Licenciatura en la Enseñanza de la Matemática

Universidad Tecnológica Nacional

"Introducción al trabajo algebraico en la escuela secundaria: ¿Qué actividades eligen los docentes?"

Tesina para la obtención del Título de Licenciatura en la Enseñanza de la Matemática

BARREIRO, P.

(Tesista)

(Director)

Gral. Pacheco, sábado 4 de junio de 2016

LINEAMIENTO Y RESUMEN

ESTE TRABAJO SE OCUPA DE LA ENSEÑANZA DEL ÁLGEBRA EN LOS PRIMEROS AÑOS DE LA ESCOLARIDAD SECUNDARIA. SE RECORREN INVESTIGACIONES EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA SOBRE EL ÁLGEBRA ESCOLAR CON VISTAS A CONOCER DISTINTOS MODOS DE INTRODUCIR EL TRABAJO ALGEBRAICO EN ESA INSTANCIA ESCOLAR.

LA CONSULTA A DOCENTES EN EJERCICIO SOBRE LOS TIPOS DE ACTIVIDADES QUE SE PUEDEN LLEVAR AL AULA PARA INICIAR A LOS ESTUDIANTES EN EL SIGNIFICADO DEL SÍMBOLO Y LAS OPERACIONES, MUESTRA ALGUNOS RESULTADOS QUE SEÑALAN ASPECTOS DESTACADOS SOBRE LAS ACTIVIDADES QUE SE CONSIDERAN IMPORTANTES Y ARROJA ALGUNAS CUESTIONES PARA MEJORAR LA ENSEÑANZA DE ESTAS TEMÁTICAS.

AGRADECIMIENTOS

"A mi familia por su apoyo incondicional y paciente, a mis amigos y amigas que me acompañaron, a mis formadores profesionales que me alentaron y alientan en la investigación continua y a mi Director Gustavo Carnelli por su acompañamiento y dedicación para realizar este trabajo"

Índice

1. INTRODUCCIÓN

La enseñanza del Álgebra es un asunto de interés tanto para la Didáctica de la Matemática como para aquellos que se dedican a su enseñanza en los niveles de escolaridad obligatorios. Esto se debe, entre otras razones, a que el pasaje del trabajo aritmético al trabajo con el uso de letras es un aprendizaje complejo para los estudiantes, puesto que el mismo maneja un alto nivel de abstracción para los primeros años de la escuela secundaria, cuyos alumnos rondan los 12 a 14 años. Palarea Medina (1999) afirma:

> *"El aprendizaje del Álgebra escolar genera en los alumnos muchas dificultades de naturaleza diferente que tienen que ver con la complejidad de los objetos del Álgebra, con los procesos de pensamiento algebraico, con el desarrollo cognitivo de los alumnos, con los métodos de enseñanza y con actitudes afectivas y emocionales hacia el Álgebra y que conectan y refuerzan en redes complejas que se concretan en la práctica en forma de obstáculos y se manifiestan en los alumnos, mediante errores."*

Estos errores que menciona la autora son reconocidos por los docentes en ejercicio, quienes buscan remediarlos mediante distintas actividades que permiten acercar a los estudiantes al uso de los símbolos necesarios para resolver problemas, demostrar propiedades matemáticas y alcanzar generalizaciones.

En este trabajo se propone analizar algunos aspectos vinculados con la enseñanza del Álgebra al inicio de la escolaridad secundaria, conocer cómo introducen los docentes en el trabajo algebraico a los estudiantes y qué tipo de actividades consideran adecuadas para tal fin. Para ello, se ampliarán algunas de las investigaciones recientes sobre el tema, que proporcionan información al momento de iniciar el trabajo con el uso de símbolos en la clase de matemática.

La investigación es cualitativa y aborda los tipos de recursos que buscan y eligen los docentes para planificar las clases iniciales sobre Álgebra.

Para conocer el tipo de actividades que los docentes evalúan pertinentes para introducir el Álgebra, se diseñó un cuestionario semiestructurado con diversos problemas seleccionados de manuales y libros de texto escolares que se apoyan en el enfoque curricular jurisdiccional propuesto (en adelante, el Diseño Curricular). El cuestionario fue enviado vía correo electrónico y respondido por la misma vía a una muestra de docentes que enseñan matemática en los primeros años del nivel secundario en distintas localidades bonaerenses, entre ellas: Pilar, Belén de Escobar, Tigre, Gral. Pacheco, Vicente López, Luján, Jáuregui y San Fernando. Por este motivo, es que tomamos, como un referente teórico al Diseño Curricular de la Provincia de Buenos Aires para ampliar el enfoque de enseñanza actual.

A través del análisis de las respuestas obtenidas, se podrá determinar qué tipo de situaciones problemáticas son aquellos que se priorizan para dar comienzo al tratamiento del Álgebra escolar en los primeros años del nivel medio.

1.1 Elección del problema de investigación

En el ámbito escolar de la educación secundaria, se suelen escuchar entre los profesores las dificultades del aprendizaje que tienen los alumnos en el bloque de Álgebra y estas preocupaciones son temas de discusión en cursos de capacitación docente, donde los profesores buscan recursos y estrategias para mejorar sus prácticas en pos de que los estudiantes puedan construir saberes con el uso de símbolos en forma positiva.

La elección del problema de investigación está basada en estas cuestiones de la práctica docente porque los Diseños Curriculares siguen haciendo hincapié en la metodología y los recursos que se pueden llevar al aula para que los alumnos, principalmente de los tres primeros años de la escuela secundaria, vivencien la introducción al Álgebra de una manera no tradicional.

1.2 Preguntas de Investigación

Para poder indagar acerca del tema en cuestión, se formularon las siguientes preguntas de investigación

Con respecto a la enseñanza, los docentes:

- ✓ ¿Qué tipo de problemas pueden ser seleccionados para lograr un trabajo algebraico en sus estudiantes coherente con el Diseño Curricular?
- ✓ ¿Cómo se atienden los distintos usos del literal del Álgebra en las actividades para el aprendizaje?

Con estas preguntas directrices se investigó en un marco teórico referencial que proporcionara información necesaria y suficiente para perseguir los objetivos del trabajo.

1.3 Objetivos

- ✓ Conocer el tipo de actividades que se pueden utilizar para introducir el trabajo algebraico en los primeros dos años de la escuela secundaria.
- ✓ Trazar lineamientos que aporten a la enseñanza en cuanto a la introducción al trabajo algebraico en los primeros años de la escuela secundaria.

Para abordar los objetivos propuestos, en los capítulos que siguen se analizan asuntos relativos a las distintas miradas sobre la noción de variable y su uso, con la intención de avanzar en la búsqueda de nuevas respuestas sobre estas temáticas de interés.

1.4 Relevancia de la investigación

- ✓ Indagar acerca de la metodología que utilizan los docentes para introducir el Álgebra a partir de las propuestas en libros y manuales de textos escolares que hay en disposición actualmente.
- ✓ Poner a luz qué tipo de actividades el docente privilegia para el trabajo algebraico.

2. ESTADO ACTUAL DEL CONOCIMIENTO Y MARCO TEÓRICO

En el marco de diversas líneas de investigación en Educación Matemática se han realizado estudios sobre la enseñanza del Álgebra escolar que aportan instrumentos y análisis al momento de pensar cómo introducir el trabajo algebraico en la escuela. Se tomaron para este trabajo diversas producciones compatibles con el Diseño Curricular y algunas que acompañan, amplían y profundizan el objeto de estudio de este trabajo.

Entre ellas, se tomaron los trabajos de Arcavi (1994, 2005, 2007), quien, a partir de lo que él denomina el "sentido de los símbolos", establece una serie de características que debe reunir un estudiante para manejarse satisfactoriamente con el lenguaje simbólico. También se tomó a Sessa (2005), de central importancia en los diseños curriculares vigentes por sus trabajos sobre la introducción del Álgebra a través de la generalización. El modelo 3UV de Ursini S. y Trigueros M. (1997) es otro referente principal sobre la enseñanza del Álgebra escolar; allí se describen las tres funciones que toma la variable: como incógnita específica, como número general y como relación funcional.Se desarrolló algunos aspectos las investigaciones de Socas (2001) sobre el desarrollo del pensamiento algebraico en los primeros años de la escuela secundaria y en los últimos de la escuela primaria (pre- Álgebra y early Álgebra), donde el autor menciona algunas actividades que se pueden llevar al aula para que los estudiantes comiencen a relacionar los distintos significados del símbolo en las operaciones.

Estos desarrollos teóricos dan un marco para la búsqueda de actividades que pueden ser consideradas para introducir el Álgebra en los primeros años de la escuela secundaria que a continuación se detallarán.

2.1. El sentido de los símbolos

Arcavi ha realizado interesantes aportes acerca del Álgebra escolar. En sus trabajos (Arcavi, 1994, 2005 y 2007) aborda el tema del significado y el sentido que los símbolos juegan a la hora de realizar actividades en Álgebra en la escuela secundaria. Observa que la mayoría de los alumnos no utilizan el lenguaje simbólico como herramienta para comprender, generalizar, relacionar y demostrar sus producciones matemáticas. Cuando el autor habla de los sentidos de los símbolos se refiere a ciertos componentes que acompañan el aprendizaje del Álgebra. El autor destaca los siguientes:

a) Amigabilidad**:** los símbolos deberían estar fácilmente disponibles para suplir cuestiones más generales que la aritmética. Como ejemplifica el autor (Arcavi, 1994):, compárese estas dos situaciones en las que se le pide a los estudiantes completar estos cuadrados mágicos:

"Completar los casilleros del siguiente cuadrado mágico para que la suma de todas las líneas de 9"

	3	
2		1

"Completar los casilleros el siguiente cuadrado mágico para que la suma de todas las líneas de 10"

	4	
2		2

Como se ve, en el primer cuadrado es posible completar los casilleros y en el segundo no lo es. La actividad lleva a los estudiantes a comenzar a razonar en qué casos sucede una o la otra y llegar a una conclusión que generalice en forma algebraica. Entonces, a la hora de cuestionar a los estudiantes para que justifiquen los razonamientos acerca de cuándo es posible o no diseñar un cuadrado mágico, Arcavi recomienda a los docentes no optar por entregar al estudiante una simbología que generalice, sino que sea el estudiante el que necesite y decida recurrir al uso de símbolos para justificar sus producciones.

Es por ello que para que el estudiante elija el símbolo, debe existir una ***amigabilidad,*** es decir, que pueda comprender la elección y la utilice en caso convenientemente. Estos símbolos amigables deben estar además fácilmente disponibles para entender situaciones.

b) Manipulación: tener la capacidad de poder manipular expresiones algebraicas. Reconocer cuando una expresión es equivalente a otra. La percepción global de las expresiones simbólicas hace que tal manipulación sea económica y más rápida.

La lectura *de* y *a través de* las expresiones simbólicas con el objeto de captar significados agrega niveles de conexión y razonabilidad a los resultados. Cuando se observa a los alumnos que están trabajando en situaciones que involucran símbolos, en general se reconocen manipulaciones automáticas o anticipaciones que luego deben resolver para verificar si obtuvieron la respuesta pensada. Por ejemplo, la ecuación $\frac{2x+3}{4x+6}$=2 puede ser anticipada por un estudiante diciendo que "no tiene solución" ya que la expresión del denominador es el doble del numerador, por lo tanto no puede ser 2 para ningún valor del literal. Pero si el alumno quisiera resolver, mediante despeje, puede llegar a la siguiente resolución:

$$2x+3 = 2. (4x+6)$$

$$2x-8x = 12-3$$

$$-6x = 9$$

$$x = -1\ 1/2$$

Al manipular técnicamente la ecuación, ésta devuelve una solución que no es la anticipada, pero si se reemplaza este valor en la expresión se puede verificar que anula el denominador.

Tanto la inspección a priori de los símbolos para "sentir" el problema y su significado, como el intento a posteriori de verificación y comparación de los significados con el resultado de las manipulaciones son ejemplos del sentido de los símbolos.

c) Diseño de relaciones simbólicas: conciencia de que uno puede diseñar exitosamente relaciones simbólicas que expresan cierta información (verbal o gráfica) dada o deseada.

Por ejemplo, relacionar una expresión algebraica con su gráfica. En los primeros años, las dos primeras funciones que ven los estudiantes son la de proporcionalidad directa e inversa y sus gráficas asociadas.

d) Seleccionar símbolos: esto es cuando la capacidad de seleccionar una posible representación simbólica es a partir de la cual el sujeto decide tomar una variable y asignarle un símbolo. Para ello debe prestar atención si conviene ese símbolo o ingeniarse para buscar una mejor. Por ejemplo, en el proceso de resolución de un problema, hacer una pausa para considerar si es más conveniente representar tres números consecutivos como n, $n+1$, $n+2$ o tal vez $n-1$, n, $n+1$.

e) Elección del símbolo: diseñar operadores simbólicos que puedan expresar cierta información, para luego lograr en forma general una verificación y comparación de los significados.

f) Revisar los símbolos: conciencia de la necesidad de revisar los significados de los símbolos durante la aplicación de un procedimiento, durante la resolución de un problema o durante la inspección de un resultado y comparar esos significados con las intuiciones (o premoniciones) acerca de los resultados esperados y con la situación misma del problema. Por ejemplo, cuando se dan actividades en las cuales los estudiantes deben llegar a una generalización a partir del descubrimiento de un patrón como señala la figura 1: la cantidad de sillas que se deben acomodar alrededor de cierta cantidad de mesas.

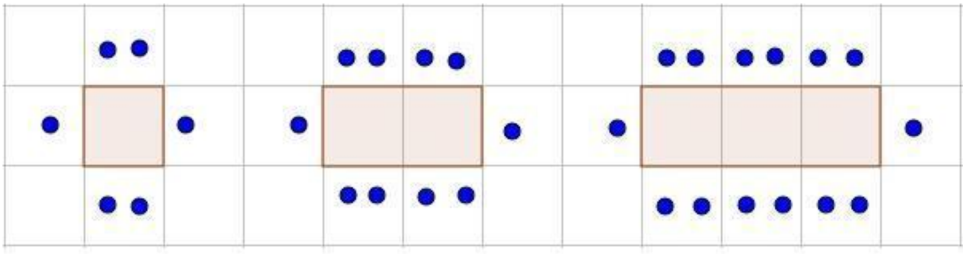


Figura 1

Algunas expresiones equivalentes a la situación son 4n+2, 1+2n+1+2n o 4(n-2)+10.

El concepto de revisar y concientizar cómo se obtienen dichas expresiones permitirá resignificar los procedimientos elegidos por los estudiantes.

g) Conciencia de que los símbolos pueden desempeñar roles distintos en distintos contextos y desarrollar un sentido intuitivo de esas diferencias: Considerar los distintos roles que pueden desempeñar las variables, los parámetros y los distintos “tiempos de sustitución”. Por ejemplo: en el caso de la expresión general de funciones lineales $y = ax + b$, tanto x e y (las variables) como a y b (los parámetros) representan números, pero los objetos matemáticos que uno obtiene al efectuar la sustitución son muy diferentes. Sustituir valores para x e y fija un punto del conjunto plano, mientras que sustituir valores para a y b fija una recta. Así, $y = b$ puede interpretarse de dos maneras diferentes: si fue el resultado de haber sustituido $x = 0$, o si fue el resultado haber sustituido $a = 0$. En el primer caso, encontramos la ordenada (general) de un punto cuya abscisa es 0. En el segundo caso, encontramos la ecuación de una recta de pendiente 0. Sugerimos que distinguir esta multiplicidad de significados que pueden tener los símbolos dependiendo del contexto y la capacidad de manejarlos es una componente del sentido de los símbolos.

A partir de todo lo anterior, a modo de síntesis, podemos decir que para que un estudiante desarrolle un manejo fluido de los símbolos es necesario que tome conciencia de que éstos pueden desempeñar roles distintos según el contexto, que comprenda su poder, eligiendo cuándo y cómo usarlos y con qué fines, que tenga capacidad para manipularlos para luego extraer información. Esto es lo que Arcavi (1994) llama leer a través de los símbolos y que comprende, en síntesis, la capacidad intuitiva de saber cuándo usar símbolos en el proceso de resolución de un problema y cuándo abandonar el tratamiento simbólico para utilizar otras herramientas; dotar de significado en contexto de la solución simbólica y convencerse de sus alcances; analizar las expresiones simbólicas antes de manipularlas; leer y manipular símbolos y expresiones simbólicas; poder elegir adecuadamente los símbolos y reconocer una elección no adecuada y proponer cambios; realizar transformaciones algebraicas, etc.

Algunas de estas características pueden verse cuando una expresión como $\frac{\mathbf{3}x-\mathbf{6}}{x-\mathbf{2}}$ es reconocida de modo tal que el numerador es el triple del denominador, excepto para $x = 2$ en que no está definida y, por lo tanto, es 3 para todos los valores de x para los cuales tiene sentido; o también cuando en la expresión $n^3 - n$ (con n natural) es entendida como un múltiplo de 6 ya que al transformarse a una expresión equivalente como $n.(n-1).(n+1)$ es posible interpretarla como el producto de tres números naturales consecutivos, lo que significa que es múltiplo de 2 y de 3, es decir, de 6.

2.2. Modelo 3UV

Uno de los referentes principales al momento de pensar el Álgebra a nivel escolar es el modelo 3UV. Sobre este modelo, Ursini (1997) considera que en el Álgebra elemental aparecen tres usos de la variable: número general, incógnita específica y en relación funcional. Para su buen manejo, el sujeto que opera debe saber las siguientes pautas para trabajar con cada noción:

a) Variable como incógnita específica:

- reconocer e identificar en un problema la existencia de algo desconocido a determinar;

-interpretar que el ente que aparece en una ecuación puede tomar valores específicos, verificar la misma y representarla en una situación;

-tener buen manejo de operaciones algebraicas y aritméticas.

b) Variable como número general:

-reconocer patrones y reglas en secuencias numéricas y en familias de problemas;

-interpretar el símbolo como representación de un objeto a determinar;

-desarrollar la idea de método general, distinguiendo los elementos variantes e invariantes hasta llegar a la formulación general del mismo;

-manipular el símbolo para simplificar o desarrollar expresiones algebraicas.

c) Variable en relación funcional:

-reconocer la correspondencia entre cantidades en sus diferentes representaciones: tabla, gráfica, problema verbal o expresión analítica;

-determinar valores de la variable dependiente cuando se conocen los de la variable independiente y viceversa;

-reconocer la variación conjunta de las variables que intervienen en la relación, en cualquier representación, determinando los parámetros en que dan esas variaciones;

-expresar una relación funcional, de manera de tabular, gráfica y/o analítica a partir de un problema.

Ursini (1997) define también como usuario competente del Álgebra a aquel que es capaz de interpretar la variable de modos distintos, según el problema en el que aparecen, manipular las variables simbólicas sin necesidad de conocer su valor eventual, trabajar con correspondencia y variación cuando las variables se encuentran en una relación funcional, identificar la incógnita y su valor específico, reconocer y expresar simbólicamente patrones de secuencias numéricas y de figuras.

En esta línea, López (2010) presenta los resultados de una investigación basada en la interpretación del concepto de variable que tienen los profesores de Matemática en el nivel medio en México, el cual el autor utilizó estos datos a modo de instrumentos en un cuestionario (Ursini y Trigueros, 1998) usado previamente con estudiantes universitarios. Este cuestionario contenía preguntas relacionadas a los tres usos de variable definidos anteriormente a través de problemas a resolver mediante el planteo de ecuaciones, la cual se muestran en el cuadro 1: ejemplos de problemas de los usos de variable definidos por Ursini y Trigueros.

Luego, se seleccionaron y se entrevistaron a docentes con el fin de analizar las principales causas de dificultad de los conceptos presentados. Los resultados arrojan que un 50.9% de las respuestas incorrectas de los docentes se debió al uso de variable como relación funcional, y un 58.2% de las respuestas correctas se debió al uso de la variable como número general. El trabajo de López concluye que parte del fracaso del alumnado en el manejo del Álgebra se debe a que los docentes no manejan conceptualmente los tres aspectos de la noción de variable y por lo tanto el autor recomienda la importancia de que los docentes realicen cursos de capacitación, talleres institucionales, participar en foros, etc.

Otros investigadores también han subrayado la importancia que tiene el contexto en el papel que juegan las letras cuando los estudiantes usan el Álgebra elemental (Kieran, 2006; Philipp, 1992; Wagner, 1981. En particular, Wagner (1981) sugiere que, así como las palabras del lenguaje verbal, los símbolos de variables matemáticas adquieren significado cuando aparecen en algún contexto y tienen algún referente. Tal como en el lenguaje verbal, el símbolo y su referente determinan el papel semántico de la variable, mientras que el símbolo y su contexto indican el papel sintáctico de la variable, lo que significa que el contexto y el referente determinan el papel matemático de la variable. Por otro lado, Wagner (1983) comenta la complejidad que tiene el uso de literales, así como la dificultad que tienen los estudiantes cuando se enfrentan a ellos.

En la clase los docentes suelen presentar actividades como si los estudiantes pudieran entender fácilmente llegando, incluso, a manejarlos con cierta naturalidad, sin valorar la complejidad del concepto ni los significados y usos que pueden tener las letras.

Algunos ejemplos de los problemas presentados bajo el modelo 3UV que fueron propuestos por Ursini y Trigueros son:

Estudio de la variable como …	**Ejemplos**
	- Escribe una fórmula que exprese un número desconocido dividido por 5 y el resultado sumado a 7.

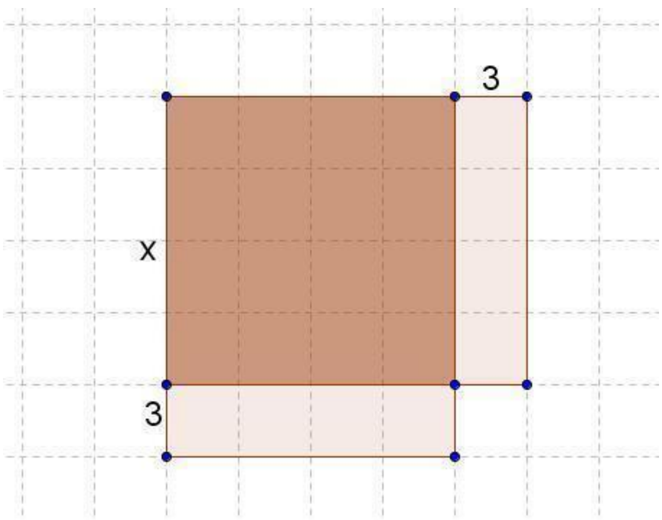
<table>
<tr>
<td>Número general</td>
<td>- Para cada una de las siguientes expresiones ¿cuántos valores puede tomar la letra? $(x-1)^2 = x^2 + 2x + 1$

$(x-1)^2 = x^2 + 2x + 1$

- De las siguientes expresiones n + 2 y 2n ¿Cuál es mayor?</td>
</tr>
<tr>
<td>Incógnita específica</td>
<td>- Para cada una de las siguientes expresiones: ¿cuántos valores puede tomar la letra? $4 + x^2 = x.(x+1)4 + x^2 = x.(x+1)$

- Dada la ecuación 40–15x–3y = 17y–5x ¿Cuál es el valor de y para x = 16?

- El área total de la figura es 27. Calcula el lado del cuadrado sombreado.


</td>
</tr>
<tr>
<td>Relación funcional</td>
<td>- Considera la siguiente expresión: y = 3 + x. Si queremos que los valores de y sean mayores que 3 pero más pequeños que 10, ¿qué valores puede tomar x?

- En una fotocopiadora se cobran $3,20 cada 20 copias. Completa la tabla que relaciona cantidad de copias con el precio y explicá</td>
</tr>
</table>

<table>
<tr>
<td></td>
<td>qué cálculos se realizan.
<table>
<tr><td>Cantidad</td><td>20</td><td>10</td><td></td><td>25</td><td></td></tr>
<tr><td>Precio</td><td>3.20</td><td></td><td>0.80</td><td></td><td>8</td></tr>
</table>
</td>
</tr>
</table>

Cuadro 1: ejemplos de problemas del uso de variable definidos por Ursini y Trigueros

Conocer la interpretación del uso de la variable en diferentes contextos ayuda al docente a recurrir a distintas estrategias y elección de problemas para llevar al aula y estudiar el uso del símbolo. El modelo 3UV no indica que debe enseñarse todos los significados en el primer año de la escuela secundaria, pero sí a lo largo de las trayectorias.

2.3. Las investigaciones de Socas

Socas (2011) trabaja sobre la enseñanza del Álgebra a nivel internacional en diferentes aspectos: formación en el profesorado, pre- Álgebra, utilización de las TIC, relación entre el Álgebra y la aritmética, planificación de su enseñanza, errores y dificultades. En particular, interesa resaltar el informe sobre el tratamiento del pre- Álgebra, early- Álgebra y la búsqueda de significados del Álgebra.

a) Pre- Álgebra: las actividades propuestas en los últimos años de educación primaria sobre planteo y resolución de ecuaciones, aproximaciones a la generalización, patrones numéricos, variables y funciones se denominan pre-algebraicas. Este enfoque se apoya en dos hechos esenciales: el Álgebra solo se presenta cuando intervienen símbolos algebraicos que van más allá de la aritmética generalizada, y la otra cuestión es que el Álgebra interviene en el estadío de desarrollo formal en la etapa cognitiva del estudiante. El pre- Álgebra tratará de facilitar la transición de la aritmética al Álgebra.

b) Early- Álgebra: Trata de desarrollar el pensamiento algebraico y aritmético en forma simultánea durante todos los años de la educación primaria, con la intención de facilitar la comprensión del estudio del Álgebra posterior en la educación secundaria. Este enfoque afirma que es imposible hacer aritmética sin Álgebra, es por ello que desde el inicio de la primaria éstos deben ir de la mano.

Tanto el pre- Álgebra como el early- Álgebra, se encuentran en etapa de desarrollo y se debe tener en cuenta que su aplicación implicaría un cambio en la currícula actual.

c) Búsqueda de significados para el Álgebra: en los últimos treinta años, las investigaciones sobre la búsqueda del significado del Álgebra han hecho aportes para el tratamiento de su enseñanza:

d) *Múltiples representaciones*: la semiótica ha puesto su interés recientemente en la Educación Matemática debido a que el uso de símbolos forma una parte esencial en la construcción de conceptos que tienen el tratamiento de los símbolos por dos razones: la naturaleza de las propias matemáticas y la otra es del tipo psicológico ya que las representaciones mejoran las el aprendizaje de los alumnos (Vega, 1985) Distintos investigadores como Janvier (1987), Hiebert (1988), Kaput (1987,1991), Duval (1993, 1995), Rico, Castro y Romero (1996), Palarea y Socas (1995, 1998), Socas y Palarea (1996), han investigado acerca de las representaciones semióticas múltiples en la escuela para que los estudiantes puedan modelizar situaciones mediante representaciones formales, verbales, concretas, pictóricas, gráficas y algebraicas.

- El planteamiento y la resolución de problemas algebraicos: en el diseño de actividades, con el fin de lograr el lenguaje algebraico, es necesario tener en cuenta tres aspectos: el primero es conectar con el conocimiento informal que traen los estudiantes; el segundo, preparar a los estudiantes a un desarrollo más abstracto, sofisticado y formal del Álgebra; y, por último, respetar los principios básicos de la autonomía intelectual del alumnado. La resolución de problemas es uno de los enfoques que tiene en cuenta esto. Al respecto, Socas (2011) afirma:

> *"Schoenfeld (1992) llamó "enculturación" a estos valores o formas propias de proceder en la comunidad o cultura matemática. A los alumnos en su trabajo en Matemáticas debe inculcárseles hábitos y actitudes propios de la comunidad como la perseverancia en el trabajo, el interés, la motivación, la flexibilidad, etc. en la resolución de problemas. Las investigaciones sugieren que los currículos deben proponer ambientes de trabajo que resalten el espíritu de búsqueda, de investigación, etc., propios del quehacer matemático."*

- El papel referencial del Álgebra en la Matemática: los aspectos semánticos y sintácticos del lenguaje matemático se han convertido en centro de investigación de varios enfoques. El autor menciona la sustitución formal, la generalización y la modelización como procesos característicos del pensamiento algebraico.

Según Bolea (2003), existen ciertos indicadores que caracterizan al Álgebra como instrumento de modelización:

- El Álgebra escolar es un instrumento para resolver problemas matemáticos o extra-matemáticos: aritméticos, geométricos, físicos, económicos, de la vida cotidiana, etc;
- el proceso de modelización algebraica es un instrumento potente para describir, generalizar y justificar procedimientos, propiedades de los sistemas estudiados;

- el Álgebra permite unificar tipos de problemas de los diferentes bloques temáticos que se enseñan en la escuela;

- la construcción de modelos extra e intramatemáticos es una puerta importante para la introducción al Álgebra;

- el Álgebra permite unificar tipos de problemas de los diferentes bloques temáticos que se enseñan en la escuela;

- estos modelos se basan en la construcción de ecuaciones, fórmulas y funciones, para su posterior interpretación y justificación;

- la última fase del proceso de modelización consiste en la formulación de nuevos problemas acerca del sistema estudiado que no surgieron antes de la construcción del modelo.

Estos instrumentos que describe la autora sirven como recursos que en el aula el docente los tiene disponible para lograr el proceso de modelización.

Las intervenciones apropiadas a cargo del docente son muy importantes en este sentido para que estos procesos se lleven a cabo y se logre un trabajo matemático por parte del estudiante.

Villella (2007) menciona que, según la NCTM (2000), un perfil profesional docente que adecúa el trabajo matemático por parte del alumno, debe tener las siguientes características:

- crear un ambiente adecuado para el aprendizaje y la enseñanza de la matemática,
- fijar objetivos y crear las formas en las que los estudiantes accederán a ellos,
- construir un discurso apropiado epistemológica y didácticamente,
- analizar el aprendizaje de los alumnos, los contenidos a desarrollar, el entorno de aprendizaje y el entorno de la enseñanza. (Douady, 1996)

Estos elementos convergen a nuevas búsquedas para introducir el Álgebra, entre ellos, los más utilizados en los últimos años y sugeridos por el Diseño Curricular, la generalización y la modelización, que se describen a continuación.

2.4. El Álgebra a través de la modelización y generalización

Muchos autores actuales coinciden en que, antes de enseñar Álgebra en el nivel medio, se deben tener en cuenta las diferencias en cuanto a las propiedades que existen con la aritmética, y que el pasaje abrupto puede generar obstáculos en el aprendizaje en los estudiantes.

Perry (1999) menciona estas diferencias:

> *"... diferencias importantes entre lo que implica hacer aritmética y hacer* Álgebra*, entre ellos: El foco de la actividad algebraica y la naturaleza de las respuestas: el foco de la actividad aritmética es encontrar respuesta numéricas particulares mientras que el foco en la actividad algebraica es deducir procedimientos y relaciones, expresarlos en forma general y manipular con ellas. El uso de la notación y la convención en* Álgebra*: en aritmética, "+" significa realizar la operación de adición y el "=" significa escribir la respuesta, en cambio en* Álgebra *"+" puede representar no sólo la acción de adicionar sino también el resultado de la correspondiente acción. De la misma manera el signo "=" puede representar no solo la acción de escribir el resultado sino también una relación de equivalencia. El significado de las letras y variables: en aritmética las letras se usan principalmente como etiquetas para representar objetos concretos mientras que en* Álgebra *el uso de la letra está destinado principalmente a representar valores. En casos donde la*

> *letra, para la aritmética, representa un valor numérico, este es único; mientras que en Álgebra las letras se usan para generalizar números...”*

Sadovsky (2005) expresa: “*Un aspecto esencial de la actividad matemática consiste en construir un modelo matemático de la realidad que se quiere estudiar, trabajar con dicho modelo e interpretar los resultados obtenidos en este trabajo para contestar a las cuestiones planteadas inicialmente*". A partir de esta idea, afirma que el uso de modelos podrá ir fortaleciendo a largo plazo el trabajo matemático que se quiere enseñar y comunicar en la clase y que es importante su seguimiento.

Como menciona la autora, la modelización fue vinculada tradicionalmente con disciplinas como la física, la química y la economía, entre otros. Por su parte, Chevallard (1989) extiende esta noción al modelizar problemas extramatemáticos e intramatemáticos.

La actividad de modelización intramatemática supone reconocer:

-Las relaciones relevantes sobre las que se va a operar;

-Los símbolos que se van a utilizar para representarlas;

- Los elementos en los que es posible apoyarse para aceptar la pertinencia del modelo que se está usando;

-Las propiedades que permiten justificar los procedimientos utilizados;

-Cómo reinterpretar los resultados obtenidos en el problema planteado.

En Sadosky (2005) cita un ejemplo de modelización intramatemática:

"Un número natural excede en 22 a un múltiplo de 5. ¿Cuál es el resto de dividirlo por 3?"

Este problema aritmético lleva un modelo algebraico de la forma $n = 5k+22$, siendo k un número natural, esto pone en evidencia la estructura de los números a los que se refiere el problema y permite producir otros números que responden a dicha estructura.

Separando los términos, se pueden estudiar los distintos restos de poder dividir por 3, sustituyendo la variable *k* por un múltiplo de 3.

Para resto 1 se obtiene la expresión $5.3q+22 = 5.3q+21+1 = 3(5q+7)+1$

Sadosky resalta que para hacer funcionar este modelo se hace necesaria la utilización de un conjunto de técnicas cuya potencia no se puede apreciar si se aíslan del problema. No se basa solo en la sustitución de expresiones equivalentes, sino de herramientas que le permitan explorar al alumno las propiedades aritméticas y ciertas técnicas que están en proceso.

Sessa (2005) afirma que:

> *"...cuando pensamos en Álgebra a propósito del aprendizaje escolar, la concebimos como un conjunto de prácticas asociadas a un espacio de problemas que se constituyen a partir de un conjunto de conceptos con sus propiedades. Prácticas que se inscriben y se escriben en un determinado lenguaje simbólico, con leyes de tratamiento específicas que rigen la configuración de un conjunto de técnicas. Todos estos elementos complejos: problemas, objetos, propiedades, lenguaje simbólico, leyes de transformación de las escrituras, técnicas de resolución, producen un entramado que configura el trabajo algebraico”.*

Uno de los asuntos importantes al momento de pensar en la enseñanza del Álgebra a nivel escolar es el llamado pasaje de la aritmética al Álgebra. En el marco de las investigaciones de la escuela francesa en Didáctica de la Matemática, Duval (1995), Chevallard (1996) y otros, investigaron sobre las dificultades que poseían los estudiantes en este pasaje. Una de ellas resultaba del uso de los literales en las operaciones: las letras no se podían calcular ni operar como números.

La introducción del Álgebra a través de la generalización puede darse mediante la obtención de una expresión general a partir de problemas que surgen de la aritmética o de la geometría y que llevan a la producción de fórmulas.

Esto pone de manifiesto varios aspectos de los procesos de modelización matemática: la exploración, la formulación de conjeturas y la búsqueda de regularidades hasta detectar las variables en cuestión que hacen la estructura del problema.

Según Sessa (2005):

> *“Nosotros sostenemos que es a través de estas prácticas que se va comprendiendo el sentido de la operatoria algebraica y, a medida que éste va siendo atrapado, permite la adquisición de herramientas de control que son imprescindibles para lograr autonomía en el desempeño de los estudiantes. La interrelación entre la actividad modelizadora del Álgebra y el aprendizaje y el manejo de las técnicas constituye un punto clave en el dominio del Álgebra.”*

¿Qué tipo de problemas serían los que pueden proponerse para la generalización? En los siguientes ejemplos, el objetivo de encontrar una fórmula general para el paso n de una cierta sucesión que guarda alguna regularidad constante ayuda a constituir el lenguaje algebraico. La idea es profundizar acerca de las posibles producciones de los alumnos y estudiar las distintas expresiones equivalentes.

Algunos ejemplos del tipo de problemas que llevan a la generalización tomados de Sessa (2005) pueden propiciar, a partir de varios casos particulares un acercamiento a una expresión que represente la situación.

Ejemplo 1:

“Las figuras que se dan más abajo muestran una sucesión de triángulos construidos con palitos de modo tal que, comenzando con un solo triángulo en la primera de esas figuras, las demás se obtienen agregándole un triángulo “pegado” más al anterior. Teniendo en cuenta esta información y las figuras 2 y 3 que siguen:

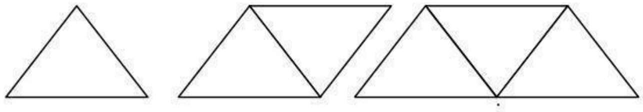


Figura 2

a) ¿Cuántos palitos se necesitan para hacer 81 triángulos pegados?

b) ¿Es posible que con alguna cantidad de triángulos se utilicen exactamente 148 palitos?

Ejemplo 2:

“Para separar un patio de un lavadero se colocan en línea canteros cuadrados rodeados de baldosas de la misma forma, como indica el dibujo:

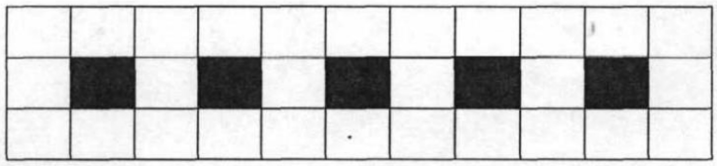


Figura 3

¿Cómo puedo averiguar cuántas baldosas se necesitarán para una cantidad cualquiera de canteros?”

En los problemas anteriores se puede observar que los estudiantes deben pasar por las distintas etapas de transformación de una sucesión, realizan un trabajo exploratorio y se espera que encuentren cierta ley de formación. Para ello, el trabajo matemático incluye estrategias de conteo, operatoria, noción de proporcionalidad, construcción de tablas o gráficos que le permiten abordar al problema desde un análisis de muchos casos particulares y llegar a la creación de una fórmula a partir de los datos del problema.

¿Cómo se acercan a este pasaje de la aritmética al Álgebra? En principio, los estudiantes resuelven algunos casos sueltos, dibujan tablas, realizan diagramas, cuentan, calculan y comprueban.

Nicaud (1993) habla de tres niveles semánticos referidos al tratamiento de expresiones algebraicas:

-Primer nivel: dar sentido a una expresión algebraica mediante el reemplazo de valores en las variables y la realización del cálculo correspondiente. Esta etapa es la etapa de evaluación de la fórmula pensada.

-Segundo nivel: transformar la expresión del nivel anterior en una equivalente: el estudiante reconoce la equivalencia porque conoce las transformaciones y puede justificarlas. Éste es el nivel del tratamiento de la expresión.

-Tercer nivel: tener conocimiento de estrategias que le permitan al estudiante utilizar las transformaciones adecuadas en la resolución de problemas, haciendo un cálculo significativo y anticipando el efecto de dichas transformaciones.

El autor afirma que si los problemas presentan un tratamiento difícil de las expresiones algebraicas, los estudiantes no llegarán a este nivel. Por lo tanto recomienda proponer problemas donde los alumnos construyan el tercer nivel en simultáneo con los otros dos, de manera autónoma.

Introducir el Álgebra a través de actividades que propicien el atravesamiento de estos tres niveles semánticos llevará al estudiante a una apropiación más amplia del sentido y significado de los símbolos. En el Diseño Curricular se puede apreciar que dichas actividades son recomendadas a la hora de llevarla al aula en los primeros años de escuela secundaria lo cual se describirá a continuación.

2.5. Las prescripciones del Diseño Curricular de la Provincia de Buenos Aires

Debido a que el trabajo expuesto está centrado en el interés por conocer las actividades y recursos que tienen disponibles los docentes a la hora de introducir el Álgebra a nivel escolar, resulta necesario consultar que sobre prescribe el Diseño Curricular vigente con respecto a este punto.

En Matemática, los bloques de contenidos están divididos en: Números y operaciones, Geometría, Álgebra y Probabilidad, y Estadística.

El bloque Álgebra acompaña el recorrido de la escolaridad secundaria obligatoria durante los seis años, lo que pone de manifiesto que su enseñanza es importante en este nivel, ya que desarrolla el pensamiento abstracto en el estudiante y pueden estudiarse propiedades de la aritmética en su forma más general, que luego desarrollarán en estudios más avanzados.

En los enfoques tradicionales de la enseñanza, se prioriza que los alumnos logren adquirir destrezas en el trabajo algebraico, es decir, que el alumno pueda plantear y despejar la incógnita en ecuaciones, factorizar expresiones algebraicas, etc. Pero ¿es éste el verdadero interés del Álgebra escolar? Con las nuevas investigaciones en Educación Matemática desde distintos enfoques teóricos como los mencionados anteriormente, se intenta plantear distintos tipos de actividades para el aula y analizar un sentido que resulte significativo, a través del cual el estudiante adquiera confianza al trabajar con letras.

En el Diseño Curricular, el enfoque teórico es tomado de la escuela francesa de la Didáctica de la Matemática que cita a autores como Guy Brousseau, Michelle Artigue, Yves Chevallard, entre otros.

A continuación se hará una breve descripción del bloque Álgebra en los tres primeros años de lo que prescribe el Diseño Curricular.

Año	**Orientaciones Didácticas**
Primero	*Introducción al Álgebra y al estudio de funciones:* Lectura, interpretación, construcción de gráficos y tablas. Proporcionalidad, Introducción al trabajo algebraico: pasaje de la aritmética al Álgebra que permiten generalizar propiedades de los números, expresar dependencia de variables en fórmulas y organizar información a través del lenguaje de las funciones. Actividades de configuraciones de embaldosados, guardas geométricas, secuencias, que permitan llegar al término general.
Segundo	*Introducción al Álgebra y al estudio de funciones:* Estimar, anticipar y generalizar soluciones de problemas relacionados con la noción de función lineal. Realizar un uso dinámico de la proporcionalidad y sus propiedades superador de proporciones tales como: “a más más...” o regla de tres simple.

	Representar mediante gráficos, tablas y/o fórmulas regularidades o relaciones observadas en los valores. Usar propiedades de la proporcionalidad para realizar estimaciones, anticipaciones y generalizaciones. Modelizar situaciones matemáticas y extramatemáticas mediante ecuaciones para obtener resultados que permitan resolverlas. Representar funciones usando algún software como Graphmathic o Geogebra, y contrastar los resultados obtenidos en el marco de los modelos planteados de las situaciones problemáticas evaluando la pertinencia de los mismos. En segundo año se espera que los alumnos logren introducir el Álgebra mediante la generalización a través del concepto de variable que estuvieron trabajando en primer año con la manipulación de proporcionalidad, y utilizar el concepto de función para la resolución de problemas y ecuaciones.
Tercero	*Álgebra y estudio de funciones:* En este año se espera que los alumnos afiancen lo trabajado en los dos primeros años. Sigue siendo la generalización la puerta de entrada al Álgebra en dos contextos: el aritmético y el geométrico. Se incorporará el estudio de algunos aspectos de las funciones para lograr establecer conclusiones respecto a las situaciones modeladas: desplazamientos de una función y ecuación de la recta conocidos un punto y su pendiente. Para ello se recomienda estimular el reconocimiento de patrones en secuencias y generalizaciones proponiendo situaciones que se solucionen encontrando la

	fórmula general. En la resolución de sistemas de ecuaciones con dos incógnitas, resulta importante debatir los tipos de datos y diferenciar las variables en juego, mediante adecuadas intervenciones del docente que contribuyan a establecer las equivalencias entre el lenguaje coloquial y simbólico. Como también la explicitación de las incógnitas, su representación simbólica y el registro de los significados de esos símbolos como paso previo a la construcción de las ecuaciones con los mismos.

Se puede observar que el documento curricular vigente destaca en las recomendaciones , como introducción al Álgebra, la generalización y modelización para realizar un avance hacia la mirada funcional. Por ello, el desarrollo de secuencias didácticas, las intervenciones docentes, las puestas en común junto a los alumnos, etc. son las principales ideas que subraya para la puesta en marcha de los contenidos.

2.6. Vía de entrada al Álgebra por las ecuaciones

La generalización no es la única vía de ingreso al trabajo algebraico. De hecho, las ecuaciones han sido, en la enseñanza tradicional, la forma privilegiada para la introducción a ese trabajo. Diversas investigaciones sobre la enseñanza del Álgebra mencionan las dificultades que presentan las resoluciones de ecuaciones en los primeros años.

Vergnaud (1988) analiza ciertos aspectos a tener en cuenta en la transición entre el tratamiento aritmético de una situación problemática a resolver y el tratamiento algebraico; el rompimiento cognitivo de estos dos campos no debe ser pasado por alto por el docente:

"El Álgebra representa una doble ruptura epistemológica: por una parte, la introducción de un desarrollo formal en el tratamiento de problemas habitualmente tratados intuitivamente, por otra parte la introducción de objetos matemáticos nuevos como ecuación e incógnita, función y variable, monomio y polinomio."

Es importante que el docente considere el cambio epistemológico en procedimientos matemáticos nuevos. El pasaje de la aritmética al Álgebra sería algo intuitivo para el estudiante, pero el uso de ecuaciones no lo es, ya que rechaza el manejo de cálculo de incógnitas y números.

Siguiendo este enfoque que menciona Vergnaud (1988), el Diseño Curricular recomienda que la enseñanza sobre ecuaciones no se reduzca a actividades mecanizables ni a pasajes de términos, sino que se estudien las propiedades de las operaciones y que puedan ser planteados a partir de situaciones problemáticas, en las que el estudiante pueda necesitar la aparición del símbolo:

"El docente debe proponer problemas en los que sea necesario el planteo y la resolución de una ecuación para encontrar la solución. Al comenzar el trabajo de planteo y resolución de ecuaciones será importante retomar, previamente, la relación entre cada operación y su inversa. El docente, teniendo en cuenta las dificultades que más habitualmente se presentan en el trabajo con ecuaciones, propondrá a los alumnos/as la resolución de situaciones en las que las mismas se pongan de manifiesto y así generar un espacio de discusión acerca de ellas dentro del aula." (Diseño Curricular 2° año ES (2008), pág. 334).

Por ello, generar intercambios en las producciones de los estudiantes es fundamental; se inicia en la labor del docente retomando las producciones y debatiendo los posibles errores que pueden llegar a aparecer respecto de este tema.

Se puede observar que lo que las orientaciones didácticas sobre su enseñanza se deben basar en el tratamiento de propiedades aritméticas, como en la generalización, para que los estudiantes puedan tomar decisiones sobre el despeje.

Esto es contario a la enseñanza tradicional sobre ecuaciones, donde los docentes utilizan el pasaje de términos como algo mecánico y económico como una técnica que el estudiante debe adquirir a lo largo de la escuela secundaria.

Existen varias actividades alternativas que se pueden proponer para plantear y resolver ecuaciones. Por ejemplo este problema fue tomado de un libro de matemática de primer año, Secuencias Didácticas (2014) Editorial Aique:

"Un mago dice a su público: piensen un número, agréguenle 8.multipliquen ese resultado por 3, réstenle 4 y súmenle el número que pensaron. Al resultado obtenido divídanlo por 4, luego, sumen la cantidad de días de una semana y por último resten el número que habían pensado. El mago se dirige a su público y exclama. "¡Les dio a todos 12!"¿Es verdadera la afirmación del mago? ¿Por qué?"

La actividad propicia la consideración de un literal para el número en cuestión, debido a que es necesario encontrar alguna forma de validar la veracidad de la afirmación del mago. En principio los estudiantes pueden tomar un número cualquiera y verificar que da cómo resultado 12. Ahora bien, a la hora de justificar, podrán expresar en forma coloquial algunas respuestas como por ejemplo "... no importa el número que elijamos porque si primeros restamos y luego sumamos el mismo número da lo mismo...", este tipo de comentarios pueden dar pie al docente a poder continuar en el uso de propiedades aritméticas y generalizar expresiones.

2.7. Síntesis

Los elementos aquí descriptos son suficientes para seleccionar actividades que se vinculen con el pasaje de la aritmética al álgebra , las ecuaciones y las prescripciones del Diseño Curricular que junto a las investigaciones de Socas, Arcavi y el modelo 3 UV, nutren al Marco Teórico.

Las producciones de los autores mencionados, dan elementos sobre la enseñanza del Álgebra para pensar en situaciones que tengan la intención de introducir a los estudiantes en el trabajo algebraico: entre ellas, el planteo de problemas que abordan la generalización, situaciones de diversa índole que requieren del trabajo con ecuaciones, problemas que enfaticen la relación entre dos variables, etc.

Se cree que estos problemas pueden ser propuestos como recurso para iniciar el estudio del Álgebra con adolescentes entre 12 y 14 años, debido a que contemplan las múltiples miradas acerca del símbolo, la enseñanza y el aprendizaje.

3. METODOLOGÍA DE LA INVESTIGACIÓN

Para conocer qué actividades utilizan los docentes para introducir a sus estudiantes en el trabajo algebraico y también para conocer qué tipo de actividades consideran adecuadas para tal fin, se diseñó un cuestionario semiestructurado con una serie de consignas que pueden ser utilizadas en una clase de matemática para la introducción del Álgebra.

Para el tipo de investigación cualitativa al que se hace referencia se consultó a una muestra de 20 docentes de la zona norte del conurbano bonaerense (Escobar, Tigre, Pacheco y Pilar) que dictan clases de matemática en los primeros años de la escuela secundaria, donde se considera suficiente , dado que los instrumentos diseñados para la recogida y análisis de respuestas han estado sujetos a la información brindada por estos docentes informantes que hacen que este estudio sea subjetivo del cual no se pretende generalizar.

Sin embargo los consultados reunían las siguientes características: tienen más de 10 años en el ejercicio de la profesión y han realizado al menos alguna capacitación en enseñanza de la matemática en el circuito ofrecido por el Ministerio de Educación de la Provincia de Buenos Aires en los últimos años. Con esto, se pretendió trabajar con profesores con un cierto grado de experiencia y con inquietudes por perfeccionarse. El cuestionario fue enviado por correo electrónico a los docentes seleccionados y las respuestas se recibieron por la misma vía.

En principio se obtuvieron 10 respuestas en una primera instancia y, luego de insistir por la misma vía, se incorporaron aquellas que luego se integraron, siendo en total 15 los cuestionarios respondidos, situación que se consideró suficiente para el análisis cualitativo.

El tipo de muestra con la que trabajamos hace que las conclusiones del trabajo se limiten al grupo analizado y no permitan más que ciertas generalizaciones razonables.

3.1. Construcción del cuestionario

El cuestionario, en su etapa de diseño, fue revisado varias veces, con la finalidad de que los consultados pudieran brindar el tipo de información que se necesita para el abordaje del problema.

Para ello se investigó en varios libros de texto actuales de Matemática dirigidos a los primeros años de las escuelas secundarias. Estos libros consultados fueron algunos de los que el Ministerio de Educación envía a escuelas estatales, otros que actualmente están en vigencia por editoriales que se venden en la provincia.

Con las consignas seleccionadas según el marco teórico descripto, se construyó finalmente un cuestionario de tipo semiestructurado, para que los docentes pudieran expresar su opinión sobre dichas actividades.

Además, se incluyó en la segunda parte del cuestionario un listado de tipos de recursos para que los docentes indicaran si los utilizarían en sus clases al introducir a los estudiantes en el trabajo algebraico. A continuación, se detalla la elaboración de las consignas y los criterios correspondientes.

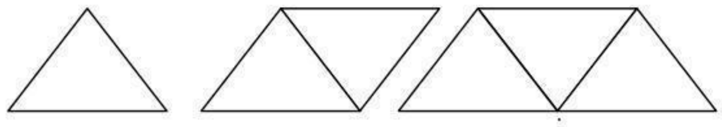
Para introducir el Álgebra por la vía de la generalización, se seleccionó dos consignas en las que se requiere la búsqueda de regularidades a partir del conteo de colecciones para llegar a una expresión para el paso "*n*" de la secuencia, como describe Sessa (2005).

En el primero se utilizó la misma sucesión de fósforos. En esta segunda consigna propusimos el uso de software, GeoGebra, para mover un deslizador con números naturales y visualizar la cantidad de círculos que se despliegan a partir de la manipulación de éste.

El uso de Geogebra como recurso permitió averiguar la opinión que tenían los docentes acerca del uso de las tecnologías de información y comunicación (En adelante TIC) en el aula.

<u>Consigna 1</u>:

A partir de la siguiente sucesión de figuras construidas con fósforos:



a) ¿Cuántos fósforos habrá en el sexto lugar?

b) ¿Cuántos fósforos son necesarios para construir la figura correspondiente al lugar 1784 de la secuencia?

<u>Consigna 2:</u>

En el siguiente archivo de Geogebra, se puede observar que al manipular el deslizador, la cantidad de círculos cambia, como muestra la figura 4:

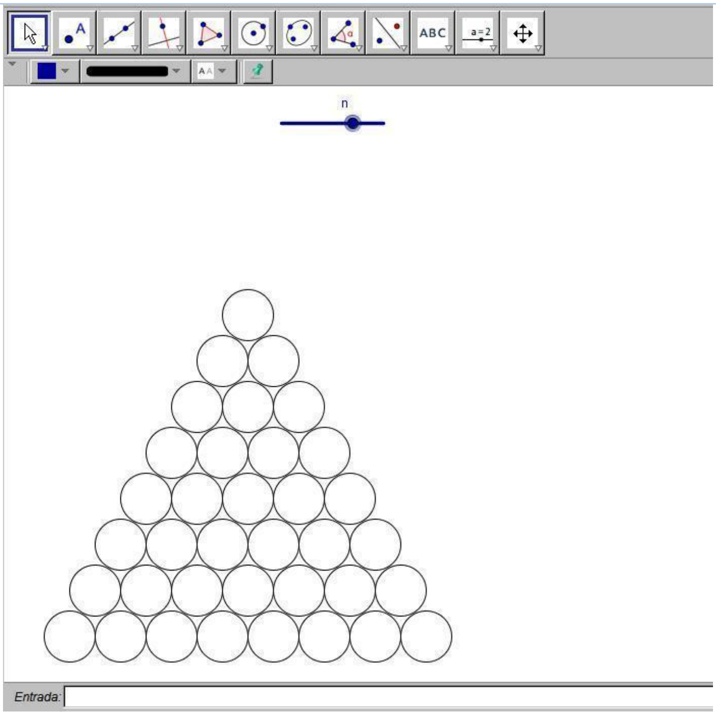


Figura 4: Material de trabajo interno de la Diplomatura en Enseñanza de la Matemática con nuevas tecnologías. UNGS. (2014) (Ver enlace en http://ggbtu.be/m1434973)[1]

a) ¿Cuántos círculos hay en el paso *n* = 32?

c) ¿Existe algún paso *n* para el que haya 1452 círculos? Justificar.

En las consignas 3 y 5 se seleccionaron tablas de proporcionalidad directa tomadas de manuales y libros de texto (Editoriales Tinta Fresca y Aique) ya que las tablas de proporcionalidad pueden ser utilizadas para introducir al Álgebra desde una mirada cercana a lo funcional, a partir del trabajo con la relación entre las variables, como lo menciona el

[1] En www.Geogebra.org se pueden subir y crear archivos donde los docentes y alumnos manipulan los deslizadores, en este caso, la actividad resulta del material de trabajo de la UNGS para el análisis didáctico en la Especialización de la enseñanza de la matemática con TIC (2014)

modelo 3UV, y estos tipos de problemas son similares a los que se trabajan en el nivel primario.

Consigna 3:

Un ingeniero automotriz toma los registros de un automóvil que se mueve a velocidad constante en una pista que tiene 10 km y los vuelca en la siguiente tabla.

Tiempo (en min.)	**5**	**10**	**12**		**85**
Distancia recorrida (en km)	10	20		35	

Completar la tabla propuesta por el ingeniero.

Consigna 5:

Para preparar comida para los animales de la granja, Mario necesita semanalmente 3 bolsas de maíz cada 2 gallinas. Para organizar esto, decide confeccionar la siguiente tabla en la computadora:

Cantidad de gallinas	**2**	**6**	**9**	**25**	**75**
Bolsas que necesito semanalmente					

Completar la tabla de Mario.

Otra vía de entrada al Álgebra es mediante las ecuaciones. Hay diversas alternativas, que fueron consideradas en las consignas 4 y 6.

En la Consigna 4, tomado del libro de la Editorial Tinta Fresca para primer año, se propicia la consideración de un número cualquiera *n* para ver si el mago tiene o no razón. Como en el proceso pedido se agrega 8 y saca dos veces 4, se multiplica por 6 y divide por 3 y 2, es posible pensar que da el número inicial. Sin embargo, la expresión que se obtiene es $n + 20/3$, lo que posibilita, mediante su análisis, interpretar la veracidad o falsedad de lo afirmado por el mago. Generalmente esta consigna es pensada para que dé una igualdad, aunque en este caso no es así.

Por otro lado, en la Consigna 6 se seleccionó una situación contextualizada en la que a partir de una expresión algebraica dada, surge la resolución de ecuaciones en el campo de los racionales positivos. El alumno debe reconocer que los literales que aparecen en la expresión representan las variables precio y consumo, y resolver cuándo se sustituye alguna de ellas por un valor.

Consigna 4:

Un mago le dice a su público: “Piensen un número, agréguenle 8, multipliquen por 6, resten dos veces 4 y dividan por 3 y luego por 2. El mago espera unos instantes y les dice: “¡A todos les dio el número que pensaron!” ¿Es verdad lo que dice el mago? ¿Por qué?

Consigna 6:

Una empresa de telefonía celular cobra a sus clientes una suma fija más lo que hablan por minuto. Para calcular cuánto debe abonar un cliente, usa la siguiente fórmula: $p = 20 + 0{,}50.m$, siendo *p* el precio a pagar y *m* la cantidad de minutos

hablados.

¿Cuánto debe pagar un cliente que habló 33 minutos? Si debe pagar $ 53,45, ¿cuántos minutos habló?

En la consigna 7, los estudiantes deben decidir cuáles de las expresiones de una serie, representa la situación que se describe.

Esta actividad puede ser la apertura a debatir sobre la noción de expresiones algebraicas equivalentes.

Consigna 7:

"Gustavo tiene 10 monedas más que Romina. Entre los dos tienen 30 monedas"

¿Cuál de las expresiones describe la situación anterior, considerando que llamamos *c* a las monedas que tiene Gustavo?

a) $c+(c+10) = 30$ **b)** $c+ (c-10) = 30$ **c)** $c+30 = c+10$

La consigna 8, tomada del libro “Matemática 7” de Editorial Aique (2010) y otorgado a las bibliotecas de escuelas públicas bonaerenses, propone buscar las regularidades que suceden en un calendario, dado que la diferencia entre las diagonales de una matriz cualquiera de 2x2 siempre da 7.

El asunto es justamente llegar a una expresión que verifique que para cualquier n se cumple que $n. (n+8)-(n+1). (n+7) = 7$

n	n+1
n+7	n+8

La versión final del cuestionario puede verse en el anexo.

Consigna 8:

En un calendario se pueden agrupar algunos números en cuadrados con lados de diferentes medidas. Por ejemplo, el siguiente corresponde al mes de febrero de un cierto año no bisiesto:

D	L	M	M	J	V	S
						1
2	3	4	5	6	7	8
9	10	11	12	13	14	15
16	17	18	19	20	21	22
23	24	25	26	27	28	

Se selecciona un cuadrado de 4 números cualquiera, por ejemplo:

4	**5**
6	7

Se pide:

Dibujar sobre el calendario otros cuadrados de 2x2. Para cada uno de ellos, calcular la diferencia entre los productos de los números situados en los extremos de las diagonales.

¿Qué relación hay entre los resultados que se obtienen?

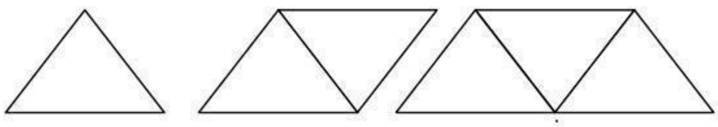
3.2. Respuestas al cuestionario

A continuación se describirá, las respuestas que brindaron las quince personas que contestaron el cuestionario respecto de cada consigna. Varias de las respuestas fueron coincidentes, por lo que se resumieron en una.

La primera parte se mencionan algunos de los comentarios más significativos que se toman para cada problema propuesto con el fin de recabar mayor información si los docentes encuestados consideran aptos para llevar al aula.

Consigna 1:

A partir de la siguiente sucesión de figuras construidas con fósforos:



a) ¿Cuántos fósforos habrá en el sexto lugar?

b) ¿Cuántos fósforos son necesarios para construir la figura correspondiente al lugar 1784 de la secuencia?

Esta consigna fue ampliamente aceptada por los profesores; catorce de ellos dijeron que la llevarían al aula por las siguientes razones:

- "…Es una actividad simple, donde los estudiantes pueden entender la consigna fácilmente e inclusive se puede llevar fósforos o cualquier material concreto y amar la secuencia como enuncia el problema…";
- "…Es una buena actividad para que los alumnos utilicen como estrategia hacer cálculos y completar tablas de valores…";
- "…Se puede trabajar en el aula con los primeros años porque es buena para introducir la generalización y producción de fórmulas a partir de una secuencia.
- "…Porque la consigna parece un juego y a los alumnos les gusta, y esto les da confianza para comenzar a resolver probando varios pasos de la secuencia…";
- "…Es una buena actividad para observar qué tipo de errores aparecen en la producción de fórmulas."

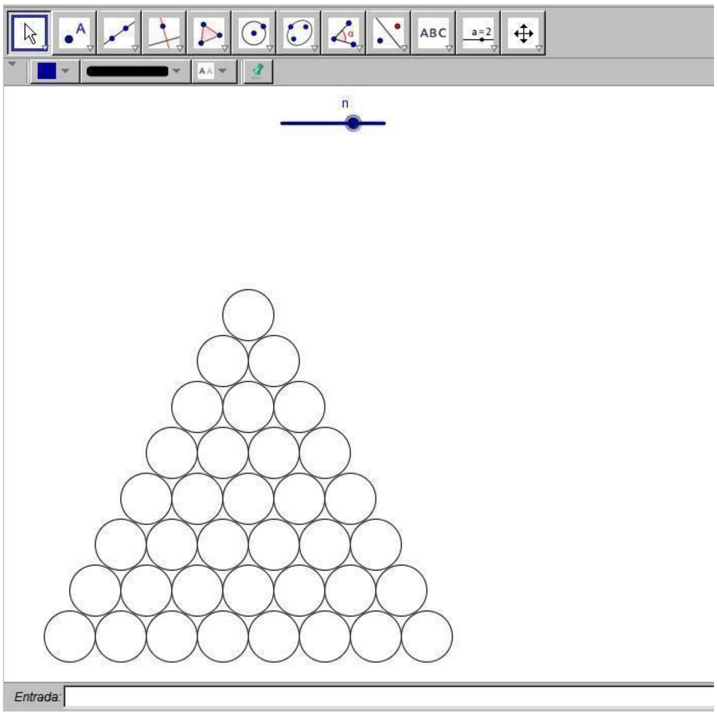
Algunos de los docentes que reconocieron que la actividad es buena para introducir el Álgebra, dijeron que cambiarían algunas de las preguntas y propondrían a los estudiantes que dibujaran más los pasos de la secuencia antes de llegar a la fórmula, porque esto les da más confianza.

La actividad fue ampliamente aceptada porque los profesores reconocieron que los alumnos no necesitan demasiados saberes previos para empezar con la actividad y logra un avance en el acercamiento de sus alumnos a los símbolos.

Sólo una persona de las quince afirmó que no llevaría esta actividad al aula porque los estudiantes no comprenderían el problema propuesto y menos aún acercarse a la producción de fórmulas.

Consigna 2:

En el siguiente archivo de Geogebra, se puede observar que, al manipular el deslizador, la cantidad de círculos cambia.



(Ver enlace en http://ggbtu.be/m1434973)

a) ¿Cuántos círculos hay en el paso n = 32?

c) ¿Existe algún paso *n* para el que haya 1452 círculos? Justificar.

Este problema tuvo una aceptación relativa en los encuestados: 7 contestaron que no y 8 que sí.

Los que contestaron que no llevarían a su clase esta actividad, dijeron lo siguiente:

- "…No utilizo TIC en mis clases de Matemática";

- “…Porque el uso de deslizador de Geogebra no muestra los valores de n y el estudiante necesita asociar el número de pasos con la cantidad de círculos…”;

- “…Porque hay una gran diferencia entre la consigna 1 y la 2 y es difícil que los estudiantes de primer año lleguen a formalizar una expresión…”;

- “…La idea de llegar a una fórmula con esta consigna es muy abstracta, los problemas deberían ser del tipo lineal y no de ecuaciones de segundo grado. Tal vez se puedan diseñar actividades con el uso de TIC pero con sucesiones aritméticas…”;

- “…No utilizo el Geogebra para Álgebra sino para Geometría…”;

- “…En mi escuela son pocos los que tienen computadora, así que es poco útil el uso de software para implementar una actividad con TIC...”.

En estas respuestas se puede observar que, aunque en los últimos años el uso de las nuevas tecnologías fue incrementándose en la enseñanza de la escuela secundaria, aún falta planificar actividades que puedan desarrollarse en el aula. Tal vez sea por esto que varios docentes no eligen la actividad.

Por el contrario, los que decidieron que sí llevarían a su clase esta actividad argumentaron lo siguiente:

- “…Sí, porque me pareció interesante la propuesta, no la conocía y los alumnos pueden implementar tablas y usar parámetros…”;

- “…Sí, porque el uso de Tic es necesario por lo que recomienda el Diseño Curricular, aunque sea un desafío…”;

- “…Sí, ya que este tipo de actividad realiza un salto desde lo lineal a lo cuadrático utilizando la potenciación…”;

- "…Sí, ya que se sigue viendo al igual que la consigna 1 la generalización de expresiones algebraicas…"

A los docentes que expresaron su aprobación les interesó el uso de Geogebra como recurso accesible y motivador para los estudiantes. Es muy posible que estos docentes conocieran el software y lo utilizaran. Sin embargo, no hicieron mención a que el problema incluía una expresión de segundo grado y su posible desajuste a los primeros años.

Consigna 3:

Un ingeniero automotriz toma los registros de un automóvil que se mueve a velocidad constante en una pista que tiene 10 km y los vuelca en la siguiente tabla.

Tiempo (en min.)	**5**	**10**	**12**		**85**
Distancia recorrida (en km)	10	20		35	

Completar la tabla propuesta por el ingeniero.

Consigna 5:

Para preparar comida para los animales de la granja, Mario necesita semanalmente 3 bolsas de maíz cada 2 gallinas. Para organizar esto, arma la siguiente tabla en la computadora:

Cantidad de gallinas	**2**	**6**	**9**	**25**	**75**
Bolsas que necesito semanalmente					

Completar la tabla de Mario.

Ante estos dos problemas de proporcionalidad directa, también hubo respuestas de ambos tipos. 10 contestaron que lo llevarían al aula y los restantes, no.

Las razones de las respuestas afirmativas son:

- “…Sí, porque los ejercicios típicos de proporcionalidad son conocidos por los estudiantes desde la escuela primaria y pueden ampliar más desde la mirada funcional…”;

-“… Sí, porque este tipo de problema permite la búsqueda de regularidades, donde la tabla puede describir situaciones de proporcionalidad…”

-“… Sí, porque es el comienzo de planteo de fórmulas con la letra como incógnita…”;

- “…Sí, porque tiene distintos marcos para trabajar y tiene significado para los alumnos…”;

- “…Sí, porque en esta tabla de proporcionalidad puede buscarse la constante como trabajo algebraico…”

- “…Sí, porque es adecuada a la edad y permite a los alumnos buscar distintas estrategias para completar la tabla…”

Se puede observar que, en las respuestas afirmativas, los docentes relacionan la proporcionalidad directa y el concepto de función, ambas como recursos para introducir el Álgebra utilizando varios marcos. Reconocen la letra como uso de variable o como incógnita y aceptan que este tipo de tablas a completar les resultan accesibles a los estudiantes ya que ellos vienen trabajando desde la escuela primaria con la tabla pitagórica para completar las tablas de los 10 primeros números naturales de manera proporcional.

Los docentes que manifestaron que no llevarían al aula este tipo de consigna dijeron lo siguiente:

- “...No, porque se puede resolver fácilmente por proporcionalidad directa y no utiliza Álgebra...”;

- “...No produce conocimiento nuevo con respecto a lo algebraico, solo consiste en encontrar la constante para completar la tabla...”;
- “...No, porque no he tenido buenos resultados involucrando relaciones funcionales a edad muy temprana...”;

El rechazo de estos docentes a este tipo de consignas tal vez se deba a que lo utilizan en cursos más avanzados de la escuela secundaria o no asocian el Álgebra a ello, sino que lo consideran una continuación del trabajo aritmético.

<u>Consigna 4:</u>

Un mago le dice a su público: “Piensen un número, agréguenle 8, multipliquen por 6, resten dos veces 4 y dividan por 3 y luego por 2” El mago espera unos instantes y les dice: “¡A todos les dio el número que pensaron!” ¿Es verdad lo que dice el mago? ¿Por qué?

Contestaron a favor de su elección, 10 de los encuestados:

- “...Sí, la llevaría al aula porque tiene un lenguaje sencillo para los estudiantes y permite escribir una ecuación...”;
- “...Sí, porque permite el uso de variable y búsqueda de propiedades aritméticas...”;
- “...Sí, porque permite la discusión de la jerarquía de las operaciones y el uso de paréntesis...”;
- “...Lo utilizo habitualmente para introducir ecuaciones; primero, porque a los estudiantes les gusta este tipo de actividad y además ellos mismos pueden inventar sus propios trucos...”;
- “...Sí, porque el uso de ecuaciones en el primer año del nivel secundario es significativo para el estudiante y aportará al Álgebra en el resto de su escolaridad...”;

- “...Sí, porque les permite buscar distintas regularidades con respecto a la operatoria y les permite generalizar...”

Los docentes que apoyaron este tipo de actividades entienden que los alumnos participan activamente en ellas, e incluso que pueden formar parte de una secuencia donde el ingreso a la letra es favorable para introducir ecuaciones lineales de primer grado.

Sin embargo, algunos no seleccionarían estos problemas por las siguientes razones:

- “...No lleva al Álgebra la situación; los alumnos pueden resolverlo mentalmente...”;
- “...Hacen falta contenidos previos como ecuaciones antes de ver este problema...”.

También se cree que estas actividades pueden tomar su tiempo en el aula y los docentes que no la llevarían prefieren ver otras en las que el debate sea el mínimo e indispensable.

<u>Consigna 6</u>:

Una empresa de telefonía celular cobra a sus clientes una suma fija más lo que hablan por minuto. Para calcular cuánto debe abonar un cliente usa la siguiente fórmula: $p = 20 + 0{,}50.m$, siendo p el precio a pagar y m la cantidad de minutos hablados.

¿Cuánto debe pagar un cliente que habló 33 minutos? Si debe pagar \$ 53,45, ¿cuántos minutos habló?

En relación con esta consigna, 11 personas contestaron afirmativamente, que llevarían este problema a sus aulas, por las siguientes afirmaciones:

- “...Sí, porque se pueden aplicar ecuaciones y resolver la incógnita...”;
- “...Sí, porque es una actividad que permite que los estudiantes exploren y justifiquen la respuesta con respecto a lo algebraico...”;

- “...Sí, porque modeliza una situación e introduce el concepto de función. También se podría utilizar las TIC para incorporar las tablas, y Excel...”;
- “...Sí, porque es una actividad donde el problema es contextualizado da la apertura de producción de fórmulas y además se puede graficar e introducir el concepto de variables...”
- “...Sí, porque permite relacionar dos variables: costo y cantidad...”;
- “...Sí, porque los alumnos deben analizar la expresión simbólica y responder las preguntas sin conocimiento previo de ecuaciones...”;
- “...Sí, porque permite construir tabla de valores, analizar las variables en juego e introducir el Álgebra desde la mirada funcional...”

Los docentes que apoyaron este problema expresan que la fórmula es sencilla para el nivel y que los alumnos pueden ver que la letra “*p”* representa el precio y “*m”* la cantidad de minutos sin ninguna dificultad; acerca a los estudiantes el reemplazo de la letra por un número, en este caso, el campo de los racionales positivos; y, además el problema presenta un tema al que ellos están familiarizados como lo es el uso de telefonía celular.

Sin embargo, los que contestaron que no, expresaron:

- “...No permite construcción algebraica, ya que la fórmula le es dada y solo tiene que verificar...”;
- “...No porque el uso de dos letras en primer año no es adecuado al nivel de abstracción...”;

Los docentes que no llevarían este tipo de problemas ven que la aparición de dos variables no es adecuada al nivel de abstracción de los estudiantes y que tampoco construye ningún conocimiento algebraico o manipulación.

<u>Consigna 7</u>:

"Gustavo tiene 10 monedas más que Romina. Entre los dos tienen 30 monedas"

¿Cuál de las expresiones describe la situación anterior, considerando que llamamos c a las monedas que tiene Gustavo?

a) $c+(c+10) = 30$ b) $c+ (c-10) = 30$ c) $c+30 = c+10$

13 personas contestaron que llevarían al aula esta actividad. Entre quienes la eligieron, dijeron lo siguiente:

- “...Es una buena actividad para introducir el Álgebra y adecuado a la edad y porque los alumnos pueden justificar...”;
- “...Sí, porque este tipo de actividades pone en juego la toma de decisiones al seleccionar una expresión u otra...”;
- “...Sí, porque también se puede introducir ecuaciones y reemplazo de variables y no de la manera tradicional...”;
- “...Sí, porque permite que el alumno pueda razonar las expresiones algebraicas sin nivel mayor de dificultad, relacionando el lenguaje coloquial y simbólico...”;
- “...Sí, porque es una actividad donde aparecen las expresiones simbólicas correctas e incorrectas y se pueden debatir sobre la validez de las mismas...”;
- “...Sí, porque se discute el significado de la letra en la fórmula y aparecen las primeras expresiones algebraicas de acuerdo a la edad...”

Si bien la fórmula ya es dada, podemos observar que los docentes eligen esta actividad porque aparece la modelización del problema y los estudiantes deben asociar la cantidad de monedas y los montos.

Los que contestaron que no dijeron lo que sigue:

- "...No llevaría al aula esta actividad porque no ven la letra como incógnita, dado que no se les pregunta puntualmente el valor a encontrar de la letra...";

- "...No, porque los alumnos no tienen el nivel de razonamiento adecuado para esta actividad...".

Consigna 8:

En un calendario se pueden agrupar algunos números en cuadrados con lados de diferentes medidas. Por ejemplo, el siguiente corresponde al mes de febrero de un cierto año no bisiesto.

:

D	**L**	**M**	**M**	**J**	**V**	**S**
						1
2	3	4	5	6	7	8
9	10	11	12	13	14	15
16	17	18	19	20	21	22
23	24	25	26	27	28	

Se selecciona un cuadrado de 4 números cualquiera, por ejemplo:

4	**5**
6	7

Se pide:

Dibujar sobre el calendario otros cuadrados de 2x2. Para cada uno de ellos, calcular la diferencia entre los productos de los números situados en los extremos de las diagonales.

¿Qué relación hay entre los resultados que se obtienen?

De los docentes consultados, 10 llevarían la actividad al aula por los siguientes motivos:

- “...Sí, porque esta actividad lleva a que los estudiantes relacionen el concepto de múltiplo desde el campo de los naturales y llegar a la generalización del porqué se cumple en los casilleros seleccionados...”;
- “...Sí, porque los estudiantes prueban, tienen trabajo exploratorio y pueden pasar desde la aritmética al Álgebra...”;
- “...Sí, porque a partir de los resultados de los estudiantes se puede llevar a una puesta en común y empezar a formalizar por qué ocurren las irregularidades en los cuadrados del calendario, hasta poder llegar a una expresión algebraica que valide...”;
- “...Es un buen disparador para generalizar de otra manera que no sea por el manejo de sucesiones aritméticas...”;
- “...Sí, porque propicia la búsqueda de propiedades aritméticas y a partir de allí se puede modelizar...”;
- “...Sí, porque es una actividad no tradicional que genera curiosidad en los estudiantes y posibilita la búsqueda de propiedades, habilitando un buen camino para introducir el Álgebra...”;
- “...Sí, porque pueden buscar relaciones que hay entre los números naturales y llegar a una expresión general...”;

Los que contestaron que no llevarían esta actividad al aula dieron los siguientes argumentos:

- “...No daría esta actividad para primer año, sino en un tercer año, porque deben tener noción y práctica de ecuaciones antes...”;

- "...No llevaría esta actividad a primer año porque las operaciones involucradas son matrices, no adecuada por este nivel...";
- "...No, porque no encuentro la relación entre la actividad e introducir el Álgebra...".

En la segunda parte del cuestionario, se les pidió a los docentes que seleccionen, de una lista, los tipos de consignas que consideran adecuados para introducir el Álgebra en sus clases.

Las siguientes fueron tomadas del marco teórico, pensando en otras actividades o preferencias que pueden llegar a tener los profesores al planificar sus clases con respecto al uso del símbolo en diferentes formatos.

Se tuvo en cuenta que podrían seleccionar situaciones o actividades en donde el estudiante interactúe con las primeras aproximaciones al lenguaje y trabajo algebraico.

Los resultados fueron los siguientes:

Tipo de consignas	**Cantidad de docentes**
Situaciones en donde se pueden plantear ecuaciones con una incógnita y se usen operaciones sencillas, incluyendo el lenguaje coloquial y simbólico.	13
Ejercicios descontextualizados de ecuaciones con una incógnita para hallar su valor y aprender el proceso de despeje.	7
Situaciones de conteo que involucren generalizaciones utilizando sucesiones.	8
Situaciones en las que hay que asignar valores numéricos en una fórmula o similar	8

Situaciones en donde el estudiante pueda relacionar dos variables	8
Situaciones en donde se pueda estudiar relaciones de proporcionalidad directa	7
Situaciones en donde se pueden modelizar situaciones mediante el Álgebra destacando el estudio de las relaciones equivalentes de sus expresiones	10
Otras distintas a las propuestas (describir)	7

En las formas distintas que se les solicitó en el último ítem los docentes que escribieron sus propuestas mencionaron actividades que estuvieran relacionadas con un problema introductorio que fuera generalmente lúdico para que los alumnos pudieran debatir entre ellos, como por ejemplo, encontrar qué número cumple cierta condición.

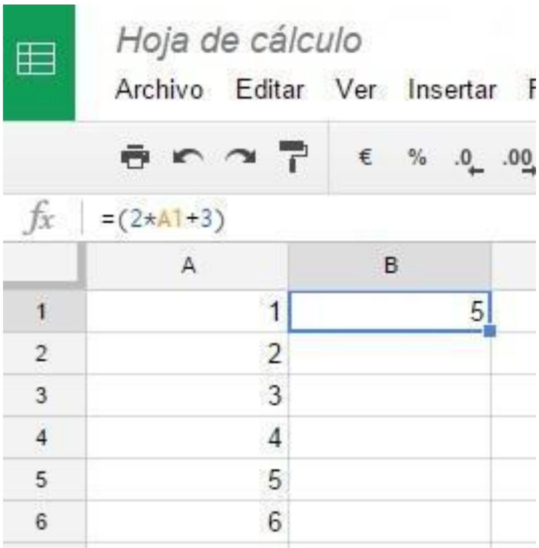
Algunos expresaron que su elección depende de las características del grupo y los temas que hayan visto antes; a partir de allí, seleccionan diversas actividades que puedan acercar herramientas a sus alumnos antes de introducir símbolos, por ejemplo, propiedades de las operaciones en el campo de los naturales o situaciones problemáticas sencillas que involucren explicaciones de cómo resolverlo.

Todos manifestaron trabajar siempre con números antes del símbolo y afirmaron que el pasaje al Álgebra debe darse de esa manera, porque los alumnos van tomando conocimiento del significado del símbolo a medida que van familiarizándose con ellos en diversas actividades.

Los docentes reconocen los errores que los alumnos expresan cuando tienen una operación como la siguiente: $x+x$, donde aparecen resultados como x, $2x$ y x^2. Expresan que les es difícil que sus estudiantes operen con expresiones algebraicas y por ello, cuando llegan a ver este tema, hacen mucho hincapié en las ecuaciones.

Aquellos que expresaron utilizar habitualmente recursos tecnológicos en el aula, comentaron que seleccionan actividades donde el uso de símbolo aparece, por ejemplo, confeccionando una tabla con la herramienta Excel ingresando en la bandeja de función la fórmula =(2*A1+3) para obtener ciertos valores que dependen de A1 (Ver Figura 5).

Estos docentes opinan que estas actividades también pueden ser apropiadas para vincularlas con el Álgebra debido a que los alumnos puedan acercarse a aproximar la relación entre los números y los resultados en función del tipo de fórmula que se ingrese en la bandeja de entrada y encuentren distintas relaciones entre ambas.



Otras de las cuestiones que mencionaron fue el uso de letras en el bloque de la enseñanza de la geometría, donde estas ocupan un significado en las expresiones y nomenclaturas ya preestablecidas.

Por ejemplo para expresar relaciones entre del área y/o el perímetro de cierta figura geométrica o por la nomenclatura de rectas, puntos, vértices, etc. que se acuerdan en el aula.

Los docentes expresaron que a los estudiantes de este rango de edad (12-14 años) se les dificulta epistemológicamente el significado de los símbolos y letras y por ello es importante que las actividades y recursos elegidos por el docente estén contemplados en diferentes ejes de su planificación.

Involucrar el Álgebra en estas actividades es una manera de poder avanzar en diferentes miradas, vinculando varias estrategias en su enseñanza y aprovechando al máximo sus distintos usos.

4. RESULTADOS

Para analizar más profundamente las respuestas, se organizó las consignas propuestas en el cuestionario según los siguientes ejes para la introducción al trabajo algebraico.

Según los comentarios e información recolectada se pudo categorizar que los docentes utilizan las diferentes actividades en forma de recursos:

- Generalización
- Uso de ecuaciones
- Utilización de problemas de relaciones funcionales
- Utilización de problemas donde se manipulen expresiones equivalentes.

4.1. El recurso de la generalización

En las respuestas de los docentes se puede observar una mayoría en aceptación acerca de este tipo de problemas.Generalmente los eligen como actividades, para empezar una secuencia de problemas que propician el conteo y búsqueda de regularidades para observar un cierto patrón. Entre estos patrones existe una preferencia por el modelo lineal y no por el cuadrático, al que evaluaron poco ajustado al nivel, ya que consideran que requiere de propiedades aritméticas que el estudiante aún no ha desarrollado. En particular, en el problema de número de círculos en el paso *n*, los docentes coincidieron en que los estudiantes no llegan a una expresión algebraica correcta. Sobre el modelo lineal, afirmaron que les permite también proponer ecuaciones lineales. Esta preferencia de los docentes por la entrada al Álgebra a través de la generalización es coherente con el enfoque del Diseño Curricular, como hemos desarrollado anteriormente.

Además, con respecto a este tipo de ejercicios, los docentes manifestaron que puede trabajar con material concreto, llevando fósforos o palitos para que los estudiantes puedan representar las situaciones. Estuvieron de acuerdo en utilizar TIC pero expresaron que aún desconocen cómo diseñarlo para llevarlo al aula. El uso de Geogebra es conocido por la mayoría de los docentes para geometría y no para Álgebra.

La mayoría de los encuestados insiste en realizar preguntas intermedias más sencillas antes de pedir al estudiante que responda en qué lugar habrá 1728 fósforos.

Los docentes creen que los alumnos no alcanzan a formular una estrategia sin mayor secuenciación de la actividad, por ejemplo pedir que calculen la cantidad de fósforos que hay en los primeros pasos.

A pesar de que eligen este tipo de actividades, no se observó que reconocieran sus cualidades respecto de la búsqueda de regularidades ni la posibilidad del trabajo con expresiones algebraicas equivalentes, sino que fueron elegidas debido a que los alumnos no necesitan tener demasiados saberes disponibles para empezar a resolver el problema o porque las intervenciones docentes en la parte de introducción pueden ser mínimas, ya que la mayoría de los alumnos dibujan varios pasos de una sucesión y van formulando conjeturas con sus compañeros.

También otros expresaron que ven a este tipo de actividades como aplicación de ecuaciones y no como introducción al trabajo algebraico, ya que opinan que los alumnos deben haber visto ecuaciones con números naturales previamente para poder averiguar en qué número de paso van a obtener cierta cantidad de fósforos.

4.2. Introducción al Álgebra a través de las ecuaciones

Las ecuaciones han sido, en la enseñanza tradicional, una de las formas privilegiadas para introducir el trabajo con literales.

Los docentes que contestaron el cuestionario afirmaron que las ecuaciones representan el Álgebra en este nivel y lo asocian a todo tipo de problemas, donde el estudiante debe saber plantear una ecuación para hallar el valor de una incógnita.

Como se mencionó en el estado del arte, la enseñanza tradicional afirma que resolver ecuaciones lineales en primer año del nivel medio permitirá al estudiante adquirir destrezas en la manipulación de símbolos y despejes, que lo vincularán con el estudio de funciones y polinomios.

Se cree que los docentes que siguen eligiendo las ecuaciones para despejar como forma de introducción al Álgebra también lo hacen por los siguientes motivos:

- Continúan la forma de enseñanza a través de la cual aprendió en este nivel.
- Se guían por algún libro, actual o no, donde la presentación del Álgebra se realiza mediante la resolución de ecuaciones.
- No conocen otras formas de introducir el Álgebra que no sea por esta vía.

Es por ello que en el cuestionario se incluyó algunas actividades donde anticipamos que el docente recurriría al uso de ecuaciones necesario para resolverlas. Por ejemplo en la consigna del mago, los profesores plantearon la siguiente expresión

$(((n+8).6-4)-4):3):2)=n$

4.3 El recurso del uso de relaciones funcionales

Las relaciones de proporcionalidad directa fueron pensadas por algunos profesores como apropiadas para introducir el Álgebra a partir de la mirada funcional, relación entre dos variables, búsqueda de constante de proporcionalidad, elaboración de tablas y posibles gráficos.

Otros expresaron que también lo utilizarían para plantear ecuaciones o la "regla de tres simple", donde en el usual planteo aparece una letra: "Si tantas máquinas cuestan tanto, entonces x costará...".

Sin embargo algunos de los encuestados contestaron que estos tipos de actividades de proporcionalidad no están ligados al Álgebra, ya que llevan al análisis de una tabla entre variables y, aunque en primer año esté sugerida la enseñanza del concepto de función, afirman que el tiempo de la planificación no alcanza para ver este tema.

Estos tipos de problemas están vinculados con el modelo 3UV (Ursini, 2005), ya que muchos docentes al ver una tabla con valores, rápidamente lo relacionan con el uso de la letra como tres significados: como incógnita específica, como número general o como relación funcional.

4.4 El recurso del uso de situaciones problemáticas donde se manipulen expresiones equivalentes.

Si bien, en la generalización, los estudiantes pueden llegar a producir una fórmula a partir del conteo, la ambición de todo docente es que, a partir de allí, puedan avanzar en el Álgebra adquiriendo destreza en las operaciones y pudiendo relacionar expresiones equivalentes.

Se estima que esto se debe a la creencia por parte del profesor de que, si el alumno llega a adquirir mayor destreza en dichas expresiones, podrá anticipar el significado de los símbolos sobre ciertas expresiones, siguiendo a Arcavi (1994), en "*capacidad para ‘manipular’ y también ‘leer a través’ de expresiones simbólicas, como dos aspectos complementarios en la resolución de problemas algebraicos*".

Sin embargo, en primer año de la escuela secundaria, esto no se termina de desarrollar durante el año y es una tarea que continúa con la modelización y análisis funcional en años posteriores.

5. CONCLUSIONES

Con lo desarrollado hasta aquí acerca de las formas de introducir el trabajo algebraico en los primeros años de la escuela media, se puede apreciar que los docentes encuestados brindan información acerca de las actividades que priorizan para llevar al aula, siendo éstas, actividades exploratorias donde los estudiantes puedan justificar los procedimientos con respecto al uso y significados que se le dan a la letra. La mayoría sostiene que la introducción del trabajo algebraico a partir de la generalización es la mejor manera de que los estudiantes realicen sus primeras aproximaciones del sentido del símbolo. Sin embargo, otro sector de los consultados siguen viendo la resolución de ecuaciones como un aprendizaje necesario de los estudiantes de los primeros años, ya que las ecuaciones pueden ser planteadas desde cualquiera de los bloques en los que está organizado el Diseño Curricular; por ejemplo, desde geometría para encontrar el valor de un ángulo, para plantear una situación problemática de proporcionalidad, un problema de lenguaje coloquial al simbólico, etc.

Incluso, al presentarles a los docentes problemas distintos a lo que comúnmente se llevan a las clases, como el caso del calendario, el juego del mago o el uso del Geogebra, varios afirmaron que, aunque les pareció interesante el tema, creen necesario el conocimiento previo de las ecuaciones para poder resolver dichas situaciones.

Esto permite suponer que siguen considerando, quizás implícitamente, que el trabajo algebraico se inicia con la enseñanza de los tradicionales despejes de la incógnita en ecuaciones descontextualizadas.

Los problemas de proporcionalidad directa o del significado de múltiplo en el campo de los naturales también fueron vistos como apropiados para introducir el Álgebra. Sería interesante avanzar en la investigación acerca de si este tipo de actividades está efectivamente presente en las aulas.

Los docentes encuestados admitieron que el problema del calendario fue el que menos anticiparon como apropiado para el trabajo algebraico y no fue hasta que lo resolvieron y analizaron que pudieron observar las regularidades del problema y concluir que se trataba de una expresión donde señalaba un múltiplo del 7.

Lo mismo ocurrió con las tablas de proporcionalidad, en donde se puede expresar una misma idea utilizando distintos tipos de expresiones o lenguaje. En este caso, donde comienza la mirada funcional, puede ser familiar a los estudiantes, ya que ellos vienen trabajando desde la escuela primaria con múltiplos y divisores y la letra puede llegar a cobrar un sentido en la búsqueda de una relación entre las variables.

Se cree que realizar y proponer distintas actividades que introduzcan el Álgebra incentiva al docente a buscar e investigar distintas estrategias para trabajar en el aula.

Se considera importante el trabajo continuo con docentes de matemática en el nivel secundario a nivel institucional, jurisdiccional y provincial, de manera de poder acercarles lineamientos de nuevas investigaciones sobre Educación Matemática y alentarlos a la capacitación continua como parte de su trayectoria docente.

En este sentido, se propone algunas orientaciones a tener en cuenta en la elección de los recursos que el docente puede llevar al aula e implementar en sus planificaciones para la enseñanza del Álgebra:

- Realizar un sondeo previo con actividades orientadas al uso de propiedades aritméticas en el campo de los naturales a partir de situaciones problemáticas que incentiven la búsqueda de regularidades y que contengan preguntas donde se pueda efectuar un debate sobre las producciones y los errores.

- Involucrar situaciones problemáticas que puedan llevar a la generalización, tal como dice el Diseño Curricular y postula Sessa (2005): presentar un conjunto de problemas de este tipo que atienda el pasaje de la aritmética al Álgebra. Este tipo de actividades, que aparecen en la mayoría de libros y manuales de los últimos años, pueden dar un inicio al trabajo algebraico y al estudio de las expresiones algebraicas equivalentes.

Es necesaria la investigación, por parte del docente, de una batería de actividades que conduzcan a la búsqueda de regularidades y que lleven a la formulación de preguntas que potencien el significado del símbolo, para que los estudiantes tomen confianza y asimilen las primeras herramientas del trabajo algebraico.

- Utilizar actividades donde la letra pueda adquirir los distintos significados que propone el modelo 3UV: como incógnita, como número general y como variables en relación funcional.

Diferentes marcos del uso de la letra podrán estar a disposición del estudiante para alcanzar herramientas y técnicas, no solo para el trabajo algebraico sino para la resolución de problemas.

Como se mencionó anteriormente, Trigueros y Ursini (2006) sostienen que la enseñanza debería hacer énfasis en la distinción entre los diferentes usos de la variable con el objetivo de que los estudiantes puedan integrarlos en una única entidad conceptual: la variable.

- Investigar y resolver actividades a través de las cuales los estudiantes puedan reconocer la necesidad de usar el símbolo utilizando distintos marcos (Douady, 1999): coloquial, gráfico, aritmético, que puedan permitir la introducción al Álgebra, desde lo particular a lo general.

Se considera que estos lineamientos pueden conducir al docente a nuevos recursos y actividades para el aula, en búsqueda de nuevas experiencias que lleven a mejorar la relación enseñanza-aprendizaje del Álgebra en los primeros años de la escuela secundaria.

6. FUTURAS LÍNEAS DE TRABAJO:

A partir de las primeras conclusiones que emergen de este trabajo, surgen nuevas inquietudes que permiten avanzar en la búsqueda de herramientas que posibiliten brindar mayor información sobre la enseñanza del Álgebra en la escuela secundaria y continuar con aportes significativos para que el docente pueda reflexionar en la búsqueda de los recursos que utiliza en el aula para tal fin.

Para ello, se plantean nuevas preguntas que pueden ser ejes de futuras líneas de trabajo en este tema:

- ¿El uso de TIC en la clase puede favorecer el aprendizaje del trabajo algebraico?

En los últimos años, las políticas educativas jurisdiccionales, provinciales y nacionales han fomentado y han asesorado a docentes de todo el país para que los recursos tecnológicos sean parte de las clases en la escuela secundaria en todas las disciplinas a través del Plan Conectar Igualdad. En este marco, tanto los alumnos como los docentes en ejercicio recibieron una netbook.

Diversos estudios afirman que el uso de TIC en el aula promueve en los estudiantes intereses en la disciplina y en la dinámica de la clase con respecto al tiempo y el uso de graficadores. Novembre, Nicodemo y Coll (2015) proponen una serie de actividades que se adecuan al enfoque de resolución de problemas con la inclusión de TIC y uso de software como Geogebra, donde se puede trabajar desde lo geométrico, lo aritmético y lo algebraico simultáneamente. Los autores mencionan a Balacheff (2000), quien señala: *"las tecnologías modifican el tipo de matemáticas que se puede enseñar, el conjunto de problemas y las estrategias didácticas"*.

En este contexto de búsqueda de situaciones problemáticas y actividades matemáticas para llevar a las aulas, se podría investigar cuáles son aquellas que permitan relacionar los conocimientos matemáticos con los tecnológicos y que además promuevan el pensamiento algebraico. Se sabe que aún no hay estudios en donde se haya comprobado que el uso de TIC favorece el desarrollo de trabajo algebraico, pero se ha comenzado a investigar: por ejemplo Muñoz y Villareal (2014), buscaron, a partir de entrevistas a estudiantes de primer año de la escuela secundaria de México, conocer la influencia de la tecnología en materias como el Álgebra, así como tomar en cuenta las opiniones de los jóvenes a los que se les imparte dicha materia.

- El trabajo con el pre- Álgebra en la escuela primaria de nuestro país ¿ayudaría en el desarrollo de competencias en los estudiantes de los primeros años de la escuela secundaria?

Como mencionan las investigaciones de Socas (2011), vistas anteriormente, el campo de estudio sobre la búsqueda de actividades que se denominan pre-algebraicas, Davis (1985), Vergnaud (1988), son aquellas que se sitúan en los últimos años de la educación primaria. Estas actividades están relacionadas con el planteamiento y la resolución de ecuaciones; aproximaciones a la generalización; patrones numéricos y geométricos; variables y funciones, estas últimas, asociadas a las computadoras.

En el currículum de la escuela primaria de la Provincia de Buenos Aires no están contemplados estos contenidos como Núcleos de Aprendizajes Prioritarios (NAP).

Es posible que nuevas investigaciones en el campo de este nivel puedan indagar si el desarrollo del pre- Álgebra puede fortalecer habilidades y potencialidades en los estudiantes.

En síntesis, las distintas miradas que poseen los docentes acerca de qué recursos pueden seleccionar al proponer la entrada al Álgebra dependen de varios factores, ya sea en la enseñanza como en el aprendizaje. Conocer qué tipo de recurso tiene a disposición el docente posibilita un aprovechamiento de su clase y un alentador desafío a corto y largo plazo, en el sentido de que pueda planificar sus actividades en pos de obtener resultados acerca del verdadero sentido de lo que el alumno aprende en relación con el Álgebra en el aula.

7. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Arcavi, A. (1994). *Sentido del Símbolo: Crear Informal en las Matemáticas formales.* Traducción del artículo "Symbol sense: Informal sense-making in Formal Mathematics" aparecido en la revista *For the Learning of Mathematics.*

- Arcavi, A. (2005). *Developing and using symbol sense in mathematics*. En For the Learning of Mathematics 25,(pp 42- 48). Canadá: FLM Publishing Association.

- Arcavi, A. (2007) *El desarrollo y el uso del sentido de los símbolos*. Conferencia realizada como Profesor visitante, CRICED, Tsukuba University- Japan. En http://ebookbrowse.com/arcavi05-el-desarrollo-y-el-uso-del-sentido-de-lossimbolos-doc-d37871752 (01/06/2011)

- Balacheff, N. (2000). *Entornos informáticos para la enseñanza de las matemáticas: complejidad didáctica y expectativas*. En N. Gorgorió, J. Deulofeu y A. Bishop (coords.): Matemáticas y educación. Retos y cambios desde una perspectiva internacional.(pp. 93-108) Barcelona: Graó

-Bolea, P.; Bosch, M.; Gascón, J. (2001). *La transposición didáctica de organizaciones matemáticas en proceso de algebrización: el caso de la proporcionalidad*.(pp. 247-304) Recherches en Didactique des mathématiques.

- Bolea Catalán, P. (2002). *El proceso de algebrización de organización de matemáticas escolares.*(En línea). Universidad de Zaragoza. Disponible en Internet: http://www.atd-tad.org/wp-content/uploads/2012/05/Tesis-Pilar.pdf

- Booth, R l. (1988).*Children´s difficulties in beginning algebra.*(pp 20-32).En A.E. Coxford and A.P Shulte (Eds). The idw1· of algebra, K-12 (1988) Yearbook The National Council of Teachers of Mathematics Virginia. U.S A

- Chevallard, Y. (1996).*Le passage de l¨arithmétique a l´algebrique dans l´enseignement des mathématiques au college*.(pp 43-72). Deuxieme partie, Petit X, nº19. Francia.

- Chevallard, Y. Bosch, M. Gascón, J. (1997). *Estudiar matemáticas. El eslabón perdido entre enseñanza y aprendizaje.* Barcelona: Cuadernos de Educación.I. C. E. Universitat Barcelona), Horsori.

- Chevallard, Y. (1997). *La transposición didáctica: del saber sabio al saber enseñado*. Buenos Aires: Aique.

- Chevallard, Y. (1989). *Le passage de l'arithmétique à l'algèbre dans l'enseignement des mathématiques au collège*. Deuxième partie. Petit X, 19, 43-72.

- Davis, R. B. (1985). *ICME–5 Report: Algebraic thinking in the early grades*.(pp 195-208) Journal of Mathematical Behaviour..

- Diseño Curricular para la educación Secundaria. *1º año (7 ESB*).(pp 173-194) D.G.C.yE.: Gobierno de la provincia de Buenos Aires.2006

- Diseño Curricular para la educación Secundaria. *2º año (8 ESB)*. (pp 295-349) .D.G.C.yE.: Gobierno de la provincia de Buenos Aires.2008

- Diseño Curricular para la educación Secundaria. *3º año (9 ESB)*.(pp 303-373). D.G.C.y E.: Gobierno de la provincia de Buenos Aires.2008

- Douady, R. (1995). *La ingeniería didáctica y la evolución de su relación con el conocimiento*. En Artigue, M.; Douady, R.; Moreno, L. y Gómez, P. (editor). Ingeniería didáctica en educación matemática. Una Empresa Docente. Bogotá: Grupo Editorial Iberoamérica.

- Douady, Regine (1999) *Juegos de Marcos y Dialéctica Herramienta- Objeto*.(pp 5-31) en Recherche en Didactique de la Mathématiques- Grenoble, Le Pensé Sauvage; Vol. 7, Nº 2.

- Duval, R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine. Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*. Berne, Suisse: Peter Lang [traducción española, Semiosis y pensamiento humano (1999). Cali, Colombia: Universidad del Valle.

- López, J. (2010) *Dificultades en el concepto de variable en profesores de matemática de secundaria: un análisis mediante el modelo 3UV*. Números: Revista de didáctica de la Matemática.

- Muñoz y y Villarreal A. *¿Cómo utilizar las Tics para aprender Álgebra en secundaria?*.Congreso Iberoamericano de Ciencia, Tecnología,Innovación y Educación.OEI. (En línea). 2014. Citado el 28 de enero de 2016

Disponible en internet: http://www.oei.es/congreso2014/memoriactei/1322.pdf

- N.C.T.M. (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. NCTM. Reston, VA

- Nicaud,J-F.(1993) *Modelisation en EIAO*. Les modeles d´APLUSIX. Raport de recherches n 859.LRI, Universite de Paris Sud.

- Novembre A.(2015). *Matemática y Tic: orientaciones para la Enseñanza*. 1ra Ed. Ciudad Autónoma de Buenos Aires.ANSES.2015

- Kieran, C. (2006). *Research the Learning and Teaching of Algebra*.(pp 11-49).En Gutiérrez, A. y Boero, P. (Eds.), Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education: Past, Present and Future. Sense Publishers. Rotterdam.

- Panizza M.; Sadovsky P.; Sessa C. (1995). *Los primeros aprendizajes de las herramientas algebraicas. Cuando las letras entran en la clase de Matemática. Informe sobre una investigación en marcha*. Trabajo presentado en la Reunión de Educación Matemática de la Unión Matemática Argentina, Río Cuarto, octubre de 1995. [Versión electrónica] obtenido el 17 de noviembre de 2007 en http://www.fcen.uba.ar/carreras/cefiec/matem/ mat_inv.htm

- Perry, P. (1999). *Aspectos claves del Álgebra escolar: ¿Sabe qué responderían sus estudiantes?*. En Revista EMA. Vol.4 .No 3

- Sessa, C. y Fioritti, G. (2010).T*rabajo colaborativo para el estudio didáctico de lo cuadrático"*. III REPEM Memorias.Santa Rosa.La Pampa.

- Sessa, C. (2005) *Iniciación al estudio didáctico del Álgebra*. Libros del Zorzal. Buenos Aires.

- Socas M. *La enseñanza del Álgebra en la Educación Obligatoria. Aportaciones de la investigación* (en línea).Números: Revista de Didáctica de las Matemáticas.ISSN: 1887-1984.Volumen 77, julio de 2011, páginas 5–34 (citado el 20 de enero de 2016).
Disponible en internet:
http://www.sinewton.org/numeros/numeros/77/Apertura.pdf

- Socas,M; Camacho, Palarea y Hernández (1989). *Iniciación al Álgebra*. Grupo Azarquiel (1993). Ideas y actividades para enseñar Álgebra. Editorial Síntesis.

-SOCAS, M. M. (1991). *Iniciación a la enseñanza-aprendizaje de Álgebra: una perspectiva curricular*. Actas del Segundo Simposio Internacional sobre Referencias bibliográficas 545 Investigación en Educación Matemática, Aprendizaje y Enseñanza del Álgebra, pp. 49-79. Cuernavaca. México.

- Socas, M. y Pararea, M. M. (1996). *El uso de sistemas de representación con imágenes en la Enseñanza-aprendizaje del Álgebra escolar*. Actas del Simposium Internacional sobre la "Matemática actual". XXV años de Matemáticas en la Universidad de la Laguna, (pp. 507-521.) Secretariado de Publicaciones de la Universidad de La Laguna.

- Socas, M. (2001). *Investigación en Didáctica de la Matemática vía Modelos de competencia. Un estudio en relación con el Lenguaje Algebraico*. Departamento de Análisis Matemático. Universidad de La Laguna

- Philipp, R. A. (1992). *The Many Uses of Algebraic Variables*.(pp 557-561) Mathematics Teacher, 85.

- Philipp, R. A. y Schappelle, B. P. (1999). *Algebra as Generalized Arithmetic: Starting with the Known for a Change*. (pp 310-316) The Mathematics Teacher, 92.

- Ursini, S., y M. Trigueros (1997).*Understanding of deferent uses of variable: A study with starting college students(pp254-261)*. Proceeding of the XXI PME Conference, Lathi, Finlandia.

- Ursini, S. (1990). *El lenguaje aritmético-algebraico en un ambiente computacional*.(pp 149-156). En Cuadernos de Investigación, Núm. 15, IV, Julio. PNFAPM, México

- Ursini, S., F. Escareño, D. Montes y M. Trigueros. (2005) *Enseñanza del Álgebra Elemental. Una propuesta alternativa.* México. Trillas.

- Ursini, S. y M. Trigueros (2006). *¿Mejora la comprensión del concepto de variable cuando los estudiantes cursan matemáticas avanzadas?*.(pp 5-38). *Educación Matemática*, 18 (3)

- Vergnaud, G. (1988). *Long terme et court terme dans l’apprentissage de l’algebre*. En C. Laborde (Ed.), Actes du premier colloque franco-allemand de didactique des mathematiques et de l’informatique (pp. 189-199). Paris: La Pensée Sauvage.

- Villella J. (2007). *Matemática escolar y libros de texto: Un estudio desde la Didáctica de la Matemática*.(pp .166-172).Miño y Ávila Editores. Buenos Aires. 2007

- Wagner, S. (1981). *An Analytical Framework for Mathematical Variables* (pp 165-170), en Proceedings of the V PME International Conference. Grenoble, France.

- Wagner, S. (1983). ¿*What are These Things Called Variables?*(pp 474-479). Mathematics Teacher, 76

- Wagner, S. y Kieran, C. (Eds) (1989). *Research issues in the Learning and Teaching of Algebra*. Volume 4. N.C.T.M. Lawrence Erlbaum Associates. Reston. Virginia. Hillsdale N.J

8. BIBLIOGRAFÍA

- Agrasar,M;Chemello,G;Chevallard,Y;Crippa,A;Diaz,A;Novembre,A.;Wosniak,F. (2011). *Enseñar Matemáticas en la escuela media*. 1ª Ed. Editorial Biblos. Buenos Aires.

- Altman S.;Arnejo,M;Comparatore,C;Kurzrok,L. (2013). *Números y Operaciones 2: secuencias de actividades*. Cap. 2. Tinta fresca. Buenos Aires.

- Andrés M. (2011). *Matemática 1*. 1ª Ed. Cap.7. Editorial Santillana. Buenos Aires.

- Barallobres, G. (2000). *Algunos elementos de la didáctica del Álgebra* en Chemello, G. y otros. Estrategias para la enseñanza de la Matemática, Buenos Aires, Universidad Virtual de Quilmes.

- Barallobres G. y Díaz A. (2010). *Matemática 7: ciencia en foco.* 1ª Ed. Aique. Buenos Aires

- Barrio L. y Petich A. (2010). *Entre Aritmética y Álgebra: un camino que atraviesa los niveles primario y secundario. Investigaciones y aportes*. 1ª Ed. Novedades Educativas. Buenos aires.

- Berio A. (2011). *Matemática 2*. Cap. 3. Puerto de Palos. San Isidro, Buenos Aires.

-Bressan,A;Díaz,A;Gysin,L;Hanfling,M;Panizza,M.;Parra,C.;Savon,S;Esperanza,G.; Gotbeter,G.;Laies,G. (2002). *Los CBC y la enseñanza de la Matemática*.3ª Ed. AZ Editora. Buenos Aires.

- Botta M. Warley J. (2007).*Tesis, tesinas, monografías e informes: Nuevas normas y técnicas de Investigación y redacción.* 2da Ed. Editorial Biblos: Metodologías. Buenos Aires.

- Ceretto J. y Giacobbe M. (2009).*Nuevos Desafíos en Investigación: Teorías, métodos, técnicas e instrumentos.* Ediciones Homosapiens. 1a Ed. Buenos Aires.

- Fioriti, G., Almirón, A., Villella, J.,Ammann,S., Lupinacci,L. (2014). *Matemática 1 y 2: proyecto nodos*. 1ª Ed. SM Ediciones. Buenos Aires.

- Gysin, L. y Fernández G. (1999). *Matemática: una mirada funcional: Álgebra y geometría*. AZ Editora. Buenos Aires.

- Itzcovich, H. y Novembre, A. (2007). Diferentes Aspectos del Trabajo Algebraico. Material teórico del curso “Diferentes Aspectos del Trabajo Algebraico.” de CePA a Distancia. Buenos Aires.

- Novembre A. (2005).*Las letras, las funciones y las ecuaciones: reflexiones sobre su enseñanza y análisis del trabajo de los estudiantes en las evaluaciones nacionales.* Dirección

Nacional de Información y evaluación de la calidad educativa.(En Línea). Disponible en Internet:
http://portales.educacion.gov.ar/diniece/wp-content/blogs.dir/37/files/2015/11/Las-letras-las-ecuaciones-y-las-funciones.pdf

- Panizza, M., Sadovsky P. y Sessa, C. (1996). *Los primeros aprendizajes algebraicos. El fracaso del éxito.* Comunicación presentada a la Reunión Anual de la Unión Matemática Argentina, Salta.
http://www.fcen.uba.ar/carreras/cefiec/cefiec.htm (recuperado en julio de 2008)

- Segal S. y Giuliani D. (2008). *Modelización matemática en el aula: Posibilidades y desafíos*. 1ª Ed. Libros Del Zorzal. Buenos Aires.

Anexos

INTRODUCCIÓN AL ÁLGEBRA EN LA ESCUELA SECUNDARIA

Cuestionario Semiestructurado a docentes – Prof. Liliana Mercado

Nombre y Apellido: …...

Escuelas secundarias donde trabaja:…..

…...

Estimado Profesor:

Como parte de una investigación en donde estudiamos las formas de introducción del Álgebra que utilizan los profesores en la escuela secundaria, le proponemos este cuestionario en el que presentamos una serie de consignas que pueden proponerse al estudiante para iniciar el estudio del Álgebra. Dichas actividades se han tomado de diversas fuentes (Diseños Curriculares, manuales escolares y publicaciones referentes a la enseñanza del Álgebra).

Le pedimos que lea atentamente los enunciados de cada una de ellas y responda las preguntas que se proponen luego.

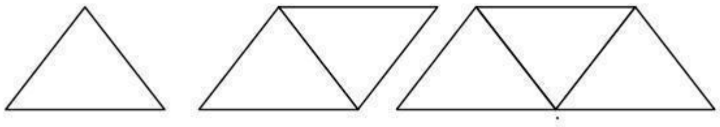
Su respuesta será de suma importancia en nuestro trabajo.

Muchas gracias por su tiempo.

Parte 1

CONSIGNAS

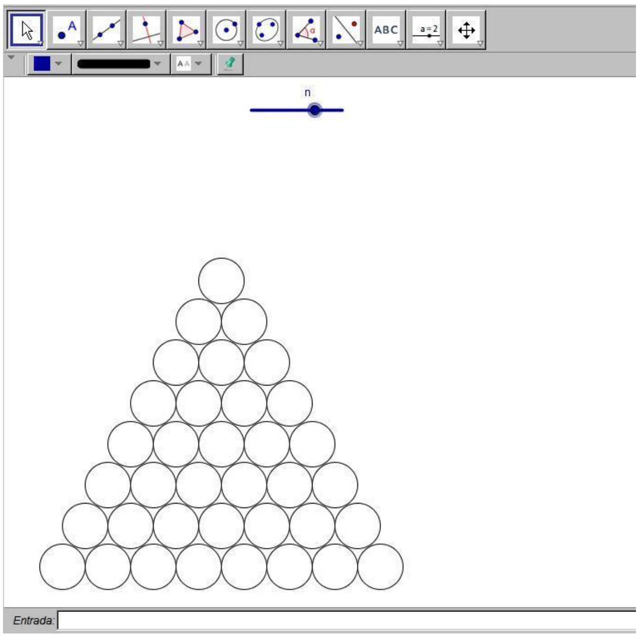
1) A partir de la siguiente sucesión de figuras construidas con fósforos:



a) ¿Cuántos fósforos habrá en el sexto lugar?

b) ¿Cuántos fósforos son necesarios para construir la figura correspondiente al lugar 1784 de la secuencia?

2) En el siguiente archivo de Geogebra, se puede observar que al manipular el deslizador, la cantidad de círculos cambia



(Ver enlace en http://ggbtu.be/m1434973)

a) ¿Cuántos círculos hay en el paso n = 32?

c) ¿Existe algún paso n para el que haya 1452 círculos? Justificar

3) Un ingeniero automotriz toma los registros de un automóvil que se mueve a velocidad constante en una pista que tiene 10 km la vuelta, y los vuelca en la siguiente tabla.

Tiempo (en minutos)	5	10	12		85
Distancia recorrida (en kilómetros)	10	20		35	

¿Cómo puede completar el ingeniero la tabla?

4) Un mago le dice a su público: “Piensen un número, agréguenle 8, multipliquen por 6, resten dos veces 4 y dividan por 3 y luego 2” El mago espera unos instantes y les dice “¡A todos les dio el número que pensaron!” ¿Es verdad lo que dice el mago? ¿Por qué?

5) Para preparar comida para los animales de la granja, Mario necesita semanalmente 3 bolsas de maíz cada 2 gallinas, para ello arma la siguiente tabla en la computadora:

Cantidad de gallinas	2	6	9	25	75
Bolsas que necesito semanalmente					

Completar la tabla de Mario.

6) Una empresa de telefonía celular cobra a sus clientes una suma fija más lo que hablan por minuto. Para calcular cuánto debe abonar un cliente, usa la siguiente fórmula: $p = 20 + 0{,}50.m$, siendo p el precio a pagar y m la cantidad de minutos hablados.

¿Cuánto debe pagar un cliente que habló 33 minutos? ¿Si debe pagar $ 53,45, ¿cuántos minutos habló?

7) "Gustavo tiene 10 monedas más que Romina. Entre los dos tienen 30 monedas"

¿Cuál de las expresiones describe la situación anterior, considerando que llamamos c a las monedas que tiene Gustavo?

a) $c+(c+10) = 30$ b) $c+ (c-10) = 30$ c) $c+30 = c+10$

8) En un calendario se pueden agrupar algunos números en cuadrados con lados de diferentes medidas. Por ejemplo, el siguiente corresponde al mes de febrero de un cierto año:

D	**L**	**M**	**M**	**J**	**V**	**S**
						1
2	3	4	5	6	7	8
9	10	11	12	13	14	15
16	17	18	19	20	21	22
23	24	25	26	27	28	

Seleccionando un cuadrado del calendario por ejemplo:

4	**5**
11	12

Se pide:

Dibujar sobre el calendario otros cuadrados de 2x2. Para cada uno de ellos, calcular la diferencia entre los productos de los números situados en los extremos de las diagonales.

¿Qué relación hay entre los resultados que se obtienen?

Una vez que haya leído las consignas le pedimos que indique en el cuadro que sigue si la llevaría a su clase para incluirla en una secuencia de introducción al trabajo con el Álgebra y que precise el motivo de su elección.

Consigna	**Sí / No**	**Porque…**
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		

Parte 2

¿Qué tipo de consignas elige en sus clases para introducir el Álgebra ? Márquelo con una cruz en el siguiente cuadro

Situaciones en donde se pueden plantear ecuaciones con una incógnita y se usen operaciones sencillas, incluyendo el lenguaje coloquial y simbólico.	
Ejercicios descontextualizados de ecuaciones con una incógnita para hallar su valor y aprender el proceso de despeje.	
Situaciones de conteo que involucran generalizaciones utilizando sucesiones.	

Situaciones en las que hay que asignar valores numéricos en una fórmula o similar	
Situaciones en donde el estudiante pueda relacionar dos variables	
Situaciones en donde se pueda estudiar relaciones de proporcionalidad directa	
Situaciones en donde se pueden modelizar situaciones mediante el Álgebra destacando el estudio de las relaciones equivalentes de sus expresiones	
Otras distintas a las propuestas (describirla)	