



TE_15_ALM_SFE	
Área:	Tecnología Educativa y Enseñanza de la Ingeniería
Categoría:	Alumno
Regional:	Santa Fe

## Aplicación para el aprendizaje de Sistemas de Ecuaciones Diferenciales

---

**Valeria BERTOSI, Esteban LAZZARONI**

*Departamento Materias Básicas, Facultad Regional Santa Fe, UTN*

*E-mail de contacto: [valeriabertossi@live.com.ar](mailto:valeriabertossi@live.com.ar), [esteban.lazzaroni@gmail.com](mailto:esteban.lazzaroni@gmail.com)*

*Este trabajo ha sido realizado bajo la dirección de la Mg Sonia Pastorelli, en el marco del proyecto "El Uso de Sistemas Algebraicos de Cómputos, Análisis de su Incidencia en la Comprensión de Matemática en Carreras de Ingeniería de la FRSF".*

### Resumen

---

En el afán de que los estudiantes comprendan contenidos medulares, desde hace algunos años, las asignaturas del área matemática incorporan el uso de softwares para colaborar en dicho proceso. Encuestas de opinión realizadas a los estudiantes que participaron en experiencias durante el año 2013 muestran su conformidad con el uso de TIC. Destacan la influencia de las visualizaciones en la comprensión de temas concretos y rescatan la posibilidad de trabajar con una amplia gama de ejemplos en el período de tiempo destinado al tratamiento de los contenidos. En este trabajo se presenta el prototipo de una aplicación informática cuya finalidad es mejorar la comprensión de Sistemas Dinámicos. La misma está siendo desarrollada por becarios del proyecto, estudiantes de Ingeniería en Sistemas de Información.

**Palabras Claves:** Sistemas Dinámicos; Matemática; Software didáctico

---

## 1. Introducción y Objetivos

### 1.1. Consideraciones Generales

La realización del presente trabajo forma parte del proyecto de investigación y desarrollo "El Uso de Sistemas Algebraicos de Cómputos (SAC), Análisis de su Incidencia en la Comprensión de Matemática en Carreras de Ingeniería de la FRSF". Éste se basa en el marco teórico "Enseñanza para la Comprensión (EpC)" desarrollado por Gardner, Perkins, Perrone y colaboradores, integrantes de la Escuela de Graduados en Educación de Harvard.

Según Stone Wiske (2006) [1] y Blythe (1999) [2] la EpC asume que comprender es poder llevar a cabo una diversidad de acciones (desempeños) que demuestren que uno entiende el tópico a la vez que amplía su conocimiento del mismo y lo utiliza de una forma innovadora. Este marco reconoce que las tecnologías de la información y la comunicación se instalan como herramientas activas y promotoras de la participación, colaboración y creatividad.

## 1.2. Objetivo

El proyecto en el que se enmarca este trabajo tiene por objetivo:

- Diseñar secuencias didácticas usando TIC en el área de matemática.
- Explorar y comparar la comprensión de los alumnos cuando se utilizan materiales didácticos tradicionales y cuando se incorpora el empleo de recursos informáticos.

El objetivo particular que se aborda en esta comunicación es socializar el prototipo de un software educativo que está siendo desarrollado en una plataforma de licencia libre y gratuita. El mismo será utilizado como instrumento didáctico en las secuencias de enseñanza llevadas a cabo por la cátedra Análisis Matemático II (AM II) de la UTN-FRSF en la unidad “Ecuaciones diferenciales”.

## 1.3. Antecedentes

El diseño curricular en la UTN parte de la premisa que la enseñanza de la matemática debe ser “motivada y no axiomática” y que “los trabajos prácticos de todas las materias del área matemática serán realizados en computadora, utilizando el mencionado software especializado que permite el manejo numérico, simbólico, gráfico y de simulación” (Resolución 64/94 del Consejo Superior de la UTN).

Los docentes y becarios participantes del proyecto se preguntan: ¿Cómo ayudar a mejorar la comprensión de tópicos importantes de matemática? ¿Pueden las nuevas tecnologías propender didácticamente a la comprensión de conceptos matemáticos?

La EpC aborda cuatro preguntas claves: ¿qué tópicos se deben comprender?, ¿qué aspectos de esos tópicos deben ser comprendidos?, ¿cómo promover la comprensión?, ¿cómo averiguar lo que comprenden los alumnos? Las respuestas a cada una son los pilares de la EpC: *Tópicos Generativos*, *Metas de Comprensión*, *Desempeños de Comprensión* y *Valoración Diagnóstica Continua*.

En cuanto a los tópicos generativos, el marco aconseja centrarse en unos pocos. Explicita que un tópico (no necesariamente contenido explícito) será generativo si es central para un dominio o disciplina, es accesible e interesante para los alumnos, es relevante para el docente, es rico en conexiones con otros conceptos. El tópico elegido en esta experiencia es el “trazado de líneas de flujo de un campo vectorial”, que, además de contar con las características descritas por el marco, tiene también la potencialidad de atravesar la mayoría de los contenidos de la asignatura AM II. El contenido involucrado, sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias, es nodal en ingeniería. Éstas habitualmente aparecen en problemas que involucran determinar más de una función de la misma variable independiente, la que normalmente suele ser el tiempo. Por otro lado, a pesar de ser un tema cardinal en la formación del ingeniero, los alumnos suelen exhibir conocimientos inertes y/o mecanizados. Sobrados son los ejemplos que exhiben los exámenes, en los que hacen prevalecer tediosos métodos analíticos, habilidades de rutina aplicadas mecánicamente, que conducen incluso a resultados visiblemente incorrectos, sin detectar siquiera que su respuesta es imposible, producto de un error algebraico menor, un signo, un error en una suma o una distracción a la hora de hacer las cuentas. Dichas evaluaciones ponen de manifiesto desempeños que están basados en conocimientos y modos de pensar no disciplinarios, que en algunos casos llegan al extremo de ser intuitivos, poco reflexivos y no estructurados. No son integradores ni críticos, revelan que la validación del trabajo

propio no es autorregulada, sino que depende de autoridad externa y demuestran un uso poco flexible de conceptos a los que les cuesta transferir a otros contextos. Seguramente esta forma de proceder replica y se deriva del tratamiento cuantitativo que hacen los libros de texto y pone de manifiesto un conocimiento ingenuo, ritual e inerte, que caracteriza a la categoría más baja de la comprensión.

Como Meta de Comprensión los investigadores del proyecto y docentes de AM II planearon que los alumnos, experimentando con las nuevas tecnologías, puedan caracterizar el equilibrio de un sistema dinámico lineal relacionándolo con los autovalores del sistema.

Los Desempeños de Comprensión son los elementos más importantes del marco conceptual de la EpC; se insiste en que la comprensión se desarrolla y se demuestra poniendo en práctica la propia comprensión. Es común observar una progresión común de tres categorías de desempeños diseñadas para fomentar la comprensión: etapa de exploración, investigación guiada y proyecto o trabajo final de síntesis. En la etapa de exploración, los desempeños consistentes en “explorar los elementos” reconocen su respeto por la investigación inicial, todavía no estructurada por métodos y conceptos disciplinares. Aparecen comúnmente al inicio de una unidad y sirven para atraer a los alumnos hacia un tópico generativo. Son comúnmente de final abierto y ayudan a que los alumnos vean conexiones entre el tópico generativo y sus propios intereses y experiencias previas. En la experiencia inicial, desarrollada durante el año 2013, la exploración comenzó a inicios de la cursada planteando problemas donde se deseaba encontrar trayectorias conociendo la función vectorial velocidad. El tema se planteó intuitivamente usando la expresión (1) que determina la trayectoria, para luego usar la ecuación (2), que pudiera reducirse a una EDO de variables separables, normalmente no lineal.

$$\vec{v}(t) = f(x)\vec{i} + g(y)\vec{j} \quad (1)$$

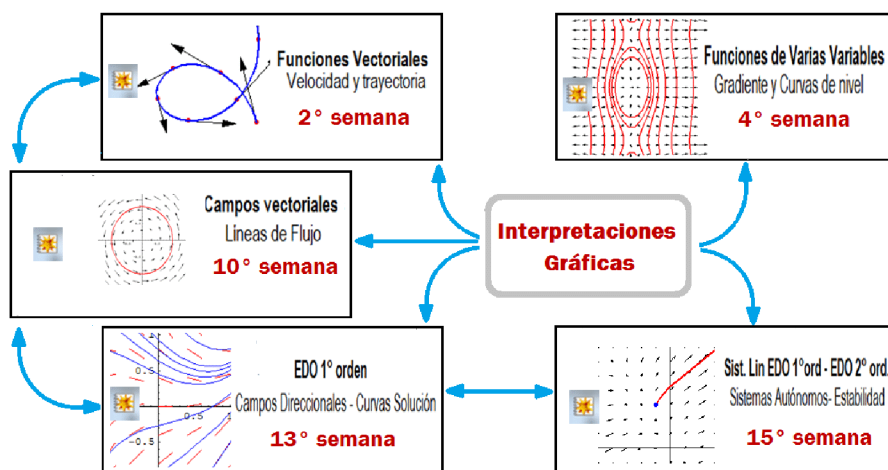
$$\vec{v}(x, y) = f(x, y)\vec{i} + g(x, y)\vec{j} \quad (2)$$

Las visualizaciones de la solución particular son un pilar fundamental en la etapa de exploración. En la fase de la investigación guiada, los desempeños involucran a los alumnos en la utilización de ideas o modalidades de investigación que el pedagogo considera centrales para la comprensión de metas identificadas. La guía que los docentes ofrecen en fases más avanzadas del desarrollo de un tema ayuda a los alumnos a aprender cómo aplicar métodos y conceptos disciplinares, a integrarlos y a poner en práctica una comprensión cada vez más amplia y compleja. En esta etapa se plantearon y resolvieron sistemas dinámicos lineales autónomos y no autónomos bidimensionales. Se utilizó el SAC Mathematica como soporte tecnológico para visualizar resultados. En el proyecto final de síntesis, rasgo distintivo en el marco conceptual de la EpC, se demuestra con claridad el dominio que tienen los alumnos de las metas de comprensión establecidas. Estos desempeños invitan a los alumnos a trabajar de manera más independiente que como lo hicieron en sus desempeños preliminares y a sintetizar las comprensiones que han desarrollado a lo largo de una unidad curricular o una serie de unidades. En este estudio, el desempeño final de síntesis fue “generar una tabla que relacione los autovalores de la matriz del sistema con el tipo de ecuación de la solución, el comportamiento de ésta cuando la variable independiente aumenta y las características gráficas de la trayectoria solución del sistema y de las curvas representativas de las funciones solución”. Para confeccionarla los estudiantes trabajaron en grupos.

La Evaluación Diagnóstica Continua valora los desempeños en relación con las metas de comprensión. En estos contextos, los estudiantes son testigos de desempeños modelo tanto por parte de expertos como de otros estudiantes. Pueden analizar y criticar estos desempeños ejemplares según criterios tendientes a comprender qué entraña un desempeño bien hecho. Los estudiantes emulan estos modelos y el aprendizaje avanza por medio de la valoración del desempeño propio y ajeno en relación con criterios claros. De esta manera, la evaluación diagnóstica refuerza a la vez que evalúa el aprendizaje. En la experiencia, la valoración diagnóstica continua tuvo su eje en la tutoría para el desarrollo de la tabla solicitada.

El uso del SAC mencionado anteriormente se resume en la figura 1.

El análisis de dicha experiencia fue un estudio de carácter cualitativo debido a que se deseó explicar un proceso: la construcción de significado usando TIC, enfoque metodológico que se basa en un esquema experimental sobre la concepción, realización, observación y análisis de secuencias de enseñanza. Dado que la experiencia se inscribe dentro de la ingeniería didáctica, su validación es en esencia interna, basada en la confrontación entre el análisis a priori y a posteriori. La misma abarcó la población constituida por los alumnos de la carrera Ingeniería Eléctrica de la Facultad Regional Santa Fe de la Universidad Tecnológica Nacional.



**Figura 1.** Uso del SAC Mathematica en el aula.

Los resultados obtenidos fueron muy alentadores. Por un lado, los alumnos desplegaron altos niveles de comprensión en el desempeño final de síntesis planificado: de los 10 grupos de trabajo, 9 entregaron en tiempo y forma la tabla solicitada. De las 9 tablas, 7 fueron correctas (o con errores menores u omisiones no significativas); 1 contenía gráficas incompletas (no utilizaban el rango  $[0, \infty)$  propuesto, sino los visualizados a través del software utilitario); mientras que la novena no incluía la ecuación genérica para las soluciones buscadas.

También fueron positivos los resultados en el parcial que involucró dichos conceptos. En él se pedía analizar la viabilidad de una solución de un sistema diferencial lineal de tres variables independientes. De los 29 alumnos, 19 relacionaron la solución buscada con los valores propios del sistema, 4 resolvieron o intentaron resolver analíticamente el problema,

mientas que 6 no lo resolvieron. Esto muestra que el 65,5% desplegó verdaderos desempeños de comprensión, superando los aprendizajes mecanizados.

Encuestas de opinión realizadas a los estudiantes que participaron en esta experiencia, reflejaron su conformidad con el uso de la tecnología, aunque también evidenciaron que el SAC Mathematica resultó ser varias veces un obstáculo: un mínimo error en la sintaxis lentificaba la tarea. Los alumnos valoraron positivamente la influencia de las visualizaciones en la comprensión de temas concretos (fundamentalmente destacaron la posibilidad de trabajar con una amplia gama de ejemplos en el período de tiempo destinado al tratamiento de los contenidos). Dejaron sentado, además, el deseo de contar con una herramienta que satisfaga ciertos requisitos de usabilidad, de modo tal que el centro esté en lo conceptual y no en la sintaxis necesaria para manipularla.

Es así que el grupo de investigación, docentes y becarios del proyecto El Uso de Sistemas Algebraicos de Cómputos, Análisis de su Incidencia en la Comprensión de Matemática en Carreras de Ingeniería de la FRSF, se encuentran actualmente abocados a desarrollar una aplicación informática para salvar dichas dificultades. Como se mencionara en el ítem “objetivo”, en esta comunicación se socializa un prototipo de tal aplicación, la cual será utilizada como instrumento didáctico en las secuencias de enseñanza llevadas a cabo por la cátedra AM II de la UTN-FRSF en la unidad “Ecuaciones Diferenciales”.

## 2. Metodología

### 2.1. Actividades necesarias

- Estudio de la metodología de enseñanza del tema “Ecuaciones diferenciales” aplicada por la cátedra AM II en las carreras de Ingeniería de la UTN-FRSF a los efectos de conocer el estado del arte, poniendo especial énfasis en el uso que se hace de las TIC durante el desarrollo de esta unidad de la asignatura.
- Análisis de plataformas de software, en particular las de licencia libre como JavaView, Octave, Scilab, Descartes, GeoGebra y Freemath, factibles para producir una aplicación matemática a utilizar en el proceso de enseñanza/aprendizaje de sistemas lineales de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden.
- Desarrollo, en una plataforma de software libre, de una aplicación informática que sirva como instrumento didáctico en las secuencias de enseñanza llevadas a cabo por la cátedra AM II de la UTN-FRSF en la unidad “Ecuaciones diferenciales”.

### 2.2. Conocimientos integrados

Para el desarrollo de la aplicación se integran distintas áreas de la formación del ingeniero en sistemas:

- Área Formación Básica Homogénea (contenidos matemáticos y físicos involucrados: Análisis Matemático I y II, Álgebra y Geometría Analítica, Física I y II);
- Área Modelos: Matemática Superior, Simulación, Teoría de Control.
- Área Programación: Algoritmos y Estructuras de Datos, Sintaxis y Semántica de los Lenguajes, Paradigmas de Programación.

- Área Sistemas de Información: Análisis de Sistemas, Diseño de Sistemas, Administración de Recursos, Ingeniería de Software, Proceso de Desarrollo de Software, Diseño de Software Basado en Arquitecturas.  
Área Gestión Ingenieril: Administración Gerencial

### 2.3. Descripción del prototipo:

Se ha optado por desarrollar la herramienta educativa en una plataforma de licencia libre en conformidad con un principio ético elemental: una universidad pública y gratuita no debiera exigirle a sus alumnos nada que ella misma no pueda proveer; y está claro que los presupuestos con los que cuenta la FRSF restringen y, en algunos casos, impiden la adquisición de licencias de software privativo. Si bien JavaView, Octave, Scilab, GeoGebra y Freemath siguen aún siendo evaluadas como plataformas de licencia libre factibles, el prototipo que se socializa en esta comunicación fue desarrollado en Descartes [3].

Técnicamente, Descartes es un applet de Java desarrollado en forma conjunta por el Instituto de Matemáticas de la Universidad Nacional Autónoma de México y el Ministerio de Educación, Cultura y Deporte de España. Esta plataforma provee una interfaz gráfica de programación y librerías. Entre éstas, existen dos: “CampVect” y “RungeKutta”, que luego de ser analizadas, pudieron utilizarse para resolver y graficar sistemas homogéneos de dos ecuaciones diferenciales lineales ordinarias de primer orden.

El prototipo permite visualizar dos escenas. Una, denominada “Plano de Fase”, muestra la curva plana representativa de la solución de un sistema autónomo a partir de las condiciones iniciales dadas, cuya expresión genérica se describe en (3), y su campo vectorial/direccional asociado. En la otra, denominada “Series de Tiempo”, se grafican las curvas representativas de las funciones solución  $x(t)$  e  $y(t)$ .

$$\begin{cases} x'(t) = f(x, y) \\ y'(t) = g(x, y) \\ x(t_0) = x_0 \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \quad (3)$$

La herramienta cuenta con dos modos de interacción posibles:

Modo “Ejemplo”: ofrece una galería de ejemplos de sistemas autónomos cuyas matrices difieren en que sus autovalores, los que pertenecen a conjuntos numéricos distintos. En la figura 2 se aprecian las opciones ofrecidas en el menú desplegable y la salida gráfica correspondiente a un sistema con autovalores complejos de parte real negativa.

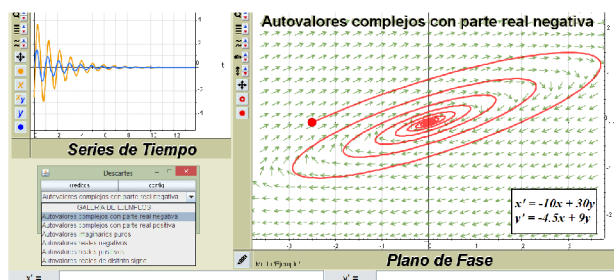


Figura 2. Operación del prototipo en Modo “Ejemplo”

Modo “Edición”: sólo en este modo de interacción están activos los campos  $x'$  e  $y'$ . En ellos, el usuario debe ingresar las ecuaciones diferenciales del sistema que desee analizar. En la figura 3 se aprecian las visualizaciones obtenidas para el sistema autónomo:  $x' = -2x + y$ ;  $y' = -x$ ;  $x_0 = 4$ ;  $y_0 = -2$ .

A continuación se detallan las distintos objetos interactivos que forman parte de la interfaz, activos en ambos modos de trabajo y que en la figura 4 se han referenciado con letras mayúsculas: (A) elegir el período de tiempo durante el que se observará el comportamiento del sistema dinámico, (B) establecer las condiciones iniciales, (C) elegir el tipo de campo (vectorial, direccional o ninguno) a visualizar en el Plano de Fase, (D) decidir si los vectores del campo vectorial se graficarán normalizados o no, (E) escalar los vectores, (F) establecer la separación entre los vectores que se graficarán en el Plano de Fase, (G) manipular de manera interactiva el punto inicial de la trayectoria para analizar las variaciones en el comportamiento de la trayectoria solución, (H) manipular controles gráficos de la escena de Series de Tiempo, (I) manipular controles gráficos de la escena del Plano de Fase, (J) activar el Modo “Edición”, (K) editar las ecuaciones diferenciales si el Modo “Edición” está activo.

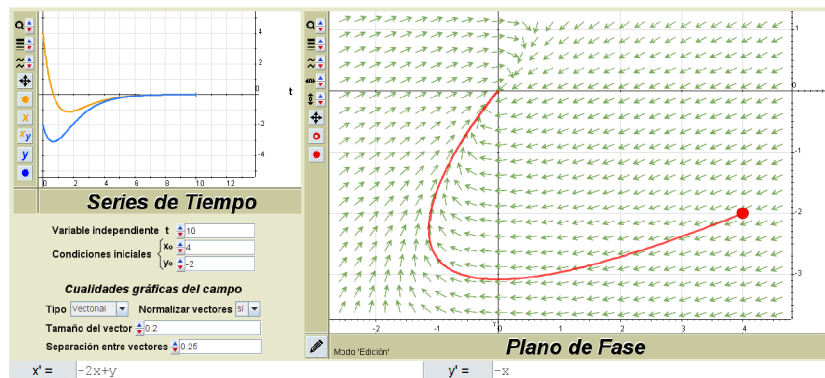


Figura 3. Operación del prototipo en Modo “Edición”

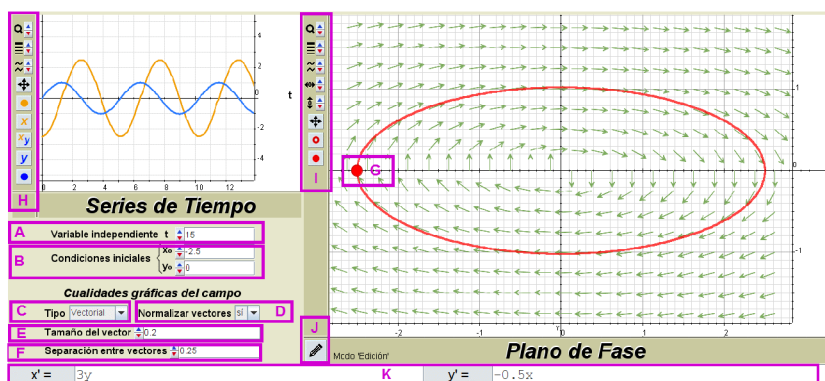


Figura 4. Objetos interactivos que forman parte de la interfaz

#### 2.4. Tareas asignadas

Las actividades propias de las primeras etapas del proceso de desarrollo de software (análisis, desarrollo del prototipo, diseño y codificación de la aplicación) están a cargo de la becaria Valeria Bertossi. Los docentes, auxiliares y demás becarios de la cátedra son los

encargados de evaluar el prototipo generado a los efectos de que la becaria desarrolladora ajuste la aplicación a las necesidades que deben ser satisfechas. La intervención del becario Esteban Lazzaroni tiene lugar en la etapa de validación y verificación. Bajo su responsabilidad está el diseño, documentación y ejecución de los casos de prueba de unidad e integración. En la fase de implantación, a cargo también de Valeria Bertossi, además del despliegue de la aplicación en las notebooks de la cátedra, se prevé dejar disponible la misma en el Campus de la UTN-FRSF para su utilización por parte de los alumnos. Los demás becarios de la cátedra tienen asignada la tarea de relevar la opinión de los alumnos usuarios con el propósito de evaluar la usabilidad del software desarrollado, esto es, su capacidad intrínseca de ser comprendido, aprendido y usado con facilidad.

### **3. Resultados y Discusión**

Si bien la aplicación informática se encuentra aún en fase de desarrollo, el prototipo está siendo evaluado por alumnos becarios y auxiliares de la cátedra. Incluso los docentes lo están utilizando en las clases de consultas, y todos coinciden en destacar tanto la facilidad de uso como las bondades de las interpretaciones gráficas que provee.

El diseño curricular de la UTN explicita: “Se usarán en las prácticas paquetes de computación que permitan cálculos numéricos y simbólicos con capacidad gráfica. En el caso de ecuaciones diferenciales se instruirá al alumno en el uso de un paquete interactivo que permita la simulación y el análisis de los resultados”. Este software educativo es un aporte a dicha premisa.

### **4. Conclusiones y tareas futuras.**

Es sabido que la esencia del software libre es el respeto por la libertad del usuario: de ejecutar el programa como lo desee, de estudiar su código fuente y adaptarlo a sus necesidades, de distribuir libremente copias exactas del programa y de contribuir a la comunidad poniendo a su disposición las propias versiones actualizadas cuando lo desee. Se pretende que este software educativo sea una contribución para el desarrollo de la comprensión. Y que una vez liberado, sirva de inspiración para que otros estudiantes de la regional extiendan su funcionalidad según futuras necesidades de la cátedra, o bien, desarrollen otras aplicaciones que aborden temáticas similares.

### **Bibliografía.**

- Stone Wiske, M. (2006). Enseñar para la comprensión con Nuevas Tecnologías. Buenos Aires: Paidós.
- Blythe T. (1999). La enseñanza para la comprensión. Guía para el docente. Paidós: Buenos Aires
- Descartes. (1998). Matemáticas interactivas para la enseñanza y el aprendizaje. Recuperado el 15 de junio de 2014. Web <http://recursostic.educacion.es/descartes/web/source/>