Modelo de optimización posibilística para determinar el costo intrínseco de la calidad eléctrica/ambiental. Parte I: Desarrollo teórico

Possibilistic Optimization Model to Determine the Intrinsec Cost of Environmental/Electricity Service Quality. Part I: Theoretical Development

Gustavo Schweickardt[a*]

Recibido: Marzo 11 de 2015
Recibido con revisión: Agosto 28 de 2015
Aceptado: Diciembre 01 de 2015

[a*]Universidad Tecnológica Nacional, Facultad Regional Concepción del Uruguay, Ing. Pereira 676 - 3260, Concepción del Uruguay, Argentina
Tel.: +(54) 3442 423898
gustavoschweickardt@conicet.gov.ar

Energética 46, diciembre(2015), pp. 37-49

ISSN 0120-9833 (impreso)
ISSN 2357 - 612X (en línea)
www.revistas.unal.edu.co/energetica

RESUMEN

Uno de los problemas que se observa en los Sistemas de Abastecimiento Energético, estriba en la valoración económica de variables que, por sus características subjetivas, incertidumbres de valor inherentes, y ausencia de un mercado que defina precios unitarios de equilibrio, no pueden ser monetizadas para, por ejemplo, definir sus costos. Este es el caso de una variable ambiental, asociada a cierto aspecto que represente un impacto sobre el medioambiente. El presente trabajo propone un Modelo de Optimización Posibilística aplicado a la determinación dinámica del Costo de la Calidad Eléctrica (Servicio Eléctrico) y/o Ambiental o Calidad EA, de un Sistema de Redes en Distribución Eléctrica, ponderado a través de una variable genérica. Se considera la Planificación de Mediano/Corto Plazo del sistema, conforme el Período de Control Regulatorio, bajo criterios a cuyas variables se le reconocen incertidumbres de valor y, por tanto, resultan no estocásticas. El cálculo del Costo de Calidad EA, se sustenta en relacionar, para cualquier estado de la Trayectoria Más Satisfactoria de Evolución del Sistema de Redes en Distribución Eléctrica obtenida, el Costo Anual de Inversión con un Índice de Impacto en la Calidad EA. Este costo es denominado, por tal razón, Costo Intrínseco, puesto que no es fijado externamente, sino resultado de los elementos que integra el sistema, y de su dinámica. Se presentan, en esta primer parte, los desarrollos teóricos del Modelo.

PALABRAS CLAVE

Optimización; Dinámica Posibilística; Calidad Ambiental Calidad del Servicio Eléctrico; Costo Intrínseco; Distribución Eléctrica.

ABSTRACT

One of the major problems of Energy Supply Systems, is the economic assets of variables that, because subjectivity characteristics, inherent uncertainties in its values, and inexistence of a market in order to determine equilibrium prices per unit, can't have a monetary value that allow, for example, to define its costs. This is the case of environmental variable, associated with some aspect that represents an impact on the environment. In this work, a Possibilistic Optimization Model, applied to dynamic determination of Environmental/Electricity Service Quality Cost or Environmental/ Electricity Service Quality of a Network Electric Distribution System, adopting a generic variable, is presented. The Mid/Short Term System's Planning, coincident with Regulatory Control Period, under criterias which associated variables exhibits uncertainties of value and, so, have not stochastic nature, is considered. The Environmental/Electricity Service Quality Cost determination, is based in the relationship, for any state of Most Satisfactory Trajectory of Network Electric Distribution System evolution, between the Annual Investment Cost and an Impact Index of Networks System Environmental/Electricity Service Quality. This cost, is introduced as Intrinsic Cost, because it's not defined externally, but depends of system's elements and its dynamics. In the first part of this works, the theoretical developments of the Model, are presented.

KEYWORDS

Optimization; Possibilistic Dynamics; Environmental Quality; Electricity Service Quality; Electric Distribution; Intrinsic Cost.

Energética 46 diciembre (2015), pp. 37 - 49

1. INTRODUCCIÓN

La Planificación Óptima de un Sistema de Abastecimiento de Energía Eléctrica, tradicionalmente ha procurado la minimización de sus costos de inversión y de operación/mantenimiento, fijando, arbitrariamente, ciertos niveles de calidad de servicio, consecuencia de la satisfacción de estándares tecnológicos. Desde hace más de dos décadas, la desregulación del servicio de abastecimiento eléctrico, dió lugar a una segmentación de la cadena productiva de la electricidad [Schweickardt & Pistonesi, 2007]. En cada segmento, denominados: Generación, Transmisión, Distribución y, en algunos países, Comercialización, se intenta introducir algún grado de competencia. En aquellos, como la Generación y Comercialización, en los que tal competencia es posible, se habla de *mercados disputables* o cuasi-competitivos. En los otros, Transmisión y Distribución, que constituyen un servicio de redes, se tiene un *monopolio natural no disputable*, y, por tanto, sus mercados requieren de regulación. En particular, sobre el segmento de Distribución, se plantea el problema de definir un Sistema de Distribución de Energía Eléctrica (SDEE) Económicamente Adaptado. Se trata de un concepto que la Autoridad Regulatoria Eléctrica, ha acuñado e introducido en las normativas de diferentes países. Entre ellos, Chile, Argentina, Colombia y Perú, en Latinoamérica, y España y Portugal, en Europa [Schweickardt & Miranda, 2007; Schweickardt & Miranda, 2009].

Siguiendo el nuevo enfoque de la Teoría Económica de Regulación, sustentada en los aportes del paradigma Neo-Clásico, tal concepto sólo destaca la *eficiencia productiva* del sistema (expansión y operación a mínimo costo). Cualquier apartamiento de esa condición, es juzgado como una desadaptación del sistema y, por tanto, penalizada. La *eficiencia asignativa*, requerimiento sustancial para conferirle a los costos identificados un carácter económico, se introduce como hipótesis o condición dada, y los diferentes productos que deben ser ofertados en la prestación del servicio, como la Calidad Ambiental, Calidad de Servicio Eléctrico, entre otros, se suponen, de tal modo, valorizados a su *costo social de oportunidad*, establecido *externa* y *arbitrariamente*. La No-Calidad, Ambiental, por caso, resulta, entonces, penalizada con un valor monetario deveniente de aquella hipótesis, y, por tanto, resulta de dudosa concepción. Desde tal enfoque, *toda desadaptación posible será estática*, ignorando *la naturaleza histórico-evolutiva del sistema* [Schweickardt & Pistonesi, 2007].

Considerando esta última característica como la limitación principal en el concepto, el mismo debe abordarse en un marco metodológico más amplio. En efecto, la sola planificación, sustentada en métodos de optimización clásicos (afines con el paradigma económico referido) *no es suficiente para juzgar desadaptaciones*. Esta aseveración se fundamenta, al menos, en *cuatro razones*: **a)** la planificación pretende determinar un costo mínimo, enfrentando un problema de *optimización multicriterio*, en el cual varios criterios carecen de valoración económica objetiva (la No-Calidad Ambiental y/o Eléctrica, por caso); **b)** muchas de las variables de optimización involucradas en el problema exhiben incertidumbres de carácter no estocástico (situación ignorada por el paradigma referido), cuyo tratamiento limita, metodológicamente, el empleo de modelos de optimización clásicos; **c)** bajo la suposición de que todos los criterios del problema tienen asociado un costo de oportunidad (valor económico) y se vinculan con variables determinísticas, *excepcionalmente podrá juzgarse adaptado un sistema real al finalizar el período de control regulatorio*. Aún habiéndose partido de un diseño "económicamente adaptado" al comienzo de tal período; por último **d)** *no existe un criterio uniforme para juzgar las desadaptaciones*: normalmente, se apela a un sobre-costo en el equipamiento existente, considerando que la demanda servida resulta menor que la pronosticada, sumado al costo arbitrariamente asociado para aquellas variables no monetizables, tal como Calidad Ambiental y la Calidad de Servicio-Producto Eléctrico. Particularmente, bajo las condiciones **c)** y **d)** es aplicado el concepto en cuestión, conforme los cuerpos regulatorios referidos.

Este trabajo presenta un modelo de solución formal acorde con un concepto que involucra *un grado de satisfacción dinámico, acotado por cierto riesgo aceptable por el planificador, en la Adaptación Económica en SDEE*. Se intenta, de tal manera, superar los inconvenientes expuestos. En este marco, *es propuesta una metodología consistente para identificar los costos de variables o criterios de optimización, cuyo valor económico se desconoce, pero que puede ser obtenido como una propiedad intrínseca del sistema en evolución*. Este es el caso, específicamente, de la Calidad Ambiental de un Sistema de Redes de Distribución. Se hablará, de aquí en más, de Calidad Ambiental, en lugar de Calidad EA, debido a que los dos aspectos y variables asociadas exhiben las idénticas características: no monetizables en forma directa en tanto su valoración económica e idéntico tatamiento en el Modelo propuesto. De modo que lo dicho respecto a Calidad Ambiental, se aplica completamente a la Calidad del Servicio Eléctrico. Como se anticipó, en esta primera parte del trabajo, son desarrollados los elementos teóricos del Modelo, los cuales permitirán arribar, finalmente, a una *definición operacional* del aquí denominado Costo Intrínseco de la variable de estado del SDEE, no monetizable en forma directa. Esta definición será luego, y como se dijo, aplicada al cálculo de la Valoración Económica de la Calidad EA del SDEE, a través de algún Índice de Impacto, el cual, sin pérdida de generalidad sobre el método, será propuesto para las simulaciones en los Estudios de Caso, presentados en la segunda parte del trabajo.

El trabajo está organizado como sigue. En la Sección **2.**, se presenta una síntesis metodológica del Modelo Posibilístico Empleado para la Planificación de Mediano/Corto Plazo del SDEE y el Cálculo del Costo Intrínseco referido, en 3 Etapas, brevemente descritas y luego desarrolladas en detalle en las Secciones siguientes. En la Sección **3.**, son introducidos los Conceptos y Herramientas

Matemáticos requeridos para el desarrollo del Modelo conforme las Etapas definidas. En la Sección **4.**, se aborda el desarrollo de la Etapa I del Modelo: La Determinación del Vector de Preferencias o Prioridades (*VP*) entre Criterios de Optimización, desde la óptica del tomador de decisiones, prestando especial atención sobre el tratamiento de *incertidumbres de valor* [Lavoie, 1992] en los criterios, y en su representación formal. En la Sección **5.**, se aborda la Etapa II del Modelo, presentando el desarrollo de la Optimización Dinámica aplicable al horizonte de Mediano/Corto Plazo para el SDEE. Se introduce concepto Toma de Decisión Estática en Ambientes Difusos, y se propone desde allí una variante de la Programación Dinámica Difusa (*PDD*) con el objeto de captar las *incertidumbres de valor* en las variables de control y de estado del SDEE, mediante Conjuntos Difusos. Desde allí la denominación de Optimización Dinámica Posibilística, habida cuenta, como se verá, de la equivalencia entre el tipo de Conjuntos Difusos empleados y una Distribución de Posibilidades. Mediante el empleo del *VP* y la *PDD*, se obtiene cada estado, por año de corte en el horizonte temporal definido, y coincidente con el Período de Control Tarifario aplicable al SDEE, perteneciente a la Trayectoria de Evolución Más Satisfactoria (*TMS*) para el sistema. Finalmente, en la Sección **6.**, es abordado el desarrollo de la Etapa III. A partir de la de la *TMS* resultante para el SDEE y el *VP* asociado a los criterios de optimización considerados, es obtenida la definición operacional del Costo Intrínseco de la Calidad Ambiental (Calidad EA), considerando un Índice de Impacto construido sobre una variable ambiental genérica, presentándose las conclusiones más pertinentes del Modelo propuesto, la Sección **7.**.

2. SÍNTESIS METODOLÓGICA DEL MODELO POSIBILÍSTICO

El Modelo Posibilístico propuesto, recurre a un *esquema de tres etapas.*

En la Etapa I, se parte de la información sobre las preferencias que el planicador confiere a los distintos criterios considerados en la optimización, y que serán comparados tomados *de a pares*. Se desarrolla un enfoque metodológico para lograr *el conjunto de valores de preferencias más consistente* y, finalmente, obtener el Vector de Prioridades [Saaty, 1977] sobre las mismas, que resulte más representativo de la importancia de cada criterio. Este vector servirá para ponderarlos, según se integran en la Etapa siguiente. Si bien el Vector de Prioridades proviene de las ideas vertidas en [Saaty, 1977], válidas para *variables determinísticas*, es necesario plantear un enfoque para captar las *incertidumbres de valor* inherentes a las preferencias entre criterios, pues la técnica de Saaty colapsa frente a esta capacidad de representación. De modo que, como aporte del presente trabajo, se desarrolla un enfoque alternativo, con extensión al dominio de los Números Difusos (Conjuntos Difusos Normalizados y Convexos) para valuar dichas preferencias en el mismo, captando operacionalmente sus *incertidumbres de valor*, y así obtener el *VP* necesario.

La Etapa II, aborda la planificación en el Mediano/Corto plazo del SDEE, en el marco propiciado por las técnicas de Programación Dinámica Difusa [Bellman & Zadeh, 1970; Schweickardt & Miranda, 2009], y de los desarrollos aplicables en la Etapa I. Para cada criterio, son contempladas sus *incertidumbres de valor*, en tanto el grado de satisfacción que el mismo alcanza en cierto estado. También se ha optado modelar tales incertidumbres mediante Conjuntos Difusos. Los criterios resultarán, entonces, Distribuciones de Posibilidades, habida cuenta de la equivalencia entre las mismas y los Conjuntos Difusos del tipo empleado [Doubois & Prade, 1980; Kaufmann & Gupta, 1985].

La Optimización Dinámica (*PDD*) arrojará *un conjunto de trayectorias posibles de evolución del sistema*, a las que se les confiere el carácter de *satisfactorio*, por encima de cierto *umbral de riesgo* que el planificador está dispuesto a enfrentar. Si las preferencias obtenidas en la Etapa I son *invariantes*, existirá una trayectoria Más Satisfactoria, *TMS*, como resultado. Al modificar las preferencias entre criterios, se modificará, consecuentemente, la *TMS*. Por ello debe hablarse, en rigor, de *conjunto* de *TMS's*.

La Etapa III, se enfoca en el Cálculo del Costo Intrínseco asociado a la Calidad Ambiental, sobre la *TMS* resultante en la Etapa II. Se concibe, de tal modo, que el valor económico asociado al Impacto Ambiental, es el resultado de las preferencias establecidas sobre el Sistema de Redes, y de su evolución en el horizonte temporal analizado. Éste coincide con el período de Control Regulatorio. Por resultar tal costo dependiente de las propiedades del sistema y su evolución, se lo refiere como *intrínseco*. Al considerar incertidumbres, siempre existirá asociado un *riesgo de insatisfacción* en la trayectoria seleccionada, consecuencia de que el Sistema de Redes pueda evolucionar por una trayectoria diferente. Por ello, *todo costo tendrá asociado un riesgo, también intrínseco*. Así visto, se hablará en los resultados obtenidos del Costo Intrínseco de la Calidad Ambiental del Sistema de Redes, a determinado Nivel de Riesgo (Intrínseco).

Este modelo conjunto pretende: a) desarrollar los aspectos teóricos requeridos para definir e introducir operacionalmente en el problema de decisión, el Riesgo Intrínseco asociado a cierta solución satisfactoria, *TMS*; y b) En el marco de un concepto más realista de Adaptación Económica del Sistema, permitir la introducción operacional de un Factor de Impacto asociado a la Calidad Ambiental del Sistema de Redes e Internalizar su Costo Posible, dadas las *incertidumbres de valor* reconocidas y captadas.

Por lo dicho, puede hablarse de un Modelo Posibilístico. La construcción de tal Factor de Impacto, se desarrolla en la segunda parte del presente trabajo, pues integra la aplicación del Modelo propuesto en un Estudio de Caso.

3. CONCEPTOS Y HERRAMIENTAS MATEMÁTICAS REQUERIDAS POR EL MODELO

3.1 Las Incertidumbres No Estocásticas desde un Paradigma Alternativo

Es pertinente una breve discusión epistemológica, abordando la relación entre el tipo de incertidumbre con la que tratan los modelos clásicos de optimización, y su vínculo con el paradigma económico dominante (referido como Neo-Clásico). Del mismo modo, procede describir el tipo de incertidumbre referida en este trabajo, y su relación con la técnica de optimización solidaria al modelo propuesto, en el seno de un paradigma económico alternativo.

El paradigma alternativo, aquí referido como Post-Keynesiano [Lavoie, 1992], destaca la siguiente clasificación propuesta por Keynes:
a) Existe *certeza* cuando cada opción invariablemente lleva a un resultado específico, cuyo valor es conocido inequívocamente; b) Existe *riesgo*, o *certeza equivalente*, cuando cada elección conduce a un conjunto de posibles resultados específicos, de valores conocidos o asociados con una probabilidad específica y c) Existe *incertidumbre* cuando la probabilidad de un resultado es desconocida, cuando el valor de un resultado es desconocido, cuando los resultados que posiblemente pueden ser consecuencia de una opción son desconocidos, o cuando el espectro de posibles opciones es desconocido. El *riesgo* se torna así en una medida de *arrepentimiento* por seleccionar, en tal contexto de incertidumbre, aquello que se juzgó preferible, sin serlo en su ocurrencia. Se tienen, entonces, *dos tipos de incertidumbres*: 1) de *probabilidad*; y 2) la que se corresponde con la caracterización más amplia de lo dicho en c), que Keynes refiere como *incertidumbre fundamental de valor*. Una alternativa metodológica para su representación, es mediante los Conjuntos Difusos. La misma resulta de plena conformidad con la Teoría de Posibilidades, para la cual se demuestra que un Número Difuso (Conjunto Difuso Normalizado y Convexo) constituye una Distribución de Posibilidades [Doubois & Prade, 1980; Kaufmann & Gupta, 1985]. Desde estas consideraciones, se hablará de *incertidumbre de valor*. El Modelo propuesto en este trabajo, considera que el entorno dinámico de decisión, se compone de variables que pueden tener, en general, cualquier tipo de incertidumbres y, en particular, *incertidumbres (fundamentales) de valor*. En tal sentido, las técnicas clásicas de optimización, constituyen claros soportes a problemas del tipo de la aplicación propuesta, en el dominio *determinístico/estocástico*. Resultan solidarias al *principio del costo marginal*, *costo de eficiencia* que la corriente de pensamiento Neo-Clásica propugna en todos sus modelos.

En particular, los costos de oportunidad de las penalizaciones referidas, en concepto de alguna de las formas de No-Calidad, se intentan asimilar a costos marginales, no obstante las importantes dificultades metodológicas para su estimación. Pero la aplicación de este principio para determinar costos económicos, colapsa por completo frente a la *incertidumbre (fundamental) de valor* (empleándose, de aquí en más, indistintamente los conceptos *incertidumbre fundamental* o *incertidumbre de valor*), por lo que también fracasan aquellas técnicas. La razón de mayor peso, estriba en que el costo marginal se funda en una condición de equilibrio (óptimo de Pareto, relacionado con la *eficiencia asignativa*), absolutamente imposible de validar en términos reales. Uno de los presupuestos que caracterizan al Paradigma Neo-Clásico, es la *racionalidad sustantiva* o *completa* que exhiben los tomadores de decisiones – agentes del sistema. Supone un *conocimiento perfecto* por parte de los mismos, ubicando el Universo de Decisión en la *certeza* de sus estados o bien en la *certeza estocástica* o *equivalente* (su noción de *riesgo*).

Por el contrario, en el mismo presupuesto para el paradigma Post-Keynesiano, *la racionalidad es acotada o procedural* y, por tanto, *los actores tienen un conocimiento acotado o imperfecto*, lo que redunda en un Universo de Decisión dominado por la *incertidumbre fundamental* inherente a sus estados. Se desvanece, así, toda consideración apriorística de equilibrio como medio para concebir la eficiencia en la asignación de recursos. Existirán *soluciones satisfactorias*, en lugar de óptimas, y, si bien se preserva la aplicación de instrumentos matemáticos clásicos, deberá ser complementada mediante técnicas capaces de tratar con este nuevo contexto, más realista.

Por ello surge la necesidad de proponer una metodología alternativa de Preferencias y Optimización Dinámica Multicriterio [Schweickardt & Pistonesi, 2007), sustentada en herramientas tales como las que se desarrollan en el presente trabajo.

3.2 El Vector de Prioridades entre Criterios de Optimización. Método Autovalor-Autovector de Saaty

La técnica de Procesos Analíticos Jerárquicos [Saaty, 1977), propone un método para establecer una escala de preferencias entre *n* criterios, a través de un vector denominado de Prioridades. Se inicia formando una Matriz de Preferencias, indicada como *MPA*, cuyas entradas, a_{ij}, son definidas a partir de una escala de dominancia establecida sobre el intervalo [1..10] de números enteros. Los criterios se comparan de a pares, siendo a_{ij} la preferencia del criterio *i* respecto del criterio *j*. De forma tal que *MPA* resulta una matriz *cuadrada* de orden *n* (número de criterios), *positiva* y *recíproca*: si a_{ij} es un número natural en el intervalo [1..10] y $aji = 1/a_{ij}$. Entonces:

$$MPA = \begin{pmatrix} 1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & 1 & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \vdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & 1 \end{pmatrix} \tag{1}$$

con: $a_{ij} > 0 \; \forall \; i, j = \{1 \in n\} \; y \; a_{ji} = 1/a_{ij}$

El Teorema de Perron [Lax, 1977] garantiza, para tal matriz, la existencia de un *autovalor dominante* y *positivo*, λP, al igual que su *autovector*, *VP*. Se cumple que:

$$\lambda P \geq n \tag{2}$$

y sólo si la matriz *MPA* exhibe *preferencias consistentes*, resultará:

$$\lambda P = n \tag{3}$$

La *condición de consistencia* expresada en [Saaty, 1977], establece que, en (1):

$$a_{ik} = a_{ij} \times a_{jk} \; ; \forall i, j, k = 1 \ldots n \tag{4}$$

El Índice de Consistencia de Saaty, que mide el cumplimiento de (4), es definido mediante la expresión:

$$ICSaaty = (\lambda P - n)/(n-1) \tag{5}$$

El *autovector de Perron*, *VP*, asociado a *MPA*, satisface el Principio de Composición Jerárquica [Saaty, 1977], definido como: siendo *V* un Vector de Prioridades y *c* constante, entonces :

$$MPA \times V = c \times V \tag{6}$$

si $c = \lambda P$ y $V = V_P$, *tal principio es satisfecho*. Es decir: los vectores posibles de Prioridades difieren en una *constante de escala*, respecto de V_P. Pero *las prioridades relativas entre criterios, no se modifican*.

3.3 Utilidad y Empleo del Vector de Prioridades en el Modelo Posiblilístico

El *autovector de Perron*, V_P, a partir de aquí indicado como Vector de Prioridades (*VP*) entre los n criterios de optimización seleccionados, tiene una *doble utilidad*. Para la *primera*, se normalizan sus componentes, sumando sus valores asociados a cada criterio *i*-ésimo, y dividiéndolos por la suma. Se obtiene el Vector de Prioridades Normalizado. Formalmente:

Si $V_P = [vc_1, vc_2, \ldots, vc_n]^T$, donde el super-índice *T* significa *transpuesto*, ya que se ha escrito como *vector fila* por comodidad, y cada componente vc_i, con *i* en *[1...n]*, es el *peso* o *prioridad del criterio de optimización i-ésimo*, entonces: $Sum = \Sigma i^n \, vc_i$. Luego, el Vector de Prioridades Normalizado, resulta (escrito como *vector fila*):

$$V_{PN} = [vc_1/Sum, vc_2/Sum, \ldots, vc_n/Sum]^T = [vc_{1N}, vc_{2N}, \ldots, vc_{nN}]^T \tag{7}$$

Se cumplirá, lógicamente, que: $\Sigma_i^n \; vc_{In} = 1$. Esta propiedad, presenta dos utilidades: la *primera* es que sirve a los efectos de calcular un *promedio ponderado entre los valores que puedan asumir los diferentes criterios*, conforme la Matriz de Preferencias *MPA*. Los ponderadores resultan, precisamente, los componentes vc_{iN}, *i* en *[1...n]*. A esta forma del Vector de Prioridades asociado a *MPA*, se la llama Lineal.

La *segunda*, de interés en el Modelo propuesto, se basa en la denominada la forma de Yager de dichos ponderadores lineales [Yager, 1977]. Simplemente, consiste en multiplicar cada componente normalizado, por el número de criterios, *n*. De manera que el Vector de Prioridades de Yager, resultará (escrito como *vector fila*):

$$V_{PY} = [vc_{1N} \times n, vc_{2N} \times n, \ldots, vc_{nN} \times N]^T = [vc_{1Y}, vc_{2Y}, \ldots, vc_{nY}]^T \tag{8}$$

Es claro que la suma de los componentes del Vector de Prioridades de Yager, será igual a *n*. A esta forma del Vector, se la refiere como forma Exponencial. Su afectación estriba en *dar mayor o menor importancia a los criterios en el proceso de toma de decisión estática, cuyas incertidumbres son captadas, como se dijo, mediante la modelación por Conjuntos Difusos*.

De modo que el objeto de la Etapa I, es la obtención del Vector de Prioridades de Yager asociado a las preferencias entre los Criterios de Optimización, considerados en la Planificación de Mediano/Corto Plazo, para el SDEE bajo estudio.

4. ETAPA I: OBTENCIÓN DEL VECTOR DE PRIORIDADES CAPTANDO LAS INCERTIDUMBRES DE VALOR EN LAS PREFERENCIAS ENTRE CRITERIOS

Como se anticipó, el *VP* obtenido desde las preferencias entre criterios de optimización mediante el Método de Saaty, es válido sólo en dominio determinístico. Se desarrollará, entonces, un procedimiento de cálculo que permita arribar al Vector de Prioridades que represente mejor a las preferencias establecidas, bajo condiciones de *incertidumbre de valor*.

A) La Matriz de Preferencias Difusas: un enfoque realista sobre las preferencias entre los criterios de optimización, requiere considerar sus *incertidumbres de valor*. Su modelación es realizada mediante Números Difusos (*ND*). Un *ND* puede ser definido mediante el acoplamiento de un Segmento de Confianza y un Nivel de Certidumbre (variable α o α–corte) [Kaufmann & Gupta, 1985], indicando con los subíndices 1 y 2 los extremos *inferior* y *superior*, respectivamente, de tal segmento. Es decir, ***pref*** es un ND, expresado como:

$$\forall \alpha \in [0,1], \; \boldsymbol{pref} = [\, pref_1(\alpha) \,, pref_2(\alpha) \,] \tag{9-A}$$

En la Figura 1 se presenta una preferencia valuada mediante un Número Difuso Triangular (*NDT*). El sufijo *Izq*, refiere el *valor inferior*, 1, del Segmento de Confianza; *Der*, el *superior*, 2, y *MP* el *central* o de Máxima Posibilidad. Si $\boldsymbol{pref_{ij}}$ indica la preferencia difusa entre los criterios *i* y *j*, extendiendo al dominio difuso la expresión (1), se obtiene la Matriz de Preferencias Difusas:

MPA: $\forall\, \alpha \in [0,1] \rightarrow$

$$\begin{pmatrix} 1 & \boldsymbol{pref_{12}} & \cdots & \boldsymbol{pref_{1n}} \\ 1/\boldsymbol{pref_{12}} & 1 & \cdots & \boldsymbol{pref_{2n}} \\ \cdots & \cdots & \vdots & \cdots \\ 1/\boldsymbol{pref_{1n}} & 1/\boldsymbol{pref_{2n}} & \cdots & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{(9-B)}$$

siendo:

$$1/\boldsymbol{pref} = [\ 1/pref_2(\alpha)\ ,\ 1/pref_1(\alpha)\ ] \qquad \text{(9-C)}$$

Las incertidumbres de cualquier preferencia $\boldsymbol{pref_{ij}}$ y de su recíproca, $\boldsymbol{pref_{ji}}$, son *dependientes*. Esto significa que si se presentase una ocurrencia $\boldsymbol{pref_{ij}}$ en el *segmento de confianza* limitado por α, entonces: $pref_{ji}(\alpha) = 1/pref_{ij}(\alpha)$. Con ello se garantiza que cualesquiera sean las ocurrencias en sus entradas, $MP_A(\alpha)$ es *determinística*, puesto que es una instancia (α) de $\boldsymbol{MP_A}$

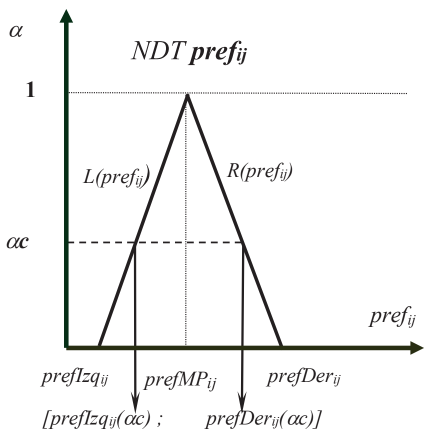

Figura 1. Una Preferencia Valuada mediante un *NDT* y su Segmento de Confianza para un Nivel de Certidumbre $\alpha = \alpha c$
Fuente: Elaboración propia.

$MP_{A(\alpha)}$ será referida como Matriz de Preferencias Colapsadas según el Nivel de Certidumbre (α). Se considerará, sin pérdida de generalidad, la matriz triangular superior. Establecidas las preferencias entre criterios, mediante (9-B), el objetivo es acotar las incertidumbres conforme cierto α-corte. Para obtener un Vector de Prioridades determinístico, que resulte el mejor representante de las preferencias difusas así acotadas, deberá reducirse cada segmento de confianza a un valor. Tal reducción es denominada, en este contexto, Colapso del *ND* [Schweickardt & Miranda, 2009]. En este trabajo, se emplea el criterio denominado Removal (*Rv*), según el cual el valor representativo del *ND*, por encima del α-corte establecido, $\alpha = \alpha c$, considerando (9-A), resulta de las siguientes expresiones:

$$Rv\Big[\ pref(\alpha c)\ \Big] = pref_{MP} + \frac{1}{2} \times \Big[\ IDer\ \text{-}\ IIzq\ \Big] \qquad (10)$$

$$IDer = \int_{pref_{MP}(\alpha c)}^{pref_2} R(pref)\, dpref \qquad (11)$$

$$IIzq = \int_{pref_1(\alpha c)}^{pref_{MP}} L(pref)\, dpref \qquad (12)$$

R y *L* (ver Figura 1) son las funciones de pertenencia del *ND* a derecha e izquierda, respectivamente; *pref* es la variable real en el segmento establecido por α*c*. Este *colapso* del *ND*, se referirá como *Rv(*α*c)*.

<u>B) Las Ecuaciones de Consistencia en las Preferencias de la Matriz de Preferencias Difusas:</u> si el valor representativo de las preferencias difusas para cierto (α*c*), está dado únicamente por (10) (o alguna otra forma de *colapso*), no se estaría considerando la *consistencia* entre las mismas, según (4). Dentro del Segmento de Confianza fijado por (α*c*), se requiere la búsqueda de aquellos valores tales, que la matriz $MP_A(\alpha c)$ resulte lo más consistente posible. De modo que los valores representantes de las preferencias dentro del segmento ($\alpha = \alpha c$), tendrán que cumplir dos objetivos: 1) que se aparten lo menos posible de su $Rv(\alpha c)$ y 2) que satisfagan lo más posible las ecuaciones de consistencia, para el conjunto de expresiones que surjan, conforme las entradas establecidas en *MPA(*α*c*). Como se ha dicho, se considera la $MP_A(\alpha c)$ triangular superior.

De manera que, ordenando por filas, el Sistema de Ecuaciones de Consistencia, respetando la formulación (4), para *n* criterios (orden de la matriz *n x n*), se expresa:

Sea $C = \{\ \forall\ i \in [2..n\text{-}1];\ \forall\ j \in [i+1..\ n]\ y\ \forall\ k \in [1..i\text{-}1]\}$ entonces:

$$\{\ pref_{ij}(\alpha c) = pref_{kj}(\alpha c)/pref_{ki}(\alpha c)\ \} \qquad (13)$$

Si (13) se satisficiera en todo el conjunto *C*, encontrando valores de preferencias en cada *segmento de confianza* fijado por (α*c*), $MP_A(\alpha c)$ resultaría *perfectamente consistente*.

<u>C) La Solución de las Consistencias de las Preferencias Colapsadas en el Nivel de Certidumbre (α*c*) mediante Programación Lineal Bi-Objetivo:</u> los dos objetivos según 1) y 2) en el punto B) anterior, pueden ser planteados en un Programa Lineal. Para ello, los errores (*e*) entre cada preferencia $pref_{ij}(\alpha c)$ y su $Rv[pref_{ij}(\alpha c)]$, y entre cada preferencia $pref_{ij}(\alpha c)$ y su formulación consistente según (13), pueden introducirse como factores. Por caso, si se buscara la máxima consistencia en cierta ecuación de sistema (13) en *C*, se tendría:

$pref_{ij}(\alpha c) \times ec_{ij}^{k} = pref_{kj}(\alpha_c)/pref_{ki}(\alpha_c)$ (14)

si $ec_{ij}^{k} = 1$, entonces la consistencia resultaría *perfecta*. Se cumple $0 < ec_{ij}^{k} \leq 1$. Para el caso del apartamiento mínimo de $pref_{ij}(\alpha c)$ respecto del $Rv[pref_{ij}(\alpha c)$:

$pref_{ij}(\alpha c) \times erv_{ij} = Rv[pref_{ij}(\alpha c)]$ (15)

con $0 < erv_{ij} \leq 1, \forall i \in [1..n-1]$ y $\forall j \in [i+1.. n]$. En consecuencia, el modelo puede linealizarse en sus restricciones, empleando variables logarítmicas. Sus objetivos serían la *minimización*, respectivamente, de la sumatoria de los valores absolutos de los logaritmos de los errores ec_{ij}^{k}, $ALec_{ij}^{k}$ y erv_{ij}, $ALerv_{ij}$. En principio, la introducción de la operación valor absoluto (considerando que pueden existir errores logarítmicos menores que cero), parecería generar objetivos no lineales. Esta cuestión se resuelve con el agregado de restricciones de desigualdad, que relacionen las variables asociadas a los valores absolutos de los errores logarítmicos, con los errores logarítmicos. Ambos objetivos, pueden ponderarse creándose una única función a *minimizar*: *el valor absoluto del error total ponderado*, *ALerrT*.

Este método es el comúnmente aplicado para la Programación Lineal Multi-Objetivo, donde existen sólo dos objetivos.

De modo que el problema de optimización lineal que resuelve el conjunto de preferencias más representativo en la matriz $MPA(\alpha c)$, se formula como sigue:

Min (16-A)

$$\left\{ ALerrT = \lambda_c \times \left(\sum_{i=2}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} \sum_{k=1}^{i-1} ALec_{ij}^{k} + \lambda_{rv} \times \left(\sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} ALrv_{ij} \right) \right) \right\}$$

Sujeto a:

[Restricciones de Consistencia – desde (14)]

Sea $C = \{\forall\ i \in [2..n-1];\ \forall\ j \in [i+1..\ n]\ y\ \forall\ k \in [1..\ i-1]\ \}$, *entonces, en C:*

$Lpref_{ij}(\alpha c) + Lec_{ij}^{k} = Lpref_{kj}(\alpha c) - Lpref_{ki}(\alpha c)$ (16-B)

[Restricciones de Valor Absoluto de los Errores Logarítmicos de Consistencia]

$ALec_{ij}^{k} - Lec_{ij}^{k} \geq 0$ (16-C)

$ALec_{ij}^{k} + Lec_{ij}^{k} \geq 0$ (16-D)

$ALec_{ij}^{k} \geq 0$ (16-E)

[Restricciones de Apartamiento respecto de $Rv[pref_{ij}(\alpha c)]$ - desde (15)]

Sea $C1 = \{\ i\ [1..n-1];\ j\ [i+1..\ n]\ \}$, *entonces, en C1:*

$Lpref_{ij}(\alpha c) + Lerv_{ij} = LRv[pref_{ij}(\alpha c)]$ (16-F)

[Restricciones de Valor Absoluto de los Errores Logarítmicos de $Rv[pref_{ij}(\alpha c)]$]

$ALerv_{ij} - Lerv_{ij} \geq 0$ (16-G)

$ALerv_{ij} + Lerv_{ij} \geq 0$ (16-H)

$ALerv_{ij} \geq 0$ (16- I)

[Restricciones de Segmento de Confianza [1,2] al Nivel de Certidumbre (αc)]

$Lpref_{ij}(\alpha c) \geq Lpref_{ij}(\alpha c)1$ (16- J)

$Lpref_{ij}(\alpha c) \leq Lpref_{ij}(\alpha c)2$ (16-K)

siendo: λc, λrv los ponderadores fijados para los objetivos ($\lambda c + \lambda rv = 1$); $Leci_{jk}$ el logaritmo (en base *e*, por caso) del error multiplicativo eci_{jk} y $ALeci_{jk}$ su valor absoluto; $Lerv_{ij}$ el logaritmo del error multiplicativo erv_{ij} y $ALerv_{ij}$ su valor absoluto; $Lpref_{ij}(\alpha c)$ el logaritmo del valor de la preferencia $pref_{ij}(\alpha c)$; [$Lpref_{ij}(\alpha c)1$; $Lpref_{ij}(\alpha c)2$] el Segmento de Confianza logarítmico al nivel de certidumbre (αc) (αc es un dato del modelo); $LRv[pref_{ij}(\alpha c)]$ es el logaritmo del Removal aplicado sobre $pref_{ij}(\alpha c)$; *ALerrT* es el error logarítmico ponderado total en las $pref_{ij}(\alpha c)$, por inconsistencias y apartamientos respecto sus colapsos $Rv[pref_{ij}(\alpha c)]$. Resuelto este Programa Lineal, las preferencias son obtenidas por exponenciación de los valores logarítmicos según la base considerada. Si la base es el número *e*:

$pref_{ij}(a_c) = e^{Lpref_{ij}(a_c)}$, *en C1* (17)

resultando valores que no necesariamente son enteros en *[1..10]*. Tal especificación de escala, propuesta por Saaty, se torna carente de sentido al formular una *solución de preferencias difusas colapsadas, de mínima inconsistencia*.

<u>D) La Solución del Vector de Prioridades:</u> a los efectos de que el Vector de Prioridades *VP* resulte el mejor representante de las preferencias colapsadas en el segmento de confianza fijado por (αc), se deberán satisfacer, lo más posible, las *condiciones de consistencia en las prioridades*, expresadas mediante:

$pref_{ij}(\alpha c) = vp_i(\alpha c) / vp_j(\alpha c)$, *en C1* (18)

siendo $vp_i(\alpha c)$ y $vp_j(\alpha c)$ las componentes *i*-ésima y *j*-ésima del vector en cuestión. La dependencia de este vector respecto de (αc), se sostiene al efecto de indicar que (αc) constituye un parámetro del modelo general para la Etapa I. Nuevamente, las incógnitas del modelo se relacionan mediante un cociente, expresión no lineal. Sin embargo, el problema resulta, al igual que el anterior y con los mismos artificios, linealizable. Antes de avanzar sobre su formulación, deben observarse *dos situaciones que pueden caracterizar este problema*: a) fuertes inconsistencias en las preferencias y b) segmentos de confianza al nivel (αc), para alguna o varias preferencias, muy estrechos (amplitud pequeña). Se requiere, así, de *tres programas lineales acoplados*, para arribar al Vector de Prioridades de mejor ajuste.

El 1er Programa define si el Vector de Prioridades tiene solución dentro de los segmentos de confianza fijados al nivel (αc). Evaluará las *inconsistencias intervalares*. Se formula como sigue:

Min

$$\left\{ Sum(Lh) = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} \left(Lh_{ij} \right) \right\} \qquad (19\text{-A})$$

Sujeto a:

[Restricciones de Consistencia en las Prioridades]

$$Lvp_i(\alpha c) - Lvp_j(\alpha c) + Lecp_{ij} = Lpref_{ij}(\alpha c), \text{ en } C1 \qquad (19\text{-B})$$

[Restricción de referencia]

$$Lvp_1(\alpha c) = 0 \qquad (19\text{-C})$$

[Restricciones de Valor Absoluto de los Errores Logarítmicos de Consistencia]

$$ALecp_{ij} - Lecp_{ij} \geq 0, \text{ en } C1 \qquad (19\text{-D})$$

$$ALecp_{ij} + Lecp_{ij} \geq 0, \text{ en } C1 \qquad (19\text{-E})$$

$$ALecp_{ij} \geq 0, \text{ en } C1 \qquad (19\text{-F})$$

[Restricciones de Segmento de Confianza [1, 2] al Nivel de Certidumbre (αc)]

$$Lvp_i(\alpha c) - Lvp_j(\alpha c) + Lh_{ij} \geq Lpref_{ij}(\alpha c)_1, \text{ en } C1 \qquad (19\text{-G})$$

$$Lvp_i(\alpha c) - Lvp_j(\alpha c) - Lh_{ij} \leq Lpref_{ij}(\alpha c)_2, \text{ en } C1 \qquad (19\text{-H})$$

[Restricciones de Positividad para los Márgenes de los Segmentos de Confianza al Nivel (αc)]

$$Lh_{ij} \geq 0, \text{ en } C1 \qquad (19\text{-I})$$

siendo: $Lvp_i(\alpha c)$ y $Lvp_j(\alpha c)$ los logaritmos de las variables $vp_i(\alpha c)$ y $vp_j(\alpha c)$ del Vector de Prioridades *VP*; $Lecp_{ij}$ el logaritmo del error multiplicativo ecp_{ij} y $ALecp_{ij}$ su valor absoluto; Lh_{ij} el logaritmo del margen multiplicativo h_{ij} en el que debería modificarse, eventualmente, el Segmento de Confianza logarítmico $[Lpref_{ij}(\alpha c)_1; Lpref_{ij}(\alpha c)_2]$; *Sum(Lh)* es la suma de los márgenes logarítmicos.

El resultado $Sum(Lh) = 0$, implica que existe solución del Vector de Prioridades respetando los límites para cada segmento de confianza al nivel (αc), en el que las preferencias han sido acotadas. Si $Sum(Lh) > 0$, se tendrá, en cada Lh_{ij}, el márgen requerido para modificar el segmento respectivo, al efecto de que la solución tenga lugar. Una observación importante en este programa, la constituye la *restricción de referencia*.

Nótese que se ha establecido en la expresión (19-C), que $vp_1(\alpha c) = 1$ ($Lvp_1(\alpha c) = 0$). Esta referencia es necesaria, puesto que las incógnitas del programa se presentan en forma de cocientes. Por ello, se necesita fijar un valor (el más simple, aquí, es sobre el primer componente de *VP* e igual a la unidad), a efectos de evitar que el programa arroje infinitas soluciones.

El Vector de Prioridades es luego normalizado, y sus componentes finales no dependen del valor impuesto en esta restricción (tampoco dependen, en rigor de la componente del *VP* a la cual se le impone la misma).

El 2do Programa busca minimizar las *inconsistencias de prioridades*, planteadas en el 1er Programa, ecuación (19-B), sobre el Vector *VP*. Adopta, como restricción adicional, la imposición de que la suma de los márgenes Lh_{ij} resulte igual a *Sum(Lh)*, obtenida desde el 1er Programa. De modo que, agregando tal restricción, sólo cambia el objetivo. La formulación resulta:

Min

$$\left\{ ALerrcpT = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} ALecp_{ij} \right\} \qquad (20\text{-A})$$

Sujeto a:
[Restricciones (19-B) a (19-I)]
[Restricción de Límite en los Márgenes de los Segmentos de Confianza al Nivel (αc)]

$$Sum(Lh) = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} Lh_{ij} \qquad (20\text{-B})$$

Finalmente, el 3er Programa busca minimizar el máximo error de inconsistencia en las preferencias, individualmente consideradas, sobre el Vector de Prioridades obtenido. Para ello se introduce una variable logarítmica adicional, *ALecMax*. El objetivo es la minimización de *ALecMax*. Tomando como referencia el 2do Programa, se tienen las mismas restricciones y se imponen, adicionalmente: a) restricciones que limiten cada error logarítmico, $ALecp_{ij}$, como máximo al valor *ALecMax* y b) la sumatoria de los $ALecp_{ij}$ debe ser igual al valor objetivo obtenido en el 2do Programa, *ALerrcpT*. Su formulación resulta:

Min
$$\{ALec\text{-}max\} \qquad (21\text{-A})$$
Sujeto a:
[Restricciones (19-B) a (19-I) y (20-B)]
[Restricción de Suma de Errores Logarítmicos por Inconsistencia en *VP*]

$$\left\{ ALerrcpT = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} ALecp_{ij} \right\} \quad \text{(21-B)}$$

[Restricciones de Límite Máximo en los Errores Logarítmicos Individuales por Inconsistencia en *VP*]

$$ALecp_{ij} \leq ALecMax, \text{ en } C1 \quad \text{(21-C)}$$

Luego, cada componente de *VP* resultará de la exponenciación (asumiendo como base el número *e*):

$$vp_i\,(\alpha c) = e^{\,Lvpi\,(\alpha c)}, \text{ en } C1 \quad \text{(22)}$$

Obtenido *VP*, para su normalización, $VP^{[N]}$, cada componente resulta del cociente entre la componente homónima de *VP* y la suma de las componentes de *VP*.

El Vector Exponencial, $VP^{[E]}$ [Yager, 1977], tiene componentes que resultan de multiplicar cada componente de $VP^{[N]}$, por el número de criterios, *n*:

$$vp_i^{[E]}\,(\alpha c) = n \times vp_i^{[N]}\,(\alpha c), \text{ en } C1 \quad \text{(23)}$$

siendo $VP_i^{[E]}\,(\alpha c)$ la componente i-ésima $VP^{[E]}$ y la de $VP_i^{[N]}$ (αc) de $VP^{[N]}$, *en C1*, definida como se dijo:

$$vp_i^{[N]}(\alpha c) = vp_i(\alpha c) \Big/ \sum_{i=1}^{n} vp_i(\alpha c) \quad \text{(24)}$$

5. ETAPA II: OPTIMIZACIÓN DINÁMICA POSIBILÍSTICA APLICABLE AL HORIZONTE DE MEDIANO/CORTO PLAZO PARA EL SDEE

5.1 Los Conjuntos Difusos para captar las Incertidumbres de Valor en cada Criterio de Optimización

A los efectos de considerar cada criterio de optimización con sus incertidumbres inherentes, no puede emplearse una *variable real*. Se debe emplear una *función*, que establezca grados de satisfacción mediante los cuales el planificador juzge el mérito, en cierto intervalo predefinido, del valor asumido por la variable asociada a cada criterio. Con esta finalidad las variables correspondientes no son integradas en forma directa, sino que se introduce el concepto de *variables de apartamiento* [Schweickardt & Miranda, 2009]. Para cierto Criterio C_i, cuya variable asociada asume el valor *vci*, la *variable de apartamiento*, *ui*, respecto de cierto *valor de referencia*, indicado como $vci^{Ref,}$ queda definida mediante la expresión:

$$u_i = |\, vc_i - vc_i^{Ref} \,| / vc_i^{Ref} \quad \text{(25)}$$

donde $vc_i^{Ref,}$ valor de referencia, es el que el tomador de decisiones/planificador, juzga como de *plena satisfacción*. Los apartamientos, u_i, se consideran en valor absoluto, puesto que interesa saber cuánto se "aparta", en cualquier sentido, *vci* respecto de $vci^{Ref,}$ para juzgar el mérito de una solución. El tomador de decisiones/planificador, *no tiene certeza* de la satisfacción de cierto valor que asume la variable de apartamiento asociada a cada criterio. Por ello, se habla del tipo de *incertidumbre de valor*, referido en **3.1.**. Al emplear esta nueva variable, todos los criterios quedan valorizados *en el mismo dominio adimensional*. En este estadio, es donde resulta pertinente la introducción de una *función* asociada a la variable u_i, que establezca el *grado de satisfacción* de cierto valor de *vci* respecto de $vci^{Ref.}$

Esta función es *subjetiva*, si bien tiene mecanismos sugeridos para su construcción, conforme cada contexto que exhiba el problema abordado [Zadeh, 1971]. Si tal *grado o nivel de satisfacción* es *normalizado* en [0, 1] (1 para máxima satisfacción, 0 para mínima) y la función es *convexa*, se está frente a un *Conjunto Difuso*, y la función se llama Función de Pertenencia del mismo. Establece el grado en el que un elemento pertenece al conjunto. Por caso, si se tratara de un *Conjunto Clásico* o *Rígido*, como se suele referírselo, la *pertenencia* asumiría dos valores: 1 cuando un elemento pertenece, y 0, cuando no pertenece al conjunto. Como se infiere, en un *Conjunto Difuso*, *un elemento puede tener un grado contínuo de pertenencia* en [0, 1], por ejemplo 0.5. A mayor grado, mayor aceptación en el valor de la variable asociada a un criterio, dentro del mérito en una toma de decisión. Entonces, para cada criterio, C_i, se tendrá un *Conjunto Difuso*, que se indicará mediante $\{C_i\}$, cuya Función de Pertenencia, *normal* y *convexa*, se indicará como. En la Figura 1, se presentó un Conjunto Difuso asociado a cierta variable, $pref_{ij}$. En este caso, se tiene una Función de Pertenencia segmentada en dos, a *izquierda* (L) y a *derecha* (R). Esta forma responde a un *N*úmero *Difuso*, tipo especial de *Conjunto Difuso* [Doubois & Prade, 1980], referido en **3.1.** como *NDT*. Nótese que al fijar un nivel de satisfacción, $\alpha = \alpha c$, en abscisas se proyecta un intervalo de valores de la variable $pref_{ij}$, indicado como $[prefIzq_{ij}(\alpha \mathbf{c});\ prefDer_{ij}(\alpha \mathbf{c})]$, denominado Segmento de Confianza. El mismo, diferenciándose del Intervalo de Confianza empleado en Probabilidades, pretende reflejar la situación siguiente: Si las funciones L y R son las establecidas, entonces *fijado un nivel de satisfacción o certidumbre*, $\alpha = \alpha c$, *las ocurrencias en los valores de* $pref_{ij}$, *deberían pertenecer a tal segmento o*, *también*, *α-corte*. En un *variable de apartamiento*, *ui*, puede tenerse un Conjunto/Número Difuso más general, denominado *Conjunto L-R* no triangular [Doubois & Prade, 1980].

Energética 46 diciembre (2015), pp. 37 - 49

5.2 Toma de Decisión Estática Difusa

Para la *toma de decisión estática difusa* [Bellman & Zadeh, 1970] introducen el concepto de Conjunto Difuso de Decisión. Si se consideran *n* Conjuntos Difusos, queda definido mediante la expresion:

$$\{D\} = \{C_1\} <opC> \{C_2\} <opC> \ldots <opC> \{C_{n-1}\} <opC> \{C_n\} \qquad (26)$$

donde <*opC*> es un *operador* entre *Conjuntos Difusos* que recibe el nombre de *confluencia*. La *confluencia* más comunmente empleada, es la *intersección*. Asociado al *operador* <*opC*> entre los *Conjuntos Difusos*, existe un *operador matemático*, *opC*, aplicable a sus *funciones de pertenencia*, que genera, desde (26), el *valor de pertenencia* del Conjunto Difuso de Decisión. Es decir:

$$\mu\{D\} = \mu\{C_1\}\ opC \ldots opC\ \mu\{C_{n-1}\}\ opC\ \mu\{Cn\} \qquad (27)$$

El *operador opC*, recibe el nombre general de *t-norma*. Por ejemplo, si la *confluencia* fuese la *intersección*, <*opC*> ≡ ∩ y *opC* resulta la *t-norma Min*: el *mínimo valor, para cierta instancia de las variables de decisión, en el conjunto de funciones de pertenencia* del segundo miembro de la expresión (27), se define como Decisión Maximizante de Bellman y Zadeh para cierto conjunto de alternativas, [A], sobre los criterios C_i con *i* en *[1..n]*, al valor de la *función de pertenencia* en el Conjunto Difuso de Decisión, dado por:

$$\mu\{D\}Max = MAX_{[A]}\ \{\ Min\ \{\mu\{C_1\}, \mu\{C_2\}, \ldots, \mu\{C_{n-1}\}, \mu\{C_n\}\ \} \qquad (28)$$

Ahora bien, si cada uno de los *n* criterios de decisión, modelados mediante sendos *Conjuntos Difusos*, tiene una *escala de prioridades* dada por el Vector de Yager, el componente de dicho vector asociado a cada criterio, *debe afectar exponencialmente a la función de pertenencia respectiva*. La razón es la siguiente: si todos los criterios fuesen igualmente preferidos, El Vector de Prioridades Normalizado de Perron, tendría como componentes el mismo valor, *1/n*. Al obtener el Vector de Prioridades de Yager, las componentes o Ponderadores de Yager, serían, según la definición dada, iguales a 1. De modo que al elevar la cada función de pertenencia en (28) a un Ponderador de Yager igual a la unidad, no sufriría modificación alguna en la *confluencia* intersección y, por tanto, en el *operador Min*. En cambio, si existen preferencias distintas, los componentes del Vector de Yager serán positivos, algunos mayores que uno, y otros menores. El efecto exponencial de un ponderador sobre el respectivo *Conjunto Difuso*, resultará en una *contracción* del mismo, si el Ponderador de Yager, $pY > 1$, y en una *dilatación*, si $pY < 1$. *La contracción impone más importancia en la confluencia, y la dilatación, menos importancia*. La *decisión estática difusa ponderada por preferencias*, queda, entonces, establecida como:

$$\mu\{D\}_{Max} = MAX_{[A]}\ \{\ Min\ \{\mu\{C_1\}^{pY\{C1\}}, \mu\{C_2\}^{pY\{C2\}}, \ldots, \mu\{C_{n-1}\}^{pY\{Cn-1\}}, \mu\{C_n\}^{pY\{Cn\}}\ \}\ \} \qquad (29)$$

5.3 La Progamación Dinámica Difusa

La Programación Dinámica Difusa (*PDD*) está basada en los *principios de optimalidad* propuestos por [Bellman & Dreyfus, 1962; Bellman & Zadeh, 1970], y, a través de la variante aquí propuesta, *propende a la inclusión de incertidumbres no estocásticas en el problema a resolver*. Para ello se soporta en *Conjuntos Difusos*, asociados a cada uno de los *n* criterios, mediante los cuales se define la *aptitud de cada estado posible*, en la evolución de un sistema cuya trayectoria quiere optimizarse. Requiere un *dominio uniforme para todas las variables* (asociadas a los *n* criterios), en el mismo Espacio Difuso de Decisión, y las *variables de aprtamiento* sobre cada criterio, constituyen una muy pertinente solución al respecto [Schweickardt & Miranda, 2009]. Como breve introducción, que puede ser profundizada en las referencias citadas, se describe, primeramente, la técnica de Programación Dinámica Clásica o Determinística (sin *incertidumbres* y con una única Función Objetivo a Optimizar). El problema de *optimización dinámica* debe ser divisible en *etapas*, las cuales tienen cierto número de *estados*. Existe, adicionalmente, una *función de transición entre estados de etapas contiguas*, la cual pretende ser *minimizada o maximizada en toda la trayectoria de evolución del sistema para las etapas establecidas*, constituyéndose en la Función Objetivo. Por ejemplo: considérese el mismo caso analizado en el presente trabajo, un SDEE, cuyas *etapas* son los años que conforman el Período de Control Regulatorio. Ha sido identificado un conjunto de *estados factibles* (variantes de equipamiento eléctrico de las redes) para cada *etapa*, a los cuales el sistema podría arribar desde cualquier *estado* de una *etapa* precedente. Además, *existe un único criterio a minimizar*, el Costo de Inversión Anual Total (incluye el de Operación y Mantenimiento del SDEE) para tal período. La *función de transición*, es, entonces, el Costo de Inversión Anual, puesto que se pasa de un *estado* perteneciente al año/etapa *k-1*, a otro perteneciente al año/etapa *k*, con una Inversión Anual requerida según la *transición entre ambos estados* (variante de equipamiento). Evolucionando de este modo, la *dinámica* recibe el nombre de *forward* o *hacia adelante*. La *política de evolución óptima* (Costo de Inversión Annual Total Mínimo) es obtenida mediante el Principio de Optimalidad de Bellman, el cual se establece formalmente como: asúmase que la Función Objetivo, *f*, debe ser *minimizada*; la *función de trancisión* es *Ftr*; se tienen *m etapas*, indicando con *k* a la *etapa genérica* en *[1…m]*, con *j* al *estado genérico* de la etapa *k*, y con *i* al *estado genérico* de la etapa *k-1*. Entonces *la política que conduce a la función f óptima (mínima), indicada como f*, resulta de la aplicación recursiva de la expresión*:

$$\forall\ i \text{ en } k-1,\ j \text{ en } k \text{ con } k \text{ en } [1\ldots m]$$
$$f^*(j,k) = Min\ \{\ f^*(i,k-1) + Ftr[\ (i,k-1), (j,k)\ ]\ \} \qquad (30)$$

La *recursión* tiene lugar cuando $k = m$, puesto que la trayectoria se reconstruye “hacia atrás”, al igual que en la recuperación de los elementos de una pila, cuyos valores son los de la *función de transición* entre estados. Al arribar al *estado de referencia o* *partida*, se obtiene el *f* total Mínimo*, en este caso.

Si este modelo *se extiende al dominio multicriterio no-determinístico, y las incertidumbres del sistema son de carácter no-estocástico*, entonces se presenta el Principio de Optimalidad de Bellman-Zadeh, el cual soporta la Programación Dinámica Difusa. El mismo es formulado en términos de la *decisión estática difusa* dada por (29), a la que se adiciona, en la *confluencia intersección*, el *vínculo dinámico con la etapa previa*, valor *más satisfactorio* alcanzado en la misma (*decisión maximizante*). Es decir:

$\forall$ *i* en *k-1*, *j* en *k* con *k* en *[1...m]*

$$\mu\{D\}^*(j, k) = MAX_{(i,\, k-1)}\{ Min \{\mu\{C_1\}^{pY\{C1\}}, ..., ..., ..., \mu\{C_{n-1}\}^{pY\{Cn-1\}}, \mu\{C_n\}^{pY\{Cn\}}, \mu\{D\}^*(k-1)\} \} \quad (31)$$

μ{D}(k-1)} es el vínculo dinámico entre k y k-1.*

Así, *la política óptima de evolución en la PDD, maximiza la decisión adoptada dinámicamente obteniendo, en k = m etapas, el nivel de satisfacción de la trayectoria* más satisfactoria*, TMS, por la que debería evolucionar el sistema*, indicado como μ{D}*. Por todo lo dicho, el Modelo Posibilístico de Optimización Dinámica propuesto en el presente trabajo, quedará formalmente establecido como sigue:

Sea un conjunto de *n* criterios de optimización, *{C}*, que definen el mérito en la planificación de un SDEE (sin pérdida de generalidad, pues puede ser cualquier otro sistema), en *m* etapas, coincidentes con los años del Período de Control Regulatorio. Sea *ui* la *variable de apartamiento* solidaria a cada criterio *i*-ésimo, sobre los cuales se han establecido las preferencias fijadas por el Vector de Prioridades de Yager, $pY(C_i)$, y definido los Conjuntos Difusos $\mu_{\{C1\}}(u_i)$, con *i* en *[1..n]*. Entonces se trata de encontrar la *decisión maximizante μ{D}** en la etapa *k = m*, a partir de la estrategia (31), *sujeta a las siguientes restricciones*: 1) $MP_A(\alpha c)$ invariante en la *TMS* alcanzada y 2*) [1-μ{D}*] ≤ ΘExt*.

La restricción 1), establece que las preferencias sean invariantes al aplicar la PDD, aquellas establecidas por el Vector de Prioridades de Yager en la Etapa I del Modelo propuesto. En caso contrario, el Modelo completo *no será consistente*.

La restricción 2), merece una breve digresión: al presentar un Conjunto Difuso, se indicó que existe, para cierto *nivel de satisfacción* α =α*c*, un Segmento de Confianza en el cual, se espera, las *variables de apartamiento* tengan sus ocurrencias. Pero como el dominio es incierto, puede que no las tengan, y se presenten valores en la planificación que alterarían la TMS. Por tanto, *las incertidumbres, suponen un riesgo: a menor nivel de satisfacción alcanzado, las ocurrencias en ui son más toleradas, considerando que aumenta la amplitud del* Segmento de Confianza (Ver la Figura 1). De manera que tales ocurrencias *pueden resultar inaceptablemente alejadas respecto del valor establecido como referencia, para la variable solidaria al criterio en estudio que ha impuesto μ{D}**. Como μ*{D}** está normalizada, por definición, en [0, 1], puede construirse un parámetro, indicado como su complemento a 1, que se denominará Riesgo Intrínseco de la *TMS*, expresado como *[1- μ{D}*]* [Schweikardt y Miranda, 2009]. Por tanto, el tomador de decisiones d*ebe fijar un valor de riesgo externamente, dependiente de su propensión o aversión al mismo, por encima del cual la TMS obtenida se vuelve inaceptable*. Este valor se denominará Riesgo Extrínseco, ΘExt, también adoptado en [0, 1]. De modo que la restricción 2) establece que *el Riesgo Intrínseco de la TMS, resulte inferior o a lo sumo igual al Riesgo Extrínseco impuesto por el planificador*. Puede observarse, según la expresión (31), que *μ{D}**, dado el vínculo dinámico entre etapas contiguas, es impuesto por algún *estado* de la *TMS* que no tiene por qué ser el correspondiente a la *etapa k = m*. A tal *estado*, se lo denominará *crítico*. Una vez obtenida la *TMS*, si la restricción 2) no se cumpliera, las alternativas, no excluyentes, serían, previo a *re-optimizar*: a) Modificar la $MP_A(\alpha c)$, b) Eliminar el *estado crítico*, y/o c) Modificar algunas o todas las *funciones de pertenencia* de los *conjuntos difusos* solidarios a cada criterio. Satisfecha la restricción 2), cada estado de la *TMS* tendrá un *nivel propio de satisfacción*, que no será resultado de *μ{D}**, ya que el mismo corresponde a la trayectoria. En este aspecto *estriba la propuesta de solución correspondiente a la* Etapa III: *el cálculo del Costo Intrínseco de la variable asociada a un criterio cuya valoración económica se desconoce* (la Calidad Ambiental SDEE, para el objetivo pretendido). Se desarrolla en la sección siguiente.

6. ETAPA III: DETERMINACIÓN DEL COSTO INTRÍNSECO

Es posible establecer una *medida de satisfacción estática* para cada uno de los *estados* que compone la *TMS*. Tal medida será designada como $\mu(j,\, k)^*S$, indicando que el *estado (j, K)** pertenece a la *política de planificación óptima*. Como se dijo, los operadores entre *funciones de pertenencia* utilizados para evaluar *méritos* en toma de *decisiones difusas estáticas*, reciben el nombre de *t-norma*. Una *t-norma*, es una *función t*, definida en el intervalo [0, 1] y aplicada también en [0, 1], que satisface las siguientes condiciones: si *t*: [0, 1] → [0, 1], entonces: **a.-** t*(0,0) = 0*; *t(x,1) = x → Condiciones de Frontera*; **b.-** *t(x,y) = t(y,x) → Conmutatividad*; **c.-** si *x ≤ α* e *y ≤ β t(x,y) ≤ t(α,β) → Monotonicidad* y **d.-** *t((t(x,y),z) = t(x,t(y,z)) → Asociatividad*.

Lógicamente, el *operador Min*, empleado en la *PDD*, es una *t-norma*, pero no sirve a la finalidad buscada, puesto que no permite expresar *μ(j, k)*S* , como una *función contínua y derivable respecto de las* $\mu_{\{Ci\}}(u_i)$, para cada criterio *i*-ésimo. Es necesaria esta condición a efectos de analizar *los cambios diferenciales que se producen en el nivel de satisfacción μ(j, k)*S, al producirce un cambio diferencial en alguna de las variables ui y, por* *consiguiente, en su $\mu_{\{Ci\}}(u_i)$ asociada*. Para el tipo de Conjunto Difusos considerados, toda $\mu_{\{Ci\}}(u_i)$ será *contínua* y *derivable* respecto de *ui*; por tanto, siendo *μ(j, k)*S* una *función de funciones*, debe imponérsele la condición anterior. La *t-norma* que ha resultado más apropiada para la finalidad buscada, *un nivel de satisfacción estático*, recibe el nombre de Producto de Einstein, $_{tPE}$. Se define como sigue. Sean *x* e *y* dos *funciones de pertenencia* genéricas, entonces:

$$t_{PE}(x,y) = \frac{x \times y}{2 - (x + y - x \times y)} \tag{32}$$

Como existe *conmutatividad* y *asociatividad* en *tPE*, si se tuviesen más *funciones de pertenencia*, asociadas a los criterios que definen el *mérito estático* de cierto *estado*, la operación resultaría: si *z* es una *función de pertenencia* en el conjunto *{x, y, z}*, entonces:

$$t_{PE}(x,y,z) = \frac{t_{PE}(x, y) \times z}{2 - (t_{PE}(x, y) + z - t_{PE}(x, y) \times z)} \tag{33}$$

Para avanzar sobre el Modelo propuesto, las *funciones de pertenencia* se referirán simplemente como μ*i*, y se asumirá, sin pérdida de generalidad, que *existen cinco criterios*: *n* = 5. Adicionalmente, como se pretende calcular *las variaciones incrementales del* Costo de Inversión Anual en el SDEE (*CI*), respecto de las *variaciones en el* índice de Impacto asociado a la Calidad Ambiental del sistema de redes (*ICA*), asumáse que las *funciones de pertenencia μ4* y *μ5,* son las correspondientes a estos dos criterios de optimización. Entonces deberá calcularse el *grado de satisfacción o mérito estático* de cada *estado (j, k)** de la *TMS* obtenida en la Etapa II, en el conjunto $\{\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu(uCI), \mu(uICA)\}$, como sigue:

$$\mu(j, k)^*S = t_{PE}(j,k) = t_{PE}(\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu(uCI), \mu(uICA))_{(j, k)}{}^* \tag{34}$$

donde *uCI* y *uICA*, son las *variables de apartamiento* correspondientes al Costo Anual de Inversión y al Índice de Impacto en la Calidad Ambiental del sistema de redes, respectivamente. Aplicando las propiedades de una *t-norma*, se tiene, en el *estado (j, k)**:

$$tPE1 = tPE(\mu 1, \mu 2)(j, k)^* = \frac{\mu_1 \times \mu_2}{2 - (\mu_1 + \mu_2 - \mu_1 \times \mu_2)} \tag{35}$$

$$tPE2 = tPE(\mu 1, \mu 2, \mu 3)(j, k)^* = \frac{t^1_{PE} \times \mu_3}{2 - (t^1_{PE} + \mu_3 - t^1_{PE} \times \mu_3)} \tag{36}$$

En este punto del cálculo, a los efectos de que las dos variables *μ(uCI)*, *μ(uICA)* queden explícitas, se logra la siguiente expresión para la μ(j, *k)*S* = $t_{PE}(j,k)$:

$$\mu(j, k)^*S = t_{PE}(\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu(uCI), \mu(uICA))_{(j, K)}{}^* =$$

$$\frac{\mu(uCI) \times \mu(uICA) \times t_{PE}{}^2}{\left\{\begin{array}{l} 2 \times \left[2 - \left(\mu(uCI) + t_{PE}{}^2 - \mu(uCI) \times t_{PE}{}^2\right)\right] - \\ \mu(uICA) \times \left[2 - \left(\mu(uCI) + t_{PE}{}^2 - \mu(uCI) \times t_{PE}{}^2\right)\right] - \\ \mu(uCI) \times t_{PE}{}^2 + \mu(uICA) \times \mu(uCI) \times t_{PE}{}^2 \end{array}\right\}} \tag{37}$$

y desde aquí se obtiene, para el nivel de satisfacción μ(j, *k)*S*:

$$\mu(uCI) = \frac{\mu(j,k)^*_S \times \mu(uICA) \times \left(2 - t_{PE}{}^2\right) + 2 \times \mu(j,k)^*_S \times t_{PE}{}^2 - 4 \times \mu(j,k)^*_S}{\left[\mu(j,k)^*_S \times t_{PE}{}^2 + \mu(uICA) \times \left(\mu(j,k)^*_S - t_{PE}{}^2\right) - 2 \times \mu(j,k)^*_S\right]} \tag{38}$$

Se intenta encontrar *una expresión que relacione los cambios diferenciales en* la variable *CI cuando se producen cambios diferenciales en la variable* ICA, asumiendo que no existen cambios en los niveles de satisfacción de los restantes criterios (*ceteris paribus*), y que el *nivel de satisfacción o mérito estático* del *estado (j, k)** de la *TMS* obtenida, *μ(j, k)*S*, *no se modifica*.

Además, como los *valores de referencia* adoptados en las Variables de Apartamiento solidarias a cada criterio de optimización son constantes del Modelo, la expresión (38) puede formularse como:

$$\mu(CI) = f(\mu(ICA)) \tag{39}$$

Despejando *CI* (expresada como función inversa):

$$CI = \mu^{-1}{}_{CI}\left(f\left(\mu(ICA)\right)\right) \tag{40}$$

Luego, derivando como función de función, a partir de las condiciones establecidas de derivabilidad, y considerando implícitamente (a los efectos de no agregar más complejidad a las expresiones de todo este desarrollo), que todas las *funciones de pertencia* involucradas), $\mu_{\{Ci\}}(u_i)$, están ponderadas por su respectivo componente del Vector de Yager, $pY(C_i)$, se obtiene, finalmente:

$$\frac{dCI}{dICA} = \left(\frac{d\mu^{-1}(CI)}{df}\right) \times \left(\frac{\partial f}{\partial \mu(ICA)}\right) \times \left(\frac{d\mu(ICA)}{dICA}\right) \tag{41}$$

La expresión (41) resulta *negativa*, porque $\left(\frac{\partial f}{\partial \mu(ICA)}\right)$ lo será. Tiene, la forma de un *costo marginal asociado aociado a la variable genérica ICA*. Entonces Puede interpretarse *como el incremento de costo de la última unidad de calidad ambiental producida*. Si se adopta la *no calidad producida* como *referencia* o *penalización*, entonces *cambia el signo*, definiéndose *positivo*. Por otro lado, este costo *no es fijado externamente, sino que dependerá de la estructura datos-representación del modelo propuesto*. Desde aquí que se lo designará como Costo Intrínseco de la Calidad Ambiental del SDEE, *por unidad de impacto* (supraíndice *u*), y su forma operacional será:

$$C^u{}_{ICA} = \left|\frac{dCI}{dICA}\right| \tag{42}$$

7. CONCLUSIONES

1ra) Se han presentado los desarrollos teóricos de un novedoso Modelo que, incorporando elementos de la Matemática y Computación Difusa, como lo son los Conjuntos Difusos y la Programación Dinámica, propende a la Valoración Económica de variables carentes de la misma, debido a las razones expuestas en la introducción. Específicamente, para los Sistemas de Distribución de Energía Eléctrica, son consideradas las variables asociadas a la Calidad Ambiental y del Servicio Eléctrico (Continuidad del Suministro). El Modelo referido como de Optimización Dinámica Posibilística (Multi-Criterio) se orienta, en un esquma de tres Eapas, al cálculo del aquí presentado como Costo Intrínseco de la variable genérica en estudio. Este Modelo Teórico general, es muy flexible, admitiendo variantes como la que se presentará en la segunda parte del presente trabajo, en el Estudio de Caso correspondiente a la valoración económica de la Energía no Suministrada ante interrupciones, aspecto vinculado a la Calidad de Servicio Eléctrico.

2da) Es importante destacar que las Funciones de Pertenencia correspondientes a cada Conjunto Difuso, solidario a los criteros de optimización, constituyen una función de satisfacción, un medida normalizada de utilidad que la variable que define el criterio, produce en los agentes del sistema, representados por la Autoridad Regulatoria. Idénticamente ocurre con los valores de la Desición Maximizante en cada estado de la Trayectoria Más Satisfactoria, ponderada mediante la t-norma Producto de Einstein. En este caso, tal valor resulta en la utilidad o satisfacción máxima combinada, en la que intervienen todos los criterios. Este es el aspecto central del Modelo, pues la eficiencia asignativa resulta de un cálculo, y cada criterio tiene su importancia predefinida, siendo de tal modo posible determinar su Costo de Oportunidad: el Costo Intrínseco.

3ra) Si bien el Costo Intrínseco calculado mediante la expresión (42) tiene la forma de un Costo Marginal, es claro que el Modelo propuesto en el presente trabajo nada tiene que ver con el Principio del Costo Marginal y sus supuestas "bondades", según propicia el Paradigma Neo-Clásico. Al contrario, los presupuestos ontológicos que subyacen en la metodología presentada, Racionalidad Acotada e Incentidumbre Fundamental, pertenecen al Paradigma Post-Keynesiano, en oposición a la Racionalidad Completa y la Incertidumbre de Probabilidad o Certeza Estocástica, propios del Paradigma Neo-Clásico. La Maximización de la Utilidad compuesta en cierto estado de la TMS, no requiere como condición de 1er Orden que el precio de la No Calidad EA se iguale a su Costo Intrínseco, o se aparte "óptimamete" del mismo, tal como lo procuran las soluciones de 2do Mejor (Precios Ramsey) en las consideradas formas restringidas de competencia, como lo es un Monopolio Natural No Disputable en un SDEE.

REFERENCIAS

Bellman, R.; Zadeh, L. (1970): "*Decision-Making in a Fuzzy Environment*". Management Science, 17, pgs. 141-164.

Doubois D., Prade H. (1980): "*Fuzzy Sets and Systems: Theory and Applications*". New York, London, Toronto Press.

Kaufmann A., Gupta M. (1985): "*Introduction to Fuzzy Arithmetic. Theory and Applications*". Van Nostrand Reinhold Electrical/Computer Science and Engineering Series.

Lavoie M. (1992): "*Foundations of PostKeynesian Economic Analisys*". Edward Elgar Publishing.

Lax P. (1997): "*Linear Algebra*". Wiley Interscience: New York.

Saaty T. (1977): "*A Scaling Method for Priorities in Hierarchical Structures*". Journal of Mathematical Psycology, 15, 234-281.

Schweickardt G., Miranda V. (2009): "*A Two-Stage Planning and Control Model Toward Economically Adapted Power Distribution Systems using Analytical Hierarchy Processes and Fuzzy Optimization*". International Journal of Electrical Power & Energy Systems. ELSEVIER. Vol. 31, issue 6 pp. 277-284.

Schweickardt G., Pistonesi H. (2007): "*Discusión sobre el Concepto de Sistema Económicamente Adaptado aplicado a las Redes de Distribución Eléctrica*". *Revista Energética*, Universidad Nacional de Colombia, Medellín, 37, 53-65.

Yager R. (1977): "*Multiple Objective Decision Making using Fuzzy Sets*". Intl. J. Man-Machine Studies. 9, 53-64.

Zadeh L. (1971): "*The Concept of a Linguistic Variable and its Application to Aproximate Reasoning*". *Memorandum ERL*- 411, Berkeley.