

DESARROLLO DE UN MÓDULO DE CONSTRUCCIÓN DEL MODELO DINÁMICO INVERSO PARA UN MANIPULADOR ROBÓTICO INDUSTRIAL

Hossian, Alejandro[‡]. Alveal, Maximiliano¹. Carabajal, Roberto¹. Echeverria, Cesar¹. Merlino, Hernan^{2‡}

¹Universidad Tecnológica Nacional.

[‡]Facultad Regional del Neuquén. Av. Pedro Rotter s/n, Plaza Huincul, Neuquén, Argentina.

²Universidad Nacional de Lanús.

[‡]29 de septiembre 3901, Remedios de Escalada, Lanús, Buenos Aires, Argentina.

Recibido noviembre 2020; aceptado diciembre 2020

Abstract

Analytical mechanics is a solid mathematical tool for modeling mechanical systems. The "Dynamic Model" of a robotic manipulator analyzes the relationship between the movement produced in the robot and the torques/forces applied to its joints. A process of construction of the dynamic model of a manipulator robot is presented based on the formulation of the Lagrange equations, which describe the dynamics of a manipulator robot by balancing the kinetic and potential energy of its links). With this model, physical phenomena such as: "Inertial Effects" - "Centripetal and Coriolis Forces" - "Gravitational Couple" and "Friction" are analyzed. This process has as "input inputs" the dynamic parameters (masses, lengths and moments of inertia of links) and the homogeneous transformation matrix supplied by direct kinematic model and as "output products" the forces and torques that are due apply to each joint.

Resumen

La mecánica analítica constituye una sólida herramienta matemática para formular modelos de sistemas mecánicos. El "Modelo Dinámico" de un manipulador robótico analiza la relación entre el movimiento producido en el robot y los pares/fuerzas aplicados en las articulaciones del mismo. Se presenta un proceso de construcción del modelo dinámico de un robot manipulador en base a la formulación de las ecuaciones de Lagrange, las cuales describen la dinámica de un robot manipulador mediante el balance de la energía cinética y potencial de sus eslabones). Con este modelo se analizan fenómenos físicos como: "Efectos Inerciales" – "Fuerzas Centrípetas y de Coriolis" – "Par Gravitacional" y "Fricción". Este proceso posee como "insumos de entrada" los parámetros dinámicos (masas, longitudes y momentos de inercia de eslabones) y la matriz de transformación homogénea suministrada por modelo cinemático directo y como "productos de salida" las fuerzas y pares de torsión que se deben aplicar en cada articulación.

Key words: Dynamic Model, Lagrange, Inertial Effects, Centripetal Forces, Coriolis, Gravitational Torque, Friction

Palabras clave: Modelo Dinámico, Lagrange, Efectos Inerciales, Fuerzas Centrípetas, Coriolis, Par Gravitacional, Fricción

I. INTRODUCCIÓN

El modelo dinámico (Reyes Cortes, 2011) del robot manipulador permite explicar una gran variedad de fenómenos físicos presentes en la estructura mecánica del sistema – robot; tales como, fuerzas centrífugas y de Coriolis (Barrientos *et al.*, 2004), efectos inerciales, par gravitacional y fenómenos de fricción (viscosa, Coulomb y estática). Estos fenómenos son intrínsecos de la naturaleza dinámica del robot (Santos, 2004). En la Figura 1 se ve la relación entre momentos de torsión τ , las variables articulares Θ y la trayectoria (T) que desarrolla el extremo del robot desde un punto A hasta el B.

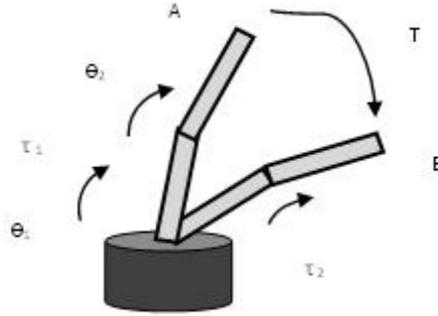


Figura 1. Relación entre los momentos de torsión τ , las variables articulares Θ y la trayectoria (T) que desarrolla el órgano terminal del robot desde un punto A hasta el B

El grupo de investigación en “Robótica aplicada a la Ingeniería” desarrolla un modelo de proceso de investigación en base a tres fases que procuran optimizar el diseño de un manipulador robótico industrial. La primera fase corresponde a la Cinemática del Robot, para la obtención de los Modelos Cinemático Directo e Inverso y del Modelo Diferencial de los manipuladores robóticos industriales; la segunda fase corresponde a la Dinámica del Robot, que se aplica a la obtención del Modelo Dinámico de estos brazos; y una tercera fase vinculada a los aspectos que hacen al Control del Robot, cuyos algoritmos permiten mejorar las características de velocidad y precisión. El problema que se analiza en este artículo se encuadra dentro de la segunda fase del modelo de proceso de investigación, correspondiente a la Dinámica del Robot (Hossian *et al.*, 2016)

El modelo de proceso de investigación y desarrollo con sus tres fases (Cinemática del Robot, Dinámica del Robot y Control del Robot), se detalla en la Figura 2.

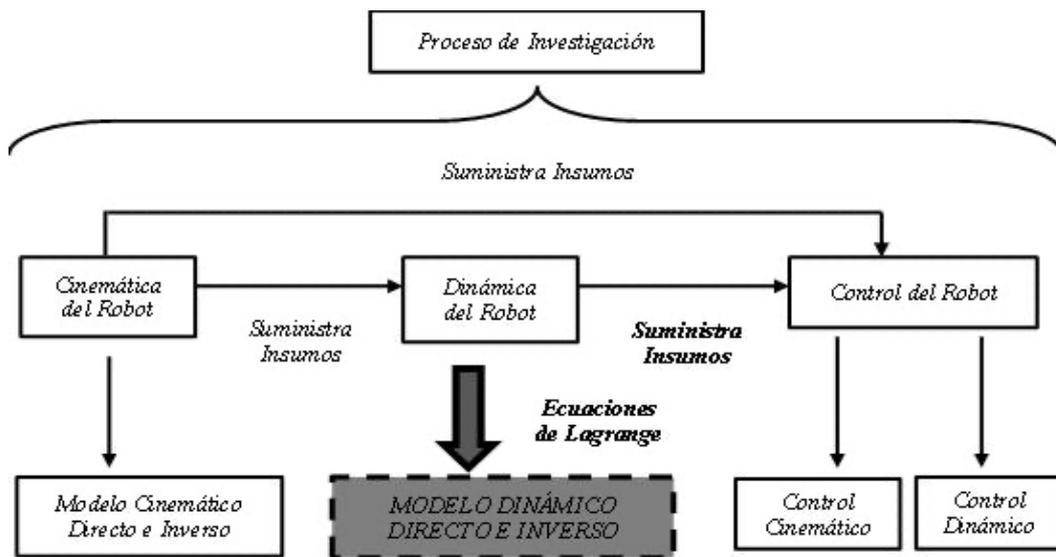


Figura 2. Modelo de Proceso de Investigación y Desarrollo

Se resalta el Modelo Dinámico Directo e Inverso y su vinculación con la fase de Dinámica del Robot; así como también, el suministro de insumos entre las diferentes fases del proceso. La fase de cinemática debe suministrar a la de dinámica las ecuaciones cinemáticas necesarias para desarrollar los balances de energía que exige la formulación Lagrangiana. Para obtener el modelo dinámico inverso es preciso contar con la forma adaptada de las ecuaciones de Lagrange; las cuales son suministradas desde la fase de dinámica del robot al módulo de construcción de los modelos dinámicos directo e inverso. Por su parte, la fase de cinemática del robot genera referencias a las fases de dinámica y control del robot (Arntz *et al.*, 2016); y la fase de dinámica suministra insumos a la fase de control, para la realización del control dinámico (Bartlett, 2015).

En las siguientes sub – secciones siguientes se analizan los aspectos fundamentales del proceso de construcción.

II. DESCRIPCIÓN DEL PROBLEMA

a. Descripción global del módulo de construcción del modelo dinámico

El proceso de construcción del modelo dinámico del manipulador robótico se sustenta en la mecánica Lagrangiana. Los insumos de entrada que recibe este proceso; son los parámetros dinámicos (masas, longitudes y momentos de inercia de eslabones), y los que suministra el módulo cinemático (la matriz de transformación homogénea con la información de las coordenadas cartesianas del extremo en función de las variables articulares ($0p_n(t)$ en función de $q(t)$), respecto al sistema de referencia asociado a la base del robot). El producto que se obtiene a la salida de este proceso, es un vector (τ) de fuerzas y momentos de torsión aplicados en los actuadores de las articulaciones para obtener determinadas trayectorias articulares (posición, velocidad y aceleración).

En Figura 3 se ilustra se exhibe un esquema global con la entrada y la salida al módulo de construcción del modelo dinámico (directo e inverso) para la implementación del mencionado proceso. Cabe señalar, que se obtiene el vector τ en forma general conforme a la configuración del robot en cuestión, para luego hallar este vector τ para las trayectorias articulares en línea con las prestaciones que debe realizar el robot.

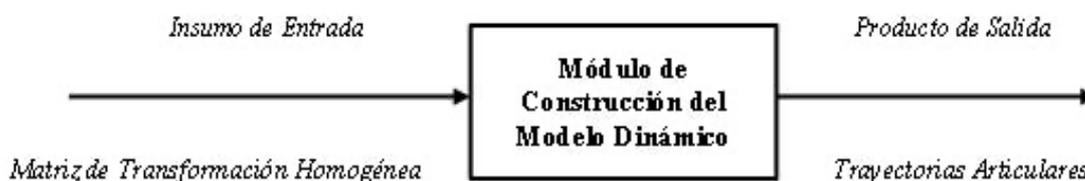


Figura 3. Insumos de Entrada y Producto de Salida al Módulo de Construcción del Modelo Dinámico

En las dos sub – secciones siguientes se analizan las características de las dos herramientas principales del proceso propuesto; considerando que ambas provienen de la mecánica analítica y se adaptan al análisis dinámico de un robot manipulador.

b. Aspectos fundamentales del modelo dinámico para un robot manipulador

La descripción matemática del modelo dinámico de un robot manipulador de n grados de libertad, está dada por la ecuación diferencial compleja y de naturaleza continua. Esta ecuación es multivariable con dinámica fuertemente acoplada y “no lineal” en el vector de estados $[q^T, \dot{q}^T]^T$; además de ser válida para un robot con una estructura en cadena cinemática abierta, que no incluye el fenómeno de elasticidad en la ecuación (1).

$$\tau(t) = M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) + F_f(\dot{q}, f_e) \quad (1)$$

Donde $\tau(t)$ es el vector de fuerzas o pares que se aplica a cada articulación, $q \in R^n$ es el vector de posiciones articulares o coordenadas generalizadas², $\dot{q} \in R^n$ es el vector de velocidades articulares, $\ddot{q} \in R^n$ es el vector de aceleraciones articulares. A su vez, el modelo dinámico posee propiedades fundamentales para el estudio del control de robots manipuladores; las cuales están asociadas a cada uno de los términos.

Efectos inerciales: está representado por el producto entre la matriz de inercia y la aceleración articular $M(q)\ddot{q}$, y cuyo principal significado se manifiesta en el cambio de estado de movimiento del robot. A su vez, la matriz $M(q)$ (siendo n los grados de libertad del robot) es una matriz simétrica $M(q) = M(q)^T$, definida positiva $M(q) > 0$ y, por lo tanto, que admite inversa ($\exists M(q)^{-1}$). Los elementos de la matriz M dependen de las variables articulares y sus coeficientes son expresiones que incluyen las masas concentradas y las longitudes entre ellas.

Fuerzas Centrípetas y de Coriolis: $C(q, \dot{q}) \in R^{n \times n}$ es la matriz de fuerzas centrípetas (fuerzas radiales en movimientos curvilíneos hacia adentro del centro de curvatura) y de Coriolis (esta fuerza representa la desviación del movimiento de traslación a raíz de su componente de rotación (Colvin *et al.*, 2014) y, al igual

¹ Para la especificación de las trayectorias articulares, se usa en forma indistinta $q(t)$ y $\Theta(t)$. De igual manera para sus derivadas.

² Para estas coordenadas se destaca que pueden variar cada una físicamente independientemente de la otra.

que la matriz $M(q)$, también es vital en el estudio de la estabilidad del sistema de control del robot (Brynjolfsson y McAfee, 2014), .A su vez, $(C(q, \dot{q}))_{mn}$ depende de q y \dot{q} y no es única; pero el vector $C(q, \dot{q})_{mn} \cdot \dot{q}_{mi}$ si lo es. Las fuerzas centrípetas son radiales y se originan debido al movimiento de rotación; mientras que las fuerzas de Coriolis, se deben al movimiento relativo existente entre los distintos elementos que dependen de la configuración instantánea del manipulador, y siempre contienen el producto de dos velocidades de articulación distintas.

Efecto gravitacional: $G(q) \in R^n$ es el vector de pares gravitacionales (vector gradiente de la energía potencial) y depende de las variables articulares q_i .

Efecto de fricción: el vector $F_f(q, \dot{q}) \in R^n$ es el vector de pares de fricción (viscosa, Coulomb y estática) de cada articulación del manipulador. Este fenómeno posee el efecto físico de oponerse al movimiento del robot. Un modelo clásico de fricción es el que combina la fricción viscosa y la de Coulomb, el cual depende de la velocidad de la variable articular y está dado por el vector $F_f(\dot{q}) = f_{m1} \dot{q} + f_{m2} \text{sign}(\dot{q})$. Donde f_{m1} y f_{m2} son matrices diagonales definidas positivas. Los elementos de la diagonal de f_{m1} son los parámetros de la fricción viscosa, y los de f_{m2} son los de la fricción de Coulomb. La fricción es un fenómeno disipativo (no conservativo) que se traduce en desgaste de las partes mecánicas del sistema; por lo es complejo modelar con exactitud estos términos.

c. Aspectos fundamentales de la formulación lagrangiana

Las ecuaciones de Lagrange permiten describir la dinámica de un manipulador mediante un balance de energía, la cual se expresa en términos de la energía cinética y potencial de sus eslabones. Para realizar la formulación Lagrangiana, es preciso contar con la cinemática directa del manipulador, lo que brinda la posibilidad de llevar a cabo cuatro procedimientos de cálculo: A) cálculo de la energía cinética ($K(q(t), \dot{q}(t))$), B) cálculo de la energía potencial ($U(q(t))$), C) cálculo del Lagrangiano ($L = K(q(t), \dot{q}(t)) - U(q(t))$) y D) formulación de las ecuaciones escalares dinámicas de movimiento de Lagrange para un robot manipulador de n grados de libertad (gdl); las cuales se desarrollan para cada uno de ellos, donde el miembro $\tau - F_f(q, \dot{q})$ se refiere a fuerzas o pares no conservativos en cada articulación visto en la ecuación (2).

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L(q, \dot{q})}{\partial \dot{q}_i} \right] - \frac{\partial L(q, \dot{q})}{\partial q_i} = \tau - F_f(q, \dot{q}) \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2)$$

d. Desarrollo del módulo de construcción del modelo dinámico

Como se detalló en la sección a., este módulo presenta como “insumos de entrada” los parámetros dinámicos (masas, longitudes y momentos de inercia de eslabones) la matriz de transformación homogénea suministrada por modelo cinemático directo. Por su parte, este proceso provee como “producto de salida” las fuerzas y pares de torsión que se deben aplicar en cada articulación, ajustados a las trayectorias articulares que se proponen. De acuerdo al esquema global de Figura 3, en la Figura 4 se exhibe el núcleo de aplicación del proceso; el cual se conforma de tres fases que permiten obtener las fuerzas y pares de torsión $\tau = \tau(q(t), \dot{q}(t), \ddot{q}(t))$. La 1ra fase desarrolla la “Formulación Lagrangiana” mediante los cuatro procedimientos citados en sub – sección 2.3. En la 2da fase se obtienen los pares de torsión en forma matricial; en otros términos, el modelo dinámico inverso general en función de la configuración del robot manipulador que se estudia. Para la realización de la 3ra fase se incorporan las trayectorias articulares $(q(t), \dot{q}(t), \ddot{q}(t))$. Se calculan los pares de torsión a aplicar en las articulaciones del robot para que el extremo del robot respete dichas trayectorias; una vez que se consideren los fenómenos de fricción u otras perturbaciones. Cabe señalar, que los resultados obtenidos constituyen importantes referencias hacia el módulo de control dinámico, siendo sustanciales en el diseño del sistema de control del robot.

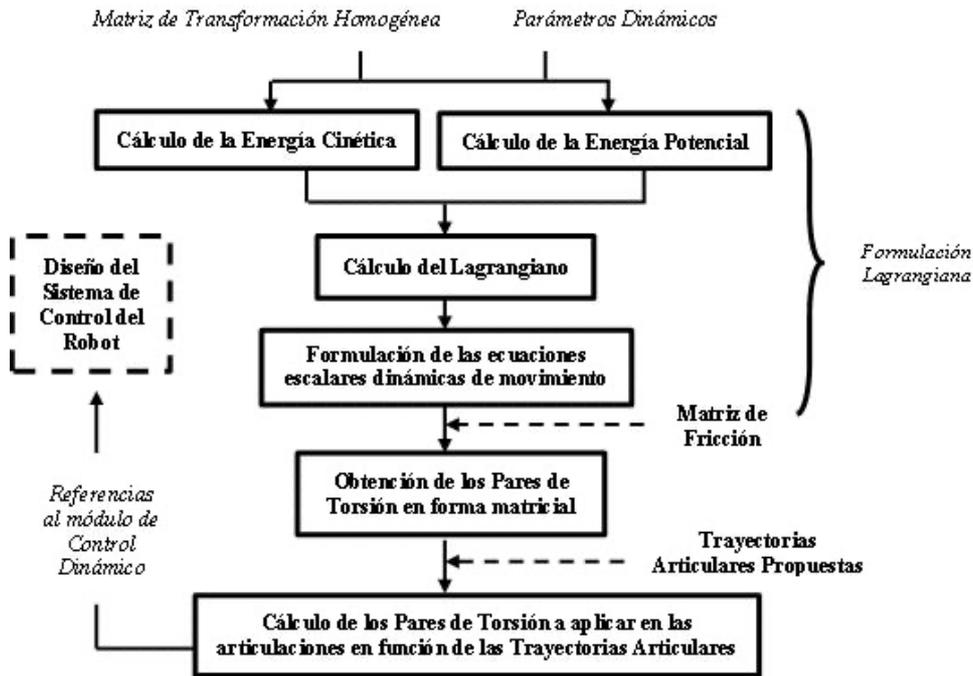


Figura 4. Núcleo y desarrollo del Proceso del Módulo de Construcción del Modelo Dinámico

e. Condiciones experimentales

En la Figura 5 se ilustra un manipulador robótico de dos (gdl) con 2 articulaciones rotacionales (RR) y 2 eslabones rígidos, donde la muñeca se considera fija.

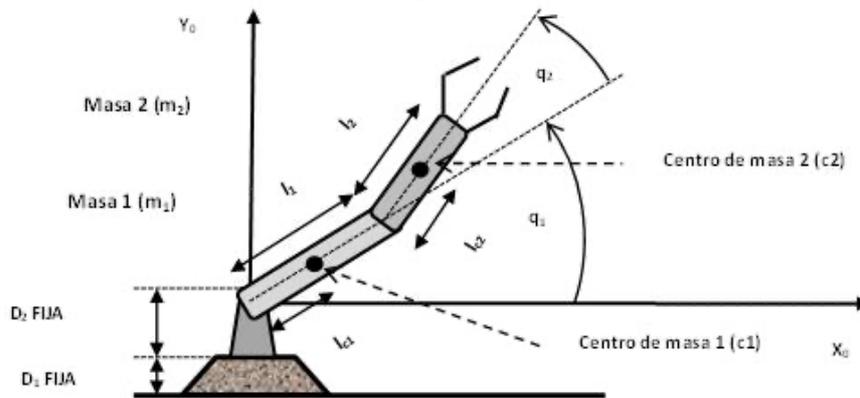


Figura 5. Manipulador Robótico Industrial de 2 Grados de Libertad

Insumos de entrada al proceso: 1) parámetros dinámicos: longitudes y masas de eslabones (l_1, l_2, m_1 y m_2), distancias entre los centros de masas (c_1 y c_2) y los ejes de giro (l_{c1} y l_{c2}) y los momentos de inercia de cada eslabón con respecto al eje que pasa por su centro de masa (J_1 y J_2). 2) matriz de transformación homogénea respecto a la base, la cual, la última columna indica las componentes (x, y) del vector posición del extremo del robot, respecto al sistema de referencia asociado a la base $S_0(X_0, Y_0)$.

$${}^0T_2 = \begin{bmatrix} c_{12} & -s_{12} & 0 & l_1 c_1 + l_2 c_{12} \\ s_{12} & c_{12} & 0 & l_1 s_1 + l_2 s_{12} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

³ Se abrevia $\cos(q_1) = C_1, \cos(q_2) = C_2, \cos(q_1 + q_2) = C_{12}, \sin(q_1) = S_1$ & $\sin(q_1 + q_2) = S_{12}$

Se inicia el Proceso del Módulo de Construcción del Modelo Dinámico, conforme a sus 3 fases para obtener las fuerzas y pares de torsión en las articulaciones del robot.

Fase I: Formulación Lagrangiana: se desarrollan los 4 procedimientos.

Cálculo de la Energía Cinética ($K(q(t), \dot{q}(t))$): la energía cinética total del robot es la suma de la energía almacenada en cada eslabón ($K_{Total} = K_1 + K_2$). Para cada eslabón, la energía cinética total es la suma de traslación más la de rotación. De la cinemática diferencial se obtiene las coordenadas y velocidades del CM de cada eslabón. Para el eslabón 1: $x_1 = l_{c1}C_1$ y $y_1 = l_{c1}S_1$; luego es:

$$v_1 = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{y}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -l_{c1}S_1 \dot{q}_1 \\ l_{c1}C_1 \dot{q}_1 \end{bmatrix}; \text{ luego: } v_1^T \cdot v_1 = \begin{bmatrix} -l_{c1}S_1 \dot{q}_1 & l_{c1}C_1 \dot{q}_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -l_{c1}S_1 \dot{q}_1 \\ l_{c1}C_1 \dot{q}_1 \end{bmatrix} = l_{c1}^2 \cdot \dot{q}_1^2; \text{ la energía cinética de traslación del eslabón 1 es: } K_{1T} = \frac{1}{2} m_1 l_{c1}^2 \cdot \dot{q}_1^2, \text{ y la de energía cinética de rotación es: } K_{1R} = \frac{1}{2} J_1 \cdot \dot{q}_1^2$$

La energía cinética total del eslabón 1 es igual a la suma de ambas contribuciones donde se observa en la ecuación (3)

$$K_1(q, \dot{q}) = K_{1T} + K_{1R} = \frac{1}{2} m_1 l_{c1}^2 \cdot \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} J_1 \cdot \dot{q}_1^2 \quad (3)$$

Análogamente, para el eslabón 2 es: $x_2 = l_1C_1 + l_2C_2$, $y_2 = l_1S_1 + l_2S_2$. Aquí se debe considerar que la energía cinética rotacional es la suma de las velocidades ($\dot{q}_1 + \dot{q}_2$). La energía cinética total del eslabón 2 es la de traslación más la de rotación, tal como figura en la ecuación (4).

$$K_2(q, \dot{q}) = K_{2T} + K_{2R} = \frac{1}{2} m_2 v_2^T v_2 + \frac{1}{2} J_2 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2; \text{ desarrollando esta expresión se tiene:}$$

$$K_2(q, \dot{q}) = \frac{m_2}{2} l_1^2 \dot{q}_1^2 + \frac{m_2}{2} l_2^2 (\dot{q}_1 + 2\dot{q}_1 \dot{q}_2 + \dot{q}_2^2) + m_2 l_1 l_2 (\dot{q}_1 + \dot{q}_1 \dot{q}_2) C_2 + \frac{1}{2} J_2 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2 \quad (4)$$

Para la energía cinética total se reemplaza 3) y 4) en $K_{Total} = K_1 + K_2$ obteniéndose la ecuación (5):

$$K_{Total}(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} m_1 l_{c1}^2 \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} J_1 \dot{q}_1^2 + \frac{m_2}{2} l_1^2 \dot{q}_1^2 + \frac{m_2}{2} l_2^2 (\dot{q}_1 + 2\dot{q}_1 \dot{q}_2 + \dot{q}_2^2) + m_2 l_1 l_2 (\dot{q}_1 + \dot{q}_1 \dot{q}_2) C_2 + \frac{1}{2} J_2 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2 \quad (5)$$

Obtención de la Energía Potencial: la energía potencial total del robot es la suma de la energía almacenada en cada eslabón, visualizado en la ecuación (6).

$$(U_{Total} = U_1 + U_2 = m_1 g l_{c1} S_1 + m_2 g (l_1 S_1 + l_2 S_2)) \quad (6)$$

Obtención del Lagrangiano: para esto se calcula la diferencia entre la energía cinética total y la energía potencial gravitatoria total. $L = K_{Total}(q(t), \dot{q}(t)) - U_{Total}(q(t))$

Luego, sustituyendo 5) – 6) en la expresión anterior se obtiene la ecuación (7):

$$L(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} m_1 l_{c1}^2 \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} J_1 \dot{q}_1^2 + \frac{m_2}{2} l_1^2 \dot{q}_1^2 + \frac{m_2}{2} l_2^2 (\dot{q}_1 + 2\dot{q}_1 \dot{q}_2 + \dot{q}_2^2) + m_2 l_1 l_2 (\dot{q}_1 + \dot{q}_1 \dot{q}_2) C_2 + \frac{1}{2} J_2 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2 - m_1 g l_{c1} S_1 - m_2 g (l_1 S_1 + l_2 S_2) \quad (7)$$

Formulación de las ecuaciones de Lagrange: de la ecuación 2) para cada coordenada generalizada q_1 y q_2 ⁴, se tienen las ecuaciones (8), (9), (10) y (11): derivando L respecto a la posición y velocidad articular de cada coordenada, tal como se observa en la Figura 6.

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L(q, \dot{q})}{\partial \dot{q}_1} \right] = [m_1 l_{c1}^2 + J_1 + J_2 + m_2 (l_1^2 + l_2^2 + 2l_1 l_2 C_2)] \ddot{q}_1 - [m_2 l_2 (l_1 C_2 + l_2) + J_2] \ddot{q}_2 - [2m_2 l_1 l_2 S_2] \dot{q}_1 \dot{q}_2 - [m_2 l_1 l_2 S_2] \dot{q}_2^2 \quad (8)$$

⁴ Se omite para este análisis los fenómenos de fricción (viscosa, Coulomb y estática) de cada articulación.

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L(q, \dot{q})}{\partial \dot{q}_2} \right] = [m_2 l_{c2}^2 + J_2] \ddot{q}_2 + [m_2 l_{c2} (l_1 C_2 + l_{c2}) + J_2] \ddot{q}_1 - [m_2 l_{c2} S_2] \dot{q}_1 \dot{q}_2 \quad (9)$$

$$\frac{\partial L(q, \dot{q})}{\partial q_1} = -g [(m_1 l_{c1} + m_2 l_1) C_1 + m_2 l_{c2} C_{12}] \quad (10)$$

$$\frac{\partial L(q, \dot{q})}{\partial q_2} = -[m_2 l_1 l_{c2} S_2] \dot{q}_1^2 - [m_2 l_1 l_{c2} S_2] \dot{q}_1 \dot{q}_2 - g m_2 l_{c2} C_{12} \quad (11)$$

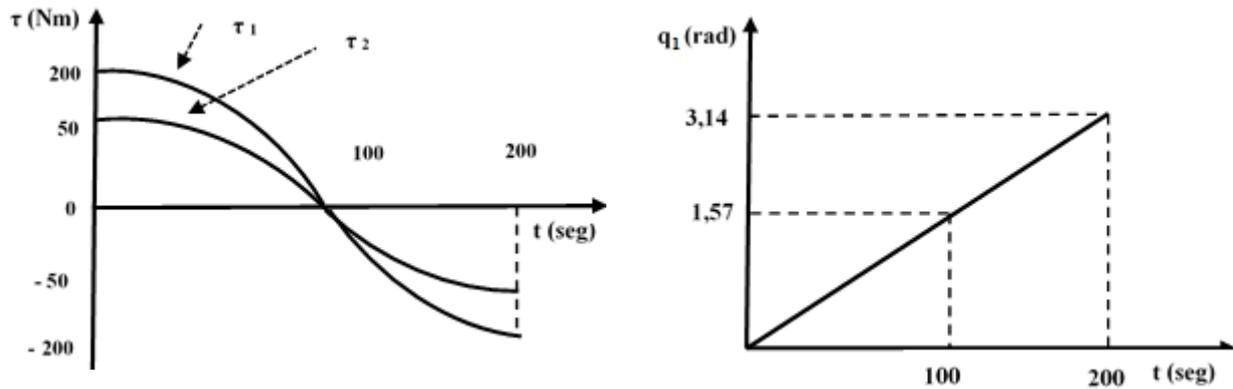


Figura 6. a) Evolución temporal de los pares de torsión τ_1 y τ_2 correspondientes al caso 1.
b) Evolución temporal de las variables articulares correspondientes al caso 1

Fase 2: Obtención de los pares de torsión en forma matricial: se aplica la ecuación 2) para las coordenadas articulares 1 y 2; operando con las ecuaciones (8), (9), (10) y (11) de la forma: $\tau_1 = (8) - (10)$ & $\tau_2 = (9) - (11)$, se obtiene la ecuación (12). Por simplicidad de se omiten J_1 y J_2 . Luego, si se efectúa el producto matricial en (12); y se expresa cada par de torsión por separado, se arriba a las ecuaciones (13) y (14):

$$\begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_1 l_{c1}^2 + m_2 (l_1^2 + l_{c2}^2 + 2l_1 l_{c2} C_2) & m_2 l_{c2} (l_1 C_2 + l_{c2}) \\ m_2 l_{c2} (l_1 C_2 + l_{c2}) & (m_2 l_{c2}^2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2m_2 l_1 l_{c2} S_2 \dot{q}_2 & -m_2 l_1 l_{c2} S_2 \dot{q}_2 \\ m_2 l_1 l_{c2} S_2 \dot{q}_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} g [(m_1 l_{c1} C_1 + m_2 (l_1 C_1 + l_{c2} C_{12}))] \\ g m_2 l_{c2} C_{12} \end{bmatrix} \quad (12)$$

$$\tau_1 = [m_1 l_{c1}^2 + m_2 (l_1^2 + l_{c2}^2 + 2l_1 l_{c2} C_2)] \ddot{q}_1 + [m_2 l_{c2} (l_1 C_2 + l_{c2})] \ddot{q}_2 - (2m_2 l_1 l_{c2} S_2) \dot{q}_1 \dot{q}_2 - (m_2 l_1 l_{c2} S_2) \dot{q}_2^2 + g [(m_1 l_{c1} C_1 + m_2 (l_1 C_1 + l_{c2} C_{12}))] \quad (13)$$

$$\tau_2 = [m_2 l_{c2} (l_1 C_2 + l_{c2})] \ddot{q}_1 + (m_2 l_{c2}^2) \ddot{q}_2 + (m_2 l_1 l_{c2} S_2) \dot{q}_1^2 + g m_2 l_{c2} C_{12} \quad (14)$$

Fase 3: Cálculo de los pares de torsión a aplicar en las articulaciones de acuerdo a las Trayectorias Articulares: en esta fase, se disponen de ciertas trayectorias articulares, como: $(q(t), \dot{q}(t), \ddot{q}(t))$, y se calculan los pares de torsión en cada articulación del robot, para que el órgano terminal desarrolle estas trayectorias. Se plantean 2 casos experimentales cuyos parámetros dinámicos se corresponden con los de la figura 5: $m_1 = m_2 = 10\text{kg}$, $l_1 = l_2 = 1\text{m}$, $l_{c1} = l_{c2} = 0,5\text{m}$, $g = 10\text{m/seg}^2$ (no se consideran J_1 y J_2). En ambos casos se adopta un lapso de tiempo de 0 a 200 seg.

Caso 1: durante los 200 seg la variable articular q_1 desarrolla velocidad constante de $0,0157\text{rad/seg}$ y $q_2 = 0$. Es decir, q_1 varía de 0 a 180° en los 200 seg y el brazo completo del manipulador permanece estirado. Se tienen las siguientes expresiones para las variables articulares:

$$q_1(t) = 0,0157 \text{ rad/seg} * t, \quad \dot{q}_1(t) = 0,0157 \text{ rad/seg} \quad \text{y} \quad \ddot{q}_1 = 0 \quad \text{y} \quad q_2 = \dot{q}_2 = \ddot{q}_2 = 0$$

Sustituyendo estos valores y los parámetros dinámicos en las ecuaciones (13) y (14), se tienen las ecuaciones (15) y (16) para los pares de torsión, cuya representación se ve en la figura (6b):

$$\tau_1 = 200 \frac{N}{m} * \cos\left(0,0157 \frac{rad}{seg} * t\right) \quad (15)$$

$$\tau_2 = 50 \frac{N}{m} * \cos\left(0,0157 \frac{rad}{seg} * t\right) \quad (16)$$

Caso 2: durante los 200 seg la variable articular q2 desarrolla velocidad constante de 0,0157rad/seg y q1 = 0. Es decir, q2 varía de 0 a 180° en los 200 seg y el eslabón 1 permanece estirado. Se tienen las siguientes expresiones para las variables articulares:

$$q_2(t) = 0,0157 \frac{rad}{seg} * t \quad (\text{figura (7a)}), \quad \dot{q}_2(t) = 0,0157 \frac{rad}{seg} \quad \text{y} \quad \ddot{q}_2 = 0 \quad \text{y} \quad q_1 = \dot{q}_1 = \ddot{q}_1 = 0$$

Sustituyendo estos valores y los parámetros dinámicos en (13) y (14), se tienen las (17) y (18) para los pares de torsión, cuya representación se ve en la figura (7b):

$$\tau_1 = 150 Nm + 50 \frac{N}{m} * \cos\left(0,0157 \frac{rad}{seg} * t\right) - 0,00123 Nm * \sin\left(0,0157 \frac{rad}{seg} * t\right) \quad (17)$$

$$\tau_2 = 50 \frac{N}{m} * \cos\left(0,0157 \frac{rad}{seg} * t\right) \quad (18)$$

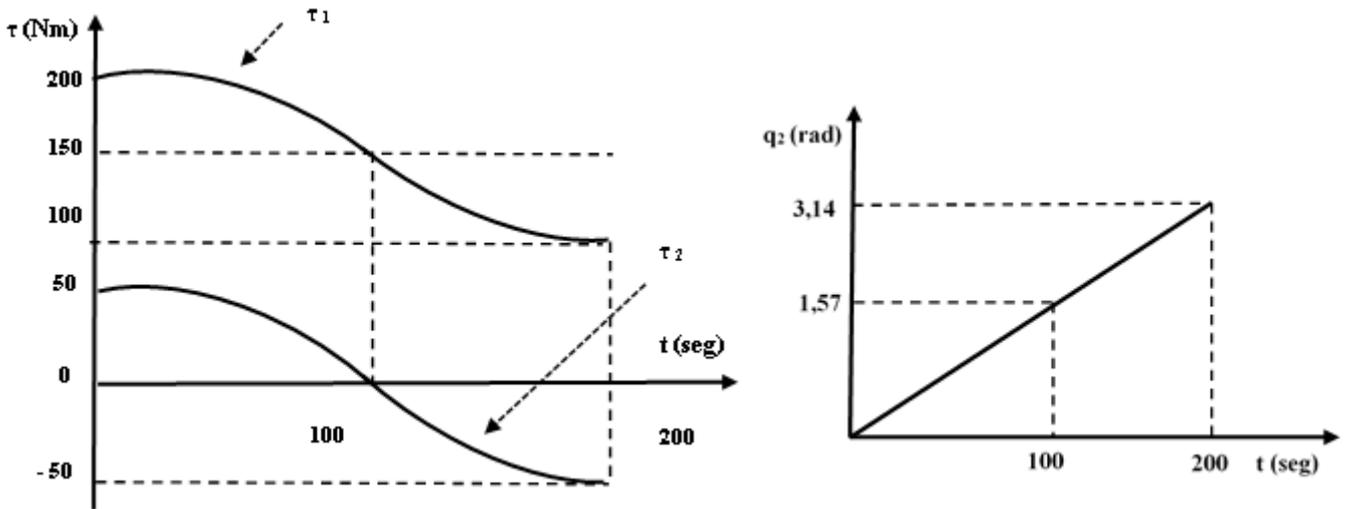


Figura 6. a) Evolución temporal de los pares de torsión τ_1 y τ_2 correspondientes al caso 2.
b) Evolución temporal de las variables articulares correspondientes al caso 2.

III. RESULTADOS Y DISCUSIÓN

Se discuten los resultados de los casos 1 y 2 para esas variables articulares.

Caso 1: las ecuaciones 15 y 16 indican que los pares de torsión que los actuadores proveen en ambas articulaciones deben contrarrestar el efecto gravitatorio de ambos eslabones (solo quedan términos en $\cos q_1$). El efecto mecánico es que no contribuyen los efectos inerciales (las dos aceleraciones articulares son nulas), ni el término de Coriolis (una velocidad articular es nula), ni los términos de las fuerzas centrípetas (el brazo 2 está siempre estirado, $q_2 = 0$ y es nula la velocidad articular 2). Un breve análisis de la situación física real, en sintonía con el gráfico de figura 6a indica que: en $t = 0$ seg es $q_1 = q_2 = 0^\circ$ (ambos brazos estirados en forma horizontal, figura 8a), $\tau_1 = 200 Nm$ y $\tau_2 = 50 Nm$ (requiriendo ambas articulaciones pares de torsión máximo en este instante). En $t = 100$ seg es $q_1 = q_2 = 90^\circ (\pi/2)$ (ambos brazos estirados en forma vertical, figura 8b), $\tau_1 = \tau_2 = 0 Nm$ (en este instante el par de torsión es nulo en ambas articulaciones. Si continúan aumentando las variables articulares pasados los 90° hasta los 180° en $t = 200$ seg, ambos pares vuelven a crecer en su valor, pero con signo contrario. Esto se debe a que ambos brazos tienden a caer por efecto gravitatorio; y debe graduar esa “caída” mediante los pares aplicados en las articulaciones para que el manipulador “baje” conforme a la trayectoria propuesta. Es decir, en $t = 200$ seg es $q_1 = q_2 = 180^\circ (\pi)$ (ambos brazos estirados en forma horizontal,

figura 10), $\tau_1 = -200\text{Nm}$ y $\tau_2 = -50\text{Nm}$ (requiriendo ambas articulaciones pares máximo en este instante). Ver Figura 8c.

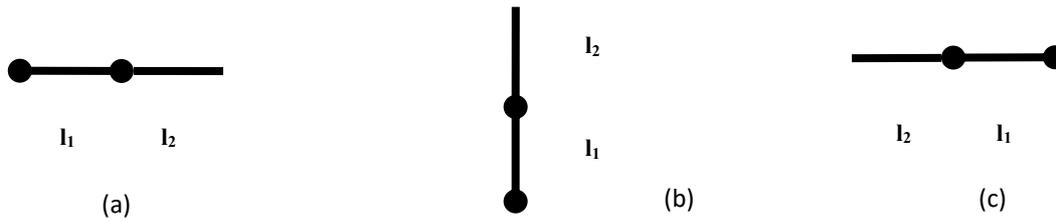


Figura 8. Posiciones del Manipulador $q_1 = 0,0157\text{rad/seg.t}$ y $q_2 = 0^\circ$ y para $t = 0, 100$ y 200 seg

Caso 2: según las ecuaciones (17) y (18), y similar al caso 1, ambos pares de torsión deben contrarrestar el efecto gravitatorio de ambos eslabones; con la salvedad que existe el término de la fuerza centrípeta de m_2 sobre la articulación 1 (aunque se puede despreciar frente a los otros valores). También se anula el término de Coriolis por las mismas razones; y como $q_1 = 0$, hay un término independiente de 150Nm en la ecuación 17 para τ_1 . Este hecho modifica sustancialmente la situación con respecto al caso 1, dado que no se anula el par τ_1 en ningún instante. Un breve análisis de la situación física real, en sintonía con el gráfico de figura 7a indica que: en $t = 0\text{seg}$ es $q_1 = q_2 = 0^\circ$ (ambos brazos estirados en forma horizontal, Figura 9a), $\tau_1 = 200\text{Nm}$ y $\tau_2 = 50\text{Nm}$ (requiriendo ambas articulaciones pares de torsión máximo en este instante). Es decir que para este instante la situación es igual al caso anterior. En $t = 100\text{seg}$ es $q_1 = 0^\circ$ y $q_2 = 90^\circ (\pi/2)$ (situación que se ilustra en la Figura 9b); aquí $\tau_1 = 150\text{Nm}$ y $\tau_2 = 0\text{Nm}$. En este instante la articulación 1 requiere un par de 100Nm ejercido por el peso del eslabón 2 en posición vertical (se redujo en 50Nm con respecto al caso anterior porque se acortó el brazo de palanca en $0,5\text{m}$ con respecto a cuándo éste está estirado), más el otro par de 50Nm proveniente del peso del eslabón 1. Si el eslabón 2 continúa girando respecto a la vertical y la variable articula supera los 90° hasta llegar a los 180° en $t = 200\text{seg}$, permaneciendo siempre el eslabón 1 en posición horizontal, será $q_1 = 0^\circ$, $q_2 = 180^\circ (\pi)$ (el brazo 2 doblado sobre el 1 en forma horizontal, Figura 9c), $\tau_1 = 100\text{Nm}$ (valor mínimo que adopta el par τ_1 sobre la articulación 1) y $\tau_2 = -50\text{Nm}$. Desde el punto de vista físico, el valor del par τ_1 se compone de 50 Nm que aporta el peso del eslabón 1, el cual siempre par de torsión a la articulación 1 porque permanece en posición horizontal los 200 segundos), más los otros 50 Nm que aporta el eslabón 2 (también en posición horizontal para este instante de 200 segundos). El par sobre la articulación 2, vale $\tau_2 = -50\text{Nm}$, dado que al invertirse la posición del eslabón 2 (como se ve en Figura 9c), el par de torsión mantiene su valor, pero ahora la articulación 2 debe reaccionar con un par en sentido contrario (anti horario) al primer caso en donde $q_2 = 0$.

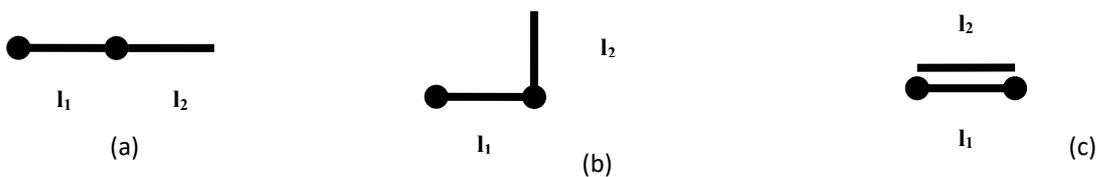


Figura 9. Posiciones del Manipulador $q_1 = 0^\circ$ y $q_2 = 0,0157\text{rad/seg.t}$ y para $t = 0, 100$ y 200 seg

IV. CONCLUSIONES

Se extraen las siguientes conclusiones de esta propuesta: 1) el problema analizado se encuadra en el modelo de proceso de investigación y desarrollo, 2) se desarrolla un proceso de construcción del modelo dinámico de un manipulador en base a la formulación Lagrangiana en base a tres fases que se desarrollan en forma interconectada, 3) este proceso se nutre con la matriz de transformación homogénea y los parámetros dinámicos del robot, y proporciona como salida las fuerzas y pares de torsión que se deben aplicar en cada articulación, de acuerdo a las trayectorias articulares que se proponen. 4) se describe un caso de estudio de un manipulador de 2 gdl y se analizan en detalle los resultados de 2 casos experimentales.

Se desarrollan las siguientes líneas de investigación: I) probar el modelo analítico obtenido en banco experimental donde los eslabones y sistemas de trasmisión se construyen en nuestro laboratorio. II) diseño y evaluación del sistema de control dinámico del robot utilizando los pares de torsión obtenidos como entrada

al sistema. III) probar trayectorias articulares más complejas. IV) introducir fricciones viscosas en las articulaciones y medir la respuesta del sistema en condiciones similares.

V. REFERENCIAS

- Arntz, M., Gregory, T., & Zierahn, U. (2016). The Risk of Automation for Jobs in OECD Countries: A Comparative Analysis. *OECD Social, Employment and Migration Working Papers No.189*. Paris: OECD Publishing. .
- Barrientos, A. P. (2007). *Fundamentos de robotica* (Segunda ed.). España: McGrawHill.
- Bartlett, J. (2015). *The Dark Net. Inside the Digital Underworld*. Nueva York: Melville House.
- Brynjolfsson, E., & McAfee, A. (2014). *The Second Machine Age*. Nueva York y Londres: Norton & Company.
- Hossian, A., Olivera, V., y Cejas, L. (2016). *Análisis de conductas de vehículos robóticos en entornos estructurados mediante la aplicación de tecnologías inteligentes*. La Habana, Cuba: 18 Convención científica de ingeniería y arquitectura.
- Reyes Cortes, F. (2011). *Control de robots manipuladores*.
- Santos, J. (2004). *Evolucion artificial y robotica autónoma*. España: RA-MA.