

15, 16 Y 17 DE SEPTIEMBRE DE 2021

PROCESO DE OBTENCIÓN DE LAS FUNCIONES POLINÓMICAS INTERPOLADORAS EN EL ESPACIO ARTICULAR PARA UN ROBOT MANIPULADOR. UN ENFOQUE BASADO EN EL CONTROL CINEMÁTICO.

Alejandro Hossian¹, Hernán Merlino², Roberto Carabajal¹, Patricio Bustamante¹, Maximiliano Alveal¹

¹Grupo de Investigación de Robótica - Universidad Tecnológica Nacional – Facultad Regional del Neuquén

Padre Rotter s/Nº - Plaza Huincul (8316) – Neuquén – Argentina

²Departamento de Sistemas – Universidad Nacional de Lanús
Lanús (CP: 1824) – Argentina

RESUMEN

Los movimientos del actuador de un manipulador cuando se desplaza de un punto a otro en su ambiente de operación, lo hace conforme a una función continua del tiempo. El cálculo de estas funciones refiere a la “GENERACION” de las “TRAYECTORIAS articulares”. El problema que se analiza, se encuadra dentro del módulo de control cinemático; el cual permite seleccionar aquellas trayectorias articulares que debería seguir el robot, conforme a los requisitos del usuario. Teniendo en cuenta que estos requisitos en general se establecen en el espacio de trabajo o cartesiano del robot, el núcleo de esta investigación consiste en una propuesta metodológica para la obtención de trayectorias en el espacio articular, las cuales se materializan por medio de las funciones polinómicas interpoladoras. Esta propuesta posee como elemento disparador la matriz de transformación homogénea referida al sistema de referencias asociado a la base del robot (0Tn). Esta matriz contiene toda la información de las coordenadas cartesianas del efector terminal en función de las variables articulares modelo cinemático directo (0Pn(t) en función de q(t)). Con este modelo es posible obtener las ecuaciones que provee el modelo cinemático inverso (q(t) en función de 0Pn(t)); a partir de las cuales determinados puntos de paso, en el espacio cartesiano (0Pn(t)) tienen correspondencia con sus valores de parámetros eslabón. Este proceso proporciona como elemento de salida las funciones interpoladoras de posición, velocidad y aceleración (elementos que se denominan trayectorias articulares). Este proceso permite examinar el cumplimiento de ciertos criterios básicos en termino de diseño; como por ejemplo, el monitoreo de la aceleración articular máxima obtenida, de manera que no supere el valor admisible de tolerancia estipulado por el fabricante ($q'_{max} \leq q''_{adm}$). En caso que no satisfaga la condición anterior, debe calcularse nuevamente el tiempo de actuación con el valor de aceleración admisible.

Palabras claves: *trayectorias articulares, criterios de diseño, velocidades articulares, modelo cinemático directo, modelo cinemático inverso*

15, 16 Y 17 DE SEPTIEMBRE DE 2021

1. INTRODUCCIÓN

Siempre que un robot manipulador lleve a cabo una tarea en su ambiente de operación, tales como tomar y colocar, corte de materiales, etc., es necesario que su efector terminal describa una cierta trayectoria en su espacio de trabajo. En esta línea de análisis, el presente artículo se focaliza en función de los requisitos del usuario. En la figura 1 se muestra una situación en la que el elemento terminal del manipulador se mueve desde el punto A hasta el B; para que ese hecho tenga lugar, se calcula una trayectoria que cada articulación debe seguir. En este contexto, se entiende por trayectoria a un historial en la línea de tiempo de posición, velocidad y aceleración para cada grado de libertad. En otras palabras, así como el modelo cinemático y dinámico de un robot se focaliza en la obtención de estrategias de control que derramen en una mejor calidad de sus movimientos, el control cinemático se ocupa de establecer la evolución temporal que debe seguir cada articulación del manipulador para alcanzar los objetivos prefijados por el usuario [1]. Entre estos objetivos se tienen: punto de destino, puntos intermedios, trayectoria cartesiana del órgano terminal, tiempo invertido por el usuario, etc. Una forma suave y controlada de movimiento para el efector final, consiste en que cada articulación se mueva de acuerdo a una función continua de tiempo. Asimismo, es conveniente que cada articulación comience y finalice su movimiento de manera simultánea; de forma tal, que el movimiento conjunto del robot manipulador sea lo más coordinado posible [2].

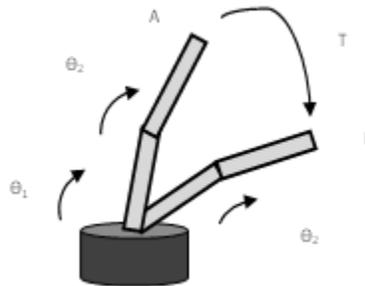


Figura 1: Trayectoria (T) del órgano terminal del robot desde un punto A hasta B con las variables articulares θ_1 y θ_2

2. Objetivos

El grupo de investigación en "Robótica aplicada a la Ingeniería" que desarrolla sus actividades en esta casa de estudios, lleva a cabo un proceso de investigación y desarrollo que se estructura en base a dos objetivos centrales que subyacen en la elaboración del presente trabajo; a saber: el primer objetivo central es de carácter "didáctico – pedagógico", el cual se focaliza en poner de manifiesto el enorme potencial que poseen diversos tópicos pertenecientes a las ciencias básicas en la formación del ingeniero, tales como: Álgebra Matricial, Cálculo Diferencial, Sistemas de Referencia Fijos y Móviles, la Cinemática y Dinámica de los Cuerpos Rígidos y Funciones Polinómicas entre otros, los cuales conforman un excelente conjunto de herramientas analíticas para modelar el funcionamiento de un manipulador. El segundo objetivo central es de tipo "científico – tecnológico", y se enfoca a la aplicación de estas herramientas, de manera de obtener los instrumentos de modelado (que permite comprender matrices de transformación homogénea, modelo cinemático, modelo diferencial, modelo dinámico, generación de trayectorias articulares y fundamentos de control, entre otros), que permiten comprender el funcionamiento de estos sistemas. Más específicamente, este segundo objetivo consiste en la implementación de un modelo de proceso de investigación en base a tres fases que procuran optimizar el diseño de un manipulador robótico industrial; a saber: una primera fase corresponde a la Cinemática del Robot,

15, 16 Y 17 DE SEPTIEMBRE DE 2021

para la obtención de los Modelos Cinemático Directo e Inverso y del Modelo Diferencial de los manipuladores robóticos industriales; una segunda fase se corresponde con la Dinámica del Robot, que se aplica a la obtención del Modelo Dinámico de estos brazos; y una tercera fase vinculada a los aspectos que hacen al Control del robot, cuyos algoritmos permiten mejorar las características de velocidad y precisión. El problema que se analiza en este artículo se encuadra dentro de la tercera fase del modelo de proceso de investigación, correspondiente al campo del Control del Robot.

El problema del control se puede abordar de acuerdo a dos enfoques: el control cinemático y el control dinámico [3]. Desde un punto de vista cinemático, el control selecciona trayectorias que idealmente debe seguir el robot para ajustarse lo mejor posible a los requisitos del usuario. Desde un punto de vista dinámico, el control custodia que las trayectorias seguidas por el robot $q(t)$ sean lo más similares posibles a las propuestas por el control cinemático; para lo cual, debe usar las referencias suministradas por el modelo dinámico.

Más específicamente, y en el marco de la fase de control, en este trabajo se estudia la generación de trayectorias articulares en el contexto del control cinemático.

El modelo de proceso de investigación y desarrollo con sus tres fases que ilustra este segundo objetivo central, se detalla en la figura 2. En dicha figura se observa resaltado el módulo de Control Cinemático y su vinculación con la fase de Control; así como también, el suministro de insumos entre las diferentes fases del proceso. A tal efecto, la fase de cinemática del robot genera referencias a las fases de dinámica y control del robot [4]; y la fase de dinámica suministra insumos a la fase de control, para la realización del control dinámico [5].

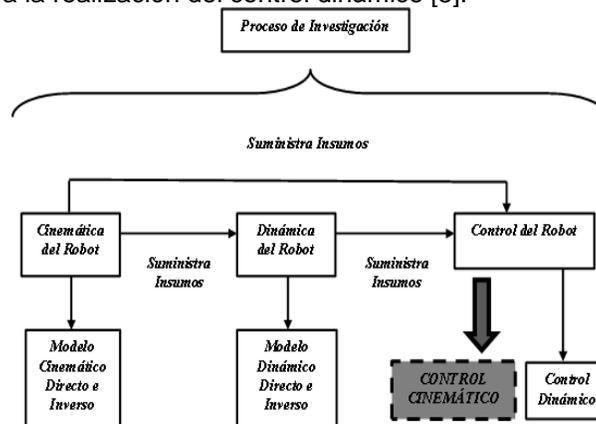


Figura 2: Modelo de Proceso de Investigación y Desarrollo

3. Descripción del problema propuesto

La contextualización del problema que se aborda en el contexto del proceso de investigación y desarrollo descrito en la figura 2, corresponde al módulo del control cinemático; y más precisamente, en la propuesta de un método de análisis para la generación de trayectorias articulares en un determinado período de tiempo, conforme a los insumos que el módulo de cinemática le suministra. En este sentido, el presente trabajo parte de la premisa de que, en un nivel de diseño preliminar, se han obtenido los modelos cinemáticos directo y el inverso. Es decir, se dispone de la matriz de transformación homogénea con la información de las coordenadas cartesianas del efector final en función de las variables articulares $O_{pn}(t)$ en función de $q(t)$, respecto al sistema de referencia asociado a la base del robot. En base a estas expresiones, es

15, 16 Y 17 DE SEPTIEMBRE DE 2021

posible obtener las ecuaciones cinemáticas inversas¹ ($q(t)$ en función de $Opn(t)$), las cuales constituyen el insumo central de este proceso metodológico para la obtención de las trayectorias articulares (posición $q(t)$, velocidad $q'(t)$ y aceleración $q''(t)$).

3.1 Trayectorias en el espacio cartesiano

En el estudio de los modelos cinemáticos se aborda la cuestión de las relaciones que tienen lugar entre el espacio de las variables articulares y el espacio de trabajo del robot, también llamado espacio cartesiano, que se representa por ejes cartesianos.

Por lo general, para especificar la posición y orientación del robot en el espacio de las variables articulares, se hace uso de un vector de dimensión n . Por su parte, el espacio de trabajo de un manipulador en el espacio tiene dimensión seis, siendo necesario tres valores para especificar la posición y otras tres para la orientación. En el caso de tratarse de un movimiento en el plano, se emplean tres valores, dos para especificar la posición y un valor para la orientación.

Para el control del movimiento, es preciso establecer las características del mismo. En tal sentido, es usual que el usuario especifique el movimiento que debe realizar el robot en su espacio de trabajo, detallando localizaciones espaciales por las que debe pasar el extremo, puntos de paso, velocidades, aceleraciones máximas y tipo de trayectoria.

Para un caso simple; el usuario puede especificar que el extremo del manipulador debe desplazarse desde un punto inicial "A" a un punto final "B" en un cierto período de tiempo, pasando por dos puntos intermedios (P_{11} y P_{12}), y desarrollando una trayectoria en línea recta en su espacio de trabajo a velocidad constante. Este caso para un robot de dos grados de libertad, se muestra en figura 3.

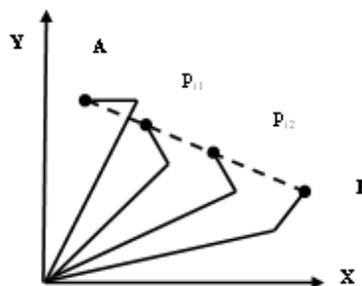


Figura 3: Trayectoria en el espacio de trabajo para un robot de dos grados de libertad

En lo que se refiere a la selección de los puntos muestreados en el espacio cartesiano, es preciso aplicar un criterio de selección que permita alcanzar una solución de compromiso entre la cantidad de puntos elegidos y el error que se comete entre la trayectoria resultante y la trayectoria cartesiana deseada por el usuario².

No obstante, cabe señalar que, si bien las trayectorias que se calculan en el espacio articular son relativamente simples y pueden asegurar que el órgano terminal alcance los puntos iniciales, intermedios y de destino final, inclusive cuando estos puntos se hayan especificado mediante sistemas cartesianos, la forma espacial que adopta la trayectoria del extremo del manipulador, no constituye exactamente una línea recta en el espacio [2]. Es decir que el resultado final del movimiento del extremo, es una trayectoria que intenta aproximarse en menor o mayor medida a la línea recta deseada por el usuario, tal como se ilustra en la figura 4.

¹ El proceso de obtención de estas ecuaciones es muy dependiente de la configuración del robot y, al contrario de lo que ocurre con el problema cinemático directo, es frecuente que la solución de estas ecuaciones no sea única.

²El número de puntos muestreados está limitado por la respuesta en tiempo real que debe proporcionar el sistema de control, con el consiguiente costo computacional.

15, 16 Y 17 DE SEPTIEMBRE DE 2021

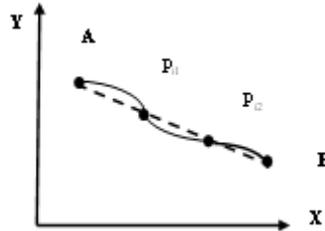


Figura 4: Trayectoria real aproximada a la trayectoria recta deseada en el espacio de trabajo

En otros términos, los esquemas en el espacio de articulación son más sencillos de calcular; y al no existir una correspondencia continua entre el espacio cartesiano y el articular, no se presentan inconvenientes con las singularidades del mecanismo. Las mismas se pueden presentar en las fronteras de su espacio de trabajo y en el interior de este. En este contexto, los problemas geométricos con las trayectorias cartesianas, o singularidades del mecanismo robótico, hace que la mayoría de los sistemas de control de manipuladores industriales soporten, en tiempo real, métodos de generación de trayectorias en el espacio de articulación. Por tal razón, es natural que se haga uso de trayectorias en el espacio articular; y recurrir a las trayectorias cartesianas, solo cuando la aplicación lo requiera.

3.2 Trayectorias en el espacio articular

Establecidos los puntos por los que debe pasar el órgano terminal del manipulador en su entorno de trabajo, se hace uso de las ecuaciones obtenidas de la cinemática inversa para convertir esos valores a sus correspondientes coordenadas en el espacio articular [6]; para luego ser utilizados en la construcción de las funciones continuas de posición, velocidad y aceleración en este espacio ($q_i(t)$, $\dot{q}_i(t)$ y $\ddot{q}_i(t)$). En otras palabras, obtenida la secuencia de configuraciones articulares por cuales debe pasar el efector final del manipulador; estos valores se deben interpolar para cada articulación de una manera sencilla y procurando que los movimientos se realicen con la máxima suavidad posible. Desde el punto de vista matemático, esta suavidad se expresa en términos de la continuidad de la primera derivada (velocidad articular), e inclusive en la segunda (aceleración articular). En la figura 5 se ilustran los valores de las variables articulares para la articulación 1, las cuales se corresponden con los puntos inicial, final e intermedios que se observan en el espacio de trabajo de la figura 3. Con igual criterio se obtienen los valores para la articulación 2, asumiendo que el tiempo requerido por segmento es el mismo para cada articulación.

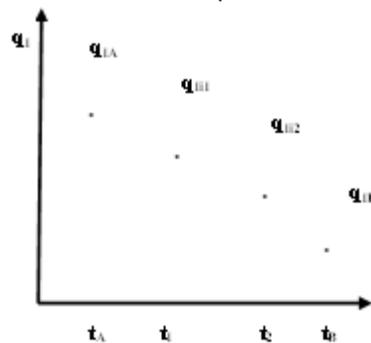


Figura 5: Valores de la coordenada articular q_1 para los instantes muestreados en el espacio de trabajo

15, 16 Y 17 DE SEPTIEMBRE DE 2021

Para unir los puntos de la figura 4 se selecciona una función continua, por lo general polinómica de segundo o tercer grado (pudiendo ser de mayor grado), cuyos parámetros se ajustan en términos de determinadas condiciones de contorno que se le imponen a las respectivas funciones de posición, velocidad y aceleración³. Si, por ejemplo, se deseara que la velocidad articular fuese constante entre dos instantes cualesquiera de la trayectoria, de manera que no supere un valor admisible establecido por fabricación; una alternativa posible sería que la trayectoria articular se aproxime por segmentos lineales, usando una función cuadrática que sustituya a los segmentos rectos en puntos cercanos a los cambios de pendiente de los mismos. En caso de que se tengan cuatro condiciones a cumplir: posición inicial y final especificadas, y velocidades iniciales y finales nulas; será preciso contar con un polinomio con cuatro coeficientes (polinomio cúbico).

3.3 Obtención de los coeficientes de las funciones interpoladoras en el espacio articular

A continuación, se desarrolla la forma de obtener los coeficientes de este polinomio de grado tres para un tiempo $t_0 = 0$; habida cuenta de que es la clase de función polinómica que se usa en el caso de estudio del presente artículo.

$$q(t) = Dt^3 + Ct^2 + Bt + A \quad 1)$$

Con la idea de obtener movimientos "suaves" la determinación de los coeficientes de esta función polinómica se realiza en términos de las siguientes cuatro condiciones de contorno:

- I. $q(t_{inicial}) = q(0) = q_{inicial}$
- II. $q(t_{final}) = q_{final}$
- III. $\dot{q}(t_{inicial}) = \dot{q}(0) = 0$
- IV. $\dot{q}(t_{final}) = 0$

De hacer cumplir las condiciones de contorno I y II a la ecuación 1), se obtienen las siguientes relaciones 2 y 3:

$$q(t_{inicial}) = q(0) = A \Rightarrow q_{inicial} = A \quad 2)$$

$$q(t_{final}) = q_{final} = Dt_{final}^3 + Ct_{final}^2 + Bt_{final} + A \quad 3)$$

Derivando la expresión 1 con respecto al tiempo se obtiene la expresión 4:

$$\dot{q}(t) = 3Dt^2 + 2Ct + B \quad 4)$$

Haciendo cumplir las condiciones de contorno III y IV, se obtienen las siguientes relaciones 5 y 6:

$$\dot{q}(t_{inicial}) = \dot{q}(0) = B = 0 \Rightarrow B = 0 \quad 5)$$

$$\dot{q}(t_{final}) = 3Dt_{final}^2 + 2Ct = 0 \quad (\text{Dado que } B = 0) \quad 6)$$

Obtenidos los coeficientes A y B, restan obtener los coeficientes C y D. En tal sentido, haciendo uso de las condiciones de contorno 3 y 6 se arriba a un sistema de dos ecuaciones con dos

³ Es de interés destacar el factor de sencillez de la función elegida, habida cuenta de que la misma será de uso vital para generar referencias al control dinámico.

15, 16 Y 17 DE SEPTIEMBRE DE 2021

incógnitas, que permite la determinación de los coeficientes C y D. Resuelto el sistema de ecuaciones, se tienen las expresiones 7, 8, 9 y 10 para todos los coeficientes:

$$A = q_{inicial} \quad 7)$$

$$B = 0 \quad 8)$$

$$C = \frac{3(q_{final} - q_{inicial})}{t_{final}^2} \quad 9)$$

$$D = \frac{-2(q_{final} - q_{inicial})}{t_{final}^3} \quad 10)$$

Existen escenarios donde, además de especificar los puntos inicial y final de la trayectoria, el usuario también, define referencias de puntos de paso intermedios; no siendo menester en tales circunstancias, que la articulación se detenga en dichos puntos. En estos casos se procede a modificar las condiciones de contorno III y IV, de manera tal que dichas velocidades adopten determinados valores no nulos.

$$\dot{q}(t_{inicial}) = \dot{q}_{inicial} \quad \text{y} \quad \dot{q}(t_{final}) = \dot{q}_{final}$$

De esta forma, es posible hallar la trayectoria articular mediante interpolación cúbica entre dos puntos intermedios. La elección de las velocidades articulares deseadas en los puntos de paso constituye una cuestión sustancial en la generación de las trayectorias; teniendo lugar en la literatura diversas alternativas en este sentido, a saber:

- A. Las velocidades cartesianas lineales y angulares son especificadas por el usuario⁴.
- B. El sistema generador de trayectorias selecciona de manera automática las velocidades en los puntos intermedios; ya sea en el espacio articular o cartesiano.
- C. El sistema generador de trayectorias selecciona de manera automática las velocidades en los puntos intermedios; de tal forma que, en dichos puntos, la aceleración sea continua. Se adopta un enfoque diferente, dado que en la conexión se sustituyen los requisitos de velocidad, por restricciones de “velocidad continua” y “aceleración continua”.

Distintos tipos de funciones interpoladoras pueden ser utilizadas para concatenar los puntos inicial, intermedio y final para la generación de la trayectoria en el espacio articular. Cabe citar, interpoladores lineales, cúbicos, quintico y funciones lineales con mezcla parabólica; entre los más citados. Por otra parte, si bien es natural plantear estos interpoladores para el espacio articular, también son aplicables a las variables cartesianas y a la orientación de la herramienta.

A modo de síntesis cabe señalar, que las trayectorias articulares ajustadas a requerimientos de usuario son utilizadas por el control dinámico para generar las actuaciones que permiten controlar el movimiento de las articulaciones, procurando que la diferencia entre las trayectorias reales y las deseadas, tienda asintóticamente a cero [6].

4 Método de obtención de las trayectorias articulares en el contexto del módulo de control cinemático

Conforme a la figura 2 se resalta el módulo del “Control Cinemático”, a partir del cual se estructura un método que permite obtener las trayectorias en el espacio articular (posición, velocidad y aceleración), en función de los requerimientos proporcionados por el usuario en el espacio de trabajo del manipulador.

⁴ Cabe consignar, que en aquellos puntos donde el jacobiano de las velocidades es singular, el usuario está imposibilitado de asignar libremente las velocidades; lo que da lugar a que el sistema incluya alguna de las alternativas B o C.

15, 16 Y 17 DE SEPTIEMBRE DE 2021

El método propuesto en el presente trabajo tiene como “insumo de entrada” la matriz de transformación homogénea [7] suministrada por modelo cinemático directo. Esta matriz, posee toda la información referida a la posición y orientación cartesiana del extremo final del manipulador (por lo general con respecto a un sistema de referencia asociado a la base del robot), en términos de las variables articulares del mismo. En forma análoga, el método proporciona como “producto de salida” las funciones interpoladoras de posición, velocidad y aceleración articulares (a este conjunto de elementos, generalmente se lo llama trayectorias articulares). En la figura 6 se muestra este escenario global, con la entrada y la salida al módulo cinemático para la implementación del método de generación de trayectorias articulares.

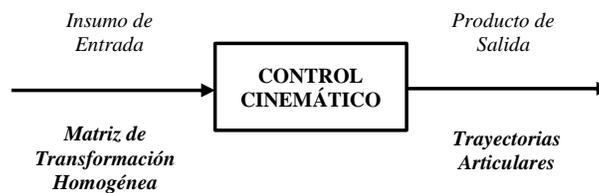


Figura 6: Insumo de entrada y Producto de salida al Módulo Cinemático para la implementación del método de obtención de trayectorias articulares

Por su parte, el núcleo de aplicación del presente método se conforma de tres fases que se desarrollan en forma interconectada, a los efectos de obtener las correspondientes trayectorias articulares [8]. La primera etapa; se focaliza en la conversión de los puntos suministrados por la matriz de transformación homogénea en el espacio cartesiano, a valores deseados de ángulos y desplazamientos en el espacio de articulación. Esta conversión se realiza por medio de la aplicación de las ecuaciones de la cinemática inversa. Obtenidos estos valores de la etapa anterior; en la segunda etapa se procede a la obtención de un primer prototipo de las funciones polinómicas interpoladoras representativas de las trayectorias articulares (por lo general segmentos lineales con transición parabólica o funciones de tercer grado), en términos de hallar los coeficientes que las conforman de acuerdo a las condiciones de contorno establecidas. Obtenidas estas trayectorias a nivel de proyecto preliminar; la tercera etapa del método tiene como eje la custodia del cumplimiento del criterio de diseño (puede ser más de uno), que se hayan establecido. El modo de operar del método de obtención de trayectorias articulares se ilustra en la figura 7.

15, 16 Y 17 DE SEPTIEMBRE DE 2021

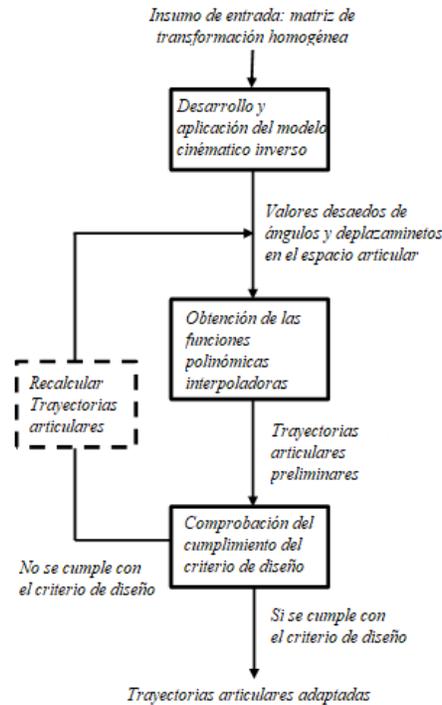


Figura 7: Método de obtención de las trayectorias articulares en el contexto del módulo de control cinemático

A modo de ejemplo; un criterio a seguir consiste en monitorear que el valor máximo obtenido de aceleración articular no supere un tope admisible como valor de tolerancia estipulado por el fabricante ($q_{max} \leq q_{adm}$). Otro criterio a considerar, está cifrado en controlar que la diferencia entre la trayectoria real obtenida y la deseada, no esté por encima de la cuota de error tolerada en términos de los requisitos de usuario. En caso de que el criterio de diseño a considerar no se satisfaga, se recalculan las trayectorias articulares en función del criterio de diseño adoptado (caja de borde punteado en figura 7). Si el criterio se satisface, se adoptan las trayectorias articulares que correspondan en esa instancia de la metodología. Asimismo, es importante destacar, que estas trayectorias articulares se deben muestrear con una frecuencia determinada, a los efectos de generar referencias al módulo de control dinámico.

5. Análisis del caso de aplicación

El siguiente caso de estudio trata la obtención de las trayectorias articulares de un robot manipulador esférico de tres grados de libertad RRP (Rotatorio, Rotatorio, Prismático). Es decir que el robot, posee dos articulaciones rotatorias representadas por las variables articulares Θ_1 y Θ_2 (para las articulaciones 1 y 2 respectivamente) y una articulación prismática representada por la variable articular D_3 (para la articulación 3). En la figura 8 se ilustra el esquema del robot manipulador con las correspondientes variables articulares y el sistema de referencia S_0 (X_0, Y_0 y Z_0).

15, 16 Y 17 DE SEPTIEMBRE DE 2021

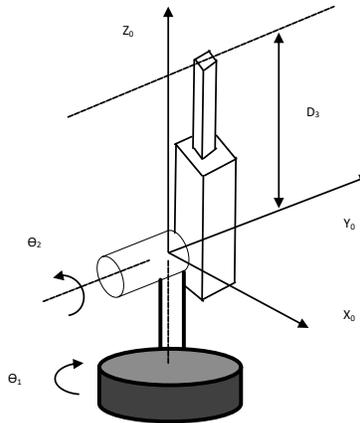


Figura 8: Robot manipulador esférico RRP

Se ha decidido no incluir el control de la orientación del órgano terminal o muñeca del manipulador en el análisis del presente caso; por consiguiente, y dado que las tres primeras filas y las tres primeras columnas constituyen la caja de rotación de dicho órgano, es de interés la última columna de la matriz de transformación homogénea 0T_3 . Esta columna especifica la posición del extremo para un determinado punto del espacio cartesiano (al que se le asocia un sistema de referencia S3) en términos del sistema de referencia S0, y en función de las variables articulares, tal como lo establece la cinemática directa. Esta matriz constituye el elemento de entrada al método propuesto, y es la siguiente⁵:

$${}^0T_3 = \begin{pmatrix} c_1c_2 & -s_1 & c_1c_2 & c_1s_2D_3 \\ c_2s_1 & c_1 & s_1s_2 & s_1s_2D_3 \\ -s_2 & 0 & c_2 & c_2D_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La posición del extremo para ese punto del espacio cartesiano, tiene las siguientes tres coordenadas dadas por las expresiones a, b y c:

$$\begin{aligned} P_{xe} &= c_1s_2D_3 && \text{a)} \\ P_{ye} &= s_1s_2D_3 && \text{b)} \\ P_{ze} &= c_2D_3 && \text{c)} \end{aligned}$$

Estas expresiones obtenidas del modelo cinemático directo, constituyen la entrada al módulo del control cinemático, para implementar el método de obtención de las trayectorias articulares.

Primera Fase: Desarrollo y aplicación del modelo cinemático inverso.

Mediante el manejo de las expresiones a, b y c; es posible expresar las variables articulares en función de las posiciones cartesianas del extremo, teniendo en cuenta que se adoptará una de las soluciones que proporciona la cinemática inversa. Se realizan los siguientes manejos algebraicos con las expresiones a, b y c: dividiendo miembro a miembro la expresión b por la a, y simplificando, se obtiene la ecuación d). Elevando al cuadrado las expresiones a y b, y sumándolas miembro a miembro (teniendo en cuenta que $\sin^2(x) + \cos^2(y) = 1$), se llega a la ecuación e). Finalmente; elevando al cuadrado la expresión c, y sumando el resultado obtenido a los cuadrados de las expresiones a y b, se obtiene la ecuación f). Así se obtienen las siguientes expresiones d, e y f:

$$\theta_1 = \arctg\left(\frac{P_{ye}}{P_{xe}}\right) \quad \text{d)}$$

⁵ Cabe aclarar que por una cuestión de sencillez de notación, se adopta $c_1 = \cos(\theta_1)$, $s_1 = \sin(\theta_1)$, $c_2 = \cos(\theta_2)$ y $s_2 = \sin(\theta_2)$.

15, 16 Y 17 DE SEPTIEMBRE DE 2021

$$\theta_2 = \arctg \left(\frac{\pm \sqrt{(P_{xe}^2 + P_{ye}^2)}}{P_{ze}} \right) \quad \text{e)}$$

$$D_3 = \sqrt{(P_{xe}^2 + P_{ye}^2 + P_{ze}^2)} \quad \text{f)}$$

Segunda Fase: Obtención de las funciones polinómicas interpoladoras.

Las ecuaciones d, e y f permiten obtener los valores de variables articulares para determinadas posiciones del efector terminal en el espacio cartesiano. Para este caso de estudio, el extremo del manipulador se debe mover desde un punto inicial $P_{ie} = (0, 1, 1)$ hasta un punto final $P_{fe} = (0, 2, 0)$. El usuario especifica que no es necesario que el manipulador deba pasar por puntos intermedios; se asume una trayectoria en línea recta entre ambos puntos en un período de 5 segundos, y una aceleración articular admisible de $11^\circ/\text{seg}^2$.

Se sustituyen las coordenadas cartesianas del punto inicial del extremo: $P_{ixe} = 0$, $P_{iye} = 1$ y $P_{ize} = 1$ en las ecuaciones d, e y f, obteniendo los correspondientes valores de las variables en el espacio articular para P_{ie} . Realizando el mismo procedimiento para el punto final del extremo: se reemplazan las coordenadas cartesianas $P_{fxe} = 0$, $P_{fyf} = 2$ y $P_{fze} = 0$ en las ecuaciones d, e y f, se obtienen los correspondientes valores de las variables en el espacio articular para P_{fe} .

En consecuencia: el punto P_{ie} corresponde a las variables articulares: $\Theta_1 = 90^\circ$, $\Theta_2 = 45^\circ$ (se toma el signo positivo en la ecuación e) y $D_3 = \sqrt{2}$; mientras que el punto P_{fe} corresponde a las variables articulares: $\Theta_1 = 90^\circ$, $\Theta_2 = 90^\circ$ (se toma el signo positivo en la ecuación e) y $D_3 = 2$. Tanto el punto inicial $P_{ie} = (0, 1, 1)$, como el punto final $P_{fe} = (0, 2, 0)$, se encuentran en el plano $Z_0 - Y_0$. El análisis de la situación física real en el espacio de trabajo, indica que la trayectoria en línea recta del extremo también ocurre en este plano (la variable articular Θ_1 se mantiene en 90° durante todo el trayecto). La variable articular Θ_2 pasa de un ángulo de 45° en el plano $Z_0 - Y_0$ a uno de 90° con respecto al eje Z_0 (siempre en el mismo plano). Y la variable articular D_3 fue creciendo desde un valor de $\sqrt{2}$ hasta 2 (nótese que es menester que esta variable, que representa la trayectoria desarrollada por el extremo del manipulador, debe modificarse; dado que, si se mantuviera constante, describiría una circunferencia en el plano de trabajo). Esta situación física se ve en la figura 9.

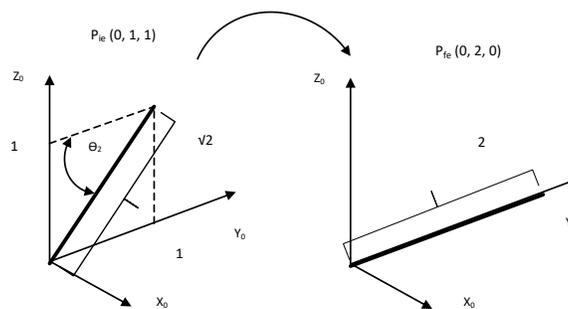


Figura 9: Trayectoria del extremo del manipulador en el espacio de trabajo desde $P_{ie} (0, 1, 1)$ hasta $P_{if} (0, 2, 0)$

A continuación, se obtienen los coeficientes de las funciones polinómicas interpoladoras, que son representativas de cada variable articular; como funciones cúbicas del tiempo ($\Theta_1(t)$, $\Theta_2(t)$ y $D_3(t)$).

Se proponen funciones polinómicas cúbicas del tipo: $q(t) = Dt^3 + Ct^2 + Bt + A$; cuyos coeficientes se calculan mediante las expresiones 7, 8, 9 y 10, tomando en cuenta las condiciones de contorno III y IV ($\dot{q}(t_{inicial}) = \dot{q}(0) = 0$ y $\dot{q}(t_{final}) = 0$). Estas condiciones son válidas para este caso de análisis y se asume que los valores de las coordenadas cartesianas se miden en metros. Se calculan los

15, 16 Y 17 DE SEPTIEMBRE DE 2021

coeficientes de las funciones para cada variable; asumiéndose por la ecuación 8, que $B = 0$ para todas las variables articulares.

Para la variable articular Θ_1 :

$$A = \theta_{1i} \Rightarrow A = 90^\circ, \quad C = \frac{3(90^\circ - 90^\circ)}{5 \text{ seg}^2} = 0^\circ / \text{seg}^2, \quad D = \frac{-2(90^\circ - 90^\circ)}{5 \text{ seg}^3} = 0^\circ / \text{seg}^3$$

Se concluye que Θ_1 se mantiene constante e igual a 90° ; lo que es lógico, dado que el brazo se mueve durante los cinco segundos en el plano $Z_0 - Y_0$. Por consiguiente, también se cumple:

$$\theta_1(t) = 90^\circ, \quad \dot{\theta}_1(t) = 0, \quad \ddot{\theta}_1(t) = 0 \quad \text{g)}$$

Para la variable articular Θ_2 :

$$A = \theta_{2i} \Rightarrow A = 45^\circ, \quad C = \frac{3(90^\circ - 45^\circ)}{5 \text{ seg}^2} = 5,4^\circ / \text{seg}^2, \quad D = \frac{-2(90^\circ - 45^\circ)}{5 \text{ seg}^3} = -0,72^\circ / \text{seg}^3$$

Con estos coeficientes se confeccionan las funciones de posición, velocidad y aceleración articular para la variable articular Θ_2 .

$$\theta_2(t) = -0,72t^3 + 5,4t^2 + 45^\circ \quad \text{h)}$$

$$\dot{\theta}_2(t) = -2,16t^2 + 10,8t \quad \text{i)}$$

$$\ddot{\theta}_2(t) = -4,32t + 10,8 \quad \text{j)}$$

Se verifican los siguientes valores de interés, inicial, intermedio y final:

$$\theta_2(0 \text{ seg}) = 45^\circ, \quad \theta_2(5 \text{ seg}) = 90^\circ, \quad \theta_2(2,5 \text{ seg}) = 67,5^\circ \quad (\text{punto de inflexión en } \Theta_2(t))$$

$$\dot{\theta}_2(0 \text{ seg}) = 0^\circ / \text{seg}, \quad \dot{\theta}_2(5 \text{ seg}) = 0^\circ / \text{seg}, \quad \dot{\theta}_2(2,5 \text{ seg}) = 13,5^\circ / \text{seg} = \theta_{2\text{MAX}}$$

$$\ddot{\theta}_2(0 \text{ seg}) = 10,8^\circ / \text{seg}^2, \quad \ddot{\theta}_2(5 \text{ seg}) = -10,8^\circ / \text{seg}^2$$

Estos son los valores máximos de aceleración articular para la variable articular Θ_2 ($10, 8^\circ / \text{seg}^2$ en valor absoluto). Este valor no debe superar el valor admisible establecido por fabricación, de acuerdo al criterio de diseño, que para este caso se estableció en $\Theta_{2\text{ADM}} = 11^\circ / \text{seg}^2$. Por otra parte, se observa que para $t = 2,5 \text{ seg}$ donde la velocidad articular alcanza su valor máximo de $13,5^\circ / \text{seg}$, la aceleración articular es nula. Es decir:

$$\ddot{\theta}_2(2,5 \text{ seg}) = 0^\circ / \text{seg}^2$$

Para la variable articular D_3 :

$$A = D_{3i} \Rightarrow A = \sqrt{2} = 1,4141 \text{ m}, \quad C = \frac{3(2\text{m} - 1,4141\text{m})}{5 \text{ seg}^2} = 0,0703 \text{ m} / \text{seg}^2, \quad D = \frac{-2(2\text{m} - 1,4141\text{m})}{5 \text{ seg}^3} = -0,0094 \text{ m} / \text{seg}^3$$

Con estos coeficientes se confeccionan las funciones de posición, velocidad y aceleración articular para la variable articular D_3 .

$$D_3(t) = -0,0094t^3 + 0,0703t^2 + 1,4141 \quad \text{k)}$$

$$\dot{D}_3(t) = -0,0282t^2 + 0,1406t \quad \text{l)}$$

$$\ddot{D}_3(t) = -0,056t + 0,1406 \quad \text{m)}$$

Se verifican los siguientes valores de interés, inicial, intermedio y final:

15, 16 Y 17 DE SEPTIEMBRE DE 2021

$$D_3(0seg)=1,4141m, D_3(5seg)=2m \text{ y } D_3(2,5seg)=1,7m \text{ (punto de inflexión en } D_3(t))$$

$$\dot{D}_3(0seg)=\dot{D}_3(5seg)=0m/seg$$

$$\dot{D}_3(2,5seg)=0,1752m/seg = D_{3MAX}$$

$$\ddot{D}_3(0seg)=0,1406m/seg^2$$

$$\ddot{D}_3(5seg)=-0,1406m/seg^2$$

Estos son los valores máximos de aceleración lineal para la variable articular prismática D_3 (0,1406 m/seg² en valor absoluto). También se observa que para $t = 2,5seg$ donde la velocidad lineal alcanza su valor máximo de 0,1752m/seg, la aceleración lineal de la articulación prismática es nula. Es decir:

$$\ddot{D}_3(2,5seg)=0m/seg^2$$

A los efectos ilustrativos, se representan las funciones polinómicas obtenidas para cada una de las variables articulares, en las figuras 10 a 16.

Variable articular Θ_1 : esta variable permanece constante e igual a 90° en los 5 segundos que dura el movimiento; por lo tanto, se muestra solo el gráfico de figura 10 correspondiente a la posición articular, siendo nulas las velocidades y aceleraciones articulares en los 5 segundos. De las ecuaciones g, se representa solo Θ_1 .

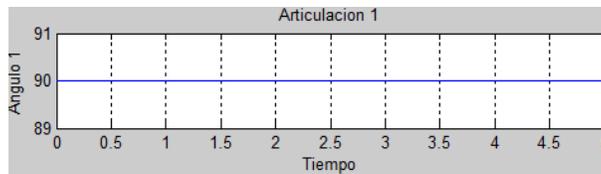


Figura 10: Evolución temporal de la variable articular Θ_1

Variable articular Θ_2 : las figuras 11 a 13 representan las gráficas de la evolución temporal de la posición, velocidad y aceleración articular, conforme a las ecuaciones h, i y j.

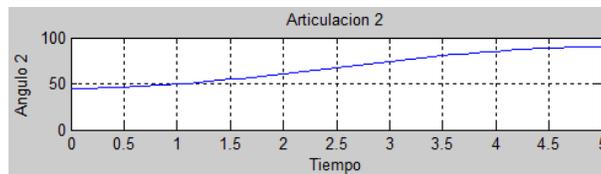


Figura 11: Evolución temporal de la posición articular θ_2

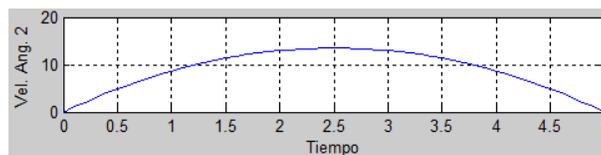


Figura 12: Evolución temporal de la velocidad articular $\dot{\theta}_2$

15, 16 Y 17 DE SEPTIEMBRE DE 2021

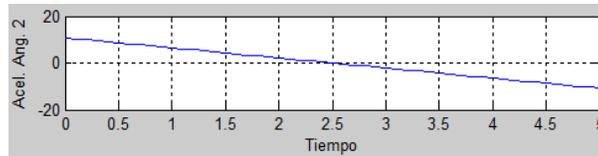


Figura 13: Evolución temporal de la aceleración articular $\ddot{\theta}_2$

Variable articular D_3 : las figuras 14 a 16 representan las gráficas de la evolución temporal de la posición, velocidad y aceleración articular, conforme a las ecuaciones k, l y m.

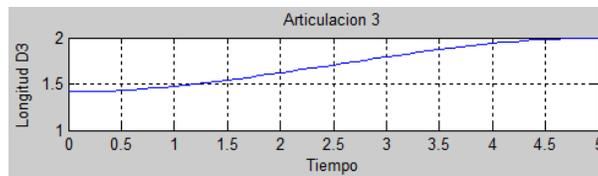


Figura 14: Evolución temporal de la variable articular D_3

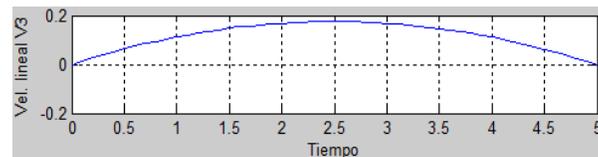


Figura 15: Evolución temporal de la velocidad articular \dot{D}_3

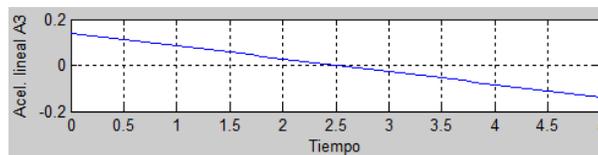


Figura 16: Evolución temporal de aceleración articular \ddot{D}_3

Tercera Fase: Comprobación del cumplimiento del criterio de diseño. Tal como se puede observar a partir del desarrollo de la fase anterior, se cumple el principal criterio de diseño establecido, dado que la máxima aceleración articular para la articulación 2 es de $10,8^\circ/\text{seg}_2$, menor que el valor admisible proporcionado por fabricación de $11^\circ/\text{seg}_2$. Es decir, se cumple que: $\Theta_{2\text{MAX}} < \Theta_{2\text{ADM}}$. Bajo la premisa del cumplimiento de esta condición de diseño, se adoptan las trayectorias articulares obtenidas para este caso de estudio, las cuales serán muestreadas con una frecuencia a establecer, y así generar referencias articulares al módulo de control dinámico. Asimismo, en la próxima sección se discuten estos resultados y se contempla otro criterio de diseño como refuerzo. A continuación, se presenta el siguiente código fuente en MATLAB, donde determinamos los valores articulares entre los dos puntos correspondientes al espacio de trabajo (Pie y Pfe). El tiempo durante el cual se desarrolla la tarea es de 5 segundos; en caso de que la velocidad y/o la aceleración fuesen demasiado elevadas o demasiado bajas, se aumenta o disminuye el tiempo, respectivamente. Cabe señalar que en el programa los coeficientes son numéricos, pudiendo ser también calculados en el mismo cuerpo del programa.

15, 16 Y 17 DE SEPTIEMBRE DE 2021

```
t=.1*(0:50); %Se ingresa la constante de tiempo t

for n=1:51%Dentro de un bucle for, se ingresan los parámetros del robot

T(n)=90; W1(n)=0; A1(n)=0; T2(n)=-0.72*(t(n))^3+5.4*(t(n))^2+45;

W2(n)=-2.16*(t(n))^2+10.8*t(n); A2(n)=-4.32*t(n)+10.8;

D3(n)=-0.0094*(t(n))^3+0.0703*(t(n))^2+1.414; V3(n)=-0.0282*(t(n))^2+0.1406*t(n);

A3(n)=-0.056*t(n)+0.1406; R(n)=0.1171*t(n)+1.414;

End%Para cada variable, se dispone de una escala de 50 unidades

X=t(1:51); Theta1=T1(1:51);Vel1=W1(1:51);

Acel1=A1(1:51); Theta2=T2(1:51); Vel2=W2(1:51); Acel2=A2(1:51);

D=D3(1:51); V=V3(1:51); Ab=A3(1:51); Rr=R(1:51);

plot(X,D3,X,Rr),grid,xlabel('Tiempo'),ylabel('Trayectoria y recta correspond. '),pause%Gráficos

subplot(3,1,1),plot(X,Theta1),grid,xlabel('Tiempo'),ylabel('Angulo 1'),title('Articulacion 1')

subplot(3,1,2),plot(X,Vel1),grid,xlabel('Tiempo'),ylabel('Vel. Ang. 1')

subplot(3,1,3),plot(X,Acel1),grid,xlabel('Tiempo'),ylabel('Acel. Ang. 1'),pause

subplot(3,1,1),plot(X,Theta2),grid,xlabel('Tiempo'),ylabel('Angulo 2'),title('Articulacion 2')

subplot(3,1,2),plot(X,Vel2),grid,xlabel('Tiempo'),ylabel('Vel. Ang. 2')

subplot(3,1,3),plot(X,Acel2),grid,xlabel('Tiempo'),ylabel('Acel. Ang. 2'),pause

subplot(3,1,1),plot(X,D),grid,xlabel('Tiempo'),ylabel('Longitud D3'),title('Articulacion 3')

subplot(3,1,2),plot(X,V),grid,xlabel('Tiempo'),ylabel('Vel. lineal V3')

subplot(3,1,3),plot(X,Ab),grid,xlabel('Tiempo'),ylabel('Acel. lineal A3'),pause
```

6. Discusión de resultados

Los resultados obtenidos en el presente caso de estudio se obtuvieron en base a la determinación de las trayectorias en el espacio articular (posición, velocidad y aceleración); teniendo como punto de partida los requisitos de usuario en el espacio de trabajo. Para estas trayectorias se adoptaron funciones polinómicas que promuevan suavidad en los movimientos, evitando superar velocidades y aceleraciones máximas permitidas; en el presente caso, se propuso polinomios de tercer grado, aunque se puede suponer otro formato. Para la obtención de los coeficientes de estas funciones, se plantearon condiciones de borde iniciales y finales; tales como velocidades articulares nulas en el instante inicial y final. A la luz de estas consideraciones, y en base a la elección de un tiempo de

15, 16 Y 17 DE SEPTIEMBRE DE 2021

tarea de 5 segundos, se obtuvieron valores razonables de velocidades y aceleraciones. Así es que para la articulación 2 tienen lugar la velocidad máxima (13,5°/seg a los 2,5 seg) y la aceleración máxima (10,8°/seg² a los 0 y 5 seg). En la articulación 3, suponiendo dimensiones en metros (sería un robot grande), las velocidades y aceleraciones máximas son muy bajas.

En lo que se refiere al criterio de diseño adoptado, es interesante discutir el siguiente punto: se obtuvo la aceleración máxima y se verificó que no superara el valor admisible. Otra forma de proceder es tomar la expresión general de la velocidad articular para función cúbica 4):

$\dot{q}(t) = 3Dt^2 + 2Ct + B$ y derivarla para obtener la aceleración articular $\ddot{q}(t) = 6Dt + 2C$ que es la expresión de una recta y cuyo valor máximo se da en $t = 0$; es decir, $\ddot{q}(0) = \ddot{q}_{MAX} = 2C$. El valor del coeficiente C, está dado por 9):

$$C = \frac{3(q_{final} - q_{inicial})}{t_{final}^2} \quad \text{y sustituyendo se tiene:} \quad \ddot{q}_{MAX} = 2C = 2 \frac{3(q_{final} - q_{inicial})}{t_{final}^2} = 6 \frac{(q_{final} - q_{inicial})}{t_{final}^2}$$

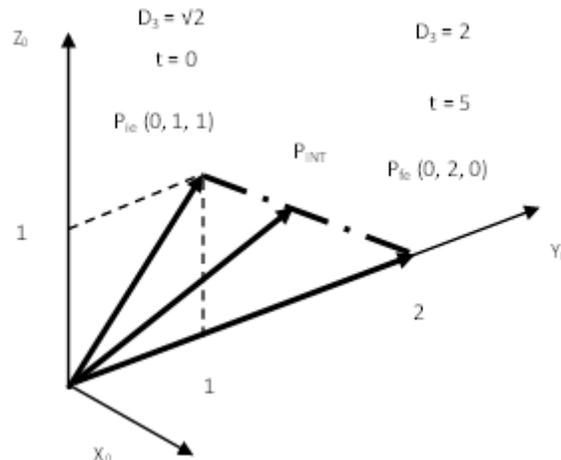
Como se debe cumplir: $\ddot{q}_{MAX} \leq \ddot{q}_{ADM}$ si se toma la igualdad en la expresión anterior, se está adoptando el valor admisible de aceleración como valor de diseño. De esta forma, haciendo esta sustitución se obtiene el tiempo final mínimo requerido para que el manipulador realice su tarea, respetando el tope admisible para la aceleración:

$$\ddot{q}_{ADM} = 6 \frac{(q_{final} - q_{inicial})}{t_{final-min}^2}$$

$$t_{final-min} = \sqrt{\frac{6(q_{final} - q_{inicial})}{\ddot{q}_{ADM}}}$$

Este valor de tiempo, u otro mayor, es el que debe utilizarse para la construcción de los coeficientes de la función polinómica interpoladora.

Otra cuestión a considerar en el contexto de los criterios de diseño, consiste en conocer las coordenadas de los puntos de paso del extremo del manipulador en el espacio cartesiano de trabajo, en base a los valores que toma D3(t) en el tiempo y haciendo respetar la trayectoria deseada por el usuario. Se asume que esta trayectoria deseada en el espacio de trabajo es una línea recta entre el punto inicial y final (recta en el plano Z0 – Y0 como lo muestra la recta punteada en la figura 17).



15, 16 Y 17 DE SEPTIEMBRE DE 2021

Figura 17: Trayectoria cartesiana del extremo del manipulador que pasa por los puntos P_{ie} , P_{INT} y P_{fe} donde la longitud del manipulador varía en el tiempo según función polinómica k .

Esta recta pasa por el punto inicial del movimiento: $Y_0 = 1$; $Z_0 = 1$ ($t = 0$, $D_3 = \sqrt{2}$) y el punto final del mismo: $Y_0 = 2$; $Z_0 = 0$ ($t = 5$, $D_3 = 2$). La ecuación del extremo del manipulador en el espacio cartesiano está dada por: $Z_0 = -Y_0 + 2$ para $1 \leq Y_0 \leq 2$ & $0 \leq Z_0 \leq 1$. En la figura 17 se observan las flechas de los vectores que representan la posición del extremo D_3 del manipulador en ambos puntos, y también en un punto de paso para un instante intermedio entre 0 y 5 seg. Es interesante observar, que si el usuario desea conocer la ubicación (Y_0, Z_0) en el espacio de trabajo cuando el extremo alcanza un cierto valor de D_3 , lo que sucede en algún instante intermedio entre 0 y 5 seg (punto P_{INT} en la figura 17), se plantean dos condiciones de borde; a saber: una que refleje la pertenencia del extremo P_{INT} a la recta en el espacio de trabajo, y la segunda que vincula las coordenadas del extremo Y_0 y Z_0 con el módulo de la variable articular D_3 . Así se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones⁶:

$$\begin{aligned} 2 &= Z_0 + Y_0 \\ D_3^2 &= Z_0^2 + Y_0^2 \end{aligned} \quad n)$$

Una propuesta de trabajo para volcarla y probarla en ordenador, consiste en resolver en forma general este sistema para esta recta en el espacio de trabajo. Despejando Y_0 de la primera y se sustituye en la segunda, se llega a la siguiente ecuación cuadrática en Y_0 :

$$2Y_0^2 - 4Y_0 + (4 - D_3^2) = 0, \text{ cuyas soluciones son: } Y_{0,2} = \frac{4 \pm \sqrt{(8D_3^2 - 16)}}{4}, \text{ que tiene solución para:}$$

$(8D_3^2 - 16) \geq 0$; y se toman los valores positivos de la resolvente, y de D_3 por ser una distancia. Si se desea saber las coordenadas Y_0 y Z_0 cuando el extremo alcanza el valor $D_3 = 1,7m$ (esto ocurre para $t = 2,5\text{seg}$); resolviendo el sistema se obtienen dos valores (1,66 y 0,33; siendo este último el válido, dado que se debe cumplir $0 \leq Z_0 \leq 1$). Para $Z_0 = 0,33m$ es $Y_0 = 1,67m$. Así es que para cada instante t , es posible obtener una terna de valores:

- ($t = 0$): ($D_3 = \sqrt{2}$, $Y_0 = 1$, $Z_0 = 1$) (punto inicial)
- ($t = 2,5$): ($D_3 = 1,7$, $Y_0 = 1,67$, $Z_0 = 0,33$) (punto de paso intermedio)
- ($t = 5$): ($D_3 = 2$, $Y_0 = 2$, $Z_0 = 0$) (punto final)

Se continúa muestreando en ordenador para más instantes, obteniendo más ternas de valores (D_3 , Y_0 , Z_0); usando la ecuación k):

$$D_3(t) = -0,0094t^3 + 0,0703t^2 + 1,4141 \quad k)$$

De esta manera, el usuario puede conocer la longitud del brazo del manipulador para cada instante, y fundamentalmente, en el espacio de trabajo para cada valor de Y_0 y Z_0 ; y respetando la trayectoria prefijada para este caso de: $2 = Z_0 + Y_0$.

7. Conclusiones y futuras líneas de trabajo

A nivel de conclusiones, este trabajo presenta las siguientes: 1) el problema analizado en, se encuadra en el modelo de proceso de investigación y desarrollo con sus tres fases (cinemática, dinámica y control); y más precisamente, en el contexto de desarrollo del módulo de control cinemático. 2) Dentro de esta línea, se implementa un proceso metodológico que se soporta en base de tres fases; el cual se nutre con la matriz de transformación homogénea, y proporciona aquellas trayectorias articulares que se ajustan a los requisitos de usuario y deben cumplimentar, al menos, un criterio de diseño. 3) Se describe un caso de estudio de un robot esférico RRP de tres

⁶ Este es un sistema de una recta y una circunferencia de radio D_3 y centro $Y_0 - Z_0$. Para cada D_3 hay una circunferencia que pasa por el punto de intersección entre el extremo de ese D_3 y la recta deseada en el espacio de trabajo ($2 = Z_0 + Y_0$).

15, 16 Y 17 DE SEPTIEMBRE DE 2021

grados de libertad aplicando el proceso metodológico expuesto; el cual permitió obtener las trayectorias articulares para este caso, y bajo la premisa del cumplimiento de una determinada condición de diseño. 4) Se presenta una discusión de estos resultados en base a dos enfoques: a) la obtención de un lapso mínimo de tiempo para la ejecución de la tarea del robot, teniendo en cuenta una aceleración admisible suministrada por el fabricante; b) el conocimiento de las coordenadas de los puntos de paso del extremo del manipulador en el espacio cartesiano, en base a los valores que toma $D_3(t)$ en el tiempo y respetando la trayectoria deseada por el usuario.

Se está trabajando en las siguientes líneas de investigación: I) una propuesta metodológica que hace uso del modelo diferencial (expresado por la matriz jacobiana de las velocidades y su inversa), aplicando el método de segmentos lineales con transición parabólica a las variables cartesianas. II) la simulación de ambas metodologías en un ordenador, para luego implementarla en un prototipo real que ya se dispone en nuestra casa de estudios. III) planteo de distintas condiciones de contorno para mayor cantidad de puntos de paso intermedios; haciendo uso de diferentes heurísticas para la determinación de las velocidades en dichos puntos. IV) Una línea de estudio se basa en obtener la función lineal $D_3(t)$ que vincula los puntos inicial y final de la trayectoria del extremo D_3 . Si se obtiene esta recta para el caso de estudio, la misma es:

$$D_3(t) = 0,1171t + 1,4141$$

Luego tomando la función cúbica obtenida k):

$$D_3(t) = -0,0094t^3 + 0,0703t^2 + 1,4141$$

, si se realiza la diferencia entre ambas funciones se obtiene otra función cúbica D_{dif} , cuya expresión es:

$$D_{dif}(t) = -0,0094t^3 + 0,0703t^2 - 0,1171t$$

Si se deriva esta expresión y se la anula, se obtienen los instantes y los valores extremos correspondientes a esos instantes. Obteniéndose los siguientes valores: para $t_1 = 1,05\text{seg}$ es $D_{dif1} = -5\text{cm}$ (la función lineal está por arriba de la cúbica); y para $t_2 = 3,93\text{seg}$ es $D_{dif2} = +5\text{cm}$ (la función lineal está por debajo de la cúbica). En la figura 18 se puede observar que para los instantes $t = 0$, $t = 2,5$ y $t = 5$; los valores son iguales para ambas funciones cúbica y lineal (1,4141, 1,7 y 2 respectivamente). Asimismo, para los instantes 1,05 y 3,93; se obtienen las máximas diferencias de 5cm (interesa el valor absoluto) entre ambas trayectorias articulares (segmentos en rojo). La cual debe ser cotejada con un valor de tolerancia.

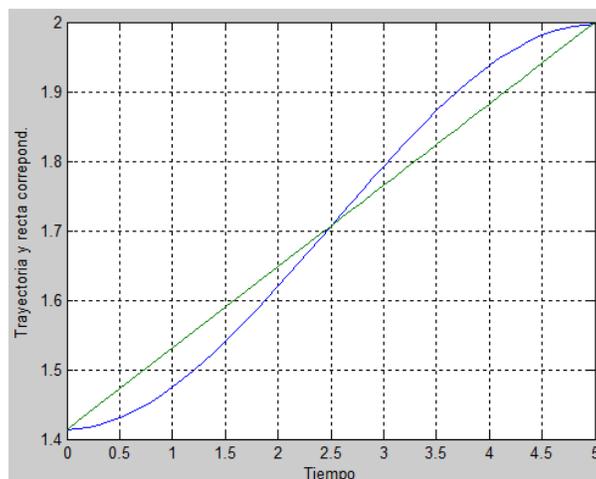


Figura 18: Función diferencia entre las trayectorias articulares cúbica y lineal con las diferencias máximas en rojo

8. Referencias

15, 16 Y 17 DE SEPTIEMBRE DE 2021

- [1] Ollero Baturone, A., “Robótica Manipuladores y robots móviles”. Ed. Alfaomega, España, 2007.
- [2] Craig, J. J., “Introduction to Robotics”. Ed. Addison Wesley, Reading, MA, 1989.
- [3] Barrientos, Antonio; Peñín, Luis Felipe; Balaguer Carlos y Aracil Rafael. “Fundamentos de Robótica”. Editorial McGraw – Hill. Madrid – España, 2007.
- [4] Reyes Cortés, F., “Robótica – Control de Robots Manipuladores”. Ed. Alfaomega, México, 2011.
- [5] Kelly, R. & Santibáñez, V., “Control de Movimiento de Robots Manipuladores”. Ed. Prentice Hall – México, 2003.
- [6] Torres, F., Pomares, J., Gil, P., Puente, S. & Aracil, R., “Robots y Sistemas Sensoriales”. Ed. Prentice Hall – España, 2002.
- [7] Iñigo Madrigal, R. & Vidal Idiarte, E., “Robots industriales manipuladores”. Ed. Alfaomega, México, 2004.
- [8] Spong, M. & Hutchinson, S. “Robot Modeling and Control”. Ed. John Wiley&Sons, 2006.