

Resolución

Análisis Matemático I

Razón de cambio

Resolución – Análisis Matemático I: Razón de Cambio

A continuación, se brinda la resolución de la secuencia recomendada para realizar el análisis y los cálculos de la situación planteada, en el problema que Eduardo y Marcos seleccionaron:

1. Leer el problema planteado en el Contexto.

Eduardo y Marcos son dos amigos que cursan Ingeniería. Estaban estudiando la derivada de una función y su interpretación como "Razón de Cambio", un tema fundamental de la asignatura Análisis Matemático I. Interpretar este tema era muy importante para continuar con el cursado de la asignatura, razón por la cual querían, además de poder **resolver los problemas analíticamente**, **entender qué pasaba** en las diferentes situaciones. Es por eso que seleccionaron un problema de la guía de Trabajos Prácticos y trataron de representarlo físicamente. El problema se planteaba de la siguiente manera: "...un hombre se aleja de un edificio de 18 metros de altura a una velocidad de 1,8 m/seg y una persona en la terraza del edificio observa a este hombre alejarse..."

Eduardo vive en un edificio de seis pisos. Un día se le ocurrió una idea brillante. Se subió a la terraza y se paró en un punto desde el cual pudo observar al portero cuando sacaba la basura y caminaba hasta la esquina para depositarla en el contenedor. Repitió la misma experiencia a lo largo de cinco días. De esta manera, pudo visualizar e interpretar el concepto de razón de cambio. Marcos hizo lo mismo y de este modo, ambos pudieron resolver los siguientes problemas de la guía sin ninguna dificultad.

¿A qué velocidad varía el ángulo de depresión de Eduardo hacia el portero cuando éste dista exactamente 24 metros de la base del edificio?

2. Identificar las variables involucradas.

h (Altura del edificio)

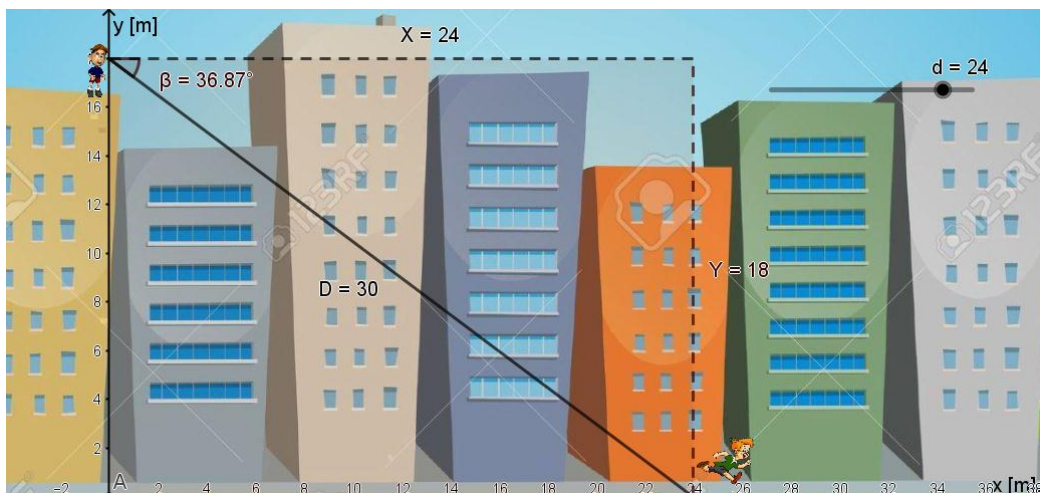
b (Distancia respecto de la base del edificio)

db/dt (Velocidad con la que se desplaza el portero)

β (Ángulo de depresión)

$d\beta/dt$ (Velocidad según varía el ángulo de depresión)

3. Si es posible realizar un bosquejo de la situación planteada (Situación planteada en forma estática).



4. Expresar estas variables y sus relaciones en forma matemática.

$$\operatorname{tg}(\beta) = \frac{h}{b}$$

Por lo tanto:

$$\beta = \operatorname{arctg}\left(\frac{h}{b}\right)$$

5. Identificar la información que brinda el problema y la que se desconoce, de forma tal que en la ecuación planteada pueda despejar la incógnita.

Datos:

$h = 18$ [m] (Altura del edificio)

$db/dt = 1,8$ [m/seg] (Velocidad con la que se desplaza el portero)

$b = 24$ [m] (Distancia respecto de la base del edificio)

Incógnita:

$d\beta/dt = ?$

6. Derivar para hallar la razón de cambio incógnita aplicando regla de la cadena a ambos miembros de la ecuación.

$$\beta = \operatorname{arctg}\left(\frac{h}{b}\right)$$

Se deberá calcular la variación del ángulo β respecto a la variable independiente "t" (tiempo) derivando miembro a miembro. Para ello, se aplicará la regla de la cadena.

En principio, se aplicará la derivada para "arctg(u)" donde $D \operatorname{arctg}(u) = \frac{u'}{1+u^2}$.

Dado que "u" es un cociente, se utilizará la regla de derivación correspondiente: $D(u) = \frac{w'v - wv'}{v^2}$.

De esta forma, se obtiene la siguiente expresión:

$$\frac{d\beta}{dt} = \frac{\frac{dh}{dt} \cdot b - \frac{db}{dt} \cdot h}{b^2 + \left(\frac{h}{b}\right)^2}$$

7. Sustituir en la fórmula, las variables con la información dada en el problema.

$$\frac{d\beta}{dt} = \frac{0\left[\frac{m}{seg}\right] \cdot 24[m] - 1,8\left[\frac{m}{seg}\right] \cdot 18[m]}{24^2 [m^2]} \\ \frac{d\beta}{dt} = -0,036 [1/seg]$$

8. Mediante el deslizador, simular la variación de las variables para obtener conclusiones (Situación planteada en forma dinámica).

Actividades extras:

Realizando los cálculos correspondientes, Eduardo y Marcos, pudieron evidenciar que la variación del ángulo pedido era $-0,036 [1/seg]$. Más allá de los valores numéricos, Eduardo y Marcos lograron entender algunos conceptos clave de la razón de cambio. ¿Y vos?

1. Considerando las condiciones iniciales del problema:

a. ¿A qué velocidad varía el ángulo de depresión de Eduardo hacia el portero cuando éste dista 0 metros de la base del edificio?

La velocidad del ángulo de depresión $\frac{d\beta}{dt}$ tiende a ser infinita. Puede corroborarlo observando las variaciones del simulador o reemplazando $b=0$ en la ley matemática.

b. ¿Cómo se comporta la variación del ángulo de depresión cuanto más se aleja la persona del edificio?

Cuanto más se aleja el portero, la variación del ángulo tiende a ser nula. Puede corroborarlo observando las variaciones del simulador.

2. Considerando que el portero corre a $2,5 [m/seg]$:

a. ¿La variación del ángulo de depresión aumentará o disminuirá en términos de valor absoluto, cuando éste llegue a recorrer 24 metros?

Cuanto más rápido se desplace el portero, la variación del ángulo aumentará en términos de valor absoluto.

b. ¿Cómo se comporta la variación del mencionado ángulo ante diferentes modificaciones del valor de la velocidad del portero?

Comparando la posición del portero a $24 [m]$ de la base:

- Si se desplaza a una velocidad menor que la del problema inicial ($1,8 [m/seg]$), $\left|\frac{d\beta}{dt}\right|$ disminuirá.
- Si se desplaza a una velocidad mayor que la del problema inicial ($1,8 [m/seg]$), $\left|\frac{d\beta}{dt}\right|$ aumentará.