Universidad Tecnológica Nacional – Facultad Regional Avellaneda.

Licenciatura en Enseñanza de la Matemática

LOGARITMOS: aportes para la enseñanza.

Tesista: Prof. Sofía Romano

Director: Lic. Alejandro E. García Venturini

Codirectora: Lic. Mónica Scardigli

5/05/2023

Resumen

La presente investigación aporta material de enseñanza acerca de la conceptualización del tema logaritmos. Reportamos las operaciones de pensamiento de una comisión de estudiantes según lo observado durante el desarrollo de algunas clases que siguieron una secuencia didáctica diseñada como hipótesis de trabajo. Finalizamos el análisis con una retroalimentación de las apreciaciones de los estudiantes y la docente que desarrolla las instancias pedagógicas.

La estrategia didáctica propuesta se diseñó con foco en problemas que contemplen el uso de los diversos registros de representación semiótica. Iniciamos el tema con una situación problemática extra-matemática en la cual los estudiantes pueden ponerse en tarea hasta el punto que las herramientas matemáticas que tienen no les permite resolver la cuestión; con ello creamos la necesidad del tema Logaritmos. Continuamos con el uso de un material tangible de “fichas” para que los estudiantes exploren numéricamente y puedan describir las propiedades que observan, así como mostrar la relación que se establece entre las dos progresiones: la aritmética y la geométrica. Finalmente, integramos el trabajo con las funciones logarítmicas con foco en los elementos característicos de las mismas y un ciclo radial entre el registro numérico, algebraico y gráfico.

En la práctica durante el proceso observamos un correcto uso de las propiedades de los logaritmos rompiendo cognitivamente con los obstáculos esperados. Creemos que estos, se transformaron en fortalezas con la significación, por parte de los estudiantes, de las diversas representaciones de los registros matemáticos. El análisis del proceso, así como los recursos didácticos utilizados, y los datos recolectados permiten un perfeccionamiento de la propuesta, así como un punto de partida para extender la misma a otros contextos con el fin de enriquecer la enseñanza y la didáctica de la matemática en nuestro país.

PALABRAS CLAVES

Conceptualización de logaritmos. Experimento de enseñanza. Propuesta didáctica.

Índice

Índice de tablas y figuras

I. Introducción

En el contexto de una Licenciatura en Enseñanza de la Matemática, nos preguntamos ante la compleja conceptualización del tema LOGARITMOS, ¿Cuáles son las potencialidades y obstáculos que influyen en el trabajo con este tema?

Al respecto, consideramos que los estudiantes tienen muy arraigada la propiedad distributiva de la multiplicación respecto a la adición y que por esto tienden, en general, a extenderla a intuitivamente a operaciones como el logaritmo de una suma igual a la suma de los logaritmos. Por tal inquietud, nos preguntamos ¿qué enfoque o qué herramientas tenemos en la didáctica de la matemática para que estos obstáculos sean superados?

Con foco en el tema y en relación a los estudiantes nos preguntamos, ¿podrán los alumnos dar sentido a partir de un recorrido paulatino y significativo? Nuestro primer propósito es colocar a los mismos como centro y productores de conocimiento junto con el profesor quien media entre el alumno y el saber. Buscamos aportar a la didáctica de la matemática en nuestro país con un material poco investigado en este territorio.

Reportamos las experiencias vividas en el aula para analizar la conceptualización del tema y concluimos con una devolución por parte del docente y estudiantes que llevaron a cabo las instancias pedagógicas propuestas.

Entorno a la propuesta didáctica que pusimos a prueba presentamos una síntesis de las ideas centrales que fuimos elaborando a partir de las preguntas formuladas y creencias de cómo enseñar.

- El modelo logarítmico permite abordar el estudio de una relación entre una progresión aritmética y una geométrica generando el obstáculo con el modelo lineal quien tiene de trasfondo una relación entre progresiones aritméticas
- La resolución en distintos registros de representación semiótica dará sentido a la comprensión del trabajo con logaritmos.
- La escritura de la fórmula de una función logarítmica a través de la ecuación

$$\mathrm{y} = \mathrm{k}.\log_b[a(x-c)]$$

favorece el análisis de los “corrimientos” de la curva logarítmica y enriquece el sentido de las características de la función.

Con estas bases anticipamos los tópicos en los cuales seccionamos el contenido. En cada una de estas secciones se abordan distintos problemas que se encuentran en el anexo I, junto con los objetivos de cada problema. Así mismo**,** describimos algunas de las interacciones de clases observadas.

Primera sección: Construcción de fórmulas exponenciales y, necesidad del uso del logaritmo.

Proponemos problemas extra matemáticos en que los estudiantes requieran validar fórmulas y proponer expresiones equivalentes para contar elementos de figuras que cumplen un determinado patrón. Buscamos introducir la idea de dar sentido a la letra como número indeterminado y al trabajo sobre las diferentes expresiones al abordar un problema desde diferentes miradas. Este desarrollo permite el uso de ecuaciones equivalentes y el uso correcto de propiedades en las expresiones algebraicas para la demostración.

Segunda sección: Introducción al concepto y propiedades del logaritmo a partir de problema en registro numérico.

Los problemas presentados en este capítulo involucran, a partir de un material tangible de "fichas" distintas situaciones para analizar a partir de determinados números. La tarea de los alumnos es estudiar el patrón de la sucesión de los números de la "fila de arriba" y la sucesión de la "fila de abajo" así como la de establecer una relación entre ambas.

Dicha secuencia está basada en el trabajo titulado "Una socioepistemología de lo logarítmico". (Escolá & Márquez, 2010), donde lo trabajado es el nexo con el registro gráfico de la función con su particular énfasis en la desestructuración de un crecimiento lineal.

Tercera sección: El estudio, análisis, gráfica y corrimientos a partir de la función logarítmica:

$$f: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R} \; / \; y = \log_b x,$$

Análisis de la ecuación de la función de la forma

$$f: A \to \mathbb{R} / y = k. \log_b[a(x - c)] + d$$

para producir información acerca de la gráfica de la función. Promover el razonamiento analógico de la ecuación de la función dada su gráfica y/o condiciones características de la función.

II. Desarrollo general

Motivación y aproximación al problema.

El diseño Curricular de la Nueva Escuela Secundaria de la Ciudad Autónoma de Buenos Aires sugiere el abordaje al tema matemático LOGARITMOS como función inversa de la función exponencial (Gerencia Operativa de Currículum, 2015). Esta definición quedó establecida por el matemático suizo Leonhard Euler en 1748 aunque el británico John Napier había publicado su primer tratado de logaritmos en 1614. Creemos que hay una problemática al enseñar el concepto desde la visión de Euler, ya que se desprenden como por arte de magia ciertos atributos matemáticos perdiéndose así el desarrollo de propiedades que dieron su origen.

Por otra parte, consideramos que en el tema LOGARITMOS un conocimiento previo al mismo interfiere con la construcción del nuevo conocimiento: la propiedad distributiva. Esta propiedad trabajada en números reales y expresiones algebraicas tienden en general a extenderla a otras operaciones, verbigracia: suelen escribir el logaritmo de una suma como la suma de los logaritmos, y el logaritmo de un producto como el producto de los logaritmos, entre otras.

Es importante remarcar que los LOGARITMOS no cumplen con ninguna de las combinaciones de la propiedad distributiva y al mismo tiempo, agregan propiedades que involucran una tercera operación, como la de transformar el producto, en suma.

Por lo que, además de una propiedad anterior que no se verifica, las nuevas propiedades rompen las estructuras de las ya conocidas. Creemos que enseñar el contenido desde su definición formal junto con las propiedades que de ella se deducen, dificultan aún más lo expuesto.

Ante estas concepciones es frecuente encontrar en libros y de parte de profesores la respuesta de proponer un contraejemplo con la ilusión de dar por terminado el obstáculo, pero entendemos que no es suficiente, se requiere de un trabajo más profundo donde el estudiante conceptualice desde su propia experiencia.

Nuestra problemática ya fue percibida en varios contextos educativos. Los autores Abrete y Pochulu establecen que los alumnos conciben el concepto de logaritmo como algo artificioso y arbitrario dada su enseñanza desprovista de su historia (Abrete & Pochulu, 2007). En este sentido, Confrey y Dennis favorecen la idea de localizar el trabajo dentro de un contexto socio-cultural e histórico ya que posibilita entenderlo desde la perspectiva de los creadores (Dennis & Confrey, 2000). Algunas investigaciones han demostrado errores comunes en los estudiantes debido a la generalidad incorrecta de las propiedades y la deficiente comprensión del concepto logaritmos (Ramírez et al., 2009); (Barcala y Astudillo, 2019)

Nuestro punto de partida es buscar una estrategia de enseñanza donde el alumno alcance una definición cercana a su propia experiencia, donde pueda conceptualizar las propiedades de la logaritmación, así como su correcta manipulación numérica y algebraica. A partir de la misma, nos proponemos a analizar la conceptualización del tema logaritmo con una hipótesis de trabajo (que exponemos en el **Anexo** I) en un curso de la Escuela ORT con estudiantes de cuarto año, con el fin de determinar cómo se desenvuelven ante nuestra problemática expuesta.

Si bien creemos que debe haber, según el término de Chevallard, una transposición didáctica (Chevallard, 1997) y, compartiendo con el autor Balmes que enseñar implica transitar caminos diferentes de los que guiaron los inventores (Balmes, 1845) consideramos que se debe investigar una propuesta didáctica que reconceptualice la epistemología del contenido estableciendo el foco en la relación alumno-saber y un profesor guía con un medio previamente planificado para promover el aprendizaje significativo en el estudiante.

Preguntas y objetivos de investigación

¿Qué evolución se percibe en los estudiantes, con arreglo a las operaciones de pensamiento, comunicación y producciones al trabajar con la propuesta didáctica diseñada para la conceptualización del tema LOGARITMOS? ¿la propuesta de estrategia didáctica diseñada permite una conceptualización del tema logaritmos?

Luego de la búsqueda de estrategias didácticas que promuevan el alcance de los objetivos planteados por la NES, realizamos instancias pedagógicas que nos llevan a analizar la conceptualización del tema a partir de las mismas.

Abordamos a una inquietud que ya fue emprendida por diversos autores, esperamos aportar material significativo a esta cuestión que se integre a lo ya estudiado y represente a la didáctica de la matemática en nuestro país.

Antecedentes

A continuación, seleccionamos dos investigaciones realizadas a nivel internacional. Ambas tienen como tema principal la enseñanza del tema logaritmo, la primera se centra en la práctica docente a partir de la estrategia didáctica utilizada por la docente; mientras que la segunda se focaliza en los estudiantes a partir de una estrategia didáctica diseñada por las investigadoras.

Los autores Yuri Morales López y Font Moll (2019) analizan en el marco de proyectos de investigación de la Universidad de Costa Rica bajo el título de “Valoración realizada por una profesora de la idoneidad de su clase de matemáticas” una clase en la cual se enseña el tema función logarítmica en cuarto año de Educación Secundaria.

La metodología utilizada es la observación no participante: se realizó la grabación de la clase para luego ser examinada junto con la profesora y así analizar la valoración de la misma. El concepto de función logarítmica es introducido a partir de un problema de interés compuesto en el cual se otorga la fórmula del modelo. Las conclusiones pertinentes con la investigación que se propone son: podría ser más provechoso para introducir el tema tener un problema y buscar una forma de modelarlo, la aparición del logaritmo se utilizó como técnica y no como concepto, al pasar del registro tabla a la gráfica correspondiente y al no usar una escala correcta los estudiantes indicaron que la misma era una recta.

Consideramos que el análisis es pertinente con nuestra investigación porque expone, en primer lugar, un valioso aporte al proponer la falencia de introducir un problema ya modelado con fundamentación en la carente conceptualización del tema logaritmos por parte de los estudiantes. Tomamos la experiencia para considerar que sería más útil construir el modelo matemático generando así procesos cognitivos de mayor riqueza y el logaritmo no se aplica como técnica sino como un recurso numérico tal como se dio en sus orígenes. Por otra parte, aporta la experiencia de la necesidad del trabajo entre la variación lineal y exponencial, análisis que se tendrá en cuenta en la propuesta didáctica que presentamos.

Un segundo antecedente, centrado en el análisis del estudiante, corresponde a las autoras Ferrari y Farfán de México. Dicha investigación se titula bajo el nombre "Multiplicar sumando: una experiencia con estudiantes de bachillerato" (Escolá & Farfán Márquez, 2017) Para la misma, utilizan la metodología de investigación la denominada Ingeniería Didáctica en la cual a partir de una propuesta socioepistemológica para la conceptualización del tema logaritmos, las autoras confrontan el análisis previo y posterior a la implementación de la estrategia didáctica. Tomamos de esta investigación la secuencia denominada "juego de fichas" para implementar, con algunas modificaciones, junto con la propuesta didáctica de nuestra investigación ya que, en la conclusión de la investigación se vio favorecida la aproximación de los estudiantes a las propiedades y definición de la logaritmación. Queremos construir en base a grandes y buenas experiencias, consideramos que este material es un buen punto de partida para nuestro objetivo.

Capítulo 1. Marco teórico.

Nos disponemos a definir los constructos teóricos que se tienen en cuenta en esta propuesta de investigación.

En primer lugar, teniendo en cuenta la mirada del alumno frente al tema de logaritmos y la forma de optimizar su aprendizaje, encuadramos los personajes y procesos. "En primer lugar tenemos los educandos, que en latín quiere decir los que deben ser educados (…) ontológicamente personas, pero que deben completar sus potencialidades" (Romano, 1984) En este proceso de educar podemos hablar de las acciones de enseñar y de aprender.

Según la Real Academia Española, enseñar deriva del latín *insignāre* que quiere decir señalar. Dar advertencia, ejemplo o escarmiento que sirve de experiencia y guía para obrar en lo sucesivo. Mostrar o exponer algo, para que sea apreciado, o bien, dejar aparecer, dejar ver algo involuntariamente.(ASALE & RAE, s. f.) De la misma forma podemos discurrir que aprender deriva del latín *apprehendĕre* que quiere decir percibir. Adquirir el conocimiento de alguna cosa por medio del estudio o de la experiencia." (ASALE &

RAE, s. f.) Consideramos así que la adquisición de los conocimientos se integra con los saberes previos a través de la experiencia.

Dentro de este universo del aprendizaje destacamos una forma. En el contexto de analizar el trabajo y el sentido según los existencialistas, Lou Marinoff afirma "el **propósito** es un objetivo último o un fin que ha de alcanzarse. Es una meta. (…) el **significado** se encuentra en el modo en que ocurren las cosas, no necesariamente en el resultado final" (Marinoff, 2005). Tomando estos constructos la estrategia didáctica que proponemos busca en los estudiantes la evolución en la conceptualización del tema logaritmos hasta alcanzar un aprendizaje significativo. Entendemos por el mismo: "el alumno manifiesta una actitud hacia el aprendizaje significativo; es decir, una disposición para relacionar, no arbitraria, sino sustancialmente, el material nuevo con su estructura cognoscitiva" (Ausubel et al., 1983). Consideramos al alumno en tarea de accionar hacia la resolución de las actividades previamente planificadas que se les propone para desarrollar y potenciar sus habilidades.

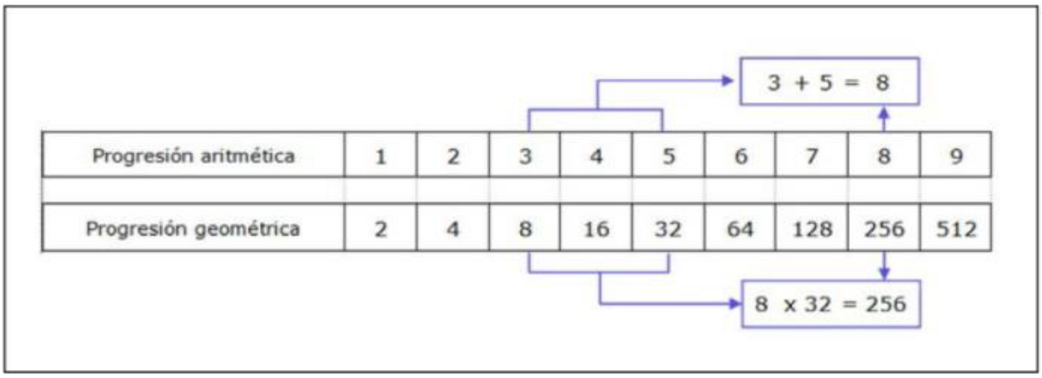
En tanto, lo expresado por los autores, consideramos un aprendizaje significativo si hay una lógica en el orden del contenido con arreglo a la estructura cognitiva del sujeto que aprende. Para ello, consideramos que debe haber una planificación para el desarrollo de las posteriores instancias pedagógicas, en este caso destacamos brevemente la epistemología del contenido que desarrollamos.

1.1- Logaritmos: historia e ideas para la propuesta del modelo didáctico

En un primer momento, Arquímedes desarrolla el concepto de logaritmo a través de una comparación entre una progresión aritmética y una geométrica (Domínguez et al., 2015) Según los mismos autores, dicha comparación se puede ordenar en forma de tabla, en la cual podemos observar que "se puede multiplicar dos números cualesquiera (situados en la fila correspondiente a la progresión geométrica) mediante la suma de los números que se encuentran en su misma columna, pero en la fila de la progresión aritmética" (Domínguez et al., 2015) En la siguiente figura los autores ayudan a comprender esta idea:

Figura 1

Ejemplo de correlación entre progresión aritmética y geométrica.



Ejemplo tomado de Domínguez Sales et al. (2012, p. 21)

Dentro de esta misma etapa destacamos el trabajo de John Napier, quien establece que “en esta tabla solo aparecían potencias de 2, de forma que únicamente se podían multiplicar determinadas cantidades (…). Otro problema que hacía poco operativa esta tabla es que la diferencia entre un número y el siguiente resultaba muy grande” (Domínguez et al., 2015). Es importante destacar para la investigación la idea del cambio en las bases de las potencias de la sucesión geométrica.

En cuanto al registro geométrico del logaritmo, observamos que, según las autoras “la forma de introducir la gráfica de la función logaritmo es realizada mediante las duplas: expresión algebraica-tabla, función inversa-simetría, teorema fundamental del cálculo-área” (Escolá & López, 2005). En esta investigación consideramos que debe haber una integración de los contenidos a partir de los saberes previos de los estudiantes por lo que establecemos en el modelo didáctico planteado en una primera instancia la dupla algebraica-tabla de relación numérica para luego poder validar, argumentar e institucionalizar el aporte de Euler del logaritmo como función inversa de la función exponencial.

En una segunda etapa alejada del cálculo numérico y enfocada en la modelización y el registro “algebraico- numérico” compartimos la idea de los autores que “Poner de manifiesto una relación entre medidas en progresión aritmética con otra serie en progresión geométrica conduce a considerar el primer fenómeno como un logaritmo del segundo" (Domínguez et al., 2015). Destacamos el enfoque abordado como base para el trabajo en la estrategia didáctica planteada.

En conclusión, subrayamos que en una primera etapa el logaritmo está enmarcado en un registro numérico para luego extenderse a otros registros. Finalmente, vemos que como afirman Abrete y Pochulu, en la actualidad, se usan los logaritmos como instrumento para las escalas, los sonidos que oímos, destructividad de un terremoto o el carácter ácido, básico o neutro de las disoluciones (Abrete & Pochulu, 2007). Es importante notar que el logaritmo como herramienta de cálculo está en desuso y que, en cambio, sí es frecuente trabajar con datos con un amplio rango de variabilidad que en ocasiones es difícil plasmar en una progresión aritmética, por lo que es más útil manejar una escala en la que no se muestre valor de la variable, sino su logaritmo (Domínguez et al., 2015). Esta recuperación de la construcción histórica del tema logaritmo a través de las nociones de progresión geométrica y aritmética, junto a sus aplicaciones actuales, permite el diseño de actividades para el modelo didáctico propuesto en nuestra investigación. Con base en las ideas planteadas nos disponemos a encuadrar el contenido a los alcances dispuestos por la política educativa y la legislación escolar actual.

1.2- Logaritmo: Diseño Curricular Nueva Escuela Secundaria (NES)

La escuela secundaria orientada en CABA tiene una duración de cinco años, dividida en dos ciclos: Básico y Orientado. El primero tiene una duración de dos años.

El tema logaritmos está destinado a enseñarse, según el diseño curricular de la Nueva Escuela Secundaria en el segundo año del ciclo orientado. Los objetivos de aprendizaje troncales de Matemática según el diseño curricular referido son: utilizar el álgebra para dar validez a propiedades numéricas y para modelar diferentes tipos de problemas; disponer de diferentes modos de representar relaciones entre variables, incluyendo el recurso informático; y recurrir a los diferentes modelos funcionales para poder estudiar procesos de cambio. (Gerencia operativa de currículum, 2015)

En particular, en cuarto año, los contenidos previos a funciones exponenciales y logarítmicas son: números reales, sucesiones, funciones polinómicas, y funciones racionales. Los contenidos incluidos en funciones exponenciales y logarítmicas según el diseño mencionado son:

- problemas que involucran el estudio de procesos de crecimiento y decrecimiento exponencial, discretos y continuos;
- la función logarítmica como inversa de la exponencial. Gráfico y fórmulas. Variación del gráfico a partir de la variación de la fórmula y viceversa;
- estudio de funciones logarítmicas y exponenciales: positividad, negatividad, ceros, crecimiento, decrecimiento en el contexto de los problemas que modelizan;
- análisis de propiedades de exponentes y logaritmos;
- problemas que se modelizan mediante ecuaciones exponenciales y logarítmicas.
- Aproximación a la resolución gráfica.

Respecto al desarrollo del tema Función Logarítmica, propone analizarlo siempre en referencia al modelo exponencial con mirada en su representación gráfica "se sugiere iniciar el tratamiento de las funciones logarítmicas y exponenciales a partir de la representación gráfica. El uso de software matemático y calculadora serán un soporte necesario para algunos elementos del análisis" (Gerencia operativa de currículum, 2015). A partir del trabajo desplegado con las funciones exponenciales y logarítmicas, se propone la introducción en la resolución de ecuaciones, conservando el soporte gráfico y funcional.

Observamos que la sugerencia del diseño curricular NES para el modelo didáctico es la conceptualización de la función logarítmica como la función inversa de la función exponencial, análisis a partir del punto de vista gráfico y funcional para finalmente modelizar situaciones y resolver problemas. Teoría que no es compartida por los autores y teorías mencionadas en el marco del problema de esta investigación. Si bien los objetivos de aprendizaje no varían, las formas de alcanzarlos parte de cimientos diferentes. Adentrándonos en el campo físico de la investigación, pondremos foco en los intercambios que se establezcan en el contexto áulico.

1.3- Teoría de las situaciones didácticas

En primer lugar, la Teoría de Situaciones didácticas (TSD), cuyo principal investigador es Guy Brousseau, indica que una situación didáctica es "un modelo de interacción de un sujeto con cierto medio que determina un conocimiento dado" (Brousseau, 2007). Entendemos por medio a la problemática planteada y el conjunto de relaciones matemáticas que se establecen a lo largo de la situación didáctica, considerando que hay una adaptación del sujeto que aprende al medio creado.

La Teoría de Situaciones Didácticas distingue cuatro tipos de situaciones, a saber: acción, formulación, validación e institucionalización. Podemos resumir cada una, según Godino; las situaciones de acción son ocasión para actuar sobre el medio en busca de la solución del problema; en las situaciones de formulación se establece una comunicación a través de los instrumentos lingüísticos; las situaciones de validación incluyen argumentos o demostraciones para las afirmaciones; y, por último, destaca, la situación de institucionalización de conceptos y teoremas matemáticos (Brousseau en Godino et al., 2006) Consideramos estas cuatro etapas necesarias para el aprendizaje de estudiante y compartimos que el medio es un pilar fundamental para que estas cuatro etapas se presenten.

El desarrollo de las cuatro situaciones planteadas es objeto de estudio para analizar la conceptualización del tema. En esta investigación, se analizan las situaciones didácticas con el fin de analizar los procesos de comunicación, asimilación y reconstrucción de los saberes de los estudiantes. Dentro de cada situación consideramos también las distintas herramientas que utilizan, cómo validan, cómo generalizan, cuándo abstraen una regla obtenida. Teniendo en cuenta que en el saber se relacionan la praxis y lo conceptual, establecemos las bases de la teoría de Régine Douady que serán un factor importante para el desarrollo de las instancias pedagógicas.

1.4- Dialéctica instrumento-objeto y el juego de marcos

Douady atribuye a los conceptos matemáticos dos dimensiones: el aspecto objeto, plasmado en definiciones y propiedades características; y el aspecto instrumento, que permite realizar una tarea en el momento dado (Douady en Godino et al., 2006). Además, establecemos, referenciando a los mismos autores, la definición de marco como el "contexto de uso" interno de la propia matemática; pueden ser entre otros algebraico, aritmético, y geométrico. Buscamos equilibrar las definiciones y propiedades con un posterior uso del objeto matemático como instrumento en otro marco.

Es por ello que, en la propuesta didáctica buscamos una articulación entre las teorías propuestas donde el medio permita el uso del objeto matemático y que, a través del "juego de marcos", las argumentaciones y las validaciones se alcance el saber matemático para institucionalizarse, a cargo del docente, como concepto-objeto. En este trayecto de praxis y logos, se presentan en los estudiantes distintas dificultades, errores y obstáculos. Definimos a continuación qué entendemos por cada uno de ellos.

1.5- Relación error-obstáculo

Según Brousseau, “algunas de las concepciones adquiridas no desaparecen inmediatamente en provecho de una concepción mejor: resisten, provocan errores y se constituyen así en *obstáculos*” (Brousseau, 2007). Es decir, remarcamos que los obstáculos se manifiestan a través de los errores considerando que los mismos provienen de un conocimiento anterior que tuvo éxito en otro ámbito. El autor agrega, que el obstáculo no desaparece con el aprendizaje del nuevo conocimiento, sino que opone resistencia a su adquisición. Consideramos en este sentido que los errores provenientes del mal uso de las propiedades de los logaritmos son previsibles y que un obstáculo debe ser resuelto y no ignorado. Así, damos importancia a los problemas abiertos que permitan una evolución en el pensamiento y conceptualización por parte del estudiantado.

1.6- Rol de los problemas en matemática

Entendemos por situaciones que sean medios para desarrollarse un aprendizaje significativo la concepción de Douady de un “buen problema” aquel que: propone un grado de desafío adecuado, es *abierto* porque permite su resolución desde una variedad de estrategias, es *rico* porque hay una red de conceptos involucrados y, el conocimiento buscado es el medio de responder eficazmente a la pregunta (Douady, 1986). Consideramos que es un desafío diseñar una propuesta de trabajo que promueva una secuencia didáctica pero que al mismo tiempo que es el motor de esta investigación para explorar en un accionar concreto una hipótesis de trabajo que creemos una buena guía para los objetivos que nos hemos planteado.

El modelo didáctico planteado propone situaciones de los denominados “buenos problemas” donde la situación planteada es el origen de la actividad por parte de los estudiantes. Un factor relevante es el contexto de aplicabilidad cercana al estudiante que tiene el problema. En relación con los problemas, Fletcher dice “la enseñanza de la matemática debe también integrarse mejor dentro de sus aplicaciones actuales (…) pero la aplicabilidad de los conceptos no es el aspecto fundamental: se trata de la capacidad de suscitar una respuesta en el estudiante” (Fletcher, 1964). En conjunto con las ideas mencionadas, planteamos la necesidad de una puesta en tarea del estudiante para dar respuesta a una pregunta.

Capítulo 2. Metodología

2.1. Delimitación y muestra.

En la Escuela ORT, sede Almagro, se llevó a cabo la propuesta didáctica en un curso de cuarto año de la especialidad: *producción y artística*. La profesora a cargo es docente de la escuela en los años superiores (cuarto y quinto) de diversas especialidades: química, producción y artística, construcciones y gestión.

2.2. Tipo de investigación

Este trabajo es analizado a través de una metodología de investigación mixta. Entendemos por método mixto, según Hernández Sampieri, un conjunto de procesos sistemáticos de investigación que implican la recolección de datos cuantitativos y cualitativos, así como su integración para mayor entendimiento del fenómeno de estudio (Hernández Sampieri et al., 1998). Entendemos que el foco cualitativo nos aproxima a la realidad vivenciada y al desarrollo de los accionares de los sujetos participantes, así como el enriquecimiento de sus operaciones de pensamientos e interpretaciones a la propuesta. A su vez, los datos cuantitativos nos ofrecen una información simplificada de ciertas categorías analizadas para finalmente, integrar la información y dar una conclusión circunstancial al modelo analizado.

2.3. Fases de la investigación

2.3.1. Fase 1. Observación de clase.

En una primera instancia buscamos obtener diagnósticos cualitativos mediante la observación. Entendemos por la misma, “el proceso de conocimiento de la realidad factual mediante el contacto directo del sujeto cognoscente y el objeto o fenómeno por conocer” (Novoa Ramírez & Mejía Mejía, 2014). Las mismas se desarrollan sin intervención dentro de la clase donde el núcleo de observación son las acciones de los estudiantes para el aprendizaje, esto es: producciones escritas, operaciones de pensamiento, comunicaciones, dificultades, errores u obstáculos en la conceptualización de la unidad pertinente. Es decir, nuestra participación es como observador participante a clases de matemática en las que se desarrollan nuestra propuesta de trabajo. Adjuntamos en el anexo las fichas utilizadas para el registro de las observaciones a partir de las cuales, creamos categorías para nuestro análisis.

2.3.2. Fase 2. Generación de categorías de análisis.

En una segunda etapa, buscamos recolectar información manifestada por los sujetos que fueron parte de las clases. Para ello, en primer lugar, recurrimos a la docente que lleva a cabo la planificación con el fin de obtener diagnósticos de sus vivencias y pensamientos respecto a lo trabajado. Esta información es de carácter cualitativa mediante una entrevista de preguntas semiestructuradas (formuladas a partir de la observación de las clases, es decir, la fase anterior).

En esta entrevista con la docente a cargo del curso buscamos recolectar sus apreciaciones y opinión en el desarrollo de las instancias pedagógicas, y, al final, generar junto a ella categorías de análisis para encuestar a los alumnos. Algunas de las mismas que tendremos en mente son: satisfacción respecto al trabajo grupal, condiciones de trabajo, satisfacción hacia el crecimiento logrado es decir sobre el propio desempeño, participación, interés, comprensión, reconocimiento de los logaritmos como objeto y como instrumento, dificultades en el aprendizaje, resolución de ejercicios.

2.3.3. Fase 3. Generación de instrumentos de recolección de datos.

Como establecimos en la etapa anterior, junto a la profesora que lleva adelante las instancias pedagógicas desarrollamos preguntas para los estudiantes con el fin de recolectar información del camino recorrido. En esta etapa, generamos los instrumentos para llevar a cabo la recolección de datos por parte de los estudiantes, planificamos hacer la misma a través de una encuesta con el fin de que podamos examinar cuantitativamente los resultados de cada categoría de análisis.

Capítulo 3. Registros y análisis de los datos.

3.1 Descripción de los instrumentos utilizados para la recolección de datos

En primer lugar, describimos las clases observadas, para este esquema de trabajo, diseñamos una guía de observación que contempla datos generales como fecha, aula, contenido. La misma es una guía no estructurada que nos orienta para focalizar en los aspectos del objeto investigado para registrar la información pertinente con el plan de investigación. En este caso, compartimos con los sujetos observados como invitados, pero al mismo tiempo registramos los datos e impresiones oportunos para la investigación.

En segundo lugar, consideramos que las distintas apreciaciones de los sujetos intervinientes, tanto los alumnos como la docente que llevó a cabo las clases, son un factor principal para analizar resultados con respecto a nuestro objeto de estudio. Para la opinión de la docente consideramos una encuesta a través de preguntas en forma verbal, dicha entrevista semiestructurada, entendiendo por la misma "una guía no tan formal y rígida porque permite al entrevistador pueda introducir algunas preguntas para esclarecer vacíos en la información" (Novoa Ramírez & Mejía Mejía, 2014), se lleva a cabo al finalizar las instancias pedagógicas.

En el caso de los estudiantes, optamos por un cuestionario por ser más confiable al ser anónimo. El mismo se dio a través de preguntas escritas para recopilar información y que los estudiantes puedan decir lo que piensan sin limitaciones. Se recurrió a la recolección de datos por parte de los estudiantes en tres instancias. Consideramos que necesitamos que los alumnos se expresen para poder generar una idea de lo que piensan. Pero, por otra parte, se nos dificulta la codificación de los datos. Es por ello que, recurrimos a un cuestionario con preguntas cerradas y abiertas.

Con la siguiente figura de elaboración propia visualizamos el proceso de la investigación mixta, describiendo las técnicas e instrumentos utilizados en la recolección de datos:

Figura 2

Proceso de la investigación mixta.

Técnica	Instrumento	Procedimiento
• Observaciones de clase	• Ficha de registro	• Narración de las clases observadas
• Entrevista al docente	• Guión de la entrevista semiestructurada	• Narración la entrevista
• Encuesta a estudiantes	• Cuestionario	• Cuantificar los datos según las unidades de análisis.

Elaboración propia.

3.2.- Registro de clases observadas con su respectivo análisis

Problema 1. La deforestación

Un bosque tiene actualmente un área de 400 kilómetros cuadrados.

Se sabe que su tamaño está reduciéndose cada año un 5%.

Determine en cuánto tiempo el bosque quedará reducido a la mitad de su tamaño.

Luego, determine una fórmula que relacione la cantidad de kilómetros cuadrados que tiene el bosque del año que transcurre.

Descripción de clase:

Los estudiantes se colocaron en grupos de 4 estudiantes a pedido de la docente, enseguida todos los grupos llegaron a la solución de 100 años. Describimos a continuación el diálogo en uno de los grupos ya que fue parecido en el resto.

Al ver que todos los estudiantes del grupo afirmaban que al transcurrir 100 años el bosque cubría un área de $200km^2$, la profesora les pidió que argumenten sus conclusiones. Un estudiante comento:

- Si en un año se reduce 20 entonces en 10 años son los 200. El resto de los estudiantes afirman que tiene razón y no encuentran dificultad en la situación planteada.

La profesora pregunta entonces

- ¿Cuántos kilómetros cuadrados ocupa el bosque al transcurrir un año?

Los estudiantes responden

- El 10% de 400 es 40, por lo que el 5% es 20; entonces en un año hay 380 kilómetros cuadrados.

Continua la docente preguntando

- ¿y a los dos años?

Recibiendo como respuesta de algunos

- otros 20 menos.

En ese momento se establece un silencio en el que los estudiantes no comprenden el motivo del encauzamiento de las preguntas de la profesora. La misma persiste:

- ¿Están seguros? A ver… piensen bien… relean el enunciado.

Luego de unos segundos, un estudiante dice:

- "ah no, porque ahora es el 5% de los 380". Se escucha un "ah, ¡claro!" mientras que otra chica dice "no para, no entendí".

La profesora acuerda con los chicos del grupo que ya hicieron la cuenta que expliquen al resto del grupo mientras ella pasaba con los otros grupos.

Con esta intervención agregamos que ningún grupo pudo conjeturar la fórmula generalizada. Aun así, la docente continua la clase con la puesta en común en el pizarrón proponiendo hacer una tabla con algunos datos numéricos mientras escribe:

Tiempo [años]	Área $[km^2]$
0	400
1	

- "¿Qué cuenta hicieron para saber el área en un año?"

Los estudiantes responden

- Sacamos el 5% de 400, y se los restamos

Otro estudiante agrega, "nosotros sacamos el 95%"

"Muy bien, hagamos dos tablas" dice la profesora mientras copia y pide a los estudiantes que copien tal cual:

<u>1° forma</u>

Tiempo [años]	5%	Diferencia	Área $[km^2]$
0			400
1	$\frac{5}{100}.400$	$400-\frac{5}{100}.400$	380

2°forma

Tiempo [años]	85%	Área $[km^2]$
0		400
1	$\frac{95}{100}.400$	380

- ¿y a dos años? Pregunta la profesora mientras agrega un renglón en cada tabla.

- "y, lo mismo" responde una alumna.

- "bueno pasa a completarlas" pide la profesora.

Mientras que la alumna completa un estudiante llama a la profesora para preguntar si puede poner directamente el resultado en vez de todo el cálculo; a lo que la profesora le contestó que convenía copiarlo así para conjeturar la fórmula. La alumna que completo en el pizarrón copio los resultados, la profesora agrego los cálculos previos reiterando que copien las cuentas que los lleva al número final para después poder generalizar.

Las tablas en el pizarrón quedaron:

1° forma

Tiempo [años]	5%	Diferencia	Área $[km^2]$
0			400
1	$\frac{5}{100}.400$	$400-\frac{5}{100}.400$	380
2	$\frac{5}{100}.\left(400-\frac{5}{100}.400\right)$	$400-\frac{5}{100}.\left(400-\frac{5}{100}.400\right)$	361

2°forma

Tiempo [años]	95%	Área $[km^2]$
0		400
1	$\frac{95}{100}.400$	380
2	$\frac{95}{100}.\frac{95}{100}.400$	361

Luego, la profe dijo “bueno, vamos a reagrupar un poco la expresión en la primera tabla”. En un costado del pizarrón copio el primer renglón y preguntó

- ¿Qué propiedad podemos aplicar para agrupar los 400?

Varios estudiantes respondieron al unísono

- Factor común 400

Mientras la profesora escribía, dijo

- bien, propiedad distributiva recíproca, ¿con qué completamos en el primer término del factor?

Respondiendo los alumnos:

- uno menos 5 sobre 100

En el pizarrón quedó escrito:

$$400-\frac{5}{100}.400=400.\left(1-\frac{5}{100}\right)$$

En ese momento una alumna exclama

- ¡Ah! ¡¡¡Y esa cuenta de 95/100 que es lo mismo que la otra tabla!!!

- Exactamente, por eso es lo mismo calcular el 95% que la diferencia entre el 100 y el 5%. En conclusión, conviene trabajar con la segunda tabla cuya expresión está agrupada. ¿y a los 5 años? ¿Qué dirían? ¿cuántos kilómetros cuadrados hay?

Luego de unos minutos de silencio, un estudiante dijo

- uh, hay que hacer todas las cuentas.

La profe le pidió a cada grupo que se ponga en tarea de resolver la nueva cuestión y que piensen nuevamente una ecuación que determine el área del bosque a partir del tiempo transcurrido.

Los estudiantes hicieron todas las cuentas. Podemos percibir que sólo un grupo hizo las cuentas anotando los resultados, el resto continúo con el formato solicitado por la docente. Tres grupos le pidieron si podían usar la notación de potencia.

Ningún grupo llego a la fórmula generalizada y pasan nuevamente a una puesta en común en el pizarrón en la que comienza con los estudiantes de diferentes grupos pasando a completar las tablas hasta el año 5 quedando anotado:

Tiempo [años]	95%	Área $[km^2]$
0		400
1	$\frac{95}{100}.400$	380
2	$\frac{95}{100}.\frac{95}{100}.400$	361
3	$\frac{95}{100}.\frac{95}{100}.\frac{95}{100}400$	$342,95$
4	$\frac{95}{100}.\frac{95}{100}.\frac{95}{100}.\frac{95}{100}400$	$325,8$
5	$\frac{95}{100}.\frac{95}{100}.\frac{95}{100}.\frac{95}{100}.\frac{95}{100}.400$	$309,51$

A continuación, la palabra de la profesora

- Bueno, muy bien, veamos. Tratemos de generalizar coloquialmente la fórmula. Si tenemos un año multiplicamos $\frac{95}{100}$ una vez. A los dos años 95/100 por 95/100, a los tres años 95/100 por 95/100 por 95/100. ¿y a los 20 años?

- Así 20 veces. O sea, a la 20.

-Perfecto y en un año genérico, llamémoslo x, ¿qué cuenta harían?

En el pizarrón la profesora agregó los renglones

20	$\left(\frac{95}{100}\right)^{20}.400$	
…	…	…
x		

El estudiantado no respondió tan ágilmente, la profesora tuvo que insistir con el lenguaje coloquial hasta que un estudiante dijo

- Y a la x

Finalmente quedó establecida la tabla con la generalización de la fórmula:

Tiempo [años]	95%	Área [km^2]
0		400
1	$\frac{95}{100}.400$	380
2	$\frac{95}{100}.\frac{95}{100}.400$	361
3	$\frac{95}{100}.\frac{95}{100}.\frac{95}{100}400$	$342,95$
4	$\frac{95}{100}.\frac{95}{100}.\frac{95}{100}.\frac{95}{100}400$	$325,8$
5	$\frac{95}{100}.\frac{95}{100}.\frac{95}{100}.\frac{95}{100}.\frac{95}{100}.400$	$309,51$
$\dots$		
20	$\left(\frac{95}{100}\right)^{20}.400$	
	$\left(\frac{95}{100}\right)^{x}.400$	

- Ustedes al principio del problema dijeron que en 10 años tendría 200 kilómetros cuadrados. ¿Pueden decirme cuántos km^2 tiene el bosque a los 10 años?

Enseguida varios alumnos solicitaron que la docente les explique cómo calcular una potencia de exponente 10. Luego de unos minutos responden

-239,5

- ¿Me pueden decir con toda esta información en qué año tendrá $200km^2$?

En el silencio algunos estudiantes probaban en sus calculadoras, otros miraban el pizarrón sin vislumbrar ninguna salida. Un estudiante afirma

- A los 13 años casi, me da 205,33.

- ¿y a los 14?

- 195,07

- ¿Pueden saber con exactitud en que momento llega a 200 el área?

-Con 13,5 da 200,13. Y con 13,6 da 199,11

- Bien, habrá un número exacto que nos de 200

Algunos estudiantes mueven la cabeza negativamente, pero ninguno responde. Otros están con la calculadora. Una alumna dice

-sí ya casi estoy con 13,52 da 199,9

-Bien, lo genial es que te hayas dado cuenta en probar con números entre 13,5 y 13,6.

La alumna interrumpe a la profesora que iba a ser énfasis en para los estudiantes que preestablecían con su postura que no iba a haber un número.

- ¿y por qué no igualamos a 200?

-¡¡¡Genial!!! Veamos qué ocurre. Hasta el momento sabemos que es un número cercano a 13,52 años.

En el pizarrón escribe

$$\left(\frac{95}{100}\right)^x .400 = 200$$

- ¿Cómo despejan x?

- pasas el 400 dividiendo

$$\left(\frac{95}{100}\right)^x = \frac{200}{400}$$

$$\left(\frac{95}{100}\right)^x = \frac{1}{2}$$

- Ahora el 100 multiplicando

La profesora le contesta automáticamente

- no, al tener un exponente no podés pasar el denominador de la base.

El alumno no parecía muy convencido por lo que añadió la docente.

- Pensalo como el exponente un número natural, multiplicas tantas veces la base y el 100 se repite por ende no lo podés pasar multiplicando hasta no aplicarle el exponente.

- ¡Ah claro! Pero ¿Y entonces que se hace? ¿Paso a raíz?

-Bueno, veamos que pasar a raíz tampoco aporta mucho porque seguimos con la misma pregunta ¿95/100 elevado a qué número la potencia es 1/2?

Varios alumnos estaban con cara de desconcierto hasta que una alumna preguntó

- ¿Y, pero entonces qué hacemos?

- Muy bien dijo la docente, matemáticamente aún no tenemos las herramientas para resolverlo. Pero intuitivamente y probando sabemos que la solución a la ecuación es aproximadamente 13,52 y escribió debajo de la ecuación

$$\left(\frac{95}{100}\right)^{x} = \frac{1}{2}$$

$$x \cong 13{,}52$$

Y añadió.

-Vamos a darle un cierre a la clase. Recapitulemos lo último visto, si tenemos una ecuación con una potencia con una base un número indeterminado tenemos como operación inversa, la raíz. Por ejemplo

La docente escribe en el pizarrón:

$$x^3 = 8$$

$$x = \sqrt[3]{8} = 2$$

Y continúa diciendo

- Pero si el número indeterminado es el exponente, no conocemos hasta el momento una operación inversa, por ejemplo

$$2^x = 8$$

Sabemos que $x = 3$ por probar. Pero matemáticamente nos falta una herramienta que veremos las próximas clases.

Ficha resumen de la clase:

Objetivos alcanzados por los estudiantes

Los estudiantes percibieron un cambio exponencial, rompiendo esquemas de variación lineal, así como reconocieron una expresión algebraica potencial y su diferencia con la lineal.

Los estudiantes calcularon un producto de un factor y una potencia jerarquizando correctamente.

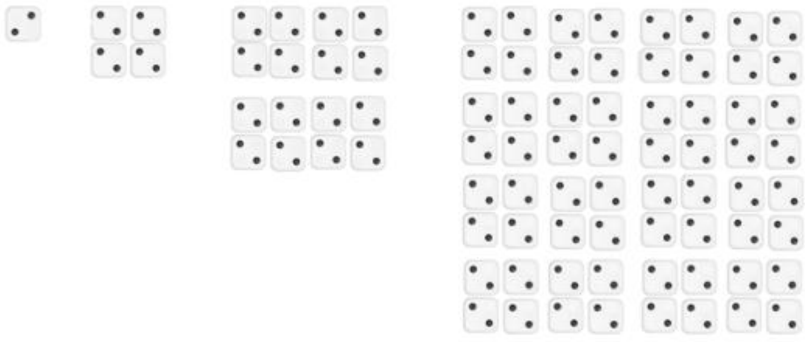
Los estudiantes plantearon una ecuación exponencial y llegaron a la necesidad del logaritmo como herramienta de cálculo.

Tabla 1

Datos recolectados de la Clase N°1

Clase N°1	**Guía de los estudiantes**				
	Grupo 1	Grupo 2	Grupo 3	Grupo 4	Grupo 5
Habilidades:					
Puesta en tarea, planteo del problema, resolución del problema. Alumnos interactúen con objeto de conocimiento.	Logrado	Logrado	Logrado	Logrado	Logrado
Objetivos	Logrados	Logrados	Logrados	Logrados	Logrados
Representaciones: Registros de representación semiótica utilizada.	Numérico	Numérico	Numérico	Numérico	Numérico
Actividad de abstraer Alcanzar la generalización	no logrado	no logrado	no logrado	no logrado	no logrado

Problema 2. Jugando con dados



Siguiendo con el patrón de figuras:

a) Determine cuántos dados habrá en la fig. 5

b) ¿En qué figura habrá 1024 dados?

c) Determine cuántos dados habrá en la fig. 8

d) Determine una ecuación que permita calcular la cantidad dados que se necesitan para armar una figura n

e) ¿Hay una expresión equivalente a la del ítem anterior? En caso de que sí, proponga cuál/es.

Los estudiantes se organizaron en 5 grupos. Para la pregunta del inciso a cada grupo debatió bastante la forma de contar. No hubo en primera instancia una estrategia, quisieron formar la figura dibujando, pero se dieron cuenta que era mejor imaginar cómo iba a ser esa figura, podemos notar que una sola alumna hizo el esbozo de todos los dados junto con la forma de la figura.

Hubo dos grandes estrategias de conteo, 3 grupos contaron la cantidad de dados que había en cada figura horizontalmente y cuántos en forma vertical. Dedujeron fácilmente que en la figura 2 colocaron 2x2; en la figura 3, 4x4, en la figura 4, 8x8 y, fácilmente respondieron en la figura 5, 16x16=256.

La segunda estrategia consistió en agrupar a los dados en grupos de 4. Notaron que la figura 1 está formada por un grupo de 4 dados, la figura 3 por 4 grupos de 4 dados cada grupo, y, la figura 4 por 16 grupos de 4 dados. Por lo que, proponen que la figura 5 tiene 64 grupos de 4 dados, 64x4=256

Para la pregunta b) la mayoría de los estudiantes siguió con el razonamiento numérico. Los de la primera estrategia, hicieron el siguiente paso 32x32 y ya les dio 1024. Parecido ocurrió en la estrategia dos. Retomamos un diálogo que se dio en un grupo, un alumno dijo

-Podemos igualar a 1024 como la ecuación de la clase pasada

- ¿qué vas a igualar si acá no tenemos fórmula?

-Ah, tenés razón.

Más allá que la profesora estaba con otro grupo y que este diálogo pudo ser muy enriquecedor, observamos que los estudiantes tienen una línea de pensamiento en el que notan que el contenido trabajado tiene cierta similitud en cuanto a los objetivos que se quieren alcanzar.

Para la pregunta c) los estudiantes siguieron con su razonamiento paso por paso hasta llegar a la figura 8, no hubo ningún grupo que haya buscado la generalización previamente. Podemos observar que todos los grupos llegaron acertadamente al resultado.

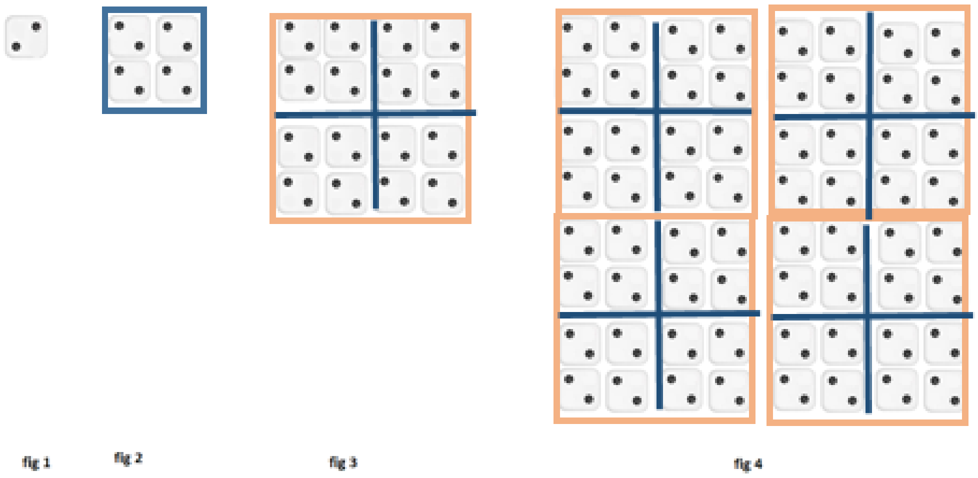
El caso de la generalización, pregunta d, fue alcanzada por los tres grupos que contaron con la estrategia de la cantidad de dados que tenía la figura. Uno de ellos no contempló el corrimiento de $n-1$ para el exponente.

En la puesta en común se expusieron las formas de contar. En el pizarrón la profesora fue anotando lo que comentaba cada grupo. Hasta el inciso c) no hubo mucho debate más que observar cómo había contado otro grupo.

Mientras cada grupo contaba su forma de pensar y los resultados hallados. La profesora en el pizarrón hizo un dibujo de las figuras y mostró claramente la estrategia que explicaban los estudiantes. Además, a medida que ellos contaban coloquialmente los cálculos hechos en cada paso, la docente los anotaba en una tabla de doble entrada agregando una columna vacía que decía “fórmula equivalente”. Además agregó un renglón para la figura 12 que dejó sin llenar y un reglón para la generalización, es decir, para una figura cualquiera n. Vale recalcar que la docente (al igual que la clase pasada) recurrió a la puesta en común sabiendo que había grupos que no habían llegado a una expresión para la generalización de la fórmula. En el pizarrón quedó escrito lo siguiente:

Figura 3.

Una estrategia de conteo para el problema 2

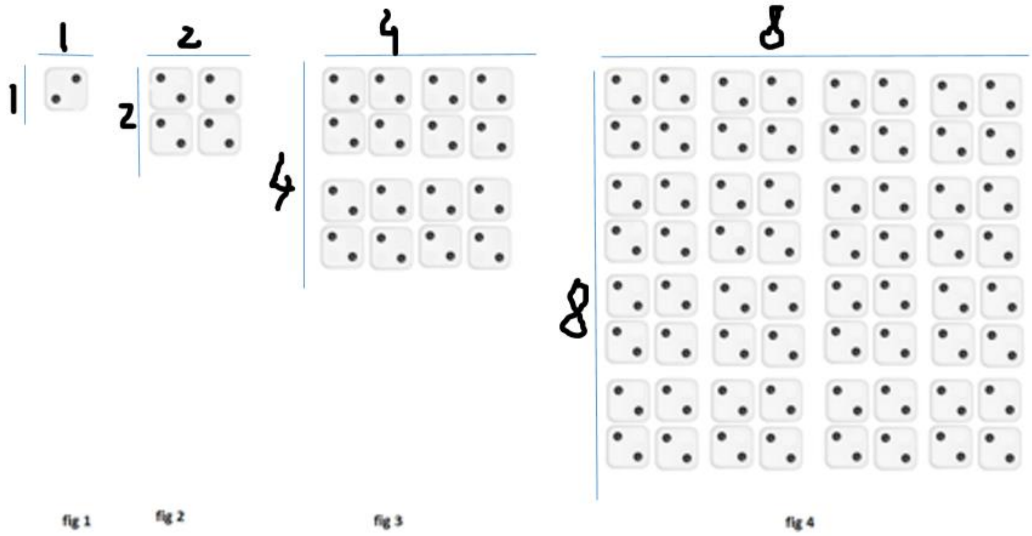


Elaboración propia

Pensamiento	Figura	Cantidad de dados	Fórmula equivalente
En la figura 2, hay 1 grupo de 4 dados.	2	1.4	
En la figura 3, hay 4 grupos de 4 dados cada grupo	3	4.4	
En la figura 4, hay 16 grupos de 4 dados cada grupo	4	16.4	
En la figura 5, hay 64 grupos de 4 dados cada grupo	5	64.4	
Fig. 6: hay 256x4	6	256.4	
Fig. 7: hay 1024x4	7	1024.4	
Fig. 8: hay 4096x4	8	4094.4	
… En la figura 12 …	12	...	
… En la figura n …	n	...	

Figura 4.

Otra estrategia de conteo para el problema 2.



Elaboración propia

Pensamiento	Figura	Cantidad de dados	Fórmula equivalente
En la figura 2, hay 2 dados de largo y 2 de alto	2	2.2	
En la figura 3, hay 4 dados de largo y 4 dados de alto	3	4.4	
En la figura 4, hay 8 dados de largo y 8 dados de alto	4	8.8	
En la figura 5, hay 16 dados de largo y 16 dados de alto	5	16.16	
Fig. 6: 32x32	6	32.32	
Fig. 7: 64x64	7	$64x64$	
Fig. 8: 128x128	8	$128x128$	
… En la figura 12 …	12	...	
… En la figura n …	n	...	

Y comenzaron con el intercambio,

-Tratemos de ambos casos escribir una expresión equivalente para poder llegar a la generalización. En la estrategia 1, fíjense que en cada renglón el 4 queda fijo que sería coloquialmente la cantidad de grupos de 4, ese 4 no cambia. El que cambia es el primer factor, 1, 4, 16, 64, 256, 1024. ¿de qué otra forma pueden escribir esos números?

Ante el silencio agrega

- ¿Qué cuenta hacen para llegar del 1 al 4, del 4 al 16, 16 al 64, etc?

Algunos estudiantes responden

-Por 4

-Multiplicamos por 4

-Profe es como un juego que yo juego que tenés que formar el 2048

Varios estudiantes afirmar con la cabeza entendiendo la idea que vincula ese juego con estos números. La profesora le contesta

-¡Si! Muy bien, en ese juego son potencias de base 2 que al multiplicarlas vas obteniendo otras potencias de base 2 que aparecen acá. Entonces veamos, el 4 podemos escribirlo como 4^1 , el 16 como 4^2, ¿el 64?

-cuatro al cubo

-Bien, ¿256?

-al cuadrado

-no, sería a la cuarta.

-Ah, sí, si

En el pizarrón fueron completando la última columna. Antes de la generalización para cualquier figura n la profesora pregunta

-Observemos la información de la tabla, para la figura 2 queda como fórmula $4^0.4$, el exponente cero. Para la figura 3, $4^1.4$; el exponente es 1. Para la figura 2, la expresión $4^2.4$ el exponente es 2.Si siguen observando el patrón ¿Qué exponente tiene la figura 12?

Mirando el pizarrón los estudiantes responden

- y 10

-Bien, ¿y para una figura n?

Ante el silencio, agrega la docente

-Díganlo coloquialmente, en la figura 12 usamos el exponente 10. En la figura 8 tenemos el exponente 6, en la 7 es 5. ¿Qué relación hay entre los números? ¿En la figura 144 por decir algo que exponente tendría?

Varios estudiantes responden

-Dos menos

-142 porque son dos menos

Continua la profesora

-Perfecto, ¿y matemáticamente cómo escriben un número genérico dos unidades menos?

- equis menos dos.

- ¡Bien escribamos eso mismo!

La tabla en el pizarrón quedó:

Pensamiento	Figura	Cantidad de dados	Fórmula equivalente
En la figura 2, hay 1 grupo de 4 dados.	2	1.4	$4^0.4$
En la figura 3, hay 4 grupos de 4 dados cada grupo	3	4.4	$4^1.4$
En la figura 4, hay 16 grupos de 4 dados cada grupo	4	16.4	$4^2.4$
En la figura 5, hay 64 grupos de 4 dados cada grupo	5	64.4	$4^4.4$
Fig. 6: hay 256x4	6	256.4	$4^5.4$
Fig. 7: hay 1024x4	7	1024.4	$4^5.4$
Fig. 8: hay 4096x4	8	4094.4	$4^6.4$
… En la figura 12 …	12	...	$4^{10}.4$
… En la figura n …	n	...	$4^{n-2}.4$

- Hagan lo mismos para la segunda tabla, piensen en dos minutos cómo ir completando la última columna para podes abstraer y generar una relacione entre el número de figura y los números que cambian en la expresión así se puede generalizar.

En la nueva puesta en común, comienza la profesora preguntando por la figura 12

-Bueno, en esta tabla con esta estrategia, ¿Cómo completaron la fila de la figura 12? ¿Qué cuenta se hace?

-Nosotros pusimos 2^{11} por 2^{11}

-Bien, ¿Y en el genérico?

-$2^{n-1}.2^{n-1}$

-Bien. ¿Algún grupo llego a otra expresión?

Los estudiantes niegan con la cabeza. La tabla en el pizarrón quedó:

Pensamiento	Figura	Cantidad de dados	Fórmula equivalente
En la figura 2, hay 2 dados de largo y 2 de alto	2	2.2	$2^1.2^1$
En la figura 3, hay 4 dados de largo y 4 dados de alto	3	4.4	$2^2.2^2$
En la figura 4, hay 8 dados de largo y 8 dados de alto	4	8.8	$2^3.2^3$
En la figura 5, hay 16 dados de largo y 16 dados de alto	5	16.16	$2^4.2^4$
Fig. 6: 32x32	6	32.32	$2^5.2^5$
Fig. 7: 64x64	7	$64x64$	$2^6.2^6$
Fig. 8: 128x128	8	$128x128$	$2^7.2^7$
… En la figura 12 …	12	...	$2^{11}.2^{11}$
… En la figura n …	n	...	$2^{n-1}.2^{n-1}$

Mientras los estudiantes copian, dice la docente

- Antes de pasar a la última pregunta, observen una cosa, si las dos estrategias cuentan la cantidad de dados. ¿Por qué llegamos a expresiones diferentes?

Los alumnos miran con cara de no entender. Agrega entonces la profesora.

-En una tabla llegamos a la fórmula genérica $4^{n-2}.4$. y en la otra $2^{n-1}.2^{n-1}$. ¿por qué? ¿No se supone que nos tendría que dar lo mismo?

Los estudiantes asienten con la cabeza, pero no pueden argumentar por qué dieron expresiones “aparentemente” diferentes. Tampoco logran expresar la idea que, aunque no sean idénticas en su forma de escritura son expresiones equivalentes. Continua la profesora

- ¿Se entiende lo que digo? En cualquier figura que elijamos la cantidad de dados nos tiene que dar lo mismo independientemente de qué fórmula utilicemos porque estamos contando lo mismo, pero ¿Por qué no obtuvimos “la misma” fórmula entonces?

Una alumna contesta

-Pero dan lo mismo, las dos funcionan

- A ver, muy bien, desarrollemos la idea un poco más, ¿Qué significa que las dos funcionan?

-Que en el cualquiera que reemplaces te va a dar la cantidad de dados, por ejemplo, en la figura 3 en las dos nos da 16, en la 4, 64 y así.

-Perfecto, ¿Se entiende lo que dice la compañera? Las dos fórmulas nos dan el mismo resultado. Es decir ¿Cómo son?

Ante el silencio, agrega

-Cuando dos expresiones son el mismo número decimos que son expresiones equivalentes.

-Ahhhhh, sí. Esas que son la misma pero escrita de otra forma, las vimos en segundo.

-Perfecto, sí. Escríbanlo. ¿Y cómo podemos demostrar que son equivalentes estas dos? Es decir, desde la figura 1 hasta la 12 nos dieron lo mismo, pero ¿cómo podemos asegurar que en cualquier figura nos va dar lo mismo?

Un alumno responde

-Había que llegar de una a la otra ¿no? O igualarlas, creo.

-Bien, vayamos por la primera opción. Tenemos la expresión $4^{n-2}.4$ y $2^{n-1}.2^{n-1}$. La idea para demostrar que son equivalentes es ir utilizando las propiedades y la definición en la fórmula genérica para llegar de una expresión a la otra. Todo esto vayan escribiéndolo que lo vamos a trabajar bastante que ahí lo resolvemos todos juntos. Copiemos la primera.

Copia en el pizarrón

$4^{n-2}.4$

-Fíjense la expresión a la que queremos llegar tiene potencias de base 2, por lo que, ¿cómo podemos escribir al 4 como una potencia de base 2?

- Al cuadrado.

-Bien, hagan una cosa por cada renglón y al costado vayan escribiendo para argumentar que es matemáticamente correcto, así:

$$4^{n-2}.4 = (2^2)^{n-2}.4$$

-Recordemos las propiedades de las potencias.

Luego, de un repaso coloquial, queda escrito a un costado del pizarrón las propiedades de la potencia:

$$a^n.a^m = a^{n+m}$$

$$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$$

$$(a^n)^m = a^{n.m}$$

$$(a.b)^n = a^n.b^b$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

-Entonces, en el primer factor, ¿Qué propiedad podemos usar? ¿O cómo quedaría?

Responden los estudiantes mientras la docente va escribiendo lo que dicen:

$$(2)^{2(n-2)}.2^2$$

$$(2)^{2n-4}.2^2$$

-Y ahora sumamos los exponentes.

$$2^{2n-4+2} = 2^{2n-2}$$

Pregunta la profesora

- ¿Llegamos a la misma fórmula?

- no, pero podemos hacer lo mismo con la otra.

-Bien, ¿Qué sería hacer lo mismo?

-Aplicar las propiedades.

-Bien, a ver.

Copia lo que los estudiantes le van diciendo sin dificultad, quedando escrito en el pizarrón:

$$2^{n-1}.2^{n-1} = 2^{n-1+n-1} = 2^{2n-2}$$

-Ahora sí, está demostrado que son la misma expresión. Esto se llama demostrar que dos expresiones son equivalentes. En este tipo de expresiones que estamos trabajando su cajita de herramientas son las propiedades y las definiciones, las tienen que ir usando correctamente para poder ir generando una nueva expresión que sea equivalente, es decir, que resulta tener los mismos resultados, aunque en aspecto se escriban diferente.

Espera que los estudiantes terminen de copiar, y agrega.

-Bueno, vamos a contestar la última pregunta ¿Hay una expresión equivalente a la del ítem anterior? En caso de que sí, proponga cuál/es.

- Si, esta que acabamos de encontrar.

-Perfecto, esta última y cualquiera de las del paso del medio, todas son equivalentes entre sí. ¿Se entiende? Por ejemplo, digamos otras expresiones equivalentes

Responden los alumnos

- 2^{2n-4+2}

-Si en la primera ya sumo los exponentes 4^{n-1}

- Muy bien, que si ahora aplicamos otra propiedad miren como queda $4^{n}.4^{-1}$

- ¿Y se acuerdan potencia de exponente negativo?

-si, 1/4

- Perfecto $\frac{1}{4}.4^{n}$. Y así podríamos estar proponiendo muchas expresiones equivalentes. Bueno, muy bien, han trabajado muy bien, repasamos todas las propiedades de la potencia, expresiones equivalentes, cómo demostrar que dos expresiones son equivalentes y potencia de exponente negativo.

Ficha resumen de la clase:

Objetivos alcanzados por los estudiantes

Los estudiantes desarrollaron una estrategia de conteo con variación exponencial.

Los estudiantes sustituyeron correctamente un dato de una magnitud en la ecuación.

Los estudiantes reconocieron y demostraron fórmulas equivalentes.

Los estudiantes determinaron nuevas expresiones equivalentes a una dada con las propiedades y definición de potencia.

Tabla 2

Datos recolectados de la Clase N°2

Clase N°2	**Guía de los estudiantes**				
	Grupo 1	Grupo 2	Grupo 3	Grupo 4	Grupo 5
Habilidades:					
Puesta en tarea, planteo del problema, resolución del problema. Alumnos interactúen con objeto de conocimiento.	Logrado	Logrado	Logrado	Logrado	Logrado
Objetivos	Logrados	Logrados	Logrados	Logrados	Logrados
Representaciones: Registros de representación semiótica utilizada.	Numérico Algebraico	Numérico Algebraico	Numérico Algebraico	Numérico Algebraico	Numérico Algebraico
Actividad de abstraer Alcanzar la generalización	Logrado en puesta común con guía del docente	Logrado en puesta común con guía del docente	Logrado en puesta común con guía del docente	Logrado en puesta común con guía del docente	Logrado en puesta común con guía del docente

Problema 3.

A partir el material repartido,

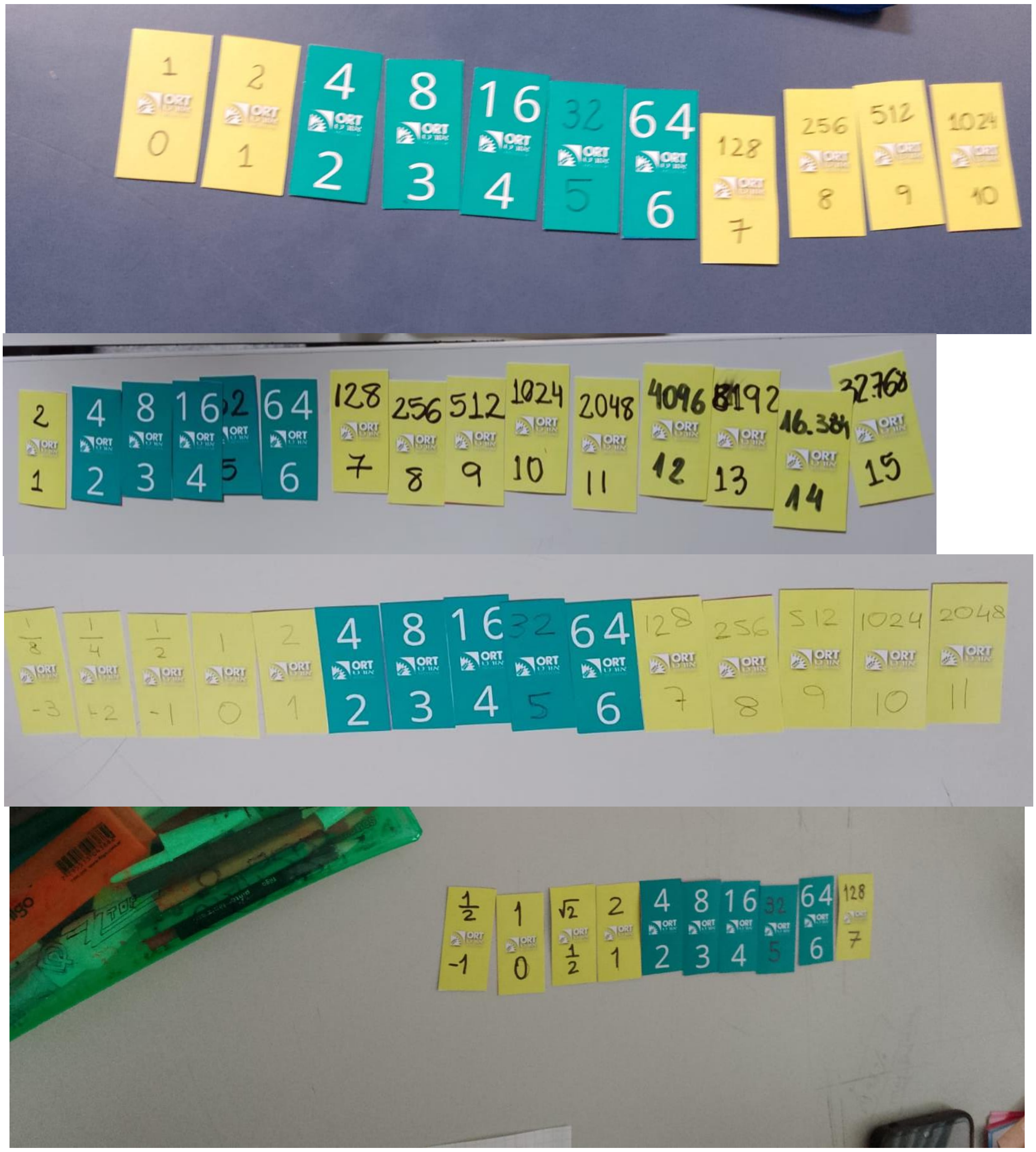
a) Tomen las fichas verdes. Identifiquen un patrón y, a partir del mismo, completen la ficha que falta.

b) Con el mismo patrón que usaron, construyan las 10 fichas amarillas

Los estudiantes se separaron en 4 grupos, mostramos cómo quedaron las fichas de cada grupo:

Figura 5.

Resolución de los estudiantes al problema 3

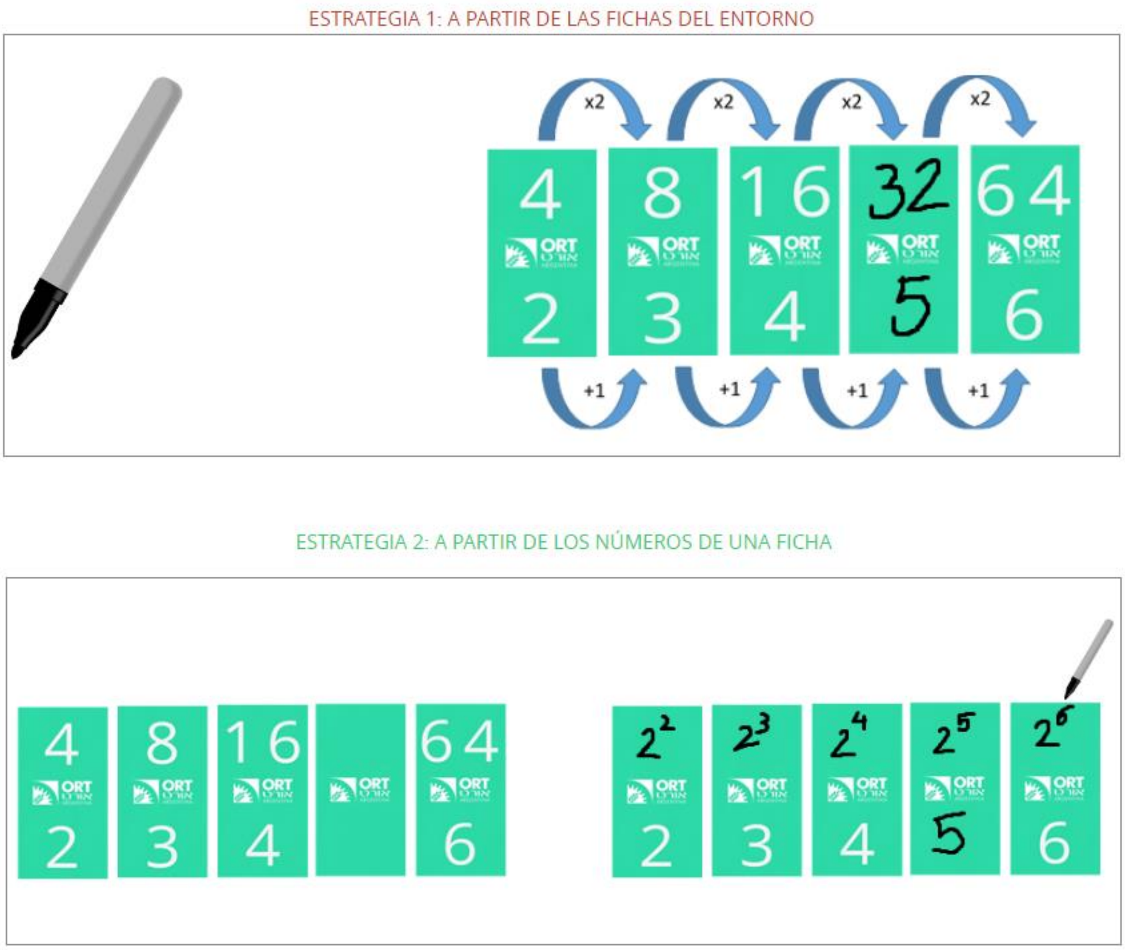


En la puesta en común podemos detectar que tres grupos completaron las fichas sumando una unidad en la fila de abajo y multiplicando por 2 en la fila de arriba. Mientras que un grupo determino que los números de la fila de arriba eran potencias de base 2 cuyo exponente es el número que le corresponde en la fula de abajo. Otra observación relevante, que a diferencia de lo planificado, no surgió la ficha $\frac{0}{0}$.

Esta etapa se vivió como desafiante pero una vez detectado el patrón no se presentaron dificultades. En el pizarrón se expusieron ambas estrategias, como hubo 4 ausentes, la docente subió todo lo trabajado al aula virtual, mostramos las dos resoluciones:

Figura 6.

Estrategias de resolución al problema 3



(*Logaritmo - Matemática - Campus Virtual ORT*, 2022)

Luego, volvieron al trabajo en grupos con la siguiente actividad:

Problema 4

a) Con lo visto en el problema 1. Completen, en caso de ser posible, las fichas azules. En caso de no poder cumplir con “el patrón” escriban con sus palabras por qué.

b) Ahora tomen las fichas rojas y determinen cuál de ellas representa la generalización de una ficha, es decir, la que determina la relación que existe entre los dos números de una misma ficha.

En todos los grupos hubo un debate, un análisis y argumentación entre ellos para ir completando las fichas azules. Respecto de las fichas que sí se pueden completar, los estudiantes no tuvieron complicaciones, hicieron correctamente los razonamientos correspondientes y completaron. En relación a las fichas que no se podían completar, algunos de los razonamientos que pudimos percibir es que la ficha

$$-\frac{1}{16}$$

“no se puede completar porque al ir dividiendo por dos en la fila de arriba siempre nos da positivo”. En otro grupo lo justificaron como: “2 a la algo siempre da positivo”.

Acá si surgió que un grupo completó la ficha

$$0$$

Con un cero en la fila de abajo. Una intervención que no pensábamos que surgiría en esta actividad pues ya estaba determinada la ficha $\frac{1}{0}$ anteriormente. Al respecto la profesora intervino en el grupo. Narramos el diálogo:

- ¿Cómo completaron esta ficha? (señalando $\frac{0}{0}$)

- Y porque es donde empieza

- ¿Cómo dónde empieza?

- y si, el origen, donde empiezan los números

Luego de unos segundos de silencio, la profesora le contesta

-Ah, creo que ya te entendí, ¿vos querés decir como el origen de la recta numérica y a partir de ahí ubicas el resto de los números?

- ¡claro! ¡¡¡Si, eso!!!

Ante el silencio el alumno, continua

- ¿Está mal?

-No, no. Estoy pensando. Tu idea está bien, pero en este contexto hay una relación entre números entonces estoy pensando como repreguntarte para que puedas ver que hay una de las filas que no puede ir el cero.

- Ah claro, si miro todas las fichas no puedo poner el cero en la fila de arriba porque son las potencias, y 2 a ningún número me va a dar cero.

- Claro, ¡¡¡muy bien!!!

- Había entendido mal, pensé que había que empezar en cero siempre

- No te preocupes, está muy bien tu forma de pensar, solo que acá al estar relacionados los números no podes decidir el número de cada uno independientemente

- Claro acá la fila de arriba es la variable dependiente de los de abajo.

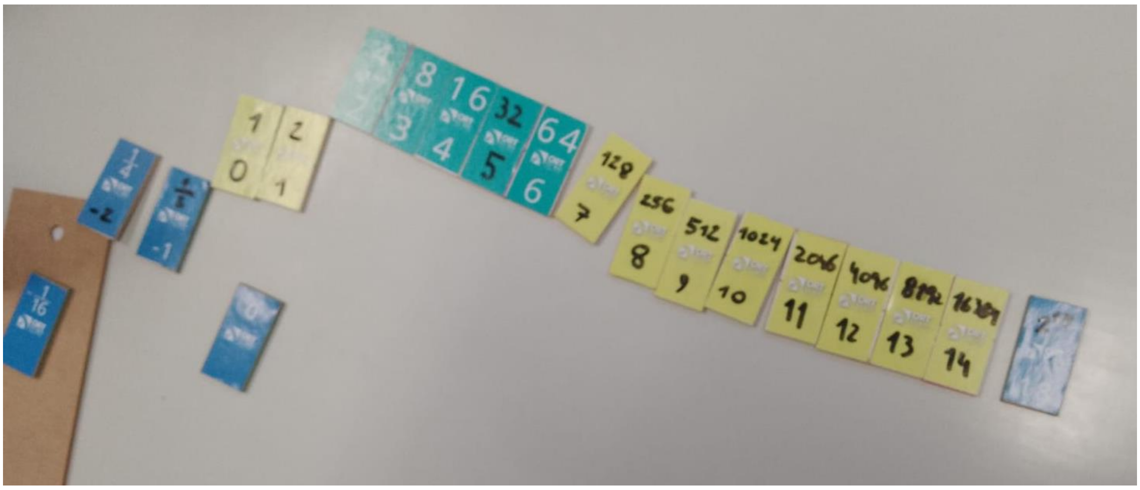
- ¡Qué bien! ¡Cuánto conocimiento dando vueltas! Eso lo vamos a debatir al final de todos los desafíos que están superando.

-Gracias profe

Observamos al alumno con una cara de alegría y satisfacción. Mostramos a continuación las fichas de un grupo:

Figura 7.

Resolución por estudiantes al problema 4



Pasaron a la puesta en común. Cada grupo explicó una de las fichas azules.

En la de exponente 18, se sociabilizo que es correcto y equivalente escribir los números en notación de potencia (2^{18}) o bien, su resultado.

Para la ficha de exponente -1, se dio sentido y significado al motivo que justifica por qué elevar a la -1 se define como el recíproco de la base. Los estudiantes estaban motivados, hasta algunos dijeron: “ah, pero que fácil”, “ah, con razón”, “todo tiene sentido”.

Para la ficha $-1/16$, se sociabilizaron entre los grupos las dos formas de argumentación “no se puede completar porque al ir dividiendo por dos en la fila de arriba siempre nos da positivo”. Y, la otra “2 a la algo siempre da positivo”. Pero también surgió un diálogo interesante de mostrar. La profesora preguntó:

- ¿Y qué ocurre entonces con las potencias (números de la fila de arriba) a medida que van construyendo fichas hacia la izquierda, es decir, que el exponente sea cada vez menor?

-Vamos dividiendo por 2, entonces es cada vez más chico…

- Bien, pero… ¿cada vez más chico todo lo que yo quiera? ¿puedo hacer que sea -1000?

-No, siempre positivo pero cada vez más cerca de cero

Un alumno exclama

-¡¡¡¡¡Ahhhhhh!!!!! como una asíntota

Vale mencionar que estos estudiantes ya vieron anteriormente función racional por lo que conocen el concepto. La profesora con una sonrisa de satisfacción dice

. ¡Qué genial! Sí, ya vamos a ver que la gráfica tiene asíntota. ¡Me encantó!

Una alumna acota

-Pero espera, ¿cómo sería con límite?

La profesora tuvo una intervención brillante.

-Bueno, eso es más complicado, pero escribámoslo. ¿cómo escribimos los números de arriba con respecto al número que hay en la fila debajo?

-2^x

-Bien

-Entonces, si llamamos x a los números de la fila de abajo, es decir, los exponentes. Los números de arriba son 2^x. Perfecto. Ahora pensemos que es lo que queremos escribir. Queremos decir que los exponentes se alejan de cero hacia los negativos, ¿Qué significa matemáticamente?

Un alumno contesta

- límite cuando x tiende a menos infinito

-Perfecto, escribamos

La docente escribe $\lim\limits_{x\longrightarrow -\infty} 2^x =$

Y agrega,

-Ahí escribimos en lenguaje matemático cuando los exponentes se alejan de cero hacia los negativos, ¿las potencias?

-igual a cero.

-Genial.

Quedo escrito en el pizarrón: $\lim\limits_{x\longrightarrow -\infty} 2^x = 0$

Respecto de la segunda actividad de esta etapa, como ya trabajaron con la relación genérica en el ítem anterior, simplemente la profesora preguntó con qué razonamiento descartaron la ficha:

$$2.n$$
$$n+1$$

Destacamos dos argumentos que se dieron en la puesta en común cuando la profesora preguntó por qué descartaron esta ficha como ficha genérica:

“Esta ficha no puede ser porque mirá reemplaza a n por 2 te da 4 y 3, no hay ninguna ficha así”. Otro argumento fue:

“no, esta ficha te permite pasar de una a otra, no la relación entre los números”

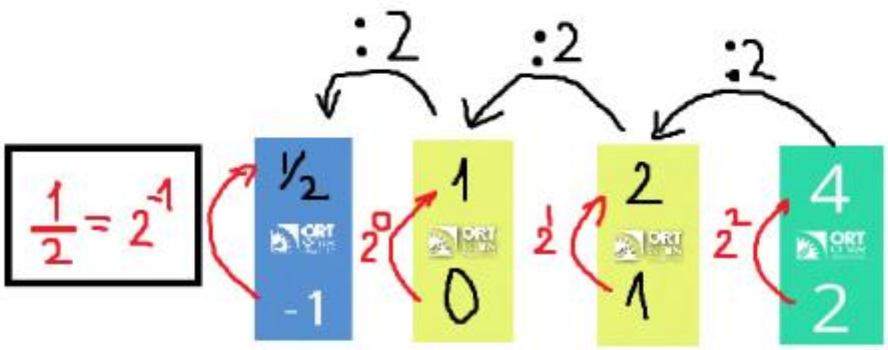
Muy bien concluyó la profesora, han trabajado muy bien ahora vamos a formalizar todo lo trabajado. Les hizo poner de título “¿Qué aprendimos?”

“En el problema 2 aprendimos la justificación de potencias de por qué si el exponente es número entero negativo se invierte la base”

A continuación, les hizo copiar:

Figura 8.

Potencia de exponente entero negativo



(*Logaritmo - Matemática - Campus Virtual ORT*, 2022)

Y, si lo generalizamos: $b \neq 0 \; y \; n \in \mathbb{N} \; entonces \; b^{-n} = \left(\frac{1}{b}\right)^{n}$

“En el problema 2 aprendimos que las potencias de base positiva son positivas”

En lenguaje matemático: $Si\ b > 0, n \in \mathbb{R}\ entonces\ b^n > 0$

“En el problema 2 aprendimos que las potencias de base mayor que 1, con un exponente que se aleja de cero hacia los negativos, las potencias se acercan a cero”

Cuando los estudiantes terminaron de copiar, y faltando 30 minutos de clase, la profesora continúa diciendo “Bueno, sigamos un poco más”

Cuando tuvieron que completar la ficha $1/4$, sin darse cuenta resolvieron una ecuación exponencial, que es la siguiente

$$2^x = \frac{1}{4}$$

Y vienen resolviendo en las clases anteriores, ¿se acuerdan el problema del bosque? ¿Qué ecuación les había quedado?

Luego de buscar unas hojas detrás en la carpeta, responden $\left(\frac{95}{100}\right)^x = \frac{1}{2}$

- ¿En qué se asemejan estas ecuaciones?

-En que la x está arriba

-Bueno, bien, en el exponente; por eso, se llaman ecuaciones exponenciales.

Un alumno, pregunta

- ¿Y cómo hacemos para resolverlas?

-Bueno, esta de acá ya la resolviste.

(señalando la ecuación $2^x = 1/4$)

- Si, ya sé, pero cómo.

-Y decime Vos como lo pensaste coloquialmente y yo te ayudo

-Y es que acá fue fácil porque justo $1/4$ es 2^{-2}.

-Bueno, escribamos

$$2^x = \frac{1}{4}$$

$$2^x = 2^{-2}$$

¿Y acá como seguirían?

- ahí ya se ve que $x\ es - 2$

-Bien, es decir, resumamos cómo hicieron. Escribieron la potencia en la misma base que tenían del lado izquierdo y luego igualaron los exponentes.

- ¿y en la otra cómo hacemos eso?

Bueno, para eso necesitamos saber logaritmos que vamos a ver la próxima clase. Les dejo tarea de lo que vimos hasta acá. Los felicito, han trabajado muy bien. Voy a copiar algunas ecuaciones para que hagan ahora en los minutos que quedan y el resto de tarea.

Mostramos lo subido al campus:

¡Resolvemos algunas ecuaciones!

- $3^{1-x^2} = \frac{1}{27}$
- $4^{x+1} = 16$
- $3.3^{x-1} = 81$

Tarea:

- $\left(\frac{1}{5}\right)^x = 125$
- $2^{3x} = 0{,}5^{3x+2}$
- $-2^x = 16$

Luego de unos 5 minutos comenzaron la puesta en común para la ecuación 1

$$3^{1-x^2} = \frac{1}{27}$$

Comenzó hablando un alumno que dijo

- La potencia $3^{-1} = \frac{1}{3}$ por lo que vimos recién y $3^3 = 27$, entonces $\frac{1}{27} = 3^{-3}$ y después hice la cuenta

- ¿Hacer la cuenta?

- Haces zoom en la cuenta

- ¿Cómo haces zoom en la cuenta?

- y haces solo la cuenta con los exponentes

- ¡Ah!, como las bases son iguales, igualamos los exponentes

-Sí, eso. Con los exponentes

- Guau! Qué razonamiento. Fíjense como pensó dos cosas simples por separado para determinar que 3^{-3} es $1/27$.

Una alumna pregunta

- Profe, yo lo hice directo. ¿Hace falta primero hacer el de a la menos 1?

- No, no, si ya lo sabes o lo pensaste directo no hace falta.

- Ah, genial

- Muy bien, entonces tenemos $1 - x^2 = -3$, ¿cómo continuaron?

El alumno dijo,

-Yo despeje x^2 y después me quedo módulo

Otro estudiante dijo,

- Yo igualé a cero e hice resolvente.

En el pizarrón se escribieron las dos resoluciones.

$$1 - x^2 = -3$$

$$-x^2 = -3 - 1 \qquad\qquad 1 - x^2 + 3 = 0$$

$$x^2 = 4 \qquad\qquad -x^2 + 4 = 0$$

$$|x| = 2 \qquad\qquad x_1 = 2 \text{ ó } x_2 = -2$$

$$x_1 = 2 \text{ ó } x_2 = -2$$

Luego, resuelven $4^{x+1} = 16$, en este caso hubo sólo una manera de resolución. Una alumna paso a resolverlo en el pizarrón y explicó: “el 16 lo escribí como 4^2 y $x + 1 = 2$, entonces $x = 1$”

El tercero si hubo un intercambio valioso

$$3.3^{x+1} = 81$$

El mismo alumno que resolvió la primera ecuación dice:

-yo lo hice, pero no sé si está bien

-Y cómo podrían saber si resolvieron bien una ecuación

-Ah claro, si tengo dudas, verifico

-Está mal y no sé por qué

La docente contesta

- ¿y cómo sabes que está mal?

- porque no me está dando. Hice $9^{x-1} = 9^2$

Un alumno le contesta,

- No, primero resolvemos exponente y luego multiplicación.

- Muy bien recuerden jerarquía de las operaciones, como no hay paréntesis, primero la potencia y luego el factor.

Un alumno dice

-Yo pase dividiendo el 3 sin exponente.

-Bien, pasa a escribirlo

$$3^{x-1} = 81 : 3$$

$$3^{x-1} = 27$$

$$3^{x-1} = 3^3$$
$$x - 1 = 3$$
$$x = 4$$

Una alumna pide pasar a escribir su resolución

$$3^{1+x-1} = 81$$

Propiedades de la potencias $3^x = 3^4$

Otra alumna hizo algo un razonamiento valioso de apreciar

$$3.3^{x-1} = 81$$
$$3.3^{x-1} = 3.3^3$$
$$3^{x-1} = 3^3$$
$$x = 4$$

Quedaron expuestas las tres maneras que resolvieron. La clase finalizó con una pregunta de la profesora, ¿cómo resuelven $2^{x+1} = 7$?

Un alumno contestó:

- 7 no es potencia de 2

La profe piensa, pero responde algo no asociado al comentario del alumno sino a la pregunta

- ¿Les parece que tiene solución?

La diversidad de respuestas fue:

-No.

-Sí, pero no sabemos resolver eso.

-Debe ser algo con coma.

-Es como el de los árboles, hay que probar

La profesora continua:

- Observen las siguientes ecuaciones: $2^x = 8$ y $x^3 = 8$

- Uno tiene incógnita la base y el otro en el exponente

- Bien, ¿cómo resuelven la segunda?

- Con raíz

- ¿y la primera?

- Y debe ser con logaritmos, nos dijiste que empezábamos con logaritmos.

La docente esboza una sonrisa y finaliza la clase “bueno, aunque no lo crean ya estuvieron trabajando con logaritmos coloquialmente y hasta dedujeron que su gráfica tiene asíntota, la próxima clase vamos a formalizar los conceptos”

Ficha resumen de la clase:

Objetivos alcanzados por los estudiantes:

Los estudiantes establecieron una relación entre las potencias sucesivas de 2 y sus respectivos exponentes. Es decir que, al aumentar una unidad en el exponente, la potencia se multiplica por 2. Y, al disminuir el exponente en una unidad, la potencia se divide por 2.

Los estudiantes exploraron potencias de exponente -1 y concluyeron su definición.

Los estudiantes generalizaron la definición de potencia de exponente entero negativo.

Los estudiantes determinaron el signo de potencias de base positiva.

Los estudiantes determinaron coloquialmente que a medida que los exponentes disminuyen las potencias se acercan a cero.

Los estudiantes resolvieron ecuaciones exponenciales en el registro coloquial cuyo exponente sea número entero.

Los estudiantes resolvieron ecuaciones exponenciales que se pueden llevar a la forma

$a^b = a^c$ con $a \in \mathbb{R}^+, b \in \mathbb{Q}, c \in \mathbb{Q}$

Tabla 3

Datos recolectados de la Clase N°3

Clase N°3 **Guía de los estudiantes**

	Grupo 1	Grupo 2	Grupo 3	Grupo 4	Grupo 5
Habilidades:					
Puesta en tarea, planteo del problema, resolución del problema. Alumnos interactúen con objeto de conocimiento.	Logrado	Logrado	Logrado	Logrado	Logrado
Objetivos	Logrados	Logrados	Logrados	Logrados	Logrados
Representaciones: Registros de representación semiótica utilizada.	Numérico Algebraico	Numérico Algebraico	Numérico Algebraico	Numérico Algebraico	Numérico Algebraico
Actividad de abstraer Alcanzar la generalización	Logrado	Logrado	Logrado	Logrado	Logrado

Como Clase N°4 se formalizó la notación de logaritmos como está en la propuesta didáctica y luego los estudiantes trabajaron con esta nueva notación para ir resolviendo distintos logaritmos, mostramos a continuación lo escrito en el campus con la profesora (que fue lo explicado en clase). La clase comenzó con un ejemplo que habían escrito la clase pasada. En el pizarrón escribió:

Figura 9

Operaciones inversas de la potenciación

Repasamos, potenciación da origen a dos operaciones inversas. Por ejemplo $2^3 = 8$

- Si los datos son la potencia y el exponente, la incógnita es la base. Utilizamos la **radicación** cuyo resultado se llama **raíz.** En el ejemplo:

$$x^3 = 8$$
$$x = \sqrt[3]{8} = 2, \ (porque\ 2^3 = 8)$$

- Si los datos son la base y la potencia, lo que se busca es el exponente de dicha base. Utilizamos la **logaritmación** cuyo resultado se llama **logaritmo.** En el ejemplo

$$2^x = 8$$
$$x = \log_2(8) = 3, \ (porque\ 2^3 = 8)$$

(*Logaritmo - Matemática - Campus Virtual ORT*, 2022)

Luego, reafirmó esta última igualdad

Figura 10

Ejemplo de logaritmo

$2^3 = 8$ *es equivalente a decir* $\boldsymbol{\log_2}(8) = 3$;

En la notación que ya conociamos: la base es **2**, el exponente es **3** y, la potencia es **8** *ó* 2^3.

En la notación de logaritmo: la base es **2**, el argumento o potencia es **8** *ó* 2^3, el logaritmo o exponente es **3**.

Se lee: "el logaritmo en base 2 de 8 es 3"

(*Logaritmo - Matemática - Campus Virtual ORT*, 2022)

Mostró dos maneras de resolver un logaritmo:

Figura 11

Cálculos de logaritmos. Ejemplos.

Si queremos calcular un logaritmo, podemos pensar de dos maneras, por ejemplo:

$\log_2\left(\frac{1}{4}\right)=$

Podemos pasar a la notación de potencia:	Podemos reescribir el argumento como potencia de base igual a la del logaritmo:
$2^x=\frac{1}{4}$, y determinar el exponente. En este caso, $\log_2\left(\frac{1}{4}\right)=-2$ *porque* $2^{-2}=\frac{1}{4}$	$\log_2\left(\frac{1}{4}\right)=\log_2(2^{-2})=-2$, la base es 2, el argumento o potencia es $\frac{1}{4}$ ó 2^{-2}, el logartimo es -2

Se lee: "el logaritmo en base 2 de 1/4 es -2"

Y, fue escribiendo distintos ejemplos:

- $\log_3(9)=\log_3(3^2)=2$, la base es 3, el argumento o potencia es 9 ó 3^2, el logaritmo es 2

Se lee: "el logaritmo en base 3 de 9 es 2"

- $\log_{\frac{1}{2}}(4)=\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}=-2$, la base es $\frac{1}{2}$, el argumento o potencia es 4 ó $\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$, el logaritmo es -2
- $\log_{\sqrt{5}}(25)=\log_{\sqrt{5}}(\sqrt{5})^4=4$, la base es $\sqrt{5}$, el argumento o potencia 25 ó $\sqrt{5}^4$, el logaritmo es 4

(*Logaritmo - Matemática - Campus Virtual ORT*, 2022)

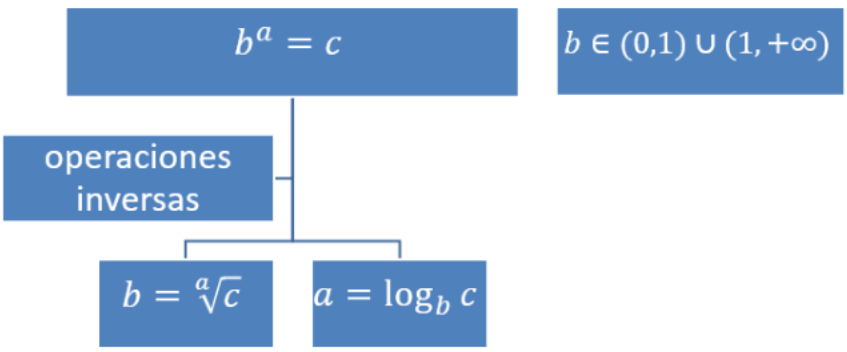
Y, luego formalizó genéricamente

Figura 12

Definición de logaritmo.

CONCLUSION:

DEFINICIÓN DE LOGARITMO: el logaritmo en la base b (mayor a cero y distinta de 1) de un número c (mayor a cero) es el exponente (llamemoslo a) al que hay que elevar b para obtener c.

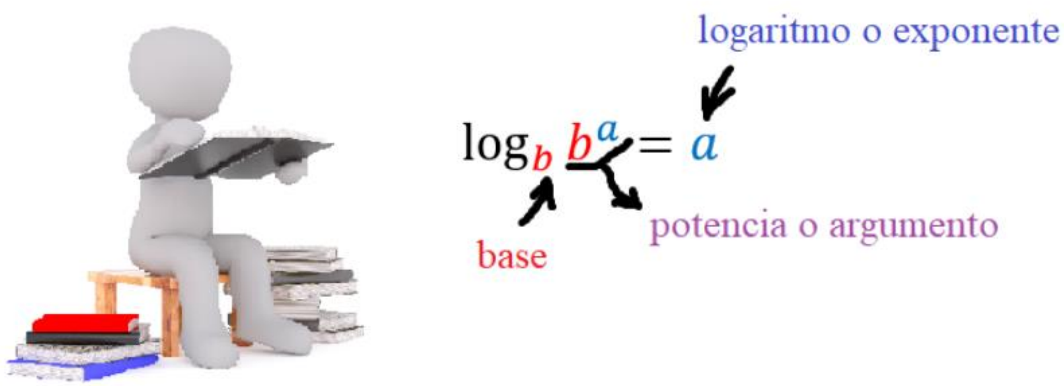


(*Logaritmo - Matemática - Campus Virtual ORT*, 2022)

Figura 13

El logaritmo si la base del argumento es igual a la base el logaritmo

Si escribimos a c en forma de potencia ***con la misma base***, el logaritmo es simplemente ese exponente:



(*Logaritmo - Matemática - Campus Virtual ORT*, 2022)

También les explicó las notaciones de logaritmo en base e y en base 10. Luego, los estudiantes se pusieron en tarea de resolver un denominado por el campus “formulario”. Mostramos a continuación los enunciados:

Figura 14

Ejercitación cálculos de logaritmos

1.*

Conociendo la base y la potencia (o argumento), calcular el logaritmo
En caso de ser número racional, exprese en forma de fracción
En caso de no ser posible, coloque un guión del medio "-"

$\log_2(32) =$ ____________________

$\log_5(\sqrt{5}) =$ ____________________

$\log_6(6^3) =$ ____________________

$\log_3\left(\frac{1}{3}\right) =$ ____________________

$\log_5(-25) =$ ____________________

$\log_{\frac{1}{2}}(8) =$ ____________________

$\log_4\left(\frac{1}{64}\right) =$ ____________________

$\log_{-2}(4) =$ ____________________

2.*

Conociendo el logaritmo y la potencia, determine el número base.
En caso de ser número racional, exprese en forma de fracción.
En caso de no ser posible, coloque un guión del medio "-"

$\log_b(25) = 2,\ entonces\ b =$ ____________________

$\log_b\left(\frac{1}{4}\right) = -2,\ entonces\ b =$ ____________________

$\log_b\left(2^{\frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{2},\ entonces\ b =$ ____________________

$\log_b\left(-\frac{1}{2}\right) = -1,\ entonces\ b =$ ____________________

3.*

Conociendo el logaritmo y la base. Determine la potencia o argumento. Puede completar el resultado de la potencia como único número o en notación de potencia usando "^" entre medio de la base y el exponente.
En caso de ser número racional, exprese en forma de fracción.
En caso de no ser posible, coloque un guión del medio "-"

$\log_5(x) = 3,\ entonces\ x =$ ____________________

$\log_2(x+3) = 3,\ entonces\ x =$ ____________________

$\log_{\frac{1}{2}}(-x) = -4,\ entonces\ x =$ ____________________

$\log_3(x) = -3,\ entonces\ x =$ ____________________

(*Logaritmo - Matemática - Campus Virtual ORT*, 2022)

De tarea, la profesora le subió al campus los siguientes ejercicios:

Figura 15

Ejercitación para el cálculo de logaritmos

Actividad 1: Calculá

a) $\log_3(27)$ b) $\log_7(7)$ c) $\log_{\sqrt{2}}(16)$ d) $\log_5(625^4)$

e) $\log_{\frac{1}{2}}(8)$ f) $\log(0{,}01)$ g) $\log_4(\sqrt{2})$ h) $\log_{\frac{1}{3}}(27)$

i) $\log_7(\sqrt[3]{49})$ j) $\log_3\left(\frac{1}{9}\right)$ k) $\log_2\left(\sqrt[3]{\frac{1}{4}}\right)$ l) $\log_5(25\sqrt{5})$

Actividad 2: Calculá cada uno de los siguientes logaritmos.

a) $\log_{10}(100)+\log_2(128)+\log_{0,2}(625)=$

b) $\log_{10}(0{,}001)+\log_{64}(4)$

c) $\log_2\left(\frac{1}{128}\right)+\log_3\left(\frac{1}{81}\right)+\log_5\left(\frac{1}{125}\right)=$

d) $\log_5(\sqrt[3]{25})+\log_5(\sqrt[5]{5^2})=$

e) $\log_b(b^7)=$

f) $\log_a(\sqrt{a^7})=$

g) $\log_{\frac{4}{3}}\left(\frac{9}{16}\right)=$

(*Logaritmo - Matemática - Campus Virtual ORT*, 2022)

Ficha resumen de la clase:

Objetivos alcanzados por los estudiantes:

Los estudiantes exploraron potencias de exponente entero negativo.

Los estudiantes generalizaron y definieron potencia de exponente entero negativo.

Los estudiantes determinaron el signo de potencias de base positiva.

Los estudiantes resolvieron ecuaciones exponenciales en el registro coloquial cuyo exponente sea número entero.

Tabla 4

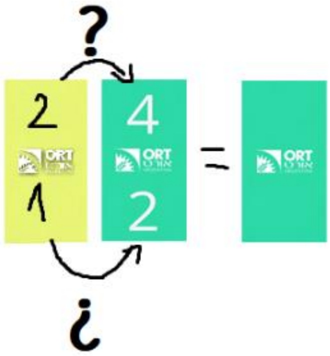
Datos recolectados de la Clase N°4

Clase N°4	**Guía de los estudiantes**				
	Grupo 1	Grupo 2	Grupo 3	Grupo 4	Grupo 5
Habilidades:					
Puesta en tarea, planteo del problema, resolución del problema. Alumnos interactúen con objeto de conocimiento.	Logrado	Logrado	Logrado	Logrado	Logrado
Objetivos	Logrados	Logrados	Logrados	Logrados	Logrados
Representaciones: Registros de representación semiótica utilizada.	Numérico Algebraico	Numérico Algebraico	Numérico Algebraico	Numérico Algebraico	Numérico Algebraico

Problema 5

a) Sociabilicen lo que recuerdan de la primera clase que trabajamos con este material. Completen la oración “Para completar la ficha siguiente sumamos 1 en el número de abajo, y en el número de arriba ___________________”

b) Ahora tomen las fichas y respondan ¿Qué ficha se determina usando la regla del ítem a?



c) ¿Qué otra “regla” pueden determinar para determinar otra ficha?

(Es decir, busquen una operación matemática entre los números de arriba que dé como resultado otro número de la fila de arriba de otra ficha y, una cuenta entre los números de abajo para que dé el número de debajo de la ficha)

d) Generalicemos la regla. Elijan las siguientes fichas y fíjense si las reglas que establecieron les forman fichas de las que ya tienen. Luego, elijan fichas al azar y prueben si la regla les permite generar fichas que cumplen con el patrón

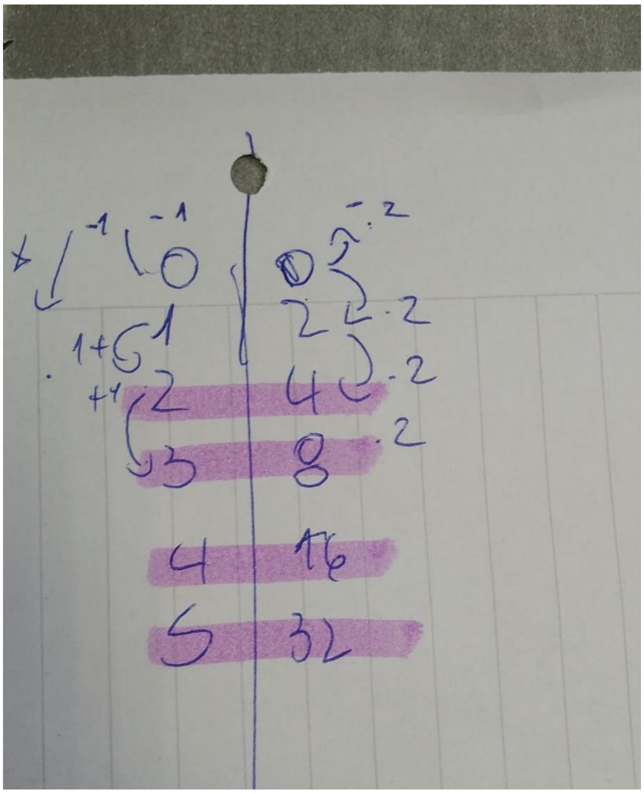
e) ¿Por qué creen que se cumple que independientemente de las fichas que elijan?

f) con lo trabajado completen las fichas rosas, plateada y dorada.

Los estudiantes se pusieron en tarea en los mismos grupos. Mostramos como un grupo generó una abstracción de las fichas y ya estableció una tabla que relaciona los exponentes y las potencias:

Figura 16

Resolución por un grupo al problema 5



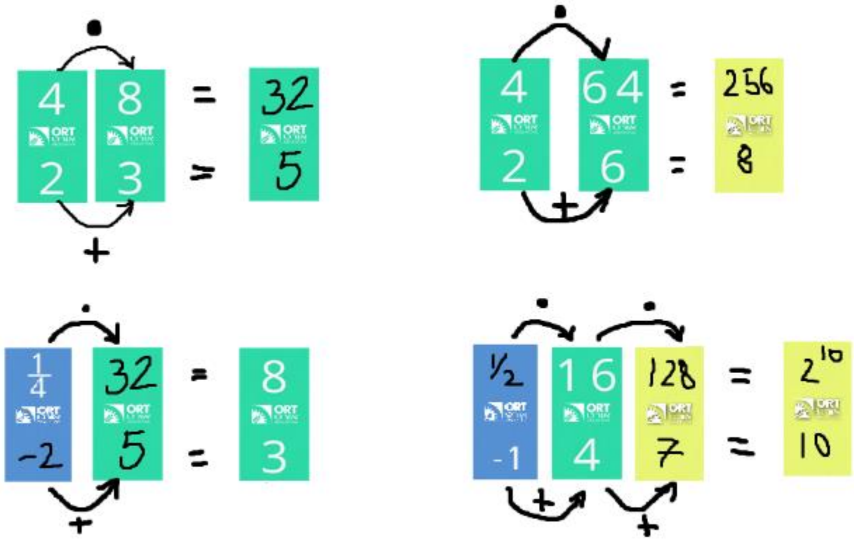
Para el ítem b, todos los grupos llegaron a la ficha $\frac{8}{3}$. Para el ítem c, se abren la diversidad en las posibles fichas. Un grupo llego sólo llego a "sumando-multiplicando" a $\frac{8}{3}$. Otro grupo puedo llegar a otra regla "dividir-restar" llego a la ficha $\frac{2}{1}$, pero solo concibieron la ficha que surge de restar el mayor exponente con el menor. Otro de los grupos escribió las dos posibilidades colocando como posibles fichas a formar $\frac{2}{1}$ y $\frac{1/2}{-1}$.

Hasta ahí la profesora al ver que había grupos que no había llegado a observar todas las reglas hizo una puesta en común. En el pizarrón y, luego en el campus, quedó escrito:

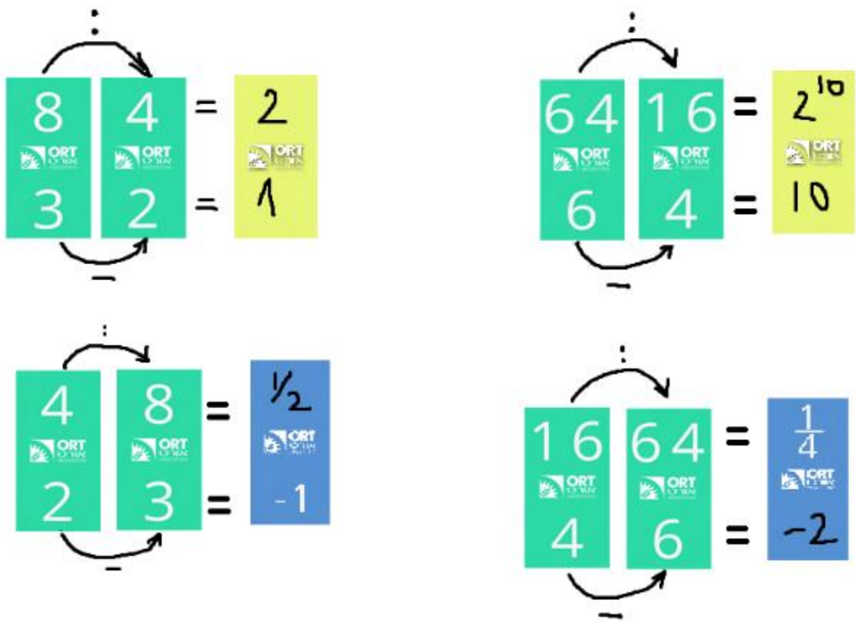
Figura 17

Correlación entre progresión geométrica y aritmética en problema 5

- "Si multiplicamos los número de la fila de arriba (las **potencias de base 2**) y sumamos los números de abajo (los **exponentes**) nos da una nueva ficha que cumple con el patrón.



- "Si dividimos los número de la fila de arriba (las **potencias de base 2**) y restamos los números de abajo (los **exponentes**) nos da una nueva ficha que cumple con el patrón.



(*Logaritmo - Matemática - Campus Virtual ORT*, 2022)

Respecto a las fichas rosas. Todos los grupos pudieron completar las fichas, pero las estrategias fueron cambiando. Con la ficha $1/2$ todos los grupos utilizaron el conocimiento que los números de arriba son las potencias de base 2., por lo que, rápidamente contestaron $\sqrt{2}$, excepto un grupo que puso $2^{1/2}$. Acá se perdió un poco de valor ya que, asombrosamente, los estudiantes recordaban (o pusieron en las calculadoras que trabajan con números irracionales) $2^{1/2}$.

Haciendo referencia a la ficha $\genfrac{}{}{0pt}{}{2^{19}}{}$ todos los grupos completaron con 19 por ser el exponente. Para la ficha $\genfrac{}{}{0pt}{}{}{22}$ completaron con 2^{22} bajo los argumentos "22 es el exponente de la potencia de base 2" y "porque si garramos la que acabamos de completar y le sumamos esta nos da 22 el exponente" (haciendo referencia a las fichas de exponentes 19 y 3). La última la completaron con 15 sin necesidad de usar las "reglas" establecidas.

Ahora bien, para la ficha plateada sí hubo intercambio formas de resolverlas.

Un grupo tomo las fichas $\genfrac{}{}{0pt}{}{4}{2}\, y \genfrac{}{}{0pt}{}{\sqrt{2}}{1/2}$ y utilizo la regla "dividir las potencias, restar los exponentes". Cuando la profesora paso por el grupo, les preguntó por qué usaron esa regla y esas fichas. A lo que le respondieron mientras le mostraban un papel donde habían escrito

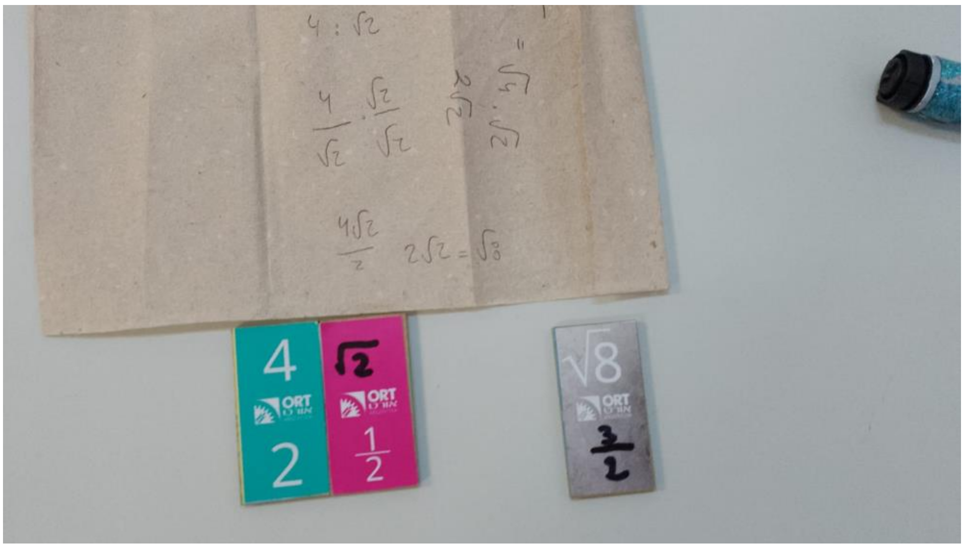
-Porque mira si dividís 4 con $\sqrt{2}$, lo racionalizamos nos dio $2\sqrt{2}$ que es lo mismo que $\sqrt{8}$ porque lo hicimos acá.

(se puede ver la cuenta $\sqrt{4}.\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$)

Mostramos en foto la resolución

Figura 18

Resolución de un grupo utilizando racionalización



El resto de los grupos reescribió al $\sqrt{8}$ como $8^{1/2}$ y luego $(2^3)^{1/2}$, para finalmente, también completar con $3/2$

La ficha dorada ningún grupo la pudo completar. Y pasaron a la puesta en común.

Primero sociabilizaron los resultados de las fichas rosas.

Figura 19

Resolución problema 5

(*Logaritmo - Matemática - Campus Virtual ORT*, 2022)

Luego, la profesora hizo hincapié en que justifiquen porque $2^{1/2}$ es $\sqrt{2}$. Recibiendo como respuestas

- Lo hice en la calculadora

- Porque el índice de la raíz es el denominador del exponente

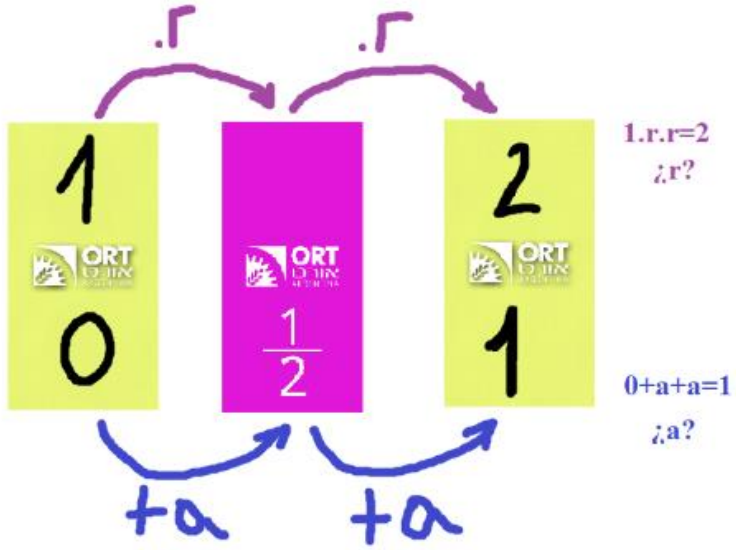
A lo que le responde,

- Sí, muy bien. Pero tiene un por qué. Y sale justamente de acá, de lo que estamos trabajando.

Escribe en el pizarrón

Figura 20

Argumento número irracional



(*Logaritmo - Matemática - Campus Virtual ORT*, 2022)

Y dice,

- Observen lo siguiente, en los números de abajo sumamos. Entonces tenemos que buscar el promedio entre 0 y 1. Es decir, 0 sumado un número nos dé 1/2 y sumado otra vez ese número 1.

Escribe al costado $0 + a + a = 1$, ¿a?

Los alumnos rápidamente responden

- $a = 1/2$

- Bien, ahora tenemos que hacer el mismo razonamiento para los números de la fila de arriba, pero multiplicando.

Y escribe al costado $1.r.r = 2$. Automáticamente se oye

-¡¡Ahhh, por eso raíz de 2!!

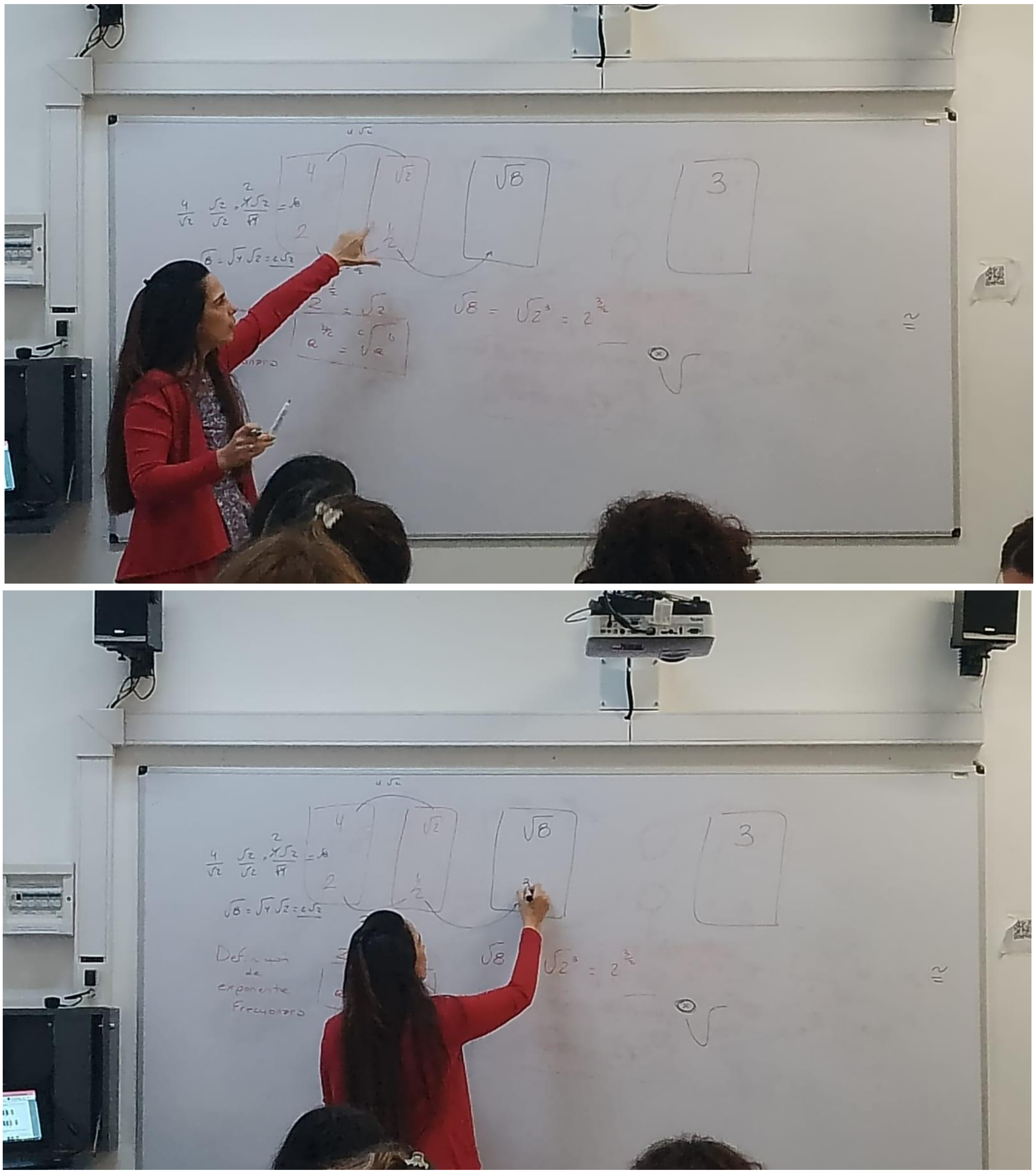
-Sí, quería mostrarles que en matemática todo tiene un por qué.

Luego, continuaron con la ficha plateada, primero sociabilizaron la estrategia que utilizaron los tres grupos y luego, la profesora pidió al grupo que utilizo racionalización exponga su razonamiento. Mostramos el pizarrón de cómo quedo escrito

En la puesta en común, la profesora sociabilizó el razonamiento del grupo:

Figura 21

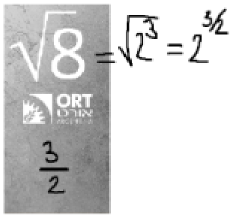
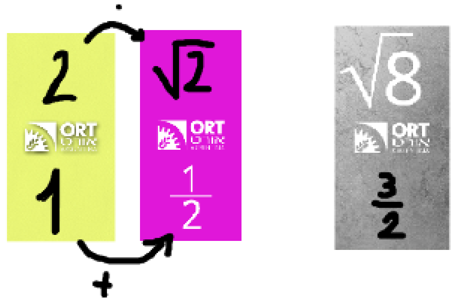
Puesta en común problema 5



Tanto en el campus como en la carpeta de los estudiantes quedaron ambas resoluciones y la docente dejo establecida la definición de potencia con exponente fraccionario:

Figura 22

Institucionalización exponente fraccionario

O bien:	Otra manera
Sabían que $\sqrt{8}$ es la potencia de base 2, y necesitaban el exponente, es decir, $2^x = \sqrt{8}$. Tuvieron que pensar ese número. La estrategia es pensar las dos expresiones en la misma base, por lo que: $\sqrt{8} = \sqrt{2^3} = 2^{\frac{3}{2}}$. Con lo cual, el exponente buscado es $\frac{3}{2}$.  	Sabemos que $\sqrt{8} = \sqrt{4.2} = \sqrt{4}.\sqrt{2} = 2.\sqrt{2}$. Por las propiedades de "multiplicar las potencia de misma base y sumar los exponentes". Entonces elegimos las fichas 

Con lo trabajado, formalizamos potencia con exponente fraccionario no entero.

Si $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$, y la fracción $\frac{p}{q}$ es irreducible, entonces

$$a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$$

Nota, recuerde que si q es par, a deber ser mayor o igual a cero

(*Logaritmo - Matemática - Campus Virtual ORT*, 2022)

Luego, adentraron en el desafío de completar la ficha dorada [3]

La profesora empezó preguntando al mismo grupo que terminó hablando en la puesta común anterior por qué no pudieron completar la ficha. A lo que respondieron

- Queríamos usar las "reglas" pero no teníamos ninguna ficha para multiplicar que nos de 3

- Ah, qué bien, qué interesante. ¿y?

- Entonces quisimos agregar fichas como una que diga 12 arriba así después dividíamos por la de 4 pero tampoco pudimos.

- Muy bien, escuchemos otro grupo. A ver ustedes

(señalando uno de los grupos)

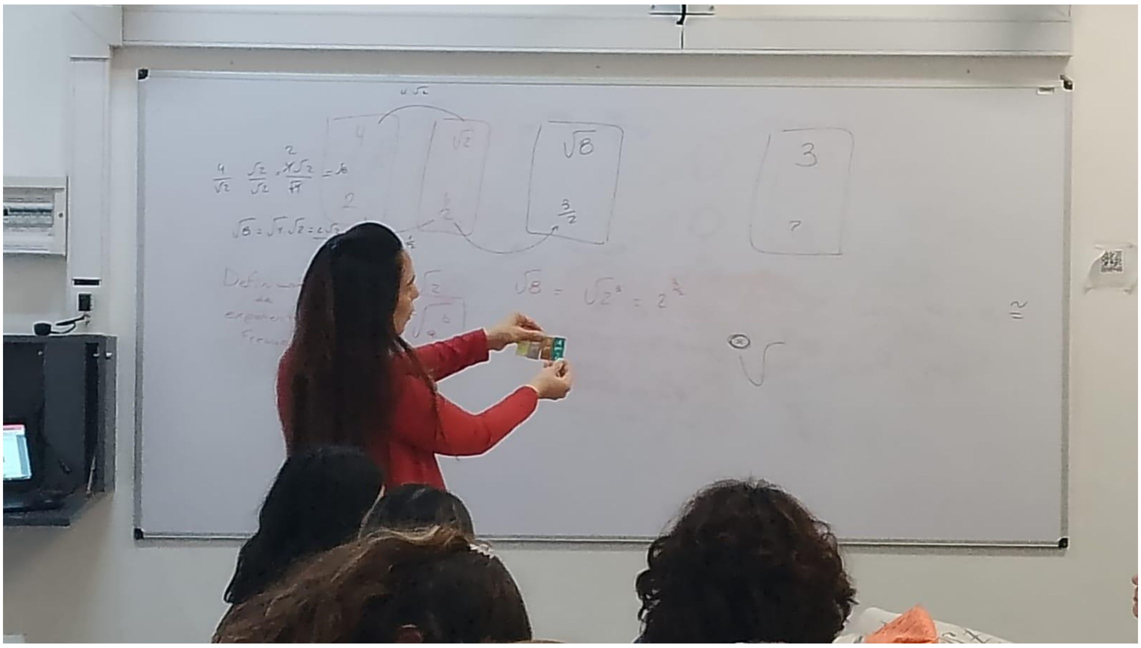
- Nosotros solo llegamos a que la ficha va a estar entre estas dos fichas

(mostrando dos fichas)

La profesora las toma y muestra a todo el curso. Mostramos a continuación el instante de dicha acción.

Figura 23

Exponente número irracional



- Bien, ¿Por qué?

- Porque tenemos los números de la fila de arriba ordenados de forma creciente.

- Perfecto, a medida que los exponentes son mayores, las potencias son cada vez mayores

Luego, la profesora pide a otro grupo que exponga lo que hallaron

- Nosotros pensamos parecido al grupo de las chicas, pero con la regla multiplicar arriba y sumar abajo. Entonces buscamos la ficha que diga 3/2 arriba así al multiplicarla por la de 2 nos da 3.

Ante el silencio y la mira da de todos. Continuó

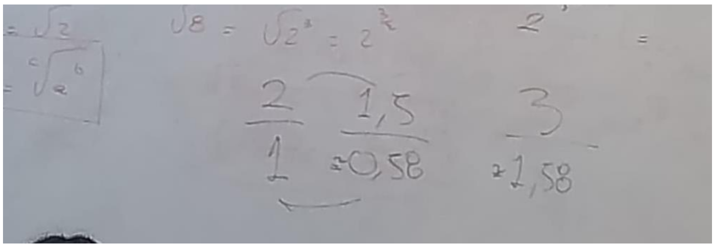
-Entonces encontramos que el exponente es 0,58 y ahí nos dio para completar con 1,58 porque sumamos en la fila de abajo

- A ver, ¿te animas a escribirlo?

Mostramos foto de lo que el alumno escribió en el pizarrón

Figura 24

Resolución por estudiante en la puesta en común



- Muy bien, ¿qué significa ese símbolo y como obtuvieron el $0{,}58$?

- Significa aproximado y lo encontramos probando en la calculadora.

- Muy bien, resolvieron otra ecuación exponencial de forma aproximada. ¿Podrían haber pensado directamente de forma aproximada $2^x = 3$?

- Sí.

- Genial. Este número que están buscando es un número irracional. Por ello, tenemos que escribirlo de forma exacta.

Escribe en el pizarrón

$$2^x = 3$$

Y pregunta.

- ¿Cómo podemos expresar el exponente?

Responden varios al mismo tiempo

- Logaritmo en base 2 de 3

Debajo escribe la profesora $\log_2 3 = x$, y completa en el pizarrón la ficha.

Una vez terminada la puesta en común, la profesora avisa que ahora van a formalizar todo lo trabajado. Mostramos a continuación lo subido al campus que coincide con lo escrito en la clase.

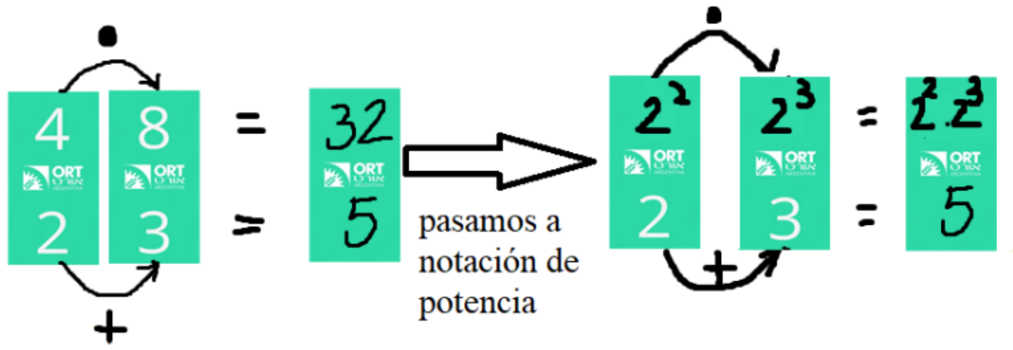
Figura 25

Institucionalización propiedades logaritmos a partir del problema 5

Veamos las relaciones establecidas:

- "Si multiplicamos los número de la fila de arriba (las **potencias de base 2**) y sumamos los números de abajo (los **exponentes**) nos da una nueva ficha que cumple con el patrón.

¿Les suena esta propiedad?



(*Logaritmo - Matemática - Campus Virtual ORT*, 2022)

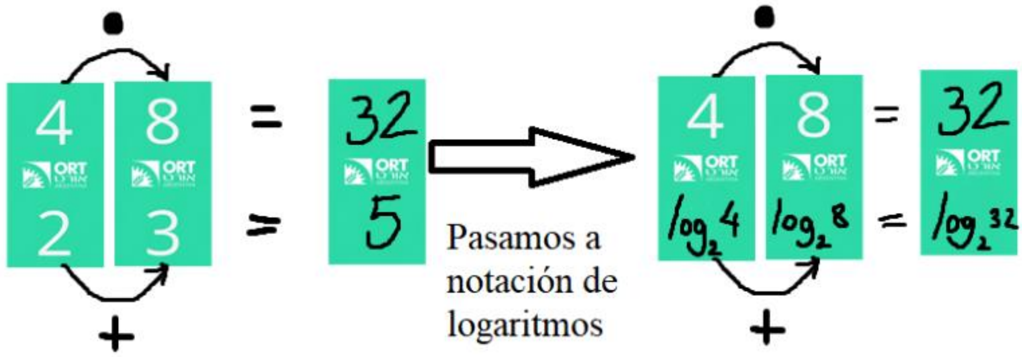
Es decir,

$$2^2 . 2^3 = 2^{2+3} = 2^5$$

Generalización (repasamos)

$$b^P . b^Q = b^{P+Q}$$

Ahora... los números de la fila de abajo se llaman exponentes o _______________



Es decir

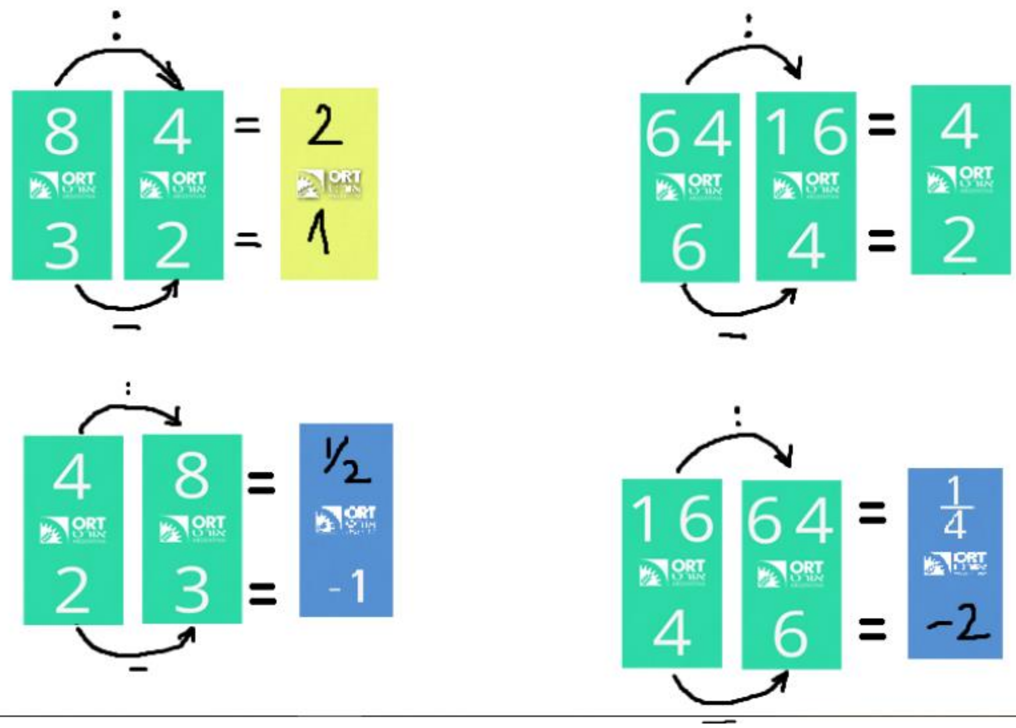
$$\log_2(4) + \log_2(8) = \log_2(32)$$

(*Logaritmo - Matemática - Campus Virtual ORT*, 2022)

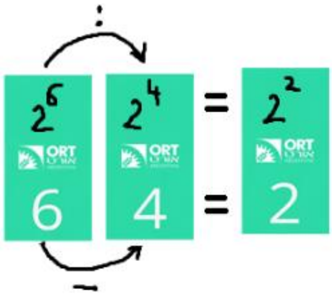
Generalización

$$\log_b(a) + \log_b(c) = \log_b(a.c)\ ,\ con\ b > 0 \wedge b \neq 1,\ a > 0,\ c > 0$$

Otra relación que podemos percibir es:

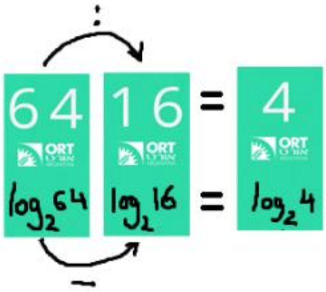


Escribamos una de las situaciones en notación de potencia para **justificar** por qué ocurre este patrón:



$2^6 : 2^4 = 2^{6-4} = 2^2$

En notación de logaritmos:



$\log_2(64) - \log_2(16) = \log_2(4)$

Generalización de las propiedades:

- $b^P : b^Q = b^{P-Q}$
- $\log_b(a) - \log_b(c) = \log_a(a : c)$, con $b > 0 \wedge b \neq 1, a > 0, c > 0$

(*Logaritmo - Matemática - Campus Virtual ORT*, 2022)

Luego la profesora dijo:

- Si multiplicamos las potencias (de misma base), sumamos los exponentes. Si dividimos las potencias (de misma base), restamos los exponentes. ¿Qué otra propiedad de la potencia, conocen?

- Potencia de otra potencia.

- Perfecto. Entonces también tenemos esa propiedad en logaritmos.

Finalmente, quedaron institucionalizadas:

Figura 26

Resumen de propiedades de logaritmos

Sean los números reales $b > 0$ *y* $b \neq 1$. $a > 0$, $c > 0$, $n \in \mathbb{R}$. Se cumple;

$$I)\ \log_b(a.c) = \log_b(a) + \log_b(c)$$

$$II)\ \log_b\left(\frac{a}{c}\right) = \log_b(a) - \log_b(c)$$

$$III)\ \log_b(a^n) = n.\log_b(a)$$

Otras propiedades más sencillas son:

$$IV)\ \log_b 1 = 0 \text{ ya que } b^0 = 1$$

$$v)\ \log_b(b) = 1 \text{ ya que } b^1 = b$$

$$VI)\ b^{\log_b(x)} = x$$

(*Logaritmo - Matemática - Campus Virtual ORT*, 2022)

Luego, la docente les dejo un formulario de tarea, cuyos enunciados mostramos a continuación:

Figura 27

Ejercitación propiedades

1.*

a es un número positivo y distinto de 1

Usando las propiedades determine si las siguientes expresiones equivalen a número determinado. En caso de que no, complete "-". En caso de que sí, complete con el número. Tenga en cuenta que si el número es racional, colocar la respuesta en forma de fracción.

$\log_a\left(\dfrac{\sqrt{a}.a^{\frac{1}{3}}}{a^{-1}}\right) =$ ______________________

$\log_a(a^2) - 16 =$ ______________________

$\log_a(a^2 + a) =$ ______________________

$\log_a\left(\dfrac{1}{a}\right) =$ ______________________

$\log_a(1) =$ ______________________

$\log_a(a) =$ ______________________

2.*

Seleccione las expresiones que sean equivalentes para todo $x>0$, $y>0$, $b\in(0;1)\cup(1;+\infty)$

$a)\ \log_b(x-y)$, $b)\ \log_b(x)-\log_b(y)$

$c)\log_2(x).\log_2(y)$, $d)\ \log_2(x.y)$

$e)\ \log_2(x)+\log_2(y)$, $f)\ \log_2(x+y)$

$g)\ c.\log_b(x)$, $h)\ \log_b(x^c)$

$i)\ \log_b\left(\frac{1}{x}\right)+\log_b(x)$, $j)\ 0$

- ☐ a y b son equivalentes
- ☐ c y d son equivalentes
- ☐ e y f son equivalentes
- ☐ g y h son equivalentes
- ☐ i y j son equivalentes
- ☐ d y e son equivalentes
- ☐ d y f son equivalentes
- ☐ c y f son equivalentes

3.*

Complete la opcion correcta (use las letras "I" , "V" en mayúscula y sin espacio) en caso de ser otra opción, complete directamente con el número correcto.
Tenga en cuenta que cuando la base del logaritmo es 10, no escribimos la base. Es decir, $\log_{10}(x)=\log(x)$

a) Si $\log(\sqrt{x})=5$, entonces $\log(x^2)=$

I. 5 II. 5^2 III. 2.5 IV. $\frac{1}{2}\cdot 5$ V. Otra.¿Cuál?

b) Si $\log(x)=a$, $\log(y)=b$, entonces $\log(\sqrt[3]{xy})=$

I. 3^a+3b II. 3ab III. $\frac{1}{3}a+\frac{1}{3}b$ IV. $\frac{1}{3}ab$ V. $\sqrt[3]{a+b}$

c) Si $\log_3(x)=y$, $\log_3(3x^3)=$

I. 1 + 3x II. 1 + 3y III. 3 + 3x IV. 3 + 3y V. 9y

4.*

Sabiendo que $\log_4(N)=3$, calculá $\log_4\left(\frac{\sqrt[3]{N}}{N^3}\right)$.

(*Logaritmo - Matemática - Campus Virtual ORT*, 2022)

Ficha resumen de la clase:

Objetivos alcanzados por los estudiantes:

Los estudiantes percibieron la relación entre la sucesión aritmética y la geométrica.

Los estudiantes identificaron las propiedades de la potencia.

Los estudiantes formularon coloquialmente las propiedades de los logaritmos.

Tabla 5

Datos recolectados de la Clase N°5

Clase N°5	**Guía de los estudiantes**				
	Grupo 1	Grupo 2	Grupo 3	Grupo 4	Grupo 5
Habilidades:					
Puesta en tarea, planteo del problema, resolución del problema. Alumnos interactúen con objeto de conocimiento.	Logrado	Logrado	Logrado	Logrado	Logrado
Objetivos	Logrados	Logrados	Logrados	Logrados	Logrados
Representaciones: Registros de representación semiótica utilizada.	Numérico Tabla Algebraico	Numérico Algebraico	Numérico Algebraico	Numérico Algebraico	Numérico Algebraico

Problema 6

Con las fichas que hayan formado.

Parte A: Consideren x a los exponentes e y a sus respectivas potencias

a) Graficar los puntos en un plano cartesiano

b) Determinar dominio, imagen, raíz y ordenada al origen

c) ¿Cuál es la ecuación de la función?

Parte B: Consideren x a las potencias e y a sus respectivos exponentes.

a) Graficar en el mismo plano que el ítem a

b) Determinar dominio, imagen, raíz y ordenada al origen

c) ¿Cuál es la ecuación de la función?

Los estudiantes trabajaron con la actividad sin dificultad. Tal como se mencionó en la hipótesis de trabajo, este ejercicio pone en tarea al alumno en una actividad necesaria para lo que sigue.

Nos parece relevante destacar las palabras de la docente en la explicación de la función exponencial por lo que generó luego en las argumentaciones de los alumnos para la función logarítmica. Mientras construía el gráfico, marcó primero el punto $(0;1)$ y dijo:

- miren acá, otro punto es $(1;2)$ porque x son los exponentes e y son las potencias. Cuando sumamos un exponente, multiplicamos por 2 el y.

Marca el punto, con el marcador sobre este punto repite

- Cuando sumamos un exponente, multiplicamos por 2 el y. Me muevo uno a la derecha y me voy al doble de 2, fíjense que no es lineal la variación ¿Qué punto tenemos?

Los alumnos asienten con la cabeza y responden

- $(2;4)$

- Bien, y otra vez, ¿Qué punto obtienen?

- $(3;8)$

- Bien, ahora tenemos que hacer la vuelta para construir el gráfico para el otro lado. En vez de suma uno, restamos uno. Y, en las potencias dividimos por dos. Asique tenemos desde acá el punto $(2;4)$, restamos uno y hacemos la mitad tenemos el $(1;2)$ y ¿Ahora?

- el $(0;1)$, después el $\left(-1;\frac{1}{2}\right)$ y así siempre la mitad.

- Perfecto, a medida que hago el anterior en x, los número y se acercan a cero. Esto ya lo habían dicho ustedes una clase de las fichitas ¿se acuerdan?

- Sí, hay asíntota en cero

- Sí decimos asíntota de ecuación $y = 0$. Bueno analicemos la otra función. Nos posicionamos en el punto $(1; 0)$ ¿cómo construimos otro punto con las reglas?

- Uh, ahora es más difícil

- ¿por qué?

-Porque lo tenemos dado vuelta

- ¿Qué eje son los exponentes?

- el y

- y ¿Entonces? A medida que aumentamos unos en y….

-Ah, claro. Cuando sumamos uno en y, multiplicamos por 2 en x.

- ¡perfecto!

- ¿Y cuándo restamos uno en y?

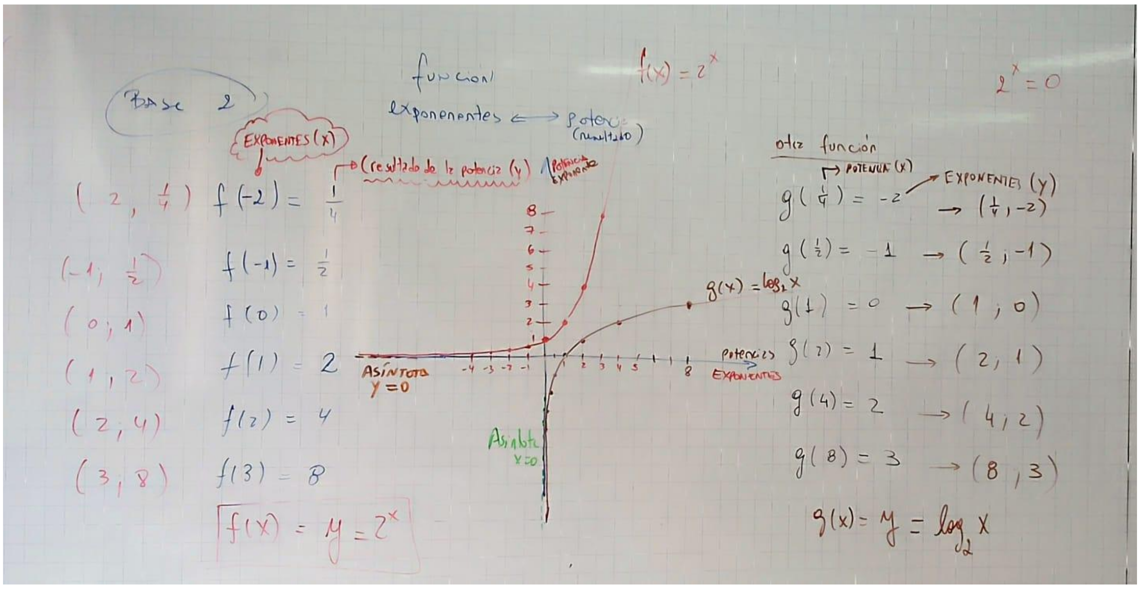
- La mitad y nunca llegamos a cero.

- Bien, x nunca puede ser cero. Vamos a decirlo bien. A medida que y toma números cada vez menores, es decir que tiende a menos infinito, los x se acercan a cero. O bien, límite cuando x tiende a cero de esta función es menos infinito.

Podemos mostrar el final luego de la puesta en común:

Figura 28

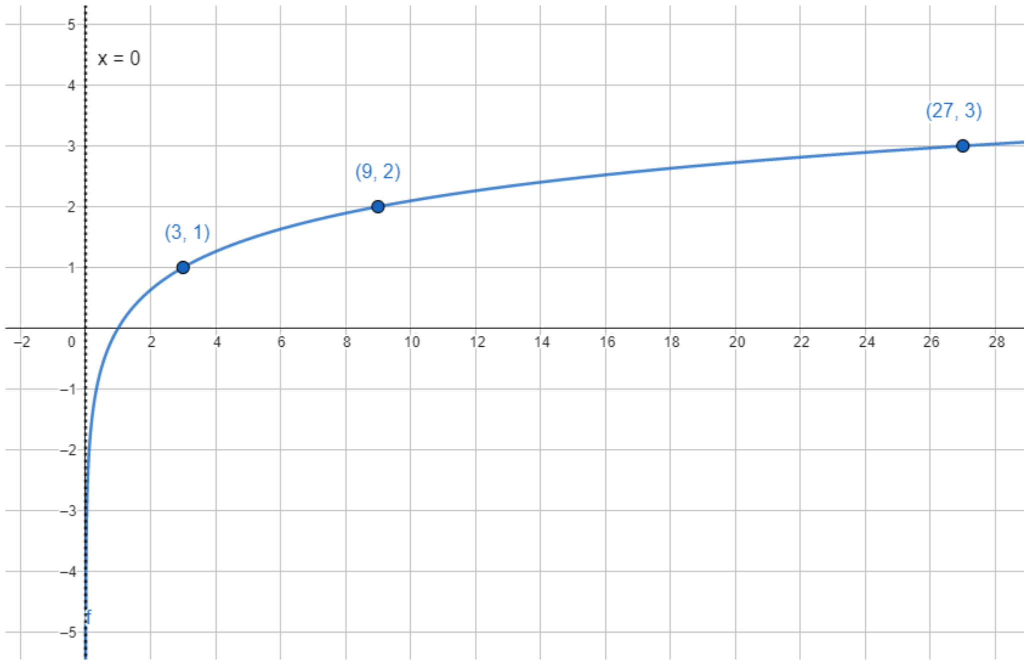
Función exponencial y logarítmica



Luego, continuaron con la siguiente actividad:

Problema 7

a. Dada la función logarítmica de la forma $f: A \rightarrow B / f(x) = \log_b x$. Determine el Conjunto A, el número b y la raíz



b. Dada la función logarítmica de la forma $g: A \rightarrow B / g(x) = \log_b x$, a partir de las siguientes relaciones. Determine el Conjunto A, el número b y la raíz. ¿La función es creciente o decreciente?

$\boldsymbol{x}$	$\boldsymbol{g(x)}$
$\mathbf{1}$	0
$\mathbf{1/2}$	-1
$\mathbf{1/4}$	-2
$\mathbf{1/8}$	-3

c. Determine una función logarítmica de la forma $h: A \rightarrow B/h(x) = \log_b x$ que sea decreciente.

Continuaron el trabajo en grupos. Para el ejercicio a, pudimos observar dos argumentos con diferentes enfoques. En uno de ellos, un estudiante dijo "b es 3 porque subimos uno, multiplicamos por 3". En otro, recurrieron a un cálculo analítico reemplazando en la ecuación por un punto:

$$1 = \log_b 3$$

$$b^1 = 3$$

Llegando a la misma conclusión de $b = 3$. Para el dominio todos los grupos lo respondieron desde el punto de vista gráfico observando que es $(0; +\infty)$. Para determinar la raíz, todos resolvieron la ecuación $f(x) = 0$.

Para el ejercicio b, nuevamente, podemos observar que el grupo que antes pensó la variación que había, volvió a usar la misma estrategia y observó "dividimos por 2, restamos 1 asique es decreciente y la base es 1/2". La profesora tuvo que intervenir en el grupo a cuestionar sus razonamientos.

- Veamos, según esta tabla, las x, ¿aumentan o disminuyen?

- disminuyen porque es la mitad

- bien, ¿Y sus respectivos resultados?

- disminuyen 1

- ¿Entonces? ¿la función cómo es?

- ¿Decreciente?

- ¿Por qué?

- Porque restamos uno en y

- Pero en x también tomas números menores al hacer la mitad.

- Ah, creo que estoy entendiendo, pero…

Había algunos con cara de desconcierto y el alumno que interactuaba con la profesora parecía entender la idea, pero no asimilarla del todo. Continuó la profesora:

-Miren, grafiquemos el primer punto de la tabla

Grafica el punto en el GeoGebra y dice

- Ahora el segundo punto está en la mitad de la coordenada abscisa y menos 1 en y.

Grafica el punto y pregunta

- Lean el gráfico de izquierda a derecha así x es creciente. A medida que x aumenta, ¿los números y aumenta o disminuyen?

- ah, claro, ahora sí, leyendo de izquierda a derecha es más fácil.

- ¿Se entendió?

- Sí, o sea que siempre nos conviene graficar, ¿no?

- Es una herramienta que los ayuda a validar o argumentar, siempre es bueno ver los objetos matemáticos desde los distintos registros: gráfico, fórmula, pensando en lenguaje coloquial, o la tabla.

- Claro. Gracias.

Los otros grupos, recurrieron al cálculo algebraico

$$0 = \log_b 1$$

$$b^0 = 1$$

Llegando a esta igualdad. Ahí surgió un debate, un alumno dijo que

- b es igual a 1

- No, la profe dijo que la base no puede ser 1 ni negativos

- Pero acá sí 1 a la cero, es 1.

- Sí, pero no se puede.

Un estudiante del grupo de enfrente acota

- Cualquier número elevado a la cero da 1. Usa otro punto.

-Ah, es verdad. Gracias.

Luego hicieron la cuenta con otro punto, llegando a que $b = 2$. Justificaron que es creciente porque la base es mayor que 1.

Otro grupo graficó la función para justificar que es creciente. Respecto a la última pregunta, un grupo propuso sobre el mismo gráfico una curva logarítmica con asíntota en la misma ecuación que la graficada, $x = 0$, la misma raíz, pero decreciente. Otro grupo, propuso base 1/2. No hubo puesta en común por el tiempo, pero la profesora pasó por todos los grupos y si bien, no todos razonaron con el mismo enfoque, todos terminaron la ejercitación.

Ficha resumen de la clase:

Objetivos alcanzados por los estudiantes:

Los estudiantes graficaron la función exponencial y logarítmica.

Los estudiantes determinaron la asíntota de cada función.

Los estudiantes percibieron el concepto de función inversa.

Los estudiantes trabajaron con diversos registros de representación semióticas: Gráfico(Geométrico) -Ecuación (Algebraico) - Tabla (numérico)

Los estudiantes determinaron el crecimiento o decrecimiento de funciones de la forma $g: A \to B / g(x) = \log_b x$

Tabla 6

Datos recolectados de la Clase N°6

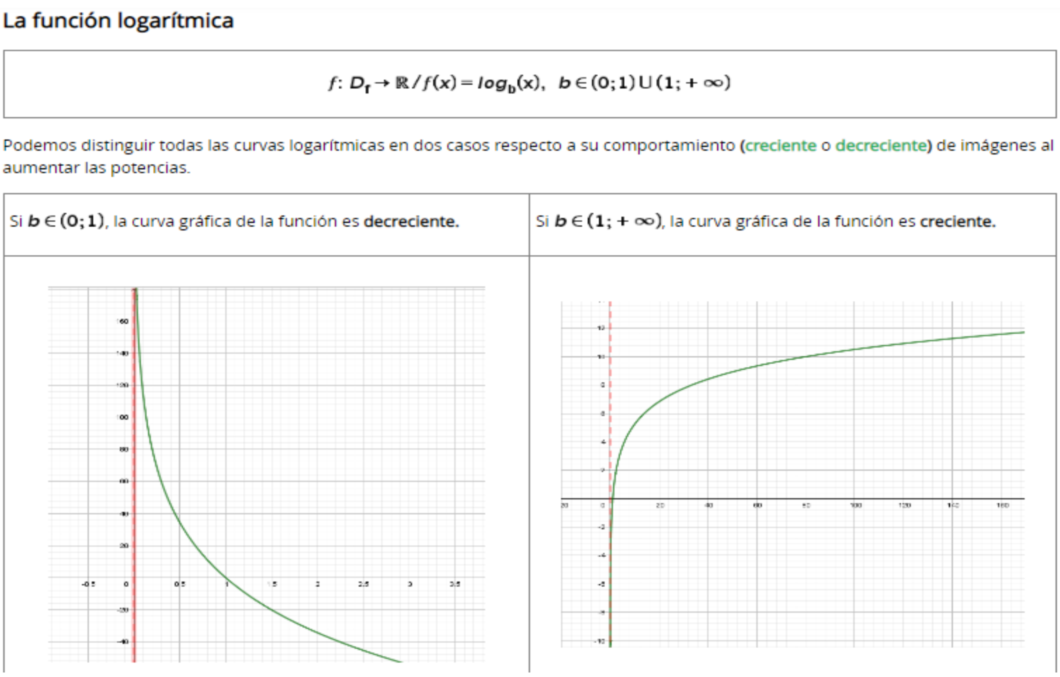
Clase N°6 **Guía de los estudiantes**

	Grupo 1	Grupo 2	Grupo 3	Grupo 4	Grupo 5
Habilidades:					
Puesta en tarea, planteo del problema, resolución del problema. Alumnos interactúen con objeto de conocimiento.	Logrado	Logrado	Logrado	Logrado	Logrado
Objetivos	Logrados	Logrados	Logrados	Logrados	Logrados
Representaciones: Registros de representación semiótica utilizada.	Numérico Algebraico Tabla Gráfico	Numérico Algebraico Tabla Gráfico	Numérico Algebraico Tabla Gráfico	Numérico Algebraico Tabla Gráfico	Numérico Algebraico Tabla Gráfico

La clase comenzó con la institucionalización, se dictó en la carpeta:

Figura 29

Institucionalización función logarítmica



La función logarítmica

$f: D_f \to \mathbb{R} / f(x) = log_b(x), \ b \in (0;1) \cup (1;+\infty)$

Podemos distinguir todas las curvas logarítmicas en dos casos respecto a su comportamiento (creciente o decreciente) de imágenes al aumentar las potencias.

Si $b \in (0;1)$, la curva gráfica de la función es **decreciente**.	Si $b \in (1;+\infty)$, la curva gráfica de la función es **creciente**.

(*Logaritmo - Matemática - Campus Virtual ORT*, 2022)

Luego, continuaron con la ejercitación

Problema 8

a) Dada la función $h: A \to B / h(x) = \mathrm{k}.\log_2 x$,

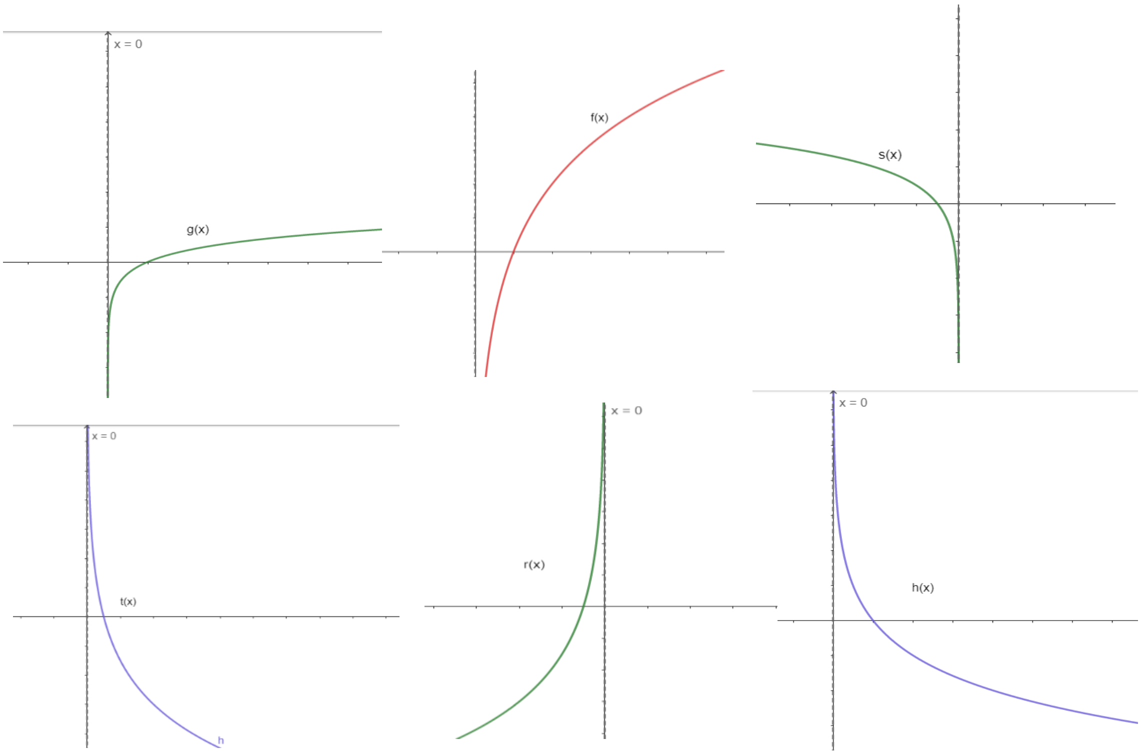
Insertar la ecuación en el GeoGebra, se creará un “deslizador” para el número k. Determine un número k para que la función sea decreciente

Dada la función $g: A \to B / g(x) = -3.\log_b x$,

b) Determine un número b par que la función sea creciente.

c) Dadas las funciones graficadas de funciones de la forma

$$f: A \to B / f(x) = \mathrm{k}.\log_b x$$



Indicar cuáles de ellas corresponden a las condiciones detalladas de k y b en cada caso

Condiciones de b y k	**Funciones**
$\mathbf{0 < b < 1 \; y \; k > 0}$	
$\mathbf{0 < b < 1 \; y \; k < 0}$	
$\mathbf{b > 1 \; y \; k > 0}$	
$\mathbf{b > 1 \; y \; k < 0}$	

Los estudiantes agarraron sus computadoras, y pusieron la ecuación en el GeoGebra, comenzaron a notar que la función podía ser creciente o decreciente según el signo de k. Rápidamente lograron contestar la pregunta, algunos contestaron -5, otros -2 o -1. Un solo grupo no determinó un número, sino que escribió cualquier negativo.

Para el ejercicio b, los estudiantes colocaron la fórmula en el GeoGebra, algunos estaban sorprendidos por qué no realizaba curva gráfica si $b < 0$. Nuevamente uno de los grupos determinó en genérico que $b > 1$ mientras que los otros dieron como respuesta, correcta, números determinados b.

Para el ítem c, los grupos volvieron a recurrir al programa GeoGebra para resolver el problema. Reafirmamos que ningún grupo intentó hacer un razonamiento analítico o de la ecuación o usar lo construido en los ítems anteriores. Sino que, colocaron la ecuación en GeoGebra con los dos deslizadores y fueron "moviendo" es decir, analizando los posibles números que pedía los ejercicios y así ajustando la función a las condiciones de los parámetros que solicita la tabla. Todos los grupos alcanzaron completar correctamente la tabla. Un solo grupo se puso a hacer una comparación con los ítems anteriores y otro, a explorar con el GeoGebra cómo podían hacer para que el gráfico sea como $s(x)$ llegando a afirmar que era imposible.

Luego, de todo este trabajo, comienza la puesta en común.

Para el primer ítem la docente preguntó

- ¿por qué el número k debe ser negativo para que sea decreciente?

Como los estudiantes simplemente habían observado la gráfica sin hacer un análisis, se produce un silencio. Luego un estudiante dice:

- Tiene que ir para abajo para que sea decreciente.

- Si, mejor dicho, a medida que los números "x" son mayores (recuerden que "x" son las potencias", los números "y", los exponentes" deben ser menores. En este caso tenemos base 2 entonces al sumar un exponente, multiplicamos por 2. A ver, hagamos un gráfico y tabla de esto que ya vimos.

Mientras la profesora copiaba el problema ya analizado de la clase que formalizó la función logarítmica, un estudiante mirando el gráfico que hizo la profesora dice

- Ah, por eso k tiene que ser negativa para que vaya para abajo, bueno, para que "y" disminuya.

- Sí, pongamos el ejemplo que $k = -1$. La ecuación es $y = -\log_2 x$. ¿En qué modifica a la gráfica multiplicar por -1 a la ecuación?

-Que ahora nos da todo el opuesto.

-Perfecto, los números "y" de esta función son los opuestos. Poe ejemplo, en esta tabla que el 1/8 está relacionado con -3. Ahora, con esta función está relacionado con el opuesto que es 3, eso es porque multiplicamos por un negativo.

-Ah, claro, se da vuelta todo por el menos.

- Sí, ahora lo anotamos bien. Sigamos construyendo esta función. Es el mismo análisis, veamos con 1/4 , en $y = \log_2 x$ es-2, si ahora le ponemos un menos adelante, aplicamos el opuesto y tenemos el número 2. Es decir, en la primera función tenemos el punto $\left(\frac{1}{4}; -2\right)$ en esta función es el punto $\left(\frac{1}{4}; 2\right)$. Y con la raíz, ¿qué opinan que va a pasar en la nueva función?

-Nada, va a ser la misma porque es cero.

- Bien, esto que observamos acá, pasa en todas las funciones. Si ustedes tiene una cuadrática, por ejemplo, x^2, ¿Qué ocurre si a es negativo, por ejemplo, $-x^2$?

- Es cóncava hacia abajo.

- Claro, en exponencial lo mismo, ¿recuerdan que de esta relación entre potencias y exponentes podemos llamar x a los exponentes e y a las potencias y queda, en este caso la función $y = 2^x$.

La profesora realiza el gráfico y debajo escribe $y = -2^x$.

- ¿Cómo va a ser el gráfico de -2^x respecto de 2^x?

- Lo mismo, pero al revés.

- ¿Qué significa eso?

- Decreciente por debajo de la asíntota.

- Bien, todos los puntos le aplico el opuesto a la coordenada “y”. Y gráficamente, se llama simetría respecto el eje x.

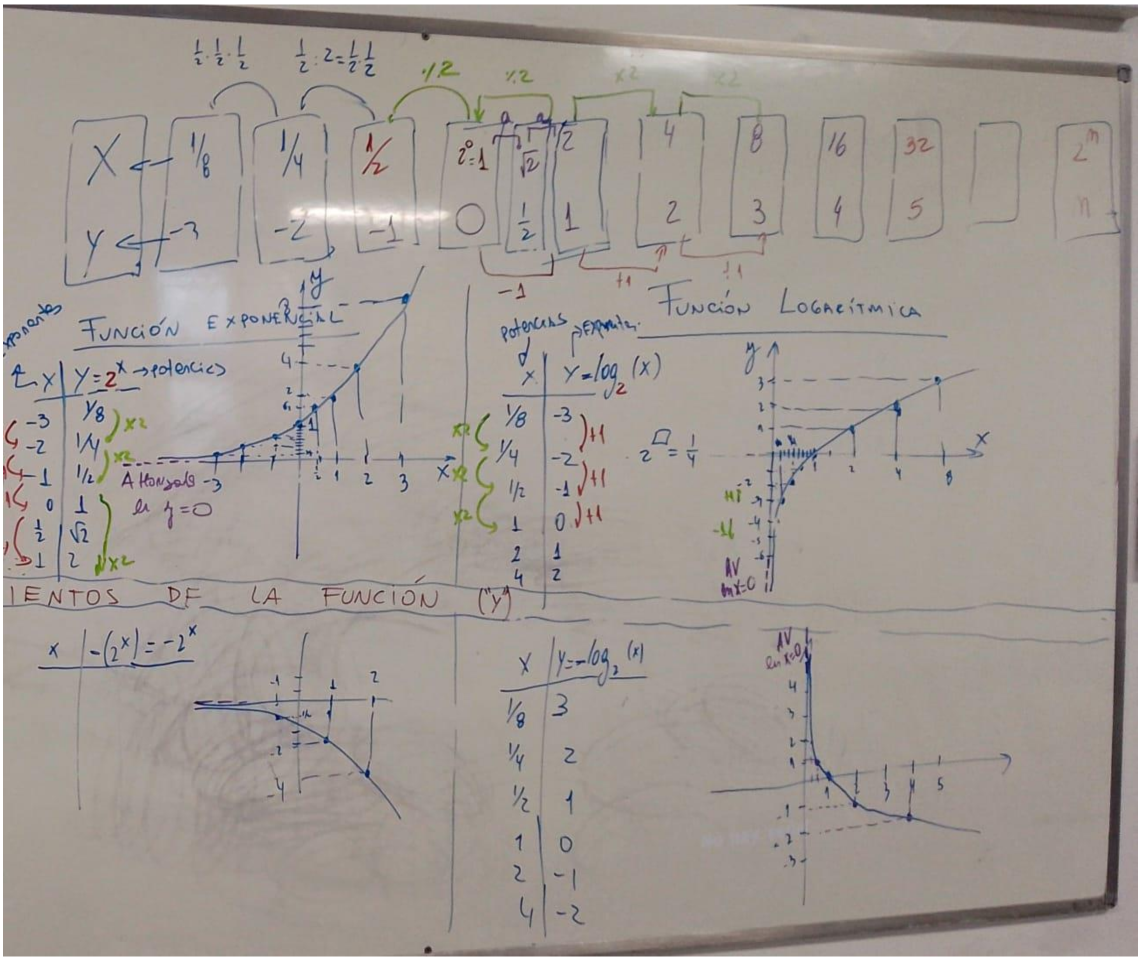
Mientras los alumnos terminan de copiar, la profesora vuelve a insistir.

-Al final de todo, copien como se dice correctamente, simetría respecto al eje x. Eso significa que todos los puntos tienen la misma coordenada x pero su opuesta en y.

Mostramos el pizarrón de la explicación:

Figura 30

Simetría en la gráfica por coeficiente negativo al logaritmo



Luego, retoma la clase la profesora diciendo

-Quiero que hagamos el ítem b razonando con esto que vimos acá. A ver quién se anima.

Una alumna levanta la mano. La profesora le da la palabra.

- Bueno, nosotras lo habíamos hecho con GeoGebra pero con lo que vimos ahora sería, que b tiene que ser una fracción entre 0 y 1 porque si es mayor que 1 como el k es negativo te queda decreciente.

- ¡Bien! Me gustó ese análisis, ¿Se entendió?

Responde varios estudiantes y otros asienten con la cabeza.

- Eso anoten todo. Quiero que entiendan una cosa, ustedes nunca vieron esto que se llama "corrimientos" que significa analizar qué cambios ocurre en la gráfica de una función al variar los números en la ecuación; entonces, para empezar que entiendan que son los mismo en todas las funciones y que, por sobre todo que el GeoGebra lo tiene como herramienta para observar, explorar, validar lo que piensan pero que tienen que entender y justificar como hicieron recién.

- Y, pero ¿cómo escribimos todo eso profe?

- Bueno, escribámoslo juntos, Miren, cuando analizan corrimientos les conviene ir pensando en el orden de jerarquía que aparecen las operaciones en la fórmula. Es decir, por ejemplo acá tenemos que x primero se le aplica logaritmo y luego, al resultado, el opuesto. Entonces, vamos a ir analizando en ese orden. ¿Estamos bien o vamos de nuevo?

- Bien, bien.

-Genial empezamos. La función $y = \log_b x$, si $b > 1$ ¿Es creciente o decreciente?

- Creciente.

- Bien, y si, ¿ahora multiplicamos por un negativo?

- Decreciente.

- Bien, escribámoslo.

- Pero, profe, ¿en que cambia multiplicar por -3 o -100?

- Bien, eso ahí lo vemos bien, fíjate en el GeoGebra qué podes observar y ahora lo analizamos. En la carpeta podrían escribir así

$(b > 1)$, $y = \log_b x$ es creciente.

$(b > 1)$, $y = -3. \log_b x$ es decreciente.

Continúa la docente,

- Analicemos el otro camino. Si empezamos con un logaritmo cuya base está entre 0 y 1

$(0 < b < 1)$, $y = \log_b x$ es decreciente.

$(0 < b < 1)$, $y = -3.\log_b x$ es creciente.

Luego, mirando al alumno que preguntó antes

- Respecto a tu pregunta, ¿pudiste observar algo?

El alumno estaba con el celular con el GeoGebra y dice

- Sí, primero con el deslizador no entendía mucho, veía que se movía que estaba como más alargada o estirada pero después puse 100 en la función logaritmo en base 2 y ahí me di cuenta que queda como más estirada porque ahora todo está multiplicado por 100, por ejemplo tengo el punto $(2; 100)$ y antes tenía el punto $(2,1)$

La profesora contesta asombrada

- ¡increíble! Mejor explicado imposible. Perfecto, el resto después puede hacer su experiencia así asimilan. Por el momento pongamos foco en que si el coeficiente es positivo cambiará un poco la curvatura si no es 1, pero si es negativo, aplica el opuesto a los números “y” y se efectúa una simetría respecto el eje x. Con esta conclusión vamos a corregir los gráficos, ¿quién quiere pasar a completar la relación entre la tabla y los gráficos?

Aclaramos que estaba puesto el proyector en el aula, varios estudiantes pasaron a completar la tabla, quedando escrito:

Figura 31

Resolución problema 8

Condiciones de b y k	Funciones
$\mathbf{0 < b < 1 \; y \; k > 0}$	$h(x)$
	$t(x)$
$\mathbf{0 < b < 1 \; y \; k < 0}$	$f(x)$
	$g(x)$
$\mathbf{b > 1 \; y \; k > 0}$	$f(x)$
	$g(x)$
$\mathbf{b > 1 \; y \; k < 0}$	$h(x)$
	$t(x)$

Luego, la profesora consultó sobre los gráficos de $s(x)$ y $r(x)$. El grupo que ya había explorado con el GeoGebra enseguida dijo

-Es imposible graficar esas.

-Veamos, es imposible con esta forma $y = k. \log_b x$. Pero, así como multiplicar a los números "y" por un negativo les hizo una simetría respecto el eje x, ¿cómo se imaginan que tienen que agregar en la fórmula para hacer los opuestos, pero respecto a los número x?

- Ah, vamos a tener que multiplicar a la x por un negativo.

- Sí. Grafiquen en estos minutos que quedan la función $y = \log_2(-x)$. Pueden hacer una tabla. Y, si terminan, después exploren con el GeoGebra poner deslizadores y analicen las siguientes funciones con el objetivo que les dije antes, usar el programa para validar o sus razonamientos.

Escribe en el pizarrón:

$$y = \log_2(ax)$$

$$y = \log_{\frac{1}{2}}(-x)$$

$$y = \log_{1/2}(ax)$$

-La próxima clase formalizamos. Empiecen a trabajar hasta donde lleguen, el resto de tarea.

Ficha resumen de la clase:

Objetivos alcanzados por los estudiantes:

Que los estudiantes exploren con el GeoGebra las curvas gráficas al variar el coeficiente.

Que los estudiantes analicen cómo incide un coeficiente negativo o positivo en la ecuación logarítmica respecto a su curva gráfica.

Que los estudiantes den significado a los k y b en funciones de la forma $f: A \to B / f(x) = \mathrm{k}.\log_b x$ respecto del crecimiento o decrecimiento de la función.

Que los estudiantes puedan relacionar la ecuación de la función logarítmica con su curva gráfica.

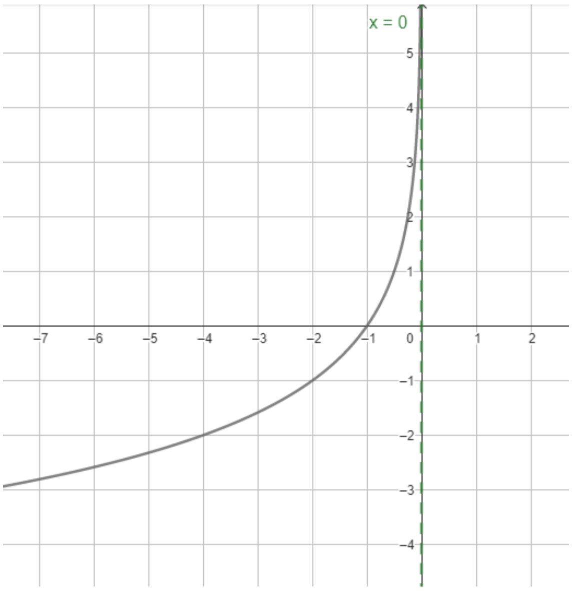
Tabla 7

Datos recolectados de la Clase N°7

Clase N°7	**Guía de los estudiantes**				
	Grupo 1	Grupo 2	Grupo 3	Grupo 4	Grupo 5
Habilidades:					
Puesta en tarea, planteo del problema, resolución del problema. Alumnos interactúen con objeto de conocimiento.	Logrado	Logrado	Logrado	Logrado	Logrado
Objetivos	Logrados	Logrados	Logrados	Logrados	Logrados
Representaciones: Registros de representación semiótica utilizada.	Numérico Algebraico Tabla Gráfico	Numérico Algebraico Tabla Gráfico	Numérico Algebraico Tabla Gráfico	Numérico Algebraico Tabla Gráfico	Numérico Algebraico Tabla Gráfico

Problema 9

Sea la función $f\colon A \to R / f(x) = \mathrm{k}.\log_b(a(x+c))$, determinen los números a y b para que la curva gráfica de f sea:



La clase comenzó con una puesta en común de la tarea pendiente de la clase anterior. La profesora con el proyector grafico las funciones en el GeoGebra. Luego, comenzaron con la actividad del día. Para la misma, se dividieron en los grupos. Al principio y al mirar todos los parámetros juntos en la misma ecuación los estudiantes no distinguían como comenzar a pensar el ejercicio. La profesora fue guiando a cada grupo con preguntas y/o planteos de acción, algunas de las que pudimos percibir son: Determinen puntos que pertenecen a la gráfica de la función, ¿Cuál es el dominio?, a medida que los exponentes disminuyen una unidad (recuerden que son los números "y"), ¿qué ocurren en las potencias ("x") ?, primero determinen una base y luego ajustan el resto de los parámetros según la jerarquía de las operaciones en la ecuación.

En grupos distintos surgió base 2 y base 1/2, se escucharon argumentos como "disminuyo 1, multiplico por 2", o, "aumento 1, divido por 2". Para el número c, todos los grupos determinaron $c = 0$, argumentando que la asíntota vertical está en $x = 0$, en un grupo escuchamos el argumento "no está traslada ni a derecha ni a izquierda". Respecto al coeficiente a, surgieron razonamientos distintos según la base establecida.

Para aquellos grupos que determinaron base 2, tuvieron una dificultad mayor ya que al hacer los opuestos respecto a x (colocando que a es -1) no les quedaba un gráfico creciente. Por lo que, tuvieron que aplicar los opuesto a los logaritmos con $k = -1$. Para ellos la ecuación de la función es $y = -\log_2(-x)$. Para el resto de los grupos, concluyeron en $y = \log_{1/2}(-x)$

En la puesta en común se nutrieron de ambas resoluciones. En un primer momento, los estudiantes pensaban que lo que había hecho el otro grupo estaba mal porque no habían llegado a los mismos números. Para demostrar que son expresiones equivalentes, en un primer momento, la profesora graficó en el GeoGebra mediante el proyector ambas funciones. Los estudiantes dieron cuenta de que se trataba de curvas que contenían los mismos puntos. En una segunda instancia, la docente propuso demostrar por medio del registro algebraico. Efectuando el cambio de base demostraron que las expresiones son equivalentes.

Tabla 8

Datos recolectados de la Clase N°8

Clase N°8	**Guía de los estudiantes**				
	Grupo 1	Grupo 2	Grupo 3	Grupo 4	Grupo 5
Habilidades:					
Puesta en tarea, planteo del problema, resolución del problema. Alumnos interactúen con objeto de conocimiento.	Logrado	Logrado	Logrado	Logrado	Logrado
Objetivos	Logrados	Logrados	Logrados	Logrados	Logrados
Representaciones: Registros de representación semiótica utilizada.	Numérico Algebraico Tabla Gráfico	Numérico Algebraico Tabla Gráfico	Numérico Algebraico Tabla Gráfico	Numérico Algebraico Tabla Gráfico	Numérico Algebraico Tabla Gráfico

3.3- Preguntas para la entrevista semiestructurada a la profesora

A. ¿Qué sensaciones percibiste en el grupo respecto al trabajo con estas actividades?

B. ¿Qué tópicos o aspectos consideras valiosos para recibir las opiniones de los alumnos?

3.3.1.- Entrevista a la docente

Respecto a la entrevista con la docente, se le dio las preguntas por escrito para que pueda tomarse el tiempo de pensarlas y analizarlas. Luego dijo

-Pude percibir un gran trabajo en grupo, manipularon mucho el contenido, sentía que la clase se me pasaba rapidísimo y que era guía de sus propias experiencias. La verdad me encantó. Compartir con ellos, cómo iban razonando, argumentando. Como docente me ponía en otro rol porque tenía que ir desandando el camino en el momento. Creo que a ellos le sirvió mucho el ir construyendo y de mi parte me parece una propuesta súper interesante. Por un lado, a veces es más desgastante, tomar lo que dice uno, dice el otro, volcar todo, es como que hay que estar.

Respecto a la segunda pregunta me interesaría mucho saber cómo percibieron ellos aprender con las fichas, si le ayudó o como están muy acostumbrados a una clase más formal de definición se sintieron perdidos.

-Muchas gracias.

Con estas ideas generamos para los estudiantes una estrategia de recolección de datos que detallamos a continuación:

3.4- Cuestionario para los estudiantes

Decidimos hacer dos preguntas abiertas con el objetivo de evaluar los recursos de fichas tangible y de software GeoGebra utilizados en determinadas instancias de la propuesta de trabajo. El primero refiere al material de “fichas” que utilizamos para la definición y propiedades del logaritmo, se busca analizar si las mismas aportaron positivamente para los objetivos planteados. Es decir, no nos interesa si resultó atractivo o divertido en sí mismo sino, evaluar si el material es una buena intervención didáctica.

La pregunta abierta tiene como objetivo analizar la conceptualización del tema logaritmos en la respuesta de cada estudiante y la manera en que percibieron, positiva o desfavorable, la actividad y el recurso utilizado. La pregunta es:

¿Crees que el material y las actividades te ayudaron a entender el tema? En caso de que sí, escriba con sus palabras alguna idea que formó durante la actividad de logaritmos.

Creemos que una pregunta cerrada no nos permitirá abstraer fehacientemente la percepción del estudiante, así como reduciría la objetividad del instrumento siendo influenciable para el sujeto que responde perdiendo su validez y confiabilidad. En cambio, esta pregunta permite que los estudiantes se tomen el tiempo y trabajo de escribir sus pensamientos y formular una devolución para la pregunta. No podremos codificar *a priori* las variables que surjan para las categorías del aspecto que analizamos, por lo que, la codificación para el análisis de los datos los haremos luego de recolectados los mismos.

En una segunda instancia, nos proponemos analizar las respuestas de los alumnos ante la intervención del GeoGebra para el evaluar si el recurso lo consideran favorable para el alcance de los respectivos objetivos referido a las funciones logarítmicas y las ecuaciones. Actividad abierta: *¿La herramienta GeoGebra favoreció tu aprendizaje?*

(x)Favorece mi entendimiento.

(x)Perjudica mi entendimiento.

(x) Me es indiferente su uso.

(x) No entiendo nada.

En cualquiera de los dos casos explique por qué.

3.4.1- Recolección y análisis de los datos del cuestionario.

En primer lugar, participaron de las clases un total de 26 estudiantes de la Escuela ORT de cuarto año 2022 especialidad *producción y artística,* comisión: A. Como establecimos en las cuestiones éticas de esta investigación, los estudiantes contaron con la libertad en sus opiniones y/o accionares. Nos disponemos a mostrar los datos recolectados para luego realizar su respectivo análisis.

La pregunta para que los estudiantes desarrollen sobre su experiencia ante la clase con las “fichas” o material tangible para la conceptualización del tema realizó a través del campus virtual que usa la Escuela ORT. En el mismo se creó un, denominado por el mismo, “formulario”; en el cual, cada estudiante completa su respuesta. Luego, de realizado el mismo, dimos cuenta que cada respuesta estaba ligada al nombre y apellido del alumno. Ni los estudiantes, ni nosotros sabíamos que al dar la respuesta queda determinado el nombre del sujeto emisor por lo que los datos no son afectados por una supuesta condición del alumno, a pesar de ello, el segundo cuestionario para recolectar datos respecto del recurso GeoGebra decidimos utilizar un formulario de *google* ya que permite en anonimato del encuestado.

Mostramos en el anexo cómo recibimos las respuestas en la primera encuesta, decidimos copiar cada respuesta en una tabla junto con una columna que determine la codificación del concepto de logaritmo concebido por el estudiante según dos categorías: Acertada o indiferente. Lo mismo analizamos respecto de la percepción de los informantes respecto de la intervención del recurso como: favorable, perjudicial o indiferente. Detallamos a continuación los comentarios de los estudiantes remarcando que fueron trascriptos de forma idéntica a la escrita por los mismos:

3.4.2- Codificación y análisis de la información de los estudiantes

Tabla 9

Codificación datos de los encuestados respecto al material tangible

	Comentario de los estudiantes. Ante la pregunta: *¿Crees que el material y las actividades te ayudaron a entender el tema? En caso de que sí, escriba con sus palabras alguna idea que formó durante la actividad de logaritmos.*	Codificación del concepto: Acertada, errónea o indiferente.	Codificación del recurso: Favorable, perjudicial o indiferente
1	"Un Logaritmo es una operación matemática que da por resultado el exponente de una potencia de una base ya establecida. En otras palabras, es una manera diferente de escribir la potenciación. Por otro lado, considero que la actividad que hicimos en clase fue dinámica y muy fácil para comprender este tema nuevo"	Acertada	Favorable

2	“Fue una actividad muy entretenida y útil para empezar a entender lo que son los logaritmos”	Indiferente	Favorable
3	“Una idea que forme durante la clase acerca de los logaritmos es que si fórmula genérica es Log a c=b. Esto se lee logaritmo en base a de c igual b”	Acertada	Indiferente
4	“Durante la actividad de logaritmos forme la idea de que eran como otra forma de expresar una potencia y que nos iba a servir para poder despejar y descubrir el exponente en caso de que este sea la incógnita. La actividad estuvo muy divertida y me gusto la idea de entender un nuevo tema de esta manera ya que a mi parecer la mejor forma de entender algo no es simplemente aburrirte viendo teoría sino que si mientras aprendes un tema te divertís y te gusta lo aprendes mucho mas fácil y no te aburrís, es mas llevadero”	Acertada	Favorable
5	“los logaritmos son una manera equivalente de expresar potencias, siendo la operación contraria a estas. Es como realizamos en la actividad con las fichas: la base siempre era 2 y teníamos en las fichas la potencia(C) y el exponente (n). Lo que nos dejaba con esta fórmula para armar las fichas: 2^n (arriba), n (abajo) Además, una de las principales utilidades que tienen los logaritmos es utilizarlos como método para resolver el tipo de ecuaciones que hasta ahora no podíamos, como por ejemplo: 2^x=256, que cuando	Acertada	Favorable

	aplicamos la logaritmización se llega a esta ecuación log_2 256 = x, que se puede llegar a resolver La actividad me pareció divertida y me ayudó a entender más cuando expliacamos logaritmos”		
6	“Los logaritmos son un tipo de operacion matematica que permite deshacer una potencia, y obtener como resultado el exponente. Resulta util en caso en que se conocen los valores de la base de la potencia y el resultado, pero el exponente es una incognita. Asi, la operacion log b (n) = x nos permite descubrir el exponente x cuando b^x = n. En mi opinion, la actividad permitio formar la idea de un logaritmo intuitivamente, partiendo de bases y numeros simples para consolidar la idea”	Acertada	Favorable
7	“Sin idea alguna del tema, previa a la actividad, entiendo a el logaritmo como un patrón en determinadas situaciones, y que este se puede llegar a generalizar en formulas, como en la actividad. Por otro lado la actividad del martes me parecido divertida, distinta y entretenida para comenzar un nuevo tema”	Acertada	Favorable
8	“Durante la actividad logré aprender y entender la definición de logaritmo y la forma de resolverlos. Me gustó mucho la actividad ya que fue simple y me permitió comprender los contenidos rápidamente”	Indiferente	Favorable

9	“Durante la actividad de logaritmos pude sacar la concluisión que estos mismos estan muy relacionados con la potenciacion y la radicación. La actividad me pareció una gran idea. Fue una buena forma de introducir contenidos nuevos, y a su vez, hacerlo de una forma más llevadera”	Acertada	Favorable
10	“En la actividad de logaritmos, la idea que mas me llamo la atención y logre desarrollar fue el análisis y detección de patrones en las diferentes cartas y lograr llegar a la formula general de los logaritmos mediante las diferentes maneras expuestas en la puesta en común, la cual es 2^m / m. La actividad me pareció muy distinta e interesante. Trabajar en grupo me pareció muy positivo y productivo, ya que entre los integrantes podíamos discutir nuestras ideas y planteamientos, por lo que me parecería bueno que se repita esa modalidad”	Acertada	Favorable
11	“La idea que pude formar de logaritmo es que pudimos hallar una formula (arriba 2^m, y abajo m), lo cual nos sirve para poder hallar el logaritmo de un numero. La actividad me pareció una muy buena idea, trabajando con los compañeros de clase, la cual nos ayudo de entender de manera fácil el nuevo tema que estamos viendo en clase”	Acertada	Favorable

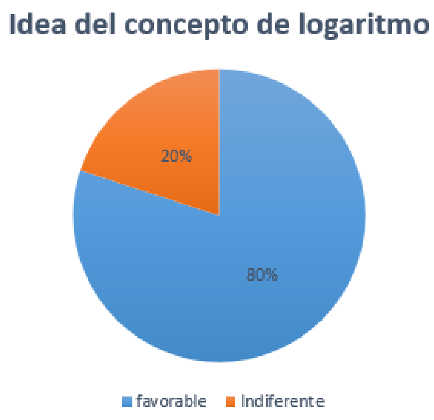
12	“La idea que formé que me pareció muy importante fue el tema de la generalización, es por esto que podemos decir que $a^b = c$ es lo mismo que $\log_a c = b$. Lo que puedo decir sobre el trabajo grupal es que se me hizo bastante entretenido para ver un tema nuevo y el hecho de estar con mas integrantes nos lleva a poder dar nuestros distintos puntos de vista y opiniones sobre el tema”	Acertada	Favorable
13	“Llegué a la conclusión de que , cuando tenemos logaritmos tenemos que encontrar un valor por el cual una base (ya establecida) se eleve y llegué a el resultado (ya establecido también). Ejemplo : 3^x = 9 la "x" es el número que tenemos que descubrir en el logaritmo que sería log(3)=9 . La actividad me pareció super comprensible y que sea en grupos le suma un montón. Para dar una idea de logaritmos me pareció bien”	Acertada	Favorable
14	“En el momento de hacer la actividad, fue bueno el primer encuentro de desconcierto con un exponente referente a una variable, y la actividad nos permitió llegar a entender bien el porqué de los logaritmos y sus excepciones de uso. La actividad fue muy dinámica, y hizo que se entiendan de mejor manera los temas”	Acertada	Favorable
15	“En la actividad lo que más me llamo la atención fue que nos daban opciones en tarjetitas, con las cuales teníamos que	Indiferente	Favorable

	deducir e identificar cual de esas era la formula genérica (seria la de los logaritmos). La actividad me pareció muy interesante ya que nos permitió debatir en grupo una propuesta muy peculiar y es mucho más llevadero que estudiarlo teóricamente, además que fue muy útil ya que fue lo que nos permitió razonar que es logaritmos”		
16	Me gustó que se implementara otra forma de explicar los logaritmos, para que no sólo sea una única forma de explicacion (si bien a mi me sirve la tradicional, creo que es muy enriquecedor probar formas nuevas).	Indiferente	Favorable

Con el análisis de las respuestas obtenidas, para la idea que generó cada estudiante luego de la actividad desciframos una frecuencia absoluta de un concepto acertado de 16, mientras que indiferente 4. Entendiendo por indiferente que no determina ninguna idea de la misma. Mostramos gráficamente con porcentaje los datos.

Figura 32

Gráfico I datos de los encuestados



(*Encuesta. Elaboración propia.*, 2022)

En relación a la percepción de cada estudiante respecto del recurso y las actividades de material tangible, los 16 alumnos encuestados contestaron que les pareció favorable para el aprendizaje.

Figura 33

Gráfico II datos de los encuestados

(*Encuesta. Elaboración propia.*, 2022)

Respecto al cuestionario sobre el uso del programa GeoGebra, trascribimos lo que los estudiantes respondieron en una tabla, nuevamente aclaramos que los datos son idénticos a los recibidos por los alumnos, es por ello que hay errores de ortografía:

Tabla 10

Codificación datos de los encuestados respecto a GeoGebra

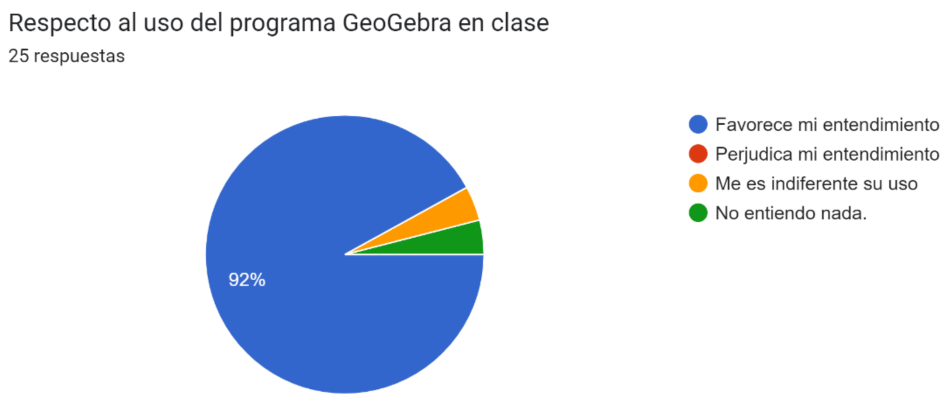
1	Favorece mi entendimiento	Ver ilustrado lo que se explica me ayuda a entender mejor todo
2	Favorece mi entendimiento	Hace los gráficos mucho más rápido y preciso
3	Favorece mi entendimiento	Porque muestra más definidamente los gráficos y funciones que se dan en clase. Es más fácil de entender.
4	Favorece mi entendimiento	Cruzar la teoria con la practica hace mas claro el entendimiento.
5	No entiendo nada.	Nunca lo use
6	Favorece mi entendimiento	Es más fácil y rápido para ilustrar ciertos temas
7	Favorece mi entendimiento	Es una herramienta util y facilita y agiliza la visualizacion de lo que estamos viendo.

8	Favorece mi entendimiento	Representa funciones y figuras de distinto tipo dejando conocer sus datos y puntos con precisión además de orientarnos a lo q seria el dibujo
9	Favorece mi entendimiento	
10	Favorece mi entendimiento	me ayuda a darme cuenta temas puntuales
11	Favorece mi entendimiento	Todavia no le di uso, pero me sirve ver las graficas cuando explica
12	Favorece mi entendimiento	
13	Favorece mi entendimiento	Ayuda a q no se pierda tanto tiempo en hacer graficos a mano y es más exacta para estos.
14	Favorece mi entendimiento	Nos da la posibilidad de graficar varias y verificar las ubicaciones.
15	Favorece mi entendimiento	GeoGebra es una herramienta de gran ayuda, porque es más fácil entender lo que el docente quiere explicar visualizándolo. Y a parte de que es más rápido usando GeoGebra que ir graficando paso por paso.
16	Favorece mi entendimiento	Porque agiliza procesos
17	Favorece mi entendimiento	Ayuda a visualizar de forma gráfica las posibles soluciones
18	Favorece mi entendimiento	Porque me ayuda a ver gráficamente las funciones, lo cual hace que entienda bien que hace cada parte de la misma y como funciona
19	Favorece mi entendimiento	Porque le veo una facilidad para las matemáticas y manejo de las fórmulas
20	Favorece mi entendimiento	te hace verlo de una forma diferente y es mas interactivo que ver solo numeros, lo hace mas interesante, un poco mas facil
21	Favorece mi entendimiento	Para mi favorece mi entendimiento ya que puedes graficar cualquier función y verificar si los ejercicios los realice de forma correcta o si me equivoque en algo comprender en que aspecto me equivoque
22	Favorece mi entendimiento	Ayuda mucho en cuanto a las gráficas
23	Favorece mi entendimiento	Es mucho más fácil de entender los gráficos, mejor para la enseñanza.
24	Me es indiferente su uso	Debido a que si se utiliza o no, la explicación y el curso de la clase no cambia mucho, aunque algunas veces es útil para desarrollar los temas
25	Favorece mi entendimiento	

En la categoría de favorable podemos observar una frecuencia absoluta de 24 estudiantes, mientras que un estudiante afirma que nunca uso la herramienta por lo que la frecuencia absoluta para la categoría “no entiendo nada” es 1. Finalmente, un estudiante determina que le es indiferente su uso. En los comentarios podemos observar la característica visual que se repite constantemente concluyendo que les facilita el análisis del concepto usando la herramienta como esclarecedora de sus ideas. Ilustramos mediante gráfico los datos de las categorías analizadas:

Figura 34

Gráfico III datos de los encuestados



(*Encuesta. Elaboración propia.*, 2022)

Capítulo 4. Resultados y conclusión

En primera instancia, partiendo de lo investigado por Yuri Morales López y Font Moll (2019), nos resultó favorable considerar el resultado abordado por las autoras: introducir a los estudiantes en un problema situado de manera simple en su comprensión y en su planteo. En nuestro caso, los estudiantes pudieron abordar el problema sin complejidad de interpretación de enunciado ni contenido matemático. Destacamos la importancia en las intervenciones de la docente para la generalización. Una vez abordada la misma, la pregunta permitió que los alumnos transitaran un camino donde las herramientas cognitivas matemáticas no les fueron suficientes y, el nuevo contenido surge como una necesidad para resolver una cuestión. Esta situación didáctica generó una expectativa, trabajo en clase, y un desandar del tema fluido y retrogrado en el sentido que siempre se vuelve a la necesidad de conocer y no, un contenido arbitrario y formalizado. Una vez requerido el contenido, ponemos de manifiesto que iniciamos el aprendizaje direccionando la situación didáctica a la conceptualización del mismo a partir de la propuesta de las autoras Escolá y Farfán (2017)

En este sentido, la propuesta de estudiar el tema LOGARITMOS a través de material tangible resultó favorable para los estudiantes ya que les otorgó un concepto significativo del mismo por medio de un camino numérico en el que el debate, intercambio de ideas, razonamientos y argumentos entre los sujetos y el saber fue el núcleo de la clase. La generalización, así como, la institucionalización matemática de lo trabajado fue dirigida por la docente con una previa conceptualización de los alumnos.

Particularmente, el registro numérico manipulado por fichas tangibles permitió cognitivamente a los estudiantes expandir sus razonamientos probando libremente herramientas y conceptos matemáticos ya adquiridos. En este sentido, podemos observar en la narración de la clase el camino transitado por el cual llegaron al acercamiento de las propiedades, cómo determinaron características de la función logarítmica hasta el punto de determinar coloquialmente la noción de asíntota de la curva logarítmica.

Así mismo, destacamos el uso de conceptos matemáticos previos para resolver nuevas dificultades; es el caso del grupo que utilizó la racionalización como instrumento para calcular el exponente de la base 2 cuya potencia es $\sqrt{8}$. La propuesta además de ser cercana al estudiante, favorable en su aprendizaje, permite a los estudiantes diversos caminos resolutivos que potencian las habilidades de los mismo y enriquece la situación didáctica. El enfoque junto al recurso resultó acertado en el contexto aplicado por parte de los estudiantes quienes los 16 encuestados respondieron que les pareció favorable para el aprendizaje.

Ampliando a las actividades siguientes, podemos observar a lo largo de todas las clases, un bucle entre los sistemas de representación de las funciones. Los estudiantes trabajaron con lo numérico, formas lingüísticas verbal y escrita, algebraico con y sin parámetros, gráficos, y, dibujos esquemáticos. Este manejo, y pasaje entre los registros enriquece el aprendizaje y el dominio del tema para su compresión desde sus diversos puntos de análisis. En relación al registro gráfico y la implementación del *software* GeoGebra como herramienta permitida en la clase para la validación, exploración y soporte en la verificación, establecemos que el 92% de los alumnos encuestados determinaron un soporte favorable para dar significado al contenido desde los diversos registros.

Respecto a la mirada de la docente que llevó adelante la propuesta, destacamos de la entrevista: "(…) La verdad me encantó. Compartir con ellos, cómo iban razonando, argumentando. Como docente me ponía en otro rol porque tenía que ir desandando el camino en el momento. Creo que a ellos le sirvió mucho el ir construyendo y de mi parte me parece una propuesta súper interesante (…)" Entendemos que esta mirada es valiosa por lo que implica la reflexión colectiva entre colegas a quien le agradecemos profundamente por la dedicación, la actitud frente a los estudiantes y sus brillantes clases.

Finalmente, creemos que esta investigación puede ser base para futuros estudios de casos con el fin de seguir aportando documentación y nuevos aportes con el fin de seguir explorando la propuesta de trabajo a fin de aportar a la didáctica de la matemática en nuestro país.

Referencias

Abrete, R., & Pochulu, M. (2007). Los logaritmos, un abordaje desde la historia de la matemática y las aplicaciones actuales. En R. Abrete, & M. Pochulu, *Experiencias, propuestas y reflexiones para la clase de matemática* (págs. 111-135). Córdoba: Universidad de Villa María.

Ausubel, D., Novak, J., & Hanesian, H. (1983). *Psicología educativa. Un punto de vista cognoscitivo*. Studylib.es. https://studylib.es/doc/8984976/ausubel--novak--hanesian---psicología-educativa.

Brousseau, G. (2007). *Iniciación al estudio de la teoría de las situaciones didácticas*. Libros del Zorzal.

Dennis, D., & Confrey, J. (2000). La creación de exponentes continuos: Un estudio sobre los métodos y la epistemología de John Wallis. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, RELIME*, 3(1), 5-31.

Domínguez, C., Gumbau, MF, & Martínez, OF (2015). *La construcción de los logaritmos: Historia y proyecto didáctico*. Universitat Jaume I. https://elibro.net/es/ereader/utnfrba/53291

Douady, R. (1986). *Relación enseñanza-aprendizaje. Dialéctica instrumento-objeto, juego de marcos*. https://iesmc-tuc.infd.edu.ar/sitio/wp-content/uploads/2020/10/CLASE-19-MATEMATICA-MATERIAL-DE-LECTURA.pdf

Encuesta. Elaboración propia. (2022). Google Docs. https://docs.google.com/forms/d/e/1FAIpQLSdyFab-2GRSytkMekDyxnzJ6udErof57a2qH2b603kZBraNyQ/viewform?usp=forms_home&ths=true&usp=embed_facebook

Escolá, M. F., & Farfán Márquez, R. M. (2017). Multiplicar sumando: Una experiencia con estudiantes de bachillerato. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, *20*(2), 137-166. https://doi.org/10.12802/relime.17.2021

Escolá, M. F., & López, R. I. (2005). *La función logaritmo bajo la perspectiva de la construcción dada por Agnesi (1748)*. https://core.ac.uk/display/33252481

Escolá, M. F., & Márquez, R. M. F. (2010). Una socioepistemología de lo logarítmico. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, RELIME*, *13*(4-I), 53-68.

Fletcher, T. J. (1964). *Didáctica de la Matemática Moderna en la Enseñanza Media*. https://docer.com.ar/doc/5s1n08

Gerencia operativa de currículum. (2015). *Diseño curricular nueva escuela secundaria de la Ciudad de Buenos Aires: Ciclo orientado del bachillerato, formación general*. Gobierno de la Ciudad de Buenos Aires. Ministerio de Educación. Dirección General de Planeamiento e innovación Educativa. https://buenosaires.gob.ar/areas/educacion/nes/pdf/2015/NES-Co-formacion-general_w.pdf

Godino, J. D., Font, V., Contreras, Á., & Wilhelmi, M. R. (2006). Una visión de la didáctica francesa desde el enfoque ontosemiótico de la cognición e instrucción matemática. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, *9*(1), 117-150.

Hernández Sampieri, R., Fernández-Collado, C., & Lucio Baptista, P. (1998). *Metodología de la investigación*. Mc Graw Hill.

Logaritmo—Matemática—Campus Virtual ORT. (1 de septiembre de 2022). https://campus.ort.edu.ar/secundaria/almagro/matematica/servicio/treeview/1823272#top

Marinoff, L. (2005). *Más Platón y menos Prozac*. SINE QUA NON.

Novoa Ramírez, E., & Mejía Mejía, E. (2014). *Metodología de la investigación cuantitativa-cualitativa y redacción de la tesis (4a. Ed.)*. Ediciones de la U. https://elibro.net/es/lc/utnfrba/titulos/70230

Ramírez, G., Chavarría, J., Borbón, A., & Alpízar-Brenes, G. (2009). *Análisis de las conceptualizaciones erróneas en conceptos de ecuaciones exponenciales y logarítmicas: Un estudio con estudiantes universitarios de primer ingreso.* Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires.

Real Academia Española. (s. f.). *Diccionario de la lengua española*. Edición del Tricentenario, de https://dle.rae.es/

Russel, B. (1977). *Los principios de la matemática*. ESPASA-CALPE, S. A.

Anexo I: Propuesta didáctica

Primera sección: Construcción de fórmulas exponenciales y, necesidad del uso del logaritmo.

> "Mientras cualquier término de nuestra proposición pueda transformarse en variable, ella podrá ser generalizada; y mientras ello sea posible, es un deber de la Matemática el hacerlo" (Russel, 1977)

En este capítulo, proponemos situaciones que implican relaciones en el registro numérico con el objetivo de la generalización como puerta al registro algebraico de las ecuaciones.

Se plantea actividades en las que se determinen números en la forma de potencia a^b, para luego el trabajo sobre las expresiones producidas. Con foco en las actividades se planifica la aparición de expresiones equivalentes en potencia de misma base, que representan el problema permitiendo discutir y dar sentido a las propiedades, por ejemplo, $a.a^b = a^{b+1}$.

La deforestación

Un bosque tiene actualmente un área de 400 kilómetros cuadrados.

Se sabe que su tamaño está reduciéndose cada año un 5%.

Determine en cuánto tiempo el bosque quedará reducido a la mitad de su tamaño.

Luego, determine una fórmula que relacione la cantidad de kilómetros cuadrados que tiene el bosque del año que transcurre.

Objetivos de la actividad:

Que los estudiantes perciban un cambio exponencial, rompiendo esquemas de variación lineal, así como que reconozcan una expresión algebraica potencial y su diferencia con la lineal.

Que los estudiantes alcancen la generalización de una fórmula exponencial que relaciona dos magnitudes.

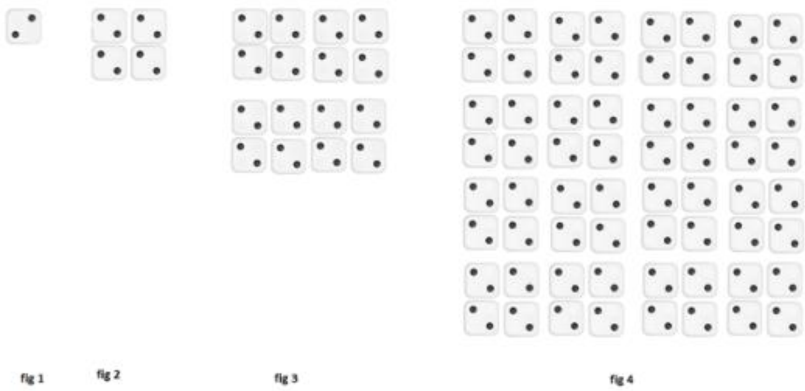
Que los estudiantes calculen un producto de un factor una potencia jerarquizando correctamente.

Que los estudiantes planteen una ecuación exponencial y lleguen a la necesidad del logaritmo como herramienta de cálculo.

Comentarios del problema

Este problema introduce a los estudiantes en una situación problemática de fácil contexto que los hace romper esquema de variación lineal así como llegar a la necesidad de una operación inversa a la potencia cuando el exponente es un número x.

Jugando con dados



Siguiendo con el patrón de figuras:

a) Determine cuántos dados habrá en la fig. 5

b) ¿En qué figura habrá 1024 dados?

c) Determine cuántos dados habrá en la fig. 8

d) Determine una ecuación que permita calcular la cantidad dados que se necesitan para armar una figura n

e) ¿Hay una expresión equivalente a la del ítem anterior? En caso de que sí, proponga cuál/es.

Objetivos de la actividad:

Que los estudiantes desarrollen una estrategia del conteo con variación exponencial.

Que los estudiantes sustituyan correctamente un dato de una magnitud en la ecuación.

Que los estudiantes generalicen una relación entre dos magnitudes con variación exponencial.

Que los estudiantes reconozcan y demuestren fórmulas equivalentes.

Que los estudiantes puedan determinar nuevas expresiones equivalentes a una dada con las propiedades y definición de potencia.

Comentarios el problema

Para las preguntas pueden surgir distintas formas de conteo que serán generadoras de expresiones equivalentes. Las preguntas a y b son de exploración para interpretación el problema, a diferencia del problema 1, los números de la relación son naturales.

Para la pregunta c es interesante la necesidad de una misma base en las potencias para llegar a la generalización, esta metodología y/o estrategia necesaria ya fue trabajada en el problema anterior.

Para aquellos grupos que hayan planteado la cantidad de dados mirando el "cuadrado" y multiplicando en los sucesivos pasos: 1x1, 2x2, 4x4, 8x8, … tendrán que idear un cambio en la base de las potencias para la generalización que podrá ser $2^{n-1}.2^{n-1}$ o bien alguna de sus equivalentes $2^{2n-2} = 4^{n-1} = \frac{1}{4}.2^{2n} = \frac{1}{4}.4^{n}$.

Corre un rumor

Un lunes Benito cuenta una noticia a tres amigos. Al día siguiente, cada uno les cuenta a otros tres. Al tercer día, cada uno de estos a otros tres. Y así sucesivamente durante una semana.

a) ¿Cuántas personas se enteran de la noticia el miércoles?

b) ¿Qué día se enteran de la noticia 729 personas?

c) Encuentre una fórmula que determine la cantidad de personas que reciben la noticia en función de la cantidad de días que transcurrieron desde que Benito cuenta a sus primeros tres amigos.

Objetivos de la actividad

Que los estudiantes sustituyan correctamente un dato de una magnitud en la ecuación.

Que los estudiantes generalicen una relación entre dos magnitudes con variación exponencial.

Que los estudiantes planteen una ecuación exponencial con incógnita el exponente.

Comentarios del problema

En este problema se busca en primera instancia que los estudiantes puedan organizar los datos de forma tal de ser analizados para su interpretación, es decir se trabaja con registro coloquial para que sean capaces de realizar un esquema intuitivo como el problema 1, diagrama de árbol o tabla de doble entrada.

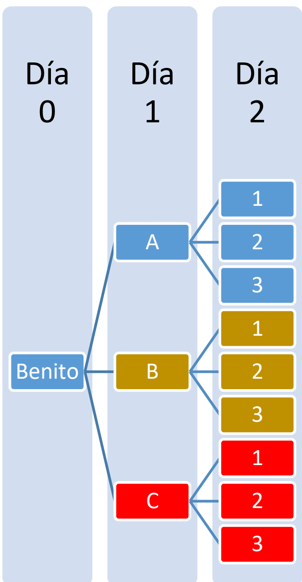
Podría ser:

Día	Días cuantificables	Cantidad de personas que se enteran la noticia
Lunes	1	$3 = 3^1$
Martes	2	$3.3 = 3^2$
Miércoles	3	$3.3.3 = 3^3$
Jueves	4	$3.3.3.3 = 3^4$
Viernes	5	$3.3.3.3.3 = 3^5$
…		
	n	3^n

O bien,

Figura 35

Diagrama de árbol para el problema “corre un rumor”



Respecto a la pregunta, ¿Cuántas personas se enteran de la noticia el miércoles?, tiene como objetivo que relacionen la cantidad de días transcurridos con el número de personas que se enteran de la noticia. En el caso del diagrama de árbol, pueden contar sin necesidad de hacer ningún planteo matemático por lo que se los conduce a la segunda pregunta.

La misma refiere a generar una expresión donde conocida la potencia y la base puedan pensar el exponente correspondiente para direccionarlos al concepto de logaritmo como exponente de una potencia de base mayor a uno y distinta de cero. La última pregunta busca la generalización, creemos que, en los casos de ser posible, es un trabajo valioso el hecho de abstraer como cierre de una idea.

Segunda sección: Introducción al concepto y propiedades del logaritmo a partir de problema en registro numérico.

Para estas clases se utiliza un recurso de “fichas” tangibles que mostramos en el anexo III

A partir el material repartido,

a) Tomen las fichas verdes. Identifiquen un patrón y, a partir del mismo, completen la ficha que falta.

b) Con el mismo patrón que usaron, construyan las 10 fichas amarillas

Objetivos

- Establezcan una relación entre las potencias sucesivas de 2 y sus respectivos exponentes. Es decir que, al aumentar una unidad en el exponente, la potencia se multiplica por 2. Y, al disminuir el exponente en una unidad, la potencia se divide por 2.

Comentarios

Adjuntamos fotos de las fichas verdes y amarillas para luego detallar el objetivo matemático del problema y las posibles resoluciones de los grupos.

Para el problema 1a, los estudiantes trabajaran con las siguientes fichas verdes:

Figura 36

Fichas verdes del material tangible

En esta primera instancia, algunos pueden observar que la sucesión de números de la “fila de abajo” es una relación de “siguiente”, mientras que la sucesión de la “fila de arriba” son potencias sucesivas de base 2, es decir que para construir los números de la fila de arriba multiplico por 2 y para la de abajo, sumo 1.

Otro grupo puede llegar a relacionar los números de una misma ficha sin necesidad de la anterior y así determinar que el número de la fila de arriba se compone de una potencia de base 2 cuyo exponente es el número de la fila de abajo.

Como docente nos interesaría que surjan las dos alternativas para enriquecer la puesta en común, pero en caso que no suceder, no forzaremos la situación didáctica de los grupos y retomaremos la idea faltante en las siguientes actividades.

Una observación, no menor, es que las fichas no necesariamente hay que dárselas ordenadas ya que esto fomentaría la idea de construir la ficha faltante usando la idea de multiplicar por 2 en la sucesión de arriba y, sumar 1 en la fila de abajo.

En cambio, el grupo que mira las fichas de forma independiente puede que tenga una visión más aislada y valide la idea de la relación entre los dos números de una misma ficha: el número de la fila de arriba se compone de una potencia de base 2 cuyo exponente es el número de la fila de abajo, sin necesidad de mirar las sucesiones de números por fila. Las fichas para el problema 1b son 10 fichas vacías:

Figura 37

Fichas amarillas del material tangible

Dependiendo qué relación lograron establecer en el grupo es la manera que encararán el problema 1b, ya que si dan cuenta que la sucesión de abajo se construye sumando una unidad y, la de arriba multiplicando por 2; es esperable que las fichas que construyan sean $\frac{128}{7}, \frac{256}{8}$, etc.

Puede surgir que al solicitarles 10 fichas los estudiantes comiencen a trabajar con números cada vez mayores y desistan de construir fichas a derecha. Es esperable que al querer construir "fichas a izquierda" piensen en el camino inverso, es decir, en la fila de arriba dividen por 2 y en la de abajo restan 1.

Otro caso son el grupo o los grupos, que haya establecido una relación entre los dos números de una misma ficha será capaz de generar fichas al azar sin necesidad de ir construyendo una por una de forma consecutiva. Por ejemplo, sabrá que si deciden colocar un 10 en la fila de abajo, deberán escribir en la fila de arriba 2^{10}.

En ambos ítems el rol del docente es en primera instancia observar el trabajo en grupo, intervenir en caso de que los estudiantes no generen fichas que cumplan con el "patrón". Y, ante cualquier estrategia, es esperable que surja como primera ficha, la:

$$\begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix}$$

Será rol del docente intervenir en este caso tanto si el razonamiento del grupo es mirando las fichas de alrededor como si construyen cada ficha de forma independiente.

Luego del trabajo en los grupos y completadas las actividades, se recomienda en esta instancia hacer una puesta en común de lo trabajado. En caso de que los grupos hayan trabajado con las diferentes estrategias, es recomendable que en la puesta en común se argumenten y expongan ambas. Finalmente, si en ningún grupo surgió la ficha

$$\begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix}$$

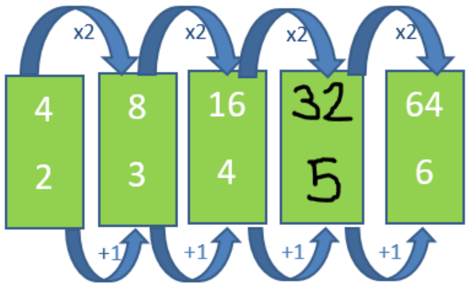
es una buena alternativa que el docente abra el debate si podría ser parte de las fichas amarillas o no. Hasta esta instancia no institucionalizaremos nada matemático, simplemente trabajaremos con las estrategias que surgen con el objetivo de ir aproximándolos a la idea de logaritmo.

Puesta en común primera parte

Algún grupo puede encontrar la relación entre los números de la fila de arriba y otra para la fila de abajo. De esta manera:

Figura 38

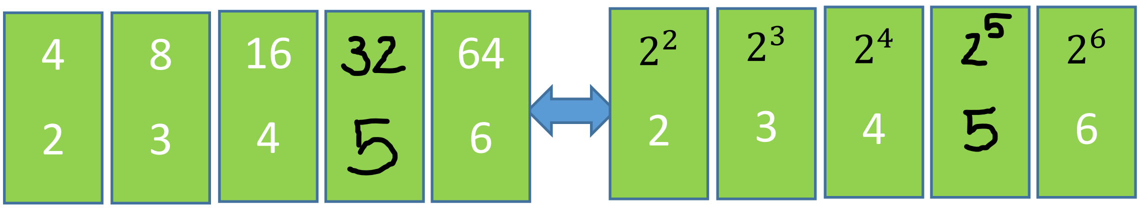
Progresión aritmética y geométrica



Otro grupo puede establecer la relación entre números de una misma ficha, determinando que el número de la fila de arriba es potencia de base 2 cuyo exponente es el número de la fila de abajo.

Figura 39

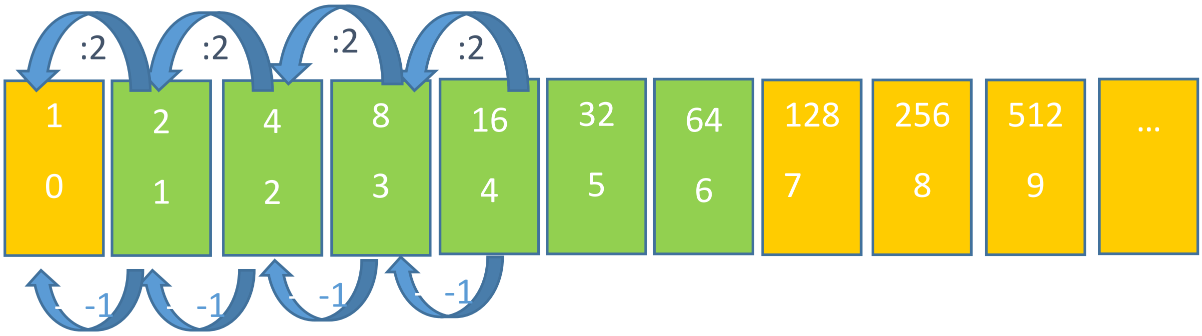
Potencias y exponentes



Para el problema 1b) se pueden construir las fichas según el patrón encontrado. Es importante que cualquier ficha propuesta sea validada por algún grupo que haya usado la estrategia opuesta. Por ejemplo, si un grupo dice “La ficha $\begin{matrix}4096\\12\end{matrix}$” porque pensaron en la estrategia que el número de arriba es potencia de base 2 de exponente el número de abajo, sea justificada y también hallada por la otra estrategia. Una posible formación de fichas al terminar la puesta en común es esperable que sea:

Figura 40

Posible puesta en común fichas verdes y amarillas



a) Con lo visto en el problema 1. Completen, en caso de ser posible, las fichas azules. En caso de no poder cumplir con “el patrón” escriban con sus palabras por qué.

b) Ahora tomen las fichas rojas y determinen cuál de ellas representa la generalización de una ficha, es decir, la que determina la relación que existe entre los dos números de una misma ficha.

Objetivos

Que los estudiantes exploren potencias de exponente entero negativo.

Que los estudiantes generalicen y definan potencia de exponente entero negativo.

Que los estudiantes determinen el signo de potencias de base positiva.

Que los estudiantes resuelvan ecuaciones exponenciales en el registro coloquial cuyo exponente sea número entero.

Comentarios

A continuación, mostramos las fichas:

Figura 41

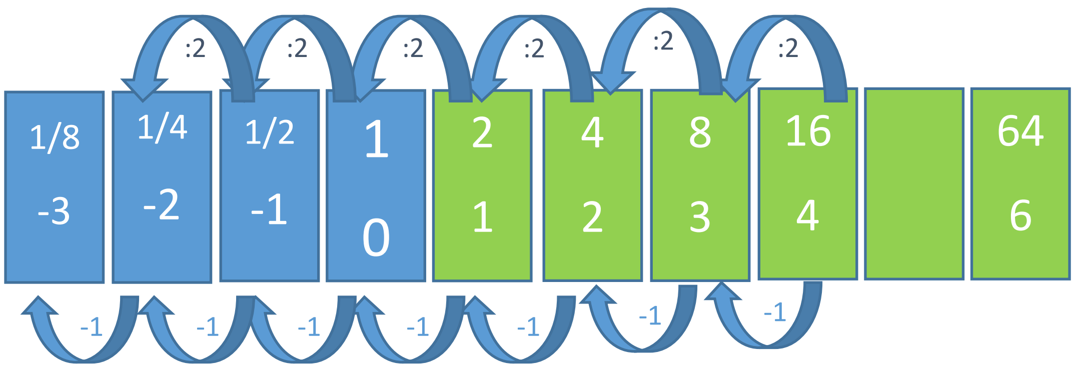
Fichas azules del material tangible

Este ejercicio tiene como objetivo que usando alguna de las dos estrategias puedan completar con el número que falta. La dificultad puede surgir al pensar la ficha que contiene al cero. Para aquellos grupos que consideren que los números de la fila de arriba son potencias de 2, darán cuenta que ningún exponente para la base 2 resulta ser cero. Mientras que los que construyen las fichas a partir de las siguientes, darán cuenta que al ir dividiendo por 2 en la fila de arriba en ningún momento logran el cero.

Respecto a la ficha que contiene el ¼, es interesante comenzar a rellenar con las fichas que están a la izquierda. Mirando desde el punto de vista matemático, los estudiantes están haciendo matemática sin el lenguaje formal de la misma, están completando el registro "tabla" o diagrama de Venn de la función $y = \log_2 x$ o bien, $y = 2^x$ dependiendo si están completando con el número de la fila de arriba o la de abajo. En la compleja cuestión de completar la ficha de ¼, nuevamente pueden construir a partir de las de alrededor:

Figura 42

Posible resolución para las fichas azules

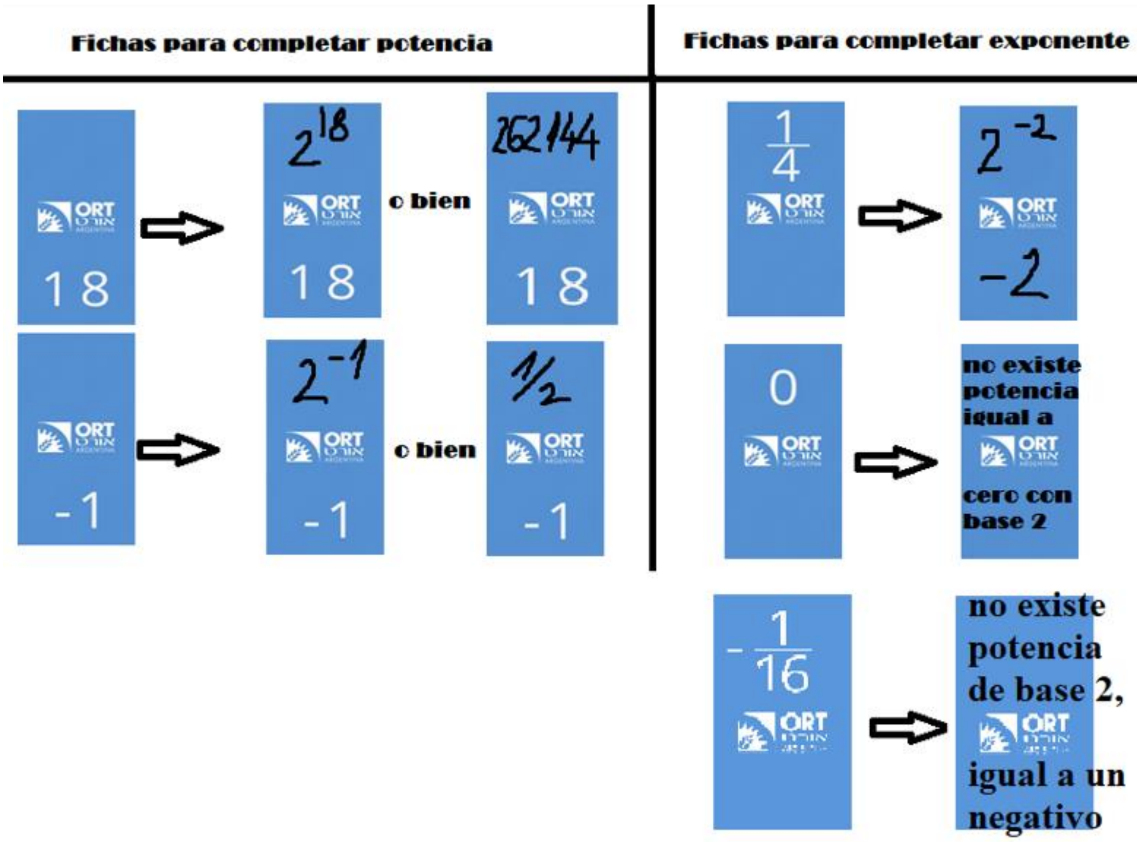


O bien, pensando cuál es el exponente de base 2 cuya potencia es $1/4$. Es decir, pensarán las fichas según el número que falta.

Respecto a la ficha 18 se tiene como objetivo abordar la notación de potencia y reafirmar que la expresión en forma de potencia es útil y bien vista en la matemática. Es decir, sociabilizamos que el uso de potencias en notación de base y exponente es correcto y necesario. Mostramos a continuación cómo pueden pensar los estudiantes: A partir de la relación que los números de la fila de arriba son potencias de base 2 cuyo exponente es su correspondiente en la fila de abajo:

Figura 43

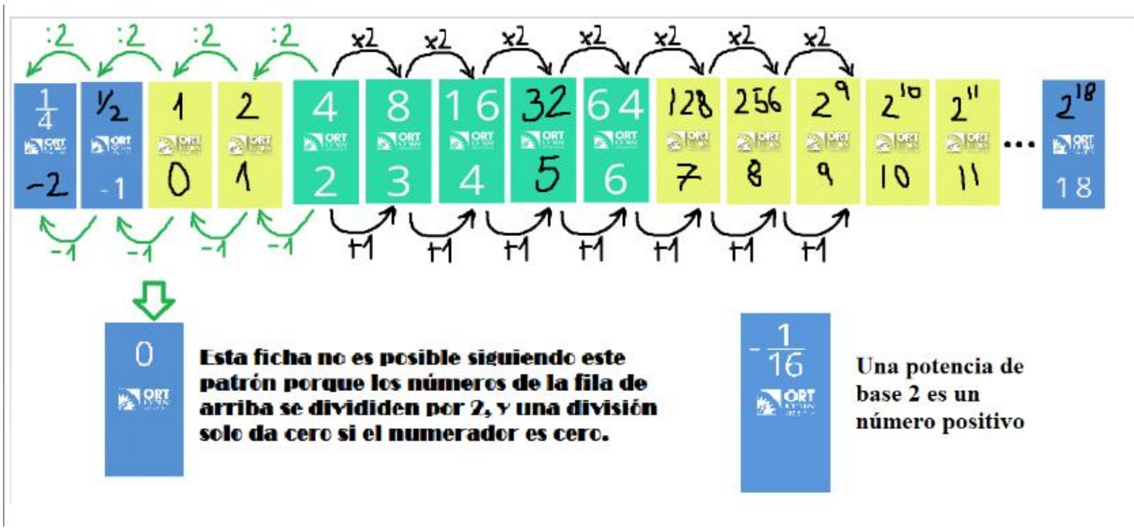
Estrategias para completar fichas azules



O bien, completar con la regla de sumar (o restar) una unidad en los exponentes y multiplicar (o dividir) por 2 en las potencias:

Figura 44

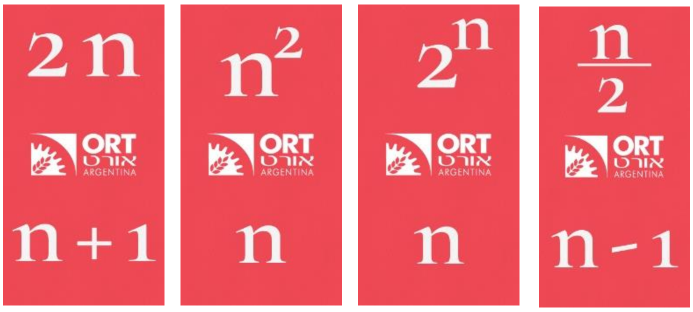
Secuencia de fichas verdes, amarillas y azules



Respecto a la pregunta de la ficha que generaliza la relación entre ambos números, son:

Figura 45

Fichas rojas del material tangible



Se debe prever que establezcan las expresiones a partir de las propiedades y no de la relación entre los números. El objetivo es abstraer algebraicamente la relación que hay entre las sucesiones para seguir trabajando en la relación potencia-base-exponente.

Aquí se puede hacer una puesta en común. Junto con los estudiantes que construyan las fichas de forma independiente, es decir, que ya relacionen que el número de la fila de abajo es el exponente de la potencia de base 2, se puede en la puesta a prueba justificar (en caso de que ya lo hayan visto) o en su defecto, institucionalizar la potencia con exponente un número entero negativo. Se puede escribir en el pizarrón:

$$Si\ n \epsilon \mathbb{N}\ \wedge\ a \epsilon \mathbb{R} - \{0\}\ entonces\ a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Como cierre de la clase el profesor dará nombre a los números de la sucesión de abajo y detallará la notación matemática correspondiente diciendo:

Cada una de estas fichas la podemos escribir en un lenguaje matemático, por ejemplo:

8

3

En esta ficha, el 8 es la potencia 2^3. Entonces podemos escribir matemáticamente:

$2^3 = 8$ donde 2 se llama base de la potencia, 3 exponente y, el 8 es la potencia.

Otro ejemplo es:

64

6

$2^6 = 64$

Ahora bien, proponemos con lo trabajado la siguiente pregunta, ¿cómo completo la siguiente ficha? Y ¿Cómo es la notación matemática?

-5

Respuesta $2^{-5} = \frac{1}{32}$

¿Y esta otra?

$\frac{1}{128}$

Respuesta $2^{-7} = \frac{1}{128}$

La idea es darle un cierre a la clase ya estableciendo que las potencias se pueden reescribir en notación de raíz o de logaritmo. Que este cambio dependerá si se busca conocer la base (operación inversa la radicación) o el exponente (operación inversa la logaritmación)

Por ejemplo, cuando los estudiantes tuvieron que completar la ficha $1/4$, están resolviendo $2^x = \frac{1}{4}$, se puede plantear esta ecuación y pedirles que "despejen" el número x. Podemos observar que si bien en este caso se puede pensar, los alumnos ya se encontraron con este inconveniente en el problema 1 cuando debían resolver $0{,}95^x = 0{,}5$ entonces podemos observar que esta necesidad abre camino a definir la operación logaritmación.

En este punto, se propone trabajar con la formalización de la notación de logaritmos, se propone enseñarlo simplemente como una relación entre los tres números base-exponente-potencia, pero escrito de otra manera para que el resultado sea el exponente.

De igual manera, mostrar que la operación radicación involucra estos mismos tres números, pero resultando como raíz, la base. Creemos que esta perspectiva ayudará a futuro para una conexión entre las propiedades que debe cumplir los logaritmos en relación a las propiedades de la potencia que ya conocen.

Por ejemplo, retomando el mismo juego de fichas podemos ir escribiendo la relación de cada ficha en sus tres formas:

$$\sqrt{4} = 2 \longleftarrow \quad 2^{\mathbf{2}} = 4 \quad \longrightarrow \log_2 4 = \mathbf{2}$$

$$\sqrt[3]{8} = 2 \longleftarrow \quad 2^3 = 8 \quad \longrightarrow \log_2 8 = \mathbf{3}$$

$$\sqrt[4]{16} = 2 \longleftarrow \quad 2^4 = 16 \quad \longrightarrow \log_2 16 = 4$$

$$\sqrt[5]{32} = 2 \longleftarrow \quad 2^5 = 32 \quad \longrightarrow \log_2 32 = \mathbf{5}$$

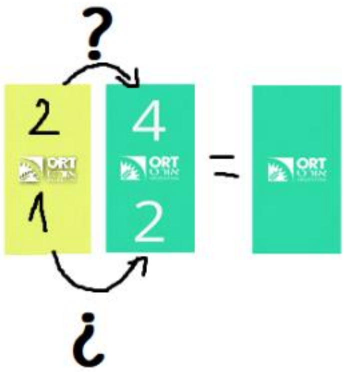
Se puede luego, generalizar la notación a números genéricos

Si $b \in (0;1) \cup (1;+\infty)$, $\quad b^a = c \iff \log_b c = a$

Si $b \in (0;1) \cup (1;+\infty)$, $\quad \log_b b^a = a$

a) Sociabilicen la regla que ya percibimos, completando la oración “cuando sumamos 1 en el número de abajo, en el número de arriba ……..”

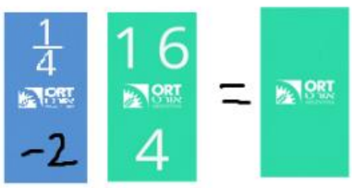
b) Ahora tomen las fichas y respondan ¿Qué ficha se determina usando la regla del ítem a?



c) ¿Qué otra “regla” pueden determinar para determinar otra ficha?

(Es decir, busquen una operación matemática entre los números de arriba que dé como resultado otro número de la fila de arriba de otra ficha y, una cuenta entre los números de abajo para que dé el número de debajo de la ficha)

d) Generalicemos la regla. Elijan las siguientes fichas y fíjense si las reglas que establecieron les forman fichas de las que tienen. Luego, elijan fichas al azar y prueben si la regla les permite generar fichas que cumplen con el patrón



e) ¿Por qué creen que se cumple que independientemente de las fichas que elijan?

f) con lo trabajado completen las fichas rosas, plateada y dorada.

Objetivos

Que los estudiantes perciban la relación entre la sucesión aritmética y la geométrica.

Que los estudiantes identifiquen las propiedades de la potencia.

Que los estudiantes formulen coloquialmente las propiedades de los logaritmos.

Comentarios

La idea este ejercicio es basándonos un razonamiento inductivo, es decir, una regla que se cumple sencillamente con una sola ficha para construir en el conjunto de los números enteros las siguientes $n = 1$ respecto de los exponentes, llevar hacia un segundo paso generalizado entre dos fichas cuales quiera en vez de $n = h$ cualquiera. Dejando la demostración final para el aula, en caso que el profesor considere pertinente para el estudiantado presente.

Asociar la regla de multiplicar en fila de arriba y sumar en la de abajo no debería ser percibido de inmediato. Así como dividir arriba y restar abajo. Es posible que asocien lo pedido con la multiplicación cruzada u operaciones con racionales.

Se espera que primero establezcan la regla "multiplicar arriba" – "sumar abajo", con la intención que en el contexto del material tangible den cuenta la relación que se establece entre la multiplicación de potencias de misma base y sus exponentes. Así como la de la división entre potencias de misma base y sus exponentes. Es importante que en este trabajo en grupo el docente vaya validando con los grupos las conjeturas tomando fichas al azar para sostener o rechazar los argumentos. Se formalizará dichas propiedades en el lenguaje matemático en la puesta en común que podría consistir en dejar expresado en el pizarrón las combinaciones que hayan surgido:

Figura 46

Puesta en común problema con material tangible I

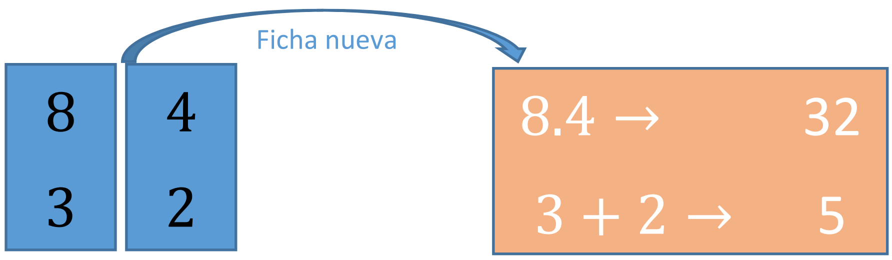
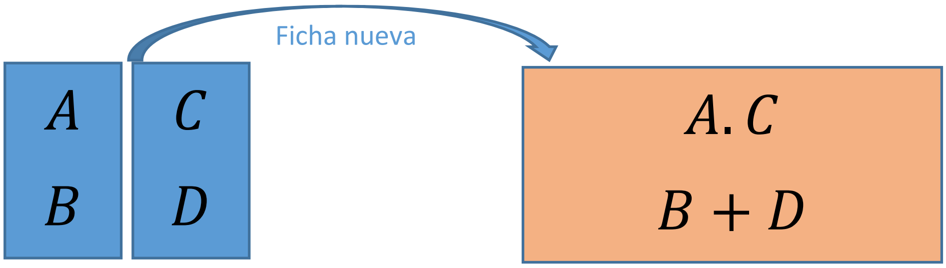


Figura 47

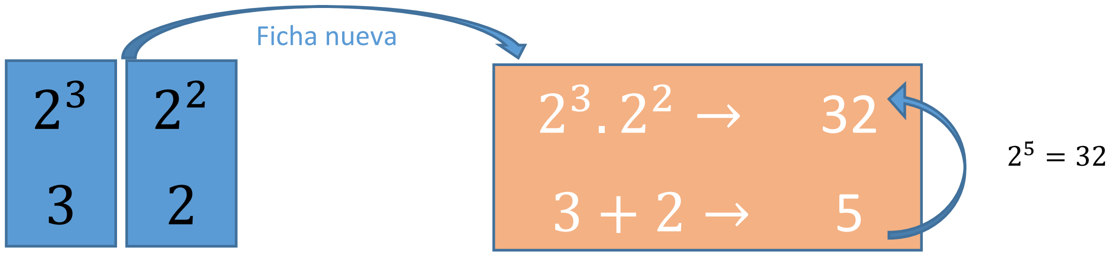
Posible puesta en común con material tangible II



Pasaremos dichos hallazgos al lenguaje matemático. Escribamos los números de la sucesión de arriba notación de potencia:

Figura 48

Posible puesta en común con material tangible III



Digamos los pasos realizados con nuestras palabras: “primero sumamos los dos números de la fila de abajo (sumamos los exponentes) y nos da un número de otra ficha que es el exponente de la potencia de la fila de arriba cuya potencia es la multiplicación de las potencias de las fichas anteriores”

En este caso: $2^3 . 2^2 = 2^{3+2} = 2^5$

Escribiremos esto con lenguaje que aprendimos de logaritmo. Recuerden que, en este caso, cuando decimos exponente es lo mismo que digamos el logaritmo en base 2 de la potencia. Por lo que, la suma del primer exponente más el segundo exponente da por resultado el exponente de la nueva ficha:

$$\log_2 2^3 + \log_2 2^2 = \log_2 2^5$$

Generalizando ambas propiedades para cualquier base mayor a cero y distinta de 1:

$$a^n . a^m = a^{n+m}$$

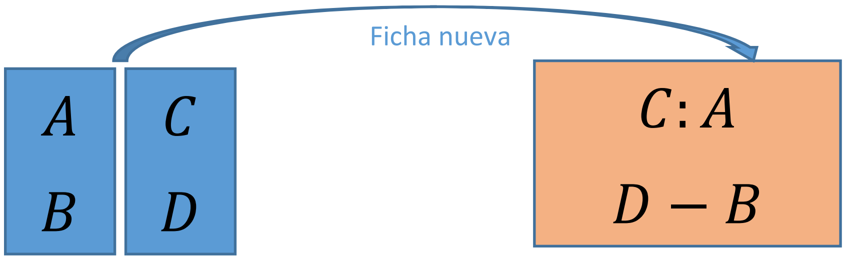
Y,

$$\log_a c + \log_a d = \log_a (c.d)$$

Análogamente, diremos que, al dividir potencias de misma base, el resultado es otra potencia de la misma base, pero exponente igual a la resta de los exponentes.

Figura 49

Posible puesta en común con material tangible IV



Pasaremos dichas construcciones al lenguaje matemático.

$$a^m : a^n = a^{m-n}$$

$$\log_a (b : c) = \log_a b - \log_a c$$

Podemos deducir además que, como el logaritmo de una multiplicación es la suma de los logaritmos (siempre y cuando sea la misma base) y que, el logaritmo de una división es la resta de los logaritmos. Entonces, el logaritmo de una potencia es el producto entre el exponente de la potencia y el logaritmo de la base.

Para el último ítem mostramos las fichas rosas creadas con el propósito de darle a los estudiantes la libertad de ver cómo las completas. Puede que lo hagan con lo visto en el primer problema o usando las reglas determinadas (las propiedades) usando otras fichas.

Figura 50

Fichas rosas del material tangible

Figura 51

Ficha dorada y plateada del material tangible

En este punto, se sugiere trabajar con el uso de propiedades en expresiones que involucran logaritmos.

Tercera sección: El estudio, análisis, gráfica y corrimientos a partir de la función logarítmica $\boldsymbol{f: A \rightarrow B / f(x) = \log_b x}$

Con las fichas que hayan formado.

Parte A: Consideren x a los exponentes e y a sus respectivas potencias

a) Graficar los puntos en un plano cartesiano

b) Determinar dominio, imagen, raíz y ordenada al origen

c) ¿Cuál es la ecuación de la función?

Parte B: Consideren x a las potencias e y a sus respectivos exponentes.

a) Graficar en el mismo plano que el ítem a

b) Determinar dominio, imagen, raíz y ordenada al origen

c) ¿Cuál es la ecuación de la función?

Objetivos

Que los estudiantes registren la curva grafica de la función exponencial y logarítmica.

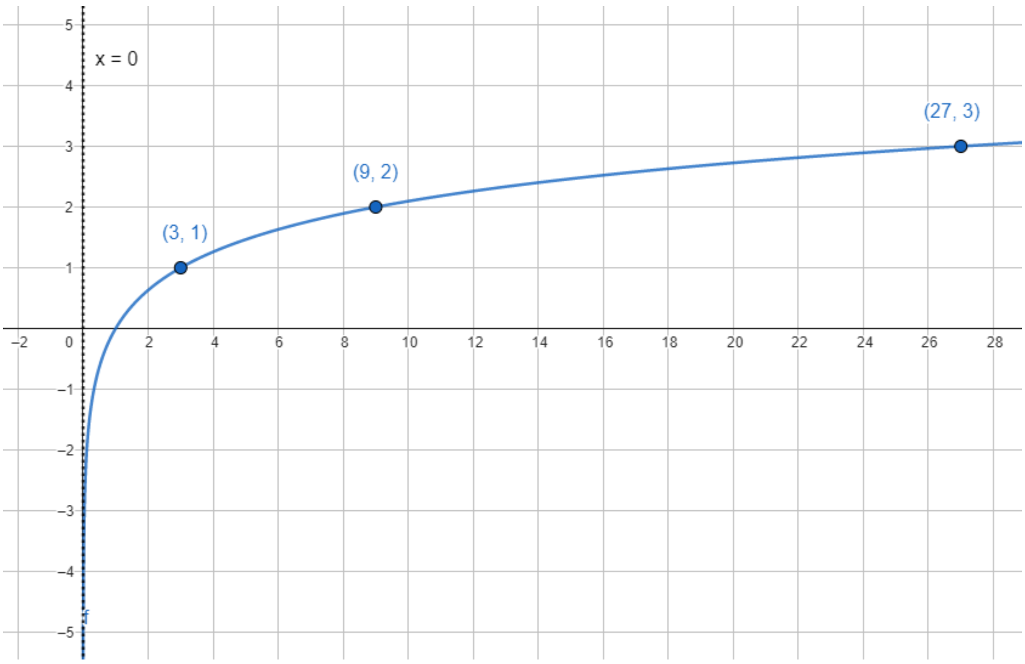
Que los estudiantes determinen la asíntota de cada función.

Que los estudiantes perciban el concepto de función inversa.

Comentarios

Este ejercicio no lo consideramos un problema de los denominados en nuestro marco teórico sino como una actividad introductoria para el estudio de cada función. Creemos que es importarte remarcar que las funciones relacionan los mismos números, pero los pares ordenados conmutados. En la puesta en común se puede hacer énfasis en la relación algebraica $\log_2 2^x = x$, así como su equivalente, $2^{\log_2 x} = x$. Estableciendo la recta de ecuación $y = x$ como recta que determina la simetría axial entre las curvas.

Dada la función logarítmica de la forma $f: A \to B / f(x) = \log_b x$. Determine el Conjunto A, el número b y la raíz



Dada la función logarítmica de la forma $g: A \to B / g(x) = \log_b x$, a partir de las siguientes relaciones. Determine el Conjunto A, el número b y la raíz. ¿La función es creciente o decreciente?

x	$g(x)$
1	0
1/2	-1
1/4	-2
1/8	-3

Determine una función logarítmica de la forma $h: A \to B/h(x) = \log_b x$ que sea decreciente.

Objetivos

Que los estudiantes triangulen registros de representación semióticas: Gráfico(Geométrico) -Ecuación (Algebraico) - Tabla (numérico)

Que los estudiantes determinen crecimiento o decrecimiento de funciones de la forma $g: A \to B/g(x) = \log_b x$

Comentarios

En esta actividad se busca que los estudiantes puedan coloquialmente establecer con los puntos que se observa la relación que hay entre los puntos y las reglas que trabajaron en los problemas anteriores.

En el caso del gráfico pueden observar que al aumentar un exponente (y), la potencia (x) se triplica. Otra opción posible es que los estudiantes hagan el registro tabla con los tres puntos dados, en este registro numérico ya trabajado en problemas anteriores establezcan la relación "aumento 1, multiplico por 3".

	x	$f(x)$	
$.3$	**3**	1	$+1$
	9	2	
$.3$	**27**	3	$+1$

Otra forma de resolución que podemos predecir es utilizando la ecuación de la función, desde el gráfico los estudiantes pueden establecer que el 3 está relacionado con 1, matemáticamente, $f(3) = 1$. Así, sustituir en la ecuación:

$$f(1) = 3$$

$$\log_b 3 = 1$$

$$b^1 = 3$$

$$b = 3$$

Observamos que este camino analítico los introduce ya en ecuaciones logarítmicas sencillas. Para el ítem b, pueden triangular al igual que el ítem a con el registro gráfico para determinar la ecuación de la función. Las estrategias utilizadas para calcular la base pueden ser las mismas planteadas en el ítem anterior.

En ambas funciones el dominio es $(0; +\infty)$. Y se sugiere calcular la raíz con la resolución de la ecuación que surge de igualar a cero con el trasfondo de integrar el contenido ecuaciones y definición de logaritmo. Al finalizar la clase se puede institucionalizar:

Para funciones de la forma $f: A \to B / f(x) = \log_b x$:

Si $b > 1$ la función es creciente

Si $0 < b < 1$ la función es decreciente

Dada la función $f: A \to B / f(x) = \mathrm{k}.\log_2 x$,

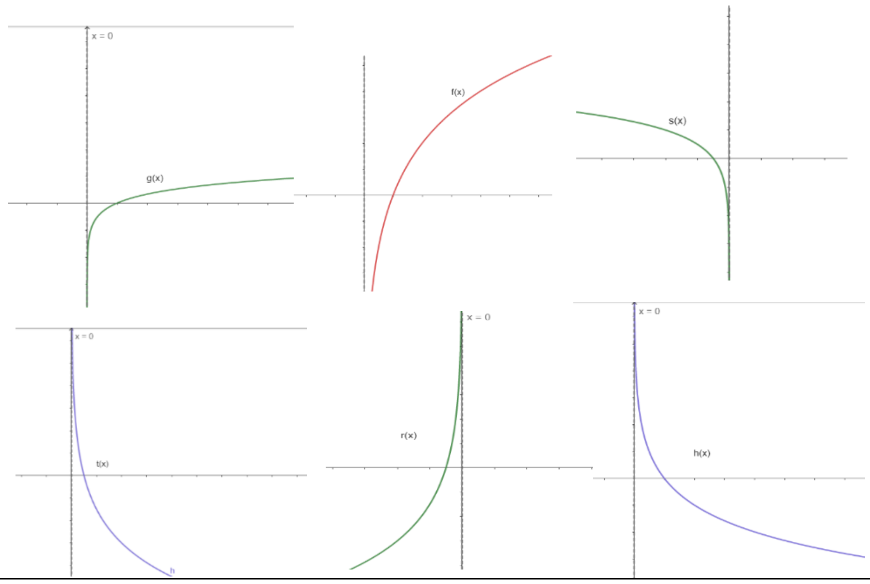
a) Insertar la ecuación en el GeoGebra, se creará un "deslizador" para el número k. Determine un número k para que la función sea decreciente

Dada la función $g: A \to B / g(x) = -3.\log_b x$,

b) Determine un número b par que la función sea creciente.

c) Dadas las funciones graficadas de funciones de la forma

$$f: A \to B / f(x) = \mathrm{k}.\log_b x$$



Indicar cuáles de ellas corresponden a las condiciones detalladas de k y b en cada caso:

Condiciones de b y k	**Funciones**
$\mathbf{0 < b < 1 \; y \; k > 0}$	
$\mathbf{0 < b < 1 \; y \; k < 0}$	
$\mathbf{b > 1 \; y \; k > 0}$	
$\mathbf{b > 1 \; y \; k < 0}$	

Objetivos:

Que los estudiantes exploren con el GeoGebra las curvas gráficas al variar el coeficiente del logaritmo.

Que los estudiantes utilicen el GeoGebra para profundizar sus ideas y validar razonamientos.

Que los estudiantes analicen cómo incide un coeficiente negativo o positivo en la ecuación logarítmica respecto a su curva gráfica.

Que los estudiantes den significado a los k y b en funciones de la forma $f: A \rightarrow B / f(x) = \mathrm{k}. \log_b x$ respecto del crecimiento o decrecimiento de la función.

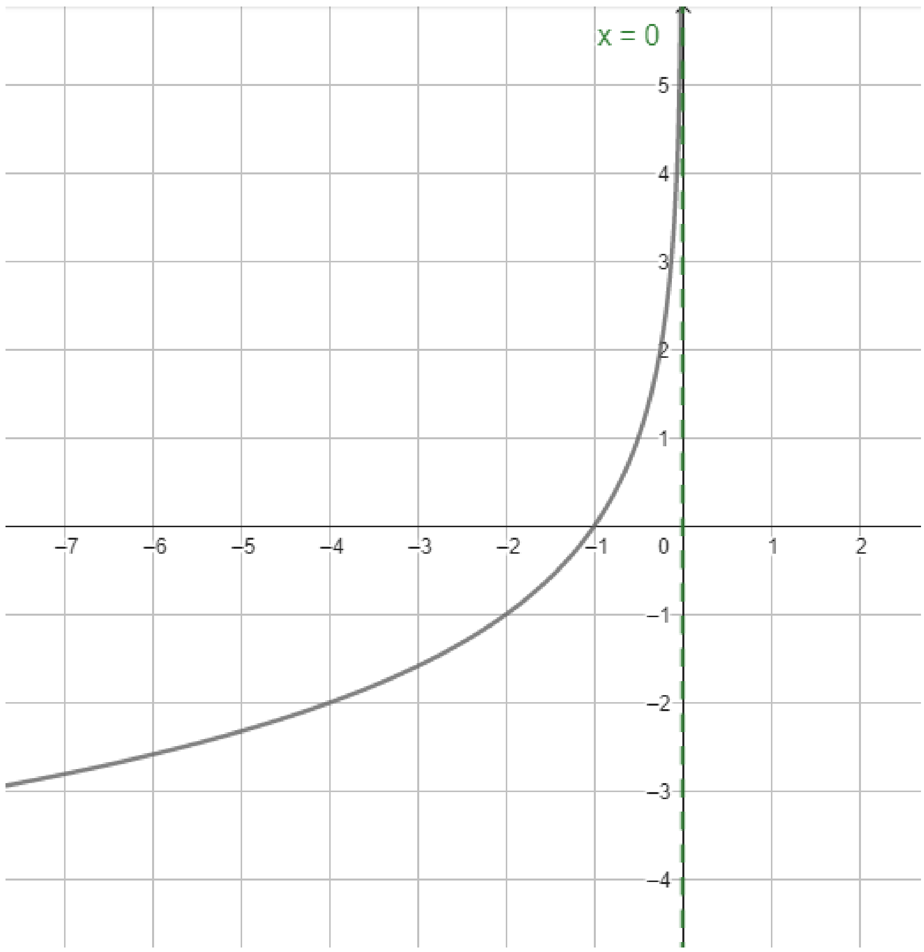
Que los estudiantes puedan relacionar la ecuación de la función logarítmica con su curva gráfica.

Comentarios

En este problema se busca, en primer lugar, alcanzar la relación que hay entre las curvas gráficas de las funciones $f(x)$ y $k. f(x)$. Se induce al trabajo entre el registro gráfico de la función logarítmica una variación del parámetro k.

Luego, cambiando el enfoque de los registros se busca que integren los contenidos vistos en el problema anterior, en el que determinan el crecimiento o decrecimiento de la función de la forma $f: A \rightarrow B / f(x) = \log_b x$, con el nuevo conocimiento, $k. f(x)$.

Sea la función $f: A \rightarrow R / f(x) = \mathrm{k}.\log_b[a(x+c)]$, determinen los números a y b para que la curva gráfica de f sea:



Objetivos:

Que los estudiantes relacionen los parámetros de la ecuación logarítmica con los elementos de su curva gráfica.

Que los estudiantes validen expresiones equivalentes

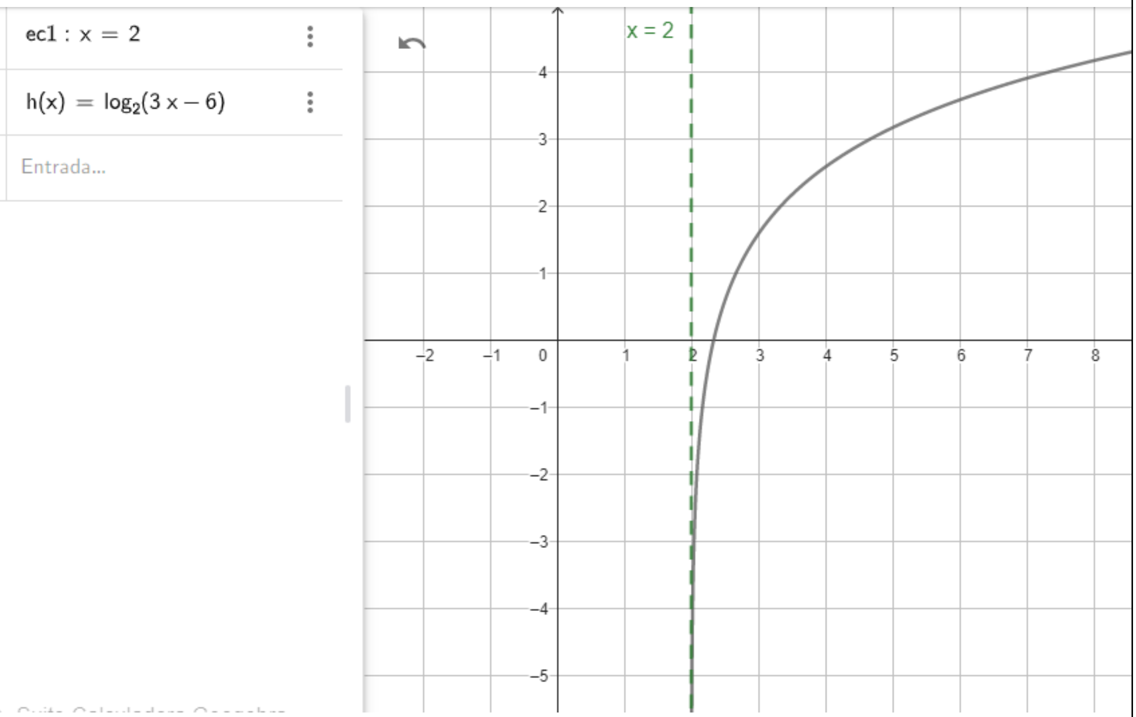
Comentarios:

Este ejercicio está pensado para que elijan en primer lugar la base; con lo ya visto en los problemas 4, 5 y lo trabajado en los siguientes que, en este caso, al restar un exponente la potencia se multiplica por 2. Al ser creciente y con dominio números negativos consideramos que los estudiantes propondrán por base 2 o base 1/2.

En el caso que elijan base 2, para modificar el dominio $a = -1$. Pero luego, $k = -1$ para aplicar los opuestos a los números “y”. En el caso que determinen base 1/2, entonces $k = 1$. En los grupos se puede dejar libertad para que lo piensen como surja, y, en caso de que se en las múltiples expresiones se enriquece la introducción al concepto de cambio de base con las expresiones equivalentes halladas por los alumnos.

Así, tendremos $-\log_2(-x) = \log_{1/2}(-x)$. Los alumnos habrán llegado a esta identidad desde el punto de vista gráfico y será tarea del docente fomentar las argumentaciones para alcanzar la demostración y luego la institucionalización del cambio de base.

a) Cambia algo de la fórmula para que el dominio sea $(-\infty; 2)$



b) Propone otra función logarítmica que tenga la misma raíz que h y que sea decreciente. ¿es única?

Objetivos

Que los estudiantes relacionen el signo del coeficiente de x con el dominio de la función.

Que los estudiantes analicen “corrimientos” que se efectúan en la gráfica de una función logarítmica a partir de conocer su ecuación

Que los estudiantes argumenten la unicidad de curvas logarítmicas que cumplen con ciertas condiciones dadas. En caso que no, que utilicen parámetros para generalizar.

Ejercicios integradores finales:

¿Cuál o cuáles de las siguientes expresiones tienen la misma gráfica que $f\colon A \rightarrow R/f(x) = 2.\log_4 x$?

I) $g\colon B \rightarrow R/g(x) = \log_4 x^2$
II) $h\colon C \rightarrow R/h(x) = \log_2 x$
III) $t\colon D \rightarrow R/t(x) = \log_4 2x$

Objetivos

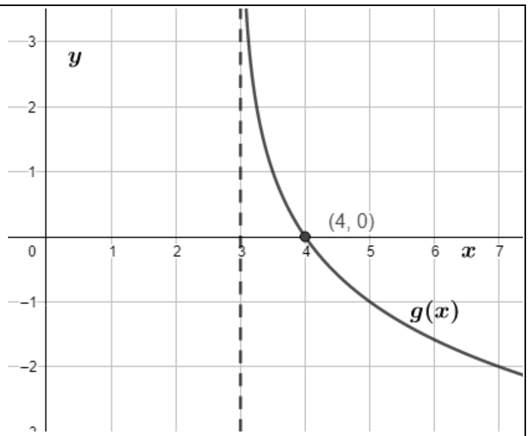
Que los estudiantes determinen expresiones logarítmicas equivalentes desde el registro gráfico y demuestren algebraicamente.

Que los estudiantes determinen el dominio para que las expresiones sean equivalentes

Que los estudiantes comprendan que las propiedades se determinan en un cierto dominio

Obtener la fórmula de la función representada, cuya forma es: $g(x) = a.\log_2(x-b)$ sabiendo que el punto A=(5;-1) pertenece a la función. Luego, determinar Dominio, imagen, raíz, ordenada al origen, asíntota.

Luego determina la solución de $g(x) = -2$



Objetivos

Que los estudiantes relacionen datos numéricos, con datos en la curva gráfica, y, la ecuación de la función.

Que los estudiantes realicen un análisis completo de una función logarítmica

Que los estudiantes relacionen una ecuación con la abscisa del punto de intersección.

Determina la/s función/es que cumplan: Nota: en el caso que la función no sea única, utiliza parámetros. a) Todas las curvas logarítmicas con asíntota vertical en $x = -2$ b) Todas las funciones logarítmicas de base e, asíntota vertical en $x = 1$, y sea creciente c) Todas las curvas logarítmicas que tengan asíntota vertical en $x = 0$ y raíz en 1

Objetivos

Que los estudiantes argumenten la unicidad de curvas logarítmicas que cumplen con ciertas condiciones dadas. En caso que no, que utilicen parámetros para generalizar.

Que los estudiantes relacionen datos del registro numérico, gráfico y algebraico para determinar la función logarítmica

Dada la función $f: A \to R / f(x) = \log_a(kx)$. Determine verdadero o falso y justifique: a) Si $0 < a < 1$ y $k > 0$ entonces la función f es decreciente b) Si $a > 1$ y $k < 0$ entonces la raía de f es negativa c) Si $0 < a < 1\ y\ k > 0$, entonces la función f es decreciente y su dominio $(-\infty; 0)$

Objetivos

Que los estudiantes relacionen las condiciones de los números del coeficiente x y el número base para determinar la curva logarítmica.

Que los estudiantes triangulen los registros numérico, algebraico y gráfico.

Dada la función $g: A \to R / g(x) = b.\log_a(kx)$. Determine verdadero o falso y justifique

a) Si $k < 0$ y $b < 0$ entonces el dominio es $(-\infty; 0)$

b) Si $k < 0$ y $b < 0$ entonces la función g es decreciente.

c) Si $k > 0$ y $0 < a < 1$ entonces la función es decreciente y $C^+ = (0; +\infty)$

Objetivos

Que los estudiantes determinen los cambios de las curvas gráficas logarítmicas a partir de los datos de los parámetros.

Que los estudiantes argumenten y analicen el registro algebraico de la ecuación de la función logarítmica con el registro gráfico.

Que los estudiantes analicen características de la función logarítmica según sus los coeficientes de la ecuación.

Luciano resuelve la siguiente ecuación logarítmica de la siguiente manera:

$$\log_3(x-1)^2 = 2$$

$$2.\log_3(x-1) = 2$$

$$\log_3(x-1) = 1$$

$$x - 1 = 3$$

$$x = 4$$

Lucía opina que hay algo mal porque el -2 es solución de la ecuación.

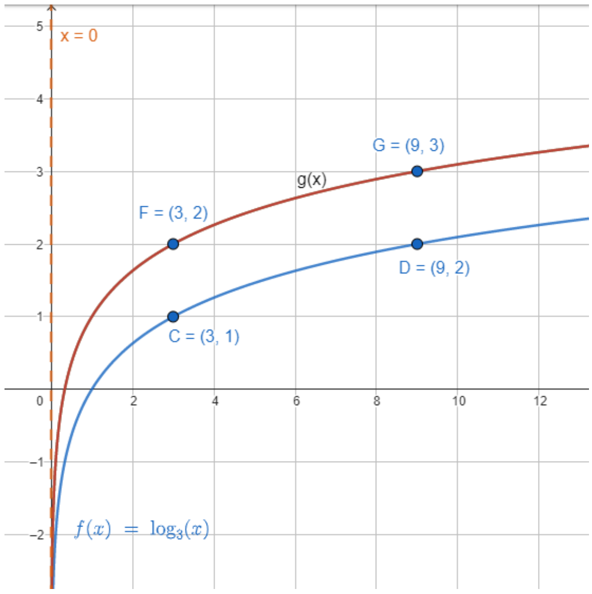
¿Podrías ayudar a esclarecer el problema? ¿cuál/es es/son la solución/es de la ecuación?

Objetivos

Que los estudiantes determinen dominio en el que las expresiones son equivalentes.

Que los estudiantes utilicen GeoGebra para analizar cantidad de soluciones que tiene la ecuación.

Que los estudiantes analicen, validen y argumenten con diversos registros; numéricos, gráfico y/o algebraico.



Problema gráfico

A partir del siguiente gráfico determinen la ecuación de la función $g(x)$

A partir de los puntos dados, ¿Qué otro punto pertenece a la curva de $f(x)$?

Objetivos

Que los estudiantes trabajen con expresiones equivalentes $\log_3(3x) = \log_3 x + 1$.

Que argumenten y demuestren porqué las expresiones son equivalentes a través de las propiedades.

Que los estudiantes analicen la ecuación de la función logarítmica en relación a su curva gráfica.

Determinar el dominio para el cual las siguientes expresiones son equivalentes

a) $h: B \to R/y = \ln(x+3)^2$; $t: B \to R/y = 2.\ln(x+3)$

b) $\mathrm{f}: \mathrm{A} \to \mathrm{R} / \mathrm{y} = \log_2\left(\frac{1}{x^2}\right)$; $g: A \to R / y = -2.\log_2 x$

Objetivos

Que los estudiantes determinen dominio en el que las expresiones son equivalentes.

Que los estudiantes analicen, validen y argumenten con diversos registros; numéricos, gráfico y/o algebraico.

Anexo II: Ilustraciones y fotos de algunos desarrollos de los estudiantes

Figura 52

Resolución de los estudiantes al material tangible I

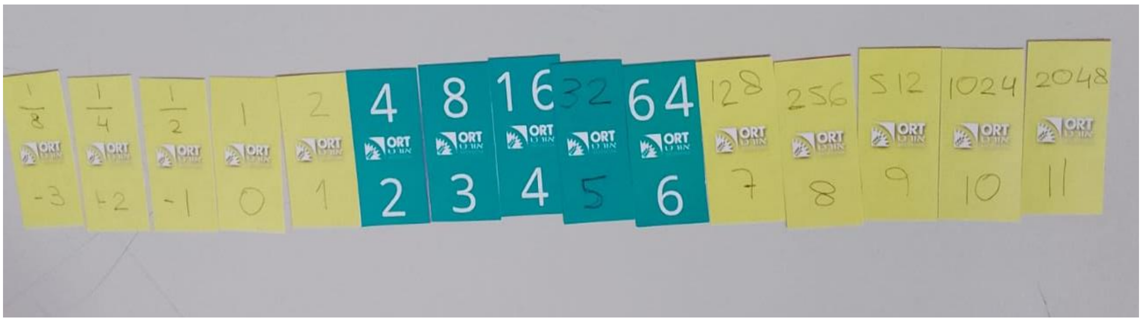


Figura 53

Resolución de los estudiantes al material tangible II

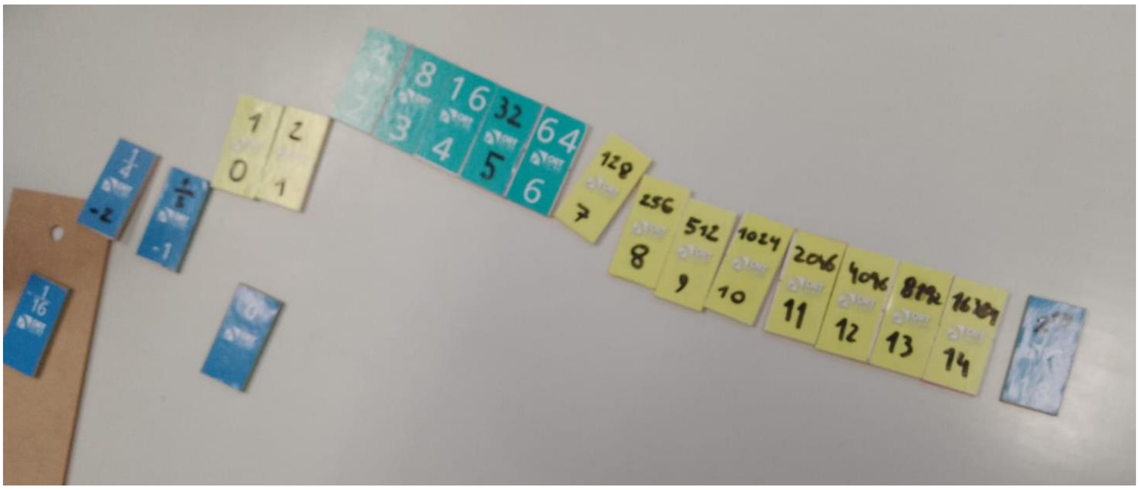


Figura 54

Resolución de los estudiantes al material tangible III

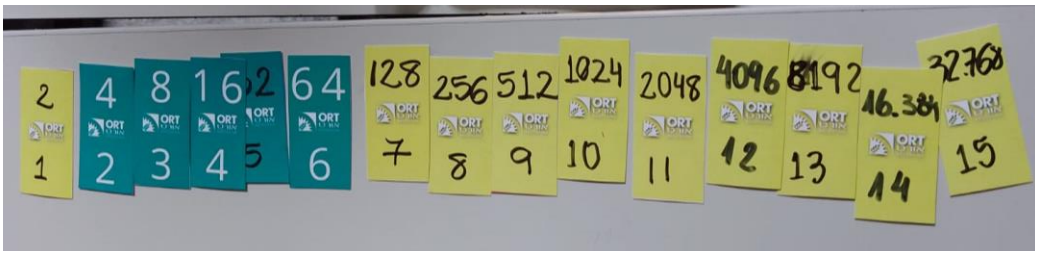


Figura 55

Resolución de los estudiantes al material tangible IV

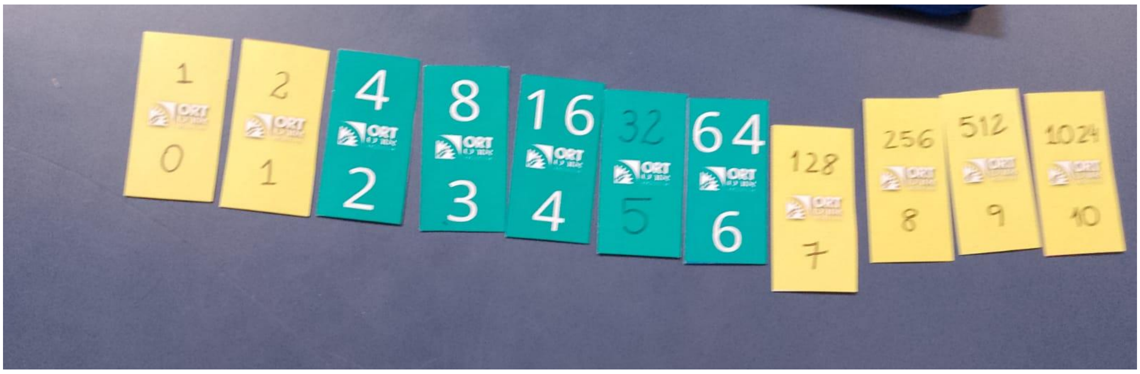


Figura 56

Resolución de los estudiantes al material tangible V

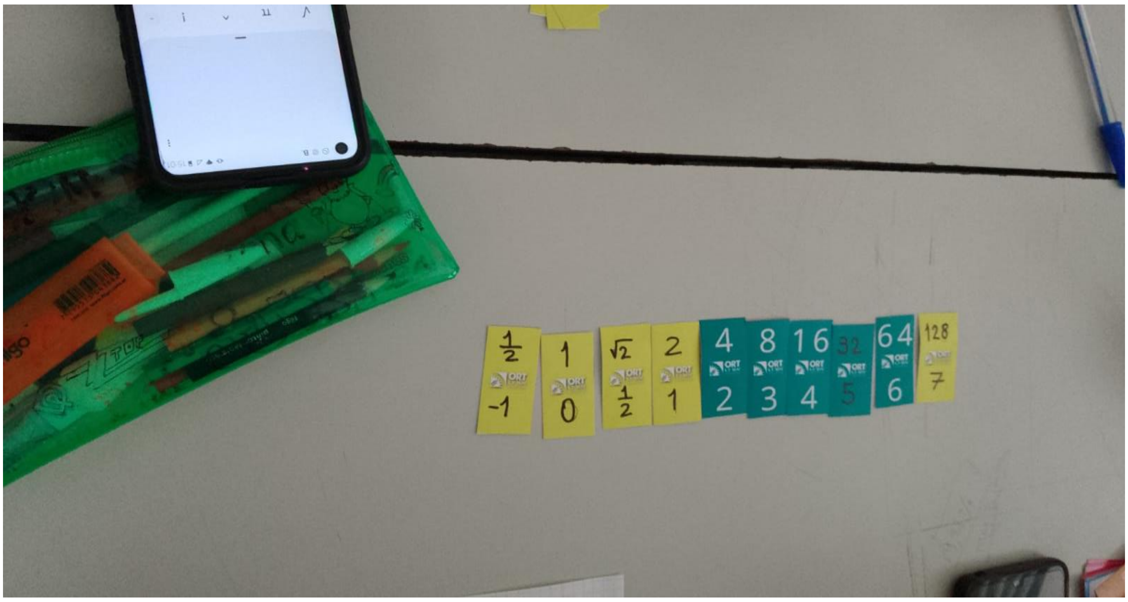


Figura 57

Resolución de los estudiantes al material tangible VI

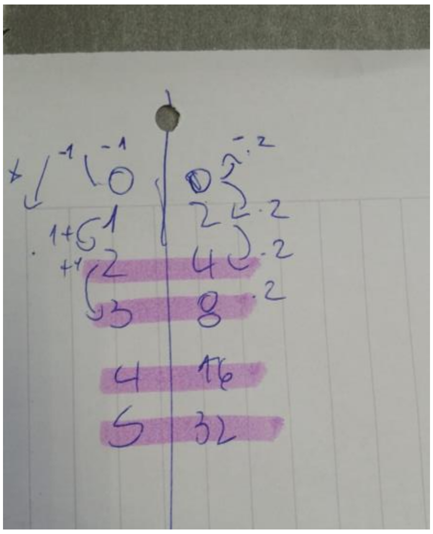
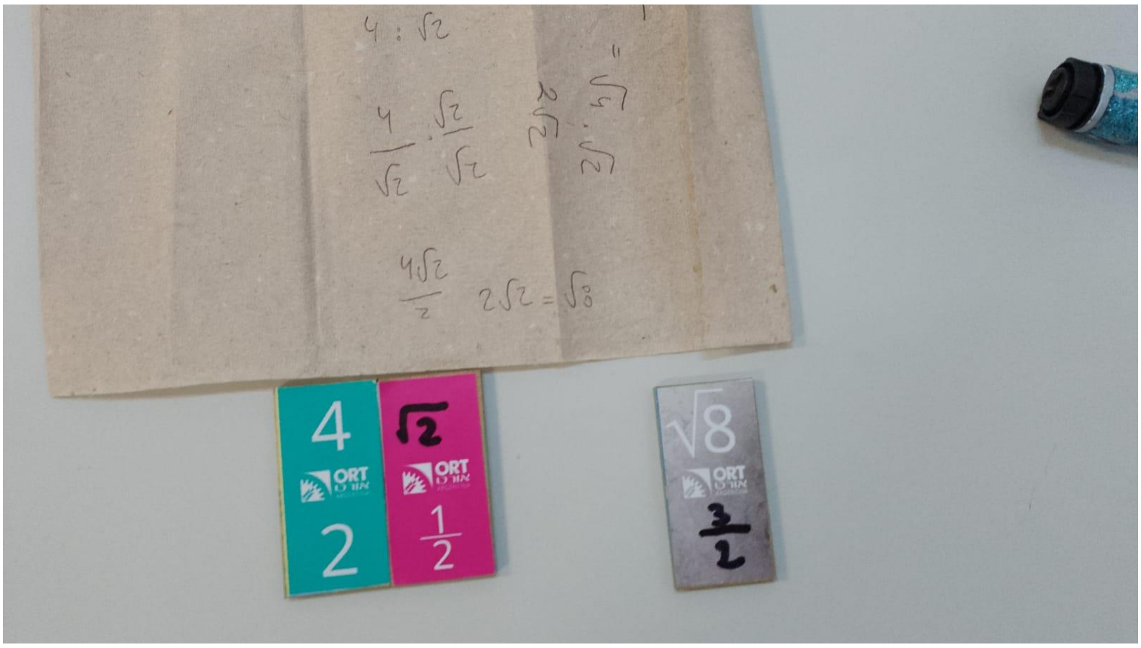


Figura 58

Resolución de los estudiantes al material tangible VII



Anexo III: Tablas y recursos utilizados.

1. Material tangible de fichas

Respecto al material tangible utilizadas consisten la propuesta de trabajo para la conceptualización del tema logaritmos, tenemos que la idea tiene un trasfondo en una experiencia realizada por Marcela Ferrari y Rosa Farfán. Adjuntamos a continuación una síntesis de las actividades y fichas propuestas en aquella clase.

Figura 59

Propuesta material tangible por Escolá y Farfán

Partes	*Extracto de actividades*	*Lo esperado*
1.- Completar el juego de fichas	Completar el juego, es decir, construir: 1.- la ficha que falta [16 / 4] [4 / 2] [64 / 6] [8 / 3] [ ] 2.- diez fichas más	.- iniciar ordenando las fichas les permitirá reconocer cómo crecen y construir fichas hacia la derecha. Podría aparecer (0,0) como la primera ficha del juego.
2.- Descubrir las reglas de "multiplicar sumando" y "dividir restando"	3.- a) Utilizar dos fichas cualesquiera y determinar qué ficha del juego sería la respuesta de su multiplicación. [32 / 5] X [4 / 2] = b) Responder: ¿se puede dividir? ¿cómo?	.- asociar multiplicar con sumar no sería percibido de inmediato; utilizarían operaciones con fracciones antes de dos operaciones aritméticas distintas asociadas. .- ampliar el conjunto de números (naturales a racionales) podría ser retenido por limitar la regla de dividir a divisor menor al dividendo.
	4.- Usar reglas anteriores como una forma de facilitar cálculos y construir más fichas dentro del juego por ejemplo: [/ 28]	.- duplicar arriba de la ficha anterior en tanto sumo 1 abajo evidenciaría que repiten el argumento de actividad 2. .- descomponer el número inferior en otros cuya suma lo conforman y multiplicar arriba evidenciaría que abstraen ley de logaritmos.
	5.- Completar las fichas que podrían pertenecer al juego de acuerdo a las reglas establecidas. [/ -1] [0 /] [0.25 /]	.- extender las fichas al campo de los reales (al menos al anillo de los racionales) podría ser reforzado con estas fichas específicas. .- percibir límite quedaría a nivel potencial.
3.- Encontrar el comodín del juego	6.- Construir el comodín del juego [/ n]	.- abstraer algebraicamente el isomorfismo de las progresiones involucradas en el juego emergerá en pocos estudiantes.

(Escolá & Farfán Márquez, 2017)

En nuestro caso, en el transitar y debatir la propuesta con colegas decidimos ajustar los enunciados. Las fichas utilizadas las diseñamos y las presentamos de la siguiente forma:

Figura 60

Material tangible de fichas

2. Respecto del software GeoGebra

Para la etapa de la curva gráfica de la función logarítmica utilizamos el recurso GeoGebra, un programa de software libre de uso gratuito. Se puede descargar de https://www.geogebra.org/

3. Fichas para la observación de las clases

Para las observaciones se utilizó la siguiente guía con el fin de registrar las acciones y alcances en las actividades realizadas por los sujetos cognoscentes. La misma tiene un formato general que se amoldó en cada clase observada de acuerdo a los objetivos propuestos junto con la dinámica del aula y el proyecto secuenciado de las actividades trabajadas.

Tabla 11

Instrumento recolección de datos

Plan de clases diario: LOGARITMOS

Fecha **Curso** **Tema**

Objetivos

Guía de los estudiantes

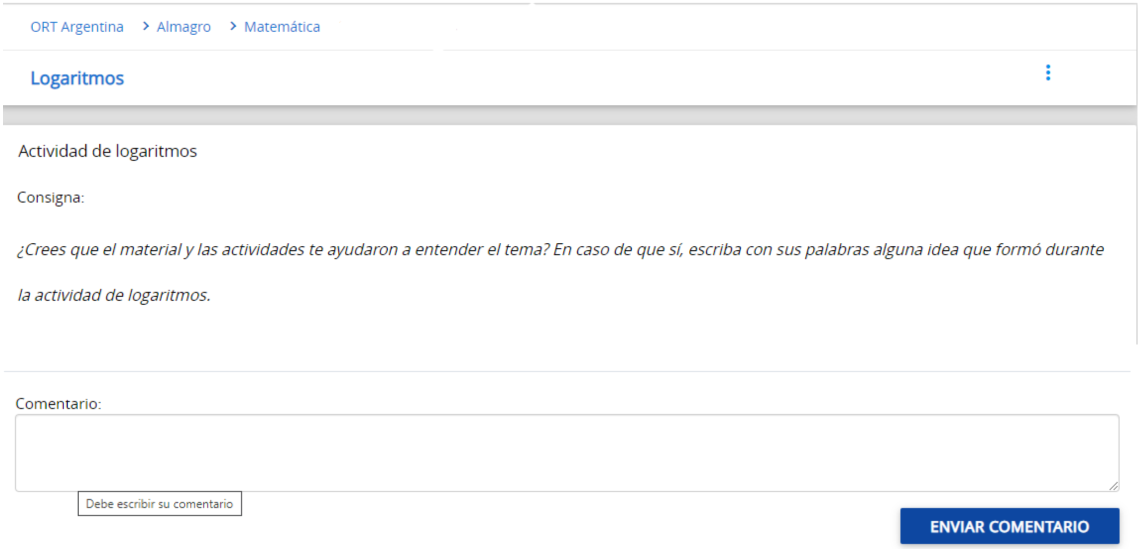
Objetivos	Grupo 1	Grupo 2	Grupo 3	Grupo 4	Grupo 5
Logrado/no alcanzado	L / NA	L / NA	L / NA	L / NA	L / NA
(Habilidades: puesta en tarea, planteo del problema, resolución del problema) Alumnos interactúen con objeto de conocimiento y adquieran nuevos saberes					
Objetivos (Se alcanzan los objetivos planificados para la actividad trabajada)					
Verificación Registros de representación semiótica utilizada. Acción de comprobación de comprensión del estudiante					
Ejercicios Actividad independiente para reforzar la lección Contenido transversal visto o anterior					

Anexo IV: Instrumentos y datos recolectados

Primera encuesta a los estudiantes a través de formulario del campus:

Figura 61

Pregunta a los estudiantes mediante el campus virtual



ORT Argentina > Almagro > Matemática

Logaritmos

Actividad de logaritmos

Consigna:

¿Crees que el material y las actividades te ayudaron a entender el tema? En caso de que sí, escriba con sus palabras alguna idea que formó durante la actividad de logaritmos.

Comentario:

Debe escribir su comentario

ENVIAR COMENTARIO

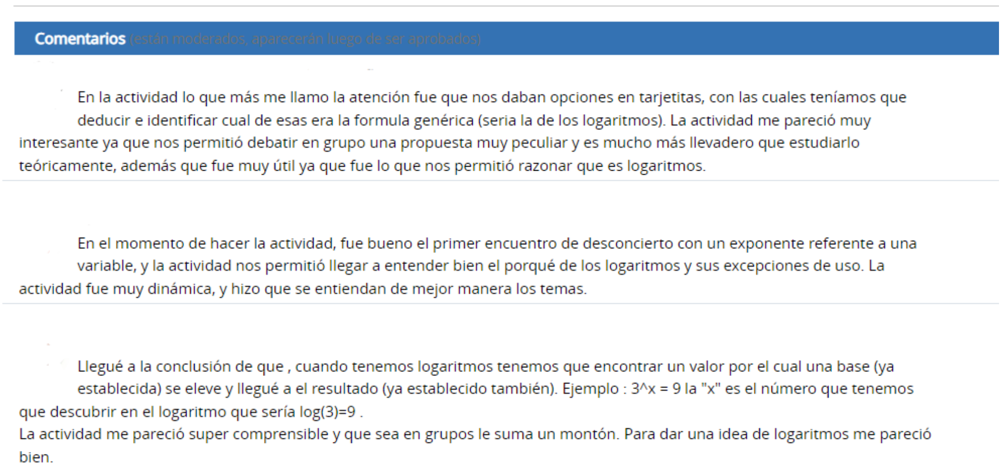
(*Logaritmo - Matemática - Campus Virtual ORT*, 2022)

Respuestas de los estudiantes al primer cuestionario

Si bien en el trabajo realizado transcribimos los datos de manera exacta a como los recibimos para una mejor fachada y, agregada la necesidad de codificar los datos, mostramos a continuación la sección completada por los alumnos que respondieron la encuesta. La única alteración a la vista original es la edición para borrar el nombre y foto de los sujetos informantes de sus apreciaciones:

Figura 62

Respuesta de los estudiantes a la pregunta abierta



Comentarios (están moderados, aparecerán luego de ser aprobados)

En la actividad lo que más me llamo la atención fue que nos daban opciones en tarjetitas, con las cuales teníamos que deducir e identificar cual de esas era la formula genérica (seria la de los logaritmos). La actividad me pareció muy interesante ya que nos permitió debatir en grupo una propuesta muy peculiar y es mucho más llevadero que estudiarlo teóricamente, además que fue muy útil ya que fue lo que nos permitió razonar que es logaritmos.

En el momento de hacer la actividad, fue bueno el primer encuentro de desconcierto con un exponente referente a una variable, y la actividad nos permitió llegar a entender bien el porqué de los logaritmos y sus excepciones de uso. La actividad fue muy dinámica, y hizo que se entiendan de mejor manera los temas.

Llegué a la conclusión de que , cuando tenemos logaritmos tenemos que encontrar un valor por el cual una base (ya establecida) se eleve y llegué a el resultado (ya establecido también). Ejemplo : 3^x = 9 la "x" es el número que tenemos que descubrir en el logaritmo que sería log(3)=9 .
La actividad me pareció super comprensible y que sea en grupos le suma un montón. Para dar una idea de logaritmos me pareció bien.

La idea que formé que me pareció muy importante fue el tema de la generalización, es por esto que podemos decir que $a^b = c$ es lo mismo que $\log_a c = b$. Lo que puedo decir sobre el trabajo grupal es que se me hizo bastante entretenido para ver un tema nuevo y el hecho de estar con mas integrantes nos lleva a poder dar nuestros distintos puntos de vista y opiniones sobre el tema.

La idea que pude formar de logaritmo es que pudimos hallar una formula (arriba 2^m, y abajo m), lo cual nos sirve para poder hallar el logaritmo de un numero. La actividad me pareció una muy buena idea, trabajando con los compañeros de clase, la cual nos ayudo de entender de manera fácil el nuevo tema que estamos viendo en clase.

Comentario corregido: En la actividad de logaritmos, la idea que mas me llamo la atención y logre desarrollar fue el análisis y detección de patrones en las diferentes cartas y lograr llegar a la formula general de los logaritmos mediante las diferentes maneras expuestas en la puesta en común, la cual es 2^m / m. La actividad me pareció muy distinta e interesante. Trabajar en grupo me pareció muy positivo y productivo, ya que entre los integrantes podíamos discutir nuestras ideas y planteamientos, por lo que me parecería bueno que se repita esa modalidad.

En la actividad de logaritmos, la idea que mas me llamo la atención y logre desarrollar fue el análisis y detección de patrones en las diferentes cartas y lograr llegar a la formula general de los logaritmos mediante las diferentes maneras expuestas en la puesta en común, la cual es m2 / m. La actividad me pareció muy distinta e interesante. Trabajar en grupo me pareció muy positivo y productivo, ya que entre los integrantes podíamos discutir nuestras ideas y planteamientos, por lo que me parecería bueno que se repita esa modalidad.

Durante la actividad de logaritmos pude sacar la concluisión que estos mismos estan muy relacionados con la potenciacion y la radicación.
La actividad me pareció una gran idea. Fue una buena forma de introducir contenidos nuevos, y a su vez, hacerlo de una forma más llevadera.

Durante la actividad logré aprender y entender la definición de logaritmo y la forma de resolverlos. Me gustó mucho la actividad ya que fue simple y me permitió comprender los contenidos rápidamente.

Sin idea alguna del tema, previa a la actividad, entiendo a el logaritmo como un patrón en determinadas situaciones, y que este se puede llegar a generalizar en formulas, como en la actividad. Por otro lado la actividad del martes me parecido divertida, distinta y entretenida para comenzar un nuevo tema.

Los logaritmos son un tipo de operacion matematica que permite deshacer una potencia, y obtener como resultado el exponente.
Resulta util en caso en que se conocen los valores de la base de la potencia y el resultado, pero el exponente es una incognita.
Asi, la operacion log b (n) = x nos permite descubrir el exponente x cuando b^x = n.
En mi opinion, la actividad permitio formar la idea de un logaritmo intuitivamente, partiendo de bases y numeros simples para consolidar la idea.

Por lo que entendí en la clase de hoy, los logaritmos son una manera equivalente de expresar potencias, siendo la operación contraria a estas. Es como realizamos en la actividad con las fichas: la base siempre era 2 y teníamos en las fichas la potencia(C) y el exponente (n). Lo que nos dejaba con esta fórmula para armar las fichas: 2^n (arriba), n (abajo)
Además, una de las principales utilidades que tienen los logaritmos es utilizarlos como método para resolver el tipo de ecuaciones que hasta ahora no podíamos, como por ejemplo: 2^x=256, que cuando aplicamos la logaritmización se llega a esta ecuación log_2 256 = x, que se puede llegar a resolver.

La actividad me pareció divertida y me ayudó a entender más cuando expliacamos logaritmos.

Durante la actividad de logaritmos forme la idea de que eran como otra forma de expresar una potencia y que nos iba a servir para poder despejar y descubrir el exponente en caso de que este sea la incógnita. La actividad estuvo muy divertida y me gusto la idea de entender un nuevo tema de esta manera ya que a mi parecer la mejor forma de entender algo no es simplemente aburrirte viendo teoría sino que si mientras aprendes un tema te divertís y te gusta lo aprendes mucho mas fácil y no te aburrís, es mas llevadero.

Un Logaritmo es una operación matemática que da por resultado el exponente de una potencia de una base ya establecida. En otras palabras, es una manera diferente de escribir la potenciación. Por otro lado, considero que la actividad que hicimos en clase fue dinámica y muy fácil para comprender este tema nuevo.

Fue una actividad muy entretenida y util para empezar a entender lo que son los logaritmos, la modalidad de los papeles de colores fue bastante bueno para poder separar en pasos lo que tenias que hacer.

Una idea que forme durante la clase acerca de los logaritmos es que si fórmula genérica es Log a c=b. Esto se lee logaritmo en base a de c igual b.

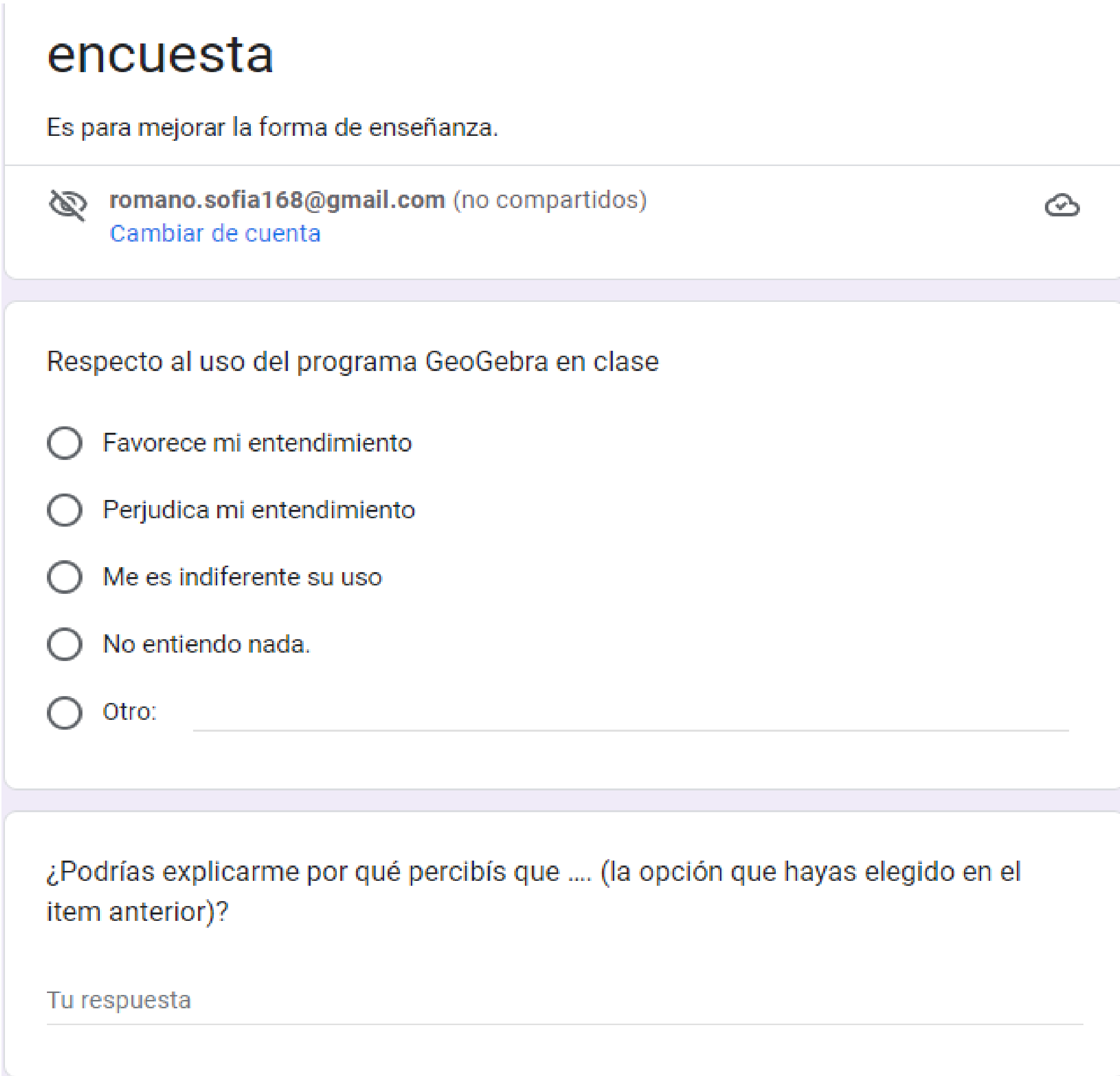
(*Logaritmo - Matemática - Campus Virtual ORT*, 2022)

Segunda encuesta a los estudiantes a través de formulario de google docs:

Mostramos a continuación la encuesta tal como la recibieron los estudiantes. La misma fue creada desde la aplicación "formularios" de *google*

Figura 63

Preguntas a los estudiantes mediante formularios de *google*


encuesta

Es para mejorar la forma de enseñanza.

romano.sofia168@gmail.com (no compartidos)
Cambiar de cuenta

Respecto al uso del programa GeoGebra en clase

- Favorece mi entendimiento
- Perjudica mi entendimiento
- Me es indiferente su uso
- No entiendo nada.
- Otro:

¿Podrías explicarme por qué percibís que .... (la opción que hayas elegido en el item anterior)?

Tu respuesta

(*Encuesta. Elaboración propia.*, 2022)

Respuestas de los estudiantes al segundo cuestionario

Figura 64

Respuesta de los estudiantes al formulario

Ver ilustrado lo que se explica me ayuda a entender mejor todo

Hace los gráficos mucho más rápido y preciso

Porque muestra más definidamente los gráficos y funciones que se dan en clase. Es más fácil de entender.

Cruzar la teoria con la practica hace mas claro el entendimiento.

Nunca lo use

Es más fácil y rápido para ilustrar ciertos temas

Es una herramienta util y facilita y agiliza la visualizacion de lo que estamos viendo.

Representa funciones y figuras de distinto tipo dejando conocer sus datos y puntos con precisión además de orientarnos a lo q seria el dibujo

me ayuda a darme cuenta temas puntuales

Todavia no le di uso, pero me sirve ver las graficas cuando explica

Ayuda a q no se pierda tanto tiempo en hacer graficos a mano y es más exacta para estos.

Nos da la posibilidad de graficar varias y verificar las ubicaciones.

GeoGebra es una herramienta de gran ayuda, porque es más fácil entender lo que el docente quiere explicar visualizándolo. Y a parte de que es más rápido usando GeoGebra que ir graficando paso por paso.

Porque agiliza procesos

Ayuda a visualizar de forma gráfica las posibles soluciones

Porque me ayuda a ver gráficamente las funciones, lo cual hace que entienda bien que hace cada parte de la misma y como funciona

te hace verlo de una forma diferente y es mas interactivo que ver solo numeros, lo hace mas interesante, un poco mas facil

Para mi favorece mi entendimiento ya que puedes graficar cualquier función y verificar si los ejercicios los realice de forma correcta o si me equivoque en algo comprender en que aspecto me equivoque

Ayuda mucho en cuanto a las gráficas .

Es mucho más fácil de entender los gráficos, mejor para la enseñanza.

Debido a que si se utiliza o no, la explicación y el curso de la clase no cambia mucho, aunque algunas veces es útil para desarrollar los temas

(*Encuesta. Elaboración propia.*, 2022)