Universidad Tecnológica Nacional
Facultad Regional de Avellaneda

Tesis

Licenciatura en Enseñanza de la Matemática

La construcción del concepto de número irracional en la escuela secundaria.

Un desafío para la enseñanza.

Presentada por:
Prof. Lema, María Florencia

Directora de tesis:
Prof. Dra. Crespo Crespo, Cecilia

Año 2023

Agradecimientos

Gracias.

A mi familia, que me escucharon y acompañaron a lo largo de este extenso camino.

A mis amigas y colegas, grandes compañeras de cursada, de estudio y gran apoyo para llevar adelante esta investigación.

A Liliana, por alentarme a seguir y acompañarme en cada paso.

A mi directora, Cecilia, por sus aportes, su conocimiento, compromiso y paciencia.

A mis estudiantes, principales protagonistas de esta investigación.

Índice

Anexos

Índice de Figuras

Índice de Tablas

Resumen

Esta investigación se centra en el análisis de las dificultades que presentan los estudiantes de la escuela media en la comprensión del concepto de número irracional y la incidencia del Discurso Matemático Escolar que elude de dicha dificultad.

El marco teórico de la investigación se sustenta en la socioepistemología, la cual aborda el estudio de la matemática desde la concepción de práctica social e incorpora las perspectivas social, histórica y cultural que permiten situar y problematizar las producciones matemáticas.

El trabajo de campo se llevó a cabo en dos cursos de 2do año de una escuela media de CABA, con diferentes docentes de matemática, con el objetivo de comparar y analizar dos metodologías didácticas, una de ellas centrada en la exposición docente más "convencional" y la otra, basada en el enfoque socioepistemológico. Complementariamente se estudiaron distintos libros de texto utilizados por los docentes de la escuela media que reproducen el DME y, finalmente, se ponderó la significatividad de los aprendizajes.

Por último, dado que esta investigación es de carácter cualitativo y examina dos modos de intervención didáctica, no sólo se analizaron los resultados de las evaluaciones sino que se hizo hincapié en la participación y entusiasmo presentes en el proceso de ambos grupos.

Palabras clave

Números irracionales. Discurso matemático escolar. Perspectiva socio- histórica.

Introducción

Los estudiantes de la escuela secundaria, desde los primeros años, estudian múltiples temas relacionados con los números irracionales. Sin embargo, con alta frecuencia, presentan dificultades en la construcción del concepto de número irracional y, consecuentemente, en la comprensión de los contenidos relacionados con el mismo.

A lo largo de la historia, los números irracionales ocasionaron muchos conflictos y dolores de cabeza a los matemáticos de distintas épocas. Es difícil que esto no se repita cuando profesores y estudiantes se enfrentan con la complejidad del concepto de número irracional a la hora de enseñarlo y aprenderlo.

Las dificultades que se presentan para construir la idea de número irracional no sólo están ligadas a los obstáculos epistemológicos propios del contenido sino también a las estrategias didácticas, es decir a la manera en que se aborda o se enseña el tema.

Atento a las cuestiones que se vienen esbozando, el presente trabajo se propone:

a- indagar sobre las problemáticas que presentan los estudiantes de escuela secundaria en la comprensión del concepto de número irracional;

b- analizar las estrategias didácticas que utilizan los docentes de los primeros años de la escuela secundaria para la introducción del concepto de número irracional y las relaciones entre contenidos que proponen;

c- analizar las propuestas didácticas de los libros de texto escolares que se ofrecen para favorecer su comprensión;

d- analizar en qué medida una estrategia didáctica que se apoye en el abordaje de la evolución histórica del concepto de número irracional aporta a su comprensión.

La investigación, por su carácter didáctico – cognitivo, se sustenta en el marco teórico de la socioepistemología “que busca intervenir en el sistema didáctico en un sentido amplio, al tratar a los fenómenos de producción, adquisición y de difusión del conocimiento matemático desde una perspectiva múltiple, que incorpore al estudio de la epistemología del conocimiento, su dimensión sociocultural, los procesos cognitivos asociados y los mecanismos de institucionalización vía la enseñanza" (Cantoral y Farfán, 2008).

En relación con los propósitos planteados y el enfoque socioepistemológico, se recurre a una estrategia metodológica cualitativa que permita una aproximación al problema de la construcción social del conocimiento matemático, en este caso el de los números irracionales. Por ello, habrá de abordarse el Discurso Matemático Escolar (en adelante DME) que permite poner en escena una situación didáctica relativa a la construcción del concepto que es objeto de esta investigación.

Capítulo 1

Definición y delimitación del problema de investigación

Los estudiantes de escuela media comienzan a trabajar con el conjunto de los números irracionales y el conjunto de los números reales desde los primeros años, incluso en algunos casos, en la educación primaria los niños conocen el número π y realizan operaciones sencillas con él, o más precisamente con su aproximación 3,14.

En la secundaria los estudiantes reconocen un número irracional, lo distinguen del conjunto de números racionales, trabajan y operan con intervalos reales, inecuaciones, etc. y, hacia los últimos años de escolaridad, comienzan a dar sus primeros pasos en el ámbito del análisis matemático. Los números irracionales son el primer acercamiento que un estudiante tiene al concepto de infinito, continuidad, completitud que luego profundizará en años superiores con el tratamiento de funciones continuas, límite y derivadas, entre otros.

La construcción de este conjunto numérico a lo largo de la historia trajo aparejada una gran cantidad de inquietudes, sorpresas, estudios, sin olvidar el ocultamiento y la incertidumbre que provocó el surgimiento de "los inconmensurables".

Del mismo modo que el surgimiento de los irracionales provocó controversias entre los matemáticos, el quiebre de la concepción de la naturaleza de los números reales con la introducción del concepto de número irracional provoca un obstáculo cognitivo. La enseñanza de los irracionales supone en el estudiante un desarrollo de la abstracción que no siempre es tenido en cuenta y requiere de un acompañamiento didáctico que favorezca o promueva este "salto" de lo finito a lo infinito.

Ahora bien, atento a las dificultades históricas que presentó su construcción, los estudiantes de la escuela secundaria ¿comprenden el concepto de número irracional?, ¿los docentes abordan esta dificultad?, ¿qué seguimiento didáctico se realiza de su profundización y complejización con otros conceptos relacionados?

Estas preguntas permiten formular el problema de investigación: ***la construcción del concepto de número irracional en la escuela secundaria y los desafíos de su enseñanza.***

Las siguientes hipótesis orientan el abordaje del problema:

- Las mismas controversias históricas presentes en la construcción del número irracional reaparecen implícitas en su enseñanza.
- Se realiza un tratamiento superficial de las dificultades de aprendizaje que presentan los estudiantes de escuela secundaria en la comprensión del número irracional.
- Las propuestas didácticas de los docentes y de los libros de texto escolar soslayan las dificultades inherentes al concepto de número irracional.
- La enseñanza que explicita las dificultades presentes en la construcción y transformación histórica del concepto de número irracional favorece su comprensión y habilita nuevas inquietudes e interrogantes.

Complementariamente, las hipótesis formuladas orientan la estrategia metodológica y permiten focalizar en los aspectos principales que serán desarrollados en esta investigación.

Capítulo 2

Antecedentes e importancia del problema de estudio

El problema en torno a la construcción del concepto de número irracional ha sido abordado desde distintas perspectivas y con diferentes enfoques. Para facilitar el ordenamiento de los antecedentes de la temática, se los agrupa en relación con los siguientes aportes:

2.1 Valor didáctico que asume la enseñanza de la matemática desde su historia

- Sánchez, J. y Valdivé, C. (2012). El número irracional: una visión histórico – didáctica. *Revista Premisa,* 14 (52), 3-16.

  Los autores realizan una descripción acerca del tratamiento y conceptualización de los números irracionales a través de la historia. Los aportes de los matemáticos en las distintas épocas están clasificados en cuatro etapas: Edad Antigua y el origen de los segmentos inconmensurables; Edad Media y su desafío hacia el reconocimiento del irracional como número; Renacimiento y el reconocimiento del irracional como número mediante aproximaciones a números racionales; Edad Moderna y Contemporánea y el irracional como un número. Este devenir proporciona elementos para poner de manifiesto las polémicas y contradicciones que produjo la noción de número irracional en el ámbito matemático. Este enfoque aporta un insumo significativo para la didáctica de la matemática por cuanto permite diferenciar las ideas, métodos, representaciones, el contexto y los conceptos asociados a la noción de número irracional de los matemáticos en cada época histórica.

- Anacona, M. (2003). La historia de las matemáticas en la Educación Matemática. *Revista EMA,* 8 (1), 30-46.

  La autora señala la importancia de la Historia de las Matemáticas en la reflexión educativa. Sostiene que los estudios históricos acerca del desarrollo de un concepto ponen en evidencia elementos lógicos y epistemológicos claves en el proceso de construcción teórica. Estos estudios muestran que las matemáticas, como construcción humana, están ligadas a diferentes dinámicas sociales y su consideración promueve una actitud diferente frente al conocimiento matemático y a su enseñanza. El artículo analiza dos dimensiones educativas acerca de la incidencia de la historia de las matemáticas: una ligada a la formación de profesores de matemática; otra a procesos de aprendizaje de las matemáticas. Dentro de estas dimensiones cobran particular interés los desarrollos referidos a la Historia de las Matemáticas como indicador de dificultades para la comprensión; la Historia de las Matemáticas en el diseño de actividades didácticas y la Historia de las Matemáticas en la relación entre Matemáticas y experiencia.

2.2 Tratamiento de los números irracionales en los libros de texto utilizados para la enseñanza en la escuela secundaria

- Reina, L., Wilhelmi, M. y Lasa, A. (2012). Configuraciones epistémicas asociadas al número irracional. Sentidos y desafíos en educación secundaria. *Educación Matemática*, 24(3), 67–97.

  Este artículo pone de manifiesto las dificultades didácticas asociadas a la enseñanza del número irracional en la escuela secundaria y focaliza su análisis en los textos escolares. La reconstrucción de la noción de número irracional la realizan mediante las herramientas de *configuración epistémica* y *holosignificado* procedentes del "enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemáticos". Enfatizan que la enseñanza de los números irracionales exige un alejamiento de una realidad concreta que para los jóvenes representa un conflicto cognitivo difícil de gestionar. Los autores señalan la importancia de trabajar con los estudiantes sobre el origen histórico de la noción de número irracional porque permite la determinación de las distintas *configuraciones epistémicas* que dieron y dan respuestas a problemas intramatemáticos que no tienen solución en el conjunto de los números racionales. Es precisamente la integración de todas estas *configuraciones epistémicas* la que constituye el *holosignificado* de la noción, es decir permiten construir respuestas en torno a las preguntas: *¿Cuál es el significado de número irracional?* y *¿Qué significa conocer el número irracional?*

El trabajo de estos autores constituye una fuente de gran valor para la presente investigación puesto que analiza tres textos escolares de uso corriente en la escuela secundaria de nuestro país de editoriales Cúspide, Santillana y Puerto de Palos.

- Sánchez, J. y Valdivé, C. (2014). Estudio del número irracional en los libros de texto escolares: una visión desde el PMA. *Revista Premisa*, 16 (62), 36-48.

  Tal como lo expresa su título su estudio se enmarca en una teoría cognitiva llamada Pensamiento Matemático Avanzado (PMA) que busca describir la naturaleza del conocimiento matemático y los procesos cognitivos que emplea el estudiante para el aprendizaje de algún conocimiento matemático. El objetivo principal se enfoca hacia la descripción de los *esquemas conceptuales* referidos a la adquisición, representación, imágenes mentales, uso y comprensión de ciertos conceptos que los estudiantes evocan y entran en conflicto con las definiciones aceptadas por los matemáticos. A los fines de esta investigación se destaca la aproximación a los esquemas conceptuales (en su acepción cognitiva y epistemológica) sugeridos en los libros de textos escolares para la enseñanza del concepto de número irracional.

2.3 Experiencias didácticas en el aula de matemática

- Crespo Crespo, C. (2009). Acerca de la comprensión y significado de los números irracionales en el aula de matemática. *Revista Premisa*, 11 (41), 21-30.

  A partir de la investigación que la autora desarrolla en el aula de matemática, en un primer año del profesorado de matemática, en la que analiza las respuestas y afirmaciones dadas por los estudiantes, infiere que los números irracionales no son enteramente comprendidos. La irracionalidad de algunos números reales es un concepto que carece de significado para los estudiantes dado que no conciben a la matemática como una disciplina en la que sus objetos deben tener sentido.

El aporte de la autora es fundamental para esta investigación dado que presenta tres diálogos con estudiantes, en los que hace referencia a tres cuestiones:

1) Números irracionales y aproximaciones: en la que da cuenta que los alumnos no comprenden las diferencias entre estos conceptos y enfatiza en la autoridad que le confieren a la calculadora y a la necesidad de expresar los resultados en sistema decimal.
2) Cuentas sin terminar: surge la necesidad que sienten los alumnos de que el resultado no contenga operaciones, a pesar de que se trata de un número irracional. También destaca la confusión que los alumnos manifiestan entre un número y su representación.
3) La no aceptación encubierta del infinito: A partir de la gráfica de una función trigonométrica surge la duda de la comprensión del valor de π. Además, se manifiestan dificultades en aceptar la existencia de infinitas cifras decimales no periódicas.

- Lestón, P. (2006). Ideas de los alumnos de escuela media sobre el infinito de los conjuntos numéricos. *Revista Premisa,* 29, 35-42.

  El trabajo de esta autora está centrado en la enseñanza y aprendizaje de conjuntos numéricos y focaliza en las dificultades relacionadas con el concepto de infinito. Señala que frente a la complejidad de conceptos tales como infinito, densidad, completitud y continuidad los docentes se abocan a dar una explicación teórica junto con una enumeración de propiedades y características que el alumno no comprende. La autora describe dos secuencias didácticas llevadas a cabo en una escuela media de Capital Federal con alumnas de segundo, tercero, cuarto y quinto año. La primera secuencia, a través de distintas actividades, intentaba recuperar los conceptos de infinito y continuidad de los conjuntos numéricos; y la segunda secuencia, a partir de actividades que permitieran transferir las propiedades de conjuntos finitos a infinitos, se intentaba que las estudiantes se encontraran con una contradicción. Concluye que las estudiantes portan una serie de imágenes mentales o representaciones acerca de los conceptos de número, conjunto e infinito, construidos en la vida misma, incluso antes de la escolarización, que es necesario analizar en profundidad por su influencia en el aprendizaje.

- Romero, I. y Rico, L. (1999). Construcción social del concepto de número real en alumnos de secundaria: aspectos cognitivos y actitudinales. *Enseñanza de las ciencias*, 17 (2), 259- 272.

  Los autores señalan la relevancia del contexto donde se desarrollan los procesos de enseñanza y de aprendizaje. La investigación se lleva adelante en el marco de la investigación-acción, en una clase con alumnos de 14-15 años. Su propósito fue estudiar potencialidades y dificultades que el concepto de número real puede presentar para la comprensión en las etapas iniciales de su construcción. La relevancia de los factores sociales y contextuales fue abordada en dos niveles. El primero, considera el clima en el que transcurren los procesos de enseñanza y aprendizaje, con especial detenimiento en los aspectos actitudinales (confianza, libertad para expresar ideas, respeto e interés genuino por las ideas de los otros) que se ponen en juego. El segundo, pone el acento en el aspecto sociocognitivo en la construcción de conocimiento matemático, para lo cual coordinan tres puntos de referencia: el conocimiento construido en la comunidad de la educación matemática, las prácticas compartidas en la comunidad de la clase y las concepciones que los estudiantes forman a partir de estas prácticas.

  Desde el punto de vista de la estrategia metodológica, este trabajo constituye una fuente valorable por cuanto guarda relación con el interés por construir conocimiento científico desde el campo de intervención profesional de un profesor de matemática. Las etapas en las que desarrollaron su investigación-acción son similares a los momentos y fases en las que se diagrama la presente investigación.

- Herrera Ruíz, M. (2010). Obstáculos, dificultades y errores en el aprendizaje de los números irracionales. En P. Lestón (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 23*, 247-255. México, DF: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

  La autora resalta la importancia del rol investigador del docente ya que, al investigar lo que sucede dentro de su salón de clase, puede realizar una descripción densa de la realidad e intervenir para mejorar las condiciones de aprendizaje matemático. Este trabajo resulta relevante por su estrecha aproximación al problema que se busca abordar en la presente investigación, aunque el marco teórico se sustenta en las teorías propuestas por Socas, en su tesis doctoral sobre dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las matemáticas en la educación secundaria; en las dimensiones afectivas descritas por Gómez; la teoría de obstáculos de Brousseau y la teoría de errores de Radatz.

Atender a la pluralidad teórica es un modo de enriquecer la perspectiva de análisis de un mismo objeto/ problema de estudio, en este caso el aprendizaje de los números irracionales.

Capítulo 3

Nueva Escuela Secundaria: marco normativo, organizativo y curricular

El Ministerio de Educación de la Ciudad Autónoma de Buenos Aires inició un proceso de transformación de la educación secundaria junto al resto de las 23 provincias de la Argentina para dar cumplimiento a la Ley 26.206 de Educación Nacional, a la Resolución CFE N° 84/09 y a la Resolución CFE N° 93/09 con el fin de mejorar la calidad y asegurar la equidad educativa en sus escuelas que garanticen la obligatoriedad del nivel medio.

En 2014 comenzó la implementación de la Nueva Escuela Secundaria (en adelante NES) en algunas escuelas piloto y en 2015, las escuelas de Gestión Estatal y Gestión Privada de la Ciudad de Buenos Aires iniciaron el primer año del Ciclo Básico.

En cuanto al ciclado de la NES, la Formación General consta de dos ciclos: un Ciclo Básico para 1ro y 2do año, y un Ciclo Orientado para 3ro a 5to año consta de formación general y orientada. La NES cuenta con 13 orientaciones diferentes. El título de egreso de la Educación Secundaria Orientada será: “Bachiller en…. (la orientación correspondiente)".

La NES no propone sólo una reforma curricular, sino también replantea los espacios y la estructura de la escuela media. Dado que el cuerpo normativo exige la obligatoriedad de la escuela secundaria, el desafío docente es llevar a cabo procesos de enseñanza que permitan lograr un aprendizaje de calidad y significativo para todos. Es necesario, entonces, cambiar la forma de enseñar y la concepción de cómo el estudiante aprende para poder ampliar el derecho a la educación y democratizar el acceso al conocimiento.

El diseño curricular para el ciclo básico contempla los siguientes elementos:

*Objetivos y contenidos troncales para la finalización de la escuela secundaria.

*Presentación: La materia Matemática se organiza tanto para el ciclo básico como para el orientado, en cuatro ejes: Números y álgebra; Funciones y álgebra; Geometría y medida; Estadística y probabilidades.

*Propósitos de enseñanza.

*Primero y segundo año: Se establecen los objetivos de aprendizaje y contenidos agrupados por unidades; alcances y sugerencias para cada uno de los ejes.

*Orientaciones generales para la evaluación.

El tratamiento de los números irracionales en la estructura curricular de la NES

Se destacan del diseño curricular del ciclo básico, por su relevancia didáctica, aquellos elementos que hacen referencia a los conjuntos numéricos, en especial al conjunto de números irracionales.

En Objetivos y contenidos troncales para la finalización de la escuela secundaria se expresa que:

“Al egresar de la escuela secundaria se espera que los estudiantes hayan tenido experiencias de trabajo en el aula que les permitan:

*Utilizar recursos algebraicos para decidir sobre la validez de propiedades numéricas y para producir, formular y validar conjeturas relativas a los números naturales, enteros, racionales y reales, considerando el sentido que adquiere cada uno de ellos y las regularidades que es posible establecer” (Ministerio de Educación, 2015a, p. 506)

En cuanto a los Contenidos troncales del Eje Números y álgebra se destacan:

*"Diferentes representaciones de números (naturales, racionales y reales) en la recta numérica. Identificación de segmentos conmensurables.

*Las operaciones y sus sentidos en los diferentes campos numéricos. El recurso algebraico para formular y validar conjeturas que involucren sus propiedades y el orden en cada conjunto numérico. Propiedades que se preservan y propiedades que se modifican en función de cada campo numérico. Análisis del funcionamiento de distintos tipos de calculadora en la resolución de cálculos combinados.

*Identificación de números que no se pueden expresar como cocientes de enteros. Representación de números de la forma $\sqrt{n}$ en la recta numérica. Aproximación de números reales por racionales. Uso de la calculadora para tratar con potencias y raíces.

*Distancia de un número real al 0. Uso de la recta numérica para estudiar condiciones para que dos números se encuentren a una cierta distancia. Intervalos de números reales.” (Ministerio de Educación, 2015a, p. 507)

La Presentación plantea que, en el Eje de Números y álgebra, “se pretende que los estudiantes profundicen sus conocimientos sobre los distintos conjuntos numéricos.” (Ministerio de Educación, 2015a, p.512)

Se prioriza que los estudiantes apliquen las propiedades de las operaciones y validen sus producciones. Para ello, prevalece el trabajo de cálculo mental, estimación y el uso de calculadora.

Algunos de los propósitos de enseñanza son:

- “Proponer situaciones problemáticas que promuevan en los estudiantes la cooperación con sus pares, la aceptación del error, la descentración del propio punto de vista, la capacidad de escuchar al otro, la responsabilidad personal y grupal.
- Ofrecer a los estudiantes las experiencias necesarias que les permitan comprender la modelización como un aspecto fundamental de la actividad matemática, y conceptualizar las características inherentes al proceso de modelizar.
- Proponer situaciones problemáticas que ofrezcan la oportunidad de coordinar diferentes formas de representación, favoreciendo que los estudiantes puedan usar como medio de producción y de control, del trabajo sobre otras.” (Ministerio de Educación, 2015a, p.513)

A continuación se mencionan aquellos contenidos, alcances y sugerencias para la enseñanza del Eje Números y álgebra, propuestos en el diseño de la Formación General Básica y Orientada, en relación con los conjuntos numéricos, en particular de los números irracionales.

En el primer año de la escuela secundaria, se propone el trabajo con números naturales, enteros y racionales positivos.

En el segundo año, objeto de esta investigación, se retoma el trabajo con números naturales, enteros y racionales y, dentro de esta última unidad, se incluye: “Valor aproximado de una raíz cuadrada: existencia de números irracionales.” (Ministerio de Educación, 2015a, p.523). En Alcances y sugerencias para la enseñanza propone que se presenten problemas en los que “se involucra la búsqueda de dos cuadrados consecutivos entre los cuales se encuentre un número. Estas situaciones apuntan al encuadramiento, en términos de aproximaciones a las raíces cuadradas, apoyado en la calculadora. Se propone a su vez que las situaciones permitan poner en debate reglas que apunten a una conceptualización de la potenciación y la raíz. No se propone un trabajo de cálculos para la aplicación de reglas memorizadas.” (Ministerio de Educación, 2015a, p. 523)

En tercer año, se profundiza el trabajo con el conjunto de números naturales y el conjunto de números racionales y se incorpora la unidad de números reales, cuyo contenido es la “Identificación de números que no se pueden expresar como el cociente de enteros” (Ministerio de Educación, 2015b, p. 404), la que puede ser abordada desde el trabajo con segmentos inconmensurables.

En cuarto año, el trabajo con números reales se amplia y su tratamiento, a diferencia de los años anteriores, aparece formulado como objetivos de aprendizaje: “Producir aproximaciones de valores de raíces utilizando truncamiento, redondeo y aproximaciones sucesivas. Distinguir medida matemática de medida obtenida en el proceso fáctico de medición.” (Ministerio de Educación, 2015b, p.409)

En la unidad de números reales, los contenidos propuestos son: “Representación de números de la forma raíz cuadrada de naturales en la recta numérica. Inconmensurabilidad de segmentos. Medida matemática y medición fáctica. Errores en la medición. Aproximación de números reales por racionales. Uso de la calculadora. Truncamiento y redondeo. Distancia de un número real al 0. Valor absoluto.” (Ministerio de Educación, 2015b, p.410)

En cuanto a los alcances y sugerencias para la enseñanza, “interesa distinguir que la medida matemática de una magnitud puede ser un número irracional pero que en la medición fáctica de magnitudes solo se puede acceder a intervalos con extremos racionales entre los que se encuentra la medida exacta. Es oportuno también abordar la idea de aproximación de la raíz cuadrada, proponiendo situaciones que demanden “ubicar” números entre los cuadrados de dos naturales consecutivos. Asimismo, es posible incorporar una aproximación con más cifras decimales y raíces de otros índices recurriendo al uso de la calculadora. Interesa proponer a los estudiantes situaciones que demanden comparar números reales” (Ministerio de Educación, 2015b, p. 110)

En quinto año, dentro de la unidad de números reales, se propone trabajar con: “Distancia entre números reales. Intervalos de números reales. Resolución de ecuaciones e inecuaciones con valor absoluto apelando a distancia. Aproximación de números reales por sucesiones de racionales. Concepto de número real. Concepto de límite: aproximación intuitiva.” (Ministerio de Educación, 2015b, p.416)

Dentro de los Alcances y sugerencias, se propone que se retome el trabajo de distancia, intervalos reales y resolución de ecuaciones e inecuaciones con módulo sencillas. Por otro lado, se apunta que “Las sucesiones de racionales son un terreno fértil para abordar nuevamente algunas relaciones que permiten comprender mejor el campo de los números reales. Se propone que solo se presenten algunos ejemplos (e, π, raíz de) y no que se aborde el problema de la definición de número real en toda su complejidad.” (Ministerio de Educación, 2015b, p.416)

Por último, en cuanto al diseño curricular del ciclo orientado del Bachillerato de Matemática y Física, está organizado en bloques y ejes. Presenta una propuesta de contenidos para los espacios curriculares orientados. A su vez, los espacios curriculares específicamente vinculados a la matemática (Laboratorio en 3er año; Laboratorio de matemática en 4to año y Matemática para la física en 5to año) asumen el formato de taller para abordar distintos niveles de modelización y no se proponen contenidos específicos sino que éstos quedan a propuesta de la institución y los docentes del área.

Capítulo 4

La socioepistemología como marco teórico

Esta investigación se sustenta en el marco teórico de la socioepistemología, que comprende la construcción del conocimiento matemático desde un aspecto social. Esta posición reconoce la necesidad de llevar a cabo investigaciones sistémicas en torno a la construcción social del conocimiento matemático. La socioepistemología abandona la mirada centrada en el *objeto* matemático y se orienta hacia el enfoque teórico centrado en las prácticas. Se interesa por modelar los significados que asume la *práctica social* en la producción de conocimiento a fin de diseñar situaciones para la intervención didáctica (Cantoral, Farfán, Lezama y Martínez-Sierra, 2006).

Desde el enfoque socioepistemológico "la práctica social no es lo que hace en sí el individuo o el grupo, sino aquello que les hace hacer lo que hacen" (Cantoral, Reyes-Gasperini y Montiel, 2014), es decir que se entiende la práctica social como normativa subyacente de la actividad humana y, por tanto, supone la interiorización de prácticas situadas e históricamente constituidas.

El Discurso Matemático Escolar (DME) "subyace a lo inmediatamente visible, lo ostensible, explícito u objetivo, los contenidos y sus concepciones: Planes y Programas de Estudio, libros de texto, exposición de aula, pero también a las creencias y concepciones de profesores, estudiantes y comunidad académica en general." (Cantoral, Montiel y Reyes- Gasperini, 2015, p.14).

La aproximación socioepistemológica a la investigación en matemática educativa busca construir una comprensión sistémica, holística, compleja y transdisciplinaria de los fenómenos didácticos en el campo de la matemática. Interviene en el aula desde una mirada más amplia, complementa la adquisición del conocimiento con la función institucional. Además, plantea el análisis del estudio de la matemática de una forma social, histórica y cultural, problematizando los fenómenos de producción y adquisición del conocimiento matemático y de los mecanismos de difusión e institucionalización vía la enseñanza.

La socioepistemología, al plantear el examen del conocimiento matemático a la luz de las circunstancias sociohistóricas de su construcción y difusión, sostiene que se forman *discursos* que facilitan la representación en matemáticas alcanzando consensos entre los actores sociales, a los que nombran con el término genérico de *discurso matemático escolar* (Cantoral, 1990). La estructuración de este discurso no puede reducirse a la organización curricular de los contenidos ni a su función declarativa en la enseñanza en el aula, sino que conlleva el establecimiento de las bases de comunicación necesarias para la formación de consensos y la construcción de significados compartidos.

El DME dominante en el sistema educativo evidencia las siguientes características: su carácter utilitario, la atomización de los conceptos, su carácter hegemónico, la concepción de la matemática como un conocimiento cerrado y continuo, la mecanización y memorización de conceptos que obstaculizan o impiden la resignificación de la matemática escolar. En contraposición, para promover la construcción social del conocimiento matemático, se torna indispensable rediseñar aquellas características fundamentales y formular nuevos principios: el carácter funcional reconociendo el contexto de origen y significación, una racionalidad contextualizada, el relativismo epistemológico en tanto la construcción del saber es relativa al individuo y al grupo cultural, pluralidad de prácticas de referencia para la resignificación progresiva del saber matemático.

El examen socioepistemológico es igualmente potente para mostrar la transformación histórica de las construcciones y discursos matemáticos ya que permite evidenciar los *obstáculos epistemológicos* (Bachelard, 1999) - y las luchas - que tienen lugar en una cultura a la hora de establecer los consensos necesarios entre los actores que conforman la comunidad de matemáticos de una época.

Bachelard advierte que el *obstáculo epistemológico* no proviene de obstáculos externos, sino que “es en el acto mismo de conocer, íntimamente, donde aparecen, por una especie de necesidad funcional, los entorpecimientos y las confusiones. Es ahí donde mostraremos causas de estancamiento y hasta de retroceso, es ahí donde discerniremos causas de inercia que llamaremos obstáculos epistemológicos. El conocimiento de lo real es una luz que siempre proyecta alguna sombra. Jamás es inmediata y plena. Las revelaciones de lo real son siempre recurrentes. Lo real no es jamás “lo que podría creerse”, sino siempre lo que debiera haberse pensado.” (Bachelard, 1999, p. 15)

En su obra “La formación del espíritu científico”, Gaston Bachelard nos aproxima a la noción de obstáculo epistemológico y examina el modo en que operan, estancan el espíritu científico o formativo y consagran el espíritu conservativo. Entre ellos, analiza “la cabeza de escuela”. Cuando el saber científico se “cosifica” en una argamasa de analogías, imágenes, metáforas y relatos verdaderos, pierde su vector de afilada punta crítica y se convierte en una sanción de juicios exitosos. La escuela, en tanto órgano destinado a la difusión del saber científico, recae ante el éxito de las respuestas, premia la adquisición de saberes y los capitaliza como una riqueza material. Así, muy a menudo, una buena cabeza es, desgraciadamente, una cabeza cerrada, una cabeza de escuela. En la operación de difusión del saber científico en la escuela predomina el espíritu conservativo.

Pero Bachelard no se detiene en esta descripción, y sostiene que “en la educación, la noción de *obstáculo pedagógico* es igualmente desconocida. Frecuentemente me ha chocado (…) que los profesores de ciencias (…) no comprendan que no se comprenda” (Bachelard, 1999, p. 20). Esta observación encierra una complejidad que es necesario analizar. En la medida en que el *discurso matemático escolar* se transforma en un relato homogéneo de saberes exitosos, en una concatenación de certezas, obtura la emergencia de la pregunta y la curiosidad propias del espíritu científico.

Reponer en la enseñanza los esfuerzos realizados por los matemáticos para formular nuevas preguntas, permite rectificar, diversificar y dinamizar el pensamiento para alejarlo de la certidumbre y la unidad homogénea. La posibilidad de dialectizar todas las variables en la enseñanza tiene cabida en todo esfuerzo educativo. Bachelard sostiene que “a través de las revoluciones espirituales que exige la invención científica, el hombre se convierte en una especie de mutante o, para expresarlo aún mejor, en una especie que necesita mutar, que sufre si no cambia. Espiritualmente el hombre necesita necesidades” (Bachelard, 1999, p. 18).

Estas consideraciones, provenientes de la socioepistemología y del filósofo Gaston Bachelard, fundamentan las hipótesis que orientan esta investigación, al tiempo que habilitan la intervención didáctica en el aula de matemática en pos de favorecer la comprensión del concepto de número irracional. Desde este sustento teórico es posible suponer que las mismas controversias e incertidumbres intelectuales que afectaron a los matemáticos de una época en la construcción y reconstrucción del concepto de número irracional, se reediten en un aula de matemática al momento de su enseñanza. Es igualmente posible suponer que los obstáculos pedagógicos, derivados de las dificultades de comprensión del concepto, sean “pasados por alto” y en el DME predomine una visión lineal, continuista, homogénea y "exitosa", por tanto enteramente "racional", del número irracional. En forma consistente con este análisis, es posible suponer que una intervención didáctica que reconoce la dificultad de comprensión, la opacidad e incertidumbre inherentes al número irracional, interrumpe la comodidad del espíritu conservativo y favorece el despunte del espíritu científico.

Específicamente, en términos de enseñanza, la socioepistemología brinda un marco interpretativo para diseñar situaciones para la intervención didáctica y, complementariamente, los aportes de Bachelard permiten reconocer la importancia de los obstáculos pedagógicos[1] que obturan la comprensión del número irracional.

En diálogo con estos dos enfoques teóricos, es necesaria la consideración del sujeto que aprende. El alumno es considerado un sujeto activo, porque participa en el proceso de aprendizaje. La participación del alumno consiste en que para aprender debe modificar sus esquemas cognitivos anteriores en virtud de una nueva propuesta de enseñanza que le presenta el docente.

Jerome Bruner (1990) pone a consideración esta idea de que el alumno debe volver sobre un mismo concepto a lo largo de un trayecto de enseñanza teniendo en cuenta que los contenidos presentan distintos grados de complejidad y abstracción crecientes y no es tarea sencilla su apropiación. Es por esto que Bruner habla de la presentación de los contenidos a partir de secuencias espiraladas que el docente diseñe, con la intención de asegurar que el grupo escolar tenga mayores oportunidades de aprendizaje. Bruner hace hincapié en el trabajo minucioso y fundamentado que debe realizar el docente en la selección y organización de los contenidos y en su modo de abordaje para no dejar librados los aprendizajes a las posibilidades de los alumnos. Otro aporte importante sobre este tema es la idea de recursividad. El volver sobre las mismas nociones le permite al alumno establecer nuevas conexiones entre los conocimientos posibilitando, afirma Bruner, la creación de nuevas categorías, la ampliación de las perspectivas de análisis y de los aportes desde distintos puntos de vista con respecto a una misma noción.

[1] El término es utilizado por Bachelard: "En la educación, la noción de obstáculo pedagógico es igualmente desconocida. Frecuentemente me ha chocado el hecho de que los profesores de ciencias, más aún que los otros si cabe, no comprendan que no se comprenda. Son poco numerosos los que han sondeado la psicología del error, de la ignorancia y de la irreflexión." (Bachelard, 1999, p. 20)

En realidad, esta idea de volver una y otra vez sobre una noción le brinda al alumno una segunda oportunidad para reflexionar sobre ella, dándose posibilidades de desarrollar circuitos de aprendizaje cada vez más amplios y complejos; la recursividad permite instancias de reflexión y metacognición.

Si bien el estudiante tiene que volver sobre el contenido las veces que sea necesario no se propicia que sea de manera repetitiva ni creando automatismos. Es allí donde la experticia del docente se pone a prueba. Esta forma de encarar el aprendizaje recursivamente no quiere decir repetir lo mismo, sino volver sobre la noción a aprender, en un tiempo y un espacio que permitan su apropiación a partir de actividades variadas a fin de no saturar a los alumnos. Ellos no están en condiciones de afirmar que las variadas actividades presentadas en sucesivos espacios y tiempos tienen como objetivo la construcción de la misma noción. Es el docente con su experticia quien tiene la obligación de hacer reales estos conceptos de espiralamiento y recursividad. Si los conocimientos a trabajar en el aula se presentan en un día o dos y luego se sigue adelante con otra propuesta de trabajo, seguramente no se coincide con lo expuesto y no se permite aprender. El tiempo es, entonces, otra variable fundamental a tener en cuenta.

Por ejemplo, si se enseña a los alumnos a partir de propuestas didácticas que se apoyen en una presentación de contenidos de manera espiralada y recursiva se logrará, seguramente, una apropiación de los mismos en el grupo escolar ya que respetamos sus tiempos y sus distintos modos de acercarse a la disciplina. Si no es así, puede ocurrir que el alumno incorpore los contenidos a partir de la repetición reiterada de conceptos, logrando un aprendizaje mecánico. En la primera opción el tiempo destinado para aprender es más largo y los resultados indican mayor nivel de logros y mejor transferencia a situaciones nuevas. La segunda opción es más rápida, y como el aprendizaje se sustenta más en la memoria y la repetición, las posibilidades de transferirlo a nuevas situaciones es poco probable. Estamos frente a dos modelos didácticos diferentes. Es el docente el que decide, a partir de su marco teórico y su modelo didáctico, la opción adecuada. En este sentido, la socioepistemología aporta principios y fundamentos para el rediseño de su práctica docente. Es en la escuela donde los esquemas previos del sujeto deben ser puestos en situación de incomodidad intelectual, a fin de que tenga lugar un conflicto cognitivo cuya superación constituya la motivación fundamental del sujeto que aprende. Es el docente, como profesional experto, quien tiene a su cargo las tareas de identificar el conflicto cognitivo, motivar al sujeto que aprende y brindarle la enseñanza precisa que le permite aprender.

Capítulo 5

Marco metodológico

En consonancia con los desarrollos conceptuales que sustentan el marco teórico, la estrategia metodológica permite poner en relación el conocimiento obtenido como producto de una práctica profesional - en este caso la enseñanza de matemática en las aulas de la escuela secundaria - con las exigencias del proceso de investigación científica.

El diseño de investigación es de tipo cualitativo y, por lo tanto, conduce a una lógica inductiva o intensiva que propicia la experiencia, la observación y el análisis de los datos como modalidad para plantear conjeturas acerca de la realidad y para construir conocimientos en relación a ella.

Esta investigación nace en el marco de un problema práctico que se origina en la dificultad para enseñar el concepto de número irracional y busca una adecuada *eficacia local, particular* para resolverlo, dentro de las normas éticas y técnicas que rigen el *campo de la incumbencia profesional* de un profesor de matemática. Pero también se rige por los principios de *universalización* y *demostración* propios del *método científico.* En la medida en que se trata de i) producir un conocimiento no meramente circunstancial sino *general,* es decir exportable a otros tiempos y a otros espacios; y ii) de hacer valer en el dominio público una comprensión del objeto/ problema según los modelos teóricos aceptables, se está respondiendo a los criterios que rigen la producción de conocimiento científico. Nada impide que un proyecto de intervención profesional se proponga, simultáneamente, resolver un problema de la realidad y producir un conocimiento en el marco de los cánones de la ciencia. Nada impide tampoco que los resultados o las ideaciones producidas durante la ejecución de una práctica profesional se transformen en fuentes de inspiración para nuevos desarrollos teóricos. [2]

Asimismo, este posicionamiento epistémico – metodológico se propone efectivizar una mediación entre teoría y práctica, en este caso entre un concepto teórico (los números irracionales) y sus dificultades prácticas para la enseñanza, fuertemente proclamada como una fase fundamental del ejercicio de la docencia, no sólo porque actualiza y

[2] Cf. Samaja, J. (2003) *Epistemología y Metodología. Elementos para una teoría de la investigación científica.* pp. 34-35. Buenos Aires: Eudeba.

dinamiza el desempeño profesional sino también por sus efectos institucionales en términos de retroalimentación y mejora.

Dentro de esta estrategia general se delinean las diversas técnicas de producción, relevamiento y análisis de la información que se generarán en los sucesivos momentos y fases de esta investigación, a la vez que permiten identificar las unidades de análisis.

Primer momento

Durante el ciclo lectivo 2019 se seleccionaron dos cursos paralelos (A y B) del 2° año de una escuela secundaria de la Ciudad Autónoma de Buenos Aires, cada uno a cargo de una docente de matemática distinta. En ambos casos se enseña el concepto de número irracional y se comparan y analizan los datos relevados con las herramientas conceptuales explicitadas en el marco teórico y en relación con las hipótesis que orientan la investigación.

Complementariamente se analizan:

- la propuesta y los textos escolares en circulación, utilizados como soporte para la enseñanza por la docente del curso A
- los recursos didácticos y situaciones de enseñanza especialmente construidos/ diseñados por la docente del curso B;

Fase I

En el curso A se enseña el concepto de número irracional de un modo convencional y expositivo, se presentan su definición y algunos ejemplos, teniendo como base el libro de texto.

En el curso B se enseña el mismo concepto desde una perspectiva socio-histórica, primero en su vinculación con un problema del campo de la geometría y luego en sus sucesivas reconceptualizaciones.

Fase II

Se obtienen registros observacionales de las clases de los cursos A y B, de los intercambios que tienen lugar, de las preguntas, relaciones que se establecen, ejercitaciones de comprensión y aplicación. Se compara y analiza la información relevada.

Fase III

En el curso A y B se toman las mismas evaluaciones. Se tabulan y analizan las respuestas de los estudiantes.

Segundo momento

A partir de la comparación del desempeño de los estudiantes de ambos cursos en la evaluación se procede a organizar los datos empíricos de modo de dar cuenta de las hipótesis que orientaron la investigación. Dado que se trata de una intervención didáctica fundada en los cánones de la producción de conocimiento científico, este momento está orientado a ampliar el conocimiento disponible acerca de las dificultades de aprendizaje que se advierten en los estudiantes frente a ciertos conceptos que requieren mayores procesos de abstracción, y en los que la comprensión intuitiva se muestra insuficiente y obstaculizante.

Se tratará pues de exponer componentes teórico-empíricos tendientes a demostrar que una propuesta de enseñanza atenta a las dificultades de aprendizaje de un concepto favorece los procesos cognitivos para su comprensión y aprehensión.

Capítulo 6

El tratamiento del concepto de número irracional en los textos escolares para la escuela secundaria

En el siguiente capítulo se analizará brevemente de qué manera los números irracionales son tratados por los libros de texto y cómo el DME influye y dificulta la comprensión de dicho concepto.

Uno de los recursos didácticos más utilizados en la escuela media son los libros de texto, ya sea por considerarlos objeto de estudio o como material de consulta. A lo largo de los años, las características de los libros de texto fueron cambiando, como así también los contenidos y la forma de tratarlos. Los libros de texto más antiguos contaban con una explicación teórica muy exhaustiva, incluyendo en algunos casos demostraciones y distintos ejemplos y, a continuación, una gran cantidad de ejercicios para que los estudiantes realicen aumentando cada vez más la complejidad de los mismos.

En los últimos años la edición de los libros de texto escolares utilizados para el nivel secundario fue modificándose, cambiando la estructura, el diseño, las explicaciones e incluso los ejercicios propuestos para que los alumnos desarrollen. Las definiciones son más breves, los ejemplos sencillos y casi no se encuentran demostraciones. En algunos casos se proponen demostraciones para que los alumnos las realicen y justifiquen el tema tratado, sea éste una propiedad, teorema, corolario etc.

Si bien el objetivo de esta investigación no es hacer una comparación entre los libros de texto que se utilizaban hace 30 años y los actuales, sí resulta pertinente señalar su transformación y el lugar que ocupan en la enseñanza. En este sentido, se analizará la propuesta de algunos libros de texto publicados en los últimos años con el fin de ver cómo es abordado el tema de números irracionales, la explicación, el desarrollo y las actividades planteadas.

En particular, la descripción y el análisis se centrarán en los libros de las editoriales Kapelusz, Puerto de Palos y Santillana. La elección de dichos libros de texto resulta de conversaciones sostenidas con colegas de distintas escuelas, todos docentes de 2do año en la Ciudad Autónoma de Buenos Aires, con la intención de saber qué textos utilizan habitualmente en sus clases o como consulta para confeccionar el material de trabajo para los estudiantes.

A continuación, se hará una breve descripción y un análisis de la estructura con la que los textos escolares abordan el concepto de número irracional y el desarrollo de actividades de aplicación.

Los libros de texto escolares que se analizarán son:

- Abálsamo, R., Berio, A., Kotowski, C., Liberto, L., Mastucci, S. y Quirós, N. (2013). *Matemática 3. Activados.* 1a ed. San Isidro: Puerto de Palos.
- Borgnino, R. y Ledesma, J. (2020). *Con todos los números III: actividades de matemática.* 1a ed. Ciudad Autónoma de Buenos Aires: Santillana.
- Effenberger, P. (2010). *Matemática 3/9.* 1a ed. Buenos Aires: Kapelusz
- Romero G. y Pérez, M. (2012). *Matemática III.* 1a ed. Buenos Aires: Santillana.

Se comienza analizando el **índice** de los textos mencionados. Lo primero que cabe destacar es que en la mayoría de los libros elegidos, el tema "Conjunto de números irracionales" aparece como subtítulo dentro del capítulo "Números Reales", excepto en el libro de la editorial Kapelusz (Ver Figura 1).

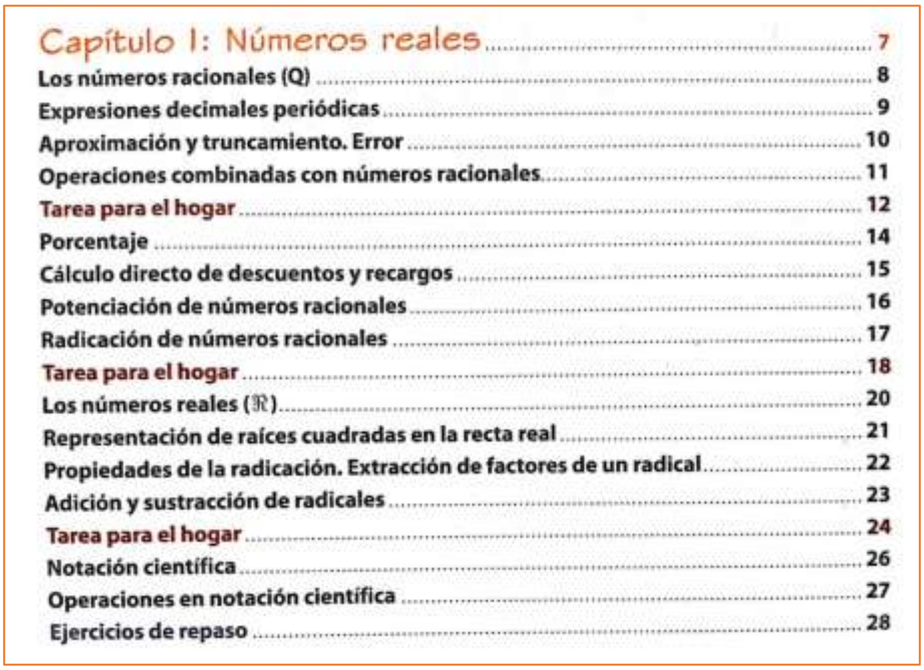


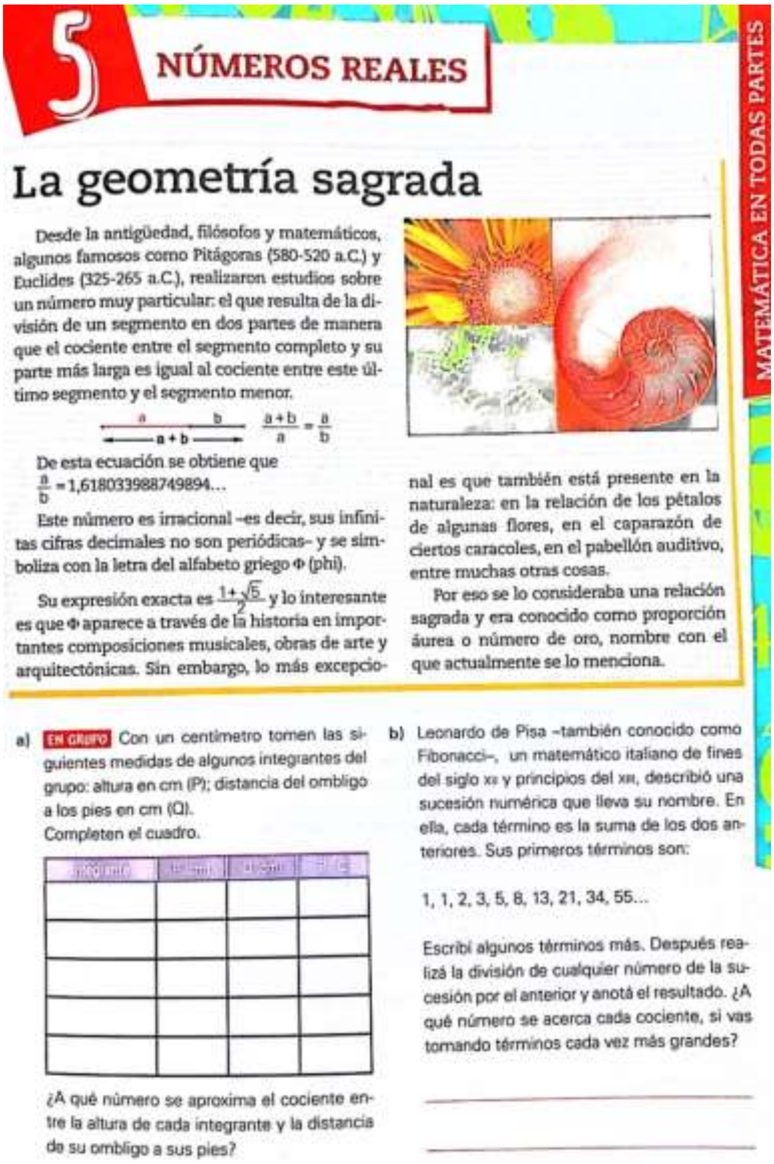
Figura 1: Índice libro de texto Ed. Kapelusz

Como se observa en la imagen anterior (Figura 1), el conjunto de números racionales aparece como subtítulo al comienzo del capítulo mientras que los números irracionales no están mencionados como tales, sino que se reitera como subtítulo “Los números reales”. Como veremos más adelante, la mención de los números irracionales surge en el desarrollo de este tema en la página 20.

En cuanto a la **introducción** del tema, los números irracionales no tienen ninguna contextualización previa en los textos de las editoriales Kapelusz y Puerto de Palos. En cambio, el texto de la editorial Santillana 2010 incluye una breve presentación del tema, en la que menciona al número de oro y lo vincula con la belleza, fotografía, arquitectura y naturaleza. Asimismo, plantea una situación en la que relaciona la cantidad infinita de cifras decimales con la extracción de bolillas de un bolillero, devolviendo cada bolilla por toda la eternidad. El objetivo es que se pueda diferenciar las infinitas cifras decimales no periódicas de un número irracional de las infinitas cifras decimales que puede tener un número racional que a partir de cierto momento, comienzan a repetir una o más cifras (Figura 2).

Figura 2: Introducción del capítulo “Números reales”. Ed Santillana 2010

Respecto de la edición Santillana 2020, la introducción aparece bajo el título “La geometría sagrada” en la que menciona a Pitágoras y Euclides y realiza una breve descripción del número de oro. Muestra la relación geométrica entre los segmentos cuyo cociente es el número ϕ, incluye la expresión exacta y por último, al igual que la edición anteriormente mencionada, destaca que este número puede aparecer en obras arquitectónicas, obras de arte, composiciones musicales y que está presente en la naturaleza. A continuación, como primer ejercicio para resolver en grupos, propone a los estudiantes que midan su altura y la distancia del ombligo a los pies y que completen una tabla. Como segundo ejercicio, dados los primeros términos de la sucesión de Fibonacci, se les propone a los estudiantes que escriban algunos términos más y, luego, calculen el cociente entre los términos consecutivos. En ambas actividades se busca que los alumnos puedan relacionar el número de oro con los resultados obtenidos en cada una de ellas (Ver Figura 3).



5 NÚMEROS REALES

MATEMÁTICA EN TODAS PARTES

La geometría sagrada

Desde la antigüedad, filósofos y matemáticos, algunos famosos como Pitágoras (580-520 a.C.) y Euclides (325-265 a.C.), realizaron estudios sobre un número muy particular: el que resulta de la división de un segmento en dos partes de manera que el cociente entre el segmento completo y su parte más larga es igual al cociente entre este último segmento y el segmento menor.

$$\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b}$$

De esta ecuación se obtiene que $\frac{a}{b} = 1{,}6180339887498{9}4\ldots$

Este número es irracional –es decir, sus infinitas cifras decimales no son periódicas– y se simboliza con la letra del alfabeto griego Φ (phi).

Su expresión exacta es $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ y lo interesante es que Φ aparece a través de la historia en importantes composiciones musicales, obras de arte y arquitectónicas. Sin embargo, lo más excepcional es que también está presente en la naturaleza: en la relación de los pétalos de algunas flores, en el caparazón de ciertos caracoles, en el pabellón auditivo, entre muchas otras cosas.

Por eso se lo consideraba una relación sagrada y era conocido como proporción áurea o número de oro, nombre con el que actualmente se lo menciona.

a) EN GRUPO Con un centímetro tomen las siguientes medidas de algunos integrantes del grupo: altura en cm (P); distancia del ombligo a los pies en cm (Q).
Completen el cuadro.

[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]

¿A qué número se aproxima el cociente entre la altura de cada integrante y la distancia de su ombligo a sus pies?

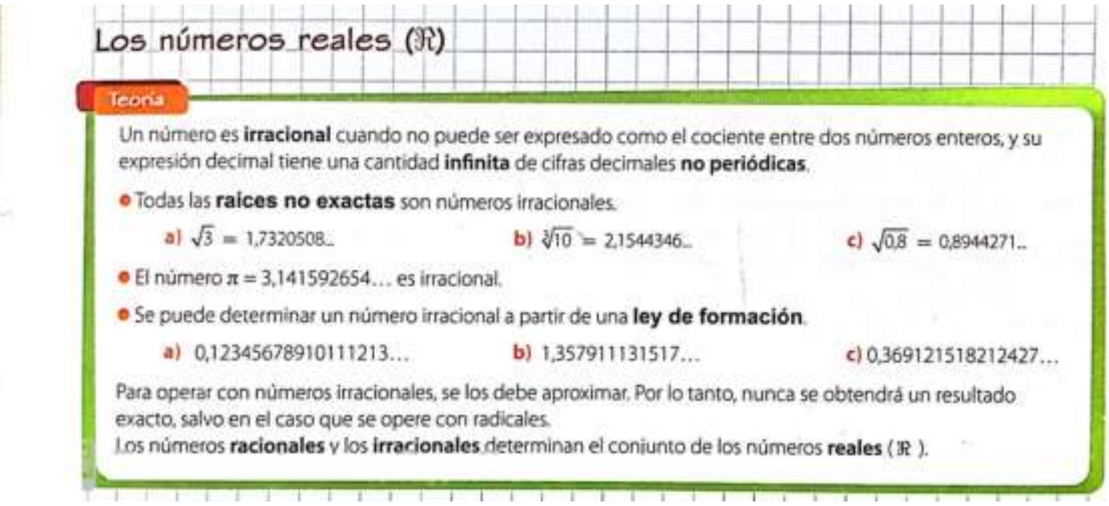
b) Leonardo de Pisa –también conocido como Fibonacci–, un matemático italiano de fines del siglo XII y principios del XIII, describió una sucesión numérica que lleva su nombre. En ella, cada término es la suma de los dos anteriores. Sus primeros términos son:

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55...

Escribí algunos términos más. Después realizá la división de cualquier número de la sucesión por el anterior y anotá el resultado. ¿A qué número se acerca cada cociente, si vas tomando términos cada vez más grandes?

Figura 3: Introducción al capítulo de “Números reales”. Ed. Santillana 2020.

Otro aspecto a destacar en el análisis de estos textos, es el referido a la **definición** de número irracional. Tanto en las ediciones de Kapelusz, Santillana 2010 y Santillana 2020, los números irracionales con definidos por lo que no son, es decir, aquellos números que no pueden ser expresados como el cociente entre dos números enteros, es decir que no pueden ser expresados como una fracción.



Los números reales ($\Re$)

Teoría

Un número es **irracional** cuando no puede ser expresado como el cociente entre dos números enteros, y su expresión decimal tiene una cantidad **infinita** de cifras decimales **no periódicas**.

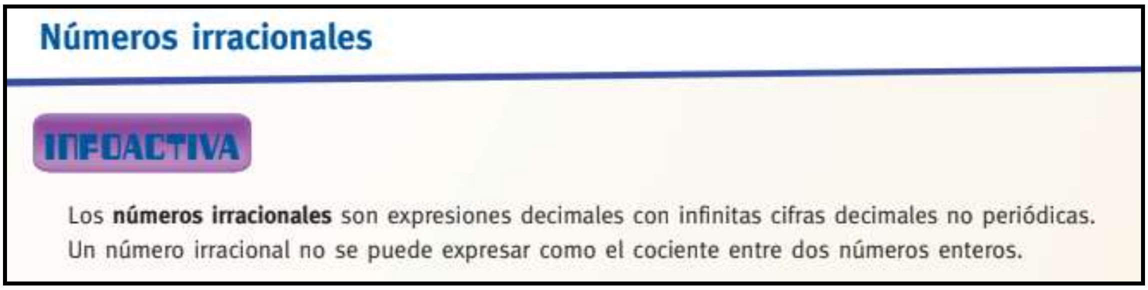
- Todas las **raíces no exactas** son números irracionales.
  - a) $\sqrt{3} = 1{,}7320508...$ b) $\sqrt[3]{10} = 2{,}1544346...$ c) $\sqrt{0{,}8} = 0{,}8944271...$
- El número $\pi = 3{,}141592654...$ es irracional.
- Se puede determinar un número irracional a partir de una **ley de formación**.
  - a) 0,12345678910111213... b) 1,357911131517... c) 0,369121518212427...

Para operar con números irracionales, se los debe aproximar. Por lo tanto, nunca se obtendrá un resultado exacto, salvo en el caso que se opere con radicales.
Los números **racionales** y los **irracionales** determinan el conjunto de los números **reales** ($\Re$).

Figura 4: Definición de número irracional. Ed. Kapelusz

La imagen del texto de Kapelusz (Figura 4) ilustra tanto la forma en que son definidos los números irracionales, como así también que no ocupan el lugar destacado de los números racionales. Se puede observar que su tratamiento es superficial y no tienen entidad propia, sino que son mencionados para completar el conjunto de números reales.

En la edición de Puerto de Palos, la definición comienza afirmando que son números con infinitas cifras decimales no periódicas y agrega que no pueden ser expresados como fracción (Figura 5).



Números irracionales

INFOACTIVA

Los **números irracionales** son expresiones decimales con infinitas cifras decimales no periódicas.
Un número irracional no se puede expresar como el cociente entre dos números enteros.

Figura 5: Definición de número irracional. Ed. Puerto de Palos.

A la hora de dar **ejemplos**, las ediciones de Puerto de Palos y Kapelusz, incluyen raíces no exactas, los números creados a través de una ley de formación y el número π. En cambio, en ambas ediciones de Santillana, se proponen raíces no exactas y agregan al número π, el número de oro y el número e. Los irracionales creados por una ley de formación los presenta como parte de la ejercitación.

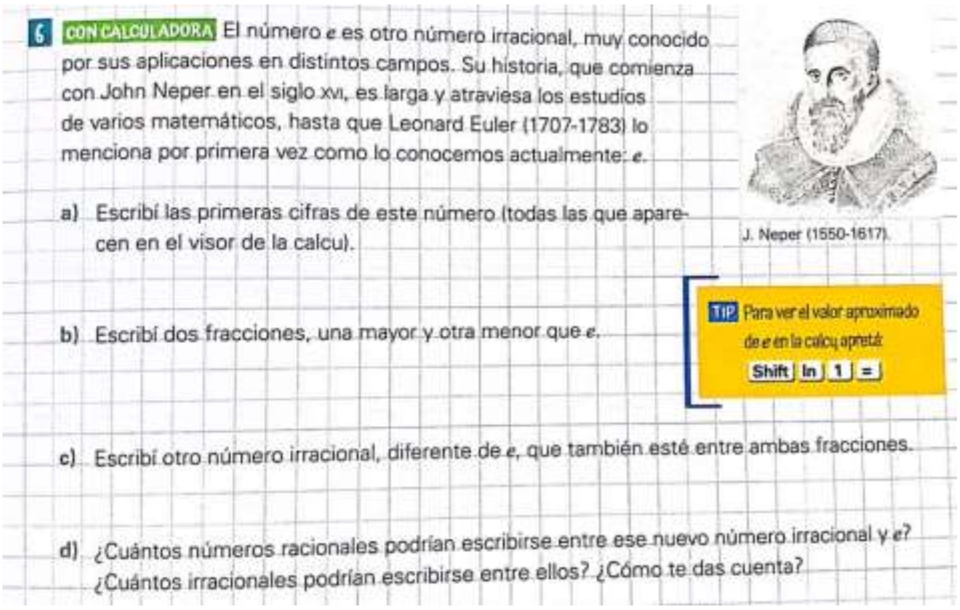
La **ejercitación** en los cuatro textos tiene distintas propuestas en cuanto al orden de los contenidos y prioridad de los temas; sin embargo, todos coinciden en iniciar con la diferenciación entre números racionales e irracionales.

En el libro de editorial Kapelusz, inmediatamente después de la definición, ejemplificación e identificación, se continúa con la teoría de "Intervalos reales" y de "Representación de raíces cuadradas en la recta real" con dos o tres ejercicios de aplicación para cada tema. Luego, sigue con las "Propiedades de la radicación", "Extracción de factores de un radical", "Adición y sustracción de radicales" y "Notación científica" con ejercicios específicos para estos contenidos.

La ejercitación propuesta por el texto de Puerto de Palos propone representar raíces no exactas en la recta numérica, algunos ejercicios relacionados al orden y a la propuesta de números creados a partir de una ley de formación. También incluye un ejercicio para operar con radicales, aunque las propiedades algebraicas no están expuestas como material teórico. Más adelante, aparecen temas como "Aproximación" y "Notación científica" y cierra el capítulo con "Intervalos reales".

La ejercitación en la edición de Santillana 2010 también propone ejercicios que incluyen orden, creación de números por ley de formación y representación en la recta numérica. Sin embargo, a diferencia del texto anterior, las operaciones con radicales son mucho más exhaustivas (similares a las de Kapelusz) incluyendo racionalización de denominadores. Más adelante se avanza con "Aproximaciones" e "Intervalos reales".

Por último, el texto de editorial Santillana 2020, incluye ejercicios integradores que apelan a funciones cognitivas más complejas que la ejercitación por repetición. Cabe destacar que dentro de las propuestas planteadas, aparecen datos históricos (Ver Figura 6), problemas de aplicación y curiosidades acerca de los números irracionales (Ver Figura 7), sin dejar de lado la ejercitación "tradicional" que incluye operaciones sencillas con radicales, aproximación de números decimales e intervalos reales.



6 CON CALCULADORA El número e es otro número irracional, muy conocido por sus aplicaciones en distintos campos. Su historia, que comienza con John Neper en el siglo XVI, es larga y atraviesa los estudios de varios matemáticos, hasta que Leonard Euler (1707-1783) lo menciona por primera vez como lo conocemos actualmente: e.

J. Neper (1550-1617).

a) Escribí las primeras cifras de este número (todas las que aparecen en el visor de la calcu).

b) Escribí dos fracciones, una mayor y otra menor que e.

TIP Para ver el valor aproximado de e en la calcu, apretá: Shift ln 1 =

c) Escribí otro número irracional, diferente de e, que también esté entre ambas fracciones.

d) ¿Cuántos números racionales podrían escribirse entre ese nuevo número irracional y e? ¿Cuántos irracionales podrían escribirse entre ellos? ¿Cómo te das cuenta?

Figura 6: Ejercicio con aporte histórico. Ed. Santillana 2020.

2 TARJETAS MAGNÉTICAS. Cuando se fabricaron las primeras tarjetas magnéticas, se pensó en que tuviesen dimensiones ideales, casi perfectas. Para eso se les dio a sus lados una relación particular.
Las tarjetas usadas actualmente, como las de crédito y débito, la SUBE, o el DNI, mantienen esa misma relación. Elegí una, medí sus lados y dividí la medida mayor por la menor. ¿A qué número irracional se aproxima ese cociente?

Figura 7: Ejercicio Ed. Santillana 2020.

Los textos analizados de las editoriales Kapelusz, Puerto de Palos y Santillana 2010, siguen una secuencia didáctica lineal y convencional y las actividades de aprendizaje se presentan como ejercitaciones aisladas entre sí que no promueven el establecimiento de relaciones ni la comprensión integral de los conceptos.

Para finalizar este análisis, se puede decir que la propuesta del libro de texto de Santillana 2020 se adapta mejor a los contenidos, alcances y sugerencias formulados en el diseño curricular de la NES, ya que no hace tanto hincapié en el cálculo con radicales sino que le da mayor importancia a que los estudiantes profundicen sobre el conjunto de números irracionales. En este sentido, las actividades de aprendizaje siguen una secuencia didáctica espiralada o recursiva que permite integrar, progresivamente, los temas vistos. Simultáneamente, este libro de texto se transforma en un recurso para los docentes al promover una enseñanza de la matemática centrada en la reconstrucción activa del conocimiento.

Capítulo 7

Desarrollo del trabajo de campo

7.1 Fase I

La investigación se lleva a cabo en una escuela media de la Ciudad Autónoma de Buenos Aires en dos cursos paralelos de 2do año (A y B) cada uno a cargo de una profesora de matemática distinta.

El curso A está formado por 40 alumnos, mientras que el curso B, cuenta con 38. En ambas divisiones, los estudiantes tienen entre 14 y 15 años y se caracterizan por su heterogeneidad en cuento al rendimiento académico y al interés que muestran respecto de la materia.

La investigación se focaliza en la enseñanza del número irracional en lo que refiere a su presentación, definición y comprensión. Este contenido corresponde a la Unidad 1 de la programación de los cursos A y B y se continúa con métodos de aproximación, intervalos reales e inecuaciones que no serán objeto de análisis, como así tampoco el conjunto de números racionales que constituye parte de los contenidos previos.

En el curso A se enseña el concepto de número irracional de un modo tradicional y expositivo. La docente se basa en las definiciones y ejercicios propuestos en el libro de texto y amplía la ejercitación con su cuadernillo/guía de actividades.

En lo que respecta al curso B, en éste se enseña el mismo concepto desde una perspectiva socio-histórica, abordándolo desde el campo de la geometría y luego, considerando las sucesivas reconceptualizaciones.

A continuación se presenta un recorte de la planificación de ambos cursos (Tabla 1 y 2 respectivamente) en la cual se advierte que si bien los contenidos y la evaluación coinciden, no así los objetivos y las actividades de aprendizaje porque responden a diferentes enfoques de enseñanza.

7.1.1 Planificación didáctica curso A:

Unidad didáctica 1: Números Reales			
Objetivos	Contenidos	Actividades	Evaluación
Que el alumno: *Conozca la necesidad de la creación de los distintos conjuntos numéricos. *Identifique los distintos conjuntos numéricos .	*Definición de número irracional. Ejemplificación. *Identificación y clasificación de números según al conjunto numérico al cual pertenecen.	*Resolución de ecuaciones. *Identificación de conjuntos numéricos.	*Identificación de números irracionales. *Identificación de números irracionales dentro del campo de la geometría. *Resolución de problemas aplicando el teorema de Pitágoras.

Tabla 1: Planificación didáctica curso A

Cabe destacar que las experiencias, situaciones y datos recolectados del curso A para su posterior análisis fueron recabados a partir de observaciones de las clases y entrevistas semanales con la docente a cargo de dicho curso.

7.1.2 Planificación didáctica curso B:

Unidad didáctica 1: Números Reales			
Objetivos	Contenidos	Actividades	Evaluación
Que los estudiantes: * aborden el concepto de número irracional desde distintos campos de la matemática. *Valoren la perspectiva socio-histórica de origen	*Definición de número irracional. Ejemplificación. *Identificación y clasificación de números según al conjunto numérico al cual pertenecen	*Análisis de las definiciones encontradas en sitios de internet. *Experiencia para ver la relación entre diámetro, longitud de una circunferencia y el número л.	*Identificación de números irracionales. *Identificación de números irracionales dentro del campo de la geometría. *Resolución de problemas aplicando el teorema de

y evolución del concepto de número irracional. *identifiquen distintos conjuntos numéricos.		*Lectura y debate de una reseña histórica del número л, raíces no exactas y número de oro. *Aplicación del teorema de Pitágoras. *Trabajo práctico grupal de investigación y profundización.	Pitágoras.

Tabla 2: Planificación didáctica curso B

7.2 Fase II

7.2.1 Introducción del número irracional de manera expositiva

A continuación se describirán las clases observadas del curso A en las que se introduce el concepto de número irracional y se desarrollan las actividades de aplicación, destacándose algunos diálogos entre los estudiantes y la docente.

Clase 1: (Duración 80 minutos)

La profesora del curso A plantea en el pizarrón una ecuación:

$$x^2 + 5 = 7.$$

Los valores de x que verifican dicha igualdad son $\sqrt{2}$ $y - \sqrt{2}$. Los estudiantes conocen el concepto de módulo ya que han resuelto ecuaciones de potencia par, obteniendo siempre raíces exactas, ya sea de números enteros o números racionales.

Comienzan a resolver la ecuación en conjunto, los alumnos proponen los pasos a seguir. Hacia el final de la resolución el último paso que aparece en el pizarrón es: $x^2 = 2$. La profesora hace una pausa.

Estudiante 1: Está mal lo que hicimos, ahora cuando despejamos la x, queda raíz cuadrada de dos y no se puede resolver.

El curso comienza a alborotarse, los alumnos comienzan a dudar sobre el desarrollo dado que estiman que la solución no puede ser correcta. Otra alumna, mientras escribe en su carpeta, afirma:

Estudiante 2: Pero lo que hicimos está bien, no encuentro el error. ¡Profe, ayudanos!

Estudiante 3: ¡Se hace con la calculadora, el resultado da con coma!

La profesora los ayuda a terminar la ecuación. Les revela que está bien el desarrollo realizado y escribe en el pizarrón las dos soluciones. Explica que se trata de números irracionales, un nuevo conjunto numérico para ellos.

A continuación, la docente dicta la definición de número irracional que aparece en el libro de texto que utiliza (Editorial Kapelusz, analizado anteriormente) y enumera algunos ejemplos de números irracionales: raíces no exactas y el número π.

Algunos de los estudiantes recordaban haber utilizado el número π en la primaria para calcular la superficie del círculo pero no lo recordaban con exactitud. Otros, asociaron el número π con su aproximación, 3,14.

Estudiante 4: ¡Profe! En la primaria calculábamos algo con el número π pero no me acuerdo.

Estudiante 5: Si, algo del círculo.

La profesora les expone que el número π se utiliza para calcular la longitud de una circunferencia y para calcular la superficie del círculo mientras en simultáneo escribe ambas fórmulas en el pizarrón: $L = 2.\pi.r$ $S = \pi.r^2$

Más adelante, explica que los números racionales junto con el conjunto de números irracionales forman el conjunto de números reales. Cierra la clase realizando un diagrama de Venn de dichos conjuntos numéricos.

Clase 2: (Duración 80 minutos)

La docente propone que los estudiantes resuelvan en parejas los siguientes ejercicios planteados en la guía de actividades confeccionada por ella para, posteriormente, realizar la puesta en común.

1) 1.1.Completa con $\in$ o $\notin$ según corresponda:

a) $-\frac{3}{2}$......Z b) $\sqrt{5}$....R c) $-0,\hat{8}$.....I d) $1,2$....Q

e) $-0,2$....R f) $\sqrt{7}$....I g) $\frac{3}{4}$......N h) $1,\hat{6}$.....I

1.2. Marca con una cruz TODOS los conjuntos numéricos a los que pertenecen cada número

	N	Z	Q	I	R
$2,\widehat{36}$					
$-3.\sqrt{4}$					
$2.\pi$					
$\sqrt{17}$					

El primer ejercicio que propone tiene como objetivo que los estudiantes identifiquen si los números pertenecen o no a distintos conjuntos numéricos. Los alumnos no muestran dificultades para distinguir la relación de pertenencia del ejercicio 1.1 aunque fue necesario, antes de comenzar con la resolución, explicar la notación $\in$ (pertenece) y $\notin$ (no pertenece) ya que no la conocían.

Por el contrario, al momento de la corrección, el ejercicio 1.2 generó algunos intercambios de ideas entre los estudiantes y la docente.

Estudiante 1: El primero ($2,\widehat{36}$) es fácil. Cómo es periódico, se puede pasar a fracción.

Profesora: Muy bien, ¿y qué pueden decir acerca de las cifras decimales?

Estudiante 2: Que son infinitas…

Estudiante 1: Que se repite siempre la misma cifra, no son distintas

Profesora: Claro, si bien las cifras decimales son infinitas, a diferencia de los números irracionales, estas cifras se repiten periódicamente.

Los estudiantes no muestran tener dudas con lo expuesto y continúan con la corrección.

El siguiente número, $-3.\sqrt{4}$, puso de manifiesto algunos inconvenientes. La primera dificultad que tuvieron fue que los estudiantes no identificaron que se trataba de un producto y, si lo identificaban, no sabían cómo resolverlo.

Ante esta duda, la profesora pregunta:

Profesora: ¿Qué tipo de operación se plantea?

Estudiante 3: Una multiplicación…

Profesora: Muy bien, uno de los factores es -3 ¿y el otro?

Estudiante 4: $\sqrt{4}$

Estudiante 5: Pero se puede resolver, es 2.

Profesora: Excelente, entonces ¿cuál es el resultado?

Estudiante 5: El resultado es – 6.

Estudiante 3: Eso es un número entero.

Profesora: ¿A qué conjunto numérico pertenece?

Estudiante 5: Es un número racional.

Profesora: ¡Muy bien! ¿y qué ocurre con el siguiente?

Estudiante 3: También es una multiplicación.

Profesora: ¿Cuál es el resultado?

Luego de pensar un instante:

Estudiante 6: (con la calculadora en la mano) es 6,28.

La profesora le hace notar que el resultado que obtuvo no está del todo correcto dado que se podría decir que está incompleto y le pide que justifique el cálculo que realizó. Al explicar que hizo 2 por 3,14 el estudiante se dio cuenta que no consideró las infinitas cifras decimales que tiene el número π, es decir que utilizó una aproximación; por lo tanto, el producto obtenido también será una aproximación. La profesora explica que dado que uno de los factores es un número irracional, el producto también lo será.

Con respecto al último número propuesto: $\sqrt{17}$, los estudiantes identificaron que es un número irracional ya que se trataba de una raíz no exacta. Así mismo, muchos utilizaron la calculadora para "resolver" dicha raíz y de esa forma, poder llegar a la conclusión.

Finalizando la clase, la profesora les deja a los chicos un ejercicio para que resuelvan para la clase siguiente:

> *Identificar los conjuntos numéricos a los que pertenecen los siguientes números:*
>
> *a)* $5\sqrt{8}$ *b)* $\pi + 1$ *c)* $\sqrt{3} - \sqrt{3}$

En el siguiente encuentro, luego de realizar la puesta en común del ejercicio pendiente, la profesora desarrolla los métodos de aproximación de números decimales, redondeo y truncamiento.

Más adelante, en las clases sucesivas, explica el concepto de intervalo real y continúa con inecuaciones, con las que se pretende englobar los temas trabajados previamente y que los estudiantes apliquen lo aprendido.

Si bien hubo una respuesta favorable por parte de los estudiantes ante las actividades propuestas no es posible afirmar que haya habido una comprensión de la complejidad del concepto de número irracional. Tanto las preguntas orientadoras que formula la docente como el tipo de ejercitación propuesto conducen a la búsqueda de un resultado que neutralice el malestar e incomodidad cognitiva que provocan este conjunto numérico.

7.2.2. Introducción del número irracional desde una perspectiva socio- histórica

Se presentan a continuación las clases correspondientes al curso B en las que, de la misma manera, se expondrán las actividades de aprendizaje propuestas y se destacarán algunos diálogos entre la docente y los estudiantes.

Clase 1: (Duración 40 minutos)

Antes de seguir avanzando con los contenidos, se consideró necesario realizar un repaso de lo trabajado hasta el momento. La clase anterior los estudiantes habían rendido el examen de la primera parte de la unidad que incluía operaciones combinadas con números racionales, propiedades, ecuaciones y situaciones problemáticas.

Profesora: Antes de seguir avanzando vamos a hacer un repaso de los conjuntos numéricos. ¿Con qué tipo de números comenzaron a trabajar? ¿Cuál fue el primer conjunto numérico que estudiaron?

Estudiante 1: Con el 1, 2, 3….

Estudiante 2: Los números naturales

Profesora: Muy bien. Luego, ¿qué tipo de números se agregaron?

Estudiante 2: Los números negativos

Profesora: Los números naturales junto con los enteros negativos y el cero forman el conjunto de números enteros.

Simultáneamente se trazaba en el pizarrón una recta numérica en la que se ubicaron algunos números a modo de ejemplo.

Profesora: ¿Por último, con qué conjunto numérico trabajaron?

Estudiante 1: Con los números con coma

Estudiante 3: Con fracciones

Estudiante 4: Números racionales

Para dar un cierre a este intercambio, se les recuerda a los estudiantes que estos conjuntos numéricos surgieron hace muchos años por necesidad para resolver distintas situaciones problemáticas de la vida cotidiana y agrega que, a pesar de que la cantidad de números que ellos nombraron es infinita, todavía la recta numérica no está completa.

Se les explica que para completar la recta necesitamos otro conjunto numérico: el conjunto de números irracionales. Inmediatamente se les propone la siguiente actividad:

Buscar en el buscador del teléfono celular la definición de número irracional, características, etc. Las distintas respuestas obtenidas se anotarían en el pizarrón con la condición de no repetirlas.

Estudiante 1: (Lee) Los números irracionales son aquellos que no se pueden expresar como una fracción

Estudiante 2: Yo encontré que son los que no se pueden expresar como el cociente entre dos números enteros

Estudiante 3: $\sqrt{2}$ es un número irracional

Estudiante 4: Pero al final, ¿qué son?

Profesora: Hasta el momento las definiciones que dieron nos dicen lo que no son, sigan buscando…

Se registran dichas definiciones en el pizarrón.

Estudiante 4: Claro, no dice lo que sí son…

Estudiante 5: Acá dice que son números decimales con infinitas cifras decimales no periódicas.

Estudiante 4: Ahhh como tienen infinitas cifras decimales ¿no se pueden pasar a fracción?

Estudiante 5: Pero los números periódicos tienen infinitas cifras decimales y sí se pueden pasar a fracción

Profesora: Tengan en cuenta que las cifras decimales de los números periódicos son infinitas pero se repiten. ¿De qué manera indicábamos que la o las cifras de un número periódico se repiten?

Estudiante 6: ¡Con el arquito arriba!

Se recuperan las respuestas de los estudiantes y, a modo de cierre de la clase, se destaca la diferencia entre números racionales y números irracionales y se explica que ambos conjuntos numéricos forman el conjunto de números reales.

En simultáneo se escucha: "¿Ahí termina o hay más números?". A modo de chiste otro compañero le responde: "¡Están los irreales!". La profesora recoge la inquietud y explica que existe otro campo numérico, el conjunto de números imaginarios o complejos, que estudiarán en los años siguientes.

Antes de finalizar, se les pide que para la próxima clase traigan un objeto cilíndrico, como por ejemplo tapa de frasco, molde de torta, un CD, etc. y un cordón o hilo para llevar a cabo una experiencia.

<u>Clase 2</u>: (Duración 80 minutos)

Para comenzar con la clase, se pide que presenten los materiales solicitados. Si bien la mayoría contaba con el material, otros improvisaron el material recurriendo a objetos disponibles en el aula como por ejemplo, con un rollo de cinta adhesiva, el frasco de la cola vinílica o un simplemente dibujando una circunferencia en una hoja de carpeta.

Se les propuso en primer lugar que con el hilo o cordón bordeen cuidadosamente y exactamente el contorno de su objeto cilíndrico -o eventualmente su dibujo-, desplieguen el hilo sobre una regla o cinta métrica y registren la longitud. En segundo lugar, se les pidió que midan el diámetro de dicha circunferencia de forma aproximada y finalmente, que calculen el cociente entre ambas medidas registradas.

Mientras se daban las consignas, la profesora mostraba a los alumnos, con una tapa de una caja cilíndrica grande, que puedan visualizar, de qué forma debían manipular el hilo, revisar la tensión del mismo, ayudarse con distintas herramientas ya sea cintas, marcas con lapicera o marcador, colaboración de otro compañero, etc. También se les proporcionó elementos de geometría como reglas de pizarrón y cintas métricas por si era necesario.

Posteriormente, se recordó el concepto de diámetro puesto que muchos lo confundían con el concepto de radio. Se les aclaró que el diámetro es el segmento que pasa por el centro de la circunferencia y que en nuestro objeto no estaría marcado dicho centro, por lo que la medición debería ser aproximada pero lo más cercana y prolija posible.

Los estudiantes midieron sin dificultades y registraron lo obtenido en sus carpetas. Mientras tanto, se recorría el aula viendo si tenían alguna duda o consulta. Al momento de calcular el cociente, muchos se dieron cuenta de lo que estábamos buscando, mientras que otros no. Uno de los estudiantes, al dividir dice:

- Profe, me dio 15, 4
- Mmm, revisá la división
- Mirá, lo hice bien. (Realiza la división con la calculadora)
- Entonces, debes medir de nuevo con más cuidado…

El estudiante mide nuevamente.

- ¡Sí! ¡Medí cualquier cosa! ¿Cómo sabías que estaba mal?
- En un ratito lo vamos a ver…

Una vez que todos terminan se procede a realizar la puesta en común y se registran en el pizarrón algunos de los resultados obtenidos:

Sofía: 3,20
Pedro: 3, 15
Santiago: 3, 18
Santino: 3, 35
Micaela: 3, 10
María Paz: 3
Candela: 3, 14
Agustina: 3, 22
Ignacio: 3,165

Antes de que la profesora comience el análisis, uno de los chicos exclama:

- Todos empiezan con tres coma algo
- ¡Bien! Con este procedimiento estamos “calculando algo” en particular. Y si les digo que la que estuvo más cerca fue Candela… ¿Saben de qué se trata?

La mayoría responde simultáneamente: El número Pi

- ¿Cómo se dieron cuenta?
- Por el resultado 3,14.

Se explica que el número л es un número irracional, que tiene infinitas cifras decimales, y que 3, 14 es su valor aproximado. Generalmente en la primaria o en los primeros años de la secundaria se utiliza para calcular la longitud de una circunferencia o la superficie de un círculo.

Se les preguntó al grupo de alumnos si alguna vez habían trabajado con el número л. La mayoría respondió que sí (solo 8 estudiantes de 42 presentes no lo conocían o no lo recordaban). Se indagó si conocían la relación entre la longitud de la circunferencia, el diámetro de la misma y el número л. Ninguno sabía de dicha relación, aunque en la escuela primaria hubieran calculado la longitud de la circunferencia y la superficie de un círculo.

Antes de que termine la clase se les anticipó que se seguiría estudiando este número y su historia.

Clase 3: (Duración 40 minutos)

Se les hace entrega de un texto con una breve reseña histórica del número л. (Anexo 1)

Se propuso que se agrupen de a dos o de a cuatro integrantes para que hagan una lectura y que anoten en los márgenes las ideas principales de cada párrafo. Así mismo, se les pidió que anoten las dudas y registren lo que más les llamó la atención.

Al cabo de quince minutos se hizo la puesta en común.

El propósito de la reseña histórica es que los estudiantes conozcan el origen del número π y el arduo trabajo que los matemáticos le dedicaron. Si bien es una reseña muy breve, los chicos desconocían la mayoría de los datos.

En la puesta en común se destacaron las siguientes ideas:

- Se caracterizó las civilizaciones egipcia y mesopotámica y se recuperó lo que habían trabajado con la profesora de historia el año anterior.
- El procedimiento que utilizó Arquímedes para aproximar el número л. Se habló sobre los aportes de este matemático en el campo de la matemática y física y se contó de dónde provenía la expresión “Eureka”
- Se comentó sobre la obra de Leonardo Da Vinci, Hombre de Vitruvio, en la que realiza un estudio de las proporciones del cuerpo a partir de los textos del arquitecto romano, de quien toma su nombre.

- A algunos de los alumnos les llamó la atención que al número π se lo haya nombrado de ese modo en el siglo XVIII, siendo que se trabaja con él desde la antigüedad.

Clase 4: (Duración 80 minutos)

Se les hace entrega de un texto con una breve reseña histórica acerca de las raíces no exactas, en particular de $\sqrt{2}$ (Anexo 2).

De la misma manera que se desarrolló la clase anterior, se realizó una lectura conjunta y se destacaron y profundizaron oralmente temas como:

- El procedimiento que utilizaban los babilonios para hallar las cifras decimales de una raíz no exacta.
- Que es posible hallar una aproximación sin necesidad de utilizar la calculadora
- Las controversias que trajo aparejado el descubrimiento de la $\sqrt{2}$ en la escuela pitagórica y sus consecuencias en el ámbito de esa academia.
- La importancia del teorema de Pitágoras y su vigencia en la actualidad.

Si bien los estudiantes trabajaron con el teorema de Pitágoras el año anterior, se explicó nuevamente la fórmula y se profundizó sobre su surgimiento, proponiendo algunos ejemplos con números enteros.

Una vez finalizada la lectura y la puesta en común, se plantean en el pizarrón los siguientes ejercicios para que los alumnos realicen con el compañero de banco:

1) *Calcular la medida de la diagonal de un rectángulo sabiendo que su base mide 5 cm y la altura 3 cm.*
2) *Ubica en la recta numérica el resultado obtenido.*

Al cabo de algunos minutos, se escuchó el primer comentario que dio lugar al siguiente intercambio:

- El primero no me da, me da con coma
-¿Y tiene sentido que el resultado te dé con coma? ¿Es posible?
- (Dudando) Sí…
El compañero de banco agrega:
- Sí, porque es la medida de un segmento…
-Es lo que le pasó a Pitágoras, que le dio un número irracional
-Exactamente. Continúen y en un ratito lo ponemos en común, dice la profesora.
- ¿Qué pongo? ¿Pongo 5,83?

Se les indica a estos estudiantes que continúen trabajando en sus carpetas y aguarden hasta que se realice la corrección grupal. Al tratarse de un curso tan numeroso, es frecuente que algunos se adelanten y respondan lo pedido rápidamente mientras que otros, recién se disponen a trabajar.

Se da el espacio para que sigan trabajando y comienzan a surgir algunas inquietudes con respecto al ejercicio 2. Se les sugiere que realicen una figura de análisis para ayudarse y orientar la resolución.

Trascurridos 30 minutos, se inicia la puesta en común y la corrección grupal.

Los estudiantes comienzan a contar de qué manera resolvieron el ejercicio 1. En primer lugar, se realiza en el pizarrón una figura de análisis y se vuelcan los datos. A partir, del teorema de Pitágoras, se resuelve y se obtiene la longitud de la diagonal buscada: $\sqrt{34}$. En este momento se retoma la pregunta realizada anteriormente: "¿Qué pongo? ¿Pongo 5,83?". Luego de un breve debate se llega a la conclusión de que 5,83 es la aproximación de $\sqrt{34}$, que se trata de una raíz no exacta y que el resultado debe expresarse de esa manera.

Con respecto al ejercicio 2, los chicos ubicaron de forma aproximada 5,83 sobre la recta numérica.

Para visualizar el error entre la ubicación aproximada y la ubicación del número irracional se procede a realizar la construcción. Con la ayuda de un compás, se toma la medida de la diagonal del rectángulo y se traslada a la recta numérica anterior. Los estudiantes reconocen así la diferencia entre el número irracional y su aproximación.

Clase 5: (Duración 80 minutos)

Al comenzar la clase se entrega a cada uno de los estudiantes un texto con una breve reseña histórica sobre el número de oro (Anexo 3)

Teniendo en cuenta que más adelante los alumnos realizarían un trabajo práctico domiciliario de investigación, se hizo hincapié sobre algunas curiosidades que tiene este número irracional tan especial. Se buscó generar cierta atracción hacia otra arista de la matemática, en este caso acerca de los números. El texto se leyó y trabajó con todo el grupo clase y con intervenciones sucesivas por parte de la docente para profundizar o ampliar ciertos aspectos.

En primer lugar, se buscaron algunos datos con la ayuda de los teléfonos celulares sobre Leonardo de Pisa, lugar y época en la que vivió, se conversó sobre el contexto histórico (previamente se coordinó con la profesora de historia para que las explicaciones sobre ese período histórico se aborden en forma simultánea) y algunas curiosidades sobre la vida personal del matemático.

A continuación, se explicó a través un diagrama en el pizarrón, el problema de los conejos. Una vez que la secuencia se entendió, los estudiantes comenzaron a completar la sucesión de Fibonacci.

Luego, se propuso que realicen el ejercicio que aparece a continuación:

Completen la siguiente tabla:

1:1	*2:1*	*3:2*	*5:3*	*8:5*	*13:8*							

¿A medida que consideramos los términos "más grandes" de la sucesión que número se obtiene?

¿Qué ocurrirá si continúan realizando las divisiones de dos términos consecutivos de la sucesión?

Algunos de los chicos planteaban todas las divisiones y luego las calculaban; otros, en cambio, planteaban cada división y la resolvían sucesivamente.

Fue una actividad que al comienzo les sorprendió pero al encontrar la secuencia de cómo debían completar la tabla, ayudándose con la calculadora resultó una actividad muy llevadera. A medida que avanzaban, se escuchaban expresiones de asombro ya que se encontraban con un número que repetía las primeras cifras decimales. Más adelante, descubren que se trata del número de oro.

Se continuó leyendo la reseña y, ya que los estudiantes mostraron más interés en la relación que guarda el número de oro con el arte, se amplió oralmente nombrando e ilustrando con algunas pinturas de distintos artistas y distintas épocas que utilizan el número de oro y la proporción áurea.

En la clase siguiente, se les hizo entrega a los estudiantes de un trabajo práctico de investigación, de producción grupal, para realizar de forma domiciliaria. El propósito que se persigue con este trabajo práctico es que mientras se continúa con la explicación del tema “Intervalos de números reales” e “Inecuaciones”, los alumnos puedan profundizar y afianzar los conceptos que fueron desarrollados y trabajados en las clases previas. Así mismo, se espera que los estudiantes trabajen colaborativamente, intercambien ideas, propongan explicaciones y construyan conclusiones de forma común. Se busca propiciar experiencias para que puedan mejorar su capacidad de escuchar al otro y desarrollen la responsabilidad personal y grupal.

El trabajo consta de 5 ejercicios, cada uno con un propósito específico. (Ver Anexo 4)

En el primer ejercicio se proponen dos números con infinitas cifras decimales: uno de ellos es un número irracional formado a partir de una ley de formación, el otro en cambio, una expresión decimal periódica pura con cifras decimales similares. Se realizan distintas preguntas en base a estos dos números y se pide que busquen diferencias entre ambos. El objetivo es que los estudiantes logren diferenciar a qué conjunto numérico pertenecen los números dados, que puedan identificar los irracionales construidos a partir de una ley de formación y los números decimales periódicos. Se espera que, para ello, los alumnos descubran la ley de formación, y puedan comparar las cifras decimales entre los números dados y fundamentar las diferencias.

En el segundo ejercicio, se propuso una situación secuenciada que permita transferir lo trabajado con el Teorema de Pitágoras para ubicar números irracionales (raíces no exactas) en la recta numérica.

En la parte A) del ejercicio se solicita a los estudiantes que realicen la construcción indicada para que puedan verificar que es posible ubicar el número $\sqrt{5}$ sobre la recta numérica aplicando el Teorema de Pitágoras.

La parte B) consta de una afirmación en la que se explican los pasos para ubicar $\sqrt{29}$ en la recta numérica. Se espera que los estudiantes apliquen el Teorema de Pitágoras para validar la afirmación dada y luego, realicen la construcción y comprueben que la suma de los cuadrados de los catetos es igual a 29.

Por último, en la parte C) se les presenta una construcción, en la que aparece en un par de ejes cartesianos: un rectángulo de base 4 y altura 2, su diagonal y un arco de circunferencia que toma la longitud de la diagonal e intersecta al eje x en un punto "n". Teniendo en cuenta la medida de los lados del rectángulo, deben calcular la longitud de la diagonal y, en consecuencia, el valor de "n". Resuelto este punto, se les solicita que a partir de la construcción dada, ubique el opuesto de "n" y su doble. Se espera que los alumnos utilicen el compás para poder trasladar las medidas pedidas.

En el tercer ejercicio, se les da la medida del radio de una circunferencia y se les proponen distintas expresiones para que los alumnos puedan identificar cuál o cuáles les permiten calcular exactamente la longitud de dicha circunferencia. Se espera que puedan apreciar la diferencia entre un número irracional, en este caso π, y su aproximación.

Para la actividad 4, se plantea una experiencia para que los estudiantes midan su altura y la distancia que hay entre el ombligo y los pies con una cinta métrica. Con esos datos, se les propone que completen una tabla, registrando cada una de las medidas obtenidas y que luego, realicen el cociente entre ambas. La finalidad de esta actividad es que descubran la relación que existe entre las medidas del cuerpo humano y el número de oro. Por otro lado, también se quiere motivar a que los estudiantes busquen distintas estrategias para la medición, trabajen con las distintas unidades de medida como puede ser metros o centímetros y que apliquen lo visto sobre aproximaciones de números decimales y tengan en cuenta el error que puede surgir a partir de la medición. Posteriormente, se les solicita que investiguen sobre el concepto de razón y proporción áurea, la relación entre distintas partes del cuerpo y las distintas manifestaciones en que la proporción áurea se presenta en obras artísticas y/o arquitectónicas.

Finalmente, el ejercicio 5 consta de dos partes. En la primera, los estudiantes deben realizar una encuesta en la que mostrarán cinco rectángulos de diferentes medidas y los encuestados tendrán que decidir qué rectángulo les parece más bello y armonioso. Dichos resultados serán volcados en una tabla y, teniendo en cuenta la cantidad de votos de cada rectángulo, calcularán el porcentaje que representa el rectángulo más elegido. En segunda instancia, deberán medir los lados de cada uno de los rectángulos y calcular el cociente entre ambos (al lado mayor dividirlo por el lado menor). Por último, se espera que el rectángulo más votado sea el 4, cuya razón entre los lados es el número de oro. Se busca que los estudiantes puedan encontrar una relación entre los resultados de los cocientes obtenidos y la tendencia espontánea de las personas a identificar el rectángulo áureo con la belleza.

7. 3 Fase III

Los estudiantes de ambos cursos resolvieron las mismas actividades a modo de evaluación (Anexo 5). A partir de los resultados obtenidos, se confeccionaron tablas y gráficos de barras para su análisis.

Para facilitar la lectura del análisis comparativo entre el grupo de control (Curso A) y el grupo experimental (Curso B) se procedió a subtitular cada ejercicio de la evaluación, transcribir la consigna correspondiente junto con sus objetivos y criterios de evaluación.

Teniendo en cuenta la cantidad de respuestas correctas, regulares, incorrectas como así también las que no lograron responder, se confeccionó una tabla para cada grupo en la que, además, aparece la cantidad de respuestas en términos de porcentaje en relación con el números de estudiantes de cada curso. Con dichos datos, se elaboraron tablas para visualizar la cantidad de respuestas obtenidas en cada curso. Por otro lado, con los porcentajes calculados, se confeccionó un gráfico de barras comparativo para ver las diferencias en las respuestas dadas. Cabe destacar que dichos porcentajes fueron aproximados al número entero más próximo para facilitar la lectura fluida y una mayor comprensión de los resultados.

7.3.1 Resultados y análisis de ejercicio 1)

Consigna:
Observa la imagen y responde:

7.3.1.1. Resultados y análisis de ejercicio 1A)

Consigna:
¿Conoces la pintura? Escribe, si lo sabes, el nombre de la obra y su autor.

Se propone esta pregunta para saber si los estudiantes conocen la obra de Leonardo Da Vinci. Se espera que puedan relacionar contenidos vistos en otras materias o fuera del ámbito escolar con lo investigado y estudiado, en particular con el número de oro.

Criterios de evaluación:

Bien: Si responden correctamente el nombre de la obra y del artista.

Regular: Si responden correctamente el nombre de la obra pero desconocen quién es su autor o conocen el nombre del autor pero no así el de la obra.

Mal: Si responden mal o no conocen el nombre de la obra y su autor.

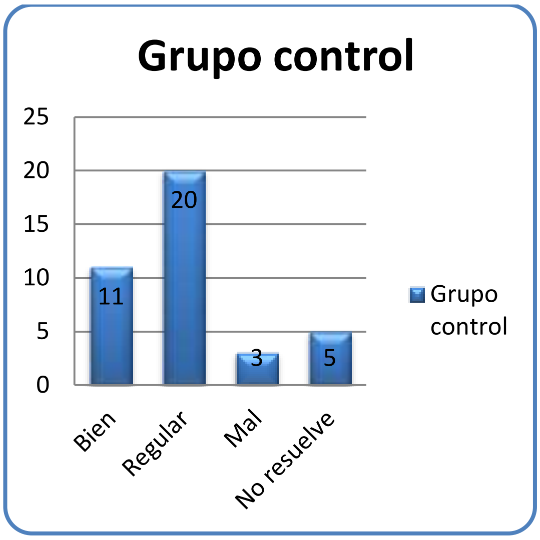
En las Tablas 3 y 4 se resumen las respuestas de la consigna 1 A) dadas en cada grupo.

1 A)	Grupo Control	
Bien	11	28%
Regular	20	51%
Mal	3	8%
No resuelve	5	13%
Total	**39**	**100%**

Tabla 3: Resultados de la consigna 1 A) obtenidos en el curso A

1 A)	Grupo Experimental	
Bien	22	61%
Regular	11	30%
Mal	1	3%
No resuelve	2	6%
Total	**36**	**100%**

Tabla 4: Resultados de la consigna 1 A) obtenidos en el curso B



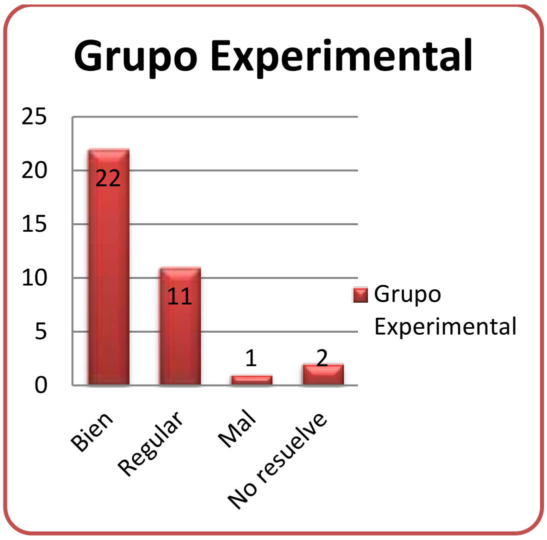


Figura 8: Resultados de la consigna 1 A) obtenidos en el curso A

Figura 9: Resultados de la consigna 1 A) obtenidos en el curso B

Como puede observarse con mayor claridad en las Figuras 8 y 9, en el curso de control 11 estudiantes respondieron correctamente, mientras que en el experimental, lo hicieron 22 estudiantes. En cuanto a las respuestas regulares del grupo de control, los estudiantes conocían el nombre de la obra pero no pudieron decir, o respondieron mal, quién fue el artista que la pintó. En cuanto a la cantidad de respuestas incorrectas o no resueltas, se advierte que en ambos grupos es considerablemente menor en comparación con las correctas y regulares.

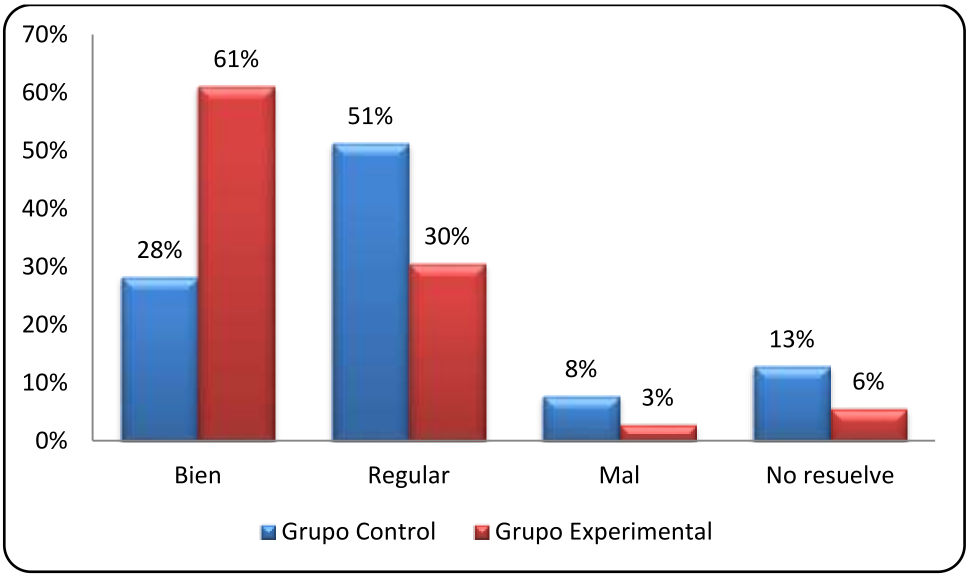


Figura 10: Comparación de resultados obtenidos en ambos grupos de la consigna 1 A)

En la Figura 10 se puede apreciar que en el grupo de control y el grupo experimental existen diferencias marcadas en la identificación de la obra y el autor de la misma.
En el grupo experimental el 61% de los estudiantes conocía tanto la obra como el autor de la misma, mientras que el 28% de los estudiantes del grupo de control pudo responder ambas preguntas. En el grupo de control se ve que el 51% conoce a la obra y su nombre, no así al artista.

7.3.1.2. Resultados y análisis de ejercicio 1B)

Consigna:
¿Con qué número irracional puedes relacionar esta obra? ¿Por qué?

El objetivo de dicha actividad se centra en que los estudiantes puedan encontrar la relación que hay entre el número de oro y la proporcionalidad que el artista tuvo en cuenta al momento de crear a la protagonista de la obra. Los estudiantes pueden recurrir a lo trabajado en las clases en las que se relacionó este número con la belleza como así también, recuperar la experiencia de medirse las partes del cuerpo y la investigación realizada en trabajo grupal.

Criterios de evaluación:
Bien: si pueden identificar que la obra tiene relación con el número de oro.
Mal: si no pueden identificar que la obra se relaciona con el número de oro o bien, si la relacionan erróneamente con otro número irracional.

En las Tablas 5 y 6 se ven reflejados los resultados de las respuestas de ambos grupos correspondientes a la consigna 1 B).

1 B)	Grupo Control	
Bien	0	0%
Regular	0	0%
Mal	10	26%
No resuelve	29	74%
Total	**39**	**100%**

Tabla 5: Resultados de la consigna 1 B) obtenidos en el curso A

1 B)	Grupo Experimental	
Bien	20	55%
Regular	0	0%
Mal	6	17%
No resuelve	10	28%
Total	**36**	**100%**

Tabla 6: Resultados de la consigna 1 B) obtenidos en el curso B

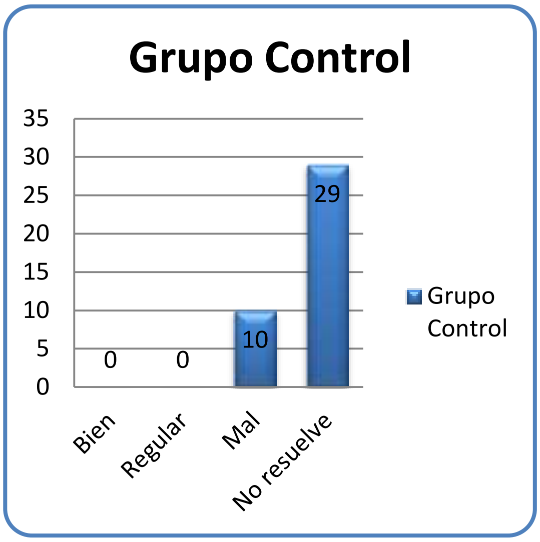


Figura 11: Resultados de la consigna 1 B) obtenidos en el curso A

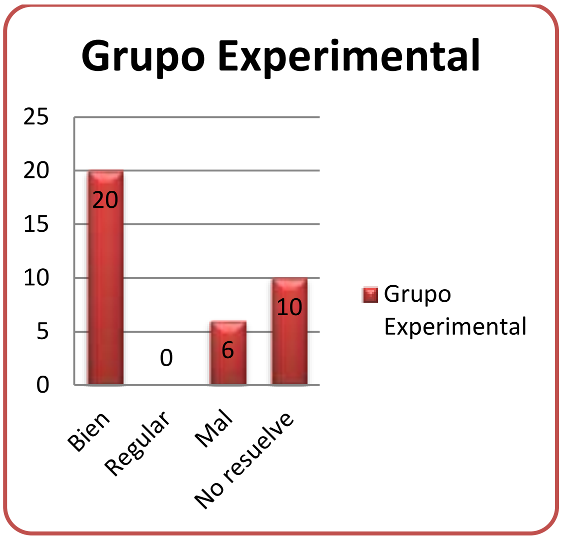


Figura 12: Resultados de la consigna 1 B) obtenidos en el curso B

Como se puede ver en el gráfico correspondiente a la Figura 11, 29 estudiantes en el grupo control no resolvieron la actividad propuesta, y los 10 que respondieron, lo hicieron erróneamente. Es decir, la totalidad del curso no resolvió o resolvió mal. En tanto, como muestra la Figura 12, en el grupo experimental 20 estudiantes respondieron correctamente, 10 no lograron responder la consiga y 6, lo hicieron de forma incorrecta.

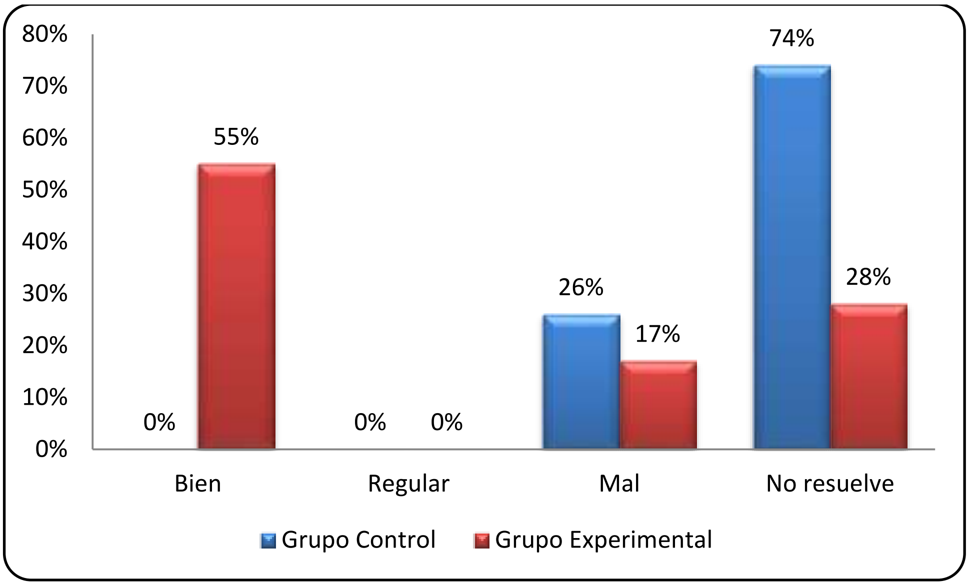


Figura 13: Comparación de resultados obtenidos en ambos grupos de la consigna 1 B)

Se puede apreciar en la Figura 13 una amplia diferencia en las respuestas de los estudiantes de ambos cursos. El porcentaje de respuestas correctas en el grupo experimental es del 55%, mientras que el porcentaje de respuestas correctas del grupo de control es 0%. Es significativo que ningún estudiante del grupo de control pudo relacionar la obra de Da Vinci con el número de oro y cabe destacar que el 74% no lo resolvió.

7.3.2 Resultados y análisis de ejercicio 2)

Consigna:

En una fiesta exclusiva de números se ven las siguientes situaciones…

A partir de las imágenes y diálogos anteriores, responde:

7.3.2.1 Resultados y análisis de ejercicio 2 A)

Consigna:

¿Quiénes son los invitados de esta fiesta distinguida? ¿Cómo te das cuenta?

El objetivo de este ejercicio es que los estudiantes puedan identificar el conjunto numérico al cual pertenecen los números representados por los personajes de esta viñeta. Se espera que los alumnos puedan clasificarlos como el conjunto de números irracionales y no como números "sueltos".

Criterios de evaluación:

Bien: Si identifican que los números pertenecen al conjunto de números irracionales.

Regular: Si enumeran los números de las viñetas pero no logran generalizar el conjunto numérico al cual pertenecen.

Mal: Si no logran identificar o confunden el conjunto numérico.

Las Tablas 7 y 8 muestran los resultados obtenidos por el curso A y el curso B respectivamente en relación a las respuestas de la consiga 2 A)

2 A)	Grupo Control	
Bien	18	46%
Regular	8	20%
Mal	10	26%
No resuelve	3	8%
Total	**39**	**100%**

Tabla 7: Resultados de la consigna 2 A) obtenidos en el curso A

2 A)	Grupo Experimental	
Bien	20	56%
Regular	12	33%
Mal	3	8%
No resuelve	1	3%
Total	**36**	**100%**

Tabla 8: Resultados de la consigna 2 A) obtenidos en el curso B

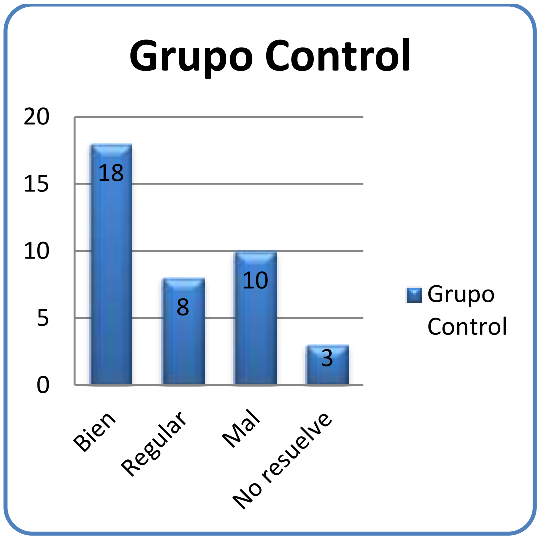


Figura 14: Resultados de la consigna 2 A) obtenidos en el curso A

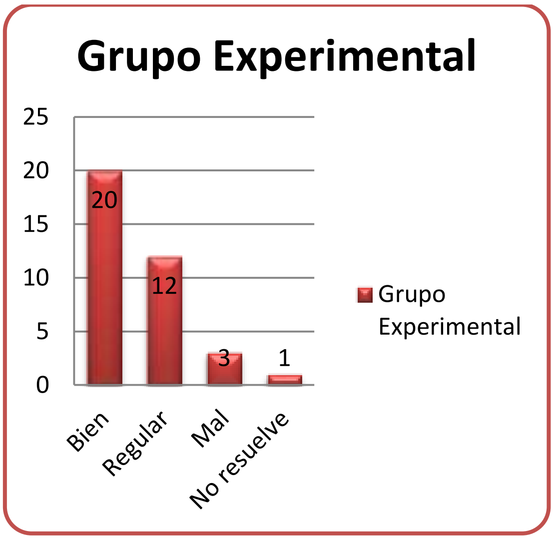


Figura 15: Resultados de la consigna 2 A) obtenidos en el curso B

Como puede verse en el gráfico correspondiente a la Figura 15, 20 estudiantes del grupo experimental respondieron correctamente y 12 lo hicieron regular. En cuanto a las respuestas obtenidas grupo de control (Figura 14), 18 estudiantes respondieron bien y 8, regular. En el grupo de control, 13 estudiantes respondieron mal o no respondieron, mientras que en el experimental 4 estudiantes respondieron mal o no respondieron.

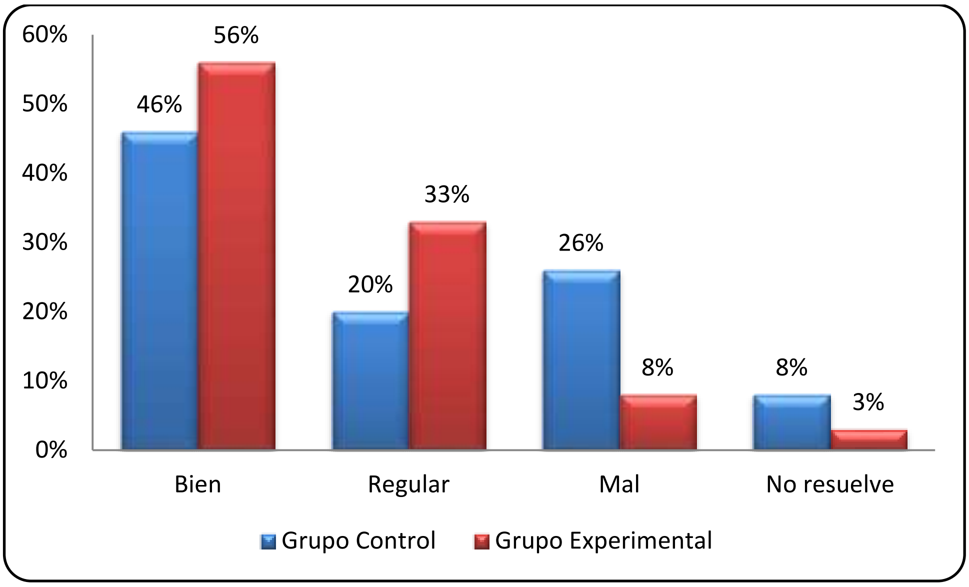


Figura 16: Comparación de resultados obtenidos en ambos grupos de la consigna 2 A)

La comparación de porcentajes (Figura 16) da cuenta que 89% de los estudiantes del grupo experimental contestaron bien o regular, mientras que en el grupo control, ese mismo porcentaje desciende a 66%. Resulta significativo que, el 11% de los alumnos del grupo experimental no resuelve o resuelve mal la consigna, frente al 34% de los alumnos del grupo control.

7.3.2.2 Resultados y análisis de ejercicio 2 B)

Consigna:

¿Por qué echaron al número 2? ¿Por qué crees que se disfrazó de raíz de 4?

Saber reconocer que $\sqrt{4} = 2$ y, por lo tanto, al tratarse de un número entero no pertenece al conjunto de números irracionales. El objetivo de estas preguntas es que los estudiantes puedan reconocer que no todas las raíces de números enteros son números irracionales, sino que sólo las raíces no exactas lo son.

Criterios de evaluación:

Bien: Si identifican que $\sqrt{4} = 2$ y logran explicar que el personaje de la viñeta quiso camuflarse como la raíz cuadrada de un número para simular ser una raíz no exacta y "pasar" como número irracional.

Regular: Si logran identificar que $\sqrt{4} = 2$ pero no logran explicar que se trata de un número entero y por lo tanto, no pertenece al conjunto de números irracionales o bien, la explicación es incompleta o errónea.

Mal: Si no logran identificar que $\sqrt{4} = 2$.

A continuación, en las Tablas 9 y 10 se vuelcan los resultados de las respuestas de la consigna 2 B) dadas por cada grupo.

2 B)	Grupo Control	
Bien	17	44%
Regular	4	10%
Mal	13	33%
No resuelve	5	13%
Total	**39**	**100%**

Tabla 9: Resultados de la consigna 2 B) obtenidos en el curso A

2 B)	Grupo Experimental	
Bien	21	58%
Regular	9	25%
Mal	2	6%
No resuelve	4	11%
Total	**36**	**100%**

Tabla 10: Resultados de la consigna 2 B) obtenidos en el curso B

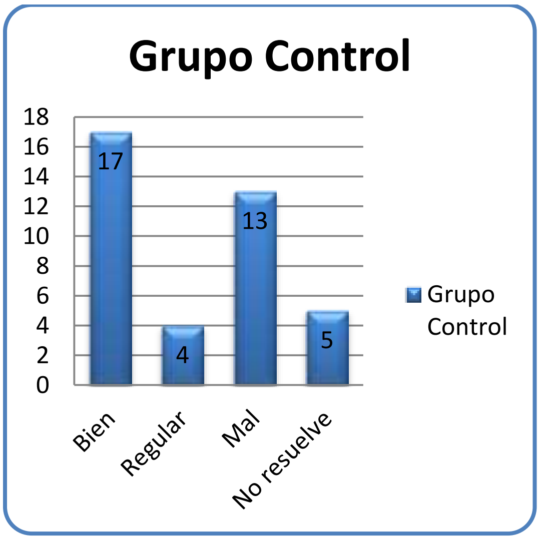


Figura 17: Resultados de la consigna 2 B) obtenidos en el curso A

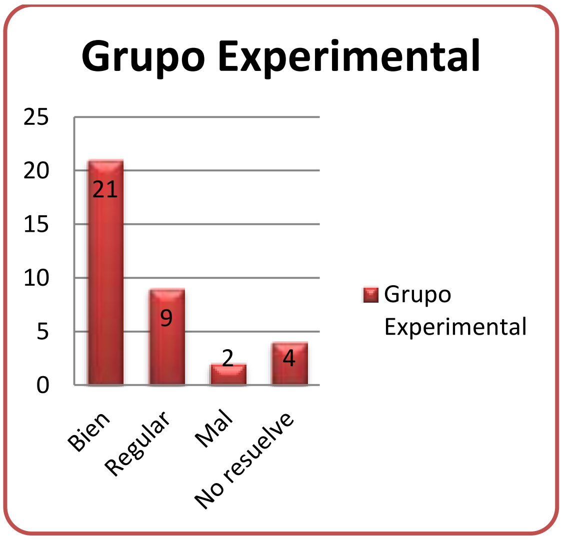


Figura 18: Resultados de la consigna 2 B) obtenidos en el curso B

En los gráficos correspondientes a las Figuras 17 y 18, se observa con claridad que en el grupo de control 17 estudiantes respondieron correctamente y 13 lo hicieron mal. En cuanto al grupo experimental, 21 alumnos respondieron bien y 2 lo hicieron de forma errónea. En cuanto a las respuestas regulares, 9 estudiantes respondieron de forma regular en el grupo experimental y casi la mitad, lo hicieron en el de control. No hay grandes diferencias en la cantidad de estudiantes que no resolvieron la consigna en el grupo de control y experimental, ya que fueron 5 y 4 estudiantes respectivamente.

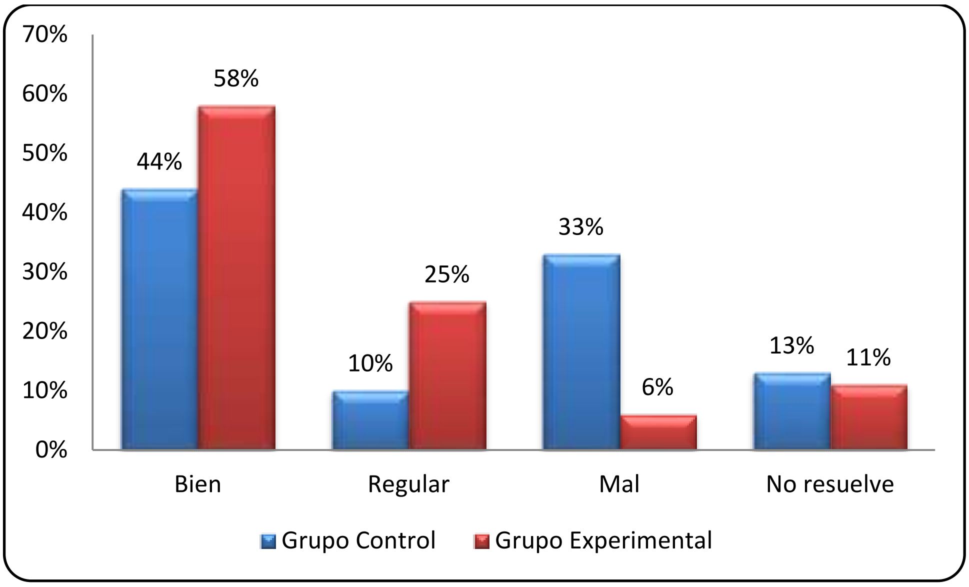


Figura 19: Comparación de resultados obtenidos en ambos grupos de la consigna 2 B)

En la Figura 19 se ve que, en cuanto al porcentaje de los estudiantes del grupo control que respondieron bien o regular a la consiga es del 54%, mientras que en el grupo experimental ese porcentaje asciende al 83%. En relación con las respuestas incorrectas o no resueltas, el porcentaje de estudiantes del grupo control es de 46%, frente al 17% del grupo experimental.

7.3.2.3 Resultados y análisis de ejercicio 2 C)

Consigna:
¿Cuáles son los números que están en el Salón VIP? ¿Por qué crees que están en ese salón?

Se espera que los estudiantes puedan identificar que los números irracionales que están en el “salón VIP” son números irracionales especiales o “famosos”. No se espera que enumeren los números (e, π, ϕ) sino que puedan clasificarlos y diferenciarlos de las raíces no exactas o los creados a partir de una ley de formación.

Criterios de evaluación:

Bien: Si logran identificar y clasificar los números irracionales especiales o "famosos".

Regular: Si enumeran las letras que representan los números irracionales (e, π, ϕ) pero no logran clasificarlos.

Mal: Si no logran identificar ni clasificar correctamente los números irracionales famosos.

Las Tablas 11 y 12 resumen los resultados de las respuestas de la consigna 2 C) dadas por los estudiantes de los cursos A y B respectivamente.

2 C)	Grupo Control	
Bien	8	21%
Regular	12	31%
Mal	13	33%
No resuelve	6	15%
Total	**39**	**100%**

Tabla 11: Resultados de la consigna 2 C) obtenidos en el curso A

2 C)	Grupo Experimental	
Bien	22	61%
Regular	7	19%
Mal	5	14%
No resuelve	2	6%
Total	**36**	**100%**

Tabla 12: Resultados de la consigna 2 C) obtenidos en el curso B

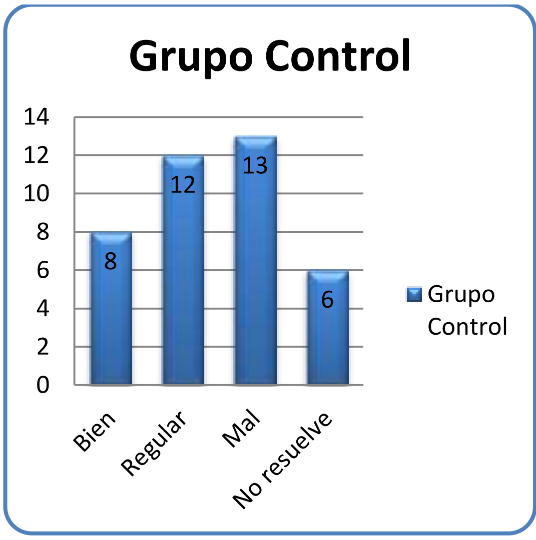


Figura 20: Resultados de la consigna 2 C) obtenidos en el curso A

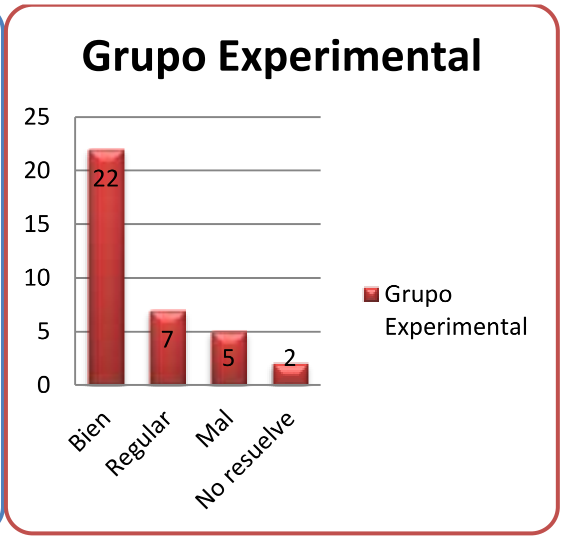


Figura 21: Resultados de la consigna 2 C) obtenidos en el curso B

En la Figura 20 puede observarse que en el grupo de control más de la mitad de los estudiantes respondió mal o regular lo pedido. Sólo 8 estudiantes pudieron responder correctamente y 6 no respondieron la consigna. Inversamente, como indica la Figura 21, más de la mitad del grupo experimental respondió bien o regular, mientras que 7 estudiantes lo hicieron mal o no lo respondieron.

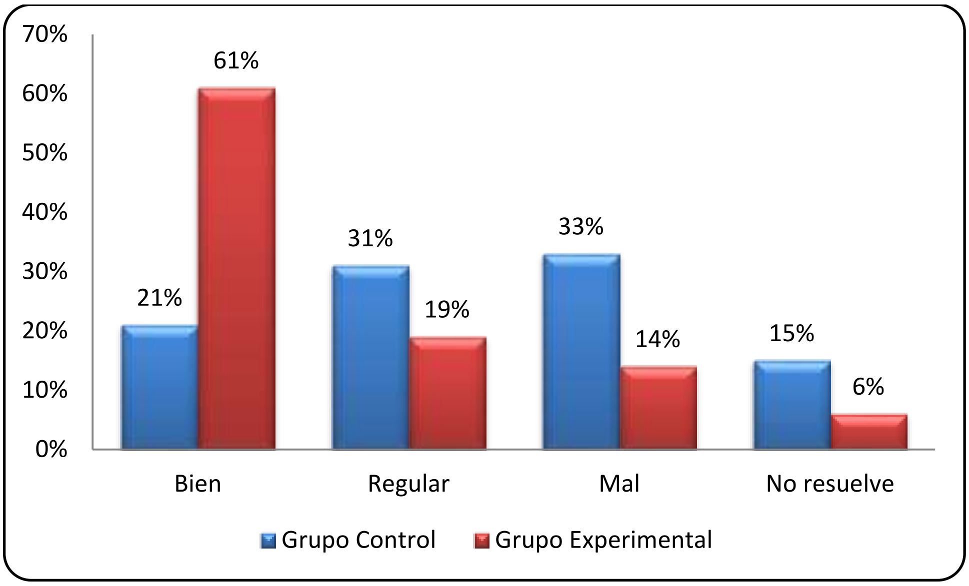


Figura 22: Comparación de resultados obtenidos en ambos grupos de la consigna 2 C)

La comparación detallada en la Figura 22 da cuenta que, en cuanto a las respuestas correctas, el grupo experimental supera en un 40% al grupo control. Las respuestas incorrectas, regulares y no resueltas muestran que en el grupo control representan el 79% mientras que, en el grupo experimental ese porcentaje se reduce casi a la mitad (39%).

7.3.2.4 Resultados y análisis de ejercicio 2 D)

Consigna:
¿A qué otro número invitarías a esta fiesta?

Se espera que los estudiantes propongan un número irracional, ya sea una raíz no exacta como uno creado a partir de una ley de formación.

Criterios de evaluación:

Bien: Si los estudiantes logran proponer un número irracional, sea una raíz no exacta o uno creado a partir de una ley de formación.

Mal: Si proponen un número que no pertenezca al conjunto de números irracionales**.**

Las Tablas 13 y 14 muestran los resultados obtenidos correspondientes a la consigna 2 D) en ambos cursos respectivamente.

2 D)	Grupo Control	
Bien	26	67%
Regular	0	0%
Mal	7	18%
No resuelve	6	15%
Total	**39**	**100%**

Tabla 13: Resultados de la consigna 2 D) obtenidos en el curso A

2 D)	Grupo Experimental	
Bien	26	72%
Regular	0	0%
Mal	3	9%
No resuelve	7	19%
Total	**36**	**100%**

Tabla 14: Resultados de la consigna 2 D) obtenidos en el curso B

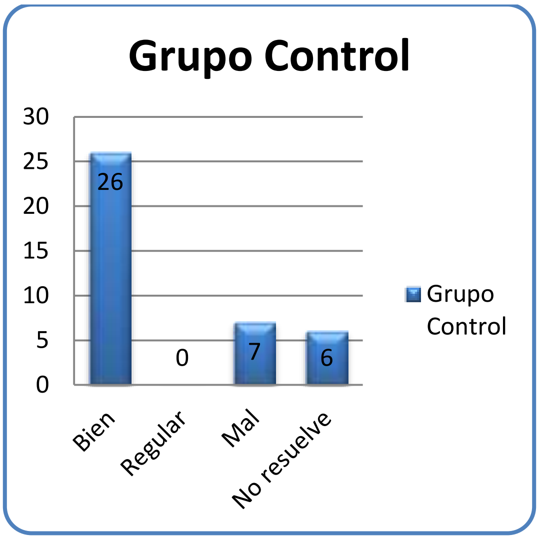


Figura 23: Resultados de la consigna 2 D) obtenidos en el curso A

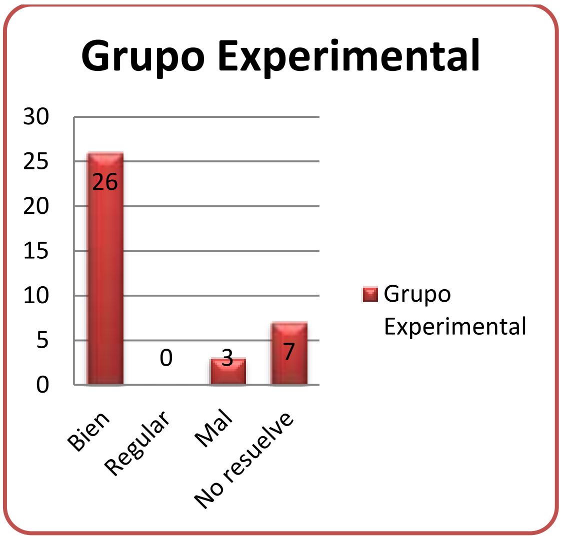


Figura 24: Resultados de la consigna 2 D) obtenidos en el curso B

Los gráficos correspondientes a las respuestas de la consigna 2 D) (Figuras 23 y 24) revelan que, en cada uno de los grupos, 26 estudiantes respondieron correctamente. En el grupo control, 7 estudiantes respondieron mal la consigna y 6, no pudieron resolverla. En el grupo experimental, 3 estudiantes respondieron mal y 7 no lograron hacerla.

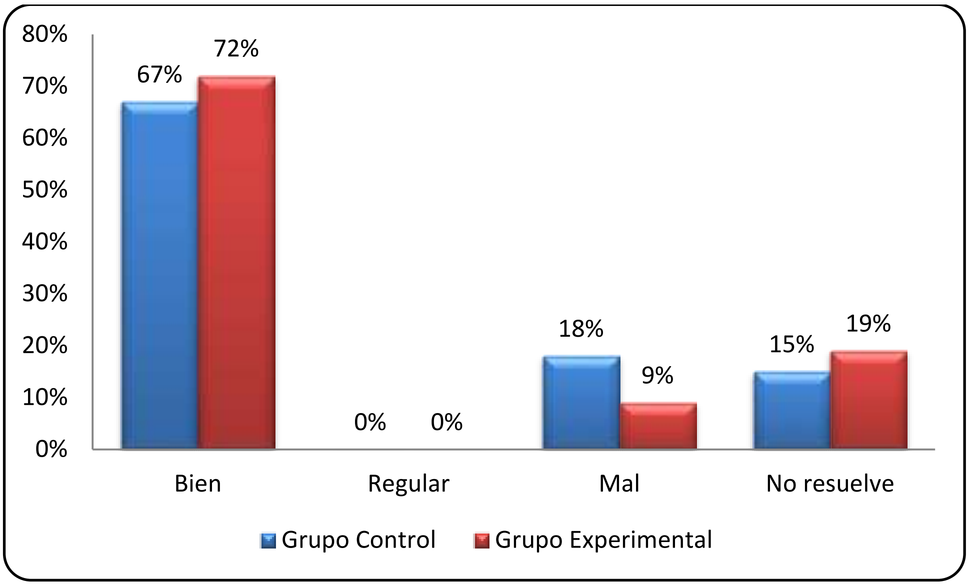


Figura 25: Comparación de resultados obtenidos en ambos grupos de la consigna 2 D)

A diferencia de las actividades anteriores, los porcentajes indican que los resultados obtenidos en dicha consigna son similares en ambos grupos. Se puede observar en la Figura 25 que, el 72% de los estudiantes del grupo experimental y el 67% de los estudiantes del grupo control respondieron correctamente. En cuanto al porcentaje de los estudiantes que no respondieron la consigna, el 15% fue en el grupo control y 19%, en el experimental. La diferencia más notable es que el 18% del grupo control respondió mal, mientras que en el experimental el 9% de los estudiantes respondió de forma errónea.

7.3.3 Resultados y análisis de ejercicio 3)

Consigna:

La obra que aparece a continuación se llama Weiches Hart y la realizó Wassily Kandinsky en el año 1927. Kandinsky realizaba obras de arte abstracto y en muchas de ellas, incluía figuras geométricas.

7.3.3.1 Resultados y análisis de ejercicio 3 A)

Consigna:

¿Qué figuras geométricas puedes identificar en la obra? (Identifica por lo menos cuatro figuras)

Se espera que los estudiantes puedan identificar distintas figuras geométricas en la obra de Kandinsky, ya sea triángulos de distintos tipos (equiláteros, isósceles, escalenos, acutángulos, rectángulos), círculos, rectángulos o cuadrados.

Criterios de evaluación:

Bien: Si los estudiantes logran identificar correctamente por lo menos cuatro figuras geométricas diferentes en la obra de Kandinsky.

Regular: Si logran identificar menos de cuatro figuras geométricas, o bien, si identifican las figuras y no logran nombrarlas o clasificarlas correctamente.

Mal: Si no logran nombrar las figuras geométricas o bien no las clasifican correctamente.

El relevamiento de los resultados de las respuestas de los estudiantes de los cursos A y B obtenidos en la consigna 3 A) se ve reflejado en las Tablas 15 y 16 respectivamente.

3 A)	Grupo Control	
Bien	23	59%
Regular	11	28%
Mal	0	0%
No resuelve	5	13%
Total	**39**	**100%**

Tabla 15: Resultados de la consigna 3 A) obtenidos en el curso A

3 A)	Grupo Experimental	
Bien	28	78%
Regular	6	17%
Mal	0	0%
No resuelve	2	5%
Total	**36**	**100%**

Tabla 16: Resultados de la consigna 3 A) obtenidos en el curso B

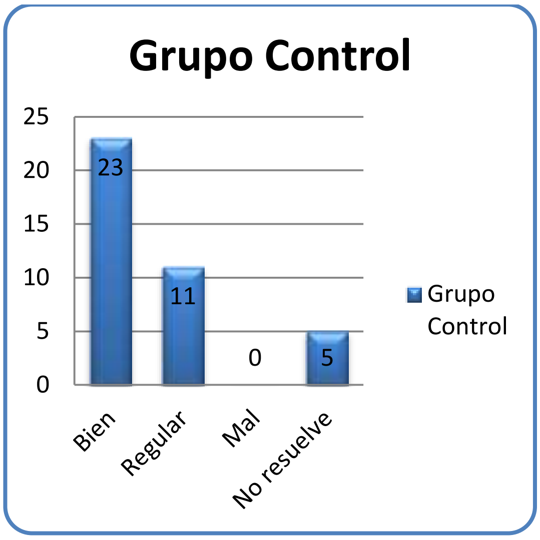


Figura 26: Resultados de la consigna 3 A) obtenidos en el curso A

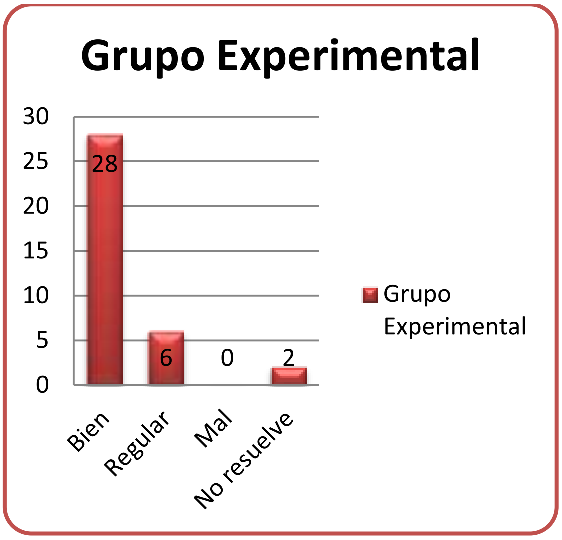


Figura 27: Resultados de la consigna 3 A) obtenidos en el curso B

Como enseña la Figura 27, en el grupo experimental 28 estudiantes respondieron correctamente, mientras que 6 lo hicieron de forma regular. En cuanto al grupo control, en la Figura 26 se ve que, 23 alumnos respondieron correctamente y 11 regular. En ningún grupo hubo estudiantes que hayan respondido de forma equivocada pero hubo 5 estudiantes del grupo control y 2 del grupo experimental que no respondieron.

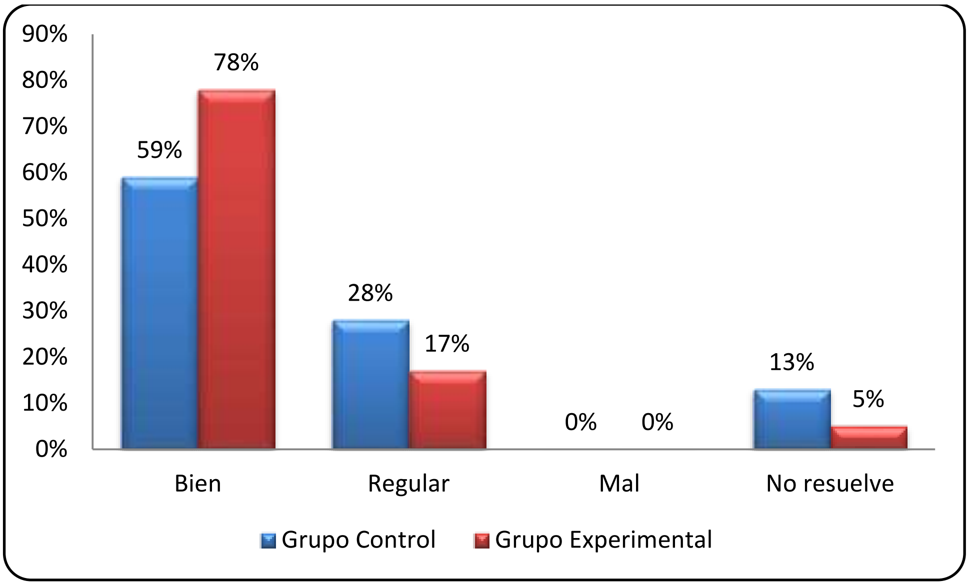


Figura 28: Comparación de resultados obtenidos en ambos grupos de la consigna 3 A)

La Figura 28 exhibe que, el 78% de los estudiantes del grupo experimental logró responder correctamente la consigna mientras que en el grupo control, lo logró el 59% de los alumnos. En cuanto a las respuestas regulares, en el grupo control el porcentaje fue del 28% y en el grupo experimental ese porcentaje desciende a 17%. Finalmente, en cuanto al porcentaje que representa a los estudiantes que no respondieron lo solicitado, en el grupo control fue de 13% y en el experimental, el 5%.

7.3.3.2 Resultados y análisis de ejercicio 3 B)

Consigna:

¿Cuál o cuáles de esas figuras geométricas se relacionan con un número irracional? ¿Por qué?

Se espera que los estudiantes puedan relacionar los números irracionales con ciertas figuras geométricas, como por ejemplo un círculo con el número π o triángulos rectángulos, rectángulos o cuadrados con las raíces no exactas, haciendo referencia a lo trabajado con el Teorema de Pitágoras.

Criterios de evaluación:

Bien: Si pueden encontrar algún número irracional que se relacione con alguna de las figuras geométricas identificadas en el punto anterior.

Mal: Si relacionan erróneamente un número irracional con una figura geométrica, o relacionan un número irracional pero no logran justificar su respuesta.

En las Tablas 17 y 18 se describen los datos obtenidos correspondientes a las respuestas de los estudiantes de los cursos A y B, respectivamente, en la consigna 3 B)

3 B)	Grupo Control	
Bien	11	28%
Regular	0	0%
Mal	13	33%
No resuelve	15	39%
Total	**39**	**100%**

Tabla 17: Resultados de la consigna 3 B) obtenidos en el curso A

3 B)	Grupo Experimental	
Bien	11	31%
Regular	0	0%
Mal	12	33%
No resuelve	13	36%
Total	**36**	**100%**

Tabla 18: Resultados de la consigna 3 B) obtenidos en el curso B

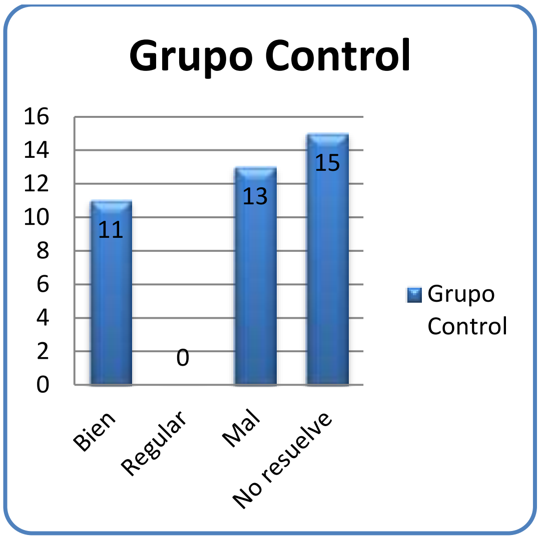


Figura 29: Resultados de la consigna 3 B) obtenidos en el curso A

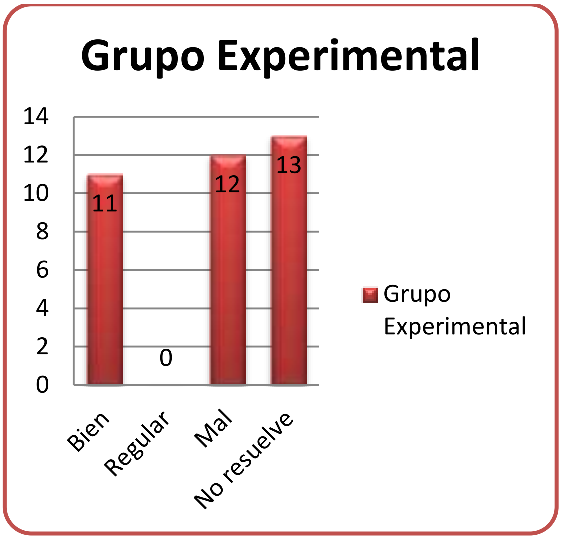


Figura 30: Resultados de la consigna 3 B) obtenidos en el curso B

Las Figuras 29 y 30 dan cuenta de que es alto el número de respuestas incorrectas o no resueltas en ambos grupos, 28 para el grupo control y 25, para el grupo experimental. Simultáneamente, 11 estudiantes de cada grupo respondieron correctamente a la consigna mientras que ninguno lo hizo de manera regular.

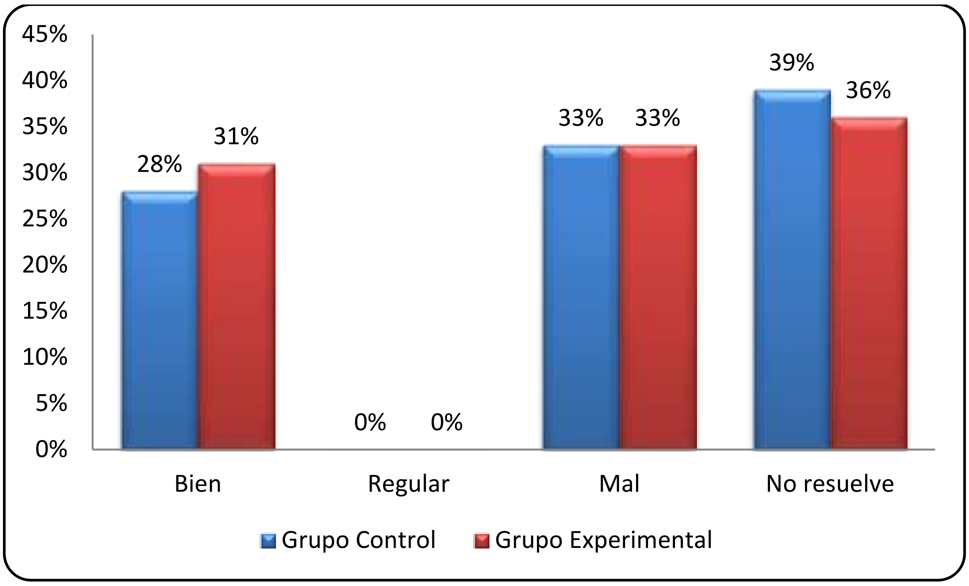


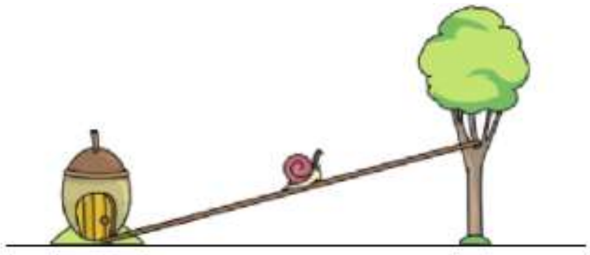
Figura 31: Comparación de resultados obtenidos en ambos grupos de la consigna 3 B)

Este gráfico de porcentajes comparativos (Figura 31) demuestra que el desempeño de los estudiantes de ambos grupos, en términos de resultados, fue similar. Si bien fue alto el porcentaje de estudiantes que no resolvieron o resolvieron mal, se destaca que frente a la dificultad de la consigna propuesta, aproximadamente un tercio de los estudiantes respondió satisfactoriamente.

7.3.4 Resultados y análisis de ejercicio 4)

Consigna:

Un caracol sale de su casita y trepa por la soga hasta lo alto del árbol como muestra el dibujo. Si la soga mide $\sqrt{34}$ *metros y la altura que alcanza del árbol es 3 metros, ¿Cuál es la distancia entre la casita y la base del árbol?*



El objetivo de este problema es que puedan interpretar los datos y obtener la distancia entre la casita y la base del árbol (cateto base del triángulo rectángulo). Para esto se espera que, apliquen el Teorema de Pitágoras ya sea despejando la incógnita o relacionando los lados del triángulo rectángulo.

Criterios de evaluación:

Bien: Si logran averiguar la distancia entre la casita a la base del árbol mediante el Teorema de Pitágoras, ya sea planteando y resolviendo la ecuación o relacionando los lados del triángulo y explicándolo con sus palabras.

Regular: Si logran ubicar bien los datos y realizar el planteo correcto pero el ejercicio incompleto o sin desarrollar

Mal: Si ubican mal los datos o el planteo es incorrecto.

En las Tablas 19 y 20 que aparecen a continuación se vuelcan los resultados de las respuestas de los estudiantes de ambos cursos para la consigna 4.

4)	Grupo Control	
Bien	16	41%
Regular	7	18%
Mal	7	18%
No resuelve	9	23%
Total	**39**	**100%**

Tabla 19: Resultados de la consigna 4) obtenidos en el curso A

4)	Grupo Experimental	
Bien	15	42%
Regular	11	30%
Mal	6	17%
No resuelve	4	11%
Total	**36**	**100%**

Tabla 20: Resultados de la consigna 4) obtenidos en el curso B

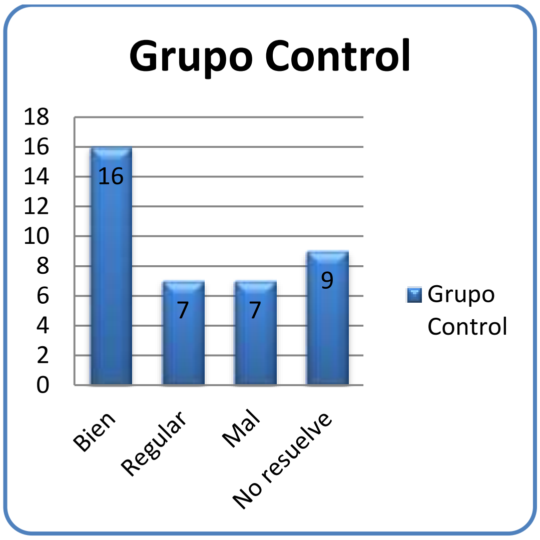


Figura 32: Resultados de la consigna 4) obtenidos en el curso A

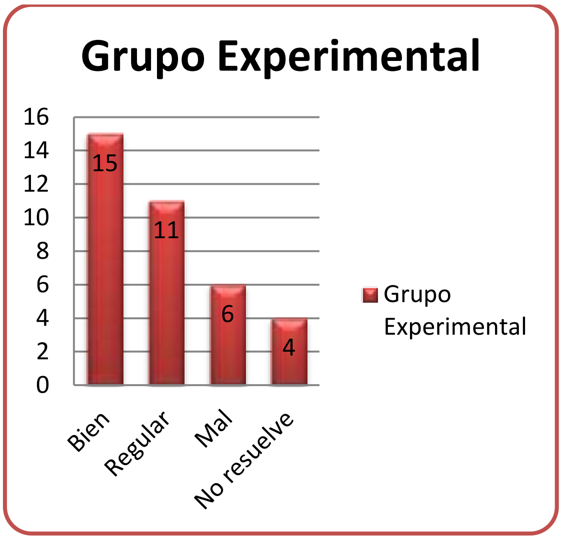


Figura 33: Resultados de la consigna 4) obtenidos en el curso B

A partir de los datos volcados en los gráficos correspondientes a las Figuras 32 y 33 se deduce que, respondieron correctamente 16 estudiantes en el grupo control y 15, en el grupo experimental. En cuanto a los que no resuelven la consigna, 9 pertenecen al grupo control mientras que 4 al grupo experimental. El número de estudiantes que responde de manera regular es de 7 en el grupo control y 11 en el experimental. Los casos del grupo control que responden mal son 7 y 6 en el experimental.

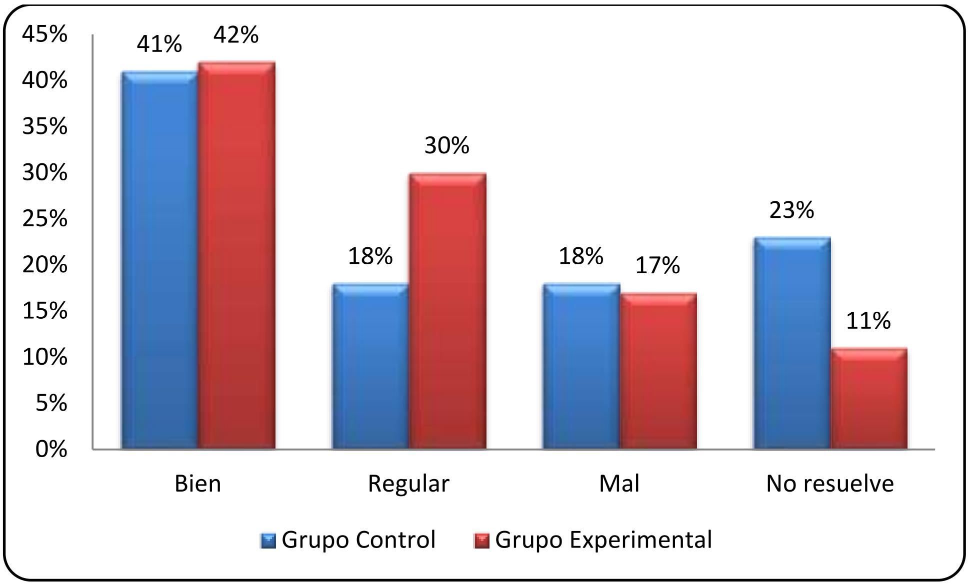


Figura 34: Comparación de resultados obtenidos en ambos grupos de la consigna 4)

En este gráfico (Figura 34) se puede apreciar que tanto los porcentajes de las respuestas correctas e incorrectas en ambos grupos son similares. La mayor diferencia se encuentra en las respuestas regulares y en las no resueltas. En cuanto al porcentaje de respuestas regulares en el grupo experimental es del 30% mientras que en el de control, disminuye a 18%. Si consideramos las respuestas no resueltas, el 11 % se dio en el grupo experimental frente al 23% del grupo control.

Capítulo 8

Análisis de resultados

En este capítulo se analizan los resultados obtenidos en relación con el marco teórico y las hipótesis que orientan esta investigación.

Como se mencionó en el comienzo de este trabajo, el diseño de investigación no es de carácter cuantitativo sino que es cualitativo, por lo tanto no sólo se analizan los resultados de la evaluación final que realizaron los estudiantes, sino también los procesos de enseñanza y de aprendizaje.

En el desarrollo del trabajo de campo se indagó sobre las problemáticas que presentan los estudiantes de la escuela secundaria en la comprensión de número irracional; se analizaron las estrategias que utilizaron las docentes, desde distintos modelos didácticos, para la introducción y tratamiento del concepto de número irracional; se analizaron las propuestas didácticas de los libros de texto escolares que se ofrecen para favorecer la comprensión del contenido y, finalmente, se estudió acerca de cómo una estrategia didáctica que recurre a la evolución histórica del número irracional, con fundamento en el enfoque socioepistemológico, facilita su comprensión.

El análisis de los procesos de enseñanza y aprendizaje que tuvieron lugar en los cursos A y B se realiza bajo los siguientes criterios de comparación:

a- Metodologías de enseñanza docente.
b- Participación y entusiasmo por parte de los estudiantes.
c- Resultados de las evaluaciones.

En cuanto a la metodología de enseñanza docente, en el curso A se llevó a cabo una estrategia expositiva. La docente a cargo guía y conduce la presentación del concepto de número irracional mediante la resolución de una ecuación. Ante la imposibilidad de resolver la ecuación aplicando los conocimientos previos, los estudiantes comienzan a manifestar dicha inquietud y la docente da los valores que verifican la igualdad y, a continuación, expone la definición de número irracional. Cabe destacar que se recurre al libro de texto de editorial Kapelusz analizado anteriormente como recurso didáctico que complementa el trabajo realizado en clase.

Al igual que en los libros de texto, la clase replica un tratamiento didáctico que reproduce el Discurso Matemático Escolar. En cuanto a la introducción y desarrollo que se dio al concepto de número irracional resultó escaso y superficial y, por lo tanto, resulta difícil determinar su grado de comprensión más allá de la resolución mecánica, e incluso exitosa, de los ejercicios propuestos.

Si bien la propuesta de enseñanza genera un conflicto cognitivo en los estudiantes -entre sus conocimientos previos y el nuevo objeto a conocer- no se le asigna el tiempo necesario para que los estudiantes procesen el conflicto y elaboren su resolución. En este sentido, el protagonismo de los estudiantes se ve desplazado por el protagonismo de la docente quien al cabo de unos minutos da la respuesta correcta y resuelve la situación problemática planteada, "cerrando" de este modo el conflicto cognitivo.

El tiempo destinado a abordar un tema con esta metodología convencional puede decirse que es más acotado ya que el docente se limita a explicar y ejemplificar. Las clases resultan más estructuradas, monótonas y más predecibles en relación con la planificación. Por otro lado, es habitual encontrar en las escuelas secundarias que el tiempo destinado a desarrollar este contenido es considerablemente menor en comparación a otros conceptos programados en la materia, pasando por alto la complejidad y potencialidad de este tema.

Lo dicho anteriormente se refuerza al hacer foco en la aplicación del número irracional en intervalos, inecuaciones, operaciones con radicales entre otros, sin profundizar sobre el concepto en sí.

En el curso B, la metodología apunta a motivar a los estudiantes a que exploren las características de un nuevo conjunto numérico, el conjunto de los números irracionales.

A diferencia del grupo control, el foco del conflicto cognitivo no está puesto en la aparición de un nuevo conjunto numérico que permita abordar ciertas situaciones problemáticas que no podían resolver con los conocimientos previos disponibles, sino que está puesto en analizar las características que los diferencian de los números racionales.

Desde una visión socio-histórica, se busca contextualizar a los principales números irracionales explicando en profundidad su valor, surgimiento, tratamiento y aplicaciones entre otras.

Luego de hacer un repaso por las características generales que tienen los conjuntos numéricos estudiados, junto con la necesidad práctica de su aparición y las diversas posibilidades de aplicación, se les presenta un nuevo conjunto numérico y se les pide que busquen la definición. Los estudiantes inician el análisis para deducir que, por ejemplo, al tener infinitas cifras decimales diferentes no pueden ser expresados como una fracción. No se trata simplemente de memorizar o repetir lo dicho, sino que se busca que los alumnos asuman el protagonismo de su propio aprendizaje.

En una segunda instancia, se los invita a realizar una experiencia en el aula, en la que se solicita que tomen la longitud de la circunferencia del elemento cilíndrico que hayan elegido y luego, la relacionen con el diámetro de la misma. Tras esta demostración empírica, los estudiantes concluyen qué es el número π, su relación con la geometría y una mayor profundización del concepto de aproximación de un número decimal.

Por último, se abordaron los principales números irracionales desde una perspectiva socio-histórica. Para ello, la docente confeccionó dos recursos didácticos específicos. El primero consistió en la elaboración de breves reseñas históricas de los números irracionales más significativos, adaptadas para la edad de los estudiantes que iban a leerlas. La adaptación didáctica es un trabajo importante porque, sin devaluar la precisión teórica, facilita la comprensión y entendimiento. En dichas reseñas se trabajó con distintos números irracionales, visibilizando diversas aristas como por ejemplo, surgimiento, definición, relación con la geometría u otros campos, anécdotas, entre otros.

El segundo recurso didáctico elaborado por la docente consistió en un trabajo práctico domiciliario de producción grupal. Las actividades propuestas facilitaron a los estudiantes el acercamiento a los números irracionales a través de un proceso cognitivo apoyado en situaciones concretas. Esta decisión didáctica favorece que los estudiantes vivencien la complejidad teórica en prácticas cotidianas y comprensibles de acuerdo a su edad.

La puesta en marcha de esta metodología requiere destinar una mayor cantidad de clases. La presentación de los contenidos de un modo espiralado y recursivo exige respetar los tiempos de aprendizaje de los estudiantes y acompañar sus procesos cognitivos. Cabe destacar que, en relación con el tiempo que demanda este enfoque metodológico, resulta menos predecible que los modelos didácticos convencionales. Asimismo, requiere mayor trabajo y preparación por parte del docente. Para elaborar recursos de enseñanza que propicien el protagonismo auténtico de los estudiantes en los procesos de aprendizaje que llevan adelante, es necesario que el docente haya actualizado sus conocimientos didácticos, haya comprendido las limitaciones que impone a los aprendizajes la reproducción del Discurso Matemático Escolar y esté dispuesto a asumir la enseñanza desde la teoría que ofrece la socioepistemología de la matemática educativa.

En relación con la participación y entusiasmo por parte de los estudiantes, en el curso A son incentivados a una participación activa en el momento en el que se les presenta una ecuación para resolver pero, inmediatamente, esa participación es reemplazada por la explicación de la docente quien a posteriori propone una serie de ejercicios de aplicación. A simple vista podría decirse que el estudiante está activo en el sentido que hace, propone y resuelve en la clase pero es difícil constatar si hubo aprendizaje o sólo una reproducción mecánica y un activismo ficcional típico del Discurso Matemático Escolar. Es una escena habitual áulica en la que tanto la docente y estudiantes se sienten “cómodos” ya que no supone mayores desafíos para los actores involucrados. Cabe destacar, que dentro de este modelo didáctico, algunos estudiantes logran comprender la complejidad y novedad de los conceptos que se enseñan. Sin embargo, esta posibilidad depende más de las cualidades e interés del individuo que aprende que de las habilidades o destrezas que despliega el docente para facilitar la comprensión.

Los estudiantes del curso B se mostraron interesados en las propuestas de trabajo planteadas. Si bien es cierto que, no a todos los estudiantes les gusta o convoca los temas abordados en matemática, el trabajo colaborativo fue clave para que los alumnos se sientan involucrados y protagonistas de su propia experiencia de aprendizaje.

A lo largo del desarrollo de las distintas clases se dio lugar al debate, a las curiosidades acerca de la vida de los matemáticos, a las circunstancias de los diferentes contextos históricos, entre otros datos de interés pudiendo, de esta manera, apreciar a la matemática desde otro punto de vista que “humaniza” la producción de los conceptos.

La aplicación de los números irracionales a la vida cotidiana como por ejemplo, la medición de sus propios cuerpos y recoger datos a través de encuestas, propició el trabajo en equipo, el respeto por la producción y participación del otro y el compromiso no sólo en relación con la materia sino entre pares.

Los estudiantes pudieron (re)construir el concepto de número irracional, adquiriendo de este modo habilidades cognitivas y socio-afectivas para la producción colectiva. También, expresaron su valoración por la propuesta de enseñanza y apreciaron el compromiso y el entusiasmo de la docente para promover actividades novedosas que alteran la rutina de enseñanza en el campo de la matemática.

Por último, los resultados de las evaluaciones muestran que los estudiantes del grupo experimental (curso B) pudieron resolver con mayor facilidad las actividades ligadas a la geometría como así también, las vinculadas al arte y al gusto estético.

Las actividades planteadas que remiten a la resolución de problemas o ecuaciones fueron resueltas por ambos cursos sin notables diferencias, tal como se puede apreciar en aquellas en las que se identifican y proponen distintos números irracionales o se aplica, por ejemplo, el Teorema de Pitágoras. En cambio, se advierte que en aquellas actividades en las que el concepto de número irracional está ligado a distintas áreas del quehacer humano las diferencias entre ambos cursos son muy notorias. Cabe destacar, que los estudiantes del curso B, pudieron reconocer los números irracionales en distintos campos sin grandes dificultades, mientras que los alumnos del grupo control (curso A) se encontraron con más obstáculos ya que no pudieron relacionar y/o aplicar el concepto de número irracional en otras áreas.

Si bien era esperable en razón del tipo de enseñanza que recibieron, los estudiantes del curso A se sorprendieron al ver las actividades propuestas en la evaluación ya que sentían que “no tenía nada que ver” con lo estudiado y trabajado de números irracionales, mientras que los estudiantes del curso B pudieron desempeñarse con mayor facilidad frente a las actividades y no manifestaron incomodidad ante las mismas.

Con las actividades propuestas se puso de manifiesto que, si bien los estudiantes del grupo control conocen la definición de número irracional y son capaces de aplicar el concepto en temas como intervalos de números reales, o resolución de ecuaciones o inecuaciones, no conocen en qué otras áreas se pueden encontrar este tipo de números, como así también desconocen su surgimiento o simplemente la ejemplificación queda limitada a las raíces no exactas.

Es importante que los alumnos puedan relacionar los contenidos trabajados en matemática con otras materias como historia, física, artes visuales, música entre otras. Y que no quede ligado a la simple resolución de ejercicios. Los chicos pueden olvidarse como calcular ciertas operaciones pero no se olvidan la experiencia en el aula ni la relación que pueden encontrar con otras disciplinas.

El modelo didáctico basado en la socioepistemología promueve la integración de conocimientos, el trabajo interdisciplinario, la participación colaborativa y amplía las áreas de interés de los estudiantes, como así también incentiva a los docentes a producir saberes pedagógicos sobre la enseñanza de la matemática sin caer, casi indefectiblemente, en la reproducción mecánica de ejercicios.

Capítulo 9

Conclusiones y perspectivas

En los últimos años, la tarea de enseñar supone un desafío que demanda mayor creatividad por parte de los docentes para despertar el interés de los estudiantes. Para que éstos comprendan un concepto y sus siguientes articulaciones teóricas es necesario presentar actividades innovadoras y variar las estrategias para generar aprendizajes significativos.

El enfoque utilizado en esta investigación corresponde al de la socioepistemología y por lo tanto, el objeto de estudio son las prácticas de los docentes y de los estudiantes para intentar comprender y anticipar las dificultades que se ponen de manifiesto en el aula, en este caso frente al concepto de número irracional.

Sin bien las prácticas sociales cambian en diferentes comunidades y momentos, aún al día de hoy, persiste una tendencia generalizada a concebir a la matemática como una materia dura, exacta y fuera de contexto. Una de las estrategias para lograr que los estudiantes sometan a un análisis crítico las representaciones sociales acerca de la matemática es mostrar el contexto histórico, las necesidades y objetivos de los matemáticos y las herramientas con las que contaban. Miguel de Guzmán afirma que "la visión histórica transforma meros hechos y destrezas sin alma en porciones de conocimiento buscadas ansiosamente y en muchas ocasiones con genuina pasión por hombres de carne y hueso que se alegraron inmensamente cuando por primera vez dieron con ellas." (Guzmán, 2007)

Atento a esta apreciación de Guzmán, resulta fundamental "humanizar" la enseñanza de la matemática y generar condiciones para que los estudiantes se asombren frente a un nuevo conocimiento, ya sea por un concepto en sí, como por curiosidades que vivenciaron los matemáticos, con su historia de vida, como así también con la posibilidad de relacionar los conceptos con distintas áreas del trabajo humano, sean éstas el arte, las construcciones arquitectónicas o los programas computacionales, entre otras.

Por otro lado, la historia de la matemática puede ser un indicador de dificultades para la comprensión de un concepto. Cuando a lo largo de la historia un tema resultó tan controversial como el conjunto de números irracionales y generó tantas inquietudes, podemos esperar que las mismas controversias que surgieron a lo largo de la historia se repitan en el aula de matemática. La enseñanza de este tema supone en el estudiante un desarrollo de la abstracción que muchas veces no es considerado y requiere de un acompañamiento específico por parte del docente. Existe un cierto paralelismo entre la evolución de un concepto matemático a lo largo de la historia y la construcción que realizan los estudiantes en el proceso de aprendizaje de dicho concepto dentro del aula. Así lo expresa Maribel Anacona (2003) "La historia es un indicador de la complejidad epistemológica de ciertos conceptos matemáticos y, por ende, de la posible dificultad en su aprendizaje" (p.38).

Es habitual que en la programación de matemática de cada uno de los años de la escuela media haya muchos contenidos para abordar y poco tiempo para desarrollarlos. En ocasiones, algunos docentes toman esto último como una "excusa" o salida rápida para no profundizar ciertos conceptos, entre ellos suele encontrarse el de número irracional. Con frecuencia, se pasan por alto las dificultades propias de los conceptos matemáticos y se ignora este indicador de complejidad epistemológica que menciona Anacona. La enseñanza de la matemática en la escuela media se distancia de la compresión y el sentido del concepto para pasar a exponer contenidos y enseñar a ejecutar y resolver.

Del mismo modo, los libros de texto hacen un abordaje superficial y apelan a la resolución mecánica que encubre la dificultad de su enseñanza y los obstáculos que presentan al aprendizaje.

Es interesante que los estudiantes aprecien que las personas, aun aquellas que aparentemente no están relacionadas con la ciencia o el mundo de la matemática, utilizan conceptos como proporción, números irracionales, figuras geométricas en sus obras y "esconden" una belleza matemática. Para ello, la enseñanza debe revisar sus posiciones "contenidistas" y mecanicistas para dar lugar a un conocimiento integral que permita a los estudiantes encontrar un sentido a lo que se está estudiando, por qué y para qué se estudia cada concepto.

Con frecuencia se escucha la pregunta: “Y esto… ¿para qué me sirve?”. La docencia tiene que estar atenta a estos planteos y aprovechar estas ganas de saber más, a veces disfrazado en modo de queja. Lo que se pone de manifiesto es que los estudiantes suelen sentirse totalmente ajenos al concepto y a la actividad áulica. La matemática es una construcción humana y más allá de la resolución exitosa de los cálculos y ecuaciones, aplicación de propiedades y teoremas, uno de los objetivos fundamentales en el “hacer matemática” en la escuela media es mostrar la relación que tiene con la vida cotidiana y otros campos del saber.

Resulta importante que los estudiantes reconozcan y puedan apreciar que detrás de todos los contenidos, cálculos, propiedades, teoremas, etc. hubo y hay miles de personas que se sentaron, estudiaron, que se equivocaron, que volvieron a intentar hasta que finalmente lograron su objetivo. Personas de distintos lugares del mundo, en diferentes momentos cronológicos, con diferentes herramientas y apreciar que el estudio de la matemática también está atravesado por la diversidad. La historia de la matemática permite no solo conocer las cuestiones que dieron lugar a diferentes conceptos sino también que los estudiantes no se sientan frustrados ante los conflictos. Se trata de un proceso y todo proceso lleva tiempo.

El trabajo de campo que se llevó a cabo en esta investigación está inspirado en estos principios y se fundamenta en el abordaje socioepistemológico para la enseñanza de la matemática. El análisis de la experiencia permitió dar cuenta de las siguientes cuestiones implicadas en la enseñanza del concepto de número irracional en la escuela media:

- La enseñanza del número irracional genera en docentes y estudiantes dificultades similares a las que se generaron en los matemáticos a lo largo de la historia.
- Para los docentes es un concepto difícil de abordar y explicar por su nivel de abstracción.
- Para los estudiantes es un concepto difícil de imaginar y de incorporar porque “rompe” con la estructura de los números racionales.

- La enseñanza convencional, tanto en las aulas como en las propuestas de los libros de texto, elude estas dificultades otorgando un tratamiento superficial del tema.
- Al “humanizar” la matemática se genera una mayor empatía por parte de los estudiantes hacia los contenidos a aprender.
- Un docente que demuestra su propio interés y entusiasmo por su trabajo genera mayor gusto por aprender, genera más confianza en los estudiantes, en el sentido que se sienten capaces de entender, incluso, conceptos muy abstractos.
- Los estudiantes comprenden mejor los conceptos que son enseñados incluyendo su contexto histórico de producción.
- El enfoque socioepistemológico de la enseñanza facilita que los estudiantes pueden establecer relaciones y transferir el conocimiento aprendido a otras áreas.
- El enfoque socioepistemológico de la enseñanza plantea desafíos cognitivos y promueve el trabajo colaborativo entre los estudiantes, lo cual se traduce en actitudes de mayor compromiso y entusiasmo.

Esta investigación sobre una experiencia de enseñanza de los números irracionales en la escuela secundaria desde una perspectiva socioepistemológica arroja evidencias sobre la mejora de los aprendizajes.

Se espera que sus resultados aporten conocimiento a la didáctica de la matemática y colaboren con la crítica o resignificación del DME.

La hegemonía de la didáctica convencional con frecuencia desalienta a los estudiantes y encorseta a los docentes en la reiteración de un modelo que opaca sus posibilidades de producir saber pedagógico. Contrariamente, el enfoque socioepistemológico de la didáctica matemática restituye la relevancia del docente como productor de condiciones de enseñanza que propician mayor comprensión, apropiación y transferencia de los conceptos matemáticos. En simultáneo, también los estudiantes vivencian el protagonismo de sus propios aprendizajes, valoran la producción colaborativa y recuperan el entusiasmo por “hacer matemática”.

En síntesis, con esta investigación se espera:

- Proporcionar un soporte teórico- práctico para los docentes que tengan que abordar el concepto de número irracional en sus clases y deseen utilizarlo.
- Promover el estudio de la historia de la matemática para abordar diferentes conceptos estudiados en la escuela media como estrategia didáctica.
- Incentivar a docentes a estudiar y trabajar con diferentes recursos en el aula para no caer en la monotonía y no perder la pasión por la enseñanza de la matemática.
- Aportar a la interrupción de la inercia del Discurso Matemático Escolar.
- Fomentar en los estudiantes el gusto por el estudio de la matemática y ampliarlo a otras áreas.
- Hacer extensivo este tipo de metodología didáctica a otros conceptos matemáticos de difícil comprensión en la escuela secundaria como por ejemplo logaritmos, derivadas e integrales, entre otros.

Referencias bibliográficas

Abálsamo, R., Berio, A., Kotowski, C., Liberto, L., Mastucci, S. y Quirós, N. (2013). *Matemática 3. Activados.* 1a ed. San Isidro: Puerto de Palos.

Alsina, C. (2010). *La secta de los números. El teorema de Pitágoras.* Navarra: RBA Coleccionables.

Anacona, M. (2003). La historia de las matemáticas en la Educación Matemática. *Revista EMA*, 8 (1), 30-46.

Bachelard, G. (1999). La noción del obstáculo epistemológico. En *La formación del espíritu científico. Contribución a un psicoanálisis del conocimiento objetivo* (pp.15-20). México: Siglo Veintiuno Editores.

Bergé, A. y Sessa, C. (2003). Completitud y continuidad revisadas a través de 23 siglos. Aportes a una investigación didáctica. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa,* 6 (3), 163-197.

Borgnino, R. y Ledesma, J. (2020). *Con todos los números III: actividades de matemática.* 1a ed. Ciudad Autónoma de Buenos Aires: Santillana.

Boyer, C. (1986). *Historia de la matemática.* Madrid: Alianza Editorial.

Bruner, J. (1990). *Desarrollo cognitivo y educación.* Madrid: Morata.

Cantoral, R. Montiel, G. y Reyes-Gasperini, D. (2015). *Análisis del discurso Matemático Escolar en los libros de texto, una mirada desde la Teoría Socioepistemológica. Avances de Investigación en Educación Matemática*, 8, p.14.

Cantoral, R.; Reyes-Gasperini, D.; Montiel, G. (2014). *Socioepistemología, matemáticas y realidad. Revista Latinoamericana de Etnomatemática: Perspectivas Socioculturales de la Educación Matemática,* 7(3), 91-116.

Cantoral, R. y Farfán, R. (2008). *Socioepistemología y matemáticas.* En P. Lestón (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 21*, 740-753. México, DF: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C.

Cantoral, R., Farfán, R. M, Lezama, J., Martínez-Sierra, G. (2006). Socioepistemología y representación: algunos ejemplos. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*. Edición especial, 83-102.

Cantoral, R. y Farfán, R. M. (2003). Matemática educativa: Una visión de su evolución. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa,* 6 (1), 27-40.

Crespo Crespo, C. (2009). Acerca de la comprensión y significado de los números irracionales en el aula de matemática. *Revista Premisa*, 11 (41), 21-30.

Effenberger, P. (2010). *Matemática 3/9.* 1a ed. Buenos Aires: Kapelusz.

García del Cid, L. (2010). *Números notables. El 0, el 666 y otras bestias numéricas.* Navarra: RBA Coleccionables.

Guzmán, M. de (2007). Enseñanza de las ciencias y la matemática. *Revista Iberoamericana de Educación,* 43, p. 31.

Herrera Ruíz, M. (2010). Obstáculos, dificultades y errores en el aprendizaje de los números irracionales. En P. Lestón (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* 23, 247-255. México, DF: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Lestón, P. (2011). *El infinito en el aula de matemática. Un estudio de sus representaciones sociales desde la socioepistemología.* Tesis de Doctorado. CICATA del IPN, México.

Lestón, P. (2006). Ideas de los alumnos de escuela media sobre el infinito de los conjuntos numéricos. *Revista Premisa*, 29, 35-42.

Ministerio de Educación (2015a). *Diseño curricular nueva escuela secundaria de la Ciudad de Buenos Aires, ciclo básico*. Dirección General de Planeamiento e Innovación Educativa. Gerencia Operativa de Currículum. Ciudad Autónoma de Buenos Aires.

Ministerio de Educación (2015b). *Diseño curricular Nueva Escuela Secundaria de la Ciudad de Buenos Aires, ciclo orientado del bachillerato, formación general*. Dirección General de Planeamiento e Innovación Educativa. Gerencia Operativa de Currículum. Ciudad Autónoma de Buenos Aires.

Navarro, J. (2010). *Los secretos del número π. ¿Por qué es imposible la cuadratura del círculo?* Navarra: RBA Coleccionables.

Reina, L., Wilhelmi, M. y Lasa, A. (2012). Configuraciones epistémicas asociadas al número irracional. Sentidos y desafíos en educación secundaria. *Educación Matemática*, 24(3), 67–97.

Romero G. y Pérez, M. (2012). *Matemática III.* 1a ed. Buenos Aires: Santillana.

Romero, I. y Rico, L. (1999). Construcción social del concepto de número real en alumnos de secundaria: aspectos cognitivos y actitudinales. *Enseñanza de las ciencias*, 17 (2), 259- 272.

Romero, I. y Rico, L. (1999). Representación y comprensión del concepto de número real. Una experiencia didáctica en secundaria. *Revista EMA*, 4 (2), 117-151.

Samaja, J. (2003). *Epistemología y Metodología. Elementos para una teoría de la investigación científica.* Buenos Aires: Eudeba.

Sánchez, J. y Valdivé, C. (2014). Estudio del número irracional en los libros de texto escolares: una visión desde el PMA. *Revista Premisa*, 16 (62), 36-48.

Sánchez, J. y Valdivé, C. (2012). El número irracional: una visión histórico – didáctica. *Revista Premisa*, 14 (52), 3-16.

Anexo 1

Breve historia del Número π

Prof. María Florencia Lema

El número π probablemente sea el primer número irracional con el que trabajamos (tal vez en la escuela primaria)… sin saber que se trata de un número irracional, ya que suele considerarse su aproximación "3,14" pero, π no es 3,14 como popularmente se lo conoce sino que tiene infinitas cifras decimales….

Pero… ¿quién dijo que tiene infinitas cifras decimales? ¿quién dijo que no se puede expresar como fracción? ¿por qué es igual a 3,1415926….?¿ por qué se llama así? Todas estas preguntas tienen respuesta.

Para responderlas se requiere un arduo trabajo y mucho estudio de la matemática, sin embargo, interiorizarse en la historia nos ayudará a comprender mejor la idea de número irracional, en particular del número π.

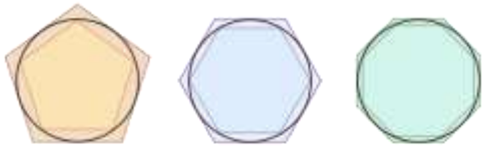
Vamos a estudiar muy brevemente la historia del número π.

¿Alguna vez nos preguntamos por qué utilizamos este número para calcular la longitud de una circunferencia o la superficie de un círculo? Precisamente, el número π es el cociente entre la longitud de la circunferencia y su diámetro.

El primer registro que se tiene del número π es en el papiro de Rhind egipcio, una fuente matemática que data del 1650 a. C aprox. El problema 50 (de los 87 que contiene) dice: "Un campo circular tiene un diámetro de 9 khet (1 khet= 50 metros), ¿Cuál es el área?" Con el sistema que proporciona el papiro para calcular el área, tenemos que $\pi = \frac{256}{81}$, es decir aproximando 3,16049.

Por otro lado, los egipcios de Giza, por el 2600 a. C., obtuvieron una aproximación más cercana: $\frac{22}{7}$, aproximadamente 3,14285.

Muchísimos matemáticos buscaron y encontraron una aproximación a este número pero fue Arquímedes de Siracusa (287 a.C- 212 a.C) quien halló un mejor acercamiento. Arquímedes realizó un arduo trabajo con polígonos y logró aproximar al valor de π



como: $3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{10}{70}$, es decir, ubicó a π entre 3,14084 y 3,142857 (truncamos la expresión decimal para apreciar las primeras cifras y facilitar la comprensión de la aproximación).

El número π a lo largo de la historia de la matemática sufrió diferentes aproximaciones para su valor. Por su parte, Vitruvio (85 a.C hacia 20 d.C) usó la equivalencia mesopotámica de $\pi \cong \frac{25}{8}$ (3,125) valiéndose de una rueda marcada como muestra la figura a continuación.

Ptolomeo (hacia 100- 170 d.C) realizó un trabajo similar al de Arquímedes y utilizó un polígono de 120 lados para llegar a obtener $\pi \cong \frac{377}{120} \cong 3{,}141666\ldots$.

El número π también fue estudiado por matemáticos árabes y chinos. En occidente, en el siglo XII Leonardo de Pisa conocido como Fibonacci dio a π el valor aproximado de 3,141818.

En el siglo XVIII, un matemático llamado Lambert probó que el número π es irracional y por lo tanto que tiene infinitas cifras decimales. En el mismo siglo, Euler lo nombro "π" por la primera letra de la palabra περιφερια (periferia).

El número π le quitó el sueño a matemáticos de la antigüedad, griegos, chinos, árabes, hindúes, occidentales, incluso al día de hoy, quien continúan buscando las cifras de este número, con una pequeña ayuda… con un programa informático, y ya se obtuvieron millones de cifras decimales!!!

Este número es tan importante que tiene día propio, el Día de Pi: 14 de marzo (para nosotros 14/3) o en inglés March 14 (3/14).

¡A festejar el día de uno de los números más estudiados (y el cumple de Einstein)!

Anexo 2

$\sqrt{\textit{Breve historia de las raíces no exactas}}$

Prof. María Florencia Lema

En el milenio III a.C. empieza a aparecer tanto en la civilización mesopotámica como en la egipcia el concepto de número. Las primeras formas de registrar números fueron incisiones en palos, huesos, rocas o en arcilla.

En las cercanías del Tigris y el Éufrates, distintas civilizaciones como Sumerios, Acadios, Arameos, Asirios, Caldeos y Babilonios, dejaron grabados sus conocimientos en tabillas de arcilla. Hasta el momento se han descubierto 500 mil tablillas aprox., de las cuales alrededor de 300 tienen contenidos matemáticos.

De dichas tablillas se destacan la Plimpton 322 (tablilla número 322 de la colección del editor George Plimpton) que data aproximadamente del 1800 a.C. al 1600 a.C. y muestra una tabla con cuatro columnas con caracteres cuneiformes que consiste en un registro de números relacionados con las longitudes de los lados de un triángulo. Por otro lado, y de la misma época que la anterior, se destaca la tablilla Yale 7289 que muestra un cuadrado con sus diagonales y unas marcas que representan números correspondientes al valor aproximado de $\sqrt{2}$.

Tablilla Plimpton 322. (Universidad de Columbia)

Tablilla Yale 7289 (Universidad de Yale)

A lo largo del valle del Nilo, más de 1200 km al suroeste de Mesopotamia, desarrollaron su actividad los egipcios. Los babilonios y egipcios desarrollaron sofisticados sistemas de escritura y cada civilización tenía su sistema de numeración. Mientras que estos últimos realizaban sus registros en tablillas de arcilla, los egipcios lo hacían en papiros. La fuente fundamental de información sobre las matemáticas del antiguo Egipto es el papiro Rhind que data del 1650 a.C y contiene 87 problemas de aritmética, geometría y álgebra.

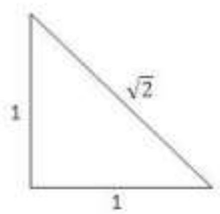
En el siglo VI a.C. Mesopotamia y Egipto dejaron de ser el núcleo del desarrollo cultural y éste se desplazó hacia el mundo griego. Se dejaron de lado las matemáticas instrumentales de los babilonios y egipcios para darle lugar a las demostraciones, a lo teórico, a la "búsqueda de la verdad".

A fines del siglo VI a.C Pitágoras de Samos funda en Crotona una escuela de carácter científico, político, filosófico y religioso. Pitágoras en su juventud realizó numerosos viajes, entre ellos Egipto y Babilonia. Es probable también que haya conocido a Thales, padre de las demostraciones en matemática en la ciudad de Mileto.

Se le atribuye a la Escuela de Pitágoras la demostración del teorema que lleva su nombre. Pitágoras, quien nació alrededor del 570 a.C. en la Isla de Samos, enunció: "En todo triángulo rectángulo, el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos".

Para los matemáticos hasta ese momento todo era medible con números naturales o bien, con fracciones. Pero a medida que la ciencia de los números avanzaba se hacía evidente que esta premisa no era posible. Fue en la geometría, al medir diversas longitudes, donde rápidamente surgió el problema.

Hipaso de Metaponto (450 a. C.) fue quien buscando relaciones entre los lados de un cuadrado y su diagonal descubrió algo que llamaría la atención de los matemáticos de la Escuela. Al considerar un cuadrado de lado 1 y calcular la diagonal aplicando el teorema de Pitágoras, se topó con que la diagonal (hipotenusa del triángulo rectángulo isósceles determinado) era igual a $\sqrt{2}$. A estos segmentos se los llamó segmentos inconmensurables.

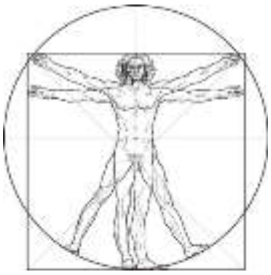


$$h = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

Para los pitagóricos este hallazgo fue algo realmente sorprendente, incluso trataron de ocultarlo.

El descubrimiento progresivo de este tipo de números, los irracionales, sigue siendo un gran reto matemático. Como $\sqrt{2}$, algunos de los irracionales más conocidos aparecieron en simples trazados de figuras con regla y compás.

Anexo 3



Breve historia del Número de Oro

Prof. María Florencia Lema

En su libro Liber Abaci, Leonardo de Pisa, más conocido como Fibonacci, propone el siguiente problema: "¿Cuántas parejas de conejos se producirán en un año, comenzando con una pareja única, si cada mes cualquier pareja engendra otra pareja, que se reproduce a su vez desde el segundo mes?

Este problema da lugar a la sucesión conocida como "Sucesión de Fibonacci" que comienza de la siguiente manera: 1 , 1 , 2 , 3 , 5 , 8 , 13 , 21 , …. , ….., ……, ……., …

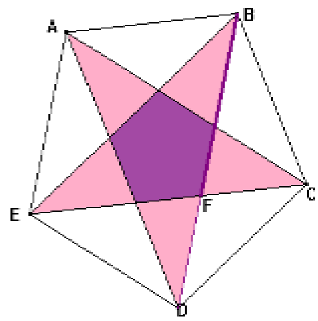
Como se trata de una sucesión de números infinita podemos continuar tanto cómo queramos, pero en esta oportunidad, sólo se trabajará con los primeros términos de la sucesión para ver qué sucede con la situación planteada a lo largo de un año.

Una vez obtenidos los primeros términos de la sucesión, completaremos la siguiente tabla. En cada casillero colocamos el cociente obtenido al dividir los términos consecutivos de la sucesión y luego, observaremos qué resultados obtuvimos.

1 : 1	2 :1	3 : 2	5 :3	8 : 5	13: 8				

A medida que se consideran los términos "más grandes" de la sucesión y se realizan las divisiones correspondientes, ¿qué número se obtiene?

El número de Oro es otro de los números irracionales considerados "famosos". Su expresión exacta es: $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \cong 1{,}618033989$



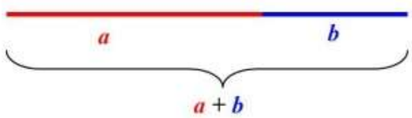
El estudio de este número no surge ni en la Edad Media ni en el Renacimiento, sino que surge en la Antigüedad.

Lo interesante de este número es que fue descubierto en la antigüedad no como una expresión aritmética sino como una relación o proporción entre segmentos.

En la Antigua Grecia ya consideraban y estudiaban las características y propiedades de este número. Por ejemplo, en La Escuela Pitagórica utilizaban el pentágono estrellado como su símbolo.

La figura de la estrella de cinco puntas queda determinada al trazar las diagonales de un pentágono regular (aquel que tiene todos sus lados iguales). En esta figura, se forma a su vez, en el centro, otro pentágono regular más pequeño, cuyos vértices son las intersecciones entre las diagonales. Cada uno de esos puntos divide a una diagonal en dos segmentos distintos y se cumple: $\frac{\overline{BD}}{\overline{BF}} = \frac{\overline{BF}}{\overline{FD}}$. Esta subdivisión de la diagonal es la razón áurea de un segmento. ¿Qué significa? Que el cociente entre ambas longitudes es el número de oro.
Estos conceptos también fueron estudiados y sistematizados por Euclides, matemático griego, en sus libros llamados "Elementos de Geometría".

Euclides definió: "Un segmento se dice que está dividido en su razón extrema y media cuando el total del segmento es a la parte mayor como la parte mayor a la menor".



$$\boxed{\varphi = \frac{a}{b} = \frac{a+b}{a}}$$

Esta proporción es conocida como "Proporción áurea", también llamada "Divina proporción".

Durante el Renacimiento, Leonardo Da Vinci consideró a esta proporción como la máxima expresión de armonía y belleza y la utilizó, al igual que otros artistas de la época en muchas de sus obras. Por su parte, Luca Pacioli publicó en 1509 un tratado completo dedicado a la sección áurea.

El número de oro o la proporción áurea no solo aparecen “escondidos” en obras del Renacimiento sino que también aparecen plasmados en distintas obras de arte, tanto en construcciones arquitectónicas como por ejemplo el Partenón o monumentos como la Torre Eiffel. A Salvador Dalí, surrealista del S.XX, también le llamó la atención dicha proporción y la incorporó en varias obras como en “Taza gigante volando con apéndice incomprensible de cinco metros de largo” en la que se puede ver cómo queda determinada la espiral áurea.

Anexo 4

Trabajo práctico grupal de profundización

1) Joaquín inventó el siguiente número: **0,14144144414444144444144444……**
y continuó agregando cifras decimales respetando la ley de formación.

a) Indiquen y expliquen cuál es el criterio que utilizó Joaquín para escribir las primeras 27 cifras decimales de este número.
b) ¿Es un número decimal periódico? ¿Por qué?
c) ¿De qué tipo de número decimal se trata?

Por otra parte, Marcos escribió el número: **0,1414141414141414……**

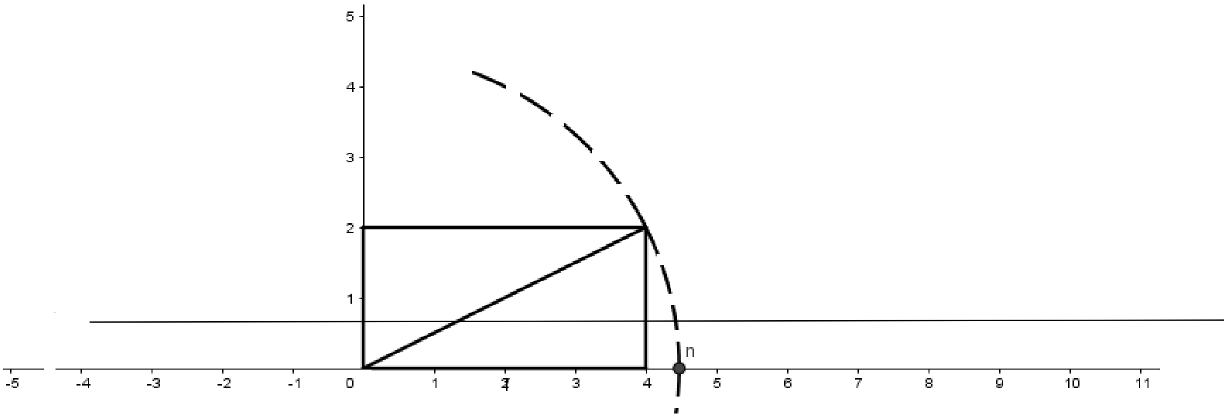
d) ¿qué diferencias encuentran entre los números planteados? ¿A qué conjunto numérico pertenece dicho número? ¿Por qué?
En el primer ejercicio se proponen dos números con infinitas cifras decimales: uno de ellos es un número formado a partir de una ley de formación, el otro, una expresión decimal periódica pura. Se realizan distintas preguntas en base a estos dos números y se pide que busquen diferencias entre ambos números.

2) A) Para ubicar el número irracional $\sqrt{5}$ la profesora construyó un rectángulo de base 2 y altura 1 y trazó su diagonal. Tomo dicha medida con el compás y haciendo centro en 0 marcó sobre la recta dicha medida. Realicen la construcción en una hoja de carpeta.

B) Para ubicar en la recta numérica al número irracional $\sqrt{29}$, Julia pensó:
"Puedo construir un rectángulo de lados 5 y 2 y trazar su diagonal".

a) Verifiquen si es cierta la afirmación de Julia realizando la construcción en una hoja de carpeta.
b) Ubiquen en la recta numérica a $\sqrt{29}$

C) A partir de la siguiente construcción, identifiquen qué número irracional se ha representado en la recta con la letra **n.**



D) Ubiquen sobre la misma recta numérica **–n** y **2.n**

3) Sabiendo que el radio de una circunferencia es de 2,5cm:

Marquen cuál o cuáles de las siguientes expresiones permite calcular exactamente su longitud de la circunferencia. Expliquen por qué eligieron o no cada una de las opciones propuestas.

(Aclaración: L=longitud de la circunferencia)

i. L= π. 2,5 cm   ii. L= 3,14 . 2,5 cm   iii. L= π . 5cm

iv. L= 3,1415. 5cm   v. L= π . 2 . 2,5 cm

4) Con una cinta métrica, midan cuidadosamente la altura de cada uno de los integrantes del equipo. (Altura= distancia del piso hasta la cabeza de forma perpendicular al piso).

A continuación, de la misma forma, midan la distancia entre el piso y el ombligo.

Registren dichos datos en la tabla.

¡Para tener en cuenta! Deben expresar ambas medidas con la misma unidad (metros o centímetros).

Finalmente, calculen el cociente entre la altura y la distancia del piso al ombligo de cada uno de los integrantes.

Nombre	Altura	Distancia piso-ombligo (Dist. P-O)	$\frac{Altura}{Dist.\ P-O}$

a) Comparen los resultados obtenidos en la última columna (cociente entre la altura y la distancia del ombligo al piso), ¿A qué número irracional se aproxima?

b) Investiguen y expliquen brevemente qué es la razón áurea.

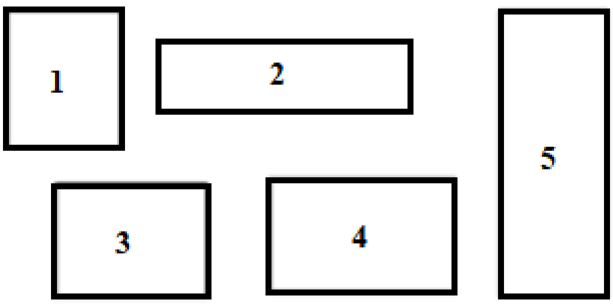
c) Investiguen y describan por lo menos una relación entre las medidas de distintas partes del cuerpo que sea considerada una razón áurea.

d) Investiguen y nombren algunos artista/s (pintor/a, escultor/a, arquitecto/a, etc) que utilizaron en sus obras esta razón o proporción. Escriban algunas como ejemplo.

5) Muéstrenle las siguientes figuras a 50 personas como mínimo.

Para que la encuesta sea más sencilla distribuyan la cantidad de personas entre los integrantes del grupo.

Dados los siguientes 5 rectángulos ¿Qué rectángulo te resulta más bello y armonioso?



a) Una vez realizada la encuesta, registren los datos obtenidos y completen la siguiente tabla:

	Rectángulo 1	Rectángulo 2	Rectángulo 3	Rectángulo 4	Rectángulo 5	Total
Cantidad de Votos						
Porcentaje						

b) ¿Qué rectángulo fue el más votado? ¿Cuál fue el porcentaje?

c) Tomen la medida aproximada de la base y de la altura de cada rectángulo y luego, calculen el cociente entre el lado mayor y el lado menor. Registren los resultados.

d) ¿Existe alguna relación entre el rectángulo más elegido y el resultado obtenido en el punto anterior?

Anexo 5

Evaluación de matemática. Números irracionales

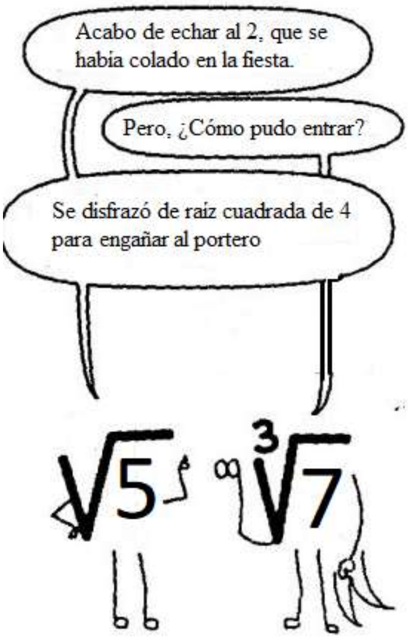
Nombre y Apellido: ……………………………………………………………Curso: …………

1) *Observa la imagen y responde:*

a) *¿Conoces la pintura? Escribe, si lo sabes, el nombre de la obra y su autor.*

b) *¿Con qué número irracional puedes relacionar esta obra? ¿Por qué?*

2) *En una fiesta exclusiva de números se ven las siguientes situaciones…*



A partir de las imágenes y diálogos anteriores, responde:

a) *¿Quiénes son los invitados de esta fiesta distinguida? ¿Cómo te das cuenta?*

b) *¿Por qué echaron al número 2? ¿Por qué crees que se disfrazó de raíz de 4?*
c) *¿Cuáles son los números que están en el Salón VIP? ¿Por qué crees que están en ese salón?*
d) *¿A qué otro número invitarías a esta fiesta?*

3) *La obra que aparece a continuación se llama Weiches Hart y la realizó* Wassily Kandinsky *en el año 1927. Kandinsky realizaba obras de arte abstracto y en muchas de ellas, incluía figuras geométricas.*

a) *¿Qué figuras geométricas puedes identificar en la obra? (Identifica por lo menos cuatro figuras)*
b) *¿Cuál o cuáles de esas figuras geométricas se relacionan con un número irracional? ¿Por qué?*

4) *Un caracol sale de su casita y trepa por la soga hasta lo alto del árbol como muestra el dibujo. Si la soga mide* $\sqrt{34}$ *metros y la altura que alcanza del árbol es 3 metros, ¿Cuál es la distancia entre la casita y la base del árbol?*