



**UNIVERSIDAD NACIONAL DEL LITORAL  
FACULTAD DE INGENIERÍA QUÍMICA**

TESIS PRESENTADA COMO PARTE DE LOS REQUISITOS DE LA  
UNIVERSIDAD NACIONAL DEL LITORAL PARA LA OBTENCIÓN DEL  
GRADO ACADÉMICO DE

**Doctor en Tecnología Química, Industrial y  
de los Materiales**

EN EL CAMPO DE: **Control Óptimo de Procesos**

TÍTULO DE LA TESIS:

**Control Predictivo Basado en Modelo con  
Desigualdades Matriciales Aplicado a la  
Industria de Procesos**

INSTITUCIÓN DONDE SE REALIZÓ:  
Departamento de Ingeniería Química  
Facultad de Ingeniería Química, UNL

AUTOR: **Hugo A. PIPINO**

DIRECTOR DE TESIS:  
**Dr. Eduardo J. ADAM**

MIEMBROS DEL JURADO:  
Dr. Rodolfo Gabriel DONDO  
Dr. Antonio FERRAMOSCA  
Dr. José María MANZANO CRESPO

AÑO DE PRESENTACIÓN: 2023





*“Para una voluntad firme, nada es imposible, no hay fácil ni difícil. Fácil es lo que ya sabemos hacer, difícil, lo que aún no hemos aprendido a hacer bien.”*

Bernardo Houssay



# Agradecimientos

En primer lugar, quiero agradecer a mi director, Prof. Eduardo J. Adam, por su constante dedicación, ideas, consejos y apoyo durante el desarrollo de la tesis, sin los cuales no hubiera sido posible este logro.

También quiero agradecer a los “Controleros”, mis compañeros de laboratorio, en especial a Carlos y Emanuel con quienes hemos compartido experiencias, conocimientos y discusiones, favoreciendo siempre un intercambio constructivo de ideas.

Además, quisiera agradecer a la Universidad Tecnológica Nacional (UTN) que, a través de la Beca de Formación de Doctores para Fortalecer las Áreas de I+D+i, me permitió emprender este camino y tener la oportunidad de realizar esta maravillosa experiencia.

Finalmente, quiero agradecer y dedicar esta tesis a mi familia y a todas las personas que me brindaron un constante aliento, por estar siempre a mi lado apoyándome.



# Índice general

<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Análisis de la principal bibliografía relacionada . . . . .	3
1.1.1. Control predictivo basado en modelos . . . . .	3
1.1.2. Control con desigualdades matriciales . . . . .	6
1.2. Aspectos que lo hacen diferente de lo ya existente . . . . .	7
1.3. Objetivos de la investigación . . . . .	8
1.3.1. Objetivo general . . . . .	8
1.3.2. Objetivos específicos . . . . .	8
1.4. Organización de la tesis . . . . .	8
<b>2. Control Óptimo de Sistemas Dinámicos</b>	<b>9</b>
2.1. Modelo del sistema . . . . .	10
2.1.1. Modelos lineales invariantes en el tiempo . . . . .	11
2.1.2. Modelos afines invariantes en el tiempo . . . . .	12
2.1.3. Modelos lineales de parámetros variables . . . . .	13
2.2. Control predictivo basado en modelos . . . . .	14
2.2.1. Análisis de estabilidad . . . . .	16
2.2.2. Control predictivo basado en modelos con modelo lineal in-	
variante en el tiempo para regulación . . . . .	21
2.2.3. Control predictivo basado en modelos con modelo lineal in-	
variante en el tiempo para seguimiento de referencia . . . . .	26
2.3. Control óptimo con desigualdades matriciales lineales . . . . .	33
2.3.1. Regulador cuadrático-lineal con modelo lineal invariante en	
el tiempo . . . . .	33
2.3.2. Regulador cuadrático-lineal con modelo lineal de parámetros	
variables . . . . .	43
2.4. Conclusiones . . . . .	49
<b>3. Control Predictivo basado en Modelos Adaptativo para Regula-</b>	
<b>ción</b>	<b>53</b>
3.1. Descripción del problema . . . . .	54
3.2. Condiciones de estabilidad . . . . .	56
3.3. Métodos de control predictivo basado en modelos adaptativo para	
regulación . . . . .	58
3.3.1. MPC adaptativo en una etapa . . . . .	59
3.3.2. MPC adaptativo en dos etapas . . . . .	67

3.4.	Aplicación a la industria de procesos . . . . .	71
3.4.1.	Ejemplo de aplicación I - Intercambiador de calor . . . . .	72
3.4.2.	Ejemplo de aplicación II - Reactor continuo de tanque agitado . . . . .	78
3.5.	Conclusiones . . . . .	84
<b>4.</b>	<b>Control Predictivo basado en Modelo Adaptativo para Seguimiento de Referencia</b>	<b>87</b>
4.1.	Definición del costo y restricción terminales . . . . .	88
4.2.	Métodos de control predictivo basado en modelos adaptativo para seguimiento de referencia . . . . .	92
4.2.1.	AMPC en una etapa para seguimiento de referencia . . . . .	92
4.2.2.	AMPC en dos etapas para seguimiento de referencia . . . . .	97
4.3.	Aplicación a la industria de procesos . . . . .	102
4.3.1.	Ejemplo de aplicación I - Intercambiador de calor . . . . .	103
4.3.2.	Ejemplo de aplicación II - Reactor continuo de tanque agitado . . . . .	107
4.4.	Conclusiones . . . . .	112
<b>5.</b>	<b>Conclusiones</b>	<b>115</b>
5.1.	Resumen y contribuciones de la tesis . . . . .	115
5.2.	Trabajos futuros . . . . .	116
	<b>Listado de Publicaciones</b>	<b>117</b>
<b>A.</b>	<b>Conjuntos Aplicados al Control</b>	<b>119</b>
A.1.	Operaciones con conjuntos . . . . .	120
A.2.	Conjuntos aplicados al control . . . . .	120
A.2.1.	Cálculo de un conjunto invariante con modelo LTI . . . . .	123
<b>B.</b>	<b>Desigualdades Matriciales Lineales</b>	<b>125</b>
B.1.	Estabilidad de sistemas lineales . . . . .	125
B.2.	Complemento de Schur . . . . .	126
<b>C.</b>	<b>Linealización Jacobiana Parametrizada</b>	<b>127</b>
C.1.	Obtención de modelos lineales . . . . .	128
<b>D.</b>	<b>Modelos Matemáticos de Sistemas Utilizados</b>	<b>129</b>
D.1.	Masa-Resorte-Amortiguador . . . . .	129
D.2.	Operaciones unitarias . . . . .	130
D.2.1.	Intercambiador de calor . . . . .	131
D.2.2.	Reactor continuo de tanque agitado . . . . .	133

# Índice de figuras

1.1. Estructura de control jerárquica . . . . .	4
2.1. Representación gráfica de un modelo LPV. . . . .	14
2.2. Esquema general de MPC . . . . .	15
2.3. Estabilidad y convergencia para el origen. . . . .	17
2.4. Conjuntos controlables considerando el sistema masa-resorte-amortiguador para regulación al origen. . . . .	23
2.5. Evolución de los estados del sistema masa-resorte-amortiguador empleando MPC para regulación al origen. . . . .	24
2.6. Evolución temporal de las variables del sistema masa-resorte-amortiguador controlado mediante MPC con propósito de regulación. . . . .	25
2.7. Carga computacional producto de MPC para regulación aplicado a un sistema masa-resorte-amortiguador. . . . .	25
2.8. Conjuntos controlables considerando el sistema masa-resorte-amortiguador para regulación a $x_s \neq 0$ . . . . .	26
2.9. Evolución de los estados del sistema masa-resorte-amortiguador empleando MPC para regulación a $x_s \neq 0$ . . . . .	26
2.10. Interpretación gráfica de una función convexa. . . . .	30
2.11. Conjunto invariante para seguimiento de referencia. . . . .	31
2.12. Conjuntos controlables considerando el sistema masa-resorte-amortiguador para seguimiento de referencia. . . . .	32
2.13. Evolución de los estados del sistema masa-resorte-amortiguador empleando MPC para seguimiento de referencia. . . . .	32
2.14. Evolución temporal de las variables del sistema masa-resorte-amortiguador controlado mediante MPC con propósito de seguimiento de referencia. . . . .	33
2.15. Carga computacional producto de MPC para seguimiento de referencia aplicado a un sistema masa-resorte-amortiguador. . . . .	34
2.16. Esquema de LQR discreto . . . . .	37
2.17. Evolución de los estados del sistema masa-resorte-amortiguador empleando LQR vía LMI con modelo LTI para regulación al origen. . . . .	42
2.18. Evolución temporal de las variables del sistema masa-resorte-amortiguador controlado mediante LQR vía LMI con modelo LTI. . . . .	43
2.19. Evolución de los estados del sistema masa-resorte-amortiguador empleando LQR vía LMI con modelo LPV para regulación al origen. . . . .	49
2.20. Evolución temporal de las variables del sistema masa-resorte-amortiguador controlado mediante LQR vía LMI con modelo LPV. . . . .	50

3.1.	Conjuntos controlables considerando el sistema masa-resorte-amortiguador con incertidumbre para regulación al origen. . . . .	64
3.2.	Evolución de los estados del sistema masa-resorte-amortiguador empleando AMPC en una etapa para regulación al origen. . . . .	65
3.3.	Evolución temporal de las variables del sistema masa-resorte-amortiguador controlado mediante AMPC en una etapa con propósito de regulación. . . . .	66
3.4.	Evolución del grado de pertenencia para la obtención del modelo de predicción de AMPC en una etapa para el sistema masa-resorte-amortiguador. . . . .	66
3.5.	Carga computacional producto de AMPC en una etapa para regulación aplicado a un sistema masa-resorte-amortiguador. . . . .	67
3.6.	Evolución de los estados del sistema masa-resorte-amortiguador empleando AMPC en dos etapas para regulación al origen. . . . .	70
3.7.	Evolución temporal de las variables del sistema masa-resorte-amortiguador controlado mediante AMPC en dos etapas con propósito de regulación. . . . .	71
3.8.	Evolución del grado de pertenencia para la obtención del modelo de predicción calculado por MHE para el sistema masa-resorte-amortiguador. . . . .	72
3.9.	Carga computacional producto de AMPC en dos etapas para regulación aplicado a un sistema masa-resorte-amortiguador. . . . .	73
3.10.	Evolución de los estados del sistema HE empleando las estrategias de control para regulación a $x_s$ . . . . .	74
3.11.	Evolución temporal de las variables del sistema HE empleando las estrategias de control con propósito de regulación con un elipsoide terminal. . . . .	75
3.12.	Evolución temporal de las variables del sistema HE empleando las estrategias de control con propósito de regulación con un politopo terminal. . . . .	76
3.13.	Evolución del grado de pertenencia para la obtención del modelo de predicción para el sistema HE. . . . .	77
3.14.	Carga computacional producto del MHE-MPC para regulación aplicado a un sistema HE. . . . .	79
3.15.	Evolución de los estados del sistema CSTR empleando las estrategias de control para regulación a $x_s$ . . . . .	80
3.16.	Evolución temporal de las variables del sistema CSTR empleando las estrategias de control con propósito de regulación con un elipsoide terminal. . . . .	81
3.17.	Evolución temporal de las variables del sistema CSTR empleando las estrategias de control con propósito de regulación con un politopo terminal. . . . .	82
3.18.	Evolución del grado de pertenencia para la obtención del modelo de predicción para el sistema CSTR. . . . .	83
3.19.	Carga computacional producto del MHE-MPC para regulación aplicado a un sistema CSTR. . . . .	84



4.1.	Conjuntos controlables considerando el sistema masa-resorte-amortiguador con incertidumbre para seguimiento de referencia. . . . .	95
4.2.	Evolución de los estados del sistema masa-resorte-amortiguador empleando AMPC en una etapa para seguimiento de referencia. . . .	96
4.3.	Evolución temporal de las variables del sistema masa-resorte-amortiguador controlado mediante AMPC en una etapa con propósito de seguimiento de referencia. . . . .	97
4.4.	Evolución del grado de pertenencia para la obtención del modelo de predicción de AMPC en una etapa para el sistema masa-resorte-amortiguador. . . . .	98
4.5.	Carga computacional producto de AMPC en una etapa para seguimiento de referencia aplicado a un sistema masa-resorte-amortiguador.	98
4.6.	Evolución de los estados del sistema masa-resorte-amortiguador empleando AMPC en dos etapas para seguimiento de referencia. . . .	100
4.7.	Evolución temporal de las variables del sistema masa-resorte-amortiguador controlado mediante AMPC en dos etapas con propósito de seguimiento de referencia. . . . .	101
4.8.	Evolución del grado de pertenencia para la obtención del modelo de predicción de AMPC en dos etapas para el sistema masa-resorte-amortiguador. . . . .	101
4.9.	Carga computacional producto de AMPC en dos etapas para seguimiento de referencia aplicado a un sistema masa-resorte-amortiguador.	102
4.10.	Evolución de los estados del sistema HE empleando las estrategias de control para seguimiento de referencia. . . . .	103
4.11.	Evolución temporal de las variables del sistema HE empleando las estrategias de control con propósito de seguimiento de referencia. . .	105
4.12.	Evolución del grado de pertenencia para la obtención del modelo de predicción para el sistema HE. . . . .	106
4.13.	Efecto de la penalización de $\nu_\mu$ en AMPC . . . . .	106
4.14.	Carga computacional producto del MHE-MPC para seguimiento de referencia aplicado a un sistema HE. . . . .	108
4.15.	Evolución de los estados del sistema CSTR empleando las estrategias de control para seguimiento de referencia. . . . .	109
4.16.	Evolución temporal de las variables del sistema CSTR empleando las estrategias de control con propósito de seguimiento de referencia.	110
4.17.	Efecto de la omisión del ruido de medición al aplicar AMPC . . . .	111
4.18.	Evolución del grado de pertenencia para la obtención del modelo de predicción para el sistema CSTR. . . . .	111
4.19.	Carga computacional producto del MHE-MPC para seguimiento de referencia aplicado a un sistema CSTR. . . . .	112
A.1.	Operaciones con conjuntos. . . . .	121
A.2.	Inclusión de conjuntos. . . . .	122
D.1.	Esquema del sistema masa-resorte-amortiguador. . . . .	129
D.2.	Diagrama del proceso de un intercambiador de calor. . . . .	131

D.3. Diagrama del proceso de un reactor continuo de tanque agitado. . 133

# Índice de tablas

3.1. Modelo LPV de un intercambiador de calor. . . . .	73
3.2. Índices de rendimiento de los métodos de control con propósito de regulación en un HE. . . . .	78
3.3. Tiempos de esfuerzo de cálculo de las estrategias de control con respecto al tiempo de muestreo en un HE. . . . .	78
3.4. Modelo LPV de un reactor continuo de tanque agitado. . . . .	79
3.5. Índices de rendimiento de los métodos de control con propósito de regulación en un CSTR. . . . .	83
3.6. Tiempos de esfuerzo de cálculo de las estrategias de control con respecto al tiempo de muestreo en un CSTR. . . . .	83
4.1. Índices de rendimiento de los métodos de control con propósito de seguimiento de referencia en un HE. . . . .	107
4.2. Tiempos de esfuerzo de cálculo de las estrategias de control con respecto al tiempo de muestreo en un HE. . . . .	107
4.3. Índices de rendimiento de los métodos de control con propósito de seguimiento de referencia en un CSTR. . . . .	109
4.4. Tiempos de esfuerzo de cálculo de las estrategias de control con respecto al tiempo de muestreo en un CSTR. . . . .	110
D.1. Parámetros del modelo de un intercambiador de calor. . . . .	132
D.2. Parámetros del modelo de un reactor continuo de tanque agitado. . . . .	134



# Resumen

Los sistemas industriales modernos, basados en proveer una mejor calidad y uniformidad de sus productos aprovechando mejor los recursos disponibles y favoreciendo el cuidado del medioambiente, incorporan sistemas de control cada vez más complejos. La industria de procesos químicos, cada vez más sofisticada, tiene un gran y continuo desarrollo que ha sido acompañado de avances en problemas de computación, control y optimización. Entre ellos, las técnicas de control avanzadas se fueron estableciendo para mejorar el desempeño y garantizar la estabilidad del sistema controlado.

En consecuencia, los controladores basados en problemas de optimización se implementan en una amplia gama de aplicaciones industriales. Los controladores óptimos u optimizantes toman en cuenta, mediante una función, los objetivos requeridos e incorporan las restricciones operativas del sistema. En este sentido, el control predictivo basado en modelos utiliza un modelo matemático de predicción para obtener las respuestas futuras y aplicar aquella que mejor satisfaga los objetivos propuestos. Por lo tanto, para diseñar esquemas de control de este tipo, se deben tener en cuenta varios aspectos. Siendo éstos los objetivos requeridos, el modelo de la planta para predicción, las restricciones impuestas, la ley de control, el tamaño del horizonte de predicción, entre otros.

Tomando en cuenta estos aspectos, esta tesis aborda el diseño, desarrollo y evaluación de estrategias de control predictivo basado en modelos aplicado a procesos típicos de la industria de procesos, que aseguren estabilidad del sistema controlado, el cumplimiento de las restricciones operativas y que contemplen incertidumbre en el modelo de predicción, ya sea por las que surgen de la naturaleza no lineal del sistema o porque no se conocen con exactitud los parámetros del modelo.

Para ello, en primer lugar, se introduce el estado del arte y se abordan los principales conceptos y herramientas matemáticas en las que se sustenta esta tesis. Luego, se presentan dos estrategias de control predictivo basado en modelos adaptativo para regulación. Por un lado, un controlador que realiza la adaptación del modelo y obtiene la secuencia de controles en una única etapa y por otro lado, un esquema de dos etapas en que la primera obtiene el modelo de predicción adaptado y la segunda calcula la secuencia de controles aplicando dicho modelo. A continuación se amplían dichas técnicas para seguimiento de referencia. Las condiciones de estabilidad del controlador se establecen en términos de problemas de desigualdades matriciales lineales.

Por último, las estrategias de control propuestas se evalúan en procesos industriales químicos no lineales típicos, un intercambiador de calor y un reactor

continuo de tanque agitado. Para ello, se realizaron simulaciones numéricas realistas que permiten abordar discusiones sobre el desempeño y la efectividad de cada una de las técnicas. Los resultados de la simulación se analizan en detalle y se discuten las ventajas y desventajas de cada estrategia de control.

# Abstract

Modern industrial systems, based on providing better quality and uniformity of their products while making better use of available resources and favoring care for the environment, incorporate increasingly complex control systems. In particular, the chemical process industry has a significant development, accompanied by advances in computing, control and optimization problems. Among these advances, advanced control techniques have been established to improve the performance and ensure the stability of the controlled system.

Consequently, optimization-based controllers are implemented in a wide range of industrial applications. Optimal or optimizing controllers take into account, through a functional, the required objectives and incorporate the system operating constraints. In this sense, model-based predictive control uses a mathematical prediction model to predict future system responses and to apply the control strategy that best satisfies the desired objectives. Therefore, to design these control schemes, several aspects must be considered, including the required objectives, process model for prediction, imposed constraints, control law, length of the prediction horizon, among others.

On the basis of the aspects mentioned above, this thesis focuses on the design, development and evaluation of model-based predictive control strategies applied to typical industrial processes. The proposed techniques aim to ensure the stability of the controlled system, compliance with operating constraints, and contemplate uncertainty in the prediction model. Uncertainty can be arise from the non-linear nature of the system or due to the lack of exact knowledge of the model parameters.

To do this, firstly, the current state-of-art is introduced together with the main mathematical concepts and necessary tools on which this thesis is based. Then, two adaptive model-based predictive control strategies for regulation purposes are presented. The first approach is a controller that adapts the model and obtains the control sequence in a single stage, and on the other hand. The second approach involves a two-stage scheme, where the first stage obtains the adapted prediction model and the second stage calculates the control sequence applying the model from the first stage. Subsequently, these techniques are extended for reference tracking purposes. The controller stability conditions are stated in terms of linear matrix inequality problems.

Finally, the proposed control strategies are evaluated on two typical non-linear chemical industrial processes, a heat exchanger and a continuous stirred tank reactor. For this, realistic numerical simulations are carried out to assess the performance and effectiveness of each technique. The simulation results are thoroughly

analyzed, and the advantages and disadvantages of each strategy are discussed.





# Capítulo 1

## Introducción

Los avances tecnológicos experimentados en las últimas décadas, sumado a la necesidad de satisfacer las necesidades de un mercado cada vez más exigente en cuanto a calidad, uniformidad, seguridad y cuidado del medioambiente, han llevado a que los sistemas de control estén presentes en casi todos los aspectos de la vida cotidiana, desde simples elementos de uso diario hasta en grandes industrias, donde la industria de procesos no es ajena.

La industria de procesos se ha vuelto cada vez más compleja, expandiéndose junto a los desarrollos recientes y continuos en áreas como la computación, el control avanzado y la optimización. Entre los métodos de control más establecidos, el Control Predictivo basado en Modelos (MPC<sup>1</sup>, por sus siglas en inglés) aparece en gran parte de estas aplicaciones industriales [1].

Básicamente, el diseño de controladores para la industria de procesos tiene por objetivo lograr que el sistema controlado funcione en forma óptima (o próximo a ésta), garantizando características dinámicas adecuadas ante los diversos escenarios que puedan presentarse, entre los que pueden mencionarse:

- Cambio de consigna, muchos procesos a lo largo de su funcionamiento normal se ven sometidos a frecuentes cambios en su punto de operación, de forma que para éstos no existe un punto de funcionamiento, sino más bien un rango de puntos de funcionamiento en cualquiera de los cuales el proceso puede operar durante un periodo de tiempo [2]. Ante esta situación, el sistema de control debe reducir o eliminar el error de seguimiento y acotar el tiempo de respuesta a valores razonables.
- Incertidumbre de modelado, el desempeño del sistema de control depende en gran medida del modelo matemático que representa la planta a controlar, sin embargo, este modelo es una aproximación de la dinámica real y la diferencia entre ambos se conoce como error o incertidumbre de modelado. Por lo tanto, el sistema de control debe lograr cierta robustez ante las incertidumbres propias del modelado al usar aproximaciones para representar al sistema.
- Presencia de perturbaciones, una planta en funcionamiento puede verse afectada por perturbaciones externas que cambian su punto de operación, mo-

---

<sup>1</sup>Model-based Predictive Control

dificando ya sea entradas y/o salidas. Por ello, el sistema de control debe presentar un buen rechazo de perturbaciones, es decir, reducir al mínimo la variabilidad que se produce en las variables controladas ante entradas no deseadas y reducir la sensibilidad al ruido de proceso o al producido en los sensores de las variables medidas.

En MPC se utiliza un modelo para predecir la salida del proceso. De esta manera, se evalúan los posibles comportamientos futuros y se calcula una secuencia de acciones de control futuras que logren el comportamiento deseado. Luego, sólo la primera acción es implementada y la situación se reevalúa, para tener en cuenta los cambios recientes, esta técnica es conocida como estrategia de horizonte deslizante (RHC<sup>2</sup>, por sus siglas en inglés).

Si bien la técnica RHC, utilizada por MPC, dota de realimentación al sistema y por lo tanto de cierta robustez, la presencia de perturbaciones externas o significativos errores de modelado pueden apartar la planta del comportamiento deseado, incluso pueden hacer que su evolución viole las restricciones operativas o de seguridad, que el controlador deje de ser factible o que se pierda la convergencia del sistema en bucle cerrado.

Lo planteado tiene especial relevancia en la industria de procesos, donde los sistemas típicos se caracterizan por presentar, como principales dificultades, comportamientos no lineales, variantes en el tiempo, tiempos muertos, límites en sus estados y en las variables manipuladas, límites de seguridad operativa, entre otras [3]. Los modelos que describen estos sistemas provienen, mayoritariamente, de la formulación matemática de sus principios físico-químicos, en general de ecuaciones de balances adecuadamente simplificadas o bien, del tratamiento numérico de datos experimentales y de la elección de una forma analítica simplificada para expresar la dinámica y posterior ajuste de sus parámetros.

Sin embargo, determinar los valores de los parámetros no implica que se conozcan con exactitud sino que va a existir una tolerancia o incertidumbre en los mismos, y aunque los valores nominales de los parámetros sean muy precisos, los puntos de operación de la planta cambian, debido a la inevitable desviación con respecto al punto de equilibrio del sistema cuando está en funcionamiento, o bien se ven afectados por perturbaciones externas, o simplemente varían con el tiempo. Por tanto, los parámetros del modelo cambian y necesitan ser contemplados y, en algunos casos, corregidos. Si no se toman los recaudos necesarios, estos factores pueden causar un pobre desempeño, y más aún, inestabilidad en el sistema controlado.

Por otro lado, en las formulaciones originales de MPC, los sistemas controlados generalmente se representan a través de modelos Lineales e Invariantes en el Tiempo (LTI<sup>3</sup>, por sus siglas en inglés), donde la inclusión de modelos no lineales no es una tarea trivial y aumenta considerablemente la complejidad de la capa de optimización resultante [4], dificultando su aplicación en tiempo real. Incluso la función (normalmente no lineal) que describe el sistema puede no estar disponible, no ser identificada o no ser utilizada para el control (por ejemplo, debido a

---

<sup>2</sup>Receding Horizon Control

<sup>3</sup>Linear Time Invariant

su complejidad). Por estas razones, usualmente se utilizan modelos lineales para la predicción, los cuales son generalmente linealizados o identificados en un punto de operación específico de la planta.

Sin embargo, el modelo lineal utilizado para la predicción representa el comportamiento de la planta alrededor de un solo punto de operación determinado. Si el punto de operación del sistema cambia, el modelo lineal utilizado para la predicción puede no describir el comportamiento de la planta en este nuevo punto y la estrategia de control puede no cumplir eficazmente con su tarea.

El objetivo de esta tesis es lograr que el sistema de control sea capaz de lograr un desempeño óptimo o muy cercano a éste, cumpliendo con las condiciones dinámicas especificadas, respetando restricciones operativas, y asegurando, las condiciones de robustez necesarias de manera que se garantice estabilidad asintótica de la referencia para el sistema controlado considerando incertidumbre de modelo, presencia de perturbaciones externas y restricciones del proceso real.

## 1.1. Análisis de la principal bibliografía relacionada con el tema propuesto

### 1.1.1. Control predictivo basado en modelos

En la industria de procesos, donde se utilizan sistemas tales como columnas de destilación, intercambiadores de calor, reactores batch y continuos, tanques, etc., las principales problemáticas son las no linealidades, las restricciones en las variables de salida y manipuladas, los tiempos muertos y requerimientos de seguridad. Esto ha llevado a que los sistemas de control tradicionales tengan un bajo desempeño y, por ello, al momento de mejorar el desempeño de procesos industriales, usualmente en la literatura de control de procesos ([5], [6], [7]) se recurre a lo que se conoce como estrategias de control avanzadas tradicionales, que incluyen fundamentalmente al control feedforward, control en cascada, predictor de Smith, control de relación, control selectivo y control de rango dividido. Si bien, estas estrategias han mostrado ser más exitosas que el control por realimentación tradicional, muchos esquemas de control avanzados se han ido radicando como estrategias ya tradicionales en la ingeniería de control de procesos, como es el caso del control óptimo, control predictivo, control adaptativo, y otras más modernas como el diagnóstico, la detección y el control tolerante a fallas, los sistemas de control con aprendizaje, entre otras.

Sin embargo, el control PID tradicional y algunas opciones de diseño como por ejemplo, el diseño fuera de línea mediante el uso de Desigualdades Matriciales Lineales LMIs<sup>4</sup> siguen siendo utilizadas en aplicaciones industriales. Estos controladores posibilitan mantener la planta en el punto de operación deseado (regulador) como control de bajo nivel en una estructura de control jerárquica como la que se muestra en la Figura 1.1 [8].

---

<sup>4</sup>Linear Matrix Inequalities

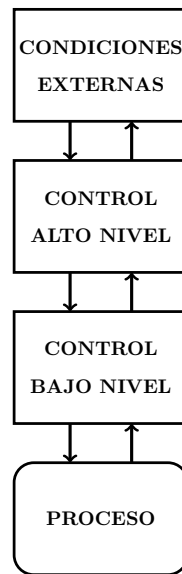


Figura 1.1: Estructura de control jerárquica

En lo que respecta al control de alto nivel, MPC aparece en gran parte de estas aplicaciones industriales siendo de los métodos de control más establecidos.

El control predictivo fue introducido por Richalet et al. en 1978 ([9]), con el controlador Model Predictive Heuristic Control. Posteriormente, Cutler y Ramaker en 1980 ([10]) presentaron el Control con Matriz Dinámica (DMC<sup>5</sup>, por sus siglas en inglés) y Clarke, Mohtadi y Tuffs (1987) ([11] y [12]) presentan el Controlador Predictivo Generalizado (GPC<sup>6</sup>, por sus siglas en inglés). Tanto el DMC como el GPC en su formulación utilizan matrices de funciones de transferencia entrada-salida obtenidas en base a una respuesta al escalón. Posteriormente muchas formas de MPC lineales que utilizan un modelo bajo la representación de estados han sido presentadas en los diferentes medios de publicación académica, entre las más populares se pueden citar a los trabajos [13], [14], [15], [16], entre muchos otros.

Además se debe tener en cuenta que el control de una planta real no lineal mediante herramientas desarrolladas para el control de sistemas lineales, difícilmente puedan ser exitosas si no se dispone de un buen modelo nominal lineal de la planta. Las fuertes no linealidades de las plantas químicas hacen de esto último algo sumamente difícil. Los inconvenientes relacionados con la identificación de funciones de transferencia o ecuaciones de estados de los sistemas tienen su impacto al momento de reajustar el controlador a fin de lograr un aceptable desempeño del lazo de control y en algunos casos puede restringir su aplicabilidad en los sistemas industriales. Por tal motivo, usualmente se siguen metodologías de trabajo bien definidas. Una de ellas busca diseñar un controlador para que un conjunto de plantas satisfagan condiciones de estabilidad y desempeño robusto ([17], [18], [19], [20], entre muchos otros).

Toda formulación de control predictivo se destaca por su funcionamiento sen-

<sup>5</sup>Dynamic Matrix Control

<sup>6</sup>Generalized Predictive Controller

cillo e intuitivo, que lo llevó a ser popular tanto en el ámbito académico como en el industrial. La posibilidad de incorporar restricciones tanto en las variables manipuladas como en los estados y las salidas, así como de trabajar con sistemas multivariados son razones que impulsan su utilización [21],[13].

En términos generales, los algoritmos de MPC presentan elementos comunes en el planteo:

- Utilizan un modelo del proceso para predecir su comportamiento a lo largo de un horizonte temporal preestablecido.
- Definen una función de costo a minimizar mediante un algoritmo de optimización. Generalmente esta función de costo depende al menos del error cuadrático entre la referencia y los estados/salida controlada en el horizonte de control.
- Calculan la secuencia de acciones de control futuras para hacer que en ese horizonte las variables controladas alcancen sus valores de referencia y minimicen la función de costo definida.
- Finalmente, sólo la primera acción es implementada y la operación de cálculo de las variables manipuladas se repite en cada instante de muestreo, técnica de horizonte deslizante RHC.

Si bien el control predictivo es una estrategia de control muy potente que permite formular controladores para sistemas complejos que incluyen restricciones, esta potencia tiene un precio asociado al costo computacional y la sintonización del controlador, que en algunos casos puede ser elevado. Los avances producidos en las últimas décadas en el campo del MPC proveen un conocimiento más profundo de estos controladores, obteniéndose resultados que permiten relajar estos requerimientos. Así por ejemplo, se han establecido condiciones generales para garantizar la estabilidad [22], condiciones bajo las cuales se puede relajar la optimalidad del controlador garantizando su estabilidad [23].

Aunque existen formulaciones de control predictivo no lineal que utilizan un modelo no lineal del proceso para predecir el comportamiento dinámico futuro de la planta ([24], [25], [4], entre otros), es habitual la utilización de modelos lineales que representen el proceso en un punto de operación óptimo o punto de funcionamiento en el cual debería permanecer con el fin de maximizar su eficiencia. Sin embargo, en la industria de procesos, muchas plantas a lo largo de su normal funcionamiento se ven sometidas a frecuentes cambios en su punto de operación, de forma que para éstos no existe un punto de funcionamiento definido, sino más bien un rango o conjunto de puntos de funcionamiento en los cuales el proceso puede operar durante un período de tiempo. La selección del punto de operación dentro de este rango se hará conforme a la diversidad de productos, lotes o situaciones en las que la planta se pueda encontrar [2].

En trabajos como [16], [26], [8], [27], [28], [2] se propone la utilización de variables de decisión auxiliares con el objetivo de permitir que el sistema pueda ser llevado a cualquier punto de funcionamiento respetando las restricciones dadas

sin necesidad de ampliar el horizonte de control. Una característica significativa de estos controladores es que si la referencia a seguir es infactible, pueden estabilizar la planta en el punto factible más cercano a la referencia evitando relajar las restricciones propias del sistema.

### 1.1.2. Control con desigualdades matriciales

A finales del siglo XX, se advirtió que un conjunto de especificaciones robustas bajo la representación de estados encontraban un marco común de formulación, llamada LMI y uno de los primeros trabajos que realiza un gran aporte a la teoría de control es el de Boyd et al. publicado en 1994 ([29]). La ventaja radica en que un conjunto de especificaciones de diseño, es transformado en una intersección de regiones convexas, y por lo tanto el conjunto resultante es convexo [30]. Planteadas las especificaciones antes mencionadas, como restricciones en formato LMI, la solución de encontrar un controlador que las satisfaga se resume a resolver un problema de optimización convexo, para el cual hay algoritmos de búsqueda especializados como son los métodos de punto interior [31]. Una vez planteado el problema de control como uno de optimización, al ser éste convexo, se tiene la certeza de que si existe solución, ésta es única.

En función de lo establecido, resulta conveniente el planteo de especificaciones de diseño para diferentes modelos que representen el sistema bajo cambios en parámetros o puntos de operación. De esta manera, es posible obtener un único problema de optimización convexo que contemple los requerimientos establecidos para todos los modelos simultáneamente [32].

Una tendencia actual consiste en diseñar a priori un controlador óptimo (predictivo o no) resolviendo un problema de optimización fuera de línea que permite satisfacer una condición de estabilidad asintótica con restricciones en la variable manipulada, la variable de estados y la variable de salida. Luego, un problema de optimización en línea es resuelto reajustando el controlador óptimo y verificando que las condiciones de diseño y las restricciones sean satisfechas sin pérdida de factibilidad en el problema de optimización [33]. Esto último, como se comentó anteriormente, surge debido a las fuertes no linealidades de los sistemas químicos que obliga a un muestreo en línea de las variables principales del proceso.

También es de remarcar que, se intensificó el esfuerzo de muchos académicos en utilizar herramientas de optimización para el diseño de sistemas de control predictivo que permitan satisfacer restricciones en la variable de control, la manipulada, etc. Un claro ejemplo son los trabajos de Kothare et al., 1996 ([34]); Mayne et al., 2000 ([22]), Maciejowski, 2002 ([13]); Rossiter, 2003 ([35]); González, 2006 ([36]). Así, la utilización de LMI se ha empezado a tomar en cuenta como una poderosa herramienta para el diseño de sistemas de control con restricciones ([34], [37], [38], [33], entre otros).

## 1.2. Aspectos que lo hacen diferente de lo ya existente y conocido en el área

En los últimos años, tanto las formulaciones de MPC como las basadas en desigualdades matriciales han experimentado un gran avance dentro del ámbito académico y en particular en la comunidad de la ingeniería en control de procesos, como así también han alcanzado un nivel muy significativo de aceptabilidad industrial en aplicaciones prácticas en esta área.

En consecuencia, es claro que la formulación de control predictivo conjuntamente con la inclusión de desigualdades matriciales puede sacar provecho de las ventajas de ambos campos de investigación.

De acuerdo a lo analizado, el problema de MPC consiste en minimizar un funcional costo sujeto al modelo, a los conjuntos de restricciones (tanto de estados, salidas como de manipuladas) y a una restricción terminal, donde el vector de decisión es la secuencia de control para cada paso de tiempo. Este problema de optimización de horizonte finito se resuelve recursivamente. Solo el primer elemento de la secuencia de control óptimo es aplicado para controlar la planta (RHC) [39]. Esta formulación resulta ser intuitiva, puede ser utilizada para controlar una gran variedad de procesos, el tratamiento de las restricciones es conceptualmente simple, éstas pueden ser sistemáticamente incluidas durante el proceso de diseño, y permite operaciones en las proximidades de las restricciones [21] [13]. Sin embargo, por tratarse de un algoritmo recursivo numérico conlleva un alto costo computacional y, en diversas ocasiones, puede complicarse la sintonización del controlador.

Por otra parte, las formulaciones basadas en desigualdades matriciales calculan una ley de control óptima que puede ser recalculada en tiempos que no necesariamente coinciden con el período de muestreo. Este enfoque posee una mayor rigurosidad en el planteo del problema permitiendo especificar los parámetros de sintonización, incluir múltiples modelos lineales, como en los casos de modelos Lineales de Parámetros Variables (LPV<sup>7</sup>, por sus siglas en inglés), y trabajar con el concepto de horizonte infinito, lo que implica que el control obtenido determina operaciones más redituables. No obstante, la inclusión de restricciones no resulta natural.

Por tal motivo, en este trabajo de tesis se busca conocer, dominar, desarrollar y utilizar técnicas de control predictivo basado en modelos utilizando desigualdades matriciales, para así implementarlas en operaciones unitarias típicas de la industria de procesos químicos, como por ejemplo, un Intercambiador de Calor (HE<sup>8</sup>, por sus siglas en inglés) o un Reactor Continuo de Tanque Agitado (CSTR<sup>9</sup>, por sus siglas en inglés).

---

<sup>7</sup>Linear Parameter Varying

<sup>8</sup>Heat Exchanger

<sup>9</sup>Continuous-Stirred Tank Reactor



## 1.3. Objetivos de la investigación

### 1.3.1. Objetivo general

Diseñar sistemas de control predictivo basado en modelos aplicados a la industria de procesos, en base a modelos lineales de parámetros variables utilizando desigualdades matriciales lineales.

### 1.3.2. Objetivos específicos

- Analizar y diseñar herramientas y algoritmos de control predictivo basado en modelos lineales y no lineales.
- Modelar sistemas no lineales, propios de la industria de procesos, mediante modelos LPV.
- Diseñar herramientas y algoritmos de control predictivo basado en modelos con garantía de estabilidad para modelos LPV.
- Evaluar y validar mediante simulaciones numéricas los sistemas de control propuestos.

## 1.4. Organización de la tesis

Esta tesis está organizada como se detalla a continuación.

En el Capítulo 2 se presentan conceptos fundamentales acerca del control óptimo de sistemas dinámicos con restricciones, se abordan las principales características y condiciones de estabilidad de MPC y del control óptimo con LMI, necesarios para tratar apropiadamente las propuestas desarrolladas en los capítulos posteriores.

El Capítulo 3 presenta el desarrollo de dos formulaciones de MPC adaptativo con fines de regulación. Se realiza un análisis, mediante el enfoque de LMI, de las condiciones de estabilidad robusta para sistemas bajo la representación de modelos LPV y se plantea una primera formulación que en una única etapa obtiene una secuencia de modelos de predicción LTI y la secuencia de controles que minimiza el funcional objetivo. Posteriormente, se propone una formulación en dos etapas, la primera de ellas se encarga de la adaptación del modelo de predicción y la segunda etapa se encarga de la obtención de la secuencia de señales de control, este enfoque busca reducir los tiempos de cómputo.

En el Capítulo 4 se extienden las técnicas indicadas a propósitos de seguimiento de referencias, para ello se aborda el cálculo de los ingredientes terminales que determinan las condiciones de estabilidad y factibilidad recursiva. Se destaca que todos los capítulos se complementan con simulaciones numéricas y conclusiones de lo tratado.

Finalmente, en el Capítulo 5 se discuten las observaciones finales y las sugerencias para futuras investigaciones.

# Capítulo 2

## Control Óptimo de Sistemas Dinámicos

A mediados del siglo XX, motivado principalmente por la industria aeroespacial, se advierte la necesidad de controlar un sistema gobernado por un conjunto de ecuaciones diferenciales, minimizando (o maximizando) un índice de desempeño pretendido [40].

De esta manera, las dinámicas de los sistemas pueden expresarse como:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= f(x(t), u(t)), \\ x(0) &= x_0,\end{aligned}\tag{2.1}$$

donde  $f(\cdot) : \mathbb{R}^{n_x} \times \mathbb{R}^{n_u} \rightarrow \mathbb{R}^{n_x}$  es una función vectorial suficientemente diferenciable para que las trayectorias de estados  $\epsilon(t)$  existan y sean únicas para cada ley de control  $\gamma(t)$ .

Por su parte, en cada problema de control óptimo existe un “costo” a optimizar que refleja el índice de desempeño. Esta función (o funcional) objetivo incluye una evaluación de la ley de control utilizada ( $\gamma(t)$ ) y de la trayectoria de estados resultante ( $\epsilon(t)$ ) a lo largo del tiempo  $t_0 \leq t \leq t_1$ , junto a una penalización final para el estado que alcance el sistema al tiempo final del intervalo ( $t_1$ ), es decir:

$$V(t_0, t_1, x_0; \gamma) = V_L(t_0, t_1, x_0; \gamma) + V_f(\epsilon(t_1)),\tag{2.2}$$

donde usualmente  $V_L(\cdot)$  viene dado por:

$$V_L(t_0, t_1, x_0; \gamma) = \int_{t_0}^{t_1} L(\epsilon(s), \gamma(s)) ds,\tag{2.3}$$

donde a la función  $L(\cdot)$  se la suele llamar el Lagrangiano por su similaridad con el problema de Cálculo de Variaciones.

Así, el problema de control óptimo consiste en encontrar una ley de control que minimiza la función objetivo, si es que ésta existe.

Probablemente el resultado más utilizado en la teoría del control óptimo es el que se obtiene de la solución al problema lineal-cuadrático, donde las ecuaciones dinámicas y las restricciones terminales son lineales y el criterio de desempeño es una función cuadrática de las variables de estados y de control. La solución a este

problema produce una ley de control como función lineal de las variables de estado [41].

De esta manera, para sistemas lineales con matrices constantes con espacio de estados  $\mathcal{X} = \mathbb{R}^{n_x}$  y de valores de control  $\mathcal{U} = \mathbb{R}^{n_u}$ , es decir, que se asume que no existen restricciones en las variables del sistema, la Ec. (2.1) resulta:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= f(x(t), u(t)) = Ax(t) + Bu(t), \\ x(0) &= x_0,\end{aligned}$$

con un costo cuadrático:

$$L(x, u) = x^T Q x + u^T R u,$$

de horizonte infinito, o sea  $t_1 = \infty$  y  $V_f(\cdot) = 0$  en la Ec. (2.2).

Por lo tanto, el problema a minimizar es:

$$V(x_0; \gamma) = \int_0^\infty (x(t)^T Q x(t) + u(t)^T R u(t)) dt,$$

para el cual, si el sistema es controlable, el resultado es un *feedback* lineal con ganancia constante [42]:

$$u^*(t) = -Kx(t), \text{ con } K = R^{-1}B^T P,$$

donde  $P$  es la solución algebraica de Riccati:

$$Q + PA + A^T P - PBR^{-1}B^T P = 0.$$

**Observación 2.1.** *De manera similar, para un sistema lineal invariante en el tiempo discreto se obtiene un feedback lineal de ganancia constante aplicando la ecuación algebraica de Riccati para tiempo discreto [43].*

Este resultado es el que se conoce como Regulador Cuadrático-Lineal (LQR<sup>1</sup>, por sus siglas en inglés).

Sin embargo, dado que los sistemas físicos presentan limitaciones en sus variables, en muchas ocasiones la aplicación de los controladores LQR se ve comprometida. Por ello, surgieron formas efectivas de implementar la solución al problema de control óptimo ante presencia de restricciones. Entre ellas se destacan MPC que se analiza en la Sección 2.2 y el enfoque basado en LMI que se desarrolla en la Sección 2.3.

Dada la relevancia de representar el sistema dinámico mediante las ecuaciones que lo describen, en la sección Sección 2.1 se realiza un análisis de diversos modelos.

## 2.1. Modelo del sistema

El modelo constituye la piedra angular de los controladores óptimos. Por ello, los sistemas que se van a controlar se suelen describir o aproximar mediante ecuaciones diferenciales ordinarias que constituyen el modelo de predicción, el cual

---

<sup>1</sup>Linear-Quadratic Regulator

frecuentemente es no lineal:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(x(t), u(t)) \\ y(t) &= g(x(t), u(t)) \\ x(0) &= x_0 \end{aligned} \tag{2.4}$$

donde  $x(t) \in \mathbb{R}^{n_x}$  es la variable de estado del sistema en un instante de tiempo dado,  $x_0$  es el estado inicial del sistema,  $u(t) \in \mathbb{R}^{n_u}$  es la variable de control o manipulada en el instante analizado,  $y(t) \in \mathbb{R}^{n_y}$  es la variable de salida o controlada del sistema en dicho instante,  $f(\cdot) : \mathbb{R}^{n_x} \times \mathbb{R}^{n_u} \rightarrow \mathbb{R}^{n_x}$  es una función continua no lineal que determina la variación de la variable de estados del sistemas en el tiempo y  $g(\cdot) : \mathbb{R}^{n_x} \times \mathbb{R}^{n_u} \rightarrow \mathbb{R}^{n_y}$  es una función continua no lineal que permite obtener la variable de salida del sistema.

### 2.1.1. Modelos lineales invariantes en el tiempo

En general, los procesos físicos son no lineales y a lo largo de su normal funcionamiento puede ocurrir que los parámetros que describen al sistema se modifiquen por la misma dinámica, por condiciones externas o por deterioro de los componentes, lo que convierte al proceso en sistemas de naturaleza variable en el tiempo. En la ingeniería de control, las no linealidades suelen presentarse por comportamientos intrínsecamente ligados a la naturaleza del sistema aunque también pueden producirse restricciones físicas en las variables de control, estados y/o salidas, así como el tasa de cambio de las mismas.

Sin embargo, siempre que el sistema no se desvíe demasiado del punto de operación nominal, es posible describir su comportamiento a través de un modelo LTI. De esta manera, es viable su análisis mediante la utilización de herramientas de control lineal, las cuales están rigurosamente establecidas y son ampliamente conocidas [44].

En este sentido, el modelo LTI en espacio de estados para tiempo continuo queda descrito por:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A_c x(t) + B_c u(t) \\ y(t) &= C_c x(t) + D_c u(t) \\ x(0) &= x_0 \end{aligned} \tag{2.5}$$

donde las matrices  $A_c \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$ ,  $B_c \in \mathbb{R}^{n_x \times n_u}$ ,  $C_c \in \mathbb{R}^{n_y \times n_x}$  y  $D_c \in \mathbb{R}^{n_y \times n_u}$  describen o aproximan el comportamiento del sistema alrededor del punto de operación nominal, son constantes y quedan definidas implícitamente por las ecuaciones no lineales expresadas en la Ec. (2.4).

No obstante, dado que el control predictivo es normalmente discreto, se suele modelar, en la literatura, mediante una ecuación en diferencias [22]:

$$\begin{aligned} x(k+1) &= Ax(k) + Bu(k) \\ y(k) &= Cx(k) + Du(k) \\ x(0) &= x_0 \end{aligned} \tag{2.6}$$

donde las matrices  $A \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{n_x \times n_u}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{n_y \times n_x}$  y  $D \in \mathbb{R}^{n_y \times n_u}$  son constantes y provienen de la discretización del modelo en la Ec. (2.5),  $x(k) \in \mathbb{R}^{n_x}$ ,  $u(k) \in \mathbb{R}^{n_u}$  e  $y(k) \in \mathbb{R}^{n_y}$  son las variable de estado, de control y de salida del sistema, respectivamente, en el instante actual y  $x(k+1) \in \mathbb{R}^{n_x}$  es la variable de estado del sistema en el instante siguiente, es decir, luego de un período de muestreo.

### 2.1.2. Modelos afines invariantes en el tiempo

Tal como se hizo mención anteriormente, un proceso no lineal puede aproximarse mediante un modelo LTI cuando el sistema no se desvíe demasiado del punto de operación nominal. Entonces, si las funciones no lineales  $f(x(t), u(t))$  y  $g(x(t), u(t))$  son continuamente diferenciables con respecto a  $x$  y  $u$ , se puede aplicar la expansión de la serie Taylor de primer orden para obtener un modelo lineal en torno al punto sobre el cual se pretende linealizar. Aunque si el punto de linealización no coincide con el punto de operación nominal, lo cual resulta lógico al utilizar múltiples modelos, el modelo obtenido es afín. Luego, a través de la discretización, las ecuaciones del modelo son las siguientes:

$$\begin{aligned} x(k+1) &= Ax(k) + Bu(k) + \Delta x \\ y(k) &= Cx(k) + Du(k) \\ x(0) &= x_0 \end{aligned} \tag{2.7}$$

donde  $\Delta x \in \mathbb{R}^{n_x}$  es un vector constante, tal como se define en el Apéndice C.1.

Sin embargo, siguiendo lo establecido en trabajos tales como [45], el modelo afín de la Ec. (2.7) puede plantearse como un modelo LTI como el indicado en la Ec. (2.6) donde se considera un estado incrementado y se amplían las matrices del modelo. De esta manera, los nuevos elementos del modelo se definen como:

$$\begin{aligned} \tilde{A} &= \begin{bmatrix} A & \Delta x \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \tilde{B} &= \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} \\ \tilde{C} &= [C \quad 0] \\ \tilde{D} &= D \\ \tilde{x}(\cdot) &= \begin{bmatrix} x(\cdot) \\ 1 \end{bmatrix}. \end{aligned} \tag{2.8}$$

De este modo, utilizando las definiciones dadas en la Ec. (2.8), se arriba a un modelo LTI equivalente al modelo de la Ec. (2.7):

$$\begin{aligned} \tilde{x}(k+1) &= \tilde{A}\tilde{x}(k) + \tilde{B}u(k) \\ y(k) &= \tilde{C}\tilde{x}(k) + \tilde{D}u(k) \\ \tilde{x}(0) &= \tilde{x}_0 \end{aligned} \tag{2.9}$$

Lo que tiene particular relevancia dado que permite contemplar los modelos afines mediante las formulaciones lineales presentadas en la Sección 2.1.1.

### 2.1.3. Modelos lineales de parámetros variables

A menudo, por razones de mercado, medioambientales, de seguridad, entre otras, resulta necesario cambiar el punto de operación o trabajar en amplios rangos de operación donde el modelo LTI no describe correctamente al sistema, es decir, es inadecuado o inexacto. Es por ello, que a los sistemas no lineales se los suele representar mediante el enfoque de modelos LPV.

Un modelo LPV depende explícitamente de un parámetro, o de un vector de parámetros  $\rho(k)$ . Este tipo de modelos se representan en espacio de estados en tiempo discreto mediante las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} x(k+1) &= A(\rho(k))x(k) + B(\rho(k))u(k), \\ y(k) &= C(\rho(k))x(k) + D(\rho(k))u(k), \\ x(0) &= x_0, \\ \rho(k) &= f_\rho(x(k)) \in \mathcal{P}, \end{aligned} \tag{2.10}$$

donde  $f_\rho(\cdot)$  representa la función no lineal endógena para la evolución del parámetro de ajuste y el conjunto  $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^{n_\rho}$  es convexo y compacto. De modo que el vector de parámetros:

$$\rho(k) = [\rho_1(k), \dots, \rho_{n_\rho}(k)]^T$$

contempla los valores mínimos y máximos que pueden tomar cada uno de los parámetros en el rango de operación considerado, con el objetivo de incluir la máxima incertidumbre de los mismos.

De esta manera, tal como se presenta en el Apéndice C, es posible incorporar la dinámica del sistema no lineal dentro de un politopo convexo de  $n_m$  vértices<sup>2</sup>, con una dependencia afín al parámetro  $\rho(k)$ :

$$[A(\rho(k)), B(\rho(k)), C(\rho(k)), D(\rho(k))] \in \Omega \tag{2.11}$$

donde  $\Omega$  es un politopo con modelos LTI en sus  $n_m$  vértices, el cual es representado como:

$$\Omega = \text{Co}\{[A_1, B_1, C_1, D_1], [A_2, B_2, C_2, D_2], \dots, [A_{n_m}, B_{n_m}, C_{n_m}, D_{n_m}]\}, \tag{2.12}$$

donde  $\text{Co}\{\cdot\}$  denota un casco convexo y  $[A_j, B_j, C_j, D_j]$  son las matrices de cada modelo LTI en los vértices del casco.

En base a la interpolación de los modelos LTI vértices, es posible construir una representación del sistema no lineal, no solo sobre el conjunto de puntos de linealización, sino también sobre aquellos contenidos en  $\Omega$  (Fig. 2.1):

$$\begin{aligned} A(\rho(k)) &= \sum_{j=1}^{n_m} \mu_j(\rho(k))A_j, & B(\rho(k)) &= \sum_{j=1}^{n_m} \mu_j(\rho(k))B_j \\ C(\rho(k)) &= \sum_{j=1}^{n_m} \mu_j(\rho(k))C_j, & D(\rho(k)) &= \sum_{j=1}^{n_m} \mu_j(\rho(k))D_j \end{aligned} \tag{2.13}$$

---

<sup>2</sup>En virtud de lo establecido en el Apéndice C, el número de modelos vértices viene dado por  $n_m = n_l^{n_p}$ , donde  $n_p$  representa el número de parámetros de ajuste y  $n_l$  el número de puntos de linealización por parámetro.

donde el vector de ponderación  $\mu(\rho(k)) \in \mathbb{R}^{n_m}$  representa el peso de cada modelo LTI vértice con el modelo LPV, y debe cumplir que:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n_m} \mu_j(\rho(k)) &= 1 \\ 0 \leq \mu_j(\rho(k)) &\leq 1, \quad j \in \mathbb{Z}_{1:n_m}. \end{aligned} \quad (2.14)$$

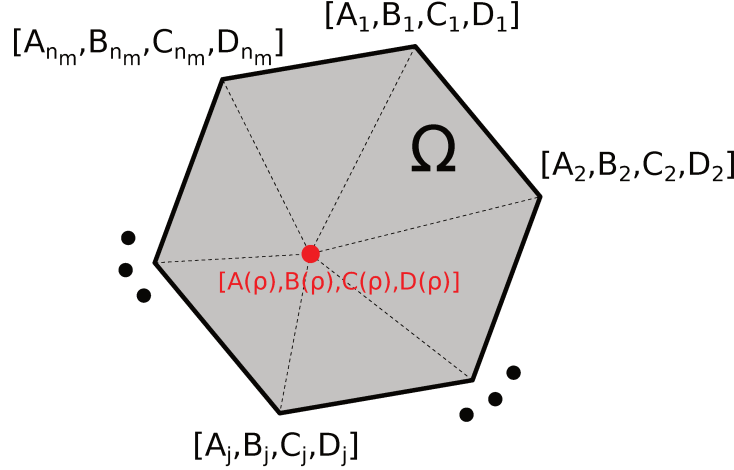


Figura 2.1: Representación gráfica de un modelo LPV.

**Observación 2.2.** *Los modelos LPV pueden interpretarse como una generalización de los modelos LTI cuando el parámetro admisible es constante, es decir  $\rho(k) = \bar{\rho}$ .*

**Observación 2.3.** *Se debe tener en cuenta que, aunque a largo de esta tesis se analizan y diseñan herramientas para control utilizando modelos LPV, de igual manera podrían utilizarse multi-modelos como el caso de modelos Lineales y Variantes en el Tiempo (LTV<sup>3</sup>, por sus siglas en inglés) o modelos quasi-LPV (qLPV<sup>4</sup>, por sus siglas en inglés).*

## 2.2. Control predictivo basado en modelos

El Control Predictivo basado en Modelos (MPC) puede entenderse como un conjunto de métodos que utilizan modelos para predecir el comportamiento de salida del proceso controlado. Así, en el caso particular de esta tesis, la acción de control actual es obtenida resolviendo *on-line*, en cada instante de muestreo, un problema de control óptimo de horizonte finito a lazo abierto, usando el estado actual de la planta como el estado inicial; la optimización produce una secuencia de control óptima y el primer control en esta secuencia se aplica a la planta. Ésta es su principal diferencia con el control LQR que utiliza una ley de control precalculada.

<sup>3</sup>Linear Time Varying

<sup>4</sup>quasi-Linear Parameter Varying

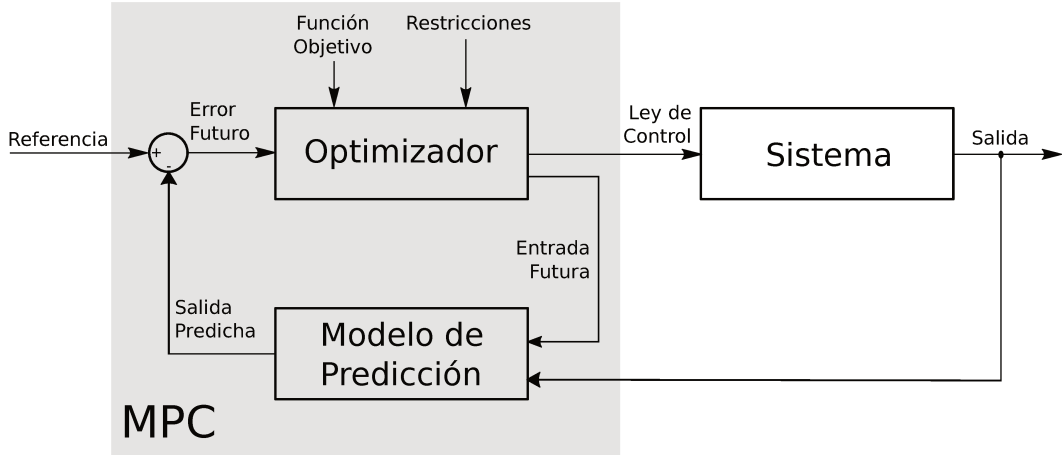


Figura 2.2: Esquema general de MPC

Todos los métodos MPC (Fig. 2.2) poseen elementos comunes, y se pueden elegir diferentes opciones para cada elemento dando lugar a diferentes formulaciones. Estos elementos son [21]:

- Modelo de predicción.
- Función objetivo.
- Ley de control obtenida.

Bajo ciertas condiciones, una formulación de MPC estándar es capaz de obtener una secuencia de acciones de control óptima que tenga en cuenta las restricciones sobre los estados y las acciones de control. Esta estrategia de control consta en resolver el siguiente problema:

$$\begin{aligned}
 \min_{\mathbf{u}} V_N &= \min_{\mathbf{u}} \sum_{k=0}^{N-1} \ell(x(k), u(k)) \\
 \text{s.a.} & \text{ Modelo del Sistema,} \\
 & x(0) = x_0 \\
 & u(k) \in \mathcal{U} \quad \forall k \in \mathbb{Z}_{0:N-1}, \\
 & x(k) \in \mathcal{X} \quad \forall k \in \mathbb{Z}_{0:N-1},
 \end{aligned} \tag{2.15}$$

donde  $\mathbf{u}$  es la secuencia óptima de acciones de control a lo largo del horizonte de predicción. El costo de etapa  $\ell(\cdot)$  pondera la acción de control y los estados en cada instante futuro; esta función es, en general, cuadrática en  $x$  y  $u$ . Tanto los estados y la variable de control se encuentran restringidos mediante:

$$\begin{aligned}
 x(k) &\in \mathcal{X} \\
 u(k) &\in \mathcal{U}
 \end{aligned} \tag{2.16}$$

siendo éstos subconjuntos convexos y compactos de  $\mathbb{R}^{n_x}$  y  $\mathbb{R}^{n_u}$ , respectivamente. Ambos conjuntos contienen el origen, es decir, son conjuntos  $\mathcal{C}$  propios<sup>5</sup>. Estas

<sup>5</sup>Un conjunto es  $\mathcal{C}$  propio si es convexo, compacto y contiene el origen como punto interior.



restricciones deben ser tomadas en cuenta por cualquier método de control que tenga como objetivo mantener una operación admisible del sistema.

Adicionalmente, en ciertas ocasiones, se considera un costo terminal  $V_f[x(N)]$  y restricciones de salida, así como el uso de restricciones terminales ( $x(N) \in \mathcal{X}_f$ ) y en la velocidad de respuesta ( $\delta u(k+1) = u(k+1) - u(k)$ ).

La base teórica de MPC hoy en día es bien conocida y la estabilidad asintótica está garantizada por medio de una apropiada penalización del estado final y añadiendo una restricción final con las siguientes condiciones [22]:

- La región terminal  $\mathcal{X}_f$  debe ser un conjunto invariante positivo admisible del sistema (ver Apéndice A).
- El costo terminal  $V_f(x)$  debe ser una función de Lyapunov asociada al sistema regulado por un controlador local para todo  $x \in \mathcal{X}_f$ .

### 2.2.1. Análisis de estabilidad

El análisis de estabilidad y convergencia que se presenta en esta sección está basado en la Teoría de Estabilidad de Lyapunov. Para ello, resulta necesario presentar las siguientes definiciones, teoremas y demostraciones, las cuales están basadas en [46]:

**DEFINICIÓN 2.1.** *Un conjunto invariante cerrado  $\mathcal{X}_s$  que contiene el origen (o simplemente el origen) es localmente estable en el sentido de Lyapunov (estabilidad  $\epsilon - \delta$ ) para un sistema,  $x(k+1) = f(x)$ , si para un  $\epsilon > 0$  arbitrario, existe un  $\delta = \delta(\epsilon) > 0$  tal que, si  $\|x_0\|_{\mathcal{X}_s} < \delta$ , entonces  $\|x(k)\|_{\mathcal{X}_s} < \epsilon$  para todo  $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ <sup>6</sup>.*

**DEFINICIÓN 2.2.** *Un conjunto invariante cerrado  $\mathcal{X}_s$  que contiene el origen (o simplemente el origen) es localmente atractivo para un sistema,  $x(k+1) = f(x)$ , si  $\|x(k)\|_{\mathcal{X}_s} \rightarrow 0$  para  $k \rightarrow \infty$  con  $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$  para todo  $x_0 \in \text{Ad}_{\infty}(\mathcal{X})$ <sup>7</sup>. Es decir, la evolución de estados del sistema converge a  $\mathcal{X}_s$ .*

A partir de aquí se denomina *estabilidad asintótica local* si se verifica que  $\mathcal{X}_s$  es localmente estable y localmente atractivo, o sea, que existe un entorno para el cual  $\mathcal{X}_s$  satisface simultáneamente las condiciones de estabilidad y convergencia. La utilización de definiciones locales y no globales, se encuentra fundada en que a lo largo del análisis se va a suponer la existencia de restricciones tanto en variables de control como en variables de estados.

**Observación 2.4.** *Notar que de acuerdo a las definiciones dadas, estabilidad no implica convergencia. Así, por ejemplo, se puede tener un sistema masa-resorte ideal en régimen libre (como el presentado en el Apéndice D.1, con  $b = 0$ ), el cual oscila con amplitud constante alrededor del punto de equilibrio del resorte sin poder detenerse en el mismo, de modo que este punto cumple con la condición de estabilidad pero el sistema no converge a este punto (Fig. 2.3a).*

<sup>6</sup> $\mathbb{Z}_{\geq 0}$  hace referencia al conjunto numérico que incluye el cero y los enteros positivos.

<sup>7</sup> $\text{Ad}_{\infty}(\mathcal{X})$  es el máximo conjunto admisible  $\text{Ad}_{\infty}(\mathcal{X}) \subseteq \mathcal{X}$ , aunque puede pensarse en conjuntos invariantes menores para horizontes de predicción finitos.

Por otro lado, convergencia no implica estabilidad. En función de ello, se puede pensar en un sistema cuya evolución converja hacia el origen pero al alcanzarlo, el sistema se ve forzado a abandonarlo. Luego la evolución tiende nuevamente al origen repitiendo el ciclo, tal es el caso de una órbita homoclínica (Fig. 2.3b) [47].

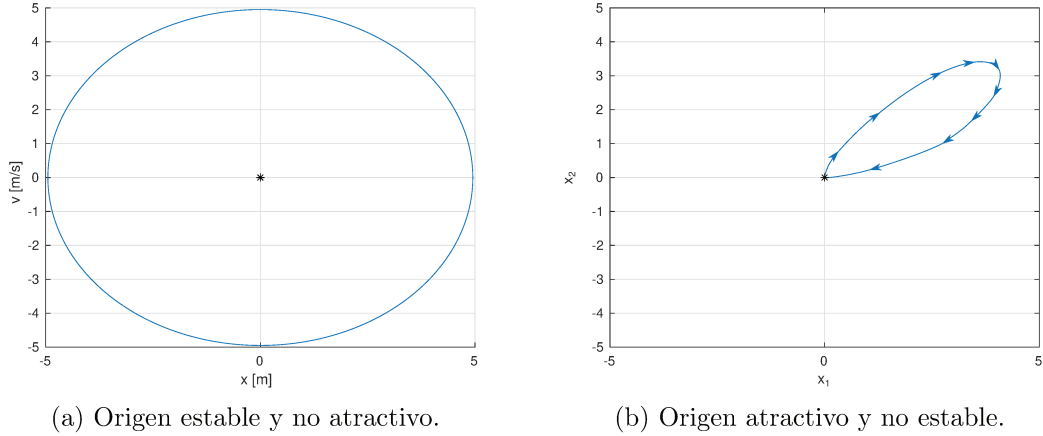


Figura 2.3: Estabilidad y convergencia para el origen.

**DEFINICIÓN 2.3.** Una función  $V(\cdot) : \mathbb{R}^{n_x} \rightarrow \mathbb{R}$  es una función de Lyapunov para un sistema,  $x(k+1) = f(x)$ , y para un conjunto invariante  $\mathcal{X}_s$  si existen funciones  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  y  $\alpha_3$ , donde las dos primeras son  $\mathcal{K}_\infty$ <sup>8</sup> y la tercera es localmente definida positiva<sup>9</sup>, tal que para  $x \in \mathcal{A}d_\infty(\mathcal{X})$ ,

$$\begin{aligned} V(x) &\geq \alpha_1(\|x\|_{\mathcal{X}_s}), \\ V(x) &\leq \alpha_2(\|x\|_{\mathcal{X}_s}), \\ V(f(x)) - V(x) &\leq -\alpha_3(\|x\|_{\mathcal{X}_s}). \end{aligned}$$

Las funciones de Lyapunov resultan importantes dado que su existencia es condición suficiente para garantizar la estabilidad asintótica, de acuerdo al Teorema 2.1.

**Teorema 2.1.** Considerando  $\mathcal{A}d_\infty(\mathcal{X}) \subset \mathbb{R}^{n_x}$ , un invariante positivo, y  $\mathcal{X}_s \subset \mathcal{A}d_\infty(\mathcal{X})$ , un invariante positivo cerrado para un sistema  $x(k+1) = f(x)$ . Sea  $V(\cdot) : \mathcal{A}d_\infty(\mathcal{X}) \rightarrow \mathbb{R}$  una función de Lyapunov para el sistema  $x(k+1) = f(x)$  y para el conjunto invariante  $\mathcal{X}_s$ , considerando  $\alpha_3(\cdot)$  como una función  $\mathcal{K}_\infty$  entonces  $\mathcal{X}_s$  es asintóticamente estable para  $x(k+1) = f(x)$ , con una región de atracción  $\mathcal{A}d_\infty(\mathcal{X})$ .

<sup>8</sup>Una función es  $\mathcal{K}_\infty$  si es continua, estrictamente creciente,  $\alpha(0) = 0$  y no acotada, es decir,  $\alpha(a) \rightarrow \infty$  cuando  $a \rightarrow \infty$ .

<sup>9</sup>Una función es localmente definida positiva si es continua,  $\alpha_3(0) = 0$  y es positiva en un entorno del origen.

*Demostración.* Considerando un  $\epsilon > 0$ ,  $\delta =: \alpha_2^{-1}(\alpha_1(\epsilon))$  y un estado inicial  $x$  de forma que  $\|x\|_{\mathcal{X}_s} < \delta$  entonces por la definición de función de Lyapunov se tiene que:

- De la tercera condición,  $V(f(x)) - V(x) \leq -\alpha_3(\|x\|_{\mathcal{X}_s})$ , por la definición de  $\alpha_3(\cdot)$ , se observa que  $V(x(k)) \leq V(x)$  para todo  $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ , donde  $x(k)$  es la secuencia de los estados y  $x$  es el estado inicial.
- De la segunda condición se observa que:

$$\begin{aligned} V(x) &\leq \alpha_2(\|x\|_{\mathcal{X}_s}) < \alpha_2(\delta) = \alpha_2(\alpha_2^{-1}(\alpha_1(\epsilon))) = \alpha_1(\epsilon), \\ V(x) &\leq \alpha_1(\epsilon). \end{aligned}$$

- De la primera condición se observa que:

$$\begin{aligned} \alpha_1(\|x(k)\|_{\mathcal{X}_s}) \leq V(x(k)) \leq V(x) &\implies \|x(k)\|_{\mathcal{X}_s} \leq \alpha_1^{-1}(V(x)) \leq \alpha_1^{-1}(\alpha_1(\epsilon)) = \epsilon, \\ \|x(k)\|_{\mathcal{X}_s} &\leq \epsilon \quad \text{para todo } k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}. \end{aligned}$$

De esta manera, se verifica la Definición 2.1.

Por otro lado, por ser  $V(\cdot)$  una función de Lyapunov, se sabe que la misma está acotada por encima, o sea es finita, está acotada por debajo por cero y además no es creciente. Esta última consideración se debe a la tercera condición aunque también se deduce de la demostración de estabilidad dada anteriormente.

De lo anterior se observa que  $V(x(k))$  converge a un valor  $\hat{V} \geq 0$  para  $k \rightarrow \infty$ . De igual manera, si se analiza un estado posterior dado por  $x(k+1) = f(x(k))$ ,  $V(x(k+1))$  converge a  $\hat{V}$  cuando  $k \rightarrow \infty$ . De este modo, se tiene que:

$$V(x(k+1)) - V(x(k)) \rightarrow 0 \quad \text{cuando } k \rightarrow \infty$$

lo cual implica, por la tercera condición, que:

$$\alpha_3(\|x(k)\|_{\mathcal{X}_s}) \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty$$

Por último, al aplicar la inversa de la función  $\alpha_3$  se tiene que  $\|x(k)\|_{\mathcal{X}_s} = \alpha_3^{-1}(\alpha_3(\|x(k)\|_{\mathcal{X}_s}))$  y tomando en cuenta que  $\alpha_3(0) = 0$  (dado que es una función  $\mathcal{K}_\infty$ ), entonces:

$$\|x(k)\|_{\mathcal{X}_s} \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty$$

lo cual verifica la Definición 2.2. □

Hasta el momento, el análisis se centró en sistemas autónomos. Sin embargo, al considerar un sistema controlado,  $x(k+1) = f(x, u)$ , se puede elegir una ley de control  $u = \kappa(x) \in \mathcal{U}$  de modo que el conjunto  $\mathcal{X}_s$  sea asintóticamente estable para el sistema de lazo cerrado  $x(k+1) = f(x, \kappa(x))$  si  $V(\cdot)$  es una función de Lyapunov de control.

DEFINICIÓN 2.4. Una función  $V(\cdot) : \mathbb{R}^{n_x} \rightarrow \mathbb{R}$  es una función de Lyapunov de control para el sistema de control como el que surge de discretizar el modelo en la Ec. (2.4) y para un conjunto invariante  $\mathcal{X}_s$  si existen funciones  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  y  $\alpha_3$ , donde las dos primeras son  $\mathcal{K}_\infty$  y la tercera es localmente definida positiva, tal que para  $x \in \mathcal{A}d_\infty(\mathcal{X})$ ,

$$\begin{aligned} V(x) &\geq \alpha_1(\|x\|_{\mathcal{X}_s}), \\ V(x) &\leq \alpha_2(\|x\|_{\mathcal{X}_s}), \\ \min_{u \in \mathcal{U}} \{V(f(x, u)) : f(x, u) \in \mathcal{A}d_\infty(\mathcal{X})\} - V(x) &\leq -\alpha_3(\|x\|_{\mathcal{X}_s}). \end{aligned}$$

De esta forma, de acuerdo con el Teorema 2.1 se puede garantizar la estabilidad asintótica para un sistema controlado a horizonte infinito. Sin embargo, MPC resuelve un problema de optimización de horizonte finito de  $N$  pasos. Por ello, se deben seleccionar adecuadamente los *ingredientes* del problema de MPC dado en la Ec. (2.15), es decir,  $\ell(\cdot)$ ,  $V_f(\cdot)$  y  $\mathcal{X}_f$  de manera de garantizar que la función objetivo óptima de horizonte finito  $V_N^*(\cdot)$  sea una función de Lyapunov para el sistema de lazo cerrado para el problema planteado y para todo  $x \in C_N(\mathcal{X}, \mathcal{X}_f)$ <sup>10</sup>.

**Suposición 1.** Las funciones  $f(\cdot)$ ,  $\ell(\cdot)$  y  $V_f(\cdot)$  son continuas y nulas en el origen.

**Suposición 2.** Los conjuntos  $\mathcal{X}$  y  $\mathcal{X}_f \subseteq \mathcal{X}$  son cerrados y  $\mathcal{U}$  es compacto. Todos ellos, contienen al origen en su interior.

Estas suposiciones son fundamentales para asegurar la existencia de solución del problema de MPC de acuerdo con lo que establece el teorema de Weierstrass [48].

Luego, como se busca que la función  $V_N^*(\cdot)$  sea una función de Lyapunov, se debe verificar que:

$$V_N^*(x, \kappa_N(x)) - V_N^*(x) \leq -\ell(x, \kappa_N(x)) \quad (2.17)$$

para todo  $x \in C_N(\mathcal{X}, \mathcal{X}_f)$ . De esta manera, se debe tener en cuenta que  $\ell(\cdot)$  debe ser localmente definida positiva, con lo cual se satisfacen las condiciones dadas en la Suposición 1 y necesaria en la tercera condición de la Definición 2.3.

En una primera instancia, se va a suponer que no existen restricciones en las variables de estados, o sea que  $\mathcal{X} = \mathbb{R}^{n_x}$ . De esta manera, para un tiempo  $k$  se tiene un estado inicial  $x(k)$  y la función objetivo óptima es:

$$V_N^*(x(k)) = V_N(x(k), \mathbf{u}^*(x(k)))$$

donde  $\mathbf{u}^*(x(k)) = \{u^*(0; x(k)), u^*(1; x(k)), \dots, u^*(N-1; x(k))\}$  es la secuencia óptima de controles correspondiente al estado  $x(k)$ . Esta secuencia, al ser aplicada al sistema, produce una secuencia de estados:

$$\mathbf{x}^*(x(k)) = \{x^*(0; x(k)), x^*(1; x(k)), \dots, x^*(N; x(k))\}$$

<sup>10</sup> $C_N(\mathcal{X}, \mathcal{X}_f)$  es el conjunto controlable en  $N$  pasos del conjunto  $\mathcal{X}_f$  (Ver Apéndice A).

donde el estado  $x^*(0; x(k))$  es el estado actual  $x(k)$  y  $x^*(1; x(k))$  es el estado sucesor, es decir,  $x(k+1) = f(x(k), \kappa_N(x(k)))$  con  $\kappa_N(x(k)) = u^*(0; x(k))$ .

Luego, puede plantearse la función objetivo de horizonte finito para el estado sucesor:

$$V_N^*(x(k+1)) = V_N(x(k+1), \mathbf{u}^*(x(k+1)))$$

con similares características a las descriptas anteriormente.

Sin embargo, a los fines de poder realizar una comparación entre la función objetivo para estos estados sucesivos, se va a considerar una secuencia de controles, para el instante  $k+1$ , factibles aunque no necesariamente óptimos, de la forma:

$$\tilde{\mathbf{u}} = \{u^*(1; x(k)), u^*(2; x(k)), \dots, u^*(N-1; x(k)), u\}$$

donde  $u \in \mathcal{U}$  es una acción de control factible, que al ser aplicada al sistema produce una secuencia de estados factibles (no se consideran restricciones de estados):

$$\tilde{\mathbf{x}} = \{x^*(1; x(k)), x^*(2; x(k)), \dots, x^*(N; x(k)), f(x^*(N; x(k)), u)\}.$$

De esta manera, el valor de la función objetivo factible es mayor o a lo sumo igual al valor óptimo:

$$V_N(x(k+1), \mathbf{u}^*(x(k+1))) \leq V_N(x(k+1), \tilde{\mathbf{u}}). \quad (2.18)$$

De acuerdo a lo establecido, la función objetivo para el instante  $k$  es:

$$\begin{aligned} V_N^*(x(k)) &= \sum_{j=0}^{N-1} \ell(x^*(j; x(k)), u^*(j; x(k))) + V_f(x^*(N; x(k))) \\ V_N^*(x(k)) &= \ell(x(k), \kappa_N(x(k))) + \sum_{j=1}^{N-1} \ell(x^*(j; x(k)), u^*(j; x(k))) + V_f(x^*(N; x(k))) \end{aligned} \quad (2.19)$$

mientras que para el instante  $k+1$  resulta:

$$\begin{aligned} V_N(x(k+1), \tilde{\mathbf{u}}) &= V_N^*(x(k)) - \ell(x(k), \kappa_N(x(k))) - V_f(x^*(N; x(k))) \\ &\quad + \ell(x^*(N; x(k)), u) + V_f(f(x^*(N; x(k)), u)). \end{aligned} \quad (2.20)$$

Considerando la Ec. (2.18), entonces se satisface la Ec. (2.17) para todo  $x \in \mathbb{R}^{n_x}$  si existe  $u \in \mathcal{U}$  tal que:

$$V_f(f(x, u)) - V_f(x) + \ell(x, u) \leq 0 \quad (2.21)$$

es decir, que  $V_f(\cdot)$  sea una función de Lyapunov de control como la presentada en la Definición 2.4, aunque global dado que no se consideran restricciones de estados.

Si además de las restricciones en la variable de control se consideran restricciones en los estados, se torna complejo obtener una función de Lyapunov de control global. Por ello, al formular el problema de MPC con frecuencia se exige que  $V_f(\cdot)$  sea una función de Lyapunov de control local, es decir, que esté definida en un

conjunto  $\mathcal{X}_f \subseteq \mathcal{X}$  que determina la vecindad del origen. Luego, el estado terminal debe ser forzado a alcanzar el conjunto  $\mathcal{X}_f$ , o sea,  $x(N) \in \mathcal{X}_f$ .

De esta manera, para asegurar la estabilidad asintótica local del origen, de acuerdo con el Teorema 2.1, se debe definir  $V_f(\cdot)$  tal que satisfaga:

$$\min_{u \in \mathcal{U}} \{V_f(f(x, u)) + \ell(x, u) : f(x, u) \in \mathcal{X}_f\} \leq V(x) \quad (2.22)$$

para todo  $x \in \mathcal{X}_f$ . Para ello, el conjunto  $\mathcal{X}_f$  debe ser un conjunto invariante de control para el sistema controlado,  $f(x, u)$ . Es decir, que para cada  $x \in \mathcal{X}_f$  existe una  $u \in \mathcal{U}$  tal que  $f(x, u) \in \mathcal{X}_f$ .

Luego, si  $V_f(\cdot) \leq \alpha_2(|x|)$ , tal como en la Definición 2.4, para todo  $x \in \mathcal{X}_f$  entonces el origen es asintóticamente estable para el sistema controlado con una región de atracción  $C_N(\mathcal{X}, \mathcal{X}_f)$ .

**Observación 2.5.** *Notar que para una referencia distinta de cero, es posible realizar un cambio de coordenadas, para el cual el único punto de equilibrio es el origen.*

**Observación 2.6.** *De acuerdo con lo indicado en el Apéndice A, un conjunto invariante  $\mathcal{X}_f$  tiene la propiedad que el conjunto a un paso de este conjunto incluye al conjunto  $\mathcal{X}_f$ . Dicha propiedad más las condiciones establecidas para garantizar estabilidad asintótica posibilitan tener factibilidad recursiva al aplicar la estrategia de horizonte deslizante.*

### 2.2.2. Control predictivo basado en modelos con modelo lineal invariante en el tiempo para regulación

Una de las formulaciones más básica y difundida de MPC es aquella que utiliza un modelo de predicción LTI como el presentado en la Ec. (2.6) para regular el sistema en una referencia dada, respetando las limitaciones físicas tal como se expresa en la Ec. (2.16) ([13], [14], [15], entre otros).

El problema MPC se formula con un costo de etapa cuadrático en  $x$  y  $u$ :

$$\ell(x(k), u(k)) = x(k)^T Q x(k) + u(k)^T R u(k)$$

donde las matrices de peso,  $Q \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$  y  $R \in \mathbb{R}^{n_u \times n_u}$  son definidas positivas.

Además, se considera una ganancia arbitraria que estabiliza el control de re-alimentación de estados,  $\kappa_f \in \mathbb{R}^{n_u \times n_x}$ , así  $A_{\kappa_f} = A + B\kappa_f$  es Schur estable<sup>11</sup> para todo  $x \in \mathcal{X}_f$ , un conjunto invariante positivo cerrado de control que contiene el origen en su interior.

De esta manera, existe una matriz definida positiva  $P \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$  y se considera un costo terminal  $V_f[x(N)] = x(N)^T P x(N)$  que determina una compensación que penaliza la desviación del estado final con el origen.

---

<sup>11</sup>Una matriz es Schur si es cuadrada con valores reales y con valores propios de valor absoluto menor que uno, es decir, que se encuentran en el interior del círculo unitario en el plano complejo.

Por lo tanto, la función de costo del problema MPC resulta:

$$V_N(x_0; \mathbf{u}) = \sum_{k=0}^{N-1} (x(k)^T Q x(k) + u(k)^T R u(k)) + x(N)^T P x(N) \quad (2.23)$$

donde se deja en evidencia que esta función es continua, cumple con las condiciones de función de Lyapunov y tiene un único mínimo en  $(x, u) = (0, 0)$ . Así, verifica las condiciones establecidas en la Sección 2.2.1.

Finalmente, el controlador se obtiene mediante la solución del siguiente problema de optimización:

$$\begin{aligned} & \underset{\mathbf{u}}{\text{mín}} V_N(x_0; \mathbf{u}) \\ \text{s.a. } & x(k+1) = Ax(k) + Bu(k), \quad k \in \mathbb{Z}_{0:N-1}, \\ & x(0) = x_0, \\ & x(k) \in \mathcal{X} \quad \forall k \in \mathbb{Z}_{0:N-1}, \\ & u(k) \in \mathcal{U} \quad \forall k \in \mathbb{Z}_{0:N-1}, \\ & x(N) \in \mathcal{X}_f. \end{aligned} \quad (2.24)$$

Así, al considerar un horizonte deslizante, la política de control propuesta para regulación está dada por:

$$\kappa(x_0) = \mathbf{u}^*(0; x_0),$$

siendo  $\mathbf{u}^*$  la solución del problema indicado en la Ec. (2.24), que representa la secuencia óptima de acciones de control calculadas.

### Costo y restricción terminales

La ec. (2.22) puede interpretarse como un control local que regula al sistema más allá del horizonte  $N$  del MPC, es decir, el costo de la cola infinita de guiar los estados al origen con ese control.

Para el controlador bajo análisis, es posible establecer los *ingredientes* terminales como los que surgen de aplicar un LQR como control local. De esta manera, la matriz  $P$  indicada en el costo terminal se obtiene resolviendo la ecuación algebraica de Riccati en tiempo discreto:

$$A^T P A - P - (A^T P B)(B^T P B + R)^{-1}(B^T P A) + Q = 0 \quad (2.25)$$

y con ello se obtiene una ganancia de realimentación:

$$\kappa_f = (B^T P B + R)^{-1} B^T P A, \quad (2.26)$$

que permite obtener el conjunto invariante  $\mathcal{X}_f$ :

$$\mathcal{X}_f = \{x \in \mathcal{X} : A_{\kappa_f}^k x \in \mathcal{X}, \kappa_f A_{\kappa_f}^k x \in \mathcal{U}, k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\}, \quad (2.27)$$

donde  $A_{\kappa_f} = A - B\kappa_f$  y  $u = -\kappa_f x$ . En el Apéndice A.2.1 se presenta un algoritmo para obtener  $\mathcal{X}_f$ .

### Ejemplo de aplicación

En esta sección se presentan resultados de simulación con el objetivo de visualizar las propiedades del controlador analizado. Para ello, se utiliza el sistema masa-resorte-amortiguador presentado en el Apéndice D.1 que debido a su simplicidad permite comparar este controlador con los analizados en las secciones posteriores.

Para este ejemplo, se fijan los valores de los parámetros en  $m = 1$ ,  $b = -0,1$  y  $k = 1$ . Se consideran además restricciones para los estados y la variable de control,  $x \in \mathcal{X} = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\|_\infty \leq 5\}$  y  $u \in \mathcal{U} = \{u \in \mathbb{R} : \|u\|_\infty \leq 2\}$ , respectivamente. Cabe destacar que el valor del parámetro  $b$  es considerado negativo a los efectos de que el origen no sea asintóticamente estable para el sistema autónomo.

Por su parte, se establece  $T = 0,4$ , el horizonte de predicción  $N = 8$ , un estado inicial  $x_0 = [3,5; 3,5]$ , el punto de referencia es el origen y las matrices de peso  $Q = 5\mathbb{I}^{12}$  y  $R = 2\mathbb{I}$ . Todos los valores se consideran en unidades del Sistema Internacional de Unidades.

De esta manera, en la Fig. 2.4 se puede observar el conjunto invariante terminal en el centro y la secuencia de conjuntos controlables en función del número de pasos. A partir de la misma se concluye que el conjunto terminal cumple con la condición de invarianza, dado que los conjuntos se encuentran anidados, es decir, se contienen unos a otros. Esta propiedad resulta fundamental para asegurar la estabilidad asintótica del origen así como la factibilidad recursiva del controlador.

Por otro lado, se observa que el conjunto controlable en 8 pasos al conjunto terminal ( $C_N(\mathcal{X}, \mathcal{X}_f)$ ), indicado en color verde, incluye el estado inicial. Con lo cual el sistema puede ser llevado mediante una secuencia de controles factibles desde el estado inicial hasta el origen.

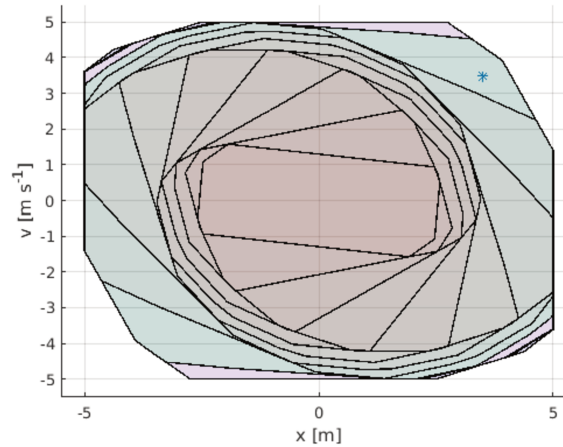


Figura 2.4: Conjuntos controlables considerando el sistema masa-resorte-amortiguador para regulación al origen.

Además se puede visualizar, en color azul-celeste, el máximo conjunto controlable que se corresponde con el máximo conjunto admisible ( $\mathcal{A}d_\infty$ ). El mismo se

<sup>12</sup> $\mathbb{I}$  denota la matriz identidad con las dimensiones apropiadas.



obtiene con un horizonte de predicción  $N = 11$  pasos e indica todos los estados que pueden ser controlados al origen mediante una secuencia de controles factibles, es decir, que horizontes mayores a 11 pasos no amplían el conjunto de estados controlables al origen.

En tanto que en la Fig. 2.5 se visualiza la evolución de los estados del sistema controlado, donde la misma converge al estado deseado. A la vez, se observan el conjunto de restricciones de estados (en color rojo), de manera que la trayectoria no abandona el espacio factible; el conjunto de estado controlables al conjunto terminal en el horizonte  $N$  (indicado en color amarillo); el conjunto invariante terminal (mostrado en color verde); y el conjunto de los estados de equilibrio que admite el sistema controlado (en color azul).

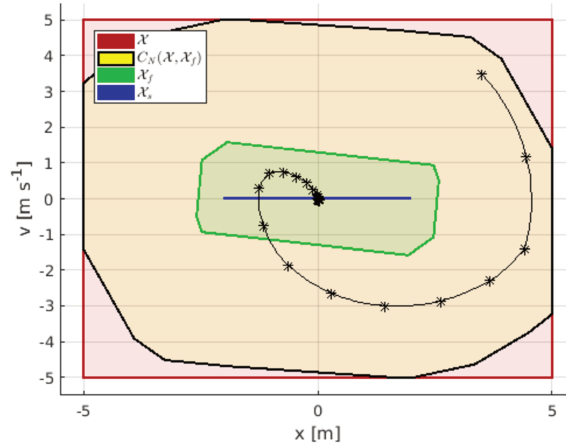


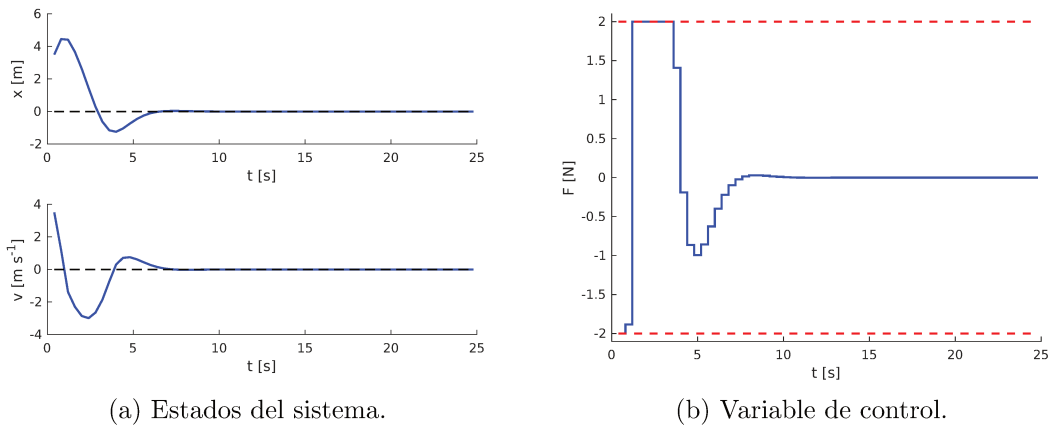
Figura 2.5: Evolución de los estados del sistema masa-resorte-amortiguador empleando MPC para regulación al origen.

Asimismo, en la Fig. 2.6 puede observarse la evolución temporal de las variables del sistema controlado, en la Fig. 2.6a se percibe como los estados del sistema (en línea sólida de color azul), alcanzan la referencia establecida (en línea de trazos negra), mediante la aplicación de los controles obtenidos (Fig. 2.6b). Adicionalmente se advierte que la variable de control es factible en todo instante, es decir, no excede las restricciones impuestas (líneas de trazos en color rojo).

Además, en la Fig. 2.7 se muestra la carga computacional debido al controlador en términos del porcentaje del periodo de muestreo que demanda el cálculo de las variables de control. En la misma se observa que al inicio se produce el mayor esfuerzo de cómputo y que luego decrece rápidamente, siendo la carga computacional media de 2,31 %<sup>13</sup>.

Para continuar con el análisis del controlador, se plantea el problema para una referencia diferente del origen. Para ello, se establece el *set-point* en  $x_s = [1 \ 0]^T$  para el cual  $u_s = 1$ . De esta manera, se formula nuevamente el controlador con los mismos parámetros considerados anteriormente.

<sup>13</sup>Las simulaciones se realizaron con un procesador i5-7200U CPU@3.1 GHz con 6 GB de RAM.



(a) Estados del sistema.

(b) Variable de control.

Figura 2.6: Evolución temporal de las variables del sistema masa-resorte-amortiguador controlado mediante MPC con propósito de regulación.

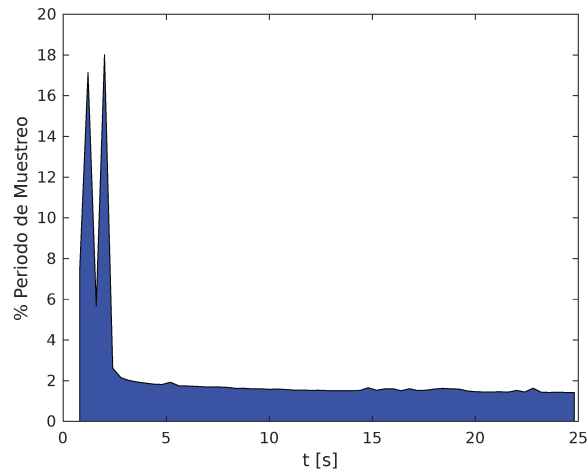


Figura 2.7: Carga computacional producto de MPC para regulación aplicado a un sistema masa-resorte-amortiguador.

Similarmente a lo observado para la situación anterior, en la Fig. 2.8 se puede ver que el conjunto terminal está contenido en los conjuntos controlables, lo cual indica que se trata de un conjunto invariante. Sin embargo, se advierte que el conjunto terminal depende de la referencia dada, de manera que el conjunto obtenido es diferente que el presentado anteriormente y, de esta manera, se requiere diseñar nuevamente el controlador. Además, se muestran el conjunto controlable en 8 pasos (en color verde), y el máximo conjunto admisible que para el presente planteo se produce con un horizonte de 12 pasos.

En la Fig. 2.9 se advierte que el sistema controlado evoluciona respetando las restricciones en sus estados, hasta alcanzar la referencia indicada.

Por último, se destaca que se satisfacen las restricciones en la variable de control y que el tiempo de establecimiento y la carga computacional para esta situación es similar al caso de regulación al origen. Por tales motivos es que no se muestran

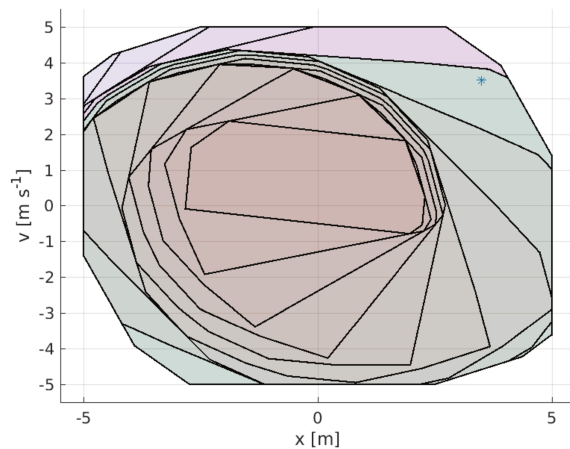


Figura 2.8: Conjuntos controlables considerando el sistema masa-resorte-amortiguador para regulación a  $x_s \neq 0$ .

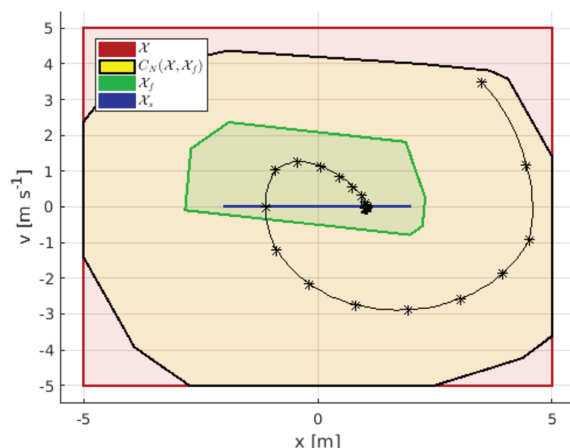


Figura 2.9: Evolución de los estados del sistema masa-resorte-amortiguador empleando MPC para regulación a  $x_s \neq 0$ .

las gráficas correspondientes.

### 2.2.3. Control predictivo basado en modelos con modelo lineal invariante en el tiempo para seguimiento de referencia

La mayoría de los resultados sobre MPC consideran el problema de regulación, es decir el problema de llevar el sistema al punto de equilibrio deseado, en general el origen.

Sin embargo, en la industria de procesos el punto de operación se ve afectado por el entorno, medio ambiente, economía, etc. pudiendo operar en diversos puntos de equilibrio con el fin de maximizar el beneficio o mantener la seguridad y la calidad. No obstante un cambio de referencia puede ocasionar que el control sea

infactible o incluso comprometer la estabilidad del sistema controlado.

Además, tal como se vio en la Sección 2.2.2, la elección del costo terminal y de las restricciones depende del estado de equilibrio deseado. Así un cambio de referencia necesita un nuevo diseño del controlador.

Por ello, en [16], [27], [28], [2] se propone un diseño de MPC para el seguimiento de una secuencia admisible de referencias utilizando un modelo LTI. En el mismo se considera una región terminal ampliada de manera que tome en cuenta los posibles cambios de referencia sin necesidad de formular nuevamente el controlador.

Las principales especificaciones son:

- Se utiliza un estado estacionario ( $x_a \in \mathbb{R}^{n_x}$ ) y una entrada ( $u_a \in \mathbb{R}^{n_u}$ ), ambos artificiales. ( $x_a, u_a$ ) definen un punto de equilibrio que se optimiza en línea, ya que se consideran como variables de decisión del problema de optimización del MPC.
- La función objetivo penaliza la desviación entre el estado estacionario artificial ( $x_a$ ) y el deseado ( $x_s$ ).
- Las condiciones terminales de estabilización ampliadas consisten en agregar un término de penalización de error de seguimiento en la función objetivo y añadir una restricción terminal tanto en el estado terminal como en el estado estacionario y la entrada artificiales.

De esta manera, se cuenta con un punto de operación cambiante ( $x_s, u_s$ ) = ( $x_s(r), u_s(r)$ ) y con punto de equilibrio artificial ( $x_a, u_a$ ) que no depende de la referencia  $r$ .

Por lo tanto, la función objetivo del problema MPC para seguimiento de referencia se considera como:

$$V_N(x_0, r; \mathbf{u}, x_a, u_a) = \sum_{k=0}^{N-1} ((x(k) - x_a)^T Q (x(k) - x_a) + (u(k) - u_a)^T R (u(k) - u_a)) + (x(N) - x_a)^T P (x(N) - x_a) + V_t(x_a - x_s(r), u_a - u_s(r)), \quad (2.28)$$

donde el término  $V_t(x_a - x_s(r), u_a - u_s(r))$  asegura que la variable artificial converja a la referencia establecida. Además, se debe tener en cuenta que una adecuada penalización del estado terminal  $x(N)$  puede conducir a la estabilidad asintótica con buenos rendimientos, como se evidencia en [27].

Luego, el problema de optimización  $P_N(x)$  para el MPC analizado se define como:

$$\begin{aligned} & \min_{u, x_a, u_a} V_N(x_0, r; \mathbf{u}, x_a, u_a) \\ \text{s.a. } & x(k+1) = Ax(k) + Bu(k), \quad k \in \mathbb{Z}_{0:N-1} \\ & x(0) = x_0, \\ & x(k) \in \mathcal{X} \quad \forall k \in \mathbb{Z}_{0:N-1}, \\ & u(k) \in \mathcal{U} \quad \forall k \in \mathbb{Z}_{0:N-1}, \\ & x(N) \in \mathcal{X}_f^t, \\ & x_a = Ax_a + Bu_a. \end{aligned} \quad (2.29)$$

siendo  $\mathcal{X}_f^t$  un conjunto invariante para seguimiento admisible para el modelo (Ec. (2.6)) sujeto a las restricciones (2.16), y para una ganancia  $\kappa_f \in \mathbb{R}^{n_u \times n_x}$  de modo que  $A + B\kappa_f$  es Schur estable para todo  $x \in \mathcal{X}_f^t$ .

**Observación 2.7.** *El conjunto invariante  $\mathcal{X}_f^t$  no depende de  $r$  sino de  $x_a$  y, por lo tanto depende del conjunto de equilibrios de control del sistema, dado que  $x_a$  representa los estados de equilibrio.*

Así, al considerar la estrategia de horizonte deslizante, la política de control propuesta para seguimiento de referencia está dada por:

$$\kappa(x_0) = \mathbf{u}^*(0; x_0),$$

siendo  $\mathbf{u}^*$  la solución del problema Ec. (2.29), que representa la secuencia óptima de acciones de control.

Algunas de las propiedades de este controlador son [8]:

- Puede utilizarse para el seguimiento de puntos de operación cambiantes o incluso trayectorias de referencia, conservando la factibilidad y la admisibilidad.
- Permite obtener un mayor dominio de atracción.
- En el caso en que el punto de operación a seguir no es admisible, el controlador lleva el sistema a un punto de equilibrio admisible tal que la distancia entre este punto y el punto de operación deseado sea mínima.
- Debido a la presencia del costo de *offset*, se puede obtener un costo más cercano del óptimo por medio de una adecuada penalización del mismo.
- Dado que este controlador provee un dominio de atracción mayor que el que provee el MPC para regulación, entonces el horizonte de predicción necesario para estabilizar un conjunto de estados iniciales dado es más pequeño.

### Costo y restricción terminales

Al igual que en el caso de regulación, es posible obtener los *ingredientes* terminales como los que surgen de aplicar un regulador LQR como control local. De esta manera, la matriz  $P$  en la función objetivo se obtiene resolviendo la ecuación algebraica de Riccati en tiempo discreto (Ec. (2.25)) y con ello se obtiene una ganancia de realimentación  $\kappa_f$  por medio de la Ec. (2.26).

Para el costo  $V_t(x_a - x_s(r), u_a - u_s(r))$  es posible considerar

$$V_t(x_a - x_s(r), u_a - u_s(r)) = (x_a - x_s(r))^T T (x_a - x_s(r))$$

donde  $T \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$ , en muchas ocasiones, se obtiene como  $T = \alpha P$  con  $\alpha \geq 10$ . De esta manera,  $x_a$  tiene una mayor tasa de convergencia a  $x_s$  que  $x(N)$  a  $x_a$ .

**Observación 2.8.** *Notar que si  $x_a = x_s(r)$  entonces la función objetivo del problema de MPC para seguimiento indicada en Ec. (2.28) es equivalente a la correspondiente a un MPC para regulación, mencionada en la Ec. (2.23), para una referencia diferente de cero.*

El conjunto invariante terminal  $\mathcal{X}_f^t$  puede interpretarse como la unión de los conjuntos invariantes terminales  $\mathcal{X}_f$  introducidos para el caso de regulación. De esta manera, en trabajos tales como [16] y [8] para la obtención del conjunto  $\mathcal{X}_f^t$  se define un sistema de lazo cerrado de estado extendido  $w = (x, \theta)$  con un ley de control dada por  $u = \kappa_f x + L\theta$ :

$$w(k+1) = \underbrace{\begin{bmatrix} A+BK & BL \\ \mathbf{0} & \mathbb{I} \end{bmatrix}}_{A_w} w(k)$$

donde el vector  $\theta \in \mathbb{R}^{n_\theta}$  es un parámetro que permite caracterizar el estado y la entrada de equilibrio de forma compacta,  $L = [-K \ \mathbb{I}]M$  y  $M$  es una matriz de transformación de modo que:

$$\begin{pmatrix} x_s(r) \\ u_s(r) \end{pmatrix} = M\theta.$$

Por lo tanto, el conjunto de estados admisibles resulta:

$$\mathcal{W}_\lambda = \{w \in \mathcal{R}^{n_x+n_\theta} : x \in \mathcal{X}, u \in \mathcal{U}, x_s(r) \in \lambda\mathcal{X}, u_s(r) \in \lambda\mathcal{U}\}$$

donde  $\lambda \in (0, 1]$  es un parámetro arbitrariamente cercano a 1. Esto se debe a que  $A_w$  puede contener autovalores iguales a 1.

Mientras que el conjunto invariante  $\mathcal{W}_f^t$  para el sistema de estado extendido es tal que:

$$\mathcal{W}_f^t = \{w \in \mathcal{W}_\lambda : A_w^k w \in \mathcal{W}_\lambda, k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\}. \quad (2.30)$$

De esta manera, el conjunto invariante terminal  $\mathcal{X}_f^t$  se obtiene como la proyección del conjunto definido en la Ec. (2.30) sobre el conjunto de estados del sistema:

$$\mathcal{X}_f^t = Proj_{\mathcal{X}}(\mathcal{W}_f^t). \quad (2.31)$$

Con las consideraciones planteadas se cumple que las funciones  $f(\cdot)$  y  $\ell(\cdot)$  son continuas,  $f(x_s(r), u_s(r)) = x_s(r)$ ,  $f(x_a, u_a) = x_a$  y  $\ell(0, 0) = 0$ . Además, que  $\mathcal{X}$  y  $\mathcal{X}_f \subseteq \mathcal{X}$  son cerrados y  $\mathcal{U}$  es compacto.

Por otro lado, el costo de etapa está acotado por debajo, es decir, cumple que  $\ell(x - x_a, u - u_a) \geq \alpha_\ell(|x - x_a|)$  para todo  $x \in C_N(\mathcal{X}, \mathcal{X}_f^t)$  con  $u \in \mathcal{U}$  y donde  $\alpha_\ell(\cdot)$  es  $\mathcal{K}_\infty$ .

De esta manera, en función de lo establecido en la Sección 2.2.1, se puede concluir que  $x_a$  es asintóticamente estable para el sistema controlado. Sin embargo, aún queda determinar que  $x_a \rightarrow x_s(r)$ .

**Observación 2.9.** Resulta importante resaltar que no se exige que  $x_s(r) \in \mathcal{X}_f^t$  o que  $x_s(r) \in \mathcal{X}$  y  $u_s(r) \in \mathcal{U}$ . De manera que si la referencia es factible,  $(x_a, u_a)$  puede alcanzar el valor  $(x_s(r), u_s(r))$ . De lo contrario,  $(x_a, u_a)$  alcanza un punto de operación factible de modo de minimizar la distancia con  $(x_s(r), u_s(r))$ .

Por lo tanto, la función  $V_t(\cdot)$  debe ser definida positiva y estrictamente convexa en  $x$  y  $u$  (ver Definición 2.5) de modo que:

$$(x_a^*, u_a^*) = \arg \min_{x_a \in \mathcal{X}_s, u_a \in \mathcal{U}_s} V_t(x_a - x_s(r), u_a - u_s(r))$$

sea único. Luego, el equilibrio  $x_a^*$ , con un control asociado  $u_a^*$ , es asintóticamente estable para el sistema controlado con un dominio de atracción  $C_N(\mathcal{X}, \mathcal{X}_f^t)$ .

**DEFINICIÓN 2.5.** Sea una función  $V(\cdot) : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}$ , donde  $\mathcal{C}$  es un subconjunto convexo no vacío de un espacio vectorial. La función  $V(\cdot)$  es convexa si para toda elección de  $c_1, c_2 \in \mathcal{C}$  y de  $0 < \theta < 1$ , se tiene que

$$V(\theta c_1 + (1 - \theta)c_2) < \theta V(c_1) + (1 - \theta)V(c_2).$$

La interpretación geométrica de la definición anterior para una función  $V(\cdot) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es como se muestra en la Fig. 2.10. En la misma se observa que el valor que toma la función entre dos puntos es menor que el valor de la recta que une esos puntos.

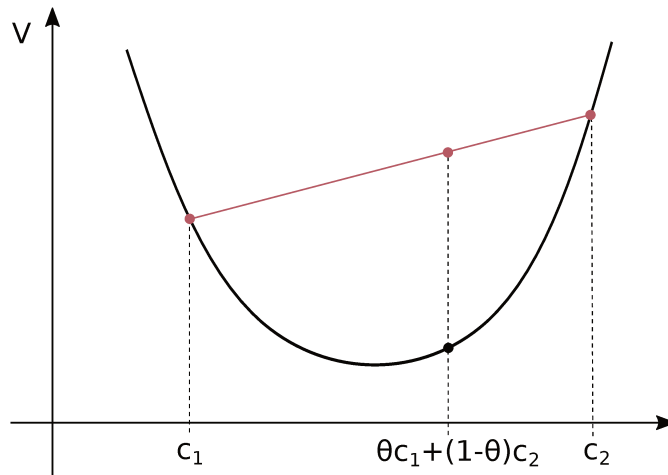


Figura 2.10: Interpretación gráfica de una función convexa.

### Ejemplo de Aplicación

En la presente sección se analizan las propiedades del controlador mediante una simulación numérica. Además, con el objetivo de realizar comparaciones con el controlador presentado en la Sección 2.2.2, se considera nuevamente el sistema masa-resorte-amortiguador mostrado en el Apéndice D.1.

Para este ejemplo, los valores de los parámetros del modelo se corresponden con los fijados en la Sección 2.2.2. Se destacar que al considerar  $b$  negativo, todo

el conjunto de estado de equilibrio  $\mathcal{X}_s$  no es asintóticamente estable para el sistema autónomo. En tanto que, en la presente sección se establece el horizonte de predicción  $N = 5$  pasos.

Bajo las consideraciones planteadas, tal como fue indicado oportunamente y como se muestra en la Fig. 2.11, puede observarse que el conjunto terminal para seguimiento de referencia,  $\mathcal{X}_f^t$ , resulta de la unión de los conjuntos terminales para regulación calculado en los diferentes puntos de equilibrio.

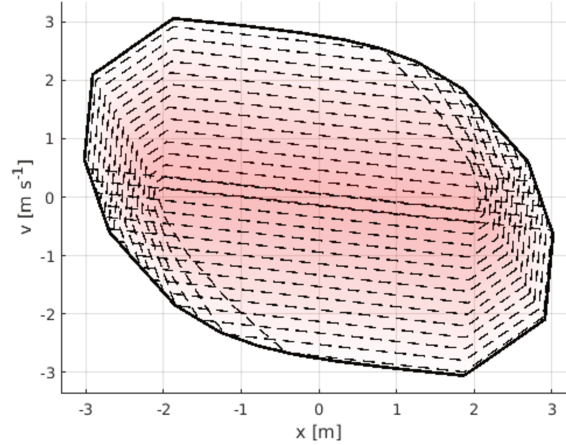


Figura 2.11: Conjunto invariante para seguimiento de referencia.

Análogamente a lo descrito para el controlador MPC para regulación, en la Fig. 2.12 se puede ver que el conjunto terminal está contenido en los conjuntos controlables, lo cual indica que se trata de un conjunto invariante. Además, se observan el conjunto controlable en 5 pasos  $C_N(\mathcal{X}, \mathcal{X}_f)$  (en color verde), el cual incluye el estado inicial, y el máximo conjunto admisible ( $Ad_\infty$ ), en color azul-celeste, que para el presente planteo se produce con un horizonte de predicción de 8 pasos. Resulta importante resaltar que el horizonte de predicción necesario para controlar el estado inicial es más pequeño que el caso de regulación analizado en la Fig. 2.4, y que estos conjuntos no dependen de la referencia como sucede en la situación abordada en la Fig. 2.8, lo que indica que cualquier estado admisible puede ser estabilizado con un horizonte de predicción de 8 pasos.

Para el presente ejemplo, la referencia es considerada como  $x_{s1} = [-1,5 \ 0]^T$  durante los primeros 10 s y luego se introduce un cambio del punto de operación a  $x_{s2} = [1,5 \ 0]^T$ .

En este sentido, en la Fig. 2.13 se visualiza la evolución de los estados del sistema controlado, donde la misma converge a los puntos de operación deseados manteniendo una trayectoria factible. Cabe destacar que, a pesar del cambio del punto de operación, el controlador conserva la factibilidad y admisibilidad sin necesidad de formular nuevamente el problema de MPC.

De igual modo, en la Fig. 2.14 puede observarse la evolución temporal de las variables del sistema controlado. En la Fig. 2.14a se percibe como los estados del sistema (en línea sólida de color azul), alcanzan la referencia establecida (en línea



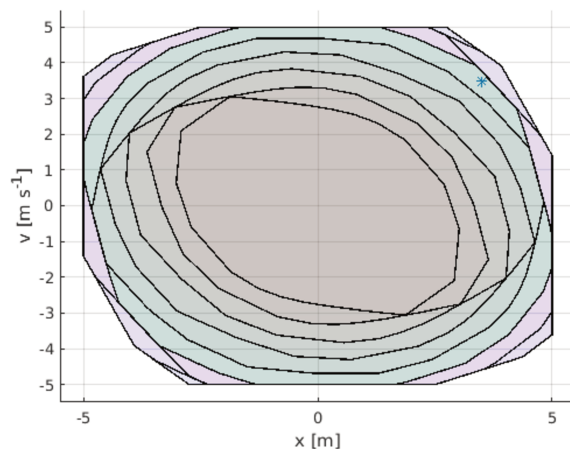


Figura 2.12: Conjuntos controlables considerando el sistema masa-resorte-amortiguador para seguimiento de referencia.

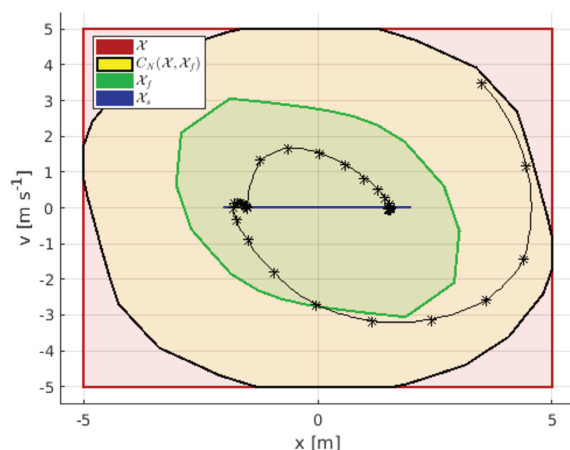


Figura 2.13: Evolución de los estados del sistema masa-resorte-amortiguador empleando MPC para seguimiento de referencia.

de trazos verde), mediante la aplicación de los controles obtenidos (Fig. 2.14b), la cual es factible en todo instante, es decir, no excede las restricciones impuestas (líneas de trazos en color rojo). Adicionalmente, en línea negra de punto-trazo, se muestra la evolución temporal de los estados y manipulada artificiales.

Para finalizar, en la Fig. 2.15 se muestra la carga computacional debido al controlador en términos del porcentaje del periodo de muestro que demanda el cálculo de las variables de control. Al igual que en el caso de regulación, se observa que al inicio se produce el mayor esfuerzo de cómputo y que luego decrece rápidamente, siendo la carga computacional media de 2,30 %.

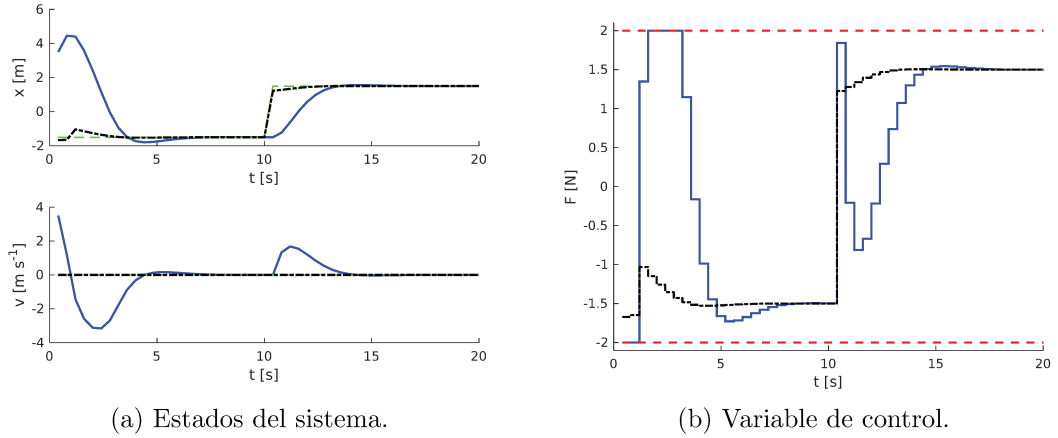


Figura 2.14: Evolución temporal de las variables del sistema masa-resorte-amortiguador controlado mediante MPC con propósito de seguimiento de referencia.

## 2.3. Control óptimo con desigualdades matriciales lineales

En la teoría de control óptimo, el análisis de problemas de sistemas dinámicos lineales y funciones objetivos cuadráticas, tal como se analizó anteriormente, representa gran interés y su análisis lleva a leyes de control lineales en ausencia de restricciones. Esta solución es la que provee un LQR.

Sin embargo, en presencia de restricciones en las variables de estados y/o en las variables de control, la aplicación de este controlador puede verse comprometida. Por ello, en las últimas décadas surgieron alternativas para su aplicación, una de ellas es MPC, analizado en la sección previa, y otra alternativa es la utilización de LMI (Ver Apéndice B), la cual se estudia en esta sección.

### 2.3.1. Regulador cuadrático-lineal con modelo lineal invariante en el tiempo

En primera instancia se analiza el diseño del controlador en ausencia de restricciones y posteriormente se amplía a formulaciones que contemplen limitaciones en las variables del sistema.

#### Regulador cuadrático-lineal sin restricciones

Considerando un modelo como el indicado en la Ec. (2.6) y fijando una ley de control lineal:

$$u(k) = \kappa x(k), \quad (2.32)$$

el sistema de lazo cerrado es  $x(k+1) = A_\kappa x(k)$  con  $A_\kappa = A + B\kappa$ , donde  $\kappa$  es una matriz de ganancia de realimentación estática.

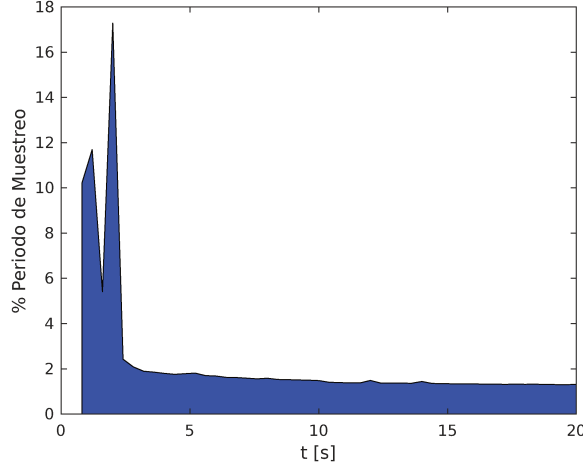


Figura 2.15: Carga computacional producto de MPC para seguimiento de referencia aplicado a un sistema masa-resorte-amortiguador.

Adoptando una función objetivo cuadrática:

$$V_{\infty}(x_0) = \sum_{k=0}^{\infty} (x(k)^T Q x(k) + u(k)^T R u(k)), \quad (2.33)$$

con  $Q \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$  semidefinida positiva y  $R \in \mathbb{R}^{n_u \times n_u}$  definida positiva. Sea  $P > 0$ ,  $V(x(k)) = x(k)^T P x(k)$  y  $\epsilon(P, \gamma)$ , un elipsoide invariante, tal como se desarrolla a continuación, de modo que:

$$V(x(k+1)) - V(x(k)) < 0, \quad \forall x(k) \in \epsilon(P, \gamma), \quad \forall k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}.$$

Entonces  $V(\cdot)$  es decreciente y la trayectoria de estados del sistema controlado converge al origen, tal como se enuncia en el siguiente teorema.

**Teorema 2.2.** *Bajo las consideraciones planteadas, si se satisfacen simultáneamente las siguientes LMIs:*

$$\begin{pmatrix} 1 & x_0^T \\ x_0 & Y \end{pmatrix} > 0, \quad (2.34)$$

$$\begin{pmatrix} Y & Y A^T + L^T B^T & Y Q^{1/2} & L^T R^{1/2} \\ AY + BL & Y & 0 & 0 \\ Q^{1/2} Y & 0 & \gamma \mathbb{I} & 0 \\ R^{1/2} L & 0 & 0 & \gamma \mathbb{I} \end{pmatrix} > 0, \quad (2.35)$$

donde  $Y = P^{-1} \gamma > 0$ ,  $L = \kappa Y$  y  $\gamma > 0$ . Entonces, el origen es asintóticamente estable para el sistema de lazo cerrado con una matriz de realimentación  $\kappa = LY^{-1}$ . Además, se garantiza que la función objetivo, presentada en la Ec. (2.33), está acotada por  $\gamma$ :

$$\sum_{k=0}^{\infty} (x(k)^T Q x(k) + u(k)^T R u(k)) < \gamma.$$

*Demostración.* De la Ec. (2.34) se obtiene, mediante el complemento de Schur (Ver Apéndice B.2), que:

$$\begin{aligned} 1 - x_0^T Y^{-1} x_0 &> 0, \\ x_0^T P x_0 &< \gamma, \end{aligned}$$

de forma que determina el elipsoide:

$$\epsilon(P, \gamma) = \{x_0 \in \mathbb{R}^{n_x} : x_0^T P x_0 < \gamma\}.$$

Por otro lado, la Ec. (2.35) indica que la función objetivo es decreciente, es decir:

$$V(x(k+1)) - V(x(k)) < 0, \quad \forall x(k) \in \epsilon(P, \gamma), \quad \forall k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}.$$

Para ello, se considera el sistema de lazo cerrado  $x(k+1) = A_\kappa x(k)$  con  $A_\kappa = A + B\kappa$ . De esta manera, la Ec. (2.35) puede reescribirse como:

$$\begin{pmatrix} Y & Y A_\kappa^T & Y Q^{1/2} & L^T R^{1/2} \\ A_\kappa Y & Y & 0 & 0 \\ Q^{1/2} Y & 0 & \gamma \mathbb{I} & 0 \\ R^{1/2} L & 0 & 0 & \gamma \mathbb{I} \end{pmatrix} > 0.$$

Luego, es posible dividir dicha matriz en submatrices o bloques, tal como se muestra a continuación:

$$\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} Y & Y A_\kappa^T \\ A_\kappa Y & Y \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} Y Q^{1/2} & L^T R^{1/2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} Q^{1/2} Y & 0 \\ R^{1/2} L & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \gamma \mathbb{I} & 0 \\ 0 & \gamma \mathbb{I} \end{pmatrix} \end{pmatrix} > 0,$$

que mediante el complemento de Schur puede escribirse como:

$$\begin{pmatrix} Y & Y A_\kappa^T \\ A_\kappa Y & Y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} Y Q^{1/2} & L^T R^{1/2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma^{-1} \mathbb{I} & 0 \\ 0 & \gamma^{-1} \mathbb{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q^{1/2} Y & 0 \\ R^{1/2} L & 0 \end{pmatrix} > 0,$$

operando algebraicamente, se tiene:

$$\begin{pmatrix} Y - (Y \gamma^{-1} Q Y + L^T \gamma^{-1} R L) & Y A_\kappa^T \\ A_\kappa Y & Y \end{pmatrix} > 0,$$

y aplicando nuevamente el complemento de Schur, se obtiene:

$$Y - \gamma^{-1} (Y Q Y + L^T R L) - Y A_\kappa^T Y^{-1} A_\kappa Y > 0.$$

Luego, pre y posmultiplicando por  $Y^{-1}$  y multiplicando por  $\gamma$ , la ecuación anterior puede escribirse como:

$$\gamma Y^{-1} - (Q + Y^{-1} L^T R L Y^{-1}) - A_\kappa^T \gamma Y^{-1} A_\kappa > 0.$$

Dado que  $Y = P^{-1}\gamma > 0$  y  $L = \kappa Y$ , se llega a:

$$P - (Q + \kappa^T R \kappa) - A_\kappa^T P A_\kappa > 0,$$

entonces, pre y posmultiplicando por  $x(k)^T$  y  $x(k)$ , respectivamente, se obtiene:

$$x(k)^T A_\kappa^T P A_\kappa x(k) - x(k)^T P x(k) < - (x(k)^T Q x(k) + x(k)^T \kappa^T R \kappa x(k)),$$

y finalmente se arriba a:

$$V(x(k+1)) - V(x(k)) < - (x(k)^T Q x(k) + u(k)^T R u(k)).$$

De manera similar a lo planteado en la Ec. (2.17), siendo  $Q > 0$  y  $R > 0$ , es claro que para todo  $x(k) \neq 0$  el lado derecho de la desigualdad anterior es un escalar positivo, lo que demuestra que la función  $V(x(k))$  es una función de Lyapunov decreciente.

Por último, se debe demostrar que la función objetivo tiene una cota superior dada por  $\gamma$ .

Tomando en cuenta que:

$$V(x(k+1)) - V(x(k)) < -x(k)^T (Q + \kappa^T R \kappa) x(k), \quad k \in \mathbb{Z}_{\geq 0},$$

expandiendo y sumando los términos de la ecuación previa se obtiene:

$$\begin{array}{rcl} V(x(1)) - V(x(0)) & < & -x(0)^T (Q + \kappa^T R \kappa) x(0) \\ + & & + \\ V(x(2)) - V(x(1)) & < & -x(1)^T (Q + \kappa^T R \kappa) x(1) \\ + & & + \\ V(x(3)) - V(x(2)) & < & -x(2)^T (Q + \kappa^T R \kappa) x(2) \\ + & & + \\ \vdots & & \vdots \\ + & & + \\ V(x(m+1)) - V(x(m)) & < & -x(m)^T (Q + \kappa^T R \kappa) x(m) \end{array}$$

.....

.....

$$V(x(m+1)) - V(x(0)) < - \sum_{k=0}^m x(k)^T (Q + \kappa^T R \kappa) x(k).$$

Dado que el origen es asintóticamente estable para el sistema de lazo cerrado, entonces  $x(\infty) = 0$  y, por lo tanto,  $V(x(\infty)) = 0$ . De esta manera, cuando  $m \rightarrow \infty$ , la sumatoria resulta:

$$\begin{aligned} V(x(0)) &> \sum_{k=0}^{\infty} x(k)^T (Q + \kappa^T R \kappa) x(k), \\ V(x(0)) &> V_{\infty}(x_0), \end{aligned}$$

y de acuerdo con la Ec. (2.34),  $V(x(0)) = x(0)^T P x(0) < \gamma$ , entonces:

$$V_{\infty}(x_0) < \gamma.$$

□

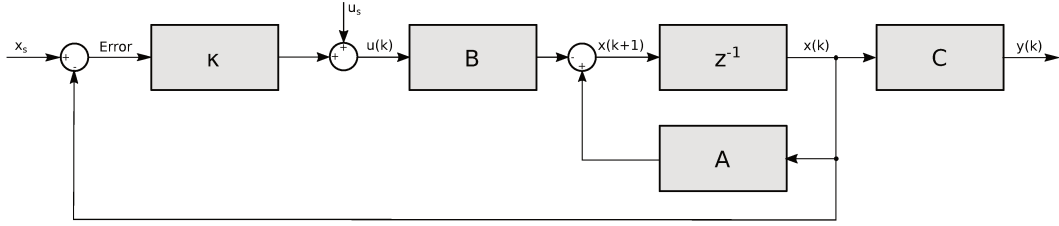


Figura 2.16: Esquema de LQR discreto

Por lo tanto, en función de lo establecido en el Teorema 2.2, al minimizar la cota superior  $\gamma$ , se minimiza la función objetivo y se obtiene una ley de realimentación óptima  $u^*(k) = \kappa^* x(k)$  que garantice que el origen es asintóticamente estable para el sistema de lazo cerrado (Fig. 2.16).

Así, el controlador LQR en tiempo discreto queda determinado mediante el siguiente problema de optimización:

$$\begin{aligned} & \min_{L, Y > 0} \gamma \\ \text{s.a.} & \begin{pmatrix} 1 & x_0^T \\ x_0 & Y \end{pmatrix} > 0, \\ & \begin{pmatrix} Y & YA^T + L^T B^T & YQ^{1/2} & L^T R^{1/2} \\ AY + BL & Y & 0 & 0 \\ Q^{1/2} Y & 0 & \gamma \mathbb{I} & 0 \\ R^{1/2} L & 0 & 0 & \gamma \mathbb{I} \end{pmatrix} > 0. \end{aligned} \quad (2.36)$$

Consecuentemente, la ley de control óptima lineal resulta de resolver dicho problema.

### Restricciones en la variable de control

Una propiedad de las LMIs es que determinan regiones convexas y la intersección con otras LMIs es una región convexa. Con lo cual, la obtención del controlador se resume a resolver un problema de optimización convexo, utilizando algoritmos de búsqueda especializados como son los métodos de punto interior [31]. Tomando en cuenta esta propiedad, es posible la inclusión de restricciones en las variables de estados y de control en formato de LMI.

De esta manera, se comienza mostrando cómo incorporar una restricción en la amplitud de la variable manipulada  $u(k)$  por medio de una LMI.

Para el análisis del controlador indicado, se considera una restricción en la norma Euclidiana:

$$\|u(k)\|_2 < u_{max}, \quad k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}. \quad (2.37)$$

Dado que se considera una ley de control lineal, tal como se indica en la Ec. (2.32), y recordando que  $\kappa = LY^{-1}$ , entonces:

$$\|u(k)\|_2^2 = x(k)^T Y^{-1} L^T L Y^{-1} x(k).$$

Definiendo:

$$z(k) = Y^{-1/2}x(k),$$

y

$$H = LY^{-1/2},$$

entonces la ecuación anterior puede reescribirse:

$$\|u(k)\|_2^2 = z(k)^T H^T H z(k),$$

donde  $H^T H$  es una matriz simétrica y diagonalizable ortogonalmente, de modo que existe una matriz ortogonal  $T$  y una matriz diagonal  $\Lambda$  tal que:

$$H^T H = T^T \Lambda T.$$

Considerando  $v(k) = Tz(k)$ , entonces:

$$\|u(k)\|_2^2 = v(k)^T \Lambda v(k) = \sum_{n=1}^{n_x} \lambda_n v_n^2(k),$$

donde  $n_x$  es el número de estados y  $\lambda_n$  son los autovalores de la matriz  $H^T H$ . De esta manera, se cumple que:

$$\|u(k)\|_2^2 \leq \lambda_{max}(H^T H) \|v(k)\|_2^2,$$

siendo  $\lambda_{max}(H^T H)$  el máximo autovalor de  $H^T H$ .

Dado que la matriz ortonormal  $T$  produce una rotación del vector  $z$  preservando su módulo [30], es decir,  $\|v(k)\|_2^2 = z(k)^T T^T T z(k) = z(k)^T \mathbb{I} z(k) = \|z(k)\|_2^2$ , por lo tanto:

$$\|u(k)\|_2^2 \leq \lambda_{max}(H^T H) \|z(k)\|_2^2,$$

Tomando en cuenta que  $\|z(k)\|_2^2 = x(k)^T Y^{-1} x(k)$  y que, de acuerdo con la Ec. (2.35),  $V(x(k))$  es decreciente. Sumado a que, en función de lo que establece la Ec. (2.34),  $V(x(0)) < \gamma$ , entonces:

$$\|z(k)\|_2^2 = x(k)^T Y^{-1} x(k) \leq x(0)^T Y^{-1} x(0) < 1.$$

Por lo tanto:

$$\|u(k)\|_2^2 \leq \lambda_{max}(L^T Y^{-1} L),$$

donde si se satisface que  $\lambda_{max}(L^T Y^{-1} L) < u_{max}^2$ , se garantiza la desigualdad de la Ec. (2.37).

Luego, aplicando el complemento de Schur, se obtiene:

$$\begin{pmatrix} u_{max}^2 \mathbb{I} & L \\ L^T & Y \end{pmatrix} > 0, \quad (2.38)$$

donde esta LMI evita que la variable de control supere una cota máxima, y determina una región convexa que intersecta a la región dada por las LMIs presentadas en la Ec. (2.34) y en la Ec. (2.35).

De igual manera podría operarse al considerar un cota por cada una de las  $n_u$  variables de control, es decir, si cada componente se encuentra restringida de forma que:

$$|u_s(k)| < u_{s_{max}}, k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$$

donde  $s \in \mathbb{Z}_{1:n_u}$  indica cada componente del vector  $u(k)$ , entonces se arriba a:

$$\begin{pmatrix} u_{s_{max}}^2 & l_s \\ l_s^T & Y \end{pmatrix} > 0, \text{ con } s \in \mathbb{Z}_{1:n_u}, \quad (2.39)$$

donde  $l_s$  son las filas de la matriz  $L$ .

### Restricciones en las variables de estados y salida

A continuación se muestra cómo incorporar una restricción en la amplitud de la variable de estados  $x(k)$  por medio de una LMI.

Para ello, se considera una restricción en la norma Euclidiana, tanto del estado actual como en los estados sucesores:

$$\|x(k)\|_2 < x_{max}, k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}. \quad (2.40)$$

Como el estado  $x_0$  está contemplado en la Ec. (2.34), entonces se debe garantizar que:

$$\|x(k+1)\|_2 < x_{max}, k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}.$$

Dado que se considera una ley de control lineal, tal como se indica en la Ec. (2.32), con  $\kappa = LY^{-1}$ , entonces:

$$\|x(k+1)\|_2^2 = x(k)^T A_\kappa^T A_\kappa x(k) \geq 0.$$

Luego considerando  $z(k)$  tal como en la sección anterior y procediendo de manera similar, se obtiene:

$$z(k)^T Y^{1/2} A_\kappa^T A_\kappa Y^{1/2} z(k) \geq 0.$$

donde:

$$Y^{1/2} A_\kappa^T A_\kappa Y^{1/2} \leq x_{max}^2 \mathbb{I}.$$

Luego pre y posmultiplicando por  $Y^{1/2}$  y usando el complemento de Schur se arriba a:

$$\begin{pmatrix} Y & YA^T + L^T B^T \\ AY + BL & x_{max}^2 \mathbb{I} \end{pmatrix} > 0, \quad (2.41)$$



de manera que se garantiza la Ec. (2.40).

Del mismo modo puede plantearse para una restricción de salida,  $y_{max}$ . Si se considera el modelo presentado por la Ec. (2.6) con  $D = \mathbf{0}$ , lo cual sucede en una gran variedad de procesos, entonces  $y(k) = Cx(k)$ . Por lo tanto, una restricción en la salida implica que [34]:

$$\begin{pmatrix} Y & (YA^T + L^T B^T)C^T \\ C(A Y + BL) & y_{max}^2 \mathbb{I} \end{pmatrix} > 0, \quad (2.42)$$

De igual manera que para la variable de control, en las variables de estado y salida es posible pensar que se encuentre restringida cada componente, es decir, que exista una cota por cada una de las  $n_x$  variables de estados y de las  $n_y$  variables de salida.

En cuyo caso, al considerar:

$$|x_r(k+1)| < x_{r_{max}}, \quad k \in \mathbb{Z}_{\geq 0},$$

donde  $r \in \mathbb{Z}_{1:n_x}$  indica cada componente del vector  $x(k+1)$ , entonces se arriba a:

$$\begin{pmatrix} Y & Y A_r^T + L^T B_r^T \\ A_r Y + B_r L & x_{r_{max}}^2 \end{pmatrix} > 0, \quad (2.43)$$

donde  $A_r$  y  $B_r$  son las filas de las matrices del sistema.

Por otro lado, tomando en consideración que:

$$|y_q(k+1)| < y_{q_{max}}, \quad k \in \mathbb{Z}_{\geq 0},$$

donde  $q \in \mathbb{Z}_{1:n_y}$  indica cada componente del vector  $y(k+1)$ , se alcanza:

$$\begin{pmatrix} Y & (YA^T + L^T B^T)C_q^T \\ C_q(A Y + BL) & y_{q_{max}}^2 \end{pmatrix} > 0, \quad (2.44)$$

donde  $C_q$  son las filas de la matriz de salida.

**Observación 2.10.** *Es de destacar que las restricciones dadas por las Ecs. (2.38), (2.39) y (2.41) a (2.44) determinan restricciones simétricas respecto del cero.*

De este modo, las LMIs establecidas en las Ecs. (2.41) y (2.42) (o las Ecs. (2.43) y (2.44) si se plantea en términos de componentes) determinan que la trayectoria de estados y salida sean factibles para todo  $k \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ . Sin embargo, el uso de estas restricciones no implica que el elipsoide de estados controlables,  $\epsilon(P, \gamma)$ , esté contenido en el espacio determinado por las restricciones impuestas.

Dado que el elipsoide  $\epsilon(P, \gamma)$  queda caracterizado por la matriz simétrica  $Y$ , de manera que:

$$\epsilon(P, \gamma) = \{x \in \mathbb{R}^{n_x} : x^T Y x < 1\},$$

con  $Y = P^{-1}\gamma$ . Entonces, una restricción dura que permite que todos los estados controlables estén contenidos dentro de las restricciones impuestas, o sea que el elipsoide se encuentre inscripto en la región factible, viene dada por:

$$x^T Y x \leq x^T \mathcal{X}_{max} x, \quad (2.45)$$

donde  $\mathcal{X}_{max}$  caracteriza el máximo el elipsoide dado por la restricción indicada en la Ec. (2.40).

Finalmente el problema LQR en tiempo discreto con restricciones en las variables de estados y de control surge de aplicar las Ecs. (2.38) y (2.41) al problema sin restricciones (Ec. (2.36)), es decir:

$$\begin{aligned}
 & \min_{L, Y > 0} \gamma \\
 \text{s.a.} & \begin{pmatrix} 1 & x_0^T \\ x_0 & Y \end{pmatrix} > 0, \\
 & \begin{pmatrix} Y & YA^T + L^T B^T & YQ^{1/2} & L^T R^{1/2} \\ AY + BL & Y & 0 & 0 \\ Q^{1/2}Y & 0 & \gamma \mathbb{I} & 0 \\ R^{1/2}L & 0 & 0 & \gamma \mathbb{I} \end{pmatrix} > 0, \\
 & \begin{pmatrix} u_{max}^2 \mathbb{I} & L \\ L^T & Y \end{pmatrix} > 0, \\
 & \begin{pmatrix} Y & YA^T + L^T B^T \\ AY + BL & x_{max}^2 \mathbb{I} \end{pmatrix} > 0 \text{ ó } Y \leq \mathcal{X}_{max}.
 \end{aligned} \tag{2.46}$$

### Ejemplo de aplicación

En la presente sección se analizan las propiedades del controlador presentado mediante una simulación numérica. A modo de realizar comparaciones con el controlador presentado en la Sección 2.2.2, se considera nuevamente el sistema masa-resorte-amortiguador mostrado en el Apéndice D.1.

Para este ejemplo, los valores de los parámetros del modelo se corresponden con los fijados en la Sección 2.2.2.

De esta manera, se presentan los resultados obtenidos al simular el sistema sin restricciones y con la inclusión de las mismas. En función de ello, en la Fig. 2.17a se presenta la evolución de los estados del sistema controlado sin restricciones así como el elipsoide invariante dado por la Ec. (2.34). En la misma se observa que la trayectoria converge al origen, que resulta el punto de operación deseado. Además, el conjunto  $\epsilon(P, \gamma)$  muestra todos los estados que son controlables con la ley de control obtenida mediante el problema Ec. (2.36).

Por otro lado, en la Fig. 2.17b se observa que, si bien la evolución alcanza el estado deseado, la presencia de restricciones provoca que el sistema oscile alrededor del origen y, por lo tanto, que la convergencia sea más lenta. Asimismo, el conjunto  $\epsilon(P, \gamma)$  resulta más pequeño en tamaño aunque no logra satisfacer las restricciones impuestas. En tanto que en la Fig. 2.17c se puede ver que el elipsoide  $\epsilon(P, \gamma)$  respeta las restricciones establecidas, no obstante la evolución la convergencia hacia el punto objetivo es más lenta aún.

De igual modo, en la Fig. 2.18 se presenta la evolución temporal de las variables del sistema controlado para las dos situación planteadas. En la Fig. 2.18a se destaca que los estados del sistema (en línea sólida de color azul), alcanzan el estado deseado (en línea de trazos negra), mediante la aplicación de los controles obtenidos (Fig. 2.18b), si bien para el caso analizado no se toman en cuenta las restricciones,

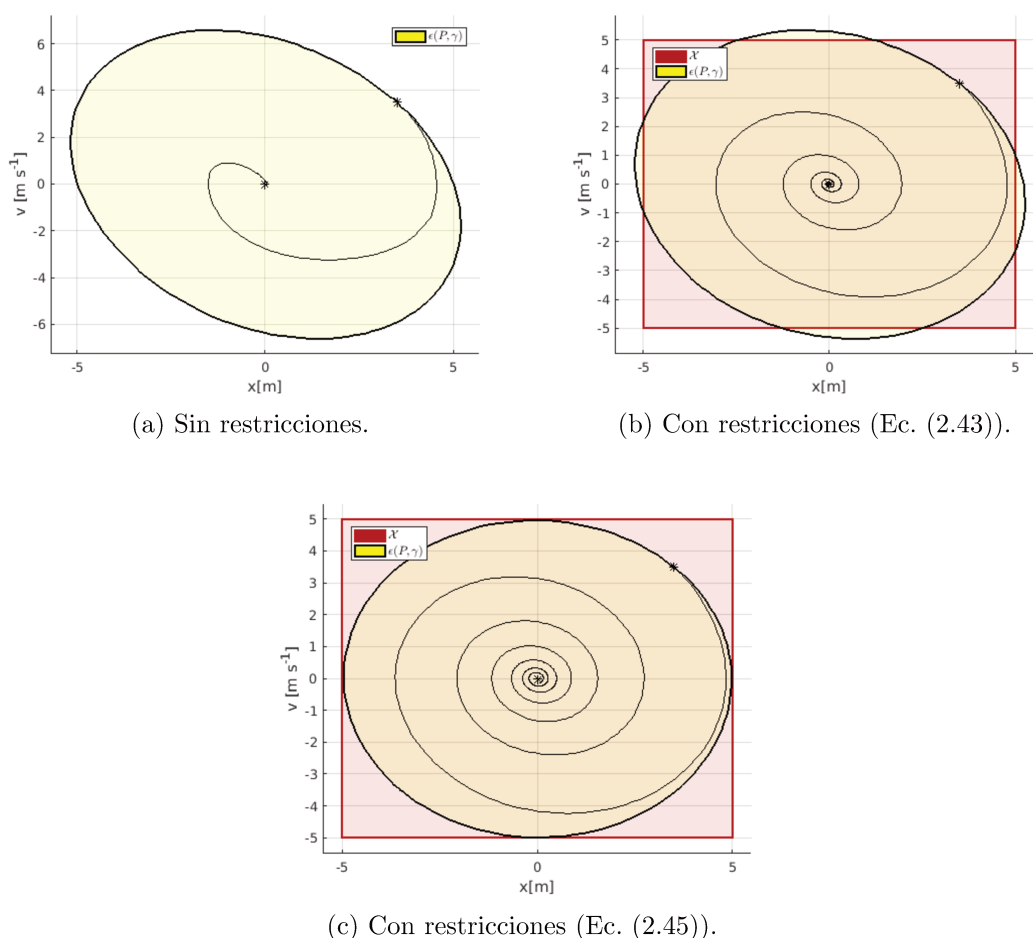


Figura 2.17: Evolución de los estados del sistema masa-resorte-amortiguador empleando LQR vía LMI con modelo LTI para regulación al origen.

en líneas de trazos en color rojo se marcan los límites que se analizan en el caso siguiente con el único objetivo de visualizar que excede estos valores y resalta la importancia de contemplar las restricciones en el diseño.

A su vez, la Fig. 2.18c muestra la evolución de los estados del sistema controlado al tomar en cuenta las restricciones impuestas. En esta situación, los estados no alcanzan el estado deseado en el tiempo de simulación establecido para el análisis de los controladores previos. Por ello, se extendió el tiempo de simulación para observar la convergencia de los estados al origen. Además, en la Fig. 2.18d se visualiza la evolución de la variable de control obtenida mediante la resolución del problema planteado en la Ec. (2.46). En la misma se observa además, que dicha variable no supera las restricciones indicadas en líneas de trazos en color rojo.

Para finalizar, cabe destacar que aunque se observa un rendimiento menor en relación a los controladores presentados en las secciones previas cuando se consideran restricciones, el cálculo de la matriz de ganancia de realimentación se realiza fuera línea y luego es aplicada al sistema, de manera que la carga computacional promedio en términos del porcentaje del periodo de muestreo resulta en 0,014 %.

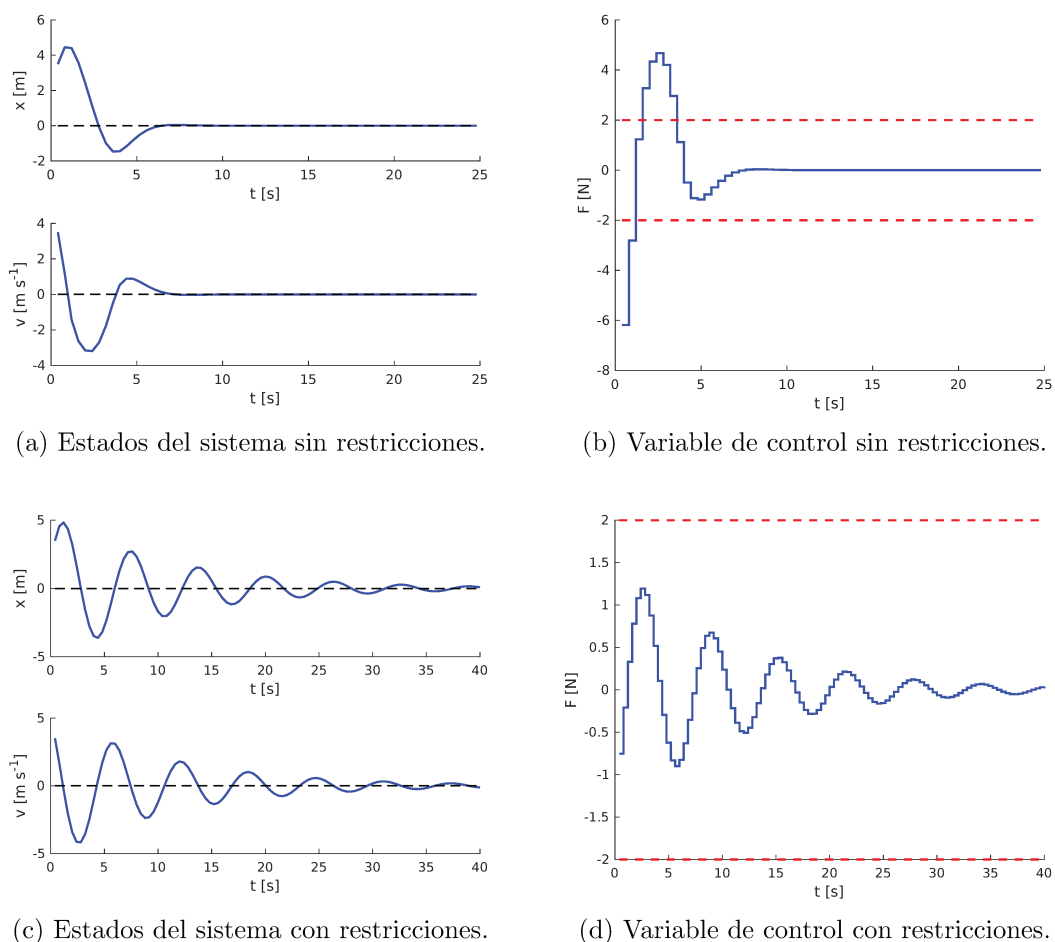


Figura 2.18: Evolución temporal de las variables del sistema masa-resorte-amortiguador controlado mediante LQR vía LMI con modelo LTI.

Por su parte, existen trabajos en la bibliografía ([34], [32], entre otros) donde se propone el recálculo en línea de la matriz de ganancia cada un período de tiempo prefijado, que puede o no coincidir con el período de muestreo, con el objeto de mejorar el desempeño.

### 2.3.2. Regulador cuadrático-lineal con modelo lineal de parámetros variables

Los modelos lineales e invariantes en el tiempo describen al sistema bajo el supuesto que sus parámetros son conocidos con certeza y no cambian con el tiempo. Además, si se trata de un sistema no lineal, entonces el modelo LTI describe el comportamiento alrededor de un punto de operación.

Dado que el rendimiento de los controladores se deteriora a medida que aumenta la diferencia entre el modelo y el sistema [49], comprometiendo incluso la estabilidad, es que las incertidumbres de modelo se deben tener en cuenta en el diseño del controlador. Bajo esta consideración, el enfoque basado en LMI permite

incorporar dicha variabilidad mediante la utilización de modelos LPV garantizando la estabilidad asintótica [34].

Considerando un modelo LPV como el indicado en la Ec. (2.10), contenido en un conjunto  $\Omega$  tal como se especifica en la Ec. (2.12) y fijando una ley de control lineal como la presentada en la Ec. (2.32), el sistema de lazo cerrado es  $x(k+1) = A_\kappa(\rho(k))x(k)$  con  $A_\kappa(\rho(k)) = A(\rho(k)) + B(\rho(k))\kappa$ .

Tomando además una función objetivo cuadrática:

$$V_\infty(x_0) = \sum_{k=0}^{\infty} (x(k)^T Q x(k) + u(k)^T R u(k)),$$

con  $Q \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$  semidefinida positiva y  $R \in \mathbb{R}^{n_u \times n_u}$  definida positiva, entonces el problema de optimización robusto se resuelve de modo de asegurar que el origen sea asintóticamente estable aún para el “peor” modelo LTI comprendido en  $\Omega$ , es decir, se pretende hallar una ley de control factible que minimice la función objetivo para el modelo LTI perteneciente a  $\Omega$  que la maximice:

$$\min_{u(k) \in \mathcal{U}} \max_{[A(\rho(k)), B(\rho(k)), C(\rho(k)), D(\rho(k))] \in \Omega} V_\infty(x_0). \quad (2.47)$$

Claramente, este es un problema mín-máx que, si bien es convexo, es computacionalmente costoso [34]. Sin embargo, siguiendo el análisis correspondiente a un modelo LTI presentado en la sección previa, es posible introducir una cota superior  $\gamma$  a la función objetivo  $V_\infty(\cdot)$  y luego minimizar esa cota en un problema de optimización cuyas restricciones sean LMIs.

De acuerdo con la Ec. (2.14), cualquier modelo contenido en  $\Omega$  puede ser expresado como una suma convexa de los vértices del conjunto. De esta manera, el análisis se concentra en cada modelo LTI en los vértices de  $\Omega$ , los cuales están representados por:

$$\begin{aligned} x(k+1) &= A_j x(k) + B_j u(k) \quad \text{con } j \in \mathbb{Z}_{1:n_m}, \\ y(k) &= C x(k), \\ x(0) &= x_0, \end{aligned}$$

para el cual se considera que la matriz  $C$  no tiene incertidumbre y se considera que  $D$  es una matriz nula con las dimensiones apropiadas.

Sea  $P > 0$ ,  $V(x(k)) = x(k)^T P x(k)$  y  $\epsilon(P, \gamma)$ , este último es un elipsoide invariante robusto de modo que:

$$V(x(k+1)) - V(x(k)) < 0, \quad \forall x(k) \in \epsilon(P, \gamma), \quad \forall k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}.$$

**Teorema 2.3.** *Bajo las consideraciones planteadas, si se satisfacen simultáneamente las siguientes LMIs:*

$$\begin{pmatrix} 1 & x_0^T \\ x_0 & Y \end{pmatrix} > 0, \quad (2.48)$$

$$\begin{pmatrix} Y & Y A_j^T + L^T B_j^T & Y Q^{1/2} & L^T R^{1/2} \\ A_j Y + B_j L & Y & 0 & 0 \\ Q^{1/2} Y & 0 & \gamma \mathbb{I} & 0 \\ R^{1/2} L & 0 & 0 & \gamma \mathbb{I} \end{pmatrix} > 0, \text{ con } j \in \mathbb{Z}_{1:n_m}, \quad (2.49)$$

donde  $Y = P^{-1}\gamma > 0$ ,  $L = \kappa Y$  y  $\gamma > 0$ . Entonces, el origen es asintóticamente estable para cualquier sistema de lazo cerrado en  $\Omega$  con una matriz de realimentación  $\kappa = LY^{-1}$ . Además, se garantiza que la función objetivo está acotada por  $\gamma$ :

$$\sum_{k=0}^{\infty} (x(k)^T Q x(k) + u(k)^T R u(k)) < \gamma.$$

*Demostración.* Siguiendo un razonamiento similar al realizado para el caso basado en un modelo LTI, resulta claro que la Ec. (2.48) determina el elipsoide:

$$\epsilon(P, \gamma) = \{x_0 \in \mathbb{R}^{n_x} : x_0^T P x_0 < \gamma\}.$$

Además, si se aplica la suma convexa planteada en la Ec. (2.14) a las LMIs introducidas en la Ec. (2.49) resulta:

$$\sum_{j=1}^{n_m} \mu_j(\rho) \begin{pmatrix} Y & Y A_j^T + L^T B_j^T & Y Q^{1/2} & L^T R^{1/2} \\ A_j Y + B_j L & Y & 0 & 0 \\ Q^{1/2} Y & 0 & \gamma \mathbb{I} & 0 \\ R^{1/2} L & 0 & 0 & \gamma \mathbb{I} \end{pmatrix} > 0,$$

de donde se obtiene que:

$$\begin{pmatrix} Y & Y A(\rho)^T + L^T B(\rho)^T & Y Q^{1/2} & L^T R^{1/2} \\ A(\rho) Y + B(\rho) L & Y & 0 & 0 \\ Q^{1/2} Y & 0 & \gamma \mathbb{I} & 0 \\ R^{1/2} L & 0 & 0 & \gamma \mathbb{I} \end{pmatrix} > 0,$$

procediendo como en el Teorema 2.2, se arriba a:

$$x(k)^T A_{\kappa}^T(\rho) P A_{\kappa}(\rho) x(k) - x(k)^T P x(k) < -(x(k)^T Q x(k) + x(k)^T \kappa^T R \kappa x(k)),$$

y finalmente se llega a:

$$V(x(k+1)) - V(x(k)) < -(x(k)^T Q x(k) + u(k)^T R u(k)).$$

Por lo tanto, si satisfacen simultáneamente las LMIs presentadas en la Ec. (2.49), entonces  $V(x(k))$  es una función de Lyapunov decreciente para todo modelo  $[A(\rho(k)), B(\rho(k)), C(\rho(k)), D(\rho(k))] \in \Omega$ .

Por último, siguiendo los pasos dados para el caso de un sistema LTI, se tiene que:

$$V_{\infty}(x_0) < V(x(0)),$$

y de acuerdo con la Ec. (2.48),  $V(x(0)) = x(0)^T P x(0) < \gamma$ , entonces:

$$V_{\infty}(x_0) < \gamma.$$

□

Así, el controlador LQR en tiempo discreto contemplando un modelo LPV queda determinado mediante el siguiente problema de optimización:

$$\begin{aligned} & \underset{L, Y > 0}{\text{mín}} \quad \gamma \\ \text{s.a.} \quad & \begin{pmatrix} 1 & x_0^T \\ x_0 & Y \end{pmatrix} > 0, \\ & \begin{pmatrix} Y & Y A_j^T + L^T B_j^T & Y Q^{1/2} & L^T R^{1/2} \\ A_j Y + B_j L & Y & 0 & 0 \\ Q^{1/2} Y & 0 & \gamma \mathbb{I} & 0 \\ R^{1/2} L & 0 & 0 & \gamma \mathbb{I} \end{pmatrix} > 0, \text{ con } j \in \mathbb{Z}_{1:n_m}. \end{aligned} \quad (2.50)$$

**Observación 2.11.** *La ley de control óptima obtenida por medio de la resolución de dicho problema contempla, mediante las restricciones LMIs, todos los modelos que pertenecen a  $\Omega$ . Por ello, minimizar  $\gamma$  implica hallar la ley de control que minimice el funcional aún para el “peor” modelo LTI en  $\Omega$ , es decir, equivale a resolver el problema mín-máx de la Ec. (2.47).*

### Restricciones en las variables de control, estados y salida

Tal como se hizo mención anteriormente, la intersección de las regiones convexas, determinadas por las LMIs, delimita una región convexa. De esta manera, el agregado de restricciones en las diferentes variables del sistema se reduce a sumar nuevas restricciones por medio de LMIs.

Para el caso de restricciones en la variable de control, es claro que las Ecs. (2.38) y (2.39) no dependen explícitamente del modelo. Por lo tanto, siguiendo el razonamiento indicado en la sección anterior se arriba a dichas ecuaciones independientemente del modelo.

Diferente es la situación de las Ecs. (2.41) y (2.42) (o las Ecs. (2.43) y (2.44)) donde las matrices del modelo se incluyen dentro de las LMIs. Por ello, las restricciones se aplican a todos los modelos, resultando una LMI por cada restricción y por cada modelo vértice contemplado:

$$\begin{pmatrix} Y & Y A_j^T + L^T B_j^T \\ A_j Y + B_j L & x_{max}^2 \mathbb{I} \end{pmatrix} > 0, \quad (2.51)$$

$$\begin{pmatrix} Y & (Y A_j^T + L^T B_j^T) C^T \\ C(A_j Y + B_j L) & y_{max}^2 \mathbb{I} \end{pmatrix} > 0, \quad (2.52)$$

$$\begin{pmatrix} Y & Y A_{j_r}^T + L^T B_{j_r}^T \\ A_{j_r} Y + B_{j_r} L & x_{rmax}^2 \mathbb{I} \end{pmatrix} > 0, \quad (2.53)$$

$$\begin{pmatrix} Y & (Y A_j^T + L^T B_j^T) C_q^T \\ C_q(A_j Y + B_j L) & y_{qmax}^2 \mathbb{I} \end{pmatrix} > 0, \quad (2.54)$$

con  $j \in \mathbb{Z}_{1:n_m}$ .

**Teorema 2.4.** *Si se satisfacen simultáneamente las LMIs indicadas en la Ec. (2.51), entonces para todo modelo LTI contenido en  $\Omega$  se cumple que  $\|x(k)\|_2 < x_{max}$  para  $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ .*

*Demostración.* Al aplicar la suma conexas planteada en la Ec. (2.14) a las LMIs introducidas en la Ec. (2.51) resulta:

$$\sum_{j=1}^{n_m} \mu_j(\rho) \begin{pmatrix} Y & Y A_j^T + L^T B_j^T \\ A_j Y + B_j L & x_{max}^2 \mathbb{I} \end{pmatrix} > 0,$$

de donde se obtiene que:

$$\begin{pmatrix} Y & Y A(\rho)^T + L^T B(\rho)^T \\ A(\rho)Y + B(\rho)L & x_{max}^2 \mathbb{I} \end{pmatrix} > 0,$$

y retomando el análisis realizado para un modelo LTI, se garantiza que la trayectoria obtenida con un modelo  $x(k+1) = A(\rho(k))x(k) + B(\rho(k))u(k)$  satisface las restricciones en las variables de estados.  $\square$

**Observación 2.12.** *Notar que si se realiza estudio similar para las LMIs presentadas en la Ec. (2.52) se observa que todos los modelos en  $\Omega$  satisfacen las restricciones en las variables de salida.*

**Observación 2.13.** *Al igual que lo indicado en la sección previa, las restricciones mencionadas no garantizan la factibilidad del elipsoide de estados controlables  $\epsilon(P, \gamma)$ . Por ello, es posible aplicar una restricción que asegure que el elipsoide se encuentre circunscripto por el conjunto de restricciones, es decir, que la restricción dada en la Ec. (2.45).*

Finalmente el problema LQR en tiempo discreto para modelos LPV con restricciones en las variables de estados y de control surge de aplicar las ecuaciones Ec. (2.38) y Ec. (2.51) al problema sin restricciones (Ec. (2.50)), o sea:

$$\begin{aligned} & \min_{L, Y > 0} \gamma \\ \text{s.a.} & \begin{pmatrix} 1 & x_0^T \\ x_0 & Y \end{pmatrix} > 0, \\ & \begin{pmatrix} Y & Y A_j^T + L^T B_j^T & Y Q^{1/2} & L^T R^{1/2} \\ A_j Y + B_j L & Y & 0 & 0 \\ Q^{1/2} Y & 0 & \gamma \mathbb{I} & 0 \\ R^{1/2} L & 0 & 0 & \gamma \mathbb{I} \end{pmatrix} > 0, \\ & \begin{pmatrix} u_{max}^2 \mathbb{I} & L \\ L^T & Y \end{pmatrix} > 0, \\ & \begin{pmatrix} Y & Y A_j^T + L^T B_j^T \\ A_j Y + B_j L & x_{max}^2 \mathbb{I} \end{pmatrix} > 0 \text{ ó } Y \leq \mathcal{X}_{max}, \end{aligned} \quad (2.55)$$

con  $j \in \mathbb{Z}_{1:n_m}$ .



### Ejemplo de aplicación

En esta sección se presentan resultados de simulación con el objetivo de visualizar las propiedades del controlador analizado. Para ello, se utiliza el sistema masa-resorte-amortiguador presentado en el Apéndice D.1 de manera de realizar comparaciones con los controladores analizados en las secciones previas.

Para este ejemplo, los valores de los parámetros del modelo se corresponden con los fijados en la Sección 2.2.2, aunque se contempla una incertidumbre en el parámetro  $k$ . A los fines de analizar el comportamiento, se establece que el sistema real es conocido y el parámetro correspondiente es  $k = 1$  y se especifica una variación del 14%, considerando un primer modelo con  $k = 0,86$  y un segundo modelo con  $k = 1,14$ , siendo éstos los valores máximos de la incertidumbre.

De esta manera, en la Fig. 2.19a se muestra la evolución de los estados del sistema para el sistema controlado sin restricciones donde se observa que la trayectoria converge a la referencia establecida. Asimismo, se muestra el elipsoide invariante robusto. Por otro lado, similarmente a lo ocurrido para caso LTI, en la Fig. 2.19b se observa que, si bien la evolución alcanza el estado deseado, la presencia de restricciones provoca que el sistema oscile alrededor del origen y, por lo tanto, que la convergencia sea más lenta. Sumado a ello, aunque el conjunto  $\epsilon(P, \gamma)$  resulta más pequeño en tamaño, no satisface las restricciones impuestas. En la Fig. 2.19c se muestra la evolución de los estados y el conjunto  $\epsilon(P, \gamma)$  si se considera la restricción que obliga al elipsoide a pertenecer al conjunto de restricciones de estados. Para esta última situación se observa que tanto el elipsoide controlable como la trayectoria son factibles.

En tanto que en la Fig. 2.20 puede observarse la evolución temporal de las variables del sistema controlado. En la Fig. 2.20a se percibe como los estados del sistema (en línea sólida de color azul), alcanzan la referencia establecida en línea de trazos negra. La ley de control obtenida determina los controles mostrados en la Fig. 2.20b, si bien para el caso analizado no se toman en cuenta las restricciones, en líneas de trazos en color rojo se marcan los límites que se analizan en el caso siguiente con el único objetivo de visualizar que excede estos valores.

Además, la Fig. 2.20c muestra la evolución de los estados del sistema controlado al tomar en cuenta las restricciones impuestas. En esta situación, los estados alcanzan el estado deseado con un tiempo de establecimiento alto. Por su parte, en la Fig. 2.20d se visualiza la evolución de la variable de control obtenida mediante la resolución del problema planteado en la Ec. (2.55). En la misma se observa además, que dicha variable no supera las restricciones indicadas en líneas de trazos en color rojo.

Para finalizar se destaca que la carga computacional promedio en términos del porcentaje del periodo de muestreo es ligeramente mayor que para el caso presentado en la Sección 2.3.1, encontrándose en el mismo orden de magnitud.

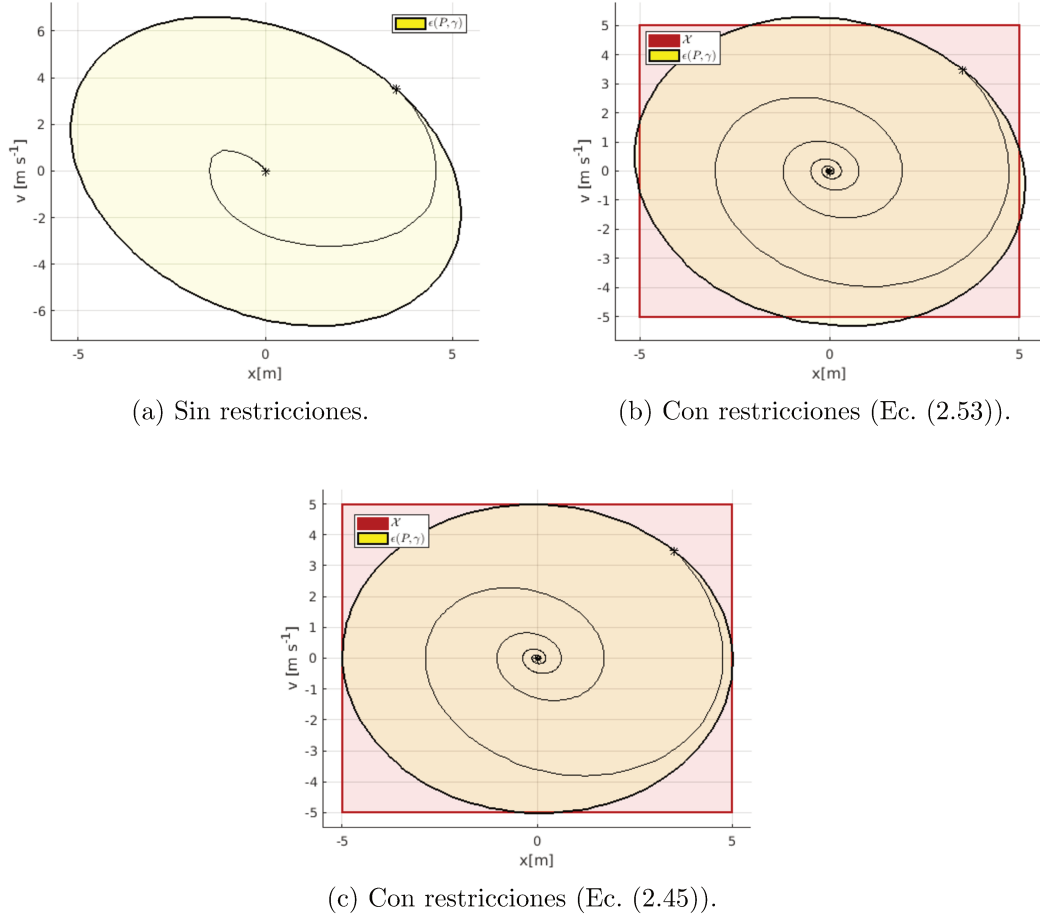


Figura 2.19: Evolución de los estados del sistema masa-resorte-amortiguador empleando LQR vía LMI con modelo LPV para regulación al origen.

## 2.4. Conclusiones

A lo largo de este capítulo se analizaron diferentes métodos de control que buscan aplicar la teoría de control óptimo ante la presencia de restricciones en las variables del sistema. Además se introdujeron conceptos fundamentales para el diseño y análisis de los mismos, tales como diversos modelos, estabilidad, convergencia, factibilidad, funciones de Lyapunov, conjuntos invariantes, entre otros.

En la Sección 2.2.2 se planteó un controlador MPC para regulación para modelos LTI, donde mediante una adecuada selección del costo y restricción terminal se garantiza estabilidad asintótica local del origen y factibilidad recursiva del sistema de control, para todos los estados incluidos en una región de atracción dada por  $C_N(\mathcal{X}, \mathcal{X}_f)$ . Además se observó que horizontes mayores proveen una región de atracción mayor hasta alcanzar el máximo conjunto admisible ( $\mathcal{A}_\infty$ ), a partir de allí el horizonte puede ser considerado como “infinito”, o sea que no aporta nuevos estados al conjunto controlable en  $N$  pasos.

Por otro lado, se observó que el diseño de este controlador depende del punto

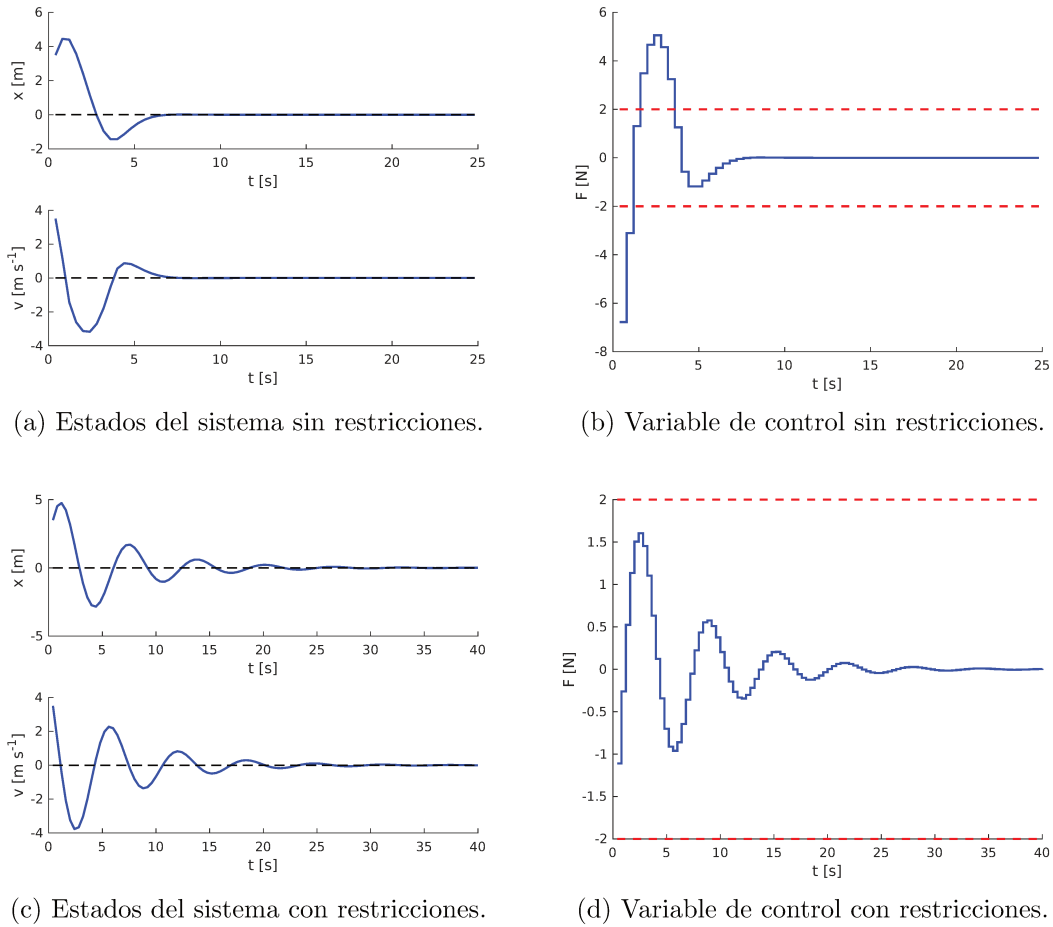


Figura 2.20: Evolución temporal de las variables del sistema masa-resorte-amortiguador controlado mediante LQR vía LMI con modelo LPV.

de operación deseado. Por lo tanto, el problema de MPC debe ser reformulado ante un cambio de referencia. Ante este inconveniente, en la Sección 2.2.3 se analizó un controlador MPC para seguimiento de referencias que en la formulación contempla, mediante la utilización de variables artificiales, los posibles puntos de operación. De esta manera, mantiene tanto estabilidad asintótica local del conjunto de equilibrios, factibilidad recursiva como admisibilidad ante un cambio o una trayectoria de referencia.

Para la obtención de los *ingredientes* terminales de dicho controlador, no se considera la referencia. De este modo, al introducir un punto de operación no factible, el controlador lleva el sistema a un punto de equilibrio admisible minimizando la distancia con la referencia indicada.

Asimismo, posee un mayor dominio de atracción, de manera que es posible utilizar horizontes de predicción más cortos. Esto es de gran importancia dado que, en controladores iterativos como MPC, el esfuerzo computacional puede resultar un factor crítico para su aplicación.

Por su parte, la inclusión de restricciones en las variables del sistema en am-

bos controladores, así como la posibilidad de operar sobre los límites de dichas restricciones, resulta natural e intuitiva.

En la Sección 2.3.1 se presentó un regulador LQR para modelos LTI bajo el enfoque de LMI y se mostró cómo se incorporan las restricciones en las variables del sistema al problema de optimización. Para este caso, la factibilidad del problema garantiza la estabilidad asintótica local del origen para el sistema de lazo cerrado, partiendo de los estados que se encuentran en el interior del elipsoide invariante  $\epsilon(P, \gamma)$ .

Bajo este enfoque, la inclusión de restricciones requiere un desarrollo previo por lo cual no resulta intuitivo como para los controladores MPC analizados. Además, dichas restricciones se trabajan en variables de desviación, son simétricas respecto del valor dado por el punto de operación, y se opera en el interior del conjunto de restricciones sin alcanzar los límites impuestos. Se destaca que trabajos recientes proveen mecanismos para evitar estos inconvenientes, sin embargo aumentan considerablemente la complejidad del problema de control y no aportan al alcance de esta tesis.

Por otro lado, los algoritmos utilizados para la resolución del problema de optimización son eficientes y permiten encontrar resultados con baja carga computacional. Este punto se pone de manifiesto en las simulaciones numéricas presentadas.

Por último, en la Sección 2.3.2 se exhibió un regulador LQR para modelos LPV bajo el enfoque de LMI. De esta manera, se visualiza que ante presencia de incertidumbre de modelado acotada, es posible garantizar que el origen sea asintóticamente estable para cualquier modelo incluido en un casco convexo definido por modelos LTI y contemplando la variabilidad de los parámetros. Se destaca que las características de este controlador son similares a las mencionadas para el caso analizado en la Sección 2.3.1.



## Capítulo 3

# Control Predictivo basado en Modelos Adaptativo para Regulación

En este capítulo, tomando en consideración los conceptos desarrollados en el Capítulo 2, se aborda el diseño y análisis de métodos de control MPC para regulación que contemplen incertidumbre paramétrica en el modelo del sistema.

El problema de control para sistemas con incertidumbre paramétrica ha sido considerado en muchos trabajos en la literatura especializada. En [34], [50], [32], entre otros, se presenta un control predictivo usando un horizonte de predicción infinito y fijando una ley de control lineal respecto de la variable de estados, para ello LMIs son utilizadas para resolver el problema de optimización. Mientras que, en [51], [52], [53], entre otros, se propone un MPC explícito basado en programación paramétrica con el mismo propósito. En estos trabajos, las entradas óptimas son calculadas *off-line* como una función afín a trozos de los estados y son almacenadas en una tabla de consulta. Luego, solamente se debe evaluar la tabla lo que permite la aplicación del MPC al sistema.

Sin embargo, en este capítulo se presentan métodos de control MPC que contemplen las propiedades y características del MPC para regulación presentado en la Sección 2.2.2 y que tome en cuenta un modelo de predicción con incertidumbre paramétrica o bien un sistema no lineal representado mediante el enfoque LPV presentado en la Sección 2.1.3.

La adaptabilidad del esquema de control propuesto se realiza mediante una variable de decisión que optimiza en línea el modelo de predicción a emplear. De esta manera, las principales características del controlador propuesto son:

- Un parámetro de ponderación  $\mu \in \mathbb{R}^{n_m}$  se considera como una variable de decisión que adapta el modelo de predicción.
- Las condiciones impuestas sobre el parámetro de ponderación se incluyen como restricciones del problema de optimización.
- El costo final se obtiene de forma de garantizar que sea una función de Lyapunov de control para todos los modelos que pertenecen a  $\Omega$ .

- El conjunto terminal es tal que cumple con la condición de invarianza para todos los modelos pertenecientes a  $\Omega$ .

Finalmente, cabe señalar que los principales resultados de este capítulo están publicados y se pueden encontrar en los trabajos [54, 55, 56, 57, 58].

### 3.1. Descripción del problema

La dinámica incierta del sistema puede ser descrita por un modelo discreto en espacio de estado con incertidumbre politópica mediante el enfoque LPV (Sección 2.1.3):

$$\begin{aligned} x(k+1) &= A(\rho(k))x(k) + B(\rho(k))u(k), \\ y(k) &= C(\rho(k))x(k) + D(\rho(k))u(k), \\ x(0) &= x_0, \end{aligned} \quad (3.1)$$

donde el parámetro  $\rho(k)$  es un parámetro de ajuste que, tal como se menciona en la Sección 2.1.3, queda determinado por una función no lineal. Es importante resaltar que la incertidumbre considerada está siempre contenida en un conjunto acotado y cerrado, es decir, compacto.

Luego, es posible incorporar la dinámica del sistema incierto o de un sistema no lineal (ver Apéndice C) dentro de un politopo convexo de  $n_m$  vértices, donde los vértices se obtienen en base a la máxima incertidumbre aunque, para un mejor desempeño, se pueden considerar valores intermedios en los parámetros del sistema. De esta manera, el sistema queda contenido en un conjunto con modelos LTI en sus  $n_m$  vértices:

$$[A(\rho(k)), B(\rho(k)), C(\rho(k)), D(\rho(k))] \in \Omega,$$

el cual es representado como:

$$\Omega = \text{Co}\{[A_1, B_1, C_1, D_1], [A_2, B_2, C_2, D_2], \dots, [A_{n_m}, B_{n_m}, C_{n_m}, D_{n_m}]\},$$

donde  $\text{Co}\{\cdot\}$  denota un casco convexo y  $[A_j, B_j, C_j, D_j]$  son las matrices de cada modelo LTI en los vértices del casco. El número de modelos vértices viene dado por  $n_m = n_l^{n_p}$ , donde  $n_p$  representa el número de parámetros de ajuste y  $n_l$  el número de puntos de linealización por parámetro.

En base a la interpolación de los modelos LTI vértices, es posible obtener un modelo de predicción, no solo sobre los vértices sino también sobre aquellos contenidos en  $\Omega$ :

$$\begin{aligned} A(\rho(k)) &= \sum_{j=1}^{n_m} \mu_j(\rho(k))A_j, & B(\rho(k)) &= \sum_{j=1}^{n_m} \mu_j(\rho(k))B_j \\ C(\rho(k)) &= \sum_{j=1}^{n_m} \mu_j(\rho(k))C_j, & D(\rho(k)) &= \sum_{j=1}^{n_m} \mu_j(\rho(k))D_j \end{aligned} \quad (3.2)$$

donde se debe cumplir que:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n_m} \mu_j(\rho(k)) &= 1 \\ 0 \leq \mu_j(\rho(k)) &\leq 1, \quad j \in \mathbb{Z}_{1:n_m}. \end{aligned} \tag{3.3}$$

La variable de ponderación  $\mu(\rho(k)) \in \mathbb{R}^{n_m}$  representa el peso de cada modelo LTI vértice con el modelo incierto. De forma que si se conoce esta variable en cada instante, realizando la suma convexa dada por las Ecs. (3.2) y (3.3), es posible determinar el modelo LTI que representa al sistema en ese instante.

Sin embargo,  $\mu(\cdot)$  depende de  $\rho(k)$ , el cual presenta una evolución no lineal y desconocida en muchas ocasiones. De esta manera, existen dos alternativas principales para el diseño de un controlador MPC bajo el enfoque LPV [59]. Una de ellas constituye un diseño robusto, asumiendo que los parámetros de ajuste son desconocidos a lo largo del horizonte de predicción. Por lo tanto, estos métodos son mucho más conservadores y generalmente se basan en procedimientos de mín-máx o en formulaciones fuera de línea. Como es el caso de los controladores mencionados en la introducción de este capítulo.

Otra alternativa es aquella que determina una posible trayectoria de  $\rho(k)$  a lo largo de los pasos futuros. En el caso de sistemas no lineales, se debe tener en cuenta que la solución resultante puede ser ligeramente diferente de los óptimos no lineales, pero se obtienen buenos rendimientos, bajo esfuerzo computacional y en muchas ocasiones se pueden lograr resultados comparables, es decir, cercanos al óptimo.

Siguiendo el segundo método, cuando el problema MPC dado en Ec. (2.15) se aplica a un sistema incierto o un proceso no lineal bajo una representación de modelo LPV, la evolución del parámetro de ajuste a lo largo del horizonte de predicción  $N$  se hace necesaria para describir los valores futuros de los estados.

En el caso de un MPC no lineal convencional, sería imperioso conocer el comportamiento exacto del modelo de proceso  $f(\cdot)$  a lo largo del horizonte de predicción. La ventaja que presenta la configuración LPV radica en que el modelo se puede describir, para todos los instantes futuros, por un modelo lineal  $[A(\rho(k)), B(\rho(k)), C(\rho(k)), D(\rho(k))]$  que pertenece al politopo  $\Omega$ .

Por lo tanto, debido a esta característica de la representación LPV, el modelo de predicción del sistema incierto o del proceso no lineal se puede establecer en el problema de la Ec. (2.15) con la respectiva suma convexa de los  $n_m$  modelos vértices LTI, siempre conocidos, dada por las Ecs. (3.2) y (3.3).

De esta manera, las  $n_m$  variables de ponderación  $\mu_j(\cdot)$  adaptan el modelo de predicción al sistema a lo largo del horizonte de predicción. Por tal motivo, al conjunto de métodos analizados en este capítulo se lo denomina Control Predictivo basado en Modelos Adaptativo (AMPC<sup>1</sup>, por sus siglas en inglés).

---

<sup>1</sup>Adaptive Model-based Predictive Control



### 3.2. Condiciones de estabilidad

Esta sección muestra las condiciones necesarias para que el origen sea asintóticamente estable de acuerdo con los conceptos desarrollados en la Sección 2.2.1.

De esta manera, el costo terminal  $V_f(\cdot)$  debe ser una función de Lyapunov de control local para el modelo descrito en la Ec. (3.1), es decir, que cumpla con las condiciones de la Definición 2.4 y que esté definida en un conjunto  $\mathcal{X}_f \subseteq \mathcal{X}$  que determina la vecindad del origen. Así, tal como se plantea para el caso lineal, el estado terminal debe ser forzado a alcanzar el conjunto  $\mathcal{X}_f$ , o sea,  $x(N) \in \mathcal{X}_f$ .

Por lo tanto, se debe definir  $V_f(\cdot)$  tal que satisfaga:

$$\min_{u \in \mathcal{U}} \{V_f(A(\rho)x + B(\rho)u) + \ell(x, u) : A(\rho)x + B(\rho)u \in \mathcal{X}_f\} \leq V(x) \quad (3.4)$$

para todo  $x \in \mathcal{X}_f$ . Para ello, el conjunto  $\mathcal{X}_f$  debe ser un conjunto invariante de control para el sistema controlado. Es decir, que para cada  $x \in \mathcal{X}_f$  existe una  $u \in \mathcal{U}$  tal que  $A(\rho)x + B(\rho)u \in \mathcal{X}_f$ .

Se considera el costo de etapa  $\ell(x(k), u(k)) = x(k)^T Q x(k) + u(k)^T R u(k)$ , con  $Q$  semidefinida positiva y  $R$  definida positiva, y el costo terminal  $V_f(x(k)) = x(k)^T P x(k)$  donde  $P > 0$ . De esta manera, la matriz  $P$  debe ser tal que el costo sea una función de Lyapunov estrictamente decreciente. Para ello, se deben satisfacer los siguientes supuestos de estabilidad:

1.  $\ell(x(k), u(k)) \leq \alpha_1(\|x\|)$ ,
2.  $V_f(x(k)) \leq \alpha_2(\|x\|)$ ,
3.  $V_f(x(k+1)) + \ell(x(k), u(k)) - V_f(x(k)) \leq 0$ ,

donde  $\alpha_1(\cdot)$  y  $\alpha_2(\cdot)$  son funciones  $\mathcal{K}_\infty$ . La verificación de los supuestos 1 y 2 resulta trivial, tanto el costo de etapa  $\ell(\cdot)$  como el costo terminal  $V_f(\cdot)$ , se definen como funciones convexas definidas positivas, son nulas cuando sus argumentos son cero y tienden a infinito cuando sus argumentos tienden a infinito. Sin embargo, las condiciones para que el supuesto 3 se satisfaga son las que se establecen en la siguiente proposición:

**Proposición 1.** *Al analizar modelos LPV, el supuesto 3 es válido, para todo modelo contenido en  $\Omega$ , si existen una  $P > 0$  y una  $\kappa$  tal que se satisface la siguiente inecuación:*

$$[A(\rho(k)) - B(\rho(k))\kappa]^T P [A(\rho(k)) - B(\rho(k))\kappa] + Q + \kappa^T R \kappa - P \leq 0. \quad (3.5)$$

*Demostración.* Substituyendo el costo terminal  $V_f(\cdot)$  y el costo de etapa  $\ell(\cdot)$  en el supuesto 3, se obtiene:

$$x(k+1)^T P x(k+1) + x(k)^T Q x(k) + u(k)^T R u(k) - x(k)^T P x(k) \leq 0.$$

Luego, considerando una ley de control  $u(k) = \kappa x(k)$  dentro de  $\mathcal{X}_f$ , el estado siguiente está dado por  $x(k+1) = [A(\rho(k)) - B(\rho(k))\kappa]x(k)$ . Entonces, la ecuación previa resulta:

$$x(k)^T \{[A(\rho(k)) - B(\rho(k))\kappa]^T P [A(\rho(k)) - B(\rho(k))\kappa] + Q + \kappa^T R \kappa - P\} x(k) \leq 0.$$

De esta manera se verifica la Ec. (3.5) para todo  $x(k) \in \mathcal{X}_f$ .  $\square$

Tomando en cuenta estas consideraciones y contemplando que el sistema puede ser representado por la suma convexa de los  $n_m$  modelos LTI vértices conocidos, entonces los *ingredientes* terminales se obtienen para los vértices de  $\Omega$ .

**Teorema 3.1.** *Considerando el costo terminal  $V_f(x(k)) = x(k)^T P x(k)$  y tomando  $P > 0$ , entonces el costo terminal es una función de Lyapunov decreciente:*

$$V_f(x(k+1)) - V_f(x(k)) \leq 0 \quad \forall x(k) \in \mathcal{X}_f,$$

si se satisfacen simultáneamente las siguientes LMIs:

$$\begin{pmatrix} Y & Y A_j^T + L^T B_j^T & Y Q^{1/2} & L^T R^{1/2} \\ A_j Y + B_j L & Y & 0 & 0 \\ Q^{1/2} Y & 0 & \gamma I & 0 \\ R^{1/2} L & 0 & 0 & \gamma I \end{pmatrix} > 0 \quad (3.6)$$

donde  $Q$  es semidefinida positiva,  $R$  es definida positiva,  $Y = P^{-1} \gamma > 0$ ,  $L = \kappa Y$ ,  $\gamma > 0$  y  $j \in \mathbb{Z}_{1:n_m}$ .

*Demostración.* Basado en el razonamiento realizado en la Sección 2.3.2, se observa que si se aplica la suma convexa planteada en la Ec. (3.3) a las LMIs introducidas en la Ec. (3.6) resulta:

$$\sum_{j=1}^{n_m} \mu_j(\rho) \begin{pmatrix} Y & Y A_j^T + L^T B_j^T & Y Q^{1/2} & L^T R^{1/2} \\ A_j Y + B_j L & Y & 0 & 0 \\ Q^{1/2} Y & 0 & \gamma \mathbb{I} & 0 \\ R^{1/2} L & 0 & 0 & \gamma \mathbb{I} \end{pmatrix} > 0,$$

de donde se obtiene que:

$$\begin{pmatrix} Y & Y A(\rho)^T + L^T B(\rho)^T & Y Q^{1/2} & L^T R^{1/2} \\ A(\rho) Y + B(\rho) L & Y & 0 & 0 \\ Q^{1/2} Y & 0 & \gamma \mathbb{I} & 0 \\ R^{1/2} L & 0 & 0 & \gamma \mathbb{I} \end{pmatrix} > 0,$$

procediendo como en el Teorema 2.2, se arriba a:

$$x(k)^T A_{\kappa}^T(\rho) P A_{\kappa}(\rho) x(k) - x(k)^T P x(k) < - (x(k)^T Q x(k) + x(k)^T \kappa^T R \kappa x(k)),$$

y finalmente se llega a:

$$V(x(k+1)) - V(x(k)) < - (x(k)^T Q x(k) + u(k)^T R u(k)).$$

Por lo tanto, si satisfacen simultáneamente las LMIs presentadas en la Ec. (3.6) se cumple el supuesto 3, entonces  $V(x(k))$  es una función de Lyapunov decreciente para todo modelo  $[A(\rho(k)), B(\rho(k)), C(\rho(k)), D(\rho(k))] \in \Omega$  y para todo  $x(k) \in \mathcal{X}_f$ .  $\square$

Tal como se especifica anteriormente, el estado terminal debe ser forzado a alcanzar el conjunto  $\mathcal{X}_f$  y este conjunto debe ser un invariante de control para todo modelo contenido en  $\Omega$ .

**Teorema 3.2.** *Si  $\mathcal{X}_f$  es un conjunto invariante de control para los  $n_m$  modelos LTI vértices, entonces  $\mathcal{X}_f$  es un conjunto invariante de control para todos los modelos contenidos en el politopo  $\Omega$ .*

*Demostración.* Si  $\mathcal{X}_f$  es un conjunto invariante de control para los  $n_m$  modelos vértices se debe cumplir que<sup>2</sup>:

$$A_j \mathcal{X}_f \oplus B_j u \subseteq \mathcal{X}_f \text{ para alguna } u \in \mathcal{U} \text{ y para todo } j \in \mathbb{Z}_{1:n_m}. \quad (3.7)$$

Si se considera un modelo en el interior de  $\Omega$ , entonces se debe verificar que:

$$A(\rho) \mathcal{X}_f \oplus B(\rho) u \subseteq \mathcal{X}_f \text{ para alguna } u \in \mathcal{U}.$$

Luego, de acuerdo con la Ec. (3.2) se tiene que:

$$\begin{aligned} A(\rho) \mathcal{X}_f \oplus B(\rho) u &= \sum_{j=1}^{n_m} \mu_j A_j \mathcal{X}_f \oplus \sum_{j=1}^{n_m} \mu_j B_j u \\ &= \sum_{j=1}^{n_m} \mu_j (A_j \mathcal{X}_f \oplus B_j u) \end{aligned}$$

donde, de acuerdo con la Ec. (3.3):

$$\sum_{j=1}^{n_m} \mu_j = 1,$$

y en función de la Ec. (3.7) se verifica que  $\mathcal{X}_f$  es un conjunto invariante para cualquier modelo contenido en  $\Omega$ .  $\square$

De esta manera, si se satisfacen las condiciones de estabilidad asintótica del origen para los  $n_m$  modelos LTI vértices, entonces también se verifica utilizando cualquier modelo perteneciente a  $\Omega$ .

### 3.3. Métodos de control predictivo basado en modelos adaptativo para regulación

En función de lo establecido en las secciones precedentes, en los métodos de control AMPC mediante el enfoque LPV resulta necesario conocer, calcular o aproximar el parámetro de ponderación  $\mu \in \mathbb{R}^{n_m}$ . Por ello, a lo largo de esta sección se considera a  $\mu$  como una variable de decisión del problema MPC y las condiciones dadas en las Ecs. (3.2) y (3.3) se tornan restricciones del problema de optimización.

De esta manera, según sea la manera en que se determine  $\mu$ , da lugar a diferentes formulaciones.

---

<sup>2</sup> $\oplus$  denota la suma de Minkowski (ver Apéndice A)

### 3.3.1. MPC adaptativo en una etapa

En primer lugar se considera un único problema de optimización a lo largo de un horizonte de  $N$  pasos hacia adelante, donde se utiliza un modelo de predicción como el indicado en la Ec. (3.1) y se contemplan las restricciones físicas dadas en la Ec. (2.16). Además, se establece la función objetivo expresada en la Ec. (3.8):

$$V_N(x; \mathbf{u}, \mu) = \sum_{k=0}^{N-1} \|x(k)\|_Q^2 + \|u(k)\|_R^2 + \|x(N)\|_P^2, \quad (3.8)$$

con  $Q \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$  semidefinida positiva y  $R \in \mathbb{R}^{n_u \times n_u}$  definida positiva. Las variables de decisión se corresponden con la secuencia de controles  $\mathbf{u}$  y la secuencia de modelos, obtenida por medio de  $\mu$ . De esta manera, en cada instante de muestreo, esta técnica busca la mejor secuencias de modelos de predicción LTI para los siguientes  $N$  pasos.

De esta manera, el controlador se deriva de la solución del problema de optimización:

$$\begin{aligned} & \min_{\mathbf{u}, \mu} V_N(x_0; \mathbf{u}, \mu) \\ \text{s.a. } & x(k+1) = A(\rho(k))x(k) + B(\rho(k))u(k), \quad k \in \mathbb{Z}_{0:N-1}, \\ & x(0) = x_0 \\ & A(\rho(k)) = \sum_{j=1}^{n_m} \mu_j(k) A_j, \quad k \in \mathbb{Z}_{0:N-1}, \\ & B(\rho(k)) = \sum_{j=1}^{n_m} \mu_j(k) B_j, \quad k \in \mathbb{Z}_{0:N-1}, \\ & \sum_{j=1}^{n_m} \mu_j(k) = 1 \quad \forall k \in \mathbb{Z}_{0:N-1}, \\ & 0 \leq \mu_j(k) \leq 1 \quad \forall k \in \mathbb{Z}_{0:N-1}, \\ & x(k) \in \mathcal{X} \quad \forall k \in \mathbb{Z}_{0:N-1}, \\ & u(k) \in \mathcal{U} \quad \forall k \in \mathbb{Z}_{0:N-1}, \\ & x(N) \in \mathcal{X}_f^a. \end{aligned} \quad (3.9)$$

donde el conjunto  $\mathcal{X}_f^a$  es un conjunto invariante robusto para el modelo LPV, es decir, que satisface la condición de invarianza para todo modelo perteneciente a  $\Omega$ .

Así, al considerar la estrategia de horizonte deslizante, la política de control está dada por:

$$\kappa(x_0) = \mathbf{u}^*(0; x_0),$$

siendo  $\mathbf{u}^*$  la solución del problema Ec. (3.9), que representa la secuencia óptima de acciones de control.

Sin embargo, si el controlador se aplica a una referencia  $(x_s, u_s)$  distinta de cero con sistemas no lineales, debe ser incorporado un término de penalización a la función objetivo de la Ec. (3.8) que asegure que la secuencia de modelos converja

al modelo LTI que describe el sistema en dicho punto. De esta manera, se agrega el término  $\|\mu(N) - \mu_s\|_{Q_\mu}^2$ , donde  $Q_\mu \in \mathbb{R}^{n_m \times n_m}$  es una matriz semidefinida positiva y  $\mu_s$  es tal que  $x_s = (A_s x_s + B_s u_s)$  con:

$$\begin{aligned} A_s &= \sum_{j=1}^{n_m} \mu_{s_j} A_j, \\ B_s &= \sum_{j=1}^{n_m} \mu_{s_j} B_j, \\ \sum_{j=1}^{n_m} \mu_{s_j} &= 1, \\ 0 &\leq \mu_{s_j} \leq 1, \end{aligned}$$

las cuales se incorporan como restricciones al problema de optimización.

**Observación 3.1.** *Debido a la simplificación de utilizar una secuencia de modelos lineales para la predicción, lo que provoca un error entre el proceso a controlar y el modelo utilizado, y el hecho de utilizar un único costo terminal para todos los modelos contenidos en  $\Omega$ , este método es, en principio, subóptimo. Aunque, dependiendo del proceso a controlar y de los puntos de referencia, puede ser muy próximo a la condición de optimalidad.*

**Observación 3.2.** *Al considerar  $\mu$  variable a lo largo del horizonte de predicción, se obtienen resultados próximos al óptimo, sin embargo, el problema de optimización es no lineal. Si se desea reducir la carga computacional, entonces se puede considerar  $\mu$  constante dentro del horizonte, lo que claramente conduce a resultados subóptimos. Para este caso, se puede obtener una variable de ponderación constante optimizando el modelo en la etapa de control o en una etapa de estimación previa y luego ser utilizada para el control como se analiza en la Sección 3.3.2.*

### Costo y restricción terminales

Para definir los *ingredientes* terminales,  $P$  y  $\mathcal{X}_f^a$ , se considera un regulador LQR politópico sin restricciones de horizonte infinito como controlador local con el modelo dado en la Ec. (3.1). De esta manera, se debe encontrar una  $P > 0$  y una ley de control  $u(k) = \kappa x(k)$  para el LQR que satisfagan la Ec. (3.5). Por lo tanto, de acuerdo con el Teorema 3.1,  $P$  se determina resolviendo el siguiente problema:

$$\begin{aligned} &\min_{\gamma, L, Y} \gamma \\ &\text{s.a. } Y > 0, \\ &\begin{pmatrix} Y & Y A_j^T + L^T B_j^T & Y Q^{1/2} & L^T R^{1/2} \\ A_j Y + B_j L & Y & 0 & 0 \\ Q^{1/2} Y & 0 & \gamma I & 0 \\ R^{1/2} L & 0 & 0 & \gamma I \end{pmatrix} > 0, \end{aligned} \quad (3.10)$$

para todo  $j \in \mathbb{Z}_{1:n_m}$ . Luego, se garantiza que el costo terminal sea decreciente para todo  $x \in \mathcal{X}_f^a$  y que además tenga una cota superior dada por  $V_N(x(k_0)) = x(N)^T P x(N)$ , la cual es minimizada en línea a través del problema del MPC planteado.

De esta manera, se debe definir una región determinada por un conjunto invariante robusto  $\mathcal{X}_f^a$  donde se satisface el decrecimiento del costo terminal. Notar que en el problema dado en la Ec. (3.9) se exige que el estado terminal pertenezca a dicho conjunto.

En primera instancia, basado en trabajos tales como [60, 61], para el propósito de regulación se considera como la restricción terminal el mayor conjunto invariante elipsoidal.

Un elipsoide invariante asintóticamente estable  $\xi$  es un subconjunto de  $\mathbb{R}^n$ , asociado a un sistema dinámico discreto (Ec. (3.1)), si tiene la propiedad que, siempre que  $x(k_0) \in \xi$ , entonces todas las trayectorias  $x(k) \in \xi$  para todo  $k \geq k_0$  y  $x(k) \rightarrow 0$  cuando  $k \rightarrow \infty$ .

De esta manera, es posible determinar un elipsoide invariante terminal para el estado terminal  $x(N)$ , centrado en el origen, siendo el mismo:

$$\mathcal{X}_f^a = \{x(N) : x(N)^T W x(N) \leq 1\}. \quad (3.11)$$

donde este conjunto terminal es un subconjunto del costo terminal  $x(N)^T P x(N)$ .

Por lo tanto, para encontrar el máximo conjunto invariante terminal  $\mathcal{X}_f^a$  bajo la ley de control  $u(k) = \kappa x(k)$  para todo  $k$  con entrada admisible (es decir  $u(k) \in \mathcal{U}$ ), es posible plantear un segundo problema LMI de maximización como el indicado en el Teorema 3.3.

**Teorema 3.3.** *Bajo las consideraciones planteadas, si se satisfacen simultáneamente las siguientes LMIs:*

$$\begin{aligned} & \underset{Z}{\text{máx}} \log \det(Z) \\ \text{s. a. } & Z > 0, \\ & \begin{pmatrix} Z & Z(A_j + B_j \kappa)^T \\ (A_j + B_j \kappa)Z & Z \end{pmatrix} > 0, \text{ para todo } j \in \mathbb{Z}_{1:n_m}, \\ & \kappa_s Z \kappa_s^T \leq u_{s_{max}}^2, \end{aligned} \quad (3.12)$$

donde  $W = Z^{-1}$ ,  $s \in \mathbb{Z}_{1:n_u}$  indica cada componente del vector  $u(k)$  y  $\kappa_s$  son las filas de la matriz  $\kappa = LY^{-1}$  determinada por el problema LMI presentado en la Ec. (3.10). Entonces, al obtener  $W$ , se obtiene la región terminal  $\mathcal{X}_f^a$  de acuerdo con la Ec. (3.11) y este elipsoide es, además, invariante.

*Demostración.* Dado que se supone que el conjunto terminal es un elipsoide como en la Ec. (3.11), al aplicar la realimentación de estados  $u(k) = \kappa x(k)$  a cualquier estado  $x(k) \in \mathcal{X}_f^a$ , si  $\mathcal{X}_f^a$  es invariante, entonces se obtiene:

$$x(k+1)^T W x(k+1) \leq x(k)^T W x(k).$$

Por lo tanto, considerando el modelo dado en la Ec. (3.1) se arriba a:

$$x(k)^T \left( (A(\rho) + B(\rho)\kappa)^T W (A(\rho) + B(\rho)\kappa) - W \right) x(k) \leq 0,$$

lo cual implica que:

$$(A(\rho) + B(\rho)\kappa)^T W (A(\rho) + B(\rho)\kappa) - W \leq 0,$$

Luego, estableciendo que  $W = Z^{-1}$  y pre y posmultiplicando por  $Z$  se llega a:

$$Z - Z(A(\rho) + B(\rho)\kappa)^T Z^{-1} (A(\rho) + B(\rho)\kappa) Z > 0.$$

En consecuencia, aplicando el complemento de Schur, se obtiene:

$$\begin{pmatrix} Z & Z(A(\rho) + B(\rho)\kappa)^T \\ (A(\rho) + B(\rho)\kappa)Z & Z \end{pmatrix} > 0.$$

Finalmente, tomando en cuenta las condiciones dadas en la Ec. (3.3) resulta:

$$\sum_{j=1}^{n_m} \mu_j(\rho) \begin{pmatrix} Z & Z(A_j + B_j\kappa)^T \\ (A_j + B_j\kappa)Z & Z \end{pmatrix} > 0,$$

la cual se verifica si:

$$\begin{pmatrix} Z & Z(A_j + B_j\kappa)^T \\ (A_j + B_j\kappa)Z & Z \end{pmatrix} > 0,$$

asegurando que  $\mathcal{X}_f^a$  es un elipsoide invariante.

Por otro lado, mediante la norma máxima de la proyección  $\kappa x(k)$  de cualquier estado  $x(k)$  que pertenezca a algún elipsoide  $x(k)^T W x(k) \leq 1$ , que viene dado por  $\sqrt{\kappa W^{-1} \kappa^T}$  [62], se verifica que se mantiene una entrada admisible. Por lo tanto, reemplazando  $W = Z^{-1}$ , da como resultado:

$$\kappa Z \kappa^T \leq u_{max}^2. \quad (3.13)$$

Por último, al considerar un cota por cada una de las  $n_u$  variables de control, lo cual significa que la proyección  $\kappa_s x(k)$  (es decir, la  $s$ -ésima señal de control) está limitada, en norma, por  $u_{smax}$ . Es decir,

$$\kappa_s Z \kappa_s^T \leq u_{smax}^2. \quad (3.14)$$

□

**Observación 3.3.** *Notar que la variable de decisión del problema dado en la Ec. (3.12) es  $Z$ . Por lo tanto, las Ecs. (3.13) y (3.14) constituyen LMIs.*

**Observación 3.4.** *La matriz simétrica  $Z$  caracteriza el elipsoide terminal. Ante restricciones de estado es posible restringir este conjunto a un elipsoide dado por los límites impuestos de manera de garantizar que todo  $x \in \mathcal{X}_f^a$  sea factible. Este análisis se realiza en las Secciones 2.3.1 y 2.3.2.*

De esta manera, los *ingredientes* terminales se obtienen resolviendo dos problemas LMIs consecutivos. El primero de ellos es tal que asegura que el costo terminal es una función de Lyapunov de control, es decir, que existe una ley de control que produce que el costo terminal sea decreciente para todos los modelos contenidos en  $\Omega$ . En tanto que el segundo problema tiene por objetivo encontrar el mayor conjunto terminal invariante  $\mathcal{X}_f^a$  donde se garantiza el decrecimiento del costo terminal dado por el primer problema. Sin embargo, este enfoque puede resultar conservador.

Por lo tanto, es posible determinar un conjunto invariante terminal mayor si se supone que el mismo no necesariamente debe ser un elipsoide, resultando en un politopo. Para ello, basado en el Teorema 3.2, al obtener un conjunto invariante politópico para los modelos LTI vértices se asegura la invarianza para todo modelo perteneciente a  $\Omega$ .

Por consiguiente, se propone obtener el conjunto terminal  $\mathcal{X}_f^a$  como la intersección de los máximos conjuntos invariantes terminales  $\mathcal{X}_{f_j}$  para regulación de cada modelo vértice LTI. Cada conjunto  $\mathcal{X}_{f_j}$  es obtenido como se presenta en la Sección 2.2.2, con una ganancia de realimentación dada por la Ec. (2.26) donde  $P$  es la obtenida por el problema dado en la Ec. (3.10). Es decir, el conjunto terminal viene dado por:

$$\mathcal{X}_f^a = \varepsilon \bigcap_{j=1}^{n_m} \mathcal{X}_{f_j} \quad (3.15)$$

donde  $\varepsilon \in (0, 1]$  es un parámetro de diseño arbitrariamente cercano a 1, de modo de garantizar que el conjunto  $\mathcal{X}_f^a$  sea invariante para los  $n_m$  vértices de  $\Omega$ .

**Observación 3.5.** *Dado que para todos los modelos pertenecientes a  $\Omega$ , el costo terminal es una función de Lyapunov de control y el conjunto terminal es invariante entonces la factibilidad recursiva está garantizada. Esto quiere decir, que para un instante  $k_0$  se obtiene una secuencia de modelos de predicción dada por  $\mu^*(k)$  que estabiliza el sistema. Para un instante siguiente, la secuencia obtenida previamente es, al menos, factible.*

### Ejemplo de aplicación

Si bien los resultados más importantes de este capítulo se dan en sistemas no lineales como se muestra en la Sección 3.4. En esta sección se presentan resultados de simulación con el objetivo de visualizar las propiedades del controlador analizado ante un sistema lineal con incertidumbre paramétrica. Para ello, se utiliza el sistema masa-resorte-amortiguador presentado en el Apéndice D.1 de manera de realizar comparaciones con los controladores analizados en el Capítulo 2.

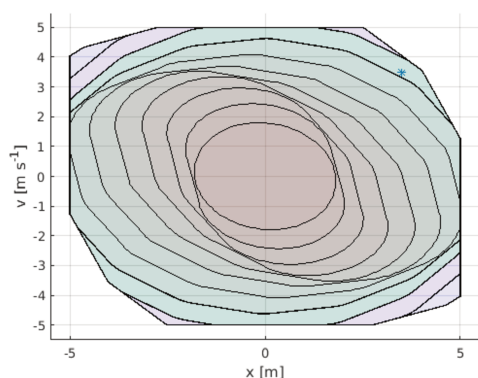
Para este ejemplo, los valores de los parámetros del modelo se corresponden con los fijados en la Sección 2.3.2. En tanto que, en la presente sección se establece el horizonte de predicción  $N = 8$  pasos.

En primera instancia, en la Fig. 3.1 se pueden observar los conjuntos invariantes terminales en el centro y la secuencia de conjuntos controlables en función del número de pasos. En las Figs. 3.1a y 3.1b se muestra el conjunto terminal obtenido

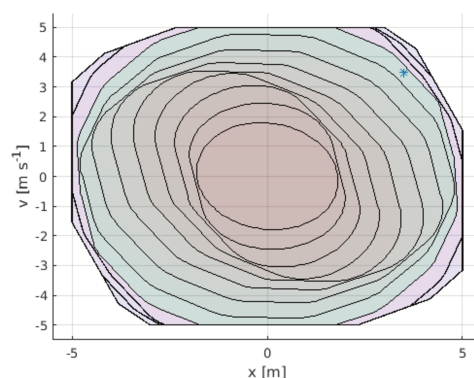


por medio del problema de la Ec. (3.12) y los conjuntos controlables para los modelos 1 y 2, respectivamente. Por su parte, en las Figs. 3.1c y 3.1d se puede visualizar el conjunto terminal obtenido por medio de la Ec. (3.15) y los conjuntos controlables para los modelos 1 y 2, respectivamente. En todos los casos, a partir de la misma, se concluye que el conjunto terminal cumple con la condición de invarianza, dado que los conjuntos se encuentran anidados, o sea, se contienen unos a otros.

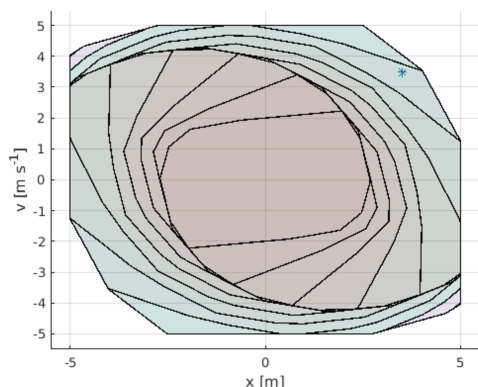
Por otro lado, se observa que el conjunto controlable en 8 pasos al conjunto terminal ( $C_N(\mathcal{X}, \mathcal{X}_f^g)$ ), indicado en color verde, incluye al estado inicial para ambos modelos y para los dos conjuntos terminales considerados. Con lo cual el sistema puede ser llevado mediante una secuencia de controles factibles desde el estado inicial hasta el origen. Sin embargo, el conjunto politópico obtenido es mayor que el conjunto elipsoidal, lo que permite la utilización de horizontes de predicción más cortos. Para el ejemplo que se desarrolla en esta sección, resulta posible un horizonte de predicción  $N = 7$  pasos cuando se utiliza este conjunto terminal.



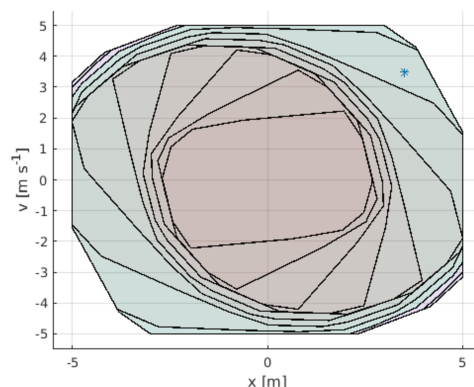
(a) Elipsoide Terminal - Modelo 1.



(b) Elipsoide Terminal - Modelo 2.



(c) Politopo Terminal - Modelo 1.



(d) Politopo Terminal - Modelo 2.

Figura 3.1: Conjuntos controlables considerando el sistema masa-resorte-amortiguador con incertidumbre para regulación al origen.

En tanto que en la Fig. 3.2 se advierte la evolución de los estados del sistema controlado, donde la misma converge al estado deseado (origen), tanto si se

considera un elipsoide (Fig. 3.2a) o un politopo (Fig. 3.2b) como conjunto terminal, siendo las mismas muy próximas entre sí. Además, para ambos planteos, se observan el conjunto de restricciones de estados (en color rojo), de manera que la trayectoria no abandona el espacio factible; el conjunto de estado controlables al conjunto terminal en el horizonte  $N$  (indicado en color amarillo); el conjunto invariante terminal (mostrado en color verde); y el conjunto de los estados de equilibrio que admite el sistema controlado (en color azul).

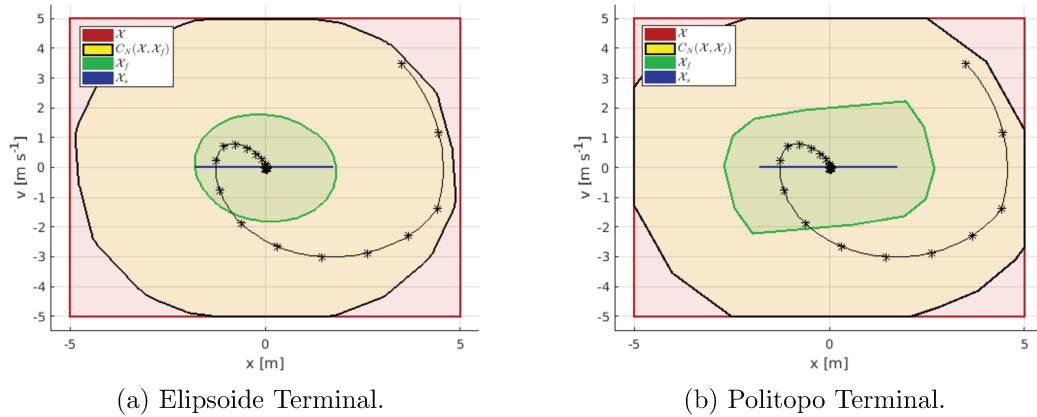
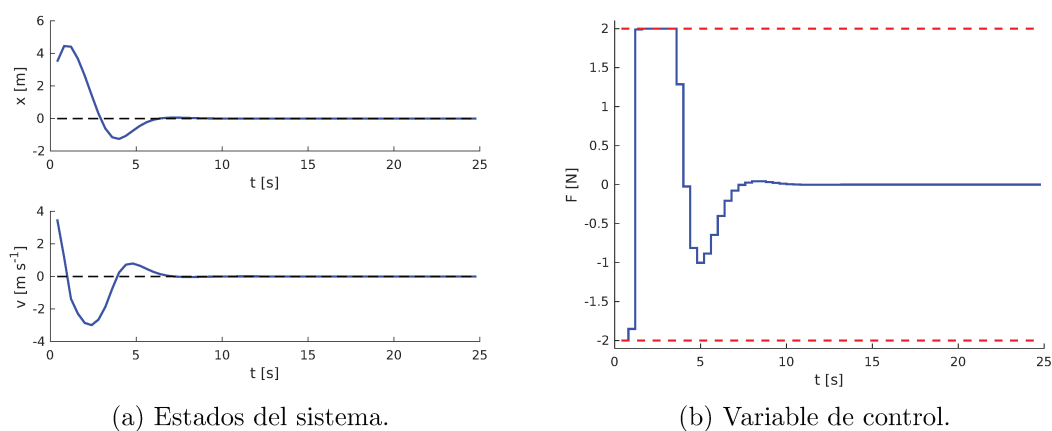


Figura 3.2: Evolución de los estados del sistema masa-resorte-amortiguador empleando AMPC en una etapa para regulación al origen.

Se destaca que por tratarse de un sistema incierto, tanto el conjunto de estado de equilibrio como el conjunto de estados controlables resultan como la intersección de dichos conjuntos obtenidos a partir de los vértices. Esto implica que sean subconjuntos de los obtenidos si se determina mediante el modelo sin incertidumbre. Adicionalmente se pone en relieve que el conjunto terminal obtenido por medio de la Ec. (3.15) es mayor que el calculado mediante el problema (3.12), y consecuentemente el conjunto de estados controlable también resulta mayor para el mismo horizonte de predicción  $N$ .

Asimismo, en la Fig. 3.3 puede observarse la evolución temporal de las variables del sistema controlado. Dado que para el ejemplo analizado, la modificación del conjunto terminal produce diferencias mínimas en la evolución de las variables de estados y control, sólo se presenta una de ellas. En la Fig. 3.3a se percibe como los estados del sistema (en línea sólida de color azul), alcanzan la referencia establecida (en línea de trazos negra), mediante la aplicación de los controles obtenidos (Fig. 3.3b). Adicionalmente se advierte que la variable de control es factible en todo instante, es decir, no excede las restricciones impuestas (líneas de trazos en color rojo).

Como se discute anteriormente, el AMPC puede encontrar un modelo de predicción adaptando el modelo de predicción LTI en línea a través de las variables de ponderación  $\mu_j$ , las cuales se muestran en la Fig. 3.4. Es de destacar que la imagen mostrada se corresponde con la pertenencia en el comienzo del horizonte de predicción pero varía también a lo largo del horizonte. Ante esta situación, también



(a) Estados del sistema.

(b) Variable de control.

Figura 3.3: Evolución temporal de las variables del sistema masa-resorte-amortiguador controlado mediante AMPC en una etapa con propósito de regulación.

se muestra sólo una evolución de modelos ya que son coincidentes independientemente del conjunto terminal adoptado. Se advierte que al alcanzar el origen, cualquier modelo perteneciente a  $\Omega$  describe el comportamiento del sistema. En la Fig. 3.4 se visualiza que se arriba al centro del politopo de modelos, o sea, se pondera en parte iguales a los modelos vértices.

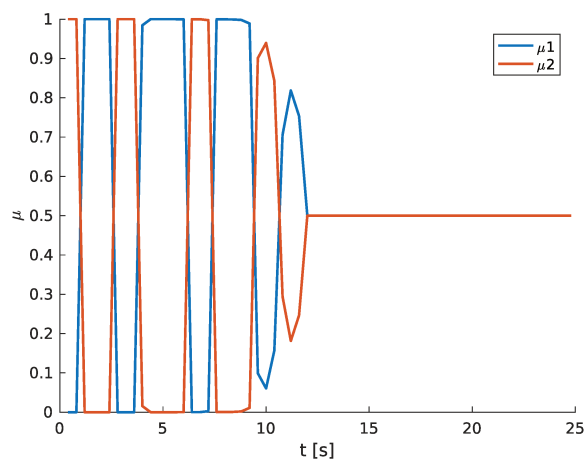


Figura 3.4: Evolución del grado de pertenencia para la obtención del modelo de predicción de AMPC en una etapa para el sistema masa-resorte-amortiguador.

Además, en la Fig. 3.5 se muestra la carga computacional debido al controlador en términos del porcentaje del periodo de muestreo que demanda el cálculo de las variables de control. En la misma se observa que durante el transitorio se produce el mayor esfuerzo de cómputo, esto se debe a que durante este lapso se adapta en línea el modelo de predicción. Luego el tiempo de cálculo decrece rápidamente, siendo la carga computacional media de 23,05 % para el controlador que contempla el elipsoide como conjunto terminal y 18,31 % para aquel que utiliza el politopo.

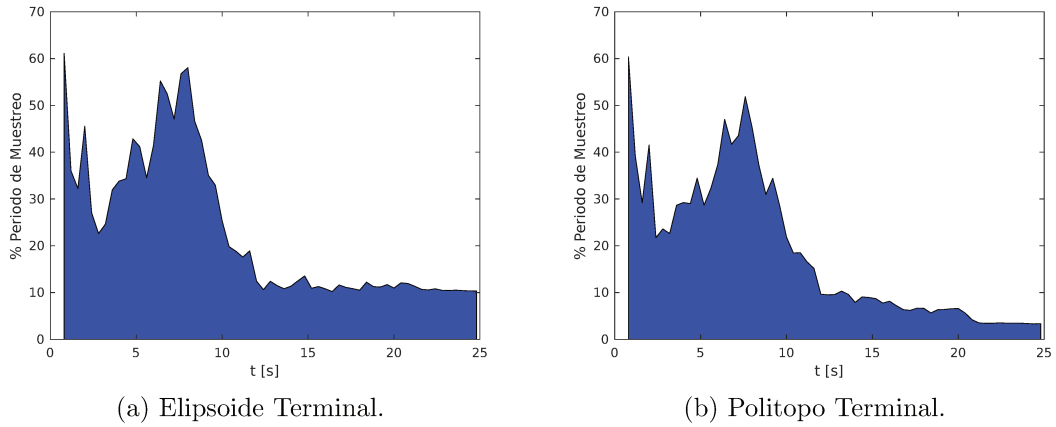


Figura 3.5: Carga computacional producto de AMPC en una etapa para regulación aplicado a un sistema masa-resorte-amortiguador.

### 3.3.2. MPC adaptativo en dos etapas

Dado el alto costo computacional que conlleva considerar una secuencia de modelos para realizar la predicción, esta sección presenta un procedimiento de diseño AMPC en dos etapas donde se utiliza un modelo de predicción LTI constante a lo largo del horizonte de predicción, obtenido por medio del modelo LPV indicado en la Ec. (3.1) y se contemplan las restricciones físicas dadas en la Ec. (2.16).

De esta manera, en cada tiempo de muestreo, se resuelven dos problemas de Programación Cuadrática (QP<sup>3</sup>, por sus siglas en inglés): el primer QP considera un horizonte hacia atrás para encontrar la variable de ajuste virtual entre modelo-proceso  $\mu$  que defina el modelo LTI que mejor describe al sistema en ese instante, considerando los vértices del modelo politópico; luego, el segundo QP utiliza este modelo LTI como modelo de predicción para optimizar el desempeño a lo largo de un horizonte futuro. Por lo tanto, este controlador AMPC intenta encontrar, en cada instante de muestreo  $k$ , un modelo de predicción LTI para los siguientes  $N$  pasos, basándose en los datos de los  $N_e$  pasos previos. Además, contempla *ingredientes* terminales para garantizar la estabilidad a pesar de las simplificaciones de modelado.

Debido a la simplificación de encontrar un único modelo de predicción LTI, se presentan errores entre el modelo de predicción y el proceso a lo largo del horizonte de control. Esto significa que el método propuesto es subóptimo. Sin embargo, la ventaja de usar un modelo de predicción simplificado es que para el esquema de control propuesto se producen un problema QP para fines de *identificación/adaptación* (con respecto a  $\mu$ ) que funciona exactamente como el método Estimador de Horizonte Móvil (MHE<sup>4</sup>, por sus siglas en inglés) para la estimación de parámetros variables en el tiempo, propuesto en la literatura [63, 64], y otro problema QP para fines de control tal como los controladores MPC presentados

<sup>3</sup>Quadratic Programming

<sup>4</sup>Moving Horizon Estimation

en el Capítulo 2, que se pueden resolver en línea con herramientas de optimización rápidas.

### QP hacia atrás - MHE

Este problema se usa para encontrar un vector constante  $\mu \in \mathbb{R}^{n_m}$  que ajusta de manera óptima el modelo LPV con el conjunto de datos reales pasados. De hecho, este procedimiento minimiza la discrepancia entre el modelo y los datos con respecto a  $\mu$  y la varianza de  $\mu$  ( $\nu_\mu$ ) a lo largo del horizonte hacia atrás, en cada tiempo de muestra.

Esta variable de ajuste virtual se encuentra con la solución del siguiente problema de optimización, considerando  $x$  y  $u$  como datos medidos y  $\mu(k_0 - 1)$  como resultado de la iteración anterior:

$$\begin{aligned}
& \min_{\mu} \quad \sum_{k=k_0+N_e-1}^{k_0} e(k)^T Q_e e(k) + \nu_\mu^T Q_\nu \nu_\mu \\
& \text{s.a.} \quad e(k+1) = x(k+1) - (Ax(k) + Bu(k)) , \\
& \quad A = \sum_{j=1}^{n_m} \mu_j A_j \quad \text{y} \quad B = \sum_{j=1}^{n_m} \mu_j B_j , \\
& \quad \sum_{j=1}^{n_m} \mu_j = 1 , \\
& \quad 0 \leq \mu_j \leq 1 , \\
& \quad \mu = \mu(k_0 - 1) + \nu_\mu ,
\end{aligned} \tag{3.16}$$

con  $k \in \mathbb{Z}_{k_0-N_e:k_0-1}$  y  $j \in \mathbb{Z}_{1:n_m}$ . Además,  $N_e$  es el horizonte de estimación y las matrices  $Q_e$  y  $Q_\nu$  son pesos de ajuste del procedimiento de optimización con las dimensiones apropiadas. Por simplicidad, se pueden considerar como matrices de identidad ponderadas.

### QP hacia adelante - MPC

Por otro lado, el QP hacia adelante se usa para obtener una ley de control considerando las restricciones en los estados, entradas y salidas. Para lograr esto, para propósitos de regulación, se adecúa el controlador presentado en la Sección 2.2.2.

De esta manera, el problema de MPC se formula con la siguiente función de costo, considerando que  $\mu$  representa el valor obtenido con el esquema MHE hacia atrás, esto es:

$$V_N(x_0, \mu; \mathbf{u}) = \sum_{k=0}^{N-1} \|x(k)\|_Q^2 + \|u(k)\|_R^2 + \|x(N)\|_P^2 , \tag{3.17}$$

donde  $N$  es el horizonte de predicción.

Finalmente, en cada paso de tiempo  $k = k_0$ , el controlador se encuentra con la

solución del siguiente problema de optimización:

$$\begin{aligned}
& \underset{\mathbf{u}}{\text{mín}} && V_N(x_0, \mu; \mathbf{u}) \\
& \text{s.a.} && x(k+1) = Ax(k) + Bu(k), \forall k \in \mathbb{Z}_{0:N-1}, \\
& && x(0) = x_0, \\
& && A = \sum_{j=1}^{n_m} \mu_j A_j, \\
& && B = \sum_{j=1}^{n_m} \mu_j B_j, \\
& && x(k) \in \mathcal{X}, \forall k \in \mathbb{Z}_{0:N-1}, \\
& && u(k) \in \mathcal{U}, \forall k \in \mathbb{Z}_{0:N-1}, \\
& && x(N) \in \mathcal{X}_f^a,
\end{aligned} \tag{3.18}$$

donde  $\mathcal{X}_f^a$  es un conjunto invariante terminal robusto que contiene el origen en su interior. Para determinar los *ingredientes* terminales, se procede como en la Sección 3.3.1.

Luego, al considerar una estrategia de horizonte deslizante, la política de control para regulación propuesta viene dada por  $\kappa(x_0) = \mathbf{u}^*(0; x_0)$ .

**Observación 3.6.** *Debido a que los problemas de optimización son independientes uno del otro, los horizontes de estimación y predicción no necesariamente deben tener la misma longitud.*

**Observación 3.7.** *Debido a que tanto el costo como el conjunto terminal cumplen las condiciones de estabilidad asintótica descritas para todo modelo perteneciente a  $\Omega$ , entonces las condiciones de estabilidad están garantizadas al utilizar los ingredientes terminales de la Sección 3.3.1. Además, siempre que el sistema real pueda ser representado por un modelo perteneciente a  $\Omega$ , se tiene factibilidad recursiva.*

### Ejemplo de aplicación

De igual manera que para el controlador AMPC de una etapa, los resultados más importantes de este capítulo se corresponden con sistemas no lineales (Sección 3.4). En esta sección se presentan resultados de simulación con el objetivo de visualizar las propiedades del controlador analizado ante un sistema lineal con incertidumbre paramétrica. Para ello, se utiliza el sistema masa-resorte-amortiguador presentado en el Apéndice D.1 de manera de realizar comparaciones con los controladores analizados en el Capítulo 2.

Para este ejemplo, los valores de los parámetros del modelo se corresponden con los fijados en la Sección 3.3.1.

Tal como se indica anteriormente, para el controlador que está bajo análisis los conjuntos terminales considerados son los mismos que los obtenidos en la Sección 3.3.1 y son los que se muestran en la Fig. 3.1.

Por su parte, en la Fig. 3.6 se visualiza la evolución de los estados del sistema controlado, la cual converge al estado deseado (origen), tanto si se considera un

elipsoide (Fig. 3.6a) o un politopo (Fig. 3.6b) como conjunto terminal, siendo las mismas muy próximas entre sí. Los conjuntos mostrados se corresponden con los expuestos en la Fig. 3.2 para ambos casos.

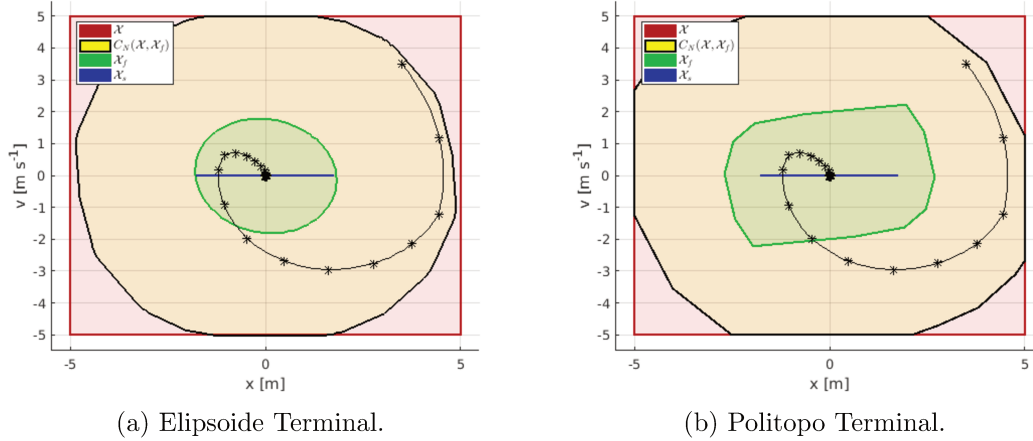


Figura 3.6: Evolución de los estados del sistema masa-resorte-amortiguador empleando AMPC en dos etapas para regulación al origen.

En tanto que en la Fig. 3.7 se observa la evolución temporal de las variables del sistema controlado. Dado que para el ejemplo analizado, la modificación del conjunto terminal produce diferencias mínimas en la evolución de las variables de estados y control, sólo se presenta la figura correspondiente a uno de los conjuntos terminales. En la Fig. 3.7a se presentan los estados del sistema (en línea sólida de color azul), los cuales alcanzan la referencia establecida (en línea de trazos negra), mediante la aplicación de los controles obtenidos (Fig. 3.7b), la cual es factible en todo instante, es decir, no excede las restricciones impuestas (líneas de trazos en color rojo).

Como se discute anteriormente, la etapa MHE obtiene un modelo de predicción adaptando el modelo de predicción LTI en línea en base a las mediciones previas a través de las variables de ponderación  $\mu_j$ , las cuales se muestran en la Fig. 3.8. Mediante el método analizado se observa que las variables de ponderación tienen una variación menor que las presentadas en la Fig. 3.4 donde la adaptación se produce sobre el horizonte de predicción, es decir, hacia adelante. Ante esta situación, también se muestra sólo una evolución de modelos ya que están próximas entre sí a pesar del cambio en el conjunto terminal adoptado.

Finalmente, en la Fig. 3.9 se muestra la carga computacional debido al controlador en términos del porcentaje del periodo de muestreo que demanda el cálculo de las variables de control. Para el algoritmo analizado, es interesante descomponer el tiempo total transcurrido en cada una de las dos etapas QP. Con respecto a este asunto, la Fig. 3.9 muestra el tiempo consumido por el MHE hacia atrás y el MPC hacia adelante, además del esfuerzo total que necesita el método completo. En la misma se observa que al inicio se produce el mayor esfuerzo de cómputo pero el tiempo de cálculo decrece rápidamente, siendo la carga computacional media de

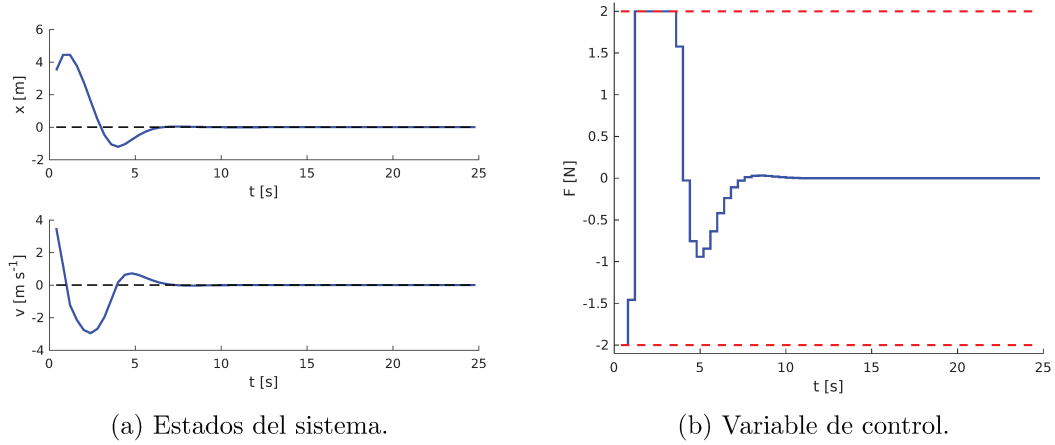


Figura 3.7: Evolución temporal de las variables del sistema masa-resorte-amortiguador controlado mediante AMPC en dos etapas con propósito de regulación.

4,51 % (2,27 % del MHE y 2,24 % del MPC) para el controlador que contempla el elipsoide como conjunto terminal y 4,24 % (2,32 % del MHE y 1,92 % del MPC) para aquel que utiliza el politopo. Por lo tanto, se observa que el esfuerzo computacional es considerablemente menor que para el controlador AMPC en una etapa de la Sección 3.3.1 y ligeramente superior al obtenido por el MPC para regulación (Sección 2.2.2).

### 3.4. Aplicación a la industria de procesos

En la industria de procesos, donde se utilizan operaciones unitarias tales como columnas de destilación, intercambiadores de calor, reactores batch y continuos, las principales problemáticas son las no linealidades, las restricciones en las variables de estados, salida y manipuladas, entre otras.

Sin embargo, según lo desarrollado, el sistema no lineal puede ser representado por un modelo LPV. De esta manera, los controladores propuestos en este capítulo pueden hacer frente a dichas problemáticas y ser utilizado en aplicaciones de la industria de procesos.

De esta manera, esta sección presenta resultados de simulación de dos de las operaciones unitarias típicas de la industria de procesos químicos mencionadas: el intercambiador de calor cuyas principales características así como el modelo no lineal son presentados en el Apéndice D.2.1, y el reactor continuo de tanque agitado descrito en el Apéndice D.2.2.

Las metodologías de control propuestas en este capítulo se comparan entre sí, pero también con un MPC lineal (denominado LTI-MPC), que resuelve el problema QP dado en la Ec. (3.18) tomando todas las variables de ponderación como  $\mu_j = 1/n_m$ , que es un modelo LTI para los sistemas analizados, considerando los  $n_m$  vértices del politopo  $\Omega$ .



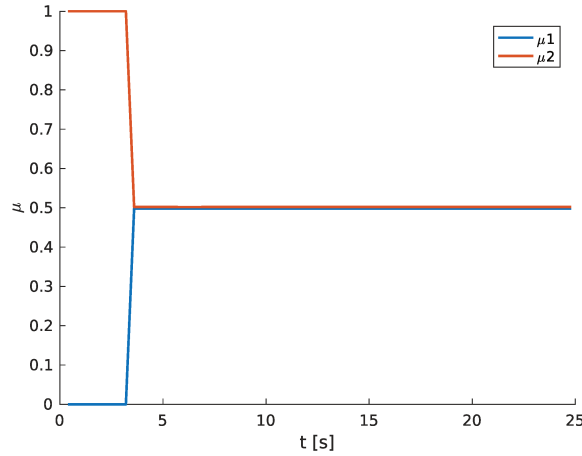


Figura 3.8: Evolución del grado de pertenencia para la obtención del modelo de predicción calculado por MHE para el sistema masa-resorte-amortiguador.

Asimismo se destaca que los *ingredientes* terminales se obtuvieron usando Matlab con *Yalmip toolbox* [65] y *SeDuMi* [66] para el costo terminal y *SDPT3* [67] para el elipsoide terminal. En tanto que los controladores se sintetizaron con *Yalmip toolbox* y *fmincon* para el AMPC en una etapa y con *Yalmip toolbox* y *quadprog* para los controladores restantes.

### 3.4.1. Ejemplo de aplicación I - Intercambiador de calor

Un intercambiador de calor (HE) es una operación unitaria industrial diseñada para transferir o “intercambiar” calor de un fluido a otro o entre un fluido y un sólido, ya sea con el objetivo de refrigerar o calentar el fluido de proceso. Existen muchos tipos diferentes, el que se analiza a continuación es un intercambiador de superficie tubular dado que es uno de los más utilizados en las plantas químicas. En el Apéndice D.2.1 se presentan las ecuaciones que describen la dinámica del sistema, así como las simplificaciones de modelado.

Para este ejemplo, los valores de los parámetros del modelo se corresponden con los fijados en la Tabla D.1. Se consideran además restricciones para los estados  $x_1(t) = \theta_{1s}(t) \in [495, 500]$  K,  $x_2(t) = \theta_{2s}(t) \in [650, 710]$  K y  $x_3(t) = \theta_p(t) \in [530, 580]$  K; y para las variables de control  $u_1(t) = q_1(t) \in [90, 110]$  lmin<sup>-1</sup> y  $u_2(t) = q_2(t) \in [7, 9]$  lmin<sup>-1</sup>.

Para el modelo LPV del sistema, se definen dos parámetros de ajuste,  $\rho(t) := [\theta_{1s}(t) \ \theta_{2s}(t)]$ , con dos puntos de linealización por parámetro,  $n_i = 2$ . Por lo tanto, empleando la Linealización Jacobiana Parametrizada (PJM<sup>5</sup>, por sus siglas en inglés) se dispone de cuatro modelos vértices LTI. Los puntos de linealización para estos modelos se fijan de modo de cubrir el posible rango de trabajo y se obtienen de la combinación de los valores mostrados en la Tabla 3.1.

A la vez, se establece el periodo de muestreo  $T = 0,05$  min, el horizonte de predicción  $N = 8$  pasos, un estado inicial  $x_0 = [495; 710; 562,1913]$  K, las ma-

<sup>5</sup>Parameterized Jacobian linearization

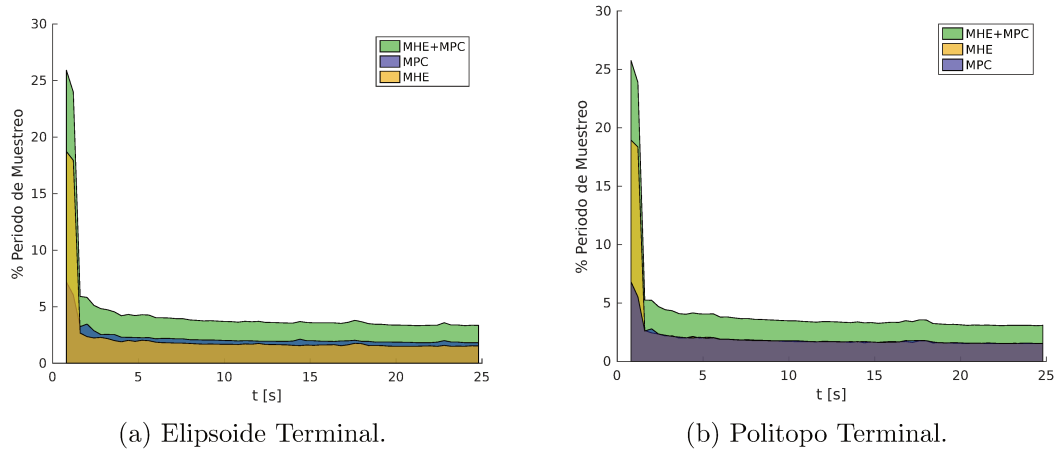


Figura 3.9: Carga computacional producto de AMPC en dos etapas para regulación aplicado a un sistema masa-resorte-amortiguador.

Tabla 3.1: Modelo LPV de un intercambiador de calor.

	$\theta_{1s}$	$\theta_{2s}$
Modelo 1	495 K	680 K
Modelo 2	500 K	680 K
Modelo 3	495 K	710 K
Modelo 4	500 K	710 K

trices de peso del controlador MPC  $Q = \mathbb{I}$  y  $R = \text{diag}\{1; 0, 1\}$ , las matrices de peso del estimador MHE  $Q_e = 1 \times 10^6 \mathbb{I}$  y  $Q_v = \mathbb{I}$ , y la matriz de peso de modelos del AMPC  $Q_\mu = 1 \times 10^6 \mathbb{I}$ . En tanto que se fija el punto de operación en  $x_s = [498; 680; 554, 8782]$  K. Además, es importante resaltar que todos los algoritmos MPC implementados utilizan el mismo conjunto de matrices de ponderación y el mismo horizonte de predicción. En el caso del controlador AMPC en dos etapas (denominado MHE-MPC con el objetivo de distinción de las técnicas adaptativas), el horizonte de estimación se considera igual que el horizonte de predicción. Asimismo se destaca que para construir una simulación realista, se ha incorporado una señal de ruido blanco de medición en las variables de salida de 0,01 K.

En este sentido, y tal como se muestra en los ejemplos de aplicación de cada metodología, se realizaron las simulaciones considerando un conjunto terminal politépico y un conjunto terminal elipsoidal. En la Fig. 3.10 se presenta la evolución de los estados del sistema controlado, la cual converge al punto de operación fijado, tanto si se considera un elipsoide (Fig. 3.10a) o un politopo (Fig. 3.10b) como conjunto terminal. Además, en la misma se observa el conjunto de restricciones de estados (en color rojo) y cada uno de los conjuntos terminales (indicado en verde), poniendo en relevancia que ambos conjuntos son factibles debido a que se encuentran en su totalidad dentro del conjunto de restricciones. En dicha figura, se muestra la evolución de estados mediante la aplicación del controlador AMPC en línea azul, con el empleo del controlador MHE-MPC en línea roja y al utilizar

el controlador LTI-MPC en línea verde, la respuesta producto de cada uno de ellos se analiza en detalle en las figuras siguientes.

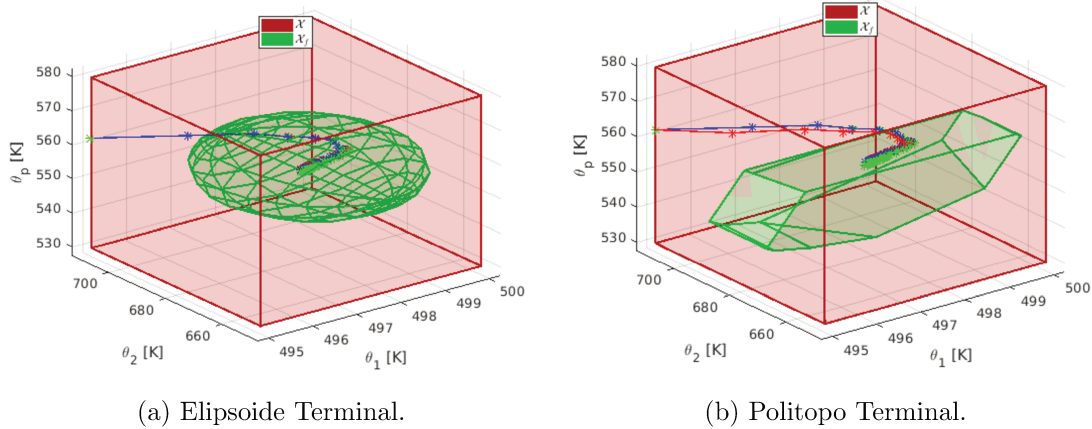


Figura 3.10: Evolución de los estados del sistema HE empleando las estrategias de control para regulación a  $x_s$ .

En la Fig. 3.11 se visualiza la evolución temporal de las variables del sistema cuando se utiliza un elipsoide como conjunto de restricción terminal. De este modo, en la Fig. 3.11a se observa el progreso de los estados cuando se aplican las variables de control (Fig. 3.11c) obtenidas por cada uno de los controladores analizados. En la misma se advierte que durante los primeros 1,25 min el sistema evoluciona hasta alcanzar el punto de operación, luego los estados se encuentran en el estado estacionario. En la Fig. 3.11b se muestra un acercamiento de la gráfica de evolución temporal de estados, donde se nota el efecto del ruido en las variables de salida así como el error de estado estable que se produce en el sistema al aplicar el controlador LTI-MPC.

Por otro lado, en la Fig. 3.12 se presenta la evolución temporal de las variables del sistema al emplear un politopo como conjunto de restricción terminal. Si bien no se presentan grandes discrepancias respecto de lo expuesto en la Fig. 3.11, bajo este enfoque se observa una diferencia notoria cuando se aplica el controlador MHE-MPC que produce un peor desempeño durante el estado transitorio.

Como se discute en este capítulo, con los controladores MPC adaptativos se busca adaptar el modelo de predicción mediante las variables de ponderación  $\mu_j$ . En función de ello, en la Fig. 3.13 se exhibe la evolución de las variables de ponderación en función del tiempo. En la Fig. 3.13a se presenta la pertenencia de cada modelo vértice al modelo de predicción al utilizar el controlador AMPC, en la misma se observa que, de acuerdo al rango de trabajo fijado y las no linealidades del sistema, un modelo lineal es suficiente para abordar el problema de control. En este caso, el modelo óptimo de predicción se comprende por el 90,25% del modelo 2 y el 9,75% del modelo 4. Es importante destacar que, si bien para este ejemplo un modelo lineal permite predecir el comportamiento aproximado del sistema, la posibilidad de adaptación presenta como ventaja que ante un cambio de punto de

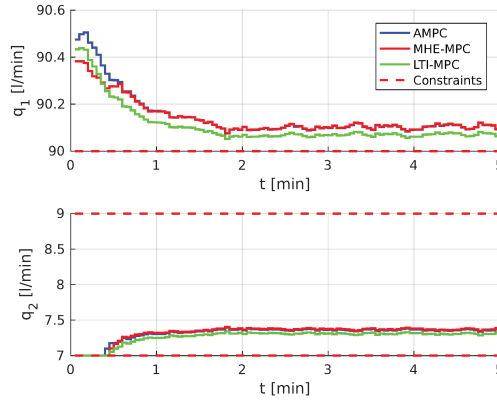
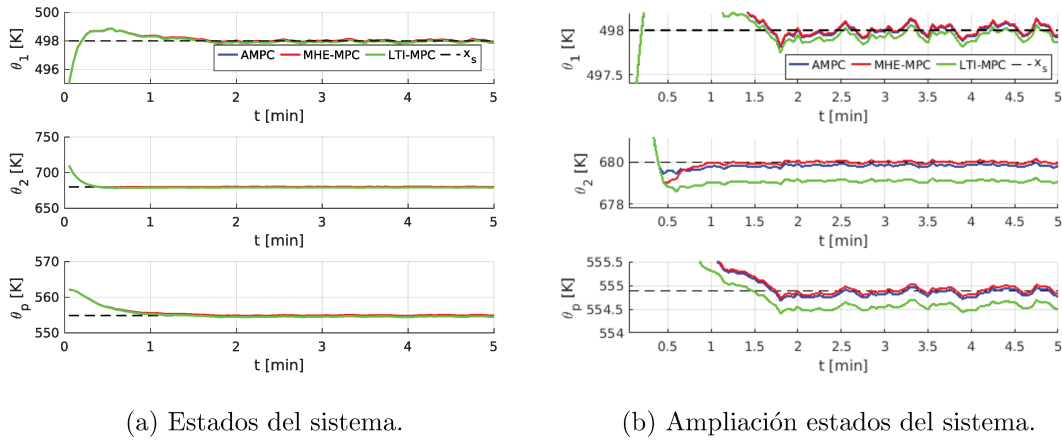


Figura 3.11: Evolución temporal de las variables del sistema HE empleando las estrategias de control con propósito de regulación con un elipsoide terminal.

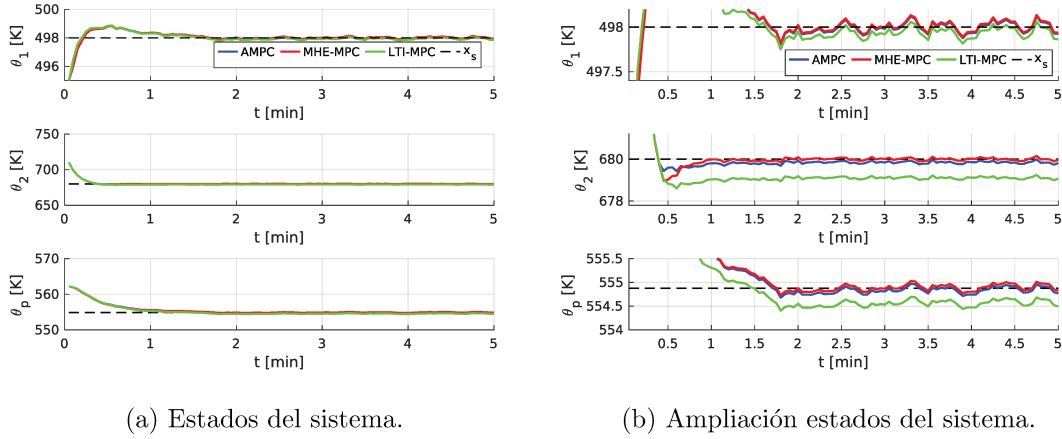
operación se reformule el controlador sin necesidad de obtener nuevos modelos, lo cual en muchas ocasiones no es una tarea trivial.

En cambio, en la Fig. 3.13b se ilustra la evolución de las variables de ponderación obtenidas por la etapa MHE del controlador MHE-MPC cuando un elipsoide terminal es utilizado. En la misma se observa el cambio de modelo de predicción que se produce a lo largo del tiempo, donde inicialmente se utiliza el modelo 3, luego se emplean modelos en el interior de  $\Omega$  y finalmente se aplica el modelo 2. En este sentido, en la Fig. 3.13c se presenta la evolución de las variables de ponderación obtenida por la etapa MHE cuando se usa un politopo terminal, si bien la secuencia de modelos es similar al emplear un elipsoide terminal, se produce una diferencia en el comienzo debido a la discrepancia en la evolución de estados.

Para finalizar y con el objetivo de resaltar los resultados, la Tabla 3.2 muestra el índice Error Absoluto Integral (IAE<sup>6</sup>, por sus siglas en inglés) y el índice Integral Temporal del Error Absoluto (ITAE<sup>7</sup>, por sus siglas en inglés) para régimen

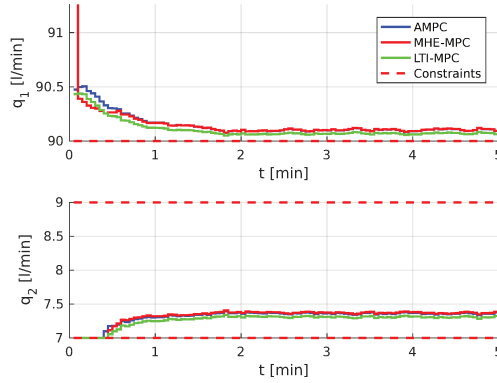
<sup>6</sup>Integrated Absolute Error

<sup>7</sup>Integral of Time Absolute Error



(a) Estados del sistema.

(b) Ampliación estados del sistema.



(c) Variable de control.

Figura 3.12: Evolución temporal de las variables del sistema HE empleando las estrategias de control con propósito de regulación con un politopo terminal.

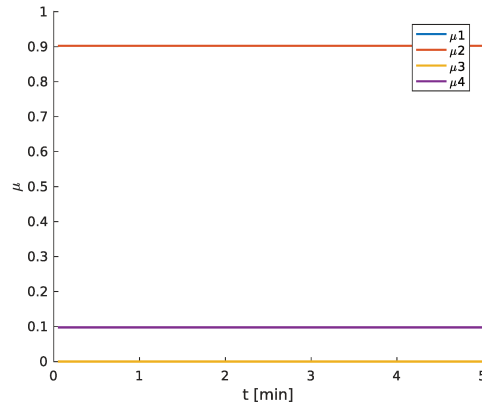
transitorio y los resultados de estado estacionario (con respecto a  $x_1$ ). Además, la Tabla 3.2 también presenta el índice Varianza Total (TV<sup>8</sup>, por sus siglas en inglés) para los tres métodos. Los valores mayores para el índice TV muestran que se aplica más variación al control a lo largo de la simulación. Por lo tanto, los valores más cercanos a cero indican estrategias de control mejores (más suaves) en términos del uso de actuadores. El análisis del índice TV es un tema muy importante desde un punto de vista práctico, ya que significa que los actuadores del sistema tendrán una vida útil más larga. En la tabla se expresa el mejor valor de cada índice como referencia y los restantes en término del incremento porcentual del mismo.

Además, la Tabla 3.3 expone el Esfuerzo Computacional en Línea (OCE<sup>9</sup>, por sus siglas en inglés) en términos del tiempo computacional transcurrido máximo, medio y mínimo medido como un porcentaje del tiempo de muestreo<sup>10</sup>.

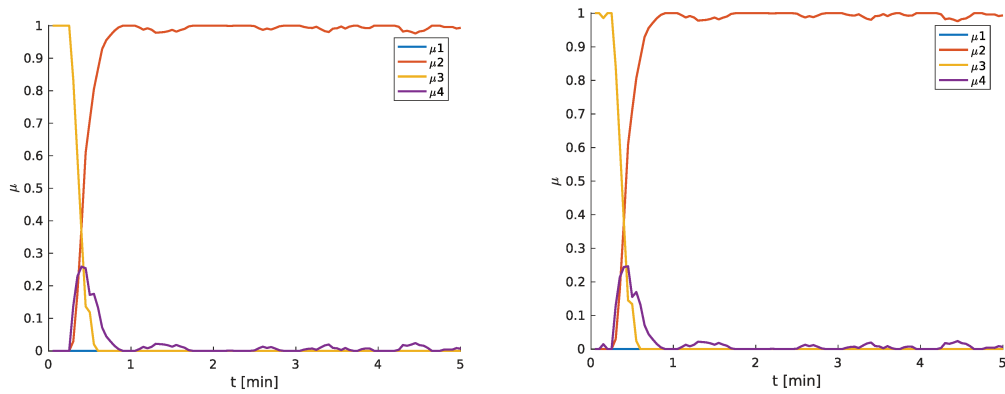
<sup>8</sup>Total Variance

<sup>9</sup>Online Computational Effort

<sup>10</sup>En un procesador i5-7200U CPU@3.1 GHz con 6 GB de RAM.



(a) Controlador AMPC.



(b) Controlador MHE-MPC con elipsoide terminal. (c) Controlador MHE-MPC con politopo terminal.

Figura 3.13: Evolución del grado de pertenencia para la obtención del modelo de predicción para el sistema HE.

En el caso del algoritmo MHE-MPC, es interesante descomponer el tiempo total transcurrido para cada una de las etapas QP. Con respecto a este asunto, la Fig. 3.14 muestra el tiempo consumido por cada etapa y el esfuerzo total mostrado en la Tabla 3.3 para cada conjunto terminal.

Como consecuencia, los resultados cuantitativos presentados en las Tablas 3.2 y 3.3 y los observados en las figuras muestran que, para el rango de trabajo dado, un modelo lineal de predicción es adecuado. En este aspecto, los índices de rendimiento planteados para seguimiento de referencia y de varianza total permiten observar un desempeño levemente mejor para la técnica LTI-MPC. Sin embargo, las técnicas adaptativas reducen el error de estado estable y mejoran el rechazo de perturbaciones, reflejado en los índices de rendimiento planteados a tal fin, donde la diferencia obtenida es considerable. Por su parte, el LTI-MPC requiere menos OCE. Sin embargo, todos los métodos se pueden implementar para propósitos de tiempo real, ya que el tiempo máximo transcurrido es menor que el tiempo de muestreo, lo cual puede considerarse un tiempo de cómputo aceptable. No obstante, la técnica AMPC presenta un esfuerzo computacional mucho mayor, lo que

Tabla 3.2: Índices de rendimiento de los métodos de control con propósito de regulación en un HE.

	IAE trans.	ITAE trans.	IAE estac.	ITAE estac.	TV
AMPC	+2,534 %	+5,862 %	<b>0,22433</b>	<b>0,64506</b>	+0,390 %
MHE-MPC (Elipsoide)	+2,956 %	+6,101 %	+1,306 %	+2,845 %	+0,353 %
MHE-MPC (Politopo)	+4,589 %	+3,187 %	+1,137 %	+2,772 %	+0,382 %
LTI-MPC	<b>0,6831</b>	<b>0,33452</b>	+29,786 %	+30,735 %	<b>38,0155</b>

Tabla 3.3: Tiempos de esfuerzo de cálculo de las estrategias de control con respecto al tiempo de muestreo en un HE.

	mínimo	promedio	máximo
AMPC (Elipsoide)	14,4744 %	24,428 %	55,3617 %
AMPC (Politopo)	14,2296 %	17,0425 %	24,4702 %
MHE-MPC (Elipsoide)	0,6338 %	0,7092 %	3,1255 %
MHE-MPC (Politopo)	0,49427 %	0,58789 %	3,3253 %
LTI-MPC (Elipsoide)	0,4183 %	0,45863 %	0,51357 %
LTI-MPC (Politopo)	<b>0,30673 %</b>	<b>0,32133 %</b>	<b>0,43003 %</b>

puede dificultar su implementación en sistemas con un tiempo de muestreo pequeño, aunque resulta razonable su utilización en aplicaciones en tiempo real que tengan un tiempo de muestreo en el rango de unos pocos segundos.

### 3.4.2. Ejemplo de aplicación II - Reactor continuo de tanque agitado

Un Reactor Continuo de Tanque Agitado (CSTR) es un reactor de flujo continuo equipado con un dispositivo de mezcla que permite alcanzar una mezcla eficiente y, a los propósitos de la ingeniería, en ocasiones se considera ideal. Constituye una operación muy utilizada en procesos químicos. En el Apéndice D.2.2 se establecen las ecuaciones que describen la dinámica del sistema, así como las simplificaciones de modelado contempladas.

Para este ejemplo, los valores de los parámetros del modelo se resumen en la Tabla D.2. En tanto que se consideran restricciones para los estados  $x_1(t) = V(t) \in [90, 110]$  l,  $x_2(t) = C_A(t) \in [0,03, 0,35]$  mol l<sup>-1</sup> y  $x_3(t) = T(t) \in [400, 480]$  K; y para las variables de control  $u_1(t) = q_s(t) \in [90, 110]$  l min<sup>-1</sup> y  $u_2(t) = q_c(t) \in [90, 110]$  l min<sup>-1</sup>.

Para el modelo LPV del sistema (obtenido empleando PJJL con  $n_l = 2$ ) se definen dos parámetros de ajuste,  $\rho(t) := [V(t) \ C_A(t)]$ . Por lo tanto, se dispone de cuatro modelos vértices LTI. Los puntos de linealización para estos modelos se establecen de modo de cubrir el posible rango de trabajo y se obtienen de la combinación de los valores mostrados en la Tabla 3.4.

En tanto que se fija el periodo de muestreo  $T = 0,1$  min, el horizonte de predicción  $N = 8$  pasos, el estado inicial  $x_0 = [95 \text{ l}; 0,04 \text{ mol l}^{-1}; 459,33 \text{ K}]$ . Asimismo, se adoptan las matrices de peso del controlador MPC como  $Q = \text{diag}\{1; 500; 0\}$  y



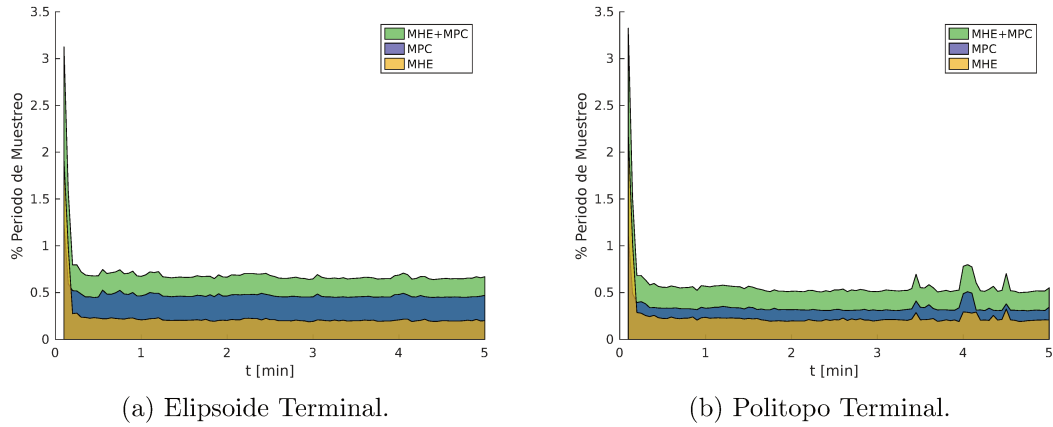


Figura 3.14: Carga computacional producto del MHE-MPC para regulación aplicado a un sistema HE.

Tabla 3.4: Modelo LPV de un reactor continuo de tanque agitado.

	$V$	$C_A$
Modelo 1	901	0,04 mol $l^{-1}$
Modelo 2	901	0,12 mol $l^{-1}$
Modelo 3	1101	0,04 mol $l^{-1}$
Modelo 4	1101	0,12 mol $l^{-1}$

$R = 0, 1\mathbb{I}$ , las matrices de peso del estimador MHE,  $Q_e = 1 \times 10^5 \mathbb{I}$  y  $Q_\nu = \mathbb{I}$ , y la matriz de peso de modelos del AMPC  $Q_\mu = 1 \times 10^4 \mathbb{I}$ . Además, se establece el punto de operación en  $x_s = [105 \text{ l}; 0, 12 \text{ mol}l^{-1}; 433, 72 \text{ K}]$ . Del mismo modo que en el sistema HE, todos los algoritmos MPC implementados utilizan el mismo conjunto de matrices de ponderación y el mismo horizonte de predicción. Para el controlador adaptativo en dos etapas (MHE-MPC), el horizonte de estimación se considera igual que el horizonte de predicción. Asimismo se destaca que para construir una simulación realista, se ha incorporado una señal de ruido blanco de medición en las variables de salida de 0,003 l, 0,001 mol $l^{-1}$  y 0,01 K, respectivamente.

De esta manera, y en concordancia con los ejemplos previos, se especifican los resultados de simulación del sistema controlado por las técnicas mencionadas considerando tanto un conjunto terminal politópico como un conjunto terminal elipsoidal. Consecuentemente, en la Fig. 3.15 se presentan las trayectorias de los estados del sistema controlado, las que convergen al punto de operación  $x_s$  indicado al considerar un elipsoide terminal (Fig. 3.15a) o un politopo terminal (Fig. 3.15b). De igual forma, en la figura se observa el conjunto de restricciones de estados en color rojo, el conjunto terminal elipsoidal en color verde y, para esta situación particular, la intersección producida al obtener el conjunto politópico se corresponde con el punto de operación deseado. Por ello, en este ejemplo se utiliza el punto  $x_s$  como un caso particular del conjunto politópico. Por su parte, se observa que las restricciones terminales impuestas son factibles dado que se encuentran contenidas por el conjunto de restricciones de estados.



Adicionalmente, en la Fig. 3.15 se muestra la evolución de estados mediante la aplicación del controlador AMPC en línea azul y con el empleo del controlador MHE-MPC en línea roja. No obstante, tal como se analiza detalladamente mediante las figuras y resultados siguientes, el amplio rango de trabajo y las fuertes no linealidades que presenta el sistema no permiten realizar el control por medio de un controlador LTI-MPC.

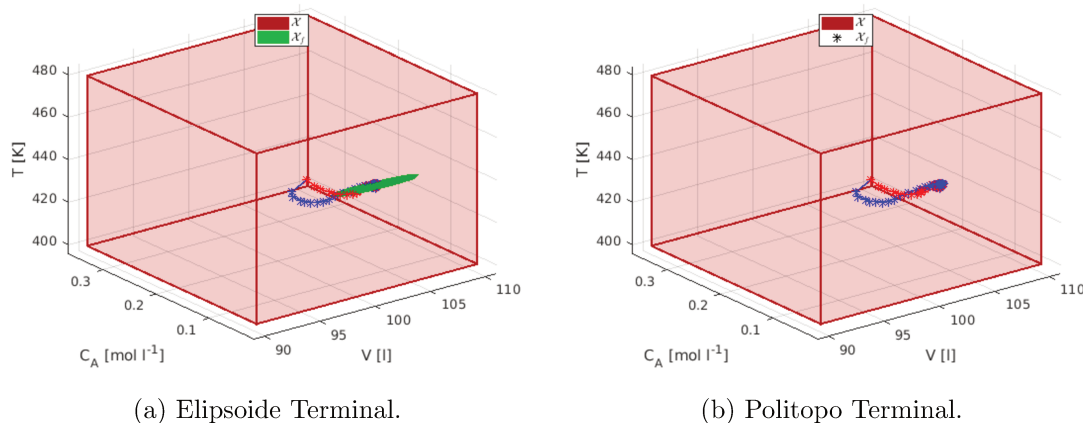
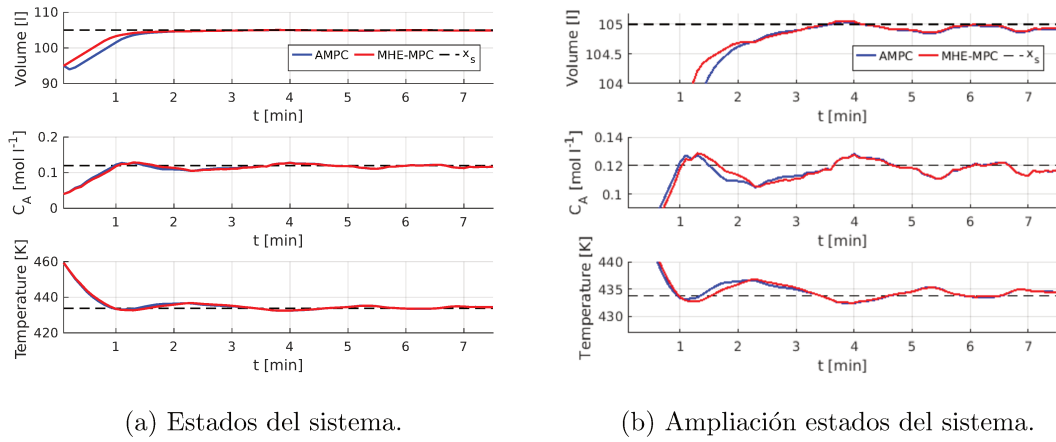


Figura 3.15: Evolución de los estados del sistema CSTR empleando las estrategias de control para regulación a  $x_s$ .

En este sentido, en la Fig. 3.16 se observa la evolución temporal de las variables del sistema al utilizar un elipsoide terminal para el sistema controlado por las técnicas adaptativas propuestas en este capítulo. De esta manera, en la Fig. 3.16a se presenta la evolución de los estados del sistema cuando se aplican las variables de control (Fig. 3.16c) calculadas mediante cada una de las estrategias de control bajo análisis. En tanto que en la Fig. 3.16b se muestra una ampliación de la Fig. 3.16a con el objetivo de resaltar el efecto del ruido incluido en las variables de salida. Como puede observarse, ambas técnicas presentan una respuesta similar y producen *offset* reducido.

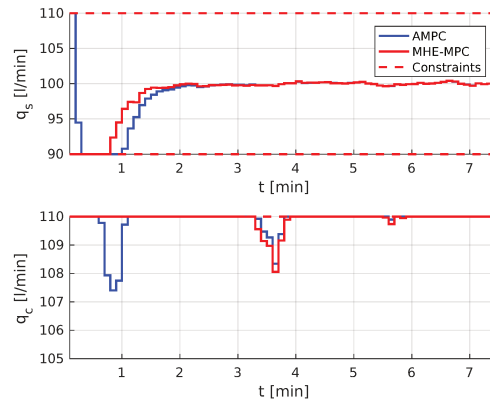
Por otro lado, la Fig. 3.17 exhibe la evolución temporal de las variables de estados para el sistema controlado al utilizar un politopo como restricción terminal. En este sentido, no se observan grandes discrepancias respecto del análisis realizado al utilizar el conjunto elipsoidal como restricción terminal.

Prosiguiendo con el análisis, la Fig. 3.18 muestra la evolución de las variables de ponderación en función del tiempo, las cuales adaptan el modelo de predicción *online*. Así, en la Fig. 3.18a se observa la pertenencia de cada modelo vértice con el modelo de predicción (en el inicio del horizonte) al utilizar el controlador AMPC. Ante esta situación se observa que, para el rango de trabajo considerado y tomando en cuenta las no linealidades del sistema, un único modelo LTI no permite abordar el problema de control. De este modo, se observa que inicialmente se utiliza un modelo compuesto por el 39,59% del modelo vértice 1, el 37,41% del modelo 3 y el 23% del modelo 4. Luego, las variables de ponderación evolucionan hasta fijar el modelo de predicción muy próximo al modelo vértice 4.



(a) Estados del sistema.

(b) Ampliación estados del sistema.

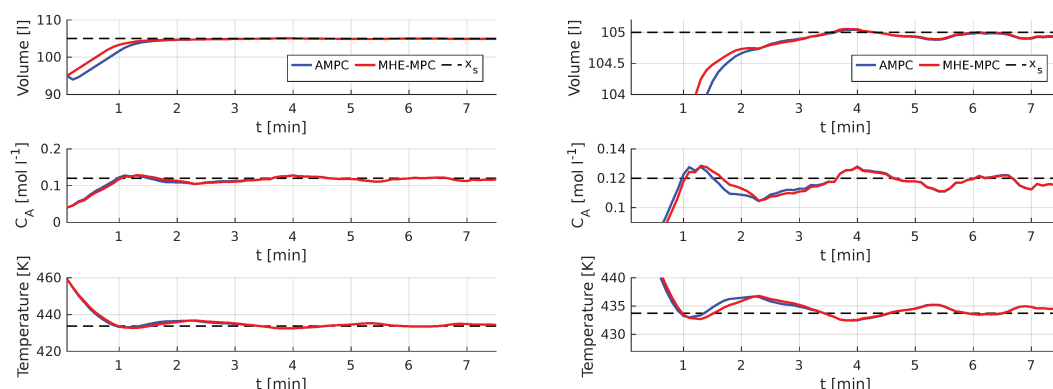


(c) Variable de control.

Figura 3.16: Evolución temporal de las variables del sistema CSTR empleando las estrategias de control con propósito de regulación con un elipsoide terminal.

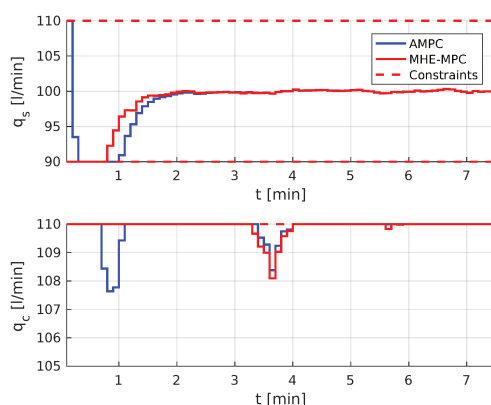
Por otra parte, la Fig. 3.18b presenta el comportamiento de las variables de ponderación obtenidas por la etapa MHE del controlador MHE-MPC. En consecuencia, se observa el cambio del modelo de predicción que se produce a lo largo del tiempo, donde inicialmente se utiliza el modelo 1, luego evoluciona utilizando modelos en el interior de  $\Omega$  y finalmente se aplica el modelo 4 como modelo de predicción. Se advierte que para los dos métodos de control analizados, la evolución de las variables de ponderación no presenta grandes diferencias ante el cambio de restricción terminal.

Para concluir, la Tabla 3.5 muestra los índices IAE e ITAE, tanto para el lapso de tiempo donde el sistema controlado alcanza la referencia como los resultados de estado estacionario (con respecto a  $x_2$ ), y el índice TV para los métodos analizados. Como consecuencia de los mismos, se visualiza que el método AMPC presenta un mejor rendimiento en la etapa de régimen transitorio, tomando en cuenta que la adaptación se realiza hacia adelante, alcanza rápidamente el modelo LTI que describe el sistema en el estado estacionario aunque, a raíz de ello, presenta mayor exigencia para con los actuadores (reflejado en el incremento del índice TV). En



(a) Estados del sistema.

(b) Ampliación estados del sistema.



(c) Variable de control.

Figura 3.17: Evolución temporal de las variables del sistema CSTR empleando las estrategias de control con propósito de regulación con un politopo terminal.

cuanto a la etapa de estado estacionario, se observa un desempeño levemente mejor para el controlador MHE-MPC si bien se encuentran muy próximos entre sí. En este sentido, se destaca que la etapa MHE modifica el modelo de predicción al ingresar una perturbación en las variables de salida, lo que produce que una menor variación de los estados, o sea, mejora el rechazo a las perturbaciones.

Por último, la Tabla 3.6 expone el OCE en términos del tiempo computacional transcurrido máximo, medio y mínimo medido como un porcentaje del tiempo de muestreo<sup>11</sup>. En este sentido, a pesar de que las dos técnicas son aceptables para su aplicación en tiempo real, el controlador MHE-MPC presenta una reducción considerable del tiempo de cálculo requerido, lo que resulta una ventaja en aplicaciones con tiempo de muestreo pequeños, es decir, en el rango de unos pocos segundos.

Adicionalmente, para el algoritmo MHE-MPC resulta interesante descomponer el esfuerzo computacional para cada una de las etapas QP. De este modo, el tiempo

<sup>11</sup>En un procesador i5-7200U CPU@3.1 GHz con 6 GB de RAM.

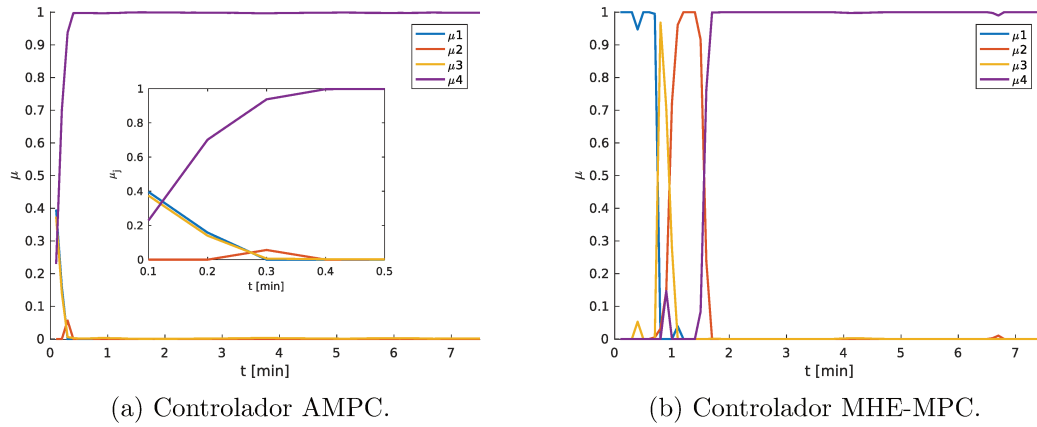


Figura 3.18: Evolución del grado de pertenencia para la obtención del modelo de predicción para el sistema CSTR.

Tabla 3.5: Índices de rendimiento de los métodos de control con propósito de regulación en un CSTR.

	IAE trans.	ITAE trans.	IAE estac.	ITAE estac.	TV
AMPC	<b>0,03975</b>	<b>0,01871</b>	+2,339 %	+1,44 %	+37,824 %
MHE-MPC	+7,462 %	+10,536 %	<b>0,03001</b>	<b>0,11942</b>	<b>104,6582</b>
LTI-MPC	-	-	-	-	-

reflejado en la Tabla 3.6 se muestra dividido en el tiempo consumido por cada etapa en la Fig. 3.19, donde se observa que la carga computacional promedio debido a la etapa de adaptación es de 0,098 % del tiempo de muestreo y la correspondiente a la etapa de control es de 0,140 % para el caso donde se utiliza un politopo como restricción terminal. El incremento del esfuerzo de cómputo que se observa al utilizar el elipsoide terminal viene dado por la etapa de control, mientras que la etapa de adaptación no tiene diferencias significativas en el tiempo de cálculo.

Tabla 3.6: Tiempos de esfuerzo de cálculo de las estrategias de control con respecto al tiempo de muestreo en un CSTR.

	mínimo	promedio	máximo
AMPC (Elipsoide)	6,3098 %	10,5400 %	32,4684 %
AMPC (Politopo)	5,8355 %	10,6870 %	21,1743 %
MHE-MPC (Elipsoide)	0,2969 %	0,3420 %	0,4227 %
MHE-MPC (Politopo)	<b>0,2254 %</b>	<b>0,2384 %</b>	<b>0,2873 %</b>
LTI-MPC (Elipsoide)	-	-	-
LTI-MPC (Politopo)	-	-	-

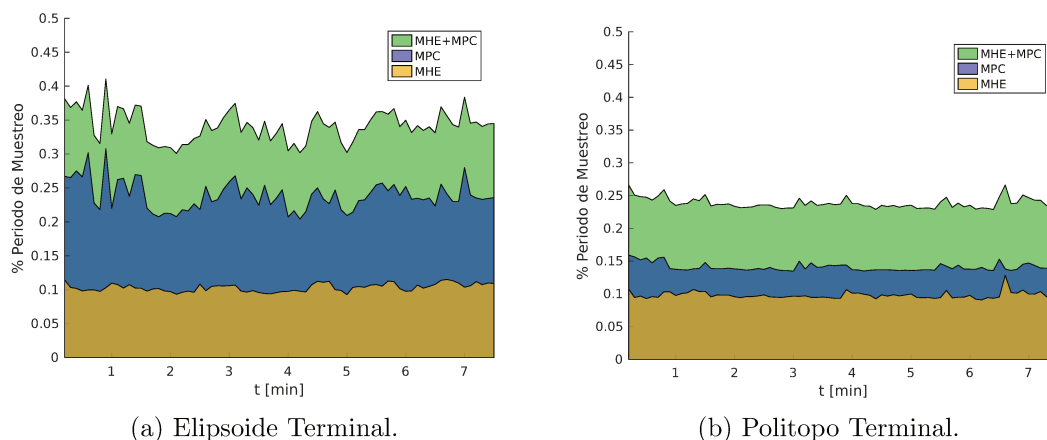


Figura 3.19: Carga computacional producto del MHE-MPC para regulación aplicado a un sistema CSTR.

### 3.5. Conclusiones

En este capítulo se presentaron dos estrategias de control predictivo adaptativas para regulación, aplicables a sistemas con incertidumbre paramétrica y sistemas no lineales representados mediante el enfoque de modelos LPV. Estas técnicas extienden la formulación del MPC para regulación tradicional presentada en la Sección 2.2.2 a una representación multi-modelo de la planta.

En este sentido, en la Sección 3.2 se especificaron las condiciones de estabilidad asintótica basadas en los conceptos planteados en la Sección 2.2.1. Para ello, es necesario seleccionar adecuadamente el costo y la restricción terminal, de manera que los mismos sean una función de Lyapunov de control y un conjunto invariante de control, respectivamente, para todos los modelos vértices. Luego, de acuerdo con lo establecido en los Teoremas 3.1 y 3.2 se garantizan estas propiedades para todos los modelos contenidos en un casco convexo delimitado por los modelos vértices. De este modo, es posible incorporar incertidumbre en los parámetros del sistema y/o considerar las no linealidades del mismo.

En la Sección 3.3.1 se planteó un controlador MPC que en una única etapa adapta el modelo de predicción mediante una secuencia de modelos LTI y calcula la secuencia de controles óptima. De esta manera, se utilizan variables de ponderación para determinar los modelos LTI que describen la dinámica del sistema en cada instante. Cuando el controlador AMPC se aplica a sistemas no lineales, resulta necesario incorporar un término de penalización que asegura que la secuencia de modelos tienda al modelo LTI que describe al sistema en el punto de operación establecido.

En tanto que en la Sección 3.3.2 se presentó un controlador AMPC en dos etapas QP, que permite el uso de herramientas de optimización más rápidas. En la primera etapa se realiza la adaptación sobre un horizonte de estimación hacia atrás, de modo de obtener el modelo que mejor describe al sistema en base a las mediciones pasadas. Por otro lado, la segunda etapa se corresponde con un

controlador MPC tradicional que aplica el modelo LTI calculado.

El costo terminal de ambas formulaciones se puede obtener contemplando los conceptos introducidos en la Sección 2.3.2. De esta manera, se planteó un problema LMI que permite encontrar una única matriz de peso que garantiza que el costo terminal sea una función de Lyapunov de control para los modelos vértices. Luego, con dicho costo es posible determinar un conjunto terminal invariante de control para los modelos vértices. Para el mismo se propusieron dos alternativas, una que considera un elipsoide terminal obtenido por el problema LMI dado en la Ec. (3.12) y otra que considera un conjunto politópico dado por la Ec. (3.15).

En sistemas lineales con incertidumbre paramétrica, se observó que los conjuntos obtenidos son más pequeños que los analizados para el sistema sin incertidumbre (Sección 2.2.2). En tanto que el conjunto politópico resulta menos conservador que el conjunto elipsoidal. Para estos sistemas, ambas formulaciones permitieron que el sistema alcance la referencia aún con una incertidumbre del 14% en uno de sus parámetros. Sin embargo, se produce un aumento en el tiempo de cómputo que en aplicaciones reales puede resultar un factor crítico, en especial para el controlador AMPC en una etapa donde el costo computacional es considerablemente mayor.

Finalmente, en la Sección 3.4 se abordó el problema de control en la industria de procesos. Para ello, se realizaron simulaciones numéricas sobre dos operaciones unitarias, un intercambiador de calor y un reactor continuo de tanque agitado. En la primera de ellas, se consideró un rango de trabajo acotado donde un controlador MPC con un modelo de predicción LTI fue capaz de controlar al sistema no lineal. Bajo estas condiciones, se observó que las tres técnicas analizadas presentaron desempeño similar durante el régimen transitorio, sin embargo las técnicas adaptativas mostraron mejorías en el rechazo de perturbaciones y en reducción del *offset*. A su vez, se destaca que la posibilidad de adaptación presenta como ventaja que ante un cambio de punto de operación no resulta necesario obtener nuevos modelos al reformular el controlador, lo cual en muchas ocasiones no es una tarea trivial para sistemas industriales no lineales.

Por su parte, en la simulación del sistema CSTR, el amplio rango de trabajo considerado y las fuertes no linealidades no permiten el control por medio de un controlador MPC con un modelo de predicción LTI, dado que el modelo lineal no resulta efectivo para representar el comportamiento del sistema a lo largo de toda la trayectoria. En este caso, los controladores adaptativos presentan gran importancia. El desempeño de ambos métodos resultó aceptable aunque la diferencia de tiempo de cálculo puede resultar determinante en aplicaciones industriales.

De este modo, los métodos AMPC propuestos permitieron garantizar la regulación de los sistemas no lineales representados bajo un modelo politópico que se utiliza para la predicción, sin la necesidad de evaluar en línea las ecuaciones diferenciales no lineales que describen la dinámica de cada sistema.



## Capítulo 4

# Control Predictivo basado en Modelo Adaptativo para Seguimiento de Referencia

Tal como se menciona en la Sección 2.2.3, en distintos momentos un sistema es posible que necesite operar en puntos de operación diferentes debido a que se encuentra afectado por factores externos, es decir, el punto de operación puede no ser único.

Sin embargo, el diseño de los *ingredientes* terminales de los métodos de control propuestos en el Capítulo 3 depende del estado de equilibrio considerado, o sea, ante un cambio del punto de operación resulta necesario recalcular tanto el costo como las restricciones terminales. Esto hace que sea dificultoso aplicar dicho controlador para sistemas que operen en puntos de operación que cambian en el tiempo, situación que suele ser frecuente en la industria de procesos.

En este capítulo se extienden los resultados mostrados en el Capítulo 3, tomando en consideración los conceptos desarrollados en la Sección 2.2.3. De este modo, se aborda el diseño y análisis de métodos de control AMPC para puntos de operación cambiantes, contemplando un modelo de predicción con incertidumbre paramétrica o bien un sistema no lineal representado mediante el enfoque LPV presentado en la Sección 2.1.3.

De esta manera, la adaptabilidad del esquema de control se realiza mediante una variable de decisión para determinar el modelo de predicción a emplear y se contempla un estado estacionario artificial, que se optimizan en línea. Con ello, las principales características del controlador propuesto son:

- El parámetro de ponderación  $\mu \in \mathbb{R}^{n_m}$  se considera como una variable de decisión que adapta el modelo de predicción.
- Las condiciones impuestas sobre el parámetro de ponderación se incluyen como restricciones del problema de optimización.
- El costo final se obtiene de forma de garantizar que sea una función de Lyapunov de control para todos los modelos que pertenecen a  $\Omega$ .



- El conjunto terminal es tal que cumple con la condición de invarianza para todos los modelos pertenecientes a  $\Omega$ .
- Se utiliza un estado estacionario ( $x_a \in \mathbb{R}^{n_x}$ ) y una entrada ( $u_a \in \mathbb{R}^{n_u}$ ), ambos artificiales.  $(x_a, u_a)$  definen un punto de equilibrio que se optimiza en línea.
- La función objetivo penaliza la desviación entre el estado estacionario artificial ( $x_a$ ) y el deseado ( $x_s$ ).
- Se agrega un término de penalización de error de seguimiento en la función objetivo.

Finalmente, cabe señalar que los principales resultados de este capítulo se pueden encontrar publicados en los trabajos [56, 57] o están en proceso de escritura.

## 4.1. Definición del costo y restricción terminales

Con el objetivo de definir los *ingredientes* terminales, el problema considerado es el descrito en la Sección 3.1. Por ello, se considera un modelo politópico (Sección 2.1.3):

$$\begin{aligned} x(k+1) &= A(\rho(k))x(k) + B(\rho(k))u(k), \\ y(k) &= C(\rho(k))x(k) + D(\rho(k))u(k), \\ x(0) &= x_0, \end{aligned} \quad (4.1)$$

el cual puede ser incorporado dentro de un politopo convexo de  $n_m$  vértices, donde cada vértice se corresponde con un modelo LTI:

$$[A(\rho(k)), B(\rho(k)), C(\rho(k)), D(\rho(k))] \in \Omega.$$

De esta manera, un modelo en el interior del conjunto  $\Omega$  puede ser obtenido realizando la interpolación de los modelos vértices LTI:

$$\begin{aligned} A(\rho(k)) &= \sum_{j=1}^{n_m} \mu_j(\rho(k))A_j, & B(\rho(k)) &= \sum_{j=1}^{n_m} \mu_j(\rho(k))B_j \\ C(\rho(k)) &= \sum_{j=1}^{n_m} \mu_j(\rho(k))C_j, & D(\rho(k)) &= \sum_{j=1}^{n_m} \mu_j(\rho(k))D_j \end{aligned} \quad (4.2)$$

donde se debe cumplir que:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n_m} \mu_j(\rho(k)) &= 1 \\ 0 \leq \mu_j(\rho(k)) &\leq 1, \quad j \in \mathbb{Z}_{1:n_m}. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Por lo tanto, siguiendo los desarrollos presentados en el Capítulo 3, las  $n_m$  variables de ponderación  $\mu_j(\cdot)$  ajustan el modelo de predicción al sistema a lo

largo del horizonte de predicción. De este modo, los métodos de control propuestos adaptan en línea el modelo de predicción y, en consecuencia, se mantiene la denominación AMPC.

Por otro lado, se deben satisfacer las condiciones impuestas en la Sección 3.2 para garantizar la estabilidad asintótica del conjunto de estados de equilibrio para el sistema controlado. Esto implica que los *ingredientes* terminales sean una función de Lyapunov de control decreciente y un conjunto invariante de control para todos los modelos vértices LTI.

Por ese motivo, se considera un regulador LQR politópico sin restricciones de horizonte infinito como controlador local con el modelo dado en la Ec. (4.1). De esta manera, se debe encontrar una  $P > 0$  y una ley de control  $u(k) = \kappa x(k)$  para el LQR que satisfagan la Ec. (3.5). Por lo tanto, de acuerdo con el Teorema 3.1,  $P$  se determina resolviendo el siguiente problema:

$$\begin{aligned} & \min_{\gamma, L, Y} \gamma \\ & \text{s.a. } Y > 0, \\ & \begin{pmatrix} Y & Y A_j^T + L^T B_j^T & Y Q^{1/2} & L^T R^{1/2} \\ A_j Y + B_j L & Y & 0 & 0 \\ Q^{1/2} Y & 0 & \gamma I & 0 \\ R^{1/2} L & 0 & 0 & \gamma I \end{pmatrix} > 0, \end{aligned} \quad (4.4)$$

para todo  $j \in \mathbb{Z}_{1:n_m}$ . Luego, se garantiza que el costo terminal sea decreciente para todo  $x \in \mathcal{X}_f^{at}$  y que además tenga una cota superior dada por  $V_N(x(k_0)) = x(N)^T P x(N)$ , la cual es minimizada en línea a través del problema del MPC planteado.

Mientras que el conjunto invariante de control para seguimiento de referencia  $\mathcal{X}_f^{at}$  se define empleando un sistema de lazo cerrado de estado extendido  $w = (x, \theta)$  con un ley de control dada por  $u = \kappa x + K\theta$ <sup>1</sup> [16, 8], así para un modelo LTI resulta:

$$w(k+1) = \underbrace{\begin{bmatrix} A + B\kappa & BK \\ \mathbf{0} & \mathbb{I} \end{bmatrix}}_{A_w} w(k) \quad (4.5)$$

donde el vector  $\theta \in \mathbb{R}^{n_\theta}$  es un parámetro que permite caracterizar el estado y la entrada de equilibrio de forma compacta,  $K = [-\kappa \ \mathbb{I}] M$  y  $M$  es una matriz de transformación de modo que:

$$\begin{pmatrix} x_s(r) \\ u_s(r) \end{pmatrix} = M\theta.$$

Por lo tanto, el conjunto de estados admisibles resulta:

$$\mathcal{W}_\lambda = \{w \in \mathcal{R}^{n_x+n_\theta} : x \in \mathcal{X}, u \in \mathcal{U}, x_s(r) \in \lambda\mathcal{X}, u_s(r) \in \lambda\mathcal{U}\}$$

<sup>1</sup>Se realizó un cambio de notación respecto de lo establecido en la Sección 2.2.3 para evitar repetición de nombres entre variables.

donde  $\lambda \in (0, 1]$  es un parámetro arbitrariamente cercano a 1. Esto se debe a que  $A_w$  puede contener autovalores iguales a 1.

Mientras que el conjunto invariante politópico  $\mathcal{W}_f^t$  para el sistema de estado extendido es tal que:

$$\mathcal{W}_f^t = \{w \in \mathcal{W}_\lambda : A_w^k w \in \mathcal{W}_\lambda, k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\}. \quad (4.6)$$

Luego, para obtener el conjunto invariante terminal  $\mathcal{W}_f^{at}$  se propone la intersección de los conjuntos invariantes terminales  $\mathcal{W}_{f_j}^t$  (Ec. (4.6)) para cada modelo vértice LTI. Es decir, el conjunto terminal para seguimiento de referencia viene dado por:

$$\mathcal{W}_f^{at} = \varepsilon \bigcap_{j=1}^{n_m} \mathcal{W}_{f_j}^t \quad (4.7)$$

donde  $\varepsilon \in (0, 1]$  es un parámetro de diseño, de modo de garantizar que el conjunto  $\mathcal{W}_f^{at}$  sea invariante para los  $n_m$  vértices de  $\Omega$ , de manera de satisfacer el Teorema 3.2.

Por otro lado, es posible determinar un elipsoide invariante terminal para el estado ampliado  $w(N)$ , centrado en el origen, siendo el mismo:

$$\mathcal{W}_f^{at} = \{w(N) : w(N)^T W w(N) \leq 1\}. \quad (4.8)$$

Por lo tanto, para obtener el máximo elipsoide invariante terminal  $\mathcal{W}_f^{at}$  bajo la ley de control  $u(k) = \kappa x(k) + K\theta(r(k))$  para todo  $k$  con entrada admisible, o sea  $u(k) \in \mathcal{U}$ , se plantea un segundo problema LMI que contempla los resultados del primer problema LMI, planteado en la Ec. (4.4). Este problema LMI de maximización es el que se indica en el Teorema 4.1.

**Teorema 4.1.** *Bajo las consideraciones planteadas, si se satisfacen simultáneamente las siguientes LMIs:*

$$\begin{aligned} & \underset{Z}{\text{máx}} \log \det(Z) \\ \text{s. a. } & Z > 0, \\ & \begin{pmatrix} Z & Z A_{w_j}^T \\ A_{w_j} Z & Z \end{pmatrix} > 0, \text{ para todo } j \in \mathbb{Z}_{1:n_m}, \\ & [\kappa_s \ K_s] Z [\kappa_s \ K_s]^T \leq u_{s_{max}}^2, \end{aligned} \quad (4.9)$$

donde  $W = Z^{-1}$ ,  $s \in \mathbb{Z}_{1:n_u}$  indica cada componente del vector  $u(k)$ ,  $\kappa_s$  son las filas de la matriz  $\kappa = LY^{-1}$  determinada por el problema LMI presentado en la Ec. (4.4) y  $K_s$  son las filas de la matriz  $K = [-\kappa \ \mathbb{I}]M$ . Entonces, al obtener  $W$ , se obtiene la región terminal  $\mathcal{W}_f^{at}$  de acuerdo con la Ec. (4.8) y este elipsoide es, además, invariante.

*Demostración.* Procediendo de manera similar al abordaje realizado para el Teorema 3.3 y tomando en cuenta que se supone que el conjunto terminal es un elipsoide como en la Ec. (4.8), al aplicar la realimentación de estados  $u(k) =$

$\kappa x(k) + K\theta(r(k))$  a cualquier estado  $w(k) \in \mathcal{W}_f^{at}$ , si  $\mathcal{W}_f^{at}$  es invariante, entonces se obtiene:

$$w(k+1)^T W w(k+1) \leq w(k)^T W w(k).$$

Por lo tanto, considerando el modelo dado en la Ec. (4.5) se arriba a:

$$w(k)^T (A_w(\rho)^T W A_w(\rho) - W) w(k) \leq 0,$$

lo cual implica que:

$$A_w(\rho)^T W A_w(\rho) - W \leq 0,$$

Luego, estableciendo que  $W = Z^{-1}$  y pre y posmultiplicando por  $Z$  se llega a:

$$Z - Z A_w(\rho)^T Z^{-1} A_w(\rho) Z > 0.$$

Entonces al aplicar el complemento de Schur, se obtiene:

$$\begin{pmatrix} Z & Z A_w(\rho)^T \\ A_w(\rho) Z & Z \end{pmatrix} > 0.$$

Por último, al considerar las condiciones dadas en la Ec. (4.3) resulta:

$$\sum_{j=1}^{n_m} \mu_j(\rho) \begin{pmatrix} Z & Z A_{w_j}^T \\ A_{w_j} Z & Z \end{pmatrix} > 0,$$

la cual se verifica si:

$$\begin{pmatrix} Z & Z A_{w_j}^T \\ A_{w_j} Z & Z \end{pmatrix} > 0, \text{ para todo } j \in \mathbb{Z}_{1:n_m},$$

asegurando que  $\mathcal{W}_f^{at}$  es un elipsoide invariante.

En tanto que, la variable de control puede expresarse como  $u(k) = \psi w(k)$ , donde  $\psi = [\kappa \quad K]$ . De esta manera, tal como se plantea en el Teorema 3.3, se verifica que se mantiene una entrada admisible mediante la norma máxima de la proyección  $\psi w(k)$  de cualquier estado  $w(k)$  que pertenezca a algún elipsoide  $w(k)^T W w(k) \leq 1$ , que viene dado por  $\sqrt{\psi W^{-1} \psi^T}$ . Por lo tanto, reemplazando  $W = Z^{-1}$ , da como resultado:

$$\psi Z \psi^T \leq u_{max}^2. \quad (4.10)$$

Finalmente, al considerar una cota para cada una de las  $n_u$  componentes de la variable de control, la  $s$ -ésima proyección  $\psi_s w(k)$  está limitada, en norma, por  $u_{smax}$ . Es decir,

$$\psi_s Z \psi_s^T \leq u_{smax}^2. \quad (4.11)$$

□

De esta manera, los *ingredientes* terminales para seguimiento de referencia pueden obtenerse resolviendo dos problemas de optimización LMIs consecutivos. El primero de ellos (Ec. (4.4)), asegura que el costo terminal sea una función de Lyapunov de control robusta, obteniéndose la matriz  $P$  y una realimentación  $\kappa$  utilizada para calcular el conjunto invariante terminal. En tanto que el segundo problema (Ec. (4.9)), determina el máximo elipsoide invariante terminal para seguimiento de referencia considerando el sistema de estado extendido,  $\mathcal{W}_f^{at}$ , dentro de este conjunto se garantiza el decrecimiento del costo terminal determinado en el primer problema.

Por último, el conjunto invariante terminal  $\mathcal{X}_f^{at}$  se obtiene como la proyección del conjunto definido en la Ec. (4.8) o el obtenido como solución del problema dado en la Ec. (4.9), sobre el conjunto de estados del sistema:

$$\mathcal{X}_f^{at} = Proj_{\mathcal{X}}(\mathcal{W}_f^{at}). \quad (4.12)$$

## 4.2. Métodos de control predictivo basado en modelos adaptativo para seguimiento de referencia

Tomando en cuenta los conceptos de las secciones precedentes, los métodos de control AMPC se basan en una aproximación multi-modelo del sistema. De esta manera, es fundamental conocer, calcular o aproximar el parámetro de ponderación  $\mu \in \mathbb{R}^{n_m}$  a lo largo del horizonte de predicción.

Por ello, en esta sección  $\mu$  se considera como una variable de decisión del problema de optimización MPC y de acuerdo a la manera en que se determina la misma, se corresponde a diferentes formulaciones de AMPC, las cuales están en consonancia con las metodologías presentadas en el Capítulo 3.

### 4.2.1. AMPC en una etapa para seguimiento de referencia

En primer lugar se considera un único problema de optimización a lo largo de un horizonte de  $N$  pasos hacia adelante, donde se utiliza un modelo de predicción como el indicado en la Ec. (4.1) y se contemplan las restricciones físicas dadas en la Ec. (2.16) y se incorporan las restricciones de la Ec. (4.3).

El controlador se plantea siguiendo el método de MPC para seguimiento [16], presentado en la Sección 2.2.3. Este diseño de control permite garantizar que el controlador conduzca asintóticamente al sistema hacia una referencia de estado estacionario  $x_s$ , en una trayectoria admisible desde cualquier estado inicial factible  $x_0$ .

El enfoque incorpora una referencia artificial  $p_a = (x_a, u_a)$  al problema de optimización y establece los estados del sistema para seguir esta variable artificial. Además, determina que este punto de equilibrio artificial debe estar lo más cerca posible de la referencia de estado real  $x_s$ , resultando en un dominio de atracción ampliado [2].

El problema de MPC se formula con una función de costo tradicional como la presentada en la Ec. (2.28) ( $V_N(\cdot)$ ), agregando un término de penalización de modelos, de manera que la misma queda expresada como:

$$V_N(x, x_s; \mathbf{u}, \mu, x_a, u_a) = \sum_{k=0}^{N-1} \|x(k) - x_a\|_Q^2 + \|u(k) - u_a\|_R^2 + \|x(N) - x_a\|_P^2 + \|x_a - x_s\|_T^2 + \|\mu - \mu_s\|_{Q_\mu}^2 \quad (4.13)$$

El costo de etapa es cuadrático en  $x$  y  $u$ , con las matrices de peso,  $Q \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$  y  $R \in \mathbb{R}^{n_u \times n_u}$ , definidas positivas y una ganancia arbitraria que estabiliza el control de retroalimentación de estados,  $\kappa \in \mathbb{R}^{n_u \times n_x}$ , así  $A_\kappa(\rho(k)) = A(\rho(k)) + B(\rho(k))\kappa$  es Schur estable. Además, existe otra matriz definida positiva  $P \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$  tal que,

$$A_\kappa(\rho(k))^T P A_\kappa(\rho(k)) - P = -(Q + \kappa^T R \kappa)$$

se mantiene para todo  $\rho(k) \in \mathcal{P}$ . Por su parte, se considera el término  $\|x(N) - x_a\|_P^2$  que especifica una compensación para penalizar la desviación del estado final con el objetivo  $p_a$  y otro término  $\|x_a - x_s\|_{T_x}^2$  para garantizar que la variable artificial siga al objetivo real,  $x_s$  [27]. Por último, se utiliza el término  $\|\mu - \mu_s\|_{Q_\mu}^2$  para asegurar que el modelo de predicción converja al modelo que representa al sistema en el punto de operación.  $Q_\mu \in \mathbb{R}^{n_m \times n_m}$  es una matriz semidefinida positiva y  $\mu_s$  es tal que  $x_s = (A_s x_s + B_s u_s)$  con:

$$\begin{aligned} A_s &= \sum_{j=1}^{n_m} \mu_{s_j} A_j, \\ B_s &= \sum_{j=1}^{n_m} \mu_{s_j} B_j, \\ \sum_{j=1}^{n_m} \mu_{s_j} &= 1, \\ 0 &\leq \mu_{s_j} \leq 1, \end{aligned}$$

las que se incorporan como restricciones al problema de optimización.

**Observación 4.1.** *Se debe considerar que si  $\mu$  no permanece constante durante el horizonte de predicción  $N$ , se generan una gran cantidad de variables de decisión para el problema de optimización y, produce un alto costo computacional. Por ello, siguiendo trabajos como [68], se considera a  $\mu$  constante a lo largo del horizonte. Debido a esta simplificación, la solución es subóptima.*

Finalmente, el controlador se obtiene mediante solución del siguiente problema

de optimización:

$$\begin{aligned}
& \min_{\mathbf{u}, \mu} V_N(x_0, x_s; \mathbf{u}, \mu, x_a, u_a) \\
\text{s.a. } & x(k+1) = A(\rho)x(k) + B(\rho)u(k), \quad k \in \mathbb{Z}_{0:N-1}, \\
& x(0) = x_0 \\
& A(\rho) = \sum_{j=1}^{n_m} \mu_j A_j, \\
& B(\rho) = \sum_{j=1}^{n_m} \mu_j B_j, \\
& \sum_{j=1}^{n_m} \mu_j = 1, \\
& 0 \leq \mu_j \leq 1, \quad \forall j \in \mathbb{Z}_{1:n_m}, \\
& x(k) \in \mathcal{X} \quad \forall k \in \mathbb{Z}_{0:N-1}, \\
& u(k) \in \mathcal{U} \quad \forall k \in \mathbb{Z}_{0:N-1}, \\
& x(N) \in \mathcal{X}_f^{at}, \\
& x_a = A_s x_a + B_s u_a, \\
& A_s = \sum_{j=1}^{n_m} \mu_{s_j} A_j, \\
& B_s = \sum_{j=1}^{n_m} \mu_{s_j} B_j, \\
& \sum_{j=1}^{n_m} \mu_{s_j} = 1, \\
& 0 \leq \mu_{s_j} \leq 1.
\end{aligned} \tag{4.14}$$

Así, al considerar la estrategia de horizonte deslizante, la política de control está dada por:

$$\kappa(x_0) = \mathbf{u}^*(0; x_0),$$

siendo  $\mathbf{u}^*$  la solución del problema Ec. (4.14), que representa la secuencia óptima de acciones de control.

### Ejemplo de aplicación

En la presente sección se analizan las propiedades del controlador mediante una simulación numérica. Además, con el objetivo de realizar comparaciones con los controladores presentados en las Secciones 2.2.3 y 3.3.1, se considera nuevamente el sistema masa-resorte-amortiguador mostrado en el Apéndice D.1.

Para este ejemplo, los valores de los parámetros del modelo se corresponden con los fijados en la Sección 3.3.1. De esta manera, se considera un politopo limitado por dos modelos LTI que contemplan la incertidumbre máxima. En tanto que, para la presente simulación se establece el horizonte de predicción  $N = 7$  pasos.

Tal como se procede en los capítulos previos, en la Fig. 4.1 se puede observar que los conjuntos terminales (tanto elipsoidal como politópico), están contenidos en los conjuntos controlables, lo cual indica que se trata de conjuntos invariantes. En las Figs. 4.1a y 4.1b se muestra el conjunto terminal obtenido como la proyección del elipsoide definido por medio del problema establecido en la Ec. (4.9) sobre el espacio de los estados y los conjuntos controlables  $C_N(\mathcal{X}, \mathcal{X}_f^{at})$  utilizando el modelo 1 y el modelo 2, respectivamente. En tanto que, en las Figs. 4.1c y 4.1d se presenta el conjunto terminal conseguido por la proyección del politopo calculado por medio de la Ec. (4.7) sobre  $\mathbb{R}^{n_x}$  y los respectivos conjuntos controlables empleando los modelos vértices. En ambos casos, se observa que el conjunto controlable en 7 pasos incluye el estado inicial considerado.

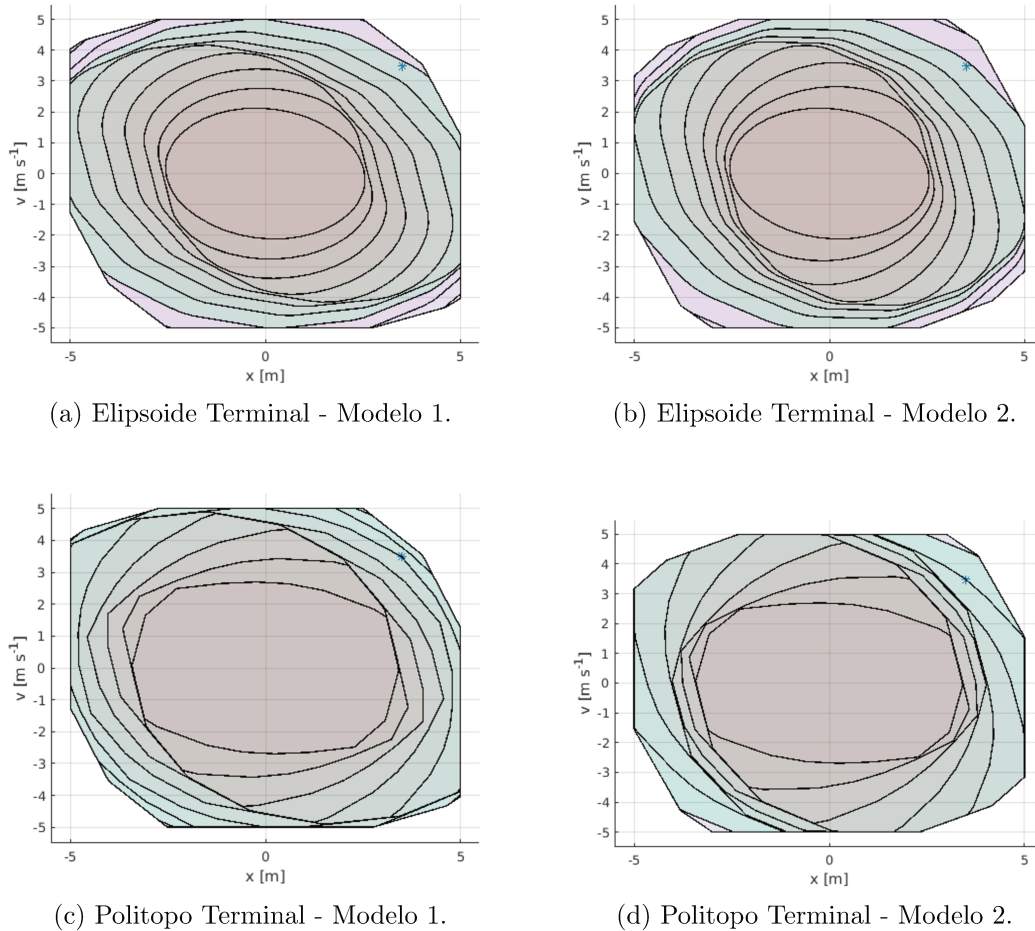


Figura 4.1: Conjuntos controlables considerando el sistema masa-resorte-amortiguador con incertidumbre para seguimiento de referencia.

Para el ejemplo presentado en esta sección, la referencia considerada es  $x_{s1} = [-1,5 \ 0]^T$  durante los primeros 20 s, luego se introduce un cambio del punto de operación a  $x_{s2} = [1,5 \ 0]^T$  durante 20 s y finalmente se fija la referencia en  $x_{s3} = [0 \ 0]^T$ .



Así, en la Fig. 4.2 se muestra la evolución de los estados del sistema controlado, la cual converge a los puntos de operación deseados manteniendo una trayectoria factible. Al igual que sucede con el controlador presentado en la Sección 2.2.3, el controlador propuesto conserva factibilidad y admisibilidad frente a los cambios de referencia, sin formular nuevamente el controlador.

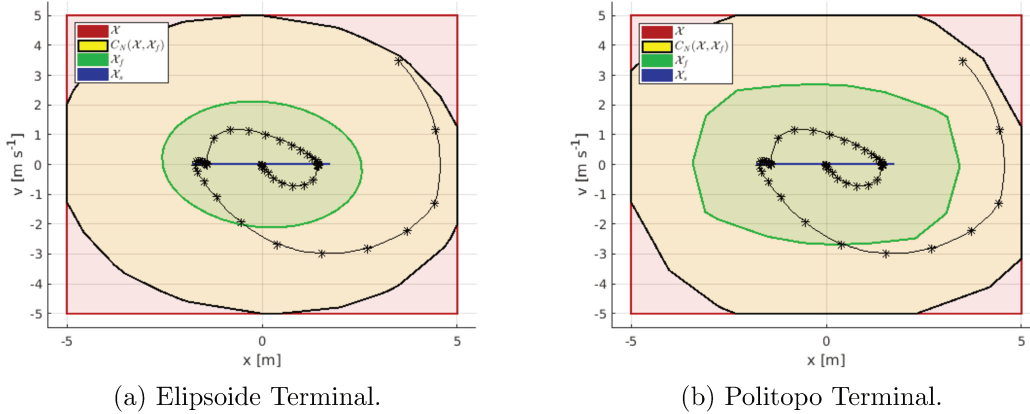


Figura 4.2: Evolución de los estados del sistema masa-resorte-amortiguador empleando AMPC en una etapa para seguimiento de referencia.

Por tratarse de un sistema incierto, el conjunto de estado de equilibrio ( $\mathcal{X}_s$ ) resulta como la intersección de los conjuntos de estados de equilibrio de control obtenidos a partir de los vértices, el mismo se corresponde al presentado en el Capítulo 3. De igual manera, los conjuntos de estados controlables para el horizonte de predicción considerado resultan de la intersección de los conjuntos correspondientes para cada uno de los vértices. Esto implica que sean subconjuntos de los obtenidos si se determina con el sistema sin incertidumbre. Adicionalmente se pone en relieve que el conjunto terminal obtenido por medio de la Ec. (4.7) es mayor que el calculado mediante el problema (4.9), y consecuentemente el conjunto de estados controlable también resulta mayor para el mismo horizonte de predicción  $N$ .

Por otro lado, los conjuntos terminales para seguimiento de referencia,  $\mathcal{X}_f^{at}$ , contiene los conjuntos terminales para regulación  $\mathcal{X}_f^a$  (Sección 3.3.1) calculados en los diferentes puntos de equilibrio. De esta manera, se obtiene un dominio de atracción ampliado y es posible la utilización de horizontes de predicción más cortos que los empleados para regulación.

En la Fig. 4.3 se presenta la evolución temporal de las variables del sistema controlado. Al igual que sucede en el Capítulo 3, para el ejemplo analizado, la modificación del conjunto terminal produce diferencias mínimas en la evolución de las variables de estados y control, por ello sólo se presenta una de ellas. En la Fig. 4.3a se muestra la evolución de los estados (en línea sólida de color azul) y que la misma alcanza la referencia establecida (en línea verde de trazo) mediante la aplicación de la secuencia de controles obtenida (Fig. 4.3b), la cual se encuentra en todo instante dentro de los límites impuestos (líneas de trazos en color rojo).

Sumado a ello, en línea negra de punto-trazo, se muestra la evolución temporal de las variables artificiales, tanto de estados como de control.

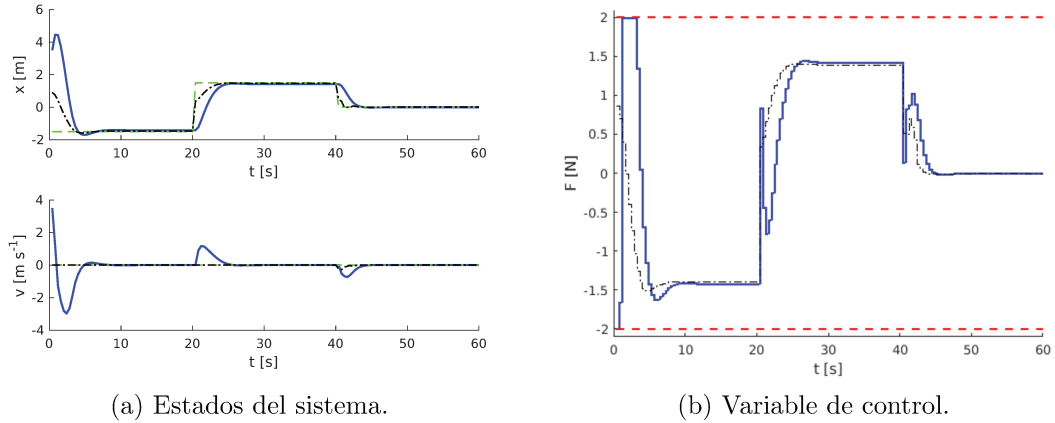


Figura 4.3: Evolución temporal de las variables del sistema masa-resorte-amortiguador controlado mediante AMPC en una etapa con propósito de seguimiento de referencia.

Como se ha indicado anteriormente, el controlador AMPC es capaz de encontrar un modelo de predicción LTI en función de los modelos vértices, realizando la adaptación en línea a través de las variables de ponderación  $\mu_j$ , las cuales se muestran en la Fig. 4.4. Ante esta situación, también se muestra sólo una evolución de modelos ya que son próximas entre sí independientemente del conjunto terminal adoptado.

En esta figura, se advierte que al alcanzar los puntos de operación  $x_{s1}$  y  $x_{s2}$ , el modelo de predicción evoluciona de manera que se obtiene con el 64,69% del modelo vértice 1 y el 35,31% del modelo vértice 2. En tanto que al alcanzar el origen, cualquier modelo perteneciente a  $\Omega$  describe el comportamiento del sistema. En la Fig. 4.4 se visualiza que se arriba al centro del politopo de modelos, o sea, se pondera en parte iguales a los modelos vértices al igual que se observa en el caso de regulación presentado en el Capítulo 3.

Finalmente, en la Fig. 4.5 se muestra la carga computacional del controlador en términos del porcentaje del tiempo de muestreo. Asimismo, se destaca que la carga computacional media es de 25,38% para el controlador que contempla el elipsoide como conjunto terminal y de 25,63% para aquel que utiliza el politopo.

#### 4.2.2. AMPC en dos etapas para seguimiento de referencia

De acuerdo a lo analizado a lo largo del Capítulo 3, resulta posible el diseño de un controlador AMPC en dos etapas, donde el desdoblamiento de las etapas de adaptación y control ofrece una disminución de la carga computacional del mismo.

De esta manera, en cada tiempo de muestro, se resuelven dos problemas de optimización QP consecutivos. El primer problema QP contempla un horizonte hacia atrás para encontrar el modelo LTI que mejor describe al sistema en ese

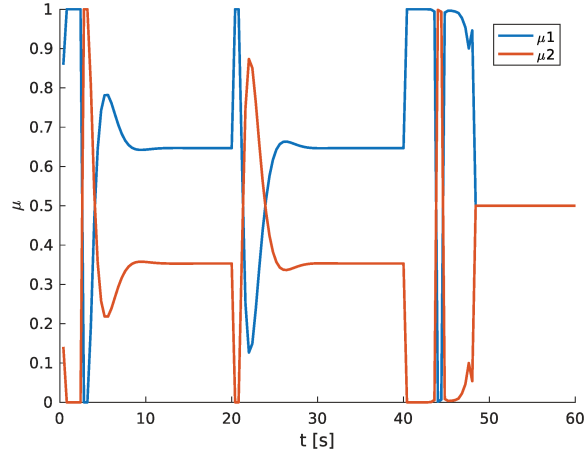


Figura 4.4: Evolución del grado de pertenencia para la obtención del modelo de predicción de AMPC en una etapa para el sistema masa-resorte-amortiguador.

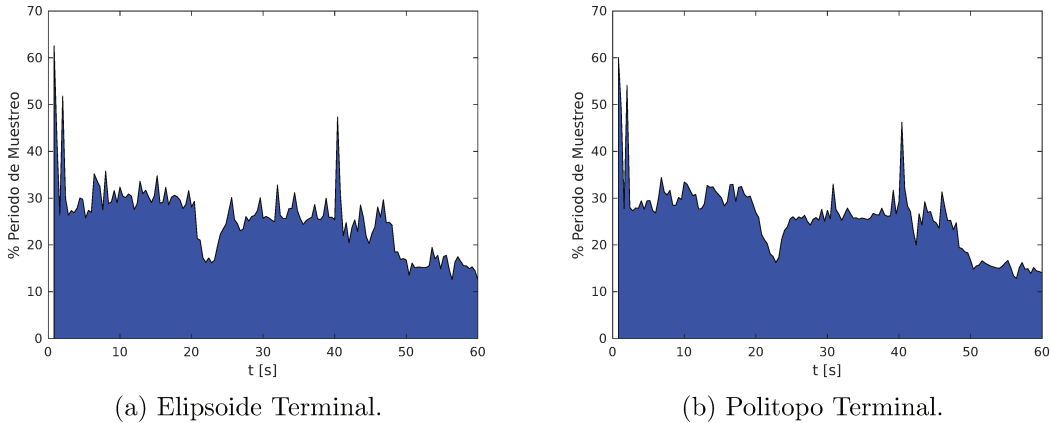


Figura 4.5: Carga computacional producto de AMPC en una etapa para seguimiento de referencia aplicado a un sistema masa-resorte-amortiguador.

instante, basándose en los datos medidos de los  $N_e$  pasos previos. La adaptación se realiza mediante la variable de ajuste entre modelo-proceso  $\mu$ , la cual se obtiene por el esquema MHE presentado en la Sección 3.3.2 que utiliza el modelo LPV dado en la Ec. (4.1).

Por otro lado, el segundo problema QP utiliza el modelo LTI, obtenido por el primer problema, como modelo de predicción para encontrar la secuencia de controles que optimice el desempeño del sistema de lazo cerrado a lo largo de un horizonte futuro. El problema QP para fines de control se basa en el controlador presentado en la Sección 2.2.3, el cual contempla las restricciones físicas dadas por la Ec. (2.16) e *ingredientes* terminales para garantizar la estabilidad asintótica del conjunto de equilibrio a pesar de las simplificaciones de modelado.

Por lo tanto, mediante el método de MPC para seguimiento [16] se garantiza que el controlador conduzca asintóticamente al sistema hacia el punto de operación

deseado  $x_s$ , en una trayectoria admisible desde cualquier estado inicial factible  $x_0$ . Para ello, este enfoque utiliza una referencia artificial  $p_a = (x_a, u_a)$  de manera que los estados del sistema evolucionen tomando como referencia esta variable artificial. Además, determina que este punto de equilibrio artificial debe estar lo más cerca posible de la referencia de estado real  $x_s$ , lo que asegura un dominio de atracción ampliado.

El problema QP hacia adelante se formula con una función de costo tradicional como la presentada en la Ec. (2.28) ( $V_N(\cdot)$ ), considerando el valor de  $\mu$  obtenido mediante el esquema MHE (Ec. (3.16)), es decir:

$$V_N(x, x_s, \mu; \mathbf{u}, x_a, u_a) = \sum_{k=0}^{N-1} \|x(k) - x_a\|_Q^2 + \|u(k) - u_a\|_R^2 + \|x(N) - x_a\|_P^2 + \|x_a - x_s\|_T^2 \quad (4.15)$$

Al igual que en el caso de MPC para seguimiento utilizando sistemas LTI, el funcional de costo considera el término  $\|x(N) - x_a\|_P^2$  que especifica una compensación para penalizar la desviación del estado final con el objetivo  $p_a$  y otro término de *offset*  $\|x_a - x_s\|_T^2$  para garantizar que la variable artificial siga al objetivo real,  $x_s$  [27]. Sin embargo, para el controlador AMPC, las matrices de peso  $P \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$  y  $T \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$  son las obtenidas considerando el modelo LPV, esto es, siguiendo lo establecido en la Sección 4.1.

Finalmente, el controlador se encuentra con la solución del siguiente problema de optimización:

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{u}} \quad & V_N(x_0, x_s, \mu; \mathbf{u}, x_a, u_a) \\ \text{s.a.} \quad & x(k+1) = Ax(k) + Bu(k), \forall k \in \mathbb{Z}_{0:N-1}, \\ & x(0) = x_0, \\ & A = \sum_{j=1}^{n_m} \mu_j A_j, \\ & B = \sum_{j=1}^{n_m} \mu_j B_j, \\ & x(k) \in \mathcal{X}, \forall k \in \mathbb{Z}_{0:N-1}, \\ & u(k) \in \mathcal{U}, \forall k \in \mathbb{Z}_{0:N-1}, \\ & x(N) \in \mathcal{X}_f^{at}, \\ & x_a = Ax_a + Bu_a, \end{aligned} \quad (4.16)$$

donde  $\mathcal{X}_f^{at}$  es un conjunto invariante terminal robusto para seguimiento de referencia que contiene el origen en su interior definido como se establece en la Sección 4.1.

Luego, al considerar una estrategia de horizonte deslizante, la política de control para seguimiento de referencia propuesta viene dada por  $\kappa(x_0) = \mathbf{u}^*(0; x_0)$ .

### Ejemplo de aplicación

De igual manera que para el controlador AMPC para seguimiento de referencia de una etapa y con el fin de comparar con los controladores analizados previamen-

te, en esta sección se presentan resultados de simulación donde se visualizan las propiedades del controlador presentado ante un sistema lineal con incertidumbre paramétrica. Para ello, se utiliza el sistema masa-resorte-amortiguador presentado en el Apéndice D.1.

Para este ejemplo, los valores de los parámetros del modelo se corresponden con los fijados en la Sección 3.3.1, con un horizonte de predicción de 7 pasos tal como se define en la Sección 4.2.1. En tanto que, los conjuntos terminales considerados son los definidos en la Sección 4.1 y se muestran en la Fig. 4.1.

Por su parte, las referencias consideradas se modifican en el tiempo de acuerdo a lo establecido en la Sección 4.2.1. Así, en la Fig. 4.6 se muestra la evolución de los estados del sistema controlado, resaltando la convergencia de las trayectorias a los puntos de operación deseados mientras se conserva la factibilidad, sin formular nuevamente el controlador.

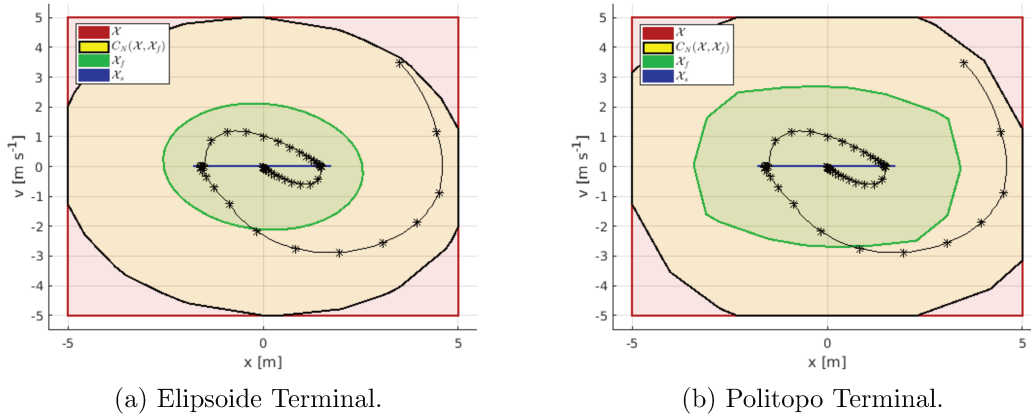
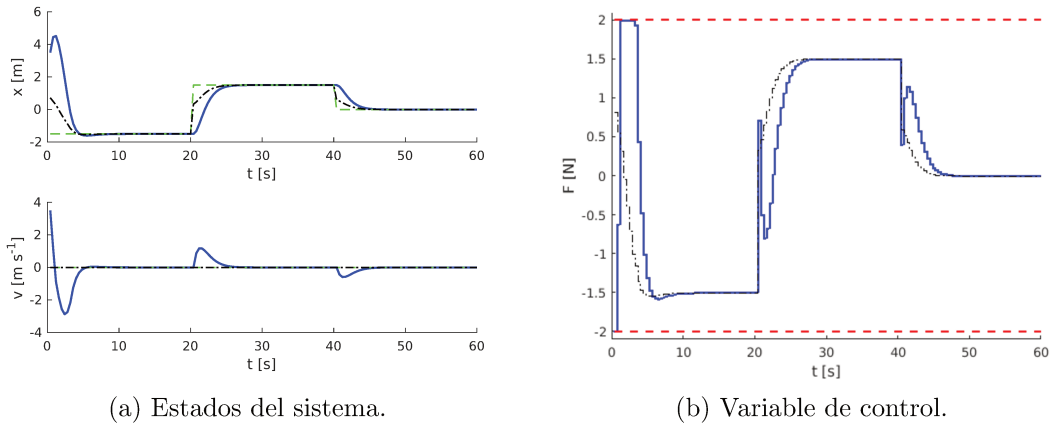


Figura 4.6: Evolución de los estados del sistema masa-resorte-amortiguador empleando AMPC en dos etapas para seguimiento de referencia.

En tanto que en la Fig. 4.7 se presenta la evolución temporal de las variables del sistema controlado. Tal como se especifica para los controladores AMPC previos, para el ejemplo analizado, la modificación del conjunto terminal (elipsoidal o politópico), produce diferencias mínimas en la evolución de las variables de estados y control, por ello sólo se presenta una de ellas. En la Fig. 4.7a se muestra la evolución de los estados (en línea sólida de color azul) y que las mismas alcanzan la referencia establecida (en línea verde de trazo) mediante la aplicación de la secuencia de controles obtenida (Fig. 4.7b), la cual se encuentra en todo instante dentro de los límites impuestos (líneas de trazos en color rojo). Sumado a ello, en línea negra de punto-trazo, se muestra la evolución temporal de las variables artificiales, tanto de estados como de control.

Para el controlador presentado en esta sección se observa que la variabilidad de las variables artificiales es menor respecto de las obtenidas mediante la aplicación del controlador presentado en la Sección 4.2.1, dicha variación se hace notoria principalmente entre los 40 s y 50 s donde el modelo de predicción del controlador bajo análisis ya se encuentra establecido. La adaptación del modelo de predicción



(a) Estados del sistema.

(b) Variable de control.

Figura 4.7: Evolución temporal de las variables del sistema masa-resorte-amortiguador controlado mediante AMPC en dos etapas con propósito de seguimiento de referencia.

se realiza en línea a través de la etapa MHE que provee las variables de ponderación  $\mu_j$ , las cuales se muestran en la Fig. 4.8. Ante esta situación, también se muestra sólo una evolución de modelos ya que son próximas entre sí independientemente del conjunto terminal adoptado.

En esta figura, se advierte que el modelo de predicción evoluciona hasta alcanzar un modelo LTI en el centro del politopo  $\Omega$ , independiente de la referencia. Esta adaptación constituye una de las principales ventajas respecto del esquema previo, ya que el modelo representa al sistema considerado como real y conocido más allá de los cambios en los puntos de operación.

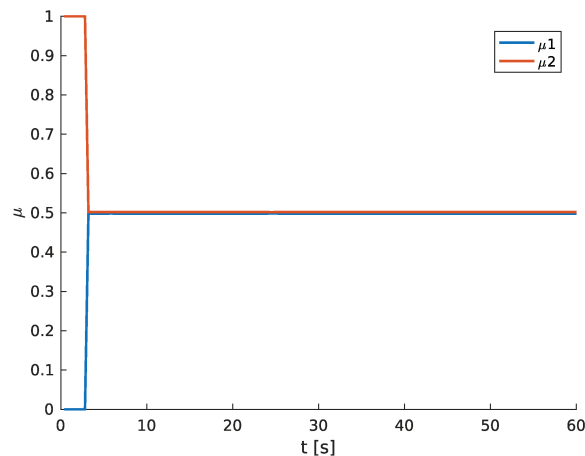


Figura 4.8: Evolución del grado de pertenencia para la obtención del modelo de predicción de AMPC en dos etapas para el sistema masa-resorte-amortiguador.

Por último, la Fig. 4.9 presenta la carga computacional del controlador en términos del porcentaje del tiempo de muestreo. En la misma, se observa que la carga computacional es considerablemente menor a la obtenida en la Sección 4.2.1,

siendo la carga computacional media de 3,76% (1,82% del MHE y 1,94% del MPC) para el controlador que contempla el elipsoide como conjunto terminal y de 4,04% (1,97% del MHE y 2,07% del MPC) para aquel que utiliza el politopo.

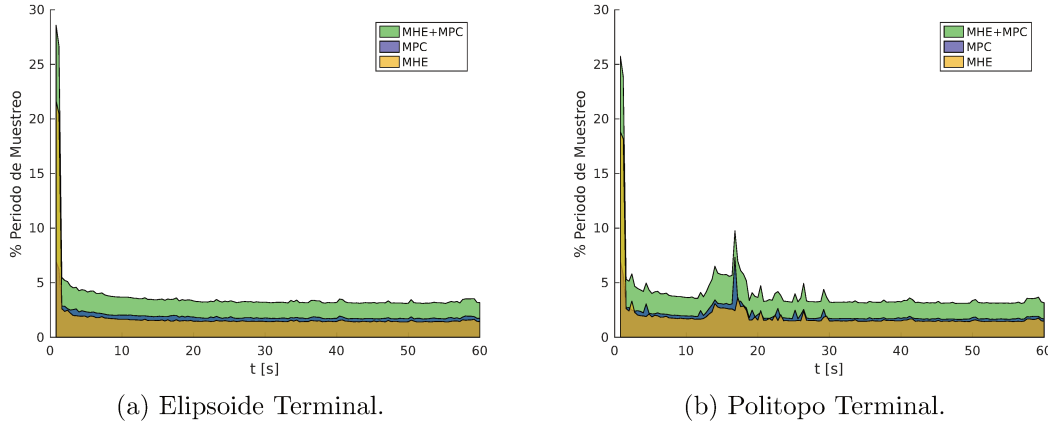


Figura 4.9: Carga computacional producto de AMPC en dos etapas para seguimiento de referencia aplicado a un sistema masa-resorte-amortiguador.

### 4.3. Aplicación a la industria de procesos

En función de las conclusiones obtenidas en el Capítulo 3, una de las principales características que ofrece el AMPC de una etapa es que la secuencia de modelos LTI permite representar sistemas no lineales y utilizar la misma para la predicción de sus comportamientos futuros. Sin embargo, ello implica un alto costo computacional que puede resultar crítico para su aplicación en procesos reales. No obstante, de acuerdo a lo desarrollado en el Capítulo 4, el modelo debe permanecer constante dentro del horizonte de predicción para propósitos de seguimiento de referencia y aún así el costo continúa siendo elevado. Por ello, en esta sección se hace un análisis detallado de las ventajas y desventajas que presentan los métodos adaptativos propuestos al aplicarse a sistemas con puntos de operación cambiantes. Por otro lado, para comparar el rendimiento, se emplea un MPC para seguimiento de referencia lineal (denominado LTI-MPC), que resuelve el problema (4.16) tomando todas las variables de ponderación como  $\mu_j = 1/n_m$ .

Además, la utilización de LMIs para la obtención de los elipsoides terminales determina un marco que favorece la inclusión de la incertidumbre paramétrica en la formulación del problema de optimización y permite obtener un elipsoide invariante para todos los modelos vértices. Conforme a las propiedades de las LMIs, donde una intersección de regiones convexas determina una región convexa, es posible incluir otras restricciones sobre el conjunto terminal y constituye uno de los puntos de interés en trabajos futuros. Por ello, en las simulaciones presentadas en esta sección se centra el foco en este tipo de conjunto terminal.

Asimismo se destaca que los *ingredientes* terminales se obtuvieron usando Matlab con *Yalmip toolbox* [65] y *SeDuMi* [66] para el costo terminal y *SDPT3*



[67] para el elipsoide terminal. En tanto que los controladores se sintetizaron con *Yalmip toolbox* y *fmincon* para el AMPC en una etapa y con *Yalmip toolbox* y *quadprog* para los controladores restantes.

De esta manera, esta sección presenta resultados de simulación de un intercambiador de calor, expuesto en el Apéndice D.2.1, y un reactor continuo de tanque agitado, descrito en el Apéndice D.2.2.

### 4.3.1. Ejemplo de aplicación I - Intercambiador de calor

En este ejemplo se analiza un HE de superficie tubular como el estudiado en la Sección 3.4.1 y cuyo modelo dinámico y parámetros se encuentran en el Apéndice D.2.1. Además, se consideran el modelo LPV (Tabla 3.1), el tiempo de muestreo, las matrices de peso del controlador MPC y del estimador MHE y las restricciones detallados en la Sección 3.4.1. Sin embargo, se establece un horizonte de predicción  $N = 6$ , un estado inicial  $x_0 = [495; 710; 562,1913]$  K y se fijan los puntos de operación en  $x_{s1} = [498; 680; 554,8782]$  K,  $x_{s2} = [496; 680; 553,5033]$  K y  $x_{s3} = [496; 690; 556,6284]$  K, cada uno de ellos se aplica en un intervalo de 5 min. Al mismo tiempo, el controlador AMPC en dos etapas (denominado MHE-MPC) utiliza el mismo horizonte de predicción que de estimación. Por último, se considera una señal de ruido blanco en las variables de salida de 0,01 K.

De esta manera, en la Fig. 4.10 se presentan las evoluciones de los estados del sistema controlado cuando se aplica cada uno de los controladores analizados y se observa que todas las trayectorias convergen a los puntos de operación fijados sin reformular los controladores. Además, es posible visualizar el conjunto de restricciones de estados (en color rojo) y el elipsoide invariante terminal (indicado en color verde), el cual resulta factible por estar contenido en el conjunto  $\mathcal{X}$ .

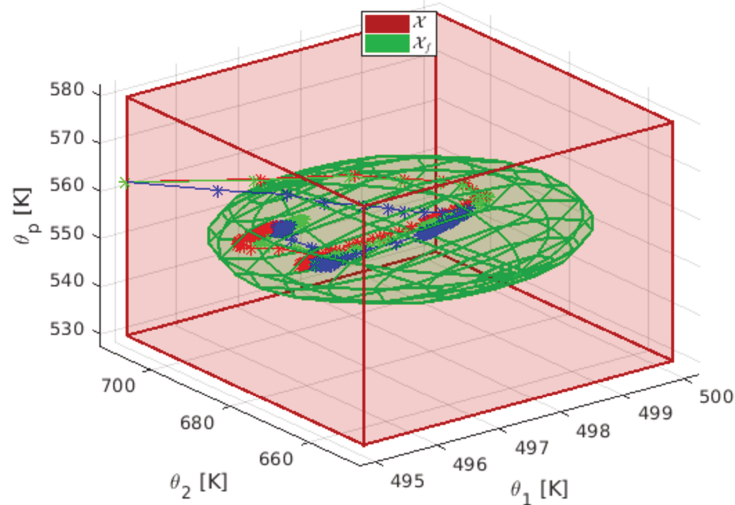


Figura 4.10: Evolución de los estados del sistema HE empleando las estrategias de control para seguimiento de referencia.

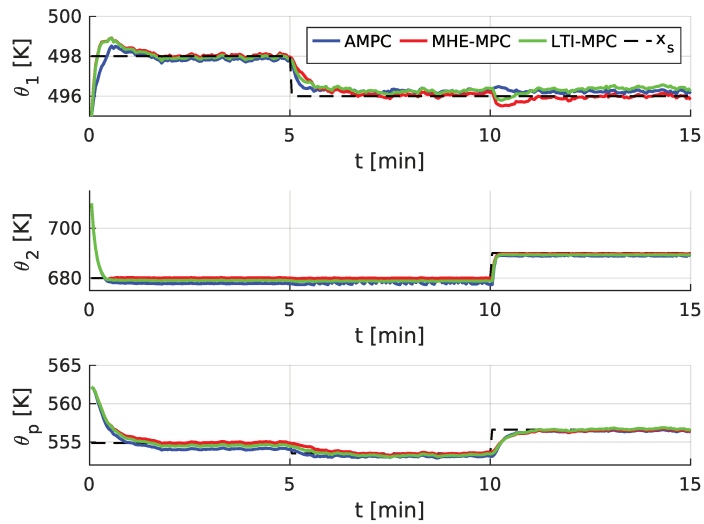


Realizando un análisis más detallado, en la Fig. 4.11 se presenta la evolución temporal de las variables del sistema controlado. De este modo, en la Fig. 4.11a se puede ver el comportamiento de los estados cuando se aplican las señales de control (Fig. 4.11b) obtenidos por cada uno de los controladores bajo análisis. Se destaca que si bien el controlador AMPC alcanza los puntos de operación deseados, el cálculo de las variables de control se ve afectado por el ruido introducido en las variables de salida del sistema como así también por los cambios de modelo que se describen más abajo. En esta figura se advierte que durante los primeros 1,25 min el sistema evoluciona hasta alcanzar el primer punto de operación, sin embargo tanto cuando se aplica el controlador AMPC como el LTI-MPC se observa error de estado estacionario, en tanto que el mismo se ve reducido al aplicar el controlador MHE-MPC. Al alcanzar los 5 min se introduce un cambio en la temperatura del fluido de proceso, se observa que cuando se aplica el AMPC la pendiente es mayor aunque se conservan los errores indicados anteriormente. Finalmente, a los 10 min se ingresa un cambio en la temperatura del fluido calefactor, donde se obtienen las mismas conclusiones.

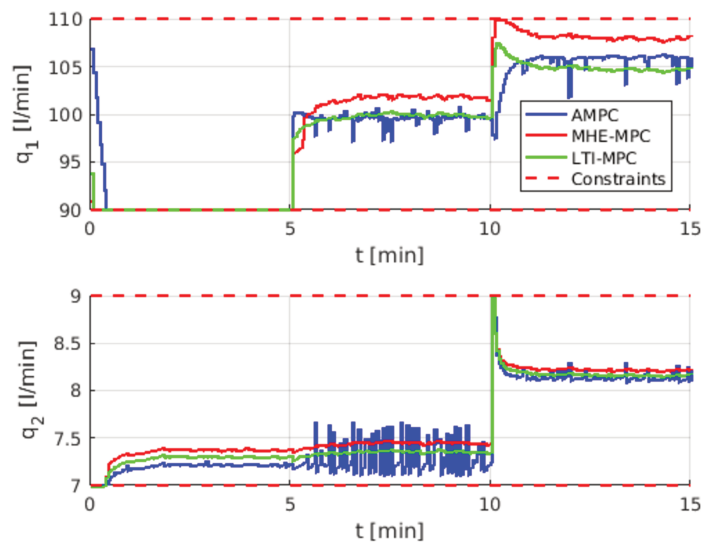
En tanto que en la Fig. 4.12a se visualiza la evolución de las variables  $\mu_j$  obtenidas por la etapa MHE del controlador MHE-MPC, encargadas de adaptar el modelo de predicción ponderando el mismo con los modelos LTI vértices. Inicialmente, donde los cambios de estados son mayores, se presentan los grandes cambios de modelo de predicción alcanzando un modelo en las proximidades del modelo vértice 2 hasta los 5 min. Luego, al introducirse cambios en el punto de operación se alcanza un modelo de predicción cercano al modelo vértice 1.

Por otro lado, en Fig. 4.12b se exponen las variables de ponderación obtenidas por el controlador AMPC de una etapa. En la misma se observa que inicialmente se adapta el modelo hasta obtener un modelo que combina aproximadamente un 95 % del modelo 4 y un 5 % del modelo vértice 2. Sin embargo, al reducir la temperatura del fluido de proceso, la similitud de los modelos lineales produce que las variables de ponderación modifiquen su valor sin alcanzar un modelo específico, lo cual provoca que se generen variaciones en las variables de control. Este efecto podría ser atenuado si introduce una penalización en la varianza de  $\mu$ . Así, introduciendo el término  $\nu_\mu^T Q_\nu \nu_\mu$ , donde  $\nu_\mu$  es la varianza de  $\mu$  y  $Q_\nu = 5 \times 10^{-2} \mathbb{I}$ , en la Ec. (4.13) y la restricción  $\mu(k_0) = \mu(k_0 - 1) + \nu_\mu$ , donde  $\mu(k_0 - 1)$  es el vector de pertenencia en el tiempo de muestreo anterior, en el problema de optimización (4.14), se obtienen las variables de control y de ponderación mostradas en las Figs. 4.13a y 4.13b, respectivamente. Allí se observa una reducción notable en las fluctuaciones de las variables presentadas.

Finalmente, en la Tabla 4.1 se resumen los índices de rendimiento de los métodos empleados. Claramente el controlador MHE-MPC provee los mejores resultados en términos de IAE e ITAE evaluados en la totalidad del tiempo de simulación y desde los 1,25 min (indicados como seguimiento) donde el sistema se establece en la primera referencia y contempla los diferentes cambios en los puntos de operación. En tanto que el controlador LTI-MPC es el que aplica menos cambios en las variables de control y actuadores. En caso del controlador AMPC, se destaca que la aplicación de un único modelo a lo largo del horizonte de predicción provoca un



(a) Estados del sistema.



(b) Variable de control.

Figura 4.11: Evolución temporal de las variables del sistema HE empleando las estrategias de control con propósito de seguimiento de referencia.

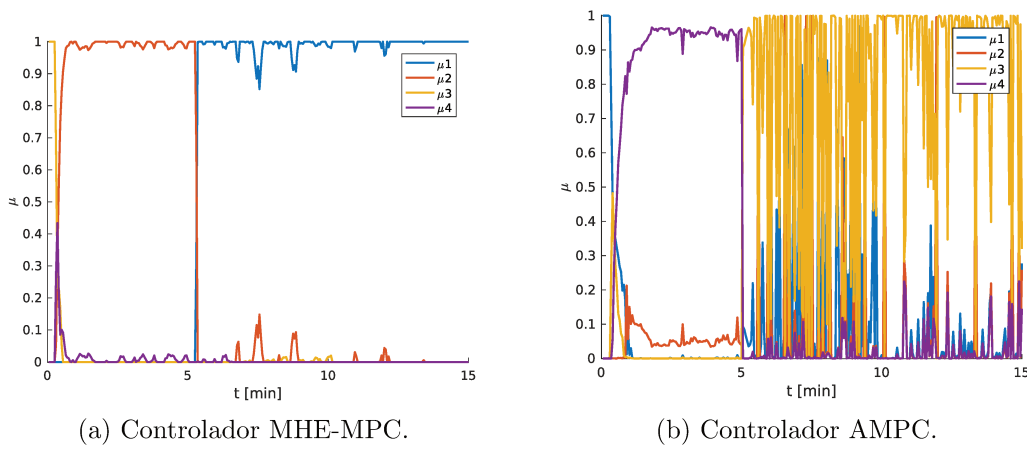


Figura 4.12: Evolución del grado de pertenencia para la obtención del modelo de predicción para el sistema HE.

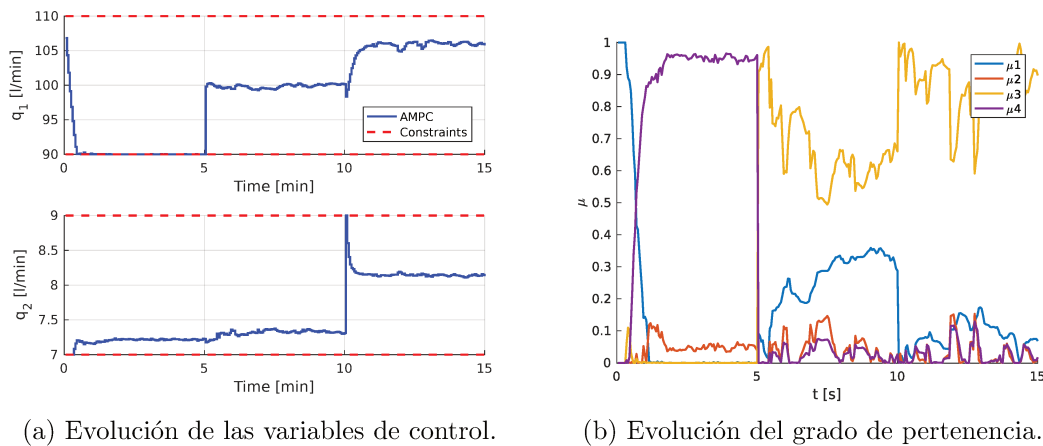


Figura 4.13: Efecto de la penalización de  $\nu_\mu$  en AMPC

deterioro del rendimiento del controlador, el cual tiene un rendimiento aceptable pero con un gran empleo de los actuadores.

Por otro lado, la Tabla 4.2 expone el OCE en términos del tiempo transcurrido como porcentaje del tiempo de muestreo. En primer lugar, se resalta que el tiempo empleado por el controlador AMPC continua siendo alto a pesar de las simplificaciones impuestas. En cambio, en los controladores restantes el OCE es sólo una pequeña porción del tiempo de muestreo y permite su utilización en aplicaciones en tiempo real.

Por último, en la Fig. 4.14 se muestra la descomposición del tiempo total transcurrido por el cómputo del controlador en cada una de las etapas QP. De esta manera, se observa que el esfuerzo computacional medio producto del MHE es 0,21 %, mientras que el de la etapa MPC es 0,38 %

Como consecuencia del análisis realizado se destaca que la adaptación del mo-

Tabla 4.1: Índices de rendimiento de los métodos de control con propósito de seguimiento de referencia en un HE.

	IAE total	ITAE total	IAE seguimiento	ITAE seguimiento	TV
AMPC	+40,728 %	+81,230 %	+62,653 %	+84,685 %	+126,214 %
MHE-MPC	<b>2,8592</b>	<b>15,5858</b>	<b>2,0786</b>	<b>15,1638</b>	+10,879 %
LTI-MPC	+57,558 %	+126,968 %	+80,871 %	+130,761 %	<b>68,6527</b>

Tabla 4.2: Tiempos de esfuerzo de cálculo de las estrategias de control con respecto al tiempo de muestreo en un HE.

	mínimo	promedio	máximo
AMPC	9,3012 %	18,2433 %	55,1253 %
MHE-MPC	0,5160 %	0,59671 %	3,7842 %
LTI-MPC	<b>0,3263 %</b>	<b>0,36581 %</b>	<b>0,5755 %</b>

delo predicción permite mejorar el desempeño del sistema controlado, y la consideración de los conceptos seguimiento de referencia permite que no deba modificarse la formulación ante un cambio de referencia, incluso para sistemas no lineales.

### 4.3.2. Ejemplo de aplicación II - Reactor continuo de tanque agitado

En este ejemplo se analiza un CSTR como el estudiado en la Sección 3.4.2 y cuyo modelo dinámico así como sus parámetros, se encuentran en el Apéndice D.2.2. Adicionalmente, se consideran el modelo politópico dado en la Tabla 3.4, el tiempo de muestreo, las matrices de peso de las etapas MPC y MHE y las restricciones detallados en la Sección 3.4.2. Sin embargo, el horizonte de predicción se reduce a  $N = 6$  pasos, se considera un estado inicial  $x_0 = [95 \text{ l}; 0,04 \text{ mol l}^{-1}; 459,3354 \text{ K}]$  y se fijan los puntos de operación  $x_{s1} = [105 \text{ l}; 0,12 \text{ mol l}^{-1}; 433,7211 \text{ K}]$ ,  $x_{s2} = [95 \text{ l}; 0,12 \text{ mol l}^{-1}; 435,6120 \text{ K}]$  y  $x_{s3} = [95 \text{ l}; 0,07 \text{ mol l}^{-1}; 447,1882 \text{ K}]$ , los cuales se aplican en intervalos de 9 min. Tal como se establece en las simulaciones previas, para el controlador denominado MHE-MPC se utilizan la misma cantidad de pasos para el horizonte de predicción que para el de estimación. Asimismo se incorpora una señal de ruido blanco de medición en las variables de salida de 0,003 l, 0,001 mol l<sup>-1</sup> y 0,01 K, respectivamente.

En la Fig. 4.15 se observan el elipsoide terminal (en color verde), el conjunto de restricciones de estados (en color rojo) y las trayectorias de estados del sistema controlado al aplicar cada uno de los controladores analizados, donde se observa que las mismas evolucionan hacia los puntos de operación fijados sin reformular los controladores. Se destaca que, tal como sucede en el caso de regulación, el amplio rango de trabajo y las fuertes no linealidades que presenta el sistema no permiten realizar el control por medio de un controlador LTI-MPC y por ello no se observa la curva correspondiente.

En la Fig. 4.16 se muestra en detalle la evolución de las variables del sistema controlado en función del tiempo. En la Fig. 4.16a se observa el comportamiento

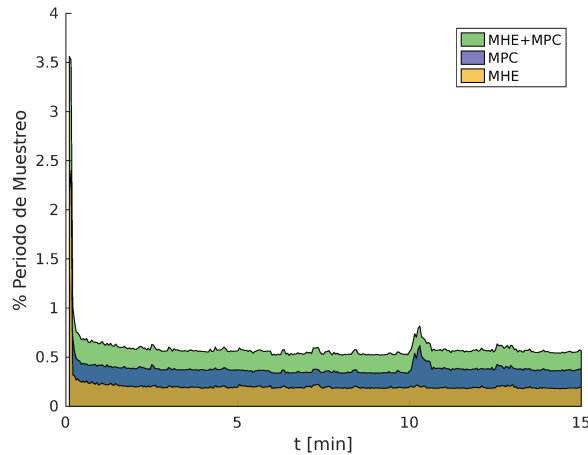


Figura 4.14: Carga computacional producto del MHE-MPC para seguimiento de referencia aplicado a un sistema HE.

de los estados cuando se aplican las señales de control (Fig. 4.16b) obtenidas mediante cada uno de los controladores adaptativos propuestos. En este ejemplo, se observa que al introducirse el primer cambio de referencia a los 9 min, el sistema controlado por el AMPC presenta un sobrepico debido al cambio abrupto del modelo, luego la presencia de ruido en las variables de salida hace que se mantenga la variación en las variables de ponderación y por ello el error en este intervalo es grande. Si el ruido es omitido, lo que implica una situación ideal, entonces el controlador alcanza un modelo de predicción estable (Fig. 4.17b) y con ello, los estados del sistema controlado convergen al punto de operación especificado dentro del intervalo analizado como se observa en la Fig. 4.17a.

Por otro lado, en la Fig. 4.16a se observa que luego de introducir el tercer punto de operación, a los 18 min, se produce un error de *offset*, el cual es mayor para el controlador MHE-MPC. Esto se debe a las no linealidades que presenta el sistema estudiado en el ejemplo, de manera que al buscar el modelo que reduzca el error en los estados puede conducir a un modelo inadecuado, ante esta situación se deben considerar mayor cantidad de puntos de linealización por parámetro para representar mejor la respuesta dinámica del sistema.

Para profundizar en el análisis del modelo de predicción, en la Fig. 4.18 se muestra la evolución de las variables de ponderación a lo largo del tiempo. De esta manera, en la Fig. 4.18a se observa que el modelo de predicción para el primer punto de operación se obtiene como una combinación de los modelos 2 y 4, alternando entre ellos con un predominio del modelo 4. Para la segunda referencia, el modelo nuevamente se forma de la combinación de estos dos modelos con supremacía del modelo 2. Esta situación también se refleja al utilizar el controlador MHE-MPC aunque como se expone en la Fig. 4.18b, las variables  $\mu_j$  se encuentran menos afectadas por la presencia de ruido de medición. En el caso del tercer punto de operación, se observa que para el controlador AMPC se obtiene un modelo en el interior del politopo de modelos y en las proximidades del modelo 3, sin embargo para el controlador MHE-MPC el modelo obtenido se corresponde con el modelo

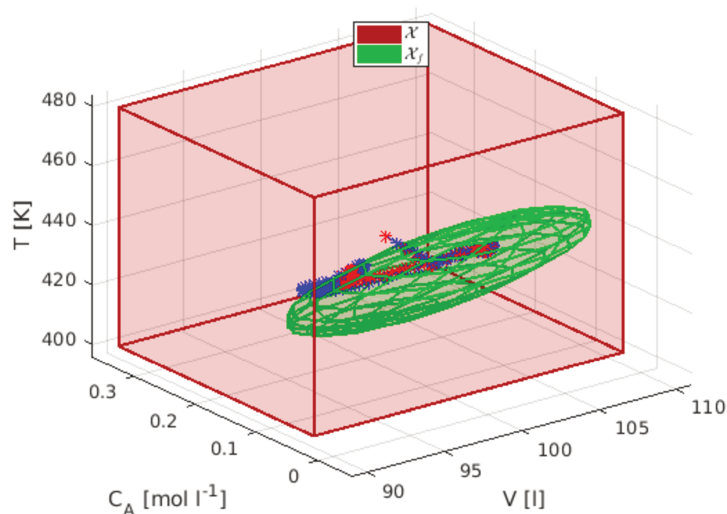


Figura 4.15: Evolución de los estados del sistema CSTR empleando las estrategias de control para seguimiento de referencia.

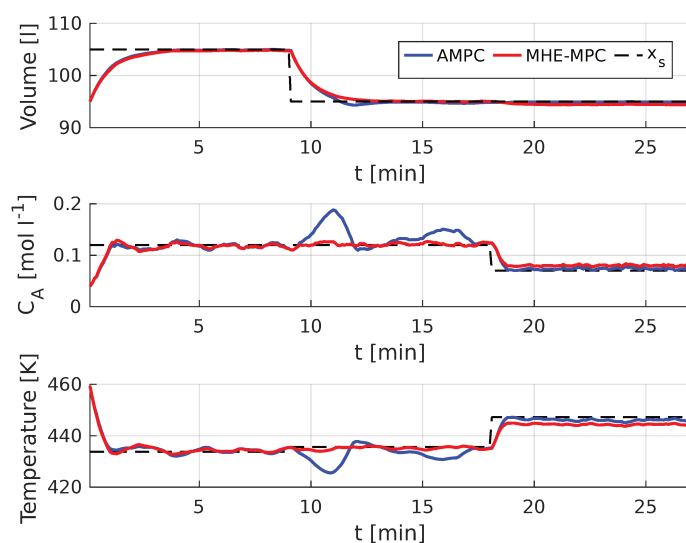
4, esta diferencia en el modelo de predicción produce que este último controlador tenga un error de estado estable mayor durante el intervalo de 18 min a 25 min.

Finalmente, en la Tabla 4.3 se resumen los índices de rendimiento de los métodos empleados. Se observa que el controlador MHE-MPC provee los mejores resultados en términos de IAE e ITAE evaluados en la totalidad del tiempo de simulación y desde los 1,8 min (indicados como seguimiento) donde el sistema se establece en la primera referencia y contempla los diferentes cambios en los puntos de operación. En tanto que el controlador AMPC es el que aplica menos cambios en las variables de control y actuadores. Se destaca que los bajos índices de rendimiento del controlador AMPC son producidos en mayor medida durante el intervalo desde los 9 min hasta los 18 min.

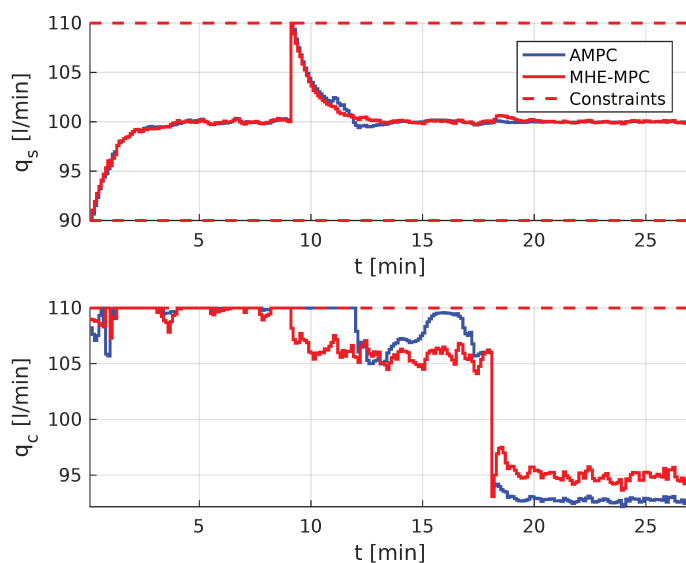
Tabla 4.3: Índices de rendimiento de los métodos de control con propósito de seguimiento de referencia en un CSTR.

	IAE total	ITAE total	IAE seguimiento	ITAE seguimiento	TV
AMPC	+46,995 %	+38,498 %	+52,310 %	+38,616 %	<b>130,9892</b>
MHE-MPC	<b>0,4409</b>	<b>8,2637</b>	<b>0,39698</b>	<b>8,2418</b>	+3,838 %
LTI-MPC	-	-	-	-	-

Por otro lado, la Tabla 4.4 expone el OCE en términos del tiempo transcurrido como porcentaje del tiempo de muestreo. En la misma se observa que el controlador AMPC presenta un tiempo de cálculo aceptable. Sin embargo, en el controlador MHE-MPC el OCE es sólo una pequeña porción del tiempo de muestreo y resulta considerable menor que el controlador en una etapa. Asimismo se destaca que el controlador LTI-MPC no cuenta con índices dado que no se obtienen resultados para el rango de trabajo analizado.



(a) Estados del sistema.



(b) Variable de control.

Figura 4.16: Evolución temporal de las variables del sistema CSTR empleando las estrategias de control con propósito de seguimiento de referencia.

Tabla 4.4: Tiempos de esfuerzo de cálculo de las estrategias de control con respecto al tiempo de muestreo en un CSTR.

	mínimo	promedio	máximo
AMPC	4,1701 %	8,0375 %	26,4943 %
MHE-MPC	<b>0,21688 %</b>	<b>0,2472 %</b>	<b>1,4989 %</b>
LTI-MPC	-	-	-

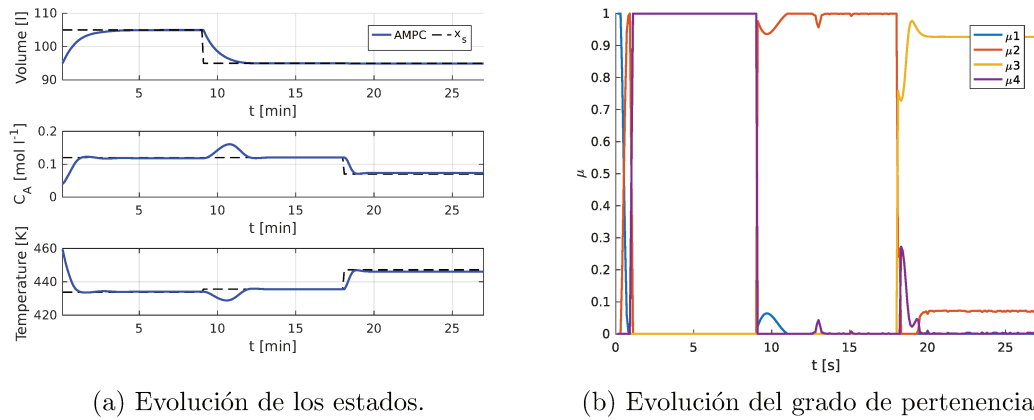


Figura 4.17: Efecto de la omisión del ruido de medición al aplicar AMPC

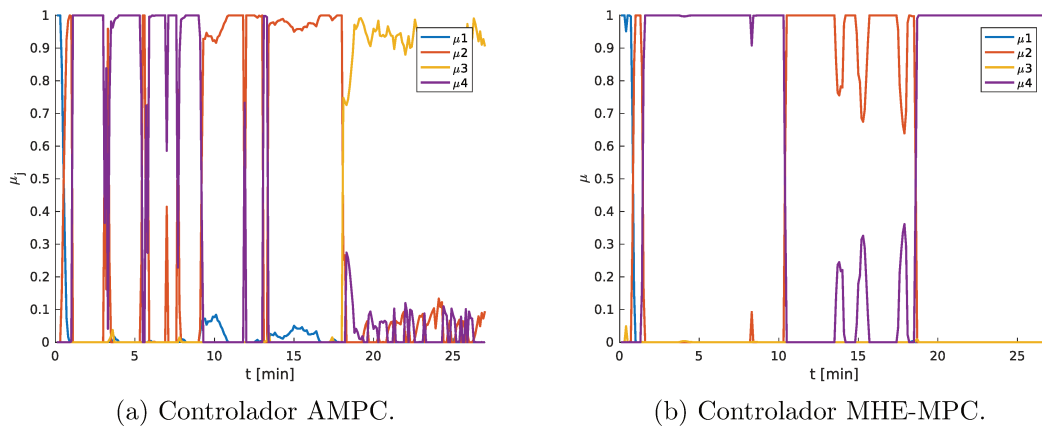


Figura 4.18: Evolución del grado de pertenencia para la obtención del modelo de predicción para el sistema CSTR.

En última instancia, en la Fig. 4.19 se muestra la descomposición del tiempo total transcurrido por el cómputo del controlador MHE-MPC en cada una de las etapas QP. De esta manera, se observa que el esfuerzo computacional medio producto del MHE es 0,10%, mientras que el de la etapa MPC es 0,14%

Como consecuencia del análisis realizado se destaca que la adaptación del modelo predicción permite el control de sistemas no lineales en rangos de trabajo donde un modelo lineal no es suficiente, y la consideración de los conceptos seguimiento de referencia permite que no deba modificarse la formulación ante un cambio de referencia.



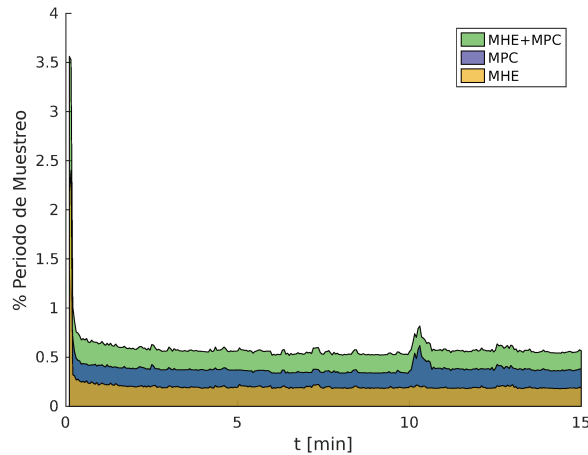


Figura 4.19: Carga computacional producto del MHE-MPC para seguimiento de referencia aplicado a un sistema CSTR.

## 4.4. Conclusiones

En este capítulo se presentaron dos estrategias de control predictivo adaptativas para seguimiento de referencia, aplicables a sistemas con incertidumbre paramétrica y sistemas no lineales representados mediante el enfoque de modelos LPV. Estas técnicas son una extensión de las formulaciones presentadas en el Capítulo 3 para su aplicación a *tracking* y de la estrategia de MPC para seguimiento de referencia presentada en la Sección 2.2.3 a representaciones multi-modelos de la planta.

De esta manera, con base en las condiciones de estabilidad presentadas en la Sección 3.2 y fundamentalmente en los Teoremas 3.1 y 3.2, se definen adecuadamente el costo y la restricción terminal tomando en cuenta el conjunto de puntos de operación factibles. La combinación de los controladores de seguimiento de referencia con los controladores adaptativos permite generar controladores MPC que no deben reformularse ante cambios en los puntos de operación dentro de la región contemplada por el modelo LPV ni que deban evaluarse en línea las ecuaciones diferenciales del modelo no lineal que representa al sistema.

En la Sección 4.2.1 se planteó un controlador AMPC de una única etapa. Debido a la gran complejidad y el alto costo computacional que conlleva la obtención simultánea de una secuencia de modelos y una secuencia de controles, se introdujo una simplificación en el modelo. Para ello, se empleó un modelo constante a lo largo del horizonte de predicción. Además, se utilizó un estado estacionario artificial que permitió el seguimiento de la referencia establecida con horizontes de predicción más cortos y manteniendo factibilidad recursiva.

En tanto que en la Sección 4.2.2 se presentó un controlador AMPC en dos etapas QP, donde la primera etapa es una estructura MHE que realiza la adaptación del modelo y se corresponde con la definida en el Capítulo 3. Mientras que la segunda etapa corresponde con un MPC para seguimiento de referencias que utiliza el modelo LTI calculado para predicción.

El costo terminal para ambas formulaciones se obtuvo siguiendo el procedimiento indicado en la Sección 4.1 y es equivalente al presentado en el Capítulo 3. De esta manera, mediante la resolución de un problema LMI se obtiene una única matriz de peso que asegura que el costo terminal sea una función de Lyapunov de control para los modelos vértices y, por convexidad, para cualquier modelo del interior del politopo.

Por otra parte, el conjunto terminal se calculó tomando en cuenta todos los puntos de operación posibles. Para ello, se utilizó un sistema de estado extendido que permite caracterizar por medio de un parámetro el estado y la entrada de equilibrio de forma compacta. Se observó que los conjuntos terminales obtenidos para seguimiento de referencia contienen los conjuntos calculados con propósito de regulación presentados en el Capítulo 3, lo que permitió el uso de horizonte de predicción más cortos.

Finalmente, en la Sección 4.3 se encaró el problema de control de dos operaciones unitarias comunes de la industria de procesos. En este sentido, se realizaron simulaciones numéricas de un intercambiador de calor y de un reactor continuo de tanque agitado. En el HE, bajo las condiciones planteadas, las tres técnicas mostraron un rendimiento aceptable y la capacidad de realizar el control del sistema no lineal ante los cambios de referencia introducidos. Sin embargo, la técnica de MPC adaptativo en dos etapas mostró un desempeño superior, donde se destaca un buen rechazo a las perturbaciones externas, introducidas como ruido blanco en las salidas, y reducción del error de estado estable. En el caso del método de MPC adaptativo en una etapa, se observó que diferentes modelos LTI podían reducir el funcional costo en ante una reducción de la temperatura del fluido de proceso, ante esta situación se planteó que introducir una penalización en la varianza de las variables de ponderación otorga un mejor desempeño y reduce la influencia de las perturbaciones externas. Para esta última técnica y este sistema, el esfuerzo computacional en línea resultó elevado y puede dificultar su implementación en procesos reales.

A su vez, en la simulación del sistema CSTR, no fue posible realizar el control por medio del controlador LTI-MPC resaltando la importancia de las técnicas adaptativas, las cuales mostraron un desempeño aceptable para el control del sistema con puntos de operación cambiantes. A lo largo del análisis, se observó que la técnica de MPC adaptativo en dos etapas mostró un mejor rechazo de las perturbaciones aunque al introducir la tercera referencia se produjo un error de estado estable mayor que para la otra técnica adaptativa. Por el contrario, el método de MPC adaptativo de una etapa mostró un pobre rechazo a perturbaciones, principalmente en el segundo punto de operación fijado, pero una mejor obtención del modelo de predicción en el intervalo de la tercera referencia que permitió reducir el error de estado estable. En este caso, los tiempos de cálculo resultaron menores que para el sistema HE, permitiendo su implementación en aplicaciones reales en función de las necesidades requeridas.



# Capítulo 5

## Conclusiones

Este capítulo contiene un resumen de las contribuciones principales de la tesis, una discusión detallada de los resultados obtenidos y una idea de posibles líneas de investigación futuras.

### 5.1. Resumen y contribuciones de la tesis

En esta tesis se abordó el análisis y el diseño de controladores MPC para sistemas no lineales, representados mediante una familia finita de modelos lineales, sujetos a restricciones. Dada la importancia de garantizar la estabilidad del sistema controlado, se profundizó en los conceptos de estabilidad y factibilidad de los controladores predictivos. Para ello, la base teórica abordada se corresponde con la teoría de Lyapunov y la teoría de conjuntos invariantes, empleadas a lo largo de la tesis para verificar los requisitos de estabilidad de los controladores propuestos.

Por su parte, el marco que ofrecen las Desigualdades Matriciales Lineales (LMI) permitió incorporar múltiples modelos en los problemas de optimización, por lo tanto la utilización de esta herramienta ha permitido el cálculo de los ingredientes terminales para el modelo LPV que representa al sistema.

El enfoque abordado a lo largo de la tesis posibilitó la utilización de multi-modelos lineales para incorporar incertidumbres paramétricas y/o para contemplar las no linealidades del sistema. Sin embargo, para su aplicación en el control se realizó la adaptación en línea del modelo permitiendo reducir el conservadurismo de las técnicas propuestas.

En consecuencia, los temas tratados en los diferentes capítulos son: en el Capítulo 1 se introdujo la temática abordada, se analizó la literatura existente, y se propusieron objetivos puntuales para el trabajo de tesis. En el Capítulo 2 se presentaron las definiciones propias del área, se describió brevemente la representación de los sistemas mediante modelos LPV y se presentaron dos enfoques diferentes para aplicar el control óptimo en sistemas dinámicos con restricciones, el Control Predictivo basado en Modelos (MPC) y el Control Óptimo mediante LMI.

Además, en el Capítulo 3 se propuso el diseño de controladores predictivos basado en modelos con la posibilidad de adaptar el modelo en línea con fines de

regulación. Para ello, se planteó un algoritmo de control predictivo adaptativo en una etapa donde se obtienen simultáneamente una secuencia de modelos y una secuencia de señales de control. Dada la naturaleza no lineal del problema de optimización resultante y el alto costo computacional, a seguir se formuló un algoritmo de control predictivo adaptativo en dos etapas, donde la primera etapa se encarga de obtener el modelo que describe al sistema en función de los datos medidos y la segunda etapa obtiene la secuencia de señales de controles empleando el modelo lineal obtenido como modelo de predicción. Este enfoque aportó mayor velocidad de cálculo.

En tanto que en el Capítulo 4, los controladores presentados en el Capítulo 3 se ampliaron para seguimiento de referencia, esto implica que los controladores propuestos no deben ser reformulados ante cambios en los puntos de operación que surjan durante el normal funcionamiento del sistema. Para ello, se planteó un algoritmo de control predictivo adaptativo en una etapa que obtiene simultáneamente un modelo de predicción, minimizando las diferencias con el modelo que describe al sistema en el punto de operación, y la secuencia de señales de control. Además, se formuló un algoritmo de control predictivo adaptativo en dos etapas, donde la etapa de control contempla un punto de operación artificial para el seguimiento de la referencia. En el Capítulo 4, se analizó y desarrolló los ingredientes terminales para garantizar estabilidad y factibilidad del sistema de control.

Por último, cabe destacar que para cada método estudiado se expusieron los resultados de simulaciones numéricas, permitiendo evaluar y generar discusiones cualitativas y cuantitativas sobre su desempeño, utilizando gráficos e índices de rendimiento.

## 5.2. Trabajos futuros

Las alternativas que ofrece el control predictivo basado en modelos y el gran avance que presentó en las últimas décadas, hacen que siga siendo un área de investigación abierta e interesante con un futuro prometedor. En base a esta línea de investigación, el desarrollo y la aplicación de los métodos de control MPC adaptativo propuestos, tiene continuidad a través de las siguientes áreas de trabajo:

- Extensión de las técnicas propuestas a estrategias de MPC económico, de manera de incluir objetivos económicos en el diseño del controlador.
- Extensión de las técnicas propuestas a estrategias de MPC robusto, si bien se mostró que las técnicas de AMPC presentan un buen rechazo a perturbaciones aditivas, las mismas no se contemplaron en el procedimiento de diseño tal como lo realizan las técnicas de MPC robusto.
- Empleo funciones de Lyapunov dependiente de parámetros para el cálculo del costo y el conjunto terminal en el procedimiento de diseño del MPC, para obtener un mayor dominio de atracción.
- Inclusión de restricciones estocásticas, para reducir el conservadurismo y ampliar el alcance de sus aplicaciones.

# Listado de Publicaciones

## Publicaciones en Revistas

- Pipino, H. A., Cappelletti, C. A., and Adam, E. J. (2021). Adaptive multi-model predictive control applied to continuous stirred tank reactor. *Computers & Chemical Engineering*, 145, 107195. doi: 10.1016/j.compchemeng.2020.107195.
- Pipino, H. A., Morato, M. M., Bernardi, E., Adam, E. J., and Normey-Rico, J. E. (2020). Nonlinear temperature regulation of solar collectors with a fast adaptive polytopic LPV MPC formulation. *Solar Energy*, 209, 214-225. doi: 10.1016/j.solener.2020.09.005.

## Publicaciones en Congresos Nacionales e Internacionales

- Bernardi, E., Pipino, H. A., Cappelletti, C. A., and Adam, E. J. (2021). Adaptive Predictive Control for Industrial Processes. XIX Workshop on Information Processing and Control (RPIC). San Juan, Argentina. doi: 10.1109/RPIC53795.2021.9648446.
- Pipino, H. A., Bernardi, E., Cappelletti, C. A., and Adam, E. J. (2020). Predictive Control Methods for Multi-Model Systems. 2020 IEEE Biennial Congress of Argentina (ARGENCON), Resistencia, Argentina. doi: 10.1109/ARGENCON49523.2020.9505546.
- Pipino, H. A., Bernardi, E., Morato, M. M., Cappelletti, C. A., Adam, E. J., and Normey-Rico, J. E. (2020). Formulación de un LPV-MPC Adaptativo para Procesos Industriales No Lineales. 27° Congreso Argentino de Control Automático (AADECA).
- Morato, M. M., Pipino, H. A., Bernardi, E., Ferreyra, D. M., Adam, E. J., and Normey-Rico, J. E. (2020). Sub-optimal Linear Parameter Varying Model Predictive Control for Solar Collectors. 2020 IEEE International Conference on Industrial Technology (ICIT), Buenos Aires, Argentina. doi: 10.1109/ICIT45562.2020.9067139.

- Pipino, H. A., and Adam, E. J. (2019). MPC for Linear Systems with Parametric Uncertainty. 2019 XVIII Workshop on Information Processing and Control (RPIC), Bahía Blanca, Argentina. doi: 10.1109/RPIC.2019.8882151.
- Cappelletti, C. A., Bernardi, E., Pipino, H., and Adam, E. J. (2018). Optimum Multiobjective Regulator with Variable Gain Matrix Applied to an Industrial Process. 2018 Argentine Conference on Automatic Control (AADECA), Buenos Aires, Argentina. doi: 10.23919/AADECA.2018.8577354.

# Apéndice A

## Conjuntos Aplicados al Control

Un conjunto es una colección de elementos con características similares considerada en sí misma como un objeto. Un conjunto puede definirse por extensión, cuando se detallan todos los elementos que forman parte del mismo, o por comprensión, cuando se enuncia la propiedad que caracteriza a sus elementos. Un ejemplo de definición por comprensión es  $\mathcal{A} = \{x : x > 0\}$ .

Un subconjunto es un conjunto que cumple con la propiedad de inclusión, se dice que el conjunto  $\mathcal{B}$  está contenido en  $\mathcal{A}$  (o que  $\mathcal{B}$  es un subconjunto de  $\mathcal{A}$ ),  $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ , si todos los elementos de  $\mathcal{B}$  son elementos de  $\mathcal{A}$ . Simbólicamente se expresa:  $\mathcal{B} = \{x \in \mathcal{B} : x \in \mathcal{A}\}$

Así, por ejemplo, se podría definir el conjunto vecindad a un punto  $\bar{x}$  situado en un conjunto  $\mathbb{R}^n$  como  $\mathcal{B}_\epsilon(\bar{x}) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - \bar{x}\| < \epsilon\}$ , para todo  $\epsilon > 0$ .

En función del conjunto vecindad, se puede definir la **frontera** de un conjunto  $\mathcal{A}$ . Un elemento  $x$  está en la frontera ( $\delta\mathcal{A}$ ) del conjunto  $\mathcal{A}$ , si  $\mathcal{B}_\epsilon(x)$  contiene al menos un punto en  $\mathcal{A}$  y punto fuera de  $\mathcal{A}$  para cada  $\epsilon > 0$ .

De este modo, un conjunto  $\mathcal{A}$  es **cerrado** si y sólo si contiene todos los puntos de su frontera. Por el contrario, un conjunto  $\mathcal{A}$  es **abierto** si y sólo si no contiene ningún punto de su frontera. Notar que un conjunto puede no ser abierto ni cerrado si contiene sólo algunos puntos de su frontera. Por su parte, un conjunto puede ser abierto y cerrado, tal es el caso del conjunto vacío y el espacio total.

Un conjunto es **acotado** si está contenido en una vecindad de radio suficientemente grande, pero acotado. Si el conjunto es acotado y cerrado, se dice que es **compacto**.

Un conjunto  $\mathcal{A}$  se dice **convexo** si para todo  $x, y \in \mathcal{A}$ ,  $\{\lambda x + (1 - \lambda)y : 0 \leq \lambda \leq 1\} \subset \mathcal{A}$ .

Los polítopos convexos, casco convexo o envoltura convexa de un conjunto finito de puntos, también pueden representarse como la intersección de hemiespacios. Esta intersección puede escribirse como la desigualdad matricial  $Ax \leq b$ , donde  $A$  es una matriz de  $n$  por  $m$ , con  $n$  el número de hemiespacios y  $m$  el número de dimensiones del polítopo, y  $b$  un vector columna de  $n$  elementos.

Los poliedros se conciben como cuerpos tridimensionales, pero hay semejantes topológicos del concepto en cualquier dimensión. Así, el punto o vértice es el semejante topológico del poliedro en cero dimensiones, una arista o segmento lo es en 1 dimensión y el polígono para 2 dimensiones. Todas estas formas son cono-



cidas como politopos, por lo que podemos definir un poliedro como un politopo tridimensional.

## A.1. Operaciones con conjuntos

A continuación se definen algunas de las operaciones que se pueden llevar a cabo con conjuntos.

**Unión:** Sean  $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^n$  y  $\mathcal{B} \subset \mathbb{R}^n$  dos conjuntos, se define la unión entre  $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{B}$ ,  $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ , al conjunto cuyos elementos pertenecen a  $\mathcal{A}$  o a  $\mathcal{B}$  o a ambos. Simbólicamente se expresa:  $\mathcal{A} \cup \mathcal{B} = \{x : x \in \mathcal{A} \text{ o } x \in \mathcal{B}\}$ . En la Fig. A.1a se representa la unión de dos conjuntos, donde en azul se observa el resultado de la operación.

**Intersección:** Sean  $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^n$  y  $\mathcal{B} \subset \mathbb{R}^n$  dos conjuntos, se define la intersección entre  $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{B}$ ,  $\mathcal{A} \cap \mathcal{B}$ , al conjunto cuyos elementos pertenecen a  $\mathcal{A}$  y a  $\mathcal{B}$ . Simbólicamente se expresa:  $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \{x : x \in \mathcal{A} \text{ y } x \in \mathcal{B}\}$ . En la Fig. A.1b se representa la intersección de dos conjuntos, donde en azul se observa el resultado de la operación. Se destaca que la intersección de conjuntos convexos determina un conjunto convexo.

**Suma de Minkowski:** Sean  $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^n$  y  $\mathcal{B} \subset \mathbb{R}^n$  dos conjuntos, se define la suma de Minkowski entre  $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{B}$ ,  $\mathcal{A} \oplus \mathcal{B}$ , como  $\mathcal{A} \oplus \mathcal{B} = \{(a+b) : a \in \mathcal{A} \text{ y } b \in \mathcal{B}\}$ . En la Fig. A.1c se representa la suma de Minkowski de dos conjuntos, donde en azul se observa el resultado de la operación.

**Diferencia de Pontryagin o Conjunto Erosión:** Sean  $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^n$  y  $\mathcal{B} \subset \mathbb{R}^n$  dos conjuntos, se define la diferencia de Pontryagin entre  $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{B}$ ,  $\mathcal{A} \ominus \mathcal{B}$ , como  $\mathcal{A} \ominus \mathcal{B} = \{a : (a+b) \in \mathcal{A}, \forall b \in \mathcal{B}\}$ . En la Fig. A.1d se representa la diferencia de Pontryagin de dos conjuntos, donde en azul se observa el resultado de la operación.

**Escalado de conjuntos:** Sea  $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^n$  un conjunto y sea  $\lambda \in \mathbb{R}$  un escalar, se define el escalado del conjunto  $\mathcal{A}$ ,  $\lambda\mathcal{A}$ , como  $\lambda\mathcal{A} = \{\lambda a : a \in \mathcal{A}\}$ . En la Fig. A.1e se representa el escalado de un conjunto, donde en azul se observa el resultado de la operación.

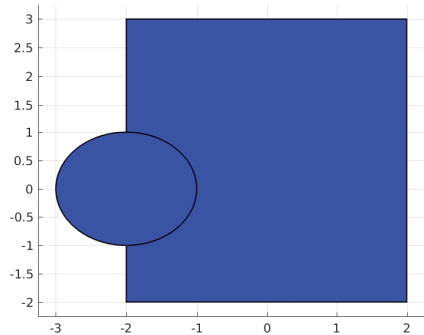
**Proyección de un conjunto:** Sea  $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^{na+nb}$  un conjunto, se define la proyección de  $\mathcal{A}$  sobre un subespacio  $\mathcal{X}_a \subseteq \mathbb{R}^{na}$ ,  $Proj_{\mathcal{X}_a}(\mathcal{A})$ , como  $Proj_{\mathcal{X}_a}(\mathcal{A}) = \{a \in \mathcal{X}_a : \exists b \in \mathcal{X}_b \subset \mathbb{R}^{nb} : (a,b) \in \mathcal{A}\}$ . En la Fig. A.1f se representa la proyección de un conjunto sobre el eje horizontal, donde en azul se observa el resultado de la operación.

## A.2. Conjuntos aplicados al control

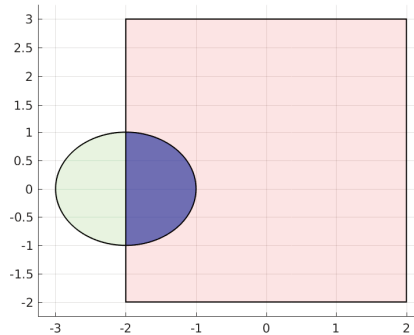
Para un sistema que presente restricciones en sus estados, entradas, velocidad de variación de entrada y/o salidas, se puede considerar que estas variables se encuentran dentro de un politopo como los definidos en esta tesis. Por ejemplo,  $x \in \mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}^{n_x}$  y  $u \in \mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^{n_u}$ .

Considerando un sistema dinámico descrito o aproximado por:

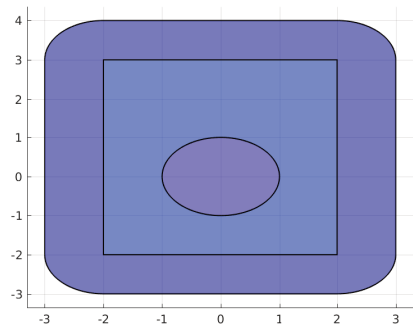
$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(x(t)) \\ y(t) &= g(x(t)), \end{aligned} \tag{A.1}$$



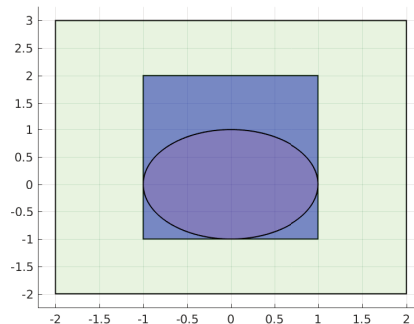
(a) Unión de conjuntos.



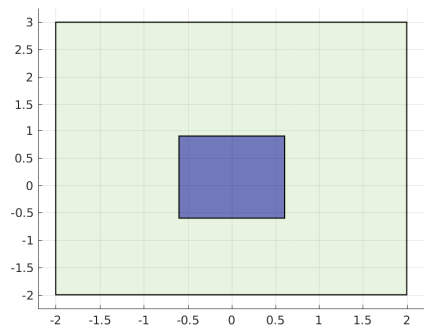
(b) Intersección de conjuntos.



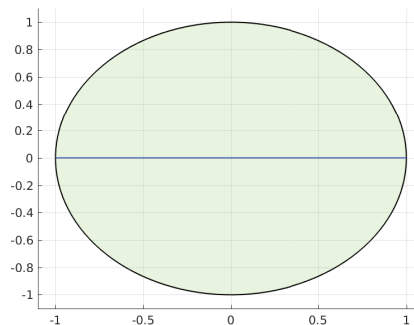
(c) Suma de Minkowski.



(d) Diferencia de Pontryagin.



(e) Escalado de conjuntos.



(f) Proyección de conjuntos.

Figura A.1: Operaciones con conjuntos.

un conjunto  $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{R}^{n_x}$  se dice invariante positivo para el sistema (A.1), si para todo  $x(0) \in \mathcal{A}$  la solución  $x(t) \in \mathcal{A}$  para  $t > 0$ . Si  $x(0) \in \mathcal{A}$  implica que  $x(t) \in \mathcal{A}$  para todo  $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ , luego  $\mathcal{A}$  es invariante [69].

De la misma manera, se puede considerar un sistema dinámico discreto dado por:

$$\begin{aligned} x(k+1) &= f_d(x(k)) \\ y(k) &= g_d(x(k)). \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

Un conjunto  $\mathcal{B} \subseteq \mathbb{R}^{n_x}$  se dice invariante positivo para el sistema (A.2) si para todo  $x(0) \in \mathcal{B}$  la solución  $x(k) \in \mathcal{B}$  para  $k > 0$ . Si  $x(0) \in \mathcal{B}$  implica que  $x(k) \in \mathcal{B}$  para todo  $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ , luego  $\mathcal{B}$  es invariante.

Considerando un sistema discreto, el conjunto invariante tiene la propiedad que  $\mathcal{B}_{N-1} \subseteq \mathcal{B}_N$ , donde  $N$  es el número de pasos, y por lo tanto  $\mathcal{B}_N$  es un conjunto invariante positivo del sistema. Esta propiedad se muestra en la Fig. A.2.

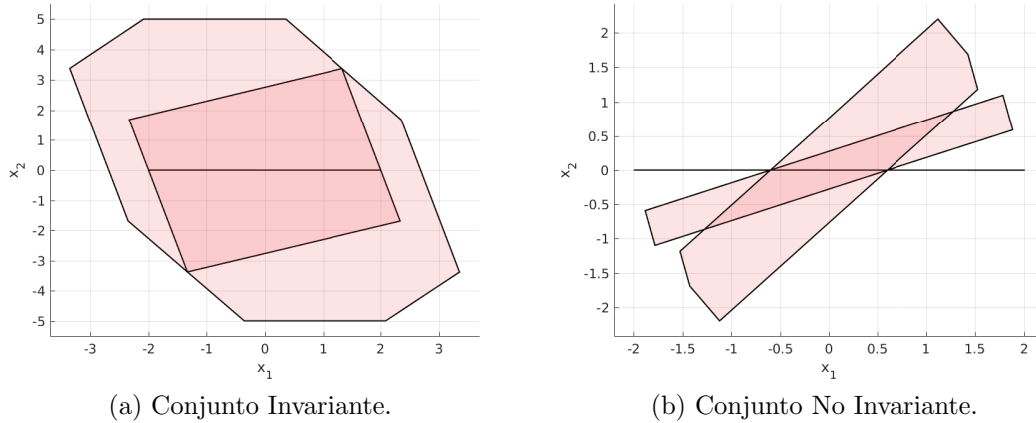


Figura A.2: Inclusión de conjuntos.

Así, se puede pensar a un punto de equilibrio (o conjunto de equilibrios) del sistema dinámico como un conjunto invariante positivo para el sistema. De esta forma, un conjunto invariante es una generalización de un punto de equilibrio.

Si se considera un sistema dinámico perturbado descrito o aproximado por:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(x(t), w(t)) \\ y(t) &= g(x(t)) \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

Un conjunto  $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{R}^{n_x}$  se dice invariante positivo robusto para el sistema (A.3) si para todo  $x(0) \in \mathcal{A}$  y **para todo**  $w(t) \in \mathcal{W}$ , la solución  $x(t) \in \mathcal{A}$  para  $t > 0$  [69].

Si se considera un sistema dinámico controlado descrito o aproximado por:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(x(t), u(t)) \\ y(t) &= g(x(t)) \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

Un conjunto  $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{R}^{n_x}$  se dice invariante de control para el sistema (A.4) si existe **una** ley de control admisible que asegura la existencia y unicidad de la solución y es tal que  $\mathcal{A}$  es un invariante positivo para el sistema de lazo cerrado [69].

Al igual que para el sistema dinámico autónomo, el conjunto de equilibrios de control dado por  $x = f(x, u)$ , **para alguna**  $u \in \mathcal{U}$ , puede entenderse como un conjunto invariante de control.

Un conjunto invariante  $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{X}$  será además contractivo si para  $x \in \mathcal{B}$  implica que  $f(x) \in \lambda \mathcal{B}$  para algún  $\lambda \in [0, 1)$ . Un conjunto se dice  $\lambda$ -invariante de control (contractivo) si para  $x \in \mathcal{B}$  implica que  $f_d(x, u) \in \lambda \mathcal{B}$  para alguna  $u \in \mathcal{U}$  y para algún  $\lambda \in [0, 1)$ .

El conjunto a un paso del conjunto  $\mathcal{B}$ ,  $Q(\mathcal{B})$ , es el conjunto de estados  $x$  para los cuales existe una acción de control admisible  $u \in \mathcal{U}$  tal que el sistema alcanza el conjunto  $\mathcal{B}$  en un solo paso  $f_d(x, u) \in \mathcal{B}$ . Simbólicamente,  $Q(\mathcal{B}) = \{x \in \mathcal{X} : \exists u \in \mathcal{U} \text{ tal que } f_d(x, u) \in \mathcal{B}\}$ . El opuesto al conjunto a un paso es el conjunto de alcance.

El conjunto controlable en  $i$  pasos  $C_i(\mathcal{X}, \mathcal{B})$  es el conjunto de estados para los cuales existe una secuencia de acciones de control admisibles tal que conduce el sistema hasta el conjunto  $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{X}$  en  $i$  pasos con una trayectoria admisible. Simbólicamente,  $C_i(\mathcal{X}, \mathcal{B}) = \{x(0) \in \mathcal{X} : \text{para todo } k = 0, \dots, i-1, \exists u(k) \in \mathcal{U} \text{ tal que } x(k) \in \mathcal{X}, \text{ y } x(i) \in \mathcal{B}\}$ .

El cálculo de la secuencia se puede obtener haciendo  $C_{i+1}(\mathcal{X}, \mathcal{B}) = Q(C_i(\mathcal{X}, \mathcal{B})) \cap \mathcal{X}$ , con  $C_0(\mathcal{X}, \mathcal{B}) = \mathcal{B}$ .

En oposición a los conjuntos controlables, están los conjuntos alcanzables.

El conjunto alcanzable en  $i$  pasos  $\mathcal{A}_i(\mathcal{B})$  es el conjunto de estados a los cuales puede evolucionar el sistema partiendo de  $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{X}$ , ante una secuencia de actuaciones admisibles en  $i$  pasos. Simbólicamente,  $\mathcal{A}_i(\mathcal{B}) = \{z \in \mathbb{R}^{n_x} : \text{para todo } k = 0, \dots, i-1, \exists u(k) \in \mathcal{U} \text{ tal que } x(i) = z\}$ .

El conjunto admisible en  $i$  pasos  $\mathcal{Ad}_i(\mathcal{X})$  es el conjunto de estados para los cuales existe una secuencia de actuaciones admisibles tal que la evolución del sistema permanece en el conjunto  $\mathcal{X}$  durante los  $i$  instantes siguientes. Simbólicamente,  $\mathcal{Ad}_i(\mathcal{X}) = \{x(0) \in \mathcal{X} : \text{para todo } k = 0, \dots, i-1, \exists u(k) \in \mathcal{U} \text{ tal que } x(k+1) \in \mathcal{X}\}$ .

Cuando  $i \rightarrow \infty$ , si  $\mathcal{Ad}_\infty(\mathcal{X})$  es el máximo invariante de control contenido en  $\mathcal{X}$ , entonces los conjuntos  $\mathcal{Ad}_\infty(\mathcal{X})$  y  $C_\infty(\mathcal{X}, \mathcal{B})$  tienden a ser iguales.

### A.2.1. Cálculo de un conjunto invariante con modelo LTI

Los conjuntos invariantes presentan un rol fundamental en las condiciones de estabilidad y, mientras mayor sean éstos, permiten ampliar los conjuntos alcanzables si se mantiene constante el horizonte de predicción. Por ello, en esta sección se presenta un algoritmo para hallar el máximo conjunto invariante de regulación basado en un modelo LTI con restricciones tanto en las variables de estados como en las variables de control o manipuladas.

En este sentido, se considera un modelo descrito por:

$$\begin{aligned} x(k+1) &= Ax(k) + Bu(k) \\ y(k) &= Cx(k) + Du(k) \\ x(0) &= x_0 \end{aligned} \tag{A.5}$$

donde las matrices  $A \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{n_x \times n_u}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{n_y \times n_x}$  y  $D \in \mathbb{R}^{n_y \times n_u}$  son constantes,  $x(k) \in \mathbb{R}^{n_x}$ ,  $u(k) \in \mathbb{R}^{n_u}$  e  $y(k) \in \mathbb{R}^{n_y}$  son las variables de estado, de control y de salida del sistema, respectivamente, en el instante actual y  $x(k+1) \in \mathbb{R}^{n_x}$  es la variable de estado del sistema en el instante siguiente, es decir, luego de un período de muestreo.

Tanto los estados y la variable de control se encuentran restringidos mediante:

$$\begin{aligned} x(k) &\in \mathcal{X}, \\ u(k) &\in \mathcal{U}, \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

siendo éstos subconjuntos convexos y compactos de  $\mathbb{R}^{n_x}$  y  $\mathbb{R}^{n_u}$ , respectivamente, que contienen el origen en su interior.

En función de lo expresado en este apéndice, los politopos convexos de la Ec. (A.6) pueden escribirse como una desigualdad matricial, es decir:

$$\begin{aligned} A_x x(k) &\leq b_x, \\ A_u u(k) &\leq b_u. \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

Se contemplan además *ingredientes* terminales como los que surgen de aplicar un LQR como control local. De esta manera, se obtiene una matriz de ganancias de realimentación:

$$\kappa_f = (B^T P B + R)^{-1} B^T P A, \quad (\text{A.8})$$

que determina una matriz de lazo cerrado  $A_{\kappa_f} = A - B\kappa_f$ , considerando  $u(k) = -\kappa_f x(k)$ .  $P$  surge de la solución a la ecuación algebraica de Riccati en tiempo discreto.

Luego, la Ec. (A.7) queda expresada en términos de los estados:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} A_x \\ A_u \kappa_f \end{bmatrix}}_{A_Z} x \leq \underbrace{\begin{bmatrix} b_x \\ b_u \end{bmatrix}}_{b_Z}. \quad (\text{A.9})$$

Con los conceptos introducidos, es posible presentar el algoritmo correspondiente para obtener el máximo conjunto invariante terminal:

### Algoritmo A.2.1.

1. Definir el conjunto de restricciones (Ec. (A.9)).
2. Inicializar  $i = 1$ .
3. Almacenar el conjunto de restricciones como  $\mathcal{O}_i$ .
4. Generar el conjunto  $A_Z A_{\kappa_f}^i x \leq b_Z$ .
5. Realizar la intersección con  $\mathcal{O}_i$ , para obtener el conjunto  $\mathcal{O}_{i+1}$ .
6. Verificar si  $\mathcal{O}_i \subseteq \mathcal{O}_{i+1}$ . Si se cumple la condición,  $\mathcal{O}_{i+1}$  es el máximo conjunto invariante y finaliza el algoritmo. Si no se verifica, se incrementa  $i$ , se asigna  $\mathcal{O}_i = \mathcal{O}_{i+1}$  y se retorna al paso 4.

# Apéndice B

## Desigualdades Matriciales Lineales

Una LMI, tal como su nombre lo indica, es una desigualdad en la que las variables son matrices. Las LMIs determinan regiones convexas, por ejemplo, elipsoides o politopos (como se plantea en Apéndice A), que en los problemas de control se traducen en restricciones convexas [70]. Diferentes aspectos del controlador pueden expresarse mediante LMIs, entre los que pueden destacarse restricciones en las variables, ubicación de polos e incluso condiciones para la estabilidad.

### B.1. Estabilidad de sistemas lineales

Aleksandr Lyapunov mediante su tesis doctoral introdujo lo que usualmente llamamos teoría de la estabilidad de Lyapunov [29, 71]. Donde se establece que un sistema autónomo lineal (sólo depende del estado inicial y no se puede modificar externamente la evolución):

$$\dot{x}(t) = Ax(t) \tag{B.1}$$

es asintóticamente estable, si y sólo si, existe una matriz definida positiva ( $P > 0$ ) tal que:

$$A^T P + PA < 0, \tag{B.2}$$

lo que se denomina desigualdad de Lyapunov en  $P$ , que constituye una LMI, la cual puede resolverse explícitamente. Así, es posible elegir una  $Q = Q^T > 0$  y luego resolver la ecuación lineal  $A^T P + PA = -Q$  para la matriz  $P$ , que está garantizada como definida positiva si el sistema (B.1) es estable. En resumen, la primer LMI utilizada para analizar la estabilidad de un sistema dinámico fue la desigualdad de Lyapunov (B.2), que se resuelve analíticamente a través de un conjunto de ecuaciones lineales.

Por su parte, si se considera un sistema de control lineal (se puede aplicar una acción externa arbitraria que modifica la evolución del sistema):

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \tag{B.3}$$

el cual se pretende controlar mediante un controlador óptimo. La construcción del controlador puede calcularse mediante la desigualdad de Riccati:

$$A^T P + PA + PBR^{-1}B^T P + Q < 0, \quad (\text{B.4})$$

donde  $Q$ , una matriz simétrica fija semidefinida positiva, y  $R$ , una matriz simétrica fija definida positiva, constituyen los parámetros del controlador. Si bien la Ec. (B.4) garantiza la estabilidad, no constituye una LMI debido a que es cuadrática en  $P$ . Sin embargo, esta desigualdad puede transformarse en una LMI mediante el complemento de Schur.

## B.2. Complemento de Schur

La definición de “Complemento de Schur” fue introducida por Haynsworth [72] y está basada en la fórmula planteada por Issai Schur. Dicha definición establece que para una matriz  $A$ , conformada por submatrices, de la forma:

$$A = \begin{pmatrix} B & C \\ D & E \end{pmatrix},$$

el complemento de Schur de  $E$  en  $A$  es  $B - CE^{-1}D$ .

La desigualdad de Riccati indicada en Ec. (B.4), puede escribirse:

$$-Q - A^T P - PA - PBR^{-1}B^T P > 0,$$

la cual mediante la aplicación del complemento de Schur puede expresarse como

$$\begin{pmatrix} -Q - A^T P - PA & PB \\ B^T P & R \end{pmatrix} > 0. \quad (\text{B.5})$$

Notar que la Ec. (B.5) es una desigualdad matricial lineal en  $P$ , por lo que es una LMI y puede utilizarse como una restricción convexa en problemas de control.

# Apéndice C

## Linealización Jacobiana Parametrizada

Un proceso no lineal arbitrario puede modelarse a través de la siguiente representación general en espacio de estados:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= f(x(t), u(t)) \\ y(t) &= g(x(t), u(t)) \\ x(0) &= x_0\end{aligned}\tag{C.1}$$

donde  $x(t) \in \mathbb{R}^{n_x}$ ,  $u(t) \in \mathbb{R}^{n_u}$ ,  $y(t) \in \mathbb{R}^{n_y}$  son los vectores de estados, entradas y salidas, respectivamente. Además,  $x_0$  es el vector de estados iniciales del sistema.

Entonces, si las funciones no lineales  $f(x(t), u(t))$  y  $g(x(t), u(t))$  son continuamente diferenciables con respecto a  $x$  y  $u$ , el modelo puede linealizarse siguiendo la técnica de Linealización Jacobiana Parametrizada (PJJ). Esta técnica se utiliza para crear un sistema LPV compuesto por una familia de modelos lineales de la planta y es una de las más utilizadas para la obtención de modelos LPV [73, 74].

El método PJJ está basado en la expansión de la serie Taylor (Ec. (C.2)) de primer orden, es decir  $n = 0, 1$ , en torno a un punto  $a$ :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x - a)^n \quad \text{con } n \in \mathbb{Z}\tag{C.2}$$

De esta manera, es posible aproximar el comportamiento dinámico del sistema (C.1) en diferentes puntos de operación  $(\bar{x}_j, \bar{u}_j)$  a través de una familia de modelos LTI (ver Apéndice C.1):

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= A_j x(t) + B_j u(t) + \Delta x_j \\ y(t) &= C_j x(t) + D_j u(t) + \Delta y_j\end{aligned}\tag{C.3}$$

donde  $A_j$ ,  $B_j$ ,  $C_j$ ,  $D_j$ ,  $\Delta x_j$  y  $\Delta y_j$  son matrices constantes de dimensiones apropiadas. Al hacerlo, es posible incorporar la dinámica del sistema (C.1) dentro de un polítopo convexo de  $n_m$  vértices (modelos LTI), con una dependencia afín a un parámetro de ajuste  $\rho$  [75].

$$[A(\rho(t)), B(\rho(t)), C(\rho(t)), D(\rho(t))] \in \Omega,\tag{C.4}$$



donde  $\Omega$  es un politopo que representa la Ec. (C.1) con modelos LTI en sus  $n_m$  vértices, el cual es representado como:

$$\Omega = \text{Co}\{[A_1, B_1, C_1, D_1], [A_2, B_2, C_2, D_2], \dots, [A_{n_m}, B_{n_m}, C_{n_m}, D_{n_m}]\}, \quad (\text{C.5})$$

donde  $\text{Co}\{\cdot\}$  denota un casco convexo y  $[A_j, B_j, C_j, D_j]$  son las matrices de cada modelo LTI en los vértices del casco.

En base a la interpolación de los modelos LTI obtenidos, es posible construir una representación de la planta no lineal, no solo sobre el conjunto de puntos de linealización, sino también sobre aquellos contenidos en el interior de  $\Omega$ :

$$\begin{aligned} A(\rho(t)) &= \sum_{j=1}^{n_m} \mu_j(\rho(t)) A_j, \quad B(\rho(t)) = \sum_{j=1}^{n_m} \mu_j(\rho(t)) B_j, \\ C(\rho(t)) &= \sum_{j=1}^{n_m} \mu_j(\rho(t)) C_j \quad \text{y} \quad D(\rho(t)) = \sum_{j=1}^{n_m} \mu_j(\rho(t)) D_j, \end{aligned} \quad (\text{C.6})$$

donde se debe cumplir que:

$$\sum_{j=1}^{n_m} \mu_j(\rho(t)) = 1 \quad \text{y} \quad 0 \leq \mu_j(\rho(t)) \leq 1, \quad j \in \mathbb{Z}_{1:n_m}. \quad (\text{C.7})$$

En las Ecs. (C.6) y (C.7),  $\mu$  es un vector de  $n_m$  componentes, donde cada  $\mu_j$  representa el peso o pertenencia del modelo vértice  $j$  con el modelo que representa la planta no lineal.

Así, cada vértice se corresponde a un modelo LTI, mientras que el modelo LPV es una combinación de estos  $n_m$  modelos. El número de modelos vértices viene dado por  $n_m = n_l^{n_p}$ , donde  $n_p$  representa el número de parámetros de ajuste y  $n_l$  el número de puntos de linealización por parámetro.

## C.1. Obtención de modelos lineales

En base a la expansión en Series de Taylor de primer orden, y siendo  $(\bar{x}, \bar{u})$  el punto donde se desea linealizar el modelo presentado en la Ec. (C.1). Entonces, las matrices  $A \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{n_x \times n_u}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{n_y \times n_x}$  y  $D \in \mathbb{R}^{n_y \times n_u}$  están dadas por:

$$\begin{aligned} A &= \left. \frac{\partial f(x(t), u(t))}{\partial x} \right|_{(\bar{x}, \bar{u})}, & B &= \left. \frac{\partial f(x(t), u(t))}{\partial u} \right|_{(\bar{x}, \bar{u})}, \\ C &= \left. \frac{\partial g(x(t), u(t))}{\partial x} \right|_{(\bar{x}, \bar{u})}, & D &= \left. \frac{\partial g(x(t), u(t))}{\partial u} \right|_{(\bar{x}, \bar{u})}. \end{aligned}$$

Resultando en el modelo lineal afín:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) + \Delta x \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) + \Delta y \end{aligned}$$

donde  $\Delta x = f(\bar{x}, \bar{u}) - (A\bar{x} + B\bar{u})$  y  $\Delta y = g(\bar{x}, \bar{u}) - (C\bar{x} + D\bar{u})$ . Es de destacar que si el punto de interés  $(\bar{x}, \bar{u})$  se corresponde con un equilibrio, el sistema resultante es lineal, esto es,  $\Delta x = 0$  y  $\Delta y = 0$ .

# Apéndice D

## Modelos Matemáticos de Sistemas Utilizados

### D.1. Masa-Resorte-Amortiguador

Considérese un sistema masa-resorte-amortiguador, representado en la Fig. D.1. Este sistema resulta relevante debido a que su modelo resultante es lineal y su simplicidad permite resaltar y visualizar diferentes aspectos de los controladores analizados.

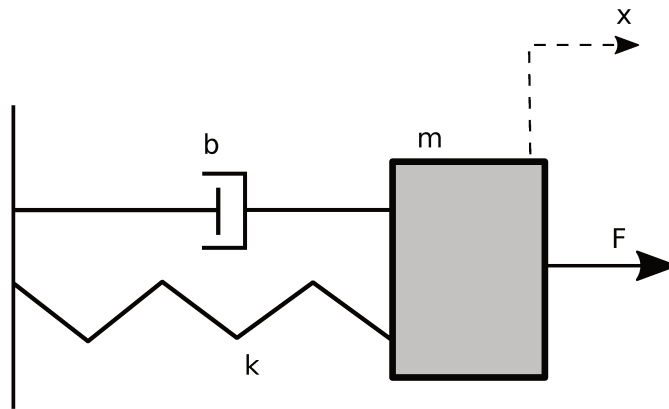


Figura D.1: Esquema del sistema masa-resorte-amortiguador.

Mediante la segunda ley de Newton se llega a la siguiente ecuación diferencial de segundo orden:

$$m\ddot{x}(t) + b\dot{x}(t) + kx(t) = F(t)$$

donde:

- $x(t)$ ,  $\dot{x}(t)$  y  $\ddot{x}(t)$  son la posición, la velocidad y la aceleración del móvil, respectivamente.
- $m$  es la masa del móvil,  $b$  es el coeficiente de amortiguamiento y  $k$  es la constante del resorte, parámetros del sistema.

- $F(t)$  es una fuerza externa que se aplica al sistema (entrada manipulada  $u(t)$ ).

La acción del resorte y el amortiguamiento hace que aparezcan fuerzas proporcionales al desplazamiento,  $kx(t)$ , y a la velocidad,  $b\dot{x}(t)$ , respectivamente.

La ecuación anterior puede ser escrita como:

$$\ddot{x}(t) = \frac{1}{m}F(t) - \frac{b}{m}\dot{x}(t) - \frac{k}{m}x(t)$$

Definiendo el vector de estados  $x$  como  $[x \ \dot{x}]^T$ , se tiene la siguiente ecuación de estado:

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{b}{m} \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix} u(t) \quad (\text{D.1})$$

De esta manera quedan definidas las matrices del modelo lineal (Ec. (D.2)) que describe al sistema, en función de los parámetros  $m$ ,  $b$  y  $k$ , los cuales se analizan y valorizan a lo largo de las simulaciones correspondientes.

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{b}{m} \end{bmatrix}, & B &= \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix}, \\ C &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, & D &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (\text{D.2})$$

## D.2. Operaciones unitarias

En la industria de procesos, una operación unitaria es un equipo o unidad básica de proceso. Una planta típica de la industria de procesos frecuentemente incluye los siguientes elementos:

- Intercambiador de Calor
- Reactor Continuo de Tanque Agitado
- Separador
- Columna de Destilación
- Tanque

En la presente tesis se plantea únicamente el análisis y control de dos de las unidades planteadas, el intercambiador de calor y el reactor continuo de tanque agitado, los cuales se detallan a continuación.

### D.2.1. Intercambiador de calor

En la práctica, todo proceso químico involucra producción o absorción de energía en forma de calor. El intercambiador de calor es comúnmente usado en la industria de procesos para transferir calor de un fluido caliente a un fluido frío a través de una pared sólida [76].

Para obtener el modelo de proceso de un Intercambiador de Calor (HE), presentado en la Fig. D.2, se han establecido las siguientes hipótesis y condiciones:

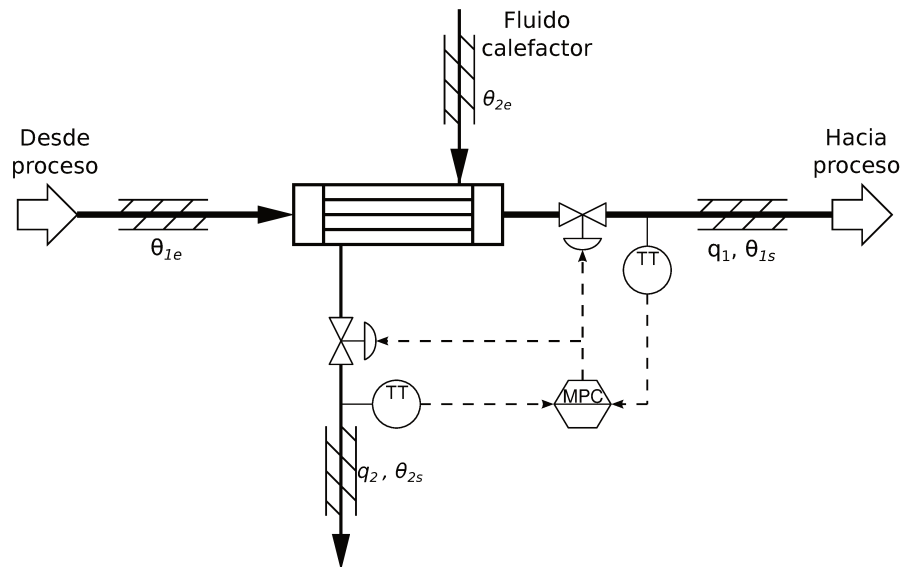


Figura D.2: Diagrama del proceso de un intercambiador de calor.

- Se considera un sistema de parámetros concentrados.
- De acuerdo al total de tubos existentes se asume que dicha masa puede acumular calor.
- Las pérdidas de calor al exterior son despreciables.
- Las propiedades físicas se consideran constantes y son evaluadas a una temperatura media entre la entrada y la salida de cada corriente.
- Fluido incompresible, consecuentemente no hay acumulación de materia en los tubos y no hay cambio de fase en los fluidos.
- Con el objeto de establecer una dirección de flujo calórico se asume que  $\theta_{2s} > \theta_p > \theta_{1s}$ .
- El perfil de temperatura en la pared de los tubos es despreciable. O sea, se asume que la pared de los tubos tiene un coeficiente de transferencia de calor ( $\lambda$ ) muy grande.
- Se considera una única área de intercambio calórico promedio ( $A_1 = A_2 = A$ ).

- No existe reacción química ( $r = 0$ ).
- Los cambio de energía potencial son despreciables.

En base a estas suposiciones y teniendo en cuenta el modelo no lineal del proceso de un intercambiador de calor, presentado por Adam [5], las ecuaciones de balance que describen la dinámica son:

$$\begin{aligned}
 \frac{d\theta_{1s}(t)}{dt} &= \frac{q_1\rho_1C_{p1}(\theta_{1e} - \theta_{1s}(t)) - Ah_1(\theta_{1s}(t) - \theta_p(t))}{\rho_1C_{p1}V_1} \\
 \frac{d\theta_{2s}(t)}{dt} &= \frac{q_2\rho_2C_{p2}(\theta_{2e} - \theta_{2s}(t)) + Ah_2(\theta_p(t) - \theta_{2s}(t))}{\rho_2C_{p2}V_2} \\
 \frac{d\theta_p(t)}{dt} &= \frac{Ah_1(\theta_{1s}(t) - \theta_p(t)) - Ah_2(\theta_p(t) - \theta_{2s}(t))}{\rho_pC_{pp}V_p}
 \end{aligned} \tag{D.3}$$

donde  $\theta_{1s}$  (temperatura de salida del fluido 1),  $\theta_{2s}$  (temperatura de salida del fluido 2) y  $\theta_p$  (temperatura de la pared) se corresponden con los estados del sistema, y  $q_1$  (caudal del fluido de proceso) y  $q_2$  (caudal del fluido calefactor) son las variables de control.

Los parámetros físicos y operativos correspondientes se encuentran resumidos en la Tabla D.1.

Tabla D.1: Parámetros del modelo de un intercambiador de calor.

Parámetro	Descripción	Valor
$\rho_1$	Densidad del fluido 1	1 kg l <sup>-1</sup>
$\rho_2$	Densidad del fluido 2	1 kg l <sup>-1</sup>
$\rho_p$	Densidad de la pared	7,874 kg l <sup>-1</sup>
$C_{p1}$	Calor específico del fluido 1	1000 cal kg <sup>-1</sup> K <sup>-1</sup>
$C_{p2}$	Calor específico del fluido 2	1000 cal kg <sup>-1</sup> K <sup>-1</sup>
$C_{pp}$	Calor específico de la pared	1075,53 cal kg <sup>-1</sup> K <sup>-1</sup>
$A$	Área de intercambio	0,881 m <sup>2</sup>
$h_1$	Transferencia de calor 1	32 374 cal min <sup>-1</sup> K <sup>-1</sup> m <sup>-2</sup>
$h_2$	Transferencia de calor 2	14 716,6667 cal min <sup>-1</sup> K <sup>-1</sup> m <sup>-2</sup>
$V_1$	Volumen de tubos	16 l
$V_2$	Volumen de carcasa	2,11 l
$V_p$	Volumen de pared	1,19 l
$\theta_{1e}$	Temperatura entrada 1	450 K
$\theta_{2e}$	Temperatura entrada 2	900 K

Siguiendo el enfoque de esta tesis, mediante la aplicación de la técnica de PJL (ver Apéndice C), es posible reescribir el sistema (D.3) como un modelo LTI en

torno al  $j$ -ésimo punto de operación  $x_j = \{\theta_{1s_j}, \theta_{2s_j}, \theta_{p_j}\}$ ,

$$A_j = \begin{bmatrix} -\frac{Ah_1+q_{1j}\rho_1C_{p1}}{V_1\rho_1C_{p1}} & 0 & \frac{Ah_1}{V_1\rho_1C_{p1}} \\ 0 & -\frac{Ah_2+q_{2j}\rho_2C_{p2}}{V_2\rho_2C_{p2}} & \frac{Ah_2}{V_2\rho_2C_{p2}} \\ \frac{Ah_1}{V_p\rho_pC_{pp}} & \frac{Ah_2}{V_p\rho_pC_{pp}} & -\frac{Ah_1+Ah_2}{V_p\rho_pC_{pp}} \end{bmatrix}, \quad (D.4)$$

$$B_j = \begin{bmatrix} \frac{\theta_{1e}-\theta_{1s_j}}{V_1} & 0 \\ 0 & \frac{\theta_{2e}-\theta_{2s_j}}{V_2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad C_j = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad D_j = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

### D.2.2. Reactor continuo de tanque agitado

El proceso Reactor Continuo de Tanque Agitado (CSTR), representado en la Fig. D.3, consiste de una reacción exotérmica e irreversible de primer orden,  $A \rightarrow B$ , en un reactor de volumen variable, refrigerado por un único flujo refrigerante. Este modelo es una versión modificada del ejemplo de CSTR presentado por Morningred et al. [77] y luego modificado por Adam [5].

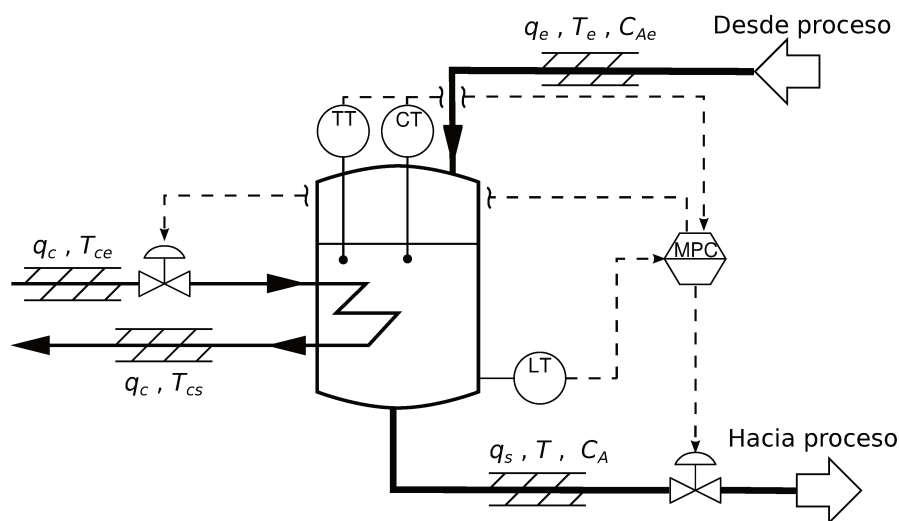


Figura D.3: Diagrama del proceso de un reactor continuo de tanque agitado.

Para la obtención del modelo que describe la dinámica se han establecido las siguientes hipótesis y condiciones:

- Las propiedades físicas son constantes e independientes de la temperatura y concentración de reactivos y productos.
- No se modelan retardos de tiempo.
- Reactivos y productos se encuentran en fase líquida.
- La reacción química es exotérmica.
- Se puede asumir mezcla perfecta en el reactor.

- La transferencia de calor del tanque de reacción a la chaqueta es ideal, lo que indica que los efectos energéticos que ocurren entre la pared del tanque y la chaqueta se suponen despreciables.
- La resistencia al líquido a la salida del tanque no es despreciable, por tanto el volumen del líquido en el reactor no puede ser considerado constante frente a cambios en el caudal de entrada ( $q_e$ ).
- La sección transversal ( $A$ ) del tanque de reacción es constante y por tanto se puede asumir que  $V = Ah$ .

En base a estas suposiciones, las ecuaciones de balance que describen la dinámica son:

$$\begin{aligned}\frac{dV(t)}{dt} &= q_e - q_s(t) \\ \frac{dC_A(t)}{dt} &= \frac{q_e}{V(t)}(C_{Ae} - C_A(t)) - k_0 e^{\frac{-E}{RT(t)}} C_A(t) \\ \frac{dT(t)}{dt} &= \frac{q_e}{V(t)}(T_e - T(t)) - k_1 e^{\frac{-E}{RT(t)}} C_A(t) + \frac{q_c(t)}{V(t)} k_2 (1 - e^{\frac{-k_3}{q_c(t)}})(T_{ce} - T(t))\end{aligned}\quad (D.5)$$

donde:

$$k_1 = \frac{\Delta H k_0}{\rho C_p}, \quad k_2 = \frac{\rho C_{pc}}{\rho_c C_p}, \quad k_3 = \frac{h_A}{\rho_c C_{pc}}.$$

En este modelo,  $V$  (volumen de reacción),  $C_A$  (concentración del reactivo  $A$ ) y  $T$  (temperatura de reacción) son los estados del sistema, mientras que  $q_s$  (caudal de proceso) y  $q_c$  (caudal refrigerante) son las variables de control. Por su parte, es importante destacar que las variables  $C_A$  y  $T$  tienen una fuerte relación de dependencia y al controlar una de ellas puede controlarse de forma indirecta la variable restante, usualmente  $C_A$  es controlada indirectamente por medio de  $T$ .

Los parámetros físicos y operativos del modelo se encuentran detallados en la Tabla D.2.

Tabla D.2: Parámetros del modelo de un reactor continuo de tanque agitado.

Parámetro	Descripción	Valor
$q_e$	Caudal de entrada	100 l min <sup>-1</sup>
$T_e$	Temperatura de entrada	350 K
$C_{Ae}$	Concentración de entrada	1 mol l <sup>-1</sup>
$T_{ce}$	Temperatura del refrigerante	350 K
$E/R$	Energía de activación	1 × 10 <sup>4</sup> K
$\Delta H$	Calor de reacción	-2 × 10 <sup>5</sup> cal mol <sup>-1</sup>
$C_p, C_{pc}$	Calor específico de los líquidos	1 cal g <sup>-1</sup> K <sup>-1</sup>
$\rho, \rho_c$	Densidad de los líquidos	1 × 10 <sup>3</sup> g l <sup>-1</sup>
$h_A$	Coefficiente de transferencia de calor	7 × 10 <sup>5</sup> cal min <sup>-1</sup> K <sup>-1</sup>
$k_0$	Constante de velocidad de reacción	7,2 × 10 <sup>10</sup> l min <sup>-1</sup>

Siguiendo el enfoque de esta tesis, mediante la aplicación de la técnica de PJJ (ver Apéndice C), es posible reescribir el sistema (D.5) como un modelo LTI en torno al  $j$ -ésimo punto de operación  $x_j = \{V_j, C_{A_j}, T_j\}$ ,

$$A_j = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{q_e(C_{A_j} - C_{Ae})}{V_j^2} & -\frac{q_e}{V_j} - k_0 e^{\frac{-E}{RT_j}} & -\frac{EC_{A_j} k_0 e^{\frac{-E}{RT_j}}}{RT_j^2} \\ A_{31} & -k_1 e^{\frac{-E}{RT_j}} & A_{33} \end{bmatrix}, \quad (D.6)$$

$$B_j = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & B_{32} \end{bmatrix}, \quad C_j = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad D_j = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

donde:

$$A_{31} = \frac{q_e(T_j - T_e)}{V_j^2} - \frac{k_2 q_{c_j} (e^{\frac{-k_3}{q_{c_j}}} - 1)(T_j - T_{ce})}{V_j^2}$$

$$A_{33} = \frac{k_2 q_{c_j} (e^{\frac{-k_3}{q_{c_j}}} - 1)}{V_j} - \frac{q_e}{V_j} - \frac{EC_{A_j} k_1 e^{\frac{-E}{RT_j}}}{RT_j^2}$$

$$B_{32} = \frac{k_2(T_j - T_{ce}) \left( e^{\frac{-k_3}{q_{c_j}}} - 1 \right)}{V_j} + \frac{k_2 k_3 (T_j - T_{ce}) e^{\frac{-k_3}{q_{c_j}}}}{V_j}.$$





# Referencias Bibliográficas

- [1] Jodie M. Simkoff y Michael Baldea. «Production scheduling and linear MPC: Complete integration via complementarity conditions». En: *Computers and Chemical Engineering* 125 (2019), págs. 287-305. ISSN: 00981354 (vid. pág. 1).
- [2] Antonio Ferramosca. «Model Predictive Control of Systems with Changing Setpoints». Tesis doct. Universidad de Sevilla, 2011, pág. 255 (vid. págs. 1, 5, 27, 92).
- [3] Carlos Alberto Cappelletti y Eduardo J. Adam. «Diseño de un Control de Nivel de un Sistema Hidráulico con Restricciones Utilizando Optimización LMI». En: *XXI Congreso Argentino de Control Automático*. 2008 (vid. pág. 2).
- [4] Frank Allgöwer y Alex Zheng. *Nonlinear model predictive control*. Vol. 26. Birkhäuser, 2012 (vid. págs. 2, 5).
- [5] Eduardo J. Adam. *Instrumentación y Control de Procesos. Notas de Clase*. 3.<sup>a</sup> ed. Santa Fe: Ediciones UNL, 2018, pág. 796. ISBN: 978-987-749-122-7 (vid. págs. 3, 132, 133).
- [6] J. P. Corriou. *Process Control. Theory and Applications*. Ed. por Springer. 2004 (vid. pág. 3).
- [7] Dale E. Seborg y col. *Process Dynamics and Control*. 2011 (vid. pág. 3).
- [8] Antonio Ferramosca. *Control de sistemas con puntos de cambiantes operación*. Inf. téc. Universidad de Sevilla, 2007 (vid. págs. 3, 5, 28, 29, 89).
- [9] J. Richalet y col. «Model predictive heuristic control». En: *Automatica (Journal of IFAC)* 14 (1978), págs. 413-428 (vid. pág. 4).
- [10] C. R. Cutler y B. L. Ramaker. «Dynamic Matrix Control – A Computer Control Algorithm». En: *Join Automatic Control Conference* (1980) (vid. pág. 4).
- [11] D W Clarke, C Mohtadi y P S Tuffs. «Generalized Predictive Control Part I. The Basic Algorithm». En: *Automatica* 23.2 (1987), págs. 137-148 (vid. pág. 4).
- [12] D W Clarke, C Mohtadi y P S Tuffs. «Generalized Predictive Control Part II. Extensions and Interpretations». En: *Automatica* 23.2 (1987), págs. 149-160 (vid. pág. 4).
- [13] Jan M. Maciejowski. *Predictive Control with Constraints*. 2002 (vid. págs. 4-7, 21).

- [14] K. R. Muske y T. A. Badgwell. «Disturbance Modeling for Offset – Free Linear Model Predictive Control». En: *Journal of Process Control* 12 (2002), págs. 617-632 (vid. págs. 4, 21).
- [15] Gabriele Pannocchia y James B. Rawlings. «Disturbance Models for Offset Free Model Predictive Control». En: *AIChE Journal* 49 (2003), págs. 426-437 (vid. págs. 4, 21).
- [16] Daniel Limón y col. «MPC for tracking piecewise constant references for constrained linear systems». En: *Automatica* 44.9 (2008), págs. 2382-2387 (vid. págs. 4, 5, 27, 29, 89, 92, 98).
- [17] Manfred Morari y E. Zafriou. *Robust Process Control*. Prentice Hall, 1989 (vid. pág. 4).
- [18] M. Green y D. J. Limebeer. *Linear Robust Control*. Prentice Hall, 1995 (vid. pág. 4).
- [19] R. S. Sánchez Peña y M. Sznaier. *Robust System. Theory and Applications*. Wiley-Interscience, 1998 (vid. pág. 4).
- [20] K. Zhou y John C. Doyle. *Essentials of Robust Control*. Prentice Hall, 1998 (vid. pág. 4).
- [21] Eduardo F. Camacho y Carlos Bordons. *Model Predictive Control*. 2007. ISBN: 9781852336943 (vid. págs. 5, 7, 15).
- [22] David Q. Mayne y col. «Constrained model predictive control: Stability and optimality». En: *Automatica* 36.6 (2000), págs. 789-814 (vid. págs. 5, 6, 11, 16).
- [23] Pierre O.M. Scokaert, David Q. Mayne y James B. Rawlings. «Suboptimal model predictive control (feasibility implies stability)». En: *IEEE Transactions on Automatic Control* 44.3 (1999), págs. 648-654 (vid. pág. 5).
- [24] F. Allgöwer y col. «Nonlinear Predictive Control and Moving Horizon Estimation — An Introductory Overview». En: *Advances in control* (1999), págs. 391-449 (vid. pág. 5).
- [25] S. Joe Qin y Thomas Badgwell. «An overview of nonlinear model predictive control applications». En: *Nonlinear model predictive control* 26 (2000), págs. 369-392 (vid. pág. 5).
- [26] Antonio Ferramosca y col. «MPC para el Seguimiento del Angulo de Cabeceo de un Helicoptero». En: (2007) (vid. pág. 5).
- [27] Antonio Ferramosca y col. «MPC for tracking of constrained nonlinear systems». En: *Proceedings of the IEEE Conference on Decision and Control* (2009), págs. 7978-7983 (vid. págs. 5, 27, 93, 99).
- [28] Antonio Ferramosca y col. «MPC for tracking with optimal closed-loop performance». En: *Automatica* 45.8 (2009), págs. 1975-1978 (vid. págs. 5, 27).

- [29] Stephen P. Boyd y col. *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*. Vol. 15. Society for Industrial y Applied Mathematics, 1994, pág. 203. ISBN: 089871334X. DOI: 10.1109/TAC.1997.557595 (vid. págs. 6, 125).
- [30] Carlos Alberto Cappelletti. «Control Óptimo de Procesos Industriales Utilizando Desigualdades Lineales Matriciales». Tesis doct. Universidad Nacional del Litoral, 2016 (vid. págs. 6, 38).
- [31] Laurent El Ghaoui y S. Niculescu. «Advances in Linear Matrix Inequalities Methods in Control». En: (2000) (vid. págs. 6, 37).
- [32] Carlos Alberto Cappelletti y col. «Optimum Multiobjective Regulator with Variable Gain Matrix Applied to an Industrial Process». En: *2018 Argentine Conference on Automatic Control (AADECA)*. IEEE, nov. de 2018, págs. 1-6 (vid. págs. 6, 43, 53).
- [33] Mickaël Rodrigues, Didier Theilliol y Dominique Sauter. «Design of a Robust Polytopic Unknown Input Observer for FDI: Application for Systems Described by a Multi-Model Representation». En: *Proceedings of the 44th IEEE Conference on Decision and Control, and the European Control Conference, CDC-ECC '05 2005* (2005), págs. 6268-6273 (vid. pág. 6).
- [34] Mayuresh V. Kothare, Venkataramanan Balakrishnan y Manfred Morari. «Robust Constrained Model Predictive Control Using Linear Matrix Inequalities». En: *Automatica* 32 (1996), págs. 1361-1379 (vid. págs. 6, 40, 43, 44, 53).
- [35] J. A. Rossiter. *Model Based Predictive Control*. CRC Press, 2003 (vid. pág. 6).
- [36] Alejandro H. González. «Control Predictivo de Procesos Industriales con Restricciones. Análisis de Estabilidad y Robustez». Tesis doct. Facultad de Ingeniería Química – Universidad Nacional del Litoral, 2006 (vid. pág. 6).
- [37] M. J. Park y H. K. Rhee. «LMI-Based Robust Model Predictive Control for a Continuous MMA Polymerization Reactor». En: *Computers and Chemical Engineering* 25 (2001), págs. 1513-1520 (vid. pág. 6).
- [38] Zhaoyang Wan y Mayuresh V. Kothare. «An efficient off-line formulation of robust model predictive control using linear matrix inequalities». En: *Automatica* 39.5 (2003), págs. 837-846 (vid. pág. 6).
- [39] Tri Tran, K-V. Ling y Jan M. Maciejowski. «Economic Model Predictive Control - A Review». En: (2014), págs. 35-42 (vid. pág. 7).
- [40] Wendell H Fleming y Raymond W Rishel. *Deterministic and stochastic optimal control*. Vol. 1. Springer Science & Business Media, 2012 (vid. pág. 9).
- [41] Jason L Speyer y David H Jacobson. *Primer on optimal control theory*. SIAM, 2010 (vid. pág. 10).
- [42] Peter Benner, Jing-Rebecca Li y Thilo Penzl. «Numerical solution of large-scale Lyapunov equations, Riccati equations, and linear-quadratic optimal control problems». En: *Numerical Linear Algebra with Applications* 15.9 (2008), págs. 755-777 (vid. pág. 10).

- [43] Augusto Ferrante y Lorenzo Ntogramatzidis. «The generalised discrete algebraic Riccati equation in linear-quadratic optimal control». En: *Automatica* 49.2 (2013), págs. 471-478 (vid. pág. 10).
- [44] Sungyung Lim. «Analysis and Control of Linear Parameter-Varying Systems». Tesis doct. Stanford, 1998 (vid. pág. 11).
- [45] Anders Rantzer y Mikael Johansson. «Piecewise linear quadratic optimal control». En: *IEEE transactions on automatic control* 45.4 (2000), págs. 629-637 (vid. pág. 12).
- [46] James Blake Rawlings, David Q Mayne y Moritz Diehl. *Model predictive control: theory, computation, and design*. Vol. 2. Nob Hill Publishing Madison, WI, 2017 (vid. pág. 16).
- [47] John Guckenheimer y Philip Holmes. *Nonlinear oscillations, dynamical systems, and bifurcations of vector fields*. Vol. 42. Springer Science & Business Media, 2013 (vid. pág. 17).
- [48] Guoqiang Tian y Jianxin Zhou. «Transfer continuities, generalizations of the Weierstrass and maximum theorems: a full characterization». En: *Journal of Mathematical Economics* 24.3 (1995), págs. 281-303 (vid. pág. 19).
- [49] Pornchai Bumroongsri y Soorathep Kheawhom. «An off-line robust MPC algorithm for uncertain polytopic discrete-time systems using polyhedral invariant sets». En: *Journal of Process Control* 22.6 (2012), págs. 975-983 (vid. pág. 43).
- [50] Yong-Yan Cao y Anke Xue. «Parameter-dependent Lyapunov function approach to stability analysis and design for uncertain systems with time-varying delay». En: *European journal of control* 11.1 (2005), págs. 56-66 (vid. pág. 53).
- [51] Thomas Besselmann, Johan Löfberg y Manfred Morari. «Explicit model predictive control for systems with linear parameter-varying state transition matrix». En: *IFAC Proceedings Volumes* 41.2 (2008), págs. 13163-13168 (vid. pág. 53).
- [52] Thomas Besselmann, Johan Löfberg y Manfred Morari. «Explicit LPV-MPC with bounded rate of parameter variation». En: *IFAC Proceedings Volumes* 42.6 (2009), págs. 7-12 (vid. pág. 53).
- [53] Thomas Besselmann, Johan Lofberg y Manfred Morari. «Explicit MPC for LPV systems: Stability and optimality». En: *IEEE Transactions on Automatic Control* 57.9 (2012), págs. 2322-2332 (vid. pág. 53).
- [54] Hugo A Pipino y Eduardo J Adam. «MPC for linear systems with parametric uncertainty». En: *2019 XVIII Workshop on Information Processing and Control (RPIC)*. IEEE. 2019, págs. 42-47 (vid. pág. 54).
- [55] Hugo A Pipino y col. «Formulación de un LPV-MPC Adaptativo para Procesos Industriales No Lineales». En: () (vid. pág. 54).

- [56] Hugo Pipino y col. «Predictive Control Methods for Multi-Model Systems». En: *2020 IEEE Congreso Biental de Argentina (ARGENCON)*. IEEE. 2020, págs. 1-8 (vid. págs. 54, 88).
- [57] Hugo A Pipino y col. «Nonlinear temperature regulation of solar collectors with a fast adaptive polytopic LPV MPC formulation». En: *Solar Energy* 209 (2020), págs. 214-225 (vid. págs. 54, 88).
- [58] Hugo A Pipino, Carlos A Cappelletti y Eduardo J Adam. «Adaptive multi-model predictive control applied to continuous stirred tank reactor». En: *Computers & Chemical Engineering* 145 (2021), pág. 107195 (vid. pág. 54).
- [59] Marcelo M Morato, Julio E Normey-Rico y Olivier Sename. «Model predictive control design for linear parameter varying systems: A survey». En: *Annual Reviews in Control* 49 (2020), págs. 64-80 (vid. pág. 55).
- [60] Pablo Gonzalez Cisneros, Sophia Voss y Herbert Werner. «Efficient Non-linear Model Predictive Control via quasi-LPV representation». En: *2016 IEEE 55th Conference on Decision and Control, CDC 2016* (2016), págs. 3216-3221. DOI: 10.1109/CDC.2016.7798752 (vid. pág. 61).
- [61] Pablo Gonzalez Cisneros, Aadithyan Sridharan y Herbert Werner. «Constrained Predictive Control of a Robotic Manipulator using quasi-LPV Representations». En: *IFAC-PapersOnLine* 51.26 (2018), págs. 118-123. ISSN: 24058963. DOI: 10.1016/j.ifacol.2018.11.158 (vid. pág. 61).
- [62] Johan Löfberg. «Oops! I cannot do it again: Testing for recursive feasibility in MPC». En: *Automatica* 48.3 (2012), págs. 550-555 (vid. pág. 62).
- [63] James B Rawlings y Bhavik R Bakshi. «Particle filtering and moving horizon estimation». En: *Computers & chemical engineering* 30.10-12 (2006), págs. 1529-1541 (vid. pág. 67).
- [64] Peter Kühn y col. «A real-time algorithm for moving horizon state and parameter estimation». En: *Computers & chemical engineering* 35.1 (2011), págs. 71-83 (vid. pág. 67).
- [65] Johan Löfberg. «YALMIP : a Toolbox for Modeling and Optimization in MATLAB». En: *2004 IEEE International Conference on Robotics and Automation* (2004), págs. 284-289. ISSN: 03014215. DOI: 10.1109/CACSD.2004.1393890 (vid. págs. 72, 102).
- [66] Jos F Sturm. «Using SeDuMi 1.02, a MATLAB toolbox for optimization over symmetric cones». En: *Optimization methods and software* 11.1-4 (1999), págs. 625-653 (vid. págs. 72, 102).
- [67] Reha H Tütüncü, Kim-Chuan Toh y Michael J Todd. «Solving semidefinite-quadratic-linear programs using SDPT3». En: *Mathematical programming* 95.2 (2003), págs. 189-217 (vid. págs. 72, 103).
- [68] Sammyak Mate y col. «A stabilizing sub-optimal model predictive control for quasi-linear parameter varying systems». En: *IEEE Control Systems Letters* 4.2 (2019), págs. 402-407 (vid. pág. 93).

- [69] Franco Blanchini. «Set invariance in control». En: *Automatica* 35.11 (1999), págs. 1747-1767 (vid. págs. 122, 123).
- [70] Jeremy G VanAntwerp y Richard D Braatz. «A tutorial on linear and bilinear matrix inequalities». En: *Journal of process control* 10.4 (2000), págs. 363-385 (vid. pág. 125).
- [71] Pascal Gahinet y col. *LMI Control Toolbox For Use with MATLAB*. Inf. téc. The MathWorks, Inc., 1995 (vid. pág. 125).
- [72] Emilie V Haynsworth. «Determination of the inertia of a partitioned Hermitian matrix». En: *Linear algebra and its applications* 1.1 (1968), págs. 73-81 (vid. pág. 126).
- [73] Corentin Briat. «Comande et Observation Robustes des Systèmes LPV Retardés». Tesis doct. Grenoble Institute of Technology, 2008 (vid. pág. 127).
- [74] Kazuo Tanaka y Hua O. Wang. *Fuzzy Control Systems Design and Analysis: A Linear Matrix Inequality Approach*. Wiley, 2001. ISBN: 0471323241. DOI: 10.1002/0471224596 (vid. pág. 127).
- [75] Damiano Rotondo. *Advances in Gain- Scheduling and Fault Tolerant Control Techniques*. Springer International, 2018. ISBN: 9783319629018 (vid. pág. 127).
- [76] Yuvraj Bhushan Khare y Yaduvir Singh. «PID Control of Heat Exchanger System». En: *International Journal of Computer Applications* 8.6 (2010), págs. 975-8887. ISSN: 09758887 (vid. pág. 131).
- [77] J. Duane Morningred y col. «An Adaptive Nonlinear Predictive Controller». En: *Chemical Engineering Science* 47.4 (1992), págs. 755-762 (vid. pág. 133).