

## **El uso de Algoritmos en Scilab para la enseñanza y el estudio de Dinámica de Rotores**

Fernando D. Palmieri<sup>1</sup>, Andreas E. Klemppow<sup>2</sup>, Wadi P. Chiapparoli<sup>1</sup>

<sup>1</sup> grupo de estudio de vibraciones Mecánicas. Departamento Mecánica, Facultad Regional San Nicolás, Universidad Tecnológica Nacional

Colon 332, B2900, San Nicolás, Buenos Aires, Argentina  
{fpalmieri,wchiapparoli}@frsn.utn.edu.ar

<sup>2</sup> grupo de investigación de vibraciones Mecánicas., Facultad Regional Delta, Universidad Tecnológica Nacional San Martín 1175, B2804 Campana, Buenos Aires, Argentina  
andreas.klemppow@gmail.com

**Resumen.** La dinámica de rotores es una de las disciplinas donde el estudiante de ingeniería se puede encontrar con resultados que contradicen la intuición, aun cuando dicho estudiante tenga cierto grado de conocimientos de dinámica clásica. Este trabajo presenta una serie de algoritmos desarrollados para incluir temas avanzados de dinámica de rotores dentro de la unidad de vibraciones mecánicas como complemento del tema dinámica de sistemas, de la asignatura Mecánica Racional (tercer nivel de la carrera ingeniería mecánica). Dichos algoritmos serán empleados para que los estudiantes puedan generar gráficas de respuesta dinámica, para rotores con distintos grados de simplificación, y experimentar de forma numérica el comportamiento de los mismos, con el propósito de entender fenómenos como el de inversión de fase durante el pasaje por una velocidad crítica.

**Palabras Clave:** Dinámica de rotores, Vibraciones mecánicas, Scilab, Mecánica racional

### **1 Introducción**

La Dinámica de Rotores es una disciplina que se ocupa de estudiar el comportamiento de los ejes giratorios de las máquinas rotantes. Normalmente no está incluida como una asignatura del plan de estudios de Ingeniería Mecánica, pero es un tema que se incluye de manera parcial en asignaturas como Mecánica Racional, Elementos de Máquinas y Máquinas Alternativas y Turbomáquinas. La importancia de esta disciplina fue creciendo a raíz del hecho de que las máquinas rotantes son elementos cruciales en la industria y en el transporte moderno, además, el avance científico y tecnológico de las áreas de materiales, lubricación y mecanizado, ha permitido lograr grandes potencias y altísimas velocidades de giro, en dimensiones pequeñas y con ejes relativamente flexibles. Esto potencia la posibilidad de aparición de problemas de dinámica de rotores y la necesidad de incluir su estudio de forma más específica

Como disciplina tiene más de 150 años de historia, donde gran parte del desarrollo teórico viene impulsado por las experiencias prácticas que los ingenieros fueron adquiriendo desde la construcción de las primeras máquinas a vapor. Rankine [1] fue quien realizó el primer análisis teórico de un eje giratorio y con este desarrollo fue capaz de demostrar que más allá de una cierta velocidad de giro "... el eje está considerablemente doblado y gira alrededor de esta forma doblada". Definió esta velocidad particular como whirling speed (velocidad de batido del eje, o velocidad de precesión, dependiendo de la traducción, no obstante la traducción literal hace referencia al movimiento de la sogá de saltar, el whirling es la rotación de la forma deflectada del eje en torno a la forma recta original). Para este estudio empleó un modelo que reemplaza al rotor por una masa giratoria concentrada, sujeta a un resorte, de la rigidez equivalente a la del eje original.

El modelo que uso Rankine permite concluir que más allá de una determinada velocidad de rotación, la desviación radial aumenta sin límite, *lo que no es cierto en la realidad*. Esta velocidad de rotación es la denominada velocidad crítica, y ocurre cuando la frecuencia de excitación (en este caso la de rotación) coincide con una frecuencia natural y en la práctica puede conducir a amplitudes de vibración excesivas.

A pesar de las conclusiones del modelo de Rankine, las turbinas construidas por Parsons en 1884 y De Laval en 1893 tuvieron éxito en funcionar por encima de la velocidad crítica. Este último, fue quien teorizó que por encima de la velocidad crítica existía un efecto de auto centrado y trabajo con un modelo de rotor de un solo disco sobre un eje flexible, que hoy se conoce como rotor de Jeffcott, en referencia al creador de la primera teoría fundamental registrada de la dinámica rotores se puede encontrar en un artículo clásico de dicho autor [2] en 1919.

Jeffcott confirmó la predicción de Föppl de que existía una solución supercrítica estable y extendió el análisis incluyendo amortiguamiento externo y mostró que la fase del punto pesado varía continuamente a medida que la velocidad de rotación pasa a través de la velocidad crítica y que en lugar de incrementarse indefinidamente la distancia del punto pesado al eje de giro geométrico real, este se acercaba luego de pasar la crítica porque esta pasaba a estar girando del lado interno de la deflexión.

De allí en más, muchas de las conclusiones de la dinámica de rotores se pueden alcanzar a partir de modelos matemáticos con distinto grado de simplificación o complejidad, pero que tienen la particularidad de llegar a resultados que a priori, contradicen muchas veces las ideas previas o las conclusiones primarias de los estudiantes como este concepto del párrafo anterior vinculado con que el punto pesado deja de estar del lado de afuera de la deflexión de la rotación del eje.

Actualmente en la literatura específica [3] se pueden encontrar métodos analíticos para determinar velocidades críticas y la respuesta del rotor a fenómenos como desbalance o cambios en las propiedades de los cojinetes, entre otros; pero dichos métodos casi siempre se aplican a modelos relativamente simples como el rotor de Jeffcot y los resultados de los mismos, y permiten comprender conceptualmente los fenómenos antes descriptos.

Para el modelado de rotores reales el método de los elementos finitos (FEM) y el Método de la Matriz de Transferencia (MMT) son los dos caminos numéricos más usuales. La aplicación de modelos de elementos finitos en dinámica de rotores ha sido exitosamente verificada [4]. No obstante, el principal inconveniente de este camino es que emplea una gran capacidad de cálculo, la programación es compleja y, en general, requiere un conocimiento preciso de la geometría del rotor.

El Método de la Matriz de Transferencia, en cambio, resuelve el problema dinámico utilizando un procedimiento de aproximación que consiste en partir de un extremo del rotor, donde las condiciones de contorno son conocidas, luego usando expresiones clásicas obtenidas de la Mecánica de Newton, de la Resistencia de Materiales y de la teoría de la Elasticidad, se determina la deflexión lateral, el ángulo de giro y los esfuerzos del eje en determinados puntos característicos a lo largo del eje (cambios de sección, apoyos intermedios, rodetes de alabes, etc.), avanzando en forma progresiva hasta llegar al otro extremo. La satisfacción de las condiciones de contorno de en los extremos y en todos los puntos intermedios permite plantear un sistema de ecuaciones lineales para determinar las velocidades críticas. Luego para cada velocidad se puede obtener el estado del rotor en esos puntos característicos intermedios, a través de las mismas ecuaciones, y de esa manera se obtienen las formas modales.

Este método tiene como principal ventaja que no requiere almacenar o manipular grandes matrices, se puede trabajar con datos concretos, como son los diámetros del rotor y las masas de los componentes y resulta más rápido para obtener resultados cuando la capacidad de cálculo es reducida.

La idea fundamental del método de las matrices de transferencias fue propuesta por Holtzer para sistemas sometidos a vibraciones torsionales, luego Myklestad lo generalizó para sistemas sometidos a la flexión [5]. Desde entonces distintas publicaciones fueron ofreciendo variantes del método para distintos sistemas rotor-cojinete. Como sugiere Murphy [6] en algunos casos puede presentar errores en la determinación de algunas de las velocidades críticas, pero existen técnicas para asegurar la precisión y mejorar los resultados.

Existen muchos trabajos realizados con el propósito de determinar las velocidades críticas, frecuencias de precesión o batido y formas modales que incorporan distintos efectos o detalles, como la influencia de los soportes y cojinetes [7, 8, 9], la inercia rotacional de los rodetes [10] o la distribución de masa e inercia rotacional del eje [11]. También se han desarrollado trabajos que usan este método para estudiar la respuesta del rotor a fenómenos como el desbalance, la desalineación [12, 13] o la presencia de una fisura del eje [14].

Todos estos modelos numéricos son relativamente sencillos, pero requieren el manejo de alguna herramienta informática para poder hacer uso de los mismos. Es por ello, que en este trabajo se presentan los algoritmos desarrollados en Scilab de algunos modelos de rotores, que fueron realizadas para complementar las clases introducción a la dinámica de rotores, tema incluido como complementario o de aplicación del eje temático dinámica de sistemas, dentro de la asignatura mecánica racional de tercer nivel de Ingeniería Mecánica.

Se pretende incluir estos códigos durante el corriente año en una secuencia didáctica donde los estudiantes puedan ensayar y analizar distintas posibilidades de respuesta de rotores. La actividad será complementada con

un cuestionario guiado, otro abierto y un problema de aplicación. En este trabajo se presentan los algoritmos y la secuencia a usar, se espera en un futuro presentar los resultados de la intervención didáctica.

## 2 Modelos matemáticos implementados

Los modelos desarrollados se pensaron para incluir en una secuencia didáctica donde se comienza por el modelo de un rotor flexible de un solo disco sobre soportes rígidos (Jeffcott), luego el modelo de rotor rígido sobre soportes flexibles y finalmente un modelo general basado en el método de la matriz de transferencia. Los códigos se desarrollaron como funciones de Scilab con la idea de poder llamarlas cambiando valores e incluso en una segunda etapa, desarrollar un entorno gráfico.

### 2.1 Rotor de eje flexible sobre soportes rígidos con rotor asimétrico

Este es uno de los modelos más simples de la dinámica de rotores y se presenta en la figura 1, para su resolución se parte de considerar los siguientes desplazamientos complejos.

$$r = x + y i \quad y \quad \varphi_r = \varphi_y + \varphi_x i \quad (1)$$

Donde  $x$  y  $y$  son las componentes del punto de intersección de la fibra neutra del eje curvado en el plano original del disco donde está montado respecto del eje recto que une los cojinetes o eje sin deflexión y  $\varphi_y$  y  $\varphi_x$  son las componentes de inclinación del disco respecto del plano  $x$ - $y$  medidas en el plano  $x$ - $z$  e  $y$ - $z$ . Las ecuaciones de movimiento entonces son

$$m_d \ddot{r} + k_{11} r + k_{12} \varphi_r = m_d e \omega^2 e^{i\omega t} \quad (2)$$

$$I_d \ddot{\varphi}_r + k_{21} r + k_{22} \varphi_r = 0 \quad (3)$$

Donde  $m_d$  es la masa del disco e  $I_d$  es el momento de inercia del disco respecto de un eje diametral,  $k_{ij}$  es el coeficiente de rigidez y se define como la fuerza  $i$  en el punto  $i$ -ésimo debido a un desplazamiento unitario  $j$  en la estación  $j$ -ésima manteniendo todos los otros desplazamientos iguales a cero, este valor se obtiene por la técnica de coeficientes de influencia.

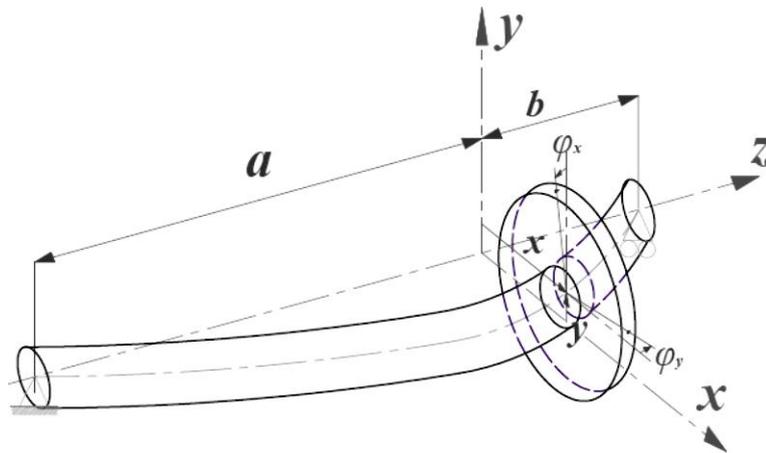


Fig. 1. Modelo de rotor de Jeffcott con disco desplazado

Proponiendo como solución:

$$r = R e^{i(\omega t - \phi_r)} \quad y \quad \varphi_r = \Phi_r e^{i(\omega t - \phi_r)} \quad (4)$$

Trabajando se llega a la expresión de la respuesta del rotor, entendida como tal al desplazamiento radial del centro de masa del disco del rotor.

$$R = \frac{m_d \omega^2 e (k_{22} - I_d \omega^2)}{(k_{11} - m_d \omega^2)(k_{22} - I_d \omega^2) - k_{12} k_{21}} \quad (5)$$

Y posteriormente se arriba a la expresión para determinar las velocidades críticas

$$\omega_{cr1,2} = \pm \sqrt{\frac{1}{2}(\omega_r^2 + \omega_\varphi^2) \pm \frac{1}{2}\sqrt{(\omega_r^2 + \omega_\varphi^2)^2 - 4(\omega_r^2 \omega_\varphi^2 - \omega_{r\varphi}^2 \omega_{\varphi r}^2)}} \quad (6)$$

Con:

$$\omega_r^2 = \frac{k_{11}}{m_d}, \quad \omega_\varphi^2 = \frac{k_{22}}{I_d}, \quad \omega_{r\varphi}^2 = \frac{k_{12}}{m_d} \quad y \quad \omega_{\varphi r}^2 = \frac{k_{21}}{I_d} \quad (7)$$

**Algoritmo 1.** Programa para obtención de respuesta de un rotor flexible de disco descentrado sobre soportes rígidos sin amortiguamiento.

```
function RespJeffcotASimgen(a, b, d_eje, m_disco, I_disco, exentricidad)
ecc=exentricidad
md=m_disco
Ir = I_disco
L=a+b
J=%pi/64*(d_eje^4)
E=210000000000
den=3*E*J*L
alfa11=(a*a*b*b)/den
alfa12=(-1)*((3*a*a*L)-(2*a*a*a)-(a*L*L))/den
alfa21=(a*b*(b-a))/den
alfa22=(-1)*((3*a*L)-(3*a*a)-(L*L))/den
den2=(alfa11*alfa22)-(alfa21*alfa12)
k11= alfa22/den2
k22 =alfa11/den2
k12=-alfa12/den2
k21 =-alfa21/den2
printf('%11.7f \t %11.7f \t \n',k11,k12);
printf('%11.7f \t %11.7f \t\n',k21,k22);
N_ptos=10000
om_u=k11/md
om_p=k22/Ir
om_up=k12/md
om_pu=k21/Ir
om_cr1=sqrt(0.5*(om_u+om_p)+0.5*sqrt((om_u+om_p)^2-4*(om_u*om_p-om_up*om_pu)));
om_cr2=sqrt(0.5*(om_u+om_p)-0.5*sqrt((om_u+om_p)^2-4*(om_u*om_p-om_up*om_pu)));
fn_1=om_cr1/(2*pi)
fn_2=om_cr2/(2*pi)
printf(' w(1)      f(1)      \t .');
printf('%11.7f \t %11.7f \t\n',om_cr1,fn_1);
printf(' w(2)      f(2)      \t .');
printf('%11.7f \t %11.7f \t\n',om_cr2,fn_2);
resp=hypermat([1 (N_ptos)])
frec=hypermat([1 (N_ptos)])
for i =1:N_ptos
omega=1+0.05*i
frec(1,i)=omega
u1=md*(omega^2)*ecc*(k22-Ir*(omega^2));
u2=((k11-md*(omega^2))*(k22-Ir*(omega^2)))-(k21*k12);
resp(1,i)=abs(u1/u2)
end
endfunction
```

## 2.2 Rotor flexible sobre soportes flexibles

En este caso la deflexión central del rotor se debe determinar como la superposición de la deflexión del disco debido al desequilibrio, cuando el eje es rígido, es decir la deflexión del disco (en el centro geométrico) causada únicamente por el movimiento de los extremos del eje (movimiento del cuerpo rígido) sobre cojinetes flexibles, a la que se le debe sumar la deflexión debida a la deformación del eje con respecto a las ubicaciones de los cojinetes. La deflexión asociada con la flexión del eje se calcula de la misma forma que en el apartado anterior. Para el cálculo de la deflexión del disco por el efecto de los cojinetes mediante la expresión

$$\{U_{s1}\} = [B][K]^{-1}[A]\{F_s\} = [C]\{F_s\} \quad (8)$$

Donde  $\{U_{s1}\}$  es el vector de desplazamientos del disco  $\{x, y, \varphi_y, \varphi_x\}$  debido al movimiento de eje producto de la elasticidad de los cojinetes, y  $\{F_s\}$  es el vector de fuerza que actúa sobre el disco. Además:

$$[A] = \begin{bmatrix} (1 - a/l) & 0 & -1/l & 0 \\ 0 & (1 - a/l) & 0 & 1/l \\ a/l & 0 & 1/l & 0 \\ 0 & a/l & 0 & -1/l \end{bmatrix} [B] = \begin{bmatrix} (1 - a/l) & 0 & a/l & 0 \\ 0 & a/l & 0 & (1 - a/l) \\ 1/l & 0 & -1/l & 0 \\ 0 & -1/l & 0 & 1/l \end{bmatrix} \quad (9)$$

Son las matrices que relacionan los desplazamientos del disco con los apoyos y la matriz  $[K]$  es la matriz de rigidez de los cojinetes, que si estos son idénticos queda como:

$$[K] = \begin{bmatrix} (k_{xx} + i\omega c_{xx}) & (k_{xy} + i\omega c_{xy}) & 0 & 0 \\ (k_{yx} + i\omega c_{yx}) & (k_{yy} + i\omega c_{yy}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (k_{xx} + i\omega c_{xx}) & (k_{xy} + i\omega c_{xy}) \\ 0 & 0 & (k_{yx} + i\omega c_{yx}) & (k_{yy} + i\omega c_{yy}) \end{bmatrix} \quad (10)$$

Al vector  $\{U_{s1}\}$  se debe sumar deflexión del disco debido a la flexión del eje solo  $\{U_{s2}\}$ , sin tener en cuenta los cojinetes, la misma se determina por coeficientes de influencia

$$\{U_{s2}\} = [\alpha]\{F_s\} \quad (11)$$

Finalmente, la deflexión neta del rotor  $\{U_s\}$  causada por la deflexión de los cojinetes más la debida a la flexión del eje se obtiene como:

$$\{U_s\} = \{U_{s1}\} + \{U_{s2}\} = ([C] + [\alpha])\{F_s\} = [D]\{F_s\} \quad (12)$$

Despejando el vector fuerza sobre el disco

$$\{F_s\} = [D]^{-1}\{U_s\} \quad (13)$$

Aplicando las ecuaciones de la dinámica al disco considerando que el mismo tiene el centro de masa desplazado respecto del punto de vínculo con el eje se llega a la respuesta a desequilibrio

$$\{F_{desequilibrio}\} = -\omega^2[M]\{U_s\} + \{F_s\} \quad (14)$$

$$\{F_{desequilibrio}\} = -\omega^2[M]\{U_s\} + [D]^{-1}\{U_s\} \quad (15)$$

$$\{U_s\} = (-\omega^2[M] + [D]^{-1})^{-1}\{F_{desequilibrio}\} \quad (16)$$

Donde  $\omega$  es la velocidad de rotación del eje,  $[M]$  es la matriz de masa del disco (contiene masa y momento de inercia) y la fuerza de desequilibrio puede tener componentes de fuerza centrífuga en x e y y también si el disco esta cruzado componentes de desequilibrio de cupla. El modelo dependerá del rotor estudiado.

**Algoritmo 2.** Programa para obtención de respuesta de un rotor flexible sobre soportes flexibles con amortiguamiento y excitación de desbalanceo radial con proyección en  $x$  e  $y$ .

```
function Resprotflexsoportesflex(v, paso, N_ptos, masa_disco, inercia_disco, d_eje,
longeje, Dist_apoyoA, kxx, kyy, kxy, kyx, cxx, cyx, cxy, cyy)
m=masa_disco //masa del rotor kg
Id=inercia_disco// momento de inercia diametral kg-m2
ecc=1.0e-4
a_ecc=1e-3
l=longeje
a=Dist_apoyoA
b=l-a
J=%pi/64*(d_eje^4)
E=210000000000
den=3*E*J*l
alfa11=(a*a*b*b)/den
alfa12=(-1)*((3*a*a*1)-(2*a*a*a)-(a*1*1))/den
alfa21=(a*b*(b-a))/den
alfa22=(-1)*((3*a*1)-(3*a*a)-(1*1))/den
resp=hypermat([1 (N_ptos)])
frec=hypermat([8 (N_ptos)])
for i =1:N_ptos
    omega=1+paso*i
    frec(1,i)=omega
    K=[kxx+%i*cxx*omega kxy+%i*cxy*omega 0 0;kyx+%i*cyx*omega kyy+%i*cyy*omega 0
0;0 0 kxx+%i*cxx*omega kxy+%i*cxy*omega ;0 0 kyx+%i*cyx*omega kyy+%i*cyy*omega];
    Ki=inv(K);
    A=[(1-a/l) 0 -1/l 0;0 (1-a/l) 0 1/l;a/l 0 1/l 0; 0 a/l 0 -1/l];
    B=[(1-a/l) 0 a/l 0;0 a/l 0 (1-a/l);1/l 0 -1/l 0; 0 -1/l 0 1/l];
    C=B*Ki*A;
    Alpha=[alfa11 0 alfa12 0;alfa21 0 alfa22 0;0 alfa11 0 alfa12; 0 alfa21 0 alfa22];
    D= C+Alpha
    E=inv(D)
    M=[m 0 0 0;0 m 0 0;0 0 Id 0;0 0 0 Id];
    H=-1*omega*omega*M+E
    F=[m*ecc*omega*omega; -1*%i*m*ecc*omega*omega; 0; 0];
    X=inv(H)*F;
    resp(1,i)=abs(X(1))
    if real(X(1))<0 then
        resp(2,i)=180/%pi*(atan(imag(X(1))/real(X(1)))-%pi)
    else
        resp(2,i)=180/%pi*(atan(imag(X(1))/real(X(1))))
    end
end
endfunction
```

### 2.3 Rotor multidisco sobre soportes flexibles con amortiguamiento MMT

El Método de la Matriz de Transferencia (MMT) es un método aproximado que trata al sistema continuo como un sistema de  $n$ -grados de libertad, donde  $n$  es un número finito. Se plantean ecuaciones de equilibrio que se resuelven asumiendo una solución que tiene generalmente la forma de series de funciones conocidas. Este procedimiento conduce a un problema de auto-valores, similar en estructura al problema de un sistema discreto de  $n$ -grados de libertad. Su solución es un conjunto de “ $n$ ” auto-valores distintos, que proveen las aproximaciones para las primeras “ $n$ ” frecuencias naturales o velocidades críticas del sistema, dependiendo de los datos y las simplificaciones realizadas, estos auto-valores se corresponden con los “ $n$ ” auto vectores, que se calculan por el mismo método y son usados para construir las “ $n$ ” formas modales del sistema original. Para tal fin, se aproxima la geometría del rotor a un número de discos rígidos conectados por tramos de eje (figura 2). Los discos son considerados como cuerpos rígidos y son llamados estaciones. Los tramos de eje son llamados campos. También, se consideran estaciones en los extremos, en los apoyos y los cambios de sección.

Para cada estación o campo se plantea un sistema de ecuaciones que relacione la deflexión lateral  $\delta$ , el ángulo de giro  $\psi$ , el esfuerzo de corte  $Q$ , y el momento flector  $M_f$  a ambos lados de dicho elemento. Ese sistema se presenta como una matriz de coeficientes o matriz de transferencia.

$$\{\delta_i^r \quad \psi_i^r \quad M_i^r \quad Q_i^r\}^T = [T_{f/s}]_i \{\delta_i^l \quad \psi_i^l \quad M_i^l \quad Q_i^l\}^T \quad (17)$$

Por último, considerando todos los campos y estaciones se llega al sistema de ecuaciones que rige el comportamiento del rotor y se puede expresar de la forma.

$$\{\delta_{n+1}^r \quad \psi_{n+1}^r \quad M_{n+1}^r \quad Q_{n+1}^r\}^T = [T_s]_{n+1} [T_f]_n \dots [T_f]_2 [T_s]_2 [T_f]_1 [T_s]_1 \{\delta_1^l \quad \psi_1^l \quad M_1^l \quad Q_1^l\}^T \quad (18)$$

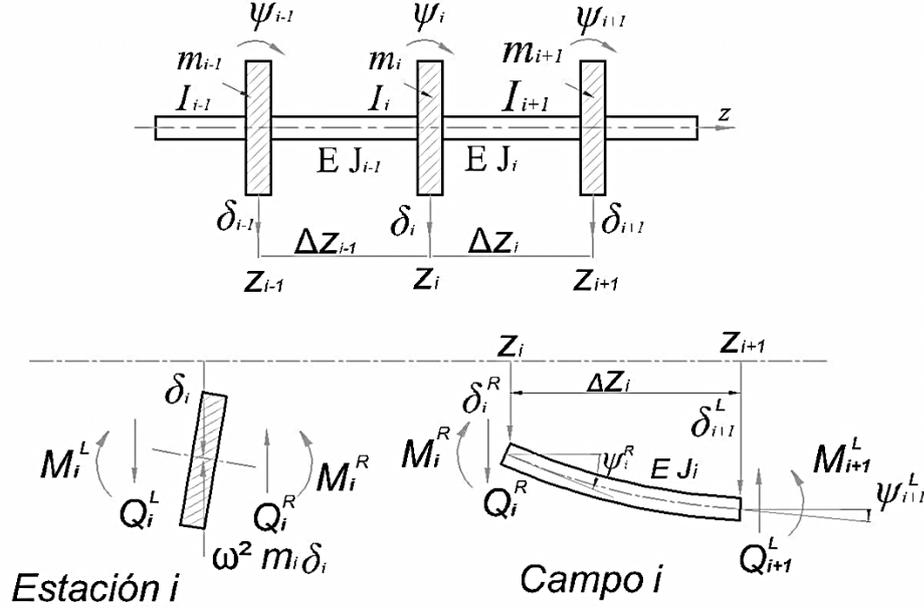


Fig. 2. Ejemplo de descomposición de un rotor en campos y estaciones

Una vez resulta la ecuación (18) para una determinada condición de contorno se puede calcular los desplazamientos de cada disco incluyendo el disco desequilibrado y de esta manera determinar la respuesta en desbalance.

### 2.3.1. Formulación de matriz de transferencia de campo

Si se considera cada tramo de eje como una viga ideal de masa despreciable, las relaciones entre deformación y esfuerzos entre ambos extremos del campo, se pueden encontrar planteado los coeficientes de influencia que relacionan esfuerzos y deformaciones entre extremos de una viga, a partir de las expresiones tradicionales de la resistencia de materiales, esto permite armar el siguiente sistema de ecuaciones presentado matricialmente a continuación.

$$\begin{Bmatrix} \delta_{i+1}^L \\ \psi_{i+1}^L \\ M_{i+1}^L \\ Q_{i+1}^L \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \Delta z_i & \Delta z_i^2/2EI_i & -\Delta z_i^2/6EI_i & 0 \\ 0 & 1 & \Delta z_i/EI_i & -\Delta z_i^2/2EI_i & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\Delta z_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_i^R \\ \psi_i^R \\ M_i^R \\ Q_i^R \\ 1 \end{Bmatrix} = [T_f]_i \begin{Bmatrix} \delta_i^R \\ \psi_i^R \\ M_i^R \\ Q_i^R \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (19)$$

Donde  $\Delta z_i$  es la diferencia de ordenadas a lo largo del eje de los extremos del campo,  $E$  es el módulo de elasticidad del material e  $I$  es el momento de inercia de la sección respecto a un eje transversal a la misma.

### 2.3.2. Formulación de la matriz de transferencia de una estación

Para obtener las matrices de transferencia de cada disco o estación, algunos autores plantean la energía cinética del disco y usan el principio de Hamilton [12]. Otros, en cambio plantean las ecuaciones clásicas de movimiento

de un cuerpo rígido expresando el momento cinético en un sistema solidario al disco [7]. Partiendo de esta manera, considerando el efecto giroscópico y la masa del disco, se puede llegar a un sistema de ecuaciones que permite obtener una matriz de transferencia relativamente simple para el disco [3,10].

$$\begin{pmatrix} \delta_i^L \\ \psi_i^L \\ M_i^L \\ Q_i^L \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -I_p \omega^2 & 1 & 0 & 0 \\ -m_d \omega^2 & 0 & 0 & 1 & m_d exc \omega^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \delta_i^R \\ \psi_i^R \\ M_i^R \\ Q_i^R \\ 1 \end{pmatrix} = [T_f]_i \begin{pmatrix} \delta_i^R \\ \psi_i^R \\ M_i^R \\ Q_i^R \\ 1 \end{pmatrix} \quad (20)$$

Donde  $\omega$  es velocidad de rotación,  $m_d$  es la masa del disco,  $I_p$  es el momento de inercia del disco respecto a un eje perpendicular al de giro, los superíndices  $R$  y  $L$  indican derecha e izquierda del disco y  $exc$  es la excentricidad de masa del disco desbalanceado.

**Algoritmo 3.** Fragmento de programa simple de respuesta por el método de la matriz de transferencia para un rotor de 9 estaciones. (Se omite la parte de armado de matrices de campo y estación y la obtención de la matriz de transferencia total por razones de extensión).

```
function fl=MMTUNIDISCv1Respdesb(w,Omg)// función de respuesta para una velocidad
.
.
.
Delta=hypermat([5 1 9])
Delta(1,1,1)=0;
Delta(2,1,1)=( (TTM(3,5,9)*TTM(1,4,9)/TTM(3,4,9)) -TTM(1,5,9) ) / (TTM(1,2,9) -
(TTM(3,2,9)*TTM(1,4,9)/TTM(3,4,9)) );
Delta(3,1,1)=0;
Delta(4,1,1)=( (TTM(1,5,9)*TTM(3,2,9)/TTM(1,2,9)) -TTM(3,5,9) ) / (TTM(3,4,9) -
(TTM(3,2,9)*TTM(1,4,9)/TTM(1,2,9)) );
Delta(5,1,1)=1;
for l =2:9
for i=1:5
for k=1:5
Delta(i,1,l) = Delta(i,1,l)+TT(i,k,l-1)*Delta(k,1,l-1)
end
end
end
Deltad=hypermat([5])
Deltad(1)=Delta(1,1,9)
Deltad(2)=Delta(2,1,9)
Deltad(3)=Delta(3,1,9)
Deltad(4)=Delta(4,1,9)
Deltad(5)=Delta(5,1,9)
Delta(1,1,9)=0
Delta(2,1,9)=0
Delta(3,1,9)=0
Delta(4,1,9)=0
Delta(5,1,9)=0
for i=1:5
for k=1:5
Delta(i,1,9) = Delta(i,1,9)+Td(i,k,9)*Deltad(k)
end
end
flechayQ=hypermat([2 9])
for i =1:9
flechayQ(1,i)=Delta(1,1,i)
flechayQ(2,i)=Delta(4,1,i)
end
fl= flechayQ
endfunction

function MMTrespuestaFFdisc(a,b,c,d)// función para obtener respuesta a distintas
velocidades
n=(b-a)/c
```

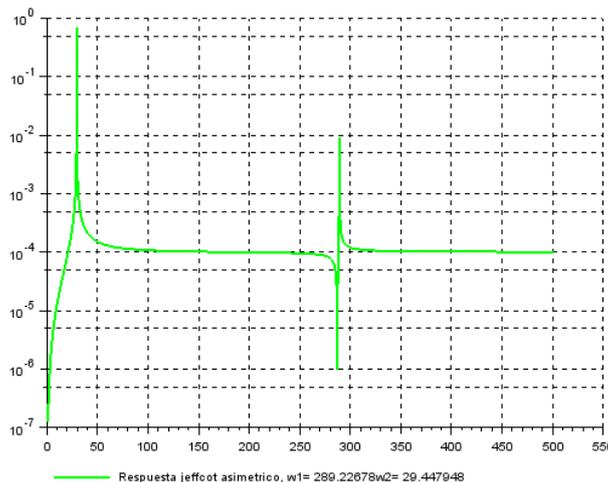
```

        Lista=hypermat([3 (n+1)])
        fyQ=hypermat([2 9])
        fyQ=MMTUNIDISCv1Respdesb(a,a,d)
        lista(1,1)=a
        lista(2,1)=fyQ(1,5)
        lista(3,1)=fyQ(2,1)
        for i=1:n
            fyQ=hypermat([2 9])
            fyQ=MMTUNIDISCv1Respdesb((a+i*c),(a+i*c),d)
            lista(1,i)=a+i*c
            lista(2,i)=(fyQ(1,5))
            lista(3,i)=fyQ(2,1)
        end
    endfunction

```

### 3 Secuencia didáctica propuesta

Los modelos presentados en este trabajo y algunos más no incluidos por cuestiones de espacio, serán incluidos en una secuencia didáctica de dos clases sobre dinámica de rotores. La misma consta de una presentación del docente y espacios de trabajo donde se propondrá que los estudiantes usen los algoritmos desarrollados para hallar respuestas de distintos rotores de medidas preestablecidas y completen con los resultados en una guía de clases.

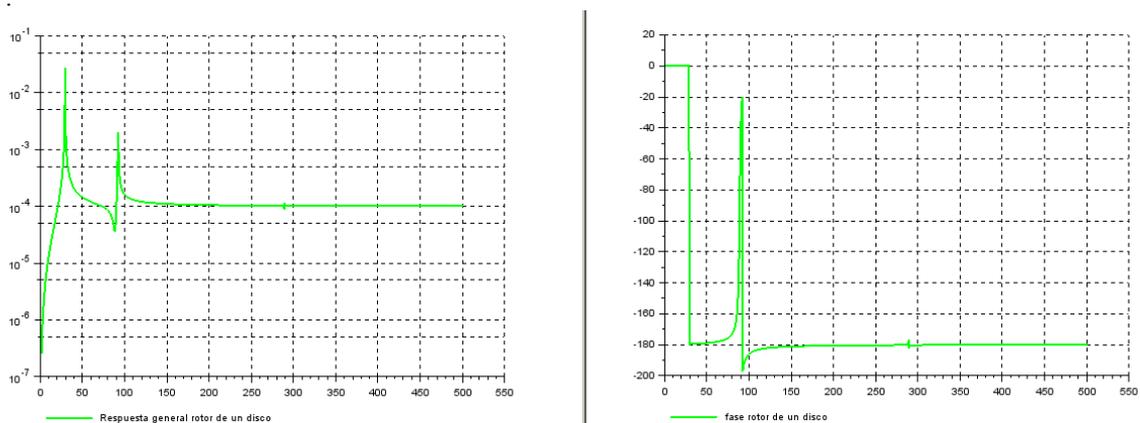


**Fig. 3.** Grafica obtenida por el algoritmo 1 para un rotor desbalanceado con eje de 1metro, desplazado 25cm del techo, diámetro del eje 10mm, disco de 10kg de masa y momento de inercia 0,02kgm<sup>2</sup>

En dicha secuencia de trabajo en el laboratorio de computación se comienza por analizar el modelo de Rankine con sus limitaciones, luego el modelo de un rotor flexible de un solo disco sobre soportes rígidos (Jeffcott), a partir de comparar estos dos modelos se pretende que los estudiantes comprendan la diferencia entre resonancia y velocidad crítica y las razones por las que se puede superar las velocidades críticas. Las gráficas que se pueden lograr con el programa del algoritmo 1 son como la presentada en la figura 3.

Luego se analizar el modelo de rotor rígido sobre soportes flexibles, con el que se pretende introducir el amortiguamiento y a continuación el modelo de rotor flexible sobre cojinetes flexibles como el algoritmo 2. En la figura 4, se presenta un ejemplo de las gráficas de respuesta obtenidas por este algoritmo. Finalmente, un modelo general basado en el método de la matriz de transferencia cuyo algoritmo es presentado en parte en el apartado 2.3 de este trabajo.

Los códigos se desarrollaron como funciones de Scilab con la idea de poder llamarlas cambiando valores de diámetros, distancia entre apoyos, masas y coeficientes de cojinetes, durante la clase y de esta manera posibilita a los estudiantes a probar con distintos rotores y apreciar que pasa cuando el rotor es más rígido o cuando los soportes son más rígidos y poder contrastar los resultados con la teoría que se está presentando. La idea de darles los algoritmos ya desarrollados es para acortar los tiempos dada la extensión de la asignatura que es mecánica Racional donde este tema es un tema anexo por la catedra,



**Fig. 4.** Gráfica obtenida por el algoritmo 2 para un rotor desbalanceado con eje de 1metro, desplazado 25cm del techo, diámetro del eje 10mm, disco de 10kg de masa y momento de inercia  $0,02\text{kgm}^2$  y cojinetes flexibles de rigideces:  $k_{xx} = 1000\text{N/m}$ ,  $k_{yy} = 44000\text{N/m}$ ,  $k_{xy} = 500\text{N/m}$ ,  $k_{yx} = 750\text{N/m}$  y amortiguamientos  $c_{xx} = c_{yy} = 0.5 \text{ N-s/m}$ ,  $c_{yx} = c_{xy} = 0.05 \text{ N-s/m}$

## 4 Conclusiones y trabajos futuros

Estos algoritmos permiten llegar a resultados numéricos de modelos de dinámica de rotores clásicos sin necesidad de un programa comercial de elementos finitos, haciendo uso de una herramienta gratuita, y esto permite usarlo en el aula sin necesidad de inversión económica alguna.

Los mismos no fueron usados aún como herramienta didáctica, pero se espera poder emplearlos en el corriente año. Se realizará una evaluación de resultados de la secuencia didáctica por dos caminos: mediante preguntas incluidas en un cuestionario teórico del parcial de la materia y mediante una encuesta de opinión.

En un futuro, se espera complementar estos algoritmos con un entorno gráfico.

## Referencias

1. Rankine, W. J. M.: On the centrifugal force of rotating shaft. *The Engineer*, N° 27, pp. 249(1869)
2. Jeffcott, H. H.: The lateral vibration of loaded shafts in neighborhood of a whirling speed: the effect of want of balance. *Philosophical Magazine*, Ser. 6, Vol. 37, Issue 219, pp. 304-314 (1919)
3. Vance, J. M.: *Rotordynamics of Turbomachinery*. Jhon Wiley & Sons, (1988)
4. Sheng-Chung Hsieh, Juhn-Horng Chen, An-Chen Lee: A modified transfer matrix method for the coupling lateral and torsional vibrations of symmetric rotor-bearing systems. *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 289, pp 294-333, (2006)
5. Meirovitch, L.: *Analytical Methods in Vibrations*. The Macmillan Company, (1967)
6. Murphy, B.T.; Vance, J. M.: An improved method for calculating critical speeds and rotordynamic stability of turbomachinery. *Transactions of the ASME- Journal of Engineering for Power*, vol. 105, pp. 591-595, (1983)
7. Ghasemalizadeh, O.; Reza Mirzaee, M.; Sadeghi, H.; Taghi Ahmadian, M.: Rotor bearing System Analysis Using the Transfer Matrix Method with Thickness Assumption of Disk and Bearing. *International Journal of Mechanical, Industrial and Aerospace Engineering*, Vol. 2, N° 4, pp. 206-213, (2008)
8. Varney, P.; Green, I.: Rotordynamic analysis using the Complex Transfer Matrix: An application to elastomer supports using the viscoelastic correspondence principle. *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 333, pp. 6258-6272,( 2014)
9. Sung Jun, O.: Influence coefficients on rotor having thick shaft elements and resilient bearings. *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 272, pp. 657-673,( 2004)
10. Farshidianfar, A.; Soheili, S.: Effects of Rotary Inertia and Gyroscopic Momentum on the Flexural Vibration of Rotating Shafts Using Hybrid Modeling. *Transaction B: Mechanical Engineering*, Vol. 16, N° 1, pp. 75-86, (2009)
11. Jong-Shyong Wu; Foun-Tang Lin; Huei-Jou Shaw: Analytical Solution for Whirling Speeds and Mode Shapes of a Distributed-Mass Shaft With Arbitrary Rigid Disks. *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 81, N° 3, ID 034503: 10 pág. (2014)
12. Chao-Yang Tsai; Shyh-Chin Huang.: Transfer matrix for rotor with parallel misalignment. *Journal of Mechanical Science and Technology*, Vol. 23, pp. 1383-1395, (2009)
13. Chao-Yang Tsai; Shyh-Chin Huang.: Vibrations of a rotor system with multiple coupler offsets. *Transactions of the Canadian Society for Mechanical Engineering*, Vol. 35, N° 1, pp. 81-100, (2011)
14. Green, I.; Casey, C.: Crack Detection in a Rotor Dynamic System by vibration Monitoring- Part I: Analysis. *Journal of Engineering for gas turbines and Power*, Vol. 127, pp. 425-436, (2005)