

# Modelo elemental de flujo de un fluido viscoso elástico. El glaciar Bahía del Diablo. Parte I

**Néstor O. Rotstein<sup>1</sup>; Sebastián Marinsek<sup>2</sup>**

1 Universidad Tecnológica Nacional, Facultad Regional Buenos Aires  
Medrano 951 (C1179AAQ), Buenos Aires, Argentina

2 Instituto Antártico Argentino, Balcarce 290 (CP 1064), Buenos Aires, Argentina

*nrotstein@cedi.frba.utn.edu.ar*

*Recibido el 20 de Junio de 2013, aprobado el 3 de Julio de 2013*

## Resumen

En este trabajo analizamos la dinámica de un glaciar, pensado como un cuerpo de hielo que se deforma y fluye debido a los esfuerzos derivados de su propio peso. Tratamos el glaciar como un sistema de densidad variable fluyendo sobre un lecho de perfil matemáticamente definido a través de una función que admite inversa. Esta es una condición necesaria para mantener el problema en un nivel matemáticamente tratable. El formalismo lo aplicamos a un sector transversal del glaciar "Bahía del Diablo" (isla Vega, Antártida Argentina) cuyo lecho ha sido registrado por medio de mediciones efectuadas con un radar de hielo. A partir de las profundidades medidas se elaboró un perfil del fondo, que aproximamos por diferentes curvas. En este artículo tratamos el perfil parabólico. Del modelo resultan funciones de velocidad que dependen fuertemente de las condiciones de contorno y, en menor grado, de la variación de densidad en profundidad que introducimos a través de una función lineal. Comparamos los resultados obtenidos con las velocidades en superficie, que también han sido registradas *in situ*. Las diferencias que existen entre los valores calculados y los valores medidos podrían deberse a la velocidad de la base del glaciar, que posiblemente responde a mecanismos de deslizamiento que no habremos de contemplar en el modelo.

**PALABRAS CLAVE:** FLUJO MÁSSICO - FLUIDO - VISCOELASTICIDAD - GLACIAR

## Abstract

In this paper we analyze glacier dynamics, assumed to be a large body of ice that deforms itself and flows owing to stresses produced by its own weight. We treat glacier like a non uniform density system that moves over a bed whose profile can be defined by a mathematical bijective function. This is a necessary condition in order to keep the problem in an amenable level. We apply the formalism to "Bahía del Diablo" glacier (Vega island, located in the Argentinean sector of Antarctic). Depths of glacier bed were derived from measurements made by means of portable radar. By means of these determined depths we have constructed a bed profile that we approximate through three different curves. Model results in a set of velocity functions, strongly dependent of contour conditions and, in a less degree, of mass density variations with depth, which we have introduced through a linear function. Surface velocities were also measured *in situ*. We find differences between measured and calculated values, which likely arise from glacier base sliding velocity, a mechanism that we do not consider in this work.

**KEYWORDS:** MASS FLUX - FLUIDS - VISCOELASTICITY - GLACIER

## Introducción

El conjunto de fenómenos asociados a lo que generalmente se denomina calentamiento global de la atmósfera planetaria se ha transformado en uno de los temas centrales de la agenda de las sociedades modernas. Dentro de este escenario se inscribe naturalmente el estudio del retroceso de los glaciares, pues parece inmediato asociar la ablación de masas glaciares al aumento de la temperatura del aire.

Este fenómeno, sin embargo, no es ni sencillo ni es lineal, pues de hecho hay algunos glaciares alrededor del mundo que, al menos en épocas recientes, no han presentado grandes cambios (por ejemplo el glaciar Perito Moreno) y otros incluso, han avanzado, es decir, han mostrado balances de masa positivo (véase el reporte del Servicio Mundial de Monitoreo de Glaciares (WMGS), 2013). Dentro de este panorama, los glaciares de la Península Antártica experimentan un marcado retroceso, al menos desde hace 50 años (Cook et al., 2005; Cook y Vaughan, 2010). Lo que hace particularmente interesantes a los glaciares antárticos es su marcada sensibilidad al cambio climático, de manera tal que, sea como sistemas individuales o como parte del conjunto completo de masas de hielo polares y subpolares, se torna esencial el monitoreo permanente de su evolución.

En consecuencia, se desprende la necesidad de contar con un modelo que enmarque el conjunto de datos obtenidos y su posterior sistematización. Independientemente de las características estructurales y geográficas del glaciar que se estudie, la imprevisibilidad de los cambios climáticos no permitirá que exista un modelo definitivo porque las variaciones en las condiciones climatológicas y atmosféricas habrán de afectar de manera directa el comportamiento dinámico del glaciar, pero no resulta menos cierto que un modelo de la evolución dinámica del glaciar es un indicador de los cambios del entorno, tanto más fiel cuanto más cercano a la realidad que describimos ese modelo esté. En la literatura tradicional se introducen diversas aproximaciones que tienden a simplificar el tratamiento general de la evolución de glaciares (véase por ejemplo Oerlemans, 2001; Cuffey y Paterson, 2010). En este trabajo desarrollamos un modelo de evolución glaciaria suponiendo conocido el perfil del lecho, el que aproximamos matemáticamente

por una función biyectiva de las variables espaciales perpendiculares a la dirección del flujo. A la par, y abandonando la hipótesis de densidad constante, permitimos eventualmente pequeñas variaciones en la densidad de masa del hielo glaciario con la profundidad, que habremos de modelizar como lineales.

En la primera parte del trabajo introduciremos el tratamiento general del problema, arribando a un conjunto de ecuaciones que, en principio y a la luz de las simplificaciones que proponemos, se reducen a una ecuación diferencial para los elementos de la parte deviatorica del tensor de esfuerzos. Sin embargo, como habremos de ver, el tratamiento matemático requiere en general de dos integraciones de las variables dinámicas que dependen de la particular forma funcional que resulte para el esfuerzo en la dirección de avance del glaciar. Por esta razón no cualquier perfil que se proponga es capaz de mantener el problema en un nivel matemático tratable, aunque siempre debe tratarse de una función plausible, consistente con los perfiles de lechos conocidos.

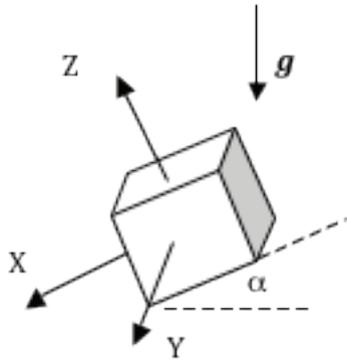
En la segunda parte, habremos de aplicar el modelo desarrollado a uno de los sectores del glaciar Bahía del Diablo (que se localiza en la península Antártica) y dejaremos la sección 4 para el análisis de las implicaciones de esta formulación y la discusión de sus resultados.

## Tratamiento general

Un glaciar fluye por deformación de la estructura cristalina del hielo que lo forma, es decir, se comporta como un fluido viscoso cuyo altísimo coeficiente de viscosidad  $\eta$ , de alrededor de  $10^{13}$  Pa s (esto es, del orden de  $10^{16}$  veces la viscosidad del agua), hace que pueda ser tratado como un fluido de tipo plástico sometido a esfuerzos de tensión y de cizalladura que de alguna manera gobiernan su evolución dinámica. En consecuencia, se trata de fluidos no newtonianos comparativamente lentos, con velocidades de entre 1 - 100 m/año.

Aun cuando un glaciar fluye viscosamente, en el lecho el hielo puede alcanzar el punto de fusión (sea por fricción, por calentamiento geotérmico, combinación de ambos factores o algunos otros que se han propuesto, véase por ejemplo Lliboutry, 1979; Iken, 1981; Fowler,

2010) y en tal caso no sólo derrama sino que además desliza. Esta observación supone la existencia de dos regímenes dinámicos acoplados en la capa límite de fusión que por el momento obviaremos. Por lo demás, es posible que la densidad del hielo sufra ligeras variaciones en profundidad, o que exista alguna región en la que la viscosidad pueda ser razonablemente considerada independiente de las tensiones y los esfuerzos de corte, esto es, que localmente se comporte como un fluido newtoniano (Fontelos; Muñoz y Schiavi, 2007). Nosotros habremos de introducir ligeras variaciones de la densidad con la profundidad del glaciar, variaciones que podrían simular la compresión gravitatoria.



**Fig. 1. Sistema coordenado en el que se describe el modelo**

Para ello, supondremos que el fluido viscoso derrama gravitatoriamente sobre una superficie inclinada, de manera tal que describiremos la evolución cuasiestacionaria del flujo ( $\partial/\partial t = 0$ ) en el sistema de ejes cartesianos XYZ de la figura 1, orientados en la dirección X del flujo. Obsérvese que la dirección del vector aceleración gravitatoria ya no coincide localmente con el eje Z, sino que forma un ángulo  $\alpha$  que es precisamente el ángulo de inclinación del glaciar. Por lo demás, las ecuaciones de evolución dinámica serán en este caso

$$\nabla \cdot (\rho \vec{U}) = 0 \quad (1)$$

$$\rho (\vec{U} \cdot \nabla) \vec{U} = \nabla \underline{\sigma} - \rho \nabla G \quad (2)$$

donde  $\rho$  representa la densidad del fluido,  $\vec{U}=(u,v,w)$  es su velocidad,  $\sigma$  representa el tensor de esfuerzos y  $G$  el potencial gravitatorio. Obsérvese que en el sistema de coordenadas cartesianas

propias que hemos adoptado, las componentes del vector  $\vec{U}$  se refieren a las velocidades en las direcciones  $x, y, z$ , respectivamente.

Como la parte isotrópica del tensor de tensiones no contribuye a la deformación de materiales incompresibles (como usualmente se asume al tratar con el hielo glaciar) definiremos los esfuerzos en términos de la parte deviatorica en la forma

$$\sigma_{ij}^{(D)} = \sigma_{ij} - P \delta_{ij} = \eta \left( \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) \quad (3)$$

donde  $P$  es la presión hidrostática,  $\delta_{ij}$  es la delta de Kronecker,  $[\sigma_{ij}^{(D)}]$  es la parte deviatorica del tensor y  $\eta$  la viscosidad del fluido. Por lo demás (véase, por ejemplo, Cuffey y Paterson, 2010) la expresión (3) puede también escribirse en términos del tensor de la tasa de esfuerzos  $D_{ij}$  como

$$D_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) \quad (4)$$

En lo que sigue supondremos que el flujo avanza uniformemente en la dirección X, sin deformaciones en las direcciones perpendiculares, restricciones que matemáticamente se traducen en las formas

$$v = w = 0 \quad (5)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} = 0 \quad (6)$$

Estas restricciones desde ya nos adelantan, a través de la expresión (3), que resultan nulas algunas componentes del tensor de tensiones, a saber

$$\sigma_{yy}^{(D)} = \sigma_{zz}^{(D)} = \sigma_{zy}^{(D)} = \sigma_{xx}^{(D)} = 0 \quad (7)$$

Por lo demás, las componentes no nulas del tensor resultan ser

$$\sigma_{xy}^{(D)} = \eta \frac{\partial u}{\partial y} \quad (8)$$

$$\sigma_{xz}^{(D)} = \eta \frac{\partial u}{\partial z} \quad (9)$$

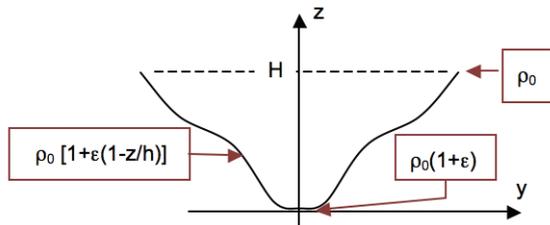
En lo que sigue, habremos de trabajar sobre perfiles del lecho de forma definida, esto es, de ecuación general

$$z = \Phi(y) \quad (10)$$

y pensaremos la densidad de masa perturbada a primer orden en la forma

$$\rho(z) = \rho_0 \left[ 1 + \varepsilon \left( 1 - \frac{z}{H} \right) \right] \quad (11)$$

donde H es la altura del sistema. En la Figura 2 mostramos el esquema general de alturas al que nos referimos, notando que en  $z=0$  está el vértice de la particular curva  $\phi(y)$  sobre la que trabajamos. Obsérvese que  $z=H$  es el extremo superior (tanto derecho como izquierdo) del sistema, es decir, la altura de los puntos de la superficie del glaciar (considerada plana) en tanto que  $z=0$  representa el punto inferior del sistema en contacto con el lecho.



**Fig.2. Esquema de perfiles de las curvas (perpendiculares al flujo) sobre las que se calculan las velocidades. H es la altura máxima. Se muestran asimismo valores particulares de a distribución de masa en diferentes puntos incluyendo uno intermedio a la altura h/  $0 < h < H$ .**

Obsérvese ahora que la ecuación (1) es idénticamente nula, y aunque es cierto que por la particular estructura del campo de velocidades que hemos adoptado resulta  $\nabla \vec{U} = 0$ , no se implica en este caso que se trate de un fluido de densidad constante (de hecho, recordemos que estamos trabajando en la hipótesis (11)). Por la particular dependencia funcional de la velocidad y la masa es nulo el miembro izquierdo de la expresión (2) que en consecuencia se desarrolla como

$$\frac{\partial \sigma_{xz}^{(D)}}{\partial z} = -\rho(z) g \operatorname{sen} \alpha - \frac{\partial \sigma_{xy}^{(D)}}{\partial y} \quad (12)$$

$$0 = -\frac{\partial P}{\partial z} - \rho(z) g \cos \alpha \quad (13)$$

Notemos ahora que en principio la ecuación (10) puede invertirse y escribirse en la forma

$$y = f(z) \quad (14)$$

de manera tal que resulte

$$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{1}{f'_z} \frac{\partial}{\partial z} \equiv F \frac{\partial}{\partial z} \quad (15)$$

$$dy = \frac{\partial y}{\partial z} dz = f'_z dz \quad (16)$$

En términos de la relación (16), resultan las identidades

$$\sigma_{xy}^{(D)} = \eta \frac{\partial u}{\partial y} = \eta F \frac{\partial u}{\partial z} \quad (17)$$

$$\sigma_{xz}^{(D)} = \eta \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{1}{F} \sigma_{xy}^{(D)} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{xy}^{(D)}}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} [F \sigma_{xz}^{(D)}] = F \frac{\partial}{\partial z} [F \sigma_{xz}^{(D)}] \\ &= F \left[ F' \sigma_{xz}^{(D)} + F \frac{\partial \sigma_{xz}^{(D)}}{\partial z} \right] \end{aligned} \quad (19)$$

Con las identidades (17)-(19) en mente, la ecuación (12) se escribe como una ecuación para  $\sigma_{xz}^{(D)}$  como función sólo de la profundidad z

$$(1 + F^2) \frac{d\sigma_{xz}^{(D)}}{dz} + [F F'] \sigma_{xz}^{(D)} = -\rho(z) g \operatorname{sen} \alpha \quad (20)$$

de manera tal que en las condiciones y aproximaciones planteadas, en principio es posible resolver la expresión (20) para el esfuerzo  $\sigma_{xz}^{(D)}$  y calcular el perfil de velocidades resultante a partir de la ley general de flujo (Glen, 1952; Nye, 1957)

$$D_{ij} = A(T) \tau^{n-1} \sigma_{ij}^{(D)} \quad (21)$$

donde A(T) es un coeficiente que depende de la temperatura (aunque en sistemas como los glaciares es constante en amplios rangos de temperatura) y  $\tau$  es el segundo invariante del tensor de esfuerzos, definido como

$$\tau^2 = \frac{1}{2} \sigma_{ij}^{(D)} \sigma_{ij}^{(D)} \quad (22)$$

A su vez, n es un factor constante empírico, del orden de 3 (Budd and Jacka, 1989). Teniendo en cuenta que el tensor  $\sigma$  es simétrico y real, es fácil desarrollar la expresión (22) en la forma

$$\tau^2 = \frac{1}{2} \left[ (\sigma_{xx}^{(D)})^2 + (\sigma_{yy}^{(D)})^2 + (\sigma_{zz}^{(D)})^2 + 2 (\sigma_{xy}^{(D)})^2 + 2 (\sigma_{xz}^{(D)})^2 + 2 (\sigma_{yz}^{(D)})^2 \right] \quad (23)$$

Ahora bien, sobre cada superficie  $y=f(z)$  vale la relación (18)

$$\sigma_{xy}^{(D)} = F \sigma_{xz}^{(D)}$$

De esta forma, el invariante (22), teniendo en cuenta las relaciones (18) y (23), se escribe como

$$\tau = \sqrt{(\sigma_{xy}^{(D)})^2 + (\sigma_{xz}^{(D)})^2} = \sqrt{1 + F^2} |\sigma_{xz}^{(D)}| \quad (24)$$

Con esta expresión para el invariante  $\tau$  podemos regresar a la ecuación (21) y escribir su forma completa en el caso que estamos tratando

$$D_{ij} = A(T) (1 + F^2)^{\frac{n-1}{2}} (\sigma_{xz}^{(D)})^n \quad (25)$$

y de esta manera calcular la velocidad  $u(z, \varepsilon)$  del flujo (recordemos que es la única que tomamos en cuenta) a partir de la expresión (4) como

$$\frac{du}{dz} = 2A(T)(1 + F^2)^{\frac{n-1}{2}} (\sigma_{xz}^{(D)})^n \quad (26)$$

Debe notarse que adoptar el valor  $n=1$  resulta en el tratamiento formal de un fluido newtoniano, de manera tal que de ninguna manera sería consistente con las ecuaciones (17) y (18), que adelantan que la viscosidad es función de los esfuerzos de corte. En consecuencia, en lo que sigue habremos de tratar el caso  $n=3$ .

### Aplicación al glaciar Bahía del Diablo

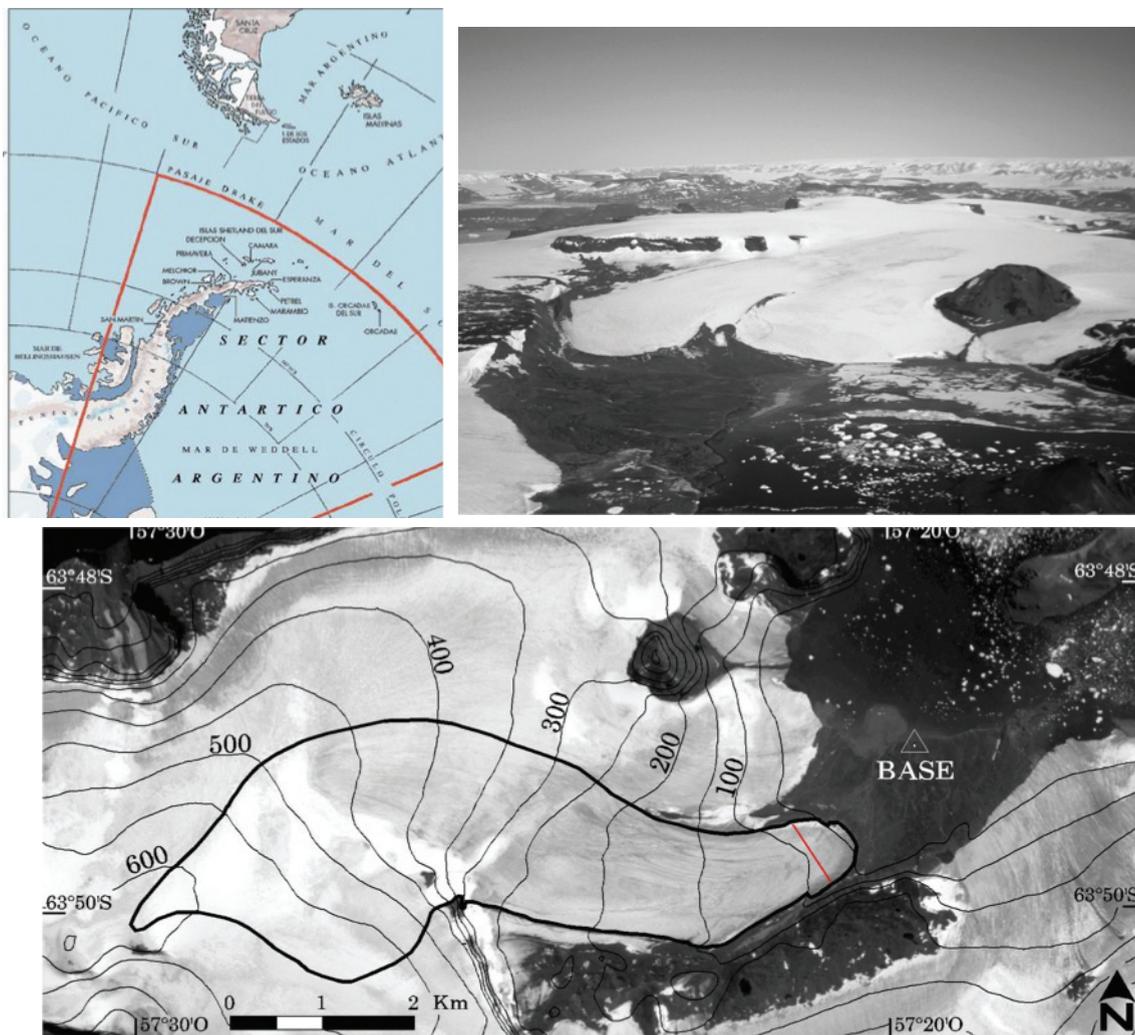
Algunos pocos glaciares de la isla Vega, en el noreste de la península antártica ( $63^\circ 49' S$ ;  $57^\circ 20' O$ ), al oeste de la Base Marambio, ofrecen la particularidad de que terminan en tierra, no son muy extensos en superficie (por lo que el balance de masa de estos glaciares es plausible dentro de las posibilidades logísticas disponibles durante las Campañas Antárticas Argentinas) y, por su naturaleza (no son glaciares de

desprendimiento) las variaciones de su balance de masa pueden asociarse directamente con el cambio climático.

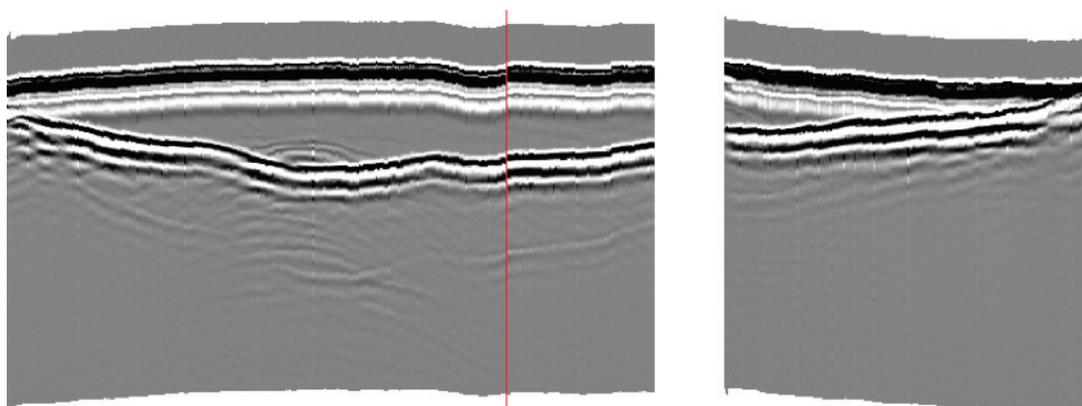
El glaciar Bahía del Diablo (GBD), que mostramos en la Figura 3, cuya superficie es de aproximadamente  $14 \text{ km}^2$ , es uno de los glaciares de la isla Vega, con la particularidad de que actualmente es el único glaciar de Antártida que aporta datos detallados al Servicio de Monitoreo Mundial de Glaciares (World Glacier Monitoring Service-WGMS), auspiciado por la UNESCO, que recopila los datos de balance de masa de una amplia diversidad de glaciares ubicados en distintos puntos de la Tierra, lo que permite evaluar el impacto del cambio climático en todo el planeta. La importancia de este tipo de resultados es tal que el WGMS de la Comisión Internacional de Nieve y Hielo (ICSI/IAHS) recolecta y publica datos estandarizados de glaciares como aporte al Global Climate/Terrestrial Observing System (GCOS/GTOS), establecido por la Organización Meteorológica Mundial (WMO), el Programa Medioambiente de Naciones Unidas (UNEP) y el ICSU y al Programa Hidrológico Internacional (PHI) de la UNESCO.

A lo largo de la línea que se muestra en la imagen satelital del GBD (parte inferior de la Figura 3) uno de nosotros (S. Marinsek) tomó imágenes de radar del lecho de la lengua del GBD durante la última campaña de verano del Instituto Antártico Argentino (Febrero - Marzo 2013). El radargrama se muestra en la Figura 4 y la Figura 5 resulta del tratamiento de esas imágenes y su traducción en profundidades y espesores. Obsérvese la línea vertical en rojo en el radargrama de la Figura 4: representa la localización de una baliza nivométrica por medio de la cual se ha medido el desplazamiento anual (la velocidad en superficie) y donde la profundidad corresponde a 73m.

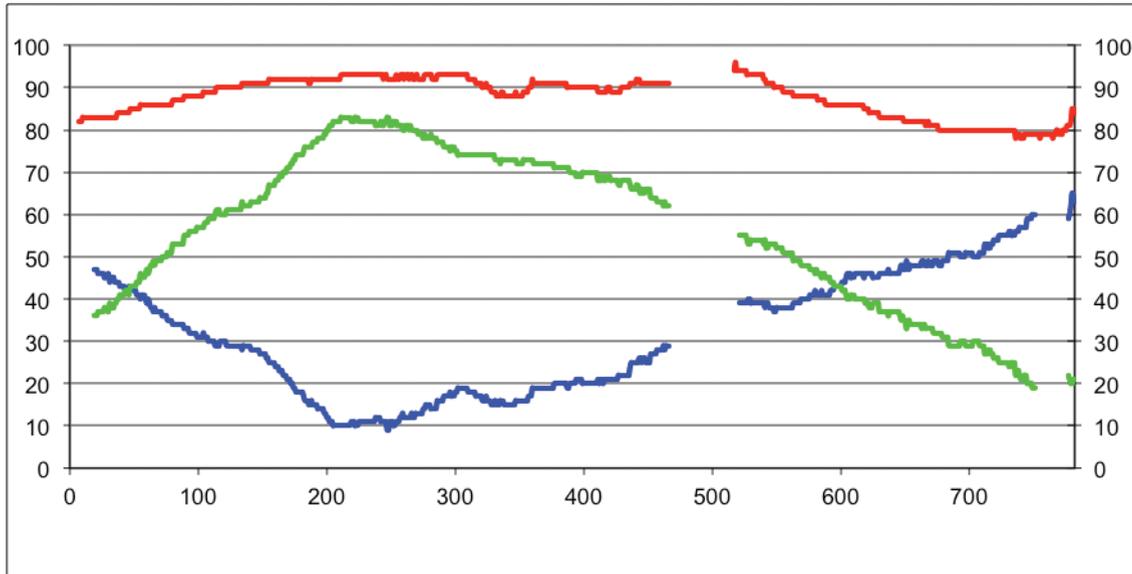
La primera observación casi evidente es que el perfil del lecho no es simétrico. Por ahora focalizaremos nuestra atención sobre la parte derecha del mismo. Aun cuando el perfil del fondo podría fijarse a través de un programa de ajuste de puntos, para ilustrar el método general de análisis que desarrollamos proponemos diversas curvas para poder analizar el efecto de la curvatura sobre las soluciones (obsérvese que incluso podría ajustarse una recta). Por la natural extensión del desarrollo, en este artículo sólo estudiaremos un perfil parabólico.



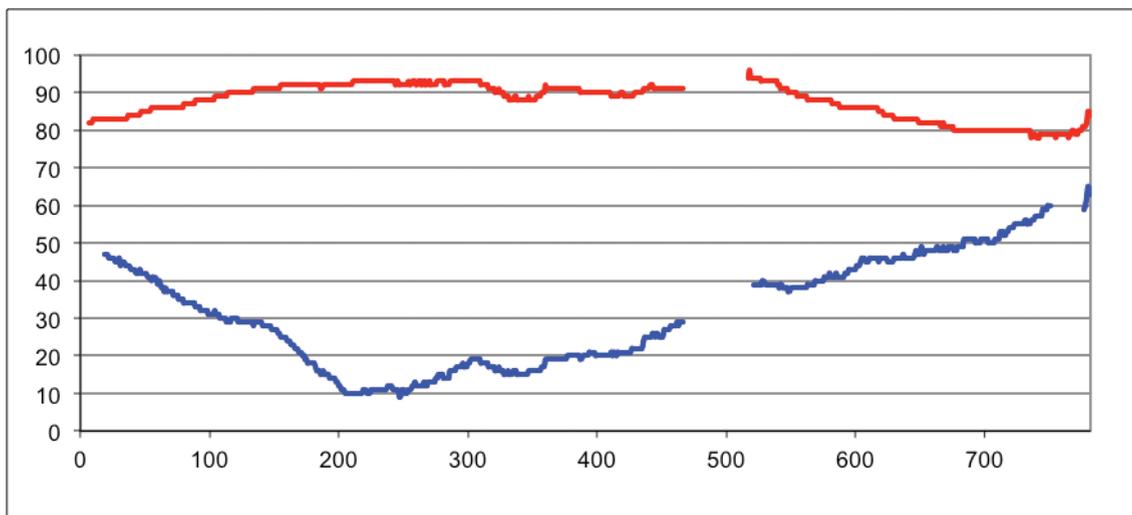
**Fig. 3.** En la parte superior izquierda se muestra la localización de la isla Vega y de la base Marambio, en el sector antártico argentino. A la derecha se muestra una imagen del GBD tomada por Marinsek desde uno de los bordes del glaciar el 13 de Marzo de 2013. El perfil del GBD se recorta en la figura inferior. Como referencia, la roca sobreelevada respecto al glaciar (nunatak Smit) se encuentra corriente arriba de la línea roja que se muestra en la parte inferior. Esta línea marca el camino que se siguió para la confección del radargrama de la Figura 4.



**Fig. 4.** Perfil de datos de radar tomados en la sección transversal de la lengua del GBD. Se pueden observar las reflexiones del lecho del glaciar. La línea roja indica la posición en la superficie de una baliza nivométrica. El sector en blanco se debe a una falla en el radar mientras se realizó la medición.



**Fig. 5. Esquema de perfiles de superficie y fondo en la región estudiada del GBD. La curva intermedia corresponde a las profundidades en cada punto.**



**Fig. 6. Ajuste de una parábola al perfil del fondo del GBD en la región estudiada. Obsérvese que el perfil propuesto (con  $a^2=1,87 \times 10^{-4} \text{ m}^{-1}$ ) ajusta aceptablemente en las partes baja y superior de la curva, en tanto que tiende a subvalorar en la región media.**

### Perfil parabólico

En la Figura 6 mostramos el ajuste del perfil con una curva de la forma  $z=a^2y^2$ , para  $a^2=1,87 \times 10^{-4} \text{ m}^{-1}$ .

$$\frac{\partial}{\partial y} = 2az^{1/2} \frac{\partial}{\partial z} \quad (28)$$

En este caso, las ecuaciones (14) – (19), con  $z=a^2y^2$ , se escriben como:

$$y = \frac{1}{a} z^{1/2} \quad (27)$$

$$\sigma_{xy}^{(D)} = \eta \frac{\partial u}{\partial y} = 2\eta az^{1/2} \frac{\partial u}{\partial z} \quad (29)$$

$$\sigma_{xz}^{(D)} = \eta \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{1}{2az^{1/2}} \sigma_{xy}^{(D)} \quad (30)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{xy}^{(D)}}{\partial y} &= 2az^{1/2} \frac{\partial}{\partial z} \left[ 2az^{1/2} \sigma_{xz}^{(D)} \right] = \\ &= 2a^2 \sigma_{xz}^{(D)} + 4a^2 z \frac{\partial \sigma_{xz}^{(D)}}{\partial z} \end{aligned} \quad (31)$$

Reemplacemos ahora la expresión (31) en la ecuación (20) para obtener:

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma_{xz}^{(D)}}{dz} (1 + 4a^2 z) + 2a^2 \sigma_{xz}^{(D)} = \\ - \rho(z) g \operatorname{sen} \alpha \end{aligned} \quad (32)$$

donde hemos escrito ahora derivadas totales en lugar de parciales porque z es la única variable espacial que sobrevive. La solución de la ecuación (32) para  $\rho(z)$  definida en la expresión (11) es inmediata y resulta en la forma:

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma_{xz}^{(D)}}{dz} (1 + 4a^2 z) + 2a^2 \sigma_{xz}^{(D)} = \\ - \rho(z) g \operatorname{sen} \alpha \end{aligned} \quad (33)$$

donde C es una constante a determinar, que evaluaremos de inmediato a partir del hecho de que en la superficie del sistema ( $z=H$ ) el esfuerzo se reduce a la componente de la presión atmosférica a lo largo del eje x, esto es,

$$\begin{aligned} \sigma_{xz}^{(D)}(z) &= \frac{C}{(1 + 4a^2 z)^{1/2}} - \\ 2 \frac{\rho_0 g \operatorname{sen} \alpha}{4a^2} \left[ 1 + \varepsilon \left( 1 - \frac{z}{3H} + \frac{2}{12a^2 H} \right) \right] \end{aligned} \quad (34)$$

donde hemos definido:

$$\begin{aligned} \sigma_{xz}^{(D)}(z=H) &= P_0 \operatorname{sen} \alpha = \\ \frac{C}{(1 + 4a^2 H)^{1/2}} - \\ 2 \frac{\rho_0 g \operatorname{sen} \alpha}{4a^2} \left[ 1 + \varepsilon \left( \gamma - \frac{1}{3} \right) \right] \end{aligned} \quad (35)$$

de manera tal que resulta:

$$\gamma = 1 + \frac{2}{12a^2 H} \quad (36)$$

Si por comodidad definimos ahora las cantidades:

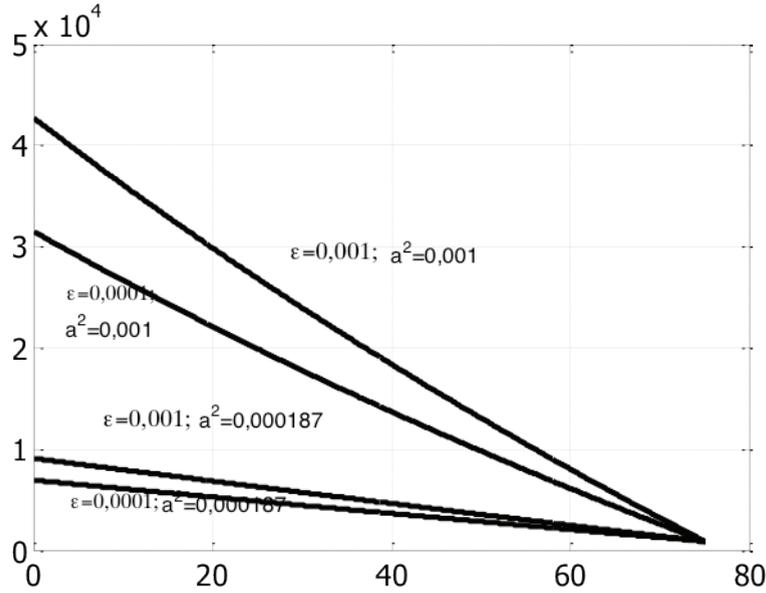
$$\begin{aligned} C &= \left( P_0 + 2 \frac{\rho_0 g}{4a^2} \left( 1 + \right. \right. \\ &\cdot \left. \left. \varepsilon \left( \gamma - \frac{1}{3} \right) \right) \right) \operatorname{sen} \alpha (1 + 4a^2 H)^{1/2} \end{aligned} \quad (37)$$

$$Q = 2 \frac{\rho_0 g}{4a^2} \quad (38)$$

la ecuación (33) se escribe como:

$$\begin{aligned} K &= \left[ P_0 + Q \left( 1 + \varepsilon \left( \gamma - \frac{1}{3} \right) \right) \right] \\ &(1 + 4a^2 H)^{1/2} \end{aligned} \quad (39)$$

En la Figura 7 mostramos el perfil de esfuerzos para diferentes valores de los parámetros de curvatura ( $a^2$ ) y de perturbación de densidad ( $\varepsilon$ ). Parece inmediato que los esfuerzos aumentan con el aumento de la curvatura y con el incremento de la densidad. La razón es como sigue: pensemos el sistema como un conjunto de capas (de hielo) superpuestas, como si se tratara de las hojas de una resma de papel. La deformación de las capas de hielo induce esfuerzos de corte en las superficies de contacto entre capas, de manera tal que el esfuerzo de corte aumenta con el aumento de masa porque debe sostener más hielo en equilibrio (porque sobre cada columna de hielo actúa la fuerza gravitatoria), aunque las diferencias son mínimas para los valores de  $\varepsilon$  que manejamos (la curva para  $\varepsilon=0$  y  $a^2=0,000187$  prácticamente se superpone con la inferior). Algo similar ocurre con el parámetro de curvatura, pues a idéntica anchura parece evidente que hay más masa para sostener en equilibrio cuanto más alto es el sistema. Obsérvese que en todos los casos el esfuerzo es definido positivo y monótono decreciente.



**Fig. 7. Esfuerzo de corte  $\sigma$  en función de la profundidad, para diferentes valores del parámetro de curvatura y de la perturbación de masa. En todos los casos se ha tomado  $H=75\text{m}$ ,  $P_0=1000\text{ hPa}$  y una inclinación  $\alpha$  de aproximadamente  $5^\circ$ .**

Es necesario notar que, dentro de los límites que impone el modelo, existe una relación definida entre la curvatura y la profundidad máxima admisible (o, si se prefiere, la altura máxima del glaciar). Ese límite, naturalmente, se impone exigiendo que los esfuerzos de cizalladura sean positivos. En este caso particular, teniendo en cuenta la expresión (39) podemos establecer esa relación como:

$$\sigma_{xz}^{(D)}(z) = \left[ \frac{K}{(1 + 4a^2z)^{1/2}} - Q \left[ 1 + \varepsilon \left( \gamma - \frac{z}{3H} \right) \right] \right] \text{sen } \alpha \quad (41)$$

Resulta casi evidente que los diferentes valores de curvatura que proponemos, con  $H=75\text{m}$ , mantienen el modelo dentro de los límites aceptables (algo que ya sabíamos porque los esfuerzos de corte de la Figura 7 son definidos positivos).

Ahora bien, a partir de la expresión (25) podemos evaluar la velocidad del sistema teniendo en cuenta la forma que adopta el invariante  $\tau$

$$\tau = \sqrt{(\sigma_{xy}^{(D)})^2 + (\sigma_{xz}^{(D)})^2} = \sqrt{1 + 4a^2z} \left| \sigma_{xz}^{(D)} \right| \quad (42)$$

Con esta expresión para el invariante  $\tau$  podemos regresar a la ecuación (25) y escribir su forma completa en el caso que estamos tratando:

$$D_{ij} = A(T) (1 + 4a^2z)^{\frac{n-1}{2}} (\sigma_{xz}^{(D)})^n \quad (43)$$

La velocidad de flujo a partir de la expresión (4) resulta en consecuencia:

$$\frac{du}{dz} = 2A(T) (1 + 4a^2z)^{\frac{n-1}{2}} (\sigma_{xz}^{(D)})^n \quad (44)$$

Integremos la ecuación (44) para  $n=3$ . Parece inmediato que se trata de resolver la ecuación

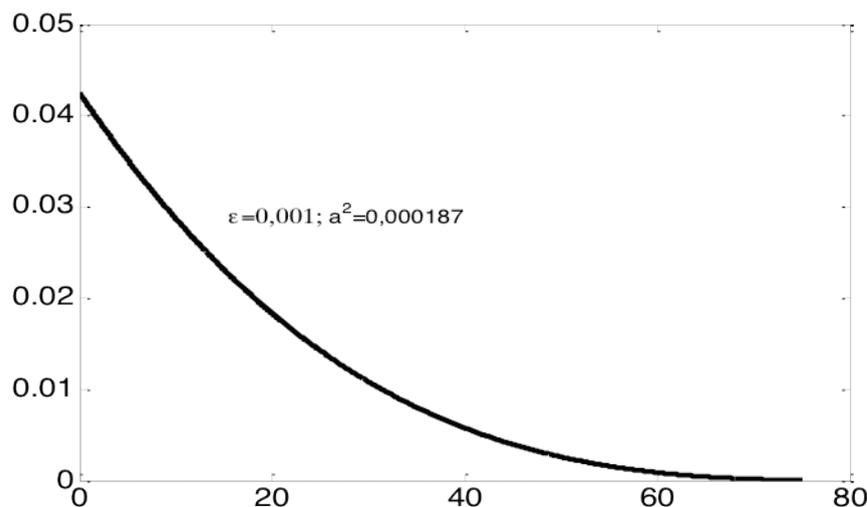
$$\begin{aligned} \frac{du}{dz} &= 2A(T)(1 + 4a^2z) \operatorname{sen}^3 \alpha \left[ \frac{K}{(1 + 4a^2z)^{1/2}} - Q \left( 1 + \varepsilon \left( \gamma - \frac{z}{3H} \right) \right) \right]^3 \equiv \\ &\equiv 2A(T) (1 + 4a^2z) \operatorname{sen}^3 \alpha \left[ \frac{K^3}{(1 + 4a^2z)^{3/2}} - \frac{3K^2Q \left( 1 + \varepsilon \left( \gamma - \frac{z}{3H} \right) \right)}{(1 + 4a^2z)} \right. \\ &\left. \frac{3KQ^2 \left( 1 + \varepsilon \left( \gamma - \frac{z}{3H} \right) \right)^2}{(1 + 4a^2z)^{1/2}} - Q^3 \left( 1 + \varepsilon \left( \gamma - \frac{z}{3H} \right) \right)^3 \right] \end{aligned} \quad (45)$$

$$\begin{aligned} \frac{du_0}{dz} &= 2A(T)(1 + 4a^2z) \operatorname{sen}^3 \alpha \left[ \frac{K}{(1 + 4a^2z)^{1/2}} - Q \right]^3 \equiv \\ &\equiv 2A(T) \operatorname{sen}^3 \alpha \left[ \frac{K^3}{(1 + 4a^2z)^{3/2}} - 3K^2Q + 3KQ^2(1 + 4a^2z)^{1/2} - Q^3(1 + 4a^2z) \right] \end{aligned} \quad (46)$$

En la Figura 8 mostramos las curvas de la derivada de la velocidad para  $a^2=0,000187\text{m}^{-1}$   $\varepsilon=0,001$ , que adelanta la forma del perfil de velocidad  $u_x(z)$  del glaciar; obsérvese que se trata de derivadas positivas y decrecientes, y

en términos del perfil de lecho adoptado, la velocidad crece mucho más rápidamente en los primeros cuarenta o cincuenta metros que en la región más superficial del glaciar.

### Soluciones con $\varepsilon=0$



**Fig. 8. Perfiles de la derivada de velocidad de avance del sistema en función de la profundidad. Las curvas corresponden a un parámetro de curvatura  $a^2=0,000187\text{m}^{-1}$  con una perturbación  $\varepsilon=0,001$ .**

La parte no perturbada de la ecuación (45), llamémosla  $u_0$ , es de la forma y su solución es inmediata

$$u_0(z) = \frac{2A(T)}{4a^2} \text{sen}^3 \alpha \left[ 2K^3 (1 + 4a^2 z)^{\frac{1}{2}} - 3K^2 Q 4a^2 z + \right. \\ \left. + 2KQ^2 (1 + 4a^2 z)^{3/2} - \frac{Q^3}{2} (1 + 4a^2 z)^2 \right] + u_p \quad (47)$$

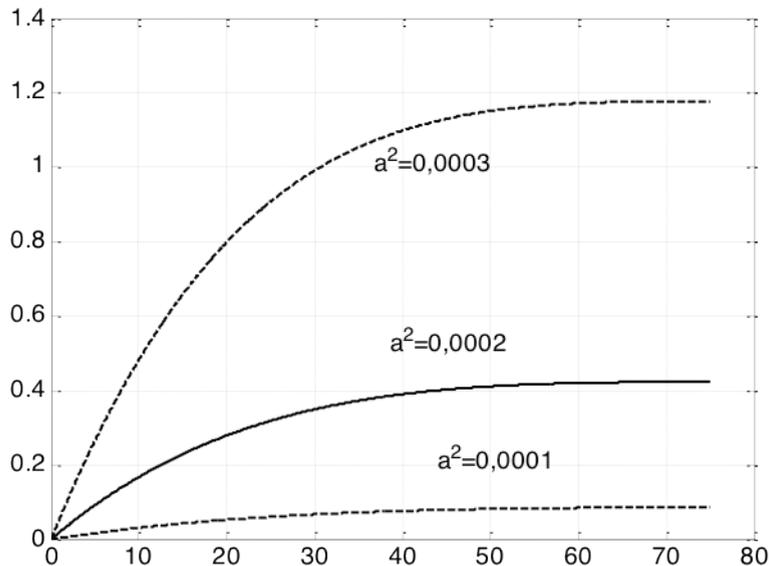
donde  $u_p$  es una constante de integración. Su valor puede calcularse fijando la velocidad del sistema en la base (el lecho del glaciar,  $z=0$ ) como  $u_b$ . La razón por la que se incluye esta última constante (no nula) es porque en general en los glaciares deben distinguirse dos tipos de movimiento: uno debido a la deformación interna (relacionado con el desplazamiento relativo entre cristales de hielo y que consideramos a través del tensor de esfuerzos) y otro debido al deslizamiento del glaciar sobre el lecho (sliding). Este último término es precisamente  $u_b$ . Claramente será:

$$u_0(z=0) \equiv u_b = \frac{2A(T)}{4a^2} \text{sen}^3 \alpha \left[ 2K^3 + 2KQ^2 - \frac{Q^3}{2} \right] + u_p \quad (48)$$

de manera tal que resulta

$$u_0(z) = \frac{2A(T)}{4a^2} \text{sen}^3 \alpha \left\{ 2K^3 \left[ (1 + 4a^2 z)^{\frac{1}{2}} - 1 \right] - 3K^2 Q 4a^2 z \right. \\ \left. + 2KQ^2 \left[ (1 + 4a^2 z)^{\frac{3}{2}} - 1 \right] - \frac{Q^3}{2} \left[ (1 + 4a^2 z)^2 - 1 \right] \right\} + u_b \quad (49)$$

En la Figura 9 mostramos las curvas correspondientes para diferentes valores del parámetro de curvatura. Obsérvese que la velocidad en la superficie crece con la disminución del parámetro de curvatura.



**Fig. 9. Perfiles de velocidad en función de la profundidad para diferentes valores de curvatura. La curva intermedia (de trazo continuo) es la que corresponde al a los parámetros del GBD.**

## Soluciones con $\varepsilon \neq 0$

Para resolver la parte perturbada, notemos que para  $H=75\text{m}$  y  $a^2 \sim 10^{-4}\text{m}^{-1}$ ,  $\gamma$  es del orden de 12, y como  $z/3H \leq 1/3$  podemos estimar que el paréntesis que multiplica a  $\varepsilon$  es del orden de 2. Luego, para  $\varepsilon \ll 1$  podemos desarrollar Taylor a primer orden los paréntesis que están multiplicados por  $\varepsilon$  en la ecuación (48)

$$(1 + p\varepsilon)^\chi \approx 1 + \chi p\varepsilon \quad (50)$$

Luego, es casi inmediato que a primer orden resultará:

$$u(z) = u_0 + 2A(T) \text{sen}^3 \alpha \int \varepsilon \left( \gamma - \frac{z}{3H} \right) [-3K^2Q + 6KQ^2(1 + 4a^2z)^{1/2} - 3Q^3(1 + 4a^2z)] dz \quad (51)$$

esto es

$$u(z) = u_0 + 2A(T) \text{sen}^3 \alpha \varepsilon \left\{ -3K^2Qz \left( \gamma - \frac{z}{6H} \right) + 6KQ^2(1 + 4a^2z)^{\frac{3}{2}} \left( \frac{2\gamma}{12a^2} - \frac{2(12a^2z - 2)}{720Ha^4} \right) - 3Q^3 \left( \frac{\gamma}{8a^2} (1 + 4a^2z)^2 - z^2 \left( \frac{1}{6H} + \frac{4a^2z}{9H} \right) \right) \right\} + u'_p \quad (52)$$

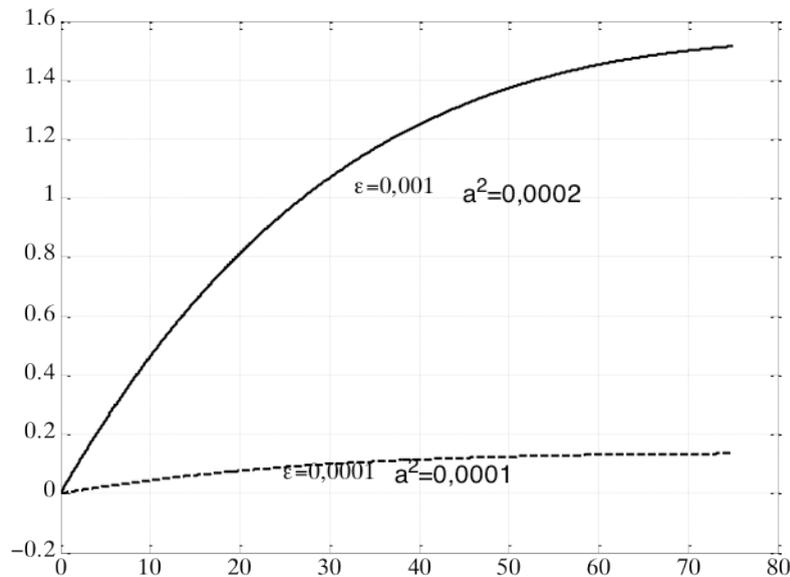
$$u(z=0) = u_0(0) + 2A(T) \text{sen}^3 \alpha \varepsilon \left\{ 6KQ^2 \left( \frac{2\gamma}{12a^2} + \frac{4}{720Ha^4} \right) - 3Q^3 \frac{\gamma}{8a^2} \right\} \quad (53)$$

escribimos la solución completa en la forma:

$$u(z) = u_0(z) + 2A(T) \text{sen}^3 \alpha \varepsilon \left\{ -3K^2Qz \left( \gamma - \frac{z}{6H} \right) + 6KQ^2 \left[ (1 + 4a^2z)^{\frac{3}{2}} \left( \frac{2\gamma}{12a^2} - \frac{2(12a^2z - 2)}{720Ha^4} \right) - \left( \frac{2\gamma}{12a^2} + \frac{4}{720Ha^4} \right) \right] - 3Q^3 \left( \frac{\gamma}{8a^2} [(1 + 4a^2z)^2 - 1] - z^2 \left( \frac{1}{6H} + \frac{4a^2z}{9H} \right) \right) \right\} \quad (54)$$

donde  $u_0(z)$  está dada por la ecuación (49). En la Figura 10 mostramos los perfiles de velocidad que resultan para dos pares diferentes de curvatura y de perturbación de masa.

En ambos casos la velocidad obtenida está por debajo de la velocidad medida en la baliza nivométrica (por encima de los 2m/año). La diferencia podría deberse a la existencia de un régimen diferencial en la capa límite de contacto entre el hielo y el lecho, que podría dar origen a mecanismos de deslizamiento basal.



**Fig. 10. Perfiles de velocidad para diferentes valores del parámetro de curvatura y diferentes valores de perturbación de masa.**

### Análisis y conclusiones

En este artículo hemos estudiado el avance de un glaciar, que fluye por efecto de su deformación y debido a los esfuerzos derivados de su propio peso. El principio de análisis es en sí estándar, pero la diferencia radica en que en este caso conocemos el perfil del lecho porque ha sido registrado *in situ*. Ni falta hace mencionarlo, no todo glaciar cuenta con esta posibilidad, y todavía más, ni siquiera todo glaciar razonablemente accesible puede ser sensado por medio de radar. En principio, conocidas las funciones que ajustan el perfil del lecho sería siempre posible construir su perfil de velocidades. Sin embargo, debemos tener en cuenta que la falta de simetría en el perfil matemático del lecho hace que exista una asimetría en los esfuerzos. Para decirlo en términos concretos, los esfuerzos a derecha e izquierda del punto  $y=200\text{m}$  (que hemos tomado como cero del sistema) posiblemente no sean los mismos, lo que conlleva la necesidad de introducir una condición de contorno más a la hora de completar los cálculos, pues si llamamos  $\sigma_{xz,IZQ}$  y  $\sigma_{xz,DER}$  a los esfuerzos de corte a izquierda y a derecha de  $y=0$ , respectivamente, parece evidente que debemos acoplar ecuaciones reclamando que esos valores sean iguales.

Hemos introducido un parámetro de perturbación de masa en profundidad, porque parece razonable suponer que la densidad del hielo

se modifique por efectos de la presión a que lo somete su propio peso. La función que introducimos es lineal con la profundidad. Salvo la simplificación que se logra con esta forma, no tenemos evidencia empírica que permita asegurar que la elección es correcta. Sin embargo, representa un paso más allá del tratamiento usual, que considera densidad de masa constante en toda la profundidad del glaciar, y por lo demás, en vista de los valores relativamente pequeños que permitimos al parámetro de perturbación  $\varepsilon$ , siempre sería posible desarrollar la función a primer orden.

Si bien en este artículo sólo hemos tratado con detalle el perfil parabólico, debemos apresurarnos a decir que no es ni el único ni, posiblemente, el que mejor ajusta. De hecho, dejamos para un próximo artículo (continuación de este) el análisis de un perfil que va como  $y^{3/2}$  en lugar de  $y^2$ . Pero hemos optado por ajustar el perfil del lecho por curvas en algún sentido sencillas porque fijar la curva del perfil por medio de algún programa de ajuste posiblemente nos haría perder de vista buena parte del análisis que realizamos. En particular, la dependencia de la velocidad con la curvatura. Parece evidente que la velocidad del conjunto se incrementa con la curvatura, y de hecho esta propiedad se observa en la Figura 9. La explicación es que la deformación de las capas de hielo requiere de esfuerzos de corte en las superficies de contacto entre capas, de ma-

nera tal que mantener más hielo en equilibrio (debido a que trabajamos con ancho glaciario fijo) requiere de mayor esfuerzo. Sin embargo, el esfuerzo de corte no se ve afectado de manera marcada por la variación en la densidad de masa.

Hemos obtenido soluciones de velocidad a menos de una constante aditiva que hemos asociado a la velocidad de la base del glaciar. Como quedó dicho, diferentes mecanismos podrían provocar la fusión del hielo en contacto con el lecho y provocar deslizamiento. A partir de las diferencias entre los valores de

velocidad medidos en la superficie y los que brinda el modelo podría estimarse la velocidad por deslizamiento. Dicho de otro modo, si se conocen en detalle todos los parámetros que intervienen en las ecuaciones de flujo y se fija la curva del perfil de manera segura, es posible utilizar estos modelos para medir la velocidad de la base.

Nuevos y mayores esfuerzos serán necesarios para tratar las partes que aquí no hemos discutido y, por otro lado, introducir nuevos métodos de análisis.

## Referencias

- COOK, A. J.; FOX, D. G.; VAUGHAN and J. G. FERRIGNO. (2005) *Science*, 308, 541.
- COOK, A. J. and VAUGHAN, D.J. (2010) *The Cryosphere*, 4, 77.
- CUFFEY, K. and PATERSON, W. (2010) "The Physics of Glaciers" (Elsevier: Amsterdam)
- FONTELOS, M.; MUÑOZ, A. y SCHIAVI, E. (2007) *Anales del XX Congreso de Ecuaciones Diferenciales y Aplicaciones y X Congreso de Matemática Aplicada, Sevilla (España)*, 1.
- FOWLER, A. (2010) *Journal of Glaciology*, 56, 965.
- HOOKE, R. (2005) "Principles of glacier mechanics" (Cambridge University Press: Cambridge)
- IKEN, A. (1981) *Journal of Glaciology*, 27, 407.
- LLIBOUTRY, L. (1979) *Journal of Glaciology*, 23, 67.
- OERLEMANS, J. (2001) "Glaciers and climate change" (Taylor & Francis: London)
- World Glacier Monitoring Se