EMCI 2018

XXI Encuentro Nacional y XIII Internacional de Educación Matemática en Carreras de Ingeniería

LIBRO DE **TRABAJOS COMPLETOS**

Villa María
Córdoba, Argentina

OCTUBRE

24 al 26 de
Octubre de 2018

Secretaría de Ciencia, Tecnología y Posgrado

Departamento de Materias Básicas

UTN VILLA MARIA

EMCI 2018

XXI ENCUENTRO NACIONAL Y XIII INTERNACIONAL DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA EN CARRERAS DE INGENIERÍA

Libro de Trabajos Completos

Comisión Permanente

María Inés Lecich
Marys M. Arlettaz
Nori Cheeín de Auat
María de las Mercedes Suárez
Irma B. Ruffiner
Ana María Narváez
María Beatriz Bouciguez
Mónica Scardigli
Gloria Prieto
Silvia Seluy
Marta Graciela Caligaris
María Mercedes Simonetti de Velazques

Comisión Organizadora

Martha Rosso
Marcelo Cejas
Graciela Trombini
Mercedes Soria
Jaquelina Aimar
Sonia Oddino
Fernando Serassio
Mariela Tabasso
Javier Gonella
Celeste Stroppiano
María de los Ángeles Pignatta
Aldana Chesta

Comisión Evaluadora

Ana Elena Gruszycki
Pedro Daniel Leguiza
Nori Cheeín de Auat
María de las Mercedes Suárez
Irma B. Ruffiner
Ana María Narváez
María Beatriz Bouciguez
Mónica Scardigli
Gloria Prieto
Silvia Seluy
Marta Graciela Caligaris
Mario José Mantulak
Jorge Omar Morel
María del Carmen Ibarra
Martha Susana Rosso
Stella Maris Vaira
Marcel Pochulú
Liliana Irassar
Marys M. Arlettaz
José Peralta
María Mercedes Simonetti

Miembros Hororarios

Veremundo Fernández
Carlos Enrique Wüst
Roberto H. Fanjul
Teresa Haydée Codagnone

XXI ENCUENTRO NACIONAL Y XIII INTERNACIONAL DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA EN CARRERAS DE INGENIERÍA

Libro de Trabajos Completos

Martha S. Rosso, Mercedes Soria, Javier Gonella
(Compiladores)

XXI Encuentro Nacional y XIII Internacional de Educación Matemática en Carreras de Ingeniería : libro de trabajos completos / Daniel Juan Alberto Abud ... [et al.] ; compilación de Javier Nicolás Gonella ; Martha Susana Rosso ; Mercedes Soria ; editado por Fernando Cejas. - 1a ed. - Ciudad Autónoma de Buenos Aires : edUTecNe, 2022.

Libro digital, PDF

Archivo Digital: descarga y online

ISBN 978-987-4998-95-8

1. Educación. 2. Matemática. 3. Medios de Enseñanza. I. Abud, Daniel Juan Alberto. II. Gonella, Javier Nicolás, comp. III. Rosso, Martha Susana, comp. IV. Soria, Mercedes, comp. V. Cejas, Fernando, ed.

CDD 510.711

Las Malvinas son Argentinas
40 años

Universidad Tecnológica Nacional – República Argentina
Rector: Ing. Rubén **Soro**
Vicerrector: Ing. Haroldo **Avetta**
Secretaria Cultura y Extensión Universitaria: Ing. Federico **Olivo Aneiros**

Universidad Tecnológica Nacional – Facultad Regional Villa María
Decano: Ing. Norberto Gaspar **Cena**
Vicedecano: Ing. Franco Martín **Salvático**

edUTecNe – Editorial de la Universidad Tecnológica Nacional
Coordinador General a cargo: Fernando **Cejas**
Dirección General: Mg. Claudio **Véliz**
Dirección de Cultura y Comunicación: Ing. Pablo **Lassave**

Queda hecho el depósito que marca la Ley Nº 11.723

Sarmiento 440, Piso 6 (C1041AAJ)
Buenos Aires, República Argentina
Publicado Argentina – Published in Argentina

ISBN 978-987-4998-95-8

9 789874 998958

Índice de trabajos

Eje 1

Articulación e Ingreso a las Carreras de Ingeniería

FORMACIÓN DE VOCACIONES TEMPRANAS Y APRENDIZAJE ACTIVO ENTRE UTN FRBB Y ESCUELAS SECUNDARIAS

Andrés García[1], Carlos Vera[1]
[1] Grupo de Investigación en Multifíscia Aplicada (GIMAP), Facultad Regional Bahía Blanca, Universidad Tecnológica Nacional 11 de Abril 461
{andresgarcia, cvera}@frbb.utn.edu.ar

Resumen. La formación de vocaciones tempranas resulta una estrategia fundamental en el desarrollo de la educación secundaria y la orientación hacia las carreras superiores. Las profesiones tecnológicas cuentan con una población que no es escasa pero tampoco abundante, por ello resulta relevante generar estrategias en esta orientación. La Facultad Regional Bahía Blanca de la Universidad Tecnológica Nacional viene desarrollando acciones en términos de articulación con colegios de nivel secundario, especialmente técnicos, de la región. El Proyecto Nexos ha creado las condiciones para la generación de nuevas líneas de acción en 2018, y se han conformado dos estrategias referidas al acompañamiento de proyectos finales de escuelas técnicas y un curso sobre aprendizaje activo promoviendo experiencias formativas profesionales. Se presentan las características de las mismas, aspirando a ser un aporte sustantivo a los procesos de mejora en la articulación entre UTN FRBB y las instituciones de educación secundaria de la zona.

Palabras Clave: Articulación universidad y educación secundaria. Vocaciones tempranas. Formación profesional. Aprendizaje activo.

1 Introducción

La articulación entre niveles universitario y secundario resulta un espacio sumamente desafiante por la complejidad, relevancia y las acciones no siempre integradas. Resulta esencial comprender la situación y generar acciones para la mejora en sí con programas específicos.

1.1 Fundamentos

Tomando como referencia resultados de estudios realizados por la Facultad Regional Bahía Blanca desde 2006 en adelante se observa claramente que los aspirantes a ingreso, son estudiantes entre los 18 y 20 años que en su mayoría no realizan actividad laboral y provienen de las regiones educativas 21, 22 y 23 de la Provincia de Buenos Aires y la Patagonia. Un porcentaje considerable, 45%, son técnicos y el resto bachilleres.

En el cursado de primer año, las asignaturas exactas y naturales presentan mayores complejidades donde los estudiantes evidencian dificultades debido a las exigencias que plantean sus contenidos y las operaciones cognitivas necesarias. Las problemáticas de aprendizaje, su evaluación y ciertas limitaciones en la lecto-comprensión, limitan el promedio de alumnos que cursan dichas cátedras a un 31%.

En las materias técnico profesionales, los alumnos vivencian situaciones más vinculadas con las carreras, porque los contenidos técnicos o sociales posibilitan actividades aplicadas al campo de la ingeniería. Ello hace que el 65% de los estudiantes alcancen la regularidad de las materias. Algo semejante ocurre en las materias integradoras, con un 58% de aprobados, donde los contenidos y actividades de articulación teoría-práctica posibilitan una inserción mayor en la carrera.

La experiencia nos lleva a aceptar que si bien muchos alumnos culminan el nivel secundario con una formación que no alcanza a cubrir los estándares universitarios, responden a los requerimientos de los diseños curriculares prescriptivos que indica la provincia de Buenos Aires y orientación de estudio (ver [1] y [2]).

Las dificultades asociadas con las áreas de desempeño estudiantil se pueden relacionar con las crisis y transformaciones que han experimentado los adolescentes en el contexto cultural actual y están en referencia con la práctica y discursos universitarios instituidos. Por ello es necesario revisar y re-contextualizar las mismas, para brindar eslabones y apoyaturas que faciliten la reflexión de estrategias e instrumentos de intervención.

En base a todo lo dicho, se propone pensar la articulación entre nivel secundario y universitario como un pasaje a través de transiciones tendientes a la inclusión paulatina de los jóvenes en la dinámica universitaria, a partir de la revisión de prácticas institucionales pedagógicas y áulicas, el fortalecimiento de los discursos y acciones docentes instituyentes y el acompañamiento de los estudiantes a través de procesos de orientación vocacional y apoyaturas tutoriales.

En este sentido, se promueve un trabajo colaborativo en base a la corresponsabilidad social de los sectores intervinientes para garantizar el ejercicio efectivo y el pleno goce del derecho constitucional de educación en el acceso y permanencia del nivel superior.

2 Experiencias de promoción de vocaciones tempranas y aprendizaje activo

Tal lo señalado, el proyecto Nexos de Ministerio de Educación de la Nación que se ejecuta actualmente en UTN-FRBB comprende un conjunto de líneas de acción con los colegios de educación secundaria de la región del sudoeste bonaerense, cercano a la ciudad.

Es posible entonces, presentar los objetivos generales para luego especificar de modo más concreto aquellos más específicos.

2.1 Objetivos generales

Como objetivos generales pueden destacarse los siguientes:

- Organizar entornos comunes de trabajo y acción entre la UTN–FRBB y las jurisdicciones provinciales de la región de las cuales provienen sus aspirantes a ingreso, a los efectos de articular trabajos tendientes a la inclusión paulatina de los jóvenes en la dinámica universitaria.
- Promover un espacio de trabajo colaborativo entre los sectores universitarios y de enseñanza media para delinear prácticas institucionales, pedagógicas y áulicas, que tiendan a fortalecer el ingreso y permanencia de los estudiantes en los primeros años de su vida universitaria.
- Acercar a los alumnos de las escuelas secundarias a la facultad y mostrar las diversas actividades que se desarrollan en la misma.
- Incorporar experiencias que integran teoría y práctica en la formación temprana de profesionales desde las materias de escuelas secundarias.
- Generar a través del trabajo articulado en estudiantes de Escuelas Secundarias de Educación Técnica y UTN FRBB, vocaciones tempranas en carreras tecnológicas.

2.2 Acompañamiento y tutoría de hasta cinco (5) proyectos finales de escuelas técnicas

Los proyectos finales de las carreras técnicas de escuelas de nivel secundario, conforman un cierre de un ciclo de aprendizaje en que el alumno vuelca el cúmulo de conocimientos incorporados en un proyecto motivante de carácter aplicado.

En este sentido, y teniendo en cuenta que muchos de los alumnos que terminan una secundaria técnica iniciarán estudios superiores en una universidad, la importancia de un contacto temprano con una institución de nivel superior se hace entonces evidente.

Es claro que la elección de una carrera de nivel superior por parte del alumno no resulta inmediata aún en aquellos casos provenientes de escuelas técnicas. Por ese motivo, la presente propuesta se enfoca hacia la formación temprana de vocaciones que resulten de la interacción entre los alumnos y profesores de escuelas secundarias, acompañados por un profesor de nivel superior de una carrera de ingeniería.

Tal es el caso propuesto, en donde se creará un ambiente de cooperación con un plan de trabajo pre-elaborado por parte del profesor de nivel superior que conducirá al alumno y su profesor (tutor de la escuela) al desarrollo de su trabajo final con una mirada de ingeniería que le permita insertarse de manera más natural en una carrera universitaria.

Se trata de una serie de experimentos interactivos a partir de sistemas físicos para la comprobación de leyes y fórmulas matemáticas. De este modo, el alumno encuentra un contexto en donde se desarrollan los conceptos necesarios para la consecución de su trabajo final con un enfoque profesional.

Es de destacar que el proyecto se propone sobre la base de una tecnología muy actual en muchos países desarrollados: ARDUINO, en la cual el alumno podrá refinar sus conocimientos de programación a la vez que aprenderá a trabajar en un contexto multidisciplinario en una carrera de ingeniería.

Este proyecto se orienta específicamente a Escuelas Secundarias de Educación Técnica (ESET) y tienen como objetivo general Incorporar experimentos que integran teoría y práctica en la formación temprana de profesionales.

La implicancia inmediata es proveer un enfoque avanzado a profesores y alumnos de escuelas secundarias tendiente a la incorporación eficiente de futuros alumnos en carreras de ingeniería.

Entre las acciones previstas se encuentran:

- Introducción al mundo de ARDUINO y componentes mecánicos que sean de utilidad para la conformación/acompañamiento de proyectos finales de escuelas técnicas.
- Contacto permanente entre profesores y alumnos de las escuelas técnicas con el profesor de UTN-FRBB.
- Tutoría en la proyección y construcción del proyecto final
- Discusiones e intercambios sobre las mejoras y modificaciones necesarias para un proyecto final más funcional
- Posibilidad de realizar el proyecto en la escuelas técnicas o de manera parcial en los laboratorios de UTN-FRBB
- Evaluación de resultados, comparación entre objetivos iniciales y objetivos obtenidos
- Elaboración de conclusiones e informes
- Viajes a colegios secundarios para intercambiar nuevos horizontes de trabajo futuro en conjunto con UTN-FRBB

2.2.1 El proyecto comprende tres etapas complementarias

La primera implica:

- Reunión en UN-FRBB. Inicio del proyecto con actividades de toma de conocimiento de los elementos a usar en cada proyecto final.
- Continuación del acompañamiento trabajando por aula virtual/presencial.
- Elaboración de ideas de proyectos en base a las necesidades de cada colegio y con los elementos introducidos

La segunda etapa desarrollará:

- Reunión en UTN-FRBB para intercambiar conclusiones parciales sobre las ideas de proyectos finales surgidas y mejoras de los mismos.
- Implementación del proyecto en Escuela Técnica /UTN-FRBB

La tercera etapa comprenderá:

- Reunión en UTN-FRBB para evaluación de resultados, aportes, enriquecimientos incluso tanto para alumnos de las Escuelas Secundarias como aquellos interesados de FRBB.
- Visita a colegios secundarios

2.2.2 Indicadores de Avance

Se proponen como indicadores para analizar los avances:

- Etapa 1: Análisis por parte del profesor UTN-FRBB sobre el material que se sube al aula virtual e intercambio de ideas y preguntas on-line sobre puntos específicos de cada proyecto.
- Etapa 2: Análisis por parte del profesor UTN-FRBB sobre las diferentes decisiones que se toman en la implementación física del proyecto final.
- Etapa 3: Análisis por parte del profesor UTN-FRBB sobre el proyecto final terminado, se evaluarán las presentaciones de PowerPoint por parte de los alumnos así como la terminación y funcionalidad de sus proyectos finales.

El responsable será un Profesor de la cátedra Control Automático de UTN-FRBB y se está ejecutando durante el año 2017.

2.3 Curso sobre aprendizaje activo en escuelas secundarias: Proyectos de mejora de experiencias formativas profesionales

Existe un enfoque de transmisión de conceptos para carreras con competencias duras en el cuál el profesor realiza experimentos que demuestran y fijan conceptos teóricos.

Este punto de vista de enseñanza se conoce como aprendizaje activo, aplicado mayormente en carreras como Física y afines, pero que recientemente se ha incorporado de manera novedosa en carreras de Ingeniería (ver [3], [4], [5], [6] y [7]).

En particular en el caso de FRBB, se está aplicando desde hace tres años en cátedras como Control Automático/Accionamientos y Controles Eléctricos y en colaboración con cátedras como Calculo Avanzado (Figs. 1 y 2).

Fig. 1**.** Equipo demostrador de bomba de aceite construido junto a alumnos de Ingeniería Mecánica.

Fig. 2: Análisis de FFT (Fast Fourier Transform) en un equipo educativo de vibraciones.

Este enfoque activo y de articulación entre teoría y práctica animan las experiencias que se presentan. Dichas orientaciones y el análisis del impacto se vinculan con el Proyecto de Investigación y Desarrollo “La formación en carreras tecnológicas en contextos profesionales” (TEUTIBB0004558TC). Esta experiencia tiene como objetivo general integrar teoría y práctica en la formación temprana de profesionales desde las materias de escuelas secundarias.

2.3.1 Objetivos específicos

Se proponen como objetivos específicos:

- Proveer un enfoque avanzado a profesores y alumnos de escuelas secundarias tendiente a la incorporación eficiente de futuros alumnos en carreras de ingeniería.
- Difundir la utilidad y valor del aprendizaje activo en los buenos resultados cognitivos de alumnos de carreras técnicas.

Mientras que las acciones previstas son:

- Introducción al aprendizaje activo usando experimentos de electricidad, mecánica y física. Programación de ARDUINO para recolección de datos y presentación en clases.
- Contacto permanente entre profesores y alumnos de las escuelas técnicas con el profesor de UTN-FRBB vía plataforma virtual
- Tutoría en la proyección y construcción de los experimentos/demostradores que elija cada profesor de escuela secundaria
- Discusiones e intercambios sobre las mejoras y modificaciones necesarias para obtener experimentos/demostradores más didácticos
- Posibilidad de realizar la implementación de cada experimento/demostrador en la escuelas técnicas o de manera parcial en los laboratorios de UTN-FRBB
- Evaluación de resultados, comparación entre objetivos iniciales y objetivos obtenidos
- Elaboración de conclusiones e informes
- Viajes a colegios secundarios para intercambiar nuevos horizontes de trabajo futuro en conjunto con UTN-FRBB

Esta experiencia comprende tres etapas complementarias::

- Etapa 1: Reunión en UTN-FRBB para dar inicio al curso con actividades de conocimiento del trabajo en Control y Automatización. Acompañamiento vía plataforma virtual. Elaboración de proyecto de implementación en materias de cada escuela participante.
- Etapa 2: Reunión para intercambiar proyectos de experimentos a aplicar en cada cátedra de las escuelas y mejoras de los mismos. Implementación de los experimentos (duración 1 o 2 meses)
- Etapa 3: Reunión en UTN-FRBB para evaluación de resultados, aportes, enriquecimientos incluso tanto para alumnos de las Escuelas Secundarias como aquellos interesados de FRBB. Viaje a colegios secundarios.

El responsable será un Profesor de la cátedra Control Automático de UTN-FRBB y se está ejecutando durante el año 2018.

2.3.2 Indicadores de avance

Se presentaron como parte del programa Nexos 2018, los indicadores de avance siguientes:

- Etapa 1: Análisis por parte del profesor UTN-FRBB sobre el material que se sube al aula virtual e intercambio de ideas y preguntas on-line sobre puntos específicos de cada experimento/demostrador.
- Etapa 2: Análisis por parte del profesor UTN-FRBB sobre las diferentes decisiones que se toman en la implementación física de los demostradores.
- Etapa 3: Análisis por parte del profesor UTN-FRBB sobre la forma en que se utilizan los experimentos/demostradores en cada materia de escuela secundaria participante.

3 Antecedentes en aprendizaje activo

Como fuera presentado en [11], ya se han realizado experimentos de aprendizaje activo en el aula en las cátedras de Control Automático y Accionamientos y Controles Eléctricos. Con los fines de completitud, se repiten a continuación la formulación y fundamentación de los cuatro demostradores presentados en [9], [10] y [11].

Dichos sistemas tienen un contenido, habiendo sido diseñados para revelar y exponer determinados conceptos específicos de la teoría de Control Automático, así como Accionamientos y Controles Eléctricos.

3.1 Péndulo Simple

Consiste en un modelo sencillo mostrado en la ecuación (1), empleando contenidos de control de sistemas que constituye un ejemplo que permite exponer de forma clara y precisa conceptos como modelado, ecuaciones diferenciales y estabilidad (Fig. 3).

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{L} \cdot sen(\theta) \qquad \textbf{(1)}$$

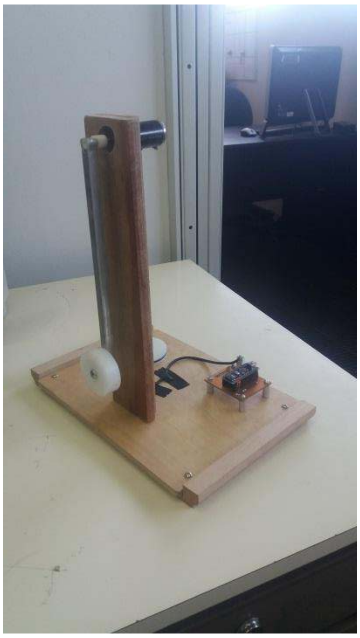


Fig. 3: Sistema péndulo simple con adquisición Arduino Nano**.**

Con este experimento es posible orientar observaciones y alcanzar conclusiones acerca de modelado empleando leyes de Newton y de física clásica (ver por ejemplo [8]).

3.2 Motor CC

Otro sistema de amplia utilización en la literatura desarrollado en materias previas como Máquinas Eléctricas I y II, es el sistema motor CC y taquimétrica de medición (Fig. 4). En este caso, el punto de interés no solo lo conforma el hecho de ser un sistema de segundo orden sino que a la vez es sistema lineal *per-se* (ecuación (2)):

$$\begin{gathered} V(t) = i(t) \cdot R + K \cdot \dot{\theta}(t) \\ b \cdot \dot{\theta}(t) + K_t \cdot i(t) = J \cdot \ddot{\theta}(t) \end{gathered} \qquad \textbf{(2)}$$

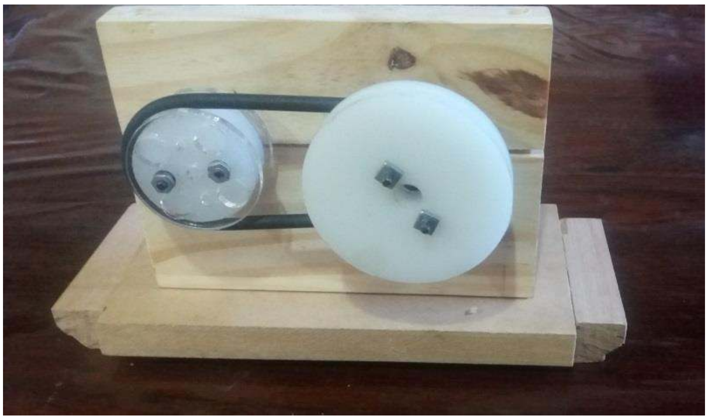


Fig. 4: Sistema Motor CC+Taquimétrica.

3.3 Control de dos tanques

Debido a la rica interacción alumno-profesor que comprende la idea de aprendizaje activo, los alumnos despiertan interés por realizar sus propios experimentos y desarrollos. Tal fue el caso de del sistema de control de dos tanque usando Arduino Mega que fuera presentado en [9] (Fig. 5).

Fig. 5: Sistema de control de dos tanques

3.4 Péndulo Invertido

Del mismo modo, tres alumnos se interesaron por la construcción y programación del sistema mecánico conocido como péndulo invertido. En este caso se desarrolló además una aplicación para celular, siendo el trabajo presentado en [10] (Fig. 6).

Fig. 6: Sistema carro-péndulo**.**

4 Resultados actuales

Con la ejecución de fondos de Nexos se han construido ya algunos demostradores avanzados (Figs. 7 y 8):

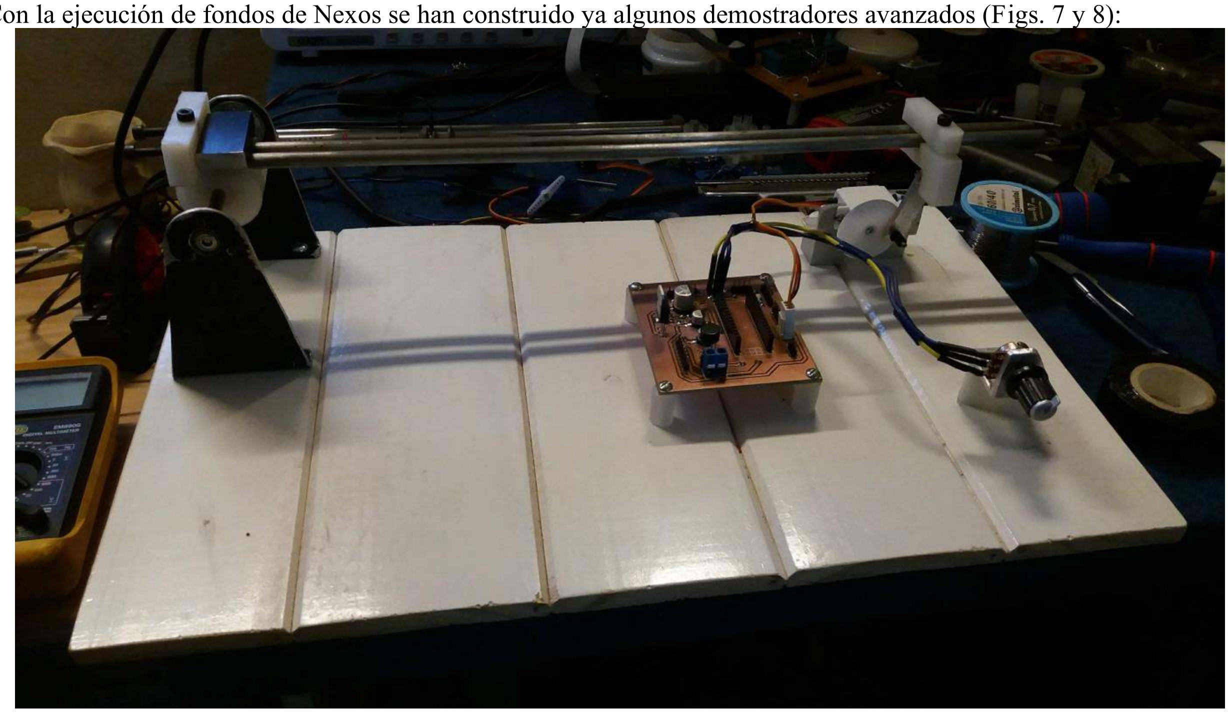


Fig. 7: Sistema ball-beam con adquisición Arduino Nano, acelerómetro y medición de posición ultrasónico.

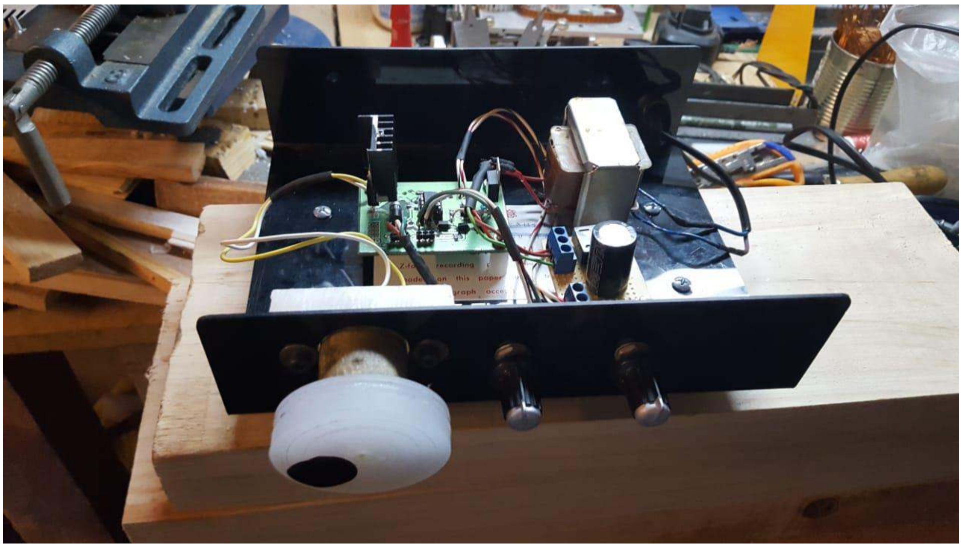


Fig. 8: Sistema de control de motores PWM y Attiny 85.

Es de destacar que en países avanzados en donde el aprendizaje activo es una práctica habitual, se poseen kits demostradores manufacturados por empresas dedicadas a tal fin (ver por ejemplo el catálogo de Quanser en [5] en donde se posee un sistema ball-beam).

5 Conclusiones y trabajos futuros

Se han presentado los lineamientos y estrategias sugeridas a través del programa Nexos 2018 que permitirán articular actividades de enseñanza y propagación de las técnicas de Aprendizaje Activo.

Como resulta claro, los antecedentes en materias como Control Automático, Accionamientos y Controles Eléctricos, a la vez que se inicia también en Cálculo Avanzado, muestran que la incorporación de conceptos matemáticos abstractos aplicados, resulta mucho más natural y preciso.

De modo de producir un mejoramiento continuo de dichas experiencias pero a su vez para prolongar las actividades de aprendizaje activo para la captación de vocaciones tempranas a nivel de escuelas secundarias, el programa Nexos 2018 permitirá enriquecer de manera sustancial las enseñanzas y dejará muchos buenos resultados de interacción en tutorías.

Como trabajo futuro se propone la continuación de tales experimentos, incorporando nuevos sistemas demostradores más complejos basados en Arduino y a la vez ricos en material teórico (*benchmark*), que conduzcan a los alumnos en su búsqueda de vocaciones.

Agradecimientos. Los autores desean agradecer el apoyo de los Departamentos de Ingeniería Eléctrica e Ingeniería Mecánica.

Referencias

1. ASIBEI. Declaración de Valparaíso de Competencias Iberoamericanas del Ingeniero. Valparaíso, ASIBEI, 2014.
2. Schön, Donald. La formación de profesionales reflexivos. Barcelona, Paidós, 1997.
3. Godoy, P.; Benegas, J.; Pandiella, S. "Metodologías para el aprendizaje activo en la Física". *En III Jornadas De Ingreso y Permanencia en Carreras Científicas y Tecnológicas. San Juan, Universidad Nacional San Juan*. 2012.
4. Royal Institution. History of the RI Christmas Lectures. S/Editorial, 2008.
5. Quanser. Innovate. Educative. Ubicado el 20/4/2017 en www.Quanser.com
6. Cambridge University. Ubicado el 20/4/2017 en http://www.phy.cam.ac.uk/
7. Aurenice Menezes Oliveira. Simple ways to facilitate active learning in hands-on Electrical Engineering technology courses. 122 ASEE Annual Conference & Exposition. 2015. Ubicado el 20/4/2017 en file:///C:/Users/Usuario/Downloads/ASEE2015_ActiveLearningInEET_Final.pdf
8. Richard C. Dorf y Robert H. Bishop. Modern Control Systems. Prentice Hall. 2010. 12th Edition.
9. Linares, A.; Garcia, A. "Demostrador para enseñanza del concepto de modelado: control de dos tanques". *En V IPECYT, Bahía Blanca, Universidad Tecnológica Nacional*, 2016.

10. Perotti, E.; Pino, J.J. ; Villagra, O.; Garcia, A. “Demostrador para enseñanza del concepto de estabilidad: péndulo invertido”. *En V IPECYT, Bahía Blanca, Universidad Tecnológica Nacional*, 2016.
11. A. García; O. Cura. Aprendizaje Activo en Ingeniería Eléctrica: Aplicación a la cátedra Control Automático. *1er Congreso Latinoamericano de Ingeniería. 13, 14 y 15 de Septiembre, Paraná, Argentina*. 2017.

Diagnóstico inicial en alumnos que repiten el curso de Matemática para Ingeniería de la FI de la UNLP

Di Domenicantonio Rossana[1], Rivera Ana Lucía[2], Chalar Elfriede[3]
[1] Imapec, Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de La Plata
1 y 47 La Plata (1900)
rossanadido@ing.unlp.edu.ar
[2,3] Cátedra de Ingreso, Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de La Plata
1 y 47 La Plata (1900)
{analucia.rivera, elfriede.chalar}@ing.unlp.edu.ar

Resumen. Se diseñó una herramienta didáctica "prueba diagnóstica" con el fin de detectar falencias, errores y necesidades de los alumnos que no logran los objetivos del curso nivelatorio intensivo de la FI de la UNLP durante el verano. La prueba se realizó a todos los alumnos que hacen la materia posterior al dictado intensivo, durante la primera clase. El objetivo es realizar un diagnóstico inicial y detectar dificultades para reforzar y profundizar durante el cursado y planificar estrategias de retención en los ingresantes. También se analizan los temas que más esfuerzo requieren por parte del alumno, y que éstos reciban una evaluación de su situación al reiniciar el estudio y logren priorizar la importancia de la matemática en el inicio de carreras de ingeniería. Se exponen los resultados cuantitativos globales, se comparan diferentes características detectadas y se proyectan estrategias de mejoras en la retención.

Palabras Clave: Evaluación matemática, Ingresantes, Errores algebraicos, Retención de ingresantes

1 Introducción

La experiencia se desarrolló con alumnos de la Facultad de Ingeniería de la UNLP, durante el 1° trimestre de 2017. Los alumnos que realizaron la prueba son aquellos que iniciaban el cursado de la materia "Matemática para Ingeniería" que es el curso nivelatorio y de ingreso a las carreras que ofrece la FI en dicha instancia. La materia se dicta en tres modalidades durante el año: la modalidad intensiva (Enero-Febrero de cada año) con un curso de cuatro horas y media de clase todos los días, de lunes a viernes, durante cinco semanas, luego para aquellos alumnos que no alcanzan los objetivos o no pudieron estar en La Plata en Enero, se vuelve a dictar desde fines de Marzo a Junio, es la modalidad 1° trimestre de cada año, con un régimen de tres clases por semana de 3 horas cada una. Por último la materia también se dicta en el 2° trimestre del año (o modalidad anticipada) para alumnos que no alcanzaron los objetivos en el 1° trimestre y los alumnos que se preparan de manera anticipada mientras realizan el último semestre en el colegio secundario. Los contenidos abordados en la materia[1] son desarrollados en el aula con un abordaje donde el alumno es el protagonista del aprendizaje, el material de clase que es el eje de la misma, presenta los contenidos con la teoría y la práctica de manera integrada y se trabaja en modalidad de aula taller. Se concibe al alumno como un participante activo que aprende haciendo, trabajando en grupo, en aulas con el equipamiento para este tipo de metodología y el docente deja de lado la clase magistral para dar lugar a un trabajo conjunto entre alumnos, con la guía de los docentes y trabajando colaborativamente. Ander Egg define el aula taller como "una forma de enseñar y sobre todo de aprender mediante la realización de algo que se lleva a cabo conjuntamente" [1]. Con esta metodología se espera que el alumno deje de lado el aprendizaje memorístico o repetitivo y se involucre activamente en el rol de estudiante activo, participativo y responsable de su propio aprendizaje.

Siendo el curso del verano un curso de modalidad muy intensiva, se observa que muchos estudiantes no alcanzan los objetivos planteados en la materia por diferentes razones, como el ritmo de trabajo propuesto para realizar el mismo en cinco semanas, diversidad de preparación de los colegios secundarios de donde provienen, diferentes tiempos de aprendizaje y estilos cognitivos, falta de hábitos y técnicas de estudio, nuevo escenario de clases, falta de adaptación al nuevo rol universitario, diferente modo de evaluación que en el colegio secundario, incertidumbres o temores de la elección sobre su carrera, nueva ciudad de residencia en gran parte de los

[1] Los contenidos abordados en esta asignatura son: conjuntos numéricos, polinomios, ecuaciones polinómicas y fraccionaras, rectas, cónicas, sistema de ecuaciones lineales y mixtos, trigonometría y resolución de triángulos rectángulos y no rectángulos.

alumnos, falta de motivación u otros factores que inciden en su desempeño. También incide la metodología de enseñanza, la forma como el profesor organiza la clase e imparte los saberes. Varios autores encontraron que la cantidad de información, el grado de abstracción, la claridad y precisión del lenguaje que utiliza el profesor, la presencia de ejemplos, el significado y utilidad del conocimiento, están relacionados con el rendimiento del estudiante [2],[3].

2 Descripción de la prueba

La institución y en particular esta cátedra entienden que el diseño e implementación de dispositivos que permitan disminuir los niveles de fracaso estudiantil son muy importantes. Además que el rendimiento académico depende no sólo de las aptitudes intelectuales de los alumnos, su preparación anterior en el caso particular de esta materia, sino de una serie de factores interrelacionados, tanto internos como externos al estudiante, entorno social, familiar y cultural entre otros.

La evaluación en general es una actividad indispensable en el proceso de enseñanza y debe centrarse en identificar los avances y las dificultades que tienen los alumnos para valorar las estrategias, las actividades, contenidos y los procedimientos utilizados en el aula de clases.

En coincidencia con Murillo [4], creemos que ha de considerarse la importancia del diagnóstico en educación como un mecanismo de evaluación que permite identificar el estado real en que se encuentra el estudiante, conocer sus competencias, deficiencias y carencias tanto de conocimientos como culturales.

La Prueba Diagnóstica fue diseñada con el fin de evaluar los conocimientos básicos que traían adquiridos de la modalidad intensiva (verano) o del colegio secundario (aquellos alumnos que la cursan por primera vez). Los contenidos y competencias evaluados son parte de la primera unidad de la materia (Conjuntos Numéricos y Operaciones).

Concordamos Hernández Valverde [5], utilizamos una evaluación diagnóstica que este autor define como la que se aplica antes de empezar un proceso educativo: un curso escolar, un bloque, un tema o una secuencia didáctica; su principal propósito es explorar los conocimientos, las habilidades y las actitudes de los estudiantes.

La información obtenida mediante una evaluación diagnóstica es valiosa, ya que ayudará a los docentes a establecer estrategias de aprendizaje adecuadas para el grupo y también, en algunos casos, obligará al docente a replantear su plan de clases o secuencias didácticas y reforzar o dedicar tiempo extra en algunos temas que crea más conveniente.

El objetivo de implementar una prueba diagnóstica al inicio del curso de repetición fue recolectar datos representativos de los alumnos que realizaron el curso intensivo del verano, tener un marco de referencia por escrito donde orientar y diseñar medidas que puedan incidir en el mejoramiento de las habilidades y competencias básicas en matemática que los alumnos debieran adquirir.

La prueba, confeccionada por la cátedra, fue implementada durante la primera clase en seis cursos a los alumnos del primer trimestre del año 2017 de Matemática para Ingeniería. La cantidad de alumnos inscriptos en esta modalidad se organizaron en seis grupos con un promedio de 85 alumnos cada comisión, pero no todos los alumnos estuvieron presentes al momento de la prueba.

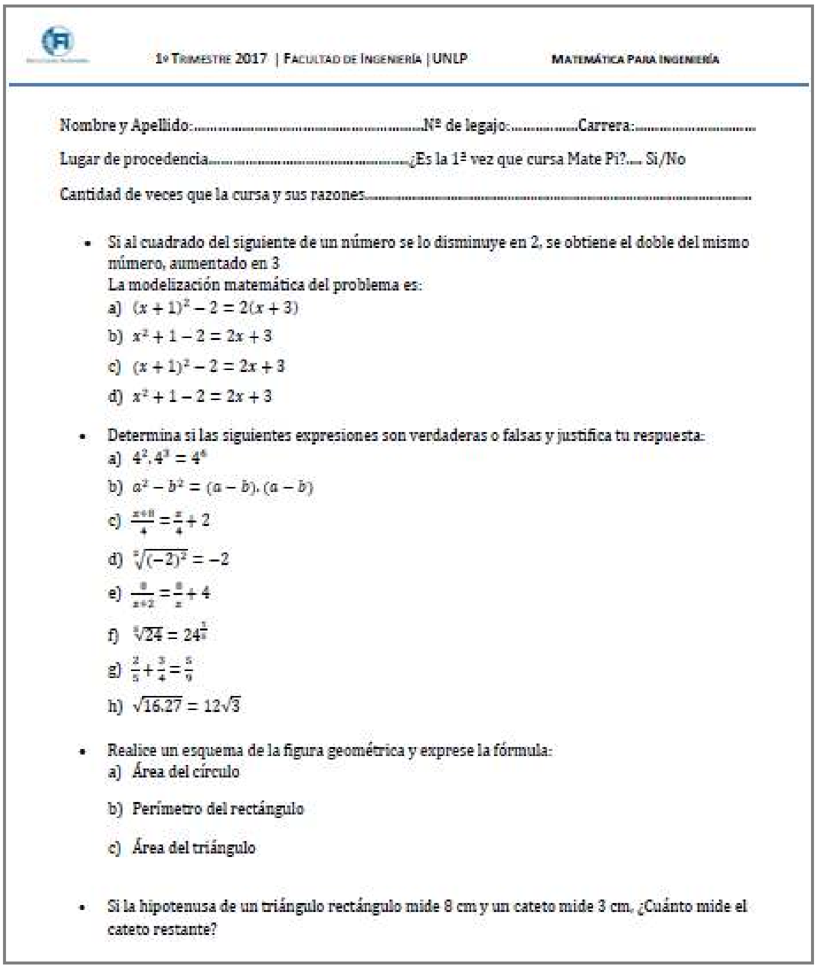
De los 433 alumnos evaluados, solo 41 de ellos (9,5%) no había cursado esta materia anteriormente en ninguna de sus modalidades.

La prueba estaba impresa y los alumnos debieron resolverla en forma escrita, sin el uso de calculadora ni celular[2], en un tiempo aproximado de 40 minutos, individualmente y sin poder consultar a sus pares o a sus docentes.

Los docentes a cargo de cada comisión corrigieron la prueba, según pautas de corrección. Fue acordado que no llevaría nota final, sino que los alumnos solo recibirían la corrección de cada ejercicio con B (bien), R (regular) o M (mal) y marcado sobre el papel aquellos errores, tanto de cálculo, procedimiento y notación matemática, que debían priorizar. Finalizada la muestra a cada alumno, cada grupo docente realizó la explicación y debate de los errores más comunes.

Las pruebas fueron reunidas en la cátedra y posteriormente analizadas de manera global y por comisión. La prueba contenía ejercicios de modelización matemática (errores frecuente de los alumnos que no alcanzan los objetivos de la materia), ejercicios de cálculo algebraico donde deben utilizar propiedades de los conjuntos numéricos, factorización y manejo de fracciones numéricas, como así también evaluación de conceptos de área y perímetro de figuras geométricas básicas y aplicación del Teorema de Pitágoras (Fig 1).

[2] Se buscan ejercicios y cálculos de sencilla resolución con el fin que los alumnos no necesiten utilizar calculadora ni celular, con el objetivo de evaluar incluso cálculos sencillos y privilegiar la argumentación y propiedades utilizadas.



1º TRIMESTRE 2017 | FACULTAD DE INGENIERÍA | UNLP   MATEMÁTICA PARA INGENIERÍA

Nombre y Apellido:..Nº de legajo:...............Carrera:..........................

Lugar de procedencia......................................¿Es la 1ª vez que cursa Mate Pi?.... Si/No

Cantidad de veces que la cursa y sus razones..

- Si al cuadrado del siguiente de un número se lo disminuye en 2, se obtiene el doble del mismo número, aumentado en 3
  La modelización matemática del problema es:
  a) $(x+1)^2-2=2(x+3)$
  b) $x^2+1-2=2x+3$
  c) $(x+1)^2-2=2x+3$
  d) $x^2+1-2=2x+3$
- Determina si las siguientes expresiones son verdaderas o falsas y justifica tu respuesta:
  a) $4^2.4^3=4^6$
  b) $a^2-b^2=(a-b).(a-b)$
  c) $\frac{x+8}{4}=\frac{x}{4}+2$
  d) $\sqrt[2]{(-2)^2}=-2$
  e) $\frac{8}{x+2}=\frac{8}{x}+4$
  f) $\sqrt[4]{24}=24^{\frac{1}{4}}$
  g) $\frac{2}{5}+\frac{3}{4}=\frac{5}{9}$
  h) $\sqrt{16.27}=12\sqrt{3}$
- Realice un esquema de la figura geométrica y exprese la fórmula:
  a) Área del círculo
  b) Perímetro del rectángulo
  c) Área del triángulo
- Si la hipotenusa de un triángulo rectángulo mide 8 cm y un cateto mide 3 cm, ¿Cuánto mide el cateto restante?

Fig.1: Enunciado de la prueba diagnóstica

2.1 Fundamentación de la elección de los ejercicios y pautas de corrección

El primer ejercicio es una modelización de un problema, con respuesta de elección múltiple (4 opciones de respuesta). Las mismas fueron elaboradas con los errores comunes y habituales de los alumnos. Se corrigió por Bien o por Mal.

El segundo ejercicio consta de 8 ítems para responder verdadero o falso y justificar. En los mismos se evalúan operaciones de cálculo con fracciones, propiedades de la potencia y de la raíz. Estos fueron calificados con: Bien si estaba bien justificado, Regular si la respuesta era correcta pero no estaba justificado, o estaba mal justificado, y Mal en caso de operar mal.

El tercer ejercicio evalúa el conocimiento de fórmulas de área o perímetro de algunas figuras básicas, donde además se les pedía que realizaran un esquema gráfico. Para la puntuación de este ejercicio, se utilizó: Bien para el que estaba correcta la fórmula y completo el esquema gráfico, Regular al que solo tenía bien la fórmula, pero faltaba el esquema, o estaba incompleto, y por último Mal al que tuvo errores en la fórmula.

En el último ejercicio se evaluó el uso correcto del Teorema de Pitágoras. Para la corrección se utilizó: Bien para aquellos alumnos que lo planteaban y lo resolvían correctamente, Regular el que planteaba bien el teorema pero lo resolvía mal, y Mal para aquel que tenía mal el planteo.

Aquellos ejercicios que no fueron resueltos no llevaron ningún tipo de calificación y fueron considerados sin puntaje (0 puntos) para la estadística.

3 Análisis de los resultados

Se analizaron los resultados asignando puntuación equitativa a cada inciso, sumando una nota máxima de 13 puntos. Para un análisis comparativo de que la prueba se decidió considerar que la misma estaba D (desaprobada) con nota de 0 a 4,5 puntos, A (aprobada) con nota entre 5 y 7,5 puntos, y P (promocionada) con nota mayor que 7,5 puntos.

Agrupando la cantidad de pruebas que tuvieron nota D, A y P se obtuvieron porcentuales que se reflejaron en un gráfico cuantitativo (Fig. 2).

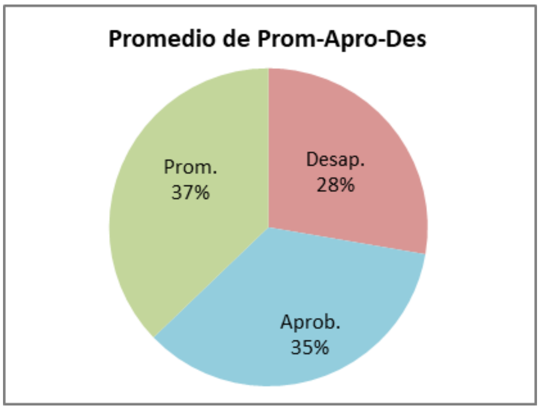


Fig.2: Resultados globales

Se realizó un promedio general de las 433 notas de las pruebas analizadas. El promedio general fue de 6,6 sobre 13 puntos (lo que equivale a una nota de 5 sobre una escala de 10 puntos). Se muestra la cantidad de alumnos según la nota obtenida (Fig.3).

Notas	Cantidad	%
0 - 0,5	13	3%
1 - 1,5	13	3%
2 - 2,5	19	4%
3 - 3,5	35	8%
4 - 4,5	40	9%
5 - 5,5	39	9%
6 - 6,5	59	14%
7 - 7,5	54	12%
8 - 8,5	50	12%
9 - 9,5	54	12%
10 - 10, 5	24	6%
11 - 11,5	18	4%
12 - 12,5	11	3%
13	4	1%

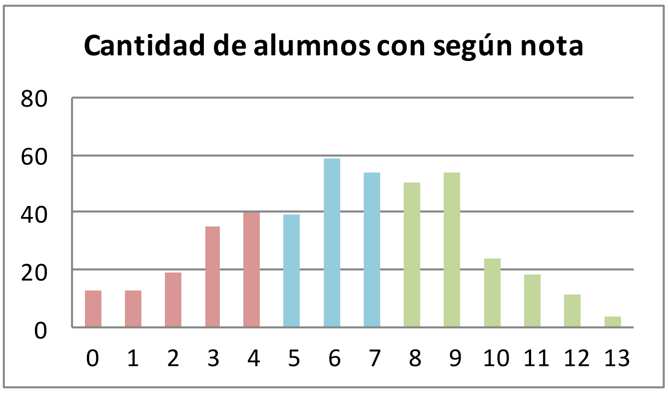


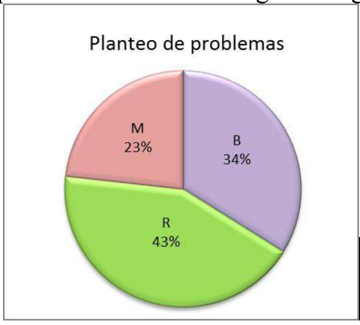
Fig.3: Distribución de cantidad de alumnos según la nota obtenida

En el gráfico de cantidad de alumnos con cada nota correspondiente (de 0 a 13 pts), se puede apreciar que se asemeja a una distribución normal (forma de campana Gaussiana), lo que evidencia que una gran cantidad de alumnos obtuvieron una nota cercana al promedio general.

3.1 Resultados por eje temático

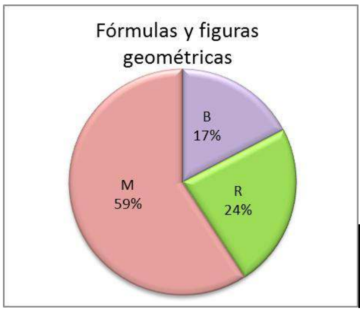
A los ejercicios se los dividió en 4 categorías: planteo de problemas (ejercicio 1 y 4), operaciones con fracciones (ejercicio 2c, 2e, y 2g), fórmulas y figuras geométricas (ejercicio 3) y cálculos algebraicos con propiedades de la potencia (ejercicios 2a, 2b, 2d, 2f y 2h).

Se sumaron de manera separada las notas de los ejercicios de cada eje, y se les puso nota B a aquellos que sumaban un 70% o más del total de puntos, R aquellos que sumaron entre un 30% y un 70% del puntaje y M los que tuvieron menos del 30% de la nota. Por cada eje temático se analizaron de manera cuantitativa los resultados que se muestran en los siguientes gráficos (Fig.4):

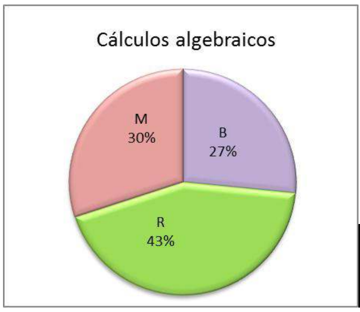


Eje temático	B		R		M	
Planteo de problemas	148	34%	184	43%	101	23%

Eje temático	B		R		M	
Operaciones con fracciones	103	24%	172	40%	158	36%



Eje temático	B		R		M	
Fórmulas y figuras geométricas	75	17%	101	23%	257	59%



Eje temático	B		R		M	
Cálculos algebraicos	115	27%	188	43%	130	30%

Fig.4: Resultados por ejes temáticos

El eje temático que mayor porcentaje de aprobados tuvo fue “Planteo de problemas”, seguido por el eje “Cálculo algebraico con propiedades de la potencia”. El tercer eje fue “Operaciones con fracciones” y por último, el tema con mayor cantidad de desaprobados fue “Fórmulas y figuras geométricas”, como se puede observar en la figura 4.

Se observó en general que una gran cantidad de ejercicios quedaron sin resolver (953 ítems de 5629, lo que equivale a un 16,9%). De los ejercicios sin resolver, la mayoría fueron los referidos a: las fórmulas y figuras geométricas (ejercicio 3); suma de fracciones (2e) y propiedades de la radicación y potencia (2h).

3.2 Comparación de resultados por grupos o comisiones

Si realizamos una rápida comparación entre los resultados de las seis comisiones donde se realizó la experiencia, observamos algunos detalles:

- La diferencia en el promedio general obtenido por comisión es leve. El mayor promedio obtenido fue de 7,3 puntos en la escala de 13 y el de menor promedio fue de 6,2 puntos en la misma escala (equivalen a 5,6 y 4,7 puntos en una escala de 10, respectivamente).
- Los incisos con mayor cantidad de respuestas correctas fueron el 2g (76%) en tres de las seis comisiones y el 2a (72%) en las restantes tres.
- En todas las comisiones, una gran cantidad de alumnos entregó la prueba sin terminar de resolver, sobre todo los últimos incisos.

Estas conclusiones y resultados globales fueron compartidos con los profesores de las seis comisiones de alumnos con el fin de que ellos tuvieran una visión global del rendimiento de todos los alumnos que estaban cursando la materia y no solo de los de su grupo.

3.3 Respuestas recibidas de los alumnos

Al pedir los datos personales de los alumnos que realizaron la prueba, se consultó sobre las razones que ellos creen por las que recursan la materia y algunas respuestas fueron:

- "Soy perezoso y duermo mucho"
- "Por falta de organización"
- "Para Aprobar e iniciar mate A"
- "Mala suerte"
- "Son muchos temas nuevos"
- "Adaptación a la nueva ciudad y arrastrar errores de la secundaria"
- "Desconocimiento de los temas"
- "Por no estudiar en mi casa"

4 Conclusiones y tareas futuras

Disminuir las tasas de deserción académica y de repitencia, así como aumentar el nivel de aprovechamiento de los cursos que realiza el alumno, es posible si se hace diagnóstico e intervención educativa, desde un enfoque de la prevención. La cantidad de alumnos que aprobó la materia durante el 1° trimestre de 2017 y pasó a la siguiente materia de matemática fue considerablemente superior al mismo período del año anterior y esta razón no es debido a un solo factor de prevención sino a un conjunto de estrategias implementadas que fueron logrando motivar al estudiante a culminar el curso, a involucrarse en el estudio, a responsabilizarse por el inicio en su carrera y lograr así los objetivos planteados.

Analizando los datos obtenidos con la prueba diagnóstica aplicada concluimos que al comienzo de ésta modalidad trimestral los alumnos no poseen en general habilidades de manejo algebraico, desconocen la diferencia entre área y perímetro de una figura geométrica, y poseen dificultades para la aplicación del teorema de Pitágoras. Además, se detectó importantes dificultades en la comprensión de los enunciados.

Coincidimos con Díaz Barriga [6], que "aprender a aprender implica la capacidad de reflexionar en la forma en que se aprende y actuar en consecuencia, autorregulando el propio proceso de aprendizaje". Para ello consideramos apropiado el uso de estrategias como la relatada en este trabajo que pretenden que los alumnos se den cuenta cómo llegan a realizar de nuevo el curso, que identifiquen sus aciertos y dificultades, que corrijan sus errores y planifiquen emplear nuevas o diferentes estrategias de estudio de manera consciente en el curso que inician para el logro de sus metas.

Para futuros cursos de estas características, planificamos repetir la utilización de este tipo de prueba diagnóstica, realizando pequeñas modificaciones como ser el orden de los ejercicios, la dificultad de los mismos, u otros, considerando sugerencias u observaciones de los docentes participantes de esta implementación. Esta misma prueba también nos planteamos implementarla en colegios secundarios que realicen actividades de articulación con nuestra facultad.

5 Referencias

1. Ander Egg, E.: *El taller: una alternativa de renovación pedagógica*. Editorial Magisterio del Río de la Plata, Buenos Aires. (1994).
2. Vargas Díez, J.: Factores diferenciales del rendimiento académico en educación superior. Tesis doctoral, Departamento MIDE, Universidad Complutense de Madrid, España. (2001).
3. Quesada, R. y otros: *Guía para evaluar el aprendizaje teórico y práctico.* Editorial Limusa, México. (1986).
4. Murillo, M.A.: Variables que influyen en el rendimiento académico en la Universidad. universidad Complutense de Madrid. Madrid: Depto MIDE (Métodos de Investigación y Diagnóstico en Educación) (2008).
5. Hernández Valverde, G.: La evaluación diagnóstica. *Blog Santillana*. https://www.santillana.com.mx/articulos/21 (2013). Accedido el 15 Septiembre de 2017.
6. Díaz Barriga F.; Hernández Rojas, G.: Estrategias para el aprendizaje significativo: Fundamentos, adquisición y modelos de intervención. *Estrategias docentes para un aprendizaje significativo*. *Una interpretación constructivista*. McGraw-Hill, México, pp.231-249. (2002).

Materiales Digitales y Tutorías Académicas de Matemática del curso de Ingreso de UNLaM en el marco del programa NEXOS

Scorzo Roxana[1] Ocampo Gabriela[1]

[1]Departamento de Ingeniería, Universidad Nacional de La Matanza
Florencio Varela 1903, San Justo, Provincia de Buenos Aires, Argentina
{rscorzo, gocampo}@unlam.edu.ar

Resumen. En este artículo describimos un plan de articulación entre la escuela y la universidad, denominado Programa NEXOS. Una iniciativa de la Secretaría de Políticas Universitarias, que pretende mejorar el acceso a la Educación Superior, mejorando competencias básicas y específicas de ciertas áreas, entre las que se encuentra matemática. Describiremos brevemente el proyecto presentado por la Universidad Nacional de La Matanza, una de las 16 casas de estudio que forman parte de esta experiencia piloto. En particular nos concentraremos en la organización y características de los materiales digitales diseñados especialmente para matemática y la propuesta de tutorías presenciales y virtuales de dicha asignatura. Finalmente haremos una breve referencia a la capacitación docente que brinda la Universidad entre los actores implicados en el programa.

Palabras Clave: Ingreso, Articulación, Matemática, Tutorías, Material Educativo

1 Introducción

Esta propuesta, que deviene de la Secretaría de Políticas Universitarias del Ministerio de Educación, contempla la realización de tutorías disciplinares y de acompañamiento para los estudiantes de nivel medio, elaboración de material educativo y formación continua docente.

Cabe señalar que esta experiencia se realizará como prueba piloto con 16 instituciones universitarias en el territorio nacional que tienen precedentes en esta línea de trabajo, a fin de evaluar la factibilidad e impacto de la iniciativa. En este sentido, la convocatoria y selección de las Universidades para el desarrollo de esta primera etapa se realizó considerando los antecedentes institucionales en la temática, así como su experticia en el desarrollo de actividades de tipo disciplinar y por áreas con docentes y estudiantes del nivel secundario.

Como antecedente a esta iniciativa nuestra Universidad trabajó, junto a las autoridades provinciales, en un proyecto de articulación en determinadas escuelas del partido de La Matanza y nuestra casa de estudios. A través del curso de ingreso y sus coordinadores, se establecieron contactos con docentes de dichas escuelas, se les brindó, charlas informativas, y material para que puedan trabajar desde las aulas. Se les brindó mail de contactos para realizar consultas y clases de apoyo para los estudiantes. Este proyecto tuvo lugar durante los años 2013 al 2016, continuando con esta iniciativa de brindar fortalecimiento en los aprendizajes de los estudiantes de las escuelas y orientar a los docentes en esta tarea de apoyo, las autoridades de la Universidad junto al Ministro de Educación deciden ser parte de esta nueva iniciativa de articulación propuesta, llamado Programa NEXOS [1].

La primera fase de este plan contempla la selección y capacitación de tutores, el diseño de material educativo y el armado de herramientas virtuales para brindar este apoyo. El proyecto que presenta nuestra Universidad se basa en tres ejes acordes con los lineamientos trazados en dicho plan: fortalecer la Plataforma Miel adquiriendo equipamiento para poder potenciarla, elaboración de contenidos para una instancia previa al cursado del ingreso de tipo semipresencial y organizar tutorías virtuales y presenciales para cada una de las materias involucradas en el proyecto que son: matemática, seminario, filosofía y biología. Estas áreas disciplinares seleccionadas por la Secretaría Académica de la UNLaM en el caso de Ingeniería, Arquitectura, Ciencias de la salud y Humanidades abarca el 100% de los contenidos del curso de admisión. En otras carreras como Abogacía y Educación Física dos de las materias antes mencionadas forman parte del curso de ingreso es decir las dos terceras partes de los contenidos están contemplados en este proyecto.

En este artículo explicaremos las decisiones que tomamos en cuanto a la elección de los contenidos matemáticos, ya que tuvimos que unificar las diferentes propuestas de ingreso de la materia matemática de acuerdo a la carrera a la que se pretende ingresar. Las carreras involucradas en el contenido matemático que describiremos son Económicas, Ingeniería, Arquitectura y finalmente Humanidades. Explicitaremos el tipo de material que hemos elaborado, la propuesta de tutorías virtuales y presenciales para los estudiantes de la escuela secundaria que aspiran a ingresar a nuestra casa de estudios y finalmente la capacitación de los docentes en post de llevar adelante las mismas.

2 Marco teórico

2.1 Articulación escuela-universidad

Son numerosos los artículos que tratan la problemática de articulación entre escuela secundaria y universidad. Gorostiaga, Lastra y Brito [2] realizaron un análisis de las políticas institucionales implementadas por cuatro universidades del conurbano bonaerense: Universidad Nacional General Sarmiento, Universidad Nacional de Lanús, Universidad Nacional de Tres de Febrero y Universidad Nacional de San Martín, que hacen referencia al acceso y permanencia a la universidad en el curso de ingreso y durante el primer año de las carreras. Los autores analizan las particularidades de los sistemas de ingreso de las cuatro instituciones, los factores institucionales y las estrategias de apoyo que usan en cada una de ellas para favorecer el ingreso y permanencia en el sistema de los alumnos. Este análisis lo realizan a partir de documentación específica de cada institución y a través de entrevistas con los coordinadores de los diferentes ingresos. Los responsables del ingreso señalan que dos factores externos son los que más influyen en la no adaptación de los estudiantes a la vida universitaria: las condiciones previas o conocimientos que traen de las escuelas y la situación laboral en su mayoría. En cuanto a los aspectos internos, el poco tiempo que duran los cursos que se imparten en las distintas universidades, es un factor fundamental en la no obtención de mejores resultados para poder acceder a la universidad. Señalan, al mismo tiempo, que dentro de las estrategias puestas en marcha para lograr una mayor retención se destacan las clases de apoyo o tutorías que realizan los docentes de las universidades involucradas en el estudio. También concluyen que, si bien los estudiantes valoran los logros alcanzados en el período de ingreso, es necesario mejorar los materiales que se les brinda a los aspirantes y reformular algunas estrategias, además de contar con mayores recursos económicos por parte de las autoridades ministeriales.

2.2 Tutorías Académicas en Matemática preuniversitaria

Numerosas son las investigaciones que se refieren a la implementación de estrategias para mejorar el rendimiento de los estudiantes en el inicio de carreras universitarias, una de ellas son las tutorías específicas en la asignatura Matemática. Rodríguez y Díaz [3] analizan los resultados de la implementación de tutorías específicas de matemática en un grupo de universidades españolas. Concluyen que un 37,5% de las universidades españolas poseen tutorías específicas en esta asignatura, con diversidad de modalidades, en algunos casos, los tutores son docentes y en otros estudiantes de los últimos años de carrera, estas últimas conocidas como tutorías de pares.

También varía la cantidad de alumnos por tutor en un rango que va desde los cuatro hasta los treinta estudiantes por cada uno. En un tercio de las universidades donde se implementan existen capacitaciones para los docentes que asumen el rol de tutores y realizan a través de encuestas una evaluación de las mismas en cuanto a resultados y satisfacción de los estudiantes que las usan. También señalan que el financiamiento de estas prácticas, es diverso, en un alto porcentaje, casi un 80%, son financiadas por el estado, el resto por las propias universidades.

En general, los temas que se tratan en las tutorías preuniversitarias son resolución de problemas y tareas de estimulación para favorecer los talentos matemáticos. García Pérez [4] realiza una descripción de diferentes sistemas tutoriales en numerosas universidades, entre ellas explicita el implementado, desde hace varias décadas, por la Open University donde el modelo de tutoría personalizada fue difundido en todo el Reino Unido y cuya característica principal es que los estudiantes estudian en forma autónoma, con materiales especialmente preparados para esta instancia y posteriormente se encuentran con los tutores para tratar los problemas de aprendizaje que surgieron en la instancia anterior. También en dicho artículo, menciona otras experiencias vinculadas a universidades españolas y mexicanas, entre otras, señalando como eje común a todas ellas, la necesidad de fomentar programas de apoyo académico para fortalecer el ingreso y permanencia de los estudiantes en el mundo universitario. Por otra parte, García Pérez señala que un programa de tutorías debe tener tres etapas: planeación, instrumentación y evaluación. En la primera etapa, se fijan los objetivos a seguir y se indaga a los estudiantes a través de una evaluación diagnóstica para saber desde donde se parte, en la segunda, se plantean las actividades para que los estudiantes participen y finalmente en la tercera se evalúan los resultados para poder implementar acciones preventivas o correctivas del proceso de aprendizaje.

2.3 Materiales educativos digitales

La elaboración de materiales educativos digitales es un proceso complejo que requiere toma de posiciones por parte del docente que los elabora, fundamentalmente no descuidando el aspecto educativo de los mismos por encima de lo computacional. Gagne citado en Guerrero y Flores [5], establece siete fases del aprendizaje que denomina: *motivación, comprensión, retención, recuerdo, generalización, ejecución y retroalimentación.* El autor define a partir de estas fases nueve instrucciones a tener en cuenta en la elaboración de materiales didácticos informáticos, así denominados por él, a saber:

-*Atraer la atención del alumno:* el docente captará la atención de los alumnos utilizando imágenes atractivas, documentos dinámicos, colores en las presentaciones que llamen la atención, diferentes tipografías, tonalidades diferentes de los audios en caso de realizar videos. También es importante plantear problemas e interrogantes que desafíen a los alumnos para que los resuelvan.

-*Informar al alumno del objetivo a seguir:* adaptar los materiales a los intereses del grupo al cual van dirigidos.

-*Estimular el recuerdo de conocimientos previos:* el autor sugiere la presencia de esquemas con los requerimientos previos que necesitan los estudiantes para poder encarar las actividades o lecturas propuestas. También presentar diferentes opciones de contenido para que los estudiantes puedan elegir de acuerdo a sus conocimientos anteriores.

-*Presentar el material estímulo:* el autor recomienda que los materiales se presenten de lo más simple a lo más complejo, de lo concreto a lo abstracto a través del lenguaje, imágenes, ejemplos de aplicación, problemas iniciales donde se aplican los conceptos a desarrollar.

-*Guiar el aprendizaje:* estos materiales se caracterizan porque los estudiantes pueden recurrir a ellos en forma reiterada, volver a leerlos, o rever en caso de los videos, sin embargo, es importante realimentar el contacto con los docentes para consultar dudas o bien promover el trabajo colaborativo con sus pares con la guía del profesor. Por eso, es indispensable contar con herramientas como el chat, correo electrónico o foros para lograr el acompañamiento necesario de los alumnos en el proceso de aprendizaje.

-*Producir la actuación o conducta.* Las diferentes corrientes teóricas, manifiestan que los aprendizajes se manifiestan en cambios de conductas de los estudiantes, cada una de ellas con su impronta teórica que la caracteriza. Esto, según Gagne, se logra en los materiales informáticos presentando los contenidos con diferentes estrategias, situaciones o problemas que promuevan discusión entre los alumnos a la hora de abordarlos.

-*Valorar la actuación:* Vaca y Gross citados en Guerrero y Flores [5] señalan respecto de esta característica de los materiales que los mismos deben proporcionar una respuesta en cuanto a los aprendizajes logrados, por ejemplo, a través de cuestionarios digitalizados o evaluaciones parciales que permitan retroalimentar la actuación de los alumnos, corrigiendo errores o modificando estrategias al recibir algún tipo de respuesta cuando los ejecutan.

- *Proporcionar retroalimentación:* presentar a los alumnos prácticas interactivas que le permitan reestructurar sus conocimientos y que puedan modificarlas y adaptarlas a sus necesidades.

-*Promover la retención y fomentar la transferencia:* estos materiales deben ser recursos de apoyo para los estudiantes y que la interacción con los mismos les permita aplicar los conocimientos a otras situaciones.

3 Contexto de aplicación

La Universidad Nacional de La Matanza es una universidad pública, radicada en la ciudad de San Justo, en el conurbano bonaerense, integrada por cinco departamentos y con un proyecto educativo – cultural inspirado fundamentalmente en la realidad local y comprometido con ella.

Desde su fundación en 1986, el sistema de ingreso a la universidad fue cambiando y adaptándose a medida que iba modificándose la realidad de los aspirantes que deseaban pertenecer a esta casa de altos estudios. Hoy en día, este sistema está regido por la Secretaría Académica de la Universidad y posee características distintivas de acuerdo a la carrera a la cual se aspire a ingresar y características comunes a todas.

Para la mayoría de las carreras, los alumnos deben cursar tres asignaturas, una común a todas, llamada *Seminario de comprensión y producción de textos*, una específica del departamento y una tercera materia. En el caso del Departamento de Ingeniería e Investigaciones Tecnológicas (DIIT) la materia específica es *Matemática* y la tercera materia es *Geometría*. El Departamento de Ciencias Económicas y el Departamento de

Humanidades y Ciencias Sociales tienen como tercera materia a *Matemática* y a *Lógica Matemática* respectivamente.

Para poder ingresar los aspirantes deben asistir a un curso de ingreso y aprobar un examen de cada una de las materias que lo forman.

El Curso de Admisión se organiza en dos instancias, la primera durante 20 semanas en el segundo cuatrimestre y la segunda se cursa de manera intensiva en cinco semanas durante los meses de febrero y marzo.

Primera instancia: Los aspirantes asisten a clase dos veces por semana de acuerdo a la combinación de días elegida por el alumno en su inscripción, pueden optar entre dos franjas horarias turno mañana o tarde, también existe la posibilidad de cursar solo los días sábados en doble turno, para aquellos alumnos que cursan jornada completa en las escuelas, o que por motivos laborales no puedan hacerlo durante la semana. En esta instancia se cursan las tres materias en forma sucesiva. La asistencia es obligatoria, siendo un requisito contar con el 75% de cumplimiento en cada una de las materias del curso.

Segunda instancia: Es de carácter intensivo, dado que el alumno cursa simultáneamente las tres materias de lunes a sábados en un turno de manera completa. El requisito de asistencia es el mismo en esta instancia.

Los alumnos deben rendir un examen final de cada una de las tres asignaturas. La calificación final del Curso de Ingreso es un promedio ponderado de las calificaciones obtenidas en cada uno de los exámenes de las tres asignaturas del Curso. La calificación obtenida en la materia específica de cada Departamento es multiplicada por el factor de ponderación 4, las obtenidas en Seminario y en la tercera materia por el factor 3. El alumno ingresa si obtiene un mínimo de 70 puntos de esta forma, y habiendo aprobado con un mínimo de 4 cuatro puntos cada una de las tres asignaturas. Tiene la posibilidad de rendir recuperatorios de los exámenes en marzo y en julio para ingresar en el segundo cuatrimestre.

Toda esta información está disponible en la página web de la universidad y en el Manual del Curso de Ingreso que se le entrega a cada aspirante en su inscripción.

En esta primera instancia del ingreso 2019 más de 18.600 alumnos están realizando el curso de ingreso, de ellos, más de 10.500 tienen a Matemática como una de las asignaturas del curso.

La Universidad Nacional de La Matanza reconoce el mérito a la trayectoria de egresados de nivel medio que, hayan obtenido los mejores promedios de todo el ciclo secundario dentro de sus establecimientos y hayan sido alumnos regulares durante el presente año, eximiéndolos de cumplir con la obtención del puntaje requerido para aprobar el Curso de Ingreso, pero si deben cumplimentar el requisito de asistencia en cada asignatura y asistir al menos a uno de los tres exámenes, en alguna de las dos instancias del Curso de Ingreso para favorecer su inserción al ámbito académico.

4 Metodología de trabajo

Los coordinadores del curso de ingreso de las materias involucradas en el proyecto de articulación Nexos, participamos de varias reuniones donde se explicitaron los objetivos del mismo y el cronograma de cumplimiento en etapas de dichas metas. A cada asignatura se le asignó un capacitador responsable de la plataforma Miel de la universidad quien nos orientó en el uso y alcance de la misma. A su vez, son los responsables de capacitar a los futuros tutores y asesorarnos en posibles metodologías para poner en funcionamiento las tutorías virtuales, basándose en experiencias anteriores implementadas por otras asignaturas.

4.1 Criterios de selección de los contenidos

Como dijimos previamente, tuvimos que articular los contenidos matemáticos que se dictan en los ingresos de tres departamentos diferentes de la UNLaM, por eso, nuestra primera decisión fue la selección de los mismos teniendo como idea rectora que sean básicos y troncales para las tres modalidades. Hemos organizado los mismos entonces, en cinco módulos de contenido, más uno de bienvenida al curso de ingreso.

-Módulo 0: Bienvenida a los estudiantes y un desafío visual a través de un problema de conteo.
-Módulo 1: Introducción al lenguaje lógico-matemático y nociones de lógica simbólica.
-Módulo 2: Funciones
-Módulo 3: Función Lineal
-Módulo 4: Ecuaciones
-Módulo 5: Sistemas de ecuaciones lineales.

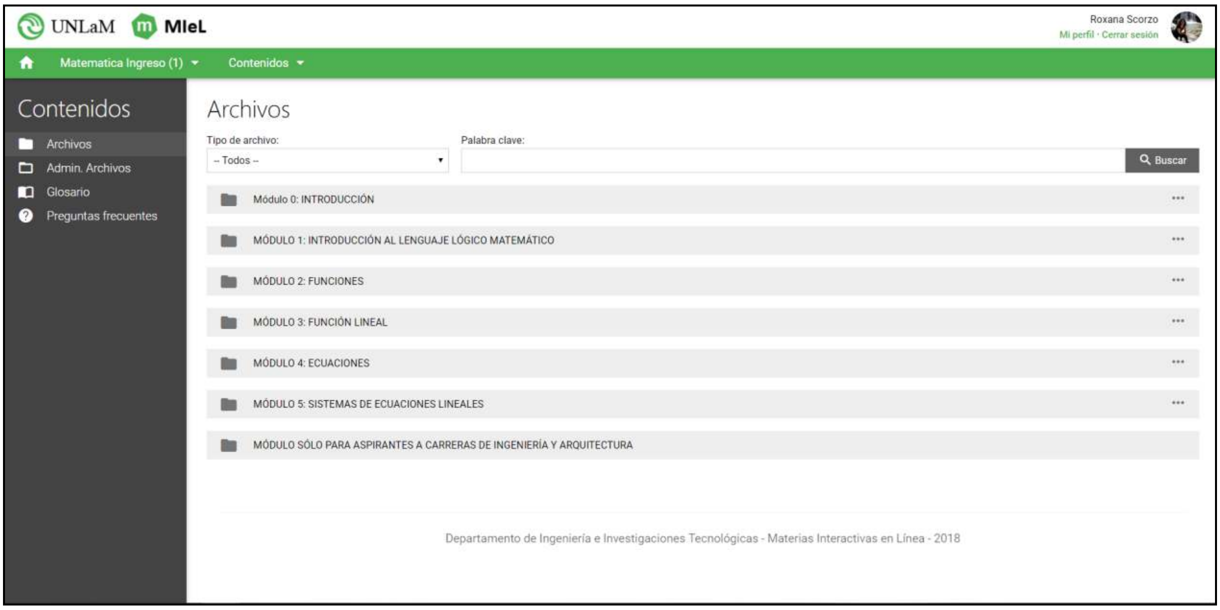


Fig. 1 Imagen de la plataforma MIEL con los Módulos de Matemática

4.2 Características de nuestros materiales educativos

Apoyándonos en los principios teóricos antes explicitados hemos elaborado materiales en formatos amigables para los estudiantes, que puedan utilizar en sus celulares, con colores diversos para cada uno de los módulos, en formatos de PPT con hipervínculos a actividades interactivas con software Geogebra o a videos tutoriales de elaboración propia, es decir, no remitimos a material disponible en la web, sino que los mismos fueron elaborados ad hoc, por los coordinadores del ingreso, pensando en nuestro contexto de aplicación.

En cada uno de los cinco módulos se dispone de:

- material teórico escrito por los docentes coordinadores del ingreso,

-documentos interactivos realizados con software GeoGebra,

-algunos apuntes en formato Word/PDF

Al finalizar el recorrido del módulo disponen de una evaluación de tipo opción múltiple con respuestas inmediatas para que puedan estimar sus progresos, y a posteriori, pueden realizar consultas en las tutorías presenciales acerca de las mismas.

Para la elaboración de los materiales teóricos-prácticos en PowerPoint hemos elegido diferentes plantillas para cada módulo (Fig.2) y decidimos subirlos a la plataforma en formato PDF para que los mismos puedan ser vistos fácilmente en sus celulares. Al confeccionar los mismos hemos considerado las recomendaciones teóricas antes expuestas, las explicaciones de cada tema comienzan desde lo más básico a lo más complejo, teniendo en cuenta que, si bien están dirigidos a estudiantes de escuela secundaria que pretenden ingresar al mundo académico, la rigurosidad de los temas es un principio rector que rige en todos los diseños. Seleccionamos formatos con diferentes colores e imágenes en múltiples formas.

Fig. 2 Materiales realizados en PowerPoint y disponibles en la plataforma en PDF

También en muchos de estos PPT colocamos hipervínculos a documentos dinámicos, que realizamos especialmente para esta instancia, usando la plataforma educativa "GeoGebra Dynamics Mathematics" (Fig. 3) de libre acceso [6], que permite almacenar los documentos a los cuales pueden acceder los estudiantes, pudiendo interactuar con ellos modificándolos, pero sin que implique la pérdida de la originalidad de los mismos, es decir no se guardan los cambios que ellos realizan, sino que mantienen su formato de origen.

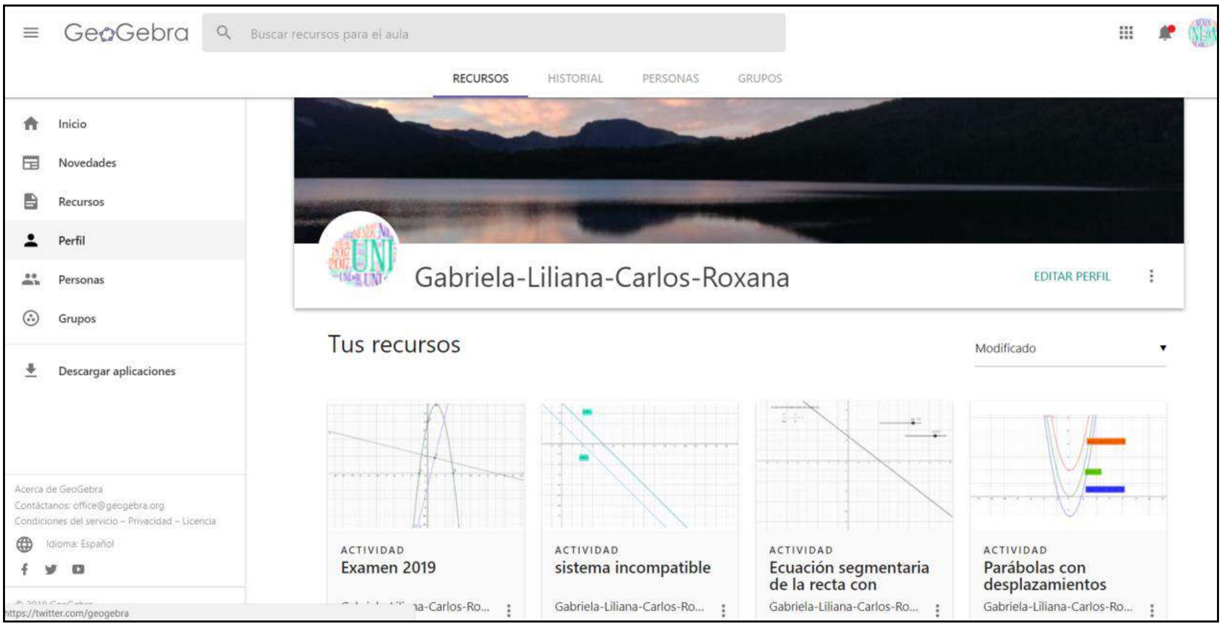


Fig.3 Plataforma educativa GeoGebra Dynamics Mathematics

Esta plataforma nos permite no sólo crear Applet con GeoGebra, sino realizar recursos que se denominan Actividades con GeoGebra (Fig.4) que permite incluir en éstas Applet, imágenes, videos, archivos, texto y realizar una evaluación de respuesta inmediata, de autocorrección sobre el tema al cual refiere la misma. Una vez finalizada la misma se accede mediante un link que compartimos en la plataforma Miel. Este tipo de recursos cumple ampliamente las recomendaciones explicitadas en el marco teórico: planteamos objetivo de la actividad, guían el aprendizaje de los estudiantes ya que pueden acceder a la misma las veces que lo desee y pueden interactuar con los documentos de tipo dinámicos (*retroalimentación)*, además la evaluación de respuesta inmediata le permite al estudiante *valorar su actuación* A modo de ejemplo, compartimos un link con un ejemplo de este tipo de recurso que elaboramos para esta instancia https://www.geogebra.org/m/Q5rUSvJm

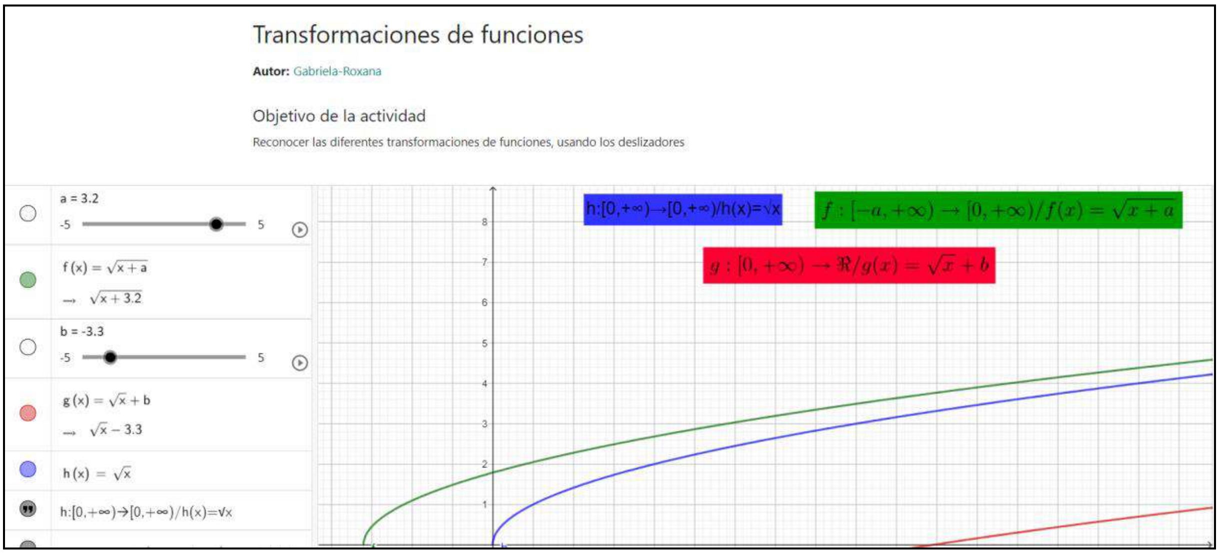


Fig. 4 Actividad con GeoGebra

Lo propio hemos hecho con los videos tutoriales (Fig.5), con la premisa de que sean cortos, dinámicos y complementarios de los temas teóricos desarrollados en cada módulo. Disponen del link de acceso a dichos videos como también el código QR para que accedan fácilmente desde sus dispositivos móviles. Para realizar estos videos, usamos una herramienta denominada Screencastify, una extensión gratuita de Chrome que permite grabar fondos de pantalla de nuestras computadoras y también usar la cámara de las mismas. Al finalizar la grabación de los mismos accedemos a un enlace para compartir en Google Drive o bien podemos publicarlo en YouTube, en nuestro caso usando el canal de la Universidad.

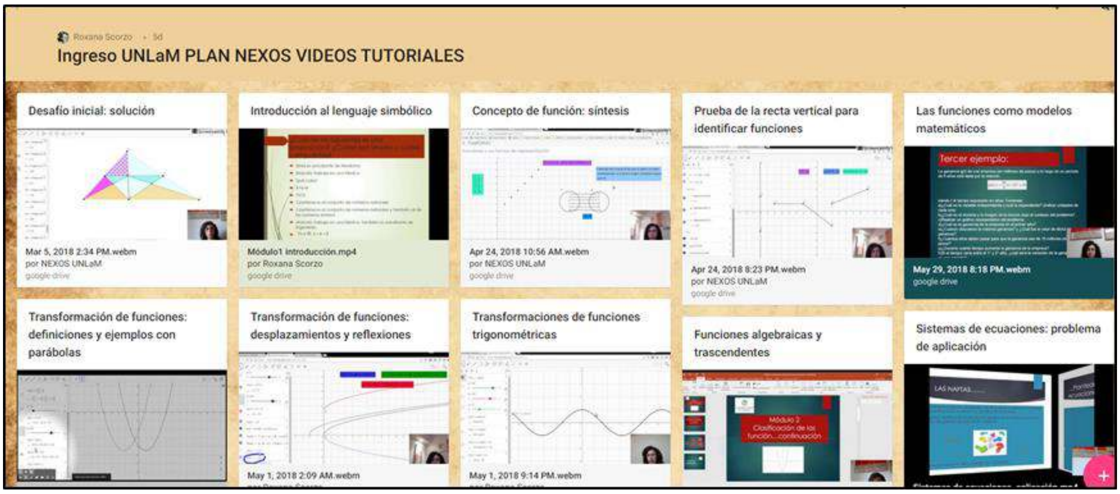


Fig. 5 Videos tutoriales Programa NEXOS-UNLaM

Es imprescindible señalar que gran parte de estos materiales están abiertos a toda la comunidad, se accede a los mismos a través de una pestaña que figura en la plataforma MIEL, que dice Ingreso 2019, Material educativo para consultar.

4.3 Tutorías virtuales y presenciales

En nuestra propuesta para implementar las tutorías de matemática, en principio, decidimos que sean específicas para cada una de las carreras involucradas en el proyecto. Es decir, serán diferentes para los estudiantes que aspiren a ingresar a carreras de Ingeniería, Económicas o Humanidades, ya que los niveles de profundidad de los contenidos matemáticos, son distintos para cada una de ellas. Todas poseerán una modalidad similar, proponer una situación problemática semanal vinculada con los temas que se dictan en las aulas del curso de ingreso y a través de ella ver cuáles son los temas que se necesitan conocer para resolverlas, resignificarlos y compartir las diferentes soluciones que propongan los estudiantes a dicha propuesta, además de analizar las más convenientes, las erróneas, las correctas, etc. Las tutorías tal cómo sugirieron desde la Secretaría Académicas serán de tipo virtuales y presenciales, en ambas modalidades se trabajará con las mismas situaciones problemáticas que deberán proponer los tutores. La organización de los foros donde se llevarán a cabo las tutorías, la hemos realizado respetando las unidades temáticas del manual de ingreso (Fig. 6). Para que los alumnos mantengan un orden a la hora de realizar la consulta y de proponer estrategias de resolución de los problemas que se irán planteando en cada uno de dichos foros.

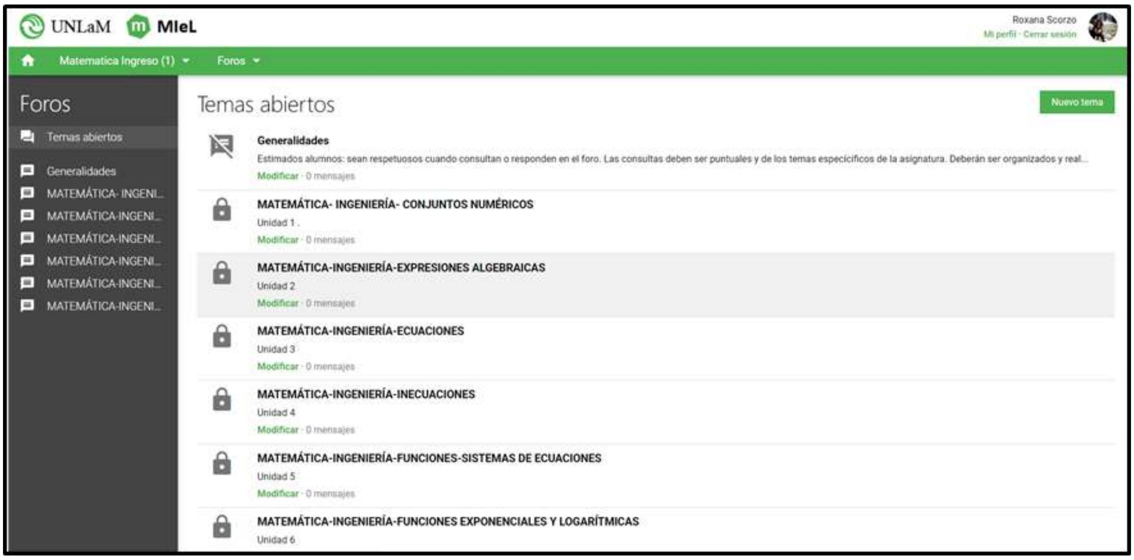


Fig. 6 Organización de los Foros para realizar Tutorías Académicas virtuales

4.4 Acerca de la capacitación docente

En cuanto a la capacitación docente brindada por la Universidad, hasta el momento se realizaron tres encuentros, dos de ellos convocando a los docentes de escuelas medias para participar de las mismas y un tercero donde se capacitó a los tutores, tanto virtuales como presenciales en el uso de la plataforma Miel. Las dos primeras jornadas se llevaron adelante con especialistas en didáctica, especialmente convocados para tal fin (Fig. 7) y los coordinadores de los cursos de ingreso. La temática tratada en la primera fue analizar en forma reflexiva aspectos vinculados con los diseños curriculares y en la segunda, más específica acerca de los contenidos matemáticos del curso de ingreso: formas de abordarlos, vinculación de estos con las diferentes asignaturas que deberán abordar en las carreras, entre otros aspectos. Participaron aproximadamente 100 docentes de diferentes distritos de la provincia, se les entregó material impreso entre los que se cuentan el manual de ingreso, exámenes anteriormente tomados, criterios de evaluación, trabajos prácticos de repaso, entre otros.

Fig.7 Difusión de convocatoria a Jornada de perfeccionamiento docente de escuelas secundarias

5 Reflexiones finales

Los nuevos materiales digitales presentados y las tutorías tanto virtuales como presenciales y constituyen una herramienta nueva y una estrategia más para enfrentar la falta de acoplamiento entre las prácticas matemáticas que se llevan a cabo en el nivel medio y las que son necesarias en el ámbito universitario

Enfatizamos las tutorías en el ingreso como una responsabilidad compartida, un intercambio distribuido y tarea colaborativa y cooperativa entre todos los actores de la institución con la meta de lograr una Universidad inclusiva

Las tutorías académicas abren un espacio de reflexión sobre las propuestas formativas, los contenidos, las explicaciones, su organización curricular, las formas de evaluación, la interrelación en la tarea entre el docente y el alumno, la inclusión de las nuevas tecnologías y su impacto en las condiciones de aprendizaje de la Matemática.

Si bien la Universidad ha participado en otros proyectos de articulación con la escuela media, es la primera vez que el mismo se encuadra en el uso de la plataforma digital de la Universidad, con expectativa a futuro de poder implementar una modalidad semipresencial en la cursada del ingreso.

Referencias

1. Programa Nexos: por un sistema educativo articulado e integrado. https://www.argentina.gob.ar/noticias/programa-nexos-por-un-sistema-educativo-articulado-e-integrado
2. Gorostiaga, J.; Lastra, K.; Britos, S.: Políticas institucionales para favorecer el acceso y la permanencia en universidades argentinas: un análisis de cuatro instituciones del conurbano bonaerense. Páginas de Educación, Vol. 10, No. 1, pp. 151-173 (2017).
3. Rodríguez, L.; Díaz, P.: Estrategias de las universidades españolas para mejorar el rendimiento en matemáticas del alumnado de nuevo ingreso. Aula abierta, Vol. 43, No. 2, pp. 69-76 (2015).
4. García Pérez, S.: El papel de la tutoría en la formación integral del universitario. Revista Institucional de Investigación Educativa, Vol.11, No 21, pp. 31-56 (2010)
5. Guerrero, M.; Flores, C.: Teorías del aprendizaje y la instrucción en el diseño de materiales didácticos informáticos. Educere, Vol. 13, No.45, pp. 317-329 (2009)
6. Plataforma Educativa *GeoGebra Dynamics Mathematics* https://www.geogebra.org/

Una propuesta de Articulación entre Matemática y Programación

Sonia Valeria Jacamo
Departamento de Matemática. Universidad Nacional de San Juan. Facultad de Ingeniería.
Avenida Libertador General San Martín 1109(O). C.P. 5400
sjacamo@unsj.edu.ar

Resumen. La enseñanza de la matemática comienza a caracterizarse por el uso de software, la evolución de los mismos nos ofrecen nuevas formas de enseñar, aprender y hacer matemática, brindando amplias posibilidades didácticas, con un gran potencial tanto para lograr la interacción del alumnado con situaciones de aprendizaje que lo conduzcan a construir conocimientos, como para tener una visión más amplia del contenido matemático [1]. En esta propuesta se pretende articular cuatro disciplinas, tres de las cuales son propias de la matemática, como lo son el cálculo, la lógica y el álgebra lineal, con una cuarta que es la computación, específicamente la programación en Octave. Se propone una forma diferente de abordar temas conocidos por el estudiante avanzado de matemática bajo la perspectiva de la lógica computacional y la programación, en este caso se trabaja con la función coseno y el polinomio de Maclaurin para dicha función. [2]

Palabras Clave: Polinomio de Maclaurin, Software Matemático, Articulación.

1 Introducción

Utilizar la computadora supone una simbiosis de nuestra inteligencia con una herramienta externa, sin la cual la mente contaría sólo con sus propios medios y no funcionaría igual.

Las computadoras nos proveen de un aprendizaje dinámico e interactivo que permite la rápida visualización de situaciones problemáticas. La posibilidad de visualizar gráficamente conceptos teóricos como así también la de modificar las diferentes variables que intervienen en la resolución de problemas favorece el aprendizaje de los alumnos.

La finalidad esencial de esta propuesta es mostrar la íntima relación que existe entre cálculo, lógica y computación, teniendo la visión que el eje integrador de toda la matemática debe ser el desarrollo del razonamiento lógico en nuestros alumnos, para que ellos puedan interpretar y resolver problemas, como así también el plantearse desafíos.

El trabajo está dividido en secciones, la sección número 2 está dedicada a la lógica computacional.

En la tercera sección se explica brevemente qué entendemos por articulación y se exponen los motivos que motivaron la presente propuesta.

En la cuarta sección se recuerdan brevemente los polinomios de Taylor y de Maclaurin, en la subsección 4.1 se desarrolla la serie de Maclaurin para la función coseno y en la 4.2 se habla de las dificultades epistemológicas de dicho desarrollo en los alumnos.

En la sección 5 se proporciona un código m cuyas salidas son los coeficientes del polinomio de Maclaurin para la función coseno y sus graficas. Dicho código puede ser implementado como herramienta didáctica que le permita al docente contar con un nuevo recurso a partir del cual se puedan abordar de manera simple los conceptos de serie, polinomio de Maclaurin, lógica algorítmica, nociones básicas de álgebra lineal y programación.

En la subsección 5.1 se analizan algunos ejemplos para los grados cuatro y seis, por último, la sección 6 está destinada a conclusiones finales.

2 Lógica algorítmica en programación computacional [3]

Autores como Guibert, Guittet y Girard plantean que los estudiantes que se enfrentan por primera vez a la programación en su proceso de formación, presentan problemas tales como: no logran desarrollar un modelo viable o estructura que permita resolver el problema, ni describir una estrategia comprensible para la computadora o abstraer los diferentes comportamientos de una tarea en una estrategia que los integre a todos. [4]

Como consecuencia estos autores concluyen que el aprendizaje para programar no puede reducirse a aprender la sintaxis de un lenguaje de programación, sino que el estudiante debe comprender la dificultad de esta tarea y construir un modelo correcto de cómo los programas se elaboran y ejecutan, fundamentar los procesos de análisis, interpretación y abstracción de su lógica y concepción algorítmica.

Es necesario resaltar que la búsqueda de una forma de enseñar a programar debe fundamentarse en procesos de análisis, interpretación y abstracción de la lógica y concepción del algoritmo; con lo que se destaca el empleo de estos, como recursos previos a la resolución de un problema de programación computacional.

Para Gavilán, Ariza, Sánchez y Barroso [5], con los avances tecnológicos existen muchos programas matemáticos como: Derive, Maple, Mathematica, Matlab, Octave entre otros, los cuales proporcionan medios para la enseñanza de la matemática; sin embargo el docente debe saber aprovecharlos para generar situaciones que permitan al alumnado construir un conocimiento más significativo [6]. La idea es que el docente use la tecnología computacional como herramienta cognitiva; es decir, como compañera intelectual del aprendiz para facilitar el pensamiento de alto nivel. [7]

Sobre la base de lo expuesto, el presente trabajo pretende consolidar un pensamiento lógico en el estudiante avanzado de ingeniería, a través de la programación de un archivo en Octave que calcula el polinomio de Maclaurin para la función coseno y lo grafica en el intervalo que el usuario desee.

Pretendemos mostrar con esto que es posible crear una conexión entre cálculo, álgebra lineal, programación y lógica, y no verlas como disciplinas separadas, pensamos que esto beneficia al estudiante en la creación de sus propias conexiones, permitiéndole ver a la matemática de una forma más global.

3 Articulación en carreras de ingeniería. [8]

El Cálculo y el Álgebra Lineal son de las primeras asignaturas básicas con que se encuentra el estudiante cuando ingresa a la Universidad en los programas de ingeniería, ya que constituyen pilares en su formación, una vez pasada esta primera instancia, los alumnos de segundo año se encuentran con materias como Computación y Métodos Numéricos. En todas estas asignaturas se les brindan a los estudiantes los conocimientos básicos que les servirán de herramientas al llegar a las materias propias de su especialidad.

Observamos que los estudiantes no logran ver la conexión que existe entre todas ellas, tendiendo a disociar una materia de otra y no crean conexiones.

Teniendo en mente lo anterior es que surge esta propuesta cuyo objetivo principal es fomentar en el alumno la articulación de notaciones, lenguaje, registros, como así también que logren aplicar herramientas y conocimientos previos en nuevos contextos que permitan una mejor comprensión de los conceptos, viendo a la matemática como un todo y su posible unión con otras disciplinas, como por ejemplo la programación.

Para cumplir este objetivo es necesario que los docentes propicien situaciones didácticas en las cuales los estudiantes realicen actividades que fomenten la capacidad de integración de conceptos matemáticos en distintas áreas, en este caso la computación se emplea para apreciar el valor y utilidad de esta herramienta.

Es nuestro propósito, con esta actividad de articulación, favorecer la integración y construcción de los conocimientos, siendo ésta una manera de motivar el aprendizaje de modo significativo. Además, se considera necesario interceder ante las dificultades académicas detectadas en los alumnos tratando de evitar las confusiones a las que da lugar el uso de terminología, nomenclatura, simbología y definiciones se evidencia que el desarrollo y contribución que desarrolla el área de formación de las ciencias básicas en los programas de ingeniería no se debe solamente a la necesidad de comprender leyes y postulados de las ciencias, sino se fortalecen a través del desarrollo de competencias como el análisis, la reflexión, la predicción, la valoración, el trabajo colaborativo, entre otros.

4 Serie de Taylor y Maclaurin.

El estudio de la teoría de aproximación de funciones comprende dos tipos generales de problemas. Uno se presenta cuando una función se da de manera explícita, pero se quiere encontrar un tipo más simple de ella, por ejemplo un polinomio, que nos sirva para determinar los valores aproximados de una función dada. El segundo problema de la teoría se refiere a la búsqueda de la función óptima que podamos emplear para representar un conjunto de datos.

Para el primer caso, el polinomio de Taylor de grado n alrededor del punto x_0, da una excelente aproximación a una función derivable de orden hasta n+1, en la vecindad de x_0.

Dicho polinomio aproxima mejor a la función localmente (en el entorno de un punto) cuanto mayor sea el orden del polinomio. Resulta entonces natural extender la noción de polinomio de Taylor a la de serie de Taylor dejando que n tienda a infinito y preguntarse si, dada una función $f(x)$ infinitamente derivable, la serie de Taylor converge en todo punto a dicha función.

La respuesta a esta interrogante es afirmativa, pues existe un teorema que afirma que si una función es infinitamente derivable en cierto intervalo y tiene todas sus derivadas uniformemente acotadas para todo punto del intervalo, entonces la función coincide con su serie de Taylor en todo punto del intervalo, esto es:

Teorema 1 Sea I un intervalo y f una función infinitamente derivable en dicho intervalo. Si existe una constante $M > 0$ tal que

$$\left|f^{(i)}(x)\right| \leq M \text{ para todo } x \in I, i \in N \tag{1}$$

Entonces,

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{f^{(i)}(a)}{i!}(x-a)^i \text{ para todo } a, x \in I \tag{2}$$

Ahora bien, si lo que deseamos es aproximar una función $f(x)$, alrededor del valor $a = 0$, llegamos a la serie conocida como serie de Maclaurin, que puede escribirse

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{f^{(i)}(0)}{i!} x^i \tag{3}$$

4.1 Desarrollo mediante serie de Maclaurin de la función coseno

En esta subsección se aplicarán los resultados obtenidos para obtener el desarrollo de la función coseno mediante series de Mclaurin.

Consideremos la función $f(x) = \cos(x)$ y su aproximación alrededor de $x = 0$.

Derivando la función, se tiene que

$$a_0 = \frac{f(0)}{0!} = \frac{\cos(0)}{1} = 1 \tag{4}$$

$$a_1 = \frac{f^{(1)}(0)}{1!} = -\frac{sen(0)}{1} = 0 \tag{5}$$

$$a_2 = \frac{f^{(2)}(0)}{2!} = -\frac{\cos(0)}{2} = -\frac{1}{2} \tag{6}$$

$$a_3 = \frac{f^{(3)}(0)}{3!} = \frac{sen(0)}{6} = 0 \tag{7}$$

$$\vdots$$

Reemplazando estos coeficientes en la expresión de la serie de Maclaurin obtenemos

$$\cos(x) = 1x^0 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 - \frac{1}{720}x^6 + \cdots = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{2i!} x^{2i} \tag{8}$$

Esta expresión de la función coseno en serie nos será útil en la programación del polinomio de Maclaurin en Octave en la siguiente sección.

4.2 Dificultades epistemológicas

Dreyfus señala que los estudiantes aprenden los procedimientos del Cálculo (encontrar límites, diferenciación, etc.) en un nivel puramente algorítmico, construidos sobre imágenes conceptuales escasas. Las dificultades en la concepción de los procesos de diferenciación e integración pueden explicarse en términos de que los estudiantes carecen, necesariamente, de un nivel alto de abstracción, tanto del concepto de función (como un objeto), como de los procesos de aproximación. [9]

En este caso, los elementos que entran en juego en la epistemología son la predicción, la graficación-modelación y el movimiento, todos ellos articulados.

La serie de Taylor, como la serie de Maclaurin son en sí modelos de predicción. En otras palabras, la re significación consiste en que ambas series precisan la simultaneidad de las derivadas, cuya función es la predicción.

Pensando en estas dificultades es que se propone esta forma de trabajar, creemos que la programación del polinomio insta al estudiante que ya cursó Computación a analizar en profundidad la serie de Maclaurin para esta función en particular, pero dicho análisis puede ser fácilmente trasladado a otras funciones que cumplan con las hipótesis impuestas en el Teorema 1.

5 Código de archivo .m en Octave.

Como ya se mencionó anteriormente, usaremos en la programación de este código a la serie de Maclaurin de la sección anterior.

Creemos que el estudio de este código le permitirá al alumno recordar la noción de polinomio, conceptos vistos en Cálculo, Computación y Álgebra, y podrá observar cómo todas estas ramas de la matemática confluyen y se enriquecen con la programación, a la vez que observará la inmediatez de los resultados gracias al uso del software.

En esta sección daremos una breve descripción del programa y explicaremos su funcionamiento, el programa propiamente dicho y finalmente algunos ejemplos en los que se evidencien las salidas del mismo.

Funcionamiento y salidas del programa

El programa para funcionar necesita que el usuario ingrese el grado del polinomio que desea obtener, si dicho número es impar, se emitirá un mensaje de error; si por el contrario el número ingresado es par, el programa producirá como salida los coeficientes del polinomio de Maclaurin.

A continuación el programa enviará un mensaje al usuario para que ingrese los límites del intervalo en el que desea graficar y mostrará las graficas de la función coseno junto con el polinomio obtenido.

Algoritmo 1. Programa para obtener los coeficientes del polinomio de Maclaurin de la función coseno junto con su gráfica en Octave.

```
clear
clc
grado= input('Ingrese el grado del polinomio ');
n=grado+1;
m=rem(grado,2);
if m==0
A=zeros(1,n);
for i=0:grado/2
coef=(-1)^i/factorial(2*i);
if i<grado/2
 j=1+2*i;
A(1,j)=coef;
else
A(1,n)=coef;
end
end
 fprintf('Los coeficientes de polinomio de Maclaurin ordenados en forma creciente y completa son: \n ')
P=A
else ('El grado ingresado es incorrecto')
end
Q=zeros(1,n);
for j=1:n
Q(1,j)=P(1,n+1-j);
end
fprintf('Ordenados en forma decreciente resulta:\n')
P=Q
a=input('Ingrese el limite inferior del intervalo ');
b=input('Ingrese el limite superior del intervalo ');
x=linspace(a,b);
y1=polyval(P,x);
```

```
title('Grafica del polinomio y de la funcion coseno en el intervalo dado')
y2=cos(x);
plot(x,y1,'k --'), hold on, plot(x,y2,'k')
legend('Polinomio de Maclaurin', 'Funcion coseno')
```

5.1 Ejemplos

Presentaremos tres ejemplos del polinomio de Maclaurin para la función coseno:

a) Polinomio de Maclaurin de grado 4 para la función coseno graficado en el intervalo [-3,2]

Ingrese el grado del polinomio 4
Los coeficientes de polinomio de Maclaurin ordenados en forma creciente y completa son:
P =
1.00000 0.00000 -0.50000 0.00000 0.04167
Ordenados en forma decreciente resulta:
P =
0.04167 0.00000 -0.50000 0.00000 1.00000
Ingrese el limite inferior del intervalo -3
Ingrese el limite superior del intervalo 2
Es decir el polinomio de Maclaurin de grado 4 para la función coseno es

$$P_4(x) = 0.04167x^4 - 0.5x^2 + 1$$

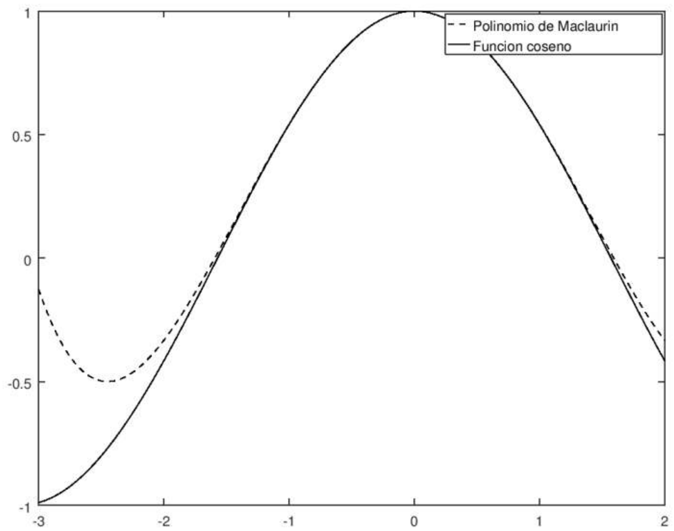


Fig. 1. Graficas de la función coseno y su polinomio de Maclaurin de grado 4 en el intervalo [-3,2]

b) Polinomio de Maclaurin de grado 6 para la función coseno graficado en el intervalo [-3,3]

Ingrese el grado del polinomio 6
Los coeficientes de polinomio de Maclaurin ordenados en forma creciente y completa son:
P =
1.00000 0.00000 -0.50000 0.00000 0.04167 0.00000 -0.00139
Ordenados en forma decreciente resulta:
P =
-0.00139 0.00000 0.04167 0.00000 -0.50000 0.00000 1.00000
Ingrese el limite inferior del intervalo -3
Ingrese el limite superior del intervalo 3

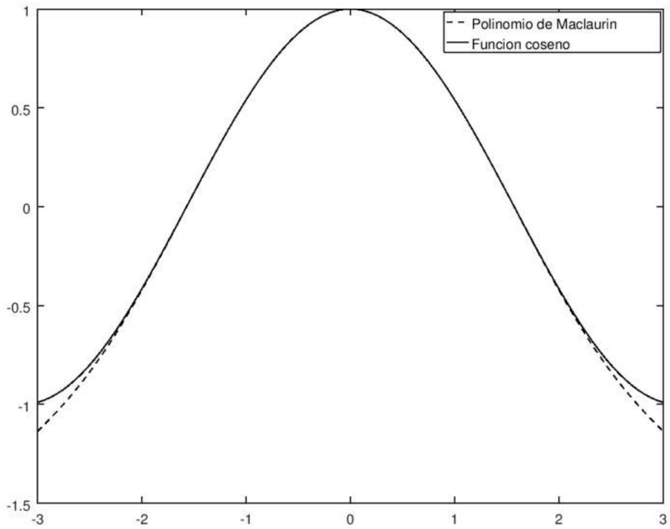


Fig. 2. Graficas de la función coseno y su polinomio de Maclaurin de grado 6 en el intervalo [-3,3]

c) Polinomio de Maclaurin de grado 6 para la función coseno graficado en el intervalo [-2,5]

Ingrese el grado del polinomio 6
Los coeficientes de polinomio de Maclaurin ordenados en forma creciente y completa son:
P =
1.00000 0.00000 -0.50000 0.00000 0.04167 0.00000 -0.00139
Ordenados en forma decreciente resulta:
P =
-0.00139 0.00000 0.04167 0.00000 -0.50000 0.00000 1.00000
Ingrese el limite inferior del intervalo -2
Ingrese el limite superior del intervalo 5
Por lo tanto el polinomio de Maclaurin de grado 6 para la función coseno es

$$P_6(x) = -0.00139x^6 + 0.04167x^4 - 0.5x^2 + 1$$

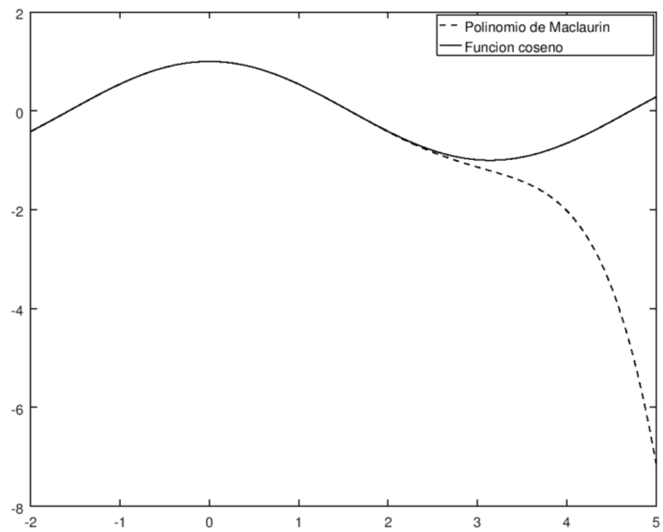


Fig. 3. Graficas de la función coseno y su polinomio de Maclaurin de grado 6 en el intervalo [-2,5]

6 Conclusiones

Con esta propuesta pretendemos validar entornos de aprendizaje, en los cuales la incorporación de tecnologías informáticas contribuyan a la construcción o re significación del conocimiento matemático, lo que se logra:

- con la integración de conocimientos de diferentes áreas, como lo son la Computación, el Cálculo y el Álgebra,
- con la re significación e integración de conceptos matemáticos. La programación permitió re significar una importante cantidad de conceptos trabajados en otras asignaturas,
- ampliando los marcos de resolución de problemas contribuyendo al sentido de ciertos saberes matemáticos. A los marcos propios de la ciencia Matemática se agregan los del contexto informático,
- redefiniendo la recursividad matemática la cual cobra otro significado a partir de la implementación de procesos recursivos efectivos en el contexto computacional, quedando a cargo del alumno las conceptualizaciones de dichos procesos.

De acuerdo a Ángel y Bautista (2001) [8], se debe convertir al alumnado en profesionales creativos, con capacidad de raciocinio, sentido crítico, intuición y recursos matemáticos que les puedan ser útiles. Por lo tanto, el ingeniero está obligado a buscar herramientas que permitan la utilización de tecnologías para crear y proporcionar un ambiente de trabajo dinámico e interactivo.

A modo de conclusión podemos decir que los recursos tecnológicos permiten mostrar aportes a las conceptualizaciones, ofreciendo nuevos marcos desde los cuales abordar la matemática, marcos que, bien utilizados, pueden llevar a profundizar la reflexión sobre los saberes y hacer que estos cobren otros significados.

Referencias

1. Guedez, M.: El aprendizaje de funciones reales con el uso de un software educativo: una experiencia didáctica con estudiantes de educación de la ULA Táchira. http://www.saber.ula.ve/db/ssaber/Edocs/pubelectronicas/accionpedagogica/vol14num1/articulo4.pdf. Accedido el 12 de Abril de 2006.
2. Ávila, M.; Chourio, E.; Carniel, L.; Álvarez Vargas, Z.: El software matemático como herramienta para el desarrollo de habilidades del pensamiento y mejoramiento del aprendizaje de las matemáticas. Actualidades Investigativas en Educación. Revista Electrónica publicada por el Instituto de Investigación en Educación Universidad de Costa Rica. ISSN 1409-4703. Vol. 7 Número 2.
3. Salgado, A.; Berenguer, I.; Sánchez, A.; Fernández, Y.: Lógica algorítmica para la resolución de problemas de programación computacional: una propuesta didáctica. Didasc@lia: Didáctica y Educación. ISSN 2224-2643.
4. Guibert, N.; Guittet, L. y Girard, P.: A study of the efficiency of an alternative programming paradigm to teach the basics of programming. http://www.lisi.ensma.fr/fr/equipes/idd/publications.html. (2005). Accedido el 10 de enero de 2012.
5. Gavilán, J.; Ariza., A.; Sánchez, A. y Barroso, R.: Software en el aprendizaje de las matemáticas. http://www.aloj.us.es/rbarroso/Pruebas/proyectoSAM.pdf. (1999). Accedido el 10 de Febrero 2005.
6. Ángel, J. y Bautista, G.: Didácticas de las matemáticas en enseñanza superior: La utilización de software especializado. (2001). http:// www.uoc.edu/web/esp/art/uoc/0107030/mates.html. Accedido el 12 de Enero de 2005.
7. Jonassen, D. Computers in the classroom: Mindtools for critical thinking. Englewood Cliffs, New Jersey: Merrill Prentice-Hall. (1996).
8. Torroba, P.; Devece, E.; Trípoli, M.; Aquilano, L.: Cinemática y análisis de una función: una propuesta didáctica para su articulación en el contexto de una facultad de ingeniería. Revista de Enseñanza de la Física. Vol. 28, No. Extra, pp. 91-99 (Nov. 2016).
9. Dreyfus, T.: Advanced mathematical thinking. Mathematics and Cognition. En Nesher, P y Kilpatrick, J. (Eds.), (pp. 113-134). Cambridge: University Press. (1990).

Utilización de TIC para Favorecer la Formación de Competencias Específicas de Matemática en los Ingresantes a las Carreras de Ingeniería

Galoppo, José Luis[1], Hirschfeld, Gisela Andrea María[2], Diaz, Laura Cecilia[3]
[1] Departamento de Matemática, Facultad de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, Universidad Nacional de Córdoba
Av.Velez Sárfiel 1611, Córdoba
jose.galoppo@unc.edu.ar,
[2] Departamento Universitario de Informática, Universidad Nacional de Córdoba
Av.Valparaíso s/n, Batería de Aulas comunes D, Ciudad Universitaria, Córdoba
ghirschfeld@unc.edu.ar,
[3] Departamento de Computación. Facultad de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, Universidad Nacional de Córdoba
Av.Velez Sárfiel 1611, Córdoba
laura.diaz@unc.edu.ar

Resumen. El Consejo Federal de Decanos de Facultades de Ingeniería de la República Argentina (CONFEDI) determinó las Competencias de Acceso de un estudiante de nivel medio que desea continuar estudios superiores en ingeniería. La situación actual de la educación en la República Argentina nos indica que existe un alto porcentaje de aspirantes a ingresar a nuestras Facultades que no han logrado suficientemente dichas competencias. Esto ha quedado de manifiesto por los resultados obtenidos en Matemática de las últimas ediciones (2016 y 2017) del Operativo Nacional Aprender de Evaluación de Aprendizajes en la Educación Primaria y Secundaria, A fin de favorecer el desarrollo de dichas competencias específicas en Matemática, en los ingresantes a carreras de Ingeniería que ofrece la FCEF y N de la UNC, se les propone la realización de cursos utilizando recursos TIC, consistentes en materiales de estudio, producciones audiovisuales y actividades en Aulas Virtuales sobre plataforma Moodle.

Palabras Clave: Competencias de ingreso, Matemática, Producciones multimediales

1 Introducción

La noción de competencia está muy vinculada con la capacidad de un individuo para poder desarrollar una tarea en un contexto específico. Podemos citar algunas ideas respecto de las competencias presentadas desde distintos ámbitos.

Según Perremont [1], la competencia es la aptitud para enfrentar eficazmente una familia de situaciones análogas, movilizando a conciencia y de manera a la vez rápida, pertinente y creativa, múltiples recursos cognitivos: saberes, capacidades, micro-competencias, informaciones, valores, actitudes, esquemas de percepción, de evaluación y de razonamiento. Podríamos resumir el concepto que tiene la Organización Internacional del Trabajo (OIT) respecto de laborales, como la capacidad efectiva para llevar a cabo exitosamente una actividad laboral plenamente identificada. Las competencias son el conjunto de conocimientos, procedimientos y actitudes combinados, coordinados e integrados en la acción, adquiridos a través de la experiencia (formativa y no formativa) que permite al individuo resolver problemas específicos de forma autónoma y flexible en contextos singulares.

El Consejo Federal de Decanos de Facultades de Ingeniería de la República Argentina (CONFEDI) determinó las Competencias de Acceso de un estudiante de nivel medio que desea continuar estudios superiores en ingeniería. Esto permitirá disponer de un punto de partida mínimo a partir del cual se pueden desarrollar los currículos para lograr las competencias de egreso [2].

La situación actual de la educación en la República Argentina nos indica que nos encontramos con un alto porcentaje de ingresantes a nuestras Facultades que no han logrado suficientemente dichas competencias. Esto ha quedado demostrado por los resultados obtenidos en Matemática de las dos últimas ediciones (2016 y 2017) del Operativo Nacional Aprender de Evaluación de Aprendizajes en la Educación Primaria y Secundaria, sobre todo el que tiene que ver con la evaluación de los aprendizajes específicos en Matemática de los alumnos del último año de la escuela secundaria [3]. En Matemática, se observan índices de desempeño muy bajos: 7 de cada10 estudiantes presentan niveles básicos, o por debajo del básico y 4 de cada 10 reconocen sólo conceptos elementales y únicamente pueden resolver problemas simples [4].

En concordancia con lo expresado por CONFEDI, lo detectado por otros investigadores [5] y de los resultados obtenidos de la Evaluación Aprender, observamos que los alumnos aspirantes a ingresar a las carreras universitarias, y aún entre los alumnos del primer año, poseen:

- Dificultades y carencias en relación a la lecto - escritura y a la interpretación de textos, fundamental para un eficiente abordaje del aprendizaje universitario.
- Dificultades para organizar el material informativo, selección de contenidos, distinción entre lo fundamental y los datos accesorios, integración de los conocimientos nuevos con los previos.
- Dificultades para la expresión oral y escrita.
- Dificultad para aplicar estrategias de profundización, tales como clasificar, comparar, contrastar, analizar, sintetizar.
- Habilidades matemáticas poco desarrolladas para responder a los requerimientos del aprendizaje de la educación superior.

Así, en este artículo, presentaremos las acciones que se vienen trabajando tendientes a favorecer el desarrollo de las competencias específicas en Matemática establecidas por CONFEDI en los alumnos de nivel secundario interesados e ingresantes a las carreras de Ingeniería, utilizando recursos TIC consistentes en materiales de estudio, producciones audiovisuales y actividades implementadas en Aulas Virtuales sobre plataforma Moodle. Además se espera que estos recursos estén disponibles en aulas abiertas a quienes tengan intenciones de ingresar a los estudios universitarios de carreras que se brindan en la Facultad de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales (UNC).

Todas estas acciones, estarán monitoreadas por un proceso de evaluación continua que estará disponible para que favorezca la reflexión del estudiante sobre su propia práctica de aprendizaje y le otorgue retroalimentación para que compruebe el nivel alcanzado de las competencias exigidas para su ingreso. Además estas acciones, estarán articuladas con las que la Facultad brinda a través del Curso de Ingreso a los Estudios Universitarios (CINEU).

1.1 Acciones tendientes a favorecer el desarrollo de competencias de acceso en alumnos ingresantes

El modelo educativo por competencias es el lugar donde el sistema educativo tradicional (basado en objetivos netamente teóricos) y, las demandas que el mundo del trabajo le impone a los profesionales egresados de instituciones educativas universitarias, convergen. La conjunción de habilidades, de conocimientos y del contexto donde se desarrollan supone una revolución de los sistemas de formación. En consecuencia, el enfoque de competencia profesional se ha consolidado como una alternativa atractiva para impulsar la formación en una dirección que armonice las necesidades de las personas, las empresas y la sociedad en general. El profesional de hoy necesita una multiplicidad de saberes, de cultura, virtudes y valores relativos a la ocupación integrados con su desarrollo personal y cívico, formación técnica y humanista. Las competencias están ligadas al desempeño profesional, a las actividades que éste comprende, a los problemas que afronta, en suma, la competencia siempre se expresa en un saber hacer cualificado y contextualizado, en una situación concreta. A esto hay que añadir la demanda creciente, en una sociedad del conocimiento y el aprendizaje, del aprendizaje continuado, permanente y a lo largo de toda la vida laboral. Quizás, la competencia para aprender a aprender y para aprender a lo largo de toda la vida en una sociedad en cambio cada vez más rápido es la competencia más importante, la más útil y necesaria [6].

Atentos a este nuevo paradigma en la enseñanza universitaria y en concordancia con CONFEDI, la Facultad de Ciencias Exactas Físicas y Naturales (FCEF y N) de la UNC realiza acciones para adecuar el currículum de sus carreras a la enseñanza por competencias y nuestro grupo de investigación [7] [8], junto a otros docentes de la Facultad, ha llevado adelante proyectos para mejorar las competencias en Matemática, tanto en los alumnos ingresantes como en los que cursan los primeros años de la carrera.

2 Utilización de recursos TIC en Aulas Virtuales

Para reforzar las competencias en Matemática de los alumnos ingresantes, a partir del mes de octubre del año 2016, se les ofreció a los inscriptos en la modalidad No presencial del Ciclo de Introducción a los Estudios Universitarios (CINEU 2017), la posibilidad de participar en Aulas Virtuales diseñadas sobre plataforma Moodle con material de estudio elaborado especialmente para favorecer aprendizajes significativos en Matemática que reforzaran las competencias específicas adquiridas en la educación secundaria.

El contenido del material puesto a disposición de los alumnos contemplaba todo el programa de la asignatura Matemática del CINEU. De tal manera que las aulas estaban estructuradas en bloques correspondientes a cada una de las unidades del programa, como se detalla a continuación en la siguiente tabla:

Tabla 1. Unidades de la asignatura Matemática del CINEU y material propuesto en las aulas virtuales.

Unidad	Temas
1.- Números Reales	Lógica Simbólica Operaciones con Números Reales. Propiedades Operaciones con Números Complejos
2.- Polinomios	Grado, Raíces Factorización
3.- Relaciones y Funciones	Dominio, Imagen Funciones lineales y cuadráticas
4.- Ecuaciones de primer y segundo grado	Ecuaciones de primer y segundo grado Sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas
5. Trigonometría	Ángulos. Unidades Funciones Trigonométricas Resolución de triángulos

Fuente: Programa de Matemática (CINEU – FCEF y N - UNC)

Teniendo en cuenta las diferentes estrategias de aprendizajes utilizadas por los alumnos [9] y los distintos sistemas de representación de la información que ponen en juego a la hora de procesar la información, se le ofreció un abanico de recursos que tuvieran en cuenta los canales de percepción visual, auditivo y kinestésico (VAK) [10], que actúan como precursores para desarrollar los diversos estilos de aprendizaje (activo, reflexivo, teórico y pragmático). Por tanto, nuestra estrategia de enseñanza a través de las aulas virtuales trabajó en función de los canales de percepción para que el estudiante diversifique la manera cómo aprende. Es por ello que en cada bloque del aula virtual (correspondiente a cada Unidad) se dispusieron recursos que tuvieran en cuenta estos tres canales de percepción, tales como:

- Breves videos de presentación, en los que distintos docentes tutores de la materia, presentaba las características más destacadas de los temas incluidos en dicha unidad.
- Así mismo, se brindaban orientaciones generales para el estudio de la unidad, con distribución aproximada de tiempos de estudio y sugerencias bibliográficas
- Vínculos web a videos, simulaciones, etc.
- Actividades de proceso y la respuesta a dichas actividades de proceso,
- Actividades propuestas y obligatorias (según la modalidad elegida por el alumno)
- Cuestionarios de autoevaluación con realimentación en cada pregunta, consistente en la resolución detallada de los ejercicios, o en la sugerencia de lecturas bibliográficas que le sirvieran al alumno para resolver correctamente dichos ejercicios.

Además, en cada Aula se dispuso de un foro de informaciones generales para dar avisos de carácter general, y luego cada unidad contaba con un foro de Consultas sobre temas relativos a la unidad, donde los alumnos podían subir sus dudas respecto de los temas teóricos, de la resolución de algún ejercicio en particular, etc. Estas acciones estuvieron monitoreadas por un proceso de evaluación continua, de carácter formativo, que le permitiera a los alumno ser consciente de sus avances, a la vez que le suministre al docente información para reflexionar sobre sus propias prácticas y realizar ajustes en la medida que sean necesarios.

2.1 Producciones Audiovisuales para enseñanza de la matemática

Una mención especial, merecen las producciones audiovisuales que se incluirán, en base al estudio del proyecto de investigación que desarrollaremos en el bienio 2018 – 2019 [11], cuyo objetivo es tener a fin de este año incluido en el aula virtual de Matemática (correspondiente al CINEU 2019) los guiones y un video modelo a partir del trabajo en el CINEU con los estudiantes de las cohortes del CINEU 2017 y 2018, las cuales fortalecerán los tres canales de percepción: visual, auditivo y kinestésico (VAK), que utilizan nuestros alumnos. Estos videos se realizarán en base a experiencias del proyecto 2016-2017 [12] en el cual se grabaron clases de matemática y se dejaron disponibles en el aula virtual, y también en consonancia con estudios sobre las competencias y preferencias de los estudiantes.

Teniendo en cuenta estas consideraciones, y del trabajo con especialistas de la comunicación audiovisual, observamos que los videos deben consistir en producciones audiovisuales breves, de dos o tres minutos de duración que se utilizarán tanto para la presentación de los temas principales de la asignatura, como para la explicación de algún concepto destacado sobre el cual, de acuerdo a nuestra experiencia docente, hayamos detectado en años anteriores que un gran porcentaje de los alumnos no poseían la competencia específica.

Para la preparación de estos videos, se tendrán en cuenta las características de los destinatarios (nuestros alumnos) y de los temas a desarrollar:

- Jóvenes entre 17 y 25 años
- La mayoría de ellos utiliza preferentemente, el sistema de representación visual como método de representación mental de la información.
- Las personas que estarán frente a cámaras utilizarán un lenguaje “formal ameno” teniendo en cuenta las características de los conceptos a explicar y el público al cual estarán dirigidos estos.
- Se utilizarán ejemplos de física que aplicarán la matemática; de esta manera el alumno relacionará el concepto (“por qué”) con su aplicación (“para qué”), de tal manera de captar su atención.
- Se tendrá en cuenta la unicidad del tema presentado en cada video; es decir, que cada video pueda ser visto y entendido sin necesidad de relacionarlo con los anteriores

Inmediatamente a continuación de cada producción audiovisual se incluirá un cuestionario o una actividad como retroalimentación al aprendizaje del alumno. Estas actividades tuvieron muy buena repercusión en los procesos de aprendizaje de los alumnos.

Tanto en experiencias anteriores de trabajos en aulas virtuales como en estas que son motivo del trabajo, los docentes tutores hemos detectado que en nuestros grupos de alumnos predomina el uso del sistema de representación visual; no porque no le interese utilizar otra vía, si no porque no están acostumbrados a prestarle atención a las otras vías de ingreso de información y obviamente siguen privilegiando el sistema visual. Estas impresiones se corroboran con trabajos de otros investigadores consultados [13].

2.2 Evaluación de los aprendizajes

Todo el trabajo y las instancias de aprendizaje ofrecidas a través de las aulas virtuales, fueron evaluadas de manera presencial en dos parciales donde se exigía la correcta resolución de problemas en los que se destacaban las competencias específicas que era necesario poner de manifiesto para aprobar dicho parcial.

Quienes no aprobaban en esta instancia (No presencial) tenían la posibilidad de hacerlo en un examen final en el mes de Diciembre de 2016. Si, a través de las evaluaciones, se detectaba que aún no poseía suficientemente desarrolladas las competencias, podía inscribirse para cursar el CINEU en la modalidad Presencial, que a partir de Febrero de 2017 se desarrolló en aulas de la Facultad dictadas por docentes contratados a tal fin, y con la continuidad del acompañamiento de la actividad en las aulas virtuales por parte de los docentes tutores (modalidad de aprendizaje mixto, blended learning). Del mismo modo la evaluación consistió en dos parciales y la posibilidad de rendir un examen final integral.

Tabla 2. Resultados obtenidos en los exámenes por los alumnos de la modalidad No presencial que utilizaron las aulas virtuales de Matemática del CINEU 2017

Año	2017
Modalidad	No presencial
Inscriptos	751 alumnos
Efectivos (%)	488 65 %
Aprobados (% sobre los efectivos)	351 72 %

Fuente: elaboración propia (en base a datos obtenidos del SIU Guaraní)

El resto de los alumnos inscriptos, un 35%, sólo la utilizó para conocer el programa de la asignatura y decidió optar por la modalidad presencial que se dictaba a partir de febrero del siguiente año, que ya comentamos anteriormente. Esto, en parte fue motivado por el hecho de que algunos alumnos no podían asistir a los parciales presenciales que se tomaban en la Facultad por residir en lugares muy distantes.

Esta experiencia de trabajo en aulas virtuales con recursos TIC se repitió con los alumnos inscriptos para el CINEU 2018, con resultados positivos en cuanto a la formación de competencias en Matemática. El trabajo con los alumnos inscriptos en la modalidad No presencial fue similar al realizado durante el CINEU 2017, ya que la cantidad de alumnos inscriptos se mantuvo; los resultados en el grado de desempeño de las competencias de los estudiantes fueron muy superiores ya que tanto los materiales como el acompañamiento de los docentes tutores se mejoró, basándose en la experiencia obtenida del año anterior (como se observa comparando los resultados presentados en la tabla 3 con los de la tabla 2).

Tabla 3. Resultados obtenidos en los exámenes por los alumnos de la modalidad No presencial que utilizaron las aulas virtuales de Matemática del CINEU 2018.

Año	2018
Modalidad	No presencial
Inscriptos	782 alumnos
Efectivos (%)	453 58 %
Aprobados (% sobre los efectivos)	385 85 %

Fuente: elaboración propia (en base a datos obtenidos del SIU Guaraní)

3 Conclusiones y trabajos futuros

Los excelentes resultados obtenidos por el uso de las Aulas Virtuales para lograr competencias de ingreso, nos impulsa a proponer acciones para que estas Aulas estén disponibles a los potenciales interesados en estudiar carreras de Ingeniería, de manera que puedan acceder a ellas libremente.

Esto motiva el desarrollo de cursos sobre distintos temas vinculados con las competencias específicas de ingreso definidas por CONFEDI, en plataformas abiertas que estén disponibles, para que, los estudiantes secundarios de diversas partes del país, que lo deseen, puedan acceder a dichas aulas con todos los materiales y actividades pensados para lograr el nivel deseado en las competencias específicas de ingreso de Matemática.

Por lo analizado anteriormente respecto de las características de nuestros alumnos y en base a nuestra experiencia en el CINEU, en dichos cursos se propone incluir producciones audiovisuales desarrolladas teniendo en cuenta las características de nuestros estudiantes, los cuales ya son nativos digitales y para los cuales las imágenes tienen mucha significación y son muy útiles en su manera de aprender.

Como expresa Alcalde Fierro, María José en [14]: …"Nuestras actuales generaciones han nacido en la era digital, por lo que buscamos desafiarlos, motivarlos y llevarlos a la experimentación desde áreas que para ellos sean de interés y familiares. Haber nacido en una era donde la influencia de la revolución tecnológica ha influenciado su actuar y como resuelven problemas o enfocan su trabajo, el aprendizaje y los juegos de nuevas formas ha significado que absorban rápidamente la información multimedia de imágenes y videos, igual o mejor que si fuera texto; que esperan respuestas instantáneas; que están comunicados permanentemente y que también crean sus propios contenidos. A estas generaciones se les ha denominado "Nativos digitales".

En virtud de estas experiencias y reflexiones, continuamos en la tarea de ofrecer materiales de estudio, actividades de autoevaluación y producciones audiovisuales que potencien el aprendizaje de Matemática en los potenciales interesados en ingresar a la FCEF y N, para lo cual estamos trabajando junto a otros grupos de investigación con docentes de la UNC en un Programa de Investigación en la actual convocatoria de la SECyT (UNC) para el bienio 2018-2019 [15].

Agradecimientos.

Queremos expresar nuestro agradecimiento a las autoridades y docentes de la FCEF y N que han posibilitado el desarrollo de nuestro trabajo y que nos han brindado los recursos tecnológicos para el desarrollo del mismo. En primer lugar a las autoridades encabezadas por su Decano, Ing. Pablo Recabarren y a las Secretarias Académicas, Dr. Magalí Evelín Carro Perez y Bióloga Analía González

Además queremos agradecer al Coordinador general del CINEU, Ing. Javier Martín y al equipo de Tecnología de Tecnología Educativa e Innovación a través de su coordinadora, la Dra. Rossana Forestello por su constante aliento a continuar con nuestro trabajo con alumnos ingresantes en el CINEU.

Referencias

1. Perrenoud, P.: Desarrollar la práctica reflexiva en el oficio de enseñar. Editorial Graó. Barcelona. (2004).
2. CONFEDI: Comisión de enseñanza. "*XLIV Reunión CONFEDI - Santiago del Estero*", (24-26 Noviembre de 2008).
3. Ministerio de Educación, Secretaría de Evaluación Educativa: "*Aprender 2017: Informe de Resultados – Secundaria*". (2017). https://www.argentina.gob.ar/sites/default/files/reporte_nacional_2017_secundaria_0.pdf. Accedido el 2 de julio de 2018.
4. Agencia de noticias TELAM: Informe Aprender 2017. URL: http://www.telam.com.ar/notas/201803/262281-aprender-2017-resultados-lengua-matematica-comprension-textos.html. Accedido el 2 de Julio de 2018.
5. Ceratto, A; Gallino, M.: "Competencias genéricas en carreras de Ingeniería". *Revista Ciencia y Tecnología N°13* (ISSN (on line): 2344-9217), Facultad de Ingeniería, Universidad de Palermo. (2013). URL: https://dspace.palermo.edu/ojs/index.php/cyt/issue/viewFile/1/5. Accedido el 2 de julio de 2018.
6. Gil Montoya, C.; Baños Navarro, R.; Alías Sáez, A.; & Gil Montoya, M. D.: "Aprendizaje cooperativo y desarrollo de competencias". VII Jornadas sobre Aprendizaje Cooperativo, 63-72. (2007). URL: https://www.uaeh.edu.mx/campus/icshu/investigacion/aace/cincide/macrieb/documentos/CTJ003.pdf. Accedido el 2 de julio de 2018
7. Azpilicueta, J.; Galoppo, J.; Sandín, D. y Vignoli, A.: "Enseñanza por competencias del Análisis Matemático y el Álgebra Lineal utilizando TIC en el primer año de las carreras de Ingeniería". *I Jornadas ArTEC – UNC*. (2014).
8. Galoppo, J.; Díaz, L.; Vignoli, A.; Sandín, D: "Evaluación Formativa de Competencias de Ingreso en los Alumnos de las Carreras de Ingeniería de la F.C.E.F. y N. de la U.N.C". *EMCI XIX San Nicolás*. (2015).
9. José María Romero Rodríguez (2016): "Estrategias de aprendizaje para visuales, auditivos y kinestésicos", Revista Atlante: Cuadernos de Educación y Desarrollo (mayo 2016). En línea, Accedido el 2 de julio de 2018: http://www.eumed.net/rev/atlante/2016/05/kinestesicos.htm
10. Gamboa Mora, Ma. C.; Briceño Martínez, J. J., Camacho González, J. P.: Caracterización de estilos de aprendizaje y canales de percepción de estudiantes universitarios. *Revista Opción 2015, Número 31 pp. 509-527* (2015). ISSN 1012-1587. http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=31045567026 Accedido el 2 de julio de 2018.
11. Galoppo, J.; Sandín, D.; Taboada, R.; Gallardo, F.: "Utilización de TIC para favorecer la formación de competencias específicas de Matemática en los ingresantes a las carreras de Ingeniería". *Proyecto de*

Investigación categoría Formar bienio 2018 – 2019 presentado ante la SECyT de la UNC para su consideración.

12. Galoppo, J.; Vignoli, A.; Sandín, D.: "Hacia una metodología de enseñanza con la incorporación de TIC para facilitar el aprendizaje significativo de Matemática en Ingeniería" (Código: 30820150100355CB) *Proyecto de Investigación bienio 2016 – 2017 aprobado por la SECyT de la UNC.*
13. Romo Aliste, M. E., López Real, D., & López Bravo, I. (2006). ¿Eres visual, auditivo o kinestésico? Estilos de aprendizaje desde el modelo de la Programación Neurolingüística (PNL). *Revista Iberoamericana De Educación, 38(2), 1-10*. Recuperado a partir de https://rieoei.org/RIE/article/view/2664. Accedido el 2 de julio de 2018.
14. Alcalde Fierro, Ma. J.: Reflexión acerca del ejercicio audiovisual como medio de expresión del diseño gráfico experimental. Cuadernos del Centro de Estudios en Diseño y Comunicación. Ensayos, (66), 1-10. (2018)http://www.scielo.org.ar/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1853-35232018000100003&lng=es&tlng=es Accedido el 2 de julio de 2018.
15. Diaz, L. et al: "Apropiación del conocimiento y la Tecnología" Programa de Investigación para el período 2018 – 2019 *presentado ante la SECyT de la UNC para su consideración*.

Aprender a “ser ingeniero” desde el Ingreso

Eugenia Rímini, María Elena Iriarte, Graciela Echevarría; Viviana Gasull.
Facultad de Ingeniería y Ciencias Agropecuarias. Universidad Nacional de San Luis
Campus universitario Ruta 148 / Ext. Norte –
Villa Mercedes (San Luis)
eugeniarimini@hotmail.com; meiriarte23@gmail.com; gecheva61@gmail.com;
viviana.gasull@gmail.com

Resumen. Para ser ingeniero no basta con “saber” ingeniería, es necesario “saber hacer” y hacerlo de forma responsable, “saber ser”[1]. Esto implica que se debe aprender a “ser ingeniero”. Los resultados del aprendizaje deben ser conocimientos (saber), capacidades, habilidades y aptitudes (saber hacer) y conductas y actitudes (saber ser). Mientras que el “saber” y el “saber hacer” son dictados y evaluados en los espacios de aprendizaje, el “saber ser” es una construcción esencialmente personal. En 2018 se implementó un proyecto piloto para desarrollar cuatro competencias instrumentales, Gestión del Tiempo, Resolución de Problemas, Orientación al Aprendizaje y Planificación. [2].En el presente trabajo se detalla los resultados de un taller específico realizado con los estudiantes ingresantes a carreras de ingeniería cuyo objetivo fue introducir a los estudiantes en el aprender a “ser ingenieros” y se analiza la evolución obtenida.

Palabras Clave: Ingresantes, Saber ser, Autoevaluación, Resultados de aprendizaje, Articulación horizontal.

1 Introducción

En la Facultad de Ingeniería y Ciencias Agropecuarias de la Universidad Nacional de San Luis se dictan las carreras de Ingeniería en Alimentos, Ingeniería Electromecánica, Ingeniería Electrónica, Ingeniería Industrial, Ingeniería Mecatrónica e Ingeniería Química.

Los estudiantes ingresantes de las seis carreras, en el primer cuatrimestre de primer año cursan de modo conjunto las materias de Análisis Matemático I y Computación I, mientras que la materia Introducción a la Ingeniería se dicta de modo separado y con distintos equipos docentes, por un lado, para Electromecánica, Electrónica, Industrial y Mecatrónica y por otro lo hacen conjuntamente Alimentos y Química.

En el marco de comenzar a implementar un modelo de formación basado en competencias, la Facultad comenzó un trabajo con docentes de materias de ciencias básicas en 2016 y con docentes integrantes de las comisiones de carreras a partir de 2017[3]

El objetivo inicial fue el determinar qué competencias se están desarrollando en los estudiantes y se puso especial énfasis en qué competencias se desarrollan de modo “casi automático” a partir de los conocimientos disciplinares y de las metodologías de enseñanza y aprendizaje aplicadas.

Se adoptó como base la propuesta de competencias desarrolladas por el proyecto Tuning, que se dividen en tres grandes grupos: instrumentales, interpersonales y sistémicas.

A partir de allí se identificó en cada asignatura de las ciencias básicas los niveles de dominio logrados en los indicadores de las competencias instrumentales definidas que se agrupan en cuatro grandes temas: 1) cognitivas, 2) metodológicas, 3) uso de TICs y 4) comunicación.

También se identificaron a partir de qué estrategias de enseñanza y aprendizaje y de qué actividades realizadas por los estudiantes se logra maximizar el logro de las distintas competencias. A modo de ejemplo:

- Computación I definió rúbricas para medir el desarrollo del “pensamiento algorítmico” a partir de los conocimientos y las prácticas de diagramación e introducción a la programación cuya implementación se realizó en su totalidad en 2018.
- Análisis Matemático I, además del software específico Geogebra® introdujo la utilización de diagramas de flujo en la resolución de problemas.
- Introducción a la Ingeniería implementó un esquema de resolución de problemas abiertos por equipos de estudiantes a través de la realización de maquetas.

Estas implementaciones en las tres asignaturas del primer cuatrimestre de primer año, y la consecuente mejora en el logro de las competencias abarcan esencialmente el “saber hacer” desde la óptica disciplinar de cada materia. Condición necesaria, más no suficiente en un esquema de formación por competencias, atento a que faltaban al menos dos componentes esenciales, por un lado la necesidad de la “articulación horizontal” para que los estudiantes comiencen a ver la carrera como un todo y no como la suma de compartimientos estancos y por otro lado la necesidad de abordar de modo integral el “saber ser”.

A comienzos de 2018 se decidió trabajar de modo conjunto entre las materias y abordar de modo directo cuatro competencias instrumentales metodológicas, consideradas imprescindibles para el estudiante y el profesional de ingeniería: Gestión del tiempo, Resolución de problemas, Orientación al aprendizaje y Planificación en el primer nivel de dominio propuesto por el mapa de rúbricas propuesto por el proyecto Tuning.

En el presente trabajo se describe la génesis, los niveles de dominio e indicadores abordados, las acciones realizadas con los estudiantes y los resultados de sus autoevaluaciones.

2 Implementación

2.1. Génesis.

Definiciones

- Ingeniería: es la profesión en la que el conocimiento de las ciencias matemáticas y naturales adquiridas mediante el estudio, la experiencia y la práctica, se emplea con buen juicio a fin de desarrollar modos en que se puedan utilizar, de manera óptima los materiales y las fuerzas de la naturaleza en beneficio de la humanidad, en el contexto de restricciones éticas, físicas, económicas, ambientales, humanas, políticas, legales y culturales.
- La Práctica de la Ingeniería comprende el estudio de factibilidad técnico-económica, investigación, desarrollo e innovación, diseño, proyecto, modelación, construcción, pruebas, optimización, evaluación, gerenciamiento, dirección y operación de todo tipo de componentes, equipos, máquinas, instalaciones, edificios, obras civiles, sistemas y procesos. Las cuestiones relativas a la seguridad y la preservación del medio ambiente, constituyen aspectos fundamentales que la práctica de la ingeniería debe observar.

Las Facultades de Ingeniería tenemos, por lo tanto, la obligación de formar ingenieros que en el ejercicio de su profesión sean competentes para cumplir con la definición de la profesión y de su práctica.

Para esto, es necesario, desde el comienzo mismo de la carrera, considerar que para ser ingeniero no basta con “saber” ingeniería, es necesario “saber hacer” ingeniería y hacerlo de forma responsable, “saber ser”.

Esto implica que un estudiante de ingeniería no sólo debe aprender ingeniería, sino esencialmente debe aprender a “ser ingeniero”.

Para ello es necesario que, a lo largo de la carrera, los Resultados del aprendizaje, no sólo sean conocimientos (saber) propios de la ingeniería, sino también capacidades, habilidades y aptitudes (saber hacer) y conductas y actitudes (saber ser).

Mientras que el “saber” y el “saber hacer” en general son dictados y evaluados por los docentes en las aulas, laboratorios, proyectos, etc. el “saber ser” es una construcción esencialmente personal.

Cuatro competencias relacionadas particularmente con el “saber ser” y en menor medida con el “saber hacer”, las competencias de Gestión del Tiempo, Resolución de Problemas, Orientación al Aprendizaje y Planificación.

El objetivo es que cada uno se autoevalúe en cada indicador y trate de cumplir con el máximo nivel de logro de cada uno de los descriptores. Periódicamente analizar si tienen la conducta y las actitudes que se detallan. En la medida que lo logren estarán aprendiendo a “ser ingenieros”.

2.2. Rúbricas de las competencias.

En el mapa de rúbricas propuestas por el proyecto Tuning se definió como objetivo de logro trabajar con el primer nivel de dominio de los cuatro niveles propuestos. El detalle es el siguiente:

Tabla 1: Competencia: Gestión del tiempo.

Primer nivel de dominio: Estableces objetivos y prioridades, planificas y cumples la planificación en el corto plazo (cada día, cada semana)

INDICADORES	DESCRIPTORES 1	2	3	4	5
Defines claramente las actividades a cumplir en el corto plazo.	No tienes objetivos explícitos a corto plazo.	Tus actividades se limitan a cumplir con lo que te exigen externamente.	Haces un listado semanal o diario de las actividades que vas a realizar.	Compaginas las actividades académicas o laborales, con las de tu vida personal (ocio, familia, intimidad).	Registras regularmente el grado de cumplimiento de tus actividades.
Estableces prioridades entre las tareas a realizar cada día.	Confundes las prioridades con tus apetencias (lo fácil antes que lo importante).	Te cuesta diferenciar grados de importancia o de urgencia.	Diferencias claramente lo importante de lo accesorio.	Jerarquizas las tareas tanto por su urgencia como por su importancia.	Te centras en las tareas importantes, relegando otras en función de las prioridades establecidas.
Planificas tu actividad diaria asignando tiempo a cada una.	No planificas. Abordas las tareas según van apareciendo.	Estableces metas diarias muy por encima de tu capacidad de cumplirlas. Vives estresado.	Dedicas un tiempo cada día a planificar las tareas que debes realizar asignando duraciones realistas.	Tu planificación incluye tiempos de descanso, desplazamientos y espacio para imprevistos.	Registras el cumplimiento diario de tu planificación y las desviaciones.
Habitualmente cumples lo planificado.	Con frecuencia postergas las tareas que debes realizar.	Confundes actividad con resultados. Estás ocupado pero no acabas las tareas.	Por lo general terminas las tareas programadas diaria y semanalmente.	Tu tiempo de trabajo no se incrementa a costa del tiempo personal.	Cumples lo planificado, valorando el tiempo invertido.
Mantienes tus documentos y materiales ordenados.	Eres desordenado. Pierdes mucho tiempo buscando documentos o materiales.	Clasificas y ordenas pero con criterios poco útiles.	Clasificas y ordenas con criterios de utilidad tus documentos y materiales.	Al terminar cada tarea recoges y guardas todos los materiales utilizados.	Mantienes y actualizas un índice de localización de todos los documentos importantes.

Tabla 2. Competencia: Resolución de problemas.

Primer nivel de dominio: Identificas y analizas un problema para generar alternativas de solución, aplicando los métodos aprendidos.

INDICADORES	DESCRIPTORES				
	1	**2**	**3**	**4**	**5**
Identificas lo que es y no es un problema y tomas la decisión de abordarlo.	No distingues correctamente problema de conflicto o algoritmo.	Te cuesta diferenciar entre problema, conflicto y algoritmo.	Identificas correctamente problemas diferenciándolos de otras situaciones.	Destacas por identificar con facilidad lo que es un problema.	Identificas problemas con facilidad y eres capaz de decir por qué o cómo se hace.
Lees y/o escuchas activamente. Haces preguntas para definir el problema planteado.	No reaccionas ante el problema.	Realizas algunas preguntas adecuadas para definir el problema.	Realizas preguntas adecuadas para definir el problema.	Tienes agilidad haciendo preguntas para definir el problema.	Formulas preguntas clave en vistas a definir el problema y valorar su magnitud.
Recoges la información significativa que necesitas para resolver los problemas en base a datos y no sólo a opiniones subjetivas y sigues un método lógico de análisis de la información.	No recoges información o la que recoges no es significativa.	Recoges información significativa, quizá incompleta y no siempre sigues un método de análisis.	Recoges la información que necesitas y la analizas correctamente.	Seleccionas acertadamente la información valiosa y la analizas sistemáticamente.	Recoges eficientemente la información significativa y la analizas con un buen método, siendo capaz de aportar reflexiones.
Sigues un método lógico para identificar las causas de un problema y no te quedas en los síntomas.	No identificas las causas del problema. Confundes causas con síntomas.	Identificas algunas causas, en otros te quedas en los síntomas.	Identificas las causas de un problema, siguiendo un método lógico.	Identificas y jerarquizas las causas de un problema.	Sigues un proceso lógico para identificar las causas y las integras en un modelo.
Presentas diferentes opciones alternativas de solución ante un mismo problema y evalúas sus posibles riesgos y ventajas.	No presentas alternativas.	Eres capaz de presentar alguna alternativa.	Presentas algunas alternativas y algunos pros y contras.	Presentas un buen análisis de las opciones y alternativas de solución.	Eliges la mejor alternativa, basándote en el análisis de las diferentes opciones.
Diseñas un plan de acción para la aplicación de la solución escogida.	No escoges una solución o planteas una solución incoherente.	Escoges una solución, pero no diseñas el plan para su aplicación.	Detallas los pasos a seguir para la aplicación de la solución que has escogido.	Escoges una buena solución y diseñas el plan de acción para su aplicación.	Te destacas por la selección de la solución y por el diseño del plan de acción.

Tabla 3. Competencia: Orientación al aprendizaje.

Primer nivel de dominio: Incorporas los aprendizajes propuestos por los expertos y muestras una actitud activa para su asimilación.

INDICADORES	DESCRIPTORES 1	2	3	4	5
Pones en práctica de forma disciplinada los enfoques, métodos y experiencias que propone el profesor.	Desconoces o desatiendes las propuestas del profesor.	Interpretas o aplicas erróneamente las propuestas del profesor.	Sigues adecuadamente las propuestas del profesor en tu proceso de aprendizaje.	Argumentas la adecuación de las estrategias propuestas al objetivo de aprendizaje.	Priorizas las propuestas del profesor que mejor se ajustan a los objetivos de aprendizaje.
Compartes y asumes los objetivos de aprendizaje propuestos por el profesor.	Prescindes de los objetivos de aprendizaje propuestos por el profesor.	Entiendes erróneamente los objetivos del aprendizaje.	Haces tuyos los objetivos de aprendizaje propuestos por el profesor.	Estableces prioridades razonadas entre los objetivos de aprendizaje propuestos por el profesor.	Introduces matices personales adecuados en los objetivos de aprendizaje.
Preguntas para aprender y te interesa por aclarar dudas.	Recibes información sin que ésta te genere dudas o preguntas.	Sólo preguntas a instancias del profesor o para solucionar problemas concretos.	Planteas dudas y preguntas sobre la información recibida, para comprender la asignatura.	Tus dudas y preguntas tratan de contemplar la información recibida para aprender.	Planteas preguntas y dudas que muestran un cuestionamiento ajustado de lo aprendido.
Comprendes los elementos que componen una disciplina.	Repites sin comprender, o con dificultad, los elementos de la disciplina trabajados. Cometes errores.	Conoces superficialmente (identificas, reconoces, reproduces) los elementos de la disciplina trabajados.	Presentas y explicas los contenidos trabajados de forma clara.	Aplicas los contenidos aprendidos en nuevas situaciones.	Buscas las relaciones entre los contenidos trabajados en la disciplina para alcanzar una comprensión más profunda de la misma.
Reconoces la relevancia de otros esquemas mentales diferentes a suyo.	Te sitúas siempre en la perspectiva propia. Defiendes tus posiciones, rebatiendo las de los demás.	Muestras escaso interés por compartir tus planteamientos con los de los demás.	Escuchas con interés los planteamientos propuestos por los compañeros y por el profesor.	Preguntas por las perspectivas y opiniones de los demás, respecto a las cuestiones objeto de estudio.	Promueves el intercambio de opiniones, y su argumentación para enriquecer y profundizar en el trabajo.

Tabla 4. Competencia: Planificación.

Primer nivel de dominio: Organizas diariamente el trabajo personal, recursos y tiempos, con método y de acuerdo a tus posibilidades y prioridades.

INDICADORES	DESCRIPTORES				
	1	**2**	**3**	**4**	**5**
Organizas los procesos y procedimientos adecuados a tus actividades.	Eres desorganizado, resintiéndose su rendimiento.	Estableces un orden para la realización de las tareas.	Organizas las tareas en el tiempo.	Estableces un plan eficaz de trabajo personal para todas tus actividades.	Planificas eficazmente tus actividades para organizar tus medios y tu disponibilidad.
Diseñas la manera de integrar procesos y procedimientos con tus medios y previendo su duración.	Improvisas sin fundamento tus actividades.	Enumeras las tareas que debes abordar, sin sistematizarlas.	Utilizas algún procedimiento de planificación adecuado a tu contexto.	Adecúas métodos de planificación a tus actividades, con flexibilidad y dinamismo.	La planificación es uno de tus métodos habituales de trabajo. Eres razonablemente metódico.
Planificas razonando cómo adecuar tus medios y tu tiempo a tus prioridades.	Actúas desordenadamente, sin atender a prioridades,	Realizas una priorización inadecuada de necesidades y actividades.	Estableces adecuadamente prioridades para acometer sus tareas.	Planificas tus actividades adecuando tus posibilidades, medios y prioridades.	Tu actuación es consecuente con tu planificación de prioridades.
Eres consciente de tus medios y disponibilidad para afrontar tus actividades.	Afrontas las actividades sin recapacitar sobre tus medios y necesidades.	Tienes dificultades para ajustar medios y actividades.	Planificas orientándote a la viabilidad.	Ajustas tus planes a tus posibilidades reales.	Demuestras la viabilidad de tus planes, cumpliéndolos.
Planificas atendiendo a tus logros.	Actúas sin planificar ni prever resultados.	Organizas tus "planes" sin supervisar.	Controlas periódicamente sus actividades y logros previstos.	Previenes con antelación cómo controlar posibles desviaciones en actividades y logros.	Identificas, valoras y extraes conclusiones de los resultados de tu planificación.

2.3. Implementación y seguimiento.

1. Propuesta: Taller.
2. Nivel: Capacitación
3. Denominación: Taller de Competencias del Ingeniero. En dicho Taller se explicaron las distintas competencias que deben tener los Ingenieros en el ejercicio de la actividad profesional.
4. Objetivos: Este Taller tiene como objetivo formar a los estudiantes de 1° año de las carreras de Ingeniería en Alimentos, Electromecánica, Electrónica, Industrial, Mecatrónica y Química acerca de las competencias instrumentales metodológicas requeridas más usuales en el ejercicio de la actividad profesional.
5. Fundamento: El tener conocimiento de las competencias habitualmente requeridas en los postulantes a puestos de Ingeniería, promueve a concientizar sobre la importancia de la formación integral por parte de los estudiantes. Por ello es de vital importancia que conozcan las competencias requeridas y se entrenen en las mismas a lo largo de todo su trayecto en la Universidad.
6. Modalidades: Esta es una charla informativa en proyección multimedia, un espacio de debate, basado en las respuestas a las preguntas de los asistentes. Realización de un ejercicio práctico en donde se evalúan como se ven en la actualidad con sus competencias y luego al final del cuatrimestre se evalúan nuevamente las mismas, verificando su evolución y/o aprendizaje.
7. Características: El Taller se realizó en fecha 26 de abril de 2018, en las instalaciones del Campus Universitario de la Facultad con un total de 3 horas reloj para 180 alumnos y docentes de las asignaturas de Introducción a la Ingeniería, Análisis Matemático I y Computación I.
8. Destinatarios: Estudiantes ingresantes de Ingeniería en Alimentos, Electromecánica, Electrónica, Industrial, Mecatrónica y Química.
9. Responsables: Ing. María Eugenia Rimini, Ing. María Elena Iriarte, Tec. Graciela Echevarría, Ing. Adriana Bochetto, Lic. Viviana Gasull, Ing. Javier Jofre e Ing. Gonzalo Olmos.

2.4. Resultados de la autoevaluación de los estudiantes.

El taller se llevó a cabo dentro del marco de la Asignatura Introducción a la Ingeniería una vez terminada la primera unidad de la materia, que trata sobre la formación profesional de Ingeniero, y donde se desarrolla de forma simple el tema de competencias profesionales requeridas.

La modalidad fue teórico-práctica, comenzando con una revisión teórica sobre el concepto de competencias, y analizando las competencias más demandadas actualmente en el mercado laboral.

Luego se realizaron ejemplos sobre algunas herramientas utilizadas en selección de personal, como test de Rotchart, dibujos, ejemplos de ejercicios de test psicotécnicos. La finalidad de realizar en forma colectiva estos ejemplos fue mostrar que en una entrevista laboral se evalúan saberes que no necesariamente responden a un esquema basado exclusivamente en conocimiento de tipo técnico.

A continuación, se solicitó a los estudiantes que realizaran una autoevaluación personal sobre un grupo de competencias, y puntuaran su situación de dominio actual.

Los resultados de ésta auto evaluación se tabularon, y se obtuvieron promedios generales de nivel de dominio por competencias.

Sobre el cierre del cuatrimestre se solicitó a los alumnos que completaran una instancia de autoevaluación final, cuyos resultados fueron también tabulados y luego comparadas con los de la evaluación inicial.

A continuación se indica el promedio de la respuesta de los estudiantes considerando que los cinco descriptores de logro tienen valores numéricos de 1 a 5.

Tabla 5. Competencia: Gestión del tiempo.

Primer nivel de dominio: Estableces objetivos y prioridades, planificas y cumples la planificación en el corto plazo (cada día, cada semana)

Indicadores	Prom.Inic.	Prom.Final
Defines claramente las actividades a cumplir en el corto plazo.	2,8	3,7
Estableces prioridades entre las tareas a realizar cada día.	3,4	4,0
Planificas tu actividad diaria asignando tiempo a cada una.	2,3	3,3
Habitualmente cumples lo planificado.	2,5	3,3
Mantienes tus documentos y materiales ordenados.	3,2	3,5
Promedio competencia gestión del tiempo	2,8	3,5

Diferencia porcentual: 25%

Tabla 6. Competencia: Resolución de problemas.

Primer nivel de dominio: Identificas y analizas un problema para generar alternativas de solución, aplicando los métodos aprendidos.

Indicadores	Prom.Inic.	Prom.Final
Identificas lo que es y no es un problema y tomas la decisión de abordarlo.	2,9	3,4
Lees y/o escuchas activamente. Haces preguntas para definir el problema planteado.	2,7	3,4
Recoges la información significativa que necesitas para resolver los problemas en base a datos y no sólo a opiniones subjetivas y sigues un método lógico de análisis de la información.	2,8	3,4
Sigues un método lógico para identificar las causas de un problema y no te quedas en los síntomas.	2,7	3,3
Presentas diferentes opciones alternativas de solución ante un mismo problema y evalúas sus posibles riesgos y ventajas.	3,2	3,7
Diseñas un plan de acción para la aplicación de la solución escogida.	2,8	3,5
Promedio competencia Resolución de problemas	2,9	3,5

Diferencia porcentual: 21%

Tabla 7. Competencia: Orientación al aprendizaje.

Primer nivel de dominio: Incorporas los aprendizajes propuestos por los expertos y muestras una actitud activa para su asimilación.

Indicadores	Prom.Inic.	Prom.Final
Pones en práctica de forma disciplinada los enfoques, métodos y experiencias que propone el profesor.	3,0	3,5
Compartes y asumes los objetivos de aprendizaje propuestos por el profesor.	3,2	3,8
Preguntas para aprender y te interesa por aclarar dudas.	2,9	3,6
Comprendes los elementos que componen una disciplina.	2,8	3,5
Reconoces la relevancia de otros esquemas mentales diferentes a suyo.	3,5	3,9
Promedio competencia Orientación al aprendizaje	3,1	3,7

Diferencia porcentual: 19%

Tabla 8. Competencia. Planificación

Indicadores	Prom.Inic.	Prom.Final
Organizas los procesos y procedimientos adecuados a tus actividades.	2,5	3,1
Diseñas la manera de integrar procesos y procedimientos con tus medios y previendo su duración.	2,6	3,2
Planificas razonando cómo adecuar tus medios y tu tiempo a tus prioridades.	3,1	3,5
Eres consciente de tus medios y disponibilidad para afrontar tus actividades.	3,3	4,0
Planificas atendiendo a tus logros.	2,9	3,5
Promedio competencia Planificación	2,9	3,5

Diferencia porcentual: 21%

3. Conclusiones

La actividad desarrollada en el marco de la asignatura Introducción a la Ingeniería, se articuló de manera horizontal con docentes de la misma asignatura Introducción a la Ingeniería de las otras carreras y docentes de asignaturas como Análisis Matemático I y Computación I.

De esta forma, de manera transversal se trató el tema competencias, resaltando a los estudiantes su importancia en el devenir de sus estudios y de su futura vida profesional.

La articulación horizontal se considera como imprescindible en una formación centrada en el estudiante y todas las asignaturas involucradas reforzaron estos conceptos a lo largo del cuatrimestre.

A partir de la primera experiencia realizada en 2018, se seguirá analizando la propia práctica docente para ajustar y mejorar la propuesta y su impacto en el comienzo de la carrera, no sólo en una mejora de los índices de aprobación individuales de cada materia, sino en los índices generales de deserción de las carreras.

La Facultad, se encuentra en un momento de transición, ajustando sus prácticas docentes al nuevo esquema de formación por competencias, que seguramente significará un cambio de planes de estudio de las carreras. Como se expresó en una formación centrada en el estudiante es imprescindible la articulación horizontal y la articulación vertical, por lo que resulta necesario prever que las competencias especificadas en el perfil de egreso se vayan desarrollando gradualmente a lo largo de la carrera.

Si consideramos que los niveles de logro al final del primer cuatrimestre del primer año de las carreras es un nivel tres (3) de cinco (5) del primer nivel de dominio, y se considera que las competencias instrumentales metodológicas descriptas deben ser desarrolladas a un nivel cinco (5) y en un segundo o tercer nivel de dominio, es necesario que esta metodología sea replicada a lo largo de los distintos semestres de las carreras de modo coordinada y articulada.

Es un desafío cultural (entre otros factores), de la organización de las carreras, generar los cambios necesarios para estos logros, que también deberán ser graduales, para construir los cambios que necesita la formación de los ingenieros en el siglo XXI, sobre la base de las fortalezas existentes en nuestras facultades.

Referencias

1. Propuesta de estándares de segunda generación para carreras de ingeniería en Argentina. “Libro Rojo”. CONFEDI 2018.
2. Aurelio Villa y Manuel Poblete. Aprendizaje basado en competencias. Una propuesta para la evaluación de competencias genéricas. Universidad de Deusto 2007
3. Programa de Postgrado “La Formación del Ingeniero Iberoamericano” dictado por Ing. Daniel Morano .Facultad de Ingeniería y Ciencias Agropecuarias 2017-2018

Aprendizaje Basado en Proyecto en la enseñanza de la Matemática en la Escuela Secundaria. Articulación entre Nivel de Educación Superior y Escuela Secundaria.

Diana Duré [1], Claudia Garcia [1], Graciela Muchutti [1]

[1] Seminario Universitario. Area de ingreso y permanencia, Facultad Regional Resistencia, Universidad Tecnologica Nacional
French 414. CP3500. Resistencia. Chaco
dianadure2005@yahoo.com.ar, claurg369@gmail.com, gracielamuchutti@yahoo.com.ar

Resumen. La enseñanza basada en proyectos propone una estrategia didáctica para el eficaz desarrollo de las competencias básicas y el aprendizaje de los contenidos matemáticos; logra que los alumnos desarrollen capacidades para hacer de ellos personas más competentes; lo que implica necesariamente una reflexión por parte del docente quien debe definir claramente "qué" quiere enseñar, "para qué" lo va a enseñar y, sobre todo, "cómo" lo va a enseñar. Los ingresantes de las carreras de Ingeniería: Electromecánica, Química y en Sistemas de Información de la Universidad Tecnológica Nacional, Facultad Regional Resistencia, deben durante su trayecto formativo poseer ciertas competencias como, ser creativos, innovadores, capaces de tomar decisiones, poseer pensamiento crítico y tener capacidad para el trabajo en equipo. Éstas necesitan del desarrollo de estrategias que los pongan en el centro del proceso de enseñanza y aprendizaje, consistiendo la metodología para ello, en otorgar constantemente, un protagonismo necesario para la construcción de saberes matemáticos. Es una propuesta de "Formación Situada" para el diseño de secuencias didácticas, enmarcada en el Nivel Superior de la Enseñanza.

Palabras Clave: Aprendizaje, Ingreso, Proyecto, Estrategias de enseñanza.

1 Introducción

El propósito de este trabajo es presentar la primera etapa del proyecto presentado al Programa NEXOS, áun en ejecución, que es una propuesta de integración entre los distintos niveles y ámbitos del sistema educativo para estimular la continuidad en los estudios universitarios y evitar la deserción. Éste, está sustentado en dos subprogramas: Universidad–Escuela Secundaria y Universidad–Institutos De Educación Superior [1].

La experiencia de aplicación de técnicas innovadoras de enseñanza, para la enseñanza de la matemática, es llevada a cabo desde la Facultad Regional Resistencia (FRRe) de la Universidad Tecnológica Nacional (UTN) donde interactúan distintos actores, docentes del área matemática, provenientes de los Institutos de Formación docente, estudiantes avanzados del Profesorado: Enseñanza Secundaria en Matemática, docentes de nivel secundario y sus alumnos.

En una primera etapa los actores mencionados, salvo los alumnos de nivel secundario, participaron de talleres intensivos con el fin de formarlos como facilitadores para las escuelas que fueron seleccionadas. El producto de éstos será la propuesta de acción a ser implementada en cada institución participante.

Los equipos de trabajo para la implementación de la propuesta de acción estarán conformados por docentes y estudiantes del Profesorado: Enseñanza Secundaria en Matemática; estos últimos tendrán el rol de tutores.

Para la realización de las actividades, como parte de las estrategias de los talleres presenciales, se trabaja con aulas virtuales.

Como resultado del proyecto implementado, se verificará el logro de los objetivos pedagógicos planificados y la participación estudiantil en todas las actividades. Esto promoverá una elevada proporción de estudiantes que deberán alcanzar la promoción directa sin exámenes finales, durante el ciclo lectivo.

La propuesta se enmarca en la línea: Propuestas de formación y capacitación docente continua. Formato: "Formación Situada". Finalidades propuestas tomadas para este trabajo: promover la permanencia y terminalidad de los estudios medios, así como la continuidad de estudios en el nivel superior, tutorías académicas en escuelas secundarias y por último el diseño de secuencias didácticas basadas en el aprendizaje por proyectos en el área de matemática.

2 El proyecto de articulación

El programa Nexos está sustentado en dos subprogramas: Universidad–Escuela Secundaria y Universidad–Institutos De Educación Superior; en esta propuesta se buscó componer en forma integrada las tres instituciones.

La metodología de trabajo para el desarrollo de las actividades se planificó en dos etapas; en la primera se realizó la selección de escuelas participantes de tres sedes (Resistencia, Presidencia Roque Sáenz Peña y Villa Ángela) porque en ellas hay Institutos de Educación Superior (IES) con la carrera, Profesorado: Enseñanza Secundaria en Matemática. Se seleccionó un docente del área específica de matemática proveniente del IES sede, y dos estudiantes avanzados del profesorado en cuestión, los que participaron de un curso intensivo con el fin de formarlos como facilitadores de los talleres a realizarse en las sedes respectivas. Estos talleres se realizaron en las instalaciones de la UTN-FRRE.

En cada sede, se desarrollaron los talleres de formación, en clases presenciales apoyadas académicamente por aulas virtuales. El producto de estos talleres será la propuesta de acción a ser implementada en cada institución participante en una segunda etapa, el que deberá ser aprobado por los facilitadores conjuntamente con los directivos de las instituciones.

Los equipos de trabajo para la implementación de la propuesta de acción serán conformados por docentes y estudiantes del profesorado, estos últimos tendrán el rol de tutores. Se contará con aulas virtuales para la realización de las actividades como parte de las estrategias de los talleres presenciales.

Para la primera etapa, las escuelas participantes fueron elegidas por la jurisdicción, en este caso la Dirección de Nivel Secundario articulada con la Dirección de Nivel Superior. Se llegó a un total de 16 (dieciséis) escuelas de nivel medio y un Instituto Superior de Formación Docente. El total de inscriptos fue de 62 (sesenta y dos) docentes, de los cuales al finalizar la primera etapa han quedado un total de 54 (cincuenta y cuatro).

3 Los talleres: El aprendizaje basado en proyecto en la educación Matemática.

3.1. Diseño de los talleres

Para el diseño de los módulos se tuvo en cuenta [2]:

> *"La Matemática es inherente al ser humano, es una construcción social y cultural. Son indiscutibles sus valiosos aportes al avance de la ciencia y, por ende, al desarrollo tecnológico de la humanidad. Pero desde un aspecto más profundo e integral, la Matemática tiene un sentido humanizante, ya que está orientada a: a) brindar las herramientas para desarrollarnos como ciudadanos activos, participativos y críticos de la sociedad del conocimiento; b) desarrollar el pensamiento lógico y la abstracción desde el análisis de los significados y significaciones de los objetos matemáticos que amplían la realidad inmediata; c) observar e interpretar el mundo que nos rodea, apropiarnos e intervenir en él con una mirada científica y con acciones tendientes a la justicia social, d) anticipar fenómenos e inferir acontecimientos futuros, e) resolver problemas y f) contemplar, analizar, comprender y disfrutar del arte en sus diversas manifestaciones…"(p39).*

Esta fundamentación responsabiliza del éxito no sólo al alumno sino también a las familias, al profesorado, a las instituciones educativas y a la sociedad.

Las Evaluaciones Nacionales de matemática reflejaron un bajo desempeño en la Jurisdicción Chaco (figura 1). Podría haber muchas explicaciones para ello, por ejemplo, una hipótesis válida podría ser: no se ha conseguido generar entornos de motivación o no existe relación alguna entre la motivación, el esfuerzo y el rendimiento de los estudiantes.

Según el diagnóstico de este grupo de investigadores, considerando la doble función de los tres como docentes de nivel medio y docentes universitarios, los estudiantes tienen cada vez menos interés por aprender y esforzarse porque no encuentran sentido a lo que aprenden en las escuelas porque no existe una conexión entre lo que se enseña, como se lo enseña y sus realidades contextuales (preocupaciones, inquietudes, etc.).

Volviendo a la fundamentación [2]: "*En efecto, la enseñanza de la Matemática debe favorecer la construcción de aprendizajes matemáticos para todos los estudiantes, una enseñanza basada en la alfabetización matemática, un aprendizaje significativo con anclaje no sólo en la realidad sino también en lo intramatemático. Recapitulando, la enseñanza de la Matemática en el Campo de la Formación General debe facilitar las herramientas para el desarrollo de capacidades que habiliten a los estudiantes que desenvolverse plenamente en la sociedad, en el mundo del trabajo y en estudios superiores (p.61) ;* los marcos legales vigentes en la jurisdicción, nos dan el aval para transformar los métodos tradicionales de enseñanza y trabajar con nuevas propuestas que permitan consolidar aprendizajes significativos en los estudiantes.

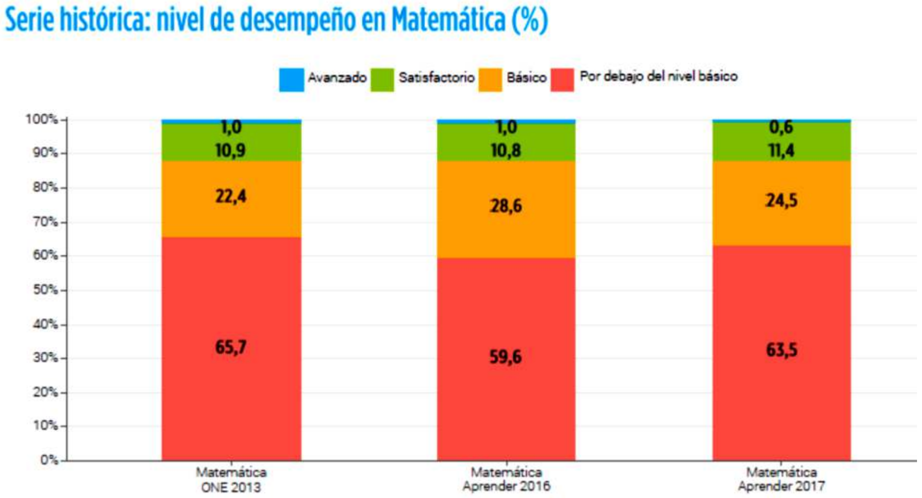


Fig.1 Aprender 2017.Informe de resultados Chaco-5to.año de la secundaria. Pag.34. Al analizar los niveles de desempeño en Matemática, se observa que: El porcentaje de estudiantes en el nivel de desempeño Satisfactorio y Avanzado en Aprender 2017 es similar respecto de Aprender 2016. Comparado con los resultados de ONE 2013, el porcentaje de estudiantes en el nivel de desempeño Satisfactorio y Avanzado en 2017 es similar [3].

Muchas veces hay que pensar en qué y cómo responder cuando preguntan los estudiantes *¿ Y esto para qué sirve?* . No se puede pretender que sientan interés si se sigue enseñando siempre de la misma manera. La matemática debe ser entendida como un saber para la vida, y no como una ciencia abstracta y carente de sentido, lo cual hace necesario contextualizarla.

Se plantea por esta razón, aplicar nuevas metodologías que estén centradas en el estudiante, donde se les muestre las implicaciones de las matemáticas en el mundo que los rodea y en otras ciencias, sin dejar de lado el carácter interdisciplinar.

La figura 2 muestra el interés de los estudiantes [3] .

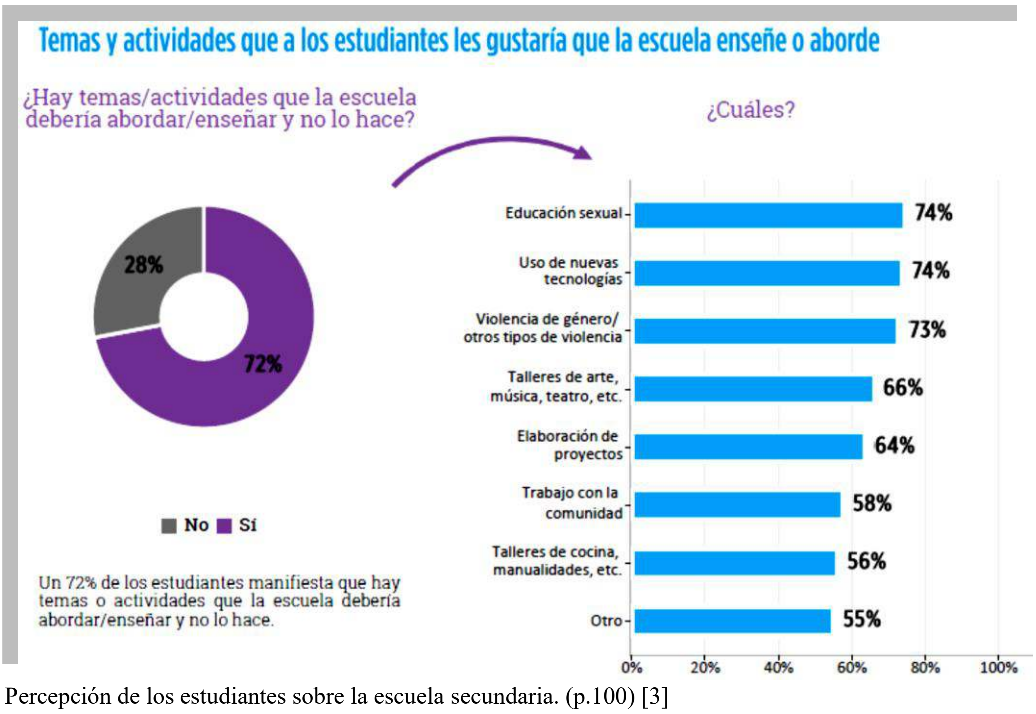


Fig.2 . Percepción de los estudiantes sobre la escuela secundaria. (p.100) [3]

Este trabajo se basa en el aprendizaje por problemas y por proyectos. No se trata de pequeña aplicaciones prácticas, sino de elaborar situaciones complejas en las que los estudiantes necesiten descubrir nuevas herramientas o utilizar conocidas y que a su vez requieran del trabajo colaborativo, el uso de las fuentes de información y de las nuevas tecnologías, porque éstas propiciarán la investigación y el aprendizaje autónomo y participativo.

Para poder iniciar a los docentes en el aprendizaje basado en proyectos (ABP) se diseñaron los módulos de la primera etapa en formato de talleres de formación. El producto de estos talleres será la propuesta de acción a ser implementada en cada institución participante.

En la tabla 1 se leen los contenidos preparados para cada uno de los módulos que se trabajaron en jornadas extendidas de 6 (seis) horas.

Tabla 1. Contenidos desarrollados en los modulos.

Módulos	Temario de los módulos
Módulo 1: Introducción al Aprendizaje Basado en proyecto	Los proyectos tienen historia. Hablemos de aprendizaje. Alfabetización matemática. Aprender como acto intencional .Aprender como acto práctico y útil. Ejemplos de aplicación.
Módulo 2: Fundamentos de la modelización	Modelos matemáticos. La modelización matemática en el aula. Lo extramatemático, lo cotidiano, lo real. Que son los modelos. Matematización intra-matemática. Primeras ideas. Bosquejos de ABP.
Módulo 3: Aprendizaje Basado en proyectos (ABP)	Introducción. Posibles objetivos del trabajo por proyecto. Características de una estrategia de proyectos. Tipos de proyectos. Etapas de un trabajo por proyecto. Fases del ABP. Actividades y demandas cognitivas de las tareas. Tratamientos de los objetivos matemáticos implicados. Formación basada en competencias. Competencias Matemáticas. Como implementar el ABP en las instituciones. Herramientas para armar tu proyecto.
Módulo 4: El ABP en la práctica matemática.	Implicaciones para la práctica docente. Algo sobre planificación en matemática. Trabajo sobre el error. Uso de los recursos TIC y de la Web.2. Presentación de los proyectos .Resolución de la propuesta presentada.
Módulo 5: Implementación de proyectos y evaluación	Implementación del proyecto. Como evaluar un ABP. Evaluación de las competencias. Escenarios y técnicas didácticas como marco de referencia. La evaluación de los aprendizajes matemáticos.

La figura 2 muestra los intereses de los estudiantes. Los valores indican que no solo hay que motivar al estudiante, sino hay que promover en ellos actitudes adecuadas hacia la matemática, que les permita afrontar retos matemáticos y resolución de problemas aplicables en su quehacer diario o en los aplicaciones que sean del agrado de los estudiantes para poder desarrollar aspectos propios de la actividad matemática.

Por ello en los módulos se trabajaron las competencias matemáticas y los aspectos del ABP. Todo ello para lograr centrar en el estudiante aspectos como autonomía, reflexion, creatividad, rigor, perseverancia y el espíritu crítico.

El primer taller trabajó la motivación en matemática y los factores implicados de tipo cognitivo, emocional y conductual, sin olvidar lo académico. Siguiendo la línea de [4], las motivaciones se clasifican en:

- Intrínseca: cuando el interés se fija por el estudio o trabajo, demostrando siempre superación y personalidad en consecución de sus fines, aspiraciones y sus metas. Definida por realizar una actividad por placer.
- Control : el estudiante tiene la posibilidad de escoger entre distintas opciones y formas de resolver la tarea, los estudiantes tienen el control de la situación, él determina su propio ritmo y modo de aprendizaje.
- Extrinseca : al contrario que en la motivación intrínseca, el aprendizaje es secundario, y considera como un medio para obtener otros fines. El estudiante solo trata de aprender, no por la asignatura.

Desde el punto de vista de los investigadores que han hecho propuestas didácticas para mejorar la motivación de los estudiantes podemos citar algunas, como ser:

- Integración de los aprendizajes.
- El uso de contextos y situaciones , en este sentido se tiene en cuenta:
  - ✓ Aprendizaje por descubrimiento y contacto con el medio.
  - ✓ Resolución de problemas y estudio de caso.
  - ✓ Desarrollo de proyectos reales o simulados.
- El uso de materiales adecuados, recursos variables y nuevas tecnologías.
- Trabajo cooperativo.

Muchos de los elementos descriptos coinciden con las características deseables de un ABP.
Otro de los aspectos a tener en cuenta es [2] *la capacidad de modelización en Matemática*. Modelizar, significa convertir y recortar una situación de la realidad o propia del mundo matemático en un objeto de estudio, reconociendo y analizando las variables y sus posibles relaciones, interpretando el grado de dependencia entre éstas, buscando patrones, otorgando significados a determinadas acciones o procedimientos, integrando nuevos saberes, construyendo y probando un modelo, determinando su alcance, produciendo nuevo conocimiento, etc.
Al respecto expresan [5]:

> *...entendemos a la modelización matemática como un proceso que atraviesa distintos momentos –recortar una problemática frente a cierta realidad, identificar un conjunto de variables pertinentes a esa problemática, producir relaciones entre las variables tomadas en cuenta, elegir una teoría para operar sobre las relaciones y producir conocimiento nuevo sobre dicha problemática-, integrando conocimientos de diferente naturaleza y abarcando el quehacer matemático. Como los conocimientos no se presentan fragmentados, sino relacionados naturalmente a través de una situación problemática, la actividad de modelización reúne condiciones para realizar en el aula un trabajo análogo a la actividad científica, centrado en la producción matemática de los alumnos y donde se re-crean los conocimientos matemáticos a partir de las propuestas del docente.*

Esta fundamentación fue importante para determinar que en el módulo 2 que se dictará en el taller 2 se tratará el contenido: modelización.
No menos importante es la evaluación, tanto de ABP como la *Evaluación en Matemática* porque ambas poseen aspectos claves y complejos de la enseñanza y el aprendizaje, ya que se debe dar cuenta de los niveles de desempeño de los estudiantes. En el módulo 5 se trabajará con los criterios e instrumentos de evaluación tanto del ABP como de la enseñanza de la matemática.

4 Metodología y el proceso de enseñanza-aprendizaje

Las sugerencias metodológicas para el desarrollo de capacidades sociocognitivas comunes se asientan en el enfoque constructivista. Las socioculturales conllevan a una serie de cambios en las escuelas seleccionadas por la jurisdicción, que afectan al proceso de enseñanza-aprendizaje y a la metodología. Cabe destacar que no hay una gran brecha de separación con el diseño curricular para la Educación Secundaria Orientada (ESO) de la Provincia del Chaco que posee las siguientes orientaciones:
- Plantear procesos cognitivos variados, priorizando la reflexión y el pensamiento crítico.
- Contextualizar los aprendizajes.
- Potenciar la metodología de investigación y del trabajo a partir de situaciones problemáticas.
- Trabajar con los saberes previos de los estudiantes y de sus inquietudes.
- Alternar diferentes estrategias metodológicas, actividades y situaciones de aprendizaje, teniendo en cuenta los intereses de sus estudiantes.
- Buscar, seleccionar y elaborar materiales curriculares diversos.
- Potenciar la lectura y el tratamiento de la información como estrategia de aprendizaje.
- Fomentar la cooperación para que el trabajo en el aula sea colaborativo entre los estudiantes, profesores, familiares y la comunidad educativa.
- Coordinar metodologías y didácticas de los equipos docentes.
- Diversificar las situaciones e instrumentos de evaluación y potenciar la evaluación formativa.

4.1 Metodología de trabajo

La actividad se planificó en dos etapas:
- Primera: ya mencionada. Es la que se llevó a cabo hasta la fecha de la producción de este trabajo. El producto de estos talleres será la propuesta de acción a ser implementada en la institución participante. Éstas deberán

ser aprobadas por los facilitadores de los talleres, en conjunto con los directivos de las instituciones. Los equipos de trabajo para la implementación de la propuesta de acción estarán conformados por docentes y estudiantes del profesorado en matemática, estos últimos tendrán el rol de tutores. Se contará con aulas virtuales para la realización de las actividades como parte de las estrategias para los talleres presenciales. Tiempo estimado para esta etapa: 6 meses.

- Segunda: Implementación de los proyectos en el aula. Serán implementados como parte de las planificaciones áulicas de las instituciones participantes. El seguimiento de estas actividades será realizado por los facilitadores y estudiantes del profesorado de matemática, cumpliendo éstos el rol de tutor en la implementación de las propuestas. Se destinará un espacio virtual para las presentaciones parciales y finales de los avances de la implementación. Culminada la implementación se realizarán acciones para la sociabilización y evaluación de las propuestas implementadas. Se desarrollará la publicación de las propuestas revisadas y evaluadas con el fin de ser utilizadas como material educativo.

Las acciones Previstas para la segunda etapa serán:

- Iniciar la fase de planificación de los docentes con sus estudiantes y socializar con la institución.
- Cerrar la elaboración de los proyectos.
- Realizar el seguimiento de la implementación de los proyectos en las instituciones: los docentes implementarán los proyectos en el aula debiendo presentar los avances en el espacio virtual destinado. El seguimiento será asistido por los estudiantes del profesorado que han participado de los talleres de formación como tutores del proyecto. Se prevé que participen de los proyectos, 2700 alumnos de escuelas secundarias. Tiempo estimado: 4 meses.
- Evaluar los resultados de la implementación de los proyectos: se realizarán encuestas a los alumnos, docentes y directivos de las instituciones participantes. Se sistematizarán los resultados de las rúbricas de los proyectos implementados. Se realizará por sede una jornada de sociabilización y evaluación de las acciones implementadas. Tiempo estimado: 1 mes.

Los talleres realizados con los docentes quedarán publicados para su acceso libre a otros docentes que deseen ampliar su formación, con la posibilidad de réplica presencial a nuevas instituciones para el ciclo lectivo siguiente.

A partir de los proyectos implementados y evaluados se realizarán materiales educativos como recursos abiertos. Estos se publicarán en el sitio web del Área de Ingreso y Permanencia con el fin de ser utilizados por instituciones educativas.

La implementación de los proyectos en el aula no será inmediata, se preparó una agenda para ir formando a los estudiantes en el trabajo cooperativo y el uso de las TIC ya que el objetivo de la fase inicial era la consolidación de habilidades necesarias, que son el requisito indispensable para garantizar una adaptación progresiva a los nuevos métodos de trabajo.

La etapa práctica del trabajo en el aula virtual seguirá las características del ABP, pero a su vez habrá situaciones problemáticas micro para ir resolviéndose hasta llegar al producto final; para ello se pidió a los docentes que realicen secuencias didácticas como las que están acostumbradas a realizar. Además, se les habilitó un sistema de fichas o grillas orientadoras para trabajar temas que generaran dudas. El objetivo de esta etapa es progresivamente dar confianza y seguridad a los estudiantes para que adquieran capacidades básicas necesarias para llevar a cabo el proyecto con autonomía.

Los contenidos trabajados en planificación tuvieron en cuenta como objeto matemático: funciones de primer grado y de segundo grado, ambas en relación directa con geometría. En función de lo planteado el abordaje de estos contenidos propician un espacio para el trabajo de modelización desde el marco geométrico, avanzando por la física y ampliando el trabajo sobre temáticas de relevancia social; implicando la incorporación de nuevos objetos de estudio y la profundización de algunos saberes referidos al análisis funcional. Para que ello suceda, una de las cuestiones claves a tener en cuenta es que el abordaje y la secuenciación de los contenidos disciplinares no sean sólo lineales.

Existen aprendizajes que pueden integrar diferentes marcos: geométrico, numérico, algebraico y/o estadístico. El docente seleccionará contenidos u objetos de estos marcos para lograr determinados aprendizajes a través del diseño de situaciones problemáticas. Los proyectos presentados como propuestas por los docentes para trabajar son algunos de ellos: Tutoriales para los estudiantes venideros. Los casos de factores; Investigación sobre Análisis Matemático en IPP; Y si creamos Microempresas ; Una Geogebra diferente; Diseñemos un Telescopio; Matemática solidaria ; Mate o drones ; Robótica ; La música y las matemáticas.

5. Conclusiones y futuros trabajos.

Si bien de la propuesta se finalizó solamente la primera etapa, que era la de capacitación y concientización a los docentes apostando por un cambio en la formación de los estudiantes que se requiere un *aprender a aprender*, se puede decir que la misma fue satisfactoria, sobre todo porque logró que los asistentes docentes de distintos establecimientos del nivel medio recibieran herramientas estratégicas para poder enseñar matemática de una manera diferente.

Pensar en los estudiantes donde sean capaces de afrontar los retos de un mundo complejo, se debe introducir competencias para una formación integral, con sentido critico no solo para comprender, sino para actuar de manera adecuada ante situaciones y problemáticas que se les puedan plantear, los principios del ABP como metodología activa cumplen con estos requisitos.

Aunque todavía no se lleva a cabo la segunda etapa, se encuentran los materiales realizados, para la puesta en práctica de 23 (veintitrés) proyectos presentados por los docentes. Este tipo de proyecto requiere mucho tiempo y dedicación por parte del docente, pero le permitirá poder ser visibilizado por sus pares ya que serán publicados y socializados.

Estos son retos que conllevan al docente a descubrir nuevas estrategias de enseñanza. El ABP requiere un trabajo interdisciplinar para que produzca los cambios que se pretenden, pero además debe involucrar a los padres y los miembros de la comunidad educativa.

Este tipo de proyectos es de utilidad para que el docente reformule su práctica con los alumnos, que pueda identificar dificultades que orienta la búsqueda y/o elaboración de nuevas estrategias para ayudar a los alumnos.

En esta etapa es nuestra inquietud que este tipo de estrategias se comparta con otros docentes que valoren el aprendizaje basado en proyecto y, por qué no, repliquen esta actividad en sus ámbitos laborales.

Es un camino para mejorar el aprendizaje y sumar profesionales con el orgullo de saber que las matemáticas, además de ser la base de la tecnología y del futuro, son esencialmente divertidas.

Referencias

1. Ministerio de Educación y Deporte de la Nación. *Programa Nexos: por un sistema educativo articulado e integrado. Articulación Universidad-Escuela Secundaria.*(2017).
2. Ministerio de Educación Provincia del Chaco. *Diseño curricular de la Educación Secundaria Orientada* . la.pp.39 y pp.61 (2016).
3. Aprender 2017.Informe de resultados Chaco-5to.año de la secundaria
4. Gómez Chacón,I. ; Ministerio de Educación y Ciencia .España. Matemática PISA. *Motivar al alumnado de secundaria para hacer matemática* (2005)
5. Segal, S.; Giuliani, D. Libros del Zorzal . *Modelización matemática en el aula: Posibilidades y necesidades.* Pp.7-8 (2008).

Articulación entre escuela secundaria y universidad: Aproximación de los contenidos en los NAP a las expectativas de egreso de la secundaria y las demandas de ingreso a la universidad

María Alicia Gemignani[1], Graciela E. Yugdar Tófalo[2], Susana Facendini, Magalí Soldini
Departamento Materias Básicas, Facultad Regional Paraná, UniversidadTecnológica Nacional
Av. Almafuerte 1033, Paraná, Entre Ríos CP 3100
[1]alicia.gemignani@frp.utn.edu.ar, [2]gyugdar@frp.utn.edu.ar

Resumen. En el presente trabajo se expone el proyecto de articulación entre escuela secundaria y universidad de la Universidad Tecnológica Nacional, Facultad Regional Paraná presentado bajo el Programa NEXOS del Ministerios de Educación y la Secretaría de Políticas Universitarias de la Nación al Consejo General de Educación de la Provincia de Entre Ríos. A través de la revisión y selección de contenidos, delineación de actividades que propicien diferentes niveles de comprensión de los temas acordados y una propuesta de evaluación formativa se espera mejorar la transición de los estudiantes de un nivel a otro en torno a las asignaturas Matemática, Física, Química e Inglés. Si bien la propuesta se encuentra en su etapa inicial de realización, es posible adelantar resultados positivos dada la amplia aceptación que la misma ha tenido por parte de los docentes involucrados.

Palabras Clave: Articulación, Escuela Secundaria, Universidad

1 Introducción

El ingreso, permanencia y egreso de los estudiantes universitarios es un tema que ocupa a los actores involucrados en este proceso, en especial a aquellos docentes que toman un primer contacto con los futuros egresados de una facultad de ingeniería. Este grupo de docentes tiene en sus manos la tarea de introducir a los estudiantes a la vida universitaria, acompañarlos en sus primeros pasos, motivarlos para que puedan superar obstáculos, acelerar su proceso de afiliación a la institución y, de ser posible, “atraparlos” en el campo disciplinar para que den continuidad a sus estudios de manera fluida.

La realidad que encontramos año tras año nos habla del alto nivel de deserción que se refleja fundamentalmente en los primeros dos años de la carrera siendo el primer semestre el más crítico. Por este motivo, es importante destacar que todo lo que se pueda hacer para acercar las experiencias de ambos niveles educativos será en última instancia un apoyo importante para quienes transiten este camino de aprendizaje con dificultad.

En este marco, modificar las metodologías de enseñanza tanto en los últimos niveles de la escuela media como en los primeros niveles de la Universidad se torna esencial de modo tal que se pueda encontrar un estado intermedio que colabore con el estudiante en que este salto sea lo menos complejo posible. Tanto desde el nivel secundario como del universitario, se han llevado a cabo propuestas que intentan despejar los obstáculos que no permiten una fluida transición de los estudiantes entre los niveles. Sin embargo, pareciera ser que estos esfuerzos se desarrollan de manera aislada aunque los dos niveles tomen en consideración las necesidades y demandas que cada contexto impone. Por un lado, la escuela secundaria intenta garantizar la finalización de los estudios de este nivel y proveer las bases para la posible incorporación de los estudiantes a una carrera universitaria. Por otro lado, la universidad intenta captar vocaciones tempranas, incentivar el ingreso y sostener el cursado de las materias en el primer curso a partir de las trayectorias educativas de los estudiantes. Las acciones realizadas se podrían representar de la siguiente manera:

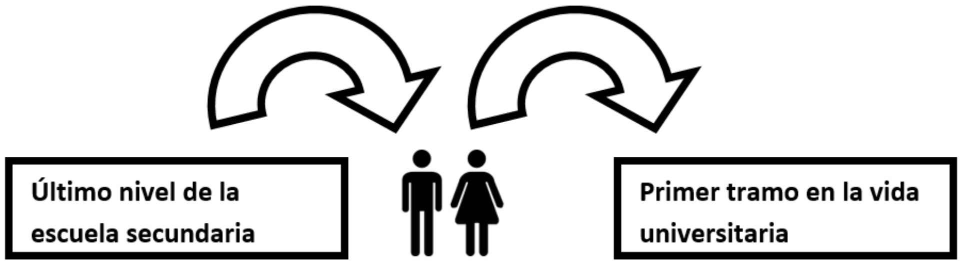


Fig. 1. Representación actual de las acciones realizadas por los docentes de los dos niveles

2 Propuesta

Una propuesta superadora debe intentar propiciar los diálogos para aunar esfuerzos y producir acciones comunes que surjan de las necesidades y demandas de los dos contextos educativos. Es decir, el plan de acción debería ser desarrollado teniendo en cuenta los dos niveles especificados en el gráfico de arriba como una unidad educativa en sí misma en la que se conjugan y acuerdan competencias, actitudes, hábitos a desarrollar en los estudiantes con crecientes niveles de profundidad para efectivizar una verdadera transición. Esta definición de los dos niveles especificados como una unidad que coordina diferentes acciones en común para alcanzar objetivos bien definidos demanda una representación mental diferente de lo que estas etapas implican en las trayectorias educativas de nuestros estudiantes. Ya no estamos hablando de acciones desde un nivel hacia el otro sino de dos niveles actuando bajo un mismo plan. Este concepto se podría representar gráficamente así:

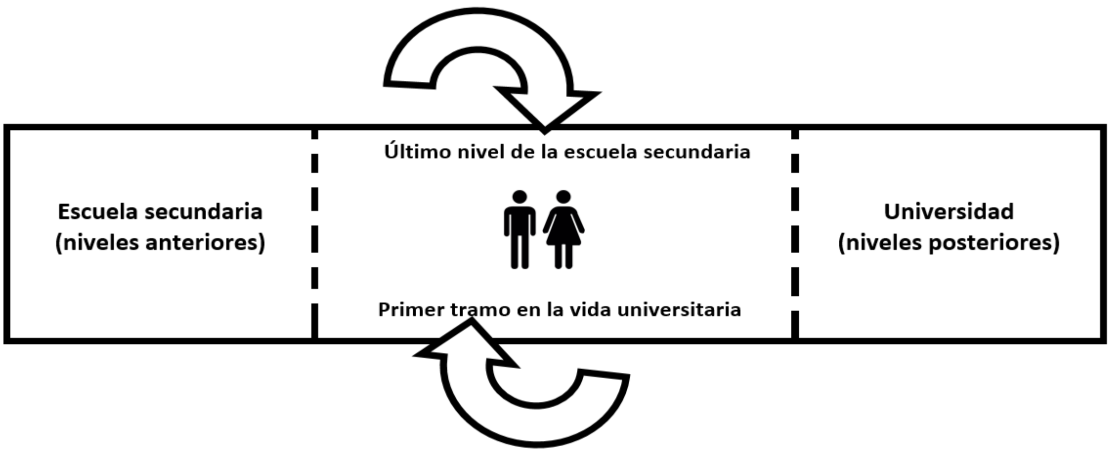


Fig. 2. Representación superadora de las acciones realizadas por los docentes de los dos niveles

Este posicionamiento frente al último año de la escuela secundaria y el primero de la universidad como una unidad con características, necesidades y demandas propias se presenta como el camino a seguir para propiciar las acciones concretas que se deben realizar y así lograr una fluida transición entre niveles. Es a partir de esta representación que se habilita a repensar los contenidos y las competencias a ser desarrolladas en nuestros estudiantes con creciente profundización. Este eje central de indagación y discusión da sentido a una propuesta que intenta abordar el abandono en la universidad desde el contexto mismo en el que los estudiantes desarrollan sus trayectorias educativas.

3 Perfil de los destinatarios

La Universidad Tecnológica Nacional, Facultad Regional Paraná, recibe estudiantes egresados de diferentes escuelas, tanto de Paraná como del interior de Entre Ríos o de diferentes Provincias de la República Argentina. Por este motivo se ha hecho un análisis estadístico del número de estudiantes que provienen de dichas escuelas y en función de ello se ha realizado una selección de escuelas debido a que no se podría abarcar la totalidad de las instituciones. Dada la viabilidad del trabajo, se abarcarán 15 escuelas de la Provincia de Entre Ríos de las que proviene nuestro actual estudiantado. La propuesta está dirigida a docentes de esas escuelas seleccionadas de las materias Matemática, Física, Química e Inglés en el último nivel que éstas se dictan.

4 Fundamentación de la propuesta

Como hemos establecido anteriormente, partimos de una problemática recurrente en nuestro país, que es la gran deserción de estudiantes que se da en la universidad en los primeros años. Una gran cantidad de estudiantes que egresan de nuestras escuelas secundarias, fracasan en su intento de seguir estudios superiores, sobre todo en las carreras de grado con cinco años o más, como es el caso concreto de las Ingenierías.

Esta problemática tiene sin duda diferentes causales, tales como los diversos contextos de los que provienen los estudiantes, la falta de motivación que ofrecen las carreras universitarias, el tiempo que dedican al estudio por diferentes cuestiones, la necesidad de trabajar durante el cursado de la carrera, entre otras. Muchas de estas cuestiones exceden tanto el ámbito de la escuela secundaria como el de la universidad, pero a través de este Proyecto, nos plantearemos una problemática real relacionada con las expectativas de contenidos -en un sentido amplio- a ser desarrollados tanto en el último nivel de la secundaria como en el primer año de las carreras de ingeniería, en relación con las materias mencionadas.

El primer año de nuestras carreras de Ingeniería ofrece un tronco común de materias que los ingresantes deben cursar (Física I, Análisis Matemático I, Química, Algebra, Geometría Analítica, Inglés I, entre otras). Estas materias, que son las mismas para las diferentes orientaciones que ofrece esta Universidad, forman parte del tronco común que integra lo que se denomina Materias Básicas y que en realidad deberían representar una continuidad de las materias que están en el currículum de cualquier plan de escuela secundaria, tanto las secundarias orientadas como las escuelas de educación técnica. Sin embargo, los docentes observan desde el curso de ingreso, que los estudiantes tienen grandes dificultades para la resolución de los problemas que se les presentan desde cada una de las áreas antes mencionadas.

Consideramos que no necesariamente la problemática responde a temas no desarrollados, sino más bien a cuestiones relacionadas con diferentes estrategias metodológicas, ya sea con la selección de los contenidos prioritarios en cada nivel o con el lenguaje con que se abordan los diferentes conceptos y no podemos dejar de considerar en muchos casos la falta de interés del estudiante que actúa como un bloqueo a la incorporación de conocimiento o el preconcepto de que "la Universidad no es para todos".

Como es sabido, las escuelas Secundarias de la Provincia de Entre Ríos poseen un Diseño Curricular basado en los Núcleos de Aprendizaje Prioritarios (NAP), que son los contenidos acordados como comunes para la enseñanza, en todas las escuelas de la Argentina, desde el nivel inicial hasta el nivel superior. Es decir que estos contenidos "comunes" responden a una decisión de política educativa, un acuerdo de alcance nacional, sobre aquellos aprendizajes fundamentales que todos los estudiantes del país incorporarán a lo largo de su trayectoria escolar.

A su vez cada provincia del país toma los contenidos definidos a nivel nacional, y les realiza adecuaciones en las que se incorporan modismos, saberes, inquietudes, costumbres, prácticas y una multiplicidad de acciones que se consideran "valiosas" para la provincia o la región. En nuestro caso, las Escuelas secundarias orientadas se rigen por la Res. Nº3322 del C.G.E. [1] y las Escuelas de Educación Técnica por la Res.2757 [2], también del C.G.E.

Desde esta perspectiva, cada escuela secundaria de la Provincia elabora un P.C.I. (Proyecto Curricular Institucional) cuyos contenidos se adecuan a las Resoluciones antes mencionadas según se trate de Escuelas Secundarias Orientadas o Escuelas de Educación Técnica, pero en definitiva, los contenidos priorizados son los requeridos por las Universidades, que a su vez proyectan dar continuidad a los estudiantes egresados del nivel secundario.

Esta organización de las instituciones, que tiene un impacto directo sobre el contenido a ser desarrollado, nos lleva a cuestionarnos sobre la preparación de nuestros estudiantes egresados de la escuela secundaria, en relación con el ingreso a la universidad, por lo que apuntar a mejorar la instancia de cambio de nivel, pensado como un espacio educativo en sí mismo, con responsabilidades compartidas entre ambos niveles del sistema educativo, representa la manera de lograr acompañar a los estudiantes que hayan decidido continuar su trayectoria educativa en la universidad, en especial a los que han elegido una carrera en el campo de las ingenierías.

Consideramos que desde la presente propuesta podemos lograr mejoras sustanciales en esta etapa de transición mediante la siguiente acción concreta:

"Aproximación de los contenidos en los NAP a las expectativas de egreso de la secundaria y las demandas de ingreso a la universidad"

A través del análisis, reflexión y discusión de los contenidos reales desarrollados en ambos niveles teniendo como eje a los NAP puede resultar en la elaboración de un plan de trabajo en común sobre una misma base de competencias a ser abordadas con diferentes grados de comprensión o profundidad en ambos niveles.

Para poder echar luz sobre este eje de discusión común a todas las asignaturas seleccionadas para el presente proyecto se propone un marco teórico de corte constructivista, desde la teoría de la enseñanza para la comprensión de Perkins.

Perkins explora la comprensión como meta a ser alcanzada por nuestros estudiantes puesto que involucra más que la simple posesión de conocimientos o su utilización de manera automatizada. Asimismo, esta visión va más allá de la concepción constructivista de pensar el aprendizaje como la construcción de representaciones de modelos mentales o esquemas de acción. Para Perkins [3] la comprensión implica "la habilidad de pensar y actuar con flexibilidad a partir de lo que uno sabe… la comprensión de un tópico es la 'capacidad de desempeño flexible' con énfasis en la flexibilidad". Asimismo, Perkins [4] sostiene que la "comprensión no es un estado de posesión sino como un estado de capacitación". Es decir, La capacidad de pensar flexiblemente es lo que da cuerpo a la comprensión, al aprendizaje.

Este posicionamiento de la "comprensión como desempeño" nos obliga a los docentes a mirar por encima del conocimiento en sí; es decir, debemos ir más allá de favorecer los procesos cognitivos para que los estudiantes desarrollen representaciones mentales. El aprendizaje como comprensión nos obliga a replantear la configuración del momento didáctico para que lo que prime sean actividades en las que los estudiantes puedan poner en funcionamiento ese conocimiento de manera flexible. A través de los "desempeños de comprensión o desempeños comprensivos" los estudiantes son interpelados a pensar a través del contraste, la comparación, jerarquización o análisis de la información y dar solución una situación que puede ser nueva y no estar dentro de un repertorio conocido.

Es de destacar que esta visión no desestima la importancia de la construcción de representaciones en el aprendizaje. Tal como lo dice Perkins [3] "de ninguna manera el énfasis en los desempeños de comprensión significa quitarle importancia al conocimiento y a las habilidades básicas. Por cierto, estaríamos profundamente limitados sin el apoyo de la memorización y la rutina". Los desempeños de comprensión nos posicionan un paso más adelante de lo que hasta ahora considerábamos como el punto de llegada. Hay comprensión, hay aprendizaje cuando esos conocimientos son usados de manera flexible.

Ahora bien, ¿todos los estudiantes llegan a un mismo nivel de comprensión? Perkins [3] señala tres puntos importantes a analizar: hay "desempeños de diferente tipo, estudiantes de diferente nivel, tópicos con diferentes exigencias". La edad de los estudiantes y su experiencia frente al tema tratado así como el tópico en si son factores que claramente imponen diferencias en cuanto al desempeño a ser alcanzado. Perkins [4] distingue cuatro niveles de comprensión: contenido, resolución de problemas, nivel epistémico e investigación. Estos niveles parten de los elementos que hacen a las bases de una disciplina hasta los niveles más altos, que tienen que ver con cómo la disciplina se piensa y se construye a sí misma. Nuestras clases usualmente exploran los dos primeros niveles, que no permiten llegar a una comprensión profunda desde la lógica y los movimientos cognitivos y meta-cognitivos que se producen desde la misma disciplina. Esta distinción de la comprensión en niveles nos permite pensar la diversidad en términos de desempeño académico usualmente encontrada en nuestros estudiantes de una manera más positiva, dejando de lado la idea de 'no sabe nada, no aprendió nada' por la idea de 'se encuentra en un nivel, avanzando hacia el siguiente'. De esta manera, las actividades de la clase se pueden diseñar buscando facilitar y promover la profundización de la comprensión hasta alcanzar el nivel de investigación.

Ahora bien, ¿cómo toma lugar la comprensión como desempeño en la que se puedan distinguir distintos niveles a ser alcanzados? Dentro de la Pedagogía de la comprensión existen cuatro elementos base: los temas generativos, las metas de comprensión, las actividades de comprensión y la evaluación continua (Perkins y Blythe, [5]). Según Pogré [6] los temas a ser elegidos para su exploración deben ser aquellos que "tienen ciertas características que los hacen especialmente indicados para ser seleccionados como habilitadores del aprendizaje". De acuerdo con Blythe [7] estas características están relacionadas con la centralidad de esos tópicos en la lógica de una o más disciplinas, la posibilidad de esos temas de generar más relaciones hacia otros tópicos, la accesibilidad a esos temas en términos de la disponibilidad de recursos para desarrollarlos y el interés y la importancia que esos temas puedan representar tanto para los estudiantes como para los docentes. Pensar los temas a priorizar desde estos criterios nos permite dejar de lado aquellos contenidos que están en nuestros programas por tradición- o por falta de actualización- dentro de la planificación, cuyo poder generativo conocimiento que lleva a más comprensión es escaso.

Las metas de comprensión, por su parte, delimitan el alcance de los temas generativos en torno a conceptos, procedimientos, procesos, destrezas que los estudiantes deben desarrollar para llegar una mejor comprensión (Pogré). Este recorte permite centrarnos en aquello que los estudiantes deben aprender para poder profundizar en niveles de comprensión, dejando de lado lo que no lleva a mayor conocimiento en los escasos tiempos de hoy día condicionados por un sinnúmero de factores que hacen al entorno académico (Stone Whiske [8]).

Como expusimos arriba, los desempeños o las actividades de comprensión son el aspecto central dentro de un marco de enseñanza para la comprensión. Los desempeños de comprensión son las actividades que llevan a los estudiantes a evaluar, analizar, sintetizar y utilizar la información de manera creativa, novedosa o flexible. Se debe destacar que los desempeños de comprensión no son simplemente actividades que presentan la información de manera diferente. Según Stone Whiske "las actividades son desempeños de comprensión sólo si desarrollan y demuestran claramente la comprensión, por parte de los alumnos, de metas de comprensión. Estas actividades no sólo demuestran que los estudiantes comprenden sino que generan aún más comprensión. Es decir, la importancia de los desempeños de comprensión yace no sólo en el hecho de que demuestran que el estudiante ha comprendido tal o cual tema sino que generan más comprensión, más conocimiento a partir de la realización efectiva de las actividades.

Un último aspecto de la Enseñanza para la comprensión está relacionada con la manera en que los estudiantes son evaluados a los largo del proceso. Este marco propone una evaluación continua, en proceso a través de la que los mismos estudiantes puedan valorar el avance en el cumplimiento de las metas de comprensión a través de los desempeños. Este tipo de evaluación se aleja de la evaluación sumativa de los estudiantes, que usualmente marca si el estudiante queda dentro del juego o fuera del mismo, para pasar a ser formativa que "permite recoger información en tanto los procesos se encuentran en curso de desarrollo" (Camilloni [9]). En su carácter formativo, este tipo de evaluación está basada en criterios que se elaboran y comparten de antemano entre estudiantes y docentes no sólo para evaluar la tarea en sí sino para poder delinear los pasos a seguir. Este sentido de acuerdo en torno a los criterios de evaluación, Stone Whiske [8] sostiene que cuando éstos son públicos "los alumnos y el docente comparten la responsabilidad permanente de analizar cómo están avanzando los alumnos hacia desempeños de alto nivel". Un abordaje metodológico hacia la comprensión debe presentar las herramientas necesarias para que los estudiantes puedan evaluar, analizar, comprender no sólo los contenidos de la disciplina sino la manera en que su propio proceso de aprendizaje se desarrolla y maximiza.

La presente propuesta básicamente encuentra fundamentación en la necesidad de abordar un tema de preocupación permanente por parte de todos los actores involucrados. Es primordial realizar este acercamiento desde los documentos y materiales reales que dan sentido a las propuestas y que se están utilizando actualmente para el dictado de las materias. Asimismo, los aportes provenientes de la experiencia y experticia de los docentes, analizados a la luz de un marco conceptual de corte constructivista pueden proveer las bases para una enseñanza más significativa.

5 Objetivos

- Generar desde diferentes instituciones educativas, un espacio de encuentro e intercambio de experiencias, que redunden en acciones concretas para los estudiantes secundarios que deciden ingresar a la Facultad de Ingeniería;
- Reflexionar sobre la necesidad de analizar los documentos base de referencia y aquellos elaborados a partir de los mismos para la elaboración de las planificaciones de clase;
- Repensar la enseñanza desde un marco conceptual que realiza aportes específicos a las materias desde un abordaje más significativo para los estudiantes;
- Consensuar un cúmulo de competencias a ser desarrolladas en diferentes niveles de profundidad;
- Elaborar propuestas de enseñanza y evaluación superadoras al interior de cada materia que reflejen la responsabilidad compartida entre los actores de la escuela secundaria y la universidad.

6 Propósitos

- Establecer vínculos entre docentes de nivel secundario y universitario a fin de intercambiar experiencias que pudieren resultar positivas para los estudiantes;
- Socializar los abordajes metodológicos utilizados en los dos niveles, propiciando la discusión y análisis de prácticas que priorizan la resolución de problemas y el pensamiento crítico;
- Establecer, en función de las capacidades requeridas para el ingreso a la Universidad, los consensos necesarios para el desarrollo temático de los núcleos prioritarios;
- Establecer un avance de ambos niveles hacia un lenguaje común;
- Acercar a los docentes universitarios a las formas de enseñanza del nivel medio.

7 Contenidos

El desarrollo de los siguientes contenidos facilita el abordaje de los NAP para así trabajar en un plan de acción colaborativo:

- Los NAP como eje organizador de responsabilidades compartidas
- La Enseñanza para la Comprensión (de David Perkins)
  - niveles de comprensión
  - la capacidad de desempeño flexible
  - los temas generativos
  - las metas de comprensión
  - las actividades de comprensión
  - la evaluación continua

8 Metodología de trabajo

El trabajo que se plantea para la capacitación se aborda desde la dinámica de talleres que conducen a la reflexión y análisis de documentos vigentes para la elaboración de una propuesta de responsabilidad compartida.

Los talleres dan comienzo con una contextualización de la problemática a abordar, estableciendo la necesidad de trabajar sobre una base en común que resulte en un plan de acción compartido. Es así que se introducen los NAP de cada materia como punto de partida y éstos son analizados a la luz de la Enseñanza para la Comprensión, lo que permite en otras instancias del taller hacer una selección de los temas generativos, establecer metas comunes de comprensión, desarrollar actividades de comprensión y realizar una propuesta de evaluación continua.

Para llevar a cabo estas decisiones en torno a un plan de trabajo en común, en una etapa previa al comienzo de la propuesta, los docentes de la U.T.N. han contrastado los contenidos de los NAP con el Plan de estudios de las Carreras de Ingeniería a fin de establecer las similitudes temáticas y seleccionarlas para su abordaje en el Taller. Además los docentes se han interiorizado en los P.C.I. de las escuelas seleccionadas a fin de establecer algunas particularidades (por ejemplo las Resoluciones antes citadas, que marcan ciertas diferencias entre las Escuelas Técnicas y los Bachilleres Orientados).

Partiendo de este análisis, una vez comenzado el taller, se solicita como insumo tanto a los moderadores como a los Profesores participantes, evaluaciones o trabajos prácticos elaborados por estudiantes de los últimos años de escuela secundaria y del curso introductorio o del primer año de facultad. Este material permite intercambiar experiencias metodológicas, observar cómo se priorizan o se deberían priorizar los contenidos en función de las capacidades que queremos desarrollar en los estudiantes y elaborar materiales consensuados entre ambos niveles. Esta discusión se plasma en diferentes documentos a ser elaborados en los diferentes encuentros de los talleres en los momentos presenciales y a través de las instancias de trabajo grupal a distancia.

Todos los materiales a ser utilizados en los encuentros han sido digitalizados para un intercambio fluido y se han compartido con todos los docentes discriminados por materia en una misma plataforma. En este espacio virtual se propicia el diálogo permanente para así acompañar el trabajo que se realiza en las instancias no presenciales, las cuales se centran en dar continuidad a las discusiones propiciadas en los talleres. Luego de cada encuentro los docentes asistentes se reúnen y elaboran sus trabajos en torno a consignas y criterios de evaluación bien definidos. Los trabajos son enviados con fecha límite de entrega a sus respectivos docentes capacitadores, quienes en reuniones colaborativas de lectura trabajan sobre el feedback y el feedforward necesario para dar seguimiento y continuidad a la propuesta en su totalidad.

9 Avances de la propuesta

La propuesta ha sido ampliamente aceptada por los docentes de las diferentes materias. Si bien sólo se han llevado a cabo tres de cuatro encuentros, se pueden mencionar los siguientes aspectos:

- 138 docentes de 20 escuelas están participando de la convocatoria: 34,8% pertenecientes a Matemática, 28,3% a Inglés, 25,4% a Química y 11,6% a Física;
- De los diálogos establecidos en el primer encuentro presencial con los asistentes se puede establecer que diferentes factores contextuales intervinientes en cada cultura escolar imponen restricciones que impactan directamente sobre los contenidos a ser abordados en las materias, resultando en una variedad de propuestas que guardan poca relación entre escuela y escuela;
- Existe consenso entre todos los docentes de las materias convocadas en la necesidad de trabajar colaborativamente desde cada espacio de los dos niveles (secundario y universidad) para lograr acompañar a los estudiantes a realizar la transición de un nivel a otro. Asimismo, remarcan la escasa articulación de los contenidos de cada materia al interior de las escuelas. Frente a las experiencias positivas y nivel de alcance y profundidad de los contenidos desarrollados por docentes que relatan experiencias positivas en torno a este tema, se reconoce la necesidad de trabajar con los niveles anteriores en la escuela secundaria para que los esfuerzos individuales no se vean opacados por falta de colaboración y diálogo. Para muchos de los docentes, la presente convocatoria a NEXOS ha sido una oportunidad para llegar a acuerdos con otros profesores de la misma institución.
- En torno a los NAPs, se puede observar que actualmente existe alcance en el desarrollo de los mismos pero a muy poca profundidad, lo que resulta en una brecha importante al contrastarlos con los contenidos requeridos para transitar fluidamente el primer año en la Universidad;
- Uno de los obstáculos más importantes para dar lugar a una nueva propuesta ha sido la toma de conciencia de la necesidad de dejar de lado aquellos contenidos que están en los planificaciones de manera reiterada, sin variación en su abordaje en términos de perspectiva o profundidad y aquellos que, por diferentes motivos inherentes a los avances y cambios al interior de cada asignatura, ya no sería necesario tratarlos en ciertos niveles de la escuela secundaria. Existe una marcada tendencia por parte de los docentes a pensar en cambios en torno a incorporaciones a realizar pero sin hacer mayores movimientos en relación con los contenidos establecidos para cada nivel.
- Otro aspecto en el que se ha trabajado es la modificación de la secuencia y recurrencia con que los contenidos son abordados. La posibilidad de cambiar los momentos del año lectivo en el que se desarrollan los temas también se presenta como una práctica poco visitada en la escuela secundaria. Este cambio da lugar a la maximización de aquellos contenidos que deben ser tratados con profundidad si se comienza con su desarrollo a principio de año y se lo retoma en distintos momentos a lo largo del curso.
- En relación con las actividades o desempeños de comprensión a ser elaborados, si bien el trabajo realizado por los docentes resulta interesante e innovador, desde su visión existe una cierta resistencia a la posible elaboración de esos materiales para un año lectivo completo dados los escasos tiempos con los que cuentan para cumplir con la carga horaria que poseen en distintas instituciones. Sin embargo, ante la propuesta de realizar pequeños cambios en cada unidad, la aceptación de la propuesta ha sido muy positiva.
- Con respecto a la evaluación de los estudiantes desde una visión formativa de la misma, los docentes se ven limitados por cuestiones de tiempo y principalmente la estructura de trimestres a ser valorados sumativamente para informar a los padres de los estudiantes. Si bien es comprensible la postura de los docentes, se puede observar que el principal obstáculo en este sentido es, al momento, la imposibilidad del docente de pensar la evaluación de los estudiantes de un lugar diferente al que conoce dadas las características que la cultura escolar impone en esta dimensión. Así como en el punto anterior, los docentes se han visto interpelados ante los beneficios que la evaluación formativa provee y se han sumado a la elaboración de algunas propuestas diferentes de acompañar a los estudiantes en el proceso de aprendizaje.
- Se pondera el gran interés de los docentes por abordar la problemática de la articulación desde una actitud positiva frente al trabajo a ser realizado para obtener logros visibles en un corto plazo.

- Los docentes asumen un compromiso personal frente a la propuesta aun que las condiciones contextuales en las escuelas secundarias no parecieran ser conducentes al trabajo en equipo con otros docentes de la misma institución.
- Si bien las propuestas curriculares de cada asignatura son diferentes en todas las escuelas, los docentes expresan la necesidad de trabajar sobre contenidos acordados de finalización de los estudios secundarios para así garantizar las mismas condiciones de egreso a todos los estudiantes que impactarán directamente en las oportunidades de ingreso a los estudios superiores;

10 Conclusiones y trabajos futuros

La propuesta de articulación entre la escuela secundaria y la universidad aquí delineada representa un desafío importante para los actores involucrados en la misma. Para que se puedan obtener resultados positivos a partir del trabajo colaborativo que se plantea es necesario que exista una actitud de apertura, sinceramiento y toma de conciencia de las responsabilidades que le cabe a cada nivel. Esta tarea se puede llevar adelante sólo si se comparte un posicionamiento nuevo en el que los dos niveles se encuentran trabajando colaborativamente hacia una misma meta: garantizar las posibilidades de una mejor terminalidad de la secundaria y de ingreso a la universidad a través del fortalecimiento de los estudiantes. Si bien todavía no se pueden presentar resultados concluyentes de ningún tipo, puesto que la propuesta está en desarrollo, es de destacar la predisposición de los dos niveles de tender puentes hacia una mejora educativa que, si bien puede comenzar con esfuerzos aislados, puede llegar a mostrar resultados positivos concretos en un futuro no muy lejano.

Referencias

1. C.G.E. (2010). *Diseño curricular para la Educación Secundaria*. *Resolución N°3322*. Entre Ríos: Consejo General de educación. Ministerio de Educación, Deportes y Prevención de Adicciones. Gobierno de Entre Ríos.
2. C.G.E. (2011). *Contenidos para la Educación Técnico Profesional*. *Resolución N°2757*. Entre Ríos: Consejo General de educación. Ministerio de Educación, Deportes y Prevención de Adicciones. Gobierno de Entre Ríos.
3. Perkins, D. ¿Qué es la comprensión? Editor: Stone Whiske, M. *La enseñanza para la comprensión*. Paidós, pp.4, 6, (1999).
4. Perkins, D. *La escuela inteligente. Del adiestramiento de la mente a la educación de la mente*. Gedisa, pp. 82, 89-90. (2003).
5. Perkins, D. y Blythe, T. *Ante todo la comprensión*. http://www.uca.edu.ar/uca/common/grupo18/files/perkins_antetodo_la_comprension.pdf (1994). Accedido el 15 de junio de 2017.
6. Pogré, P. Enseñanza para la comprensión. Un marco para innovar en la intervención didáctica. Editores: Aguerrondo, I. y colaboradores, *Escuelas del futuro II: Cómo planifican las escuelas que innovan*. Editorial Papers, pp. sección Los Tópicos Generativos. (2001).
7. Blythe, T. *La enseñanza para la comprensión. Guía para el docente*. Paidós., pp. 58. (2002).
8. Stone Whiske, M. *La enseñanza para la comprensión*. Paidós, pp.17, 21, 23 (1999).
9. Camilloni, A. Sobre la evaluación formativa de los aprendizajes. En: *Quehacer Educativo*, pp. 7. (septiembre, 2004).

La eliminación del Examen de Ingreso a la Universidad: ¿Una decisión acertada?

Ibarra, María del Carmen[1], Rivero, Luisa Leonor[2]
[1,2] Departamento de Matemática, Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de Misiones
Juan M. De Rosas 325 - Oberá, Misiones, Argentina
ibarra@fio.unam.edu.ar, rivero@fio.unam.edu.ar

Resumen. Los resultados arrojados por el Operativo Aprender 2016-2017 en el área Matemática dan cuenta de las falencias de los egresados del Nivel Medio en saberes básicos necesarios para iniciar estudios superiores, a lo cual se suma –a partir del Ciclo Lectivo 2016 - la eliminación del Examen de Ingreso a la Universidad. En este trabajo se realiza un análisis del impacto de ambos factores en el desempeño académico de estudiantes de primer año de la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional de Misiones (FIUNaM), en las asignaturas Cálculo 1 y Algebra y Geometría Analítica, en el período 2014-2017.

Palabras Clave: Ingreso, Matemática, Ingeniería, Universidad, Escuela Media

1 Introducción

La Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional de Misiones desarrolla durante los meses de febrero y marzo de cada año, un curso de nivelación en el área matemática de 6 semanas de duración, cuyos ejes temáticos son:

Unidad I: Conjuntos numéricos
Unidad II: Polinomios
Unidad III: Sistema de Ecuaciones Lineales
Unidad IV: Trigonometría

Hasta el año 2015 inclusive el estudiante debía aprobar un Examen de Ingreso sobre las unidades temáticas citadas. A partir del año 2016 el ingreso a la Universidad es irrestricto y sin ningún tipo de examen (Ley 27204 sancionada en Octubre del 2015).

Esta nueva modalidad ha provocado un significativo incremento en el número de ingresantes y paradójicamente una reducción en los índices de regularidad en las asignaturas de primer año. Sin embargo esta cantidad de alumnos se reduce abruptamente a las pocas semanas de iniciado el curso de nivelación, lo que puede obedecer a varios factores: asumir que carece de conocimientos matemáticos básicos, no haber analizado o reflexionado suficientemente la elección de la carrera, no estar dispuesto a seguir un ritmo exigente y constante de estudio, entre otras. La siguiente instancia donde se nota nuevamente una alta deserción es antes del primer parcial (los cuales se realizan durante el mes de mayo), lo que refleja su falta de motivación para aceptar el desafío.

2 Contextualización y presentación de datos

2.1 Pruebas Aprender 2017

Los resultados de las Pruebas Aprender 2017 a nivel nacional (Fig. 1) muestran que el 69% de los estudiantes del último año del secundario tienen serias dificultades para resolver operaciones matemáticas básicas; esta cifra aún es más alarmante en zonas rurales. En la Provincia de Misiones esta cifra asciende al 82% (Fig. 2)

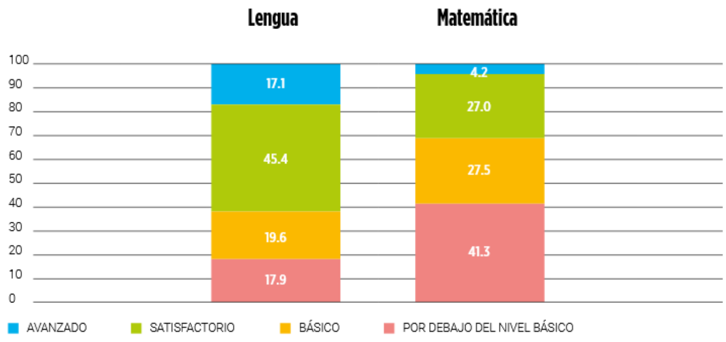


Fig. 1. Desempeño Aprender 2017 – Resultados Nacionales

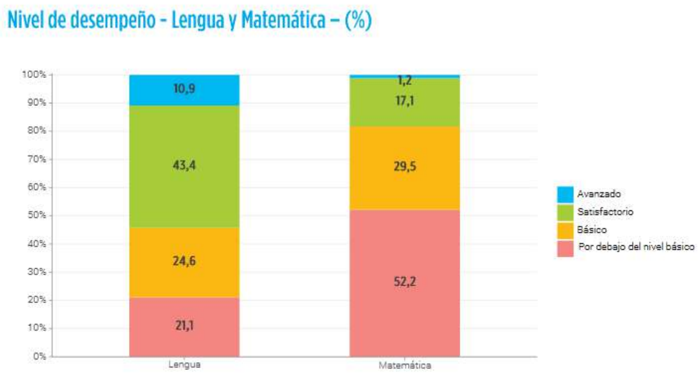


Fig. 2. Desempeño Aprender 2017 – Provincia de Misiones.

A diferencia de lo que ocurre en otros países de América Latina, en Argentina no se realizan evaluaciones al finalizar el ciclo secundario para acreditar conocimientos mínimos como en Chile (PSU), Brasil (ENEM), Ecuador (ENES) y Colombia (Prueba Saber), de manera que el alumno ingresa directamente a la universidad, donde tampoco debe superar ningún tipo de acreditación de saberes mínimos; con este panorama se pueden entender los elevados índices de deserción y la muy baja tasa de graduación del sistema universitario argentino.

2.2 Datos Facultad de Ingeniería UNaM

Del Examen Ingreso realizado en el Año 2014 se ha tomado una muestra de 95 evaluaciones, y se ha analizado la resolución (Bien/Mal) de los ejercicios de cada una de las unidades temáticas.

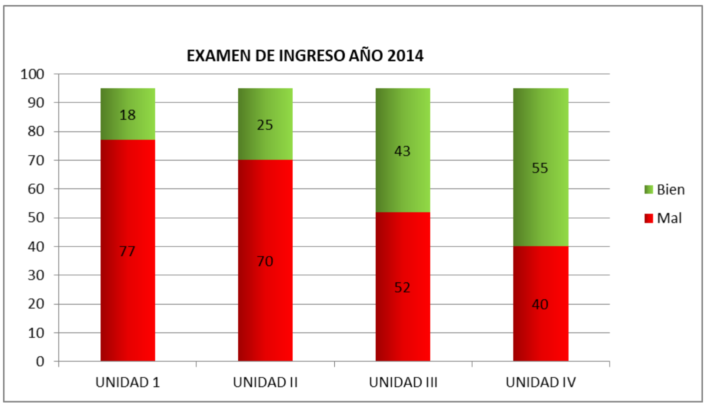


Fig. 3. Examen de Ingreso 2014 –FIUNaM – Área Matemática- Resolución de ejercicios por unidad temática.

Se evidencia que los temas de mayor dificultad corresponden a operaciones con números y sus propiedades y funciones polinómicas (de primer y segundo grado), situación que no es superada con un Curso de Nivelación y que se mantiene a lo largo del ciclo lectivo, debido a que el alumno tiene poco desarrolladas las habilidades matemáticas básicas necesarias para responder a los requerimientos de la educación superior.

En el año 2017 se dictó un Curso de Nivelación con los mismos contenidos pero con el doble de carga horaria de ediciones previas, al finalizar el mismo se realizó un examen diagnóstico, donde se pudo observar un escenario similar al de años anteriores.

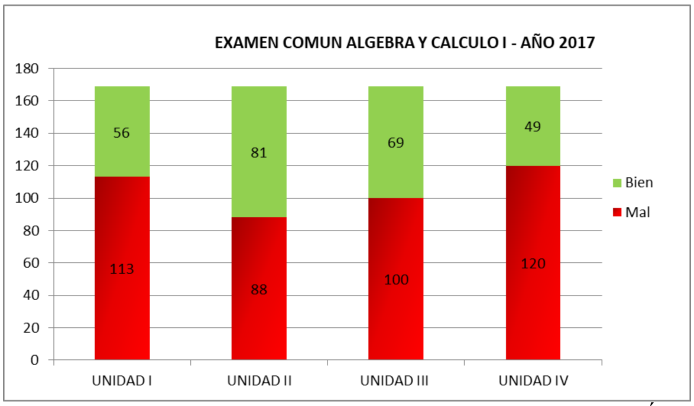


Fig. 4. Examen Común Cálculo 1 y Algebra y GA – Año 2017 – FIUNaM – Área Matemática

De los resultados de las evaluaciones anteriores se observa un bajo nivel académico de los ingresantes, lo cual acarrea dos consecuencias:

- ❖ alto índice de deserción y
- ❖ elevado número de alumnos reinscriptos (recursantes)

El alto índice de alumnos recursantes es una problemática que se replica en todo el país; según datos oficiales tomando en cuenta las 40 universidades nacionales, el 44% de los estudiantes aprueba a lo sumo una materia al cabo de un año de cursada y el 30% no aprueba ninguna en el mismo período de tiempo.

A pesar de haber duplicado la carga horaria del Curso de Nivelación 2017 los resultados no han mejorado, poniendo en evidencia que la problemática es compleja y profunda y que no se supera simplemente con un curso introductorio de dos meses de duración. Esta situación es consecuencia de que la mayoría de los estudiantes egresados del Nivel Medio tiene conocimientos por debajo del nivel básico en Matemática, según datos suministrados por las Pruebas Aprender 2016/2017.

En este contexto surgen algunas preguntas: *¿La desaparición del examen de ingreso favorece al estudiante? ¿Y cómo incide en el desempeño académico en su primer año de carrera? ¿Hacen falta los Exámenes de Ingreso? ¿Se prepara el estudiante para su ingreso a la Universidad o solamente lo hace cuando debe afrontar un Examen de Ingreso? ¿Las instituciones y los docentes de la Escuela Media están comprometidos con la preparación de sus alumnos para el ingreso al Nivel Superior? ¿Qué responsabilidad debería asumir el estudiante del último año del secundario con vista a iniciar una carrera universitaria?*

A partir de la no toma de Exámenes de Ingreso (período 2015-2017) los índices de regularidad en las asignaturas Algebra y Geometría Analítica y Cálculo 1 (ambas asignaturas de dictado anual y correspondientes al primer año de las carreras de Ingeniería) han disminuido significativamente, como se observa en los siguientes gráficos

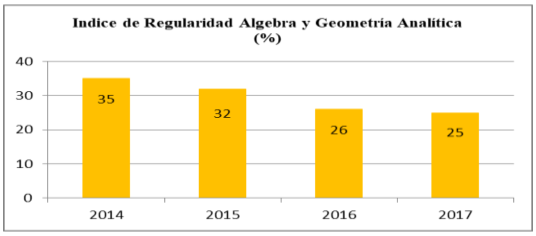


Fig. 5. Indice de regularidad Algebra y Geometría Analítica (%)

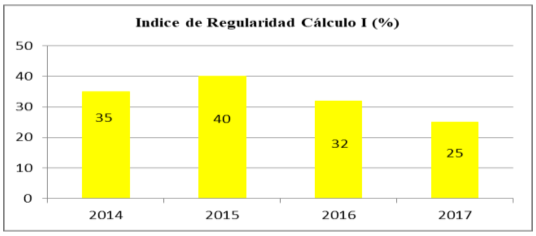
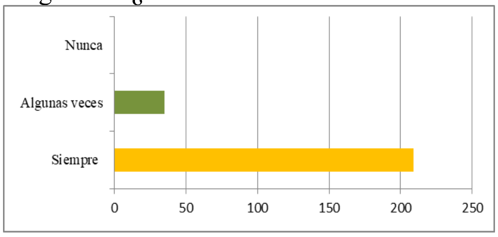


Fig. 6. Indice de regularidad Cálculo I (%)

2.2.1 Encuesta

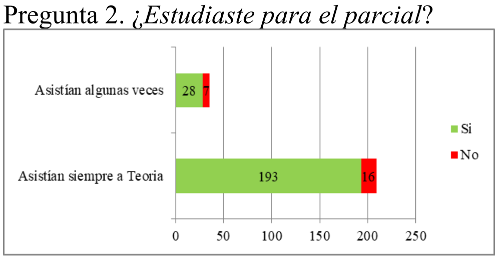
Al inicio del Ciclo Lectivo 2017 se observó en ambas asignaturas un bajo rendimiento en el primer parcial y ante esta situación se realizó a la totalidad de los alumnos cursantes (244 estudiantes) una encuesta, enfocada en el nivel de asistencia a clases (teóricas y de consultas), horas semanales de estudio, horas promedio para la preparación de exámenes parciales y resultados del primer parcial.

Pregunta 1. *¿Asistís a las clases Teóricas*?



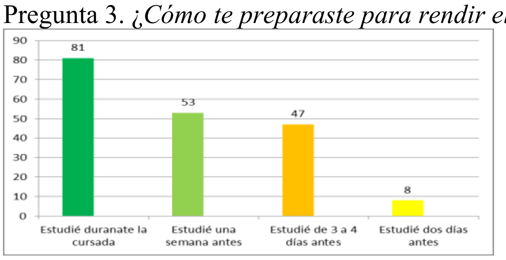
Si bien las clases teóricas son optativas, 209 alumnos (85%) afirmaron que asistían regularmente. Sin embargo solamente 44(23%) de ellos aprobó el primer parcial.

Pregunta 2. *¿Estudiaste para el parcial*?



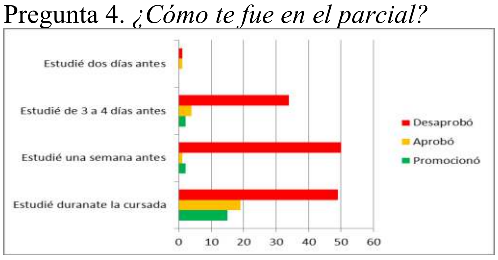
El 90% de los alumnos que asistían regularmente a clases teóricas manifestó haberse preparado para el parcial.

Pregunta 3. *¿Cómo te preparaste para rendir el parcial*?



De acuerdo a los datos relevados, 55 estudiantes manifestaron haberse preparado menos de 3 días mientras que 135 alumnos lo hicieron durante al menos una semana.

Pregunta 4. *¿Cómo te fue en el parcial?*



De acuerdo a los datos relevados 55 estudiantes manifestaron haberse preparado menos de 3 días para el primer parcial y solamente 4(7%) de ellos lograron aprobar el examen. Mientras que 134 alumnos afirmaron haberse preparado al menos una semana, de los cuales 37(30%) aprobaron.

Haciendo un análisis se puede concluir que:

- El alto el nivel de asistencia a clases teóricas no se ve reflejado en los índices de aprobación de los parciales. Esta situación tiene varias aristas, entre las cuales se pueden citar:
    - ✓ actitud pasiva por parte de los estudiantes, que en muchos casos no toman apuntes y se limitan a sacar fotos con el celular de la pizarra
    - ✓ toman apuntes pero con información insuficiente y sin lograr extractar lo más relevante de la clase
    - ✓ no completan sus apuntes con los temas desarrollados en aquellas clases en que estuvieron ausentes
    - ✓ la mayoría de los alumnos recursantes se retiran antes de finalizar la clase para asistir a otra materia
    - ✓ algunos estudiantes por temor o timidez no efectúan ni responden preguntas a pesar de la insistencia del docente
    - ✓ por lo general no revisan los contenidos desarrollados en las clases teóricas antes de asistir a las clases prácticas
- Aquellos alumnos que llevan al día la materia, asistiendo a clases y dedicando al menos 6 horas semanales extra áulicas, son los que mayor probabilidad tienen de aprobar.
- Consultados respecto al material didáctico utilizado para estudiar, la mayoría respondió Material de Internet, Apuntes de Cátedra y Apuntes de clase; un porcentaje mínimo manifestó recurrir a libros de texto. Aparece así otra problemática cada vez más aguda, el reemplazo de los libros de texto como material de estudio – casi en extinción - por recursos de internet de dudosa procedencia en muchos casos.

3. Conclusiones y trabajos futuros

Los números muestran que la no toma de Examen de Ingreso a partir del 2016 ha actuado en detrimento del rendimiento académico en primer año. De acuerdo a estadísticas oficiales, esta problemática es común a todas las Universidades del país, dado que los índices de deserción en primer año, el número de alumnos reinscriptos y el porcentaje de estudiantes que no logra aprobar ninguna asignatura en su primer año de cursada, están creciendo a ritmos alarmantes.

Mirando nuestros vecinos de América Latina (Chile, Brasil, Ecuador, Colombia) se puede ver que Argentina es uno de los pocos países donde no se realiza ningún tipo de evaluación vinculante al egresado de la escuela media y además en los últimos años han desaparecido los Exámenes de Ingreso a la Universidad.

Otra arista importante en esta situación, son los resultados arrojados por el Operativo Aprender en el área Matemática, que dan cuenta de las falencias de los egresados del nivel secundario en saberes básicos necesarios para iniciar estudios superiores. Tanto la Universidad como la Escuela Media son partes responsables de esta realidad y deben aunar esfuerzos e implementar estrategias conjuntas a corto plazo, para asegurar que los estudiantes ingresen suficientemente preparados a la Universidad; pero todos estos esfuerzos no darán frutos si el alumno no toma conciencia de estudiar y prepararse en el trayecto del secundario, lo que implica esfuerzo, dedicación, disciplina y alto grado de responsabilidad. Pero la realidad muestra que ante la ausencia del Examen de Ingreso, el adolescente no está estimulado a prepararse en su último año del secundario y desconoce que será el principal perjudicado con esta actitud.

De continuar esta ausencia de exámenes en ambos niveles y habiendo comprobado que un Curso de Nivelación de 8 a 10 semanas de duración es insuficiente para abordar los contenidos básicos indispensables para iniciar el cursado de las materias de primer año de ingeniería, se proponen las siguientes acciones:

- Jornadas de trabajo entre docentes del Nivel Medio y de primer año de la FIUNaM con el fin de exponer la problemática del ingresante. Para ello se preveé una serie de talleres donde se abordarán cuestiones como:
    - ✓ Material didáctico sobre el curso de nivelación en matemática elaborados por docentes de primer año de la FIUNaM, de manera que el docente de la escuela media conozca los temas/contenidos básicos para el ingreso a carreras de ingeniería, así como el enfoque dado a los mismos. De esta manera el docente dispondría de material especifico para orientar a aquellos estudiantes interesados en algunas de nuestras carreras.
    - ✓ Principales errores o dificultades que aparecen en los exámenes diagnóstico/o cursos de nivelación

- ✓ Presentación y análisis de los ejercicios y situaciones problemáticas de los operativos aprender.

- Extender la duración e intensificar la carga horaria del Curso de Nivelación presencial que ofrece la FIUNaM en el área Matemática a los alumnos del último año del secundario y al finalizar su dictado realizar un examen que sirva como diagnóstico al estudiante, dando cuenta de su nivel académico.

- Implementar durante el segundo semestre un Taller común a las asignaturas Cálculo 1 y Algebra y Geometría Analítica, destinado a los alumnos que hayan quedado Libres (en ambas asignaturas esta situación se presenta recién al inicio del primer semestre) en este espacio se tratarán cuestiones como por ejemplo: análisis de errores, técnicas de estudio, interpretación de consignas, revisión de exámenes parciales.

- Jornadas de trabajo con los estudiantes de primer año destinadas a las técnicas y metodologías para la toma de apuntes

Referencias

1. Aprender 2017, Ministerio de Educación de la Nación http:// www.argentina.gov.ar Accedido el 06 de Agosto de 2018
2. Centro de Estudios de la Educación Argentina – Universidad de Belgrano. *Universidad :¿hacen falta exámenes de Ingreso?*, Año 3 – N° 18 (2014)
3. Centro de Estudios de la Educación Argentina – Universidad de Belgrano. *Universidades Nacionales: el 44% no aprueba más de una materia por año*, Año 3 – N° 27 (2014)
4. Centro de Estudios de la Educación Argentina – Universidad de Belgrano. *Universidad Ingreso a la Universidad en Brasil, Chile y Argentina*, Año 5 – N° 50 (2016)
5. Centro de Estudios de la Educación Argentina – Universidad de Belgrano. *Dos días muy distintos en Brasil y Argentina*, Año 5 – N° 54 (2016)

El Diagnóstico al Ingreso y su Impacto en los Resultados Académicos de los Estudiantes.

Flores-Godoy, José Job[1], Lacués Apud, Eduardo[1], Pagano Nachtweyh, María Magdalena[1]
[1] Departamento de Matemática, Facultad de Ingeniería y Tecnologías, Universidad Católica del Uruguay.
8 de Octubre 2738, Montevideo Uruguay
jose.flores@ucu.edu.uy, elacues@ucu.edu.uy, mapagano@ucu.edu.uy

Resumen. Durante los últimos quince años el Departamento de Matemática de la Universidad Católica del Uruguay ha trabajado analizando el perfil académico de los estudiantes ingresantes en las carreras de Ingeniería e implementando medidas remediales tendientes a reducir el impacto en la transición entre la enseñanza media y el ingreso a la universidad. Teniendo en cuenta los cambios operados en el currículo de enseñanza media en los últimos años, se ha hecho necesario modificar el proceso de diagnóstico y proponer otras acciones remediales. En el presente trabajo se describen los cambios realizados y las medidas implementadas, y se analiza preliminarmente el efecto que han tenido sobre el desempeño académico de los estudiantes.

Palabras Clave: Articulación enseñanza media superior- enseñanza universitaria inicial, Diagnóstico al ingreso, Correlación conocimientos previos - desempeño académico

1 Introducción

El porcentaje de estudiantes que reprueban los cursos de Matemática en las carreras de Facultad de Ingeniería y Tecnologías (FIT) de la Universidad Católica del Uruguay (UCU) ha ido creciendo sostenidamente en los últimos años; de acuerdo con los registros internos que lleva el Departamento de Matemática ha llegado a un 70% en 2017, cuando a comienzos de esta década se ubicaba en un 50%.

Esto puede explicarse parcialmente por la evidencia recogida en las pruebas de evaluación de los cursos de primer año, cuya corrección ha mostrado que los estudiantes cometen numerosos errores en cuestiones relativas al conocimiento de contenidos propios de la enseñanza media [1], [2].

Por otro lado, en observaciones no sistemáticas en actividades de clase, los profesores han constatado carencias de los estudiantes en cuanto a habilidades procedimentales.

Otra explicación surge al considerar los cambios operados en el currículo de enseñanza media, donde entre otros elementos, se ha disminuido la atención prestada al desarrollo de habilidades de cálculo algorítmicas o rutinarias [3].

Estas cuestiones han generado preocupación tanto en el Departamento de Matemática como en las autoridades de la FIT, lo que ha llevado a considerar la implementación de nuevas medidas remediales al ingreso en 2018, que se describen a continuación.

En primer lugar, se reformuló la prueba de diagnóstico, dividiéndola en tres secciones de diez ítems cada una, con las características que se describen en la sección 2.

En segundo lugar, se planificaron talleres con la finalidad de ayudar a los estudiantes en el desarrollo de habilidades de cálculo algorítmico. Estos talleres son de carácter optativo y se diseñaron de manera que se desenvolvieran en paralelo con los cursos de Matemática de primer año.

En tercer lugar, se orientó a los estudiantes acerca de qué trayecto académico seguir a partir de su desempeño en la prueba de diagnóstico. Dado que además de los talleres referidos, algunas de las asignaturas que se ofrecen en el primer semestre son optativas para algunas carreras, se formularon trayectos diferenciados para los estudiantes de cada carrera teniendo en cuenta el grado de conocimientos previos y desarrollo evidenciados en su desempeño en la prueba de diagnóstico. La organización de éstos se describe en la sección 3 La orientación recibida por el estudiante no es de aplicación obligatoria, por lo que puede optar por otros trayectos.

Este trabajo, además de las descripciones mencionadas, es un informe preliminar de los resultados de la implementación de estas medidas. En particular, se analizó la calidad de la prueba y se buscó correlacionar los resultados del diagnóstico y el trayecto seguido con el desempeño académico conseguido en el primer bimestre del año académico 2018. Estos resultados se presentan en la sección 4.

2 Diseño del instrumento de la prueba de diagnóstico

Hasta 2017, la prueba de diagnóstico al ingreso fue de carácter optativo para los ingresantes a las carreras de la FIT. Se tomó la decisión de que en 2018 fuera obligatoria, de manera que se pudiera contar con información de todos los alumnos.

El Departamento de Matemática de la FIT ha venido realizando este tipo de diagnósticos desde el año 2002 [4], [5], en ocasiones en colaboración otras universidades [1], [6], teniendo en cuenta los cambios curriculares de secundaria para adaptar los instrumentos usados, estudiando diferentes aspectos de su calidad y correlacionando los resultados registrados con el desempeño académico.

Consistentemente, estos análisis han mostrado que un bajo desempeño en la prueba se correlaciona fuertemente con el fracaso académico. Esta característica ha permitido identificar a los estudiantes con riesgo de fracaso, para quienes se han diseñado distintas medidas remediales.

Para el diseño del instrumento usado en 2018, se consideraron como antecedentes relevantes los resultados registrados en 2015, 2016 y 2017. Esta selección se basa, entre otros motivos, en que en 2012 se implementó en Uruguay un cambio curricular en los bachilleratos (contenidos, sistemas de evaluación). Por lo tanto, los alumnos ingresantes a la universidad en 2015 fueron los primeros en egresar de este nuevo programa.

Los resultados registrados mostraron que por lo menos dos terceras partes de quienes rindieron la prueba de diagnóstico estaban en riesgo de fracaso en sus cursos de Matemática en primer año. El estudio de los desempeños académicos confirmó la asociación entre un bajo desempeño (contestar correctamente menos de un 60% de las preguntas) y perder al menos un curso o examen al cabo del primer semestre.

Estas constataciones y el conjunto de observaciones realizadas por los profesores de Matemática a partir de las actividades habituales de enseñanza y de los registros tomados de las pruebas de evaluación, llevaron a diseñar un cuestionario de múltiple opción de treinta ítems, con tres partes diferenciadas cada una de diez ítems.

La primera parte (nivel I, N1) se refirió a procedimientos de cálculo aritmético o algebraico. El tratamiento de estos contenidos corresponde al ciclo básico de la enseñanza media. Las fallas en estos procedimientos constituyen una de las principales causas de fracaso, de acuerdo a las observaciones efectuadas en las pruebas de evaluación.

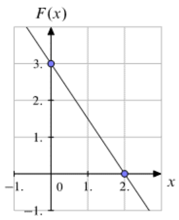
La segunda parte (nivel II, N2) interrogó sobre funciones polinómicas, racionales, exponenciales y logarítmicas, desde una perspectiva centrada en lo algebraico. Estos contenidos corresponden al primer año común de bachillerato. En esta parte se incorporan preguntas que refieren a competencias matemáticas como uso del lenguaje específico, estructuras de razonamiento o sistemas de representación.

La tercera parte (nivel III, N2) se concentró en temas de Cálculo Diferencial y de Geometría, cuya presencia en el currículo ocurre en Uruguay en el último año de bachillerato.

Para ejemplificar el tipo de preguntas del instrumento, se incluyen a continuación dos ítems de cada nivel, en cada caso una pregunta que obtuvo el mayor porcentaje de respuestas correctas y otra pregunta que obtuvo el menor porcentaje de respuestas correctas. Lo resultados completos se presentan en la sección 4.

Nivel 1, pregunta con mayor porcentaje de respuestas correctas (C con 72.64%)

2) Sea F una función lineal cuyo gráfico se adjunta



Entonces su ecuación está dada por:

A) $F(x) = -\frac{3}{2}x + 3$

B) $F(x) = 2x + 3$

C) $F(x) = -2x + 3$

D) $F(x) = \frac{3}{2}x - 3$

Nivel 1, pregunta con menor porcentaje de respuestas correctas (B con 35.85%)

5) Se considera un círculo de radio r cuya área A es πr^2. Si el valor de r se duplica, entonces el área del nuevo círculo resultará ser:

A) $2\pi r^2$

B) $4\pi r^2$

C) $(\pi r^2)^2$

D) $4\pi^2 r^2$

Nivel 2, pregunta con mayor porcentaje de respuestas correctas (D con 71.70%)

18) Se considera una función lineal g, tal que $g(x) = ax + b$, con a positivo, entonces:

A) g tiene una raíz positiva

B) g tiene una raíz negativa

C) $g(0) = -\frac{b}{a}$

D) No se puede conocer el signo de la raíz, sin conocer el signo de b

Nivel 2, pregunta con menor porcentaje de respuestas correctas (B con 23.58%)

12) El valor de la expresión $\log_6 18 + \log_6 4 - \log_6 2$ es:

A) 6

B) 2

C) $\log_3 18$

D) $\log_6 20$

Nivel 3, pregunta con mayor porcentaje de respuestas correctas (A con 51.89%)

24) Dada f definida por $f(x) = \dfrac{1}{(x^2+1)\,\mathrm{L}\,(x^2+1)}$, entonces el dominio de f es:

A) $\mathrm{Dom}\, f = \mathbb{R} - \{0\}$

B) $\mathrm{Dom}\, f = \mathbb{R}^+$

C) $\mathrm{Dom}\, f = \mathbb{R} - \{-1\}$

D) $\mathrm{Dom}\, f = \mathbb{R}^+ - \{1\}$

Nivel 3, pregunta con mayor porcentaje de respuestas correctas (A con 21.70%)

25) Se considera la función $f : [0, 5] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2 - 6x + 5$. El recorrido de la función es el intervalo:

A) $[-4, 5]$

B) $[0, 5]$

C) $[-4, 0]$

D) $[1, 5]$

3 Trayectos diferenciados propuestos

Las carreras de la FIT se pueden agrupar en dos grandes ramas en función del punto de comienzo en los cursos de matemáticas. Las carreras del área informática (Licenciatura o Ingeniería en Informática) junto con la Licenciatura en Ingeniería Audiovisual establecen como punto de inicio los cursos de Introducción al Cálculo A y B (ICA, ICB respectivamente). El resto de las carreras (Ingeniería en Electrónica, Telecomunicaciones, Sistemas Eléctricos de Potencia, Industrial o en Alimentos comienzan con Cálculo 1A y 1B (C1A y C1B respectivamente) y Álgebra 1A y 1B (A1 y A1B, respectivamente) y continúan con Cálculo 2A y 2B y Álgebra 2A y 2B (C2A, C2B, A2A y A2B respectivamente).

Para el ciclo lectivo 2018 se acordó que los cursos de Introducción debían ser realizados por todos los estudiantes que no hubieran obtenido un buen desempeño en las tres partes de la prueba de diagnóstico.

Con la posible excepción de los alumnos que ingresaron revalidando algunas de las asignaturas del área matemática cursada en otra universidad, los ingresantes debían seguir uno de tres posibles recorridos.

Quienes aprobaran todas las secciones del diagnóstico podrían comenzar con los cursos de Cálculo IA y Álgebra IA en el primer bimestre.

Quienes aprobaran las dos primeras secciones de la prueba y no la tercera comenzarían en el primer bimestre con Introducción al Cálculo A y un taller de acompañamiento.

El trayecto a seguir en el segundo bimestre dependería de los resultados obtenidos en este primer bimestre: en caso de aprobar ICA podría continuar con los cursos curriculares, en caso de reprobar ICA se le aconsejaría repetir dicho curso antes de iniciar CIA

Quienes no aprobaran alguno de los primeros niveles, deberían cursar en el primer semestre los cursos de Introducción al Cálculo A y B, además de respectivos talleres específicos en temas principalmente de operatoria.

En la Tabla 1 se explicitan detalladamente estos recorridos a lo largo del primer año.

Tabla 1. Recorridos académicos para el primer año.

	Primer bimestre	Segundo bimestre	Tercer bimestre	Cuarto bimestre	Febrero
No aprueba al menos uno de los dos primeros niveles del diagnóstico (I, II)	ICA Taller de apoyo	ICB Taller de apoyo	A1A C1A	A1B C1B	
Aprueban I y II pero no III	ICA Taller de apoyo	C1A A1A	C1B A1B	C2A A2A	C2B A2B
Aprueban I, II y III	A1A C1A	A1B C1B	A2A C2A	A2B C2B	

4 Resultados obtenidos en el diagnóstico y su correlación con el rendimiento académico en el primer bimestre.

A continuación, presentamos el resultado de la aplicación del diagnóstico a 106 estudiante y el seguimiento de los estudiantes inscritos a los cursos ICA y C1A.

4.1 Resultados obtenidos en el diagnóstico

El diagnóstico fue aplicado a 106 estudiantes. El instrumento reporta un Alpha de Cronbach, [7], de 0.81.
En la Tabla 2, podemos ver la distribución de frecuencias de las respuestas para cada pregunta

Tabla 2. Distribución de resultados del diagnóstico

Pregunta	Opción Correcta	Tabla de Frecuencias A	B	C	D	NC
Pregunta1	C	15.09%	32.08%	**43.40%**	8.49%	0.94%
Pregunta2	A	**72.64%**	16.04%	7.55%	3.77%	0.00%
Pregunta3	D	4.72%	19.81%	18.87%	**56.60%**	0.00%
Pregunta4	C	7.55%	16.04%	**57.55%**	17.92%	0.94%
Pregunta5	B	*53.77%*	**35.85%**	10.38%	0.00%	0.00%
Pregunta6	D	5.66%	9.43%	16.04%	**62.26%**	6.60%
Pregunta7	A	**49.06%**	4.72%	43.40%	1.89%	0.94%
Pregunta8	C	33.02%	8.49%	**39.62%**	16.04%	2.83%
Pregunta9	B	1.89%	**78.30%**	7.55%	9.43%	2.83%
Pregunta10	B	2.83%	**83.96%**	11.32%	1.89%	0.00%
Pregunta11	C	14.15%	1.89%	**59.43%**	16.98%	7.55%
Pregunta12	B	6.60%	**23.58%**	4.72%	*60.38%*	4.72%
Pregunta13	A	**62.26%**	13.21%	12.26%	10.38%	1.89%
Pregunta14	A	**66.04%**	15.09%	9.43%	8.49%	0.94%
Pregunta15	C	27.36%	12.26%	**50.94%**	8.49%	0.94%
Pregunta16	C	19.81%	27.36%	**31.13%**	9.43%	12.26%
Pregunta17	D	11.32%	16.98%	32.08%	**34.91%**	4.72%
Pregunta18	D	9.43%	4.72%	12.26%	**71.70%**	1.89%

Pregunta19	D	16.04%	5.66%	17.92%	**55.66%**	4.72%
Pregunta20	C	24.53%	11.32%	**48.11%**	4.72%	11.32%
Pregunta21	C	22.64%	36.79%	**33.02%**	6.60%	0.94%
Pregunta22	B	8.49%	**33.96%**	15.09%	33.96%	8.49%
Pregunta23	D	14.15%	26.42%	13.21%	**40.57%**	5.66%
Pregunta24	A	**51.89%**	19.81%	13.21%	11.32%	3.77%
Pregunta25	A	**21.70%**	<u>*49.06%*</u>	4.72%	17.92%	6.60%
Pregunta26	A	**42.45%**	15.09%	24.53%	12.26%	5.66%
Pregunta27	B	10.38%	**48.11%**	20.75%	12.26%	8.49%
Pregunta28	B	26.42%	**35.85%**	16.98%	14.15%	6.60%
Pregunta29	B	10.38%	**39.62%**	30.19%	7.55%	12.26%
Pregunta30	D	19.81%	10.38%	25.47%	**40.57%**	3.77%

La opción correcta de cada pregunta está resaltada en negritas y los casos donde algún distractor obtuvo más respuestas que la opción correcta están resaltadas en cursiva subrayada.

Se agruparon los resultados obtenidos por cada nivel, con dos categorías, resultados menores de 60% de respuestas correctas y resultado mayor o igual al 60% de respuestas correctas, dando un total de 8 clases de posibles resultados, un resumen se presenta en la Tabla 3.

Cada lugar de las ternas de la primera columna de la tabla está ocupado con 1 o 0 de acuerdo con haber aprobado o no el nivel correspondiente al lugar en la terna.

Tabla 3. Distribución de resultados del diagnóstico

Código	N1	N2	N3	
111	Aprobado	Aprobado	Aprobado	22.64%
110	Aprobado	Aprobado	No Aprobado	12.26%
101	Aprobado	No Aprobado	Aprobado	2.83%
100	Aprobado	No Aprobado	No Aprobado	15.09%
011	No Aprobado	Aprobado	Aprobado	1.89%
010	No Aprobado	Aprobado	No Aprobado	7.55%
001	No Aprobado	No Aprobado	Aprobado	0.94%
000	No Aprobado	No Aprobado	No Aprobado	36.79%

Únicamente el 22.64% de la población obtuvo nota aprobatoria en los tres niveles mientras que el 36.79% no obtuvo nota aprobatoria en ninguno de los niveles. Si consideramos la cantidad de estudiantes que no lograron aprobar el primer nivel tenemos que aproximadamente el 47% de la población presenta deficiencias en las habilidades de operatoria que se corresponden con los contenidos y habilidades desarrolladas durante el ciclo básico de la enseñanza media. Por otra parte, un 12.26 % de los estudiantes logran aprobar los dos primeros niveles de la prueba, como se verá más adelante esta población pudiera estar en condiciones de seguir los trayectos convencionales de sus respectivas carreras.

4.2 Trayectos efectivamente recorridos por los estudiantes y su relación con el rendimiento académico

Como se explicó en la introducción de este documento, los estudiantes no podían ser obligados a recorrer trayectos alternativos en función de sus resultados en la prueba de diagnóstico. A continuación, se analizan los trayectos recorridos por los estudiantes y los resultados obtenidos en los cursos correspondientes.

Para el primer bimestre se inscribieron a ICA 59 de 106 y a C1A se inscribieron 31 de106. La discrepancia de 16 individuos es por ser rematriculados.

En ICA aprobaron 28 de 59 estudiantes y no aprobaron 31 de 59 estudiantes; para este curso se ofreció un Taller de apoyo con 12 sesiones.

Interesaba saber la incidencia que este taller tuvo en los niveles de aprobación. Para estudiar este efecto, se agrupó en dos categorías a los estudiantes: los que participaron en 9 o más sesiones, por un lado, y los que lo hicieron en menos de 9 sesiones. Resultó que 41 de 59 participaron menos de 9 sesiones y 18 de 59 participaron en 9 o más sesiones. El resumen de la distribución de aprobación del curso vs. Participación en el Taller se puede ver en la Tabla 4.

Tabla 4. Distribución de resultados del aprobación del curso ICA con la participación en el Taller

	Participación Taller		
	No	Si	Total general
No Aprobado	27	4	31
Aprobado	14	14	28
Total general	41	18	59

Hay evidencia de que los eventos de Aprobar el curso y la Participación en Taller no son independientes (usando una prueba de hipótesis sobre la independencia entre aprobar el curso y participar en el taller, [8], con un valor P=0.002. Además, el número de estudiantes que no aprobaron al curso y no fueron al taller es tres veces mayor con respecto a los estudiantes que no aprobaron el curso y si asistieron al taller. La no asistencia al taller parece por lo tanto estar altamente correlacionada con la no aprobación del curso para aquellos estudiantes con deficiencias.

La relación entre la aprobación o no aprobación con respecto al tipo de calificaciones en el diagnóstico se puede ver en la Tabla 5.

Tabla 5. Distribución de aprobación o no aprobación del curso ICA con respecto a los resultados del diagnostico

	Aprobación Curso		
Código	No Aprobado	Aprobado	Total general
111	0	4	4
110	2	3	5
101	0	2	2
100	5	4	9
010	2	4	6
001	1	0	1
000	21	11	32
Total general	31	28	59

La mayoría de los estudiantes que no aprobaron el curso de ICA son aquellos que no lograron aprobar ninguno de los niveles del diagnóstico A partir de este resultado; pudiera asumirse que los estudiantes necesitarían un curso más básico que el de ICA.

Para Cálculo 1 A se inscribieron 31 estudiantes, aprobaron 19 y no aprobaron 12. De estos estudiantes, 18 cursaron Cálculo I A desestimando la recomendación de cursar ICA. Por otra parte, 9 de ellos no aprobaron 2 de los tres niveles de la prueba diagnóstico y 9 no aprobaron solo un nivel del diagnóstico. La distribución de aprobados y no aprobados con respecto a la recomendación sobre ICA se puede ver en la Tabla 6.

Tabla 6. Distribución de resultados aprobación del curso C1A con respecto al trayecto sugeriod

	Sigue Recomendación			
	No; 2 Niveles no aprobados	No; 1 Nivel no aprobado	Si	Total general
No Aprobado	7	2	3	12
Aprobado	2	7	10	19
Total general	9	9	13	31

Es posible observar que, entre los estudiantes no aprobados, la proporción de los que no siguieron la recomendación de inscribirse a ICA es el doble de la proporción de los que la siguieron. En la Tabla 7 podemos ver la distribución de aprobación y no aprobación con respecto a los resultados del diagnóstico.

Tabla 7. Distribución de aprobación o no aprobación del curso con respecto a los resultados del diagnósticoón

	Aprobación Curso		
Código	No Aprobado	Aprobado	Total general
111	3	10	13
110	1	6	7
101	1	0	1
100	4	1	5
011	1	1	2
010	0	1	1

000	2	0	2
Total general	12	19	31

Es contundente el hecho de que no hubo estudiantes que aprobaran el curso habiendo reprobado todos los niveles del diagnóstico.

5 Conclusiones y trabajos futuros

Un primer resultado a destacar es la asociación entre participar asiduamente en el taller y aprobar el curso. Esto puede interpretarse como una evidencia en favor de incluir en el currículo esta actividad.

Una cuestión a investigar es la posibilidad de extender a otras asignaturas la experiencia de taller y estudiar su efecto en los aprendizajes.

En segundo lugar, puede señalarse el carácter predictor del instrumento de diagnóstico, en relación con anticipar la posibilidad de fracaso. La evidencia en este sentido surge tanto de considerar el resultado del diagnóstico en relación con los niveles de aprobación, como de desagregar la población en base al criterio de si optaron o no por seguir la sugerencia que recibieron.

Esto abre la posibilidad de diseñar trayectos diferenciados, adecuados al punto de partida de los ingresantes, y que permitan acompañar su desarrollo previniendo frustraciones académicas, aún con el costo de extender la duración curricular de la carrera.

En conjunto, estos dos resultados constituyen un insumo para el proceso de rediseño que las carreras de la FIT están transitando. Para esto, se está continuando el estudio de los resultados incluyendo los del segundo bimestre, para disponer de una evidencia complementaria.

Referencias

1. Bourel, M.; Díaz, J.; Lacues, E.; Rabín, F.; Sabattino, J: Algunas cuestiones para pensar sobre el ingreso de los estudiantes a las carreras de ingeniería en Uruguay. *VII Congreso Iberoamericano de Educación Matemática*, pp. 1758–1765, Montevideo. Uruguay. Recuperado de: http://www.cibem7.semur.edu.uy/7/actas/pdfs/737.pdf, (Setiembre de 2013).
2. Unidad de Enseñanza: *Informe Herramienta Diagnóstica al Ingreso Generación 2012.* Montevideo: Facultad de Ingeniería, Universidad de la República. (2013).
3. Otheguy, G.; Incidencias de la Reformulación 2006 del Bachillerato de Educación Secundaria en el Desarrollo de Competencia Matemática. *Tesis de Maestría*, Montevideo: Universidad Católica del Uruguay. (2017).
4. Álvarez, W.; Lacués, E.; Pagano, M.: Diseño y validación de un instrumento predictor del éxito académico de alumnos ingresantes a la universidad, *Decimoséptima Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa* (RELME 17), Santiago de Chile, (2003).
5. Álvarez, W; Lacués, E; Pagano, M.: Diseño y validación de un instrumento predictor del éxito académico de alumnos ingresantes a la universidad, *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, vol. 17, pp. 116–129, (2004).
6. Álvarez, W; Czerwonogora, A; Gisolabella, G; Lacués, E; Leymonié, J; Pagano, M.: La matemática al ingreso en la universidad. Un estudio comparativo de cuatro Facultades en el Uruguay. *Revista Iberoamericana de Educación*, núm 42, Madrid, OEI, http://www.rieoei.org/deloslectores/1636Villar.pdf, (2007).
7. Bland, J. M.; Altman, D. G.: Statistics notes: Cronbach's alpha, *BMJ,* 314 (7080): 572, (1997). doi: 10.1136/bmj.314.7080.572.
8. Crow, E. L.; Davis, F. A.; Maxfield, M. W: *Statistics Manual (Dover Books on Mathematics)*, Dover Publications, Inc., pp. 97–100 (2011).

Eje 2

Extensión

El Silencio de lo Femenino en el Estudio de la Reina de las Ciencias: Reivindicación y Nueva Perspectiva

D'Andrea Leonardo Javier[1]
[1] Departamento de Ciencias Básicas, Facultad Regional Avellaneda, Universidad Tecnológica Nacional
Av. Mitre 750, Avellaneda, Provincia de Buenos Aires
dandrealj@yahoo.com

Resumen. Es común que muchas veces los estudiantes en el nivel secundario y en el nivel universitario nos pregunten a los profesores en Matemática, por qué no suelen aparecer teoremas o al menos alguna mención de mujeres matemáticas. Lo cierto que es que las mujeres se han tenido que enfrentar a diversos desafíos frente a la discriminación de siglos de antigüedad basada en su género para ser aceptadas como iguales en los círculos matemáticos, y aún en mayor medida frente a las dificultades de poder acceder a buenos puestos de trabajo en la enseñanza. Se propone un recorrido histórico por los aportes de las grandes mujeres matemáticas y la posibilidad de incluir sus trabajos en la enseñanza de materias como Análisis Matemático, Álgebra y Geometría. El primer paso para una reivindicación es visualizar esta situación y luego, proponer una cambio de perspectiva curricular y pedagógica.

Palabras Clave: Género, Mujeres Matemáticas, Enseñanza, Historia de la Matemática.

1 Introducción

"Las matemáticas son cosa de hombres jóvenes"
Hardy, en Hersh y John-Steiner, 2012.

Es común que muchas veces los estudiantes en el nivel secundario y en el nivel universitario nos pregunten a los profesores en Matemática, por qué no suelen aparecer teoremas o al menos alguna mención de mujeres matemáticas. La cita de Hardy revela la frecuente creencia que esta ciencia es propia de los hombres y más, de hombres jóvenes. Hersh y John-Steiner afirman que "las mujeres se han tenido que enfrentar a diversos desafíos (…) a una discriminación de siglos de antigüedad y que se basa en su género" [1] para ser aceptadas como iguales en los círculos matemáticos, y aún en mayor medida frente a las dificultades de poder acceder a buenos puestos de trabajo en la enseñanza.

Esta discriminación la describe Morgade cuando afirma que "la historia del mundo de occidente muestra que el sólo hecho de ser mujer ha implicado por siglos subordinación y exclusión" [2]; leyendo por ejemplo en Rousseau que respecto a la mujer y el saber académico, la mujer observa, el hombre razona; o en Darwin, la idea que el hombre tiene mayor capacidad intelectual que la mujer en lo que respecta al pensamiento, al razonamiento.

En 1926, cuando describe las premisas psicológicas de la educación mixta, Vygotsky afirma que las diferencias entre los femenino y lo masculino responden en su mayoría a exigencias de carácter social:

> (…) las diferentes capacidades para algunas materias, por ejemplo, la cacareada ineptitud de las niñas para la matemática o para una actividad dinámica, tampoco son dotes primariamente condicionadas, sino derivadas del papel histórico de la mujer, en el que la diferenciación de las funciones sociales la condenaba al estrecho círculo de las cuatro K (Kinder, Küche, Kleider, Kirche [en alemán]), o sea: Hijos, Cocina, Vestidos e Iglesia. [3]

Lo cierto es que muchos son los ejemplos que demuestran que la mujer ha podido avanzar en su formación intelectual y dejar sus aportes en la Matemática, aún a pesar de muchos obstáculos. Por ejemplo, Marie-Sophie Germain (1776-1831) asume una identidad de un antiguo estudiante "Antoine-Auguste Le Blanc" para poder presentar sus trabajos en un congreso en París (en 1794) exclusivo para hombres, y cuando "Lagrange observó que las soluciones del señor Le Blanc mostraban una extraordinaria mejora, (…) Germain se vio obligada a revelar su identidad" [1]. Luego, este famoso matemático se vuelve su mentor y amigo.

Otro de los importantes aportes de Germain refieren a los trabajos del "príncipe de la Matemática" Carl Gauss, quien expresó luego de conocer su identidad:

> Cuando una persona que pertenece al sexo que, según nuestras costumbres y prejuicios, debería enfrentarse a un número de dificultades infinitamente superior a las que se tienen que enfrentar los hombres para familiarizarse con estos espinosos estudios y logra, pese a todo, superar esos obstáculos y penetrar las partes más oscuras de

> estas investigaciones, entonces esa persona, sin duda, debe de estar dotada del más noble de los valores, de un talento extraordinario y de un genio superior. (Gauss, citado en [1])

Estas palabras de Gauss y la falta de mención de mujeres matemáticas en la historia y en la enseñanza de esta ciencia, dan cuenta de lo que Barrancos afirma sobre la desigualdad de estatus entre los sexos que “ha excluido en gran medida a las mujeres del relato de la Historia hasta muy reciente data” [4]. Por su parte, Morgade explica que “cuando las valorizadas matemática, física o química reciben el nombre de “ciencias duras”, serían de alguna manera asimiladas a lo masculino” [2]; dando razón a lo que expresa Gauss como dificultades infinitamente superiores a enfrentar.

El presente trabajo invita a reflexionar sobre la ausencia o poca mención de la participación de mujeres en la Matemática, tanto en el nivel secundario como universitario. Tal como menciona Morgade: “la escuela refuerza la visión de que el mundo público de “las cosas importantes” está protagonizado por hombres” [2].

2 La omisión en la historia y la enseñanza de la Matemática

*“Cuando Sofía habla, su rostro se ilumina con tal expresión de amabilidad femenina y de inteligencia superior que resulta sencillamente deslumbrante. (...) Como erudita, la caracterizan su clarida*d poco habitual y su precisión en la *forma de expresarse… comprendo por qué Weierstrass la consideraba la más capaz de su alumnos”*
Gosta Mittag-Leffler, en Hersh y John-Steiner, 2012.

La descripción en el epígrafe del alumno de Weierstrass, matemático reconocido por sus importantes e imprescindibles aportes en el Análisis Matemático, referida a la matemática Sofía Vasilyevna Kovalevskay (1850-1891) es un ejemplo más de la importancia de reconocer el trabajo de las mujeres en las ciencias exactas. No es frecuente oír en una clase de estudio de funciones donde se trabaja con los teoremas de Weierstrass y de Cauchy, que una de sus colaboradoras más importantes es “la primera mujer en Europa en obtener un doctorado en matemáticas (… siendo…) su tesis doctoral (…) conocida hoy en día con el nombre de teorema de Cauchy-Kovalevskay” [1].

¿A qué se debe la omisión de los aportes femeninos en las clases de Matemática? ¿Es desconocimiento por parte de los docentes o es desinterés por comentar que hay grandes mujeres matemáticas con importantes aportes en esta ciencia?

Podemos comprender que tanto el desconocimiento como dicho desinterés, puede deberse a que “ciertas materias y disciplinas eran consideradas naturalmente masculinas (…) ciertas carreras y profesiones eran consideradas monopolios masculinos, estando prácticamente vedadas a las mujeres” (Silva, [5]).

¿Cómo afecta este “silencio” de lo femenino en el estudio de la reina de las ciencias? Tal como lo plantea Silva [5] en la dinámica de género en educación, podemos relacionar estas omisiones con cuestiones de acceso. Por ejemplo, cuando “los estereotipos y los preconceptos de género (… son…) internalizados por los propios profesores y profesoras que inconscientemente (… esperan…) cosas diferentes de niños y de niñas” [5], determinan la carrera educacional de esos jóvenes, reproduciendo desigualdades de género; ya que al no reconocer ni dar a conocer que en áreas como la Matemática, tanto mujeres como hombres han sido y son capaces de desarrollar avances por igual.

Consideramos importante la reflexión que Silva hace respecto a que la perspectiva feminista implica una verdadera trasformación epistemológica; ya que no se trata únicamente de una cuestión de acceso, sino de perspectiva: “En la medida en que refleje la epistemología dominante, el currículum es también claramente masculino. Es la expresión de la cosmovisión masculina” [5]. Es decir, relacionándolo con la enseñanza de la Matemática, no es casual que se desconozca o no se preste atención a los aportes de mujeres matemáticas en los contenidos que se trabajan en las clases. En los diseños curriculares del nivel secundario y en los contenidos curriculares de las universidades de las diferentes ramas de la Matemática, no suelen mencionarse teoremas o aportes de mujeres.

Para fundamentar que existen aportes de mujeres matemáticas que podrían o deberían incluirse en los contenidos de dichos currículums, podemos mencionar “a una de las más grandes algebristas del siglo XX” [1], Emmy Amalie Noether (1882-1935) quien trabajó junto a Hilbert y Klein (famosos matemáticos que se suelen mencionar en el estudio de la Geometría, el Álgebra y la Topología). El primer hallazgo de esta matemática, fue el importante teorema de Noether en Física teórica, que establece una correspondencia entre las simetrías diferenciales y las leyes de la conservación; y el cual además permitió nuevas formulaciones en la teoría de la relatividad general de Einstein.

Hersh y John-Steiner mencionan que “el enfoque conceptual de Noether en álgebra desembocó en todo un corpus de principios que unificaba el álgebra, la geometría, el álgebra lineal, la topología y la lógica” [1], haciendo referencia a la nueva teoría de “ideales” que ella desarrolló y que contribuyó a convertir la especialidad algebraica denominada teoría de anillos en una de las cuestiones matemáticas más importantes.

Conway, Bourque y Scott afirman que en “la ciencia moderna la representación de lo científico es masculina” [6] y agregan que “la participación de las mujeres en actividades que forman parte de la ciencia moderna no ha transformado necesariamente las relaciones aceptadas entre lo científico y la naturaleza” [6]; refiriéndose a que, al considerar la asignación de papeles sociales, estos no son biológicamente prescriptos sino que responden a una conceptualización cultural y de organización social.

Estas ideas responden a nuestro interrogante sobre las omisiones de los aportes femeninos en la enseñanza de la Matemática. No debe olvidarse que haber naturalizado dichas omisiones, anulan la visualización de las posibilidades de un cambio, tal como Becerra denuncia: las representaciones hegemónicas respecto de los géneros “en las instituciones educativas son producto de los sujetos que las habitan y a la vez producen sujetos, por lo cual marcan los límites y las posibilidades de la subjetividad y la libertad” [7].

No reconocer a las mujeres matemáticas, ¿responde a una violencia simbólica? Considerando la definición de dicho tipo de violencia según Bourdieu y Passeron (1974) como “la (re)presentación de una realidad como “dada” (por naturaleza) ocultando los fundamentos históricos (las relaciones de poder) que le dieron origen” [7]; la respuesta es afirmativa. No mencionar en las clases de Matemática a mujeres que en dicha ciencia han dado aportes de gran importancia, junto a los realizados por hombres que sí son mencionados, es claramente un ejemplo de discriminación histórica.

Respecto a esta discriminación, podemos mencionar a Morgade cuando asegura que el currículo escolar no es únicamente aquello que se hace o menciona, sino que también incluye “mensajes a través de aquello silenciado, aquello que debería estar pero no está, aquello de lo que no se habla; el currículo “evadido” (…)” [2].

3 Reivindicación histórica

*“Se verá entonces e*n qué medida podrá ella, en igualdad con el hombre, salir del papel de excelente alumna o de *colaboradora perfecta y sumarse a los sabios cuya obra ha abierto caminos nuevos y lleva la marca del genio”*
Dubreil-Jacotin, M. L., 1963.

A partir de lo afirmado en apartados anteriores, consideramos imprescindible visualizar en nuestras clases de Matemática a las mujeres que estudiaron y aportaron en esta ciencia, pero no sólo como la mejor de las discípulas o la colaboradora de algún gran sabio - según se describe en el epígrafe -, sino también desde sus creaciones y/o aportes, habida cuenta la existencia de estos últimos en la historia.

Si bien se han ido mencionando algunos de los trabajos matemáticos de las mujeres, en este apartado nos centraremos en esa distinción entre acompañar en las producciones de los sabios y ser creadoras propias de avances en la Matemática.

Dubreil-Jacotin [8] ubica a Hipatía como la primera mujer matemática en la antigüedad griega, nacida en Alejandría en el año 370 d. C: colaboró con la enseñanza de la filosofía de Platón, de Aristóteles, las obras de Diofanto y las secciones cónicas de Apolonio de Perga, y realizó un comentario de las tablas de Tolomeo, que llega a nosotros bajo el nombre Teón.

Este ejemplo de mujer matemática que colabora en la enseñanza de la obra de hombres en la ciencia, puede completarse con: Catherine de Parthenay como la mejor alumna de Viète, el creador del Álgebra; Cristina, reina de Suecia, y Isabel de Bohemia discípulas de Descartes; Sofía, electora de Hannover y su hija Sofía Carlota, reina de Prusia, colaboradores de Leibniz.

También se pueden mencionar el estudio de Carolina de Brandeburgo Anspach y Emilia de Breteuil, marquesa de Châtelet, de los trabajos de Newton; y los largos cálculos realizados para Clairaut, por Madame Lepaute, sin ni siquiera ser citada por él al finalizar el trabajo.

Pero si nos acercamos a otras mujeres brillantes que han realizado aportes, independientemente de ser auxiliares o no de hombres matemáticos; encontraremos a María Gaetana Agnesi (1718-1799) de Italia. Ella fue la primera matemática profesora de una facultad y entre sus trabajos, podemos mencionar el denominado Instituzioni Analitiche en el cual expone la solución de varios problemas de geometría, determinados e indeterminados, desde el álgebra ordinaria.

En su segundo tomo, Agnesi se dedica al análisis infinitesimal, rama de la Matemática muy reciente para entonces. Según Dubreil-Jacotin, la contribución al estudio de curvas de tercer grado “fue suficientemente grande como para que una de ellas lleve todavía su nombre: la cúbica de Agnesi” [8]. Se ha establecido que esta curva es una aproximación de la distribución del espectro de la energía de los rayos X y de los rayos ópticos – Fig. 1 –.

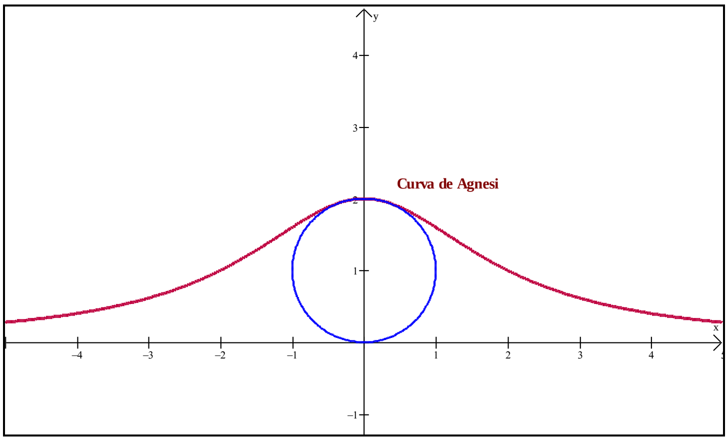


Fig. 1: “Curva de Agnesi” y $x^2 = a^2 (a - y)$ con a = 2

A pesar de la hostilidad paterna que atravesó (trabajó durante las noches envuelta en sábanas, cuando le quitaban los vestidos de su habitación para impedir que se levantara, y hasta se la privó de luz y fuego, para que no continuará sus lecturas), Sophie Germain – Fig. 2 – se dedicó a la demostración del Teorema de Fermat hasta el grado 100 y escribió artículos sobre historia y filosofía de las ciencias, que son citados por Augusto Comte en su curso de filosofía positiva.

Por su parte, la obra principal de Mary Fairfax (o Somerville) - nacida en 1780 en Escocia – fue “traducir y hacer conocer a sus contemporáneos la mecánica celeste de Laplace, a la que agregó notas personales de verdadero valor” [8].

A lo mencionado de Sonia Kovalewski – Fig. 2 –, cuyo nombre de soltera era Corvino-Krukowski, podemos agregar que halló en su memoria “Sobre la rotación de un cuerpo sólido alrededor de un punto fijo” un nuevo caso de integrabilidad, en el cual es posible obtener para las ecuaciones del movimiento de un sólido (móvil alrededor de un punto fijo) una “integral primera” algebraica, diferente de la integral de la fuerza viva y de la integral de las áreas para condiciones iniciales arbitrarias. Luego, Husson demostraría que son únicos los tres casos de integrabilidad: el de Euler y Poinsot, el de Lagrange y Poisson (al cual Jacobi dio solución del problema por funciones elípticas) y el de Kovalewski.

Respecto a Emmy Noether – Fig. 2 –, debido a su tesis “Sobre los sistemas completos de invariantes para las formas bicuadráticas ternarias” y que presentó en 1907, recibió el apoyo de Hermann Weyl y de David Hilbert:

> Según una anécdota que circulaba en Gotinga, Hilbert para defenderla consideró adecuado declarar al Consejo de la Universidad: “No veo por qué el sexo de la candidata es un argumento contra su nombramiento como Privatdocent; después de todo no somos una establecimiento de baños…”. [8]

Los trabajos de Noether acerca de los sistemas hipercomplejos, la teoría de la representación y el álgebra no-conmutativa se caracterizan por el papel que desempeñan los conceptos de módulo, ideal y automorfirmo; y sobre todo porque sus teorías son válidas sea cual fuere el cuerpo fundamental, “mientras que en Frobenius y sus sucesores directos ese cuerpo era el de los números complejos o el de los números reales” [8]. Por otra parte, mediante su teoría del “producto cruzado” alcanzó en álgebra y en aritmética resultados de gran profundidad, donde los métodos hipercomplejos se aplican a los difíciles problemas de la teoría de cuerpos de clases.

Sin duda, compartimos lo que afirma Dubreil-Jacotin acerca de Noether: “su obra se hace merecedora de figurar, no solamente en el primer rango de las matemáticas, sino también en la de los grandes matemáticos” [8].

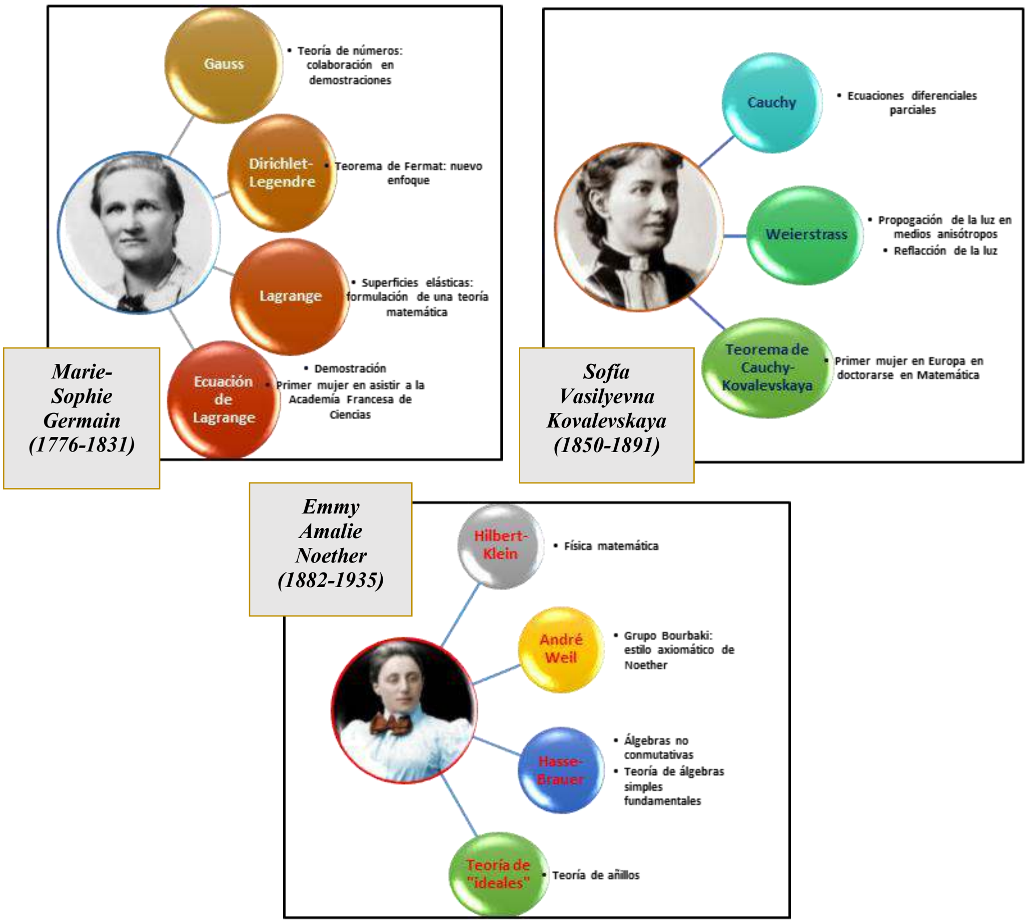


Fig. 2: Mujeres matemáticas y algunos de sus aportes.

4 Conclusiones

"Las mujeres atribuyeron sus dificultades en matemática predominantemente a factores personales ("me cuesta"), mientras que los varones, mayoritariamente, las atribuyeron a que no estudian lo suficiente o bien (...) siempre sin poner en duda su capacidad o habilidad"
Morgade, G., 2001.

Lo primero que podemos concluir es que a pesar de todos los avances logrados por las luchas feministas, que han permitido una mayor visualización de la diversidad de géneros y la incorporación de la educación sexual en las escuelas, "el núcleo duro del sistema de organización patriarcal (…) todavía no ha podido ser removido en Argentina" [7].

Debemos, en principio, darnos cuenta que "el orden de los prejuicios no sólo es una consecuencia del sentido común acrítico, sino que ha sido una larga construcción científica, especialmente de la que se desarrolló con la expansión de la modernidad en el siglo XXI" [4]. Por lo que para realmente poder intentar un cambio en lo que respecta a la omisión del trabajo de las mujeres en ciencia y, en particular, en Matemática; debemos iniciar por llamar la atención de este hecho.

Tal como lo cuestiona Silva respecto a la relación entre la formación de la masculinidad y la posición privilegiada de poder de los hombres en la sociedad:

> ¿Cómo el currículo está implicado en la formación de esa masculinidad? ¿Qué conexiones existen entre las formas como el currículo produce y reproduce esa masculinidad y las formas de violencia, control y dominio que caracterizan el mundo social más amplio? Este tipo de investigación muestra que las cuestiones de género tienen implicaciones que no son sólo epistemológicas: tienen que ver con problemas y preocupaciones que son vitales para el mundo y la época en que vivimos. [5]

Entre las posibles alternativas a buscar el cambio, nos sumamos a lo que Silva define como una posible solución: "no consistiría en una simple inversión, sino en construir currículos que reflejen, de forma equilibrada, tanto la experiencia masculina como la femenina" [5]; y también, para llevar esto adelante, coincidimos con las propuestas que Morgade ejemplifica como superadoras:

> • Criticar y modificar el uso de la lengua cotidiana en la escuela. (…)
>
> • Ampliar la perspectiva de estudio de las ciencias sociales (…) "Agregar las mujeres" u otros grupos subordinados en el estudio de los diferentes períodos (…)
>
> • Enriquecer el tratamiento de los temas (en particular los de las ciencias exactas y naturales) con propuestas atractivas para los diferentes grupos (…). [2]

Este recurrido por el desarrollo de los aportes femeninos en una ciencia "asociada a los hombres", puede brindar una reflexión para su inclusión crítica en las clases, hacer visible los aportes de las mujeres en el trabajo con los conocimientos durante la enseñanza de materias como el Análisis Matemático, Álgebra y Geometría en el nivel universitario; y también su adaptación en la Matemática en el nivel primario y secundario.

Creemos que llevar adelante configuraciones de clases que den cuenta de lo femenino en las ciencias duras, puede enriquecer el tratamiento de los temas como lo sugiere Morgade [2]. Hasta podemos considerar esta propuesta como los primeros pasos por superar problemáticas de género que van más allá de cuestiones matemáticas: ¿por qué el número de estudiantes hombres de carreras de ingeniería suelen superar ampliamente al de estudiantes mujeres? En 2008, por ejemplo, en la Universidad Tecnológica Nacional - Facultad Regional Avellaneda en la provincia de Buenos Aires un estudio estadístico sobre estudiantes de ingeniería da cuenta que "el 90% de la población estudiantil corresponde al género masculino y el 10% restante al femenino" (Simone, Pazos y Wejchenberg, [9]).

Trabajar por revertir estas problemáticas implica un cambio de perspectiva, una postura como docentes y estudiantes, donde se esté atento a trabajar con lo masculino como con lo femenino, pero sin insistir en la diferencia sino en el complemento de ambas visiones. Un desafío que es imprescindible llevar adelante.

Referencias

1. Hersh, R.; John-Steiner, V.: Matemáticas. Una historia de amor y odio. Editorial Paidós (2012)
2. Morgade, G.: Aprender a ser mujer, aprender a ser varón. Ediciones Novedades Educativas (2001)
3. Vygotsky, L. S.: Psicología pedagógica. Aique Grupo Editor (2005)
4. Barrancos, D.: Mujeres, entre la casa y la plaza. Sudamericana (2008)
5. Silva, T.: Espacios de Identidad. Una introducción a las teorías del currículo. Octaedro (1999)
6. Conway, J., Bourque; S., Scott, J.: El Concepto de género. Lamas, M.: El género: la construcción cultural de la diferencia sexual. Porrúa (1996)
7. Becerra, M.: Representaciones sobre ciudadanía, maternidad y género en la educación argentina en el Centenario y el Bicentenario. En: Actas del V Congreso de Estudios Comparados en Educación, SAECE. Sociedad Argentina de Estudios Comparados en Educación, Buenos Aires (2015)
8. Dubreil-Jacotin, M. L.: Mujeres matemáticas ilustres. Le Lionnais, F.: Las grandes corrientes del pensamiento matemático. EUDEBA, pp. 276-288 (1963)
9. Simone, V.; Pazos, C. y Wejchenberg, D.: Los alumnos de la UTN – Facultad Regional Avellaneda: entre el estudio y el trabajo. Documento de trabajo N°2, ISSN 1851-0930. Monitoreo de Inserción de Graduados. Laboratorio MIG ediciones (2008)

Eje 3

Aplicaciones de la Matemática

Cancelación Adaptativa de Ruido Acústico Periódico Basada en la Teoría de Lyapunov

Patricia N. Baldini[1], Guillermo R. Friedrich[1]
[1] Grupo SITIC, Departamento de Ingeniería Electrónica, Facultad Regional Bahía Blanca.
Universidad Tecnológica Nacional
11 de Abril 462, Bahía Blanca
{pnbaldi, gfried}@frbb.utn.edu.ar

Resumen. La necesidad de reducir la contaminación sonora en todo ambiente laboral por el cuidado de la salud o el confort de los trabajadores, impulsó el desarrollo de diversas metodologías de atenuación de ruido. Para el caso particular de ruido de baja frecuencia, las técnicas que resultan efectivas se conocen como control activo de ruido. Este tipo de control se basa en generar nuevas ondas de presión acústicas, adecuadas para lograr interferencia destructiva mediante superposición lineal con el ruido a cancelar. En este trabajo se presenta un esquema de control activo de tipo adaptativo. Los coeficientes del controlador se actualizan en el tiempo mediante un algoritmo fundamentado en la teoría de Lyapunov. La estabilidad en el sentido de Lyapunov garantiza la convergencia asintótica a cero del ruido residual en cierta región del espacio, independientemente de las propiedades estadísticas del ruido a atenuar. La efectividad del control propuesto se verifica por simulación.

Palabras Clave: Control Activo de Ruido, Estabilidad de Lyapunov, Control Adaptativo, Ruido Periódico.

1 Introducción

El concepto de contaminación acústica hace referencia a los niveles excesivos de ruido y vibraciones provocados por la actividad humana, que se constituyen en causa de una gran variedad de efectos nocivos para las personas y su entorno. Está demostrado que la exposición a altos niveles de ruido, además de provocar la degradación progresiva del aparato auditivo, también genera estrés, pudiendo llegar a dañar el sistema nervioso. Otro aspecto a destacar es la interferencia en la comunicación, lo que lleva a elevar la voz forzando las cuerdas vocales. Por otro lado, se comprueba la reducción del rendimiento físico y la pérdida de concentración y atención. Para mitigar estos problemas las técnicas de reducción de ruido acústico cobran cada día mayor importancia. Tradicionalmente, el control de ruido ha venido realizándose mediante las denominadas técnicas pasivas, consistentes en la introducción de barreras físicas o silenciadores que intentan aislar la fuente de ruido del entorno que le rodea. Sin embargo, a medida que se reducen las frecuencias de la señal ruidosa que se desea silenciar, las técnicas pasivas requieren un significativo incremento del volumen y el costo, tornándose ineficientes. En todo caso, representan un sistema poco flexible que no contempla posibles cambios del entorno acústico.

La alternativa actual para estos casos la representa el control activo de ruido (CAR), basado en la generación controlada de ondas sonoras, denominadas comúnmente antirruido. Estas ondas se superponen con el campo ruidoso original de forma de crear, por interferencia destructiva, una zona de silencio o, al menos, un campo resultante del menor nivel sonoro posible en determinadas regiones del espacio, tanto más grandes cuanto mayores sean las longitudes de onda del ruido a cancelar.

Si bien estas técnicas de CAR se propusieron hace años, solo el reciente desarrollo de herramientas de procesamiento adaptativo de señales sumado al avance tecnológico de los procesadores digitales de señal, hicieron posible su implementación práctica [1], [2], [3], [4], [5], [6].

En este trabajo se analiza el desempeño de un algoritmo eficiente para el controlador de sistemas CAR, diseñado en base a un nuevo enfoque, según se muestra en la Fig. 1. Se consideran controladores implementados mediante filtros transversales cuyos coeficientes se ajustan adaptativamente en base a una función de energía dependiente del error de cancelación, en lugar de plantear la optimización de una función objetivo. Siguiendo la teoría de estabilidad de Lyapunov se garantiza la convergencia asintótica a cero del error, sin necesidad de estimaciones del gradiente [7], [8], [9]. El diseño no depende de las propiedades estadísticas de las señales, generalmente desconocidas, y su complejidad computacional es comparable a la del algoritmo de mínimos cuadrados con filtrado previo (FxLMS) comúnmente usado. El algoritmo presenta buena velocidad de convergencia y valor alcanzable de estado estacionario del error muy próximo a cero. La estabilidad está garantizada por la teoría de Lyapunov aun en presencia del inevitable ruido de medida o de perturbaciones aleatorias.

Se consideran procesos de ruido de banda angosta o periódico ya que en ambientes industriales la contaminación acústica es frecuentemente ocasionada por sistemas que tienen algún tipo de funcionamiento cíclico y presentan características tonales bastante definidas. Ejemplos típicos son las máquinas rotativas, como motores, ventiladores y bombas, y los flujos pulsantes de líquidos o gases producto de combustión o restricciones de flujo. Por otra parte, los transformadores eléctricos emiten ruido causado por vibraciones mecánicas, conformado por armónicos pares de la frecuencia de red. Los ruidos de tipo periódico son linealmente predecibles y, por lo tanto, factibles de ser cancelados.

Se realizan varias experiencias de simulación para demostrar la eficiencia del esquema bajo estudio, siguiendo la bibliografía [10], [11], [12], para un sistema de control monocanal con ruido de banda angosta. La metodología propuesta se puede extender fácilmente a otro tipo de procesos de ruido y de sistemas.

2 Fundamentos del CAR en Configuración Feedforward

La contaminación acústica de baja frecuencia, muy común tanto en el entorno laboral como doméstico, es sufrida por gran parte de la población debido a la facilidad que tiene para propagarse y a la poca efectividad de los sistemas pasivos para controlarla.

En general, el CAR se basa en el principio de la interferencia destructiva entre una fuente de ruido primario y una fuente secundaria cuya salida acústica está gobernada por un controlador. Se debe lograr que la salida de la fuente secundaria esté en contrafase exacta con la onda acústica producida por la fuente primaria en la zona de cancelación.

Un esquema de un sistema CAR típico se muestra en la Fig. 1. El sistema está conformado por sensores, actuadores y un controlador que, en la mayor parte de los casos, implementa una estrategia de control de tipo *feedforward* o de lazo abierto. Los sensores son dispositivos que permiten obtener información de los niveles de presión acústica de la señal a cancelar y del ruido residual que indica la efectividad del control. Los actuadores son componentes electroacústicos que permiten modificar favorablemente el campo acústico. Finalmente el controlador es un sistema electrónico que procesa la información recibida de los sensores y genera señales eléctricas que serán transformadas por los actuadores en ondas de presión acústica para producir la cancelación.

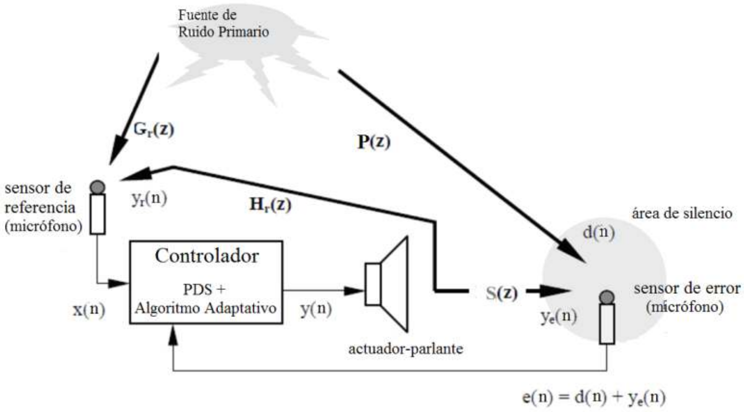


Fig. 1: Esquema de un sistema de CAR.

En este trabajo se considera un sistema de CAR monocanal para un conducto de ventilación, según se muestra en la Fig. 2. En los conductos, el ruido de baja frecuencia se propaga a través del aire como ondas planas desde la fuente primaria hacia la salida.

Las ondas de ruido de la fuente primaria son detectadas mediante un micrófono que proporciona la señal de entrada al controlador, $x(n)$. El controlador genera una señal eléctrica, $y(n)$, y la envía a la fuente secundaria o actuador, frecuentemente un parlante, que la convierte nuevamente en una señal acústica. En esta configuración, la señal de salida $y(n)$ no se suma directamente con la señal a cancelar, $d(n)$, sino que atraviesa una parte del sistema denominada camino secundario, modelada por una función transferencia $S(z)$, que incluye a la etapa conversora digital-analógica, a la función transferencia electro-acústica del parlante, al camino acústico entre el parlante y el micrófono, y a la etapa conversora analógica-digital. En el micrófono de error, $y_e(n)$ debe encontrarse invertida en fase con respecto a la señal que llega desde la fuente de ruido por el camino primario,

d(n). La disminución de la presión acústica se logra en un entorno de este segundo micrófono. La posible realimentación acústica desde el actuador hacia el sensor de referencia, representada por H_r(z), se puede evitar utilizando micrófonos y parlantes directivos ($y_r(n) \approx 0$, $\forall n$). La información del ruido residual, $e(n)$, permite optimizar el funcionamiento del controlador.

Generalmente estos sistemas se implementan electrónicamente centrados en un procesador digital de señal (PDS) y deben ser adaptativos para poder adecuarse al comportamiento no estacionario del entorno acústico y de las fuentes de ruido. El controlador deberá modificar sus parámetros de funcionamiento rápidamente, conforme varían las características del ruido, para evitar un funcionamiento inestable y lograr en todo momento la correcta cancelación. Los datos numéricos que representan las señales analógicas pasan por algoritmos digitales (sistemas discretos), cuya función transferencia debe corregir en fase y amplitud la señal de entrada, y así poder cancelar la señal de error detectada por el segundo micrófono. Los datos modificados por el sistema discreto se convierten de nuevo en señales eléctricas analógicas y por medio de un actuador electro-acústico, se transforman finalmente en ondas de presión acústica (Fig. 2).

El sistema puede generalizarse para conseguir la atenuación en varias zonas espaciales de un determinado recinto. Se remarca que, si bien en la práctica no es posible obtener cancelación total, se logran grandes atenuaciones.

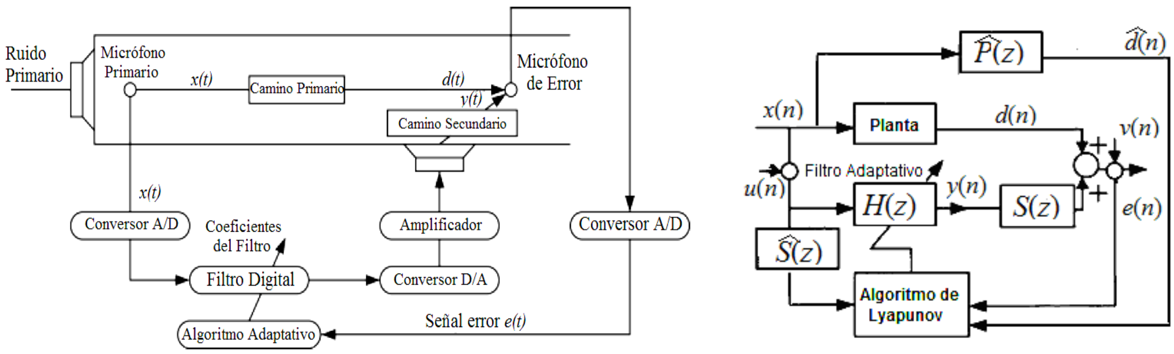


Fig. 2. Diagrama esquemático del sistema y diagrama en bloques del CAR basado en algoritmos de Lyapunov.

2.1 Algoritmo Adaptativo de Lyapunov

El controlador adoptado es un filtro digital de respuesta finita al impulso (RIF) y se modela mediante su función transferencia. Los filtros RIF son sistemas discretos estructuralmente estables y pueden tener fase lineal, es decir, un retardo constante para todas las frecuencias. Como se desea que el control responda a las posibles variaciones del entorno acústico, es necesario que los coeficientes del filtro se actualicen dinámicamente en cada instante de muestreo. Con este fin se utiliza un algoritmo adaptativo que, en base a la información proveniente de los sensores, trata de calcular en tiempo real los valores que minimizan el ruido residual. Se debe tener en cuenta que la salida del controlador, $y(n)$, debe atravesar el camino secundario antes de interferir con $d(n)$, de modo que hay que compensar este efecto dando lugar a los algoritmos denominados de *entrada filtrada.* Los algoritmos comúnmente usados por cumplir con un buen compromiso entre simplicidad y eficiencia son los de máxima pendiente, según la dirección opuesta al gradiente de la superficie del error cuadrático instantáneo, denominados de mínimos cuadrados con entrada filtrada (FxLMS). De todos modos, estos algoritmos requieren del conocimiento previo de las propiedades estadísticas de la señal de ruido para la estimación del gradiente, lo que en general no sucede en casos reales, y su estabilidad es altamente dependiente del tamaño del paso de actualización.

El diseño del controlador para el sistema de CAR basado en la teoría de estabilidad de Lyapunov (FxLY) representa un nuevo enfoque que no necesita estimaciones del gradiente y es independiente de las propiedades estocásticas de las señales tratadas. En lugar de plantear la optimización de una función objetivo dependiente del error de cancelación, se define una función de energía en el espacio de estados paramétrico con punto de equilibrio único en cero correspondiente a la mínima energía [6]. La correcta elección de la ley de actualización de los coeficientes del controlador garantiza que la función de energía decrezca sobre las trayectorias de estado, asegurando la convergencia asintótica a cero del error. Es decir que la selección de la función de Lyapunov y la ley de actualización de parámetros no son independientes. Para detalles de la teoría de estabilidad de Lyapunov referirse a [13].

Si se adopta, en base a consideraciones de estabilidad, una configuración *feedforward* con estructura del controlador del tipo RIF de orden N_c, la señal de control adaptativa en el instante n será:

$$y(n) = \sum_{k=0}^{N_c-1} h_k(n)x(n-k) = \mathbf{H}^T(n)\mathbf{x}(n)\,, \tag{1}$$

donde $\mathbf{H}^T(n) = \left[h_0(n)\, h_1(n) \cdots h_{N_c-1}(n)\right]$, h_i son los valores temporales de la respuesta al impulso del controlador y $\mathbf{x}(n) = \left[x(n)\ x(n+1) \cdots x(n-N_c+1)\right]^T$ es el vector de medidas en la fuente.

La medida de la señal de error, que se registra mediante un sensor de salida en cada instante de muestreo, es modelada por

$$e(n) = d(n) + \sum_{k=0}^{N_s-1} s_k y(n-k) + v(n) = d(n) + \mathbf{S}^T \mathbf{y}(n) + v(n)\,, \tag{2}$$

donde $\mathbf{S}^T = \left[s_0\ s_1 \cdots s_{N_s-1}\right]$ representa la respuesta al impulso del camino secundario real, de longitud N_s, $\mathbf{y}(n) = \left[y(n)\ y(n+1) \cdots y(n-N_s+1)\right]^T$ es un vector de salidas del controlador y $v(n)$ es el ruido de medida.

La ecuación de actualización del vector de coeficientes del controlador será

$$\mathbf{H}(n) = \mathbf{H}(n-1) - \mathbf{g}(n)\alpha(n)\,, \tag{3}$$

donde $\boldsymbol{g}(n)$ es la ganancia de actualización y $\alpha(n)$ representa la estimación a priori del error, según las expresiones

$$\mathbf{g}(n) = \frac{\hat{\mathbf{x}}(n)}{\left(\|\hat{\mathbf{x}}(n)\|^2\right)}\left[1 - \frac{|e(n-1)|}{\beta^n |\alpha(n)|}\right], \tag{4}$$

$$\alpha(n) = \hat{d}(n) + \mathbf{H}^T(n-1)\hat{\mathbf{x}}(n)\,, \tag{5}$$

con $\hat{d}(n) = \hat{\mathbf{P}}^T(\mathbf{x}(n) + \mathbf{u}(n))$ la estimación de la salida del camino primario; $\hat{\mathbf{P}}$ es la estimación de la respuesta al impulso del camino primario; $\hat{\mathbf{x}}(n) = \hat{\mathbf{S}}^T(\mathbf{x}(n) + \mathbf{u}(n))$; $\hat{\mathbf{S}}$ es la estimación de la respuesta al impulso del camino secundario y $\boldsymbol{u}$ es ruido de medida en el sensor de fuente. Se ha supuesto que los coeficientes del controlador varían lentamente de modo que es válida la conmutación:

$$\mathbf{H}^T(n)\hat{\mathbf{x}}(n) = \mathbf{H}^T(n)(\hat{\mathbf{S}}^T\mathbf{x}(n)) \approx \hat{\mathbf{S}}^T(\mathbf{H}^T(n)\mathbf{x}(n))\,. \tag{6}$$

La funcional de energía adoptada tiene la forma $V(n) = \left(\beta^n e(n)\right)^2$ ($\beta > 1$). Con esta función de Lyapunov, la convergencia asintótica está garantizada por la teoría de Lyapunov ya que se comprueba que, para la respuesta deseada d(n), la funcional de energía adoptada, (7), decrece a lo largo del proceso de cancelación según (8).

$$\Delta V(n) = V(n) - V(n-1) = (\beta^n e(n))^2 - (\beta^{n-1}e(n-1))^2, \tag{7}$$

$$\Delta V(n) = -e(n-1)^2\left[\beta^{2(n-1)} - 1\right] < 0, \qquad \text{para} \quad n > 1 \text{ y } \beta > 1. \tag{8}$$

El error de cancelación a lo largo del proceso dinámico, (9), converge a cero siguiendo ley exponencial (10), según se demuestra en [6].

$$|e(n)| = \left| d(n) + \left(\mathbf{H}^T(n-1) - \alpha(n)\mathbf{g}^T(n)\right)\mathbf{S}^T(n)\mathbf{x}(n)\right|\,, \tag{9}$$

$$|e(n)| = \beta^{-n}|e(n-1)| = \beta^{-\frac{n(n+1)}{2}}|e(0)| \, . \quad \textbf{(10)}$$

En la práctica, la expresión de la ganancia de actualización (4) presenta problemas de singularidades, de modo que se introducen constantes $\lambda_i \ll 1$ (i=1,2) para evitar inconvenientes numéricos cuando la señal o el error se aproximan a cero según se muestra en (11):

$$\mathbf{g}(n) = \frac{\hat{\mathbf{x}}(n)}{\left(\|\hat{\mathbf{x}}(n)\|^2 + \lambda_1\right)}\left[1 - \kappa \frac{|e(n-1)|}{\beta^n|\alpha(n)| + \lambda_2}\right]. \quad \textbf{(11)}$$

Estas constantes traen como consecuencia un sesgo en la estimación, es decir, la convergencia del error a un valor en un entorno de cero tanto más pequeño cuanto más lo sean las constantes consideradas.

2.2 Esquema del Control Activo de Ruido FxLY

El esquema de control propuesto requiere de estimaciones iniciales del las respuestas al impulso de los trayectos primario y secundario, $\hat{P}(z)$ y $\hat{S}(z)$ respectivamente.

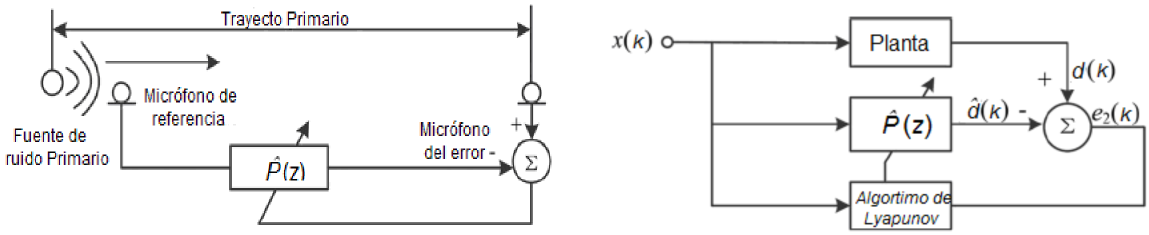


Fig. 3. Sistema y diagrama en bloques del modelado *off-line* del trayecto Primario.

Esto se realiza *off-line,* asumiendo que los sistemas son estacionarios o presentan cambios poco significativos, según se muestra en las Fig. 3 y 4.

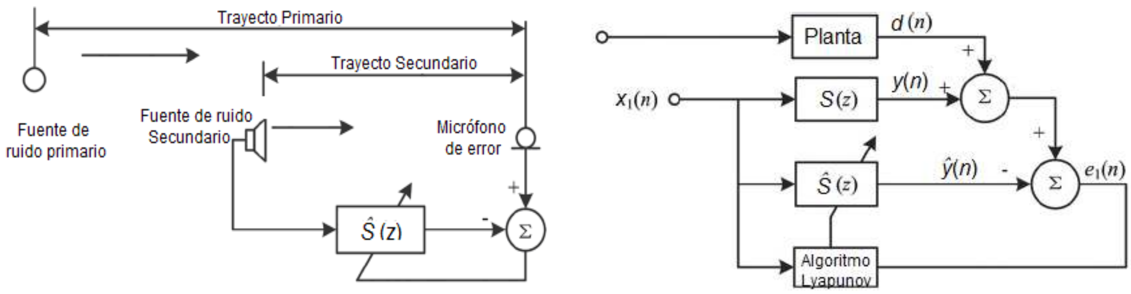


Fig. 4. Sistema y diagrama en bloques del modelado *off-line* del trayecto Secundario.

Un diagrama de flujo esquemático del algoritmo completo, se muestra en la Fig. 5.

3 Experiencias de Simulación

Para evaluar, en primera instancia, la performance del algoritmo de control bajo estudio, se desarrollan una serie de experiencias de simulación en ambiente Matlab. En todo caso se supone que, por diseño, no existe realimentación acústica. Se adoptan los modelos simplificados de uso corriente en la bibliografía para representar los trayectos reales primario y secundario, por ejemplo en [8], [10], [11], [12], y se incluyen los errores de estimación del camino secundario ($\hat{S}(z) \approx S(z)$). El período de muestreo adoptado fue T_s =0.2 *mseg* ya que las frecuencias máximas a considerar son del orden de 500 Hz. En todos los casos, el controlador adoptado es un filtro RIF de longitud *Nc*=15. Los procesos de ruido periódico se normalizan de modo que su potencia resulta unitaria. El ruido de medida en los sensores se toma del orden del 10%.

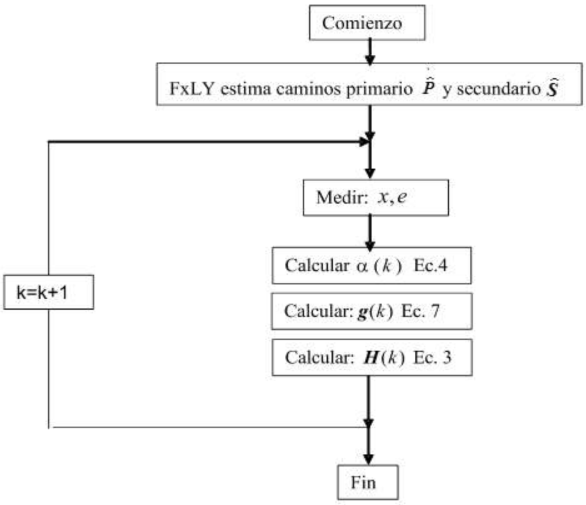


Fig. 5. Diagrama de flujo esquemático del algoritmo de control

La efectividad de la cancelación se comprueba por comparación con la obtenida mediante el algoritmo clásico FxLMS normalizado (FxNLMS). Este algoritmo resulta más conveniente que el FxLMS cuando se desconoce el factor de convergencia adecuado para conseguir un funcionamiento óptimo, ya que tiene en cuenta la potencia de la señal de referencia, mejorando la convergencia del algoritmo, con un número pequeño de operaciones extra. Sin embargo, ha demostrado ser inestable cuando el factor de convergencia tiende a acercarse al límite superior admisible.

El análisis comparativo se basa en una serie de índices de desempeño propuestos en la bibliografía ([4], [5], [9], [10], [11], [12]). La media del error cuadrático promedio normalizado (ECP) tomado sobre una serie de 50 pruebas independientes, permite verificar las propiedades de convergencia. Mediante la densidad espectral de potencia (DEP), estimada mediante el método de Welch, se analiza el nivel relativo de cancelación en función de la frecuencia. El error cuadrático medio normalizado, definido como $\mathrm{NMSE} = 10\log\left(\dfrac{\sum_{k=1}^{n} e^2(k)}{\sum_{k=1}^{n} d^2(k)}\right)$, muestra el desempeño temporal relativo.

3.1 Primer Experimento

En esta experiencia se consideran como fuente de ruido primario una señal de banda estrecha que comprende dos frecuencias, 200 y 400 Hz, más ruido blanco con relación señal a ruido, SNR, de 20 dB y un período de muestreo Ts = 0.2 mseg. Siguiendo las referencias indicadas anteriormente, el modelo para representar el trayecto primario real se toma como un filtro RIF representado mediante la función transferencia de fase no mínima (FNM)

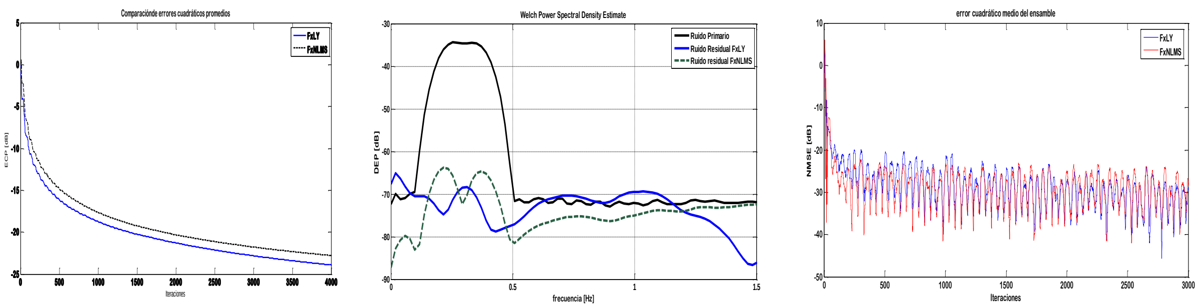


Fig.6: E1: Comparación de ECP, DEP y NMSE de los algoritmos FxLY y FxNLMS para ruido bitonal y *S* de FNM.

$P(z) = z^{-5} - 0.3\,z^{-6} + 0.2\,z^{-7}$. De igual modo, el trayecto secundario real, *S,* se considera de fase no mínima con un modelo de función transferencia dado por $S(z) = z^{-2} + 1.5\,z^{-3} - z^{-4}$

El camino secundario estimado se computa con el método propuesto, incluyendo ruido de medida en el modelo de la señal de error registrado por el sensor de salida. Se emplea a tal efecto un filtro RIF de longitud N_s =15. El tamaño del paso de actualización de FxNLMS se ajusta empíricamente a μ = 0.1, siendo su valor crítico para la velocidad de convergencia. El parámetro de ajuste de FxLY, β no resulta crítico y se fijó en 4.

3.2 Segundo Experimento

En este caso, se utilizan un proceso de ruido multitonal con modulación de amplitud, $x(n) = a(n)\left[\sum_{k=1}^{4} \mathrm{sen}\left(\frac{2\pi k f_c}{f_s} n\right)\right]$, con f_c = 125 *Hz,* y f_s = $1/T_s$. y $a(n) = 5 + 0.5\,\mathrm{sen}\left(\frac{2\pi 0.01}{f_s} n\right)$ y la misma función transferencia del trayecto primario que en la primera experiencia. De todos modos, el trayecto secundario se adopta de fase mínima (FM) con función transferencia $S(z) = z^{-2} + 0.5\,z^{-3}$.

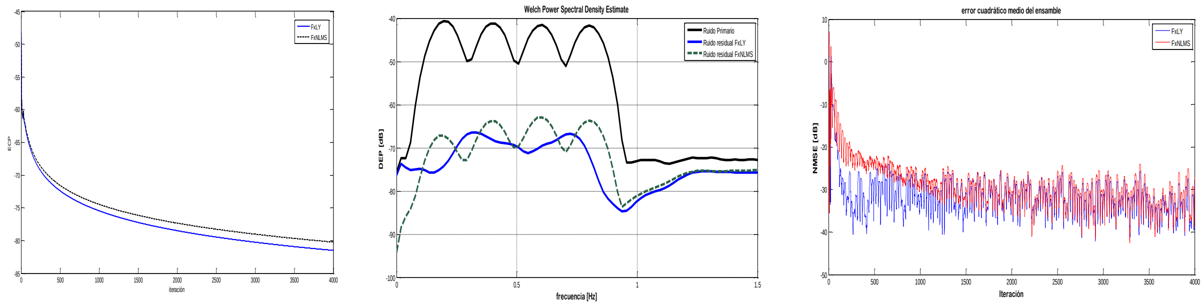


Fig. 7: E2: Comparación de ECP, DEP y NMSE de los algoritmos FxLY y FxNLMS para ruido multitonal y *S* de FM.

3.3 Tercer Experimento

En este caso, se utilizan el mismo proceso de ruido multitonal modulado y la misma función transferencia del trayecto primario que en la segunda experiencia. De todos modos, el trayecto secundario se adopta de FNM con función transferencia del primer experimento.

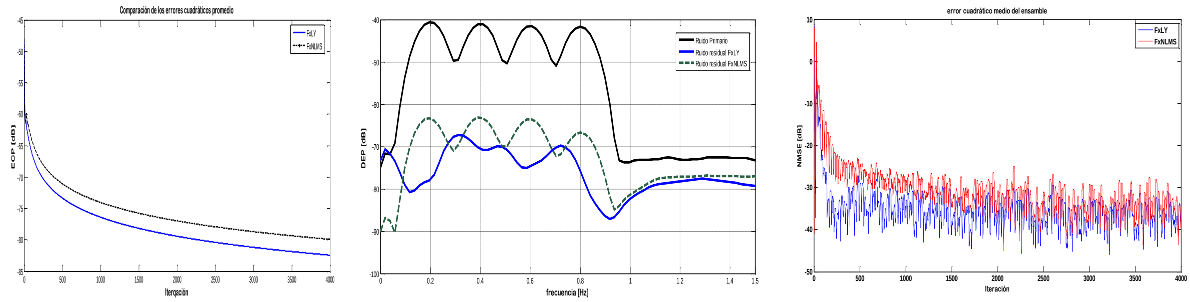


Fig. 8: E3: Comparación ECP, DEP y NMSE de los algoritmos FxLY y FxNLMS para ruido multitonal y *S* de FNM.

Las Fig. 6 a 8 muestran los gráficos comparativos de los ECPs de 50 realizaciones, la DEP del ruido primario en el sensor de salida junto a las densidades de los errores residuales producto del control aplicando ambos métodos, y los NMSEs. Se puede observar en todas las experiencias que la convergencia de FxLY es más rápida que la de FxNLMS, y la atenuación de ruido obtenida luego de la convergencia resulta levemente mejor, con valores entre 30 y 35 dB. En cuanto a la DEP se evidencia una mayor atenuación (entre 20 y 30 dB) en el rango de frecuencias de interés. Si bien la atenuación es menor a frecuencias mayores en el caso del esperimento 1, es conocido que el CAR no resulta práctico en esos rangos por lo que no se considera significativo .El método propuesto resulta, en relación al método FxNLMS, mucho menos sensible a cambios en los parámetros de ajuste, manteniendo en todo caso la estabilidad y buena velocidad de convergencia.

4 Conclusiones

En este trabajo se analiza la performance de una estrategia de control adaptativo para la atenuación de ruido unidimensional, basada en la teoría de estabilidad de Lyapunov. Los filtros diseñados bajo esta teoría han sido ampliamente analizados pero no específicamente en lo que respecta a su aplicación en CAR. Resulta un diseño independiente de las propiedades estadísticas de las señales a atenuar, normalmente desconocidas, con complejidad computacional comparable a la del algoritmo de uso más difundido, FxLMS.

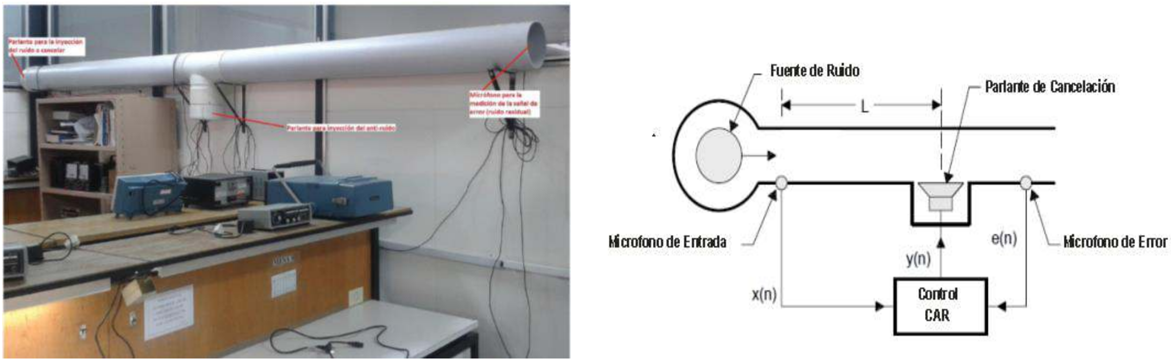


Fig. 9: Plataforma experimental para ensayos y su diagrama esquemático

Las simulaciones realizadas constituyen un primer abordaje del uso en CAR de este tipo algoritmos. La comparación con el algoritmo FxNLMS cuyo comportamiento es significativamente dependiente del tamaño del paso e actualización, permite comprobar propiedades de convergencia superiores tanto en la velocidad como en la sensibilidad a parámetros de ajuste. Además se verifica que se logra el objetivo planteado de atenuar eficazmente ruido periódico, de banda angosta, dentro del rango de frecuencias para el que es aplicable el control activo. Se destaca que se analizaron sistemas tanto de fase mínima como no mínima y se incluyeron los desajustes en la estimación de los modelos de los trayectos primario y secundario además de los errores de medida. Esto permite esperar buenos resultados en la implementación, basada en un DSP, para su prueba inicial sobre el prototipo de laboratorio de un ducto de ventilación (Fig. 9).

Agradecimientos. Los autores agradecen a la Secretaría de Ciencia y Tecnología de las Universidad Tecnológica Nacional por la financiación del proyecto de investigación en el marco del cual se desarrolló este trabajo.

Referencias

1. Kuo, Sen M.; Morgan, Dennis, R. Review of DSP Algorithm for Active Noise Control. In: *Proceeding IEEE International Conference on Control Application*, AK, USA (2000).
2. Hansen, C.; Snyder, S.;Qiu, X; Brooks, L.; Moreau, D.: *Active Control of Noise and Vibration*. CRC Press. Vol II. Boca Raton (2012).
3. Kajikawa, Yoshinobu; Gan, Woon-Seng; Kuo, Sen M.: *Recent advances on active noise control: open issues and innovative applications.* Cambridge Press. SIP(1) e3, pp.1-21 (2012).: https://www.cambridge.org/core/service/aop-cambridge-core/content/view/ 9E27156562A24026ECD6F6A49A54F53A/S2048770312000042a.pdf. Accedido el 2 de mayo de 2018.
4 Bismor, Dariusz :Simulations of Partial Update LMS Algorithms in Application to Active Noise Control. *Procedia Computer Science* .80, pp. 1180–1190 (2016).
5 Zhao, Tong; Liang Jiabi: Zou Liang, and Zhang ,Li: A New FXLMS Algorithm With Offline and Online Secondary-Path Modeling Scheme for Active Noise Control of Power Transformers. *IEEE Transaction on Industrial Electronics*, 64, (8), pp. 6432-6442 (2017).
6. MengüÇ, Engin C.; Acir, Nurettin. A Novel Adaptative Filter Design Using Lyapunov Stability Theory. *Journal of Electrical Engineering & Computer Science* (23), pp. 719-728 (2015).

7. Seng. Phooi K; Man, Zhihong; Wu Hong R.: Lyapunov Theory Based Radial Basis Function Networks for Adaptative Filtering. *IEEE Trans. on Circuits and Systems-I: Fundamental Theory and Applications* (49) 8, pp. 1215-1220. (2002).
8 Wu, Cai Y. ; Speech Enhancement System Based on Lyapunov FXLMS Algorithm. *Advanced Materials Research* (493), pp. 1670-1674. (2012) .
9 Seng, Phooi K.; Man, Zhihong; Wu, Hong R.; Nonlinear Active Noise Control Using Lyapunov Theory and RBF Network. In*: Proceeding of X IEEE Neural Networks for Signal Processing* , Sydney, Australia. pp.916-925, (2000).
10 Spiriti , Emanuele, Morici, Simone: Piroddi, Luigi: A gradient-free adaptation method for nonlinear active noise control. Journal of Sound and Vibration, 333, pp. 13–30 (2014).
11 Kajikawa, Yoshinobu and Hirayam,a Ryotaro: Feedback Active Noise Control System Combining Linear Prediction Filter. In: 18th *European Signal Processing Conference* (EUSIPCO) Denmark, pp 31-35 (2010).
12 Sahib, Mouayad A. and Kamil, Raja :Comparison of Performance and Computational Complexity of Nonlinear Active Noise Control Algorithms. *ISRN Mechanical Engineering* .pp 1-9, (2011).
13 Vidyasagar, Mathukumalli: *Nonlinear Systems Analysis.* Cap. 5. 2nd Ed. Prentice Hall, New Jersey, USA. (1993).

Resolución de Placa Rectangular Sometida a Flexión

Pablo Guillermo Marcuzzi Naveda[1]
[1] Departamento de Matemática, Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de San Juan, San Juan, Argentina
pmarcuzzi@unsj.edu.ar

Resumen. El cálculo de desplazamientos, giros en bordes, solicitaciones y demás respuestas de una placa cargada normalmente a su plano medio ha sido objeto de estudio por más de 200 años, existiendo soluciones analíticas para un número pequeño de casos. El desarrollo de los métodos numéricos ha permitido resolver el problema en forma aproximada, pero agregando la versatilidad que los métodos analíticos no poseen. En este trabajo se plantea, mediante el método de diferencias finitas, la resolución del problema de desplazamientos de una placa rectangular sometida a flexión, con diferentes condiciones de borde y carga. Por último, se presentan dos ejemplos, el objeto del primero es comparar las soluciones numéricas con las analíticas, y el segundo para mostrar la versatilidad del código presentado.

Palabras Clave: Métodos Numéricos, Diferencias Finitas, Ingeniería Estructural.

1 Introducción

Los primeros modelos matemáticos del comportamiento de placas sometidas a flexión datan de principios del siglo XIX [1]. A mediados del siglo XX, con la aparición de las computadoras, los métodos analíticos, fueron reemplazados por métodos numéricos tales como elementos finitos o diferencias finitas. Estos últimos permiten una mayor versatilidad para adaptarlos a placas de formas geométricas irregulares, compuestas por distintos materiales, variabilidad (tanto en espacio como en tiempo) de la carga aplicada y condiciones de borde, etc.

En placas rectangulares, dependiendo de la relación entre las longitudes de los lados y el espesor, se tiene una primera clasificación en placas delgadas y placas gruesas. Un valor empírico límite para esta relación es 0.1, es decir una placa cuyo cociente entre los lados y su espesor sea menor a 0.1, se considerará placa delgada. Caso contrario, será una placa gruesa.

1.1 Hipótesis de Placas delgadas (Teoría de Kirchoff)

Las hipótesis cinemáticas que permitirán el planteo de las ecuaciones son [2]:

- Las cargas que actúan sobre la placa son perpendiculares al plano medio de ésta.
- El plano medio de la placa (Fig. 1) funciona como plano neutro durante la flexión i.e. no se producen deformaciones en él. Esto se debe a la ausencia de fuerzas paralelas a los planos (de tracción o compresión).
- Una línea cualquiera recta, con dirección normal al plano medio en la posición no deformada, continuará recta y normal al plano medio durante la deformación. Esto se debe a que no se tienen en cuenta las deformaciones por corte.
- Se desprecia el efecto en la flexión de las tensiones normales σ_z y las tangenciales τ_{xz} y τ_{yz}. Esto implica que cada capa paralela al plano medio se encuentra sometido a un estado plano de tensiones, con σ_x, σ_y y τ_{xy} distintos de cero.
- El espesor de la placa se mantiene constante
- Para este trabajo, se considerará a la placa constituida por un material homogéneo, elástico e isótropo.

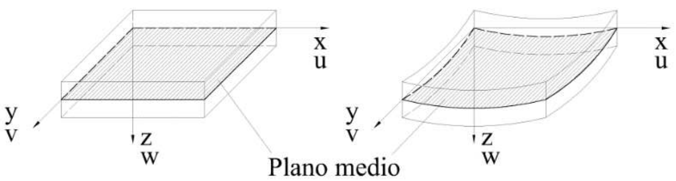


Fig. 1. Plano medio antes y después de la deformación.

La ventaja que se consigue con las hipótesis planteadas es que, conociendo la función de dos variables $w = w(x, y)$ correspondiente a los desplazamientos verticales de la placa (establecida a partir de condiciones de borde), el estado de deformación queda totalmente determinado, ya que el giro de una sección cualquiera puede obtenerse mediante las derivadas parciales espaciales de w.

1.2 Ecuación diferencial de la flexión de placas

En base a las hipótesis mencionadas anteriormente, y aplicando condiciones de equilibrio entre los esfuerzos internos (corte y momento flector) y las cargas aplicadas $q(x, y)$, se obtiene la siguiente ecuación diferencial lineal de segundo orden en derivadas parciales [3]:

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + q(x, y) = 0 \qquad \textbf{(1)}$$

Recordando la relación entre las funciones momento flector $M(x, y)$ y desplazamientos $w(x, y)$ [2], la ecuación (1) se puede reescribir como:

$$\frac{\partial^4 w(x, y)}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w(x, y)}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w(x, y)}{\partial y^4} = \frac{q(x, y)}{D} \qquad \textbf{(2)}$$

Siendo D la rigidez a flexión de la placa, cuya expresión es:

$$D = \frac{E\ esp^3}{12(1 - \upsilon^2)} \qquad \textbf{(3)}$$

Donde E y υ representan el módulo de Young y la relación de Poisson del material que compone la placa, respectivamente; esp es el espesor de la misma.

1.3 Condiciones de borde

Las condiciones de borde que se plantearán en este trabajo son de dos tipos: bordes articulados (i.e. con posibilidad de girar libremente) y bordes empotrados (restringidos al giro). En ambos casos, el valor de la función desplazamiento w, será igual a cero. Las condiciones de borde repercutirán en la matriz de rigidez de la placa.

2 Modelo en Diferencias Finitas

2.1 Dominio discreto

La resolución de la ecuación (2) puede llevarse a cabo mediante métodos analíticos o numéricos. Estos últimos, a pesar de ser aproximaciones, tienen la posibilidad de considerar distintos tipos de cargas q (uniformemente distribuida, concentrada, distribuida con alguna ley, variable en tiempo y espacio, etc.)
Para poder plantear el método de diferencias finitas, es necesario dividir el dominio continuo Ω definido por la ecuación (4) en N_x puntos en la dirección x y en N_y puntos en la dirección de y (Fig. 2).

$$\Omega_{continuo}: \left\{(\mathrm{x}, \mathrm{y}) | 0 \leq \mathrm{x} \leq \mathrm{L_x} \wedge 0 \leq \mathrm{y} \leq \mathrm{L_y}, \mathrm{x}, \mathrm{y} \in \Re \right\} \qquad \textbf{(4)}$$

$$\Omega_{discreto}: \left\{(\mathrm{x}, \mathrm{y}) | \mathrm{x} = (\mathrm{i} - 1)\Delta\mathrm{x} \ \wedge\ \mathrm{y} = (\mathrm{j} - 1)\Delta\mathrm{y}, \mathrm{i} = 1, \dots, N_x, \mathrm{j} = 1, \dots, N_y\right\} \qquad \textbf{(5)}$$

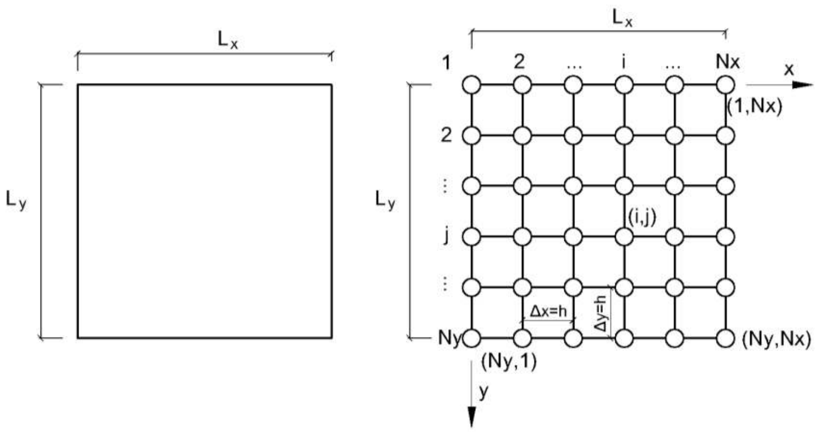


Fig. 2. Discretización del dominio en ambas direcciones.

Si en la ecuación (5) del dominio discreto se toman las separaciones en ambas direcciones iguales (i.e. $\Delta x = \Delta y = h$), y recordando las expresiones de diferenciación numérica hasta el orden 4 [4], la ecuación (2) puede escribirse de la siguiente manera:

$$\frac{1}{h^4}\big[20\,w_{i,j} - 8\big(w_{i,j+1} + w_{i,j-1} + w_{i+1,j} + w_{i-1,j}\big) + 2\big(w_{i+1,j+1} + w_{i+1,j-1} + w_{i-1,j-1} + w_{i-1,j+1}\big) + w_{i,j-2} + w_{i,j+2} + w_{i-2,j} + w_{i+2,j}\big] = \frac{q_{i,j}}{D} \quad \textbf{(6)}$$

2.2 Condiciones de borde

Como se mencionó anteriormente, se considerarán dos condiciones de borde: articulados o libres al giro y empotrados o restringidos al giro. La condición que debe cumplirse en ambos casos es que los desplazamientos verticales son nulos, esto es:

$$w|_{puntos\ de\ borde} = 0 \quad \textbf{(7)}$$

Además, para los bordes articulados se agregan las condiciones:

- A lo largo de los bordes paralelos al eje x **(8a)**

$$M_y = -\frac{D}{h^2}\big[\big(w_{i+1,j} - 2w_{i,j} + w_{i-1,j}\big) + \upsilon\big(w_{i,j+1} - 2w_{i,j} + w_{i,j-1}\big)\big] = 0$$

- A lo largo de los bordes paralelos al eje y

$$M_x = -\frac{D}{h^2}\big[\big(w_{i,j+1} - 2w_{i,j} + w_{i,j-1}\big) + \upsilon\big(w_{i+1,j} - 2w_{i,j} + w_{i-1,j}\big)\big] = 0 \quad \textbf{(8b)}$$

Por otro lado, para los bordes empotrados, las condiciones adicionales a la ecuación (7) son:

- A lo largo de los bordes paralelos al eje x **(9a)**

$$\left.\frac{\partial w(x,y)}{\partial y}\right|_{puntos\ de\ borde} = \frac{1}{2h}\big(w_{i+1,j} - w_{i-1,j}\big) = 0$$

- A lo largo de los bordes paralelos al eje y

$$\left.\frac{\partial w(x,y)}{\partial x}\right|_{puntos\ de\ borde} = \frac{1}{2h}\big(w_{i,j+1} - w_{i,j-1}\big) = 0 \quad \textbf{(9b)}$$

Las ecuaciones (7), (8) y (9) se pueden escribir en forma matricial como:

$$\mathbf{C}_{B} = \mathbf{C}_{BE} + \mathbf{C}_{BL} \tag{10}$$

Siendo C_B la matriz de condiciones de borde; C_{BE} matriz de condición de borde empotrado y C_{BL} matriz de condición de borde libre (articulado). Las matrices resultan de dimensión $\left[(N_x-2)\left(N_y-2\right),(N_x-2)\left(N_y-2\right)\right]$.

2.3 Matriz de rigidez

La matriz de rigidez K de la placa se obtendrá mediante la suma de la matriz de coeficientes A, obtenida de la aplicación de la ecuación (6) sobre los puntos del dominio y la suma ponderada de las matrices de condición de borde C_B:

$$\boldsymbol{K} = \frac{L_x\, L_y}{N_x N_y}\,\frac{D}{h^4}\,(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{C_B}) \tag{11}$$

Algoritmo 1. Código escrito en Octave que arroja como resultado a la matriz de rigidez de la placa.

```
close all;clear;clc

%1.Geometría
lx=4;               %longitud de la losa en la dirección X
ly=4;               %longitud de la losa en la dirección Y

xmin =0; %Coordenada x mínima
xmax = lx; %Coordenada x máxima
ymin =0; %Coordenada y mínima
ymax =ly; %Coordenada y máxima

h=0.1; %Tamaño del Paso (igual en las dos direcciones)

N_x=floor((xmax-xmin)/h+1); %Puntos en dirección X
N_y=floor((ymax-ymin)/h+1); %Puntos en dirección Y

%2.Rigidez a flexión, matriz de desplazamientos

fc=21e6;               %Tensión característica del hormigón [Pa]
E=4700*sqrt(fc*1e-6)*1e6; %Módulo de Elasticidad longitudinal [Pa]
v=0.3;                  %Coeficiente de Poisson
esp=0.2;                %Espesor de la losa [m]
D=E*esp^3/(12*(1-v^2));  %Rigidez flexural de la placa [N m]

w=ones(N_y,N_x);        %Matriz de desplazamientos (incógnitas)

%3.Condiciones de borde y matriz de rigidez

%3.1 Condición de borde forzada: desplazamientos verticales nulos

w([1 N_y],1:N_x)=0; %Dirección X
w(2:N_y-1,[1 N_x])=0; %Dirección Y

%3.2 Matriz de rigidez sin condiciones de borde aplicadas

[I,J] = find(w ~= 0); %Índices de desplazamientos incógnitas

n = length(I);
A = zeros(n);
```

```
for k=1:n
  i = I(k);
  j = J(k);
  A(k,I== i+2 & J== j )  =  1;
  A(k,I== i+1 & J==j+1)  =  2;
  A(k,I== i+1 & J== j )  =  -8;
  A(k,I== i+1 & J==j-1)  =  2;
  A(k,I== i   & J== j+2) =  1;
  A(k,I== i   & J==j+1)  =  -8;
  A(k,I== i   & J== j )  =  20;
  A(k,I== i   & J==j-1)  =  -8;
  A(k,I== i   & J== j-2) =  1;
  A(k,I== i-1 & J==j+1)  =  2;
  A(k,I== i-1 & J== j)   =  -8;
  A(k,I== i-1 & J==j-1)  =  2;
  A(k,I== i-2 & J== j )  =  1;
End

%3.3 Condición de borde 2: derivadas del campo de desplazamiento
%Matrices de condiciones de borde que se sumará a la del sistema

% Grados de libertad de los bordes de la losa
%               L3
%          -------------
%         |             |
%     L4 |             |
%         |             | L2
%         |             |
%          -------------
%               L1

L1=[(2:N_x-1)',(N_y-1)*ones(length(2:N_x-1),1)];
L2=[(N_x-1)*ones(length(2:N_y-1),1),(2:N_y-1)'];
L3=[(2:N_x-1)',2*ones(length(2:N_x-1),1)];
L4=[2*ones(length(2:N_y-1),1),(2:N_y-1)'];

%Indices correspondientes a cada lado

ind_L1=(N_y-2)*(1:(N_x-2)); %Malla reducida (sin nudos del borde)
ind_L3=(N_y-2)*(1:N_x-2)-(N_y-3); %Malla reducida (sin nudos del borde)
ind_L2=((N_x-2)*(N_y-2)-(N_y-2))+(1:N_y-2);%Malla reducida (sin nudos del borde)
ind_L4=1:N_y-2; %Malla reducida (sin nudos del borde)

%3.4 Matriz de condiciones de borde empotrada
%Dirección paralela al eje X

%Vector de coeficientes de condiciones de borde:
%alpha=[L1 L2 L3 L4]: Si alpha=[1 1 1 1], los 4 bordes se encuentran empotrados
%Si alpha=[0 0 0 0], los 4 bordes se encuentran articulados

alpha=[1 1 1 1]; %Bordes empotrados

CBe_x_L1=zeros((N_x-2)*(N_y-2));
CBe_x_L3=zeros((N_x-2)*(N_y-2));

CBe_x_L1(ind_L1)=alpha(1);
CBe_x_L1=diag(CBe_x_L1(:,1));

CBe_x_L3(ind_L3)=alpha(3);
CBe_x_L3=diag(CBe_x_L3(:,1));

CBe_x=CBe_x_L1+CBe_x_L3;

%Dirección paralela al eje Y
CBe_y_L2=zeros((N_x-2)*(N_y-2));
```

```
CBe_y_L4=zeros((N_x-2)*(N_y-2));

CBe_y_L2(ind_L2)=alpha(2);
CBe_y_L2=diag(CBe_y_L2(:,1));

CBe_y_L4(ind_L4)=alpha(4);
CBe_y_L4=diag(CBe_y_L4(:,1));

CBe_y=CBe_y_L2+CBe_y_L4;

CBe=CBe_x+CBe_y;

%3.5 Matriz de condiciones de borde simplemente apoyada
%Dirección paralela al eje X
CBl_x_L1=zeros((N_x-2)*(N_y-2));
CBl_x_L3=zeros((N_x-2)*(N_y-2));

CBl_x_L1(ind_L1)=(1-alpha(1))*-1;
CBl_x_L1=diag(CBl_x_L1(:,1));

CBl_x_L3(ind_L3)=(1-alpha(3))*-1;
CBl_x_L3=diag(CBl_x_L3(:,1));
CBl_x=CBl_x_L1+CBl_x_L3;

%Dirección paralela al eje Y

CBl_y_L2=zeros((N_x-2)*(N_y-2));
CBl_y_L4=zeros((N_x-2)*(N_y-2));

CBl_y_L2(ind_L2)=(1-alpha(2))*-1;
CBl_y_L2=diag(CBl_y_L2(:,1));

CBl_y_L4(ind_L4)=(1-alpha(4))*-1;
CBl_y_L4=diag(CBl_y_L4(:,1));
CBl_y=CBl_y_L2+CBl_y_L4;

CBl=CBl_x+CBl_y;

% 4 Matriz de rigidez
K=lx*ly/(N_x*N_y)*(D/h^4)*(A+CBe+CBl); %Matriz de rigidez %[K]=N/m
```

2.4 Vector de cargas y desplazamientos

Para la determinación de los desplazamientos verticales de una placa rectangular, cuyos bordes cumplen alguna de las condiciones mencionadas anteriormente, es necesario definir un vector de cargas B que se encuentra actuando sobre la misma:

$$\boldsymbol{B} = -q \frac{L_x\, L_y}{N_x N_y}\, \boldsymbol{b} \tag{12}$$

Siendo q el valor de la fuerza por m^2 de placa, y b un vector de tamaño $\left[(N_x-2)\left(N_y-2\right),1\right]$ que aplicará la fuerza en los puntos del dominio discreto que se deseen.

Una vez definido el vector B, el problema a resolver es:

$$\boldsymbol{w} = \boldsymbol{K}^{-1}\, \boldsymbol{B} \tag{13}$$

Siendo w el vector de desplazamientos verticales de los nodos del dominio.

Algoritmo 2. Asignación del vector de cargas y resolución del sistema de ecuaciones

```
%Vector de cargas
```

```
%Análisis de cargas
%Peso propio: 24000 N/m^3 * th [N/m^2=Pa]
%Contrapiso Hormigón simple (e=0.05 m): 1100 [N/m^2=Pa]
%Piso cerámico: 250 [N/m^2=Pa]
%Cielorraso: 150 [N/m^2=Pa]
%
qD=24000*esp+1100+250+150; %Carga muerta [N/m2=Pa]
qL=750; %Carga viva [N/m2=Pa]
q=qD+qL;            %Carga uniformemente distribuida [N/m^2=Pa]
q=-q;

%Vector de cargas B [N]
b=ones(n,1);
B=(q*lx*ly/(N_x*N_y))*b;

%Solución del problema estático (desplazamientos) y presentación de resultados
ww=K\B;
%
w_no_nulos=reshape(ww,[N_y-2 N_x-2]);
w(2:N_y-1,2:N_x-1)=w_no_nulos;
```

3 Ejemplos

3.1 Ejemplo 1

Considere una placa rectangular con bordes articulados, sometida a una carga uniformemente distribuida q. Halle los desplazamientos máximos para distintas relaciones entre lados. Compare con los resultados exactos [2].

La solución a este problema se da en la Tabla 1, haciendo las siguientes consideraciones:

1- Al estar sometida la placa a una carga uniformemente distribuida, los desplazamientos máximos se producirán en las coordenadas del centro de la misma (i.e. $l_x/2$ y $l_y/2$). La solución "exacta" se calculará mediante la ecuación (14) [2]

$$w_{max} = \frac{16\,q}{\pi^6\,D} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{m+n}{2}-1}}{m\,n\left(\frac{m^2}{{l_x}^2} + \frac{n^2}{{l_y}^2}\right)^2} \tag{14}$$

2- Los resultados estarán normalizados con respecto a la carga, relación de luces, luz en la dirección x, y rigidez a flexión de la placa mediante un coeficiente $\boldsymbol{\beta}$, que tendrá la siguiente expresión:

$$\beta = \frac{D\,\boldsymbol{w_{max}}}{{l_x}^4\,q} \tag{15}$$

3- El error entre ambos coeficientes se calculó con la expresión:

$$\text{Error} = \frac{|\boldsymbol{\beta_{exacto}} - \boldsymbol{\beta_{numérico}}|}{\boldsymbol{\beta_{exacto}}}\,100 \tag{16}$$

Tabla 1. Coeficientes β en función de la relación de luces. En la columna de las soluciones numéricas, se aclara el tamaño del paso entre los puntos del dominio. Cuando la relación de luces fue mayor a 3, se hizo necesario incrementar el tamaño del paso por problemas de memoria en el disco de la computadora.

$\boldsymbol{l_y/l_x}$	$\boldsymbol{\beta_{exacto}}$	$\boldsymbol{\beta_{numérico}}$ (h=0.1)	Error [%]
1	0.00406	0.004062	0.04926108
1.1	0.00485	0.004868	0.37113402
1.2	0.00564	0.005455	3.28014184
1.3	0.00638	0.006392	0.18808777
1.4	0.00705	0.006914	1.92907801
1.5	0.00772	0.007724	0.05181347
2	0.01013	0.010131	0.00987167
3	0.01223	0.012252(*)	0.17988553
4	0.01282	0.012842(*)	0.17160686
5	0.01297	0.012996(*)	0.20046261
∞	0.01302	0.013061(**)	0.31490015

(*) $h = 0.2$
(**) $h = 0.25$

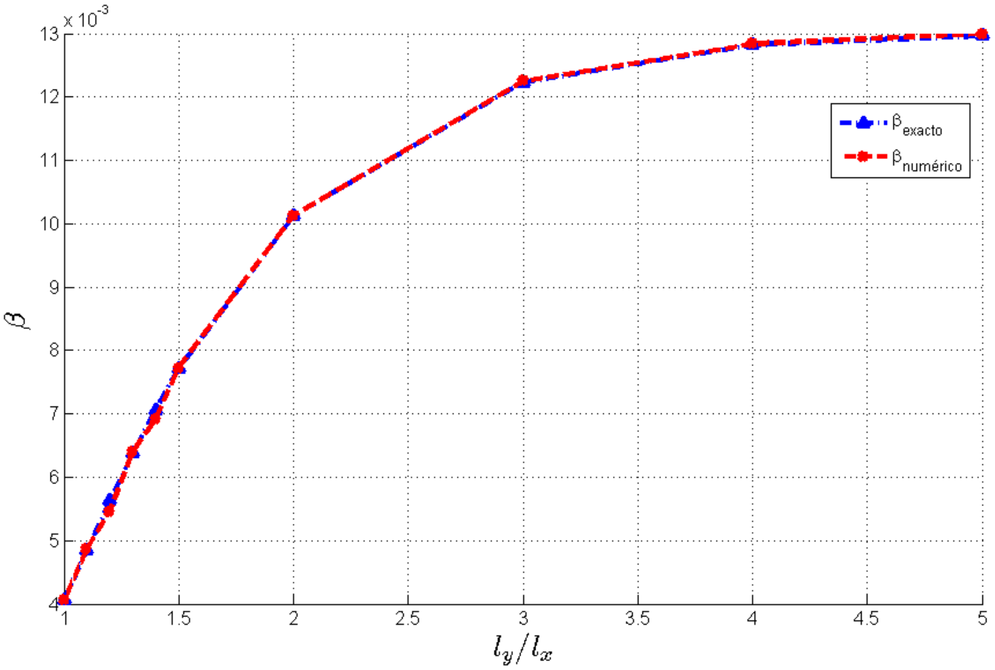


Fig. 3. Comparación de resultados, en función de la relación de luces.

La Fig. 3., muestra los resultados tabulados. En ella se observa que la media de los errores oscila en un 0.6%, valor más que aceptable en el campo de la ingeniería civil, demostrado la eficacia y precisión del modelo numérico.

A esto, debe agregarse que el modelo numérico contempla la posibilidad de variar, lado por lado, las condiciones de borde, como así también el tipo de carga, posición de la misma, etc.

3.2 Ejemplo 2

Considere una losa rectangular con las siguientes medidas: $\boldsymbol{l_x} = 4\,m$, $\boldsymbol{l_y} = 6\,m$. Una rigidez a flexión $D = 1.5779\ 10^7\,Nm$ y una fuerza puntual $q = -7050\,N$ aplicada en las coordenadas $(x, y) = (1.2\,m, 4.3\,m)$.

Suponga los bordes más alejados de la carga como empotrados y los restantes, articulados. Con estas condiciones, encuentre el valor de la deflexión máxima.
La solución se observa en la Fig. 4.

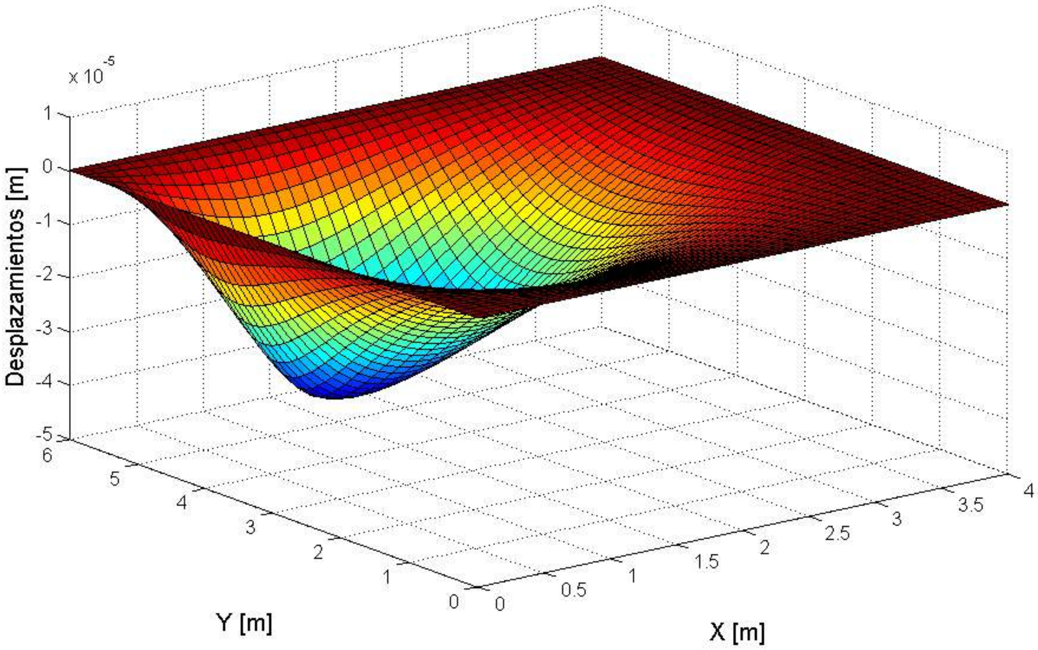


Fig. 4. Solución del Ejemplo 2.

El valor buscado es $w_{max} = -4.07\ \ 10^{-5}\ m$ y se produce naturalmente bajo la carga concentrada.
Claramente, este problema no puede ser resuelto por métodos analíticos, lo cual demuestra la versatilidad del modelo numérico mencionada anteriormente.

4 Conclusiones y trabajos futuros

Se ha presentado un modelo de diferencias finitas que permite atacar la resolución de una ecuación diferencial biarmónica, correspondiente a la flexión en placas delgadas. Al mismo se le han agregado elementos para darle una mayor versatilidad a la hora de plantear problemas con diferentes configuraciones de borde, cargas, etc.
Se dieron dos ejemplos, el primero para evaluar la precisión del modelo numérico y el segundo para mostrar su versatilidad.
Trabajos futuros pueden proponerse incluyendo variaciones tanto en espacio como en tiempo de la carga (problemas dinámicos), los cuales permitirán realizar simulaciones de personas caminando o saltando sobre la placa. Otro aspecto que debe incluirse como mejora al modelo es la consideración de un material componente de la placa anisótropo y de comportamiento no lineal.

Agradecimientos. El autor agradece al Departamento de Matemática de la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional de San Juan por el apoyo brindado.

Referencias

1. Love, A. E. H., *On the small free vibrations and deformations of elastic shells*, Philosophical trans. of the Royal Society (London), 1888, Vol. série A, N° 17 p. 491–549
2. Timoshenko, S. and Woinowsky-Krieger, S., *Theory of plates and shells*, McGraw-Hill New York (1959)
3. Zienkiewicz, O. C. and Taylor, R. L.: *El Método de los Elementos Finitos. Volumen 2 (Cuarta Edición)*. McGraw Hill/Interamericana de España S.A. (1995)
4. Bathe, K. J.: *Finite Element Procedures,* Prentice Hall, New Jersey (1996)
5. Eaton, J.; Bateman, D.; Hauberg, S; Wehbring, R.: *GNU Octave - Free your numbers 4th edition*. https://www.gnu.org/software/octave/octave.pdf (2017). Accedido el 01 de Julio de 2018

Wavelets discretos en la obtención de la dimensión fractal de series de tiempo

Jesús Rubén Azor Montoya [1]
[1] Facultad de Ingeniería Universidad de Mendoza,
Peatonal Emilio Descotte 750 (5500) Mendoza, Argentina, jesus.azor@um.edu.ar

Resumen. Como una aplicación de Matemática Aplicada que combina dos herramientas modernas como lo son wavelets y fractales, se propone un desarrollo con alternativas de réplica computacional a través de un software de amplia difusión, que permite introducir al alumno universitario en este campo tan utilizado en la actualidad y que no está tan difundido en las carreras de grado. Se parte de una relación sucinta de conocimientos básicos acerca de la Transformada Wavelet y de la Geometría Fractal para entrar a posteriori en el desarrollo del algoritmo "*Coeficiente Wavelet Promedio*" (Average Wavelet Coefficient) aplicado a una serie de tiempo con dimensión fractal conocida. Finalmente, con el auxilio de la Estadística se hace una valoración de los resultados obtenidos mediante el citado algoritmo. Esta propuesta forma parte del Proyecto de Investigación "Ritmos Biológicos y estilos de aprendizaje" que se lleva a cabo con estudiantes de la Facultad de Medicina y Ciencias de la Salud de la Universidad de Mendoza, con el que se pretende relacionar los diferentes estilos, preferencias y percepciones de los aprendizajes de educandos, con las variaciones rítmicas circadianas.

Palabras Clave: Wavelets, Fractales, Dimensión Fractal, coeficiente de Hurst.

1 Introducción

En la Matemática Aplicada moderna, aparecen dos conceptos que revolucionan el universo de herramientas útiles en campos tan diversos y tan amplios que son difíciles de mensurar, esto son los Wavelets y los Fractales.

A la fecha, los currículos universitarios (y aún en el nivel secundario) están incorporando estos recursos para actualizar la comprensión de un mundo tecnológico en plena expansión.

La palabra "fractal" fue acuñada, allá por los años 60, por el brillante matemático polaco Benoit Mandelbrot (1924-2010). Su obra maestra "The Fractal Geometry of Nature" (La Geometría fractal de la Naturaleza) publicada en 1982 [1], compila con enorme belleza y rigurosidad el nuevo campo de la matemática del cual es su mentor.

La etimología del término está en la palabra griega "fractus (quebrado)" y con ello Mandelbrot hace referencia a la descripción de objetos que son sumamente "fracturados".

Hay dos particularidades en los objetos fractales que los distinguen de aquellos que son descriptos por la geometría tradicional: son demasiado irregulares y presentan características autosimilares.

Precisamente es esta última propiedad la que les otorga una potencialidad que día a día va siendo objeto de estudio por parte de la Ciencia y que los proyecta a logros hasta ahora nunca alcanzados.

Cuando se habla de autosimilitud de un objeto, se hace referencia al hecho de que el mismo está constituido por partes que son "réplicas" reducidas en escala y rotadas del propio objeto [2].

Mandelbrot define un número, asociado con cada fractal, al que llama su dimensión fractal.

En cuanto a los wavelets, también conocidos como "ondículas" en un intento de traducción al castellano, aparecen como una alternativa a las técnicas de Fourier para la visualización de señales temporales en el dominio de la frecuencia a través de la famosa transformación que lleva el nombre del insigne investigador.

Mientras que Joseph Fourier, en el siglo XIX sentó las bases con sus teorías del análisis de frecuencia, que resultó ser de enorme importancia e influencia, la atención de los investigadores pasó gradualmente del análisis basado en frecuencias al análisis basado en escalas cuando comenzó a quedar claro que un enfoque que mide las fluctuaciones promedio a diferentes escalas podría ser menos sensible al ruido. [5].

La primera mención registrada de lo que ahora se llama "wavelet" parece ser en 1909, en una tesis de Alfred Haar [3] quien construyó la primera base wavelet cuando demostró que cualquier función continua f $\in [0, 1)$ se puede aproximar usando funciones escalón.

La base de Haar no se utiliza tanto en la práctica debido a su discontinuidad, pero es muy simple y, por lo tanto, útil para fines educativos. Además, muchos de los argumentos utilizados para Haar pueden ampliarse a otras bases de wavelets.

El concepto de wavelets en su forma teórica actual fue propuesto por primera vez por Jean Morlet y el equipo del Centro de Física Teórica de Marsella que trabajaba bajo la dirección de Alex Grossmann [4] en Francia.

Los métodos de análisis wavelet han sido desarrollados principalmente por Y. Meyer y sus colegas, quienes han asegurado la diseminación de los mismos. El algoritmo principal se remonta al trabajo de Stephane Mallat [5] en 1988.

La propuesta de este trabajo parte de la generación de una serie de tiempos con exponente de Hurst conocido (y por ende su dimensión fractal) mediante la Función Coseno de Weierstrass, para después determinarlo utilizando el algoritmo “Coeficiente Wavelet Promedio”.

A través de lo desarrollado, se establece el grado de exactitud de la utilización de esta técnica que puede llevar a compararla con la de otros métodos encontrados en la literatura.

2 Fractales

El concepto de dimensión fractal, en el que se articula la geometría fractal, surge de las consideraciones teóricas basadas en la auto-similitud de cualquier objeto.

Considérese, como ejemplo práctico de un objeto auto-similar, un segmento (Fig. 1, a).
Siempre es posible elegir un entero b que "cubra" el segmento con N=b partes iguales. Cada parte se puede conseguir del segmento original a través de la relación de similitud $r(n) = 1/b = 1/N$.

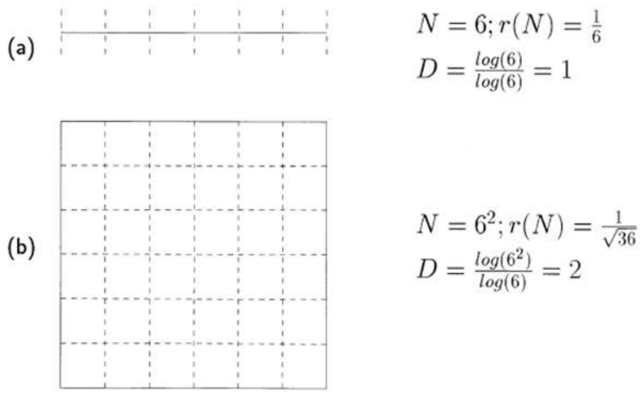


Figura 1. Auto-similitud en (a) un segmento lineal y (b) un cuadrado. El valor de dimensión del objeto se deriva de la aplicación de la relación de similitud, la que produce valores enteros para figuras euclidianas (a) y (b).

Luego se considera un cuadrado (Fig. 1, b) que puede ser cubierto por $N = b^2$ partes iguales, aquí la relación de similitud es $r(N) = 1 / b = 1 / N^{1/2}$. El mismo procedimiento aplicado a un cubo produce una relación de similitud $r(N) = 1 / N^{1/3}$, se puede generalizar este resultado para cualquier dimensión D, donde la proporción es de $r(N) = 1 / N^{1/D}$.

Se define como dimensión fractal a la relación (1):

$$D = \frac{log(N_l/N_{l+1})}{log(L_{l+1}/L_l)} \qquad (1)$$

Para líneas geométricas fractales, esta fórmula es útil para encontrar D directamente desde los parámetros del procedimiento de construcción de la curva. Para ello, temiendo en cuenta el nivel de construcción l, y siendo N_l el número de "piezas" de longitud L_l.

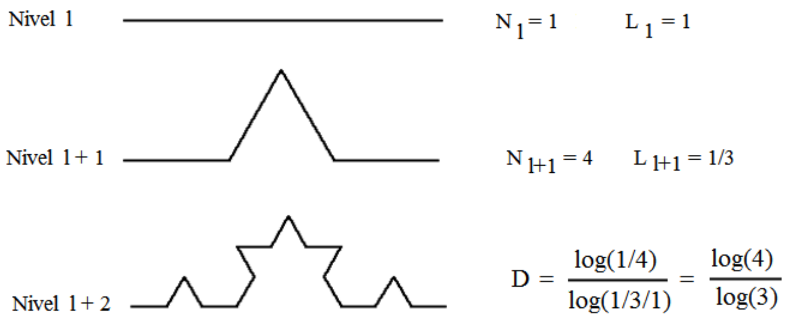


Figura 2. Construcción del fractal (curva de Koch) y aplicación de la fórmula para el cálculo de la dimensión fractal.

Para el caso de Fig.1, a y b, este valor es de 1 y 2 respectivamente. En otras palabras, números enteros. En cambio, en el caso de la Fig. 2 el cociente da un número fraccionario característico de un objeto fractal (para la curva de Koch D=1.2618).

3 Wavelets

La transformada wavelet continua o CWT se puede escribir como (2):

$$\gamma(s,\tau) = \int f(t).\psi^{*}_{s,\tau}(t).dt \qquad (2)$$

donde * denota complejo conjugado. Esta ecuación muestra cómo una función f(t) es descompuesta en un conjunto de funciones base $\psi_{s,t}$ llamadas wavelets. Las variables s y τ son las nuevas dimensiones, escala y traslación.

Los wavelets son generados desde una única función básica ψ(t), llamado wavelet-madre, por escalamiento y traslación (3):

$$\Psi_{s,\tau}(t) = \frac{1}{\sqrt{s}}\psi\left(\frac{t-\tau}{s}\right) \qquad (3)$$

En la transformada wavelets discreta ψ no es continuamente escalable sino que puede ser escalada y trasladada en pasos discretos. Esto se logra modificando la representación wavelet para crear (4):

$$\Psi_{j,k}(t) = \frac{1}{\sqrt{s_0^j}}\Psi\left(\frac{t-k.\tau_0.s_0^j}{s_0^j}\right) \qquad (4)$$

Usualmente, se elige $s_0 = 2$ de modo que el muestreo del eje de frecuencia corresponde a un muestreo diádico. Esta es una elección muy natural para computadoras, el oído humano y la música, por ejemplo. Para el factor de traslación usualmente se elige $\tau_0 = 1$ de modo que también se tiene muestreo diádico en el eje de tiempos.

Con estos valores, la expresión anterior queda (5):

$$\Psi_{j,k}(t) = s_0^{-j/2}\Psi(2^{-j}.t-k) \qquad (5)$$

Cuando los wavelets discretos son usados para transformar una señal continua, el resultado será una serie de coeficientes wavelets, a este proceso se lo denomina Descomposición en Series Wavelets.

Los coeficientes wavelets representan variaciones de la señal a diferentes escalas. Por ejemplo, los coeficientes de nivel uno capturan las componentes de frecuencia más altas.

A continuación, se obtienen las estadísticas de dependencia de escala transformando el perfil de la serie de tiempo en espacio de wavelet, los coeficientes wavelets en varias escalas s se usan para determinar la función de fluctuación.

Los detalles de alta frecuencia son capturados por los coeficientes de wavelet de escala más baja y las escalas más altas capturan los detalles de baja frecuencia. Al convolucionar la transformada wavelet discreta con la serie de tiempo dada, se obtienen los coeficientes wavelet para varias escalas (6):

$$f(t) = \sum_{k} c_{j_0,k} \cdot \phi_{j_0,k} + \sum_{j=j_0}^{\infty} \sum_{k} d_{j,k} \cdot \psi_{j,k}(\mathbf{t}) \qquad (6)$$

Donde los c y los d son los llamados coeficientes aproximación y wavelet, respectivamente. ϕ es la función de escalamiento y j_0 es el nivel de descomposición [6].

La determinación de los coeficientes se hace a través de un banco de filtros pasa-banda, cuyo esquema se puede ver en la Fig. 3.

El software Matlab (T.M Mathworks) en el Toolbox de Wavelets [7] posee dos funciones que serán de sumo interés en el desarrollo de este trabajo.

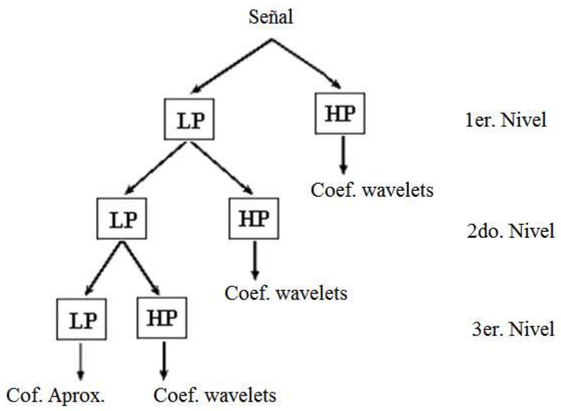


Figura 3 – Obtención de los coeficientes aproximación y wavelet de 3er. Nivel utilizando un Banco de Filtros (paso-bajo, LP y paso-alto, HP).

3.1 Función wavedec

Wavedec devuelve la descomposición wavelet de una señal X en el nivel n usando wavelet wname. La estructura de descomposición de salida consiste en el vector de descomposición wavelet C y el vector contabilizante L, que contiene el número de coeficientes por nivel. Para el nivel de descomposición n=3, el esquema correspondiente se ve en la Figura 4.

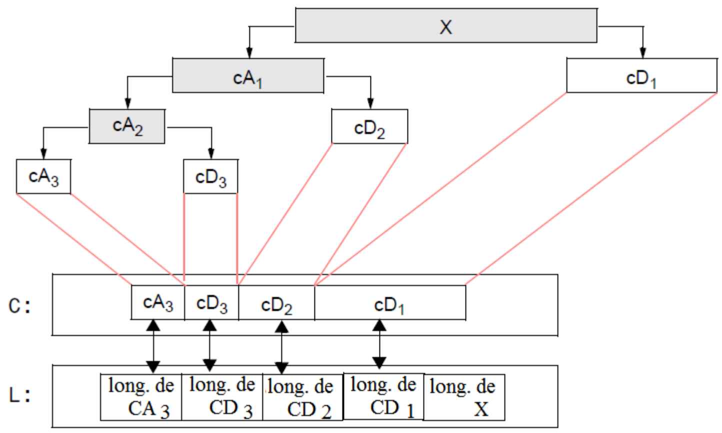


Fig. 4 – Esquema de la descomposición wavelet realizada por wavedec para un nivel 3.

Los wavelets que pueden utilizarse (wname) son abundantes y están extensamente descritos en [6]. La sintaxis correspondiente es [C, L] = wavedec(X,n,wname).

3.2 Función detcoef

Esta función es complementaria a wavedec y permite extraer los coeficientes wavelet en el nivel k ($1 \leq k \leq n$) de la estructura de descomposición wavelet. Su sintaxis es D = detcoef(C,L,k).

Para cada valor de k se obtiene el vector de coeficientes wavelet en ese nivel, C y L son valores obtenidos por la aplicación de wavedec al vector de datos X.

4 Función Coseno de Weierstrass (WCF, Weierstrass Cosine Function)

Esta función es útil para generar una señal de prueba con exponente de Hurst determinado, lo que permite evaluar medidas de dimensión fractal.

La relación entre el exponente de Hurst (H) y la dimensión fractal (FD) es **FD = 2 – H**. H es un valor real entre 0 y 1.

La expresión de WCF está dada por (7):

$$w(t) = \sum_{k=0}^{k\max} \lambda^{-k.H}.\cos(2.\pi.\lambda^{k}.t) \qquad (7)$$

Donde λ es un parámetro mayor que 1. Si λ es entero, entonces, la WCF es periódica con periodo uno. H es el exponente de Hurst deseado para la señal de prueba y kmax es usualmente elegido tal que $2.\pi.\lambda^k <= 10^{12}$. Un valor típico es kmax=10.

Una representación típica se puede ver en la Fig. 5 y su implementación function Gene, Apéndice 1.

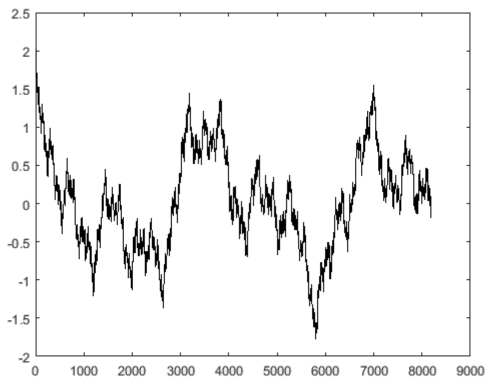


Figura 5. Función Coseno de Weierstrass para kmax=10 , λ=2.2, H=0.5.

5 Algoritmo "Coeficiente Wavelet Promedio" (Average Wavelet Coefficient)

Este método, descrito por Simonsen y Hansen [8] se inscribe dentro de los clasificados como tiempo-escala.

Los wavelets, a través de sus capacidades de resolución múltiple y localización, son muy adecuados para extraer fluctuaciones a diversas escalas de las tendencias locales sobre tamaños de ventana apropiados. La naturaleza de las fluctuaciones extraídas depende en parte de la elección de los wavelets, que están diseñados con propiedades útiles para un análisis deseado.

Si bien Simonsen et.al utilizaron transformada wavelet continua, se ha demostrado que los wavelets discretos [9] proporcionan una base ortonormal completa, asegurando que las fluctuaciones sean independientes en cada nivel. Para ello se hace una transformación wavelet discreta de la señal, utilizando una familia determinada.

El número de niveles para la transformación de wavelet discreta del algoritmo de Mallat [5] se elige con respecto a la longitud de la señal.

Para encontrar el Average Wavelet Coefficient, se calcula la media aritmética con respecto al coeficiente de traslación. Los coeficientes promedio vs. los niveles se trazan en un gráfico log-log. Una regresión lineal estándar a este gráfico tendrá una pendiente H + 1/2, siendo H el exponente de Hurst a través del cual se halla la dimensión fractal mediante D = 2 – H.

Recurriendo a la Función Coseno de Weierstrass como referencia de coeficiente de Hurst conocido, se desarrollará un procedimiento para su determinación a través del Algoritmo “Coeficiente Wavelet Promedio”.

Sea Y_t (t = 1, 2, 3, ..., N) la serie temporal de longitud N. Primero se determina la transformación de la serie de tiempo en el espacio wavelet, los coeficientes wavelets en varias escalas s se usan para determinar la llamada función de fluctuación (8).

$$W_{j,k} = 2^{j/2}.\sum_{i=0}^{N-1} Y_i.\psi(2^j.t-k) \qquad (8)$$

Aquí 'j' es el índice de escalamiento y k representa la variable de traslación. Como la transformada wavelet discreta satisface la condición de ortogonalidad, puede proporcionar la información de series de tiempo a diversas escalas de forma inequívoca.

La potencia wavelet se calcula sumando los cuadrados de los valores del coeficiente para cada nivel (9):

$$A(j) = \sum_{k=0}^{\frac{N}{2^j}-1} W_{j,k}^2 \qquad (9)$$

Para caracterizar las series de tiempo, la función de fluctuación F(s) en un nivel s se obtiene del espectro de potencia acumulada (10):

$$F(s) = \left[\sum_{j=1}^{s} A(j)]\right]^{\frac{1}{2}} \qquad (10)$$

Se puede comprobar el comportamiento de escalamiento en la forma (11)

$$F(s) \sim s^H \qquad (11)$$

Aquí H es el exponente de escalamiento de Hurst, que se puede obtener a partir de la pendiente de la gráfica log-log de F(s) vs. las escalas s.

Para las series de tiempo persistentes H > 0.5 y H = 0.5 series no correlacionadas y H <0.5 para series temporales antipersistentes.

Toda esta secuencia se instrumenta en la function awc del Apéndice 2.

También se realiza un análisis del comportamiento del algoritmo con diferentes valores de H utilizando distintos wavelets y midiendo el porcentaje promedio de error relativo (última columna). Los resultados se muestran en la Tabla 1.

Como se puede apreciar, el wavelet más apropiado es el coiflet coif1.

Tabla 1 – Medidas de H y promedio porcentual de error relativo para distintos wavelets

wave	H=0.1	H=0.2	H=0.3	H=0.4	H=0.5	H=0.6	H=0.7	H=0.8	H=0.9	Prom. % error
db4	0.0891	0.1851	0.2814	0.3781	0.4758	0.5735	0.6708	0.7668	0.8606	5.7762
db24	0.0932	0.1874	0.2819	0.3774	0.4738	0.5698	0.6641	0.7549	0.8413	5.8140
sym1	0.0865	0.1884	0.2903	0.3910	0.4901	0.5866	0.6785	0.7629	0.8357	4.8679
sym3	0.0982	0.1968	0.2957	0.3950	0.4956	0.5970	0.6981	0.7980	0.8952	0.9432
coif1	0.1020	0.2011	0.3006	0.4004	0.5013	0.6021	0.7020	0.7999	0.8951	0.4770

A modo ilustrativo y para conformar resultados mostrados en la Tabla 1, se hace una “corrida” de la function awc donde las entradas son:

- **data**: serie de tiempo de N=8192 y H=0.3 producida por la ejecución de data=Gene(H,N)
- **wave**: wavelet a utilizar wave= 'coif1'
- **nivel**: nivel máximo de descomposición wavelet nivel=8.

Utilizando la nomenclatura de Matlab, el resultado obtenido es:

```
WCF=Gene(0.3,8192);
h=awc1(WCF, 'coif1',8);
--- AWC estimado del exponente de Hurst ---
H = 0.3006
```

También se obtiene una salida gráfica log-log, como se muestra en la Fig. 6.

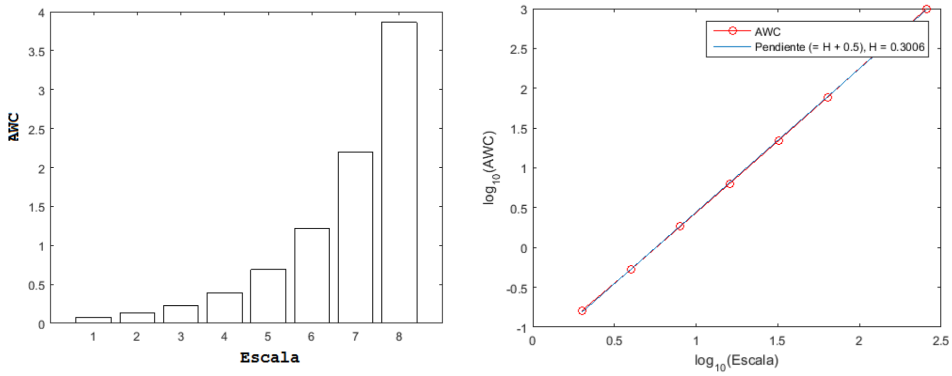


Figura 6 - Gráfica log-log que muestra la evolución de AWC con la escala

6 Conclusiones y trabajos futuros

Conforme a lo desarrollado en este trabajo se puede apreciar un vínculo virtuoso, desde el punto de vista pedagógico, entre fractales y wavelets. Además se suministran todas las herramientas informáticas para replicar la experiencia y plantear nuevos escenarios que profundicen la eficacia de este algoritmo en la determinación de la dimensión fractal, a través del exponente de Hurst.

Por otro lado, se verifica a través de la Estadística el buen nivel de exactitud en las estimaciones del parámetro en cuestión marcando un buen comportamiento del procedimiento y su factibilidad de aplicación.

Esta propuesta forma parte del Proyecto de Investigación “Ritmos Biológicos y estilos de aprendizaje” que se lleva a cabo con estudiantes de la Facultad de Medicina y Ciencias de la Salud de la Universidad de Mendoza, con el que se pretende relacionar los diferentes estilos, preferencias y percepciones de los aprendizajes de educandos, con las variaciones rítmicas circadianas.

Además, es intención del autor transferir la mecánica enunciada a actividades de grado en el espacio curricular Análisis de Señales en donde se desempeña como profesor titular.

Referencias

[1] Jarnicki, M., Pflug, P. “Continuous Nowhere Differentiable Functions: The Monsters of Analysis”. Springer Monogrphs in Mathematicas. 2015.
[2] Sagan, H. “Space-filling curves”. Springer. 1994.
[3] Warren, J. , Weimer H. "Subdivision Methods for Geometric Design: A Constructive Approach". Morgan Kaufmann, 2001.
[4] Mandelbrot B. “The fractal geometry of nature”. Freeman, New York. 1983.
[5] Barnsley, M. F. “Fractals Everywhere”. Elsevier. Morgan Kaufmann, 1993.
[6] Stepanov, A., Rose, D. "From Mathematics to Generic Programming". Addison-Wesley Professional. 2015.
[7] Clarke, K. C. "Computation of the Fractal Dimension of topographic surfaces using the triangular prism surface area method". Computers and Geosciences, 12(5): 713-722. 1986.
[8] Tang, M., Wang, N. "Feature analysis of brain MRI images based on fractal dimension". Engineering in Medicine and Biolog Society, 2005
[9] Manimaran, P. "On Estimation of Hurst Scaling Exponent through Discrete Wavelets". Elsevier Science. 2017

Apéndice 1

Algoritmo 1. Función para generar una serie de tiempo con exponente de Hurst predeterminado.

```
function WCF = Gene(H, N)
% Genera una Serie de longitud N y exponente de Hurst H
% Entradas:
% H Exponente de Hurst de la serie a generar
% Longitud de la serie
% Salida:
% WCF Serie de tiempo de longitud N y exponente de Hurst H
Lambda=2.2; t = linspace(0,1,N); %N samples.
Kmax = 10; aux = NaN(1,Kmax); aux2 = NaN(Kmax,N);
for k = 1:Kmax
    aux(k) = Lambda^((-1)*(k*H));
    aux2(k,:) = aux(k).*cos(2*pi*( Lambda^k)*t);
end
```

Apéndice 2

Algoritmo 2. Función para calcular el exponente de Hurst con el objeto de catalogar el grado de exactitud del método aplicado para su determinación.

```
function h=awc_hurst(data,wave,nivel)
% data=Gene(2.2,0.4,1024*8);
% Entradas:
%   data: serie de tiempos (vector)
%   wave: wavelet a utilizar (string)
%   nivel: Nivel máximo de descomposición(entero)
% Salida:
%   h, exponente de Hurst calculado por awc
N = floor(log2(length(data))); T=1:nivel; % rango del escalamiento
%  Decomposición Wavelet
DATA = zeros(2^N,1);
DATA(1:length(data)) = data;
[C,L] = wavedec(DATA,N,wave);
% Computa el estadístico AWC
for j=1:N,
     awc(j) = mean(abs(detcoef(C,L,j)));
     sc(j) = 2^j;
end
% Computa el exponent de Hurst
P = polyfit(log10(sc(T)),log10(awc(T)),1);
h = P(1) - 0.5;

% Calcula el exponente de Hurst
P = polyfit(log10(sc(T)),log10(awc(T)),1);
h = P(1) - 0.5;

% Grafica los resultados en gráfico log-log
plot(log10(sc),log10(awc) + log10(sc),'or-',...
log10(sc),log10(sc)*(P(1)+1) + P(2));
legend('AWC',['Pendiente (= H + 0.5), H = '  num2str(h,4)],4)
xlabel('log_{10}(Escala)')
ylabel('log_{10}(AWC)')
disp('--- AWC estimado del exponente de Hurst ---')
disp(['H = ' num2str(h,4)])
```

Determinación de Intervalos de Confianza para el Proceso Productivo de una Pequeña Empresa de Manufactura – Estudio de Caso

Mario José Mantulak[1], Silvana Sofía Nelli[1], Julio Cesar Bresciani[1], Alfredo Roberto Pauluk[1]

[1]Departamento de Matemática, Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de Misiones
Juan Manuel de Rosas 325, Oberá, Misiones, Argentina
mantulak@fio.unam.edu.ar, nelli_sofia@yahoo.com.ar, juliocesarbresciani@gmail.com, robertopauluk@hotmail.com

Resumen. El presente trabajo aborda un análisis estadístico del proceso productivo de transformación mecánica de la madera en el ámbito de un pequeño aserradero en la provincia de Misiones, Argentina. El objetivo del mismo, se centró en la utilización de intervalos de confianza para establecer los rendimientos productivos en el emprendimiento, como propuesta educativa de articulación de contenidos curriculares aplicados a una actividad productiva regional. En el desarrollo del trabajo se analizaron los volúmenes maderables del aserradero, para las diferentes clases diamétrica en que se clasifican los troncos. Luego se calcularon sus respectivos rendimientos productivos. Uno de los principales resultados obtenidos fue que la clase diamétrica que aporta porcentualmente mayor volumen productivo es la que contiene a los troncos con diámetros iguales o mayores a 28 cm, mientras que la clase que contiene a los troncos de 14 a 20 cm es la que presenta un menor rendimiento productivo.

Palabras clave: Estadística aplicada, Intervalos de confianza, Proceso productivo, Pequeña empresa, Manufactura.

1 Introducción

La adecuada gestión de bosques implantados en la República Argentina constituye un valioso recurso ambiental renovable, con enorme potencial para abastecer la industria forestal del país, y también mantener diversos mercados en el extranjero. El rendimiento productivo del procesamiento de la madera a través de mediciones detalladas, desde que ingresan los troncos al aserradero hasta que salen convertidas en productos finales, es una manera de conocer las fortalezas y debilidades de las estaciones de trabajo específicas del proceso de transformación, lo cual posibilita realizar los ajustes necesarios que conduzcan al alcance de mayor eficiencia en la industrialización forestal primaria.

La Provincia de Misiones es el polo forestal más importante de la República Argentina, con crecimientos forestales altos, selvas nativas aún productivas, una capacidad industrial altamente desarrollada, un marco legal y ambiental adecuado para favorecer la inversión privada en el área plantaciones, como en servicios e industrias. [1] A ello hay que sumarle el hecho de la implementación una fuerte política gubernamental a través de líneas estratégicas de desarrollo forestal en el corto y mediano plazo.

Para poder gestionar adecuadamente el desempeño productivo de una organización, ligada a determinada porción del aparato productivo, se requiere conocer, por un lado, internamente y en detalle las variables de control involucradas en los procesos de producción y el grado de interrelación entre ellas, por otro lado, el grado de influencia o repercusión de cada una de las variables mencionadas en el entorno en que se desenvuelve, evaluado en un contexto económico y social.

La experimentación estadística resulta esencial para el seguimiento de las diversas etapas de un proceso mediante el tratamiento estadístico de los datos recopilados, con el objeto de evaluar la variabilidad, con lo cual es posible mejorar el control sobre dicho proceso. Por ello el diseño del experimento no debe ser muy complejo, para que no resulte en una actitud de escepticismo por parte del empresario-dueño del aserradero, quien en la mayoría de los casos se muestra poco convencido con la aplicación de herramientas de análisis de elevado contenido teórico.

En el contexto de esta investigación llevada a cabo por los integrantes de la cátedra, resulta imprescindible que los resultados de la misma puedan ser luego transferidos al aula. El dictado de la materia Probabilidad y Estadística 1 se desarrolla a través de dos tipos de actividades, una de corte netamente teórico, y otra referida a la ejercitación planteada a través de los denominados trabajos prácticos. En las consignas de ejercicios de trabajos prácticos se utiliza la información obtenida de las actividades de investigación de la cátedra. Una actividad que permite a los alumnos experimentar con datos reales, implica mejorar la comprensión de los conceptos impartidos (Batanero, 2001) [2].

Asimismo, en el ámbito de la materia se desarrolla el Proyecto de promoción de la investigación encuadrado dentro del Programa de Investigación del departamento de matemática, y el cual tiene como propósito impulsar la transferencia de los resultados de la investigación a los alumnos. Por ello, Behar Gutiérrez (2001), plantea que es fundamental que los ejercicios planteados a los alumnos se encuentren relacionados con su futura profesión, en particular si es posible utilizar la estadística para su resolución, lo cual les sirve de motivación para el estudio de la asignatura [3].

Por otra parte, esta experiencia permite a los alumnos observar que la estadística es inseparable de sus aplicaciones y que su justificación está en su aplicación a problemas externos a la misma (Batanero y Díaz, 2005) [4]. Por ello, se destaca la trascendencia que tiene el involucramiento de los integrantes de la cátedra en actividades de investigación, de modo que puedan transferir a los estudiantes los conocimientos y experticias devenidas de la aplicación de técnicas estadísticas a determinadas actividades productivas de la región.

En el presente trabajo, es necesario además, utilizar técnicas que permitan trascender, a partir de los datos muestreados en el experimento, hacia un posible estado de situación generalizado en mayor escala del proceso productivo bajo análisis. En función de ello, el objetivo del trabajo se centró en la aplicación de herramientas estadísticas que posibilitan la determinación de intervalos de confianza para los volúmenes medios de producción de un pequeño aserradero de la provincia de Misiones, con el propósito de que los alumnos tengan la posibilidad de vincular conceptos estadísticos aplicados a una actividad productiva, con un enfoque práctico dentro del currículo de enseñanza de la Ingeniería.

2 Materiales y métodos

Para el diseño del muestreo se trabajó en función de la clasificación de troncos preestablecida por la empresa, según clases diamétricas (diámetros de troncos). Así, se tienen identificados tres categorías de troncos, según los rangos de diámetros de 14 a 20 cm, de 21 a 27 cm, y de 28 cm o más. Puesto que, se estableció la necesidad de obtener los volúmenes productivos generados por cada una de las categorías de troncos, se utilizó el método de muestreo estratificado con reposición. Para lo cual se estableció un total de tres estratos a estudiar, uno por cada categoría de troncos, se definió que la cantidad de troncos a muestrear por categoría debía ser de 15 unidades, con una afijación del tipo uniforme.

2.1 Medición de troncos

Una vez realizado el procedimiento de aleatorización y determinados los troncos a muestrear en cada estiba, se los marcó con pintura en cada una de sus caras; cada tronco se pintó con un color diferente para poder realizar el seguimiento de sus partes aserradas. Se organizaron los troncos según su clase diamétrica, y se obtuvieron medidas de las siguientes dimensiones: dos longitudes en generatrices opuestas, dos diámetros tomados en cruz en la punta gruesa del tronco y dos diámetros tomados en cruz en la punta fina del tronco; luego se consiguieron promedios de cada una de las dimensiones de cada tronco.

Luego de que el rollo ha pasado por la sierra sin fin principal, se tienen un pan principal y dos costaneros. El pan principal sigue por la línea principal, pasa por la sierra circular múltiple y luego por las sierras circulares; los costaneros van a línea de recuperación, pasan por la sierra sin fin simple y la sierra circular, y luego reingresan las tablas obtenidas a la línea principal.

2.2 Medición de tablas

En esta etapa del proceso se tiene en cuenta lo sugerido por el Instituto Forestal de Chile [5], donde se miden en cada una de las tablas obtenidas, dos medidas de longitud, cuatro de espesor, y de tres del ancho. Luego se calculan valores promedio de las tres dimensiones (longitud, espesor y ancho) de cada una de las tablas. De igual manera se trabaja para obtener las medidas de las tablas de la línea de recuperación, y calcular los correspondientes promedios de las medidas de cada una de ellas.

2.2 Cálculo de volúmenes maderables

Para determinar el volumen de cada tronco (V_T) se utiliza la fórmula de Smalian, de acuerdo con Tuset y Duran [6], para la cual se toman las medidas de los diámetros de punta fina y de punta gruesa, con ellas se hallan las áreas de cada punta, obteniéndose posteriormente un promedio de ambas, y luego multiplicándose este valor por la longitud del tronco.

Para obtener el volumen aserrado correspondiente al pan principal (Vp), se trabaja a partir de los promedios calculados de los espesores, anchos y longitudes de cada tabla, obteniéndose primero un volumen por tabla, y luego se suman todos los volúmenes de las tablas obtenidas de un mismo tronco, determinándose el volumen maderable del pan principal. Para establecer el volumen aserrado correspondiente la línea de recuperación (Vr), se procede de igual manera que para la línea principal, hallándose el volumen maderable de los costaneros de recuperación.

Por último se determina el volumen productivo (Vpro) de cada tronco, de cada una de las tres clases diamétricas. Para ello, sumamos el volumen maderable proveniente del pan principal y el volumen maderable proveniente de los costaneros de recuperación; para obtener el volumen productivo por tronco. A partir de ello, se suman todos los volúmenes productivos de los troncos para determinar el volumen productivo total por clase diamétrica.

2.3 Determinación de intervalos de confianza para los volúmenes maderables

La teoría de la inferencia estadística consiste en aquellos métodos con los cuales se pueden realizar estimaciones o generalizaciones sobre una población. Un modelo probabilístico es abstracto hasta que se lo relaciona con las observaciones de un fenómeno de la vida real, y a partir de los datos de una muestra del fenómeno observado se obtienen estimaciones de los parámetros de la población.

Los intervalos de confianza proporcionan dos extremos entre los cuales se debe encontrar la media poblacional, con nivel de confianza de (1- α) 100%; para hallar estos extremos se utiliza la media de una muestra de la población, el valor de z que delimita un área $\alpha/2$ a cada extremo en la distribución normal estándar; la varianza de la población y el tamaño de la muestra [7]. Mientras más alto es el nivel de confianza, más fuerte es la creencia de que el valor del parámetro que se está estimando queda dentro del intervalo, de tal manera que, el ancho del intervalo da información sobre la precisión de una estimación de intervalo [8].

Para la determinación de los intervalos de confianza de los diferentes volúmenes maderables y volúmenes productivos de las diferentes clases diamétricas se utilizará la expresión (1). En el presente trabajo se ha considerado que las muestras provienen de poblaciones que poseen una distribución normal.

Debido a que el número de muestras es pequeño para cada una de las clases diamétricas (n=15) se debe trabajar con una distribución t de Student para realizar los intervalos.

$$P\left(\overline{X} - t_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \overline{X} + t_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \alpha \quad (1)$$

3 Resultados

3.1 Aplicación a una pequeña empresa de manufactura

El establecimiento de referencia procesa rollos de pino en el aserradero, para lo cual utiliza diferentes tipos de estaciones de trabajo: acopiado, corte con sierra sin fin principal, corte con sierra circular múltiple, corte con sierra circular simple (despuntado), corte con sierra sin fin horizontal (tableado) y corte con sierra circular doble (canteado). En la Figura 1 se presenta un diagrama de bloques del proceso.

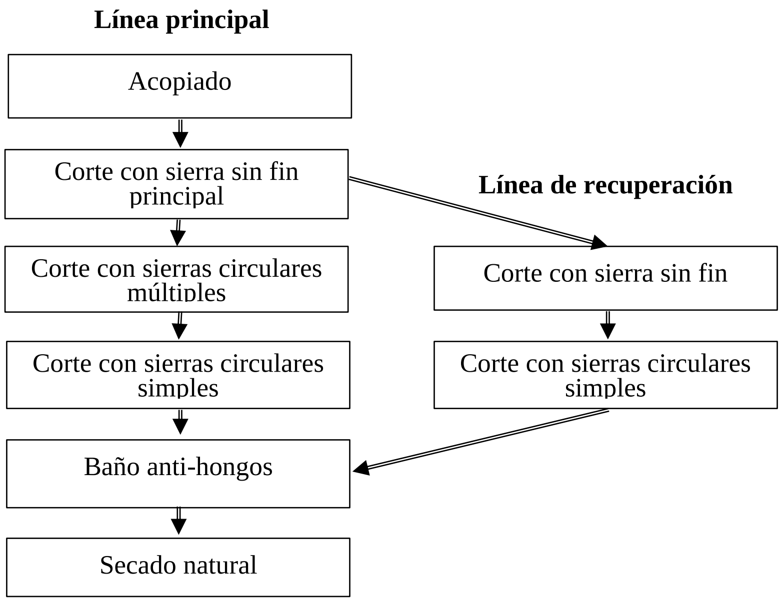


Figura 1. Esquema del proceso de productivo en el pequeño aserradero

Al ingresar al aserradero los troncos pasan primeramente por una sierra sin fin principal, de donde se obtiene el pan principal y los panes de recuperación. El pan principal pasará a continuación a las sierras circulares múltiples y circulares simples para la obtención de las tablas de primera calidad. Dichas tablas irán a un baño anti hongos para finalmente realizarse un secado natural de las mismas.

Por otro lado, los panes de recuperación pasarán a una línea secundaria, donde se los corta con sierras sin fin y sierras circulares simples, obteniéndose tablas de segunda calidad que se incorporan a la línea principal para recibir el baño anti hongo y pasar al secado.

En las tablas 1, 2 y 3 se resumen los valores promedio de volúmenes totales (VT), volúmenes de pan principal (Vp), volúmenes de pan de recuperación (Vr) y volúmenes productivos (Vpro), como suma de los dos anteriores, todo ello diferenciado por cada clase diamétrica.

Tabla 1: Volúmenes promedios de la clase simétrica de 14 – 20 (cm), expresados en cm^3

Diámetro: 14 a 20 (cm)				
Tronco	**V_T**	**Vp**	**Vr**	**Vpro**
1	82.596,14	30.052,23	6.305,51	36.357,74
2	48.666,67	17.942,19	7.689,82	25.632,01
3	66.209,83	18.287,49	8.751,42	27.038,91
4	56.323,53	21.556,95	4.897,45	26.454,40
5	66.122,60	20.604,73	4.294,41	24.899,14
6	68.825,18	25.813,02	7.645,69	33.458,71
7	70.142,45	28.569,68	9.514,05	38.083,73
8	81.736,57	27.574,86	5.214,99	32.789,85
9	75.788,33	29.045,28	9.152,29	38.197,57
10	70.692,28	27.593,96	9.721,40	37.315,36
11	58.677,56	23.949,21	7.234,22	31.183,43
12	59.879,45	25.132,25	8.742,15	33.874,40
13	63.845,22	22.987,92	6.243,51	29.231,43
14	78.968,47	36.621,31	9.623,50	46.244,81
15	76.133,86	33.180,48	8.979,45	42.159,93
Prom.	**68.307,21**	**25.927,44**	**7.600,66**	**33.528,11**

Tabla 2: Volúmenes promedios de la clase simétrica de 21 – 27 (cm), expresados en cm^3

Diámetro: 21 a 27 (cm)				
Tronco	**V_T**	**Vp**	**Vr**	**Vpro**
1	147.256,61	42.516,88	32.932,16	75.449,04
2	136.260,13	37.244,48	29.344,77	66.589,25
3	158.231,57	44.978,25	35.934,16	80.912,41
4	128.849,56	36.932,52	25.403,92	62.336,44
5	94.500,40	29.530,27	20.869,76	50.400,03
6	89.779,50	28.156,88	18.869,76	47.026,64
7	84.509,85	25.441,31	17.869,76	43.311,07
8	89.645,77	28.911,19	18.869,76	47.780,95
9	104.683,12	32.394,61	22.403,25	54.797,86
10	119.853,23	36.251,74	21.403,24	57.654,98
11	127.656,61	37.716,88	26.732,16	64.449,04
12	153.878,43	45.860,29	34.732,16	80.592,45
13	89.779,50	28.156,88	18.869,76	47.026,64
14	89.645,77	25.911,19	16.869,76	42.780,95
15	129.853,23	36.251,74	23.403,22	59.654,96
Prom.	**116.292,22**	**34.417,01**	**24.300,51**	**58.717,51**

Tabla 3: Volúmenes promedios de la clase simétrica de 28 o más (cm), expresados en cm^3

Diámetro: 28 o más (cm)				
Tronco	**V_T**	**Vp**	**Vr**	**Vpro**
1	178.190,66	76.609,09	38.076,77	114.685,86
2	201.511,81	88.784,08	41.076,77	129.860,85
3	199.266,77	86.070,11	42.076,77	128.146,88
4	210.857,85	86.775,11	45.191,92	131.967,03
5	175.397,32	68.583,05	34.076,77	102.659,82
6	179.637,65	65.718,51	32.076,77	97.795,28
7	209.216,78	76.871,54	32.076,77	108.948,31
8	197.497,02	72.434,52	34.115,15	106.549,67
9	169.498,89	67.363,58	35.115,15	102.478,73
10	211.799,44	82.214,86	54.153,54	136.368,40
11	188.190,66	79.624,19	43.123,78	122.747,97
12	197.378,12	78.234,25	32.076,77	110.311,02
13	209.216,78	76.871,54	32.076,77	108.948,31
14	201.511,81	73.784,08	32.076,77	105.860,85
15	179.778,89	69.456,76	32.076,77	101.533,53
Prom.	**193.930,03**	**76.626,35**	**37.297,82**	**113.924,17**

A partir de estas tablas se calculan la varianza y la desviación estándar de las muestras que serán necesaria para realizar los cálculos de los intervalos de confianza. La Tabla 4 presenta el resumen de estos datos:

Tabla 4: Volúmenes promedios (cm^3), varianzas (cm^6) y desviaciones estándar (cm^3) para cada clase diamétrica.

	Vp	**Vr**	**Vpro**	
Medias	25.927,44	7.600,66	33.528,11	**Diámetro: 14 a 20 (cm)**
Varianzas	27.781.289,03	3.341.423,32	39.622.409,05	
Desviaciones Estándar	5.270,80	1.827,96	6.294,63	
Medias	34.417,01	24300,51	58.717,51	**Diámetro: 21 a 27 (cm)**
Varianzas	44.972.523,72	40061441,55	166.416.252,92	
Desviaciones Estándar	6.706,16	6329,410838	12.900,24	
Medias	76.626,35	37.297,82	113.924,17	**Diámetro: 28 o más (cm)**
Varianzas	52.103.157,94	43.351.734,94	158.394.103,75	
Desviaciones Estándar	7.218,25	6.584,20	12.585,47	

3.2 Realización de intervalos de confianza

Para realizar los intervalos de confianza trabajaremos con un nivel de confianza del 95%. Es decir:

$$P\left(\overline{X} - t_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{s}{\sqrt{n}} < \mu < \overline{X} + t_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{s}{\sqrt{n}}\right) = 0.95 \qquad (2)$$

Intervalos de confianza para Vp, clase diamétrica de 14 a 20 cm. En base a los datos de la tabla 1 Se obtiene el valor de la media $\overline{X}$ y desviación s muestrales. Luego se obtiene el valor de $t_{1-\alpha/2}$ de la distribución t Student. Esto es, el valor que toma la variable aleatoria t para una probabilidad de 0.975 con 14 grados de libertad. De esta manera, reemplazando los valores obtenidos en la expresión (2), se obtiene el siguiente intervalo:

$$25.927{,}44 - 2{,}145 \cdot \frac{5.270{,}80}{\sqrt{15}} < \mu < 25.927{,}44 + 2{,}145 \cdot \frac{5.270{,}80}{\sqrt{15}} \qquad (3)$$

Lo que da como resultado:

$$23.008{,}28 < \mu < 28.846{,}60 \qquad (4)$$

El mismo procedimiento se realiza para hallar el intervalo de confianza para volumen de recuperación (Vr), y volumen productivo (Vpro) para esta clase diamétrica. Obteniéndose los siguientes intervalos:

Para volumen de recuperación (Vr):

$$6.588{,}27 < \mu < 8.613{,}05 \qquad (5)$$

Para volumen productivo (Vpro):

$$30.041{,}91 < \mu < 37.014{,}31 \qquad (6)$$

Con las mismas consideraciones realizadas para la clase diamétrica anterior se realiza para la clase de 21 a 27 cm. Para volumen principal (Vp), a partir de los datos de la Tabla 2. Se obtiene el siguiente intervalo:

$$30.702{,}90 < \mu < 38.131{,}12 \qquad (7)$$

Intervalos de confianza para volumen de recuperación (Vr), se obtiene el intervalo:

$$24.300{,}51 - 2{,}145 \frac{6.329{,}41}{\sqrt{15}} < \mu < 24.300{,}51 + 2{,}145 \frac{6.329{,}41}{\sqrt{15}} \qquad (8)$$

Calculando se llega a:

$$20.795{,}05 < \mu < 27.805{,}97 \qquad (9)$$

De la misma forma para volumen productivo (Vpro) se tiene:

$$51.572{,}88 < \mu < 65.862{,}14 \qquad (10)$$

El intervalo de confianza que se obtuvo, utilizando los datos de la Tabla 3 para volumen principal (Vp) en clase diamétrica de 28 o más cm fue:

$$72.628{,}62 < \mu < 80.624{,}08 \qquad (11)$$

Para volumen de recuperación (Vr):

$$33.651{,}25 < \mu < 40.944{,}39 \qquad (12)$$

Finalmente, para volumen productivo (Vpro):

$$113.924{,}17 - 2{,}145\frac{12.585{,}47}{\sqrt{15}} < \mu < 113.924{,}17 + 2{,}145\frac{12.585{,}47}{\sqrt{15}} \qquad (13)$$

Obteniéndose:

$$106.953{,}87 < \mu < 120.894{,}47 \qquad (14)$$

Todos estos intervalos se presentan en la Tabla 5, donde se resumen los resultados obtenidos del cálculo de intervalos de confianza:

Tabla 5: Intervalos de confianza para los volúmenes promedio Vp, Vr y Vpro para cada clase diamétrica.

	Clases diamétricas		
Volumenes	**14 a 20 cm**	**21 a 27 cm**	**28 cm o más**
Vp	23008.28<μ<28846.60	30702.90<μ<38131.12	72628.62<μ<80624.08
Vr	6588.27<μ<8613.05	20795.05<μ<27805.97	33651.25<μ<40944.39
Vpro	30041.91<μ<37014	51572.88<μ<65862.14	106953.87<μ<120894.47

A partir de estos resultados se pueden calcular el rendimiento productivo promedio de los troncos, a partir de realizar el cociente entre el volumen promedio aprovechado y el volumen promedio total de los troncos. De esta manera se presenta en la Tabla 6 un resumen de los rangos de rendimientos productivos obtenidos, a partir de las muestras de troncos.

Tabla 6: Rangos de rendimiento productivo para cada clase diamétrica.

Rangos de Rendimientos Productivos Volumen para las clases diamétricas		
14 a 20 cm	**21a 27 cm**	**28 cm o más**
43,98% a 54,19%	44,35% a 56,64%	55,15% a 62,34%

4 Propuesta didáctica asociada con la investigación

En función de las actividades que se llevaron a cabo en la presente investigación y teniendo en cuenta los contenidos curriculares que se desarrollan en la asignatura de probabilidad y estadística 1 de la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional de Misiones, la cátedra lleva adelante una propuesta didáctica, la cual se explica a continuación.

4.1 Articulación de conceptos teóricos con resultados de investigación

Esta propuesta didáctica se realiza a partir de aquellas clases teóricas y la resolución de trabajos prácticos que abordan los contenidos curriculares utilizados en el presente trabajo. La misma se basa en la explicación de la utilidad que puede tener la estadística aplicada a un proceso productivo muy importante para la región cómo lo es la industria maderera. En particular, en lo que respecta al presente trabajo se han articulado conceptos y aplicaciones correspondientes a estimación e intervalos de confianza.

4.2 Aplicación de resultados de investigación al trabajo práctico de la asignatura

Esta actividad se enfoca en la utilización por parte de los alumnos, de datos obtenidos como producto de actividades de la presente investigación, mediante la resolución de ejercicios vinculados a estadística descriptiva, variables aleatorias continuas, intervalos de confianza y regresión y correlación. En este sentido se les brinda a los alumnos una explicación previa que les posibilita observar de manera integral el problema analizado, para tomar en cuenta factores relevantes como el contexto en que se realiza la investigación, la fuente de los datos, el método de muestreo, y además, para interpretar resultados e identificar implicaciones prácticas.

5 Conclusiones y trabajos futuros

- Se observó que los rendimientos productivos para la clase diamétrica de 28 o más es superior a las demás clases y varía en un rango de 55.15% y 62.34%. Mientras que, para la clase de 21 a 27 cm, el rendimiento que se obtuvo fue en el rango de 44.35% a 56.64%, próximo al de la clase de 14 a 20cm de 43.98% a 54.19%, que fue un poco inferior.
- El método propuesto para el cálculo de los volúmenes productivos posibilita que pueda ser utilizado en cualquier contexto de funcionamiento del aserradero, para posibilitar un análisis de producción adecuado y pertinente, y con obtención de la información a partir de un método sencillo que puede ser perfectamente sistematizado. El mismo está planteado de forma integral a través de todo el proceso de aserrado.
- Esta actividad ha permitido que los alumnos relacionen conceptos teóricos con actividades productivas de la vida cotidiana, al tiempo que ha posibilitado un usufructo de la investigación llevada a cabo por docentes de la catedra, con el propósito de alcanzar un análisis integral en el abordaje de determinados contenidos curriculares en las carreras de la Facultad de ingeniería de la UNaM.
- Como trabajo a futuro se plantea la realización de un estudio áulico sobre las dificultades de comprensión de parte de los alumnos de contenidos curriculares referidos a los intervalos de confianza, y su interpretación con respecto a datos provenientes de esta misma investigación.

Referencias

1. Zorrila, A. (2004). Evaluación de sustitución por tecnologías limpias – Industria del aserrado. División para el Desarrollo Sustentable (Naciones Unidas) y Secretaría de Ambiente y Desarrollo Sustentable (Argentina). Buenos Aires, Argentina. http://www2.medioambiente.gov.ar/ciplycs/documentos/archivos/Archivo_395.pdf. Acceso: septiembre de 2016.
2. Batanero, C. Didáctica de la Estadística. *Grupo de Investigación en Educación Estadística.* Universidad de Granada. Granada, España. http://www.pucrs.br/famat/viali/graduacao/matematica/material/referencias/didacticaestadistica.pdf. (2001). Accedido el 15 de marzo de 2017.
3. Behar Gutiérrez, R. Mil y una dimensiones del aprendizaje de la estadística. *Estadística española*, Vol. 43, No 148, 2001, pp 189–207 (2001).
4. Batanero, C. y Díaz, C. El papel de los proyectos en la enseñanza y aprendizaje de la estadística. *I Congresso de Estatística e Investigação Operacional da Galiza e Norte de Portugal*, Guimarães, Portugal. http://www.ugr.es/~batanero/pages/ARTICULOS/CEIO.pdf. (2005). Accedido el 10 de diciembre de 2016.
5. Instituto Forestal de Chile: *Manual Nº 16 - Principios de organización y Operación del Aserradero*. División Regional Concepción (1989).
6. Tuset, R. y Duran F.: *Manual de Maderas Comerciales, Equipos y Procesos de Utilización*. Editorial Hemisferio Sur, Uruguay (1995).
7. Deepol Rivero, R. y Monasterio, D.: Probabilidad y Estadística-Aplicaciones a la Ingeniería. Editorial Universidad Nacional Experimental Politécnica Antonio José de Sucre, Venezuela, (2013).
8. Devore, J. L.: Probabilidad y Estadística para Ingeniería y Ciencias. Editorial Cengage Learning Editores, S.A. de C.V. (2008).

Otras fuentes consultadas

- García, R.: *Inferencia Estadística y Diseño de Experimentos*. Editorial Universitaria de Buenos Aires, Argentina (2004).

- Cardona Brain, G. Análisis del sector forestal argentino. *Montes, Revista del ámbito forestal*. Colegios y Asociaciones de Ingenieros de Montes e Ingenieros Técnicos Forestales. Madrid, España. Nº 89 (2º trimestre), pp. 32-36 (2007).
- Navidi W.: *Estadística para Ingenieros y Científicos*. Mc Graw Hill Interamericana, D.F. México (2006).
- Pérez López, C.: *Muestreo estadístico - conceptos y problemas resueltos*. Pearson-Prentice Hall, España (2005).
- Tinto, J. C.: *Tecnología de las Maderas Argentinas y del Mundo*. Editorial Agro Vet S.A., Argentina (1997).

Diseño de Visualización Interactiva para la Construcción de una Imagen Conceptual del Método de Halley en Cálculo Numérico

Oscar Enrique Ares[1], Agustín Menuet[1]
Facultad de Ingeniería y Ciencias Agropecuarias – Universidad Nacional de San Luis
[1]Departamento de Ciencias Básicas
Campus Universitario. Ruta 147. Villa Mercedes (SL)
oscareares@gmail.com, agustinmenuet@gmail.com

Resumen. En este trabajo se presenta el diseño pero también las conclusiones de la puesta en escena de una secuencia didáctica utilizando nuevas tecnologías para la enseñanza del tema de cálculo numérico: Método de Halley. Una fase del diseño es la construcción de una herramienta didáctica computacional que se materializa en el entorno de visualización del software Geogebra. La esencia de esta propuesta didáctica es la utilización de la herramienta computacional específicamente destinada a visualizar los conceptos involucrados en el método de Halley, pero el alumno elabora sus respuestas en cuatro registros: geométrico, algebraico, numérico y computacional, mediante la confección de un guion Matlab para ejecutar el algoritmo de Halley con su correspondiente visualización, que le permitirán realizar tareas de exploración respecto al comportamiento del método ante raíces simples y múltiples. Siguiendo la estrategia didáctica del constructivismo el alumno realiza la construcción teórica de la fórmula iterativa del método numérico.

Palabras clave: Método Halley, Halley cúbico, Visualización interactiva.

1 Introducción

Uno de los problemas más clásicos y antiguos en cálculo numérico, pero de permanente actualidad es el problema de la búsqueda de raíces de ecuaciones no lineales en una variable. Sin duda que el método más popular y utilizado frecuentemente es el Newton_Raphson de convergencia cuadrática. En convergencia cúbica posiblemente el método más difundido y redescubierto es el método de Halley, debido al matemático británico Edmund Halley quien publica los principios del método, aunque no exactamente su fórmula como la conocemos actualmente, en una revista londinense en 1708.

Es conocida la interpretación geométrica del método de Newton. Dada una aproximación inicial x_0, la recta tangente a la curva f en el punto (x_0, f(x_0)) se intersectara con el eje de las abscisas, determinando x_1, el punto siguiente de la sucesión. Por esto el método de Newton también es conocido como de la recta tangente.
La fórmula de Halley:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \frac{2}{\left(2 - \frac{f(x_n) f''(x_n)}{f'(x_n)^2}\right)} \qquad \textbf{(I)}$$

Así directamente expresada como en (I) carece de una interpretación geométrica. No obstante en 1952 el matemático ruso Salehov sugiere la construcción del método de Halley con hipérbolas osculatrices, es decir hipérbolas que tienen contacto de segundo orden con la curva f, en cada punto (x_n, f(x_n)) de la sucesión, de ecuación:

$$y(x) = \frac{(x - x_0) + c}{a\,(x - x_0) + b} \qquad \textbf{(II)}$$

Siendo a, b y c coeficientes a determinar, incógnitas de un sistemas de tres ecuaciones en tres incógnitas *no lineal*. La mayoría de la literatura habitual de cursos de cálculo para ingeniería no plantea el método, pero aquellos artículos que lo hacen no ofrecen el desarrollo en detalle y solamente los resultados. Este trabajo *desarrolla los detalles del método de las hipérbolas tangentes* y luego plantea su construcción y visualización en forma de secuencia didáctica para su enseñanza.

2 Objetivos

Utilizando distintos caminos teóricos, al menos hay registrados siete [1], se definen estrategias todas en *registro algebraico* que conducen al método de Halley. El recurso clásico es aproximarse a la raíz de f mediante el polinomio de Taylor, es decir, desarrollar hasta segundo grado la expresión $f(x_0+\varepsilon)=0$ y hallar ε.

Para facilitar la construcción de una *imagen conceptual para el alumno del método de Halley*, se elige la estrategia didáctica de la visualización matemática junto con registro algebraico, numérico y computacional. La secuencia didáctica del *método de las hipérbolas tangentes* también llamadas *osculatrices* por su segundo orden de contacto con f(x), permitirá al alumno realizar la *construcción teórica del método, visualizar el proceso iterativo y construir su guion matlab para el estudio de comportamiento en cuanto a su orden de convergencia*.

Fundado en la teoría del constructivismo la secuencia didáctica permite el protagonismo del alumno como constructor de su propio aprendizaje.

3 Conceptos teóricos de didáctica de las matemáticas aplicados en la secuencia

La imagen conceptual es la *primera asociación mental no verbal que aparece en nuestra mente* cuando el nombre del concepto es evocado [2].
Puede tratarse de una impresión visual o una colección de impresiones o experiencias. Si bien estas imágenes visuales, experiencias pueden luego traducirse en forma verbales, no es así como aparecen en primera instancia.

Para adquirir un concepto *no es suficiente con memorizar su definición*, debe poseerse una imagen conceptual del mismo. Es decir, que el aprendizaje, la comprensión, la aplicación y desarrollo de los conceptos matemáticos involucra la construcción de un cierto tipo de estructura mental: la imagen conceptual.

La teoría de situaciones didácticas [3] introducidas por G. Brousseau (1986), se basa en una hipótesis acerca de la construcción del significado de una noción... *una noción aprendida no es utilizable sino en la medida en la que ella es relacionada con otras, esas relaciones constituyen su significación, su etiqueta, su método de activación. Empero, no es aprendida si no es utilizable y utilizada efectivamente, es decir, solo si es una solución de un problema. Tales problemas constituyen, junto con las restricciones a las que la noción responde, la significación de la noción.* Esta concepción teórica se concreta en la utilización de la definición de *orden de contacto entre curvas* y curva osculatriz que proviene del capítulo aplicaciones de la derivada en análisis matemático y permite plantear el sistema de tres ecuaciones no lineales con tres incógnitas que son los coeficientes de la fórmula de la hipérbola tangente.

4 Fundamentos matemáticos del método de hipérbolas tangentes

Uno de los problemas más básicos y más estudiado e investigado en cálculo numérico es el llamado problema de la *búsqueda de raíces.* Se trata de *hallar* los valores de la variable x para los cuales f(x) = 0. A los valores x solución, se les llama *ceros de f,* o raíces de f. La mayoría de los métodos de cálculo numérico para búsqueda de raíces corresponde a alguno de los siguientes tres campos estratégicos:

La primera estrategia es *aproximar* la función f cuyos ceros se quieren hallar, con una *curva osculatriz que tenga en el punto de contacto un prefijado* en cada punto del plano cuya abscisa queda determinada por el método iterativo. Cuando el *orden de contacto* entre la función cuyos cero se busca y la curva osculatriz es *dos*, tenemos los clásicos métodos geométricos de parábolas o hipérbolas tangentes. También se puede utilizar para aproximar f(x), *un polinomio de interpolación*, cuyo grado es una solución que tiene en cuenta precisión, costo numérico y demás características a considerar en el proceso. Por ejemplo, en el método de la regla falsa el polinomio de interpolación entre (a,f(a)) y (b,f(b)) es de primer orden, geométricamente una línea recta. Los métodos que responden a esta estrategia son regla falsa, de la secante, método de Hamming, método de interpolación inversa cuadrática también llamado de parábolas tangentes. Se incluye en esta estrategia el método de las hipérbolas tangentes, también llamado método de Halley.

La segunda estrategia aproxima localmente f, en un entorno de la última iteración mediante un *Polinomio de Taylor*, cuyo grado depende de la calidad del refinamiento buscado y de las variables antes señaladas en a). Esta línea estratégica tiene su origen en el *método de linealización* de Newton-Raphson, que aproxima la función f en un punto dado con la *recta tangente* en dicho punto. Este método es uno de los más populares y utilizados. Pero también, es el punto de partida para toda una familia de métodos que son modificaciones, variantes del mismo y que utilizan distinto grado de aproximación con el polinomio de Taylor.

La tercera estrategia utiliza el denominado algoritmo de punto fijo, que vincula la resolución de la ecuación f(x)=0, con la búsqueda del punto fijo en la ecuación g(x) = x, mediante la fórmula iterativa $p_n = g\ (p_{n-1})$, donde g se denomina función de punto fijo. Esta estrategia es la base de los métodos de aproximaciones sucesivas y variantes cuya importancia en cálculo numérico es enorme.

Para aproximar la solución de la ecuación f(x) = 0, a partir de una condición inicial x_0, se determinará una hipérbola de ecuación

$$y(x) = \frac{(x - x_0) + c}{a\,(x - x_0) + b} \qquad \textbf{(III)}$$

Con la condición de que el punto de contacto entre la curva osculatriz (hipérbola) y f(x) sea de orden dos. En consecuencia

$$\begin{cases} y(x_0) \ = f(x_0) \\ y'(x_0) \ = f'(x_0) \\ y''(x_0) \ = f''(x_0) \end{cases} \qquad \textbf{(IV)}$$

$$y(x_0) = \frac{c}{b} \qquad \textbf{(V)}$$

$$y'(x_0) = \frac{b - ac}{b^2} \qquad \textbf{(VI)}$$

$$y''(x_0) = \frac{2a(-b + ac)}{b^3} \qquad \textbf{(VII)}$$

$$\begin{cases} f(x_0) = \dfrac{c}{b} \\ f'(x_0) \ = \dfrac{b - ac}{b^2} \\ f''(x_0) \ = \dfrac{2a(ac - b)}{b^3} \end{cases} \qquad \textbf{(VIII)}$$

Por lo tanto se ha generado un sistema de *tres ecuaciones no lineales* con tres incógnitas, cuya resolución se explicita a continuación y constituye uno de los objetivos didácticos para la enseñanza del tema.

$$\frac{f''(x_0)}{f'(x_0)} = \frac{\dfrac{2a(ac - b)}{b^3}}{\dfrac{b - ac}{b^2}} = \frac{b^2 2a(ac - b)}{b^3 b - ac} = \frac{2a(ac - b)}{b(b - ac)} = -\frac{2a}{b} \qquad \textbf{(IX)}$$

$$f'(\mathrm{x}_0) \ = \frac{b - ac}{b^2} = \frac{b - a\,f(\mathrm{x}_0)\,b}{b^2} = \frac{b(1 - a\,f(\mathrm{x}_0)\,)}{b^2} = \frac{(1 - a\,f(\mathrm{x}_0)\,)}{b} \qquad \textbf{(X)}$$

$$\begin{cases} \dfrac{f''(\mathrm{x}_0)}{f'(\mathrm{x}_0)} = -\dfrac{2a}{b} & (1) \\ f(\mathrm{x}_0) \ = \dfrac{c}{b} & (2) \\ f'(\mathrm{x}_0) = \dfrac{(1 - a\,f(\mathrm{x}_0)\,)}{b} & (3) \end{cases} \qquad \textbf{(XI)}$$

De (XI) tomando (1) se despeja la constante b:

$$b = \frac{-2af'(\mathrm{x}_0)}{f''(\mathrm{x}_0)} \qquad \textbf{(XII)}$$

Se despeja b de (1) y (3), luego se iguala:

$$\frac{-2af'(\mathrm{x_0})}{f''(\mathrm{x_0})} = \frac{(1 - a\,f(\mathrm{x_0}))}{f'(\mathrm{x_0})} \leftrightarrow -2af'(\mathrm{x_0})\,f'(\mathrm{x_0}) - f''(\mathrm{x_0}) + a\,f(\mathrm{x_0})\,f''(\mathrm{x_0}) = 0 \qquad \textbf{(XIII)}$$

Se obtiene la constante a:

$$a = \frac{f''(\mathrm{x_0})}{-2(f'(\mathrm{x_0}))^2 + f(\mathrm{x_0})\,f''(\mathrm{x_0})} \qquad \textbf{(XIV)}$$

Reemplazando a en la ecuación (VIII) se puede obtener b en función de los datos f(x_0), f ´(x_0) y f ´´(x_0)

$$b = \frac{-2\,f'(\mathrm{x_0})}{(-2(f'(\mathrm{x_0}))^2 + f(\mathrm{x_0})\,f''(\mathrm{x_0}))} \qquad \textbf{(XV)}$$

La constante c, se conoce que es:

$$c = f(\mathrm{x_0})\,b \qquad \textbf{(XVI)}$$

Sustituyendo la constante b, resulta c en función de los datos f(x_0), f ´(x_0) y f ´´(x_0):

$$c = \frac{-2\,f'(\mathrm{x_0})\,f(\mathrm{x_0})}{(-2(f'(\mathrm{x_0}))^2 + f(\mathrm{x_0})\,f''(\mathrm{x_0}))} \qquad \textbf{(XVII)}$$

Sintéticamente, los resultados obtenidos que se sustituyen en (III) son:

$$\begin{aligned} a &= \frac{f''(\mathrm{x_0})}{-2\big(f'(\mathrm{x_0})\big)^2 + f(\mathrm{x_0})\,f''(\mathrm{x_0})} \\ b &= \frac{-2\,f'(\mathrm{x_0})}{-2(f'(\mathrm{x_0}))^2 + f(\mathrm{x_0})\,f''(\mathrm{x_0})} \\ c &= \frac{-2\,f'(\mathrm{x_0})\,f(\mathrm{x_0})}{-2(f'(\mathrm{x_0}))^2 + f(\mathrm{x_0})\,f''(\mathrm{x_0})} \end{aligned} \qquad \textbf{(XVIII)}$$

Ejemplo 1:

$$y(x) = \frac{(x - x_0) + c}{a\,(x - x_0) + b}$$

$$\begin{cases} f(x) = \exp(x) - 2 \\ f'(x) = \exp(x) \\ f''(x) = \exp(x) \end{cases}$$

Para $x_0 = 1$

$$\begin{cases} f(x_0) = \exp(x_0) - 2 & f(1) = \exp(1) - 2 = 0.7183 \\ f'(x_0) = \exp(x_0) & \rightarrow f'(1) = \exp(1) = 2.7183 \\ f''(x_0) = \exp(x_0) & f''(1) = \exp(1) = 2.7183 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = \dfrac{2.7183}{-2 * (2.7183)^2 + 0.7183(2.7183)} = -0.2119 \\ b = \dfrac{-2(2.7183)}{-2 * (2.7183)^2 + 0.7183(2.7183)} = 0.4239 \\ c = \dfrac{-2(2.7183)(0.7183)}{-2(2.7183)^2 + (0.7183)(2.7183)} = 0.3045 \end{cases}$$

$$y = \frac{(x - 1) + 0.3045}{-0.2119\,(x - 1) + 0.4239}$$

Ejemplo 2. Diseño de un guion de programación para hallar los coeficientes.

```
>> Cal_Halley
Ingrese la fórmula: f= 'exp(-x)-x'
Ingrese el valor de xo: xo= 3
```

F	F1	F2	a	b	c
-2.95	-1.05	0.05	-0.0212	-0.8931	2.6347

La ecuación de la Hipérbola queda:

$$y = \frac{(x-3)+2.6047}{-0.212\,(x-3)-0.8931}$$

5 Herramienta didáctica computacional

La visualización interactiva es un elemento didáctico esencial para la formación de una imagen conceptual puesto que adicionalmente permite explorar, verificar y facilitar un aprendizaje centrado en el alumno. Antes de abordar específicamente la secuencia didáctica y con nociones teóricas previas sobre método de Halley se propone al alumno experimentar con la herramienta computacional diseñada por el docente. Fijadas distintas funciones de antemano, la variable didáctica a experimentar es el valor inicial x_0. Aquí el alumno observará la configuración geométrica de las hipérbolas osculatrices y también someterá a verificación la sucesión numérica iterativa de tercer orden de convergencia ante ceros simples de f, figuras N°1 y N°2. También en otro diseño, en matlab en este caso, podrá observar y verificar la tabla de *valores numéricos* junto con la aparición de la gráfica ilustrativa, según figuras N°3 y N°4.

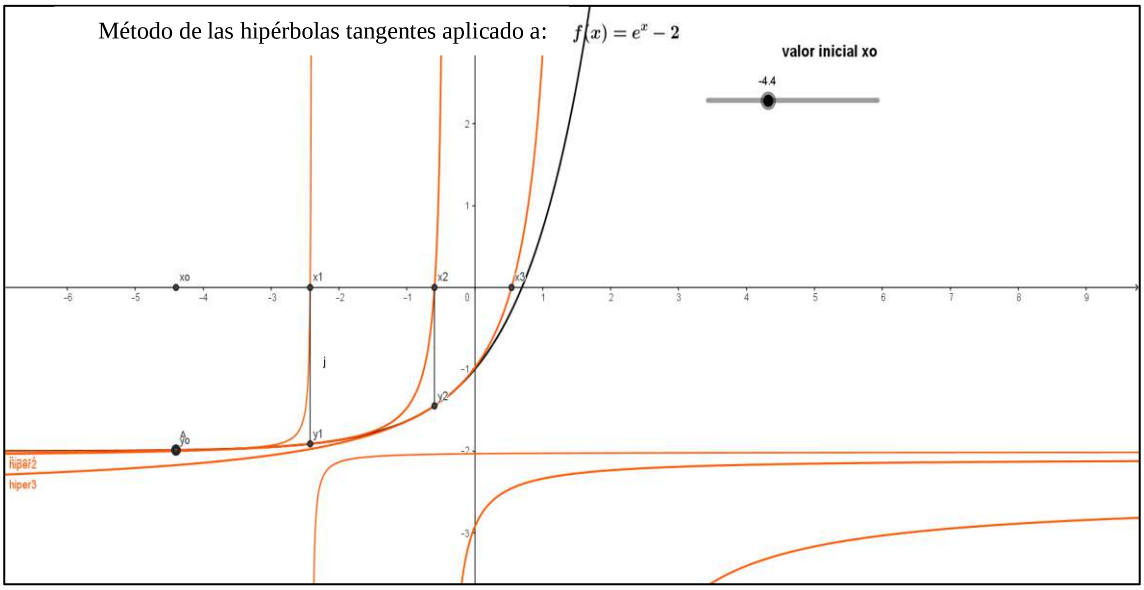


Fig. 1. Visualización interactiva para el método de las hipérbolas tangentes.

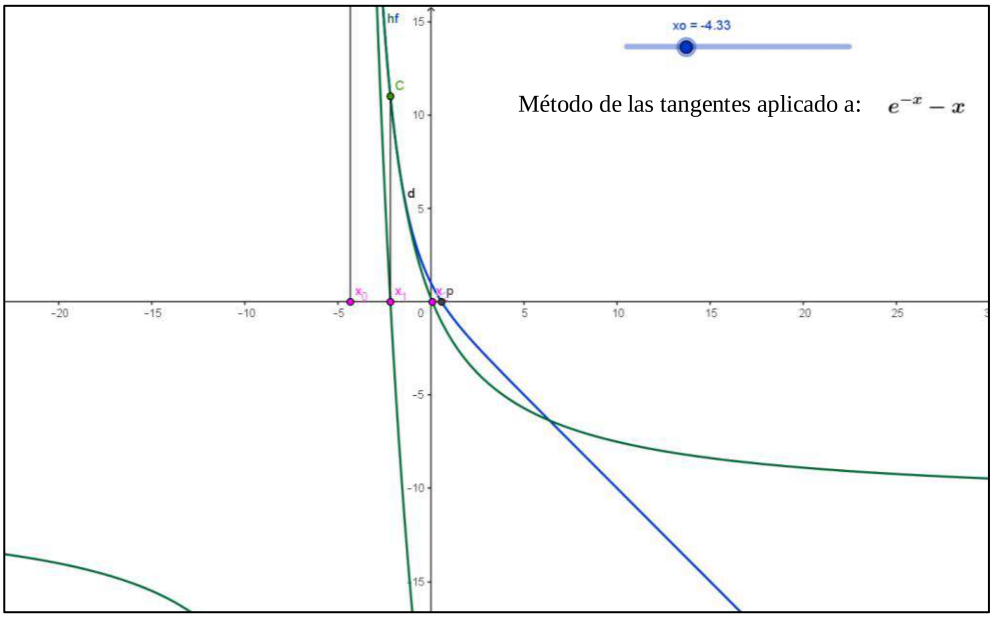


Fig. 2. Simulación del método de Halley utilizando Geogebra.

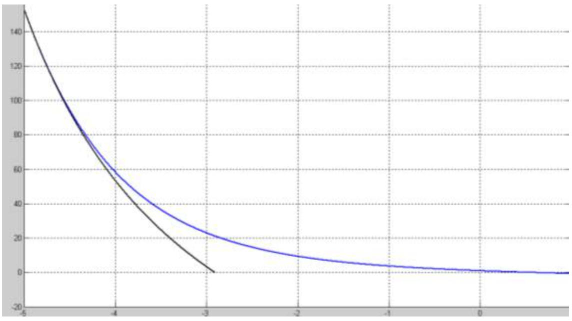


Fig. 3. Método de las hipérbolas tangentes o de Halley aplicado a f(x)=exp(-x)-x.

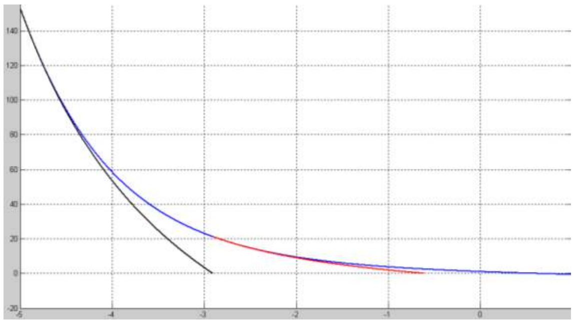


Fig. 4. Método de las hipérbolas tangentes o de Halley aplicado a f(x)=exp(-x)-x.

6 Secuencia didáctica: Método de las hipérbolas tangentes.

6.1 Fundamentos y objetivos específicos de la secuencia didáctica

La visualización es una estrategia didáctica que sirve para crear una situación didáctica, en el sentido de Brousseau, para generar un aprendizaje activo y significativo de uno de los métodos numéricos más redescubiertos en cálculo numérico: el método de Halley. El significado del saber matemático del alumno está fuertemente influenciado por la forma didáctica con que el contenido le es presentado. *El desarrollo del alumno dependerá de la estructuración de las diferentes actividades de aprendizaje* a través de una *situación didáctica*, Brousseau (1986). La idea pedagógica en el redescubrimiento del conocimiento no es fácil de ser puesta en práctica y solamente cobra sentido en un cuadro muy bien reflexionado. Todo indica que tal vez uno de los grandes equívocos encontrados en la enseñanza de la matemática sea aquel de pensar que su práctica educativa se reduciría a una simple reproducción, en menor escala, del contexto de trabajo del científico.
El objetivo específico de la secuencia didáctica es realizar un estudio del comportamiento numérico del método de Halley conjuntamente con su visualización interactiva y su formulación algebraica, siguiendo una estrategia didáctica de tipo constructivista.

6.2 Actividades

6.2.1 Actividad 1. Orden de contacto entre curvas e hipérbola osculatriz de segundo orden y visualización método de Halley.

6.2.1.1 Metas de comprensión

Comprender el concepto que expresa la definición de orden de contacto entre curvas y encontrar las expresiones analíticas para la aproximación de segundo orden de una hipérbola osculatriz a una f(x) dada, a través de la visualización con geogebra y también en registro algebraico. Esto significa utilizar efectivamente el concepto de curva osculatriz, hipérbola tangente en el método de Halley y orden de contacto entre curvas.

6.2.1.2 Conocimientos previos

Fórmulas de derivación, definición de orden de contacto entre curvas, saber operar con el software geogebra.

6.2.1.3 Enunciado de la actividad

6.2.1.3.1 Primera etapa. Definición y Visualización de orden de contacto entre curvas

- Definir matemáticamente contacto entre curvas de orden cero, uno, dos y en general de orden n.
- Dadas las funciones $f(x) = e^x\,; g(x) = sen(x) + \cos(x)$ visualizar interactivamente con geogebra, el contacto deslizando con el cursor el punto de contacto.
- Dadas las funciones $f(x) = x\,; g(x) = sen(x); h(x) = xcos(x)$ *visualizar* interactivamente con geogebra, el contacto deslizando con el cursor el punto de contacto.

6.2.1.3.2 Segunda etapa. Registro algebraico: cálculo del orden de contacto

- Hallar el orden de contacto en el origen de las curvas dadas en los ítems b y c.
- Determinar la hipérbola osculatriz a f(x) en punto x_0, de ecuación:

$$y(x) = \frac{(x - x_0) + c}{a(x - x_0) + b}$$

Con

$$a = \frac{-f''(x_0)}{2f'(x_0)^2 - f(x_0)f''(x_0)}\,; b = \frac{2f'(x_0)}{2f'(x_0)^2 - f(x_0)f''(x_0)}$$

$$c = \frac{2f(x_0)f'(x_0)}{2f'(x_0)^2 - f(x_0)f''(x_0)}$$

Para las funciones

$$f(x) = e^{-x} - x\,; g(x) = e^x - 2; h(x) = x - sen(x)$$

Para los valores x_0: -3, 4, 2 que corresponde a f, g, h respectivamente.

Hallar los valores de intersección de las respectivas hipérbolas con el eje x.

- Utilizando la herramienta didáctica computacional proporcionada al estudiante visualice el método numérico de las hipérbolas tangentes y verifique los valores numéricos hallados en 1.2.2.

6.2.2 Actividad N° 2. Determinación del sistema de ecuaciones no lineales en las incógnitas a, b, c coeficientes de las hipérbolas tangentes.

6.2.2.1 Metas de comprensión.

Con la realización de la actividad 2, el alumno será capaz de generar algebraicamente el *sistema de ecuaciones no lineales* para determinar los coeficientes de la hipérbola osculatriz.

6.2.2.2 Conocimientos previos

Fórmulas de derivación en una variable, contacto de segundo orden entre curvas

6.2.2.3 Enunciado de la actividad

- Se solicita escribir en forma genérica, correspondiente a un punto de abscisa x_0, las tres ecuaciones correspondientes a un contacto de segundo orden entre la hipérbola osculatriz y(x) y la función f(x).
- Efectuar las derivadas correspondientes y generar el sistema de tres ecuaciones en tres incógnitas no lineal.

6.2.3 Actividad N° 3. Resolución del sistema de ecuaciones no lineales en las incógnitas a,b,c coeficientes de las hipérbolas tangentes.

6.2.3.1 Metas de comprensión

Tiene el objetivo de abordar la resolución de sistemas de ecuaciones no lineales específicamente aplicadas al método de Halley.

6.2.3.2 Conocimientos previos

Comprensión conceptual de las diferencias entre sistema de ecuaciones lineal y no lineal.

6.2.3.3 Enunciado de la actividad

En esta actividad, la estrategia didáctica será la de establecer un punto de partida algebraico, es decir, un organizador en la forma de indicación de un metodología de trabajo de las ecuaciones.

Indicación de una metodología de trabajo

- Efectuar el cociente

$$\frac{f''(x_0)}{f'(x_0)}$$

- Resolver el sistema resultante

$$\begin{cases} \dfrac{f''(x_0)}{f'(x_0)} = -\dfrac{2a}{b} & (1) \\ f(x_0) = \dfrac{c}{b} & (2) \\ f'(x_0) = \dfrac{\left(1 - af(x_0)\right)}{b} & (3) \end{cases}$$

Eliminando el coeficiente b de (1) y (3) e igualando. Desde aquí obtener los coeficientes a, b, c. Contrastarlos con las formulas dadas en la actividad Nº1.

- Construir un guion matlab que permite calcular los coeficientes.

6.2.4 Actividad N ° 4. Obtención de la fórmula iterativa del método de Halley.

6.2.4.1 Metas de comprensión

Como la estrategia didáctica es el modelo constructivista, se pretende que el alumno construya conocimiento en este caso *obteniendo la fórmula de Halley*.

6.2.4.2 Conocimientos previos

Intersección de curvas, bajo qué condiciones una curva intersecta el eje x.

6.2.4.3 Enunciado de la actividad

Hallar el punto x_1 -en forma algebraica- intersección de la hipérbola con el eje x. Luego desde aquí obtener la fórmula iterativa del método de Halley.

Indicación de una metodología de trabajo.

Una vez encontrada la hipérbola osculatriz, tomamos como nueva aproximación su intersección con el eje de abscisas, es decir, el punto $y(x_1) = 0$. De esta ecuación *eliminar x_1 y luego generalizar a x_n para obtener la fórmula iterativa del método*.

6.2.5 Actividad N°5. Estudio del comportamiento numérico del método de Halley mediante la ejecución de un guion matlab.

6.2.5.1 Metas de comprensión

Realizar un estudio numérico experimental del comportamiento del método ante diferentes tipos de raíces ejecutando su correspondiente guion matlab.

6.2.5.2 Conocimientos previos

Programación de guiones breves en matlab, fórmula de Halley, definición de orden de convergencia.

6.2.5.3 Enunciado de la actividad

- Diseñar un guion matlab para ejecutar método de Halley y aplicarlo a las siguientes funciones

$$f(x) = e^{-x} - x \, ; g(x) = e^{x} - 2; h(x) = x - sen(x)$$
$$r(x) = sen(x^3)$$

Tomando los valores iniciales indicados en la actividad Nº1, describir el comportamiento del *orden de convergencia* en los distintos casos.

- A partir del guion *diseñar un modelo gráfico* que muestre sucesivamente dos hipérbolas tangentes a partir de los valores iniciales señalados.

6.2.6 Actividad N ° 6. Orden de convergencia cúbico del método de Halley.

6.2.6.1 Metas de comprensión

Verificar algebraicamente el orden de convergencia cúbico del método, definiendo su función g de punto fijo.

6.2.6.2 Conocimientos previos

Función g de punto fijo junto con condiciones de las derivadas de la función g evaluada en x = p, para asegurar orden de convergencia cúbico.

6.2.6.3 Enunciado de la actividad

Sea la función $f(x) = e^{-x} - 1$.

- Pruebe que f tiene un cero simple en x=0.
- El método de Halley tiene orden de convergencia tres en general, ilústrelo *algebraicamente* aplicado a f.

6.2.7 Actividad N° 7. Visualización en Matlab de Halley

6.2.7.1 Metas de comprensión

Construcción de una visualización del método de Halley utilizando Matlab.

6.2.7.2 Conocimientos previos

Conocimientos sólidos de los comandos para graficar en matlab junto con la mecánica iterativa del método de Halley.

6.2.7.3 Enunciado de la actividad

A partir del guion Matlab para Halley construir con el comando plot la gráfica de las funciones y sus respectivas hipérbolas osculatrices hasta la segunda iteración para las funciones de la actividad Nº5 ítem 6.2.5.3.

7 Conclusiones

El nudo central de este trabajo, la visualización del método cúbico de Halley a través del diseño de una herramienta didáctica computacional junto con la deducción algebraica de la fórmula iterativa a través de las hipérbolas tangentes con segundo orden de contacto, ha permitido en gran medida al alumno realizar a través de una secuencia didáctica la construcción teórica, la representación gráfica en Matlab de la sucesión de hipérbolas osculatrices, junto con los guiones del método iterativo y aplicarlos posteriormente a la resolución de ecuaciones no lineales en una variable. Pero además con la ejecución de los guiones ha podido constatar la convergencia cúbica del método ante ceros simples y en los casos complejos de ceros múltiples ha observado una reducción del orden de convergencia. En síntesis la realización de la secuencia tiene múltiples consecuencias verificadas en clase y en los escritos de parciales:

- Participación activa de los grupos de trabajo en la construcción de su propio aprendizaje.
- Clara comprensión conceptual y analítica del método numérico de Halley verificado en resultados de exámenes parciales.

Referencias

1. Ezquerro, J.; Gutiérrez, J.: *El método de Halley: posiblemente el método mas redescubierto del mundo.* Servicio de publicaciones. Universidad de la Rioja. (2001).
2. Hitt, Fernando: *Construcción de conceptos matemáticos y estructuras cognitivas.* Cinvestav, IPN. México. (2000).
3. Brousseau, G.: *Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques*. (1986).

Aproximación e Interpolación polinómica, para una nube de datos usando cualquier norma

Carlos Adolfo Calvo[1], Armando Luis Imhof[2] ,Beatriz Morales[1] Analía Moyano[1]

[1] Departamento de Matemática, Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de San Juan , San Juan, Argentina

ccalvo@unsj.edu.ar , bmorales@unsj.edu.ar

[2]Instituto Geofísico Sismológico Volponi, Facultad de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, Universidad Nacional de San Juan, Argentina

aimhof@unsj.edu.ar

Resumen. Para un conjunto de n datos discretos, se pretende construir un polinomio de aproximación-interpolación que debe pasar por algunos puntos definidos previamente y aproximar a los datos en los puntos restantes. Para lograr esto se modifican los datos y al polinomio, incorporando la interpolación lo que permite reducir el problema original a uno de aproximación exclusivamente. Para minimizar el error de ajuste se trabaja primero con norma 2 aplicando las Ecuaciones Normales de Gauss. De ser requerido la aproximación con otra norma se aplica un algoritmo iterativo de minimización que necesita de valores iniciales, para lo cual se usan los obtenidos con la norma 2. La implementación computacional se realiza con el paquete informático Matlab. Las salidas gráficas son la mejor medida de la calidad del proceso expuesto.

Palabras Clave: Ajuste. Interpolación. Polinomios.

1 Introducción. Definición del problema

Dada una nube (o tabla) de datos (x_i, y_i) $i \in I = [1\,,2\,,\ldots,n]$ se desea aproximarlos con un polinomio de grado $\boldsymbol{m}$, pero que interpole (coincida) en $\boldsymbol{k}$ puntos ($\boldsymbol{k} < \boldsymbol{m}$), correspondientes a los índices dados por $II \subset I$, el resto de los índices $III = II^c(complemento\ de\ II)$ corresponde a las coordenadas de los puntos donde se realiza el ajuste o aproximación.

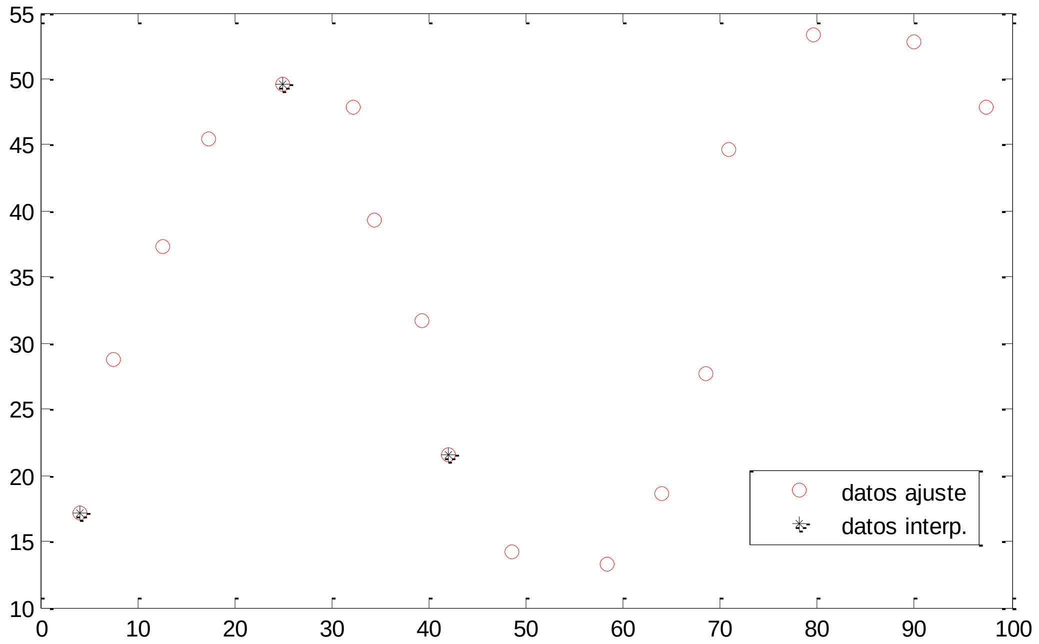


Fig. 1: Datos dados por n = 17 puntos, con interpolación en los puntos de índice II = [1 5 9] y ajuste en los restantes.

Notación:

$x(I) = [x(1)\ ,\ x(2)\ , \dots , x(n)]$: abscisas de todos los puntos

$(x(II)\ \ ,\ y(II))$:coordenadas de los puntos donde se realiza interpolación

$(x(III)\ ,\ y(III))$: coordenadas de los puntos donde se realiza el ajuste

Sea el conjunto $\pi = \{\ p(x)\}$ de todos los polinomios de grado ***m***, siendo

$$p(x) = a_1 x^m + a_2 x^{m-1} + \ \dots + a_{m+1}$$

el objeto de la aproximación es minimizar la desviación entre las ordenadas y_i y el valor que toman los polinomios en las abscisas x_i.

Para ello se define la desviación local

$$d_i = y_i - p(x_i)$$

y el vector desvío

$$\bar{d} = [y_1 - p(x_1)\ ,\ y_2 - p(x_2)\ , \dots ,\ y_n - p(x_n)]$$

la norma de este vector mide el error de la aproximación

$$Error = \|\bar{d}\|_q = \left(\sum_{i=1}^{n} \left(y_i - p(x_i)\right)^q\right)^{1/q} \qquad q \geq 1 \tag{1}$$

Se debe lograr un polinomio $p^*(x)$ óptimoque cumpla

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \left(y_i - p^*(x_i)\right)^q\right)^{1/q} = \min_{p(x) \in \pi} \|\bar{d}\|_q$$

Si el problema es sólo de aproximación, las variables de ajuste son todos los coeficientes de $p(x)$.

$$\|\bar{d}\|_q = f(a_1, a_2, \dots , a_{m+1})$$

Pero al existir ***k*** condiciones de interpolación, el número de variables libres es: ***m+1-k***

2. Desarrollo del Método

Primero se descompone el polinomio $p(x)$, incorporándole condiciones de interpolación, luego se modifican los datos llegando a una nueva expresión del error de la aproximación

A. Descomposición de $p(x) = p_3(x) + p_1(x)$

a) polinomio de interpolación en los ***k*** puntos (x_i, y_i);$i \in II$.

$$p_1(x) = \alpha_1 x^{k-1} + \alpha_2 x^{k-2} + \cdots + \alpha_k$$

Planteando las **k** condiciones, $p_1(x_i) = y_i;\ i \in II$, se llega a un sistema lineal

$$\begin{bmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots . & \dots & \dots & \dots \\ {x_i}^{k-1} & {x_i}^{k-2} & \dots & x_i & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \dots \\ \alpha_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_k \end{bmatrix} \tag{2}$$

$$A\ \alpha = y(II)$$

cuya resolución permite conocer $p_1(x)$.

b) polinomio de grado $\boldsymbol{k}$ cuyos ceros son x_i;$i \in II$

$$p_2(x) = \prod_{i \in II} (x - x_i)$$

c) Definiendo $p_3(x) = p(x) - p_1(x)$ resulta un polinomio de grado $\boldsymbol{m}$ con $\boldsymbol{k}$ ceros en x_i ; $i \in II$ por lo tanto

$$p_3(x) = p_2(x)\left[\beta_1 x^{m-k} + \beta_2 x^{m-k-1} + \cdots + \beta_{(m+1-k)}\right] \quad \textbf{(3)}$$

Resulta:

$$p(x) = p_2(x)\left[\beta_1 x^{m-k} + \beta_2 x^{m-k-1} + \cdots + \beta_{(m+1-k)}\right] + p_1(x) \quad \textbf{(4)}$$

B. Modificación de las ordenadas y_i del vector desvío y la función Error

Definiendo $yy_i = y_i - p_1(x_i)$; $i \epsilon I$, se cumple entonces, que $yy_i = 0$; para $i \epsilon II$.Sumando y restando $p_1(x_i)$ en d_i :

$$d_i = \left(y_i - p_1(x_i)\right) - \left(p(x_i) - p_1(x_i)\right) = yy_i - p_3(x_i)$$

y la norma del desvío (1) queda expresada en función de $p_3(x)$:

$$\|\vec{d}\|_q = \left(\sum_{i \epsilon III} \left(yy_i - p_3(x_i)\right)^q\right)^{1/q} = f\left(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{m+1-k}\right) \quad \textbf{(5)}$$

Esta expresión del error (5) sugiere que el ajuste se realiza para **los datos modificados** $(\boldsymbol{x_i}, \boldsymbol{yy_i})$ mediante un polinomio $p_3(x)$ (3)**, el cual incorpora las $\boldsymbol{k}$ condiciones de interpolación** (mediante $p_2(x)$), con $\boldsymbol{m+1-k}$ variables de ajuste, que son determinadas al buscar:

$$\min_{\beta_i} \|\vec{d}\|_q$$

C. Minimización del error usando norma 2 ($q = 2$)

La minimización con norma 2, **Método de los Mínimos Cuadrados de Gauss**, conduce a las ecuaciones normales.

Definiendo la matriz $\boldsymbol{A}$ formada por columnas

$$k_j = \left[\ldots, p_2(x_i). x_i{}^{(m+1-k-j)}, \ldots.\right]^T \; ; \; i \in III \; ; \; j = 1{:}\, m + 1 - k$$

el vector de incógnitas

$$\vec{\beta} = [\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{m+1-k}]^T$$

y el vector de términos independientes

$$\overrightarrow{yy} = [\ldots, yy_i, \ldots]^T \quad , \quad i \in III$$

la expresión del desvío es

$$\vec{d} = \overrightarrow{yy} - \boldsymbol{A}.\vec{\beta}$$

Para encontrar

$$\min_{\beta_i}\|\bar{\bar{d}}\|_2$$

debemos resolver las ecuaciones normales [1]

$$\boldsymbol{A^T A}.\vec{\beta} = \boldsymbol{A^T}\,\overrightarrow{yy} \qquad \textbf{(6)}$$

La resolución de este sistema lineal permite conocer $\vec{\beta}$

D. Minimización del error usando norma distinta a dos ($q \neq 2$)

Para minimizar la expresión (5), al no existir un método directo (como para $q = 2$), se usa un algoritmo numérico para determinar los coeficientes β_i.

$$\left(\sum_{i \in III}\left(yy_i - p_2(x_i)\left[\beta_1 {x_i}^{m-k} + \beta_2 {x_i}^{m-k-1} + \cdots + \beta_{(m+1-k)}\right]\right)^q\right)^{1/q} = f(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{m+1-k}) \quad \textbf{(7)}$$

El proceso iterativo de minimización requiere de valores iniciales ${\beta_i}^{(0)}$, para lo cual se usan los valores determinados para $q = 2$, en el paso C.

E. Hallado $\vec{\beta} = [\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{m+1-k}]^T$, según paso C o D se determina el $p_3(x)$ usando (3) y luego el polinomio buscado, como:

$$p(x) = p_3(x) + p_1(x)$$

3. Elección del grado m del polinomio

Una regla práctica para elegir $\boldsymbol{m}$, en los casos de ajuste, consiste en interceptar la gráfica de los datos con una recta adecuada, el máximo número de cortes logrado, indica el grado $\boldsymbol{m}$ del polinomio. Esta regla se altera en este caso debido a las $\boldsymbol{k}$ condiciones de interpolación, por lo que se prueba con $\boldsymbol{m} \geq \boldsymbol{k}$ hasta obtener una salida gráfica de calidad aceptable

Otra forma [2] consiste en calcular la dispersión del ajuste obtenido con $p_3(x)$ para los datos modificados:

$$\sigma^2 = \sum_{i=1}^{n-k} \frac{(yy_i - p_3(x_i))^2}{n-m-k} \qquad \textbf{(8)}$$

y el valor mínimo de (8) determina el grado $\boldsymbol{m}$. En caso de no obtener este mínimo se elige como valor de $\boldsymbol{m}$ aquel que luego de una disminución significativa de la σ^2 con el aumento de $\boldsymbol{m}$, no ocurre un decrecimiento importante.

4. Implementación Computacional

Como argumento de entrada se toma: 1) una nube de puntos dados como vectores $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$; 2) el grado $\boldsymbol{m}$ del polinomio de ajuste**.** Como argumentos de salida se obtiene el polinomio de ajuste-interpolacion y salida grafica (fig. 2).

Se usa el software Matlab. Los polinomios se denotan por un vector que contiene los coeficientes en orden decrecientes.

$$p = [a_1 a_2 \ldots a_{m+1}]^T \;\; indica\ un\ polinomio\ de\ grado\ m$$

- De no existir un algoritmo para la multiplicación en el software usado, puede hacerse el producto de polinomios p (de n elementos) por q (de m elementos) como el producto de la matriz P, $(de\ m+n-1\ filas\ y\ de\ m\ columnas)$ por el vector columna q

$$p * q = \underbrace{\begin{bmatrix} [p] & 0 & 0 & 0 \\ 0 & [p] & 0 & 0 \\ 0 & 0 & [p] & 0 \\ 0 & 0 & 0 & [p] \end{bmatrix}}_{P} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{bmatrix}$$

P se obtiene reemplazando en una matriz identidad de orden m, los elementos diagonales por el vector columna p.

- La resolución del sistema lineal planteado en (1) no requiere de tratamiento especial por ser de orden bajo. En cambio las ecuaciones normales llevan a sistemas de mala condición, por lo que es conveniente el uso de otros métodos (Househölder, descomposición en valores singulares, método QR, etc.)

- En este trabajo se usa QR [3] con una etapa de mejoramiento iterativo.

- Algoritmo:

  - Se descompone A = QR siendo Q matriz ortogonal $Q.Q^T = Q^T.Q = I$y Res matriz triangular superior.
  $$A^T.A = R^T.Q^TQ.R = R^TR$$
  - Aplicado a (6) queda:
  $$R^TR.\vec{\beta_1} = A^T.\overrightarrow{yy}$$
  - Cuya resolución permite la primera solución ($\vec{\beta_1}$)

  - Se calcula el residuo
  $$r = A^T\overrightarrow{yy} - R^T.R\vec{\beta_1}$$

  - y se resuelve nuevamente el sistema lineal
  $$R^T.R\overrightarrow{\beta_2} = r$$

  - Se toma como solución
  $$\vec{\beta} = \vec{\beta_1} + \vec{\beta_2}$$

- Para el proceso de minimización indicado en D. se emplea el algoritmo Simplex de Nelder-Mead implementado en Matlab [4], este método iterativo requiere de la expresión a minimizar (7) y de valores iniciales $\beta_i^{(0)}$ (dado con las ecuaciones normales). Luego a través de un proceso de evaluación de la función a minimizar se alcanza el valor óptimo.

5. Ejemplo y Resultados

En la figura 2, se muestra el ajuste-aproximación para los 17 puntos dados en la figura1. La interpolación se realiza en los puntos de índice II = [1 5 9]. El grado se determina por ensayo a partir del número de puntos usados para interpolar (3 en este caso) y se va aumentando paulatinamente hasta que la salida gráfica sea aceptable. Este criterio aunque menos científico que la formula (8) da siempre buenos resultados, y es preferido en aplicaciones de Ingeniería. Se determinó así un polinomio de grado 6. La gráfica muestra el ajuste con 3 normas distintas (1 2 e infinito). Con norma 2 se observa un ajuste intermedio entre las otras dos. No se analiza en este trabajo la ventaja de una sobre otra. Aunque la norma 1, resulta más conveniente por su menor sensibilidad a valores discordantes. El objeto de este trabajo es sólo mostrar el instrumento para su aplicación, no su análisis, que corresponde a una etapa posterior.

6. Relación con la Educación Matemática

El trabajo presente tiene una dificultad moderada. Pero es descompuesto en problemas más sencillos y fáciles de atacar. El primero consiste en construir un polinomio, $p_1(x)$, que tome determinados valores. El segundo polinomio, $p_2(x)$ tiene ceros en puntos definidos. Estos dos problemas sólo requieren conceptos de Algebra lineal. Para determinar el tercer polinomio, $p_3(x)$, se usa un software que realiza el proceso de minimización, lo que enseña a valorizar el uso de programas hechos, muy útiles en ingeniería. En la resolución de las ecuaciones normales se usó el algoritmo QR con una etapa de mejoramiento iterativo, para hacerlo efectivo en casos de mala condición. Su aplicación excede a los conceptos aprendidos en Algebra Lineal pero puede reemplazar QR por un método de Gauss común. En resumen el presente trabajo, enseña a dividir problemas de cierta complicación en problemas más sencillos y al uso del software disponible.

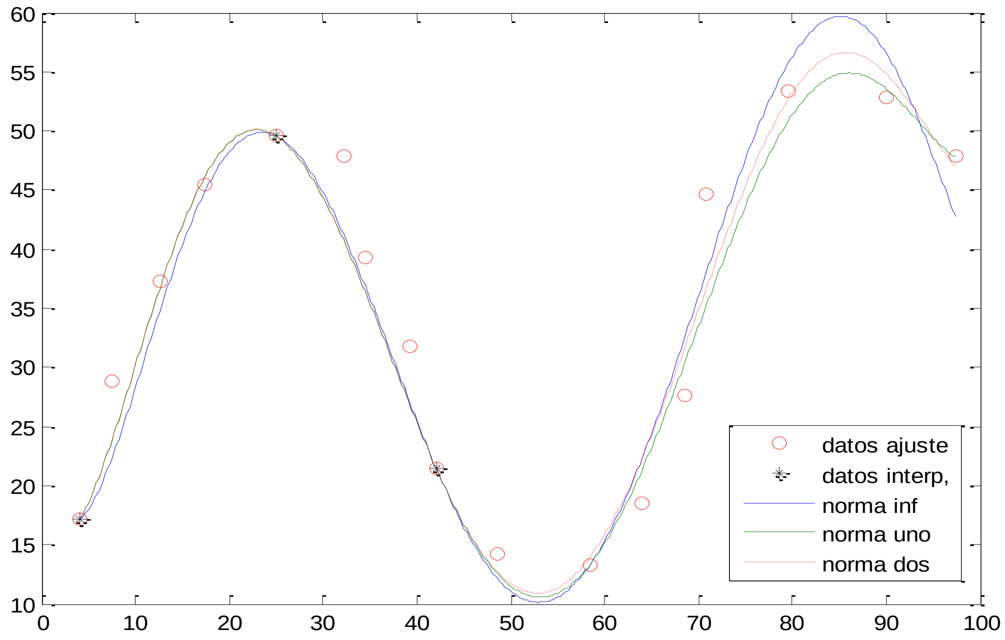


Fig. 2: Ajuste y aproximación con un polinomio de sexto grado, para los datos dados en fig. 1. Se indica con ‘‘...’’ el polinomio ajustado con norma 2. En azul con norma infinito y en verde con norma 1

7. Conclusiones

Se ha desarrollado una herramienta que construye polinomios de ajuste - interpolación, usando distintas normas para el proceso de aproximación. Para su construcción se ha descompuesto el polinomio buscado en polinomios más sencillos que asumen los pasos de interpolación y de ajuste. Se da un criterio para la elección del grado, aunque se prefiere un método de experimentación. Excepto en algunos casos de datos muy mal acondicionados, el método ha llegado a excelentes resultados

8. Referencias

1. Press, W. H. et al .:NumericalRecipes. Cambridge University Press (1986)
2. Ralston, Anthony. :Introducción al Análisis Numérico. Limusa (1978)
3. J.G.F. Francis, “The QR Transformation”, II" The Computer Journal, vol. 4, no. 4 (1962)
4. Shampine, L. F.; Reichelt :TheMatLab O de Suite, L. F. W. SIAM Journalon Scientific Computing (1997)

Ensayo Geométrico sobre Optimización de Elementos Finitos

Gerardo R. Chacón
Facultad Regional Santa Fe, Universidad Tecnológica Nacional
Lavaise 611 (3000) Santa Fe, Argentina
gerch1@hotmail.com

Resumen. Las soluciones por métodos numéricos de modelos fisicomatemáticos expresados mediante ecuaciones diferenciales exige primordial importancia al desarrollo, elección y perfeccionamiento de las funciones de aproximación, las cuales son responsable directas del error de discretización y de la convergencia hacia la solución exacta, como del esfuerzo computacional, exigencia mas critica cuando se tienen zonas de altos gradientes o discontinuidades en el medio físico. Mientras que el análisis diferencial considera funciones y operadores continuos, el análisis numérico opera con funciones y operadores discretos. La proximidad de un modelo discreto a un modelo continuo caracteriza la calidad del método. Se hace una breve contextualización sobre los métodos de optimización y posteriormente en modo heurístico se realiza un ensayo numérico mediante una reconstrucción geométrica en dos dimensiones a través de dos enfoques: el enfoque geométrico y en el enfoque topológico.

Palabras clave: Error de Discretización, Convergencia, Topología y Cohomología

1 Introducción

En métodos numéricos la expresión en forma cuantitativa de un fenómeno físico involucra para su determinación un amplio abanico de opciones que comienza en principio con la formulación diferencial y su correspondientes condiciones de frontera, así como las distintas expresiones analíticas equivalentes sobre el problema que permita la elección del método numérico que mejor se adapte a tales formulaciones diferenciales, entre los cuales se encuentra los métodos en diferencias finitas y/o los métodos variacionales tales como el de Rayleigh-Ritz o el método de los Residuos Ponderados y dentro de este último se puede optar por el método de los Elementos Finitos el que a su vez presenta distintas variantes entre las cuales se encuentran el método de colocación por puntos, el método de colocación por subdominios, el método de los mínimos cuadrados y el método de Galerkin.

Elegir entre distintas posibilidades no es sencillo. Aunque la experiencia ha permitido clasificar los métodos más aptos para determinados problemas físico, la adopción del mejor planteo matemático conjuntamente con el método numérico está guiada básicamente por el requerimiento del esfuerzo computacional y el criterio de convergencia.

Las estructuras básicas con las que trabaja el método de los elementos finitos es la malla de discretización y las funciones de aproximación o de interpolación también llamadas funciones de forma.

2 Marco referencial

El método de los elementos finitos convierte un problema de infinitos grados de libertad del medio continuo, en un problema discretizado, cuya solución tiene un número finito de grados de libertad.

El dominio del continuo se divide en un número finito de partes, denominados elementos finitos, los cuales en su conjunto conforman una malla.

Sobre los elementos de la malla se determinan puntos llamados nodos los cuales pueden establecerse en la intersección o puntos de unión de los elementos, o en el punto medio de un lado del elemento o en algún punto central del elemento u otro criterio según sea la técnica usada, realizándose sobre los mismos los cálculos, por lo que también se les asocia como grado de libertad en el contexto del método.

Las funciones de forma más comúnmente utilizadas son de tipo segmentos para dominios unidimensionales, triangulares para dominios bidimensionales y tetraédricos para dominios tridimensionales.

2.1 Discretización

En el Método de los Elementos Finitos (MEF), una vez discretizado el dominio, las variables involucradas en el mismo se aproximan mediante funciones de base llamadas de interpolación (o de aproximación o de forma), expresadas en términos de los valores nodales de la variable dependiente, o si es el caso de su derivada.

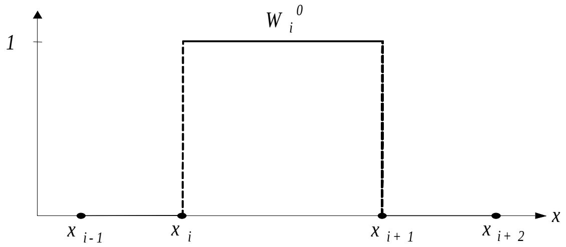
Normalmente las funciones de aproximación son expresiones algebraicas de tipo polinómica, acotadas al dominio del elemento, por ello su denominación de funciones a “trozos” (o por partes), definidas con un valor máximo 1.

Las funciones de forma más utilizadas son normalmente polinomios de bajo orden y los más frecuentes son los denominados polinomios de Lagrange.

2.2 Discretización esquema básico

Caso unidimensional (1D)

El caso más simple de función de aproximación es la utilización de la función a trozos constante o polinomio de Lagrange de orden 0 (P0 en código), de valor 1, que presenta un solo nodo(o grado de libertad) en su punto medio, que para el caso unidimensional se representa:



$$W_i^0(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x_i \le x \le x_{i+1} \\ 0 & \text{de otra manera} \end{cases}$$

Fig. 1: Caso unidimensional: dominio y función de forma P0

Luego sigue en complejidad la interpolación lineal que se realiza mediante funciones lineales tales como los polinomios de Lagrange de primer grado o de orden 1 (P1), que presentan dos grados de libertad, en los dos extremos (nodos) del segmento:

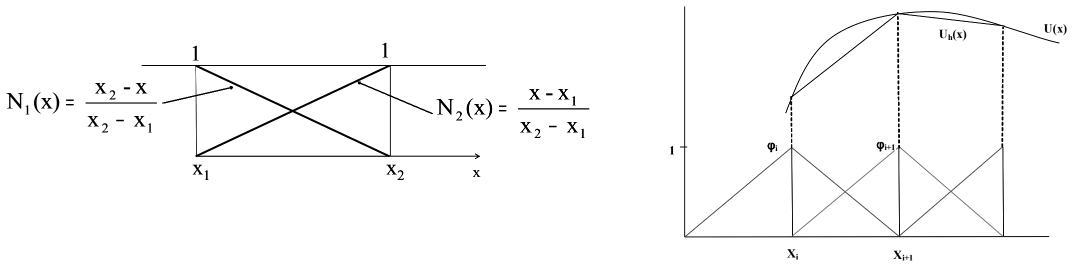


Fig. 2: Caso unidimensional: dominio, solución aproximada y funciones de interpolación o de forma P1.

La aproximación U de la solución vendrá dada por:

$$U(x) = N_1(x)u_{1x} + N_2(x)u_{2x} \tag{1}$$

Donde u_1 y u_2 son los valores de la variable en los extremos del segmento, y N_1 y N_2 las funciones de forma o interpolación.

Nótese que para representar la solución aproximada necesitamos dos funciones de interpolación lineales sobre cada intervalo, segmento o elemento finito del dominio unidimensional.

Caso bidimensional (2D)

Para el caso bidimensional la función constante (P0) es una superficie de valor 1 y su único nodo normalmente está localizado en alguno de sus centros ya sea en su baricentro o en su circuncentro, según el tipo de triangulación adoptado.

Luego sigue la función lineal (P1), que para el caso bidimensional con elementos triangulares, los nodos se ubican en los vértices.

La solución aproximada puede expresarse como:

$$U_e(x,y) = a + bx + cy \tag{2}$$

Donde *U* es la variable desconocida o solución aproximada buscada, cuyos valores exactos puede establecerse en los nodos (vértices del triángulo),

Sin embargo es más adecuada una representación en función de las funciones lineales de interpolación λ_l:

$$U_e(x,y) = \lambda_i u_i + \lambda_j u_j + \lambda_k u_k \tag{3}$$

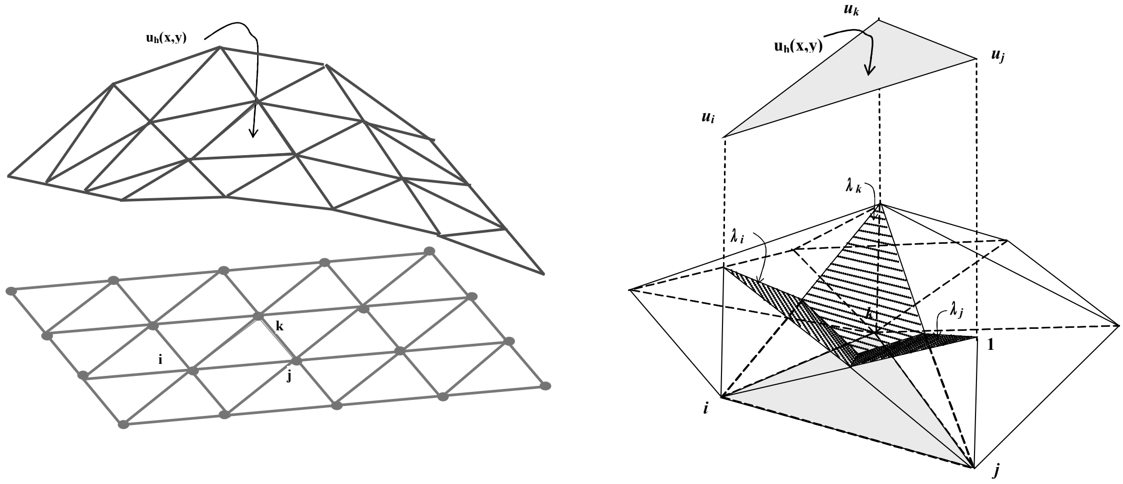


Fig. 3: Caso bidimensional: dominio, solución aproximada y funciones de interpolación o de forma P1.

La notación para los vértices (1, 2, 3 ó i, j, k) se indica porque se usan indistintamente en la literatura como forma equivalente.

Obsérvese que para representar la solución aproximada necesitamos tres funciones lineales de interpolación por cada subdominio triangular, que se corresponden en la figura con los tres planos triangulares λ_l sobre el elemento., cuyas bases valen 0 y el vértice restante 1.

Se advierte además que en particular, sobre cada borde o arista la interpolación se realiza de manera similar a la unidimensional, debido a las trazas que establecen los planos al interceptar las caras del volumen imaginario de altura 1 formado sobre el elemento triangular.

La solución aproximada U_e puede expresarse ahora en función de sus valores nodales como:

$$U_e(x,y) = \lambda_i u_i + \lambda_j u_j + \lambda_k u_k \qquad \text{(i, j, k = 1,2,3)} \tag{4}$$

En forma abreviada: $U_e = \sum_{l=1}^{3} \lambda_l u_l$ Donde λ_l son las funciones lineales de interpolación sobre un elemento triangular:

$$\lambda_i = \frac{\Delta_i}{\Delta} \qquad \text{i=1,2,3. donde: } \Delta_1 = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} \quad \text{y} \quad \Delta = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} \tag{5}$$

Las expresiones de las funciones lineales de interpolación son análogas a las de coordenadas baricéntricas (o de área). A la utilización conjunta de estas funciones lineales con las coordenadas baricéntricas que son las que describen la geometría del dominio se denomina formulación isoparamétrica.

En el caso unidimensional, el polinomio de Lagrange ya visto, es la expresión en coordenadas baricéntricas tanto del segmento o elemento finito, como de la función lineal de interpolación.

Notamos que anteriormente expresamos que la solución aproximada necesitaba tres funciones lineales de base por cada subdominio y en el caso unidimensional, en la aproximación lineal, observamos que la función de forma está constituida por dos funciones de base también denominadas "sombrero".

Las funciones descriptas anteriormente fueron las primeras en utilizarse, son las más comúnmente utilizadas y forman parte del denominado grupo que también recibe el nombre generalizado de funciones de base nodales.

También suelen utilizarse polinomios cuadráticos y de mayor grado, pero es menos frecuente.

2.3 Error de discretización

El error de discretización, es causado por la representación de los infinitos puntos de un continuo, mediante un número finito (discreto) puntos, y cuantitativamente es la diferencia entre los valores de la solución exacta y la solución aproximada. Cuanto menor o mínima es esa diferencia más satisfactorio resulta el método.

Este error se acentúa en el caso de las restricciones que imponen las condiciones de contorno y es aún más crítico en el caso de contornos geométricamente irregulares, como surge en muchos problemas de la técnica.

2.4 Criterio de convergencia

Este criterio califica el comportamiento de la solución discreta obtenida.

La aproximación o discretización de la geometría, está limitada a la capacidad de las funciones de forma geométricas de representar con exactitud la geometría real. Una estimación de tal aproximación está dada por el criterio de convergencia.

Como punto de partida, se plantea un problema en ecuaciones en derivadas parciales, con sus respectivos valores de frontera, en forma de ecuación de operadores. El método numérico de elementos finitos resuelve esta situación discretizando el problema, para a continuación definir una solución aproximada u_h.

El criterio de convergencia indica que el método numérico tendrá valor si en primera instancia es **consistente** esto es si las solución discreta se aproxima a la solución continua cuando los incrementos (tamaño de los elementos) disminuyen, o lo que es lo mismo que el error tiende a cero cuando el tamaño del elemento finito ∇h tiende a cero **y** además **estable** que significa que ante una perturbación, modificación o evolución de los datos iniciales el comportamiento de la solución aproximada debe ser similar al comportamiento de la solución real o exacta, es decir que el error de discretización no se amplifique u oscile.

Con frecuencia ocurre que no basta con que el esquema numérico sea cuantitativamente próximo al problema original; es decir, puede ocurrir que un método consistente para un problema bien propuesto sea inestable, aunque en menor medida ha ocurrido también a la inversa [1].

Lo anterior se resume en que un método que es a la vez consistente y estable ha de ser convergente: consistencia + estabilidad = convergencia

2.5 Técnicas de minimización del error

Existen dos aspectos primarios para reducir el error de discretización: el refinamiento adaptativo y la optimización de las formas discretas redefiniendo o desarrollando separada o conjuntamente nuevas funciones de forma y esquemas de interpolación.

2.6 Refinamiento adaptativo

Las técnicas básicas para reducir los errores de discretización se denominan sistema de refinamiento h-adaptativo, p-adaptativo y h-p adaptativo (este último combina ambos métodos).

La técnica h-adaptativa que recurre a aumentar el mallado o refinarlo en las zonas conflictivas, esto es empleando elementos (h) pequeños en las zonas de variación rápida de la solución, y elementos grandes en las zonas de variación lenta.

La p-adaptativa que consiste en aumentar el número de puntos de interpolación de o en cada elemento en las regiones difíciles, con lo que necesariamente aumenta el grado p del polinomio. Para la utilización eficiente de este recurso se hace necesario utilizar funciones de forma jerárquica, es decir funciones de forma que son un subconjunto de funciones de un orden inmediatamente superior, de modo que diferentes órdenes pueden ser utilizadas juntas en la misma malla.

La técnica h-adaptativa aunque más lenta es más utilizada ya que en la p-adaptativa los polinomios de grado alto plantean problemas de estabilidad, por su carácter oscilatorio. Además su cálculo exige un número de operaciones relativamente grande, con el consiguiente aumento de los errores de redondeo.

2.7 Optimización de las formas discretas

Las funciones de forma utilizadas para la interpolación deben que cumplir una serie de requisitos para garantizar la convergencia y la estabilidad de la solución. Las más importantes serían: su independencia, su continuidad y la de sus derivadas hasta un orden menor de la mayor derivada existente en el funcional a minimizar.

Salvo los requerimientos enunciados, estas funciones son arbitrarias por lo que se debe enfrentar el problema de elegir entre distintas posibilidades alguna de las cuales pueden resultar no tan claras. Pero ciertamente la calidad de la solución dependerá fuertemente de las propiedades de las funciones elegidas.

La proposición de funciones de forma que resulten satisfactorias en la resolución de problemas con variables de comportamientos complejos y/o dominios difíciles comenzó con la aplicación de las funciones de forma de H. Whitney o elemento nodal de Whitney (o de Whitney-Nedelec) al caso particular del campo electromagnético que tiene como particularidades su naturaleza vectorial, y la de ser discontinuos por definición.

E n este ensayo examinaremos dos formas de optimización de formas discretas: la primera será utilizando las formas básicas de Whitney y la segunda utilizando Elementos Mixto-Duales.

3 Ensayo geométrico

La incorporación de las funciones de Whitney-Nedelec al Método de los elementos Finitos no fue inmediata pero sus aciertos en algunos problemas propuso una mayor atención al papel de las Formas Diferenciales como una alternativa al Cálculo vectorial en formulaciones de problemas de campo, las cuales están asociadas a la teoría homológica de Rham.

Uno de los pilares de la teoría homológica de Rham se basa en establecer la secuencia exacta de las formas diferenciales denominada también complejo de Rham [2], que en 3D y 2D estas secuencias se expresan respectivamente:

:
$$\mathbb{R} \xrightarrow{\mathrm{i}} \mathbb{P}_r \xrightarrow{\mathrm{grad}} (\mathbb{P}_{r-1})^3 \xrightarrow{rot} (\mathbb{P}_{r-2})^3 \xrightarrow{div} \mathbb{P}_{r-3} \xrightarrow{\mathrm{o}} 0$$

$$\mathbb{R} \xrightarrow{\mathrm{i}} \mathbb{P}_r \xrightarrow{\mathrm{grad}} (\mathbb{P}_{r-1})^2 \xrightarrow{rot} \mathbb{P}_{r-2} \xrightarrow{\mathrm{o}} 0$$

El significado de estas secuencias exactas es que $\forall\ P_r \circ P_{r-1} = 0$, esto es que Img P_{r-1} = Ker P_r tal como Rot (grad) = 0 ó Div (rot) = 0 ó el gradiente de una función constante es cero.

Esta secuencia incluye los espacios H (rot) conforme y H (div) conforme, que significan continuidad de la traza tangencial y continuidad de la traza normal respectivamente.

Las propiedades de exactitud de complejos diferenciales discretos (asociados a las funciones de forma discretas o funciones a “trozos” utilizadas en el método numérico) y su relación con los complejos diferenciales asociados a las ecuaciones en derivadas parciales se constituyen como herramientas determinantes para establecer la convergencia de los métodos numéricos. Estos conceptos, implícitos en las formas de Whitney, permitieron el surgimiento de un nuevo enfoque sobre bases alternativas: los Elementos mixto-duales.

3.1 Formas de Whitney básicas

La forma lineal (tipo uno o primera forma) de las funciones de forma de Whitney para el caso bidimensional se obtienen a partir de los elementos lineales simples, ya vistos, mediante la siguiente operación:

$$N_i = \lambda_j \nabla \lambda_k - \lambda_k \nabla \lambda_j \qquad \textbf{(6)}$$

Para el caso bidimensional las tres funciones lineales de Whitney (representadas en la Fig. 4) sobre un elemento finito triangular tienen la siguiente expresión:

$$N_k = N_1 = \lambda_1 \nabla \lambda_2 - \lambda_2 \nabla \lambda_1 \qquad N_i = N_2 = \lambda_2 \nabla \lambda_3 - \lambda_3 \nabla \lambda_2 \qquad N_j = N_3 = \lambda_3 \nabla \lambda_1 - \lambda_1 \nabla \lambda_3 \qquad \textbf{(7)}$$

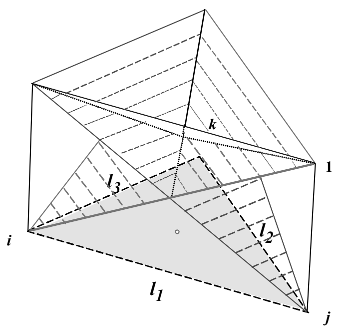


Fig. 4: Caso bidimensional: dominio y funciones de aproximación de Whitney (o de borde).

La notación en subíndices de las funciones N_1, N_2, N_3 en este caso hacen referencia a los lados o aristas del triángulo opuestos a los vértices respectivos.

Se observa ahora que el vértice vale 0 y la base vale 1, a la inversa del elemento lineal simple visto. Al igual que las funciones lineales simples también estas funciones establecen dos trazas sobre cada cara de un volumen imaginario de altura 1 sobre el elemento triangular.

La aproximación de la solución mediante elementos lineales de Whitney vendrá dada por:

$$U_e(x, y) = N_i u_i + N_j u_j + N_k u_k \qquad \textbf{(8)}$$

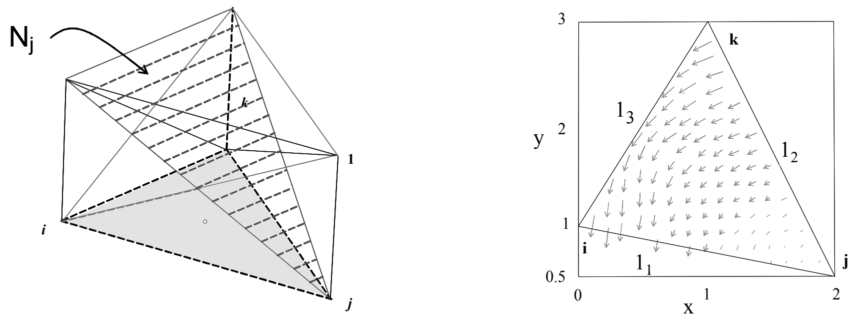


Fig. 5: Dos formas de representar de N_j

De lo anterior se puede extraer una aproximación de la solución U para cada borde o arista del elemento, que se obtiene de la interpolación de dos trazas lineales ξ y una traza constante η sobre el borde (η=1):

$$\begin{aligned} u_{k,i} &= u_j\eta + u_i\xi_i + u_k\xi_k \\ u_{i,j} &= u_k\eta + u_i\xi_i + u_j\xi_j \\ u_{k,j} &= u_i\eta + u_k\xi_k + u_j\xi_j \end{aligned} \quad \textbf{(9)}$$

Donde $u_{k,i}$ es el valor aproximado de la variable U sobre la arista o borde entre los vértices k e i, y así sucesivamente con las dos restantes.

3.2 Ensayo numérico

Las ecuaciones (9) permiten realizar un ensayo numérico sobre las posibilidades o aptitudes de representación de estas funciones de interpolación. En todos los casos hemos adoptado un mallado triangular.

Dado dos elementos triangulares a ambos lados de una frontera Γ entre dos materiales se propone una discontinuidad de la solución a lo largo de la misma:

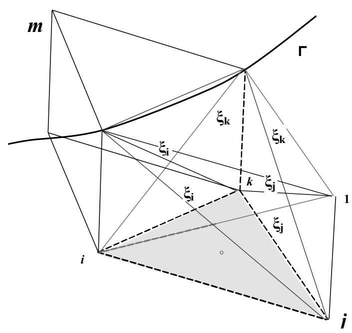


Fig. 6: Elementos triangulares a cada lado de la frontera

Sea el valor de la variable u =10 de la frontera Γ en dirección al nodo m, incluyendo los nodos i y k, y sea u =5 desde la frontera hacia el nodo j.

Solo calcularemos el valor de la solución aproximada sobre la arista i-k.

En la frontera las trazas λ_i y λ_k valen 1 sobre el nodo indicado en el índice respectivo, y cada una disminuye hasta cero en el nodo opuesto.

Evaluando del lado del nodo m tendremos:

$$\begin{aligned} u_{k,i} &= 10\cdot 1 + 10\lambda_i + 10\lambda_k = 10 + 10 = 20 \\ u_{i,j} &= 10\cdot 1 + 10\lambda_i + 10\lambda_j \\ u_{k,j} &= 10\cdot 1 + 10\lambda_k + 10\lambda_j \end{aligned} \quad \textbf{(10)}$$

Evaluando del lado del nodo j tendremos:

$$\begin{aligned} u_{k,i} &= 5\cdot 1 + 10\lambda_i + 10\lambda_k = 5 + 10 = 15 \\ u_{i,j} &= 10\cdot 1 + 10\lambda_i + 5\lambda_j \\ u_{k,j} &= 10\cdot 1 + 10\lambda_k + 5\lambda_j \end{aligned} \quad \textbf{(11)}$$

Sobre la frontera Γ (k-i) tenemos u varía 20-15=5 que es un salto o discontinuidad lo que indica que estos elementos son aptos para representarla.

3.3 Elementos mixto-duales

Básicamente, los elementos mixto-duales resuelven simultáneamente dos espacios de variables, representándose con su propio espacio de funciones de base, que se interpolan sobre distintos nodos de o en una misma malla. Esto implica la noción de la dualidad concepto que introduce el estudio de la topología.

La elección de elementos duales no es inmediata, sino que su identificación debe ajustarse a conceptos tales como: equivalencia combinatoria, grado de ortogonalidad e invariantes algebraicos, entre otros, lo que implica además que su adopción debe conjugarse con una adecuada configuración geométrica de la malla, lo que remite a las dependencias topológicas de esta elección.

Es decir la dualidad no solo involucra a las funciones de interpolación sino que se extiende al dominio de interpolación (la malla).

Para el tratamiento de elementos finitos mixto duales se completa la homología de Rham y se incorpora la teoría discreta de Hodge, aplicándose la teoría de Calculo Exterior Discreto (CED) en toda su extensión, completándose la misma al incorporar el concepto de dualidad y con esto la cohomología.

El CED entiende que el fenómeno físico presenta una estructura subyacente de índole geométrica considerando que en el análisis de un fenómeno físico se asocia potenciales a puntos, campos a líneas, flujos a superficies y densidades (cargas, fuentes) a volúmenes.

El CED asocia que si los grados de libertad tienen una dualidad geométrica natural, como ocurre por ejemplo entre campos eléctricos y magnéticos, son necesarias dos mallas del dominio: una malla primal y dual.

La teoría del CED explica por qué los grados de libertad asociados a las diferentes variables deben ser almacenados en el dominio primal y en dual vinculados entre sí a través de una estrella discreta Hodge para transferir información entre las mallas [3].

3.4 Aproximación al Calculo Exterior Discreto

Para una mejor comprensión utilizaremos el lenguaje del Calculo Exterior Discreto y su analogía con los usados en elementos finitos.

En homología y cohomología se presentan definiciones y términos intuitivamente simples que surgen de abstracciones rigurosas pero muy sutiles cuya asimilación no es sencilla ni inmediata.

Las estructuras básicas de análisis del CED son las cadenas y cocadenas.

Las cadenas y las cocadenas se usan para modelar cantidades físicas en un entorno discreto.

Brevemente las cadenas son colecciones de k-símplices codificadas numéricamente con un orden de prevalencia que permite dotarlas de orientación o sentido y además de permitir su manipulación algebraica [4].

Las cadenas y cocadenas y su vinculación o nexo permiten una ampliación del concepto de derivación e integración.

En el Cálculo Exterior Discreto se denomina símplices a los subdominios resultante de la partición del dominio, esto es a cada elemento que compone la malla, por ejemplo en una malla triangular a cada triangulo que compone la misma.

A su vez cada símplice está conformado por estructuras geométricas tales como puntos o vértices, aristas o bordes, caras y volúmenes, que se indican k-símplices o k-simplex, donde k denota la dimensión de cada k-simplex.

En general se asocian puntos a vértices, curvas a aristas o bordes, superficies a caras y volúmenes a celdas (interiores o contenedores según la literatura).

Los grados de libertad estarán asociados a puntos o vértices.

Por ejemplo, un 0-símplex es un punto; un 1-símplex una curva; un 2-símplex una superficie; un 3-símplex es un volumen, donde el número indica la dimensión del simplex. Esto formulación permite luego obtener la estructura geométrica dual (denominada según la nomenclatura célula o cell) del simplex adoptado mediante la asociación entre el dominio primal y dual dada por la estrella (*) de Hodge:

$$\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n \\ n-k \end{pmatrix} \qquad \text{Para K un simplex en } R^n, \quad 0 \le k \le n \qquad \textbf{(12)}$$

Donde K se refiere al símplice como una colección o complejo de k-símplex, n es la dimensión del dominio, y n-k es la dimensión del elemento dual.

Una vez obtenido la estructura dual esta define nuevos grados de libertad sobre los vértices de la misma.

Aunque parezca sencillo esta formulación no es tan fácil de asimilar y es conveniente explicitarla mediante un ejemplo que se presenta a continuación en 2D.

Por ejemplo en una triangulación (2D: n=2) si se adopta para la submalla primal un 0-simplex, un vértice (punto), la fórmula (12) indica (2-0=2) que su estructura geométrica dual es 2-simplex (o 2-cell), esto es una superficie (en rojo) del lado izquierdo inferior de la Fig. 7:

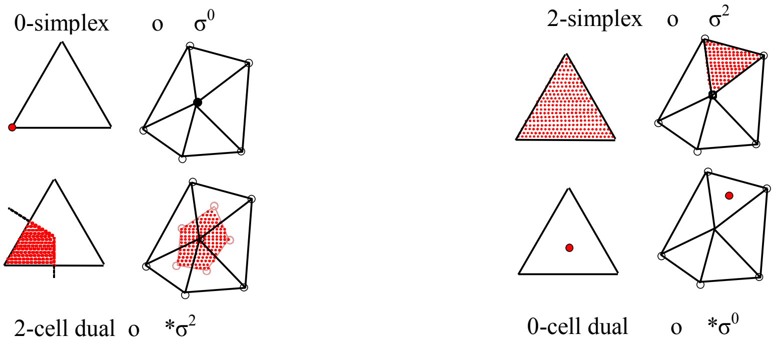


Fig.7: Determinación de dominios primales y duales

A la inversa si se adopta, como partida una estructura 2-simplex (una superficie triangular), su estructura dual (2-2=0) es un punto 0-simplex (o 0-cell según la nomenclatura que se adopte) como se indica en la parte derecha inferior de la figura.

Obsérvese que en el primer caso el punto primal que contiene 5 vértices obtiene una superficie dual que provee de 5 nuevos vértices a la malla lo que agrega 5 grados de libertad.

En el segundo caso la superficie primal obtiene un punto dual, y si agregamos las cuatro superficies restantes, obtendremos los cinco puntos duales que conformaran los cinco nuevos grados de libertad, y además uniéndolos mediante segmentos reproduciremos la figura del primer caso.

Para representar un segmento, una cara o un volumen por un punto, se indica que éste sea un punto interior representativo tal como un punto medio o razón áurea para un segmento y el baricentro o circuncentro para una superficie o volumen, o cualquier otro punto que resulte significativo.

Para el caso de una malla triangular el dominio primario es un complejo simplicial K Denotamos 0-simplices que indica la dimensión adoptada del elemento de K como sus vértices. La malla de dominio dual K se define tomando los baricentros de n-simplices y conectándolos basándose en la adyacencia simplex de la manera natural como se muestra en la figura siguiente:

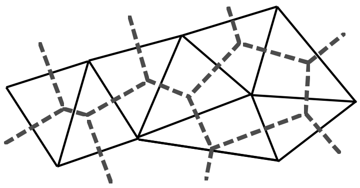


Fig. 8: Triangulación de Delaunay-Voronoy

3.5 El método de Galerkin

En el Calculo Exterior Discreto la integración de las formas diferenciales sobre los sobre los dominios o k-símplices permite obtener las denominadas cocadenas.

Si las formas diferenciales utilizadas conforman una secuencia exacta y se integran sobre dominios duales las características topológicas subyacentes de la ecuación diferencial se preservan en el método numérico.

Para una discretización de Galerkin simplemente reemplazamos bajo la integral las formas diferenciales continuas por las funciones de interpolación (o de forma).

Las cadenas son los k-simplices que se corresponden en el Método de los Elementos Finitos justamente con el elemento finito, o sea el dominio de integración de la funciones de forma.

Los valores o números (cocadenas) obtenidos de la integración de las funciones de forma sobre cada subdominio de integración están asociados a los grados de libertad y conforman la matriz numérica de la solución discreta de la ecuación diferencial.

El método de Galerkin se entiende como una realización del operador de Hodge en el Método de los Elementos Finitos [5].

Por lo tanto mediante la elección de funciones de forma que se ajusten a la secuencia exacta de las formas diferenciales de Rham ya vistas, e integrando sobre cadenas definidas sobre una malla dual, es posible obtener una solución numérica consistente y de comportamiento estable.

3.6 Ensayo numérico con elementos mixto-duales

Siguiendo con el ensayo numérico sobre una malla triangular, la representación geométrica se realiza ahora mediante elementos mixto-duales. Utilizando funciones lineales simples P1 se realiza sobre el espacio primal una interpolación lineal simple entre los vértices de cada elemento (malla primal). Y sobre el espacio dual se realiza una interpolación entre los baricentros de cada elemento (malla dual) mediante funciones constantes (P0).

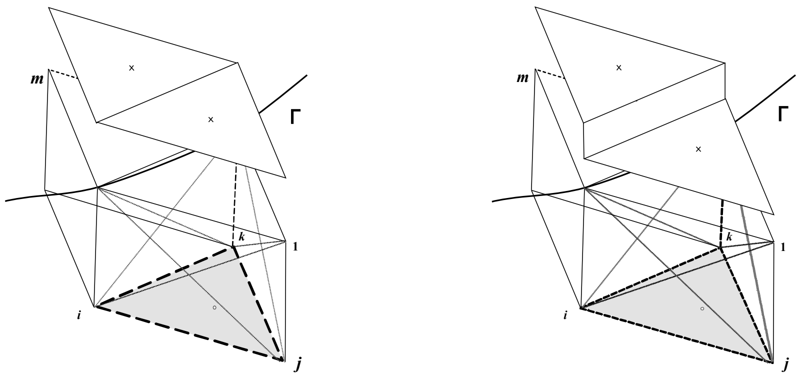


Fig. 9: Elementos mixto-duales: función constante P0

Se observa que la interpolación entre los baricentros (indicado por las cruces) del triangulo se realiza en forma transversal a la interpolación lineal (entre vértices). Esta es la característica deseada del método: la interpolación de la función constante permite representar la discontinuidad.

Utilizando estos espacios de funciones (P0 y P1) conjuntamente con la utilización de mallas duales se ha resuelto un problema numérico del campo electromagnético sobre un motor de reluctancia [6].

4 Conclusión y trabajos futuros

La reconstrucción de una estructura geométrica de la expresión matemática permite estimar el alcance y efecto de distintos operadores matemáticos y proponer nuevas formulaciones.

Tanto la utilización de elementos de borde (o de Whitney) utilizados en el primer análisis, como los elementos mixto duales en el segundo análisis tuvieron similar comportamiento, pero según los casos serán más eficientes uno u otro.

El ensayo numérico ha permitido demostrar la aptitud de las estructuras geométricas analizadas para representar una discontinuidad, muy conveniente para reducir el error de discretización, además de permitir observar la disposición geométrica y ampliar la percepción sobre las posibilidades de los distintos elementos.

Las estructuras analizadas se adaptan más a mallados con triángulos o tetraedros, que son los tipos de elementos que aunque permiten mallar geometrías complejas, presentan un mayor número de nodos. Como desarrollo a futuro se propone mejorar la eficiencia en geometrías sencillas analizando la utilización de cuadriláteros o hexaedros, con el fin de obtener matrices menos densas y por lo tanto más rápidas de resolver y con un menor esfuerzo computacional.

Referencias

1. Arnold N.: Complejos Diferenciales y Estabilidad Numérica. *La Gaceta de la RSME*, Vol. 8.2 335-360 (2005).
2. Arnold N.; Falk R.; and Winther R.: Finite element exterior calculus: from Hodge theory to numerical Stability. *Mathematics Subject Classification* Primary: 65N30, 58A14 (2009).
3. Gillette A.; Bajaj Ch.: Dual Formulations of Mixed Finite Element Methods with Applications. *University of Texas at Austin, United States*, May 11, (2011).
4. Desbrun M.; Hirani A. N.; Leok M.; and Marsden J.: Discrete Exterior Calculus. *Computer Scienc* Caltech, Pasadena, CA. (2003).
5. Bossavit A.: Generalized Finite Differences in Computational Electromagnetics. *Progress In Electromagnetics Research*. PIER 32, 45–64 (2001).
6. Chacón G.: Análisis Electromagnético mediante Elementos Finitos. *VI Congreso de Matemática Aplicada, Computacional e Industrial.* Comodoro Rivadavia, pp.181–184 (2017).

Selección de Modelos Estadísticos para la Estimación de Caudales en obras de drenaje en Caminos de Montaña

Ozán N. Susana[1], García Gracielar[1], De Los Rios Claudia[2] ,Gómez Mariana[1,]

[1] Departamento de Matemática, Facultad de Ingenieria, Universidad Nacional de San Juan
sozan@unsj.edu.ar, ggarcia@unsj.edu.ar

[2] Departamento de Biología, Facultad de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, Universidad Nacional de San Juan.
matema_clau@yahoo.com.ar , marianagomez1976@yahoo.com.ar,emorales@unsj.edu.ar

Resumen. El estudio del efecto de la alteración del escurrimiento natural de los caudales es muy importante en la instancia del diseño geométrico de las estructuras viales. El caudal depende de ciertos factores fijos y otros aleatorios lo que permite abordar la estimación de los mismos mediantes modelos estocásticos. Luego, la propuesta en este trabajo es presentar el ajuste de modelos que expliquen el valor esperado de caudal máximo y seleccionar, mediantes criterios estadísticos, el más adecuado para la estimación. Los resultados del análisis realizado muestra que modelos donde se considera la asimetría y linealidad en los parámetros son lo más apropiado para este tipo de situaciones. Por lo que se ajustó un Modelo Lineal Generalizado Gamma, considerando varias alternativas y validando el modelo seleccionado. La información recolectada corresponde a un tramo de la Ruta Nacional 40 situada en la cordillera de los Andes Central (San Juan, Argentina).

Palabras Clave: Estimación de caudales, Modelo Generalizado Gamma.

1 Introducción

En las etapas de planificación de obras de drenaje en caminos a construir es importante evaluar el efecto de la alteración del escurrimiento natural de los caudales que impondrá la presencia de la futura obra vial. Así luego se realizará un adecuado tratamiento en la etapa de diseño geométrico de las estructuras necesarias. En este contexto, es de interés determinar, con cierta precisión, los caudales máximos que han de solicitar a puentes, alcantarillas, etcétera.

En la práctica vial uno de los métodos usados para el cálculo del caudal es el Método Racional Generalizado del Ing. Federico Rhule [1]. La expresión genérica propuesta por este método para el caudal de proyecto (Q), que descarga una cuenca, medido en el punto de intersección de su cauce principal con el camino o punto de control, es

$$Q = \alpha \times \beta \times (E\ A\ I)/K \qquad \textbf{(1)}$$

Tal que, Q es el caudal o descarga, en m³/seg.; E el coeficiente medio de escorrentía de la cuenca (adimensional); A el área de la cuenca, en hectáreas (ha); I la intensidad de precipitación, en mm/hora. También se consideran los coeficientes α y β que tienen en cuenta la influencia sobre el derrame de la menor intensidad de la precipitación sobre el área y la reducción del derrame por la retención del cauce, respectivamente. Además K es un coeficiente para uniformar unidades (su valor es 360 para Q en m³/seg, y A en hectáreas) [2]. Es claro que esta forma de cálculo no contempla el aspecto aleatorio del fenómeno de crecidas y caudales.

La propuesta en este trabajo es considerar el caudal como una variable aleatoria con determinada probabilidad de ocurrencia. Hallar esta probabilidad es equivalente a representar dicha variable mediante un modelo probabilística del fenómeno. Esto nos permite estimar valores de caudales con precesión y en lugares donde no se cuenta con registros observados. Además poder cuantificar los errores de medición. Por lo tanto se estudia la forma de modelar el caudal y seleccionar el modelo más adecuado.

La formulación de un modelo estadístico, desde la perceptiva de los modelos de regresión, implica considerar un conjunto de variables controladas que explican algún fenómeno cuyo resultado es aleatorio, y se denomina variable respuesta [3]. Al ser la variable respuesta aleatoria, en este caso el caudal (Q), tiene asociada una distribución de probabilidades.

La información que se utilizó en el presente trabajo fue recolectada en un tramo que corresponde a la Ruta Nacional 40 situada en la cordillera de los Andes Central (San Juan, Argentina). El análisis exploratorio de los datos es el punto de partida fundamental para determinar la distribución de probabilidades más adecuada que permite modelar la variable respuesta.

Los modelos considerados son de la clase de los modelos lineales, es decir, los parámetros del modelo que se estiman mediante métodos basados en la información dada por los datos, son lineales [3]. Se ajustan modelos que expliquen el valor esperado de caudal máximo y se selecciona, mediantes criterios estadísticos, el más adecuado para mejorar la precisión de las estimaciones [4].

2 Desarrollo del problema

2.1. Base de datos. Análisis exploratorio

La base de datos utilizada consta de mediciones tomadas en las estaciones meteorológicas "Mogna" y "Los Baldes" de la Ruta Nacional Nº 40 en la provincia de San Juan-Argentina. La información relevada corresponde al *área* de la cuenca (A), *desnivel* de la cuenca (D), *intensidad de lluvia* (I), *longitud* de la cuenca (L) y *caudal* (Q) [5].

En primer lugar se realiza el estudio descriptivo de las mediciones de las variables mencionadas, a saber, Área, Desnivel, Intensidad y Longitud. Además se considera, según la estación meteorológica citada, el caudal máximo. Los resultados del análisis exploratorio se presentan en la Tabla 1.

Tabla 1. Medidas descriptivas de todas las variables.

Variables	Estación	Media	Desviación	Sesgo	Curtosis	Mediana
Área	Los Baldes	973.38	703.05	2.24	4.55	775
	Mogna	973.38	703.05	2.24	4.55	775
Desnivel	Los Baldes	768.19	412.40	0.87	-0.34	675
	Mogna	764.27	417.27	0.82	-0.36	675
Intensidad	Los Baldes	9.78	1.89	0.42	-1.48	9.29
	Mogna	9.74	2.29	0.26	-1.50	9.06
Longitud	Los Baldes	12.30	4.06	-0.17	-1.44	12.44
	Mogna	12.30	4.06	-0.17	-1.44	12.44
Caudal	Los Baldes	8.94	6.29	0.70	1.98	5.23
	Mogna	8.99	6.19	0.69	1.93	5.41

Hay una similitud en los valores obtenidos para las mediciones de ambas estaciones, valores medios y desviaciones prácticamente análogas en todas las variables. Esto muestra la homogeneidad de las zonas muestreada. Por lo tanto, se decide realizar el análisis y ajuste de modelos para los datos de la estación "Mogna".

El grado de relación lineal entre las variables se analiza mediante la matriz de correlación. Esta matriz es cuadrada y simétrica, en la diagonal muestra la relación de cada variable consigo misma, la cual toma el valor 1, indicando la relación perfecta. Fuera de la diagonal se indica la correlación entre variables diferentes, si este valor se aproxima a 1 (o -1) el grado de correlación lineal positiva (o negativa) entre las variables consideradas es fuerte (altamente relacionadas). El resultado obtenido en este caso se muestra en la Tabla 2

Tabla 2. Matriz de correlación de las variables explicativas.

	Área	Desnivel	Intensidad	Longitud
Área	1.00	0.26	-0.06	0.24
Desnivel	0.26	1.00	0.06	0.42
Intensidad	-0.06	0.24	1.00	-0.84
Longitud	0.24	0.42	-0.84	1.00

Se observa que entre las variables Intensidad y Longitud hay una correlación lineal negativa fuerte (-0.837), lo que implica que basta con considerar una de ellas para asociarla con el caudal.

Esto lleva a concluir, como primer aspecto importante, que las variables que explican al Caudal son: Área, Desnivel e Intensidad.

La forma de la distribución de los datos se infiere rápidamente mediante gráficos. Por lo cual se realizó un histograma y gráfico de caja (box plot) de cada variable. Ya que el interés está centrado en la variable Caudal, la Fura 1 muestra los respectivos gráficos correspondientes a dicha variable.

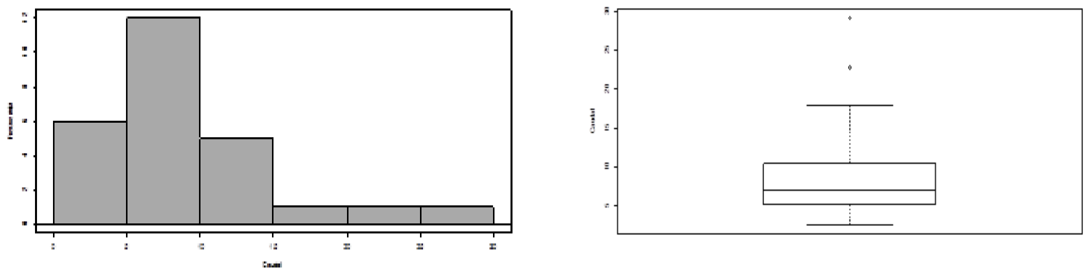


Fig. 1. Histograma y diagrama de caja correspondientes a la variable Caudal.

Los gráficos de la Figura 1 muestran la asimetría en la distribución de la variable Caudal. Esto justifica asumir una distribución asimétrica asociada con el problema. Una distribución asimétrica adecuada es la distribución Gamma, que además de modelar la asimetría, pertenece a la familia exponencial en su forma canónica. Esto posibilita la implementación de los modelos lineales generalizados para modelar el Caudal.

El diagrama de caja también permite detectar la presencia de observaciones atípicas. Las observaciones atípicas o anómalas suelen ser consecuencia de errores de medición o debido a la presencia de situaciones extraordinarias. En este caso, se destacan dos puntos anómalos que probablemente indican la existencia de un evento fuera de lo común (alta crecida).

2.2. Formulación de Modelos

La variable respuesta a modelar es el *Caudal*, la cual, según la conclusión obtenida en el análisis exploratorio de los datos, presenta una distribución sesgada o asimétrica. Por lo tanto el modelo considerado es un modelo lineal generalizado Gamma [6].

La notación utilizada para designar las variables en el modelo es la propuesta en el punto anterior, es decir, *Q:* Caudal que pasó por el conducto, variable respuesta, dependiente, y las variables explicativas *I:* Intensidad de la lluvia, *A:* Área de la cuenca y *D:* Desnivel.

El modelo lineal generalizado estima una función (función de enlace), del valor esperado del caudal, dadas el resto de las variables $X = (A, I, D)$, esto es, el valor esperado del caudal condicionado a: área, intensidad de lluvia y desnivel. Se simboliza como $\mu_{Q/X.}$

Por ejemplo, si la función de enlace es logarítmica esto implica que $g(\mu_{Q/X}) = log(\mu_{Q/X})$.

Se denomina predictor lineal a: $\eta = \beta_0 + \beta_1 A + \beta_2 I + \beta_3 D$ tal que $g(\mu_{Q/X}) = \eta$.

Luego, $g(\mu_{Q/X}) = \beta_0 + \beta_1 A + \beta_2 I + \beta_3 D$ entonces el valor esperado es: $\mu_{Q/X} = e^{\beta 0 + \beta 1 A + \beta 2 I + \beta 3 D}$.

Si la función de enlace es la función inversa entonces $\mu_{Q/X} = 1 / (\beta_0 + \beta_1 A + \beta_2 I + \beta_3 D)$.

El vector de parámetros del modelo es $\beta = (\beta_0 , \beta_1 , \beta_2 , \beta_3)$ los cuales son estimados mediante un método iterativo del tipo Fisher Scoring. Los valores estimados de los parámetros se denotan como $\hat{\beta} = (\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2, \hat{\beta}_3)$

Por lo tanto el *caudal estimado* mediante el modelo con función de enlace logaritmo y según la ecuación (1),

$$\hat{Q} = e^{\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 A + \hat{\beta}_2 I + \hat{\beta}_3 D} \qquad \textbf{(2)}$$

En cambio, al utilizar como función de enlace la función inversa, la expresión del *caudal estimado* está dado por la siguiente expresión $\hat{Q} = \frac{1}{\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 A + \hat{\beta}_2 I + \hat{\beta}_3 D}$.

En la Tabla 3 se indican los modelos estudiados según la función de enlace (inversa o logaritmo) y las variables involucradas.

Tabla 3. Modelos propuestos y la respectiva función de enlace.

Modelo	Función de enlace	Variables independientes
Modelo I	Inversa	Área, Intensidad, Desnivel
Modelo II	Inversa	Área, Intensidad
Modelo III	Logaritmo	Área, Intensidad, Desnivel
Modelo IV	Logaritmo	Área, Intensidad

2.3. Selección de modelo

Los resultados del ajuste de los modelos para obtener los estimadores de los parámetros del predictor lineal se observan en la Tabla 4. Se presenta el valor estimado y entre paréntesis, la desviación estándar (medida de dispersión de los datos respecto a la media), a menor valor de desviación mejor precisión en la estimación del parámetro [7].

Se ha indicado en la Tabla 4 el *valor p* del test de significancia de cada parámetro, lo que permite descartar (o no) alguna variable. A valores de probabilidad *p* pequeños esto indica que dicha variable es significativa para explicar la variable respuesta.

Se toma el criterio de información de Akaike para seleccionar el mejor modelo (AIC). El coeficiente AIC es un criterio para medir la calidad del ajuste, mientras menor es el valor del AIC el modelo explica mejor a la variable respuesta.

Tabla 4. Estimaciones de parámetros de los modelos propuestos.

Variables	Estimaciones			
	Modelo I	**Modelo II**	**Modelo III**	**Modelo IV**
Intercepto	3.050e-01	3.009e-01	6.393e-01	0.6396078
	(5.548e-02)	(5.427e-02)	(3.660e-01)	(0.3471386)
	p = 1.60e-05	p= 1.22e-05	p = 0.09459	p = 0.07833
Área	-4.285e-05	-4.474e-05	5.564e-04	0.0005566
	(9.015e-06)	(8.022e-06)	(1.123e-04)	(0.0001059)
	p = 9.58e-05	p = 1.13e-05	p = 5.85e-05	p = 2.48e-05
Intensidad	-1.291e-02	-1.313e-02	9.442e-02	0.0944448
	(4.638e-03)	(4.552e-03)	(3.340e-02)	(0.0325585)
	p = 0.0108	p = 0.00837	p = 0.00981	p = 0.00806
Desnivel	-1.039e-05		7.888e-07	
	(2.248e-05)		(1.891e-04)	
	p = 0.6485		**p = 0.99671**	
AIC	144.41	142.62	142.05	140.05

El valor *p* en cualquiera de los modelos que incluya la variable *Desnivel* supera el 0.05 (5%), cota superior propuesta para incluir una variable en el modelo. Por lo tanto la variable *Desnivel* no explica el *Caudal* y se considera no significativa en el modelo. Así se puede concluir que los modelos adecuados son el II y el IV. Sin embargo, utilizando el criterio de Akaike. el menor coeficiente AIC corresponde al modelo IV. Luego el mejor modelo que ajusta este conjunto de datos es el Modelo IV. Un modelo lineal generalizado Gamma con función de enlace logarítmica y dos variables predictoras.

Por lo tanto, $\eta = \beta_0 + \beta_1 A + \beta_2 I$ tal que $log(\mu_{Q/X}) = \eta$.

El valor esperado del caudal, dado $X = (A,I)$ es $\mu_{Q/X} = e^{\beta 0 + \beta 1\, A + \beta 2\, I}$.

Luego, el valor estimado del caudal esperado, según la ecuación (2), está dado por la expresión,

$$\hat{Q} = \hat{\mu}_{Q/X} = e^{0.6396 + 0.0005\,A + 0.0944\,I} \qquad \textbf{(3)}$$

2.4. Validación del Modelo Análisis de Diagnóstico

Una vez que se selecciona el modelo más adecuado es fundamental validar los supuestos estadísticos que han permitido estimar los parámetros del mismo. La validación del modelo se denomina análisis de diagnóstico, y en este caso, se comprueba en forma gráfica los supuestos de independencia y normalidad. Además estas técnicas de diagnóstico se utilizan para detectar puntos atípicos, que son observaciones que influyen (o no) en la estimación de los parámetros.

En la Figura 2 se muestran los gráficos obtenidos.

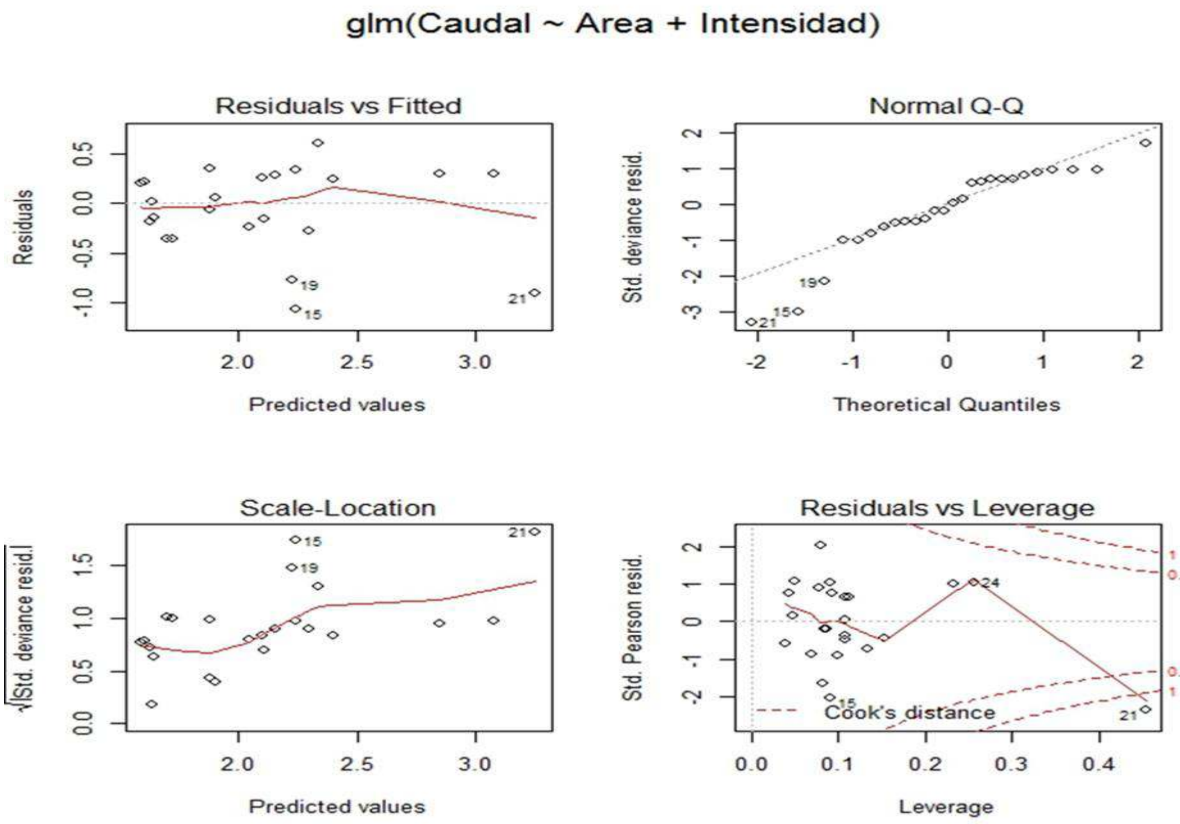


Fig. 2. Verificación gráfica de los supuestos del modelo.

En los gráficos se observa que el modelo es bastante aceptable y bien ajustado ya que no hay tendencias en los valores predichos ni alejamiento de la normalidad. Mientras que en la observación 21 (Área = 3227) se detecta una anomalía o valor atípico.

La presencia de una observación atípica lleva a analizar la influencia de la misma en la estimación del caudal. Por lo tanto se realiza un nuevo ajuste sin considerar la observación 21. En la Tabla 5 se se presentan los resultados obtenidos.

Tabla 5. Ajuste del Modelo IV sin dato atípico.

	Estimador	Error Estándar	*t* observado	Variables *p*
Intercepto	0.5588	0.3132886	1.784	0.08823
Área	0.0007	0.0001250	6.030	4.54e-06
Intensidad	0.0869	0.0292241	2.975	0.00699

Criterio de calidad del ajuste AIC: 127.64

Los resultados mostrados en la Tabla 5 indican que el ajuste ha mejorado respecto al modelo IV. El coeficiente AIC = 127.64 y las estimaciones de los parámetros se mantiene estables con desviación estándar baja, por lo tanto, el modelo sin la observación 21 se asume como el definitivo.

Luego, el caudal estimado es $\hat{Q} = e^{0.55889 + 0.00075\,A + 0.0869\,I}$.

La relación entre el valor estimado del caudal y el caudal observado se observa en la Figura 3 donde se destaca la linealidad de los parámetros.

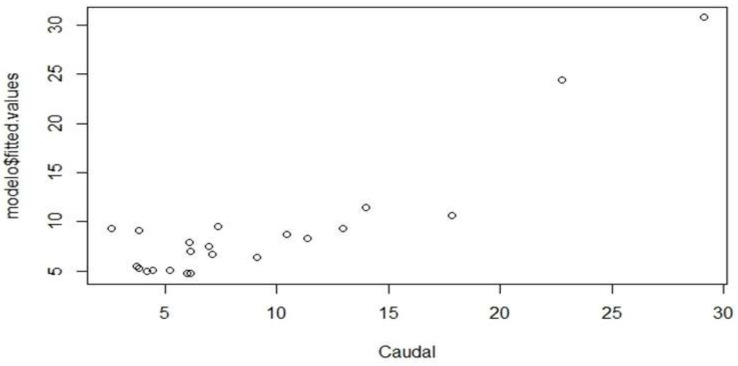


Fig. 2. Verificación gráfica de la validación del modelo.

Observación. Los cálculos estadísticos y gráficos se realizaron utilizando el lenguaje de programación R [8] .

3. Conclusiones y trabajos futuros

En primer lugar, se prueba que es posible plantear un modelo estocástico adecuado para estimar los caudales. El abordaje de la estimación de caudales donde se considera la aleatoriedad del fenómeno de la naturaleza, mediante el modelo Gamma, produce resultados aceptable y de confiabilidad.

Hay puntos de observación en los cuales no es posible realizar mediciones. Por ejemplo, áreas irregulares y de difícil acceso, falta de estaciones meteorológicas, escasos instrumentos de medición, etcétera. Esto no impide predecir el caudal utilizando la ecuación (3) en datos faltantes, siempre y cuando estén dentro del rango de observación.

Los resultados son válidos en datos referidos a la cuenca del río San Juan. Además de ser una buena alternativa para estimar caudales en lugares de difícil acceso, siempre y cuando se mantenga el rango de las observaciones.

Los trabajos que se encuentran en proceso de desarrollo cuentan con información sobre la Ruta 150, Ruta 149 y Ruta 510, con el objetivo de generalizar la metodología a estimar caudales de cuencas de ríos de la pre-cordillera andina en la zona de San Juan.

Agradecimientos. A la Secretaria de Ciencia y Técnica de la Universidad Nacional de San Juan que financia el desarrollo de esta investigación. A la Escuela de Ingeniería de Caminos de Montaña de la Facultad de Ingeniería por el asesoramiento y colaboración. Al Departamento de Matemática de la Facultad de Ingeniería por el apoyo brindado.

Referencias

1. Rühle, F.G.: Determinación del Derrame Máximo Superficial de las Cuencas Imbríferas. *La Ingeniería, Nº 987*. Centro Argentino de Ingenieros. 2ª edición. Buenos Aires. (1966).
2. Fernández, M.; González Alladio C.; Ozán N.S.; Fullana L.; Ruiz M.: Calibración y ajuste de métodos de cálculo de caudales máximos para el diseño de alcantarillas clasificados por regiones, aplicados a rutas representativas de San Juan. Segunda Etapa. *XVI Congreso Argentino de Vialidad y Tránsito.* ISBN: 978-987-28682-0-8. (2012)
3. Weisberg, S.: *Applied Linear Regression.* 3rd Edition. John Wiley & Sons, Inc. (2002).
4. Ozán, N.S.; Gómez, M.; Fernández, M.: Modelos lineales para la estimación del caudal de drenaje en un tramo de la ruta internacional 150 –Argentina. *CAE I – Congreso Argentino de Estadística.* ISSN 2451-8131. (2015).
5. Unidad de Información Meteorológica. Publicación Nº 5. *Instituto de Investigaciones Hidráulicas*. Facultad de Ingeniería. UNSJ. (2000).
6. Mc Cullagh, P.; Nelder, J. A.: *Generalized linear models,* Second Edition. London: Chapman & Hall. (1989).
7. Faraway, J.: *Linear Models with R*. London. Chapman & Hall. (2006).
8. Ozán, N.S.; De Los Ríos, C.; García, G.; Gómez, M.; Morales, E.: *Introducción al Lenguaje R.* http://www.virtual.unsj.edu.ar/wpv_proyecto_estadistica_aplicada. ISBN 978-987-42-7950-7. UNSJ. (2018).

Aplicación del concepto de Orden de Convergencia en Calculo Numérico para el Método de Newton Raphson en sus distintas formulaciones

Oscar Enrique Ares
Facultad de Ingeniería y Ciencias Agropecuarias – Universidad Nacional de San Luis
Departamento de Ciencias Básicas.
Campus Universitario. Ruta 55.Villa Mercedes (SL).
oscareares@gmail.com

Resumen. En este trabajo se presenta una utilización del concepto matemático de orden de convergencia, orden de convergencia óptimo e índice de eficiencia para los distintos métodos modernos de Newton Raphson en cálculo numérico, destinado a la enseñanza en las carreras de ingeniería. La estrategia didáctica consiste en que a partir de una fase de orientación por parte del docente el alumno diseñe y ejecute guiones de programación para verificar experimentalmente el comportamiento numérico y la eficiencia de los métodos Newton de tercer y cuarto orden que caracterizados a partir de un índice permiten elegir el óptimo. Como las formulas iterativas de Newton se obtienen de paper matemáticos recientes, la actividad del alumno a través de una secuencia didáctica deviene en exploración, investigación y diseño además de actualizar el clásico y difundido Newton-Raphson de segundo orden.

Palabras clave: Newton raphson, Eficiencia numérica, Convergencia optima.

1 Introducción

Sin duda que el método iterativo más famoso y utilizado frecuentemente para resolver ecuaciones no lineales es el Newton Raphson de convergencia cuadrática. Investigaciones matemáticas recientes dar a conocer fórmulas de *orden de convergencia cúbica y cuartica* del método iterativo de Newton Raphson [1]. De gran importancia para valorar un método iterativo es un índice, llamado índice de eficiencia que computa el orden de convergencia y la cantidad de veces de que evalúa la función junto con las derivadas.

Bajo el encabezado de fundamentos matemáticos se explicitan estas varias de estas fórmulas iterativas conjuntamente con un diseño de guion de programación Matlab para su ejecución. En consecuencia, se generan tablas que permiten mostrar el comportamiento numérico.

Como utilización del concepto de orden de convergencia y eficiencia para estudiar las formulas iterativas Newton Raphson se propone para su enseñanza en cálculo numérico una secuencia didáctica que consiste en diseñar y ejecutar sus guiones de programación y calcular además el índice de eficiencia.

2 Objetivos

Se define como objetivo una actualización de la enseñanza de las formulas iterativas de Newton Raphson resultado de investigaciones matemáticas recientes, pero además utilizando los conceptos de orden de convergencia, orden de convergencia optimo e índice de eficiencia para *comprender los resultados* arrojados por la ejecución de los guiones.

Fundado en la teoría del constructivismo la secuencia didáctica permite el protagonismo del alumno como constructor de su propio aprendizaje.

3 Conceptos teóricas de didáctica de las matemáticas aplicados en la secuencia

La secuencia didáctica se plantea desde la perspectiva del constructivismo y la teoría de situaciones didácticas. La teoría de situaciones didácticas introducidas por G. Brousseau (1986) [2], se basa en una hipótesis acerca de la construcción del significado de una noción .. . *una noción aprendida no es utilizable sino en la medida en la que ella es relacionada con otras, esas relaciones constituyen su significación, su etiqueta, su método de activación. Empero, no es aprendida si no es utilizable y utilizada efectivamente, es decir, solo si es una* *solución de un problema. Tales problemas constituyen, junto con las restricciones a las que la noción responde, constituyen la significación de la noción.*

4 Fundamentos matemáticos de métodos de Newton de alto orden

La fórmula del método de Newton Raphson tradicional es :

$$x_{n+1} = x_n - {f(x_n)}\Big/{f'(x_n)} \qquad (1)$$

que posee orden de convergencia cuadrática.

Una de las modificaciones del método de Newton, para obtener convergencia de tercer orden de convergencia es [1]:

$$x_{n+1} = x_n - {f(x_n)}\Big/{f'(x_n)} - {f(y_n)}\Big/{f'(y_n)} \qquad (2)$$

Con

$$y_n = x_n - {f(x_n)}\Big/{f'(x_n)} \qquad (3)$$

Otra fórmula alternativa de tercer orden, es dada por la expresión (4):

$$x_{n+1} = x_n - {f(x_n)}\Big/{f'(x_n)} - {f(x_n)f(y_n)}\Big/{(f(x_n) - f(y_n))f'(x_n)} \qquad (4)$$

Un nuevo método de Newton de tercer orden está dado por la formula (5) :

$$x_{n+1} = x_n - {f(x_n)}\Big/{f'(x_n)} - {2f(y_n)}\Big/{(f'(x_n) + f'(y_n))} \qquad (5)$$

La *combinación lineal* de las formulas iterativas de tercer orden (2) y (5), realizada por R. Ezzati y F. Saleki en el trabajo titulado '*On the Construction of New Iterative Methods with Fourth-Order Convergence by Combining Previous Methods'* [1], genera un nuevo método de al menos *cuarto orden.* La combinación lineal se escribe:

$$x_{n+1} = A\left(x_n - {f(x_n)}\Big/{f'(x_n)} - {f(y_n)}\Big/{f'(y_n)}\right) + B\left(x_n - {f(x_n)}\Big/{f'(x_n)} - {2f(y_n)}\Big/{(f'(x_n) + f'(y_n))}\right) \qquad (6)$$

Con A=1 y B=-2 se genera la expresión del método iterativo:

$$x_{n+1} = x_n - {f(x_n)}\Big/{f'(x_n)} + {f(y_n)}\Big/{f'(x_n)} - {2f(y_n)f(x_n)}\Big/{(f(y_n) - f(x_n))f'(x_n)} \qquad (7)$$

que tiene convergencia de al menos cuarto orden. Antes de proseguir con el desarrollo se muestran unos guiones con sus respectivas tablas numéricas, que son proporcionados al alumno en la *fase de orientación*, para sus actividades de la secuencia didáctica.

Algoritmo 1. Guion de programación en Matlab para Newton con orden de convergencia tres de (2):

```
  function Newtoncubico1(f,Po,tol,N)

  syms x
  g=diff(f,x);
  i=1;
    for i=1:N
    x=vpa(Po,50);
    Q=vpa(eval(f),50);
    G=vpa(eval(g),50);
    H=vpa(Q/G,50);
    Po=vpa(Po,50);
     y=vpa(Po-H,50);
     x=y;
     QQ=vpa(eval(f),50);
     GG=vpa(eval(g),50);
     HH=vpa(QQ/G,50);
     P=vpa(Po-H-HH,50);
     err=vpa(abs(P-Po),50); iter=i;
     disp([i P err])
       if
      (numeric(err)<numeric(tol)),raiz=P,error_aprox_abs=err,iteracion=iter,break,
      end
       if i==N
       disp('el metodo fracaso luego de N iteraciones')
end
       Po=P;
       i=i+1;
end
%ingresar f entre comillas
%sintaxis Newtoncubico1(f,Po,tol,N)
>> f='exp(-x)-x';
>> Newtoncubico1(f,-1,1e-025,8)
```

Tabla 1. Sucesión numérica y error absoluto aproximado generado por newton cubico (2)

N° iter	Valor numérico sucesión	Error absoluto aproximado
1	.26894142136999512074884075817816	1.2689414213699951207488407581782
2	.56524035110354139164780050344998	2.9629892973354627089895974527182 e-001
3	.56714328995823579298826247187894	1.9029388546944013404619684289 6 e-003
4	.56714329040978387299996866220432	4.5154808001170619032538 e-010
5	.56714329040978387299996866221035	6.03 e-030

raiz =.56714329040978387299996866221035

error_aprox_abs =.603e-29

Algoritmo 2. Guion de programación en Matlab para Newton con orden de convergencia tres de (4):

```
  function Newtoncubico2(f,Po,tol,N)
  syms x
  g=diff(f,x);
  i=1;
    for i=1:N
     x=vpa(Po,50);
     Q=vpa(eval(f),50);
     G=vpa(eval(g),50);
     H=vpa(Q/G,50);
     Po=vpa(Po,50);
     y=vpa(Po-H,50);
     x=y;
     QQ=vpa(eval(f),50);
     GG=vpa(eval(g),50);
```

```
    HH=vpa(QQ/GG,50);
    P=vpa(Po-H-G*QQ/((G-QQ)*G),50);
    err=vpa(abs(P-Po),50);
    iter=i;
    disp([i P err])

     if(numeric(err)<numeric(tol)),raiz=P,error_aprox_abs=err,iteracion=iter,break
     end
       if i==N
       disp('el metodo fracaso luego de N iteraciones')
       end
       Po=P;
       i=i+1;
 end
%ingresar f entre comillas
%sintaxis Newtoncubico2(f,Po,tol,N)
```

>> f='exp(-x)-x';

>> Newtoncubico2(f,-1,1e-025,8)

Tabla 2. Sucesión numérica y error absoluto aproximado generado por newton cubico (4)

N° iter	Valor numérico sucesión	Error absoluto aproximado
1	.21194155761708544507084053818075	1.2119415576170854450708405381808
2	.56341213291535980358994033646847	3.5147057529827435851909979828772 e-001
3	.56714328699748457747104717661066	3.7311540821247738811068401 4219 e-003
4	.56714329040978387299996865960852	3.4122992955289214829978 6 e-009
5	.56714329040978387299996866221035	2.60183 e-027

raiz =.56714329040978387299996866221035

Resultado experimental numérico donde puede apreciarse Newton cubico en la tercera columna. Más adelante resultado se definirán y utilizaran para valorar estas tablas el concepto de orden de convergencia optimo y eficiencia del método.

Algoritmo 3. Guion de programación en Matlab para Newton con orden de convergencia cuatro de (7):

```
function Newtoncuartoorden25(f,Po,tol,N)

syms x
g=diff(f,x);
i=1;
 for i=1:N
 x=vpa(Po,50);
 Q=vpa(eval(f),50);
 G=vpa(eval(g),50);
 H=vpa(Q/G,50);
 Po=vpa(Po,50);
 y=vpa(Po-H,50);
 x=y;
 QQ=vpa(eval(f),50);
 GG=vpa(eval(g),50);
 P=vpa(Po-H+(QQ/G)-2*QQ*Q/((Q-QQ)*G),50);
 err=vpa(abs(P-Po),50);
 iter=i;
 disp([ i P err])
    if
  (numeric(err)<numeric(tol)),raiz=P,error_aprox_abs=err,iteracion=iter,break,end
    if i==N
     disp('el metodo fracaso luego de N iteraciones')
end
  Po=P;
  i=i+1;
end
```

>>f =cos(x)-x

>> Newtoncuartoorden25(f,1.7,1e-010,10)

Tabla 3. Sucesión numérica y error absoluto aproximado generado por newton cuartico (7)

N° iter	Valor numérico sucesión	Error absoluto aproximado
1	7.4259621935532066066348854203651	9.5740378064467933933651145796349 e-001
2	7.3908513322226184544987885650237	3.5110861330588152136096855341 4 e-003
3	7.3908513321516064165531208767387	7.10120379456676882850 e-012

raiz =.73908513321516064165531208767387
error_aprox_abs =7.10120379456676882850 e-012
iteracion = 3

4.1 Orden de convergencia óptimo e índice de eficiencia

Los nuevos conceptos a definir para la enseñanza actualizada de orden de convergencia, son convergencia óptima e índice de eficiencia de cualquier método numérico que se sintetizan en fórmulas y permiten categorizar los métodos numéricos.

El índice de eficiencia de cualquier método se define por la fórmula [3]:

$$p^{1/m} \tag{8}$$

donde p es el orden de convergencia del método, m la cantidad de evaluaciones de la función y sus respectivas derivadas en cada evaluación. En consecuencia, el método dado por la formula (2) tiene eficiencia $3^{1/4} = 1.3161$, mientras la formula iterativa (4) da un método cubico con eficiencia $3^{1/3} = 1.4422$. El clásico método de Newton Raphson de convergencia cuadrática tiene eficiencia $2^{1/2} = 1.4142$. Los resultados numéricos permiten discriminar la eficiencia en los distintos métodos independiente de que orden sea óptimo, como se describirá.

De acuerdo con los trabajos de Kung y Trub [4] para n evaluaciones de la función el orden de convergencia optimo es 2^{n-1}. Por lo tanto el orden óptimo requeriría tres evaluaciones de la función, para obtener orden de convergencia cuatro. El clásico Newton Raphson 2^{2-1} requiere dos evaluaciones de funcion para ser optimo y efectivamente son las requeridas puesto que en cada paso se evalua f(x) y f´(x).El siguiente método de orden de convergencia cuatro optimiza el orden de convergencia ya que solo exige tres evaluaciones de la función: $f(x_n)$, $f(y_n)$ y $f'(x_n)$. La estrategia es hacer una combinación lineal de $f'(x_n)$ y de $(f(y_n) - f(x_n)) / (y_n - x_n)$, para aproximar $f'(y_n)$. Desde la conocida aproximación de Newton

$$y_n = x_n - f(x_n)\Big/f'(x_n)$$

se tiene [1] la siguiente familia de métodos de cuarto orden con orden de convergencia optima

$$x_{n+1} = y_n - f(y_n)\Bigg/\left(\propto f'(x_n) + (1-\propto)\frac{f(y_n) - f(x_n)}{y_n - x_n}\right) \tag{9}$$

Sea p un cero simple de f una función suficientemente diferenciable en un intervalo abierto. Si x_0 esta suficientemente próximo a p el orden de convergencia es cuatro si y solo si $\alpha = -1$. En consecuencia, la fórmula de método iterativo es

$$x_{n+1} = y_n - f(y_n)\Bigg/\left(-f'(x_n) + 2\frac{f(y_n) - f(x_n)}{y_n - x_n}\right) \tag{10}$$

Algoritmo 4. Guion de programación en Matlab para Newton con orden de convergencia cuatro optimo

```
function Newtonoptimocuartoorden(f,Po,tol,N)
syms x
g=diff(f,x);
i=1;
```

```
for i=1:N
x=vpa(Po,50);
   Q=vpa(eval(f),50);%calculo de fxn
   G=vpa(eval(g),50);%calculo de f´xn
   H=vpa(Q/G,50);
   Po=vpa(Po,50);
   %calculo de yn=xn-fxn/f´xn
   y=vpa(Po-H,50);
   x=y;
   %formula de xn+1=yn-fyn/(-f´xn + 2 (fyn - fxn)/ (yn - xn))
   QQ=vpa(eval(f),50);%calculo fyn
   GG=vpa(eval(g),50);%calculo de f´yn
   %calculo de xn+1
   P=vpa(y-QQ/(-G+2*(QQ-Q)/(y-Po)),50);
    err=vpa(abs(P-Po),50);
   iter=i;
   disp([ i P err])
     if
     (numeric(err)<numeric(tol)),raiz=P,error_aprox_abs=err,iteracion=iter,break
     end
     if i==N
     disp('el metodo fracaso luego de N iteraciones')
end
    Po=P;
    i=i+1;
end
```

>> f =cos(x)-x
>> Newtonoptimocuartoorden(f,1.7,1e-010,10)

Tabla 4. Sucesión numérica y error absoluto aproximado generado por newton cuartico (10)

1	.74246921078655069189987488933693	9.5753078921344930810012511066307 e-001
2	.73908513321849887322461446446490	3.38407756805181867526042487203 e-003
3	.73908513321516064165531208767387	3.33823156930237679103 e-012

raiz =.73908513321516064165531208767387
error_aprox_abs =.333823156930237679103e-11
iteracion =3

La eficiencia de este método es $4^{1/3} = 1.5874$, mayor que sus homologos del mismo orden.

5 Secuencia didáctica

5.1 Fundamentos y objetivos específicos de la secuencia didáctica

El objetivo específico de la secuencia didáctica es realizar un estudio del comportamiento numérico de métodos de Newton de alto orden de descubrimiento reciente según se desprende de la literatura bibliográfica habitualmente destinada a calculo numérico en la enseñanza de grado con el objetivo de favorecer la utilización del clásico concepto de orden de convergencia y los modernos de orden de convergencia optimo e índice de eficiencia, que actualizan la enseñanza del tema para carreras e ingeniería. Para la presente secuencia las formulas iterativas de Newton alto orden han sido extraidas de paper (2011) On the Construction of New Iterative Methods, with Fourth-Order Convergence by Combining Previous Methods del matemático R. Ezzati.

5.2 Actividades

5.2.1 Actividad 1. Método de Newton doble.

5.2.1.1 Metas de comprensión

Estudiar el comportamiento numérico del método Newton doble a través del diseño de un guion de programación en Matlab, con el objetivo de consolidar los conceptos de orden de convergencia, orden de convergencia óptimo e índice de eficiencia.

5.2.1.2 Enunciado de la actividad

Sea el método de Newton doble

$$y_n = x_n - {f(x_n)}/{f'(x_n)}$$

$$x_{n+1} = y_n - {f(y_n)}/{f'(y_n)}$$

- Se solicita *elaborar* un guion Matlab para el método de Newton doble.
- *Ejecutarlo* aplicado a la función f =cos(x)-x, en P_0 = 1.7.
- Estimar de la *tabla numérica* el orden de convergencia. Calcular el orden óptimo de convergencia y la eficiencia del método y compararla con otros valores dados en teoría.

5.2.2 Actividad 2. Método de Newton de alto orden

5.2.1.1 Metas de comprensión

Estudiar el comportamiento numérico de un método Newton de alto a través del diseño de un guion de programación en Matlab, con el objetivo de consolidar los conceptos de orden de convergencia, orden de convergencia óptimo e índice de eficiencia.

5.2.1.2 Enunciado de la actividad

Sea el método de Newton doble

$$y_n = x_n - {f(x_n)}/{f'(x_n)}$$

$$x_{n+1} = x_n - {f(x_n)}/{f'(x_n)} + {f(y_n)}/{f'(x_n)} - {2f(y_n)f(x_n)}/{(f(y_n) - f(x_n))f'(x_n)}$$

Formula iterativa tomada de paper (2011) On the Construction of New Iterative Methods [1].

- Se solicita *elaborar* un guion matlab para el método de Newton doble.
- *Ejecutarlo* aplicado a la función f =ex(x)-x, en P_0 = -1.
- Estimar de la *tabla numérica* el orden de convergencia. Calcular el orden óptimo de convergencia y la eficiencia del método y compararla con otros valores dados en teoría.

7 Conclusiones

El nudo central de este trabajo, lo constituye la comprensión de conceptos matemáticos relativamente nuevos como orden de convergencia óptimo y eficiencia de los métodos. Se infiere de este trabajo la importancia de enseñar en ingeniería conocimientos actualizados en carreras de grado en ingeniería que trasciendan el camino clásico en métodos numéricos, pero que están estrechamente vinculados con los conocimientos básicos que le sirven de soporte para comprender los nuevos avances. La estrategia didáctica sirve para la comprensión conceptual de los conceptos mencionados, es una secuencia didáctica que tiene al alumno como principal protagonista en la construcción de conocimientos, ya que el experimentara con su propio diseño. Fue ensayado solo con alumnos en condición de promoción, lo que marca una limitación, pero se ha verificado en la práctica los siguientes ítems:

- Participación activa del grupo de trabajo seleccionado en la construcción de su propio aprendizaje.
- Realización completa de las tareas asignadas en la secuencia.

Referencias

1. Ezzati, R.: On the Construction of New Iterative Methods with Fourth Order Convergence by Combining Previous Methods. International Mathematical Forum, Vol. 6, 2011, no. 27, 1319 - 1326
2. Brousseau,G.: *Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques*. (1986).
3. Gautschi,W.: Numerical Analysis:An introduction. Birkhaser.(1997).
4. Kung, H.T., Traub, J.F.: Optimal Order of One-Point and Multipoint Iteration. J. Assoc. Comput. Math. 21. (1974)

Obtención de soluciones exactas para problemas de mecánica mediante ecuaciones diferenciales de variable compleja

José Alberto Sánchez[1], Daniel Juan A. Abud[2]
[1] Departamento de Física, Facultad de Ciencias Exactas Físicas y Naturales, Universidad Nacional de Córdoba
Av. Velez sarsfield 1611, ciudad de Córdoba, Provincia de Córdoba
joseasanchez53@yahoo.com.ar, daniel.abud@yahoo.com

Resumen. En este trabajo se exponen dos ejemplos de aplicación de las ecuaciones diferenciales de variable compleja para la obtención de soluciones exactas de sistemas de ecuaciones diferenciales que surgen de problemas de la mecánica. El primero consiste en la obtención de la trayectoria de un punto material respecto de un sistema de referencia no inercial y el segundo en la determinación del movimiento de un disco rodante no holónomo. El objetivo del trabajo consiste en exponer una herramienta más para obtener soluciones exactas de algunos sistemas de ecuaciones diferenciales que surgen en la ingeniería.

Palabras Clave: Ecuaciones diferenciales en variable compleja, problemas de mecánica.

1 Introducción

La finalidad del presente artículo consiste en mostrar algunas aplicaciones de las ecuaciones diferenciales en variable compleja [1] [2] para obtener soluciones exactas de sistemas de ecuaciones diferenciales que surgen de la mecánica teórica y la mecánica analítica. Nos proponemos mostrar una herramienta más para ese fin, entre otras, como por ejemplo la aplicación de los grupos y álgebras de Lie [3] [4]. En esa dirección, se muestra la reducción de un sistema de dos ecuaciones diferenciales en variable real a una única ecuación diferencial en variable compleja, la que puede resolverse fácilmente para obtener la solución exacta del sistema.

2 Aplicaciones

A continuación, se desarrollan dos aplicaciones.

2.1 Movimiento de un punto material respecto de un sistema no inercial

Consideremos un punto material P que se apoya sobre el suelo liso de un vehículo, mientras éste gira uniformemente con velocidad angular ω constante con respecto a un sistema de referencia fijo (inercial). Inicialmente P está en reposo en la posición P_0 respecto del vehículo. Hallar las ecuaciones de movimiento y la trayectoria de P con respecto al vehículo (sistema de referencia no inercial) y a un sistema fijo (sistema de referencia inercial).

Consideremos que el sistema de referencia no inercial {O,x,y} solidario al vehículo gira con velocidad angular constante ω con respecto al sistema de referencia {O1,x1,y1} y que ambos sistemas tienen un origen común (O1=O).

Denominamos $\theta = \omega t$ al ángulo entre los ejes x y x1, positivo en sentido antihorario y establecemos como condiciones iniciales para la posición y velocidad inicial del punto P respecto de los ejes móviles x e y, las siguientes: $\big(x(0), y(0)\big) = (x_0, 0)$ y $\big(\dot{x}(0), \dot{y}(0)\big) = (0,0)$.

Planteamos la segunda ley de Newton para la dinámica:

$$m\bar{a}_r = \bar{F} + \bar{F}_a + \bar{F}_c \tag{1}$$

donde $\bar{F}$ es la fuerza de interacción, $\bar{F_a}$ es la fuerza de inercia de arrastre y $\bar{F_c}$ la fuerza de inercia de Coriolis. En nuestro caso:

$$\bar{F} = 0 \quad \textbf{(2)}$$

$$\bar{F_a} = -m\bar{a}_0 - m\dot{\bar{\omega}} \times \bar{r} - m\bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}) = m\bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}) \quad \textbf{(3)}$$

$$\bar{F_c} = -2m\bar{\omega} \times \bar{v}_r \quad \textbf{(4)}$$

desarrollando, obtenemos:

$$\bar{F_a} = -m\omega\bar{k} \times \left(\omega\bar{k} \times (x\bar{\imath} + y\bar{\jmath})\right) = m\omega^2 x\bar{\imath} + m\omega^2 y\bar{\jmath} \quad \textbf{(5)}$$

$$\bar{F_c} = -2m(\omega\bar{k} \times (\dot{x}\bar{\imath} + \dot{y}\bar{\jmath}) = 2m\omega\dot{y}\bar{\imath} - 2m\omega\dot{x}\bar{\jmath} \quad \textbf{(6)}$$

reemplazando (2), (5) y (6) en (1), se obtienen finalmente las ecuaciones diferenciales del movimiento del punto material P respecto del sistema de referencia no inercial solidario al vehículo:

$$\begin{cases} \ddot{x} = \omega^2 x + 2\omega\dot{y} \\ \ddot{y} = \omega^2 y - 2\omega\dot{x} \end{cases} \quad \textbf{(7)}$$

Multiplicamos por ***i*** la segunda ecuación y operamos con variable compleja:

$$\ddot{z} = \ddot{x} + i\ddot{y} = \omega^2(x + iy) - 2\omega i(\dot{x} + i\dot{y}) = \omega^2 z - 2\omega i\dot{z} \quad \textbf{(9)}$$

$$\ddot{z} + 2i\omega\dot{z} - \omega^2 z = 0 \quad \textbf{(10)}$$

$$r = \frac{-2i\omega \pm \sqrt{-4\omega^2 + 4\omega^2}}{2} \quad \textbf{(11)}$$

$$z = Ae^{-i\omega t} + Bte^{-i\omega t} \quad \textbf{(12)}$$

tomando en cuenta que $z(0) = x_0 + i0$ y $\dot{z}(0) = 0 + i0$, obtenemos:

$$\begin{cases} A = x_0 \\ B = i\omega x_0 \end{cases} \quad \textbf{(13)}$$

reemplazando *A* y *B* en (12) se obtiene:

$$z = x_0 e^{-i\omega t} + i\omega x_0 t e^{-i\omega t} \quad \textbf{(14)}$$

Tomando la parte real y la parte imaginaria de esta ecuación, obtenemos finalmente *x* e *y* en función del tiempo, lo que nos da las ecuaciones paramétricas de la trayectoria del punto material respecto del sistema de referencia no inercial solidario al vehículo:

$$\begin{cases} x = x_0 \cos(\omega t) + \omega x_0 t sen(\omega t) \\ y = -x_0 sen(\omega t) + \omega x_0 t cos(\omega t) \end{cases} \quad \textbf{(15)}$$

Esta curva es una evolvente de una circunferencia. Puede verse fácilmente que la trayectoria del punto *P* respecto del sistema de referencia fijo es la recta de ecuación $x = x_0$.

2.2 Disco vertical que rueda sobre un plano horizontal (sistema no holónomo)

Sea un disco homogéneo de radio *R* que rueda verticalmente en un plano horizontal sin la aplicación de fuerzas activas, tal como el que se muestra en la figura 1.

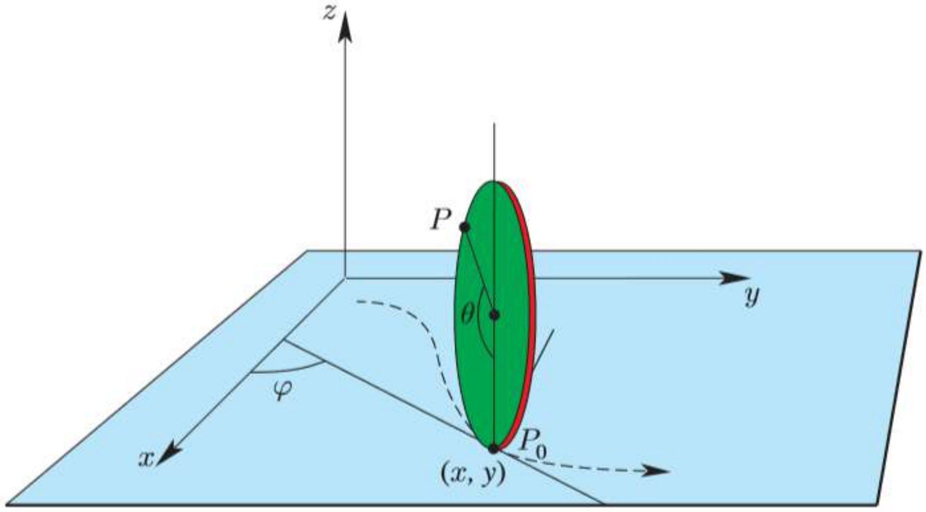


Fig. 1. Disco vertical homogéneo rodante sobre un plano horizontal.

Las ecuaciones de Lagrange para sistemas no holónomos, tal como en el presente caso, son:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i a_{ij} \quad para \quad j = 1, \dots, n \tag{16}$$

Donde *T* es la energía cinética del sistema mecánico, Q_j es la fuerza generalizada correspondiente a la ***j*** coordenada generalizada q_j , $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ son los **m** multiplicadores de Lagrange correspondientes a las **m** condiciones de ligadura, **n** es el número de grados de libertad del sistema y $a_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial \dot{q}_j}$ donde $f_i(q_j, \dot{q}_j, t) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\dot{q}_j + b_i$ para $i = 1, \dots m$ son las m condiciones de ligadura no integrables del sistema.

En el presente caso las coordenadas generalizadas son (x, y, θ, φ) tal como se ven en la figura.
Las condiciones de ligadura se expresan en la forma:

$$\begin{cases} \dot{x} + R\dot{\theta}cos\varphi = 0 \\ \dot{y} + R\dot{\theta}sen\varphi = 0 \end{cases} \tag{17}$$

Sabiendo que $T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{mR^2}{4}\dot{\theta}^2 + \frac{mR^2}{8}\dot{\varphi}^2$ y que no existen fuerzas activas, las ecuaciones de Lagrange para sistemas no holónomos (16) y las condiciones de ligadura (17) conducen al siguiente sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias:

$$m\ddot{x} = \lambda_1 \quad \textbf{(18)}$$

$$m\ddot{y} = \lambda_2 \quad \textbf{(19)}$$

$$\frac{mR^2}{4}\ddot{\varphi} = 0 \quad \textbf{(20)}$$

$$\frac{mR^2}{2}\ddot{\theta} = (\lambda_1 cos\varphi + \lambda_2 sen\varphi)R \quad \textbf{(21)}$$

$$\dot{x} + R\dot{\theta}cos\varphi = 0 \quad \textbf{(22)}$$

$$\dot{y} + R\dot{\theta}sen\varphi = 0 \quad \textbf{(23)}$$

de la ecuación (20) surge que $\ddot{\varphi} = 0$, lo que implica $\dot{\varphi} = \dot{\varphi}_0\ (cte)$ y $\varphi = \varphi_0 + \dot{\varphi}_0 t$

Escribimos las ecuaciones (18) y (19) en la forma:

$$m\ddot{z} = \Lambda \quad \textbf{(24)}$$

con $z = x + iy$ y $\Lambda = \lambda_1 + i\lambda_2$.

La ecuación (21) puede reescribirse en la siguiente forma:

$$\frac{mR}{2}\ddot{\theta} = Re[(\lambda_1 + i\lambda_2)(cos\varphi - isen\varphi)\} = Re(\Lambda e^{-i\varphi}) \quad \textbf{(25)}$$

Las ecuaciones (22) y (23) se puede reescribir en la forma:

$$\dot{z} + R\dot{\theta}e^{i\varphi} = 0 \quad \textbf{(26)}$$

Derivando la ecuación anterior respecto del tiempo, multiplicando por m y considerando que $\dot{\varphi}$ es constante, se obtiene:

$$m\ddot{z} + mR\ddot{\theta}e^{i\varphi} + imR\dot{\theta}\dot{\varphi}_0 e^{i\varphi} = 0 \quad \textbf{(27)}$$

reemplazando (24) y (25) en (27) se obtiene:

$$\Lambda + 2Re(\Lambda e^{-i\varphi})e^{i\varphi} + imR\dot{\theta}\dot{\varphi}_0 e^{i\varphi} = 0 \quad \textbf{(28)}$$

$$\Lambda + e^{i\varphi}\left[2Re(\Lambda e^{-i\varphi}) + imR\dot{\theta}\dot{\varphi}_0\right] = 0 \quad \textbf{(29)}$$

$$\Lambda e^{-i\varphi} + 2\mathrm{Re}(\Lambda e^{i\varphi}) + \mathrm{imR}\dot{\theta}\dot{\varphi}_0 = 0 \quad \textbf{(30)}$$

tomando las partes real e imaginaria de la ecuación anterior e igualándolas a cero obtenemos:

$$\text{Parte real : } 3Re(\Lambda e^{-i\varphi}) = 0 \quad \textbf{(31)}$$

de donde se obtiene: $\lambda_1 cos\varphi + \lambda_2 sen\varphi = 0 \Rightarrow \quad tg\varphi = -\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \Rightarrow \Lambda \perp trayectoria\ del\ punto\ P_0$.

Λ representa la fuerza de fricción que el piso ejerce sobre el disco en P_0, tal como surge de las ecuaciones (18) y (19).

Tomando ahora la parte imaginaria de la ecuación (30), obtenemos:

$$Im(\Lambda e^{-i\varphi}) + mR\dot{\theta}\dot{\varphi}_0 = 0 \quad \textbf{(32)}$$

$$-\lambda_1 sen\varphi + \lambda_2 cos\varphi + mR\dot{\theta}\dot{\varphi}_0 = 0 \quad \textbf{(33)}$$

$$\lambda_2(tg\varphi\ sen\varphi + cos\varphi) + mR\dot{\theta}\dot{\varphi}_0 = 0 \quad \textbf{(34)}$$

$$\lambda_2\left(\frac{sen^2\varphi + cos^2\varphi}{cos\varphi}\right) + mR\dot{\theta}\dot{\varphi}_0 = 0 \quad \textbf{(35)}$$

de donde se obtiene $\lambda_1 = mR\dot{\theta}\dot{\varphi}_0 sen\varphi$ y $\lambda_2 = -mR\dot{\theta}\dot{\varphi}_0 cos\varphi$, de donde resulta que

$$\Lambda = \lambda_1 + i\lambda_2 = mR\dot{\theta}\dot{\varphi}_0(sen\varphi - icos\varphi) = -imR\dot{\theta}\dot{\varphi}_0 e^{i\varphi} \quad \textbf{(36)}$$

reemplazando (36) en (25) se obtiene $\ddot{\theta} = 0$. En consecuencia a partir de la ecuación (27) podemos escribir:

$$\ddot{z} = -iR\dot{\theta}\dot{\varphi}_0 e^{i\varphi} \quad \textbf{(37)}$$

Despejando $\dot{z}$ de la ecuación (26) obtenemos $\dot{z} = -R\dot{\theta}e^{i\varphi}$ y reemplazando en (37) se obtiene la siguiente ecuación diferencial en variable compleja:

$$\ddot{z} - i\dot{\varphi}_0\dot{z} = 0 \quad \textbf{(38)}$$

La ecuación característica se escribe $r^2 - i\dot{\varphi}_0 r = 0$ cuyas raíces son $r = 0$ y $r = i\dot{\varphi}_0$, de donde resulta que la solución de la ecuación diferencial se escribe:

$$z(t) = C_1 e^{0t} + C_2 e^{i\dot{\varphi}_0 t} = C_1 + C_2[\cos(\dot{\varphi}_0 t) + isen(\dot{\varphi}_0 t)] \quad \textbf{(39)}$$

cuyas componentes real e imaginarias nos dan la solución del problema, es decir *x(t)* e *y(t)*:

$$\begin{cases} x(t) = C_{11} + C_{21}\cos(\dot{\varphi}_0 t) \\ y(t) = C_{12} + C_{22}sen(\dot{\varphi}_0 t) \end{cases} \quad \textbf{(40)}$$

que se puede escribir en forma compleja como:

$$z - C_1 = C_2 e^{i\dot{\varphi}_0 t} \quad \textbf{(41)}$$

Tomando módulos en ambos miembros, tenemos:

$$|z - C_1| = |C_2|\left|e^{i\dot{\varphi}_0 t}\right| = |C_2| \quad \textbf{(42)}$$

De donde se deriva que la trayectoria del punto P_0 es una circunferencia de centro C_1 y radio $|C_2|$.
Las constantes complejas C_1 y C_2 se obtienen de las condiciones iniciales del movimiento (posición y velocidad inicial).

3. Conclusiones

Concluimos que resulta muy útil la obtención de soluciones exactas de sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias que surgen en los problemas de la mecánica; en particular porque permiten conocer el error que se comete cuando se utilizan métodos numéricos.

El método que hemos aplicado en este trabajo es sólo una herramienta más para la finalidad antes expresada. Pensamos que se deberían intentar todos los caminos posibles para obtener las tan preciadas soluciones exactas y si ello no fuese posible, se deberían, a nuestro criterio, utilizar aquellos métodos numéricos que preservan la estructura, tales como los métodos simplécticos.

Referencias

1. Churchill, R.V.; Brown, J.W.: *Variable Compleja y Aplicaciones* (Ed): Mc Graw Hill, quinta edición (1992).
2. Kristensson,G.: Second Order Differential Equations: Special Functions and Their Classification: Springer (2010).
3. Sánchez, J.A.; Natali O.: *Obtención de soluciones exactas de ecuaciones diferenciales de primer orden mediante grupos de Lie – Aplicación a un problema de Mecánica*: XVIII EMCI Nacional y X EMCI Internacional. Mar del Plata. 7 a 9 de Mayo de 2014.
4. Sánchez, J.A., Abud, D.: *La teoría de Lie y la conservación de la energía mecánica*: Terceras Jornadas del Departamento de Física de la Facultad de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales de la UNC, 6 y 7 de Agosto de 2015.

Eje 4

Experiencias de Cátedra

Evaluaciones en un Ambiente de Aprendizaje Virtual

Daniela Müller, Silvia Vrancken
Ingeniería Agronómica, Facultad de Ciencias Agrarias, Universidad Nacional de Litoral
R.P. Luis Kreder 2805. 3080 – Esperanza, Santa Fe
{dmuller, svrancke}@fca.unl.edu.ar

Resumen. La incorporación de las aulas virtuales a la docencia, permite contar con un espacio en el que, entre las diferentes herramientas y recursos que se pueden proponer a los alumnos, se encuentran los cuestionarios.
En este trabajo se presentan las principales características de los cuestionarios, de las preguntas que los integran y la retroalimentación que, no sólo informa la validez de la respuesta, sino que proporciona sugerencias y comentarios del posible origen de su error. Se pretende que, a partir de los resultados obtenidos, los alumnos tengan la posibilidad de revisar sus producciones y determinar aquellos conceptos que debe revisar y reforzar.

Palabras Clave: Evaluaciones, Ambiente de aprendizaje, Virtual.

1 Introducción

La incorporación de las tecnologías de la información y de la comunicación a la docencia universitaria, es un proceso que ha avanzado de manera creciente en los últimos años. Las aulas virtuales son cada vez más frecuentes en la Educación Superior, como un recurso imprescindible para la docencia, aun en aquellas universidades que siguen manteniendo su oferta académica presencial.

La tecnología ha facilitado la creación de herramientas y de entornos o ambientes virtuales de aprendizaje que permiten enriquecer las experiencias de aprendizaje. Las innovaciones tecnológicas que favorecen este tipo de ambientes tienen importantes posibilidades pedagógicas que los docentes pueden utilizar para realizar distintas propuestas didácticas y han abierto la posibilidad de introducir nuevas estrategias de aprendizaje y de evaluación [1].

Desde hace años, desde la cátedra, se busca propiciar las condiciones que puedan hacer del aula de matemática un ambiente en el que los alumnos desarrollen experiencias de aprendizaje, fomentando procesos de exploración e indagación a través de estrategias de enseñanza que favorezcan la construcción de conocimiento y el desarrollo del pensamiento matemático. Fue así que se planteó la necesidad de generar espacios, entornos o “ambientes de aprendizaje”, de forma sistémica y organizada, en los que los alumnos participen de manera consciente y activa en sus procesos de aprendizaje, que favorezcan procesos de análisis y reflexión en el aula y que permitan dar sentido a la actividad matemática.

Como se expresa en [2], se considera que el ambiente de aprendizaje es “una concepción activa que involucra al ser humano y por tanto involucra acciones pedagógicas en las que, quienes aprenden, están en condiciones de reflexionar sobre su propia acción y sobre las de otros, en relación con el ambiente” (p. 7).

La incorporación de las aulas virtuales permite contar con un espacio en el que es posible ofrecer a los alumnos diferentes herramientas como información, foros para la comunicación e interacción, así como tareas y actividades fácilmente evaluables.

En [3], se considera que en los ambientes virtuales de aprendizaje deben contemplarse actividades de evaluación de diversos tipos, que activen conocimientos previos, desarrollen el trabajo del alumno, recapitulen y sinteticen lo tratado hasta ese momento, que potencien la lectura y la consulta activa, motiven y provoquen la reflexión, afiancen la seguridad en el aprendizaje y muestren ciertos progresos. Si estas actividades son de autoevaluación, el principal objetivo debe ser el de proporcionarle a los alumnos información tanto del proceso de aprendizaje que están siguiendo como de la calidad del conocimiento que están construyendo. Esta información debería serles útil para tomar decisiones, para reorientar su proceso de aprendizaje en el sentido que sea necesario, tanto en aspectos conceptuales, procedimentales o estratégicos.

En el año 2006 se comenzó a utilizar un aula virtual creada en una plataforma Moodle de la universidad (http://entornovirtual.unl.edu.ar) y desde entonces se ha convertido en una herramienta básica para toda la labor docente. Coincidiendo con [4], uno de los objetivos propuestos, fue el de incorporar el uso de un aula virtual con diversos elementos que se encuentran presentes en el aula presencial como, contenidos, actividades de evaluación, de comunicación tanto entre los alumnos como con el profesor.

A partir de la experiencia adquirida en el desarrollo de las actividades propuestas, en el manejo del aula, junto con los datos generados de su implementación y las respuestas emitidas por los alumnos, se consideró relevante continuar utilizando ese ambiente de aprendizaje virtual como un complemento al trabajo en el aula de matemática, realizando distintas experiencias que avanzaron en la adaptación de los alumnos y de todos los integrantes de la cátedra, a este nuevo contexto. En particular, en los últimos años, se prestó especial interés a la confección de cuestionarios en la plataforma Moodle y a la diversidad de tipos de preguntas que posibilita la misma, prestando especial atención a la posibilidad de configurar la retroalimentación automática que recibirá el alumno según sean sus respuestas, una vez que finalice la resolución.

Por otra parte, la actividad de los docentes de todos los niveles educativos y del universitario en particular, está inmersa en un contexto de cambio que se espera que conduzca a la adaptación a un nuevo entorno que utilice las tecnologías de la información y de la comunicación. En este sentido, a través de este trabajo, se espera contribuir, al exponer la propia experiencia, a mejorar el proceso de adaptación de la actividad docente ante las nuevas circunstancias. Así, se presentan las principales características de los cuestionarios, de las preguntas que los integran y la posibilidad de aplicación como elemento principal en una evaluación de tipo formativa donde, a partir de los resultados obtenidos, los alumnos tengan la posibilidad de revisar sus producciones y, los docentes, la de poder realizar los ajustes necesarios en el desarrollo de los temas siguientes.

2 La propuesta

Como lo expresan en [1], entre las posibilidades que emergen del uso de las tecnologías de la información y de la comunicación, se encuentra la posibilidad de evaluar el progreso del aprendizaje del alumno durante la acción docente. Agregan que, una de las características de la evaluación formativa, es que el alumno obtiene una información externa sobre el progreso de su aprendizaje. En este sentido, podrían proponerse en el aula virtual actividades o ejercicios que, al resolverlos, el alumno podría obtener el resultado y los comentarios o las soluciones de manera inmediata. Por otro lado, teniendo el docente información objetiva sobre los resultados de cada alumno durante el desarrollo de su acción docente, podría realizar los ajustes necesarios, aplicando tal vez alguna medida que no estaba prevista al inicio, como, por ejemplo, ampliar los contenidos o el material, recomendar recursos relacionados con ciertos contenidos u ofreciendo explicaciones y aclaraciones.

Entre las distintas actividades propuestas en el aula virtual de Matemática, se diseñaron algunas de modo tal que, al analizar las resoluciones de los alumnos, se pudiera determinar en qué medida son capaces de reconocer, comprender, analizar o utilizar el conocimiento en base a los contenidos estudiados. Se consideró también realizar actividades de evaluación de tipo formativa, como aquellas que intencionalmente se realizan durante el proceso de aprendizaje con el propósito de retroalimentar al alumno en los aspectos que le permitirán mejorar su rendimiento, realizando una revisión y análisis de sus principales dificultades.

Moodle es un entorno de aprendizaje virtual que ofrece la posibilidad de realizar y proponer cuestionarios a los alumnos. Estos cuestionarios realizados de manera virtual, ya sea como recurso para la evaluación o para los procesos de enseñanza y de aprendizaje, pueden formar parte de los criterios contemplados en la evaluación continua de una asignatura resolviendo el problema que supone realizar controles periódicos.

Matemática I es una asignatura que consta principalmente de tres grandes bloques: Funciones, Álgebra y Geometría Analítica. Hace tres años, para cada bloque temático, se confeccionaron en el aula virtual, cuestionarios con diez preguntas de distintos tipos. Los mismos se fueron habilitando una vez que se terminaba de desarrollar el tema correspondiente y se consideraron dos para el bloque Funciones, uno para Álgebra y otro para Geometría Analítica. Los alumnos disponían de distintos días y horarios para resolverlos, asistiendo al gabinete de informática de la facultad con la supervisión de un docente de la cátedra. La intención fue poder monitorear el desarrollo de esta actividad y resolver las dificultades que podrían presentarse y que tal vez no habían sido contempladas.

En una primera instancia se implementaron en el primer semestre del año 2015 y el propósito perseguido fue favorecer la autoevaluación de los alumnos. En este sentido, coincidiendo con [3], se esperaba que la resolución de los cuestionarios les proporcionara a los alumnos información del proceso de aprendizaje que estaban siguiendo. Para ello, para cada opción que el alumno seleccione en el cuestionario, se diseñó un mensaje de estímulo en el caso de que haya sido correcta, o el concepto o procedimiento que debería revisar, en caso de que la selección hubiera sido incorrecta. También, para cada pregunta, se elaboró una retroalimentación general en la que se hizo referencia al concepto teórico o propiedad involucrada en el enunciado.

En [5], mencionan que uno de los factores para que la evaluación formativa funcione, es la existencia de un feedback inmediato en relación con aquello que pueda fortalecer la capacidad de los alumnos para autorregular su aprendizaje.

Por esto, todos los mensajes y los comentarios que constituyen la retroalimentación general de lo realizado en la evaluación, se decidió que se visualizaran al finalizar la resolución completa del cuestionario. Así, el informe que reciben los alumnos contiene, además del puntaje, la opción que eligieron en cada pregunta, el comentario en particular sobre su elección y en general sobre el concepto involucrado.

2.1 Tipos de preguntas

En la plataforma Moodle, existen distintos tipos de preguntas que se pueden agregar a los cuestionarios. Las que se eligieron fueron de opción múltiple, verdadero falso, de respuesta corta, de selección y de ensayo. Esta última es una pregunta abierta que dispone de un editor de texto donde el alumno puede escribir todo el desarrollo de su resolución. De las diez preguntas que conforman cada cuestionario, nueve son de distintas tipologías y se decidió que sólo una de ellas sea de tipo ensayo. Ésta es la única que no dispone de una retroalimentación automática y es corregida con posterioridad por el docente que, además del puntaje correspondiente, puede agregar un comentario detallado sobre lo escrito. En este sentido, el alumno no sólo obtendrá una calificación que indique la validez de la respuesta, sino que recibirá además comentarios sobre el posible origen del error cometido y sugerencias al respecto.

Un ejemplo de este tipo de preguntas, tal como lo visualiza el alumno, se observa en la Figura 1:

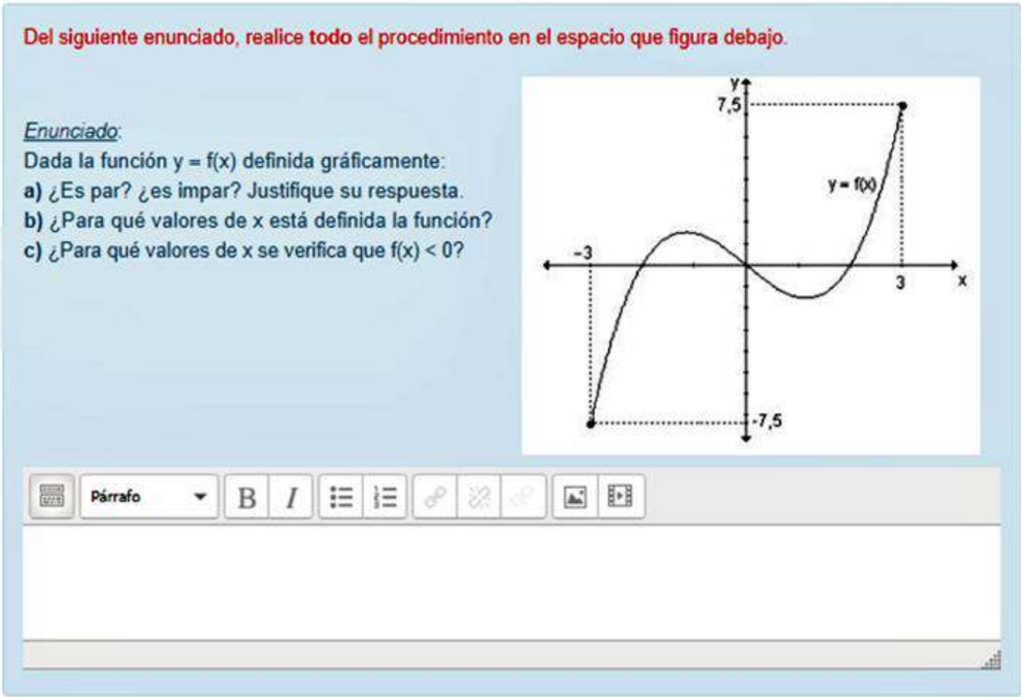


Fig. 1. Aspecto de una pregunta tipo ensayo generada en la plataforma Moodle.

El alumno debe contestar dentro del espacio definido por el editor que figura debajo. Habiendo finalizada la resolución completa del cuestionario, el docente puede revisar la respuesta, agregar los comentarios que considere necesarios y, del puntaje total de la pregunta, asignarle el que corresponda. Esta calificación se sumará a las que obtuvo al responder las otras preguntas del cuestionario.

En el caso de preguntas con retroalimentación automática, una de las opciones es elegir una de tipo de respuestas anidadas (Cloze). Ésta incluye dos tipologías: la de selección, en la que se despliegan distintas opciones elegidas por el docente y otra que dispone de un campo donde el alumno debe ingresar una respuesta a través del uso del teclado. Un ejemplo de ello puede observarse en la Figura 2 donde en las dos primeras debe responder escribiendo la respuesta y las cuatro últimas opciones corresponden a opciones de selección. Cualquiera de ellas es autocorregible al momento de cerrar el cuestionario y para cada una, también, es posible diseñar el mensaje que será visualizado luego por el alumno, de acuerdo a cada elección o a cada respuesta ingresada.

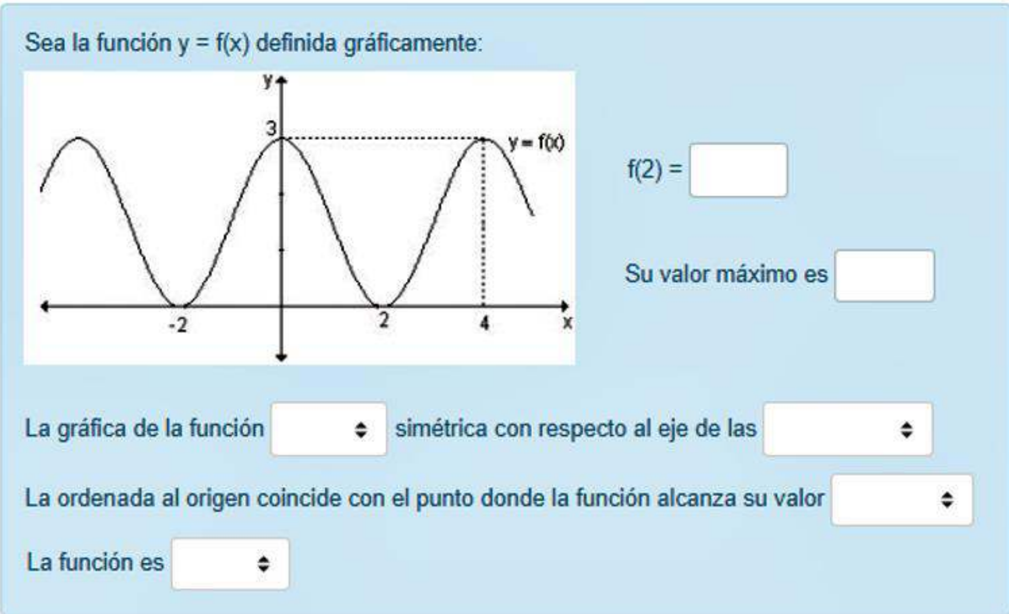


Fig. 2. Ejemplo de pregunta tipo cloze en Moodle.

En la Figura 3 se presenta un ejemplo de resolución de la pregunta anterior y el mensaje que visualizará el alumno al pasar el puntero del mouse sobre su respuesta errónea. Otro similar se obtiene al pasar el puntero sobre las correctas donde, además de un mensaje de estímulo, se agrega alguna referencia al concepto involucrado. Por ejemplo, el mensaje de retroalimentación que obtiene al seleccionar la opción "par", es: ¡Correcto! Se observa que la gráfica es simétrica respecto al eje de las ordenadas. Si hubiera seleccionado la opción "impar", el mensaje es: No es correcto. Observa nuevamente la gráfica y analiza su simetría.

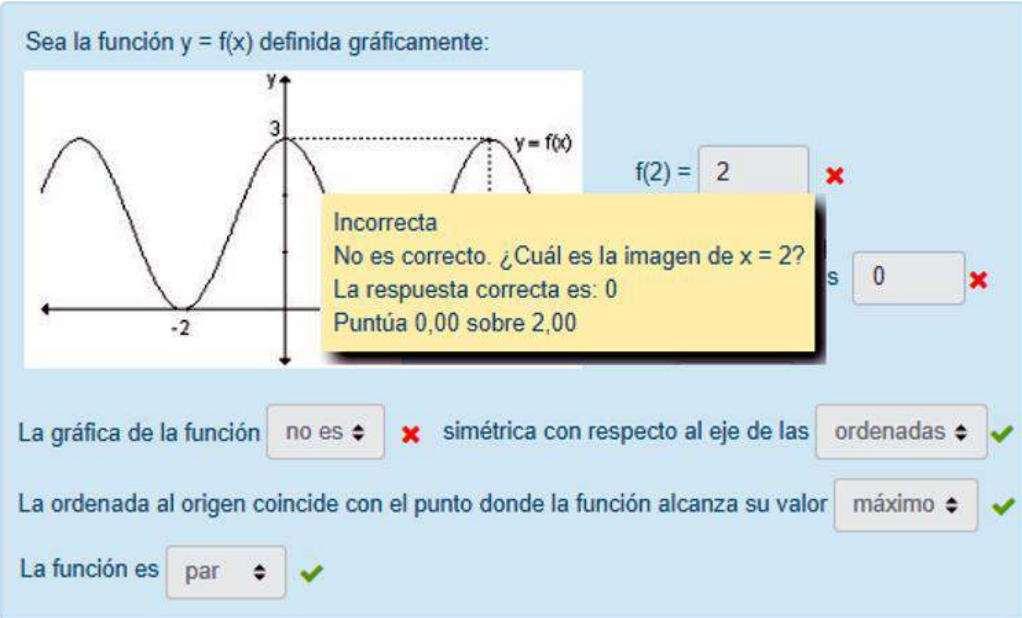


Fig. 3. Ejemplo de pregunta tipo cloze respondida.

Otro tipo de pregunta que se puede plantear, es como la que se muestra en la Figura 4:

La gráfica de una función de primer grado pasa por los puntos $P_1(3, 6)$ y $P_2(\mathbf{m}, 2)$.
Para que sea paralela a la recta de ecuación **2y - 8x - 1 = 0**, el valor de m debe ser **1**.

Seleccione una:

- Verdadero
- Falso

Fig. 4. Ejemplo de pregunta tipo verdadero-falso.

Si bien la selección es entre las opciones verdadero y falso, para responder, el alumno debería realizar algún procedimiento para poder decidir cuál elegir. En este sentido, se prestó especial atención a la elaboración de la retroalimentación para cada una. De este modo, ante una selección errónea, como en el ejemplo planteado en la Fig. 4, el alumno visualizará el mensaje que se presenta en la Figura 5.

La expresión no es correcta. La pendiente de una recta se obtiene calculando $\frac{\Delta y}{\Delta x}$.
En este caso, $m = \frac{2-6}{m-3}$
Por otro lado, la expresión **2y - 8x - 1 = 0** es equivalente a $y = 4x + \frac{1}{2}$, de donde
m = 4.
Como las rectas son paralelas, debes igualar las pendientes.
Revisa las operaciones que hiciste.

Fig. 5. Retroalimentación recibida al seleccionar una opción falsa.

En la plataforma también se presentan preguntas de tipo opción múltiple. La Figura 6 ilustra un ejemplo de este tipo, con la retroalimentación que recibe el alumno al no responder correctamente:

El polinomio $p(x) = (2\mathbf{m}+3)x^3 + x^2 - x + 5$, es divisible por $(x + 1)$ si el valor de **m** es:

Seleccione una:

- a. m = -4 ✖ Revisa las operaciones que hiciste.
- b. m = 0
- c. m = 2

p(x) es divisible por (x + 1) si p(-1) = 0, es decir si x = -1 es raíz de la ecuación p(x) = 0

Fig. 6. Pregunta y retroalimentación recibida en una pregunta de opción múltiple.

En este caso, el comentario que figura debajo constituye la retroalimentación general de la pregunta y se visualiza en cualquiera de las opciones que seleccione el alumno, correcta o no. El comentario cuyo contenido puede cambiar, según sea la selección del alumno, es el que aparece al lado de la opción elegida.

Si bien el alumno puede seleccionar una opción al azar, sin pensar en la que es correcta, al igual que en la pregunta anterior, para elegir la que corresponde también debería realizar algún procedimiento algebraico.

2.2 Implementación

La actividad propuesta se realizó con los 93 de alumnos que se encontraban cursando la asignatura. Dado que son 25 los sitios de trabajo del gabinete de informática, se organizaron en cuatro grupos en diferentes horarios. La fecha de realización fue avisada con anticipación para que revisaran los contenidos dado que no iban a disponer en el momento del material para consultar. Fue una actividad de realización individual y obligatoria para todos. La calificación obtenida en los mismos, no fue tenida en cuenta para la regularidad de la asignatura, sólo la realización.

Una vez que los alumnos resolvieron cada cuestionario, se les solicitó que revisaran con detenimiento cada una de las preguntas que lo conformaban y, en especial, que analizaran los comentarios que aparecían al lado de sus respuestas y al final de las mismas. También, se decidió dejar visible el cuestionario para que lo puedan seguir revisando en los días siguientes. Luego de haber finalizado todos los cuestionarios, se les solicitó que emitieran su opinión sobre esa actividad en general y sobre la retroalimentación recibida en cada cuestionario, en particular.

De los 93 alumnos que respondieron, el 95% considera que, al revisar la resolución de su cuestionario, pudieron reforzar los conceptos que se evaluaban e identificar los errores cometidos. El 5% restante no cometió errores, obteniendo el total del puntaje.

El 74% opina que el comentario que figuraba al lado de cada una de sus respuestas erróneas, lo ayudó mucho a entender el origen de su error.

El 76% manifiesta que la retroalimentación general de la pregunta contribuyó a entender la definición o el concepto que estaba involucrado en el enunciado.

Al finalizar sus opiniones, algunos alumnos agregaron comentarios sobre la experiencia en los que se pudo observar que, dentro del contexto en que se realizó esta actividad, tanto las preguntas como la retroalimentación automática proporcionada, fueron aceptadas positivamente por los alumnos. Algunos incluso solicitaron realizar este tipo de actividad de autoevaluación con mayor frecuencia.

Las principales ventajas descriptas en sus opiniones, fueron: rapidez en el ofrecimiento de las respuestas, mejor orientación, simulación de diálogo con el profesor al leer los comentarios y motivación para seguir estudiando.

Participar como docente espectador de la resolución de los cuestionarios fue un momento muy valioso de trabajo en el aula, al observar cómo los alumnos revisaban la resolución de su cuestionario y cada uno de los mensajes que aparecían en cada pregunta.

3 Consideraciones y trabajos futuros

En toda evaluación se pueden considerar tres momentos en la recogida de información de manera tal que posibilite conocer, en primer lugar, de qué situación se parte (evaluación diagnóstica); qué procesos se están produciendo (evaluación de proceso), con la inmediatez suficiente para regular los procesos y ayudar a la autorregulación de los aprendizajes de los alumnos; y, por último, qué resultados se han producido en el aprendizaje (evaluación sumativa o de producto).

En la plataforma Moodle, los cuestionarios constituyen una herramienta potente y flexible que permite plantear distintas estrategias de evaluación que, realizando pequeñas modificaciones, respondan a cada uno de estos momentos. También, es posible armar una amplia base de preguntas agrupadas en distintas categorías que podrían estar en relación directa con los distintos temas del programa analítico y con la posibilidad que brinda la plataforma Moodle de poder configurar el cuestionario para que cierta cantidad de preguntas se seleccionen al azar dentro de las distintas categorías que se han creado. Esto permite generar varios cuestionarios para que realicen los alumnos de manera simultánea en una sala de informática, por ejemplo, cuestión que en algunos casos sería difícil de llevar a cabo en papel. Más aun, pensando en la corrección de tanta diversidad de evaluaciones.

Si se utilizan los cuestionarios como herramienta de aprendizaje, es posible tener una idea del nivel de competencia alcanzado por el alumno y, del informe que se obtiene de la resolución de uno en particular, es posible determinar en qué fallan más los alumnos en los temas evaluados y de esta manera poder implementar a tiempo alguna estrategia para tratar corregirlas.

La mayor ventaja en el uso de estos cuestionarios se encuentra en la inmediatez de la visualización de la respuesta correcta, muy importante para los alumnos, como lo manifestaron, pero también para el docente, ya que su acción de retroalimentación se encuentra en ella. Esta respuesta automática podría igualarse a la presencia del docente en la que valida el contenido de la respuesta dada por el alumno [6].

Para que sea efectiva, esta retroalimentación debe ofrecer a los alumnos información sobre su aprendizaje, fomentar el diálogo con el docente y con los compañeros sobre el aprendizaje y proporcionarle información útil al docente.

Por otro lado, este tipo de evaluación automática de los cuestionarios le permitirá al docente disponer de mayor tiempo para analizar los resultados obtenidos por los alumnos y así tener una base sólida para tomar las decisiones de reorientar el desarrollo de los contenidos siguientes. También, a partir de las observaciones que realice, podrá generar nuevas preguntas o hacer especial hincapié en algún contenido en particular, mejorando de esta forma la evaluación continua.

El diseño de estos cuestionarios y la elaboración de preguntas, requiere, por parte del docente, mucho tiempo, trabajo y compromiso. La ventaja que se destaca es que todas las preguntas y cuestionarios generados son reutilizables en ediciones posteriores y con pocos pasos, es posible hacer los ajustes necesarios de acuerdo a las respuestas obtenidas y a las dificultades detectadas.

La decisión de adoptar estos recursos será un gran aporte para la educación en la medida que los docentes nos cuestionemos cómo utilizarlos. En este sentido es importante planificar detalladamente todos los factores organizativos, personales y materiales, adecuados a las necesidades particulares de la institución, de los alumnos y de la asignatura.

A partir de la experiencia realizada y de la respuesta obtenida de los alumnos, se volvió a implementar de modo similar en los dos años siguientes. Se tiene previsto seguir utilizando los cuestionarios y se está analizando la factibilidad de incorporarlos a la evaluación formal de la cátedra y se espera también diversificar más la tipología de preguntas utilizadas, tratando de contar con preguntas formuladas con todas alternativas posibles: apareamiento, opciones múltiple, numérica, respuesta breve, verdadero o falso, respuestas anidadas, de ensayo, respuesta abierta y las de arrastrar y soltar sobre un texto o sobre una imagen. Nuevos desafíos que nos mantienen en camino para encontrar respuestas a interrogantes que surjan de la utilización de ambientes de aprendizajes virtuales.

Referencias

1 Bautista, G., Borges, F.; Forés, A. Didáctica universitaria en entornos virtuales de enseñanza-aprendizaje. Narcea. (2006)

2 Viveros, P. Ambientes de aprendizaje. Una opción para mejorar la calidad de la educación. http://148.208.122.79/mcpd/descargas/Materiales_de_apoyo_3/Viveros_%20S%C3%A1nchez,%20J_Ambientes%20de%20aprendizaje_%20una%20opci%C3%B3n%20para%20mejorar%20la%20educaci%C3%B3n.pdf (2003). Accedido el 17 de febrero de 2017

3 Barberà, E.; Badia, A. Educar con aulas virtuales: Orientaciones para la innovación en el proceso de enseñanza y aprendizaje. Machado. (2004)

4 Arenas, F., Domingo, M., Molleda, G., Ríos, M.; Ruiz, J. Aprendizaje interactivo en la educación superior a través de sitios web. Un estudio empírico. Píxel-Bit. Revista de Medios y Educación. n° 35, pp. 127-145. http://www.sav.us.es/pixelbit (2009). Accedido el 13 de agosto de 2017

5 Sancho, T.; Escudero, N. ¿Por qué una propuesta de evaluación formativa con feedback automático en una asignatura de matemáticas en línea? Revista de Universidad y Sociedad del Conocimiento (RUSC). Vol. 9, nº 2. UOC. http://rusc.uoc.edu/ojs/index.php/rusc/issue/view/v9n2 (2012). Accedido el 7 de abril de 2014.

6 Barberà, E. Aportaciones de la tecnología a la e-Evaluación. Revista de Educación a Distancia. Año 5, nº VI. http://www.um.es/ead/red/M6/barbera.pdf (2006). Accedido el 13 de agosto de 2013.

Taller de Análisis Matemático II
La proposición y resolución de problemas reales

Riccomi Humberto[1], Sacco Lucía[1]
[1] Investigación Departamento de Materias Básicas, Facultad Regional San Nicolás, Universidad Tecnológica Nacional
Colón 332
hriccomi@peeirr.com.ar , lcsacco@gmail.com

Resumen. Este trabajo presenta dos problemas reales formulados y resueltos por estudiantes en la segunda implementación del Taller de Análisis Matemático II (AMII), de la Facultad Regional San Nicolás, Universidad Tecnológica Nacional (FRSN-UTN), durante el período 2015-2016. En el XX EMCI se realizó una anticipación de la dinámica de trabajo en el Taller, como propuesta educativa innovadora destinada a estudiantes de años avanzados de la Carrera de Ingeniería que adeudaban AMII. Los problemas formulados, trabajados y resueltos durante el desarrollo de las clases evidencian el compromiso asumido por cada uno de los involucrados, la transferencia de aprendizajes en la resolución de problemas y el reconocimiento del trabajo en equipo en la resolución de problemas de Ingeniería.

Palabras Clave: Análisis Matemático, Resolución de problemas reales, Ingeniería.

1 Introducción

La idea del desarrollo e implementación del Taller surge en el 2013 como propuesta de mejora a una situación que se presentaba en estudiantes de Ingeniería que, habiendo terminado de cursar todas las materias o con sólo algunas en curso, adeudaban Análisis Matemático II.

Durante muchos años, en la Universidad Tecnológica Nacional estuvo en vigencia el Plan de Estudios de 1979 [1]. Según dicho plan, en la carrera de Ingeniería Mecánica, la asignatura Análisis Matemático II de 2ndo año del Ciclo Básico no era correlativa con otras asignaturas de años siguientes. Los estudiantes que la regularizaban en 2ndo año podían avanzar en la carrera, teniendo pendiente rendir AMII. En 1993, y atendiendo a un cambio de paradigma en la educación, se implementaron los nuevos Diseños Curriculares a través de la Ordenanza 741/1993. A partir de ellos, AMII pasó a ser correlativa con otras asignaturas de años superiores en todas las carreras de Ingeniería. A mediados del 2012, en relevamientos realizados en numerosas cohortes de estudiantes de AMII, se evidenció que existía un importante número de estudiantes de la carrera de Ingeniería Mecánica que, aun en un avanzando estado en su carrera, seguían adeudando AMII. Analizando la situación de estos estudiantes, se observó que pertenecían al viejo Plan de Estudios. Por ello, como parte del Plan de Mejoras iniciado en 2008 por los docentes de la cátedra, se propuso como acción estratégica implementar en 2013 un Taller de AMII para aquellos estudiantes que se hallaban en dicha situación [2]. Desde entonces, cada dos años, se desarrolla con un grupo reducido de estudiantes que se hallan en la situación antes mencionada.

2 Fundamentación

Cuando se piensa en la formación profesional, es importante orientar los aprendizajes de modo de acercar a los estudiantes, en la medida de lo posible, a lo que será el trabajo en la práctica profesional. La propuesta de este modelo pedagógico implica un acercamiento a los desarrollos teóricos a través de las necesidades surgidas en función de la resolución de un problema. El objetivo es que los conocimientos se incorporen en la estructura semántica experiencial (como instrumentos valiosos para el análisis y la solución de problemas) y no en la estructura semántica académica (para resolver con éxito sólo las demandas del aula, asociadas a la vida escolar) [3].

Este tipo de conocimiento plantea estructurar los saberes a través de metodologías de enseñanza que favorezcan el aprendizaje a partir de situaciones que resulten significativas para el estudiante. Estas metodologías son las denominadas metodologías activas. Se las definen como “un proceso interactivo basado en la comunicación profesor-estudiante, estudiante-estudiante, estudiante-material didáctico y estudiante-medio que potencia la implicación responsable de este último (medio) y conlleva la satisfacción y enriquecimiento de docentes y estudiantes” [4]. Como aquellas que ofrecen una alternativa atractiva a la educación tradicional al hacer más énfasis en lo que aprende el estudiante que en lo que enseña el docente, y esto da lugar a una mayor comprensión, autonomía, motivación y participación del estudiante en el proceso de aprendizaje. En términos de Un método es activo cuando genera en la persona-colectivo una acción que resulta de su propio interés, necesidad o curiosidad [5]. El facilitador es en ese sentido, quien debe propiciar dicho interés planificando situaciones de aprendizaje estimulantes, sin descuidar que los métodos son el medio y no el fin. “La metodología activa se debe entender como la manera de enseñar que facilita la implicación y la motivación”. Usar estas metodologías implica centrar el proceso en las actividades por encima los contenidos, aun cuando esta última ha sido la forma de estructurar la enseñanza tradicionalmente. Los contenidos siguen existiendo, pero cobran sentido en el contexto de las actividades [6].

Dos metodologías activas, propias del ámbito universitario, es la resolución de problemas que realiza el sujeto [7] o el estudio de casos [8]. Los conocimientos adquiridos mediante resolución de problemas adquieren una significación profunda para el estudiante.

El aprendizaje significativo [9] implica que los conocimientos nuevos se incorporan, mediante una relación sustantiva y no arbitraria, a los saberes que el estudiante dispone en su estructura cognoscitiva y a los nuevos saberes por aprender. El conocimiento generador [10] tiene en cuenta tres metas fundamentales para la educación: retención (no memorística), comprensión y uso activo del conocimiento. Estos procesos sólo pueden darse en el marco pedagógico en el cual los alumnos participan de un proceso de aprendizaje, reflexionando sobre lo que aprenden, encontrando significado propio a los nuevos conceptos aprendidos y relacionándolos con los saberes previos.

La resolución de problemas plantea una situación en la cual los estudiantes requieren de un proceso reflexivo y analítico para arribar a una solución, lo cual favorece la formación en competencias [11] [12]. Lo ideal es plantear situaciones problemáticas en concordancia con la futura incumbencia profesional.

Otra metodología activa es el trabajo en equipo, el cual permite el intercambio de ideas y opiniones entre los integrantes del equipo, de manera que se enriquecen las opiniones y puntos de vista y se favorece la colaboración entre los participantes.

Por último, las TIC han influido en el ejercicio del campo profesional. Por ello, la enseñanza deberá incluirlas [13]. La Universidad no puede quedar fuera de esta realidad.

3 Taller de Análisis Matemático II

Durante el 2015 el Taller comenzó a dictarse en el de abril y finalizó entre las mesas de diciembre del mismo año, día en que se realizó el Coloquio Final. Se realizaron 15 encuentros presenciales y el horario propuesto fue consensuado con los estudiantes de modo que no ocasionara superposición con las clases o trabajos de cada uno. Los encuentros se realizaron cada quince días, a la tarde, con una duración de entre dos y tres horas. La asistencia a los encuentros presenciales fue obligatoria. Se consideraron horarios alternativos para aquellos estudiantes que eventualmente tuvieran problemas de horarios para asistir a los encuentros. Periódicamente se desarrollaron coloquios, como jornadas de socialización de avances en los Trabajos Prácticos y de resultados en los Trabajos Conceptuales desarrollados. El dictado del Taller estuvo a cargo de un profesor de la cátedra y de un ayudante de primera de AMII.

Los estudiantes trabajaron durante el desarrollo del Taller con el cuadernillo de la cátedra, la bibliografía recomendada y apuntes preparados de acuerdo con las necesidades observadas. Se propusieron diversas actividades de comprensión de aquellos tópicos con mayores dificultades, al igual que instancias para formular y responder preguntas, aprender el uso de software específico en la resolución de problemas, encontrar respuestas a aquellos problemas y ejercicios propuestos en los cuadernillos, consultar bibliografía, etc. También se incluyeron espacios de reflexión sobre propuestas y procesos, no solo individuales sino grupales, enriqueciendo experiencias y potenciando las oportunidades de acercamiento a mejores posibilidades de solución.

Los encuentros presenciales se alternaron con encuentros virtuales realizados a través del Aula Virtual del Taller de AMII, donde los estudiantes encontraban el material de estudio, unidades, consignas de Trabajos Prácticos y problemas trabajados en el Taller. Para la comunicación entre encuentros se realizó un grupo de WhatsApp, el cual también se utilizó para el envío de documentos.

La propuesta educativa del Taller de AMII ha sido pensada con la intención de que los futuros ingenieros desarrollen competencias específicas (precisión y claridad en el lenguaje, creatividad, análisis e interpretación de problemas reales, modelización) y transversales (autonomía en el aprendizaje y habilidades cognitivas) para el futuro desempeño profesional. Dicha propuesta está orientada a competencias profesionales y requiere de una reflexión crítica, lo que lleva a pensar en el diagnóstico de las necesidades del contexto y las operaciones del proceso educativo, sin perder de vista el sistema de evaluación. Esta forma de pensar se retroalimenta en todo momento, en contraposición a la educación tradicional cuyo enfoque es pasivo-receptivo [14].

En el Taller de AMII considera una evaluación continua de los procesos de enseñanza y de aprendizaje, de modo, que brinde elementos para el mejoramiento de la calidad de ambos procesos y que constituya un componente de retroalimentación permanente para la toma de decisiones. Entre los criterios de evaluación fijados es posible mencionar para la acreditación del Taller de AMII:

- Asistencia, por lo menos, a uno de los dos encuentros mensuales destinados al desarrollo de las unidades, explicaciones e indicaciones.
- Aprobación de todos los Trabajos Conceptuales, que incluyen diferentes tipos de actividades del marco teórico desarrollado durante ese mes. Los estudiantes contaron con instancias de recuperatorio de sólo uno de ellos.
- Aprobación de los Trabajos Prácticos, que incluyen anticipaciones parciales de los problemas a preparar para el Trabajo Final.
- Aprobación del Coloquio Final: presentación individual y oral de tres problemas que vinculen contenidos de AMII. Interrogatorio por parte de los docentes evaluadores. La nota final del examen debe ser superior a 7 (siete) puntos.

A continuación, se presentan dos problemas de Ingeniería, formulados y resueltos por dos estudiantes cursantes del Taller de AMII durante el 2015. Estos estudiantes, al compartir el lugar de trabajo en una empresa, les permitió analizar una problemática de interés de ambos, la cual ajustaron a los requisitos del Trabajo Final pedido en el Taller. El propósito es mostrar cómo los estudiantes, a partir de la formulación y resolución de dichos problemas, evidenciaron la aplicación y aprendizaje de los contenidos de la asignatura.

3.1 Problema 1: Construcción de ductos

<u>Enunciado del problema</u>

Esta es una de las etapas que mayor dificultad presenta al estudiante. La formulación de problemas en Ingeniería implica necesariamente la delimitación de la situación a estudiar / investigar, estableciendo claramente los límites dentro de los cuales se desarrollará el problema. Es una competencia que desde la práctica educativa propuesta debe considerarse espacios y tiempos para su formación y desarrollo.

La versión del enunciado del Problema 1 propuesta por el estudiante fue:

> *En la construcción de grandes ductos, es frecuente la utilización de chapa conformada. Para la ejecución de un empalme de ductos de igual radio, se debe calcular la cantidad (superficie) de chapa utilizada para ejecutar el ducto que acomete al principal.*
>
> *En este caso, ambos ductos tendrán un radio de 3m, y se realiza una intersección ortogonal del ducto vertical hacia un ducto horizontal, cuyo eje se ubica a 4m por encima del piso.*

<u>Visualización de la situación</u>

La definición del problema implicó al estudiante el análisis y representación de la situación de modo de establecer y definir variables y condiciones para definir estrategias de resolución del problema.

- o La Fig. 1 muestra dos fotos del ducto en estudio.

Fig. 1. Fotos del ducto.

- Las Fig. 2 y 3 sonre representaciones realizadas por el estudiante para visualizar la situación del problema. Consideró representar los ductos por dos cilindros con ejes en los ejes coordenados cartesianos. La Figura 2 presenta la parte del ducto al cual hay que calcular su superficie.

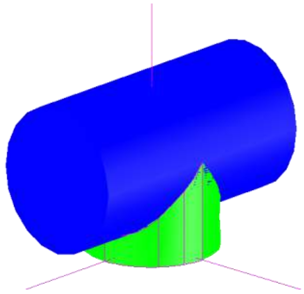


Fig. 2. Posición de los ductos en un sistema de coordenadas cartesianas.

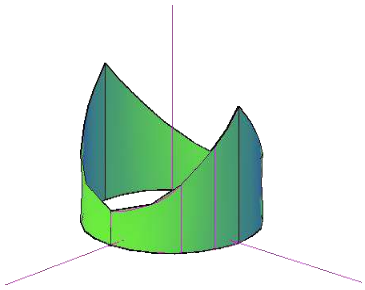


Fig. 3. Superficie del ducto a calcular.

<u>Búsqueda de información</u>

Para la modelización de los dos cilindros, el estudiante tuvo en cuenta las siguientes premisas:

- El piso, el plano XY
- El eje del cilindro vertical, el eje z. Este cilindro vertical será una superficie con generatriz en el plano, y centro en el origen de coordenadas; y directriz paralela al eje z.
- El eje del cilindro horizontal estará contenido en el plano XZ, lo que implica que la generatriz, en el plano YZ tendrá centro en y=0, z=4; y directriz paralela al eje x

A partir de ello, planteó el siguiente sistema de ecuaciones que describen ambas superficies:

$$\begin{cases} x^2+y^2=9 \\ y^2+(z-4)^2=9 \end{cases} \tag{1}$$

La primera ecuación corresponde a la de un cilindro vertical de eje z y radio 3 y la otras, de un cilindro horizontal de eje paralelo al eje x y de igual radio al vertical.

<u>Resolución del problema</u>

A partir del sistema (1) el estudiante planteó el siguiente esquema de trabajo para la resolución del problema:

a) *Obtuvo las dos superficies planas que contienen a la curva intersección entre ambos cilindros:*
   - El plano z=0 delimita inferiormente a la superficie del ducto a calcular. Superiormente estará delimitado por la intersección de ambos cilindros. Igualando las ecuaciones planteadas en (1) es posible hallar la intersección de ambas superficies.

$$x^2+y^2=y^2+(z-4)^2 \quad \Rightarrow \quad x^2=(z-4)^2$$

$$|x|=|z-4| \Rightarrow \begin{cases} x=|z-4| \Rightarrow \begin{cases} x=z-4 \\ x=-z+4 \end{cases} \\ -x=|z-4| \Rightarrow \begin{cases} -x=z-4 \\ -x=-z+4 \end{cases} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=z-4 \\ x=-z+4 \end{cases} \tag{2}$$

   - A partir del sistema obtenido (2) el estudiante despeja la variable z de ambas ecuaciones y obtiene las ecuaciones (3) de los dos planos paralelos al eje y con inclinación de 45° buscados (Fig. 4):

$$z=x-4\ ;\ z=-x+4 \tag{3}$$

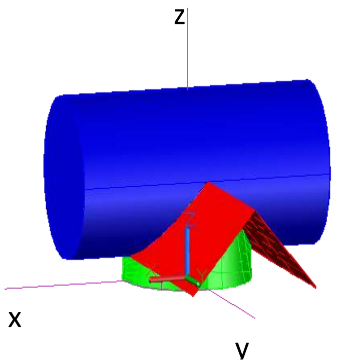


Fig. 4. Planos que contienen la curva intersección de ambos ductos.

b) *Estableció simplificaciones a partir de relaciones espaciales de las variables del problema*
A partir de considerar que la superficie del ducto a calcular es tanto simétrica respecto al eje **x** y respecto al eje **y**, planteo la integral en la cuarta parte de la superficie a calcular (Fig. 5).

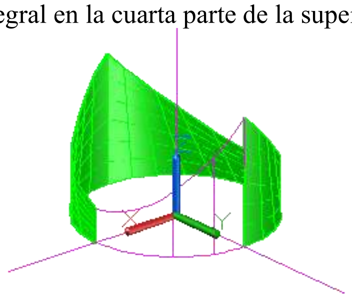


Fig. 5. Sección a calcular su superficie.

El proceso para obtener el área de la superficie buscada llevado a cabo por parte del estudiante, fue aplicando conocimientos de lo trabajado en la Unidad Didáctica N°5 de AMII: *Integrales de funciones de Rn en Rm:*

- Determinación de la expresión matemática para el cálculo del área de una superficie:

$$A_S = \iint_T \left\| \bar{r}_u \wedge \bar{r}_v \right\| du\ dv \tag{4}$$

- Obtención de la ecuación paramétrica de la superficie a calcular su área:

$$\bar{r}_{(u,v)} = \begin{cases} x_{(u,v)} = 3\cos u \\ y_{(u,v)} = 3\sin u \\ z_{(u,v)} = v \end{cases} \qquad \begin{array}{c} 0 \le u \le \pi/2 \\ 0 \le v \le -3\cos u + 4 \end{array}$$

$$\bar{r}_{(u,v)} = \left(3\cos u\ \bar{i} + 3\sin u\ \bar{j} + v\ \bar{k}\right) \tag{5}$$

- Calculo del área de la superficie, obteniendo previamente derivadas parciales, producto vectorial fundamental y módulo del vector obtenido:

$$\bar{r}_u = \left(-3\sin u\ \bar{i} + 3\cos u\ \bar{j} + 0\ \bar{k}\right)$$

$$\bar{r}_v = \left(0\ \bar{i} + 0\ \bar{j} + \bar{k}\right)$$

$$\bar{r}_u \wedge \bar{r}_v = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ -3\sin u & 3\cos u & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\bar{r}_u \wedge \bar{r}_v = \left(3\cos u\ \bar{i} + 3\sin u\ \bar{j} + 0\bar{k}\right) = \left(3\cos u\ \bar{i} + 3\sin u\ \bar{j}\right)$$

$$\left\| \bar{r}_u \wedge \bar{r}_v \right\| = 3\sqrt{\cos^2 u + \sin^2 u} \quad \Rightarrow \quad \left\| \bar{r}_u \wedge \bar{r}_v \right\| = 3 \tag{6}$$

- Cálculo de la integral (4) obteniendo:

$$\frac{A_S}{4} = \int_0^{\pi/2} \int_0^{-3\cos u + 4} 3\ dv\ du \qquad \Rightarrow \quad A_S = -36 + 24\pi\, m^2 \quad \Rightarrow \quad A_S \cong 39{,}4\, m^2 \tag{7}$$

Análisis de la solución

Una vez obtenida una solución, se sugirió al estudiante que analizara el resultado obtenido, a partir de información que pueda obtener desde el lugar de trabajo, como así también utilizando herramientas tecnológicas.

a) Análisis de la situación con un programa de diseño que utilizan a diario en su lugar de trabajo (Fig. 6), mostrando como al ejecutar los ductos en la fábrica, se trazan los cortes de chapa por aproximación de poligonales.

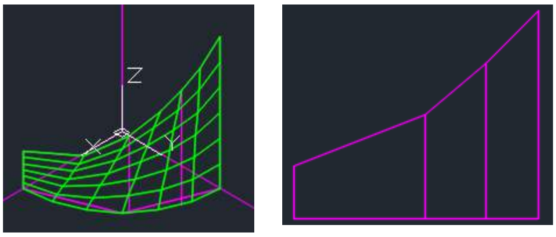


Fig. 6. Esquemas obtenidos con el programa de diseño.

b) Cálculo de la cuarta parte del área de la superficie con el programa de diseño del área del corte de chapa (Fig. 7).

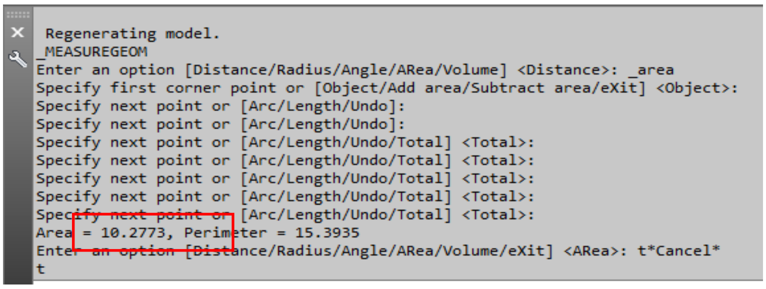


Fig. 7. Valor del área del ducto con el programa utilizado.

c) Análisis del valor obtenido con el software. Aproximando el resultado a 10,28m^2, se obtiene un área total de 41,12m^2. Este valor da un error de aproximadamente 4%, respecto al cálculo teórico.

Continuidad del problema

El estudiante consideró que el problema permitiría seguir trabajando:

a) La posibilidad de considerar casos donde se realicen más de un empalme, y con diferentes longitudes de ducto. En este caso se puede realizar el cálculo del área de empalme solamente, sumando la superficie del cilindro recto. En el caso de estudio, se puede representar de la siguiente forma:

$$A_S = 4\left(\int_0^{\pi/2}\int_0^1 3\ dv\ du\right) + 4\left(\int_0^{\pi/2}\int_1^{-3\cos u+4} 3\ dv\ du\right) \quad (8)$$

b) También, es importante conocer el fluido que transporte o contenga el ducto, para calcular el peso de este, que sumado al del ducto propiamente dicho, permitirá calcular el soporte necesario. Para ello, se debe calcular el volumen contenido en esa sección del ducto.

3.2 Problema 2

En relación con esto último planteado por el estudiante que trabajó con el Problema 1, el otro estudiante formuló y resolvió el Problema 2.

Enunciado del problema

En la construcción de grandes ductos, es frecuente la necesidad de calcular el volumen del ducto que acomete al principal. En este caso, ambos ductos tendrán un radio de 3m, y se realiza una intersección ortogonal del ducto vertical hacia el ducto horizontal, cuyo eje se ubica a 4m por encima del piso.

Visualización de la situación
Trabajaron ambos estudiante colaborativamente en la representación del recinto (Fig. 8) y de proyecciones sobre los planos coordenados (Fig. 9).

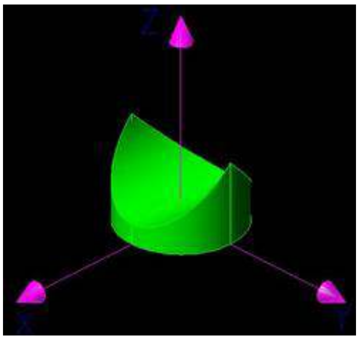


Fig. 8. Recinto sólido.

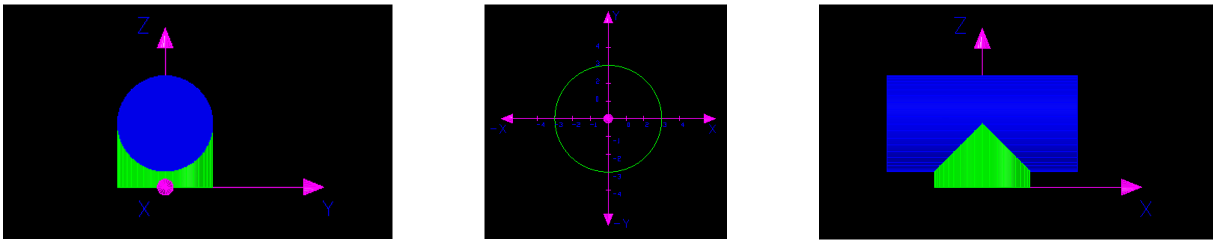


Fig. 9. Proyecciones sobre los planos coordenados del recinto sólido.

Análisis de información
El estudiante que trabajó con este problema partió del valor del volumen que le brindaba el programa AutoCAD, que a diario utiliza (con la correspondiente licencia) en su lugar de trabajo (Fig. 10).

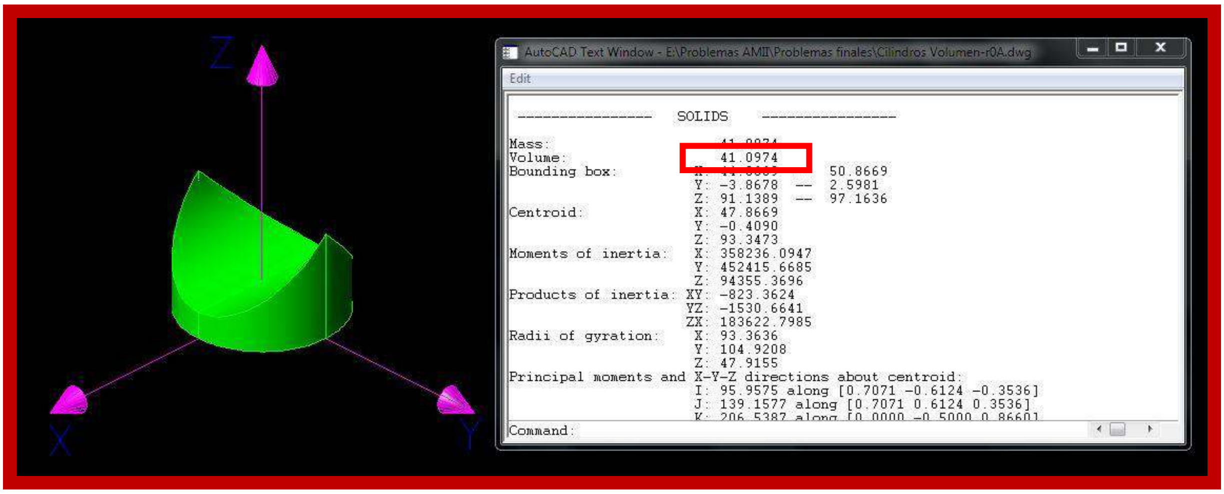


Fig. 10. Resultado del volumen obtenido con AUTOCAD

Resolución del problema
El estudiante planteó el siguiente esquema de trabajo para la resolución del problema:

a) *Simplificación / Modelización matemática*
Para el cálculo del volumen del sólido el estudiante planteó el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 9 \\ z = 0 \\ y^2 + (z-4)^2 = 9 \end{cases} \qquad \textbf{(9)}$$

b) *Definición del recinto de integración*

- A partir del cálculo de volúmenes de recintos sólidos similares, el estudiante decide escribir el recinto de integración utilizando coordenadas polares (al trabajar con integrales dobles):

$$\left| \begin{array}{l} x = \rho\cos(\theta) \\ y = \rho\,\mathrm{sen}(\theta) \end{array} \right. \quad 0 \le \rho \le 3 \quad ; \quad 0 \le \theta \le \pi/2 \qquad \textbf{(10)}$$

c) *Cálculo del volumen por medio de una integral doble utilizando coordenadas polares*

$$V = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{3} \rho\cdot(4-\sqrt{9-x^2})\,d\rho\, d\theta \qquad \textbf{(11)}$$

Una vez planteada la integral (11), el estudiante se encontró con la dificultad del cálculo de esta:

$$V = 4\left[18\theta\Big|_0^{\pi/2} - 9\cdot\left(\cos\theta + \sec\theta\right)\Big|_0^{\pi/2}\right] \qquad \textbf{(12)}$$

d) *Nueva definición del recinto de integración*

Lo anterior lleva al estudiante a definir los extremos de integración utilizando coordenadas rectangulares, considerando simetría del recinto sólido sobre el plano XY y tomar la ¼ parte de este según muestra la Fig. 11.

$$0 \le x \le 3\,;\ 0 \le y \le \sqrt{9-x^2} \qquad \textbf{(13)}$$

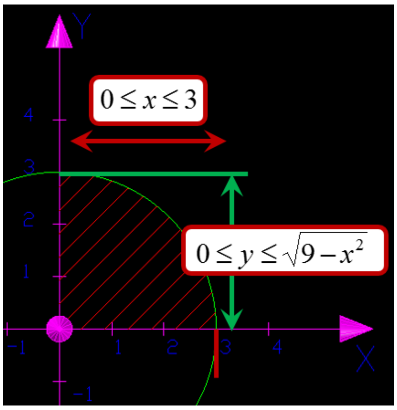


Fig. 11. Recinto de integración sobre plano XY.

Para la definición del extremo en z, el estudiante consideró:

$$x^2 + (z-4)^2 = 9 \quad \Rightarrow \quad |z-4| = \pm\sqrt{9-x^2} \quad \Rightarrow \quad z = \begin{cases} 4+\sqrt{9-x^2} \\ 4-\sqrt{9-x^2} \end{cases} \qquad \textbf{(14)}$$

El estudiante suma a la resolución varias imágenes del recinto de integración (Fig. 12).

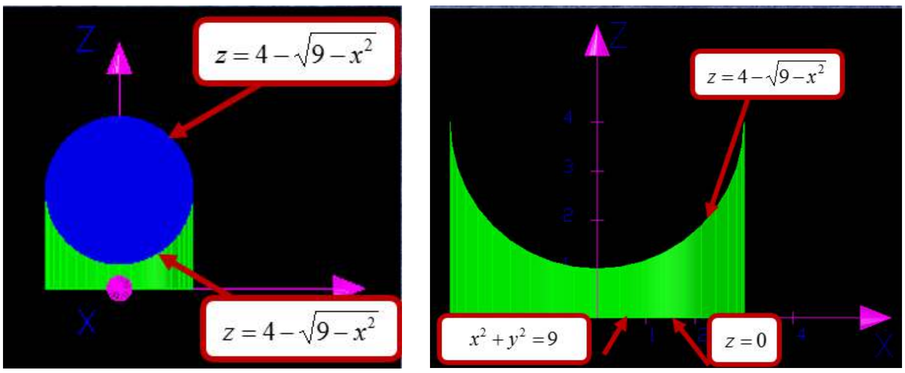


Fig. 12. Recinto de integración.

e) *Cálculo del volumen por medio de una integral doble*

$$V = 4\int_{0}^{3}\int_{0}^{\sqrt{9-x^2}} (4-\sqrt{9-x^2})\,dydx \tag{15}$$

$$V = 4\left[4\cdot 9\frac{\pi}{4} - 9\cdot 3 + \frac{3^3}{3}\right] = 4\cdot(10{,}27) = 41.08m^3 \tag{16}$$

<u>*Análisis de la solución*</u>
El estudiante reconoce que lo realizado a partir de la aplicación de conocimientos de Análisis Matemático II ha permitido verificar el valor que determinaba el AutoCAD (Fig. 10).

4 Conclusiones

Las funciones más habituales de los ingenieros son el diseño, el desarrollo, la producción, la evaluación, el control, la construcción y la operación de proyectos de solución de problemas. Cada una de estas funciones requiere de procesos de precisión, investigación, establecimiento de criterios, consideración de alternativas, análisis y resolución de dichos problemas, comunicación, toma de decisiones y otras.

La intención del docente universitario es preparar al estudiante para que logre ser un ingeniero competente. Tal como expresa [13]:

> La enseñanza es una actividad intencional, y esa intencionalidad consiste en el ejercicio deliberado de influencia sobre aquellos a los que se enseña; una influencia que se traduce en proponer –cuando no imponer– significados sobre la realidad, a través del conocimiento y las formas en que éste se hace accesible a los estudiantes y de las relaciones pedagógicas que para su adquisición se establecen. Es, por todo ello, una actividad moral. Así pues, la enseñanza se realiza de acuerdo con algunas razones, para algunos propósitos que deben explicitarse y comunicarse. (p.205)

Desde este posicionamiento, la cátedra de Análisis Matemático II fundamenta las acciones que día a día realiza, en este caso particular desde el Taller, tendientes a mejorar la calidad de los aprendizajes del estudiante de Ingeniería. En este artículo es posible apreciar el trabajo realizado por el alumno en la resolución del problema, el cual permite evidenciar a través de él las intenciones docentes formuladas.

La metodología de trabajo por proyectos en el aula del Taller permitió al estudiante enriquecer su facultad racional, brindando formas de trabajo, espacios y tiempos de investigación y reflexión sobre lo realizado y toma de decisiones totalmente fundamentadas, constituyendo un valiosísimo aporte a su formación como ingeniero.

Como se mencionó antes, la gente aprende más cuando tiene una oportunidad razonable y una motivación para hacerlo [15].

Se considera que un gran desafío fue involucrar al estudiante en plantear una situación problemática concreta que tenga interés por estudiarla. Utilizar situaciones concretas y a partir de ellas plantear un problema, no es tarea sencilla. Mucho más, con el plus de mostrar la importancia de los temas que se desarrollan en Análisis Matemático II y sus aplicaciones en la Ingeniería. Como docente es preciso enseñar a escribir y plantear el problema con precisión y claridad en el lenguaje. Para ello fue necesario brindar al estudiante oportunidades para que realice investigaciones que le permitieran conocer más del problema en estudio, para luego aplicar dichos conocimientos en las etapas de resolución del problema.

No menos importante ha sido priorizar la reflexión y el razonamiento frente al entrenamiento y la memorización. Calcular el volumen del horno resultó para el estudiante mucho más que aplicar una integral doble o triple. Implicó interpretar los planos, reflexionar por qué etapas debía transitar para resolver el problema, analizar cómo podía dividir el horno para realizar menos cálculos y con mayor precisión, razonar cuáles serían las mejores secciones que considerar, etc. El planteo y cálculo de cada una de las integrales evidencia el razonamiento realizado por el estudiante en cuanto a qué herramientas matemáticas resultaban las adecuadas y necesarias para hacerlo.

Esto último ha permitido fomentar la concientización sobre la necesidad de una formación matemática sólida que permita al estudiante abordar con éxito, no sólo las materias del ciclo de especialidad, sino las situaciones concretas de su trabajo diario.

El valor agregado de este tipo de trabajo, en una asignatura como es Análisis Matemático II de segundo año del Ciclo Básico, es descubrir, implícitamente, su implicancia en la Ingeniería [16].

5 Referencias

1. Resolución 299/1978 CSU: Secretaría del Consejo Superior. Universidad Tecnológica Nacional.
2. Riccomi, H.; Sacco, L.: Propuesta educativa innovadora en la Facultad Regional San Nicolás. Taller de Análisis Matemático II. *Libro de Actas,* XX Encuentro Nacional y XII Internacional de Educación Matemática en Carreras de Ingeniería. Facultad de Ciencias Exactas y Tecnologías. Universidad Nacional de Santiago del Estero. Argentina, pp. 450-459 http://emci2017.unse.edu.ar/wp-content/uploads/2016/08/Libro-de-Actas-EMCI-2017.pdf (2017). Accedido el 20 de junio 2018
3. Pérez Gómez, A.I.: Enseñanza para la comprensión. En Gimeno, J. y Pérez, A.I. *Comprender y transformar la enseñanza*. Madrid: Morata, pp. 78-114 (1992)
4. López Noguero, F.: *Metodologías participativas en la enseñanza universitaria*. Madrid: Narcea (2005)
5. Huerta Rosales, M.: *Enseñar a aprender significativamente*. Perú: San Marcos (2002)
6. Gros, B.: *Evolución y retos de la educación virtual: construyendo en el siglo XXI.* Barcelona, España. Editorial UOC (2011)
7. Branda, L.: Aprendizaje Basado en Problemas, centrado en el estudiante, orientado a la comunidad. En *Aportes para un cambio curricular en Argentina*, Jornadas de Cambio Curricular de la Facultad de Medicina de la Universidad de Buenos Aires, Organización Panamericana de la Salud, pp.79-101 (2001)
8. Sánchez Moreno, M.: *Cómo enseñar en las aulas universitarias a través del estudio de casos.* Documento 07. Instituto de Ciencias de la Educación. Universidad de Saragoza (2008)
9. Ausubel, D. P.; Novak, J. D.; Hanesian, H.: *Psicología educativa. Un punto de vista cognoscitivo*. Trías Ed., México (1983)
10. Bur, A.: Educación universitaria y conocimiento. *XXI Jornadas de Reflexión Académica en Diseño y Comunicación Facultad de Diseño y Comunicación.* Universidad de Palermo. Año XIV, Vol. 21, Buenos Aires, Argentina https://fido.palermo.edu/servicios_dyc/publicacionesdc/archivos/430_libro.pdf (2013)
11. Suarez Arroyo, B.: La formación en competencias: un desafío para la educación superior del futuro. Barcelona https://web.ua.es/es/ice/documentos/recursos/materiales/foramcion-en-competencias.pdf (2005) Accedido el 20 de junio 2018
12. Litwin, E.: *El oficio de enseñar: condiciones y contextos*, Buenos Aires, Paidós (2008)
13. Blanco, N.: Las intenciones educativas, en Ángulo Rasco, J.; Blanco, N. (coords.) (1994): *Teoría y desarrollo del curriculum.* Málaga: Aljibe, pp.205-231 (1994)
14. Brousseau, G.; Centeno, J.: Role de la mémoire didactique de l'enseignant". Recherches en *Didactique des mathématiques*, Vol. 11. No. 2-3. La Pensée Sauvage. Grénoble, pp. 203 (1991)
15. Perkins, D.: *La escuela Inteligente. Del adiestramiento de la memoria a la educación de la mente*, Gedisa, Barcelona (2003)
16. Riccomi, H., Sacco, L. Estudio de las causas de una falla en un horno de arco eléctrico por sobrecarga. Cálculo del volumen para obtener su capacidad máxima. Congreso Latinoamericano de Ingeniería y Ciencias Aplicadas – Clicap 2018. San Rafael Mendoza (2018)

Empleo de Modelos Económicos en la asignatura Análisis Matemático I en Carreras de Ingeniería

Mónica Scardigli[1], Carolina Cordón[1], Aída Miguel[1]
[1] Facultad Regional Buenos Aires, Universidad Tecnológica Nacional
Medrano 951, CABA, Argentina
mgscard@hotmail.com, carocordon@gmail.com, aidamiguel13@yahoo.com.ar

Resumen: En este artículo se presenta una experiencia realizada en cursos de Análisis Matemático I, de la Universidad Tecnológica Nacional Facultad Regional Buenos Aires. En la experiencia se les presentó a estudiantes del primer nivel de las carreras de ingeniería, una aplicación económica de temas de la asignatura. Para llevar adelante la actividad, los alumnos trabajaron en grupos. Al iniciar se realizó una introducción a los temas económicos a tratar de modo que los estudiantes pudiesen vincularlos con conceptos propios de la materia. El objeto de trabajar con esta metodología es favorecer la transferencia de los conocimientos matemáticos ya adquiridos a situaciones nuevas y así mejorar la comprensión de procesos matemáticos. La experiencia resultó motivadora para los estudiantes, valoraron poder aplicar diversos conceptos de la asignatura para resolver una situación real como así también el trabajo en equipo y la posibilidad de participación activa en su propio aprendizaje.

Palabras Clave: Actividades interdisciplinarias, Trabajo en grupos, Aprendizaje significativo

1 Introducción

Los estudiantes de ingeniería necesitan alcanzar la competencia de resolver problemas de la profesión, los cuales son en su mayoría interdisciplinarios, por esta razón es necesario desde las materias básicas plantear situaciones problemáticas que permitan a los estudiantes desarrollar estrategias similares a las que deberán desplegar en su futuro desempeño profesional. En este sentido, el diseño curricular de las carreras de ingeniería en la UTN, si bien continúa con el esquema Ciencias Básicas y Aplicadas, plantea la posibilidad de una nueva relación entre la teoría y la práctica, de modo tal que esta última no se reduzca a la simple aplicación de la teoría, sino que represente una fuente de conocimiento teórico; de esta forma la teoría está relacionada con la resolución de los problemas que se presentan en la práctica. Por cuanto consideramos que esta característica de los diseños curriculares constituye una innovación muy importante a la hora de plantear propuestas en la enseñanza de la ingeniería y nos permite trabajar centrados en la problematización; consideramos importante incluir el trabajo con actividades interdisciplinarias en las asignaturas del área de matemática correspondiente al primer nivel de la carrera de ingeniería.

Por otra parte, como señala el CONFEDI en su Propuesta de estándares de segunda generación para la acreditación de carreras de ingeniería en la República Argentina [1]: "Los graduados de carreras de ingeniería deben tener una adecuada formación general que les permita adquirir los nuevos conocimientos y herramientas derivadas del avance de la ciencia y tecnología". En este sentido, y en las consideraciones generales del mencionado texto, se señala como uno de los objetivos principales: "consolidar un modelo de aprendizaje centrado en el estudiante".

Por tanto, este nuevo paradigma pedagógico exige a los docentes una cuidadosa selección de las actividades que resulten propicias para que los estudiantes se involucren de manera activa en su aprendizaje en este nuevo escenario colaborativo y dinámico.

En este contexto y en el marco del PID "Empleo de problemas interdisciplinarios en asignaturas de matemática en carreras de ingeniería", se han diseñado e implementado diversas actividades interdisciplinarias conectando el área de matemática con diversas asignaturas correspondientes a los primeros niveles de la carrera. Aquí se desarrolla una actividad presentada a alumnos cursantes de la asignatura Análisis Matemático I correspondiente a distintas carreras de ingeniería, de la UTN-FRBA. La actividad consistió en presentar a los estudiantes una actividad de economía para resolver en forma grupal y con una entrega posterior de un trabajo escrito. El objetivo de la experiencia es transferir los conceptos matemáticos adquiridos a situaciones propias de otras disciplinas y propiciar en los estudiantes la adquisición de competencias necesarias en su futura vida profesional.

2 Fundamentación

Poniendo el foco del proceso de enseñanza y de aprendizaje en los estudiantes, quienes además serán futuros ingenieros y necesitarán desarrollar ciertas capacidades para poder ingresar a un mercado laboral cada día más competitivo, nos parece interesante presentarles a los mismos situaciones problemáticas que vinculan los conceptos matemáticos de la materia con otras disciplinas. El trabajo en el aula con problemas de aplicación a otras ciencias propicia un ambiente de intercambio que facilita el trabajo en equipo, fomenta el espíritu crítico, forma en la modelización de situaciones reales y permite establecer relaciones entre los conceptos aprendidos.

La utilización de problemas de aplicación no sólo permite afianzar el conocimiento matemático adquirido sino también establecer conexiones con otras ciencias y adquirir ciertas competencias que serán fundamentales para formar un futuro ingeniero con pensamiento crítico, con capacidad de análisis, con capacidad de trabajo en equipo, con flexibilidad al cambio, con capacidad de conjeturar, con capacidad de relacionar conceptos, etc.

Como sostiene Coll y otros, [2]: “el planteo de actividades relativas a un contexto más realista favorece la posibilidad de transferir lo aprendido a nuevas tareas y otros contextos”.

Por otra parte, considerando la postura de Ausubel [3] sobre el Aprendizaje Significativo, “todo nuevo aprendizaje para que sea significativo requiere conectarse a un concepto ya existente en la estructura cognitiva del individuo que aprende”. En este sentido, entendemos que el trabajo con actividades que relacionen la matemática con otras disciplinas, propicia en los alumnos la adquisición de conocimientos que son significativos, por cuanto, si bien en el proceso de resolución de la situación problemática utilizan conceptos ya estudiados en la asignatura, para resolver la tarea propuesta deben elaborar nuevas estrategias relacionando lo aprendido e integrando conceptos. También el trabajo con actividades interdisciplinarias, y su empleo en el proceso evaluativo, puede constituir una herramienta poderosa, ya que más allá de ser motivador para los estudiantes, les permite desplegar estrategias que resultarán beneficiosas tanto en el abordaje de los contenidos de las asignaturas de años superiores como en su futuro desempeño profesional.

3 Desarrollo

Unas semanas después de comenzadas las clases se les propuso a los alumnos realizar alguna actividad de aplicación de los conocimientos adquiridos en la materia Análisis Matemático 1. Los alumnos se mostraron muy interesados aunque proponían diferentes áreas de aplicación. Por ello, se realizó una encuesta inicial, previa a la experiencia áulica propiamente dicha para poder definir con mayor claridad los intereses de la mayoría de los alumnos.

Presentamos a continuación dicha encuesta:

1. ¿En qué grado está interesado en participar en actividades interdisciplinarias organizadas por la cátedra?

    Muy interesado

    Medianamente interesado

    Poco interesado

2. ¿Con qué disciplina le gustaría conectar el inglés técnico? (elija sólo una)

    Economía   Física   Química

    Medicina   Otra (indique cuál)

3. En su opinión ¿cuál es el beneficio de trabajar con actividades que relacionen la asignatura con distintos campos del conocimiento?

Fig. 1. Encuesta realizada a los cursantes respecto de sus intereses

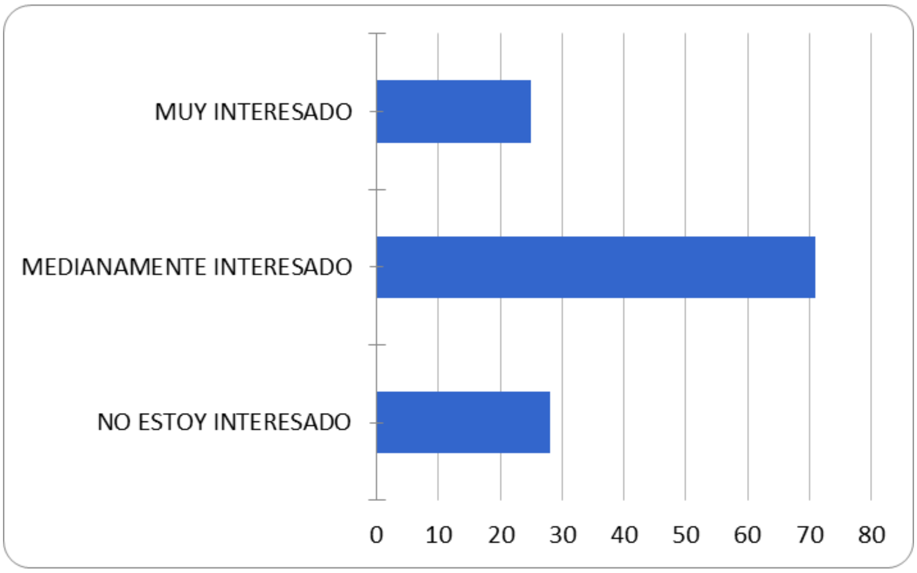


Fig. 2. Respuestas a la encuesta realizada a los cursantes respecto del grado de interés

La encuesta inicial arrojó como área de aplicación favorita Física, seguida por Economía. Se optó por la segunda opción luego de considerar por un lado, la gran cantidad de aplicaciones físicas que se muestran en la guía de trabajos prácticos y por otro, los comentarios de los alumnos pues explicitaban que, como la materia Legislación y Economía se encuentra más avanzada en la carrera, ya en ese momento, piensan que les resultan irrelevantes dichas conexiones. Por lo expuesto anteriormente se optó por presentarles un problema de aplicación económica.

Luego analizamos las distintas unidades de la materia y optamos por una aplicación económica de los temas de la unidad correspondiente al concepto de derivadas, pues nos pareció una experiencia motivadora previo a la realización del primer parcial de la materia.

A continuación se muestra la aplicación económica presentada a los estudiantes:

Enunciado:

Siendo $I(x)=900x-2x^2$ la función Ingreso Total y $C(x)= x^3-52x^2+1200x+200$ la función Costo Total de una empresa, donde I y C están expresadas en $ y x en toneladas de cierto producto. Se pide:

a. Halle la función Beneficio. ($B(x)= I(x) - C(x)$)

b. Compruebe matemáticamente la condición económica que maximiza el Beneficio de la empresa. ($I'(x)=C'(x)$)

c. ¿Es suficiente lo analizado en el punto anterior para asegurar el Beneficio máximo de la empresa? Justifique su respuesta.

d. Halle el nivel de producción que maximice el Beneficio. ¿cuál es dicho Beneficio? Compruebe los resultados obtenidos analizando la gráfica de la función. Utilice algún software matemático conocido para realizar dicha gráfica.

e. ¿Hay algún otro procedimiento que me permita llegar a similares conclusiones? ¿qué se observa si comparamos gráficamente las funciones Costo Marginal ($C'(x)$) e Ingreso Marginal ($I'(x)$)? Utilice algún software matemático conocido para realizar dicha gráfica.

Resolución:

La función Beneficio se define por la diferencia entre los ingresos obtenidos por ventas y los costos de producción incurridos para producir los productos de la empresa. La variable independiente está representa por la cantidad de producto producido y se mide, por ejemplo, en toneladas.

La condición de económica que asegura el beneficio máximo de una empresa se llama condición de equilibrio y establece que el ingreso marginal es equivalente al costo marginal de la misma, en términos matemáticos:

$$I'(x) = C'(x) \qquad \textbf{(1)}$$

Además es importante destacar, que por tratarse de variables productivas, las mismas se definen positivas y las funciones de producción que se establecen, tendrán que cumplir además ciertas restricciones económicas que aseguren Beneficio positivo, por lo que interesará sólo el análisis de las funciones en el primer cuadrante.

Para la situación de la función costo definida en nuestro problema de aplicación, se observa que cualquier función de costo cúbica debe cumplir las siguientes restricciones: a,c,d > 0 , b < 0 y $b^2 < 3ac$ (puede investigar esto individualmente si lo desea).

a.

La función beneficio está definida como:

$$B(x) = I(x) - C(x) \qquad \textbf{(2)}$$

Por lo que, para nuestra empresa, la función Beneficio Total queda definida por:

$$B(x)=- x^3+50x^2-300x-200 \qquad \textbf{(3)}$$

b.

La condición económica que maximiza el Beneficio de una empresa establece que el Costo Marginal de su función de producción debe ser igual al Ingreso Marginal de dicha empresa.

Desde el punto de vista matemático si consideramos nuestra función Beneficio como la función a optimizar, esta será nuestra función objetivo y nos interesará buscar los extremos relativos de dicha función. Para ello necesitamos cumplir con la condición necesaria para la existencia de extremos relativos, es decir:

$$B'(x)=0 \text{ en } x=a \qquad \textbf{(4)}$$

o bien **(3)** continua x=a y no derivable en x=a lo cual no es posible en nuestro caso, por ser **(3)** una función polinómica, derivable en R.

Derivando **(2)** se tiene:

$$B'(x)=I'(x)-C'(x) \qquad \textbf{(5)}$$

De **(4)** y **(5)** se tiene:

$$I'(x)=C'(x) \qquad \textbf{(6)}$$

Es decir:

$$900-4x=3x^2-104x+1200 \qquad \textbf{(7)}$$

c.

No, no es suficiente, pues la condición anterior asegura la existencia de puntos críticos en **(3)** pero no significa que los puntos hallados sean máximos o mínimos relativos, para ello se debe verificar la condición suficiente para la existencia de extremos relativos. En nuestro caso utilizaremos el criterio de la derivada segunda que resulta sencillo de verificar en un polinomio.

d.

Si nuestra función Beneficio queda definida por **(3)**, su derivada primera es:

$$B'(x)=-3 x^2+100x-300 \qquad \textbf{(8)}$$

Si la condición necesaria establece **(4)** entonces buscamos las raíces en **(8)** y resultan:

$$x_1=3{,}33 \qquad x_2=30 \qquad \textbf{(9)}$$

Analizamos la condición suficiente, para ello hallamos previamente calculamos:

$$B''(x)=-6x+100 \qquad \textbf{(10)}$$

para los valores hallados se tiene entonces:

$$B''(x_1)=80 \text{ y } B''(x_2)=-80 \qquad \textbf{(11)}$$

Si observamos la gráfica de la función se ven claramente los puntos hallados.

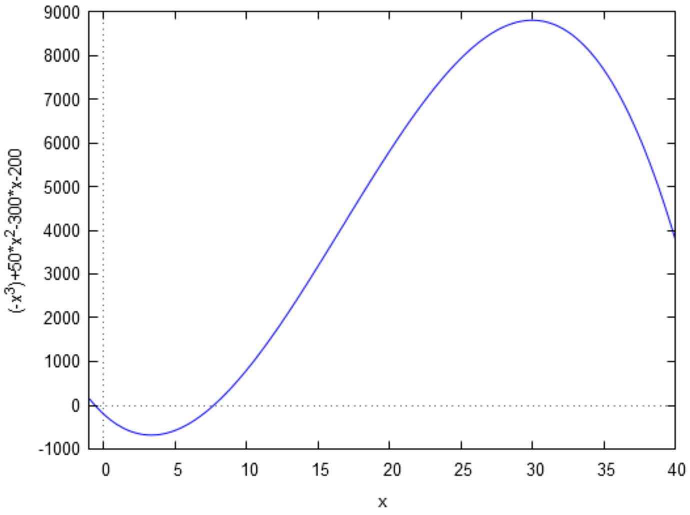


Fig. 3. Gráfica de la función Beneficio.

Por lo anterior se concluye que el nivel de producción que maximiza el Beneficio es de 30 toneladas.
Calculamos ahora el Beneficio Máximo de la empresa:

$$B(30)=-\ 30^3+50.30^2-300.30-200 \qquad \textbf{(12)}$$

El Beneficio Máximo de la empresa es de: $ 8.800.

e.

Podríamos haber utilizado la igualdad económica que maximiza el Beneficio es decir **(6)**.
Estaríamos entonces buscando la intersección entre dichas curvas, gráficamente:

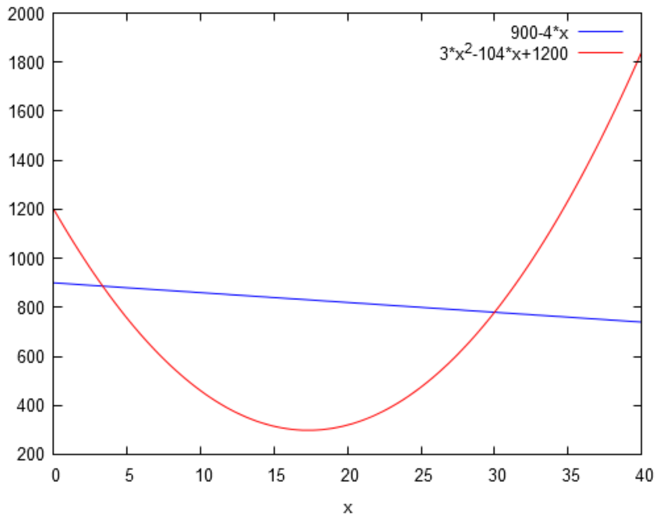


Fig. 4. Gráfica de las funciones Ingreso Marginal (azul) y Costo Marginal (rojo).

Nótese que de manera analítica estaríamos resolviendo la misma ecuación que nos permitió hallar los puntos críticos anteriormente.

Es claro que no deja de ser un razonamiento incompleto desde el punto de vista matemático pues no verifica los resultados obtenidos utilizando la condición suficiente para la existencia de extremos locales.

La actividad propuesta se realizó fuera del horario de clase, en grupos de un máximo de cuatro personas (elegidos por los alumnos libremente), con un plazo máximo de entrega de 20 días, con la posibilidad de enviar preguntas al docente a través del aula virtual del curso. La entrega del trabajo tuvo dos modalidades: en formato escrito físico (papel) o en formato escrito digital (a través de un envío por el aula virtual). La propuesta fue opcional, los alumnos podían optar por no participar de la tarea, aún así el 80% del curso participó de la propuesta y se mostraron entusiasmados en hacerlo.

El ejercicio de aplicación se presentó en la clase presencial a todo el curso, se explicaron además, conceptos económicos básicos necesarios para su resolución. Se observó mucho interés por parte de los alumnos en dicha clase, preguntando el significado y aplicación directa de los conceptos de Costo Marginal, Beneficio Marginal, etc.

Al momento de la entrega se realizó una devolución inmediata por parte de los docentes y luego se envió la corrección final con los comentarios vía campus virtual o vía email.

Luego de las correcciones individuales a los grupos se hizo un comentario general de la experiencia, en la clase presencial donde los participantes pudieron intercambiar experiencias con los demás alumnos y con los docentes. Para finalizar, los estudiantes respondieron en forma anónima encuestas de cierre de la actividad en las que se evidenció interés por seguir reforzando e incluyendo este tipo de experiencias áulicas.

4 Resultados y Conclusiones

Luego de finalizada la defensa del trabajo presentado por cada grupo, se realizó una encuesta individual a los alumnos con el objeto de completar la evaluación de la experiencia y de los resultados obtenidos, como muestra la figura 5.

Cuestionario de Estrategias de Aprendizaje y Motivación Análisis Matemático I y Economía			
Ítems	En desacuerdo	Indeciso	De acuerdo
1- En las actividades desarrolladas en clase deseo que se presenten situaciones problemáticas que despierten mi curiosidad a pesar del grado de dificultad de las mismas.			
2- Es interesante para mi poder establecer relaciones entre las asignaturas.			
3- Identifico correctamente los modelos matemáticos que debo aplicar en temas que son propias del área de mi especialidad.			
4- Relaciono los conceptos desarrollados en las clases con otros adquiridos previamente.			
5- Vinculo las palabras claves comunes de los temas que se relacionan con las distintas asignaturas.			
6- Los conceptos aprendidos sobre las funciones, derivada, máximos y mínimos los aplico en otras áreas de estudio.			
7- En las clases de AM I me resulta difícil entender las relaciones que existen entre los temas propias de la asignatura.			
8- Cuando estudio hago hincapié en los vínculos existentes entre los temas.			
9- En las clases de AM I aplico los conceptos de otras asignaturas.			
10- Trabajo con más dedicación en clase cuando le encuentro sentido al modelo teórico que estudiamos en AM I.			

Fig. 5. Encuesta realizada a los alumnos respecto de la tarea realizada

Se detalla a continuación, en el gráfico de la figura 6, los resultados obtenidos en la encuesta individual, con respecto a la participación de cada estudiante dentro de su equipo de trabajo.

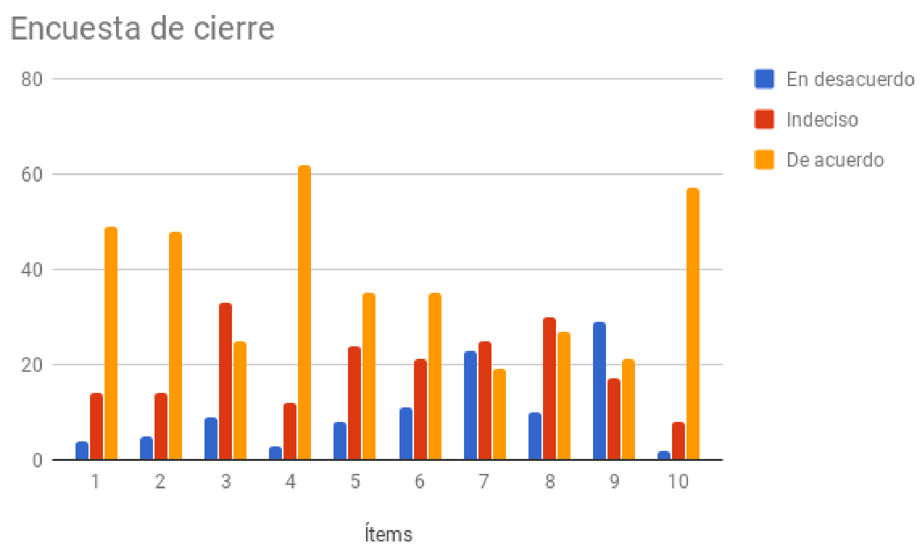


Fig. 6. Resultados de la encuesta respecto de la actividad realizada

La encuesta pretendió también propiciar un espacio de reflexión para el alumno, que permitiese aportar datos respecto de su valoración de este tipo de actividades y detectar algunas dificultades que se les hubiesen presentado en su abordaje.

Consideramos muy importante esta etapa de reflexión ya que propicia que el estudiante relacione "el hacer" con el conocimiento, y de esta manera pueda fundamentar su propia acción. En efecto, el ejercicio de una mirada hacia atrás del alumno en cada actividad, le permite ser consciente de su proceso de aprendizaje y de esta manera propicia el desarrollo de estrategias cognitivas relacionadas con la autogestión de sus aprendizajes.

Los resultados de la encuesta que se reflejan en la Fig.6, muestran altos porcentajes, entre el 73% y 85%, de aprobación por parte de los alumnos de contar, en sus clases teóricas y prácticas, con actividades con situaciones problemáticas reales y concreta ya que despiertan la curiosidad sobre lo que plantean, y permiten aplicar y relacionar conceptos desarrollados en dichas clases. Cuando encuentran sentido al modelo teórico estudiado y pueden plasmarlo en la resolución de problemas, el trabajo en las clases les resulta ameno e interesante. Por las respuestas dadas, podemos decir que es importante para los alumnos relacionar e integrar conceptos adquiridos previamente con los nuevos que van apareciendo a medida que se van desarrollando los temas de la asignatura Análisis Matemático I. Hay que tener presente que el 43%, (cerca de la mitad de los alumnos encuestados), no aplica en las clases de la mencionada asignatura conceptos de otras asignaturas; esto puede ser porque al estar cursando primer año de la carrera de Ingeniería todavía no logran integrar conceptos.

Los docentes también debemos considerar que el 49% de los alumnos no identifica correctamente los modelos matemáticos que debe aplicar en temas propios de las distintas especialidades de la carrera.

Las respuestas obtenidas en el Cuestionario de Estrategias de Aprendizajes y Motivación son una herramienta de información importante para planificar y desarrollar los temas de la mencionada asignatura, de forma tal que los alumnos puedan sentir interés por lo que estudian y logren aplicar e integrar los conceptos que van aprendiendo.

Además, de la encuesta a los alumnos es importante mencionar la valoración del docente respecto de la actividad y su desarrollo. Un aspecto relevante de la actividad ha sido la motivación de los alumnos. Se observó un gran interés no sólo durante la actividad sino posterior a la misma. Los alumnos se mostraron más participativos y con más inquietudes en las clases posteriores y mantuvieron dicha actitud hasta el final de la cursada de la materia. Las clases se volvieron más dinámicas y los alumnos se animaron a cuestionarse conceptos, intercambiar puntos de vista y plantear varios caminos de solución a los ejercicios de la guía de trabajos prácticos, planteados luego de la actividad, durante el desarrollo de las unidades siguientes.

Consideramos que el planteo de este tipo de actividades, además de resultar motivadoras para los estudiantes propicia la comprensión de procesos matemáticos y no la simple ejercitación de rutinas. Además, favorece el trabajo en equipo, la distribución de responsabilidades, roles y tareas entre sus miembros y la valoración de la actividad interdisciplinaria.

En ese sentido, Paula Carlino [4], señala que: "en la mayoría de las clases los docentes planifican sus exposiciones", sin embargo, destaca la autora, "resultaría más conveniente que el docente también elabore e implemente actividades para que los estudiantes las aborden con los diferentes temas de la asignatura". Considera también que: "lo que está en juego en este reparto de roles es quién, con qué fines y de qué modo hablará, escuchará o leerá y, por tanto, quién extenderá su comprensión y conocimiento de los temas de la asignatura".

Cabe señalar que, si bien la actividad en sí ha resultado exitosa también nos ha permitido detectar algunos aspectos para mejorar en el proceso de enseñanza y de aprendizaje al observar la dificultad que manifiestan muchos estudiantes, tanto para aplicar lo aprendido a otras situaciones fuera de la asignatura, como para identificar los modelos matemáticos adecuados para modelizar situaciones concretas. En este sentido, se evidencia la necesidad de incorporar de forma sistemática este tipo de actividades, teniendo en cuenta que estamos formando ingenieros que necesitarán modelizar la realidad para poder dar soluciones reales a los problemas que se les presenten en su futuro ejercicio profesional.

Por otro lado, a partir de los resultados obtenidos de esta experiencia, estamos evaluando la posibilidad de realizar actividades que atraviesen los conceptos centrales de la asignatura para ser resueltas durante toda la cursada.

Asimismo, consideramos que el diseño y la implementación de este tipo de actividades propicia el desarrollo de competencias tecnológicas, ya que para abordar estas problemáticas los estudiantes deben identificar y resolver problemas interdisciplinarios que son propios de la ingeniería, y también de competencias sociales al trabajar eficazmente organizados en grupos.

Finalmente, cabe destacar que, para propiciar una enseñanza centrada en los estudiantes es importante plantear en nuestras clases, actividades que permitan transferir los aprendizajes que en general se han presentado descontextualizados, a situaciones cercanas a la realidad.

5 Referencias

1. CONFEDI, Libro Rojo, Aprobado por Asamblea de CONFEDI en Rosario el 1 de junio de 2018. Disponible en: https://confediorg.ar/librorojo.pp1(2018)
2. Pano y otros.: Apuntes sobre innovación en educación universitaria. Buenos Aires: Ediciones Rosel, pp. 62,63 (2011)
3. Ausubel, David.: Adquisición y retención del conocimiento. Paidós, Barcelona, Buenos Aires (2002).
4. Carlino, P.: Escribir, leer y aprender en la universidad. Buenos Aires: Fondo de Cultura Económico. pp11 (2005).

Propuesta Didáctica para el Aprendizaje de Ecuaciones Diferenciales Lineales Ordinarias, con ayuda de GeoGebra

Susana B. Ruiz[1], María Inés Ciancio[2], Vanesa Gallardo[2]
[1] Departamento de Geofísica y Astronomía, Facultad de Ciencias Exactas, Fisicas y Naturales, UNSJ
Av. Ignacio de la Roza 590 (O), Rivadavia, San Juan, CPA: J5402DCS
sbruizr@yahoo.com.ar,
[2] Departamento de Geología, Facultad de Ciencias Exactas, Fisicas y Naturales, UNSJ
Av. Ignacio de la Roza 590 (O), Rivadavia, San Juan, CPA: J5402DCS
miciancio@hotmail.com
vanesagallardol@gmail.com

Resumen. Se presenta una propuesta didáctica para alumnos que cursan la asignatura Análisis Matemático II en la FCEFyN de la UNSJ, a través de un material didáctico interactivo sobre Ecuaciones Diferenciales Lineales Ordinarias, con el objetivo de lograr aprendizajes significativos. El material se organiza en actividades de tal forma que los alumnos grupalmente y en forma colaborativa aborden la resolución de ecuaciones diferenciales simples, mediante distintos enfoques para una enseñanza eficaz, a través de simulaciones y con ayuda del software GeoGebra. En la resolución se aplican conocimientos matemáticos, físicos y computacionales en forma integrada. Mediante la prueba piloto se pudo valorar la propuesta en contribuir para la compresión de la temática en forma significativa, y más equitativa según distintos tipos de aprendizaje. Favoreció a la integración de contenidos, la comunicación, fortaleciendo capacidades para afrontar nuevos problemas y responder a nuevos interrogantes motivados con el uso de nuevas tecnologías interactivas.

Palabras Clave: Ecuaciones diferenciales ordinarias, Materiales didácticos interactivos, Integración de contenidos, Aprendizaje significativo, Enseñanza eficaz, GeoGebra.

1 Introducción

Tanto en la Facultad de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, como en la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional de San Juan (UNSJ), la unidad temática Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (EDO) forma parte de los contenidos de la asignatura Análisis Matemático II, que comprende, además, el estudio de todos los temas tradicionales del cálculo diferencial e integral multivariado. En particular, el estudio de las EDO es de fundamental importancia para la formación de los alumnos, en las carreras que se imparten, ya que está fuertemente ligado a problemas de interés profesional.

El lenguaje del Análisis Matemático para funciones de una o varias variables es adaptable a muchos contextos, por la generalidad de sus objetos de estudio, por ello forma parte en el planteo de modelos y la determinación de soluciones de situaciones de la misma Matemática y otros campos científicos como son el de la Física, Ingeniería, Geofísica, Astronomía, Geología, etc., donde juega un papel relevante la teoría de EDO. Es por ello que es de mucha importancia que los docentes universitarios responsables de cátedra, en su rol de facilitadores del aprendizaje en dicha temática y para la mejora de la calidad educativa, brinden propuestas didácticas que contribuyan al logro de aprendizajes significativos. Estas propuestas se deben adecuar al espacio, tiempo y recursos didácticos que se disponen, como también a los conocimientos previos, intereses y perfil profesional de los alumnos a formar.

El aprendizaje significativo es el proceso según el cual se relaciona un nuevo conocimiento o una nueva información con la estructura cognitiva de la persona que aprende de forma no arbitraria y sustantiva o no literal. Esa interacción con la estructura cognitiva no se produce considerándola como un todo, sino con aspectos relevantes presentes en la misma, que reciben el nombre de subsumidores o ideas de anclaje [1]. El aprendizaje significativo depende de las motivaciones, intereses y predisposición del aprendiz. No se trata de un proceso pasivo, ni mucho menos, sino que requiere una actitud activa y alerta que posibilite la integración de los significados a su estructura cognitiva. Ante una actitud pasiva o negativa de estudiantes en el aula, el docente, en su rol de educador, no debe estar ajeno a esta situación, debe brindar experiencias motivadoras que favorezcan la integración de contenidos, vinculando los conceptos matemáticos a problemas concretos de la vida cotidiana, ya que ello favorece en el cambio hacia una actitud positiva y al logro de aprendizajes significativos.

También resulta relevante tener en cuenta en la práctica educativa el modelo socio-constructivista, en el cual considera la interacción como base del aprendizaje y propicia el trabajo colaborativo, la interactividad y la socialización del conocimiento, entre otros aspectos. En este contexto el estudiante asume un rol protagónico y el docente es mediador pedagógico, colaborador y dinamizador del proceso de aprendizaje [2].

Investigaciones realizadas sobre una enseñanza eficaz han demostrado que la estrategia más eficaz es la utilización de actividades diversas adecuándose al momento, al contenido, al estudiante. Con ello se consigue una mayor motivación presentando nuevos estímulos hacia los estudiantes; cuando el docente utiliza diferentes actividades los contenidos se perciben como más interesantes y estimulantes provocando su natural curiosidad. Además permite que los estudiantes conecten lo aprendido con otros temas y situaciones cotidianas, constituyendo en sí mismas, ejemplos prácticos de significado y funcionalidad de aquello sobre lo que se esté trabajando. Otras investigaciones coinciden, para una enseñanza eficaz, en la importancia de la interacción entre profesores y estudiantes durante las sesiones de clase. Cuanto más tiempo dedican los maestros a hacer preguntas y a fomentar el debate y la discusión en pequeño y gran grupo, mayor efecto positivo se produce en el progreso de los estudiantes [3].

Respecto a la enseñanza de las EDO, en muchos trabajos de investigación orientados a la búsqueda de una enseñanza eficaz, diversos autores señalan como elementos comunes: el empleo de herramientas tecnológicas, el trabajo de a pares o en grupos de alumnos, la resolución de problemas realistas, la modelización y la utilización paralela de los enfoques gráfico, numérico y analítico [4], [5], [6].

Esta propuesta se enmarca en el siguiente contexto. Se presenta material didáctico interactivo elaborado por la cátedra "Análisis Matemático II" para alumnos del segundo año de las carreras de Lic. en Astronomía y Lic. en Geofísica de la FCEFN de la UNSJ, con el objetivo de lograr aprendizajes significativos en la temática de Ecuaciones Diferenciales Lineales (EDL) Ordinarias a coeficientes constantes. Las distintas actividades que se plantean están diseñadas para que se aborde la temática mediante análisis gráficos, analíticos y numéricos de modelos simples y aplicados a la Física. También mediante simulaciones con apoyo del software GeoGebra. En esta propuesta se elige trabajar con el software GeoGebra, ya que es un software libre y simple de utilizar. GeoGebra corresponde al conjunto de Sistemas Algebraicos de Cómputo (SAC) apropiado para la enseñanza del Análisis Matemático, con un creciente potencial de recursos de aplicación, tanto para alumnos como también para docentes, para favorecer los aprendizajes.

2 Modelo de propuesta didáctica

La propuesta didáctica se denomina "Trabajo Especial de Ecuaciones Diferenciales Lineales", cuyos destinatarios son alumnos universitarios con conocimientos previos de lo que representa una EDO, los tipos de solución y el método de variable separable. Las actividades están organizadas bajo la presentación de dos planteos generales. En el primer planteo se pretende que el alumno realice actividades con EDL ordinarias de primer orden realizando representaciones graficas, análisis, cálculos algebraicos y aproximados con ayuda de software. En el segundo planteo las actividades se centran en trabajar con EDL de segundo orden a coeficientes constantes, mediante la resolución de problemas físicos sobre sistemas masa-resorte donde se incluyen simulaciones. Las simulaciones se basan en cálculos aproximados y análisis gráficos. Se pretende que al finalizar el mencionado Trabajo, los alumnos puedan logran una integración de contenidos del Análisis Matemático 1(Análisis diferencial e integral), Geometría Analítica (graficas de rectas y pendientes de curvas planas), Algebra Lineal (funciones linealmente independientes) y Física Mecánica (velocidad, aceleración, Segunda Ley de Newton, Ley de Hooke, efecto de Resonancia) con el apoyo del software GeoGebra.

En el material de actividades elaborado se distinguen las siguientes partes:

- Presentación general introductoria del tema matemático a abordar, los objetivos del trabajo y la organización de actividades a través de diferentes planteos.
- En cada planteo, una breve introducción sobre la temática específica a tratar, de interés para ambas carreras.
- Desarrollo secuencial de actividades asociadas, y organizadas de lo simple a lo complejo, donde al alumno se lo guía a trabajar los contenidos en forma gráfica, numérica y analítica, con la ayuda del software GeoGebra.
- Espacio para el análisis, debate y reflexión, por parte del alumno, de las tareas desarrolladas y el material de trabajo empleado en la experiencia.

El desarrollo y evaluación del trabajo es en forma grupal. Se prevé, para la evaluación, la presentación del material desarrollado en forma escrita bajo la modalidad tipo informe final. El plazo para la presentación del informe grupal es de a lo sumo 10 días. Se tendrá en cuenta, en la valoración del trabajo además, el orden, prolijidad y completitud (como mínimo un 70%) de las actividades desarrolladas en forma correcta.

Modelo de Guía de Actividades

Trabajo Especial de Ecuaciones Diferenciales Lineales

Resumen: El objetivo de esta guía es abordar la resolución de Ecuaciones Diferenciales Lineales Ordinarias de orden 1 y 2, desde distintos enfoques (gráfico, algebraico, numérico y mediante simulaciones) para la mejor comprensión de la temática. Las actividades de este trabajo, están programadas a desarrollarse en forma grupal colaborativa, de a lo sumo 3 (tres) alumnos, en un plazo de a lo sumo 10 (diez días) a partir de la recepción del mismo.

Las tareas consignadas están organizadas secuencialmente, de lo simple a lo complejo, a partir de dos planteos diferentes. En ambos planteos se requerirá del empleo del software Geogebra, para apoyar los cálculos e interpretaciones gráficas, como también la consulta del Material Didáctico de la Cátedra y de Biblioteca. Cuentan además con el apoyo y guía de Docentes de la cátedra en horarios de consultas y de gabinete consignados.

En particular, en el Planteo 2, trabajarán con modelos físicos-matemáticos, basados en sistemas masa-resorte, de interés en sus carreras. Abordarán también el estudio mediante simulaciones utilizando recursos de GeoGebra, bajo un material didáctico que se proporcionará en el Gabinete de Computación. Esta aplicación les permitirá realizar análisis de resultados al modificar parámetros de operación del sistema de estudio [7]. El desarrollo completo del trabajo es a los fines de que, en un mismo ámbito, puedan realizar tareas simples e integradoras, sobre conceptos matemáticos, físicos y computacionales, que sean de importancia para la formación en sus carreras.

Planteo 1

Una EDO de la forma $y' + P(x)y = Q(x)$, con $P(x)$ y $Q(x)$ continuas e integrables en un dominio común se dirá una Ecuación Diferencial Lineal Ordinaria de primer orden (EDLO de primer orden).

En este caso *y= y(x)* es una función incógnita (función solución) que se desea determinar, donde *x* es la variable independiente real. Asumiendo que la función *y = y(x)* es derivable, la derivada $y'(x_0)$ en cada punto $(x_0, y(x_0))$ representa la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función en ese punto.

En nuestro caso: $y'(x) = Q(x) - P(x)\,y(x)$ *Forma Normal de la EDLO de primer orden*.

Teniendo en cuenta esto, y para el caso: $y' = \frac{y}{x}$ (es decir para: $P(x) = -\frac{1}{x}$ y $Q(x) = 0$, siendo $x \neq 0$) resolver las siguientes actividades.

Actividad 1:

a) Sabiendo que la derivada $y'(x_0)$ representa en cada punto $(x_0\,, y(x_0))$ la pendiente de la recta tangente a la gráfica, representar gráficamente, en el plano xy, con pequeños segmentos trazados en cada uno de los siguientes puntos, una porción de la recta tangente a la gráfica que pasa por ese punto, en los casos:

(1,1), (1,-1) , (-1,1), (-1,-1), (2,2), (2,-2) , (2,0), (-2,1) y *(-1,2)*.

b) Empleando el programa GeoGebra y la instrucción

CampoDirecciones(<f(x, y)>)

donde f (x, y) es el segundo miembro de la Forma Normal de una EDO de primer orden, esto es, en nuestro caso $\frac{y}{x}$, repetir el trazado del punto anterior, pero esta vez para una gran número de puntos del plano equidistribuidos (más detalles se pueden ver en https://wiki.geogebra.org/es/Comando_CampoDirecciones).

Actividad 2:

a) Imprimir el Campo de direcciones obtenidos en la Actividad 3 e intentar esbozar cómo sería la curva solución que pasa por el punto (1,1). Tener en cuenta que por cada punto por donde pase la curva ésta debe ser tangente al pequeño segmento que está trazado en ese punto.

b) Comparar el trazado anterior con el que provee GeoGebra con la instrucción

ResuelveEDO(<Ecuación>, <Punto(s) de f>)

en la entrada CAS, donde en <Ecuación> se escribe $y' = \frac{y}{x}$ y en <Punto(s) de f > se escribe (1,1). Para más detalles pueden ver https://es.scribd.com/document/360322096/Comando-ResuelveEDO-GeoGebra-Manual).

Actividad 3: La instrucción "ResuelveEDO(<Ecuación>, <Punto(s) de f>)" intenta buscar analíticamente la solución exacta de la ecuación. Consulte en el material de "Apuntes de Cátedra" como se resuelve la EDLO de primer orden, y aplique dicho proceso algebraico en este caso. Comparar la solución obtenida, con la función que parece en la Vista Algebraica del GeoGebra .¿Cuál es la curva-solución que pasa por (1,1)?

Actividad 4: La instrucción "ResuelveEDO(<f(x, y)>, <x inicial>, <y inicial>, <x final>, <Paso>)" realiza una resolución numérica aproximada, estimando puntos de la curva-solución del siguiente modo: la ecuación $y' = \frac{y}{x}$ se reemplaza por su expresión aproximada $\frac{y(x_n)-y(x_{n-1})}{x_n-x_{n-1}} = \frac{y(x_{n-1})}{x_{n-1}}$ que se utiliza para estimar una sucesión de puntos $(x_n, y(x_n))$ a partir del punto $(x_{inicial}\ ,\ y_{inicial}) = (x_0,\ y_0)$, y del valor x_{final} de interés en el estudio, siendo $h = x_n - x_{n-1}$ el Paso que se elija. Utilizar dicho comando para la ecuación diferencial considerada, $(x_{inicial}\ ,\ y_{inicial}) = (x_0,\ y_0) = (1,1)$, $x_{final} = 3$, y pasos *h=1, 0.5* y *0.1*. Luego realizar el mismo cálculo a mano para *h=1*.

Planteo 2

El tema que ahora abordaremos es el movimiento de sistemas Masa-Resorte, visto en profundidad en Física Mecánica. Se analizaran los casos de sistemas de masa-resorte con oscilaciones libres (en ausencia de fuerzas externas), y con oscilaciones forzadas (con presencia de fuerzas externas). Los movimientos que se describen, en el último caso, representan ondas que son el resultado de un medio perturbado. El más sencillo de los movimientos es el que realizan los cuerpos elásticos. Una clase muy especial de movimiento ocurre cuando la fuerza sobre un cuerpo es proporcional al desplazamiento del cuerpo desde alguna posición de equilibrio. Estos movimientos denominados armónicos, relacionados a sistemas masa resorte, son de mucha aplicación en problemas de Ingeniería Civil en análisis sísmicos, en Astronomía en estudios de ondas electromagnéticas para medir indirectamente la rapidez de acercamiento o alejamiento de objetos celestes en el espacio respecto a la Tierra [8], etc

Modelo de Oscilaciones Libre: Se toma un resorte ordinario, que resista tanto la compresión como la extensión, y se suspende verticalmente de un soporte fijo. En el extremo inferior del resorte se sujeta un cuerpo de masa *m* como se muestra en la Fig. 1. Se supone que *m* es tan grande que puede despreciarse la masa del resorte. Si el cuerpo se tira hacia abajo cierta distancia y luego se suelta, experimenta un movimiento. Se supone que el cuerpo se mueve únicamente en sentido vertical.

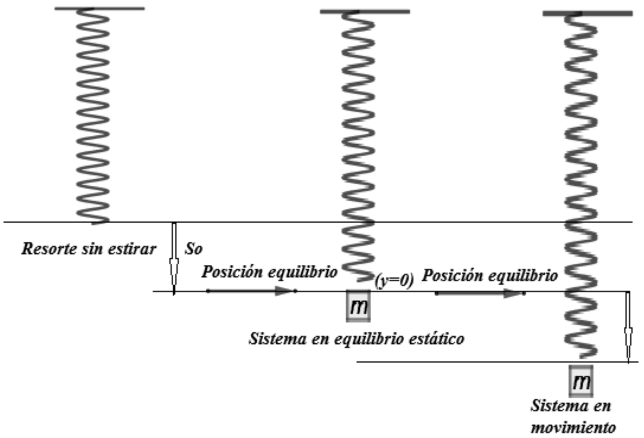


Fig. 1. Representación gráfica de un sistema masa-resorte libre de resistencia y de fuerzas externas

Se desea determinar el movimiento de este sistema mecánico. Para ello se consideran las fuerzas que actúan sobre el cuerpo durante el movimiento. Esto llevará a una ecuación diferencial, de cuya solución y(t) se obtendrá el desplazamiento de la masa en función del tiempo t.

Se elige la dirección hacia abajo como la positiva y, en consecuencia, las fuerzas dirigidas hacia abajo se consideran positivas, y negativas las fuerzas en la dirección contraria.

La fuerza más evidente que actúa sobre el cuerpo es la atracción de la gravedad $F_1 = mg$, donde *m* es la masa del cuerpo y g (=980cm/seg^2) es la aceleración de la gravedad.

Se considera ahora la fuerza del resorte F_2 que actúa sobre el cuerpo. Experimentos indican que dentro de límites razonables, esta magnitud es proporcional al cambio de la longitud del resorte. Su dirección es hacia arriba si el resorte está estirado y hacia abajo si está comprimido. Por tanto, $F_2 = -ks$, donde *s* es el desplazamiento vertical del cuerpo (recuérdese que el extremo superior del resorte es fijo), a la constante k se le llama modulo del resorte y el signo menos hace que F_2 sea negativa (hacia arriba) para un valor positivo de y (estiramiento del resorte) y positiva (hacia abajo) para y negativa (compresión del resorte).

Si $s = 1$, entonces $F_2 = -k$. Entre más rígido sea el resorte, mayor será el valor de k.

Cuando el cuerpo está en reposo (sin movimiento), la fuerza gravitacional y la fuerza del resorte están en equilibrio, siendo su resultante la fuerza cero, $F_1 + F_2 = mg - ks_0 = 0$, siendo s_0 el estiramiento del resorte que corresponde a esta posición, la cual recibe el nombre de posición de equilibrio estático.

Se denota por $y = y(t)$ al desplazamiento del cuerpo a partir de la posición de equilibrio estático ($y = 0$), con la dirección positiva hacia abajo.

Este desplazamiento produce una fuerza adicional $-ky$ sobre el cuerpo, por la ley de Hooke. Por tanto, la resultante de las fuerzas que actúan sobre el cuerpo en la posición $y(t)$ es

$$F_1 + F_2 - ky = -ky \qquad \textbf{(1)}$$

Sistema no amortiguado (ecuación y solución): Si el amortiguamiento del sistema es tan pequeño que puede despreciarse, entonces (1) es la resultante de todas las fuerzas que actúan sobre el cuerpo. La ecuación diferencial se obtendrá entonces mediante la aplicación de la segunda Ley de Newton

Masa x Aceleración=Fuerza

donde fuerza significa la resultante de las fuerzas que actúan sobre el cuerpo en cualquier instante. En el caso presente, la aceleración es $y^{//} = \frac{d^2y}{dt^2}$ y la resultante la da (1). Así, $my^{//} = -ky$ [9].

Por tanto, el movimiento de este sistema está gobernado por la ecuación diferencial lineal con coeficientes constantes

$$my^{//} + ky = 0 \qquad \textbf{(2)}$$

Actividad 1: Mostrar que la solución general de (2) es y(t)=$C_1 \cos(bt) + C_2 sen(bt)$, aplicando el método para resolver una Ecuación Diferencial Lineal Homogénea a coeficientes constantes, siendo $b = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

Actividad 2: Plantear y resolver la ecuación diferencial correspondiente al sistema de resorte no amortiguado, para el caso k=40N/metros, *m*=10kg, tiempo inicial =0seg., posición inicial de la masa y=0 metros y velocidad inicial de la masa=5metros/seg (bajo las condiciones iniciales $y(0) = 0$ e $y^{/}(0) = 5.$).

Actividad 3: Resolver la ecuación diferencial de la actividad anterior utilizando el comando ResuelveEDO en la vista CAS de GeoGebra y mediante representaciones graficas que caracteriza el movimiento del sistema.

Actividad 4: La siguiente imagen muestra un simulador de sistema masa resorte como el definido en este trabajo (ver Fig. 2). El simulador se ha construido utilizando recursos de GeoGebra, para analizar el comportamiento del sistema al variar distintos parámetros dentro de un cierto rango de valores que incluye los planteados en la Actividad 2. Utilizar el simulador propuesto, para analizar el comportamiento del sistema al ir variando los parámetros que caracterizan el resorte (*k*), la masa del objeto (*m*) y las posiciones iniciales de los objetos del sistema (tiempo inicial, posición inicial del objeto y velocidad inicial). Expresar sus conclusiones.

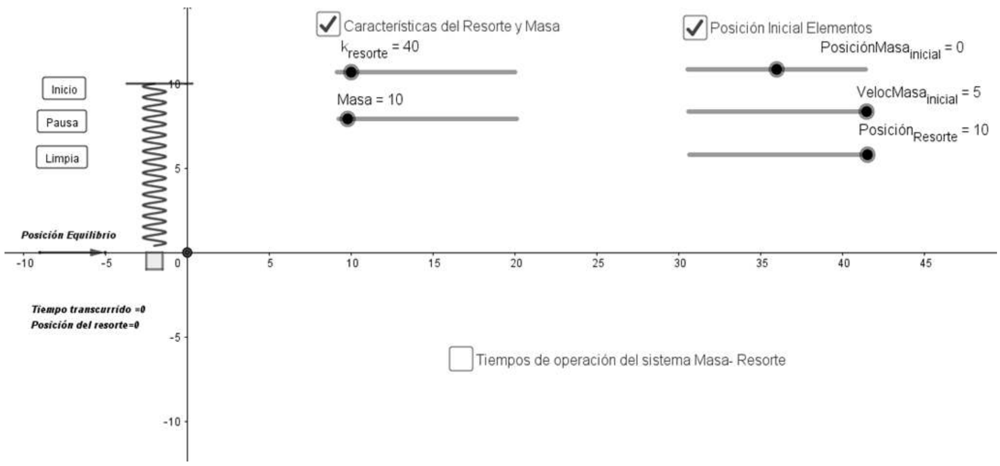


Fig. 2. Imagen del simulador masa- resorte, construido empleando recursos del GeoGebra.

Actividad 5: Movimiento forzado.

"Los movimientos forzados se obtienen si se hace que una fuerza externa F(t) actúe sobre el objeto. En cuyo caso se resuelve la ecuación diferencial

$$my^{//} + ky = F(t) \qquad \textbf{(3)}$$

donde F(t) se denomina fuerza de excitación."

Plantee y resuelva la ecuación diferencial (3) para sistemas masa resorte sin amortiguamiento y con presencia de fuerzas de excitación, aplicando el método de los coeficientes indeterminados, en el caso de las condiciones definidas en la Actividad 3, considerando la presencia de fuerzas externas F(t) al sistema, en cada uno de los siguientes casos: i) F(t)=t , ii) F(t)=cos(bt) con b=$\sqrt{\frac{k}{m}}$ y c) F(t)=t+cos(bt) .

En cada caso, comparar resultados y extraer conclusiones.

Actividad 6: Idem a la actividad anterior, para

a) F(t)=at con a=1, 10 y 20.

b) F(t)=cos(ht) con h= 1.5, 1.8, 1.9 , 1.99 y 2 (observe que $b = \sqrt{\frac{k}{m}}$=2).

c) F(t)=t+cos(bt) para $b = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

Hallar las soluciones mediante el empleo del comando ResuelveEDO de GeoGebra.

Comparar las expresiones analíticas y gráficas en cada caso, con la obtenida en el caso homogéneo (sin presencia de fuerzas de excitación). Discutir en grupos los resultados y expresar conclusiones.

Actividad 7: Espacio para expresar sus vivencias, aspectos positivos y negativos, respecto a las actividades realizadas en el trabajo especial desarrollado.

3 Aplicación y resultados de la propuesta

Respecto a la puesta en práctica del Trabajo Especial propuesto, sólo se ha realizado una prueba piloto con alumnos avanzados en las carreras de Geofísica y Astronomía en la asignatura Análisis Matemático II, para el Planteo 2, donde se observó que las tres primeras actividades no presentan grandes dificultades en su resolución, desde el enfoque algebraico. Pudieron determinar las raíces de la ecuación característica asociada a la EDLH, para luego, plantear la solución general de la ecuación diferencial $10\, y^{//} + 40y = 0$ y luego resolverla teniendo en cuenta las condiciones iniciales planteadas. Obtuvieron la ecuación del movimiento y(t) = $\frac{5}{2} sen(2t)$ del sistema masa resorte. Posteriormente lograron caracterizar el movimiento, mediante la visualización de la gráfica con GeoGebra (ver Fig. 3), como periódico oscilatorio con período $T = \frac{2\pi}{2} = \pi$ y amplitud $A = \frac{5}{2}$, que se conserva a través del tiempo.

En los horarios de consulta, los docentes guiaron y apoyaron a los alumnos mediante material bibliográfico, realizando preguntas convenientes dirigidas para que los alumnos pudieran establecer relaciones entre conocimientos de diferentes áreas, vinculando los nuevos conocimientos a conocimientos previos dentro de un mismo área, con el objetivo de que se aproximen al nuevo saber en forma integrada y concreten las actividades en forma apropiada.

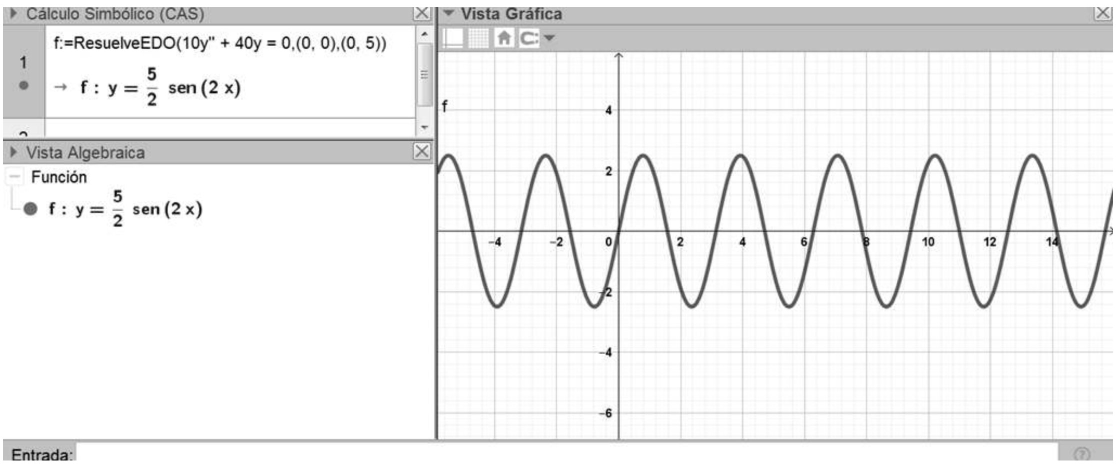


Fig. 3. Visualización grafica de la función incógnita de la Actividad 2, del Planteo 2, para movimiento de un sistema masa resorte no amortiguado y sin fuerzas externas utilizando GeoGebra.

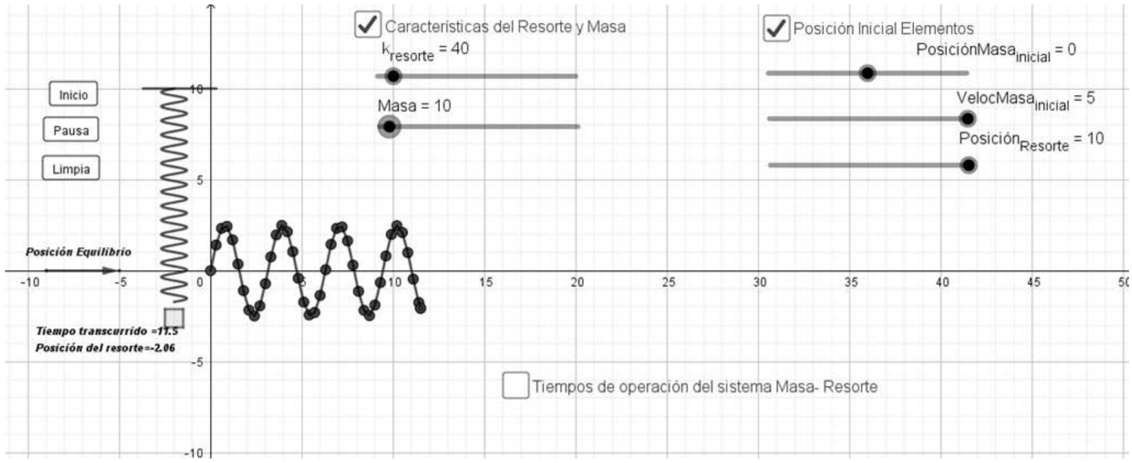


Fig. 4. Visualización gráfica, en la simulación, para el movimiento del sistema masa resorte bajo las condiciones planteadas en la Actividad 2 con GeoGebra.

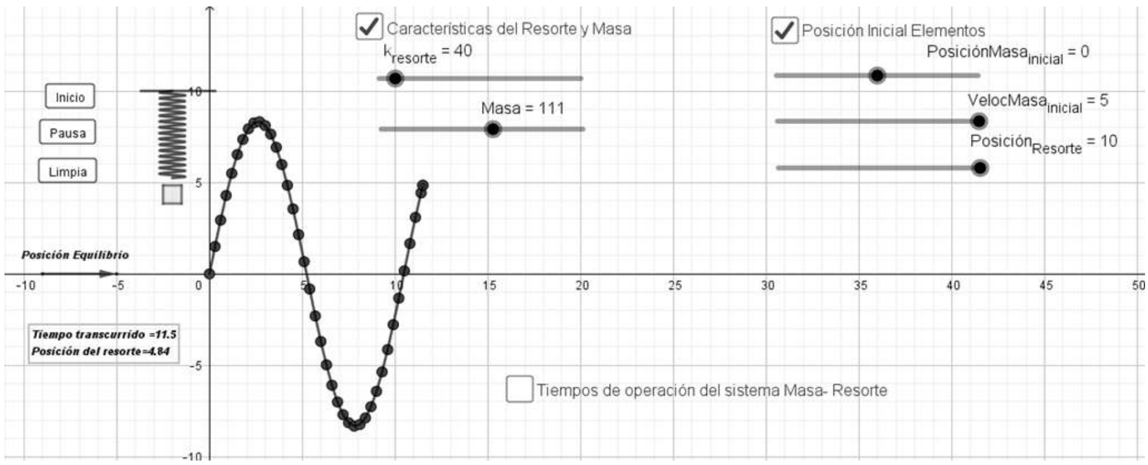


Fig. 5. Visualización gráfica, en la simulación con GeoGebra, para el movimiento del sistema masa resorte bajo las condiciones planteadas en la Actividad 2 modificada en peso de la masa.

Parte de las Actividades 4, 5 y 6 desarrolladas, en el Planteo 2, quedan ilustradas en las Figuras 4 a 10. Se observa como el movimiento del sistema varía en función de la constante k del resorte, la posición inicial de la masa, el peso de la masa y su velocidad inicial (Figs. 4, 5 y 6). Los alumnos se mostraron muy motivados en las simulaciones como recurso para la mejor comprensión de los problemas y como aporte para conjeturar sobre el comportamiento del sistema ante futuras posibilidades de fuerzas externas. En el análisis del comportamiento del sistema en función de cómo se definien los parámetros ante presencia de fuerzas externas (Figs. 7 y 8) valoraron el recurso de visualización grafica para complementar la interpretación de la solución algebraica y entender con mayor profundidad los desarrollos metodológicos analíticos en la solución EDLO a coeficientes constantes.

A partir de un análisis reflexivo sobre la experiencia didáctica a través del empleo del Trabajo Especial propuesto en una prueba piloto, teniendo en cuenta registros de actividades, evaluaciones y vivencias de docentes y alumnos, se pudo valorar la propuesta didáctica como superadora, en cuanto a contribuir al logro de aprendizajes significativos y más eficaces, respecto a la propuesta inicial de la cátedra que sólo considera el enfoque algebraico y resoluciones de ecuaciones diferenciales sin ningún contexto de aplicación. La estrategia de ofrecer múltiples actividades desde distintos enfoques sobre la temática, aportó a los grupos de alumnos diferentes aproximaciones hacia el mismo conocimiento, y la posibilidad de adquirir los mismos en forma más equitativa, beneficiando a todos los estudiantes independientemente de sus características, expectativas o estilos de aprendizaje. En particular abordar la resolución de EDOs desde la resolución de un problema físico de interés para las carreras universitarias utilizando recursos tecnológicos apropiados, facilitó la integración de contenidos de distintas áreas (Matemática, Física e Informática), motivando al aprendizaje del software GeoGebra como un medio para abordar nuevos temas físicos de interés donde se apliquen la teoría Matemática.

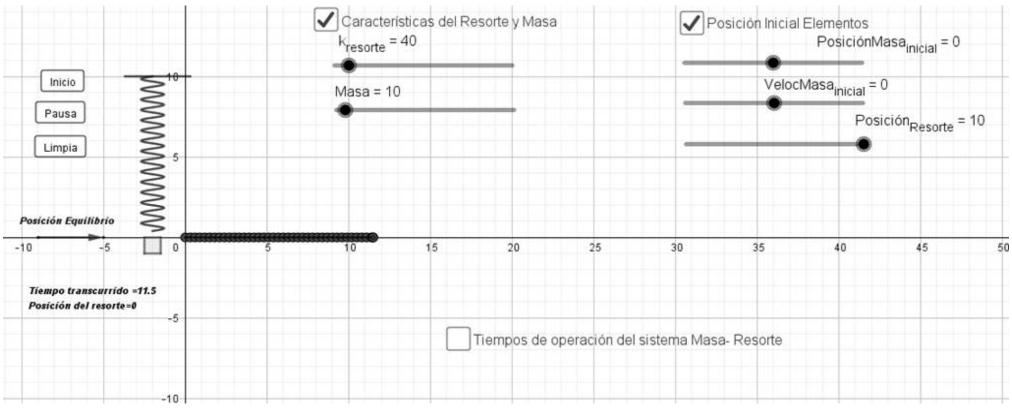


Fig. 6. Visualización gráfica, en la simulación con GeoGebra, para el movimiento del sistema masa resorte bajo las condiciones planteadas en la Actividad 2 modificada en cuanto se considera nula la velocidad inicial de la masa.

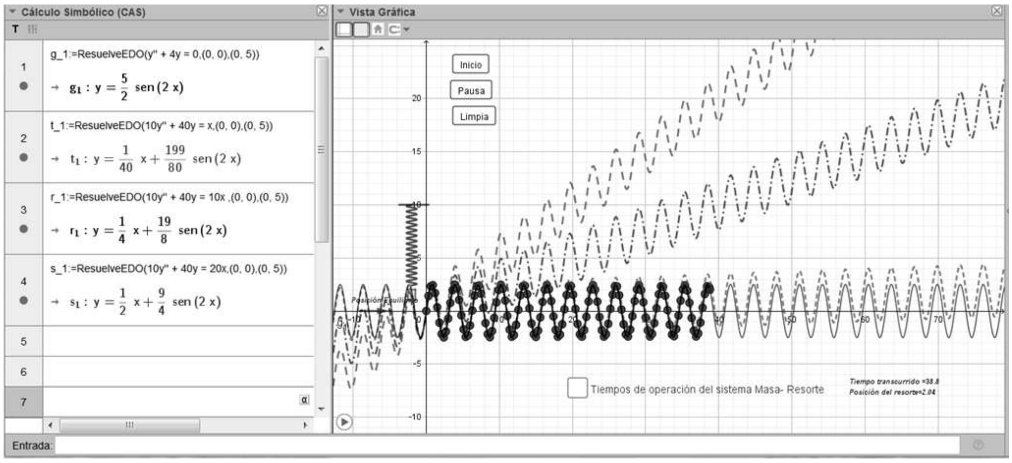


Fig. 7. Visualización gráfica, en la simulación, para el análisis realizado para sistemas masa resorte con presencia de fuerzas externas de la forma F(t)=at, con a=1, 10 y 20.

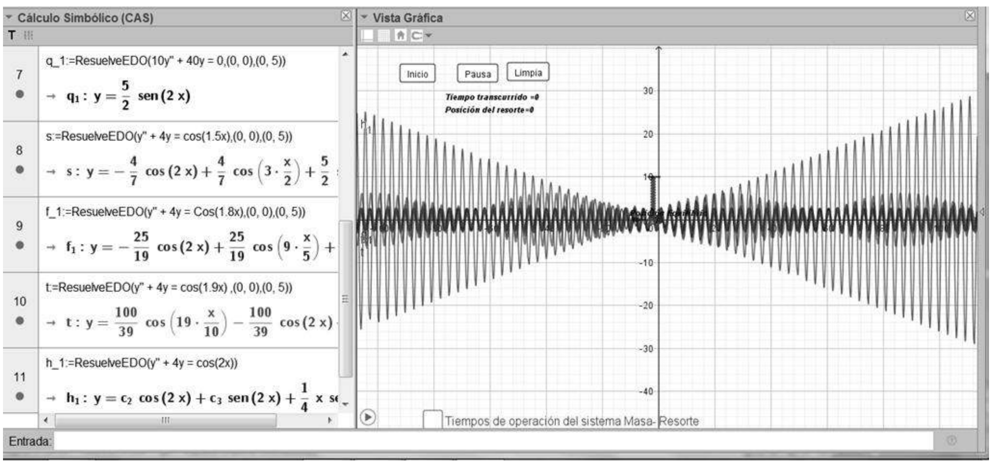


Fig. 8. Gráficas que surgen del análisis realizado para sistemas masa resorte con presencia de fuerzas externas de la forma F(t)=cos(ht) con h= 1.5, 1.8, 1.9 , 1.99, 2. Para h=2 se observa efecto de resonancia.

4 Conclusiones y trabajos futuros

El estudio de las EDO es de fundamental importancia para la formación de los alumnos en distintas carreras de la Facultad de Ingeniería y la Facultad de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales de la UNSJ, ya que constituye uno de los ejes principales en carreras con perfil profesional aplicado. Es por ello la importancia de generar propuestas didácticas tendientes a la mejora de la calidad educativa en esta temática, para alumnos de dichas instituciones. En búsqueda de una enseñanza eficaz y un aprendizaje significativo en EDOL se genera una propuesta didáctica, desde la cátedra Análisis Matemático II de la Lic. en Geofísica y Lic. en Astronomía de la UNSJ, mediante la elaboración de un material didáctico denominado "Trabajo Especial de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias", que tiene como aspectos importantes para su desarrollo: el trabajo colaborativo en grupos pequeños de alumnos, el planteo de modelos simples y de interés para las carreras, la resolución de problemas con EDOL desde distintos enfoques, el empleo de recursos de visualización grafica mediante simulaciones con GeoGebra. A partir de una prueba piloto se pudo apreciar que a partir de este tipo de material es posible desarrollar capacidades en los alumnos para generar su propia experiencia en encontrar soluciones y responder a los interrogantes planteados desde distintas perspectivas. Brinda posibilidades de aproximación al conocimiento desde distintas perspectivas y en forma más equitativa según distintos estilos de aprendizaje. El trabajo en este tipo de entornos fomenta el interés del alumno, aumenta la confianza en ellos mismos, el trabajo colaborativo refuerza las relaciones, y al proponer actividades cada vez más complejas, vemos importantes progresos, mostrándose cada vez más interés en "hacer matemática". Por otro lado, la introducción de nuevas tecnologías en la resolución de problemas con EDO, supone un aliciente más para enfrentarlos, ya que agiliza y ofrece la posibilidad de simular diferentes situaciones, sobre todo en estas décadas, donde el uso de la tecnología constituye parte de la vida diaria de los estudiantes y profesionales de las distintas carreras mencionadas.

Referencias

1. Rodriguez, M. L.: La investigación acción en educación. Octaedro, pp. 10-11 (2010). https://elibros.octaedro.com/appl/botiga/client/img/10112.pdf. Accedido el 30 de junio de 2018.
2. Tobón Sergio: Aspectos Básicos de la Formación Basada en Competencias. Talca (2016).
3. Murillo, F.; Martínez, C. ; Hernández, R. (2011)- Decálogo para una la enseñanza eficaz. Revista Iberoamericana sobre Calidad, Eficacia y Cambio en Educación, Vol 9, No 1, pp. 13-14 (2011). http://www.redalyc.org/html/551/55118790002/ Accedido el 14 de setiembre de 2018.
4. Camacho, M., Perdomo, J. y Santos, M.: Procesos conceptuales y cognitivos en la introducción de las ecuaciones diferenciales ordinarias vía la resolución de problemas. Enseñanza de las Ciencias, 30 (2), pp. 9-32 (2012). www.raco.cat/index.php/Ensenanza/article/download/254501/391048. Accedido el 15 de Enero de 2017.
5. Morales López, Y.: Enfoques y Dificultades en la Enseñanza de las Ecuaciones Diferenciales. Revista Premisa, Vol. 12, No. 45, pp. 25 – 36 (2010). http://www.soarem.org.ar/Documentos/45%20Morales.pdf. Accedido el 20 de enero de 2018.
6. Borssoi, A. y Werle, L.: Modelagem matemática e aprendizagem significativa: uma proposta para o estudo de equações diferencias ordinárias. Educação Matemática Pesquisa, Vol. 6, No. 2, pp. 91-121 (2004). http://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/viewFile/4689/3258. Accedido el 1 de marzo de 2018.
7. Cornejo Serrano, M. C.; Villegas Saucillo, J. J.; Serrano García, D. A.; Molina Estrada, A.: Aplicaciones de las ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden, simuladas en GeoGebra. Pistas Educativas Año XXXIII, pp.6-27(2013). http://www.itcelaya.edu.mx/ojs/index.php/pistas/article/view/1326/1142. Accedido el 14 de mayo de 2018.
8. Rojas Peña, I.: B.B.2 Efecto Doppler en ondas electromagnéticas. Astronomía Elemental: Volumen II: Astrofísica y Astrobiología. USM, Apéndice (2015).
9. Kreyszig, E.: Ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden. Matemáticas Avanzadas para Ingeniería. Limusa, pp. 105-107 (2010).

Desafíos del Cursado Semipresencial en el Ingreso a la Universidad: Cómo Acortar Distancias y Lograr un Acompañamiento Efectivo Mediante las TIC

Guillermo M. Croppi[1], Nazareno Rudi[1], Cristian Bernal[2]

[1] Área Ingreso a la Universidad – Universidad Tecnológica Nacional – Facultad Regional Santa Fe
Lavaise 610, Santa Fe.
{guillermocroppi,rudinazareno}@gmail.com,

[2] Área Ingreso a la Universidad y Dpto. de Materias Básicas, Univ. Tecnológica Nacional – Facultad Regional Santa Fe
Lavaise 610, Santa Fe.
cbernal@frsf.utn.edu.ar

Resumen. Lograr un efectivo proceso de enseñanza/aprendizaje a distancia es un reto para todas las instituciones educativas. En particular, para el seminario de ingreso a la Universidad Tecnológica Nacional – Facultad Regional Santa Fe (UTN–FRSF), se complejiza el escenario al ser aquél la única alternativa que tienen algunos aspirantes que no pueden acceder a las clases tradicionalmente presenciales. La presente contribución expone una propuesta desarrollada en los cursos semipresenciales de Física para el seminario de ingreso a la UTN–FRSF, donde el foco se centra en mejorar la experiencia del aprendizaje a distancia utilizando los beneficios que brindan las tecnologías informáticas. La estrategia implementada impacta en el rendimiento de los alumnos a través de una enseñanza más personalizada y un acompañamiento más próximo entre docente y alumno e influye en la motivación del estudiante para aprender y seguir en el cursado

Palabras Clave: Seminario de ingreso a la universidad, Enseñanza-aprendizaje a distancia, Plataformas virtuales, Material audiovisual.

1 Introducción

La distancia siempre ha representado un desafío para la enseñanza, tanto para el docente, a quien le cuesta lograr un acercamiento efectivo y personalizado con el estudiante (en este caso, el aspirante a ingresar al universidad), como también para este último, que por diversas realidades y factores, debe optar por una alternativa de estudio no presencial, siendo este trayecto educativo su primer contacto con la institución y en la mayoría de los casos, por no decir "en casi todos", la primera vez que pone a prueba su capacidad autodidacta.

Nuestra sociedad discute y hasta cuestiona acaloradamente la autodisciplina que los jóvenes estudiantes demuestran a la hora de instruirse a sí mismos en una materia, manifestando que escasea en ellos la capacidad intelectual para seguir un plan de estudio y alegando que forman parte de una generación digital que se encuentra sumergida día a día en numerosas fuentes de distracción provocadas por la tecnología. Este último concepto es lo que Manes y Niro denominan "la era de la distracción" [1]. Puede apreciarse en los pasillos de nuestra facultad que aún existe un grupo numeroso de docentes que adhiere al mito que cuestiona las tecnologías como herramientas para el desarrollo educativo e inclina la balanza en posturas fundamentalistas que sostienen que la enseñanza clásica es la única forma reconocible para la apropiación del conocimiento. Y las aulas lo ratifican.

Entre las diferentes modalidades que posee el aspirante para realizar el seminario de ingreso a la UTN–FRSF desde el año 2014 se ofrece la posibilidad de realizar el cursado semipresencial de los módulos Matemática y Física; destinado exclusivamente a aquellos alumnos cuyo domicilio se encuentre fuera de la ciudad de Santa Fe y alrededores. Todos los años, dicha modalidad se presenta como un desafío tanto para el docente que acompaña al aspirante, como para este último, debido a la distancia física que media entre ambos.

A partir del año 2016, se afrontaron estos desafíos abordando el cursado semipresencial de una forma innovadora, revisando y replanteando distintos aspectos del plan de trabajo y capitalizando las bondades que ofrece la tecnología para proveer una mejor experiencia en el aprendizaje y lograr un acercamiento virtual. Para ello, se realizó un análisis sobre la problemática, se propusieron alternativas de solución y se optó por la que a nuestro criterio resultó la más adecuada.

2 La problemática abordada

Entre los objetivos del Plan Estratégico del Seminario Universitario [2] se destacan: mejorar los índices de retención en los primeros ciclos y nivelar conocimientos en Matemática y Física. Específicamente en los cursos semipresenciales, al no contar con la interacción personal propia de las aulas tradicionales, el seguimiento y la retención de los alumnos, resultaban difíciles de mensurar.

Durante las clases semipresenciales de Física, que se desarrollaban desde agosto de 2014 a diciembre de 2015, varios alumnos presentaban dificultades a la hora de abordar la temática o de llevar un adecuado seguimiento del plan de estudio. Nos encontrábamos con muchas situaciones en las que los estudiantes abandonaban el curso y ello nos llevó a cuestionarnos si los motivos eran externos al proceso de enseñanza/aprendizaje o si las verdaderas razones se debían a la calidad de los materiales de estudio, a deficiencias en la comunicación y/o a la calidad del curso en sí mismo. Dentro de un contexto de mejora continua, nos propusimos reinventar el cursado semipresencial bajo la hipótesis de que, si mejorábamos y proveíamos una solución a los factores que estuvieran a nuestro alcance modificar, la deserción decrecería a la vez que mejorarían los porcentajes de aprobación.

Definir una nueva estrategia requería, en primer lugar, estudiar la problemática a la que nos enfrentábamos. Para ello, aplicamos lo que en el campo de la Ingeniería en Sistemas de Información se llama Diseño Centrado en el Usuario, una filosofía de diseño de estrategias que pone el foco en los usuarios para resolver sus necesidades concretas, consiguiendo así su mayor satisfacción y mejor experiencia [3]. Entonces, aplicamos lo que pregona Pressman [4]: "trabajar para comprender a los propios usuarios" y dar "respuestas a las distintas preguntas, permitirán que el diseñador comprenda quiénes son los usuarios finales, qué los motiva y complace"

2.1 Patrones identificados

El primer paso fue identificar problemáticas y necesidades, tanto de los docentes como de los estudiantes. Los patrones identificados coincidieron con las hipótesis del equipo coordinador del Seminario Universitario. A través de algunas entrevistas y consultas a ambas partes, se obtuvo el siguiente listado:

- Cuesta lograr un acercamiento personal con el docente o la posibilidad de identificarlo visualmente. El mismo problema se da la inversa, de docente a aspirante.
- Varios presentan problemas con los horarios en los que pueden estar presentes en los *chats* semanales con el docente (único medio de contacto para consultas *online*).
- Se intenta aprender solamente de un apunte que provee la cátedra, sin un apoyo audiovisual, ni explicación alguna sobre cómo encarar la resolución de los ejercicios.
- Las consultas *offline* se realizan de forma escrita, generalmente vía *e–mail* y muchos presentan dificultades para expresar sus dudas. La misma situación se observa del lado del docente, al intentar explicar un proceso únicamente a través de la palabra escrita.
- Al docente le cuesta lograr que el alumno se comprometa con el material y con el estudio. La publicación de un calendario de temas no es suficiente para que el alumno lleve al día la lectura del material.
- Los aspirantes ven el material poco atractivo para el estudio y, a veces, les resulta confuso de seguir sin el acompañamiento presencial del docente.
- Varios alumnos abandonan el cursado semipresencial para optar por una opción presencial.

2.2 Estructura del curso semipresencial

El curso semipresencial sigue las mismas exigencias de aprobación que los cursos presenciales y el modo de evaluación es por parciales, de carácter presencial. Los aspirantes deben concurrir a los exámenes parciales. Por razones operativas y pedagógicas, el cupo del curso semipresencial es de hasta 30 alumnos. La modalidad ofrecía, a través del campus virtual de la facultad, la posibilidad de acceder a material didáctico para cubrir el temario completo de los módulos de Física y Matemática, bajo la tutela de un docente que guiaba el estudio a distancia, estableciendo contacto periódico con los alumnos y monitoreando el avance de los ingresantes.

En cuanto al soporte tecnológico para la comunicación y tutela del estudiante, se utilizaba el campus virtual de la UTN FRSF, una implementación de la plataforma Moodle, una plataforma de aprendizaje diseñada para proporcionar a educadores, administradores y estudiantes un sistema integrado único para crear ambientes de aprendizaje personalizados [5].

El modo en que se organizaba el curso utilizando la plataforma era el siguiente:

- Se dividía el temario en bloques, que se iban presentando a medida que se avanzaban con los módulos de estudio de la materia: Introducción y conceptos básicos – Movimiento rectilíneo uniforme (MRU) – Movimiento rectilíneo uniformemente acelerado (MRUA) – Encuentro – Movimiento Vertical – Movimiento en el plano – Movimiento circular uniforme (MCU).
- Los materiales de estudio se encontraban disponibles en la plataforma virtual, y el docente iba desbloqueando el acceso a los mismos, de acuerdo con el avance del cursado.
- Los encuentros virtuales se realizaban en una sala de chat de texto plano y la modalidad era de consulta: el profesor principalmente respondía a preguntas específicas de los alumnos.
- Los alumnos podían realizar otras consultas personales o particulares vía *e–mail* o foros de discusión.

2.3 Las críticas

Entre las distintas críticas y comentarios referidos al curso por parte de los alumnos podemos mencionar:

- Se desaprovechaban varias funcionalidades del campus virtual, por ejemplo, la realización de encuestas, la programación de entregas de actividades, la realización de evaluaciones de seguimiento programables, etc.
- El calendario no era claro de entender. Al estar la materia dividida exclusivamente en módulos, al estudiante le resultaba complicado ubicarse en qué módulo se encontraba a la hora de tener un encuentro virtual.
- Solamente se publicaban las fechas de los exámenes y se carecía de una estructura de temas armada para que el aspirante estudiara semana a semana de modo de guiarlo en la organización del estudio.
- El único medio de contacto con el docente era a través de la palabra escrita, sea vía *chat* virtual de texto plano o *e–mail*. Muchos han calificado al *chat* como una pérdida de tiempo o poco útil ya que solamente cumplía la función de resolver dudas puntuales.

3 La estrategia basada en la mejora de la experiencia del alumno

Para el planteo de una nueva estrategia, se comenzó partiendo de la hipótesis de que todos los estudiantes terminan percibiendo el cursado semipresencial como una modalidad que les provee mayor libertad para organizar sus estudios. Esta impresión no solo ocurre en este curso en particular, sino que se aprecia en cualquier curso de modalidad virtual, al no estar el estudiante presente en el aula ni tampoco el docente al frente de la misma, acompañando y dirigiendo el estudio de la materia.

Si bien es verdad que los aspirantes requieren crear su propia estrategia de estudio, los casos analizados han demostrado que, en cursos semipresenciales anteriores, la mayoría de las veces, esta organización estudiantil autónoma, no ha prosperado o no ha cubierto nuestras expectativas. Varias de las razones por las que ocurre esto suelen escaparse del control del curso y del docente. Sin embargo, es clave evaluar cuáles son las variables que sí pueden controlarse, para lograr un ajuste ventajoso a la hora de proponer un rediseño del plan.

De esta manera, los cambios realizados fueron planteados con el fin de proveer al aspirante un camino bien delimitado o *roadmap*, brindándole una organización de actividades, un entorno amigable y un calendario para guiar al aspirante e instruirlo en una metodología de estudio que le facilite su aprendizaje.

A continuación, se detallan los cambios implementados en el curso para los ciclos de ingreso 2016 y 2017.

3.1 Mejorar la administración del curso

Una buena gestión de los aspirantes y del curso provee orden y genera una mayor confianza por parte de los estudiantes para con el docente y con el curso en general. Para lograrlo, se realizaron las siguientes acciones:

3.1.1 Planificación semanal de contenidos y actividades.

La programación eficiente de las clases ayuda al docente a organizar el cursado, programar los contenidos que se irán revelando de acuerdo con el plan de estudio, y permite al estudiante contar con una estrategia de estudio. Esto resulta sumamente útil para controlar el grado de avance y el compromiso que vienen llevando los aspirantes con la materia. Además, se evitan la desorganización y el retraso en el desarrollo de los contenidos curriculares. En nuestro caso, programamos el curso semana por semana, permitiendo al aspirante visualizar el horizonte de los temas y organizar sus propios horarios comprometiéndose con los materiales que se proveen cumplimentando dicha periodicidad.

Tabla 1. Ejemplos de programacion por semana en el cursado. (Agosto a diciembre de 2017)

Semana	Videos presentados	Actividades
2	Presentación y bienvenida (2017) Introducción a la Física (2016) Magnitud Física, Cantidad Física y Sistema Internacional (2016) Unidades, Unidades Derivadas y Pasaje de Unidades (2016) Cuerpo y Partícula (2016)	• Chat semanal • Habilitar un cuestionario programado para los estudiantes, con el fin de autoevaluar los conocimientos adquiridos de los temas de introducción a la Física
5	Introducción SEMANA 5 (2017) Velocidad Negativa (2016) Ejercicio 3 - Velocidad Negativa (2016) Ejercicio 4 - Grafica Velocidad negativa (2016) Encuentro - Base de los problemas (2016)	• *Chat* semanal • Presentación de un práctico hecho en GeoGebra, con demostración gráfica de algunas funciones del movimiento, específicamente en el cambio de valores y como estos inciden.
17	Sin presentación de nuevos videos.	• *Chat* semanal • *Livestream* en vivo con los alumnos • Subir ejercicios de práctica para el 2° parcial

3.1.2 Acompañamiento personalizado.

El seguimiento individualizado es una herramienta fundamental en este tipo de cursados. Es funcional ya que sirve al docente para lograr un acompañamiento efectivo. En nuestro caso, dicho seguimiento consiste en llevar un historial del alumno, registrando observaciones que refieren a su desempeño, su contexto y su actitud frente al curso. Tales registros consisten en la asistencia del alumno a los *chats* semanales, las consultas realizadas, los temas en los que se observa alguna dificultad, la participación a través de aportes o comentarios y cualquier otra problemática que fuera expresada, inclusive ajena al propio curso. Ponemos especial atención a este último punto: se intenta lograr un acercamiento más personal con el estudiante para interpretar su contexto sociocultural, partiendo del supuesto que, cuanto mayor sea la comprensión del entorno, el acompañamiento resultará de mejor calidad. Esta relación de proximidad influye, además, creando un mayor vínculo de responsabilidad y compromiso de ambas partes con el cursado y esto es clave para lograr un mejor desempeño y aprendizaje, que es, en definitiva, nuestro objetivo. Una técnica utilizada es el contacto periódico, planteando preguntas tales como: *"¿Cómo te sentís con el curso?, ¿El material te está sirviendo?, ¿Cómo venís estudiando la materia?, ¿Contás con alguna complicación fuera del curso que te impide estudiar correctamente?"*. Todas estas cuestiones se desarrollan en un contexto de informalidad y honestidad, sin siquiera el compromiso de ser respondidas, sin embargo, logran el establecimiento del vínculo docente-alumno que se persigue concretamente.

3.1.3 Encuestas.

Las encuestas ayudan al docente para medir la situación en distintos momentos del curso semipresencial. Son herramientas válidas para tomar decisiones durante el cursado y en la replanificación del futuro ciclo. Para nuestro caso particular, se hicieron encuestas tanto para tomar decisiones de forma generalizada, por ejemplo, para definir el mejor horario para convocar a los chats semanales; o personales, para consultar la relación de los aspirantes con el curso y con el docente. Algunos resultados obtenidos se sintetizan de forma anónima y se comparten con los estudiantes. A los efectos de la ejecución y análisis de encuestas, una ventaja observada fue contar con una funcionalidad del aula virtual específica para programarlas, con informes y estadísticas generadas automáticamente para su lectura, con varios gráficos y formatos disponibles.

Tabla 2. Resultados de una encuesta para estudiar la factibilidad de un cambio de horario. (Ago-Dic 2017)

Pregunta	Si	No
El horario de física es el jueves a las 17.30Hs. ¿Tienes problemas con este horario?	65%	35%
En caso de que tengamos que cambiar el horario, ¿Estarías dispuesto a reubicar tus horarios?	94%	6%

3.2 Crear un entorno virtual “amigable” para el aspirante

Una comunicación efectiva con el aspirante requiere de un entorno ordenado, que sea al mismo tiempo amigable para navegar y para ubicarse dentro del espacio y así encontrar lo que se está buscando de un modo sencillo. El objetivo de este punto es recrear muchas de las actividades que ocurren dentro de un aula tradicional, en el entorno virtual. La ventaja de estos sistemas es la provisión de variadas herramientas que aportan a la organización y al estudio. También es importante que todo lo que ocurre y se comunica acerca del curso, pase por este espacio virtual, para tener la información concentrada en un sólo lugar. A continuación, se listan distintos elementos que componen este entorno virtual.

3.2.1 Plataforma general del campus virtual.

En el caso de la UTN FRSF, se provee a todos los cursos de un aula virtual, implementada en *Moodle*. La misma permite diversas funcionalidades para la gestión y varias herramientas. En cuanto a la gestión, se tiene la administración de estudiantes, configuración del curso, división en comisiones o grupos, registro de asistencia, envió de novedades (noticias), estadísticas automáticamente generadas del curso, armado de cronograma, confección de informes (con tablas y gráficos automáticos), programación de eventos (útil para parciales y exámenes), sistema de calificaciones, etc. Con respecto a las herramientas disponibles, contamos con la posibilidad de crear actividades como chats, cuestionarios, foros, gestión de recursos o materiales, programación de tareas, exámenes, cuestionarios para autoevaluación, encuestas, wikis, y mucho más. Otra ventaja es la personalización de la página bajo distintos formatos. En nuestro caso utilizamos el formato de secciones, donde cada sección representa una semana, y dentro de cada sección se definían materiales que nos interesaba que el alumno estudie en ese periodo (además de actividades, tareas, o consignas que pudiéramos definir).

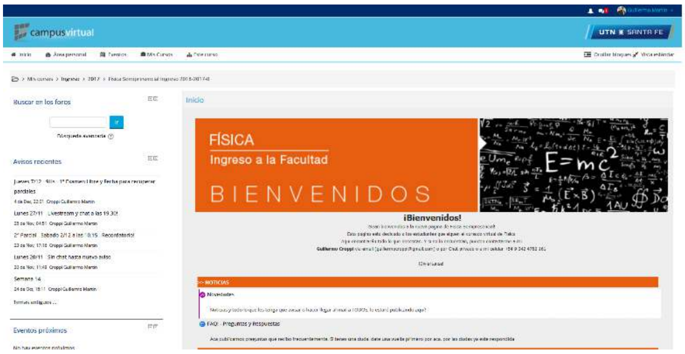


Fig. 1. Captura de pantalla del espacio del curso semipresencial de Física, provisto por la plataforma Moodle.

3.2.2 Foros de consulta.

Se habilita por semana un foro de consultas y respuestas, donde los estudiantes pueden compartir las inquietudes y problemas con los que se enfrentan en la semana para que sean respondidas, tanto por el docente como por los propios alumnos. Se intenta alentar a los estudiantes a que escriban sus consultas en los foros, ya que tanto la consulta, como su respuesta, es útil para compartir la problemática, que generalmente, se repite. Además, se alienta a que entre los mismos estudiantes colaboren entre sí, al permitir que otro estudiante se sume y responda a la consulta.

3.2.3 Evaluaciones programadas y opcionales.

La plataforma *Moodle* permite que se puedan programar cuestionarios para autoevaluaciones. Esta es una alternativa que ha ayudado a los estudiantes a hacer una revisión de la comprensión que van logrando. Allí se proveen distintas opciones de uso: informes de los resultados, tiempo que le llevo a cada estudiante completar el cuestionario, cantidad de respuestas correctas e incorrectas, cantidad de veces que completó el cuestionario, etc. Los estudiantes han participado y evaluado su nivel de conocimiento en conceptos introductorios de Física y en ejercicios teóricos de opción múltiple tales como los que se presentan en los exámenes parciales del curso. Como ejemplo de lo expresado, mostramos el top de preguntas que han presentado mayor dificultad:

- P1: “[tn] o "tonelada" es una unidad derivada”
- P2: “m/s es una unidad de medición usada por el sistema internacional de medidas para la velocidad”
- P3: “La física es una ciencia teórica. Al igual que la matemática, los fenómenos se estudian desde la lógica, y no desde la observación ni la experimentación.”

Tabla 3. Resultados del cuestionario “Introducción a la Física”. (Ago.-Dic. 2017).

	P1	P2	P3	P4	P5	P6	P7	P8	P9
Correcto	5	9	9	15	13	12	12	12	14
Incorrecto	12	8	8	2	4	5	5	5	3
Dificultad	71%	47%	47%	12%	24%	29%	29%	29%	18%

3.3 Contenidos en formatos digitales y audiovisuales

Entre los cambios introducidos en este plan, la reformulación de contenidos en formatos digitales y audiovisuales es el factor clave que resultó de mayor interés para los aspirantes. En varios de ellos, se trabaja en un *“canvas”* (elemento informático que permite la creación de gráficos y animaciones de forma dinámica) que mediante el input de una tableta graficadora, simula la escritura en un pizarrón. Esta técnica es sumamente interesante para demostrar la resolución de ejercicios y las estrategias disponibles para aplicar. En la fig. 2 se muestran algunos ejemplos de material audiovisual elaborado para el curso semipresencial de Física.

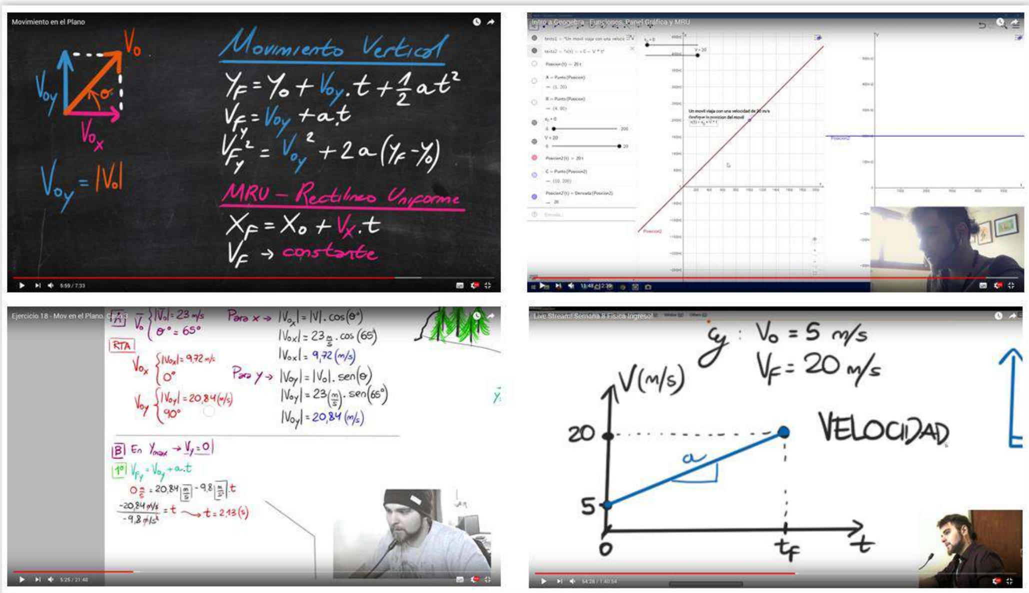


Fig. 2. En orden de izquierda a derecha, de arriba para abajo: “Movimiento en el plano”, “Introducción a Geogebra: Funciones, Panel Grafico y MRU”, “Movimiento en el Plano: Caso 3” y “*Live Stream:* Semana 8”.

3.3.1 Videos.

Los medios audiovisuales han sido ampliamente utilizados en todo el mundo como estrategia de muchos cursos e instructores para mejorar la experiencia de aprendizaje de los estudiantes [6]. Nuestra inspiración para el desafío de la producción de videos fueron los cursos publicados por Khan Academy, una ONG que desde el 2006 elabora estas herramientas pedagógicas para diversas materias, con 1500 millones de vistas en su canal de *YouTube* [7]. Hasta en nuestra propia comunidad universitaria, los mismos estudiantes comparten entre sí videos educativos como material de estudio. Con este ejemplo a seguir, se diseñaron y produjeron entre el año 2016 y 2017 una enorme variedad de videos de Física, transformándolos en el material central del curso semipresencial. Se grabaron y editaron más de 68 videos, que suman aproximadamente 15 horas de contenido, de distintos formatos y presentaciones: teóricos (con un enfoque a la teoría e introducción a los temas), prácticos (exponiendo los distintos casos de problemas y ejercicios, y las distintas estrategias de resolución), tutoriales (con resolución de exámenes, o explicaciones del uso de software, como GeoGebra) y orientadores (publicados semanalmente con el fin de orientar al alumno en donde nos encontramos temporalmente en el curso y que se viene). Otra de las razones por la que se decidió la realización de estos videos es que los estudiantes pudieran ver y conocer quién es el docente de la materia ya que, como expresamos en el apartado 3.1.2, los vínculos aspirante-docente son fundamentales para un efectivo acompañamiento.

Todo este trabajo, aportó además a la motivación para el estudio y a la confianza con el docente, la cual se pone de manifiesto en las instancias de evaluaciones presenciales formales.

Fig. 3. Set de herramientas utilizado durante la grabación de los videos. De izquierda a derecha: Tableta digitalizadora o *tablet* gráfica, que actúa como periférico y permite introducir gráficos o dibujos a mano, conveniente para la realización de gráficos, especialmente para simular la escritura en el pizarrón o en papel. Cámara de video y micrófono, ambos necesarios para la filmación de la clase.

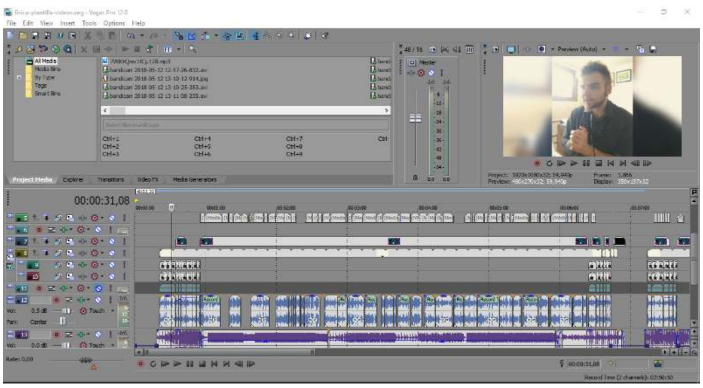


Fig. 4. Software de edición de videos utilizado para la composición de los archivos de video y de audio.

3.3.2 *Playlists* de videos organizados por semana.

Tal como lo definimos cuando detallamos la planificación del curso por semana, el armado de *playlists* de videos presenta un formato cómodo y compacto de los temas que se dan en la semana. En nuestro caso nos pareció mucho más práctico y agradable para el alumno tener los videos agrupados por semana, en vez de tenerlos dispersos en la plataforma.

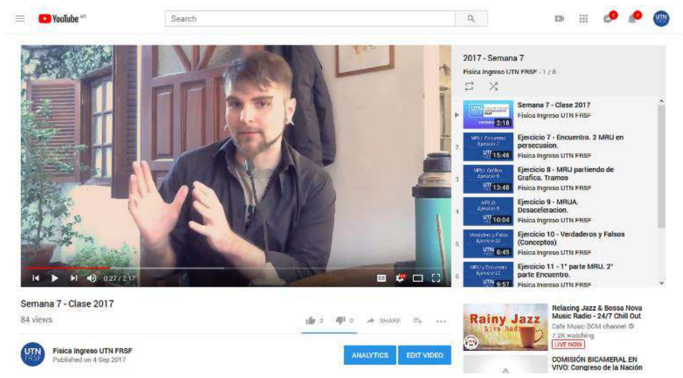


Fig. 5. Ejemplo de una playlist con los videos asignados para la semana 7.

3.3.3 *Livestreams* - Transmisión en vivo con chat.

Una de las críticas hechas al curso semipresencial era que los encuentros semanales en el chat de texto eran poco aprovechados y no aportaban al aprendizaje. En el año 2017, se realizaron los chats, sumando transmisión en vivo, donde el docente contestaba a preguntas del chat en tiempo real y se generaba un dialogo más directo entre ambas partes. Los estudiantes participaban de los mismos de forma activa.

3.3.4 Trabajos prácticos y simulaciones en GeoGebra.

Creamos para el curso una serie de guías para realizar simulaciones con GeoGebra. Como el alumno se encuentra a distancia, resulta imposible hacer un taller laboratorio, pero dejar que el alumno aprenda a hacer todo por sí mismo, nos iba a conducir a la obtención malos resultados. Entonces, decidimos construir guías prácticas, donde los aspirantes siguen una serie de pasos para poder hacer distintas simulaciones de MRU, MRUA, MCU, etc. También elaboramos videos tutoriales de introducción al GeoGebra, su uso e instalación.

4 Beneficios y resultados percibidos

A continuación, exponemos una serie de acciones que llevamos a cabo con el objeto de medir el impacto de haber aplicado todas las innovaciones y cambios mencionados en el apartado 3.

4.1 Encuesta docente

Es importante destacar que la encuesta docente, que se les brinda a los aspirantes al finalizar el trayecto educativo, es un buen recurso que nos ha servido para poder medir la calidad del curso según los aspirantes y conocer en qué aspectos el docente requiere profundizar su esfuerzo en próximos ciclos.

Tabla 4. Resultados de la encuensta docente realizada a los aspirantes al final del cursado Ago-Dic 2017

Calificación	Actitud Escuchar	Responsabilidad Asist & Puntual.	Actitud Conf. & Partic	Conocim. Claridad	Conocim. Seguridad
EXCELENTE	70%	70%	70%	100%	90%
MUY BUENO	30%	20%	20%	-	10%
BUENO	-	-	-	-	-
REGULAR	-	-	-	-	-
INSUFICIENTE	-	-	-	-	-
NS NC	-	10%	10%	-	-
TOTAL	**100%**	**100%**	**100%**	**100%**	**100%**

4.2 Seguimiento del comportamiento de los aspirantes con el contenido y las plataformas

En el rubro de la informática y el diseño de sistemas, se habla sobre la relación del usuario con el contenido, y se maneja la hipótesis que mientras más sepamos sobre cómo el usuario consume y se relaciona con el contenido, mejores contenidos podemos armar y direccionar [8]. Es interesante aplicar la hipótesis en la enseñanza a través de TIC. La misma podría ayudar a la hora de pensar en modificaciones al plan de estudio y en la detección de módulos o contenidos que necesitan ser mejorados o revisados. Un ejemplo concreto es el siguiente: imaginábamos a priori que los temas más consultados serían los más complejos, sin embargo, la estadística nos muestra que el movimiento rectilíneo uniforme es el más consultado por los estudiantes.

Tabla 5. Categorías de los términos más buscados en la plataforma YouTube que apuntaron a videos del canal Ingreso Fisica UTN [9]. Los valores corresponden al período Agosto-Dicimbre de los años 2016 y 2017.

Categorías buscadas	Reproducción (en min)	Vistas
MRU	517	103
Movimiento en el plano	504	153

Ingreso UTN	378	154
MRUA	307	79
Movimiento vertical	265	51
Encuentro	173	31
Ejercicios y exámenes resueltos	143	35
GeoGebra	117	17
Movimiento circular	84	22

4.3 Estadísticas disponibles.

Otra ventaja de utilizar herramientas como *Moodle* para la implementación del aula virtual y YouTube para la publicación de videos, es la posibilidad de obtener gran cantidad de datos para la generación de informes y la elaboración de patrones para la medición del *engagement* con el contenido. Es interesante ver los informes que proporciona *YouTube*, de *Google*, en su menú *Analytics.* (Fig. 6 y 7)

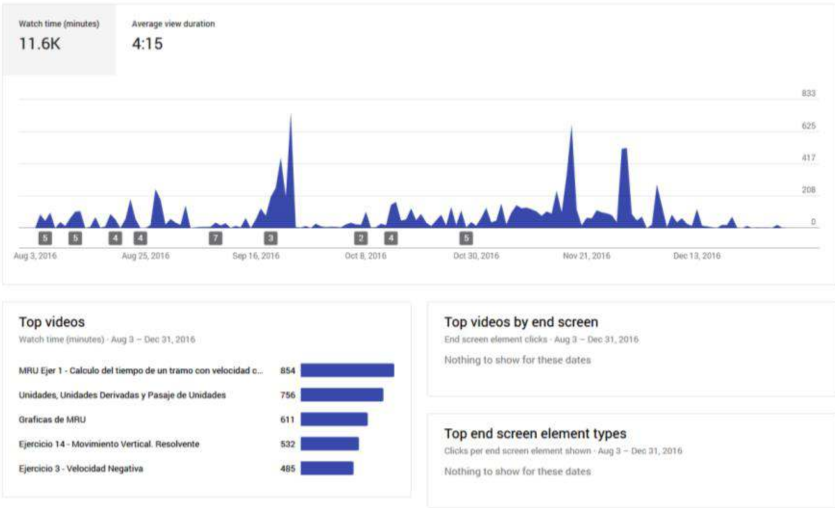


Fig. 6. Parte del informe provisto por *Analytics* de la plataforma *YouTube* durante el periodo Ago.-Dic 2016.

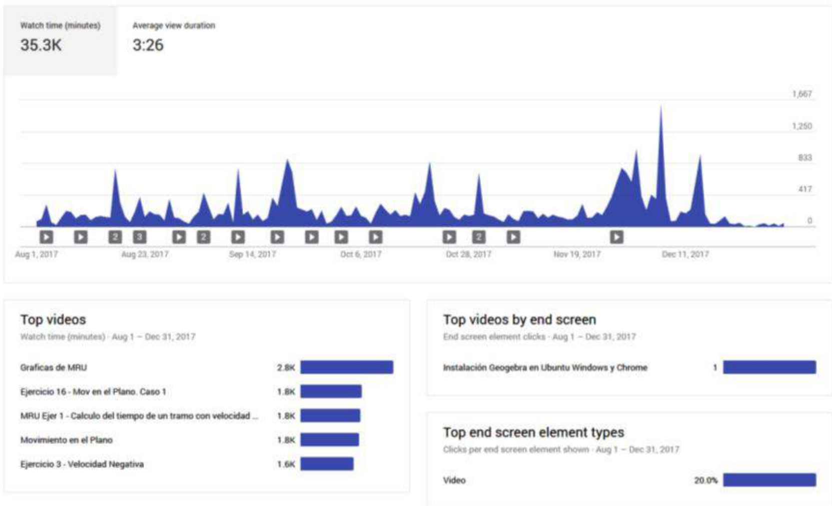


Fig. 7. Parte del informe provisto por *Analytics* de la plataforma *YouTube* durante el periodo Ago.-Dic 2017. Aquí podemos notar que el tiempo de reproducción se triplicó en comparación con el período anterior.

Todas estas estadísticas han servido para estudiar cómo el aspirante hace uso de los videos y han permitido que saquemos algunas conclusiones, por ejemplo, que los usuarios suelen prestar más atención a videos de entre 6-8 minutos que otros más largos. Otra conclusión notable de las gráficas es que los videos llegan a tener su pico de reproducciones cerca de las fechas de los exámenes del Ingreso de Física, lo que demuestra que los aspirantes de los cursos presenciales también suelen tomar los videos como referencia.

5 Trabajo a futuro

En la UTN FRSF, el seminario universitario se encuentra constantemente buscando mejorar el nivel de sus cursos. A partir de la experiencia presentada, comenzamos a enfocar la experiencia del aprendizaje, orientándonos hacia una mejor oferta en los formatos de los contenidos curriculares, profundizando la utilización de las TIC como una estrategia real para la enseñanza. El plan a largo plazo es ofrecer todo el material académico de modo online, mediante libros digitales que ordenen y mejoren la comprensión del alumno y dispongan de herramientas estadísticas donde se pueda medir el nivel de interacción de los estudiantes y demás elementos que nos permitan seguir analizando el proceso de enseñanza-aprendizaje. Otra de las líneas de trabajo consiste en continuar realizando material audiovisual de los temas de física e incorporar matemática, mejorando la calidad de las grabaciones, y aumentando la cantidad de videos teóricos y prácticos online por *livestreaming*.

Todos estos planes de acción fueron presentados y aprobados dentro de un proyecto global al que llamamos PUENTES (Proyecto Universidad y Escuelas - Nutriendo el trayecto Educativo-Social) en el marco del programa NEXOS [10], el cual los vuelve económicamente factibles.

6 Conclusiones

Para la modalidad semipresencial del seminario universitario de la UTN FRSF, el cambio de paradigma, materializado en el diseño de un curso innovador y moderno con el uso de la tecnología y la producción de material audiovisual, ha sido un plan exitoso ya que se registró un incremento en la tasa de aprobación de los aspirantes de este trayecto educativo en comparación con el mismo ciclo del año anterior, y la recepción del material audiovisual fue evaluada por los propios alumnos como positiva en las encuestas realizadas sobre el cierre del cursado.

Confiamos que también debió impactar, aunque en menor medida, en el aprendizaje logrado en los cursos presenciales, cuyos alumnos registraron algunos comentarios en las páginas web de nuestros videos.

Estamos orgullosos de poder concluir que el trabajo no fue en vano y que creemos haber logrado una herramienta superadora para el proceso de enseñanza dentro del seminario de ingreso a la universidad.

Agradecimientos A los aspirantes del curso semipresencial del Ingreso. Por el feedback recibido, por su participación responsable y por la utilización activa del contenido digital generado. Al ex Sec. Académico de la Facultad, Dr. Alfonso Giménez Uribe, por apoyarnos siempre y confiar en nosotros.

Referencias

1. Manes, F.; Niro, M.: *El cerebro del futuro. ¿Cambiará la vida moderna nuestra esencia?* Planeta, pp. 348–351 (2018).
2. Consejo Superior – U.T.N.: Resolución 1639/2016. *Secretaría de Consejo Superior.* http://csu.rec.utn.edu.ar (2016) Accedido el 25 de Setiembre de 2018.
3. Norman, D.: User-Centered System Design. New Perspectives on Human-Computer Interaction. *Usability.gov.* https://www.usability.gov/what-and-why/user-centered-design.html Accedido el 25 de Setiembre de 2018.
4. Pressman, R: *Ingeniería del software: Un enfoque práctico.* McGraw-Hill, pp. 305-307 (2006)
5. Dougiamas, M.: Acerca de Moodle. *Moodle Documentation.* https://docs.moodle.org Accedido el 25 de set. de 2018.
6. Guo, P; Kim, J; Rubin; R.: An Empirical Study of Massive Open On-Line Course. *SIGCHI Conference Proceedings Format*. http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc Accedido el 25 de Setiembre de 2018.
7. Khan S.: *Khan Academy YouTube Channel*. https://www.youtube.com/user/khanacademy/about (2006) Accedido el 25 de Setiembre de 2018.
8. Furlong, J; Davies, C.: Young people, new technologies and learning at home: taking context seriously. *Oxford Review of Education.* Vol. 38, No. 1, pp 45-62. (2012)
9. Croppi, G.: Física para el Ingreso. *YouTube Channel*. https://www.youtube.com/channel/UCszejLA7LOY91bDIGkcFQ8Q (2017) Accedido el 25 de Setiembre de 2018.
10. S.P.U., Min. de Educación, Consejos regionales de planificación de la educación superior (CPRES) *Programa NEXOS.* https://www.argentina.gob.ar/educacion/politicasuniversitarias. (2017) Accedido el 25 de Setiembre de 2018.

Construcción de un Objeto de Enseñanza. Integración Curricular

H. Caraballo[1], C. Gonzalez[1,2], M. Ponce[3],
[1] Departamento de Ciencias Exactas, Facultad de Ciencias Agrarias y Forestales, Universidad Nacional de LaPlata.
[2] Departamento de Ciencias Básicas, Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de LaPlata.
[3] Departamento de Ingeniería Agrícola y Forestal, Facultad de Ciencias Agrarias y Forestales, UN LP.
Calle 60 y 119 La Plata (1900)
caraballohoracio@gmail.com, ceciliazgonzalez@gmail.com, marianojulioponce@gmail.com

Resumen. En este trabajo presentamos el diseño de material didáctico realizado por docentes de los cursos de Mecanización Agraria, Matemática y Computación de la Facultad de Ciencias Agrarias y Forestales de la Universidad Nacional de La Plata, lo que genera una integración del conocimiento a transmitir que abarca diferentes planos. El material producido se presenta como un objeto de enseñanza permitiendo su utilización desde cualquiera de los cursos con distintos objetivos y metodologías. Entendemos por Objeto de Enseñanza a un conjunto de recursos que puede ser utilizado, en diversos contextos por distintos docentes, con un propósito educativo y está constituido por, al menos, los siguientes componentes: contenidos, actividades de aprendizaje, elementos de contextualización y metadatos. El tema técnico consiste en generar una simulación dinámica del corte de dos cuchillas que giran en un plano en función de la velocidad angular, la distancia entre los ejes de giro y la velocidad de avance.

Palabras Clave: Integración curricular, Objetos de enseñanza, Modelos matemáticos, Simulación.

1 Introducción

El punto de partida de la construcción de este objeto de enseñanza (OE) es la necesidad de explicar el corte que producen una o varias cuchillas giratorias, como las de la plataforma de corte de un tractor. Se busca entender los efectos que tienen la velocidad angular de las cuchillas, la velocidad de avance del tractor y la distancia entre los ejes de giro. El tema se puede presentar con mayor o menor desarrollo matemático, pero en cualquier caso requiere un proceso de imaginación y visualización que constituye un obstáculo importante para los alumnos. Un complemento didáctico muy eficaz en la presentación del tema es el uso de una simulación dinámica en la que se controlan los parámetros de interés y se ven las áreas de corte como resultado. Esta simulación se obtiene con un software de matemática dinámica.

En esta tarea participaron docentes de los cursos de Mecanización Agraria, Matemática y Computación de las carreras de Ingeniería Agronómica e Ingeniería Forestal. Mecanización Agraria es una materia de cuarto año, Matemática es una materia de primer año y Computación ofrece cursos optativos que se pueden tomar en distintos años de la carrera. El hecho de que se utilice una construcción didáctica estructurada como OE permite una integración curricular vertical. Los recursos didácticos se pueden utilizar desde los distintos cursos de modos diferentes.

2 Marco teórico

El contexto en el que se estructura la construcción didáctica tiene cuatro aspectos a considerar. En primer lugar, la forma de armar el material y los métodos como un OE, este es un aspecto innovador del trabajo, permite diferentes miradas sobre el tema y la integración curricular vertical tanto en la propia construcción de los recursos, así como también en su utilización. Lo segundo que se resume es el aspecto técnico del problema que consiste en estudiar la rototraslación de un segmento y la superficie barrida. Luego se hacen algunas consideraciones, respecto del problema técnico, referidas a una plataforma de corte de dos cuchillas. Por último, se especifican algunas cuestiones relacionadas al programa elegido para generar la simulación y a la forma de publicación en línea del material del OE.

2.1 Objetos de Enseñanza

Un Objeto de Enseñanza se define como un conjunto de recursos que puede ser utilizado, en diversos contextos por distintos docentes, con un propósito educativo y está constituido por, al menos, los siguientes componentes: contenidos, actividades de aprendizaje, elementos de contextualización y metadatos. Un OE se transforma en un método de enseñanza cuando se lo lleva al aula. [1]

Algunas características de los OE, la mayoría compartidas con los Objetos de Aprendizaje [2] [3] [4] que nos interesa destacar son:

- Intención didáctica específica. Apuntan a un propósito de aprendizaje que es claramente definido en el objeto.
- Apertura. Lo cual implica la posibilidad de compartirlos con los demás brindando la oportunidad de acceso al conocimiento y generando recursos que pueden ser mejorados por parte de quienes los utilizan.
- Posibilidad de una construcción activa y colaborativa del conocimiento.
- Actividades didácticas centradas en el estudiante y mediadas por el objeto en manos del docente.
- Apoyo de la propuesta didáctica a partir de distintas piezas de software libre diseñado para educación matemática o como auxiliares para la misma.
- Residencia en repositorios, sitio Web, aulas virtuales, blogs, etc. con el propósito de facilitar su catalogación, almacenamiento, búsqueda y recuperación.
- Accesibilidad. Se puede acceder a ellos con una conexión a Internet a través de un navegador.
- Metadatos. Información sobre el contenido del objeto, que facilita su reutilización.
- La utilización que se hace de ellos. Están pensados para que los utilice un docente en el aula.
- La reutilización por el propio docente o por otros docentes en otros contextos.
- La posibilidad de reciclar el objeto, actualizarlo, modificarlo, etc. por parte del autor del objeto o por otro docente que decida hacerlo.

Si bien los Objetos de Enseñanza tienen características similares a los Objetos de Aprendizaje hay una diferencia central referida al destinatario, ya que están pensados específicamente como insumos para docentes. Asimismo, un OE puede contener uno o varios objetos de aprendizaje.

En general un OE se estructura sobre una base HTML, este soporte permite la existencia en línea del objeto. Tiene metadatos (se describen a continuación) y un sistema de archivos de distintos tipos con contenidos, actividades, contextualización, etc. En otras palabras, un OE se piensa como una estructura empaquetada y etiquetada en un repositorio en línea.

Los metadatos son los que permiten identificar el objeto y es posible tomar el Learning Object Metadata (LOM) [5] como estándar para los OE, es una especificación que define un conjunto de etiquetas que se estructuran en las siguientes categorías:

- General: agrupa la información general que describe un objeto en su conjunto.
- Ciclo de vida: describe la historia y estado actual de un objeto, así como aquellas entidades que han intervenido en su creación y evaluación.
- Meta-metadatos: describe el propio registro de metadatos. Describe como puede ser identificada una instancia de metadatos, quién la creó, cómo, cuándo y con qué referencias.
- Técnica: describe los requisitos y características técnicas del objeto.
- Uso Educativo: describe las características educativas y pedagógicas fundamentales del objeto. Concretamente, es la información didáctica esencial para aquellos docentes involucrados en una experiencia educativa de calidad.
- Derechos: describe los derechos de propiedad intelectual y las condiciones de uso aplicables al objeto.
- Relación: describe las relaciones existentes, si las hubiese, entre un objeto y otro. Para definir relaciones múltiples deben utilizarse varias instancias de esta categoría. Si existen varios objetos con los cuales está relacionado, cada uno de ellos tendrá una instancia propia de esta categoría.
- Anotación: proporciona comentarios sobre la utilización pedagógica del objeto, e información sobre quién creó el comentario y cuando fue creado. Esta categoría permite a los educadores compartir sus valoraciones sobre el objeto, recomendaciones para su utilización, etc.
- Clasificación: describe dónde se sitúa el objeto dentro de un sistema de clasificación concreto. Para definir múltiples clasificaciones, deben utilizarse múltiples instancias de esta categoría. Las etiquetas pueden rellenarse con dos tipos de valores, o bien valores correspondientes a vocabularios controlados con un formato determinado o bien valores de texto libre.

2.2 Rototraslación de un segmento

El problema central es entender cuál es la superficie de corte que produce una cuchilla de giro horizontal que se traslada, pensemos como caso sencillo de visualizar el de una cortadora de césped. Hay que aclarar que por motivos de sencillez se modeliza la mitad de la cuchilla como un segmento que tiene uno de sus extremos en el eje de rotación y longitud igual a uno. La abstracción matemática del tema empieza considerando la rotación y traslación del punto más alejado del eje del segmento. Si la frecuencia (cantidad de revoluciones en la unidad de tiempo) es f y la velocidad de avance es v la curva en forma paramétrica para el punto en cuestión es:

$$\mathrm{r(t)} = \langle \cos(2\pi f\ t) + vt\ , \mathrm{sen}(2\pi f\ t)\rangle \tag{1}$$

Tomando arbitrariamente la frecuencia igual a dos y la velocidad igual a uno la curva que describe una de las puntas de la cuchilla está representada en la Fig.1. Si la frecuencia es igual a uno y la velocidad igual a dos la curva que describe la punta de la cuchilla es, ahora, la de la Fig.2. El tiempo que transcurre en los dos casos es de tres unidades. El eje de rotación parte desde el origen coordenado y avanza sobre el eje de abscisas. En el primer caso el grafico es simple de interpretar y el corte resulta aceptable, en el segundo caso el corte es malo y no es tan fácil entender la acción de la cuchilla.

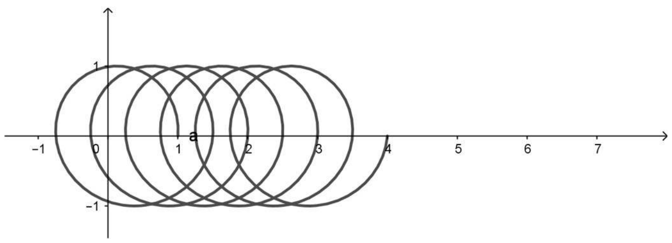


Fig. 1. La gráfica representa la trayectoria de la punta de la cuchilla cuando la frecuencia es 2, la velocidad es 1 y el tiempo es de 3 unidades.

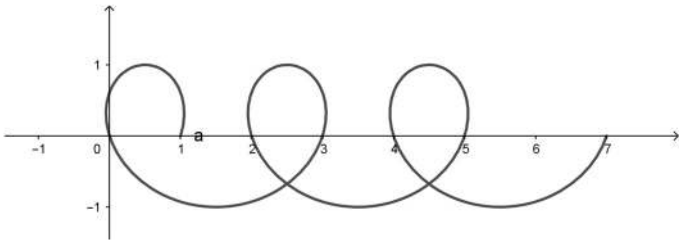


Fig. 2. La gráfica representa la trayectoria de la punta de la cuchilla cuando la frecuencia es 1, la velocidad es 2 y el tiempo es de 3 unidades.

Es mejor ver el grafico del segmento que representa a la mitad de la cuchilla en una sucesión de pasos a lo largo del tiempo. Para esto es muy fácil utilizar software de matemática dinámica. El tratamiento matemático se basa en las ideas anteriores. Se define un punto sobre el eje que se traslade con velocidad v y otro punto (una de las puntas de la cuchilla) que rote con una frecuencia f respecto de éste y se traslade con la misma velocidad. Llamando A y B a los puntos su definición es:

$$\mathrm{A}(vt, 0) \tag{2}$$

$$\mathrm{B}\big(\cos(2\pi f\ t) + vt, \mathrm{sen}(2\pi f\ t)\big) \tag{3}$$

Luego se determina el segmento entre A y B. Se definen adecuadamente los parámetros: *f, v, t*. De este modo se logra una simulación adecuada.

La Fig.3 es una captura de la simulación, se pueden elegir la frecuencia, la velocidad y el intervalo de tiempo. Animando este último se puede ver la evolución del segmento para cualquier elección de parámetros que se haga. Con estos elementos básicos falta agregar el otro segmento que complete la cuchilla y luego agregar una cuchilla más. Con las dos cuchillas aparece otro parámetro, la separación de los ejes de giro, pudiéndose estudiar también la sincronización de fase.

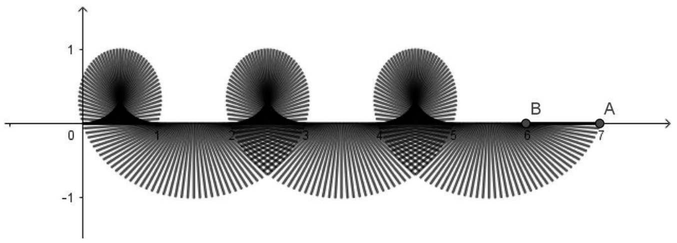


Fig. 3. Representación de una sucesión de pasos del segmento que representa a media cuchilla cuando la frecuencia es 1, la velocidad es 2 y el tiempo es de 3 unidades.

2.3 Plataforma de corte con dos cuchillas

El proceso de cosecha de plantas forrajeras ocurre en tres etapas: corte, acondicionado y empaquetado [6]. De las posibles máquinas capaces de intervenir en la primera etapa, las más difundidas, tanto a nivel nacional como internacional, son aquellas que realizan el corte de forma libre, es decir, mediante una cuchilla que gira respecto a un eje. En este mecanismo la calidad del corte, entendida como la definición en la separación de las fibras vegetales, depende de la velocidad de corte de la cuchilla y el filo de la misma [7] [8]. La velocidad de corte es la resultante de la velocidad tangencial de la cuchilla y de la velocidad de avance o desplazamiento de la máquina.

La velocidad de avance influye en la cantidad de forraje a cortar por cada cuchilla en su movimiento circular, además de limitar zonas desfavorables, donde el forraje es cortado en un momento o situación perjudicial, existiendo la posibilidad de no ser cortado. [9]

En este trabajo se estudia en particular una plataforma de corte con dos cuchillas como la que muestra la Fig.4

Fig. 4. Plataforma de corte con dos cuchillas vista desde abajo. En orden de marcha las cuchillas giran en un plano paralelo al suelo.

2.4 Software y entorno de publicación

La elección del programa para generar la simulación es GeoGebra, un software libre de matemática para la educación en todos sus niveles. Disponible en múltiples plataformas. Reúne dinámicamente, aritmética, geometría, álgebra y cálculo en un único entorno, sencillo a nivel operativo. Ofrece representaciones diversas de los objetos desde cada una de sus posibles perspectivas: vistas gráficas, algebraicas, estadísticas y de organización en tablas, planillas y hojas de datos dinámicamente vinculadas. [10]

El sitio oficial de GeoGebra (https://www.geogebra.org/) ofrece un repositorio para publicar recursos didácticos (https://www.geogebra.org/materials) en este lugar es posible subir los materiales y métodos que forman parte del OE que presentamos en estas notas.

3 La simulación

A continuación, se detalla el modelo matemático sobre el que se construye la simulación y luego la implementación en GeoGebra propiamente dicha.

3.1 Modelo matemático

Se modeliza la rototraslacion de las dos cuchillas considerando que cada una de ellas esta representada por dos segmentos que tienen un extremo en común, el eje de giro, y están sobre la misma recta. Los parámetros son:

- *t* es el tiempo.
- *f* es la frecuencia, que es la misma para las dos cuchillas.
- *v* es la velocidad de avance de los ejes.
- *d* es la distancia entre los ejes.

La longitud de cada cuchilla se elige arbitrariamente igual a dos, de este modo la longitud de cada segmento es uno.

Los puntos que representan a los segmentos que simulan a la primera cuchilla son, A el eje de rotación, B y C los extremos. Las definiciones son:

$$\mathrm{A}(vt, 0) \tag{4}$$

$$\mathrm{B}\big(\cos(2\pi f\ t) + vt, \operatorname{sen}(2\pi f\ t)\big) \tag{5}$$

$$\mathrm{C}\big(\cos(2\pi f\ t + \pi) + vt, \operatorname{sen}(2\pi f\ t + \pi)\big) \tag{6}$$

Los puntos que representan a los segmentos que simulan a la segunda cuchilla son, D el eje de rotación, E y F los extremos. Las definiciones son:

$$\mathrm{D}(vt, d) \tag{7}$$

$$\mathrm{E}(\cos(-1)(2\pi f\ t + 3\pi/2) + vt, \operatorname{sen}(-1)(2\pi f\ t + 3\pi/2) + d) \tag{8}$$

$$\mathrm{F}(\cos(-1)(2\pi f\ t + \pi/2) + vt, \operatorname{sen}(-1)(2\pi f\ t + \pi/2) + d) \tag{9}$$

Las diferencias de fase en la definición de los puntos se introducen de modo que las cuchillas comiencen su movimiento de manera perpendicular. El (-1) en las fases de los últimos puntos invierte la rotación de la segunda cuchilla. Estos detalles se introducen para estudiar este tipo particular de configuración. Podrían agregarse más parámetros que permitan ajustar los sentidos de giro y las posiciones iniciales, no se consideran por motivos de simplicidad.

Si bien los argumentos son simples, en el contexto de la enseñanza de la Matemática en los cursos de los primeros años, hay un gran numero de elementos en la construcción: lugares geométricos de puntos en el plano, funciones trigonométricas, traslación, rotación, parametrización de curvas, etc. El OE permite utilizar las partes como ejemplos de aplicación y su posterior integración.

3.2 Simulación en GeoGebra

La construcción es simple, se definen cuatro deslizadores: la frecuencia, la velocidad de avance, la separación entre los ejes de rotación y el tiempo. Este último es el que anima a la simulación siendo los tres primeros parámetros los que se eligen previamente para estudiar los distintos resultados.

Se definen seis puntos teniendo en cuenta lo dicho en el apartado anterior, estos puntos definen cuatro segmentos que representan las dos mitades de cada hoja de corte. En la Fig.5 se muestra la construcción sin el formato definitivo, se eligió un color distinto para cada segmento de modo de ver mas claramente cual es barrido de cada parte de ambas cuchillas.

No se trata de lograr un comportamiento realista de una situación concreta, en este caso no se especifican las dimensiones técnicas habituales. Se trata de comprender el efecto que tiene las distintas elecciones relativas en los parámetros que caracterizan la situación en función de la evolución temporal del sistema. En el resultado mostrado para la simulación el corte es muy malo y no corresponde a situaciones reales de frecuencia de giro y velocidad, lo que se pone de manifiesto es el barrido efectivo de cada mitad de las dos hojas de corte y la animación permite estudiar el detalle de cada tramo. En un sistema más elaborado podrían agregarse las velocidades tangenciales de algunos puntos relevantes de cada cuchilla, se podrían determinar los sentidos de rotación y las posiciones iniciales de los elementos de corte, etc.

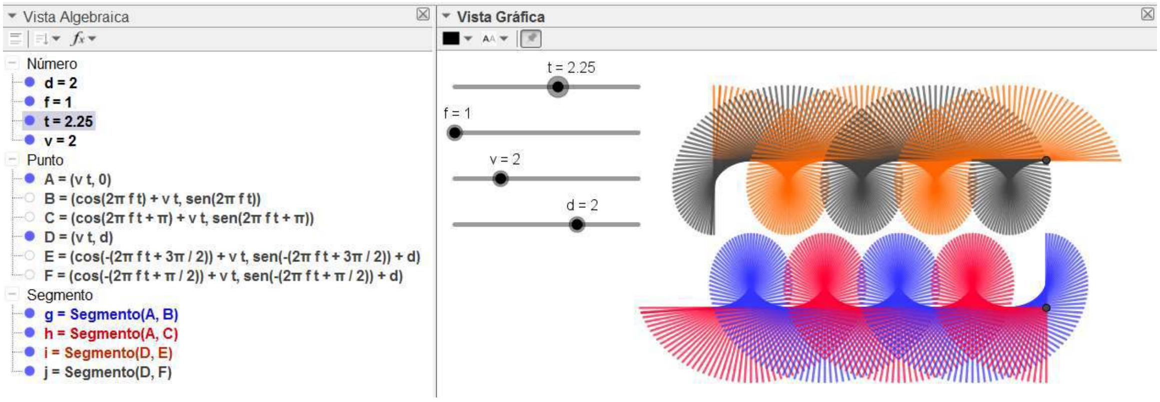


Fig. 5. Vistas gráfica y algebraica de la construcción en GeoGebra. En la vista grafica se ven las zonas barridas por los segmentos que representan a las cuchillas en dos y media unidades de tiempo para la elección hecha de la frecuencia la velocidad y la distancia entre ejes.

Esta construcción se edita adecuadamente para generar el applet que se comparte en línea, en este caso se publica en el repositorio de recursos que ofrece GeoGebra.

4 Construcción e integración

La construcción del OE permite obtener, además de la simulación, el conjunto de elementos que sirven como antecedentes, generando la integración entre la aplicación concreta y los saberes agronómicos, matemáticos e informáticos puestos en juego. Hay un conjunto de contenidos y métodos que pueden tomarse en la totalidad o en partes para generar distintas situaciones didácticas.

4.1 Las partes del OE

En el diseño particular del OE, que se está considerando, hay cuatro clases de elementos básicos:

- Applet. Son las construcciones dinámicas construidas con GeoGebra.
- Guía de actividades. Son documentos en los que se plantean diversas actividades a realizar en el propio contexto del OE o fuera del mismo.
- Contexto didáctico. Son documentos en los que se plantean los distintos aspectos didácticos de cada applet o actividad según corresponda, estos aspectos son parciales ya que los diferentes usos del OE o partes del mismo pueden generar cuestiones no contempladas.
- Instructivos. Estos instructivos son documentos que se utilizan simultáneamente con el software y con la guía del trabajo práctico. Cada instructivo muestra una secuencia de comandos y acciones en la interfase del programa que permite resolver la actividad. En otras palabras, son facilitadores para el uso del software sin ser la propia solución de la actividad propuesta [11].

4.2 Publicación del OE

Las partes mencionadas se publican como un libro de GeoGebra. Los applets se editan en línea o se pueden subir de un modo muy simple desde el programa corriendo en una maquina local. Los documentos se incorporan al libro como archivos pdf. En el libro se pueden agregar otros elementos que mejoran la presentación. Todo lo publicado es de dominio publico en el marco de la licencia de GeoGebra (https://www.geogebra.org/license)

4.3 Insumos didácticos

La simulación es accesible para los alumnos en cualquier momento, antes, durante o después de una clase, en general corre en una computadora, una tableta o un teléfono.

En las clases de Mecanización la simulación puede ser usada como complemento de la exposición del tema agregando un espacio virtual dinámico a la presentación tradicional del tema [12]. También puede ser utilizada como actividad, la tarea para los alumnos puede ser la construcción de la simulación de manera guiada durante una clase o mediante un instructivo de manera asincrónica.

Las partes del OE pueden utilizarse de diversos modos en un curso de Matemática. Los fundamentos de la construcción pueden tomarse de manera fragmentada para culminar con la simulación como ejemplo de aplicación de las partes.

En el curso de Computación se puede partir de la simulación para refinarla, modificarla, ampliarla, etc.

5 Conclusiones y trabajos futuros

En términos matemáticos se estudian un conjunto de temas donde predominan las imágenes visuales (registros gráficos) lo que hace que el uso de una aplicación de matemática dinámica sea muy eficaz.

El uso de tecnología es central en este desarrollo de dos maneras. La primera está relacionada con el uso del software como complemento didáctico. La segunda se relaciona con el hecho de utilizar el software como una herramienta de simulación para un problema concreto.

La definición de OE tiene que ver con la necesidad de generar un marco para poder compartir este tipo de actividades entre docentes. En este sentido, nuestro desarrollo es incipiente. Las alternativas de compartir materiales educativos mediados por tecnología son muchas, pero al estar poco conectadas con una situación didáctica bien definida, se vuelven poco útiles. Los OE pondrían remedio a esta situación.

La publicación de OE en un repositorio propone un conjunto de desafíos complejos. Los problemas técnicos no ofrecen gran dificultad, de una manera u otra es fácil empaquetar y publicar el OE, pero los detalles no son menores y complican la resolución. El estudio y la solución de estas cuestiones es actualmente objeto de desarrollo.

Referencias

1. González, C.; Caraballo, H.: Incorporación de software educativo al aula. Entornos colaborativos locales. *Libro de Actas. IX Congreso de Tecnología en Educación y Educación en Tecnología.* (TEyET 2014), pp. 262-269 (2014).

2. IEEE: Object Metadata. Learning Technology Standards Committee. *IEEE Standard for Learning Object Metadata.* https://ieeexplore.ieee.org/stamp/stamp.jsp?arnumber=1032843. (2002). Accedido en abril de 2018.

3. Chiappe, C.;Segovia, Y.; Rincón, H.: Toward an instructional design model based on learning objects. *Educational Technology Research and Development*, (2007).

4. Del Carmen, Y.; Ruiz, L.; Trujillo, Y.; Ril, Y.: La calidad de los objetos de aprendizaje producidos en la universidad de las ciencias informáticas. *Edutec, Revista Electrónica de Tecnología Educativa*. Núm. 36 (2011)

5. IEEE: Object Metadata. Learning Technology Standards Committee. *IEEE Standard for Learning Technology—Extensible Markup Language (XML) Schema Definition Language Binding for Learning Object Metadata.* https://ieeexplore.ieee.org/stamp/stamp.jsp?arnumber=1532505. (2005) Accedido en abril de 2018.

6. Linares, P.; Vazquez, J.: Maquinaria de Recolección de forrajes. Ministerio de Agricultura, Pesca y Alimentación-Ediciones Mundi-Prensa, Madrid. (1996)

7. Srivastava, A.K.; Goering, C.E.; Rohrbach, R.P.: Engineering principles of agricultural machines. American Society of Agricultural Engineers, St. Joseph. (1993)
8. Persson, S.: Mechanics of cutting plant material. American Society of Agricultural Engineers, St. Joseph. (1987)

9. Bainer, R.; Kepner, R.; Barger, E.: Principles of farm machinery. John Willey and Sons, Inc, New York. (1982)

10. Hohenwarter, M.: ¿Qué es GeoGebra? *GeoGbrea institute of California*. http://geogebraca.org/markus-hohenwarter-about-geogebra-blog/ Accedido en marzo de 2018

11. González, C. Caraballo, H.: Sistemas de cálculo simbólico. Instructivos. *Acta de la IX CAREM*. Buenos Aires. 2012.

12. González, C. Kleiman, D. Caraballo H.: Transformada de Laplace: una alternativa didáctica. *Acta del XVIII EMCI*. Buenos Aires. 2014.

Conflictos semióticos en el escenario de Matemática Discreta

María Andrea Aznar[1], María Laura Distéfano[1], José Campos[1]
[1] Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de Mar del Plata
Juan B. Justo 4302 , Mar del Plata, Buenos Aires, Argentina.
maznar@fi.mdp.edu.ar, mldistefano@fi.mdp.edu.ar, josecampos10386@gmail.com

Resumen. En esta comunicación se presentan conflictos semióticos detectados en distintos momentos en el desarrollo del tema conectividad de grafos correspondiente a la asignatura Matemática Discreta. Se describen acciones llevadas a cabo para procurar remediarlos. Como resultado de esas acciones se observa la superación de los conflictos semióticos por parte de la mayoría de los estudiantes. También se plantea la necesidad de promover la implicación de los estudiantes y la interacción entre ellos. Finalmente, se reflexiona sobre la posibilidad de utilizar los indicadores propuestos por el Enfoque Ontosemiótico para analizar y modificar las trayectorias didácticas propuestas en procura de la resolución de conflictos semióticos.

Palabras Clave: Conflictos semióticos, Matemática Discreta, Enfoque Ontosemiótico

1 Introducción

La importancia de los distintos sistemas de representación de objetos matemáticos (numérico, algebraico, gráfico, etc.) para el desarrollo y el aprendizaje de las matemáticas ha sido consensuada en distintos foros y medios de difusión de profesionales de las matemáticas y de su enseñanza. El hecho de que el quehacer matemático sea de naturaleza simbólica ha sido señalado como una de las razones por la que la semiótica ha adquirido notable interés en el campo de la educación matemática [1]

Particularmente, Duval [2, 3] demostró que las transformaciones entre representaciones semióticas, internas a un registro o entre distintos registros, condicionan la aprehensión conceptual.

Coordinar representaciones de un objeto matemático no sólo es una condición necesaria para su conceptualización sino que es relevante como habilidad para la tarea de resolución de problemas pues permite al resolutor poder seleccionar la representación que más lo acerque a la resolución. En algunos casos, como el que se tratará en este trabajo, esta tarea requiere de la habilidad de visualizar, es decir, interpretar, usar y reflexionar sobre figuras, imágenes o diagramas, para comunicar información, pensar y desarrollar ideas y avanzar en la comprensión [4].

La relevancia de adquirir la habilidad de coordinar y analizar qué información aportan las distintas representaciones de un objeto matemático se subraya en el caso del futuro ingeniero. Esto es bajo la idea de que dichas habilidades están vinculadas a la de poder seleccionar la mejor forma de representar los datos para resolver un problema de ingeniería. En particular, en el caso del ingeniero informático la selección de formas eficientes de representar los datos requiere fomentar las habilidades mencionadas.

En las distintas prácticas matemáticas comprendidas en la asignatura Matemática Discreta se requiere el uso y dominio de interpretación de distintos sistemas de representación semiótica: lenguaje coloquial, lenguaje algebraico, lenguaje lógico, matricial, figural, etc. Así lo destacan Có, del Sastre, y Panella [5] quienes señalan como de especial importancia el uso de representaciones, especialmente gráficas, en la enseñanza y el aprendizaje de contenidos de Matemática Discreta.

Desde el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemática (EOS) [6] una representación semiótica es un objeto matemático primario, al que se le asigna un significado en función de las prácticas matemáticas que con dicho objeto se realizan o a partir de las cuales dicho objeto emerge como una necesidad.

A lo largo del desarrollo de una trayectoria de enseñanza se pueden producir conflictos de significado que dificultan o contaminan la construcción del significado por parte del estudiante, por lo cual es importante poder identificarlos para poder plantear y llevar a cabo acciones remediales destinadas a subsanarlos. Dichos conflictos son denominados por el EOS [6] *conflictos semióticos*.

La asignatura Matemática Discreta integra el Plan de Estudios de la carrera de Ingeniería Informática de la Universidad Nacional de Mar del Plata. En el transcurso de su implementación en el primer cuatrimestre del 2018 se han detectado distintos conflictos semióticos.

En esta comunicación se describen algunos conflictos semióticos relativos al tema conectividad de grafos y las distintas representaciones involucradas; los mismos fueron revelados en distintas instancias del proceso de enseñanza aprendizaje y se comparten con la intención de plantear formas de abordarlos y cuestionar las propias prácticas didácticas intentando mejorarlas. A continuación se puntualizan brevemente ciertos conceptos teóricos utilizados.

2 Marco Teórico

Los lineamientos teóricos que se han tomado en cuenta corresponden al Enfoque Ontológico y semiótico del conocimiento y la instrucción matemática (EOS). Esta propuesta teórico-metodológica, desarrollada por Juan Godino, Carmen Batanero y Vicenç Font [7] procura articular diversos enfoques de investigación de la Didáctica de la Matemática en un modelo unificado de la cognición y la instrucción que contemple las distintas facetas implicadas en la matemática, su enseñanza y su aprendizaje. Entre las teorías contempladas por esta propuesta se encuentra la Teoría de Representaciones Semióticas de Duval, ya que el EOS reconoce el papel importante que juegan las diferentes representaciones ostensivas y las traducciones entre ellas en la comprensión matemática [6].

El EOS considera a la Matemática en su triple aspecto como actividad de resolución de problemas socialmente compartida, como lenguaje simbólico y como sistema conceptual lógicamente organizado. Así, a partir de la noción primitiva de situación-problema, se definen los conceptos teóricos de práctica, objeto (personal e institucional) y significado, que subrayan el triple aspecto referido [7].

Se define como *práctica matemática* a toda actuación o expresión (verbal, gráfica, etc.) realizada por alguien para resolver problemas matemáticos, comunicar a otros la solución obtenida, validarla o generalizarla a otros contextos y problemas [7]. Una práctica matemática puede ser de índole *personal* o compartida en el seno de una *institución*. Dentro de este marco, se considera que la institución está conformada por las personas que comparten una misma clase de situaciones problemáticas. En el seno de tal institución los sujetos dialogan, consensuan y regulan sus modos de expresión y actuación ante cierta clase de problemas y, de esas prácticas compartidas, emergen *conocimientos institucionales*, los cuales a su vez condicionan los modos de pensar y actuar de los miembros de estas instituciones [8].

A partir de la anterior discriminación de significados, el proceso de aprendizaje se define como un acercamiento entre significados personales e institucionales: "El aprendizaje de un objeto O por un sujeto se interpreta como la apropiación de los significados institucionales de O por parte del sujeto; se produce mediante la negociación, el diálogo y acoplamiento progresivo de significados". ([7], p.22)

Para el estudio de un proceso de enseñanza aprendizaje, esta teoría pone el énfasis en la detección de *conflictos semióticos*, planteados como discordancias entre los significados atribuidos a una expresión por dos sujetos, ya sean personas o instituciones. Los conflictos son llamados *epistémicos*, cuando la disparidad se plantea a nivel de la institución matemática; cuando se producen entre prácticas que forman parte del significado personal de un mismo sujeto, se denominan *cognitivos*. Por otra parte, si la disparidad se produce entre dos sujetos diferentes en interacción comunicativa se les aplica el nombre de *interaccionales*. [6]

Según el momento del proceso de instrucción en el que se manifiestan los conflictos semióticos son clasificados como *potenciales* (a priori del proceso), *efectivos* (durante el proceso de instrucción) y *residuales* (a posteriori),

Para valorar la idoneidad didáctica de un proceso de instrucción Godino, Contreras y Font [9] proponen seis aspectos parciales: *idoneidad epistémica, cognitiva, mediacional, emocional, interaccional* y *ecológica*. Se pueden caracterizar brevemente:

La Idoneidad epistémica observa el grado de representatividad de los significados institucionales implementados (o pretendidos), respecto de un significado de referencia propio de la comunidad científica.

La Idoneidad cognitiva contempla el grado en que los significados pretendidos/ implementados están en la zona de desarrollo potencial de los alumnos respecto de sus conocimientos previos, así como la proximidad de los significados personales logrados a los significados pretendidos/ implementados.

La idoneidad interaccional examina si las configuraciones y trayectorias didácticas permiten, por una parte, identificar conflictos semióticos potenciales y por otra parte permitan resolver los conflictos que se producen durante el proceso de instrucción.

La Idoneidad mediacional observa el grado de disponibilidad y adecuación de los recursos materiales y temporales necesarios para el desarrollo del proceso de enseñanza aprendizaje.

La Idoneidad afectiva se vincula con el grado de implicación (interés, motivación, …) del alumnado en el proceso de estudio. Está relacionada tanto con factores que dependen de la institución como con factores que dependen básicamente del alumno y de su historia escolar previa.

La Idoneidad ecológica atiende al grado en que el proceso de estudio se ajusta al proyecto educativo del centro, la escuela y la sociedad y a los condicionamientos del entorno en que se desarrollaron.

3 Descripción de conflictos semióticos

La asignatura objeto de esta comunicación figura en el cuarto cuatrimestre del Plan de estudios de la carrera de Ingeniería Informática de la Universidad Nacional de Mar del Plata; durante dicho cuatrimestre los estudiantes cursan también la primera asignatura de Programación, la segunda asignatura de Física y la tercer asignatura de Análisis Matemático. Matemática Discreta está enmarcada dentro del área Álgebra y de hecho los estudiantes han cursado dos asignaturas de esa área en cuatrimestres anteriores.

En las trayectorias didácticas se proponen al alumnado actividades de aprendizaje a desarrollar en ámbitos áulicos y extra-áulicos. Las correspondientes al ámbito áulico tienen lugar en dos instancias semanales: la clase predominantemente teórica y la clase práctica, de dos horas cada una. Al ámbito extra-áulico corresponden las tareas de estudio sobre el material proporcionado por la cátedra o sobre la bibliografía recomendada, y resolución de tareas y/o problemas proporcionados en una Guía de Trabajos Prácticos o en las clases teóricas. En la clase teórica el docente desarrolla contenidos con modalidad expositivo-dialógica. Se presentan conceptos, propiedades y demostraciones, se plantean problemas breves para resolver en la clase y algunos para resolver en momentos extra-áulicos y discutirlos en clase. La clase práctica se lleva a cabo con modalidad de taller y se subraya el rol del docente como facilitador. Los alumnos trabajan o realizan consultas sobre las actividades propuestas en la Guía de Trabajos Prácticos con problemáticas resueltas en tiempos áulicos y extra-áulicos. El docente realiza devolución de los problemas a los estudiantes orientándolos con preguntas y coordina puestas en común en el pizarrón donde son institucionalizados y recalcados los significados fundamentales cuya apropiación por parte del alumno se pretende.

A continuación se describen algunos conflictos semióticos

3.1 Durante una clase teórica

El escenario de revelación del conflicto fue el de una clase teórica, la cual se desarrolla de manera dialógica. Por el momento en que se produjo, puede clasificarse al conflicto semiótico como *efectivo*. Se abordaba el tema Conectividad en grafos. En unidades anteriores se había estudiado el tema relaciones en un conjunto, desarrollando en particular las relaciones de orden y las de equivalencia.

Habiendo explicitado la definición de grafo conexo se mostraban ejemplos extraídos del libro de Epps ([10], p. 646) y se señalaba en ellos la partición del grafo como se expone en la Fig. 1. A partir de la muestra de los ejemplos se pudo observar una partición del conjunto de vértices lo que podía anticipar la presencia de una relación de equivalencia cuyas clases configuran las componentes conexas del grafo.

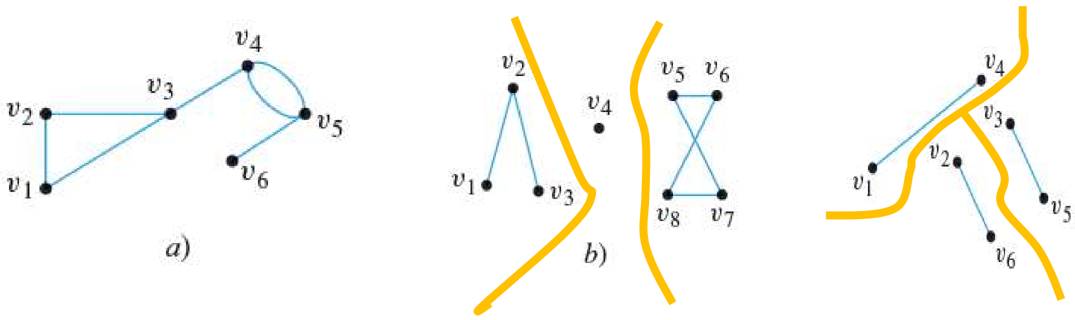


Fig. 1. Ejemplos de grafos dados extraídos del Libro de Epp [10] y señalamiento de partición.

A partir de la exposición de los ejemplos y la anticipación de la relación de equivalencia, se presentó la definición de la relación de accesibilidad R* propuesta en Caicedo Barrero, Wagner de García, y Méndez Parra [11]:

Sea G=(V,E) un grafo no dirigido. Sean x,y∈V. Se define la relación de accesibilidad R* en V. xR*y sií x=y o existe un camino entre x e y. Se dice que y está conectado con x ó que es alcanzable desde x (como es grafo x alcanzable desde y)

Mientras se dialogaba sobre las características que debía tener R* un estudiante preguntó "¿por qué la relación R* es reflexiva?". En el momento de la clase la docente respondió expresando que se cumplía la condición x=y que correspondía a la situación de acceso trivial de cada vértice consigo mismo. Continuó el desarrollo de la clase y al finalizar, el mismo estudiante comentó que "el grafo no tiene bucles" aludiendo al motivo de su interrogante. Esa frase alertó sobre la naturaleza del conflicto semiótico: la confusión entre la relación representada por el grafo y la relación R*.

Se puede considerar que un grafo G sin aristas paralelas es la representación gráfica de una relación R_G, en la que se cumple que xR_G y si y solamente sí los vértices x e y son adyacentes mediante una arista. De acuerdo con este planteo, si se observa el grafo del ejemplo b) de la Fig. 1, $v_1 R_G v_2$ pero v_1 no está relacionado con v_3 por la relación R_G. Por otra parte, si se considera la relación R*, $v_1 R^* v_2$ pues hay por lo menos un camino entre ellos, por ejemplo el camino de longitud 1: v_1 - v_2. Pero también ocurre que $v_1 R^* v_3$ pues hay por lo menos un camino entre ellos, por ejemplo el camino de longitud 2: v_1 - v_2 – v_3 .

Para buscar subsanar el conflicto y aprovechar para integrar algunas nociones relativas a conectividad vistas en la clase, se les planteó a los estudiantes una tarea de tipo conceptual para resolver en sus hogares y traerla en la próxima clase. Es importante recalcar que la tarea fue de naturaleza optativa, ya que no se había planteado al principio del cuatrimestre la valoración con calificación de este tipo de tareas.

3.2 Una tarea para desarrollar en tiempos extra-áulicos

En la Fig. 2 se muestra la actividad propuesta a los estudiantes. Se usó uno de los grafos expuestos en la clase teórica para analizar distintos conceptos y representaciones semióticas en relación a la conectividad.

En principio, en el inciso a) se les pide obtener la matriz de adyacencia del grafo, para hacer presente otra forma de representación del grafo.

El inciso b) solicita la obtención de la matriz de la relación de accesibilidad R*, M_{R^*} , y verificar en la matriz las condiciones de una relación de equivalencia esto es: R* es reflexiva, dado que la matriz Id(8) precede a M_{R^*} , R* es simétrica, dado que la matriz $(M_{R^*})^t = M_{R^*}$ y, R* es transitiva, dado que el producto booleano(M_{R^*}□ M_{R^*}) precede a M_{R^*}. Estas actividades fueron solicitadas para que el estudiante profundice su conocimiento de la matriz M_{R^*} y lo que representa, al mismo tiempo que integre con los temas vistos de relaciones de equivalencia.

Luego se plantean preguntas que apuntan a diferenciar la relación figurada por el grafo de la relación R* . En el caso del inciso b) i. apuntando a detectar las diferencias entre sus representaciones matriciales ; en b) ii. se retoma la pregunta del estudiante durante la clase.

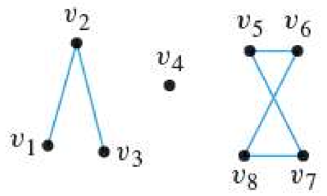
Posteriormente, en los incisos c) y d) se realizan preguntas que apuntan a fomentar la interpretación de las potencias de la matriz de adyacencia.

En los incisos e) iii. y e) iv. se procuró contribuir a la vinculación entre la matriz C y la matriz de la relación de accesibilidad entre dos vértices.

Actividad conceptual

Considerar el grafo G=(V,E) representado.

a) Representar su matriz de Adyacencia A
b) Sean x,y∈V. Se define **la relación de accesibilidad R*** en V. xR*y sií x=y o existe un camino entre x e y. Representar la matriz de la relación M_{R^*}. Verificar matricialmente que esta relación es de equivalencia.
   i. ¿Es cierto que si A[i,j]=0 entonces M_{R^*}[i,j]=0?
   ii. Si, como dijo su compañero en la teoría, el grafo G No tiene bucles ¿por qué se cumple la reflexividad de R*?
c) Representar todos los caminos posibles de longitud 3 entre v_5 y v_6 .
d) Obtener A^3 y vincular con lo obtenido en c)
e) Considerar la matriz $C=A+A^2+\ldots+A^7$. ¿Qué información da acerca del grafo?
   i. Sin calcular C ¿Puede anticipar el valor de C[3,5]?
   ii. Sin calcular C ¿Puede anticipar el valor de C[1,3]?



b)

iii. ¿Es cierto que si $M_{R*}[i,j]=0$ entonces $C[i,j]=0$?
iv. Si $C[i,j]=15$ entonces ¿cuánto vale $M_{R*}[i,j]$?

Fig. 2. Actividad Conceptual propuesta.

Así en e) iii) la implicación "Si $M_{R*}[i,j]=0$ entonces $C[i,j]=0$" es verdadera pues, si no hay caminos que conecten v_i con v_j con $i \neq j$ entonces no hay caminos de longitudes 1 a 7 por lo que C será nula en esa posición.

En e) iv. Se espera que los estudiantes deduzcan que si $C[i,j]=15$ hay caminos entre los vértices v_i y v_j por lo que v_i R* v_j lo que se traduce en $M_{R*}[i,j]=1$

En principio debe tenerse en cuenta que pocos estudiantes resolvieron la tarea (8 de un total de 21 asistentes a dicha clase) y esto es indicativo de la necesidad de darle una valoración evaluativa. Se analizaron y corrigieron las respuestas de las tareas entregadas y se les entregó nuevamente en la próxima clase dialogando con cada uno las correspondienes aclaraciones.

Los alumnos que entregaron su respolución respondieron de forma correcta los incisos a, b, c y d.

Algunos estudiantes no pudieron resolver el inciso e) ii. Para responderlo se debían contar los caminos de longitud 1, de longitud 2, de longitud 3, de longitud 4, de longitud 5, de longitud 6 y de longitud 7 entre v_1 y v_3. Al hacer la devolución alguno comentó que no pensaba que podera ser "tan artesanal" la resolución, lo que alude a que la expectativa del estudiante era obtenerlo con alguna fórmula sistemática y no contándolos uno a uno.

En el caso del ítem e) iv, algunos estudiantes perdían en su búsqueda de solución el hecho de que M_{R*} es una matriz booleana por lo cual sólo hay que explorar entre dos posibles valores, 0 o 1. Al perder este hecho buscaban otro tipo de relaciones con el 15 de la componente de la matriz C.

Un caso para destacar es el de un estudiante que invirtió el sentido de la implicación en e) iii.. En su resolución, según se muestra en la imagen de la Fig. 3, respondió: "Es falsa por ejemplo $M_{R*}[4,4]=1$ pero $C[4,4]=0$". En este caso hay un conflicto semiótico pero vinculado al sentido de la proposición y a su valor de verdad.

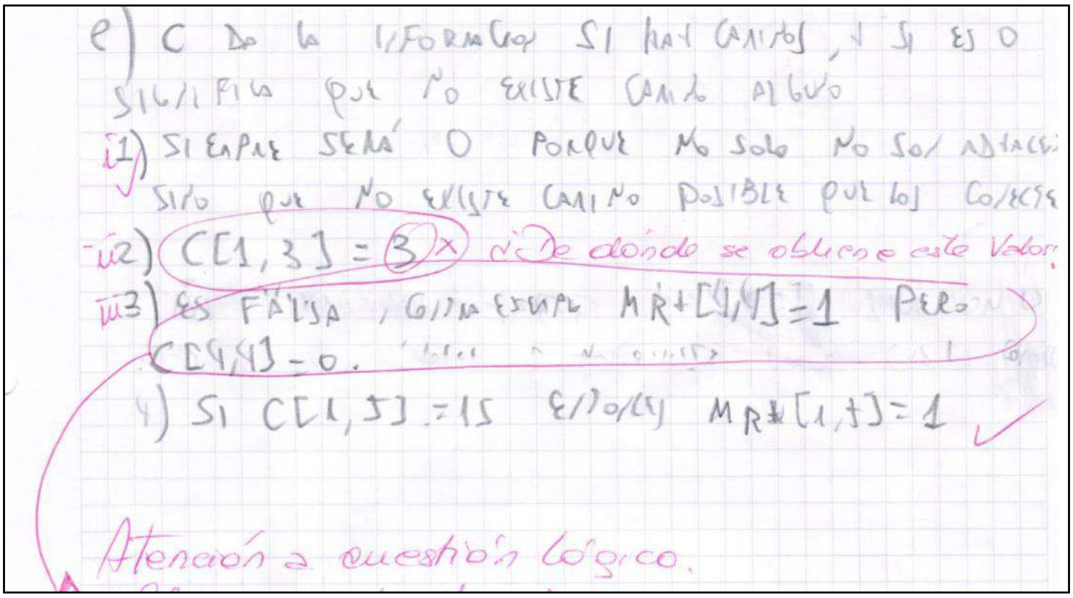


Fig. 3. Conflicto semiótico relativo al sentido de implicación y su valor de verdad.

A continuación se muestran algunos conflictos semióticos detectados en las resoluciones de uno de los ítems de una evaluación.

3.3 Conflictos semióticos detectados en las resoluciones de una evaluación parcial

En la segunda evaluación parcial escrita de la asignatura, en la cual se evaluaba, entre otros, el tema conectividad de grafos se planteó el siguiente ítem:

Representar, si es que existe, un grafo G=(V,E) con las condiciones expresadas: $V=\{v_1, v_2, \dots, v_5\}$ A matriz de adyacencia de G, $C=A+A^2+A^3+A^4$ y R es la relación de accesibilidad. Se pide que: A no tenga filas (columnas) nulas, R* determine 2 clases de equivalencia sobre G y C tenga elementos nulos.*

En caso de existencia representar G y decir cuáles elementos de C serán nulos; en caso contrario, justificar apropiadamente.

En este ítem se pretendió evaluar:

- La interpretación de la condición "A no tenga filas (columnas) nulas" como no existencia de vértices aislados.
- La asociación de la frase "R* determine 2 clases de equivalencia sobre G" al significado G tiene 2 componentes conexas.
- La determinación de los componentes nulos de la matriz C, como aquellos correspondientes a las posiciones [i, j] donde no exista un camino entre el vértice v_i y el vértice v_j.

En general los estudiantes que habían realizado la tarea expuesta en el parágrafo anterior resolvieron adecuadamente este ítem. En resoluciones realizadas por otros estudiantes se manifestaron algunos conflictos semióticos que, si bien se manifiestan en una evaluación, no serán considerados conflictos semióticos *residuales* porque el proceso de enseñanza aprendizaje aún no había concluido dado que las instancias de muestra de evaluaciones y clases de consulta previas a las evaluaciones posteriores, son consideradas parte del proceso.

En la Fig. 4, se muestra la resolución del estudiante A, quien confunde la matriz de Adyacencia A del grafo con la matriz de la relación de accesibilidad R* pero establece adecuadamente la interpretación de la matriz C y asocia las clases de equivalencia con las componentes conexas.

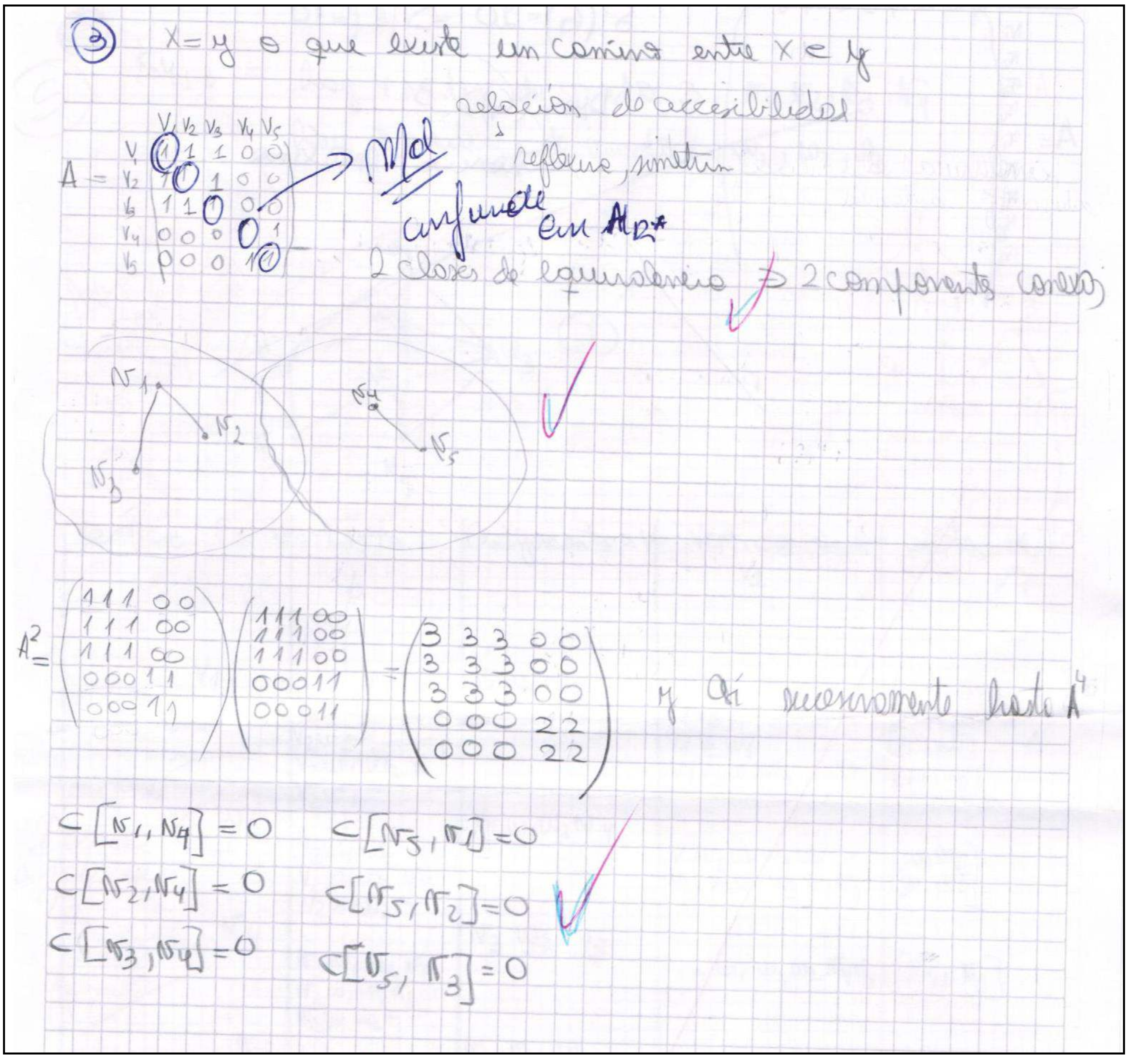


Fig. 4. Resolución del estudiante A.

En el caso de la resolución del estudiante B, que se muestra en la Fig. 5, además de confundir la matriz de la relación R* con la matriz de adyacencia A, no asocia las 2 clases de equivalencia de R* con las componentes conexas del grafo. La interpretación de cuáles serán las componentes nulas de C parece provenir del cálculo algebraico más que de la ubicación de vértices no conectados por ningún camino.

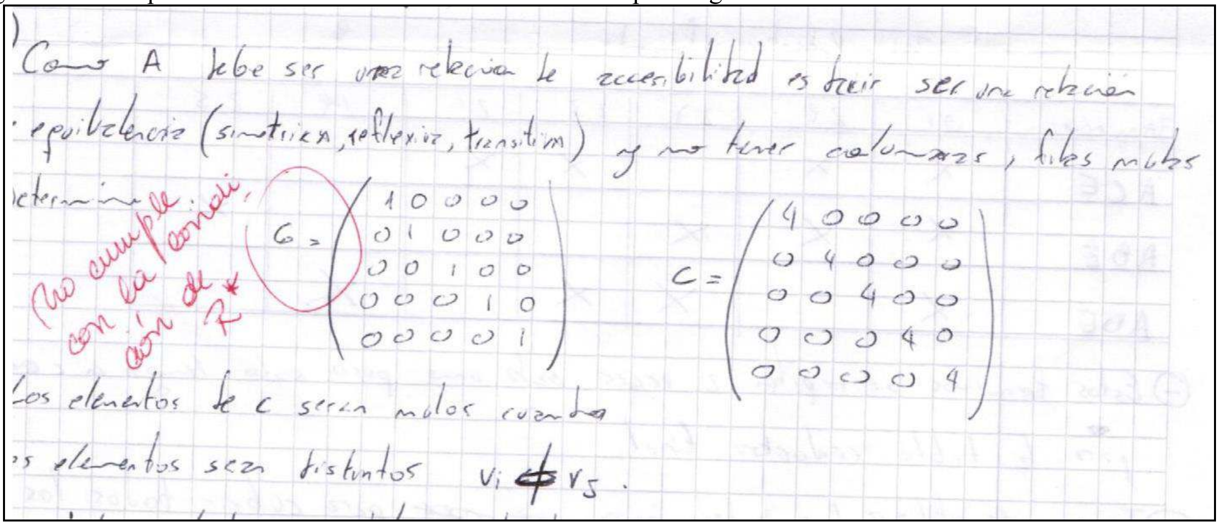


Fig. 5. Resolución del estudiante B

Finalmente, se expone el conflicto semiótico detectado en la resolución del estudiante C expuesta en la Fig. 6. Puede observarse que, si bien interpreta correctamente que si la componente C[n,k]=0 entonces no hay caminos que conecten el vértice v_n con v_k, argumenta que esto indicaría que alguna fila o columna de A debe ser nula. Posiblemente el conflicto provenga de analizar que se necesita alguna fila o columna nula para que el producto que da lugar a la componente A^h[n,k] sea nulo en las distintas potencias h.

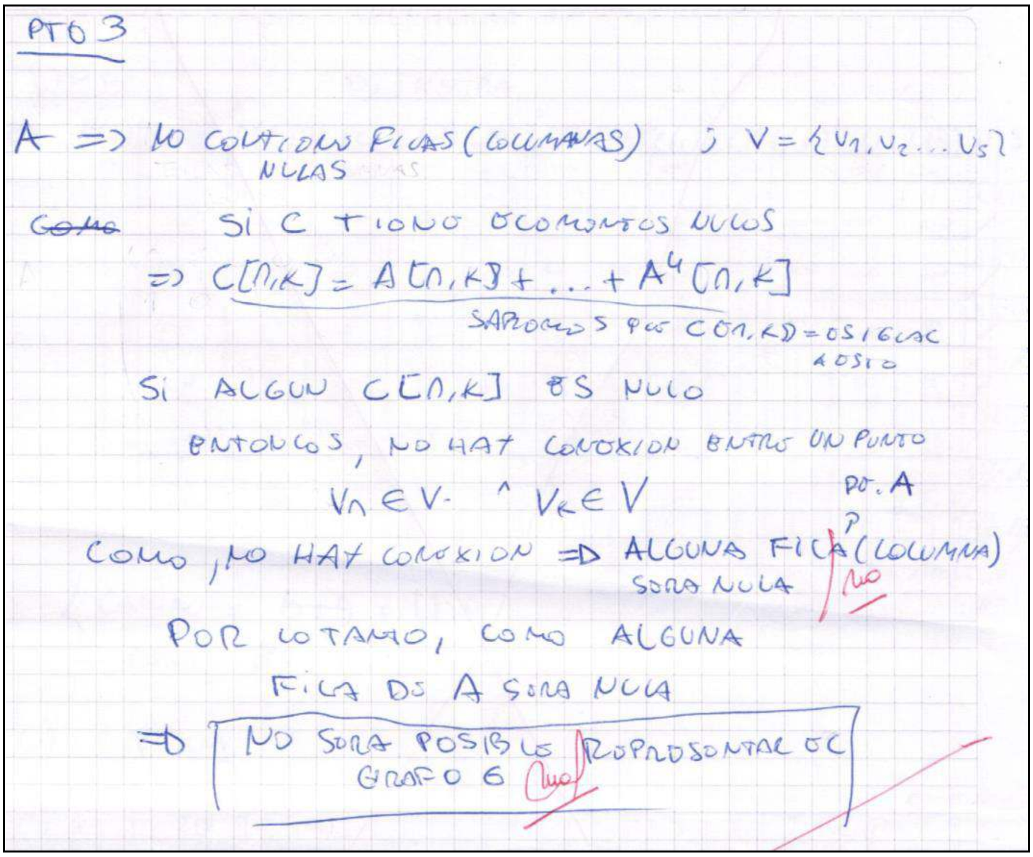


Fig. 6. Resolución del estudiante C

4 Reflexiones finales

Se han descripto distintos conflictos semióticos detectados en diferentes momentos de una trayectoria didáctica. Un primer conflicto fue descubierto al inicio de la trayectoria didáctica, a partir de la pregunta de un estudiante. Si se considera la metáfora de una trayectoria de enseñanza-aprendizaje como un camino donde se proponen prácticas matemáticas para que los estudiantes construyan determinados significados, los conflictos semióticos pueden ser contemplados como sinuosidades en dicho camino. Para llegar a buen destino hay que saber reconocer y "sortear" dichas sinuosidades. Respecto de este primer ejemplo es importante reflexionar sobre los niveles de atención docente para el reconocimiento de estos conflictos. Así, cuando el docente responde a la pregunta con una respuesta "matemáticamente correcta" podríamos considerar que hay un primer nivel de atención sobre el conflicto semiótico, donde el foco está puesto en el objeto matemático. Pero, el cuestionarse "¿Por qué el estudiante se pregunta esto?" implica un segundo nivel de atención, focalizado en el proceso de comprensión del estudiante, más profundo y enriquecedor, para poder proyectarse en el análisis y mejora de las trayectorias didácticas implementadas.

La tarea propuesta para ser resuelta en tiempos extra-áulicos tuvo algunos resultados positivos, pero aún son necesarios algunos ajustes en la implementación de este tipo de tareas para favorecer la implicación de los estudiantes y la interacción entre ellos. Una observación para destacar es que la tarea dio lugar a la detección de otro conflicto semiótico en relación al valor de verdad de una proposición cuyo signo principal es una implicación. Si bien este significado es relevante en cualquier carrera, tiene implicancias subrayadas en el caso de Ingeniería Informática donde este tipo de proposiciones se hacen presentes en sentencias de programación del estilo "If- then", por lo cual resulta valioso contribuir en la resolución de este tipo de conflictos.

Los conflictos semióticos detectados se convierten en una herramienta para diseñar y/o modificar trayectorias didácticas para evitarlos y/o resolverlos. Desde el EOS, se entiende por Idoneidad interaccional al grado en que las configuraciones y trayectorias didácticas permiten, por una parte, identificar conflictos semióticos potenciales (que se puedan detectar a priori), y, por otra parte, resolver los conflictos que se producen durante el proceso de instrucción mediante la negociación de significados.

Con base en estas reflexiones cabe formularse la pregunta: ¿Qué se puede hacer para mejorar en pequeños pasos?. Tal vez en ese sentido se pueden contemplar, a manera de autoevaluación docente y de estrategias, los indicadores [12] planteados por el EOS para evaluar la idoneidad interaccional:

- El profesor hace una presentación adecuada del tema (presentación clara y bien organizada, no habla demasiado rápido, enfatiza los conceptos clave del tema, etc.)
- El docente reconoce y resuelve los conflictos de los alumnos (se hacen preguntas y respuestas adecuadas, etc.)
- Se busca llegar a consensos con base al mejor argumento
- Se usan diversos recursos retóricos y argumentativos para implicar y captar la atención de los alumnos.
- Se facilita la inclusión de los alumnos en la dinámica de la clase Interacción entre alumnos
- Se favorece el diálogo y comunicación entre los estudiantes buscando que traten de convencerse a sí mismos y a los demás de la validez de sus afirmaciones, conjeturas y respuestas, apoyándose en argumentos matemáticos
- Se favorece la inclusión en el grupo y se evita la exclusión.
- Se contemplan momentos en los que los estudiantes asumen la responsabilidad del estudio (plantean cuestiones y presentan soluciones; exploran ejemplos y contraejemplos para investigar y conjeturar; usan una variedad de herramientas para razonar, hacer conexiones, resolver problemas y comunicarlos)
- Se implementan instancias de Evaluación formativa.

De manera similar a un ingeniero, se presenta a los docentes un problema a resolver: la construcción de habilidades en los futuros ingenieros. En muchos casos se presentan condicionantes tales como tiempos ajustados para el desarrollo de los temas, cursos numerosos con pocos docentes, etc. que pueden cuestionar la posibilidad de llevar a cabo algunas de las estrategias mencionadas pero tal vez sea viable comenzar, con pequeños pasos, en algunos temas, en alguna clase. Queda planteada como propuesta, para futuros trabajos, el estudio de la implementación de las estrategias planteadas por los indicadores del EOS, para promover la búsqueda y resolución de conflictos semióticos en trayectorias didácticas.

Referencias

1. Radford, L. Introducción. Semiótica y Educación Matemática. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, Relime. Número especial, 7-21. (2006) http://www.redalyc.org/pdf/335/33509902.pdf Accedido el 20 de marzo de 2018

2. Duval, R. Semiosis y pensamiento humano. Cali, Colombia: Instituto de educación y pedagogía de la Universidad del Valle. (2004).

3. Duval, R.: Un tema crucial en la educación matemática: La habilidad para cambiar el registro de representación. *La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española,* 9(1), 143-168 (2006). http://www.rsme.es/gacetadigital/abrir.php?id=546

4. Arcavi, A.:The role of visual representations in the learning of mathematics. Educational Studies in Mathematics, 52, 215-241 (2003).

5. Có, P.; del Sastre, M.; Panella, E. : La importancia de las representaciones en la enseñanza de la matemática discreta. En Lestón, Patricia (Ed.), Acta Latinoamericana de Matemática Educativa (pp. 451-458). México DF, México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C (2009)

6. Font, V., Godino, J. D. y D'Amore, B.: Enfoque Ontosemiótico de las representaciones en Educación Matemática, en M. J. Alderete y M. L. Porcar (Eds.), Temas de Didáctica de las Matemáticas (pp. 1-20). Mendoza, Argentina: Universidad de Cuyo (2007). Este trabajo es una versión ampliada del artículo: Font, V., Godino, J. D. & D'Amore, B. (2007). An ontosemiotic approach to representations in mathematics education. For the Learning of Mathematics, 27 (2) , 2-7.

7. Godino, J.; Batanero, C.; Font, V..: U*n enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática* (2009) Versión ampliada del artículo The onto-semiotic approach to research in mathematics education. ZDM. The International Journal on Mathematics Education, Vol. 39 (1-2): 127-135 (2007) http://die.udistrital.edu.co/sites/default/files/doctorado_ud/publicaciones/parte_i_un_enfoque_ontosemiotico_del_conocimiento_y_instruccion_matematica.pdf Accedido el 20 de febrero de 2018.

8. D'Amore B., Godino J.:El enfoque ontosemiótico como un desarrollo de la teoría antropológica en Didáctica de la Matemática. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* Relime. Vol. 10, n° 2.pp. 191-218 (2007).

9. Godino, J. D., Contreras, A. y Font, V. : Análisis de procesos de instrucción basado en el enfoque ontológico-semiótico de la cognición matemática. Recherches en Didactique des Mathématiques, 26 (1): 39-88. (2006).

10. Epp, S.: Matemáticas discretas con aplicaciones Cengage Learning. (2013)

11. Caicedo Barrero, A. ; Wagner de García, G.; Méndez Parra, R. M.: *Introducción a la teoría de grafos*. Armenia, Quindío: Universidad de Quindío. (2010).

12. Godino, J.: Indicadores de la idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. XIII Conferência Interamericana de Educação Matemática (CIAEM-IACME), Recife (Brasil). (2011) https://www.researchgate.net/publication/267235828_Indicadores_de_la_idoneidad_didactica_de_procesos_de_ensenanza_y_aprendizaje_de_las_matematicas. Accedido el 20 de marzo de 2018.

Experiencia de Diseño Basado en Blended Learning en la Asignatura Cálculo II

Patricia Cuadros[1], Sebastián Godoy[1], Lorena Orosco[1]
[1] Departamento de Matemática, Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de San Juan
Av. Lib. San Martín (Oeste) 1109. San Juan. Argentina
{pcuadros, sgodoy}@unsj.edu.ar, lorosco@gateme.unsj.edu.ar

Resumen. Una pregunta que nos formulamos, como docentes, es si en el nivel universitario actual se pueden reducir las clases a ser solamente presenciales o es necesario que exista una relación docente alumno más fluida y más allá del aula y de un horario fijo. En la búsqueda de respuestas, se trabajó en años anteriores en la implementación de una experiencia didáctica con la metodología de blended learning (BL), en dos temas puntuales de la asignatura Cálculo II. Se lograron mejoras en el rendimiento académico de los alumnos, en las calificaciones y en la incorporación de los conceptos involucrados, poniendo en evidencia el potencial y validez de esta metodología de aprendizaje, lo que impulsó al diseño de un aula virtual para la asignatura posibilitando aplicar en todo su desarrollo la metodología de BL. Este trabajo presenta una propuesta didáctica diseñada para desarrollar el proceso de enseñanza en la asignatura Cálculo II con modalidad BL.

Palabras Clave: Blended learning, TIC, Aula virtual.

1 Introducción

Considerando que la incorporación de TIC abre un gran abanico de posibilidades en el proceso enseñanza aprendizaje, comenzamos en años anteriores con la puesta en práctica de una experiencia didáctica para un par de temas bien acotados de la asignatura Cálculo II [1]. El resultado constatado fue una mejora en las calificaciones de los alumnos, como así también en la comprensión de los conceptos teóricos involucrados y en sus capacidades digitales, de comunicación y de aprendizaje colaborativo.

Uno de nuestros objetivos fundamentales como profesionales dedicados a la docencia universitaria es avanzar en la búsqueda e implementación de metodologías formativas adaptadas a los alumnos actuales, futuros profesionales, que demandan otra forma de aprender, de construir su conocimiento, interactuando en el contexto digitalizado en el que vivimos.

Actualmente entre las clases presenciales tradicionales y la educación a distancia hay un gran número de metodologías que combinan en más o menos medida las TIC al proceso educativo. La popularidad de las redes sociales y el fácil acceso a internet desde cualquier dispositivo móvil ha permitido el cambio en el diseño de los modelos pedagógicos y su implementación en el aula. Haciendo posible la incorporación de modelos más abiertos, flexibles y adaptados a la sociedad actual, con diferentes dinámicas de aprendizaje, centradas en la necesidad de cada alumno.

El criterio principal empleado al definir que recurso tecnológico usar en toda la asignatura, es el grado de adaptabilidad a las necesidades e intereses de los alumnos y de la cátedra, que permita acomodar los distintos ritmos de aprendizaje y que sea adecuado para los temas tratados. Desde el punto de vista del docente, el recurso tecnológico elegido debe ser flexible, no excesivamente estructurado y ni rígido, debe permitir desarrollar un cierto grado de autonomía de decisiones para su implementación y en el transcurso del curso para adaptarlo a las diversas situaciones que se pueden presentar.

Usar TIC en el proceso de enseñanza cobra sentido pedagógico cuando las actividades están debidamente planificadas para favorecer ciertas habilidades o capacidades de los alumnos.

Luego de una exhaustiva búsqueda de una metodología a implementar siguiendo el Modelo TPACK, seleccionamos el Blended Learning, BL, enseñanza híbrida o mixta, que es una combinación entre la enseñanza presencial y la virtual o no presencial, con uso de TIC.

Con esta metodología de BL se pueden aplicar una gran variedad de nuevos recursos para interactuar y colaborar entre docentes y alumnos, como son, la realidad aumentada, la impresión 3D, la robótica, etc.

2 Objetivos a lograr

Los objetivos principales de esta experiencia son:

- Promover el aprovechamiento de los espacios virtuales con el fin de permitir una gestión individual del tiempo de acuerdo a las necesidades de cada estudiante.
- Diseñar entornos educativos de calidad con uso de TIC.
- Disminuir los tiempos de clases presenciales clásicas, donde solo se realiza una transmisión de información.
- Remediar obstáculos de aprendizaje de la materia.
- Propiciar el trabajo colaborativo entre docentes y alumnos para lograr aprendizajes significativos.

3 Metodología

Tomando como referencia a Graham [2] y Picciano [3], de acuerdo a la tipología de BL, lo implementamos a nivel de curso. Un curso BL combina actividades presenciales con actividades en el aula virtual, la organización temporal de estos bloques del curso puede presentarse superpuesta en el tiempo o secuenciada.

De acuerdo a [4-7] hay formas que combinan los métodos didácticos o las modalidades de clases presenciales con aprendizaje en línea, de acuerdo a ellos definen grupos de modelos de BL. En nuestro caso podemos hablar de incluirnos en la tipología de rotación. Los alumnos rotan entre modalidades de aprendizaje donde una de ellas es el aprendizaje en línea, otras la clase presencial y el trabajo en grupo, pudiendo seguir esto una secuencia fija, a discreción del profesor. Esta rotación nos da lugar a usar el tipo de aula invertida. Aquí se da la rotación entre las clases teóricas, prácticas y evaluaciones en forma presencial, en el horario de clases preestablecido y el acceso a los contenidos, recursos del tema, a la realización de prácticas y evaluaciones online. Otra tipología descripta es la flexible, donde el aprendizaje en línea es lo principal del proceso de formación, no siendo nuestro caso.

Las ventajas de usar BL consideramos que son:

Aporta flexibilidad entre el modelo tradicional y la incorporación de TIC con enseñanza online. También en los tiempos y espacios educativos. Incorpora nuevas dinámicas de aprendizaje.

No sustituye al docente, sino que este tiene un cambio de rol, administra, dirige el proceso de aprendizaje. Se transforma en guía y facilitador de todo el proceso. Sigue siendo el aula el ámbito de trabajo principal.

Favorece el logro de competencias digitales de los alumnos y de los docentes.

Usa diversos materiales, desde libros y apuntes teóricos en papel a materiales digitales audiovisuales, como videos tutoriales que refuerzan los temas de la asignatura. Posibilita que en el aula se trabaje más la parte conceptual y procedimental del contenido.

Garantiza el rápido y eficiente acceso a los temas para solucionar dudas o realizar cualquier tipo de consulta a los docentes. Aportando una solución a la necesidad del "just in time" de los alumnos actuales, al contar con más canales de comunicación docente alumno.

Tiene en cuenta la diversidad: facilita a todos los alumnos realizar un aprendizaje de acuerdo a sus necesidades y tiempos. Dando especial importancia a la motivación y participación en las diversas actividades propuestas, mejorando la productividad individual.

El aprendizaje colaborativo es una de los aspectos que más se favorece, tanto entre docente y alumno como entre alumnos.

Evidentemente para lograr estas ventajas hay que contar por parte de los docentes con una mayor dedicación en tiempo a la preparación de las clases, cierta creatividad y dominio de los recursos tecnológicos y el diseño de las propuestas didácticas a aplicar. También no hay que olvidar que es el docente quien gestiona la actividad en el aula virtual.

A lo mencionado hay que agregar que es necesario lograr una mayor calidad en los contenidos como en su presentación para realmente hacer buen uso de esta metodología.

4 Propuesta de aula virtual

Realizamos una búsqueda y análisis de diversas plataformas virtuales, eligiendo la plataforma Schoology, que es libre, que se adapta a los requisitos de nuestra asignatura y al número de estudiantes con la que trabajamos.

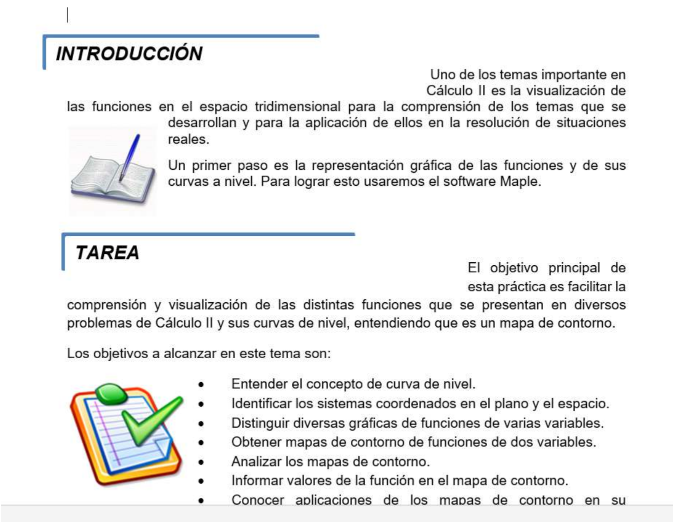
El punto de partida del diseño del aula virtual es la selección de contenidos (en el marco del programa de estudios) que formarán parte de tareas en el aula virtual a realizar por los estudiantes, el análisis de los obstáculos de aprendizaje de estos temas, y la determinación de una intención de aprendizaje de cada contenido, sea expresada en términos de objetivos, finalidades o propósitos de acuerdo a la visión pedagógico-didáctica del equipo docente.

A partir de ello se avanza en dos líneas simultáneas: qué resultados se espera obtener en los alumnos, lo que apunta hacia la construcción de acciones de evaluación y qué actividades se pueden proponer para lograr los objetivos propuestos. Todas las actividades están diseñadas acorde con los temas de la asignatura.

Las tareas tienen la finalidad de que el estudiante interaccione con una nueva información sobre un tema, a partir de la cuál le puede dar sentido y significado a los conceptos y logre su aprendizaje. Las fuentes de la información pueden ser diversas, una exposición docente, la realización de una discusión sobre una lectura, un video de origen académico, los recursos son muy variados.

El diseño del curso parte de tres unidades temáticas, ya establecidas en el programa de la asignatura, como módulos de trabajo. En cada uno de estos módulos los alumnos disponen del material didáctico del tema, de guías de trabajo para temas específicos, elaboradas con el formato de webquest, que denominamos tareas, que deben ser analizadas y resueltas en grupo, usando algún recurso tecnológico Geogebra o Maple, y en fecha establecida subir el informe individual elaborado sobre esta tarea, el cual es corregido por el equipo docente, formando parte de los requisitos de la asignatura. Estas tareas están diseñadas como secuencias didácticas, las que constituyen una organización de las actividades de aprendizaje con la finalidad de crear situaciones que les permitan desarrollar a los alumnos un aprendizaje significativo y desarrollar capacidades cognitivas y críticas para mejorar el aprendizaje.

En cada tarea se detallan los objetivos a alcanzar para que el alumno esté en conocimiento de ellos y sea consciente de lo que debe lograr para poder controlar su desarrollo, sabiendo el sentido y la utilidad del tema en la asignatura. La tarea consta de varios apartados que están organizados para promover el desarrollo de las capacidades, especificadas en el diseño curricular promovido por el Consejo Federal de Decanos de Ingeniería, a saber: de identificar, formular y resolver problemas, de operar con el pensamiento lógico-formal y desarrollar pensamiento crítico, de desarrollar el hábito de aprendizaje autónomo, de trabajo colaborativo y de utilizar de manera efectiva los conocimientos, las técnicas y estrategias de las disciplinas básicas. Por ejemplo, en la tarea correspondiente al tema curvas de nivel se establecieron los apartados de: Introducción, Tarea, Ejemplos y aplicaciones del tema, actividades a resolver, Recursos a utilizar, evaluación y conclusiones. La Fig. 1 detalla una parte de la tarea. Las actividades planteadas están de acuerdo con la clasificación de la taxonomía del área matemática de Judi Harris, basada en el modelo TPACK: considerar, practicar, interpretar, aplicar y evaluar.


INTRODUCCIÓN

Uno de los temas importante en Cálculo II es la visualización de las funciones en el espacio tridimensional para la comprensión de los temas que se desarrollan y para la aplicación de ellos en la resolución de situaciones reales.

Un primer paso es la representación gráfica de las funciones y de sus curvas a nivel. Para lograr esto usaremos el software Maple.

TAREA

El objetivo principal de esta práctica es facilitar la comprensión y visualización de las distintas funciones que se presentan en diversos problemas de Cálculo II y sus curvas de nivel, entendiendo que es un mapa de contorno.

Los objetivos a alcanzar en este tema son:

- Entender el concepto de curva de nivel.
- Identificar los sistemas coordenados en el plano y el espacio.
- Distinguir diversas gráficas de funciones de varias variables.
- Obtener mapas de contorno de funciones de dos variables.
- Analizar los mapas de contorno.
- Informar valores de la función en el mapa de contorno.
- Conocer aplicaciones de los mapas de contorno en su

Fig. 1. Parte de la tarea de curvas de nivel

El aula virtual brinda cierta ubicuidad y le garantiza al alumno el rápido y eficiente acceso a los contenidos del curso en diferentes presentaciones, textos, videos, para solventar dudas o realizar cualquier tipo de consulta. También se encuentra toda la información de la organización de la asignatura y fechas a cumplir. Disponen de correo para comunicación personal con algún miembro del equipo docente o en la modalidad de foro accesible a todos los miembros del aula.

En la propuesta de actividades o tareas los alumnos están siendo evaluados simultáneamente con una evaluación formativa, la que permite retroalimentar el proceso mediante la observación de los avances y dificultades que presentan en su trabajo, como así también una evaluación sumativa como resultado de la tarea.

Cada unidad temática tiene una evaluación virtual individual desarrollada en base a los conceptos principales del tema y cuyas preguntas son asignadas aleatoriamente a cada alumno por la plataforma, seleccionadas de un banco de preguntas previamente diseñado por el equipo docente, con puntaje y tiempo limitado para realizar la evaluación, siendo una evaluación formativa del proceso. En el banco de preguntas se encuentran las preguntas, las cuales están constituidas de diversas formas, algunas con opción múltiple, con opción verdadero, falso, otras con el formato de completar espacios en blanco, preguntas abiertas de respuesta corta, y de correlación. La calificación es realizada directamente por la plataforma, el alumno puede conocer de forma inmediata su resultado. Esto es una primera función didáctica de retroalimentación que permite al alumno determinar su nivel de aprendizaje alcanzado y reflexionar sobre las capacidades logradas o fortalecidas y el profesor obtiene información que le será útil para replantear sus actividades de enseñanza, aprendizaje y evaluación. A esta evaluación se agrega la evaluación parcial presencial de los conceptos y ejercitación que completan la unidad temática, constituyendo la evaluación sumativa. Siendo requisitos la aprobación de ambas para obtener la certificación definitiva de la asignatura, de acuerdo al reglamento académico de la carrera. En la Fig. 2 se muestra la configuración principal del aula virtual diseñada en la plataforma Schoology.

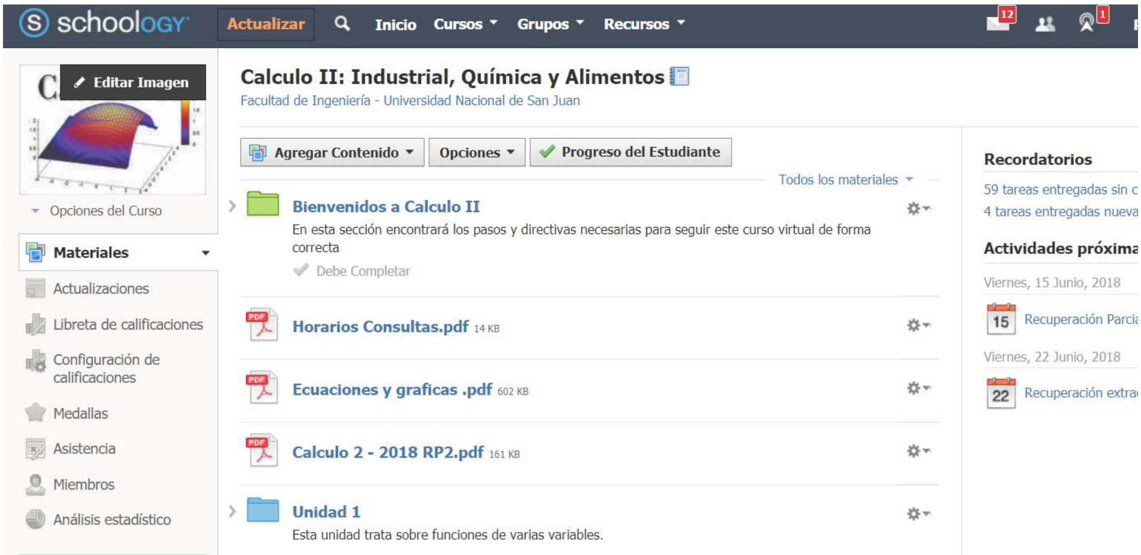
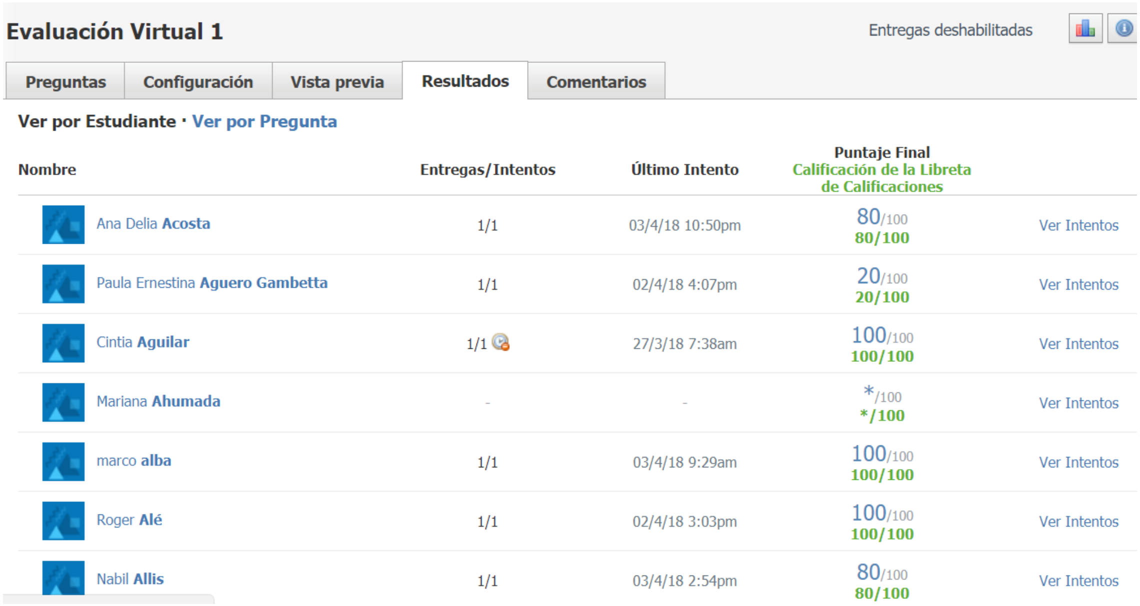


Fig. 2. Pantalla principal del aula virtual desarrollada en la plataforma Schoology para la materia Cálculo II.

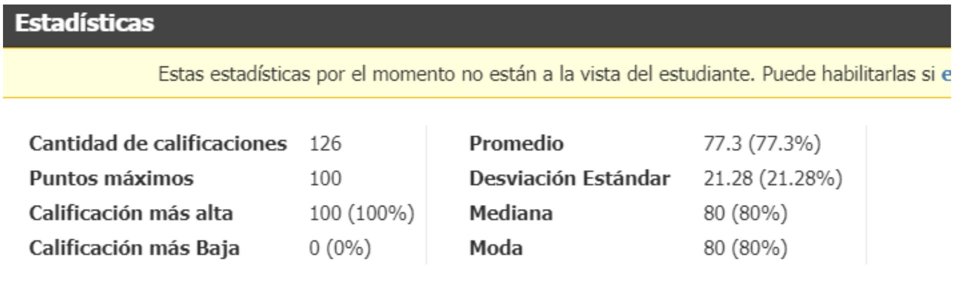
5 Resultados

En el diseño del aula virtual, en la primera unidad se propuso un trabajo más intensivo de tareas a realizar por los alumnos, observándose una evolución muy favorable del proceso de aprendizaje, logrando que la mayoría de los alumnos aprobaran la evaluación parcial de esa unidad, 73% aprobaron, que comparados con cursos de años anteriores con el sistema tradicional no se superaba un 50% de aprobación. En la Fig. 3 y 4 se muestran los resultados individuales y totales del grupo en la evaluación virtual 1.



Nombre	Entregas/Intentos	Último Intento	Puntaje Final Calificación de la Libreta de Calificaciones	
Ana Delia **Acosta**	1/1	03/4/18 10:50pm	80/100 80/100	Ver Intentos
Paula Ernestina **Aguero Gambetta**	1/1	02/4/18 4:07pm	20/100 20/100	Ver Intentos
Cintia **Aguilar**	1/1	27/3/18 7:38am	100/100 100/100	Ver Intentos
Mariana **Ahumada**	-	-	*/100 */100	Ver Intentos
marco **alba**	1/1	03/4/18 9:29am	100/100 100/100	Ver Intentos
Roger **Alé**	1/1	02/4/18 3:03pm	100/100 100/100	Ver Intentos
Nabil **Allis**	1/1	03/4/18 2:54pm	80/100 80/100	Ver Intentos

Fig. 3. Resultados individuales mostrados en la plataforma Schoology de los alumnos cursantes dela asignatura Cálculo II.



Cantidad de calificaciones	126	Promedio	77.3 (77.3%)
Puntos máximos	100	Desviación Estándar	21.28 (21.28%)
Calificación más alta	100 (100%)	Mediana	80 (80%)
Calificación más Baja	0 (0%)	Moda	80 (80%)

Fig. 4. Resultados totales mostrados en la plataforma Schoology de los alumnos cursantes dela asignatura Cálculo II.

Para realizar un análisis comparativo, en la unidad dos no se colocaron tareas que fueran parte de los requisitos exigibles de la asignatura, siendo voluntaria su realización por parte de los alumnos. En esta unidad los alumnos solamente debían realizar la evaluación virtual del tema, donde el formato de la evaluación consistía solamente de preguntas conceptuales. Los estudiantes alcanzaron, en esta evaluación muy buenos resultados, pero no así en la evaluación parcial presencial, siendo su porcentaje de aprobación similar a los logrados en los cursos anteriores.

La secuencia didáctica establecida, consiste en una serie de actividades de aprendizaje que tienen un orden interno entre sí, con el fin de que la información a la que va acceder el estudiante en el desarrollo de la secuencia sea significativa. Esto hace que tenga sentido y pueda abrir un proceso de aprendizaje. La secuencia demanda que el estudiante realice acciones que vinculen sus conocimientos. Consideramos que la no realización de tareas que forman parte de la secuencia de aprendizaje significativo y la falta de trabajo colaborativo entre pares y con los docentes hizo caer los porcentajes de aprobación que se habían logrado en la unidad anterior.

Los resultados de una actividad de aprendizaje, los trabajos o tareas que el alumno realiza constituyen elementos de evaluación. La secuencia integra de esta manera principios de aprendizaje con los de evaluación, en sus tres dimensiones diagnóstica, formativa y sumativa, que están estrechamente vinculados a los propósitos del curso. Toda tarea o evaluación cumple con una función didáctica, ya que en primer término sirve para retroalimentar el proceso de aprendizaje que realiza el estudiante, mientras que para el docente se constituye en una posibilidad de analizar cómo está funcionando el desarrollo del curso.

Detectar esta dificultad nos permite reorganizar el avance del curso, estableciendo para la unidad tres nuevamente tareas a realizar de forma obligatoria, así todos los estudiantes siguen la secuencia establecida, mejorando nuevamente los porcentajes de aprobación.

Comparando los resultados logrados en la obtención de certificación definitiva de la asignatura en los años 2017 y 2018 en que se usó esta metodología con los años 2015 y 2016 que se trabajó con la metodología tradicional de clase presencial, se puede ver en la Tabla 1 que los resultados son significativamente mejores.

Tabla 1. Tabla comparativa de porcentaje de almunos con boleta definitiva para los disitintos años de cursado de la asignatura.

Año	N° de alumnos con:		Porcentaje de Alumnos con certificación definitiva
	Actividad académica	Certificación definitiva	
2015	165	103	62%
2016	146	83	57%
2017	129	111	86%
2018	115	93	81%

6 Conclusiones

El BL es una metodología que permite evaluar con base en competencias, mejorar y enriquecer la preparación de los alumnos al dotarlos de nuevas habilidades y formas de pensamiento que demanda la sociedad actual y tienen algo muy importante que es la posibilidad de retroalimentación en torno a sus fortalezas.

El éxito de este modelo de enseñanza se basa "no ya de la tecnología empleada y de la cantidad o proporción respectiva de presencia/distancia, sino de los diseños pedagógicos, de la metodología, del uso adecuado que se hace de los recursos y de la preparación y disposición del profesorado" [8,9].

En relación a los docentes, las autoras en [10] plantean que "El BL favorece el desarrollo de competencias docentes y a su vez el desarrollo profesional de este colectivo".

Una ventaja que observamos es que esta metodología nos permite optimizar el tiempo de clases y de trabajo individual.

El alumno aprende, por lo que realiza, por la significatividad de la actividad llevada a cabo, por la posibilidad de integrar nueva información en concepciones previas que posee, por la capacidad que logra al verbalizar ante otros (la clase) la reconstrucción de la información. No basta escuchar al profesor o realizar una lectura para generar este complejo e individual proceso.

Al finalizar el curso se logró una mejora de las capacidades digitales de los alumnos, incorporaron nuevos medios y recursos para interactuar, colaborar y apropiarse de nuevos saberes, desarrollaron habilidades para aprender a aprender, planificar su aprendizaje y sus tiempos y distinguir que recursos son los apropiados de acuerdo a las necesidades individuales. Todo lo que redunda en un mayor nivel de conocimiento y también de calificaciones, como así en sus competencias sociales, de participación y colaboración.

Agradecimientos. Este trabajo ha sido parcialmente financiado por el Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET - Consejo Nacional de Investigaciones Científicas) y la Universidad Nacional de San Juan.

Referencias

1. Cuadros, P., Godoy, S. Propuesta de diseño para una clase sobre el tema Curvas de Nivel. Libro de Actas XX Encuentro Nacional y XII Internacional de Educación Matemática en Carreras de Ingeniería. 1ª ed. Santiago del Estero. Lucrecia. ISBN 978-987-720-151-2. (2017).
2. Graham, C. R. (2006). Blended Learning Systems. Definition, current trends and Future Directions. En J. Curtis, Ch. Bomk y R. Graham (Ed.). The Handbook of Blended Learning: Global Perspectives, Local Desing. John Wiley & Sons.
3. Picciano, A. G., Dziuban, C. D., & Graham, C. R. (Eds.). Blended learning: Research perspectives (Vol. 2). Routledge. (2013).
4. Horn, M. B., & Staker, H. The rise of K-12 blended learning. Innosight institute, 5. (2011).
5. Graham, C., Henrie, C., y Gibbons, A. Developing models and Theory for Blended Learning Research. En A. Picciano, C. Dziuban, y C. Graham (Eds.). Research Perspectives in Blended Learning: Research Perspectives, 2(13-33). P.:Routledge NY. (2014).

6. Gisbert Cervera, M., de Benito Crosetti, B., Perez Garcies, A.,Salinas Ibañez, J. (2018) Blend Learning, más allá de la clase presencial. RIED. Revista Iberoamericana de Educación a Distancia, 21(1), pp.195-213. doi: http://dx.doi.org/10.5944/ried.21.1.18859
7. Aretio, García. ¿ El blended learning como solución? Web: https://aretio.hypotheses.org/2437 (2018). Accedido el 18 de Junio de 2018
8. Corbella, M. R., & Aretio, L. G. (2010). Movilidad virtual en la educación superior, ¿Oportunidad o utopía?. Revista española de pedagogía, 243-259.
9. Aretio, L. G., & Corbella, M. R. (2010). La eficacia en la educación a distancia: ¿Un problema resuelto?. Teoria educativa, 141-162.
10. Hueros, A. D., Franco, M. D. G., & Domínguez, C. R. Y. (2018). Aportaciones de la formación blended learning al desarrollo profesional docente. RIED. Revista Iberoamericana de Educación a Distancia, 21(1), 155-174.

La enseñanza de la matemática centrada en el alumno, para estudiantes de ingeniería

Batallán, C[1]. ; Kanobel, M. C[2].; Sjoerdstra, F[3].; Granado Peralta, S[4]
1,2,3 UNDAV, Departamento de Tecnología y Administración, Ingeniería en materiales
España 350, Avellaneda
4, Facultad Regional Buenos Aires
{cbatallan@undav.edu.ar; mckanobel@gmail.com; profefabiana@hotmail.com}
UTN FRBA
Medrano 951, CABA
sagperalta@gmail.com

Resumen. En este trabajo exponemos algunas de las actividades puestas en marcha y los resultados obtenidos en las asignaturas del Área Matemática de la carrera Ingeniería en Materiales de UNDAV. Se sabe que el divorcio entre la educación matemática entre los niveles medio y superior trae aparejadas cuestiones que impactan negativamente en la comprensión y desempeño académico de los estudiantes en las primeras materias del primer nivel. Los alumnos presentan déficit para la construcción de textos argumentativos, en la comprensión de los enunciados y en la lectoescritura. El efecto dominó hace que esto repercuta en las siguientes. La idea central de esta experiencia se basa en dos pilares: por un lado, la adaptación de una ingeniería didáctica, al contexto de cada asignatura, por otro no perder de vista que los cursantes son futuros ingenieros.

Palabras Clave: Matemática, Enseñanza, Estrategias Aprendizaje significativo.

1 Introducción

Enseñar matemática a estudiantes de ingeniería presenta un desafío. Se trata de una disciplina fundamental por su aporte a la modelización de situaciones reales que enfrentarán, tanto en la cursada de la carrera como en su futura vida profesional.

Artigue [1] indica que la investigación educativa se está ocupando tanto del aprendizaje como de la enseñanza de la matemática. Moreno [2] señala que cada vez son más numerosas las investigaciones que centran su interés en el papel de la didáctica en la enseñanza de la Matemática en el nivel superior.

Usualmente, en las carreras de ingeniería en nuestro país, se imparten Cálculo diferencial e integral en una y más variables, ecuaciones diferenciales, Álgebra lineal, Matemática discreta, Probabilidad y Estadística, entre otras.

No es tarea sencilla enseñar para aprender y pocas veces se cumple con el objetivo. Generalmente se logra la memorización de un algoritmo y el uso adecuado de reglas algebraicas, no así la comprensión de conceptos y métodos de pensamiento. Entendemos que alcanzar las competencias deseadas no es un hecho menor. Al mismo tiempo advertimos que los contenidos matemáticos no pueden quedar desvinculados de la problemática que aborda la especialidad, en este caso, Ingeniería en Materiales.

Ante esta situación es importante reflexionar sobre el papel que tiene el docente como mediador de una interacción educativa. Debe propiciar, en el estudiante, el desarrollo de habilidades y actitudes para la utilización de los conocimientos matemáticos en las diferentes disciplinas de la ingeniería.

Ante la necesidad de lograr que la matemática se constituya en un aliado central para resolver problemas concretos pensamos en la adaptación de una ingeniería didáctica para estudiantes de ingeniería

Esta metodología surge en los ochenta en la didáctica de la matemática francesa. Proviene de las teorías de situaciones didácticas (Brousseau) [3] y de la transposición didáctica (Chevallard) [4]. Se caracteriza por su visión sistémica de la didáctica de la matemática y se centra en el estudio de las interacciones entre un saber, un sistema educativo y los alumnos. Su objetivo es optimizar los modos de apropiación de este saber por el sujeto Brousseau [3].

Douady [5] sostiene que el término ingeniería didáctica designa el conjunto de las secuencias de una clase. Son pasos organizados y articulados en el tiempo de forma coherente. El docente, se propone un proyecto de aprendizaje para un grupo de estudiantes, el intercambio alumnos- docente lleva adelante el proyecto. Su evolución está condicionada por las reacciones de los receptores en función de las decisiones y elecciones del profesor. De esa forma es, al mismo tiempo, un producto (análisis a priori) y un proceso que resulta de la adaptación de la puesta en marcha de acuerdo con el contexto (cada clase).

Artigue [6] distingue varias dimensiones ligadas a los procesos de construcción de ingenierías didácticas:

a) Epistemológica: asociada a las características del saber puesto en funcionamiento.
b) Cognitiva: asociada a las características cognitivas de los alumnos a los que se dirige la enseñanza.
c) Didáctica: asociada a las características del funcionamiento del sistema de enseñanza.

En la postura de Brousseau [3], surgen los conceptos de situaciones didácticas y de contrato didáctico.

El autor considera que el aprendizaje, mediado por situaciones didácticas, es una adaptación al medio y el contrato didáctico, un acuerdo explícito de aprendizaje entre alumno-docente. Considera también que el alumno aprende adaptándose a un medio. Se observa una concepción constructivista -en el sentido piagetiano- del aprendizaje.

Este saber, fruto de la adaptación del alumno, se exterioriza por las nuevas formas de posicionarse frente a situaciones ya conocidas. Se registran los estudios de casos, se observa el antes y el después y se pueden distinguir las siguientes fases:

Fase 1: análisis de la situación de partida
Fase 2: concepción y análisis de las situaciones didácticas a priori
Fase 3: experimentación
Fase 4: análisis a posteriori y evaluación

2 Objetivos de la propuesta

La propuesta didáctica tiene como propósito implementar un enfoque metodológico de enseñanza en las asignaturas del área Matemática en el contexto de las carreras de ingeniería. Se pretende mejorar el aprendizaje de los estudiantes.

Se espera que, la implementación del diseño didáctico promueva en los cursantes la reflexión sobre su propio proceso de pensamiento. Al mismo tiempo, que desarrollen estrategias de aprendizaje autónomo y cooperativo. Que puedan relacionar conceptos y seleccionar herramientas matemáticas para resolver cuestiones en otras áreas de la especialidad.

3 La puesta en marcha

La propuesta didáctica, adaptada a cada asignatura, surge del análisis y trabajo conjunto. En cada Materia y Unidad a desarrollar, se considerarán:

a) El *aspecto epistemológico* que, desde una perspectiva histórica, permite dar más sentido al abordaje de cada tema. Entre ellos:
   a1) el desarrollo histórico de la teoría,
   a2) la dificultad de los problemas ligados al origen, desarrollo y evolución,
   a3) los problemas para la comprensión de los conceptos, su evolución, uso e importancia
b) El *plano cognitivo* asociado a las características de los alumnos cursantes. Destacamos:
   b1) la dificultad de explicar, en lenguaje cotidiano, tanto definiciones como propiedades
   b2) los conflictos para formalizar en lenguaje matemático
   b3) las dificultades para graficar
   b4) la no identificación de hipótesis y tesis
   b5) la imposibilidad de relacionar temas y encontrar similitudes y diferencias
c) El *enfoque didáctico*, mediante una secuencia basada en la participación del alumno. Entre ellos el análisis de los conceptos de los estudiantes, desde las actividades que se plantean.

De este modo, mediante las tareas, se busca evaluar el conocimiento e interpretación del grupo sobre las cuestiones propuestas.

Será *Unidad de observación* cada una de las asignaturas y *Unidad de análisis* la disponibilidad de contenidos básicos de matemática, los saberes previos para afrontar la materia, los obstáculos existentes, las situaciones didácticas diseñadas y el desempeño de los alumnos afectados.

3.1 Fase 1: Prueba diagnóstica

Para realizar un diagnóstico se tuvieron en cuenta distintas cuestiones:

a) Análisis a priori: Su objetivo es conocer la disponibilidad de las competencias para encarar la asignatura. Destacamos
   - a1) Capacidad para la interpretación de textos. La acción
     Dado un texto se piden ideas principales y resumen
   - a2) Grado de conocimiento de las propiedades elementales de las operaciones aritméticas básicas. La acción
     Mediante un múltiple choise de resultados de operaciones aritméticas se solicita seleccionar la adecuada
   - a3) Estado de la capacidad de razonamiento, desde el punto de vista cognitivo. La acción
     Deducir la conclusión a partir de dos o tres premisas
   - a4) Interpretación de gráficos. La acción
     Se presenta un gráfico que relacione, por ejemplo, cantidad de agua caída por mes.

3.2 Fase 2: Para cada asignatura y tema central se diseñaron situaciones didácticas

Antes comenzar cada tema central se indica a un grupo de estudiantes (todos deben participar durante la cursada) que busquen material para comprender el origen, la evolución y aplicaciones del tema en cuestión. Deben explicar brevemente al grupo.

El día que, por primera vez se desarrolla el contenido, se tienen en cuenta algunas cuestiones. Por un lado, los conocimientos previos de los alumnos acerca de la temática que pueden ser correctos o no. Si no son correctos interesa saber el origen de ese error (idea propia, no comprendido, mal enseñado, etc.). Se hace una puesta en común. Por otro lado, los integrantes del grupo comprometido con esa clase comentan los resultados de su investigación. A partir de ahí se trabaja con los alumnos. El objetivo es lograr la construcción de un pequeño cuerpo de conocimientos y conocer el objeto matemático para poder utilizarlo como herramienta en la resolución de problemas concretos.

3.2.1Análisis Matemático I (AMI), tema funciones

Se tratan los siguientes tópicos: similitudes y diferencias entre relaciones y funciones similitudes. Se comienza con una definición provisoria "regla" (en conjunto con los cursantes). Se acuerda la notación. Se distinguen las polinómicas, racionales, constantes, compuestas, continuas, etc.

Las actividades se centraron en las fortalezas y debilidades de los alumnos. Teniendo en cuenta que sólo es cuatrimestral se eligió trabajar con Geoebra (software libre, dinámico e interactivo) para el análisis de gráficas de las diferentes funciones, luego de haberlas bosquejado en lápiz y papel. Se destacaron los elementos notables. Entre ellos, dominio, imagen., continuidad, etc. Al mismo tiempo se evaluó la comprensión de tema habiendo sido mediado por el software elegido

Ejemplo 1: Para $f(x) = x^2 / (x^2 - 9)$. Se pide graficarla (usar GEOGEBRA), determinar Dominio, Imagen, continuidad

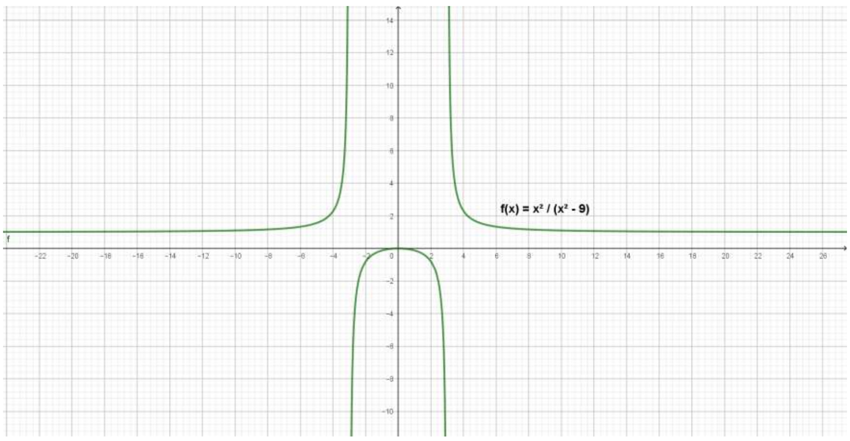


Fig. 1. Una gráfica correspondiente al ejemplo 1. Fuente: elaboración propia

Como experiencia, resultó positiva. Los estudiantes se mostraron interesados en buscar material referido al tema., conocer su origen y evolución, como así también sus diferentes aplicaciones en distintas ramas y disciplinas. Todos, además, coincidían en que el uso del GeoGebra ayuda a visualizar las transformaciones de las funciones, facilita su análisis de una manera muy simple, permitiendo obtener iguales resultados que los alcanzados con los medios tradicionales en un tiempo significativamente menor.

3.2.2 Análisis Matemático II(AMII), tema curvas de nivel

La presentación e inicio de la temática se desarrolla como en AMI.

En este caso se hace hincapié en los conceptos de cota, líneas principales y accesorias. Se intenta, con el grupo, llegar a un acuerdo sobre los conceptos indicados.

De la misma manera se usa GeoGebra para graficar de manera simple y rápida las curvas de nivel. Los comentarios, resultados y conclusiones son similares a los obtenidos en AMI.

Ejemplo 2: Para z= 2 x y se pide Graficar las curvas de nivel para los siguientes valores de z
z=0; z=-2; z=-4; z=2; z= 4

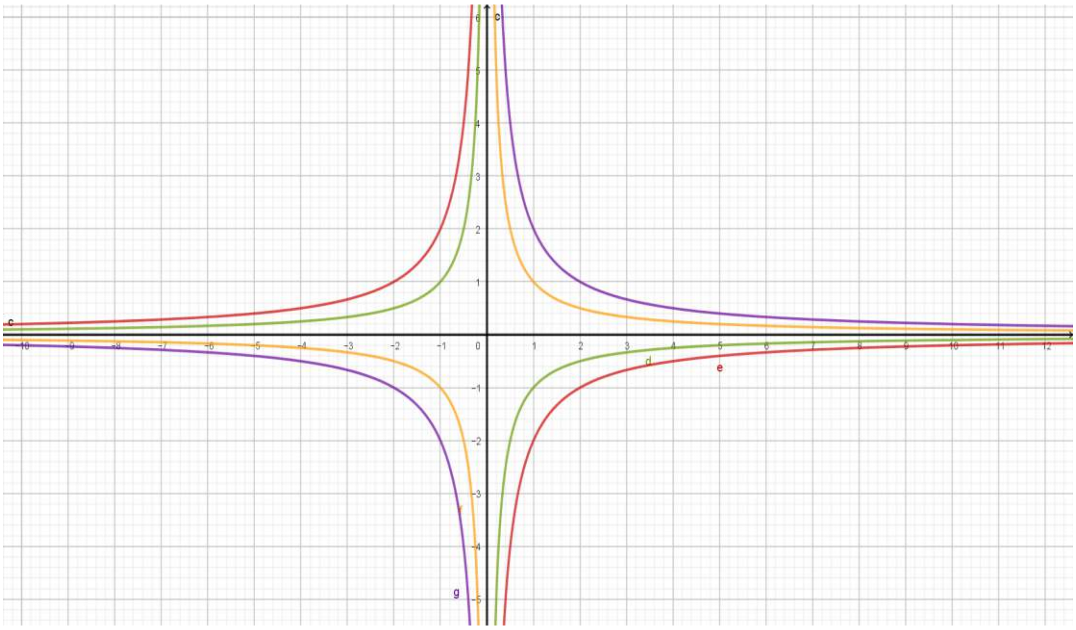


Fig. 2. Gráfica correspondiente al ejemplo 2. Fuente: elaboración propia

3.2.3Algebra y Geometría Analítica, (A y GA)

Se elige el tema *Cónicas*, en particular se presentará sólo *Circunferencia*. Se observa la dificultad en la distinción entre circunferencia y círculo. Se da, a partir de ahí, el concepto de lugar geométrico y se llega a la ecuación de la circunferencia. Se logra una definición en común. Se caracterizan sus elementos. Se trabajó con circunferencias con centro en el origen. Se obtuvo la ecuación de circunferencias con centro distinto al origen de coordenadas. Se hicieron gráficas y sus respectivos análisis.

Se logró una generalización de los conceptos abordados en función de los parámetros y las gráficas desarrolladas en GOG y se diagramaron actividades centradas en el trabajo del alumno, como protagonista de los aprendizajes significativos.

A fin de agilizar y visualizar la gráfica de las cónicas, así como su traslación y puntos notables, se introdujo el uso de un software colaborativo GOG (GeoGebra).

La actividad propuesta a continuación se realiza en forma analítica. Mediante el uso del GeoGebra se hace la interpretación geométrica. A modo de ejemplo se muestran los dos primeros ítems de la actividad con una imagen del GOG.

Ejemplo 3: Obtención de la ecuación canónica de la circunferencia y, a partir de ella la general. Intersección con rectas.

Dadas la circunferencia con centro en (2,-1) y radio $r = 2^{1/2}$, y la familia de rectas y= -x + b.

Se pide encontrar e interpretar geométricamente:

a) la ecuación de la circunferencia y su gráfica.

b) la intersección entre la circunferencia y la recta de la familia que contiene al origen

c) los valores del parámetro *b* en los que la recta corta la circunferencia en un sólo punto (en este caso se trabaja el concepto de recta tangente)

d) los valores de *b* para los cuales la recta y la circunferencia no se cortan

e) los valores de *b* para los cuales la recta y la circunferencia tienen dos puntos en común

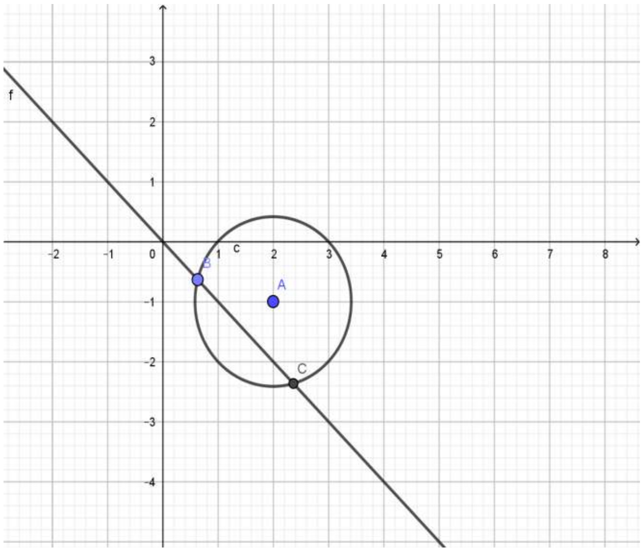


Fig. 3. Gráfica correspondiente al ejemplo 3. Fuente: elaboración propia

3.2.4Probabilidad y Estadística (P y E)

La importancia de esta asignatura en el contexto de las carreras de Ingeniería puede basarse en dos ejes centrales: l*as aplicaciones en el campo profesional y l*os *problemas de investigación*. El objetivo es proveer al estudiante de bases sólidas para poder, como profesionales, abordar exitosamente temáticas como pruebas de control. Al mismo tiempo podrá comprender los fundamentos de la inferencia estadística para aplicar en diferentes modelos.

Al final del curso de Probabilidad y Estadística, se espera que los estudiantes sean capaces de reconocer y aplicar adecuadamente modelos y técnicas estadísticas en la resolución de situaciones aplicadas al ámbito de la ingeniería que lo requieran y, en función de ello, inferir conclusiones para la toma de decisiones.

Para ejemplificar, se elige el tema *Introducción a la Teoría de probabilidades*. Como consecuencia del objetivo de la asignatura y de la modalidad de enseñanza se destacan:

- Las Actividades de aprendizaje desde los conocimientos previos que involucran operaciones entre conjuntos y definición clásica de probabilidad
- La búsqueda de una institucionalización de las definiciones y conceptos centrales asociados a la definición de probabilidad a partir de la ejercitación brindada en las actividades de aprendizaje.

a) Actividad introductoria

Partiendo de la definición clásica de probabilidad y de los conocimientos previos que tienen los estudiantes se propone una guía con una serie de problemas que involucren a dicho concepto y donde sea necesaria la aplicación de las distintas propiedades asociadas a él, sin una institucionalización y a partir de los conocimientos aportados por los estudiantes.

En el ejemplo 4, los alumnos deberán poner en juego no solamente la definición clásica sino también, los conceptos de unión e intersección de sucesos, el concepto de probabilidad condicional:

Ejemplo 4

Hay diez cartones rojos numerados del 1 a los 10 y 15 verdes numerados del 11 al 25.

i. *Se saca un cartón al azar, calcular la probabilidad de que sea verde*

ii. *Se saca un cartón al azar, calcular la probabilidad de que sea menor a 20*
iii. *Se saca un cartón al azar, calcular la probabilidad de que sea roja y par*
iv. *Se saca un cartón al azar, calcular la probabilidad de que sea roja o par*
v. *Se saca un cartón al azar, calcular la probabilidad de que no sea verde ni impar.*
vi. *Se saca un cartón al azar entre los verdes. Calcular la probabilidad de que sea impar.*
vii. *Se saca un cartón al azar entre los impares. Calcular la probabilidad de que sea verde.*

b) Actividad de aprendizaje

En esta instancia, se propone a los estudiantes una guía de ejercitación que permite asociar las actividades trabajadas en la fase anterior, promover un espacio de discusión para institucionalizar los conceptos aplicados. El ejemplo 5 involucra los conceptos de unión de sucesos cualesquiera, sucesos mutuamente excluyentes y probabilidad condicional.

Ejemplo 5

Las botellas de gaseosa que pasan por el control de calidad de una fábrica tienen por lo general dos tipos de fallas. El 15% contiene menos cantidad de lo aceptable, el 10% tiene problemas con la tapa y el 2% presenta las dos fallas. Las botellas que presentan alguna de estas fallas se descartan y no se venden.

i. Calculen la probabilidad de que una botella elegida al azar no pase la prueba.
ii. ¿Cuál es la probabilidad de que una botella elegida al azar tenga solo una de las dos fallas?
iii. ¿Si la botella seleccionada tiene menos cantidad de la aceptada, cual es la probabilidad de que tenga problemas en la tapa?

3.3 Fase 3: la experimentación

Es aquí donde queda expuesta la estrategia planificada por la docente. Constituye un análisis a posteriori de la propuesta. Consiste en estudiar el conjunto de datos recogidos tales como las observaciones realizadas de las secuencias de enseñanza y las producciones de los estudiantes. La validación de las hipótesis se realiza con la confrontación de los análisis: a priori y a posteriori.

Uno de los objetivos de enseñar matemática es que lo que se enseña sea significativo. En realidad, se constituye como uno de los principales obstáculos. G. Brousseau [3] sostiene que el sentido de un conocimiento matemático está dado, tanto por las situaciones en las que aparece como teoría, como por aquellas donde se lo ha encontrado como solución. La construcción que un alumno haga del significado de un concepto es central. Charnay [7] distingue dos niveles. El externo que refiere al campo de utilización y sus límites. El interno que da cuenta del cómo y el porqué del uso de esa herramienta. Agregamos que cada concepto debe ser considerado como herramienta y objeto. Es aquí donde es muy importante la elección de la estrategia. Es necesario facilitar la apropiación del concepto ya que debe poder ser resignificado y adaptado a nuevas situaciones.

Por otro lado, es central tener en cuenta el contexto en el que se desarrolla la experiencia. Todas las asignaturas en las que trabajó son del área matemática de la carrera Ingeniería en Materiales. Desde ya es necesario conocer el objeto matemático, pero mucho más importante es reconocerlo para poder usarlo como herramienta.

3.4 Fase 4: análisis a posteriori y evaluación

En el caso que nos ocupa se implementó sólo una vez durante el primer cuatrimestre de este año. Aún no hay datos concretos. Se observó interés en conocer el origen, evolución y aplicación de los temas centrales tratados. Ese interés se tradujo, entre otras cosas, en mayor motivación para avanzar en cada una de las asignaturas que intervienen en la experiencia didáctica.

De todos modos, y aunque no resulta concluyente, es importante tener en cuenta los primeros resultados sobre el desempeño académico de los estudiantes en la primera implementación de la propuesta, que indican una mejora significativa respecto de los resultados obtenidos en cohortes anteriores.

Desde el punto de vista cualitativo, de los primeros resultados del diseño implementado en las distintas asignaturas, podemos destacar algunas ventajas en el proceso de aprendizaje:

- estudiantes activos en contraposición de alumnos pasivos
- alumnos motivados e involucrados en su propio aprendizaje versus estudiantes aburridos
- validación de procesos contra mecanización de procesos

También debemos tener presente que puede surgir, como desventaja o como dificultad a resolver, la dualidad entre la componente heurística y los contenidos específicos del razonamiento matemático. En este caso, es uno de los temas a trabajar en el ajuste de este tipo de implementación de enseñanza de la matemática.

Desde una mirada cuantitativa, atendiendo a los procesos de acreditación y teniendo en cuenta que las tres asignaturas tienen régimen de promoción, se observaron los siguientes resultados:

Tabla 1. Comparativo de estudiantes promocionados por asignatura

Asignatura	Promedio histórico de promocionados en las cohortes anteriores (en porcentaje)	Promocionados (en porcentaje)
Análisis Matemático 1	54	81
Análisis Matemático 2	60	90
Álgebra	55	75
Probabilidad y Estadística	45	86

4 Reflexiones y conclusiones

Enseñar matemática no es tarea sencilla en ningún nivel educativo. Uno de los problemas es acerca de los propósitos de su enseñanza. Esa cuestión impacta en la selección de los contenidos y, por lo tanto, en las estrategias de enseñanza.

Si referimos a los niveles primario y secundario facilita el desarrollo del pensamiento abstracto. Contribuye a la adquisición de habilidades de razonamiento. Promueve la adquisición de conocimientos. Ayuda a la inserción en la sociedad. No hay duda de que es una herramienta fundamental en el proceso individual del aprendizaje. Podemos identificar tres matemáticas distintas. Por un lado, la herramienta. Por otro la matemática como ciencia (objeto de estudio). Finalmente, la matemática natural. En esta categoría están, según la epistemología genética, el conjunto de operaciones y estructuras de razonamiento que los individuos van construyendo espontáneamente a partir de su interacción con el medio natural y social. (es conveniente enfatizar que son conocimientos innatos y que el sujeto no es consciente de tales construcciones). Piaget [8] la denomina "estructuras y operaciones lógico-matemáticas". La matemática natural es el primer nivel de construcción cognitiva de las operaciones matemáticas.

El segundo nivel es el de la matemática aplicada. Tiene que ver con la apropiación de algunas herramientas matemáticas para abordar determinados problemas.

El tercer nivel corresponde a la Matemática como ciencia. Educativamente sólo incumbe a la formación de matemáticos profesionales en el ciclo universitario.

Nos centraremos en la matemática aplicada en el nivel universitario. Es acá donde comienzan a apropiarse de las técnicas y del lenguaje matemático. Es fundamental que se entienda que esa apropiación es un medio para la solución de problemas reales. En los niveles anteriores se ven las técnicas y el lenguaje para resolver problemas propios y adecuados a la edad.

La problemática que se plantea es ¿qué enseñar? y ¿cómo hacerlo? No hay que olvidarse del interés, de la motivación. Una forma de motivar para interesar es brindar la posibilidad de investigar, descubrir, de participar. En otro caso la actitud del cursante es pasiva. Simplemente espera que se le dé el conocimiento.

Es, por lo menos sospechoso, que el aprendizaje de la Matemática por sí misma sea un buen recurso para interesar y motivar en su aprendizaje a individuos cuyo interés su aplicación para resolver temas puntuales.

De ahí que pensamos que es necesario implementar innovaciones que favorezcan la enseñanza y el aprendizaje de la disciplina. Entendemos por innovación a un proceso deliberado y sistemático por el que se quiere introducir algún cambio en la práctica educativa vigente, que puede ser un cambio curricular (nuevos productos, materiales , metodologías e incluso personas).

Destacamos que a partir de la publicación de la tesis doctoral de I. Lakatos [9], Proofs and refutations, se han producido cambios profundos en el campo de las ideas acerca de lo que verdaderamente es el quehacer matemático.

Se considera que debe tender a la adquisición del lenguaje simbólico necesario para presentar operativamente los conceptos. A la disposición de los conceptos adquiridos y a su aplicación en situaciones específicas. El corolario de estas cuestiones es favorecer la adquisición de los procesos de pensamiento propios de la matemática. No la transferencia de contenidos. En esta dirección se encauzan los intensos esfuerzos por transmitir estrategias heurísticas adecuadas para la resolución de problemas en general. Por estimular la resolución autónoma de verdaderos problemas, más bien que la mera transmisión de recetas en cada asignatura.

Recordemos, profesores de matemática, que se trata de una ciencia en la que prima el saber hacer. Donde la forma de encarar las cuestiones predomina sobre el contenido. Según Gagné [10] para que pueda tener lugar el aprendizaje, la enseñanza debe realizar diez funciones: Estimular la atención y motivar; Dar a conocer a los alumnos los objetivos de aprendizaje; Activar los conocimientos y habilidades previas de los estudiantes. relevantes para los nuevos aprendizajes a realizar (organizadores previos);Presentar información sobre los contenidos a aprender o proponer actividades de aprendizaje; Orientar las actividades de aprendizaje de los estudiantes; Incentivar la interacción de los estudiantes con las actividades de aprendizaje, con los materiales, con los compañeros... y provocar sus respuestas; Tutorizar, proporcionar feed-back a sus respuestas; Facilitar actividades para la transferencia y generalización de los aprendizajes; Facilitar el recuerdo; Evaluar los aprendizajes realizados

Creemos , entonces, que para mejorar el desempeño de nuestros cursantes, se hace imprescindible innovar las metodologías de enseñanza. Entre ellas, destacamos la motivación. Favorecer la investigación acerca de la aplicación de los contenidos en la carrera y la vida profesional y su relación continua con la sociedad. Usar tecnologías informáticas para estimular la comprensión de los procesos matemáticos y no la ejecución de ciertas rutinas.Implementar Trabajos Prácticos a resolver en grupo con problemas (no ejercicios), en los que tengan que buscar la información, organizarla, entenderla, resolver las situaciones explicitadas y defenderla. Agiornar las guías de ejercicios priorizando la diversidad de cuestiones a resolver en vez de la reiteración de ejericicos similares.

Como cierre podemos decir que esta primera experiencia en la carrera ingeniería en Materiales de UNDAV, es muy valiosa por dos cuestiones centrales. La primera, la diversidad de asignaturas. La segunda, la homogeneidad de resultados. Se destacan, desde el lugar de los estudiantes, el interés en conocer el origen de cada tema, la evolución en el tiempo y su aplicación en cuestiones concretas, en particular de la especialidad. Desde el lugar del docente, la prueba diagnóstica es una herramienta muy valiosa. Junto con las ideas previas acerca de algunos conceptos, se constituyen como un precioso tesoro para desarrollar el tema. Por último, el desempeño académico de los estudiantes, que no sólo se expresó en el interés y participación, sino también en el aumento en el porcentaje de quienes acreditaron las asignaturas.

Finalmente, acordamos con Josep Gascón [11] con respecto a la matemática en las asignaturas de primer año, primer cuatrimestre. Se observa un obstáculo muy importante para los alumnos cuyo pensamiento no ha alcanzado plenamente la etapa formal. Referimos al “cambio” del contrato didáctico de la matemática. Los alumnos pasan de una matemática mostrativa en el nivel medio a una matemática demostrativa, donde hay problemas a pensar.

Finalmente reiteramos que la enseñanza de la matemática como herramienta para quienes no son matemáticos no debe desligarse de los contenidos dados por los fenómenos cotidianos, debe estar contextualizada y atender a los intereses de los cursantes.

Referencias

1. Artigue, M.: ¿Qué se Puede Aprender de la Investigación Educativa en el Nivel Universitario?. *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana*, Vol. X, No. 2, 117-134. (2003)
2. Moreno, M.: El papel de la didáctica en la enseñanza del Cálculo: evolución, estado actual y retos futuros. *En Maz, Alexander; Gómez, Bernardo; Torralbo, Manuel (Eds.), Noveno Simposio de la Sociedad Española de Educación Matemática SEIEM* (pp. 81-96). Córdoba: Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática, SEIEM. (2005)
3. Brousseau, G.: *Theory of Didactical Situations in Mathematics*. Kluwer, Dordretch., (1997)
4. Chevallard, Y.: La Transposición didáctica. *Del saber sabio al saber enseñado*. Aiqué Grupo Editor; (1997)
5. Doaudy, R., *Ingeniería didáctica y evolución de la relación con el saber en las matemáticas de collège-seconde*. En Barbin, E., Douady, R. (Eds.). Enseñanza de las matemáticas: Relación entre saberes, programas y prácticas. Francia. Topiques éditions. Publicación del I.R.E.M., (1996)
6. Artigue, M., *Ingeniería didáctica*. En Artigue, M., Douady, R., Moreno, L., Gómez, P. (Eds.). Ingeniería didáctica en educación matemática. Colombia. Una empresa docente (1998)
7. Charnay, R.: *Aprender (por medio de) la resolución de problemas*, en Parra, C. y Saiz I., *Didáctica de la Matemática. Aportes y reflexiones,* Buenos Aires, Paidós., (1994)
8. Piaget, J. *Estudios de psicología genética*, EMECE, (1986)
9. Lakatos, I., *La Historia de la ciencia y sus reconstrucciones racionales*. Madrid: Tecnos, (1974)

10.Gagné, R. Las condiciones del aprendizaje. Aguilar. Madrid, (1970)
11.Gascón, J., *Cambios en el contrato didáctico: el paso de estudiar matemáticas en Secundaria a estudiar matemáticas en la Universidad*. Suma. Revista sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, 26, 11-21., (1997)

Preparando al ingresante para una comunicación competente

Marta Graciela Caligaris, María Elena Schivo y María Rosa Romiti
Grupo Ingeniería & Educación, Facultad Regional San Nicolás, Universidad Tecnológica Nacional
Colón332, 2900, San Nicolás, Buenos Aires, Argentina
{mcaligaris, mschivo, mromiti}@frsn.utn.edu.ar

Resumen. Entre las competencias que deberá desarrollar el ingeniero argentino en las distintas etapas de aprendizaje se encuentra la de comunicarse con efectividad. Para ello se requiere la articulación de diferentes capacidades, entre las cuales se encuentra la de utilizar y relacionar de manera eficaz diversos registros como el natural, el gráfico y el simbólico. En el primer trimestre de 2018 se trabajó con ingresantes a primer año de Ingeniería Electrónica e Industrial de la Facultad Regional San Nicolás y se analizó si lograban comunicar un enunciado o texto matemático considerando los tres registros. Los resultados iniciales no fueron satisfactorios. El objetivo de este trabajo es analizar si estos alumnos han mejorado la comunicación luego de trabajarla durante el desarrollo de los primeros contenidos de la asignatura. Si bien los resultados no fueron óptimos, se pudo concluir que mejoró el desempeño en la comunicación en los registros natural y simbólico.

Palabras Clave: Competencias, Comunicación, Registros.

1 Introducción

En el año 2006, el CONFEDI aprobó las Competencias de Egreso del Ingeniero Argentino y en el 2008 se plantearon las Competencias Requeridas para el Ingreso a las carreras de Ingeniería [1].

Las competencias de ingreso deben ser consideradas como referencia para los ingresantes a carreras de ingeniería. Éstas se dividen en: básicas, transversales y específicas, y deben ser requeridas a los aspirantes al ingresar. Entre las competencias básicas se encuentran la lectura comprensiva y rápida, la escritura y la interpretación y solución de situaciones problemáticas.

A comienzos de año, se trabajó con los ingresantes a Ingeniería Electrónica e Industrial de la Facultad Regional San Nicolás, dependiente de la Universidad Tecnológica Nacional (FRSN-UTN), analizando la competencia comunicacional, en particular, la relacionada con el manejo simbólico propio de la Matemática y las representaciones gráficas.

Si bien el manejo simbólico y gráfico es indispensable para la comunicación de un contenido matemático, se consideró oportuno no excluir en el análisis de la misma al registro natural, que es la vía utilizada para la comunicación diaria entre alumnos y docentes.

El objetivo de este trabajo es analizar si los alumnos de primer año de la FRSN-UTN de las especialidades mencionadas, han mejorado la comunicación de un enunciado, resultado o texto matemático considerando tres registros semióticos de representación, el natural, el simbólico y el gráfico, luego de trabajar la misma durante el desarrollo de los primeros contenidos propios de la asignatura.

2 Investigación previa

El presente trabajo de investigación es una continuación de otro realizado a comienzos de 2018. El mismo se focalizó en la asignatura Análisis Matemático I, trabajando con 35 ingresantes a la especialidad de Ingeniería Electrónica y 30 de Ingeniería Industrial del turno tarde. Se eligieron estas dos especialidades para tener una población variada, ya que los ingresantes a Ingeniería Electrónica provienen, en un 54%, de escuelas medias de modalidad técnica, mientras que los que eligieron Ingeniería Industrial han cursado su escuela media con modalidad no técnica.

Para que no fuera un obstáculo el contenido a comunicar, se valoró el desempeño individual de los estudiantes en una actividad que involucró conceptos simples, como la propiedad distributiva de la potencia con respecto a la multiplicación o el teorema de Pitágoras. Estos contenidos fueron abordados en la escuela media y tratados y evaluados en el curso introductorio a la FRSN-UTN.

De acuerdo con los resultados obtenidos, ningún estudiante de las especialidades analizadas ha mostrado un desempeño satisfactorio en la comunicación usando el registro natural. En su mayoría, han tenido un desempeño insatisfactorio porque redactaron expresiones sin un sentido matemático preciso o con predominio simbólico.

En cuanto a los errores cometidos, entre el 15 % y 20% de los estudiantes de las dos especialidades confundieron los conectivos lógicos como la disyunción con la conjunción o el condicional con el bicondicional. También se ha observado que la mayoría utilizó expresiones imprecisas para referirse a estos dos últimos como: "…esto significa que…", "…a la vez que…", "…quiere decir que…" o "…de igual forma que…".

Sobre el desempeño de los estudiantes en la comunicación utilizando el registro simbólico, cabe destacar que no llegó al 5% de resultados satisfactorios. En cuanto a los errores comunes observados en la comunicación en este registro, se puede destacar que entre un 10% y un 15% escribió la propiedad a comunicar, presentando un caso particular y casi el 40% de los estudiantes escribió expresiones en símbolos sin sentido matemático.

Respecto a la comunicación utilizando el registro gráfico, cabe destacar que más del 40% ha sido satisfactorio. En este registro se han observado los mejores resultados. No obstante, más del 10% de los estudiantes de Ingeniería Industrial, confundió la propiedad enunciada.

Los resultados obtenidos de la investigación muestran claramente que los alumnos que iniciaron el cursado de Análisis Matemático I de Ingeniería de la FRSN-UTN en las especialidades Electrónica e Industrial en 2018, tuvieron serias deficiencias a la hora de expresarse en el lenguaje simbólico, propio de la matemática, y en el natural. Su desempeño en la comunicación en dichos registros fue el que mostró mayor cantidad de resultados insatisfactorios, mientras que en el gráfico alcanzó el mayor número de resultados satisfactorios.

En esta primera instancia, la diferencia de procedencia de los estudiantes de escuelas de modalidad técnica y no técnica sólo se evidenció en el trabajo sobre el registro gráfico ya que en los otros dos, los resultados fueron muy similares y con errores en común.

Esta investigación llevó a concluir que es prioritario, desde el inicio del ciclo básico, proponer actividades para disminuir las falencias de comunicación observadas. En esa oportunidad se planteó como trabajo futuro intensificar el trabajo en el aula para colaborar en el logro de una de las capacidades del egresado, la de ser capaz de utilizar y articular de manera eficaz distintos lenguajes: formal, gráfico y natural.

3 Marco teórico

El trabajo por competencias ha ido ganando lugar de forma creciente en todos los ámbitos y niveles de la educación formal. Las competencias brindan información sobre lo que se debe ayudar al estudiante a construir, a adquirir y desarrollar trayendo como consecuencia un referente para la evaluación comprobando el nivel de logro alcanzado por ellos. Sin embargo deben ser muy bien seleccionados no sólo los contenidos para trabajarlas si no también las tareas que se solicitan al alumno [2].

A partir de las distintas perspectivas, CONFEDI adopta como definición de competencia a la capacidad de articular eficazmente un conjunto de esquemas o estructuras mentales y valores, permitiendo poner a disposición distintos saberes, en un determinado contexto con el fin de resolver situaciones profesionales. Las competencias aluden a capacidades complejas e integradas, relacionadas con saberes que se vinculan con el saber hacer, entre otras cosas [3].

El enfoque complejo sobre competencias en nivel superior contempla seis aspectos primordiales: procesos, complejidad, desempeño, idoneidad, metacognición y ética los cuales deben analizarse en cada competencia para orientar el aprendizaje y la evaluación. Desde este enfoque el diseño curricular pretende formar individuos con un claro proyecto ético, creativo, investigador. Por ello se insiste en que el currículum responda no sólo a los retos presentes sino también a los del futuros [4].

El contenido de límite trabajado en esta investigación posee una amplia problemática ligada a los obstáculos cognitivos que se presentan en su construcción. Dichas dificultades tienen que ver con el concepto en sí, con la definición que involucra símbolos como $\in, \exists, \partial, \forall$, con los procesos infinitos, con las notaciones simbólicas como $\lim_{x \to +\infty} f(x) = L$, $\lim_{x \to a} f(x) = L$, con el significado de x tiende a "a" o x tiende a infinito, con las lecturas de gráficas de funciones y sus representaciones, con la interpretación de gráficas sobre límites, con su relación con la continuidad y el hecho de reemplazar directamente en la variable, con las demostraciones de teoremas o propiedades y con la intuición [5].

Generalmente los alumnos tienen dificultades que se conectan y se manifiestan en errores en el aprendizaje de la matemática. Entre los tópicos sobre las dificultades en su aprendizaje se encuentra el de las dificultades asociadas a la complejidad de los objetos matemáticos y la comunicación de los mismos. La comunicación, fundamentalmente en forma escrita, se realiza utilizando símbolos matemáticos, acompañados por el lenguaje natural con el objetivo de favorecer estos signos. El lenguaje matemático es más preciso que el lenguaje habitual y la forma de transmitir su significado es por la interpretación rigurosa de sus signos.

Una exigencia básica para la comprensión de un concepto matemático por parte de un estudiante es la coordinación o articulación entre sus diferentes representaciones. Es decir, se puede afirmar que un alumno ha comprendido un concepto cuando éste manifiesta que ha enriquecido sus redes internas de conocimiento. Y esta manifestación sólo puede hacerse a través de los sistemas de representación y mediante las actividades asociadas a los mismos. Por lo tanto, la coordinación de registros no es la consecuencia del entendimiento matemático sino que es una condición esencial debido a que cada sistema de representación permite ver una faceta diferente del objeto a estudiar y pone de manifiesto algunas de sus propiedades relevantes [6].

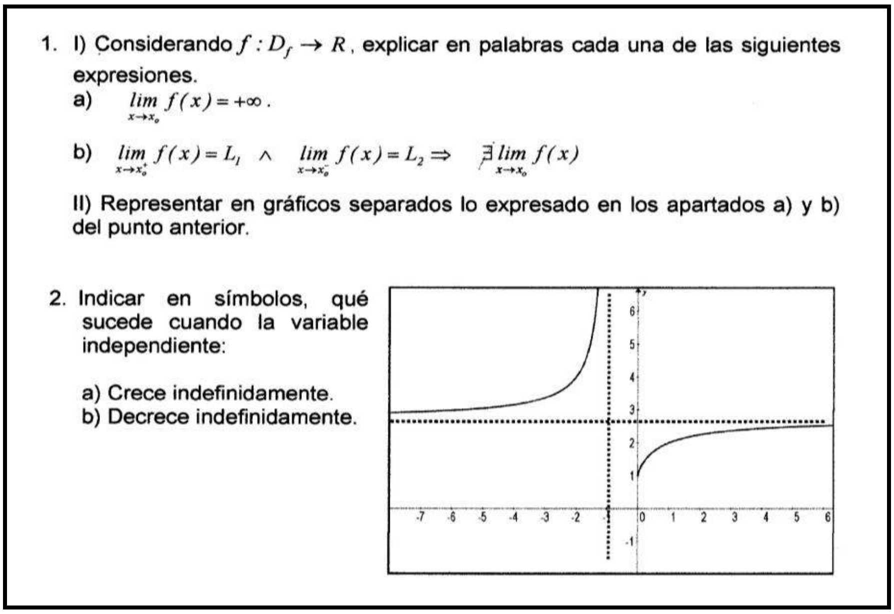
4 Metodología

Este estudio se realizó nuevamente en Análisis Matemático I y en las mismas especialidades que en la investigación previa, ya que el objetivo fue el de detectar posibles mejoras en la comunicación. Se trabajó luego de haber finalizado el desarrollo de las unidades correspondientes a “Número real”, “Funciones” y “Límite y continuidad”, con los 24 estudiantes de Ingeniería Electrónica y los 19 de Ingeniería Industrial del turno tarde, regulares por asistencia a esta altura del ciclo lectivo.

Para la recolección de datos asociados a las producciones de los alumnos se diseñó un cuestionario de respuestas abiertas, de tipo autoadministrado, ya que se les proporcionó directamente a los alumnos de ambas especialidades, quienes lo contestaron sin intermediarios, en forma individual [7].

Para evitar que el contenido a comunicar fuera un obstáculo, las actividades propuestas involucraron conceptos muy simples, abordados durante el desarrollo de las unidades mencionadas. Se muestran en la Fig. 1 las consignas de dicho cuestionario.

Cabe destacar que durante el desarrollo de las unidades involucradas, se realizó un trabajo de refuerzo en la comunicación en los tres registros, natural, gráfico y simbólico, del estilo de las consignas del cuestionario que se presenta en la Fig. 1. Ante cada definición o propiedad enseñada, se les pidió que las explicaran con sus palabras, que las representaran gráficamente o que las escribieran en símbolos, según el caso.


1. I) Considerando $f : D_f \to R$, explicar en palabras cada una de las siguientes expresiones.

a) $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$.

b) $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = L_1 \wedge \lim_{x \to x_0^-} f(x) = L_2 \Rightarrow \nexists \lim_{x \to x_0} f(x)$

II) Representar en gráficos separados lo expresado en los apartados a) y b) del punto anterior.

2. Indicar en símbolos, qué sucede cuando la variable independiente:

a) Crece indefinidamente.

b) Decrece indefinidamente.

Fig. 1. Cuestionario.

En un primer análisis de resultados se clasificó el desempeño de los alumnos de la siguiente manera: satisfactorio (S), cuando realizan la actividad solicitada en forma completa y correcta en su totalidad, parcialmente satisfactorio (PS), cuando realizan la mitad o más de la actividad solicitada en forma correcta e insatisfactorio (I), cuando resuelven en forma incorrecta la totalidad o la mayoría de la actividad, o incluso no resuelven.

En segundo término, también se analizaron los errores más comunes que cometieron los alumnos en la comunicación en cada registro.

Las consignas 1. I a) y I b) del cuestionario presentado en la Fig. 1, sirvieron para analizar la comunicación del contenido utilizando el registro natural. Se muestra en la Tabla 1 el criterio con que se evaluó el grado de desempeño en esta consigna.

Los ítems 1. II a) y II b) del cuestionario presentado en la Fig. 1, se utilizaron para analizar la comunicación del contenido utilizando el registro gráfico. Se muestra en la Tabla 2 el criterio con que se evaluó el grado de desempeño en esta consigna.

Los ítems 2 a) y b) del cuestionario presentado en la Fig. 1, sirvieron para analizar la comunicación del contenido utilizando el registro simbólico. Se muestra en la Tabla 3 el criterio con que se evaluó el grado de desempeño en esta consigna.

Tabla 1. Criterio de evaluación del desempeño en la comunicación en el registro natural.

SATISFACTORIO	PARCIALMENTE SATISFACTORIO	INSATISFACTORIO
Redacta correctamente en palabras ambas consignas.	Redacta ambas consignas con predominio del lenguaje natural pero utiliza algunos términos inadecuados.	Redacta expresiones sin un sentido matemático preciso, lo vuelve a expresar con predominio simbólico o no responde.

Tabla 2. Criterio de evaluación del desempeño en la comunicación en el registro gráfico.

SATISFACTORIO	PARCIALMENTE SATISFACTORIO	INSATISFACTORIO
Representa gráficamente en forma correcta ambas consignas.	Representa gráficamente en forma correcta alguna de las dos consignas y la otra con errores no muy graves.	Representa incorrectamente ambas consignas o no responde.

Tabla 3. Criterio de evaluación del desempeño en la comunicación en el registro simbólico.

SATISFACTORIO	PARCIALMENTE SATISFACTORIO	INSATISFACTORIO
Escribe correctamente en símbolos ambas consignas.	Redacta correctamente en símbolos alguna de las dos consignas y la otra con errores no muy graves	Escribe expresiones sin un sentido matemático preciso, utiliza símbolos inadecuados o no responde.

Por último, para analizar si los estudiantes han mejorado la comunicación de un enunciado, resultado o texto matemático considerando tres registros semióticos de representación, el natural, el simbólico y el gráfico, luego de trabajar dicha comunicación durante el desarrollo de los contenidos propios de la asignatura, se analizaron comparativamente los resultados de esta experiencia y los de la investigación previa.

5 Resultados

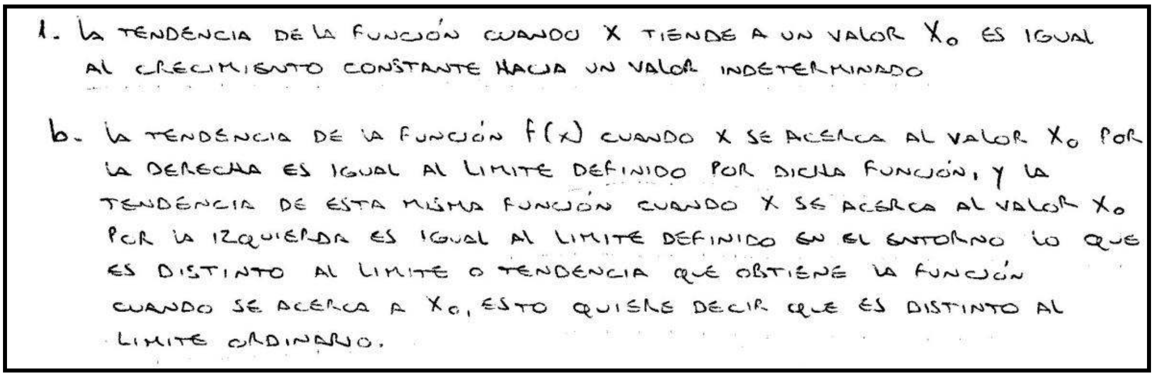
Para dar respuesta al objetivo de la investigación: analizar si los alumnos de primer año de la FRSN-UTN de las especialidades mencionadas, han mejorado la comunicación de un enunciado, resultado o texto matemático considerando tres registros semióticos de representación, el natural, el simbólico y el gráfico, luego de trabajar la misma durante el desarrollo de los contenidos propios de la asignatura, se presentan los resultados obtenidos por especialidad y por registro trabajado.

Puede observarse en la Tabla 4 la distribución de los estudiantes según su desempeño en la comunicación utilizando el lenguaje natural, considerando la clasificación que se presenta en la Tabla 1.

Como se puede apreciar según los porcentajes presentados en la Tabla 4, alrededor del 50% de los estudiantes de las especialidades analizadas ha mostrado un desempeño insatisfactorio en la comunicación usando el registro natural. En su mayoría, el motivo de este resultado es que redactan expresiones sin un sentido matemático preciso. Se puede apreciar un ejemplo de este tipo de errores en la Fig. 2.

Tabla 4. Distribución de los alumnos según su desempeño en la comunicación en el registro natural

	Ingeniería Electrónica		Ingeniería Industrial	
Desempeño	**Cantidad de alumnos**	**Porcentaje respectivo**	**Cantidad de alumnos**	**Porcentaje respectivo**
Satisfactorio	5	21%	7	37%
Parcialmente satisfactorio	8	33%	2	10%
Insatisfactorio	11	46%	10	53%
Totales	**24**	**100%**	**19**	**100%**


1. LA TENDENCIA DE LA FUNCIÓN CUANDO X TIENDE A UN VALOR X_0 ES IGUAL AL CRECIMIENTO CONSTANTE HACIA UN VALOR INDETERMINADO

b. LA TENDENCIA DE LA FUNCIÓN $f(x)$ CUANDO X SE ACERCA AL VALOR X_0 POR LA DERECHA ES IGUAL AL LIMITE DEFINIDO POR DICHA FUNCIÓN, Y LA TENDENCIA DE ESTA MISMA FUNCIÓN CUANDO X SE ACERCA AL VALOR X_0 POR LA IZQUIERDA ES IGUAL AL LIMITE DEFINIDO EN EL ENTORNO LO QUE ES DISTINTO AL LIMITE O TENDENCIA QUE OBTIENE LA FUNCIÓN CUANDO SE ACERCA A X_0, ESTO QUIERE DECIR QUE ES DISTINTO AL LIMITE ORDINARIO.

Fig. 2. Ejemplo de expresiones imprecisas para explicar con palabras los enunciados sobre límite.

Puede apreciarse en la Tabla 5 la distribución de los alumnos según sus desempeños en la comunicación gráfica, considerando la clasificación que se presenta en la Tabla 2.

Tabla 5. Distribución de los alumnos según su desempeño en la comunicación en el registro gráfico

	Ingeniería Electrónica		Ingeniería Industrial	
Desempeño	**Cantidad de alumnos**	**Porcentaje respectivo**	**Cantidad de alumnos**	**Porcentaje respectivo**
Satisfactorio	13	54%	11	58%
Parcialmente satisfactorio	7	29%	6	32%
Insatisfactorio	4	17%	2	10%
Totales	**24**	**100%**	**19**	**100%**

El desempeño de los estudiantes de las dos especialidades en la comunicación utilizando el registro gráfico, en gran mayoría ha sido satisfactorio o parcialmente satisfactorio, como se puede observar en la Tabla 5. En este registro se han obtenido los mejores resultados. No llega al 20% el desempeño insatisfactorio. No obstante, dentro de este último grupo, se han detectado errores graves que muestran total desconocimiento sobre la representación gráfica de límites, como se puede apreciar en la Fig. 3.

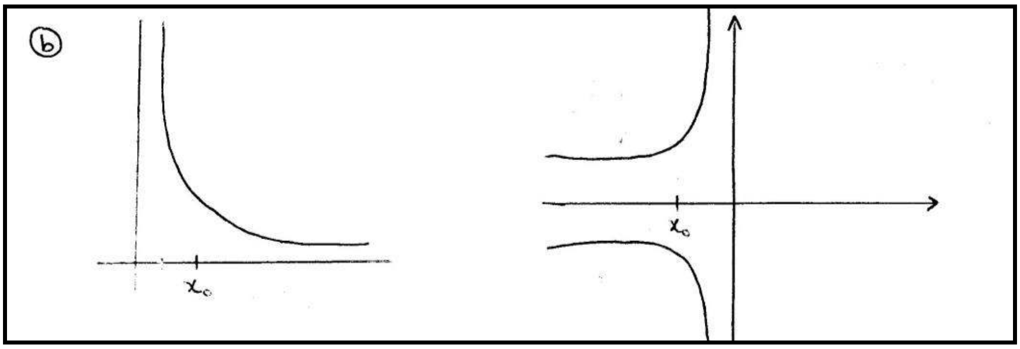


Fig. 3. Ejemplo de errores graves cometidos en la comunicación gráfica sobre límites.

La distribución de los alumnos según sus desempeños en la comunicación en el registro simbólico, considerando la clasificación presentada en la Tabla 3, puede apreciarse en la Tabla 6.

Tabla 6. Distribución de los alumnos según su desempeño en la comunicación en el registro simbólico

	Ingeniería Electrónica		Ingeniería Industrial	
Desempeño	**Cantidad de alumnos**	**Porcentaje respectivo**	**Cantidad de alumnos**	**Porcentaje respectivo**
Satisfactorio	9	37%	10	53%
Parcialmente satisfactorio	10	42%	1	5%
Insatisfactorio	5	21%	8	42%
Totales	**24**	**100%**	**19**	**100%**

Sobre el desempeño de los estudiantes en la comunicación utilizando el registro simbólico, se han encontrado diferencias entre las dos especialidades según se puede observar en la Tabla 6. Mientras que en Ingeniería Electrónica sólo alrededor del 20% ha tenido un desempeño insatisfactorio, en Ingeniería Industrial, este porcentaje asciende a más del 42%. Un ejemplo de comunicación simbólica insatisfactoria se puede apreciar en la Fig. 4.

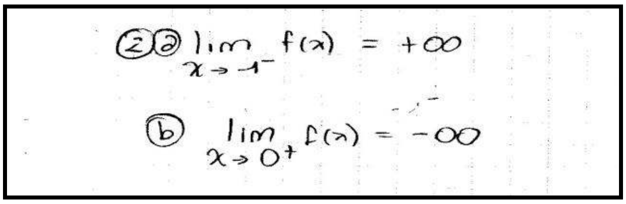


Fig. 4. Ejemplo de errores cometidos en la comunicación simbólica sobre límites.

5.1 Comparación de resultados respecto de la investigación previa

Con el fin de analizar si se produjo o no una mejora en la comunicación de los estudiantes en alguno de los tres registros, se realizó una comparación entre los resultados obtenidos en la investigación previa y la presente. Para ello, se tuvieron en cuenta sólo a los 24 estudiantes de Ingeniería Electrónica y a los 19 de Ingeniería Industrial, presentes que respondieron los dos cuestionarios.

Con respecto a la comunicación en el registro natural, se puede observar en la Fig. 5 que los estudiantes de Ingeniería Electrónica mostraron un progreso, disminuyendo los resultados insatisfactorios en más de un 20%. En cambio, los de Ingeniería Industrial han aumentado el porcentaje de resultados insatisfactorios. A pesar de esta diferencia, se puede concluir que los porcentajes obtenidos en los desempeños insatisfactorios de los dos grupos, distan mucho de ser los deseables. En ambas especialidades, alrededor del 50% de los alumnos continua con serias dificultades en comunicar resultados en el registro natural.

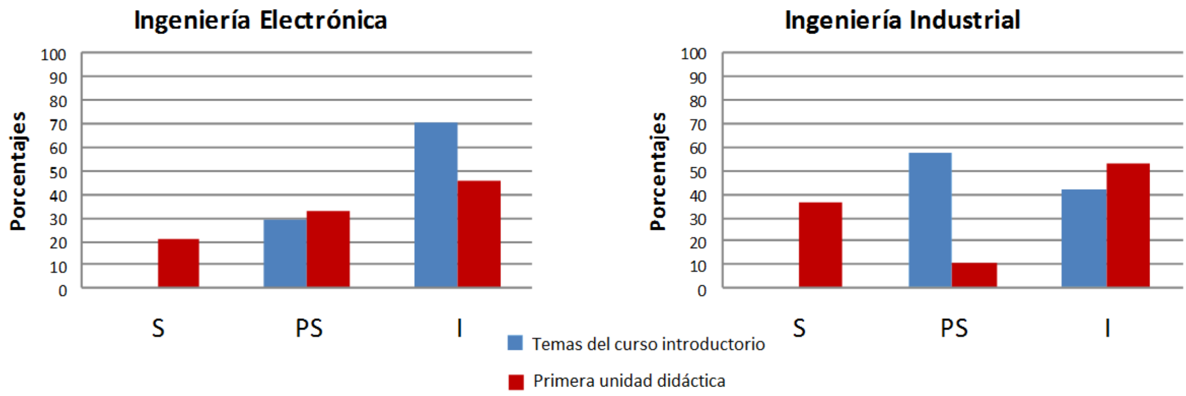


Fig. 5. Comparación de resultados entre la investigación previa y la actual: comunicación en el registro natural.

En cuanto a la comunicación en el registro gráfico, se puede observar en la Fig. 6 que los resultados para los estudiantes de Ingeniería Electrónica prácticamente se han mantenido sin cambios, con una disminución de aproximadamente un 10% en los parcialmente satisfactorios que se han volcado a los insatisfactorios. De todos modos, en la investigación previa fueron altos los porcentajes de resultados satisfactorios y parcialmente satisfactorios y en la actual se mantienen con bajo porcentaje de insatisfactorios.

Para Ingeniería Industrial, en cambio, es muy notoria la mejoría en este tipo de comunicación. Esta especialidad comenzó con alto porcentaje de resultados insatisfactorios y en la primera unidad didáctica este porcentaje ha disminuido sensiblemente.

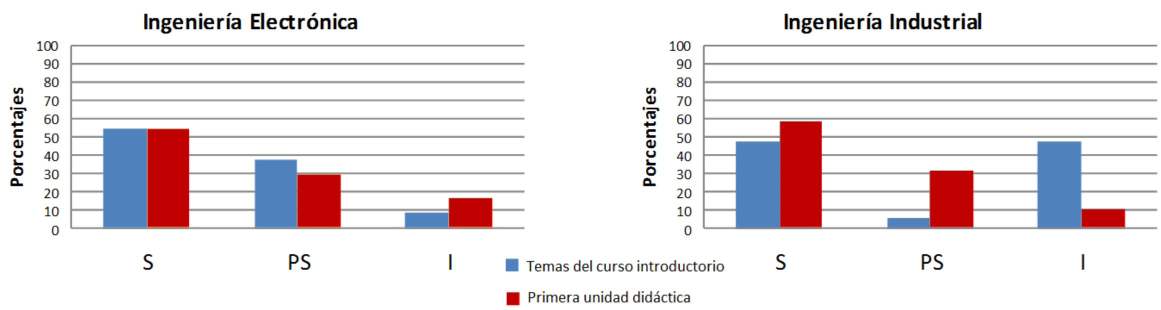


Fig. 6. Comparación de resultados entre la investigación previa y la actual: comunicación en el registro gráfico.

Por último, el análisis comparativo de la comunicación en el registro simbólico, Fig. 7, permite concluir que la mejora es muy notoria en ambas especialidades, aunque la especialidad Industrial continúa con alto porcentaje de resultados insatisfactorios.

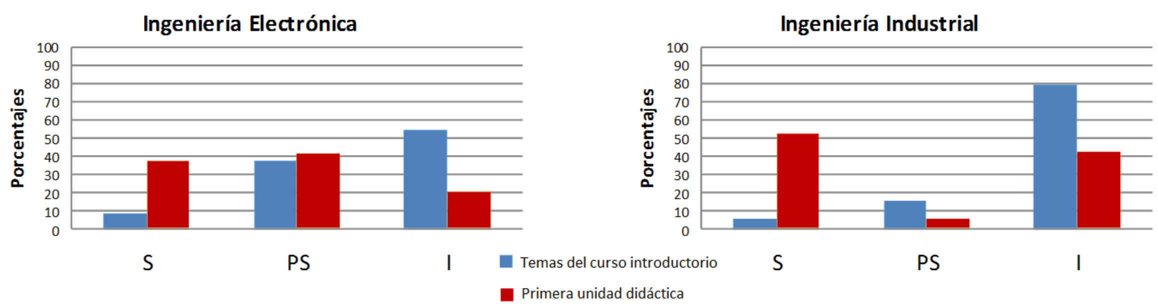


Fig. 7. Comparación de resultados entre la investigación previa y la actual: comunicación en el registro simbólico.

6 Conclusiones

Los resultados obtenidos en la investigación previa mostraron claramente que los alumnos que inician el cursado de Análisis Matemático I de Ingeniería de la FRSN-UTN en las especialidades Electrónica e Industrial tienen serias deficiencias a la hora de expresarse en el lenguaje simbólico, propio de la matemática, y en el natural. Su desempeño en la comunicación en dichos registros es el que presentó mayor cantidad de resultados insatisfactorios, mientras que en el gráfico se alcanzó el mayor número de resultados satisfactorios. Sólo se diferenciaron en el registro gráfico, con mejores resultados para Ingeniería Electrónica.

Siguiendo con la línea de investigación propuesta, durante el desarrollo de las unidades de “Número real”, “Funciones” y “Límite y continuidad” se intensificó el trabajo en clase con consignas para reforzar la comunicación en los tres registros: natural, gráfico y simbólico. Si bien los resultados distan de ser los esperados, los estudiantes de Electrónica mostraron una mejoría en la comunicación utilizando los registros simbólico y natural a pesar de continuar alto el número de insatisfactorios en el último. En Ingeniería Industrial se puede decir que prácticamente no se ha logrado modificar los resultados previos. En ambas especialidades, la comunicación en el registro natural es la que continúa presentando dificultades.

Si bien son alarmantes los porcentajes de insatisfactorios en el registro natural en ambas especialidades hay que tener en cuenta que el concepto de límite trae serias dificultades en el aprendizaje en general y en su comunicación en particular.

Esta investigación llevó a concluir que es prioritario, desde el inicio del ciclo básico, proponer actividades en el aula para disminuir las falencias de comunicación observadas. Se piensa que esta forma de trabajar contribuirá a mejorar la competencia comunicacional en los contenidos futuros.

Referencias

1. CONFEDI: Documento sobre Competencias Requeridas para el Ingreso a los Estudios Universitarios. Competencias en Ingeniería. Universidad Fasta Ediciones, pp. 35 (2014).
2. Coll, C.: Las competencias en la educación escolar: algo más que una moda y mucho menos que un remedio. Aula de Innovación Educativa, No. 161, pp. 34-39 (2007).
3. CONFEDI. Giordano Lerena, R., Compilador: Competencias y perfil del Ingeniero Iberoamericano, formación de profesores y desarrollo tecnológico e innovación. Asibei, (2016).
4. Tobón, S.: Formación basada en competencias en la educación superior: El enfoque complejo. ECOE, (2008).
5. Hitt, F.; Murillo, R.: Dificultades de aprendizaje del concepto de límite y actividades de enseñanza. XII Encuentro de Profesores de Matemáticas. Seminario Nacional de Reflexiones sobre la Enseñanza del Precálculo y del Cálculo, (2004).
6. Duval, R.: Representation, vision y visualization: cognitive functions in mathematical thinking. Basic issues for learning. Proceeding of the 21 Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Vol. 1, pp. 23-26 (1999).
7. Hernández Sampieri, R.; Fernández Collado, C.; Baptista Lucio, P.: Metodología de la investigación. McGraw Hill (2003).

Una manera atractiva de enseñar Sistema de Ecuaciones Lineales en las Ciencias Biológicas

Bongiovanni, Silvina[1], Capdevila, Sonia Elisabeth[1], De los Rios, Claudia[1]
[1] Departamento de Biología, Facultad de Ciencias Exactas ,Físicas y Naturales, Universidad Nacional de San Juan
Av. Ignacio de la Roza 590 (Oeste), J5402DCS, Rivadavia
San Juan, Argentina
silvina.bongiovanni@gmail.com
secapdevila@yahoo.com.ar
matema_clau@yahoo.com.ar

Resumen. El presente trabajo muestra una experiencia de la cátedra Álgebra y Geometría Analítica, correspondiente al primer año, primer semestre de la carrera Licenciatura en Biología de la Facultad de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. A partir de la presentación de una situación problemática, se trabajan los contenidos referidos a Sistemas de Ecuaciones Lineales de varias variables.
El desafío consiste en, obtener la cantidad de árboles que se deberán plantar en un terreno, teniendo como dato la superficie que se desea cubrir y la cantidad de flores que se estiman obtener de cada una de las especies consideradas. Ésta actividad se llevó a cabo en el campus de la Facultad de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales y no requirió tener un completo conocimiento en el tema. Los alumnos, mediante las observaciones y mediciones efectuadas, lograron plantear el problema y resolverlo sin demasiados inconvenientes. Ellos aportaron sus conclusiones, las cuales contribuyeron a una mejor asimilación de los contenidos por parte de todo el grupo. Esta actividad contribuyó al mejoramiento del proceso del Enseñanza y Aprendizaje.

Palabras Clave: Sistema de Ecuaciones, Desafío, Proceso de Enseñanza.

1 Introducción

El afán por mejorar la calidad educativa induce a realizar cambios sustanciales en el proceso de enseñanza y aprendizaje. Es necesario incorporar desafíos atractivos y motivadores para que así, los alumnos descubran la importancia de los contenidos que se abordan.
En este trabajo, se muestra cómo se plantea a los alumnos una situación real y vivencial, la cual debe ser resuelta mediante observaciones y mediciones. Esta experiencia ha sido implementada en la cátedra Álgebra y Geometría Analítica correspondiente al primer año, primer semestre, de la carrera Licenciatura en Biología, dentro del contenido "Sistemas de Ecuaciones lineales de varias incógnitas" [1][4][8][11].
El relacionar los conceptos con situaciones reales, fortalece la relación existente entre la teoría y la realidad, esto posibilita aprender a interpretar de una manera más efectiva.

2 Objetivos Específicos

A través del desafío planteado, se espera que el alumno logre:

- Interpretar correctamente el problema propuesto.
- Identificar las variables involucradas. .
- Efectuar de forma adecuada las mediciones y observaciones requeridas en el problema.
- Plantear el desafío utilizando el concepto de Sistemas de ecuaciones lineales de varias incógnitas.
- Resolver adecuadamente la situación problemática usando métodos de resolución convenientes.
- Proporcionar conclusiones acordes al área biológica.

3 Desarrollo del Trabajo

Se presenta la siguiente situación motivadora:

"Un productor de flores dispone de una parcela de 800 m^2 para cultivar dos especies de árbol. Para que el negocio genere ganancias, debe producir un total de 4500 flores al año (entre dos especies elegidas). ¿Cuántos arboles de cada especie debe plantar en la parcela?".

A los fines prácticos, se plantea esta situación para dos conjuntos de especies presentes en el campus Algunos grupos de alumnos trabajan con las especies: Jacarandá (*Jacaranda mimosifolia*) y Ceibo (*Erythrina crista-galli*) ; y otros , con: Palo borracho de flor blanca (*Ceiba insignis*) y Palo borracho de flor rosada (*Ceiba speciosa*).

Las consignas a seguir para resolver el desafío son:

1) Analizar qué datos se necesitan para resolver el problema e identificar las variables involucradas.
2) Efectuar las mediciones y observaciones pertinentes de cada especie arbórea.
3) Plantear un sistema de ecuaciones lineales para resolver el problema y encontrar su solución.
4) Analizar el resultado mediante la interpretación biológica.

3.1. Modalidad de trabajo

Con el propósito de fomentar la integración de todos los alumnos y trabajar de manera organizada se decide:

- Formar libremente 4 grupos de 10 personas aproximadamente.
- Asignar a cada grupo, una de las especies de árbol, ubicado en el campus de la Facultad..
- Efectuar las mediciones de la superficie teniendo como referencia la copa del árbol asignado y contar la cantidad de flores del mismo.
- Intercambiar los datos obtenidos por cada grupo para poder resolver el problema planteado.
- Proporcionar las conclusiones adecuadas.

3.2. Proceso de Desarrollo

Es importante destacar ciertas instancias de los procesos de Enseñanza y Aprendizaje que se tuvieron en cuenta para la elaboración del desafío. Se consideraron las habilidades cognitivas y ejecutivas [2] y las inteligencias involucradas [9].
Se tuvo en cuenta la Taxonomía de Bloom [5], considerando las siguientes etapas:

- Conocimiento: Se recolecta la información y se seleccionan los datos.
- Comprensión: Se establecen analogías de la información que se tiene, se resume, se explica, etc.
- Aplicación: Se interpreta la situación problemática recurriendo a la ilustración para su posterior resolución.
- Análisis: En esta instancia se incorpora la categorización e identificación de los datos.
- Síntesis: Es la etapa de la creación, la producción, organización, etc.
- Evaluación: Se pone de manifiesto, el comparar, relacionar, ponderar los resultados obtenidos.

Dentro de cada una de las etapas se contemplaron los posibles obstáculos [3] que probablemente se podrían presentar, a saber:

- Ontogenéticos: Tienen que ver con todo lo relacionado a las limitaciones del sujeto en algún momento de su desarrollo (este obstáculo se ha considerado puesto que se han presentado alumnos con ciertas limitaciones psicológicas).
- Didácticos: Son los que se adquieren o aparecen por el modo de enseñar o por la escogencia de un tema o una axiomática en particular.
- Epistemológico: Son los obstáculos que ciertos conceptos tienen para ser aprendidos, es propio del concepto.

Además se tuvieron en cuenta las fases del Proceso Creativo [7] considerando las distintas etapas, a saber:

- Etapa 1: Cuestionamiento: Es el descubrimiento del problema lo que despierta curiosidad en el alumno. Se abre un período de dudas, de cierta ansiedad pero también de expectativa y de deseo de aventura.
- Etapa 2: Incubación: Es la hora de las observaciones sistemáticas, en esta etapa la mente es la máquina con el poder de transformar y procesar.
- Etapa 3: Iluminación: Es el momento donde aparece la inspiración de la idea, cuando el problema es reestructurado y aparece la solución. Se identifica como un proceso de salida de la información.

- Etapa 4: Verificación: Es la realización de la obra, aquí entramos al dominio de la lógica, de la técnica, de la organización de la disciplina; es cuando cobran relieve los detalles, la habilidad en el uso de los materiales.

Se consideraron, además, diversos tipos de pensamientos [7], que se presentan a continuación:

- Pensamiento crítico: Se consideran las siguientes habilidades:
  - El juicio, la crítica y la opinión: Permiten realizar el análisis de los datos.
  - La evaluación: Nos conduce a decidir qué camino tomar a cada paso.

- Pensamiento inferencial: Reconoce:
  - La comparación: Sirve para estudiar objetos y reconocer sus similitudes y sus diferencias.
  - La inferencia: Permite la utilización de información con la cual contamos para la elaboración de nueva información, por medio de procesos analíticos.

- Pensamiento matemático: Entre los beneficios que otorga este pensamiento, se encuentran:
  - Promover la capacidad de resolver problemas en diversos ámbitos de la vida a través de la formulación de hipótesis y de la elaboración de predicciones.
  - Incentivar el razonamiento acerca de los objetivos y los métodos a seguir para alcanzarlos.
  - Permitir relacionar conceptos que se encuentran distantes entre sí, lo cual abre las puertas a un entendimiento más profundo.
  - Despertar la necesidad de ordenar y analizar los actos y las decisiones que se realizan a diario, mejorando el rendimiento general.

Es importante destacar que "Como en todos los casos, cuanto más temprano en la vida se comience a estimular el pensamiento matemático en una persona, mayor será su desarrollo intelectual y más natural, no se debe olvidar que se aprende mejor cuando la educación supone un divertimento, que cuando se impone" [10].
Además se consideraron las distintas inteligencias involucradas de acuerdo a cada una de las instancias del desafío, a saber:

- La lingüística, nos permite saber comunicarnos e interpretar las consignas de lo requerido en una capacidad transversal pues, puede ser aplicada en cualquier área de la educación y de la vida.
- La lógica – matemática, en el trabajo presentado es fundamental, pues se contempla la capacidad para el razonamiento lógico.
- La espacial, determina la capacidad para detectar detalles, es importante destacar esta capacidad porque permite potenciar el proceso de razonamiento.
- La naturalista, proporciona la capacidad de detectar diferencias y categorizar los aspectos vinculados a la naturaleza.
- La intrapersonal**,** nos capacita para comprendernos y controlarnos.
- La interpersonal, es la que determina la capacidad para reconocer las habilidades del docente frente al alumnado, la de los alumnos frente al docente y la interacción entre los alumnos, proporcionando sus experiencias y conocimientos del área determinada.
- La inteligencia emocional, es la que nos capacita para controlar y seleccionar nuestras emociones y las de los demás.
- La inteligencia espiritual, muestra la capacidad de ser flexible, poseer un alto nivel de conciencia en sí mismo, marcada tendencia a preguntar, ¿por qué? ¿y si?. A pretender respuestas fundamentales.
- La inteligencia exitosa [12] considera tres tipos de inteligencias dentro de ésta, que son: Analítica, permite evaluar, comparar y asociar hechos y conocimientos; Creativa, capacita para descubrir, imaginar y proyectar ideas; Práctica, resulta fundamental a la hora de ejecutar e implementar las decisiones.

3.3. Recursos

Los recursos que se emplearon en este trabajo, fueron:

- Presentación de diapositivas.
- 4 Cintas métricas de 50 metros.
- Material teórico elaborado por docentes de la cátedra.

3.4. Evaluación

El desafío que se propuso, formó parte de la evaluación final de la Unidad de Sistema de Ecuaciones Lineales con varias Incógnitas.
Se elaboró la siguiente rúbrica de evaluación.

Propósitos	Satisfactoriamente logrado	Logrado	No Logrado
Interpreta claramente el desafío.			
Identifica en el problema las incógnitas.			
Realiza las mediciones y observaciones acorde a las pautas indicadas.			
Participa y respeta la opinión del grupo de sus compañeros en el planteo del problema.			
Usa técnicas y herramientas adecuadas para la resolución correcta del problema.			
Proporciona conclusiones de los resultados obtenidos, apropiadas a la situación problemática propuesta.			

La misma muestra un indicador de los aspectos que el docente requirió de los alumnos. Para la aprobación de la actividad se debía tener un 70% de la rúbrica lograda, de no cumplir con tal condición, se les proporcionó una actividad similar a la dada, la cual tuvo que ser presentada en un tiempo predeterminado y con todas las justificaciones pertinentes.

4 Conclusiones

La experiencia realizada indicó resultados ampliamente satisfactorio, puesto que los alumnos manifestaron haber entendido los contenidos abordados mediante la aplicación real de los mismos.
De acuerdo a esto, se concluyó, que es fundamental detectar las necesidades e inquietudes de los alumnos, ver la situación-contexto en la que nos encontramos, y saber lo que se quiere conseguir para encontrar la herramienta adecuada, que permita llevar a cabo esa situación didáctica y tener la capacidad de planificar los contenidos, implementando la motivación y la aplicación, para lograr el afianzamiento de los mismos [6].
Nuestros estudiantes respondieron positivamente al problema planteado.
Esta actividad, provocó que el docente, ya no sea un mero transmisor de conocimientos y que los alumnos reviertan la postura de meros receptores.
Se experimentó que si el alumno es un sujeto pasivo, su proceso de aprendizaje presenta un porcentaje muy bajo de apropiación de conceptos.
Entonces sería muy adecuado tener en cuenta que mientras más activa es la participación del alumno, mayor porcentaje de retención de contenidos adquiere.
Los resultados de las evaluaciones referidas al tema abordado, mejoraron notablemente con respecto a las que no estuvieron implicadas con una experiencia real.
Según las encuestas realizadas, los alumnos se mostraron muy interesados, con mucho entusiasmo y sugirieron que dichas experiencias se realizaran en lo posible con mayor frecuencia.

A continuación se citan algunas de las respuestas referida a dicha encuesta:

"*Fue útil, ya que se puede entender más, pero también es más pensativo. Se pueden ver diferentes puntos de vista de los compañeros"*
"Ayuda a entender la utilidad de lo que se ve en clases para la profesión que se eligió para el futuro"
"Creo que fue una experiencia muy entretenida lo que ayudó a que prestáramos más atención y se aprende de mejor manera"
"Me gustaría que esta forma de trabajo se realizara más, ya que se trabaja con más entusiasmo y se logra comprender los temas con más facilidad"

Esta experiencia, es el inicio de nuevos desafíos para que el alumnado afiance los contenidos de una manera más atractiva y motivadora. En el segundo semestre se ha implementado, para el estudio de Funciones, Límite y Derivadas (está en proceso), la elaboración de un germinador con distintas clases de semillas, dicha experiencia se enfoca en la observación continua del crecimiento de la planta. Además se pretende aplicar dicha información en la construcción de modelos de regresión en la cátedra "Bioestadística", correspondiente al segundo año, segundo semestre de la carrera Licenciatura en Biología.

Referencias

1. Apóstol.: Cálculo Vol. I. Editorial Reverte
2. Bruner, J.: La educación, puerta de la cultura. Madrid, Visor (1999).
3. Brousseau G. (1999): "Educación y Didáctica de las matemáticas", en Educación Matemática , México
4. Capdevila, S.: Apuntes de cátedra
5. De Bono, Edward. El pensamiento creativo. Ed. Paidos. México. 1994. 464pp.
6. Fidalgo, A.; Sein-Echaluce, M.L. (Coord.): Aprendizaje, innovación y competitividad (2012).
7. García Carrasco, J. ; García del Dujo, Á.: Teoría de la Educación II. Procesos primarios de formación del pensamiento y la acción. Salamanca, Ediciones Universidad de Salamanca (2001).
8. Larson; Hostetlery E.: Cálculo Vol. I. Editorial Mc Graw Hill.
9. Pea, R.: Prácticas de inteligencia distribuida y diseños para la educación, en Salomón (comp.) Cogniciones distribuidas. Consideraciones psicológicas y educativas. Buenos Aires, Amorrortu (2001)
10. Porto Julián Pérez y Gardey Ana. Publicado: 2011. Actualizado: 2014. Definición de pensamiento matemático (https://definicion.de/pensamiento-matematico/)
11. Rey Pastor; Pi Calleja; Trejo.: Análisis Matemático Vol. I . Editorial Kapeluz
12. Stemberg, L.: Contranálisis (1999).

.
.

Una Experiencia Inclusiva en Análisis Matemático II: Transposición Didáctica y Uso de Tiflotecnología

Olga Scagnetti[1], Valeria Bertossi[1]
[1] Departamento de Materias Básicas, Facultad Regional Santa Fe, Universidad Tecnológica Nacional
Lavaise 610
{oscagnetti, vbertossi}@frsf.utn.edu.ar

Resumen. En este artículo exponemos un caso de transposición didáctica que tuvo lugar con un alumno cuyas características no son a las que estamos habituadas en nuestra tarea de enseñar. La experiencia resultó una literal traducción del saber: además de llevarlo a la esfera cognoscitiva del alumno para convertirlo en saber enseñado, hubo que traducir el lenguaje cargado de gestualidad y alto contenido visual, con el que la mayoría de los seres humanos nos comunicamos, a un lenguaje háptico que transpusiese las barreras de la ceguera que circunscriben la esfera de discapacidad del estudiante. En nuestro empeño por lograrlo hemos adaptado los sistemas de enseñanza, apelado a materiales de diseño universal, recursos tiflológicos y artesanales, requerido el esfuerzo comprometido (y necesario) del alumno y contado con el indispensable apoyo institucional.

Palabras Clave: Alumno ciego, Inclusión, Transposición didáctica, Tiflotecnología

1 Introducción

A partir del debate instalado acerca de la discapacidad e inclusión en todos los niveles del ámbito educativo, Pegalajar Palomino [1] advierte que “la atención a la diversidad desde un contexto inclusivo constituye uno de los retos del actual sistema universitario”. Para responder a ello, la comunidad docente ha comenzado a poner en marcha una serie de cambios didácticos y organizativos en sus prácticas. Pero en nuestro caso, tal cambio se produjo de modo imperativo y urgente a raíz de la presencia de un alumno ciego en nuestro curso de Análisis Matemático II de la carrera Ingeniería en Sistemas de Información de la Universidad Tecnológica Nacional (UTN), Facultad Regional Santa Fe. Los contenidos conceptuales de la asignatura comprenden cálculo diferencial e integral de funciones vectoriales de una variable en R^2 y R^3, cálculo diferencial e integral de funciones de varias variables, cálculo vectorial y ecuaciones diferenciales, los cuales demandan las representaciones geométricas que proveen los softwares graficadores como medios facilitadores para su cabal comprensión, pero que a la fecha no incorporan ningún módulo de accesibilidad para personas carentes de visión.

Nuestra práctica docente se basa en el ‘sistema didáctico’ concebido como la relación ternaria entre el docente, los alumnos y el saber matemático, donde es el pedagogo el encargado de transformar el saber que se debe enseñar en un saber apto para ser enseñado, esto es, realizar la *transposición didáctica* (Chevalard) [2].

Pero esa *transposición didáctica* que tiene lugar con el alumno no vidente difiere de la que ocurre con el resto de los estudiantes que carecen de tal discapacidad. Debimos apelar a recursos tecnológicos y artesanales para sortear la ausencia de visión a la hora de construir representaciones mentales que resultaran lo más aproximado posible a la realidad, haciendo un acercamiento al conocimiento a través del tacto, en respuesta a sus necesidades psicofísicas. Lucerga Revuelta y Sanz Andrés [3] afirman: “las personas privadas de visión obtienen la mayor parte de la información a través de dos canales fundamentales: el lenguaje y la experimentación táctil, cuyo órgano más especializado es la mano”. En tal sentido, Lafuente de Frutos [4] recomienda que a la hora de preparar material didáctico se debe tener presente que la base del desarrollo y aprendizaje de los alumnos con ceguera es la *percepción háptica* (tacto activo) en el que confluyen dos sistemas de captación de información: la *percepción táctil* (estática), a través de la cual se sienten las propiedades térmicas y la consistencia del objeto examinado; y la *percepción cinestésica* (dinámica), que a través del movimiento voluntario de las manos permite percibir su forma, su textura, aspereza y dureza. Al tiempo que la mano no dominante proporciona puntos de referencia y la mano dominante inspecciona el objeto realizando movimientos sobre el mismo, se integran los datos obtenidos para configurar un concepto global del objeto explorado.

Esta *transposición didáctica* requirió, además, de un proceso de adaptación de las formas comunicativas. Para ello hemos recurrido a la tiflotecnología, que se define como “el conjunto de técnicas, conocimientos y recursos encaminados a procurar a los ciegos y deficientes visuales los medios oportunos para la correcta utilización de la tecnología, con el fin de favorecer su autonomía personal y plena integración social, laboral y educativa” (Pegalajar Palomino) [1]. También fue necesario disponer en el aula de instrumentos y materiales didácticos específicos, verbalizar cuanto se escribiese en pizarra, reiterar la presentación de información, flexibilizar los sistemas de evaluación y considerar al profesor de apoyo como un elemento esencial dentro y fuera del aula para cooperar y coordinarse continuamente (Martínez Liébana) [5], [6].

El *contrato didáctico* entre docente y alumno, devenido de la relación ternaria docente–alumno–saber, es un conjunto de reglas explícitas e implícitas que deben ser cumplidas por ambas partes. Una regla implícita del lado del profesor es destinar un mayor *tiempo didáctico* al alumno que carece de visión, así como también potenciar las perspectivas táctiles, auditivas y cinestésicas para una apropiación significativa, activa y constructiva del saber; entendiéndose por *tiempo didáctico* aquél que el programa de la materia designa para el desarrollo del tema del saber, a diferencia del *tiempo de enseñanza* que es el requerido por la singularidad del alumno para la asimilación del mismo.

La consecuencia lógica de lo expuesto precedentemente fue la modificación decisiva en nuestros sistemas de enseñanza. El desafío de la inclusión de un alumno con discapacidad visual en nuestro trabajo cotidiano significó implementar nuevas estrategias pedagógicas, crear y usar material didáctico apropiado, y recurrir a la tiflotecnología para que los *tiempos de enseñanza* transcurriesen similares a los de sus pares.

2 Aspecto cognitivo, emocional y conductual del alumno ciego

En este apartado pretendemos comentar de modo esquemático las cualidades cognitivas, emocionales y conductuales del alumno con el que vivimos la experiencia inclusiva para echar luz a los resultados que posteriormente presentaremos.

Aspecto cognitivo. Posee muy buena memoria y concentración, su capacidad de abstracción está muy bien desarrollada y goza de una atención distribuida digna de admiración: mientras toma apuntes en su computadora, a la vez que escucha en su auricular lo que va escribiendo (borrando y corrigiendo si se equivoca), sigue la explicación que el profesor hace en pizarra, atiende alguna aclaración puntual del docente de apoyo al momento que él lo requiere, y eventualmente se hace cómplice de algún comentario ocurrente hecho por un compañero sentado atrás. Tiene internalizado un mecanismo de traducción permanente entre el leguaje y diferentes códigos no lingüísticos que le permite en todo momento saber de qué se está hablando y comprender el concepto abordado. Se expresa con claridad y manifiesta de manera precisa sus dudas y razonamientos. Organiza su material de estudio (apuntes propios, de cátedra y bibliografía) aprovechando la estructura de carpetas de Windows. Cursó sus estudios secundarios en una escuela para normovidentes y egresó como abanderado. Ingresó a estudiar Ingeniería en 2016; actualmente tiene todo primer año aprobado y está cursando tercer año junto a una materia de segundo, que es la única de ese nivel que le quedó pendiente.

Aspecto emocional. Se acepta a sí mismo como tal y es empático con los demás. Su buena predisposición, responsabilidad y tenacidad lo comprometen con la tarea, aunque a veces su autoexigencia lo convierte en una persona muy demandante. Se maneja de manera autónoma; a modo anecdótico, cuando ingresó a la facultad la recorría por sí mismo con su bastón para reconocer y memorizar los diferentes espacios. Es extrovertido y de fácil y rápida adaptación. No se victimiza por su discapacidad, al contrario, toma las riendas de su ceguera y es resiliente a los obstáculos que ésta le interpone, actuando de manera proactiva al aportar nuevas y superadoras soluciones a las sugeridas por los docentes en las diferentes circunstancias.

Aspecto conductual. Establece vínculos interpersonales con absoluta naturalidad. Es respetuoso al hacer peticiones, sea una explicación, una clase de consultas o cualquier otra cosa que requiera para su desenvolvimiento habitual. Construyó enseguida y sin inconvenientes su grupo de amigos, aspecto fundamental para la integración al ámbito universitario (a modo de ejemplo, los compañeros le enseñaron a realizar su firma con birome en un papel); desde su ingreso a primer año pudo apreciarse un notable progreso en lo que a madurez, desenvolvimiento y seguridad en sí mismo se refiere. También tiene otros vínculos sociales extra facultad como, por ejemplo, el equipo santafesino de fútbol para ciegos ‘Los Búhos’ y, por si esto fuera poco, es además integrante del seleccionado nacional ‘Los Murciélagos’, que en los Juegos Parapanamericanos Juveniles 2017 obtuvo medalla de plata.

3 La experiencia

3.1 En el aula

Cuando hablamos del espacio físico para el 'sistema didáctico' el lugar por excelencia es el aula. Durante el desarrollo de las clases, el alumno disponía de su notebook como herramienta para tomar apuntes. Dos instrumentos tiflológicos fueron imprescindibles aquí:

1) El editor de ecuaciones Lambda, especialmente diseñado para ciegos. En la parte (a) de la Fig. 1 se aprecia la salida del programa cuando el alumno lo está utilizando y en la parte (b) se muestra la salida del visualizador gráfico, módulo que traduce la signografía Lambda a la signografía matemática, de manera que lo que se ha escrito en modo edición resulte legible a una persona vidente.
2) El lector de pantalla Jaws, que transforma la información de los sistemas operativos y las aplicaciones en sistema sonoro o audio, permite a las personas ciegas utilizar los programas instalados en Windows. Con este software y unos auriculares, el alumno podía escuchar al tiempo que tomaba notas en Lambda qué era lo que estaba escribiendo.

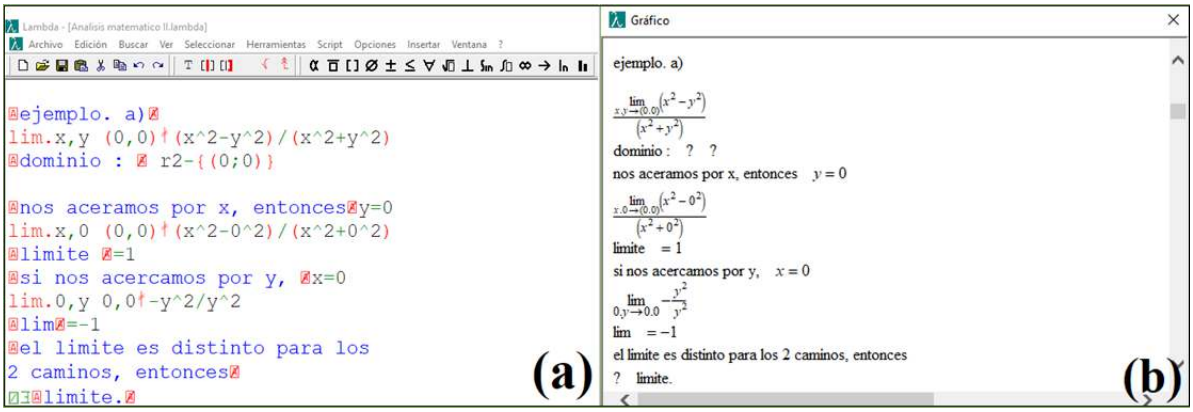


Fig. 1. Editor Lambda. Parte (a): Salida por pantalla en el modo edición. Parte (b): Salida del visualizador gráfico, legible para una persona vidente.

La organización curricular de la UTN divide el proceso de enseñanza en dos momentos: la Teoría y la Práctica; y asigna a cada comisión de cada asignatura una dupla docente que trabaja en forma coordinada: el profesor que presenta la Teoría (y asume la responsabilidad de dicha comisión) y el auxiliar que desarrolla la Práctica. Entre ambas decidimos que la auxiliar de Práctica oficiara de docente de apoyo del estudiante ciego. En las clases teóricas se sentaba a su lado para aclararle todo aquello que fuera expuesto por la profesora de Teoría pero que él no alcanzase a interpretar. Para que comprendiera las gráficas en R^3 realizadas en pizarra utilizábamos su notebook como primer octante del sistema de coordenadas cartesianas tridimensional: adoptábamos el teclado como plano *xy*, asumíamos las teclas como los puntos del plano, considerábamos el lateral izquierdo del teclado como *eje x*, el borde izquierdo de la pantalla como *eje z* y la arista entre el teclado y la pantalla como *eje y*. Con sus manos, guiadas por las de la auxiliar, "dibujábamos" en el aire las superficies y las curvas de modo que pudiera construir la imagen mental análoga.

En el desarrollo de la unidad 'Funciones vectoriales' hemos empleado una plancha metálica a modo de plano cartesiano, tiras de lámina imantada con una línea central trazada con pintura acrílica en relieve para representar los ejes, hilos elásticos para establecer escalas sobre los mismos, palillos de bambú para simbolizar los vectores pertenecientes al rango de las funciones vectoriales y plastilina para fijar éstos a la plancha. Bastaba que el alumno siguiera con las yemas de sus dedos las puntas de los palillos para hacer la composición de la curva. En la Fig. 2. se aprecia lo descripto para la hélice dada por la función vectorial (1), que en la imagen hemos representado con un hilo para una mejor visualización.

$$\vec{r}(t) = < cos(t); sen(t); t > \quad \textbf{(1)}$$

Fig. 2. Representación de una hélice generada por una función vectorial.

Para detectar determinadas características de las funciones de dos variables, tales como el límite, las derivadas parciales, etc., consideramos oportuno realizar impresiones 3D de diferentes superficies. Por ejemplo, fue útil la impresión de la función dada por la ecuación (2). La Fig. 3 evidencia cómo a través de la *percepción háptica* pudo generar la imagen mental de la superficie logrando interpretar correctamente la no existencia de límite en el origen. En la parte (a) hemos coloreado en amarillo el camino de ecuación (3) y en la parte (b) en naranja el camino de ecuación (4), que hemos elegido recorrer para calcular analíticamente el límite en el origen.

$$z = \frac{xy}{x^2+y^2} \qquad (2)$$

$$y = x \qquad (3)$$

$$y = -x \qquad (4)$$

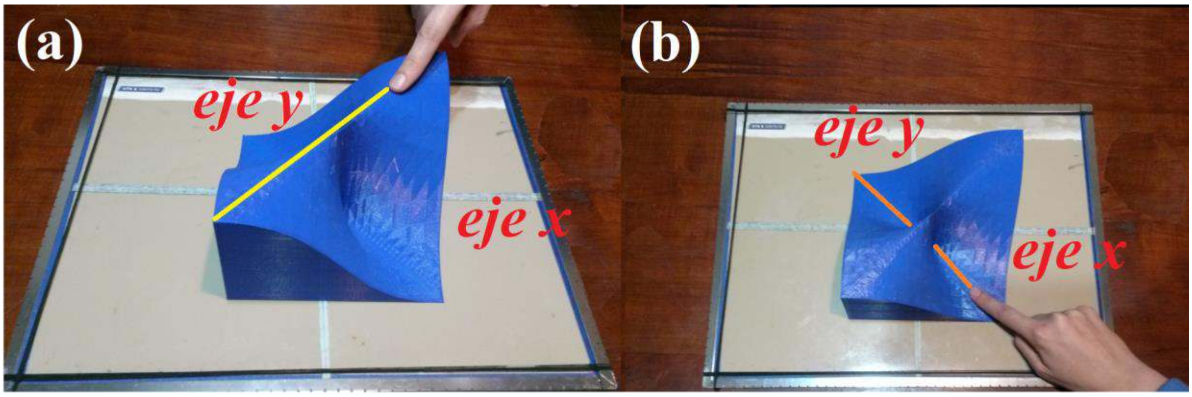


Fig. 3. Interpretación de la no existencia de límite en el origen de una función de dos variables a través de la *percepción háptica.* Parte (a): camino *y*=*x*. Parte (b): camino *y*=-*x*.

Con las impresiones 3D de trozos de la superficie de ecuación (5), una lámina plana y un palillo de bambú, tal como se muestra en la Fig. 4, aprehendió el concepto de derivadas parciales en un punto.

$$z = 2 - x^2 - 2y^2 \qquad (5)$$

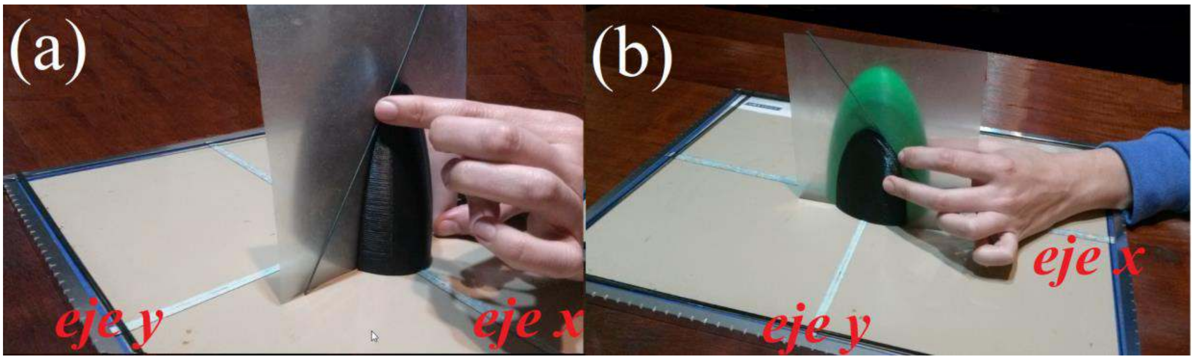


Fig. 4. Parte (a): Derivada parcial respecto de *y*. Parte (b): Derivada parcial respecto de *x*.

En las clases de Práctica, dado que la docente ya no podía sentarse al lado del estudiante, ésta verbalizaba todo cuanto escribiera o dibujara en el pizarrón mientras sus compañeros cumplían en dicho momento el rol de docentes de apoyo.

3.2 Fuera del aula

El uso de las tecnologías digitales y de comunicación actuales coadyuvaron a la eficaz inclusión del discapacitado visual al proceso de enseñanza–aprendizaje:

1) Hemos aprovechado los espacios de almacenamiento en la Nube a través de una carpeta compartida en Dropbox donde intercambiábamos información: el alumno guardaba allí los archivos (generados en Lambda) que contenían la ejercitación resuelta y las notas que había tomado durante las clases para que las docentes se los revisáramos; y, a la vez, nosotras le copiábamos los apuntes de cátedra (en formato doc, docx o PDF), que con el lector de pantalla Jaws él era capaz de escuchar.
2) Hemos empleado una aplicación móvil de uso libre y gratuito para grabar audios en formato m4a con la que dictábamos uno a uno los ejercicios previstos para las clases de Práctica y se los enviábamos vía WhatsApp algunos días previos a dichas clases. Con esta forma de proceder a él le resultaba fácil la tarea de escucharlos y pasarlos al editor Lambda, de modo que los tuviera a mano durante las clases, en igualdad de condiciones al resto de sus compañeros, que los tenían en el libro impreso.

La Regional Santa Fe de la UTN cuenta con un área de Cátedras Accesibles cuya finalidad es brindar apoyo en situaciones como la que describimos en esta contribución. Ha aportado, bajo la figura de 'alumno guía', a dos estudiantes avanzados en sus respectivas carreras que lo han acompañado durante el año para ayudarlo en situaciones tanto de índole académica como de desenvolvimiento general en la vida universitaria. Por ejemplo, colaboraron pasando a Lambda la 'Tabla Resumen de Fórmulas' que la cátedra permite utilizar a todos los alumnos en las instancias de evaluación.

Otro aspecto a destacar en el trabajo realizado fuera del aula fue la necesidad de agregar clases de consulta extra a las habituales destinadas para el alumnado en general, ya que contribuían a reforzar la seguridad en sí mismo y a garantizarle que sus notas tomadas en clase eran correctas.

3.3 La evaluación

En lo que refiere a evaluación continua, ésta pudo llevarse a cabo fácilmente dado que se incrementaron las consultas extraclase y a que la docente de Práctica estuvo junto al alumno en todas las clases teóricas.

En las instancias de evaluación sumativa nos conducíamos del siguiente modo: el alumno disponía de la 'Tabla Resumen de Fórmulas' editada en Lambda y de la plancha metálica descripta en el apartado 3.1 (junto a algunos otros accesorios más para realizar gráficas) colocada en una mesa al lado de su pupitre (ver Fig. 5); al tiempo que repartíamos el examen al resto de los alumnos, le entregábamos un pendrive con el mismo enunciado editado en Lambda. Él lo resolvía en su notebook y nos devolvía el pendrive con la solución grabada para su corrección.

Fig. 5. Alumno no vidente rindiendo el segundo examen parcial de Análisis Matemático II.

En la Fig. 6 puede apreciarse un fragmento del segundo parcial resuelto en Lambda con la forma en que procedíamos para corregirlo (lo que aparece subrayado en verde es la corrección de la docente). Este archivo luego era copiado en la carpeta compartida de Dropbox para que el alumno recibiera la retroalimentación. Éste logró la promoción del 70% de los contenidos de la asignatura aprobando los dos primeros parciales. De acuerdo a la planificación de la cátedra, el tercer parcial se toma al finalizar la cursada, extendiendo esta posibilidad hasta la finalización del ciclo lectivo en alguna de las mesas examinadoras de febrero–marzo. En el caso particular de este estudiante, dado que estaba preparándose para rendir Análisis Matemático I en mayo 2018, flexibilizamos lo programado ofreciéndole la oportunidad de rendir el 30% restante del programa analítico de Análisis Matemático II en alguna de las mesas examinadoras de julio–agosto 2018.

```
Tema II:
Dada f(x,y)=x^4-4*x*y+y^4 y el reci0nto D={(x,y)/x^4+y^4<=1}
a) Determinar puntos críticos de f(x,y) en R2
b) Determinar extremos absolutos de f(x,y) en D


a) La region es
y<=√(4:1)
x<=√(4:1)
Valeria: Ninguna de las inecuaciones está bien

la circunferencia x^2+y^2<=1
Valeria: ¿Por qué toma un círculo de radio 1 si las
variables están elevadas a la cuarta, no al cuadrado?

f(x,y)=x^4-4*x*y+y^4
δfδx=4*x^3-4*y
Valeria: 2 puntos

δfδy=-4*x+4*y^3
Valeria: 2 puntos

Para que se hagan 0
4*x^3-4*y=0
4*(x^3-y)=0
x^3-y=0
y=x^3
-4*x+4*y^3=0
(-x+y^3)=0
igualando por 0
x^3-y=y^3-x
x^3+x=y^3+y
x*(x^2+1)=y*(y^2+1)
si x;y=0 entonces
0=0
(x^2+1)=0

y^2+1=0
Valeria: Búsqueda de raíces: 1p.

entonces encontramos los puntos criticos
p1=(0,0)
Valeria: 1p.  (faltaron los puntos críticos
p2=(1,1) p3=(-1,-1))
```

Fig. 6. Fragmento de examen parcial resuelto y corregido en el editor de ecuaciones Lambda.

4 Conclusiones

Cabe puntualizar una realidad que desafortunadamente está lejos de la ideal: los docentes no estamos acostumbrados ni aún debidamente capacitados para hacer frente a situaciones especiales que se suscitan eventualmente en nuestras aulas, tal como la que hemos divulgado en esta comunicación.

No obstante ello, la experiencia resultó enriquecedora. La diversidad, en este caso distinguida por la impronta de la presencia de un discapacitado visual, produjo una circulación de saberes en la que todos los actores del proceso de enseñanza–aprendizaje nos hemos visto beneficiados: alumno no vidente, alumnos videntes y docentes. Fue necesario que todos reforzáramos valores tales como la empatía, la solidaridad y el compromiso con la tarea para llevar adelante la eficaz inclusión, además, por supuesto, del aprovechamiento de la tiflotecnología. El esfuerzo compartido, sumado a las características de personalidad excepcionales del estudiante ciego, permitieron que promocionara durante la cursada el 70% de los contenidos de Análisis Matemático II y sólo le queda pendiente rendir el 30% restante del programa analítico.

Una cuestión a destacar es la gran utilidad y muy buena aceptación de las impresiones 3D, no sólo por parte del estudiante no vidente sino también del resto de sus compañeros ya que, dado su carácter de diseño universal y su cualidad tangible, propiciaron la comprensión del concepto de límite y el de derivadas parciales de funciones de dos variables; al punto que hoy en día se siguen utilizando con las nuevas cohortes de alumnos normovidentes.

Agradecimientos. A Bruno Rodríguez, que al haberse cruzado en nuestro camino hizo posible el recorrido por esta experiencia maravillosa que colmó de honra nuestra tarea docente.

Referencias

1. Pegalajar Palomino, Mª.: Tiflotecnología e inclusión educativa: evaluación de sus posibilidades didácticas para el alumnado con discapacidad visual. *Revista Electrónica de Investigación y Docencia*. https://revistaselectronicas.ujaen.es/index.php/reid/article/view/1180/1001 (2013). Accedido el 11 de Junio de 2018.
2. Chevallard, Y.: *La transposición didáctica, del saber sabio al saber enseñado.* Aique (1997).
3. Lucerga Revuelta, R.; Sanz Andrés, M.: Puentes Invisibles: El desarrollo emocional de los niños con discapacidad visual. *Portal de la Organización Nacional de Ciegos de España (ONCE)*. https://portal.once.es/bibliotecas/fondo-bibliografico-discapacidad-visual/14414/ (2004). Accedido el 11 de Junio de 2018.
4. Lafuente de Frutos, A.: Educación Inclusiva. Personas con Discapacidad Visual. *Instituto Nacional de Tecnologías Educativas y de Formación del Profesorado (INTEF), Ministerio de Educación de España.* http://www.ite.educacion.es/formacion/materiales/129/cd/index.htm (2011). Accedido el 11 de Junio de 2018.
5. Martínez Liébana, I. (Coord.): *Aspectos evolutivos y educativos de la deficiencia visual. Volumen I.* ONCE (1999/2000). https://portal.once.es/bibliotecas/fondo-bibliografico-discapacidad-visual/14303?form=revista_field=0&areas_field=0&tDocument_field=0&titulo_field=Aspectos+evolutivos+y+educativos+de+la+deficiencia+visual&ordenacion_select=titulo&subareas_field=0&form.button.submit=Buscar&form.submitted=1&publicacion_field=&autor_select=&materias_field=0&anio_desde_field=&anio_hasta_field=&ISBN_field=&pos=0&sit=primero. Accedido el 11 de Junio de 2018.
6. Martínez Liébana, I. (Coord.): *Aspectos evolutivos y educativos de la deficiencia visual. Volumen II.* ONCE (1999/2000). https://portal.once.es/bibliotecas/fondo-bibliografico-discapacidad-visual/14304?form=revista_field=0&areas_field=0&tDocument_field=0&titulo_field=Aspectos+evolutivos+y+educativos+de+la+deficiencia+visual&ordenacion_select=titulo&subareas_field=0&form.button.submit=Buscar&form.submitted=1&publicacion_field=&autor_select=&materias_field=0&anio_desde_field=&anio_hasta_field=&ISBN_field=&pos=1&sit=ultimoultimo. Accedido el 11 de Junio de 2018.

Desarrollo de competencias y fortalecimiento de estilos de aprendizaje predominantes. El caso del estudio de la parábola.

Mario Di Blasi Regner[1], Andrea Comerci[1], Silvana Daneri[2]
[1] Departamento de Materias Básicas, Facultad Regional General Pacheco, Universidad Tecnológica Nacional
Hipólito Yrigoyen 288, General Pacheco (1617), Pcia de Bs As, Argentina
mdiblasi@red.frgp.utn.edu.ar, acomerci@docentes.frgp.utn.edu.ar,
[2] Departamento de Materias Básicas, Facultad Regional General Pacheco, Universidad Tecnológica Nacional
Hipólito Yrigoyen 288, General Pacheco (1617), Pcia de Bs As, Argentina
silvanadaneri@yahoo.com.ar

Resumen. En este trabajo presentamos el diseño fundamentado de actividades en torno al concepto de parábola y algunos resultados de la experiencia de su implementación. Nuestro objetivo fue identificar estrategias de enseñanza capaces de fortalecer los estilos de aprendizaje dominantes de los estudiantes, previamente determinados mediante Cuestionario Honey-Alonso de Estilos de Aprendizaje (CHAEA), y promover el desarrollo de las competencias matemáticas básicas propuestas por el Consejo Federal de Decanos de Ingeniería (CONFEDI) para las carreras de Ingeniería. Como resultado relevante podemos observar que las actividades diseñadas atendiendo a una relación existente entre los estilos de aprendizaje predominantes y ciertas competencias específicas de la materia entorno al concepto de parábola, produce en los estudiantes una buena predisposición hacia el trabajo colaborativo al mismo tiempo que evidencia una actitud favorable para la reflexión de su propio aprendizaje.

Palabras Clave: Estilos de Aprendizaje, Competencias, Ingeniería, Parábola.

1 Introducción

La propuesta didáctica que presentamos en este trabajo es parte de un diseño fundamentado de actividades en torno a los conceptos de secciones cónicas que se lleva adelante en la materia Algebra y Geometría Analítica (AyGA) correspondiente al primer año de las carreras de Ingeniería de la Facultad Regional General Pacheco (FRGP) de la Universidad Tecnológica Nacional (UTN)

Nuestro estudio se inició al advertir un fenómeno que se presenta actualmente, tanto en países europeos como en Latinoamérica, como es el de la implementación de procesos educativos basados en competencias profesionales valoradas como la nueva directriz en la organización de los procesos de enseñanza y aprendizaje del nivel superior.

Cabe aclarar que entendemos que una *competencia* – en el ámbito educativo formal- no es un saber que se transmite, sino que un sujeto-aprendiz la construye (y desarrolla) a partir de las distintas secuencias de aprendizaje que el docente le pueda presentar. De modo que el rol del profesor en el aula es el de creador de condiciones favorables para dar lugar a dicha construcción personal. En este sentido, para modelar nuestra experiencia de aula adoptamos algunos de los lineamientos que se exponen en un documento emitido por el CONFEDI en el cual se expone un consenso sobre el hecho que “todo ingeniero no sólo debe saber, sino también saber hacer” y asumen en [1] que una competencia es “la capacidad de articular eficazmente un conjunto de esquemas (estructuras mentales) y valores, permitiendo movilizar (poner a disposición) distintos saberes, en un determinado contexto con el fin de resolver situaciones profesionales”.

Por otro lado, hemos centrado nuestra atención en los *Estilos de Aprendizaje* (EA) de los estudiantes. Entendemos que se han desarrollado distintos modelos y teorías sobre estilos de aprendizaje, en virtud de ello, para nuestra experiencia, hemos adoptamos la definición asumida por Alonso y Gallego en [2] quienes siguen la noción propuesta por Keefe y Farrell en [3] quienes expresan que "los estilos de aprendizaje son los rasgos cognitivos, afectivos y fisiológicos, que sirven como indicadores relativamente estables, de cómo los discentes perciben, interaccionan y responden a sus ambientes de aprendizaje" Y de las posibles clasificaciones de EA propuestas desde distintos modelos tratados en [4] hemos adoptado aquella surgida dentro del paradigma del procesamiento de información formulada por Honey y Mumford en [5] quienes identifican cuatro estilos de aprendizaje: *Activo*, *Reflexivo*, *Teórico* y *Pragmático*.

En particular, hemos diseñado actividades en torno al concepto de parábola. La implementación de estas se llevó a cabo en un curso seleccionado al azar dentro de una población de ocho cursos de AyGA de la FRGP-

UTN. El curso elegido correspondió a la especialidad de Ingeniería Mecánica integrada por treinta y cuatro estudiantes. Dentro del año lectivo, la experiencia se ubicó en la finalización del primer cuatrimestre de la cursada de la materia anual AyGA con anterioridad a la primera evaluación parcial de la misma.

2 Situación actual

La asignatura Álgebra y Geometría Analítica (AyGA) se imparte en dos cuatrimestres en el primer año de las carreras de ingeniería. Esta materia consta de ocho unidades temáticas: dos unidades que comprenden contenidos de Geometría Analítica y seis unidades que atienden a nociones de Álgebra Lineal. Su concepción pedagógica responde predominantemente al modelo tradicional de enseñanza con cierta identificación con el enfoque comprensivo en el cual prevalece la enseñanza de la lógica interna de los conocimientos y donde se aspira a que los estudiantes aprendan sobre la materia de una forma activa empleando para ello la lógica aparte de la memoria.

De modo que se reconoce la necesidad de realizar ciertas modificaciones en la manera de trabajar en AyGA que enriquezcan la experiencia de aprendizaje de los estudiantes en su aproximación a los contenidos de la materia.

En este orden de las cosas, se entiende que tales intervenciones docentes no pueden -ni deben- ignorar la realidad que caracteriza a la mayoría de los ámbitos educativos locales, la cual presenta ciertas limitaciones de recursos tales como la presencia de una numerosa concurrencia de estudiantes en una misma clase y los tiempos un tanto acotados para el desarrollo de una dinámica educativa más alejada del modelo tradicional.

No obstante, se percibe plausible que los cambios pueden materializarse a través de estrategias de enseñanza donde se contemple, al menos dos aspectos: por un lado, los hechos que los estudiantes pueden sostener su aprendizaje también en sus propios procesos lógicos y estos pueden ser reconocibles en los estilos de aprendizajes según [2] y, por otro lado, en la consideración del desarrollo de competencias fundamentadas y consensuadas, por instituciones como el CONFEDI, con las cuales debe contar un futuro profesional de la ingeniería.

3 Diseño y fundamentación de la actividad

Una etapa previa al diseño de cada una de las actividades que mostraremos en el presente trabajo fue destinada para la detección de cuáles eran las competencias propuestas por el CONFEDI (y seleccionadas para la materia AyGA) que se correspondían con aquellas involucradas en los cuatro estilos de aprendizajes (EA). Dicho estudio nos permitió la elaboración de la Tabla N°1.

Tabla 1. Relación entre competencias y estilos de aprendizajes

Competencias propuestas por el CONFEDI / EA	**Pragmático**	**Activo**	**Reflexivo**	**Teórico**
Competencia básica **Resolución de problemas**	Resolver el problema, utilizando otro procedimiento, para verificar el resultado.	Comunicar los resultados en un lenguaje comprensible.	Reflexionar sobre problemas afines que sabe resolver.	Buscar, seleccionar y procesar la información necesaria para la resolución del problema.
Competencias transversales o genéricas **Autonomía en el aprendizaje**	Mostrar disciplina y esfuerzo en la búsqueda de resultados.	Participar en las clases activamente.	Estar concentrado en momentos de estudio – aprendizaje.	Organizar adecuadamente el tiempo de estudio.

Destrezas cognitivas generales	Reconocer, en ejemplos, la aplicación de determinada categoría conceptual.	Identificar patrones de comportamiento.	Elaborar argumentaciones que permitan sostener una hipótesis dada.	Utilizar la teoría para modelizar con vistas a generalizar a partir de situaciones independientes.
Competencias específicas **Referidas a la materia AyGA**	Analizar un fenómeno físico sencillo a partir de su representación gráfica o a partir de ecuaciones matemáticas.	Utilizar computadoras aplicando lógica procedimental en la utilización de TIC.	Resolver problemas sencillos en AyGA aplicando modelos matemáticos.	Transferir el conocimiento teórico de AyGA a situaciones problemáticas variadas.

Los datos referidos a los EA para diseñar las actividades en el curso escogido se recabaron mediante la aplicación del Test CHAEA, que consiste en cuestionario que consta de ochenta preguntas (veinte ítems referidos a cada uno de los cuatro estilos de aprendizaje) que deben responderse manifestando acuerdo (+) o desacuerdo (-). Para el análisis de los resultados obtenidos a través del test se utilizó el *Baremo General de Preferencia en Estilos de Aprendizaje* propuesto por Alonso en [2]

Asimismo, los estudiantes recibieron información sobre la caracterización de dichos estilos como así también los resultados obtenidos de la prueba. Cabe aclarar que en este curso se lograron registrar tres estilos predominantes de los cuatro EA propuestos por Honey -Alonso: los estilos pragmático, reflexivo y activo. Asimismo, se reconoce que de todas las competencias que figuran en la Tabla N°1 se seleccionaron las Competencia Específicas. De modo tal que hemos diseñado tres actividades, atendiendo a las competencias referidas a la materia AyGA y según los estilos de aprendizaje dominantes determinados para cada uno de los estudiantes del curso donde se desarrolló la experiencia.

3.1 Consigna para los estudiantes de estilo predominante pragmático

Para diseñar la actividad de la Fig. 1 que estaba dirigida al estudiante con estilo pragmático se asumió que un discente con dicho estilo cuenta con la capacidad de: transferir los resultados de estudios e investigaciones; utilizar información adquirida previamente para completar una tarea o solucionar un problema; aplicar con facilidad las metodologías recién adquiridas; y aplicar el método científico a cualquier fenómeno de la vida real.

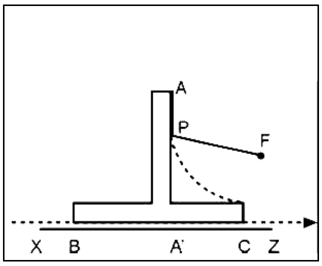
Dicha actividad consistía en instar al estudiante a utilizar los conceptos previos tales como distancia entre puntos, la distancia entre punto y recta y el lugar geométrico circunferencia. Se los instaba a los estudiantes a construir un parabológrafo con material concreto con el que se los proveía. El diseño de esta experiencia estuvo inspirado en una actividad elaborada por los profesores P. Cobos, V. Grau, P. Parés, E. Pérez y J. Pérez en [6] a quienes se les solicitó autorización para su uso.

NOMBRE Y APELLIDO: **ESTILO PREDOMINANTE:**

Ya conoces conceptos tales como distancias entre puntos, entre punto y recta y el lugar geométrico llamado circunferencia. Ahora con dichos conceptos en tu mente te pedimos que desarrolles la siguiente actividad.

Consigna: Sigue las instrucciones y construye un instrumento para encontrar un nuevo lugar geométrico.

Con los elementos que tienes disponible (tablillas, cintas, chinches, cartón, hilos, pegamento, arandelas, tijeras, etc.) construye una pieza hecha de madera en forma de T. En el extremo superior A fija un hilo de longitud igual a la altura de la T, es decir, que vaya desde A hasta A'. En el extremo inferior del hilo coloca un anillo o arandela (debe ingresar la punta de un lápiz) F.



Para obtener la curva (este instrumento dibujará aproximadamente una parte de dicha curva) tenemos que fijar el punto F en un lugar del plano y a continuación desplazar todo el aparato sobre la recta XZ manteniendo siempre la punta del lápiz y el hilo fijado sobre la recta AA'. Observamos que la distancia PF siempre será la misma que PA' y en consecuencia todos los puntos P describen una curva que tal vez te resulte familiar ¿Cuál es?

Actividades

a) *Obtiene la gráfica completa de la curva con el instrumento que construiste*
b) *¿Cómo cambia la curva cuando se modifica la posición de F por ejemplo a lo largo de una recta perpendicular a la recta XZ?*
c) *Observa y describe que pasa si la distancia AA' es diferente de FA, es decir, si colocamos un hilo más corto que la atura de la pieza en forma de T.*
d) *Si se considera la recta XZ perpendicular a la recta AA' ¿Qué ocurre con la curva cuando P pasa por el punto medio entre F y la recta AA'?*
e) *Identifica el nombre de la curva con un lugar geométrico que aparezca en el apunte de cátedra e identifica en tu construcción los elementos particulares que lo definen.*

Fig. 1. Consigna para los estudiantes de estilo predominante pragmático.

3.2 Consigna para los estudiantes de estilo predominante teórico

Para el diseño de la actividad de la Fig. 2 dirigida hacia el estudiante con estilo teórico se consideró que un discente con este estilo se caracteriza por su capacidad de poder: identificar teorías, principios y modelos; diferenciar entre una pregunta y una aseveración; valorar en base a criterios específicos o estándares; y sistematizar el conocimiento en base a teorías y modelos.

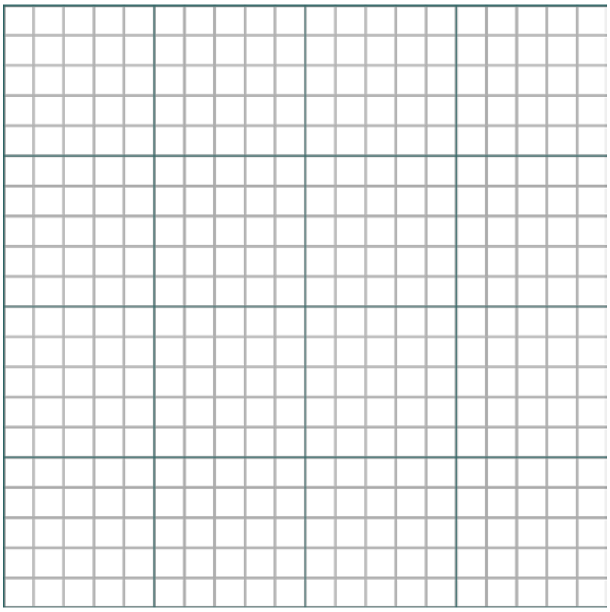
Dicha actividad invitaba a los estudiantes a utilizar los conceptos previos tales como distancia entre puntos, distancia entre punto y recta y el lugar geométrico circunferencia y a recurrir a todo tipo de material escrito disponible tales como libros y/o apuntes de cátedra.

NOMBRE Y APELLIDO: **ESTILO PREDOMINANTE:**

Ya conoces los conceptos como distancias entre puntos, entre punto y recta y el lugar geométrico llamado circunferencia. Ahora con dichos conceptos en tu mente te pedimos desarrolles la siguiente actividad:

Consigna: ***Halle la expresión algebraica y la gráfica de una curva formada por todos los puntos que están a la misma distancia de un punto F (0; p) y de una recta d cuya ecuación es y = (-p)***

NOTA: Adjuntamos una grilla para que la utilices si es que te resulta necesaria.



Actividades

a) Indica cuáles son los conceptos vistos en unidades anteriores que consideras que puedes utilizar para responder la consigna.

b) Escribe cada uno de los pasos que realizas para poder responder la consigna. Puedes utilizar la grilla que acompaña esta consigna para realizar todo tipo de gráfica que consideras necesario.

c) Identifica la expresión algebraica que conseguiste con un lugar geométrico que puedes encontrar en los textos y/o apunte de cátedra que tienes disponible.

Fig. 2 Consigna para estudiantes con estilo predominante teórico.

3.3 Consigna para los estudiantes de estilo predominante activo

Para el diseño de la actividad que se puede observar en la Fig. 3 dirigida al estudiante con estilo activo se contempló el hecho que los discentes con este estilo cuentan con: la capacidad de transferir información e ideas con facilidad; de adaptación al cambio; generar e integrar ideas con facilidad para nuevos proyectos o planes; y procesar información de diferentes fuentes.

Dicha actividad invitaba a los estudiantes a utilizar los conceptos previos tales como distancia entre puntos, distancia entre punto y recta y el lugar geométrico circunferencia para desarrollar la siguiente consigna mediada por uso del software Geogebra®.

NOMBRE Y APELLIDO: **ESTILO PREDOMINANTE:**

Ya conoces conceptos como distancias entre puntos, entre punto y recta y el lugar geométrico llamado circunferencia. Ahora con la ayuda de un software y con dichos conceptos en tu mente te pedimos que desarrolles la siguiente actividad:

Consigna: ***Halle la expresión algebraica y la gráfica de una curva formada por todos los puntos que están a la misma distancia de un punto F (4.2) y de una recta d cuya ecuación es x=2.***

Comenzar abriendo un archivo en Geogebra. Allí, activar los ejes y la cuadrícula, en la barra de *Entrada*, ingresamos la ecuación de la recta d: x = 2 y se pulsa Enter. En la vista gráfica queda determinada una recta. Seleccionamos la gráfica y con el botón derecho del mouse, del menú seleccionamos *Propiedades* y allí elegimos color **rojo**, grosor **3** y en la solapa *Básico* seleccionamos en el menú desplegable **Nombre y Valor.**

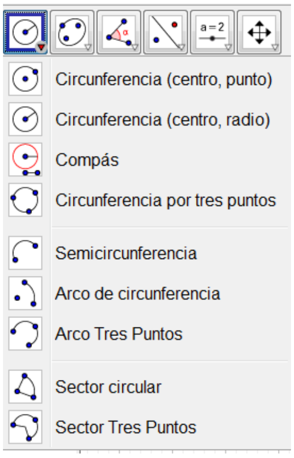
Luego en la barra de entrada se ingresa el **punto F** se pulsa Enter y en la vista gráfica queda determinada dicho punto.

Se define un *Deslizador* k, en el penúltimo grupo de íconos se selecciona dicha opción: al desplegarse un menú donde seleccionaremos *color verde y grosor 5.* Luego, haremos *clic* en la zona gráfica.

En la opción *Intervalo***,** asignaremos *Mín: 0, en Máx: 10* y en *Incremento: 0.1, e*n la solapa Deslizador se agrega: *Ancho: 200 y e*n la ficha *Animación* se selecciona la opción **Repite***: Creciente.*

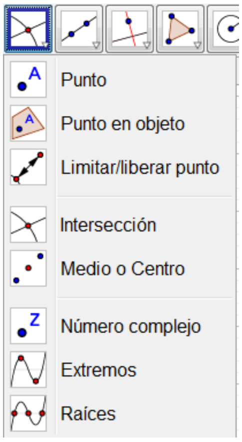
En la barra de *Entrada*, se ingresa la expresión **x= k + 2,** con lo cual se obtiene una recta r paralela a la recta d. Se selecciona la recta y en el menú desplegable se elige la opción Propiedades y en la solapa estilo en Estilo de trazo se elige uno punteado.

Luego en el grupo de íconos, de izquierda a derecha se selecciona el sexto ícono y en el desplegable se elige la opción **Circunferencia (centro radio)** y se elige como centro al **punto F** y radio al **deslizador k**



Se obtiene la circunferencia C se selecciona dicha curva y en el menú desplegable se elige la opción Propiedades y en la solapa estilo en Estilo de trazo se elige uno punteado.

Luego en el grupo de íconos, de izquierda a derecha se selecciona el segundo ícono y en el desplegable se elige la opción Intersección:



Luego en la vista grafica se selecciona la intersección entre la circunferencia C y la recta r: P_1 y P_2 puntos que equidistan de F y al pertenecer a una recta paralela a la directriz están a la misma distancia de esta. Se selecciona cada uno de dichos puntos P_1 y P_2 y del menú desplegable se activa su **rastro**.

Actividades
a) Obtiene la gráfica de la curva seleccionando el deslizador y activando la Animación.
b) Mueve el punto F. Observa y describe qué ocurre con la curva cuando se modifica la posición dicho punto.
c) Si se considera la recta que pasa por F y perpendicular a la recta r ¿Qué ocurre con la curva cuando P pasa por el punto medio entre F y la recta r?
d) *Identifica el nombre de la curva con un lugar geométrico que aparezca en el apunte de cátedra, escribe la expresión algebraica de la curva obtenida y reconoce en tu construcción los elementos (puntos y/o rectas fijas) particulares que lo definen.*

Fig. 3 Consigna para estudiantes con estilo predominante activo.

4 Implementación de la actividad

Las actividades se efectuaron dentro del horario de clase y el día que cada estudiante asiste para cursar la materia AyGA, contando con cuatro horas dispuestas institucionalmente para dichas clases. Cada estudiante recibió la actividad impresa y de forma individual que respondía a su EA predominante, el cual había sido previamente establecido por el análisis del CHAEA y oportunamente notificado a todos aquellos que lo respondieron.

El rol de cada uno de los docentes presentes en la clase se limitó al desempeño como observadoras participantes de forma moderada. En consecuencia, los docentes se limitaron sólo a aclarar las consignas y al registro de observaciones.

En el momento de la implementación:

- Para la actividad dirigida hacia el estudiante con estilo pragmático se procuró que los mismos dispusieran libremente de material concreto tales como lápices, alfileres, hilos, cartón, palillos de matera, pegamento, tijeras y cintas adhesivas.
- Para la actividad diseñada teniendo en cuenta el estilo teórico se habilitó la posibilidad de disponer de los apuntes de cátedra usualmente utilizados en clase y una grilla que podían o no utilizar para la representación gráfica solicitada en la consigna.
- Para la actividad diseñada hacia los estudiantes con estilo activo se les solicitó con antelación a la clase donde se desarrolló esta actividad disponer de sus computadoras personales o teléfono celular para acceder de forma online al software GeoGebra®. Cada consigna iba acompañada de un breve tutorial del software donde figuraban aquellas sentencias que les permitiría la representación de puntos, rectas y el cálculo de distancias.

- Si bien cada actividad fue facilitada de forma individual los estudiantes tenían la opción de nuclearse en grupos con la misma consigna -de no más de tres integrantes- para desarrollar la misma.

Una vez finalizada la actividad, se solicitó que un estudiante de cada EA predominante comparta el modo de realizar su consigna. Finalmente, se hizo una puesta en común con la intervención del docente, momento que permitió establecer un lugar oficial al conocimiento al que se hizo referencia en la actividad propuesta.

5 Producciones y percepciones de los estudiantes de la experiencia

Las siguiente Fig. 5 es parte del registro fotográfico recolectados por los docentes que participaron moderadamente en la experiencia.

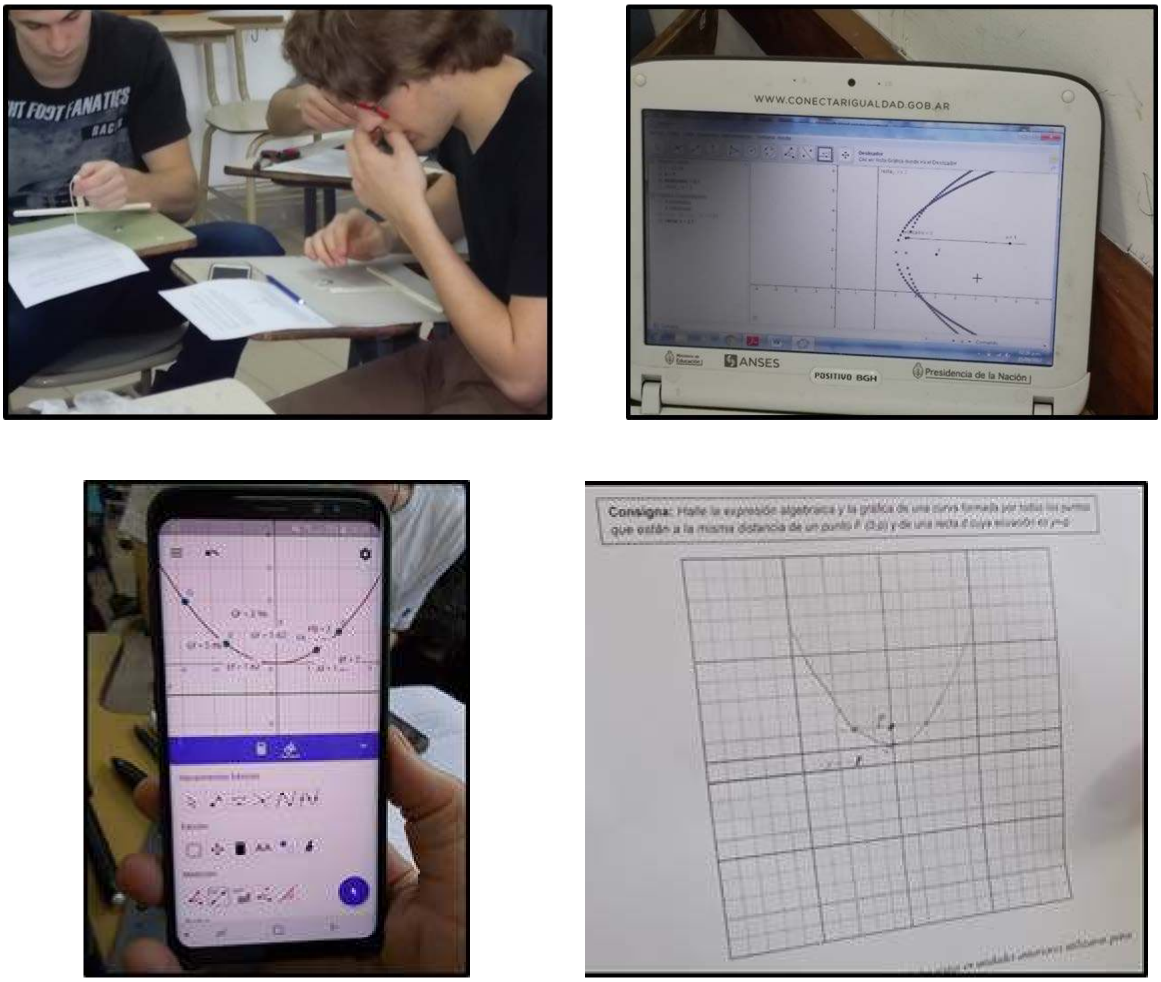


Fig.5 Algunas producciones de los estudiantes según su estilo de aprendizaje predominante.

Se elaboró una encuesta de opinión para la obtención de información acerca de las percepciones de los estudiantes sobre la estrategia de enseñanza que se desarrolló a través de las actividades propuestas, cuyos diseños atendían a la relación entre EA y competencias específicas para AyGA, con el objetivo de recoger las opiniones de los estudiantes sobre el empleo de las actividades para desarrollar el tema en el curso. Esta encuesta anónima fue entregada a los estudiantes al finalizar la unidad temática *Secciones cónicas y superficies cuádricas* y una vez evaluados sobre esos contenidos. Compartimos textualmente algunas opiniones de los estudiantes:

- (Teórico) *"Creo que es bueno reconocer y explorar las diferentes formas que tiene cada uno para un mejor rendimiento y aprendizaje"*
- (Teórico) *"Me pareció que se veía mejor plasmado y se entendía mejor en el Geogebra"*
- (Pragmático) *"Muy bueno. Me gustó salir del cuaderno para realizar alguna actividad práctica"*
- (Activo) *"Es interesante para autoanalizarse"*
- (Activo) *"Prefiero las actividades prácticas"*

Nos parece, interesante compartir el hecho que un ochenta por ciento (80%) de los alumnos eligió el trabajo en grupo y algunas de las fundamentaciones textuales que motivaron la elección fueron:

- (Pragmático) *"Porque es mucho más fácil comparar resultados para alcanzar el resultado óptimo."*
- (Teórico) *"Para intercambiar distintos puntos de vista sobre de qué manera abordar la actividad y resolverla"*
- (Pragmático) *"Para comparar resultados"*
- (Activo) *"Para facilitar el trabajo"*
- (Teórico - Activo) *"Porque cuando trabajo en general suelo tener dudas y me ayuda tener personas que me aconsejen o me den otro punto de vista."*

6 Conclusiones y trabajos futuros

Cabe decir que, se recurrió a la triangulación metodológica considerando distintos métodos de recolección y de análisis de datos para aproximarse a la realidad investigada. No obstante, en este punto de nuestro trabajo expondremos sólo algunos resultados del análisis de los registros de observación – escrito y fotográfico- realizados por los docentes que estuvieron presentes en la experiencia. Quienes debido al tipo de metodología elegida tuvieron una participación moderada, de modo que, asumimos que no se contará con una descripción completa de las actividades ya que entendemos que este tipo de técnica presenta las limitaciones propias de cualquier tipo de proceso de registro donde es inevitable que no resulte influenciado por las creencias personales de los observadores de todo aquello que tiene relevancia e importancia.

En este sentido, por parte de las docentes a cargo se evitó incurrir en cualquier tipo de proceso evaluativo hacia las producciones de los estudiantes ya que se tenía planificada una instancia para tales fines. De modo que atendiendo a dichas precauciones se evidenció que:

-En su mayoría los estudiantes presentaron una dificultad para dar inicio a la actividad. Algunas de las razones esgrimidas de tal actitud refieren a la dificultad para interpretar las consignas.

-La mayoría de los estudiantes trabajaron nucleados en grupos más allá de que sus EA no los identificaba como discentes con una predisposición para aprender dentro de un entorno de trabajo colaborativo.

En suma, podemos dar cuenta -parcialmente- que las actividades diseñadas atendiendo a una relación existente entre los estilos de aprendizaje predominantes y ciertas competencias específicas de AyGA relacionadas con el concepto de parábola permitieron en la mayoría de los estudiantes que participaron de la experiencia: el desarrollo de una buena predisposición para el trabajo grupal a la vez de una actitud favorable hacia la reflexión de su propio aprendizaje.

Referencias

1. VVAA: Competencias en Ingeniería. *Universidad FASTA Ediciones*, pp.16-56 (2014)
2. Alonso, C.; Gallegos, D.: *Estilos de Aprendizaje: teoría y práctica*. UNED (1994)
3. Keefe, J.; Farrell, B.: Developing a Defensible Learning Style Paradigm. *Educational Leadership*, Vol. 48, N°2, pp. 57-61 (1990)
4. Aragón García, M.; Jiménez Galán, Y.; Diagnóstico de los estilos de aprendizaje en los estudiantes: Estrategia docente para elevar la calidad educativa. CPU-e, *Revista de Investigación Educativa*, N° 9, pp. 1-21 (2009)
5. Honey, P.; Mumford, A.: *The manual of Learning Styles*. Peter Honey Publications (1986)
6. Cobos, P. y Otros: Materiales para construir las matemáticas. *Departamento de Matemática de l'IES Pius Font i Quer de Manresa*. https://www.iespfq.cat/dep/mates/apartados/arxius_pdf_cas/Parabológrafo.pdf. Accedido el 05 de julio de 2018.

Rotacional de un Campo Vectorial. Aplicaciones Físicas

Laura S. Oliva[1], Ansisé Chirino[1], Ivonne R. Esteybar[2], Lorena S. Correa[2]
[1] Departamento de Matemática y Departamento de Física, Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de San Juan
Avenida Libertador General San Martín 1109 (Oeste)
{loliva, anchir}@unsj.edu.ar,
[2] Departamento de Matemática, Facultad de Ingeneiría, Universidad Nacional de San Juan
Avenida Libertador General San Martín 1109 (Oeste)
iesteybar@gmail.com, lcorrea@gateme.unsj.edu.ar

Resumen. Desde los Departamentos de Matemática y de Física de la Facultad de Ingeniería de la UNSJ se llevan adelante proyectos que favorecen y contribuyen a la articulación entre ambas disciplinas. Los planes de estudio de las carreras de ingeniería requieren que el estudiante tenga una sólida formación en matemática y en física y que utilice herramientas adquiridas en distintas asignaturas para la resolución de problemas multidisciplinares. En este artículo se presenta material didáctico diseñado por docentes de matemática y física para una experiencia de articulación basada en la vinculación de conceptos matemáticos y físicos. Se desea destacar cómo los procedimientos matemáticos aportan a la resolución de problemas que facilitan la integración de conocimientos.

Palabras Clave: Interdisciplinariedad, Cálculo Multivariado, Física.

1 Introducción

La física modela fenómenos naturales mediante relaciones matemáticas. En general todas las leyes físicas se extraen de la experiencia pero es necesario el lenguaje matemático para su formulación. La física necesita de la matemática pues no es simplemente una ciencia experimental, ella obtiene gracias a la matemática resultados teóricos que luego pueden ser verificables.

La matemática aporta los procedimientos para estudiar las relaciones que la física estudia, ella proporciona modelos comprensibles para explicar los fenómenos naturales utilizando la razón [1].

Algunos contenidos del cálculo diferencial e integral de campos vectoriales son de difícil comprensión por parte de los estudiantes de ingeniería debido a su difícil representación. Muchos de estos conceptos son aplicados en los cursos regulares de Física para el estudio de casos particulares como son los campos eléctricos y campos magnéticos.

La matemática como herramienta en el estudio de la Física y de disciplinas aplicadas es de gran importancia y no siempre los alumnos perciben la necesidad de estudiar profundamente los fundamentos matemáticos. En muchos casos omiten aplicar en sus prácticas de física, resultados que ya conocen de la matemática que les ayudarían a una mejor comprensión de los fenómenos estudiados [2].

Cuando un concepto es abordado desde distintas áreas o disciplinas, éste tiende a fijarse de una manera acabada. El uso frecuente de conceptos áridos de la matemática por parte de otras asignaturas, contribuye a que la matemática cobre una importancia relevante como herramienta para el estudiante de ingeniería.

Los planes de estudio de las carreras de ingeniería requieren que el estudiante tenga una sólida formación en matemática y en física y que utilice herramientas adquiridas en distintas asignaturas para la resolución de problemas multidisciplinares [3], [4].

Desde múltiples proyectos que se llevan adelante en los Departamentos de Matemática y de Física de la Facultad de Ingeniería de la UNSJ se proponen espacios integradores para ambas disciplinas en los que se diseñan experiencias de cátedra y problemas que permiten relacionar estas asignaturas. La elaboración de material didáctico por parte de docentes de distintos equipos de cátedra permite encontrar temas vinculantes y lograr una verdadera articulación. El trabajo conjunto de estos equipos de cátedra contribuye además a equiparar nomenclaturas usadas, lo cual posibilita que el alumno, debido al escaso tiempo de cursado, logre integrar lo aprendido en distintas disciplinas.

2 Preparación de la contribución

Se presenta aquí una secuencia didáctica elaborada para experiencias de cátedra, utilizadas en instancias de articulación entre las asignaturas de Cálculo Multivariado y Física. Luego del análisis de la bibliografía utilizada en los cursos de Cálculo y de Física, se muestra una forma de abordar un concepto matemático de difícil comprensión, como es el rotacional de un campo vectorial para lo cual se recurre a casos particulares de campos vectoriales cuya velocidad angular es constante, como se presenta a continuación.

2.1 Rotor de un campo vectorial

Si se considera el campo vectorial $\overline{V}$ representado en la Figura 1. Es fácil ver que este campo es independiente de z, es decir se comporta de igual forma en todo plano paralelo al plano xy como lo muestra la Figura 2.

$$\overline{V}(x, y, z)=(-y, x, 0) \qquad \textbf{(1)}$$

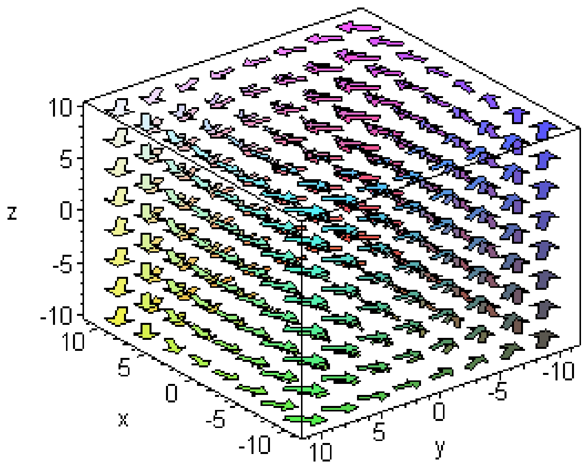


Fig. 1. Representación del campo.

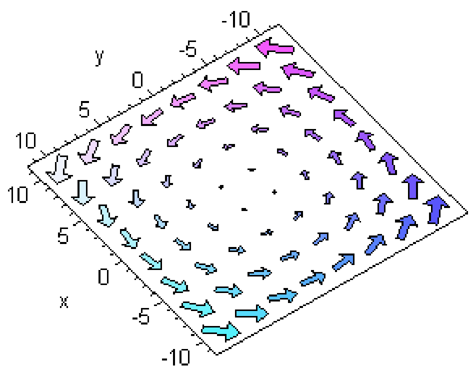


Fig. 2. Representación del campo vectorial en todo plano paralelo al plano xy.

Este campo vectorial podría modelar el campo de velocidades de un objeto que gira alrededor del eje z sobre trayectorias circulares de radio a. La Figura 3 muestra la trayectoria circular del objeto alrededor de un eje perpendicular al plano de representación. La rotación se realiza en sentido contrario a las agujas del reloj.

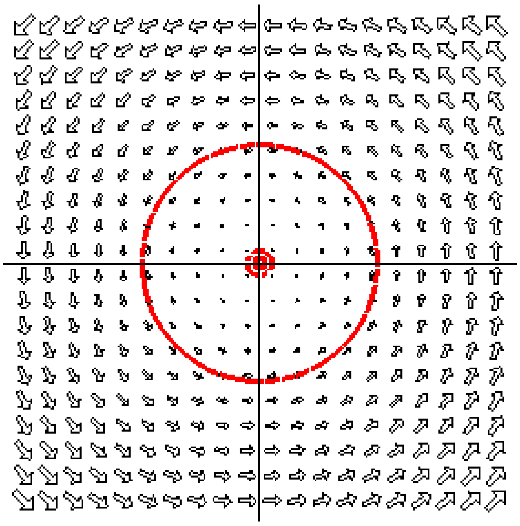


Fig. 3. Trayectoria del objeto alrededor de un eje perpendicular al plano.

Puede deducirse la relación entre la magnitud de la velocidad lineal y la velocidad angular del objeto en movimiento. Siendo s, la longitud recorrida por cada ángulo θ

$$\frac{ds}{dt}=a\frac{d\theta}{dt} \tag{2}$$

Resultando

$$\underbrace{\frac{ds}{dt}}_{\|\overline{V}\|}=a\underbrace{\frac{d\theta}{dt}}_{\|\overline{w}\|} \tag{3}$$

El módulo del campo vectorial es

$$\|\overline{V}\| =\sqrt{x^2+y^2} \tag{4}$$

Y para los puntos de la trayectoria circular

$$\|\overline{V}\| =a \tag{5}$$

Resulta entonces que la velocidad angular

$$\|\overline{w}\|=1 \tag{6}$$

Y como el objeto gira en contra de las agujas del reloj, la velocidad angular es constante en módulo

$$\overline{w} = \check{e}_3 \tag{7}$$

Inversamente, se puede ver que a partir de la velocidad angular, se puede determinar el campo de velocidades del objeto [5]. En efecto, a partir del vector posición del objeto $\overline{r} = (x, y, z)$

$$\overline{V}= \overline{w}x\overline{r} \tag{8}$$

En este caso se puede comprobar

$$\overline{\mathrm{V}}=\overline{\mathrm{w}} \mathrm{x} \overline{\mathrm{r}}=\begin{vmatrix} \breve{e}_1 & \breve{e}_2 & \breve{e}_3 \\ 0 & 0 & 1 \\ x & y & z \end{vmatrix} = (-y,x,0) \qquad \textbf{(9)}$$

Este concepto se puede vincular con el rotacional de un campo vectorial, para ello se calcula la circulación del campo de velocidades sobre una curva C, siendo ella una circunferencia de radio “a” centrada en el origen como la representada en la Figura 3.

$$\oint_C \overline{\mathrm{V}}\,.d\bar{l}=\int_0^{2\pi} a^2\, dt=2\pi a^2 \qquad \textbf{(10)}$$

Si se divide por el área limitada por la circunferencia C y se hace que el área tienda a cero, resulta

$$\lim_{a\to 0}\frac{\oint_C \overline{\mathrm{V}}\,.d\bar{l}}{\pi a^2}=2 \qquad \textbf{(11)}$$

Este valor proporcionado por la ecuación 11 es el que se define como la componente del rotacional del campo de velocidades en el origen de coordenadas y en la dirección del eje de rotación, en este caso el eje perpendicular al plano del movimiento

$$\operatorname{rot}\overline{\mathrm{V}}.\breve{e}_3|_{\bar{0}} = \lim_{a\to 0}\frac{\oint_C \bar{V}\,.\,d\bar{l}}{\pi a^2}=2 \qquad \textbf{(12)}$$

Es decir que si la velocidad angular de un fluido es constante, se puede afirmar que el rotacional del campo de velocidades escalado por 1/2 da la velocidad angular del campo. Esto permite que el alumno tenga una primera interpretación para casos particulares del concepto de rotacional [5], [6].

Una aplicación inmediata de este concepto puede ser a campos magnéticos.

2.2 Campo magnético

El campo de velocidades descripto en 2.1 podría ser el campo magnético $\overline{\mathrm{B}}$, determinado por un hilo de longitud infinita en el que circula una corriente I que es estacionaria (si el hilo no es infinito I no es estacionario).

De acuerdo con la forma diferencial del Teorema de Ampère dada por la ecuación (13) en la cual $\bar{\mathrm{J}}$ es la densidad de corriente, es decir la corriente por unidad de área y μ_0 la permeabilidad del vacío.

$$\operatorname{rot}\overline{\mathrm{B}}=\mu_0\,\bar{\mathrm{J}} \qquad \textbf{(13)}$$

Considerando que la intensidad de corriente I que atraviesa una superficie S es el flujo del campo $\bar{\mathrm{J}}$ a través de la superficie S, es decir:

$$\iint_S \bar{\mathrm{J}} d\bar{\mathrm{S}}=\mathrm{I} \qquad \textbf{(14)}$$

Luego utilizando el Teorema de Stokes para el campo magnético $\overline{\mathrm{B}}$, resulta que

$$\oint_C \overline{B}.d\overline{l} = \iint_S \operatorname{rot}\overline{B}.\ d\overline{S} \qquad \textbf{(15)}$$

Sustituyendo con la ecuación (13), resulta

$$\oint_C \overline{B}.d\overline{l} = \iint_S \mu_0\ \overline{J}.\ d\overline{S} \qquad \textbf{(16)}$$

Utilizando la ecuación (14)

$$\oint_C \overline{B}.d\overline{l} = \mu_0 \iint_S \overline{J}.\ d\overline{S} = \mu_0 I \qquad \textbf{(17)}$$

Obteniéndose así la Ley de Ampère [6], [7]

$$\oint_C \overline{B}.d\overline{l} = \mu_0 I \qquad \textbf{(18)}$$

Esta ley es útil para determinar el módulo del campo magnético si C es un círculo de radio “a” alrededor de un hilo de longitud infinita como el representado en la Figura 4

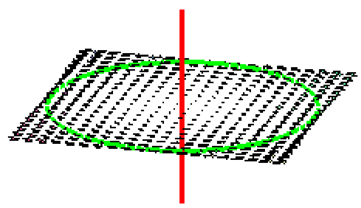


Fig. 4. Hilo de longitud infinita. Campo magnético.

$$\oint_C \overline{B}.d\overline{l} = \int_0^{2\pi} \|\overline{B}\| \underbrace{\cos\theta}_{1}\ a\ dt = 2\pi a \|\overline{B}\| = \mu_0 I \qquad \textbf{(19)}$$

$$\|\overline{B}\| = \frac{\mu_0 I}{2\pi a} \qquad \textbf{(20)}$$

Es decir el módulo del campo magnético es directamente proporcional a la intensidad de corriente I, e inversamente proporcional a “a”, distancia al cable conductor.

La dirección es siempre tangente a la trayectoria porque son nulas sus componentes radial y respecto de z en un sistema de coordenadas cilíndricas. Luego el campo magnético queda definido por

$$\overline{B}=\frac{\mu_0 I}{2\pi\rho}\ \bar{u}_\varphi \qquad \textbf{(21)}$$

A continuación se muestra un ejercicio propuesto a los alumnos en espacios de articulación. La metodología empleada en estos espacios de articulación es la de resolución de problemas. Las situaciones problemáticas se extraen de prácticas de física y son resueltos por los alumnos en las clases de Cálculo conformando grupos de trabajo y con el aporte del personal de las cátedras. El uso de contenidos y procedimientos de ambas disciplinas permitió adquirir por parte de los alumnos, la destreza de vincularlos.

2.3 Ejercicio

Un conductor cilíndrico con radio R transporta una corriente I. La corriente está distribuida de manera uniforme sobre la superficie de la sección transversal del conductor. Obtener el campo magnético, como función de la distancia r desde el eje del conductor, en puntos situados fuera ($r > R$) del conductor y dentro ($r<R$) del mismo [7], [8].

Para puntos situados fuera del conductor ($r>R$); se aplica la Ley de Ampère, teniendo en cuenta que la trayectoria amperiana está por fuera del conductor y la corriente neta encerrada (In), es la corriente total que circula por el mismo.

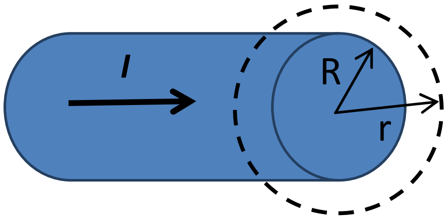


Fig. 5. Conductor cilíndrico.

$$\oint_C \vec{B}\cdot\vec{dl} = \mu_0 I_n = \mu_0 I \qquad \textbf{(22)}$$

$$\oint_C \vec{B}.\vec{dl} = \int_0^{2\pi} \|\overline{B}\|\ r\,dt = \|\overline{B}\| \int_0^{2\pi} r\,dt = \mu_0 I \qquad \textbf{(23)}$$

Como el módulo del campo magnético es el mismo a lo largo de toda la trayectoria puede salir fuera de la integral

$$\|\overline{B}\|\ 2\pi r = \mu_0 I \qquad \textbf{(24)}$$

$$\|\overline{B}\| = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \qquad \text{para } r > R \qquad \textbf{(25)}$$

Esta es la expresión del campo magnético en función del radio r para puntos exteriores al conductor.
Se observa que al alejarse del conductor, es decir a mayor distancia, la intensidad del campo magnético disminuye.

Para puntos situados en el interior del conductor se considera una trayectoria Ameperiana de radio r<R; la corriente neta encerrada se tiene que determinar considerando la densidad de corriente (J) que atraviesa el área del conductor.

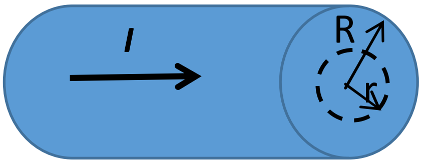


Fig. 6. Conductor cilíndrico.

$$\oint_C \vec{B}.d\bar{l} = \int_0^{2\pi} \|\bar{B}\| \text{ r dt} = \|\bar{B}\| \int_0^{2\pi} \text{r dt} = \mu_0 \text{ I}_n \qquad \textbf{(26)}$$

$$\|\bar{B}\| \; 2\pi \text{ r } = \mu_0 \frac{\text{Ir}^2}{\text{R}^2} \qquad \textbf{(27)}$$

$$\|\bar{B}\| = \frac{\mu_0 \text{Ir}}{2\pi \text{R}^2} \quad \text{para } \text{ r} < R \qquad \textbf{(28)}$$

Esta es la expresión del campo magnético en función de r para puntos interiores del conductor.

Se observa que el campo magnético aumenta al aumentar la distancia al centro, esto coincide si se considera que se abarca mayor corriente si se aumenta el radio de la trayectoria.

En el borde del conductor r=R, la expresión del campo magnético que se obtiene por ambos lados es la misma:

$$\|\bar{B}\| = \frac{\mu_0 \text{I}}{2\pi \text{R}} \quad \text{para } \text{ r} = \text{R} \qquad \textbf{(29)}$$

3 Conclusiones y trabajos futuros

La integración de asignaturas como Matemática y Física en las carreras de ingeniería es de fundamental importancia porque permite en primer lugar generar espacios de estudio, discusión y trabajo conjunto entre docentes que imparten sus clases a un mismo grupo de alumnos. En segundo término favorece el abordaje de temas comunes entre distintas asignaturas por parte de los estudiantes y la utilización de herramientas proporcionadas por distintas disciplinas para resolver un mismo problema desde distintos enfoques. Las asignaturas relacionadas entre si permiten mejorar el abordaje al conocimiento, evitan la desconexión de saberes. La interdisciplinariedad es una herramienta para complementar la educación debido al reducido crédito horario de las asignaturas de los ciclos básicos.

Desde múltiples proyectos que se llevan adelante en los Departamentos de Matemática y de Física de la Facultad de Ingeniería de la UNSJ se trabaja en la elaboración de experiencias de cátedra interdisciplinares. Se espera continuar con esta metodología de trabajo y poder abordar temáticas comunes entre matemática y física.

Referencias

1. Aragón, P. A.; Santamaría, C. M.: Competencias Básicas: El Pensamiento Físico-Matemático como un Objeto de Estudio de la Didáctica de la Física. *Congreso Iberoamericano de Educación*, METAS 2021. (2010)
2. Escalona, M.: El Perfeccionamiento de la Enseñanza de la Matemática en la Educación Superior. Su Concreción en las Carreras de Ingeniería en la Universidad de Holguín. *Revista Iberoamericana de Educación*, pp.1-13 (2011)
3. Consejo Directivo: Plan de Estudios Ingeniería Electrónica. Ordenanza 14/2005. http://www.fi.unsj.edu.ar/digestoInfo.php?id_norma=354. Accedido e1 2 de marzo de 2016
4. Consejo Directivo: Plan de Estudios Ingeniería Eléctrica. Ordenanza 17/2005. http://www.fi.unsj.edu.ar/digestoInfo.php?id_norma=351. Accedido e1 2 de marzo de 2016
5. Stewart, J.: Cálculo. (Eds): Cengage Learning. (2008)
6. Zill, D.; Wright, W.: Matemática 3. Cálculo de Varias Variables. (Eds): McGraw-Hill. (2011)
7. Halliday, D.; Resnick, R.: Física. Parte 2. (Eds): Compañía Editorial Continental S. A. (1982)
8. Tipler, P.A.: Física para la Ciencia. Volumen 2. (Eds): Reverte S. A. (2003)

Hacer Matemática en el inicio de las carreras de Ingeniería
La planificación de una clase de Álgebra

María Carmen Quercia[1], María Laura Distéfano[1], María Andrea Aznar[1]
[1] Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de Mar del Plata
Juan B. Justo 4302 , Mar del Plata, Buenos Aires, Argentina.
mariaquercia@gmail.com, mldistefano@fi.mdp.edu.ar, maznar@fi.mdp.edu.ar

Resumen. En este trabajo se tiene la intención de reflexionar en torno a las estrategias de enseñanza del Álgebra en el inicio de las carreras de Ingeniería. Para ello, se interpeló la propia práctica docente a través de una serie de preguntas que pudieran ayudar a pensar acerca del sentido del aprendizaje de la Matemática, en particular del Álgebra, en la formación inicial del ingeniero. Desde esta perspectiva, "el" interrogante que articula esta propuesta es cómo hacer de esas clases, lugares de intercambio y de debate que favorezcan la formación del futuro profesional en el comienzo de su trayectoria universitaria. Se presenta entonces aquí la planificación de una clase para la enseñanza de la Combinatoria Simple, considerando la Idoneidad Didáctica como criterio sistémico de pertinencia de un proceso de instrucción al programa educativo, con el objetivo de contribuir al proyecto de estudio de cada alumno.

Palabras Clave: Álgebra, Combinatoria Simple, Estrategias de enseñanza, Planificación, Proyecto de Estudio, Idoneidad Didáctica.

1 Introducción o Primera Parada: ¿cuál es el punto de partida?

En la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional de Mar del Plata (UNMdP), todos los estudiantes cursan la asignatura Álgebra A en el primer cuatrimestre de primer año, simultáneamente con las materias Análisis Matemático A y Química General I.

Para el presente ciclo lectivo, en Álgebra A, se han inscripto cuatrocientos treinta alumnos, los cuales se distribuyen en seis comisiones. En cada una de ellas hay un profesor a cargo de la clase de teoría y un jefe de trabajos prácticos, responsable de la clase de práctica, a quien acompañan dos o tres ayudantes graduados, según la cantidad de estudiantes anotados en la comisión.

Si bien en el Plan de Trabajo Docente (PTD) se explicitan los aportes que desde esta materia pueden hacerse al desarrollo de las competencias genéricas del Ingeniero, el énfasis está puesto en contribuir al proceso de fortalecimiento de las competencias académicas. Estas últimas, según Mastache [1], aluden al conjunto integrado de conocimientos, habilidades, destrezas y actitudes requeridos para un correcto desempeño en el rol de alumno. Las competencias académicas se adquieren y desenvuelven durante toda la escolaridad y, en la universidad, suelen ser consideradas, en general, como un capital cultural que los estudiantes deben haber desarrollado con anterioridad.

Sin embargo, en este contexto, aparece una contradicción, pues las competencias académicas enunciadas en el PTD, rara vez son consideradas por los docentes como un "contenido" a ser tratado en la asignatura. Así, muchos estudiantes cuya escolaridad no les facilitó el desarrollo de las competencias académicas, se ven enfrentados a la exigencia de recurrir a hábitos, habilidades y conocimientos cuya adquisición nunca les fue posibilitada. En este sentido, es generalizada e histórica la queja de los docentes de esta cátedra respecto del bajo nivel académico que muestran sus alumnos.

En consecuencia, la reprobación, la deserción y el abandono de los estudiantes en esta asignatura llegan a niveles realmente preocupantes. Esta situación, atravesada por diversas causas, interpela urgentemente a su análisis con el objetivo de proponer y llevar a cabo adecuadas acciones de remediación.

Corresponde entonces, particularmente a los docentes de las cátedras de las materias de primer año, planificar e implementar estrategias de enseñanza acordes a la realidad señalada para contribuir al proyecto de estudio de cada alumno: es con este propósito que se realiza el presente trabajo.

2 Segunda parada: ¿cómo se desarrollan habitualmente las clases de Álgebra A?

El tratamiento de la asignatura Álgebra A se organiza en cuatro clases semanales de dos horas de duración cada una. Dos de ellas corresponden a la "clase de teoría" y las otras dos a la "clase de práctica". Integrar el sentido de ambas clases debería posibilitar a cada alumno actuar matemáticamente con verdadera eficacia para entender lo que está estudiando.

Aunque las clases de teoría son predominantemente de carácter magistral, se pretende establecer el diálogo reflexivo entre el docente y los estudiantes como sujetos activos, a propósito de los contenidos (la "materia" u objeto del diálogo) mediante un vehículo privilegiado que es el lenguaje. En este sentido, la palabra, la pregunta reflexiva, el mensaje tiene una dirección: construir significados, elaborar conceptos, interpretar y explicar.

Se procura instalar entonces el valor de la pregunta reflexiva que se asienta en la búsqueda de la comprensión. La pregunta puede surgir de quien aprende (y el docente la aprovecha) o puede partir del docente, provocando el proceso reflexivo.

En este último caso, en algunas oportunidades el docente realiza preguntas para facilitar el proceso de comprensión y reconocer si éste se ha realizado. En otras, las preguntas se transforman en desafíos cognitivos, es decir, en genuinas invitaciones para que los alumnos se cuestionen acerca del tema que se esté estudiando.

Para iniciar la clase se hacen preguntas que favorecen la recuperación del saber en cuestión y que le darán sentido a la clase que se desplegará a continuación.

Las preguntas en el desarrollo de la clase permiten conectar lo nuevo con lo que ya se sabe o sabía y, a diferencia de las preguntas del inicio, aquí se comienza con un proceso de mayor profundización.

Las preguntas finales permiten el desenvolvimiento de procesos de síntesis o conclusiones o la anticipación del próximo tema y prever el contenido de la clase siguiente.

La importancia de las preguntas radica en que orientan y ayudan a pensar. Es por ello que, en estas clases se formulan tres tipos diferentes: las referidas a la cognición, a la metacognición y al nivel epistémico.

En las clases de práctica se ejemplifican, practican y consolidan las nociones teóricas previamente aprendidas en la clase de teoría. También se atienden las consultas que realizan los estudiantes en relación a los ejercicios resueltos fuera de estas clases.

Para contribuir a la construcción del proyecto de estudio de cada alumno se ha creado un blog donde está disponible todo el material para aprender. Allí se encuentran tanto los Apuntes de Teoría, donde se desarrollan todos los contenidos teóricos de la asignatura, como los cuestionarios y las guías con orientaciones para revisitar los conceptos tratados. También se incluyen en el blog, por cada unidad de contenidos del programa, las Guías de Trabajos Prácticos y los recursos complementarios: problemas resueltos, autoevaluaciones con claves de corrección y exámenes ya propuestos con el desarrollo de los procedimientos de resolución de cada uno de los ejercicios.

Además, para profundizar en el estudio de diversos contenidos, se encuentran en ese espacio virtual algunas secuencias de videos y escenarios armados en Geogebra diseñados por diferentes integrantes de la cátedra.

Sin embargo, a pesar de contar con todos estos recursos, se observa, en líneas generales, que los estudiantes perciben una cierta independencia entre ambos tipos de clases. Por ejemplo, disponen de dos cuadernos personales: uno para las clases teóricas y otro para las prácticas. El primero, rara vez está presente en las clases prácticas, como tampoco los Apuntes de Teoría. A menudo, los cuadernos que corresponden a las clases prácticas están llenos de respuestas a los ejercicios que se resolvieron sin anotaciones personales que luego faciliten el estudio, tales como alguna reflexión posterior o alguna discusión. Tampoco se observan registros respecto de la utilización de alguno de los recursos disponibles en el blog.

Esta situación proporciona indicios de que los alumnos no pueden establecer la relación que existe entre ambos tipos de clases para así poder estudiar Álgebra.

3 Tercera parada: ¿cómo estudian Álgebra los alumnos en el inicio de las carreras de Ingeniería?

El inicio del primer año de la carrera en la Facultad de Ingeniería de la UNMdP se presenta como un momento crucial para los alumnos en cuanto a la construcción de hábitos para el estudio.

Cada uno de ellos se enfrenta a un cambio de prácticas muy importante. Además de su vínculo con el conocimiento científico, se modifica su relación con el docente: por un lado, deberá ahora adaptarse a una mayor cantidad de ellos que integran una misma cátedra y que cumplen diferentes funciones y, por otro, percibe que se espera de él tanto una actitud positiva hacia el estudio, como una mayor autonomía para tomar decisiones al respecto.

Los profesores, por su parte, no comprenden muchas veces estas representaciones de los alumnos y confían en que ellos podrán afrontar los estudios superiores poniendo en acto las competencias académicas que han desarrollado (o tal vez no) en su escolaridad.

En este contexto, el plan integral de formación algebraica de un alumno compromete un renovado proyecto de estudio pues, en el camino, encontrarán objetos matemáticos desconocidos, diferentes problemas y distintas técnicas para producir y para incorporar de manera sistemática. Estudiar requiere, por parte del alumno, reconocer que no se puede aprender sin un trabajo personal, ya que resulta insuficiente ver y escuchar la actividad matemática de otros para desarrollar la propia.

Pero, ¿qué hacen los alumnos para estudiar Álgebra?

Algunos se organizan para estudiar, rescatan la teoría como algo importante para ello. Se focalizan en los problemas con los que tuvieron dificultades, anotan los errores comunes y resuelven problemas nuevos. Registrar lo que no se comprende implica no sólo ser capaz de reconocer las propias dificultades sino también poder verbalizarlas. Un alumno que hace esto reconoce la utilidad de preguntar sobre las dudas específicas para avanzar en el estudio, es decir, no sólo está estudiando para aprobar sino para aprender.

Otros sostienen una creencia muy difundida entre los alumnos: que la Matemática no se estudia. Pareciera que el estudio está reservado para materias teóricas, pero no para Matemática, donde estudiar está vinculado con un hacer.

Ciertos estudiantes señalan también como importante la predisposición para el estudio clase a clase y, casi todos, destacan la noción de tiempo: para aprender se necesita tiempo y, por lo tanto, también para estudiar.

No obstante, sea cual fuera el proyecto de estudio personal, puede observarse que los alumnos estudian de manera independiente en muy escasos momentos y, en general, antes de una evaluación.

Las actividades de los estudiantes se restringen al trabajo que se realiza en clase produciendo una fuerte dependencia hacia el profesor, cuestión sumamente notoria en las clases prácticas. Esta dependencia se ve fortalecida por otras cuestiones como, por ejemplo, el escaso uso que se hace de las carpetas (o cuadernos), de los Apuntes de la teoría y de los otros materiales disponibles en el blog como recursos de aprendizaje.

Sin embargo, ¿es una responsabilidad exclusiva de cada alumno elaborar su proyecto de estudio?

4 Cuarta parada: ¿cómo puede contribuir el profesor al proyecto de estudio de los alumnos que cursan Álgebra?

Según Chevallard, Bosch y Gascón [2], "el estudio es hoy el eslabón perdido entre una enseñanza que parece querer controlar todo el proceso didáctico y un aprendizaje cada vez más debilitado por la exigencia de que se produzca como una consecuencia inmediata, casi instantánea, de la enseñanza. Pretendemos restituir el estudio al lugar que le corresponde: el corazón del proyecto educativo de nuestra sociedad. (...) Proponemos considerar la educación de manera más amplia como un proyecto de estudio cuyos principales protagonistas son los alumnos. El profesor dirige el estudio, el alumno estudia." (p. 13)

Como los autores citados en el párrafo anterior, en este trabajo se sostiene que:

- el aprendizaje no es la consecuencia inmediata de la enseñanza;
- no hay aprendizaje sin un trabajo personal del alumno, es decir sin estudio;
- contribuir a la organización del estudio del alumno debería ser parte del proyecto del profesor.

El trabajo personal del alumno, que es en definitiva lo que se entiende por estudio, incluye tanto las actividades que se despliegan en el espacio de la clase bajo el control del docente, como la resolución de problemas fuera de ella y también otros momentos de estudio diferentes a los anteriores.

Estudiar significa mucho más que resolver ejercicios de la carpeta o similares, aunque esta actividad está incluida en el estudio. Estudiar un concepto involucra, entre otras cosas, relacionarlo con otras nociones, identificar qué tipos de problemas se pueden resolver con esa red de conocimientos que se va construyendo y cuáles no, reconocer cuáles son los errores más comunes que se han cometido en el desarrollo de la actividad matemática (tanto en la clase como fuera de ella) y por qué.

Cada disciplina tiene una especificidad en su quehacer, tiene formas particulares de producir, de comunicar y de validar conocimientos y estas formas que le son propias de producir conocimiento, de validarlo y de comunicarlo deben estar incluidas en el estudio del alumno. En Álgebra A, estudiar supone entonces:

- Resolver problemas, construir estrategias de validación, comunicar y confrontar con otros el trabajo producido.

  Esta tarea se realiza primordialmente en la clase de práctica y, algunas veces, en la clase de teoría.

  Para ello, se utilizan como recursos didácticos tanto los Apuntes de Teoría como la Guías de Trabajos Prácticos de la asignatura, cada una de las cuales incluye una sección con problemas y ejercicios a desarrollar (tanto en clase como fuera de ella) y una sección de problemas propuestos, en todos los casos con sus respectivas respuestas.

- Reflexionar sobre el propio proceso de aprendizaje.
  Esta actividad se promueve en la clase de práctica de manera personalizada y, en las clases de teoría, en instancias de trabajo colectivo.
  Para que los estudiantes realicen esta tarea se emplean como recursos los materiales complementarios disponibles en el blog (detallados en la segunda parada de este trabajo).

En este sentido y para que cada alumno pueda diseñar su propio proyecto de estudio, se propone una intervención pedagógica flexible en cuanto al uso de estrategias diferentes y complementarias manteniendo la estructura "clase de teoría-clase de práctica".

5 Quinta parada: ¿qué estrategias de enseñanza diferentes son posibles para contribuir al proyecto de estudio de cada alumno?

Cuando un docente decide qué enseñar y cómo hacerlo, esa determinación es atravesada por múltiples variables ligadas a las concepciones del quehacer matemático, tanto propias como de los estudiantes. Considerando esta compleja trama, para seleccionar una estrategia de enseñanza que aporte en algún sentido a la construcción de un proyecto de estudio para cada alumno, resulta necesario elegir un contenido matemático cuyo tratamiento lo posibilite. En esta ocasión, se ha optado la Combinatoria Simple porque es un campo donde diferentes estrategias de resolución de problemas pueden ser adecuadamente enseñadas considerando como punto de apoyo para ello los conocimientos disponibles de los estudiantes.

La enseñanza de la Combinatoria Simple en Álgebra A se realiza en una clase tal como se la ha descripto en la segunda parada. Si durante la cursada de la asignatura surge alguna situación inesperada por la cual debe alterarse el cronograma previsto, en la clase de teoría se propone a los alumnos el estudio independiente del tema utilizando como recurso la secuencia de videos disponibles en el blog. En esa instancia también se indica a los estudiantes cuáles son los problemas que deben resolver de la correspondiente Guía de Trabajos Prácticos y se les sugiere que registren todas sus dudas para ser tratadas convenientemente en la clase de práctica.

Sin importar cuál de las estrategias señaladas en los párrafos anteriores se implemente, gran parte de los estudiantes no logra resolver el problema de Combinatoria Simple que se les plantea en el correspondiente examen parcial. Este resultado interpela entonces la enseñanza de la Combinatoria en la cual se "muestran" las definiciones y se identifican a las mismas como único método de resolución de problemas.

En este sentido, y pensando en fortalecer las competencias académicas de los estudiantes al realizar aportes significativos al proyecto de estudio de cada uno de ellos, se considera para elaborar este trabajo una de las cinco nociones teóricas que actualmente componen el Enfoque Ontosemiótico (EOS): la Idoneidad Didáctica. En este contexto, la Idoneidad Didáctica [3] se concibe como un criterio general de adecuación y pertinencia de las acciones de los diferentes actores institucionales, de los conocimientos puestos en juego y de los recursos usados en un proceso de estudio en Matemática.

El siguiente sistema de componentes o dimensiones identificados en esta perspectiva constituye una guía para el análisis y la reflexión sistemática de los procesos de enseñanza y de aprendizaje con el propósito de su mejora progresiva:

1. *Idoneidad epistémica*: refiere al grado de representatividad de los significados institucionales previstos o implementados, respecto de un sistema de referencia.
2. *Idoneidad cognitiva*: expresa antes de comenzar el proceso de instrucción si lo que se quiere enseñar está a una distancia razonable de lo que saben los estudiantes y, luego, si los aprendizajes logrados se acercan a los que se pretendían enseñar.
3. *Idoneidad interaccional*: permite determinar si el intercambio ha contribuido a resolver dudas y dificultades de los estudiantes.
4. *Idoneidad mediacional*: corresponde al grado de adecuación de los recursos materiales y temporales necesarios para el desarrollo de los procesos de enseñanza y de aprendizaje.
5. *Idoneidad emocional*: habilita tratar el grado de implicación (en cuanto a interés y a motivación) de los alumnos en el proceso de estudio.
6. *Idoneidad ecológica*: posibilita valorar la adaptación del proceso de estudio al proyecto educativo de la institución en cuestión, las directrices curriculares, las condiciones del entorno social y profesional, etc.

Desde este enfoque y acorde a lo planteado al inicio de esta parada, se ha planificado una secuencia didáctica para que los alumnos de Álgebra A estudien la noción de Combinatoria Simple en una clase de teoría.

Es de destacar que, en esta hipótesis de trabajo, el docente toma decisiones sobre la progresión en complejidad del contenido a tratar en función de las características del grupo, de sus saberes y competencias académicas disponibles, etc. Es decir, el profesor anticipa qué cuestiones son viables de presentar a ese conjunto de estudiantes orientado por el sistema de componentes que se identifican en la Idoneidad Didáctica y, con este objetivo, determina el tipo de situación, el contexto, las cantidades en juego y las restricciones introducidas, entre otras.

Se espera entonces que, estas opciones, junto a las intervenciones del docente, posibiliten, por un lado, un adecuado tratamiento de los procedimientos de resolución de los alumnos para impactar en la relación que tienen con los conocimientos puestos en juego y, por otro, contribuir al proyecto de estudio de cada uno de ellos.

6 Sexta y última parada: ¿cómo se planificó esa clase?

Para planificar la clase que se caracteriza en la parada anterior se pone en primer plano la intención de que el alumno reconstruya el saber a través de aproximaciones sucesivas, interactuando con el contenido en diferentes situaciones y desde diferentes perspectivas, lo cual hará posible construir conocimientos cada vez más ajustados a la naturaleza del contenido, tal como lo plantea Roland Charnay [4].

En este sentido, se consideraron sólo dos de los numerosos aspectos que pueden anticiparse en una planificación: la secuencia de problemas y la posible organización de la clase. Es de destacar que se proponen estas dos unidades de análisis a efectos de comunicar una organización, pero en las previsiones que se presentan a continuación, una y otra se entraman poniendo en evidencia la complejidad de una clase cuando se la concibe como un ambiente de producción de conocimiento matemático, acorde a lo que se señala en el párrafo anterior.

6.1 La secuencia de problemas

La Combinatoria Simple estudia los conjuntos finitos y las configuraciones que pueden obtenerse a partir de sus elementos mediante ciertas transformaciones, considerando que un mismo elemento no puede repetirse en una misma configuración. Estas transformaciones originan cambios en la estructura (permutación de sus elementos) o en la composición de los mismos (obtención de subconjuntos a partir de un conjunto dado). Tanto la existencia de esas configuraciones y su proceso de formación, como su recuento y optimización son objeto de la Combinatoria [5].

Es de destacar que el tratamiento de la Combinatoria en las carreras de Ingeniería resulta de gran importancia porque es la base de la Matemática Discreta y, por lo tanto, se constituye en la raíz de otras ramas de la Matemática como la Teoría de Números o la Teoría de la Probabilidad y también de otras Ciencias que se estudian en este ámbito académico.

Desde esta perspectiva se ha diseñado la secuencia que se propone a continuación, en la cual se ha considerado que los contenidos están formados tanto por títulos fácilmente reconocibles (Combinatoria Simple), como por las prácticas por medio de las cuales se elaboran. Es por ello que, en cada uno de los problemas que la componen, las cantidades involucradas son pequeñas a fin de habilitar la exploración, la representación y la elaboración de conjeturas como prácticas previas a la validación, para así favorecer la construcción del sentido de la Combinatoria Simple.

Problema 1:
Alejo, Bianca, Celina, David y Emilio integran la lista Celeste y Blanca que se presentará en las próximas elecciones del Centro de Estudiantes.
Deciden mantener una entrevista con las autoridades de la Facultad y están pensando cómo se sentarán en la fila de sillas que están preparadas para la entrevista.
a) ¿Cuántas son todas las ubicaciones posibles?

El propósito de este problema es que los alumnos, mediante diferentes modos de representación, como dibujos o diagramas, puedan explorar, recomenzar a partir del error, para así implementar estrategias que les posibiliten organizar los elementos de esta colección y contarlos de manera exhaustiva, estableciendo relaciones entre este tipo de organización y la multiplicación.

Las formas de representación que inicialmente utilicen los estudiantes se constituirán en necesarios puntos de apoyo para favorecer la aparición de otras más convencionales a partir de las cuales el docente dará status matemático a la noción de “Permutación”.

b) ¿De cuántas maneras distintas pueden sentarse uno al lado del otro si Celina debe aparecer primera en la fila y David último?

Los procedimientos y nociones reconocidos formalmente en el problema anterior podrán ser ahora retomados por los alumnos para analizar en este caso que, si se consideran dos de los elementos “fijos”, éstos no cuentan en el total de la colección.

c) ¿De cuántas maneras posibles pueden ubicarse si las chicas quieren sentarse juntas y a los varones no les interesa sentarse juntos o separados?

Aquí se espera que los estudiantes retomen las nociones y los procedimientos anteriores y avancen en la consideración de que las chicas, que quieren sentarse juntas, “cuentan” como un solo elemento y que, a su vez, pueden cambiar de lugar entre ellas. Esto hace que los alumnos deban “controlar” dos organizaciones que se dan simultáneamente, dando lugar a una nueva estructura multiplicativa.

d) ¿De cuántas maneras diferentes se podrán sentar si Alejo y Emilio no quieren estar juntos?

En este problema se tiene como propósito que los estudiantes reflexionen acerca de que, para contar los casos en que una situación no acontece, puede recurrirse a la cantidad de casos que “le falta” a la cantidad de casos en que los varones sí aparecen juntos para “llegar” a la cantidad total de casos.

Si bien este no es el único procedimiento posible, es de destacar que, si no apareciera, el docente lo propondrá a los estudiantes y generará el intercambio y el debate para su análisis y posterior comparación con los realizados por los alumnos.

Problema 2:

Luego de la entrevista Alejo, Bianca, Celina, David y Emilio se reunirán en el comedor del Anexo. Se sentarán en torno a una mesa redonda para intercambiar opiniones y otra vez piensan en las posibles ubicaciones.

a) ¿De cuántas formas diferentes se podrán sentar?

Los procedimientos desplegados en el Problema 1 pueden ser aquí retomados para avanzar en el análisis de una organización circular, donde un elemento queda fijo, como referencia, y no debe considerarse en el total de los elementos de la colección. Considerando como punto de apoyo estas ideas, el docente institucionaliza aquí la noción de “Permutación Circular”.

El profesor, mediante preguntas reflexivas, promueve en los estudiantes el establecimiento de comparaciones con las nociones tratadas hasta este momento.

b) ¿Cuántas son todas las ubicaciones posibles si, en torno a esta mesa redonda, Alejo y Bianca quieren sentarse juntos?

Aquí se espera que los estudiantes retomen del Problema 1 la consideración de que los chicos que quieren aparecer siempre juntos “cuentan” como un solo elemento, aunque pueden cambiar de lugar entre ellos, para ampliarla al contexto de una organización circular.

Problema 3:

Los chicos deben decidir quién se presentará como presidente, quién como vicepresidente y quién como secretario en las próximas elecciones del Centro de Estudiantes. ¿De cuántas maneras distintas pueden armar la lista?

Las diferentes estructuras multiplicativas que se pusieron en juego en las resoluciones anteriores, cuando interesa el orden en que aparecen los elementos de una colección, se amplían en este problema con la consideración de que sólo pueden favorecerse tres personas de las cinco.

A partir de los procedimientos desarrollados por los estudiantes, el docente dará status matemático a la noción de “Variación Simple”.

Problema 4:

Luego, Alejo, Bianca, Celina, David y Emilio quieren armar un grupo integrado por tres de ellos para presentar la propuesta de esta lista a los alumnos de primer año. ¿Cuántos grupos diferentes pueden formarse?

En este caso se retoma del Problema 3 la condición de que sólo pueden favorecerse tres personas de las cinco, pero ahora no interesa el "orden" en que aparecen en cada grupo, razón por la cual, para la resolución de este problema, se debe poner en juego una nueva estructura multiplicativa: la "Combinación Simple".

El docente institucionaliza entonces este conocimiento a partir de las producciones de los alumnos y también los invita a establecer similitudes y diferencias con el concepto tratado en el problema 3.

Problema 5:
Posteriormente, los cinco chicos presentarán la propuesta a los estudiantes de primer año, pero un grupo integrado por tres de ellos se trasladará en taxi. ¿De cuántas formas diferentes pueden hacerlo si desean que al menos uno de los integrantes del grupo sea un varón?

En este problema se retoman los procedimientos reconocidos y los conceptos tratados en el Problema 4 para ampliarlos con la consideración de tres posibles situaciones: que sólo un varón integre el grupo, que lo integren dos o que lo integren tres. Esto implica que la cantidad total de casos proviene de la suma de las cantidades de casos para cada situación detallada anteriormente. Se ponen en juego entonces nuevas relaciones entre las estructuras comprometidas.

6.2 La posible organización de la clase

Para favorecer la construcción de sentido de los conocimientos por parte de los alumnos, en la planificación de esta clase se contemplen diferentes instancias:

- de presentación de cada problema para su resolución individual primero y en pequeños grupos luego. Se propone un uso comprensivo de las fórmulas y, para que esto ocurra, las mismas deberán ser reconocidas formalmente a partir del trabajo de construcción realizado previamente por los alumnos.
  En esta instancia pueden evaluarse, en algún sentido, la idoneidad interaccional, la mediacional y la emocional.
- de resolución efectiva por parte de los alumnos, en las que las intervenciones del docente se centran en aclarar consignas y en alentar la resolución sin intervenir de modo directo, evitando las correcciones parciales mientras los estudiantes resuelven ya que pueden ocasionar que las concepciones erradas no aparezcan para ser discutidas y explicitadas.
  En este sentido, resulta necesario diferenciar el error del conocimiento incompleto. Para el primero se necesita una reconstrucción, mientras que para el segundo hay que hacer la construcción de lo faltante y hay que dar el tiempo necesario para que esa construcción sea realizada por el alumno. En esta clase es probable que ambos surjan y, si así no sucediera, será imprescindible que el profesor provoque la aparición de errores comunes para permitir superar conscientemente concepciones erróneas.
  En este momento la Idoneidad Didáctica puede ser valorada considerando las seis dimensiones anteriormente descriptas en un complejo entramado.
- de confrontación de resultados, de procedimientos y de argumentos empleados, en las que el docente organizará la reflexión sobre lo realizado y luego hará una síntesis de los conocimientos a los que llegó el grupo. A partir de ello establecerá las relaciones entre el conocimiento que circuló en la clase y aquel que pretendía enseñar, pondrá nombres a los objetos matemáticos, en caso de que sean nuevos, reconocerá ciertos conocimientos producidos por los alumnos y los vinculará con otros ya estudiados, es decir, comenzará a institucionalizar los nuevos conocimientos. Es en este contexto que la idoneidad cognitiva y la idoneidad interaccional son posibles de ser analizadas con mayor profundidad.

Cumplidas estas instancias en la resolución de cada uno de los problemas, el docente retomará las institucionalizaciones parciales realizadas para revisitarlas y habilitar su utilización en otros problemas.

En este sentido, en la clase de práctica, posterior a esta de teoría, habrá un lugar para que los estudiantes estabilicen y se familiaricen con los conceptos con los que ya tuvieron una primera interacción. Para ello se les propondrá la resolución de los problemas que se encuentran en la Guía de Trabajos Prácticos correspondiente, que conllevan a una reutilización de conceptos y técnicas ya tratadas en la clase de teoría.

7 A modo de cierre, siempre abierto

La clase, tal como se planificó en la sexta parada, se implementó el tres de abril de dos mil dieciocho en la clase de teoría de la comisión seis con treinta y siete estudiantes presentes. Se formaron siete grupos: uno de cuatro estudiantes, tres grupos de cinco estudiantes y tres grupos de seis estudiantes.

El encuentro se desarrolló de muy diferente manera a la tradicional “clase de teoría” en términos de las relaciones que se establecieron entre el docente, los estudiantes y el saber en juego.

En este sentido, la noción de Idoneidad Didáctica posibilitó valorar las diferentes trayectorias en procesos de estudio efectivos por contraste con procesos de estudio potenciales anticipados en la planificación.

Tanto la narrativa de lo sucedido en ese encuentro como su posterior análisis en forma colaborativa serán presentados en un próximo trabajo. En él se profundiza en la reflexión sobre la propia práctica a fin de tener una actitud crítica con la misma con la intención de producir nuevos conocimientos acerca de ella para mejorarla. De esta forma se espera contribuir a que los estudiantes logren genuinos aprendizajes algebraicos en el inicio de las carreras de Ingeniería.

Referencias

1. Mastache, A.: *Formar personas competentes*. Ediciones Novedades Educativas. Buenos Aires, Argentina. (2007)

2. Chevallard, Y.; Bosch, M.; Gascón, J.: *Estudiar matemáticas. El eslabón perdido entre enseñanza y aprendizaje*. Editorial Horsori. Barcelona, España. (1997).

3. Godino, J. D., Contreras, A. y Font, V. : Análisis de procesos de instrucción basado en el enfoque ontológico-semiótico de la cognición matemática. Recherches en Didactique des Mathématiques, 26 (1): 39-88. (2006).

4. Charnay, R.: Aprender (por medio de) la resolución de problemas en Parra, I.; Saiz, I.(Ed): *Didáctica de Matemáticas, Aportes y reflexiones*. Paidós Educador, pp. 51-63 (1994).

5. Batanero, C.; Godino, J.D,; Navarro-Pelayo, D. : *Razonamiento combinatorio*. Editorial Síntesis. Madrid. España. (1994).

Un Recurso en los Procesos de Enseñanza y Aprendizaje. Pruebas Diagnósticas empleando GeoGebra.

Diana Raquel Kohan[1], Marisa Battisti[1]

[1] Departamento Matemático, Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de Entre Ríos
Ruta Prov. 11 Km 10, Oro Verde (Dpto. Paraná), Entre Ríos, Argentina
{dikohan, mbattisti}@ingenieria.uner.edu.ar

Resumen. Probabilidad y Estadística es una asignatura dictada en las carreras de Bioingeniería y Licenciatura en Bioinformática ofrecidas por la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional de Entre Ríos. Año tras año se aprecia que los alumnos presentan dificultades en la apropiación de las medidas estadísticas de evaluación de pruebas diagnósticas, contenido abordado dentro de las aplicaciones del teorema de Bayes.
Esta propuesta incorpora una actividad, que incluye la descarga de un documento de GeoGebra, elaborado por los docentes de la cátedra para tal fin, con preguntas que inducen a los estudiantes a experimentar con el software y extraer conclusiones acerca de la variación conjunta de las distintas medidas obtenidas.
Con esta tarea se espera el enriquecimiento del razonamiento inductivo, la actitud crítica y el aprendizaje autónomo en los jóvenes universitarios, habilidades esenciales en todo profesional.

Palabras Clave: GeoGebra, Teorema de Bayes, Pruebas diagnósticas.

1 Motivación

La asignatura Probabilidad y Estadística se dicta en el segundo año de las carreras de Bioingeniería y Licenciatura en Bioinformática ofrecidas por la Facultad de Ingeniería perteneciente a la Universidad Nacional de Entre Ríos.

A partir de la enseñanza de las unidades de la materia, año tras año se aprecia que los estudiantes presentan dificultades en la apropiación de las medidas estadísticas de evaluación de pruebas diagnósticas, contenido que es enseñado como una de las aplicaciones de la noción de probabilidad condicional y la regla de Bayes.

Luego del desarrollo habitual del tema con la metodología tradicional de enseñanza, la propuesta incorpora una actividad de realización domiciliaria, que incluye la descarga de un documento de GeoGebra diseñado por los docentes de la cátedra, con preguntas que inducen a los alumnos a experimentar con el software y extraer conclusiones acerca de cómo varían conjuntamente la sensibilidad, la especificidad, y los valores predictivos positivos y negativos en pruebas diagnósticas.

2 Fundamentación

Las tecnologías de información y comunicación (TIC) son conocidas mundialmente por traer consigo nuevas estrategias educativas capaces de enriquecer los procesos de enseñanza-aprendizaje. Sin embargo, además del manejo instrumental básico que los educadores necesitan tener de ellas, Díaz Barriga [1] sostiene que el docente precisa mejorar y enriquecer las oportunidades de enseñanza y aprendizaje significativo a sus estudiantes, siendo el cimiento de dichas posibilidades tecnologías que impliquen el uso de ambientes de aprendizajes fortalecidos mediante las TIC.

Siendo tantas las ventajas que aporta su empleo, Batanero [2] considera que los docentes están llamados a buscar situaciones didácticas que involucren la incorporación de las TIC en la enseñanza de la Estadística.

Ante la clara consigna, la autora destaca que una de las principales cualidades de la utilización de software es su naturaleza dinámica, pues permite situar al estudiante en contextos propicios para la experimentación y la exploración.

Frente a la amplia gama de software disponible se considera que, en la ardua tarea de selección de uno o varios de ellos para una situación didáctica, es importante la clasificación de Biehler [3], quien diferencia los mismos atendiendo a sus funciones educativas en la enseñanza de la estadística. El autor los clasifica en *herramientas* y *micromundos*.

La denominación *herramientas* engloba a todos aquellos entornos informáticos en que los estudiantes aprenden a “practicar” estadística de una manera similar a la que lo hacen los profesionales estadísticos.

En contraposición se encuentran los llamados *micromundos*, caracterizados por dar espacio a los experimentos interactivos, la visualización exploratoria, y las simulaciones, brindando escenarios que puedan ayudar a que los alumnos conceptualicen la Estadística. Posibilitan la manipulación de determinados parámetros, para que los estudiantes puedan observar el grado del impacto que esta variación ocasiona en el resto de los parámetros. En todos los casos, Biehler afirma que la elección del software apropiado atenderá intrínsecamente a una serie de requisitos que dependerán de los objetivos educativos previstos.

Actualmente está en auge la noción de recurso educativo abierto (RAE) definido por la Organización de las Naciones Unidas para la Educación, la Ciencia y la Cultura (UNESCO) como “cualquier recurso educativo que esté plenamente disponible para ser usado por educadores y estudiantes, sin que haya necesidad de pagar regalías o derechos de licencia (...)” [4]. Rodriguez Uribe [5] clarifica esta concepción identificando como recursos educativos abiertos a los videos, las plataformas, software y aquellas herramientas o materiales que contribuyan a la mejor aprehensión del conocimiento. Dichos conceptos son aplicables para todos los niveles educativos. Así mismo, UNESCO los concibe como conceptos de potencialidad increíble que intentan apoyar a la transformación educativa.

Entendiendo que es menester comenzar o reforzar el empleo de TIC en la docencia universitaria actual y a la luz de lo antes exhibido, la idea es elegir un recurso educativo abierto como lo es GeoGebra, con el cual se desarrolle una situación didáctica para producir mejor calidad en el aprendizaje de contenidos del programa de la asignatura.

3 Materiales y métodos

El contenido de Sensibilidad y Especificidad es desarrollado como una de las aplicaciones del Teorema de Bayes dentro del primer eje temático de la asignatura: *Introducción a la probabilidad*. Comprende las medidas que cuantifican el desempeño de una prueba diagnóstica en la detección de una determinada patología incluyendo: probabilidades de resultados falsos positivos y negativos, sensibilidad, especificidad y valores predictivos positivos y negativos.

Generalmente, se destina una parte de la clase de práctica para su enseñanza en la forma tradicional, partiendo de un ejemplo para ilustrar los diferentes conceptos. Luego se proponen algunas situaciones problemáticas sencillas para que los estudiantes resuelvan durante la clase, quedando otras pendientes para realizar en forma domiciliaria.

La propuesta es reemplazar alguna de las tareas que se realizan empleando lápiz y papel por una que incorpore la descarga de un documento de GeoGebra que los docentes de la cátedra han diseñado para tal fin, con preguntas que induzcan a los estudiantes a experimentar con el software y extraer conclusiones acerca de cómo varían conjuntamente la sensibilidad, la especificidad, y los valores predictivos positivos y negativos en pruebas diagnósticas.

La actividad estará disponible en el aula virtual que la asignatura posee en la plataforma Moodle y deberán realizarla en equipos de dos o tres estudiantes en un plazo máximo de siete días luego de habilitado el recurso.

3.1 Breve reseña sobre GeoGebra

Dentro de la amplia gama de recursos educativos abiertos, GeoGebra es concebido como un software matemático dinámico, interactivo, de carácter libre, que reúne distintas ramas de la Matemática como son Geometría, Álgebra, Cálculo y Estadística.

Ha sido elaborado en 2001 por Markus Hohenwarter de la Universidad de Salzburgo (Austria), en conjunto con un grupo internacional de desarrolladores de software. Su objetivo primario es la enseñanza de la Matemática [6].

Para los docentes es una herramienta de fácil manejo a la cual puede recurrirse para elaborar construcciones, o emplear alguna creada por otro, y convertirlas en recursos de enseñanza o actividades para que los alumnos erijan sus propios aprendizajes.

El entorno de GeoGebra brinda al estudiantado un ámbito apropiado para la manipulación de distintos objetos matemáticos, basándose en la experimentación para deducir resultados y propiedades a partir de la observación directa.

Tal como lo describe su creador, el software es dotado de varias perspectivas diferentes de cada elemento matemático: una *Vista Gráfica*, una *Vista Numérica*, una *Vista Algebraica* y una *Vista de Hoja de Cálculo*. La variedad de visualizaciones posibilita apreciar los objetos en sus distintas representaciones, siendo que cada una se vincula dinámicamente con las demás en forma automática asimilando los cambios ocasionados en cualquiera de ellas.

El programa se puede descargar gratis de la página oficial https://www.geogebra.org/download y es de fácil instalación en los sistemas operativos iOS, Android, Windows, Mac, Chromebook y Linux de computadoras y teléfonos móviles.

Los atributos y las herramientas características de GeoGebra, convierten a este software en uno de los recursos educativos más completos y atractivos para la enseñanza de la Matememática en la universidad [5].

3.2 Diseño del recurso

Para la construcción del recurso se emplearon deslizadores insertados sobre la Vista Gráfica, los cuales son definidos como representaciones gráficas de números libres [6].

Se optó por crear tres deslizadores: uno asignado a la probabilidad de seleccionar al azar un paciente de la muestra con determinada patología, denotada como $\mathrm{P(E)}$; y otros dos que se corresponden con las probabilidades condicionadas de resultados falso positivo y falso negativo, denotadas como $\mathrm{P(F+)}$ y $\mathrm{P(F-)}$, respectivamente (véase Fig. 1).

La principal cualidad de la herramienta *deslizador* es que el usuario puede, moviendo el cursor, cambiar dicho valor y observar cómo en un esquema estas variaciones alteran total o parcialmente dicha estructura. En este caso, ya que dichos números son probabilidades de ocurrencia de un suceso, previamente se determina que estén limitados en el intervalo [0,1], con un incremento ajustado a 0,01.

A partir de entradas algebraicas en la *Barra de entrada* al pie de la pantalla de GeoGebra se ingresan en forma de *objetos dependientes*:

- *Sensibilidad* de la prueba diagnóstica, calculada como la probabilidad del complemento de un resultado falso positivo
- *Especificidad, obtenida como la probabilidad del complemento de un resultado falso negativo*
- *Probabilidades de resultados positivos y negativos en la prueba diagnóstica, simbolizados como* $\mathrm{P(+)}$ *y* $\mathrm{P(-)}$*, respectivamente, los que se calcularon con el teorema de probabilidad total*
- *Valor Predictivo Positivo (VPP) y Valor Predictivo Negativo (VPN), obtenidos aplicando la regla de Bayes.*

Todos estos valores se recalculan automáticamente al variar las probabilidades asignadas a los deslizadores, prescindiendo de tiempo de cómputo manual. Así es posible observar, por ejemplo, cómo varía el valor predictivo positivo de una prueba de diagnóstico ante diferentes escenarios como mayor o menor probabilidad de que un paciente padezca la enfermedad, mayor o menor probabilidad de resultado falso positivo o falso negativo.

Debido a que todos estos cálculos se muestran como resultados numéricos en la Vista Algebraica, con la herramienta *Inserta Texto* se crean textos de tipo *mixto* [6] entendidos como combinación de textos *estáticos* y *dinámicos*. A través de este atributo del software, se añaden a la Vista Gráfica de manera estática las notaciones de las diferentes probabilidades y de manera dinámica los resultados obtenidos en la Vista Algebraica.

Otra de las tantas ventajas que ofrece GeoGebra para el diseño de recursos didácticos, es que permite al docente personalizar fácilmente la interfaz de uso, pudiendo él mismo decidir cuáles diferentes partes mostrar u ocultar, tildando las correspondientes vistas (gráfica, algebraica, numérica, hoja de cálculo).

Gracias a esta valiosa característica, resulta posible sólo mostrar al alumno la *Vista Gráfica* sin abrumarlo de información que podría desenfocarlo del objetivo de aprendizaje perseguido.

Además, en la Vista Gráfica se construye una representación geométrica del espacio muestral a partir de un cuadrado de longitud unitaria del lado, cuyos vértices son el origen de coordenadas cartesianas y los puntos (0,1), (1,1) y (1,0). El cuadrilátero se particiona en dos rectángulos, donde las alturas son la probabilidad de que el paciente esté enfermo con la patología de interés (rectángulo rojo) y la probabilidad de que el paciente no padezca la enfermedad (rectángulo verde). A su vez, cada rectángulo se divide en otros dos rectángulos con longitudes de bases iguales a las probabilidades de resultados positivos y negativos condicionadas a enfermos y no enfermos respectivamente (véase Fig. 2).

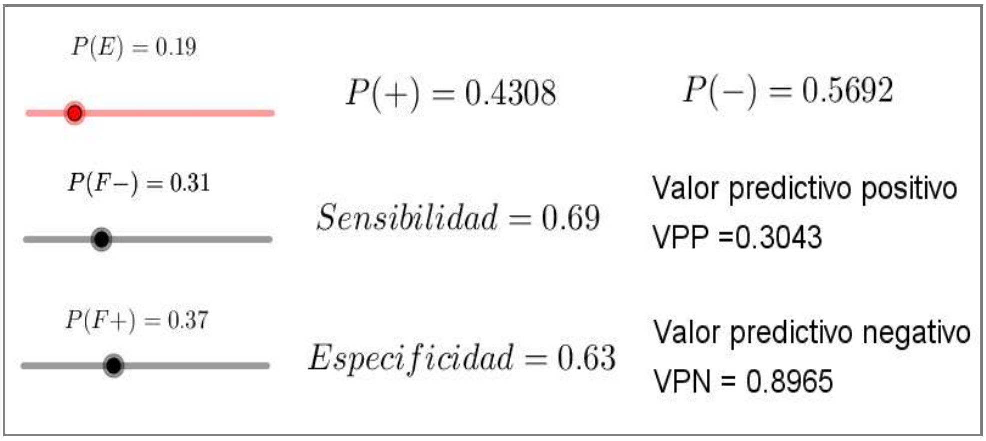


Fig. 1. Deslizadores y textos dinámicos.

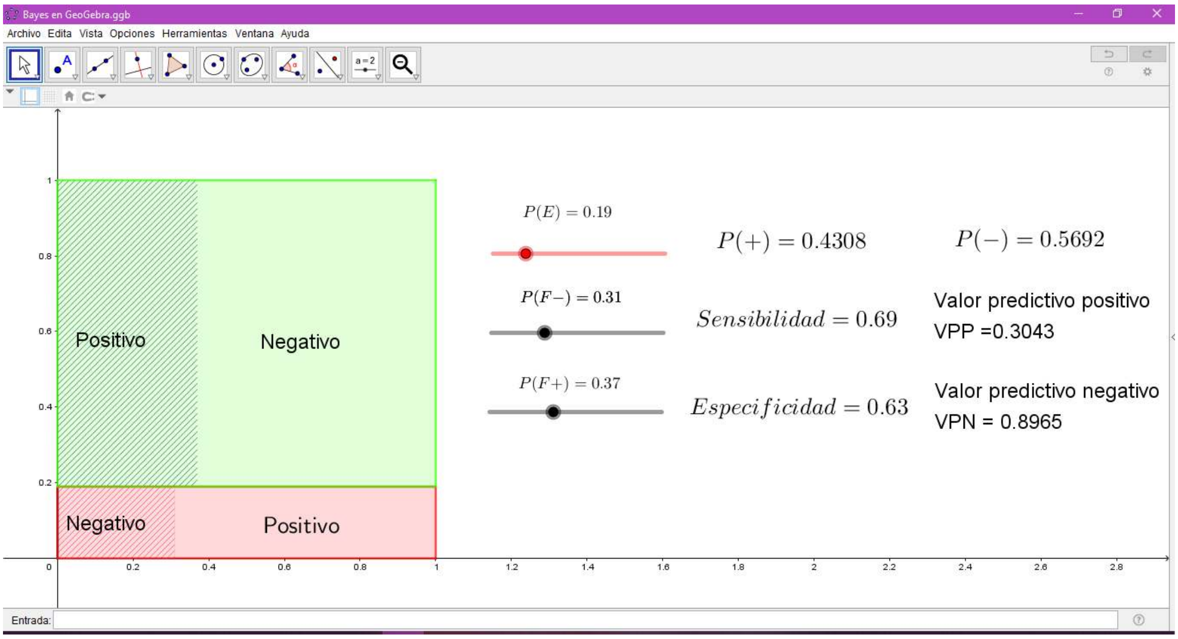


Fig. 2. Vista Gráfica del recurso empleando GeoGebra.

Los rectángulos rayados representan aquellos diagnósticos incorrectos, es decir, pacientes enfermos con resultados negativos y pacientes sanos con resultado positivos en la prueba de detección de la enfermedad. En contraste, los rectángulos de textura lisa son aquellos casos diagnosticados de manera correcta.

Todos los cuadriláteros han sido construidos como objetos matemáticos dependientes de los valores que varían al mover los deslizadores. Por lo tanto, sus áreas cambian en función de cómo aumenten o disminuyan $\mathrm{P(E)}$, $\mathrm{P(F+)}$ y $\mathrm{P(F-)}$.

3.3 Contenido de la propuesta

La actividad comienza brindando a los estudiantes un escenario con determinada prevalencia de una patología en una población, conociendo que se aplica cierta prueba diagnóstica a una muestra aleatoria representativa de esta población con el fin de evaluar su desempeño en la detección de la enfermedad.

Se pide el cálculo manual de determinados índices acerca de la performance de la prueba y su posterior verificación mediante el recurso elaborado en GeoGebra.

Seguidamente, se induce a los alumnos a experimentar variar alguna de las probabilidades dadas y concluir cuáles medidas fluctúan en consecuencia.

A continuación se listan consignas planificadas a partir de una situación inicial como la siguiente:

Sabiendo que la prevalencia de cierta patología en una población es del 10%, y que se cuenta con una muestra aleatoria representativa de la misma, considere que toda la muestra es sometida a una nueva prueba de detección que arroja resultados negativos en el 15% de los pacientes enfermos y resultados positivos en el 3% de los pacientes sanos.

- ¿Cuál es la sensibilidad y la especificidad de esta prueba?
- ¿Cuál es la probabilidad de resultados positivos $P(+)$ y negativos $P(-)$ de esta prueba?
- Calcule las medidas VPP y VPN en forma manual, y compare los resultados obtenidos con los computados al desplazar los deslizadores del archivo de GeoGebra.
- En la situación inicial y manteniendo invariante todas las probabilidades excepto la del resultado falso negativo, ¿qué medida varía: sensibilidad o especificidad? Justifique. ¿Qué ocurre al aumentar la probabilidad de falso negativo?
- En la situación inicial y manteniendo invariante todas las probabilidades excepto la del resultado falso positivo, ¿qué medida varía: sensibilidad o especificidad? Justifique. ¿Qué ocurre al aumentar la probabilidad de falso positivo?
- En la situación inicial y manteniendo invariante todas las probabilidades excepto la probabilidad que el paciente padezca la enfermedad, ¿cuáles de las siguientes medidas fluctúan: sensibilidad, especificidad, VPP o VPN?
- ¿De qué probabilidades dependen la sensibilidad y la especificidad de una prueba diagnóstica: $P(E)$, $P(F+)$ o $P(F-)$?

4 Resultados esperados y trabajos futuros

Se cree que una propuesta basada en el uso de TIC da una posibilidad a los alumnos de prescindir de tiempo en efectuar algunos cálculos y centrarse más en la resolución de problemas, pudiendo comprender el concepto en su totalidad.

Frecuentemente, vislumbrar la implementación de un software en actividades de Estadística viene aparejada de la burda idea que es una habilidad más, la cual el estudiante debe adquirir para poder manipularlo y que en el camino se corre el riesgo de perder de vista los objetivos trazados.

No obstante, en esta situación didáctica los docentes elaboraron una construcción *amigable* empleando un software de manipulación relativamente sencilla para el alumno, que induce a la experimentación.

Es de suma importancia, tener en claro que la llamada *inteligencia matemática* no será descubierta por los estudiantes sino aportamos los medios para que ellos razonen por sí mismos como los matemáticos [7].

El entorno informático preferido para el desarrollo de la propuesta pertenece a los denominados *micromundos* de Biehler, y se espera que la capacidad dinámica de GeoGebra otorgue al estudiantado una oportunidad de experimentar ágilmente, razonando y evaluando el grado de impacto ocasionado por las modificaciones en la probabilidad de padecer una patología o las probabilidades de resultados erróneos respecto de las medidas del desempeño de una prueba de diagnóstico.

Con la inserción de una actividad que involucra este software, entendido como un recurso en los procesos de enseñanza y aprendizaje, se pretende el fortalecimiento de otras habilidades del pensamiento, como el razonamiento inductivo, la actitud crítica y el aprendizaje autónomo en los jóvenes universitarios, cualidades esenciales en todo profesional.

El empleo de esta herramienta es un buen recurso didáctico que permite verificar los resultados calculados manualmente en la ejercitación habitual del contenido abordado.

El equipo de cátedra pretende a partir de este desarrollo estimular discusiones acerca de las características positivas del empleo de GeoGebra como recurso educativo abierto para la enseñanza de la Estadística en entornos universitarios, pudiendo ser una pequeña contribución para sortear el difícil reto de acortar la brecha entre el impacto actual de las TICs en el nivel educativo superior y sus vastas potencialidades pedagógicas [4].

La estrategia invita a repensar cómo sacar partido a las nuevas tecnologías con la única finalidad de lograr que los estudiantes alcancen aprendizajes más sólidos, en ámbitos con mayor motivación en los que puedan aprender *haciendo* alcanzando un rol activo en la adquisición del conocimiento.

Referencias

1. Díaz Barriga, F.: Las TIC en la educación y los retos que enfrentan los docentes. *Organización de Estados Iberoamericanos: Metas Educativas 2021*. https://www.oei.es/historico/metas2021/expertos02.htm (2009). Accedido el 3 de Julio de 2018
2. Batanero, C.: *Didáctica de la Estadística*. Grupo de Investigación en Educación Estadística (2001)
3. Biehler, R.: Software for Learning and for Doing Statistics. *International Statistical Review*, Vol. 65, No. 2, pp. 167-189 (1997)
4. UNESCO: *Guía Básica de Recursos Educativos Abiertos (REA)*. UNESCO (2015)
5. Rodríguez Uribe, L.: GeoGebra como recurso educativo para la enseñanza de las matemáticas en educación superior. *Repositorio Institucional UMNG*. https://repository.unimilitar.edu.co/bitstream/10654/17042/1/ RodriguezUribeLuisa Alejandra2017.pdf (2017). Accedido el 2 de Julio de 2018
6. Hohenwarter, M.; Hohenwarter, J.; Saidon, L.: Documento de Ayuda de GeoGebra: Manual Oficial de la Versión 3.2. *GeoGebra Website*. https://app.geogebra.org/help/docues.pdf (2009). Accedido el 26 de Junio de 2018
7. Sáenz de Cabezón, E.: *Inteligencia Matemática*. Plataforma Editorial (2016)

Análisis de las Habilidades Matemáticas Desarrolladas por los Alumnos en el Aprendizaje de los Métodos de Integración Numérica

Marta G. Caligaris, Georgina B. Rodriguez, Lorena F. Laugero
Grupo Ingeniería & Educación, Facultad Regional San Nicolás, Universidad Tecnológica Nacional
Colón332, 2900, San Nicolás, Buenos Aires, Argentina
{mcaligaris, grodriguez, llaugero}@frsn.utn.edu.ar

Resumen. Es posible hacer importantes aportes al proceso de formación de habilidades desde el dictado de las asignaturas del ciclo de formación básica. Las autoras de este trabajo han decidido enseñar los temas que se desarrollan en la materia Análisis Numérico proponiendo actividades que favorezcan el desarrollo de habilidades matemáticas. En particular, para determinar el grado de desarrollo de las habilidades matemáticas adquiridas por los alumnos después del aprendizaje de los métodos de integración numérica, se plantearon distintos problemas en la instancia evaluativa tomada al finalizar el tema. En su resolución, los estudiantes debían poner en juego diversas habilidades. En este trabajo, se muestran dos de los problemas propuestos y la rúbrica que se utilizó para analizar cada una las respuestas de los alumnos. Se presentan también, los resultados obtenidos, algunas reflexiones acerca de las habilidades adquiridas por los estudiantes y un estudio comparativo con los resultados del ciclo 2017.

Palabras Clave: Habilidades, Taxonomía de Bloom, Integración Numérica

1 Introducción

Según Capote León, Rizo Rabelo y Bravo López [1], la enseñanza de la ingeniería desde su surgimiento ha estado condicionada por diferentes cambios que la han hecho evolucionar y a la vez enriquecerse. Constituye una preocupación de todos los tiempos, la formación de un ingeniero acorde con las necesidades del entorno en que vive. Para lograr este propósito es necesario que la formación del futuro ingeniero supere el paradigma en el que predominaba la adquisición y transmisión de conocimientos y se asuma uno nuevo, orientado a generar nuevas formas de pensamiento y acción, que permita formar profesionales que sean capaces de lograr un aprendizaje continuo o permanente, un estudiante que adquiera las habilidades necesarias para abordar los futuros problemas profesionales.

Desde las asignaturas del ciclo de formación básica se puede empezar a realizar aportes a este proceso de formación de habilidades. Por ejemplo, en la materia Análisis Numérico se enseñan los temas proponiendo situaciones que favorezcan el desarrollo de habilidades matemáticas. Estas habilidades son reconocidas por muchos autores como aquellas que se forman durante la ejecución de las acciones y operaciones en el marco de una actividad matemática. Para ello, se incorporó a la cartilla de actividades que se resuelve durante el desarrollo de cada uno de los temas, ejercicios que no sólo permitan recordar o aplicar un determinado método numérico sino, por ejemplo, analizar si es posible aplicarlo en función de las características del problema propuesto.

El objetivo de este trabajo es mostrar la experiencia realizada durante el desarrollo del tema “métodos de integración numérica” con los alumnos de las especialidades Electrónica, Industrial y Mecánica que cursan Análisis Numérico en la Facultad Regional San Nicolás. También se presenta un análisis de las habilidades desarrolladas al finalizar la enseñanza del tema, algunas reflexiones en función de los resultados obtenidos y un estudio comparativo con los resultados del ciclo 2017.

2 Marco teórico

2.1 Habilidades y taxonomía de Bloom

Hay diferentes definiciones del término habilidad, según el punto de vista desde donde se lo enfoca. En general, en las distintas definiciones propuestas, los autores consideran a las habilidades como un sistema de acciones que posibilita la realización de una actividad determinada, sobre la base de hábitos y conocimientos adquiridos [2].

Cuando se enseña, se pretende desarrollar ciertas habilidades, y luego este desarrollo debe ser medido. La taxonomía de Bloom, luego revisada por Anderson y Krathwool [3] es una forma de clasificar el aprendizaje en los estudiantes, con niveles de complejidad creciente. La misma ayuda a comprender cómo aprenden los alumnos y sienta las bases en cada nivel de aprendizaje con el propósito de asegurar un aprendizaje significativo y la adquisición de habilidades que permitan el uso del conocimiento construido.

La taxonomía de Bloom revisada distingue seis niveles que el alumno debe ir superando para que se produzca un verdadero proceso de aprendizaje. Los tres primeros niveles agrupan habilidades de orden inferior y los tres últimos, habilidades de orden superior. Estos son:

- **Recordar:** implica que el alumno pueda recuperar los conocimientos o saberes relevantes de su memoria (de largo plazo).
- **Comprender:** implica que el alumno sea capaz de poner en propias palabras los conocimientos recordados, sin necesariamente establecer relaciones entre ellos.
- **Aplicar:** implica que el alumno pueda hacer uso de la información en nuevas situaciones.
- **Analizar:** implica que el alumno sea capaz de pasar de lo global a lo específico, descomponiendo el conocimiento en diferentes partes y analizando las relaciones entre ellas.
- **Evaluar:** implica que el alumno sea capaz de realizar juicios de valor basados en criterios a través de la comprobación y crítica.
- **Crear:** implica que el alumno pueda reorganizar elementos en una nueva estructura mediante la planificación o la producción. Para ello, el estudiante, debe tener las suficientes habilidades para manejar el conocimiento aprendido y crear uno nuevo a través de diferentes herramientas y mediante su propio saber hacer.

La Tabla 1 presenta algunos verbos indicadores del proceso cognitivo que desarrolla el alumno para cada una de las categorías de la taxonomía de Bloom revisada. La evaluación de la acción o actividad realizada usando estos verbos permitirá determinar qué niveles de la taxonomía han alcanzado los estudiantes.

Tabla 1. Verbos de cada categoría de la taxonomía de Bloom revisada.

Categoría	Algunos verbos indicadores
Recordar	citar, definir, buscar, enumerar, escribir, memorizar, decir, enumerar, indicar, mencionar.
Comprender	determinar, concluir, estimar, asociar, comparar, generalizar, distinguir, relacionar, explicar, interpretar.
Aplicar	calcular, completar, ejecutar, usar, mostrar, modificar, elegir, emplear, operar, resolver, tabular, realizar.
Analizar	estudiar, debatir, criticar, deducir, diferenciar, integrar, clasificar, asociar.
Evaluar	estimar, comprobar, formular, elegir, justificar, argumentar, valorar, discutir.
Crear	generar, diseñar, elaborar, idear, formular, construir, inventar, modificar, desarrollar, producir.

2.2 Las rúbricas como instrumento de evaluación de habilidades

La formación en las carreras de ingeniería debe proporcionar a los estudiantes las herramientas que realmente van a necesitar en su desarrollo profesional, y asegurarse que las han adquirido. Por esta razón, debe prestarse especial atención a la evaluación, como parte del proceso.

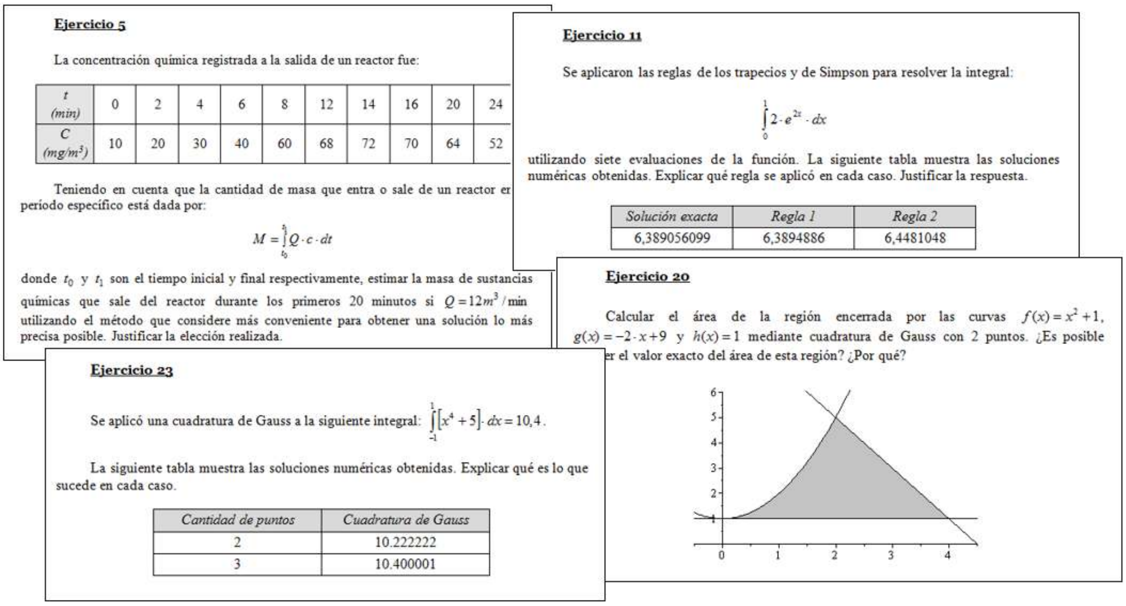
La evaluación debe constituirse en un proceso optimizador de los aprendizajes. Así, Bordas y Cabrera [4] consideran que la evaluación debe ser un proceso reflexivo donde el que aprende toma conciencia de sí mismo y de sus metas y el que enseña se convierte en guía que orienta hacia el logro de ciertos objetivos.

Teniendo en cuenta la importancia de la evaluación en el aprendizaje del alumno, y con el fin de conseguir su misión formativa, el docente debe poner especial atención en el diseño de las actividades de evaluación. Estas actividades únicamente logran ser formativas si, además de estar bien diseñadas, aportan al alumno información detallada, fiel y valiosa sobre los resultados obtenidos, con el fin de contribuir al perfeccionamiento de su proceso de aprendizaje [5].

Una herramienta muy útil y adecuada para evaluar el grado de desarrollo de una habilidad es la rúbrica, también llamada matriz de valoración. Según Raposo Rivas y Martínez Figueira [6], la rúbrica se convierte tanto en una estrategia para la orientación y seguimiento del trabajo del alumno, como en una escala de valoración asociada a la evaluación. Es un recurso para la evaluación integral y formativa, un instrumento de orientación o una herramienta pedagógica, que establece criterios para valorar y evaluar distintos niveles de desempeño y dominio de habilidades. Además, facilita a los docentes realizar una evaluación imparcial, utilizando idénticos criterios con todos los alumnos y aportando calificaciones objetivas.

3 Experiencia de cátedra

Con el objetivo de que los alumnos pudieran desarrollar habilidades matemáticas tanto de orden inferior como de orden superior, se modificó la cartilla de actividades que se empleaba durante el aprendizaje del tema. En ella, se incorporaron actividades que no sólo apuntan a la aplicación de un determinado método de integración numérica. Se añadieron situaciones donde el alumno debe considerar qué método puede utilizar en función de la cantidad de puntos disponibles y el orden de precisión deseado, analizar en qué casos la solución numérica obtenida puede coincidir con la solución exacta de la integral definida o indicar qué método se empleó para obtener una cierta solución numérica teniendo en cuenta las distintos factores que influyen en dicha solución. A modo de ejemplo, la Fig. 1 muestra algunas de las actividades propuestas.


Ejercicio 5

La concentración química registrada a la salida de un reactor fue:

t (min)	0	2	4	6	8	12	14	16	20	24
C (mg/m³)	10	20	30	40	60	68	72	70	64	52

Teniendo en cuenta que la cantidad de masa que entra o sale de un reactor en período específico está dada por:

$$M = \int_{t_0}^{t_1} Q \cdot c \cdot dt$$

donde t_0 y t_1 son el tiempo inicial y final respectivamente, estimar la masa de sustancias químicas que sale del reactor durante los primeros 20 minutos si $Q = 12 m^3/min$ utilizando el método que considere más conveniente para obtener una solución lo más precisa posible. Justificar la elección realizada.

Ejercicio 11

Se aplicaron las reglas de los trapecios y de Simpson para resolver la integral:

$$\int_0^1 2 \cdot e^{2x} \cdot dx$$

utilizando siete evaluaciones de la función. La siguiente tabla muestra las soluciones numéricas obtenidas. Explicar qué regla se aplicó en cada caso. Justificar la respuesta.

Solución exacta	Regla 1	Regla 2
6,389056099	6,3894886	6,4481048

Ejercicio 20

Calcular el área de la región encerrada por las curvas $f(x) = x^2 + 1$, $g(x) = -2 \cdot x + 9$ y $h(x) = 1$ mediante cuadratura de Gauss con 2 puntos. ¿Es posible ...r el valor exacto del área de esta región? ¿Por qué?

Ejercicio 23

Se aplicó una cuadratura de Gauss a la siguiente integral: $\int_{-1}^{1} [x^4 + 5] \cdot dx = 10,4$.

La siguiente tabla muestra las soluciones numéricas obtenidas. Explicar qué es lo que sucede en cada caso.

Cantidad de puntos	Cuadratura de Gauss
2	10.222222
3	10.400001

Fig. 1. Nuevos ejercicios de la cartilla de actividades “Integración numérica”.

Una vez finalizada la enseñanza del tema, para medir el grado de desarrollo de las distintas habilidades matemáticas alcanzado por los alumnos, se plantearon en la instancia evaluativa dos actividades donde el alumno debía desplegar habilidades de orden inferior y superior. A continuación, se presentan estas dos actividades junto con el objetivo propuesto en cada una de ellas.

3.1 Primera actividad propuesta

Objetivo: seleccionar y aplicar una fórmula de Newton Cotes según la cantidad de puntos disponibles y el orden de precisión deseado.

De una función se conoce la siguiente tabla de valores:

x	0	2	3	4	6	7	8	10
y	1	7	10	13	19	22	25	31

Calcular la integral definida en el intervalo [0; 8] empleando la fórmula de Newton Cotes de mayor precisión que considere adecuada. Justificar la elección realizada. Nota: utilizar la mayor cantidad de puntos posible.

3.2 Segunda actividad propuesta

Objetivo: formular la ley de una función tal que el resultado obtenido al aplicar un método de integración numérica coincida con la solución exacta, pero con otro método no, teniendo en cuenta el orden de precisión de los métodos.

Indicar una función *f(x)* tal que si se aplica la cuadratura de Gauss – Legendre de tres puntos para resolver la integral de esa función en el intervalo [*a, b*] se obtiene el resultado exacto, pero no se consigue el valor exacto si se aplica la regla de 3/8 Simpson.

4 Rúbricas elaboradas

Se elaboraron distintas rúbricas para la corrección de cada una de las actividades propuestas en la instancia evaluativa con la finalidad de obtener información valiosa sobre la efectividad de las estrategias de enseñanza utilizadas en el desarrollo del tema. A continuación, se muestran las rúbricas elaboradas para analizar el grado de concreción de las habilidades matemáticas que los alumnos desarrollaron durante la resolución de cada una de las actividades propuestas para cada nivel de la taxonomía de Bloom.

4.1 Rúbricas para la primera actividad

Tabla 2. Habilidades matemáticas del nivel Recordar

Habilidad	Poco desarrollada	Moderadamente desarrollada	Desarrollada
(1) Describe las condiciones que cumplen las fórmulas de Newton Cotes.	No nombra las condiciones.	Nombra las condiciones con algunos errores.	Nombra adecuadamente las condiciones.
(2) Reconoce el concepto de orden de precisión.	No reconoce cuando una solución numérica es más precisa.	Reconoce en algunos casos cuando la solución numérica es más precisa.	Reconoce cuando una solución numérica es más precisa.
(3) Escribe la fórmula de 1/3 Simpson.	No escribe la fórmula de 1/3 Simpson correctamente.	Escribe con errores la fórmula de 1/3 Simpson.	Escribe la fórmula de 1/3 Simpson correctamente.

Tabla 3. Habilidades matemáticas del nivel Comprender

Habilidad	Poco desarrollada	Moderadamente desarrollada	Desarrollada
(1) Comprende la información proporcionada por el problema.	No identifica los datos del problema.	Identifica algunos datos del problema.	Identifica todos los datos del problema.

Tabla 4. Habilidades matemáticas del nivel Aplicar

Habilidad	Poco desarrollada	Moderadamente desarrollada	Desarrollada
(1) Aplica la fórmula de 1/3 Simpson.	No calcula correctamente la solución numérica.	Calcula la solución numérica con algunos errores.	Calcula correctamente la solución numérica.

Tabla 5. Habilidades matemáticas del nivel Analizar

Habilidad	Poco desarrollada	Moderadamente desarrollada	Desarrollada
(1) Analiza qué método emplear con la cantidad de puntos disponibles.	No explica correctamente cuando es posible utilizar la fórmula 1/3 Simpson.	Explica con errores cuando es posible utilizar la fórmula 1/3 Simpson.	Explica correctamente cuando es posible utilizar la fórmula 1/3 Simpson.

4.2 Rúbricas para la segunda actividad

Tabla 6. Habilidades matemáticas del nivel Recordar

Habilidad	Poco desarrollada	Moderadamente desarrollada	Desarrollada
(1) Recuerda el concepto de orden de precisión.	No reconoce el orden de precisión de los métodos.	Reconoce en un caso el orden de precisión de los métodos.	Reconoce el orden de precisión de los dos métodos.

Tabla 7. Habilidades matemáticas del nivel Crear

Habilidad	Poco desarrollada	Moderadamente desarrollada	Desarrollada
(1) Formula una ley de una función que satisfaga las condiciones pedidas.	No propone una función con los requisitos establecidos.	Propone una función con los requisitos establecidos con algunos errores.	Propone una función con los requisitos establecidos.

5 Resultados y discusión

Se tabularon por curso las respuestas dadas por los alumnos con las rúbricas descriptas para cada una de las habilidades matemáticas. En las Fig. 2 a 6 se muestran los resultados obtenidos. En ellas, el color rojo representa que la habilidad está poco desarrollada en el alumno, mientras que los colores amarillo y verde indican que la habilidad está moderadamente desarrollada o desarrollada, respectivamente. También se presenta un breve análisis de los resultados obtenidos en cada actividad propuesta.

5.1 Resultados de la primera actividad

La Fig. 2 muestra que un alto porcentaje de alumnos, al menos el 75%, pudo describir las condiciones que cumplen las fórmulas de Newton Cotes y reconocer el concepto de orden de precisión. Las mayores dificultades se presentaron a la hora de escribir la fórmula del método elegido.

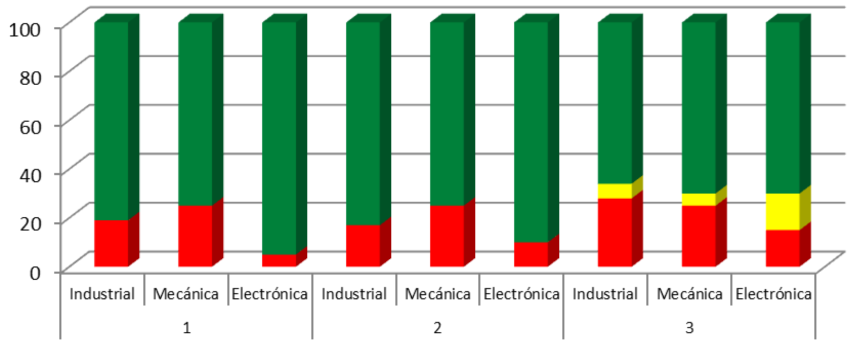


Fig. 2. Comparación de las habilidades matemáticas del nivel Recordar de la primera actividad.

Con respecto a la habilidad del nivel comprender, como se puede apreciar en la Fig. 3, únicamente el 10% de los alumnos no pudo desarrollar esta habilidad en Ingeniería Electrónica, mientras que en las otras dos especialidades este porcentaje fue superior (25%).

Todos los alumnos que recordaron la fórmula de 1/3 Simpson pudieron aplicarla, aunque entre el 20% y el 30% cometieron algún error de cálculo (Fig.4).

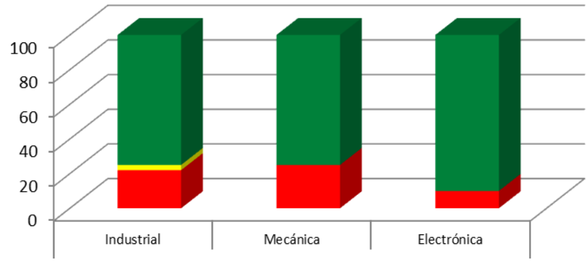


Fig. 3. Comparación de las habilidades matemáticas del nivel Comprender de la primera actividad.

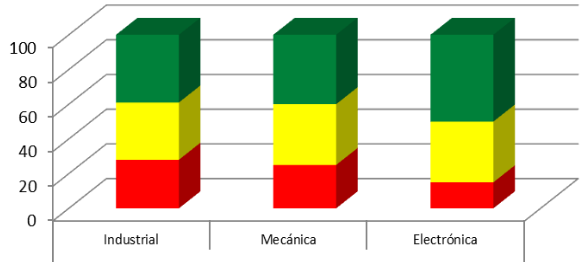


Fig. 4. Comparación de las habilidades matemáticas del nivel Aplicar de la primera actividad.

Los resultados obtenidos para las habilidades matemáticas del nivel Analizar coinciden con los del nivel Comprender. Es decir, aquellos estudiantes que lograron comprender la información proporcionada por el problema son los que pudieron desplegar la habilidad de orden superior (analizar qué método era posible emplear en función de la cantidad de puntos disponibles).

5.2 Resultados de la segunda actividad

Los porcentajes de desarrollo de las habilidades tanto del nivel recordar como del nivel crear son los mismos (Fig. 5 y 6). Es decir, los alumnos que recordaron el orden de precisión de los métodos involucrados en la actividad, son los que lograron inventar la función con las condiciones pedidas.

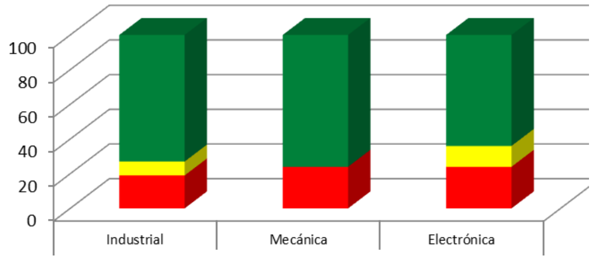


Fig. 5. Comparación de las habilidades matemáticas del nivel Recordar de la segunda actividad.

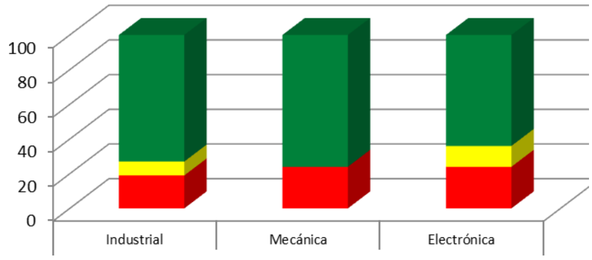


Fig. 6. Comparación de las habilidades matemáticas del nivel Crear de la segunda actividad.

5.3 Análisis comparativo con los resultados obtenidos en el ciclo lectivo 2017

Una experiencia similar a la descripta en el presente trabajo se aplicó el año anterior en el curso correspondiente a Ingeniería Mecánica. La Fig. 7 compara los resultados obtenidos en las habilidades de orden superior, en los ciclos lectivos 2017 y 2018.

Se puede apreciar una mejora notoria en los resultados del ciclo 2018. Aproximadamente, aumentó en un 25% la cantidad de alumnos que mostraron un desarrollo completo de las habilidades correspondientes a ambos niveles.

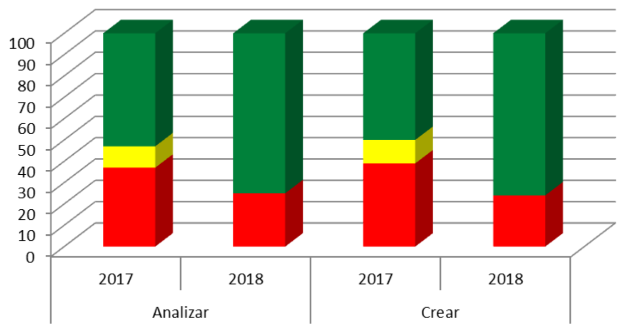


Fig. 7. Comparación de las habilidades de nivel superior en los ciclos 2017 y 2018, especialidad Mecánica.

6 Conclusiones

El análisis de los datos muestra que, en promedio, aproximadamente el 75% de los alumnos pudo desarrollar tanto las habilidades matemáticas de orden inferior como de orden superior. Estos resultados junto con el análisis comparativo que se realizó con la información obtenida en el ciclo lectivo 2017 permiten determinar que una de las posibles causas de esta situación favorable es la forma en que se trató la enseñanza del tema al modificar la cartilla de actividades. Teniendo en cuenta que las habilidades se forman y desarrollan por la vía de la ejercitación de las acciones mentales y mediante el entrenamiento continuo, se entiende que la modificación de la cartilla de actividades permitió contribuir a este fin.

Teniendo en cuenta los resultados obtenidos, se seguirá trabajando en otros temas de la asignatura, para poder lograr que un mayor porcentaje de alumnos logre desarrollar las habilidades matemáticas que se necesitan para resolver las situaciones problemáticas que se les plantean.

7 Bibliografía

1. Capote León, G. E., Rizo Rabelo, N., & Bravo López, G. La formación de ingenieros en la actualidad. Una explicación necesaria. *Revista Universidad y Sociedad* [seriada en línea], Vol. 8 Nº 1. pp. 21-28. (2016).
2. Rodríguez Rebustillo, M. & Bermúdez Sarguera, R. Algunas consideraciones acerca del estudio de las habilidades. *Revista cubana de Psicología*, Vol. 10 Nº 1, 27 – 32. (1993).
3. Churches, A. *Taxonomía de Bloom para la era digita*l. Página *Web Eduteka.* (2008). http://eduteka.icesi.edu.co/articulos/TaxonomiaBloomDigital. Último acceso 28 de junio de 2018.
4. Bordas, M. & Cabrera, F. Estrategias de evaluación de los aprendizajes centradas en el proceso, Revista Española de Pedagogía, Nº 218, pp. 25-28. (2001).
5. Espinosa Martín, M. Evaluación de competencias mediante rúbrica. Importancia de las matemáticas en la evaluación de competencias genéricas. *Historia y Comunicación Social*, Vol. 18. Nº Esp, pp. 243-255. (2013).
6. Raposo Rivas, M. y Martínez Figueira, M. La rúbrica en la enseñanza universitaria: un recurso para la tutoría de grupos de estudiantes. *Formación Universitaria*, Vol. 4 Nº 4, pp. 19-28. (2011).

Pensamiento Algorítmico para Entender Continudad de una Función.

Echevarría, Graciela del Valle1 - Cagnina, María Agostina1 – Felizzia, Daniel1, Vilchez, Paola Andrea1
1Departamento de Ciencias Básicas- Facultad de Ingeniería y Ciencias Agropecuarias Universidad Nacional de San Luis
Campus Universitario -Ruta 148 Extremo Norte – Villa Mercedes, (San Luis)
{gecheva61agostinacagnina,dfelizz,vilchezpaolaandrea}@gmail.com

Resumen. El presente trabajo consiste en una experiencia realizada con los alumnos de primer año de las carreras Ingeniería (Electromecánica, Electrónica, Mecatrónica, Química, Alimentos e Industrial), de Análisis Matemático I. El alumno tuvo que analizar si una función es continua o discontinua, aplicando la definición de continuidad y clasificando la discontinuidad. Haciendo uso de los diferentes registros, siguiendo la Teoría de Duval que considera que la comprensión integral de un concepto está basada en la coordinación de al menos dos registros de representación, para finalmente poder lograr una articulación con herramientas conocidas de otras materias para llegar a la comprensión y aplicación de un nuevo algoritmo para controlar y validar sus ejercicios.

Palabras Clave: Cambio de registro, Continuidad, Pensamiento algorítmico, Diagrama de flujo, Estrategia de enseñanza.

1. Introducción

El presente trabajo se llevó a cabo con alumnos de primer año de las carreras de Ingeniería en Alimentos, Ingeniería Electromecánica, Ingeniería Electrónica, Ingeniería Industrial, Ingeniería Mecatrónica e Ingeniería Química que cursan Análisis matemático I, dictada en la Facultad de Ingeniería y Ciencias Agropecuarias de la Universidad Nacional de San Luis.

La experiencia se dividió en dos partes, en la primera parte los alumnos debían determinar si la función era continua, para este caso usamos como marco teórico la [1] Teoría de Duval. En una segunda parte ellos tenían que realizar un diagrama de flujo (tema visto en la materia Computación I), que cursan en forma simultánea con Análisis Matemático I). El diagrama que ellos debían hacer tenía como finalidad verificar si lo que habían hecho en la primera situación era correcto, una forma de tener un control sobre lo ya realizado.

El objetivo de este trabajo es mejorar el proceso de enseñanza aprendizaje del tema Continuidad, tratando de encontrar nuevas maneras en la que los alumnos puedan desarrollar habilidades para la solución de problemas a través de la teoría de cambio de registros, sumado al desarrollo de diagramas de flujo y pseudocódigos.

Se emplea la teoría de Duval (cambios de Registros) y para la enseñanza de aprendizaje diagrama de flujo una herramienta que usan en Computación I PSeInt. Lo que se pretende con el uso de esta herramienta es lograr una enseñanza transversal, de manera tal que el alumno sea capaz de poder transferir un conocimiento aprendido en un espacio pasarlo a otro espacio y que no se limiten solo a la materia en la cual lo aprendieron.

Lo que se pretende es que tempranamente el estudiante de ingeniería pueda aplicar y apropiarse de algunas competencias, en este caso haremos hincapié en la competencia para utilizar de manera efectiva las técnicas y herramientas de aplicación en la ingeniería [2] Confedi. Esto implica a su vez generar competencia transversal o genérica (entiéndase a esta competencia como la capacidad de poder pasar un conocimiento de una disciplina a otra) con el objetivo que a lo largo de su carrera el estudiante vaya sumando diversas competencias que serán de gran utilidad para su vida profesional.

2. Marco Teórico

Este trabajo se basa en los registros de representación semiótica establecidos por Duval (1993,1998) y algoritmos.

Duval (1998) frecuentemente enfatiza que el conocimiento matemático puede ser representado bajo diferentes formas semióticas. Esta es una operación cognitiva básica, que está fuertemente relacionado a los tratamientos de comprensión y las dificultades del aprendizaje conceptual.

Duval enfatiza la importancia de la representación en Matemática, estableciendo que no es posible estudiar los fenómenos relativos al conocimiento sin recurrir a ella. Para la comprensión de un concepto es necesaria la coordinación de los diferentes registros de representación, ya que con la representación de un solo registro no se obtiene la comprensión integral del concepto.

Las representaciones no solo son necesarias para fines de comunicación, sino que son esenciales para la actividad cognitiva del pensamiento, estas juegan un papel primordial en:

- El desarrollo de las representaciones mentales.
- El cumplimiento de diferentes funciones cognitivas
- La producción de conocimientos
- Duval afirma que para que un sistema semiótico pueda ser un registro de representación debe permitir las tres actividades cognitivas fundamentales ligadas a la semiosis.
- La formación de una representación identificable como una representación de un registro dado: enunciación de una frase, composición de un texto, dibujo de una figura, elaboración de un esquema, escritura de una fórmula etc. Esta formación implica una selección de rasgos y de datos en el contenido por representar.
- El tratamiento de una representación es la trasformación de esta representación en el registro mismo donde ha sido formada, el tratamiento es una transformación interna a una registro. La paráfrasis y la inferencia son formas de tratamiento en el registro natural, el cálculo es una forma de tratamiento propio de la escritura simbólica, la reconfiguración etc. Existen naturalmente reglas de tratamiento en cada registro donde su naturaleza y su nombre varían considerablemente de un registro a otro.
- La conversión de una representación es la transformación de esta representación en una representación de otro registro en el cual conserva la totalidad o una parte del contenido de la representación inicial. La conversión es una trasformación externa al registro de partida.

En esta teoría se considera que la comprensión integral de un concepto está basada en la coordinación de al menos dos registros de representación y esta coordinación se pone de manifiesto por medio del uso rápido y la espontaneidad de la conversión cognitiva, logrando articulaciones entre diferentes registros de representación semiótica.

Los registros de representación en el concepto de continuidad de una función en un punto admite una gran variedad de registros de representación, por lo que en este trabajo estudiaremos las diversas formas de representar este concepto:

- Registro Gráfico
- Registro simbólico
- Registro analítico
- Registro tabular

Como objetivo nos propusimos no solo hacer un tratamiento sobre un solo registro sino la coordinación de todos ellos y finalmente crear un puente con herramientas conocidas en otra materia para llegar a la comprensión y aplicación de un nuevo algoritmo para controlar y validar sus ejercicios.

3. Metodología

Teniendo en cuenta que este es un estudio exploratorio se pretendió crear un puente entre dos materias de modo que los alumnos pudieran lograr una comprensión significativa del tema. Esta experiencia relaciono un tema de la materia Análisis Matemático 1, (continuidad de una función en un punto), con los diagrama de flujo, vistos en la materia Computación 1. Esta práctica se fue desarrollando a lo largo del cursado y al concluir el mismo debían formalizar la entrega de los diagramas en el programa Pseint.

A partir de esa idea se plantearon tres actividades, en la primera actividad se les presento distintos gráficos donde se les solicito determinar si la función era continua, en caso de no ser continua indicar que condición no cumplían y luego clasificar la discontinuidad, la segunda actividad fue una función definida a trozos en donde se les pidió graficar y luego analizar la continuidad en un punto y la última actividad, se les solicito realizar un diagrama de flujo sobre continuidad, y con esto verificar los ejercicios realizados en las actividades anteriores y analizar si llegaban a la misma conclusión de lo logrado en las actividades 1 y 2, de no ser así rehacer el diagrama de tal modo de poder arribar a los mismos resultados.

Los objetivos de nuestro estudio fueron:

- Analizar si el alumno identifica la continuidad de una función a partir de distintos registros de representación.
- Analizar los errores que cometen al realizar conversiones entre los registros.

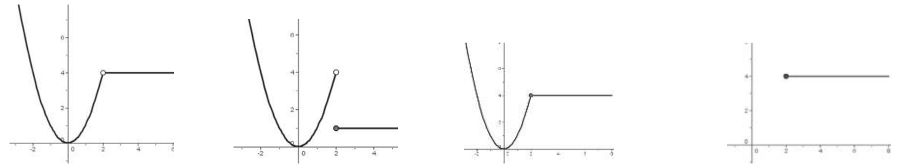
Vincular este conocimiento con el uso de algoritmo usando como herramienta el PSeInt el cual está pensado para asistir a los estudiantes que se inician en la construcción de programas o algoritmos computacionales.
Es multiplataforma (probado en Microsoft Windows, GNU/Linux y Mac OS X), es totalmente libre y gratuito (licencia GPLv2)

A continuación se muestran distintas actividades que tuvieron que analizar los alumnos.

- La primera actividad consiste en la visualización gráfica de las siguientes funciones para así poder determinar la continuidad de las mismas

Utilizando la definición de continuidad de una función en un punto determine si las siguientes representaciones son:
a. Decir si la función es continua en el punto x = 2
b. En caso de no ser continuas, indicar que condición no se cumple
c. Clasificar la discontinuidad
d. De ser posible redefina la función para que sea continua

I II III IV



- Segunda actividad: Consiste en la representación gráfica de una función definida a trozos y analizar la continuidad de la misma en un punto.

Dada la siguiente función: $f(x) = \begin{cases} 4 - x^2 \text{ si } x < 2 \\ \sqrt{x-4} \text{ si } x \geq 2 \end{cases}$

a. Realizar la representación gráfica de la función
b. Decir si la función es continua en x = 2
c. En caso de no ser continua indique el tipo de discontinuidad que presenta. Justifique su respuesta.
d. De ser posible redefina la función.

Diversas investigaciones nos muestran que los alumnos tienen dificultades al realizar las conversiones entre los registros gráfico y simbólico [3] (Villalobos A. 2001). Con mayor razón en este caso, al ser una función definida a trozos. y x < 2, consideran los x menores que 1.

La representación gráfica ayuda a la visualización debido a que juega un papel importante para encontrar la respuesta correcta. [4] Leinhard (1990), señala la importancia y la variedad de aspectos en que es posible centrar la atención y en particular dentro del lenguaje gráfico.

- Tercera actividad: Realizar un diagrama de flujo usando el programa Pseint.

> a. Dada la definición de continuidad en un punto, realizar un diagrama de flujo que actúe como un algoritmo para analizar r la continuidad de una función.
> b. Verificar los ejercicios de las actividades 1 y 2 con el diagrama de flujo obtenido en el ítem a.

En la fig. 1, se muestra el diagrama esperado al que los alumnos deben llegar

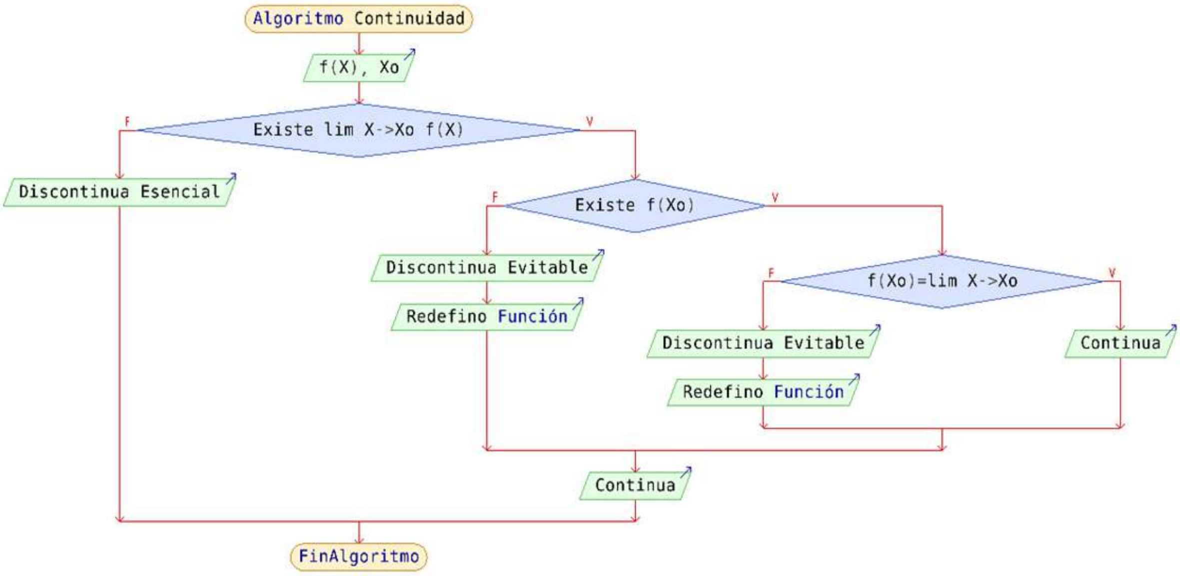


Fig. 1 Diagrama de flujo

4. Análisis de los resultados

Se logró la conexión entre el tema continuidad de una función de la materia Análisis Matemático I, y la herramienta PSeInt desarrollada en la materia Computación I , pudiendo así generar una articulación entre las materias de primer año.

A través de las actividades solicitadas, los alumnos debieron apropiarse de lo ya aprendido en computación, para darle una utilidad específica, en cuanto a la determinación de la continuidad de una función.

Los alumnos fueron desarrollando diferentes diagramas que al llevarlos a la práctica arrojaron errores:

En la fig. 2 Hay errores de notación, no ingresa la función ni el punto en donde se quiere analizar la continuidad. Se llega a determinar la contiuidad de la función en forma errónea.

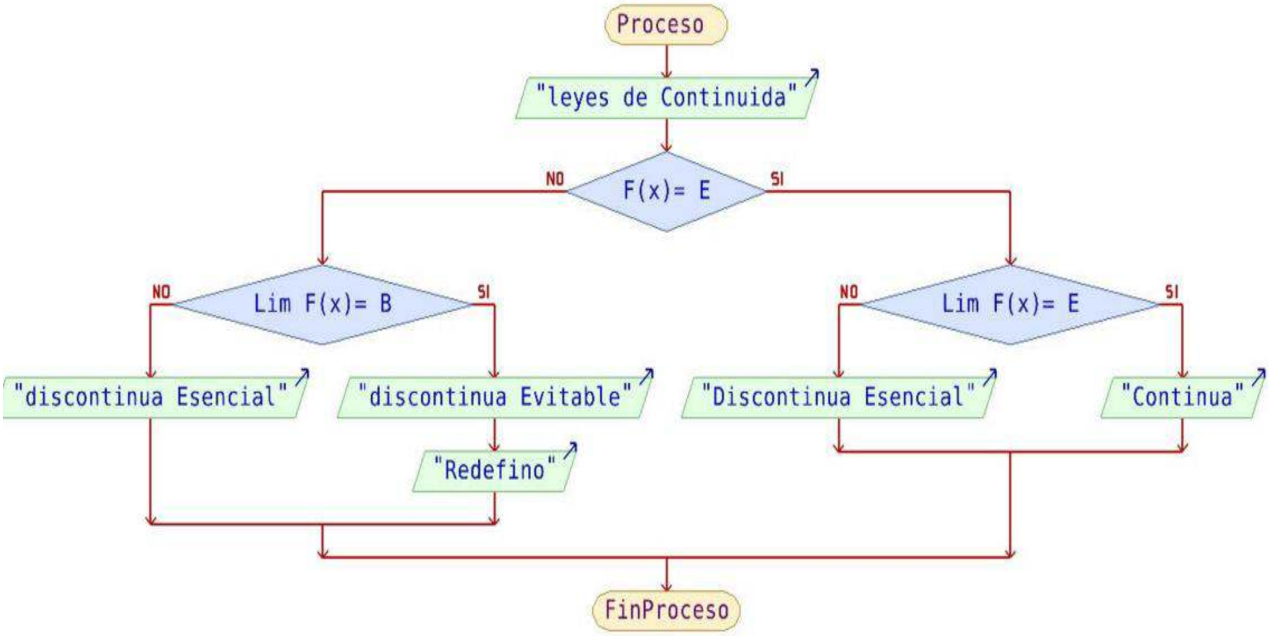


Fig. 2 Diagrama de flujo alumno 1.

En la fig. 3, evidencia desconocimiento del uso de la herramienta que está usando y del tema que está analizando.

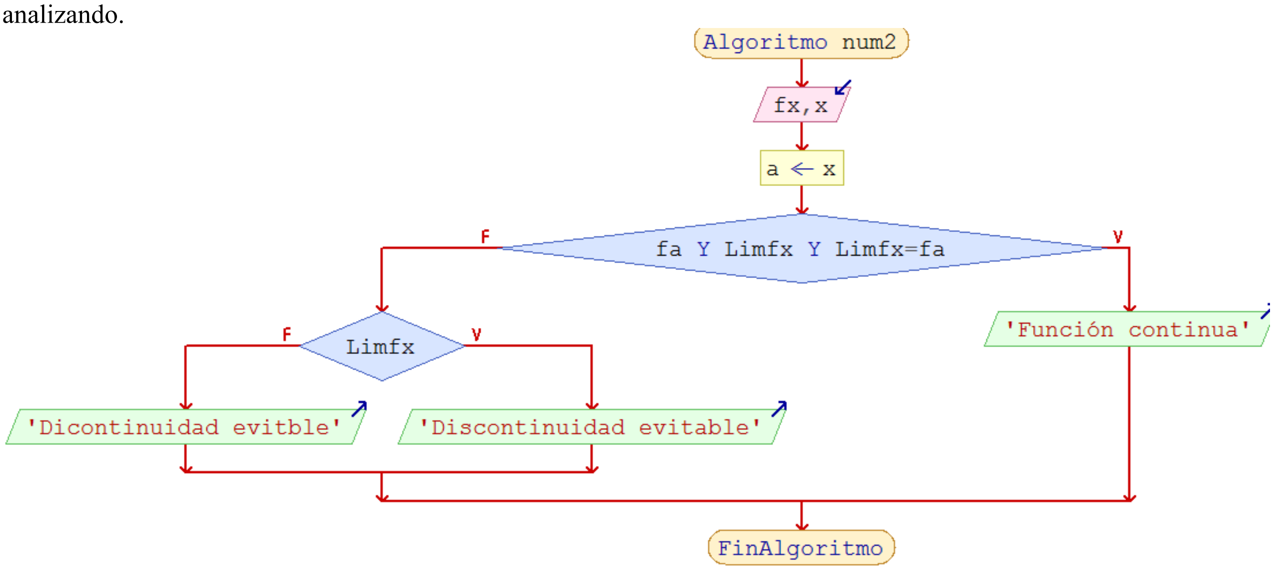


Fig. 3 Diagrama de flujo alumno 2.

En la fig. 4 tiene claro los contenidos matemáticos, pero no así el uso de la herramienta.

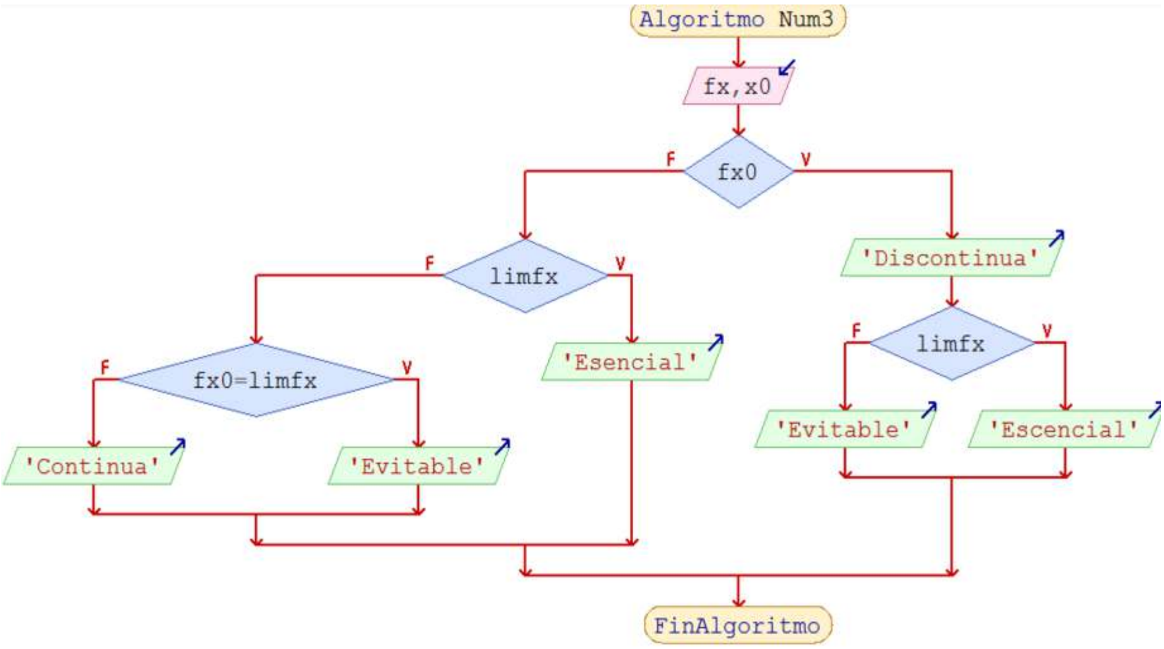


Fig. 4 Diagrama de flujo alumno 3.

En fig. 5 evidencia errores de notación, y errores conceptuales.

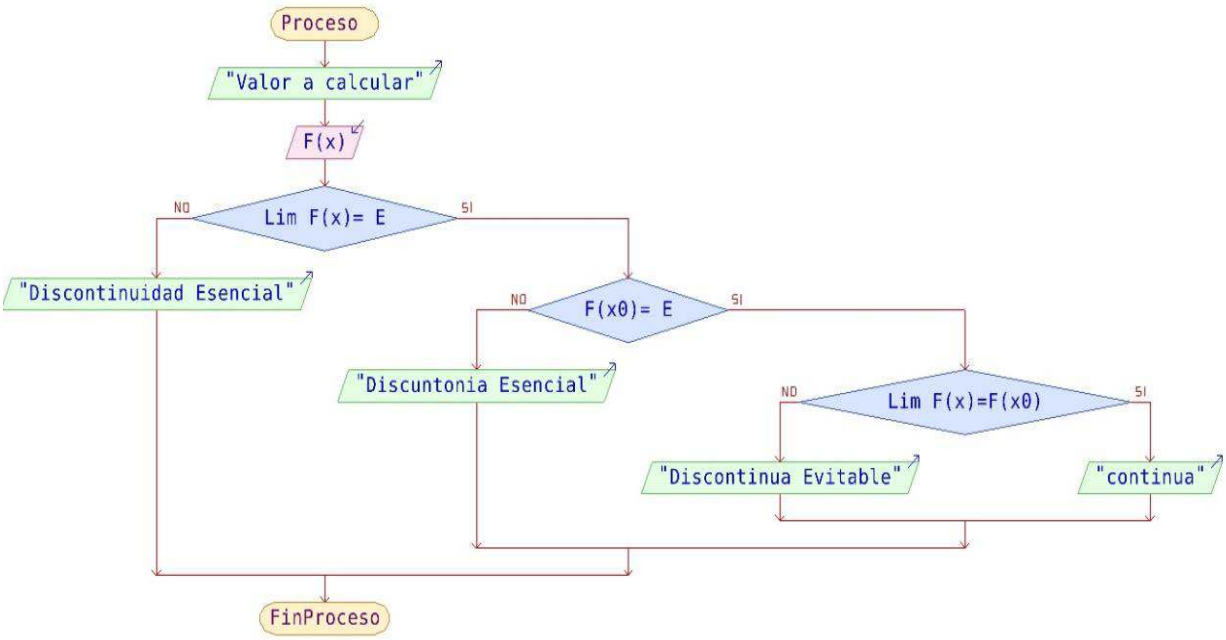


Fig. 5 Diagrama de flujo alumno 4.

5. Conclusiones

A partir del trabajo realizado, se logró que el alumno afiance el concepto de continuidad por medio de la utilización del programa PSeInt como herramienta de soporte.
Al trabajar con diferentes registros, los alumnos logran realizar una articulación entre los diferentes sistemas de representación semiótica.
Se ha despertado el interés por parte de los alumnos en buscar otros temas de la materia que puedan aplicar diagrama de flujo.
Los alumnos han podido tener control de los ejercicios a través de los algoritmos, ya que implican una herramienta para su verificación.
El uso de algoritmo y diagrama de flujo son una herramienta de suma utilidad para el futuro ingeniero. Es importante que vean su aplicabilidad desde las primeras materias de la carrera.

Referencias

1. Duval, R (1998). Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento. En F. Hitt (Ed.), Investigaciones en matemática educativa II, (pp. 173-201). México: Departamento de matemática educativa. Cinvestav
2. CONFEDI (2014). Consejo Federal de Decanos de Ingeniería eISBN 978-987-1312 -62-7-Pdf. Primera edición Mar del Plata
3. Villalobos A. Farfan R. (2001): Identificación de obstáculos en la construcción de gráficas de funciones. Acta latinoamericana de matemática educativa, vol. 14. Panamá (pp 396-399)
4. Leinhardt G., Zaslavsky O. y Stein M. (1990). Functions, graphs and graphing: tasks. Learning and teaching. Review of Educational Research. 60(1), (pp 1-64)

GeoGebra como Auxiliar en la Geometría Analítica: Problemas Tempranos de Lugar Geométrico

Jorge O. Morel[1], Gastón D. Solonyezny[1]
[1]Departamento Matemática, Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de Misiones
Juan Manuel de Rosas 325 (C. P. 3360)
{omar.morel, solonyezny}@gmail.com

Resumen. La distancia entre puntos como expresión, no presenta inconvenientes para los alumnos de Álgebra y Geometría Analítica del primer año de la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional de Misiones, pero cuando se la necesita usar para deducir algunos lugares geométricos, éstos, en su mayoría no la pueden aplicar. Se ha decidido incluir tempranamente algunos ejercicios que den cuenta de la habilidad de usar las expresiones de lugar geométrico. Se utiliza el software para bosquejar y encontrar las soluciones, antes que resolverlas analíticamente, y luego para la validación de resultados. Se comparte acá dos ejercicios, y la forma en que se trabajan. Geogebra es la herramienta que ha adoptado para esta etapa, que también es una oportunidad para aprender a usarlo.

Palabras Clave: Enseñanza mediada por TICs, Lugar geométrico, Aplicaciones del concepto de distancia, Aprendizaje activo.

1 Introducción

Se presenta una posible estrategia para posibilitar la integración de las herramientas tecnológicas en las clases de Algebra y Geometría Analítica de primer año de la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional de Misiones, analizando los aportes de las TIC a la formación general de los estudiantes y a su formación profesional como futuros ingenieros, pero sobre todo como herramientas para hacer y aprender matemática.

Se ha diseñado algunos problemas de distancia que se pueden resolver primero con el apoyo del software Geogebra y con ciertos saberes previos que los estudiantes deben poseer, por ejemplo, que la distancia entre el centro de una circunferencia y su periferia se mantiene constante. Esta actividad está programada para la segunda semana del inicio del ciclo lectivo como disparadora de acciones importantes que los estudiantes de ingeniería deben operar: la utilización de herramientas informáticas, generando nuevas oportunidades de aprendizajes y niveles de entendimiento en base a la visualización y exploración de objetos y conceptos en entornos multimedia; así como el tratamiento analítico.

La situación que se presentaba en la clase era que: al definir la distancia entre dos puntos que yacen en una recta, en el plano o en el espacio tridimensional y preguntar por la distancia entre dos puntos, normalmente cualquier estudiante puede resolverlo; pero cuando se trata de manejar la información de sumas de distancias, de razones de distancia, o para calcular distancias entre un punto y una recta en una posición paralela a un eje – saberes necesarios para estudiar cónicas y cuádricas– hay un porcentaje elevado de alumnos que no pueden operar con estos problemas. Por eso se adelantó algunos temas, como por ejemplo: modelizar rectas en el plano, o planos paralelos a los ejes coordenados, mediante una familia de puntos.

Se ha detectado en estos últimos años el incremento en la cantidad de estudiantes que presentan dificultad para dibujar e imaginarse las cuádricas y cónicas. No se intenta dar una respuesta sobre el origen de esa problemática, simplemente se la reconoce y se la aborda, sobretodo cuando en asignaturas del tercer semestre se necesita de la habilidad de reconocer curvas y superficies además de dibujar las mismas, y se espera que esta asignatura les introduzca a ellas.

Una alternativa para viabilizar tales el desarrollo del proceso de enseñanza aprendizaje de los temas planteados es gestionar más eficientemente la incorporación de las TIC, de manera que se logre una actividad más amena, motivante y desarrolladora de las potencialidades de los estudiantes. Para eso es necesario adelantar algunos temas, como por ejemplo: modelizar rectas en el plano, o planos paralelos a los ejes coordenados, mediante una familia de puntos.

Se presenta una selección de dos ejercicios diseñados teniendo en cuenta ciertas pautas de acompañamiento al estudiante en lo que respecta al aprendizaje del software y el tratamiento analítico del ejercicio que no son los tradicionales, de solución única, como es el típico “Halla la distancia de un punto a otro”

La herramienta de GeoGebra contribuye en muchos aspectos a mejorar las metodologías de enseñanza-aprendizaje y para la solución de problemas académicos proporcionando información valiosa en aspectos gráficos, lo cual genera interés en la aplicación de esta herramienta para la resolución de problemas.

La secuencia es entonces una aproximación a la solución mediante Geogebra, luego la resolución analítica, y finalmente una validación con el software.

1.1 Fundamentos

La consigna para realizar esta modificación a las actividades anteriores de los trabajos prácticos descansa en algunos documentos como por ejemplo:

"*Entre las características que deben procurarse en el ingeniero iberoamericano se destacan:*

- *La capacidad de autoaprendizaje y el compromiso con una formación continua, en especial con la aplicación e implementación de los avances tecnológicos.*
- *La habilidad de analizar, modelar, experimentar y resolver problemas de diseño, de soluciones abiertas y de enfoque multidisciplinario.*
  Siguen…
- *La capacidad de utilizar eficientemente el creciente desarrollo de las telecomunicaciones y las herramientas informáticas*."[1]

"*Desde la perspectiva que adoptamos, entendemos que el objetivo es que los alumnos aprendan a hacer Matemática. Se trata de una actividad que implica mucho más que conocer definiciones, propiedades o teoremas y saber en qué momentos aplicarlos. Hacer Matemática implica tratar con problemas. Decimos tratar y no resolver, porque la resolución es solo una parte del trabajo. El conocimiento matemático no se construye como una consecuencia inmediata de la resolución de uno o más problemas, sino que requiere que el alumno se haga preguntas, que pueda explicitar los conocimientos puestos en juego para resolverlos, que determine aquellos que pueden reutilizarse en otras situaciones, que pueda apoyarse en argumentos matemáticos para dar cuenta de cómo los resolvió, defender sus posturas en un espacio de intercambio con sus pares y con el docente, interpretar las estrategias utilizadas por sus compañeros y, eventualmente, adoptarlas, etc*." [2]

La introducción en forma temprana de algunos conceptos que luego se van a refinar corresponde a una manera intuitiva de pensar la docencia que tiene ejemplos en autores exitosos como [3], que en su prefacio explica porqué usa este tipo de abordaje en las características descriptivas del libro. En este caso, el hecho de escribir una recta en el plano o un plano paralelo a uno de los planos coordenados como familia de puntos, y las actividades entre las que se exponen acá serían algunas introducciones tempranas.

Geogebra puede ser usado por el estudiante cuando debe resolver ejercicios, como elemento explorador, para tener idea de una posible solución; o como una forma de corroborar los datos. El objetivo es que con éstas actividades los estudiantes se involucren con estas dos experiencias, como una sola. En otras palabras: que puedan usar ambas técnicas, como una forma de trabajo para resolver los ejercicios. Las direcciones son para que el estudiante inexperto sepa que siempre debe hacerse preguntas sobre su actividad.

Otro uso de Geogebra para el estudiante son los bocetos, en forma de libros o lecciones que pueden armarse en una propuesta secuenciada como la mayoría de las que aparecen en los perfiles de GeoGebra Tube, donde profesores de todo el mundo comparten esas construcciones con la esperanza de que permitan al estudiante apropiarse de un concepto. No es el caso de esta comunicación, aunque el perfil al que los alumnos acceden pueda incluir un boceto donde se muestra la solución más generalizada –se puede cambiar las ubicaciones de A y B y la relación de distancias–.

Para el desarrollo de esta experiencia, se cuenta con una computadora conectada a un proyector, además los estudiantes pueden usar la aplicación en sus teléfonos. Sin embargo, para los exámenes se cuenta con 10 computadoras sin bloqueo y con los tres programas que se utilizan: Freemat, Wxmaxima y Geogebra, razón por la que se anima a los estudiantes a que traigan sus netbooks. Normalmente en el salón de clase hay un promedio de 6 computadoras entre los 120 alumnos de esta comisión a principio del año; de manera que la condición de estudio no es la ideal, puesto que no todos pueden probar sus conjeturas.

De acuerdo con [4] "*Generar un único material, en formato digital, que incluya el texto teórico–práctico y applets interactivos, de uso dinámico e intuitivo, en un mismo lugar, puede resultar una mejor estrategia de integración de las TIC.*", es una salida a la cual lentamente estamos convergiendo.

2 Las actividades

2.1 Ejercicio 1

Consigna TP2, Ejercicio 4F.
Halla las coordenadas de un punto situado de tal modo que su distancia a A(−9,0) sea tres veces menor que su distancia a B(−3,0). Ayuda: recuerda el ej.3B), pero ahora P(x,y)

El ejercicio al que hace referencia es uno que reza: *Halla las coordenadas de un punto situado de tal modo que su distancia a A(−9) sea tres veces menor que su distancia a B(−3)*, y tiene dos soluciones.

Procedimiento

Como primera instancia se discute la posibilidad de que el problema sea igual al ejercicio referenciado. Una vez que comprueban que las soluciones ahora pueden ser (-7.5,0) y (-12,0) debe preguntarse si éstas son las únicas soluciones.

Como segunda instancia se debe tratar de bosquejar en Geogebra la situación planteada en el ejercicio propuesto, para ello se espera y se discuten estrategias. En general, es necesario guiar sobre las alternativas para plantear el escenario, que sería por ejemplo la siguiente secuencia:

- Colocar los puntos A y B como indica la consigna
- Colocar un punto auxiliar C, sujeto al eje X –no es necesario, pero comprobado que se entiende más rápido–
- Hallar r = Distancia(C, A)
- Construir una circunferencia con centro en A y radio r; realizando énfasis en que todos los puntos de la circunferencia están a la distancia r de A…
- Discutir la necesidad de contar con algún punto –no es necesario que los estudiantes ya se percaten de que hay par de puntos– donde la distancia al punto B sea …
- Discutir el valor que debe tener el radio … 3r.
- Por tanto, se debería llegar a construir otra circunferencia con centro en B y radio 3r, y mover el punto auxiliar C hasta que haya intersección
- Construir las intersecciones –puntos D y E–
- Verificar la existencia de al menos una solución doble mediante
    - La construcción de los segmentos DB y DA –segmentos f y g respectivamente–
    - La razón f/g y viendo que mientras existan, es de 3
- Mediante la opción de "Mostrar Rastro", y moviendo adecuadamente C, puede obtenerse el lugar geométrico esperado
- Reconocer que el lugar geométrico de los puntos cuya distancia a A es tres veces menor que de B parece ser una circunferencia.

En la Fig. 1 se muestra el posible resultado de este proceso, donde la construcción permite evaluación dinámica, para lo cual también se ha invertido tiempo en ello.

La segunda instancia es la resolución analítica del ejercicio. Partiendo de la base de que se sabe que hay soluciones y que ésta no va a ser un punto sino una familia de ellos, se tienen que sortear las dificultades de:

- Modelización del problema:
    - Se recomienda para cualquier ejercicio la confección, de ser posible, de un dibujo-bosquejo de la situación planteada en la consigna. Esto responde al "modo de ser" del ingeniero.
    - Discutir sobre la necesidad de colocar solamente el punto genérico P(x,y), del cual interesará conocer la relación entre x e y (Fig. 3). Ha surgido la pregunta de por qué no se definen dos puntos, como sugiere el boceto.
    - Darle un nombre a cada distancia involucrada en la consigna.
    - Establecer la relación de distancias. Este es un punto donde generalmente hay mucha discusión.

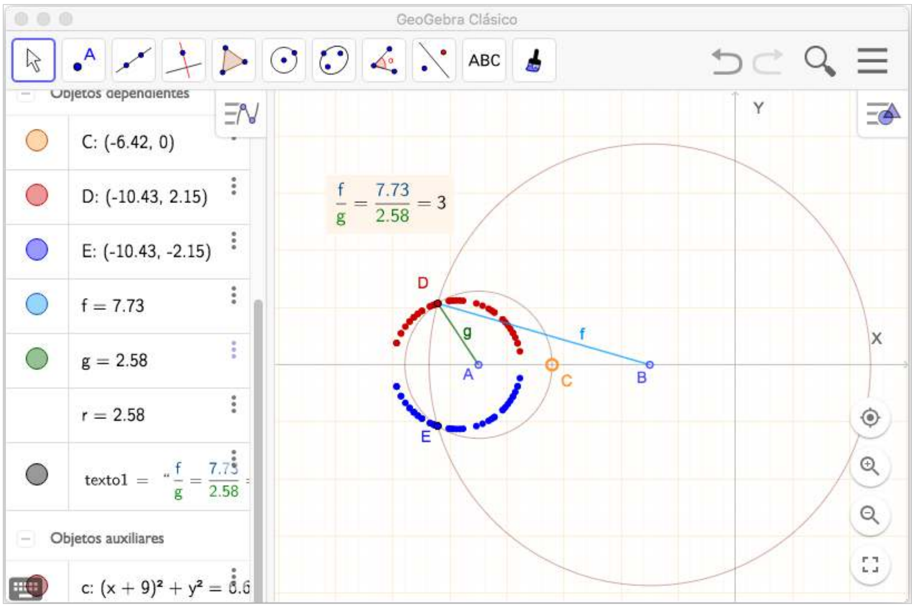


Fig. 1. Vista del boceto de Geogebra para el ejercicio 1.

La relación debiera quedar, de acuerdo con la consigna y la Fig. 2, como:

$$d(P, B) = 3d(P, A) \quad \textbf{(1)}$$

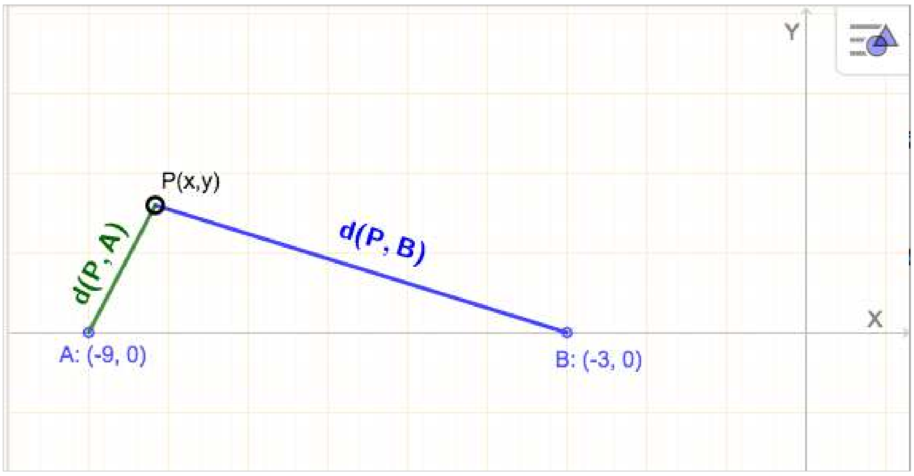


Fig. 2. Esquema para el análisis (para el ejercicio 1).

- La manipulación algebraica: Este es un aspecto muy álgido. Desde hace al menos dos cohortes y acentuándose con mucha fuerza en la cohorte actual, los estudiantes que tienen escasa habilidad de manipulación algebraica. La aprobación del examen de ingreso no es de exigencia para ingresar en esta Facultad. De 300 alumnos que ingresaron solamente 50 aprobaron el examen este año. Y tanto el examen cuanto el recuperatorio han sido de nivel mínimo. Es un aspecto a tener en cuenta.
- La verificación sobre el boceto
  - Se ocultan los puntos C,D y E; así como las circunferencias c y d y los segmentos f y g del boceto de la figura. Con el propósito de visualizar solamente los trazos del lugar geométrico calculado por la experimentación
  - Se construyen los lugares gemométricos de los puntos D y E, que dependen de C.
  - Se coloca un punto (F) sobre uno de los lugares geométricos.

- Se solicita una circinferencia por tres puntos (D,E,F). Es importante hacer notar que Geogebra guarda la expresión anterior como
  $(x+9.75)^2+y^2=5.06$, y que eso es algo que no todos los alumnos se dan cuenta sin dirección.
- Se ingresa la expresión que han resuelto de la manipulación algebraica,
  $8x^2 + 156x + 8y^2 + 720 = 0$
  En este punto el colega se pregunará porqué no se llega a una expresión más canónica de la circunferencia solución: la respuesta es que preferimos no hacerlo hasta dentro de 5 semanas, cuando terminemos con los entes y pasemos a las ecuaciones de las cónicas.
- Si se verifica que es la misma solución, se ha logrado el objetivo. De lo contrario se discute la posibilidad de algún error en el proceso de manipulación.

• La verificación sobre los términos del problema.
En este caso se procede en una nueva hoja a
- Redibujar solamente los puntos originales A y B y entrar la circunferencia del análisis
  A(-9,0) B:(-3,0) s: 8x^2+156x+8y^2+720=0
- Definir un punto P sobre la circunferencia s
- Construir los segmentos f y g y el texto como antes
- Mover el punto P para verificar que aunque cambien los segmentos f y g, la razón siempre se mantiene constante (Fig. 4).

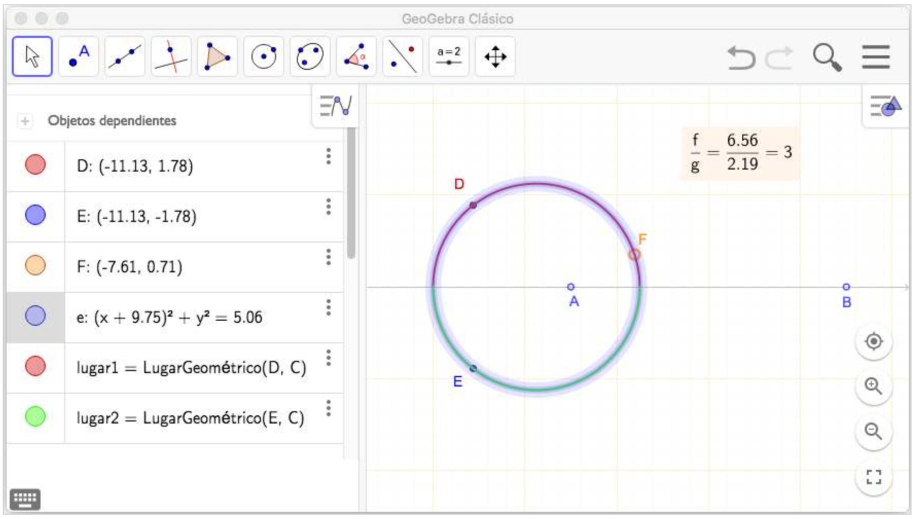


Fig. 3. Boceto para verificación del análisis con el boceto (para el ejercicio 1). Se grafican los puntos geométricos y se marcan tres puntos que van a servir de parámetro para la circunferencia dada por tres puntos.

2.2 Ejercicio 2

Consigna TP2, Ejercicio 7C i.
Encuentra una ecuación para todos los puntos P (x,y) que equidistan de A(0,1) y de {(x,-1)}

El ejercicio se tratará de acuerdo a los mismos criterios que el anterior, por tanto, no se repetirán acá los detalles. Asimismo, aparece después que otro problema en el que se pide el lugar geométrico de los puntos que equidistan de otros dos puntos fijos en el plano… que a su vez está resuelto como ejemplo 2.1 en la primera parte del trabajo práctico.

Una práctica común es solicitar que los estudiantes identifiquen antes de hacer cualquier cuenta o procedimiento con la computadora, es si hay alguna solución que puede verse sin hacer cálculos, como en este caso el punto del origen, que equidista del punto A y de la recta.

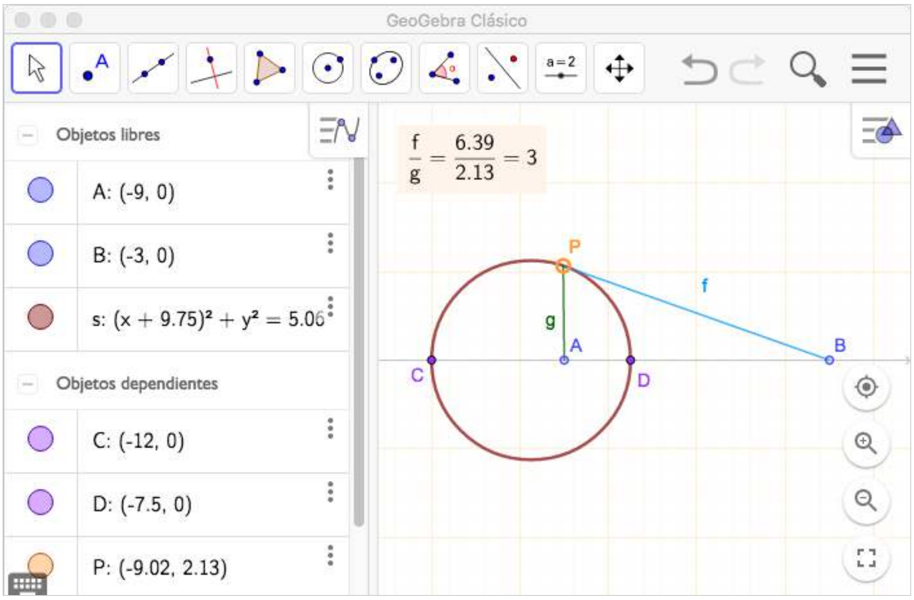


Fig. 4. Boceto para verificación del análisis con la consigna (para el ejercicio 1). Se introduce la ecuación calculada analíticamente y se comprueba que la razón de distancias es al solicitada en al consigna.

Procedimiento

Como primera instancia es tratar de bosquejar en Geogebra la situación planteada en el ejercicio propuesto, para ello se tiene, por ejemplo, la siguiente secuencia:

- Definir el punto A y la recta, como indica la consigna
- Construir un punto auxiliar C, sujeto la recta
- En este momento se dirá que la distancia de un punto P a la recta se medirá mediante la longitud vertical del punto a la recta horizontal. Por ello es que
  - Se contruye una vertical que contenga al punto auxiliar C
  - Se construye un punto supuesto P’ en esa vertical como para experimentar
  - Se abre el debate sobre cómo construir el punto –si existiera– equidistante entre el punto A y la recta. En este punto quisieran repetir la estrategia anterior… y así hallan la mediatriz.
- Se consigue P como la intersección entre la mediatriz entre los puntos A y C
- Se halla el lugar geométrico de P en función de C… y con ello se ha resuelto.

La segunda instancia es el análisis:

- Modelización: d(A, P) = d(P, C) de donde
- La respuesta es $y = x^2 / 4$

La tercera, es la validación, y se procede de la misma manera que en el ejemplo anterior.

3 Conclusiones

Se ha tratado que el estudiante se involucre, debata, proponga ideas para resolver el ejercicio; se ha generado un espacio para verificar esas hipótesis, para que emerjan los errores y que se las maneje como cualquier proceso normal de aprendizaje o situación en las asignaturas del ciclo que viene.

Conseguir que un estudiante sienta deseo de compartir lo que está aprendiendo es fundamental para reforzar sus estudios y, de ser necesario corregir aquello en lo que se equivoca. Por eso, entender el error como una oportunidad de aprendizaje requiere una actitud positiva, que debe ser percibida por el estudiante, y que no se sienta intimidado, sino por el contrario, los motive a expresarse. Dicen los expertos que interesarse con apertura y paciencia en los estudiantes que se equivocan y preguntarles cómo y por qué han llegado a esos resultados, es una puerta abierta no solo para mejorar, sino también para desencadenar en procesos metacognitivos de gran importancia en el desarrollo de habilidades de aprendizajes. Darles confianza en que ellos son capaces y tener verdaderamente altas expectativas de su aprendizaje, es un gran impulso a la hora de definir la calidad de lo que enseñan y de los que aprenden.[5]

En este caso se considera que se ha dado la oportunidad de hacer matemática, que es distinto de hacer cálculos y comprobar los resultados con el profesor o con un colega.

De todas maneras, el estudiante vive esta situación con un poco de zozobra: toda su educación se ha dado de otra manera. Pero es necesario, a la luz de lo que se requiere de él como egresado (ver [1]).

Referencias

1. CONFEDI.: Marco conceptual y definición de estándares de acreditación de las carreras de ingeniería. Oro Verde – Entre Ríos, Argentina–, p. 6, 2017
2. Novembre, A; Nicodemo, M; Coll, P.: Matemática y TIC: orientaciones para la enseñanza. Buenos Aires: ANSES, E-Book. ISBN 978-987-45744-1-1, 2015
3. David C. Lay.: Álgebra lineal y sus aplicaciones. 3ra ed., Pearson, México, ISBN: 978-970-26-0906-3, p 8, 2007
4. Del Río, L.S; Gonzalez, A.; Bucari, N..: La integración de las TIC en las clases de matemática en el nivel universitario: ¿Cómo afrontar este desafío? *Congreso Iberoamericano de Ciencia, Tecnología, Innovación y Educación*. Buenos Aires. ISBN: 978-84-7666-210-6 – Artículo 612, 2014
5. González Vargas, B.: Cómo aprovechar los errores en el Proceso de Aprendizaje, *EducaRueca,* (2017), http://www.educarueca.org/spip.php?article570, Accedido el 5 de Julio de 2018

Propuesta de Articulación horizontal, en el Ciclo Básico de las Carreras de Ingeniería en el tema Parábola

Julia M. Hurtado[1], Florencia M. Alurralde[1],José L. Gutierrez[2]
[1]Consejo de Investigación de la universidad Nacional de Salta (CIUNSa),
Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de Salta (UNSa)
Av. Bolivia 5150. Salta 4400
Julia_mhurtado@yahoo.com.ar,florencialurralde@gmail.ar
[2]Facultad de Ingenierá, Universidad Nacional de Salta
Av. Bolivia 5150. Salta 4400
Joseluis.llxll@gmail.com

Resumen. En este trabajo se presenta una propuesta de actividad de articulación horizontal entre dos asignaturas del primer cuatrimestre del primer año de las carreras de la Facultad de Ingeniería de la UNSa: Álgebra Lineal y Geometría Analítica (ALGA) y Análisis Matemático I (AMI). Se trabaja sobre el tema Parábola, ya que es estudiado en ambas asignaturas, pero desde distintos marcos: como una función cuadrática en Análisis y como un lugar geométrico (cónica) en Álgebra. La actividad de articulación consiste en abordar la parábola con el apoyo del software Geogebra, como refuerzo para integrar los dos marcos referenciales, facilitando la visualización de las gráficas y la verificación de resultados obtenidos en la resolución de problemas relacionados con el tema.

Palabras Clave: Articulación, Parábola, Geogebra.

1 Introducción

Esta investigación forma parte de un Proyecto del Consejo de Investigación de la Universidad Nacional de Salta (CIUNSa) sobre la integración de las TIC en el primer año del Ciclo Básico de las Carreras de Ingeniería de la UNSa. Nace con la idea de emplear la característica dinámica del software de geometría Geogebra, como herramienta mediadora en el aprendizaje de los temas de las asignaturas Álgebra Lineal y Geometría Analítica (ALGA) y Análisis Matemático I (AMI). Su objetivo es reflexionar sobre posibles cambios en las estrategias de enseñanza de las asignaturas que contribuyan significativamente en el aprendizaje de los estudiantes. Las asignaturas ALGA y AMI corresponden al primer cuatrimestre del primer año del plan de estudio de las carreras de Ingeniería de la UNSa.

El problema elegido para la propuesta de actividad de articulación se refiere al estudio de la ecuación general de segundo grado en dos variables cuya representación gráfica es una parábola. Su planteo posibilita el abordaje analítico desde las dos asignaturas, a partir del estudio de las funciones básicas, utilizado en AMI, y desde el Álgebra y la Geometría Analítica trabajada en ALGA.

2 Objetivo

El objetivo fundamental de esta propuesta es articular un contenido común a ALGA y AMI, mediante la realización de actividades sobre la parábola con el apoyo del software de geometría dinámica Geogebra como herramienta integradora.

3 Marco teórico

Desde el punto de vista de AMI el abordaje del tema "Parábola" elegido para la propuesta de articulación se refiere al estudio de "funciones elementales", a partir de su expresión. Se identifica dominio e imagen de la función, simetrías, intersecciones con los ejes coordenados cartesianos, intervalos de crecimiento y decrecimiento y de concavidad, determinación de máximos y mínimos, y se realiza la correspondiente gráfica.

Desde la mirada de ALGA, se encara la parábola como un lugar geométrico: una cónica, en el marco del Álgebra Lineal y la Geometría Analítica, se trata de una ecuación general de segundo grado en dos variables, que cumple ciertas condiciones para que su gráfica corresponda a una parábola que puede o no ser una función. Es un tratamiento más amplio, ya que abarca tanto las parábolas verticales (funciones), como las horizontales (que no son funciones). La resolución de un problema en el que se pretende graficar la cónica que representa la ecuación de segundo grado en dos variables, se puede encarar utilizando los conceptos abstractos del álgebra lineal, como espacios vectoriales, matrices, aplicaciones lineales y diagonalización, con el fin de realizar un cambio de base (Rotación de ejes) y una Traslación de ejes (completando cuadrados en las variables y luego haciendo un cambio de variables) para obtener la ecuación Normal de la parábola, lo que permite reconocer sus elementos y graficarla.

En el plano y en el espacio los vectores tienen existencia doble: son a la vez objetos algebraicos y geométricos. “Este tipo de dualidad nos permite estudiar la geometría con métodos algebraicos…” [1]. La resolución del mismo problema desde los dos enfoques antes indicados se complementa con el software Geogebra.

El estudio de la Geometría con el apoyo del Geogebra hace posible que el estudiante trabaje de manera autónoma, construya conjeturas y valide resultados obtenidos a partir de la resolución de problemas con lápiz y papel [2].

“A diferencia de otros software de matemáticas, la geometría dinámica fue destinada desde su origen a la enseñanza, por lo que se reconoce fácilmente su vocación didáctica y se resaltan sus potencialidades en la enseñanza…” [3].

“…podría ser valioso considerar que la pantalla del programa permita construir una figura, o si se quiere una serie de figuras que se obtienen en forma dinámica por la variación de ciertos elementos, que permita establecer una conjetura. Estamos queriendo decir que de algún modo, el dibujo se ha transformado en una “figura de análisis” que permite explorar la situación pero cuyas respuestas posiblemente las hallemos fuera de la pantalla…” [4].

Según Ramírez Toledo [5], en la enseñanza constructivista el aprendizaje humano es una construcción interior, aunque el docente acuda a una exposición magistral, ésta no puede ser significativa si sus conceptos no encajan en los conceptos previos de los alumnos y entre los requerimientos necesarios para potenciar la enseñanza constructivista. Este autor menciona el propiciar las condiciones para que el estudiante sea partícipe del proceso de enseñanza-aprendizaje, de la planeación, selección de actividades, las consultas de fuentes de información, etc. En este sentido Sánchez Rosal [6], recomienda una paulatina incorporación de los recursos tecnológicos como complemento de la enseñanza tradicional en el ámbito universitario y pone énfasis en la importancia de los procesos de visualización, que permite la asimilación de conceptos abstractos en base de imágenes o representaciones que las TIC proporcionan. Usar Geogebra puede propiciar un entorno adecuado para la exploración activa de estructuras matemáticas mediante múltiples representaciones, o para mostrar a los estudiantes algunos aspectos de las matemáticas que no son posibles con la pluma y el papel [7].

4 Desarrollo

Las actividades que se proponen se llevarán a caboen horario extra clase de la asignatura ALGA, en las que se trabajarán conjuntamente con el docente de la comisión de práctica y los estudiantes (aproximadamente 40 alumnos). Cada participante debe contar con una PC o teléfono celular que contenga el soft Geogebra, para trabajar individualmente.

- Se presentará una breve explicación de los comandos básicos del software Geogebra.
- Se recordará la función de segundo grado, cuya gráfica corresponde a una parábola vertical, estudiada en la asignatura AMI.
- Se recordará el trabajo realizado en la asignatura ALGA en el estudio de ecuaciones de segundo grado en dos variables, cuya representación gráfica corresponde a parábolas verticales u horizontales.
- Se entregará a los participantes del proyecto una guía de actividades sobre el tema.
- Los estudiantes desarrollarán la guía con el apoyo del profesor, quien utilizará el proyector como un medio de socialización para las explicaciones necesarias y para control final de las soluciones a las actividades propuestas.
- Al finalizar las tareas se realizará una encuesta a los estudiantes acerca de los aspectos positivos, interesantes y negativos de la propuesta de trabajo.

4.1 Actividad N° 1

Esta actividad se debe realizar con Geogebra, salvo el último inciso que debe ser resuelto con lápiz y papel y corroborado luego con el soft. El trabajo realizado se guardará en un archivo cuyo nombre será Apellido_Nombre_Comisión_A1.

- Ingresar una función cuadrática con coeficientes variables.
- Modificar su definición para que el intervalo de representación sea variable.
- Hallar el máximo o el mínimo valor de la función, según corresponda.
- Determinar las raíces reales o raíces complejas según corresponda.
- Expresar esa función cuadrática como la ecuación normal de la parábola, indicando todos sus elementos.

4.2 Actividad N° 2

Encontrar la ecuación de la parábola que tiene vértice sobre la recta r: 2y-3x=0, pasa por los puntos D= (3,5) y E= (6,-1), y tiene eje de simetría paralelo al eje x.

- Presentar el desarrollo del ejercicio en forma escrita.
- Indicar las fórmulas y pasos empleados en la resolución del mismo.
- Realizar una verificación de todos los resultados con Geogebra.
- Comprobar la definición de la parábola como lugar geométrico.

4.3 Actividad N° 3

Elegir una ecuación general de segundo grado en dos variables que represente una parábola vertical y realizar el estudio de la función cuadrática, expresándola luego como la ecuación normal o canónica de la parábola, nombrando todos sus elementos. Realizar la gráfica correspondiente. Con ayuda del Geogebra cambiar los coeficientes de la ecuación y observar cuáles son los cambios en la gráfica.

A modo de ejemplo se presenta a continuación la resolución de la Actividad N°2 y la Actividad N° 3.

4.4 Resolución de Actividad N° 2

Como el eje de la parábola es paralelo al eje x, es una parábola horizontal y tiene una ecuación del tipo:

$$(y-k)^2 = 4p(x-h) \qquad \textbf{(1)}$$

El vértice de coordenadas (h, k) pertenece a la recta r, entonces verifica su ecuación:

$$2k-3h=0 \qquad \textbf{(2)}$$

Resulta entonces:

$$h=\frac{2}{3}k \qquad \textbf{(3)}$$

Los puntos D y E pertenecen a la parábola, por lo tanto verifican su ecuación. Si reemplazamos las coordenadas de dichos puntos en la ecuación (1), obtenemos dos ecuaciones, de las cuales se puede calcular el valor de 4p.

Reemplazando D= (3,5) en (1):

$$(5-k)^2 = 4p\left(3-\frac{2}{3}k\right) \qquad \textbf{(4)}$$

Resultando:

$$4p = \frac{(5-k)^2}{\left(3-\frac{2}{3}k\right)} \qquad \textbf{(5)}$$

Reemplazando E= (6,-1) en (1):

$$(-1-k)^2 = 4p\left(6-\frac{2}{3}k\right) \qquad \textbf{(6)}$$

Se obtiene:

$$4p = \frac{(-1-k)^2}{\left(6-\frac{2}{3}k\right)} \qquad \textbf{(7)}$$

Igualando los lados derechos de (5) y (7), tenemos:

$$\frac{(5-k)^2}{\left(3-\frac{2}{3}k\right)} = \frac{(-1-k)^2}{\left(6-\frac{2}{3}k\right)} \qquad \textbf{(8)}$$

Operando llegamos a:

$$11k^2 - 82k + 147 = 0 \qquad \textbf{(9)}$$

Las soluciones son:

$$k_1 = \frac{49}{11} \qquad \textbf{(10)}$$

$$k = 3 \qquad \textbf{(11)}$$

Los valores de h correspondientes son:

$$h_1 = \frac{98}{33} \qquad \textbf{(12)}$$

$$h_2 = 2 \qquad \textbf{(13)}$$

El vértice de la parábola 1 es:

$$V_1 = \left(\frac{98}{33}, \frac{9}{11}\right) \qquad \textbf{(14)}$$

El vértice de la parábola 2 es:

$$V_2 = (2,3) \qquad \textbf{(15)}$$

Con los valores de h y de k para dos vértices distintos, se puede calcular el valor de 4p.

$$4p_1 = \frac{108}{11} \quad \textbf{(16)}$$

$$4p_2 = 4 \quad \textbf{(17)}$$

Hay dos soluciones. La ecuación de la parábola 1 es:

$$\left(y - \frac{49}{11}\right)^2 = \frac{108}{11}\left(x - \frac{982}{33}\right) \quad \textbf{(18)}$$

La ecuación de la parábola 2 es:

$$(y-3)^2 = 4(x-2) \quad \textbf{(19)}$$

Una vez obtenidas las ecuaciones de las parábolas, procedemos a la determinación de los elementos de cada una de ellas.

Parámetro p para la parábola 1:

$$p = \frac{27}{11} \quad \textbf{(20)}$$

Parámetro p para la parábola 2:

$$p = 1 \quad \textbf{(21)}$$

El vértice y el foco están situados sobre el eje de simetría, y este es paralelo al eje x, entonces la ordenada del foco es la misma que la del vértice. Si el vértice está a una distancia p del foco, entonces sumamos (se suma porque la orientación de la parábola es cóncava positiva)a la coordenada h del vértice esta distancia para obtener la abscisa del foco:

$$F = (h + p, k) \quad \textbf{(22)}$$

Luego, el foco para la parábola 1:

$$F_1 = \left(\frac{179}{33}, \frac{49}{11}\right) \quad \textbf{(23)}$$

El foco para la parábola 2:

$$F_2 = (3.3) \quad \textbf{(24)}$$

Como la directriz es una recta que corta al eje de la parábola perpendicularmente y está a una distancia p del vértice, entonces tomamos la siguiente fórmula:

$$x = h - p \quad \textbf{(25)}$$

Ecuación de la directriz para la parábola 1:

$$x = \frac{17}{33} \quad \textbf{(26)}$$

Ecuación de la directriz para la parábola 2:

$$x = 1 \quad \textbf{(27)}$$

El eje de simetría es una recta que pasa por el vértice y es perpendicular a la directriz. Siendo para la parábola 1:

$$x = \frac{49}{11} \quad \textbf{(28)}$$

Eje de simetría para la parábola 2:

$$y = 3 \quad \textbf{(29)}$$

A continuación en la Fig. 1 se muestra la representación o vista geométrica de las parábolas obtenidas, sus elementos (vértices, focos,directrices, ejes de simetría) y la verificación de la parábola como lugar geométrico.

Asimismo, se aprecia también la vista algebraica (ecuaciones, distancias y puntos) de los resultados obtenidos en el mismo inciso. Ambas gráficas fueron extraídas de las diferentes visualizaciones para los objetos geométricos que presenta el Geogebra.

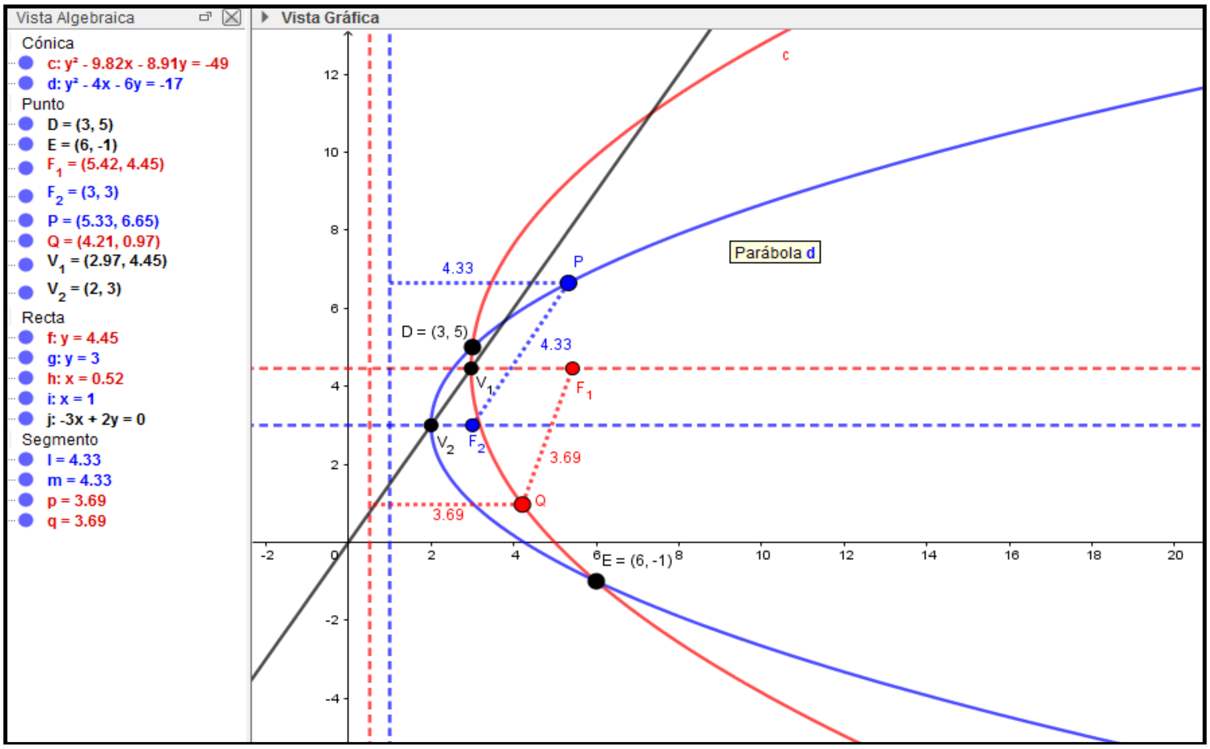


Fig. 1. Vista algebraica y vista geométrica de la actividad 2 obtenida con Geogebra.

4.5 Resolución de Actividad N° 3

Se abordará la resolución de esta actividad desde dos marcos distintos, que son los empleados en las asignaturas ALGA y AMI, y se trabajará con la misma ecuación general de segundo grado en ambos casos.

- Estudio de la parábola en la asignatura ALGA:

Se realiza el estudio completo de la siguiente ecuación general de segundo grado en dos variables, cuya representación es una parábola, tal y como se lleva a cabo en la asignatura ALGA:

$$x^2 - 12x - 6y + 18 = 0 \quad \textbf{(30)}$$

Se observa que existe un término en x^2, por lo que la parábola tiene un eje de simetría vertical. Se quiere expresar la ecuación en su forma canónica, como se muestra a continuación:

$$(x-h)^2 = 4p(y-k) \qquad \textbf{(31)}$$

Esto se consigue completando cuadrados en la ecuación (30), obteniéndose la ecuación normal o canónica de la parábola con vértice (h, k):

$$(x-6)^2 = 6(y+3) \qquad \textbf{(32)}$$

Procedemos ahora a la determinación de los elementos de esta parábola vertical, cuyo vértice está desplazado del origen de coordenadas:

Coordenadas del vértice (h, k):

$$V = (6,-3) \qquad \textbf{(33)}$$

Concavidad positiva, ya que 4p es positivo:

$$p = \frac{3}{2} \qquad \textbf{(34)}$$

Coordenadas del foco (h, k + p):

$$F = \left(6,-\frac{3}{2}\right) \qquad \textbf{(35)}$$

Longitud del lado recto |4p|:

$$LR = 6 \qquad \textbf{(36)}$$

Ecuación de la directriz y = k – p:

$$y = -\frac{9}{2} \qquad \textbf{(37)}$$

Eje de simetría x = h:

$$x = 6 \qquad \textbf{(38)}$$

Como la parábola está desplazada del origen de coordenadas, se realiza la traslación de los ejes en (32):

$$s = x-6 \qquad \textbf{(39)}$$

$$t = y+3 \qquad \textbf{(40)}$$

Obtenemos así la ecuación normal o canónica de la parábola con vértice (0,0) en los nuevos ejes s y t:

$$s^2 = 6t \qquad \textbf{(41)}$$

La Fig. 2 muestra la gráfica de la parábola obtenida y sus elementos (vértice, foco, lado recto,eje de simetría y directriz), como así también la ubicación de los nuevos ejes s y t. Se observan las dos vistas, gráfica y algebraica, que se obtienen de las visualizaciones para los objetos geométricos que presenta el Geogebra.

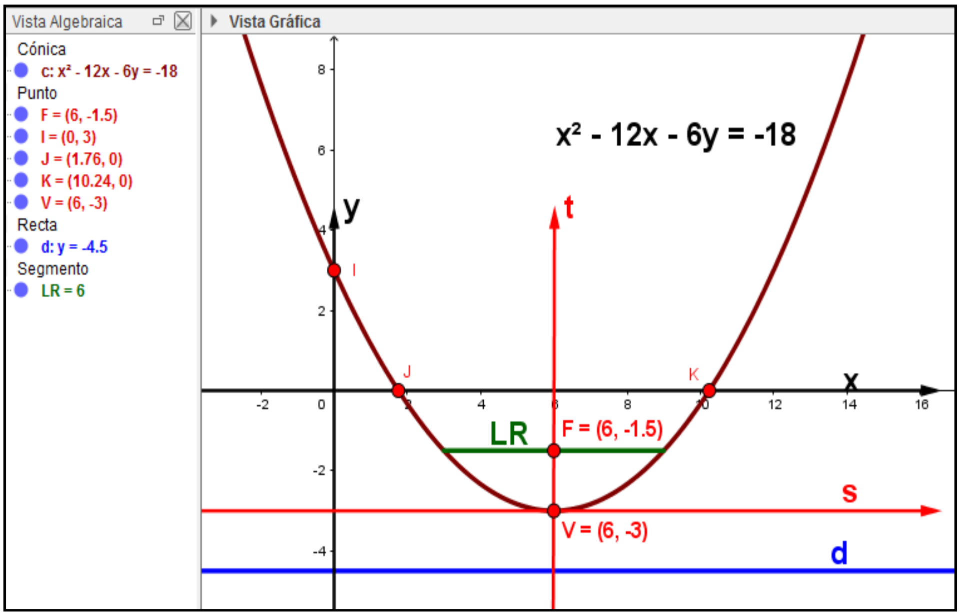


Fig. 2. Vista algebraica y vista geométrica de la actividad 3, obtenidas con Geogebra.

- Estudio de la parábola en la asignatura AMI:

En esta asignatura, se da un enfoque distinto al estudio de una ecuación general de segundo grado en dos variables, ya que se analiza desde el punto de vista de una función cuadrática. Para poder realizar una comparación con el análisis anterior, tomaremos el mismo ejemplo para su estudio. En este caso la consigna dada sería:

Realizar el estudio completo de la siguiente función cuadrática y graficarla:

$$x^2 - 12x - 6y + 18 = 0 \qquad \textbf{(42)}$$

Para ello se la lleva a la forma de una función polinómica de segundo grado, como se muestra a continuación:

$$y = ax^2 + bx + c \qquad \textbf{(43)}$$

Donde a, b y c son números reales y el coeficiente principal "a" es no nulo. Por lo tanto, reacomodando (42), queda la función cuadrática de segundo grado:

$$y = \frac{1}{6}x^2 - 2x + 3 \qquad \textbf{(44)}$$

La gráfica de la función cuadrática es una parábola, en este caso vertical porque la variable lineal indica que el eje de simetría de la parábola es paralelo al eje coordenado "y". La concavidad de la parábola depende del signo del coeficiente principal, como "a" es positivo, entonces la concavidad será positiva.

Se determina el dominio de la función, que por tratarse de una cuadrática, abarca todos los números reales, siendo Df = R.

Intersecciones con el eje x: se calculan haciendo y = 0 en (44), por lo que queda la siguiente ecuación cuadrática:

$$\frac{1}{6}x^2 - 2x + 3 = 0 \qquad \textbf{(45)}$$

Las soluciones se encuentran usando la fórmula de la resolvente, obteniéndose los siguientes puntos de intersección con el eje de las abscisas: (1.76, 0) y (10.24, 0).

Intersección con el eje y: se calcula haciendo x = 0 en (44), obteniéndose el punto (0, 3).
Forma canónica de la parábola vertical de vértice (h, k):

$$(x-h)^2 = \frac{1}{a}(y-k) \qquad \textbf{(46)}$$

Esto se consigue completando cuadrados en (44), obteniéndose:

$$(x-6)^2 = 6(y+3) \qquad \textbf{(47)}$$

Donde se puede identificar el vértice de la parábola (h, k):

$$V = (6,-3) \qquad \textbf{(48)}$$

Como el coeficiente principal "a" es positivo, por lo tanto la parábola presenta un mínimo en dicho vértice.

El eje de simetría de la parábola vertical es la recta paralela al eje y, que pasa por el vértice, siendo su ecuación:

$$x = 6 \qquad \textbf{(49)}$$

Intervalos de crecimiento y decrecimiento: como el coeficiente "a" es positivo, la función cuadrática crece en el intervalo $[h,\infty)$ y decrece en el intervalo $(-\infty, h]$, como se muestra a continuación:

Intervalo de crecimiento Ic:

$$Ic = [6,\infty) \qquad \textbf{(50)}$$

Intervalo de decrecimiento Id:

$$Id = (-\infty, 6] \qquad \textbf{(51)}$$

Como "a" es positivo, la imagen de la función cuadrática será $Im = [k,\infty)$, resultando:

$$Im = [-3,\infty) \qquad \textbf{(52)}$$

Al realizar la gráfica de la función cuadrática teniendo en cuenta la información obtenida en este estudio, se obtiene la parábola de la Fig. 2 presentada anteriormente, lo cual es lógico pues se trata de la misma ecuación general de segundo grado en ambos casos planteados, uno analizado desde el punto de vista de una cónica, y el otro desde el punto de vista de una función cuadrática.

5 Conclusiones y trabajos futuros

Es política de la Facultad, además de ser una recomendación de los actuales procesos de acreditación, favorecer la articulaciónhorizontal y vertical entre las asignaturas de la carrera según lo establecido en el Convenio de Articulación de las Universidades Nacionales del NOA, para el CICLO COMÚN ARTICULADO (CCA), aprobado por el Consejo Directivo, mediante Resolución Nº 693/04 y por el Consejo Superior mediante Resolución Nº 701/04, por lo que consideramos que este tipo de actividades son un pequeño aporte en ese sentido.

Además de alentar a los estudiantes a utilizar el software de geometría dinámica Geogebra con el fin de validar procedimientos y resultados; ambas asignaturas lo incorporan en sus clases (tanto teóricas como prácticas) y en la plataforma Moodle, mediante la inclusión de actividades que contribuyen a reforzar y reflexionar sobre los contenidos, como así también obtener la visualización gráfica del problema, la elaboración de conjeturas y la verificación de resultados de la situación problemática. Todo ello con el objetivo de lograr un aprendizaje significativo de la matemática.

En particular la articulación del tema parábola se considera importante porque la experiencia de años como docentes de ambas asignaturas, nos muestra que los estudiantes hablan de la parábola de Álgebra y de la parábola de Análisis, como si fueran distintas.

Se debe continuar trabajando para quelos alumnos integren conceptos de ALGA y AMI, e incorporen las herramientas tecnológicas disponibles para una mejor comprensión de los temas estudiados.

Las actividades a realizar en un futuro próximo son:

- Elaborar actividades de articulación, horizontal y vertical con las demás asignaturas del ciclo básico.
- Trabajar con los estudiantes en la comprensión de consignas y textos.
- Ampliar la bibliografía de consulta, elaborar cartillas sobre el uso básico del soft y dictado de talleres sobre las aplicaciones del Geogebra en las distintas asignaturas.
- Extender paulatinamente el empleo de Geogebra a otros temas comunes entre dos asignaturas de primer año de ingeniería.

Referencias

1. Nakos, G.; Joyner, D.: *Álgebra con aplicaciones*. Ed. Thomson (1999)
2. Sánchez Rosal, A.: Incorporación de las TIC en el aprendizaje de la matemática en el sector universitario. *Revista de Educación Matemática*. Unión Matemática Argentina, Vol. 27, Nº 3, pp. 23-38 (2012)
3. Acosta Gempeler, M. E.: Geometría experimental con Cabri: una nueva praxeología matemática. *Revista Educación Matemática*. Vol.3, Nº 27, pp. 121-140 (2005)
4. Bifano, F.; Lupinacci, L.: Misión posible, ¿una construcción imposible? Ferragina (Ed): *GeoGebra entra al aula de Matemática*, Capítulo 3, p. 46. Ediciones Espartaco (2012)
5. Ramírez Toledo, A.: El Constructivismo Pedagógico. *Educarchile*. http://ww2.educarchile.cl/UserFiles/P0001/File/El%Constructivismo/%20Pedag%C3B3gico.pdf. (2012).Accedido el 7 de diciembre de 2017.
6. Sánchez Rosal, A.: Incorporación de las TIC en el aprendizaje de la matemática en el sector universitario. *Revista de Educación Matemática.* Unión Matemática Argentina, Vol. 27, Nº 3, pp. 23-38 (2012)
7. Orozco Rodríguez, C.: Objetos de Aprendizaje con eXeLearning y GeoGebra para la definición y representación geométrica de operaciones con vectores y sus aplicaciones (tesis doctoral).*GRIAL repository*. http://repositorio.grial.eu/handle/grial/772 (2017). Accedido el 20 de marzo de 2018.

Funciones trigonométricas, periódicas y oscilatorias: una propuesta de trabajo interdisciplinario

Trípoli, M.[1], Torroba, P.[2], Devece, E. [2] y Aquilano, L.[2]
[1] Departamento de Ciencias Básicas, Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de La Plata
1 y 47, La Plata, Buenos Aires, Argentina
mercedes.tripoli@gmail.com,
[2] IMApEC, Departamento de Ciencias Básicas, Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de La Plata
1 y 47, La Plata, Buenos Aires, Argentina
patricia.torroba@gmail.com, eudvc@gmail.com, luu.aquilano@gmail.com

Resumen. En este trabajo se relata la primera implementación de una propuesta interdisciplinaria que consistió en una actividad de articulación en la cual se relacionaron las funciones trigonométricas seno y coseno con el movimiento armónico simple. La actividad mencionada estuvo dirigida a estudiantes de primer año de ingeniería y se llevó a cabo en un aula de matemática con docentes de distintas disciplinas. En la propuesta se trabajó con la construcción de las gráficas de las funciones seno y coseno a partir de la circunferencia unidad, apoyándose del software GeoGebra. Además, se relacionaron las constantes asociadas a dichas funciones con las características de un sistema físico masa-resorte y un péndulo simple, que realizan un movimiento armónico simple, mediante una actividad experimental con uso de elementos tradicionales combinados con TIC. De la evaluación de la experiencia se puede concluir que a los estudiantes les resultó motivadora para el estudio de la matemática.

Palabras Clave: Funciones trigonométricas, Movimiento Armónico Simple, Articulación, Trabajo interdisciplinario, Estrategias de enseñanza.

1 Introducción

Como parte de un conjunto de estrategias didácticas de enseñanza en las cuales se trabaja diseñando actividades de articulación entre matemática y física que favorezcan la apropiación del conocimiento por parte de los estudiantes, es que se presenta la implementación de una propuesta de articulación entre las disciplinas mencionadas. Dicha propuesta se enmarca en el Proyecto de Investigación y Desarrollo Acreditado de la Universidad Nacional de La Plata (UNLP): “Articulación en la enseñanza de las Ciencias Básicas en carreras de Ingeniería”, integrado por docentes de la Facultad de Ingeniería (FI) de la UNLP. La investigación que se viene llevando a cabo, que ha derivado en actividades de articulación, ha sido evaluada y se han obtenido resultados favorables, motivando de esta manera dar continuidad a las mismas y a su vez profundizar en su impacto a largo plazo [1], [2], [3] y [4].

La formación en las ciencias básicas, en particular en matemática y física, constituye los cimientos sobre los cuales se espera que los estudiantes de ingeniería construyan los saberes específicos; es por ello que una sólida formación conceptual es necesaria como parte del sustento de estas disciplinas. Como aporte a esta formación, se proponen e implementan actividades de articulación para los alumnos que están cursando una asignatura de matemática, con el objetivo de mostrarles su relación con otras áreas, presentarles alguna aplicación a situaciones de la vida diaria, ayudarlos en la vinculación de los conceptos involucrados, así como de las notaciones y lenguajes de las distintas disciplinas y generar en el estudiante interés por el estudio de la matemática. Los profesores que son autores de este trabajo que se han formado en distintas áreas como matemática, física e ingeniería, así como la alumna avanzada de ingeniería química que también es autora, además proponen un trabajo interdisciplinario, desde el diseño de las actividades hasta la realización de la misma en el aula junto con los estudiantes. La interdisciplinariedad es un aspecto básico de la actitud humana, fundamental para alcanzar el propósito esencial de la educación, implica una transformación profunda en los métodos de enseñanza y requiere de un cambio de actitud y de las relaciones entre los docentes y, entre estos y los estudiantes.

En este trabajo se relata la primera implementación de una propuesta de articulación en la cual se vinculan algunos aspectos de las funciones trigonométricas seno y coseno con el movimiento armónico simple (MAS). Tiene como objetivo motivar al alumno para estudiar matemática, trasmitirle que es una herramienta imprescindible en su formación profesional y mostrarle alguna aplicación que tienen las funciones trigonométricas en situaciones reales concretas. Dicha propuesta consistió en una actividad que se llevó a cabo en una clase de Matemática A, asignatura que cursan todos los estudiantes que ingresan a la FI. La actividad se realizó de manera interdisciplinaria entre docentes de distintas áreas. Se presentan algunos resultados de la implementación y se reflexiona sobre una nueva implementación de acuerdo a los resultados obtenidos.

2 Algunos fundamentos teóricos

Al realizar el diseño de la propuesta se tuvo en cuenta que los alumnos aún no poseen la competencia necesaria para articular por si solos los conocimientos previos y los nuevos que van incorporando por ser de primer año, siendo necesaria la colaboración del docente para que puedan llevar a cabo dicho proceso [3].

Los aspectos teóricos que fundamentan este trabajo fueron considerados al pensar la propuesta de articulación, la cual fue presentada en el 1er. Congreso Latinoamericano de Ingeniería, CLADI [5]. Como fuera mencionado, se considera la teoría cognitiva del aprendizaje significativo, que es donde se enmarcan las investigaciones que los autores vienen realizando. "Las teorías cognitivas del aprendizaje sostienen la idea de combinar la información previa con la nueva para arribar a una comprensión más profunda. La teoría de la asimilación de Ausubel incorpora la noción del conocimiento a priori como fundamento del aprendizaje y propone que el aprendizaje significativo requiere la activación del conocimiento de estructuras existentes durante o después del estudio. Además, Ausubel destaca que para que se produzca aprendizaje significativo, el aprendiz debe querer aprender. Una forma de propiciar el aprendizaje y en forma significativa, es atender a lo expresado por Moreira que sugiere crear situaciones de enseñanza en el aula que motiven el aprendizaje" [5], [6], [7] y [8].

Asimismo, se consideró lo que sostiene Santaló [9] con respecto a la enseñanza de la matemática para no matemáticos, así como lo que sustentan Mendible y Ortiz [10]: …como sostiene Santaló, cuando se imparte matemática para aquellas profesiones en que ésta no es un fin sino un medio para su mejor ejercicio, "hay que simplificar los detalles técnicos, que deben dejarse para los matemáticos profesionales, y procurar que los resultados, asegurada su validez por estos últimos, lleguen a hacerse intuitivos y comprensibles para quienes lo necesiten". Quienes necesiten la matemática por sus aplicaciones "basta que tengan de ellas una comprensión intuitiva que les permita ver claro en qué casos y de qué manera puede aplicarse". Es necesario que se contemplen ejercicios, problemas, actividades, etc. que acerquen al estudiante, en la medida de que los conocimientos de matemática lo permitan, a aplicaciones de la vida diaria. Como sostienen Mendible y Ortiz, no debe caerse en un docente que tienda "a trasmitir una matemática, con cálculos ilustrados por lo general en los ejemplos descritos en los libros de texto, con la satisfacción ofrecida al estudiante, de conocer el método, aun cuando no haya elaborado un camino que pueda ensayar por su cuenta", alejando al alumno de la realidad profesional que enfrentará en el futuro, "…apartándolo de posibles herramientas cognitivas, mentales, operativas y creativas de solución".[5]

Conjuntamente con los aspectos considerados, cabe destacar la importancia de trabajar en forma interdisciplinaria como una propuesta de mejorar el proceso de enseñanza y aprendizaje. Actualmente, el desarrollo del conocimiento científico y la innovación tecnológica se llevan a cabo mediante la intervención de equipos de trabajo interdisciplinarios. En este nuevo contexto mundial, el abordaje interdisciplinario de los contenidos académicos se ha convertido en una necesidad, de lo contrario los estudiantes no estarán preparados para desenvolverse en un mundo que es cada vez más complejo e interconectado.

La interdisciplinariedad puede verse como una estrategia pedagógica que implica la interacción de varias disciplinas, entendida como el diálogo y la colaboración de éstas para lograr la meta de un nuevo conocimiento [11]. Por otra parte, es un nivel de integración disciplinar en el cual la cooperación entre disciplinas conlleva interacciones reales; es decir, reciprocidad en los intercambios y, por lo tanto, un enriquecimiento mutuo. Es así que se logra una transformación de conceptos, metodologías de investigación y de enseñanza. A su vez, implica la preparación de marcos conceptuales más generales, en donde las diferentes disciplinas en contacto, son a la vez modificadas y pasan a depender unas de otras [12].

En el proceso de enseñanza y aprendizaje de la matemática y la física, la interdisciplinariedad es un elemento esencial, por cuanto está implícita en las propias disciplinas, razón por la cual requiere de un conocimiento profundo de ambas y sus nexos.

Al enseñar la matemática vinculándola con la física, es esperable que haya incremento de la efectividad de su enseñanza tanto en términos cuantitativos como cualitativos, ya que, si hay algo que ha quedado sobradamente demostrado es que un contenido sólo puede ser aprendido eficazmente cuando quien se enfrenta a él tiene claro el por qué y para qué de dicho contenido, es decir, cuando sea significativo y funcional.

Entre las ventajas de la aplicación del enfoque interdisciplinario en el aula se destaca el hecho de abordar y valorar puntos de vistas diferentes de un mismo contenido, sin perder de vista lo propio de cada disciplina.

3 Relato de la experiencia

La propuesta que se relata en este trabajo es la primera implementación de una actividad de articulación en donde se vincularon las funciones trigonométricas con el MAS; actividad que fue pensada y diseñada para llevar a cabo con estudiantes de ingeniería en el aula de matemática, por docentes de distintas disciplinas.

3.1 Objetivo de la propuesta

El objetivo general de la propuesta es motivar al alumno para estudiar matemática, trasmitirle que es una herramienta imprescindible en su formación profesional y mostrarle alguna aplicación que tienen las funciones trigonométricas en situaciones reales concretas.

Como objetivo específico, se pretende que el alumno, por un lado comprenda la definición de las funciones seno y coseno a partir de la circunferencia unidad y del ángulo en su posición normal y por el otro, que vincule las constantes que aparecen en estas funciones,

$$f(t) = Asen(Bt + C) + D \qquad \textbf{(1)}$$

con alguna interpretación física, relacionándolas con cierta aplicación a la ingeniería y visualice su utilidad en una situación física experimental con uso de TIC, de modo de lograr un aprendizaje significativo.

3.2 Marco contextual

La propuesta se llevó a cabo en el aula Matemática A, siendo las siguientes algunas de sus características: es la primera materia de conceptos matemáticos nuevos que cursan los alumnos que ingresan a la FI (previamente deben haber acreditado Matemática para Ingeniería, que se dicta en parte de los meses de enero y febrero y en la que se repasan algunos temas contemplados en los planes de estudio del nivel medio); el eje conceptual es la diferenciación, tanto en una como en varias variables; los alumnos (alrededor de 1000) se dividen en varias comisiones (16) en las cuales la metodología de trabajo es teórico-práctica; sus clases se conciben como espacios de actividad en las cuales todos participan, en donde se propone trabajar en forma grupal y de manera colaborativa entre los alumnos y entre éstos y sus docentes; se cuenta con un material de estudio teórico práctico, diseñado para trabajar de acuerdo a la metodología de enseñanza propuesta y cada equipo docente (de cada comisión) tiene la libertad de proponer en su comisión actividades adicionales que complementen la formación del alumno, teniendo en cuenta que estos son futuros ingenieros. Los docentes que diseñaron la actividad en conjunto con la profesora de matemática, cumplen tareas en Física I. En este caso, las clases tienen una modalidad similar a las de matemática: se trabaja en forma grupal realizando actividades teórico-prácticas-experimentales en el aula; las actividades de laboratorio se desarrollan, de acuerdo al aspecto temático a tratar, en el espacio áulico o en un laboratorio acondicionado para tal fin; se emplean elementos tradicionales y TIC; en las clases se incluyen mostraciones motivadoras que permiten predecir y posteriormente visualizar, de ser posible, el fenómeno a tratar y además, esta asignatura tiene como correlativa a Matemática A. [2]

Específicamente, la propuesta se realizó en una de las comisiones conformada por alumnos de las especialidades de Civil, Hidráulica, Industrial y Materiales.

Las funciones trigonométricas forman parte de la unidad 5 del programa analítico de Matemática A (puede verse en el link: https://www.ing.unlp.edu.ar/sitio/academica/asignaturas/asignatura.php?cod=F1301#analitico). La presentación de este tipo de funciones, también llamadas circulares, junto con las funciones exponencial y logaritmo, cierran el Módulo I (la materia se divide en dos módulos).

El movimiento armónico simple (MAS) se estudia en Física I en el marco de las Leyes de Newton, particularmente en el contexto de fuerzas que no son constantes, aproximadamente en la mitad del curso.

Se eligió articular sobre estos temas porque ambos tienen en común a las funciones trigonométricas. El MAS es uno de los movimientos idealizados más importante, pues constituye una buena aproximación a muchas de las oscilaciones que se dan en la naturaleza y es muy sencillo de describir matemáticamente [13]. Los conceptos involucrados en este tratamiento, resultan ser el primer nivel de entendimiento para otros sistemas más complejos que se expresan como combinación lineal del caso sencillo.

3.3 Implementación de la propuesta

La propuesta que se presenta, como ya se mencionó en párrafos anteriores, ya se había diseñado y se había presentado en el CLADI [2]. En este trabajo lo que se relata es la implementación de la misma, la cual fue pensada para ser desarrollada en tres etapas. La primera etapa de la actividad se realizó, de acuerdo a lo proyectado, en una clase de matemática, sólo con los docentes de Matemática A. Se dedicó la segunda mitad de la clase, las cuales son de cuatro horas. Tanto la segunda como la tercera etapa se llevaron a cabo en dos horas reloj, durante otra clase de matemática, pero con los docentes de ambas disciplinas trabajando en conjunto.

Primera etapa: para organizar la tarea en el aula, correspondiente a la primera etapa, se dividió la actividad en dos partes: primero se trabajó sobre la definición de seno y coseno a partir de la circunferencia unidad, y en una segunda parte sobre la manera en la cual las constantes involucradas en dichas funciones (de acuerdo a la Fórmula 1) influyen sobre sus gráficas (se nombra la función seno pero los alumnos pudieron observar que sucedía lo mismo con la función coseno).

Los estudiantes ya habían visto previamente, durante la asignatura Matemática para Ingeniería la definición de las funciones trigonométricas a partir de la circunferencia unidad. En el material de estudio de Matemática A se retoman estas definiciones y se presentan las gráficas de las funciones seno y coseno a partir de las mismas. Se señalan algunos puntos que están en la gráfica, por ejemplo del seno, y se proponen unir dichos puntos. Se extiende la gráfica a toda la recta real ya que previamente se demostró la periodicidad de esta función (el material de la cátedra se puede ver en el link: https://www.ing.unlp.edu.ar/catedras/F0301/).

Lo que se propuso en esta parte, fue trabajar con el software GeoGebra, en donde se puede visualizar de qué manera, teniendo la circunferencia unidad, se construyen las gráficas de las funciones seno y coseno. Se utilizó una construcción ya hecha que está en la web (https://www.geogebra.org/m/VynZaCx8) y se trabajó con un proyector intentando que los alumnos observen qué sucedía a medida que se modificaba el ángulo.

Una vez que ya se contaba con la gráfica de las funciones seno y coseno, se visualizó cómo influyen las constantes en las gráficas de las mismas. Se tomó nuevamente la función seno. Se utilizó el software GeoGebra, creando deslizadores y viendo qué sucedía con las gráficas a medida que éstos se modificaban. Se dejó fija la función $sen(t)$ para poder hacer una comparación. En la Fig. 1 se muestran dos casos a modo de ejemplo.

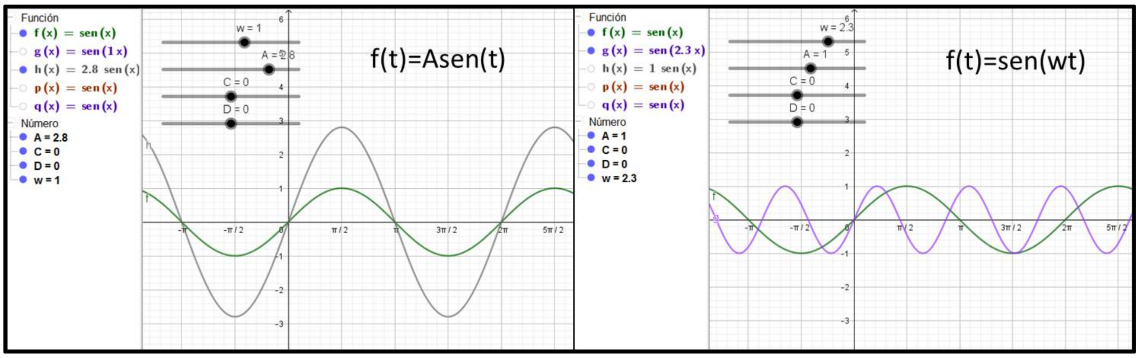


Fig 1. Dos casos de funciones propuestas y visualización con el GeoGebra, donde A y w son los deslizadores.

El material de la cátedra propone, en este caso, que los estudiantes trabajen con el software, aunque no teniendo en cuenta todas las constantes involucradas. Debido a la falta de tiempo, no se pudo dejar que los estudiantes trabajen en forma grupal y saquen conclusiones para luego hacer una puesta en común, sino que se trabajó directamente con el proyector. Una vez discutido de qué manera las constantes involucradas influyen en la gráfica de la función, se definió amplitud, período, frecuencia y desfasaje. Estas dos últimas no están definidas en el material de la cátedra pero era necesario para poder llevar a cabo la actividad experimental propuesta para la clase siguiente.

Es importante señalar que los conceptos planteados para desarrollar en esta primera etapa forman parte de los propuestos en el material de la cátedra (salvo algunos ya mencionados), pero lo que se consideró necesario era que todos los alumnos hayan pasado por esa parte del material al momento de la visita de los docentes de física, para poder compartir la experiencia que se iba a llevar a cabo. La aclaración es necesaria ya que en las clases de matemática, las intervenciones de los docentes dependen de la marcha del grupo: en un año puede haber más intervenciones, en otro más puestas en común grupales en las mesas, a veces las intervenciones se hace después de observar que la mayoría pudo trabajar sobre los temas y otras veces es necesario hacerlas previamente.

Segunda etapa: en esta etapa, de acuerdo a lo proyectado, los docentes de física concurrieron al aula de matemática para trabajar en forma conjunta con los docentes de matemática y con los estudiantes.

La profesora de física comenzó referenciando que la clase anterior los estudiantes habían trabajado sobre las funciones trigonométricas, en particular sobre las funciones seno y coseno. Durante la charla, mencionó que se iba a trabajar con los sistemas masa-resorte y con el péndulo simple (como los que muestran en la Fig. 2), introdujo el concepto de movimiento armónico simple, de manera cualitativa, con el objetivo que los estudiantes lo relacionaran con lo visto previamente en la clase de matemática, realizando los comentarios básicos para que los alumnos puedan entenderlo y necesarios para que puedan luego trabajar con una situación física concreta. Durante la charla, la docente de matemática intervino en distintos momentos con el objetivo de hacer el nexo entre la mirada que se le dio en la clase de matemática, con la terminología y notación usada en física.

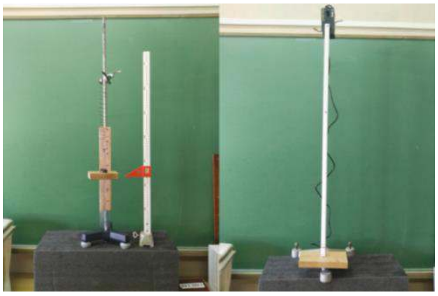


Fig. 2. Sistemas masa-resorte y el péndulo simple.

Con respecto al sistema masa-resorte, la profesora explicó que si apartamos el cuerpo de su posición de equilibrio o también llamada de reposo y luego lo liberamos, comienza el movimiento, que recibe el nombre de movimiento armónico simple (MAS). ¿Cuáles son las características de este movimiento? Observando, se ve que es oscilatorio (se mueve hacia un lado y hacia el otro de la posición de equilibrio) y es periódico (siendo un período el tiempo que tarda en realizar una oscilación completa). ¿Cuál será la función que indicará la posición del cuerpo, respecto de la posición de equilibrio, para todo tiempo t, considerando que tiene que tener las características del movimiento? Es decir, ¿qué funciones periódicas y oscilatorias conocen? En este momento los alumnos respondieron con senos y cosenos.

Se presentó la función seno involucrada, de acuerdo a la notación que verán en física:

$$x(t) = Asen(wt + \varphi_0) \qquad \textbf{(2)}$$

siendo $x(t)$ la posición del cuerpo respecto de la posición de equilibrio para cada t. Se buscó de esta manera que los alumnos comiencen a realizar vinculaciones entre notaciones.

Se caracterizan las constantes involucradas en este contexto:

- A se llama amplitud y es el mayor apartamiento de la posición de equilibrio.
- w es la frecuencia angular donde $w = 2\pi/T$ siendo T el período, que es el tiempo que tarda en volver a pasar por la misma posición.
- φ_0 es la fase inicial para $t = 0$. Juega el rol de C en la ecuación (1) cuando D=0. Es una constante que se necesita determinar para describir correctamente el movimiento. Da información de dónde está el cuerpo cuando se empieza a medir el tiempo.
- Se define a la frecuencia $f = 1/T$, y es el número de oscilaciones por unidad de tiempo.
- En un sistema masa-resorte, $w = \sqrt{k/m}$, donde k es la constante del resorte y tiene información de las características de éste y m la masa del cuerpo que cuelga (estos conceptos los van a justificar en Física I pero era necesario mencionarlos para realizar la experiencia).

Con respecto al péndulo simple, si bien parecen ser sistemas diferentes, su comportamiento es similar. Lo que se modifica en este caso es que la variable adecuada para describir la posición del cuerpo para todo tiempo es el ángulo que forma el hilo o la varilla con la vertical. En este caso,

$$\theta(t) = \theta_{max}sen(wt + \varphi_0) \qquad \textbf{(3)}$$

y $w = \sqrt{g/L}$, donde g es la aceleración de la gravedad y L la longitud del hilo o la varilla.

¿Cómo sabemos que ambas expresiones (Fórmulas 2 y 3) que contienen la función seno describen correctamente el comportamiento de ambos sistemas físicos?

El profesor, que es ingeniero, retomó la clase mencionando que en la cátedra de Física I cuentan con dispositivos llamados sensores de movimiento que replican el comportamiento de los murciélagos, así como con sensores de rotación. Utilizando este hecho, explicó el funcionamiento de los sistemas con los que se va a trabajar. Luego, apartó el cuerpo de la posición de equilibrio y midió con el sensor (con la ayuda de la estudiante avanzada de ingeniería que forma parte de esta actividad), obteniendo una función. Luego se ajustó la curva con una función seno y se visualizó que coinciden perfectamente. Por medio de este instrumento se pudo dar validez a las expresiones propuestas.

Una vez verificada que la función seno (por ejemplo, ya que podría ser coseno), modela la situación propuesta, se trabajó con los estudiantes de acuerdo a los siguientes interrogantes: ¿qué se haría para modificar la amplitud? y ¿cómo se podría modificar la frecuencia angular del sistema masa-resorte? Primero se trabajó sobre el sistema masa-resorte y luego con el péndulo simple. En cuanto a la amplitud, a los estudiantes les fue bastante natural responder. Sin embargo, con respecto a la frecuencia angular, se tuvo que intervenir más. Para el caso del sistema masa-resorte, a partir de la dependencia de la frecuencia con k y m, se propuso modificar la masa. En una primera instancia se agregó masa y se les preguntó si van a observar mayor o menor número de oscilaciones. Se trató de la misma manera la situación cuando se quita masa. En el caso del péndulo simple la forma de modificar la frecuencia es alargar o achicar la longitud de la varilla. Se preguntó nuevamente como esperarían observar el gráfico cuando se incluyan estos cambios. (Fig. 3)

Los alumnos en la clase anterior ya habían visto cómo influían los cambios de las constantes de la función en sus gráficas usando el GeoGebra, en esta clase lo que pudieron observar es cómo esos cambios influyen pero en una situación física concreta que la pueden relacionar con aspectos de la vida cotidiana.

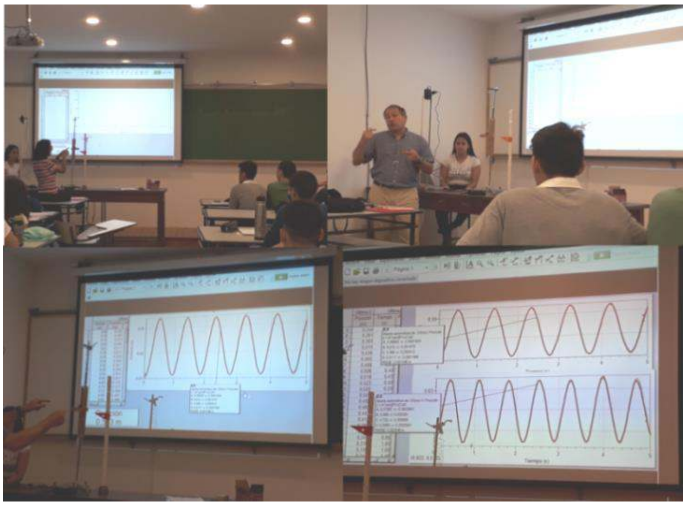


Fig. 3. Imágenes de la clase experimental.

Tercera etapa: Luego de las discusiones en torno a los sistemas masa-resorte y el péndulo simple, se les repartió a los estudiantes una actividad formada por cuatro ejercicios en donde se relacionaba lo visto en matemática con lo de la clase experimental. En las Fig. 4 y 5 se muestran los dos primeros ejercicios.

Los alumnos resolvieron la actividad en forma grupal, con la ayuda de los docentes que estaban en el aula, cuando era requerida por ellos. Antes de terminar la clase, la entregaron para poder ser corregida.

1. La siguiente gráfica representa la posición de un cuerpo que describe un movimiento armónico simple (MAS).

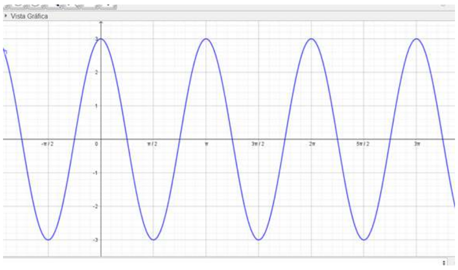


Fig. 4. Primeros dos ejercicios de la actividad presentada (primera parte).

Señala cuál de las siguientes funciones representa la gráfica de arriba, donde t se expresa en segundos y x en metros

$x = 3sen(2t + \pi)$ $b)\ x = 6sen(1/2\ t + \pi)$ $c)\ x = 3sen(2t + \pi/2)$ $d)\ x = 6sen(2t + \pi)$

Determina la amplitud, el período, la frecuencia y el desfasaje (o fase inicial) del movimiento correspondiente (indica las unidades de medida):

Amplitud: ………………………….
Período: ……………………………
Frecuencia: ………………………..
Desfasaje: …………………………

2. La ecuación de un MAS es x(t)= 2cos(10t), en la que x es el apartamiento de la posición de equilibrio, medido en centímetros (cm) y t el tiempo en segundos (s). Determina la amplitud, el período y la frecuencia de este movimiento.

Amplitud: ………………………….
Período: ……………………………
Frecuencia: ………………………..

Fig. 5. Primeros dos ejercicios de la actividad presentada (continuación).

También se les pidió a los estudiantes que contestaran una encuesta como otra manera de medir la experiencia, la cual se muestra en la figura siguiente (Fig. 6):

1. ¿Pudiste vincular las constantes de las funciones trigonométricas seno y coseno estudiadas en Matemática A con las magnitudes físicas presentadas en la experiencia desarrollada? SI NO

Si tu respuesta fue afirmativa, ¿considerás que la actividad experimental te sirvió para comprender dicha vinculación?

Si tu respuesta fue negativa, ¿qué motivo considerás que influyó para que no hayas podido realizar la vinculación?

2. ¿Pudiste resolver los ejercicios de la actividad propuesta? SI NO

Si tu respuesta fue negativa, ¿cuál considerás que fue el motivo?

Si tu respuesta fue afirmativa, ¿considerás que la experiencia desarrollada en forma experimental, contribuyó para que puedas resolverlos? SI NO

En ambos casos, justificá tu respuesta:

3. ¿Te parece importante que se brinden actividades en las que puedas vincular la matemática con situaciones experimentales?
SI NO

En ambos casos, justificá tu respuesta:

Fig. 6. Encuesta realizada a los estudiantes.

4 Resultados

Las tres etapas propuestas en la actividad se llevaron a cabo teniendo en cuenta lo proyectado oportunamente, pero con algunos cambios que no modificaron el objetivo planteado.

Con respecto a los ejercicios propuestos para que resuelvan en la tercera etapa, prácticamente el total de los estudiantes resolvieron los dos primeros ejercicios mostrando las mayores dificultades en la determinación de la frecuencia y desfasaje, como se muestra en la Fig. 7. Estos dos conceptos no forman parte del material de la cátedra, sin embargo se habían definido tanto en la primera como en la segunda etapa. Los alumnos no acostumbran a tomar apuntes por lo que podría ser una de las causas de que lo hayan contestado erróneamente, a pesar de que podían consultar a los docentes durante la resolución de los mismos. Algo a considerar es que aquellos estudiantes que contestaron mal, en su gran mayoría pusieron como respuesta el mismo valor, lo que podría deberse a que entendieron mal los conceptos.

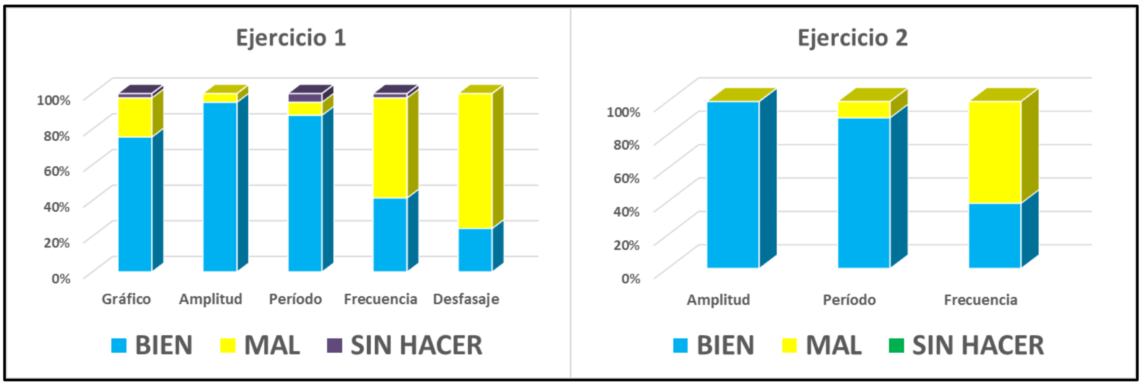


Fig. 7. Resultados de los ejercicios 1 y 2.

Es importante señalar que en el primer ejercicio se les pidió explícitamente a los estudiantes que indicaran las unidades con las que estaban trabajando (como se indica en la Fig. 5) y, sin embargo, el 78% no lo hicieron, como se puede observar en la Fig. 8. De los alumnos que consideraron las unidades, en general no tuvieron problemas con las correspondientes a la amplitud y el período, nuevamente cometieron errores en la frecuencia y el desfasaje, hasta incluso dejaron sin completar las unidades correspondientes a estos últimos conceptos. Teniendo en cuenta la importancia que tienen las unidades a lo largo de todos los temas que se estudian en las clases de física, debido a que ellas intervienen en el análisis de los resultados, es que se tomará en cuenta la manera de incorporarlas en las clases de matemática.

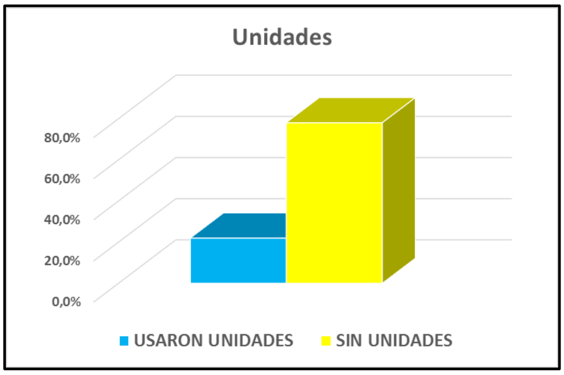


Fig. 8. Información sobre el uso de las unidades.

Con respecto al ejercicio 3, en el cual se les daban ciertos datos y debían construir la función que modela la situación planteada para poder responder una pregunta sobre la distancia a la que se encontraba un objeto de su posición inicial en un cierto instante, el 63% de los estudiantes determinó en forma correcta la ecuación sin embargo sólo el 31% no cometió errores al responder la pregunta específica. Se pudo observar que un número importante de los alumnos que respondieron en forma errónea, utilizaron la calculadora en sistema sexagesimal y no en el sistema radial, lo que permite inferir que entendían lo que debían hacer pero el error se debió a una dificultad externa a la situación. Un porcentaje bajo de alumnos, 4%, no resolvieron el ejercicio mientras un 13% determinaron mal la ecuación y no respondieron la pregunta de la consigna.

En cuanto al ejercicio 4, que se componía de 6 incisos, el 66% de los estudiantes no lo resolvieron. De aquellos que lo resolvieron, sólo el 25% contestaron todos los incisos. El hecho de que un número importante de alumnos no lo haya resuelto, muestra que el tiempo que se dispuso para hacer esta actividad no fue suficiente, incluso algunos estudiantes escribieron en sus hojas que no lo habían realizado porque se quedaron sin tiempo.

Esta falta de tiempo mencionada hizo que no se pudiera realizar la encuesta planteada para el final de la actividad, los alumnos la contestaron al iniciar la clase de matemática siguiente.

En cuanto a la encuesta, el 90,5% respondió que pudo vincular las constantes de las funciones trigonométricas con las magnitudes físicas asociadas y ese mismo porcentaje afirmó que esa asociación fue facilitada por la actividad experimental realizada, como se muestra en la parte izquierda de la Fig. 9. El 2,4% no pudo hacer la vinculación y el 7,1 % dejo la respuesta en blanco.

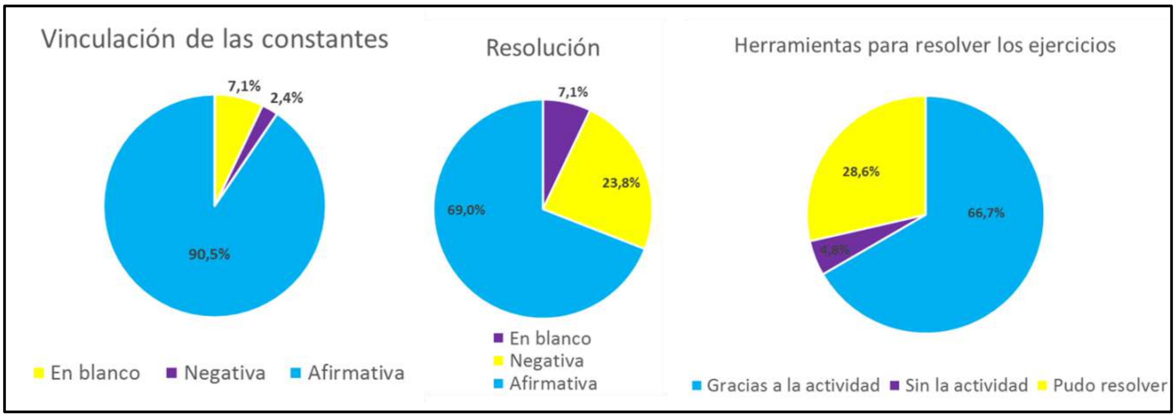


Fig. 9. Resultados de la preguntas 1 y 2 de la encuesta.

El 69,0% respondió que pudo resolver los ejercicios de la actividad realizada, el 23,8% no pudo resolverlos y el 7,1% dejó en blanco la respuesta, como se muestra en la parte central de la Fig. 9. De los alumnos que pudieron resolver los ejercicios propuestos, el 66,7% mencionó que fue porque colaboró la realización de la actividad experimental mientras que el 4,8% que no. El 28,6% dejó la respuesta en blanco.

De los resultados mencionados de la encuesta y de los ejercicios propuestos se observa que, a pesar que un alto porcentaje de los encuestados mencionan que pudieron relacionar las constantes involucradas en las funciones trigonométricas con las constantes físicas comprendidas en la actividad experimental asociada con el movimiento armónico simple, la respuesta de los ejercicios muestra que un porcentaje de estos alumnos realizaron dicha vinculación en forma incorrecta, en particular al determinar la frecuencia y el desfasaje. Los posibles motivos ya fueron expuestos. Además, pareciera que consideran que el hecho de resolver sólo algunos de los ejercicios propuestos vinculados al tema tratado (funciones trigonométricas- MAS), alcanza para decir que pudieron resolver los ejercicios de la actividad propuesta, como lo indica el resultados de la segunda pregunta de la encuesta. Esto puede deberse a que sólo uno de los cuatro ejercicios, el 4, es el que la mayoría dejó sin responder. Motivos también expuestos anteriormente.

En relación a realizar actividades en las que se pueda vincular la matemática con situaciones experimentales, tercera pregunta de la encuesta, el 88,1 % respondió que les parece importante, el 4,8 % respondió que no les pareció importante y el 7,1% dejó la respuesta en blanco.

Se transcriben, a continuación, algunos de los comentarios de los estudiantes que se consideraron más representativos relacionados con los puntos 2 y 3 de la encuesta: “la explicación me pareció muy clara y acompañada con el desarrollo experimental fue mucho más simple, ayudó a ver el tema de una manera aplicada y menos abstracta, nos ayuda para englobar todos los conceptos ya aprendidos, la visualización de los experimentos ayudó a recordar y entender las variables de la función seno, me ayudo a realizar los ejercicios y poder comprender de qué estábamos hablando, gracias a la experiencia realizada pude vincular conceptos e implementar nuevos para así llevar a cabo el desarrollo de los ejercicios, descubrimos que lo que estudiamos pasa en la realidad, demuestra que lo que estás estudiando verdaderamente va a ser útil, nos ayuda a entender por qué debemos estudiar matemática para desenvolvernos en el ámbito laboral, verla en forma experimental me sirvió para poder vincular las funciones trigonométricas en un caso de la vida cotidiana, para comprender más la utilidad práctica de la matemática y sus potenciales usos”.

5 Reflexiones finales

A partir de los resultados de las encuestas se puede observar que la realización de esta actividad de articulación favoreció el aprendizaje significativo en el tema de las funciones trigonométricas. El empleo de TIC resultó motivador, hizo de nexo entre constantes matemáticas abstractas y situaciones físicas concretas como lo es un sistema masa-resorte o un péndulo. Además, su uso permitió contrastar a tiempo real el resultado de las predicciones hechas por los estudiantes sobre el comportamiento de los sistemas físicos con las respuestas del modelo físico-matemático empleado.

Creemos que lograr una adecuada relación entre las diferentes miradas, física y matemática, influye en el consecuente incremento de la efectividad del proceso de enseñanza y aprendizaje, tanto en términos cuantitativos como cualitativos y al mismo tiempo exige una mayor preparación de los docentes involucrados. La propuesta interdisciplinaria requiere una necesaria coordinación entre los docentes de las diferentes asignaturas, de forma tal que se garantice la integración de los conocimientos y habilidades. Además, la conformación de un grupo docente interdisciplinario aporta las miradas desde cada disciplina, transmitiendo una visión global del tema.

Consideramos que es necesario crear condiciones en nuestras aulas que permitan llevar adelante este tipo de actividades en un número mayor de cursos. Para lograr este objetivo se debería generar un clima adecuado que disminuya la resistencia de algunos docentes a incorporar cambios en sus cursos. Estas modificaciones requieren por parte de los docentes cierta preparación y adaptación.

La implementación de esta experiencia indicó que sería conveniente dedicar mayor tiempo a la interacción individual de los docentes con los estudiantes en la resolución de los ejercicios para que pueda surgir más claramente en dónde estarían las dificultades en la comprensión del tema.

Un aspecto que debemos analizar es cómo y en qué instancia se deberían incorporar las unidades de medida básicas, en las clases de matemática. Este tema es abordado en la escuela secundaria y se podría recuperar en situaciones tratadas en matemática.

Cabe destacar que en estas actividades, cada disciplina conserva intacto su objeto y se acerca a la otra, en la medida en que encuentra algunos puntos de articulación que le permiten visualizar un mismo objeto, aunque en aspectos y desde enfoques siempre diferentes, ya que cada ciencia conserva su especificidad.

Referencias

1. Costa, V.; Torroba, P.; Devece, E.: Articulación en la enseñanza en carreras de ingeniería: el movimiento armónico simple y las ecuaciones diferenciales de segundo orden lineal. *Latin American Journal of Physics Education*, Vol. 7, Nº3, pp. 350-356 (2013).
2. Devece, E.; Di Domenicantonio, R.; Torroba, P.; Trípoli, M.: Experiencia de articulación entre Matemática A y Física I, *en Actas de las IV Jornadas de Enseñanza e Investigación Educativa en el campo de las Ciencias Exactas y Naturales Facultad de Humanidades y Ciencias de la Educación*. Facultad de Humanidades y Ciencias de la Educación. Universidad Nacional de La Plata (2015).
3. Torroba, P.; Devece, E.; Trípoli, M.; Aquilano, L.: Cinemática y el análisis de una función: una propuesta didáctica que articula contenidos de matemática y física. Revista de Enseñanza de la Física. Vol. 28, pp. 91-99: Número Extra: Selección de Trabajos presentados a SIEF (2016).
4. Torroba, P.; Trípoli, M.; Devece, E.; Aquilano, L.: Magnitudes vectoriales: una propuesta didáctica para articular matemática y física. *Revista de Enseñanza de la Física*. Vol. 29, pp. 305-313: Número Extra: Selección de Trabajos presentados a REF (2017).
5. Torroba, P.; Devece, E.; Trípoli, M.; Aquilano, L.: Funciones trigonométricas y el movimiento armónico simple. 1er Congreso Latinoamericano de Ingeniería (CLADI), Entre Ríos, Argentina (2017).
6. Torroba, P.; Costa, V.; Devece, E.: Conceptualización de temas enmarcados en la Mecánica Clásica, en Electromagnetismo y en Ecuaciones Diferenciales Ordinarias a partir de una experiencia de articulación en una clase de matemática en carreras de ingeniería. XI Conferencia Interamericana sobre Enseñanza de la Física. Guayaquil, Ecuador. (2013).
7. Ausubel, D.; Novak, J.; Hanesian, H.: Psicología educativa: un punto de vista cognoscitivo. Vol. 3. Trillas, México (1976).
8. Moreira, M.: Aprendizaje significativo. Un concepto subyacente. Actas del II Encuentro Internacional sobre Aprendizaje Significativo. Burgos, España (1997).
9. Santaló, L.: Matemática para no matemáticos. Parra, C.; Saiz, I.: Didáctica de Matemáticas. Aportes y reflexiones. Buenos Aires, Paidós (1994).
10. Mendible, A.; Ortiz, J.: Modelización Matemática en la Formación de Ingenieros. La Importancia del Contexto. Enseñanza de la Matemática. Vol. 12, pp. 133-150 (2007).
11. Van del Linde, G.: ¿Por qué es importante la interdisciplinariedad en la educación superior? Cuadernos de Pedagogía Universitaria. Año 4, No. 8, pp. 11-13, Pontificia Universidad Católica Madre y Maestra, Rep. Dominicana (2007).
12. Posada Álvarez, R.: Formación superior basada en competencias, interdisciplinariedad y trabajo autónomo del estudiante. Revista Iberoamericana de Educación. Vol. 35, N°1, pp. 1-33 (1994). Recuperado a partir de https://rieoei.org/RIE/article/view/2870
13. Alonso, M.; Finn, E.: Física. Addison-Wesley Iberoamericana, S. A., Wilmington, Delaware, EUA. (1995).

No transformar por transformar: una propuesta para resignificar transformaciones lineales

Paolini, Graciela[1,2], Cocilova, Ana Inés[1], Cornejo Endara, Rafael[1], Lusente, María Fernanda[1,2]
[1] GECGA-BB, Departamento de Matemática, Universidad Nacional del Sur
Av. Alem 1253. (8000) Bahía Blanca
{gpaolini, cocilova, rcornejo, mlusente}@uns.edu.ar,
[2] Departamento de Ciencias Básicas, Facultad Regional Bahía Blanca, Universidad Tecnológica Nacional
11 de Abril 461. (8000) Bahía Blanca

Resumen. En este artículo se presenta una secuencia que permite a los alumnos de Ingeniería la transferencia de contenidos del tema transformaciones lineales en el contexto de la asignatura Análisis Matemático II. La propuesta de enseñanza fue diseñada con el objetivo de fomentar el desarrollo de competencias deseables en la formación de un ingeniero y la articulación de distintos registros de representación semióticas de los objetos matemáticos. Uno de los medios que utilizamos para lograr esta meta es la incorporación de las TIC'S como facilitadoras de un aprendizaje significativo.

Palabras Clave: Transformaciones lineales, Articulación, Representación semiótica, TIC's, Competencias.

1 Introducción

El siguiente trabajo consiste en la socialización de una secuencia que será implementada en el transcurso del segundo cuatrimestre de 2018. La generación de la misma fue impulsada por la necesidad de lograr articulación entre las distintas asignaturas básicas de las carreras de Ingeniería. En este caso se vinculan contenidos de transformación lineal (Álgebra y Geometría) y cambio de variables (Análisis Matemático II).

Para la elaboración de la secuencia se tuvieron en cuenta, entre otros, los siguientes aspectos:

- Colaborar con el desarrollo de competencias del futuro ingeniero basados en los lineamientos que sugiere el CONFEDI [1].
- Fomentar el uso de las TIC'S como mediadoras de aprendizajes. Teniendo en cuenta que estos estudiantes están iniciando su proceso de formación elegimos el software GeoGebra para la realización de las actividades propuestas.

2 Contexto institucional

La primera aproximación que los alumnos de ingeniería tienen con los contenidos de Transformación lineal dentro de la Universidad Nacional del Sur se da en la asignatura Álgebra y Geometría. Tradicionalmente, el enfoque que se da en esta materia no hace énfasis en las representaciones geométricas, se priorizan las representaciones algebraicas y se hace un tratamiento aritmético del contenido. Al momento de resignificar estos contenidos en Análisis Matemático II, consideramos que la utilización de estas representaciones semióticas [2] se convierte en un obstáculo para los alumnos.

A pesar de que la definición de transformación lineal que se utiliza en nuestra institución es funcional, observamos que su tratamiento se reduce a un manejo aritmético a partir de las matrices asociadas, y en algunas cátedras se complementa con demostraciones meramente algebraicas de propiedades de las mismas.

Además, los ejercicios propuestos en algunas prácticas tienen una tendencia a generar desarrollos algorítmicos que estimulan la mecanización en el trabajo de los alumnos en desmedro de generar un aprendizaje significativo con potencialidad en la transferencia de este contenido en otros contextos [3].

Cabe mencionar que, al igual que en muchas otras universidades del país, en la Universidad Nacional del Sur existe la preocupación de generar las competencias sugeridas por el CONFEDI para los egresados de las carreras de ingeniería.

3 Motivaciones para el diseño de la secuencia

Tres aspectos principales motivaron el diseño de esta propuesta:

- Al igual que Mariana Maggio [4] consideramos que:
  El conocimiento es una construcción provisoria que se produce en un marco epistemológico que también lo es. En él se toma posición sobre cómo el conocimiento se construye, se valida, se interpela y se vuelve a construir. Cuando enseñamos sin ver o reconocer estos niveles de construcción del conocimiento, cuando enseñamos haciendo de cuenta que "el mundo es plano", nos alejamos de modo sistemático de las oportunidades que ofrece el pensamiento disciplinar que son, ni más ni menos, aquellas que otorgan las herramientas que permiten seguir construyendo conocimiento y, por ende, posiblemente las únicas que valga la pena enseñar. (p. 50).
- La cita anterior nos motivó a repensar nuestras prácticas docentes en términos de los requerimientos que el Consejo Federal de Decanos de Ingeniería propone como perfil de egreso del ingeniero argentino. Es decir desarrollar en los futuros ingenieros ciertas competencias que le son indispensables para el ejercicio de su profesión. Como parte de nuestro compromiso como docentes de materias básicas de las carreras de Ingeniería nos propusimos generar nuevas propuestas de enseñanza para colaborar en el desarrollo de algunas de esas competencias.
- Por otra parte, atendiendo a las implicancias didácticas de la Teoría de Representaciones Semióticas, nos es imperioso proponer a nuestros alumnos actividades que exijan, para un mismo objeto matemático, la coordinación de representaciones en diferentes registros semióticos. En este sentido, consideramos la potencialidad del software GeoGebra, puesto que posibilita la visualización de un mismo objeto matemático en diferentes vistas (algebraica, gráfica, tabular). Convirtiéndose así en un escenario propicio, para que los alumnos realicen exploraciones y sean capaces de construir relaciones que articulen y coordinen diferentes representaciones de un mismo objeto.

4 Análisis de la secuencia

A partir de la observación del contexto, se generó una secuencia de transformaciones lineales orientada a propiciar la articulación entre distintos registros de representación.

Como parte de la socialización de esta propuesta de enseñanza nos es imperativo explicitar los propósitos docentes y los objetivos de la misma, entendiendo que estos son los pilares que sustentan las actividades y las intervenciones docentes a partir de las cuales se efectivizará la implementación.

Como docentes perseguimos los siguientes propósitos:

- Promover la transferencia de contenidos.
- Favorecer los procesos metacognitivos en los alumnos, a través de la explicación por escrito de sus resoluciones.

Se espera que los alumnos logren:

- Interpretar geométricamente la noción de transformación lineal.
- Articular distintos registros de representación semióticos.
- Construir algunos significados geométricos relacionados con la noción de determinante de la matriz asociada a la transformación lineal.

Como medio para alcanzar estos propósitos y objetivos se les presentará a los alumnos la siguiente secuencia de actividades.

4.1 Descripción de la actividad 1

Objetivos

- Aprovechar la potencialidad del uso de GeoGebra como herramienta de exploración.
- Interpretar los efectos de una transformación lineal en términos geométricos.
- Resignificar contenidos de Álgebra y Geometría.

- Generar y validar conjeturas.
- Conceptualizar acerca de la interpretación geométrica del determinante de una matriz de orden 2.

Actividad 1 A partir de la exploración con el siguiente archivo de GeoGebra: 1. Estudiar si es posible hallar un paralelogramo tal que su transformado sea un cuadrado unitario. 2. Conjeturar si existe alguna relación entre las áreas de la imagen y la preimagen de la transformación.

La actividad consiste en que los alumnos realicen una exploración utilizando un archivo de GeoGebra suministrado por la cátedra. Con el fin de que esta actividad pueda ser capitalizada en el desarrollo de las otras tareas de la secuencia, se les propondrá a los alumnos que realicen un relevamiento de los datos observados.

Como podemos observar, en esta captura (Fig.1) se ve un paralelogramo ABCD en el sistema de referencia (O,XY) (vista gráfica 1) y su imagen, por medio de una transformación lineal en el sistema de referencia (O,VU) (vista gráfica 2).

La exploración a la que se hacemos referencia consistirá en modificar el paralelogramo dado en el sistema (O,XY) (correspondiente a la vista gráfica 1), y analizar el impacto de dichas modificaciones en la figura de la vista gráfica 2.

Consideramos importante aclarar algunas características del archivo suministrado ya que su carácter dinámico no se puede observar a partir de la captura de pantalla:

- Se optó por elegir los vértices B y D como puntos móviles, a fin de que los alumnos lleven adelante la exploración, mediante la acción de modificar el paralelogramo utilizando la herramienta *elige y mueve*.
- Las coordenadas de los puntos móviles B y D, pueden tomar cualquier valor real.
- La construcción que se realizó permite que para cualquier elección de los puntos B y D siempre se obtenga un paralelogramo. En caso que estén alineados ABCD se considera un paralelogramo degenerado.
- La vista gráfica 2 siempre mostrará un paralelogramo ya que la transformación a la que se somete la gráfica de la vista 1 es lineal.
- La transformación lineal a la que se somete el paralelogramo ABCD, no es visible para los alumnos.
- Tanto en la vista gráfica 1 como en la vista gráfica 2 el valor del área de cada uno de los paralelogramos involucrados se modifica automáticamente.

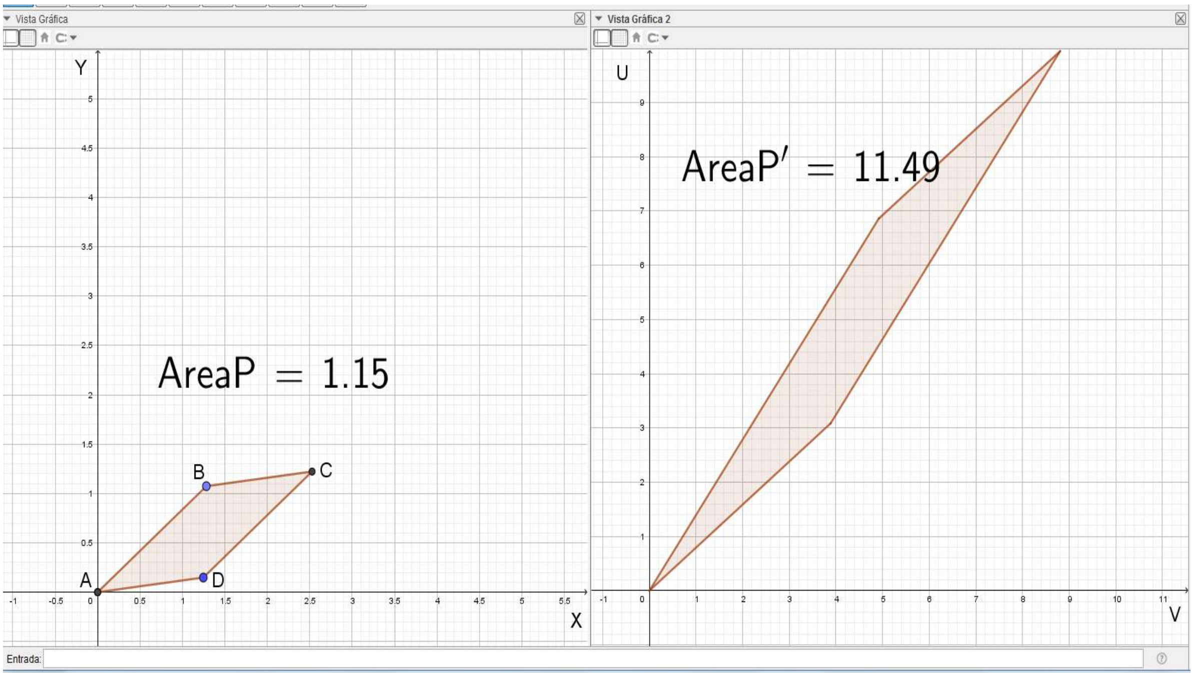


Fig. 1. Una captura de pantalla del archivo de GeoGebra correspondiente a la actividad 1.

4.2 Descripción de la actividad 2

Objetivos
- Aprovechar la potencialidad del uso de GeoGebra como herramienta de exploración.
- Interpretar los efectos de una transformación lineal en términos geométricos.
- Resignificar contenidos de Álgebra y Geometría.
- Generar y validar conjeturas.
- Conceptualizar acerca de la interpretación geométrica del determinante de una matriz de orden 2.
- Articulación entre los registros geométricos, gráficos y numéricos.

> Actividad 2
> 1. Explorar para qué matriz $[T]_C^{-1}$ la imagen del paralelogramo dado es un cuadrado unidad.
> 2. ¿Es única esa matriz? ¿Por qué?

Los alumnos trabajarán a partir de un archivo de GeoGebra elaborado por la cátedra. Al igual que en la actividad anterior se sugerirá a los alumnos que realicen un registro de los resultados.

Como podemos observar, en esta captura (Fig.2) se ve en la vista gráfica 1, un paralelogramo fijo en el sistema de referencia (O,XY) y una transformación lineal dada en forma matricial. En la vista gráfica 2 se ve el sistema de referencia (O,VU) y la imagen del paralelogramo de la vista gráfica 1 por medio de la transformación lineal elegida.

La exploración a la que se hacemos referencia consistirá en modificar los elementos de la matriz asociada a la transformación lineal indicada (Fig. 2), con el objetivo de obtener como imagen del paralelogramo dado un cuadrado unitario.

Consideramos importante aclarar algunas características del archivo suministrado ya que su carácter dinámico no se puede observar a partir de la captura de pantalla:
- Se decidió que la transformación sea variable en esta actividad como un medio para que los alumnos articulen las representaciones matriciales y gráficas.
- El paralelogramo dado en el sistema de referencia (O,XY) es fijo.
- La notación utilizada para la transformación guarda coherencia con la utilizada normalmente en la institución.
- Al cambiar cualquier elemento de la matriz de transformación se modifica automáticamente la vista gráfica 2.
- El campo de variación de los elementos de la matriz es el conjunto de los números reales.

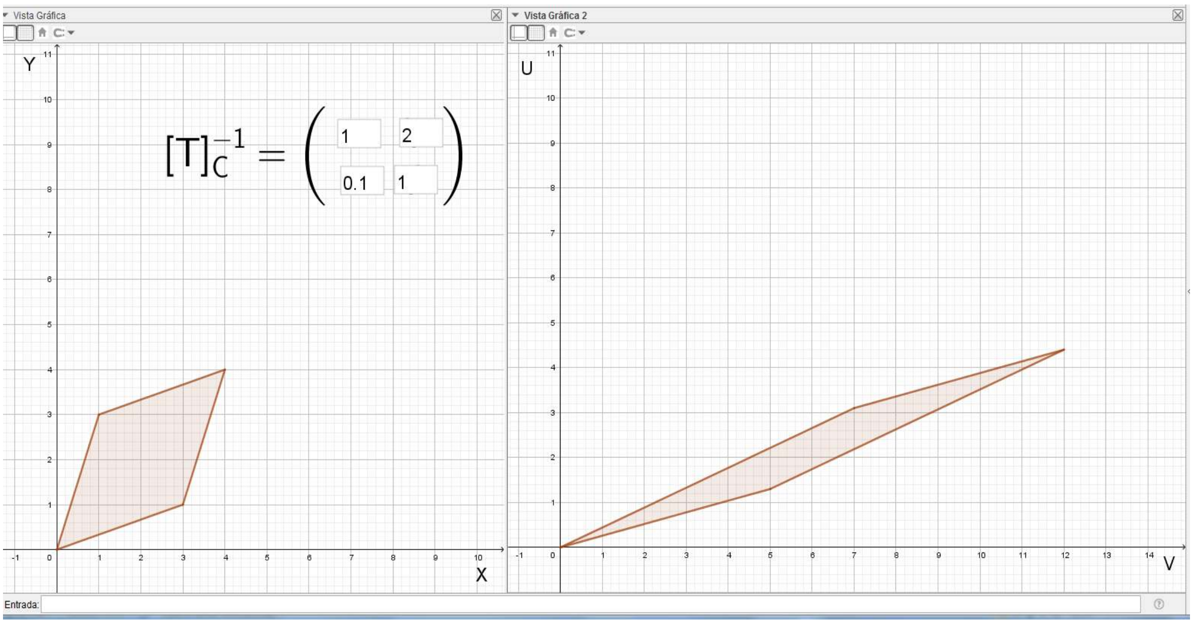


Fig.2. Captura de pantalla correspondiente a la actividad 2

4.3 Descripción de la actividad 3

La tarea de la actividad 3 busca favorecer que los alumnos realicen una transferencia de lo explorado, conjeturado y validado en las actividades anteriores.

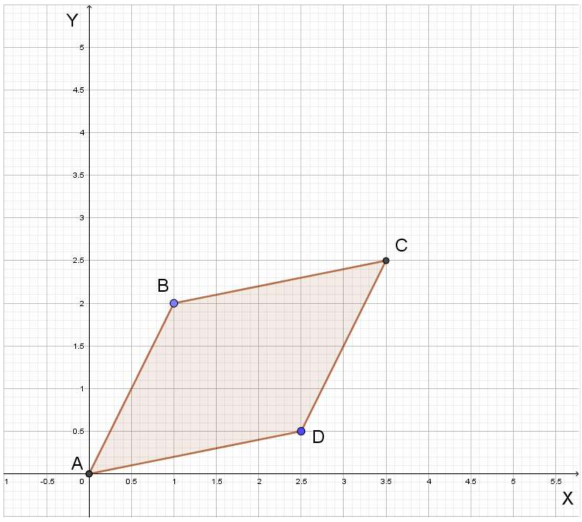
Consideramos que lo registrado en las actividades anteriores toma una mayor relevancia al momento de resolver esta actividad. El nivel de detalle que cada grupo alcanzó a partir de las actividades anteriores se constituiría en fortalezas o debilidades a la hora de enfrentar este desafío.

Objetivos

- Interpretar los efectos de una transformación lineal en términos geométricos.
- Resignificar contenidos de Álgebra y Geometría.
- Conceptualizar acerca de la interpretación geométrica del determinante de una matriz de orden 2.
- Articular los registros geométrico, gráfico, numérico y algebraico.
- Permitir la autoevaluación de los procesos de exploración que llevaron adelante cada grupo.

Actividad 3

Dado el paralelogramo ABCD, indicar por lo menos una transformación lineal que lo transforme en un cuadrado de área 25.



4.4 La gestión de la clase

Para el desarrollo de la secuencia propuesta se les propondrá a los alumnos que trabajen en pequeños grupos (no más de 6 integrantes cada uno). El tiempo estimado para la implementación de la misma es de 4 horas.

Cada actividad de la secuencia está pensada para ser realizada en dos momentos:

- Primer momento: Exploración y elaboración de conjeturas, en el grupo de trabajo.
- Segundo momento: Socialización al resto de la clase de las conjeturas que el grupo considere de mayor relevancia.

Como cierre de las actividades cada grupo deberá realizar un breve informe escrito en el que dejará constancia del trabajo realizado. Una característica importante de este informe es que en el mismo se deberán explicitar las validaciones de las conjeturas planteadas.

5 Comentarios finales

La propuesta de este recorrido pretende aprovechar la potencialidad del software GeoGebra como una herramienta que permite analizar una gran variedad de casos, para conjeturar sobre los efectos que tiene una transformación lineal sobre paralelogramos en $\mathbb{R}^2$.

Esta secuencia les permitirá a los alumnos la posibilidad de resignificar contenidos ya estudiados, fomentando un aprendizaje significativo que facilite la transferencia en otros contextos intra y extra matemáticos.

Además se pondrá énfasis en el significado del determinante de la matriz asociada a la transformación, con la intención de lograr que la extensión a cambios de variables no lineales sea más natural.

La secuencia, junto con su gestión, fue orientada al desarrollo de las siguientes competencias:

- Capacidad para identificar y formular problemas.
- Capacidad para realizar una búsqueda creativa de soluciones y seleccionar criteriosamente la alternativa más adecuada.
- Capacidad para implementar tecnológicamente una alternativa de solución.
- Capacidad para controlar y evaluar los propios enfoques y estrategias para abordar eficazmente la resolución de los problemas.
- Competencia para desempeñarse de manera efectiva en equipos de trabajo.
- Competencia para comunicarse con efectividad.

Referencias

1. Anónimo. Documentos de CONFEDI: *Competencias en Ingeniería*.(Eds): Universidad Fasta. Mar del Plata.pp.15-33 (2014).
2. Duval, R. Un tema crucial en la educación matemática: la habilidad para cambiar de registros de representación. *La gaceta de la RSME*. Vol 9, No 1, pp 143-168 (2006).
3. Perkins, D. *El Aprendizaje Pleno: Principios de la enseñanza para transformar la educación*. (Eds): Paidós. pp. 139-164(2016).
4. Maggio, M. *Enriquecer la enseñanza: Los ambientes con alta disposición tecnológica como oportunidad*. (Eds): Paidós. cap. 2 (2012).

La Integral de Superficie en el Contexto de la Ingeniería

Patricia Có[1], Alicia Matassa[1], Marisa Piraino[1], Mónica del Sastre[1], Dirce Braccilarghe[1]
[1]Departamento de Matemática, Escuela de Formación Básica, Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura, Universidad Nacional de Rosario, Av. Pellegrini 250, 2000 Rosario, Santa Fe, Argentina
{co, matassa, piraino, delsas, dirce}@fceia.unr.edu.ar

Resumen. En general, en nuestro sistema educativo, las prácticas áulicas se desentienden de la construcción del conocimiento, estableciéndose entonces un espacio donde los estudiantes escuchan pasivamente al profesor. Quedan así excluidos, docentes y estudiantes, de este proceso de construcción. A partir de la necesidad de superar esta situación, y con la intención de propiciar la resignificación del concepto de integral de superficie, propusimos a estudiantes de un curso de Cálculo III de las carreras de Ingeniería, un trabajo práctico grupal que contribuyera a agregar significado a una práctica usual de clase, favoreciendo la integración disciplinar de contenidos, la revisión de hechos históricos y la utilización de variados recursos tecnológicos. Mostramos en este trabajo síntesis de algunas producciones realizadas por los estudiantes y reflexionamos acerca de las mismas.

Palabras Clave: Integral de Superficie, Socioepistemología, Resignificación, Exclusión

1 Introducción

Es claramente observable en las aulas de la Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura (FCEIA) de la Universidad Nacional de Rosario (UNR) una actitud de todos los participantes (docentes, estudiantes, coordinadores de cátedra, elaboradores de planes de estudio, etc.) de separar las clases de "teoría" de las clases de "práctica" (destinadas a resolver ejercicios de aplicación de los temas vistos en "teoría"). Así mismo, la forma en que se encara el desarrollo de los temas casi invariablemente remite a una secuencia en la que se comienza por definir conceptos, enunciar teoremas, en algunos casos demostrarlos y finalmente aplicar mecánicamente los resultados a la resolución de ejercicios. De esta forma, las actividades puestas en juego se desentienden de la construcción del conocimiento; se establece un ámbito donde los estudiantes escuchan pasivamente a un docente que habla en el frente, la mayoría de las veces sobre una tarima y en un aula extremadamente grande con un numeroso grupo de alumnos. Quedan así, los estudiantes excluidos del proceso de construcción de conocimiento [1].

Por otro lado, vivimos en una sociedad identificada con la incertidumbre que provocan ciertos cambios de naturaleza compleja. Estos cambios han llevado a poner en alerta la práctica actual centrada en la transmisión de conocimiento e información, como también los roles del profesor como responsable de dicho proceso y del estudiante como receptor y luego reproductor de esa información. Si bien esta discusión se viene planteando desde hace más de veinte años [2], sigue sin considerarse el problema de la exclusión antes descripto que el propio sistema educativo provoca.

Desde nuestra posición de educadores creemos que, para hacer frente a los desafíos que estos cambios conllevan, la educación debería encaminarse hacia el desarrollo de capacidades y no tanto a la transmisión de conocimientos cerrados o la reproducción de técnicas. Todo esto reafirma nuestra idea de que el foco de los procesos educativos debe estar puesto en lograr que los estudiantes sean gestores de sus propios aprendizajes, disponiendo de herramientas que les permita este ejercicio continuo a lo largo de toda su vida.

La incorporación de la tecnología de la información y la comunicación (TIC) en la educación abre grandes expectativas y posibilidades para mejorar los procesos de enseñanza y de aprendizaje. Conocer diferentes recursos, sus posibilidades de uso y sus limitaciones es un paso muy importante para el diseño de material didáctico que tendrá, lógicamente, características distintas a las propuestas tradicionales de enseñanza. En consecuencia debemos pensar en propuestas de diseño flexible y de rediseño continuo debido a la permanente actualización de dispositivos y recursos, con reglas implícitas o explícitas definidas por cada grupo de participantes, donde el uso de la tecnología esté en función del contexto institucional, social y económico, de los conocimientos previos de los alumnos, sus inquietudes, actitudes, motivación. Nuestra prospectiva es diseñar actividades con las particularidades antes descriptas.

Las autoras de este trabajo nos desempeñamos como docentes en asignaturas de Matemática del ciclo básico de las carreras de Ingeniería de la Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura (FCEIA) de la Universidad Nacional de Rosario (UNR). Teniendo como referencia la teoría Socioepistemológica,

consideramos que el conocimiento se genera a partir de prácticas sociales puestas en contexto. En este sentido entendemos que la Matemática en las carreras de Ingeniería debe significarse a partir de la modelización y la resolución de problemas ingenieriles. Esto nos lleva a buscar cotidianamente la forma de favorecer la resignificación de conceptos, para ello consideramos necesario planificar la enseñanza no para la simple acumulación de saberes, sino para que los estudiantes puedan construir formas de pensamiento que fomenten las relaciones con sus conocimientos previos e intereses personales, así como también la aplicación de métodos específicos.
En este sentido se propuso a estudiantes de una comisión de la asignatura Cálculo III, asignatura del primer cuatrimestre del segundo año de las Carreras de Ingeniería, presentar por escrito y exponer oralmente, un trabajo práctico grupal integrador de conocimientos consistente en la búsqueda de problemas reales que pudieran resolverse con Integrales de Superficie.
En este trabajo mostramos una síntesis y un breve análisis de la producción de los estudiantes.

2 Marco de referencia

Dentro de la Matemática Educativa se distinguen distintas corrientes de investigación cuya diferencia principal es la manera de entender y atender al conocimiento matemático según la posición epistemológica respecto a él. Una de esas corrientes es iniciada por el Dr. Ricardo Cantoral y se plasma como Teoría Socioepistemológica (TSE). Esta teoría sostiene que la construcción del conocimiento se basa en las prácticas sociales y que el tipo de racionalidad con la cual un individuo o grupo -como miembro de una cultura- construye conocimiento quedará determinado por el contexto. Es decir, el conocimiento no es algo preexistente y único, ni válido universalmente. El saber se genera a partir de la interacción entre los miembros de una comunidad. La Matemática toma sentido y significado a partir de otras prácticas más allá de las exclusivamente matemáticas [3], [4].
En esta aproximación teórica las actividades que desarrollan los humanos a través de su experiencia se conciben como prácticas de referencia que acontecieron a partir de un problema particular, de cuya solución destacan los conocimientos de referencia en forma de significados [5].
En el contexto de la Matemática Educativa, Cantoral, Farfán, Lezama y Martínez [6] conciben los conocimientos de referencia como constituidos en ambientes socioculturales, no escolares, de los que se desprenden modificaciones para su difusión en el salón de clases, que "afectan su estructura y su funcionamiento, de manera que modifican también las relaciones que se establecen entre los estudiantes y sus profesores".
El sistema didáctico de la educación superior en carreras de Ingeniería se caracteriza por el hecho de que la Matemática está al servicio de otros dominios científicos y de otras prácticas de referencia, de donde a su vez adquiere sentido y significación [3]. El aula se convierte así en un aula extendida, el aula de la vida cotidiana, es decir un espacio que permite la entrada de otros saberes no habitualmente presentes en los contenidos curriculares [7].
La Matemática en las carreras de Ingeniería adquiere sentido en tanto tenga que ver con la problemática específica de los estudiantes de estas carreras, reconociéndola como un medio o herramienta que permite entender la realidad de otras áreas del conocimiento.
Al ser significado y puesto en uso el conocimiento se afirma como un saber y su validez competerá al individuo o al grupo. Con el transcurrir de la vida del individuo o grupo y su interacción con diferentes contextos, se resignificarán esos saberes enriqueciéndolos con nuevos significados.
Intentar la resignificación de un concepto supone entonces por un lado un previo acercamiento escolar al mismo por parte de los estudiantes y, por otro, un agregado de nuevos significados usualmente realizado mediante actividades didácticas diseñadas por el docente. Esta teoría parte de asumir que los problemas de la enseñanza de la Matemática no provienen o no sólo son relativos a las prácticas de estudio memorístico de los estudiantes, ni a las competencias docentes de sus profesores, sino que obedecen principalmente a la estructura, funcionamiento y naturaleza del saber matemático escolar puesto en juego [8].
La utilización de variados recursos tecnológicos aparece como indispensable para el desarrollo de actividades del tipo de las planteadas, y puede afirmarse que el uso de la tecnología es una de las prácticas sociales inherentes a casi todas las actividades humanas, y reconocida como fomentador de conductas participativas, de autogestión y de compromiso con actividades colectivas [9], [10], [11], [12], [13].

3 Descripción de la propuesta

Usualmente las prácticas sobre el tema Integral de Superficie consisten en resolver ejercicios rutinarios de cálculo de flujo o área de una superficie de la que se conoce su parametrización. En particular, los teoremas de Stokes y de Divergencia, considerados fundamentales en el Cálculo Vectorial, deberían ser introducidos con aplicaciones reales y no solamente enunciarlos al final del curso como habitualmente ocurre.

En el intento de modificar esta práctica usual, se propuso a los estudiantes de una comisión de la asignatura Cálculo III presentar por escrito y exponer oralmente, un trabajo práctico grupal integrador de conocimientos consistente en la búsqueda de problemas reales que permitieran ser resueltos utilizando el concepto Integral de Superficie.

Dado que “la habilidad para trabajar en grupo es una de las habilidades de la Ingeniería” [14], pedimos a los estudiantes que se organizaran en grupos de no más de cuatro integrantes para llevar a cabo la discusión de distintos enfoques y métodos de trabajo. La exposición oral del trabajo tuvo como objetivo estimular la capacidad de comunicación y el uso de recursos tecnológicos, habilidades no menos importantes para un futuro ingeniero.

Nos interesó también propiciar la libre elección tanto de un software matemático como de los dispositivos informáticos a utilizar. En cuanto al software, cada estudiante podía optar por el que le resultara más conveniente entre los ya conocidos en la escuela secundaria y los utilizados en la cátedra con el apoyo de guías confeccionadas por docentes (GeoGebra, Maxima, Maple, etc.). Con respecto al uso de dispositivos tecnológicos nos encontramos que los estudiantes contaban con una variedad muy actualizada de aparatos: netbooks, celulares, tabletas, entre otros.

Las pautas para llevar a cabo la tarea fueron las siguientes:

- Trabajar en forma grupal.
- Abordar situaciones diferentes, comunicándolas en el grupo cerrado de Facebook especialmente creado para la comisión.
- Utilizar cualquier recurso tecnológico (software, resolutores online, sitios, páginas, etc.) y citarlo apropiadamente.
- Recurrir libremente a bibliografía sobre el tema, especificando libro, autor o sitio consultado.
- Presentar un informe impreso y en formato digital. Compartir las producciones a través del grupo de Facebook y realizar una exposición oral de las mismas.

En todo momento las docentes acompañaron el trabajo de los estudiantes respondiendo a todas sus inquietudes, en forma presencial o virtual. Se fijaron tres encuentros para la puesta en común de las producciones de los 18 grupos de trabajo (de 2 a 4 integrantes cada uno). Cada exposición duró aproximadamente 15 minutos y a continuación se dispusieron de 10 minutos para la discusión sobre la temática propuesta por cada equipo.

La realización de este trabajo práctico fue propuesta como opcional y sustitutiva de la evaluación escrita tradicional referida al tema en cuestión. La valoración del desempeño de cada grupo contribuyó a la definición de la calificación final de la asignatura.

Cabe mencionar que todos los trabajos resultaron muy interesantes, no sólo por las opiniones de las docentes, sino por las propias expresiones de los estudiantes vertidas en una encuesta realizada al finalizar el cuatrimestre.

4 Síntesis de algunas presentaciones de los estudiantes

Describiremos brevemente algunas presentaciones, transcribiendo textualmente los objetivos propuestos por cada grupo (**O**), una breve descripción de los contenidos matemáticos y prácticas puestas en juego (**MP**) y una reseña de la búsqueda de contextos y situaciones reales que generó el trabajo propuesto (**CS**).

<table>
<tr>
<td>

Grupo 1*. *Cálculo de un área de superficie: Torres Dolfines Rosario

O: Calcular mediante los conocimientos obtenidos en clase la superficie lateral de uno de los tanque de agua de las torres Dolfines (Rosario), para poder estimar el costo necesario para iluminarlo.

</td>
<td>

</td>
</tr>
<tr>
<td>

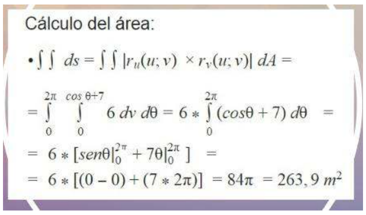
MP: Estiman las dimensiones del tanque de agua y el ángulo que forma el plano que contiene a la tapa del cilindro truncado con el que contiene a la base, para llegar a una ecuación.
Modelizan la superficie para utilizar parametrizaciones ya conocidas y simplificar cálculos.
Calculan el área aproximada con integrales de superficie.

</td>
<td>

</td>
</tr>
<tr>
<td>

CS: Consultan con un especialista en luminotecnia que participó en la construcción de los edificios (Ingeniero Fermín Peña), y les brinda muy entusiastamente toda la información que los estudiantes le solicitan, especificando que el tipo de iluminación utilizada es “bañadores led Philips” y su costo aproximado por metro cuadrado (alrededor de 48 bañadores) es de 193,25 euros. Dando un costo total aproximado de 51.000 euros por tanque.

</td>
<td>



</td>
</tr>
</table>

<table>
<tr>
<td colspan="2">

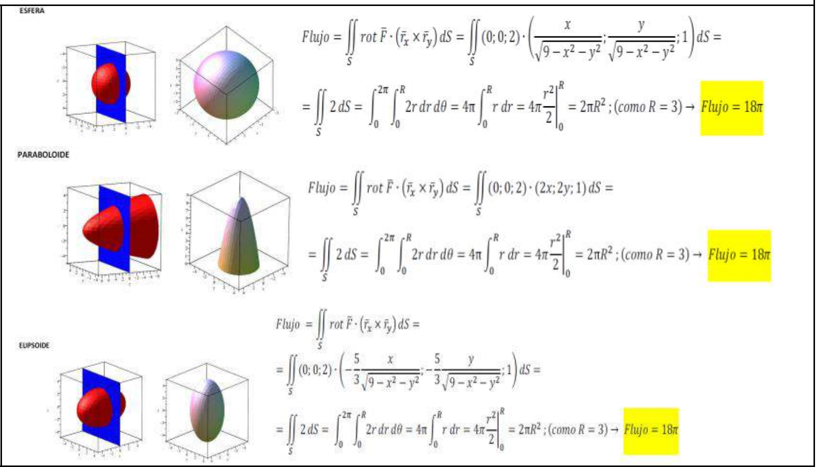
Grupo 2. Cálculo del Flujo. Comprobación del Teorema de Stokes

O: Calcular el flujo volumétrico de los gases a través de la superficie de un globo aerostático mediante integrales, a través de la aplicación del Teorema de Stokes.

</td>
</tr>
<tr>
<td>

MP: Modelizan el movimiento de las partículas de un gas dentro de un globo mediante un determinado campo vectorial ***F****(x,y,z)=(-y,x,0)*.
Grafican utilizando software matemático Maple.
Calculan el flujo de aire utilizando integrales de superficies, eligiendo diferentes superficies: esfera, paraboloide y elipsoide.
Verifican el Teorema de Stokes.

</td>
<td>



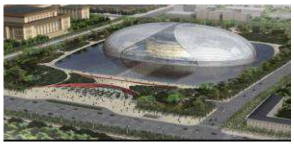
</td>
</tr>
</table>

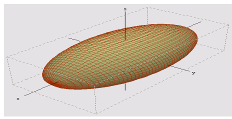
CS: Los globos aerostáticos funcionan gracias a la diferencia de densidad del aire dentro del globo con respecto al aire exterior. Dentro del globo generalmente hay helio o aire caliente, los cuales son menos densos que el aire exterior. Ahora bien, según el Principio de Arquímedes, el aire caliente, al ser menos denso, pesará menos que el aire exterior y por lo tanto recibirá una fuerza de empuje hacia arriba que hará ascender al globo.
La altura a que los globos aerostáticos llegan dependerá de la densidad del aire dentro del globo, dado que una vez que ésta se nivele con la densidad exterior, el globo dejará de elevarse.
Para descender, la densidad del aire en el globo debe ser mayor que la del aire exterior. Este manejo de las densidades es la tarea del piloto del globo.
Cuando el quemador se apaga, el aire del interior del globo se enfría, aumenta su densidad y disminuye su empuje, que es vencido por el peso del globo y, tras un breve periodo de enfriamiento, el globo desciende.

Grupo 3. Cálculo de un área de superficie: El Gran Teatro Nacional de Beijing

O: Hallar el área de la cubierta del Gran Teatro Nacional de Beijing para conocer qué porcentaje del presupuesto se invirtió en la compra del Titanio y el Cristal que recubren esa superficie.

MP: Modelizan la forma del teatro como un elipsoide completo y luego del cálculo del área dividen el valor a la mitad, ya que la cubierta es sólo la mitad superior del elipsoide. Suponen que las placas de Titanio y de Cristal empleadas tienen las mismas dimensiones.
Grafican utilizando WolfranAlpha.
Calculan el área de la superficie utilizando la parametrización conocida de un elipsoide.
Verifican los resultados utilizando software.





CS: El costo de las placas de titanio y cristal son datos proporcionados por empresas reales.
El Gran Teatro Nacional también conocido como “el huevo” es un teatro de ópera en Pekin, China. Abrió sus puertas en junio de 2007. El arquitecto francés Paul Andreu fue el encargado de diseñarlo, con una planificación del costo de 3.200.000 millones de yuanes (U$S 515.264.000.000). El exterior del teatro es una cúpula de titanio y cristal completamente rodeado por un lago artificial.
La envoltura de titanio y cristal tiene forma elíptica, con un eje mayor de 213 m, eje menor de 144 m y una altura de 46 m. (para sujetar esta envoltura se ha creado una estructura a base de tubos de acero).

Precio del Titanio utilizado: U$S 689.761.632

Precio total del Titanio/Cristal utilizado: U$S 694.043.932

U$S 515.264.000.000 ---------- 100 %

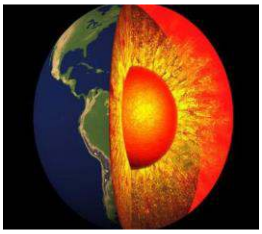
U$S 694.043.932------------- 0,13 %

CONCLUSIÓN:

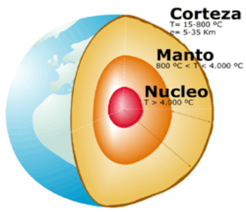
Pese a que el costo del recubrimiento de la superficie exterior con placas de titanio y cristal es de aproximadamente unos U$S 700.000.000, sólo representa el 0,13 % del presupuesto total destinado a la construcción de este teatro.

Grupo 4. Cálculo de flujo. Flujo de calor que atraviesa la superficie terrestre

O: El objetivo del trabajo práctico es el cálculo de este flujo en forma aproximada, mediante la aplicación de las herramientas matemáticas enseñadas en la cátedra. Se aborda el problema en forma general, no entrando en detalles en la diversidad de procesos que intervienen y las distintas variables físicas y químicas que llevaría un estudio más específico. En lugar de ello, se modelizó el problema como se muestra a continuación.

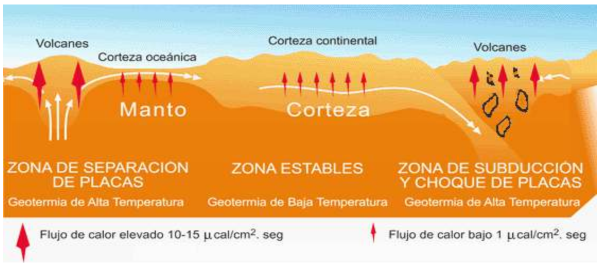


MP: Modelizan del problema, considerando a la Tierra como una esfera perfecta con centro en el origen un sistema de coordenadas cartesiano, subdividida en tres capas concéntricas: núcleo, manto y corteza.
Recopilan información de distintas fuentes y deciden cuáles son los datos más adecuados para determinar la función que represente la temperatura de la Tierra.
Estimaron el campo vectorial que represente el flujo de calor desde el centro de la Tierra, considerando el proceso de transmisión por conducción térmica y la Ley de Fourier.
Calculan el flujo de calor por medio del Teorema de la Divergencia utilizando una parametrización adecuada y software Maple para realizar los cálculos.
Comparan el valor obtenido con el valor real y justifican el error obtenido.



$$\bar{q} = -k\nabla T$$

CS: La modelización realizada no fue muy exacta ya que no tuvieron en cuenta distintas composiciones de suelos, espesores, temperaturas y fenómenos geológicos, motivo por el cual el valor calculado difiere del real.
Explicitan, a través de información específica de sitios confiables, por qué el flujo de calor es diferente ante distintas situaciones.



Grupo 5**. **Cálculo de caudal. Caudal que atraviesa un ventrículo cardíaco

O: Nuestro grupo de trabajo propuso la utilización de los conceptos de integrales de campos vectoriales desarrollados durante el cursado de la materia; para poder calcular el caudal que atraviesa el ventrículo izquierdo del corazón, y así poder obtener la potencia que debe tener un dispositivo VAD (Ventricular AssistDevice) en su función de ayudar al corazón a bombear el flujo de sangre que necesite el cuerpo para su normal funcionamiento.

MP: Explicitan que para poder calcular la potencia que necesitaría el VAD en su función de bombear sangre deben conocer el caudal que circula por el mismo, y que va a ser calculado mediante la integral de un campo vectorial de velocidades. A su vez este campo debe atravesar una superficie que en este caso es el Ventrículo Izquierdo del Corazón.
Consideraciones que tuvieron en cuenta para calcular el caudal:
-el ventrículo es un cilindro de radio uniforme
-la sangre no posee viscosidad y tiene densidad constante
-no hay gasto cardíaco
-el campo de velocidad de la sangre es **v**= (—y; x; |x. y|)

Consideraciones que tuvieron en cuenta para calcular potencia:
-la densidad volumétrica de la sangre de un hombre de edad media cuyos latidos por minuto varían entre 60 y 70, es de 1057 g/ml y el caudal aproximado es de 4900 ml por minuto
-el VAD otorga a la sangre una presión de 6000 mmHg
Parametrizan la superficie utilizando coordenadas cilíndricas.
Utilizan software Maple para realizar los cálculos.
Interpretan el resultado y lo comparan con información obtenida de distintos medios.

CS: Un dispositivo de asistencia ventricular, o VAD (Ventricular AssistDevice) es un aparato mecánico que se utiliza para reemplazar la función de un corazón dañado.
Para obtener los datos utilizados, el grupo no solo buscó información de distintos sitios y/o foros de Internet, sino que además consultó con un profesional médico especialista para confirmar si los datos obtenidos eran correctos.

***Grupo 6.* Cálculo del área de una superficie: Alerón de un auto de carrera.**

O: Calcular el área de cada una de las partes que componen el alerón de un auto de carrera y el costo de su fabricación según diferentes materiales.

MP: En la descripción del trabajo tienen en cuenta cómo influye el flujo del aire sobre el alerón y la velocidad que le propicia para considerar la inclinación óptima.

CS: Indagan **e**l precio de distintos materiales y analizan el beneficio/costo según el rendimiento.
Comparan información y realizan conclusiones sobre el material a utilizar para obtener un óptimo desempeño de un auto de carrera.

***Grupo 7.* Cálculo del área de una superficie: Planetario James S. Mc Donnel, ubicado en la ciudad de Saint Louis, estado de Missouri, Estados Unidos**.

O: Cálculo del área de la superficie para obtener el costo del material para pintarlo.

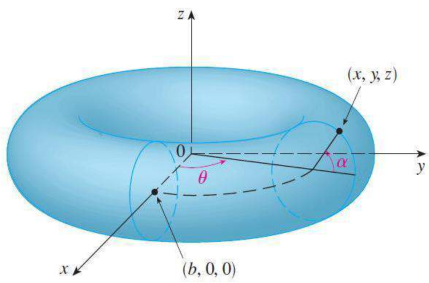
MP: Comparan la superficie con de un hiperboloide de una hora y utilizan una parametrización conocida.
Calculan la integral de superficie.

CS: Averiguan el valor de la pintura.
Aproximan el costo total por cada mano de pintura.

***Grupo 8.* Cálculo del área de una superficie: Superficie de una cámara de rueda de bicicleta (toroide).**

O: Calcular la cantidad de caucho (en kilogramos) que se necesitan para fabricar la cámara de una bicicleta de montaña de rodado 26.

MP: Describen la característica de la cámara.
Modelizan la cámara como un toroide y el pico como un cilindro y utilizan parametrizaciones conocidas para calcular el área de la superficie de la cámara mediante integrales de superficies.
Calculan el volumen multiplicando por el espesor del material, y luego por la densidad del caucho.
CS: Indagan el costo real del caucho apropiado para este tipo de cámaras.



Masa total *M(s)= 0.25 kg.*
Costo del caucho ~20 pesos
Costo del material ~5 pesos

Éstas son algunas de las numerosas propuestas presentadas, las cuales abarcaron una gran variedad de temáticas. Además de cumplir con el objetivo propuesto, cada grupo evidenció un interés particular en el tema escogido, ya que no sólo justificaban su elección, sino que también enriquecieron su propuesta agregando, según cada caso, información de datos históricos de monumentos, ubicaciones geográficas de edificios, detalles de costo reales de materiales utilizados, presentación de copias de planos obtenidos en dependencias gubernamentales, etc.

5 Reflexiones finales

Esta experiencia nos brindó la posibilidad de vivenciar el compromiso de los estudiantes al proponerles la realización de una actividad que, a pesar de poseer una consigna simple, implicó un trabajo colaborativo, una permanente toma de decisiones y una actitud crítica y reflexiva, poniendo en juego un conjunto de conocimientos producto de distintas prácticas de referencia, como por ejemplo: medir, estimar, aproximar, calcular, modelar o verificar resultados. Evidenciaron además sus conocimientos no académicos, realizando reconocimiento y revisión de hechos históricos, compartiendo sus intereses personales y culturales.
Observamos cómo esta propuesta propició un entorno de aprendizaje en el que el uso de TIC ayudó a complementar la educación presencial en el escenario y las condiciones institucionales actuales. Más aún, no sólo vimos a un estudiante usando conceptos matemáticos, sino también gestionando su propio aprendizaje, interactuando con situaciones reales o simuladas y entusiasmado en la adquisición de saberes y habilidades propios de la comunidad profesional a la que se pretende integrar, todo esto en una dimensión tecnológica conocida más por ellos que por nosotros los profesores.
Proyectamos ahondar en el diseño de propuestas de enseñanza que, como ésta, promueva desde el inicio de las carreras de Ingeniería, ambientes de aprendizaje flexibles y colaborativos, fomentando la participación activa de todos los actores involucrados y favoreciendo la resignificación de los distintos conceptos matemáticos a partir de una integración disciplinar fuertemente vinculada con las problemáticas sociales, ambientales, etc.

Referencias

1. Braccialarghe, D.; Introcaso, B.; Rodríguez, G.: Hacia la construcción de la modalidad de taller como propuesta de integración entre introducción a la ingeniería y las ciencias básicas. *Revista Argentina de Enseñanza de la Ingeniería*. 4, 9, 41-49. (2015)
2. Declaracion mundial sobre la educacion superior en el siglo xxi: vision y accion y marco de accion prioritaria para el cambio y el desarrollo de la educacion superiorconferencia mundial sobre la educación superior. http://www.unesco.org/education/educprog/wche/declaration_spa.htm/ artículo 9/. (1998). Accedido el 27 de julio de 2018.
3. Cantoral, R.; Farfán, R.: Matemática Educativa: Una visión de su evolución. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa*. 16, 27-40. (2003).
4. Cantoral, R.: Tendencias de la investigación en Matemática Educativa: del estudio centrado en el objeto a las prácticas. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*. 23, 1043-1052. (2010).
5. Camacho Ríos, A.: Socioepistemología y prácticas sociales. Hacia una enseñanza dinámica del cálculo diferencial. *Revista Iberoamericana de Educación Superior.* 2, 3, 152-171. (2011).
6. Cantoral, R.; Farfán, R. M.; Lezama, J.; Martínez Sierra, G.: Socioepistemología y representación: algunos ejemplos. *Revista Latinoamericana de Educación en Matemática Educativa*. Número especial, 83-102 (2006).
7. Cantoral, R.; Reyes Gasperini, D.: Socioepistemología y Matemáticas: del Aula Extendida a la Sociedad del Conocimiento. "Todo lo que siempre quisiste saber y nunca te animaste a preguntar". *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 27, 1573-1583. (2014).
8. Cantoral, R., Reyes-Gasperini, D., & Montiel G. Socioepistemología, Matemática y Realidad. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática*. 7, 3, 91-116. (2014).
9. Có, P.; del Sastre, M.; Panella, E.: Visualización y TIC en la enseñanza universitaria de la Geometría Analítica. En *XV Encuentro Nacional y VII Internacional de Educación Matemática en carreras de Ingeniería*. 19. (2009).
10. Có, P.; del Sastre, M.; Panella, E.: Representaciones con software. Un puente hacia la aprehensión conceptual. *International Program Committee of XIII Inter American Conference on Mathematics.* 27. 2011.
11. Có, P.; del Sastre, M.; Panella, E.; Sadagorsky, A.: Valoración del impacto de los software matemáticos en el aprendizaje y la enseñanza de la matemática básica en carreras de Ingeniería. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa.* 24, 1134-1141. (2011).
12. Có, P.; del Sastre, M.; Panella, E.: Una propuesta de trabajo colaborativa con libre elección de tic en el aula de matemática. *Ponencia presentada en la vigésimo séptima Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa. Buenos Aires, Argentina*. 2185. (2013)
13. Có, P.; Braccialarghe, D.; Matassa, A.; Piraino, M.: Relevamiento de recursos para el diseño de actividades con TIC en las carreras de ingeniería. *XI Carem. Congreso Argentino de Educación Matemática.* 528 – 538. (2016).
14. Grech, P.: *Introducción a la Ingeniería: Un enfoque a través del diseño*. Bogotá, Colombia. Prentice Hall. (2001).

La Tarea como una Herramienta para Ganar Confianza a Fin de Potenciar Aprendizaje de Calidad

Beherens Nadia Vanina[1], Folino Patricia Nora[1], Boutet Stella Maris[2]
[1] Facultad, Regional de Avellaneda, Universidad Tecnológica Nacional
Ramón Franco 5050 – Villa Domínico – (1874) Provincia de Buenos Aires
[1]nadiabeherens@hotmail.com, patriciafolino@yahoo.com.ar
[2] Facultad, Regional de Avellaneda, Universidad Tecnológica Nacional
Ramón Franco 5050 – Villa Domínico – (1874) Provincia de Buenos Aires
stellaboutet@gmal.com

Resumen. Nuestro trabajo se ubica en los cursos de primer año de Ingeniería, en la materia Análisis Matemático I, que es común a todas las especialidades, siendo los cursos homogéneos. Los errores cometidos por los estudiantes en los parciales son objeto de nuestra atención y nos han motivado a buscar sus posibles causas y soluciones. En este marco convenimos que no todos los errores son de la misma índole, a grandes rasgos, algunos se deben a conceptos previos endebles o erróneos y otros a problemas de lenguaje matemático que desconocen o interpretan y aplican mal.
La propuesta consiste en el seguimiento realizado a nuestros estudiantes mediante tareas pedidas clase a clase, realizadas fuera del aula y en su mayoría en grupos, y el impacto producido en el parcial, viendo buenos resultados en varios aspectos.

Palabras Clave: Lenguaje Matemático, Tarea, Aprendizaje con Comprensión.

1 Introducción

Diseñar y elaborar tareas que apoyen nuestra enseñanza a fin de potenciar aprendizajes de calidad, no es tarea fácil, teniendo en cuenta las condiciones que impone el diseño curricular (cantidad de horas y días de clase, clases una vez por semana, temas a tratar, estructura de cátedra, etc.) que no podemos modificar.

La propuesta es sencilla, necesitamos que nuestros estudiantes resuelvan ejercicios correctamente y escriban con lenguaje matemático, y eso es lo que pedimos que hagan con las tareas, tratando de que estas sean de tal manera que no solo fijen un algoritmo, sino que puedan comprender qué están haciendo y utilicen adecuadamente el lenguaje matemático.

2 Marco teórico

En principio, hemos tenido en cuenta el enfoque ontosemiótico para el análisis de nuestra propuesta. De acuerdo con éste, se considera práctica matemática, a cualquier acción, expresión o manifestación realizada por alguien para resolver problemas matemáticos, comunicar la solución obtenida a otras personas, validar y generalizar esa solución a otros contextos. Particularmente, queremos ubicar nuestro trabajo en el análisis de lo que Font, Godino y Gallard [1] definen como objetos primarios o de primer orden. Situaciones problemáticas, elementos lingüísticos, conceptos, proposiciones y argumentos. En este sentido, los alumnos enfrentan un problema que es la motivación de la actividad, en la que el lenguaje opera como soporte en conjunto con los argumentos y proposiciones para resolver dichos problemas y actividades.
Hemos desarrollado aquí varios aspectos. Por un lado, el aprendizaje autorregulado. Zimmerman [2] define al aprendizaje autorregulado como ‘el proceso en el cual los estudiantes activan y sostienen pensamientos, efectos y comportamiento que son planteados y cíclicamente adaptados a la consecución de sus metas’. En este proceso los estudiantes son responsables y protagonistas de su propio aprendizaje, para el cual deben seleccionar las estrategias que mejor se adapten a la situación que enfrentan y hacen uso de sus recursos personales, tomando una posición proactiva. Torre (2008, citado en García Martín [3]) define al alumno autorregulado como aquél que considera al aprendizaje no solo como algo que le pasa a él, sino como algo que él también puede causar. Esta cualidad no se adquiere de manera inmediata, sino que es un proceso constituido por fases. Primero se comienza con la observación de modelos, seguido por la imitación de modelos, luego una práctica guiada y un feedback (en este caso otorgados por el docente) y finalmente se alcanza una etapa de práctica autónoma y utilización de estrategias.

En este sentido, algunos autores (ver por ejemplo, Valle et al. [4], García Martín [3]), consideran fundamental la enseñanza de contenidos así como también estrategias de aprendizaje pertinentes para la materia. Además de estas cuestiones, Boekaerts y Cascallar [5] agregan la importancia de un ambiente positivo y activo, en el que los alumnos trabajen en pequeños grupos. En otras palabras, consideran esencial el trabajo colaborativo para alcanzar un aprendizaje autorregulado.

Con respecto a este último, Järvelä y Niemivirta [6] definen al trabajo colaborativo como aquellas situaciones en las que los alumnos discuten, toman decisiones, e interactúan, poniendo en juego distintos puntos de vista y compartiendo conocimiento y estrategias de aprendizaje. Es un modelo de aprendizaje interactivo, que invita a los alumnos a trabajar en conjunto. Maldonado [7] señala más que una técnica, el trabajo colaborativo es considerado una filosofía de interacción y una forma personal de trabajo, que implica el manejo de aspectos tales como el respeto a las contribuciones individuales de los miembros del grupo.

3 Desarrollo de la experiencia

En Análisis Matemático, como en muchas asignaturas, es necesario no solo alcanzar el conocimiento matemático sino también dominar su lenguaje. Si bien, siempre ha sido un desafío la incorporación de éste, en los últimos años hemos notado una desmejora, que se relaciona estrechamente con la preocupación nacional acerca de la lecto-escritura tanto a nivel escolar como académico. Por ello queremos tomar las preguntas propuestas por Moyano [8] '¿En qué etapa de la formación de los alumnos se debe introducir la enseñanza de la escritura académica? ¿Quiénes deben hacerse cargo?'. En el caso de los alumnos de primer año de la universidad, poseen conocimientos previos y un lenguaje matemático relacionado con éstos. Sin embargo, no es el que se espera en este nivel. Es entonces que decidimos actuar para revertir esta situación.

Esta experiencia se lleva a cabo desde hace algunos años por algunos docentes de la cátedra de Análisis Matemático I, de UTN FRA donde finalmente decidimos detenernos a realizar un análisis acerca de esta actividad y del impacto que esta tiene en el aprendizaje de nuestros estudiantes.

Al finalizar cada clase, se proponen actividades, no más de cinco ejercicios, a modo de tarea, para ser entregada en la próxima clase, que pueden hacer en grupo de tres integrantes como máximo y no obligatoria, lo que implica un aprendizaje autorregulado por parte de los alumnos ya que ellos son quienes deciden si la llevarán a cabo.

Para resolver las tareas usaron distintos elementos. En algunos casos el Geogebra y otros softwares, especialmente para ver cómo influyen los distintos parámetros en los gráficos de cada función, también lo han usado para la resolución, estimación o verificación de cálculos de límites. Algunos tutoriales de YouTube, en menor cantidad, libros de Análisis Matemático y sus propios apuntes de clase.

A medida que avanzaban las clases fuimos observando que las cuestiones de cálculo más elementales se iban agilizando y realizando bien, pero lo que más costaba era la justificación de procedimientos, enunciados para decidir verdadero – falso, enunciados de teoremas (su redacción y aplicación). Por eso nos enfocamos especialmente en la escritura de los estudiantes a lo largo de dichas tareas. Las correcciones de las mismas se hicieron con detalle, pidiendo en varios casos que las rehagan para ver si comprendieron dónde estaba el error.

Cuando comenzamos las clases, se les aclaró, a los estudiantes, que estas tareas no eran obligatorias, pero sí era recomendable que las hagan. Podemos afirmar que, en la mayoría de los cursos, los estudiantes, vieron esta actividad como positiva, que tuvieron buena disposición para hacerla y que, si faltaban, para la clase siguiente trataban de traer ambas tareas.

Los temas tratados corresponden a las dos primeras unidades de la materia: Desde ecuaciones e inecuaciones, funciones (lineal, cuadrática, polinómicas en general, homográfica, raíz cuadrada, valor absoluto, exponencial, logarítmica, etc.), con el análisis elemental de las mismas (no está aquí derivadas), hasta composición, inversa, límite y continuidad.

De las tareas solicitadas, destacamos algunos errores de los más comunes entre los cursos y en distintos años.

En una de las primeras, se pedía hallar el conjunto solución de ecuaciones e inecuaciones, del tipo cuadrática, trigonométrica y racional. Algunos de los errores más típicos fueron la confusión entre el símbolo $\wedge$, y, $\vee$ lo que termina influyendo directamente en el conjunto solución. Otro error común en esta etapa fue la resolución de inecuaciones cuyo conjunto solución es vacío, por ejemplo, $|x+2|<0$, lo cual no lo cumple ningún valor de x, se añade aquí el querer aplicar propiedades que no corresponde usar y cómo indicar cuál es el conjunto solución. Otro tanto ocurre con inecuaciones como $x^2 + 1 < 0$.

Para las tareas siguientes, referidas al cálculo del dominio de diversas funciones, algunos estudiantes aún tenían errores vinculados con la notación e interpretación de la conjunción y la disyunción. De todos modos, en cada actividad se les siguió marcando el error con la respectiva explicación.

En los temas referidos a biyectividad y función inversa, se nota claramente la dificultad para enunciar el procedimiento que están realizando. Desde no indicar qué están buscando, a justificaciones incompletas, confusión entre codominio y conjunto imagen. En esta etapa de la cursada, consideramos que es el momento en el que aparecen las primeras formalidades de la materia, de manera que los alumnos deben incorporar además del conocimiento para la resolución de ejercicios, un dominio del vocabulario pertinente, para una correcta resolución y justificación de los ejercicios. Cabe destacar, que los exámenes parciales incluyen ejercicios tanto prácticos, mera resolución, como algunos de carácter, que podríamos denominar, más teórico, lo que implica un mayor dominio de vocabulario para su resolución, ya que en su mayoría exigen una justificación.

Las tareas de composición de funciones implicaron un desarrollo más formal de los ejercicios, dando un paso más con respecto a los ejercicios anteriores. En cada caso, se pidió que primero expliquen si la composición era posible y en caso negativo que redefinan, si es posible, para que se pueda hacer. Ya aquí empezamos a ver una mejora notable con respecto a la actividad anterior. Para este momento, los alumnos ya han estado trabajando tanto en clase como en forma independiente, ejercicios que involucran la utilización de elementos lingüísticos, conceptuales, proposicionales y argumentativos (EOS). A medida que se avanzaba en la cursada los alumnos consultaban por la corrección, la mayoría argumentando que querían entender y no por reclamar.

4 Resultados

Los siguientes gráficos muestran la mejora obtenida al avanzar en las actividades y los resultados del primer examen:

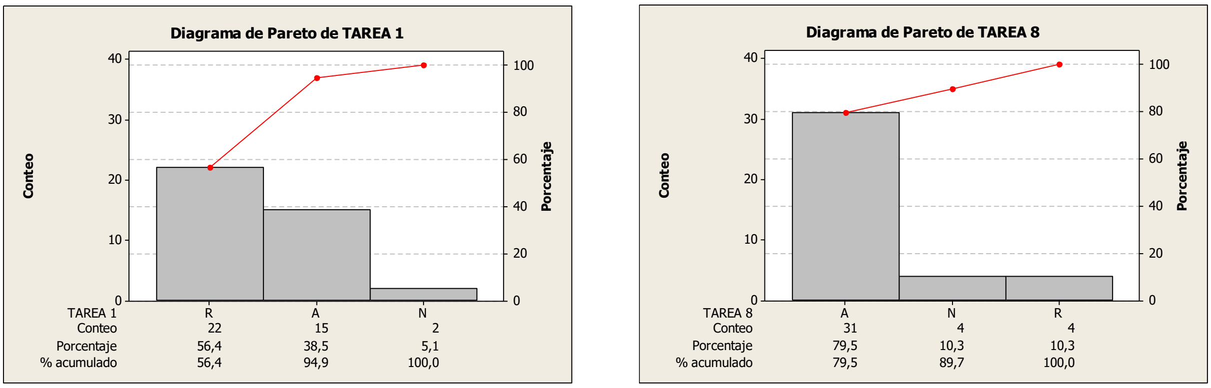


Fig. 1. Diagrama de Pareto. Curso A- Notas: R tarea para rever o sea con errores, B: tarea bien resuelta, N: tarea sin resolver o no entregada.

Tabla 1. Resumen de resultados del primer parcial del presente ciclo lectivo

Curso	Total	Aprobados	Desaprobados
A	36	9	27
B	43	6	37
C	34	14	20
D	35	16	19

Analizando la relación entre las tareas y los resultados obtenidos en el parcial, observamos que:

- En el curso A, el total de aprobados había entregado la tarea y dentro de los desaprobados, quienes habían realizado la tarea pudieron realizar correctamente un porcentaje considerable del examen. Solo una alumna entregó en blanco, quien no había entregado tarea y tenía alto porcentaje de inasistencia.

En los cursos siguientes, se aplicó la metodología con una diferencia con respecto al curso A: los trabajos se volvían a entregar con las correcciones pedidas.

- En el curso B, notamos que muchos que no habían entregado tarea, no estuvieron cerca de la aprobación.
- En el curso C, de los aprobados, 3 nunca habían entregado la tarea mientras que los 11 restantes habían entregado todas las tareas ‘bien’. De los desaprobados 5 habían entregado la tarea de forma correcta, con

gran porcentaje del examen bien resuelto, mientras que 9 lo habían hecho mal y sin devolución. Los 6 restantes nunca habían entregado las tareas.

- El curso D, de los 16 aprobados 14 habían entregado bien la tarea, uno entregó mal y no corrigió, y uno no entregó. Y dentro de los 19 desaprobados, 5 habían entregado la tarea 'bien' y estuvieron cerca de la aprobación, mientras que 6 entregaron mal y no corrigieron, y 8 no entregaron nunca la tarea.

Además del análisis cuantitativo de la resolución de tareas, consideramos pertinente realizar una encuesta a los alumnos para indagar sobre sus percepciones con respecto a la tarea. Para ello, propusimos 10 preguntas, algunas cerradas y otras de carácter abierto, para que los alumnos expresen sus opiniones de manera anónima, como figura a continuación.

Estimados Estudiantes
Agradecemos la respuesta a la presente encuesta anónima. Nos interesa la mejor respuesta que usted pueda darnos, aquella que nos diga lo que realmente piensa, lo que realmente hizo.

1) ¿Ha realizado las tareas propuestas?
2) ¿Cómo se ha sentido frente a la realización de las mismas? (por ejemplo, cómodo, desorientado, seguro, inseguro, etc.)
3) ¿Considera que estas tareas realizadas fueron útiles para el desarrollo de los contenidos?
4) ¿Considera que han influenciado en alguno de estos aspectos?

	Sí	No
Comprensión de la materia		
Autoevaluación de los aprendizajes		
Regulación del estudio		
Escritura		
Conocimiento de los métodos de corrección		

5) ¿Considera que existe relación entre las tareas y lo trabajado en clase?
6) ¿Ha consultado libros u otro tipo de material para su resolución?
7) ¿Ha asistido a clases de consulta?
8) ¿Considera que existe relación entre lo propuesto en las tareas y lo evaluado en el examen?
9) ¿Fue necesaria la guía docente en algún momento?
10) ¿Qué sugeriría para favorecer el aprendizaje de los contenidos de esta asignatura?

De las mismas, obtuvimos la siguiente información:

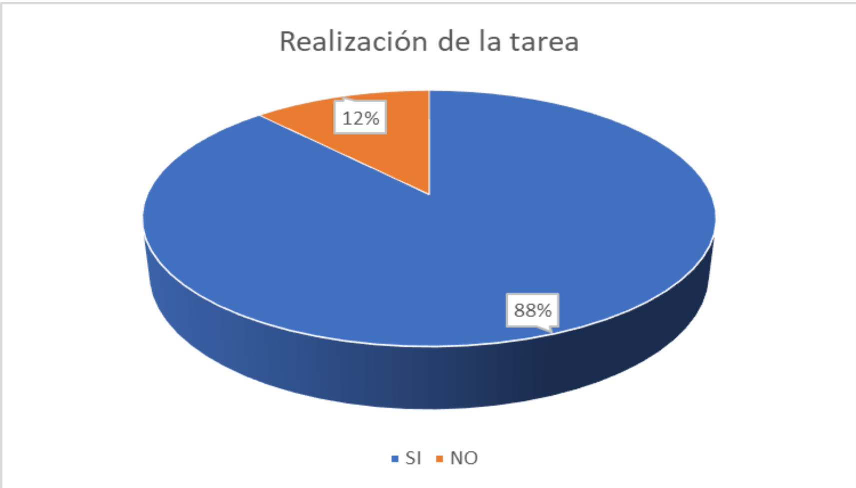


Fig. 2. Diagrama circular: Realización de tarea

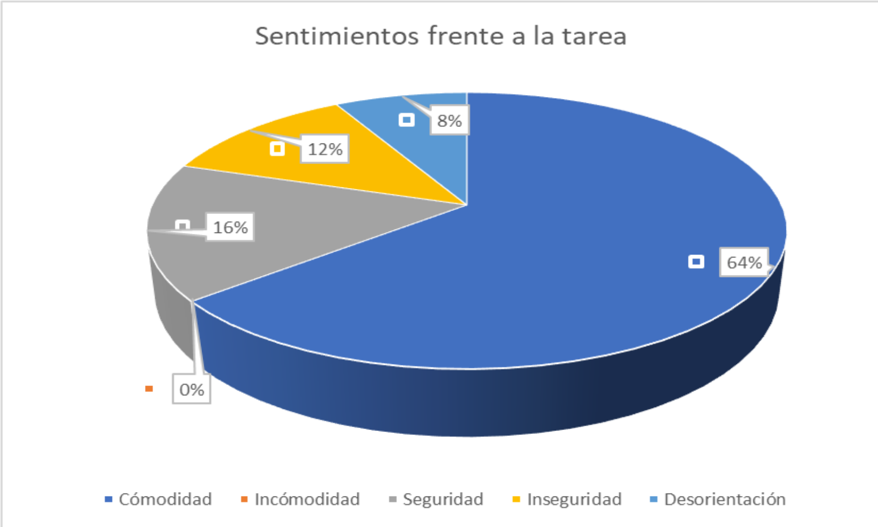


Fig. 3. Diagrama circular: Sentimientos frente a la tarea

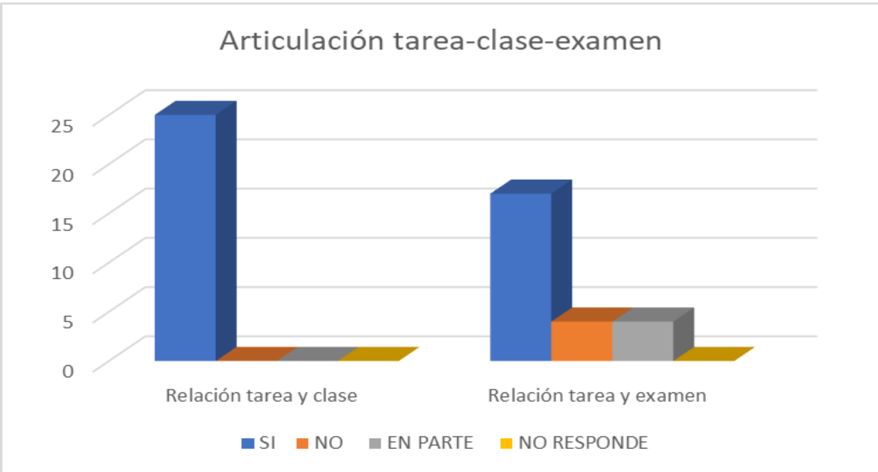


Fig. 4. Diagrama de barras: Articulación: tarea-clase- examen

Además, del total de alumnos solo el 40% consulta libros u otro tipo de material para su resolución (video, Internet) mientras que el 20% ha asistido a alguna clase de consulta. Por otro lado, el 80% asegura haber necesitado la guía docente en algún momento de la realización de estas tareas. Es decir, a pesar de que el trabajo que realizan es autorregulado la acción docente es fundamental para alcanzar un aprendizaje significativo. Por último, los alumnos se enfrentaron a una pregunta abierta que consistía en plasmar sugerencias referidas tanto a las tareas como al trabajo docente. Entre las respuestas, la más nombrada fue ampliar la cantidad de ejercicios de la práctica. Si bien este trabajo esta centrado en otras cuestiones, nos deja una puerta abierta para pensar.

5 Conclusiones y trabajos futuros

La entrega de actividades propició el aprendizaje autorregulado, en el que los alumnos son protagonistas de su propio aprendizaje. Además, hemos notado una correlación entre la resolución de tareas y la aprobación de los exámenes. En general, aquellos alumnos que han entregado la tarea corrigieron sus errores y han logrado aprobar el examen. En aquellos casos en que no han aprobado, aun haciendo las tareas bien, que son muy pocos, han podido resolver un porcentaje alto del examen, estando cerca de la aprobación.

Por otro lado, la entrega de actividades fomentó la participación de los alumnos en clase, y en un curso particularmente, la interacción entre ellos, propiciando el trabajo colaborativo. En cuanto a la escritura, hemos observado claras mejoras mostrando una evolución desde el primer trabajo hasta el último y viéndose reflejado en los resultados del examen.

A partir de los resultados obtenidos, el curso A reforzará sus prácticas utilizando la metodología de reelaboración del trabajo corregido que ya se utiliza en los otros cursos.

Se reconoce que escribir sirve para posicionar a los alumnos más activamente en la clase, para ayudarlos a comprender y, por tanto, para aprender la materia [9]. Es entonces, que nos planteamos como objetivo para el segundo cuatrimestre reforzar la tarea para poder realizar un seguimiento de los alumnos que participaron en las actividades en el primer cuatrimestre y ver el progreso de los que participan por primera vez. En general, pensamos en mejorar el método. Analizaremos las actividades pedidas y la relación con lo tomado en el parcial. Compararemos los errores cometidos y trataremos de ofrecer tareas personalizadas, por ejemplo, para los que deban recuperar el parcial. Así como también, propondremos tarea especial como autoevaluación previa al parcial y ejercicios adicionales basados en lo pedido por los alumnos.

Una aclaración final. Este trabajo fue posible ya que cada curso cuenta con un docente a cargo y su auxiliar correspondiente, de otra forma no podríamos hacer este seguimiento, hay que tener en cuenta que los cursos son aproximadamente de 55 alumnos inscriptos.

Agradecimientos

Un agradecimiento especial a la Lic. Gabriela Canhué quien ha colaborado estrechamente en la implementación de la propuesta.

Referencias

1. Distéfano,L.; Pochulu,M.D.; Font,V.: Análisis de la complejidad cognitiva en la lectura y escritura de expresiones simbólicas matemáticas. *Redimat J. Res. Math. Educ.* vol. 4, no. 3, pp. 202–233, (2015).
2. Zimmerman,B.: Attaining self-regulation: a social cognitive perspective. Boekaerts, M.; Zeidner, M., ; Pintrich, P. (eds.): *Handbook of self-regulation*. Academic Press. pp. 13–39. (2000).
3. García Martín,M.: La autorregulación académica como variable explicativa de los procesos de aprendizaje universitario. *Profesorado. Rev. Currículum y Form. Profr.* vol. 16, no. 1, pp. 203–221, (2012).
4. Valle,A.; Núñez,J.C.; Cabanach,R.G.; González-Pienda,J.A.; Rodríguez,S.; Rosário,P.; Cerezo,R.; Muñoz-Cadavid,M.A.: Self-regulated profiles and academic achievement. *Psicothema*. vol. 20, no. 4, pp. 724–731, (2008).
5. Boekaerts,M.; Cascallar,E.: How far have we moved toward the integration of theory and practice in self-regulation? *Educ. Psychol. Rev.* vol. 18, no. 3, pp. 199–210, (2006).
6. Järvelä,S.; Niemivirta,M.: Motivation in context: challenges and possibilities in studying the role of motivation in new pedagogical cultures. Volet, S.; Järvelä, S. (ed.) *Advances in learning and instruction series. Motivation in learning contexts: Theoretical advances and methodological implications*. Pergamon Press. pp. 105–1127. (2001).
7. Maldonado,P.M.: El trabajo colaborativo en el aula universitaria. *Laurus*. vol. 13, no. 23, pp. 263–278, (2007).
8. Moyano,E.I.: La escritura académica: una tarea interdisciplinaria a lo largo de la currícula universitaria. *Rev. Texturas*. vol. 4, no. 4, pp. 109–120, (2004).
9. Carlino,P.: Concepciones y formas de enseñar escritura académica: un estudio contrastivo. *Signo y Seña*. vol. 16, pp. 71–117, (2008).

Uso del Software GeoGebra como Estrategia Didáctica para la Enseñanza de Cónicas y Superficies Cuádricas

Yris B. Rafael[1], Alejandra B. Lima[1], Viviana del C. Ledda[1]

[1] Departamento Académico de Matemática, Facultad de Ciencias Exactas y Tecnologías, Universidad Nacional de Santiago del Estero

Av. Belgrano (s) 1912 (CP 4200) Santiago del Estero. Argentina

bettianarafael74@yahoo.com.ar , alejandra.b.lima@gmail.com, viviledda@hotmail.com

Resumen. A partir del diagnóstico sobre dificultades en los procesos de enseñanza y aprendizaje, el rendimiento académico y diversos factores que resultan verdaderos obstáculos en la formación del estudiante, y en el marco del Proyecto de Investigación: "Las competencias en el proceso de formación de los estudiantes del Profesorado en Matemática de la FCEyT, usando GeoGebra" se estudian los contenidos curriculares "Cónicas" y "Superficies Cúadricas" interrelacionándolos a través de las intersecciones de estas últimas con los planos coordenados y paralelos a ellos, usando el software GeoGebra. Esto se implementa en la asignatura "Geometría Analítica" del Profesorado en Matemática, haciendo extensivo a "Álgebra y Geometría Analítica" de las carreras de Ingeniería que ofrece la Facultad de Ciencias Exactas y Tecnologías, de la Universidad Nacional de Santiago del Estero.

Palabras Clave: Competencias, GeoGebra, Cónicas, Superficies cuádricas.

1 Introducción

El presente trabajo constituye un aporte al conocimiento sobre el efecto del uso de las Tecnologías de la Información y la Comunicación (TIC) en Matemática y se enmarca, a partir del abordaje exploratorio, crítico y propositivo, en una de las dimensiones de estudio del Proyecto de Investigación: "Las competencias en el proceso de formación de los estudiantes del Profesorado en Matemática de la FCEyT, usando GeoGebra".

La demanda de una educación de calidad y la necesidad de hacer un uso reflexivo de las TIC a favor de los procesos de enseñanza y aprendizaje plantean desafíos y reestructuraciones a la misma, debido al impacto y requerimiento que ellas generan en la manera como la sociedad se organiza, trabaja, se relaciona y aprende.

Las mayores críticas que hacen los estudiantes a su profesores es la falta de contextualización y aplicación de los contenidos que se trabajan en el aula de clases, más aún los de matemática, donde se requieren un poco más de abstracción y lógica. Todo ello debido a que en muchas ocasiones los conocimientos que adquieren no están relacionados con su entorno inmediato [1].

Es así como se hace necesario implementar metodologías diferentes que apunten a que los estudiantes comprendan la relevancia y uso de los conocimientos matemáticos en su vida cotidiana para luego aplicarlos en su vida profesional. Es importante señalar que si los alumnos comprenden el concepto y saben aplicarlo se logra un aprendizaje más significativo y valioso en su formación. Además, serán capaces de argumentar y resolver situaciones problemáticas usando un lenguaje formal y disciplinar más avanzado.

En este contexto y en el marco de la asignatura "Geometría Analítica", ubicada en primer año, segundo cuatrimestre del Plan de Estudios (PE) de la carrera de Profesorado en Matemática (PM) que ofrece la Facultad de Ciencias Exactas y Tecnologías (FCEyT) de la Universidad Nacional de Santiago del Estero, se estudian los contenidos curriculares "Cónicas" y "Superficies Cuádricas" interrelacionándolos a través de las intersecciones de estas últimas con los planos coordenados y paralelos a ellos. Para este caso en concreto, se utiliza el software didáctico GeoGebra como una alternativa válida y pertinente que propiciará actividades que son complicadas de realizar por otros medios, con el cual pretendemos generar interés y motivación en los estudiantes involucrándolos de tal manera que mejoren sus niveles de adquisición del conocimiento matemático, permitiendo que temas de difícil aprendizaje y visualización como son los propuestos, sean comprendidos utilizando los diversos recursos que brindan estas herramientas, sumadas a la creatividad y la innovación del diseño.

Con esto se busca que los estudiantes de esta carrera, y de todas aquellas a las cuales se hace extensiva esta propuesta, como ser Álgebra y Geometría Analítica de las Ingenierías, desarrollen competencias básicas y específicas que permitan superar los obstáculos de aprendizaje de este tema, representar, experimentar y razonar conceptos matemáticos relacionándolos con los distintos espacios curriculares de los Planes de Estudios de las carreras que cursan, aplicar en ejemplos cotidianos y posibilitar una inserción más activa y una mejor integración intra e inter universidad.

2 Desarrollo

La asignatura Geometría Analítica del Profesorado en Matemática de la FCEyT de la UNSE está integrada por cuatro unidades donde se estudian las nociones básicas de la Geometría Analítica Clásica, enfocadas desde un punto de vista vectorial y matricial, desarrollando temas como Vectores en el plano y en el espacio, Recta en el plano y en el espacio, Plano en el espacio, Cónicas y Superficies Cuádricas.

En nuestra experiencia como docentes de esta asignatura hemos notado que particularmente en la unidad correspondiente a Cónicas y Superficies Cuádricas los estudiantes tienen habilidades procedimentales cuando se trata de manipular ecuaciones o fórmulas pero poseen serias dificultades a la hora de visualizar, argumentar o interpretar las gráficas de las superficies como así también las trazas de éstas con los respectivos planos considerados.

Consideramos que esto se debe principalmente a que no han adquirido de forma adecuada los conceptos y se les dificulta su interpretación e interrelación, siendo estos indicadores de que el aprendizaje de los estudiantes no es significativo.

Estas dificultades se observan también en nuestros estudiantes de las carreras de Ingeniería, cuando desarrollan dichos temas en la asignatura Álgebra y Geometría Analítica.

En este sentido, y tomando como base uno de los objetivos específicos del Proyecto arriba mencionado, Implementar estrategias didácticas con la aplicación de entornos virtuales que permitan representar, experimentar y razonar conceptos matemáticos ofreciendo nuevas y mejores metodologías de aprendizaje nos proponemos incorporar nuevas estrategias didácticas mediante el uso de las TIC, las cuales proporcionan a los docentes y estudiantes herramientas mediadoras en todas las áreas del saber, generando nuevas formas de trabajo, nuevos recursos educativos innovadores en los procesos de enseñanza y aprendizaje. En particular, la utilización de una herramienta potente como lo es el software educativo GeoGebra presenta en el proceso de aprendizaje una serie de ventajas como ser el potencial gráfico que facilita la exploración por parte del estudiante y lo mantiene motivado, provocando una retroalimentación inmediata por su característica interactiva lo que favorece el aprendizaje a partir del ensayo – error y el entorno algebraico que evita pérdidas de tiempo, entre otras [2].

A partir de lo expuesto precedentemente, se plantean las siguientes secuencias didácticas para abordar los contenidos curriculares:

- Cónicas: elipse (circunferencia), hipérbola y parábola; dando en cada una de ellas las definiciones correspondientes, los distintos tipos de ecuaciones, sus elementos y características, con sus respectivas gráficas.
- Superficies Cuádricas: elipsoide (esfera), hiperboloide de una y de dos hojas, paraboloide elíptico (circular), cono elíptico (circular), entre otros; analizando en cada uno de ellos sus ecuaciones, características y gráficas.
- Intersecciones de las Superficies Cuádricas con los planos coordenados y paralelos a ellos, analizando y caracterizando las Cónicas que se obtienen.

Además se proponen actividades integradoras para su evaluación, tales como:

1) a) ¿Qué cónica se obtiene como intersección de un paraboloide elíptico de eje $\underline{z}$ con un plano paralelo al plano coordenado xz?. Justifique su respuesta analítica y gráficamente.

b) Defina coloquial y simbólicamente la cónica obtenida en a). Escriba la ecuación de la misma cuando su eje focal es paralelo al eje coordenado $\underline{y}$, indicando todos sus elementos. Grafique usando GeoGebra.

2) a) Estudie la ecuación de un hiperboloide de una hoja de eje $\underline{z}$, centrado en el origen del sistema de coordenadas. Clasifique las intersecciones que se obtienen con planos paralelos a los planos coordenados. Grafique usando GeoGebra.

b) Defina coloquial y simbólicamente la cónica que resulta de la intersección del hiperboloide dado en a), con un plano paralelo al plano coordenado xz. Escriba la ecuación de la misma si el eje focal es paralelo al eje coordenado y, indicando todos sus elementos. Grafique usando GeoGebra.
A modo de ejemplo se resuelve 1)a).
Para ello, dada la ecuación del paraboloide elíptico de eje z:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z}{c} \text{ con } a \neq 0, b \neq 0,\ c \neq 0 \ \wedge\ a \neq b \tag{1}$$

al realizar la intersección de esta superficie con planos paralelos al plano coordenado xz, con $y = y_0$, y dando a y_0 valores adecuados para que los planos asociados a dichas ecuaciones tengan intersección no vacía con la gráfica de la superficie cuádrica, se obtienen parábolas de ecuación:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{{y_0}^2}{b^2}=\frac{z}{c} \tag{2}$$

como se muestra, para un caso particular, en Fig. 1.

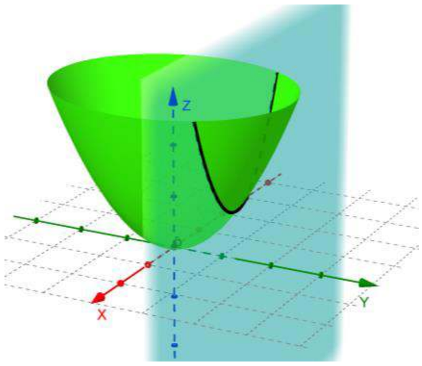


Fig. 1. Intersección del paraboloide elíptico con el plano de ecuación $y=y_0$

2.1 Ejemplo de actividad integradora

Sea el paraboloide circular [3,4], de ecuación:

$$25z = x^2 + y^2 \tag{3}$$

Al presentar esta ecuación a los estudiantes y pedir la representación de la superficie asociada a ella en el espacio tridimensional, es donde les surge la dificultad a la hora de visualizar, argumentar o interpretar la gráfica de la misma. Es por ello que proponemos el uso del software educativo GeoGebra, para la visualización de la superficie como también de las diferentes trazas, desde diferentes ángulos.

La representación gráfica del paraboloide cuya ecuación está dada en (3), es:

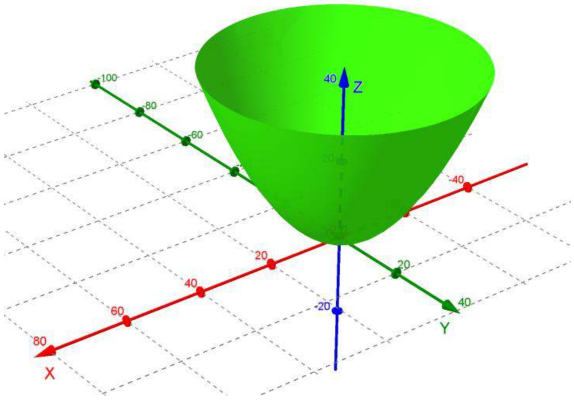


Fig. 2. Gráfica del paraboloide circular.

A continuación analizamos analítica y gráficamente el ejemplo.
Observemos que la:
-Traza con el plano xy , z = 0, es el punto $P = (0,0,0)$
-Traza con el plano xz , y = 0, es la parábola de ecuación:

$$25z = x^2 \tag{4}$$

-Traza con el plano yz, x = 0, es la parábola de ecuación:

$$25z = y^2 \tag{5}$$

cuya representación gráfica está dada en Fig.3 y Fig.4.

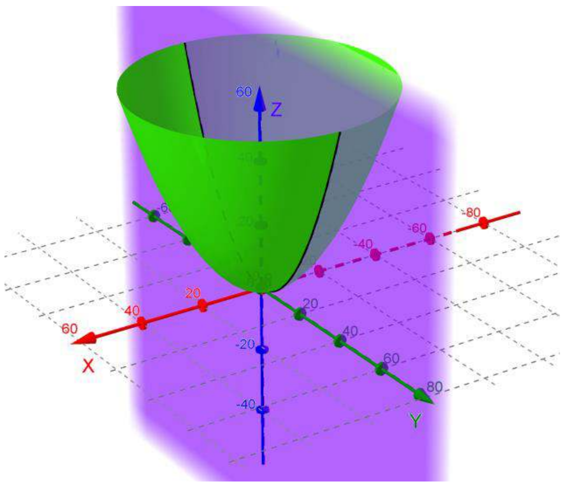


Fig. 3. Traza con el plano coordenado yz.

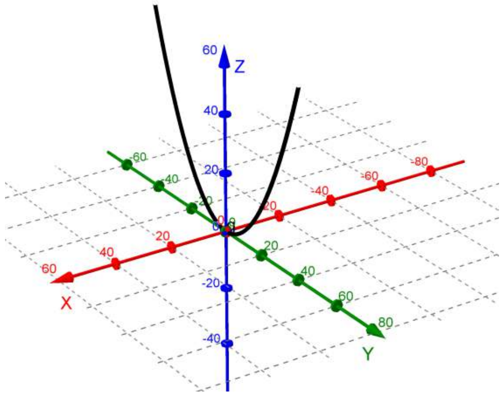


Fig. 4. Gráfica de la parábola cuya ecuación está dada en (5).

De igual manera, al buscar las trazas con planos paralelos a los planos coordenados, haciendo $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0$, y dando a x_0 , y_0 , z_0, los valores adecuados para que los planos asociados a dichas ecuaciones tengan intersección no vacía con la gráfica de la superficie cuádrica (es decir, que corten a la gráfica de la superficie cuádrica), se obtiene que la:

- Traza con el plano yz, $x = x_0$, es la parábola de ecuación

$$25z = x_0^2 + y^2 \tag{6}$$

cuya representación gráfica está dada en Fig.5. y Fig.6. para $x_0 = 20$

- Traza con el plano xy , $z = z_0$, es la circunferencia de ecuación

$$25z_0 = x^2 + y^2 \tag{7}$$

Fig.7 y Fig.8 para $z_0 = 30$

- Traza con el plano xz , $y = y_0$, es la parábola de ecuación

$$25z = x^2 + y_0^2 \tag{8}$$

Fig.9 y Fig.10 para $y_0 = 26$

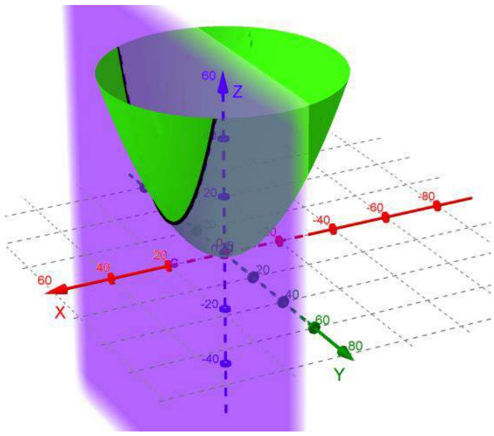


Fig. 5. Traza con el plano paralelo al plano coordenado yz, cuando $x_0 = 20$.

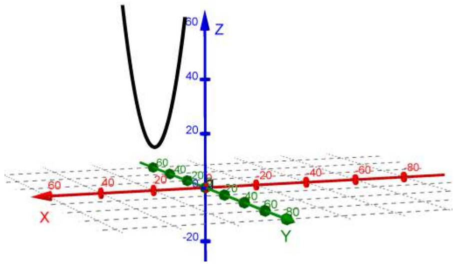


Fig. 6. Gráfica de la parábola cuya ecuación está dada en (6), cuando $x_0 = 20$.

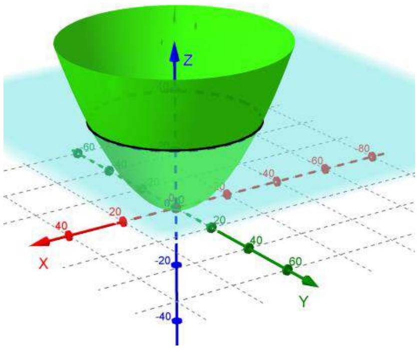


Fig. 7. Traza con el plano paralelo al plano coordenado xy, cuando $z_0 = 30$.

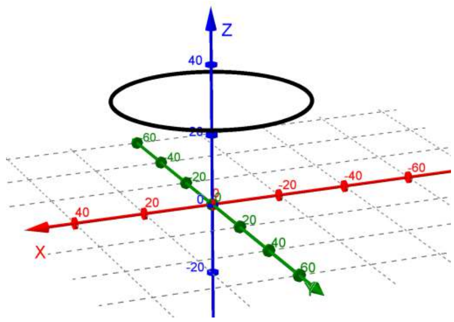


Fig. 8. Gráfica de la circunferencia cuya ecuación está dada en (7), cuando $z_0 = 30$.

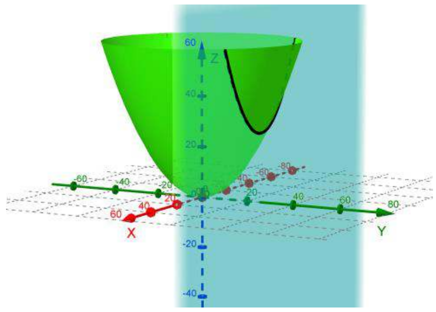


Fig. 9. Traza con el plano paralelo al plano coordenado xz, cuando $y_0 = 26$.

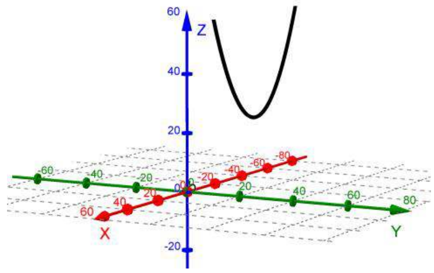


Fig. 10. Gráfica de la parábola cuya ecuación está dada en (8), cuando $y_0 = 26$.

3 Conclusiones

La propuesta presentada diseñada para desarrollar competencias en el estudio del tema Cónicas y Superficies Cuádricas con el uso del software GeoGebra, nos ayuda a reflexionar acerca de las ventajas de la utilización de recursos tecnológicos y el desarrollo de aplicaciones didácticas para convertir la información en conocimiento. Esto permite que el aprendizaje de los estudiantes se realice de manera dinámica y visual, que aprendan de forma significativa los conceptos que se involucran, brindando la oportunidad para que los mismos comparen situaciones reales con situaciones ideales descriptas por los modelos matemáticos.

Referencias

1. Barberá Gregori, E.; Majós, T.; Onrubia, J.; Aguado, G.: Perspectivas actuales sobre la calidad educativa de los procesos de enseñanza y aprendizaje que incorporan las TIC. *Como valorar la calidad de la enseñanza basada en las TIC.* Editorial Graó.pp.29–46 (2008)
2. Rodino, A.M.: Las nuevas tecnologías informáticas en la educación: viejos y nuevos desafíos para la reflexión pedagógica. *Memoria del VII Congreso internacional sobre Tecnologías y Educación a distancia*. Pp. 51-71 (1996)
3. Rafael, B.; Lima, A.; Ledda, V.: "*El Uso del Sofware Geogebra en Asignaturas del Profesorado en Matemática. Su Aporte como Estrategia de Enseñanza*". Libro de Resúmenes de IPECyT. Artículo 73. (2018). http://www.fio.unicen.edu.ar/ipecyt2018
   Rafael, B.; Lima, A.; Ledda, V.: "*El Uso del Sofware Geogebra en Asignaturas del Profesorado en Matemática. Su Aporte como Estrategia de Enseñanza*". Libro de Trabajos Extensos de IPECyT, en construcción. ISBN: en trámite. (2018).
4. Rabuffetti, H.T. Vectores. *Introducción al análisis matemático (Calculo 2).* El Ateneo p.p. 47-71 (1991)

Probabilidad Sin Fórmulas

Lorena Verónica Belfiori[1], Mariana Soledad García[1]
[1] Departamento de Materias Básicas, Facultad Regional Avellaneda, Universidad Tecnológica Nacional
Ramón Franco 5050
lbelfiori@fra.utn.edu.ar, marianagarcia.utn@gmail.com

Resumen. En las clases de Probabilidad y Estadística correspondientes a la unidad de introducción a la probabilidad se construye una comunidad matemática en la que los estudiantes comienzan resolviendo ejercicios sin más teoría que la poca que traen de la escuela secundaria. En grupos o de a pares piensan y responden a situaciones sin la utilización de fórmulas ni de lenguaje específico, cada uno aplica la heurística o estrategia que le resulte más adecuada o más familiar. Luego se va formalizando y creando consensos sobre la escritura. Para evaluar los conocimientos, los alumnos dispuestos de a dos para debatir, deben resolver distintas situaciones problemáticas pudiendo hacer uso de sus apuntes. Esta metodología utilizada durante los últimos años arroja para el presente un promedio de 77% de aprobación y una alta fijación de los conceptos por ser adquiridos a través de un aprendizaje significativo.

Palabras Clave: Probabilidad, Aprendizaje significativo, Estrategias de enseñanza.

1 Introducción

Vivimos en un mundo en el que es necesario construir constantemente la ciudadanía, un lugar caracterizado por el azar donde es imprescindible comprender distintas situaciones aleatorias y tomar decisiones adecuadas. Gómez-Chacón [1] afirma:

> Las sociedades democráticas necesitan ciudadanos reflexivos que puedan plantearse los grandes temas que en ellas se suscitan (las migraciones, la multiculturalidad, el gran avance tecnológico, las fuertes desigualdades, etc.); ciudadanos que sepan construir su propia opinión y que participen activamente en las decisiones sociales. Sujetos que sean miembros conscientes y activos en una sociedad democrática, que conozcan sus derechos individuales y sus deberes públicos. Ante esta demanda, la educación matemática contribuye a esa formación, asumiendo que las matemáticas juegan un papel esencial en la formación de un ciudadano responsable. (Gómez-Chacón, 2010, pág.59)

Muchas veces se utiliza la intuición y la experiencia para entender el mundo. En la concepción más moderna, se considera que las intuiciones son cogniciones rápidas y automáticas, habitualmente subconscientes que pueden explicarse en términos de heurística, es decir, se consideran una especie de atajo para aprender, descubrir y resolver problemas que, aunque falible, puede ser adecuado en determinadas circunstancias de incertidumbre.

La cátedra de Probabilidad y Estadística de la UTN Facultad Regional Avellaneda, opina que el razonamiento intuitivo-estadístico se desarrolla con la contribución de la experiencia, la capacitación o instrucción formal, y en virtud de una progresión en el dominio del lenguaje y del conocimiento. Por tal motivo, se propone el estudio de la unidad de introducción a la probabilidad desde un punto de vista intuitivo, haciendo uso del sentido común y sus experiencias. Se les presenta a los estudiantes distintos ejercicios que pueden resolverse desde sus conocimientos cotidianos. El trabajo se realiza sin exigencia de vocabulario ni notación específica de la materia. Los alumnos escriben las resoluciones expresando a su manera la solución y de a poco se comienza a presentar acuerdos en las formas de escribir las resoluciones a las situaciones presentadas.

Esta forma de trabajo se opone a los modelos educativos tradicionales que son llamados transmisivos porque la función del profesor es la de ofrecer a los alumnos el conocimiento por medio de métodos habitualmente discursivos. En ellos el docente explica el tema y los estudiantes atienden a esas explicaciones desempeñando un papel prácticamente pasivo. La participación del alumno se limita a la relación con el docente a partir de la exposición de dudas, los comentarios o la respuesta a preguntas. Es decir, en las aulas tradicionales se comienza transmitiendo conocimientos a los estudiantes (incluyendo el análisis y la síntesis) y se espera que los alumnos encuentren las maneras de aplicar dicho conocimiento en futuras acciones prácticas.

En cambio, en el modelo de aprendizaje basado en la experiencia propuesto por la cátedra de Probabilidad y Estadística, se plantea a los estudiantes una serie de actividades que han de desarrollar, a partir de las cuales infieren el conocimiento requerido sin necesidad de que sea el profesor quien lo transmita en primera instancia. Los futuros ingenieros necesitan adquirir ciertas competencias que promuevan habilidades relacionadas con la resolución de problemas, el aprendizaje autónomo y la capacidad para tomar decisiones, autodirigir sus acciones y analizar su impacto. Para el logro de estas competencias, el aprendizaje basado en la práctica es un modelo muy adecuado.

Para facilitarlo, los docentes de la cátedra nos apoyamos en la idea del aprendizaje por la acción y la reflexión propuesta por John Dewey [2]. Este tipo de aprendizaje se diferencia del abordaje tradicional, en que los facilitadores involucran primero a los estudiantes en la acción y luego les piden que reflexionen acerca de la experiencia que han tenido para que descubran los conceptos teóricos.

La propuesta metodológica de Dewey consta de 5 fases:

1. Consideración de alguna experiencia actual y real del estudiante.
2. Identificación de algún problema o dificultad suscitados a partir de esa experiencia.
3. Inspección de datos disponibles, así como búsqueda de soluciones viables.
4. Formulación de la hipótesis de solución.
5. Comprobación de la hipótesis por la acción.

Lo que se busca es crear una verdadera comunidad matemática dentro del aula tal como sugiere Jorge Steiman [3]. Se justifica

> • Porque la matemática tendrá un sentido para cada uno de los miembros de la comunidad y ese sentido puede valer la pena compartirlo.
>
> • Porque la matemática podrá ser un objeto-saber que se construya a partir de la participación de todos y no sólo a partir *de las "facilidades" que ciertos alumnos puedan tener para con ella.*
>
> • Porque en esta comunidad matemática pueden coexistir propuestas de trabajo individual con propuestas de trabajo grupal.
>
> • *Porque también se podrá aprender a trabajar "con" los otros y "a partir" de los otros.*
>
> • Porque la riqueza del trabajo en grupos se logrará a partir de la variedad de oportunidades que el grupo tenga para experimentar un aprendizaje cooperativo. (p. 78)

2 Un poco de historia

Desde los orígenes la principal dificultad para poder considerar la probabilidad como una rama de la matemática fue la elaboración de una teoría suficientemente precisa como para ser aceptada como una forma de matemática. A principios del siglo XX, en 1933, el matemático ruso Andrei Kolmogorov la definió de forma axiomática a través de tres axiomas: la probabilidad de cualquier suceso es no negativa, la probabilidad de un suceso seguro es 1, y la probabilidad de la unión de un conjunto cualquiera de sucesos incompatibles dos a dos (mutuamente excluyentes) es la suma de las probabilidades de los sucesos. Con ello dio su fundamentación matemática rigurosa y estableció las bases para la moderna teoría de la probabilidad que en la actualidad es parte de una teoría más amplia como es la teoría de la medida.

Como indica Servien [4] "allí donde se perfora el suelo de la ciencia se acaba por encontrar las probabilidades". Le Lionnais [5] señala que la probabilidad nace como la meditación sobre los fenómenos concretos, tanto los de la vida corriente como los de las ciencias, debiéndose asumir que la certeza en la verificabilidad de los resultados es imposible y, por lo tanto, debemos conformarnos con cierta probabilidad de veracidad; cuyo cálculo se convirtió en el andamiaje de la inferencia; aunque en sus comienzos no fuera muy aceptado en el mundo no matemático. Así, por ejemplo, a Augusto Comte y Claude Bernard, en el siglo XIX, les costó admitir la validez del cálculo estadístico en Biología y la extensión de la Matemática probabilística tanto a esa ciencia como a las ciencias del hombre (Canguilhem [6]).

Para estudiar la probabilidad de un suceso, es necesario aplicar un pensamiento estocástico, este tipo de pensamiento es distinto al deductivo, comúnmente utilizado en el resto de las ramas de la matemática.

Pero, ¿cómo decidían los antiguos jugadores a qué apostar? Por la intuición. No usaban fórmulas armadas matemáticamente ni teoremas. Para tomar la decisión aplicaban su experiencia e intuición. Obviamente, cuando el jugador se enceguece por el juego pierde todo razonamiento, incluso el intuitivo.

3 Experiencia

La intuición es un tipo de aprendizaje inconsciente basado en las experiencias, que por sus características permite generar conocimiento con una mayor resistencia al olvido. Tal como expresa Fischbein [7], “la fuente básica del conocimiento intuitivo es la experiencia acumulada por una persona en condiciones relativamente constantes”.

La educación experiencial es un modelo de enseñanza que involucra a los estudiantes en una experiencia de aprendizaje que tendrá consecuencias reales. Su diferencia más notoria respecto del modelo de asimilación de información de la educación tradicional, donde se parte de la teoría y se pasa a la práctica, radica en el hecho de que aquí el grupo parte de la práctica para luego construir desde el análisis crítico de la experiencia, la teoría.

> A través de la educación experiencial los estudiantes harán descubrimientos y experimentarán con los conocimientos ellos mismos, en lugar de escuchar o leer acerca de las experiencias de otros. En el camino reflexionarán respecto de sus experiencias, desarrollarán nuevas habilidades, nuevas actitudes y formas de pensamiento. (Kraft & Sakofts [8])

Con el objeto de recurrir a la construcción de ideas mediante métodos que difieren del aprendizaje convencional racional, se propuso a los alumnos de segundo año de la materia Probabilidad y Estadística de todas las especialidades de ingeniería de la UTN FRA una serie de diecisiete ejercicios prácticos correspondiente a los contenidos que permiten el manejo básico de la probabilidad.

Los docentes indujeron el proceso mediante la explicación de la Fórmula de Laplace como única herramienta teórica, la cual a pesar de su simplicidad, fue un punto de partida para que los alumnos alcanzaran, por sí mismos, los contenidos de la unidad. La regla de Laplace permite calcular probabilidades de sucesos aleatorios cuando todos los elementos del espacio muestral son equiprobables. Fue enunciada por Pierre Laplace en su libro Teoría Analítica de las Probabilidades en el año 1812, pero es inconsistente como definición de probabilidad, ya que se establece como una relación de las mismas.

La unidad temática propuesta para este desafío fue de una complejidad reducida, lo que permitió adecuarla, sin dificultades, a este modelo de aprendizaje.

“El estudiante, al encontrarse ante nuevos conceptos, trata de asociar y comparar el nuevo conocimiento con el ya existente dentro de su campo conceptual, e intenta aplicar al nuevo conocimiento nociones referidas al anterior”. (López [9])

Cabe aclarar que el aprendizaje intuitivo es de carácter incompleto, ya que no construye áreas donde no hubo experiencia previa, siendo un ejemplo del mismo la formalización matemática, lo cual obliga a los profesores a efectuarla pasada la práctica.

La conceptualización abstracta a partir de las experiencias previas requiere una reestructuración de las actividades propuestas al momento. Su diseño debe favorecer el razonamiento intuitivo en el alumno, evitando que los mismos recurran ante la falta de estrategias a predicciones o aciertos. Las predicciones, surgen azarosamente, sin un análisis que las fundamente. Al no sustentarse en el conocimiento previo, no permiten adquirir nuevos y se olvidan con relativa facilidad.

Si bien el aprendizaje intuitivo no es una modalidad adaptable a todas las unidades del temario, permite incorporar con mayor solidez las bases necesarias para estudiar los temas subsiguientes.

Así es que en esta experiencia se trabajó principalmente con dos fotocopias con situaciones problemáticas. Inicialmente los estudiantes recibieron una primera fotocopia con seis problemas básicos en los que la dificultad se fue incrementando a medida que se avanzaba en la ejercitación. El primer problema referido a bolitas de diferentes colores colocadas en una bolsa, podía resolverse representando la situación, dibujándola o simplemente imaginando lo que ocurriría aplicando la experiencia previa. Su enunciado es el siguiente:

Se tienen 10 bolitas verdes, 4 rojas, 8 azules y 3 blancas. Si se toma una bolita al azar, calcular la probabilidad de que la obtenida

a) Sea roja
b) Sea verde o azul
c) No sea blanca
d) No sea roja ni sea azul

Los alumnos debatieron la forma de resolver cada ítem y cuando se hizo la puesta en común se evidenció las distintas maneras de resolver la situación problemática, en este caso algunos ítems se podía resolver utilizando el cálculo de la probabilidad del complemento del suceso en estudio. En este caso los sucesos son mutuamente excluyentes y los estudiantes se dieron cuenta de ello aunque no utilizaron esa terminología.

El segundo problema fue discutido más arduamente ya que los últimos incisos ponen condiciones en el espacio muestral por lo que la cantidad de casos posibles se ve modificada. Esta situación problemática se trata de cartones rojos y verdes enumerados por lo que ciertos sucesos no son mutuamente excluyentes por lo cual la metodología empleada en el primer ejercicio no es válida para este segundo. Varios grupos cometieron errores al resolver este ejercicio y fue recién en el momento de la puesta en común cuando comprendieron que su resolución no era la correcta pudiendo aceptar la argumentación dada por los compañeros.

En el tercer problema se dan los datos a través de una tabla de doble entrada, siendo su enunciado:

Una consultora de marketing relevó la preferencia de hombres y mujeres respecto de los envases de cierta bebida mediante una encuesta en los supermercados. Los datos se volcaron en la siguiente tabla:

	A	B
Hombre	25	40
Mujer	35	50

a) Calcular la probabilidad de que un encuestado sea hombre

b) Calcular la probabilidad de que un encuestado haya preferido el envase B

c) Calcular la probabilidad de que un encuestado sea hombre y haya preferido el envase B

d) Se elige un encuestado al azar y resulta ser hombre, calcular la probabilidad de que haya elegido el envase B

e) Para presentar en informe hicieron dos tablas de valores porcentuales. Completen las tablas y expliquen el significado de los valores en las celdas sombreadas.

	A	B	
Hombre			100%
Mujer			100%

	A	B
Hombre		
Mujer		
	100%	100%

En este caso no tuvieron, en general, problemas para interpretar la información y responder los ítems en los que se preguntaba acerca de la probabilidad, siendo algunas de estas referidas a una probabilidad condicional. El debate realizado en los dos problemas anteriores fue lo suficientemente fructífero para crearles confianza para resolver este ejercicio. En el ítem que mayores inconvenientes tuvieron fue en el que se les pide completar dos tablas de doble entrada aparentemente iguales pero en las que se considera cada fila en un caso y cada columna en el otro como el 100%. Estas tablas se piden en forma porcentual y cada una representa un espacio muestral distinto (se refieren a probabilidades condicionales). Una vez que lograron ponerse de acuerdo con la forma en que quedan las tablas, también tuvieron ciertas dificultades para traducir al lenguaje coloquial cotidiano la lectura de la información de una celda particular.

En el cuarto problema, se plantea una situación problemática en la que se dan los datos en forma porcentual y son los estudiantes los que deben interpretar la información encontrando la diferencia de utilizar o no la palabra “solo” en un dato. A continuación es posible visualizar lo expresado en su contexto original.

En una fábrica se hacen artículos que pueden tener dos tipos de fallas. El 10 % tiene solo la falla A, el 20% solo la falla B y el 55% no tiene fallas. ¿Cuál es la probabilidad de que una pieza tenga las dos fallas?

Como se detalla anteriormente, cuando se dice que el 10% de los artículos tienen solo la falla A es diferente a decir que el 10% tienen la falla A. Esta expresión fue de gran discusión e incertidumbre en el interior de cada grupo.

En el problema cinco se hace hincapié en que los alumnos puedan diferenciar cuando un dato se refiere a una probabilidad condicional o a la intersección de dos sucesos. Esta situación problemática generó confusiones y se debió argumentar bastante para que se comprendiera la diferencia.

En el sexto problema se expone una situación problemática referida a una mezcla en la que debe utilizarse la noción de partición. Algunos estudiantes utilizaron distintos tipos de gráficos para representar los datos e interpretarlos. Unos intentaron armar un diagrama de Venn y otros diagramas de árbol, algunos usaron multiplicaciones y otros regla de tres para hallar la solución numérica. Estos últimos fueron los que más inconvenientes tuvieron para entender la respuesta y descubrir el porqué su razonamiento no era el adecuado cuando llegaban a conclusiones erróneas.

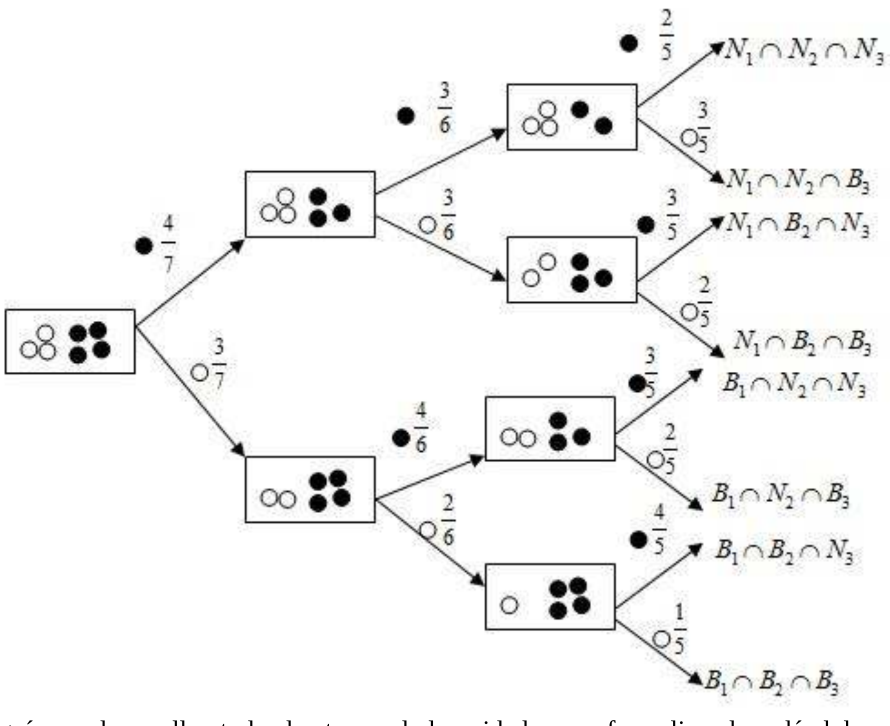
Luego de trabajar esta primera fotocopia durante dos clases, se les entrega una segunda fotocopia con los siguientes once problemas que ayudan a redondear los temas de la unidad.

En el séptimo problema se propuso asociar ciertas probabilidades con su representación gráfica en el diagrama de Venn. En este ítem, los alumnos, generalmente confunden la probabilidad de la ocurrencia de un determinado suceso con aquella en la cual se considera el suceso sin su intersección.

En el octavo, noveno y décimo problema, a partir del concepto de probabilidad condicional, se introducen dos teoremas: el de probabilidad total y el de Bayes o de las Causas a los cuales arriban de manera intuitiva sin grandes dificultades.

En los problemas 11 a 17, se llega gradualmente en forma gráfica y analítica al concepto de independencia estadística entre dos sucesos. Generalmente este contenido no presenta problemas importantes en su interpretación, por la simplicidad de la condición de independencia. Pero es notable, que cuando los ejercicios requieren considerar todos los casos en que se da la situación planteada y sus ordenamientos, los resultados dejan de ser tan óptimos. A modo de ejemplo, a continuación se incluye uno de los problemas que forma parte de este conjunto.

En una caja hay 4 bolitas negras y 3 blancas y se extraen 3 bolitas, una tras otra, sin reponer. Los resultados posibles y sus probabilidades se pueden representar en un diagrama de árbol. Calculen la probabilidad de obtener todas blancas. Para ello, utilicen el siguiente diagrama.



Con estas dos guías se desarrollan todos los temas de la unidad, se va formalizando y dándole nombres a las cuentas, transformadas ahora en fórmulas, que fueron utilizadas para hallar la respuesta a cada problema, se construyen los conceptos de probabilidad condicional así como de sucesos mutuamente excluyentes e independencia. Del debate se deducen propiedades y se logra formalizar la definición axiomática de probabilidad. Todo esto partiendo de los conocimientos previos de los estudiantes, de su experiencia e interacción.

Por otra parte, además de estos problemas que fueron trabajados exhaustivamente en clase, los estudiantes disponen de ejercicios en la guía de práctica. Estos se entregan con sus respuestas para que practiquen en forma autónoma y consulten con los docentes ante cualquier duda.

4 Análisis de los resultados obtenidos

Luego de trabajar durante algunas clases con guías que contienen distintas situaciones problemáticas, después de varios momentos de debate entre grupos o pares de estudiantes pensando las diferentes maneras de resolver cada problema, los alumnos son evaluados a través de un parcialito, de a dos, pudiendo utilizar la carpeta o apuntes propios. En caso de aprobar este examen, se considera aprobado uno de los ejercicios del parcial; caso contrario (estudiantes desaprobados o ausentes) deberán resolver todos los ejercicios del parcial incluyendo los que corresponden a la unidad de introducción a la probabilidad.

Tal como se ve en la tabla 1 referida a los resultados del parcialito, en todas las comisiones los resultados fueron satisfactorios. En promedio hubo un 77% de aprobados entre los presentes y en general hubo un alto porcentaje de presentismo (un 75%) y, salvo en 2°21 correspondiente a Ingeniería Química en el que la cantidad de grupos aprobados y desaprobados es la misma, en todos los otros cursos el porcentaje de aprobados supera en demasía al de desaprobados. Por ejemplo, en Ingeniería Civil hay un 90% de aprobados sobre los presentes mientras que en Ingeniería Mecánica hay un 83% de aprobados. Es de destacar el rendimiento de 2° 41 correspondiente a Ingeniería Eléctrica en que hubo un 100% de aprobados entre los presentes, siendo uno sólo el ausente, es decir, más de un 97% de aprobados totales en ese curso.

Tabla 1. Resultados de los exámenes evaluados durante el año 2018. Fuente: elaboración propia.

1er PARCIALITO - CICLO LECTIVO 2018						
CURSO	INGENIERÍA	PRESENTES	INSCRIPTOS	AUSENTES	APROBADOS	DESAPROBADOS
2° 31	Civil	31	33	2	29	2
2° 32	Civil	30	38	8	26	4
2° 41	Eléctrica	34	35	1	34	0
2° 15	Electrónica	23	58	35	14	9
2° 11	Electrónica	25	28	3	22	3
2° 12	Electrónica	30	38	8	19	11
2° 51	Industrial	32	43	11	26	6
2° 52	Industrial	46	58	12	28	18
2° 101	Industrial	21	34	13	17	4
3° 1	Mecánica	23	32	9	19	4
2° 21	Química	28	36	8	14	14

Desde el año 2016, se propuso incorporar esta modalidad a los cursos regulares, obteniéndose resultados similares en el rendimiento de los estudiantes, lo cual se vio reflejado en las calificaciones de los parciales.

El dinamismo del método permitió que los alumnos sean partícipes del proceso de enseñanza y aprendizaje compartiendo el armado de conceptos con el docente, integrándose y familiarizándose con el lenguaje estadístico con un menor grado de dificultad y rigidez.

Cabe destacar, que integrar al estudiante en la construcción de la teoría es un proceso importante en los primeros años de una carrera universitaria, ya que permite aumentar su confianza reduciendo el temor a fracasar ante la dificultad de los temas y la vertiginosa vida universitaria que tanto difiere de la educación secundaria.

5 Conclusiones

La no exigencia del uso de una notación específica sino la construcción de la misma a través de consensos, así como el trabajar sin las fórmulas impuestas sino con las que ellos mismos armaban, facilitó la confianza de los estudiantes en sus posibilidades de resolver lo planteado.

El aprendizaje basado en experiencias previas mostró resultados favorables en la incorporación de contenidos básicos. Si bien todas las especialidades de ingeniería tuvieron un desempeño similar, las ramas ligadas al diseño de operaciones, equipos y procesos (por ejemplo eléctrica, mecánica, civil y química) tuvieron una mejor adaptación a la misma, favorecida por las características propias de la carrera, donde las herramientas adquiridas se utilizan para diseñar y modelar soluciones desconocidas a ciertos problemas que se generan.

Este método es apropiado para impartir los temas iniciales de una materia, con la ventaja de una sólida incorporación de los mismos frente al modelo de aprendizaje tradicional, lo que lo convierte en una opción didáctica para el aula.

El debate continuo de cada uno de los ejercicios tanto de la práctica como de la evaluación enriqueció la experiencia y facilitó la adquisición de los conocimientos.

Referencias

1. Gómez-Chacón, I.: "Matemáticas: mente disciplinar, mente creativa, mente ética. Una propuesta de educación ciudadana", en Callejo y Goñi (cords.), Educación matemática y ciudadanía Barcelona: GRAÓ, pp. 59-88 (2010)
2. Dewey, J.: El arte como experiencia. Ediciones Paidos Ibérica S.A. Barcelona. (1938)
3. Steiman, J.: El aula: "una comunidad matemática". En Villella, J. (comp.) Números y formas: ¿los contenidos de la matemática escolar? Montevideo, Espartaco, pp. 64-80 (2005)
4. Servien, P.: Azar y Matemáticas. Las grandes corrientes del pensamiento matemático. Buenos Aires: EUDEBA SEM. (1975)
5. Le Lionnais, F.: Las grandes corrientes del pensamiento matemático. Buenos Aires: EUDEBA. (1976)
6. Canguilhem, G.: Estudios de historia y de filosofía de las ciencias. Buenos Aires: Amorrortu. (2009)
7. Fischbein, E.: Intuition in Science and Mathematics: An Educational Approach. D. Reidel. Dordrecht, Holanda. (1987).
8. Kraft, D.: Sakofs, M.: La teoría de la educación experimental. Boulder, CO: Association of Experiential Education. (1988)
9. López, C.: La intuición y la matemática. Buenos Aires: UP. (2018)

Enseñando el concepto de derivada a través de clase invertida

Georgina Beatriz Rodríguez, Carina Pacini, María Celeste González
Facultad Regional San Nicolás, Universidad Tecnológica Nacional
Colón332, 2900 San Nicolás, Buenos Aires, Argentina
{grodriguez, cpacini, mcgonzalez}@frsn.utn.edu.ar

Resumen. Este trabajo presenta una experiencia de cátedra de un curso de Análisis Matemático I de primer año de carreras de Ingeniería de la Facultad Regional San Nicolás, Universidad Tecnológica Nacional. El objetivo de esta experiencia es aplicar la metodología de clase invertida al introducir el concepto de derivada de una función, promoviendo el aprendizaje autónomo y el trabajo colaborativo entre pares. Este modelo se centra en el estudiante, con el docente desde un nuevo posicionamiento. Para el desarrollo de la experiencia se seleccionaron videos existentes en la Web, aprovechando la variedad disponible sobre el tema. Se propuso a los estudiantes una secuencia de actividades para realizar luego de la visualización de los mismos, fuera del horario de clase, y posteriormente en la clase se debatió sobre dichas actividades y se realizaron nuevas, con acompañamiento docente. Los resultados fueron satisfactorios, por lo que se agregará próximamente una segunda etapa a la experiencia.

Palabras Clave: Enseñanza. Aprendizaje autónomo. Trabajo colaborativo. Clase invertida.

1 Introducción

Para lograr el aprendizaje en el estudiante universitario es necesario captar su atención, aprovechar sus habilidades y potenciarlas. Esto requiere un cambio sustantivo en la forma de enseñar, en la forma de pensar las clases, utilizando las tecnologías disponibles y sin perder de vista que se aprende de diferentes maneras.

Centrando la atención en carreras de ingeniería, desde esta mirada, se debería aprovechar aún más las ventajas que brindan las nuevas tecnologías, adecuándose a los nuevos modos y nuevas posibilidades de obtener información en forma inmediata y variada que tienen los estudiantes hoy.

En ese contexto, y con la intención de innovar para mejorar el aprendizaje de los alumnos, el Grupo Ingeniería & Educación está desarrollando el proyecto de investigación "Ensayo y análisis del impacto del modelo de 'la clase invertida' en cursos de carreras de Ingeniería", en la Facultad Regional San Nicolás (FRSN), de la Universidad Tecnológica Nacional. El objetivo general del proyecto es desarrollar y aplicar la metodología de "clase invertida" en distintas asignaturas de matemática en carreras de Ingeniería que se dictan en la FRSN e indagar el impacto que produce en los estudiantes y en los docentes, además de analizar los resultados del aprendizaje de los estudiantes bajo esta nueva metodología de enseñanza.

En el marco de este proyecto, se realizan experiencias de cátedra desde el año 2016 en un curso de Análisis Matemático I de primer año de carreras de Ingeniería, donde se fueron seleccionaron distintos contenidos para ser abordados mediante la tecnología de aula invertida [1-3]. En esta oportunidad se describe la primera experiencia correspondiente al año en curso, 2018, en la cual se introdujo el concepto de derivada a través de este modelo de enseñanza. Para evaluar esta experiencia, se encuestó a los alumnos con el propósito de indagar su opinión sobre esta metodología de enseñanza y respecto a los videos propuestos. Por otro lado, se tomaron notas de clase registrando el desempeño de los estudiantes en la clase presencial.

2 Objetivo

El objetivo de esta experiencia es aplicar la metodología de clase invertida en un contenido específico de Análisis Matemático I, haciendo hincapié en las actividades de la clase presencial, para promover el aprendizaje autónomo en los estudiantes y favorecer el trabajo colaborativo entre pares.

3 Fundamentación

Para utilizar en la enseñanza herramientas brindadas por las tecnologías de la comunicación y la información (TIC) se requiere conocimiento y criterio de selección de recursos. Mediante la generación de espacios de reflexión, los docentes pueden replantear las estrategias de enseñanza a utilizar, intentando situar la atención del estudiante en el objeto de estudio; organizar la información que se pretende que el estudiante maneje; promover el aprendizaje autónomo en los alumnos a través de una adecuada vinculación entre los conocimientos previos y los nuevos; y promover el trabajo colaborativo entre pares.

El desarrollo tecnológico, de uso diario en la vida social, acompaña el proceso de enseñanza y aprendizaje en la medida que el docente brinde el espacio adecuado, promueva un ambiente que genere una sinergia entre la presencialidad y la virtualidad en la enseñanza, donde la autonomía del estudiante se manifiesta mediante un aprendizaje significativo y colaborativo en nuevos entornos de trabajo.

En una clase tradicional el docente tiene el papel protagónico, desarrolla los contenidos y el estudiante, desde un posicionamiento pasivo, copia, escucha. En cambio, el aula invertida o Flipped Classroom es un nuevo modelo que consiste en asignar a los estudiantes, protagonistas del proceso, tareas para realizar en casa, y se deja para trabajar en la clase aquellas actividades que requieran mayor participación, creación, evaluación, análisis y aplicación [4].

El aula invertida se trata de un nuevo modelo educativo, que requiere tener una perspectiva integral de lo que se pretende enseñar y pensar la manera de hacer que el estudiante tome protagonismo en el proceso de aprendizaje.

La posibilidad de acceso al uso de las TIC ha favorecido el incremento y variedad de recursos útiles tanto para los alumnos como para los docentes, en particular videos que son utilizados como material didáctico.

Se entiende como material didáctico al conjunto de medios o recursos que intervienen y facilitan los procesos de enseñanza y aprendizaje, y pueden ser tanto físicos como virtuales. Deben despertar el interés de los estudiantes. Pueden servir para aplicar una técnica concreta en el ámbito de un método de aprendizaje determinado [5]. Un material didáctico no es el recurso en sí mismo, sino que es el recurso sumado a la forma en que se utiliza. Los videos actualmente se han convertido en un potente material didáctico, habiendo infinidad de ellos disponibles en la web.

El aula invertida no solamente hace uso de videos para realizar actividades fuera de la clase, sino que brinda al profesor la posibilidad de realizar un seguimiento más definido de los estudiantes, por el tipo de actividades que se pueden realizar durante la clase, y la experiencia resultará exitosa en la medida en que cada estudiante logre: ser capaz de recordar información aprendida; hacer propio aquello que ha aprendido; aplicar las habilidades adquiridas a nuevas situaciones; solucionar problemas a partir del conocimiento adquirido; crear, integrar, planear y presentar nuevas maneras de hacer; y exponer juicios de valor [6].

Para recorrer este camino el docente, con una adecuada preparación y orientación sobre recursos educativos disponibles, podrá diseñar estrategias y metodologías centradas en el estudiante que incluyan actividades individuales y grupales, adaptadas a sus necesidades, para que los alumnos alcancen los resultados de aprendizaje propuestos. Se replantea el rol del profesor. Este modelo, considera primordial la identificación de las competencias que se han de desarrollar en el estudiante, ello requiere que desde el comienzo del proceso de aprendizaje se informe al alumno de las competencias y el plan de acción que permita el cumplimiento y evaluación de las actividades propuestas por el docente, para alcanzar su desarrollo [7].

Antes de decidir la estrategia que se va a utilizar con los estudiantes, el docente debe identificar con antelación los conceptos a ser enseñados; qué es lo que los alumnos deben aprender y cómo activar los conocimientos previos. Debe determinar qué actividades promueven la relación de lo aprendido con lo nuevo por aprender, y de qué manera promover el aprendizaje autónomo, el cual se define como: "...un proceso donde el estudiante se autorregula siendo consciente de sus propias formas de organización del trabajo. Uno de los retos más importantes es la determinación de los objetivos del estudio" [8].

Para promover este tipo de aprendizaje, el docente debe crear condiciones para que el estudiante aprenda a aprender, debe generar entornos apropiados, crear un ambiente propicio para favorecer el aprendizaje en los estudiantes. Es un proceso en el cual el estudiante toma conocimiento de sus procesos cognitivos y socio-afectivos, y requiere por parte del docente un esfuerzo pedagógico para acompañar al estudiante en su formación, en solucionar situaciones de su propio aprendizaje y no sólo en resolver una tarea determinada por el docente. Se debe orientar al estudiante a que realice actividades en las cuales exista el espacio para que cuestione, analice, proyecte, examine y valore su accionar en el aprendizaje. Este proceso de enseñanza tiene como objetivo desarrollar niveles de comprensión y de control del aprendizaje por parte de los estudiantes, es decir desarrollar conductas de tipo metacognitivos [9]. El docente debe definir actividades en las cuales los estudiantes sean los protagonistas del proceso de aprendizaje, siendo conscientes de ese protagonismo, y para lograrlo se requiere del docente un cambio de actitud, de posicionamiento frente al estudiante, que lo lleva a revisar su propia práctica y ver nuevas formas de enseñar, y del estudiante, interés y compromiso por aprender.

4 Desarrollo

Las nuevas tecnologías han provocado un impacto en las comunidades educativas, lo que ha llevado a reflexionar sobre cómo efectuar su uso con el estudiante en forma adecuada y oportuna.

En esta oportunidad se ha decidido realizar una nueva experiencia de Aula Invertida en un curso conformado por 25 estudiantes, un profesor y un ayudante, con una buena relación docente/estudiante, permitiendo llevar a cabo un seguimiento exhaustivo al grupo y a cada individuo para el abordaje del contenido "Derivada de una función".

Para lograr un trabajo coordinado, y asegurarse de que los alumnos reciban las consignas para realizar previas a la clase (lo que no necesariamente garantiza la realización de las mismas), se armó un grupo de Whatsapp con los estudiantes y docentes del curso. Luego, por este medio se asignaron las tareas: la visualización de una serie de videos cuyos links se adjuntaban, y actividades individuales para realizar después de verlos y presentar en la clase presencial.

Los instrumentos de recolección de información, para el desarrollo de la investigación sobre la experiencia, fueron la observación participante, lo que permitió a las docentes realizar notas de campo, y una encuesta de opinión diseñada teniendo en cuenta los videos propuestos en el abordaje del contenido. La encuesta, fue realizada al final de la experiencia, y sirvió para analizar la opinión de los alumnos en cuanto a la nueva metodología de trabajo.

Para el análisis de esta experiencia, se consideraron las siguientes cuestiones: el uso de las TIC por parte de los estudiantes, el nivel de comprensión del lenguaje empleado en cada video, la interpretación de las representaciones presentadas en los mismos y el tiempo que necesitaron para comprender lo expuesto en cada uno de ellos. LA información fue obtenida mediante una encuesta de opinión realizada a los estudiantes, en la cual se les indicó puntuar cada ítem propuesto utilizando una escala de tres alternativas:

1: En desacuerdo;
2: Ni de acuerdo ni en desacuerdo;
3: De acuerdo.

4.1 Videos

Se presentan aquí los cuatro videos seleccionados como material didáctico para el desarrollo de la experiencia.
El primer video seleccionado se refiere al significado de derivada, en el cual se da una explicación gráfica e histórica. Se encuentra disponible en el vínculo https://www.youtube.com/watch?v=ia8L26ub_pc

Los demás videos seleccionados presentan ejemplos prácticos de cálculo de derivadas, llamados parte 1, parte 2 y parte 3, están ordenados en forma creciente de acuerdo a la complejidad del cálculo.

La parte 1 muestra como derivar una constante (donde la constante puede ser una fracción, una raíz, o el número Pi), y una constante por x. La parte 2 se refiere a polinomios, potencias positivas, binomio al cuadrado y la parte 3 trata con raíces, exponentes negativos y fraccionarios. Los siguientes son los links a cada uno de los videos, en el orden indicado:
https://www.youtube.com/watch?v=JwEM-Iyply8&index=2&list=PL9SnRnlzoyX1kIbHdA7GN-6g-hvkyLbWp,
https://www.youtube.com/watch?v=JwEMIyply8&index=2&list=PL9SnRnlzoyX1kIbHdA7GN-6g-hvkyLbWp,
https://www.youtube.com/watch?v=za5QqCZw3Ws&list=PL9SnRnlzoyX1kIbHdA7GN-6g-hvkyLbWp&index=4

4.2 Observación áulica. Notas de campo.

En la clase presencial, se realizó una reflexión general y puesta en común del contenido tratado en los videos. Primeramente, una de las docentes consulta si todos los alumnos pudieron verlos. De un grupo de 25 alumnos, sólo dos mencionaron que no pudieron acceder, por no haber recibido la información. Esto ocurrió porque su asistencia es en general irregular, y las últimas clases no concurrieron, por lo que no dieron sus datos para integrar el grupo de Whatsapp. Además, sus compañeros no los incorporaron porque no sabían si continuaban cursando.

Se pudo observar a los estudiantes entusiasmados por participar, para responder las preguntas generales realizadas por la docente. En primer lugar, se planteó el interrogante propuesto en el primer video, ¿Qué es la derivada?, a través de un debate generado entre los estudiantes, se aportaron algunas ideas planteadas en el video, relacionada a la interpretación geométrica de la derivada. La idea de recta tangente a una circunferencia, nombres de algunos matemáticos y físicos que intervinieron, entre otros ejemplos.

Se propuso realizar una corrección grupal de las actividades, para ello pasó al pizarrón un alumno voluntariamente a comentar su resolución. En particular, la actividad N° 1, que puede verse en la Fig. 1, se resolvió aplicando la definición de derivada (a través del límite del cociente incremental) para calcular la pendiente de la recta solicitada, y luego se verificó el resultado obtenido a través de la tabla de derivadas. Otro estudiante incorporó lo visto en los videos siguientes, relacionados con el cálculo de derivada de funciones potenciales.

La actividad N° 2 fue resuelta por otro alumno, quien voluntariamente graficó en el pizarrón las rectas tangentes solicitadas en la actividad. Entre todos, respondieron el ítem b) de esta actividad.

Actividad individual nº 1:

Dada la función cuya ley es $f(x) = x^2 + 4x$, determinar la ecuación de la recta tangente que pasa por el punto $(-1; f(-1))$. Graficar la curva y su recta tangente.

Actividad individual nº 2:

Teniendo en cuenta que el gráfico de la derecha muestra una función f, se pide:

a) Trazar la recta tangente a la misma en los puntos de la gráfica cuyas abscisas son:

$x = 0{,}5$, $x = 1$, $x = 2$, $x = 5$

b) Analizar en cada caso el signo de la pendiente de las rectas trazadas.

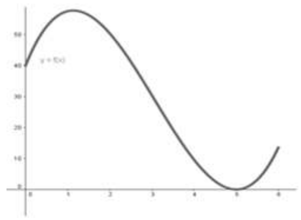


Fig. 1. Actividades para trabajar la derivada en forma gráfica.

Para realizar la actividad N° 3, presentada en la Fig. 2, los alumnos debían ver, de un segundo video, Parte 1 y Parte 2 (con una duración de pocos minutos cada una), donde se explica cómo calcular derivadas de polinomios (entre ellos potencias positivas, binomios al cuadrado).

Actividad individual nº 3:

Hallar las leyes de las funciones derivadas de:

a. $y = x^6$ b. $y = 2x^6 + 1$ c. $y = (x^2 - 3x)^2$

Fig. 2. Actividades para aplicar las reglas de derivación sobre funciones potenciales.

Para realizar su corrección pasaron alumnos al pizarrón en forma voluntaria, y resolvieron muy seguros las actividades, ya que no llevaron sus hojas para copiar la resolución. En particular, para resolver el último, un alumno plantea resolverlo por otro método (utilizando la regla de la cadena que no se había trabajado hasta ese momento).

Finalizando las actividades planteadas, en la última de ellas, presentada en la Fig. 3, los alumnos debieron recurrir a lo explicado en el último video (parte 3 de reglas de derivada), donde se trabaja el cálculo de derivadas de funciones irracionales. En particular, en esta actividad se los observó un poco inseguros al trabajar con el pasaje de raíz a exponente fraccionario. Luego de superar este inconveniente, pudieron fácilmente calcular la derivada de una función potencial.

Actividad individual nº 4:

Hallar las leyes de las funciones derivadas de:

a. $y = \sqrt{x^3}$ b. $y = \dfrac{4}{\sqrt[5]{x}}$ c. $y = -\dfrac{8}{\sqrt[4]{x^3}}$

Fig. 3. Actividades para aplicar las reglas de derivación sobre funciones irracionales.

Para continuar, se les propuso resolver del ejercicio N° 6 de la cartilla de práctica de la asignatura, en el cual deben calcular la derivada de distintas funciones. Los alumnos trabajaron muy bien realizando consultas a sus compañeros, con cierta complicidad refiriéndose a un ejemplo similar trabajado en los videos, o aclarando dudas con las docentes.

Se pudieron trabajar con comodidad los contenidos previstos para esta clase. Los alumnos participaron entusiasmados, en un clima de colaboración con sus compañeros, y mostrando autonomía en su desempeño áulico y evidenciando comprensión del tema a partir de las respuestas dadas a interrogantes realizados por la docente.

Las docentes del curso observaron un cambio de actitud de los estudiantes en cuanto a la participación, en el desarrollo de las clases presenciales posteriores a la experiencia, como también un mayor compromiso en la realización de cada una de las actividades individuales y grupales propuestas.

4.3 Resultados

La encuesta realizada a los estudiantes está dividida en tres partes. La primera se relaciona con el primer video, donde se introduce el concepto de derivada desde la historia, haciendo referencia a matemáticos de la antigüedad. La segunda parte se refiere a los videos que muestran cómo se procede (en la práctica) para derivar a través ejemplos resueltos paso a paso, y la tercera y última parte de la encuesta tiene que ver con el uso de las nuevas tecnologías.

Se presentan en la Fig. 4 los resultados obtenidos en la primera parte de la encuesta.

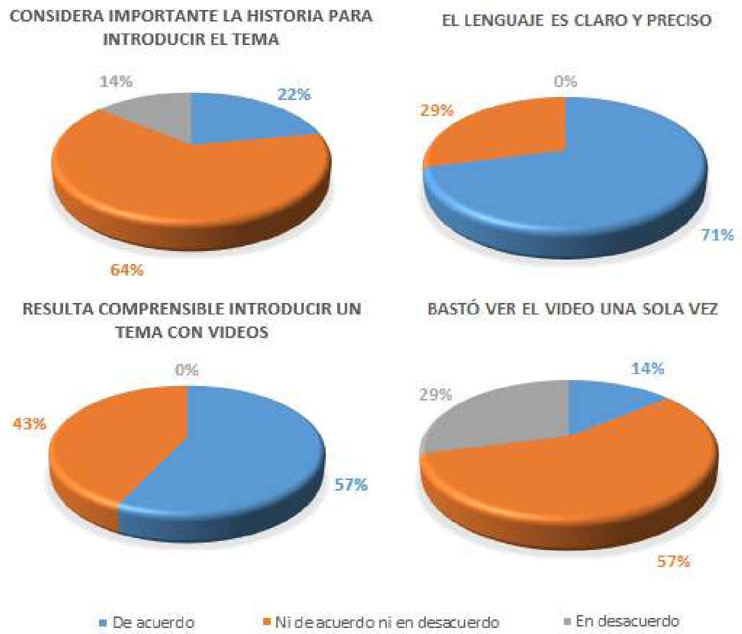


Fig. 4. Opiniones recabadas sobre el primer video.

La Fig. 4 muestra que son pocos los alumnos que le dan importancia a los orígenes de los temas que estudian, ya que sólo el 22% de los alumnos encuestados consideró importante hacer referencia a la historia para introducir el concepto de derivada, y un alto porcentaje no tiene una opinión firme y justificada sobre sus elecciones porque responden mediante la opción "ni de acuerdo ni en desacuerdo".

Se ve también en la Fig. 4 que la mayoría de los estudiantes acuerdan que el lenguaje del video es claro y preciso, no habiendo alumnos que opinen lo contrario. Es un indicador importante para los docentes que deben seleccionar un medio audiovisual para los estudiantes el lenguaje empleado.

Se destaca en esta encuesta la opinión de los alumnos respecto a introducir el concepto de derivada a través de un video, en comparación con el material impreso. Cerca del 60% de los alumnos respondió afirmativamente, mientras que el resto no tiene una posición tomada al respecto.

A partir de las respuestas obtenidas en la última pregunta de la primera parte, donde se indaga si ver el video una vez basta para entender el tema, se observa que un bajo porcentaje estuvo de acuerdo, sólo el 14%, y casi un 30% respondió que no. Esto destaca la ventaja que diferencia el recurso video respecto de una explicación presencial del profesor: el alumno puede "rebobinar" el video todas las veces que quiera, ¡pero no puede hacer lo mismo con el profesor!

La fig. 5 muestra las opiniones de los alumnos recabadas en la segunda parte de la encuesta, con respecto a los videos relacionados con las reglas para el cálculo de derivadas, crecientes en complejidad.

Más de la mitad de los alumnos sostiene que les resulta más comprensible introducir un tema, en este caso la derivada de funciones conocidas, a través de videos en comparación con el material impreso. Esto posiblemente está relacionado con el estilo de aprendizaje de los alumnos, en el análisis realizado en otros cursos de ingeniería se ha dado que en su mayoría los alumnos tienen un estilo de aprendizaje visual-kinestésico [10].

En cuanto al ítem sobre si bastó ver los videos una sola vez para comprender el tema, más de la mitad de los estudiantes no emite un juicio, pero son más los que dicen haber necesitado repetir el video.

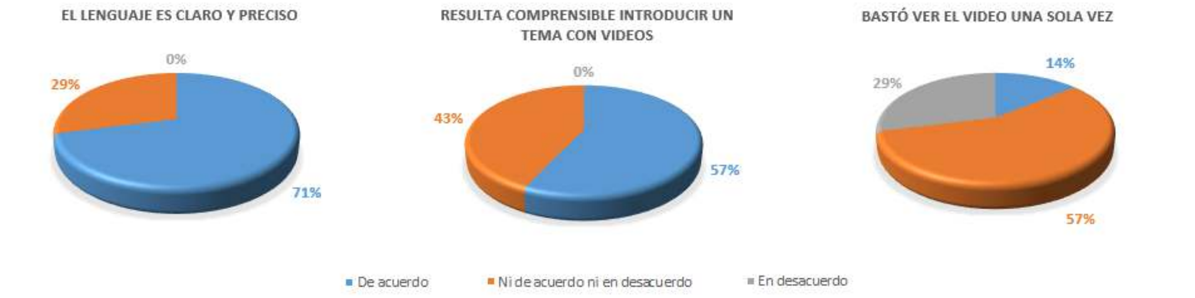


Fig. 5. Opiniones recabadas sobre los videos restantes

La fig. 6 presenta las respuestas a la última parte de la encuesta, relacionada con el uso de las nuevas tecnologías para aprender.

Fig. 6. Opiniones recabadas sobre el uso de las nuevas tecnologías para el aprendizaje

En relación al uso de las nuevas tecnologías, sólo el 8% de los alumnos, no está de acuerdo con que los videos no sean muy extensos para captar la atención e interés. Es decir, prefieren los videos cortos.

En cuanto a la consulta sobre si resulta más beneficioso estudiar en casa con videos y otros materiales sugeridos por los docentes que ir a las clases presenciales, las respuestas fueron variadas, no obstante, sólo el 29% de los alumnos no está de acuerdo con esta afirmación.

Sólo el 7% de los alumnos no cree que sea conveniente dedicar en las clases más tiempo a consultas y ejercicios.

En los comentarios finales solicitados en la encuesta, citaron inconvenientes al bajar los videos, pero que fueron solucionados, dado que tuvieron tiempo previo suficiente.

5 Conclusiones y trabajos futuros

Esta experiencia permitió generar espacios de reflexión individual y colectiva sobre la práctica de los docentes intervinientes, sobre su accionar en el aula, favoreciendo el trabajo colaborativo entre pares, como también brindar el espacio de intervención a los estudiantes y sus aportes en cuanto a las formas más adecuadas para llevar a cabo su aprendizaje. Este trabajo permitió determinar de qué manera se puede cambiar en la posición docente y cómo promover el aprendizaje autónomo y mayor compromiso en el accionar del estudiante.

Desde la posición docente, esta experiencia sirvió para tomar una postura analítica de las estrategias de enseñanza que implementa, a partir de la cual se plantea rediseñar las secuencias de clases y de esa manera dar lugar a un mayor protagonismo de los estudiantes en su propio aprendizaje con un uso apropiado de las TIC.

Desde el lugar del estudiante, el hecho de analizar material audiovisual propuesto por los docentes, lo llevó a tomar un rol protagónico en el proceso de aprendizaje; posicionarse desde un lugar de evaluador de una nueva metodología de trabajo en el aula y fuera de ella; adquirir la habilidad de tomar decisiones con una actitud de reflexión ante cambios posibles de la realidad que lo rodea; y construir una postura que integre los aspectos cognoscitivos, habilidades y pensamiento crítico necesario para aprender nuevos conceptos.

A futuro se trabajará sobre la resolución de las actividades realizadas por los estudiantes a partir de los videos, las cuales fueron entregadas en forma impresa, permitiendo seguir con el proceso de evaluación de los aprendizajes, como también brindar información relevante para poder continuar con esta metodología al abordar otros temas de la asignatura, y realizar una comparación con un grupo de control conformado por estudiantes de otro curso.

A través de las experiencias realizadas, hasta el momento, se infiere que la metodología de clase invertida incide favorablemente en el desarrollo de la autonomía en el alumno, adquiriendo mayor compromiso con su propio aprendizaje y la posibilidad de mejorar la calidad de la formación de futuros ingenieros en la FRSN.

Referencias

1. Rodríguez, G., Pacini C. & Gonzalez, M. C. La clase invertida como estrategia de enseñanza en carreras de Ingeniería. Estudio de caso en Análisis Matemático I, *Anales Primer Congreso Internacional de Enseñanza de las Ciencias Básicas* 8 (2016).
2. Rodríguez, G., Pacini C. & Gonzalez, M. C. La clase invertida como modelo para la enseñanza de integrales indefinidas en un curso de Ingeniería. *Anales Educación Matemática en Carreras de Ingeniería: XX Encuentro Nacional, XII Internacional. Santiago del Estero* (2017)
3. Rodríguez, G., Pacini C. & Gonzalez, M. C. La clase invertida como modelo para la enseñanza de sucesiones y series en un curso de Ingeniería. *Anales VI Jornadas Nacionales y II Latinoamericanas de Ingreso y Permanencia en Carreras Científico-Tecnológicas - IPECyT* (2018)
4. Bergmann, J. y Sams, A. *Flip Your Classroom: Talk to Every Student in Every Class Every Day*. ISTE. (2012)
5. Morales Muñoz, P. *Elaboración de material didáctico.* Red Tercer Milenio. Méjico. (2012) http://www.aliat.org.mx/BibliotecasDigitales/derecho_y_ciencias_sociales/Elaboracion_material_didactico.pdf. Accedido el 21 de Julio 2018
6. Krathwohl, D. A Revision of Bloom`s Taxonomy: an Overview. *Theory into practice. Vol. 41*, N° 4. (2002).
7. Anijovich, R. y Mora, M. Estrategias de enseñanza. Otra mirada al quehacer en el aula. Aique Grupo Editor. Primera edición. Buenos Aires. Argentina. Primera Edición. (2010).
8. Crispín Bernardo, M. L. *Aprendizaje autónomo. Orientaciones para la docencia*. Universidad Iberoamericana. Primera edición electrónica. México. (2011) http://www.ibero.mx/web/filesd/publicaciones/aprendizaje-autonomo.pdf. Accedido el 21 de julio de 2018
9. Martí, E. *Metacognición y estrategias de aprendizaje*, en Pozo, J.I. y Monereo, C. El aprendizaje estratégico. Madrid: Aula siglo XXI, Santillana. (2000)
10. Caligaris M., Rodríguez G. & Laugero L. Learning Styles and Visualization in Numerical Analysis. *International Conference on New Horizons in Education Proceedings Book, Vol* 3, pp 216-222 (2014)

Estadistica Descriptiva, una manera dinamica de enseñanza

Bertero, Regina Susana[1], Ponce, Alejandro Daniel[1]
[1] Departamento de Minas, Facultad de Ingenieria, Universidad Nacional de San Juan
Av. Lib. San Martín (Oeste) 1109 CPA:J5400ARL
San Juan, Argentina
reginabertero@hotmail.com
adponcefelez@gmail.com

Resumen. El trabajo es una experiencia de cátedra de la carrera Ingeniería en Minas. Es habitual que se cuestionen los contenidos de estadística, las preguntas que realizan es, cuál es la utilidad y aplicación de los mismos. Para responder a estos cuestionamientos el equipo de cátedra conformados por ingenieros se enfocaron en la búsqueda de estrategias para lograr que la Estadística fuese atractiva al alumno, y así poder responder a sus inquietudes de los contenidos, en la carrera. El trabajo presentado está referido al tema "Estadística Descriptiva". Se plantea como desafío la obtención de datos de minería y poder reflejar dichos valores mediante gráficos, tablas y medidas. Esta actividad requirió de la necesidad de tener conocimiento en el tema, los alumnos mediante la experiencia pudieron plantear el problema y resolverlo sin inconvenientes haciendo uso de los residuos cognitivos adquiridos. Además, aportaron sus conclusiones que fueron de mucha utilidad.

Palabras Clave: Descriptiva, Estadística.

1. INTRODUCCIÓN

La práctica a analizar pertenece a la materia de Estadística perteneciente a segundo año de las carreras de Ingeniería de Minas e Ingeniería en Metalurgia Extractiva dictadas en el Departamento de Ingeniería de Minas de la Facultad de Ingeniería dependiente de la Universidad Nacional de San Juan.
La materia tiene la opción de ser de promocional realizando el cumplimiento del 80 % de asistencia y aprobación de siete trabajos prácticos, siete ejercicios integradores y dos evaluaciones parciales por cada unidad del programa analítico
La visión y misión del equipo de cátedra es presentar la materia de manera que el alumno adquiera los conocimientos y comprenda la forma de relacionarlos de manera práctica en su vida profesional.
Además, finalizada la teoría se encarga a los alumnos un trabajo, donde deben buscar datos relacionados a su carrera y presentar un informe sobre dichos datos.

2. OBJETIVOS

Objetivos Generales de esta experiencia

Al finalizar el Curso se espera que el alumno logre:

- Conocer y comprender los conceptos y métodos estadísticos presentados en las unidades del programa analítico
- Adquirir habilidad y utilizar el lenguaje técnico.

- Analizar estadísticamente la información obtenida utilizando los programas específicos propuestos (Microsoft Excel, GeoGebra, Statgraphics)
- Analizar críticamente publicaciones científicas
- Comprender la importancia de la interrelación entre la Estadística y la investigación minera como así también en los procesos metalúrgicos
- Ser capaz de realizar juicio crítico en el análisis y resolución de problemas.
- Integrar equipos de trabajo aplicando técnicas de trabajo en grupos en los que se debe respetar la opinión del otro y llegar a resultados consensuados.
- Familiarizarse con el uso de los diferentes recursos tecnológicos propuestos durante el cursado.

3. ACTIVIDADES

La actividad propuesta consiste en conformar un equipo de trabajo de no más de tres integrantes, elegir un tema de interés referido a la explotación [7] o procesamiento de minerales [8] y determinar las medidas de tendencia central vistas en la unidad N°1 de estadística descriptiva [1] [3] [5], realizar el análisis de los datos recopilados y elaborar una presentación para exponer [1] [3] [5].

Esta actividad fomenta el trabajo en equipo, favorece la cooperación entre alumnos y el desarrollo de actitudes positivas para realizar el análisis de la situación elegida [6]. Además, familiariza a los alumnos con el uso de las nuevas tecnologías con aplicación didáctica [6].
El programa del ejercicio integrador n° 1 se desarrolla de la siguiente manera:

Conocimientos Previos	• Debate grupal en el aula para determinar los contenidos previos y sus debilidades. • ppt resumen para retomar y refresacar los temas vistos en la clase anterior (parte teórica y ejemplos prácticos con los distintos tipos de soft) • ppt para presentar la actividad, metodología de trabajo y cronograma)
Actidad Propuesta	• Conformar un equipo de trabajo de no más de tres integrantes, elegir un tema de interés referido a la explotación o procesamiento de minerales y determinar las medidas de tendencia central vistas en la unidad n°1 de estadística descriptiva, realizar el análisis de los datos recopilados y elaborar una presentación para exponer • El enunciado de la actividad se encuentra ubicado dentro del aula virtual
Organización	• Formación de equipos de trabajo • Debate grupal para elección de tema y elección del mismo
Seguimiento	• Clases de consulta presenciales • Foro de consulta del aula virtual
Exposición y Evaluación	• De acuerdo a la fecha prevista se realiza la exposición de los distintos equipos de trabajo. • la exposición no debe durar más de 10 minutos • Para exponer el tema tratado podrán usar los softwares disponibles en forma habitual (procesadores de textos, Power point, Prezi) • Discución y conclusiones de los temas planteadas • Evaluación colectiva • La presentación del trabajo es enviada en forma individual mediante el aula virtual

4. ANÁLISIS DE LA ACTIVIDAD PROPUESTA

Roles del docente y del alumno

- **Rol del Docente:** gestionar la clase organizando los equipos, estableciendo cronograma de entrega de la tarea y asegurando el buen funcionamiento de los recursos a utilizar.
  El docente debe actuar como guía y facilitador del alumno en el proceso de enseñanza-aprendizaje, sirviendo de puente entre el alumno y el conocimiento, haciendo seguimiento y sugerencias del tema propuesto por cada equipo a través de clases de consulta presenciales o en el foro de consultas del aula virtual.
- **Rol del Alumno:** Analizar la situación problemática elegida, obtener conclusiones acordes del tema propuesto.

El rol del alumno es totalmente activo ya que se le propone recopilar, analizar y concluir un tema de su interés relacionado con la temática propuesta en forma grupal.

Posibles Obstáculos Identificados [9] [10]

ETAPA 1: Conocimientos Previos

- **Epistemológico**: escasos conocimientos del tema acarreado de niveles educativos anteriores, poco manejo previos de los software propuestos; para compensar esto se realiza un debate grupal en clases de teoría y prácticas acerca del tema y de acuerdo al sondeo se sugieren que asista a clases de consulta
- **Ontogénético:** poca participación del alumno por temor o verguenza al que dirán, lo que no permite al docente conemplar sus conocimientos previos del tema.
- **Didácticos:** poco tiempo asignado en la planificacion del cursado para realzar nivelación y repaso de los temas

ETAPA 2: Actividad Propuesta

Didácticos: **:** poca claridad en el enunciado del planteo del ejercicio y limitación de la cantidad de computadoras en el gabinete (se sugiere traer computadoras personales en caso de tener y como máximos dos alumnos por equipo)

ETAPA 3: Organización

- Epistemológico: Desorden para organizar y presentar la información
- Ontogénético:**:**. Presentar dificultades para trabajar en equipo.
- Didácticos: baja supervicón del docente en la eleción del tema propuesto

ETAPA 4: Seguimiento

Epistemológico: Confusión de los conceptos aprendidos a la hora de relacionarlos en forma práctica.

Ontogénético: baja automotivación para realizar las actividades

Didácticos: baja supervicón del docente en el seguimientos de los equipos de trabajo. La actividad esta pensada para que los equipos realicen conultas en forma presencial o por foro en el aula virtual; pero hay que tener en cuenta que no todos los equipos tienen la autonomía para concluir el trabajo es por eso que hay que tenerlo en cuenta y contactarlos para ver los avances logrados.

ETAPA 5: Exposición y Evaluación

- Ontogénético: Timidez para realizar la exposición.
- Didácticos: Criterios erróneos a la hora de evaluarse entre pares las disitntas temáticas presentadas; esto se controla entregándo una rúbrica con los criterios a considerar.

Estrategias de Evaluación

La actividad propuesta es parte de la evaluación continua durante el cursado en donde se observará si el alumno respeta normas de conducta, si alumno participa naturalmente en clase o bien se lo debe inducir, cómo se integra a los grupos de trabajo, la forma de expresión oral y escrita.
En la planificación de la cátedra se confeccionan rúbricas de las actividades por separado que serán completadas con un porcentaje de acuerdo al criterio de evaluación que considera si las actividades han sido logradas, parcialmente logradas o no logradas las consignas.
Para aprobar esta actividad deben tener un 70% y contempla el siguiente criterio de evaluación:

Evaluación de Diagnóstico

- Debate grupal en el aula para determinar los contenidos previos y sus debilidades.

Evaluación Procesual

- Se realiza una evaluación grupal de los equipos que exponen; el día de la exposición se le entrega a los presentes una grilla para con una serie de preguntas acerca de cómo calificaría la presentación de cada grupo (análisis de datos, conclusiones y forma de presentación). En función de esta información se establece una calificación final.

Evaluación Sumativa o Término

- Este ejercicio integrador es uno de los 7 ejercicios integradores de la parte de la práctica que esa en función del programa analítico. Estos ejercicios integradores se deben presentar en forma individual asociados a cada unidad del programa propuesto que se van a descargar del aula virtual, y luego de resolverlos se envían por la misma plataforma

5. RECURSOS

Recursos disponibles por el equipo de cátedra y la institución:

- Presentación de diapositivas (ppt)
- Gabinete de computación del Departamento de Ingeniería de Minas (10 máquinas instaladas),
- Materiales disponibles en el aula virtual de la materia correspondiente a la unidad.
- Programas instalados en el gabinete: Microsoft Excel paquete de análisis de datos y fórmulas estadísticas, softwares estadísticos Geogebra y Statgraphics (análisis de variables). Las explicaciones del software se encuentran disponibles en el aula virtual.

Recursos utilizados por los alumnos:

- Aplicación del formato de encueta de Google y encuestas realizadas en forma personal.
- Recopilación de información de la web como para la recolección de datos como el INDEC, Ministerio de Minería Nacional y Provincial.
- Programas instalados en el gabinete: Microsoft Excel paquete de análisis de datos y fórmulas estadísticas, softwares estadísticos Geogebra y Statgraphics

6. CONCLUSION

Debemos enseñar contenidos contextualizados con las tareas y actividades que llevan a cabo los estudiantes. Nuestros estudiantes responden positivamente a problemas del mundo real acorde a la carrera elegida.
Se debe procurar con estos desafíos, que el docente ya no sea un mero transmisor de conocimientos y que los alumnos reviertan la postura de meros receptores.
Se experimentó que, si el alumno es un sujeto pasivo, su proceso de aprendizaje presenta un porcentaje muy bajo de apropiación de conceptos. Entonces sería muy adecuado tener en cuenta que mientras más activa es la participación del alumno, mayor porcentaje de retención de contenidos adquiere.
Se notó que el alumnado se mostró más interesado en la utilidad de realizar un buen estudio preliminar de los datos como base para posteriores estudios estadísticos.
Además, presentaron problemas de la falta de información sobre datos de opinión pública como el uso de soluciones cianuradas y su posible contaminación, en procesos mineros.

Referencias

1. WALPOLE R. Y MYERS R. Probabilidad y Estadística. Ed. McGraw-Hill
2. BOWKER A., LIEBERMAN G. Estadística para Ingenieros. Ed.Prentice-Hall.
3. MILLER R. Y KAHN J. Statistical Analysis in the Geological Sciencies. Ed.Willey and Sons.
4. NEVILLE A. Y KENNEDY J. Basic Statistical Methods for Engineers and Scientists. Ed. International Textbook Company.
5. BERTERO R. Y PONCE A. Apuntes de clases.
6. MAURIN S. Educación emocional y social en la escuela. Ed. Bonum, 2013
7. REYES B. Curso de Metodos de Explotación. 2005
8. Wills B. & Napier-Munn T., “Mineral Processing Technology, An Introduction to the Practical Aspects of Ore Treatment and Mineral Recovery”, 2006, 7° ed., Queensland, Australia
9. Alicia R.W. de Camilloni “Los obstáculos epistemológicos en la enseñanza” Gediza 2001
10. Johsua, Samuel “Introducción a la didáctica de las ciencias y la matemática” Ediciones Colihue 2005

Para Enfrentar las Dificultades en “Serie”

Bontti Griselda[1], Poggio M. Inés[1], Piedrabuena Andrea[1].
[1] Departamento de Ciencias Básicas, Universidad Nacional de Luján
Rutas Nac. 5 y 7, Luján (6700), Buenos Aires
gbontti@hotmail.com, minpoggio@gmail.com, piedrabuena_andrea@yahoo.com.ar

Resumen. Este trabajo se propone enumerar y describir algunas de las dificultades observadas, en relación al tema de las Series numéricas, según nuestra experiencia en la práctica docente en cursos de Análisis I para Carreras de Ingeniería, así como plantear actividades utilizando herramientas computacionales, de modo de ofrecer una alternativa didáctica que colabore con los estudiantes en la superación de las dificultades descriptas.Con el fin de estimular la combinación de varios registros de representación, se propusieron actividades a través de la plataforma digital de la Universidad, complementando la actividad del aula, para las cuales los alumnos debían emplear tanto el registro gráfico como el algebraico. Los resultados de la primera experiencia son alentadores y se espera repetirla y perfeccionarla con nuevos elementos de análisis y valoración.

Palabras Clave: Dificultades, Series numéricas, Definiciones, Criterios de convergencia.

1 Introducción

Las dificultades de comprensión y abordaje de las series numéricas en el curso de Análisis Matemático I nos hacen retomar un trabajo presentado en la edición precedente del Encuentro de Educación Matemática en Carreras de Ingeniería (Poggio et al. EMCI 2017). En aquélla oportunidad nos propusimos, en primer lugar, enumerar y describir –con cierto grado de detalle, y de acuerdo al orden en que cronológicamente se iban presentando– algunas de las dificultades observadas a lo largo de nuestra experiencia en la práctica docente, en cursos de Análisis I para Carreras de Ingeniería. En segundo lugar, pusimos en práctica el objetivo de plantear y diseñar actividades utilizando herramientas computacionales como una alternativa didáctica, que colabore con los estudiantes en el abordaje y superación de las dificultades descriptas en la primera parte de nuestro trabajo, con respeto al el tema series numéricas. [1]

Efectivamente, nuestra preocupación alcanzó tanto a detectar las dificultades que inducen a los estudiantes a cometer ciertos errores que se repiten en grupos, circunstancias y tiempos distintos, como a determinar también cuáles fueron y son las dificultades didácticas que enfrentamos los docentes, que aun con dedicación y cambios de estrategias hacen que a veces parezca que el tiempo no ha transcurrido, ya que nos encontramos frente a situaciones y resultados idénticos.

Una primera conjetura fue que una de las posibles causas de la dificultad y los consiguientes errores, se encontraba en la naturaleza y oportunidad del contenido a enseñar: su ubicación en el contexto del programa de la asignatura, su alejamiento en el tiempo y el consecuente olvido de otras nociones previas que deben suponerse conocidas para facilitar la comprensión del nuevo concepto, tales como el concepto de sucesión, de límite y ni más ni menos que los conceptos de infinitésimo e infinito y el respectivo orden! … sin pretender hacer una lista completa.

Otra cuestión que surgió de nuestras conversaciones y lecturas fue que como sucede con el aprendizaje de muchos temas del Cálculo, existe en los textos y en las prácticas, una fuerte tendencia a la algebrización. Así como asegura Hitt, si la enseñanza del Cálculo se limita a sus aspectos algebraicos, sin atender al uso de otras representaciones, difícilmente los estudiantes llegarán a una comprensión profunda. No es posible que un alumno pueda entender profundamente conceptos de cálculo sin haber desarrollado las habilidades visuales ligadas a su construcción. [2]

El uso de un único registro de representación, y una considerable resistencia a la visualización, hace perder la riqueza y profundidad de algunos conceptos, que si fueran examinados y convertidos a otro registro o transformados dentro de un mismo o más de un registro, sería posible lograr una comprensión más acabada. La posibilidad de manejar dinámicamente los objetos matemáticos en múltiples registros de representación, tal como lo afirma en su teoría Duval, juega un papel preponderante en la comprensión de los conceptos por parte del estudiante. [3]

Actualmente se tiende a la inclusión de las nuevas tecnologías en los ambientes educativos ya que permiten el manejo dinámico de los múltiples sistemas de representación. Uno de los primeros beneficios que se observan con el uso de la tecnología en los procesos de enseñanza y de aprendizaje es la posibilidad de manejar dinámicamente estos objetos matemáticos dentro de esquemas interactivos, difíciles de lograr con los medios tradicionales, como el lápiz y el papel. Mediante la utilización de las Tic, en la introducción del Cálculo diferencial e integral y sus aplicaciones, se ha logrado una aproximación a obtener una interacción más o menos equilibrada entre lo visual y lo algebraico, tanto en los textos que utilizamos en el aula como así también desde nuestras propias prácticas docentes.

Pero ¿qué hacemos con las Series? ¿Cómo lograr que el tratamiento que se dé a ellas no sea meramente algebraico? Que no se reduzca a la aplicación mecánica de criterios de convergencia para los cuales solamente se realizan cálculos o se examinan desigualdades, o se calcula alguna integral, sin alguna visualización gráfica que muestre y haga ver "algo". La responsabilidad es nuestra. Si bien el tema es el último del programa, se da al final del curso cuando al olvido de otros conceptos se agrega la fatiga del fin del cuatrimestre y la acumulación de parciales, el desafío es comenzar a promover la visualización de la convergencia o divergencia de las sucesiones de sumas parciales mediante animaciones que permitan facilitar la comprensión del concepto.

Además, ver e interpretar esas imágenes animadas, o ser capaz de reproducirlas con lápiz y papel, requiere y promueve otras actividades cognitivas más complejas ya que el acto de "ver" está indisolublemente ligado al lenguaje, puesto que para interpretar y construir hay que poner en práctica el razonamiento y explicar verbalmente los procedimientos utilizados para construir o lo que se concluye a partir de lo que se ve. Tal como refiere Duval, esto es lo que sucede con la enseñanza de la Geometría, y en este caso estamos pretendiendo utilizar registros gráficos o geométricos para representar las series.[4]

En nuestro primer trabajo relativo a este tema comenzamos a mostrar las primeras aproximaciones, mientras que, en esta oportunidad, pusimos el esfuerzo en mejorar la propuesta didáctica, tanto desde la selección de los problemas como desde la búsqueda de mejores recursos comunicacionales para hacerla más accesible a los destinatarios desde distintos dispositivos y procurando que pudieran acceder a ella sin necesidad de tener instalados los programas con los que fueron construidas. Por esta razón, deseamos poner en común algunos avances logrados: mostrar la evolución de las actividades desarrolladas, su aplicación en un grupo de estudiantes y la experiencia de los primeros resultados obtenidos.

2 Análisis previo

El objeto de reflexión es muy amplio y nos conduce a revisar con mayor profundidad las diferencias entre los conceptos de dificultades, errores y obstáculos así como sus clasificaciones, causas y consecuencias en cada uno de los momentos y componentes de una situación de aprendizaje. Las dificultades pueden abordarse desde varias perspectivas: el desarrollo cognitivo del alumno, el currículum de la asignatura y el método de enseñanza.

En palabras de Socas, "estas dificultades se conectan y refuerzan en redes complejas que se concretan en la práctica en forma de obstáculos y se manifiestan en los alumnos en forma de errores".[5]

En pocas palabras tenemos que examinar también el rol y la influencia del error en el conjunto del sistema didáctico.

Si nos preguntamos por qué es difícil para nuestros alumnos aprender Matemática, hacer frente satisfactoriamente a un curso de Cálculo, y en particular a los temas que hoy nos ocupan, el estudio de las Series, podemos reconocer varios aspectos donde la dificultad se hace más evidente:

- **La terminología y el simbolismo:** no logran el uso adecuado de los términos técnicos y los símbolos, y confunden la oportunidad y contexto en que corresponde colocar uno u otro. Por ejemplo, deben calcular el límite al término general y escriben el límite de la serie, o sea que mantienen la escritura del símbolo de suma dentro del cálculo del límite.
  A pesar, de la insistencia y los numerosos contraejemplos, persisten en el error de confundir una condición necesaria con una condición suficiente y pretenden probar la convergencia de una serie con sólo probar que el término general es un infinitésimo.
- **Las técnicas de cálculo algebraico:** como están presentes en la mayoría de los problemas del Análisis, interfieren y a veces hasta impiden consolidar el aprendizaje de los nuevos conceptos. Requieren un poco de memorización, hacer un seguimiento cuidadoso de procedimientos complejos, mantener la atención de manera prolongada (suelen advertirse muchas distracciones y errores banales que podrían evitarse poniendo más atención) Por ejemplo un criterio mal aplicado por invertir la razón o el argumento de la raíz, efectuar

cálculos equivocados, o escribir mal el factorial de los pares o de los impares puede conducir a una conclusión equivocada sobre el carácter de la serie que se estudia.

También los cálculos que se hacen en el estudio de las series requieren desarrollar la habilidad de conjeturar o predecir un posible resultado o conclusión y cuando los cálculos no acompañan la conjetura también deben ser capaces de interpretar esa discrepancia y desandar el camino. Hay mucha resistencia a ese trabajo de búsqueda del propio error, no se cuestionan un resultado extraño y dejan todo como está.

Se observa con frecuencia escaso dominio de las propiedades de las desigualdades cuando se aplica el criterio de comparación o cuando se propone una serie geométrica dependiente de un parámetro y se pide hallar el conjunto de valores del parámetro para los cuales converge. Las sucesivas transformaciones del sistema de inecuaciones que debe resolverse suele mostrar serios errores al multiplicar desigualdades por números negativos o tomar inversos.

Los cálculos numéricos que se presentan por lo general son muy sencillos y no requieren del uso de la calculadora para evitar que ésta sea usada para cálculos triviales de manera mecánica y con escaso sentido crítico.

- **Problemas de traducción del lenguaje natural al lenguaje matemático.** Las explicaciones de las clases y de los textos dan lugar a la necesidad de denominar nuevos objetos, enunciar propiedades que los caracterizan o deducir otras, interpretar y traducir informaciones verbales o gráficas de un problema a un procedimiento de cálculo o viceversa.

  Por otra parte, existen términos del lenguaje natural que se utilizan en Matemática con idéntico significado e incluso a veces con significado propio, por ejemplo, términos como “definitivamente” decrecientes, que requieren una definición precisa. Otros, que si bien pertenecen al lenguaje natural, son menos usuales y estudiantes con un vocabulario restringido se resisten a su uso: “mayorar” o “minorar”, y resulta necesario usar también algún sinónimo de uso corriente hasta que se familiarizan con el término. Es claro que el lenguaje natural es el registro que actúa como nexo y soporte en todas las conversiones de un registro a otro o transformaciones dentro de un mismo registro de representación, y a veces su escaso dominio aporta nuevas dificultades.

3 Diseño, elaboración y puesta en marcha de las actividades

Ante la persistencia en ciertos errores, las omisiones en aspectos importantes que permitan distinguir una serie convergente de una divergente, reconocer en qué casos una serie geométrica converge o una serie armónica generalizada diverge, sin confundirse unos con otros, y como esto muchos otros conceptos clave que el estudiante no logra relacionar, hemos enfrentado el desafío de generar una herramienta capaz de facilitar esas operaciones intelectuales, que con nuestras clases tradicionales no logramos estimular.

Hemos puesto en marcha algunas actividades utilizando estrategias de aprendizaje para promover el pensamiento visual, ya que consideramos al igual que Eisenberg & Dreyfus que, además de ser un soporte que ayuda a la intuición, tiene gran importancia en el descubrimiento, descripción y justificación de diversos contenidos matemáticos.[6]

Con este propósito hemos hecho llegar a los estudiantes dos propuestas de trabajo mediante la plataforma digital de nuestra universidad.

La idea principal en la elaboración de estas actividades fue la visualización de diferentes sucesiones asociadas a diversos conceptos concernientes a las series, con sus correspondientes preguntas a responder por los estudiantes y algunas definiciones.

Estas actividades, combinadas con la enseñanza tradicional, pretendieron ampliar y consolidar la comprensión del tema que nos ocupa. La primera de ellas trata del concepto de serie y algunas de sus propiedades; la segunda abarca distintos criterios de convergencia para series de términos no negativos.

La propuesta acompaña el orden que presenta el texto “Lecciones de Análisis I” de Novelli, adoptado para el desarrollo de las clases. Los estudiantes tuvieron una semana para realizar las actividades con lápiz y papel; una vez corregidas se informaron los resultados.[7]

Con posterioridad se trabajó para determinar si las mismas lograron facilitar la construcción del conocimiento y además, para establecer si el uso de instrumentos computacionales logró promover un mejor desarrollo de las habilidades cognitivas de los estudiantes.

Para comunicar de manera compacta y elocuente nuestros propósitos en el diseño de las actividades se presenta la Fig. 1:

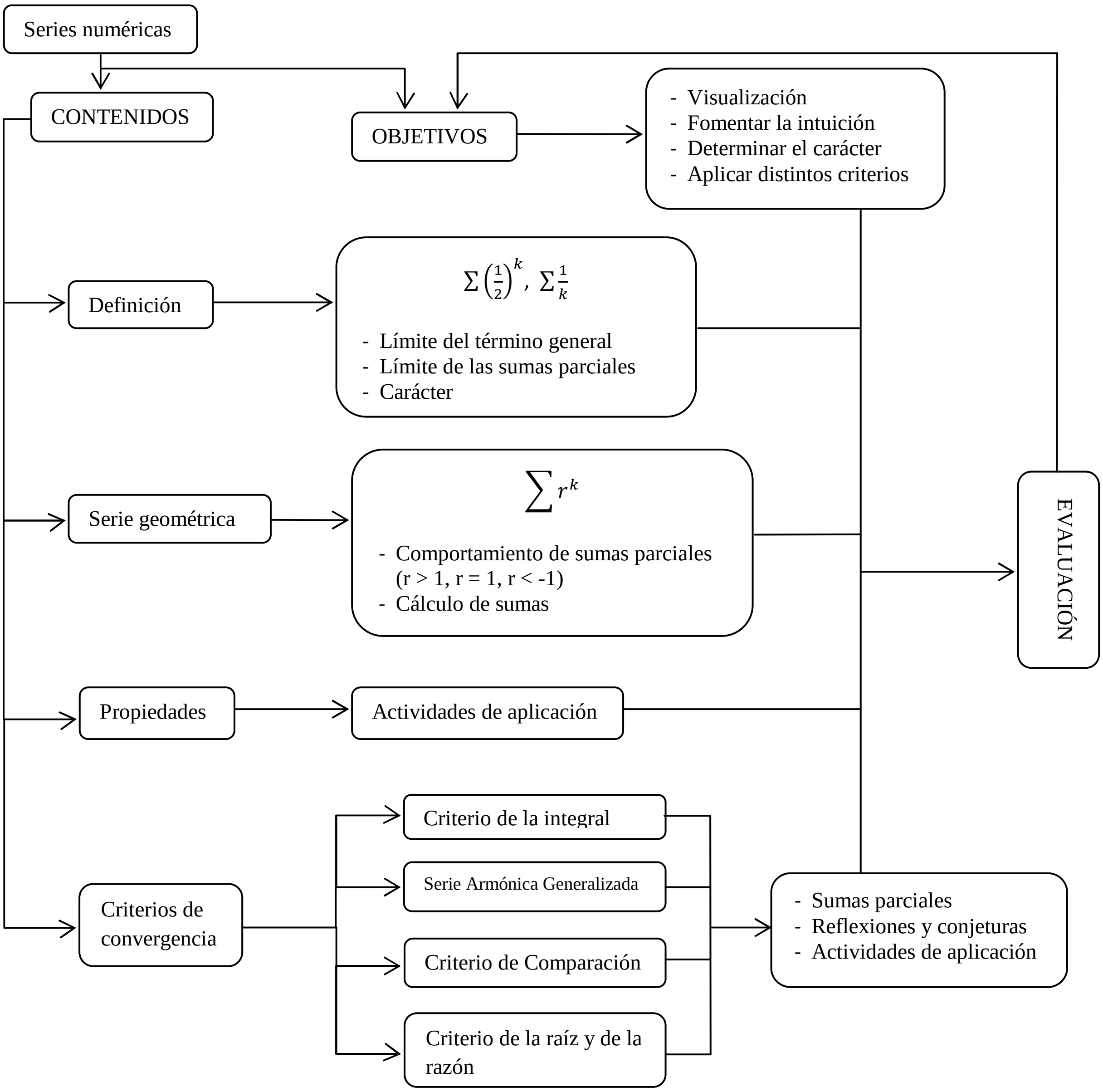


Fig. 1. Planificación de las actividades complementarias a la enseñanza de las series.

4 Resultados obtenidos

4.1. En las actividades propuestas

Se asignaron dos actividades. La primera orientada a presentar la serie geométrica y la serie armónica para contar con dos modelos de series de distinto carácter. Se presentan acompañadas de tablas de valores y gráficos concernientes a las sucesiones de términos generales y de sumas parciales.

A partir de esa información se formulan un conjunto de preguntas para cuyas respuestas se espera que el estudiante aproveche la información que tiene a la vista. Sin embargo hemos observado que aproximadamente un 20% de los que participaron de la actividad, ignoró la información presentada, y en vez de hacer la lectura de la tabla realizó los cálculos de las sumas parciales pedidas, así como calculó los límites en vez de inferir las respuestas a partir de los gráficos. Esto pone de manifiesto la resistencia a la visualización y una mayor preferencia por el cálculo algebraico.

Luego se les presenta la definición de serie y se propone indicar el carácter de las series dadas según los resultados obtenidos anteriormente. A continuación, mediante una imagen interactiva realizada en Geogebra, se propone inferir la condición necesaria y suficiente de convergencia de una serie geométrica, como se muestra en la Fig. 2:

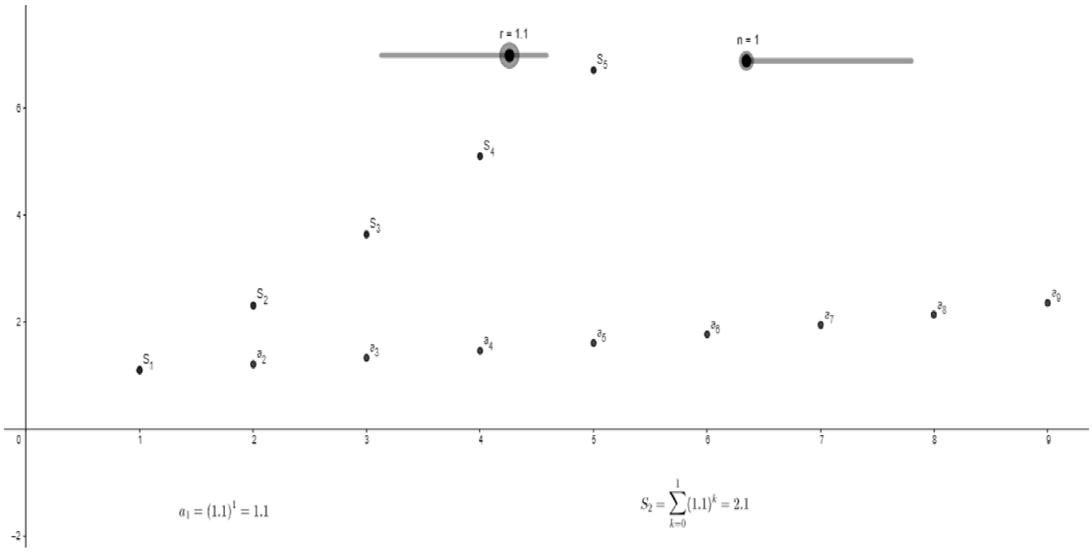


Fig. 2. Relación entre la variación de la razón de la serie geométrica y su carácter.

Una vez más se observó la reticencia a apelar a la visualización, ya que aproximadamente un 25% argumentó no haber podido abrir el enlace (que había sido probado y funcionaba perfectamente) y respondió con información proveniente de otra fuente, como la clase habitual o el texto.

Posteriormente se proponen ejercicios de aplicación de algunas propiedades de las series. En ellos no se ofreció ninguna representación gráfica y por lo tanto el único registro que debía utilizarse era el algebraico y, como es frecuente en estos casos, reaparecen los obstáculos referidos al escaso manejo operativo que muestran los estudiantes ante cálculos sencillos.

La segunda actividad trata exclusivamente de criterios de convergencia para series de términos no negativos presentados mediante imágenes interactivas realizadas con Geogebra.

En la actividad correspondiente al criterio de la integral debían mover el deslizador para poner en evidencia la variación del carácter de la integral impropia al hacer variar p, para llegar a enunciar el criterio correspondiente y analizar ciertos casos particulares. En estos encontramos que un 60% respondió correctamente utilizando la visualización, mientras que el resto se distribuyó en respuestas acertadas o no haciendo los cálculos mediante la definición de integral impropia e ignorando la imagen del enlace.

En el criterio de comparación es en el que más se reforzaron las consignas en las que se pedía responder a partir de la observación, como se muestra en las Fig. 3 y 4:

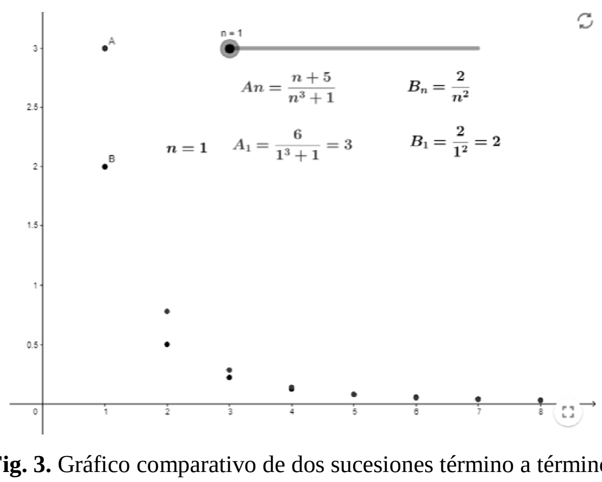


Fig. 3. Gráfico comparativo de dos sucesiones término a término.

Criterio de comparación para series de términos no negativos

Dadas dos series $\sum u_k$ y $\sum v_k$, si definitivamente resulta $0 \le u_k \le v_k$, y la segunda serie converge, entonces converge también la primera.

Actividad 4

En el siguiente enlace se muestran los primeros términos de dos series, utilizar el deslizador y responder:

a) ¿Los términos de la sucesión A_n son no negativos?

b) ¿Los términos de la sucesión B_n son no negativos?

c) ¿Para todo valor de n resulta $A_n \le B_n$?

d) ¿Resulta definitivamente $A_n \le B_n$?

e) ¿Qué carácter tiene la serie $\sum B_n$? Justificar.

f) ¿Qué se puede afirmar acerca del carácter de la serie $\sum A_n$? Justificar.

Actividad 5

En el siguiente enlace se muestran los primeros términos de dos series, utilizar el deslizador y responder los mismos ítems de la actividad 1

Fig. 4. Actividades presentadas para el criterio de comparación.

No obstante también se observó la mayor resistencia a responder a partir de la observación, ya que solamente un 15% respondió acertadamente respetando la consigna, 30% responde correctamente mediante el registro algebraico, un 15% tropieza con los errores del mismo registro, y el resto (40%) omite la resolución. Muchos de los estudiantes que omitieron la respuesta justificaron esa omisión nuevamente con la excusa de no poder abrir el enlace, aunque consideramos que la actividad tenía cierto grado de dificultad. No tenemos modo de evaluar si la omisión se debió a la dificultad de la actividad, o incapacidad para interpretar la novedad de la consigna, o realmente a un problema técnico informático.

En la actividad correspondiente al criterio de la razón, se observa que alrededor de un 55% la resuelve satisfactoriamente, solamente un 3% la resuelve con errores y los demás omitieron la resolución. Los errores observados son los habituales errores de cálculos algebraicos, expresan mal el factorial y equivocan la simplificación, y solamente uno obtiene bien el límite, menor que 1 y enuncia la conclusión opuesta diciendo que la serie diverge; en éste la naturaleza del error es diferente. Una posible explicación es que aún no han madurado la diferencia entre los criterios y confunden el de comparación con la serie armónica generalizada, que diverge para $p < 1$, aunque la actividad era domiciliaria y podía consultar apuntes y bibliografía.

En la actividad correspondiente al criterio de la raíz, que se puede observar en las Fig. 5 y 6, alrededor de un 55% la resuelve correctamente, el 3% resuelve mal y el resto no responde.

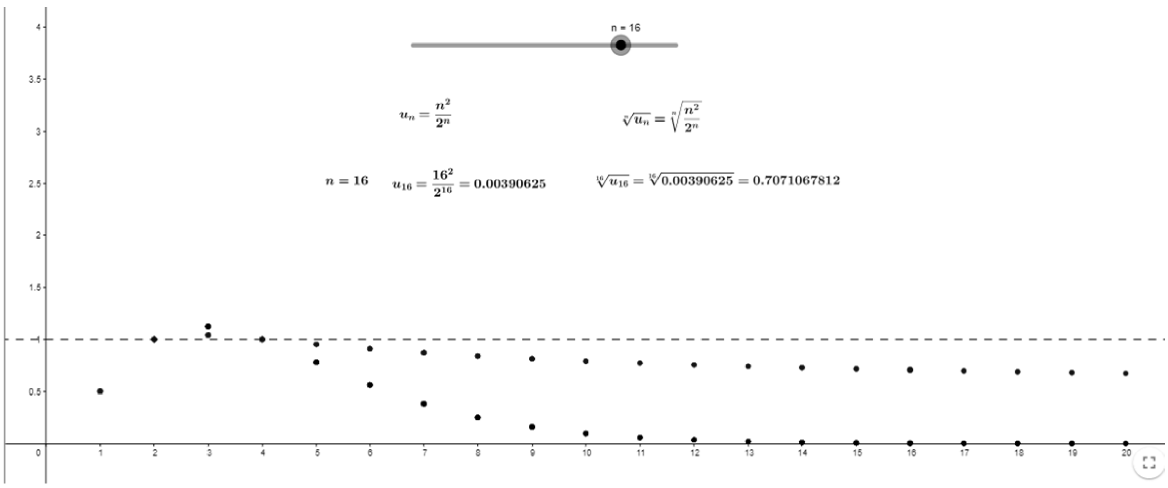


Fig. 5. Visualización de la variación de la raíz del término general con respecto a 1.

Criterio de la raíz para series de términos no negativos

Dada una serie $\sum u_k$ donde definitivamente $u_k \geq 0$, y existe el $\lim \sqrt[k]{u_k} = \lambda$.

Si $\lambda < 1$ la serie converge, si $\lambda > 1$ la serie diverge. (Si el límite no existe o resulta $\lambda = 1$ este criterio no sirve).

Actividad 2

En el siguiente enlace se muestran los primeros términos de dos series, utilizar el deslizador y responder:

a) Para $n \to \infty$ las sucesión u_n, ¿es infinito o infinitésimo?
b) ¿Qué puedes conjeturar acerca de $\lim \sqrt[n]{u_n}$?
c) ¿Qué carácter supones que tiene la serie $\sum \frac{n^2}{2^n}$?
d) Calcular $\lim \sqrt[n]{\frac{n^2}{2^n}}$
e) ¿Qué carácter tiene la serie $\sum \frac{n^2}{2^n}$?
f) ¿Qué se puede asegurar de la serie $\sum u_n$, si u_n no es infinitésimo?

Fig. 6. Actividades presentadas para la comprensión del criterio de la raíz.

Cuando se pide que emitan una conjetura acerca del límite de la raíz enésima del término general, lo hacen bien sólo el 19% mediante la observación de acuerdo con la consigna, el resto observa pero conjetura mal.

Con respecto al carácter de la serie, una vez más el 55% supone bien, 3% lo hace mal y el 42% restante omite la respuesta. Del mismo modo para el cálculo del límite de la raíz y la afirmación del carácter de la serie.

A la última pregunta sobre el carácter de la serie cuando el término general no es infinitésimo, aparece gran variedad de resultados: el 42% responde bien pero sólo el 9% lo hace justificando su respuesta; el 10% responde erradamente y el 48% omite la respuesta.

Cabe destacar que un gran número de estudiantes no respondió las últimas dos actividades que presentaban una dificultad un poco mayor que las otras, y esto pudo deberse como algunos informaron, a que no lograron abrir el enlace. Tenemos constancia de que los enlaces funcionaban y funcionan correctamente. En otros ejercicios de aplicación de estos criterios, vimos que 55% resuelve correctamente, omiten la resolución un 25% de los estudiantes, y el 20% restante comete diversos tipos de errores con predominio de los errores algebraicos.

4.2. En los ejercicios de la evaluación parcial

En la evaluación se tomaron dos ejercicios referidos a series numéricas. Para analizar si la ejercitación planteada tiene algún tipo de injerencia sobre las respuestas de los estudiantes en la evaluación parcial, hemos detallado los resultados de aquellos estudiantes que han cumplimentado las actividades (SA), treinta en total y los de aquellos que no han cumplimentado las actividades (NA), quince en total. Los resultados se muestran en las Tablas 1 y 2:

Tabla 1. Resultados obtenidos en el primer problema de la evaluación parcial.

Determinar el carácter de $\sum\left(\frac{3n^2+5n}{n^2-7n+10}+\frac{2n}{e^{2n}}\right)$	Objetivos: Aplicar propiedades de las series numéricas Aplicar distintos criterios de convergencia	NA	SA
Resultados	Bien resuelto	60%	69%
	Concluye que converge porque calcula el límite (polinomio/polinomio) y le da distinto de cero	-	7%
	Analiza sólo una de las series	6%	6%
	A partir del criterio del infinitésimo, obtiene α igual a cero y concluye mal	20%	3%
	Copia mal el ejercicio disminuyendo el grado de dificultad	6%	6%
	Realiza mal la minoración	-	3%
	Calcula mal el límite en el criterio de la razón	-	3%
	Aplica mal el criterio (como si estuviera calculando radio de convergencia)	-	3%
	No resuelve	6%	-

Tabla 2. Resultados obtenidos en el segundo problema de la evaluación parcial.

<table>
<tr><td colspan="2">Hallar los valores de “a” para los cuales converge la serie $$\sum_{n=0}^{\infty}\left(2-\frac{1}{a}\right)^{n}$$</td><td>Objetivos:
Conocer la condición necesaria y suficiente para la convergencia de una serie geométrica
Calcular la suma de una serie geométrica convergente</td><td>NA</td><td>SA</td></tr>
<tr><td rowspan="6">Resultados</td><td colspan="2">Bien resuelto</td><td>27%</td><td>48%</td></tr>
<tr><td colspan="2">Plantean la condición pero no logran despejar “a”</td><td>6%</td><td>8%</td></tr>
<tr><td colspan="2">Despeja mal ya que aplican mal las propiedades de las desigualdades</td><td>40%</td><td>28%</td></tr>
<tr><td colspan="2">Plantea mal la condición que debe cumplir la razón (no pone el modulo)</td><td>12%</td><td>10%</td></tr>
<tr><td colspan="2">Presenta errores algebraicos en la resolución de la inecuación con módulo</td><td>-</td><td>3%</td></tr>
<tr><td colspan="2">No resuelve</td><td>12%</td><td>3%</td></tr>
</table>

De los datos observados se vislumbra una ligera diferencia favorable en cuanto a los estudiantes que participaron en la experiencia y no así en los resultados de los que no lo hicieron. No podemos asegurar conclusiones definitivas, consideramos que necesitamos perfeccionar y repetir la experiencia para sacar conclusiones con mayor certeza.

5 Conclusiones

El concepto de serie es tratado de forma algorítmica y algebraica tanto desde nuestro quehacer áulico como en distintos libros de texto, por lo general se presentan pocos ejemplos de la representación gráfica de la convergencia de las series y las escasas representaciones existentes son más bien representaciones estáticas. Es nuestro propósito comenzar a dar sentido y respaldo gráfico al concepto de series y la determinación de su carácter y ese intento hemos tratado de ponerlo de manifiesto en esta oportunidad, donde mostramos algunas actividades presentadas a un grupo de estudiantes con estos nuevos recursos utilizados por primera vez en nuestras clases.

Realizamos esta propuesta con el fin de ayudar a nuestros estudiantes en la comprensión del concepto de serie y los criterios de convergencia resaltando la importancia del rol del razonamiento visual. Los resultados obtenidos son alentadores, y concluimos que la utilización de la representación formal y visual de los conceptos será ventajosa para el aprendizaje de los estudiantes. Esta idea de trabajo está compuesta por ejercicios con representaciones gráficas intencionalmente seleccionados, para que los estudiantes respondan en forma inmediata diferentes preguntas orientadas al tema que nos ocupa.

Reservamos para una propuesta futura, ampliar la ejercitación mediante la incorporación de aplicaciones de las series a diversos problemas relacionados con contenidos de varias disciplinas.

A partir del análisis de los datos obtenidos en nuestra propuesta, hemos observado que los alumnos prefirieron los enunciados de tipo algorítmico con instrucciones claras y evidentes de lo que se les pedía, eligiendo trabajar en el registro algebraico a pesar de las deficiencias que muchos presentaron en este registro. Resultó bastante evidente que las actividades en las que se pedía una interpretación de datos o de gráficos no fueron abordadas por un número importante de estudiantes y las consignas en las que se requería trabajar en un registro distinto al algebraico fueron escasamente respondidas. También se observó que no podían responder a preguntas en las que se pedía por ejemplo que indicaran si los términos de una sucesión eran definitivamente menores que los términos de otra, dato que salía de la mera observación del gráfico. No solo eso, el hecho pareció confundirlos, y este tipo de actividades fue eludido por varios de ellos mediante la frase “no puedo abrir el link”. Todo esto nos sugiere que los estudiantes prefirieron resolver cálculos algebraicos a interpretar los problemas desde el registro gráfico.

Luego de llevar a cabo esta experiencia notamos una leve mejoría en la evaluación parcial de los alumnos que entregaron las actividades, lo que nos sugiere que nuestra búsqueda de alternativas para mejorar la enseñanza del concepto puede tener una respuesta positiva en el empleo de técnicas como las que desarrollamos en esta oportunidad.

Creemos que este enfoque para la enseñanza de la matemática, donde lo gráfico y lo algebraico van de la mano, permitirá dar oportunidad al alumno de comenzar a apropiarse del conocimiento del tema propuesto utilizando saberes ya adquiridos, ampliando otros, justificando la elección de determinadas estrategias, reflexionando sobre nuevos instrumentos elaborados, empleando distintos registros para representarlos, y en especial fundamentando el producto de la actividad realizada.

Sabemos que no es tarea sencilla, ésta fue la primera experiencia que necesita perfeccionarse, repetirse y reunir mayor información para realizar los ajustes necesarios. Esperamos que este aporte represente una oportunidad que oriente la discusión y la reflexión de los equipos docentes.

Referencias

1. Poggio M.I.; Bontti, G.; Piedrabuena A.: Dificultades en "Serie". *Actas del XX Encuentro Nacional y XII Internacional, Jornadas de Educación Matemática en carreras de Ingeniería, EMCI*. (2017).
2. Hitt,F.: Dificultades en el aprendizaje del cálculo. *Décimo primer Encuentro de Profesores de Matemáticas del Nivel Medio Superior.* Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo, Morelia, pp. 81-107. (2003).
3. Duval, R.: Registres de représentations sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensé.*Annales de Didactique et SciencesCognitives*, ULP, IREM Strasbourg. Volume 5, pp. 37-65. (1993).
4. Duval, R.: Les conditions cognitives de l'apprentissage de lagéométrie: développement de la visualisation, différenciation des raisonnements et coordination de leurs fonctionnements. *Annales de Didactique et Sciences Cognitives*, ULP, IREM Strasbourg. Volume 10, pp. 5 - 53. (2005).
5. Socas, M.: Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las matemáticas en la Educación Secundaria. *Investigación en educación matemática: comunicaciones de los grupos de investigación del XI Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática.* La Laguna. España. ISBN 978-84-612-5856-7, pp. 19-52. (2008).
6. Eisenberg, T.; Dreyfus, T.: On the Reluctance to Visualize in Mathematics, en Zimmermann, W. y Cunningham, S. (eds.), *Visualization in Teaching and Learning Mathematics*, Washington: Mathematical Association of America. pp. 25-37. (1991).
7. Novelli, A.: Lecciones de Análisis I. Universidad Nacional de Luján. Buenos Aires. Argentina. Edición del autor. (1998).

Dificultades en la Comprensión de la Integral Impropia

Poggio M. Inés[1], Bontti Griselda[1], Jañez Mónica[1].

[1] Departamento de Ciencias Básicas, Universidad Nacional de Luján
Rutas Nac. 5 y 7, Luján (6700), Buenos Aires
minpoggio@gmail.com, gbontti@hotmail.com, monicaklaus35@gmail.com

Resumen. Las integrales impropias son uno de los temas que presentan dificultades a los estudiantes de un curso de Análisis Matemático, y un interesante ejemplo que plantea dos desafíos. En primer lugar revisar y describir, de acuerdo con nuestra experiencia, los errores más frecuentes intentando interpretar y explicar sus causas, considerando los aportes de algunos autores. En segundo lugar completar el análisis previo asumiendo el desafío de diseñar y proponer la aplicación de algún recurso didáctico o secuencia de actividades que combinen diversos registros de representación y tiendan a mejorar el aprendizaje de este concepto importante por su vínculo con otros como el estudio de las series, y aplicaciones que deberán enfrentar en cursos sucesivos tales como la función gamma, la densidad de probabilidad o la transformada de Laplace, entre otros.

Palabras clave: Integral impropia, Dificultades, Habilidades, Visualización.

1 Introducción

Entre los temas que presentan especial dificultad a los estudiantes de un primer curso de Análisis Matemático, las integrales impropias constituyen un interesante ejemplo que plantea en principio dos desafíos. En primer lugar, revisar y describir de la manera lo más detallada posible, de acuerdo con nuestra experiencia, los errores que con mayor frecuencia se observan en las respuestas a las actividades propuestas ensayando una interpretación que pueda explicar su origen o causas, tomando en cuenta varios aspectos de investigaciones de González-Martín et al. [1] [2] [3]

En segundo lugar, la acción descriptiva y diagnóstica deberá completarse con una acción propositiva y por lo tanto, el desafío será diseñar y proponer la aplicación de algún recurso didáctico o secuencia de actividades que aspire a mejorar el aprendizaje de un concepto importante por su vínculo con otros que poco después deberán enfrentar, como es el estudio de las series, y de numerosas aplicaciones con las que deberán trabajar en cursos sucesivos y que requieren del dominio fluido de esta noción, como cuando se encuentren con la función gamma, la densidad de probabilidad o la transformada de Laplace, entre otros.

Mucho tiempo de enseñar estos temas y observar la reincidencia en determinados errores que vuelven a repetirse a través de los años y varios intentos correctivos con escaso resultado, constituyen el estímulo para sistematizar el análisis de esta problemática.

Por lo general, un programa clásico de Cálculo Integral para una Carrera de Ingeniería suele partir del concepto de integral de una función continua en un intervalo cerrado y acotado, para proceder luego a su generalización mediante la construcción del concepto de integral impropia. Para ello será necesario realizar convenientes transformaciones a la definición previamente enunciada y cambiar algunas condiciones: por ejemplo, la función mantiene la continuidad pero el intervalo dejará de ser cerrado y en un extremo podrá tener una asíntota vertical, o sea una discontinuidad de infinito, o dejará de ser acotado y la gráfica podrá tener una asíntota horizontal.

Es decir que el concepto de integral impropia no es en sí mismo un concepto totalmente nuevo, ya que en su definición confluyen los conceptos de integral definida, el paso al límite y la noción de convergencia, cada uno de los cuales aporta a la síntesis su propia complejidad y contribuye a la aparición de ciertos errores y obstáculos al abordar su aprendizaje.

Entonces en este trabajo, trataremos de reflexionar sobre nuestras acciones pasadas, relativas a la enseñanza de este tema; analizar y describir cómo hemos hecho para facilitar transformaciones dentro del registro algebraico formal de la definición de integral en un intervalo cerrado y acotado, así como la conversión de ese registro al registro gráfico y viceversa, para llegar a construir la definición de integral impropia y promover su comprensión por parte de los estudiantes, de acuerdo con las recomendaciones de Duval (1993), entendiendo que ese es el modo de acceder al conocimiento matemático, mediante no menos de dos registros de representación diferentes. [4]

Muchos serán los obstáculos que habrá que sortear para cumplir el objetivo, y muchos los conceptos previos que el estudiante debe manejar con suficiente soltura para que el concepto nuevo se establezca de manera firme y pueda ser utilizado en las numerosas aplicaciones en que interviene.

2 Relato de una experiencia

Comencemos por relatar nuestra propia experiencia en el desarrollo de este tema. De acuerdo con la bibliografía seleccionada, Lecciones de Análisis I de Alfredo Novelli y la planificación prevista, en nuestros cursos la enseñanza de la integral impropia es uno de los últimos temas del Capítulo del Cálculo integral, y anterior al comienzo del Capítulo de Series. [5]

Es decir que en ese momento el estudiante carece absolutamente de toda noción sobre Series y aunque ya tiene nociones previas de límites, infinitésimos y orden, el abordaje que hacemos del tema se limita a construir de manera visual la definición de integral impropia como generalización de la integral de función continua en un intervalo cerrado y acotado, como se muestra en la Fig. 1, con un conveniente paso al límite según cuál sea el tipo de integral impropia: en intervalo no acotado, o con punto de infinito en un extremo.

$$\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{b \to \infty} \int_a^b f(x)dx$$

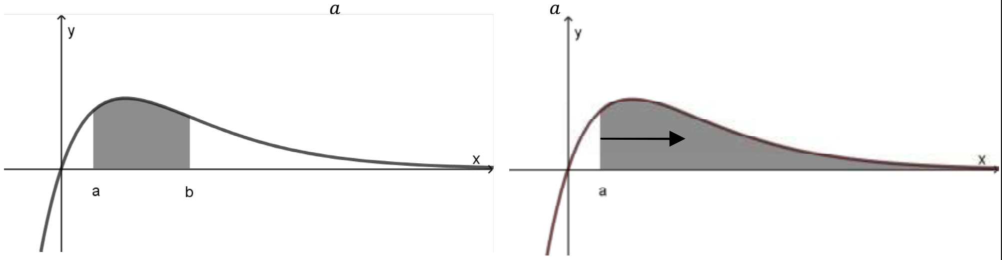


Fig. 1. Presentación gráfica de la integral impropia en el intervalo no acotado.

Se enuncian formalmente las definiciones y luego de varios ejemplos y demostraciones de la convergencia para algunas integrales particulares, tales como $\int_1^\infty \frac{1}{x^p}dx$ o $\int_2^\infty \frac{1}{x(logx)^p}dx$ según los valores del parámetro y el intervalo de integración, el trabajo de los estudiantes consiste en determinar la convergencia o no de ciertas integrales propuestas mediante la aplicación de la definición.

Se procura alternar ejercicios mecánicos de determinación de la convergencia para diversos casos particulares, mediante los cuales se promueva la aplicación directa de la definición, con otros problemas menos rutinarios del tipo de sencillas demostraciones como las que se indican en el párrafo precedente. Estos tienen especial interés por su posterior aplicación al estudio de algunas series notables mediante el criterio de la integral.

Es parte de una modalidad habitual en nuestros cursos proponer para los diversos temas de la asignatura, ejercicios que persiguen la adquisición de ciertos automatismos de cálculo, junto con otros en los cuales, a partir de ciertas familias de funciones dependientes de uno o más parámetros, según el caso, se propone investigar qué valores de esos parámetros permiten obtener una función que cumpla las condiciones necesarias y suficientes que impone una definición. Lo hacemos para la continuidad o para la derivabilidad en un fijado punto del dominio, y también nos interesa hacerlo para la convergencia de una integral impropia o de una serie, ya que se ponen en juego y se relacionan diversos conocimientos previos con el nuevo concepto que se desea consolidar.

En esta modalidad se decidió no trabajar con criterios de convergencia para integrales impropias, por ejemplo la comparación visual entre la gráfica de una función con otra de carácter conocido podría permitir anticipar, antes de calcular, un resultado esperado o estimar el carácter de una integral en casos en que la primitiva no sea elementalmente calculable.

Sin embargo, el concepto se amplía y completa cuando, en el capítulo siguiente, se estudia el criterio de la integral para series de términos no negativos, porque en ese momento se puede intentar asociar la convergencia o no de la integral impropia con el orden que tiene el integrando como infinitésimo, o con el carácter de la serie asociada a ella.

Y decimos que *se puede intentar* establecer esas asociaciones y analogías, porque son pocas las veces que lo logramos como explicaremos a continuación.

3 Dificultades y errores observados

En el momento en que se introduce el tema, la ejercitación adquiere cierto carácter mecánico y rutinario, o sea se busca incorporar el automatismo de aplicar correctamente la definición y, por añadidura, aprovechar para seguir poniendo en práctica algunas técnicas de integración como la sustitución, la integración por partes y algo de descomposición en fracciones parciales sencillas para funciones racionales con denominadores de segundo grado.

Es aquí donde aparecen los primeros errores, a veces debidos a que se aplican mal las técnicas de integración, pero en gran medida por errores de tipo algebraico o numérico en los que reinciden siempre que hay algo para calcular.

Siguiendo los pasos del procedimiento que plantea la definición, aparecen los errores en el cálculo del límite, sobre todo cuando el que hay que calcular no es inmediato o no es un límite notable al que pueda darse respuesta rápida y fácilmente. Cuando aparece una forma indeterminada, por ejemplo un producto de un infinitésimo por un infinito en el producto de una exponencial decreciente por un polinomio, o una resta de dos infinitos, en algunos casos de fracciones simples, que obligan a modificar la expresión obtenida para poder calcular el límite, hemos observado que se presentan numerosas respuestas erróneas, que ilustraremos con algunos ejemplos.

Elegimos dos problemas distintos tomados en exámenes finales o parciales en los cuales hemos cuantificado los resultados posibles que observamos en la corrección, desde la resolución correcta hasta la omisión de la misma, pasando como hemos dicho, por distintos tipos de errores en cada etapa del proceso: la integración, errores algebraicos o numéricos, el cálculo de límite, como se muestra en la Fig. 2.

Al final haremos un análisis cualitativo, interpretando globalmente estos ejemplos y otras observaciones de nuestra propia experiencia en relación con la naturaleza de los errores que nuestros estudiantes presentan al abordar este tipo de problemas.

Este es el motor que promueve nuestras reflexiones y el interés de encontrar una propuesta superadora.

Calcular, si existe la siguiente integral impropia: $\int_5^{\infty} \frac{2}{x^2-5x+4} dx$

Muestra: 30

Calcular, si existe, la siguiente integral impropia: $\int_1^{\infty} \frac{1+logx}{x^2} dx$

Muestra: 22

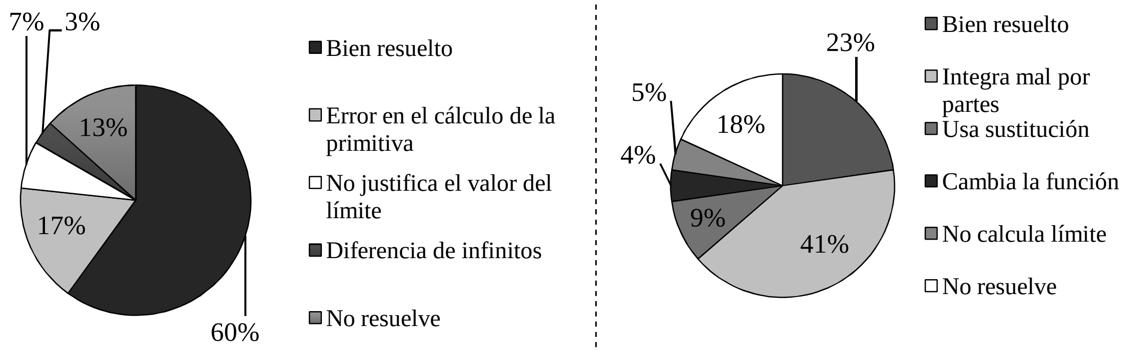


Fig. 2. Cuantificación de resultados en dos problemas de examen.

Como consecuencia de estos errores que se han cuantificado, localizados en alguna de las etapas de la resolución, el estudiante obviamente no obtiene el resultado esperado, es decir, por ejemplo encuentra un resultado de otro signo u obtiene divergencia cuando la integral dada debió ser convergente.

Pero todo esto sucede porque han mecanizado el procedimiento y no se atreven a poner en duda su propio resultado aunque sea extraño, o porque no lo advierten como extraño.

Si bien no se ha planificado trabajar con criterios de convergencia para las integrales impropias, al momento de evaluar los aprendizajes tanto en un examen parcial o final, ya se conoce y se ha trabajado con el criterio de la integral para la convergencia de series. Entonces puede usarse como condición necesaria y suficiente ya que bajo oportunas hipótesis, la serie y la integral impropia asociada a ella tienen el mismo carácter: ambas convergen o ambas divergen. Pues no, solamente lo aceptan y aplican para probar que si la integral impropia converge, entonces la serie asociada también converge, pero no aplican la recíproca para determinar el carácter de la integral. Éste sería de gran utilidad para anticipar un resultado, corroborarlo con el cálculo o utilizarlo a posteriori como mecanismo de control.

Otra dificultad importante que los hace incurrir en errores bastante graves es que, en este contexto hacen caso omiso de las propiedades de signo que, aunque son conocidas por ellos y por lo general son bien usadas en las integrales de funciones continuas en intervalos acotados, no suelen ser transferidas a las integrales impropias.

Vemos con frecuencia que en el cálculo de un área o un volumen, o en cualquier integral de función continua y no negativa en un intervalo acotado, controlan la coherencia de signo del resultado, o si encuentran un resultado extraño, intentan la búsqueda del error, porque les resulta más fácil revisar una cuenta o controlar si han invertido distraídamente los límites de integración. Incluso hemos observado que, si luego de revisar persisten en el error, informan la incoherencia del resultado y la imposibilidad de localizar el error para poder corregirlo.

Sin embargo en el cálculo de una integral impropia convergente de una función no negativa en $[a, \infty)$ a veces con la gráfica a la vista, por ejemplo de un polinomio de primer grado por una exponencial decreciente, como el de la Fig. 1, obtienen resultado negativo, finito o infinito, resultado nulo, o resultado infinito positivo, lo recuadran y dan el problema por terminado sin hacer el menor intento de control o dudar de esa respuesta. Conjeturamos que en este caso no interviene solamente la eventual dificultad de una operación de cálculo sino que predomina la confusión de que un límite puede presentar un resultado “cualquiera” y no generarles sorpresa ni percibirlo como extraño.

Esto se vincula con otra dificultad que, a pesar de intensas recomendaciones y puesta en práctica como modelo de actitud en nuestras resoluciones en las clases, en éste y muchos temas de esta asignatura, se presenta con mucha frecuencia. Cuesta mucho alcanzar un importante objetivo en la formación de un ingeniero: la habilidad del autocontrol del aprendizaje, es decir que sean capaces de planificar, anticipar, estimar, desarrollar y volver atrás en sus pasos, dudar de lo que obtienen y revisar.

Cuando en ocasiones de la clase provocamos el conflicto o por alguna pregunta reproducimos algún error que encontraron para analizarlo y hacemos en común esa vuelta atrás, los estudiantes pueden advertir la importancia de esa búsqueda, y de qué manera los orienta para identificar el lugar y la causa del error y el modo de corregirlo.

4 Marco Teórico elegido

Habiendo advertido que un recorrido tradicional no resultó satisfactorio en cuanto al alcance de determinadas habilidades que el estudiante debería disponer y ejercer al culminar nuestros cursos para emprender los cursos siguientes, asumimos como propias las consideraciones de Delgado Rubí: “*… se obtiene mayor eficiencia y solidez en el aprendizaje si se dirigen los esfuerzos a la formación de los procedimientos generales del quehacer matemático, en contraposición con la forma tradicional, que pone el énfasis en el aprendizaje de muchos procedimientos específicos sin destacar ni sistematizar los modos de actuación del sujeto.*” [6]

Delgado cita la tesis doctoral de Hernández relativa al sistema básico de habilidades matemáticas basada en la teoría psicológica de la actividad (Talizina, 1984), que sostiene que “no se puede separar el saber, del saber hacer,… no puede haber un conocimiento sin una habilidad…” Integran dicho sistema básico, entre otras, las habilidades de definir y demostrar, identificar, interpretar, graficar, algoritmizar, calcular y comparar.

Estas habilidades se pueden clasificar en las siguientes categorías:

- Conceptuales: aquellas que operan directamente con los conceptos (identificar, definir, comparar, demostrar)
- Traductoras: aquellas que permiten pasar de un dominio a otro del conocimiento (interpretar, modelar, recodificar)
- Operativas: funcionan generalmente como auxiliares de otras más complejas y están relacionadas con la ejecución en el plano material o verbal (graficar, algoritmizar, aproximar, optimizar, calcular)
- Heurísticas: aquellas que emplean recursos heurísticos y que están presentes en un pensamiento reflexivo, estructurado y creativo (resolver).

Asimismo tomamos en cuenta ciertos autores que ponen el énfasis en la combinación del uso de registros de representación y en estimular la visualización. Al respecto Duval indica que en la construcción de los conceptos matemáticos cada una de las representaciones es parcial respecto al concepto que se representa, por lo tanto es imprescindible la interacción entre diferentes representaciones para su comprensión. Particularmente consideramos que es de gran importancia que los estudiantes elaboren representaciones mentales de un concepto que provengan de varios registros relacionados entre sí (numérico, algebraico, gráfico), y que estos sean flexibles según el contexto en el cual deban ser aplicados. Eisenberg & Dreyfus ponen especial énfasis en la visualización, tan resistida por los estudiantes y que tiene consecuencias tan fecundas para la comprensión de los conceptos del Cálculo. [7] [8]

A partir de la enumeración y descripción de habilidades que se desean promover, de las consideraciones relativas al uso de recursos visuales y distintas representaciones del mismo concepto, así como también de las dificultades detectadas en los estudiantes, decidimos diseñar una propuesta didáctica que resumimos a continuación.

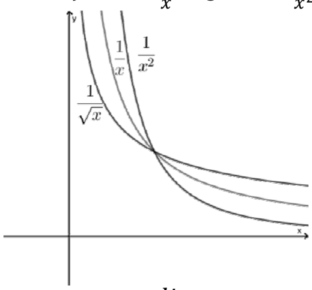
5 Propuesta didáctica

Con esta propuesta didáctica pretendemos, a partir de los distintos ejercicios, estimular diferentes habilidades de pensamiento. Los estudiantes las desarrollarán de manera individual, contando con la oportuna orientación del docente y ejercitando los procesos cognitivos que se enuncian a la par de cada actividad, como se muestra en las Tablas 1 y 2.

Tabla 1. Actividad que pone en juego habilidades de conocimiento, de comprensión y de aplicación.

Actividad	**Habilidades asociadas**
Dada $f(x) = \frac{1}{x}$ se pide: a) Graficar la función b) Calcular $\int f(x)dx$ c) Calcular $\int_1^e f(x)dx$ d) Calcular $\int_1^{10000} f(x)dx$ e) Siendo $b > 1$, calcular $\int_1^b f(x)dx$ f) Calcular $\lim_{b\to\infty} \int_1^b f(x)dx$ g) ¿Qué representa gráficamente el resultado anterior?	• Recordar y reconocer la función dada y su gráfica. • Calcular la integral indefinida pedida y las definidas indicadas en distintos intervalos. • Interpretar la diferencia entre los resultados obtenidos. • Comprender e interpretar información nueva en base a conocimiento previo, tanto en el cálculo del límite como en la interpretación de su resultado.

Tabla 2. Actividad que promueve habilidades de comprensión, de aplicación y de análisis.

Actividad	**Habilidades asociadas**
Dadas $f(x) = \frac{1}{x}$, $g(x) = \frac{1}{x^2}$ y $h(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$  a) Indicar $\lim_{b \to \infty} \int_1^b f(x)dx$ (ejercicio anterior) b) Calcular $\lim_{b \to \infty} \int_1^b g(x)dx$ c) Calcular $\lim_{b \to \infty} \int_1^b h(x)dx$ d) ¿Qué representan estos resultados?	• Diferenciar las curvas según el exponente del denominador. • Calcular los límites indicados. • Asociar los resultados obtenidos con el comportamiento de la función en el intervalo $[1, \infty)$

Luego se presenta la definición de integral impropia en un intervalo no acotado y se proponen diferentes actividades donde intervienen las funciones $f_1(x) = e^{-x}$, $f_2(x) = xe^{-x^2}$, $f_3(x) = xe^{-x}$, $f_4(x) = (1-x).e^{-x}$ y se pide responder cuestiones tales como:

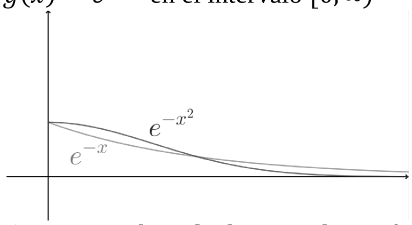
- Graficar la función,
- ¿Qué signo tiene la función en el intervalo $[0,\infty)$? ,
- ¿Qué signo esperas que tenga $\int_0^\infty f_i(x)dx$?,
- ¿Qué método de integración usarías para calcular la integral?,
- Calcular $\int_0^\infty f_i(x)dx$,
- Las integrales calculadas ¿convergen o divergen?

Con estas actividades se pretende promover las habilidades de conocimiento, aplicación, síntesis y evaluación:

- Graficar todas las funciones y comparar las respectivas gráficas entre sí.
- Identificar el signo de cada una de ellas mediante ambos registros de representación (gráfico y algebraico).
- Predecir el signo esperado para cada integral impropia.
- Reconocer el método de integración apropiado para cada una de ellas.
- Recodificar aquella que deba integrarse por sustitución.
- Calcular las integrales impropias pedidas.
- Verificar la coherencia de sus resultados.

Con la actividad presentada en la Tabla 3 intentamos que los estudiantes infieran visualmente un criterio de comparación para las integrales impropias.

Tabla 3. Actividad para promover habilidades de conocimiento, análisis, evaluación y creación.

Actividad	**Habilidades asociadas**
Dadas las gráficas de las funciones $f(x) = e^{-x}$ y $g(x) = e^{-x^2}$ en el intervalo $[0,\infty)$  a) ¿Se puede calcular con los métodos conocidos $\int g(x)dx$? b) Sabiendo que $\int_0^\infty e^{-x}dx$ converge, ¿Qué se puede concluir acerca del carácter de $\int_0^\infty e^{-x^2}dx$?	• Reconocer si una función es elementalmente integrable examinando los métodos conocidos. • Comparar las áreas comprendidas entre cada curva y el eje de abscisas. • Elaborar una conclusión como consecuencia de la comparación.

Con la actividad presentada en la Tabla 4, nos proponemos poner a los estudiantes en contacto con un ejemplo de aplicación que, aunque en este curso no se utilice, reconocerán y verán su empleo como herramienta para resolver ciertos problemas, en cursos posteriores. Se trata de la transformada de Laplace para funciones conocidas, ya que su definición remite a una integral impropia sencilla que los estudiantes están en condiciones de calcular, con el fin de promover habilidades de conocimiento, comprensión, aplicación, análisis, síntesis y evaluación.

Se trata de una actividad integradora que eventualmente puede adoptar la forma de trabajo práctico para realizar en grupos pequeños, durante la clase, oportunamente guiados por los docentes, que podrán intervenir en una síntesis que contribuya al aprovechamiento de la actividad.

No se pretende construir la totalidad de la tabla de Transformadas ya que sólo se han elegido tres o cuatro de las funciones más sencillas: una exponencial, la función 1 y dos potencias, para las cuales el cálculo de las primitivas se reduce a dos sustituciones y dos integraciones por partes de poca dificultad. Incluso hasta podrían omitirse los nombres de los objetos que se obtienen y la futura aplicación de estas integrales, lo que puede aparecer descontextualizado de las temáticas propias de un primer curso de Cálculo.

En el intento de buscar problemas menos rutinarios, para los que sea necesario hacer algo más que meros cálculos, ofrezcan el desafío de discutir y analizar para qué conjunto de valores la integral converge a una nueva función que depende del parámetro, es probable que esta actividad resulte un poco ambiciosa.

No obstante hemos deseado incluirla en nuestra propuesta precisamente por su carácter crítico, para ponerla en práctica y evaluar la oportunidad de su aplicación.

Tabla 4. Actividad que pone en juego habilidades de conocimiento, comprensión, aplicación, análisis, síntesis y evaluación.

Actividad	**Habilidades asociadas**
Siendo s un número real cualquiera, ¿qué valores debe tomar s para que la integral impropia $\int_0^\infty e^t e^{-st} dt$ exista? Elegir dos valores de s (s_1 y s_2) tales que la integral $\int_0^\infty e^t e^{-st} dt$ converja y graficar ambas funciones integrandas. ¿Cuál converge más rápidamente? ¿Por qué? Considerando las áreas encerradas entre cada gráfica y el eje x, ¿Cuál de ellas es mayor? ¿Se conocen sus valores?	• Calcular la integral impropia dependiente de un parámetro. • Decidir el resultado del limite a partir de discutir el signo del exponente. • Construir dos funciones y trazar sus gráficas. • Comparar visualmente la rapidez de convergencia y justificar la respuesta. • Comparar visualmente las áreas bajo las respectivas curvas y calcular su valor
La transformada de Laplace se utiliza para la resolución de ecuaciones diferenciales, porque permite transformarlas en ecuaciones algebraicas. Sea $f(t)$ definida para $t > 0$. Su transformada de Laplace se define como $F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st} dt$, si existe la integral impropia. a) Hallar $F(s)$ para $f(t) = e^{2t}$ b) ¿Qué signo debe tener $F(s)$? c) ¿Para qué valores de s existe o converge la integral impropia? d) Graficar la función $f(t)$ e) Graficar la función $F(s)$ f) ¿Qué curva representa la transformada $F(s)$ de la exponencial $f(t)$? g) Optativo: Repetir las consignas anteriores para las funciones: $f(t) = 1$, $f(t) = t$ y $f(t) = t^2$	• Calcular la integral impropia dependiente de un parámetro. • Identificar el signo de $F(s)$. • Decidir el resultado del limite a partir de discutir el signo del exponente • Diferenciar la función dada $f(t)$ respecto de su transformada $F(s)$. • Reconocer la función obtenida ($F(s)$) e interpretarla como resultado de un límite. • Graficar las funciones y reconocer la gráfica de la transformada. • Transferir el conocimiento a un nuevo contexto.

En este trabajo sólo mostramos algunas de las actividades en las que intervienen integrales impropias de funciones continuas en el intervalo $[a, \infty)$, aunque también está pensado que los alumnos definan y calculen integrales impropias en $[-\infty, b)$ o en todo el eje real, y las de segunda especie, así como también la aplicación de propiedades para calcularlas.

6 Conclusiones

Generalmente la enseñanza de las integrales impropias es un proceso en el que se conduce al alumno a resolver problemas rutinarios, donde se prioriza la algoritmación y algebrización. Entonces se observa que los estudiantes se habitúan a realizar ejercicios mecánicamente, lo que produce un aprendizaje de poca duración y profundidad.

Por este motivo, y viendo que los errores que cometen los estudiantes en la resolución recaen habitualmente en cuestiones algebraicas, es que formulamos una propuesta didáctica en la que intervienen varios registros, y en la que los alumnos deban poner en juego diferentes habilidades matemáticas además del cálculo rutinario.

Las actividades planteadas intentan promover el razonamiento con el auxilio de elementos visuales, ya que consideramos que éstos ayudan a una mejor comprensión de los conceptos matemáticos. La habilidad de trazar gráficos sencillos y usar la información que proporcionan los mismos resulta fundamental para el aprendizaje del cálculo.

Asimismo nos proponemos que los estudiantes sean capaces de recordar los conocimientos aprendidos y saber aplicarlos, seleccionarlos y transferirlos a tareas nuevas, planificar la resolución de un problema ordenando y clasificando la información disponible, y también adquirir el autocontrol necesario para revisar, y si hace falta corregir, cada etapa de su proceso de resolución.

Cabe destacar que en esta oportunidad realizamos una propuesta didáctica buscando aproximarnos a una transformación en el modo de enseñar y aprender el tema. El próximo desafío será poner en marcha el diseño realizado y analizar los resultados obtenidos para determinar si de esta forma se promueve un mejor desarrollo en las habilidades cognitivas de nuestros estudiantes.

Referencias

1. González-Martín, A. S. Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje del concepto de integral impropia. Tesina. La Laguna University. (2002).
2. González-Martín, A. S.; Camacho, M. Legitimization of the graphic register in problem solving at the undergraduate level. The case of the improper integral, *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (PME28), Bergen, vol. 2, pp. 479-486. (2004).
3. González-Martín, A. S.; Camacho, M. Sobre la comprensión en estudiantes de matemáticas del concepto de integral impropia. Algunas dificultades, obstáculos y errores. *Enseñanza de las Ciencias,* 23(1), pp. 81-96. (2005).
4. Duval, R. Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée, *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 5, IREM de Strasbourg, 37-65. (1993).
5. Novelli, A.: Lecciones de Análisis I. Universidad Nacional de Luján. Buenos Aires. Argentina. Edición del autor. (1998).
6. Delgado Rubí, J. Los procedimientos generales matemáticos. En Hernández Fernández y otros. Cuestiones de Didáctica de la Matemática. Rosario, Argentina. Serie Educación. Homo Sapiens ediciones. (1997).
7. Duval, R. Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento. En F. Hitt (Ed.), Investigaciones en Matemática Educativa II, México: Grupo Editorial Iberoamérica, pp. 173-201. (1998).
8. Eisenberg, T. & Dreyfus, T. On the Reluctance to Visualize in Mathematics, *Visualization in Teaching and Learning Mathematics* (Zimmermann, & Cunningham, Ed), Washington, 25-37. (1991)

Propuesta Innovadora: Clases filmadas para Enseñanza de Matemática en Carreras de Ingeniería

Adolfo Leonardo Vignoli[1], Gisela Andrea María Hirschfeld[2], Laura Cecilia Díaz Dávila[1]
[1] Facultad de Ciencias Exactas Físicas y Naturales, Universidad Nacional de Córdoba
Av.Velez Sarsfield 1611, Córdoba, Argentina
adolfo.vignoli@unc.edu.ar, laura.diaz@unc.edu.ar
[2] Departamento Universitario de Informática, Universidad Nacional de Córdoba
Av. Valparaíso s/n esq. Enfermera Gordillo, Córdoba, Argentina
ghirschfeld@unc.edu.ar

Resumen. Este trabajo se refiere a una experiencia piloto consistente en la incorporación de objetos de aprendizaje de contenido audiovisual en la enseñanza de matemáticas en primer año de carreras de ingeniería. Su objetivo es indagar el impacto de tal experiencia y explorar las posibilidades de su optimización. Se inserta en el marco de una de las líneas de investigación del Programa "Apropiación del Conocimiento y de la Tecnología", iniciado en 2016. En esta dirección se pusieron clases filmadas a disposición de alumnos de la cátedra de Introducción a la Matemática de la Facultad de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales de la Universidad Nacional de Córdoba; y se realizó un sondeo para evaluar su resultado y las posibilidades de su perfeccionamiento. Se intenta proveer a los alumnos de medios de acceso al conocimiento usuales en la actualidad, facilitando un aprendizaje significativo de la matemática.

Palabras Clave: Accesibilidad, Aula virtual, Vídeo, Primer año, Ingeniería.

1 Introducción

En los últimos años integrantes de este equipo de investigación vienen desarrollando acciones [1] tendientes a mejorar los procesos de enseñanza-aprendizaje en las asignaturas de Matemáticas de las carreras de Ingeniería. Esta experiencia responde a las necesidades particulares de los alumnos en el inicio de sus carreras, caracterizados por su masividad, diversidad de formación previa, dificultad de adaptación a los estudios universitarios y alta tasa de aplazo en evaluaciones parciales y exámenes [2].

Se propuso la puesta a disposición de material audiovisual a través del aula virtual, como recurso complementario de las clases presenciales, para facilitar al alumnado de primer año el aprendizaje de la Matemática.

La contribución consiste en filmar las clases de un profesor en una comisión y luego de la postproducción del material fílmico, dejar disponibles los vídeos a sus alumnos para finalmente observar el impacto.

Esta estrategia empleada en diversas universidades del mundo [3], permite el acceso del estudiante a la explicación del docente en cualquier momento, lugar y desde cualquier dispositivo con conexión a Internet.

Se espera que la implementación de este recurso pedagógico constituya un primer paso hacia la divulgación de contenidos curriculares de manera eficaz, en un gran número de estudiantes, con diversidad de conocimientos previos, de posibilidades de estudio y de preferencias en cuanto a las formas de acceso al conocimiento. El objetivo de este trabajo de investigación es explorar la repercusión en los estudiantes de esta herramienta para la enseñanza y optimizar su presentación y su articulación con las clases presenciales y otros recursos didácticos en uso actualmente, o en el futuro, a través del aula virtual.

En primer lugar, se explican los antecedentes, el marco teórico y el contexto en el que se desarrolla el dictado de la asignatura Introducción a la Matemática de primer año. En segundo lugar, se describen las acciones realizadas en el marco de los proyectos de investigación 2016-2017 y 2018-2019, en particular la puesta a disposición de los alumnos de los vídeos. Luego se indagan y se analizan las opiniones de los alumnos mediante sendas encuestas realizadas al final de los ciclos lectivos 2017 y 2018 (primer cuatrimestre), con el objetivo de corregir y optimizar esta herramienta de enseñanza.

1.1 Antecedentes y marco teórico

El presente trabajo de investigación se inscribe en la misma línea ya iniciada con otros realizados por el mismo equipo en años anteriores, como, por ejemplo: "Utilización de TIC para lograr aprendizajes significativos en

Matemáticas en las carreras de Ingeniería" de los ingenieros José Luis Galoppo, Adolfo Leonardo Vignoli, Daniel Lucio Sandín y Laura Cecilia Díaz, presentado en el III CADI y IX CAEDI, de 2016.

Desde esta perspectiva de investigación se pretende subsanar algunas deficiencias en el aprendizaje de las Matemáticas en los alumnos de primer año. Esta problemática fue detectada por las autoridades de la facultad, quienes implementaron en 2012 talleres para docentes de Matemáticas y Física de primer año, coordinados por integrantes del Departamento de Enseñanza de la Ciencia y la Tecnología de la misma facultad, en los que fue discutida y explicitada. Las deficiencias o dificultades detectadas se pueden resumir en las siguientes [4]:

a) Falta de precisión en el uso del lenguaje matemático para definir conceptos, tanto oral como escrito.
b) Dificultad para comprender las diferencias entre definiciones, axiomas y teoremas.
c) Dificultad para comprender conceptos y deducciones lógicas.
d) Falta de hábito de lectura de textos de matemáticas.
e) Falta de desarrollo de capacidad para un aprendizaje autónomo.
f) Insuficientes conocimientos previos que debieran haberse adquirido en la enseñanza secundaria.
g) Dificultad en la aplicación de los conceptos matemáticos a distintas disciplinas.
h) Escasa transferencia de los conceptos teóricos a la resolución de situaciones problemáticas.
i) Insuficiencia en la interpretación de consignas.
j) Desconocimiento y/o falta de destreza en el uso de herramientas informáticas para escribir fórmulas y presentar resultados matemáticos.

Como resultado del intercambio de ideas entre los docentes surgió la idea de confeccionar material de estudio y actividades tendientes a lograr un aprendizaje significativo que redujera la cantidad de alumnos no aprobados tras cursar las materias durante el año lectivo y que les posibilitara aplicar los contenidos en las restantes materias del currículo, y posteriormente, en la práctica profesional. En este sentido, nuestro grupo de investigación inició la construcción y administración de aulas virtuales en el campus que posee la facultad sobre la plataforma Moodle: http://lev2.efn.uncor.edu/ .

El documento del año 2009, "Competencias requeridas para el Ingreso a los Estudios Universitarios" [5], del CONFEDI, aborda la cuestión de las competencias que los alumnos del nivel medio deberían alcanzar para iniciar sus estudios en la universidad. Como muestra el trabajo de Cerratto y Gallino, "Competencias genéricas en carreras de ingeniería" [6], las competencias aludidas son escasamente logradas por los alumnos, lo que dificulta la comprensión de los nuevos temas que se desarrollan en las asignaturas de las carreras universitarias. La causa de esta dificultad radica, en parte, en que no cuentan con los conocimientos esperables luego de egresar del nivel medio, donde se puedan anclar los nuevos contenidos. Esto impide el llamado aprendizaje significativo, según lo expresara Ausubel en su teoría [7].

Podemos agregar, consecuentemente con los trabajos de Díaz Barriga y Hernández Rojas desarrollados en su libro "Estrategias docentes para un aprendizaje significativo" [8], que el aprendizaje de conceptos nuevos para lograr la construcción del conocimiento es un proceso de elaboración, en el que el alumno selecciona, organiza y transforma la información que recibe; estableciendo relaciones entre la información nueva y la que ya posee. Al docente, por su parte, le compete facilitar el proceso de vinculación entre los conocimientos ya adquiridos y los nuevos. El aprendizaje será significativo, si se logra aplicar a situaciones problemáticas, propias del trabajo como profesional de la Ingeniería.

Teniendo como premisa los principios del aprendizaje significativo, se priorizará en toda acción docente la incorporación no arbitraria de nuevos conocimientos; se ligarán los nuevos conocimientos a conceptos de nivel superior, más inclusivos, ya existentes en la estructura cognitiva; se relacionarán los nuevos contenidos con experiencias, hechos y objetos; se aplicarán en lo posible con problemas de la ingeniería, interpretando los resultados; por último, se tratará de lograr una implicación afectiva del alumno para relacionar los nuevos conocimientos con los previos.

1.2 Contexto

En el primer semestre se dicta la materia Introducción a la Matemática, asignatura del primer año de todas las carreras de Ingeniería de la Facultad de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales de la Universidad Nacional de Córdoba.

Antes del dictado de esta asignatura, los alumnos cursan un breve Curso de Nivelación que se extiende por cinco semanas. El curso forma parte del currículo y es una materia más, como cualquier otra de las distintas carreras de ingeniería. El programa del cursillo contiene temas ya estudiados en el nivel medio: Conjuntos, Polinomios, Funciones y Trigonometría. Al finalizar, se rinde un examen final. Los estudiantes que resultan aplazados tienen otras instancias durante el año lectivo para aprobar el examen final.

En los últimos años, aún aquellos alumnos que aprueban el examen del Curso de Nivelación presentan serias deficiencias en cuanto a sus conocimientos básicos de matemática. Muchos alumnos manifiestan que nunca estudiaron el tema Conjuntos o que nunca estudiaron la demostración de un teorema. O bien, no recuerdan otros contenidos que se supone debieran conocer.

La realidad actual de los niveles primario y secundario del Sistema de Educación queda reflejada en los resultados obtenidos en Matemática en las dos últimas ediciones (2016 y 2017) del Operativo Nacional Aprender de Evaluación de Aprendizajes en la Educación Primaria y Secundaria [9]; los cuales indican que nos encontramos con altos porcentajes de ingresantes a nuestras facultades que no pueden desenvolverse en un ambiente educativo superior, que "solo comprenden las operaciones básicas, suma, resta, división y multiplicación, pero tienen altísimas dificultades para aplicarlas", y que no pueden realizar cuentas muy sencillas como una "regla de tres simple". Todo lo señalado dificulta la comprensión de nuevos conceptos y la resolución de problemas prácticos de las asignaturas vinculadas.

Los contenidos de Introducción a la Matemática son: Conjuntos de números, Desigualdades y Valor absoluto, Sistemas de ecuaciones lineales, Matrices, Álgebra vectorial, Funciones, Límites y Continuidad y Derivadas.

Los alumnos que cursan esta asignatura se distribuyen en 23 comisiones de entre 40 y 80 integrantes, en general. Inclusive, en algunos casos, el número de alumnos llega a 100, de acuerdo con la capacidad de las aulas. Las clases son teóricas y prácticas. Cada comisión tiene un único docente que desarrolla los temas teóricos, expone ejemplos prácticos y asiste a los estudiantes en la resolución de ejercicios prácticos. Se desprende de esta descripción que no es posible atender en forma personal la evolución de cada alumno y sus necesidades particulares. Los alumnos cuentan con un libro de cátedra y una guía de trabajos prácticos, ambos elaborados por los mismos docentes de la cátedra. También se sugiere al alumnado una bibliografía disponible en bibliotecas y librerías.

Hasta 2017 se efectuaban tres evaluaciones parciales teórico-prácticas y una instancia de recuperación. A partir de 2018 se redujo la cantidad de evaluaciones parciales teórico-prácticas a dos y una de recuperación. El cambio obedece a la intención de destinar mayor cantidad de tiempo a clases, reduciendo el tiempo destinado a las evaluaciones. En algunas comisiones, la primera evaluación abarca los temas del Álgebra: Conjuntos de números, Desigualdades y Valor absoluto, Sistemas de ecuaciones lineales, Matrices y Álgebra vectorial. La segunda evaluación parcial incluye contenidos de Análisis Matemático: Funciones, Límites y Continuidad y Derivadas. En las otras comisiones los contenidos del primer y del segundo parcial se invierten. En general, la cantidad de alumnos que aprueban los parciales varía entre 15% y 50% (Fuente: archivo personal del Profesor Titular de la Cátedra de Introducción a la Matemática, Ing. Pedro Atilio Santucho). Los alumnos que aprueban dos parciales (con nota igual o superior a 4), o en su defecto, que aprueban un parcial y el parcial recuperatorio, promocionan la materia, lo que implica su aprobación final. De no cumplirse estos requisitos, deben rendir un examen final escrito que incluye todos los temas teórico-prácticos, con el mismo nivel de exigencia que el de las evaluaciones parciales. El año 2016 de un total de 1516 alumnos inscriptos lograron promocionar la materia 418 (el 27 %). El año 2017, sobre 1498 alumnos, promocionaron 404 (26,9 %). En 2018, de 1702 alumnos inscriptos promocionaron 499 (29,3 %) (Fuente: archivo personal del Profesor Titular de la Cátedra de Introducción a la Matemática, Ing. Pedro Atilio Santucho).

En los exámenes de noviembre-diciembre, febrero-marzo y julio, se suelen presentar en cada fecha entre 100 y 300 alumnos, e incluso se ha llegado hasta 550. La cantidad de alumnos aprobados en los exámenes finales oscila alrededor del 20 % (Fuente: archivo personal del Profesor Titular de la Cátedra de Introducción a la Matemática, Ing. Pedro Atilio Santucho).

Durante el dictado de la asignatura, en las pruebas parciales, en los exámenes finales y en las materias correlativas, se detectan en los alumnos, de manera creciente, dificultades en la comprensión y en el manejo de los temas y carencia de destrezas para ejecutar operaciones básicas y para resolver problemas. Cuando hablamos de dificultades en la comprensión nos referimos a deficiencias en la diferenciación entre definiciones, axiomas y teoremas, dificultad para entender la lógica de las demostraciones de teoremas, falta de comprensión de la relación interna en los distintos pasos de los procedimientos de resolución de problemas, dificultad para aplicar conocimientos e inventar métodos para resolver nuevos problemas y, finalmente, imposibilidad de generar visualizaciones mentales y representaciones de figuras geométricas en el plano y en el espacio. Algunos pocos alumnos logran un nivel acorde a las expectativas, pero un gran número se retrasa en sus estudios por el tiempo que les demanda aprobar la materia, tras repetidos aplazos (Fuente: archivo personal del Profesor Titular de la Cátedra de Introducción a la Matemática, Ing. Pedro Atilio Santucho).

2 Aula virtual y grabación de clases

Con el objetivo de contribuir a subsanar, aunque más no sea en parte, las falencias observadas, desde 2013 se crearon aulas virtuales en algunas comisiones, entre ellas las comisiones 2.2 y 2.3, a cargo del mismo profesor, integrante de este equipo de investigación (Ing. Civil Adolfo Leonardo Vignoli, Profesor Adjunto por concurso de Introducción a la Matemática). Uno de los propósitos formulados es el logro de una más fluida comunicación entre docente y alumnos que permita, a estos últimos, formular consultas y, al primero, poner a disposición de los estudiantes material didáctico consistente en ejercicios propuestos, ejercicios resueltos, explicaciones aclaratorias de ciertos temas, etc., de acuerdo con el desenvolvimiento de las clases. Ambas comisiones compartieron entre sí, en su totalidad, el material del aula virtual.

El año 2016 se decidió filmar las clases teóricas de Introducción a la Matemática, dictadas por el mismo docente aludido anteriormente (Ing. Civil Adolfo Leonardo Vignoli, Profesor Adjunto por concurso de Introducción a la Matemática), los martes en la Comisión 2.2, de 14:00 a 15:30 hs. en el aula 203 de la Ciudad Universitaria. En esta comisión estaban inscriptos 50 alumnos. Se filmaron 11 clases en donde se desarrollaron los temas Conjuntos de Números, Desigualdades y Valor Absoluto; Sistemas de ecuaciones lineales, Matrices y Álgebra Vectorial. Estos contenidos eran evaluados hasta 2017 en la primera y segunda evaluaciones parciales. En 2018 fueron parte del primer parcial.

Las filmaciones se subieron al aula virtual de las Comisiones 2.2 y 2.3, en el año lectivo 2017, 15 días antes de que se tomara el 2° parcial, cuyo temario incluía solamente Álgebra vectorial. Las filmaciones estaban prácticamente sin editar, lo que implica que tenían explicaciones en algunos casos redundantes y tiempos excesivos para una buena técnica filmográfica y para estudiantes urgidos por la proximidad de la evaluación.

La finalidad de posibilitar que los alumnos volvieran a presenciar, esta vez a través de un vídeo, las clases; es que pudieran ver tantas veces como fuera necesario, en el momento en que a cada alumno le resultare más conveniente y con el detenimiento que su propio ritmo de estudio lo requiriera, el desarrollo del contenido de la materia con las explicaciones y los ejemplos ilustrativos.

Finalizado el dictado de la asignatura, el mismo año 2017 se formuló una encuesta a los alumnos para medir el impacto de todas las acciones materializadas a través del aula virtual.

En el presente año lectivo, 2018, se volvieron a subir las filmaciones, y el resto del contenido ya existente, al aula virtual de las comisiones 2.2 y 2.3. Como todos los años anteriores se agregó más contenido y se corrigió el material didáctico existente. Dos de las once filmaciones fueron subdivididas en tres partes, para hacer más manejable su consulta. La puesta a consideración de los estudiantes de las clases filmadas, a diferencia del año anterior, se hizo desde el principio del año lectivo. Se volvió a hacer una encuesta antes de la primera prueba parcial, para evaluar su impacto y para escrutar aquellos temas que requieren mayor refuerzo o apoyo. Con estos datos se realizará una edición más minuciosa de las filmaciones para los próximos años, con el agregado de más y, en lo posible, mejores explicaciones y ejemplos prácticos.

Se tiene previsto agregar otro tipo de herramientas tecnológicas, como software interactivo para ejercitar a los alumnos en los temas básicos de las matemáticas y en la ejercitación del contenido específico de la materia Introducción a la Matemática. Se considera esta posibilidad como altamente factible de realizar a partir de la incorporación de profesionales jóvenes a nuestro equipo de investigación, procedentes de diversas disciplinas humanísticas y tecnológicas.

3 Encuestas

El año 2017, antes de tomar el 3° parcial, se realizó una encuesta escrita y anónima a la totalidad de los alumnos con el propósito de evaluar el impacto de las filmaciones. Se aprovechó la oportunidad para formular preguntas relativas al resto de las acciones que se llevaron adelante a través del aula virtual y de otros aspectos concernientes al modo en que los alumnos estudian la materia. Los alumnos que respondieron la encuesta fueron en total 95. Pertenecían a las comisiones 2.2 y 2.3, ambas con acceso a la misma aula virtual y a los mismos vídeos. Se recuerda que durante dicho año lectivo se hicieron 3 evaluaciones parciales y una evaluación parcial recuperatoria.

En 2018 nuevamente se hizo una encuesta con la misma modalidad, es decir, escrita y anónima. Participaron 140 alumnos. Las preguntas tuvieron algunas modificaciones con respecto a las de la encuesta del año anterior en temas referentes a la utilización del aula virtual. El cambio en las preguntas obedeció a que el último año disminuyó sensiblemente la participación de los alumnos, a través de preguntas al docente, en los foros del aula virtual. La menor participación fue motivada por el hecho de que el aula virtual no permitió este año, como en los anteriores, que se enviaran mensajes al conjunto de los alumnos, comunicando las preguntas individuales y anónimas, con sus respectivas respuestas, sobre ejercicios y demás contenidos. Por esta razón, es estima, los estudiantes no se mostraron incentivados a utilizar esta posibilidad de consulta con el docente. Se juzgó que, la escasa participación de los alumnos para realizar consultas (preguntas al profesor) a través del aula virtual, hacía poco relevante medir su impacto.

A continuación, se analiza el sentido y se formulan distintas consideraciones acerca de las preguntas de las encuestas y de las respuestas de los estudiantes. En cada pregunta se brindó un abanico de respuestas posibles, para que los alumnos escogieran entre ellas, con el objetivo de lograr uniformidad en las respuestas y poder cuantificarlas.

3.1 Preguntas y resultados

El texto de las preguntas está en letra cursiva. Luego siguen, en letra normal, las consideraciones acerca de las preguntas y de las contestaciones, con el objetivo de explicar el sentido de los interrogantes planteados y la interpretación de las respuestas.

Pregunta 1. *¿Asistió con regularidad a las clases presenciales de Introducción a la Matemática, prestó atención durante las explicaciones del profesor y realizó las actividades propuestas en ellas?*

En las carreras de ingeniería, el tiempo que demanda la asistencia a clases de las distintas asignaturas y el cumplimiento de las actividades prácticas obligatorias es muy importante y, frecuentemente sucede, que los alumnos deben optar entre asistir a una clase o hacer un trabajo práctico o estudiar otra materia. O bien, van a clase, pero no prestan atención porque no están en condiciones de entender las explicaciones. Uno de los posibles motivos es que no tienen conocimientos previos que les permitan comprender los contenidos. También suele ocurrir que los alumnos no tienen motivación para estudiar y ejercitarse. En caso de ser ciertas estas conjeturas, los esfuerzos que se hacen para mejorar el aprendizaje caerían en saco roto, pues no habría ninguna respuesta de parte del alumno.

Surge de la experiencia del profesor que los alumnos, pese a las dificultades aludidas, asisten a clases, aunque un porcentaje de alrededor del 30% de los que inician el cursado lo abandonan después del primer parcial, al advertir que no lograrán con sus conocimientos, y pese a sus esfuerzos, revertir el mal resultado obtenido. También se advierte que los alumnos en general se empeñan en estudiar y hacer las actividades propuestas. Sin embargo, en muchos casos no les resulta posible promocionar la materia.

De la encuesta 2017 surge que el 92 % de los alumnos asiste con regularidad a las clases, atiende las explicaciones del profesor y realiza las actividades que se proponen en las clases. El 8 % se inclinó por la afirmación opuesta.

En la encuesta 2018, los porcentajes ante idéntica pregunta fueron 93 % y 7 %, respectivamente.

Pregunta 2. *En caso de que la respuesta a la pregunta anterior hubiera sido negativa, indique los motivos.*

Se sugirieron las siguientes alternativas:

a) No entiende los contenidos por falta de conocimientos previos.

Encuesta 2017: El 100 % de los alumnos que respondieron negativamente la pregunta anterior se inclinó por esta opción.

Encuesta 2018: El 38 % de los alumnos que respondieron negativamente la pregunta anterior se inclinó por esta opción.

b) No entiende los contenidos porque las explicaciones son insuficientes y el contenido es demasiado complejo.

Encuesta 2017: Ningún alumno optó por esta alternativa.

Encuesta 2018: El 29 % de los alumnos que respondieron negativamente la pregunta anterior se inclinó por esta opción.

c) Otros.

Encuesta 2017: Ningún alumno se inclinó por esta opción.

Encuesta 2018: El 33 % de los alumnos que respondieron negativamente la pregunta anterior se inclinó por esta opción.

Pregunta 3. *¿Fueron suficientes para comprender la teoría y realizar los ejercicios prácticos las clases y la bibliografía sugerida por la cátedra?*

Las respuestas sugeridas fueron:

Totalmente.	2017: 35.7 %
En parte.	2017: 54.7%
Escasamente.	2017: 6.3%
Nada.	2017: 3.1%

Esta pregunta no se hizo en el año 2018 porque se consideró que la pregunta 8 ya tocaba este punto.

El 90% de las respuestas de la encuesta 2017 dan a entender que la concurrencia a clase y el manejo de la bibliografía propuesta por la cátedra, disponible en la biblioteca de la Facultad, son casi, o totalmente, suficientes para el aprendizaje. El margen que no quedaría cubierto es el que se pretende llenar con el aula virtual; con sus actividades y espacios de consulta, y con las filmaciones.

Muchos docentes observan que los alumnos cada vez son menos propensos a estudiar autónomamente de libros de textos y prefieren medios interactivos con respuestas inmediatas a sus inquietudes.

Pregunta 4. *Indique si tuvo acceso al aula virtual.*

Respuestas sugeridas:

Sí.	2017: 98%.	2018: 96 %
No.	2017: 2%.	2018: 4 %.

Algunos alumnos por problemas de matriculación o por errores en sus datos no logran ingresar al laboratorio de enseñanza virtual. Estos son inconvenientes administrativos, totalmente subsanables. Otros alumnos, una escasa cantidad, manifiestan desinterés en hacerlo.

De las respuestas se concluye que en su gran mayoría los alumnos tuvieron la posibilidad de acceder al aula virtual, donde se encuentran entre otros contenidos, los vídeos de las clases filmadas.

Pregunta 5. *¿Vio las filmaciones de las clases de Introducción a la Matemática?*

Respuestas sugeridas:

Todo o casi todo.	2017: 18%.	2018: 19 %.
En un 50%.	2017: 31%.	2018: 42 %.
Nada o casi nada.	2017: 51%.	2018: 39 %.

Se puede advertir en las respuestas que el año 2017, en su mayoría, los alumnos no vieron las filmaciones de las clases. Es muy probable que la razón sea el hecho de que se subieron al aula virtual 15 días antes del segundo examen parcial casi sin editar y sin seguir el orden en que fueron dados en clase los distintos temas. Además, los vídeos incluían temas que formaban parte del contenido del primer parcial. En 2018 disminuyó el porcentaje de los que no vieron nada de las filmaciones y aumentó el de los que vieron parte de ellas.

Al no estar totalmente editadas, las filmaciones son excesivamente largas para tratar el contenido de cada tema. Por consiguiente, es probable que el alumno - apremiado por la falta de tiempo - haya preferido leer los contenidos de sus apuntes de clase para prepararse en algunos temas.

Pregunta 6. *¿Le resultaron útiles las filmaciones de las clases de Introducción a la matemática?*

Respuestas sugeridas:

Sí, totalmente.	2017:	37%.	2018:	44 %.
En parte.	2017:	18%.	2018:	29 %.
No.	2017:	0%.	2018:	0 %.
No las ví.	2017:	45%.	2018:	27 %.

De las respuestas se puede inferir, que aquellos alumnos que vieron - aunque más no sea en parte - las filmaciones, les atribuyeron utilidad para sus estudios.

Pregunta 7. *En caso de que las filmaciones le hubieran resultado útiles, ¿en qué aspecto lo fueron?*

Respuestas sugeridas:

Me ayudaron a comprender los temas.	2017:	25%.	2018:	22 %
Me sirvieron para repasar los contenidos.	2017:	35%.	2018:	43 %
Me sirvieron porque había faltado o no había estado atento en las clases.	2017:	6%.	2018:	12 %
No las ví.	2017:	34%.	2018:	23 %

Se colige de las respuestas que las clases filmadas pueden incidir en la comprensión de los distintos temas y permitir su repaso. Por tanto, colaboran para un mejor aprendizaje.

La diferencia entre los porcentajes de las respuestas “No las ví” de esta pregunta y de las dos anteriores puede deberse a que algunos alumnos, habiendo visto muy poco de las filmaciones, expresaron su opinión en algunas preguntas de la encuesta, en tanto que en otras no alcanzaron a tener elementos de juicio para verter su valoración.

Pregunta 8. *¿Le pareció adecuado el resto del material didáctico que se subió al aula virtual?*

Respuestas sugeridas:

Sí.	2017:	81%
En parte.	2017:	14%
No.	2017:	0%
No accedí al aula virtual.	2017:	4%

Esta pregunta no se hizo en la encuesta del corriente año porque la pregunta que sigue la incluye.

En las respuestas de esta pregunta queda reflejado el buen concepto que los alumnos tienen de los recursos didácticos que se pusieron a su disposición a través del aula virtual. Vale la pena recalcar que son contenidos, en su gran mayoría, hechos especialmente para el aula virtual de esta materia, desde 2013 a la fecha, que fueron perfeccionados y corregidos año a año.

Pregunta 9. *¿Considera que fue útil para estudiar la materia el material didáctico del aula virtual?*

Respuestas sugeridas:

Sí.	2017:	66%.	2018:	55 %
En parte.	2017:	29%.	2018:	40 %
No.	2017:	1%.	2018:	1 %
No accedí al aula virtual.	2017:	3%.	2018:	4 %.

De estas respuestas se deduce que los alumnos que acceden al aula virtual, casi la totalidad, obtienen gran provecho de ella. Es de suponer, teniendo en cuenta las respuestas anteriores, que no se refieren tanto a las filmaciones como al resto del material. La razón sería - como ya se esbozó – la falta de edición y la escasa antelación con respecto al examen parcial con que fue compartido el material fílmico en 2017.

Pregunta 10. *¿Qué recursos didácticos utilizó para estudiar la materia?*

Respuestas sugeridas:

Libro de la cátedra.	2017:	23 %	2018:	19 %
Apuntes de clase.	2017:	38%	2018:	36 %
Material del aula virtual.	2017:	21 %	2018:	24 %
Otros libros.	2017:	7 %	2018:	5 %
Profesor particular.	2017:	3 %	2018:	4 %
Filmaciones de clases.	2017:	7 %	2018:	12 %

Los alumnos que se valen de sus apuntes de clase y del aula virtual, exceptuando las filmaciones, son potenciales usuarios del material fílmico; pues aparentemente no se sienten satisfechos con la bibliografía recomendada y podrían cubrir los déficits que eventualmente presenten sus notas de clase y el aula virtual con los vídeos.

Pregunta 11. *¿Utilizó el aula virtual para hacer consultas que faciliten su aprendizaje?*

Respuestas sugeridas:

Muchas veces.	2017:	9%
A veces.	2017:	37%
Nunca.	2017:	50%
No tenía acceso al aula virtual.	2017:	3%

Esta pregunta no se efectuó en la encuesta de 2018 porque al no llegarles a los alumnos, en forma conjunta, las respuestas a las consultas vía mail (debido a una modalidad operativa de “gmail”) y en cambio, solamente las que cada alumno formulaba individualmente, muchos estudiantes no se sintieron motivados para hacer uso de esta opción y hubo escasa participación.

Pregunta 12. *Si tuvo acceso al aula virtual, califique de 1 a 10 el siguiente material de acuerdo con la utilidad que representó para usted para el estudio de la materia:*

Filmaciones.

Desarrollo de temas teóricos de la materia (por ejemplo: “Guía de estudio de Sistemas de ecuaciones lineales”).

Respuestas a preguntas de alumnos a través del aula virtual.

Enlaces a páginas web (por ejemplo: Ejercicios de Vitutor).

Ejercicios resueltos.

Cuadros sinópticos, esquemas, etc. (por ejemplo, Operaciones con vectores).

Preguntas y ejercicios modelo de parciales y pruebas espejo.

Esta pregunta se hizo solamente en 2017. El 42% de los alumnos calificó con 9 y 10 el rubro “Respuestas a preguntas de alumnos a través del aula virtual”.

El 41 % asignó 9 y 10 puntos a “Desarrollo de temas teóricos de la materia”. Posiblemente este material atendió dudas puntuales que surgieron en las clases presenciales, en la lectura de los apuntes de clase y del libro de la cátedra.

Un porcentaje de 36 % - conceptuó con 9 y 10 el ítem “Enlaces a páginas web”.

El 31 % adjudicó 9 y 10 puntos al rubro “Filmaciones”, lo que debería interpretarse más como una posible utilidad que como una real utilidad, teniendo en cuenta que la mayor proporción no vio las filmaciones, hasta el momento de la encuesta.

El 29% calificó con 9 y 10 los rubros “Cuadros sinópticos, esquemas, etc.” y “Preguntas y ejercicios modelo de parciales y pruebas espejo”.

Por último, el 27 % otorgó 9 y 10 puntos al ítem “Ejercicios resueltos”.

Pregunta 13. *¿Qué temas del programa les presentaron dificultades para comprenderlos o realizar los ejercicios?*

Desigualdades: 2 %	Sistemas de ecuaciones lineales: 0,3 %
Operaciones con matrices: 3 %	Operaciones con vectores: 13 %
Ecuaciones de rectas y planos: 21 %	Intersección y paralelismo: 32
Distancias entre rectas y planos: 27 %	

Esta pregunta se hizo solamente en 2018. La identificación de los temas más complejos para los alumnos permitirá reforzarlos en el futuro o cambiar la modalidad de enseñanza.

Pregunta 14. *Sugerencias*

Las sugerencias de los alumnos, en general, se refirieron a la necesidad de resolver más ejercicios en clase y colocar los resultados correctos de los ejercicios de la Guía de Trabajos Prácticos.

4 Sobre el material audiovisual

Con la intención de proveer a los alumnos de distintos tipos de materiales educativos se optó en un primer momento por grabar 11 clases completas, de aproximadamente 1 hora 20 minutos de duración promedio.

El equipo de grabación consistió en una cámara Canon T3i, Grabadora de audio H4N, zoom, trípode y micrófono direccional Rode.

El material fue editado con software de la Suite Adobe Master Collection CS6.

Ante la insistencia de los mismos alumnos que requerían el material con rapidez, en el ciclo lectivo 2017, y en medio de una prueba piloto para testear dicho material, se cargaron al aula virtual las clases prácticamente sin edición.

Para el ciclo lectivo 2018, se editaron las clases (aún resta hacer algunas correcciones); se eliminaron los tiempos muertos y se reemplazaron las pizarras por gráficas digitales, para contribuir al dinamismo y acortar los tiempos de cada video.

Tras consultar informalmente a alumnos y expertos en contenido, se optó por subdividir las clases 1 y 9 en 3 partes, según cada unidad temática. Esto significa una ventaja a la hora de buscar en el material audiovisual disponible, aquel más pertinente a una necesidad.

5 Conclusiones

De los porcentajes de alumnos que aprueban la materia y de las opiniones de alumnos, se desprende que hay mucho por hacer en cuanto a los modos y recursos empleados para la enseñanza de la matemática en las carreras de ingeniería.

En este sentido, la filmación de las clases y el uso de la tecnología aplicada a la didáctica de una materia troncal como matemática tienen mucho para ofrecer. Las encuestas y la comunicación personal con los alumnos indican que los videos tuvieron buena aceptación y fueron de utilidad para los alumnos durante el cursado y también al rendir la materia habiendo transcurrido algún tiempo del cursado.

Un paso por seguir, luego de la experiencia obtenida, sería la indagación sobre cuáles son los temas que resultan más complejos y buscar distintas formas de desarrollarlos en videos cortos.

Es imprescindible que exista un temario link, o índice, que muestre el minuto en que se trata cada tema dentro de cada filmación, a fin de que aquellos alumnos que buscan repasar un tema específico lo encuentren con facilidad y no requiera demasiado tiempo hallarlo en los vídeos.

Además de la creación de un repositorio de clases grabadas, el audiovisual permite una amplia gama de herramientas disponibles a la hora de generar explicaciones aclaratorias sobre temas de compleja exposición.

Es necesario insistir en la importancia de facilitar un aprendizaje significativo por parte de los alumnos. Para ello, tanto el material subido al aula virtual, como el desarrollo de las clases filmadas, deben partir de los contenidos previos, ya sea correspondientes al nivel medio o a temas anteriores de la misma materia. Así mismo, las explicaciones y preguntas formuladas a los alumnos, ya sea en las clases presenciales o en el material difundido a través del aula virtual, deben poner de manifiesto las relaciones de los conceptos entre sí y con sus aplicaciones, de manera de propender a que los alumnos logren un aprendizaje significativo.

Cabe puntualizar que con el desarrollo de estas herramientas, la Universidad Nacional de Córdoba puede cumplir su misión de extender a toda la comunidad, los saberes que en ella se imparten [10].

Referencias

1. Azpilicueta, J.; Galoppo, J.; Sandín, D. y Vignoli, A. *"Enseñanza por competencias del Análisis Matemático y el Álgebra Lineal utilizando TICs en el primer año de las carreras de Ingeniería"*. I Jornadas ArTEC – UNC (2014).

2. Galoppo, J.; Díaz L.; Vignoli, A.; Sandín, D. *"Evaluación Formativa de Competencias de Ingreso en los Alumnos de las Carreras de Ingeniería de la F.C.E.F. y N. de la U.N.C"*. EMCI XIX San Nicolás (2015).
3. Linear Algebra*, Mit Open Couse Ware Massachusetts Institute of Technology* https://ocw.mit.edu/courses/mathematics/18-06-linear-algebra-spring-2010/index.htm1.
4. Cerato, A.I.; Gallino, M. Competencias genéricas en carreras de ingeniería. *Ciencia y Tecnología, Número 13*, pp. 83 - 94 ISSN 1850-0870 (2013).
5. Documento de CONFEDI. *Competencias en Ingeniería: Competencias requeridas para el Ingreso a los Estudios Universitarios en Argentina* 1ra Edición. Universidad FASTA, Mar del Plata ebook: ISBN 978-987-1312-62-7 pdf (2014).
6. Cerato, A.I.; Gallino, M. Competencias genéricas en carreras de ingeniería. *Ciencia y Tecnología, Número 13*, pp. 83 - 94 ISSN 1850-0870 (2013).
7. Ausubel, David: "Teoría del Aprendizaje Significativo". Consultado en: http://s3.amazonaws.com/academia.edu.documents/38902537/Aprendizaje_significativo.pdf?AWSAccessKeyId=AKIAJ56TQJRTWSMTNPEA&Expires=1466797908&Signature=9ZzcQxAsMTtFldKck5T0X9YLe5U%3D&response-content-disposition=inline%3B%20filename%3DTEORIA_DEL_APRENDIZJE_SIGNIFICATIVO_TEOR.pdf
8. Díaz Barriga, F.; Hernández Rojas, G. *Estrategias docentes para un aprendizaje significativo. Una interpretación constructivista*. McGraw-Hill. Interame-ricana de España S.L. 420 páginas. ISBN: 6071502934 (2010).
9. Evaluación nacional Aprender. Consultada en https://www.argentina.gob.ar/educacion/aprender.
10. Britos, J., Díaz, L., Morales, S., Vargas, L., Vignoli, A., Hirschfeld, G., Presman, T. *"Los MOOC como propuesta para la estandarización de la calidad educativa".* XI Congreso de Tecnología en Educación y Educación en Tecnología (TE&ET 2016) : p. 614-621 ISBN: 978-987-3977-30-5 (2016).

La linealidad en Economía en la enseñanza en carreras de Ingeniería

Abud, Daniel J.A.[1], Nieri, Ernesto G.[2]
[1] Departamento de Física, Facultad de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales,
[2] Departamento Ingeniería Económica y Legal, Facultad de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales,
Universidad Nacional de Córdoba
Av. Velez Sarsfield 1611. Ciudad Universitaria. (CP 5000) Córdoba. Argentina
daniel.abud@unc.edu.ar, daniel.abud@yahoo.com, ernestognieri@hotmail.com

Resumen. Este trabajo presenta una propuesta didáctica que ponga en relieve la linealización de los modelos matemáticos. En este caso, se toman como modelos a los problemas de Economía. No cualquier problema sino aquellos de aplicación a la Ingeniería, es decir, específicamente al sistema productivo. Se busca una explicación racional y lógica al hecho de investigar cómo linealizar todas las funciones de la Economía (que es una ciencia social) aplicadas a la Ingeniería. Con un enfoque desde el punto de vista del sistema productivo, propio de la Ingeniería, considerando la importancia de la Economía en Ingeniería. Con ejemplos ilustrativos de la aplicación a la Economía (en Ingeniería) dentro de la enseñanza de esta disciplina en las diferentes carreras de Ingeniería. Se analizan las funciones principales que más se utilizan en este contexto.

Palabras Clave: Linealidad, Funciones, Economía, Ingeniería, Estrategias de enseñanza.

1 Introducción

Orientar al alumno en el desarrollo de soluciones de la Economía, como ciencia social, dentro del curriculum de las carreras de Ingeniería no es una tarea sencilla. Para eso se requiere que el alumno disponga de otros conocimientos que están fuera, como por ejemplo, la inserción en el mundo laboral. La mayoría de los alumnos (95%) no trabajan. Por ende, adolecen de esa habilidad. La obtención de resultados para la proyección de la Demanda u Oferta considerando curvas que no se comportan de manera lineal pero que puedan ser linealizadas es muy útil en Economía, pero aún más en Ingeniería. Un buen número de grupos de datos en la vida real siguen trayectorias parabólicas, exponenciales, geométricas, etc., haciéndose necesaria su aproximación a tendencias lineales, ayudándose con la teoría de la regresión lineal y de los mínimos cuadrados, por ejemplo. Este artículo, trata de explicar la metodología de análisis didáctico y cálculo para estos casos, clarificando esta situación con algunos ejemplos pertinentes para demostrar su aplicabilidad y utilidad en numerosos estudios de mercado donde se hace necesaria las proyecciones de variables como Costo, Ingreso, Utilidad, Demanda y Oferta. [1], [3], [4]

El estudio de Mercado en microeconomía, y de otras variables importantes en macroeconomía, son una de las partes más importantes que se deben analizar en diversas actividades como la preparación de proyectos, el análisis económico de una situación de una región, la programación de la producción, etc. Este análisis se constituye en un punto crucial y decisivo porque, gracias a la buena determinación de la Demanda y Oferta, se podrá hacer una buena cuantificación de la Demanda efectiva y de la Demanda insatisfecha, aspectos que incidirán de manera clara en la determinación del tamaño real al que nos enfrentamos en el análisis que estamos haciendo. Una mala determinación y cuantificación del Mercado incidirá en un aumento del riesgo y por ende modificará de manera clara la decisión que se vaya a tomar al respecto. Se debe distinguir entre el mundo real y la idealización que hacemos para poder estudiarlo. [1], [3], [5], [10]

2 Metodología para las funciones lineales de Costo

Se presentan a continuación ejemplos didácticos a seguir para la materia Economía dentro del curriculum de las carreras de Ingeniería. A las Empresas les interesan los "*costos*" porque reflejan el dinero que gasta. Esos flujos de dinero suelen destinarse a erogaciones de todo tipo, es decir, al pago de sueldos, materias primas, suministros, alquiler, calefacción, servicios públicos y otros gastos. Los contadores y economistas definen el costo total en términos de dos componentes: *costo total variable* y *costo total fijo*. Ambos componentes deben sumarse para determinar el costo total. Podemos escribir:

$$C(x) = \alpha x + \beta \tag{1}$$

donde

x : es la cantidad del Bien producido

α y β : son constantes

$CTV(x) = \alpha x$: es el costo variable total (depende directamente del Nivel de producción)

$CTF(x) = \beta$: es el costo fijo (independiente del Nivel de producción)

Ejemplo 1.
Una empresa que elabora un solo producto quiere determinar la función que expresa el costo total anual y en función de la cantidad de unidades producidas *X*. los contadores indican que los gastos fijos cada año son de \$50.000.-. También han estimado que los costos de materia primas por cada unidad producida ascienden a \$5.50.- y que los de mano de obra son de \$1.50.- en el departamento de montaje, \$0.75.- en el cuarto el acabado y \$1.25.- en el departamento de empaque y embarque.

Solución
La función de ***Costo Total*** tendrá la forma:

$$y = C(x) = CTV + CTF \tag{2}$$

Los costos totales variables constan de dos componentes: los costos de materias primas y los de mano de obra. Los segundos se calculan al sumar los respectivos costos de mano de obra de los tres departamentos. El costo total se define por medio de la función

$$\boxed{y = \text{costo total de materias primas} + \text{costo total de mano de obra} + \text{costo total fijo}}$$

Más discriminado queda:

$$\boxed{y = \begin{bmatrix}\text{costo total de}\\ \text{materias}\\ \text{primas}\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\text{costo de m. de o.}\\ \text{(depto de montaje)}\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\text{costo de m. de o.}\\ \text{(sala de acabado)}\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\text{costo de m. de o.}\\ \text{(depto de embarque)}\end{bmatrix} + [CTF]}$$

o bien,

$$y = 5,50x + (1,50x + 0,75x + 1,25x) + 50.000 \tag{3}$$

que, al simplificarse da:

$$y = \underset{CTV}{9x} + \underbrace{50.000}_{CTF} \tag{4}$$

Muy a menudo las funciones lineales de costo son realistas, aunque, ignoran la posibilidad de las economías y deseconomías de escala. Es decir, implica "rendimientos constantes a escala"

$$\left(\frac{d^2C(x)}{dx^2} = 0\right) \tag{5}$$

Estos rendimientos suponen que, cualquiera sea el número producido de unidades, el costo variable de cada uno sea el mismo. Y tal suposición ignoran la posibilidad de que los elementos del proceso de producción, tanto que los elementos del proceso de producción, tanto obreros como maquinas, pueden hacerse más eficientes al ir aumentando las unidades producidas o que, al comprar materias primas en grandes cantidades se pueden obtener descuentos por volumen y que estos a su vez reducen el costo de variables por unidad producida.

Algunos modelos de costos reconocen estas posibles “*no linealidades*” al servirse de alguna medida de “costo variable promedio por unidad”. En otras situaciones podría desarrollarse un conjunto de funciones lineales de costo, apropiado c/u en ciertos casos según el nivel de producción que se escoja. En el siguiente ejemplo aplicamos este último concepto.

Ejemplo 2.

En este caso tenemos dada una función de costo total “f” que es una función no lineal. Para emplear el concepto de función lineal de costo total linealizamos por tramos la función “f”, es decir con la “f_1” y “f_2”. Dados los pares: (0, 300.000); (8.00, 1.300.000) y (20.500, 1.900.000) obtenemos por geometría analítica elemental las ecuaciones de las rectas “f_1” y “f_2”:

Solución

Las funciones

$$f_1(x) = 125x + 300.000 \tag{6}$$
$$f_2(x) = 48x + 916.000$$

donde

$$0 \le x \le 8.000 \tag{7}$$
$$8.000 \le x \le 20.500$$

Para una mejor ilustración se puede graficar:

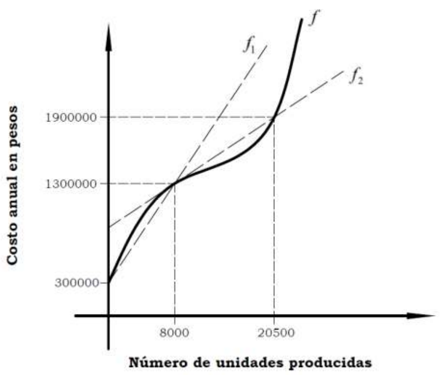


Fig. 1. Una gráfica que representa los costos analizados.

3 Metodología para las funciones lineales de Ingreso

El dinero que ingresa (entra) en una organización por la venta de sus Bienes o productos o por la prestación de Servicios recibe el nombre de ***Ingreso***. La manera más básica de calcular el ***Ingreso Total*** por la venta de un servicio es:

$$\boxed{\text{Ingreso Total} = (\text{precio}) \times (\text{cantidad vendida})} \tag{8}$$

En esta relación se supone que el precio de venta es el mismo para todas las unidades vendidas.

Si una empresa vende “$\boldsymbol{n}$” productos diferentes, donde “$\boldsymbol{x_i}$” es el número de unidades vendidas del producto “$\boldsymbol{i}$” y “$\boldsymbol{p_j}$” indica el precio del producto total obtenido del producto “$\boldsymbol{n}$” es:

$$I = p_1x_1 + p_2x_2 + p_3x_3 + \ldots + p_nx_n \tag{9}$$

o también,

$$I = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i \tag{10}$$

Ejemplo 3.
Una agencia de alquiler de automóviles está tratando de competir con algunas de las firmas más grandes de la provincia. La dirección se da cuenta de que a los clientes actuales no les interesan muchas cosas como el tipo de cristales, radios, sistema de calefacción u otros aditamentos. El Dueño y Presidente de la agencia ha estado reciclando automóviles usados para incorporarlos a la flotilla y simplificó la estructura de la tarifa de alquiler, pues cobra \$9,95.- netos diarios por el uso del automóvil. El Ingreso Total por año es una función lineal del número de días-automóvil rentado por la agencia, esta es, si ***I* = *Ingreso Total Anual*** y da número de días-automóvil rentado durante el año.

Solución

$$I = f(d) = 9{,}95d \tag{11}$$

4 Metodología para las funciones lineales de la Utilidad

La ***Utilidad*** de una empresa es la diferencia entre el *Ingreso Total* y el *Costo Total*:

$$\boxed{\text{Utilidad} = \text{Ingreso Total} - \text{Costo Total}} \tag{12}$$

Cuando el Ingreso Total es mayor que el Costo Total, la Utilidad será positiva. En tales circunstancias, a la utilidad se le llama "*ganancia*". Si el Costo Total es mayor que el Ingreso Total, la utilidad es negativa y recibe el nombre de "*déficit*".

Como, tanto el ingreso total como el costo total, son funciones lineales de las mismas variables, la función de utilidad es también un función lineal de las mismas variables.

Si

$$\begin{aligned} \text{Ingreso Total} &= I(x) \\ \text{Costo Total} &= C(x) \end{aligned} \tag{13}$$

La *Utilidad* será:

$$U(x) = I(x) - C(x) \tag{14}$$

Ejemplo 4.
Una empresa vende un solo producto a \$65.- por unidad. Los costos variables por unidad son de \$20.- por concepto de materiales y de \$27,50.- por concepto de mano de obra. Los costos fijos anuales ascienden a \$100.000.-. Formule la función de utilidad expresada en términos de "*x*", número de unidades producidas vendidas. ¿Qué utilidad se gana si las ventas anuales son 20.000 unidades?

Solución
Si el producto se vende a \$65 por unidad, el ingreso total se calcula mediante la función:

$$I(x) = 65x \tag{15}$$

El costo total anual está constituida por los costos de materiales, mano de obra y fijos:

$$C(x) = 20x + 27{,}50x + 100.000 \tag{16}$$

La función de *Utilidad* será:

$$U(x) = I(x) - C(x) \quad \textbf{(17)}$$
$$= 65x - (47{,}50x + 100.000)$$
$$= 17{,}5x - 100.000$$

Si la firma vende 20.000 unidades durante el año, entonces:

$$U(20.000) = 17{,}5 \times 20.000 - 100.000 \quad \textbf{(18)}$$
$$= 350.000 - 100.000 = \$250.000.-$$

Ejemplo 6.
Un grupo de Ingenieros quiere formar una empresa para producir "*detectores de humo*". Han ideado un diseño y estiman que los costos variables por unidad, incluyendo material, mano de obra y costos de mercadotecnia, son de \$22,50.-. Los costos fijos relacionados con la formación, operación y dirección de la empresa y la compra de maquinaria y equipo son en total \$250.000.-. Estiman que el precio de venta será de \$30.- por detector.

a) Determine el número de detectores de humo que han de venderse para que la empresa alcance el equilibrio en el negocio.
b) Los datos preliminares de mercadotecnia indican que la empresa venderá aproximadamente 30.000 detectores, de humo a lo largo de la vida del proyecto, si les pone un precio de \$30.- cada uno. Determine las utilidades esperadas en este nivel de producción.

Solución.
a) El ingreso

$$I(x) = 30x \quad \textbf{(19)}$$

El Costo

$$C(x) = 22{,}50x + 250.000 \quad \textbf{(20)}$$

se cumple

$$\underset{\textbf{INGRESO TOTAL}}{\underset{\Downarrow}{I(x)}} = \underset{\textbf{COSTO TOTAL}}{\underset{\Downarrow}{C(x)}}$$

entonces, desarrollando,

$$30x = 22{,}50x + 250.00$$
$$7{,}50x = 250.000$$
$$x_{NE} = \frac{250.000}{7{,}50} = 33.333{,}33 \quad \rightarrow \quad 33.333 \text{ unidades}$$

Otra forma de llevar adelante el mismo cálculo es:

$$U(x) = 30x - 22{,}50x - 250.000 = 0$$
$$= (30 - 22{,}50)x_{NE} - 250.000 = 0$$
$$x_{NE} = \frac{250.000}{7{,}50} = 33.333 \text{ unidades de detectores de humo}$$

b) Cuando se proyectó una venta de 30.000 detectores de humo:

$$U(30.000) = 7{,}5 \times 30.000 - 250.000 = -25.000 \quad \textbf{(21)}$$

Esta ecuación sugiere que, si se cumplen las estimaciones (de precio, costo y demanda), la empresa esperará perder \$25.000.- en el negocio.

Gráficamente,

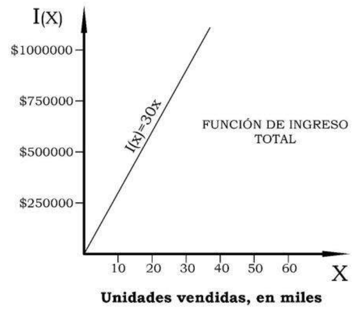


Fig. 2. Una gráfica que representa la función Ingreso.

Se puede escribir el Nivel de Equilibrio de la Producción:

$$x_{NE} = \frac{CF}{p - CV} \tag{22}$$

siendo

CF : costos fijo.
p : precio de la unidad.
CV : costo variable de la unidad.

La demostración de esta fórmula es obvia

$$x_{NE}\,p - x_{NE}CV = CF \cdot x_{NE}\,p = CF + x_{NE}CV \quad \Rightarrow I\left(x_{NE}\right) = C\left(x_{NE}\right) \quad \Rightarrow U\left(x_{NE}\right) \tag{23}$$

En el ejemplo anterior

$$x_{NE} = \frac{CF}{p - CV} = \frac{250.000}{30 - 22,5} = \frac{250.000}{7,50} = 33.333 \tag{24}$$

Ejemplo 7.
“Planificación de convenciones”
Una organización profesional está planeando su convención anual que se celebrara en Villa Carlos Paz. Están haciéndose arreglos con un gran hotel donde se llevara a cabo la convención. Los participantes en ese evento de tres días de duración pagaran \$3750.- por persona, cantidad en que se incluyen la cuota de inscripción, el hospedaje, las comidas y las propinas. El hotel cobra a la organización \$300.000.- por el uso de las instalaciones como salas de reunión, la pista de baile y los servicios recreativos. Además, el hotel cobra \$2.175.- a cada huésped por el concepto de hospedaje, comidas y propinas. La organización profesional se reserva \$375.- de la cuota de \$3.750.- como: cuotas anuales que se depositará en la tesorería de la oficina central. Determine el número de participantes que se necesita para que la organización cobre el costo fijo de \$300.000.-.

Solución.
Se hace,

$$\begin{aligned} p - CV &= \text{cuota de inscripción}\left(p\right) - \begin{bmatrix}\text{Costo de hotel}\\ \text{por persona}\end{bmatrix} - \text{cuotas anuales} \\ &= \$3750 - \$2.175 - \$375 \\ &= \$1200 \end{aligned}$$

Es decir,

$$x_{NE}\begin{pmatrix}\text{Asistentes para alcanzar}\\ \text{el equilibrio}\end{pmatrix}=\frac{CF}{p-CV}=\frac{30.000}{1.200}=\frac{250.000}{7,50}=250\ \text{personas}$$

Esta significa que la cantidad mínima de asistentes deberá ser de 250 personas.

Ejemplo 8.
"Decisión sobre la compra de computadora o la contratación de una empresa de servicios computacionales"

Un numeroso grupo médico se compone de 30 médicos de tiempo completo. En el momento actual, los empleados preparan manualmente las facturas, el gerente administrativo piensa que ha llegado el momento de hacer la transición de la facturación manual a la computarizada. Están estudiándose dos opciones: (1) el grupo médico puede alquilar la computadora y los programas y hacer el mismo la facturación (la opción "de hacer") o (2) puede contratar a una empresa de servicios computacionales que se encargue de efectuar las facturación (la opción "de comprar").

Los costos de una y otra alternativa dependen de la cantidad de facturas. La oferta más baja presentada por una empresa de servicios computacionales originara una cuota de \$450.000.- anuales más \$14,25.- por factura procesada. Con ayuda de un experto que el grupo puede rentar un pequeño sistemas de cómputo para negocios, junto con los programas necesarios, a un costo de \$225.000.-.

Solución.

Se estiman en \$9,75.- por factura los costos variables de realizar la facturación de este modo.

Si *x* representa el número de facturas de pacientes al año, el costo de la facturación está representado por la función:

$$C(x)=45.000+14,25x \qquad \textbf{(25)}$$

El costo anual de alquiler un sistema de cómputo y los programas (software) se expresa por medio de la función:

$$L(x)=225.000+9,75x \qquad \textbf{(26)}$$

Las dos opciones cuestan lo mismo cuando

$$C(x)=L(x) \qquad \textbf{(27)}$$

o sea,

$$45.000+14,25x=225.000+9,75x \qquad \textbf{(28)}$$
$$4,5x=180.000$$
$$x=\frac{180.000}{4,5}=40.000$$

Por lo tanto, si el numero esperado de facturas de paciente por año rebasa las 40.000 $\left[L(40.000)<C(>40.000)\right]$ la opción de alquilar es más barata, si se espera que el número de facturas sea menor que 40.000, la opción de contratar los servicios de una empresa de computación cuesta menos $\left[C(x<40.000)<L(x<40.000)\right]$.

Gráficamente,

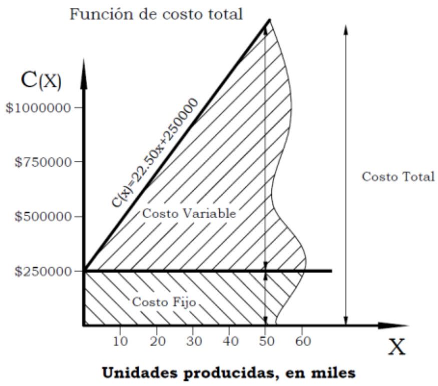


Fig. 3. Una gráfica que representa el costo en función de las cantidades producidas.

Ejemplo 9.

Aproximación de una función de Demanda Q_D no lineal utilizando un polinomio de 2^do grado en el cual cada coeficiente se determina resolviendo un sistema lineal de ecuaciones simultaneas no homogéneo.

$$Q_D = a_2 p^2 + a_1 p + a_0 = f(p) \tag{29}$$

Supongamos que tenemos tres puntos por los que pasa $Q_D = f(p)$

$$A = (88,2798;\ 69,2758) \tag{30}$$

$$B = (67;\ 500) \qquad\qquad Q_D = f(p)$$

$$C = (57;\ 1.000) \qquad\qquad 57 \le p \le 88,2798$$

Sigamos la siguiente nomenclatura: $a_2 = x_1$ $\quad a_1 = x_2$ $\quad a_0 = x_3$
entonces tenemos:

$$\begin{aligned} Q_{DA} &= 69,2758 = 88,2798^2 \times x_1 + 88,2798 \times x_2 + x_3 \\ Q_{DB} &= 500 = 67^2 \times x_1 + 67 \times x_2 + x_3 \\ Q_{DB} &= 1000 = 57^2 \times x_1 + 57 \times x_2 + x_3 \end{aligned} \tag{31}$$

o sea, resolviendo el sistema, tenemos que:

$$\begin{pmatrix} 7793,3231 & 88,2798 & 1 \\ 4489 & 67 & 1 \\ 3249 & 57 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 69,2758 \\ 500 \\ 1.000 \end{pmatrix} \tag{32}$$

luego $a_2 = 0,95138$ $\qquad a_1 = -167,972$ $\qquad a_0 = 7.483,34$

$$Q_D = 0,95138\,p^2 - 167,972\,p + 7.483,34 \tag{33}$$

$$\frac{dQ_D}{dp} = 1,9028\,p - 167,972$$

recordemos que, por definición

Elasticidad precio de la demanda $\rightarrow$ $\quad \xi = -\dfrac{dQ_D}{dp} \times \dfrac{p}{Q}$

Entonces,

$$\xi_A = \frac{0 \times 88,2798}{69,2758} = 0 \quad \rightarrow \quad \text{totalmente inelastica}$$

$$\xi_1 = \frac{20,2388 \times 77,6399}{180} \cong 8,73 \quad \rightarrow \quad \text{elástica}$$

$$\xi_B = \frac{40,4844 \times 67}{500} \cong 5,43 \quad \rightarrow \quad \text{elástica}$$

$$\xi_2 = \frac{49,9984 \times 62}{726,1807} \cong 4,26 \quad \rightarrow \quad \text{elástica}$$

$$\xi_C = \frac{59,5124 \times 67}{1.000} \cong 3,40 \quad \rightarrow \quad \text{elástica}$$

resolviendo esta ecuación de 2^{do} grados obtenemos

$$p \begin{cases} \nearrow 29,8507 \rightarrow \text{está raíz da un valor de “p” que se encuentra fuera del entorno de validez de } Q_D. \\ \searrow 87,8327 \rightarrow \text{está es la solución que debemos adoptar.} \end{cases}$$

Verificación.

$$\xi = 1 = 0,8439 \times \frac{87,8327}{69,4059} \cong 1,00 \text{ (verifica)} \tag{34}$$

Gráfico de $Q_D = f(p)$

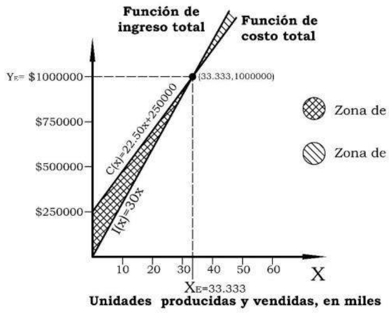


Fig. 4. Una gráfica que representa el saldo de caja y su equilibrio.

Siendo, A, B y C → puntos que se usaran para definir $Q_D = f(p)$

1”, 1 y 2: puntos definidos evaluando la función $Q_D = f(p)$ ya obtenida

Se trata de una parábola con eje // al eje Q_D:

$$\begin{Bmatrix} \text{En “A” totalmente inelástica} & \xi = 0 \\ \text{En “1” elasticidad unitaria} & \xi = 1 \\ \text{En 1, B, 2, C elástica} & \xi > 1 \end{Bmatrix}$$

Estos resultados han sido fiel reflejo de lo que se ha querido demostrar en este desarrollo.

5 Conclusiones y trabajos futuros

Es interesante terminar nuestro artículo mostrando las conclusiones o ideas didácticas más importantes y los trabajos futuros que se desarrollarán a partir de éstas. Existen diversos modelos que, no siendo directamente modelos lineales, admiten una transformación que los permite estudiar a partir de la teoría vista como modelos lineales. Pero, en realidad, el problema radica en transformar la mente de los alumnos de Ingeniería para poder aceptar una materia proveniente de las ciencias sociales como lo es la Economía. Se está trabajando en una publicación (no terminada) relacionada con la resolución de problemas de Economía en general. No solo lo tratado en este artículo. No existen dificultades matemáticas para su resolución sino conceptuales. No debemos olvidar que la única materia de Economía es esta. [2], [3], [4], [6]

En general, el estudio de las propiedades de sistemas lineales y su resolución, es mucho más simple que el de sistemas no lineales. A lo largo de la historia, la linealización de funciones alrededor de ciertos valores ha sido una técnica muy usada para el análisis del comportamiento de sistemas no lineales. *Linealizar* consiste pues en encontrar una función lineal que pueda aproximar una función dada alrededor de un punto. El primer paso para resolver un *problema de optimización* es modelizar la realidad con lenguaje matemático, es decir, reescribirla mediante variables y relaciones entre éstas. Frecuentemente, la realidad da lugar a relaciones no lineales entre las variables que la definen. *En programación matemática, el concepto de linealización consiste en aproximar una función dada por una función lineal en un intervalo* para poder aplicar técnicas de resolución y optimalidad de problemas lineales. [1], [3], [4], [7], [8], [9]

Debido a que la mayoría de las herramientas para el análisis de sistemas y diseño de sistemas de control requieren que el modelo sea lineal, es necesario entonces disponer de métodos para linealizar modelos.

La linealización, generalmente, consiste en una expansión en series de Taylor de la ecuación de estado (no-lineal) alrededor de un punto de operación definido naturalmente por el sistema o seleccionado arbitrariamente para satisfacer alguna necesidad de control. De inmensa utilidad en Economía (especialmente, en Ingeniería). [1], [3], [4], [7], [8], [9], [10]

Referencias

1. Abud, D "*Economía Básica*", Editorial Solsona, ISBN Nº 978-987-33-6920-9, Córdoba, (2015)
2. Allen, R. G. *Macro-economic theory: a mathematical treatment*. Londres: MacMillan (2016)
3. Barbolla, R. y Gómez, J. P. *Control de sistemas macroeconómicos*. (2015)
4. Bulat, Tomas, *Economía Descubierta.* Ediciones B Argentina. (2013)
5. Cafferata, A.; Recalde de Bernardi; M.; García, R. y Swoboda, C. *Actividad y Teoría Económica*. Asociación Cooperadora Facultad de Ciencias Económicas. UNC. (2001)
6. Cagan, P. *The monetary dynamics of hiperinflation*. En M. Friedman (Ed.), Studies in the quantity theory of money pp. 25-117. Chicago: The University of Chicago Press (1956)
7. Chen, L. y Chen, G. Controlling chaos in an economic model. *Physica* A, 374, pp. 349-358 (2007)
8. Mochon, F. y Becker, V. A. *Economía: Principios y Aplicaciones*. McGraw Hill. (1997)
9. Rossetti, J. P. *Introducción a la Economía. Enfoque latinoamericano.* Ed. Harla. (1991)
10. Samuelson, P. A. *Economía*. Ed. McGraw Hill. (1951)

Optimización Restringida en Ingeniería

Abud, Daniel J.A.[1]
[1] Departamento de Física, Facultad de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales,
Universidad Nacional de Córdoba
Av. Velez Sarsfield 1611. Ciudad Universitaria. (CP 5000) Córdoba. Argentina
daniel.abud@unc.edu.ar, daniel.abud@yahoo.com

Resumen. Este trabajo es una propuesta didáctica para la asignatura Análisis Matemático II, donde a partir de la suposición fundada que, en Ingeniería, prácticamente, todas las funciones a extremar están restringidas o vinculadas. Se ve como abordaje didáctico la exposición de aplicaciones y ejemplos. El objetivo del Ingeniero es optimizar o eficientizar, por eso localizar valores extremos es el objetivo básico de la optimización matemática, especialmente en Ingeniería, en sus disciplinas como la Física, el Cálculo Estructural, la Economía. Todas ellas aplicadas a la Ingeniería.

Palabras Clave: Extremos condicionados, Análisis matemático, Estrategias de enseñanza en ingeniería.

1 Introducción

En general, el problema de la optimización restringida (o de los extremos condicionados) consiste en extremar (minimizar o maximizar) funciones sujetas a otras funciones. Normalmente, se comienza analizando una función de una sola variable y luego se extrapola a varias variables. Recordemos lo que puede ocurrir con una función $y = f(x)$ continua real de variable real (aunque, no necesariamente analítica) en un intervalo cerrado $[a, h]$ (ver figura 1): puede tomar su *Máximo absoluto* en la frontera $x = a$ o su mínimo absoluto en la frontera $x = h$, pero en esos puntos vemos que las derivadas (pendientes) no son nulas.

En lo que sigue, no consideramos los puntos fronteras, es decir, trabajaremos con intervalos abiertos. Según vemos en la gráfica de la figura 1 la función posee extremos relativos en los puntos interiores: en $x = b$ un *mínimo relativo*, en $x = c$ un *Máximo relativo*, de $x = d$ a $x = e$ un mínimo "*amplio*" (dada la función es constante), en $x = f$ una *inflexión*. En $x = g$ no es derivable pero posee un *Máximo*. Los puntos donde la derivada es nula los llamaremos "*críticos*". Vemos que la nulidad de la derivada es una condición necesaria (aunque no suficiente) para que la función posea un extremo relativo. Similarmente, ocurre con funciones de dos variables independientes $z = f(x, y)$.

Un problema de extremos condicionados consiste en buscar un extremo de una función no sobre cualquier punto de su dominio sino sobre un subconjunto del dominio de la función que puede expresarse como variedad diferenciable. Más concretamente, consiste en encontrar un máximo (o un mínimo) sujeto a la condición de que el punto donde se produce pertenezca a un cierto conjunto. Problema de mucha aplicación en Ingeniería.

Un Ingeniero no puede diseñar sus estructuras sin considerar las limitaciones propias de la geometría como de la economía, por eso este tipo de problemas aparece en numerosas aplicaciones prácticas de la Ingeniería, tanto en las ciencias físicas como incluso en la economía de las obras. Para resolver este tipo de problemas se usa comúnmente el método de los multiplicadores de Lagrange que se expondrá en este trabajo. [1], [2], [3]

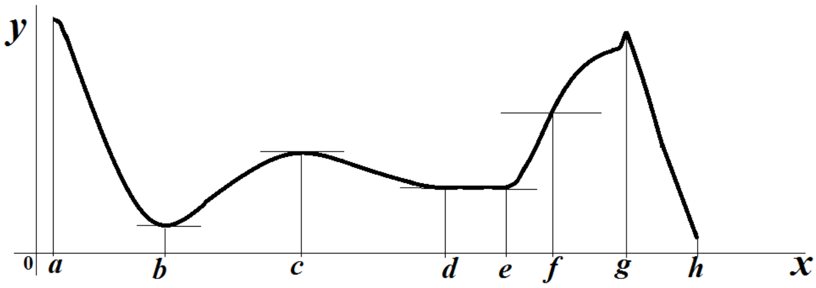


Fig. 1. Una gráfica de una función real de variable real con diferentes puntos para su análisis.

2 Extremos libres (no condicionados)

2.1 Condición necesaria

Dada $f(\vec{x})$, con variable vectorial $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_m)$ la condición necesaria de extremo de f en $\vec{x}_0$ es todos los puntos con la derivada parcial nula

$$\nabla f(\vec{x})\Big|_{\vec{x}=\vec{x}_0} = \vec{0} \tag{1}$$

o sea $\dfrac{\partial f}{\partial x_1} = 0, \ldots, \dfrac{\partial f}{\partial x_m} = 0$, en $\vec{x}_0$.

2.2 Condición suficiente

Clasificación del extremo por las derivadas segundas (*Hessiano*). Para mejor comprensión, se hará el estudio con una función de solo dos variables independientes: $f(x, y)$. Denotaremos las derivadas parciales así: ${}^{\partial f}\!/_{\partial x} = f_x$; ${}^{\partial^2 f}\!/_{\partial x \partial y} = f_{xy}$; ${}^{\partial^2 f}\!/_{\partial y^2} = f_{yy}$, etc., además, supondremos funciones de clase $\mathbb{C}^2$ de modo que $f_{xy} = f_{yx}$. El desarrollo de Taylor para $\Delta f = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y)$ es:

$$\Delta f = f_x \Delta x + f_y \Delta y + \frac{1}{2!}(f_{xx}\Delta x^2 + 2 f_{xy}\Delta x \Delta y + f_{yy}\Delta y^2) + \text{etc.} \tag{2}$$

Si (x_0, y_0) es un punto crítico resulta $f_x = f_y = 0$ en (x_0, y_0) (condición necesaria). Además, suponiendo un entorno suficientemente pequeño en (x_0, y_0), es decir, $\Delta x, \Delta y$ suficientemente pequeños como para despreciar los términos con potencias superiores a dos, resultando:

$$\Delta f \simeq \frac{1}{2}\left(f_{xx}\Delta x^2 + 2 f_{xy}\Delta x \Delta y + f_{yy}\Delta y^2\right) + \text{resto despreciado} \tag{3}$$

Para investigar que ocurre en la variación Δf en el entorno de (x_0, y_0) debemos ver que ocurre en las (x) direcciones que pasan por (x_0, y_0). Para ello, es mejor utilizar un ángulo de dirección θ (fig. 2), de modo que:

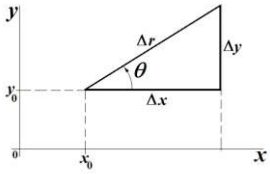


Fig. 2. Una gráfica que muestra el incremento de una y otra variable.

$$\Delta x = \Delta r \cos\theta$$

$$\Delta y = \Delta r \sin\theta \qquad \textbf{(4)}$$

reemplazando en Δf resulta: $\Delta f \simeq \frac{\Delta r^2}{2}\left(f_{xx}\cos^2\theta + 2 f_{xy}\cos\theta\sin\theta + f_{yy}\sin^2\theta\right)$

Supongamos que, al menos alguna derivada es no nula, por ejemplo, f_{xx} , de modo que multiplicar y dividir por ella resulta:

$$\Delta f \simeq \frac{\Delta r^2}{2 f_{xx}}(f_{xx}^2\cos^2\theta + 2 f_{xy} f_{xx}\cos\theta\sin\theta + f_{xx} f_{yy}\sin^2\theta) \qquad \textbf{(5)}$$

Vemos que hay fenómenos que sugieren el desarrollo de un binomio al cuadrado, para ello sumamos y restamos $f_{xy}^2\sin^2\theta$:

$$\Delta f \simeq \frac{\Delta r^2}{2 f_{xx}}(f_{xx}^2\cos^2\theta + 2 f_{xx} f_{xy}\cos\theta\sin\theta + f_{xy}^2\sin^2\theta - f_{xy}^2\sin^2\theta + f_{xx} f_{yy}\sin^2\theta) \qquad \textbf{(6)}$$

o bien:

$$\Delta f \simeq \frac{\Delta r^2}{2 f_{xx}}\left[(f_{xx}\cos\theta + f_{xy}\sin\theta)^2 + \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy}\end{vmatrix}\sin^2\theta\right] \qquad \textbf{(7)}$$

donde $\left| f_{xx}, f_{xy}, f_{xy}, f_{yy}\right| = f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2$ es el llamado determinante *hessiano* (*H*), todo, claro está, evaluado en el punto crítico (x_0, y_0). [1], [2], [3], [4], [5], [6]

2.3 Casos posibles

a) $H > 0,\ f_{xx} > 0 \rightarrow \Delta f > 0$ para todo θ , luego es un ***mínimo estricto.***

b) $H > 0,\ f_{yx} < 0 \rightarrow \Delta f < 0$ para todo $\forall\theta$, ***Máximo estricto.***

c) $H < 0$, ahora el signo de Δf depende de θ, en efecto, para $\theta = 0$: $\Delta f \simeq \frac{\Delta r^2}{2} f_{xx}$, si $f_{xx} > 0$, parece que se tiene un mínimo, pero, no es así, pues para una dirección θ_0 tal que $(f_{xx}\cos\theta_0 + f_{xy}\sin\theta_0) = 0$, o sea $\theta_0 = \tan^{-1}\left(-\frac{f_{xx}}{f_{xy}}\right)$ es $\Delta f \simeq \frac{\Delta r^2}{2 f_{xx}} H\sin^2\theta$ y como $H < 0$ en $\Delta f < 0$, Máximo. Por lo tanto, en la dirección $\theta = 0$ (eje ***x***) es un mínimo, pero en la dirección θ_0 es un Máximo, por lo tanto, en (x_0, y_0) se tiene un *punto silla*. Ejemplo de este caso: $z = x^2 - y^2$ (paraboloide hiperbólico o "*silla de montar*"), ver figura 3:

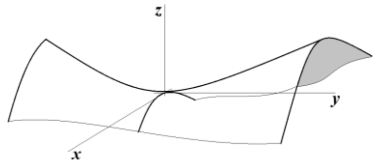


Fig. 3. Una gráfica que muestra el paraboloide hiperbólico o "*silla de montar*".

Punto crítico: $z_x = 2x = 0 \to x_0 = 0$ siendo $z_y = -2y = 0 \to y_0 = 0$, el origen es un punto crítico pero *¿qué extremo es*? El *determinante hessiano* es: $\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -4$, luego: $\Delta f \simeq \frac{\Delta r^2}{4}\left[4\cos^2\theta - 4\sin^2\theta\right]$ para $\theta = 0$ es $\Delta f \simeq \Delta r^2 > 0$ mínimo, como $f_{xy} = 0$, es $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$ y en esa dirección (eje y) es $\Delta f \simeq -\Delta r^2 < 0$ máximo. El valor de z en $(0,0)$ es 0 .

d) $H = 0$: $\Delta f \simeq \frac{\Delta r^2}{2\,f_{xx}}(f_{xx}\cos\theta + f_{xy}\sin\theta)^2$, otra vez Δf depende de la dirección: para $\theta = 0$ es $\Delta f \simeq \frac{\Delta r^2}{2\,f_{xx}} f_{xx}$, si $f_{xx} > 0$ parece ser su mínimo, pero para $\theta_0 = \tan^{-1}(\frac{-f_{xx}}{f_{xy}})$, $\Delta f = 0$, es decir, f no varía, luego sería su mínimo amplio o no estricto. Ejemplo de este caso: $z = y^2$ para $\forall x$ (fig. 4) (es un *cilindro parabólico*):

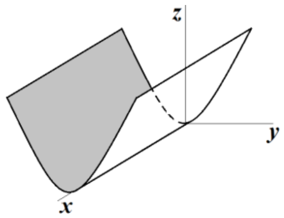


Fig. 4. Una gráfica que muestra el cilindro parabólico.

$z_x = 0$, $z_y = 2y = 0 \to y = 0$ para $\forall x$ (es una "recta crítica"). El *hessiano* es $\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 0$.

$\Delta f \simeq \Delta r^2.2\sin^2\theta$, para $\theta = 0, \Delta f = 0$, f no varía. Para $\theta = \frac{\pi}{2}, \Delta f > 0$ mínimo amplio.

2.4 Generalización para n variables $x_1, ..., x_n$

El *determinante hessiano* es ***H***. En este caso ($n > 2$) es mejor utilizar la forma cuadrática:

$$\Delta f \simeq \begin{bmatrix} \Delta x_1 & \dots & \Delta x_n \end{bmatrix} H \begin{bmatrix} \Delta x_1 \\ \vdots \\ \Delta x_n \end{bmatrix} = \bar{x}^T \left[H\right] \bar{x} \qquad \textbf{(8)}$$

Caso a: si todos los autovalores de la matriz hessiana (simétrica) son > 0, es $\Delta f > 0$, mínimo estricto.
Caso b: si todos son < 0, es $\Delta f < 0$, Máximo estricto.
Caso c: si son de $\neq$ signos $\to$ "*ensilladura*", pero claro está que, para $n > 2$ no es posible dibujarlo.

Caso d: si algún *autovalor* es nulo, no define. [1], [2], [3]
Otro criterio es utilizar los *determinantes menores superiores izquierdos*:

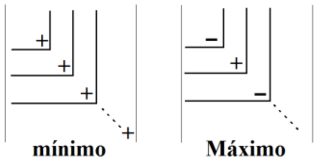


Fig. 5. Una gráfica que muestra los determinantes menores.

Otra signatura es *punto silla*, si son todos nulos, no define.

3 Extremos restringidos (o condicionados o ligados)

En el tema anterior las variables de la función objeto eran independientes, es decir, varían libremente en el Dominio de la función, en la búsqueda de los puntos críticos. Ahora, restringimos los valores de las variables imponiendo ciertas condiciones, es decir, las variables de la función objeto ya no serán todas independientes. Hay muchos casos prácticos en Ingeniería, de distinta naturaleza, que conducen a este asunto. Por ejemplo: maximar el volumen de una caja en forma de paralelepípedo recto, $\upsilon = xyz$, pero condicionando que el área total tenga cierto valor, por ejemplo, $A = 1m^2$, por lo tanto, si consideramos sin tapa x, y, z deberá cumplir: $xy + 2xz + 2yz = 1$, en síntesis: Función objeto: $\upsilon = xyz$; Restricción: $xy + 2xz + 2yz - 1 = 0$

Otro Ejemplo. Dada una elipse, hallar los puntos de ella que estén más cerca y más lejos de otro punto dado (por ejemplo, el origen $(0{,}0)$), ver figura 6. La función objeto (o su cuadrado) es $r^2 = x^2 + y^2$, restringida a los puntos de la elipse: $\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$

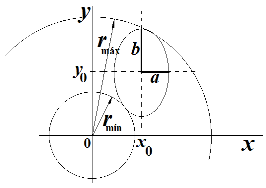


Fig. 6. Gráfica del ejemplo de la elipse.

Estudiamos el tema comenzando por los casos más sencillos, y así, rápidamente se pueden comprender ciertas particularidades. Sea la función objeto $z = x^2 + y^2$ (paraboloide circular de eje z), ver figura 7. Hallar los puntos críticos de posibles extremos condicionados por la restricción $y = -x + 1$, o bien $y + x - 1 = 0$ (forma implícita).

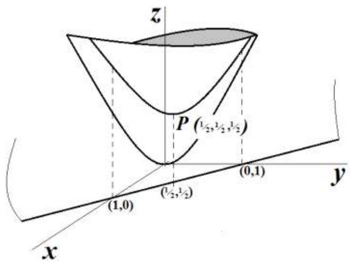


Fig. 7. Gráfica del ejemplo correspondiente.

Visualicemos: en la figura 7 se observa el paraboloide que es la gráfica de $Z = x^2 + y^2$ y en el plano x, y se observa la recta $y + x - 1 = 0$, de modo que si variamos x, y solo lo podemos hacer sobre dicha recta.

En $\mathbb{R}^3$: $y+x-1=0$ es un plano paralelo a Z que intersecta al paraboloide generando una parábola. Si fuese la búsqueda de extremos libres, obviamente un punto crítico es el origen $(0,0)$, con el mínimo $Z=0$ pero aquí debemos respetar la restricción, de modo que debe ser un punto como el P (mínimo de la parábola intersección). Este caso es fácil: podemos reemplazar en $Z = x^2 + y^2$, $y=-x+1$, resulta:

$$Z = x^2 + (-x+1)^2 = x^2 + x^2 - 2x + 1 \quad \textbf{(9)}$$

$Z = 2x^2 - 2x + 1$, ahora consideramos a Z como función de una sola variable x, de modo que un punto crítico se obtiene anulando la derivada:

$$\frac{dz}{dx} = 4x - 2 = 0 \rightarrow x = \frac{1}{2} \quad \textbf{(10)}$$

Luego $y = \frac{1}{2}$ de modo que $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ es un punto crítico. *¿Qué se tiene*? Derivando de nuevo: $\frac{d^2z}{dx^2} = 4 > 0$, luego es un mínimo. El valor mínimo de Z es también $\frac{1}{2}$ (punto P). *¿Cómo se ve esto en los conjuntos de nivel de z y de* $g = x + y - 1$?

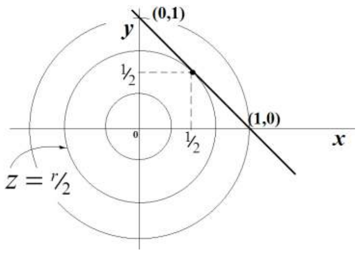


Fig. 8. Gráfica del ejemplo correspondiente.

Las curvas de nivel de Z son circunferencias, de todas ellas nos interesa la $z = \frac{1}{2}$. Podemos considerar que la recta $x+y-1=0$ es la "curva" de nivel $g=0$. Vemos que hay tangencia en el punto crítico. Se comprende que si nos "*movemos*" en la recta hacia "*arriba*" Z aumenta, lo mismo si nos movemos hacia "*abajo*", por lo tanto es un mínimo. ¿Podría la recta ser secante en el punto crítico? (ver figura 9). No, pues entonces no habría ni máximo ni mínimo: en efecto, si nos movemos hacia arriba, Z aumenta pero hacia abajo Z disminuye (en el entorno del punto crítico). [1], [2], [3]

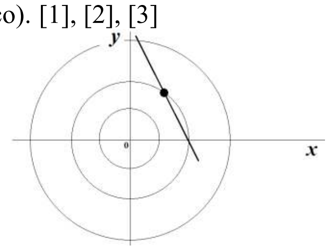


Fig. 9. Gráfica del ejemplo correspondiente.

Dicha tangencia entre las curvas de nivel en el punto crítico implica que las normales son paralelas: dichas normales son las gradientes de ***Z*** y de ***g*** evaluados en el punto crítico. En efecto:

$$\nabla Z = \left(\frac{\partial Z}{\partial x}, \frac{\partial Z}{\partial y}\right) = (2x, 2y) \quad \textbf{(11)}$$

que evaluado en $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ es $\nabla Z = (1,1)$. $\nabla g = (1,1)$: En este caso, más que paralelos, son iguales. El paralelismo se lo puede considerar como una dependencia lineal: $\nabla Z = \lambda \nabla g$, donde λ es una constante que aquí vale uno. En síntesis: hemos resuelto el problema sustituyendo una variable en función de la otra, utilizando la restricción. ¿*Este método, de ser posible, conduce siempre al resultado correcto*? Sí, pero hay que tener precaución en el reemplazo de variables. Veamos con un ejemplo: encontrar la mínima distancia al origen $(0,0)$ de los puntos de la parábola "*horizontal*" $y^2 = x-1$ (fig. 10). O sea:

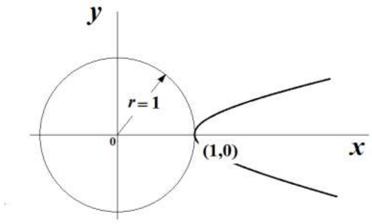


Fig. 10. Gráfica del ejemplo correspondiente.

Función objeto: $r^2 = x^2 + y^2$; Restricción: $g(x,y) = y^2 - x + 1 = 0$. Directamente de la fig. 10 vemos que la distancia mínima en $r = 1$ (punto crítico $(1,0)$). Intentemos reemplazar en la función objeto y^2 por $x-1$, resulta $r^2 = x^2 + x - 1$, derivado y anulando la derivada:

$$\frac{d(r^2)}{dx} = 2x + 1 = 0 \rightarrow x = -\frac{1}{2} \tag{12}$$

¡INCORRECTO!

¿*Qué ocurre*? Lo que ocurre es que en base al Teorema de la Función Implícita y no es función de x en el entorno de $(1,0)$, en efecto $\frac{\partial g}{\partial y} = 0$ en dicho punto, luego y no es función de x. En cambio, al ser $\frac{\partial g}{\partial x} = -1 \neq 0$, entonces es x función de y: es $x = y^2 + 1$, reemplazando en la función objeto $r^2 = (y^2+1)^2 + y^2 = y^4 + 2y^2 + 1 + y^2 = y^4 + 3y^2 + 1$, entonces, $d(r^2)/dy = 4y^3 + 6y^2 = 0 \rightarrow y = 0$, $x = 1$, lo que es correcto. La otra solución de $4y^2 + 6 = 0$, no es real.

3.1 Multiplicadores de Lagrange

En los ejemplos anteriores hemos podido explicitar una variable en función de la otra, respetando la condición que impone el conocido Teorema de las Funciones Implícitas, pero este no siempre es posible (por ejemplo, en $e^{(x+y)} + \sin(y/x) = 0$ no es posible). En estos casos, se puede recurrir al método de los multiplicadores de Lagrange, denominados (λ). Introduciremos este tema también con ejemplos sencillos. Sea la función objeto $u = x + y + z$, restringida por dos funciones de restricción: $g_1 = 0 = x^2 + y^2 - 1$ (cilindro de eje z, radio 1) y $g_2 = 0 = z - 2$ (plano "*horizontal*") (ver figura 11)

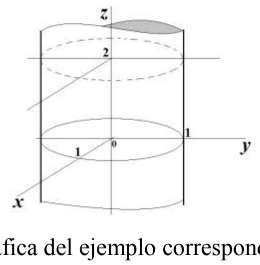


Fig. 11. Gráfica del ejemplo correspondiente.

Calculemos los gradientes:

$\nabla u = (1,1,1)$, vector perpendicular a las superficies de nivel $u = cte.$ (planos $x + y + z = cte.$)
$\nabla g_1 = (2x, 2y, 0)$, perpendicular a la superficie cilíndrica que es superficie de nivel cero de $u = x^2 + y^2 - 1$
$\nabla g_2 = (0,0,1)$, perpendicular al plano $z = 2$. *¿Estos vectores son linealmente dependientes*? Si $2x - 2y \neq 0 \rightarrow x = y$ son linealmente dependientes. Como $\nabla g_1 . \nabla g_2 = 0$, ∇g_1 y ∇g_2 son perpendiculares, los podemos tomar como base para expresar ∇u :

$$\nabla u = \lambda_1 \nabla g_1 + \lambda_2 \nabla g_2 \text{(en } x = y \text{ , } z = 2 \text{).} \qquad \textbf{(13)}$$

Se forma así, un sistema de ecuaciones, compatible, que permita hallar los puntos críticos $P_1(\sqrt{1/2}, \sqrt{1/2}, 2)$, $P_2(-\sqrt{1/2}, -\sqrt{1/2}, 2)$, además: $\lambda_2 = 1$, $\lambda_1 = \pm\sqrt{2/2}$. Con $x = \sqrt{1/2}$: $\lambda_1 = \sqrt{2}/2$ Con $x = -\sqrt{1/2}$: $\lambda_1 = -\sqrt{2}/2$. Pero, por ahora, no utilizaremos estos valores de λ_1, λ_2 . Para $P_1(\sqrt{1/2}, \sqrt{1/2}, 2)$, u toma el valor $2 + \sqrt{2}$ (Máximo?) Para $P_2(-\sqrt{1/2}, -\sqrt{1/2}, 2)$, u toma el valor $2 - \sqrt{2}$ (mínimo?) Más adelante debemos investigar criterios de suficiencia para los extremos, que, como veremos, conducen al *hessiano ampliado u orlado*. También con el Método de Lagrange debemos tener precaución, pues puede fallar, veamos dos ejemplos ilustrativos:

4 Generalización

Sea la función objeto $f(\vec{x})$, con variable vectorial $\vec{x} = (x_1, ..., x_n)$ y m funciones implícitas de restricción (con $m < n$): $g_k(\vec{x}) = 0$, con $k = 1, ..., m$. Construimos la función de Lagrange, $L(\vec{x}, \lambda_1, ..., \lambda_m) f(\vec{x}) - \lambda_k g_k$ (también se puede sumar los términos donde intervienen las funciones de restricción). Si los gradientes ∇g_k son independientes, los puntos críticos se obtienen resolviendo el sistema: $\frac{\partial L}{\partial x_1} = 0, ..., \frac{\partial L}{\partial x_m} = 0, \frac{\partial L}{\partial \lambda_1} = 0, ..., \frac{\partial L}{\partial \lambda_m} = 0$. [1], [2], [3]

5 Análisis del tipo de extremo utilizando el *hessiano* ampliado u orlado

Este tema será presentado sin demostraciones. Sea la función objeto $f(\vec{x})$ sujeta a una sola restricción $g(\vec{x}) = 0$. Construimos como ya hemos dicho, la función de Lagrange $L = f(\vec{x}) - \lambda g(\vec{x})$, luego construimos el *hessiano orlado* por las primeras derivadas de g a las derivadas segundas de L : $\frac{\partial^2 L}{\partial x_i \partial x_j} = L_{ij}$:

$$\begin{vmatrix} 0 & -\partial g/\partial x_1 & -\partial g/\partial x_2 & \cdots & -\partial g/\partial x_n \\ -\partial g/\partial x_1 & L_{11} & L_{12} & \cdots & L_{1n} \\ -\partial g/\partial x_2 & L_{21} & L_{22} & \cdots & L_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -\partial g/\partial x_n & L_{n1} & L_{n2} & \cdots & L_{nn} \end{vmatrix} \qquad \textbf{(14)}$$

Todo esto se evalúa en el punto crítico. Denominamos H_3 al determinante 3×3 superior izquierdo, H_4 al siguiente, hasta el completo $(n \times n)$. Si $H_3 > 0, H_4 < 0, ...$ (signos alternados) se tiene un máximo. Si son todos negativos, se tiene un mínimo. Cualquier otro orden de signos es un punto silla. Si son todos nulos no define y se debe investigar *ad hoc*. En el caso de solo dos variables x, y se tiene:

$$\begin{vmatrix} 0 & -\frac{\partial g}{\partial x} & -\frac{\partial g}{\partial y} \\ -\frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial^2 L}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} \\ -\frac{\partial g}{\partial y} & \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} \end{vmatrix} \begin{matrix} > 0 \text{ Máximo} \\ < 0 \text{ mínimo} \\ = 0 \text{ no define} \end{matrix} \qquad \textbf{(15)}$$

Ejemplo.

Retomemos el ejemplo anterior: Función objeto: $u = x + y + 2$; Restricción: $x^2 + y^2 - 1 = 0$; entonces $L = x + y + -\lambda(x^2 + y^2 - 1)$. Puntos críticos: $x = y = \pm\sqrt{2}/2$. Reemplaza en la 1ª $\lambda_1 = \sqrt{2}/2$. Reemplaza en la 1ª $\lambda_2 = -\sqrt{2}/2$. Puntos críticos: $P_1(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$, $P_2(-\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2)$. Construyamos el *hessiano orlado*:

$H = \begin{vmatrix} 0 & -2x & -2y \\ -2x & -2\lambda & 0 \\ -2y & 0 & -2\lambda \end{vmatrix}$, evaluemos en $P_1(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$ y $\lambda_1\ \sqrt{2}/2$:

$H = \begin{vmatrix} 0 & -\sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & -\sqrt{2} & 0 \\ -\sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} \end{vmatrix} = \sqrt{2}(2) > 0$ (Máximo). Ahora evaluemos en $P_2(-\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2)$:

$H = \begin{vmatrix} 0 & \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} \end{vmatrix} = -\sqrt{2}(2) < 0$ (mínimo), confirmando lo ya calculado antes.

Si se tienen m vínculos $g_1, ..., g_m$, con $m < n$ el *hessiano orlado* sería:

$$\begin{array}{c} \\ \text{m ceros}\left\{\begin{matrix} \\ \\ \\ \end{matrix}\right. \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \begin{vmatrix} \overbrace{0 \quad \cdots \quad 0}^{\text{m ceros}} & -\partial g_1/\partial x_1 & -\partial g_1/\partial x_1 & \cdots & -\partial g_1/\partial x_n \\ \vdots \quad\ \ \vdots \quad\ \ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ 0 \quad \cdots \quad 0 & -\partial g_m/\partial x_1 & -\partial g_m/\partial x_1 & \cdots & -\partial g_m/\partial x_n \\ -\partial g_1/\partial x_1 \ \cdots \ -\partial g_m/\partial x_1 & L_{11} & L_{12} & \cdots & L_{1n} \\ -\partial g_1/\partial x_2 \ \cdots \ -\partial g_m/\partial x_2 & L_{21} & L_{22} & \cdots & L_{2n} \\ \vdots \quad \cdots \quad \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -\partial g_1/\partial x_n \ \cdots \ -\partial g_m/\partial x_n & L_{n1} & L_{n2} & \cdots & L_{nn} \end{vmatrix} \qquad \textbf{(16)}$$

Considerando que $H_{2m+1} > 0, H_{2m+2} < 0$, Máximo. Todos negativos, mínimo. Otra signatura "*punto silla*" son todos nulos, no define. [1], [2], [3]

En lo que sigue, en otros artículos se hará referencia al trabajo realizado por el Dr. Salvador Gigena quien desarrolló un criterio propio de derivadas superiores, sin utilizar los multiplicadores, basándose en composición de funciones, definiciones y derivadas de funciones implícitas, jacobianos, etc. [4], [5], [6]

6 Conclusiones y trabajos futuros

Es interesante terminar este artículo mostrando cómo en Ingeniería en general nunca las funciones a extremar son libres, sino más bien siempre son condicionadas o vinculadas o restringidas. Esto permite ver la modelización de los fenómenos a través de búsquedas de extremos condicionados.

Esta ha sido una propuesta didáctica, con la cual sería bueno comenzar una clase brindando ejemplos que son bien ilustrativos en Matemática aplicada a Ingeniería, donde los Máximos y mínimos de una función, (conocidos como extremos de una función), son los valores más grandes (máximos) o más pequeños (mínimos), que toma una función en un punto situado ya sea dentro de una región en particular de la curva (extremo local) o en el Dominio de la función en su totalidad (extremo global o absoluto). De manera más general, los Máximos y mínimos de un conjunto (como se define en teoría de conjuntos) son los elementos, mayor y menor en el conjunto, cuando existen. [7]

Agradecimientos. Especial colaboración e ideas originales del Profesor Ing. Gerardo Víctor Morelli, Profesor retirado de la UNC y de la UTN (entre otras instituciones). En sus brillantes clases, por su claridad y didáctica, se pueden ver estos y otros desarrollos muy útiles para la Enseñanza de la Matemática en carreras de Ingeniería. [4], [5], [6]

Referencias

1. Gigena, S.; Binia, M.; Abud, D. Extremos Condicionados: una propuesta metodológica para su resolución, *Revista de Educación Matemática*, R. Nac. de la Prop. Intelectual N° 168024, UMA - FAMAF, Vol. 16, N° 3, pp. 31-53, (2001)
2. Gigena, S.; Binia, M.; Abud, D. Puntos Críticos Condicionados, en *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (RELME 15) Vol. 15, Tomo II, ISBN N° 970-625-343-2, Argentina, pp. 998-1003, (2002)
3. Gigena, S. D. Extremos condicionados sin multiplicadores de Lagrange. En Martínez, Gustavo (Ed.), Acta Latinoamericana de Matemática Educativa (pp. 150-155). México DF, Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C. (2006).
4. Larson, R.; Edwards, B.H. *Calculus* Brooks/Cole. ISBN 0-547-16702-4. (2009)
5. Stewart, J. Calculus: *Early Transcendentals* Brooks/Cole. ISBN 0-495-01166-5. (2008)
6. Thomas, G.B.; Weir, M.D.; Hass, J.T. *Calculus: Early Transcendentals* Addison-Wesley. ISBN 0-321-58876-2 (2010)
7. Abud, D *Ecuaciones Diferenciales de la Mecánica*, Edit Solsona, ISBN Nº 978-987-42-6953-9, Córdoba, (2017)

Estrategias de enseñanza para contribuir a la superación de algunos errores en las producciones de los alumnos de Análisis Matemático I

Andrea Virginia Alvarez[1], Andrea Silvia Arce[1] , María Cristina Kanobel[1]
[1] Departamento de Matemática, Facultad Regional Avellaneda, Universidad Tecnológica Nacional
Av. Ramón Franco 5050, Villa Domínico, Avellaneda, Buenos Aires, Argentina
andreasarce@yahoo.com.ar, aalvarez@fra.utn.edu.ar, mckanobel@gmail.com

Resumen. Analizando las producciones de nuestros alumnos de la materia Análisis Matemático I de la Universidad Tecnológica Nacional Facultad Regional Avellaneda, observamos que sistemáticamente se producen errores en el proceso de construcción del conocimiento matemático. Dentro del marco teórico constructivista a partir de la exploración de la potencialidad de dichos errores, nos planteamos la necesidad de diseñar estrategias de enseñanza que apunten a la superación de estos, en miras de alcanzar entre otros objetivos, el de un aprendizaje certero, significativo y autorregulado. Se proponen entonces distintas actividades académicas virtuales y presenciales, promoviendo que los estudiantes sean activos y los docentes facilitadores del aprendizaje, utilizando al error como un elemento de motivación, atendiendo las carencias detectadas en los conocimientos previos a partir de su utilización en los contenidos nuevos que se abordan en la materia.

Palabras Clave: Errores de aprendizaje, Análisis Matemático I, Estrategias de enseñanza, Aprendizaje autorregulado.

1 Introducción

En los procesos de aprendizaje, el error es parte constituyente. Al conocer, los alumnos realizan conjeturas, implicaciones, con la posibilidad del error en el proceso. Por lo tanto, en la construcción del conocimiento matemático los errores forman parte del quehacer cotidiano en las aulas. Pensamos que los errores cometidos por los alumnos pueden ser el punto de partida motivador para realizar distintas exploraciones matemáticas [1], que impliquen el desarrollo de acciones cognitivas para superarlos.

Existe una amplia bibliografía con respecto a la clasificación de errores. El presente trabajo no persigue como objetivo una clasificación de los errores observados, sino el diseño de actividades académicas virtuales y presenciales que permitan desarticular los mecanismos que obstaculizan el aprendizaje significativo de algunos conceptos de Análisis Matemático I, asignatura del primer año de todas las especialidades de la Carrera de Ingeniería de la Universidad Tecnológica Nacional Facultad Regional Avellaneda. Sostenemos que el estudiante autorregulado construye aprendizajes significativos, obteniendo buenos desempeños académicos. Por esta razón, diseñamos las tareas con el propósito de aumentar la motivación intrínseca, pensando en profesores que actúen como correguladores de los aprendizajes, fomentando un aprendizaje significativo [2]. La intervención didáctica se desarrolla en el marco del Proyecto de investigación interfacultades “Gestión y transferencia del conocimiento en las ciencias básicas mediado por tecnologías” que se lleva a cabo actualmente en las regionales Avellaneda, Buenos Aires y Chubut de la Universidad Tecnológica Nacional.

2 Marco Teórico

2.1 Aprendizaje centrado en el alumno

Según expresa el CONFEDI [3], en este aprendizaje el foco está puesto en lo que el estudiante hace para aprender. El profesor cumple el rol de facilitador, es quien configura estrategias y acciones necesarias para que el alumno construya conocimiento [3]. Entre las características del aprendizaje centrado en el alumno destacamos:

- Sujeción a un aprendizaje más activo que pasivo.
- Énfasis en el aprendizaje profundo y la comprensión.
- Incremento en la responsabilidad del estudiante.
- Refuerzo del sentido de autonomía del estudiante.

Según el CONFEDI, un aprendizaje más auténtico y de mayor significación y persistencia, permite desarrollar habilidades de pensamiento de orden superior (pensamiento crítico, creatividad, análisis, conceptualización, evaluación y autoevaluación).

2.2 Estrategias de Enseñanza

Según Díaz -Barriga y Hernández [4], podemos definir a las estrategias de enseñanza como los procedimientos o recursos utilizados por el agente de enseñanza para promover aprendizajes significativos. Las estrategias preinstruccionales de enseñanza son las que se incluyen antes del desarrollo del contenido específico de la asignatura, atendiendo a una clasificación de las estrategias en cuanto a su momento de uso y presentación. La activación del conocimiento previo nos permite conocer el saber de los alumnos y su posterior utilización como base para promover los nuevos aprendizajes. Así las estrategias preinstruccionales también nos muestran las carencias de conocimientos previos que se trasladan a los nuevos contenidos que se abordan.

2.3 Aprendizaje autorregulado

Actualmente, se exige al estudiante universitario que sea capaz de aprender a aprender. Esta exigencia surge al desarrollar un proceso de enseñanza aprendizaje centrado en el alumno, promoviendo la autonomía, y se vincula desde las teorías educacionales sociocognitivas, con el aprendizaje autorregulado que se lo define como un proceso activo en el que los estudiantes seleccionan sus metas académicas que desean alcanzar y que les permiten regular variables cognitivas, afectivo emocionales, contextuales y comportamentales que intervienen en el aprendizaje y que le permiten alcanzarlas. Diversos estudios demuestran que el alumno que autorregula su aprendizaje obtiene mejores resultados académicos [5].

2.4 Retroalimentación

Al igual que Paoloni [6], entendemos a los procesos de retroalimentación desde una perspectiva amplia que los vincula a cuatro áreas estrechamente relacionadas:

- Retroalimentación sobre la tarea entendida como producto.
- Retroalimentación sobre los pasos o procedimientos seguidos para completar la tarea.
- Retroalimentación relativa a las estrategias puestas en juego para avanzar en la consecución de la tarea.
- Retroalimentación vinculada con las autopercepciones de las estudiantes no necesariamente ligadas en forma directa con la tarea.

Las características que deberían reunir estos procesos aspiran a comprometer a los estudiantes con sus estudios y activar estrategias autorregulatorias, entre ellas destacamos:

- Acentuar el esfuerzo y el progreso personal del estudiante.
- Brindar alternativas de acción para progresar en la tarea.
- Transmitir información sobre la calidad de la actuación marcando suficiencias e insuficiencias.

.

2.5 Plataforma Moodle

Moodle es una aplicación que pertenece al grupo de los Gestores de Contenidos Educativos (LMS, Learning Management Systems), también conocidos como Entornos de Aprendizaje Virtuales (VLE, Virtual Learning Managements), un subgrupo de los Gestores de Contenidos (CMS, Content Management Systems).[7] Esta aplicación gestiona distintas plataformas educativas, organizada por uno o más docentes con acceso a los alumnos, generando espacios virtuales de gestión de los procesos de enseñanza aprendizaje . El diseño y desarrollo de la plataforma se basan en la teoría del aprendizaje construccionista social. En este contexto el docente suministra y organiza los recursos para que los alumnos alcancen un aprendizaje exitoso.

2.5.1 Cuestionarios Moodle

Dentro de las variadas actividades de Moodle, el Cuestionario es una herramienta muy dúctil que permite en el diseño, plantear estrategias de autoevaluación que serían imposibles de llevar a cabo con cuestionarios en papel. Facilitan a los estudiantes la autorregulación de los aprendizajes, ya que en todos los casos permite una retroalimentación ya establecida por el docente. [7]

2.6 GeoGeobra

Diversas investigaciones indican que el software GeoGebra es un sotfware motivador para el alumno en cuanto a la posibilidad de indagar los conceptos matemáticos en diferentes marcos, por ejemplo, marco geométrico y marco algebraico. [8]
Entre las características que presenta GeoGebra destacamos:

- Ofrecer una interfaz fácil de usar con comandos y ayuda.
- Alentar el aprendizaje por descubrimiento experimental.

3 Descripción de la experiencia

Nuestra propuesta parte de algunos errores recurrentes de los alumnos observados durante nuestra práctica docente en la FRA. Acotamos la experiencia a los errores cometidos en los contenidos de las Unidades 1 y 2 de la asignatura. En la primera unidad observamos dificultades en el reconocimiento de distintas expresiones algebraicas, en la simplificación y en la resolución de inecuaciones. En la segunda unidad advertimos frecuentemente grandes dificultades en el momento de identificar ciertos tipos de indeterminación en el cálculo de límites. (Figuras 1, 2 y 3)

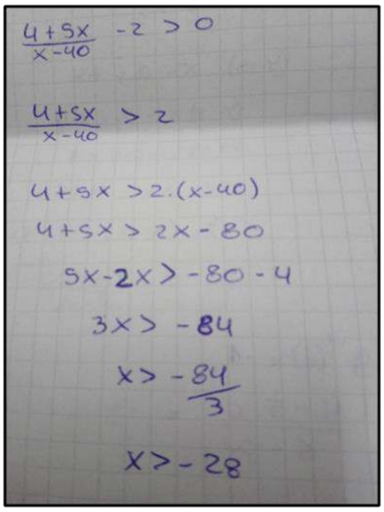


Fig. 1 Error al resolver una inecuación.

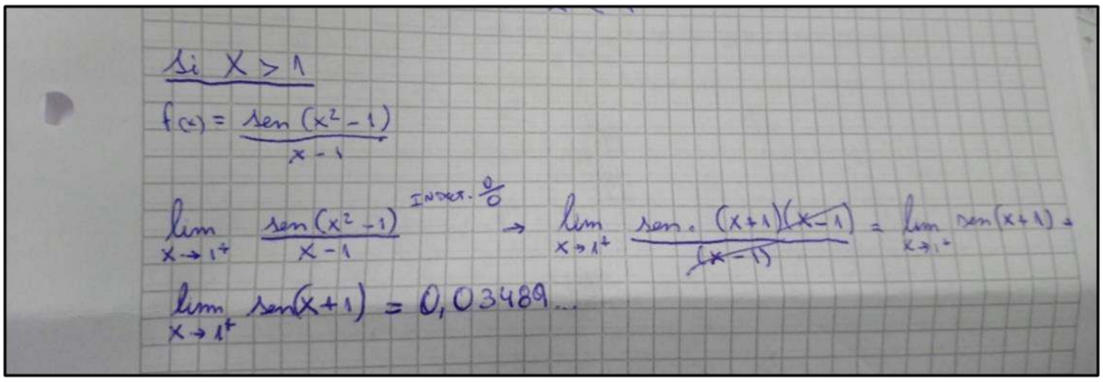


Fig. 2 Error en la simplificación.

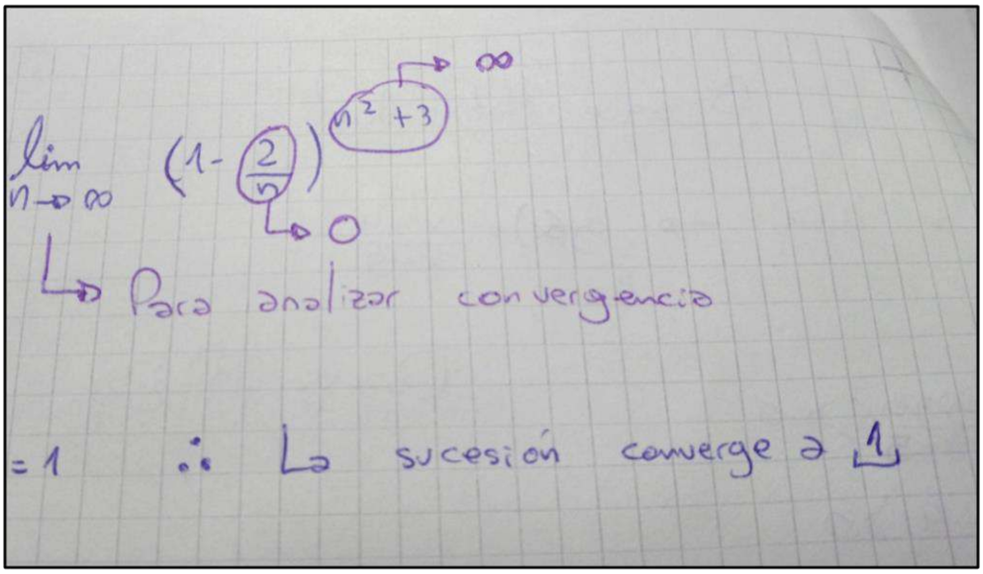


Fig. 3 Error en el cálculo de límite indeterminado.

En consecuencia, se diseñan dos actividades académicas. En ambas se parte de al menos una clase presencial, en dónde se mencionan los conceptos que luego serán abordados en cada propuesta. Luego de realizar cada una de las actividades virtuales, nuevamente en clases presenciales el docente utilizará estrategias que faciliten la discusión sobre los errores más frecuentes en miras de su superación con un aprendizaje en dónde el alumno es el actor central.

3.1 Propuesta didáctica: Cuestionarios Moodle

Elegimos esta herramienta por mostrar, en forma instantánea, una retroalimentación a las respuestas que permite al estudiante reflexionar sobre su producción. Las preguntas utilizadas son de opción múltiple que posibilita la elección de una o más respuestas verdaderas, desplegando una lista de opciones diseñadas estratégicamente y de emparejamiento.

El objetivo de la siguiente pregunta es desarticular los mecanismos que llevan al alumno a suponer, por ejemplo, que una fórmula que contiene al menos una variable denota una función o que cualquier expresión algebraica es una ecuación.

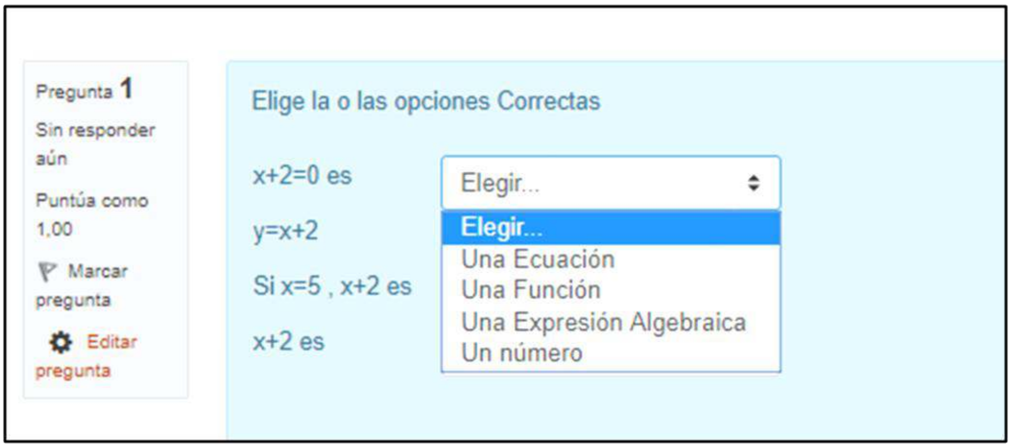


Fig. 4. Cuestionario Moodle. Pregunta sobre Expresiones algebraicas.

En la siguiente pregunta se abordan las desigualdades. Se observa la retroalimentación ante una de las opciones.

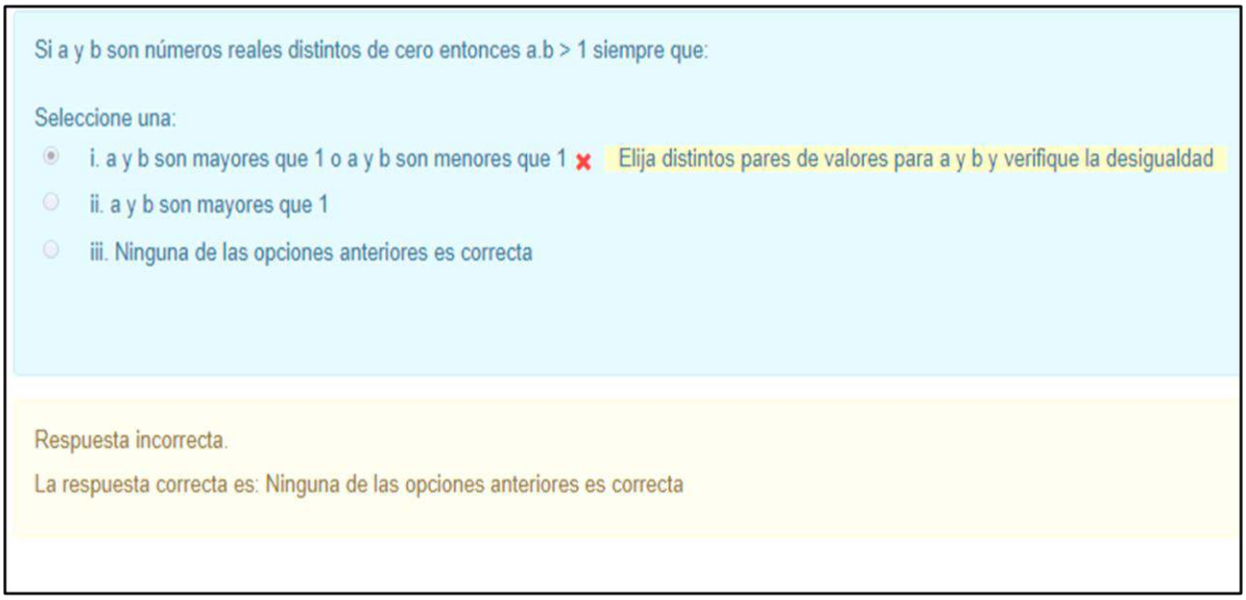


Fig. 5 Cuestionario Moodle. Desigualdades.

En la siguiente figura (Fig.6), se observan las posibilidades que ofrece el cuestionario al responder la pregunta que refiere a los errores al simplificar expresiones algebraicas.

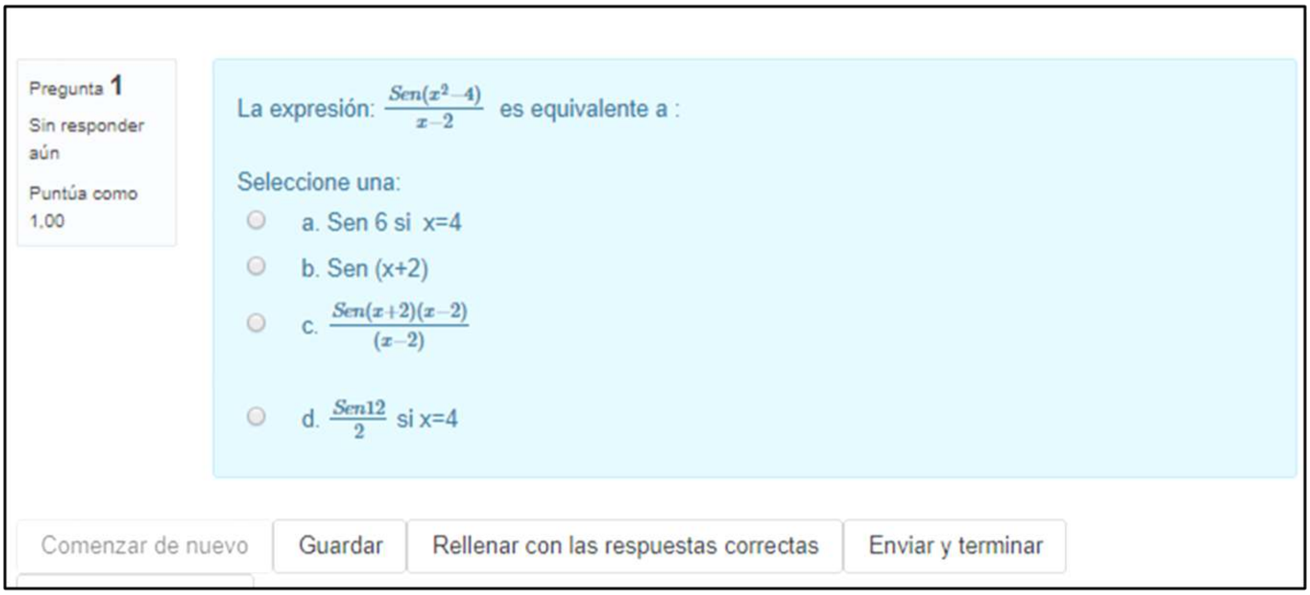


Fig. 6. Cuestionario Moodle. Expresiones algebraicas.

El cuestionario ofrece varias posibilidades de retroalimentación, como se puede advertir en la Fig. 5. Una vez obtenidos los resultados, en una clase posterior se discutirán los conceptos a partir de las respuestas obtenidas y las actividades realizadas, sugeridas por cada retroalimentación, haciendo hincapié en los errores más frecuentes.

3.2 Propuesta didáctica: GeoGebra

Decidimos realizar una actividad con este recurso por ser un software libre, de fácil acceso, amigable y muy potente para el estudio de funciones en general. La mayoría de nuestros alumnos han tenido algún tipo de acercamiento a este programa.

GeoGebra permite abordar el análisis de una indeterminación mediante la construcción de tablas de valores utilizando la hoja de cálculo y recurriendo a la visualización del gráfico de una función determinada recurriendo a la vista gráfica.

Hemos elegido comenzar la actividad con la indeterminación de la forma “1^∞” por la dificultad que representa al reconocerla como tal. La creencia de que un límite indeterminado de la forma “1^∞"siempre es 1 es un error muy frecuente en los alumnos. Nuestra experiencia nos hace pensar que este error se basa en la idea de que el número 1 elevado a “cualquier cosa” siempre es 1, pasando por alto varias cuestiones: 1 es el límite de una función; ∞ no es un número, sino que es el límite de otra función; “1^∞” no expresa ningún cálculo aritmético.

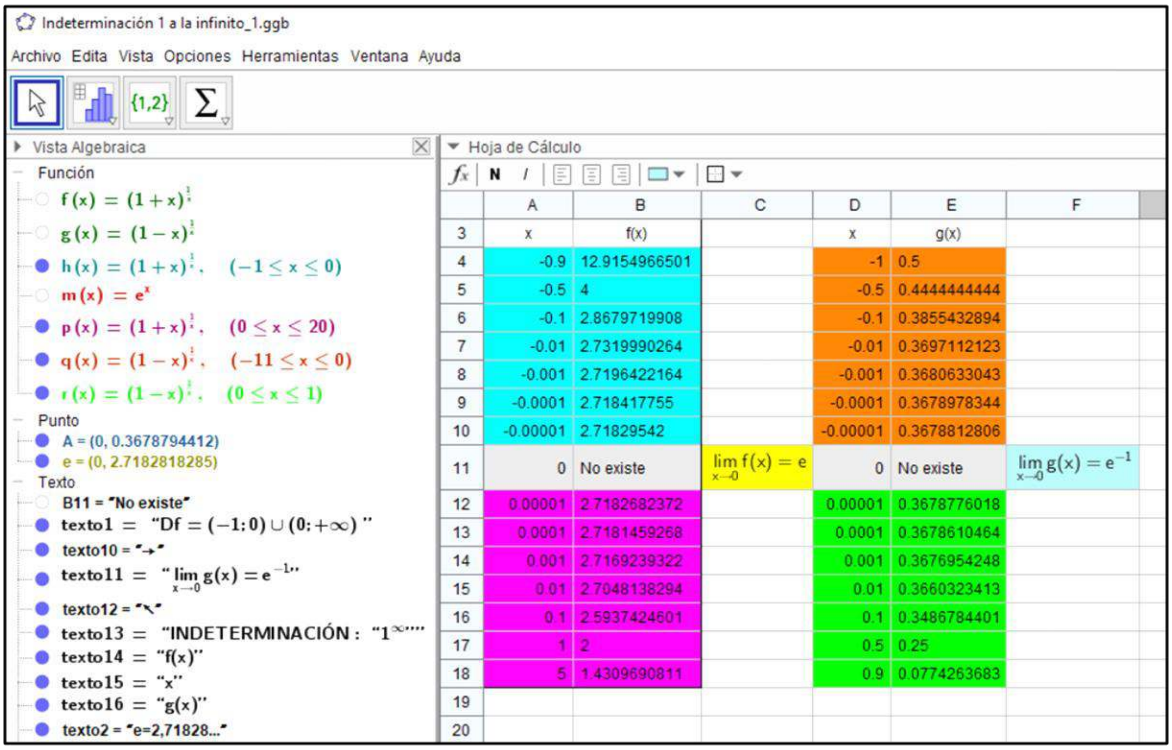
La actividad propuesta considera las funciones de fórmula

$$f(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}} \quad \textbf{(1)}$$

$$g(x) = (1-x)^{\frac{1}{x}} \quad \textbf{(2)}$$

Ambas presentan una indeterminación de la forma “1^∞” cuando $x \to 0$ pero tienen distintos límites.

La Fig. 7 muestra la vista algébrica y la hoja de cálculo de un archivo de GeoGebra. La actividad propone que en este documento se construya una tabla de valores para (1) y (2) haciendo que la variable independiente (x) tome valores cada vez más cercanos a 0 por izquierda y por derecha y calculando las respectivas imágenes. En el caso de la función f el límite es el número **“e”** mientras que el límite para la función g es e^{-1} .



	A	B	C	D	E	F
3	x	f(x)		x	g(x)	
4	-0.9	12.9154966501		-1	0.5	
5	-0.5	4		-0.5	0.4444444444	
6	-0.1	2.8679719908		-0.1	0.3855432894	
7	-0.01	2.7319990264		-0.01	0.3697112123	
8	-0.001	2.7196422164		-0.001	0.3680633043	
9	-0.0001	2.718417755		-0.0001	0.3678978344	
10	-0.00001	2.71829542		-0.00001	0.3678812806	
11	0	No existe	$\lim_{x \to 0} f(x) = e$	0	No existe	$\lim_{x \to 0} g(x) = e^{-1}$
12	0.00001	2.7182682372		0.00001	0.3678776018	
13	0.0001	2.7181459268		0.0001	0.3678610464	
14	0.001	2.7169239322		0.001	0.3676954248	
15	0.01	2.7048138294		0.01	0.3660323413	
16	0.1	2.5937424601		0.1	0.3486784401	
17	1	2		0.5	0.25	
18	5	1.4309690811		0.9	0.0774263683	
19						
20						

Fig. 7. Tabla realizada con GeoGebra para trabajar la indeterminación 1^∞

Los resultados obtenidos en la hoja de cálculo se reflejan en la Fig. 8. En ella pueden observarse los gráficos de las funciones consideradas. En ambos, se destaca el límite de la función cuando *x* tiende a 0.

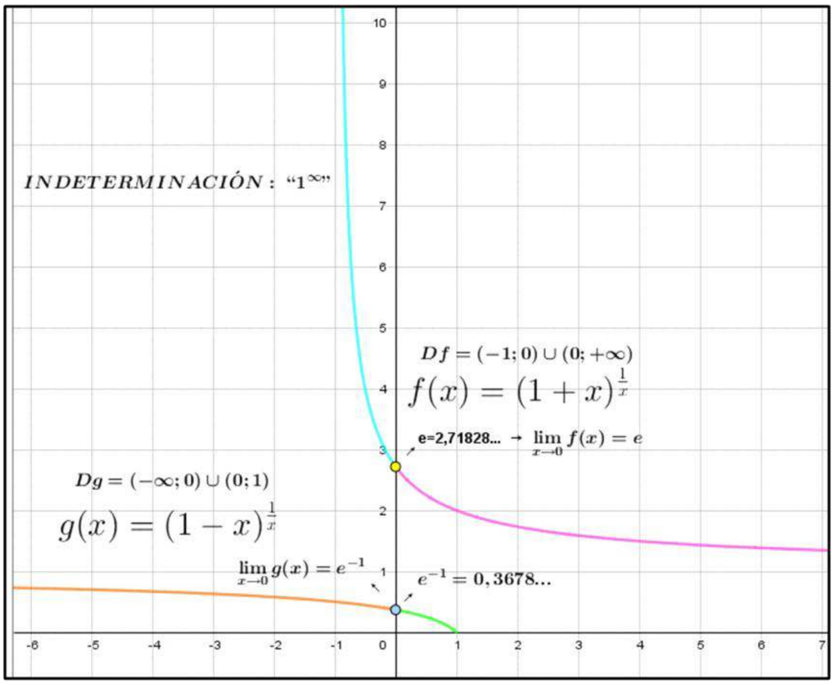


Fig. 8. Gráfico realizado con GeoGebra para visualizar la tabla de valores de la Fig.7.

Es habitual que el cálculo de límites se reduzca a una serie de pasos algebraicos en donde los estudiantes deben recordar la sucesión de procedimientos algebraicos y no se haga hincapié en su interpretación, que es lo que verdaderamente resulta significativo para su aprendizaje. Pensamos que este tipo de actividades permite no sólo entender el concepto de límite indeterminado, sino también el concepto de límite en general.

4 Conclusiones y trabajos futuros

Creemos que incluir estrategias de enseñanza para la discusión sobre los errores cometidos por los estudiantes, utilizándolos como un potencial motivador en la búsqueda de la superación de estos, posibilita un salto cualitativo que va más allá de la algoritmia. La Utilización de tareas académicas virtuales y el software GeoGebra acompañando al alumno en la discusión de los procesos de resolución de las actividades planteadas y su posterior interpretación permite la superación de los errores observados en las producciones de los alumnos. Particularmente, cada una de las actividades presentadas intenta proveer una experiencia anterior al estudio de los temas de la primera Unidad de Análisis Matemático I de nuestra facultad, revisando conocimientos previos, anticipando el trabajo para analizar a través de las actividades preconceptos erróneos.

Esta propuesta de aprendizaje centrada en el estudiante forma parte de un trabajo de campo sobre preconceptos en límites indeterminados y resolución de inecuaciones que se proyecta desarrollar en la Universidad Tecnológica Nacional en la Facultad Regionales Avellaneda. Posteriormente a la implementación de esta metodología de enseñanza, se planea la construcción de instrumentos que permitan evaluar el impacto sobre el aprendizaje respecto a los errores mencionados como así también la influencia del diseño preinstruccional propuesto sobre la motivación en cuanto a la confianza en sus posibilidades y el propio desempeño académico de los estudiantes. Consideramos que el futuro ingeniero puede beneficiarse con el desarrollo de la actividad colaborativa y autorregulada, por eso resulta de interés evaluar el impacto sobre la formación de este tipo de actitudes en los estudiantes a partir de las estrategias de enseñanza promovidas.

Referencias

1. Pochulu, Marcel. Análisis y categorización de errores en el aprendizaje de la matemática en alumnos que ingresan a la universidad. Colección Digital Eudoxus, No 8 (2009)
2. Díaz, F.; Hernández, G., Estrategias docentes para un aprendizaje significativo. Una interpretación constructivista, Vol. 2 (2002)
3. Morano, D.: La formación de ingenieros en Argentina. El proceso de aseguramiento de la calidad. ACOFI - CONFEDI: Aseguramiento De La Calidad Y Mejora De La Educación En Ingeniería, pp.41-74 (2018)
4. Díaz-Barriga Arceo, F.; Hernández Rojas, G. Estrategias docentes para un aprendizaje significativo. Una interpretación constructivista. 2ª. ed. McGraw Hill (2002)
5. Garello, M.; RINAUDO, M. Características de las tareas académicas que favorecen el aprendizaje autorregulado y la cognición distribuida en estudiantes universitarios. REDU: Revista de Docencia Universitaria, Vol. 10, No 3, pp. 415 (2012)
6. Paoloni, P.; Rinaudo, M.; González-Fernández A. Procesos de retroalimentación en la autorregulación de recursos de aprendizaje. Explorando su potencial en el contexto de la universidad. Revista de Educación a Distancia No.3, pp.333-334 (2011)
7. Sanchos, J. La Plataforma Educativa Moodle. Manual de Consulta para el Profesorado. URL: http://www.fvet.uba.ar/postgrado/Moodle18_Manual_Prof_1.pdf (2007). Accedido el 26 de Julio de 2018
8. Avecilla, F.; Barahona; et al. GeoGebra para la enseñanza de la matemática y su incidencia en el rendimiento académico estudiantil. Revista Tecnológica. Vol. 28, No. 5 (2015)

Integración de contenidos de Álgebra y Geometría Analítica a través de la Resolución de un Problema Ingenieril

Arce Andrea[1], Beherens Nadia[1], Kanobel, María Cristina[1]
[1] Departamento de Matemática, Facultad Regional Avellaneda, Universidad Técnológica Nacional
Av. Ramón Franco 5050, Villa Domínico, Avellaneda, Buenos Aires, Argentina.
andreasarce@yahoo.com.ar, nadiabeherens@hotmail.com, mckanobel@gmail.com

Resumen. Interesadas por lograr un aprendizaje significativo del Álgebra y la Geometría Analítica y en continuidad con nuestros trabajos realizados en el marco del PID FIIT "Formación inicial en Ingenierías y Carreras Tecnológicas" con respecto a la experiencia del Blog interfacultades para el estudio de autovalores y autovectores en modalidad flipped learning, y el estudio de las secciones cónicas a través de una experiencia de trabajo colaborativo y autorregulado se presenta a los alumnos un problema de Ingeniería Industrial en donde se utilizan para su modelización y resolución las transformaciones lineales, las cónicas y la rototraslación de las mismas. Se observa en los estudiantes el desarrollo de estrategias de resolución, interrelación de conceptos, motivación para la modelización y resolución de otros problemas, como así también un mayor nivel en el rendimiento académico.

Palabras Clave: Aprendizaje significativo, Modelización y resolución de problemas, Integración de contenidos de Álgebra y Geometría Analítica, Desarrollo de estrategias.

1 Introducción

En el primer año de las carreras de Ingeniería los alumnos se encuentran con la tarea de aprender diversos contenidos de matemática. En general, dichos contenidos se presentan en secuencia y descontextualizados. Comprometidas en promover mejoras en los procesos de enseñanza y aprendizaje, saliendo de la clase expositiva de matemática para la posterior resolución de los trabajos prácticos, realizamos dos experiencias: La primera fue un trabajo grupal de investigación para el estudio de las secciones cónicas, con la resolución de problemas ingenieriles que requieran la utilización del modelo matemático de dichas curvas y en la segunda, utilizamos el modelo de clase invertida para el estudio de autovalores y autovectores en un Blog interfacultades de estudio compartiendo con la Facultad Regional Bahía Blanca. En ambas experiencias fueron alcanzadas las expectativas esperadas por los docentes, lo que nos incentivó a dar un paso más e incluir la resolución de problemas y la modelización matemática ya que la tarea del Ingeniero será justamente la resolución de problemas ingenieriles, articulando distintas disciplinas. Según el Consejo Federal de Decanos de Ingeniería de la República Argentina (CONFEDI), el marco de formación debe contemplar en la formulación de sus planes de estudio "Desarrollar capacidad para afrontar situaciones de incertidumbre, consolidando actitudes para la solución de problemas no tradicionales con predisposición a la adopción de soluciones bajo riesgo" [1]. Nos proponemos entonces favorecer el desarrollo de estrategias en los estudiantes de modo que logren desarrollar procesos creativos en la resolución de problemas [2].

2 Marco Teórico

1.1 Flipped Learning

En la visión tradicional los estudiantes aprenden a través de instrucción directa del docente, sin embargo, ellos son capaces de entender el conocimiento por sí mismos. El modelo de aprendizaje de flipped learning propone intercambiar el tiempo de instrucción dentro de la clase por el tiempo de práctica fuera de ella. Los estudiantes obtienen el conocimiento antes de tomar la clase, dedicando más tiempo a la resolución de actividades en la misma, permitiendo así una mayor interacción entre compañeros y con los docentes. Lo importante de este modelo es el diseño de las clases presenciales, ya que estarán focalizadas en un pensamiento de orden superior

[3] y en las necesidades puntuales de los alumnos. Dentro de las ventajas de este modelo, podemos decir que propicia: el aprendizaje activo, el desarrollo de las actitudes de aprendizaje de los estudiantes, el uso favorable del tiempo de clase, el énfasis en el estado de aprendizaje de los estudiantes y la solución de problemas particulares.

1.2 Aprendizaje autorregulado

El aprendizaje autorregulado es un proceso cíclico en el que el estudiante planifica para una tarea, monitorea su rendimiento y reflexiona sobre los resultados. Paoloni, Rinaudo y Gonzalez-Fernandez [4] identifican en este modelo las siguientes características: a) los estudiantes son partícipes y protagonistas de sus propios procesos de aprendizaje; b) los estudiantes monitorean, controlan y regulan aspectos de su propia cognición, motivación, comportamiento y ambiente; c) los alumnos comparan sus desempeños y analizan cambios en su accionar para alcanzar las metas establecidas; d) las actividades autorregulatorias actúan como mediadoras entre el contexto, los rasgos personales y el rendimiento obtenido; e)la motivación es esencial para la realización de las actividades, ya que estas demandan más tiempo y esfuerzo que las tradicionales.

1.3 Principio de Merril

Este modelo aparece como una conjunción de varias teorías y modelos, tales como la solución colaborativa de problemas, Aprendizaje Constructivista, Aprendiendo por Hacer [5]. Se centra en la idea que el aprendizaje se promueve cuando los alumnos se dedican a resolver problemas que se pueden encontrar en el mundo real. Para ello, los estudiantes atraviesan distintas fases:

1- Activación: recuerdan y relacionan conocimientos previos como fundamentos del nuevo aprendizaje.
2- Demostración: el nuevo conocimiento es demostrado a los alumnos con ejemplos concisos.
3- Aplicación: los estudiantes usan el conocimiento para resolver problemas por su cuenta
4- Integración: el estudiante transfiere conocimiento, demostrando lo que sabe, reflexionando y creando nuevas formas.

1.4 Modelización matemática

Cristante, Esteley, Marguet, y Mina [6], sostienen que “La modelización matemática consiste en el arte de transformar problemas de la realidad en problemas matemáticos y resolverlos interpretando sus soluciones en un lenguaje del mundo real”. Se comienza con una situación problemática que contiene fenómenos observables que se cuestionan. Para comprender ese fenómeno, se deberán utilizar herramientas matemáticas que se poseen o se deben construir. Es entonces cuando se identifica la situación problemática, se simplifica, relacionando las variables que intervienen y tomando decisiones. Luego, se comienza a crear un modelo matemático en el que se relacionan variables y se aplican teorías y herramientas matemáticas. El siguiente paso, está compuesto por la interpretación de resultados para luego aplicarlos a diferentes problemas [2].

3 Descripción de la experiencia

Presentamos a los alumnos del curso homogéneo 1° 104B de la materia Álgebra y Geometría Analítica el siguiente problema ingenieril:

> Se desea colocar una membrana filtrante circular de diámetro 1 decímetro en un conducto de forma elíptica. Analice qué variables debe tener en cuenta para la modelización de manera tal que la membrana deformada cumpla su función, si el conducto tiene un semidiámetro menor y mayor de 2 y 3 decímetros respectivamente.

Para analizar el impacto de esta experiencia, proseguimos a analizar los aspectos cualitativos a través de una encuesta a los alumnos del curso, y también los aspectos meramente cuantitativos, a partir de los resultados obtenidos en los exámenes en este tema en particular. Para ello, realizamos una encuesta anónima que constaba de seis preguntas, focalizadas en la utilización de las plataformas educativas, tanto el campus virtual como el blog; como se muestra a continuación.

Estimados Estudiantes:

Agradecemos la respuesta a la presente encuesta realizada en el marco del PID FIIT 'Formación Inicial de Ingenierías y Carreras Tecnológicas', Proyecto de Investigación Interfacultades, realizado por: Facultad Regional Bahía Blanca, Facultad Regional Chubut y Facultad Regional Avellaneda.

1) ¿Encontró dificultades para desempeñarse a través del Campus Virtual? SI- NO
2) Los cuestionarios realizados fueron útiles para:

	SI	NO
Comprensión del tema		
Autoevaluación de aprendizaje		
Regulación de estudio		

3) ¿Piensa que sus expectativas iniciales respecto de la tarea de aplicación a la ingeniería de los autovalores y autovectores se vieron cumplidas? SI – NO – EN PARTE ¿Por qué?
4) Las tareas propuestas de autovalores y autovectores, tanto en la clase presencial como en el Campus, le resultaron:

	Tareas	Campus		Tareas	Campus
Nada interesante			Demasiado difícil		
Poco interesante			Difícil		
Interesante			NI fácil ni difícil		
Bastante interesante			Fácil		

4) 1. Tanto para las tareas y el Campus, explique el por qué de sus respuestas.

5) ¿Qué fortalezas y debilidades identifica respecto de la posibilidad de trabajar en grupo?
6) ¿Qué sugeriría para favorecer el aprendizaje de los contenidos de esta asignatura?

4 Resultados

A partir de la encuesta realizada a nuestros alumnos, podemos decir que más del 70% de los alumnos indica que el cuestionario virtual ha inferido positivamente en la comprensión del tema trabajado, mientras que aproximadamente el 80% de estos alumnos reconocen que dicho cuestionario los ha ayudado para realizar una autoevaluación, así como también para regular sus tácticas de estudio (Fig. 1). Por otro lado, se observa que el 56% de los alumnos considera que las aplicaciones tratadas han satisfecho sus expectativas, mientras que el 19% lo cree, pero en parte (Fig. 2). De esto entonces, podemos concluir que el 75 % de los alumnos considera que se han cumplido sus expectativas con respecto a las aplicaciones ingenieriles, al menos en parte. En cuanto a las tareas realizadas, el 70% expresa un nivel de interés con respecto a lo trabajado en clase, mientras que más del 80% considera interesante lo realizado a través del campus virtual (Fig. 3).

Ahora bien, al estudiar los aspectos cuantitativos, utilizamos los datos de las evaluaciones del tema en el curso dónde se realizó la experiencia 1°104 B y de otro curso 1° 105 que fue elegido curso testigo. Considerando estos aspectos (Fig. 4 y Fig. 5), se puede observar un mejor desempeño académico en el curso 1° 104 B, tanto en diagonalización como en rototraslación. Un 60% de los estudiantes respondieron bien en este curso, dato que supera significativamente al porcentaje de quienes respondieron correctamente en 1°105, de sólo un 17% y se confirma con un p-value= 0.0028. En el tema de rototraslación, aunque se puede observar en ambos cursos más respuestas incorrectas, también se infiere la misma tendencia de mejora (con un p-value=0.07): mientras que un 28% respondió bien en 1° 104 B, sólo un 11% lo hizo correctamente en 1° 105.

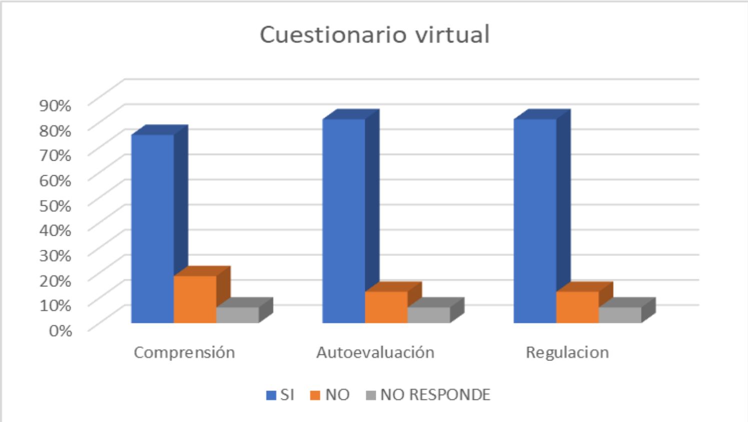


Fig.1 El gráfico muestra la apreciación de los alumnos de 1° 104 B con respecto al impacto del cuestionario virtual en la comprensión del tema, su autoevaluación y regulación de estudio.

Fig.2 El gráfico representa el porcentaje de alumnos de 1° 104 B que sienten que sus expectativas con respecto a las aplicaciones han sido cumplidas.

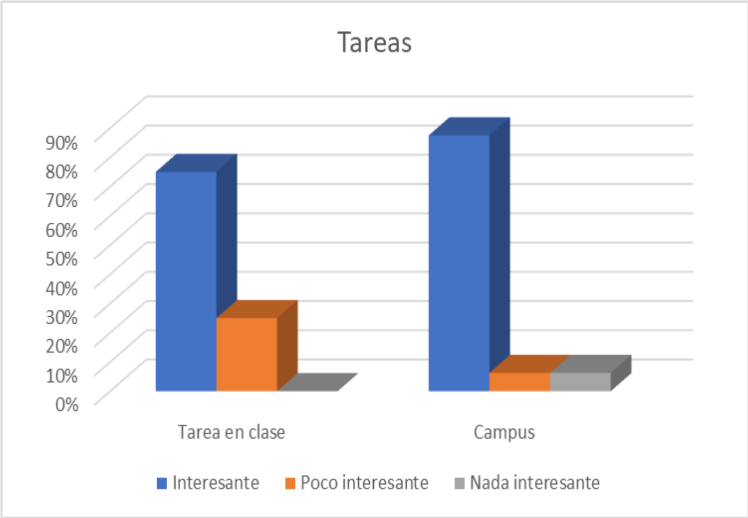


Fig.3 El gráfico muestra las apreciaciones de los alumnos de 1° 104B con respecto a las tareas trabajadas en las clases presenciales y en el campus.

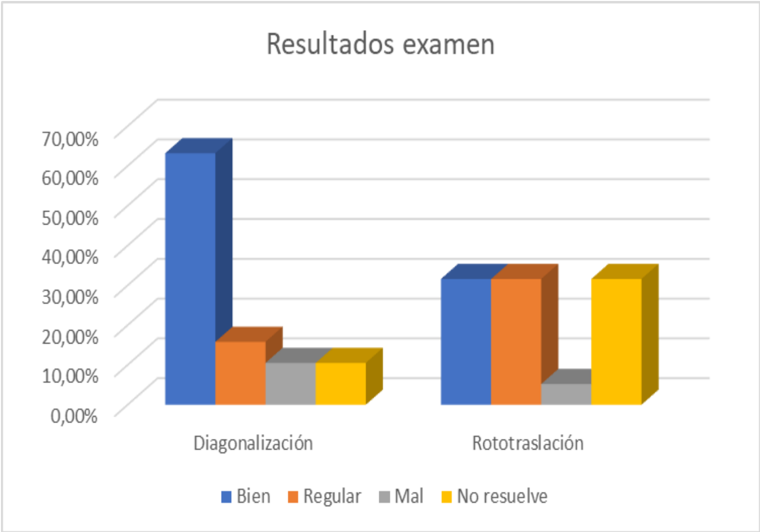


Fig.4 El gráfico representa los resultados en el examen con respecto al tema de diagonalización y rototraslación en el curso 1° 104B

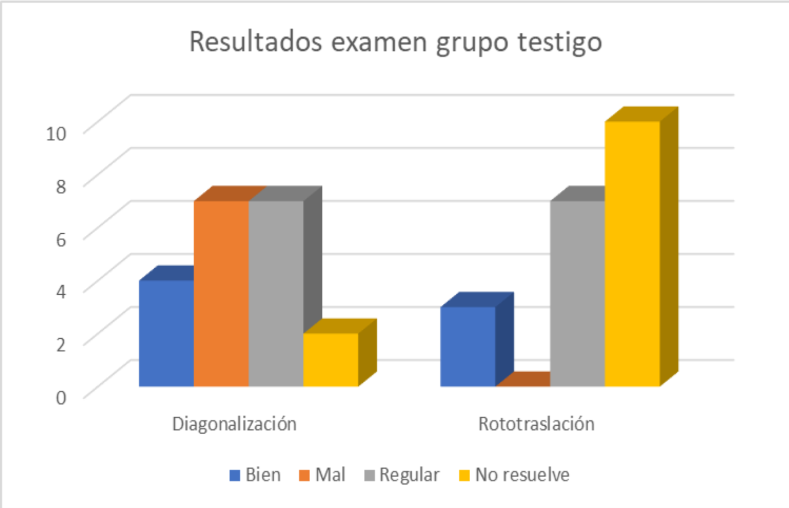


Fig.5 El gráfico representa los resultados en el examen con respecto al tema de diagonalización y rototraslación en el curso 1° 105.

5 Conclusiones y trabajos futuros

Basados en el principio de Merril, podemos decir que se han cumplido sus diferentes etapas entre las dos secciones de la clase, la presencial y la que esta fuera del aula. Es así, que, en el tiempo invertido fuera del aula, los alumnos han atravesado la etapa de activación en el momento que miraron los videos y leyeron el contenido; la demostración cuando se les presentaron diversos ejemplos a través del Blog y aplicación en el momento en el que realizaron el cuestionario online a través del campus. Por otro lado, en las clases presenciales se vuelve a atravesar la etapa de activación, en el momento en el que los docentes revisan el tópico e interactúan con los alumnos y sus percepciones; la etapa de aplicación se activa cuando resuelve problemas sencillos durante la clase en pequeños grupos, y finalmente se logra la etapa de integración cuando los alumnos discuten problemas más avanzados y con aplicaciones al mundo real (en nuestro caso la deformación de la membrana).

A partir de los resultados obtenidos podemos concluir que los alumnos han recibido la propuesta satisfactoriamente, ya que han expresado que los ha ayudado para la comprensión del tema, así como también para autorregular su estudio y autoevaluar sus conocimientos. Además, han expresado que la tarea les resultó interesante y cumplió sus expectativas iniciales, particularmente en relación con la aplicación de cuestiones matemáticas a problemas ingenieriles, expresando el interés por resolver otras situaciones relacionadas con otras especialidades de la ingeniería

Finalmente, y no por eso menos importante, los resultados en los exámenes reflejan lo expresado por los alumnos. Más del 60% de los alumnos pudo resolver el ejercicio de diagonalización sin errores, mientras que un 15% lo ha hecho con algún error del tipo leve, es decir, aquellos que no implican una cuestión conceptual (por ejemplo, errores de cuentas). En cuanto al ejercicio de rototraslación podemos apreciar que entre ejercicios bien hechos (sin errores) y regulares (errores leves), se alcanza un porcentaje que supera la mitad de los alumnos. Si bien, los números son bastante alentadores, esperamos aumenten este año. Para ello, pondremos especial énfasis en los ejercicios que impliquen rototraslaciones que es donde hemos notado mayores falencias. Para ello trabajaremos con nuevos problemas referidos a este tema ya que forma parte de los contenidos de la asignatura. También nos interesa trabajar nuevas contextualizaciones del proceso de diagonalización, como por ejemplo la resolución de sistemas dinámicos.

Referencias

1. Morano, D.: La formación de ingenieros en Argentina. El proceso de aseguramiento de la calidad. ACOFI - CONFEDI: *Aseguramiento De La Calidad Y Mejora De La Educación En Ingeniería*, pp.41-74 (2018).

2. Rodriguez, M.; Barreiro, P.: Modelización y Resolución de Problemas. Pochulu, M: *La Modelización en Matemática : marco de referencia y aplicaciones*, GIDED, pp 17-26 (2018).
3. Lai,C.; Hwang G.: A self-regulated flipped classroom approach to improving students' learning performance in a mathematics course, *Computers & Education*. Vol.100, pp. 126-140 (2016) .
4. Paoloni, P. V.; Rinaudo, M. C.; González-Fernández, A. : Procesos de retroalimentación en la autorregulación de recursos de aprendizaje. Explorando su potencial en el contexto de la universidad. *Revista de Educación a Distancia.* Vol. 3, pp. 1-18 (2011)
5. Merrill, M.D.: First Principles of Instruction. *ETR&D.* Vol.50, No.3, pp. 43-59 (2002).
6. Cristante, A.; Esteley, C.; Marguet, I.; Mina, M.: Experiencia de modelización en aula con orientación en Economía y Gestión de las Organizaciones 1. *Experiencias, Propuestas Y Reflexiones Para La Clase deMatemática.* pp. 305–318 (2007)

Futuros Profesores de Matemática y TIC

Marisa Reid[1], Rosana Botta Gioda[1]
[1]Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Avda Uruguay 151
6300 Santa Rosa, La Pampa, Argentina
[1] {mareid, rosanabotta}@exactas.unlpam.edu.ar

Resumen. En este trabajo, se describen acciones llevadas a cabo en la asignatura Práctica Educativa II del Profesado en Matemática con el objetivo de crear oportunidades de aprendizaje, haciendo hincapié en la importancia de construir conocimientos y destrezas mediante el análisis de diferentes aspectos de la enseñanza al incorporar TIC en las clases de matemática, que ofrezcan a los futuros profesores mejores condiciones para el desarrollo de su trabajo docente.
Consideramos en primer lugar, que el compromiso con las tecnologías podría mejorar la comprensión de los futuros profesores sobre el conocimiento del tema y desarrollar actitudes positivas hacia el uso de las mismas. En segundo lugar, la incorporación de registros de clases grabadas basados en la práctica en la formación podría ayudarlos a desarrollar su conocimiento pedagógico y conocimiento sobre el aprendizaje de los estudiantes.

Palabras Clave: Tecnología, Formación de Profesores, Matemática.

1 Introducción

La tecnología se está incorporando al ámbito educativo de numerosas maneras. De allí la necesidad de incluirla en los programas de formación inicial de profesores de Matemática, en algunas oportunidades el docente formador es el principal usuario de la tecnología. Por ejemplo, cuando utilizamos la tecnología digital para ilustrar situaciones o ejemplos en clase. En esas ocasiones recurrimos a estudios de casos multimedia de episodios de enseñanza para ayudar a los futuros profesores a analizar entornos de enseñanza y aprendizaje. También disponemos de un aula virtual en la plataforma Moodle como complemento y apoyo de la enseñanza presencial, para presentar información y llevar adelante actividades virtuales y a distancia (tareas colaborativas, wikis, foros de discusión, cuestionarios en línea), o para demostrar exploraciones.
En segundo lugar, el futuro docente se está preparando para ser el usuario principal de la tecnología, para usar software y sitios web específicos para crear presentaciones, documentos de texto, planificar actividades y evaluaciones.
Un tercer enfoque para incorporar tecnología en la formación docente es prepararlos para que luego sus estudiantes la utilicen para investigar conceptos y resolver problemas significativos. Por ejemplo, los futuros profesores de Matemática están aprendiendo cómo guiar a sus estudiantes a utilizar hojas de cálculo, calculadoras gráficas, programas de geometría dinámica y sitios web de juegos para explorar conceptos matemáticos y resolver problemas en diferentes contextos.
Los tres usos de la tecnología en la formación docente presentados anteriormente están relacionados con diferentes propósitos y todos pueden conducir a una mejor formación de los docentes y a un mejor aprendizaje de los estudiantes. Por lo tanto, todos son importantes. Sin embargo, según nuestra experiencia, la manera más directa y efectiva de utilizar las TIC para mejorar el aprendizaje de los estudiantes en matemática es preparar a los futuros profesores para incorporar a su enseñanza una serie de actividades que involucren el pensamiento matemático facilitado por herramientas tecnológicas. Por lo tanto, desde la asignatura Práctica Educativa II enfatizamos el tercer uso, en el cual, en última instancia, el alumno es el usuario principal.
Consideramos que el docente debe tener conocimientos y ser capaz de utilizar la tecnología para ayudar la actividad matemática; y conocer sus limitaciones.

2 Actividades planteadas como formadores de profesores

Como formadores proponemos a los futuros profesores identificar aspectos relevantes de la situación de enseñanza generada en un contexto de desarrollo profesional e interpretarla para dotarla de sentido y así tomar decisiones de acción en la enseñanza de la matemática. Para llevar a la práctica lo planificado se utiliza el aula virtual de Práctica Educativa II en la Plataforma Moodle, a la que se puede ingresar en la dirección http://online2.exactas.unlpam.edu.ar/course/view.php?id=95.

El diseño de este espacio de interacción virtual, como medio para facilitar la construcción de conocimiento, permite a los futuros profesores explorar, debatir y consensuar con el resto de los compañeros de la asignatura Práctica Educativa II sobre las distintas interpretaciones dadas a las situaciones de enseñanza-aprendizaje planteadas en el video, relacionando los sucesos de una clase con los principios teóricos procedentes de la didáctica de la matemática.

El poder de usar video en el desarrollo profesional para obtener una reflexión crítica y apoyar el aprendizaje de nuevos contenidos y habilidades por parte de los docentes ha sido ampliamente documentado en los trabajos de Borko, Jacobs, Seago, & Mangram [1]; Rich y Hannafin [2] y Sherin [3].

El video permite que las complejidades de la práctica en el aula se detengan en el tiempo y se analicen cuidadosamente, lo que ayuda a cerrar la brecha entre la teoría y la práctica y apoya la mejora de la enseñanza. Considerando que en el aula los docentes deben tomar decisiones individuales, en el análisis del video los futuros profesores deben analizar las estrategias de enseñanza, las actividades utilizadas en relación con el contenido a enseñar, las posibles resoluciones o acciones de los estudiantes en la resolución y la intervención docente.

Las nuevas tecnologías permiten ir incorporando a la formación de profesores medios materiales que son pertinentes desde el punto de vista teórico. La posibilidad de obtener registros de la práctica mediante grabaciones de video, permite observar el contexto en el que se presenta la tarea, la comunicación verbal y los comportamientos de interacción no verbales apoyados con las reflexiones de los futuros profesores. Creemos que los entornos de aprendizaje diseñados en la universidad utilizando estos registros de la práctica pueden ser coherentes con las reflexiones teóricas sobre cómo se llega a comprender la práctica de enseñar matemática y sobre cómo se desarrollan el conocimiento y destrezas útiles para ser profesor de matemática.

Los formadores de profesores consideramos la tecnología como un objeto del aprendizaje de los futuros profesores y un medio para ese aprendizaje. Se trata de abordar, explícita o implícitamente, el conocimiento disciplinar (referido al objeto contenido de enseñanza), conocimiento pedagógico (que permita intervenir desde la enseñanza para promover aprendizajes en sus alumnos) y conocimiento tecnológico (ligado al uso de las tecnologías para informarse, comunicarse y resolver diferentes tareas cotidianas y laborales) y las interacciones o combinaciones de los mismos.

Uno de los riesgos es caer en usos de tecnología forzados o sin sentido**,** en el descuido de los contenidos seducidos por la tecnología o en el cambio de metodología de enseñanza producto del uso de un recurso TIC que se contradice con la concepción didáctica del docente.

Esto resulta en un modelo que fue descripto por Mishra y Koehler [4] llamado Conocimiento Tecnológico y Pedagógico del Contenido (TPACK, por sus siglas en inglés). El modelo "enfatiza la compleja interacción de estos tres cuerpos de conocimiento" con el conocimiento de contenido pedagógico de Shulman (PCK) y la introducción del conocimiento pedagógico tecnológico (TPK), el conocimiento de contenido tecnológico (TCK), y conocimiento de contenido pedagógico tecnológico (TPACK).

Niess [5] argumentó que quienes preparan a los docentes para afrontar los desafíos y exigencias de la enseñanza de las matemáticas con tecnologías digitales apropiadas del siglo XXI deben abordar la cuestión de cómo los programas de preparación de docentes previos al servicio deberían rediseñarse para describir trayectorias de aprendizaje adecuadas para aprender a enseñar matemáticas en el siglo XXI.

La propuesta es que los estudiantes de Profesorado en Matemática planteen problemas pedagógicos, tecnológicos y de contenido, manteniendo la complejidad de las interrelaciones entre estos cuerpos de conocimiento.

En muchos casos el uso de entorno dinámico o tecnología interactiva puede ayudar a desarrollar una mejor comprensión del contenido abordado.

Usamos estas actividades para anclar las discusiones en clase sobre cuestiones relacionadas con los lineamientos de los Diseños Curriculares vigentes en la Provincia de La Pampa [6] y su enseñanza en las aulas, los estándares nacionales y estatales, la secuenciación de las actividades propuestas, la articulación entre los diferentes cursos, el papel de la tecnología y la evaluación.

Los programas de formación docente a menudo utilizan el método de enseñanza tradicional y sitúan las TIC en el centro del proceso de aprendizaje simplemente para cumplir con las tendencias educativas y se presta poca atención al aprendizaje de los estudiantes. Las experiencias didácticas vividas en formación docente inicial

tienen un fuerte impacto en la conformación del perfil profesional del profesor. Por lo tanto, los futuros docentes tienden a enseñar de la misma manera que aprendieron como parte de su formación.
Para revertir esta situación es preciso ofrecer a los futuros profesores oportunidades de utilización de las TIC como un medio para promover un aprendizaje significativo.
El uso de software dinámico o recursos de aprendizajes interactivos y basados en la web podría desarrollar actitudes positivas de los participantes hacia la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas con tecnologías.

3 Actividades planteadas por estudiantes de profesorado

Como docentes formadores de profesores de Matemática de la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales de la Universidad Nacional de La Pampa debemos crear oportunidades de aprendizaje que ofrezcan a los futuros profesores mejores condiciones para que puedan desarrollar habilidades que les permitan seguir aprendiendo a lo largo de la vida profesional, haciendo hincapié en la importancia de desarrollar conocimientos y destrezas para analizar diferentes aspectos de la enseñanza (tareas, aprendizaje del alumno producto de la resolución de las tareas, interacción y discurso matemático en el aula).
En los espacios de formación de profesores no se trata de transmitir conocimientos sino de construir criterios que posibiliten identificar problemas y temáticas relevantes en el ejercicio de la profesión.
Desde la formación inicial de profesores, nuestro rol como formadores es fundamental debido a la responsabilidad para ayudar a construir el conocimiento profesional inicial para la enseñanza.
El uso de la tecnología en las clases de la Matemática no tiene como propósito su enseñanza en sí, sino mejorar la enseñanza y aprendizaje de esa ciencia usando las TIC.
Es por eso que consideramos valioso que se lleven adelante en la formación inicial propuestas en donde los futuros profesores tengan la oportunidad de vivenciar actividades donde exploren temas de matemática usando la tecnología y que puedan participar de nuevas dinámicas de la clase que movilicen conocimientos y permitan desarrollar capacidades que, con problemas "más tradicionales", no podrían surgir. De este modo, tienen más posibilidades de ver sus beneficios potenciales y usarlos en su enseñanza posterior.

3.1 Incorporar representaciones múltiples

Una de las actividades propuestas por un grupo de alumnos durante la cursada de la asignatura Práctica Educativa II es la siguiente:

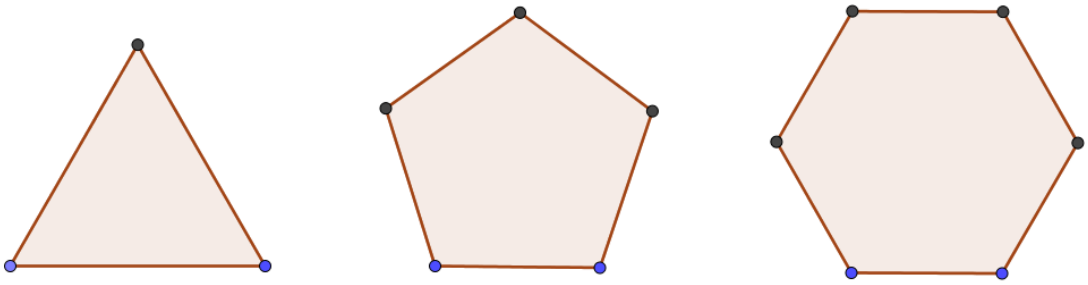
Problema del corral Un granjero tiene 20 metros de alambre con el que planea cercar un corral rectangular al lado de un galpón de 25 metros de largo como muestra la figura (el lado que está junto al galpón no necesita cerca). Hallar las dimensiones del corral de área máxima que se puede diseñar con esas características.

Comienzan con una exploración geométrica manipulativa utilizando el aplicativo de GeoGebra, http://ggbtu.be/m215401, luego realizan un registro de datos en forma tabular y una descripción verbal de la relación. En este entorno digital usan representaciones en forma de tablas, gráficas y geométricas y, finalmente, utilizan una representación algebraica obtenida con papel y lápiz para confirmar la relación. Esta investigación se utiliza para impulsar las discusiones con los futuros docentes sobre los beneficios y desventajas de utilizar representaciones múltiples, para comprender las relaciones matemáticas y la importancia de conectar temas matemáticos desde la educación secundaria hasta el Cálculo Diferencial.
Algunos trabajos de investigación muestran que muchos estudiantes tienen dificultades para conectar las representaciones verbales, gráficas, numéricas y algebraicas de las funciones matemáticas [7, 8]. El uso apropiado de la tecnología puede ser efectivo para ayudar a los estudiantes a realizar tales conexiones.

3.2 Aprovechar la tecnología

El trabajo con resolución de problemas en la asignatura Práctica Educativa II permite mostrar a los futuros profesores que existen otras maneras de trabajar y hacer Matemática en el aula.

Embaldosado del plano
Elijan entre los siguientes polígonos regulares aquellos que sirvan como formas de baldosas para embaldosar un patio con baldosas iguales. Se pueden recortar las baldosas en los bordes del patio, pero no se permite dejar agujeros. Justifique su elección de baldosa.



En esta actividad donde se propicia la indagación sobre una situación abierta para el alumno emergen múltiples acciones de encuentro, análisis y control sobre el entorno.
La utilización del software GeoGebra permite formular y comprobar conjeturas relacionadas con las combinaciones de formas geométricas que permiten embaldosar un plano.
Las actividades basadas en contenido que usan tecnología deben abordar conceptos, procedimientos y estrategias de matemáticas que valgan la pena, y deben reflejar la naturaleza y el espíritu de la Matemática. El uso de la tecnología en la enseñanza de la Matemática debe apoyar y facilitar el desarrollo conceptual, la exploración, el razonamiento y la resolución de problemas.
Esta es una buena oportunidad para promover la reflexión acerca de la importancia de formular conjeturas y las formas de establecer su validez y para que los futuros profesores discutan la noción de demostración en geometría y el papel de la tecnología en una prueba informal y la necesidad de una prueba formal.

3.3 La tecnología para conjeturar

A continuación presentamos una actividad en donde las TIC se convirtieron en una herramienta indispensable para que a partir de las relaciones puestas en juego emerjan objetos matemáticos y además se generen espacios de reflexión sobre la relación con otros objetos y todos los argumentos posibles.

Sean A, B, C y D los vértices de un cuadrilátero. Consideremos P, Q, R, S los puntos medios de los lados del cuadrilátero ABCD. Dibuja el cuadrilátero PQRS.
¿Qué tipo de cuadrilátero es y porqué?
¿Hay alguna relación entre el perímetro de PQRS y las diagonales de ABCD?
¿Hay alguna relación entre el área del cuadrilátero ABCD y el área del cuadrilátero PQRS?
¿Podemos conseguir que PQRS sea un rombo o un cuadrado?

La construcción, utilizando GeoGebra, del cuadrilátero ABCD y del cuadrilátero construido a partir de los puntos medios del ABCD, serviría de representación gráfica sobre la cual visualizar relaciones y propiedades.
Usando el software a través de la visualización, el propósito es detectar, percibir o evocar propiedades geométricas en una representación gráfica para producir conjeturas.
En estrecha conexión con la visualización está la exploración, mediante la posibilidad de arrastre que brinda GeoGebra, y la búsqueda de propiedades o relaciones entre las partes constitutivas de la figura.
Se pueden realizar investigaciones empíricas sobre las figuras a través de acciones como medir, calcular y hacer construcciones.
Se podrían agregar construcciones auxiliares como las diagonales del cuadrilátero ABCD y establecer relaciones con los lados del cuadrilátero PQRS que permitan formular conjeturas.
La actividad matemática no acabó en el momento en que se formula una conjetura. Se destacó el hecho de que, si bien los estudiantes podrían quedar satisfechos con la verificación, el profesor debe impulsar la construcción de un discurso argumentativo, de carácter deductivo, que valide la conjetura.
Como afirma [9], los ambientes dinámicos no solo les permiten a los estudiantes construir figuras con ciertas propiedades y por lo tanto visualizarlas, sino que también le permiten transformar construcciones en tiempo real.

Este dinamismo puede contribuir hacia la formación de hábitos de transformar un ejemplo particular, para estudiar las variaciones, visualmente da indicios de invariantes, y posiblemente facilita las bases intuitivas para dar justificaciones formales de conjeturas y proposiciones mentales.
En este caso, el programa brinda la posibilidad de modificar la figura sin que varíen las relaciones entre los elementos que la constituyen, y se tiene la posibilidad de hipotetizar acerca de las variaciones e invariantes y obtener ideas, aportar a la intuición que constituirá una base para elaborar una explicación formal de la relación hallada.
No todos los problemas son aptos para un trabajo exploratorio en computadora. Se busca que las situaciones planteen preguntas que acompañen la experimentación, que los lleve a predecir ciertos resultados.

4 Reflexiones finales

La introducción de las TIC en los sistemas educativos es un fenómeno inevitable, que se está haciendo realidad a pasos agigantados [10].
La tecnología debe contribuir a generar cambios en la manera de plantear y desarrollar las clases de matemática. Por lo que es necesario realizar acciones para que los futuros profesores de matemática incorporen la tecnología en la planificación de las clases.
Las TIC poseen un gran potencial para la educación en general y para la educación matemática en particular. Pero no debe usarse ese potencial como excusa para llevar a la clase de Matemática todo aquello que sorprende por su versatilidad. Como señala Gómez [11] el éxito de su empleo depende de que el profesor diseñe y lleve a la práctica el currículo de forma tal que estos materiales contribuyan al aprendizaje de los alumnos.
Considerando que adquirir conocimiento profesional en el ámbito de las nuevas tecnologías requiere tanto profundizar en el conocimiento del propio recurso a nivel técnico como en el análisis de las consecuencias de su uso en la enseñanza y sabiendo de la potencialidad de la tecnología, es necesario entonces planificar con detalle qué objetivos y competencias podemos desarrollar en los futuros profesores, qué tareas podemos diseñar con esos materiales y recursos para conseguirlo.
La formación inicial de profesores de Matemática que pueden usar la tecnología para mejorar el aprendizaje de la Matemática por parte de los estudiantes no es un asunto trivial. Los futuros profesores deben desarrollar habilidades tecnológicas, mejorar y ampliar su conocimiento de la Matemática con herramientas tecnológicas, y convertirse en desarrolladores críticos y usuarios de la pedagogía tecnológica. El diseño de actividades representa un punto de partida para preparar los futuros docentes para usar la tecnología de manera apropiada.

5 Referencias

1. Borko, H.; Jacobs, J.; Seago, N.; Mangram, C.: Facilitating video-based professional development: Planning and orchestrating productive discussions. Li, Y.; Silver, E.A.; Li, S. (Eds.), *Transforming mathematics instruction: Multiple approaches and practices*, pp. 259-281. Dordrecht, NE: Springer International Publishing Switzerland. (2014).
2. Rich, P. J.; Hannafin, M.: Video annotation tools technologies to scaffold, structure, and transform teacher reflection. *Journal of Teacher Education*, Vol. 60 No.1, pp.52-67. (2009).
3. Sherin, M. The development of teachers' professional vision. Goldman, R.; Pea, R.; Barron, B.; Derry, S. (Eds), *Video research in the learning sciences*, pp. 383-395,. New York, NY: Routledge. (2007).
4. Mishra, P.; Koehler, M. J.: Technological Pedagogical Content Knowledge: A Framework for Teacher Knowledge. *Teachers College Record*, Vol. 108, No. 6, pp. 1017–1054. (2006).
5. Niess, M. L.: Re-thinking pre-service mathematics teachers preparation: Developing technological, pedagogical, and content knowledge (TPACK). Polly, D.; Mims, C.; Persichitte, K. (Eds.), *Developing technology-rich teacher education programs: Key issues*, pp. 316-336. Hershey, PA: Information Science Reference. doi:10.4018/978-1-4666-0014-0.ch02. (2012).
6. *Materiales Curriculares Matemática Educación Secundaria -Ciclo Orientado-2013.* Ministerio de Cultura y Educación. Gobierno de la provincia de La Pampa.

7. Goldenberg, E.P.: Mathematics, metaphors, and human factors: Mathematical, technical, and pedagogical challenges in the educational use of graphical representations. *Journal of Mathematical Behavior*, No.7, pp.135-173. (1988).
8. Leinhardt, G.; Zaslavsky, O.; Stein, M.K.: Functions, graphs, and graphing: Tasks, learning and teaching. *Review of Educational Research*, Vol. 60, No.1, pp.1-64 (1990).
9. Arcavi, A.; Hadas, N.: Computer mediated learning: an example of an approach. *International Journal of Computer for Mathematical Learning*, No.5, pp.25-15. Kluwer Academic Publishers. (2000).
10. Forestello, R.:Políticas educativas públicas, TIC y formación docente en Argentina, *Memorias del Congreso Iberoamericano de Ciencia, Tecnología, Innovación y Educación*. (2015).
11. Gómez, P.: Análisis didáctico y uso de tecnología en el aula de matemáticas. Peñas M., Moreno A. y Lupiáñez J. L. (Eds.), *Investigación en el aula de matemáticas. Tecnologías de la información y la comunicación*, pp. 73-95. SAEM Thales y Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada (2004).

Experiencia con Ingresantes a Carreras de Ingeniería en la Competencia Resolución de Problemas

M. Arias[1], S. Busab[1], A. Nahas[1], M. Martín[1], L. Jimenez[1]
[1] Departamento de Matemática, Facultad de Ciencias Exactas y Tecnología, Universidad Nacional de Tucumán
(4000) Avda. Independencia 3800
{marias, sbusab}@herrera.unt.edu

Resumen. En este trabajo se presenta una experiencia de enseñanza-aprendizaje sobre competencia Resolución de Problemas (CRP) con alumnos del nivel medio que aprobaron el curso de nivelación de la Facultad de Ciencias Exactas y Tecnología (FACET) de la UNT pero que no comenzaron con las clases de las asignaturas de primer año. Seleccionamos la competencia mencionada porque somos docentes de Cálculo I y Cálculo II, cuyos contenidos promueven la resolución de problemas de la vida diaria y de situaciones ingenieriles sencillas y además, porque CRP está muy ligada con otras competencias: pensamiento reflexivo, pensamiento crítico, pensamiento lógico, toma de decisiones y expresión oral y escrita. Con un gran convencimiento de poder aportar al desarrolllo de la CRP y sus transversales en los estudiantes se diseñó un encuentro de trabajo con una metodología de taller para promover la participación de los alumnos. Se describe el taller y sus resultados los cuales generaron nuevos desafíos.

Palabras Clave: Competencias, Problemas, Taller.

1 Introducción

Con el surgimiento de las tecnologías de la información y la comunicación, la humanidad ha logrado desarrollar un nivel y cantidad de conocimientos sin precedente en la historia, de modo que para lograr que el conocimiento ocupe el papel indicado se requiere el desarrollo de competencias, que potencien una capacidad adaptativa al entorno generado en los últimos años. Sólo mediante el desarrollo de las competencias se podrá estimular la creatividad y la innovación para enfrentar los retos planteados por dicho entorno.

Se deben direccionar todos los esfuerzos hacia el desarrollo de las competencias de cada persona, donde su desempeño permita utilizar los recursos existentes, materiales y tecnológicos, físicos e intelectuales, y sea capaz de conocer, interpretar y transformar la realidad, lo que implica estimular la creatividad, la imaginación, el pensamiento divergente, para resolver los problemas que se plantean, o se proyectan en el contexto actual y futuro.

El ingeniero debe abocarse a proponer respuestas a los problemas y a las necesidades que se enfrenta en las nuevas condiciones en que se vive, por lo que requiere movilizar toda la experiencia acumulada, los saberes de los distintos dominios de conocimiento, de las capacidades de acción, de interacción, para generar un modelo que integre saberes, acciones de interacción social y de autoconocimiento, desde una perspectiva integral y dinámica. De ahí la necesidad de las competencias.

La resolución de problemas implica la capacidad de identificar y analizar situaciones problemáticas cuyo método de solución no resulta obvio de manera inmediata. Incluye también la disposición a involucrarse en dichas situaciones con el fin de lograr su pleno potencial como seres constructivos y reflexivos.

La capacidad de resolver problemas es una habilidad muy preciada en muchos aspectos de nuestras vidas y es sin duda, una parte importante del Cálculo Diferencial e Integral que es el contenido de las asignaturas de Cálculo I y Cálculo II de las carreras de ingeniería de la FACET.

Este trabajo es un aporte del grupo de investigación que integran las autoras a la resolución de problemas desde una mirada del campo de las competencias.

2 Marco teórico

Dentro del marco teórico de este trabajo consideramos cuatro aspectos fundamentales: constructivismo y competencias, Consejo Federal de Decanos de Facultades de Ingeniería (CONFEDI) y competencias, Comisión Nacional de Evaluación y Acreditación Universitaria (CONEAU) y resolución de problemas propiamente dicho.

2.1 Constructivismo y competencias

El constructivismo es una corriente pedagógica, que postula la necesidad de entregar al estudiante las herramientas necesarias (generar andamiajes) que le permitan construir sus propios procedimientos para resolver una situación problemática, lo que implica que sus ideas puedan verse modificadas y siga aprendiendo.

El constructivismo propone un paradigma donde el proceso de enseñanza se percibe y se lleva a cabo como un proceso dinámico, participativo e interactivo del sujeto, de modo que el conocimiento sea una auténtica construcción operada por la persona que aprende (por el sujeto cognoscente).

Desde el constructivismo puede crearse un contexto favorable al aprendizaje, con un clima de motivación, de cooperación, donde cada alumno reconstruye su aprendizaje con el resto del grupo. Así, el proceso del aprendizaje prima sobre el objetivo curricular. En consecuencia la teoría mencionada subyacerá en nuestras aulas que tienen que enfrentar al aprendizaje como logro de competencias.

En efecto, "la rapidez en los cambios de la vida actual, incluyendo aquellos que se relacionan con el advenimiento de nuevas tecnologías y la globalización, son grandes desafíos para la educación en el logro de competencias" y no tanto de la adquisición de conocimientos [1].

Por esta razón, a finales de 1997, se inició el Proyecto DESECO (Definición y Selección de Competencias) con el fin de brindar un marco conceptual firme que sirva para la identificación de competencias claves y, el fortalecimiento de las encuestas internacionales que miden el nivel de competencia de jóvenes y adultos. Este proyecto, realizado bajo el liderazgo de Suiza y conectado con el Programa Internacional para la Evaluación de Estudiantes (PISA) reunió a expertos de una amplia gama de disciplinas para elaborar un marco relevante para las políticas educativas de distintos países, desde América del Norte y del Sur hasta Europa y el Pacífico Asiático incluyendo a los países más avanzados del mundo, pero también a emergentes como México y Chile. El proyecto reconoció la diversidad de valores y prioridades a largo de países y culturas, pero identificó también desafíos universales de la economía global y la cultura, así como valores comunes que informan sobre la selección de las competencias más importantes.

Se considera que el término "competencia" se refiere a una combinación de destrezas, conocimientos, aptitudes y actitudes, y a la inclusión de la disposición para aprender a aprender [2]. Una competencia presenta, por tanto, una estructura interna con tres componentes (cognitivo, afectivo–relacional y meta-cognitivo) que responden a los tres grandes tipos de conocimiento (explícito, causal e implícito).

Cuando DeSeCo formula las competencias fundamentales opta de manera bastante explícita, por recurrir al constructivismo como el enfoque educativo que mejor se adapta a los procesos de construcción de las competencias, explicitando la existencia de dos razones. En primer lugar, porque los profesores ya no imparten conocimientos a los alumnos, sino que les ayudan en su construcción mediante procesos de interacción–interactividad y, en segundo lugar, porque el enfoque constructivista de la educación acentúa la importancia del contexto para un eficaz y eficiente desarrollo de los procesos de aprendizaje.

Por tanto, para explicar estos procesos, hemos de tener en cuenta cuatro elementos centrales del proceso: el sujeto que aprende, el profesor que enseña, el contenido que se aprende y la finalidad del aprendizaje. Profesor–alumno–contenido–meta se constituyen así en un todo indisociable a la hora de explicar y analizar los procesos de enseñanza y aprendizaje.

2.2 CONFEDI y competencias

El mundo está en un continuo cambio, y la sociedad actual exige más a los ingenieros, no sólo exige la formación profesional (el “saber”), sino también, el “saber hacer”. Esto es asumido así por las universidades a partir de la Declaración de Bolonia de 1999 y la declaración de “la educación como un servicio público” de la Convención de Salamanca de 2001, [3].

La formación de profesionales basada en la enseñanza como simple esquema de transferencia de conocimientos que el alumno oportunamente sabrá abstraer, articular y aplicar eficazmente, se está desvaneciendo. La sociedad propone ver al ingeniero como un ser que ha desarrollado un conjunto de competencias, capaz de ejercer su profesión en la realidad que lo rodea.

En particular en Argentina, y en el Consejo Federal de Decanos de Facultades de Ingeniería, CONFEDI, “hay consenso en cuanto que el ingeniero no sólo debe saber, sino también saber hacer. El saber hacer no surge de la mera adquisición de conocimientos sino que es el resultado de la puesta en funciones de una compleja estructura de conocimientos, habilidades, destrezas, etc. que requiere ser reconocida expresamente en el proceso de aprendizaje para que la propuesta pedagógica incluya las actividades que permitan su desarrollo”, [4].

En este contexto, CONFEDI, concluye en la importancia de contar con una referencia en cuanto a las competencias que se deberían desarrollar en los graduados de ingeniería en Argentina. En octubre de 2006, se suscribió el documento que sintetiza las Competencias Genéricas de Egreso del Ingeniero Argentino. Este acuerdo orienta a las facultades de ingeniería en la definición de sus procesos de enseñanza aprendizaje tendientes al desarrollo de competencias en sus alumnos y, en el 2009, acuerda sobre las Competencias requeridas para el Ingreso a los Estudios Universitarios que orienta a la educación de nivel medio respecto de las competencias que deberían desarrollar en sus alumnos, previendo su continuidad en los estudios en el ámbito universitario.

Para definir lineamientos que contribuyan a caracterizar al Ingeniero Iberoamericano y a orientar a las facultades de la región en el proceso de formación, en noviembre de 2013, en Chile, la Asamblea General de la Asociación Iberoamericana de Entidades de Enseñanza de la Ingeniería adopta como propia la síntesis de competencias genéricas de egreso acordadas por CONFEDI, permitiendo procesos de búsqueda y definición de los propios perfiles en cada país, la integración regional y los acuerdos de movilidad e intercambio académico entre las universidades.

¿Cómo se pueden clasificar las competencias para su mejor tratamiento? Competencias genéricas: son las vinculadas a las competencias profesionales comunes a todos los ingenieros. Competencias específicas: son las competencias profesionales comunes a los ingenieros de una misma terminal. Dentro de las competencias genéricas se seleccionó la de Resolución de Problemas como tema central de este grupo de investigación y aporte del ciclo básico a la formación del ingeniero. Además, se tuvo en cuenta que la competencia elegida es importante ya que promueve también el pensamiento reflexivo, el creativo, el analógico, el práctico, el deliberativo y la comunicación verbal y escrita.

2.3 CONEAU y resolución de problemas

La Comisión Nacional de Evaluación y Acreditación Universitaria (CONEAU) es un organismo público argentino dependiente de la Secretaría de Políticas Universitarias del Ministerio de Educación, encargado de la evaluación de las universidades públicas y privadas y la acreditación de sus respectivas carreras de grado y posgrado y de sus correspondientes títulos.

Para acreditar las carreras se aplican estándares fijados por el Ministerio de Educación, que tienen en cuenta: contenidos curriculares básicos, carga horaria mínima y criterios de la formación práctica. Un decreto dispone que la acreditación constituya una condición necesaria para el reconocimiento oficial y consecuente validez nacional del título por parte del Ministerio de Educación, entendiéndose por acreditación un proceso de evaluación de la calidad académica, complementario de la evaluación institucional y dirigida a su mejoramiento que tiene objetivos exclusivamente académicos.

También la CONEAU ha destacado la importancia del tema expuesto en el trabajo, al colocar en la Ficha Curricular bajo el nombre "Modalidad de la enseñanza" un ítem específico para consignar la carga horaria dedicada a la resolución de problemas. Más aún, en el punto Resolución de problemas de ingeniería dice: Los componentes del plan de estudios deben estar adecuadamente integrados para conducir al desarrollo de las competencias necesarias para la identificación y solución de problemas abiertos de ingeniería. Se define como problema abierto de ingeniería aquellas situaciones reales o hipotéticas cuya solución requiera la aplicación de los conocimientos de las ciencias básicas y de las tecnologías. (CONEAU, 2002), [5].

Continuando el análisis de los documentos antes citados, aparecen otras especificaciones que acompañan las ya conocidas caracterizaciones de los problemas de ingeniería como problema abierto y de estándar de calidad. En las pautas de acreditación, en el título Objetivos de la Acreditación se señala en primer término: Identificar, evaluar y resolver problemas de ingeniería con creatividad o innovación dentro de los límites de su propio conocimiento.

2.4 Resolución de problemas

Aunque en general se considera que la capacidad para resolver problemas es un tema más bien matemático, hay plena conciencia entre los docentes que estas habilidades permiten a los estudiantes una formación integral que los capacita para enfrentarse a situaciones de diferente índole. Existen concepciones erróneas sobre lo que significa resolver un problema. La mayor parte de las veces se piensa que es equivalente a resolver ejercicios ya discutidos en clase, reproduciendo los algoritmos y explicaciones entregadas en el aula; sin embargo implica un tipo de actividad mental de mayor exigencia. La resolución de problemas ha sido un tema ampliamente debatido a lo largo de la historia de la pedagogía, que además goza de una permanente renovación, ya que representa un área importante dentro de los planes y programas educativos, y que no siempre está claramente expuesto.

El aprendizaje por competencias es el enfoque que está en el centro de la política educativa en todos los niveles y concuerda con diversos proyectos internacionales como ejemplo "*Tuning*". Además, constituye la base fundamental para orientar el currículo, la docencia, el aprendizaje y la evaluación, desde un marco de calidad.

Por lo anterior se propone la Teoría de Resolución de Problemas planteadas por Polya (1965), Shoenfeld (1985), Brousseau (1986) y Guzmán (2006) como una estrategia metodológica creadora de conocimiento y que potencia el desarrollo de competencias en los estudiantes preuniversitarios y universitarios.

En el año 2006 fue publicado el Informe del Progreso Educativo en América Latina que analizó la participación de países latinoamericanos en las evaluaciones del "Programme for Internacional Student Assessment" (PISA) del 2003. Los resultados obtenidos demostraron que muchos estudiantes no pueden aplicar en forma ordenada las habilidades matemáticas básicas para comprender y explorar situaciones contextualizadas.

Polya introdujo la idea de que la resolución de problemas puede ser vista como un arte que utiliza como medio la "heurística moderna". Para él, resolver problemas representa una forma de descubrimiento y considera la heurística como una forma de investigar nuevos problemas (Polya, 1990), [6].

En la perspectiva internacional, los problemas no se ven solamente como una práctica al finalizar la explicación docente, sino que constituyen lo medular en el proceso y será lo que va a permitir al estudiante construir sus conocimientos.

Heurísticos para la resolución de problemas. Cuando se habla de heurísticos en Educación Matemática, generalmente, se relaciona a la enseñanza de la resolución de problemas. Esto debido a que los heurísticos podrían definirse como estrategias usadas para avanzar a la solución de un problema (Foong, 2013). Polya (1979) es uno de los pioneros en establecer esta idea, que Castro (1991) denomina dirección; esta noción se enmarca en los aportes de la Teoría de Gestalt e intentó determinar unas fases que seguiría el sujeto para encontrar la solución a un problema. Dichas fases se usaron y usan para enseñar a resolver problemas.

Polya (1979) planteó cuatro fases desde el punto de vista del comportamiento del resolutor ideal, las fases propuestas por este autor son: comprensión del problema, diseño del plan, ejecución y verificación de la solución obtenida. A continuación se pueden ver algunas de las recomendaciones, muchas de ellas en forma de interrogantes, para ayudar en el proceso de resolución.

- *COMPRENSIÓN DEL PROBLEMA*: ¿Cuál es la incógnita, los datos, las condiciones? ¿Son suficientes las condiciones para hallar la incógnita? Dibuje una figura. Adopte una notación adecuada.
- *CONCEPCIÓN DE UN PLAN:* Descubra las relaciones entre datos e incógnita. Puede tener en cuenta problemas auxiliares. Deberá llegar a obtener un plan de resolución. ¿Conoce algún problema relacionado? ¿Conoce algún teorema que le pueda ser útil? ¿Podría utilizar el resultado y/o el método de un problema resuelto antes? ¿Debería introducir algún elemento auxiliar para poder utilizarlo? ¿Podría imaginarse algún problema más sencillo? ¿Algún problema más general? ¿Algún problema análogo? ¿Ha utilizado todos los datos? ¿Ha utilizado todas las condiciones?
- *EJECUCIÓN DEL PLAN:* Lleve a cabo su plan de resolución y compruebe cada paso. ¿Puede demostrar que es correcto?
- *REVISIÓN:* Examine la solución obtenida ¿Puede comprobar el resultado? ¿Puede comprobar el razonamiento? ¿Puede obtener el resultado de otra manera? ¿Puede utilizar el resultado, o el método, para algún otro problema?

Miguel de Guzmán (2006) partiendo de las ideas de los autores antes señalados, elaboró un modelo para la solución de problemas, donde incluye tanto las decisiones ejecutivas de control como las heurísticas. La meta de este autor es que el estudiante examine y remodele sus propias formas de pensar de manera sistemática a fin de eliminar los obstáculos y de llegar a establecer hábitos mentales eficaces, en otras palabras un pensamiento de buena calidad (Herrera, 2008). El modelo para la resolución de problemas consta de las siguientes fases:

- Familiarización con el problema: Trata de entender a fondo la situación. Con paz, con tranquilidad, a tu ritmo. Juega con la situación, piérdele el miedo.
- Búsqueda de una (s) estrategia (s): Empieza por lo fácil. Experimenta. Haz un esquema, una figura un diagrama. Escoge un lenguaje adecuado, una notación apropiada. Busca un problema semejante. Induce. Supongamos el problema resuelto. Supongamos que no está resuelto.

Lleva adelante tu estrategia. Selecciona las mejores ideas que se te han ocurrido en la fase anterior. Actúa con flexibilidad. No te cierres en una idea, si las cosas se complican busca otra vía. ¿Salió? ¿Seguro? Mira a fondo tu solución.

- Revisa el proceso y saca conclusiones del mismo. Examina a fondo el camino que has seguido. ¿Cómo has llegado a la solución? ¿por qué no has llegado? Trata de entender no sólo que la estrategia funciona sino por qué funciona. Examina si encuentras un camino más simple. Reflexiona sobre tu propio proceso de pensamiento y saca algunas conclusiones y experiencias, para el futuro.

Foong (2013) plantea que además de estas heurísticas "generales", existen otras específicas que serían de ayuda para problemas concretos. Entre ellas encontramos: actuar el problema, utilizar un diagrama, dibujar esquemas de barras, hacer una lista sistemática, buscar patrones y utilizarlos, ensayo y error, trabajar hacía atrás, usar la noción antes-después, dividir el problema en partes, resolver un problema más sencillo, conjeturar, [6].

Como se puede ver, las propuestas de fases de resolución, estrategias o heurísticos para resolver problemas son bastante similares y difieren muy poco en la especificidad de las fases.

3 Investigación

El logro de la competencia para resolver problemas se consigue a lo largo de la carrera. También, para conseguirla, los profesores deberán diseñar aportes para contribuir a la calidad del egresado. En consecuencia, decidir cómo se ayuda a desarrollar esta competencia cae al interior de las cátedras provocando un proceso de reflexión e investigación ante la certeza de que ya no se puede dejar implícito el concepto «resolución de problemas». Algunos interrogantes orientan la búsqueda: ¿cómo se logra esta competencia?, ¿de qué manera instrumentar el trabajo de aula para que los alumnos egresen con este "saber hacer" que le permita resolver problemas abiertos de ingeniería?, ¿cuáles serán los conceptos y procedimientos, también las actitudes a promover en la resolución de problemas, para que el egresado pueda competir en un entorno nacional y regional con expectativa de éxito?

Al grupo de investigación le espera un recorrido sinuoso y difícil pero no imposible. La búsqueda de técnicas o programas de acción es, también, una experiencia de contacto con un campo amplísimo de prácticas que varían según los autores, los espacios académicos, las problemáticas disciplinares.

A pesar de todo lo expuesto acotamos la bibliografía a manejar y diseñamos una experiencia que nos motive a seguir la línea de investigación del proyecto.

4 Experiencia

Se planificó e implementó este año una instancia de enseñanza y aprendizaje sobre el tema que fue el Taller "Resolución de Problemas" para los ingresantes de la Facultad de Ciencias Exactas y Tecnología antes del inicio de las clases de las asignaturas de primer año, aproximadamente 100 alumnos. El mismo era de carácter optativo.

Se trabajó con problemas cerrados de la vida diaria para analizar y resolver con creatividad o innovación dentro de los límites de su propio conocimiento, [8], [9].

4.1 Objetivos

Lograr que los alumnos inicien el desarrollo o mejoren sus competencias en la resolución de problemas mediante su participación activa en el proceso favoreciendo de esta manera la adquisición de habilidades tales como el pensamiento reflexivo, el creativo, el analógico, el práctico, el deliberativo y la comunicación verbal y escrita.

4.2 Metodología

La metodología de trabajo es el taller, caracterizada por la interrelación entre la teoría y la práctica y el trabajo en equipo. Es una modalidad de enseñanza-aprendizaje, en donde el profesor expone los fundamentos teóricos y procedimentales, que sirven de base para que los alumnos realicen un conjunto de actividades diseñadas previamente y que los conducen a desarrollar su comprensión de los temas al vincularlos con la práctica operante. Bajo el enfoque actual de competencias, es considerado superior a los cursos puramente teóricos, ya que el curso-taller presenta el ambiente idóneo para el vínculo entre la conceptualización y la implementación, en donde el instructor permite la autonomía de los estudiantes bajo una continua supervisión y oportuna retroalimentación.

4.3 Propuesta de trabajo

Se desarrolló en tres instancias con diferentes actividades mencionadas a continuación:

Primera etapa:

– **Presentación e introducción al tema del taller a cargo de los docentes**. Se analizaron varias definiciones de problema y se eligió una entre ellas, la más clara y sencilla: Un problema es una situación, que requiere solución, y para la cual no se vislumbra un medio o camino obvio que conduzca a la misma.

– **Planteo de estrategias para resolver problemas. Se optó por el método de Polya que fue presentado mediante** un esquema tipo diagrama de flujo (véase la Fig.1) y un mapa conceptual (Fig. 2) aceptando que los procedimientos heurísticos no aseguran precisión ya que su efectividad se define por la creatividad con que el sujeto formula las preguntas o inventa las propuestas de solución del problema, [7]. Refieren al arte, y en este sentido al saber hacer, de elaborar estrategias para encontrar respuestas, a la habilidad creativa de la persona que se manifiesta en su hacer, en la experiencia con que afronta las situaciones problemáticas.

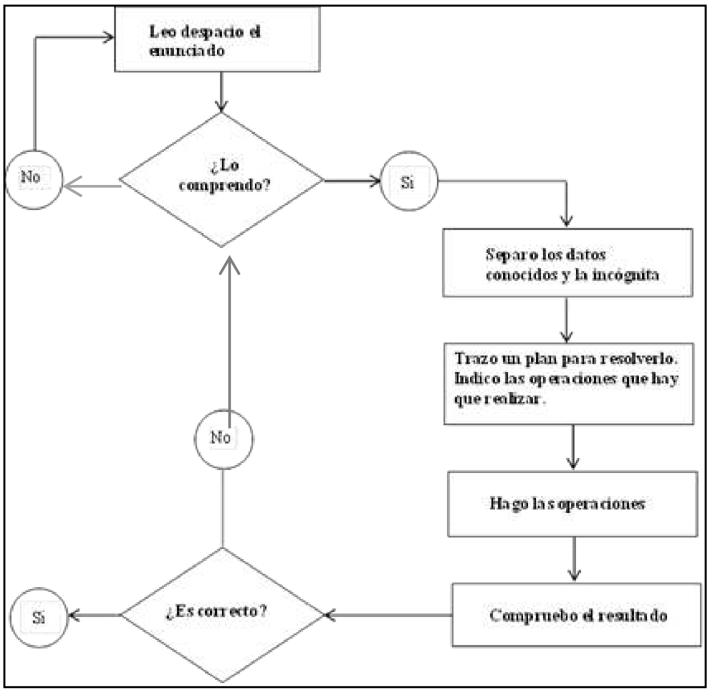


Fig. 1. Diagrama de flujo para la teoría de Polya.

A continuación, los docentes presentaron un mapa conceptual, herramienta de aprendizaje basada en la representación gráfica de un determinado proceso, con las esquematización de las acciones típicas de cada una de las fases propuestas por Polya. Los conceptos son escritos de forma jerárquica dentro de figuras geométricas (óvalos), que se conectan entre sí a través de líneas y palabras de enlace con un impacto visual que facilita la comprensión del contenido planteado (véase Fig. 2).

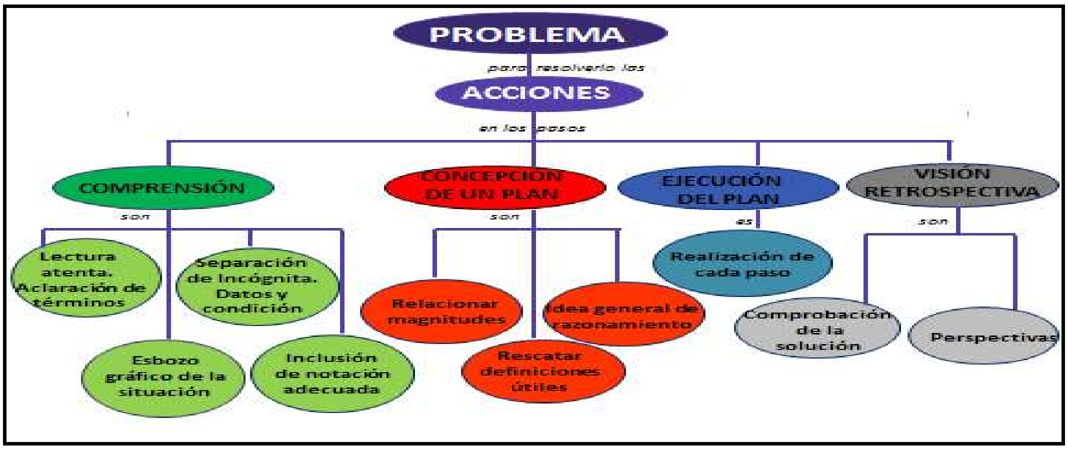


Fig. 2. Mapa conceptual para la teoría de Polya.

Comprender un problema no sólo significa entender las palabras, el lenguaje o los símbolos en los que está planteado sino también ubicarse en la situación como tal y adquirir una disposición de búsqueda de solución. Además para que se dé esta comprensión fue necesario escoger problemas que contengan conocimientos conceptuales ya conocidos y que se repasaron en el curso de nivelación aprobado.

Es decir, esta primera etapa exige la presencia de conocimientos lingüísticos, semánticos que se utiliza para interpretar el contexto del problema y darle sentido, y conocimientos esquemáticos que ayudan a decidir qué datos son útiles.

El proceso de configuración de un plan exige un conocimiento estratégico que ayuda a establecer medios útiles para encontrar una solución. Al idearlo se determina qué conceptos o definiciones o resultados conocidos se han de emplear y qué operaciones se han de realizar.

Algunas preguntas, seleccionadas teniendo en cuenta los participantes del taller (edad y nivel educativo), que ayudan a comprender mejor y configurar un plan se presentan como apoyo a las acciones sugeridas en los pasos mencionados mediante una tabla (véase Fig. 3).

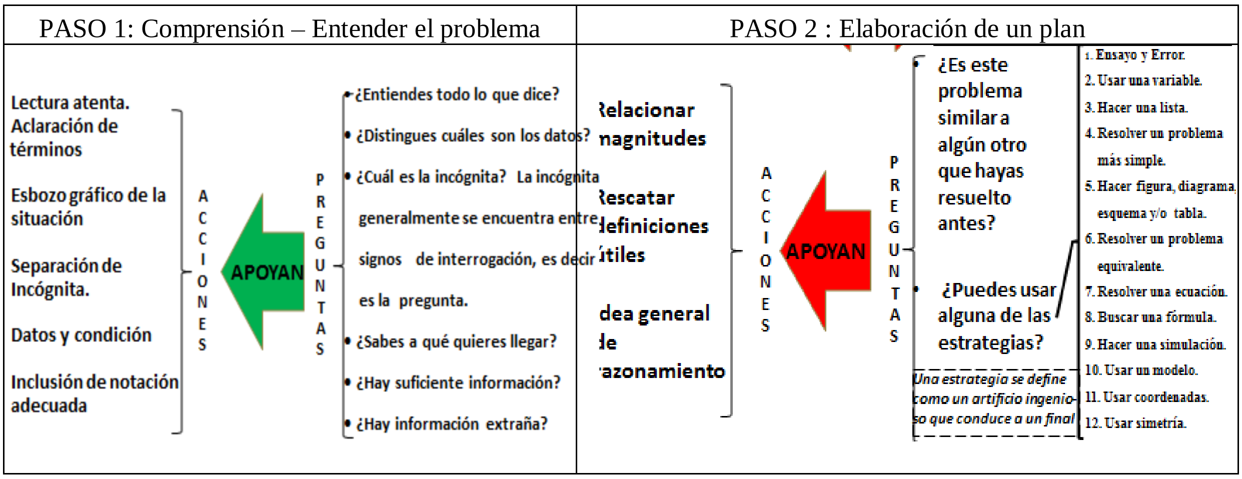


Fig. 3. Preguntas que apoyan las acciones en los pasos 1 y 2.

El plan proporciona una línea general pero no asegura que los detalles encajen correctamente entre sí. Entonces, es necesario, un seguimiento riguroso, un examen detallado de cada paso. Pero se insistió en que la solución de problemas no sigue siempre una secuencia lineal como la que describe Polya, ya que la puesta en marcha de un plan puede hacer que surjan nuevos problemas para los cuales hay que diseñar nuevos planes. El proceso de ejecución exige un conocimiento operativo que permite llevar a cabo las estrategias y planes.

No siempre la solución encontrada es adecuada. Puede ser errónea por diferentes causas. Una visión retrospectiva puede indicar errores en la ejecución del plan (errores algebraicos) o en la planificación del mismo ya sea por falta de comprensión del problema o una elección estratégica equivocada.

Algunas preguntas y/o sugerencias, elegidas teniendo en cuenta las características del grupo de estudiantes participantes del taller (edad y nivel educativo), que ayudan a ejecutar el plan diseñado y revisión hacia atrás se presentan como apoyo a las acciones sugeridas en los pasos mencionados mediante una tabla (véase Fig. 4).

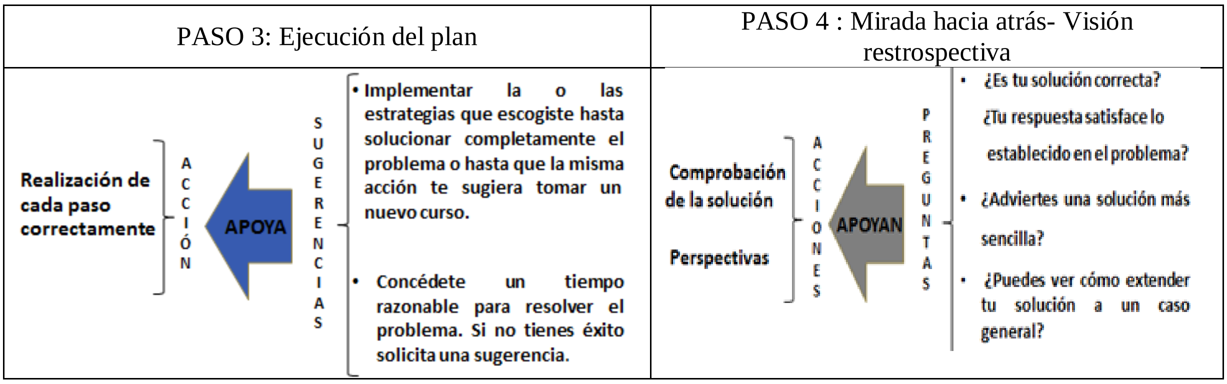


Fig. 4. Preguntas y/o sugerencias que apoyan las acciones en los pasos 3 y 4.

Las cuatro fases enunciadas por Polya con sus respectivas acciones apoyadas por preguntas seleccionadas, únicamente proporcionaron un esquema general que fue necesario llenar de contenidos. Para ello se seleccionó una situación problemática real en una interacción constante entre el docente y los alumnos, descubriendo o construyendo los pasos que conducirán a resolver el problema planteado, bajo diferentes supuestos (Fig. 5).

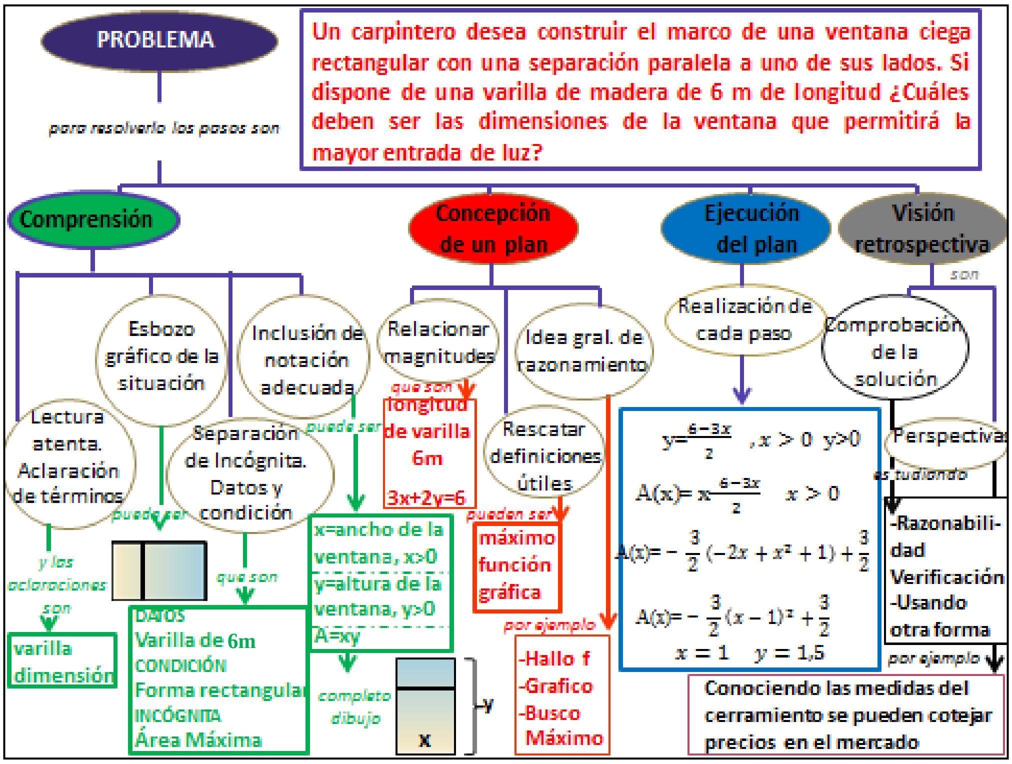


Fig. 5. Aplicación directa a una situación problemática.

Luego se presentó una situación real muy parecida al problema de la Fig.5. en la cual se especificaba el ancho de la varilla. Recién en ese momento se percataron de los supuestos que habían hecho, cómo debía variar la expresión que modeló la situación problemática anterior y .la solución la encontramos con un software muy amigable, Geogebra.

Para mostrar la importancia de la mirada hacia atrás se presentó en el taller un problema resuelto contextualizado en el área de física. Al analizar la respuesta que versaba sobre rapidez promedio, nos dimos cuenta que no era satisfactoria porque al usar la fórmula distancia = rapidez x tiempo no reproducía la distancia recorrida por la viajera. El equívoco que estaba en el plan de resolución generó una participación activa de los estudiantes y una discusión fructífera que motivó muchísimo a los alumnos.

Segunda etapa: Trabajo grupal con las situaciones problemáticas que se presentaron en la sección “¡A trabajar!!!!!”, con el acompañamiento y la asistencia de los docentes.

Se formaron tres grupos con subgrupos de 5 o 6 alumnos que pretendían lograr una participación de todos a partir de una agrupación heterogénea de los estudiantes. Cada grupo estaba supervisado por dos docentes que fueron los encargados de introducir la actividad, guiar al grupo y favorecer el debate. Por todo ello, la finalidad de esta estrategia consistió en que todos los alumnos, completen las actividades planteadas a partir del aprendizaje dialógico y la interacción entre todos los miembros y, expongan su trabajo para los restantes subgrupos del taller, [10].

Se decidió la exposición grupal para intentar generar cooperación y compañerismo entre miembros del grupo. Ellos acordaban de acuerdo a sus habilidades y fortalezas quien: graficaba, escribía las ecuaciones, expresaba la respuesta, pero todos participaban de alguna acción y después debían expresarlas de manera oral. El tipo de exposición mencionada tenía como fin además que se dieran cuenta que era redituable mostrarse como un bloque para analizar los interrogantes o sugerencias de diversidad de soluciones de los miembros de los otros grupos y, detectar errores propios y ajenos. Es decir la puesta en común se realizó por grupo.

Siempre se tuvo en cuenta que el docente además de ser el responsable de la preparación del material didáctico congruente con los objetivos, debe acompañar y supervisar al grupo de estudiantes, quienes desarrollan la mayor parte de las actividades en la consecución de un producto tangible.
Tercera etapa: Plenario. En esta etapa, los alumnos plantearon sus opiniones acerca de la metodología del aprendizaje, el tema del taller y anhelos. Los docentes sistematizaban periódicamente las ideas más importantes ofrecidas por los participantes para conseguir aportes grupales y/o individuales y plantear una síntesis globalizadora de la temática abordada. Luego respondieron una encuesta que tenía en cuenta tres variables: organización, aspectos, académicos y de mediación y, acompañamiento del docente.

5 Resultados

Se presentan dos tipos de resultados: registros realizados por docentes en las distintas etapas del taller y resultados de la encuesta.

5.1 Registros[11]

Presentación. Se pueden destacar dos momentos: fase de presentación y explicación y, fase de ejemplificación. En la primera se explicitaron los procesos a realizar y se presentaron materiales conocidos pero formalizados que servirían para la producción del taller. En esta etapa los participantes no pudieron ubicarse en el proceso y participar activamente en él.

En la fase de ejemplificación se posibilitó más la reflexión y, teniendo cuidado de avanzar a la velocidad adecuada y adaptada a la capacidad de ellos, se incrementó la participación observándose que muchos de ellos se acercaban al docente para manifestar su acuerdo o desacuerdo a lo planteado obviando su exposición pública. Al resolver problemas se pusieron en práctica métodos, pasos y consideraciones teóricas antes expuestas que les mostraron simplificaciones que habían hecho sin darse cuenta, lo cual despertó el interés para realizar la tarea grupal del taller.
Trabajo grupal. Se adaptaron rápidamente al trabajo grupal participando de diferentes maneras y compromiso. A veces sugirieron soluciones a los problemas de forma inmediata, otras esperaron ser alentados por el mediador para el logro de los de los objetivos. Demostraron cierta habilidad para manejar las relaciones en el grupo, es decir entre pares. Promovieron escasamente la cooperación y participación entre los miembros de equipo. Se trataron con respeto pero no intentaron motivar al que estuvo receptivo. Aceptaron sugerencias y críticas del equipo muchas veces sin entender lo que se cuestionaba. En la mayoría de las ocasiones estuvieron atentos a las opiniones, escucharon pero no hablaron todos los miembros.
Puesta en común. En general, en la expresión escrita se utilizó una terminología adecuada y una notación correcta pero incompleta. El trabajo no se presentó en la pizarra de manera ordenada, clara y organizada. Pocos errores de ortografía.

La exposición oral de los grupos ha sido bastante clara. Se entendió perfectamente aunque hubo algún aspecto que les costó justificar ante la pregunta del docente. Se ha seguido un orden correcto no visualizado en la presentación escrita. Se notó que no estaban las respuestas o conclusiones preparadas. Los estudiantes comprendieron las preguntas del profesor y de sus compañeros y fueron capaces de responder la mayoría apoyándose y complementándose todos los integrantes del grupo.
Plenario. Se promovió la participación para expresar y escuchar con respeto puntos de vista o producción del taller. Los estudiantes manifestaron su interés en nuevos encuentros educativos de este tipo para tratar con problemas específicos de las asignaturas Cálculo I y Cálculo II. Sugirieron ser más estrictos con los horarios.

5.2 Encuesta

Tabla 1. Análisis de los Aspectos Organizativos valorados en la encuesta.

Aspectos Organizativos		
El 41,5% de los alumnos opinó que la distribución entre presentación, trabajo grupal y cierre fue excelente, el 53,2% buena y sólo un 5,2% regular.	A un 59,7% de los estudiantes el tiempo asignado al trabajo grupal le pareció suficiente, a un 29,9% relativamente suficiente, y a un 10,4% insuficiente.	A un 61,0% de participantes les pareció que el tiempo asignado al cierre del taller fue suficiente. El 32,5% opinó relativamente suficiente y el 6,5% insuficiente.

Los resultados de la encuesta se muestran en las tablas 1 y 2.

Tabla 2. Análisis de los Aspectos Académicos y de Mediación valorados en la encuesta.

Aspectos Académicos			Mediación y Acompañamiento del docente		
El 19,5% de los alumnos respondió que el material del taller fue muy claro y muy novedoso y un 77,9% claro y novedoso. Un 2,6% estuvo en desacuerdo.	El 31,2 % de los estudiantes opinó que la presentación con ejemplificación pertinente fue sumamente útil, y un 51,9% útil. Sólo un 16,9% no percibió utilidad en la primera etapa del taller.	El 31,2% de los alumnos estuvieron completamente de acuerdo que vivenciaron una nueva forma de aprender y un 61,0% de acuerdo. Solamente a un 7,8% le pareció que la organización general no ayudó a una nueva manera de aprender.	Para un 37,7% de los participantes, las distintas formas de resolver los problemas, propiciadas y/o remarcadas por el mediador, fueron sumamente útiles y para el 46,7% útiles. . El 15,6% opinó que no encontraron utilidad.	El 35,1% de los estudiantes recomendaría completamente esta forma de aprender a sus compañeros con el acompaña-miento del docente y sus pares y, el 62,3% también lo aconsejaría. El 2,6% no recomendaría la participación o no contestó.	A un 66,2% de alumnos les pareció que la participación del docente en el trabajo grupal, ayudó mucho al respeto y a la participación en la resolución de problemas y a un 33,8% que la misma, permitió la discusión de todas las situaciones problemáticas.

6 Conclusiones

- La valoración que hacen los estudiantes de la propuesta innovadora de utilizar el taller como recurso metodológico para lograr mayor destreza en la resolución de problemas es positiva.
- Se logró mayor participación en el proceso y práctica de habilidades tales como el pensamiento reflexivo, el analógico, el práctico, el deliberativo y la comunicación verbal y escrita.
- Como trabajo futuro se proyecta emplear la misma metodología en la resolución de problemas de temas de las asignaturas y desarrollar rúbricas para el desarrollo del grado de reflexión matemática y resolución de problemas, como aporte al mejoramiento de la cuantificación del logro de las competencias mencionadas.

Referencias

1. Salganik, Rychen, Moser y Konstant, “Definition and Selection of Competencies: Theoretical and Conceptual Foundations (DeSeCo)”. OECD/SFSO/ DeSeCo Background Paper. p5. (1999).
2. Comisión de las Comunidades Europeas. “Propuesta de Recomendación del Parlamento Europeo y del Consejo sobre las competencias clave para el aprendizaje permanente”. p. 5. (2005).
3. R. Giordano-Lerena y S. Cirimelo, “Competencias en ingeniería y eficacia institucional”. Ingeniería Solidaria, Vol. 9, No. 16, pp. 119-127, Dic., 2013. ISSN 1900-3102 / e-ISSN 2357-6014.
4. Documentos de CONFEDI – Competencias en Ingeniería - Universidad FASTA –Chile- Ediciones Abril de 2014.
5. Comisión Nacional de Evaluación y Acreditación Universitaria Acreditación de carreras de Grado, “Anexos Resolución 1232”. 11. (2002).
6. J. L. Piñeiro Garrido y Pinto Marín E. ¿Qué es la Resolución de Problemas? Revista Virtual Redipe: Año 4 Vol. 2 Universidad de Granada (2015).
7. Pólya, G. (1990). Cómo plantear y resolver problemas (XV reimpresión de la 1ªedición en español, 1965). México: Editorial Trillas.
8. D. Gutiérrez. El Taller como Estrategia Didáctica. Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey, Razón y Palabra (publicación electrónica) editada por el Proyecto Internet del ITESM Campus Estado de México. México. Número 66.http://razón y palabra.org.mx/n/n66/varia/dgutierrez.html#au
9. Miguel Jesús Gea Linares Taller de Matemática I.E.S. "Murgi" Universidad de Granada.
10. J. Peirats Chacon y M. Lopez Mari, M. “Los grupos interactivos como estrategia didáctica en la atención a la diversidad”. ENSAYOS, Revista de la Facultad de Educación de Albacete (Universidad de Valencia) Nº 28, 2013. (Enlace web: http://www.revista.uclm.es/index.php/ensayos. Consultada en fecha (10-07-2018) ISSN 2171-9098.
11. C. Perez Barreiro; G. Arranz Manso; M. Ferrando Velázquez; M. L. González González; M.R. Patiño Molina; A. Portillo De La Fuente y M.A. Símon Hurtado. Experiencias de Evaluación de Competencias Genéricas mediante Rúbricas- Jornada Competencias Genéricas y su Evaluación. EUP (2008).

Libro Digital Interactivo de Ecuaciones Diferenciales

Valeria Bertossi[1], Sonia Pastorelli[1], Eva Casco[1]
[1] Departamento de Materias Básicas, Facultad Regional Santa Fe, Universidad Tecnológica Nacional
Lavaise 610
{vbertossi, spastorelli, ecasco}@frsf.utn.edu.ar

Resumen. El Libro Digital Interactivo de Ecuaciones Diferenciales es un objeto de aprendizaje desarrollado con un doble objetivo didáctico: constituir un material para ser empleado por docentes y alumnos en el aula y fuera de ella, ya sea a través de *notebooks*, *tablets* o *smartphones*; y ofrecerle al estudiante un recurso tecnológico de autoevaluación. Actualmente, se está gestionando su publicación en edUTecNe, editorial de la Universidad Tecnológica Nacional, para uso libre y gratuito de la comunidad universitaria.

Palabras Clave: Libro digital interactivo, Objeto de aprendizaje, Autoevaluación, Ecuaciones diferenciales

1 Introducción

Nuestra propia experiencia como docentes de Matemática en las carreras de Ingeniería de la Universidad Tecnológica Nacional (UTN) Regional Santa Fe, junto al consenso en el ámbito universitario en lo que a recursos digitales educativos se refiere en tanto medios facilitadores de habilidades cognitivas de orden superior y de estrategias para aprender, nos impulsó a reformular el material de cátedra redactado en PDF por Pastorelli [1] que venimos utilizando en la enseñanza de ecuaciones diferenciales, de manera que su conformación resulte atractiva a los nativos digitales, se adecue a su modo hipertextual de explorar los contenidos, les ofrezca una herramienta de autoevaluación y se ejecute en diferentes plataformas de hardware, esto es, no sólo en *notebooks* y *PCs* de escritorio, sino también en los dispositivos omnipresentes en la vida cotidiana, de la que nuestras aulas no están exentas: los *smartphones*.

Lo expuesto no reduce nuestra concepción de la calidad educativa al mero uso de artefactos tecnológicos; reconocemos que ella depende de la explotación didáctica que realice el docente y del contexto en el que se desarrolle. En tal sentido, adherimos a lo que expresa Loyola [2]: "La computadora, del mismo modo que cualquier otro material de enseñanza, no es útil en sí misma por su soporte tecnológico ni por su diseño sino en la medida que se subordine a una intencionalidad pedagógica y a un proyecto didáctico específico. Y en este sentido, remarcamos que el 'medio' no se refiere únicamente al instrumento tecnológico, o al soporte físico o artefacto; sino que incluye las decisiones didácticas del docente en el momento de su uso". Veletsianos [3] coincide igualmente con que las tecnologías emergentes son herramientas, conceptos, innovaciones y avances utilizados en diversos contextos educativos al servicio de múltiples propósitos relacionados con la educación. También Abreu León [4] concuerda con que la tecnología no es la panacea aunque sí puede acercar al estudiante a los conocimientos abstractos. Sostiene que el *quid* de la cuestión está en reconocer la importancia de entender la Matemática, no de aprenderla de memoria; y aquí es donde la tecnología puede jugar un papel facilitador. Entre otras bondades de la misma se pueden citar: la visualización de variados casos concretos en unos cuantos segundos (cosa que al docente le llevaría, quizás, toda una clase en explicar sólo uno); modelado económico de la realidad y programación de simulaciones que conducen a la comprobación casi inmediata de resultados. Finalmente, refiriéndose al sentir del alumno, el autor afirma que si aquél experimenta con muchos ejemplos, los manipula dinámicamente y observa siempre los mismos resultados o idéntico patrón de comportamiento sentirá una certeza que, si bien no es propiamente matemática, le ayudará a convencerse de que vale la pena estudiar por qué 'eso' es lógicamente necesario. Y así ocurre cuando al encontrarse frente a un teorema se convence que el mismo es necesario porque no sólo ha visto sino comprendido su demostración. Lo expuesto no es un asunto menor, pues provoca en él una gran satisfacción y un sentimiento de poder que 'eso' que ha entendido nadie jamás se lo va a poder quitar; y esto promueve una gran seguridad en sí mismo.

Por lo expuesto, es habitual que los docentes recurramos a herramientas de software. Pero aquí Cabero y Llorente [5] encienden una luz de alerta que nos invita a reflexionar en que antes de pensar en el medio debemos tener presente las características de los destinatarios del material didáctico, la forma en que lo utilizaremos y nuestras pretensiones. Incluso cuando se habla de aprendizaje, hay más de una variable a tener en cuenta además del individuo; no se deben perder de vista su historia personal, los conocimientos adquiridos, las herramientas que dispone, las personas que lo rodean y su entorno; que no sólo apoyan el aprendizaje sino que lo determinan.

Finalmente, para procurar la mejora continua del proceso de enseñanza/aprendizaje de las EDO entendemos que sus principales actores, docentes y alumnos, debemos involucrarnos en la evaluación del mismo, cada uno según su rol, tal cual lo proponen Jiménez Galán, González Ramírez y Hernandez Jaime [6]. Por un lado, en lo que compete a nuestro rol docente, la coevaluación cualitativa y continua de este esfuerzo singular que supone el uso de un recurso didáctico novedoso nos proporcionará información relevante que servirá de *input* para la interpretación y juicio del recurso didáctico en sí y del modo en que se lo hubo empleado. A partir de las conclusiones obtenidas identificaremos fortalezas y áreas de oportunidad para mejorar tanto el diseño de la propia herramienta como la planificación, organización e implementación de las actividades áulicas que prevén su uso. Por otro lado, como dijimos en el primer párrafo, nuestra intención pedagógica al desarrollar el libro interactivo fue el de ofrecerle al estudiante una herramienta tecnológica de autoevaluación. Consideramos trascendental que valore su propia tarea y sopese el grado de satisfacción que le produce porque como pregonan Jiménez Galán *et al.* [6] "deben ser educados para realizar esa función y deben de dárseles pautas para que lo hagan con seriedad y corrección, no de forma autocomplaciente o por juego".

2 Diseño del libro digital interactivo

El recurso didáctico que divulgamos en esta comunicación pertenece a la categoría de *objeto de aprendizaje,* según la taxonomía de objetos digitales educativos propuesta por Gértrudix Barrio, Álvarez García, Galisteo del Valle, Gálvez de la Cuesta y Gértrudix Barrio [7]. Los autores definen al *objeto de aprendizaje* como una combinación de los anteriores niveles de la jerarquía, *media* (fotografía, ilustración, sonido) y *media integrado* (combinación de varios elementos *media*), pero incluye objetivos didácticos propios, actividades de aprendizaje para su consecución y sistema de evaluación.

La columna vertebral del diseño del libro digital se cimentó en las preguntas de Cabero y Llorente [5]: *¿para quién*?, *¿cómo lo vamos a utilizar*?, *¿qué pretendemos con él*? y, finalmente, *¿qué medio elegiremos para alcanzar nuestros objetivos*?

Obviamente, en primer lugar, hemos dado repuesta a dos interrogantes tácitos en la lista de estos autores, *¿qué contenido*?: las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (EDO); y *¿por qué*?: las EDO forman parte de los contenidos mínimos de la asignatura Análisis Matemático II consignados en las ordenanzas del diseño curricular de las carreras de ingeniería de la UTN [8], [9], [10], [11], [12]; y un dominio adecuado de las mismas resulta de gran utilidad en el modelado de situaciones problemáticas que se encuentran habitualmente en la práctica ingenieril. Además, porque los materiales didácticos mejoran la actitud de los alumnos frente a la Matemática, los enfrentan a problemas que no tienen solución determinada de antemano y permiten a profesores y alumnos "conversar" sobre algo concreto (Laurillard) [13].

2.1 Los destinatarios

Gértrudix *et al.* [7] argumentan que "la educación se encuentra en una apasionante encrucijada; la de la ineludible adaptación de los procesos de enseñanza/aprendizaje a la sociedad del siglo XXI, a sus procesos, a sus nuevas costumbres, a los requerimientos vitales de un mundo que ha pautado su forma de conocer y apropiarse de la realidad desde la extensión de sus contemporáneos recursos tecnológicos."

Este año están cursando el primer nivel de Ingeniería los primeros alumnos nacidos en el siglo XXI, pero ello no exime al resto de las características propias del alumnado de este siglo:

- Generación multimedia y multitarea (echan mano de una variedad de medios pero de manera simultánea).
- Relación estructural vida cotidiana–tecnologías digitales, con los consecuentes cambios en las prácticas comunicativas, en los modos de producción, circulación y apropiación del conocimiento (Loyola) [2].
- "Plasticidad neuronal y elasticidad cultural que favorece la adaptación a los diferentes contextos y el dominio de la complejidad de las redes informáticas", usando las palabras de Martín–Barbero, como lo refiere Loyola [2].
- Uso de Internet como posibilidad de acceder, agregar, modificar el conocimiento y su forma de apropiación mediante el uso de tecnologías emergentes (Siemens) [14].
- Cultura del zapping y de la inmediatez de los resultados que configuran las preferencias por la hipertextualidad.
- Subutilización de mecanismos de verificación de resultados que permiten arribar a la conclusión que las respuestas son imposibles a causa de deficiencias en el planteo o producto de errores algebraicos menores.

- Dificultades para sostener la atención. La gran cantidad de estímulos tecnológicos de la vida moderna caracterizan esta época como la "era de la distracción" (Manes y Niro) [15].

2.2 Cómo lo vamos a utilizar

La docencia está ubicada en el centro de múltiples intereses económicos, sociales y culturales, tanto individuales como colectivos. En medio de este contexto dinámico el sistema educativo está reclamando de los profesores una acción protagónica como clave para el cambio (Tardif) [16].

Aún hoy nos encontramos con modelos convencionales que no parecen responder a las inquietudes y necesidades de los nuevos alumnos ni a las modificaciones que experimenta la sociedad ni a las demandas vertiginosas del mercado de trabajo. Casco, Giménez Uribe, Llorens y Rodríguez [17] proclaman la importancia social de la Universidad y la necesidad de dar respuesta a estas transformaciones mediante un sistema educativo flexible que atienda a los requerimientos del aprendizaje continuo sin descuidar la rigurosidad en la formación, manteniendo un balance entre teoría y práctica, incorporando nuevas competencias actitudinales y técnicas, y resolviendo problemas con criticidad, creatividad y con herramientas de cálculo y diseño.

Esto implica por parte del docente un cambio de mentalidad en cuanto al manejo de la información y a la capacitación que ello exige. Nuestras prácticas en el aula están signadas habitualmente por el uso de tecnologías que proveen representaciones netamente visuales (y estáticas): pizarra, fibrón, proyecciones con computadora y cañón.

Actualmente, cuando se propone la utilización de materiales que mejoren la comprensión de la Matemática, casi en su totalidad, se hace referencia a representaciones geométricas mediadas por computadora. Para dar respuesta a este imperativo hemos elaborado una herramienta innovadora a ser utilizada por docentes y alumnos, tanto en el aula como fuera de ella. Al manipular el libro interactivo nuestros jóvenes podrán hacer uso de los conceptos teóricos de EDO y explorarlos a través de experimentaciones dinámicas que favorezcan la interrelación de los contenidos aprendidos, circunscribiendo nuestro rol docente al de mediador y guía. De este modo, al posibilitarles la apropiación del conocimiento con autonomía y flexibilidad les estaríamos brindando un nuevo escenario de enseñanza/aprendizaje que colabore en la construcción de significado.

2.3 Qué pretendemos

"El material es un medio dirigido a producir en el que aprende resultados fructíferos. Si no los produce hay que evitar su utilización. (…) [El profesor debe] atender a la manipulación de materiales con actividades que optimicen el entendimiento, que provoquen, desafíen, motiven, porque actualizan las necesidades del alumno. (…) Hacer Matemática implica ante todo establecer relaciones" (Fernández Bravo) [18]. En línea con lo expresado por el autor, en la etapa inicial de diseño hemos establecido que el recurso didáctico diera cumplimiento a los siguientes objetivos:

- 'Sintonizar' con las características del alumnado descriptas en la subsección 2.1, de modo que su utilización constituya un medio para captar su atención, ya que estaríamos integrando al aula (con una finalidad didáctica, por supuesto) herramientas tecnológicas a las que acceden, toman contacto y utilizan en la cotidianidad.
- Proponer actividades interactivas de autoevaluación que no pongan en tensión al alumno tal cual ocurre en otras formas de evaluación como las sumativas o diagnósticas de carácter público. A estas últimas nos referimos cuando hacemos un sondeo en el aula y por toda respuesta recibimos un silencio sepulcral por temor al ridículo ante una respuesta equivocada.
- Incluir actividades interactivas y de simulación que inviten al alumno a conjeturar, probar, y en dicho proceso permitirse cometer errores, pero también corregirlos; actividades que inciten a construir argumentos sobre la validez de un razonamiento y puedan ser debatidos con los compañeros y el docente (Laurillard) [13]. Estas habilidades si bien son requeridas en todo ámbito educativo, en el espacio universitario cobran crucial importancia ya que es aquí donde se forman los futuros ingenieros que, además de contar con solidez científica, deberán indudablemente estar capacitados para comunicar eficazmente, coordinar equipos, tomar decisiones sostenibles, resolver conflictos interpersonales, negociar, acordar, etc.
- Explotar el potencial que las tecnologías emergentes ofrecen en pos de alumbrar un escenario de enseñanza/aprendizaje que se afiance en criterios sustantivos como la autonomía, la flexibilidad y la interrelación de los contenidos. Esperamos que el alumno pueda cerrar el círculo de los conceptos desarrollados a lo largo de la cursada: velocidad y trayectorias (unidad 1: Funciones vectoriales), gradiente y curvas de nivel (unidad 2: Funciones de varias variables), líneas de flujo (unidad 4: Cálculo vectorial),

campos direccionales y curvas solución (unidad 5 – parte a: EDO de primer orden), sistemas autónomos y estabilidad (unidad 5 – parte b: Sistemas lineales de EDO y EDO de segundo orden); además de recuperar conceptos previos de Álgebra y Geometría Analítica y de Análisis Matemático I (asignaturas del primer nivel de las carreras de Ingeniería de la UTN) tales como cónicas, curvas en paramétricas, autovalores, autovectores e integrales simples.
- Dar soporte para optimizar el tiempo de desarrollo de las clases ya que la unidad EDO ‘se cae’ del calendario académico.

2.4 Cuál es el medio

El medio es un libro digital interactivo de EDO que, además de cumplir con los requisitos de rigor de todo libro educativo tradicional (tapa, prólogo, índice, capítulos, ejercitación propuesta en cada capítulo, etc.), está diseñado de una manera simple, que emula la de los libros de papel en lo que a lectura secuencial se refiere, pero que está enriquecido por las posibilidades que ofrece la tecnología digital: incorporación de íconos cuya infografía alude a la función que se ejecutará si se cliquea en ellos, posibilidad de descargar documentos, escuchar audios y ver vídeos, facultad de imprimir el libro en forma completa o parcial, ejecución de simulaciones, inclusión de actividades interactivas, navegabilidad o hipertextualidad.

A través de la lectura lineal podemos recorrer los contenidos conceptuales dando vuelta las páginas tal cual leemos un libro impreso, pero con el plus de hacerlo con el dedo índice si empleamos un dispositivo de pantalla táctil; hecho que nos sugerirá la misma sensación que la de un libro de papel. Esta linealidad se combina con la hipertextualidad (que permite ‘navegar’ el libro) y que hemos clasificado en cuatro categorías:

Categoría I. Comprende vínculos hacia la ampliación de contenidos que se abren en ventanas emergentes con la posibilidad de descargar y/o imprimir el documento en PDF.

- *Vínculos a ejemplos*: En cada hito didáctico hemos agregado un enlace a ejemplos desarrollados en forma completa para esclarecer la teoría y que, en algunos casos, anexan objetos de aprendizaje interactivos para hacer las comprobaciones del ejemplo en cuestión y promover experimentaciones de situaciones similares.
- *Vínculos a demostraciones de teoremas:* Para favorecer la lectura fluida y a medida de lo que el devenir del texto exige, hemos enunciado los teoremas enmarcando únicamente sus hipótesis y tesis en un recuadro de color para diferenciarlos del resto del escrito y con la intencionalidad pedagógica de destacar su relevancia. Ahora bien, si el estudiante desea indagar un poco más y obtener la respuesta acerca de por qué eso que enuncia el teorema es necesariamente cierto, tiene la posibilidad de desplegar su demostración en una ventana emergente y descargarla o imprimirla como se mencionó arriba.
- *Vínculos a recordatorios de conocimientos previos:* Son enlaces a conceptos cuya evocación es necesaria para establecer su interrelación con el tema que se está leyendo.

Categoría II. Agrupa los vínculos a los objetos de aprendizaje interactivos que hemos dispuesto a lo largo del libro según su pertinencia. Algunos se han recuperado de la web del proyecto Descartes y otros han sido programados *ad hoc*, tanto en la plataforma DescartesJS como en Geogebra. Dichos objetos atienden a diferentes propósitos tales como:

- *Ejecución de simulaciones:* a) DaVinci (Bertossi) [19]; b) Sistemas homogéneos; c) Sistemas inhomogéneos.
- *Realización de cálculos:* Calculadora (Ripoll Mira y García Cebrian) [21].
- *Autoevaluación con retroalimentación:* a) Tabla resumen para punto crítico aislado; b) Familias ortogonales.
- *Comprobación de hipótesis y resultados:* a) Familia de curvas solución de una EDO; b) Solución particular de una EDO; c) Campos eléctricos en conductores (Abreu León, Oliveró Serrat, Escamilla González y Espinosa Longi) [20].

En un escenario hipotético de aprendizaje los aprendientes podrían preguntarse: *¿qué pasaría si las condiciones iniciales fuesen éstas y no aquéllas?; la trayectoria que seguirá una partícula lanzada en este campo direccional, en este punto, ¿será la que estamos pensando?; la familia de curvas que obtuvimos siguiendo el algoritmo para ello, ¿es realmente ortogonal a la familia original?; ¿son efectivamente elipses las curvas ortogonales a la familia dada? ¿Serán hipérbolas las integrantes de la familia de curvas solución de tal ecuación diferencial?* Éstos y otros cuestionamientos se suscitarán probablemente cuando los educandos manipulen los objetos de aprendizaje para realizar las actividades sugeridas en el propio libro, extendiendo así la finalidad primigenia de su diseño: conquistar la construcción colectiva de significado que al decir de Abreu León [4] “causa un gran placer”.

Categoría III. Involucra los vínculos internos a otras partes del texto como lo son, por ejemplo, las entradas del índice; los ítems de listas, que enlazan a las páginas donde se desarrollan los conceptos a los que aluden; una frase o palabra que apunta a la parte del libro donde el tema fue explicado, etc.

Categoría IV. Agrupa los vínculos a páginas web externas con la intencionalidad de expandir el conocimiento del joven, que eche a volar su mente y establezca nuevas conexiones entre lo aprendido y otros conceptos que exceden a los desarrollados en el libro, pero que pueden captarse intuitivamente gracias a la manera atractiva que tiene la ciencia ficción de presentarlos. Es así que para aquellos alumnos curiosos e inquietos, que no se conforman con los contenidos curriculares mínimos y que están interesados en saber qué hay más allá de los sistemas dinámicos lineales, les ofrecemos en el epílogo la posibilidad de asomarse al mundo de los sistemas dinámicos no lineales caóticos a través de enlaces a páginas web disponibles en Internet: a) la película "El Efecto Mariposa" (Bress y Gruber) [22]; b) el cuento "El ruido de un trueno" en su versión escrita (Bradbury) [23]; c) la versión de audio del mismo cuento (Rodríguez) [24]; d) el libro "El fin de la Eternidad" en su versión escrita (Asimov) [25]; e) la versión de audiolibro de la misma obra (Arizmendi) [26].

La Fig. 1 esquematiza el diseño que hemos descripto previamente.

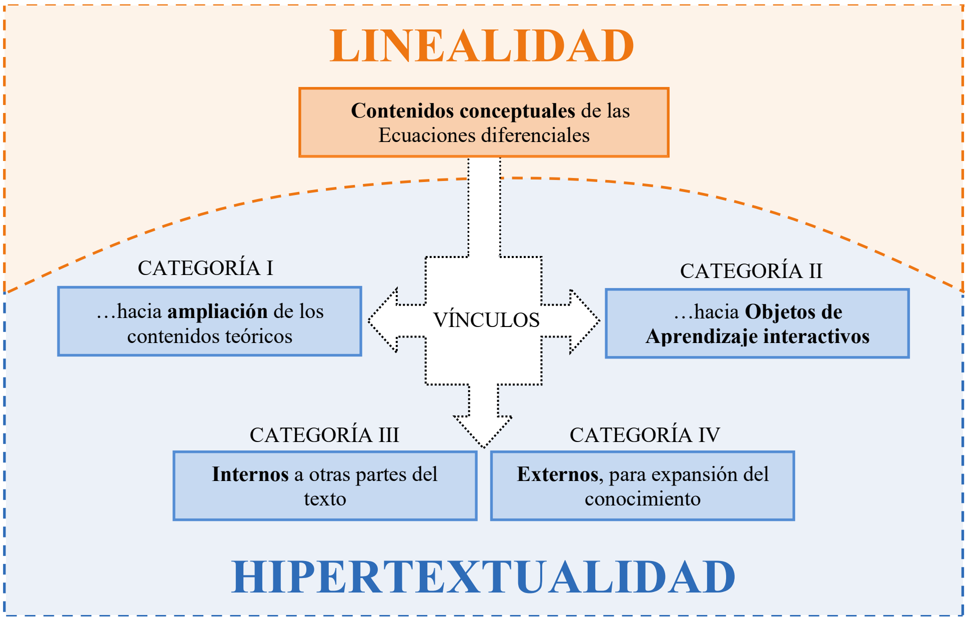


Fig. 1. Diseño estructural del Libro Digital Interactivo de Ecuaciones Diferenciales.

3 Conclusiones y trabajos futuros

El Libro Digital Interactivo de Ecuaciones Diferenciales fue producto de muchos e intensos años de trabajo colaborativo y un consolidado apoyo institucional. En 2011 se publicó el material de cátedra en formato PDF (Pastorelli) [1]; en 2014, dentro del marco de un proyecto de investigación en educación matemática para Ingeniería, dirigido por Pastorelli, se desarrolló DaVinci 1.0 en tecnología Java (simulador de sistemas autónomos y no autónomos, lineales y no lineales) como proyecto final de la carrera Ingeniería en Sistemas de Información de quien trabajara en aquel entonces como ayudante de segunda de Análisis Matemático II (Bertossi) [27]. En 2015, en el marco de una BINID (Beca de Iniciación en Investigación y Desarrollo) que promueve la UTN para jóvenes graduados, se migró el simulador a tecnología JavaScript para posibilitar su ejecución en dispositivos móviles, dando lugar a la versión 2.0 de DaVinci (Bertossi) [28]. En 2016 comenzó la génesis de un libro digital que nucleara en una única pieza de software el simulador DaVinci y el material de cátedra (Bertossi y Casco) [29], cuya programación se completó hacia fines de 2017. Durante el primer semestre de 2018 se ejecutó la etapa de revisión y, actualmente, se está gestionando su publicación en edUTecNe, editorial de la UTN, para uso libre y gratuito de la comunidad universitaria.

Una vez editado, pretendemos utilizarlo en las aulas y realizar mediciones de los aprendizajes para analizar si el uso de este material interactivo es superador, produce algún efecto no deseado o inesperado en el proceso de enseñanza/aprendizaje, no tiene efectos significativos en él y/o es complementario de los recursos didácticos tradicionales. Según el *feedback* obtenido aspiramos a mejorar y/o revisar los puntos débiles de diseño y de utilización en el aula e incorporar nuevas actividades interactivas que hubiéremos advertido necesarias al realizar las prácticas con los estudiantes.

Agradecimientos. A nuestras familias, que son el sostén circunspecto de nuestra labor docente.
A nuestros alumnos, que nos invitan día a día con sus interrogantes y manifestaciones a incursionar en nuevas estrategias y materiales para lograr el tan preciado aprendizaje significativo.
Y, finalmente, y no por ello menos importante, a la UTN, que a través del otorgamiento de becas de investigación y el financiamiento de proyectos I+D+i, hace posible la concreción de ideas de docentes que procuran la mejora continua en la educación superior, particularmente en la enseñanza de la Matemática.

Referencias

1. Pastorelli, S. Ecuaciones diferenciales. *Campus Virtual UTN-FRSF.* https://campusvirtual.frsf.utn.edu.ar/course/view.php?id=3261. (2011). Accedido el 18 de junio de 2018.
2. Loyola, M. Y en el aula, ¿qué hacemos? Estrategias (posibles y realizables). Cabello, R.; Morales, S. (Ed.): *Enseñar con tecnologías: nuevas miradas en la formación docente*. Prometeo Libros, pp. 109-130 (2011).
3. Veletsianos, G. A definition of emerging technologies for education. *Emerging Technologies in Distance Education.* Athabasca University Press, pp. 3-22 (2010).
4. Abreu León, J. Alcanzando el conocimiento: Entrevista al Dr. En Matemáticas José Luis Abreu. *YouTube*. https://www.youtube.com/watch?v=GxaeOTKOFyI (2012). Accedido el 18 de junio de 2018.
5. Cabero, J.; Llorente, M. Las TIC y la Educación Ambiental. *Revista Latinoamericana de Tecnología Educativa,* Vol. 4, No. 2, pp. 9-26 (2005).
6. Jiménez Galán, Y.; González Ramírez, M.; Hernández Jaime, J. Modelo 360° para la evaluación por competencias (enseñanza/aprendizaje). *Innovación Educativa,* Vol. 10, No. 53, pp. 43-53 (2010).
7. Gertrudix Barrio, M.; Álvarez García, S.; Galisteo, A.; Gálvez de la Cuesta, Mª.; Gértrudix Barrio, F. Acciones de diseño y desarrollo de objetos educativos digitales: programas institucionales. *Revista de Universidad y Sociedad del Conocimiento,* Vol. 4, No. 1, pp. 14-25 (2007).
8. CSU UTN. Ordenanza 1030. *Secretaría del Consejo Superior de la UTN.* http://csu.rec.utn.edu.ar/docs/php/salida.php3?tipo=ORD&numero=1030&anio=0&facultad=CSU&pagina=1Accedido el 18 de Junio de 2018.
9. CSU UTN. Ordenanza 1026. *Secretaría del Consejo Superior de la UTN.* http://csu.rec.utn.edu.ar/docs/php/salida.php3?tipo=ORD&numero=1026&anio=0&facultad=CSU&pagina=1Accedido el 18 de Junio de 2018.
10. CSU UTN. Ordenanza 1114. *Secretaría del Consejo Superior de la UTN.* http://csu.rec.utn.edu.ar/docs/php/salida.php3?tipo=ORD&numero=1114&anio=0&facultad=CSU&pagina=1Accedido el 18 de Junio de 2018.
11. CSU UTN. Ordenanza 1027. *Secretaría del Consejo Superior de la UTN.* http://csu.rec.utn.edu.ar/docs/php/salida.php3?tipo=ORD&numero=1027&anio=0&facultad=CSU&pagina=1Accedido el 18 de Junio de 2018.
12. CSU UTN. Ordenanza 1150. *Secretaría del Consejo Superior de la UTN.* http://csu.rec.utn.edu.ar/docs/php/salida.php3?tipo=ORD&numero=1150&anio=0&facultad=CSU&pagina=1Accedido el 18 de Junio de 2018.
13. Laurillard, D. (2002). Rethinking University Teaching. A conversational framework for the effective use of learning technologies. Londres: Routledge.
14. Siemens, J. Conociendo el conocimiento. *Nodos ele*. http://www.nodosele.com/editorial/. (2010). Accedido el 18 de Junio de 2018
15. Manes, F; Niro, M. *El cerebro del futuro.* Planeta (2018).
16. Tardif, M. *La Condition Enseignante au Quebec du XIXe au XXIe Siecle: une H.* Presses Université Laval (2013).
17. Casco, E.; Giménez Uribe, A.; Llorens, R.; Rodríguez, Mª. El currículum de la carrera Ingeniería Industrial UTN, su relación con los modelos curriculares y su evidencia a través de los proyectos finales de carrera. *VIIIº Congreso Argentino de Ingeniería Industrial.* http://www.edutecne.utn.edu.ar/coini_2015/trabajos/F001_COINI2015.pdf. (2015). Accedido el 18 de junio de 2018.
18. Fernández Bravo, J. Avatares y estereotipos sobre la enseñanza de los algoritmos en matemáticas. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, No. 4, pp. 31-46 (2005)
19. Bertossi, V. DaVinci 2.0. *RIA de la UTN.* http://ria.utn.edu.ar/handle/123456789/1401. (2015). Accedido el 18 de junio de 2018.
20. Abreu León J.; Oliveró Serrat, M.; Escamilla González, O.; Espinosa Longi, J. Campos eléctricos en conductores. *Red Educativa Digital Descartes.* http://proyectodescartes.org/Un_100/materiales_didacticos/_Un_092_CamposElectricosConductores/index.html. (2014). Accedido el 18 de junio de 2018.

21. Ripoll Mira, E.; García Cebrian, M. Calculadora Descartes. *Red Educativa Digital Descartes.* http://proyectodescartes.org/calculadora/index.htm. Accedido el 18 de junio de 2018.
22. Bress, E.; Gruber, J. El Efecto Mariposa. *YouTube.* https://youtu.be/g6xGK0JBohc. (2004). Accedido el 18 de junio de 2018.
23. Bradbury, R. El ruido de un trueno. *Ciudad Seva.* https://ciudadseva.com/texto/el-ruido-de-un-trueno. (s. f.). Accedido el 18 de junio de 2018.
24. Rodríguez, M. El ruido de un trueno – Cuentos y relatos. *Ivoox.* http://ar.ivoox.com/es/1846181. (2013). Accedido el 18 de junio de 2018.
25. Asimov, I. El fin de la eternidad. *Google Docs.* https://docs.google.com/file/d/0B9WnQ0hW1Bo3WTlwd01RZ0RzSDA/edit. (s. f.). Accedido el 18 de junio de 2018.
26. Arizmendi, D. El Fin de la eternidad – Audio libro. *YouTube.* https://www.youtube.com/watch?v=ZOcob3LoHSU&list=PLysnhHs16jquZZPfCxnI1b0hHRGA1K33z&index=1. (2017). Accedido el 18 de junio de 2018.
27. Bertossi, V. Desarrollo de un software educativo para la comprensión de sistemas lineales de ecuaciones diferenciales de primer orden. (Tesis de grado). *RIA de la UTN.* http://ria.utn.edu.ar/handle/123456789/1400. (2014). Accedido el 18 de junio de 2018.
28. Bertossi, V. DaVinci 2.0. *RIA de la UTN.* http://ria.utn.edu.ar/handle/123456789/1401. (2015). Accedido el 18 de junio de 2018.
29. Bertossi, V.; Casco, E. Integración de Objetos Digitales Educativos Existentes en un Nuevo Material Didáctico con Entidad Propia. *RIA de la UTN.* http://ria.utn.edu.ar/handle/123456789/2900. (2017). Accedido el 18 de junio de 2018.

Eje 5

Investigación Educativa

Habilidades Matemáticas en Torno al Concepto de Derivada: Resultados de una Investigación.

Betina Williner[1], Scorzo Roxana[1], Favieri Adriana[1]
[1]Departamento de Ingeniería, Universidad Nacional de La Matanza
Florencio Varela 1903, San Justo, Provincia de Buenos Aires, Argentina
{bwilliner, rscorzo. afavieri}@unlam.edu.ar

Resumen. El presente artículo reporta algunos de los resultados sobre el desempeño de los alumnos de ingeniería de la Universidad Nacional de la Matanza (UNLaM) en términos de las habilidades matemáticas definidas en torno al concepto de derivada. Esto forma parte de un proyecto de investigación cuyo objetivo general fue explorar el desarrollo de habilidades matemáticas ligadas al concepto de derivada cuando los alumnos resuelven actividades basadas en ideas de variación. El estudio surgió debido a las dificultades que tienen los alumnos para comprender dicho concepto, cuya importancia es trascendental en la formación de un ingeniero. Presentamos algunas actividades, el análisis preliminar de habilidades correspondiente, los resultados obtenidos en la experiencia y las conclusiones a las que arribamos.

Palabras Clave: Derivada, Habilidades matemáticas, Diseño de actividades.

1 Introducción

En este artículo queremos mostrar algunos resultados de una investigación que realizamos en el Departamento de Ingeniería e Investigaciones Tecnológicas (DIIT) de la Universidad Nacional de La Matanza (UNLaM) sobre el desarrollo de habilidades matemáticas y el aprendizaje del concepto de derivada. La misma tuvo como objetivo general explorar el desarrollo de habilidades matemáticas ligadas al concepto de derivada cuando los alumnos resuelven actividades especialmente diseñadas que involucran diversas situaciones de variación.

En carreras de ingeniería la comprensión del concepto de derivada se hace indispensable. Es la herramienta matemática que permite estudiar funciones, resolver problemas de optimización, realizar aproximaciones, entre otros. Gran parte de la comunidad de educadores matemáticos pone su atención en la falta de comprensión por parte de los alumnos de dicho concepto, entre ellos elegimos a Cantoral y Mirón [1] que expresan:

> (…) la enseñanza habitual del análisis matemático logra que los estudiantes deriven, integren, calculen límites elementales sin que sean capaces de asignar un sentido más amplio a las nociones involucradas en su comprensión. De modo que aun siendo capaces de derivar una función no puedan reconocer en un cierto problema la necesidad de una derivación (pp. 269-270).

Por otro lado, nuestros alumnos, futuros ingenieros deben aplicar el conocimiento a la resolución de problemas, deben saber "hacer". Tienen que adquirir habilidades que los ayuden a no proceder en forma mecánica, que los auxilien a razonar, evaluar, deducir en matemática para, de esta forma, lograr adaptarse a distintas situaciones. Las habilidades matemáticas definidas como las acciones o tareas orientadas al logro de un objetivo donde la matemática está involucrada, permiten desplegar estrategias para resolver en forma autónoma diversos problemas, desde los más simples en la vida como estudiante, hasta los más complejos como profesional.

En nuestro estudio definimos habilidades matemáticas ligadas al concepto de derivada que pensamos promueven la construcción adecuada del mismo. Diseñamos una secuencia de actividades para promover el desarrollo de dichas habilidades basada en situaciones de variación y la llevamos al aula en tres comisiones de la asignatura Análisis Matemático I del DIIT.

Presentamos a continuación los resultados que obtuvimos en cuanto al desempeño de los alumnos en término de las habilidades definidas y las conclusiones a las que arribamos.

2 Marco teórico. Habilidades matemáticas

Respecto a la definición de habilidad, varios autores ([2], [3], [4], [5]), hablan de procedimientos o habilidades como los modos de actuación, de un saber hacer o de contenidos procedimentales. Nosotros definimos procedimiento a la acción o tarea que debemos realizar para lograr un objetivo o fin en el cual la matemática está involucrada. En tanto que una habilidad matemática es la facultad personal de efectuar el procedimiento eficientemente, es decir, la capacidad de realizar acciones correctamente en relación con el logro del objetivo planteado.

En el año de 1956, Benjamín Bloom, desarrolló su taxonomía de Objetivos Educativos, que sostiene que el proceso de aprendizaje está relacionado con tres dominios psicológicos: el cognitivo, el afectivo y el psicomotor. Lorin Anderson revisó dicha taxonomía y publicó, en el año 2001, la Taxonomía Revisada de Bloom, que como novedad incorpora el uso de verbos en lugar de sustantivos para cada categoría. Las categorías incluyen las habilidades recordar, comprender, aplicar, analizar, evaluar y crear [6].

Delgado Rubí [3] realiza una clasificación de las habilidades matemáticas, a saber:

- Habilidades conceptuales: aquellas que operan directamente con los conceptos (identificar, fundamentar, comparar, demostrar)
- Habilidades traductoras: aquellas que permiten pasar de un dominio a otro del conocimiento (interpretar, modelar, recodificar)
- Habilidades operativas: funcionan generalmente como auxiliares de otras más complejas y están relacionadas con la ejecución en el plano material o verbal (graficar, algoritmizar, aproximar, optimizar, calcular).
- Habilidades heurísticas: aquellas que emplean recursos heurísticos y que están presentes en un pensamiento reflexivo, estructurado y creativo (resolver, analizar, explorar)
- Habilidades metacognitivas: las que son necesarias para la adquisición, empleo y control del conocimiento y demás habilidades cognitivas (Planificar, Predecir, Verificar, Comprobar, Controlar).

3 El contexto

El contexto de la investigación es la asignatura Análisis Matemático I del DIIT de la UNLaM, la cual posee un programa tradicional de Cálculo diferencial e integral en una variable y una cursada cuatrimestral con carga horaria de 8 horas reloj por semana. Empleamos una modalidad de enseñanza que combina clases tradicionales expositivas-dialogadas con clases bajo modalidad taller donde los alumnos trabajan con actividades en equipos de dos personas. Estas actividades se basan en los temas fundamentales de la materia: funciones, límite, derivada, problemas de optimización, ecuaciones diferenciales e integrales definidas. Las mismas involucran modelos matemáticos simples (movimiento de una partícula, crecimiento de una población, enfriamiento de un cuerpo, etc.) y están presentadas en distintos registros de representación. Este espacio es el campo propicio para que el alumno desarrolle habilidades matemáticas vinculadas a los conceptos matemáticos propios del Cálculo.

4 Metodología

Con base en la bibliografía, en investigaciones anteriores ([7], [8], [9], [10]) y teniendo en cuenta que la derivada se basa en las tres nociones fundamentales que brinda Dolores [7] en su propuesta de enseñanza:

- variación
- rapidez promedio de variación
- rapidez instantánea de variación,

definimos las habilidades matemáticas que consideramos son necesarias promover para el aprendizaje de dicho concepto. Estas son:

- Identificar variable independiente y dependiente, dominio e imagen en funciones y en contexto (H1).
- Identificar y diferenciar las tres nociones fundamentales definidas anteriormente (H2).
- Calcular razones de cambio promedio e instantáneas por medios numéricos y analíticos (H3).
- Explicar el significado en diferentes contextos de las tres nociones fundamentales (H4).
- Aplicar el concepto en la solución de problemas (H5).

Diseñamos una secuencia de actividades involucrando diversos contextos y sistemas de representación con el objetivo de promover el desarrollo de las habilidades anteriormente definidas. La secuencia estuvo formada por tres actividades: una sobre funciones, una sobre límite y la última sobre derivada. A su vez cada una de estas actividades incluyó tres tareas cuyos modelos se mantuvieron a lo largo de toda la experiencia.

- Tarea 1: basada en el modelo geométrico sobre la recta tangente a una función en un punto.
- Tarea 2: basada en el modelo de movimiento rectilíneo.
- Tarea 3: basada en el modelo de volumen de un gas conocida la presión a temperatura constante.

En la primera actividad introducimos el concepto de cambio de una variable o variación y el de razón de cambio, dándole a este último una interpretación dentro de cada contexto. En el primero como pendiente de la recta secante, en el segundo como velocidad media y en el tercero como razón de cambio promedio del volumen del gas respecto a la presión del mismo. La segunda actividad tuvo como propósito la construcción de la razón de cambio instantánea a través del proceso de límite en los tres modelos. Mediante consignas guiadas y con diversas explicaciones, solicitamos el paso al límite de la razón de cambio promedio y la definimos como razón de cambio instantánea. Todo lo trabajado en esta actividad fue retomado por los docentes en la clase siguiente donde se definió el concepto de derivada haciendo hincapié en la interpretación del mismo en los tres modelos. Por último, el tercer grupo de tareas tuvo como objetivo aplicar el concepto de derivada a diversas situaciones.

Paso seguido de elaborar la secuencia de actividades realizamos un análisis preliminar de las habilidades matemáticas que estas promueven. Este análisis lo volcamos en tablas, de las que mostramos en apartados siguientes la correspondientes al modelo del volumen de un gas.

Efectuamos la experiencia en tres cursos del turno mañana de la asignatura, los que estaban a cargo de las docentes que suscribimos este artículo. Los alumnos trabajaron en equipos de dos personas bajo modalidad taller. El total de equipos entre las tres comisiones fue de 89 (178 alumnos). Tuvimos tres sesiones de trabajo (una para cada actividad) con una duración aproximada de dos horas cada una.

Analizamos las producciones escritas de los alumnos teniendo en cuenta las habilidades matemáticas definidas y el análisis preliminar efectuado.

5 La propuesta didáctica y su análisis preliminar

De las tres actividades elegimos mostrar las tareas que se refieren al contexto del volumen de un gas conociendo la presión del mismo a temperatura constante. Presentamos cada tarea y su análisis preliminar de habilidades mediante una tabla donde indicamos el ítem de la tarea al que hacemos referencia, la habilidad correspondiente y cómo realizamos la valoración de esa habilidad en las producciones escritas de los alumnos.

5.1. Tarea en la actividad de funciones

Tarea 3

Con el objetivo de analizar la variación del volumen de cierto gas al variar su presión se realiza con dicho gas y, a temperatura constante, una experiencia en la que se obtiene la siguiente tabla de valores.

P(atm)	1	4	7	10
V(lts)	30.00	7.45	4.3	3.00

a) Indicar dominio e imagen en el contexto del problema.
b) ¿Cuál es la variable independiente? ¿Cuál la dependiente?
c) Graficar los puntos de la tabla y unirlos.
d) Calcular los cambios ΔV del volumen para intervalos de tres atmósferas.
e) Calcular el cociente $\frac{\Delta V}{\Delta P}$ a intervalos de tres atmósferas.
f) Explicar con tus palabras qué significado tiene ese cociente bajo el contexto del problema.

Fig.1. Tarea 3 correspondiente a la actividad de Funciones.

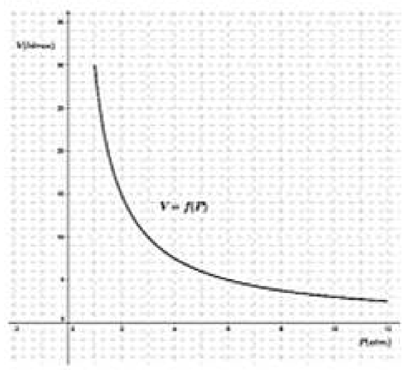
Tabla 1. Análisis preliminar de habilidades de la tarea 3 de la actividad de funciones

Habilidad	Ítems en la tarea	Bien	Regular	Mal
Identificar variable independiente y dependiente, dominio e imagen en funciones y en diferentes contextos (H1)	a)	Identifica correctamente dominio e imagen	Identifica correctamente dominio o imagen	No identifica ni dominio ni imagen
	b)	Identifica correctamente las dos variables con sus unidades.	Identifica correctamente una sola de las variables u olvida unidades.	No identifica ninguna de las dos variables o las confunde.
Calcular la variación de cada variable (H3)	d)	Calcula correctamente las variaciones de ambas variables.	Calcula correctamente una sola de las variaciones de las variables.	Lo hace en forma incorrecta.
Calcular razones de cambio promedio por medios numéricos y analíticos (H3)	e)	Calcula correctamente el cociente de incrementos.	Expresa correctamente el cociente, pero se ven errores de cálculo.	No calcula correctamente el cociente de incrementos.
Explicar el significado de razón de cambio promedio en funciones y en diferentes contextos de la razón de cambio promedio (H4)	f)	Explica correctamente el significado del cociente en el contexto del problema.	Explica de manera regular el significado del cociente en el contexto del problema.	Explica incorrectamente el significado del cociente en el contexto del problema.

5.2. Tarea en la actividad de Límite funcional

Tarea 3

A temperatura constante el volumen (V, en litros) de un gas es inversamente proporcional a la presión de ese gas (P, en atmósferas). En una experiencia se obtuvieron los datos que se graficaron de la siguiente manera:



a) Calcular los cambios promedios de volumen respecto a la presión para los siguientes intervalos.

Recordar $rcp = \frac{\Delta V}{\Delta P}$.

Intervalo [6, P]					tendencia	Intervalo [P,6]			
	[5.7,6]	[5.8,6]	[5.9,6]	→		←	[6,6.1]	[6,6.2]	[6,6.3]
rcp									

b) ¿Qué indica el signo de cada cambio promedio?

c) Explicar el significado de los cálculos recién realizados

d) Se define como razón de cambio instantánea en un valor P = a, como el límite de las razones de cambio promedio cuando el intervalo tiene longitud tendiendo a cero; es decir, $rci = \lim_{P \to 6} \frac{\Delta V}{\Delta P}$. Calcularla.

e) Explicar el significado del límite recién calculado.

Fig.2. Tarea 3 correspondiente a la actividad de límite funcional

Tabla 2. Análisis preliminar de habilidades de la tarea 3 de la actividad de límite funcional

Habilidad	Ítems en la tarea	Bien	Regular	Mal
Calcular razones de cambio promedio por medios numéricos y analíticos (H3))	a)	Calcula correctamente los cambios promedios de volumen respecto a la presión en cada intervalo.	Calcula correctamente algunos cambios promedios de volumen respecto a la presión en cada intervalo.	Calcula incorrectamente los cambios promedios de volumen respecto a la presión en cada intervalo.
Explicar el significado de razón de cambio promedio en funciones y en diferentes contextos de la razón de cambio promedio (H4)	c)	Explica correctamente el significado del cociente en el contexto del problema.	Explica de manera regular el significado del cociente en el contexto del problema.	Explica incorrectamente el significado del cociente en el contexto del problema.
Calcular razones de cambio instantánea por medios numéricos y analíticos (H3)	d)	Calcula correctamente la razón de cambio instantánea con sus unidades correspondientes.	Calcula de manera regular la razón de cambio instantánea u olvida sus unidades.	Calcula incorrectamente la razón de cambio instantánea.
Explicar el significado de razón de cambio instantánea en funciones y en diferentes contextos de la razón de cambio promedio (H4)	e)	Explica correctamente el significado del cálculo recién realizado.	Explica de manera regular el significado del cálculo recién realizado.	Explica incorrectamente el significado del cálculo recién realizado.

5.3. Actividad de Derivada

Tarea 3: la siguiente fórmula relaciona el volumen V (en litros) de un cierto gas, a temperatura constante, en función de la presión P (en atmósferas): $f:[1,12]\to(0,30)/V=f(P)=\dfrac{30}{P}$

a) Calcular el cambio instantáneo o tasa de variación instantánea del volumen respecto a la presión para cualquier valor de P mediante la definición y luego utilizando reglas de derivación, comparar los resultados.

b) Hallar el valor de P para el cual la razón de cambio instantánea es igual a la razón de cambio promedio en el intervalo [2,6].

c) Interpretar gráficamente la situación anterior.

Fig. 3. Tarea 3 correspondiente a la actividad de derivada

Tabla 3. Análisis preliminar de habilidades de la tarea 3 de la actividad de derivada

Habilidad	Ítems en la tarea	Bien	Regular	Mal
Calcular la razón de cambio instantánea(H3)	a)	Identifica la razón de cambio instantánea con la derivada de la función y la calcula bien de las dos maneras.	Identifica la razón de cambio instantánea con la derivada, pero se equivoca o por definición o por regla de derivación.	No identifica la razón de cambio instantánea como la derivada de la función en el punto.
Calcular razón de cambio promedio en registro analítico (H3)	b)	Calcula bien la razón de cambio promedio en el intervalo dado.	Plantea bien la razón de cambio promedio, pero hace una cuenta mal.	Plantea mal la razón de cambio promedio en el intervalo dado
Aplicar el concepto de derivada en diferentes contextos (H5)	b)	Iguala la función derivada obtenida a la razón de cambio promedio calculada y despeja P.	Iguala la función derivada obtenida a la razón de cambio calculada y no despeja o despeja mal.	No iguala la razón de cambio promedio obtenida con la derivada.
Explicar en forma verbal lo que significa la razón de cambio instantánea y/o la razón de cambio promedio (H4)	c)	Explica correctamente el significado geométrico de los cálculos realizados.	Explica de manera regular el significado geométrico de los cálculos realizados	Explica incorrectamente el significado de los cálculos realizados.

6 Resultados y discusión

En los apartados siguientes mostramos los resultados de desempeño (en frecuencias relativas) en términos de las habilidades estudiadas y de acuerdo con el análisis preliminar presentado.

6.1. Tarea en la actividad de funciones

	H1a)	H1b)	H3	H3	H4
B	89 %	65%	68%	56%	23%
R	3%	32%	8%	20%	43%
M	5%	0%	8%	8%	34%
No	3%	3%	16%	16%	0%

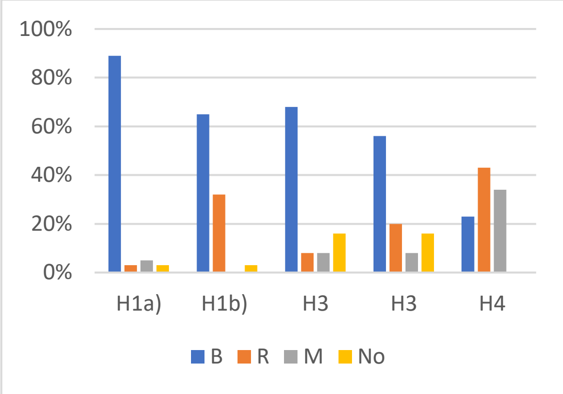


Fig.4. Tabla y gráfico de resultados de desempeño en la actividad de funciones

La mayoría de los equipos (89%) identificó el dominio e imagen en el contexto del problema. El porcentaje de buen desempeño en la identificación de las variables es un poco menor debido a que consideramos respuestas regulares aquellas que omitían las unidades de cada una o brindaban expresiones como “la variable independiente es P”, en vez de “la variable independiente es la presión y se simboliza con P”.

Más de la mitad de los equipos calculó bien los cambios de la variable dependiente y la razón de cambio promedio. Algunos errores fueron cambiar el orden entre estado final e inicial para que el resultado fuera positivo u omitir unidades de los mismos. La habilidad en la que vislumbramos desempeño menos favorable fue la de explicar bajo el contexto del problema qué significaba la razón de cambio promedio calculadas. Sólo un 23% de los equipos dio respuestas aceptables. Los equipos que obtuvieron un desempeño regular evidenciaron una redacción confusa, sin buen manejo del lenguaje coloquial o hicieron mención al hecho que el resultado era negativo.

6.2. Tarea de actividad de límite

	H3 (rcp)	H4 (rcp)	H3 (rci)	H4 (rci)
B	44%	19%	39%	19%
R	6%	6%	6%	5%
M	17%	33%	17%	34%
No	33%	42%	38%	42%

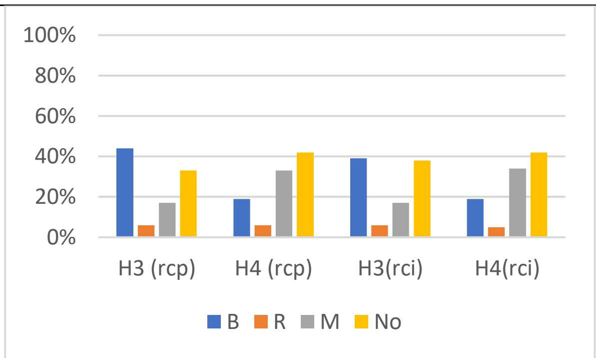


Fig. 5. Tabla y gráfico de resultados de desempeño en la actividad de límite.

Alrededor de un 40% de los equipos pudo calcular en forma correcta la razón de cambio promedio y realizar el paso al límite para hallar la razón de cambio instantánea del volumen respecto a la presión del gas, con las unidades correspondientes. Es notable la cantidad de alumnos que expresaron en forma equivocada o no lo hicieron el significado de estos dos conceptos. Sólo un 19% logró un buen desempeño en cada una de estas habilidades, a pesar de las orientaciones brindadas por los docentes en el momento de la actividad.

6.3. Tarea de la actividad de derivada

	H3(rci)	H3(rcp)	H5	H4
B	39%	44%	25%	6%
R	25%	3%	19%	3%
M	3%	6%	6%	3%
No	33%	47%	50%	88%

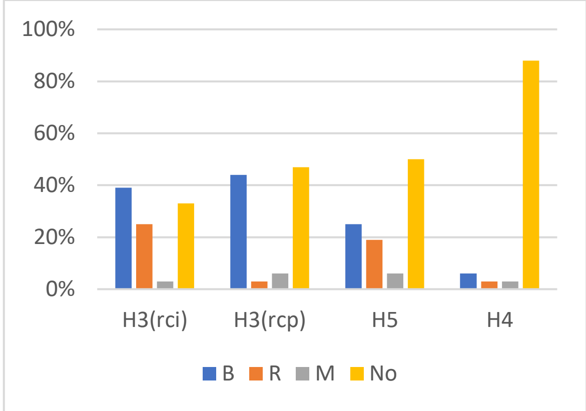


Fig. 6. Tabla y gráfico de resultados de desempeño en la actividad de derivada.

Si bien aproximadamente el 40% de los equipos pudieron calcular bien la razón de cambio promedio e instantánea (similar porcentaje de la tarea anterior), el 25% logró aplicar los conceptos, igualando los resultados y despejando el valor de la presión solicitado. Observemos que sólo el 6% de los equipos fue capaz de explicar el significado geométrico de lo realizado, a pesar de que se solicitaba el gráfico de la situación y de las orientaciones brindadas por el docente en el momento de la experiencia. A pesar de esto, cuando en clase se explicó la interpretación del teorema del valor medio, varios alumnos recordaron esta tarea y la asociaron con lo que se estaba desarrollando en el pizarrón.

7 Conclusiones

El trabajo realizado de indagación bibliográfica y la experiencia de esta y otras investigaciones que realizamos, nos permiten seguir reforzando con evidencia lo difícil que es para el alumno una construcción adecuada del concepto de derivada. A pesar de que los tres conceptos: cambio, razón de cambio promedio y razón de cambio instantánea se trabajaron desde un inicio en las tres tareas en forma simultánea, en el modelo presentado del volumen de un gas conociendo la presión los alumnos no evidenciaron un buen nivel de desarrollo de las habilidades estudiadas.

Con las actividades diseñadas nos propusimos poner al alumno en camino a la construcción del concepto de derivada a fin de que paso a paso logre el aprendizaje del mismo. Cada actividad favorecía el desempeño de las habilidades matemáticas que consideremos son necesarias desarrollar para poder lograr el aprendizaje. Las tareas fueron muy guiadas por diversas razones. En primera instancia porque la construcción del concepto no es simple, requiere del manejo de funciones y del aprendizaje genuino del concepto de límite, que en ciertas ocasiones no se posee. Otra razón es el contexto con el que trabajamos. En general son alumnos ingresantes o transitaron solamente un cuatrimestre en la universidad. Sus conocimientos previos y destrezas matemáticas son pobres, así como también el lenguaje que emplean y la manera en que presentan sus producciones. Agregamos también la cantidad de alumnos por aula (aproximadamente 80), la heterogeneidad de los mismos y el tiempo limitado asignado a cada actividad.

El nivel de desempeño de las habilidades H1, identificar dominio e imagen en contexto, y H3, tanto en el cálculo de la razón de cambio promedio como la razón de cambio instantánea, fueron aceptables, quizás porque solo se requiere un cálculo que a su vez estaba indicado en la consigna.

Las habilidades H4, de explicar en lenguaje verbal el significado de los cálculos realizados, o la H5, de aplicar el concepto de derivada, tuvieron niveles de desempeño muy bajos. Una causa pudo haber sido el tipo de función que usa el modelo, que, si bien era sencilla, las razones de cambio eran negativas. Otra causa pudo haber sido el desconocimiento del fenómeno físico. De todas formas, a los alumnos no les resultó simple "transferir" las nociones fundamentales de variación que habían estudiado en el contexto geométrico y físico a este modelo. Recordemos que los profesores retomaron la segunda actividad (en la que se trabajaron razones de cambio promedio e instantánea en modelo geométrico y físico también) para definir el concepto de derivada. Con esto queremos enfatizar que las habilidades se fueron promoviendo desde varias perspectivas: en la secuencia propiamente dicha, en el trabajo tipo taller cuando fue resuelta y en el pizarrón cuando el docente hizo una síntesis de todo lo trabajado y formalizó la idea.

La mayoría de los alumnos no supo explicar en lenguaje coloquial el significado de los cálculos realizados. En general se expresaron en forma confusa o escribieron cuestiones que no tenían que ver con el significado de las razones de cambio (por ejemplo, "la función decrece"). Esto nos motiva a diseñar actividades que estimulen respuestas, explicaciones y conclusiones en lenguaje coloquial.

De todas formas, las tareas resultaron altamente positivas para introducir el tema derivada en clase, los estudiantes pudieron recuperar y reflexionar acerca de las respuestas dadas en las mismas y de esta forma transformar errores o dificultades en conocimiento.

Otro punto que considerar para futuras investigaciones es pensar la posibilidad de trabajar con diversos modelos, no sólo con el geométrico (pendiente de la recta secante y la recta tangente) y el físico (velocidad media e instantánea), reforzando las nociones fundamentales desde las tareas y desde un debate grupal.

Rescatamos la importancia de diseñar actividades enfocadas en el desarrollo de habilidades matemáticas ya que ordenan el trabajo en clase, el seguimiento del desempeño y la valoración de las mismas en los alumnos.

Referencias

1. Cantoral, R.; Mirón, H.: Sobre el estatus de la noción de derivada: de la epistemología de Joseph Louis Lagrange al diseño de una situación didáctica. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa,* Vol. 3, No. 3, pp. 265-292 (2000).
2. Hernández Fernández, H.: Vigotsky y la estructuración del conocimiento matemático. Experiencia cubana. Hernández Fernández, H.; Delgado Rubí, J.R.; Fernández de Alaíza, B.; Valverde Ramírez, L. & Rodríguez Hung, T. (Eds). *Cuestiones de didáctica de la Matemática.* Serie Educación. Homo Sapiens Ediciones. pp. 33-53. (1998).
3. Delgado Rubí, J.R.: Los procedimientos generales matemáticos. Hernández Fernández, H.; Delgado Rubí, J.R.; Fernández de Alaíza, B.; Valverde Ramírez, L. & Rodríguez Hung, T. (Eds). *Cuestiones de didáctica de la Matemática.* Serie Educación. Homo Sapiens Ediciones, pp. 69-87. (1998).
4. Zabala, A.: Los enfoques didácticos. Coll, C.; Martín, E.; Mauri, T.; Miras, M.; Onrubia, J.; Solé, I. & Zabala, A. (Eds). *El constructivismo en el aula*. Editorial GRAÓ, pp.125-161. (2007).
5. Sánchez, M.: La investigación sobre el desarrollo y la enseñanza de las habilidades del pensamiento. *Revista Electrónica de Investigación Educativa,* Vol. *4,* No 1. http://redie.ens.uabc.mx/vol14no1/contenido-amestoy.html (2002). Accedido el 4 de diciembre de 2009.
6. Churches, A.: Taxonomía de Bloom para la era digital.. http://www.eduteka.org/TaxonomiaBloomDigital.php (2009). Accedido el 1 de febrero de 2012.
7. Dolores, C.: Una propuesta didáctica para la enseñanza de la derivada. Cantoral, R. (Ed). *El futuro del Cálculo Infinitesimal, ICME 8*. Grupo Editorial Iberoamérica, pp. 155-181. (2000).
8. García, M.: *Una situación de aprendizaje para contribuir a la mejora de la comprensión del concepto de derivada*. Tesis de maestría no publicada, Universidad autónoma de Guerrero, Unidad Académica de Matemáticas, Centro de Investigación en Matemática Educativa. (2011).
9. Vrancken, S., Engler, A., Müller, D.: Una propuesta para la introducción del concepto de derivada desde la variación. Análisis de los resultados. *Premisa,* Vol. 10, No. 38*,* pp. 36-46. (2008).
10. Vidal, O.: *Interpretación de la noción de derivada como razón de cambio instantánea en contextos matemáticos.* Tesis de Maestría no publicada, Universidad Nacional de Colombia. (2012).

Factores Endógenos y Exógenos: su Incidencia en el Rendimiento Académico de una Cátedra

Correa Zeballos, M Adriana[1,2], Gallo, Ricardo R[2], Figueroa, Gregorio R[1], Moya, M Adriana[1,2]
[1] Instituto de Matemática, Facultad de Bioquímica, Química y Farmacia, Universidad Nacional de Tucumán
Ayacucho 471
adricorrea@arnet.com.ar, rfigueroa@fbqf.unt.edu.ar, amoya@fbqf.unt.edu.ar,
[2] Departamento Ciencias Básicas, Facultad Regional Tucumán , Universidad Tecnológica Nacional
Rivadavia 1050
rgallo@arnet.com.ar

Resumen. En un trabajo anterior (CAREM-2016), propusimos una metodología para medir el Rendimiento Académico de cualquier cátedra universitaria. En (CIBEM-2017), se formuló otra metodología para determinar los factores endógenos y exógenos que inciden en el mencionado rendimiento y en (CAREM-2018) se analizó la incidencia de los factores endógenos, exclusivamente, en el rendimiento académico de una cátedra. En el presente trabajo analizamos si los factores endógenos y exógenos tienen incidencia en el rendimiento académico de una cátedra particular. Para el caso estudiado se concluye que ninguno de los factores endógenos analizados tiene impacto en el rendimiento académico. En los exógenos, la no regularización de Física I hay que prestarle especial atención. Otro factor que incide en el rendimiento académico es la situación laboral, para los que trabajan 4 o más horas diarias y la combinación de vivir fuera del hogar y débil apoyo económico es otro factor impórtate en el rendimiento académico.

Palabras Clave: Rendimiento Académico, Factores de Deserción, Factores Endógenos, Factores Exógenos.

1 Introducción

En un trabajo anterior (CAREM-2016), realizado por este equipo de investigación, que titulamos “Evaluación del Rendimiento Académico de una Cátedra”, propusimos una metodología para medir este indicador del desempeño de cualquier cátedra universitaria, analizando tres dimensiones; a) Dimensión Rendimiento, en donde consideramos las calificaciones o notas obtenidas en los exámenes; b) Dimensión Eficiencia, en donde contemplamos la forma en que los estudiantes aprueban la materia, c) Dimensión Temporal, en donde analizamos la continuidad o discontinuidad de los estudiantes en el ritmo temporal relativo al año académico. A los fines de mostrar el modo de aplicar la metodología propuesta se realizó la determinación del rendimiento académico de la cátedra de Matemática II de la Bioquímica, Química y Farmacia de la Universidad Nacional de Tucumán, para el año 2015, el que resultó con la calificación final de “bueno”.

Los resultados que se obtienen con la aplicación de la metodología propuesta nada dicen de las variables que condicionan los resultados conseguidos. Por esta razón se avanzó con otro trabajo, del mismo grupo de investigación, que propone una metodología para determinar las factores que inciden en el rendimiento académico de una cátedra, que dio origen a otro trabajo titulado, “Propuestas Metodológicas para la Determinación del Rendimiento Académico y de los Aspectos Didácticos y Socioculturales que Impactan en el Mismo” (CIBEM-2017) y en (CAREM-2018) se analizó la incidencia de los factores endógenos, exclusivamente, en el rendimiento académico de una cátedra. De esta manera se avanzó en conocer, identificar y dar un orden de importancia, a los factores endógenos y exógenos que impactan en el rendimiento académico de una cátedra, con el fin de: i) modificarlos o fortalecerlos según corresponda, y ii) proponer las medidas concretas para producir los cambios que se consideren necesarios. Entendiendo que los factores endógenos son aquellas variables que originan el desgranamiento, la ineficiencia y un bajo rendimiento de los alumnos de una cátedra universitaria, que pueden ser controladas o modificadas por la misma porque son el resultado de sus actividades y los factores exógenos son aquellas variables que impactan en el desgranamiento, la ineficiencia y un bajo rendimiento de los alumnos de una cátedra universitaria, que no pueden ser controlados o modificadas por la misma ya que no son el producto de sus actividades.

Al haber acumulado suficientes datos de las factores endógenos y exógenos, mediante encuestas realizadas a los estudiantes de una cátedra de Análisis Matemático en una carrera de ingeniería de Facultad Regional Tucumán de la UTN, durante los años 2015, 2016 y 2017, para los primeros y 2015 y 2016 para los segundos.

En el presente trabajo analizamos si estos factores han tenido incidencia en el rendimiento académico de la mencionada cátedra en los años propuestos.

2 Objetivo

Evaluar la incidencia de los factores endógenos y exógenos en el rendimiento académico de los estudiantes de las cohortes 2015, 2016 y 2017, cursantes, por primera vez en una cátedra de Análisis Matemático en una carrera de ingeniería que se desarrolla en la Facultad Regional Tucumán de la UTN.

Este objetivo se funda en las necesidades de disponer de una metodología que permita tipificar la población de estudiantes que acceden a una determinada Facultad y de esta manera visibilizar las condiciones socio-económicas, familiares y personales de cada estudiante, con el fin de conocer: i) Los factores endógenos que inciden en el rendimiento de la cátedra para potenciar los positivos y modificar o hacer desaparecer a los negativos y ii) Los factores exógenos que inciden en el rendimiento de la cátedra a los fines de comunicar a las autoridades para su conocimiento y búsqueda de soluciones.

3 Marco Teórico

Como es sabida la evaluación es un tema de gran importancia en las instituciones de educación universitaria y en los últimos años se vio potenciada por los procesos de evaluación y acreditación universitaria implementados por el Ministerio de Educación Nacional. Tanto la institución, los educadores y alumnos son conscientes de las repercusiones del hecho de evaluar y ser evaluado. Esto está íntimamente relacionado con la necesidad de alcanzar determinado nivel de calidad educativa en el nivel superior, de gerenciar adecuadamente los recursos, el tiempo y los esfuerzos para alcanzar un mayor nivel de competencias tanto en el individual como en lo institucional. En particular interesa, siguiendo los conceptos de Barnetson (1999): 1º) qué observar en una cátedra y cómo medir su desempeño. Esto se logra analizando su Rendimiento Académico, a través de sus tres dimensiones; rendimiento, eficiencia y desgranamiento, que para esta instancia tienen sus particularidades.

Entonces se conviene que Rendimiento Académico de una cátedra es el indicador que está constituido por tres dimensiones; rendimiento, eficiencia y desgranamiento, las cuales tienen las siguientes características: a) Dimensión Rendimiento, en donde consideramos las calificaciones o notas obtenidas en los exámenes; b) Dimensión Eficiencia, en donde contemplamos la forma en que los estudiantes aprueban la materia; c) Dimensión Temporal, en donde analizamos la continuidad o discontinuidad de los estudiantes en el ritmo temporal relativo al año académico. Entendemos por continuidad el ritmo normal en los estudios y como discontinuidad el retraso, con respecto al año académico, en el cursado de la materia. 2º) Obviamente este rendimiento académico a nivel de cátedra, tendrá factores endógenos y exógenos que impactan en él. Éstos factores internos y externos a la asignatura pueden ser los mismos más otros agregados de los que se investiguen e identifiquen para el nivel institucional o, simplemente, pueden ser distintos.

Una vez hecho el diagnóstico del Rendimiento Académico de una materia se hará necesario determinar los factores endógenos y exógenos que impactan sobre dicho rendimiento académico y definirlos con la mayor precisión posible para poder actuar sobre los mismos. Es así que, entendemos por: i) Factores endógenos de una cátedra: son aquellas variables que originan el desgranamiento, la ineficiencia y un bajo rendimiento de los alumnos de una cátedra universitaria, que pueden ser controladas o modificadas por la misma porque son el resultado de sus actividades. Algunas de estas variables pueden ser: Tipos de clases, Material didáctico, Didáctica docente, Clases de consulta. Horarios de las clases teóricas, prácticas y de consulta. ii) Factores exógenos de una cátedra: son aquellas variables que originan el desgranamiento, la ineficiencia y un bajo rendimiento de los alumnos de una cátedra universitaria, que no pueden ser controlados o modificadas por la misma ya que no son el producto de sus actividades. Si bien estas variables no pueden ser modificadas por la cátedra, ésta puede realizar las acciones necesarias tendientes a minimizar los efectos negativos o bien para maximizar los efectos positivos de las mismas. Algunas de estas variables pueden ser: Edad, Sexo, Procedencia, Conocimientos previos secundarios, Conocimientos previos universitarios, Esquema vocacional, Desgranamiento en otras cátedras horizontales, Situación laboral, Situación familiar.

4 Metodología

En otros trabajos realizados sobre esta temática y de acuerdo al marco teórico considerado se investigó la forma de evaluación del rendimiento académico de los estudiantes de una cátedra y de los posibles factores endógenos y exógenos que podrían explicarlo. Para poder precisar estos factores se llevaron a cabo dos encuestas, la primera para determinar los endógenos y la segunda los exógenos. Dichas encuestas se aplicaron a la totalidad de alumnos cursantes por primera vez de la asignatura matemática II, cohortes 2015, 2016 y 2017. Los resultados para la cohorte 2015 fueron procesados y publicados en otros trabajos. En esta oportunidad continuaremos con el estudio del rendimiento académico para las cohortes 2016 y 2017.

Recordando los conceptos mencionados en el párrafo anterior se tiene lo siguiente.

4.1. Rendimiento Académico

Se consideró que el Rendimiento Académico de una cátedra está compuesto por tres dimensiones: Rendimiento, Eficiencia y Temporalidad (Desgranamiento). Es así que se propuso para medir cada una de estas dimensiones los siguientes indicadores:

i) Dimensión Rendimiento.

Promedios de notas de exámenes finales de los alumnos de un mismo año de cursado (independientemente de la cohorte a la cual pertenece), incluyendo aprobados y desaprobados, hasta la última mesa de examen correspondiente al año académico en curso. Si no hay alumnos que se presenten a rendir y que hayan cursado en un año dado, la nota será 0 (cero). Para tener un parámetro de evaluación cualitativo de la dimensión rendimiento de una cátedra, vamos a considerar la siguiente escala: **a)** Promedio de 0 a 3: Muy mal rendimiento. **b)** Promedio más de 3 a 4: Mal rendimiento. **c)** Promedio más de 4 a 6: Regular rendimiento. **d)** Promedio más de 6 a 7: Buen rendimiento. **e)** Promedio más de 7 a 9: Muy buen rendimiento. **f)** Promedio más de 9: Excelente rendimiento

ii) Dimensión Eficiencia.

El porcentaje de alumnos que aprueban la materia en el año de cursado, o sea hasta la última mesa del año académico, referidos al número de estudiantes que comenzaron el cursado en ese año, en consecuencia:

$$e = \frac{x}{y}.100\ [\%] \qquad \textbf{(1)}$$

e = Eficiencia

x = Número de alumnos que aprobaron el examen final en el año de cursado

y = Número de alumnos que cursaron en el mismo año que x.

Como parámetro de evaluación cualitativa de esta dimensión se consideró la siguiente escala: a) De 0 al 15 %, Muy Mala. b) De más del 15 % al 25 %, Mala. c) De más del 25 % al 45 %, Regular. d) De más del 45 % al 60 %, Buena. e) De más del 60 % al 90 %, Muy buena. f) De más del 90 %, Excelente.

iii) Dimensión Temporal: Desgranamiento.

Porcentaje de alumnos que quedaron libres, por la causa que fuere, en la materia en un año, referidos al número de estudiantes que comenzaron el cursado en ese año. Es lo que definimos como el desgranamiento anual en la materia. De esta manera será:

$$d = \frac{x}{y}.100\ [\%] \qquad \textbf{(2)}$$

d = Desgranamiento

x = Número de alumnos que quedaron libres en el año

y = Número de alumnos que comenzaron el cursado en el mismo año que x.

También se consideró la siguiente tabla cualitativa de valorización para tener un marco de referencia de calificación del desgranamiento. Es así que, si d resulta: a) de 100% a 70 %, Muy mala; b) de menos del 70 % al 50 %, Mala. c) de menos de 50 % al 25 %, Regular. d) de menos de 25 % al 15 %, Buena; e) de menos de 15 % al 5 %, Muy buena, f) de menos de 5 %, Excelente.

iv) Evaluación del Rendimiento Académico.

Como evaluación global del rendimiento académico la cátedra, se planteó la siguiente técnica. Para cada dimensión del rendimiento se propuso cualitativamente, 6 (seis) categorías posibles clasificadas como: muy mala, mala, regular, buena, muy buena y excelente. A cada una de estas categorías se las cuantificó de la de la siguiente manera: a) si es Muy Mala le corresponde la nota 1, b) si es Mala le corresponde la nota 3, c) si es Regular le corresponde la nota 5, d) si es Buena le corresponde la nota 7, e) si es Muy Buena le corresponde la nota 9, f) si es Excelente le corresponde la nota 10.

Se designó con **ra** al rendimiento académico de una cátedra, **r**: la nota obtenida por el rendimiento, **e**: la nota obtenida por eficiencia, **d:** la nota obtenida por desgranamiento. Entonces el promedio simple de las tres notas se consideró como calificación del rendimiento académico esto es:

$$ra = (r + e + d) / 3 \qquad \textbf{(3)}$$

De esta manera: a) si **ra** resulta menos de 3, al rendimiento lo calificamos como Muy Malo, b) si **ra** resulta entre 3 y menos de 5 como Malo, c) si **ra** resulta ente 5 y menos de 7 como Regular. d) Si **ra** resulta entre 7 y menos 9, como Bueno, e) si **ra** resulta entre 9 y menos de 10 como Muy Bueno, f) si **ra** resulta 10, como Excelente.

4.2. Factores Endógenos y Exógenos

i) Factores Endógenos

Son aquellas variables que originan el desgranamiento, la ineficiencia y un bajo rendimiento de los alumnos de una cátedra universitaria, que pueden ser controladas o modificadas por la misma porque son el resultado de sus actividades. Entre ellos se mencionan: a) Tipos de clases teóricas, b) Tipos de clases prácticas, c) Material didáctico, d) Didáctica docente, e) Clases de consulta, f) Horarios de las clases teóricas, prácticas y de consultas.

ii) Factores Exógenos

Son aquellas variables que impactan en el desgranamiento, la ineficiencia y un bajo rendimiento de los alumnos de una cátedra universitaria, que no pueden ser controlados o modificadas por la misma ya que no son el producto de sus actividades. Las variables consideradas son: a) Edad y sexo, b) Procedencia, c) Conocimientos previos secundarios, d) Conocimientos previos universitarios, e) Elección vocacional, f) Desgranamiento en otras cátedras horizontales, g) Situación laboral y h) Situación familiar.

5 Análisis de los Resultados

5.1 Determinación y Análisis del Rendimiento Académico

Para determinar los indicadores de la calidad académica se consideraron los datos de alumnos de las cohortes 2015 a 2017 proporcionados por la cátedra de Análisis Matemático II y departamento Tic's de la Facultad Regional Tucumán de la UTN. Dicha información se presenta en forma resumida en las siguientes tablas.

Tabla N°1. Datos básicos de alumnos de Análisis Matemático II de la carrera de Ingeniería en Sistemas de Facultad Regional Tucumán de la UTN. Período 2015-201**7.**

Años	Inscriptos	Cursantes	Rindieron Examen Final	Aprobaron Examen Final	Ausentes Examen Final	Libres	No Aprobaron Examen Final
2015	198	172	168	119	107	34	49
2016	234	219	163	114	107	30	49
2017	255	233	179	147	44	34	32

Tabla N°2. Porcentajes en el período 2015-2017

Años	Cursantes vs Inscriptos	Rindieron Examen Final vs Inscriptos	Rindieron Examen Final vs Cursantes	Aprobaron Examen Final vs Cursantes	Ausentes vs Cursantes	Libres vs Cursantes	No Aprobaron Examen Final vs Cursantes
2015	87%	85%	98%	69%	62%	20%	28%
2016	93%	70%	74%	53%	49%	14%	23%
2017	91%	70%	77%	63%	19%	15%	14%

La Tabla N°3 se construyó considerando los promedios de las notas en los exámenes finales en el período diciembre del año considerado a noviembre del año siguiente.

Tabla N°3. Promedios de notas de exámenes finales- Período 2015-2017

Años	Promedio de Notas
2015	5,21

2016	5,19
2017	5,93

Para calcular los indicadores de la calidad académica se emplearon los conceptos explicitados en los apartados 4.1 y 4.2 de este trabajo y los resultados se presentan en la Tabla Nº4.

Tabla Nº4. Indicadores de la calidad académica

Años	Rendimiento (r)	Eficiencia (e)	Desgranamiento (d)	Rendimiento Académico (ra)
2015	5,21= Reg= **5**	69%=MB=**9**	20%=B= **7**	ra= 7 = **B**
2016	5,19= Reg = **5**	53%=B=**7**	14%=MB=**9**	ra= 7 = **B**
2017	5,93= Reg = **5**	63%=MB=**9**	15%=B=**7**	ra= 7 = **B**

Analizando las resultados expresados en las tablas anteriores y para los tres años considerados, la dimensión rendimiento se mantuvo baja en los tres años; la eficiencia prácticamente estable en los tres años y se observa una pequeña mejora en el desgranamiento del año 2017.

También se advierte que el indicador global del rendimiento académico de la cátedra (5ta columna de la Tabla Nº4) se mantuvo en la calificación de bueno es decir estable durante los tres años considerados.

5.2. Determinación y Análisis de los Factores Endógenos.

Del análisis de las encuestas de las cohortes 2016 y 2017 se construyó la tabla Nº5, a la que se le agregó a modo de comparación los resultados ya estudiados de la cohorte 2015.

Tabla Nº5. Factores endógenos según cohortes 2015, 2016 y 2017.

Factores Endógenos		Cohortes		
		2015	2016	2017
Tipo de Clases Teóricas	-Uso de diapositivas -Pizarrón -Medio lógico informático etc.	-98% **MB Y B** -2% **R**	-98% **MB Y B** -2% **R**	-99% **MB Y B** -1% **R**
Tipo de Clases Prácticas	-Participativas -seminarios etc	porcentajes similares anterior	porcentajes similares anterior	porcentajes similares anterior
Material Didáctico	-Textos de teoría y práctica	-98% **MB Y B** -2% **R**	-97% **MB Y B** -3% **R**	-95% **MB Y B** -5% **R**
Didáctica Docente	-Claridad conceptos -Comprensión del tema -Didáctica docente	-99% **MB y B** (78% MB y 21% B) -1% **R**	-98% **MB y B** (82% MB y 16% B) -2% **R**	-99% **MB y B** (83% MB y 16% B) -1% **R**
Clases de Consultas		No se evidencia inconvenientes	No se evidencia inconvenientes	No se evidencia inconvenientes
Horarios de Clases Teóricas y Prácticas		Solicitaron cambio de horarios de comienzo de las clases para los días lunes, después de las 8 hs.	No se evidencia inconvenientes	No se evidencia inconvenientes

Algunas opiniones que se repiten en las encuestas: a) están conformes con la cátedra de Análisis Matemático II en cuanto al trabajo y esfuerzo que realizan todos los docentes para que logren alcanzar con éxitos la aprobación de la asignatura, b) que las otras cátedras deberían trabajar de esta manera; c) se tendrían que desarrollar más ejercicios en la teoría y d) en la práctica; les gusta mucho el uso de pizarrón y menos diapositivas.

5.2. Determinación y Análisis de los Factores Exógenos.
Del análisis de las encuestas de las cohortes 2015 y 2016 se construyó la tabla Nº6.

Tabla Nº6. Factores exógenos según cohortes 2015 y 2016.

Factores Exógenos		**Cohortes** 2015	**Cohortes** 2016
Sexo	Femenino	77%	78%
	Masculino	23%	22%
Procedencia	Menos de 20 Km	41%	45%
	Entre 20 y 200 Km	32%	27%
	Más de 200 Km	27%	28%
Conocimientos Previos Secundarios	Matemática	67%	66%
	Física	64%	40%
	Química	50%	56%
Conocimientos Previos Universitarios	Análisis Matemático I	32% Aprobó	62% Aprobó
		68% Regular	38% Regular
	Física I	35% Aprobó	41% Aprobó
		59% Regular	59% Regular
		6% Recursar	
	Química General	29% Aprobó	35% Aprobó
		67% Regular	65% Regular
		4% Recursar	
Elección Vocacional	Vocación	82%	92%
	Tradición familiar	7%	3%
	Por amigos ó compañeros	1%	1%
	Mejor situación laboral	10%	4%
Desgranamiento en otras cátedras horizontales	Física II	21%	11%
	Sistemas Operativos	34%	8%
Situación Laboral	Trabaja	13%	16%
	No trabaja	87%	84%
Situación Familiar	Padres	64%	61%
	Familiares	12%	14%
	Solos	24%	25%
Soporte Económico	Padres	80%	76%
	Otros familiares	7%	3%
	Becas	6%	10%
	Trabajo	3%	11%

De los encuestados, cabe aclarar que en cuanto al desgranamiento en otras cátedras horizontales en el año 2015, el 21% de los estudiantes no cursa Física II de donde se infiere que deben recursar Física I y el 34% no cursa Sistemas Operativos. Estos resultados deben llamar la atención porque entre el 21 y 34 % de los estudiantes debe volver a cursar Física I u otra materia lo que produce un prematuro desgranamiento que incluso puede afectar el rendimiento académico de la cátedra estudiada

En el año 2016, el 11% de los estudiantes no cursa Física II por lo que deben recursar Física I y el 8% no cursa Sistemas Operativos y se deduce que deben recursar alguna otra materia.

En cuanto a la situación laboral en el año 2015 el 87 % solo estudia y el 13 % restante trabaja y estudia. De los que trabajan el 5 % lo hace entre uno o dos días a la semana, 58 % entre 3 y 5 días y 37 % entre 6 y 7 días. El 32 % hasta 4 horas por día, el 53 % entre 4 y 8 horas y el 16 % restante, más de 8 horas. Dado el tipo de diseño pedagógico de la carrera este 13 % que trabaja y estudia ve muy dificultoso su permanencia en la carrera, en especial aquellos que lo hacen durante 4 o más horas por día. Evidentemente, para estos estudiantes, esta variable es un potencial factor de un bajo rendimiento académico o de rezago y posterior abandono, por lo tanto hay que prestarle mucha atención.

En el año 2016 el 84% solo estudia y el 16% trabaja y estudia. De los que trabajan el 7% lo hace entre uno y dos días de la semana, el 80% entre tres y cinco días y el 13% entre seis y siete días. El 7% hasta 4 horas por día y el 93% entre cuatro y ocho horas.

En cuanto a la situación familiar en el año 2015 el 64 % vive con los padres, un 12 % con familiares y el 24 % restante viven solos en pensiones, casas o departamentos.

El 80 % de los estudiantes son sostenidos económicamente por sus padres, el 3 % solo con su trabajo, el 6 % por los padres más una beca y el 7 % por familiares.

Si se considera que el 36 % de los encuestados vive fuera de su hogar y el 20 % con un débil apoyo en cuanto al recurso económico, esta combinación aparece como un factor importante en cuanto al rendimiento académico, desgranamiento y un potencial abandono de la carrera.

En cuanto a la situación familiar en el año 2016 el 61% vive con los padres, un 14% con familiares y un 25% solos en pensiones, casas o departamentos

El 76% de los estudiantes son sostenidos económicamente por sus padres, el 11% por su trabajo, el 10% por los padres y becas y el 3% lo ayudan familiares.

En este caso, el 39% de los estudiantes vive fuera de su hogar y el 24% con un débil apoyo económico.

6. Conclusiones y trabajos futuros

Por lo expuesto, ninguno de los factores endógenos aparecen como potenciales variables que afecten negativamente en el rendimiento académico de la cátedra estudiada de la Facultad Regional Tucumán de la UTN o que sean factores de desgranamiento y mucho menos de deserción de los estudiantes.

En cuanto a los factores exógenos, la no regularización de Física I aparece como un factor de desgranamiento prematuro a la cual hay que prestarle especial atención. Otro factor que incide en el rendimiento académico es la situación laboral, en especial los que trabajan 4 o más horas diarias y finalmente la combinación de vivir fuera del hogar y débil apoyo de recursos económicos es otro factor impórtate en el rendimiento académico.

Se debe advertir que esta conclusión es válida exclusivamente para la cátedra estudiada en los años considerados. Se tendrá que interesar a las autoridades de la gestión de cada facultad para que se reproduzca este estudio para todas y cada una de las materias que componen la currícula de cada carrera, año a año. De esta manera se pondrán obtener conclusiones generales por carreras y, si es necesario, establecer medidas correctivas, como por ejemplo capacitación docente y toda otra acción que tiendan hacer desaparecer a los factores endógenos como causantes de un bajo rendimiento académico o como factores de desgranamiento y deserción.

Para finalizar, al cierre de esta presentación, el equipo de trabajo se encuentra abocado en la obtención y análisis de las encuestas de los factores exógenos a la cátedra del año 2017, con el fin de tener un diagnóstico causal de estos en el rendimiento académico de la cátedra, lo que dará lugar a una nueva exposición.

Referencias

1. Barnetson, Robert J.: *Key performance indicators in Higher Education*. Alberta, Canadá. Alberta Colleges and Institutes Faculties Association (1999).
2. Celman, S.: *¿Es Posible Mejorar la Evaluación y Transformarla en Herramienta de Conocimiento?* Buenos Aires. Editorial Paidós. (1998)
3. Giménez Rodríguez, J.: *Evaluación en Matemáticas*. Madrid. Editorial Síntesis (1997)

4. Lipsman, M.: *La Innovación en las Propuestas de Evaluación de los Aprendizajes en la Cátedra Universitaria*. Santa Fe. Ediciones UNL. (2004).
5. Giménez Uribe, M.; Samoluk, M.: *Reflexiones Sobre Evaluación Universitaria. Posibilidades de Revisión y Mejora*. Santa Fe. Mat.Didáctico UTN. (2007)
6. Santos Guerra, M. A.: *Evaluación Educativa. Un Proceso de Dialogo, Comprensión y Mejora*. Buenos Aires. Editorial Magisterio del Plata. (1998)
7. Samaja, J.: *Epistemología y Metodología. Elementos para una Teoría de la Investigación Científica*. Buenos Aires. EUDEBA. (1993)
8. Graham, D. Brian E.: *Clinical Biostatistics*. New York. John Wiley & Sons Inc. (1995)
9. Jewsbury, A.; Haefeli, I.: *Análisis de la deserción en universidades públicas Argentinas*. Argentina. Asociación de Administradores Gubernamentales. http://www.ag.org.ar/pon_cong.htm. Accedido el 10 de febrero de 2001

Implementación de una secuencia mediada por las TIC en la asignatura Algebra Lineal desde APOE: Tesis de Maestría en Carreras de Ingeniería.

Podevils Lorena[1], Montenegro Fabiana[2]
[1,2] Facultad de Ingeniería y Ciencias Hídricas de la Universidad Nacional del Litoral
podevilslorena@gmail.com, montenegrofg@gmail.com

Resumen. Este trabajo presenta la descripción y avances de una tesis de maestría que se encuentra en desarrollo en la Facultad de Ciencias Hídricas de la Universidad Nacional del Litoral, titulada 'Implementación de una secuencia mediada por las TIC en la asignatura Algebra Lineal'. Se adoptó la teoría APOE como marco teórico y metodológico con el objeto de esbozar e implementar una secuencia didáctica, mediada por la implementación de las Tecnologías de la Información y la Comunicación que aporte al fortalecimiento del aprendizaje del concepto de Transformación Lineal. Dicha secuencia se llevó a cabo a través de actividades ligadas a applets de Geogebra disponibles en un sitio de Google. Además de permitir una descripción de los mecanismos y las construcciones mentales que los alumnos desarrollan, este trabajo ha permitido pensar en maneras de contribuir a que los estudiantes superen los obstáculos cognitivos que deben enfrentar al intentar esa construcción.

Palabras Clave: TIC, Algebra Lineal, Tesis de maestría, APOE.

1 Introducción

El presente trabajo presenta una breve descripción y avances de una Tesis de Maestría que se encuentra en desarrollo, titulada 'Implementación de una secuencia mediada por las TIC en la asignatura Algebra Lineal'. Las autoras de esta ponencia son respectivamente la autora y la directora de esta tesis y, al mismo tiempo, son docentes de la Cátedra Algebra Lineal de la Facultad de Ingeniería y Ciencias Hídricas (en adelante, FICH) de la Universidad Nacional del Litoral.

La asignatura Álgebra Lineal, aparece en los planes de estudios de todas las carreras de grado -Ingeniería en Informática, en Agrimensura, en Ambiental y en Recursos Hídricos - de la FICH, en el primer cuatrimestre y con una carga semanal de 5hs reloj. El Programa Analítico de esta asignatura comprende los tópicos: espacios vectoriales, espacios con producto interno, transformaciones lineales, valores y vectores propios y diagonalización de matrices. Según el régimen de correlatividades. Para poder cursar esta asignatura, los alumnos deben poseer la condición de alumno regular en 'Matemática Básica', que se cursa durante el primer cuatrimestre del mismo año.

El álgebra lineal es una de las primeras materias de carácter formal a las que se enfrenta un estudiante universitario de ingeniería.

En los últimos veinte años distintos grupos de investigadores en educación matemática han estado trabajando sobre la didáctica del álgebra lineal: un grupo francés integrado, entre otros, por Dorier, Aline Robert, Michele Artigue, Alves Dias; uno canadiense liderado por Anna Sierpinska y un grupo estadounidense conformado por Harel, Dubinsky, etc. Todos los grupos mencionados acuerdan que los conceptos del álgebra lineal son de difícil comprensión debido a su naturaleza epistemológicamente sofisticada y abstracta. No es menos cierto que, gran parte de los conceptos del álgebra lineal, se presentan como definiciones de objetos que, en la mayoría de los casos, no tienen conexión con argumentos geométricos o físicos que motivan la definición.

A continuación, en la sección 2) se presenta la definición de transformación lineal que se adopta en la asignatura. En la sección 3) los lineamientos teóricos sobre los que se apoyó este trabajo. En la sección 4) se describe el diseño y aplicación de los instrumentos de investigación y, finalmente, en la sección 5) se exponen algunas reflexiones sobre la propuesta.

2 Transformación lineal

La definición de transformación lineal en [1] expresa: Sean V y W espacios vectoriales reales. Una transformación lineal T de V en W es una función que asigna a cada vector $\mathbf{v} \in V$ un vector único $T\mathbf{v} \in W$ y que satisface, para cada u y v en V y cada escalar α

$T(u + v) = T(u) + T(v)$
$T(\alpha v) = \alpha T(v)$

En dicha bibliografía se menciona al momento de definir Espacio Vectorial que los escalares que se usarán en todo el texto son números reales.

Esta definición, por su carácter general de referirse a dos espacios vectoriales cualesquiera, se desarrolla en el marco algebraico. Pero para el caso de los espacios vectoriales R^2 y R^3, consideramos que el tratamiento gráfico de las propiedades de linealidad puede ayudar a reforzar el esquema de algunas operaciones con vectores y, al mismo tiempo, aportar a la caracterización de las propiedades gráficas de los objetos involucrados. En consecuencia las actividades propuestas se diseñaron bajo los siguientes supuestos:

1. El registro de representación en el que se inicia el estudio de algún objeto matemático afecta el nivel de comprensión que se puede llegar a obtener de él.
2. Los ambientes dinámicos diseñados con GeoGebra pueden facilitar en los estudiantes la observación y comprobación de las propiedades gráficas mediante la manipulación directa en pantalla, facilitando con ello la conversión grafico-algebraica.

De la población de alumnos de esta asignatura, constituida, según los registros de los últimos años, por aproximadamente 200 alumnos, el trabajo de campo se efectuó con una muestra que corresponde a la comisión donde la tesista es profesora de la práctica.

3 Tesis

3.1. Planteamiento del problema y objetivos

Distintos investigadores, entre los que podemos nombrar a [2], [3], [4], [5],[6], se abocaron al estudio de las transformaciones lineales por ser un tópico central que involucra diversos conceptos importantes del álgebra lineal tales como espacio vectorial, combinación lineal, base, valores y vectores propios. Además las transformaciones lineales juegan también un papel importante en otras áreas de las matemáticas, así como en problemas aplicados a las ciencias físicas, económicas y sociales.

Entre las diversas corrientes de la Didáctica de la Matemática, la presente investigación se centra en la teoría APOE (acrónico de las iniciales de los siguientes construcciones: Acción-Proceso-Objeto-Esquema) ya que brinda elementos adecuados que permiten describir y analizar las construcciones mencionadas y los mecanismos mentales que los estudiantes ponen en juego para construir e interrelacionar conceptos matemáticos.

Con base en la Teoría APOE y considerando los antecedentes en investigaciones reportadas, esta tesis se planificó con el propósito de esbozar, validar e implementar una secuencia didáctica, mediada por la implementación de las Tecnologías de la Información y la Comunicación (TIC), que aporte al fortalecimiento de la enseñanza y aprendizaje del concepto de transformación lineal en la cátedra y facultad ya mencionadas.

3.2 Marco teórico

La propuesta de Piaget sobre el proceso de abstracción reflexiva como la clave de la construcción de los conceptos lógicos-matemáticos, influyó sobre Dubinsky en 1991 en el desarrollo de la teoría de Acción-Proceso-Objeto-Esquema.

La Teoría APOE es un enfoque de la Didáctica de la Matemática que se centra en la manera en que los estudiantes construyen los conceptos a partir de sus estructuras matemáticas previas, las cuales evolucionan conformando otros saberes. De esta manera se propone manifestar las construcciones mentales necesarias para que dicha evolución se produzca.

Según APOE, la construcción del conocimiento matemático pasa por tres etapas básicas: acciones, procesos y objetos. Un estudiante muestra una concepción acción de un determinado concepto matemático si no es capaz de realizar las transformaciones sobre el objeto por sí solo, necesitando estímulos o instrucciones externas que le indiquen paso a paso como llevarlas a cabo. De algún modo el objeto es percibido por el individuo como algo externo. Una acción es por naturaleza, algorítmica. Por ejemplo [5] menciona que un estudiante con una concepción acción de transformación lineal puede determinar la imagen de vectores particulares dada la función y, con ello, considerar que la preservación de las operaciones (suma vectorial y producto por un escalar) para dichos vectores del dominio y algunos escalares implica que se satisfacen las propiedades de linealidad.

Aunque la concepción de acción es muy limitada, las acciones marcan el principio crucial del entendimiento de un concepto. Por lo tanto, el acercamiento pedagógico de la teoría APOE basada en una teoría de aprendizaje comienza con actividades diseñadas para ayudar a los estudiantes a construir acciones ([8]).

Se dice que un estudiante muestra una concepción proceso de un determinado concepto matemático cuando es capaz de reflexionar sobre el mismo, realizando transformaciones pero sin la necesidad de realizar acciones específicas sobre él, es decir, realiza una construcción interna que ejecuta la misma acción, pero ahora no necesariamente dirigida por un estímulo externo. A diferencia de una acción, el individuo percibe el proceso como algo interno, y bajo su control. En el caso de transformaciones lineales, una evidencia de que el estudiante tiene una concepción proceso es que pueda verificar las propiedades de linealidad para elementos genéricos del espacio vectorial dominio o que puede reconocer si es o no una transformación lineal al verificar mentalmente tales propiedades.

Como menciona [9] cuando un individuo reflexiona sobre las operaciones aplicadas a un proceso, toma conciencia del proceso como un todo, realiza aquellas transformaciones (ya sean acciones o procesos) que pueden actuar sobre él, y puede construir de hecho esas transformaciones, entonces está pensando en este proceso como un objeto. Al respecto

En el caso del concepto transformación lineal, al realizar preguntas específicas sobre esta función, como si T es una transformación lineal, ¿es siempre T -1 una transformación lineal?, o al considerar L(U,V) como el conjunto de transformaciones lineales definidas entre los espacios vectoriales U y V, donde cada función g definida entre los espacios vectoriales es una transformación lineal y conforma un vector del espacio vectorial L(U,V), las transformaciones lineales son consideradas como objetos ([4])

El paso por las etapas de acciones, procesos y objetos no es necesariamente lineal, y la concepción de un estudiante puede estar en una etapa en ciertos aspectos de un determinado concepto y en otra para otros.

En la teoría APOE, un esquema se define como la colección de acciones, procesos, objetos y otros esquemas que están vinculados de manera consciente o no en la mente de un individuo en una estructura coherente y que están disponibles para la solución de una situación problemática.

3.3 Ciclo de investigación de APOE

La teoría APOE dispone de un ciclo de investigación compuesto por tres componentes: el análisis teórico, el diseño y aplicación de instrumentos y el análisis y verificación de datos ([10]).

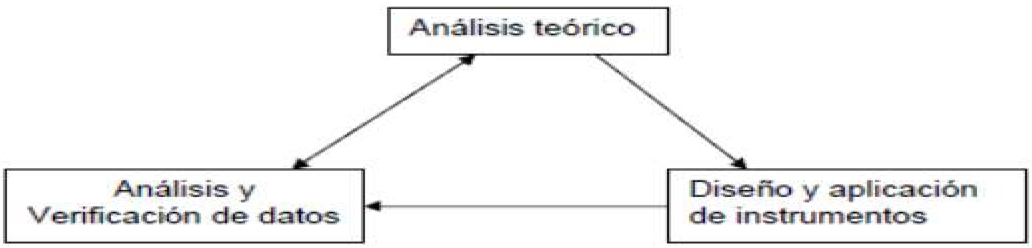


Fig. 1. Ciclo de investigación de la teoría APOE

El objetivo de la primera componente, el análisis teórico, es partir del análisis teórico sobre el concepto matemático teniendo en cuenta los libros de texto y la experiencia de los investigadores para determinar un camino viable de la construcción de un concepto, llamada descomposición genética. Este análisis permite la descripción de las construcciones mentales por las cuales se puede acceder a la construcción adecuada de dicho concepto. No existe una única descomposición genética de un concepto, ya que las mismas dependen de los caminos de construcción del concepto y de las estructuras definidas en los estudiantes.

Para este trabajo de investigación se ha optado por la descomposición genética de transformación lineal presentada en [4], [5]. Por razones de extensión se presentará un esquema de la misma sin explicitar mayores detalles:

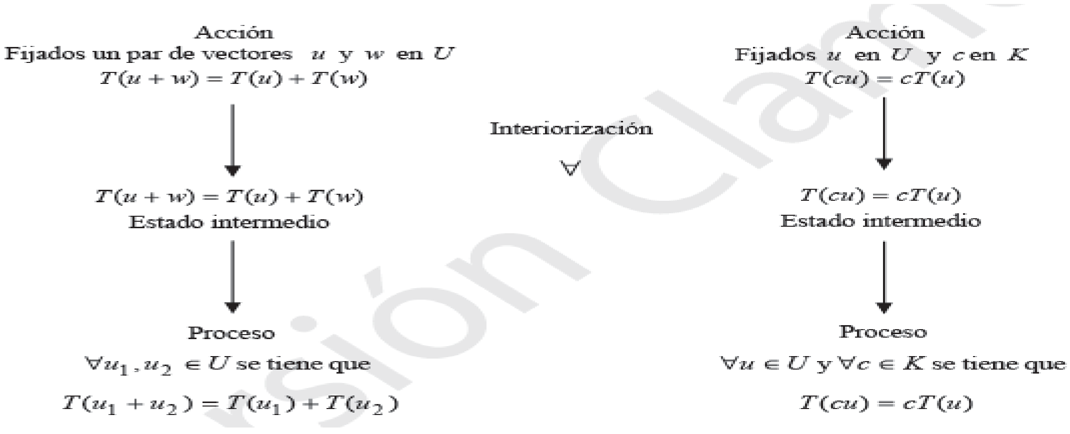


Fig. 2. Construcción del concepto transformación lineal.

Una vez determinada la descomposición genética, esta línea de investigación propone diseñar y aplicar instrumentos que permitan identificar las construcciones mencionadas en tal descomposición. En esta tesis se diseñó una secuencia de actividades con el objetivo de ayudar a los estudiantes a construir acciones, interiorizar a acciones en procesos, coordinar dos o más procesos para generar nuevos procesos y encapsular a los procesos en objetos. Esta fase de la investigación será explicada con mayor detalle en la próxima sección.

Finalmente, el análisis y verificación de datos es una fase transcendental para este marco teórico pues permite comprobar o refutar empíricamente la descomposición genética adoptada. Se ha de responder aquí a cuestiones del tipo: ¿Los estudiantes realizan las construcciones mentales descritas por la descomposición genética? ¿Qué tan bien los estudiantes pudieron comprender el concepto de transformación lineal? Para indagar sobre estas cuestiones en la tesis se utilizaron cuestionarios y entrevistas semi-estructuradas.

Los resultados de un ciclo de investigación pueden ser refinados mediante una nueva aplicación del ciclo de investigación.

4 Diseño y aplicación de instrumentos

La secuencia didáctica planificada se desarrolló a través de actividades que se encontraban ligadas a applets disponibles en https://sites.google.com/view/tl-con-geogebra/transformaciones-lineales.

La primera parte de esta secuencia fue realizada en forma virtual por los alumnos. Consistía en actividades propuestas con la intención de familiarizar a los estudiantes con las representaciones y tratamientos del ambiente dinámico de Geogebra y consolidar las construcciones previas a las de la descomposición genética: tales como la suma de vectores y la multiplicación de un vector por un escalar real. Cada ejercicio, además, contaba con un cuestionario de Google Drive que cada alumno debía responder en su domicilio sin restricción de tiempo para su ejecución.

A modo de ejemplo en la siguiente figura mostramos la actividad de exploración para el tratamiento de la combinación lineal de dos vectores y el cuestionario correspondiente:

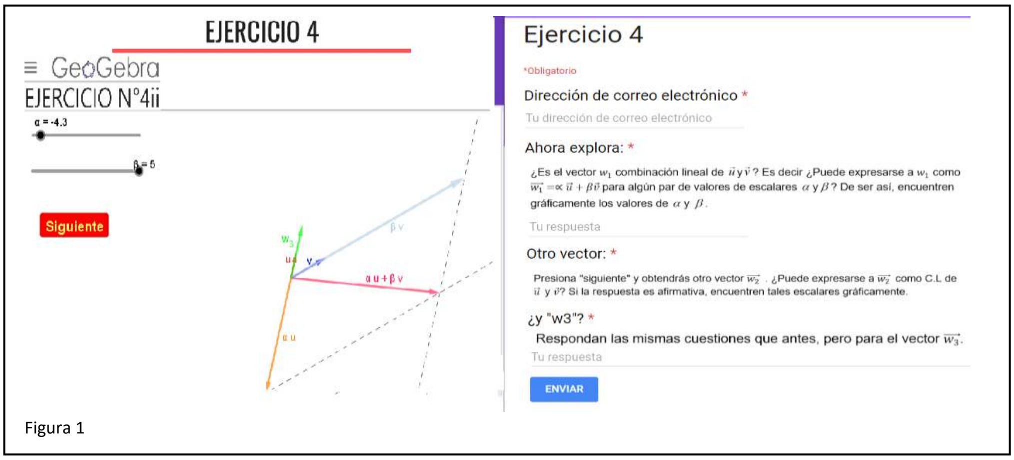


Fig. 3. Ejercicio 4 de la primera actividad de la secuencia

La segunda parte de la secuencia fue desarrollada en el Laboratorio de Informática de la Facultad a la que pertenecemos y se dispuso de 3 horas reloj para su desarrollo. Cada estudiante tenía disponible una computadora y se permitía el trabajo en parejas.

Fig. 4. Trabajo de los alumnos en la segunda actividad.

En este caso todos los applets se referían a transformaciones lineales y no lineales y fueron utilizados en exploración libre para observar, mediante su manipulación, las manifestaciones de las propiedades de linealidad en el registro gráfico y para clasificar las transformaciones del plano.

Fueron especialmente construidos por la tesista con las siguientes características: representan por separado los planos del dominio y contra-dominio (o espacio de llegada) de las transformaciones a manera de dynagraph; se puede manipular un vector del dominio mientras GeoGebra calcula la imagen de tal vector bajo alguna transformación mostrando la imagen en el contra-dominio y opcionalmente mostrando el rastro del vector manipulado así como el de su imagen o la imagen de alguna región del dominio.

[11], citado en [2], define las representaciones tipo dynagraph como “herramientas de visualización de funciones que tienen como características que 1) la variable del dominio puede ser manipulada dinámicamente […] y 2) la variable del dominio y su imagen son representadas cada una en su propio espacio” ([2])

A modo de ejemplo presentamos una imagen de una de las actividades y su análisis a priori En ella se presentaban cuatro transformaciones, que aparecen en la imagen como T1; T2; T3 y T4. La definición algebraica de éstas es inaccesible para los alumnos, para evitar que trabajen en el registro algebraico:

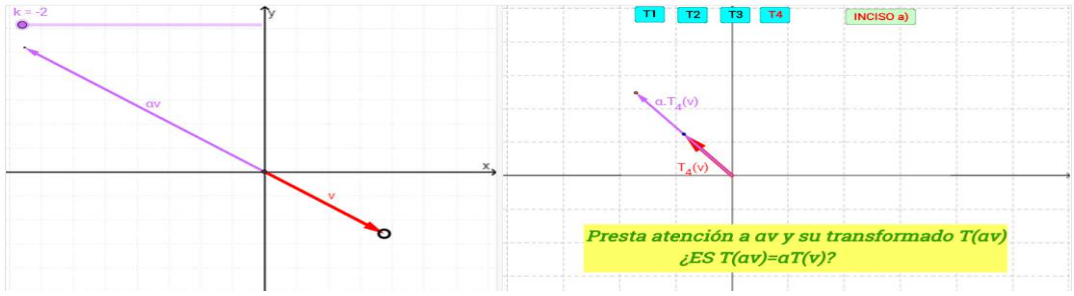


Figura 2

Fig. 5. Ejercicio 1 de la segunda actividad de la secuencia

El ejercicio está relacionado con la operación producto por un escalar, entre un vector del espacio vectorial R^2 y un escalar real. Se pretendía que los alumnos relacionen las transformaciones lineales con aquellas que cumplen las características siguientes:

- Las imágenes de vectores colineales son también vectores colineales.
- La proporción entre las normas de dos vectores colineales es la misma que la de sus imágenes.

Si comprueba la propiedad para casos concretos; es decir, si sólo considera un vector u particular y un real específico α que verifica tal propiedad, se concluirá que posee una concepción acción, pues sólo considera el cumplimiento de la propiedad sobre elementos particulares.

Cuando pueda pensar en el vector u como un representante cualquiera de todos los vectores de R^2 y compare la imagen de αu y α por la imagen de u, estableciendo si se cumplen o no las propiedades de colinealidad y proporcionalidad recién mencionadas, diremos que el alumno tiene una concepción proceso de la propiedad, que le permite pensar que se comprueba para todo elemento de R^2.

Gracias al carácter dinámico de GeoGebra es posible que el alumno manipule un vector como representante de todos los elementos de un espacio vectorial pero, sin embargo, no pueda generalizar el cumplimiento de esta propiedad para todos los elementos de R^2. Diremos, en este caso, que está transitando entre la concepción acción y la concepción proceso de la propiedad pues no puede considerar el cumplimiento de la propiedad mediante el cuantificador universal.

5 Reflexiones

Luego de las actividades descriptas se efectúo un cuestionario a los alumnos participantes. Y, hasta la fecha de presentación de esta ponencia, una entrevista. Los resultados de estos instrumentos de investigación están siendo analizados.

El análisis bibliográfico efectuado nos indica elementos pedagógicos y didácticos sobre cómo el concepto de transformación lineal puede ser presentado en las clases:

- La consideración del conjunto L(U,V), cuyos elementos son transformaciones lineales, propicia en los estudiantes un razonamiento más profundo de sus construcciones, al concebir a las transformaciones lineales como vectores de un espacio vectorial.
- En la evolución del esquema de transformación lineal se considera importante analizar la construcción del esquema de base de un espacio vectorial.
- La descripción de los mecanismos y construcciones mentales evidenciadas por los estudiantes, permiten detectar los conflictos potenciales y efectivos en la construcción del concepto de transformación lineal y, en particular, en un ambiente mediado por las TIC.

Se prevé incorporar los avances de esta tesis al próximo dictado de la asignatura a realizarse en el segundo cuatrimestre del presente año.

REFERENCIAS

[1] Grossman, S. Algebra Lineal. Quinta edición. Mc Graw Hill, pp 467 (2005).
[2] Romero Félix, C. (2016). Aprendizaje de Transformaciones Lineales mediante la coordinación de Representaciones Estáticas y Dinámicas. Tesis para Obtener el Grado de Doctor en Ciencias en la Especialidad de Matemática Educativa.

[3] Molina, G.; Oktaç, A. Concepciones de la Transformación Lineal en Contexto Geométrico. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, Vol. 10, No 2, pp. 241-273 (2007).
[4] Roa-Fuentes, S.; Oktac, A. Construcción de una descomposición genética: Análisis teórico del concepto transformación lineal. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, Vol. 13, No 1, pp. 89-112 (2010).
[5], Roa-Fuentes, S.; Oktac, A. Validación de una descomposición genética de transformación lineal: una análisis refinado por la aplicación del ciclo de investigación de la teoría APOE. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, Vol. 15, No 2, pp. 199-232 (2012).
[6] Romero Félix, C. y Oktac, A. (2015). Representaciones dinámicas como apoyo para la interiorización del concepto de transformación lineal. Ponencia de la XIV Conferencia Iberoamericana de Educación Matemática. XIV CIAEM-IACME, Chiapas, México.
[7] Dubinsky, E. Reflective abstraction in advanced mathematical thinking. Tall, D. Advanced mathematical thinking. Kluwer, pp. 95-126 (1991).
[8] Parraguez, M. (2009), Evolución cognitiva del concepto espacio vectorial. Tesis de doctorado inédita, CICATA-IPN, México.
[9] Asiala, M.; Brown, A.; Devries, D.J.; Dubinsky, E.; Mathews, D.; Thomas, K. A framework for research and curriculum development in undergraduate mathematics education. En J. Kaput, A.H. Schoenfeld, E. Dubinsky (Eds.) Research in collegiate mathematics education II. CBMS issues in mathematics education, Vol. 6, pp. 1–32 (1996).
[10] Goldenberg, P.; Lewis P.; O'Keefe, J. Dynamic representation and the development of an understanding of function. Harel. G; Dubinsky, E. (Eds), The concept of Function: Aspects of Epistemology and Pedagogy. Mathematical Association of America, pp. 235-260 (1992).

Registros Semióticos de Representación en Geometría del Espacio

Ana E. Gruszycki[1], Mónica P. Maras[1], Pedro D. Leguiza[1], Nori Cheein de Auat[2]
[1] Instituto GeoGebra Chaco, Universidad Nacional del Chaco Austral
{ana, pmaras, dleguiza}@uncaus.edu.ar
[2]Universidad Nacional de Santiago del Estero
ncheein@unse.edu.ar

Resumen. El presente artículo es parte de un proyecto de investigación que tiene como objetivo contribuir a la aprehensión conceptual de Geometría del Espacio, mediante la coordinación entre los diferentes registros de representación de un mismo objeto matemático, en alumnos de primer año en la asignatura Álgebra Lineal y Geometría Analítica de las carreras de Ingeniería y Álgebra y Geometría Analítica de la carrera Licenciatura en Biotecnología de la Universidad Nacional del Chaco Austral (UNCAUS) a través del diseño, aplicación y evaluación de secuencias didácticas utilizando el software dinámico GeoGebra. Se realizó el análisis de los registros involucrados en los temas: Plano y Recta en el Espacio y Superficies Cuádricas, observándose un predominio del registro simbólico, en menor porcentaje el registro verbal y ausencia de tratamiento en el registro gráfico. En este marco se propone diseñar secuencias didácticas con actividades que permitan establecer la coordinación entre los diferentes registros de representación y mejorar la aprehensión conceptual de los conceptos involucrados.

Palabras Claves: Geometría Analítica en el Espacio, Teoría de registros de representación semiótica, Geometría Dinámica, Secuencias didácticas.

1 Introducción

Con esta investigación se pretende abordar las actividades de enseñanza y de aprendizaje de los alumnos que cursan el primer año de las carreras de Ingeniería en la Universidad Nacional del Chaco Austral (UNCAUS), considerando como eje temático Geometría Analítica en el Espacio.

La enseñanza, el aprendizaje, la comprensión y divulgación de éste tema, se ve obstaculizada por la incapacidad de abstracción que se necesita para visualizar correctamente los gráficos realizados en el espacio, por este motivo para facilitar el desarrollo del pensamiento espacial se propone incorporar diversas metodologías de enseñanza favoreciendo el aprendizaje y, la teoría de registros de representación semiótica desarrollada por Raymond Duval [1] constituye un marco adecuado para la investigación.

Este autor subraya la importancia que tiene la conversión de las representaciones, en la formación de conceptos matemáticos, destacando: *Para la actividad matemática es esencial poder movilizar varios registros de representación semiótica (figuras, gráficas, simbólica, lengua natural, etc.) en el transcurso de una misma tarea, ya sea escogiendo un registro más bien que otro. E independientemente de toda comodidad de tratamiento, este recurso a varios registros parece una condición necesaria para que los objetos matemáticos no sean confundidos con sus representaciones y para que sean reconocidos en cada una de ellas* [1].

Sobre la complejidad cognitiva de la conversión sostiene que*: Cambiar la representación de objetos o relaciones matemáticas de un sistema semiótico a otro es siempre un salto cognitivo. A diferencia del tratamiento, no hay reglas ni asociaciones básicas, como entre palabras e imágenes en el lenguaje cotidiano, para este tipo de transformación de representación. La conversión no se reduce pues a una codificación* [2].

Pero el manejo de diferentes sistemas de representación y la conversión entre unos y otros no es suficiente para obtener una comprensión integral. Es necesario crear condiciones donde sea posible establecer una coordinación entre los diferentes registros de representación.

En esta búsqueda de nuevas metodologías, la inclusión de tecnologías y el aporte que éstas realizan al desarrollar actividades desde más de un sistema de representación parece ser el camino indicado, por este motivo, se decidió integrar el uso de un software de Geometría Dinámica, se escogió GeoGebra porque es un software gratuito, con un entorno muy sencillo que no requiere grandes conocimientos para utilizarlo y permite observar los gráficos construidos en 3D coordinando los diferentes registros de representación, y de este modo favorecer el aprendizaje.

El presente trabajo, se encuentra en el marco del proyecto de investigación PI 66 Secuencias didácticas con GeoGebra utilizando los registros semióticos de representación en Geometría del Espacio, llevado a cabo en la Universidad Nacional del Chaco Austral.

2 Planteamiento del problema

Analizando las representaciones utilizadas durante la enseñanza de este tema en la asignatura Álgebra Lineal y Geometría Analítica en las carreras de Ingeniería Química, Ingeniería en Alimentos, Ingeniería Industrial, e Ingeniería en Sistemas de Información y Álgebra y Geometría Analítica en la carrera de Licenciatura en Biotecnología, se observa que el enfoque de la misma relega variantes entre los diferentes registros de representación utilizados, dejando de lado la importancia que tiene la conversión de las representaciones en la formación de conceptos matemáticos, lo que supone un obstáculo en el aprendizaje de estos objetos.

Dada la situación contextual presentada, este trabajo propone abordar el siguiente problema de investigación:

La falta de coordinación entre los distintos sistemas de representación dificulta que los alumnos que cursan las carreras de Ingeniería desarrollen el pensamiento espacial.

3 Objetivos

Se propuso como objetivo general: Contribuir a la aprehensión conceptual de Geometría del Espacio, mediante la coordinación entre los diferentes registros de representación de un mismo objeto matemático, en alumnos de primer año de las carreras de la UNACUS a través del diseño, aplicación y evaluación de secuencias didácticas utilizando el software dinámico GeoGebra; y como objetivos específicos: 1) Establecer los elementos teóricos didácticos necesarios, alrededor del estudio de geometría del espacio teniendo en cuenta la coordinación entre los diferentes registros de representación, para la elaboración de un diseño de secuencias didácticas integrando GeoGebra; 2) Aplicar situaciones didácticas que estimulen la actividad cognitiva relacionada a la coordinación entre los diferentes registros de representación y 3) Analizar y evaluar si los estudiantes reconocen el objeto de estudio en diferentes registros de representación así como su habilidad para realizar la conversión entre los mismos a través del rendimiento académico haciendo uso de GeoGebra.

4 Actividades cognitivas para lograr la aprehensión conceptual

Duval en [3] afirma que un sistema semiótico de representación debe permitir tres actividades cognitivas fundamentales para lograr la aprehensión conceptual de un concepto matemático.

4.1 Formación de una representación identificable como una representación de un registro dado

Para conseguir la formación de una representación identificable, se debe llevar a cabo una selección de rasgos y de datos en el contenido por representar; tal selección depende de unidades y reglas de formación que son propias del registro semiótico en el cual se produce la representación. Dicha formación respetará las reglas del registro y éstas asegurarán en primer lugar, las condiciones de identificación y de reconocimiento de la representación y, en segundo lugar, la posibilidad de su utilización para los parámetros.

4.2 Tratamiento de la representación

Se define como tratamiento a la trasformación que se lleva a cabo dentro del mismo registro donde ha sido formada dicha representación. El tratamiento es una transformación interna a un registro. Para este autor, existen reglas de tratamiento propias de cada registro, su naturaleza y número varían considerablemente de un registro a otro.

4.3 Conversión de la representación

Es una transformación externa al registro de partida, conservando la totalidad o una parte solamente del contenido de la representación inicial. La conversión produce una representación en un registro distinto al de la representación inicial. Es el primer umbral de la comprensión en el aprendizaje de las matemáticas.

Esta actividad es la menos espontánea de las tres y más difícil de adquirir para la gran mayoría de los alumnos. No solo el cambio de registro ocasiona obstáculos que son independientes de la complejidad del campo conceptual en el que se trabaja; también, con mucha frecuencia, la ausencia de coordinación entre los diferentes registros de representación genera un obstáculo para los aprendizajes conceptuales.

4.4 Representaciones y Tecnología

Las representaciones tradicionales se han visto ampliamente complementadas y enriquecidas con los Sistemas de Geometría Dinámica (SGD), su carácter estático desaparece con las representaciones ejecutables desde el momento en que se actúa directamente sobre ellas.

Esta afirmación es compartida por varios investigadores que estudiaron los sistemas de representación, entre ellos Hitt [4], quien sostiene que el desarrollo de la tecnología y la capacidad de las computadoras, impulsó el estudio del rol que juegan las diferentes representaciones de un concepto matemático en su construcción. También plantea que las representaciones de un objeto matemático, sólo son una parte del mismo, por lo tanto, el tratamiento de las diferentes representaciones es lo que permite su construcción.

Actualmente son muchos los softwares que posibilitan el tratamiento dinámico de los objetos matemáticos, uno de ellos es GeoGebra (versión 5.0) [5]. La manipulación de un entorno dinámico como éste, posiblemente ayude al estudiante a ampliar su experiencia permitiendo coordinar diferentes registros de representación. Es muy probable también, que, a través de él, se puedan discriminar unidades significantes de una representación, posibilitando la aprehensión de un campo de variaciones posibles relacionadas a uno o varios registros, algo que es muy difícil de lograr sin la mediación de este tipo de software. La multiplicidad de vistas permite apreciar los objetos matemáticos desde diferentes perspectivas, cada representación se vincula dinámicamente a las demás en una adaptación automática y recíproca que asimila los cambios producido en cualquiera de ellas, independientemente en cual fuera creada originalmente.

4.5 Registros utilizados en Geometría del Espacio

Los registros de representación utilizados generalmente para los objetos definidos en Geometría Analítica del Espacio son: el registro verbal, simbólico y gráfico.

En el cuadro 1 se presenta una adaptación de las posibles relaciones que pueden establecerse entre los registros de representación que utilizamos en el tema bajo estudio, de acuerdo a Font [6].

Cuadro 1. Adaptación de las posibles relaciones entre los registros de representación propuesto por Font.

Hacia / Desde	Situación, Descripción Verbal	Expresión analítica	Gráfica
Situación, Descripción Verbal	Distintas descripciones	Modelo	Boceto
Expresión analítica	Interpretación de la fórmula (interpretación de parámetros)	Transformaciones de la fórmula	Representación gráfica
Gráfica	Interpretación de la gráfica	Ajuste gráfico	Variaciones de escala, unidades, origen, etc.

Según estas relaciones, se puede establecer una analogía entre los tratamientos propuestos por Duval [3]. cuando se relacionen los mismos registros y con las conversiones cuando las relaciones se dan entre diferentes registros.

En el cuadro 2, se muestra una actividad de la guía de trabajos prácticos: Superficies cuádricas, donde las capacidades que se espera que los alumnos desarrollen son:

- Reconocimiento de la representación en el registro simbólico
- Tratamiento de la representación en el registro simbólico
- Conversión de la representación desde el registro simbólico hacia el registro gráfico

Cuadro 2. Tratamiento y Conversión de representaciones.

Registro de partida: Registro simbólico

Representar gráficamente la superficie que se da a continuación, tomando como base la discusión de la misma. Clasificarla.

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{5}-z^2=1$$

Registro de llegada: Registro simbólico y gráfico

Hiperboloide de una Hoja.

Intersección con los ejes coordenados:

Tiene intersección con el "eje x", $y=z=0$; e intersección con el "eje y", $x=z=0$

$\frac{x^2}{4}=1,$ $\qquad$ $x=\pm\sqrt{4}$ $\qquad$ $P_1(2{,}0{,}0);\ P_2(-2{,}0{,}0)$

$\frac{y^2}{5}=1\,,$ $\qquad$ $y=\pm\sqrt{5}$ $\qquad$ $P_1\left(0,\sqrt{5}\,,0\right);\ P_2\left(0,-\sqrt{5}\,,0\right)$

El eje del Hiperboloide es el "eje z"

Es simétrica respecto al origen de coordenadas, a los ejes y planos coordenados. Es una superficie abierta.

Intersección con los planos coordenados.

Plano xy

$$\begin{cases}\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{5}=1\\ z=0\end{cases}$$

Elipse

Plano yz

$$\begin{cases}\frac{y^2}{5}-z^2=1\\ x=0\end{cases}$$

Hipérbola

Plano xz

$$\begin{cases}\frac{x^2}{4}-z^2=1\\ y=0\end{cases}$$

Hipérbola

Planos Paralelos

Secciones planas paralelas al plano xy dan elipses: escogemos los valores para z=2, z=0 y z=-2

Si $z=2$

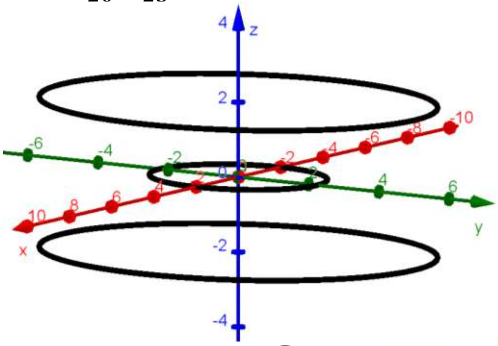
$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{5}-(2)^2=1$$
$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{5}=5$$
$$\frac{x^2}{20}+\frac{y^2}{25}=1$$

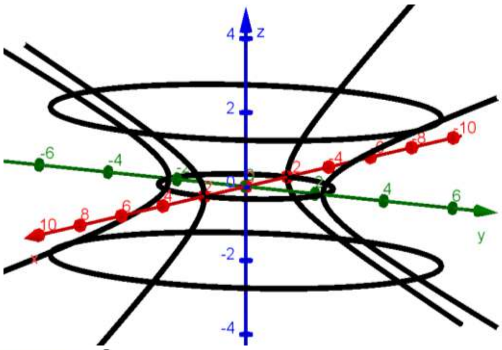
$z=0$

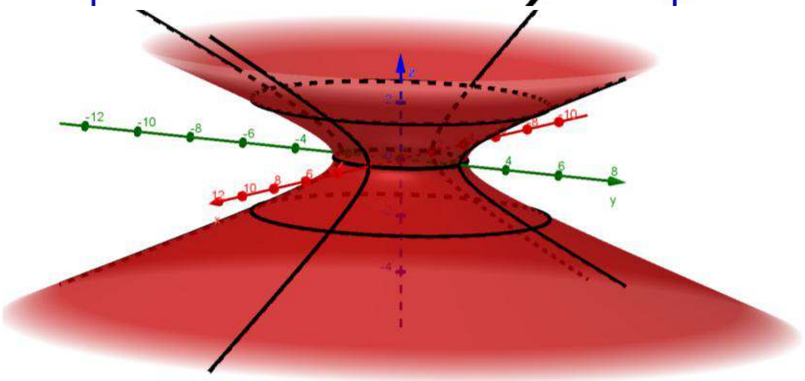
$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{5}=1$$

Si $z=-2$, da el mismo resultado que $z=2$

$$\frac{x^2}{20}+\frac{y^2}{25}=1$$







5 Análisis preliminar

Se realizó un análisis de los registros en los temas: Plano y Recta en el Espacio y Superficies Cuádricas de las guías de trabajos prácticos de Álgebra Lineal y Geometría Analítica dadas en el año 2017, correspondiente a las carreras de Ingeniería de la UNCAUS, observándose para la realización de los tratamientos, un predominio del registro simbólico, en menor porcentaje el registro verbal empleado en las actividades de integración y, ausencia de tratamiento en el registro gráfico. En cuanto a conversiones en el tema Plano y Recta en el Espacio, se plantean actividades que requieren las siguientes transformaciones: conversiones del registro simbólico al verbal, del registro simbólico al gráfico y del registro gráfico al verbal. Analizado el tema de Superficies Cuádricas se plantean actividades que requieren conversiones desde el registro verbal al simbólico, del registro simbólico al gráfico, registro gráfico al verbal y del registro gráfico al simbólico; como se observa los cuadros 3 y 4.

Cuadro 3. Registros involucrados en la guía de trabajos prácticos del tema Plano y Recta en el Espacio.

Registro Llegada / Registro Partida	Verbal	Simbólico	Gráfico
Verbal	0	1	1
Simbólico	12	38	11
Gráfico	5	0	0

Cuadro 4. Registros involucrados en la guía de trabajos prácticos del tema Superficies Cuádricas.

Registro Llegada / Registro Partida	Verbal	Simbólico	Gráfico
Verbal	2	6	0
Simbólico	0	12	10
Gráfico	8	2	0

Dado que dominar un concepto matemático requiere conocer y reconocer sus principales representaciones, para así convertirlas o traducirlas de un modo a otro. *La conversión y el tratamiento debe ser separados para analizar lo que hacen los estudiantes cuando se enfrentan con el problema; esta separación metodológica y teórica va en contra de la práctica actual de considerar estos dos tipos de transformaciones como una unidad para la resolución de los problemas* [2].

Sin embargo, el manejo de diferentes sistemas de representación y la conversión entre unos y otros no es suficiente para obtener una comprensión integral. Es necesario crear condiciones donde sea posible establecer una coordinación entre los diferentes registros de representación. *La coordinación entre las representaciones que provienen de sistemas semióticos diferentes no es espontánea. Su puesta en juego no resulta automáticamente de los aprendizajes clásicos demasiado directamente centrados en los contenidos de la enseñanza. Lo necesario para favorecer tal coordinación parece ser un trabajo de aprendizaje específico centrado en la diversidad de los sistemas de representación, en la utilización de sus posibilidades propias, en su comparación por la puesta en correspondencia y en sus "traducciones" mutuas* [3].

Por lo que se propone diseñar secuencias didácticas que abarquen todas las categorías de comportamiento descritas anteriormente.

6 Posibles Resultados

Con las secuencias didácticas elaboradas se pretende que, los estudiantes que cursan la asignatura Álgebra Lineal y Geometría Analítica, superen los errores y dificultades con que se encuentran al abordar conceptos involucrados en Geometría Analítica del Espacio y permitan orientarlos en la interpretación y comprensión de estos conceptos, favoreciendo el desarrollo espacial.

De cumplirse con los objetivos, éste será un aporte científico para la Universidad Nacional del Chaco Austral, ya que permitirá mantener actualizada esta esfera del conocimiento.

Referencias

1. Duval R. (1998/1993) Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento. En F. Hitt (Ed.) Investigaciones en Matemática Educativa II. (Traducción del original francés: Registres de représentation sémiotique et functionnement cognitif de la pensée. Annales de Didactique et de Sciences Cognitives), (Vol. 5) México: Grupo Editorial Iberoamérica.
2. Duval, R. (2006). Un tema crucial en la educación matemática: La habilidad para cambiar el registro de representación. La gaceta de la RSME, 9(1),143–168
3. Duval, R. (2004). Semiosis y Pensamiento Humano. (Traducción de título original: Sémiosis et Pensée Humaine. Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels) (2ª ed) Universidad del Valle. Instituto de Educación y Pedagogía. Santiago de Cali, Colombia: PeterLang. S.A.
4. Hitt, F. (2003) Una reflexión sobre la construcción de Conceptos Matemáticos en Ambientes con Tecnología. *Edición Especial: Educación Matemática, 213.*
5. Hohenwarter, M. (2015). GeoGebra (versión 5.0) [Programa de Computador]. Österreich, Linz, Austria. Disponible gratuitamente en https://www.geogebra.org/
6. Font, V. (2001). Expresiones simbólicas a partir de gráficas. El caso de la parábola. *Revista EMA*,6(2),180-200.

Construcción de Significado de Símbolos Matemáticos en Estudiantes de Ingeniería

María Laura Distéfano[1], María Andrea Aznar[1], Marcel David Pochulu[2]
[1] Departamento de Matemática, Facultadd de Ingeniería, Universidad Nacional de Mar del Plata
Juan B. Justo 4302, Mar del Plata, CP 7600
ml.distefano@fi.mdp.edu.ar, maznar@fi.mdp.edu.ar
[2] Instituto Académico Pedagógico de Ciencias Básicas y Aplicadas, Universidad Nacional de Villa María
Arturo Jauretche 1555, Villa María, CP 5900
marcelpochulu@hotmail.com

Resumen. Se presentan resultados parciales de una investigación centrada en el proceso de construcción de significado de algunos símbolos matemáticos, por parte de estudiantes universitarios y, en particular, de estudiantes de carreras de Ingeniería. Se consideraron constructos del Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemática y de la Teoría de Registros Semióticos. Se presenta un estudio cualitativo sobre los niveles de evolución en la construcción de significado de los símbolos, a partir de tareas de lectura y escritura de expresiones simbólicas. También se realiza un análisis cuantitativo en relación con la distribución de los estudiantes en los distintos niveles como así también en comparación con estudiantes de otras carreras universitarias, identificando similitudes y diferencias.

Palabras Clave: Símbolos matemáticos, Significado, Enfoque Ontosemiótico.

1 Introducción

La lectura y escritura de expresiones simbólicas constituyen prácticas que, si bien sostienen y son escenario de toda la actividad matemática, no son consideradas como objeto de enseñanza y se espera que los estudiantes las aprendan en el transcurso del desarrollo de los temas abordados por las distintas asignaturas. Sin embargo, se han observado dificultades en los estudiantes universitarios para leer y escribir expresiones simbólicas. Esto constituyó la motivación para realizar una investigación focalizada en el objetivo de describir el proceso de construcción de significado, por parte de estos estudiantes, de algunos símbolos matemáticos. Los resultados que se presentan en este trabajo provienen de dicha investigación, la cual abordó el estudio de aspectos sintácticos y semánticos ligados a las tareas de lectura y escritura de expresiones simbólicas.

Los estudiantes que participaron pertenecen a distintas carreras de la Universidad Nacional de Mar del Plata, que contienen Álgebra en su plan de estudios. Entre dichas carreras se encuentran las de Ingeniería, en cuyos estudiantes se centra este trabajo.

La importancia de las habilidades relativas al lenguaje para la formación del ingeniero ha sido marcada por Serna y Flórez [1] quienes señalan que afecta la capacidad de razonamiento lógico formal de los ingenieros.

En esta comunicación se presenta un análisis cuali-cuantitativo relativo a la distribución de los estudiantes en distintos niveles de evolución en la construcción de significado de algunos símbolos en particular y se realiza una comparación de los estudiantes de ingeniería con los de las otras carreras estudiadas.

Si bien, como refiere Ullmann [2], la noción de significado es controversial desde un punto de vista filosófico y lingüístico, el Enfoque Ontosemiótico de la Cognición y la Instrucción Matemática da una definición precisa sobre el significado de un objeto matemático, la cual orientó la construcción de un instrumento para relevar datos como así también la definición de herramientas metodológicas para llevar a cabo el análisis de los mismos. Estos constructos teóricos se presentan a continuación en la próxima sección.

2 Marco teórico

Los lineamientos teóricos de la investigación están dados por el Enfoque Ontosemiótico de la Cognición y la Instrucción Matemática (EOS), de Godino y colaboradores [3], y por la Teoría de Registros Semióticos, de Duval [4].

El EOS define como *práctica matemática* a cualquier acción, expresión o manifestación (lingüística o de otro tipo) realizada por alguien para resolver problemas matemáticos, comunicar la solución obtenida a otras personas, validar y generalizar esa solución a otros contextos [3]. A partir de este concepto, surge la noción de *significado*, el cual es definido en este marco como el sistema de prácticas operativas y discursivas para resolver un cierto tipo de problemas [5].

Para el EOS, el aprendizaje supone la apropiación por parte del estudiante de los significados validados en el seno de una institución, mediante su participación en las comunidades de prácticas [3], [5]. Plantear el aprendizaje en términos de significados otorga una relevancia al proceso mediante el cual un sujeto crea un significado vinculando una expresión con un contenido a través de una *función semiótica*. Esta función es establecida por un sujeto (persona o institución) de acuerdo con un cierto criterio o regla de correspondencia. De esta manera, los distintos objetos no resultan aislados entre sí, sino que se vinculan a través de las funciones semióticas construidas entre ellos, pudiendo ejercer el rol de antecedente o de consecuente [3].

De la teoría de Registros Semióticos se consideraron las actividades cognitivas definidas por Duval [4]: la *formación de expresiones*, que permite utilizar signos para sustituir objetos; los *tratamientos*, que constituyen transformaciones internas a un registro semiótico, y las *conversiones*, que son transformaciones de representaciones entre distintos registros semióticos.

3 Metodología

Para llevar a cabo la investigación fue necesario restringir la cantidad de símbolos a estudiar. Se decidió trabajar con seis símbolos: $\in$, $\subset$, $\wedge$, $\vee$, $\forall$ y $\exists$.

Se definieron las prácticas matemáticas que están ligadas a la construcción de un símbolo matemático:

- Representar en forma escrita u oral el vocablo asociado a un símbolo dado, o, recíprocamente, representar en forma escrita el símbolo asociado a un vocablo dado.
- Escribir una proposición de manera simbólica, respetando las reglas de sintaxis asociadas a los símbolos utilizados.
- Decidir si una expresión simbólica dada está correctamente escrita de acuerdo con las reglas de sintaxis de los símbolos empleados.
- Determinar el valor de verdad de una proposición dada de manera simbólica.
- Efectuar conversiones entre representaciones realizadas en el registro simbólico-algebraico y el registro coloquial.

Las prácticas matemáticas definidas permitieron identificar tres funciones semióticas, a las que se consideró como *principales*, que participan en la construcción de significado de un símbolo:

- F1: asocia el *símbolo* con el *vocablo* de su denominación.
- F2: relaciona el *símbolo/vocablo* con la *estructura sintáctica* de la expresión que lo contiene
- F3: vincula la *proposición* en la que está presente el símbolo con su *valor de verdad*.

Las funciones semióticas principales, de acuerdo a los elementos que vinculan y a las prácticas matemáticas implicadas, pueden clasificarse de la siguiente manera: F1 es *nominal*, F2 es *sintáctica* y F3 es *semántica*.

Una de las prácticas matemáticas consideradas en esta construcción de significado son las conversiones entre el registro simbólico-algebraico y el registro del lenguaje coloquial. Para el estudio de este tipo de práctica matemática también se consideraron tres funciones semióticas:

- Fsc: relaciona una expresión en el registro simbólico-algebraico con una en el registro del lenguaje coloquial.
- Fcs: relaciona una expresión en el registro del lenguaje coloquial con su correspondiente en el registro simbólico-algebraico.
- Ft: vincula una Expresión convertida Símbolo a Símbolo en el registro del lenguaje coloquial con una Expresión Global en dicho registro.

Debe tenerse en cuenta que obtener la expresión en lenguaje coloquial, a partir de una simbólica, involucra tanto una conversión como un tratamiento, dado que la respuesta final requiere construir una oración que manifieste el sentido de la expresión, más allá de la traducción símbolo a símbolo que devuelve la conversión congruente de los símbolos uno a uno. Por lo tanto, se definieron dos funciones semióticas correspondientes a cada una de las mencionadas actividades cognitivas. La función semiótica relativa a la conversión del registro simbólico-algebraico al registro coloquial, F_{sc}, tiene como antecedente una expresión simbólica y como consecuente una expresión coloquial. La función semiótica correspondiente al tratamiento, F_t, tiene como antecedente y como consecuente a dos expresiones coloquiales, cuyo contenido semántico es el mismo. En principio, puede parecer que una función semiótica que es interna al registro coloquial no es relevante para esta investigación, pues en la misma no participa directamente el registro simbólico-algebraico. Sin embargo, este tratamiento está ligado a la comprensión del contenido semántico de una expresión simbólica pues transforma la expresión formulada símbolo a símbolo en una expresión más global, en el registro coloquial, que se asemeja a la forma en que la idea representada se expresa en lenguaje oral. La manifestación del establecimiento de esta función semiótica es un indicador de la comprensión del contenido semántico de la expresión.

En las Figuras 1 y 2 se representan las funciones semióticas definidas, detallando sus respectivos antecedentes y consecuentes. Las de la Figura 1 corresponden a las Funciones semióticas principales y las de la Figura 2, a las definidas en relación a las actividades cognitivas correspondientes a las conversiones entre los registros coloquial y simbólico-algebraico, y a los tratamientos en el registro coloquial.

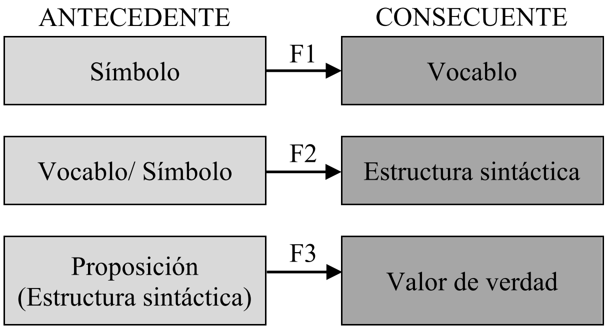


Fig. 1. Representación de las funciones semióticas principales asociadas a la construcción de significado de un símbolo

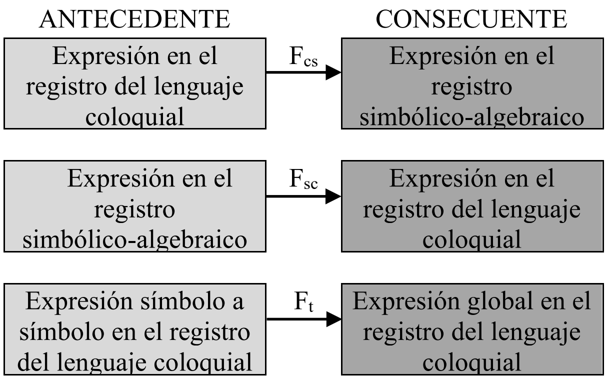


Fig. 2. Funciones semióticas relativas a las actividades cognitivas de conversión y tratamiento

A partir de estas prácticas matemáticas y las correspondientes funciones semióticas, se diseñó y construyó un instrumento *ad-hoc,* para relevar datos relativos a las prácticas que realizan los estudiantes en la lectura o en la escritura de expresiones simbólicas, como parte del significado de los símbolos en estudio. El mismo fue administrado a 90 estudiantes distribuidos de la siguiente manera: 43 de las carreras de Ingeniería, 16 de Profesorado en Matemática, 21 de Bioquímica y 10 de la Licenciatura en Biología. Todas las carreras están radicadas en la Universidad Nacional de Mar del Plata, Argentina.

En dicho instrumento se proponen distintas tareas de lectura y escritura de expresiones simbólicas, destinadas a evaluar la manifestación del establecimiento, por parte de los estudiantes, de las distintas funciones semióticas. En el proceso de diseño del instrumento se construyeron tres versiones sucesivas, en las que se fueron incorporando mejoras provenientes del análisis de cada versión. En el Anexo pueden encontrarse los enunciados de los ejercicios propuestos, tal como aparecen en el protocolo utilizado en su versión definitiva.

4 Resultados

A partir de los datos relevados se observó que el establecimiento de estas funciones semióticas en los estudiantes se produce con cierto orden, evidenciándose una secuenciación en relación con las prácticas matemáticas que caracterizan al proceso de construcción de significado de los símbolos estudiados. El análisis de dicha secuenciación permitió la definición y caracterización de tres niveles en dicho proceso de significación. En la Tabla 1 se presentan los tres niveles, indicando qué funciones semióticas abarca cada uno, en qué tipo de tarea e identificando sus características.

Tabla 1. Niveles en la construcción de significado de símbolos matemáticos.

Nivel	Funciones semióticas que abarca	Características
1	• F1 • Fsc	Caracterizado por una construcción de significado elemental, en la que básicamente el estudiante identifica al símbolo con el vocablo coloquial, y esto le permite realizar conversiones símbolo a símbolo a partir de una expresión simbólica.
2	• Fcs • F2-En formulación de un ejemplo • F3- En formulación de un ejemplo • F3- En una expresión simbólica dada	Los estudiantes que se ubican en este nivel manifiestan habilidades relativas a los aspectos sintáctico y semántico. En general, pueden formular expresiones simbólicas bien formadas a partir de una oración coloquial dada y/o a partir de una idea propia. También se muestran capaces de establecer el valor de verdad de una expresión simbólica dada y justificar su decisión en este sentido.
3	• F2-En la detección de un error sintáctico de una expresión dada • Ft	Los estudiantes de este nivel son capaces de reconocer errores sintácticos en una expresión simbólica dada y repararlos reformulando correctamente la expresión. También se muestran capaces de expresar mediante una expresión coloquial la idea global que corresponde al contenido representado por una expresión simbólica.

Una vez caracterizados estos niveles, se analizó en qué nivel se encontraban los estudiantes, para cada uno de los símbolos en estudio. Esto permitió observar algunas características generales en los estudiantes de cada una de las carreras en las que se relevaron datos.

En la Tabla 2 se presentan los porcentajes de estudiantes de Ingeniería que se encuentran en cada nivel, para cada uno de los seis símbolos estudiados. Estos porcentajes fueron calculados sobre los 43 estudiantes de Ingeniería que componen la muestra. En este caso se consideró un Nivel 0, que corresponde a los estudiantes que no manifestaron ninguna de las funciones semióticas correspondientes a ese símbolo.

Tabla 2. Porcentajes de estudiantes de Ingeniería por nivel para cada uno de los símbolos estudiados.

Nivel	Símbolo					
	$\in$	$\subset$	$\forall$	$\exists$	$\wedge$	$\vee$
0	0	51	7	4	2	0
1	4	21	35	40	63	75
2	59	12	30	30	23	21
3	37	16	28	26	12	4

Como puede observase en los datos registrados en la Tabla 2, el símbolo de pertenencia es el más conocido por los estudiantes, dado que la gran mayoría se ubica entre los niveles 2 y 3. Por el contrario, el símbolo de inclusión es el menos conocido, pues la mitad de los estudiantes se ubica en el Nivel 0. Los cuantificadores tienen una distribución similar en todos los niveles, aunque la construcción de estos dos símbolos es independiente. Con respecto la conjunción y a la disyunción, puede observarse que la mayoría de los estudiantes se concentra en el nivel 1, es decir que estos estudiantes tienen una construcción de significado muy elemental de estos dos símbolos.

En la Tabla 3 se presentan los porcentajes de estudiantes discriminados en cada una de las carreras que componen la muestra. En dicha Tabla se muestran los porcentajes correspondientes a cada uno de los niveles definidos, para cada uno de los símbolos estudiados.

Tabla 3. Porcentajes de la distribución de estudiantes por niveles discriminados por carreras, para cada símbolo.

Símbolo	*Nivel*	INGENIERÍA	MATEMÁTICA	BIOQUÍMICA	BIOLOGÍA
$\in$	*0*	0	0	0	0
	1	5	6	0	10
	2	58	6	29	70
	3	37	88	71	20
$\subset$	*0*	51	12	14	60
	1	21	19	24	40
	2	12	0	19	0
	3	16	69	43	0
$\forall$	*0*	7	0	10	10
	1	35	25	57	70
	2	30	56	19	10
	3	28	19	14	10
$\exists$	*0*	5	0	0	10
	1	40	25	57	70
	2	30	31	29	0
	3	26	44	14	20
$\wedge$	*0*	2	0	0	10
	1	63	50	57	70
	2	23	31	33	20
	3	12	19	10	0
$\vee$	*0*	0	0	10	10
	1	74	56	76	70
	2	21	19	5	20
	3	5	25	10	0

Con relación a los datos de la Tabla 3, si se pone el foco sobre cada uno de los símbolos en particular, pueden realizarse varias observaciones:

- $\in$: Este símbolo es el único que se presenta como conocido por todos los estudiantes. La gran mayoría manifiesta construido el significado de este símbolo en un nivel medio o alto, destacándose el muy alto porcentaje de estudiantes de la carrera de Matemática que se encuentran en el nivel 3.

- $\subset$: La mayoría de los estudiantes de Ingeniería se ubica entre no conocer el símbolo o tener un significado elemental construido. Esta misma situación se repite para la totalidad de los estudiantes del profesorado en Biología. En cambio, casi las tres cuartas partes de los estudiantes del profesorado en Matemática se ubica en el nivel 3 y más del 60% de los estudiantes de Bioquímica también tiene construido un nivel medio-alto para este símbolo, ubicándose en los niveles 2 y 3.

- $\forall$ y $\exists$: Entre estos dos símbolos la situación es similar, para las cuatro carreras. Los estudiantes de Ingeniería se distribuyen de manera semejante entre los distintos niveles, sin observarse una polarización. En cambio, la mayoría de los estudiantes de Biología y de Bioquímica se encuentran en un nivel básico de construcción de significado. Por su parte, las tres cuartas partes de los estudiantes de Matemática se ubican entre los niveles 2 y 3, mostrando una construcción de significado media-alta para este símbolo.

- $\wedge$ y $\vee$: Para estos símbolos, la distribución de los porcentajes es similar entre ambos, para las cuatro carreras. La mayoría de los estudiantes de están aglutinados en el nivel 1. En el caso de los estudiantes de Matemática, son los de menor porcentaje en el nivel 1, y la mitad restante se ubica entre los niveles 2 y 3, aunque son los de mayor porcentaje en el nivel 3. El resto de las carreras ubica, en la mayoría de los casos, a una quinta parte de los estudiantes en el nivel 2.

5 Conclusiones

Los análisis anteriores permiten obtener algunas conclusiones relativas a la construcción de significado de cada uno de los símbolos estudiados, en particular, y también algunas conclusiones referidas al desempeño de los estudiantes de las distintas carreras en las que se relevaron los datos.

Se observa que la construcción de cada uno de los símbolos es independiente, aun cuando pudiera suponerse una concordancia por la similitud en su estructura sintáctica o situaciones de uso, como es el caso de los cuantificadores o de la conjunción y la disyunción. Es por esto que pueden realizarse observaciones particulares para cada símbolo.

El símbolo de *pertenencia* es el que aparece como el más conocido por la mayoría de los estudiantes de todas las carreras. En el extremo opuesto se ubica el símbolo de *inclusión*, que se presenta, en general, como el de menor nivel de construcción de significado.

Con respecto a los *cuantificadores*, los estudiantes de Ingeniería se distribuyen de manera semejante entre los distintos niveles. En cambio, la mayoría de los estudiantes de Biología y de Bioquímica se encuentran en un nivel básico de construcción de significado. Por el contrario, la mayor parte de los estudiantes de Matemática se ubican entre los niveles más altos, mostrando una construcción de significado media-alta de estos símbolos.

En relación a la *conjunción* y a la *disyunción*, la distribución de los estudiantes en los distintos niveles es similar en todas las carreras. La mayoría de los estudiantes se ubica en un nivel básico, en el que apenas reconocen la identificación del símbolo con el vocablo coloquial para su lectura y considerablemente pocos en el nivel más alto.

Respecto del desempeño de los estudiantes de las distintas carreras en las que se relevaron datos se confirma, en general, una situación que es esperable desde la experiencia docente. Los estudiantes de la carrera de Profesorado en Matemática son los que presentan un nivel de construcción más alto en casi todos los símbolos estudiados. Los siguen en sus niveles de desempeño los estudiantes de Ingeniería, luego los de Bioquímica y, finalmente, los estudiantes de Licenciatura en Biología son los que manifiestan la más baja construcción de significado en todos los símbolos estudiados. Esto podría deberse a la cantidad y tipo de prácticas matemáticas que se ponen en juego en las clases de las asignaturas de cada una de las carreras en las que se relevaron datos.

Considerando la cantidad de asignaturas de Matemática que cursa un ingeniero en formación, y que los símbolos constituyen un insumo importante en estas asignaturas, resulta necesario contribuir, con intencionalidad pedagógica, a la construcción de significado. En este sentido, las funciones semióticas definidas pueden resultar una guía para el diseño de tareas orientadas a la construcción de significado de los símbolos matemáticos.

Referencias

1. Serna, E. y Flórez, G.: El razonamiento lógico como requisito funcional en ingeniería. *Proceedings of the Eleventh LACCEI Latin American and Caribbean Conference for Engineering and Technology (LACCEI'2013)*. Disponible en: http://www.laccei.org/LACCEI2013-Cancun/RefereedPapers/RP221.pdf. (2013). Accedido el 20 de junio de 2018.
2. Ullmann. S.: *Semántica. Introducción a la ciencia del significado*. Madrid, España: Aguilar. (1965)
3. Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V.: Un enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática. Disponible en: http://www.ugr.es/~jgodino/funciones-semioticas/sintesis_eos_10marzo08.pdf. (2009). Accedido el 14 de abril de 2018.

4. Duval, R.: *Semiosis y pensamiento humano.* Cali, Colombia: Universidad del Valle. (2004).
5. Godino, J.D., Bencomo, D., Font, V. y Wilhelmi, M.R.: Análisis y valoración de la idoneidad didáctica de procesos de estudio de las matemáticas. *Paradigma*, 27 (2), 221-252 (2007)

Anexo. Protocolo del instrumento diseñado para la recolección de datos.

❶ Complete:

Símbolo	¿Cómo se lee?	Escriba un ejemplo utilizando el símbolo del que se pueda afirmar que es VERDADERO
$\in$		
$\subset$		
$\forall$		
$\exists$		
$\wedge$		
$\vee$		

❷ Analice si las siguientes expresiones están BIEN ESCRITAS (independientemente de ser verdaderas o falsas). En caso de no estarlo, escríbala en forma correcta.

Expresión	¿La expresión está BIEN ESCRITA? (SI/NO)	Si la expresión está MAL ESCRITA, escríbala en forma correcta
$-2 \in \mathbb{Z}$		
$3 \subset \mathbb{Z}$		
$\{1 ; 2\} \subset \mathbb{N}$		
$\mathbb{N} \in \mathbb{Z}$		
$4 \in \mathbb{N} \wedge -3 < 0$		
$7 \in \mathbb{N} \vee -1 \in \mathbb{Z}$		
$-5 \wedge 4 \in \mathbb{R}$		
$4 \in \mathbb{N} \vee \mathbb{Z}$		
$\forall \mathbb{N} \ \ \mathbb{N} > 0$		
$\forall x \in \mathbb{R} \ \ x2 \geq 0$		
$\exists x \in \mathbb{R} \ / \ y + 2 = 5$		
$\exists x \in \mathbb{Z} / x < 0$		

❸ Exprese coloquialmente (con sus palabras) lo que representa cada una de las siguientes expresiones simbólicas. Indique si es verdadera o falsa, justificando su respuesta.

Expresión simbólica	**Expresión coloquial (con sus palabras)**	**V-F**	**Justificación del V-F**
$0,5 \in \mathbb{Z} \lor -1 \in \mathbb{Z}$			
$-2 \in \mathbb{Z} \land -1 \in \mathbb{N}$			
$\forall x \; (x \in \mathbb{Z} \Rightarrow x < 0)$			
$\exists x \; (x \in \mathbb{Z} \land x < 0)$			
$\exists\, x \in \mathbb{N} \,/\, 2 < x < 3$			
$\forall\, x \in \mathbb{N} \;\; x < x + 1$			

❹ Escriba en forma simbólica cada una de las siguientes expresiones coloquiales.

Expresión coloquial	**Expresión simbólica**
3 es un número entero y positivo	
3 y 5 son números naturales	
4 es un número natural o entero	
Cada número entero es menor que su sucesor	
Algunos números naturales son negativos	
El cuadrado de cualquier número real es positivo o cero	

Niveles de Alfabetización Estadística en Estudiantes de Ingeniería

Stella Maris Figueroa[1], Sandra Baccelli[1]

[1] Grupo de Investigación en Enseñanza de la Matemática en Carreras de Ingeniería, Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de Mar del Plata

Juan B. Justo 2002. 1er piso. Facultad de Ingeniería. Anexo

stellafigueroa@gmail.com , sbaccelli@gmail.com

Resumen. En este trabajo se evalúan los significados personales de 187 estudiantes de ingeniería para determinar su nivel de alfabetización estadística. Se les propuso resolver un problema donde debían recuperar los datos a través de la interpretación de distintas medidas de tendencia central y de posición. Con los datos hallados, debieron efectuar un análisis de los mismos respecto de su simetría y variabilidad y detectar valores atípicos. Los resultados obtenidos fueron estudiados en el marco del Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemática. El análisis proporcionó categorías de respuestas que se clasificaron según el nivel de alfabetización estadística alcanzado. Los estudiantes evidenciaron dificultades en la interpretación de las medidas, en la comprensión de su cálculo y en el significado asignado por el contexto de la variable, pero las dificultades se incrementaron en el análisis de la forma, de la variabilidad de los datos y en la detección de valores atípicos.

Palabras clave: Alfabetización estadística, Habilidades, Prácticas matemáticas, Niveles

1 Introducción

Entre las recomendaciones internacionales para la enseñanza de la estadística, se destaca la aplicación de un enfoque que contextualiza la enseñanza de esta disciplina. En esta contextualización, se pretende que el estudiante se involucre en el ciclo de investigación para la resolución de un problema estadístico y de esta manera, pueda darle sentido a los objetos estadísticos intervinientes en su aprendizaje. Al respecto, Batanero [1] define con tres componentes el sentido estadístico: el primero, es la comprensión de las ideas estadísticas fundamentales que contribuyeron al desarrollo de la estadística, y son necesarias en la resolución de problemas estadísticos, el segundo es la competencia en el análisis de datos y el tercero es el razonamiento a partir de los datos, para realizar inferencias o tomar decisiones.

Al considerar a la Estadística como la ciencia de los datos, los números no están vacíos de contenido, sino que están dados en un contexto: son los datos del problema y en ese escenario, adquieren significados. En esta perspectiva, el cálculo de medidas descriptivas debe ir acompañado de su significado, es decir, debe ir acompañado de la interpretación de cada una de esas medidas en el contexto en el que se definen los datos. Sin embargo, en la mayoría de los textos de estadística de nivel universitario, no se da un espacio de análisis a los significados de las medidas calculadas. Muchas veces el estudiante de ingeniería da como respuesta, la definición de una medida, cuando se le está preguntando por su significado en el contexto del problema, como la definición de la mediana por ejemplo. Tampoco relaciona la forma y la variabilidad de la distribución de los datos con las medidas que pueden resumirlos. El análisis e interpretación de los datos resulta ser una tarea personal de cada estudiante donde muchas veces no logra trasladar a otra problemática el análisis de los distintos ejemplos desarrollados durante las clases.

Surge entonces el interrogante de determinar cuáles son las habilidades necesarias a desarrollar en el estudiante de ingeniería para el tratamiento de estas dificultades.

Al respecto, Batanero [2] y Curcio [3] resaltan la necesidad de que los estudiantes adquieran habilidades en la lectura crítica de los datos.

Curcio [3] describe tres niveles de comprensión de los gráficos: 1) *Leer los datos*: este nivel de comprensión no interpreta la información incluida en el gráfico. Es una lectura literal del mismo. 2) *Leer dentro de los datos:* requiere la habilidad para comparar medidas e interpretar los datos en el gráfico y uso de otros conceptos matemáticos 3) *Leer más allá de los datos:* requiere la realización de predicciones e inferencias a partir de los datos sobre informaciones que no se reflejan directamente en el gráfico. Posteriormente se agrega un cuarto nivel y tiene que ver con *leer detrás de los datos*, y se refiere a la confiabilidad de los datos del estudio realizado, la fuente, la metodología utilizada, la metodología de selección de la muestra, etc.

Pero además de marcar niveles en la comprensión de gráficos, es necesario plantear un razonamiento que involucre la aplicación del método que utiliza la estadística en la resolución de problemas.

Pfannkuch y Wild [4] consideran el razonamiento estadístico como la suma de cuatro dimensiones: la primera, es el ciclo de investigación, con sus pasos a seguir desde que el planteo del problema estadístico hasta su resolución o modificación; la segunda, los modos fundamentales de razonamiento estadístico (detallados en el párrafo siguiente); la tercera, el ciclo de preguntas, que se aplica en forma constante en la solución de problemas estadísticos, tanto a nivel general como en cada paso. El ciclo de preguntas consiste en la búsqueda y comprobación de sucesivas explicaciones, hipótesis o preguntas desde los datos, los análisis realizados o los resultados; y la cuarta, dada por actitudes como el escepticismo, la apertura mental, la perseverancia, el espíritu crítico o la curiosidad.

Los modos fundamentales de razonamiento estadístico están dados por 1) *Reconocer la necesidad de los datos.* Las situaciones de la vida real sólo pueden ser comprendidas a partir del análisis de datos, seleccionados adecuadamente, ya que los datos proporcionan la evidencia para la toma de decisiones. 2) *Transnumeración.* Indica la comprensión que surge al cambiar la representación de los datos. Desde la perspectiva de modelización, puede haber tres tipos de transnumeración: a partir de la medida que registra las cualidades o características del mundo real, o bien al pasar de los datos brutos a una representación tabular o gráfica que les den sentido, y el último tipo de transnumeración es comunicar en forma comprensible, el significado que surge de los datos. 3) *La percepción de la variación*. La recopilación adecuada de datos y la determinación de las fuentes de variación (medida, datos, muestreo, análisis, variación debida a factores, variación aleatoria) requieren la comprensión de la variación que se encuentra y se transmite en los datos. 4) *Razonamiento con modelos estadísticos*. La estadística es esencialmente un proceso de modelización; la diferencia con los modelos matemáticos es la presencia de aleatoriedad, se utilizan los modelos probabilísticos pero también otros modelos, como gráficos, o funciones (por ejemplo, en regresión). Los modelos se utilizan para representar y comprender la realidad. e) *Integración de la estadística y el contexto.*

Ben-Zvi y Garfield [5] definen la alfabetización estadística como un conjunto de habilidades básicas necesarias para la comprensión de la información y la lectura e interpretación de resultados que surgen de las investigaciones.

Batanero [6] utiliza el concepto de “cultura estadística” en lugar de “alfabetización estadística”, y coincide al considerar que el objetivo principal en la educación estadística “no es convertir a los futuros ciudadanos en *estadísticos aficionados… Tampoco se trata de capacitarlos en el cálculo y la representación gráfica, sino que* se pretende proporcionar una cultura estadística, que se refiere a dos componentes interrelacionados: a) capacidad para interpretar y evaluar críticamente la información estadística, los argumentos apoyados en datos o los fenómenos estocásticos que las personas pueden encontrar en diversos contextos, incluyendo los medios de comunicación, pero no limitándose a ellos, y b) capacidad para discutir o comunicar sus opiniones respecto a tales informaciones estadísticas cuando sea relevante” [7]

Siguiendo esta línea de pensamiento, Tauber [8], Ben-Zvi y Garfield [5] advierten la necesidad de dar definiciones de ciertos términos para que sean consistentes con los objetivos de aprendizaje. Por ejemplo, los procesos cognitivos de alfabetización, razonamiento y pensamiento estadístico son usados indistintamente en trabajos donde se analizan las recomendaciones para la reforma de la enseñanza de la estadística. Aunque no se ha llegado a un consenso general en distintos congresos internacionales de la enseñanza de la estadística (ICOST) para clarificar las diferencias y similitudes entre estos términos, estos autores describen las habilidades que caracterizan estos procesos que resumen las ideas de mayor aceptación entre los educadores estadísticos e investigadores sobre el tema, a las cuales este trabajo adhiere:

Alfabetización estadística: incluye las habilidades básicas que se utilizan para realizar una lectura e interpretación básica de la información y de los resultados presentados en reportes periodísticos o investigaciones. Estas habilidades se refieren a organizar datos, construir y presentar tablas y trabajar con distintas representaciones de datos. También incluye una comprensión básica de conceptos, vocabulario y símbolos, y de la probabilidad como una medida de la incertidumbre.

Razonamiento estadístico: se refiere al cómo razonar y dar sentido a la información estadística. Involucra hacer interpretaciones basadas en un conjunto de datos, representar o resumir datos. También comprende las relaciones entre conceptos, o combinar ideas sobre los datos y las posibilidades. Razonar, en este sentido, significa comprender y ser capaz de explicar procesos estadísticos y de interpretar, de manera global, los resultados estadísticos.

Pensamiento estadístico: Involucra la comprensión del por qué y cómo se realizan las investigaciones y el papel de las “grandes ideas estocásticas” implícitas en ellas. Estas ideas incluyen la naturaleza de la variación, cuándo y cómo usar los métodos más apropiados del análisis de datos, tales como resúmenes numéricos y gráficos. En este pensamiento interviene una comprensión de la naturaleza del muestreo, cómo hacer inferencias a la población y cómo diseñar experimentos con el objetivo de establecer causas. Además comprender cómo usar los modelos para simular fenómenos aleatorios y por qué sirven para estimar probabilidades. Este pensamiento también implica utilizar el contexto de un problema de investigación y dar conclusiones, reconocer y comprender los procesos completos (desde proponer preguntas a recolectar los datos para elegir el análisis y la prueba de hipótesis que corresponda). Por último, el pensamiento estadístico critica y evalúa los resultados de un problema o de un estudio realizado por otros. [8]

Paralela a esta clasificación, el modelo de enseñanza de la estadística que plantea Gal [9] para estudiantes ingresantes a la universidad, está dado por una alfabetización estadística que involucra un componente de conocimiento (compuesto por cinco elementos cognitivos: habilidades de alfabetización, conocimiento estadístico, conocimiento matemático, contexto de conocimiento y habilidades críticas) y un componente disposicional dado por la postura crítica, creencias y actitudes. Afirma además, que estos componentes no se pueden considerar independientes, sino como un conjunto dinámico de conocimientos y aptitudes que forman el comportamiento "estadísticamente alfabetizado", puesto que la valoración crítica de la información estadística luego de ser comprendida e interpretada, depende de la habilidades para realizar preguntas y para impulsar una postura crítica, las cuales se basan en determinadas creencias y actitudes.

La clasificación de habilidades dadas a partir de las definiciones anteriores, identifica niveles de alfabetización estadística que puede ser utilizada por el profesor de estadística para establecer criterios en la selección de habilidades que un estudiante de ingeniería debiera desarrollar. Estas habilidades están en la misma dirección que las competencias que plantea el Consejo Federal de Decanos de Ingeniería en este área, en congruencia a que el estudiante logre darle sentido a la información estadística que proviene de situaciones reales relacionadas con su futura profesión.

En consecuencia, el modelo teórico de enseñanza sobre la alfabetización estadística de Gal identificado a través de las habilidades requeridas para los estudiantes, puede pensarse en términos de las prácticas matemáticas que propone el Enfoque Ontosemiótico de la Cognición y la Instrucción Matemática (EOS), desarrollado por Juan Díaz Godino, Carmen Batanero y Vicenç Font Moll [10] [11] [12]. El EOS considera *práctica matemática* a cualquier acción, expresión o manifestación (lingüística o de otro tipo) realizada por alguien para resolver problemas matemáticos, comunicar la solución obtenida a otras personas, validar y generalizar esa solución a otros contextos. El *significado* de un objeto matemático, es definido como el sistema de prácticas operativas y discursivas para resolver un cierto tipo de problemas asociados a ese objeto [12]

Ante un determinado objeto matemático, cada alumno le asigna un significado personal a este objeto. El significado fijado por el profesor, o por el libro de texto, es su significado institucional. A partir de esta distinción se puede describir el aprendizaje como acoplamiento progresivo entre significados personales e institucionales [12]

Debido al rol preponderante que juegan los objetos matemáticos, el EOS considera que el problema epistémico-cognitivo no puede desligarse del ontológico. Así, la tipología de objetos primarios, está constituida por:

- Situaciones-problemas: aplicaciones extra-matemáticas, ejercicios.
- Elementos lingüísticos: términos, expresiones, notaciones, gráficos, en diversos registros (escrito, oral, etc.)
- Conceptos- definiciones: introducidos mediante definiciones o descripciones.
- Proposiciones o propiedades: enunciados sobre conceptos.
- Procedimientos: algoritmos, operaciones, técnicas de cálculo.
- Argumentos: enunciados usados para validar o explicar las proposiciones y procedimientos (deductivos o de otro tipo).

Las seis entidades primarias postuladas no son objetos aislados sino que se vinculan entre sí: las situaciones-problemas son el origen y motivación de la actividad, el lenguaje actúa como soporte para representar a las restantes entidades y sirve de instrumento para la acción, los argumentos justifican los procedimientos y las proposiciones que, conjuntamente con las definiciones, resuelven las situaciones-problemas. Estas relaciones entre los objetos primarios determinan las configuraciones (Figura 1), definidas por Godino, Batanero y Font [12] como "las redes de objetos intervinientes y emergentes de los sistemas de prácticas y las relaciones que se establecen entre los mismos" (p. 8). En los casos en que estas redes se refieren a acciones representativas de la institución y acordes a ella, se denominan configuraciones epistémicas. Paralelamente, las configuraciones cognitivas, son aquellas que describen los sistemas de prácticas personales [12] Tanto los sistemas de prácticas como las configuraciones (epistémicas y cognitivas) se proponen como herramientas teóricas para describir los conocimientos matemáticos, en su doble versión, institucional y personal [10]

Fig. 1. Componentes de una configuración epistémica/cognitiva
Font y Godino, 2006

En este contexto, este trabajo pretende categorizar los significados personales de los estudiantes de ingeniería de la Universidad Nacional de Mar del Plata en niveles de alfabetización estadística. Para ello, se presenta un problema donde el estudiante parte del conocimiento de los valores de la media, mediana, moda y tercer cuartil para que, con la interpretación de cada una de estas medidas, acceda a la recuperación de los datos y pueda analizar en forma gráfica y analítica la distribución de los mismos en cuanto a su forma y su variabilidad.

Posteriormente, se analizan los significados personales de los estudiantes verificando si lograron desarrollar las habilidades estadísticas del modelo de Gal, para establecer los niveles de alfabetización estadística alcanzados por los estudiantes.

2 Metodología

Se administró un problema con cinco preguntas a 187 estudiantes de la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional de Mar del Plata, para evaluar significados personales correspondientes a la unidad de Estadística Descriptiva y, a partir de ellos, establecer niveles de alfabetización estadística en los estudiantes. Para el análisis de los significados personales, se construyó una configuración epistémica del problema, es decir, se describieron los objetos primarios intervinientes: situación problema, lenguaje, definiciones, propiedades, procedimientos y argumentos. Para clasificar los niveles mencionados en los estudiantes, se consideraron los significados personales en términos de habilidades, según la clasificación que proponen Ben-Zvi y Garfield [5] integrada al modelo de enseñanza de la Estadística que propone Gal [9]. La descripción de la configuración epistémica comienza en el apartado siguiente con el problema presentado a los estudiantes.

2.1 Configuración epistémica

2.1.1 Situación problema

A partir de los ocho resultados de una muestra aleatoria, correspondientes a un examen de ingreso administrado a los aspirantes de cierta facultad, se obtuvo la información siguiente: media = 5; mediana Me= 4,5; Moda =3,5 Tercer cuartil Q_3= 6,5 Rango intercuartílico =3 y rango = 9. Además $x_1 < x_2 = x_3 = x_4 < x_5 = x_6 < x_7 < x_8$

a) ¿Qué significa, en términos de la variable, que la Me = 4,5 y que el Q_3= 6,5? Plantear las ecuaciones correspondientes para recuperar todos los valores numéricos desde x_1 hasta x_8 ambos inclusive, en esta serie simple.
b) Hallar el Cv.
c) ¿Existen valores atípicos? Justifique con el gráfico correspondiente.
d) Analizar la simetría y la variabilidad de los datos en forma gráfica y analítica.
e) ¿Es la media o la mediana representativa de estos 8 datos? Justifique.

2.1.2 Lenguaje

Media ($\bar{x}$), Mediana (Me), Moda (Mo), Dispersión muestral (S), Coeficiente de variación (Cv= S / $\bar{x}$),

1er cuartil (Q_1), 3er cuartil (Q_3), Rango ($X_{máx}$ - $X_{mín}$) , Rango intercuartílico (Q_3- Q_1),
Coeficiente de asimetría (As = ($\bar{x}$ - Me)/S),
Límites para determinar valores atípicos: Q_1 -1,5(Q_3-Q_1) y Q_3 +1,5(Q_3-Q_1)
Diagrama de caja.
Histograma.

2.1.3 Definiciones

Media ($\bar{x}$), es el promedio aritmético de los valores de la variable.
Mediana (Me), es el valor central de un conjunto ordenado de datos.
Moda (Mo), es el valor de la variable que más se repite.
Dispersión muestral (S), es la raíz cuadrada del cociente entre de la suma de los cuadrados de los desvíos x_i- $\bar{x}$ y n-1, siendo n el tamaño de la muestra.
Coeficiente de variación (Cv= S / $\bar{x}$), es el cociente entre la dispersión muestral y la media.
1er cuartil (Q_1), es el valor de la variable que separa los datos ordenados dejando a la izquierda, el 25 % de los datos, y a la derecha, el 75 %.
3er cuartil (Q_3), es el valor de la variable que separa los datos ordenados dejando a la izquierda, el 75 % de los datos, y a la derecha, el 25 %.
Rango (R = $X_{máx}$ - $X_{mín}$), es la diferencia entre el valor máximo y el valor mínimo de la variable.
Rango intercuartílico (RIC= Q_3- Q_1), es la diferencia entre el tercer cuartil y el primero.
Coeficiente de asimetría: As = ($\bar{x}$ - Me)/S, es el cociente entre la diferencia de la media y la mediana y la dispersión.
Límites para determinar valores atípicos: A partir de los extremos de la caja, dados por los cuartiles, para el límite inferior, se resta una vez y media el rango intercuartílico, desde el primer cuartil: Q_1 -1,5(Q_3-Q_1) y para el límite superior, se suma al tercer cuartil una vez y media el rango intercuartílico: Q_3 +1,5(Q_3-Q_1)
Distribución simétrica: Media, mediana y moda coinciden o el coeficiente de asimetría es cero.
Distribución asimétrica positiva; el coeficiente de asimetría es positivo.
Distribución asimétrica negativa: el coeficiente de asimetría es negativo.

2.1.4 Propiedades

Relaciones entre la media, la mediana y la moda y la forma de la distribución de los datos.
Relación entre el coeficiente de variabilidad y la variabilidad de los datos.

2.1.5 Procedimientos

Interpretación del significado de la mediana y del 3er cuartil en el contexto de los datos.
Uso de la definición de moda para hallar x_2, x_3 y x_4
Uso del cálculo de la mediana para ocho datos sin agrupar para obtener x_5 reemplazando el valor de x_4
Obtención del valor x_6 a partir de la ecuación del enunciado $x_5 = x_6$
Uso del cálculo del 3er cuartil para ocho datos sin agrupar para obtener x_7 reemplazando el valor de x_6
Uso de la definición de rango para expresar la relación entre el máximo y el mínimo.
Uso del cálculo de la media para reemplazar la información obtenida de los datos anteriores y hallar el mínimo y máximo.
Cálculo de la dispersión muestral
Cálculo del coeficiente de variabilidad
Uso del dato del Rango intercuartílico para hallar Q_1 o aplicación del cálculo del Q_1 para los 8 datos sin agrupar.
Representación de un diagrama de caja
Identificación de valores atípicos en el diagrama de caja a través del cálculo de los límites Q_1 -1,5.(Q_3-Q_1) y Q_3 +1,5.(Q_3-Q_1) y su comparación respectiva con el mínimo y el máximo de los datos.
Clasificación de la forma de la distribución en forma gráfica y analítica a través del coeficiente de asimetría.
Análisis de la variabilidad de los datos en forma gráfica y analítica utilizando el coeficiente de variabilidad.
Elección de medidas que resuman datos a partir del análisis de la forma y de la variabilidad de los mismos.

2.1.6 Argumentos

Si la Me= 4,5; significa que el 50 % de las calificaciones con menor puntaje de los estudiantes, obtuvo 4,5 puntos como calificación máxima. O también el 50 % de las calificaciones con mayor puntaje de los estudiantes, obtuvo 4,5 puntos como calificación mínima.

Si el Q_3=6,5; significa que el 75 % de las calificaciones con menor puntaje de los estudiantes, obtuvo 6,5 puntos como calificación máxima. O también, el 25 % de las calificaciones con mayor puntaje de los estudiantes, obtuvo 6,5 puntos como calificación mínima.

Dado que, $x_2 = x_3 = x_4$ y la Mo=3,5 entonces $x_2 = x_3 = x_4 = 3,5$

Por ser n=8 una cantidad de datos par, y Me=4,5 entonces $(x_4+x_5)/2=4,5$. Luego $x_4 + x_5 = 9$.

Además $x_2 = x_3 = x_4 = 3,5$ porque la Moda es 3,5. Se reemplaza el valor de $x_4=3,5$ en $x_4 + x_5 = 9$ y se obtiene el valor de $x_5=5,5$

Si $x_5 = x_6$ y $x_5=5,5$ entonces $x_6=5,5$

Si Q_3= 6,5 entonces $(x_6 + x_7)/2= 6,5$ luego $x_6 + x_7 = 13$ y $x_6=5,5$ entonces $x_7 = 7,5$

Si la media es 5 entonces $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6+x_7+x_8=5.8$ y se reemplazan en esa ecuación los valores hallados utilizando además la definición del rango $=x_8-x_1=9$ para reemplazar x_8 como $x_8= 9- x_1$

De la ecuación del rango, se obtiene $x_8= 10$ porque el valor de x_1 en la ecuación anterior es $x_{1=}1$

Luego, los valores obtenidos son: $x_1= 1$ $x_2= 3,5$ $x_3= 3,5$ $x_4= 3,5$ $x_5 = 5,5$ $x_6 =5,5$ $x_7 = 7,5$ $x_8 = 10$

Si $S = ((1-5)^2 + 3.(3,5-5)^2+2.(5,5-5)^2+(7,5-5)^2+(10-5)^2)^{1/2} / (8-1)^{1/2} = 2,79$ entonces $Cv = S / \bar{x} = 2,79 / 5 = 0,558$

Todos los valores de la variable (las calificaciones) se encuentran dentro de la franja determinada por los límites $Q_1 -1,5(Q_3-Q_1)$ y $Q_3 +1,5(Q_3-Q_1)$ Esto significa que no existen valores atípicos.

En forma analítica: El coeficiente $As = (\bar{x} –Me)/S = (5 - 4,5)/7,29 > 0$ entonces la distribución es Asimétrica hacia derecha o positiva

El coeficiente de variabilidad Cv = 0,558 > 0,30. Se tomó este valor 0,3 de referencia para indicar que existe mucha variabilidad en los datos.

En forma gráfica: Son pocos datos para agruparlos por intervalos y construir un histograma, pero al ser una variable continua, puede graficarse la distribución de los datos en forma aproximada con una curva suavizada que ubique la media, la mediana y la moda en el eje horizontal, considerando el máximo en la frecuencia correspondiente a la moda. La mediana, por definición, es ubicada en el valor central y la media, en el sesgo, (es en la cola de la distribución) por ser desplazada del centro de los datos por los valores extremos hacia la derecha de la mediana.

Se clasifica el tipo de asimetría, en este caso, positiva y de acuerdo al rango y a la mayor frecuencia, se observa la variabilidad. Cuanto más “aplanada” es la curva, se tiene mayor variabilidad.

Otra manera de analizar en forma gráfica la simetría y variabilidad, es a partir del diagrama de caja.

Se analiza la simetría con la ubicación de la mediana en la caja y se compara la longitud de los bigotes entre sí.

Para la variabilidad, se compara la longitud de la caja con el rango y la longitud de los bigotes.

Ni la media ni la mediana son representativas de los datos porque el coeficiente de variación es mayor que el 0,30.

2.2 Habilidades consideradas para la clasificación de niveles de alfabetización estadística, según el modelo de Gal (2004)

La componente disposicional, que define Gal, tiene que ver con las creencias y actitudes de los estudiantes, no fue contemplada en este trabajo, pero sí la componente de conocimiento, que está codificada de la siguiente manera: H_1: habilidades de alfabetización, H_2: conocimiento estadístico, H_3: conocimiento matemático, H_4: contexto de conocimiento y H_5: habilidades críticas.

A las habilidades de alfabetización estadística (H_1) se las desagrega según la definición dada en la introducción respecto de la alfabetización estadística, referida a la lectura e interpretación básica de la información y de los resultados: H_{11}: Organizar datos, construir y presentar tablas y trabajar con distintas representaciones de datos. H_{12}: Comprensión básica de conceptos, vocabulario y símbolos.

El conocimiento estadístico (H_2) está dado por el razonamiento estadístico, es decir, por cómo razonar y dar sentido a la información estadística. En esta habilidad no fue considerado el pensamiento estadístico, ya que no se pretende formar habilidades de estadísticos profesionales, sino formar en habilidades requeridas al futuro ingeniero, como la toma de decisiones frente a la incertidumbre. En consecuencia, al desagregar el conocimiento estadístico (H_2), se estudiaron H_{21}: Realizar interpretaciones basadas en un conjunto de datos, representar o resumir datos, H_{22}: Efectuar relaciones entre conceptos, y H_{23}: Interpretar, de manera global, los resultados estadísticos.

En este trabajo se asume que H_4: (contexto de conocimiento) está considerada en H_{21}: (Realizar interpretaciones basadas en un conjunto de datos, representar o resumir datos) y en H_{22}: Efectuar relaciones entre conceptos. Las habilidades H_5 (habilidades críticas) están contempladas en H_{23}: Interpretar, de manera global, los resultados estadísticos. Toda esta categorización se muestra en la Tabla 1, que vincula los niveles de alfabetización estadística, dados por las habilidades mencionadas, con las prácticas matemáticas evaluadas, clasificadas por los ejercicios a resolver.

Tabla 1. Clasificación de las prácticas matemáticas evaluadas según los niveles de alfabetización estadística considerados en la clasificación de habilidades inspiradas en el modelo de enseñanza de Gal (2004)

Niveles de Alfabetización Estadística	Habilidades	Prácticas matemáticas evaluadas a través de los ejercicios
Nivel I	H_{11} , H_{12} y H_3	a y b
Nivel II	$H_{21} = H_4$, H_{22} y H_3	c y d
Nivel III	$H_{23} = H_5$ y H_3	e

2.3 Puntaje asignado según el desarrollo de las habilidades logradas en la resolución de los ejercicios

Se asignó 4 puntos a cada ejercicio resuelto correctamente, 3 puntos, si faltó completar alguna actividad en la resolución, 2 puntos si resolvieron correctamente la mitad de lo solicitado, 1 punto si resuelven bien una cuarta parte de lo pedido y 0 punto, si no resuelven o no interpretan lo pedido en la resolución.

3 Análisis de los resultados

Para el análisis de los resultados de las producciones de los estudiantes, se obtuvo el porcentaje de cada uno de los puntajes obtenidos en cada uno de los ejercicios. Este cálculo permitió clasificar las habilidades logradas por los estudiantes en los distintos niveles considerados: I, II y III. La Tabla 2 muestra el porcentaje de estudiantes según los puntajes obtenidos en cada uno de los ejercicios a, b, c, d y e

Tabla 2. Porcentaje de estudiantes según los puntajes obtenidos en cada uno de los ejercicios

Puntaje	a	b	c	d	e
4	12,3	34,8	7,5	19,8	26,7
3	11,2	8,0	2,1	3,2	1,6
2	29,4	4,8	19,8	26,2	5,3
1	18,7	2,7	4,8	3,7	0,5
0	28,3	49,7	65,8	47,1	65,8
Porcentajes	100	100	100	100	100

Ejercicio "a"

Para lograr el puntaje máximo de 4 puntos, el estudiante debía recuperar los ocho datos y para ello aplicar definiciones e interpretaciones de la mediana y del tercer cuartil. Sólo el 12,3 % de los estudiantes mostraron estas habilidades (H_{11} H_{12} y H_3) y se ubicaron en el Nivel I.
La mayoría de las respuestas, casi el 30 %, de los estudiantes, obtuvo 2 puntos. Significa que estos estudiantes o bien recuperaron todos los datos o interpretaron estas medidas, pero no simultáneamente. Casi otro 30 % ni siquiera pudo plantear un sistema de ecuaciones lineales de 8 ecuaciones con 8 incógnitas a partir de las definiciones de las medidas. No desarrollaron H_3, (el conocimiento matemático contenido en cada habilidad) ni H_{11} (trabajar con distintas representaciones de datos.)

Ejercicio "b"

Casi la mitad de los estudiantes obtuvo cero puntos. Confundieron el cálculo de la dispersión muestral con la dispersión poblacional, otros invirtieron el cociente del coeficiente de variabilidad, y aunque no se pedía interpretación, sólo el 35 % respondió correctamente ubicándose en el Nivel I.

Ejercicio "c"

El 66 % de los estudiantes obtuvo cero puntos. La dificultad se evidenció en no poder construir el diagrama de caja correctamente o bien en no conocer los límites que determinan la franja que ubica la zona de los valores atípicos. Sólo el 7,5 % de los estudiantes se ubicaron en el Nivel II con esta práctica matemática.

Ejercicio "d"

Casi el 20 % de los estudiantes alcanzó el Nivel II en esta práctica matemática. Debían analizar simetría y variabilidad. El 26 % analizó sólo una y casi la otra mitad de los estudiantes no pudo efectuar el análisis.

Ejercicio "e"

El 66 % de los estudiantes no contestó o no pudo decidir qué medida resume un conjunto de datos, conozcan o no la forma de su distribución y su coeficiente de variabilidad. El 26 % responde correctamente y se ubica en el Nivel III al mostrar haber adquirido habilidades críticas (H_{23}: Interpretar, de manera global, los resultados estadísticos).
La Tabla 3 muestra los niveles alcanzados por los estudiantes al agrupar los porcentajes de estudiantes que resolvieron correctamente los ejercicios que corresponden al mismo nivel de alfabetización estadística.

Tabla 3. Niveles de alfabetización estadística alcanzados por los estudiantes

Niveles de Alfabetización Estadística	Habilidades	Porcentaje de estudiantes que evidenciaron desarrollar estas habilidades
Nivel I	H_{11} , H_{12} y H_3	47 %
Nivel II	$H_{21} = H_4$, H_{22} y H_3	27 %
Nivel III	$H_{23} = H_5$ y H_3	26 %

4 Conclusiones y trabajos futuros

En este trabajo se presentó una categorización de los significados personales de los estudiantes de ingeniería en niveles de alfabetización estadística, a través de un problema inverso. A partir de las medidas tendencia central dadas, los estudiantes debieron recuperar los datos, aplicando no sólo cada una de las definiciones de estas medidas para obtenerlos, sino también asignar a cada medida un significado en el contexto del problema. Estas habilidades pertenecían al primer nivel de alfabetización estadística considerado y la sorpresa fue detectar que casi la mitad de los estudiantes no pudieran resolver un sistema de ecuaciones lineales de ocho ecuaciones con ocho incógnitas. Este hecho plantea detectar si la falla se originó por encontrar la información en un contexto diferente al que están acostumbrados cuando resuelven sistemas de ecuaciones, o al no poder interpretar el significado de las medidas dadas para la recuperación de los datos.

Sin embargo, si se agrupan los porcentajes de estudiantes que evidenciaron haber desarrollado las habilidades cognitivas más complejas, puede observarse que superó al porcentaje del nivel I.

Si bien se establecieron tres niveles de alfabetización estadística acordes a la formación del ingeniero, ya que la toma de decisiones en situaciones de incertidumbre es parte de su trabajo profesional, es necesario seguir trabajando para la formación de habilidades de análisis que desarrollen no sólo el sentido crítico, sino también promover los modos fundamentales de razonamiento estadístico tal como lo expresan Pfannkuch y Wild [4], es necesario plantear actividades que le permitan al estudiante al reconocer la necesidad de los datos, también considerar la transnumeración, que contribuye a la comprensión que surge al cambiar la representación de los datos. Además tener en cuenta la percepción y la comprensión de la variación, el razonamiento con modelos estadísticos y lograr integrar la estadística y el contexto. Esta capacidad es un componente esencial del razonamiento estadístico porque aparece con el planteamiento del modelo al principio y final, con la interpretación del modelo en la realidad en las etapas de modelización.

Proponer problemas de ingeniería que requiera del análisis de datos para su resolución, es una estrategia central para el desarrollo de estas habilidades. Una enseñanza de la estadística que plantee proyectos de análisis de datos puede no sólo superar las dificultades encontradas, sino también vincular al estudiante con problemas afines a su profesión que desarrolle las habilidades cognitivas de mayor nivel de alfabetización estadística.

Referencias

1 Batanero, C.:Sentido Estadístico: Componentes y desarrollo. *I Jornadas virtuales en Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria*. (2013). http://www.ugr.es/~batanero/pages/ARTICULOS/Sentidoestad%C3%ADstico.pdf Accedido el 10 de junio de 2018

2 Batanero, C.; Godino, J.; Green, D.; Holmes, P.; Vallecillos, A.: Errors and difficulties in understanding statistical concepts. *International Journal of Mathematics Education in Science and Technology*, Vol. 25, No. 4, pp.527-547 (1994)

3 Curcio, F.: Developing graph comprehension. *National Council of Teachers of Mathematics*, Reston, VA. (1989)

4 Wild, C.; Pfannkuch, M.: Statistical thinking in empirical enquiry. *International Statistical Review*, Vol. 67, No 3, pp.221-248 (1999)

5 Ben-Zvi, D.; Garfield, J.: Statistical Literacy, Reasoning and Thinking: goals, definitions and challenges. En Ben-Zvi, D. y Garfield, J. (eds.): *The challenge of developing statistical literacy, reasoning and thinking,* pp. 3-15 (2004)

6 Batanero, C.: Los retos de la Cultura Estadística. *Jornadas Interamericanas de enseñanza de la estadística.* Buenos Aires. Conferencia Inaugural (2002). http://www.ugr.es/~batanero/pages/ARTICULOS/CULTURA.pdf Accedido el 10 de junio de 2018

7 Gal, I.: Adult's statistical literacy: Meaning, components, responsibilities. *International Statistical Review* Vol. 70, No. 1, pp.2-3 (2002)

8 Tauber, L.: Análisis de elementos básicos de alfabetización estadística en tareas de interpretación de gráficos y tablas descriptivas. *Ciencias Económicas*. *Investigación* Vol. 8, No 1, pp. 53-74 (2010)

9 Gal, I.: Statistical Literacy: meanings, components, responsibilities. En: D. Ben-Zvi y J. Garfield (eds.), *The challenge of developing statistical literacy, reasoning and thinking*, pp. 47–78 (2004)

10 Godino, J.; Batanero, C: Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol. 14, No. 3, pp.325-355 (1994)

11 Godino, J.; Contreras, A.; Font, V.: Análisis de procesos de instrucción basado en el enfoque ontológico semiótico de la cognición matemática. Recherches en Didactique des Mathématiques, Vol. 26, No.1, pp. 39-88 (2006).

12 Godino, J.; Batanero, C.; Font, V.: U*n enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática* (2009) Versión ampliada del artículo The onto-semiotic approach to research in mathematics education. ZDM. The International Journal on Mathematics Education, Vol. 39, No.1-2, pp. 127-135 (2007) http://die.udistrital.edu.co/sites/default/files/doctorado_ud/publicaciones/parte_i_un_enfoque_ontosemiotico_del_conocimiento_y_instruccion_matematica.pdf Accedido el 20 de mayo de 2018.

Rendimiento Matemático y Autoconcepto, un Modelo Explicativo

Antonio Humberto Closas, Edgardo Alberto Arriola, Mariela Rosana Amarilla, Ethel Carina Jovanovich
Grupo de Investigación Educativa sobre Ingeniería, Facultad Regional Resistencia, Universidad Tecnológica Nacional
French 414, Resistencia (H3500CHJ), Chaco, Argentina
hclosas@hotmail.com, earriola2006@yahoo.com.ar, prof.mariela@live.com.ar, carijovanovich@yahoo.com.ar

Resumen. El objetivo principal de este estudio fue desarrollar un modelo de regresión logística que permita explicar de qué manera distintas áreas del constructo autoconcepto se relacionan con los resultados matemáticos. La muestra estuvo compuesta por 152 jóvenes, pertenecientes a la FRRe-UTN, con una media de 19.63 años (*DE* = 1.48). La investigación responde a un diseño explicativo, de estilo descriptivo mediante encuesta, de línea cuantitativa y de corte transversal. Se utilizó el test "Autoconcepto Forma 5", conformado por 30 preguntas, organizadas en seis (6) ítems para cada una de las cinco (5) áreas consideradas (*Académica*, *Social*, *Emocional*, *Familiar* y *Física*). En la etapa empírica, los análisis estadísticos implementados, permitieron conocer ciertas características de las dimensiones de la prueba, los índices de consistencia interna de las diferentes áreas y del instrumento en su conjunto, así como determinar el modelo logístico que mejor se ajusta a los datos muestrales.

Palabras Clave: Rendimiento matemático, Dimensiones del autoconcepto, Estudiantes universitarios, Regresión logística, Curva ROC.

1 Introducción

1.1 Problemática y planteamiento

En líneas generales, la diferencia entre la formación matemática que los alumnos poseen al llegar a la Universidad y los conocimientos que en esta área son requeridos, es un hecho que ha sido observado y comprobado en reiteradas ocasiones, de diversas maneras y en distintos contextos. Por cierto, los estudiantes de los primeros años de las asignaturas de este campo disciplinar en las carreras de Ingeniería que se imparten en la Facultad Regional Resistencia (FRRe) de la Universidad Tecnológica Nacional (UTN), no son la excepción y la afirmación realizada se ajusta plenamente a este conjunto de jóvenes universitarios.
Si bien la distancia a la que se hace referencia se debe a diferentes motivos –en razón de que el individuo es el resultado de múltiples factores tanto genéticos como ambientales, los cuales se encuentran con frecuencia estrechamente relacionados y en complejas interacciones–, existe entre ellos un aspecto particular en torno al cual girará el desarrollo de nuestra investigación. En efecto, la variable a la que hacemos referencia es el *autoconcepto*; es decir, la percepción que una persona tiene respecto de sí misma. Este conjunto de características físicas, intelectuales, afectivas, sociales, etc., que conforman la imagen que poseemos acerca de nosotros mismos, presenta en principio cierta relevancia en los resultados cognitivos y laborales, entre otros, que los sujetos obtienen en sus tareas habituales.
Con el fin de explicar de la mejor forma posible –tanto conceptual como técnica– de qué manera el constructo teórico objeto de interés influye en los resultados académicos, nos hemos planteado como *objetivo* en este trabajo desarrollar un modelo de regresión logística en el que la variable criterio sea, ciertamente, el *rendimiento matemático* (medido a través de las calificaciones obtenidas en la asignatura Análisis Matemático I de carreras de Ingeniería de la FRRe-UTN), mientras que las variables predictoras sean distintas dimensiones del factor autoconcepto. En la fase empírica de esta investigación, el instrumento de medición que se aplicó a los sujetos de la muestra para medir las variables explicativas de la ecuación de regresión, fue el test "Autoconcepto Forma 5", elaborado por García y Musitu [1], conformado por treinta (30) preguntas, organizadas en seis (6) ítems para cada una de las cinco (5) áreas consideradas (*Académica*, *Social*, *Emocional*, *Familiar* y *Física*).
Recoger, observar y analizar los datos que deriven de la aplicación del instrumento señalado en el ámbito antes referido, genera ciertamente la posibilidad de contar con información directa del espacio académico de la muestra. Este hecho es, sin duda, relevante puesto que permitirá adoptar decisiones más ajustadas o brindar explicaciones de mayor eficiencia y eficacia con el objeto de mejorar los resultados educativos.

1.2 Consideraciones sobre autoconcepto y rendimiento académico

Como suele ocurrir con muchos otros términos, existen diferentes significados, conceptualizaciones y descripciones relacionadas con el constructo bajo estudio. Así, en el diccionario de la Real Academia Española [2], la definición sobre *autoconcepto* indica que es la "opinión que una persona tiene sobre sí misma, que lleva asociado un juicio de valor".

A su vez, de acuerdo con el diccionario Akal de Psicología [3], la noción de *autoconcepto* consiste en una "representación de sí en el sistema de conocimientos del individuo. Esta representación es equivalente a una estructura cognitiva probablemente compleja que interviene en el tratamiento de las informaciones procedentes del entorno social del individuo o de su propio comportamiento. La misma está hecha de un conjunto de metaconocimientos funcionales y de conocimientos factuales que se encuentran activados por determinados aspectos sobresalientes del entorno o del comportamiento. El autoconcepto sirve para organizar la información nueva que se refiere al sí. Implica reglas de inferencia, juicio, ciframiento, recuperación en la memoria de estas informaciones, así como de predicción y planificación de comportamientos por venir" (p. 69).

Diversos autores se han ocupado del vocablo y de la problemática objeto de este trabajo. Así por ejemplo, Burns [4] define el autoconcepto como la percepción que el sujeto tiene de sí mismo; está basado en las experiencias individuales y sociales y en las atribuciones que se otorgan a la propia conducta; incluye actitudes, sentimientos, apariencias, aceptación social y capacidades cognitivas. Es considerada como una de las variables personales que mayor influencia tendría, tanto directa como indirectamente, en el rendimiento académico.

El interés por el autoconcepto, ha estado presente desde hace tiempo en el psicoanálisis, el conductismo, las teorías del aprendizaje social, la psicología cognitiva y la psicología humanística; también en el campo de la psicología aplicada: clínica, educativa y social [5].

En la década de los sesenta, los modelos del autoconcepto eran típicamente de naturaleza unidimensional; es decir, se consideraba que el autoconcepto era un constructo unitario que podía ser evaluado presentando a niños o adolescentes ítems que reflejaran su autoconcepto global a través de múltiples contextos. Posteriormente, en los años ochenta las investigaciones abandonaron este enfoque unidimensional y desarrollaron un modelo multidimensional propuesto por Shavelson, Hubner y Stanton [6].

En este modelo distinguen un autoconcepto general que se subdivide en académico (Idiomas, Historia, Matemáticas y Ciencias) y no académico (estados emocionales particulares), y físico (habilidad y apariencia física). Este modelo propone que el autoconcepto pueda ser evaluado utilizando instrumentos que midan cada una de las áreas por separado [7].

El autoconcepto académico, según sostiene Marsh [8], debe ser entendido como la concepción que tiene el estudiante de su capacidad para aprender y rendir en las tareas escolares. La bibliografía científica lo valora como una condición necesaria pero no suficiente para un adecuado rendimiento. Respecto del autoconcepto no académico, algunos autores [6] expresan que se configura por componentes emocionales –son los más subjetivos e internos–, sociales –relacionados con el significado que la conducta del individuo tiene para los demás–, y físicos –en los que tienen una incidencia fundamental las actitudes y apariencia general del individuo–.

En este trabajo se estudiará el autoconcepto a partir de las dimensiones: académica, social, emocional, familiar y física, las cuales brevemente pasamos a describir, a partir de García y Musitu [1]. Sin embargo, no se debe soslayar que según estos autores los indicadores del autoconcepto académico y del autoconcepto social son las dos áreas que mejor explican –18.7% y 10.2% de la varianza, respectivamente– el autoconcepto general.

Académica: se refiere a la percepción que el sujeto tiene de la calidad del desempeño de su rol como estudiante.

Social: es la opinión que tiene el individuo de su desempeño en las relaciones sociales.

Emocional: hace referencia a la apreciación que una persona realiza respecto de su estado emocional y de sus respuestas a situaciones específicas, con cierto grado de compromiso e implicación en su vida cotidiana.

Familiar: está asociado a la consideración que tiene el sujeto de su implicación, participación e integración en el medio familiar.

Físico: este factor se vincula con la creencia que tiene el individuo de su aspecto físico y de su condición física.

Los estudios sobre autoconcepto han demostrado que este constructo constituye uno de los más importantes y significativos reguladores de la conducta humana [9] [10]. No obstante, hay dificultades para establecer la naturaleza de la relación y para identificarla. De acuerdo con Markus y Wurf [11] el inconveniente con el que nos encontramos en el momento de identificar la influencia del autoconcepto en la conducta del individuo radica también, en estimar qué otros factores influyen en la conducta, además del autoconcepto.

En particular, respecto a la relación causal entre el autoconcepto y el rendimiento académico, los resultados de investigaciones realizadas no aportan evidencia definitiva sobre la naturaleza exacta de la dirección del vínculo que une a estas dos variables. En efecto, Núñez y González-Pienda [12] distinguen cuatro patrones o modelos de causalidad entre ambos constructos. En primer lugar, el rendimiento académico como determinante del autoconcepto; en segundo término, los niveles del autoconcepto como determinantes del grado de logro académico; en tercer orden, autoconcepto y rendimiento académico se influyen y determinan mutuamente; por último, terceras variables pueden ser la causa tanto del autoconcepto como del rendimiento académico.

Evidentemente, conocer y estudiar las variables que inciden en los resultados en Matemática es una labor estratégica puesto que dará lugar a proponer acciones que permitan mejorar la enseñanza de esta materia en los distintos niveles educativos. En este contexto, el objeto principal del presente estudio reside en elaborar un modelo que permita explicar de qué manera la imagen que los estudiantes tienen de sí mismos, en las distintas dimensiones que se analizan, influye en el rendimiento matemático.

2 Materiales y Métodos

2.1 Participantes

Debido a que nuestro interés radica en trabajar con una muestra en la cual su unidad se encuentre formada por la totalidad de los estudiantes que componen una entidad con definida personalidad como es el grupo-clase, hemos considerado adecuado –luego de estratificar la población en estudio (los estratos estuvieron representados por los turnos de clase, mañana y tarde)– apelar al método de muestreo por conglomerados (las comisiones de estudio integraban los conglomerados). Por otra parte, en virtud de que nuestra intención reside en trabajar con grupos aleatorios de alumnos, la elección final de los mismos se realizó al azar. Resumiendo, podemos decir que en el procedimiento utilizado para extraer la muestra hemos combinado los métodos estratificado, por conglomerados y aleatorio simple, para identificar y seleccionar las unidades respectivamente.

En concreto la muestra elegida estuvo conformada por 152 jóvenes (114 mujeres, 75% y 38 hombres, 25%), pertenecientes a las tres carreras de Ingeniería (Sistemas de Información, Electromecánica y Química) que se imparten en la FRRe de la UTN. La edad media de los estudiantes que respondieron los ítems de la prueba fue de 19.63 años (*DE* = 1.48). Algunas de las características de la muestra utilizada en esta investigación, se ilustran en la Tabla 1.

Tabla 1. Detalles relativos a la muestra empleada en la etapa empírica del estudio.

Turno	Carrera	Alumnos	Edad
Mañana y Tarde	Ingeniería en Sistemas de Información	n = 52 (34.21%) (40 m, 26.32% – 12 h, 07.89%)	*Mín.* = 18 *Máx.* = 24 *M* = 19.52 *DE* = 1.36
Mañana y Tarde	Ingeniería Electromecánica	n = 56 (36.84%) (49 m, 32.24% – 07 h, 4.60%)	*Mín.* = 18 *Máx.* = 24 *M* = 20.09 *DE* = 1.55
Mañana	Ingeniería Química	n = 44 (28.95%) (25 m, 16.45% – 19 h, 12.50%)	*Mín.* = 18 *Máx.* = 24 *M* = 19.16 *DE* = 1.38
Muestra: N = 152 (114 m, 75% – 38 h, 25%) Edad: *Mín.* = 18, *Máx.* = 24, *M* = 19.63, *DE* = 1.48			

2.2 Diseño

Esta investigación, inicialmente de naturaleza *no experimental*, puede considerarse en una segunda etapa también *explicativa*, en razón del objetivo que se pretende lograr. Si consideramos como criterio el tipo de información que se proporcionará y el modo de recogerla, el diseño es de estilo *descriptivo mediante encuesta*.

Por otra parte, en atención a la forma de administrar el instrumento de medición, en este estudio empleamos la *técnica del cuestionario*. A su vez, si tenemos en cuenta el marco donde se lleva a cabo, estaríamos hablando de una *investigación de campo*. Además, en razón de cómo se miden y analizan los datos, es una investigación de línea *cuantitativa*. Teniendo en cuenta la instancia de recolección de la información, este trabajo revela una estrategia de corte *transversal*. Dado que no existe manejo experimental de las variables explicativas, ni procedimientos de control de las extrañas –excepto el llamado control estadístico–, el diseño de esta investigación es de carácter correlacional.

En líneas generales, desde el ámbito de la confrontación teórica-empírica, podríamos señalar que la investigación responde a un proceso de carácter hipotético-deductivo, puesto que pretendemos comprobar si la conceptualización teórica de la cual partimos se ajusta a la realidad objeto de estudio, a través de la recolección de datos y su posterior análisis estadístico.

2.3 Procedimiento

Una vez seleccionada la muestra, la recolección de los datos se llevó a cabo, en cada uno de los grupos-clase, en una única instancia. En primer lugar se les informó a los alumnos participantes que la aplicación del instrumento en cuestión respondía a un trabajo de investigación mediante el cual se pretende explicar de qué manera se relacionan distintas áreas del autoconcepto con los resultados educativos. También se les indicó sobre la importancia de responder con sinceridad a los distintos ítems que se plantean, que sus respuestas tendrán un carácter estrictamente confidencial y serán utilizadas sólo con finalidad científica, y que la participación en el estudio era una decisión totalmente voluntaria.

El momento temporal de este proceso fue el mes de agosto de 2017, en el marco de la asignatura Análisis Matemático I, cuyo régimen de cursado es anual. La aplicación del test Autoconcepto Forma 5 la efectuaron los propios profesores, al comienzo de clase y con el margen de tiempo adecuado en virtud de las consultas formuladas en la prueba (20 minutos en promedio).

2.4 Instrumentos

Según ha sido señalado en la sección introductoria, la prueba aplicada se denomina Autoconcepto Forma 5 (AF5) y fue elaborada por García y Musitu [1]. Está compuesta por 30 preguntas agrupadas en 5 dimensiones: académica, social, emocional, familiar y física, acerca de las que nos hemos referido brevemente en el apartado 1.2.

En el test original, la validez discriminante del total de los ítems pudo ser comprobada a través de un grupo de 20 expertos, los mismos tuvieron un porcentaje de acuerdo al clasificar los ítems en las dimensiones del 96%. A su vez, para contrastar empíricamente la validez teórica de los cinco componentes se aplicó el análisis factorial (método de componentes principales y rotación oblicua con normalización de Kaiser, por tratarse de dimensiones relacionadas). La estructura factorial obtenida resultó muy nítida, confirmando satisfactoriamente las dimensiones teóricas.

El instrumento utilizado en esta investigación, tiene las mismas características de aplicación que el AF5 (los 6 ítems que componen cada una de las 5 dimensiones se evalúan en una escala con alternativas de respuesta que van de 1 a 99); su aplicación puede hacerse en forma individual o colectiva, en nuestro caso evidentemente se realizó en forma colectiva.

Con la finalidad de analizar, mediante regresión logística múltiple, las asociaciones entre las escalas de la AF5 y el rendimiento en Matemática hemos utilizado como variable respuesta las notas (promedio de evaluaciones parciales) alcanzadas por los alumnos encuestados en la asignatura Análisis Matemático I, las que fueron obtenidas a partir del Sistema Académico SYSACAD (fuente de información secundaria). Se han seleccionado las calificaciones puesto que son el criterio social y legal del rendimiento en el ámbito de los centros educativos. Por otra parte, es el indicador más utilizado en las investigaciones sobre el tema a pesar de la dispersión o falta de consenso de las diferentes instituciones e incluso entre los profesores de una misma institución.

La variable dependiente del modelo es de tipo continua, sus valores enteros varían entre 1 y 10; en cambio, las variables independientes (dimensiones de la AF5, fuente de información primaria), si bien son continuas, sus valoraciones oscilan entre 0.1 y 9.90).

2.5 Análisis de datos

La evaluación cualitativa del instrumento a utilizar, fue realizada por profesores del Área de Matemática del Departamento de Materias Básicas (FRRe–UTN), en cuanto a los aspectos: a) pertinencia del contenido de los ítems propuestos (indicadores subjetivos de validez), y b) conformación del cuestionario en su conjunto (indicadores de la validez factorial o estructural). Las apreciaciones formuladas por los docentes-investigadores que colaboraron tuvieron una amplia coincidencia en relación con ambos aspectos.

Sin duda, los análisis realizados en la línea de validez cualitativa (juicio de expertos y grado de acuerdo) fueron valiosos, a fin de minimizar los márgenes de error del instrumento de medición al momento de su utilización en nuestro espacio sociocultural.

En segundo término, con la base de datos en formato electrónico, se realizaron diversos análisis estadísticos. Los estudios implementados pertenecientes al dominio de la psicometría (correlación dimensión-total corregida y consistencia interna), también de la estadística descriptiva (algunos estadísticos centrales y de dispersión) e inferencial (análisis correlaciónales bidimensionales, análisis de regresión logística y curva ROC; para las pruebas de hipótesis, como es habitual, utilizamos la medida p-valor).

Los diferentes tratamientos estadísticos indicados en el párrafo anterior permitieron, por un lado, conocer las características y el comportamiento de cada una de las áreas de la prueba utilizada, así como el grado de confiabilidad del instrumento; por otra parte, dieron lugar a determinar la ecuación de predicción que mejor describía la relación entre los cinco tipos de autoconcepto considerados y el rendimiento matemático. En todos los casos, el procesamiento de los datos fue realizado con ayuda del programa IBM SPSS Statistics 22.

3. Resultados y Discusión

3.1 Estudios de las dimensiones del cuestionario aplicado

Se presentan a continuación, en razón del propósito de esta investigación y de los análisis estadísticos anunciados, de forma sintética los resultados de aquellos indicadores que nos han parecido más convenientes calcular para caracterizar la muestra en el total de la prueba y en las cinco dimensiones que conforman el test aplicado.

En efecto, en la Tabla 2, pueden apreciarse las valoraciones, la media, la desviación estándar, la correlación dimensión-total corregida y el coeficiente alfa de Cronbach. Los dos primeros estadísticos son de mucha utilidad, puesto que cuando se analiza un conjunto de datos numéricos, el conocimiento de ambas medidas ayuda a comprender, entre otras cosas, la distribución de los datos de la muestra. El tercer de los cuatro estadísticos mencionados (correlación dimensión-total corregida), recoge el grado de relación que cada una de las áreas posee con el total de la prueba, lo que puede considerarse un indicador de su grado de discriminación. La fiabilidad es una de las características fundamentales de un test, una de las formas de evaluarla es a través del cuarto estadístico (coeficiente alfa de Cronbach) el cual indica la precisión o estabilidad de los resultados; señala la cuantía en que las medidas de la prueba están libres de errores casuales o aleatorios.

Tabla 2. Estadísticos descriptivos, de correlación y de fiabilidad de las dimensiones de la AF5.

Dimensión	Número de ítems	Valoración	Media	DE	Correlación dimensión-total corregida	α de Cronbach sin la dimensión
Académica	6	Mín. = 1.12 Máx. = 9.63	5.99	1.57	.59	.63
Social	6	Mín. = 1.32 Máx. = 9.90	6.80	1.81	.66	.56
Emocional	6	Mín. = 0.50 Máx. = 9.90	5.77	2.27	.27	.84
Familiar	6	Mín. = 0.18 Máx. = 9.90	8.24	1.70	.41	.72
Física	6	Mín. = 0.42 Máx. = 9.90	5.82	1.96	.65	.57
AF5 (5 Dimensiones): Val. Mín. = 14.51 Val. Máx. = 44.88 Media = 32.62 DE = 5.53 α = .73						

Se destacan a continuación algunos aspectos que surgen de la lectura de los valores que se encuentran en la Tabla 2, obtenidos a partir de los análisis efectuados sobre los datos muestrales.

Comenzamos por señalar que los valores hallados para cada una de las dimensiones, así como para el conjunto de las mismas, en cuanto a valoración, *media* y *desviación típica*, resultaron absolutamente razonables y se encuentran dentro del rango de medidas que se esperaban obtener, en virtud de los antecedentes bibliográficos que fueron consultados sobre el tema (consideramos conveniente mencionar que no se realizaron modificaciones de ningún tipo en el texto de las preguntas, ni en la estructura de la escala original).

En general, las valoraciones en cada una de las áreas muestran *correlaciones corregidas* aceptables con las valoraciones totales en la prueba (sumatoria de los ítems que componen las dimensiones, excluidos aquellos que integran la dimensión cuya asociación se evalúa), puesto que en todos los casos superan el valor de referencia .20 [13], observándose la más alta en la categoría denominada *Social* (.66), aunque seguida muy de cerca por la dimensión *Física* (.65).

Respecto de los indicadores *α de Cronbach cuando se excluye la dimensión*, podemos señalar que los valores que sobresalen corresponden a las mismas áreas, *Social* (.56) y *Física* (.57), citadas anteriormente (en este caso, coeficientes bajos ponen en evidencia el aporte relevante que la dimensión que no participa realiza respecto de la fiabilidad de la prueba). Los valores de *α de Cronbach* hallados son correctos en su totalidad, ya que verifican siempre el criterio de algunos autores de estar en estudios exploratorios al menos entre .50 y .60 [14].

Los indicadores de las dos últimas columnas de la Tabla 2 pertenecen a conceptos estrechamente vinculados, en términos generales, con la confiabilidad del instrumento, que en nuestro estudio resultaron muy coherentes y sencillos de interpretar (valores altos de *correlaciones corregidas* se relacionan con cuantificaciones bajas de *α de Cronbach*).

Para finalizar con este apartado, debemos señalar que la fiabilidad calculada para el conjunto de las cinco dimensiones es aceptable puesto que el coeficiente alfa encontrado (.73) supera el criterio de .70 recomendado [15]. Se recuerda que la fiabilidad, es una característica fundamental en cualquier test, ya que indica la precisión o estabilidad de los resultados; señala la cuantía en que las medidas de la prueba están libres de errores casuales o aleatorios. Asimismo, se considera conveniente mencionar que calcular el coeficiente de fiabilidad en cada nueva muestra, y no apoyarse en la obtenida en otros estudios como aval de la fiabilidad del instrumento, es una de las recomendaciones de la American Psychological Association [16].

3.2 Análisis de relaciones entre las variables objeto de interés

En este apartado llevaremos a cabo análisis relacionales entre las cinco dimensiones que integran la prueba AF5 y la variable rendimiento matemático (los datos de esta variable, originalmente oscilaban entre 1 y 10, fueron recodificados: a las calificaciones entre 1 y 5 se les asignó el valor 1, mientras que a las notas entre 6 y 10 les correspondió el valor 0).

La primera razón por la que se realizan estos estudios radica en el hecho de que los estadísticos que se obtengan permitirán reconocer la presencia o no de asociaciones entre las categorías del instrumento y los resultados académicos, lo que proporcionará un indicio acerca de la validez predictiva del test objeto de interés.

El segundo motivo de los actuales estudios reside en que, en atención al objetivo principal de esta investigación, está previsto obtener un modelo de regresión logística explicativo de las relaciones entre el rendimiento matemático y las dimensiones de la prueba AF5, y es siempre de utilidad examinar previamente las asociaciones que presentan, en esta ocasión, las variables independientes con la variable dependiente.

Tabla 3. Relaciones entre las dimensiones de la prueba AF5 y el rendimiento matemático.

	Académica	**Social**	**Emocional**	**Familiar**	**Física**
Rendimiento matemático	–2.89**	.72	1.16	.55	.60

**p < .01 N = 152

Nota: Para determinar si las distintas áreas del test (variables continuas) se hallaban relacionadas con el rendimiento matemático (variable dicotómica), se realizaron contrastes de hipótesis a través de la prueba T de Sudent.

Respecto de los valores del estadístico t (permite contrastar la hipótesis nula de que el rendimiento es independiente del autoconcepto) entre las dimensiones de la prueba AF5 y el rendimiento matemático, según puede verse en la Tabla 3, de los cinco posibles, sólo uno resultó estadísticamente significativo (α = .01), tal es el caso del correspondiente al autoconcepto Académico (t = –2.89).

Lo destacable de los indicadores obtenidos en esta parte del estudio es que la presunción que teníamos al respecto; esto es, la presencia de asociación entre ambos constructos (autoconcepto y rendimiento), pudo ser empíricamente comprobada. Más precisamente podemos afirmar que en este contexto de análisis estadísticos, se encontraron evidencias suficientes para rechazar la hipótesis nula de que el rendimiento matemático no depende del autoconcepto Académico; de manera que es posible señalar por ahora, que al menos la dimensión mencionada se encuentra efectivamente relacionada con la variable respuesta.

Esta apreciación nos lleva a sostener, a priori, que las distintas categorías del test AF5, principalmente la Académica, por evidentes razones, sería de utilidad para configurar un modelo que permita clasificar en el futuro los resultados académicos; aunque de ninguna manera se deben descartar las demás dimensiones como posibles variables independientes de la ecuación final de regresión.

3.3 Análisis de regresión logística

En vista del objetivo planteado en este estudio, ha sido ingresada como variable respuesta el Rendimiento matemático (0 = Aprobado y 1 = Desaprobado), y como variables explicativas o covariables las cinco dimensiones del test AF5: Académica, Social, Emocional, Familiar y Física.

Los resultados de la regresión logística binaria (en SPSS optamos por el método Atrás: Condicional) indican, en virtud de la aplicación de los tests de ajuste global, que las variables Académica, Emocional, Familiar y Física, en su conjunto, serían relevantes a la hora de explicar o predecir el comportamiento de los resultados académicos.

Se considera conveniente señalar que a la hora de seleccionar el modelo que razonablemente se ajusta a los datos de la muestra se han priorizado en general los resultados de los tests de ajuste global, por encima de criterios particulares respecto de cada una de las dimensiones de la prueba AF5 (ver Tabla 4), como pueden ser los estadísticos de Wald y sus p-valores asociados.

Tabla 4. Coeficientes del modelo y estadísticos de Wald.

	B	Wald	Valor p
Académica	–.47	11.93	.00
Emocional	.11	1.78	.18
Familiar	.14	1.49	.22
Física	.19	3.41	.06
Constante	–.28	.07	.79

Respecto al contraste global del modelo (véase Tabla 5), podemos indicar que el p-valor correspondiente a la prueba Chi-cuadrado (15.59) ha resultado .00; por lo que, para un nivel de significación $\alpha = .05$, se rechaza la hipótesis nula de que los coeficientes incluidos en el modelo sean estadísticamente iguales a cero.

A su vez, la prueba de Hosmer-Lemeshow (la hipótesis nula indica que el modelo se ajusta a la realidad), otra forma de evaluar la bondad de ajuste de un modelo de regresión logística, ha proporcionado un p-valor de .08, para el estadístico Chi-cuadrado cuya medida resultó 14.20 (Tabla 5); de manera que en sintonía con lo expresado en el párrafo anterior, podemos sostener que el modelo que se propone refleja adecuadamente los datos empíricos (no se encontraron evidencias suficientes para rechazar la hipótesis nula).

Tabla 5. Indicadores globales del modelo.

Test	χ^2	Valor p
Bondad de ajuste	15.59	.00
Hosmer-Lemeshow	14.20	.08

En virtud de lo que antecede se procedió a plantear un modelo logístico conformado por cuatro de las cinco dimensiones posibles (la única área de la prueba que ha sido excluida del modelo –en razón de que sus indicadores lo sugerían de manera categórica, además los estadísticos de bondad de ajuste del modelo no se veían mayormente afectados–, fue el autoconcepto Social) como variables independientes de la ecuación, el resultado obtenido pueden apreciarse a continuación:

Modelo de regresión logística

$$\boxed{p(\text{Rendimiento matemático = Desaprobado}) = \frac{1}{1+e^{0.28+0.47\times\text{Académica}-0.11\times\text{Emocional}-0.14\times\text{Familiar}-0.19\times\text{Física}}}}$$

Si bien en este apartado hemos sostenido que el modelo propuesto se ajusta a los datos de la muestra, utilizaremos a continuación el concepto de la curva ROC (Receiver Operating Characteristic), con el objeto de mostrar la capacidad que el modelo posee para explicar los resultados del rendimiento académico, así como de elegir el punto de corte más apropiado para una sensibilidad o una especificidad determinada. La sensibilidad indica la capacidad del estimador para identificar correctamente los casos positivos (en nuestro estudio, alumnos que se encuentran en el grupo de desaprobados; es decir, estudiantes que presentan problemas de rendimiento). Por el contrario, la especificidad es la probabilidad de detectar correctamente la presencia de casos negativos (en nuestro estudio, alumnos que se encuentran en el grupo de aprobados, o que carecen de dificultades académicas).

3.4 Curva ROC

En la Tabla 6 se presentan diferentes valores del área bajo la curva ROC. En efecto, pueden apreciarse, la estimación puntual (.71), el error estándar de esta estimación (.04), también el límite inferior (.62) y superior (.79) de un intervalo de confianza del 95%. Como este intervalo no contiene al valor .50, podemos rechazar la hipótesis nula (AUC [Area Under the Curve] = .50) y concluir que la estimación puntual del área bajo la curva ROC (.71, $p < .05$) estaría indicando que el modelo que se propone posee calidad diagnóstica para clasificar el Rendimiento matemático de los estudiantes de la muestra.

Tabla 6. Área bajo la curva ROC.

Área	Error estándar	Valor p	Interv. de confianza	
			Lím. inf.	**Lím. sup.**
.71	.04	.00	.62	.79

En la Figura 1, puede apreciarse la representación gráfica de la curva ROC ajustada a los datos muestrales. En este caso, la curva se encuentra razonablemente por encima de la recta y = x, por lo que podemos considerar que el método de diagnóstico es aceptable para discriminar los resultados educativos de los alumnos. La flecha indica el punto de corte óptimo (0.43) que determina la sensibilidad (0.72) y especificidad (1 – 0.32 = 0.68) conjuntas más altas (Mayor índice de Youden = 0.40).

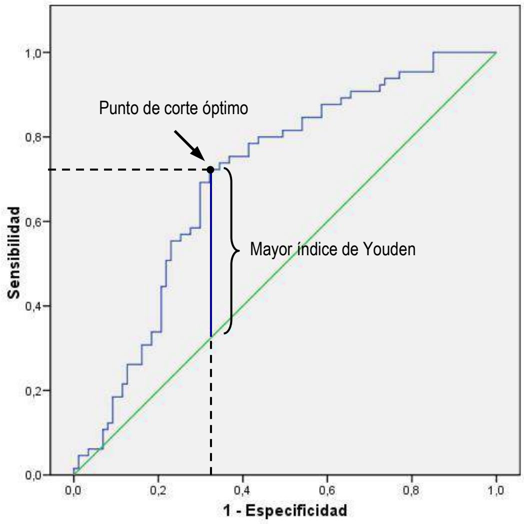


Fig. 1. Gráfico de la curva ROC.

De la observación de la lista de coordenadas de la curva ROC (información obtenida a partir de las alternativas seleccionadas y las opciones que por defecto brinda SPSS 22), surge que para el caso de una sensibilidad del 72% tendríamos una especificidad del 68%, lo que se consigue en el punto de corte 0.43. El punto de corte lo hemos elegido teniendo en cuenta que la sensibilidad fuera la más alta y el número de falsos positivos (1 – especificidad) fuera el más bajo, dentro de los valores posibles, puesto que de esta manera, además de maximizar el índice de Yuoden, el modelo proporcionará estimaciones que estarían equilibradas y ajustadas a la realidad objeto de estudio.

4. Conclusiones

En el presente estudio nos habíamos propuesto principalmente concretar, en un dominio estadístico de tipo descriptivo, psicométrico e inferencial, el desarrollo de un modelo de predicción logística que permita explicar las relaciones existentes entre distintas áreas del *autoconcepto* y el *rendimiento matemático*, empleando una muestra conformada por estudiantes de Ingeniería de 1° año de la FRRe–UTN. Pues bien, en vista de los resultados obtenidos en el marco de esta investigación, podemos afirmar que el objetivo planteado ha sido logrado.

En efecto, a partir de los estudios iniciales (estadísticos descriptivos, correlación dimensión-total corregida y alfa de Cronbach) realizados sobre las dimensiones del test utilizado, así como de los análisis implementados posteriormente (correlacionales y de regresión), fue posible comprobar que la prueba aplicada constituye un instrumento fiable y válido para medir la percepción que los estudiantes tienen acerca de ellos mismos en distintos aspectos, como también de qué manera se vinculan los tipos de autoconcepto estudiados con el rendimiento académico en la asignatura Análisis Matemático I.

Así pues, en relación con la fiabilidad de la escala, los resultados indican que puede considerarse un instrumento aceptable, dado que el coeficiente de consistencia interna encontrado para el conjunto de las cinco dimensiones ($\alpha = .73$) supera el valor mínimo requerido ($\alpha = .70$). A su vez, como complemento de la información dada, podemos decir que las correlaciones entre cada categoría y la AF5 (denominado índice de homogeneidad corregido) fueron siempre muy razonables, en todos los casos superan el valor de referencia .20 (van de $r_{d\text{-}t} = .27$ a $r_{d\text{-}t} = .66$).

En razón de los resultados conseguidos en el estudio de validez predictiva, nuestra apreciación respecto de los niveles de discriminación –mediante las categorías de la prueba– de los resultados educativos es lógicamente favorable; esto es, pensamos que la AF5 es un instrumento que clasifica adecuadamente a los estudiantes con diferentes grados de logro académico. Así por ejemplo, utilizando el modelo obtenido en el apartado de regresión logística, se podría predecir que los alumnos que principalmente posean puntajes altos en la dimensión *Académica* (sin necesidad de que también lo sean en las demás dimensiones), tendrían mejores resultados cognitivos en la asignatura objeto de interés. Por el contrario, en aquellos estudiantes con puntajes bajos en el área *Académica* (y quizás altos en las demás dimensiones), se observaría un menor rendimiento en el campo de conocimiento bajo análisis.

Aunque en su generalidad, los resultados muestran evidencia que el test aplicado presenta suficientes bondades para ser utilizado en la evaluación de las formas de autoconcepto, así como en la explicación del rendimiento académico en asignaturas del área de Matemática, creemos necesario considerar algunas limitaciones.

En efecto, en primer lugar, los participantes de la presente investigación fueron alumnos de primer año de una unidad académica específica, lo que quizás no permite hacer inferencias demasiado generales sobre otros estudiantes universitarios o extender los resultados obtenidos sobre otras poblaciones no representadas en la muestra.

En segundo orden, no se puso a prueba el instrumento AF5 en función de variables demográficas como la edad y el género de los participantes, o la especialidad de ingeniería que siguen los estudiantes encuestados, por lo que sería interesante en próximos trabajos, analizar en el ámbito de aplicación del test cómo se manifiestan los tipos de autoconcepto al considerar estos aspectos.

Sin embargo, a pesar de las limitaciones expuestas, por lo que los resultados logrados deberían aceptarse con cierta cautela, pensamos que el trabajo realizado debe ser reconocido como un paso adelante en el abordaje del complejo tema objeto de interés y, consecuentemente, un aporte a la comunidad académica y científica del área de conocimiento, con posibles proyecciones en política, planificación y gestión educativa, de allí que el presente estudio conlleva implícitamente verdaderas perspectivas de transferencia.

El trabajo llevado a cabo nos hizo ver con interés el desarrollo de futuras investigaciones en torno a los siguientes temas (considerando, siempre que se utilicen modelos estadísticos de dependencia, al rendimiento académico como variable explicada): a) análisis de validez externa del AF5; b) estudios de diferencias cuantitativas con respecto a distintas variables predictoras, tales como el tipo de carrera que siguen los estudiantes o el grado de estudio alcanzado por los padres, entre otras; c) utilización, además del autoconcepto, de otros determinantes personales y contextuales, como los mencionados en el punto anterior, con el objeto de elaborar un modelo causal y probar su validez de medida y global, empleando la técnica multivariante denominada estructuras de covarianza; d) replicación de la actual elaboración usando un diseño longitudinal, con evaluaciones periódicas durante los años de permanencia de los estudiantes en la universidad o en un intervalo de tiempo determinado. En este último caso, el tipo de diseño que se utiliza proporcionaría información sobre los posibles efectos o cambios que ocurren en el autoconcepto por causa de la edad y la adquisición de nuevas competencias, entre otros factores.

Como última reflexión se indica que el hecho de haber validado empíricamente el AF5 (a efectos de explicar los resultados educativos) en un determinado contexto académico y sociocultural, da origen a contar con un nuevo marco de referencia, lo cual permite ampliar la aplicación de la prueba objeto de análisis; en esta oportunidad, utilizando una muestra conformada por estudiantes de carreras de Ingeniería con residencia en la zona noreste de Argentina. Por lo que antecede, se considera que tanto la temática desarrollada como el tratamiento realizado constituyen un aporte científico genuino en razón de la producción de saberes que fue posible generar a partir de datos correspondientes a nuestro lugar de pertenencia, que no habían sido relevados en trabajos anteriores.

Desde nuestro punto de vista, el autoconcepto en sus distintas formas representa una cuestión relevante por su implicancia en el rendimiento académico, por lo que deberían incrementarse sus líneas de investigación a efectos de lograr un mayor desarrollo sobre su conocimiento y utilidad en nuestro contexto sociocultural. Este hecho, evidentemente, sería una importante contribución al proceso de enseñanza-aprendizaje de la asignatura bajo estudio, y de otras que se encuentran en la misma área de conocimiento, puesto que daría lugar a sugerir medidas de intervención con el propósito principal de alcanzar un mejor desempeño cognitivo de los estudiantes.

5. Referencias

1. García, F. y Musitu, G.: AF5. Autoconcepto Forma 5. Madrid: TEA (2001).
2. Real Academia Española: *Diccionario de la lengua española* (22a. ed.). Madrid: Espasa-Calpe (2001).
3. Doron, R. y Parot, F.: *Diccionario Akal de Psicología.* Madrid: Akal (1998).
4. Burns, R.: Self-concept development and education. London: Holt, Rinehart & Winston (1982).
5. Harter, S.: Psychological perspective on the self. Hillsdale, NJ: Erlbaum (1986).
6. Shavelson, R. J., Hubner, J. J. y Stanton, G. C.: Validation of construct interpretations. Review of Educational Research, 46, 407-441(1976).
7. Escurra, L., Delgado, A., Guevara, G., Torres, M., Quezada, R., Morocho, J., Rivas, G. y Santos, J.: Relación entre el autoconcepto de las competencias, las metas académicas y el rendimiento en alumnos universitarios de

la ciudad de Lima. Revista de Investigación en Psicología, 8(1), 87-106 (2005).
8. Marsh, H. W.: Academic self-concept: Theory measurement and research. En J. Suls (Ed.), Psychological perspectives on the self (Vol. 4, pp. 59-98). Hillsdale, NJ: Erlbaum (1993).
9. Suls, J.: Psychological perspectives on the self (Vol. 1). Hillsdale, NJ: Erlbaum (1982).
10. Suls, J. y Greenwald, A.: Psychological perspectives on the self (Vol. 2). Hillsdale, NJ: Erlbaum (1983).
11. Markus, H. y Wurf, E.: The dynamic self- concept: social psychological perspective. Annual review of psychology, 38, 299-337 (1987).
12. Núñez, J. C. y González-Pienda, J. A.: Determinantes del rendimiento académico. Variables cognitivo-motivacionales, atribucionales, uso de estrategias y autoconcepto. Oviedo: Servicio de Publicaciones de la Universidad de Oviedo (1994).
13. Kline, P.: The handbook of psychological testing (2a. ed.). London: Routledge (2000).
14. Huth, J., Delorme, D. E. y Reid, L. N.: Perceived third-person effects and consumer attitudes on preventing and banning DTC advertising. Journal of Consumer Affairs, 40(1), 90-116 (2006).
15. Nunnaly, J. C. y Bernstein, I. H.: Psychometric theory (3a. ed.). New York: McGraw-Hill (1994).
16. American Psychological Association: Publication Manual of the American Psychological Association. Washington DC: Author (2001).

Cuestionamientos a la Enseñanza Tradicional del Cálculo en una Variable: Análisis de los Significados Institucionales Referenciales y Pretendidos

D'Andrea Leonardo Javier[1]

[1] Departamento de Ciencias Básicas, Facultad Regional Avellaneda, Universidad Tecnológica Nacional
Av. Mitre 750, Avellaneda, Buenos Aires
dandrealj@yahoo.com

Resumen. Se propone realizar un análisis histórico, epistemológico y didáctico sobre los objetos matemáticos y su enseñanza en Análisis Matemático 1, como consecuencia del estado del arte realizado en un plan de tesis. A partir de constructos del Enfoque Ontosemiótico acerca de las prácticas discursivas y operativas que llevan adelante las instituciones y las personas frente a situaciones problemáticas, nos centramos en los significados institucionales referenciales y pretendidos. Las preguntas sobre las que pretendemos reflexionar son: ¿las prácticas operativas y discursivas referenciales y pretendidas en Análisis Matemático 1 en el nivel universitario, se corresponden al origen y evolución histórico-epistemológica de los objetos matemáticos? ¿A qué se debe el orden clásico en la instrucción de dicha rama de la Matemática? ¿Qué implicancias didácticas tiene este orden en la enseñanza del cálculo?
Finalmente, se reflexiona sobre posibles acciones que permitan resignificar las tareas previas a la enseñanza del cálculo en el nivel universitario.

Palabras Clave: Significados Institucionales, Enseñanza, Análisis Matemático, Enfoque Ontosemiótico, Historia de la Matemática.

1 Introducción

En el presente artículo se propone realizar un análisis histórico, epistemológico y didáctico sobre los objetos matemáticos y su enseñanza en Análisis Matemático 1, que resultó del estado del arte de un plan de tesis para el Doctorado en Enseñanza de las Ciencias. A partir de la propuesta del Enfoque Ontosemiótico (en adelante EOS) acerca de las prácticas discursivas y operativas que llevan adelante las instituciones y las personas frente a situaciones problemáticas, proponemos centrarnos en los significados institucionales referenciales y pretendidos sobre Funciones, Límites, Continuidad, Cálculo Diferencial y Cálculo Integral en una variable en el nivel universitario.

Siguiendo a Godino, Batanero y Font, determinar el significado referencial "requiere realizar un estudio histórico – epistemológico sobre el origen y evolución del objeto en cuestión, así como tener en cuenta la diversidad de contextos de uso donde se pone en juego dicho objeto" [1]. Estos sistemas de prácticas se utilizan como referencia para elaborar los significados pretendidos, es decir, el sistema de prácticas incluidas en la planificación del proceso de estudio.

Para planificar un proceso de instrucción, explica Godino [2], el docente comienza por delimitar el objeto matemático según sus propios conocimientos personales, junto a lo que es para las instituciones matemáticas y didácticas; lo cual se realiza acudiendo a los textos matemáticos y orientaciones curriculares. Las preguntas sobre las que pretendemos reflexionar son: ¿las prácticas operativas y discursivas referenciales y pretendidas en Análisis Matemático 1 en el nivel universitario, se corresponden al origen y evolución histórico-epistemológica de los objetos matemáticos? ¿A qué se debe el orden clásico en la instrucción de dicha rama de la Matemática? ¿Qué implicancias didácticas tiene este orden en la enseñanza del cálculo?

Finalmente, se comparten reflexiones finales sobre este recorrido y posibles acciones por llevar adelante que permitan resignificar las tareas previas a la enseñanza del cálculo en una variable en el nivel universitario: "los significados institucionales de referencia y pretendidos tendrán un carácter de a priori, mientras que el implementado y el evaluado serán a posteriori" [2].

2 La problemática en la enseñanza y el aprendizaje del Cálculo

En los últimos años, varios trabajos han planteado la necesidad de una revisión sobre la enseñanza y el aprendizaje de Funciones, Límites, Continuidad, Derivación e Integración en un variable en el nivel universitario o terciario, donde se describen problemas didácticos, epistemológicos y cognitivos. Respecto a la enseñanza de los principios del cálculo, Artigué [3-4] analiza dificultades asociadas con la conceptualización de la noción de Límites considerando la idea de obstáculo epistemológico. Entre los obstáculos se menciona la concepción de límite desde el sentido común como "una barrera intraspasable y no alcanzable (…), que tiende al mismo tiempo a reforzar las concepciones monótonas estrictas de la convergencia" [3], y el salto cualitativo referido a la historia de este concepto "entre el manejo relativamente intuitivo (…) y la noción formalizada estándar" [3].

Las concepciones de los estudiantes acerca de los conceptos de límites y continuidad son consideradas por Sierra Vázquez, González Astudillo y López Esteban [5], reconociendo las dificultades en la comprensión de los mismos aún posterior a su enseñanza. Al igual que Artigué [3], los autores afirman que es posible encontrar posibles relaciones entre esas concepciones y las concepciones que han aparecido a lo largo de la historia. Por su parte, Hitt [6] reconoce los problemas en el aprendizaje de Límites tanto en los estudiantes como en los profesores, donde se plantean los obstáculos que los docentes generan en los estudiantes a partir de su introducción en el temática: se reconoce la renuencia al uso de las TIC para favorecer los procesos de visualización, la restricción a los aspectos algebraicos por sobre los geométricos, junto a la problemática referida a las cuestiones del acercamiento intuitivo del infinito (asociados a la vida cotidiana) y los aspectos propios del infinito en Matemática, ese salto cualitativo que menciona Artigué [3].

En un segundo trabajo, Hitt [7] realiza una breve descripción de la evolución histórica del límite, desde su noción intuitiva hasta su formalización actual: se concluye que hay una rivalidad entre las ideas intuitivas de los estudiantes - ligadas al infinito potencial - respecto a las ideas promovidas en la instrucción - ligadas al infinito actual -. Luego, se analizan los obstáculos promovidos por el cómo se enseña: "una posibilidad es la de introducir los procesos algebraicos utilizados hasta ahora, acompañados de un acercamiento que promueva tareas de conversión entre las representaciones numérica, gráfica y algebraica de un problema de cálculo de límites" [7].

En relación a lo observado por Hitt [6-7], Pantoja Rangel, López Betancourt, Ortega Árcega y Hernández García [8] proponen incluir el uso de las TIC para favorecer la organización diferente de los contenidos referidos a Límites y Continuidad centrándose en la resolución de ejercicios, el trabajo colaborativo y la promoción de la investigación temprana.

El trabajo de Contreras de la Fuente, García Armenteros y Font [9] plantea desde el EOS el análisis de un proceso de estudio sobre la enseñanza del límite de una función, en donde se trabaja de una forma intuitiva este objeto matemático, y a partir del cual se corrobora que la triple representación gráfica, numérica y simbólica fue imprescindible para el aprendizaje del concepto. Sin embargo, se reconoce que el desarrollo del límite solamente en forma intuitiva no permitió la conceptualización del infinito actual en los estudiantes, tal como lo menciona Hitt [6-7] y Artigué [3].

3 Origen y desarrollo de los conocimientos del Análisis Matemático

La revisión del desarrollo histórico-epistemológico de los objetos matemáticos asociados Análisis Matemático 1 nos permite reconocer cuál es el origen y la evolución de esos conocimientos, contextualizados por la época y bajo las invenciones de los matemáticos que los han creado (Fig. 1). La intencionalidad de este apartado es focalizarse en revisar los puntos críticos que mencionan los antecedentes sobre la enseñanza y el aprendizaje de los objetos matemáticos, tal como la formalización y la intuición, y la dificultad en los conceptos de función, límite, continuidad, derivación e integración: ¿qué motivó y a quién se debe la rigurosidad en el Análisis Matemático? ¿Es cierto que sin una topología de los números reales, no es posible el desarrollo de las funciones escalares? ¿Sin una noción clara de función, la propiedad de existencia y de unicidad, no se puede trabajar con límites y continuidad de funciones? ¿Sólo el concepto de límite de una función justifica la continuidad, derivabilidad e integración de funciones? ¿Es posible recurrir a la noción aritmética y geométrica para estudiar la resolución algebraica de límites y continuidad de funciones?

Vera [10] afirma que todas las teorías de la Matemática son el resultado de modelos abstractos construidos de acuerdo a ciertos hechos experimentales que posteriormente expresados en el lenguaje de dicha ciencia, se desarrollan sobre la base del razonamiento puro. Luego, el cálculo infinitesimal es un ejemplo de ello: "nace como un cuerpo de doctrina en la segunda mitad del siglo XVII; pero cuyos antecedentes se encuentran ya en los geómetras griegos – Arquímedes en primer lugar – quienes realizaron verdaderas integraciones por exhaución" [10].

Por su parte, Bell define al Análisis como el "vasto dominio, [que] comprende a todo aquello que concierne a las cantidades que varían de modo continuo" [11]. Agrega luego que el progreso de esta rama de la Matemática en el siglo XVIII no tuvo precedentes, produciendo que en la actualidad abarca tanto terreno que ningún matemático es competente más que en una o dos "provincias" de todo el dominio.

3.1 El período de la intuición: el cálculo integral

Respecto a lo que afirma Vera acerca del origen experimental, se conoce que en 1612 en Austria, Kepler inspirándose en una cuestión de carácter práctico da "el primer gran avance durante los diecinueve siglos que van desde Arquímedes hasta él" [10] cuando se propone calcular el volumen del vino dentro de unos barriles.

Posteriormente Cavalieri da un paso hacia adelante en la Geometría de los indivisibles, en Bolonia 1635. En este caso, a diferencia de Kepler que dividió sus toneles, los indivisibles de Cavalieri carecen de espesor y son innumerables, y "su técnica es esencialmente distinta de la de aquél porque el matemático alemán tomó como punto de partida un problema práctico y el italiano un reflexión teórica acerca de la génesis de las figuras" [10]. Con el método de Cavalieri queda eliminada toda consideración metafísica sobre el continuo geométrico.

Estos primeros antecedentes en el origen de las integrales, previos a Leibniz y Newton, están acompañados por otros trabajos de otros matemáticos: Pascal en 1654 calcula algunas áreas que equivalen a las modernas integrales definidas, Wallis integra en 1655 las potencias de cualquier exponente, lord Brouncker desarrolla en serie el logaritmo de 2, dependiendo de la cuadratura de la hipérbola. Todo esto, según Vera, prepara "el terreno para el Cálculo integral que, como vemos, tiene muchos antecedentes y es anterior del diferencial, aunque por razones didácticas se enseñe después de este, el cual no nace, en realidad, hasta la época cartesiana (…)" [10].

Luego de que Roberval: "el maestro de la integración en su época" [12], se preocupara por las tangentes de las curvas que "definió como dirección del movimiento del punto que las describe" [10] y Barrow descubre en 1669 que el problema del área es el inverso del de la tangente: "concebir intuitivamente la relación inversa entre los procedimientos de diferenciación e integración" [12], las ideas infinitesimales llegan a Leibniz y Newton, quienes para Bell "fueron los dos mortales que en definitiva crearon el cálculo" [13]. Por su parte Collette reconoce que los trabajos de Barrow representan desde la visión de las investigaciones geométricas del siglo XVII, "la exposición más sistemática y detallada de las propiedades de las curvas tales como tangentes, arcos, áreas, etc., lo que, en manos de Newton y Leibniz, conducirá rápidamente a la invención del cálculo diferencial e integral" [12].

Vera aclara que Leibniz y Newton encontraron hecho el lenguaje infinitesimal sobre la base de los sustantivos que habían inventado sus antecesores y lo que hicieron ellos fue "agregarles los verbos que transformaron en dinámico el Cálculo estático anterior, haciéndolo apto para investigar todos los fenómenos naturales que proceden de una causa y producen un efecto" [10].

Bell afirma que "sin la lógica matemática que preconizó Leibniz, y que empezó a crear, la obra crítica del siglo XX sobre los fundamentos del análisis, y en realidad de toda la matemática, hubiera sido humanamente imposible" [13]. Vera afirma que prescindiendo del rigor lógico, que es un imperativo moderno, y desde el punto de vista de los matemáticos del siglo XVII: "las ideas fundamentales del Cálculo infinitesimal son las de variable, función y límite, hoy muy complejas, pero que en aquel tiempo eran intuitivas y, por tanto, fáciles de comprender" [10].

3.2 Los inicios del rigor en el Análisis Matemático: los diferentes conceptos de función

En el desarrollo del concepto de función, se menciona que fue Euler el primero en hacer hincapié en dicho concepto y realizó un estudio sistemático de todas las funciones elementales, como también de sus derivadas e integrales.

Las relaciones entre variables se encuentra desde la época de los babilonios y los egipcios, pero "la relación matemática expresada de una manera explícita no aparece hasta mucho más tarde y, en particular en los trabajos de Galileo sobre la mecánica" [12]. Ya en el siglo XVII se considera la relación funcional debido al estudio de las curvas, y se distinguen funciones transcendentes y funciones algebraicas. Entre los distintos conceptos de función, Collette menciona:

> El término "fluente" utilizado por Newton, representa una relación entre variables, mientras que Leibniz se sirve de la palabra "función" para designar toda cantidad que varía de un punto a otro de una curva, por ejemplo, la longitud de la tangente o de la subtangente y de la normal. En su Historia de 1714, Leibniz emplea el término "función"

para designar cantidades que dependen de una variable, y Johann Bernoulli considera que una cantidad formada de cualquier manera con variables y constantes constituye una función.

En el mismo comienzo de su Introductio, Euler define la función de una cantidad variable como un "expresión analítica" formada de cualquier manera con esta cantidad variable, con números y con constantes. Engloba bajo esta denominación a los polinomios, las series de potencias y las expresiones trigonométricas y logarítmicas. [12]

Luego, Euler distingue funciones explícitas y funciones implícitas, y funciones que pueden tener una imagen o varias imágenes según un valor de la variable independiente (funciones uniformes y multiformes).

3.3 Los creadores del orden clásico de la enseñanza del cálculo: la noción de límite y continuidad

Si buscamos un posible origen del orden clásico de la enseñanza del Análisis Matemático, podemos mencionar que fue Cauchy quien "desarrolló el cálculo diferencial e integral sobre la base del concepto de límite en sus Lecciones sobre el cálculo infinitesimal, publicada por primera vez en 1823" [12], donde el principal objetivo que persigue era conciliar el rigor con la simplicidad respecto a las cantidades infinitamente pequeñas. Vera afirma que "Cauchy desconfía de la evidencia intuitiva y ataca el principio de continuidad de Poncelet, que considera sólo como una fuerte inducción, lo que dio origen a un polémica entre el Análisis y la Geometría" [10].

Se afirma que el concepto de límite se desarrolló gradualmente desde el método de recubrimiento de los griegos hasta que Newton lo expresó a su manera en sus Principia, y a pesar que D'Alembert y Lacroix hacen de ese concepto la base fundamental del Cálculo, en todo este período se asocia el Análisis Matemático "como un instrumento que se ocupaba de relaciones entre cantidades implicadas en problemas geométricos" [12].

Por su parte, Euler y Lagrange intentaron establecer el Cálculo sobre el formalismo de su concepto de función analítica; y salvo Bolzano, todos los matemáticos previos a Cauchy continúan, según Collette [12], considerando al límite desde una noción geométrica. Esta observación nos dirige al trabajo de Hitt [6-7] donde se sugiere superar la restricción algebraica en la enseñanza del límite a través de tareas que permitan integrar lo algebraico, lo numérico y lo gráfico.

Cauchy define límite como un concepto aritmético sin apoyo geométrico, y a partir de esa definición, se propone definir los infinitésimos y el álgebra de los mismos. Posteriormente, define a partir del límite la continuidad de una función con algunas ambigüedades tales como: "suficientemente pequeña", "llega a ser y sigue siendo"; que luego serán formalizadas por los trabajos de Karl Weierstrass.

La centralidad otorgada por Cauchy a la noción de Límite lo lleva en 1823 a definir la derivada mediante ese concepto, definición que es utilizada en la actualidad, "si se exceptúa la utilización del límite a la izquierda y del límite a la derecha, que no aparece en Cauchy" [12]. Posteriormente define el diferencial en términos de la derivada y la integral definida en términos de límite de las sumas integrales, hasta demostrar el Teorema Fundamental de Cálculo – aunque sin rigurosidad, por la ausencia de la noción de continuidad uniforme –. Con estos trabajos, Cauchy va en contra de lo propuesto por sus predecesores del siglo XVIII, quiénes trataban a la integración como una operación inversa de la diferenciación.

3.4 Aritmetización del análisis: continuidad en el Conjunto de los Números Reales

A pesar de los intentos de rigor en el Análisis Matemático por parte de Cauchy, quedaban ciertos puntos por clarificar: la relación entre la función continua y la función diferenciable, la vaguedad y ambigüedad en sus frases, y la claridad en el concepto de "número".

Respecto a los aportes de Bolzano, también define en forma rigurosa a la función continua y a la función derivada, pero reconoce - a diferencia de Cauchy - que la continuidad no implica la diferenciación: "En 1834 (…) separa el concepto de continuidad del de derivabilidad: cuarenta años antes que Weierstrass, había construido una función de variable real, continua en un intervalo cerrado, que no tiene derivada en ningún punto de ese intervalo" [12]. Y a pesar de reconocer la continuidad en un punto, calcular la continuidad por izquierda y derecha, y haber reconocido la diferencia de cardinalidad entre los números reales y los números enteros, Boyer (citado en Collette [12]) menciona que Bolzano "predicaba en el desierto", sus trabajos no fueron conocidos hasta finales del siglo XIX.

Weierstrass se encargará con sus trabajos de la aritmetización del Análisis, que se inició con Bolzano, Abel y Cauchy. La noción de una variable que se aproxima a un límite, que aparece en la definición de Cauchy y Bolzano, sugería implícitamente el tiempo y el movimiento; pero Weierstrass resaltará el concepto aritmético interpretando sencillamente una variable como una variable que representa cualquier valor de un conjunto dado, omitiendo así la noción de movimiento: "la primera definición de límite de una función en términos de ε y δ por Weierstrass puede encontrarse, según parece, en su curso de cálculo diferencial impartido en 1861" [12].

La introducción del rigor en el análisis matemático mostró la falta de claridad y la imprecisión del conjunto de los números reales: “Weierstrass intentó separar el cálculo diferencial e integral de la geometría y hacer reposar todo ese cálculo sobre el concepto de número. Para realizar este nuevo enfoque (…) era necesario definir el número irracional independientemente del concepto de límite” [12].

Esta tarea que inicia Weierstrass es desarrollada en los trabajos de Dedekind, “probablemente el último alumno conocido de Gauss (… y que…) murió (…) sin conocer nunca la gloria” [12].

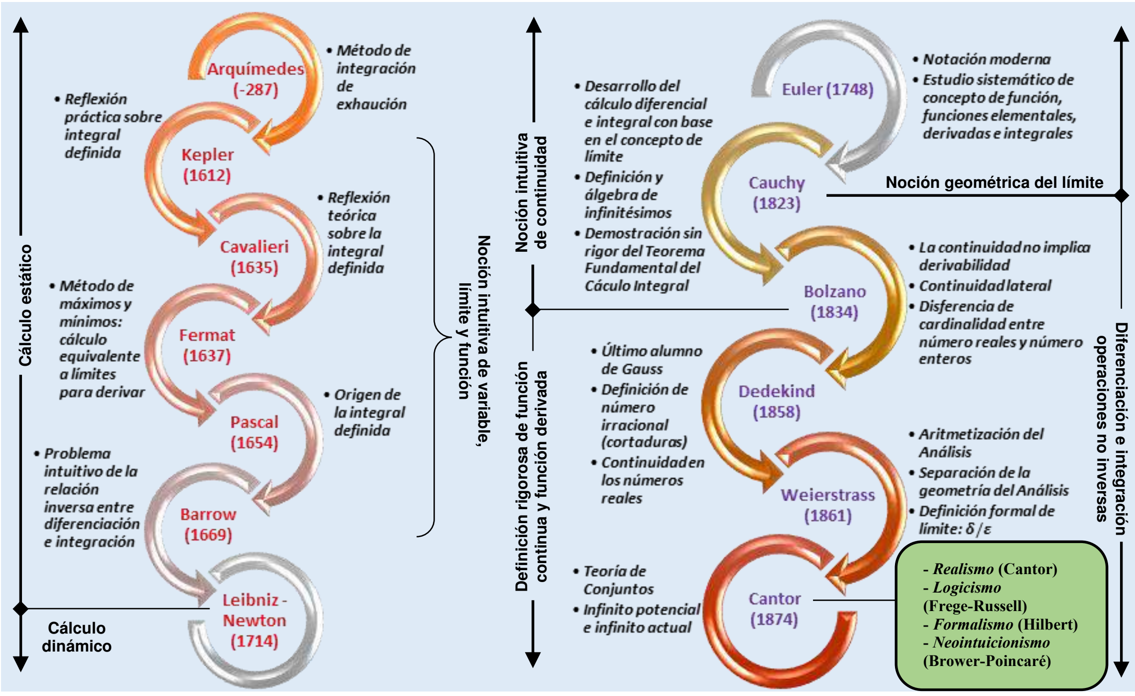


Fig. 1. Origen y evolución histórica de los objetos matemáticos del Cálculo.

4 El orden clásico en la enseñanza del Análisis Matemático 1 y las implicancias didácticas

En libros de texto sobre Análisis Matemático 1 o Cálculo 1, debido a que se desarrollan en el orden clásico los contenidos:

> Para enseñar la derivada habrá que enseñar antes límites (porque la derivada es un límite) y para enseñar límites habrá que enseñar antes funciones (porque los límites son de funciones) y para enseñar funciones habrá que enseñar antes los números reales (porque son funciones de variable real). (Salinas y Alanís, [14])

La importancia otorgada a límites y continuidad responde a la rigurosidad en las definiciones y las propiedades de los mismos y en los otros conocimientos como Derivadas e Integrales: “entre todos los conceptos que se presentan en el cálculo infinitesimal, el de límite es, a no dudarlo, el más importante y quizás también el más difícil” (Spivak, [15]); “hasta finales del siglo XIX, con Weierstrass, no se logró una expresión del cálculo infinitesimal suficientemente correcta y rigurosa. Ello fue posible gracias a la revisión de conceptos básicos como número real, la noción de límite, la de continuidad” (Guzmán y Colera, [16]); “el concepto de continuidad, una de las ideas más importantes y más fascinantes de toda la Matemática” (Apóstol, [17]); “El límite de una función es el concepto principal que distingue al cálculo del álgebra y de la geometría analítica. La noción de un límite es fundamental para el estudio del cálculo” (Larson y Edwards, [18]); “la idea de límite sustenta las diversas ramas del cálculo; de ahí la importancia de empezar el estudio de éste investigando los límites y sus propiedades” (Stewart, [19]).

Consideramos que dicho orden clásico de enseñanza responde a una particular concepción epistemológica de la Matemática, y que Gascón [20] denomina euclídea a partir de los dos grupos de teorías epistemológicas generales o patrones de la organización matemática como un todo, según la caracterización de Lakatos (1978). En este modelo general del saber matemático, el “euclidianismo”, se pretende “trivializar” el conocimiento matemático:

> Propone que todo conocimiento matemático puede deducirse de un conjunto finito de proposiciones trivialmente verdaderas (axiomas) que constan de términos perfectamente conocidos (términos primitivos). La verdad de los axiomas fluye entonces desde los axiomas hasta los teoremas por los canales deductivos de transmisión de verdad (pruebas). [20]

Cuando esta forma de interpretar el saber matemático ingresa en los modos de enseñanza de esta ciencia, Gascón describe dos modelos docentes: los teoricistas y los tecnicistas, llamados “modelos docentes clásicos”, para los cuales “el proceso de enseñanza es mecánico y trivial, totalmente controlable por el profesor” [20].

A pesar de los inconvenientes que describe Gascón como consecuencias de estos modelos docentes: “las formas extremas de los modelos docentes clásicos presentan incoherencias y limitaciones evidentes en la gestión del proceso de estudio de las matemáticas” [20], Pochulu y Font reconocen en la actualidad que muchas clases de matemáticas que se imparten no son significativas y responden a un modelo más o menos conductista, denominado mecanicista: “entre otras razones, porque este modelo resulta más fácil para muchos profesores con poca formación matemática, o para aquellos que, aunque tienen una visión un poco más amplia, siguen la tradición” [21].

Para la enseñanza del Análisis, Salinas y Alanís entienden que el contenido matemático se presenta estructurado de manera formal y rigurosa, donde se “focaliza en técnicas algorítmicas que se alteran con la presencia de definiciones y resultados formales que lo justifican” [14]. Por ello, entienden que esta práctica docente que denominan “paradigma tradicional en la enseñanza del Cálculo” responde al modelo tecnicista como alternativa a los fracasos del modelo teoricista.

El orden clásico en que se desarrollan los contenidos en los libros de texto que hemos mencionado más arriba, guardan relación con ese tipo de estructura en la presentación tradicional del contenido: “una estrategia de enseñanza tradicional del profesor que se limita a exhibir (enseñar) la estructura, ya que presupone que así se dará el aprendizaje” [14].

Desde el EOS este modelo teórico se denominará “magistral”, donde la manera tradicional de enseñar la Matemática está basada en la presentación magistral seguida de ejercicios de aplicación de los conocimientos y saberes presentados, donde no se suprimen los momentos de exploración, de formulación y validación – pero quedan bajo la responsabilidad del estudiante o bien se ponen en juego en instantes aislados de evaluación –.

5 Conclusiones y trabajos futuros

Lo primero debemos considerar es que el orden tradicional en que se desarrollan los conocimientos en Análisis Matemático en una variable, tanto en los libros de texto como en los currículos de varias universidades en la provincia de buenos aires (Universidad Nacional de Quilmes, Universidad Tecnológica Nacional – Facultad Regional Avellaneda, Universidad de Buenos Aires, Universidad Nacional de Avellaneda), no es más que una de las formas en qué plantear los significados referenciales institucionales. Reconocer que ese orden, que “en algún momento llega a ser normal identificar en las aulas” [14] y responde a decisiones históricas y modelos docentes, puede permitir llevar adelante la toma de decisiones en la búsqueda de alternativas didácticas y epistemológicas.

Recurrir a la revisión y análisis de los significados institucionales de referencia y pretendidos, nos brinda la posibilidad de plantear desde la historia de la Matemática el diseño de experiencias didácticas que retomen algunos caminos ocurridos en que emergieron los conocimientos y plantear nuevas expectativas. Hasta puede permitirnos comprender las dificultades en la enseñanza y el aprendizaje de esta rama de la Matemática, el trabajo intuitivo que caracteriza a los matemáticos del siglo XVII, la resolución de situaciones problemáticas con derivadas e integrales sin la definición formal de límite en los trabajos de Leibniz y Newton, el cálculo de áreas desde una noción geométrica de la integral definida previo a la noción de derivada, el cálculo de límites e indeterminaciones sin la noción formal de infinitésimos.

Concluimos que es posible a partir de estas respuestas a los interrogantes iniciales, llevar adelante innovaciones en la enseñanza del Análisis Matemático, que sean superadores de las problemáticas originadas en la concepción tradicional: formalismo versus intuición, análisis geométrico versus análisis algebraico, infinito potencial versus infinito actual, entre otras dificultades.

Se propone rescatar situaciones problemas por los que atravesaron los diferentes matemáticos en el origen y desarrollo histórico de los objetos del cálculo, y analizarlos en el aula desde un trabajo de resolución con todas las técnicas y tecnología actuales, tal como los softwares matemáticos que brindan herramientas “ricas” para encarar variedad de soluciones y simulaciones.

Entendemos que esta propuesta puede posibilitar diseñar dispositivos didácticos que alteren el desarrollo de los conocimientos en la enseñanza y el aprendizaje. Como ejemplo podemos mencionar una reformulación del método exhaustivo de Arquímedes, en el cálculo del área del círculo y de la longitud de la circunferencia. A partir de la reseña de este problema en la historia de la Matemática, trabajar con el tanteo y la aproximación (acercamiento al número irracional trascendente *pi*), rescatar mediante interrogantes y diferentes actividades varios saberes previos acerca de la Geometría elemental (nociones de ángulos, polígonos, circunferencia, trigonometría, medición de ángulo, perímetro) y reconocer el surgimiento de nuevos conocimientos a partir de la búsqueda de respuestas (noción de números reales, relación funcional entre variables, dominio de definición en las expresiones algebraicas, interpretación intuitiva de la tendencia según la variación de las incógnitas, apoyo en el uso de las TIC, entre varios de los contenidos a estudiar en Análisis Matemático en una variable).

En la Figura 2 planteamos un mapa de este proceso de rescate y aparición de conocimientos previos y nuevos, respectivamente; resignificando el orden tradicional de enseñanza del Cálculo y el tratamiento de los temas a trabajar (basarse en la intuición, en el tanteo y apoyo en lo geométrico, discutir la tendencia, el límite, y fortalecer la indagación mediante el uso de las tecnologías).

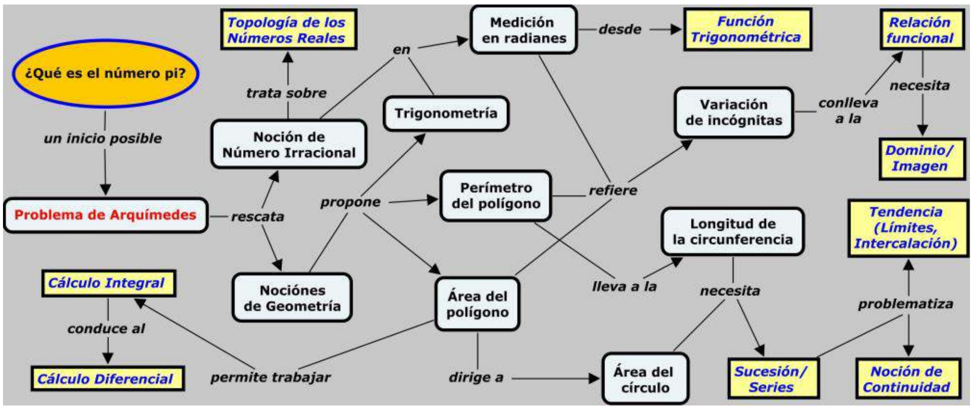


Fig. 2. Mapa conceptual de un plan de enseñanza del Cálculo en una variable.

Referencias

1. Godino, J.; Batanero, C.; Font, V.: Un enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática. Español (Argentina) (2009)
2. Godino, J. D.: Teoría de las Funciones Semióticas. Facultad de Ciencias (2003)
3. Artigue, M.: La enseñanza de los principios del Cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos. Artigue, M.; Douady, R.; Moreno, L.; Gómez, P.: Ingeniería didáctica en educación matemática (pp. 97-140). Grupo Editorial Iberoamérica, pp. 97-140 (1995)
4. Artigué, M.: Qué se puede aprender de la investigación educativa en el nivel universitario. Boletín de la Asociación Matemática Venezolana 10 (2), pp. 117-134 (2003)
5. Sierra Vázquez, M.; González Astudillo, M. T.; López Esteban, C.: Concepciones de los alumnos de bachillerato y curso de orientación universitaria sobre límite, funcional y continuidad. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 3 (1), pp. 71-85 (2000)
6. Hitt, F.: Dificultades en el aprendizaje del cálculo, XI. Meeting of Middle-Higher Level Mathematics Teachers, Michoacan University San Nicolás de Hidalgo, Morelia (Mexico) (2003a)
7. Hitt, F.: El concepto de infinito: obstáculo en el aprendizaje de límite y continuidad de funciones. En E. Filloy (Ed.), Matemática Educativa: aspectos de la investigación actual (pp. 91-111). Fondo de Cultura Económica (2003b)
8. Pantoja Rangel, R., López Betancourt, A.; Ortega Árcega, M. I.; Hernández García, J. C.: Diseño instruccional para el aprendizaje del concepto de límite: Un estudio de caso en el ITCG, la UJED, la UASLP y la UAN. Unión Revista Iberoamericana de Educación Matemática, 37, pp. 91-110 (2014)
9. Contreras de la Fuente, Á.; García Armenteros, M.; Font Moll, V.: Análisis de un proceso de estudio sobre la enseñanza del límite de una función. Bolema: Boletín de Educación Matemática, 26 (42b), 667-690 (2012)
10. Vera, F.: Breve historia de la Matemática. [2° Ed]. Ed. Losada (1961)
11. Bell, E. T.: La reina de las ciencias. Ed. Losada (1944)
12. Collette, J. P.: Historia de las matemáticas II. Siglo XXI (2007)
13. Bell, E. T.: Historia de las matemáticas. Fondo de cultura económica (2014)
14. Salinas, P.; Alanís, J. A.: Hacia un nuevo paradigma en la enseñanza del Cálculo dentro de una institución educativa. Revista latinoamericana de investigación en Matemática educativa. ISSN 2007-6819 (2009)
15. Spivak, M.: Cálculo Infinitesimal. [2° Ed.]. Reverté Ediciones (1996)
16. Gúzman, M.; Colera, J.: Matemáticas 1. C. O. U. Grupo Anaya (1987)
17. Apóstol, T.: Calculus. Volumen I. Editorial Reverté (1984)
18. Larson, R.; Edwards, B.: Cálculo. Tomo 1. Cengage Learning Editores (2010)
19. Stewart, J.: Cálculo en una variable. Cengage Learning Editores (2008)

20. Gascón, J.: Incidencia del modelo epistemológico de las matemáticas sobre las prácticas docentes. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 6 (1), pp. 129-159 (2001)
21. Pochulu, M.; Font, V.: Análisis del funcionamiento de una clase de matemáticas no significativa. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 14 (3), pp. 361-394 (2011)

Invitación a una Innovación en Álgebra Lineal: Ejemplo de Topología Molecular

Ana María Narvaez[1,2], Marcela Rodriguez[1,2]
[1] Departamento de Materias Básicas, Facultad Regional Mendoza, Universidad Tecnológica Nacional
Rodriguez 273 (5500) Mendoza
[2] Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de Cuyo, Ciudad Universitaria, Parque Gral. San Martín
ana.narvaez@frm.utn.edu.ar, marcela.rodriguez.aghem@gmail.com

Resumen. Este trabajo es de interdisciplinariedad entre Álgebra Lineal y Química, específicamente, entre la teoría de grafos y la topología molecular. El propósito es tender a la calidad de los conocimientos impartidos en el grado para el futuro ingeniero, pues la articulación consciente, potencia el conocimiento científico. El marco teórico utilizado es la teoría de la Transposición Didáctica, indicada para la enseñanza universitaria pues tiene en cuenta el real funcionamiento del sistema. La metodología empleada es la de Ingeniería Didáctica que se basa en un esquema de realizaciones didácticas en clase, con énfasis en el análisis a priori. Los resultados obtenidos se refieren a los conocimientos adquiridos respecto de los fundamentos epistemológicos necesarios para diseñar material a ser usado por los docentes y estudiantes en Álgebra Lineal de la Facultad Regional Mendoza de la Universidad Tecnológica Nacional y de Ingeniería en Petróleos de la Universidad Nacional de Cuyo.

Palabras Clave: Interdisciplinariedad, Teoría de grafos, Grafo molecular.

1 Introducción

En los últimos años se ha desarrollado una corriente científica, apta para la enseñanza universitaria, que integra la química con la matemática, tal disciplina es actualmente conocida como química matemática. Uno de sus ejes es abordado desde la teoría de grafos, desarrollada en el siglo XIX por A. Cayley y J. J. Silvester, si bien existen resultados dados por Leonard Euler desde un siglo antes. Recordemos que la teoría de grafos es un exponente de la matemática pura que ha encontrado con el tiempo diversas aplicaciones; es una herramienta imprescindible en áreas en las que estructura y conectividad juegan un papel preponderante [1].

Es bien conocido el hecho que ejemplos sencillos de la teoría de grafos aparecen en la literatura de Álgebra Lineal para cursos básicos de ingeniería: redes de comunicación y transporte, diseño de circuitos eléctricos, optimización de líneas de suministro, epidemiología, etc., en relación al estudio de matrices.

Por otro lado, la representación de compuestos químicos mediante grafos es cada vez más frecuente, dada la utilidad de los mismos para predecir las propiedades de una molécula antes de sintetizarla.

2 Marco teórico

En este trabajo del área de la Didáctica de la Matemática y de la Química como disciplinas experimentales, se privilegia la Teoría de Transposición Didáctica de Ives Chevallard. Ahora bien, ¿por qué utilizar esta teoría?

"Porque permite la articulación del análisis didáctico con el análisis epistemológico y se convierte en guía del buen uso de la epistemología para la didáctica" (Chevallard, 1991, p. 23). [2]

Esta teoría es la adecuada para sustentar la presente investigación que pretende darle respuesta a la pregunta ¿las innovaciones ayudan a una mejor aprehensión del tema matrices?, pues en este marco se le da respuesta al interrogante ¿qué se entiende por mejor...?

Mejor significa que la nueva contextualización que se le otorgue al objeto de estudio sea adecuada para los alumnos hacia los cuales va dirigida, eligiendo para ello una red de problemáticas y de problemas que pudiendo coincidir o no con la génesis histórico – epistemológica del concepto, encuentre su uso, su empleo, es decir su sentido. *"Todo saber está vinculado a sus productos y se encarna en él"* (Chevallard, 1991, p. 24) [2].

Más aún, se pretende que los alumnos logren mejor comprensión e interpretación y competencias adecuadas para la solución de problemas específicos del área ingenieril.

La teoría de la Transposición Didáctica se inserta en el sistema didáctico, que es ternario, formado por el docente, alumnos y saber matemático. La misma designa el conjunto de las transformaciones que sufre un saber con el fin de ser enseñado. Este fenómeno de transposición queda a veces oculto en la enseñanza.

En un sentido restringido, la transposición didáctica designa el paso del saber sabio o disciplinar o matemático al saber enseñado. El concepto de transposición didáctica es de Michel Verret, filósofo contemporáneo de las ciencias.

3 Metodología de la investigación

En esta investigación se emplea la metodología de investigación llamada micro ingeniería didáctica. La ingeniería didáctica se caracteriza por un esquema experimental basado en "realizaciones didácticas" en clase, esto es sobre la concepción, realización, observación y análisis de secuencias de enseñanza.

La expresión ingeniería didáctica se utiliza para denominar una forma de trabajo didáctico comparable al trabajo del ingeniero, término que proviene de la palabra "ingenio". Este último, apoyándose en los conocimientos científicos de su dominio y aceptando el control de la teoría, está obligado a trabajar con objetos más complejos que los objetos puros de la ciencia y debe gestionar problemas específicos sobre los que la ciencia no se hace cargo [3].

4 Propósitos y Descripción

Los propósitos de la presente propuesta se refieren a que los aprendizajes logrados por los estudiantes sean de la mejor calidad posible; para ello, una estrategia es anclar los nuevos conocimientos a los anteriores. En esta dirección se está trabajando para dar en Álgebra Lineal (materia del primer semestre de primer año) ejemplos de grafos que podrán ser puestos en acto en el curso de Química Orgánica (segundo semestre de segundo año). Además, se pretende que los contenidos de Álgebra Lineal y Geometría Analítica tengan aplicaciones interesantes, no estándares en la bibliografía básica para estos cursos [4],[5],[6].

La investigación consiste en realizar el estudio de las definiciones, ejemplos, propiedades y teoremas necesarios de la teoría de grafos para ser incluidas en el curso de Álgebra Lineal y Geometría Analítica, no alterando el cronograma planificado para los contenidos de la asignatura. De esta forma, dicha teoría estará disponible para realizar la caracterización estructural de moléculas, tema central de Química Orgánica.

La caracterización de moléculas se puede realizar mediante unos invariantes sencillos, llamados índices topológicos. Estos índices, una vez procesados estadísticamente juegan un papel decisivo en el descubrimiento de nuevas aplicaciones de moléculas conocidas y en el diseño de moléculas con propiedades químicas específicas. Esto es lo que actualmente se llama topología molecular.

Esencialmente la topología molecular sirve para encontrar correlaciones entre una propiedad física, química o biológica y las estructuras moleculares, basándose en los índices topológicos [7].

Dichos índices se pueden obtener a partir del tratamiento matemático de las matrices asociadas a la teoría de grafos.

La aplicación de la teoría de grafos en la química es la topología molecular; ésta se basa en la aplicación de la teoría de grafos a la descripción de las estructuras moleculares, siendo un grafo un conjunto de puntos (llamados nodos o vértices) con algunos pares de ellos conectados mediante uniones llamadas aristas o ejes. Los nodos del grafo G los numeraremos arbitrariamente y denotaremos por $e_{i,j}$ al eje que une los nodos i y j. Utilizaremos N para denotar el número de nodos de un grafo, mientras que E(G) representa el conjunto de ejes y $/E(G)/$ su cardinalidad, es decir el número de ejes de G. Si dos nodos están conectados por un eje, se llaman adyacentes. El número de ejes que salen de un nodo se llama grado del nodo. Un camino o trayectoria p en G es el subgrafo obtenido al conectar consecutivamente varios nodos adyacentes; si, además, conectamos el primer nodo al último nodo de p, obtenemos un ciclo. La longitud de un camino o ciclo es el número de ejes que lo componen [8].

Cuando la teoría de grafos se aplica a moléculas, los nodos representan átomos y las aristas, enlaces químicos, normalmente enlaces covalentes puesto que es en la química orgánica donde la topología molecular ha encontrado su mayor campo de aplicación. El grafo resultante que nos dice como están ligados los átomos y el camino (o caminos) que une (n) un átomo a otro en una misma molécula, se llama grafo molecular.

Supongamos que queremos caracterizar estructuralmente un compuesto orgánico, si es posible, se eliminan los átomos de hidrógeno de la molécula, en segundo lugar, los átomos restantes (los vértices del grafo molecular) se numeran de forma conveniente. Por último, la caracterización estructural contenida en el grafo molecular, puede ser encapsulada de muy diversas maneras como, por ejemplo, mediante matrices, índices numéricos, polinomios, espectros, grupos u operadores; en este trabajo sólo veremos las herramientas más sencillas utilizadas en la topología molecular.

4.1 Matrices asociadas a grafos moleculares

Entre las diferentes matrices asociadas a los grafos moleculares, cabe destacar las siguientes por su simplicidad: matriz de adyacencia y matriz de distancia.

La matriz de adyacencia se puede utilizar como instrumento algebraico, para indicar qué pares de nodos están unidos por aristas; si la molécula consta de N átomos, la matriz de adyacencia del grafo molecular G, A = A(G) es una matriz N x N simétrica cuyas componentes son

$$A_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ si los átomos i y j están ligados,} \\ 0 \text{ en caso contrario.} \end{cases}$$

La matriz de distancia D = D(G), es una matriz N x N simétrica cuyas componentes son las distancias topológicas. Se define:

$$D_{ij} = \begin{cases} \text{longitud mínima de los caminos que unen i y j, si } i \neq j, \\ 0, \text{ si } i = j. \end{cases}$$

Así, D proporciona una imagen cualitativa de las relaciones de proximidad o lejanía entre los átomos de la molécula. La suma de las distancias topológicas entre el vértice i y todos los demás vértices del grafo molecular, se llama suma de las distancias del vértice i

$$DS_i = \sum_{j=1}^{N} D_{ij} = \sum_{j=1}^{N} D_{ji} \qquad (1)$$

Obsérvese, finalmente, que la matriz de distancia puede obtenerse a partir de la matriz de adyacencia [1].

5 Actividad

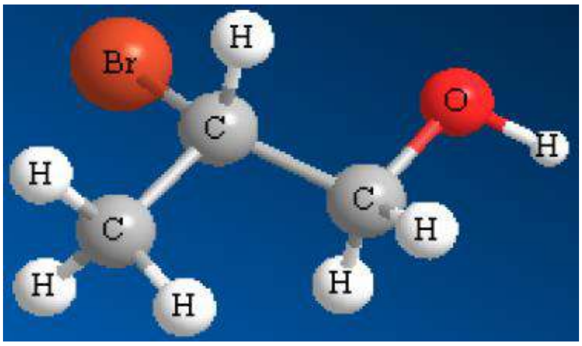
Teniendo en cuenta que las actividades a ser desarrolladas por el alumno deben ser diseñadas en distintos contextos con el control de variables didácticas que permitan la aparición de obstáculos para su tratamiento [9], [10] y, en función de los objetivos de la innovación, se propuso en el primer trabajo práctico de la cátedra de Álgebra y Geometría (se refiere a matrices), en el primer semestre del año en curso, la siguiente actividad.

5.1 Ejercicio de la guía: Matrices asociadas a grafos moleculares

Se puede utilizar como instrumento algebraico la matriz de adyacencia de un grafo, que indica qué pares de nodos están unidos por aristas; si la molécula consta de N átomos, la matriz de adyacencia del grafo molecular G, A = A(G) es una matriz N x N simétrica cuyas componentes son

$$A_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ si los átomos i y j están ligados,} \\ 0 \text{ en caso contrario.} \end{cases}$$

A continuación, la figura 1 muestra la molécula de 2-bromopropanol y su grafo molecular, propuesto por Rozas (2011) [11].



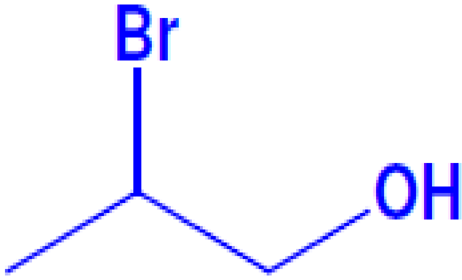


Fig. 1. Molécula 2- bromopropanol. Gráfico de barras y esferas y grafo molecular.

La representación del grafo matemático puede ser

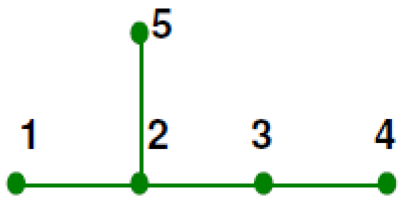


Fig. 2. Grafo matemático de la molécula 2- bromopropanol.

i) Entonces, la matriz de adyacencia $A = (A_{ij})_{1\leq i, j\leq N}$ es A = ………………………..
ii) Verificar que la matriz de adyacencia es simétrica.
iii) Verificar que en la molécula dada, que sólo tiene enlaces simples, la suma de todos los elementos de la fila i de A, $\sum_{j=1}^{N} A_{ij}$ así como la suma de todos los elementos de la columna i, $\sum_{j=1}^{N} A_{ji}$, dan indistintamente el número total de ejes que confluyen en el átomo i.
iv) La matriz de distancia $D = (D_{ij})$, es una matriz N x N cuyas componentes son las distancias topológicas. Se define:

$$D_{ij} = \begin{cases} \text{longitud mínima de los caminos que unen i y j, si } i \neq j, \\ 0, \text{ si } i = j. \end{cases}$$

Entonces la matriz de distancia es D = …………………..
v) Verificar que la matriz de distancia D es simétrica.

5.2 Notas sobre la Actividad

a) Las respuestas de las matrices de adyacencia y distancia solicitadas en el ejercicio son

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad y \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

b) Con respecto a esta actividad, se ha realizado la validación de la misma en una oportunidad.
c) Sólo se tienen al momento evaluaciones cualitativas de impacto positivo en docentes y estudiantes.
d) Se espera que en el cursado intensivo de la asignatura, correspondiente al segundo semestre se puedan obtener nuevas evaluaciones con un protocolo previamente armado y analizar cuantitativamente el impacto.

6 Conclusiones y trabajos futuros

En esta etapa de la investigación se continúan estudiando las definiciones, propiedades y teoremas necesarios, sobre grafos, para dar en el curso de Álgebra Lineal y Geometría Analítica, que no alteren el tiempo planificado para impartir dicho programa y que permitan de forma eficaz dar ejemplos de matrices para destacar, entre otros aspectos, su funcionalidad como un lenguaje compacto de aplicación en las ciencias ingenieriles. Asimismo, es importante destacar que introducir innovaciones que permitan articular conceptos entre distintos espacios curriculares es enriquecedor tanto para los docentes como para los alumnos.

La incorporación en la guía de trabajos prácticos del ejemplo mencionado ha sido bien recibido por los docentes, a quienes se les preguntó previamente si deseaban incorporarlo a la mencionada guía; según ellos transmitieron, también impactó positivamente en los estudiantes.

La articulación consciente entre distintos espacios disciplinares favorece la capacitación de docentes y, en consecuencia, la calidad de los aprendizajes de los estudiantes.

Según Amigó, las características singulares de la topología molecular pueden resumirse de la siguiente manera: es una vía puramente matemática de describir la estructura molecular y un método muy eficaz para descubrir nuevas moléculas activas barriendo bases de datos, dado que todo el proceso es fácilmente computarizable [1].

Los trabajos futuros que se desarrollarán a partir de estos resultados consisten en obtener otras matrices que caractericen a los compuestos químicos y el espectro de la matriz de adyacencia, puesto que, aunque sólo se utilizan el mínimo y el máximo autovalor en topología molecular (el máximo autovalor representa el número de ramificaciones o *branching* del compuesto químico) dicho tema es un eje central en Álgebra Lineal.

Referencias

1. Amigó, J. M., Falcó, A., Gálvez, J. y Villar, V. *Topología Molecular*. Bol. Soc. Esp. Mat. Apl. nº 39 (2007), pp. 135-149. (2007)
2. Chevallard, I. La Transposición Didáctica. Del saber sabio al saber enseñado. Aique Grupo Editor S. A. Buenos Aires. Argentina. (1991)
3. Artigue, M. Ingeniería Didáctica. En P. Gomez (ed.). Ingeniería Didáctica en Educación matemática. Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Grupo Editorial Iberoamericano. Méjico. (1995)
4. Grossman, S. Álgebra Lineal con Aplicaciones. McGraw W-Hill Interamericana de México. México. (1992)
5. Kolman, B. ; Hill, D. Álgebra Lineal. Pearson Educación. México. (2006)
6. Larson, R. y Falvo, D. Fundamentos de Álgebra Lineal. Cengage Learning. México. (2010)
7. Villar Amigó, V., Falcó Montesinos, A., Casanova Sorní, C., Moreno Sancho, M. L., Antón Fos, G. , García Doménech, R. La topología molecular en el descubrimiento de nuevas terapias. (2015) http://elfarmaceutico.es/index.php/la-revista/secciones-de-la-revista-el-farmaceutico/item/6622-la-topologia-molecular-en-el-descubrimiento-de-nuevas-terapias#.W1oZc7ivHIW. Accedido 3 de noviembre de 2017.
8. Bollobás, B. Modern Graph Theory. Springer Verlag. New York. (1998)

9. Contreras de la Fuente, A. ¿Se aprende por medio de los cambios entre sistemas de representación semiótica? XVIII JORNADASDEL SI- IDM, Castellón. (2002).
10. Duval, R. *Semiosis y pensamiento humano. Registros semióticos y aprendizajes intelectuales*. Universidad del Valle. Instituto de Educación y Pedagogía, Grupo de Educación Matemática. Peter Lang S. A. Editions scientifiques européennes, 1995. (1991).
11. Rozas, I. *Web*. http:// www.imus.us.es/ACT/RSME-RSEQ-2011/php/rozas.pdf (2011). Accedido 2 de junio de 2017.

Dificultades de estudiantes universitarios en el aprendizaje del concepto de probabilidad condicional

Silvia Bravo [1,2,3], Elena Gianinetto [1]

[1] Departamento de Sistemas, Universidad Tecnológica Nacional Facultad Regional Tucumán
Rivadavia 1050
Email: sbravo@herrera.unt.edu.ar
Email: vecagi @uolsinectis.com.ar

[2] Departamento de Física, Facultad de Ciencias Exactas y Tecnología, Universidad Nacional de Tucumán
Avenida Independencia 1800

[3] Instituto de Física del Noroeste Argentino, CONICET- Universidad Nacional de Tucumán
Avenida Independencia 1800

Resumen. En este trabajo presentamos un estudio exploratorio sobre los sesgos presentes en el razonamiento sobre probabilidad condicional en estudiantes universitarios de ingeniería. Se analizan las respuestas a diferentes tipos de problema. Los resultados son coherentes con los encontrados en investigaciones anteriores y evidencian la influencia del enunciado del problema con la interpretación y razonamiento de los estudiantes. Muestran la importancia del lenguaje y las representaciones simbólicas como un aspecto a tener en cuenta desde nuestro rol de docentes, tanto en el diseño de material didáctico como en el desarrollo de las clases y en la evaluación del aprendizaje.

Palabras clave: probabilidad condicional, razonamiento, sesgos, lenguaje**.**

1. Introducción

Actualmente en las carreras de ingeniería se está implementando un modelo de educación centrado en el estudiante y basado en el desarrollo gradual de competencias. Los docentes se enfrentan de esta manera, al desafío de definir objetivos de aprendizaje e instrumentos de evaluación en las diferentes asignaturas, acordes con este modelo. En este marco, la comprensión del concepto de probabilidad condicional implica un tipo de razonamiento muy importante en diversas tareas profesionales, tales como el diagnóstico, la evaluación y la toma de decisiones.

La probabilidad condicional es un concepto básico para la comprensión de muchos otros que también se requieren como competencias profesionales, por ejemplo, los de nivel de significación y potencia en un contraste de hipótesis, distribuciones marginales y rectas de regresión, entre otros [1].

Sin embargo, desde la práctica docente con estudiantes universitarios de carreras de ingeniería, hemos detectado diferentes tipos de dificultades en la interpretación del concepto de probabilidad condicional, lo que nos lleva a interesamos en investigaciones que tratan de explicar por qué se producen estas dificultades y realizar una investigación con nuestros estudiantes.

Al respecto, se han desarrollado numerosas investigaciones sobre las razones de las dificultades de los estudiantes para resolver situaciones o problemas que involucran el cálculo de probabilidades condicionales. Por ejemplo: [1], [2], [3], [4] y [5].

Muchas de estas investigaciones hacen referencia a heurísticos, a sesgos de razonamiento y confusiones o interpretaciones incorrectas de la probabilidad condicional relacionadas con la causalidad o una relación confusa con la probabilidad conjunta [1] y [2]. Otras investigaciones hacen referencia al uso de distintos heurísticos en el razonamiento [6], a dificultades de estudiantes en la comprensión e identificación de probabilidad condicional y probabilidad conjunta [7] y [8].También se abordan las dificultades de los estudiantes relacionadas al contexto en que se formulan los problemas, al formato con que se expresan las cantidades (frecuencias, porcentajes o números entre 0 y 1), además de la estructura en que se relacionan las probabilidades simples o marginales $P(A)$, las probabilidades conjuntas $P(A \cap B)$ y condicionales $P(A/B)$ [9]. En efecto, en la práctica docente se utilizan diversos sistemas de representación que actúan como mediadores entre el lenguaje con el que se expresan las cantidades en el contexto del problema y el lenguaje simbólico al que se traduce el mismo, tales como tablas de contingencia, diagramas de árbol, diagramas de Venn, etc., con el objetivo de que los estudiantes puedan hacer una lectura analítica del problema e introducir reglas de cálculo [10].

Este trabajo representa un estudio exploratorio sobre influencia de algunas características del enunciado del problema en la aparición de determinados sesgos en el razonamiento que despliega el estudiante en su intento de resolverlo.

2. Marco teórico de referencia

Las investigaciones realizadas desde la Psicología del razonamiento, así como algunas investigaciones recientes en didáctica de la probabilidad muestran la existencia de intuiciones incorrectas, sesgos de razonamiento y errores de comprensión y aplicación de este concepto. Algunos de ellos son bastante resistentes a la enseñanza formal de los conceptos involucrados.

Los sesgos de razonamiento ocurren por la propia naturaleza de nuestro sistema de procesamiento de la información y ocurren por las aproximaciones que utiliza el sistema para una mejor administración de sus recursos [6]. En lugar de utilizar las leyes de la probabilidad bayesiana para emitir un juicio, se utilizan en forma espontánea otro tipo de estrategias ("reglas de andar por casa") que permiten simplificar la tarea de asignar probabilidades y de predecir, reduciendo ambas tareas a operaciones más simples. Estas reglas se denominan heurísticos y su uso se podría explicar por algunas restricciones cognitivas, como las limitaciones de la memoria de corto plazo: al no poder tener en cuenta toda la información, la selección de la misma se realiza teniendo en cuenta el tipo de juicio a realizar y la disponibilidad de dicha información.

Las explicaciones en base a estos heurísticos se han relacionado en general con la causalidad, con el rol del evento que actúa como condicionante o con la relación confusa de la probabilidad condicional y la probabilidad conjunta, errores más frecuentes detectados en las investigaciones. Una síntesis de estas heurísticas, sesgos de razonamiento y confusiones o interpretaciones equivocadas al tratar con la probabilidad condicional se presentan en [5].

- La *falacia de la condicional transpuesta*, ocurre cuando no se discrimina adecuadamente entre las dos direcciones de la probabilidad condicional P(A/B) y P(B/A) [1]. Este error se ha observado en determinados contextos de problemas, como los de medicina, donde se confunde la probabilidad de tener una enfermedad cuando ha sido positivo el test de diagnóstico, con la probabilidad de un resultado positivo en el test de diagnóstico, dado que se tiene la enfermedad.
- La *falacia del eje temporal* es la creencia de que un suceso que ocurre después del suceso que estamos evaluando, no puede afectar a la probabilidad de éste. En este caso se dificulta la comprensión de la relación de condicionalidad si la secuencia temporal de los sucesos no coincide con el orden dado en el condicionamiento [11] y [8].
- *Confusión entre probabilidad condicional y probabilidad conjunta*: los estudiantes no son capaces de discriminar en el enunciado de los problemas, cuándo se trata de un suceso condicionado por la ocurrencia de otro y cuándo se trata de la ocurrencia de ambos. En general, las investigaciones al respecto atribuyen esta confusión a la dificultad de comprensión del lenguaje de los problemas [8].
- *Condicionamiento y causación*: cuando se evalúa una probabilidad condicional P(A/B) el contexto puede hacer que se perciba psicológicamente que B es causa de A (relación causal) o viceversa (relación diagnóstica). Esta relación de causalidad también puede aparecer asociada a la secuencia temporal, se dificulta la comprensión de la condicionalidad si se invierte el eje del tiempo en que ocurren naturalmente los eventos [1].
- *Sincronismo y diacronismo de los eventos*: se dificulta realizar la restricción del espacio muestral cuando los eventos son simultáneos (ocurren al mismo tiempo), por ejemplo, extraer una sola carta de una baraja y definir eventos relacionados con el palo y con las figuras o números que han resultado. La dificultad disminuye, en cambio, cuando hay una clara secuencia temporal, por ejemplo, extraer dos bolitas de una urna en forma sucesiva [9].
- *Confusión entre sucesos independientes y sucesos excluyentes*: cuando los sucesos son excluyentes, la ocurrencia de uno implica la no ocurrencia del otro, por lo tanto estamos ante el caso más fuerte de dependencia. Sin embargo, debido a las imprecisiones del lenguaje ordinario o a la influencia de las representaciones en diagramas de Venn, se confunde "independencia" con "separados" [12].

Desde la psicología del razonamiento se considera que el sistema cognitivo tiene determinadas restricciones, tales como capacidad de memoria y recursos de procesamiento limitados. Ante una situación determinada, el sistema se ve obligado a seleccionar aquello que sea relevante para resolver la situación y este proceso puede conducir a errores que, cuando son sistemáticos se los clasifica como sesgos [6]. Una de las áreas de investigación más extensas de la psicología del razonamiento deductivo, se centra en el estudio de las inferencias condicionales sobre las relaciones que vienen enunciadas por medio de "si, entonces".

La teoría de modelos mentales de Johnson-Laird [13] es uno de los marcos teóricos para explicar el razonamiento humano dentro de esta área, proponiendo que la interpretación de un enunciado "si p, entonces q" dependerá de su significado lingüístico y del contexto. Considera que construimos modelos de eventos y aspectos del mundo usando procesos cognitivos tácitos y razonamos con esos modelos, poniendo a prueba las conclusiones a las que se llega con el uso de ellos. La comprensión de un aspecto de la realidad ocurre entonces cuando se verifica acuerdo entre el modelo construido para explicarlo y el aspecto modelado

Desde el ámbito de la educación en Matemáticas también ha surgido en las últimas décadas la teoría de campos conceptuales de Vergnaud [14], que explica el funcionamiento cognitivo de los sujetos en una determinada situación tomando como referencia el propio contenido del conocimiento y el análisis conceptual del dominio de ese conocimiento. Vergnaud [15] considera que el comportamiento ante una situación dada está dirigido por esquemas, los cuales generan una secuencia de acciones que dependen de los parámetros de la situación. Define un esquema como la "totalidad organizada que permite generar una clase de comportamientos diferentes en función de las características particulares de cada situación", y señala los elementos que lo constituyen: a) metas y anticipaciones, que permiten identificar situaciones, b) invariantes operatorios (conceptos-en-acción y teoremas-en acción) mediante los cuales se puede reconocer los elementos pertinentes de la situación y la información relevante de la misma, c) reglas-de-acción del tipo "si...entonces" que permiten generar un secuencia de acciones y d) inferencias o razonamientos que se efectúan durante la actividad frente a la situación.

Estos modelos permiten explicar la dinámica del razonamiento y justifican la aparición de los sesgos en el razonamiento, al considerar el contexto o situación, el conocimiento previo, la selección de aspectos relevantes y las reglas de acción.

3. Metodología

La muestra está constituida por 345 alumnos de 3º año de la carrera de Ingeniería en Sistemas de Información, correspondientes al cursado 2017 y 2018 de la asignatura Probabilidades y Estadísticas.

Los enunciados que se utilizaron como instrumentos tienen estructuras distintas en cuanto a las cantidades conocidas y desconocidas y difieren además en el formato de su presentación. Fueron administrados durante la primera evaluación parcial del cursado en ambos años, donde cada estudiante respondió a dos problemas relacionados con probabilidad condicional:

- uno seleccionado al azar entre los enunciados P1, P2, P3, P4 y P5, cuyas estructuras relacionan probabilidades simples con probabilidades condicionales y probabilidades conjuntas, además de abordar el concepto de independencia de eventos.
- un problema de Teorema de Bayes, seleccionado al azar entre P6 y P7.

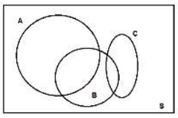
La asignación de los problemas se realizó al azar. Cada uno de los enunciados P1, P2, P3, P4 y P5 fue respondido por aproximadamente 70 estudiantes del total y cada uno de los enunciados P6 y P7 fue respondido por aproximadamente 170 estudiantes del total.

A continuación, se describen los distintos enunciados utilizados en esta investigación, y la estructura de cada uno.

Enunciados

P1- La probabilidad de que un médico diagnostique correctamente una enfermedad en particular es de 0,7. Si
realiza un diagnóstico incorrecto, la probabilidad de que el paciente realice una demanda es de 0,9.
a) ¿Cuál es la probabilidad de que el médico realice un diagnóstico incorrecto y que el paciente lo demande?
b) ¿Cuál es la probabilidad de que el diagnóstico sea incorrecto si se presentó una demanda?
c) ¿Son independientes los eventos "realizar diagnóstico incorrecto" y "presentar una demanda"?

P2- Se definen tres eventos sobre un espacio muestral.



$P(A) = 1/3$, $P(B) = 1/4$, $P(C) = 1/5$, $P(A \cap B) = 1/10$ y $P(B/C) = 1/4$
a) Calcule P(A/B) ¿Son A y B independientes?
b) Calcule P(B/C) ¿Son B y C independientes?
c) ¿Son A y C independientes?

P3- Se extraen 3 cartas sin reemplazo de una baraja de 52 cartas.
a) ¿Cuál es la probabilidad del suceso A: "salen T,*T,D en ese orden"*?
b) Sea el suceso B: "*la primera es de T",* calcule P(A/B) y P (B/A)
c) ¿Son A y B independientes? Justifique su respuesta.

P4- Un jugador tira dos dados simultáneamente, uno rojo y otro negro.
a) Después que se han tirado los dos dados, un observador puede ver que en el dado rojo salió un dos, pero no puede ver el dado negro. En esta situación, ¿Cuál es la probabilidad de que la suma haya sido siete?
b) El evento "la suma de puntos resulta siete" es independiente del evento "en el dado rojo sale dos"? Explique.

P5- Se extrae aleatoriamente una carta de una baraja de 52 cartas.
a) Calcule la probabilidad de que la carta sea un as
b) Calcule la probabilidad de que la carta sea de diamante
c) Si alguien le dice que la carta extraída es de diamante, ¿cuál es la probabilidad de que sea un as?
d) ¿Son independientes los eventos definidos en los apartados (a) y (b)?

P6- Se puede llegar a una ciudad por tres rutas distintas.
La probabilidad de accidentes en la ruta A es de 0,01, en la ruta B es de 0,05 y en la C es de 0,06. Se conoce que el 50% de las veces se escoge la ruta A, un 20% de las veces se escoge la B y un 30% de veces la C.
a) ¿Cuál es la probabilidad de que ocurra un accidente en un viaje a dicha ciudad?
b) Si se conoce que hubo un accidente, ¿cuál es la probabilidad de que haya ocurrido en la ruta A?

P7- En la experiencia de una casa bancaria, los clientes que tienen suficiente dinero en sus cuentas, firman cheques con fecha adelantada por error una vez cada mil veces. Por su parte los clientes que firman sobre cantidades insuficientes de dinero, invariablemente lo hacen con fecha adelantada; éste último grupo constituye el 1% del total de clientes. Un cajero recibe un cheque firmado por adelantado. ¿Cuál es la probabilidad de que provenga de un cliente que tiene dinero insuficiente?

Los problemas varían en cuanto a la estructura de las cantidades conocidas y desconocidas, en el lenguaje (coloquial o simbólico) y el contexto al que se refiere. Se describen en la Tabla 1.

Tabla 1. Características de los enunciados.

	Descripción	Estructura Cantidades/Conceptos conocidos	 Cantidades/Conceptos desconocidos
P1	Enunciado verbal. Sin representaciones mediadoras. Con contexto	P(A), P(B/A)	P(B∩A), P(A/B), independencia
P2	Enunciado no verbal. Con representaciones mediadoras. Sin contexto.	P(A), P(B), P(C), P(B∩A), P(B/C)	P(A), P(B), P(A/B), P(B/A), independencia
P3	Enunciado verbal. Con algunas representaciones mediadoras. Experimento con secuencia temporal. Con contexto.	Reglas de conteo	P(A/B), P(A/C), independencia
P4	Enunciado verbal. Los eventos considerados son simultáneos. Con contexto.	P(A/B)	P(A), independencia
P5	Enunciado verbal. Los eventos son simultáneos. Con contexto.	Reglas de conteo	P(A), P(B), P(A/B), independencia
P6	Enunciado verbal con datos de probabilidades en forma explícita. Con contexto.	P(A), P(B), P(C), P(D/A), P(D/B), P(D/C)	P(D), P(C/D)
P7	Enunciado verbal con datos de probabilidades en lenguaje coloquial. Con contexto.	P(B/A), P(B/Ā), P(A), P(Ā)	P(A/B)

4. Presentación de resultados

Se analizaron las respuestas a los problemas clasificándolas en las categorías correctas e incorrectas en cuanto al procedimiento. Se ha consensuado la clasificación en estas categorías con los docentes de la cátedra según el siguiente criterio:
Correctos: Los estudiantes interpretan el enunciado, pueden formalizar los mismos en términos de eventos, probabilidades simples o condicionales y utilizan los procedimientos correctos (cálculos de probabilidades simples o condicionales, teorema de la probabilidad total o teorema de Bayes) para su resolución.
Incorrectos: No interpretan el enunciado y no pueden formalizar el mismo en términos de los conceptos estudiados ni pueden utilizar los procedimientos necesarios para resolverlos. Presentan interpretaciones confusas y/erróneas de los datos y de las cantidades que se pide calcular o evaluar.

Los resultados que se presentan en la Tabla 2, se expresan, para cada enunciado, en porcentajes sobre el total de estudiantes que responden al mismo.

Tabla 2. Categorización para cada respuesta

	P1	P2	P3	P4	P5	P6	P7
Respuestas correctas	27%	59%	40%	32%	46%	52%	17%
Respuestas incorrectas	53%	31%	45%	43%	35%	36%	38%
No responden	22%	10%	15%	35%	23%	12%	45%

A continuación se analizan todas las respuestas categorizadas incorrectas para identificar los principales núcleos de dificultad en el proceso de resolución. Tomado como categorías los principales sesgos y heurísticos que se han detectado en investigaciones anteriores, se consigna el porcentaje de respuestas que se clasifican en cada una de ellas. Los resultados se consignan en la Tabla 3 y los porcentajes, en este caso, se calculan en base al total de respuestas incorrectas para cada problema.

Tabla 3. Porcentajes de dificultades identificadas en los enunciados

	P1	P2	P3	P4	P5	P6	P7
Confusión entre independencia y exclusión	23%	80%	20%	6%	35%	-	-
Confusión entre probabilidad condicional y probabilidad simple	5%	-	-	24%	-	30%	43%
Confusión entre probabilidad conjunta y probabilidad condicional	37%	-	12%	8%	23%	11%	21%
Falacia de la condicional transpuesta	22%	-	-	12%	-	-	-
Falacia del eje temporal	-	-		-	-	5%	35%
Otras dificultades	32%	20%	68%	30%	35%	26%	34%

En la Tabla 2 se puede observar que:
- es baja la proporción de respuestas correctas en los enunciados P1 y P7, donde el lenguaje es básicamente coloquial y propio de un determinado contexto.
- los valores más altos de respuestas correctas se observan en los enunciados P2 y P6. En P2 se utilizan diagramas de Venn y presentación de valores de las probabilidades en términos de las representaciones formales, como P(A), P(A/B) y P(A∩B). El enunciado P6 tiene el formato característico de la mayoría de los libros de textos universitarios de probabilidades y estadísticas sobre Teorema de Bayes.

En la Tabla 3 se puede observar que:
- en algunos problemas, como P1 y P4, se observa la presencia de los distintos sesgos.
- en los restantes problemas se observan solamente algunos de los sesgos mencionados.
- en todos los enunciados se observan otro tipo de dificultades. Estas dificultades están asociadas, en general, a la aplicación acrítica de algoritmos de resolución de problemas, donde el estudiante trata de "acomodar" los datos a una dada expresión, sin que se pueda interpretar en su procedimiento que los errores obedecen a algunos de los sesgos mencionados.

5. Discusión de Resultados y Conclusiones

5.1 Confusión entre independencia y exclusión

El hecho de que $A \cap B = \varnothing$ representa la condición más fuerte de dependencia: dos sucesos A y B que son excluyentes son dependientes, ya que uno de ellos no puede ocurrir cuando ocurre el otro.

Al resolver la situación que se presenta en el enunciado P2, un 60% de los alumnos con respuesta incorrecta dicen que A y C son independientes "porque no se intersectan" o "no hay puntos en común".

Esta idea también aparece durante el trabajo con el enunciado P5. Un 35% de los estudiantes que respondieron en forma incorrecta expresan que no son independientes porque "la carta puede ser de diamante y un as simultáneamente" o "si existe una carta as de diamante los eventos no serían independientes".

En estas respuestas la palabra "independientes" se está interpretando en un sentido figurado, tal vez como "A no tiene nada que ver con B", lo cual lleva a una asociación con el concepto de "excluyentes".

El análisis de las respuestas al enunciado P2 también evidencia dificultades de este tipo. En efecto, muchos alumnos pueden resolver correctamente el apartado (a) que consiste en una asignación de probabilidades a partir del espacio muestral, pero no logran responder correctamente al apartado (c). Entre las respuestas incorrectas, se destacan algunas que responden desde un modelo intuitivo, por ejemplo: "en una misma tirada se pueden dar los dos sucesos, la ocurrencia de un número par en el dado rojo incide en el resultado de la suma". Interpretamos que este alumno no está pensando en la ocurrencia simultánea de los eventos como una probabilidad conjunta sino como una "asociación o relación" entre eventos.

5.2 Confusión entre probabilidad condicional y probabilidad simple

Los resultados son coherentes con los reportados por investigaciones anteriores, en cuanto se relaciona con las expresiones lingüísticas y/o simbólicas del enunciado. La dificultad en la interpretación aumenta a medida que el enunciado no explicita la probabilidad condicional que se entrega como dato o que se quiere averiguar con los condicionales “si” o “dado que”, que son más familiares al estudiante. En efecto, los enunciados P4, P6 y P7 son los que más dificultades revelan asociadas con este sesgo.

5.3 Confusión entre probabilidad condicional y probabilidad conjunta

A excepción del enunciado P2, todos los demás presentan, en mayor o menor medida, este tipo de dificultad. Algunos alumnos tienen dificultades con la sintaxis de la expresión de la probabilidad condicional ya que existen variadas y diferentes expresiones para ella. En efecto, el nexo más común en las oraciones que expresan condicionalidad es el SI, por ejemplo: “Si ocurrió A, calcule la probabilidad de B”. Pero existen muchas otras formas posibles de enunciados para informar datos o preguntar algo, tales como, por ejemplo: “De los alumnos del último año escolar, ¿qué tanto por ciento son varones?”, “Sabiendo que ocurrió B, la probabilidad de A es …”, “Conocemos que ocurrió B. Calcule la probabilidad de A”, etc.

Entender que estas distintas sintaxis en la oración están informando o preguntando sobre una probabilidad condicional, además de interpretar el contexto de la situación que se presenta, evidentemente demanda más esfuerzo cognitivo. Esta dificultad de interpretación lleva al estudiante a “asociar” a los dos eventos como ocurriendo juntos.

En sentido inverso, aquellas expresiones que utilizan la conjunción “y” en un lenguaje coloquial no son siempre interpretadas como una probabilidad de la intersección. Muchos alumnos la interpretan como una probabilidad condicional, aunque este caso es menos frecuente que el anterior.

En el caso del enunciado P2, la redacción está planteada en términos simbólicos, en el lenguaje formal de la disciplina, por lo que no se observa este tipo de dificultad.

Los resultados resaltan la importancia del lenguaje en la redacción y de la mediación del profesor para la construcción de significados.

5.5 falacia de la condicional transpuesta

Se observa solamente en los enunciados P1 y P4. El enunciado P1 tiene similitud de estructura y contexto con los problemas de tests de diagnóstico de enfermedades. En este caso les cuesta a los estudiantes distinguir entre la probabilidad de que “se haga una demanda cuando el diagnóstico es incorrecto” y “que el diagnóstico sea incorrecto cuando hubo una demanda”. El contexto otorga una fuerte asociación a la palabra “demanda” con “diagnóstico incorrecto”, por lo que la atención sobre el diacronismo de los eventos queda en segundo plano.

Si bien el enunciado P4 no responde a este contexto, también se detecta este tipo de error. En este otro caso uno, de los eventos involucra solamente al resultado de uno de los dados y el otro evento involucra al resultado de ambos. Si consideramos además la simultaneidad (sincronismo) de los eventos, es lógico que el sistema cognitivo aplique ciertas restricciones para reducir la complejidad de la interpretación, dando origen a los sesgos. Esto explicaría por qué les cuesta distinguir ente la probabilidad de que “haya salido un dos en uno de los dados si la suma es siete” y “la suma sea siete si sale un dos en uno de los dados”.

5.5 falacia del eje temporal

Las dificultades estarían relacionadas con el orden temporal entre los sucesos, los alumnos manifiestan la concepción de que el suceso condicionante B es necesariamente anterior al suceso condicionado A (concepción cronologista). Esta dificultad ha sido detectada en el desempeño de los alumnos con los enunciados P6 y P7, donde se solicita la probabilidad del suceso “pasado”, conocido el suceso “futuro”.

La pregunta principal de los alumnos, durante el desarrollo de la evaluación en estos casos era del tipo “¿Cómo puedo calcular esta probabilidad si mis datos están al revés?”. El porcentaje de alumnos que no pueden resolver esta situación presentada es mayor en el enunciado P7, ya que además se agrega el esfuerzo cognitivo de interpretar el contexto de la situación, presentada en lenguaje coloquial. En el enunciado P6, en cambio, son menores las dificultades relacionadas con el eje temporal dado que se utiliza un formato estándar para problemas de Teorema de Bayes y tienen un cierto entrenamiento en interpretar este formato de datos.

6. Conclusiones e implicancias para el rol del docente

Los resultados evidencian que:
- Los sesgos que aparecen en el razonamiento de los estudiantes están asociados a características propias del enunciado del problema. Las dificultades se hacen mayores cuando el enunciado se plantea en lenguaje coloquial dentro de un determinado contexto en el cual se deben realizar los razonamientos.
- Algunas características de los eventos involucrados, tales como sincronismo versus diacronismo, de los eventos, favorecen la aparición de determinados sesgos,
- Los sesgos asociados a los modos de razonamiento de los estudiantes se presentan generalmente entrelazados en un mismo problema, sumados a otras dificultades propias de su desempeño tales como el uso acrítico de las expresiones simbólicas del teorema de la probabilidad total, el teorema de Bayes, o la regla del producto $P(A\cap B) = P(A).\ P(B)$, válida solo para eventos independientes.

Nos parece importante para la práctica docente centrar la atención en la influencia de la estructura, lenguaje y contexto de los enunciados que se utilizan durante el proceso de enseñanza y aprendizaje. Es nuestra tarea como docentes conocer las estructuras gramaticales que podemos utilizar para la expresión de la probabilidad condicional con el objetivo de evitar el lenguaje ambiguo y favorecer la interpretación deseada de la probabilidad condicional, tanto en los datos que se presenten como en las preguntas que se realicen.

En el caso de las situaciones que se presentan en la enseñanza formal, necesitan ser descriptas y ello implica lenguaje, esencial para construir el significado de los conceptos con los cuales se aborda la situación, captarlo, negociarlo o compartirlo.

Por otra parte, teniendo en cuenta los objetivos de la asignatura y la carrera, si queremos que los estudiantes desarrollen competencias para tomar decisiones acertadas en situaciones de incertidumbre o realicen diagnóstico de situaciones, debemos promover el razonamiento en una diversidad de éstas, ya que un concepto no se desarrolla en una sola categoría de situaciones [15].

Referencias Bibliográficas

1. Falk, R. Conditional probabilities: insights and difficulties. En R. Davidson y J. Swift (Eds.), *Proceedings of the Second International Conference on Teaching Statistics, International Statistical Institute*, Victoria, Canada, 292–297. (1986).
2. Ojeda, A. M. (1995). Dificultades del alumnado respecto a la probabilidad condicional. *UNO*, 5, 37-55.
3. Díaz, C. Evaluación de la falacia de la conjunción en alumnos universitarios. *Suma*, 48, 45-50. (2005).
4. Huerta, M. P. On conditional probability problem solving research –structures and context. *International Electronic Journal of Mathematics Education* 4(3), 163-194. (2009).
5. Batanero, C; Contreras, J.; Díaz, C. Sesgos en el Razonamiento Sobre Probabilidad Condicional e Implicaciones Para la Enseñanza. *Revista digital Matemática, Educación e Internet.* Vol. 12, No 2. (2012) (http://www.tec-digital.itcr.ac.cr/revistamatematica/).
6. González Labra, M. Cap. 8: El razonamiento condicional. *Introducción a la Psicología del pensamiento*. Editorial Trotta. (1998).
7. Huerta, M. P.; Lonjedo, M. A. Los problemas de probabilidad condicional en la Enseñanza Secundaria, en Encuentros Educativos. *XI Jornadas sobre el Aprendizaje y la Enseñanza de las Matemáticas* (XI JAEM). (2003).
8. Díaz, Carmen; de la Fuente, I. Dificultades en la resolución de problemas que involucran el teorema de Bayes. *Revista Educación Matemática*, vol 18, num 2, pp. 75- 94. (2006).
9. Huerta, M.; Arnau J. La probabilidad condicional y la probabilidad conjunta en la resolución de problemas de probabilidad. *AIEM - Avances de Investigación en Educación Matemática*. - 2017, Nº 11, 87 – 106. (2017)
10. Corter, J. E. & Zahner, D. Use of external visual representation in probability problem solving. *Statistics Education Research Journal.* 6, 22-50. (2007).
11. Ojeda, A. M. Dificultades del alumnado respecto a la probabilidad condicional. *UNO*, 5, 37-55. (1995).
12. Sánchez, E. Dificultades en la comprensión del concepto de eventos independientes. En F. Hitt (Ed.), *Investigaciones en Educación Matemática* , pp. 389-404. México. (1996).
13. Johnson-Laird P. *Mental Models*. Cambridge,MA: Harvard University Press. (1983).
14. Vergnaud G. Multiplicative structures. *Acquisition of Mathematics Concepts and Processes*. New York: Academic Press Inc. (1983).
15. Vergnaud, G. ¿Por qué la teoría de los campos conceptuales? *Infancia y Aprendizaje*, 36 (2), pp. 131-161. (2013).

Evaluación de Proyectos Propuestos por Alumnos de la UTN FRSF en el Tópico "Razón de Cambio" y su Relación con Objetos de Aprendizajes.

Casco Eva[1], De Santis Eduardo[1], Rodríguez Elvira[1], Pastorelli Sonia[1],
[1] Departamento de Materias Básicas, Facultad Regional Santa Fe, Universidad Tecnológica Nacional
Lavaisse 610
ecasco@frsf.utn.edu.ar, edu.desantis@gmail.com, mrodriguez@frsf.utn.edu.ar, spastorelli@frsf.utn.edu.ar

Resumen. Los actuales estudiantes universitarios denominados "millennials" o "generación Y" muestran creatividad, adaptación a las tecnologías y capacidad para desarrollar tareas múltiples. En consecuencia, los docentes detectan la necesidad de adecuar sus prácticas áulicas tradicionales, empleando coreografías didácticas activas que se adapten a estas características, en pos de mejorar los aprendizajes. Lejos ha quedado la preocupación centrada en la repetición de técnicas y rutinas estandarizadas; hoy es importante apoyarse en las nuevas tecnologías, apostando al desarrollo y a la adquisición de habilidades cognitivas superiores. En un trabajo precedente se diseñó, implementó y valoró una práctica, abordando el tópico generativo "razón de cambio". Los alumnos, agrupados y apoyados en el software Geogebra, modelaron un problema. La experiencia permitió refinar los niveles de comprensión y motivar a los estudiantes. En el presente trabajo se analiza si las producciones generadas por ellos califican como *objetos de aprendizaje*.

Palabras Clave: Objetos de aprendizaje, Enseñanza para la comprensión, Coreografía didáctica activa, Evaluación.

1 Introducción

El interés de la experiencia tiene su origen en las dificultades observadas en la comprensión del contenido medular aplicación de derivadas "razón de cambio", en estudiantes universitarios. Se trata de una investigación, basada en un estudio de caso, siendo los actores los alumnos de la asignatura Análisis Matemático I, particularmente, una comisión de cursado cuatrimestral (segundo cuatrimestre del año 2017). Es de destacar que dicha comisión estuvo conformada por aspirantes de las distintas especialidades que no aprobaron el curso introductorio convencional; y por lo tanto debieron rehacerlo durante el primer cuatrimestre. Esta situación pone de manifiesto las dificultades previas en la comprensión de los contenidos matemáticos elementales que presentó el colectivo estudiantil.

La Enseñanza para la Comprensión (EpC) propone que aquello que aprenden los alumnos tiene que ser internalizado y factible de ser utilizado en diversas circunstancias dentro y fuera de las aulas, como base para un aprendizaje constante y susceptible de continuos enriquecimientos. Por lo dicho anteriormente, en este trabajo se investiga si determinados proyectos, los cuales son realizados por los actores mencionados, generan un recurso didáctico de calidad que estimula el aprendizaje.

Cabe aclarar que este estudio se realiza en el marco de dos proyectos de investigación vigentes en la UTN FRSF, denominados "Evaluación y rendimiento académico durante la formación del Ingeniero en la UTN-FRSF" y "Tecnologías emergentes en el proceso de enseñanza-aprendizaje del ciclo básico común de las ingenierías de la FRSF".

2 Marco teórico

Según Zabalza [1], una coreografía didáctica "Es una metáfora que se toma del mundo de la danza para intentar aplicarlo a lo que sería una organización diferente de los contextos educativos. Con una buena coreografía incluso bailarines mediocres pueden llegar a resultados aceptables. Mientras que con una mala incluso los más brillantes pueden fracasar. Aplicado este concepto a la educación, se indaga sobre los métodos con que los alumnos estudian. A veces buenos estudiantes no aprenden bien porque las instituciones no generan un ambiente de aprendizaje adaptado para lo que ellos necesitan. Si el modelo es que el profesor sólo dé clases y se marche, es una coreografía absolutamente minimalista y no se puede generar ninguna expectativa interesante. Los muy buenos estudiantes sobreviven a eso e incluso logran buenos resultados. Pero en general no es una estructura que se adapte a los alumnos de hoy. Es muy diferente una coreografía donde haya prácticas, trabajo en equipo y un gran contacto con la comunidad. Como sucede en el teatro o la danza, las coreografías pueden ser más complejas pero a su vez más ricas". Según Sacristán y Pérez, en Gutiérrez Casas, [2] "Para que el docente transforme los entornos de aprendizaje, éste tiene que ser un artista y manejar diversa cantidad de herramientas, discursos y presentaciones de lo que quiere enseñar y transmitir. Esto invita a redefinir el ambiente educativo en términos del aula de clase y a transformarlo por un escenario lleno de colorido y llamamiento a los sentidos".

Se coincide con Gutiérrez Casas, quien expresa que el docente tiene la responsabilidad de hacer un manejo didáctico que transite desde la clásica "didáctica tradicional" hasta la "didáctica activa". La primera se caracteriza por unos contenidos específicos y una verticalidad fuerte; aquí se enseña lo que el docente sabe; y la segunda, sostiene que el docente ha de ser un mediador, que logre proyectar un aprendizaje, que se adapte a la innovación y al uso de recursos cotidianos; debe ser un gestor que promueva en la institución la adquisición de recursos que fortalezcan sus propuestas de enseñabilidad para que de manera general, diferencial y específica se potencialicen los procesos de aprendizaje.

Casco et al. [3], argumentan sobre la importancia social de la Universidad y la necesidad de dar respuesta a estos cambios mediante un sistema flexible educativo que pueda atender las demandas del aprendizaje continuo. Es así como, manifestaron que el mismo puede hacerse sin descuidar la rigurosidad en la formación, mediante el balance entre teoría y práctica, la incorporación de nuevas competencias actitudinales y técnicas, así como la resolución de problemas con criticidad, con herramientas de cálculo y diseño, incorporando la creatividad.

En un trabajo previo, los proyectos realizados por los alumnos fueron analizados en el marco de la EpC [4], [5] que refiere a un tipo de constructivismo que desafía la tradicional centralidad de las representaciones como objeto de construcción. Se insiste en que el estudiante no sólo debe construir representaciones sino también capacidades de desempeño. Por su énfasis en las representaciones, el constructivismo tradicional sostiene al descubrimiento como clave para la comprensión. En cambio, la visión constructivista vinculada con el desempeño evoca más la metáfora de desarrollar una capacidad de actuación flexible que, con el tiempo, se convierta en un dominio.

Así, un parámetro de falta de comprensión es, por ejemplo, cuando un estudiante no puede avanzar más allá de la memorización y la acción rutinaria. Poseer el conocimiento y las habilidades es un antecedente crucial para un aprendizaje para la comprensión, pero no un consecuente. Comprender un tópico implica capacidad de controlar, explicar, justificar, extrapolar, vincular y aplicar de maneras que van más allá del conocimiento y la habilidad rutinaria.

El marco conceptual de la EpC está constituido por cuatro partes claves: tópicos generativos, metas de comprensión, desempeños de comprensión y evaluación diagnóstica continua.

Los tópicos generativos o hilos conductores tienen la característica de ser centrales para una o más disciplinas o dominios, son accesibles por la gran cantidad de recursos que permiten al estudiante investigarlos y, quizás lo más importante de todo, despiertan el interés y de alumnos y docentes.

En cuanto a las metas de comprensión son enunciados o preguntas donde se expresan cuáles son las cuestiones más importantes que deben comprender los alumnos dentro de una unidad o de un curso específico.

Los desempeños de comprensión son actividades que desarrollan y a la vez demuestran la comprensión del alumno en lo referente a las metas de comprensión, al exigirles utilizar lo que saben de nuevas maneras. Al principio los desempeños de comprensión son simples; luego evolucionan para emprender tareas más exigentes, que implican desafíos progresivamente más sutiles.

El cuarto pilar de esta metodología de la investigación es la evaluación continua. Cuando los alumnos aprenden con vistas a comprender necesitan criterios, realimentación y oportunidades para reflexionar a lo largo de la secuencia total de enseñanza. La realización de proyectos se constituyó en un mecanismo para la evaluación continua y formativa. "Proceso que, a partir del conocimiento y comprensión de cierta información, permite, desde una actitud dialógica, emitir un juicio de valor acerca de las prácticas de enseñanza y/o las prácticas de aprendizaje en un contexto socio histórico determinado en el cual intervienen con particularidad significante lo social amplio, la institución, el objeto de conocimiento, el grupo de alumnos y el docente, que posibilita tanto el tomar decisiones referidas a las prácticas de referencia como exige comunicar a docentes y alumnos –por medio de enunciados argumentativos- el juicio de valor emitido y las orientaciones que, derivadas de éste, resulten necesarios para la mejora de la práctica". [6]

En la universidad, la evaluación habitualmente se lleva a cabo al final del cursado; se centra en la calificación obtenida y en algunos casos en la responsabilidad. Si bien éstos son aspectos necesarios, no son suficientes para el verdadero aprendizaje del alumno. Es de destacar que entró en vigencia en el ciclo lectivo 2017 un nuevo Reglamento de Estudios de las carreras de grado de la citada casa de estudios [7] el cual establece la obligatoriedad de la evaluación continua. Por otro lado, el Diseño Curricular [8] establece que "Los Trabajos Prácticos de todas las materias del área Matemática serán realizados con computadora, utilizando software especializado, que permita manejo numérico, simbólico, gráfico y de simulaciones".

Los docentes efectivos diseñan desempeños en los cuales sus alumnos pueden usar lo que Gardner [9] llama las “inteligencias múltiples”, vale decir las diferentes formas de expresión que pueden incluir actividades verbales, matemáticas, visuales, musicales, de movimiento, introspectivas e interpersonales.

Stone Wiske [10] afirma que las nuevas tecnologías pueden perfeccionar y enriquecer los desempeños de comprensión de diversas maneras, entre las que se incluyen:

- La tecnología multimedia permite que el estudiante investigue nuevas ideas y produzca conocimientos utilizando una variedad de inteligencias.
- Muchos softwares pueden hacer visibles conceptos abstractos y permiten que los estudiantes comprendan ideas complejas experimentando activamente con ellas, manipulando variables y observando la interacción dinámica de los elementos de un sistema.
- Las tecnologías digitales y las herramientas informáticas permiten que los alumnos expresen su comprensión en una rica variedad de formas. Estas tecnologías también permiten registrar el trabajo de los alumnos en formatos que pueden corregirse, combinarse y distribuirse más fácilmente.

Para este trabajo se utiliza la definición de Objetos de Aprendizaje (OA) realizada por Wiley [11], y su posterior adaptación por la Universidad Politécnica de Valencia (UPV) [12], se define el OA como “la unidad mínima de aprendizaje, en formato digital, que puede ser reutilizada y secuenciada”. Se conciben, por tanto, estos pequeños componentes como elementos integrados e integradores del proceso de enseñanza-aprendizaje, ofreciendo a los estudiantes la posibilidad de mejorar su rendimiento y nivel de satisfacción.

De acuerdo con la UPV, con el fin de asegurar objetos de aprendizaje de calidad, se establecen las siguientes características que los mismos deben cumplir:

- Formato digital: capacidad de actualización y/o modificación constante, es decir, es utilizable desde Internet y accesible a muchas personas simultáneamente y desde distintos lugares.
- Propósito pedagógico: los OA no sólo deben incluir contenidos, sino que también deben guiar el proceso de aprendizaje del estudiante.
- Contenido interactivo: implica la participación activa de cada individuo (profesor-alumno/s) en el intercambio de información. Para ello es necesario que el objeto incluya actividades que permitan facilitar el proceso de asimilación y seguimiento del progreso de cada alumno.
- Es indivisible e independiente de los otros objetos de aprendizaje.
- Es reutilizable en contextos educativos distintos a aquel para el que fue creado.

Para que un OA pueda ser reutilizable es necesario que:

- Los contenidos no estén contextualizados (no hacer referencia a su ubicación ni en la asignatura, ni en la titulación, ni en el tiempo…).
- Se determinen algunos de los posibles contextos de uso, facilitando el proceso posterior de rediseño e implementación.
- Se le otorguen previamente una serie de características identificativas (metadatos) que permitan distinguirlos de otros objetos.
- Junto con otros objetos, se pueden alcanzar objetivos de aprendizaje más amplios, llevando a la construcción de los llamados: módulos de aprendizaje (por ejemplo Derivada).

3 Objetivo

El objetivo del presente trabajo es valorar si los proyectos realizados por los alumnos responden a las características de Objeto de Aprendizaje de calidad. Este interés surge dado que, en una investigación precedente, se observó una mejora en el nivel de comprensión del tópico “razón de cambio”, a través de la realización de los mencionados proyectos.

4 Metodología

La enseñanza apoyada en las TIC está asociada a un número elevado de contenidos digitales. Esta fuente de referencia cobra una gran importancia en el ámbito de la Ingeniería dada la diversidad de herramientas para la creación y observación de experimentos. Desde presentaciones sobre los conceptos en estudio, hasta simulaciones mediante computador con distintos grados de complejidad, todos estos recursos multimedia interactivos facilitan el análisis de sistemas reales comparando su comportamiento con aproximaciones sobre modelos teóricos de sus componentes. [13]

Trabajando con alumnos que mostraron dificultades iniciales en el aprendizaje de las matemáticas, se diseñó, se puso en práctica y se evaluó una experiencia áulica que permitió abordar el tópico generativo “razón de cambio”. En las guías de trabajos prácticos “Aplicaciones de la Derivada” existen varios problemas de razón de cambio. Los docentes motivados en mejorar el proceso de enseñanza-aprendizaje, propusieron la realización de un proyecto, asignando a cada grupo la resolución de uno de los problemas de la guía, tales como los que se muestran en la Fig. 1.

El trabajo debió incluir una simulación haciendo uso del software Geogebra, la cual derivó en el desarrollo de pequeños proyectos y que permitió el uso de nuevas tecnologías que posibilitaron perfeccionar y enriquecer los desempeños.

Guía de Trabajos Prácticos Tema 4
Parte III: Razón de Cambio

Ejercicios para desarrollar en clase

1) Una piedra se deja caer sobre un estanque en reposo y produce ondas circulares concéntricas. El radio r de la onda exterior crece al ritmo constante de 30 cm/seg. Cuando su radio es 120 centímetros, ¿a qué ritmo está creciendo el área total A de la zona perturbada?

2) Un punto se mueve a lo largo de la gráfica de $y = x^3$ de modo que su abscisa decrece a razón de 2 unidades por segundo. ¿Cuál es la razón de cambio de su ordenada cuando $x = 3$?

3) Un cubo se expande de modo que su lado está cambiando a razón de 5 m/seg. Hallar la razón de cambio de su volumen cuando su arista mide 4 metros de longitud.

4) ¿Con qué rapidez aumenta el volumen V de un globo esférico cuando el radio r es de 3 cm y crece a razón de 2 cm/seg?

5) El diámetro y la altura de un cilindro son 10 cm y 20 cm, respectivamente. Si el diámetro crece con una velocidad de 1 cm/seg, decir con qué velocidad debe reducirse la altura para que el volumen permanezca constante.

6) La altura de un triángulo disminuye a razón de 2 cm/min, mientras que el área del mismo disminuye a razón de 3 cm^2/min. ¿A qué ritmo cambia la base del triángulo cuando la altura es igual a 20 cm y el área es de 150 cm^2?

7) Una escalera de 5,20 metros de largo está apoyada sobre una pared vertical. Si el extremo inferior de la escalera se está alejando del pie de la pared a razón de 0,92 m/seg, calcular la rapidez con que está descendiendo la parte superior cuando el extremo inferior está a 2,45

Fig. 1. Guía de trabajos prácticos. Tema 4: Aplicaciones de la Derivada -Razón de Cambio.

El trabajo “El uso de tecnologías, la comprensión y la evaluación” Casco et al. [14] reporta que el objetivo de la experiencia (mejorar los desempeños de comprensión en el tópico evaluado) fue alcanzado en la mayoría de los estudiantes. En el mismo se destaca que la resolución de un problema en clase puso en evidencia un nivel de comprensión ingenuo del colectivo estudiantil; y que luego del desarrollo de los proyectos (en grupos de hasta 3 integrantes), algunos alumnos mostraron un nivel de comprensión de aprendiz y otros de novato. Además, se menciona que involucrar a los estudiantes en el desarrollo de un proyecto permitió que los mismos asumieran un compromiso con los objetivos de la cátedra, pero quizás el punto más fuerte de la experiencia fue el clima de comunidad educativa generado en la clase.

Las tecnologías emergentes son herramientas, conceptos, innovaciones y avances utilizados en diferentes contextos educativos al servicio de diversos propósitos relacionados con la educación. En la búsqueda constante de estrategias para que los estudiantes puedan comprender y asimilar los contenidos, es habitual recurrir a la incorporación de herramientas de software que colaboren en el proceso. En este sentido, es necesario examinar, considerar la pertinencia y seleccionar dichas herramientas, previo a su utilización, según Veletsianos [15].

Es por ello, que nos interesa analizar si estos proyectos realizados por los alumnos pueden ser valorados como objetos de aprendizaje de calidad. Para ello, el OA debe cumplir una serie de características para poder considerado como tal.

5 Análisis de los proyectos

A continuación, analizaremos las características de los trabajos presentados para valorar si los mismos se ajustan a la definición de objetos de aprendizaje de calidad.

Dado que, se solicitó la resolución de un problema que incluya una simulación haciendo uso del software Geogebra, el *formato fue digital*, con un claro *propósito pedagógico*: asegurar el proceso de enseñanza aprendizaje en el tópico ya mencionado. Se destaca que los objetos contaron con *contenido interactivo*, al observarse participación activa de alumnos y profesores en el intercambio de la información, al tiempo que mostraban el problema con el uso de gráficos, diagramas, tablas, etc.

Además, se puede destacar que responden a la característica de *indivisibilidad* e independientes de otros objetos de aprendizajes, pues los alumnos lo realizaron para el propósito establecido según las variables determinadas por el problema y con las consignas establecidas los objetos fueron adquiriendo sentido en sí mismo, no pudiendo descomponerse en partes más pequeñas y resultando posibles de ser reutilizables en contextos educativos distintos a aquel para el que fue creado, por ejemplo por otro grupo de estudiantes del año sucesivo o incluso del nivel educativo anterior. Esta característica es la que determina que un objeto tenga valor, siendo uno de los principios fundamentales del concepto de objeto de aprendizaje.

A continuación, se expone en la Tabla N° 1 una ficha de evaluación recomendada por la UPV, la cual es una guía práctica que ayuda a constatar la calidad de los objetos de aprendizaje.

Tabla 1. Ficha de evaluación según indica UPV.

FICHA DE EVALUACIÓN						
CARACTERÍSTICAS DEL OBJETO	**Proyecto 1**	**Proyecto 2**	**Proyecto 3**	**Proyecto 4**	**Proyecto 5**	**Proyecto 6**
Tiene formato digital	S	S	S	S	S	S
Tiene propósito pedagógico	S	S	S	S	NS	S
Su contenido es interactivo (implica alguna actividad por parte del alumno)	S	S	S	S	S	S
Tiene sentido en sí mismo	S	S	S	S	S	S
No puede descomponerse en partes más pequeñas	MS	MS	MS	MS	MS	MS
Puede reutilizarse en contextos educativos distintos	MS	MS	MS	MS	NS	MS
OBJETIVOS						
Se han explicitado los objetivos	S	S	S	S	S	S
Se han formulado adecuadamente los objetivos	S	S	S	S	NS	S
Alcance del objeto adecuado (realista, congruente…)	S	S	S	S	NS	S
CONTENIDOS						
La selección de contenidos es adecuada	S	S	S	S	S	S
El formato elegido es adecuado	S	S	MS	S	S	S
Se ha realizado una introducción al contenido	MS	MS	MS	MS	NS	MS
El desarrollo del contenido es coherente con los objetivos planteados	MS	S	MS	MS	NS	MS
Contempla el cierre del contenido	S	S	S	S	NS	S

Referencias MS: Muy Satisfactorio, S: Satisfactorio, NS: No Satisfactorio

En la Fig. 2 y en la Fig. 3 se muestran, a modo de ejemplo, imágenes extraídas de diferentes proyectos.

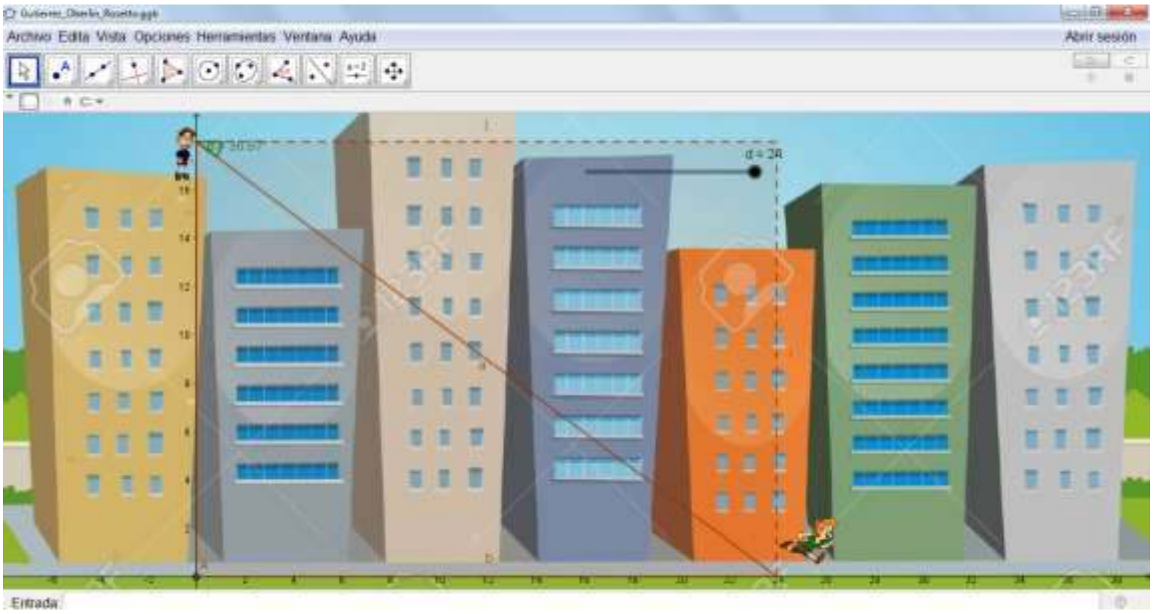


Fig. 2. Simulador presentado en el Proyecto 3.

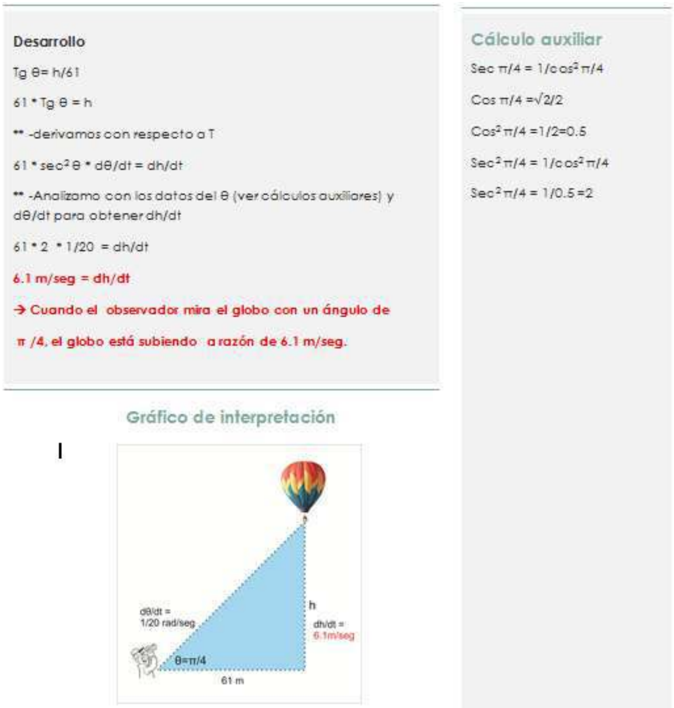


Fig 3. Característica pedagógica presentada en el Proyecto 2.

La UPV determina para la utilización de objetos de aprendizaje como recurso didáctico nuevos enfoques en el diseño, en la metodología docente y en las estrategias de aprendizaje del alumno.
En cuanto al diseño pedagógico, se destaca la posibilidad de reutilización en 5 de los 6 los proyectos, así como el cumplimiento del objetivo explicitado y el alcance realista, como se muestra en la Tabla 1, así como todos presentaban al menos un deslizador lo que implica alguna actividad interactiva. El desarrollo de los contenidos respondió coherentemente con los objetivos planteados a excepción de un caso.

En cuanto a la metodología docente, reconocimos un avance al conducirnos desde la tradicional "lección magistral" y la pasividad de los estudiantes hacia una didáctica activa.

Así, los profesores viramos de transmisor a orientador del estudiante y éste, protagonista del proceso enseñanza- aprendizaje. Esto posibilita la generación de nuevas estrategias de aprendizajes permitiéndoles desarrollar competencias genéricas: instrumentales, interpersonales y sistémicas.

6 Conclusiones

En los últimos años se ha producido un fuerte impulso hacia la integración de las TICs en la educación superior, por lo que los recursos a utilizar en el escenario áulico están cambiando. En este sentido, bajo el marco teórico establecido y lo analizado en la metodología, el equipo de investigación valora que los alumnos crearon, a partir del proyecto desarrollado, *mini unidades de aprendizaje* (MUA). Éstas últimas no pueden ser consideradas como objetos de aprendizaje, ya que no cumplen con todas las características solicitadas por los investigadores de la UPV. Por ejemplo, no tienen capacidad de actualización y/o modificación constante pues no se encuentran accesibles a muchas personas simultáneamente o desde distintos lugares, ya que no se encuentran Internet (aún). Los objetos, si bien resultaron interactivos podrían ampliar tal condición, transformado algunos datos en variables. También podrían enriquecerse los contenidos teóricos tanto al inicio como al cierre del contenido.

El término "mini unidades de aprendizaje" es determinado por los autores del presente trabajo. Se hace referencia a MUA como un anteproyecto de los objetos de aprendizaje, dado que no cumplen con la totalidad de los criterios demandados. Sin embargo, esto no invalida que los alumnos puedan diseñarlo con guía del docente y utilizarlos. Al mismo tiempo, generar un aprendizaje significativo y colaborativo. Además, involucrar estas MUA en el escenario áulico promueve una didáctica activa y permite que el docente, utilizando diversas herramientas, discursos y presentaciones, transforme los entornos de aprendizaje. Esto invita a redefinir el ambiente educativo en términos del aula de clase y a transformarlo en un escenario colmado de sentido.

El equipo investigador se enriqueció de nuevos conceptos en lo referido a objetos de aprendizaje; y a modo de adelanto, se puede informar que, desde la visión docente, las MUA brindan la posibilidad de optimizar los tiempos invertidos en el desarrollo de las actividades áulicas.

7 Resultados esperados y trabajos futuros

El uso de tecnologías emergentes moviliza a los estudiantes a explorar, calcular, y hasta cometer y corregir errores. En un futuro se pretende desarrollar objetos de aprendizajes que, junto con otros, construyan módulos de aprendizaje vinculados a conceptos centrales de la asignatura. Se espera que esto represente una mejora de la comprensión.

Referencias

1. Zabalza Beraza, M.: Guía didáctica basada en la conferencia "Coreografías didácticas para una enseñanza innovadora". Feria del Libro Buenos Aires. *Fundación Lúminis.* https://www.fundacionluminis.org.ar/radio/miguel-zabalza-beraza-las-coreografias-didacticas-la-ensenanza-innovadora. (2017). Accedido el 1 de Julio de 2018.
2. Gutiérrez Casas, M. V.: Didácticas activas: Coreografía didáctica. Una propuesta integradora del ser, hacer y saber hacer para la didáctica universitaria. *Revista Interacción*. http://www.unilibre.edu.co/revistainteraccion/volumen12/art14.pdf. (2013). Accedido el 1 de Julio de 2018.
3. Casco, E; Giménez Uribe, A; Llorens, R; Rodríguez, M. E.: El currículum de la carrera Ingeniería Industrial UTN, su relación con los modelos curriculares y su evidencia a través de los proyectos finales de carrera. *EdUTecNe.* http://www.edutecne.utn.edu.ar/coini_2015/trabajos/F001_COINI2015.pdf. (2015). Accedido el 23 de Julio de 2018.
4. Blythe, T.: *La Enseñanza para la Comprensión. Guía para el docente*. Editorial Paidós. (1999).

5. Stone Wiske, M.: La Enseñanza para la Comprensión. Vinculación entre la investigación y la práctica. Editorial Paidós. (1999).
6. Steiman, J.: Las prácticas de evaluación. Miño; Dávila. *Más didáctica (en la educación superior).* UNSAM, pp. 125-207. (2009).
7. Consejo Superior de la UTN.: Ordenanza 1549. Reglamento de Estudio de Carreras de Grado de la UTN. *Portal UTN.* http://csu.rec.utn.edu.ar/docs/php/salida.php3?tipo=ORD&numero=1549&anio=0&facultad=CSU.(2016). Accedido el 1 de Agosto de 2017.
8. Consejo Superior de la UTN: Parte homogénea del Diseño Curricular de las carreras en la UTN, Resolución 68/94, pp. 6.
9. Gardner, H.: *Estructuras de la mente. La teoría de las inteligencias múltiples*. Fondo de cultura económica, pp. 20-34. (2001).
10. Stone Wiske, M.: *La Enseñanza para la Comprensión con Nuevas Tecnologías.* Editorial Paidós. (2005).
11. Wiley, D. A.: Learning Objects Explained. Wiley, D. A.: *The Instructional Use of Learning Objects*. Agency for Instructional Technology; Association for Educational Communications & Technology, pp. 1-3. (2002). https://members.aect.org/publications/InstructionalUseofLearningObjects.pdf. Accedido el 1 de Julio de 2018.
12. Martínez Naharro, S.; Bonet Espinosa, P.; Cáceres González, P.; Fargueta Cerdá, F.; García Felix, E.: Los objetos de aprendizaje como recurso de calidad para la docencia: criterios de validación de objetos en la Universidad Politécnica de Valencia. *CEUR Workshop Proceedings.* http://ceur-ws.org/Vol-318/Naharro.pdf (2007). Accedido el 2 de Julio de 2018.
13. Zorita, L; López, A; Latorre, M; Blázquez, B; San Cristóbal, E; Martín, S; Díaz, G; Castro, M.: Creación de objetos digitales de aprendizaje y su inclusión en el repositorio institucional espacio-UNED. *Revista Iberoamericana de Educación a Distancia.* http://www.redalyc.org/pdf/3314/331429941008.pdf. (2014). Accedido el 2 de Julio de 2018.
14. Casco, E; De Santis, E; Verrengia, M; Tibaldo, A.: El uso de tecnologías, la comprensión y la evaluación. *IPECyT: VI Jornadas Nacionales y II Latinoamericanas de Ingreso y Permanencia en Carreras Científico-Tecnológicas*. (2018).
15. Veletsianos, G.: A definition of emerging technologies for education. *Emerging Technologies in Distance Education.* https://www.researchgate.net/publication/235939794/download. (2010). Accedido el 1 de Julio de 2018.

Evaluación de Competencias Matemáticas utilizando las TICs como Herramientas Formativas en las Carreras de la Facultad de Ciencias Forestales

Nabarro, Sylvia[1]; Ger, Carolina[1]; Cejas, Claudia[1]
[1]Departamento de Ciencias Básicas. Facultad de Ciencias Forestales. UNSE. Avda. Belgrano Sud 1912.
CP 4200 Santiago del Estero, Argentina
sylvianabarro@yahoo.com.ar, carolinager@hotmail.com, claudiacejas_1@hotmail.com

Resumen. En este trabajo se realiza un análisis, evaluación y conclusión de las competencias desarrolladas por los alumnos de Primer Año, en las Asignaturas Álgebra y Geometría Analítica y Cálculo Diferencial e Integral de las carreras de Ingeniería (Facultad de Ciencias Forestales). Se diseñaron distintas actividades a realizar durante todo el año, utilizando de soporte, las TICs como herramientas formativas y de análisis. Se culmina con la observación de encuestas realizadas a los estudiantes, que tienen el objetivo de apreciar sus percepciones sobre las diferentes actividades realizadas. El presente trabajo se realiza en el marco del Proyecto de Investigación "Potenciar el pensamiento matemático para contribuir al desarrollo de competencias pertinentes en los ingresantes a las carreras de la Facultad de Ciencias Forestales de la UNSE." Las competencias evaluadas fueron contrastadas con las requeridas para el ingreso en los estudios universitarios fijadas por el CONFEDI: Competencias en Ingeniería en el año 2014.

Palabra clave: Competencias, Ingeniería, Tics, Experiencias formativas.

1 Introducción

Uno de los grandes desafíos que tienen actualmente los docentes, requiere afrontar los nuevos escenarios académicos mediante la formación basada en competencias y el uso de las tecnologías de la información y comunicación, las que contribuyen en gran parte con la innovación pedagógica y se encuentran estrechamente relacionadas con la planificación, organización y producción de la información, toma de decisiones, pensamiento reflexivo, la interacción colaborativa y la comunicación en sus diferentes lenguajes.

El objetivo general del proyecto plantea "Favorecer los procesos de enseñanza y de aprendizaje a partir de dispositivos pedagógicos / didácticos que potencien el pensamiento matemático para el desarrollo de las competencias requeridas en las carreras de la Facultad de Ciencias Forestales de la UNSE". En congruencia, en el año 2009 el Consejo Federal de Decanos de Ingeniería [1] en plenario de decanos acuerda un documento sobre las Competencias requeridas para el ingreso a los Estudios Universitarios con el fin de orientar a las facultades de ingeniería en los procesos de enseñanza y de aprendizaje tendientes al desarrollo de competencias en sus alumnos.

Una competencia supone la integración de una serie de elementos (conocimientos, técnicas, actitudes, procedimientos, valores) que una persona pone en juego en una situación problemática concreta demostrando que es capaz de resolverla. [2]

El enfoque del aprendizaje basado en competencias se fundamenta en la responsabilidad de aprender del estudiante y en el desarrollo de sus competencias iniciales a lo largo de su carrera. Por lo tanto, el aprendizaje no sólo se refiere al conocimiento nuevo que puede y debe adquirir el estudiante sino al desarrollo y evolución de su modo y estilo de aprender, de aprender y mejorar cómo aplica los conocimientos a situaciones nuevas, cómo integra las actitudes y valores y los pone en juego, cómo incorpora las técnicas y métodos en su modo de actuar y afrontar las situaciones. [2]

Teniendo en cuenta lo expuesto y considerando que cada área de las carreras impacta sobre la formación del alumno, futuro profesional, en las clases de Algebra y Geometría Analítica y Cálculo Diferencial e Integral de primer año de las Carreras de grado de la Facultad de Forestales, se proponen tareas que, en forma progresiva contribuyan al proceso de desarrollo de las competencias requeridas, implementándose un conjunto de experiencias formativas tendientes a fomentar el uso pedagógico de las tics: uso de la plataforma virtual, uso de software específico en clase tanto en celulares como en notebook y talleres de integración de saberes con uso de software.

En cuanto a la plataforma virtual, esta fue utilizada durante el desarrollo de las asignaturas, siendo un medio que permitió complementar las clases presenciales a través del uso de materiales audiovisuales apoyados en guías de trabajo grupales e individuales, utilización de foros en cada unidad con el fin de atender consultas virtualmente y guías de autoevaluación de los estudiantes por cada trabajo práctico. En cuanto al Software específico, el uso cotidiano en celulares permitió el análisis y estudio de funciones, complementando el trabajo analítico propio de la matemática, para contribuir entre ambos a una comprensión más acabada de conceptos. En relación a la implementación de talleres como actividad de cierre de las asignaturas, tuvieron varios propósitos: por un lado sintetizar los saberes adquiridos a través del planteo y resolución de problemáticas, y por otro, fortalecer el trabajo grupal y favorecer la comunicación en sus diferentes lenguajes.

Como conclusión, se implementaron encuestas a los estudiantes al finalizar el ciclo lectivo, con el objetivo de valorar las acciones ejecutadas y las competencias logradas, a partir de sus percepciones sobre las diferentes actividades vinculadas al uso de las tics.

Las encuestas realizadas tienen como objetivo principal, indagar sobre la percepción de los estudiantes acerca de la utilidad de los recursos aplicados, el desarrollo de los problemas planteados como una forma de incentivar la construcción del aprendizaje, el impacto del trabajo grupal en la construcción del conocimiento y las potencialidades y dificultades en la exposición oral como una forma de comunicar saberes y procedimientos.

Los objetivos específicos propuestos, que se detallan a continuación, direccionan las tareas realizadas durante todo el dictado de las asignaturas:

- Identificar las competencias básicas de los estudiantes que ingresan a las carreras de la Facultad de Ciencias Forestales de la UNSE.
- Explorar dispositivos didácticos que se implementan en el desarrollo de las distintas asignaturas de primer año de las carreras.
- Inferir la relación o correlación entre el desempeño de los estudiantes en términos de competencias previas, la propuesta del CONFEDI [1] sobre las competencias que debe manifestar un alumno universitario y las modalidades de enseñanza en las asignaturas de las carreras de la Facultad de Ciencias Forestales de la UNSE.
- Construir una propuesta pedagógica didáctica para el mejoramiento del desempeño de los estudiantes de las carreras de la Facultad de Ciencias Forestales de la UNSE
- Contribuir a la Formación de recursos humanos del área de la Matemática en el diseño y desarrollo de dispositivos didácticos que promuevan la interdisciplinariedad y el trabajo colaborativo en las carreras de la Facultad de Ciencias Forestales de la UNSE.
- Conocer los resultados de la implementación de la propuesta didáctica para la formación en competencias.
- Evaluar los resultados de la aplicación de los dispositivos didácticos diseñados considerándolos como un sistema.

2 Desarrollo

2.1 Desarrollo del proceso

Al inicio de este proyecto de investigación se acordó el enfoque del proceso de enseñanza y de aprendizaje basado en competencias efectuando la recolección, revisión y análisis documental de material bibliográfico sobre el tema del proyecto y sobre la identificación y análisis del conjunto de competencias básicas de los alumnos. El enfoque de competencias implica transformaciones profundas en los diferentes niveles educativos, y seguir este enfoque es comprometerse con una docencia de calidad, buscando asegurar el aprendizaje de los estudiantes. [3]

Los diseños de instrumento utilizados para el diagnóstico de competencias básicas de los alumnos ingresantes a las carreras de la FCF, incluyen: diseño de dispositivos didácticos para el desarrollo de competencias y diseño de aulas virtuales como estrategia de apoyo, experiencias formativas, comunicación y contención del alumno de primer año. También los seminarios internos se realizaron para planificaciones de actividades de docencia y capacitación intragrupal enfocados en la formación en competencias en el área de la matemática.

Se implementaron instrumentos para la recolección de datos:

a) Actividades en las Aulas Virtuales como estrategia de apoyo, comunicación y contención del alumno de primer año.
b) Implementación de un taller integrador con apoyo de las nuevas tecnologías de la información y comunicación realizada en el segundo semestre con 50 alumnos.
c) Aplicación de un software matemático (GEOGEBRA).

d) Ejecución de encuestas con el objetivo de indagar la percepción de los estudiantes sobre las distintas implementaciones.

Todos los dispositivos anteriores para la recolección de datos se analizaron en forma descriptiva y se interpretaron los resultados.

2.1.1 Recolección, revisión y análisis documental sobre el tema del proyecto. Identificación y análisis del conjunto de competencias requeridas por los alumnos

En el proyecto "Potenciar el pensamiento matemático para contribuir al desarrollo de competencias pertinentes en los ingresantes a las carreras de la Facultad de Ciencias Forestales de la UNSE" se definen competencias básicas, transversales y específicas de acuerdo a lo fijado por el CONFEDI [1].

Las competencias básicas comprenden conocimientos, procedimientos, destrezas y actitudes fundamentales para el desarrollo de otros aprendizajes; se consideraron aquellas que hacen falta para cualquier tipo de actividad que abarca todas las áreas de la vida, tanto cotidiana como laboral o científica. Implican el desarrollo de saberes complejos y generales que hacen falta para cualquier tipo de actividad intelectual: comprensión lectora, producción de textos escritos y resolución de problemas. Son competencias estrictamente necesarias para el alumno ya que su conocimiento le permitirá realizar, con éxito, futuros aprendizajes importantes y asumir, sin problema, otros aprendizajes nuevos para él.

Las competencias transversales se aplican tanto a las competencias básicas como a las específicas y se orientan hacia el logro de autonomía en el aprendizaje y de destrezas cognitivas generales. Están relacionadas con los aspectos actitudinales y las destrezas cognitivas fundamentales requeridas para el desarrollo de la actividad académica universitaria y apuntan al desarrollo de dos aspectos claves para los estudios superiores: autonomía del aprendizaje y destrezas cognitivas superiores.

Las competencias específicas son un sostén indispensable para poder internarse en los conocimientos de las asignaturas que el alumno debe comenzar a cursar. Se ubican según el área disciplinar a la que pertenece la carrera elegida.

Se acordaron indagar sobre las siguientes competencias, con el propósito de disponer de un punto de partida para el desarrollo de las actividades curriculares en las asignaturas: Álgebra y Geometría Analítica y Cálculo Diferencial e Integral, y determinar las competencias con las que acceden los estudiantes a las carreras universitarias de grado, con sus respectivos indicadores:

1) **Competencias básicas**:
a) Manejo de las formas del lenguaje matemático: Relaciona el texto con los datos del contexto de producción.
b) Resolución de problemas

2) **Competencias Transversales**: Planificación e Implementación de estrategias de Resolución de Situaciones Problemas
a) Organiza adecuadamente el tiempo y el espacio de estudio para responder a la situación.
b) Relaciona situaciones de aprendizaje nuevas con experiencias anteriores y saberes previos.
c) Demuestra capacidad para comprender relaciones lógicas entre conceptos.

3) **Competencias Específicas:**
a) Resolver problemas aplicado a conceptos matemáticos desarrollados en el ciclo medio.
b) Reconocer y aplicar propiedades numéricas.
c) Analizar una función a partir de su representación gráfica y/o a partir de sus ecuaciones matemáticas.
d) Utilizar la computadora, aplicando lógica procedimental en la utilización de Sistema Operativo y diversas aplicaciones.

2.1.2 Diagnóstico de competencias básicas de los alumnos ingresantes a las carreras de la FCF

Para la evaluación de las competencias básicas se implementó un dispositivo de diagnóstico, que consistió en una evaluación con ejercicios y preguntas, tratando de utilizar los saberes adquiridos en el nivel secundario. Para la resolución de la evaluación disponían de dos horas, debiendo resolverla en parejas y por escrito.

Una vez analizada la respuesta de 50 estudiantes que conformaban el grupo de aspirantes a cursar carreras de grado, los resultados obtenidos permitieron observar que el desarrollo de las competencias básicas, en general, es relativamente bueno, pero se debe tener en cuenta las falencias en la comunicación de resultados, así también se pudo observar que existe una gran diferencia en los logros alcanzados en las competencias transversales y específicas, siendo las competencias específicas las que manifestaron un menor grado de desarrollo.

El logro de estas competencias fue comprendido como el resultado de un proceso en progresivo crecimiento y adaptado al contexto institucional por lo que el resultado obtenido sólo mostró el estado actual de desarrollo de las competencias, siendo esta información insumo para el equipo catedra en el desafío de proponer situaciones que dieran lugar a la evolución de las mismas.

El estudio realizado abarcó sólo las competencias consideradas por el equipo como las más representativas, quedando para el futuro no sólo la evolución de éstas sino el estudio de otras, lo que permitirá efectuar la comparación con las competencias fijadas por el CONFEDI.

2.1.3 Diseño de dispositivos didácticos y su implementación para el desarrollo de competencias

Durante el desarrollo de la asignatura, se diseñaron un conjunto de dispositivos didácticos con el fin de comparar los datos obtenidos y así, determinar la relación entre el desempeño de los estudiantes en términos de competencias previas, las competencias propuestas por el CONFEDI y el modelo de enseñanza.

Con esta finalidad, se incorporaron clases teórico prácticas, en las cuales se pusieron a los estudiantes en contacto con conceptos básicos acompañados de ejemplos y situaciones problemáticas, lo que les permitió identificarse con la carrera elegida. Se implementó el Aula Virtual con videos, consulta a los docentes, tareas para fijar y significar los conceptos, autoevaluaciones y apuntes de cátedra de la asignatura.

Para analizar las competencias que fueron desarrollando los alumnos, se consideraron las competencias y los indicadores propuestas por el CONFEDI.

Se diseñaron actividades grupales durante el semestre con el propósito de analizar la evolución y desarrollo de las competencias establecidas, para luego contrastarlas con las obtenidas el período de diagnóstico.

Para el seguimiento y evaluación se consideró no sólo el manejo de saberes disciplinares sino también el grado de razonamiento lógico y los procesos de algoritmación. Los resultados obtenidos permitieron determinar que los estudiantes al finalizar el primer semestre, mejoraron en un alto grado el desarrollo de las competencias básicas comparativamente con las observadas en el ingreso. No sucedió lo mismo con las otras competencias, ya que los logros alcanzados en las transversales y específicas manifestaron un menor grado de desarrollo.

A partir de estos resultados se diseñaron, para la asignatura correlativa, situaciones que promuevan el desarrollo de las competencias transversales y específicas, considerando que la formación por competencias es un proceso progresivo en crecimiento y adaptado al contexto institucional, que debe realizarse en conjunto con el resto de las asignaturas tanto horizontal como verticalmente.

2.1.4 Implementación de TIC's como herramientas formativas, estrategia de apoyo, comunicación y contención del alumno de primer año

Los estudiantes actuales tienen un elevado acceso a la información, pero no son necesariamente bien informados, por lo que se necesita un nuevo tipo de educación, afianzando la Educación Basada en Competencias y la implementación de las TIC's en las aulas. Considerando las ventajas y la necesidad de los alumnos de incorporar competencias digitales, además contando con una plataforma virtual de la facultad, se implementaron Aulas Virtuales en las asignaturas Álgebra y Geometría Analítica y Cálculo Diferencial e Integral

Las mismas brindaron información sobre el interés de los alumnos en participar de la experiencia y las ventajas o dificultades que para ellos supone estudiar a través de un aula virtual. Se constituyó en un instrumento válido de seguimiento del aprendizaje

Además comprometió y compromete a los integrantes de este proyecto a gestionar el espacio, el tiempo, el diseño de los contenidos y el tipo de actividades formativas, ajustándose a un modelo pedagógico, mediado por la tecnología, creando las condiciones necesarias para favorecer el aprendizaje por medio de la virtualidad.

Se implementó como dispositivo didáctico, un software matemático (GEOGEBRA) con el tema "Aplicaciones de la Derivada" en los alumnos cursantes de la Asignatura Cálculo Diferencial e Integral (segundo semestre). Se realizó un análisis de las competencias básicas, transversales y específicas, principalmente las competencias informáticas, que adquirieron los alumnos en el transcurso del año, mediante distintas actividades realizadas con el software propuesto y a través del Aula Virtual en la Asignatura. Se desarrollaron varias actividades a través de la plataforma virtual con el objetivo de impulsar al desarrollo de competencias informáticas básicas, de igual forma se trabajó con el software de aplicación Geogebra permitiendo adquirir conocimientos básicos sobre la aplicación de ejercicios y problemas matemáticos.

Este estudio permitió contrastar con estudios anteriores y posteriores de similar índole, con el propósito de observar las competencias que van adquiriendo los alumnos durante el ciclo lectivo, evaluar las competencias que requieren más atención y fijar metas pedagógicas para mejorar su afianzamiento.

Se implementó el método de aprendizaje inductivo atendiendo al desarrollo de competencias matemáticas enriquecidas por situaciones problemáticas aplicadas al futuro profesional que posibilitan avanzar a niveles de competencias cada vez más complejas.

Para englobar el análisis de las competencias informáticas junto a las demás competencias se diseñó una actividad que consistía en analizar un gráfico interactivo, sobre Aplicaciones de la Derivada, utilizando el software Geogebra, a través de la plataforma virtual de la asignatura.

Cabe destacar que esta actividad se realizó antes de desarrollar los conceptos necesarios sobre Aplicaciones de la Derivada. Los estudiantes disponían una semana para responder las preguntas a través de la plataforma, brindándoles toda la información necesaria para poder realizarlos. Se obtuvieron respuesta de 28 estudiantes que conformaban el grupo de alumnos cursantes de la asignatura.

2.1.5 Implementación de un taller integrador con apoyo de las TICs

Para sintetizar los saberes incorporados por los estudiantes en el proceso de aprendizaje, se diseñó un taller integrador grupal al final de la asignatura, en el segundo semestre de primer año, desde la asignatura Cálculo Diferencial e Integral correspondiente a las carreras de Ingeniería. La propuesta se articula con temáticas abordadas en espacios curriculares con dictado simultáneo y con problemas a ser retomadas y profundizadas en espacios avanzados de la carrera, a fin de fomentar el enfoque interdisciplinario de matemática con fenómenos de la naturaleza. Consiste de un trabajo grupal obligatorio y requisito junto con los parciales para regularizar la asignatura. En este taller se distribuye a cada grupo un problema diferente vinculado a su campo profesional para ser interpretado, analizado y representado para una posterior comunicación.

Se implementó una encuesta abierta individual a los estudiantes luego de la instancia de exposición grupal a fin de obtener información sobre los distintos aspectos de este dispositivo didáctico y ponerlos en correspondencia con los objetivos iniciales del mismo y las capacidades a desarrollar previstas por el equipo docente.

Las figuras que a continuación se detallan presentan algunos resultados de tales encuestas que permiten observar la experiencia de los alumnos en este taller.

La figura 1 pone en evidencia las ventajas del uso de software específico facilitando la gráfica, la realización de cálculos, pero fundamentalmente favoreciendo la comprensión de los conceptos.

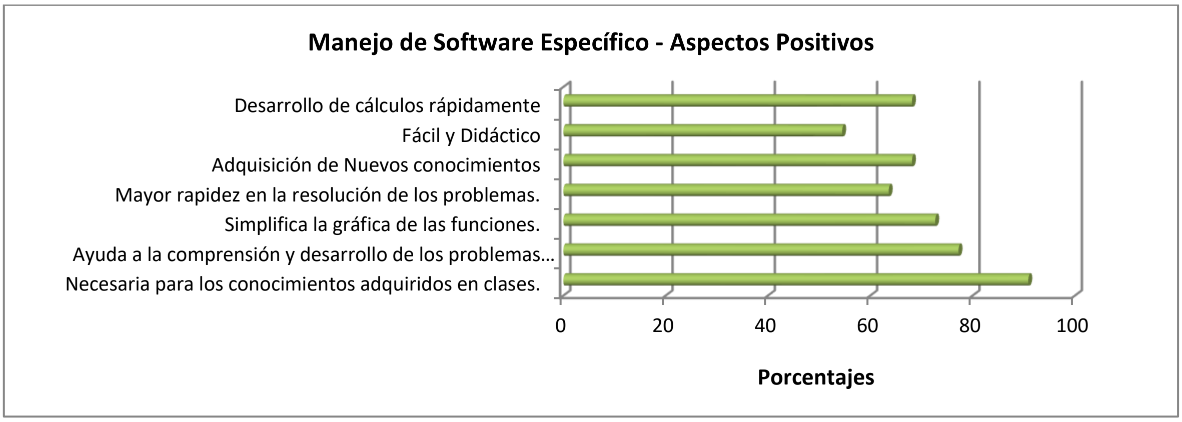


Fig. 1. Opiniones de los estudiantes respecto del uso de software específico en clase. Aspectos positivos. Fuente: Encuestas a los alumnos de Primer Año.

En la figura 2 se observa que la principal dificultad del uso de software específico reside en la falta de hábito en el manejo del mismo por parte de algunos estudiantes. Esto se debe por un lado a la escasa experiencia previa en el nivel secundario y, por otro, a que es la única asignatura de primer año que la utiliza, siendo el segundo semestre del primer año donde más se afianza su empleo.

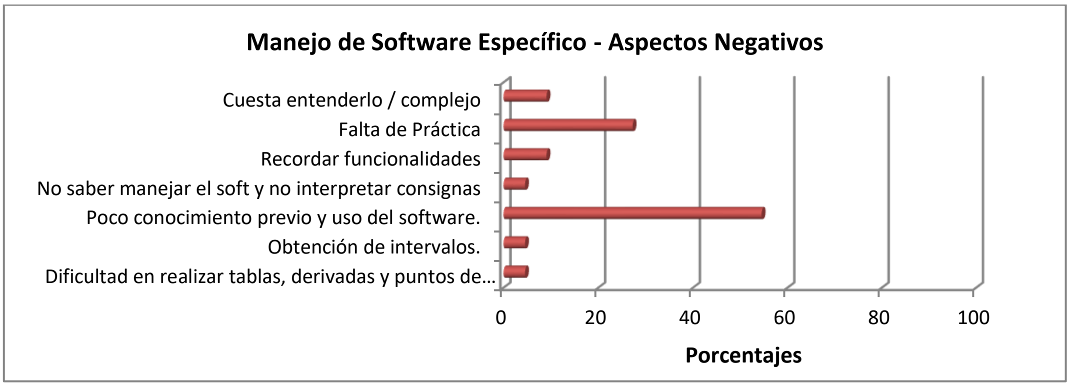


Fig. 2. Opiniones de los estudiantes respecto del uso de software específico en clase. Aspectos negativos Fuente: Encuestas a los alumnos de Primer Año.

En la figura 3 se puede advertir que el uso de la plataforma virtual es una herramienta totalmente novedosa para la mayoría. Nuevas maneras de aprender, más fácil para la entrega de trabajos (ya que no requieren la impresión costosa a papel), interactiva, interesante y sobre todo importante para prepararlos para el futuro.

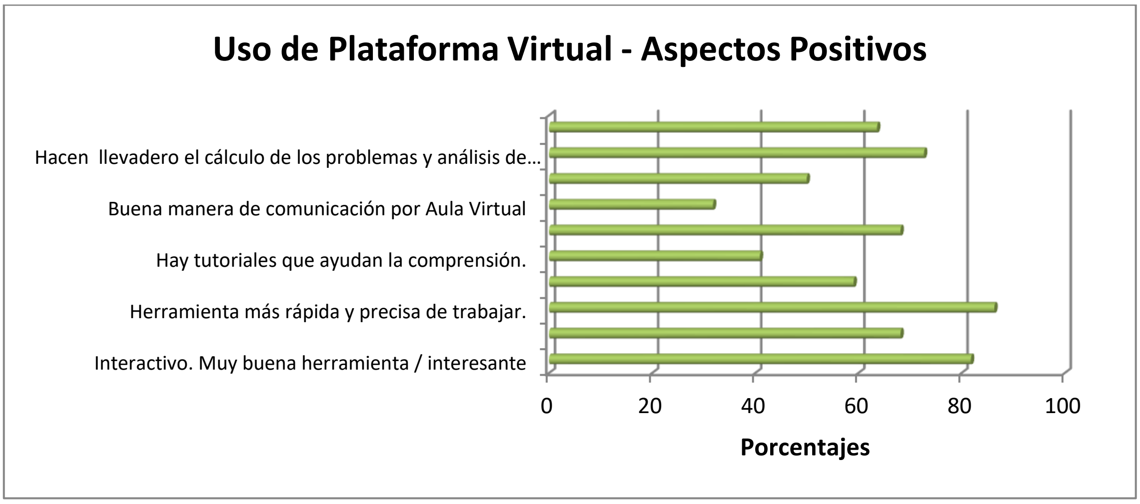


Fig. 3. Opiniones de los estudiantes respecto al uso de la Plataforma Virtual. Aspectos Positivos. Fuente: Encuestas a los alumnos de Primer Año.

En la figura 4 se puede observar que una de las grandes desventajas de nuestros estudiantes es la falta de conectividad y hábito con la utilización de la plataforma virtual. El olvido permanente de usuario y clave son evidencia de ello. También el conocimiento de la plataforma, su exploración, el envío de actividades mediante archivos adjuntos, son evidencia de las demoras manifiestas de quienes recién se inician en estos modos de interacción.

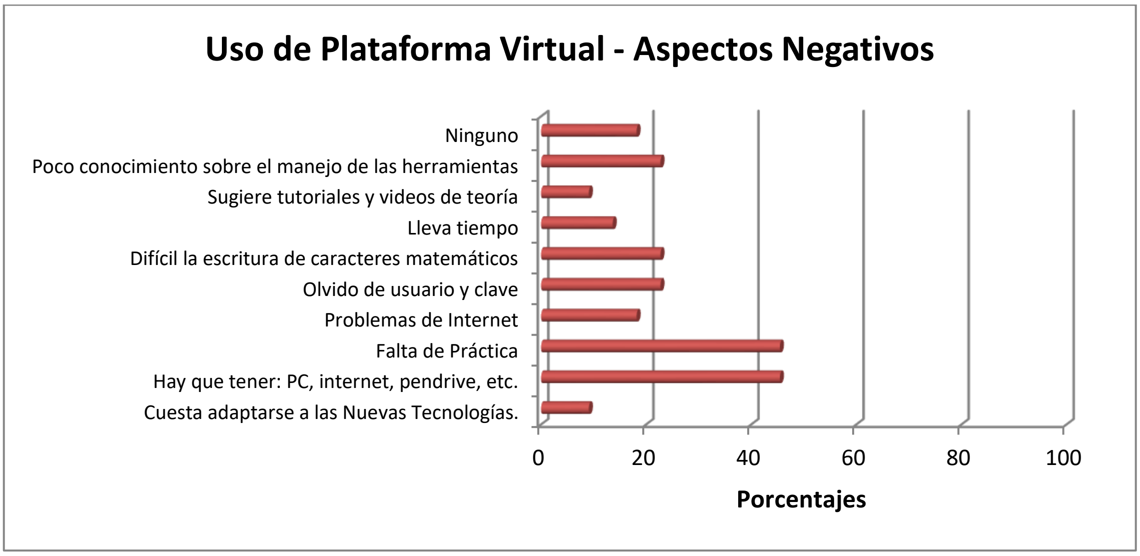


Fig. 4. Opiniones de los estudiantes respecto al uso de la Plataforma Virtual. Aspectos Negativos. Fuente: Encuestas a los alumnos de Primer Año.

La figura 5 muestra que la mayor parte de los estudiantes advierte numerosas y diversas ventajas de enfrentarse a resolver problemas. Por un lado, encontrar la vinculación de la matemática con problemáticas de su carrera, la visualización de conceptos matemáticos implícitos en ellos y su manejo adecuado para la toma de decisiones. Por otro, la dificultad en sí de resolver problemas, ya que ello implica un complejo proceso de interpretación y análisis

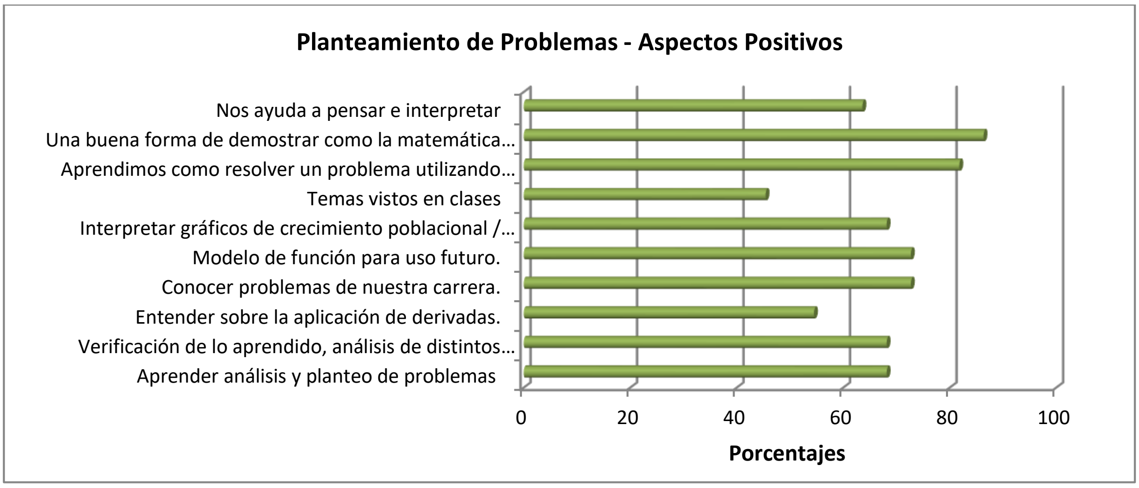


Fig. 5. Opiniones de los estudiantes respecto del planteamiento del problema. Aspectos Positivos. Fuente: Encuestas a los alumnos de Primer Año.

En la figura 6, se puede observar que, al enfrentarse a resolver los problemas, despierta un abanico de dificultades a los estudiantes, desde comprender el problema, interpretar consignas, elegir fórmulas pertinentes, representar sus datos de diferentes formas

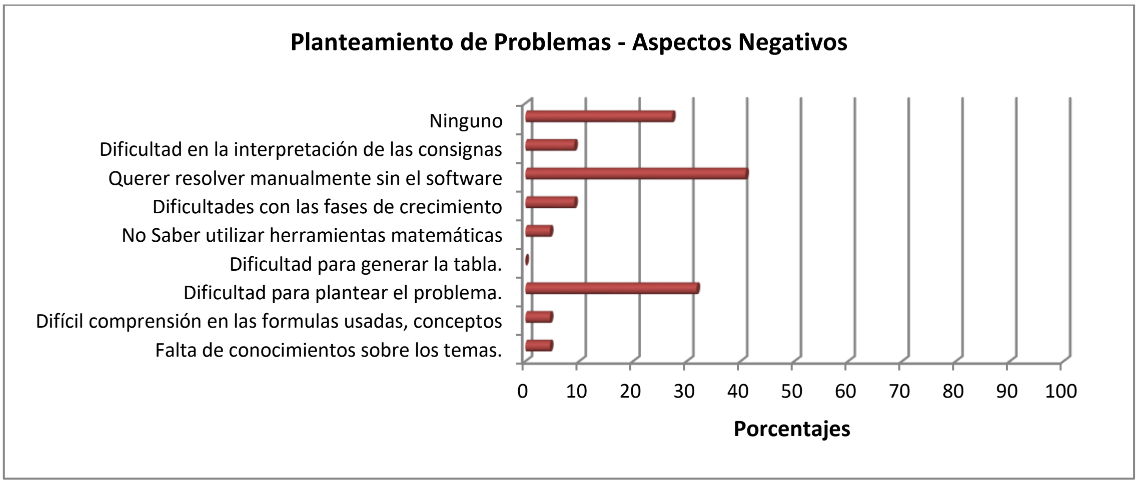


Fig. 6. Opiniones de los estudiantes respecto del planteamiento del problema. Aspectos Negativos. Fuente: Encuestas a los alumnos de Primer Año.

En la figura 7, se puede inferir las múltiples ventajas del trabajo en equipo que manifestaron los estudiantes. Los enfrenta a situaciones de interacción e intercambio, a debatir, razonar y tomar decisiones colaborativamente, a evaluarse y evaluar el trabajo de equipo, a fortalecerse de las opiniones ajenas.

Fig. 7. Opiniones de los estudiantes respecto al trabajo grupal. Aspectos Positivos. Fuente: Encuestas a los alumnos de Primer Año.

En la figura 8, se evidencia dificultades propias de lo colectivo con respecto al trabajo grupal, pero también a nivel individual. La dificultad de establecer acuerdos cuando hay diversidad de opiniones, la solidaridad frente a aquellos que no tienen los mismos tiempos de comprensión, la falta de organización para reunirse, la participación y distribución de responsabilidades, la falta de compromiso en algunos miembros, que lleva a la decisión de que algunos prefieran afrontar el trabajo individualmente.

Fig. 8. Opiniones de los estudiantes respecto al trabajo grupal. Aspectos Negativos. Fuente: Encuestas a los alumnos de Primer Año.

En la figura 9, se observa que la exposición oral de trabajos grupales les permitió percibir diferentes sensaciones. Para algunos perder el medio, la vergüenza, o la timidez a la hora de hablar frente a sus compañeros y profesores. Poder comunicar procedimientos y resultados mediante el lenguaje propio de la matemática. Poder organizar coherentemente la exposición para defender el propio trabajo.

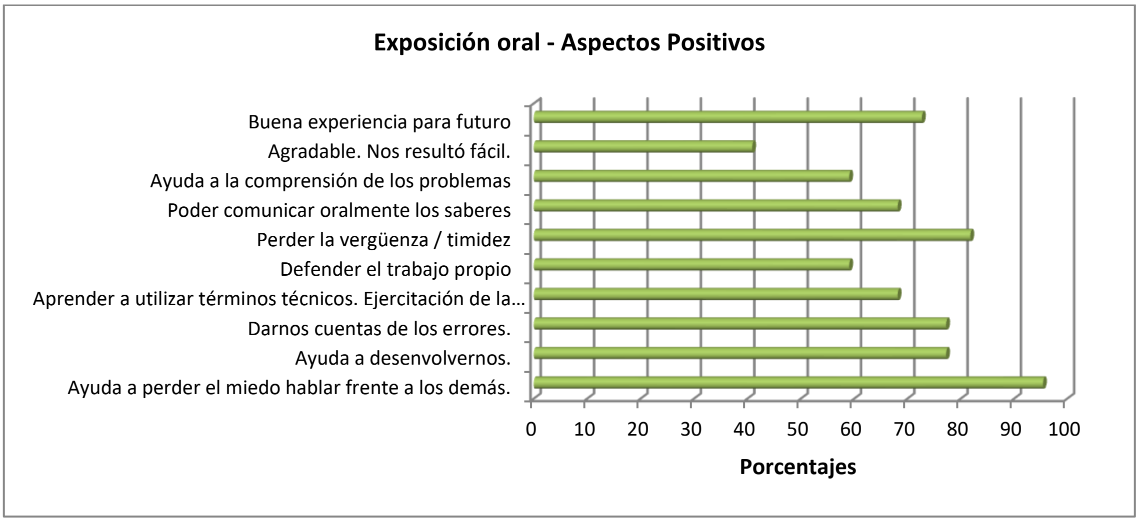


Fig. 9. Opiniones de los estudiantes respecto a la exposición oral. Aspectos Positivos. Fuente: Encuestas a los alumnos de Primer Año.

En la figura 10 se puede observar que la mayor preocupación de los estudiantes a la hora de enfrentarse a una exposición oral, es la falta de hábito en ello, que conlleva la preocupación en la precisión del lenguaje, como así también en lograr una exposición clara y ordenada. Estos desaciertos posibilitan la autoevaluación en relación a la coherencia global de la exposición.

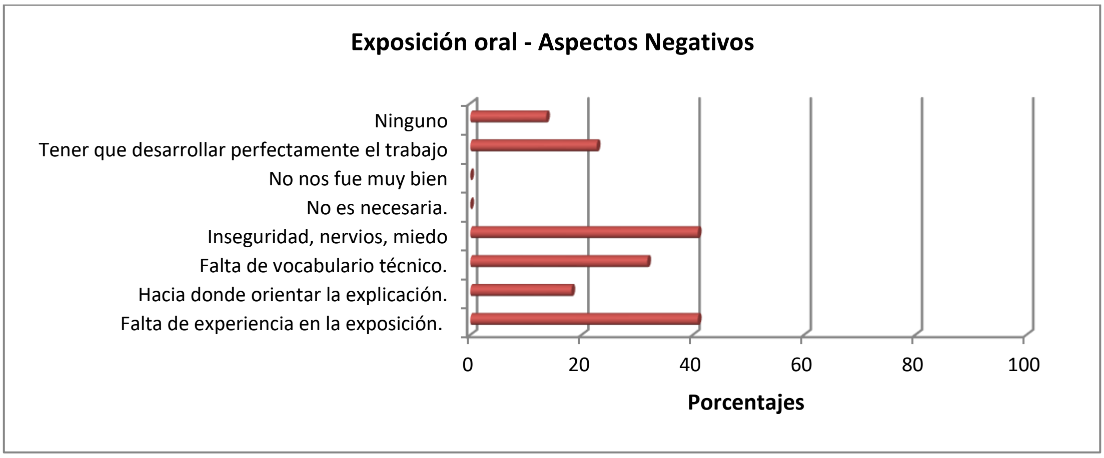


Fig. 10. Opiniones de los estudiantes respecto a la exposición oral. Aspectos Negativos. Fuente: Encuestas a los alumnos de Primer Año.

3 Conclusión

Las estrategias metodológicas empleadas en el desarrollo de la asignatura estuvieron orientadas al logro de un aprendizaje basado en competencias, tomando como base los saberes iniciales de los ingresantes y entendiendo el concepto de competencia como el "saber hacer en un contexto", "saber hacer" que requiere de conocimiento (teórico, práctico o teórico-práctico), afectividad, compromiso, cooperación y cumplimiento, todo lo cual se expresa en el desempeño de tipo teórico, práctico o teórico-práctico [4].
La adopción de este modelo nos ha conducido a replantear los nuevos roles demandados al docente y a los alumnos como así también a repensar el rol de la evaluación, un punto especialmente importante en cualquier modelo pedagógico. Y es este último aspecto el que despierta un gran interés en analizar en profundidad por parte del equipo de trabajo, ya que para que cualquier sistema de evaluación tenga validez, ha de ir en consonancia con los objetivos de la enseñanza y las competencias a desarrollar a través de una metodología que permitan configurar un todo coherente. El aprendizaje de los estudiantes puede ser tan bueno como lo sean las tareas de evaluación que propongamos [5]. Los métodos y requisitos de la evaluación probablemente tienen más influencia en cómo y qué aprenden los estudiantes que cualquier otro factor individual. Esta influencia es posible que tenga mayor importancia que el impacto de los materiales de enseñanza [6] [7]. Es así que el propósito de las investigaciones futuras, estará centrado no sólo en profundizar el modelo, sino también en el análisis del sistema de evaluación que acompaña dicho modelo, Particularmente en el uso de las rubricas a partir de su importante potencial formativo y las posibilidades que ofrece para orientar a los estudiantes hacia qué se espera de ellos, cómo hacer un buen trabajo y qué es lo verdaderamente relevante.

Referencias

1. CONFEDI: *Declaración de Valparaiso sobre competencias genéricas de egreso del ingeniero iberoamericano. Competencias genéricas de egreso del ingeniero argentino. Competencias requeridas para el ingreso a los estudios universitarios en Argentina.* FASTA Ediciones. (Abril 20l4).
2. Villa Sánchez, A.; Poblete Ruiz, M.: *Aprendizaje Basado en Competencias: Una Propuesta para la Evaluación.* Ediciones Mensajero, S.A.U. Universidad de Deusto Bilbao (2007)
3. Tobon S.: *Aspectos básicos de la formación basada en competencias.* Talca: Proyecto Mesesup. http:/www.tecnologicocomfacauca.edu.co/FBC.pdf (2006). Accedido el 2 de Diciembre de 2016.
4. Posada Alvarez, R.: Formación superior basada en competencias, interdisciplinariedad y trabajo autónomo del estudiante. *Revista Iberoamericana de Educación.* http://www.rieoei.org/deloslectores/648Posada.PDF. (2004). Accedido el 07 de Febrero de 2017.
5. Race, P.; Brown, S.; Smith, B.: *500 Tips on Assessment.* Kogan Page Ltd. (2007)
6. Boud, D.: *Problem-based learning in Education for the professions.* Sydney: Higher Education Research and Development Society of Australia (1985).
7. Herrero, R.; Ferrer, M.A.; Calderón, A.A.: *Evaluación de las competencias genéricas mediante rúbricas* http://repositorio.upct.es/bitstream/handle/10317/4115/ecg.pdf (2014). Accedido el 10 de Abril de 2018.

La Evaluación Continua como Herramienta para Mejorar los Resultados del Aprendizaje

Sara Alaniz[1]; Daniel Morano[1]; Gladys May[1]; Roberto Simunovich[1]
[1]Facultad de Ingeniería y Ciencias Agropecuarias. Universidad Nacional de San Luis
Campus universitario Ruta 148 / Ext. Norte
saraaidaalaniz@gmail.com;dmorano1963@gmail.com

Resumen. CONFEDI estableció como marco conceptual que "Competencia es la capacidad de articular eficazmente un conjunto de esquemas (estructuras mentales) y valores, permitiendo movilizar (poner a disposición) distintos saberes, en un determinado contexto con el fin de resolver situaciones profesionales". Desde matemática debemos continuar aportando al ingeniero el saber y saber hacer para modelar, calcular y resolver problemas complejos, pero además deben generarse condiciones para que el estudiante tenga una participación activa y comprometida con su propio aprendizaje (saber ser). Transitando de una evaluación del aprendizaje a una evaluación para el aprendizaje buscando mantener un equilibrio (Stiggins, 2002; Moreno, 2012), es que desde 2013 en Análisis Matemático II (2° Año, 1° Cuatrimestre) se implementaron autoevaluaciones formativas continuas, centradas tanto en procesos y en resultados, con el objetivo que los estudiantes reconozcan y confíen en sus capacidades de aprendizaje.[1, 2]

Palabras Clave: Evaluación continua, Aprendizaje activo, Compromiso con el aprendizaje, Autoevaluación.

1 Introducción

La asignatura Análisis Matemático II se dicta en el 1° cuatrimestre del 2° año de las carreras de Ingeniería en Alimentos, Ingeniería Electromecánica, Ingeniería Electrónica, Ingeniería Industrial, Ingeniería Mecatrónica e Ingeniería Química de la Facultad de Ingeniería y Ciencias Agropecuarias.

Como requisito para su cursado los estudiantes deben tener aprobada la asignatura Análisis Matemático I (1° Año 1° Cuatrimestre) y cursada la asignatura Álgebra y Geometría Analítica (1° Año, 2° Cuatrimestre).

Para regularizar debe asistir al menos al 70% de las clases, y aprobar dos parciales con al menos un 60%, y para aprobar la materia debe rendir un examen final oral.

Según la concepción constructivista, el aprendizaje es un proceso activo desde el punto de vista del alumno, en el cuál éste construye, modifica, enriquece y diversifica sus esquemas de conocimiento. La enseñanza, es una ayuda al proceso de aprendizaje, porque la enseñanza no puede sustituir la actividad mental constructiva del alumno ni ocupar su lugar, (Coll 1990) se refiere a tres ideas fundamentales en torno a la estructura de la concepción constructivista: [3,4]

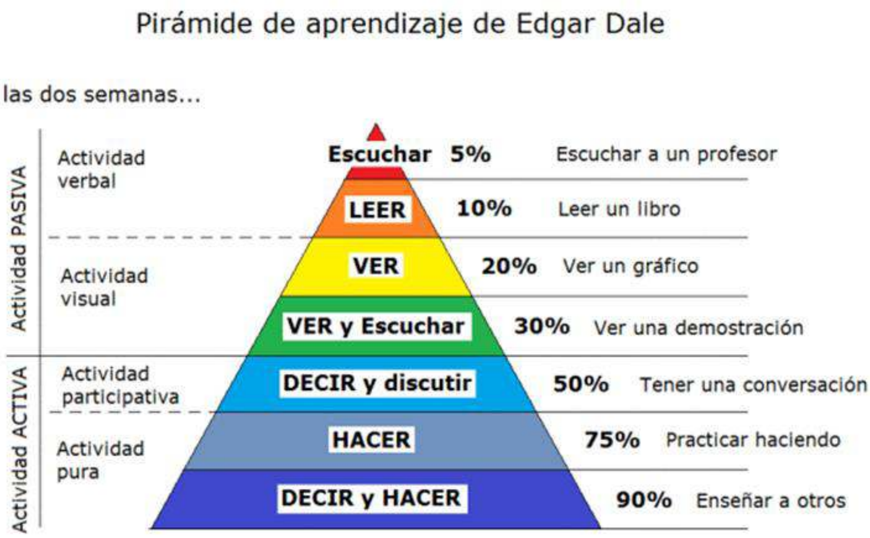
1. El alumno es responsable último de su propio aprendizaje, él es quien construye(o reconstruye) los saberes y quien llega a ser sujeto activo cuando manipula, explora, descubre, inventa e incluso cuando lee un texto o escucha una alocución de otros.
2. La actividad mental constructiva del alumno se aplica a contenidos que poseen ya un alto nivel de elaboración.
3. La función docente consiste en engarzar los procesos de construcción del alumno con el saber colectivo culturalmente organizado.

La condición básica para que la ayuda educativa sea eficaz, se debe conjugar en dos grandes características, en primer lugar, debe tenerse en cuenta los esquemas de conocimientos de los alumnos en relación al contenido del aprendizaje de que se trate, y tomar como punto de partida los significados y sentidos de los que, en relación a ese contenido, dispongan los alumnos. Pero, al mismo tiempo, debe provocar desafíos y retos que hagan cuestionar esos significados y sentidos y fuercen su modificación por parte del alumno, y asegurar que esa modificación se produce en la dirección deseada, es decir, que acerque la comprensión y la actuación del alumno a las intenciones educativas. La enseñanza pretende, siempre, incrementar la capacidad de comprensión y actuación autónoma por parte del alumno. Con el aprendizaje activo los estudiantes asumen una mayor responsabilidad sobre su propia educación. [5]

La evaluación es parte de la enseñanza y del aprendizaje, tiene como objetivo acreditar el logro de los conocimientos, capacidades y competencias de distinto orden adquiridas por el alumno. Además le permite volver sobre lo hecho, repensar, focalizar aquellos aspectos que debe profundizar y producir incorporando nuevas perspectivas. La evaluación permite al alumno reconocer sus dificultades e identificar las diferencias entre sus puntos de vista y lo que debería haber aprendido. [5]

Considerar la evaluación como parte del proceso educativo, implica una concepción de la enseñanza como una constante revisión de lo que sucede e implica por tanto una postura crítica y abierta del profesor que lo lleva a realizar ajustes pedagógicos.

Teniendo en cuenta las posibilidades de la materia, en particular relación docente-estudiantes, se decidió incorporar técnicas de aprendizaje activo. Tomando el cono de aprendizaje de Edgar Dale, se decidió incorporar una "*actividad pura*" como aprendizaje activo que es la de "*hacer una cosa que se intenta aprender*". [6]



En este contexto, en el año 2013 se decidió incorporar como metodología de aprendizaje activo un sistema de autoevaluación permanente por parte de los estudiantes. Esta metodología, denominada por los estudiantes "parcialito", consiste de tres actividades teóricas o prácticas. En la evaluación parcial se proponen actividades, cada una consta de dos ítems, el haber aprobado los parcialitos le permite al estudiante optar en cada actividad resolver sola una de las dos opciones solicitadas. En caso contrario, resuelve toda la evaluación. Cabe aclarar que se toman dos evaluaciones parciales, con dos de sus respectivas recuperaciones. Para mejorar el rendimiento de nuestros alumnos decidimos tomar "parcialitos" en todas las clases, con un repaso previo a la evaluación sobre los temas involucrados. [7,8, 9]

Con los "parcialitos" se pretende motivar a los alumnos a un estudio diario y constante, con la intención de modificar la conducta incorporada por la mayoría de estudiar solo en los días previos a un parcial. Además posibilita la retroalimentación necesaria en el mecanismo de enseñanza y aprendizaje.

Con la periodicidad de los "parcialitos" se pretende facilitar la asimilación y el desarrollo progresivo de los contenidos de la asignatura y de las competencias que debe alcanzarse, así como habituar al alumno a la evaluación. De esta manera, la evaluación se convierte en continua y el docente puede hacer un mejor seguimiento del proceso de aprendizaje del alumno. Siguiendo las teorías constructivistas del conocimiento, se trata de apostar por un aprendizaje significativo. [7,8, 9]

La utilización de la resolución de problemas como estrategia metodológica activa, desafía al estudiante a generar un conocimiento, a partir de la búsqueda de soluciones a problemas que cuidadosamente planteados y seleccionados, deben ser interesantes, atractivos y estar relacionados con su carrera o su entorno profesional. Por eso en cada unidad se incorporan problemas de aplicación sencillos como un aporte a la Competencia Genérica, Tecnológicas: "Identificar, formular y resolver problemas de ingeniería". [10]

Paralelamente la autoevaluación permanente permite que el estudiante desarrolle la Competencia Genérica Actitudinales: "Aprender en forma continua y autónoma" atento a que debe aplicar competencias instrumentales metodológicas como Gestión del Tiempo, Orientación al Aprendizaje y Planificación. [10]

2 Metodología

Nuestro trabajo es de tipo exploratorio donde se analiza el impacto de los "parcialitos" en el rendimiento académico de los alumnos, a partir del año 2014 hasta el 2017, porque permite el desarrollo en los estudiantes de la Competencia Genérica Actitudinal: "Aprender en forma continua y autónoma" [10]. Además, se analiza la opinión de los estudiantes que son los destinatarios de la enseñanza.

3 Implementación

Como se expresó, en el año 2013 se agregó un sistema de autoevaluación continua denominada "parcialitos". Las mismas se realizan al comienzo o al finalizar de cada clase y cuentan con tres ejercicios sencillos o conceptos teóricos que hacen que el estudiante esté en un contacto permanente con la teoría y la práctica de la asignatura.

El equipo docente con los "parcialitos" debe valorar el rendimiento de los estudiantes como así también tener una postura crítica y abierta para realizar ajustes pedagógicos de forma permanente a partir de la detección de las dificultades de aprendizaje de forma temprana y por tanto adecuar las estrategias didácticas o reajustar la planificación preestablecida en el programa.

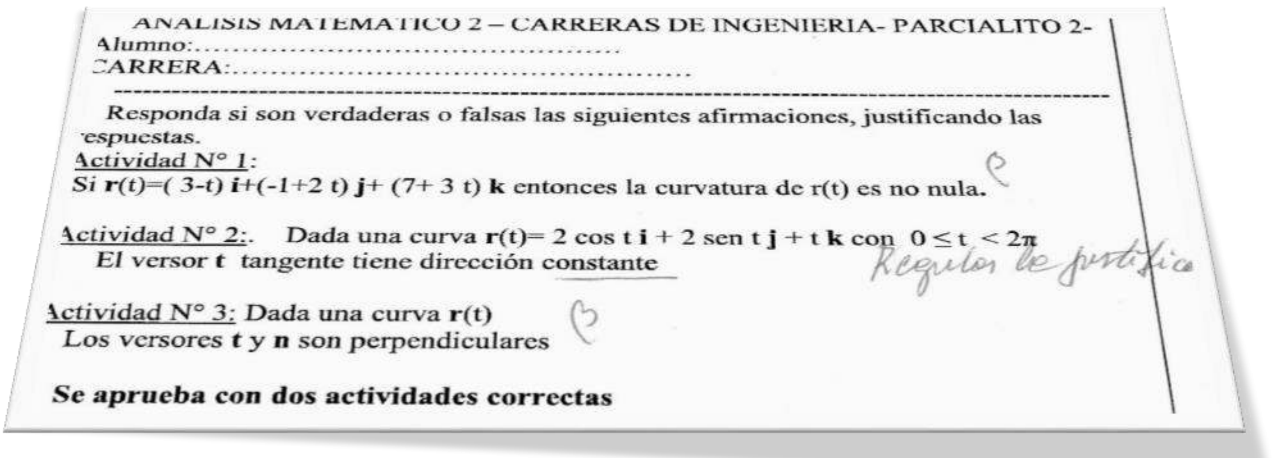
Es importante asegurar que el estudiante sea capaz de asimilar los contenidos de las asignaturas gradualmente, con el fin de alcanzar un nivel aceptable de conocimiento, entendimiento y capacidad de aplicación.

Con el aprendizaje continuo se pretende, además, motivar a los estudiantes a un estudio diario y constante, con la intención de modificar la conducta incorporada por la mayoría de estudiar solo en los días previos a un parcial, induciéndolos a desarrollar los primeros niveles de dominio de las competencias instrumentales de gestión del tiempo, planificación de actividades y orientación al aprendizaje, fundamentales para la formación y el ejercicio profesional de la ingeniería.

3.1 Los "parcialitos"

Las revisiones conceptuales(los parcialitos) no siempre se realizan de una misma manera, a veces utilizamos cuestionarios de verdadero o falso y de opciones múltiples. De todos modos, además del verdadero o falso, el estudiante debe justificar la respuesta, con lo que el nivel evaluativo permite un análisis más detallado del aprendizaje parcial del estudiante.

A modo de ejemplo presentamos dos "parcialitos" que hemos tomado a los estudiantes:



ANALISIS MATEMATICO 2 – CARRERAS DE INGENIERIA- PARCIALITO 2-

Alumno:...

CARRERA:...

Responda si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones, justificando las respuestas.

Actividad N° 1:
Si **r**(t)=(3-t) **i**+(-1+2 t) **j**+ (7+ 3 t) **k** entonces la curvatura de r(t) es no nula.

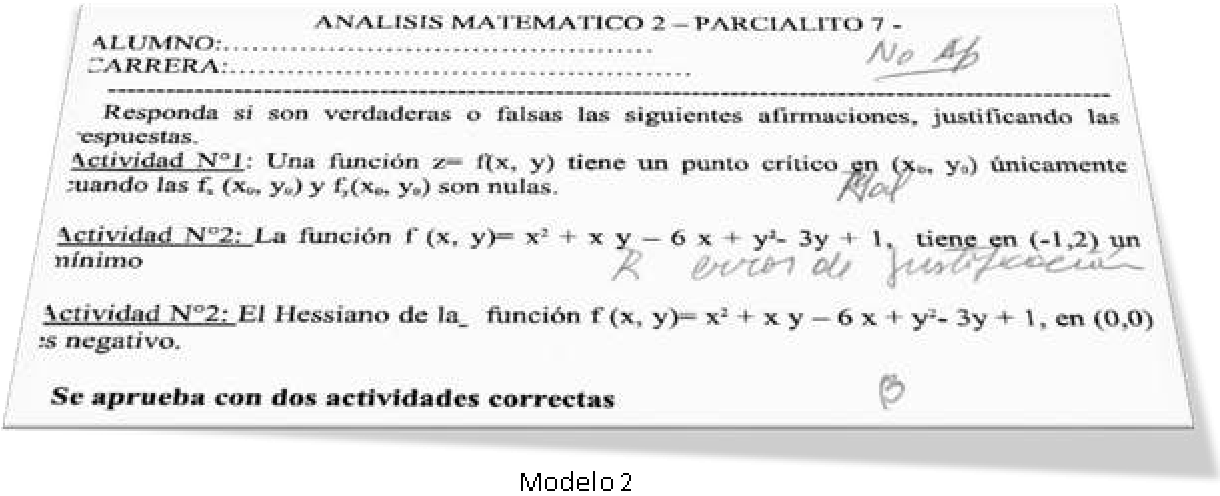
Actividad N° 2:. Dada una curva **r**(t)= 2 cos t **i** + 2 sen t **j** + t **k** con $0 \leq t < 2\pi$
El versor **t** tangente tiene dirección constante

Regular le justifica

Actividad N° 3: Dada una curva **r**(t)
Los versores **t** y **n** son perpendiculares

Se aprueba con dos actividades correctas

Modelo 1



ANALISIS MATEMATICO 2 – PARCIALITO 7 -
ALUMNO:...
CARRERA:..   No Ap

Responda si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones, justificando las respuestas.

Actividad N°1: Una función z= f(x, y) tiene un punto crítico en (x_o, y_o) únicamente cuando las $f_x (x_o, y_o)$ y $f_y(x_o, y_o)$ son nulas.   Mal

Actividad N°2: La función f (x, y)= x^2 + x y – 6 x + y^2- 3y + 1, tiene en (-1,2) un mínimo
R error de justificación

Actividad N°2: El Hessiano de la_ función f (x, y)= x^2 + x y – 6 x + y^2- 3y + 1, en (0,0) es negativo.

Se aprueba con dos actividades correctas   B

Modelo 2

3.2 Los resultados

Haciendo una revisión y análisis de estos cuatro años en cuanto a la toma de "parcialitos" para mejorar el rendimiento académico y aumentar el número de estudiantes que regularicen y aprueben la asignatura pasamos a desarrollar lo que creemos que se ha logrado por parte de los estudiantes

A los efectos del análisis de resultados se indica la cantidad de estudiantes aprobados (Apr), reprobados (Rep) y que abandonaron (Abn) el cursado de la materia.

Tabla 1: Estudiantes aprobados, reprobados y que abandonaron la asignatura entre 2014 y 2017

Carrera\Año\ Condición	**2014**			**2015**			**2016**			**2017**			**Suma**		
	Apr	**Rep**	**Abn**	**Apr**	**Rep**	**Abn**	**Apr**	**Rep**	**Abn**	**Apr**	**Rep**	**Abn**	**Apr**	**Rep**	**Abn**
Alimentos	2	2	1	9	0	0	9	1	0	8	1	0	28	4	1
Electromecánica	10	4	2	23	2	4	13	0	4	17	2	5	63	8	15
Electrónica	5	0	1	4	0	2	8	0	2	8	3	3	25	3	8
Industrial	24	11	2	26	1	4	19	2	2	21	2	6	90	16	14
Mecatrónica	8	2	0	12	1	0	19	1	1	12	0	0	51	4	1
Química	8	1	2	9	2	1	20	0	1	14	2	0	51	5	4
TOTAL	**57**	**20**	**8**	**83**	**6**	**11**	**88**	**4**	**10**	**80**	**10**	**14**	**308**	**40**	**43**
Porcentaje	**67%**	**24%**	**9%**	**83%**	**6%**	**11%**	**86%**	**4%**	**10%**	**77%**	**10%**	**13%**	**79%**	**10%**	**11%**
% Apr./Repr	**74%**	**26%**		**93%**	**7%**		**96%**	**4%**		**89%**	**11%**		**89%**	**11%**	

Fuente: datos propios.

En la tabla se observa los resultados de la regularidad en la asignatura obtenida por los estudiantes entre los años 2014 al 2017.

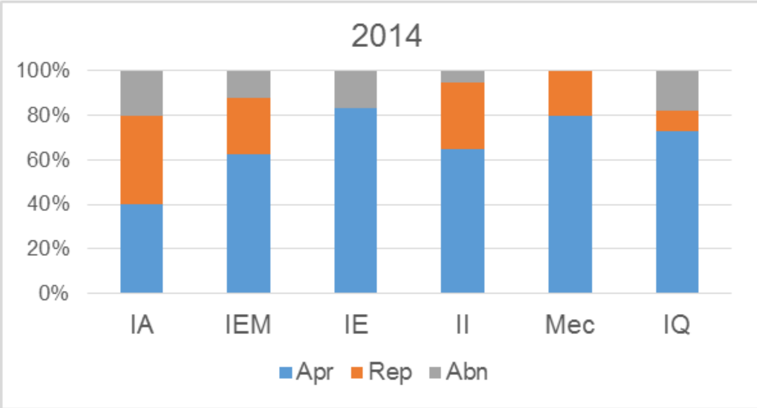


Figura 1

En el año 2014 regularizó el 67% de los inscriptos, el 24% reprobó y el 8% abandonó.

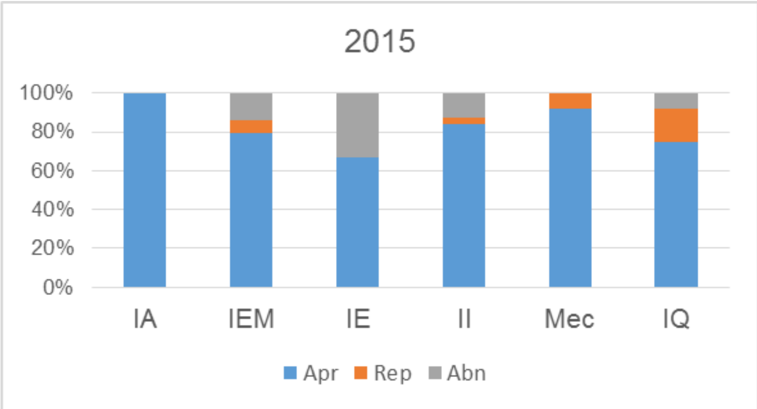


Figura 2

En el año 2015, el 83% regularizó, el 6 % reprobó y el 11 % abandonó.

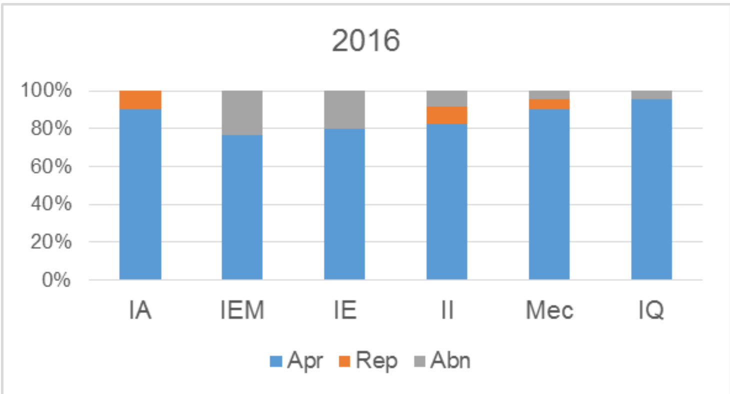


Figura 3

En el año 2016, el 86% regularizó el 4% reprobó y el 10 % abandonó

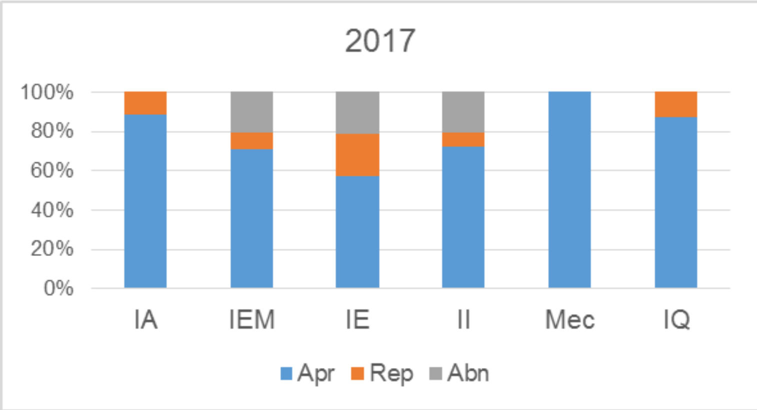


Figura 4

El 77% regularizó, 10 % reprobó y el 13 % abandono.

Si tomamos los estudiantes que finalizaron el cursado de la asignatura, el porcentaje de aprobados que fue del 74% en 2014, osciló entre el 89% y el 96% entre los años 2015 y 2017.

3.3 La opinión de los estudiantes

La Universidad Nacional de San Luis tiene implementado un sistema de encuestas para lograr la opinión fundada del claustro de alumnos con respecto al dictado de las materias y la opinión acerca del equipo docente.

Al momento de inscribirse en el sistema de alumnos los estudiantes responden una encuesta sobre las materias cursadas en el cuatrimestre anterior. Así, por ejemplo, las encuestas sobre Análisis Matemático II (1° cuatrimestre) la responden en el mes de agosto cuando se inscriben para cursar las asignaturas del segundo cuatrimestre del año.

En la tabla siguiente están las preguntas de la encuesta del claustro de estudiantes, la opinión del curso y de cada docente. Los estudiantes deben asignarle un valor de 1 a 10.

Tabla 2: Opinión fundada del claustro de alumnos 2017

Opinión del curso	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**Med**
¿Se explicaron los contenidos y los objetivos del programa al inicio del curso?											
¿Se informó claramente el sistema de evaluación al inicio del curso?											
El nivel de exigencia en las evaluaciones ¿se correspondió con el desarrollo de los contenidos teóricos y las actividades prácticas realizadas?											
¿Se corrigieron y entregaron los trabajos prácticos y parciales en un tiempo razonable (máximo 15 días)?											
Los prácticos de la materia ¿te ayudaron a comprender los temas del curso?											
¿Ha existido coordinación entre las actividades teóricas y las actividades prácticas?											
La bibliografía recomendada ¿fue útil para el seguimiento del curso?											
Tu nivel de conocimientos previos ¿era adecuado para la comprensión de los temas de este curso?											
Desde tu posición actual ¿consideras que este curso es importante para tu futuro profesional?											
¿Recomendarías este curso a un amigo?											
Opinión de docentes	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**Med**
¿Acostumbra destacar y dejar en claro los conceptos fundamentales de cada tema?											
¿Organiza la clase y explica con claridad?											
¿Estimula al alumno para que piense por sí mismo y participe de las clases?											
¿Tiene buena disposición y está disponible para atender consultas y contestar dudas?											
Si tuvieras oportunidad ¿tomarías otro curso con este docente?											

Fuente: Sistema de opinión fundada del claustro de alumnos UNSL

Los docentes tenemos acceso a las opiniones del claustro de estudiantes en las asignaturas en la que somos responsables.

Los resultados de la opinión de los estudiantes que cursaron en el 2017 la asignatura Análisis Matemático 2 de las Carreras de Ingeniería, para cada ítems y en cada carrera es superior a 8 puntos, el valor medio más bajo es aquel que se refiere al nivel de conocimientos previos de cada estudiante para comprender los temas del curso.

Además, la Facultad de Ingeniería y Ciencias Agropecuarias cuenta con el Programa de Atención y Seguimiento de Alumnos. Este Programa tiene como objetivo primordial un seguimiento sistemático, exhaustivo y pormenorizado del desempeño académico de los estudiantes, a fin de detectar las problemáticas en forma anticipada, a efectos de facilitar la intervención inmediata del Servicio Interdisciplinario de Orientación al Estudiante y buscar su atención con soluciones acorde a cada caso, elevando el nivel de retención institucional y por ende disminuyendo el índice de deserción. A partir del 2017 se han implementado entrevistas a todos los alumnos en cada cuatrimestre, donde se les pregunta sus opiniones respecto al dictado de cada asignatura y si tienen propuestas.

Toda esta información recabada a los alumnos es analizada por el docente, quien puede, si lo cree necesario reformular, reorganizar, cambiar algunos aspectos sobre el dictado de la asignatura.

3.4 Cambios conductuales y actitudinales de los estudiantes

a) La mayoría estudian o, como mínimo, leen la teoría en todas las clases para poder aprobar "los parcialitos", situación que se verifica en un incremento de consultas de teoría, cuando antes solo lo hacían previo a los exámenes finales. Además, observamos en las consultas un cambio de actitud, atento a que realizan preguntas bien definidas y sobre lecturas previas. Ya no comienzan diciendo "no entiendo", "no sé cómo se hace" o "¿cómo se hace esto?".
b) Según una encuesta sobre si los "parcialitos" le ayudaron al aprendizaje de la asignatura, mostraron su conformidad manifestando que "los parcialitos" les ayuda a conectar la teoría con la práctica. Un estudiante opinó: "*Si, los parcialitos ayudan a mejorar el aprendizaje. Se debe estudiar para todas las clases lo que hace que el resolver ejercicios y estudiar para el parcial sea menos complejo"*
c) Les ayuda a no memorizar sino a interpretar, utilizar adecuadamente los conceptos y saber aplicarlo a situaciones.
d) Se observa una mayor participación en las clases, no se inhiben de realizar preguntas sobre cualquier duda que tengan. Perciben que buena parte de sus errores se debe a que aún no han asimilado aquellos temas que se les ha pretendido enseñar.
e) Aprovechan todos los parciales, advertimos en estos últimos años que ha disminuido el índice de abandono sino aprueban el primer parcial o su recuperatorio y utilizan todas las instancias de evaluación.
f) Los estudiantes van aprendiendo gradualmente cuales son los temas más importantes o en los que se hace mayor hincapié en la asignatura. Jerarquizan los temas y toman conciencia del conocimiento significativo que se propone en cada uno de ellos.
g) Empiezan a tener un pensamiento crítico en el desarrollo de la asignatura, se observa que no estudian de memoria como ocurría en los exámenes parciales y finales. Justifican de manera concreta y fácil las respuestas.
h) Algunos estudiantes mejoraron las justificaciones de las respuestas utilizando correctamente las fórmulas y símbolos matemáticos.

Que logra y hace el docente:

a) Le permite hacer un seguimiento continuo del aprendizaje de los estudiantes, ver posibles falencias o carencias y remediarlas antes del parcial. Se utiliza el error como una fuente de información y como una oportunidad para aprender, no para castigar y para que preste atención en los conceptos claves que deben tener en cuenta. Por ejemplo: la intención de las actividades 1 y 2 del Modelo 1 es que los estudiantes distingan las características de una recta y las de los vectores del triedro de Frenet. En el caso de la Actividad N°1 del Modelo 2 es para que analicen la definición de punto crítico de una función.
b) Es necesario destacar que significa mayor trabajo al equipo docente, que deben confeccionar para todas las clases preguntas de respuestas múltiples o de verdadero-falso, aunque con el tiempo se genera una base de datos. La corrección de las evaluaciones insume tiempo al equipo docente.

4 Reflexiones finales

1. Se debe considerar la evaluación como motor propulsor del verdadero aprendizaje y como valioso instrumento de vigilancia de las prácticas en el aula. Para que esto suceda el docente debe plantear la actividad evaluativa como un desafío atractivo, genuino, un reto cognitivo en el que el estudiante se involucra y se compromete con la actividad.
2. Coincidiendo con" (Díaz Barriga) "*La evaluación de los aprendizajes es un proceso, a través del cual se observa, recoge y analiza información relevante respecto de los aprendizajes de los alumnos, con la finalidad de reflexionar, emitir juicios de valor y tomar decisiones pertinentes y oportunas para mejorar el proceso*.[11]
3. La evaluación continua tiene ventajas para el estudiante. Porque el estudiante que participa de la evaluación continua tiene mayor posibilidad de aprobar la asignatura debido que ha ido asimilando de forma gradual los contenidos más importantes y también porque conoce la forma de evaluar del docente, sabe que es lo que el docente considera más importante, lo que más valora y además el estudiante recibe información sobre su propio ritmo de aprendizaje durante las continuas devoluciones y es capaz de rectificar los errores que ha ido cometiendo.
4. "Las herramientas que ofrece la computadora también facilitan los ciclos de evaluación continua de diversas formas. Permiten almacenar el trabajo realizado por los estudiantes de modo tal que el proceso de análisis y revisión se hace más sencillo que si se realiza con las herramientas estáticas tradicionales", Stone Wiski (2006, 61). Como próximo paso y haciendo uso de las nuevas tecnologías, pensamos implementar la plataforma virtual Moodle para la toma de "parcialitos", ya que nos permitirá a través de la opción de cuestionarios realizar evaluaciones de opciones múltiples o de falso/verdadero, con la ventaja de obtener el resultado cuando finaliza la evaluación y la posibilidad de recibir el estudiante la devolución en forma inmediata. [12, 13]
5. Coincidiendo con Stone Wiski: *"Si la comprensión incluye la capacidad de reflexionar empleando lo que sabemos, es evidente que los temas del currículo deberían no solo "cubrirse" sino también "descubrirse" de modo que alienten la indagación continua. Los docentes son más eficaces para guiar una investigación cuando ellos mismos encuentran fascinantes los temas que abordan"* (pag,30, 2006)[13]
6. Teniendo implementado y evaluado el sistema de evaluación continua, el paso siguiente que nos hemos planteado para generar la trazabilidad necesaria que certifique el aporte de la asignatura a las competencias de egreso del ingeniero. Para ello se definirán algunas rúbricas de los resultados de aprendizaje de competencias cognitivas, metodológicas e interpersonales, según el siguiente detalle:[14]

Tipo	Competencia	Nivel de dominio
Cognitiva	Pensamiento analítico	Seleccionar los elementos significativos y sus relaciones en situaciones complejas.
Cognitiva	Pensamiento lógico	Utilizar procedimientos lógicos para conceptuar, distinguir e inferir ideas, factores y/o consecuencias de casos o situaciones reales.
Cognitiva	Pensamiento práctico	Utilizar sus capacidades y los recursos de que dispone para alcanzar los objetivos en situaciones habituales y siguiendo instrucciones.
Metodológica	Gestión del tiempo	Establecer objetivos y prioridades, planificar y cumplir la planificación en el corto plazo (cada día, cada semana)
Metodológica	Resolución de problemas	Identificar y analizar un problema para generar alternativas de solución, aplicando los métodos aprendidos.
Metodológica	Orientación al aprendizaje	Incorporar los aprendizajes propuestos y mostrar una actitud activa para su asimilación.
Metodológica	Planificación	Organizar diariamente el trabajo personal, recursos y tiempos, con método, de acuerdo a sus posibilidades y prioridades.
Interpersonales	Automotivación	Tener conciencia de los recursos personales y limitaciones (personales, entorno, etc.) para aprovecharlos en el óptimo desempeño de las tareas encomendadas.

Mapa de rúbricas Proyecto Tuning.

Referencias

1. Stiggins, R. Assessment crisis: the absence of assessment for learning. *Phi Delta Kappan,* 758-765. (2002, junio).
2. Moreno Olivos, T., La evaluación de competencias en educación- *Sinéctica*- version On-line ISSN 2007-7033 *versión impresa* ISSN 1665-109X.(2012).
3. Davini, M. *Métodos de enseñanza. Didáctica general para maestros y profesores*. Ed. Santillana. (2008).
4. Litwin, E. *El oficio de Enseñar. Condiciones y Contextos.*(1ª ed.) Buenos Aires: Editorial Paidos. (2008).
5. Litwin ,E. La evaluación como una explicación ecológica de la actividad en el aula. en Evaluación Aportes para la Capacitación Nº1. Revista *Novedades Educativas* Edición Nº90. Buenos Aires. Pág. 45 a 65. (1998).
6. Dale, E. *Audio-Visual Methods in Teaching,* 3rd ed., Holt, Rinehart & Winston, New York, (1969).
7. Alaniz, S.; May G.; Baracco, M.; Simunovich R. "Opinión de los estudiantes sobre los parcialitos como ayuda para la comprensión de los temas de Matemáticas Especiales" *Actas de XVIII Jornadas de Educación Matemática en Carreras de Ingeniería, VI Internacional. (*2014).
8. May G.; Hidalgo G.; Esperanza J.; Aliaga L.; Simunovich R."Parcialitos" como herramienta de evaluación continua para el aprendizaje en Análisis Matemático II. *Actas de XXVIII Jornadas Nacionales de Docentes de Matemática de La Facultades de Ciencias Económicas y Afines.* (2013).
9. May G.; Alaniz, S.; Esperanza J.; Simunovich R.; Oromi, F. "Análisis de la Opinión de los estudiantes sobre "los parcialitos" y el modo de evaluación de la asignatura Matemática II". *Actas de XXIX Jornadas Nacionales de Docentes de Matemática de La Facultades de Ciencias Económicas y Afines.* (2014).
10. CONFEDI. Declaración de Valparaiso sobre competencias genéricas de egreso del ingeniero iberoamericano. Competencias genéricas de egreso del ingeniero argentino. Competencias requeridas para el ingreso a los estudios universitarios en Argentina. FASTA Ediciones. (Abril 20l4).
11. Diaz Barriga, A.(1995). *Didática: Aportes para una polémica.* Buenos Aires: Aique Grupo Editor.
12. Delgado, A., Oliver R. 2013. *La evaluación continua en un nuevo escenario docente*. Revista de Universidad y Sociedad del Conocimiento. www.uoc.edu/rusc/3/1/dt/esp/delgado_oliver.pdf., (2006) Accedido el 9 de agosto del 2018.
13. Stone Wiski, M. *Enseñar para la Comprensión con nuevas tecnologías.* Editorial Paidós. (2006).
14. Villa, A. y Poblete, M. A*prendizaje basado en competencias. Una propuesta para la evaluación de competencias genéricas.* Universidad del Deusto (2007)

Atendiendo al nuevo paradigma del perfil del egresado de ingeniería, ¿cómo potenciar los aportes que brindan el álgebra y el análisis?

Gatica, María Andrea[1], Cocilova, Ana Inés[1], Cornejo Endara, Rafael[1], Paolini, Graciela Beatriz[1,2]
[1] GECGA-BB, Departamento de Matemática, Universidad Nacional del Sur
Av. Alem 1253. (8000) Bahía Blanca
{mariaandrea.gatica, cocilova, rcornejo, gpaolini}@uns.edu.ar,
[2] Departamento de Ciencias Básicas, Facultad Regional Bahía Blanca, Universidad Tecnológica Nacional
11 de Abril 461. (8000) Bahía Blanca

Resumen. En el siguiente trabajo se presentan los primeros avances observados en el marco del proyecto *Atendiendo al nuevo paradigma del perfil del egresado de ingeniería, ¿cómo potenciar los aportes que brindan el álgebra y el análisis?* Este proyecto está siendo desarrollado por docentes del Departamento de Matemática de la UNS con el objetivo de problematizar el rol docente, a través de la gestión de las intervenciones áulicas y del tratamiento articulado entre contenidos del álgebra y el cálculo para las carreras de Ingeniería. La motivación de problematizar el rol docente surge con el fin de atender al nuevo perfil de ingeniero que se propone desde los documentos del CONFEDI. Para abordar esta problemática utilizamos la metodología de la Ingeniería Didáctica, ya que permite sistematizar el abordaje del diseño e implementación de las propuestas áulicas emergentes de los procesos de investigación.

Palabras Clave: Ingeniería didáctica, Álgebra, Geometría, Cálculo, Competencias.

1 Introducción

En este trabajo socializaremos los primeros avances observados en el marco del proyecto *Atendiendo al nuevo paradigma del perfil del egresado de ingeniería, ¿cómo potenciar los aportes que brindan el álgebra y el análisis?,* que se desarrolla en la Universidad Nacional del Sur. Los docentes que llevan a cabo esta investigación pertenecen al grupo GECGA-BB (Grupo de Educación en Cálculo, Geometría y Álgebra, Bahía Blanca). La finalidad del mismo es problematizar los procesos de enseñanza y aprendizaje del cálculo y el álgebra de modo de promover aprendizajes significativos en nuestros alumnos.

Dos fenómenos observados en nuestra práctica docente motivaron la conformación de este grupo:

- En los últimos años hemos advertido dificultades que presentan los ingresantes en las carreras de ingeniería al transitar las materias básicas de matemática. Si bien estas dificultades son multicausales, notamos una recurrencia en la carencia de construcción de significados en los conceptos que se estudian en las asignaturas Análisis Matemático I, Análisis Matemático II y Álgebra y Geometría. Las consecuencias son, a nuestro entender, el estancamiento en los primeros años de la carrera, la baja autoestima y la deserción.
- Por otro lado no podemos desconocer el cambio en el paradigma de formación de profesionales. El egresado actual ya no es un mero contenedor de conocimientos sino que debe aspirar a ser competente en la realidad que lo rodea. En el caso de los alumnos de ingeniería:

  > *Hay consenso en cuanto que el ingeniero no sólo debe saber, sino también saber hacer. El saber hacer no surge de la mera adquisición de conocimientos sino que es el resultado de la puesta en funciones de una compleja estructura de conocimientos, habilidades, destrezas, etc. que requiere ser reconocida expresamente en el proceso de aprendizaje para que la propuesta pedagógica incluya las actividades que permitan su desarrollo. (CONFEDI, p. 9) [1]*

Así es que, atendiendo a las dificultades observadas en los alumnos ingresantes y al perfil de ingeniero que pretende formar el CONFEDI [1], hemos decidido problematizar nuestra labor docente en las cátedras mencionadas. Nuestra meta es profundizar el estudio de posibles modificaciones de las variables didácticas que se ponen en juego en los procesos de enseñanza-aprendizaje de la matemática, de modo de reconstruir nuestro rol docente en función a las competencias que pretendemos que nuestros alumnos desarrollen.

A modo de síntesis, este proyecto pone en tensión la labor que realizamos como docentes de alumnos de ingeniería, es decir, problematiza en torno a cómo redefinir el rol docente de matemática, atendiendo a las necesidades específicas de los futuros ingenieros. Consideramos que el redefinir este rol excede a la labor docente. Para esta tarea es necesario adoptar una metodología científica delimitando unidades de análisis siguiendo un marco teórico de referencia.

2 Objetivos

Los principales objetivos que pretendemos alcanzar son los siguientes:

- Diseñar secuencias de intervención que pongan en tensión las conceptualizaciones previas de los alumnos, que propicien el tratamiento espiralado de los contenidos, que promuevan la articulación de registros de representación semióticos [2] y que incluyan preguntas metacognitivas.
  Este objetivo se sustenta en las implicancias didácticas de la Teoría de Campos Conceptuales [3] y la Teoría de Representaciones Semióticas [2]
- Gestionar intervenciones que superen la brecha teoría-práctica, en las cuales los alumnos asuman tareas de investigación en las que la teoría aparezca como una necesidad para la resolución de problemas concretos, tanto en álgebra como en análisis.
  Este objetivo procura otorgar una razón de ser a los contenidos que se proponen para ser estudiados.
- Promover el tratamiento articulado entre los contenidos del álgebra y del cálculo.
  Este objetivo se fundamenta en las implicancias didácticas del Jeux de Cadré [4] que reconoce el potencial, como facilitador de aprendizajes, de propiciar el tratamiento de un mismo concepto en diferentes marcos.
- Incentivar a cada estudiante que adquiera conciencia de la construcción de sus conocimientos, colaborando en la formación de estrategias de organización, planificación de actividades y autoevaluación.
  Este objetivo propicia la autonomía de los alumnos a partir de hacerlos asumir responsabilidades acerca de su aprendizaje.
- Promover el desarrollo de alumnos autónomos de acuerdo a los lineamientos del perfil del egresado para carreras de ingeniería que propone el documento del CONFEDI [1].

3 Marco teórico

Los principios teóricos de nuestras investigaciones se encuadran, principalmente, en la Escuela Francesa de la Didáctica de la Matemática, en particular, las ideas de Chevallard [5], Douady [6] y Artigue [7].

Los fundamentos epistemológicos son tomados de la obra de Klimovsky y Boido [8], en la que se detallan entre otras cuestiones las corrientes de la filosofía de la matemática Platonismo, Formalismo, Logicismo, Intuicionismo.

Los fundamentos cognitivos corresponden a algunos enfoques de la psicología cognitiva que analizan los procesos de aprehensión y apropiación de la matemática, tales como la Teoría de Representaciones [2], la teoría APOE [9] y la Teoría de Campos Conceptuales [3].

A su vez, para perfilar las competencias que deseamos que nuestros alumnos de ingeniería desarrollen, adoptamos como guía el Documento del CONFEDI [1].

4 Posicionamiento

En relación a nuestro Posicionamiento respecto a la enseñanza y el aprendizaje de la matemática, adherimos a las ideas de Douady [4], quien afirma que:

> Para un profesor, enseñar se refiere a la creación de las condiciones que producirán la apropiación del conocimiento por parte de los estudiantes.
> Para un estudiante, aprender significa involucrarse en una actividad intelectual cuya consecuencia final es la disponibilidad de un conocimiento con su doble status de herramienta y de objeto.
> Para que haya aprendizaje y enseñanza, es necesario que el conocimiento sea un objeto importante, casi esencial de la interacción entre el profesor y sus alumnos, es decir, que el conocimiento sea *una manifestación importante de los "juegos" de l*a escuela.

Partimos del supuesto de considerar que los procesos de enseñanza-aprendizaje se cristalizan por medio de la dialéctica entre las hipótesis de trabajo áulicas y la gestión de las mismas. Debido al carácter idiosincrático, temporal y contextualizado de estos procesos, consideramos necesario someter el diseño y la puesta en marcha de los mismos a un método científico, razón por la cual hemos adoptado como Metodología la Ingeniería Didáctica, la cual describiremos en el siguiente ítem.

La concepción de nuestras hipótesis áulicas es que las mismas deben posibilitar el acercar la actividad del alumno al quehacer matemático, el cual no se limita a la resolución de tareas o problemas, sino que también exige el planteo de nuevos problemas, la generación de conjeturas y el control y validación de las mismas.

Siguiendo las ideas de Balacheff [10], afirmamos que, por muy buenas que sean las situaciones que se les planteen a los alumnos, la validación y el control no son actividades que éstas puedan demandar. Por esta razón es que la gestión de la clase toma un rol fundamental a la hora de pretender que el quehacer matemático sea parte de la vivencia de nuestros alumnos.

Consideramos que las secuencias didácticas que conforman las hipótesis áulicas son instrumentos de mediación epistémicas, en el sentido de ser medios facilitadores de aprendizajes significativos para los alumnos.

Explicitamos a continuación los principios desde los cuales diseñamos las secuencias didácticas emergentes de nuestras investigaciones:

- Fundamentar las propuestas en marcos teóricos de la didáctica de la matemática.
- Proponer un tratamiento espiralado de los contenidos.
- Promover la articulación entre distintos tipos de registros de representación semióticos [2].
- Favorecer el desarrollo de algunas de las competencias propuestas por el CONFEDI [1].
- Favorecer la relación entre los distintos aspectos de un mismo concepto matemático en las diferentes asignaturas, logrando así la integración de los contenidos.
- Naturalizar el uso de las tecnologías en las aulas como medio de aprendizaje.

Los siguientes principios guían las hipótesis de nuestro trabajo áulico:

- Incentivar espacios de socialización de las producciones de los alumnos.
- Romper con la tradicional separación entre teoría y práctica predominante en las cátedras universitarias, promoviendo que la teoría aparezca como una necesidad para la resolución de problemas concretos.
- Propiciar que los alumnos puedan explicitar sus conceptualizaciones y fundamentar los procedimientos y estrategias elegidas para desarrollar las actividades.

Nuestra intención es que la gestión de la clase se convierta en un motor para facilitar la confrontación de las diferentes resoluciones de los alumnos, a la vez que se analizan los medios de control utilizados por ellos. Es imperioso entonces tensionar las explicaciones de los alumnos para lograr distintos tipos de pruebas, procurando que el nivel de complejidad de las mismas evolucione.

5 Metodología de Trabajo

La metodología que adoptamos para el diseño, la gestión y la evaluación de las propuestas áulicas dentro de nuestro Proyecto es la Ingeniería Didáctica [7]. La misma fue generada en el seno de la Escuela Francesa de la Didáctica de la Matemática, como un método para las realizaciones tecnológicas de los hallazgos de la Teoría de Situaciones Didácticas. El nombre surgió de la analogía con la actividad de un ingeniero quien, según Artigue [7]:

> *"...Para realizar un proyecto determinado, se* basa en los conocimientos científicos de su dominio y acepta someterse a un control de tipo científico. Sin embargo, al mismo tiempo, se encuentra obligado a trabajar con objetos mucho más complejos que los depurados por la ciencia y, por lo tanto, tiene que abordar prácticamente, con todos los medios disponibles, problemas de los que la ciencia no *quiere o no puede hacerse cargo." (p. 33)*

En las últimas décadas esta metodología se convirtió en una técnica privilegiada para el desarrollo de las investigaciones de distintas teorías de la Escuela Francesa. Por otra parte, lejos de circunscribirse sólo al ámbito de la investigación, cada vez más autores están de acuerdo en considerarla como una herramienta generadora de intervenciones áulicas. Según postula Douady [11]:

> "… el término ingeniería didáctica designa un conjunto de secuencias de clase, concebidas, organizadas y articuladas en el tiempo de forma coherente por un profesor-ingeniero para efectuar un proyecto de aprendizaje de un contenido matemático dado para un grupo concreto de alumnos. A lo largo de los intercambios entre el profesor y los alumnos, el proyecto evoluciona bajo las reacciones de los alumnos en función de las decisiones y elecciones del profesor. Así, la ingeniería didáctica es, al mismo tiempo, un producto, resultante de un análisis a priori, y un proceso, resultante de una adaptación de la puesta en *funcionamiento de un producto acorde con las condiciones dinámicas de una clase." (p.241)*

De acuerdo al proceso experimental de la metodología seleccionada, nuestra investigación consta de las siguientes cuatro fases:

- Primera fase: Análisis preliminares

  Aquí incluimos los análisis epistemológicos acerca de los contenidos contemplados en la enseñanza, tanto del álgebra como del análisis; los análisis de los planes de estudio de las materias donde realizamos las implementaciones; los análisis de la enseñanza tradicional de la institución y los análisis de las dificultades y obstáculos que presentan nuestros estudiantes. En particular nos interesa analizar las carencias en la articulación de registros [2].

- Segunda fase: Concepción y análisis a priori de las intervenciones didácticas.
  En esta fase se diseñan las hipótesis áulicas que serán puestas en marcha en las diferentes cátedras y se someten a un análisis a priori. Este análisis comprende una etapa descriptiva y otra predictiva, ya que se busca analizar cuáles son los contenidos matemáticos que se movilizan en cada secuencia de clase, anticipar los posibles caminos de resolución que seguirán los estudiantes y anticipar posibles intervenciones docentes de manera de gestionar en forma efectiva la clase.
- Tercera fase: Implementación
  Requiere de la recolección de los datos, incluyendo el registro de las producciones de los alumnos y la confección de diarios de registro por parte de los docentes-investigadores.
- Cuarta fase: Análisis a posteriori y evaluación.
  Los datos recolectados durante las implementaciones se complementan con entrevistas a los alumnos. La evaluación de las propuestas consiste en el contraste entre los análisis a priori y los análisis a posteriori, dando lugar a la realización de ajustes a las propuestas áulicas.

6 Primeros avances de la investigación

Con el fin de construir un escenario propicio para favorecer las implementaciones áulicas y promover el desarrollo de competencias, decidimos ajustar ciertas variables didácticas. Las modificaciones en el contrato didáctico incluyeron:

- Habilitar el uso de las TIC’s como medio facilitador del aprendizaje.
- Incorporar trabajos grupales de investigación.
- Generar instrumentos de evaluación tendientes a favorecer la autonomía y la toma de decisiones por parte de los alumnos.

Los avances de nuestra a investigación se materializaron en:

- La generación de la siguiente secuencia respecto del contenido: *Vectores en el plano*[12].

Etapa 1

Actividad

a) ¿Cuáles de las siguientes figuras (Fig.1), considera que son vectores? ¿Por qué?

b) Representar geométricamente un vector.

c) Indicar tres palabras relacionadas a la idea de vector.

d) ¿Qué considera que puede ser representado por medio de un vector?

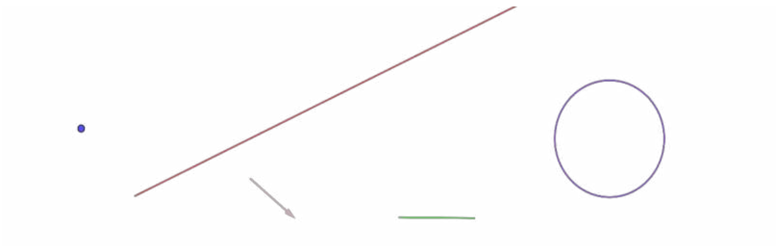


Fig. 1

Etapa 2

Actividad

a) Dada la siguiente figura (Fig. 2) agrupar los vectores equipolentes.

b) Dado el punto P, dibujar vectores equipolentes a cada uno de ellos con origen en P.

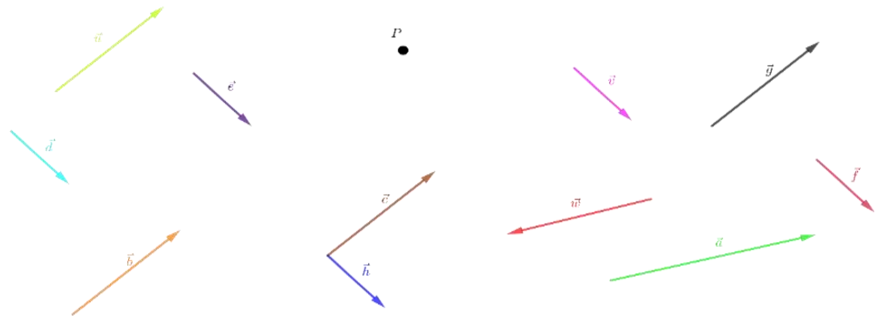


Fig. 2

Actividad

Dados los vectores $\vec{u}$ y $\vec{a}$ (Fig. 3), dibujar tres vectores equipolentes a cada uno de ellos. ¿Podrías dibujar más? En caso afirmativo, indicar, en forma intuitiva, cuántos.

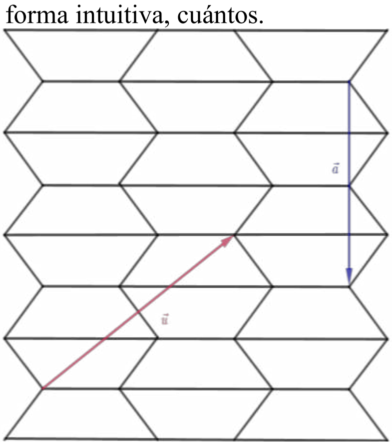


Fig. 3

Actividad

Dado el vector $\vec{u}$ (Fig. 4) dibujar vectores equipolentes al mismo con origen en el punto A . ¿Cuántos podrías dibujar en este caso?

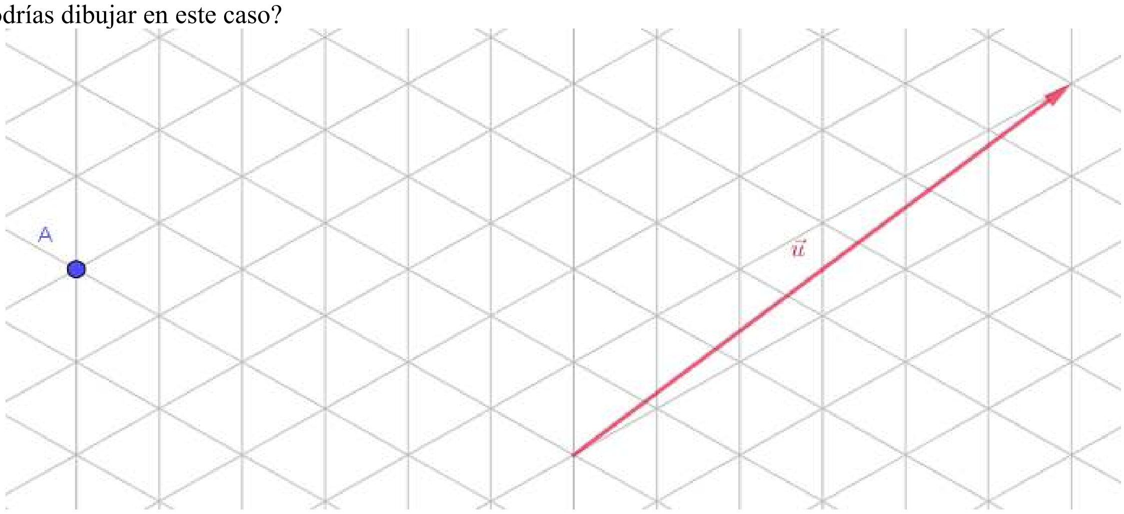


Fig.4

Etapa 3

Actividad

¿Es posible que el vector $\vec{a}$ sea equipolente al vector $\vec{w} = \alpha\,\vec{u} + \beta\,\vec{v}$, para algún par de números reales α y β? Explicar los procedimientos realizados. (Fig. 7)

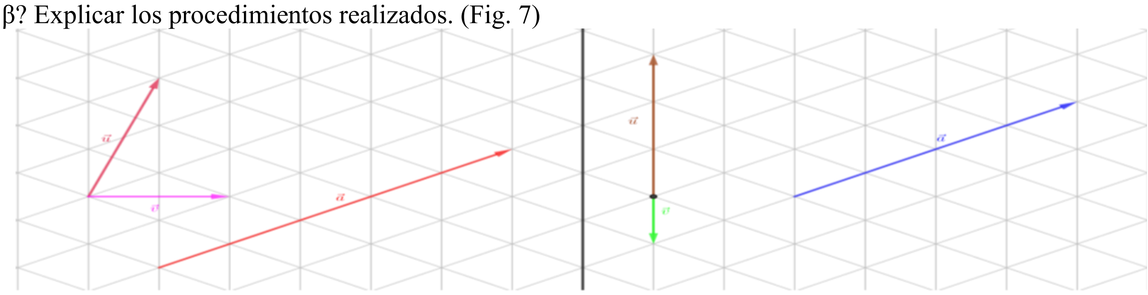


Fig.7

Actividad 8

A partir de la figura (Fig. 8), responder las siguientes preguntas. Si la respuesta es afirmativa, analizar su unicidad

a) ¿Es posible que $\vec{b}$ sea equipolente a una combinación lineal de $\vec{u}$ y $\vec{v}$?

b) ¿Es posible que $\vec{b}$ sea equipolente a una combinación lineal de $\vec{v}$ y $\vec{w}$?

c) ¿Es posible que $\vec{b}$ sea equipolente a una combinación lineal de $\vec{u}, \vec{v}$ y $\vec{w}$?

d) ¿Es posible que $\vec{b}$ sea equipolente a una combinación lineal de $\vec{w}$?

e) ¿Es posible que $\vec{b}$ sea equipolente a una combinación lineal de $\vec{u}$?.

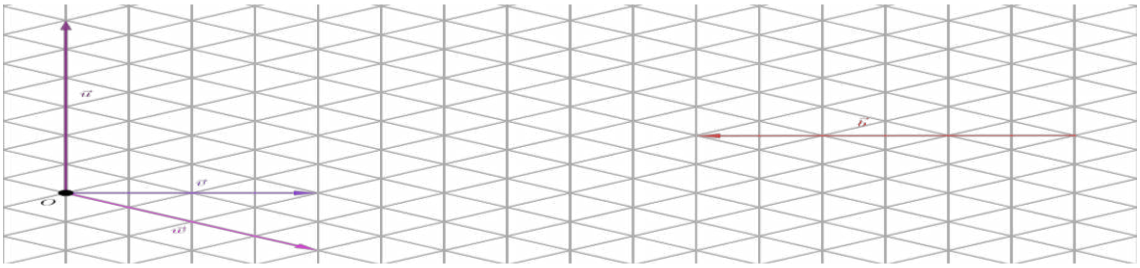


Fig. 8

Actividad 9

Analizar si es posible, en el siguiente gráfico, escribir al vector $\overrightarrow{AB}$ como combinación lineal de los vectores del conjunto $G = \{\vec{u}, \vec{v}\}$. En caso afirmativo, indicar si es única. (Fig. 13)

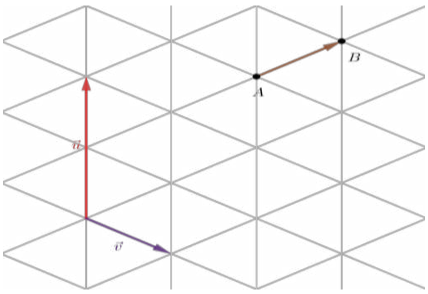


Fig.13

- La implementación de dicha secuencia se concretó en una cátedra de álgebra y geometría, siguiendo los principios de gestión antes descriptos, de 4 horas de duración. Se organizó bajo la metodología de trabajo en pequeños grupos seguido de espacios de socialización.

- La generación de una secuencia didáctica tendiente a articular el contenido de transformaciones lineales en los contextos del álgebra y del cálculo, que será presentada en este mismo encuentro. La propuesta promueve la articulación de registros de representación y adopta como medio el empleo de un software como facilitador de aprendizajes significativos.

7 Conclusiones

El abordaje geométrico que desarrollamos con la secuencia de vectores libres permitió a los alumnos concentrarse en los aspectos algebraicos evitando así la aritmetización de este contenido. En particular, la última actividad propuesta permitió visualizar geométricamente las nociones de sistemas de generadores y base de un $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión dos.

8 Trabajo futuro

El grupo se encuentra trabajando en las siguientes tareas:

- Análisis de los datos recolectados y las entrevistas a los alumnos que participaron de la secuencia didáctica correspondiente al tema vectores en el plano.
- Análisis de los protocolos de los alumnos correspondientes a los trabajos grupales de investigación propuestos en una cátedra de Análisis Matemático I.
- Gestionar la implementación de la secuencia didáctica referida al tema transformaciones lineales.
- Generar primeras conclusiones acerca del impacto que nuestras decisiones didácticas han tenido en los aprendizajes de los alumnos de ingeniería.

Referencias

1. Anónimo. Documentos de CONFEDI: *Competencias en Ingeniería*. (Eds) Universidad Fasta. Mar del Plata, pp.15-33 (2014).
2. Duval, R.: *Un tema crucial en la educación matemática: la habilidad para cambiar de registros de representación*. La gaceta de la RSME. Vol 9, No 1, pp. 143-168 (2006).
3. Vergnaud, G.: *Pourquoi la théorie des champsconceptuels?*. Infancia y Aprendizaje 36(2), pp. 131-161(2013)
4. Douady, R.: *Jeux de cadres et dialectiqueoutil-objet*. Recherche en Didactique de la Mathématiques, 7(2), pp. 5-31(1999).
5. Chevallard, Y.: *Enseñar Matemáticas en la Sociedad de Mañana: Alegato a Favor de un Contra paradigma Emergente*. Journal of Research in Mathematics Education, 2 (2), pp. 161 - 182(2013).
6. Doady,R.: La ingeniería didáctica y la evolución de su relación con el conocimiento. Gómez, P. (Ed): *Ingeniería didáctica en educación matemática. Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.* Grupo Editorial Iberoamérica S.A. de C.V., pp. 97-148(1995).
7. Artigue, M.: La enseñanza de los principios del cálculo: problemas epistemólogicos, cognitivos y didácticos. Gómez, P. (Ed.): *Ingeniería didáctica en educación matemática. Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas*. Grupo Editorial Iberoamérica S.A. de C.V., pp. 97-148 (1995).
8. Klimovski, G.; Boido, G.: *Las desventuras del conocimiento matemático*. AZ Editora. (2005).
9. Dubinsky, E.: Aplicación de la perspectiva piagetiana a la educación matemática universitaria. *Educación Matemática.* 8(3), pp.25-41(1996).
10. Balacheff, N.: *Procesos de prueba en los alumnos de matemáticas. Una empresa docente*. Centro de Impresión Digital Cargraphics S.A. (2000).
11. Douady, R.: Ingeniería didáctica y evolución de la relación con el saber en las matemáticas de collège-seconde. Barbin, E.; Douady, R. (Ed): *Enseñanza de las matemáticas: Relación entre saberes, programas y prácticas*. Topiqueséditions.Publicación del I.R.E.M.(1996).
12. Gatica, M. A; Lusente, M. F.; Cocilova, A.; Cornejo Endara, R.: Una propuesta para construir geométricamente el concepto de base en el plano. *Revista Electrónica de Didáctica en Educación Superior Publicación Semestral de Acceso Libre*. http://www.biomilenio.net/RDISUP/numeros/15/15GaticaLusenteetal.pdf (2017). 07 de septiembre de 2018.

Significados institucionales vinculados al objeto límite funcional

Gómez, José Ismael[1], Ger, Carolina[2], Cejas, Claudia[2]
[1]Departamento Físico-Matemático. Facultad de Agronomía y Agroindustrias. UNSE. Avda. Belgrano Sud 1912. CP 4200 Santiago del Estero, Argentina
jgomez@unse.edu.ar
[2]Departamento de Ciencias Básicas. Facultad de Ciencias Forestales. UNSE. Avda. Belgrano Sud 1912. CP 4200 Santiago del Estero, Argentina
carolinager@hotmail.com, claudiacejas_1@hotmail.com

Resumen. La noción de límite de una función marca una línea divisoria entre la matemática de la escuela media -donde generalmente no se enseña este objeto- y el Cálculo o Análisis Matemático que se enseña en la universidad. El propósito de este trabajo es plantear preguntas y formular respuestas sobre este objeto de estudio, dirigidas a identificar los significados institucionales que aparecen en libros de textos y en las salas de clase de primer año de universidad y que pueden guiar el proceso de su enseñanza y aprendizaje. Se responden estas preguntas en el marco del Enfoque Ontosemiótico de la Cognición Matemática (EOS) [1] y desde la experiencia docente y, son válidas también para el estudio de significados institucionales de otros objetos del Cálculo.

Palabras Clave: Límite, Cálculo, Significados institucionales, Libro de texto, Sala de clase, Universidad.

1 Introducción

Numerosos trabajos de investigación se han escrito en torno al proceso de enseñanza y aprendizaje de límite de una función, dada su naturaleza controvertida y de alcance significativo, en cuanto que es el fundamento de otros objetos de Cálculo, como continuidad, derivabilidad e integral definida, que se estudian en Cálculo de primer año de la universidad.

El objetivo de este trabajo es plantear cuestiones relativamente nuevas sobre la *configuración epistémica* del objeto `límite de una función`, que permitan identificar los significados institucionales que aparecen en libros de textos y en las salas de clase de primer año de universidad y que pueden guiar el proceso de su enseñanza y aprendizaje.

Se pretende brindar una mirada holística y ontológica (logos o conocimiento del ente) de límite funcional. No se trata de una experiencia docente, sino de preguntas o cuestiones que hunden sus raíces en la práctica docente de más de treinta años en la enseñanza de Análisis Matemático en la universidad.

La idea del presente trabajo surgió a partir de la lectura de un prospecto de un remedio que provenía de un laboratorio brasileño. El prospecto de referencia presentaba, entre otras cuestiones, las siguientes: ¿Para qué este medicamento está indicado?, ¿Cómo funciona este medicamento?, ¿Cuándo no debo usar este medicamento?, Lo que debo saber antes de usar este medicamento y ¿Cómo debo usar este medicamento? El prospecto funciona a la manera de una guía de conocimiento y empleo del medicamento. A partir de su lectura, se nos ocurrió encarar de una manera similar la presentación del concepto de límite, que divide la matemática de la escuela secundaria de la matemática de la universidad.

Nos ha parecido que el Enfoque Ontosemiótico de la Cognición Matemática (EOS), contiene herramientas que pueden brindar el marco teórico suficiente para abordar este trabajo.

Estos interrogantes pueden ser empleados en el estudio de los significados institucionales de otros objetos del Cálculo, como el objeto `derivada` o `integral definida`, por citar los principales.

1.1 Marco teórico: Sistemas de prácticas

Se considera "*práctica matemática"* a toda actuación o expresión (verbal, gráfica, etc.) realizada por alguien para resolver problemas matemáticos, comunicar a otros la solución obtenida, validarla o generalizarla a otros contextos y problemas [2]. Las prácticas pueden ser personales o bien compartidas en el seno de una institución.

La Teoría de las Funciones Semióticas (TFS) considera a los objetos matemáticos como entidades emergentes de los sistemas de prácticas que realiza una persona (significado personal) o compartida en el seno de la institución (significado institucional), para resolver un tipo de situaciones problema.

1.2 Significados institucionales

En Godino y Batanero [2] se propone un sistema de nociones con la idea de dar "una respuesta antropológica – pragmatista a la cuestión del significado de los conceptos matemáticos." [1]

En ese artículo se define como significado de un objeto institucional O_I al sistema de prácticas institucionales asociadas a un campo de problemas que dan lugar al objeto O_I en cierto momento. Esta consideración del significado en términos de prácticas, conlleva una relatividad socio epistémica y cognitiva [3]. Estos autores proponen para los significados institucionales, los siguientes tipos:

- Implementado: el sistema de prácticas efectivamente llevado a cabo por el docente en un proceso de estudio específico.
- Evaluado: aquel subsistema de prácticas empleadas por el docente para evaluar los aprendizajes.
- Pretendido: sistema de prácticas que figuran en la planificación del proceso de estudio.
- Referencial: sistema de prácticas que se toma como referencia para definir el significado pretendido. En una institución de enseñanza concreta este significado de referencia será una parte del significado holístico del objeto matemático.

1.3 Objetos intervinientes y emergentes de los sistemas de prácticas

Cuando un sujeto realiza y evalúa una práctica matemática es necesario activar un conglomerado formado por algunos (o todos) de los siguientes elementos: lenguaje, situaciones, conceptos, propiedades, procedimientos y argumentos. A este conglomerado, necesario para la realización y evaluación de la práctica, en el EOS se le llama configuración. Estas configuraciones pueden ser cognitivas (conglomerado de objetos personales) o epistémicas (conglomerado de objetos institucionales) según que se considere la práctica desde la perspectiva personal o institucional.

Lenguaje: son términos, expresiones, notaciones, gráficos, ..., expresados en sus diversos registros (escrito, oral, gestual, ...)

Situaciones-problemas: son aplicaciones extra-matemáticas o ejercicios.

Conceptos- definición: son introducidos mediante definiciones o descripciones.

Proposiciones. Se refieren a enunciados sobre conceptos.

Procedimientos: incluyen algoritmos, operaciones, técnicas de cálculo.

Argumentos: son enunciados empleados para validar o explicar las proposiciones y procedimientos, deductivos o de otro tipo.

Este trabajo se enmarca en la Cognición Matemática de Godino y Batanero [2], [3], [5], junto con el aporte de otros investigadores Font [6], Inglada y Font [7], Contreras, Font, Luque y Ordoñez [8].

En los trabajos de Godino y Batanero se desarrolla la teoría de los significados institucionales y personales y la teoría de las funciones semióticas (TFS), como evolución de las primeras investigaciones.

Estas producciones se encuadran en lo que actualmente se denomina "Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción matemáticos" (EOS) [9].

En los primeros trabajos de Godino y Batanero, se conciben los objetos matemáticos personales como emergentes del sistema de prácticas personales significativas asociadas a un campo de problemas" [2]. De allí que en este marco teórico, el objeto matemático posee un carácter derivado y la práctica, un lugar preferencial.

Godino propone para estos objetos, categorías o tipos de entidades matemáticas, teniendo en cuenta los roles que desempeñan estas entidades en el trabajo matemático: situaciones, acciones, lenguaje, conceptos-reglas, propiedades y argumentaciones. [5]

Por otra parte y según el juego de lenguaje [10] en que participen, los objetos matemáticos pueden ser considerados en relación a las siguientes facetas o dimensiones duales:

Personal- institucional (individual-social)

Ostensiva- no ostensiva (perceptible – mental)

Intensiva – extensiva (ejemplar- tipo, concreta- abstracta)

Elemental – sistémica (unitaria – compuesta)

Expresión – contenido (significante- significado)

La noción de ´prácticas´- elementos constitutivos de la actividad matemática- es entendida como un manejo de ostensivos acompañadas de pensamiento en los que se manipulan símbolos mentales [7].

2 Nuestro trabajo: Cuestiones y respuestas que apuntan a los significados institucionales

Presentamos a continuación cuestiones que apuntan a reconocer significados institucionales que están en los libros de textos y en salas de clase del objeto límite.

Estas preguntas y respuestas, pueden guiar el proceso de su enseñanza y aprendizaje, aunque se ha de reconocer que los significados institucionales y personales implementados en clase pueden diferir considerablemente de los significados pretendidos, que en cierto modo aquí se proponen.

2.1 ¿Para qué está indicado el objeto límite de una función?

Este objeto está destinado al estudio del comportamiento de una función en las proximidades de un número real. Esto es, dada una función escalar f, el límite de esta función está destinado al estudio de la aproximación de los valores de la función a un cierto número real, llamemos L, cuando la variable x en el dominio se acerca a un cierto número real c, que puede estar o no en el dominio.

De un modo informal se expresa que:

Cuando *f(x)* se aproxima a un cierto número real L, siempre que x sea suficientemente próximo a c, se dice que la función *f* tiene límite en c y es L.

El objeto límite está indicado para abordar también otras situaciones como la continuidad de una función en un punto, la pendiente de la recta tangente a una curva en un punto de la misma, la derivada de una función en un punto y también la noción de integral definida, por mencionar los principales objetos que se estudian en Cálculo de primer año de la universidad.

2.2 ¿Cómo se obtiene el límite?

Se puede determinar la existencia de límite de una función f en un punto c, mediante:

Una estimación del límite tomando x próximos a este punto, por derecha y por izquierda. Si en estas circunstancias, ocurre que la función se aproxima a un mismo número real L, se dice que la función tiene límite en ese punto.

El paso al límite.

El empleo de la definición.

El estudio de la gráfica de la función.

A los efectos de ilustrar el proceso de estimación del límite consignamos la siguiente actividad:

Sea la función f definida por $f(x) = 2x + 3$, con $x \neq 1$.

Estime mediante cálculos numéricos, a qué número real se aproximan los valores de la función cuando x tiende a 1.

Respuesta

Se analiza el comportamiento de f cuando x se aproxima a 1 por la derecha o por valores mayores que 1, o cuando x tiende a 1 por la derecha, o por valores menores que 1.

En forma simbólica, esta aproximación se indica así: $x \to 1^+$

Se consignan algunos de estos x:

$x = 1{,}01$
$x = 1{,}001$
$x = 1{,}0001$

Sus imágenes son:

$f(1{,}01) = 5{,}02$
$f(1{,}001) = 5{,}002$
$f(1{,}0001) = 5{,}0002$

En nuestra labor docente, se hace escribir al estudiante el texto siguiente, como texto de referencia para ser empleado en situaciones similares. Podemos establecerlo como primer texto de referencia: Cuanto más se aproxima x a 1, por valores mayores que 1, sus imágenes más se aproximan a 5 por valores mayores que 5. Así como se pueden presentar estos textos para ser replicados en similares situaciones, podemos incorporar también símbolos de referencia que acompañen esos textos, como el siguiente:

Cuando $x \to 1^+, f(x) \to \overline{5}$

Se considera ahora, valores de x próximos a 1 por la izquierda, o cuando x tiende a 1 por la izquierda, cuyo símbolo de referencia es: $x \to 1^-$

Por ejemplo:

$x = 0{,}99$
$x = 0{,}999$
$x = 0{,}9999$

Sus imágenes son:

$f(0{,}99) = 4{,}98$
$f(0{,}999) = 4{,}998$
$f(0{,}9999) = 4{,}9998$

De nuevo, el alumno escribe lo que viene a ser un segundo texto de referencia, correspondiente a esta situación:

Cuanto más se aproxima x a 1, por valores menores que 1, sus imágenes más se aproximan a 5 por valores menores que 5; y se introduce los siguientes símbolos de referencia: Cuando $x \to 1^-, f(x) \to \underline{5}$

Un tercer texto de referencia sobre el que se trabaja en los siguientes ejercicios o actividades dice:

Cuando x más se acerca a 1 tanto por derecha como por izquierda, las imágenes más se aproximan a 5, por valores mayores y menores de este número, respectivamente, decimos que la función tiene límite 5 en $x = 1$. y se introducen los símbolos de referencia siguientes:

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1}(2x + 3) = 5$$

Un cuarto texto de referencia y texto final consiste en hacer que el estudiante escriba:

La función puede alcanzar cualquier valor tan próximo a 5 como se desee, con tal de considerar x suficientemente próximo a 1 y distinto de 1.

La otra modalidad para determinar la existencia de límite de una función es por "pasaje" al límite: se substituye en la función la variable independiente x por el punto c, y el valor obtenido, si es un número real, es el límite de la función en ese punto.

En este punto es importante decir que, aunque la función no sea continua en el punto c, y obviamente, los alumnos todavía no saben de continuidad, con el cálculo de pasaje al límite, estamos empleando de una manera tácita, la definición de continuidad de una función en un punto que pertenece al dominio de la misma. Esto es:

$lim_{x \to c} f(x) = f(c)$ siendo en este caso: $L = f(c)$

Poco menos empleado es la obtención del límite a partir de la observación del gráfico de una función.

Como una primera conclusión de esta primera pregunta, ¿cómo se obtiene el límite?, se puede establecer las siguientes:

La estimación del límite de una función en un punto, figura en el comienzo del tratamiento de este objeto, tanto en libros de Cálculo como en una sala de clase, y es una primera actividad para hacer avanzar el estudio de este objeto matemático.

Se hace frecuente el uso de textos de referencia como de símbolos de referencia que se replican en funciones nuevas, orientadas al objetivo de hacer que se instalen en la mente del estudiante como estructuras que pueden contribuir a la construcción de este objeto.

El objetivo del cálculo del límite por medio del proceso de estimación es hacer que el estudiante tome como suya- más que del profesor- la tarea de indagar el comportamiento de la función cuando x se aproxima a un cierto punto. Aquí es donde puede entrar en juego la creatividad, en cuanto a que el alumno puede elegir los números decimales próximos al punto c, tanto por derecha como por izquierda, sobre los cuales, naturalmente, no hay unicidad.

Lo algebraico se imbrica con la aproximación infinita que subyace en la definición de límite, en cuanto a la tarea de obtener un $\delta > 0$, para cada $\epsilon > 0$, en la cadena de condicionales a partir de $|f(x) - L| < \varepsilon$ para una función f dada y un valor de L calculado por `pasaje al límite`.

El uso de la definición formal, deja de lado o pasa por encima de este procedimiento de estimación que puede permitir respuestas no únicas o no estandarizadas como ocurre con la mecanización del cálculo de δ.

2.3 ¿Cómo funciona el objeto límite?

El objeto límite funciona como un "operador" que actúa sobre una función, a través de sendas aproximaciones – en el recorrido y en el dominio- y que guardan una relación entre sí: una que tiene lugar en el eje de las ordenadas, y la otra en el eje de las abscisas.

Para la primera aproximación y en un contexto de definición informal, con miras a su formalización posterior, se suele decir que $f(x)$ tiende a L, o $f(x)$ se aproxima a L, *"Cuanto se quiera"*; y a continuación se considera la segunda aproximación en estos términos: *"Con tal de considerar* x suficientemente próximo a c y distinto de c."

Ambas aproximaciones actúan a la par, y como se trata de números reales, se expresan en términos del valor absoluto de la diferencia. Así, $f(x)$ se aproxima a L, *"Cuanto se quiera"*; significa que dado cualquier número real pequeño $\varepsilon > 0$, el valor absoluto de la diferencia entre $f(x)$ y L es menor que ε: $f\ \ x\ \ - L\ < \varepsilon$, para todo $\varepsilon > 0$.

A su vez, la expresión *"Con tal de considerar* x suficientemente próximo a c y distinto de c." significa que para cada $\varepsilon > 0$ dado, existe un $\delta > 0$, tal que, el valor absoluto de la diferencia entre x y c, es mayor que cero y menor que el δ obtenido:

$$0 < \ x - c\ < \delta$$

Como señala E. Linés [11], "para poder definir L como límite de f cuando x tiende hacia c, es necesario, aparte de concretar la proximidad de $f(x)$ a L, y la de x a c, precisar la relación entre ambas proximidades, lo que se consigue con la formulación "ε,δ". (p.194)

Desde un punto de vista formal, la definición de límite de una función tal como aparece en Cálculo de una variable, Volumen 1 de Bradley y Smith (p.81) [12] y que es similar a la que figura en otros textos de Cálculo. Larson, Leithold, Stewart [13], [14], expresa que:

La notación

$$lim_{x\to c} f(x) = L$$

Significa que para cada $\varepsilon > 0$ existe un número $\delta > 0$, que verifica que
$f\ \ x\ \ - L\ < \varepsilon$. siempre que $0 < \ x - c\ < \delta$

Una digresión: Como una manera de rescatar las nociones de lógica proposicional, en cuanto al uso de operaciones proposicionales y de cuantificadores, la definición anterior se puede indicar en la forma siguiente:

$lim_{x\to c} f(x) = L \ \Leftrightarrow \forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0\ /\ P(x,c,\delta) \Rightarrow Q(f\ \ x\ \ , L, \varepsilon)$

Donde $P(x,c,\delta)$ es la función proposicional siguiente: $0 < \ x - c\ < \delta$, y
$Q(f\ \ x\ \ , L, \varepsilon)$ es otra función proposicional: $f\ \ x\ \ - L\ < \varepsilon$

Que puede leerse en los dos sentidos, como indica un bicondicional:

$\Rightarrow)\ lim_{x\to c} f(x) = L \ \Rightarrow\ \forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0\ /\ P(x,c,\delta) \Rightarrow Q(f(x), L, \varepsilon)$

$\Leftarrow)\ \forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0\ /\ P(x,c,\delta) \Rightarrow Q(f(x), L, \varepsilon)\ \Rightarrow \lim_{x\to c} f(x) = L$

Esta segunda forma se emplea para verificar el valor de L a través de la definición.

El objeto límite posee propiedades que permiten determinar la aproximación de funciones en un cierto punto, tales como las funciones: suma, resta, producto y cociente, de funciones que admiten límite en un punto dado.

En el caso de la noción de continuidad de una función en un punto que pertenece al dominio de la función, este objeto se define como:

Diremos que f es continua en $c \in D_f$ sí: $\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$

En este caso, el objeto límite funciona de esta manera:

$$\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$$

Si para cada $\varepsilon > 0$ existe un número $\delta > 0$, tal que para cada x en el dominio de f se verifica que si $\ x - c\ < \varepsilon$, entonces $f\ \ x\ \ - f(c)\ < \varepsilon$.

Otro problema importante que permite resolver el objeto límite es el de determinar la recta tangente a una curva en un punto de la misma. En este caso, se tiene que:

Sea f una función definida en el intervalo abierto (a,b) y que contiene al punto c.

Sean $P = (c, f(c))$ un punto fijo sobre la curva $\mathcal{C}$ de f y $Q = \ x, f(x)\ $, un punto móvil sobre $\mathcal{C}$.

Sea $\mathcal{S}$ la recta secante que pasa por P y Q.

La pendiente $m_{\mathcal{S}}$ de la recta secante $\mathcal{S}$ está dada por: $m_{\mathcal{S}} = \frac{f\ x\ - f(c)}{x - c}$

Donde $f\ \ x\ \ - f(c)$ se llama variación o incremento del valor de la función f en c y el denominador es el incremento de x con respecto a c.

Por ello, el cociente $\frac{f\ x\ - f(c)}{x - c}$ se llama cociente incremental o cociente de incrementos.

Si α es el ángulo que forma la recta secante $\mathcal{S}$, con el eje positivo de x, la pendiente m_{sec} es igual a la tangente trigonométrica de este ángulo:

$$m_{\mathcal{S}} = tg\ \alpha$$

La secante $\mathcal{S}$ se puede aproximar a la recta tangente $\mathcal{T}$ a la gráfica de f en el punto P cuando Q se mueve hacia P haciendo que x tienda a c.

Es razonable pensar que en este caso, cuando$x$ tienda a c, la recta secante $\mathcal{S}$ puede aproximarse a la posición de la recta tangente $\mathcal{T}$.

De ser así, la pendiente $m_{\mathcal{T}}$ de la recta tangente es:

$m_{\mathcal{T}} = \lim_{x\to c} \frac{f(x)-f(c)}{x-c}$ si este límite existe.

Desde el punto de vista de la noción de derivada, se tiene:

Sea f una función definida en el intervalo abierto (a,b) que contiene al punto c. Se dice que f tiene derivada en c y que denotaremos por $f'(c)$, al número real dado por:

$\lim_{x\to c} \frac{f(x)-f(c)}{x-c}$ si este límite existe.

En este caso, el objeto límite funciona de esta manera:

$$\lim_{x\to c} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} = f`(c)$$

Si para cada $\varepsilon > 0$ existe un número $\delta > 0$, tal que para cada x en el dominio de f se verifica que si $|x-c| < \varepsilon$, entonces $\left|\frac{f(x)-f(c)}{x-c} - f`(c)\right| < \varepsilon$.

2.4 ¿Qué debo saber al emplear la definición de límite funcional?

A continuación presentamos nociones que consideramos básicas para el estudio del objeto límite, para un curso de Cálculo de primer año de la universidad:

Nociones elementales de lógica proposicional

Es un capítulo de la matemática que puede estar también en un curso de Álgebra, no solo de Cálculo. En el caso particular del objeto límite, se usa en especial, la noción de implicación o condicional.

La definición de límite de una función en un punto puede verse en términos de condicionales de las siguientes maneras:

Cuando se conoce que la función tiene límite en un punto, la afirmación

$\lim_{x\to c} f(x) = L$ implica que: Si para cada $\varepsilon > 0$ existe un número $\delta > 0$, tal que para cada x en el dominio de f se verifica que si $0 < |x-c| < \delta$, entonces $|f(x) - L| < \varepsilon$.

Por otra parte, cuando se quiere demostrar o verificar un límite, se puede emplear la definición de límite en este sentido:

Si para cada $\varepsilon > 0$ existe un número $\delta > 0$, tal que para cada x en el dominio de f se verifica que si $0 < |x-c| < \delta$, entonces $|f(x) - L| < \varepsilon$, se tiene que: $\lim_{x\to c} f(x) = L$

Hay que saber también que:

La expresión $0 < |x-c| < \delta$, que figura en la definición de límite de una función, expresa matemáticamente la proximidad de x a c, y además $x \neq c$. La interpretación geométrica de este valor absoluto de la diferencia entre x y c, es la distancia entre dos puntos de una recta, la recta real, que se ubica en el eje horizontal, llamado eje de las abscisas.

Las desigualdades $0 < |x-c| < \delta$ forman parte de la definición de entorno reducido de un conjunto de puntos, centrado en el punto c, y de radio $\delta > 0$, que se ubica en el eje de las abscisas.

La expresión $|f(x) - L| < \varepsilon$ que figura en el objeto límite, expresa matemáticamente la proximidad de $f(x)$ a L, y se puede interpretar también como la distancia entre dos puntos de una recta, la recta real, que se ubica en el eje de las ordenadas. En este punto se puede decir que hay por parte del alumno, un "acostumbramiento" a ver la noción de distancia en el eje horizontal solamente, no así en el eje vertical, como si este no fuese también la recta real.

La desigualdad $|f(x) - L| < \varepsilon$ corresponde a la definición de entorno (no reducido) centrado en el punto L, y de radio $\varepsilon > 0$, que se ubica en el eje de las ordenadas. Los puntos de dicho conjunto son de la forma $f(x)$.

2.5 ¿Cómo debo usar el límite?

La idea de límite es una de las principales del Cálculo y sin embargo, su estudio en un curso de primer año de universidad se enfoca principalmente en un aspecto utilitario, operativo.

El objeto límite puede ser considerado en sus dimensiones proceso y producto. La dimensión proceso, cuyo núcleo es el estudio del comportamiento de una función a través de aproximaciones, queda suponiendo su presencia, como reservada al plano de lo mental, mientras que la dimensión producto es lo más fácil de encontrar en la producción de los estudiantes. Se puede decir que la dimensión proceso del límite es para el docente, o que el docente está más del lado del proceso, y la dimensión producto, para el estudiante, o que el estudiante está más del lado del límite como producto.

En la práctica docente se observa que el aprendizaje de límite se caracteriza más bien por el manejo algebraico de este objeto, estando las dos dimensiones mencionadas como sin una debida vinculación. La parte procesual del límite, que articula las aproximaciones de los valores de la función a un número real, con la aproximación de la variable independiente a otro número real, eventualmente está presente.

Lo deseable sería que el estudiante empleé el límite, tanto en su dimensión proceso como producto, aunque desde el punto de vista de lo didáctico, puede ser suficiente que el estudiante empiece por manejarlo en su dimensión producto, como una primera etapa, con vistas a considerarlo más adelante en la otra dimensión también.

Otra digresión: Desde un punto de vista de la permanencia de un conocimiento, y esto no solo aplicable al objeto límite, hay como un camino: La parte procesual o mental se hace difícil de lograr en un primer momento, no así lo operativo, la dimensión producto. Si en una etapa posterior se logra el manejo del objeto desde lo procesual, argumental, que lleva a la comprensión de la idea fundamental del objeto; es posible que con el tiempo, se conserve esto en la mente de la persona, no así lo operativo, que se puede recuperar luego con cierta facilidad.

Un aspecto que no se tiene en cuenta en el proceso de enseñanza y aprendizaje de este objeto, es la aplicación o reproducción de la estructura de la definición de límite a otros objetos, tales como propiedades de límite, continuidad y derivada, por mencionar las más empleadas. Esto es, si tomamos por caso, la continuidad de una función en un punto, este objeto supone la proximidad de los valores de la función, $f(x)$ al valor de la función en el punto $x = c$, cuando x se aproxima a c, y pueden ambos ser iguales.

En la definición se habla de una función f cuyo límite es el número real L, cuando x se aproxima a un cierto punto c, que puede no estar en el dominio de la función; y estas proximidades se plantean en términos de:

Para todo $\varepsilon > 0$ existe un número $\delta > 0$ tal que si $0 < \; x - c \; < \delta$ entonces
$f\; x \; - L \; < \varepsilon$.

Toda la primera parte "Para todo $\varepsilon > 0$ existe un número $\delta > 0$ tal que si $0 < \; x - c \; < \delta$" es la misma para otros objetos tales como las propiedades aritméticas de límite, continuidad y derivada.

Lo que cambia es el consecuente de la implicación, $f\; x \; - L \; < \varepsilon$.

Resulta difícil hacerles ver que la definición misma de límite es como un "molde" que puede ser ocupado por otros objetos como la función suma $f + g$ o la función cociente incremental $\frac{f\; x\; - f(c)}{x - c}$ que se emplea en la definición de derivada, que en lugar de L se tiene $M + N$, siendo estos valores, los límites de las funciones f y g, respectivamente, o bien es $f(c)$ en el caso de la continuidad o bien $f`(c)$ en el caso de derivada de una función f, en todos estos casos en el punto c.

Tomemos por caso, la definición de derivada en lo que respecta al consecuente de la implicación: $f\; x \; - L \; < \varepsilon$. toma ahora la forma de

$\frac{f\; x\; - f(c)}{x - c} - f`(c) \; < \varepsilon$, donde $f(x)$ está dado por $\frac{f\; x\; - f(c)}{x - c}$ y en lugar de $L$ se tiene $f`\; c$.

3 Conclusiones

En este trabajo se plantean cuestiones relativamente nuevas sobre la *configuración epistémica* del objeto `límite de una función`. Estas preguntas y respuestas no tienen que ver necesariamente con una experiencia docente en particular, sino con una mirada holística y ontológica de este objeto que, si tiene en cuenta entre otros elementos de estudio, la experiencia docente de más de treinta años en la enseñanza de Cálculo o Análisis Matemático.

Las preguntas que dieron lugar al trabajo, contienen en sí mismas, una pista para las conclusiones: Pueden ser empleadas para guiar tanto el proceso de su enseñanza como el de su aprendizaje, incluyendo el de evaluación.

Se reconoce que puede ser un objetivo ambicioso que el alumno pueda responder todas estas cuestiones luego de haber cursado los contenidos de Análisis Matemático o Cálculo de funciones de una variable, dada precisamente la configuración epistémica y cognitiva del límite.

Con relación a la pregunta ¿Para qué está indicado el objeto límite de una función?, en el comienzo de la enseñanza de este tema, se suele explicar a los alumnos sobre su importancia, su amplio campo de acción, su relación a otros objetos del Cálculo. Una conclusión que puede extraerse de esto es que se trata de una pregunta que no suele hacerse al alumno, en las evaluaciones parciales o finales, porque este proceso se dirige más bien a cuestiones puntuales, operativas, prácticas, conceptuales y hasta cierto punto parcializadas o compartimentadas. Como recomendación o sugerencia es elaborar otro tipo de evaluación, donde se tenga en cuenta este aspecto.

Sobre la pregunta: ¿Cómo se obtiene el límite?, se observa que en los libros de texto se comienza su obtención a partir del proceso de estimación, de un modo como intuitivo, informal, de un modo gráfico también y luego por "pasaje al límite", aunque esto no se diga por escrito. En este punto como que se pierde la idea de aproximación para dar lugar a un simple reemplazo o sustitución de la variable independiente por el número en cuyas proximidades se estudia el comportamiento de la función. Se da una especie de dicotomía, porque la aproximación es una idea principal en el concepto de límite, se usa para introducir este tema, pero luego como que es dejada de lado para ir a lo "directo": el pasaje al límite. Conclusión: hay como "atajos" en el estudio de nociones de matemáticas, como en este caso, de pasaje al límite, que dejan en segundo plano, la idea fundamental del concepto.

A la pregunta ¿Cómo funciona el objeto límite?, se puede responder diciendo que actúa como un "operador" sobre una función, a través de sendas aproximaciones –en el recorrido y en el dominio- y que guardan una relación entre sí: una que tiene lugar en el eje de las ordenadas, y la otra en el eje de las abscisas. Lo mencionado en el párrafo anterior, vale también en esta cuestión. Sin lugar a dudas, en este caso es donde se observa una mayor densidad matemática, en cuanto a formulaciones teóricas, simbólicas y conceptuales. Conclusión: Esta pregunta encierra las ideas centrales del concepto.

Sobre la pregunta ¿Qué debo saber al emplear la definición de límite funcional? se puede extraer como conclusión que la ontología de este objeto nos indica la existencia de otros objetos previos a su aprendizaje, tales como: nociones elementales de lógica proposicional, números reales, desigualdades, valor absoluto, entorno, entorno reducido, función, dominio, imagen y recorrido. Su dominio es conveniente para el estudio del límite. La ontología del límite nos dice que este objeto pivotea sobre la noción de aproximación en dos direcciones: la de los valores de la función a un número real y la de su variable independiente a un cierto número real que puede estar en el dominio de la función. En ese contexto, la formulación ε, δ establece la vinculación entre estas aproximaciones. Se debe saber qué ε designa un número real positivo, tan pequeño como se quiera-salvo en límite infinito- que es un valor dado, mientras que δ, es un número real positivo que depende de $\varepsilon > 0$, y que en la implicación final que aparece en la definición, el antecedente está dado por la aproximación de x a un número c, y que de verificarse esto, se cumple el consecuente, esto es, la aproximación de $f(x)$ a un cierto número real L, que es su límite.

Hay que reconocer que en la enseñanza de límite de una función, entra en juego entre otras cosas, la carga horaria, el plan de estudios, la carrera que se cursa, los libros de texto que se maneja y de un modo importante: el criterio de enseñanza del profesor titular o responsable de la asignatura. En este contexto, hay como dos vertientes: la de Análisis Matemático, donde se enseña o se puede enseñar con punto de acumulación de por medio; y la de Cálculo, donde la enseñanza de límite prescinde de este objeto. Normalmente los textos de Cálculo siguen este criterio.

A la pregunta sobre ¿Cómo debo usar el límite?, la experiencia docente parece indicar que en primer año de universidad, cuando el estudiante se enfrenta a este objeto por primera vez, es conveniente "sacrificar" el rigor matemático, los detalles y simbolismos, en aras de un manejo más bien operativo, utilitario, que haga uso de propiedades y teoremas- eligiendo ciertos teoremas para demostrar- y avanzar en el estudio de continuidad y derivadas, con la idea que la comprensión de un concepto matemático en general, y de límite en particular, se alcanza con el tiempo. En este sentido, la enseñanza debe hacer un equilibrio entre lo formal y conceptual con lo informal y comprensivo.

Referencias

1. Godino, J.D.; Batanero, C.; Font, V.: The Onto-Semiotic approach to research in Mathematics Education. Zentralblat für Didaktik der Mathematik, Vol. 38. Versión ampliada en español, *Un enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática*. http://www.ugr.es/local/jgodino/indice_eos.htm (2006). Accedido el 15 de Febrero de 2018.
2. Godino, J.D.; Batanero, C.: Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques* (1994).
3. Godino, J.D.: Teoría de las Funciones Semióticas. Un enfoque ontológico-semiótico de la cognición e instrucción matemática. *Trabajo de investigación presentado para optar a la Cátedra de Universidad de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada* (2003).
4. Godino, J.D.; Batanero, C.: *Clarifying the meaning of mathematical objects as a priority area of research in mathematics education*. En: A (1998).
5. Godino, J.D.: Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactique des Mathématiques* (2/3): 237–284 (2002).
6. Font V.: *Procediments per obtenir expressions simbòliques a partir de gràfiques*. Barcelona: Universitat de Barcelona (2000).

7. Inglada; Font, V.: Significados institucionales y personales de la derivada. Conflictos semióticos relacionados con la notación incremental. *XIX Jornadas del SI-IDM.* Córdoba. http://www.ugr.es/~jgodino/siidm/cordoba_2003/IngladaFont.pdf (2005). Accedido el 4 de Marzo de 2018.
8. Contreras A.; Font, V.; Luque, L.; Ordóñez, L.: Algunas aplicaciones de la teoría de las funciones semióticas a la didáctica del análisis. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 25 (2), 151–186 (2005).
9. Godino, J.D.; Batanero, C.; Font, V.: Un enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática. Versión ampliada y revisada al 8/Marzo/2009 del artículo, Godino, J. D. Batanero, C. y Font, V. (2007). The ontosemiotic approach to research in mathematics education. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education,* 39 (1-2), 127-135. URL: http://www.ugr.es/local/jgodino (2009).
10. Wittgenstein L.: *Investigaciones filosóficas*. Editorial Atalaya (1999).
11. Linés Escardó, E.: *Principios de Análisis Matemático*. Editorial Reverté S.A. (1991).
12. Bradley, G.L.; Smith, K.J.: *Cálculo de una variable*. Volumen 1. Editorial Prentice Hall Iberia, Madrid (1998)
13. Larson R.; Hostetler R.; Edwards B.: *Cálculo I.* Ediciones Pirámide, 7º Edición (2002).
14. Stewart J.: *Cálculo. Trascendentes tempranas.* Thomson Learning. 4º Edición (2002).

La Conceptualización de los Sistemas de Medición Angular en Alumnos Ingresantes a Carreras de Ingeniería

Cintia Vernazza[1], Daniela Emmanuele[2]
[1] Departamento de Matemática de la Escuela de Formación Básica, Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura, Universidad Nacional de Rosario
Av Pellegrini 250, Rosario (2000)
cinvernazza@gmail.com, vernazza@fceia.unr.edu.ar
[2] Departamento de Matemática de la Escuela de Ciencias Exactas y Naturales, Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura, Universidad Nacional de Rosario
Av Pellegrini 250, Rosario (2000)
emmanueledaniela@gmail.com, emman@fceia.unr.edu.ar

Resumen El presente trabajo corresponde a una primera aproximación al objeto de estudio de una tesis de maestría en Didáctica de las Ciencias (Mención Matemática) en el marco del proyecto ING548. Dicho trabajo académico se enmarca en la Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa. Tiene como objetivo indagar acerca de los marcos de referencia del que disponen los estudiantes finalizantes del cursillo de ingreso a Ingeniería para la construcción del concepto de medición de un ángulo, cómo construyen (resignifican) el sistema radial y sus usos, para utilizarlo como punto de partida de un análisis acerca de la construcción de lo trigonométrico. Realizamos encuestas a los estudiantes de dicho curso, como así también un análisis del libro diseñado especialmente para el dictado de tal cursillo de ingreso. Los resultados preliminares ponen de manifiesto las dificultades que tienen los alumnos en nombrar los sistemas de medición, como así también en referenciarlos y significarlos.

Palabras Clave: Trigonométrico, Sistema radial, Socioepistemología, Ingresantes

1 Introducción

El Diseño Curricular de Educación Secundaria Orientada del Ministerio de Educación de la Provincia de Santa Fe (2014) establece que la trigonometría se debe introducir en el tercer año de la educación secundaria a través de la semejanza de triángulos; luego se debe seguir profundizando en cuarto año a través de la circunferencia trigonométrica con ángulos de hasta un giro y además presentar los Teoremas del Seno y del Coseno; por último, se finaliza en quinto año con las funciones trigonométricas.

En carreras universitarias donde en su ciclo básico cuentan con materias de matemática, como por ejemplo las Ingenierías, Ciencias Económicas, Arquitectura, Bioquímica, retoman la trigonometría en los cursillos de ingreso, debido a que luego será necesario hacer uso de ella en las materias de la carrera, como por ejemplo Cálculo I o Física I.

Lo anterior mencionado da cuenta de la importancia de desarrollar este contenido y de que los alumnos puedan apropiárselo significativamente [1]. A quienes nos interesa propiciar una buena articulación entre el nivel secundario y el nivel superior no podemos dejar de prestar atención a este contenido a desarrollar.

Para trabajar con razones trigonométricas o funciones trigonométricas, se deben conocer los sistemas de medición angular más comúnmente usados: el sistema sexagesimal y el radial. Pero notamos que este último muchas veces es ajeno a los alumnos, es decir, desconocen la necesidad de trabajar en radianes y tampoco aprecian su relación con el número real.

Para desarrollar este trabajo formulamos las siguientes preguntas:

- ¿Cuál es el marco de referencia del que dispone el alumno para la construcción del concepto de medición de un ángulo?
- ¿Cómo resignifican (o construyen) el concepto de sistema radial los alumnos ingresantes a las carreras de ingeniería y cómo lo utilizan en distintas situaciones?
- ¿De qué manera operativizan la noción de un ángulo cuya medida se expresa en radianes?

Este trabajo se sitúa en el marco del Proyecto de Investigación ING 548 radicado en el Departamento de Matemática de la Escuela de Ciencias Exactas y Naturales (ECEN) de la Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura (FCEIA) de la Universidad Nacional de Rosario (UNR). Pretendemos realizar un análisis exploratorio acerca de cuáles son los marcos de referencia del que disponen los estudiantes finalizantes del cursillo de ingreso a Ingeniería para la construcción del concepto de medición de un ángulo y qué tipo de construcción (resignificación) realizan del sistema radial y sus usos. Es decir, pretendemos indagar sobre las representaciones, conceptos, nociones, referencias, sentidos que los estudiantes emplean cuando se les pide describir el sistema radial y además analizar de qué forma los alumnos utilizan dicho sistema cuando se les solicita que calculen el valor de una función trigonométrica. Detectar un inconveniente en la conceptualización de esta noción, quizás sirva a futuro para comprender algún obstáculo particular en la construcción de lo trigonométrico.

Para llevar a cabo este primer acercamiento realizamos encuestas a los estudiantes de dicho curso, como así también un análisis del libro diseñado especialmente para el dictado de tal cursillo de ingreso.

A través del análisis del libro utilizado, nos interesa poder pesquisar características concretas en cuanto al discurso matemático escolar (dME) [2] que subyace detrás de los conceptos relativos a lo trigonométrico. Lo que de allí resulte será conveniente para luego ser capaces de sugerir pautas y acciones que propicien un adecuado rediseño del mismo que se sustente en la problematización de lo que se enseña.

Los resultados preliminares ponen de manifiesto las dificultades que tienen los alumnos en nombrar los sistemas de medición, como así también en referenciarlos y significarlos.

2 Algunos antecedentes del tema abordado

- En [3] las autoras encontraron que el alumno no hace diferencia entre el seno (coseno) como una razón trigonométrica y el seno (coseno) como función trigonométrica, advirtiendo que hay pocas huellas de comprensión, del género que fuera, de la función circular y de su papel en la definición de las funciones trigonométricas.

- En [4] se realizó una investigación en el nivel medio superior mexicano, de la cual resultó que los estudiantes no perciben que el uso de la calculadora para las funciones trigonométricas se encuentra mediado por, al menos, dos modos de cálculo, el sexagesimal y el radián.

- En [5] las autoras manifiestan observar que los estudiantes confunden la razón trigonométrica con la función trigonométrica y que además, desconocen la necesidad de trabajar en radianes, por lo que presentan una experiencia de cátedra realizada en la FCEIA.

- En [6] se realiza un estudio de carácter sistémico respondiendo a cómo se realiza la transición del concepto de unidad angular, grados-radianes-reales, en el argumento de la función trigonométrica.

- Desde el marco de la socioepistemología en [7] se realiza un análisis sobre libros de textos escolares utilizados para la enseñanza secundaria mexicana sobre el tema trigonometría.

- En [8] la autora se propone por un lado, una construcción del conocimiento trigonométrico basada en prácticas y no sólo en conceptos matemáticos, y por el otro, analiza los desarrollos de pensamiento geométrico-proporcional y analítico-funcional, enfatizando la relación y la funcionalidad trigonométricas con la intencionalidad de contrastar con la mirada tradicional sobre el aprendizaje de la razón y la función.

3 Marco teórico

Llevamos a cabo nuestra investigación posicionándonos desde la Socioepistemología. Se trata de una aproximación teórica que propone una perspectiva sociocultural para abordar el problema del estudio de las matemáticas, permite explicar la naturaleza de un discurso específico – el discurso matemático escolar (dME) y en particular, el discurso Trigonométrico Escolar (dTE) -, que regula e instituye las formas de construir y transmitir los objetos matemáticos en el aula; y permite además, mostrar evidencias de cómo se construye el conocimiento matemático escolar a partir de una intencionalidad didáctica [9]. Las características del dME se establecen en torno a: i) la atomización en los conceptos (en lugar de atender a racionalidades contextualizadas diversas); ii) su carácter utilitario (en lugar de propiciar un carácter funcional); iii) la falta de marcos de referencia para la resignificación (en lugar de valerse de prácticas de referencia que favorezcan tal resignificación); iv) carácter hegemónico y v) presentación del conocimiento como algo del orden de lo acabado y continuo.

Además, en tanto se trata de una Epistemología de Prácticas, se conciben a las prácticas sociales como generadoras de resignificaciones de conocimiento matemático, brindando una clasificación de los tipos de prácticas sociales: de transculturación de conocimiento, de transposición didáctica, de modelación y procedimentales, y de empoderamiento, entre otras [10]. Aparicio y Cantoral [11] suponen, con base en su investigación, que: "… los conocimientos matemáticos en la mente de los estudiantes son el producto cultural de una serie de prácticas sociales".

Desde este encuadre teórico, se sostiene la construcción social del conocimiento matemático y se propone el rediseño del dME mediante la *descentración del objeto*; esto es, puesto que se critica el focalizar la atención en los conceptos o procesos matemáticos, se plantea, en cambio, focalizar la atención en los elementos sociales, culturales, funcionales e institucionales que permiten la construcción de los conocimientos matemáticos, caracterizando a las prácticas sociales como generadoras de dichos conocimientos.

Así, desde la Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa (TSME), se cuestiona el qué enseñamos, problematizando al conocimiento matemático para - a partir de dicha problematización del saber matemático (*psm*) - intentar esbozar una explicación del porqué de ciertas dificultades que conciernen al aprendizaje de los alumnos o el porqué del éxito de algunas innovaciones didácticas que conciernen a los procesos de enseñanza, con independencia del enfoque pedagógico en que se sostiene la práctica educativa [12]. Se interroga acerca de si la construcción de la temática a abordar está basada sólo en conceptos y no en prácticas de referencia, pues esa manera de abordaje provocaría una enseñanza centrada en el objeto matemático, con ausencia de marcos de referencia y de significados. Las actividades áulicas mediante las cuales se recrean las prácticas sociales reconocidas como generadoras de conocimiento son denominadas desde la TSME como *prácticas de referencia*. En [13] se asevera que:

"La investigación de corte socioepistemológico identifica entonces prácticas diversas produciendo lo que denominamos una descentración del objeto. Delimita el papel que juega el escenario histórico, cultural e institucional en la actividad humana. El problema que motiva a las investigaciones puede ser la dificultad de los estudiantes para aprender algún concepto; sin embargo, estudiarlo desde la perspectiva socioepistemológica persigue el fin de contribuir a una visión alternativa que contemple las prácticas sociales asociadas y, en esa medida, de una mirada social y cultural del saber matemático".

Queremos señalar cómo entendemos, desde la TSME, la diferencia entre *la matemática* y *lo matemático*, y así se comprenderá la diferencia entre la trigonometría y lo trigonométrico. La matemática hace referencia al proceso de aprendizaje de la matemática escolar que se basa en objetos, conceptos, algoritmos y procedimientos. Pero el proceso de aprendizaje del saber matemático escolar refiere a la significación de esos objetos, conceptos, algoritmos y procedimientos mediante su uso; esto es, refiere a la habilidad de significar y dotar de sentido al objeto matemático mediante los usos del conocimiento. La resignificación progresiva de los conceptos se desarrolla precisa de marcos de referencia que potencien el sentido de aquello que se aprende en relación a su uso.

La enseñanza de la trigonometría, tanto en el nivel secundario como en el nivel superior, se realiza según una tradición basada en el *fenómeno de la aritmetización trigonométrica*, caracterizada por el hecho de dirigir el interés de la actividad trigonométrica en el procedimiento de operar números para hallar el valor de una incógnita en el triángulo rectángulo [14]. Lo que desde el enfoque de la TSME se cuestiona es que de este modo se deja de lado el estudio de lo trigonométrico como aquel conocimiento que da cuenta de la naturaleza de la relación entre el ángulo y los lados del triángulo, en el contexto de las construcciones geométricas. Este planteo es concordante con lo analizado en [3], donde las autoras objetan el uso del círculo unitario, pues sostienen que esta aproximación concretiza la definición de las funciones trigonométricas al precio de crear dificultades en los estudiantes. De hecho, destacan que se privilegia el significado de la razón trigonométrica como la división de longitudes en un triángulo rectángulo. Así, podemos señalar que el dTE "despoja a las razones trigonométricas de todo aquello que le da origen, sentido y significado; es decir, hay una *pérdida del proceso geométrico en la construcción de lo trigonométrico*" [12]

Respecto a las prácticas sociales generadoras de conocimiento trigonométrico, Montiel [8] distingue dos prácticas bien específicas: la de anticipación, en relación a la matematización de la astronomía, y la de predicción, en relación a la matematización de la física. Cada uno de estos tipos de prácticas sociales se insertan en diferentes períodos históricos caracterizados por racionalidades bien diferentes:

1) la práctica de anticipación (período helenístico de la Antigüedad), asociada a la explicación y/o predicción de fenómenos celestes, basada en una racionalidad helenístico-euclidiana, orientaba las prácticas de la agricultura, el comercio, la astronomía y la geografía;

2) la práctica de la predicción (s. XVI al s. XVII), asociada a la necesidad de conocer un estado futuro con base en el presente y las variaciones de su pasado, orientaba el desarrollo de la teoría newtoniana en un contexto dinámico, que concibe cualidad y movimiento en término de entes abstractos (figuras y números), partiendo de una interpretación de los objetos geométricos como entidades generadas por un movimiento continuo.

En cuanto al origen de los sistemas de medición de ángulos, encontramos que el sistema sexagesimal tiene su origen hace aproximadamente 4100 años en una de las primeras civilizaciones Mesopotámicas, en Sumeria, donde utilizaban el sistema duodecimal, esto es, el 12 como base (resulta divisible por 2, 3, y 4), y como consecuencia el círculo de cuatro cuadrantes se divide en 360°. En la Antigüedad los habitantes del llamado Creciente Fértil (región histórica que se correspondería con parte de los territorios del Antiguo Egipto, el Levante y Mesopotamia) contaban señalando con el dedo pulgar, cada una de las 3 falanges de los restantes dedos de la misma mano, comenzando por el meñique. Observar que con este método se puede contar hasta 12. Para contar cifras mayores, cada vez que se realiza esta operación se levanta un dedo de la mano libre hasta completar 60 unidades (12 x 5 = 60). Es por ello que esta manera de contar se convirtió en una referencia habitual en transacciones y medidas. Similar suerte corrió el número contado en la mano derecha, el 12, y algunos múltiplos como 24, 180 (12 x 15, o bien 60 x 3) y 360 (12 x 30, o bien 60 x 6). Por esto, el sistema sexagesimal se emparenta en su raíces históricas con el sistema duodecimal. Esta forma de contar con los dedos (hasta 12 y, luego, hasta 60) sigue siendo usada en la actualidad por algunos habitantes del Medio Oriente. También se dice que dividían el círculo en 360° partes iguales, fundándose en el hecho de que la revolución del sol se da en 360 días.

El sistema radial, en cambio, es moderno (s. XVIII); se le acredita al matemático y físico Roger Cotes en 1714, quien reconoció el carácter natural del radián como unidad de medida angular, pero nunca le dio el nombre. Dicho concepto surge en el marco del desarrollo de la concepción del cálculo. El trabajo simultáneo de los arcos (su proporción respecto al círculo) y los radianes comienza a partir de los problemas que surgen de la matemática de la variación y el cambio. En [6, p. 84] el autor menciona que: “La palabra “radián” que puede significar “radio en el ángulo”, parece haberse originado alrededor de 1870 producto del intercambio de las ideas entre Thomas Muir y James Thomson, respecto al factor de proporción concebido por Cotes para la medida angular”.

En cuanto al libro de texto se refiere, entendemos que se trata de un objeto cultural mediante el cual se construye el consenso educativo. Sirve por tanto para introducir una ideología y para legitimar contenidos y formas específicas del conocimiento. En este sentido el análisis del dME a través del libro de texto utilizado en el cursillo es – para nuestra investigación - un recurso que brinda información acerca de las visiones institucionalizadas del conocimiento que con frecuencia suelen ser distantes de los estudiantes. [7]

4 Metodología

Nuestra investigación es de carácter exploratorio y forma parte de la fase inicial del proceso de investigación de tesis de maestría de una de las autoras.

Para llevar a cabo dicha exploración utilizamos dos técnicas de recolección de datos, que son las siguientes:

1. Encuestas a ingresantes: Se les proporcionó una encuesta a los alumnos de las distintas comisiones que forman parte del cursillo introductorio 2018 a las carreras de Ingeniería de la Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura de la Universidad Nacional de Rosario. Dicha encuesta fue administrada durante la última semana de cursada en el mes de febrero, previa al examen de ingreso. Para la comunicación de estos resultados parciales se seleccionaron 3 comisiones en forma aleatorias (que reúnen un total de 51 alumnos encuestados), debido a que aún no tuvimos tiempo de relevar exhaustivamente los datos de todas las comisiones.

2. Análisis del capítulo *Trigonometría* del libro *Introducción a la matemática de ingeniería y ciencias exactas* 2018 utilizado en dicho curso de ingreso, el cual es un material realizado por docentes del Área de Ingreso, de los cuales, algunos ejercen en las cátedras de grado de las carreras de Ingeniería.

5 Resultados de preguntas seleccionadas de las encuestas a los ingresantes

a) En la encuesta se propuso como una de las consignas, indicar la modalidad con la cual egresaron del colegio secundario, con el propósito de analizar si existe alguna correlación entre la modalidad elegida en la escuela secundaria con la carrera universitaria elegida por el alumno. Y además, con la intención de pesquisar la influencia de la modalidad elegida en la escuela secundaria en relación al discurso matemático escolar de lo trigonométrico. Pero las modalidades mencionadas por los alumnos resultaron ser muy variadas, por lo que hasta ahora no encontramos claramente la correlación buscada o sospechada. Aún así, del análisis de esta pregunta resultó llamativo que, por ejemplo, un alumno egresado como *Técnico Constructor* – una modalidad que consideramos debería tender a fortalecer la comprensión de lo trigonométrico - tenga muchas dificultades para responder las preguntas del cuestionario.

b) Otra consigna rezaba: "¿Estudió trigonometría plana en su escuela?"

La finalidad de formular esta pregunta es conocer si el tema Trigonometría había sido abordado efectivamente en la escuela secundaria.

En la comisión 1, de un total de 20 alumnos, 18 respondieron afirmativamente.

En la comisión 2 de un total de 11 alumnos, 7 respondieron afirmativamente.

En la comisión 3 de un total de 20 alumnos, 10 dicen no haber estudiado trigonometría en la escuela secundaria. Nos sorprendió que la mitad dijera que no, ya que como mencionamos anteriormente según establece el diseño curricular, se trata de un contenido a desarrollar desde tercer a quinto año. Nos queda como interrogante si realmente no lo trataron o no recuerdan haberlo abordado; en este último caso, de todas formas, parece no haber sido muy significativo para el estudiante. En caso de que realmente no se haya estudiado también nos surge preguntarnos cuál o cuáles serían los motivos argumentados por los docentes para justificar tal omisión.

Esto amerita la confección de otro instrumento de recolección de datos, y es por ello que estamos diseñando una entrevista abierta que será administrada a un grupo de docentes en ejercicio profesional, de escuelas secundarias de la ciudad de Rosario, que ejercen en las modalidades respondidas por los alumnos.

c) Otra pregunta fue la siguiente: "¿Qué sistemas de medición de ángulos conoce?"

En la comisión 1, 18 alumnos mencionan el sistema sexagesimal y el radial, y sólo un estudiante menciona tres sistemas de medición (sexagesimal, radial, centesimal).

En la comisión 2, 9 alumnos mencionan el sistema sexagesimal y el radial.

En la comisión 3, 12 mencionan el sistema sexagesimal y el radial, 3 estudiantes, los tres sistemas, y 3 no comprenden la consigna brindando respuestas sin relación alguna a la pregunta formulada.

A continuación dejamos plasmados en un gráfico estadístico los resultados de esta pregunta.

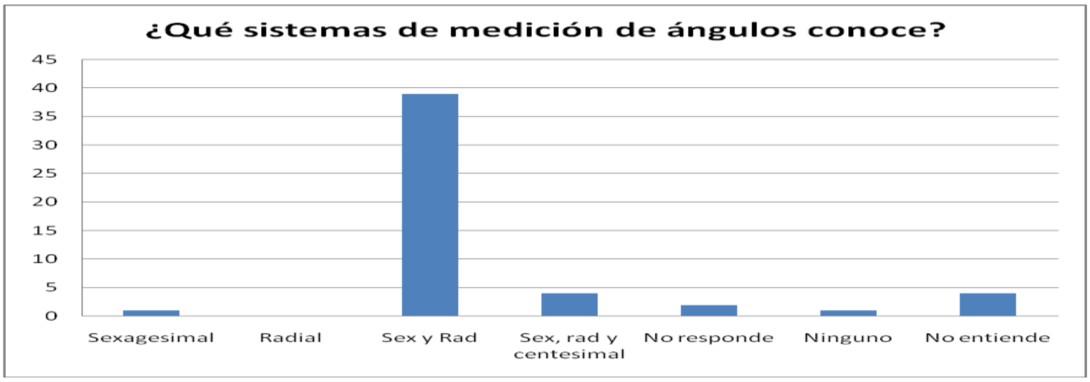


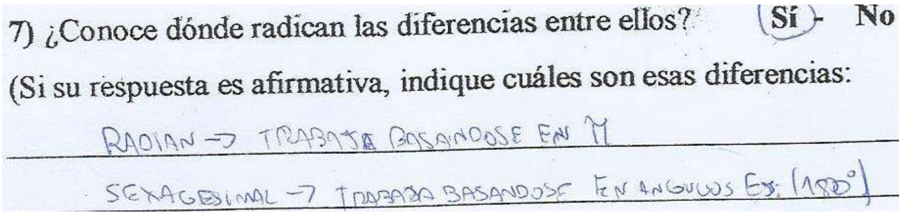
Fig. 1. Resultados de la pregunta acerca de los sistemas de medición que conoce cada alumno.

Cabe aclarar que muchos de los que consideramos que respondieron sexagesimal y radial, no lo escribieron con su nombre correcto, sino por ejemplo "grados y radianes", es decir colocaban las unidades de cada sistema. Este tipo de respuesta da cuenta de las dificultades que presenta la comprensión de los sistemas de medición de ángulos en relación a su origen y las razones por las cuales se los utiliza. Entonces notamos que la mayoría de los estudiantes reconoce al menos un sistema de medición angular y además dicen reconocer la diferencia entre los sistemas planteados, pero es muy bajo el número de estudiantes que realmente pueden explicar "correctamente" dicha diferencia. Esto lo observamos en la pregunta siguiente.

d) Se les preguntó lo siguiente: "¿Conoce dónde radican las diferencias entre ellos?" (referida a los sistemas de medición mencionados previamente).

Dentro de las respuestas que podríamos considerar como "correctas" encontramos frases como las siguientes, las cuales son muy escuetas y a veces confusas: "Son unidades de medidas diferentes…$360° = 2\pi$".

Otros intentan explicar y dar la definición del sistema radial. También hay otro tipo de respuestas que no aclaran nada como: "El sexagesimal es en grados y el radial es en radianes".O respuestas equivocadas y diversas, que muestran una confusión en el uso de los sistemas, como por ejemplo, las respuestas que aparecen a continuación en las siguientes imágenes:



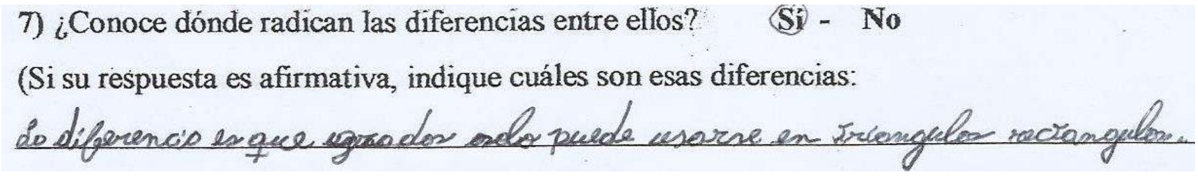
7) ¿Conoce dónde radican las diferencias entre ellos? Sí - No

(Si su respuesta es afirmativa, indique cuáles son esas diferencias:

RADIAN → TRABAJA BASANDOSE EN π

SEXAGESIMAL → TRABAJA BASANDOSE EN ANGULOS EJ: (180°)

Fig. 2. Explicación de la diferencia entre el sistema sexagesimal y el radial por un estudiante de la comisión 3.

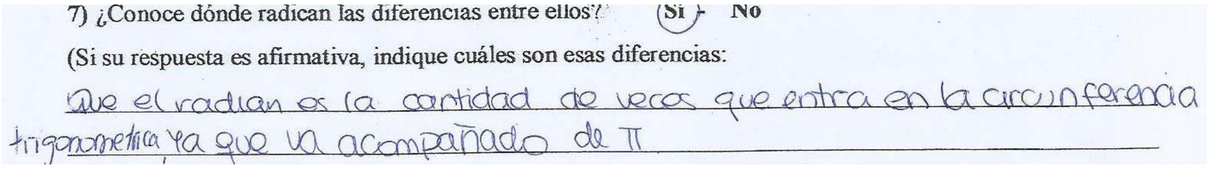


7) ¿Conoce dónde radican las diferencias entre ellos? Sí - No

(Si su respuesta es afirmativa, indique cuáles son esas diferencias:

lo diferencia es que ugrados solo puede usarse en triangulos rectangulos.

Fig. 3. Explicación de la diferencia entre el sistema sexagesimal y el radial por un estudiante de la comisión 3.

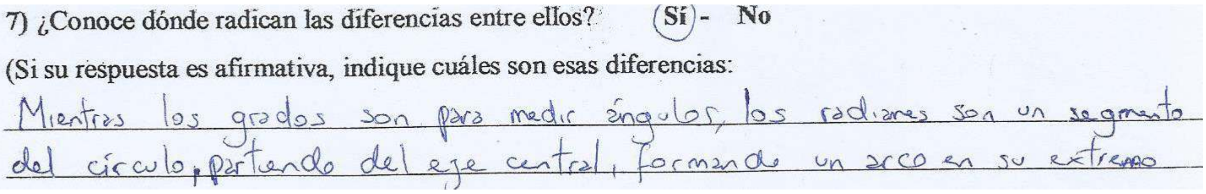


7) ¿Conoce dónde radican las diferencias entre ellos? Sí - No

(Si su respuesta es afirmativa, indique cuáles son esas diferencias:

Que el radian es la cantidad de veces que entra en la circunferencia trigonometrica ya que va acompañado de π

Fig. 4. Explicación de la diferencia entre el sistema sexagesimal y el radial por un estudiante de la comisión 1.



7) ¿Conoce dónde radican las diferencias entre ellos? Sí - No

(Si su respuesta es afirmativa, indique cuáles son esas diferencias:

Mientras los grados son para medir ángulos, los radianes son un segmento del circulo, partiendo del eje central, formando un arco en su extremo

Fig. 5. Explicación de la diferencia entre el sistema sexagesimal y el radial por un estudiante de la comisión 2.

e) Por último, en este apartado vamos a analizar la siguiente pregunta: "¿Qué es un radián? ¿Puede realizar una representación gráfica?"

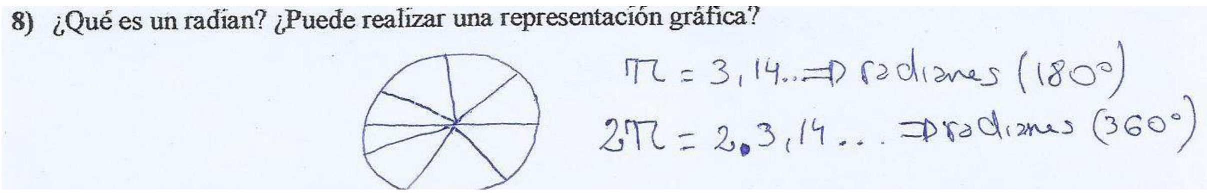
Aquí es donde notamos mayor confusión en las respuestas.

De la comisión 2, ningún alumno responde correctamente.

De la comisión 1, sólo un alumno responde correctamente y 7 no responden nada.

De la comisión 3, ningún alumno responde correctamente y 6 no responden nada.

Muchos alumnos en esta pregunta respondieron colocando la equivalencia de un sistema con otro para los ángulos π o 2π, como se muestra un ejemplo en la figura siguiente:



8) ¿Qué es un radian? ¿Puede realizar una representación gráfica?

$\pi = 3{,}14.. \Rightarrow$ radianes $(180°)$

$2\pi = 2.3{,}14... \Rightarrow$ radianes $(360°)$

Fig. 6. Explicación y representación de un radián por un estudiante de la comisión 2.

Algunos estudiantes dieron su equivalencia en el sistema sexagesimal, es decir, respondieron "1 radián = 57°".

También aparecen algunas respuestas que se aproximan a lo que consideraríamos como correcto o que al menos utilizan los elementos necesarios para definir un radián, pero tergiversándolos, como por ejemplo las siguientes:

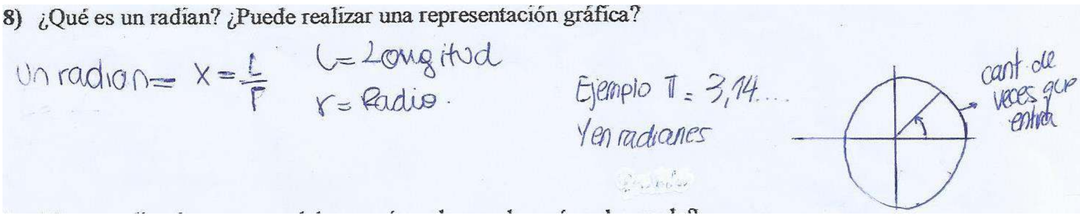


Fig. 7. Explicación y representación de un radián por un estudiante de la comisión 1.

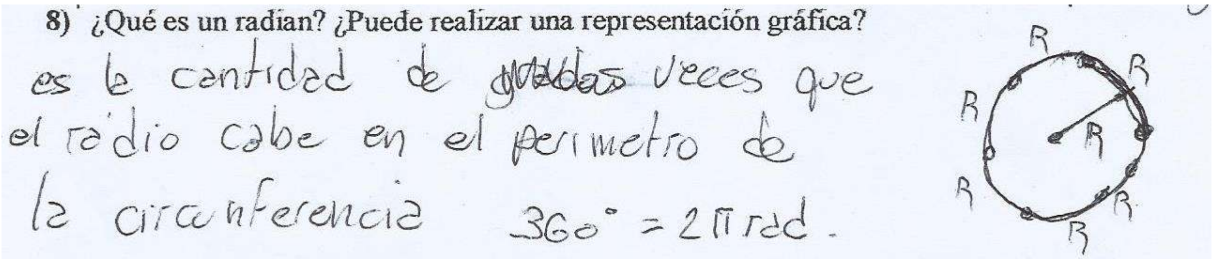


Fig. 8. Explicación y representación de un radián por un estudiante de la comisión 1.

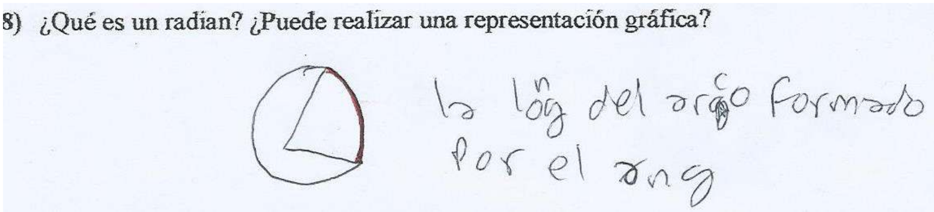


Fig. 9. Explicación y representación de un radián por un estudiante de la comisión 2.

f) Con la intención de analizar si los alumnos efectivamente reconocen que la medida de un ángulo en radianes se asocia con un número real, se propuso la siguiente consigna:

"El valor de cos(5) es aproximadamente: a) 0,087 b) -0,958 c) 1,25 (resuelva con calculadora)".

Nota: no consideramos todas las respuestas por un error en la confección del cuestionario (quedó escrito cos(5) cuando debía decir sen(5)); sí tuvimos en cuenta aquellas respuestas que indicaban cuál era el valor correcto esperado (que - por el error mencionado - no figuraba en forma explícita entre las opciones) o que aludían a un valor fuera del rango.

Teniendo en cuenta, entonces, el inconveniente descripto anteriormente, se decidió incluir sólo 18 respuestas del total de 51, a partir de las cuales podemos realizar algún tipo de análisis que resulta provechoso para nuestros fines. Del total analizado, 7 alumnos respondieron que el valor del cos(5) es 1,25, lo que nos alerta en cuanto no sólo a la falta de significación del concepto coseno de un ángulo, o mejor dicho, coseno de un número real, sino también al desconocimiento de la circunferencia trigonométrica, y más aún al desconocimiento del cálculo de dicho valor con la calculadora.

El resto de los estudiantes (11) respondieron que el valor del cos(5) es 0,99, es decir utilizaron la calculadora en el sistema sexagesimal. Ninguno (de los 18) lo calculó interpretando que se trataba de un ángulo medido en radianes y que por ello debía seleccionar el modo correspondiente al sistema radial. A pesar de que los alumnos respondieron (en ítems previos) conocer los dos sistemas, a la hora de utilizar la calculadora el único válido es el sexagesimal. Dejamos un ejemplo a continuación.

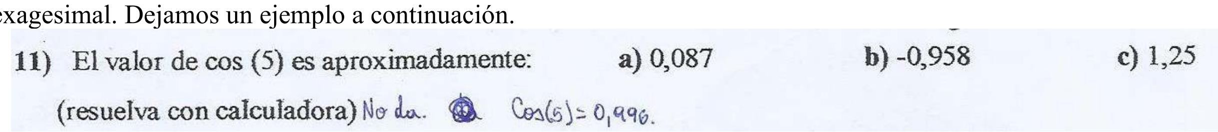

11) El valor de cos (5) es aproximadamente: a) 0,087 b) -0,958 c) 1,25
(resuelva con calculadora) No da. Cos(5) = 0,996.

Fig. 10. Resolución del cos(5) con calculadora por un estudiante de la comisión 1.

6 Análisis del libro utilizado en el curso.

En el cursillo de ingreso se utiliza un cuadernillo confeccionado por docentes del Área de Ingreso, el cual está dividido en capítulos con los contenidos que se desarrollan en dicho curso. Uno de los capítulos (capítulo 6) se llama Trigonometría y está dividido en dos secciones.

La primera sección denominada “6.1 – Resolución de Triángulos”, comienza con resolución de triángulos rectángulos, presentando las razones trigonométricas de ángulos agudos. Las unidades de medida de todos los ángulos que allí se mencionan están en el sistema sexagesimal.

En la segunda sección, cuyo título es “6.2 - Funciones Trigonométricas”, se presentan formalmente los sistemas sexagesimal y radial. Como señalamos anteriormente, ya se habían usado ángulos en grados sexagesimales en algunos ejemplos y/o ejercicios aún antes de esta formalización, lo que da cuenta de la hegemonía de este sistema en lo trigonométrico; por otra parte se trata entonces de un concepto desprovisto de marcos de referencia, mediante el cual se imponen significados, argumentos y procedimientos centrados en el objeto matemático considerado.

Posteriormente a presentar el sistema radial y dar la definición de radián, se plantea su relación con el sistema sexagesimal, mostrando la equivalencia del valor del ángulo de una vuelta. Pero, más allá de la presentación teórica de dicha relación, nunca se especifica, por ejemplo, cuál es el equivalente en grados sexagesimales de un radián.

Es interesante destacar que hay un apartado que alerta a los alumnos en cuanto a la necesidad de un sistema de medición de ángulos distinto del sexagesimal, y que podría estar al servicio de intentar, al menos, fisurar la hegemonía del sistema sexagesimal presente en el dME. El apartado lleva por título ¿Por qué trabajar en radianes?, pero - creemos que - la respuesta no resulta totalmente convincente, es decir no brinda una justificación que denote lo imprescindible que resulta dicho sistema. Quedaría entonces pendiente una razón taxativa del uso del sistema radial.

Luego bajo el subtitulo de “Funciones trigonométricas”, se indica que es posible *“extender”* las razones trigonométricas para ángulos no agudos y orientados por medio de la circunferencia trigonométrica. Así también está expresado en el Diseño Curricular de la Provincia de Santa Fe, en el cual se sugiere que en cuarto año dentro del Eje Geometría y Medida se debe enseñar “razones trigonométricas en ángulos de hasta un giro, acudiendo a la circunferencia trigonométrica”. Expresado de esta forma, nos parece que el concepto de función trigonométrica se confunde con el de razón, ya que no aparece enfatizada la relación de dependencia entre dos variables que requiere la definición de función, entre otras cosas. En todo este apartado se trabaja utilizando ángulos en el sistema radial.

Observamos una clara disociación, donde el sistema sexagesimal es utilizado -casi en forma exclusiva - para el tratamiento de triángulos, y el radial es usado sólo en relación a la circunferencia trigonométrica.

7 Algunas reflexiones

Los alumnos del cursillo de ingreso 2018 a las carreras de Ingeniería ofrecidas por la FCEIA, reconocen la existencia de los dos sistemas de medición de ángulos más utilizados (sexagesimal y radial), a pesar de tener dificultades no sólo para nombrarlos sino también para referenciarlos (o significarlos). A la hora de pedirles que expliquen la diferencia entre ellos, sólo logran indicar la equivalencia de un sistema con otro para la medida de un ángulo (generalmente el llano o el de un giro). Esto podría estar relacionado con la forma en que el tema se desarrolla en el libro usado en el cursillo, pues luego de definir radián, inmediatamente se busca la equivalencia de la medida en radianes de un ángulo cualquiera con el correspondiente valor en grados, minutos y segundos en el sistema sexagesimal. Claramente, lo hegemónico del dTE se presentifica en el libro produciendo una fuerte atomización de los conceptos en parcelas estancas, no relacionadas: el concepto de ángulo (pero no de medición del mismo) se expone en el capitulo anterior llamado *Geometría*, y curiosamente, se desarrolla todo el capítulo utilizando el sistema sexagesimal, a pesar de no haber hecho una presentación todavía de la medición angular.

También es muy llamativo que al solicitar la definición de radián (y a pesar de haber tratado y repasado – según el caso - el tema en el cursillo) sólo unos muy pocos estudiantes logran hacerlo correctamente.

Por otro lado a pesar de reconocer ambos sistemas, ningún alumno utiliza el sistema radial para hallar el valor del cos (5); es decir, a la hora de utilizar la calculadora, sólo realizan el cálculo en el sistema sexagesimal, sin registrar que el valor “5” no está acompañado de la unidad “grado”, lo cual debería ser indicativo de que su unidad es radián. Pareciera que, para ellos, carece de importancia indicar la unidad; no les llama la atención la ausencia de la unidad de medida probablemente porque tienen naturalizado que dicha unidad se refiere al sistema sexagesimal. Parece existir una falta de comprensión respecto a la necesidad concreta que motiva y da sentido al uso del sistema radial, a pesar del esfuerzo que se hace en el libro mediante la pregunta explícita respecto a por qué trabajar en radianes.

Asimismo, no queda claro si se logra apuntalar la construcción del concepto de radián, o sólo se refuerza la repetición de la definición, una definición que aparentemente no es comprendida en forma acabada. Pareciera que es otro sistema para medir ángulos y lo que importa es saber su equivalencia con el sistema sexagesimal, pero no se halla una referencia de cómo se constituye dicho sistema, ni cuál es el motivo de su uso. Creemos que la relación de la medida de un ángulo en radianes con un número real, no logra establecerse fehacientemente como correspondería al nivel.

Quizás todo lo anteriormente descripto se deba a la forma en que se presenta la secuenciación de los contenidos. Además el abordaje de esta temática, el sistema radial, requiere de varios conocimientos previos como por ejemplo, longitud de una circunferencia, números irracionales, entre otros; y aún más elemental, el concepto de ángulo y de medición de ángulos. El no tener dichos conceptos incorporados, contribuye claramente a la dificultad para comprender el concepto de radián. Podría ser aceptada dicha dificultad en el nivel secundario, debido a que el grado de abstracción y comprensión lógico-formal de los alumnos no está consolidado aún, pero – creemos que - en el nivel superior esto no debería formar parte de un obstáculo para la comprensión del sistema radial. No hallamos prácticamente ninguna actividad práctica relacionada a lo cotidiano que facilite la construcción del concepto de ángulo radián, pero somos concientes de que el libro es solamente un apoyo para el docente. Aún no hemos realizado observación de estas clases, por lo que no podemos saber qué tipo de acciones y propuestas realizó cada docente para proveer marcos de referencia a esta unidad didáctica.

Cabe señalar que, en el diseño curricular del nivel secundario de la provincia de Santa Fe, no se halla mención explícita de los distintos sistemas de medición de ángulos. Es más, cuando se mencionan los ángulos de un giro, se los expresa solamente en el sistema sexagesimal. Interpretamos esto como otro importante indicador de la hegemonía que desde el dME se instala respecto de lo trigonométrico.

Insistimos en que este trabajo sólo representa un primer acercamiento al objeto de estudio. Se trata de una fase inicial, exploratoria, donde el objetivo primordial es conocer el real estado de la problemática. Aún estamos diseñando distintas herramientas de recolección de datos cuya confección atiende a las características encontradas en las encuestas aquí discutidas (entrevistas a docentes en ejercicio en escuelas secundarias de la ciudad de Rosario que se desempeñen en las modalidades relevadas, encuestas a alumnos de primer año que hayan utilizado el libro analizado en el momento de realizar el cursillo de ingreso, entrevistas abiertas con algunos docentes que participaron en el dictado del cursillo de ingreso 2018, entre otras). Los resultados obtenidos serán comunicados en jornadas, encuentros o congresos futuros. Nuestra intención, también, es plantear una secuencia didáctica alternativa para desarrollar funciones trigonométricas en el nivel secundario y superior atendiendo a estas problemáticas.

8 Referencias

1. Ausubel, D.; Novak, D.; Hanesian, H.: *Psicología educativa. Un punto de vista cognoscitivo*. Trillas. (1976)
2. Cordero, F.; Gómez, C.; Silva-Crocci, H.; Soto, D.: *El discurso matemático escolar: la adherencia, la exclusión y la opacidad*. México: Gedisa (2015)
3. De Kee, S.; Mura, R.; Dionne, J: La comprehension des notions de sinus et de cosinus chez des eleves du secondaire. For the learning of mathematics, vol. 16, num. 2 (1996)
4. Sierra, G.: Concepciones y matemática escolar: Unidades de medida de la funciones trigonométricas en el nivel medio superior. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, Vol.15, No. 1, pp.35-62. (2012)
5. Braccialarghe, D.; Introcaso, B.; Matassa, A.; Piraino, M.: Problematizando las funciones trigonométricas a través de la simulación. *Libro de actas: XX Encuentro Nacional y XII Internacional de educación matemática en carreras de ingeniería*, pp. 498-503. (2017)
6. Pérez, H.: La transición, grados, radianes, reales en la construcción de la función trigonométrica: un análisis sistémico. Tesis de maestría. México. (2010)
7. Cantoral, R.; Montiel, G.; Reyes-Gasperini, D.: Análisis del discurso matemático escolar en los libros de texto, una mirada desde la teoría Socioepistemológica. *Avances de investigación en Educación Matemática*, No. 8, pp. 9-28. (2015)
8. Montiel, G.: *Construcción de conocimiento trigonométrico. Un estudio socioepistemológico*. México: Díaz de Santos. (2011)
9. Maldonado, M.; Rodríguez, M.; Tuyub, J.: Un estudio sobre el discurso en los libros de texto de Matemáticas. Su relación con la práctica escolar. (Tesis de Lic en Enseñanza de las Matemáticas). Universidad Autónoma de Yucatán. México: CINESTAV del IPN. (2007)
10. Camacho Ríos, A.: Socioepistemología y prácticas sociales. *Revista de Educación Matemática Santillana*, Vol.18, No.1, pp.133-160. (2006)

11. Aparicio, E.; Cantoral, R.: Sobre la noción de continuidad puntual: un estudio de las formas discursivas utilizadas por estudiantes universitarios en contextos de geometría dinámica. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa,* Número 17 (1), pp. 341-354. México: Clame. (2004)
12. Cantoral, R.: *Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa. Estudios sobre la construcción social del conocimiento*. México: Gedisa. (2016)
13. Cantoral, R.; Reyes-Gasperini, D.; Montiel, G.: Socioepistemología, Matemáticas y Realidad. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática*, 7(3), 91-116. (2014)
14. Montiel, G.; Jácome, G.: Significados trigonométricos en el profesor. *Boletim de Educação Matemática, Bolema 28 (50)*, 1193-1216. (2014)

Las Dificultades de los Alumnos que Ingresan a la Universidad para Expresarse por Escrito en Matemática

Silvia G. Seluy[1], Agostina M. Zucarelli[1]
[1] Proyecto de investigación CAI+D 2016, Facultad de Ingeniería y Ciencias Hídricas,
Universidad Nacional del Litoral
Ruta Nacional Nº 168 – Km 472 - Ciudad Universitaria
3000 Santa Fe - Argentina
silvia_seluy@yahoo.com.ar, agostinazucarelli@gmail.com

Resumen. La falta de adaptación a las nuevas formas de utilizar el lenguaje rutinario, para adaptarlo a un lenguaje técnico, sumado a las propias dificultades que trae consigo el alumno en cuanto al uso de su lengua madre, trae aparejado que sus deficiencias lingüísticas representen uno de los tantos factores que inciden en su rendimiento académico y que conllevan al abandono de los estudios. Para evitar este desenlace se pretende identificar los tipos de errores gramaticales cometidos por los estudiantes y a partir de ello analizar qué actividades podrían remediar los problemas encontrados. Un análisis de las producciones escritas de una muestra de estudiantes de Matemática Básica ha puesto en evidencia que la mayoría de ellos presenta errores relacionados con el uso incorrecto de las formas gramaticales y de interpretación, lo que puede atribuirse a falta de lectura de textos, ya sea que se trate de textos académicos, científicos o de otro tipo; a la falta de concentración en la lectura, o quizás a otros factores que podrían detectarse a lo largo de distintas investigaciones.

Palabras Clave: Dificultades de lecto-comprensión, Rendimiento académico, Análisis de producciones escritas.

1 Introducción

Los alumnos que ingresan a Carreras universitarias en cuyos planes de estudio tienen asignaturas de Matemática, se encuentran con un nuevo lenguaje propio de esta Ciencia al que deben adaptarse, seguramente, con mayor rigurosidad de lo que hasta el momento han hecho. En este tipo de materias se debe trabajar con lenguaje simbólico y también lenguaje coloquial o lenguaje que el alumno utiliza para expresar una idea con sus propias palabras en lugar de utilizar símbolos.

Si bien los alumnos ingresantes traen como conocimientos previos lo que aprendieron en la escuela media, en dicho ciclo, los símbolos matemáticos no son de uso frecuente, en cambio son indispensables en el desarrollo de asignaturas de Matemáticas impartidas a nivel universitario, donde se requiere habilidad del dominio en la lectura y escritura de los símbolos y su interpretación, para comprender los desarrollos que el profesor da en las clases [1]. A la luz de estos conceptos, el docente debe analizar ¿cuál es la capacidad en el alumno para adquirir esas nuevas formas en cuanto a la actividad y el consiguiente pensamiento matemático que le genere?.

Los estudiantes que cursan los primeros años de universidad no sólo suelen tener problemas cognitivos, sino que además evidencian el uso incorrecto del vocabulario al comunicarse oralmente y por escrito, por lo que podemos inferir como docentes que tal situación tiene relación con sus pocos hábitos de estudio y por ende, de lectura, generando distintos tipos de errores que merecen la pena analizar. Es nuestro interés por lo tanto, constituir esta hipótesis en el objeto de investigación del trabajo.

Dicha investigación se enmarca en el Proyecto CAI+D 2016 titulado "La comunicación del conocimiento científico en los primeros años de ingeniería. El desarrollo informativo de los textos de Matemática y Química, y las estrategias que favorecen su comprensión", Proyecto que se encuentra actualmente en pleno desarrollo en el seno de la Facultad de Ingeniería y Ciencias Hídricas de la Universidad Nacional del Litoral, el cual surge de la participación conjunta de docentes de las asignaturas: Comunicación Oral y Escrita, Matemática Básica y Química. La primera de ellas, aborda la problemática de la comunicación en el ámbito científico y los recursos y estrategias lingüísticas que permita a los estudiantes mejorar sus niveles de comprensión del lenguaje para la asignatura que se trate y mejorar el desempeño académico a lo largo de sus carreras, lo cual resultó interesante para poder aunar las inquietudes entre las asignaturas mencionadas y elaborar una propuesta de mejora sobre todo en los cursos universitarios mencionados. Éstos, se ubican en el primer cuatrimestre del primer año de las Carreras de Ingeniería de la Facultad, donde fundamentalmente se observa la influencia de la brecha que existe entre el Nivel Medio y el Ciclo Superior, ya sea a nivel de métodos de enseñanza, de exigencias curriculares, de formas de estudio y de comunicación, entre otras.

2 Fundamentación

Los estudiantes necesitan reconocer que en el recorrido por su carrera de grado, deben adquirir las habilidades y competencias exigidas para poder integrarse a la cultura universitaria de la cual ahora forman parte. Sin embargo, es fundamental reconocer que el estudiante, al ingresar, desconoce la cultura académica de la que formará parte, carece de hábitos de lectura de textos académicos aplicados y no ha desarrollado la perseverancia en el estudio. Si bien la Universidad presupone que el estudiante cuenta con estrategias de lectura y escritura eficaces para enfrentar estas nuevas exigencias es consciente de que no siempre es así, ya que las actividades vinculadas con la lectura y la escritura de textos no son objeto de reflexión ni de práctica sostenida en la escuela secundaria [2]. El estudiante universitario requiere de competencias comunicativas, discursivas y lingüísticas especiales para poder leer y comprender en forma eficiente los textos que se les proporciona, los cuales se caracterizan por estar dirigidos a conocedores de las líneas de pensamiento de determinada disciplina [3]. En ese sentido [4], sostienen que actualmente se pretende mejorar el desempeño académico de los alumnos, dado los bajos niveles en cultura escrita con que ingresan a la Universidad la mayoría de ellos y fundamentalmente, brindarles un enfoque basado en la comprensión, la producción y la interpretación de significados, tratando de evitar el problema que genera en los estudiantes su escasa literacidad, como factor que tiende al abandono de los estudios. El concepto literacidad, según [5], abarca todos los conocimientos y actitudes necesarios para el manejo del código y de los géneros escritos, el conocimiento de la función del discurso y de los roles que asumen el lector y el autor, los valores sociales asociados con las prácticas discursivas correspondientes, las formas de pensamiento que se han desarrollado con ellas, entre otras.

Los procesos de enseñanza-aprendizaje que se implementan en el ciclo básico de la Carrera universitaria, también están ligados a la riqueza en conocimientos previos que trae el estudiante. Investigaciones como la de [6], afirman que si el aprendizaje se asocia con la comprensión lectora de los alumnos, se podrían distinguir dos grandes enfoques: el aprendizaje profundo y el superficial, consistentes en la combinación de elementos cognitivos y motivacionales, de manera que un enfoque profundo implica el propósito intrínseco de comprender por sí mismo las ideas y usar estrategias para crear el significado, mientras que un enfoque superficial del aprendizaje, está asociado con el propósito extrínseco de sobrellevar los requisitos del curso y la utilización de estrategias centradas en la memorización rutinaria. También se asocia el enfoque profundo al intento de integrar la nueva información con los conocimientos previos que llevarán al alumno a organizar nuevas ideas, relacionarlas y monitorizar su propia comprensión de la información como aspectos que se traducen en un mejor rendimiento [7]. Este autor, también se refiere al enfoque superficial como una memorización mecánica de la información, sin elaboración, lo que daría lugar a un aprendizaje poco duradero. De estos conceptos se desprende que el enfoque profundo conduce a una actitud más reflexiva de parte del alumno, pudiéndose pensar que un enfoque superficial es poco reflexivo hacia el texto. Agrega [8], un tercer enfoque llamado de aprendizaje de logro el que se relacionaría con el uso efectivo del espacio y el tiempo por parte del estudiante, con el fin de maximizar los logros o resultados del aprendizaje.

Considerando entonces que el tipo de aprendizaje que puede adquirir el alumno, también tiene que ver con sus capacidades de lectura, sería útil que se pudiese instalar en las prácticas docentes a Nivel Superior, un enfoque de aprendizaje de tipo profundo o de logro, dada la importancia que reviste el hecho que los estudiantes puedan comprender el significado de lo que leen, y que puedan adquirir mayores competencias reflexivas más aún si lo pensamos desde nuestro lugar, como docentes en Carreras de ingeniería.

Se espera que los estudiantes que registren un buen aprovechamiento e interpretación de la lectura, adquieran capacidades para poder investigar un tema de distintas fuentes, para poder analizar, evaluar y discernir acerca de lo que han interpretado [9], pero cuando esto no ocurre el alumno siente un fracaso, ya que no sabe cómo realizar las lecturas, incluso de textos científicos y académicos. Si a esto se suma la falta de ayuda o guía de los docentes, corre el riesgo de reprobar e incluso desertar de la Universidad ya que percibe que no está preparado para continuar en el Nivel Superior al que ingresó generándose situaciones que conducen a la frustración y que ciertas veces, concluyen en un alumno desertor. Por estas razones, se considera que los profesores deben guiar a los estudiantes para concientizarlos de cómo la lectura y la escritura les permite reflexionar sobre su propio conocimiento dado que son procesos inseparables del aprendizaje de cualquier disciplina.

La necesidad urgente y que compartimos con [9], es diseñar una capacitación dirigida a los docentes en promoción de la comprensión lectora en los estudiantes de Nivel Superior, dada la importancia que ésta reviste para potenciar el pensamiento crítico que posibilita el razonamiento lógico, la resolución de problemas y la toma de decisiones como facultades indispensables en la formación de los universitarios.

Para [10], algunas de las dificultades de la comprensión lectora de los alumnos pueden deberse a factores relacionados con el estudiante, con los docentes y con el contexto, los que el autor explica de la siguiente manera:

- Factores relacionados con el estudiante: carencia de motivación hacia la lectura; bajo nivel cultural; falta de prerrequisitos relacionados al tema de la lectura; problemas para ordenar un texto.
- Factores relacionados con los docentes: no diferencian en el alumno los problemas semánticos y sintácticos; presentan una selección de textos poco atractivos o de bajo interés para el alumno.
- Factores relacionados con problemas de contexto, los que a su vez se distinguen en:
  - Factor escolar: en cuanto a la relación docente-alumno; alumno-alumno;
  - Factor psicopedagógico: adecuación de materiales; métodos de enseñanza para fomentar la lectura; tiempo de exposición a la lectura; comprensión de textos; criterios de evaluación.
  - Factor familiar: en cuanto a las relaciones padre/madre/hijo; expectativas parentales hacia los aprendizajes; el comportamiento lector en el hogar y además el nivel sociocultural el entorno familiar.

3 Metodología

A los efectos de poder cumplir con los objetivos propuestos y considerando los aportes de los investigadores citados, se analizarán las principales dificultades de lecto-comprensión en alumnos de la asignatura Matemática Básica, con el objeto de generar las herramientas metodológicas propicias con miras a subsanar las dificultades mencionadas y que contribuyan a mejorar el desempeño académico de los estudiantes**.**

Se recurre a una investigación de tipo exploratoria, planteando a tal fin una metodología ad hoc, donde en primera instancia se recurre al uso de una encuesta que permitió obtener algunos indicadores a modo de exploración previa y a partir de los mismos, se trabajó sobre las producciones que los alumnos han podido entregar por escrito en las evaluaciones de la asignatura.

3.1 Desarrollo de la investigación y resultados

Con la finalidad de detectar el origen de los distintos errores que tienen los estudiantes en sus producciones escritas, se ha recurrido al análisis de los archivos de todas las instancias evaluativas (parciales, recuperatorios, exámenes finales) conformando una muestra de cien alumnos elegidos al azar de la asignatura Matemática Básica del primer año de las distintas Carreras de Ingeniería que se dictan en la Facultad de Ingeniería y Ciencias Hídricas de la Universidad Nacional del Litoral. Previamente, a los alumnos se les realizó una encuesta en la cual se solicitaba la opinión acerca de sus debilidades y fortalezas en el uso del lenguaje y en los conocimientos que se requieren tanto de ortografía, gramática y redacción al momento de tener que responder las consignas que se les proponía en los exámenes, o al momento de dar respuestas coherentes a las situaciones problemáticas que se les presentara. Dicha encuesta también indagaba sobre sus hábitos de escritura, frecuencia en lectura de esparcimiento y fuentes de estudio e interés por escribir historias. Además se les preguntaba cómo está constituido el grupo familiar con el que conviven y cuál es el mayor grado académico alcanzado por sus padres.

Según la forma en que expresaban por escrito los resultados de la encuesta, se elaboraron indicadores de la situación, los que cruzados con la información obtenida de sus producciones, han permitido elaborar una lista de tipos de errores observados más frecuentes, por alumno, a través de las cuales se pudo arribar a algunas conclusiones.

A modo de ejemplo se exhibe en la Tabla 1 el análisis realizado, el cual debido a limitaciones para mostrarlo en forma completa por la extensión del presente trabajo, se ha reducido a un grupo de seis estudiantes del total analizado.

Tabla 1. Análisis de los errores cometidos en las instancias evaluativas, tomando seis estudiantes del total de la muestra.

Tipos de errores	Alumno 1	Alumno 2	Alumno 3	Alumno 4	Alumno 5	Alumno 6
Errores gramaticales	X	X				X
No describe los desarrollos realizados	X	X	X	X	X	

No responde las consignas	X			X		
Realiza aclaraciones que no son lógicamente válidas	X					X
Expresa con ideas incorrectas los enunciados de Teoremas y definiciones	X			X	X	
Confunde símbolos del lenguaje matemático		X				
Expone respuestas a problemas de la vida real que carecen de significado físico		X				X
Interpreta incorrectamente los enunciados de problemas		X	X	X	X	
No logra transcribir con símbolos matemáticos lo que expresa coloquialmente en sus respuestas				X	X	

Una vez analizados los exámenes de los alumnos del total de la muestra (100 estudiantes), se enumeraron los errores comunes encontrados y de ellos se calculó la frecuencia de ocurrencia. En este sentido, la Tabla 2 y la Figura 1 dadas a continuación presentan, ambas, un resumen de los errores más frecuentes.

Tabla 2. Resumen de los errores más frecuentes y la frecuencia de ocurrencia.

Tipos de errores	**Porcentaje de error**
Gramaticales	39%
Ortográficos	3%
Interpretación incorrecta de la consigna	56%
Carencia de descripciones coloquiales en las justificaciones	76%
Escritura incompleta de enunciados de teoremas y definiciones	71%
Aclaraciones que no son lógicamente válidas	63%
Interpretación incorrecta de los enunciados de problemas de aplicación	91%

Se destaca que la mayoría de los alumnos tienen dificultades para interpretar los enunciados de problemas de aplicación, mientras que, de la observación de los exámenes, se desprende que en su mayoría, omiten en sus producciones las justificaciones de los procedimientos empleados para realizar las resoluciones.

Analizando la encuesta se pudo evidenciar que el 95% de los estudiantes que cometen errores de ortografía, gramaticales y de interpretación de enunciados no leen libros ni escriben textos que no sean los que se soliciten como parte de las actividades curriculares.

Una visualización de los porcentajes señalados se puede observar en la Fig. 1 a modo de Diagrama de barras:

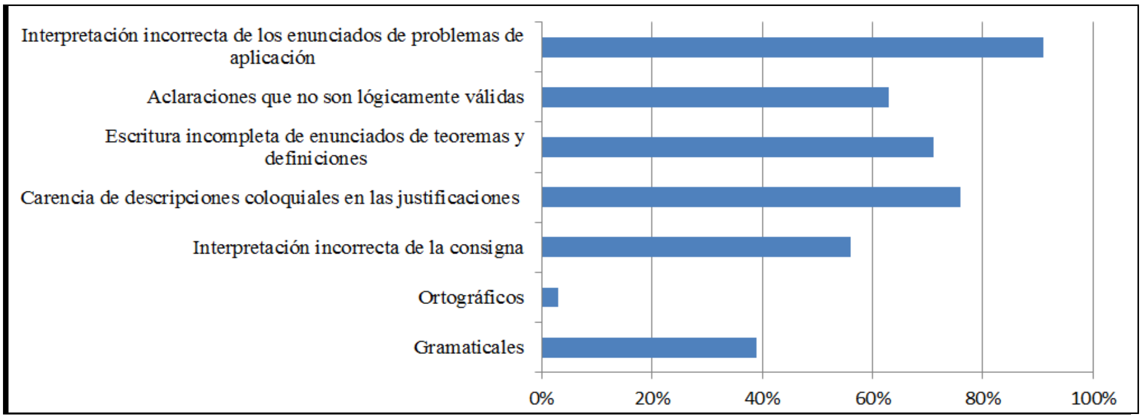


Fig. 1. Representación de los errores más frecuentes y el porcentaje de ocurrencia.

Por otra parte, se han analizado las características del núcleo familiar del alumno, con ellas se trató de buscar su incidencia en los resultados obtenidos. Los mismos, arrojaron que el 60% de los progenitores de los encuestados, tienen estudios secundarios completos; el 30% tiene al menos uno de sus padres con nivel terciario ó universitario completo y sólo el 10% de ambos padres poseen estudios terciarios ó universitarios completos.

Para subsanar estas dificultades observadas en los estudiantes se propone:

- Incorporar, paulatinamente, ejercicios que fomenten la lectura y producciones escritas. En este sentido al finalizar cada módulo de la asignatura, se entregará a los alumnos una actividad obligatoria que consistirá en diez preguntas conceptuales referidas a los contenidos de dicho módulo, en las que no se les requiere desarrollos matemáticos. Esta actividad tiene como finalidad fomentar el razonamiento en los estudiantes.
- Como una condición de aprobación de la asignatura, complementaria a las existentes para los alumnos que son candidatos a la promoción de la asignatura, al finalizar el cursado y las evaluaciones cuyos resultados van indicando su condición, deberán leer y analizar un artículo, entregado por el docente, relacionado con temas de la carrera que cursa y entregar un informe escrito (no a modo de resumen) de los aspectos más importantes que ha rescatado de la interpretación de dicha lectura. Esta actividad, que se hará bajo ciertas pautas establecidas por el docente, tiene como objetivo primordial fomentar en el alumno la lectura de textos científicos y su correspondiente análisis e interpretación.

4 Conclusiones y trabajos futuros

A partir de la presente investigación se ha podido evidenciar que en la mayoría de los estudiantes se detectaron errores relacionados con el uso incorrecto de las formas gramaticales, lo cual les dificulta construir en forma correcta sus respuestas, hecho que pone en relieve la falta de lectura de textos, ya sea que se trate de textos académicos, científicos o de otro tipo. Por otra parte, sus producciones escritas demuestran carencia de lenguaje expositivo y argumentativo necesario en los estudiantes universitarios de nuestras carreras de ingeniería.

Si bien se puede reconocer que en las asignaturas de Matemática prevalece el desarrollo simbólico frente al coloquial, se insiste al alumno de ingeniería que describa y justifique siempre, los procedimientos realizados sobre la temática que se está evaluando, ya que es común evidenciar la escasa y casi nula descripción de procedimientos además de incorrectos desarrollos de enunciados de teoremas y definiciones y/o aclaraciones que no son lógicamente válidas.

Aunque en menor medida se encontraron errores de interpretación de las consignas, el conjunto del tipo de errores encontrados pone en evidencia la falta de algunas habilidades para leer y escribir que tienen los estudiantes universitarios. Cabe aclarar que sorpresivamente, el error que tuvo menor incidencia en el análisis efectuado resultó ser el de ortografía.

Por todo lo expuesto, es necesario e importante reconocer las dificultades que les acarrea a los estudiantes la falta de lectura ya que también puede ser un factor que les retrase el aprendizaje de las asignaturas.

En base a la importancia de guiar al alumno en superar algunas carencias en la práctica de algunos hábitos, se espera ampliar la investigación en el futuro mediante la búsqueda de estrategias que ayuden a mejorar las situaciones analizadas, con el fin de subsanar en los alumnos un mayor compromiso hacia la adquisición de hábitos de lectura ya que distintas investigaciones han reflejado que las falencias de los alumnos en aspectos que tienen que ver mayormente con la lecto-comprensión, son factores que inciden negativamente en el rendimiento académico y probablemente sean causantes de aumentar los índices de deserción existentes, cuestión que también nos preocupa año a año.

Referencias

1. Distéfano, M. L.; Pochulu, M. D.; Font, V.: Análisis de la complejidad cognitiva en la lectura y escritura de expresiones simbólicas matemáticas.Journal of Research in Mathematics Education. Vol. 4, N° 3 (2015)
2. Clérici, C.; Monteverde, A.; Fernández, A..: Lectura, escritura y rendimiento académico en ingresantes universitarios. *Ciencia, docencia y tecnología*. pp 35-70. (2015). Consultado en. http://www.scielo.org.ar/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1851-17162015000100002&lng=es&tlng=pt. Accedido el 06 de julio de 2018.
3. Moyetta, D.; Lúchese, M.; Fernández, R.: Leer en áreas de conocimiento: la experiencia en la Facultad de Cs. Médicas, U.N.C., *Zona Próxima,* N° 19, pp.86-94, (2013) Disponible en http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=85329192008. Recuperado el 14 de Julio de 2018
4. Helao Salazar, J. I.; Londoño-Vásquez, D.: Relación literacidad, contexto sociocultural y rendimiento académico: la experiencia de la Facultad de Ciencias Empresariales de la Institución Universitaria de Envigado. *Revista Encuentros,* Vol. 15, Nº 01, pp. 29-46. (2017).
5. Cassany, D.: Investigaciones y propuestas sobre literacidad actual: multiliteracidad, internet y criticidad. *Cátedra UNESCO para la Lectura y la Escritura*. (2005).
6. Cano, F.; García, A.; Justicia, F. y García Berbén, A. B.: Enfoques de aprendizaje y comprensión lectora: el papel de las preguntas de los estudiantes y del conocimiento previo. *Revista de psicodidáctica.* Vol. 19, N° 2, pp 247-265 (2014)
7. McInerney, D. M.; Wing-yi Cheng, R.; Mo Ching Mok, M.; Kwok Hap, A.:Academic Self-Concept and Learning Strategies Direction of Effect on Student Academic Achievement. *Journal of Advanced Academics* Vol 23, N°3, pp 249–269 (2012). Obtenido de https://www.researchgate.net/profile/Dennis_Mcinerney3/publication/258153967_Academic_Self-Concept_and_Learning_Strategies_Direction_of_Effect_on_Student_Academic_Achievement/links/551a24150cf2f51a6fea2b81/Academic-Self-Concept-and-Learning-Strategies-Direction-of-Effect-on-Student-Academic-Achievement.pdf?origin=publication_detail. Accedido el 20 de junio de 2018.
8. García, T.; Cueli, M.; Rodríguez, C.; Krawec, J. & González-Castro, P.: Conocimiento y habilidades metacognitivas en estudiantes con un enfoque profundo de aprendizaje. Evidencias en la resolución de problemas matemáticos. *Revista de Psicodidáctica* , Vol 20, N° 2,pp. 209-226 (2015).
9. Vidal Mocoso, D.; Manriquez Lopez, L.: El docente como mediador de la comprensión lectora en universitarios. *Revista de la educación superior.* Vol *45, N°* 177, pp. 95-118 (2016). Extraído de https://dx.doi.org/10.1016/j.resu.2016.01.009. Accedido el 10 de julio de 2018.
10. Tapia Paredes, N.: Propuesta metodológica para desarrollar la compresión lectora en las Instituciones Educativas de las Fuerzas Armadas del Ecuador. *Congreso Iberoamericano de las Lenguas en la Educación y en la Cultura* (2012). Extraído de file:///D:/Mis%20documentos/Downloads/Tapia_Nancy.pdf. Accedido el 7 de Julio de 2018

El Concepto de Trazabilidad Aplicado a la Educación Matemática en las Carreras de Ingeniería

Andrea Comerci[1], Daniela Emmanuele[2]
[1] Departamento de Materias Básicas, FRGP, Universidad Tecnológica Nacional
Av.Y Hirigoyen 288, Gral Pacheco, Buenos Aires
acomerci@docente.frgp.utn.edu.ar,
[2] Departamento de Matemática, Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura, Universidad Nacional de Rosario
Av. Pellegrini 250, Rosario, Santa Fe
emmanueledaniela@gmail.com

Resumen. El presente escrito tiene la intención de mostrar el proceso utilizado para construir un dispositivo metodológico que llamaremos *trazabilidad de un contenido matemático en una situación escolar* elaborado para analizar el discurso matemático escolar (dME) referido al uso dado del contenido *autovalores y autovectores* en las planificaciones de materias correlativas a Álgebra y Geometría Analítica. Dichas materias integran los planes de estudio de las carreras de ingeniería de la Facultad Regional Pacheco de la Universidad Tecnológica Nacional (FRGP-UTN). Aclaramos que este trabajo es una primera aproximación al objeto de estudio de una tesis de maestría en Metodología de Investigación Científica incluida en el proyecto ING548 que se enmarca en la Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa (TSME) y su objetivo es indagar acerca del tipo de resignificación progresiva del contenido matemático mencionado bajo el supuesto que se trata de un conocimiento en uso a lo largo de toda la carrera.

Palabras Clave: Álgebra, Ingeniería, Trazabilidad, Socioepistemología, Resignificación progresiva.

1 Introducción

Harvey Brooks citado en [1] afirma que:

El dilema del profesional hoy en día está en el hecho de que los dos extremos del vacío que espera llenar con su profesión están cambiando rápidamente: el cuerpo de conocimientos que debe utilizar y las expectativas de la sociedad a la que debe servir. Estos dos cambios tienen su origen en un mismo factor común: el cambio tecnológico. El problema no puede ser interesadamente expresado en términos de demasiada tecnología. Más bien se trata de si podemos generar un cambio tecnológico suficientemente rápido para afrontar las expectativas y demandas que la tecnología misma ha generado. Y las cuatro profesiones -medicina, ingeniería, gestión de empresas y educación- pueden llevar el peso de la responsabilidad para generar y conducir este cambio. Esto plantea al profesional una exigencia de adaptabilidad que no tiene precedente.

El motivo por el cual iniciamos nuestro trabajo con la cita de Brooks es porque el fenómeno descripto en la misma tiene vigencia local, al menos desde hace una década. Ello queda de manifiesto en las diversas formulaciones de políticas universitarias nacionales sobre la formación de futuros ingenieros planteadas desde distintos organismos estatales o por iniciativas institucionales. Sólo por citar algunas de ellas mencionaremos: el Plan Estratégico de Formación de Ingeniero 2012-2016 (Ministerio de Educación de la Nación), el Programa Argentina Innovadora 2020 (Ministerio de Ciencia, Tecnología e Innovación y Desarrollo de la Nación); el Laboratorio de Monitoreo de Inserción de Graduados (MIG) y el Consejo Federal de Decanos de Facultades de Ingeniería (CONFEDI)

Entre las propuestas emitidas por las distintas organizaciones nombradas se puede identificar al menos una coincidencia que se vincula con la necesidad de efectuar cambios en el diseño curricular de las carreras ingenieriles. Cabe aclarar que nuestro trabajo se contextualiza en las carreras de ingeniería mecánica y civil de la FRGP-UTN. Y que a pesar de aquello que se explicita en el contenido de los planes de la carrera, se reconoce de manera implícita la existencia de la disyuntiva planteada por Brooks, y por ello entendemos que aún no se ha sorteado tal dilema. En este sentido, nosotros en tanto profesionales dedicados a la docencia en carrera de ingeniería, asumimos esa responsabilidad como actores de cambio. Y nos cuestionamos sobre cómo se expresa en los currículos de ingeniería ese requisito de adaptabilidad a la realidad comentada en [1] con la que deben contar los profesionales, en este caso, los ingenieros.

Nuestro problema consiste en pensar un instrumento metodológico que permita identificar la resignificación progresiva de un conocimiento matemático específico que se supone -ya que aparece en los planes de estudio- fue seleccionado para enseñar porque, de alguna manera, ha de tratarse de un saber que un ingeniero debe tener disponible para su uso en la práctica profesional. Bajo estos supuestos, concebimos que el problema debe encararse desde dos campos disciplinares: por un lado, desde una epistemología de las prácticas que advierta cómo identificar la demanda social hacia la institución universitaria encargada de formar profesionales y por el otro lado, desde una Socioepistemología que dé cuenta de cómo son puestos en uso, los conocimientos- en nuestro caso matemáticos- en dicha formación.

El abordaje de nuestro problema bajo la consideración de esos dos corpus teóricos permitió efectuar la identificación y la adaptación de un concepto que procede del ámbito de los procesos productivos o de métodos de desarrollo de software [2] como es el de trazabilidad. Para dar cuenta de los motivos por el cual elegimos realizar la adaptación al contexto educativo de la mencionada noción nos hemos respaldado en constructos provenientes de la Epistemología de la Práctica Profesional desarrollada por Schön y de la Socioepistemología de la Educación Matemática constituyéndose, de este modo, en nuestro marco conceptual.

2 Estado de la cuestión. Propuestas sobre la formación de ingenieros.

Concluida una búsqueda bibliográfica orientada hacia propuestas que versen sobre la formación profesional del ingeniero como así también la implementación de instrumentos que permitan distinguir el uso de los conocimientos seleccionados para dicha formación pudimos poner en consideración: el trabajo realizado por el Laboratorio de Monitoreo de Inserción de Graduados (MIG); el Plan Estratégico de Formación de Ingenieros 2012-2016 (PEFI); un documento del CONFEDI y el Plan Argentina Innovadora 2020.

El MIG se constituye en un antecedente de un dispositivo nuevo de instrumentos de seguimiento en el mercado laboral de toda persona que haya transitado (graduado, estudiante o haya abandonado) por el nivel superior [3], en particular, en algunas sedes de la Universidad Tecnológica Nacional. Se trataba de un espacio de investigación dirigido por la profesora Marta Panaia, investigadora del CONICET con asiento en la Universidad de Buenos Aires y el Decanato de la Regional General Pacheco a través de un grupo de profesores, graduados y estudiantes que aceptaron constituirse en un caso piloto del proyecto para poner a prueba dicho dispositivo y poder contar con la información sobre los problemas académicos de cada regional, los requerimientos de cambios del medio en el que se ubica la universidad y los estándares exigidos de calidad y acreditación.

Por su parte, el CONFEDI presentó, en 2009 – y que fue recogido posteriormente en el PEFI - una iniciativa acerca de las competencias advertidas como necesarias para el ingreso a las carreras de ingeniería. Propuesta que una vez presentada a las asociaciones de decanos de carreras científicas y tecnológicas permitió arribar a un consenso en dicho aspecto de la formación ingenieril que quedó plasmado en [4], un documento colectivo cuyos lineamientos fueron considerados como base en los acuerdos entre universidades y escuelas secundarias. Según sus autores, la consensuada propuesta posibilitaría el pasaje de los estudiantes entre ambos niveles educativos.

En el 2013, Ministerio de Educación de la Nación impulsa, en conjunto con otros actores, el desarrollo del PEFI cuyos objetivos se centraron en incrementar la cantidad de graduados en ingeniería, asegurar perfiles de formación para lograr un desarrollo sostenible del modelo productivo y del sistema científico, tecnológico y de innovación; y garantizar la presencia internacional de la ingeniería argentina.

Para las autoridades gubernamentales argentinas, el PEFI fue considerado un instrumento para el logro de las metas de desarrollo orientadas hacia el sostenimiento de un modelo productivo puesto en marcha en el año 2003 por el Estado Nacional. Metas materializadas en políticas fundadas en la elaboración de una matriz de crecimiento económico basada en factores vinculados con la producción, el valor agregado, el mercado interno y el crecimiento de las exportaciones. Los agentes estatales encargados de este proyecto vieron como un elemento necesario para la concreción de sus metas a la actuación conjunta entre sector público y privado. En este contexto, los funcionarios estatales entendían que la ingeniería era una disciplina fundamental para la consolidación del desarrollo industrial, para establecer el vínculo entre conocimiento científico e innovación productiva, y la disminución de los niveles de dependencia tecnológica.

En este sentido, se atendía al hecho donde no sólo era necesario fortalecer la formación mediante el aprendizaje de contenidos, sino también a través del desarrollo -durante el proceso formativo- de capacidades, actitudes y habilidades que permitan generar un profesional de alta capacitación técnica con compromiso social, conciencia ambiental y capacidad de liderazgo.

En tanto ese mismo año, 2013 , el Dr. Barañao en ejercicio como Ministro de Ciencia, Tecnología e Innovación Productiva de la Argentina - actualmente Secretario de Ciencia y Tecnología en el Ministerio de Educación- en [5] refería acerca del Plan Argentina Innovadora 2020, como “la herramienta con la que el Gobierno Nacional, a través de este Ministerio, aspira a profundizar este accionar en los próximos años y crear las condiciones para que la ciencia, la tecnología y la innovación sean las impulsoras de un salto cualitativo en materia de desarrollo social y económico e inclusión social. De esta manera, el Plan es un instrumento al servicio de todos los argentinos para responder a los desafíos del presente".

A modo de resumen sobre proyectos que giran en torno a la formación en carreras de ingeniería, podemos decir que si bien todos estos instrumentos dan cuenta de la voluntad por el fomento y el seguimiento en la formación de ingenieros desde su ingreso hasta su egreso e incluso de la inserción de ingenieros noveles en el mercado laboral. Sin embargo, comprendemos que resulta incompleto si no se atiende a la necesidad de un cambio curricular que se adecue a las demandas de la región y hacia la reflexión sobre el hecho de que los actuales diseños curriculares de la UTN – implementados a partir del 2004 y que presenta algunas adecuaciones en el año 2015 - fueron elaborados para un contexto nacional y mundial particular comparados con los que se presentan en la actualidad.

Nuestra hipótesis de trabajo aborda el hecho que para lograr un cambio a nivel del diseño curricular de las carreras de ingeniería que respondan a los objetivos pensados por los distintos planes y proyectos estatales se debe contar con algún tipo de instrumento que dé cuenta del uso que se hace de los distintos conocimientos seleccionados para dichas carreras.

3 Marco conceptual

3.1 Teoría Socioepistemológica de la Educación Matemática (TSEM): racionalidad contextualizada, resignificación progresiva y discurso matemático escolar artículo

Según Ricardo Cantoral explica en [6] que [...] "la teoría Socioepistemológica sostiene que las prácticas sociales son los cimientos de la construcción del conocimiento (normatividad de las prácticas sociales), y que el contexto influye sensiblemente en el tipo de racionalidad con la cual un individuo o grupo construye conocimiento en tanto lo signifique y ponga en uso (racionalidad contextualizada). Una vez que este conocimiento es puesto en uso, es decir, se consolida como un saber, su validez será relativa a su entorno, ya que de ellos surgió su construcción y sus respectivas argumentaciones, lo cual lo dota a ese saber de un relativismo epistemológico. Así a causa de la propia evolución y de su interacción con los diversos contextos, se resignificarán estos saberes enriqueciéndose con variantes significativas (resignificación progresiva)"

Unas de las nociones de la TSME que consideraremos vertebral en nuestro estudio es el concepto de discurso matemático escolar (dME) y hace referencia a aquel discurso que fundamenta la inclusión de un saber matemático al sistema educativo y legaliza un nuevo sistema racional. Cantoral y otros en [7] sostienen que el dME se halla presente tras aquello que se pone de manifiesto como los planes de estudio, las planificaciones de cátedra, las actividades propuestas en clase, como así también en las creencias y concepciones de profesores, estudiantes y la institución académica en general.

En relación con el concepto de dME en [8] se reconoce que presenta tres fenómenos: adherencia, exclusión y opacidad. Cabe aclarar que los fenómenos no revisten orden alguno, de hecho, se observan, vinculados en forma integral.

- El fenómeno de adherencia, en términos generales, se relaciona con el hecho de *universalizar el conocimiento* que fue construido en y para responder a las necesidades de regiones dominantes, y que como consecuencia se puede ver afectada la función de éste al ser usado en un marco de referencia con especificidades distintas al que fue construido.
- La opacidad describe el *efecto producido por el dME* en el que se constituye en un obstáculo que impide la relación entre la vida cotidiana y la matemática escolar. Esta última opaca a la primera y, en consecuencia, el conocimiento del cotidiano se encuentra opaco en los marcos referenciales de la matemática escolar.
- Por último, el concepto de exclusión pone de relieve que la *centración en los objetos matemáticos* (conceptos y procedimientos matemáticos) que se ha expresado en una educación matemática pone en el centro la enseñanza y el aprendizaje de conceptos, teoremas, demostraciones, entre otras. Donde el uso del conocimiento no se percibe.

En consecuencia, queda expuesta la necesidad de discutir sobre la importancia de cambiar el foco hacia las prácticas sociales que generan el conocimiento matemático.

3.2 Epistemología de la Práctica de Schön: racionalidad técnica y prácticum reflexivo

Donald Schön desde su epistemología de la práctica pone en evidencia la problemática que experimentan las instituciones encargadas de la preparación de profesionales – en particular, Schön en [9] trata los casos para medicina, arquitectura e ingeniería- consistente en que la necesidad que tienen los aspirantes a profesionales es aquello que los centros de formación no son capaces de enseñar y afirma que el "origen de este conflicto se produce en una subyacente epistemología de la práctica profesional, durante mucho tiempo ajena a un examen crítico, consistente en un modelo de conocimiento profesional incrustado institucionalmente en el currículum y en los convenios entre el mundo de la investigación y el de la práctica. Los centros superiores de formación de profesionales, en el marco de la moderna investigación universitaria, sientan como premisa la racionalidad técnica"

Entendiendo por racionalidad técnica a aquel tipo de racionalidad -derivada de la filosofía positivista- que jerarquiza los niveles de conocimiento donde la producción del conocimiento se separa de su aplicación.

Schön precisa que la cuestión entre la idoneidad en la práctica y el conocimiento profesional necesita concebirse al revés. Esto es, no se debe comenzar con el planteo de cómo hacer un mejor uso del conocimiento científico, sino cuestionándose qué se puede aprender del modo en que en realidad los prácticos son capaces de usar para manejar aquellas zonas indeterminadas de la práctica – es decir, aquellos aspectos de los problemas que no pueden ser tratados mediante la aplicación directa de teorías y reglas derivadas del conocimiento profesional- independientemente de aquella otra competencia que se puede relacionar con la racionalidad técnica. En este sentido, el autor en [9] incorpora el concepto de *prácticum reflexivo* y lo define como aquellas "prácticas que pretenden ayudar a los estudiantes a adquirir las formas de arte que resultan esenciales para ser competentes en las zonas indeterminadas de la práctica"

Cabe aclarar que esta perspectiva no pretende la subordinación de los distintos tipos de racionalidades, ni mucho menos, de hecho, el autor en [9] trata como una de las premisas de su enfoque a aquella que sustenta que "en el terreno de la práctica profesional, la ciencia aplicada y la técnica basadas en la investigación ocupan un territorio críticamente importante si bien limitado, colindante en varios de sus lados con el arte. Existe un arte de la definición del problema, un arte de su puesta en práctica y un arte de la improvisación: todos son necesarios para mediar el uso en la práctica de la ciencia aplicada y de la técnica".

3.3 Diálogo entre la TSME y Schön. Trazabilidad de un contenido matemático en una situación escolar

Según la TSME en [10] en las practicas sociales es donde se sostiene la construcción de conocimientos, prácticas en las que se incluye el prácticum reflexivo planteado por Schön. Ambos enfoques coinciden en que la influencia del entorno sobre el tipo de racionalidad puesta en juego por un individuo se logra en la medida en que este lo ponga en uso, es decir, este tipo de racionalidad es denominada por la TSME racionalidad contextualizada en la cual la racionalidad técnica de Schön se inserta.

Una vez que este conocimiento es puesto en uso, es decir, se consolida como un saber, su validez será relativa a su contexto, ya que de ellos surgió su construcción y sus respectivas argumentaciones, validación que dota a ese saber de un relativismo epistemológico. De tal forma que en virtud de la propia evolución y de su interacción con los diversos contextos, se resignificarán estos saberes enriqueciéndose con variedades significativas (resignificación progresiva).

De modo, que contextualizando nuestro trabajo en la formación académica de profesionales de la ingeniería, donde se pone de manifiesto la necesidad de responder a las demandas de las posibles empresas receptivas, es dable reflexionar sobre la posible desvinculación entre la vida cotidiana- particularmente con la actividad laboral- y la matemática escolar y la centralización rígida de objetos matemáticos que conforma un dME y en qué medida éste obstaculiza la profesionalización.

El diálogo entre los conceptos de la TSME y de la perspectiva de Schön y la adaptación del término trazabilidad en tanto procedimiento metodológico usado en procesos productivos permitió la generación de un constructo como es el de trazabilidad de un contenido matemático en una situación escolar entendido como "el proceso que permite pesquisar el grado de resignificación progresiva de un saber o conocimiento en uso presente en los discursos profesionalizantes que se da en los sistemas didácticos en una carrera académica-profesional".

La implementación del proceso de trazabilidad según Sánchez en [11] se concreta a través de ocho pasos de los cuales de cara a la adaptación de este proceso a la educación que nos propusimos, hemos seleccionado los que siguen:

- Estudio de los sistemas de archivos que posee la institución: Estudiar detenidamente el sistema de trazabilidad de proceso formativo permite obtener beneficio de la información que el sistema genera.
- Consulta con docentes de las materias y potenciales empleadores de los egresados: acercarle inquietudes para tomar un mismo camino en común. De esta forma, tanto con docentes como con los potenciales empleadores, los registros pasarán a ser entendibles y acordes entre los diferentes actores de los distintos contextos donde son puestos en uso los conocimientos seleccionados para la formación.
- Definición del ámbito de aplicación:

a) Trazabilidad hacia atrás*:* Se trata de cuestionarse acerca de cuáles son los contenidos que se suponen previos en el currículo de la materia correlativa (ej.: materia correlativa a Álgebra y Geometría Analítica

(AyGA) como por ejemplo Estabilidad), o bien, acerca de qué contenidos previos de AyGA se ponen en uso y de qué manera se realiza en dicha materia.

b) Trazabilidad hacia delante: Preguntarse sobre cuál es la razón de ser del contenido, justificación del contenido o asignatura correlativa anterior (ej.: AyGA) para formar parte de la carrera.

Asumimos que la implantación de un proceso de trazabilidad en cada nivel de la formación desde el eslabón anterior hasta el eslabón posterior ayuda a mantener un permanente monitoreo de la articulación vertical desde el ingreso al egreso de la carrera.

- Definición de criterios para la agrupación de estudiantes en relación con la trazabilidad: Asociar de alguna manera el conjunto de estudiantes, por ejemplo, como la propuesto desde el MIG en ingresantes, abandonadores y egresados. Práctica que permita revisar los distintos niveles de resignificación de los contenidos según la etapa de formación en que cada estudiante se encuentra.
- Establecimiento de mecanismos de validación/verificación por parte de la institución: debe resultar habitual la revisión del proceso de trazabilidad. Deberá evaluarse teniendo en cuenta: la exactitud de la información almacenada. No se debiera perder de vista que la comprobación del sistema de trazabilidad debe hacerse con docentes y potenciales empleadores.

4 Esquema metodológico

El esquema metodológico de la tesis responde a la construcción de instrumentos utilizados por las ciencias sociales al cual se incorporará como procedimiento el de trazabilidad.

4.1 Estudio de casos

Entendemos que nuestro trabajo se ajusta a un estudio de casos, del cual asumimos que no se trata de una elección metodológica sino de un acto de optar por un objeto de estudio. Comprendemos que es el interés en un objeto lo que lo define y no el método que se pueda usar. En este sentido, cualquier unidad de análisis puede convertirse en ese objeto el cual puede tratarse tanto de una unidad individual como colectiva: un estudiante, un grupo de estudiantes, una institución; un programa, un sistema, etc. En nuestra investigación, el caso está representado por las planificaciones y las actividades prácticas propuestas por las materias correlativas a AyGA de las carreras de ingeniería mecánica y civil. Nuestra atención investigativa está puesta hacia la comprensión de su especificidad más que en la búsqueda de generalizaciones, en virtud de que como bien expresa Archenti en [12] “la búsqueda no se orienta hacia el establecimiento de regularidades empíricas sino hacia la comprensión del caso en su unicidad”.

4.2 Sistema de matrices de datos

Por otra parte, el diseño de la presente investigación está basado en el concepto de sistemas de matrices de datos desarrollado por Samaja en [13]. En la propuesta de Samaja, el término matrices de datos refiere a una estructura tripartita que presenta todo dato científico, según el cual el dato científico siempre contiene como elementos constitutivos: una unidad de análisis (UA), una variable o dimensión de análisis (V), un valor (R) y un indicador (I). A su vez, el autor, sostiene que el indicador es una subestructura compuesta por dos elementos: la dimensión (d) y el procedimiento (p).

La UA es aquella entidad en la que se focaliza la descripción, ente sobre el que se quiere decir algo. Las mismas conforman la muestra o las muestras de la investigación. En tanto que se llama V a los aspectos de las UA que se han seleccionado para examinar o estudiar de ellas. En virtud de considerar las V, en tanto campo de variaciones, que representan los estados posibles que puede asumir la UA surge la necesidad de clasificar esos estados. En tanto que clasificar es identificar diferencias, el concepto de sistema de clasificación es ajustado para referir a una V y para lograrlo se requiere que se cumplan con condiciones formales:

- *Exhaustividad:* Se debe contemplar el total de los estados posibles que puede presentar la UA, para el mismo y único campo de validación.
- *Exclusividad:* Cada estado posible debe excluir a los restantes, ninguna UA podrá presentar dos valores simultáneamente en la misma variable
- *Fundamento común:* Debe existir un fundamento que vincule a los valores entre sí.

Sobre esta etapa de la determinación de las dimensiones de análisis (V) resaltamos que nos resulta crucial trascendente la problematización *del saber* que nos conduce a explorar los aspectos de la construcción social del conocimiento matemático: *autovalores y autovectores*, desde sus orígenes con la finalizad de localizar y analizar tanto su aspecto epistemológico como los distintos contextos y usos que se han dado a dicho saber. Concepto que presenta características interesantes desde su terminología como bien lo expresaba el matemático Halmos en [13] al tratar este contenido: “Casi todas las combinaciones de los adjetivos propios, latentes, característicos y seculares con los sustantivos la raíz, el número y el valor, se han utilizado en la literatura para lo que llamamos un valor adecuado". Por otra parte, Davis y Peck en [14] permiten identificar que la historia de la terminología relacionada con autovectores y autovalores comprenden campos disciplinares tales como el álgebra, el análisis matemático, la mecánica, la física clásica y cuántica.

En cuanto al concepto de indicador, Sajama en [15] apela a la noción de función matemática F(x) = y, que puesto en relación con las componentes del dato se constituye del siguiente modo:

$$F(x) = y \text{ donde } F=V;\ x = UA;\ y = R;\ I = \frac{d}{p}.$$

Es precisamente en el procedimiento (p) que figura en el denominador de la expresión del I que se pretende implementar el constructo de trazabilidad que proponemos.

Siguiendo la tesis de Samaja para quien el dato es construido integrando lo que se denomina matrices de datos, se trata de una manera de ordenar en una tabla los datos de forma tal que se torna visible la estructura tripartita de los datos. En este sentido, Samaja en [15] sostiene que “cualquiera sea la investigación de que se trate, ella determina un grupo de matrices. Como mínimo, tres matrices de datos”. Dichas matrices de datos se encuentran integradas dialécticamente en diferentes niveles jerárquicos:

a) Una matriz central, que es la que se considera la matriz de datos de la investigación. Se la llama "matriz del nivel de anclaje" o, también, "matriz focal", para señalar que la investigación ha decidido "anclar" en ese nivel, entre otros posibles, y se la denota con el símbolo "Na".

b) Una matriz constituida por los contextos de las unidades del Na, que se denomina "matriz supraunitaria" y la denota como "N_{a-1}".

c) Una matriz constituida por los componentes (o partes) de las unidades de análisis del nivel de anclaje. Denominada "matriz de Nivel subunitario" que usualmente se la designa como "N_{a+1}".

4.3 Diseño del objeto

Según lo propone Samaja en [15], el diseño del objeto comprende dos pasos sucesivos, por un lado, decidir una forma de recortar el objeto, de entre las muchas formas posibles. Y, por otro lado, se trata de decidir de qué manera se va a operar para transformar las variables definidas conceptualmente, en variables observables, es decir, *operacionalizar las variables*. Estas dos tomas de decisión establecen las bases del *sistema de matrices de datos*.

En otras palabras, el objetivo general de esta fase de la investigación consiste en decidir cuál será el objeto empírico de la investigación. Es decir, dar cuenta sobre cuáles serán las entidades del campo de estudio consideradas como unidades de análisis a describir; cuáles serán las variables que se asumirán como relevantes para dicha descripción; a qué fuentes se recurrirá para obtener la información. En este sentido, entendemos que en un estudio de casos el objeto se puede abordar desde diferentes métodos y con diversas técnicas tanto de recolección de información como de análisis. Es por tal motivo que el investigador se aproxima al caso a través de la triangulación metodológica. De modo que hemos de indicar que optamos por un diseño de investigación mixto.

Como ya ha sido mencionado para generar nuestro dispositivo metodológico tomamos instrumentos y herramientas provenientes de las ciencias sociales. Y atendiendo a los esquemas metodológicos expuestos por la TSME en [6] y con la intención de recolectar información sobre “lo que dicen que hacen”, “lo que han dicho otros que hacen” y “lo que escriben que hacen” los distintos objetos e individuos involucrados en nuestro caso, el modelo de triangulación resultará como lo muestra la Fig. 1.

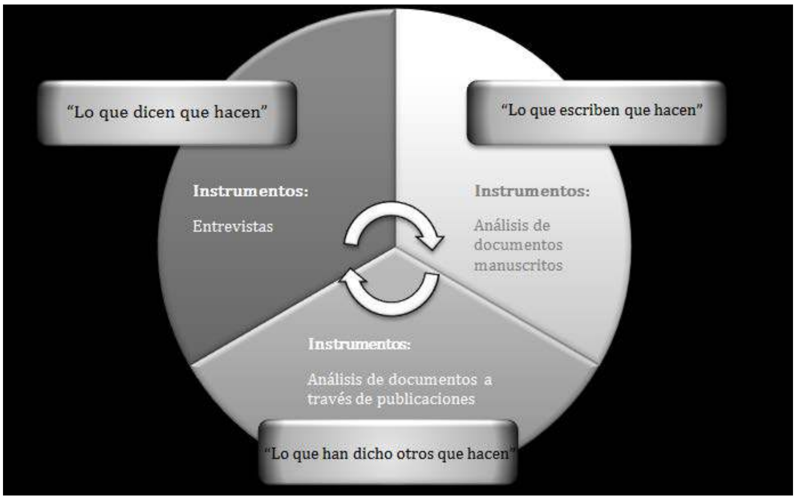


Fig. 1. Modelo de Triangulación basado en los esquemas metodológicos sugeridos desde la TSME

De modo que en nuestro trabajo identificamos tres de dichos niveles de análisis en los que se implementará los pasos del dispositivo de trazabilidad:

- *Un nivel supraunitario (N_{a-2}):* Centrado en textos históricos y originales sobre el tratamiento de autovalores y autovectores tales como el trabajo de Hawkins en [16] y el escrito de Cayley [17]
- *Un nivel supraunitario (N_{a-1}):* Centrado en los documentos tales como estatutos, cartas orgánicas o reglamentos de la UTN-FRGP, planes de estudios de correspondiente a las carreras de ingeniería civil y mecánica.
- *Un nivel de anclaje (N_a):* Centrado en los documentos tales como las planificaciones que se utilizan en las materias correlativas a Álgebra y Geometría Analítica.
- *Un nivel subunitario (N_{a+1}):* a) Centrado en encuestas a estudiantes de la carrera de ingeniería civil y mecánica que hayan cursado o estén cursando el último año de la carrera. b) Centrado en encuestas a docentes formadores de las distintas materias correlativas de las carreras mencionadas.

5 Conclusiones y trabajos futuros

Entendemos que esta parte del trabajo es el espacio dispuesto para exponer conclusiones o las ideas importantes y los trabajos futuros que se desarrollarán a partir de éstas. Pues en virtud de que el trabajo que presentamos aborda resultados alcanzados en una incipiente etapa de una tesis de maestría como es el estudio bibliográfico y la elaboración de un dispositivo metodológico, los futuros pasos a seguir consistirán en:

- En tanto que el presente trabajo versa sobre la incipiente investigación académica, acotaremos el proceso de implementación del dispositivo, y sólo se tratará la trazabilidad *hacia atrás* de una sola materia y sus respectivas correlativas.
- En cuanto a la definición del criterio de agrupación de los estudiantes con relación a la trazabilidad, nos centraremos en el análisis de las opiniones registradas por medio de un cuestionario dirigido hacia estudiantes egresados de las carreras de ingeniería civil y mecánica entre 2014 y 2018.
- Y realizaremos consultas con los docentes encargados de elaborar las planificaciones y actividades para las materias correlativas a la asignatura AyGA.

Referencias

1. Schön, D.: *El profesional reflexivo. Cómo piensan los profesionales cuando actúan*. Paidós (1998)
2. Giró, J.; Vázquez, J.; Meloni, B.; Constable, L.: *Expectativas y realidades de la trazabilidad de requerimientos en proyectos de desarrollo de software.* M &Copias impresiones (2014)
3. Panaia, Marta: *Trayectorias de ingenieros tecnológicos. Graduados y alumnos en el mercado de trabajo*. Miño y Dávila (2006)

4.AAVV: Documentos de CONFEDI: competencias requeridas para el ingreso a los estudios universitarios en Argentina. *Repositorio Digital de la Universidad FASTA*. http://redi.ufasta.edu.ar:8080/xmlui/handle/123456789/409. Accedido el 6 de junio de 2018
5. Barañao, L.: *Argentina innovadora 2020. Plan nacional de ciencia, tecnología e innovación. Lineamientos estratégicos 2012–2015*. Ministerio de Ciencia, Tecnología e Innovación Productiva. p. 11(2012)
6. Cantoral, R.: *Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa.* Gedisa (2013)
7. Cantoral, R.; Montiel, G.; Reyes-Gasperin, D.: *Análisis del discurso Matemático Escolar en los libros de texto, una mirada desde la Teoría Socioepistemológica*. AIEM - Avances de Investigación en Educación Matemática, N.º 8, pp. 9 – 28 (2015)
8. Cordero, F.; Gómez, K.; Silva, H.; Soto, S.: *El discurso matemático escolar: la adherencia, la exclusión y la opacidad*. Gedisa (2017)
9. Schön, D.: *La formación de profesionales reflexivos*. Paidós (1998)
10. Cantoral, R.; López, J.: La Socioepistemología: Un estudio de su racionalidad. *Revista Paradigma 31 (1)* https://www.researchgate.net/publication/262188795.(2010). Accedido el 6 de junio de 2018.
11. Sánchez, R.: *Introducción a la Trazabilidad: un primer acercamiento para su comprensión e implementación*. El Escriba (2008)
12. Archenti, N., Marradi, A.; Piovani, J.: *Metodología de las Ciencias Sociales*. Emece (2007)
13. Halmos, P. R.: *Finite Dimensional Vector Spaces*. Nostrand, p. 102 (1958)
14. Davies, C. y Peck, W.: *Mathematical Dictionary and Cyclopedia of Mathematical Sciences comprising definitions of all the terms employed in mathematics -- an analysis of each branch, and of the whole, as forming a single science.* A. S. Barnes and Co. (1857)
15. Samaja, J.: *Epistemología y metodología. Elementos para una teoría de la investigación científica*. EUDEBA (2010)
16. Hawkins, T.: The Theory of Matrices in the 19th Century. *Proceedings of the International Congress of Mathematicians*, pp.561–570 (1974)
17. Cayley, A.: A memoir on the theory of matrix. *A Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, pp.17–37 (1858)

Enseñanza de Recursividad en asignaturas Matemáticas y su impacto en otras asignaturas en Ciencias de la Computación

Mario E. Quintana (1) , Jorge E. Sagula (1)
(1) Facultad de Ingenieria y Tecnologia. Universidad de la Cuenca del Plata, Sede Formosa. CP 3600
quintanamario_for@ucp.edu.ar

Resumen: Aquí se aplican estrategias recursivas en distintos espacios curriculares de segundos cuatrimestres de Licenciatura en Sistemas de Información-UCP, en 2016, analizando metodologías aplicadas, contenidos abordados, criterios evaluativos seleccionados y recursos utilizados. Consecuentemente, se hizo seguimiento y monitoreo exhaustivo en clases de: Matemática Discreta y Análisis Matemático II, entrevistando a sus docentes responsables para profundizar, evaluar resultados obtenidos y conocer sus comentarios sobre la importancia de las estrategias aplicadas.
Se detectaron cambios sustanciales en cada espacio curricular, al analizar los resultados de diferentes tipos de evaluaciones, en contenidos nucleares formativos del profesional; permitiendo así, mejorar la comprensión de contenidos centrales en las asignaturas involucradas.
Los docentes valoraron usar algoritmos recursivos para resolver problemas disciplinares propios.
Nuestro convencimiento es que abordar distintos contenidos curriculares centrados en recursividad comprende dimensiones muy complejas, considerando a la recursividad como epicentro y conocimiento ordenador de conocimientos de orden superior en asignaturas de Ciencias de la Computación.

Palabras Clave: Recursividad, Contenidos Curriculares, Integración Conceptual, Ciencias de la Computación.

1. Introducción

La recursividad permite realizar grandes aportes para comprender conceptos fundamentales en distintas disciplinas de ciencias de la computación, y no sólo constituye una perspectiva diferente de resolver problemas, sino que permite optimizar procedimientos y algoritmos, contribuyendo a mejorar la deducción y demostración de conceptos centrales. Este concepto se sustenta en un trabajo de Epp [1], confirmando que "La Recursividad es una de las ideas centrales en ciencias de la computación" (1995, p. 427). Y también que "la potencia de la recursión se fundamenta en la posibilidad de definir un conjunto infinito de objetos con una declaración finita. Igualmente, un número infinito de operaciones computacionales puede describirse con un programa recursivo finito, aunque el programa no contenga repeticiones explícitas" (Wirth & Niklaus; 1976, p. 126). Estas afirmaciones fundamentan tanto los objetivos como los logros pretendidos en esta investigación.
Esta investigación parte del consenso entre los docentes de distintas asignaturas de la carrera, en pos de aplicar estrategias de enseñanza basadas en funciones recursivas a fin que los alumnos de la Licenciatura en Sistemas de Información de la UCP puedan comprender los contenidos fundamentales de su espacio curricular. Esta instancia se produjo como consecuencia de la concientización de los docentes sobre la importancia de la temática de modo de poder desarrollar contenidos centrales de sus asignaturas y así, mejorar el proceso de enseñanza. Luego, se postuló el abordaje y la aplicación de estrategias recursivas en estos espacios curriculares: Programación Orientada a Objetos; Sistemas Operativos; Modelos, Simulación y Teoría de la Decisión; Teoría de la Computación I; Investigación Operativa; Matemática Discreta; Estadística y Análisis Matemático II, desarrollados durante el 2º Cuatrimestre de la LSI. Al efecto, se observaron y analizaron las metodologías aplicadas en tópicos centrales de cada asignatura, los recursos utilizados, el monitoreo a las clases correspondientes e informes cualitativo y cuantitativo de los docentes, relevándose la información de los docentes responsables de las asignaturas consignadas a fin de profundizar los resultados obtenidos y conocer las opiniones sobre la importancia de aplicar específicamente estrategias recursivas en los respectivos contenidos y sus resultados.
En esta presentación sólo se consignará lo relevado en Análisis Matemático II y Matemática Discreta.
En Análisis Matemático II, la Recursividad se empleó para desarrollar contenidos de derivadas parciales sucesivas (u orden superior) y diferenciales totales de orden superior. La construcción de cada una de las

derivadas y las diferenciales se desarrolló desde esta perspectiva para que los alumnos pudiesen generar las sucesivas derivadas y diferenciales de orden superior para funciones de dos o más variables.
Considerando que Matemática Discreta está directamente relacionada con Recursividad, en este caso se seleccionaron Espacio Vectorial, Vectores y Dimensiones para analizar el uso de la recursividad como método de inferencia de teoremas y propiedades fundamentales.

2. Marco Teórico

Hay numerosos trabajos circunscriptos al desarrollo de la recursividad y su aplicación en contenidos ejes de asignaturas directamente relacionadas con la temática y en aquellas asignaturas donde las funciones recursivas son herramientas adecuadas para comprender temas centrales en ciencias de la computación. Esto contribuye a buscar la mejor forma de entender la recursividad vinculando a las ciencias de la computación con la matemática.
En el artículo "Una experiencia de coordinación entre las asignaturas de Análisis Matemático y Programación", Sanabria Codesal e Hinarejos [2] describen una actividad transversal entre las asignaturas citadas, obligatorias en el primer curso de Ingeniería en Informática de la Escuela Técnica Superior de Ingeniería Informática (ETSINF) de la Universidad Politécnica de Valencia (UPV). Si bien el objetivo era fomentar el trabajo cooperativo y el aprendizaje activo de los contenidos de dos asignaturas básicas de la carrera, los alumnos realizaron un trabajo grupal, relacionando contenidos de Programación con contenidos propios de Análisis Matemático mejorando la comprensión.
González Osorio [3] en su trabajo "Programación funcional: conceptos y perspectivas", efectúa un abordaje profundo de programación funcional y concluye que la implementación de una función en un lenguaje funcional definitivamente exigiría otra estrategia, pues estos lenguajes no tienen variables, ni asignaciones, ni ciclos. Por tanto, se recurre a una definición recursiva equivalente a la función. ·
Finalmente, Schiavoni, Fava y Rosso [4], presentan en el contexto de metodologías basadas en estrategias recursivas una herramienta que brinda la posibilidad de realizar seguimiento y análisis de los llamados recursivos pudiendo inspeccionar el estado de las variables en cada llamado, y así mejoran el aprendizaje de algoritmos y estructuras de datos en alumnos de Primer Año de la carrera orientada a Ciencias de la Computación.

3. Hipótesis de Trabajo

Hipótesis 1: Implementar estrategias, aplicando conceptos de recursividad y procedimientos recursivos en la enseñanza de Matemática Discreta y Análisis Matemático II, asignaturas curriculares de la Licenciatura en Sistemas de Información posibilita una mejor comprensión de los contenidos centrales de tales asignaturas.
Hipótesis 2: Los docentes responsables de los espacios curriculares concientizan a los alumnos sobre la utilidad de los algoritmos recursivos para acceder a la resolución de problemas inherentes a su disciplina brindando herramientas para la comprensión, la programación, la construcción de algoritmos y la elaboración de fórmulas, en pro de mejorar la formación del futuro egresado.
Hipótesis 3: Se reconoce que la recursividad es el eje temático que integra y relaciona a la matemática con las ciencias de la computación.

4. Metodología

Para realizar el seguimiento correspondiente en las distintas asignaturas, primero se concretaron reuniones con los profesores responsables de las asignaturas involucradas, a fin de acordar metodologías, procedimientos, contenidos, criterios evaluativos, recursos y posibles cronogramas de actividades según la planificación de cada cátedra. En la Licenciatura en Sistemas de Información de la UCP se decidió analizar sucesivamente la inserción y la aplicación de Recursividad, Relaciones Recursivas y Algoritmos Recursivos, esenciales para el desarrollo de temas ejes de cada disciplina integrante de Ciencias de la Computación.
El estudio reviste un enfoque cuali-cuantativo por la naturaleza de la situación.
Luego, en colaboración con los docentes, se decidió aplicar estrategias recursivas en temas importantes en las asignaturas: Programación Orientada a Objetos, Sistemas Operativos, Teoría de la Computación I, Investigación Operativa, Matemática Discreta, Estadística y Análisis Matemático II, con seguimiento integral de las clases específicas relacionadas con recursividad.
Finalmente, se efectuó una entrevista personal a los profesores responsables de tales asignaturas de modo de evaluar dicho abordaje, conocer la utilidad de la recursividad y, además, saber sus conclusiones sobre la importancia de aplicar estrategias recursivas en contenidos de la asignatura bajo su responsabilidad.

4.1.1. Matemática Discreta

En Matemática Discreta se abordó la recursividad, en particular, en la Unidad 3 del programa. Si bien en la mayor parte de los contenidos de la asignatura se utilizaron procedimientos y/o algoritmos recursivos, en este trabajo se tomó un tema en particular (Espacios Vectoriales, Vectores, Dimensiones) y el desarrollo de las clases al respecto.
En primera instancia se recuerda a los alumnos los conceptos de punto y recta.
Punto: objeto matemático abstracto carente de dimensiones. Si agrego un punto al lado de otro infinitamente obtengo un objeto de una (1) dimensión denominada Recta. De modo que la recta se define como un objeto matemático que tiene una (1) dimensión.
Luego, agregando infinitos puntos al lado de los puntos pertenecientes a la recta se obtiene un nuevo objeto de dos (2) dimensiones denominado Plano.
Seguidamente se deja a los alumnos que reflexionen sobre el procedimiento, y luego de unos minutos descubren la recursividad y definen al espacio como un objeto matemático de tres (3) dimensiones agregando infinitamente puntos que no pertenecen al plano a los lados de los puntos que pertenecen al plano.
Una vez establecida la diferencia entre una (1), dos (2) y tres (3) dimensiones se explica a los alumnos que los vectores son conjuntos infinitos de puntos de una dimensión que tienen dirección, magnitud o módulo y sentido. También se indica que conforme a la dimensión del espacio vectorial donde se encuentran tienen la misma cantidad de componentes ortogonales.
Se ejemplifica con espacios vectoriales de una (1) y dos (2) dimensiones, demostrando cómo se calcula el módulo y presentando a cada vector como una suma vectorial de sus componentes ortogonales, y el cálculo analítico utilizando el Teorema de Pitágoras para los triángulos rectángulos. Se invita a los alumnos a deducir el procedimiento para determinar el módulo de un vector en un espacio vectorial de tres (3) dimensiones y transcurrida media hora logran construir un triángulo rectángulo con el vector suma de las primeras dos (2) dimensiones y el componente de la nueva dimensión, quedando el vector final como suma vectorial de los tres componentes ortogonales.
Descubren la recursividad utilizada para hallar el módulo de cualquier vector así:

$$\text{modulo}^2 = \text{componente}_1^2 + \text{componente}_2^2 + \ldots + \text{componente}_{n-1}^2 + \text{componente}_n^2$$

En el espacio curricular se trabajó esta temática desde la bibliografía básica propuesta por el docente, de autores como Keneth Ross y Charles Wrigth (1990) [5].

4.1.2. Análisis Matemático II

Aquí fue importante usar los procedimientos recursivos para construir la conceptualización de derivadas parciales de orden superior. Inicialmente, se toma una función Z = f (x; y) sobre la que se definieron las derivadas parciales de primer orden.

$$\frac{\partial f(x;y)}{\partial x} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h;y)-f(x;y)}{h} = fx(x;y) = Zx(x;y)$$

$$\frac{\partial f(x;y)}{\partial y} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x;y+k)-f(x;y)}{k} = fy(x;y) = Zy(x;y)$$

que son, en general, nuevas funciones de x e y.
Luego, si estas funciones admiten a su vez derivadas, las nuevas funciones así definidas se denominan derivadas segundas de f (x; y); las derivadas de las derivadas segundas se denominan derivadas terceras de f (x; y); etc.
Dada la función Z = f (x; y) se tienen cuatro derivadas parciales segundas:

$$\frac{\partial^2 f(x;y)}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = f_{\mathrm{xx}}(x;y) = Z_{\mathrm{xx}} = Z_{x^2}$$

$$\frac{\partial^2 f(x;y)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = f_{\mathrm{xy}}(x;y) = Z_{\mathrm{xy}}$$

$$\frac{\partial^2 f(x;y)}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f(x;y)}{\partial y} = f_{\mathrm{yx}}(x;y) = Z_{\mathrm{yx}}$$

$$y2$$

$$\frac{\partial^2 f(x;y)}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y \partial y} = f_{\mathrm{yy}}(x;y) = Zalignl$$

Habrá ocho derivadas parciales terceras, correspondientes a la derivación con respecto a x e y de las cuatro derivadas segundas, obtenidas en forma recurrente:

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3};\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y};\frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y^2};\frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y\partial x};\frac{\partial^3 f}{\partial y\partial x^2};\frac{\partial^3 f}{\partial y^2\partial x};\frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y\partial x};\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}$$

En general, una función Z = f (x; y) de dos variables independientes tiene 2r derivadas de orden “r”, pero bajo ciertas condiciones, algunas de las cuales son iguales entre sí, se puede afirmar, en general, que el número de derivadas de orden “r” distintas, es igual a r + 1.

Análogamente, los alumnos al elaborar y hallar las diferentes derivadas sucesivas logran descubrir la relación entre las derivadas parciales cruzadas de orden superior; así, se pudieron acordar los teoremas que determinan las condiciones bajo las cuales: $f_{\mathrm{xy}}(x;y) = f_{\mathrm{yx}}(x;y)$, el Teorema de Schwartz y el corolario de Bonnet.

Adicionalmente, a los alumnos se les propusieron deducciones de las Diferenciales Sucesivas desde esta perspectiva.

Se parte de la diferenciación de funciones de dos variables:

$$\mathrm{df} = f_x(x;y).\mathrm{dx} + f_y(x;y).\mathrm{dy}$$

tal que: df depende de x; y; dx; dy.

Dando valores fijos a dx y dy, la diferencial dependerá únicamente de x e y, y considerada como una función de estas dos variables, tal que la diferencial segunda está dada por: $d^2f = d[\mathrm{df}]$

Extendiendo estos conceptos a funciones de dos variables, para diferenciales de orden superior, resulta:

$$d^3f = d[d^2f] = d[d(\mathrm{df})]; d^4f = d[d^3f] \ldots\ldots d^nf = d[d^{n-1}f]$$

Si $f(x;y) \in C^2$ existirá la diferencial segunda.

Habiendo considerado: $\Delta x = \mathrm{dx} \wedge \Delta y = \mathrm{dy}$ se tendrá:

$$d^2f(x,y) = d[\mathrm{df}(x,y)] = d\big[f_x(x;y).\mathrm{dx} + f_y(x;y).\mathrm{dy}\big] = d[f_x(x;y).\mathrm{dx}] + d\big[f_y(x;y).\mathrm{dy}\big]$$

y siendo: dx = cte., dy = cte. resultará:

$$d^2f(x,y) = \{d[f_x(x;y)]\}.\mathrm{dx} + \big\{d\big[f_y(x;y)\big]\big\}.\mathrm{dy} = f_{\mathrm{xx}}(x;y).\mathrm{dx}.\mathrm{dx} + f_{\mathrm{xy}}(x;y).\mathrm{dy}.\mathrm{dx} + f_{\mathrm{yx}}(x;y).\mathrm{dx}.\mathrm{dy} + f_{\mathrm{yy}}(x;y).\mathrm{dy}.$$

$$d^2f(x,y) = f_{\mathrm{xx}}.\mathrm{dx}^2 + 2f_{\mathrm{xy}}.\mathrm{dx}.\mathrm{dy} + f_{\mathrm{yy}}.\mathrm{dy}^2$$

Se denomina “Operador Diferenciación” a la expresión:

$$d = \frac{\partial}{\partial x}.\mathrm{dx} + \frac{\partial}{\partial y}.\mathrm{dy}$$

Aplicando el operador diferenciación a una función f(x; y) se obtiene:

$$\mathrm{df}(x,y) = \left(\frac{\partial}{\partial x}.\mathrm{dx} + \frac{\partial}{\partial y}.\mathrm{dy}\right).f(x;y) = \frac{\partial f(x;y)}{\partial x}.\mathrm{dx} + \frac{\partial f(x;y)}{\partial y}.\mathrm{dy}$$

La diferencial primera se obtiene aplicando el operador diferenciación a la función
f (x; y), recursivamente.

Aplicando ahora el operador al cuadrado, obtendremos la diferencial segunda:

$$\frac{\partial}{\partial x}.\mathrm{dx} + \frac{\partial}{\partial y}.\mathrm{dy} \quad {}^2.f(x;y) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}.\mathrm{dx}^2 + 2\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}.\mathrm{dx}.\mathrm{dy} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}.\mathrm{dy}^2$$

$$d^2f(x,y) =$$

Si $f(x;y)\hat{I}C^3$ existirá la diferencial tercera; y por tanto se verá que d^3f se obtiene aplicando el operador diferenciación elevado al cubo, recursivamente:

$$\frac{\partial}{\partial x}.\mathrm{dx} + \frac{\partial}{\partial y}.\mathrm{dy} \quad {}^3.f(x;y) = \frac{\partial^3}{\partial x^3}.\mathrm{dx}^3 + 3\frac{\partial^3}{\partial x^2\partial y}.\mathrm{dx}^2.\mathrm{dy} + 3\frac{\partial^3}{\partial x\partial y^2}.\mathrm{dx}.\mathrm{dy}^2 + \frac{\partial^3}{\partial y^3}.\mathrm{dy}^3$$

$$d^3f(x,y) =$$

En general si $f(x;y) \in C^k$ se tendrá:

$$\frac{\partial}{\partial x}.\mathrm{dx} + \frac{\partial}{\partial y}.\mathrm{dy} \quad {}^k.f(x;y)$$

$$d^kf =$$

Finalmente, se pidió a los alumnos la construcción de la diferencial sucesiva para Funciones de Tres Variables a fin de evaluar el uso de los procedimientos recursivos para su deducción.

Para fundamentar lo demostrado, desde este enfoque, el docente propuso consultar a Rabufetti (2001) [6].

4.2. Entrevista a docentes

En segunda instancia de la metodología implementada se realizó una encuesta personal a los docentes de las asignaturas: Programación Orientada a Objetos; Sistemas Operativos; Modelos, Simulación y Teoría de la Decisión; Teoría de la Computación I; Investigación Operativa; Matemática Discreta; Estadística y Análisis Matemático II. Al efecto, se tomaron variables como contenidos abordados para aplicar la recursividad, actividades realizadas por los alumnos, tiempo dedicado a la temática, recursos utilizados, entre otros. Además, fueron consultados sobre la importancia de la recursividad como estrategias de enseñanza en su asignatura en temas ejes y sus opiniones sobra la recursividad como herramienta didáctica para su asignatura.

También se les consultó en cuanto a las dificultades y ventajas al abordar el tema sobre recursividad en temas ejes de las asignaturas.

5. Resultados Obtenidos

5.1. En los Espacios Curriculares

Más allá del análisis específico planteado en este trabajo en el desarrollo de las asignaturas Matemática Discreta y Análisis Matemático II, como resultado de las entrevistas a docentes, se sintetizan cuestiones vinculadas a la competencia de las funciones recursivas como recurso, herramienta o como conocimiento fundamental en la construcción de conceptos o contenidos ejes; su influencia en las actividades de enseñanza y aprendizaje, y la articulación e integración con otras asignaturas de cada una de los espacios en este cuadro:

Tabla 1. Recursividad, su articulación e integración.

Asignatura	**Temas de las asignaturas**	**Competencias de la recursividad**	**Articulación e integración**	**Actividades realizadas**
Matemática Discreta	Espacio vectorial. Vectores. Dimensiones	Deducción para determinar el módulo de un vector en distintas dimensiones.	Álgebra Análisis Matemático	Construcción de conceptos y fórmulas. Resolución de ejercicios.
Estadística	Regresión Lineal Residuos	Análisis de residuos en el método de los mínimos cuadrados. Deducción de los residuos recursivos.	Probabilidad y Estadística Inferencial	Elaboración de método de análisis. Deducción del error de predicción.
Análisis Matemático II	Derivadas Parciales y Diferencial total de orden superior	Uso de los procedimientos recursivos a fin de construir la conceptualización de las derivadas parciales de orden i diferenciales de orden superior.	Probabilidad y Estadística Inferencial	Construcción de fórmulas y procedimientos. Resolución de ejercicios.
Investigación Operativa	Programación Lineal: Método Simplex	Construcción y comprensión del Método Simplex.	Todas las asignaturas relacionadas con problemas de optimización.	Deducción del procedimiento del Simplex. En la resolución de ejercicios. Optimización.
Teoría de la Computación I	Lenguaje Formal. Gramática	Análisis y uso de la recursividad en gramáticas. Concepción de las producciones recursivas. La conceptualización y la interiorización de	Todas las asignaturas de programación y afines.	Deducción de conceptos. Resolución de ejercicios y situaciones.

		la recursividad para gramáticas recursivas.		
Programación Orientada a Objetos	Programación en Java	Construcción de un programa. Programación de una aplicación.	Todas las asignaturas de programación y afines.	Desarrollo de una programación. Construcción de una estructura para almacenar operadores y operandos en forma dinámica
Modelos, Simulación y Teoría de la Decisión	Congruencias. Métodos recursivos.	Deducción de métodos. Construcción de algoritmos.	Todas las asignaturas de programación y afines.	Elaboración de fórmulas y algoritmos. Resolución de ejercicios.
Sistemas Operativos	Concurrencia	Analisis de paradigmas que permiten la ejecución de los procesos concurrentes. Tiempo de ejecución de un proceso (programa) de naturaleza recursiva.	Todas las asignaturas de programación y afines.	Resolución de situaciones problemáticas, seleccionando el paradigma y el lenguaje de programación. Ejercicios de Análisis del tiempo de ejecución, en tiempo de CPU de usuario, tiempo de CPU del sistema y tiempo real.

Como se observa en el desarrollo de las temáticas en cada asignatura se destaca la solvencia de los alumnos en contenidos estrechamente relacionados con la Recursividad. En nuestra opinión, y luego de haber presenciado el dictado de los temas centrales expuestos en la **Tabla 1**, observando las estrategias resolutivas de los alumnos, los resultados de las estrategias de enseñanza aplicadas inicialmente fueron conducentes a este logro, concluyendo que los alumnos profundizaron la comprensión del tema en cuestión.
Durante el desarrollo de las clases pedagógicas en cada asignatura, se percibió el logro de las siguientes capacidades de los alumnos:

Tabla 2. Las capacidades recursivas en las asignaturas

Capacidades	**Asignatura**							
	Mat. Discreta	Análisis Matemático II	Estadística	Investigación Operativa	Teoría de la Comp. I	Programación O. a Objetos	Modelos, S. y T. de la D.	Sistemas Operativos
Dominio de algoritmos recursivos	X	X	X	X	X	X	X	X
Pensamiento recursivo en resolución de situaciones y ejercicios		X	X	X	X	X	X	X
Elaboración deductiva de conceptos y propiedades desde los conceptos recursivos	X	X	X		X		X	X
Creatividad en la resolución de		X		X	X	X	X	X

situaciones y ejercicios, en base a algoritmos y procedimientos recursivos								
Construcción adecuada de la sintaxis de programación						X	X	X
Aplicación correcta de procedimientos para programar en cualquier lenguaje						X	X	X

Sin embargo, el valor más saliente es destacar la importancia de la Recursividad y sus temas afines, y su tratamiento como eje en numerosas asignaturas de la carrera.

Se destaca que este estudio sólo cubrió espacios curriculares desarrollados durante el II Cuatrimestre Lectivo; quedando pendiente promover, en futuras investigaciones, la exploración en otras asignaturas de la Licenciatura en Sistemas de Información.

5.2. En encuesta a docentes

De las encuestas realizadas a los docentes responsables de cada una de las asignaturas se obtuvieron los siguientes resultados (ver Tabla 3)

Tabla 3. Opiniones de los docentes sobre recursividad.

Recursividad	Muy de acuerdo	Algo de acuerdo	Algo en desacuerdo	Muy en desacuerdo
1. La naturaleza particular de la recursividad como algoritmo es útil para las temáticas de la asignatura.	7	1	-	-
2. La recursividad tiene suficiente consistencia lógica para formalizar rigurosamente un contenido de la asignatura.	5	3	-	-
3. La riqueza eminentemente práctica de la recursividad en el "mundo de la computación" hace que este tema tenga mayor utilidad en la resolución de situaciones y ejercicios en mi asignatura.	6	2	-	-
4. Abordo la recursividad como cualquier otro contenido de mi asignatura.	2	1	5	-
5. Los conocimientos sobre recursividad son fundamentales en mi asignatura.	4	4	-	-
6. Las características propias de la recursividad hablan por sí solas de la importancia de estos contenidos en el currículo de mi asignatura.	6	2	-	-

La mayoría de los docentes afirman que el abordaje de la recursividad como tal no necesita extensas clases dado que los alumnos, en alguna medida, lo tienen interiorizado. Y el uso de la Recursividad tiene una connotación, en la mayoría de las asignaturas, con lo metodológico, mejorando y fortaleciendo las estrategias de enseñanza para desarrollar temas ejes de las asignaturas.

6. Análisis y Conclusiones

En este trabajo se pretende confirmar y fortalecer el principal objetivo del proyecto de investigación: fundamentar por qué la recursividad es un tópico central y significativo en ciencias de la computación. Este estudio, descripto para Matemática Discreta y Análisis Matemático II, y extendido para la implicancia de los contenidos específicos a temas propios de otras asignaturas del mismo cuatrimestre (II Cuatrimestre Lectivo) de la Licenciatura en Sistemas de Información, tales como Programación Orientada a Objetos; Sistemas Operativos;

Métodos, Simulación y Teoría de la Decisión; Teoría de la Computación I; Investigación Operativa y Estadística, confirma hallazgos previos y las hipótesis, y también, lo hallado en tres asignaturas del I Cuatrimestre Lectivo de la Licenciatura en Sistemas de Información, tales como Programación III, Programación en Ambiente Web y Análisis Matemático I.
Conforme a las consideraciones expuestas en los resultados del desarrollo de las clases en cada asignatura y las opiniones de los docentes, se concluye que la comprensión de la Recursividad como herramienta y su poder, favorece la resolución de problemas naturalmente, llegando a corroborar la solución del problema, en cualquier asignatura, en general.
Considerando las afirmaciones de los docentes encuestados, concluimos que emplear estrategias recursivas para abordar ejes centrales en asignaciones de Ciencias de la Computación ha mejorado ostensiblemente la enseñanza de otros contenidos.
Con este estudio, se amplía el espectro de asignaturas donde se aborda esta temática que influye en la enseñanza de contenidos ejes, y permite reafirmar la necesidad de investigar el abordaje y trabajo de la Recursividad en las asignaturas restantes de la Licenciatura en Sistemas de Información, de modo de profundizar el conocimiento de la temática para establecer y confirmar la importancia de las Funciones Recursivas en Ciencias de la Computación, en su más amplia expresión; consecuentemente, queda pendiente la necesidad de promover actividades similares en las demás asignaturas que conforman el plan de estudios de la carrera, a efectos de permitir que los alumnos logren una mejor comprensión de conceptos fundamentales de cada espacio curricular en las ciencias de la computación.

7. Referencias

1. Epp, S.. Matemática Discreta con aplicaciones. 4ta. Edición. Editorial Cengage Learning. México D.F. (2011)
2. Martínez Hinarejos, Carlos; Sanabria Codesal, Esther. “Una experiencia de coordinación entre las asignaturas de Análisis Matemático y Programación de la ETSINF”. VIII Jornadas de Redes de Investigación en Docencia Universitaria, Alicante. España. ISBN 978-84-693-6845-9 . PP. 1050-1060 . (2010)
3. F. González Osorio. Programación Funcional: Conceptos y Perspectivas. Ingeniería e Investigación, No. 40, Agosto de 1998, pp. 65-71, Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de Colombia. (1998)
4. Schiavoni, María Alejandra; Fava, Laura Andrea; Rosso, Jorge (Junio 2015. Una herramienta educativa para mejorar la comprensión de algoritmos y estructuras de datos. “X Congreso sobre Tecnología en Educación & Educación en Tecnología (TE & ET)”. Corrientes. Argentina. Libro de Acta ISBN: 978-950-656-154-3. p. 617-623. (2015)

8. Bibliografías

5. Ross, K. y Wrigth, C. Matemática Discreta. Segunda Edición. Editorial Prentice Hill.(1990)
6. Rabufetti, H. Introducción al Análisis Matemático - Cálculo II. Buenos Aires, El Ateneo. (2001)

EMCI 2018

Continuemos intercambiando ideas, conocimientos y experiencias.

Secretaría de Ciencia, Tecnología y Posgrado

Departamento de Materias Básicas

UTN VILLA MARIA




78 Trabajos presentados

Ejes Temáticos:

1. Articulación e Ingreso a las carreras de Ingeniería	10 Trabajos
2. Extensión	1 Trabajo
3. Aplicaciones de la Matemática	10 Trabajos
4. Experiencias de Cátedra	38 Trabajos
5. Investigación Educativa	19 Trabajos

Compilación: **Martha S. Rosso, Mercedes Soria, Javier Gonella**




Universidad Tecnológica Nacional
Facultad Regional Villa María
Av. Universidad 450 - Villa María, Córdoba

Agosto 2022

ISBN 978-987-4998-95-8