Universidad Tecnológica Nacional

Facultad Regional Avellaneda

Licenciatura en Enseñanza de la Matemática

Tesina de la Licenciatura en Enseñanza de la Matemática

El uso de las fracciones y de sus diferentes significados en la resolución de problemas.

Un estudio exploratorio en 1° año de la escuela secundaria.

Prof. Marisa Roxana Giglio
Autora

Dra. (Lic.) Claudia Noemí Ferrari
Directora

2019

Agradecimientos

Agradezco a Dios por brindarme la fortaleza necesaria para poder concluir con mis estudios de grado de Licenciada en Enseñanza de la Matemática; a mi marido Carlos, por el apoyo incondicional y la comprensión que tuvo durante todo este proceso. A mi Directora de tesina Claudia Noemí Ferrari por dedicarme parte de su tiempo y compartir sus conocimientos conmigo, brindarme su apoyo y confianza permitiéndome de esa forma culminar con este proyecto y, a la Universidad Tecnológica Nacional, Facultad Regional Avellaneda por brindarme la oportunidad de profesionalizarme y aumentar mis conocimientos.

Índice de contenidos

Índice de tablas, gráficas y figuras

Resumen

Este trabajo presenta una experiencia de aula con alumnos de los segundos años de la educación secundaria, sobre el concepto de fracción y sus diferentes significados en diversos contextos. Enmarcado en la Teoría de los Campos Conceptuales (Vergnaud, 1990, 2013, 2016) y las seis interpretaciones del concepto de fracción (Llinares y Sánchez,1988; Pujadas y Equiluz, 2000; Maza y Arce, 1991; Ponce, 2004) se diseñó e implementó una evaluación diagnóstica para ser aplicada al inicio del ciclo lectivo en los alumnos de 2º año, a fin de detectar las dificultades que el concepto de fracción y sus diferentes significados generan en los alumnos de 1º año y qué tipo de estrategias utilizan al resolver situaciones problemáticas. El análisis de las respuestas dio origen a la creación de categorías de resolución y de códigos a partir de las estrategias utilizadas. Del análisis a los protocolos de los 86 estudiantes, se puede afirmar, en general, no fueron capaces de explicar las estrategias utilizadas; en casi todos los protocolos se evidencia poca destreza en la explicitación del modo en que se obtiene la respuesta y un escaso *conocimiento predicativo*. Sin embargo, resolvieron situaciones problemáticas, de manera relativamente correcta, lo que permite inferir un *conocimiento operatorio* moderado.

Palabras Clave: Fracciones, significados de las fracciones, Teoría de los Campos Conceptuales, evaluación diagnóstica.

Introducción

Los Diseños Curriculares de la Provincia de Buenos Aires, correspondiente al 1º año de la Educación Secundaria Básica (2006) proponen problemas que impliquen y que amplíen o profundicen, los significados de las fracciones en diferentes contextos: continuo y discreto. Sin embargo, la mayoría de las investigaciones sobre la enseñanza y el aprendizaje de fracciones, se ha desarrollado en el nivel primario, ya que es en este nivel, donde se inicia el estudio de las mismas. Los diferentes significados de las fracciones demandan, en la escuela primaria, mucho tiempo de estudio; no obstante, cuando los alumnos ingresan en la escuela secundaria, siguen manifestando confusión en la resolución de problemas que los involucran.

Este trabajo se ubica en la problemática de la conceptualización de las fracciones en los estudiantes de los primeros años de la Escuela Secundaria (Ex Básica), con fundamento en la Teoría de los Campos Conceptuales (Vergnaud, 1990, 2013, 2016). En correspondencia con el referencial teórico adoptado, se diseñó, evaluó, implementó y analizó un instrumento, para ser aplicado a alumnos de escuelas secundarias, que permitió caracterizar tanto los significados de las fracciones que poseen, como las dificultades al momento de resolver situaciones problemáticas que requieran de esos significados y, a la vez, determinar las estrategias de resolución empleadas.

El diseño de investigación propuesto es de corte exploratorio y descriptivo, y contempla técnicas cualitativas de recogida y análisis de la información.

Este trabajo se llevó a cabo para obtener el grado de Licenciada en Enseñanza de la Matemática, título que otorga la Universidad Tecnológica Nacional, Facultad Regional Avellaneda y cuyos resultados servirán para establecer características esenciales que deba contemplar la enseñanza de las fracciones.

El presente trabajo se estructura en seis capítulos, cuya organización se describe a continuación:

Capítulo 1: en este capítulo se presenta la delimitación y justificación del problema de investigación, los objetivos que se persiguen en el estudio y las preguntas de investigación a las que pretende dar respuesta.

Capítulo 2: este capítulo contiene una breve descripción de la evolución histórica de las fracciones, la noción de fracción y las interpretaciones que proponen diferentes autores, presentando algunos antecedentes de investigación en la enseñanza de las fracciones.

Capítulo 3: este capítulo refiere al marco teórico que da sustento a esta investigación: la Teoría de los Campos Conceptuales de Gérard Vergnaud (1990, 2013, 2016); en este capítulo se describen los principios básicos de esta teoría.

Capítulo 4: contiene una descripción general de la metodología empleada describiendo la muestra de estudiantes participantes y presentando las características del instrumento diseñado, como el modo de obtención de datos empíricos.

Capítulo 5: aquí se describen los resultados del estudio, poniéndose el énfasis la interpretación de la resolución de las actividades del instrumento empleado.

Capítulo 6: se responden las preguntas de investigación y se formulan conclusiones; se incluyen reflexiones finales que surgen del estudio y se sugiere posibles investigaciones futuras.

CAPÍTULO 1

EL PROBLEMA Y SUS ANTECEDENTES

1.1. Delimitación y justificación del problema

Un gran porcentaje de alumnos señalan a la Matemática como la materia que menos les gusta y, muy pocos, la eligen como una de sus materias preferidas; incluso, algunos alumnos que tienen muy buen rendimiento en esta disciplina, expresan una opinión adversa sobre ella. Los argumentos más frecuentes para justificar su disgusto frente a esta materia, son dos: “La materia es muy complicada” y “No me gusta sacar cuentas”; particularmente, se refieren a las fracciones como “muy difíciles”.

En efecto, el proceso de aprendizaje de las fracciones, se halla condicionado por la variedad de estructuras cognitivas a las que están conectadas sus diferentes interpretaciones y sus diferentes significados.

En ese sentido, la Dirección Nacional de Información y Evaluación de la Calidad Educativa (DiNIECE), reporta en los años 2007 y 2010 para alumnos de 6º año de Educación Primaria, resultados en relación al aprendizaje de las fracciones atendiendo a los documentos curriculares y jurisdiccionales y los Núcleos de Aprendizajes Prioritarios (NAP), considerados como referentes. Estos resultados indican que el 24,1% de los alumnos, que representa a 191.097 estudiantes, resolvió actividades consideradas del Nivel Alto, en las cuales los estudiantes logran un desempeño destacado en el dominio del conjunto de contenidos y capacidades cognitivas evaluadas y esperables. Las actividades que resolvieron los alumnos de este nivel de desempeño, son las que requieren resolver problemas complejos, involucrando dos o más operaciones y un trabajo con fracciones complicado, tales como equivalencia entre una fracción y un número decimal y viceversa; reconocer fracciones equivalentes; sumar fracciones con distinto denominador; reconocer un número decimal en un gráfico; definir una fracción o un número decimal entre dos números naturales; problemas de división para dar sentido al resto, entre otros.

Además, se determinó que el 40,2 % de los estudiantes, que representa 318.801 estudiantes, resolvió actividades que se ubican en el Nivel Medio; los estudiantes de este nivel logran un desempeño satisfactorio en el dominio del conjunto de contenidos y capacidades cognitivas evaluadas y esperables, tales como resolver problemas de proporcionalidad directa; de reparto en el que el resultado es una fracción; de porcentaje; traducir al lenguaje simbólico matemático una desigualdad sencilla, etc.

En tanto que el 35,7 % de alumnos evaluados, que representa 282.782 estudiantes, resolvió actividades que se ubican en el Nivel Bajo; los estudiantes de este nivel solamente pudieron abordar actividades en las cuales se ponen en juego capacidades cognitivas como identificar; reconocer; resolver operaciones; resolver problemas simples. Estos alumnos lograron resolver problemas elementales del campo aditivo con números decimales; ordenar números decimales; representar en la recta números naturales y decimales; reconocer fracciones en gráficos usuales, etc. “Los estudiantes de este nivel logran un desempeño elemental o poco satisfactorio en el dominio del conjunto de contenidos y las capacidades cognitivas evaluadas y esperables (Ministerio de Educación, 2010. p. 6)

Por otra parte, el Diseño Curricular para la Educación Primaria (2008) correspondiente al primer ciclo (tercer grado), prevé que los estudiantes trabajen con fracciones; inicialmente, con la resolución de problemas de reparto, que implican partir el entero en partes iguales en (medios y cuartos), en contextos particulares (repartos y medidas de peso y capacidad). El inicio del estudio de estos números en el segundo ciclo (cuarto grado) exige recuperar aquellas cuestiones que fueron abordadas con anterioridad o que forman parte de conocimientos que circulan fuera del ámbito escolar; analizar las características de uso y funcionamiento de la expresión fraccionaria, para expresar repartos, medidas (en tanto relaciones entre partes y todo), porcentajes, escalas, relaciones de proporcionalidad y también, fracciones equivalentes y la expresión decimal.

En tanto que, en el nivel secundario, deberían ampliar sus aplicaciones y significados, como consecuencia de lo establecido en los Diseños Curriculares de la Provincia de Buenos Aires correspondiente al primer año de la Educación Secundaria Básica (2006). Es así que se propone el estudio de la fracción como parte-todo, cociente y su expresión decimal, razón, probabilidad, porcentaje y representación en la recta numérica como expresión de una medida.

Sin embargo, al terminar la escuela primaria e ingresar a la escuela secundaria se ponen de manifiesto, por parte de los estudiantes, serias dificultades en la resolución de situaciones problemáticas que involucran el uso de las fracciones.

Estas dificultades se deben, en gran medida, a que las fracciones constituyen uno de los contenidos más complejos de comprender y su construcción requiere de varios años de escolaridad (Colindres, 2010).

Indagar la problemática de la enseñanza y el aprendizaje de las fracciones se torna fundamental y por tal motivo, en este trabajo, se proponen los objetivos y las preguntas de investigación que se formulan en el apartado que sigue.

1.2. Objetivos de la investigación

1.2.1. General

- ✓ Diseñar, desarrollar, analizar y evaluar dispositivos didácticos para el estudio de las fracciones en la escuela secundaria.

1.2.2. Específicos

- ✓ Determinar cuáles son los significados de las fracciones que poseen los estudiantes de los primeros años de las Escuelas ES Nº 36; ES Nº 46 y ES Nº 60 del distrito de Florencio Varela.
- ✓ Identificar las dificultades que, el concepto de fracción y sus diferentes significados, generan a los alumnos de los primeros años al resolver problemas que los involucren.
- ✓ Describir las estrategias utilizadas por los alumnos de los primeros años de la EES ex ESB para resolver situaciones problemáticas que involucren el uso de fracciones.

1.3. Preguntas de investigación

- ✓ ¿Cuáles son los significados, que, en relación a las fracciones, poseen los estudiantes de los primeros años de las Escuelas ES Nº 36 (Ex SB Nº 11); ES Nº 46 (Ex SB Nº 16) y ES Nº 60 (EX SB Nº 60) del distrito de Florencio Varela?
- ✓ ¿Cuáles son las dificultades que el concepto de fracción, y sus diferentes significados, generan a los alumnos de los primeros años de la Escuela Secundaria de Florencio Varela, al resolver problemas que los involucren?
- ✓ ¿Cuáles son las estrategias utilizadas por los alumnos de los primeros años de la EES (Ex ESB) para resolver situaciones problemáticas que involucren el uso de fracciones?

Para dar respuesta a estos interrogantes es necesario comprender la evolución histórica de la noción de fracción y sus diferentes interpretaciones, que se incluyen en el capítulo siguiente.

CAPÍTULO 2

LAS FRACCIONES Y SU ENSEÑANZA

2.1. Fracciones y su evolución histórica

Se sabe que el resultado de una división con números naturales no siempre es otro número natural. Se cree que en este hecho (con el que debieron toparse nuestros antepasados en más de una ocasión al realizar reparticiones de herencias, territorios o mercancías) está el origen del concepto de fracción.

El nivel cultural desarrollado en la Edad de Bronce, generó en la civilización egipcia la necesidad de usar las fracciones, especialmente aquellas de la forma *1/n* a las que denominaron, fracciones unitarias. Se considera que fueron los egipcios quienes utilizaron por primera vez las fracciones.

Según Boyer (1968), el papiro de Ahmes encontrado en 1858, expresa algunas costumbres de los egipcios para representar fracciones. A la fracción *2/3* le asignaban un papel tan especial en sus cálculos aritméticos que para calcular un tercio de un número ¡hallaban primero los dos tercios y luego calculaban la mitad del resultado! Conocían y utilizaban el hecho de que los dos tercios de la fracción unitaria *1/n* era igual a la suma de las dos fracciones unitarias *1/2n* y *1/6n*, es decir, *2/3.1/n=1/2n+1/6n*, y sabían también, obviamente, que el doble de la fracción unitaria *1/2n* es la fracción unitaria *1/n* y para descomponer números de la forma *2/n* (como suma de fracciones unitarias), sugerían una tabla seguida de otra *n/10*, para *n* de *1* a *9* en la que estas fracciones eran descompuestas en términos de las unitarias de la fracción *2/3*.

Por otra parte, los babilonios también desarrollaron su sistema de notación fraccionaria, que permitió hacer aproximaciones decimales. Ellos tuvieron la idea de extender a las fracciones el principio posicional de los números enteros.

En la Gráfica 1, se sintetiza la evolución de las fracciones.

Gráfica 1

Evolución histórica de las fracciones

Cronología		
Año		**Acontecimientos**
BABILONIOS	XXVII a.C. 2400 a.C. 1900 a.C - 1600 a.C.	Conservaban sus registros del sistema de numeración sobre la superficie de tablillas de arcillas de formas circulares (cuneiformes). En tableros se tiene el manejo de las fracciones *1/2, 1/3* y *5/6*. Fue escrita la tablilla Plimpton 322.
EGIPCIOS	1890 a.C. 1858 a.C.	Fue escrito el papiro de Moscú. Fue encontrado el papiro de Ahmes por el escocés Henry Rhind. Para calcular un tercio de un número primero hallaban los dos tercios y luego calculaban la mitad del resultado y para descomponer números de la forma *2/n* sugerían una tabla seguida de otra *n/10*, para *"n"* de *1* a *9*.
BABILONIOS	1831 a.C. 1800 a.C. 1700 a.C.	Aproximación en sus cálculos. Registro de uso de fracciones. Apareció el sistema sexagesimal de valor posicional, venía del 400 a.C.
EGIPCIOS	1650 a.C.	Sistema de fracciones y resolvían problemas de la vida diaria.
GRIEGOS	600 a.C.	Dotes en las construcciones geométricas de segmentos cuyas longitudes representan racionales.
INDIOS	300 a.C.	Aparecen los números Brahmi de los cuales descienden nuestros números actuales y se manejaban las cuatro operaciones con fracciones elementales.
CHINOS	213 a.C. 100	El emperador Shih Huang -ti ordeno quemar los libros de matemática. El Chou Pei Suan Ching es el texto más antiguo y contiene fracciones usando denominador común. Sistema de cálculo de fracciones con varillas (Suanpan) y en la división de fracciones se exige la previa reducción de estas a común denominador.
ÁRABES	Siglo XII 1202	Al' Hassar usa por primera vez la línea horizontal en las fracciones. El nombre de fracción se debe en parte a Juan de Luna, quién tradujo del libro de aritmética de Al-Khowarizmi al latín la palabra *"fractio"* como traducción de la palabra *"al-Kasr"*, que significa *quebrar o romper*; también se denominaban a las fracciones con el nombre de "*quebrados"*, y eran conocidas por babilonios, egipcios y griegos. Leonardo de Pisa en su Libro *Abaci* usa la línea horizontal fraccional.
BABILONIOS	1802	Grotefend y Rawlianson en 1847 descifraron las inscripciones de las tablillas de arcillas.
EGIPCIOS	1858	Fue encontrado el papiro de Ahmes en una ciudad comercial de Nilo por el escocés Henry Rhind, expresa algunas costumbres que usaban para representar fracciones.
BABILONIOS	1945	Fue descifrada la tablilla Plimpton por Neugebauer y Sachs nuestras expresiones fraccionarias.
EGIPCIOS	2006 - 2011	Acostumbraban manipular fracciones que tenían únicamente como numerador la unidad. La llamada tabla *2/n* del papiro Rhind. El código del escriba fue descifrado y esto se confirmó demostrando que cada fracción *n/p* fue ampliada a mn/mp. La metodología prueba que el escriba Ahmés escogía el mejor mínimo común múltiplo *"m"*.

Los chinos conocían muy bien las operaciones con fracciones de tal forma que sabían cómo calcular el común denominador de varias fracciones. Boyer (1968) menciona que los chinos "Utilizaban analogías con el sexo se referían al numerador como *'el hijo'* y el denominador como *'la madre'"* (p. 264). También implementaban el sistema de medidas sexagesimal al igual que los babilonios.

Es claro que todos los procedimientos utilizados por los egipcios, babilonios y chinos, no son ajenos a los empleados por los estudiantes de la escuela secundaria.

Algunos libros de Historia de la Matemática (Milo Gardhen, 2008; Ruiz Cruz, 2013 y Boyer, 1968, entre otros) pueden servir como lectura para seguir el rastro al concepto de fracción a través del tiempo y de culturas diversas. Una breve ampliación de lo mencionado en los párrafos anteriores, en relación a la evolución histórica de las fracciones, se presenta en la tabla anterior (Gráfica 1).

2.1.1. Concepto de fracción

Resulta oportuno mencionar que el Diccionario de la Real Academia Española (2012), indica que el término de fracción proviene (del lat. *fractĭo, - ōnis*) y tiene tres significados o acepciones:

> La primera de ellas la define como *"División de algo en partes"*, la segunda establece que la fracción es "*Cada una de las partes separadas de un todo o consideradas como separadas*" y, en tercer lugar, se la define como *"Cada uno de los grupos de un partido u organización, que difieren entre sí o del conjunto, y que pueden llegar a independizarse".*

Parece que ninguna de las acepciones concuerda exactamente con la idea de fracción que se estudia en la escuela secundaria.

El concepto matemático de fracción corresponde a la idea intuitiva de dividir una totalidad en partes iguales como cuando hablamos, por ejemplo, de un cuarto de hora, de la mitad de una torta, etc. Pero, tres cuartos de hora no son, evidentemente, la misma cosa que las tres cuartas partes de una torta, pero se "calculan" de la misma manera: dividiendo la totalidad (una hora, o la torta) en cuatro partes iguales y tomando luego tres de esas partes.

Más formalmente, podemos definir una fracción como:

> Toda expresión del tipo a/b, en la cual a y b son números enteros y $b \neq 0$, se llama fracción o expresión fraccionaria. Podemos asociar una fracción a una parte de un "todo". a es el numerador: indica el número de partes que se toman.

b es el denominador: indica en cuántas partes iguales se divide el todo (denomina a la fracción) (Garaventa et al., 2008, p. 5).

De esta definición no es fácil llegar a la comprensión de lo que en verdad es una fracción. Mencionan Llinares y Sánchez (1997) citados en Morales (2011, p. 21),

> Llegar a la comprensión del concepto de fracción es un largo camino debido a sus múltiples interpretaciones, sin mencionar a las ya establecidas desde el lenguaje cotidiano, cuestión que suele estar presente en los procesos de aprendizaje de estos temas.

La comprensión del concepto de fracción depende de cómo se entienda cada significado, por lo que es importante tener claridad sobre cada uno de ellos.

2.2. Fracciones y sus interpretaciones

Un elemento crucial, para este trabajo, es la caracterización de los diferentes significados e interpretaciones de las fracciones dado que, como señala Harting, (1958), citado en Morales (2011, p.11), "El concepto de fracción es complejo y no es posible aprehenderlo enseguida. Es preciso adquirirlo a través de un prolongado proceso de desarrollo secuencial"; ese proceso debe incluir los diferentes significados e interpretaciones.

Los significados de las fracciones, proveen las bases para poder construir una plataforma conceptual sólida que permita, a los estudiantes, comprender e interiorizar el concepto de fracción y posteriormente aplicarlo en situaciones de la vida cotidiana.

La Gráfica 2, sintetiza los significados de las fracciones y las relaciones entre las distintas interpretaciones que serán explicitadas en el apartado siguiente.

Gráfica 2

Significados de las fracciones

*Nota. A*daptado de Modelo Teórico de las cinco interpretaciones del concepto de fracción de (Behr et al., 1983) citado en Castellón (2008). Colindres, (2010).

2.2.1. La fracción como parte-todo

En general, en el estudio de las fracciones éstas se introducen habitualmente a través del modelo parte-todo y esta elección está apoyada por diferentes investigaciones. Según Llinares y Sánchez, (1988).

> Se presenta esta situación cuando un "todo" (continuo o discreto) se divide en partes "congruentes" (equivalentes como cantidad de superficie o cantidad de "objetos"). La fracción indica la relación que existe entre un número de partes y el número total de partes (que puede estar formado por varios "todos").
>
> El todo recibe el nombre de unidad. Esta relación parte-todo depende directamente de la habilidad de dividir un objeto en partes o trozos iguales. La fracción aquí es siempre "fracción de un objeto".
>
> Sobre esta interpretación se basan generalmente las secuencias de enseñanza, cuando se introducen las fracciones (normalmente en su representación continua). (p. 55)

Para Ponce (2004),

> el todo es dividido en partes y la fracción describe la relación entre las partes que se consideraban y el número de partes en que se había dividido el todo.
>
> Esta interpretación puede darse sobre un contexto continuo o discreto. (p. 46)

Las situaciones de reparto son particularmente importantes porque las actividades que permiten cuantificar la fracción resultante de un reparto propician, en los alumnos, el desarrollo de las habilidades de subdivisión en partes iguales y de manera exhaustiva.

2.2.2. La fracción como cociente y su expresión decimal

La fracción, en esta interpretación, se asocia a la operación de dividir un número natural[1] por otro número natural, es decir $a/b=a:b,\ a,\ b \in N$. Esta interpretación contempla dos aspectos:

- ✓ considerar a la fracción *a/b* como una división indicada y,
- ✓ considerar las fracciones como elementos de una estructura algebraica (Llinares y Sánchez, 1988, p. 63).

Diferentes autores han indagado sobre la interpretación de las fracciones como cociente. Para Maza y Arce (1991),

> [...]el símbolo *a/b* denota una parte fraccional de una cantidad determinada (sea

[1] En este trabajo, sólo se considerarán las fracciones positivas. El conjunto de los números naturales no contiene al número cero.

> el todo o la unidad general de medida); este símbolo también puede representar una operación entre los números enteros *a* y *b*. En esta interpretación, la fracción sería una división indicada. (p. 83)

En tanto que, según Morales (2011),

> El significado de la fracción como cociente es importante porque permite preparar el camino para entender los números racionales como un campo de cocientes, teniendo de esta manera una construcción formal de estos. Esta interpretación aporta una herramienta de suma importancia para el trabajo en otras interpretaciones de las fracciones, como la recta numérica o las razones. (pp 23-24)

Llinares y Sánchez (1988) sostienen que la interpretación de las fracciones como cociente abre paso a la futura compresión del concepto de número racional. Estos autores señalan, además, que esta interpretación reviste gran importancia en relación al uso que se le puede dar, a las fracciones, en la vida cotidiana; así mismo su estudio aporta elementos primordiales para entender y comprender la fracción como un punto en la recta numérica y de igual manera comprender las fracciones como una razón.

2.2.3. La fracción como una razón

Otro significado diferente de fracción aparece con la idea de razón entre dos cantidades de una misma magnitud medidas con la misma unidad; de este modo, la razón se expresa mediante una relación de números naturales, que son las medidas de las cantidades correspondientes.

Boyer (1968), apunta "A las fracciones no se las consideraba como entidades únicas, sino como una razón o relación entre dos números enteros". (p. 83)

Esta forma de concebir las fracciones es más parecida a la matemática "moderna" que a la aritmética usual de hace unas generaciones. Tal como lo expresaba Euclides, en los *Elementos (*V.3) citado en Boyer (1968), "Una razón es una cierta relación con respecto al tamaño de dos magnitudes del mismo tipo". (p. 83)

De acuerdo con Boyer (1968) la noción *razón*,

> [...] centra su atención en la conexión entre pares de números, tiende a poner el énfasis en los aspectos racionales o teóricos del concepto de número y no en el papel del número como herramienta para el cálculo o para la aproximación en la medida. (pp 83-84)

Cuando se establece una comparación entre dos cantidades de una magnitud, lo que estamos haciendo es encontrar una razón; en otras palabras, una razón es el cociente entre dos números. "En este caso, la fracción no vendría a ser una parte fraccional o una operación indicada, sino un índice comparativo" (Maza y Arce, 1991, p. 83).

Más aún, "este significado se usa comúnmente con la idea de formar proporciones y permite también desarrollar o integrar los conceptos de fracciones equivalentes, probabilidad y porcentaje" (Morales, 2011, p. 25).

Algunas de las situaciones donde se presenta este uso de las fracciones, están asociadas a mezclas y aleaciones, comparaciones, escalas de mapas y planos, recetas de cocina, entre otras, pues cuando hay una relación entre *a* y *b* (una razón), todo cambio en *a* producirá un cambio en *b*. Dos de los modos más comunes de ver la fracción como razón, son los porcentajes y la probabilidad.

2.2.4. La fracción como probabilidad

Las fracciones también se usan para representar la posibilidad o la probabilidad de ocurrencia de algún fenómeno o evento particular y aleatorio. Ponce (2004) afirma que "Es un tipo de comparación todo . todo entre el número de casos favorables y el número de casos posibles". (p. 48)

Este significado de las fracciones es muy importante en sí mismo porque prepara a los alumnos para la compresión de fenómenos aleatorios que pueden acontecer en la vida diaria; por otro lado, los inicia en el estudio de la teoría de probabilidades, indispensable en todas las ramas del saber.

En concordancia a lo antes expuesto, Llinares y Sánchez (1988) indican que,

> [...] la utilización de las fracciones en este contexto se le da un carácter de cálculo (aritmético) sin pensar que la estructura cognitiva subyacente a las relaciones implícitas en contextos de probabilidad está vinculada a la red de relaciones establecida para los números racionales. (p. 71)

2.2.5. La fracción como porcentaje

Uno de los usos más habituales que tienen las fracciones es para expresar un porcentaje.

Para Llinares y Sánchez (1988), "los porcentajes se pueden entender como el establecimiento de "relaciones" entre conjuntos (razones), estableciéndose subconjuntos de cien partes". (p. 72) Si bien, los porcentajes tienen asignado un aspecto de operador, la representación de los mismos mediante fracciones, se asocia a la comparación de una parte y el todo. Según Llinares y Sánchez (1988), "la relación de proporcionalidad que se establece entre un número y 100 (ó 1000) $[sic]$ recibe el nombre particular de porcentaje". (p. 71)

2.2.6. Las fracciones como expresión de una medida y la recta numérica

Medir es una actividad importante para el desarrollo de ideas matemáticas y se ocupa de comparar, ordenar y cuantificar cantidades. Así la medida de cantidades de magnitudes es una actividad importante; esta actividad dio origen a los números racionales.

Para Llinares y Sánchez (1988),

> En esta situación se asocia la fracción *a/b* con un punto situado sobre la recta numérica en la que cada segmento unidad se ha dividido en *"b"* partes (o en un múltiplo de *b*) congruentes, de las que se toman *"a"*. También se puede considerar como un caso particular de la relación parte-todo. (p. 59)

Estos autores sostienen que, "la recta numérica sirve también como una buena representación de la interpretación de las fracciones como medida". (p. 60)

Según Pujadas y Eguiluz (2000), "representar una fracción *a/b* en la recta significa asociar a la fracción un punto de la misma. Para ello se divide el intervalo $[0;1]$ en *b* segmentos congruentes de los que se toman *a*". (p. 28)

Maza y Arce (1991) sostienen que,

> Cuando se considera una longitud, por ejemplo, se divide en partes congruentes y se expresa una relación entre su número de partes y la unidad general de medida (así, una longitud puede medir 3 metros y 1/4 de metro) se está utilizando la fracción en otro contexto. Como señalaron otros autores (Behr, Lesh, Post y Silver, 1983), existe una estrecha conexión de esta interpretación con la de parte-todo, hasta el punto en que puede considerarse la misma. Ello es discutible por lo peculiar del contexto de medida y las actividades implícitas en su realización. (p. 83)

Por otro lado, Colindres (2010) considera que la fracción como expresión de una medida,

> Se define como la asignación de un número a una región o a una magnitud de una, dos o tres dimensiones, producto de la repartición equitativa de la unidad (Kieren, 1980 citado en Perera y Valdemoros, 2007). Chamorro (2003) define esta interpretación como la relación entre una parte y un todo (sea este continua o discreta). Esta interpretación implica las nociones de la unidad y subintervalos,

> equivalencia y la idea de densidad de los números racionales (Lamon, 2007, p. 23). (Colindres, 2010, p. 23)

La primera aproximación a la noción de número racional se encuentra asociada con la representación de la medida de cantidades de magnitudes, y teniendo en cuenta la finalidad de la medida pueden presentarse situaciones diferenciadas como, por ejemplo, medir utilizando múltiplos y submúltiplos de la unidad y la comparación con la unidad.

Según Novillis (1976), citado en Pujadas y Equiluz (2000),

> En su investigación del desarrollo jerárquico del concepto de fracción en niños de 10 a 12 años, confirmo que el modelo recta numérica resulta notablemente más difícil que el modelo relación del área de una parte a la del todo o que el modelo subconjunto de un conjunto discreto. (p. 29)

La construcción del concepto de número racional, cognitivamente, es un proceso largo de articulación integral de conocimientos, conceptos, nociones y significados.

2.3. Antecedentes de investigación en la enseñanza de las fracciones

Diferentes autores han abordado la problemática de la enseñanza y el aprendizaje de las fracciones. Colindres (2010), centra su investigación en la exploración de los procesos de pensamiento matemático en torno al concepto de fracción y las operaciones entre fracciones, con alumnos de séptimo grado de una escuela de Honduras; el objetivo de su trabajo no sólo es identificar las estrategias utilizadas por los estudiantes, sino también, identificar errores y dificultades más comunes que presentan los alumnos, además de desarrollar actividades de aprendizaje que contribuyan a fortalecer y mejorar esta situación. Esta autora concluye que los alumnos lograron comprender en su totalidad el concepto de fracción parte-todo, medida y operador; recomienda, "iniciar a los estudiantes desde temprana edad en actividades que desarrollen la comprensión del concepto de fracción en sus diferentes interpretaciones utilizando la estrategia de resolución de problemas, para evitar la memorización". (p. 120)

Por otro lado, Morales (2011) aborda la problemática desde otra perspectiva, la de los maestros que tienen a su cargo la enseñanza de las fracciones. Enmarcada en la Teoría de los Campos Conceptuales, busca fortalecer las prácticas de enseñanza de los docentes de una institución de enseñanza primaria de Colombia, a partir del diseño y aplicación de guías de trabajo de situaciones problemáticas, que favorezcan la comprensión conceptual de la fracción y sus diferentes significados utilizando diferentes interpretaciones y material concreto. El concepto de fracción se aborda desde cinco diferentes interpretaciones: la fracción como parte-todo, la fracción como división, la fracción como operador, la fracción como razón y la fracción como medida. Logra la comprensión del concepto de fracción en los diferentes significados posibilitando la relación con otros conceptos matemáticos, y sugiere,

> Iniciar a los estudiantes desde temprana edad en actividades que permitan, la comprensión del concepto de fracción y sus diferentes significados, utilizando la estrategia de solución de problemas, para darle sentido al concepto. Teniendo presente cuales son los conocimientos previos de los estudiantes, hacia dónde pretende llevarlos con lo planteado y qué se deseaba confrontar. (p. 78)

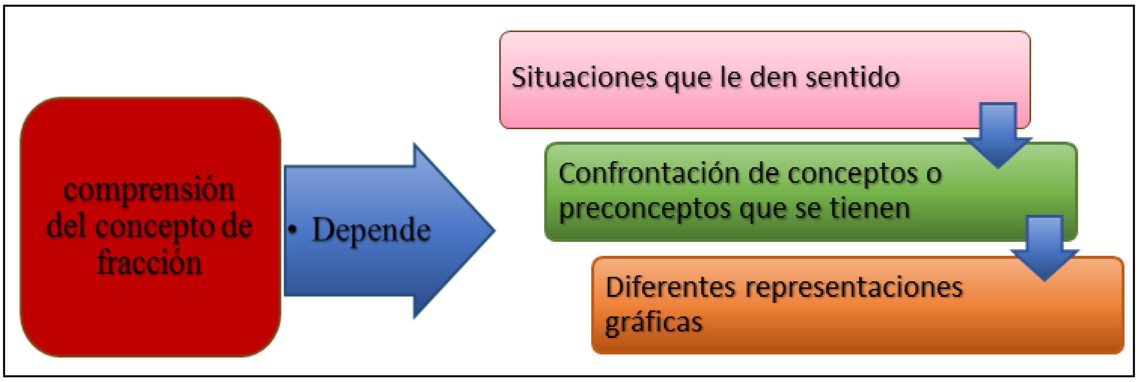
Para Robles (2010),

> [...] emplear distintos materiales y recursos a la hora de explicar el tema de fracciones, permitirá que los alumnos no se limiten tan sólo a uno de los posibles significados del concepto […], sino que permitirá un mayor enriquecimiento y un aprendizaje más profundo. (p. 57)

De lo anterior, la comprensión de las fracciones dependerá de la diversidad de situaciones cuidadosamente escogidas, de modo que permitan poner en juego los preconceptos que los estudiantes tienen (Gráfica 3).

Gráfica 3

Elementos que permiten la conceptualización de la fracción



Nota. Adaptado de Elementos que permiten la conceptualización de la fracción, Morales, (2011), (www.bdigital.unal.edu.co/6084/).

En este proceso de estudio, no debe desestimarse la acción mediadora del docente, responsable de la organización de las actividades; de allí la necesidad de trabajar conscientemente para lograr avances significativos en la comprensión del concepto de fracción y sus diferentes significados.

Por otro lado, Llinares (2003, p. 189) citado en Morales (2011, p. 11), al respecto, referencia a Vergnaud afirmando que, “El dominio de las fracciones hace parte de un campo conceptual constituido por un conjunto de situaciones cuyo dominio progresivo requiere la utilización de una variedad de procedimientos, de conceptos y de representaciones que están en estrecha conexión”.

Según Vergnaud citado en Morales (2011, p. 15),

> El concepto de fracción hace parte de un campo conceptual que también incluye los conceptos de: número racional, razón, tasa función lineal y no lineal, multiplicación y división, entre otras, *el campo conceptual de las estructuras multiplicativas*, cuyo dominio requiere de un conjunto de situaciones que se resuelvan a partir de las operaciones: multiplicación, división o ambas. Para la comprensión de estos conceptos se requiere de una variedad de situaciones y la interrelación de varios conceptos, lo que implica un trabajo pensado, planeado, con propósitos claros y esto requiere tiempo.

En el capítulo siguiente se presentan las ideas de Vergnaud en relación a la Teoría de los Campos Conceptuales, que brinda el marco teórico para este estudio.

CAPÍTULO 3

MARCO TEÓRICO

3.1. Fundamentos teóricos

Para este trabajo, se consideraron diferentes referentes de la educación matemática, que aportan elementos pedagógicos, didácticos y disciplinares. Entre ellos, Llinares y Sánchez (1988), Maza y Arce (1991), Pujadas y Eguiluz (2000) y Ponce (2004), aportan el marco conceptual de las interpretaciones del concepto de fracción adoptadas y que fueran explicitadas en el Capítulo 2.

Además, algunos aspectos, que se detallan a continuación, de la Teoría de los Campos Conceptuales de Vergnaud (1990, 2013, 2016), Otero (2006) y Parra y Otero (2021), brindan el marco teórico a este trabajo.

3.2. La Teoría de los Campos Conceptuales de Vergnaud

La Teoría de los Campos Conceptuales (en adelante, la TCC) es una teoría cognitivista que desarrolló Gérard Vergnaud (1990).

Para Moreira (2002, p. 1), Vergnaud fue

> [...] director de investigación del Centro Nacional de Investigación Científica (CNRS) de Francia, discípulo de Piaget, amplía y redirecciona en su teoría, el foco piagetiano de las operaciones lógicas generales y de las estructuras generales del pensamiento, para el estudio del funcionamiento cognitivo del "sujeto-en-situación". Además, a diferencia de Piaget, toma como referencia el propio contenido del conocimiento y el análisis conceptual del dominio de ese conocimiento.

La TCC surgió como una necesidad para el estudio del funcionamiento cognitivo del *sujeto-en-situación* y, si bien se inició a partir del aprendizaje de la Matemática, es de aplicación en otras ciencias. Para Vergnaud, el desarrollo cognitivo es la conceptualización y el dominio progresivo de una diversidad de campos conceptuales.

La TCC de Vergnaud habilita el estudio del desarrollo cognitivo en los adultos y el aprendizaje de conceptos específicos de cada dominio, como los que tienen lugar en la escuela, en el mundo del trabajo y en el de la formación profesional. En cada campo de conocimiento, son necesarios ciertos procesos de conceptualización, que se presentan en ciertos tipos de situaciones y de fenómenos, que convocan al desarrollo de determinadas formas de actividad.

La TCC tiene influencias tanto de la teoría de Piaget como del legado de Vigotsky; de la primera, toma el concepto de esquema que será fundamental en la teoría de Vergnaud y, de Vigotsky, adopta la importancia atribuida a la interacción social, al lenguaje y a la simbolización en el progresivo dominio de un campo conceptual por parte de los estudiantes (Moreira, 2002).

Además, Vergnaud

> Propone la existencia de dos formas del conocimiento en permanente interacción y no en oposición, la forma operatoria y la forma predicativa. La forma operatoria es la que permite al sujeto actuar con cierto suceso en una situación. Es un hecho muy positivo que se le otorgue gran importancia a la forma operatoria del conocimiento. Pero esto no disminuye la importancia de la forma predicativa. (Vergnaud, 1990, 1998, 2013, como se citó en Parra et al., 2021, p. 337)

Vergnaud, […] "afirma que el conocimiento no puede reducirse ni a una forma ni a la otra" (Vergnaud, 1990, 1998, 2013, como se citó en Parra et al., 2021, p. 335).

También "El conocimiento es producto de la interacción adaptativa de un organismo con su medio. Vivir es conocer, en consecuencia, el conocimiento es adaptación y cambio estructural del organismo con conservación de su organización" (Otero, 2006, p. 37).

Para Piaget, "el conocimiento es adaptación; y añade asimilación y acomodación: asimilación del nuevo conocimiento al antiguo, y acomodación a lo que no ha sido previsto antes, es decir, a la contingencia" (Vergnaud, 2016, p. 285).

Maturana, "propone que conocer es un proceso que se inicia en la acción de cualquier organismo vivo en interacción con su medio" (Maturana, 1984, 1991, 1995, 2001, como se citó en Otera, 2006, p. 26).

Para Vergnaud, el conocimiento se encuentra organizado en lo que denomina campos conceptuales, los que serán dominados por parte del sujeto, luego de un periodo extenso de tiempo.

La TCC considera que la piedra angular de la cognición es la conceptualización en la que se entrelazan los conceptos clave de esta teoría: campo conceptual, esquemas, situación, invariante operatorio y concepto. Una breve descripción de los conceptos clave de la TCC se presenta a continuación.

3.3. Principios básicos de la Teoría de los Campos Conceptuales

3.3.1. Campo Conceptual

El concepto de campo conceptual se basa en tres argumentos considerados por Vergnaud: un concepto no se forma dentro de un solo tipo de situaciones; una situación no se analiza con un solo concepto y la construcción y apropiación de todas las propiedades de un concepto es un proceso que se extiende a lo largo de los años, con filiaciones y rupturas entre situaciones, entre conceptos, entre procedimientos, entre significantes (Moreira, 2002).

De esta manera, "Campo conceptual es […] un conjunto de problemas y situaciones cuyo tratamiento requiere conceptos, procedimientos y representaciones de tipos diferentes, pero íntimamente relacionados" (Moreira 2002, p. 3).

Así, a la hora de estudiar un *campo conceptual* resulta fundamental analizar qué *situaciones* favorecen su conceptualización, ya que la resolución de las *situaciones* permite analizar las tareas cognitivas y los procedimientos que pueden ser puestos en juego en cada una de ellas. Las *situaciones* se encuentran así, en la base de la *conceptualización de un campo conceptual* (Sureda y Otero, 2011).

Por otro lado, un concepto no se forma aislado sino conjuntamente con otros. Un campo conceptual es entonces también un conjunto de conceptos que forman un sistema referido a una clase de situaciones, y que se originan en la actividad del sujeto en esas situaciones (Vergnaud, 2013).

3.3.2. El concepto

Para Sureda y Otero (2011),

> [...] es importante considerar que un *concepto* es primeramente una construcción pragmática. Como tal, si se está interesado en su enseñanza y aprendizaje, no se debe reducir el *concepto* a su definición, pues es a través de las *situaciones* y de los problemas que se pretenden resolver como un *concepto* adquiere sentido para el sujeto. (Sureda y Otero, 2011, p. 3)

Se comprende que, el estudio de los conceptos tiene sentido si se analizan las variadas relaciones, entre las situaciones, representaciones y los esquemas.

Vergnaud (1990) considera al concepto como un conjunto de invariantes utilizables en la acción y lo especifica como un triplete C= (S, I, R) de tres conjuntos no independientes: el referente, el significado y el significante del concepto. (Moreira, 2002, p. 5)

- ✓ El referente [S]: es el conjunto de las situaciones que dan sentido al concepto;
- ✓ El significado [I]: es el conjunto de invariantes (objetos, propiedades y relaciones) sobre los cuales reposa la operacionalidad del concepto;
- ✓ El significante [R]: conjunto de representaciones lingüísticas y simbólicas (algebraicas, gráficas, etc.) permiten representar simbólicamente el *concepto* y sus propiedades, las situaciones y los procedimientos de tratamiento. (Vergnaud, 2013, p. 5)

Para Vergnaud,

- ✓ no se puede estudiar el desarrollo de un concepto de manera aislada, porque siempre está tomado de un conjunto, formando un sistema;
- ✓ la conceptualización es un proceso que forma parte de la actividad, y es necesario, pues, captar las conceptualizaciones que operan en los esquemas, tanto si son explicitas como implícitas;
- ✓ en una perspectiva de desenvolvimiento, un concepto es un triplete de conjuntos: un conjunto de situaciones, un conjunto de invariantes operatorios, un conjunto de formas lingüísticas y simbólicas. (Vergnaud, 2016, p. 288)

En Vergnaud (2016), "La conceptualización puede ser definida como la identificación de los objetos del mundo, de sus propiedades, relaciones y transformaciones" (p. 299).

Una definición pragmática de concepto puede considerarlo como un conjunto de invariantes utilizables en la acción; esta definición implica también un conjunto de situaciones que constituyen el referente y un conjunto de esquemas puestos en acción por los sujetos en esas situaciones. La TCC abandona la relación estímulo/respuesta, que fuera propuesta por Piaget, para abordar el análisis de la nueva dupla: situación/esquema.

3.3.3. Situación y Esquema

La *situación* es entendida, en la TCC, como una tarea; es a través de las situaciones y de los problemas que se pretenden resolver, como un concepto adquiere sentido.

"Según Vergnaud, muchas de nuestras concepciones vienen de las primeras situaciones que fuimos capaces de dominar y de nuestra experiencia al intentar modificarlas" (Moreira, 2002, p. 6).

Para Moreira (2002),

> Las situaciones son las que dan sentido a un concepto y son responsables del sentido a que se le atribuye a ese concepto; la variedad de situaciones torna

> significativo al concepto, pero su sentido no está en las situaciones en sí mismas y tampoco en las palabras o en los símbolos. El sentido es una relación del sujeto con las situaciones y con los significantes. (p. 6)

Parra y Otero (2021) "[…] Los sujetos se adaptan a las situaciones que enfrentan, pero en realidad, son los esquemas que ellos utilizan en la situación, lo que resulta modificado durante la adaptación" (p. 338).

"Más precisamente, son los esquemas evocados en el sujeto, por una situación o por un significante que constituyen el sentido de esa situación" (Moreira, 2002, p. 6).

Por otra parte, fue Piaget quien dio el paso decisivo en dirección de la *actividad* al proponer al *esquema* como instrumento de asimilación y acomodación. Vergnaud retoma esta noción de *esquema* que proponía Piaget y lo amplia a la vez que se aparta de la idea lógica de este constructor, para centrarse más en su aspecto pragmático. Así, para Vergnaud los *esquemas* son pragmáticos en el sentido de que funcionan para la adaptación y la acción operatoria del sujeto. Los *esquemas* se acomodan a las *situaciones* pues se relacionan con las características de las *situaciones* a las cuales se aplican y son funcionales a estas.

El concepto de *esquema* es justamente con el de situación uno de los más importantes de la TCC debido a que son los esquemas quienes se adaptan a las *situaciones*, y no el sujeto al objeto, como había formulado Piaget.

Un *esquema*, "es la organización invariante de la conducta para una clase de situaciones dada que funciona en forma diferenciada según el tipo de situación a la que se enfrenta el sujeto" (Vergnaud, 1990, p. 136).

Vergnaud contempla ciertas especificaciones de los esquemas:

- ✓ una meta (o varias), sub-metas y anticipaciones: la resolución de la *actividad* puede ser analizada como una organización secuencial y simultánea de la *acción*, de la *toma de información* y del *control*.
- ✓ reglas de acción, de toma de información y de control: la *actividad* no se ha generado en forma lineal, sino secuencialmente, y con la participación *secuencial* y simultanea de la selección de *información* y el *control*. Así, el concepto de *regla de acción* es insuficiente para analizar la *actividad*.
- ✓ Invariantes operatorios (conceptos en acto y teoremas en acto): constituyen la base implícita o explícita que permite obtener información pertinente y de ella inferir la meta a alcanzar y las reglas de acción adecuadas.

- ✓ posibilidades de inferencia: que permiten calcular las reglas y anticipaciones a partir de las informaciones e invariante operatorios que dispone el sujeto.

> Los *esquemas* son frecuentemente *eficaces*, pero no siempre *efectivos*. Cuando un niño utiliza un *esquema* ineficaz para una cierta situación, la experiencia le conduce bien a cambiar de *esquema*, bien a modificar este *esquema*. En este punto resulta relevante destacar que es la organización de la actividad la que es invariante, no la actividad misma, pues el *esquema* no es un estereotipo. Por otra parte, como el *esquema* se dirige a una clase de situaciones, es un universal; incluso si esta clase de situaciones es pequeña, como es el caso en los primeros momentos de comprensión de un *campo conceptual* nuevo. (Sureda y Otero, 2011, pp 6-7)

Según Vergnaud (2016), "Sin esquema y sin situaciones no se puede comprender el desarrollo del pensamiento" (p. 288).

> Entre las cuatro definiciones de esquema propuestas por Vergnaud seleccionamos la siguiente: Un esquema necesariamente está compuesto por cuatro clases de componentes: una meta o varias, sub-metas y anticipaciones, las reglas de acción, de captación y control de la información, los invariantes operatorios (conceptos en acto y teoremas en acto) y las posibles inferencias. (Sureda y Otero, 2021, p. 338)

Si bien los esquemas pueden ser más o menos elaborados, representan siempre la forma estructural de la actividad; es la organización invariante del sujeto sobre una clase de situaciones dadas y contiene invariantes operatorios que son implícitos.

La TCC recrea la noción de esquema, ofreciendo entre otras, una definición analítica de sus componentes, donde la noción de invariantes operatorio, es un elemento teórico fundamental.

3.3.4. Invariantes operatorios

Se designan como invariantes operatorios aquellos *conceptos en acto* y *teoremas en acto* que, sin ser explícitos, dirigen las conductas del sujeto y sobre los cuales reposa la operacionalidad de los esquemas evocados, por el sujeto, ante una situación.

Un *teorema-en-acto* es una proposición sobre lo real que se tiene como verdadera. Un *concepto-en-acto* es una categoría de pensamiento, una propiedad, un predicado que se considera relevante o pertinente para la situación.

> Hay una relación dialéctica entre *conceptos-en-acto* y *teoremas-en-acto*; los conceptos son ingredientes de los teoremas y los teoremas son propiedades que dan a los conceptos sus contenidos. Pero sería un error confundirlos. Los *conceptos-en-acto* son necesarios para las proposiciones, pero no son teoremas pues no permiten inferencias; las inferencias requieren proposiciones. Las proposiciones pueden ser verdaderas o falsas; los conceptos pueden ser relevantes o no. Aún así, no existen proposiciones sin conceptos. (Moreira, 2002, p. 11)
>
> […] Los conceptos y los teoremas explícitos no forman sino la parte visible del iceberg de la conceptualización; pero sin la parte escondida formada por los invariantes operatorios, esta parte visible no sería nada. Estos invariantes operatorios (conceptos en acto y teoremas en acto) son en particular, la base conceptual implícita (o explícita) de los esquemas debido a que permiten seleccionar la información pertinente y, a partir de ella y de la meta a atender, inferir las reglas de acción más adecuadas para abordar una situación. (Vergnaud, 1990, 1998, 2013, como se citó en Parra et al., 2021, p. 338)

Según Vergnaud,

> […] Como son necesarias categorías para recoger la información, y seleccionar lo que es pertinente, los conceptos-en-acto están en el corazón de la organización de los esquemas; y los teoremas-en-acto son el medio de inferir, la mayor parte del tiempo de manera totalmente implícita, los objetivos y reglas oportunas. Es necesario, pues, posibilidades de inferencia inmediatamente: ellas permiten la adaptación de la actividad a la situación presente. No hay en el fondo actividad totalmente automática, que funcione sin control y sin adaptación a las propiedades particulares de la situación. (Vergnaud, 2016, p. 292)

Vergnaud (2016), "Como la relación entre conceptos y teoremas es dialéctica (no hay teoremas sin conceptos, y no hay conceptos sin teoremas)" (p. 294).

> Pero es la observación de la actividad en situación lo que permite detectar los conceptos-en-acto y los teoremas-en-acto; son eventualmente conscientes para el sujeto, eventualmente inconscientes. Es eso lo que justifica el concepto de invariante operatorio, incluso si los conceptos y teoremas formalizados también son operatorios. (Vergnaud, 2016, p. 299)

Es necesario indicar que un *concepto-en-acto* no es un verdadero concepto científico, ni un *teorema-en-acto* es un verdadero teorema a menos que se tornen explícitos. En la ciencia conceptos y teoremas explícitos son apenas, la parte visible de la conceptualización; sin la parte escondida formada por los invariantes operatorios, esa parte visible no sería nada (Moreira, 2002).

3.3.5. Forma operatoria y forma predicativa del conocimiento

Por lo antes expuesto, se establece que el desarrollo de conocimientos implícitos en la acción del sujeto, se evidencia en dos formas de conocimiento. Vergnaud describe a la *forma operatoria* y a la *forma predicativa del conocimiento.*

> La *forma operatoria del conocimiento*, es la que permite actuar en situación (y eventualmente tener éxito), mientras que la *forma predicativa del conocimiento,* es la que enuncia los objetos de pensamiento, sus propiedades, sus relaciones y sus transformaciones. (Sureda y Otero, 2011, p. 12)

Si bien la *forma predicativa*, es una forma compleja, resulta ser esencial, en el proceso de conceptualización; aunque las palabras no dan cuenta del conocimiento operatorio del sujeto, la operatoria es condición necesaria para la conceptualización (Sureda y Otero, 2013). Este cuestionamiento teórico de la relación entre la *forma operatoria* y la *forma predicativa* del conocimiento, se debe a que la complejidad no está sólo en el hacer, sino también en el decir. La enunciación es esencial en el proceso de *conceptualización*.

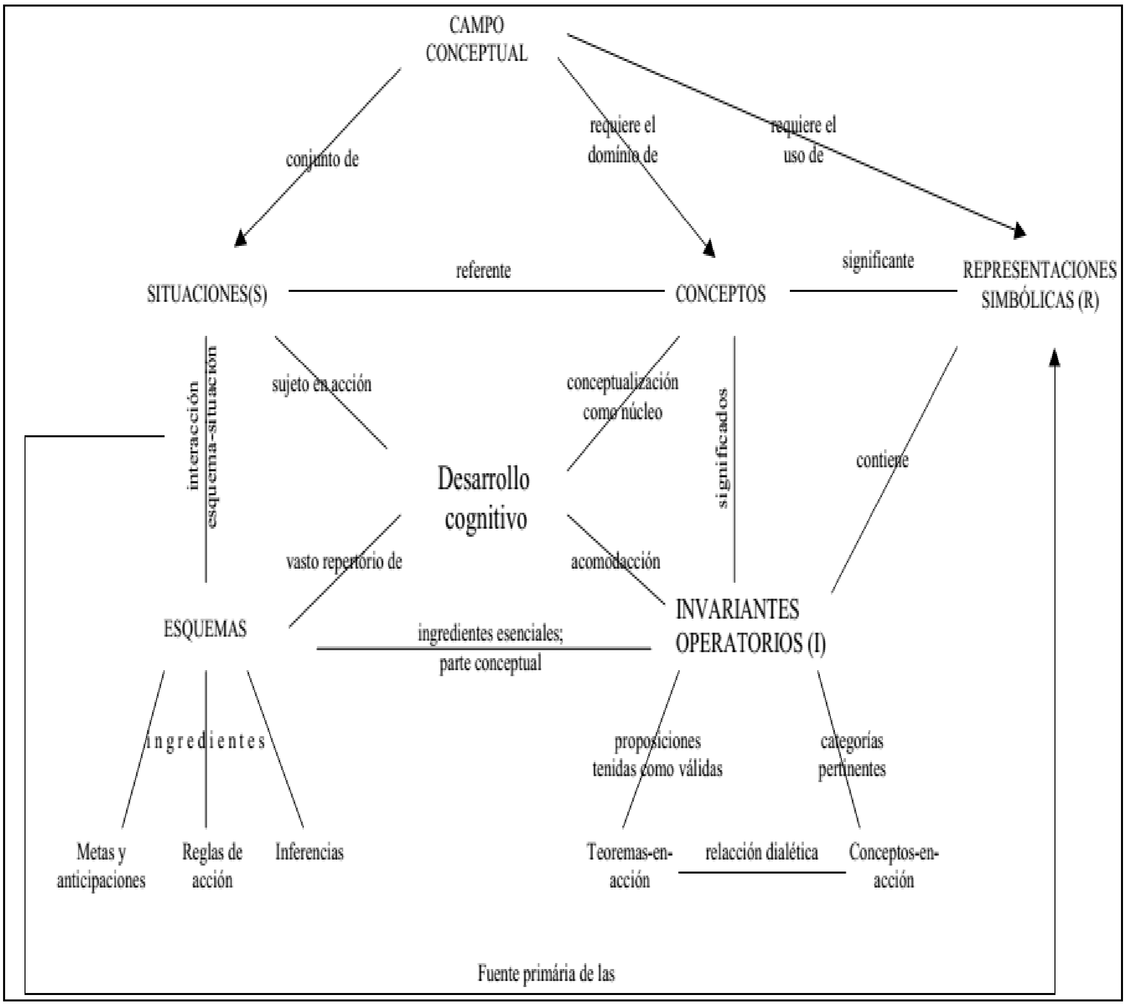
Para Vergnaud,

> […] la distinción entre la forma operatoria del conocimiento, que permite actuar en situación (y tener éxito eventualmente), y la forma predicativa del conocimiento, que enuncia los objetos de pensamiento, sus propiedades, sus relaciones y sus transformaciones. La ciencia está hecha de textos. Esta es una dimensión esencial, pero los textos sólo dan cuenta imperfectamente del conocimiento operatorio, que se pone en acto en situación. (Vergnaud, 2016, p. 286)

La Gráfica 4 presenta los conceptos básicos de la TCC que fueron antes mencionados con sus interrelaciones a través de un mapa conceptual de la TCC, extraído de Moreira (2002).

Gráfica 4

Mapa conceptual de la Teoría de los Campos Conceptuales



Nota. Un mapa conceptual para la teoría de los campos conceptuales de Vergnaud, (Moreira, 2002), (https://www.if.ufrgs.br/moreira/vergnaudespanhol).

3.4. La Teoría de los Campos Conceptuales y la enseñanza de la Matemática

Si bien las situaciones a las que la TCC hace referencia no son situaciones didácticas propiamente dichas, son tareas o problemas que el profesor, como mediador, debe proveer para que un campo conceptual sea progresivamente dominado por sus estudiantes.

> Pero dada las dificultades encontradas por los alumnos en el aprendizaje de la matemática, es posible colocar casi al mismo nivel, por un lado, la complejidad de las *situaciones* y de las operaciones de pensamiento necesarias para tratarlas, y por otro, la complejidad de ciertos enunciados y simbolismos matemáticos. A tal punto que algunos investigadores colocan las dificultades de la matemática

> en el lenguaje. Sin embargo, la matemática no es un lenguaje sino un conocimiento. Y el *conocimiento* como tal es adaptación: asimilación y acomodación. Asimilación del nuevo conocimiento al antiguo, y acomodación a lo que no ha sido previsto antes, es decir, a la contingencia. El carácter implícito de una gran parte del conocimiento de las personas no significa que el conocimiento explícito no sea operacional. Pero las rupturas que existen entre las *formas operatorias* y las *formas predicativas* de los conocimientos matemáticos, engendran dificultades para los alumnos. Rupturas de las cuales todavía, se tiene escaso conocimiento. (Sureda y Otero, 2011, p. 13)

> Si no se desestabiliza a los alumnos, no tienen ninguna razón para aprender. Es verdad también que, si se les desestabiliza demasiado, no aprende más. El principio de adaptación de Piaget funciona muy bien aquí; por otra parte, la idea de desarrollo próximo de Vygotsky, incita a la prudencia. (Vergnaud, 2016, p. 288)

Atendiendo a lo expuesto en los párrafos anteriores se realizó una investigación cuyo diseño metodológico se presenta en el siguiente capítulo.

CAPÍTULO 4

METODOLOGÍA

4.1. Descripción general de la metodología empleada

El diseño de investigación, propuesto para este estudio, es de corte exploratorio y descriptivo. Se plantea un estudio que contemple técnicas cualitativas, dado que ellas permiten mayor apertura y flexibilidad para reformular o ampliar las preguntas de investigación, de manera simultánea a su implementación; de este modo, el diseño se fue completando y precisando de manera concurrente a la ejecución de la investigación, con el propósito de que ésta sea sensible a aquello que busca describir y comprender, "dialogando" con el objeto para cobrar sentido, al finalizar el estudio.

Con el propósito de indagar la comprensión del concepto de las fracciones y sus diferentes significados, usando contextos continuos y discretos, se diseñó, evaluó, aplicó y analizó un instrumento de evaluación diagnóstica (ED) que incluye diferentes situaciones problemáticas.

4.2. Selección de la muestra de participantes

La población, objeto de estudio de este trabajo, se halla constituida por los estudiantes de los segundos años de las escuelas de educación secundaria (Ex SB) de Florencio Varela.

Un primer recorte del marco muestral tuvo en cuenta, por un lado, la representatividad de las diferentes zonas del distrito escolar y, por otro, la posibilidad física de relevamiento de la información. De esta manera, se decidió considerar tres puntos muéstrales, uno de cada zona del distrito de Florencio Varela, a los cuales la investigadora tuvo fácil acceso.

El conjunto de puntos muéstrales, inicialmente, estuvo conformado por las escuelas secundarias básicas ESB N° 16, ESB N° 27 y ESB N° 60. La primera de ellas, alejada del casco céntrico del partido; la segunda en la zona céntrica de Florencio Varela y, la tercera, en la zona rural de este distrito escolar.

Sin embargo, razones ajenas a este estudio, obligaron a desestimar uno de los puntos muéstrales antes descriptos. La ESB N° 27 fue unificada con la EES N° 8; como sus autoridades no consintieron la implementación de la ED, argumentando la falta de autorización de los menores que asisten a ella, fue sustituida por la EES Nº 36 (Ex ESB N° 11), que se encuentra alejada del centro del distrito.

De esta forma, la población en estudio está determinada por los N= 258 estudiantes de los segundos años de las escuelas de educación secundarias EES Nº 46 (ex ESB Nº 16), EES Nº 36 (ex ESB Nº 11) y EES Nº 60 (Ex ESB Nº 60), que asisten a las instituciones mencionadas de Florencio Varela, tanto del turno mañana como del turno tarde.

Como el marco teórico adoptado requiere de información que aporte riqueza, profundidad y calidad, el criterio de muestreo más adecuado para este estudio, fue la capacidad operativa de recolección y análisis de la información de interés. El criterio para el muestreo propuesto fue la muestra dirigida que selecciona sujetos “típicos” (Sampieri, 2010). Se seleccionaron tres cursos que fueron incluidos según se consideraron como casos típicos, o casos que, por su especificidad de la zona de ubicación y sus características, responden a las necesidades propias de la investigación (Sampieri, 2010). Atendiendo a esto, se seleccionó una muestra de casos-tipo de n = 86 alumnos.

Esta muestra contiene 44 mujeres y 42 varones, de entre 12 y 14 años de edad y su distribución por establecimiento educativo y género, se muestra en la Tabla 1.

Tabla 1

Distribución de los participantes por escuela y género

Establecimientos	Género		Cantidad de estudiantes muestreados
	Masculino	Femenino	
EES Nº 46	18	17	35
EES Nº 36	12	18	30
EES Nº 60	12	9	21
Total	42	44	86

4.3. Diseño del instrumento

Las actividades que integran la ED están relacionadas con situaciones de la vida real. Dichas actividades fueron diseñadas basándose tanto al Diseño Curricular Provincial (2006) vigente correspondiente a Matemática para el primer año de la escuela secundaria, como a los objetivos de la investigación y a resultados de investigaciones previas sobre el aprendizaje del concepto de fracción (Llinares y Sánchez, 1988; Maza y Arce, 1991; Pujadas y Eguiluz, 2000; Ponce, 2004; Colindres, 2010; Ministerio de Educación (2010) *Operativo Nacional de Evaluación;* Morales, 2011).

Una primera versión de la ED compuesta por diez actividades fue sometida al juicio de tres expertos. Estos especialistas llevaron adelante un minucioso análisis tanto, de la pertinencia de las situaciones, en relación a los objetivos de la ED, a los contenidos curriculares, como al modo en el cual las actividades fueron presentadas y redactadas. Las observaciones de estos jueces permitieron la reformulación de los ítems de la versión final.

Además, se realizó una aplicación piloto de la versión inicial, en la EES Nº 36 (Ex ESB Nº 11) a un grupo de 10 estudiantes en el mes de marzo del ciclo lectivo 2016; esta aplicación permitió testear el dispositivo, analizando su viabilidad de modo tal que pudo ser modificado en función de los resultados del pilotaje.

De esta forma la versión final de la ED (Anexo) estuvo conformada por seis ítems conteniendo actividades que pretenden indagar el conocimiento de los significados de la fracción vinculados a la relación parte-todo, cociente y su expresión decimal, razón, porcentaje, probabilidad y representación en la recta numérica (como expresión de una medida). En la Tabla 2, se presenta la categorización de los seis ítems de la ED.

Tabla 2

Categorización de los ítems de la ED según significados de la fracción

Ítems	Significados de la fracción
1	Parte-todo (continuo y discreto)
2	Cociente y su expresión decimal (continuo)
3	Razón (discreto)
4	Porcentaje (discreto)
5	Probabilidad (discreto)
6	Representación en la recta numérica (como expresión de una medida) (continuo)

Desde el referencial teórico adoptado, la ED, pretende indagar el conocimiento operatorio y predicativo, de los participantes, en torno a las fracciones. Las actividades de la ED permiten comprender los aprendizajes logrados por los estudiantes, además de explorar su acción en situación, y la organización de su conducta; es decir, la identificación de los esquemas que se ponen en juego (Vergnaud, 1990), al momento de enfrentar distintas tareas relevantes para cada conjunto de conceptos incluidos en la ED.

El análisis de la resolución de las situaciones planteadas permite dar respuesta a las primeras preguntas formuladas en este estudio; en tanto que la descripción de las estrategias utilizadas por los estudiantes, surge del análisis de la explicitación o justificación de sus modos de resolución, lo que es, además, requerido. Este requerimiento busca indagar sobre los procesos de razonamiento y argumentación, representación y modelización. Si bien las palabras sólo dan cuenta de una forma aproximada del conocimiento, son tan necesarias como la forma operatoria que permite al sujeto actuar en situación; la forma predicativa le permite enunciar, así como comunicar su conocimiento (Vergnaud, 1990).

4.4. Aplicación del instrumento

La ED fue respondida presencial, individualmente y por escrito, por la totalidad de alumnos que intervienen en este estudio, en el horario habitual de su clase. El tiempo destinado en cada curso fue de dos horas reloj, en una clase típica de Matemática y en presencia del docente del curso y de la investigadora.

Se buscó crear un ambiente de confianza y respeto, que permitiera el desarrollo de las actividades planteadas y que propiciara la reflexión de los alumnos. Particularmente, se puso especial interés en responder al compromiso ético de resguardar la confidencialidad de la identidad e información personal aportada por los participantes del estudio. Además, se hizo hincapié en que la información generada no sería utilizada con ningún otro fin que no sea el de la investigación, no teniendo efectos sobre los participantes de quienes sólo se demandó su tiempo y sinceridad al responder.

Los alumnos fueron invitados a resolver las actividades de la ED con libertad, del modo que consideraran conveniente y que expresaran sus estrategias de resolución, donde involucraban los diferentes significados de las fracciones, que se consideran en el Diseño Curricular correspondiente al primer año de secundaria; en el primer trimestre de 2016 se realizó la ED, al inicio del año escolar.

4.5. Análisis de los resultados de la implementación

Una primera revisión de un subconjunto de protocolos permitió encontrar una tipología de estrategias empleadas por los estudiantes; las diferentes categorías de estrategias surgieron de agrupar respuestas que evidenciaron cierto grado de homogeneidad. De este modo se definieron 3 Categorías; para las 6 actividades. A cada categoría se le asignó un código que consta de las primeras letras del tipo de estrategia; por ejemplo: LG (este código identifica aquellas respuestas en las que se evidencia el uso exclusivo del lenguaje gráfico).

Cada código condensa los conceptos en acto y/o teoremas en acto que los participantes pusieron en juego en la resolución de las actividades.

La agrupación de respuestas idénticas o que, al menos, aparezcan como equivalentes, para cada uno de los ítems, permitió la construcción de una tabla de frecuencias para la variable categórica “Códigos”.

En el capítulo siguiente, se analizan los resultados de la implementación de la ED, a partir de los protocolos relevados.

CAPÍTULO 5

RESULTADOS DEL ESTUDIO

5.1. Procesamiento de los datos

Una primera revisión de los protocolos de los estudiantes, permitió caracterizar las estrategias utilizadas y encontrar tipologías de respuestas posibles, en concordancia con las formulaciones teóricas que guían este estudio.

Inicialmente las respuestas a cada una de las actividades de los 86 estudiantes fueron categorizadas según las tres categorías que se definieron para este estudio; estas categorías son:

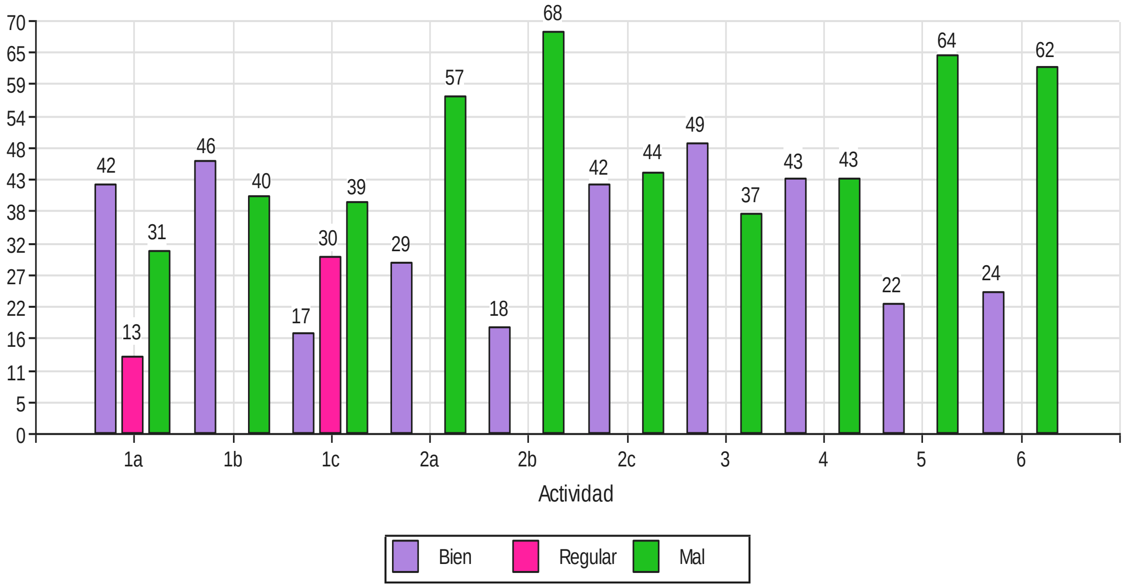
- *Bien*: esta categoría se asocia a las respuestas que evidencian destreza en la realización de operaciones con fracciones y la utilización de una representación gráfica de manera experta.
- *Regular*: esta categoría se asocia a respuestas que muestran la ejecución de operaciones correctas y la utilización de representaciones gráficas inadecuadas, o bien, operatoria incorrecta y representación gráfica pertinente.
- *Mal*: esta categoría se corresponde con las respuestas en las que se observa tanto operaciones con fracciones mal resueltas como representaciones gráficas incorrectas.

Un primer análisis global de la distribución de frecuencias de las categorías anteriores, para cada uno de los ítems de la ED, se presenta en la Figura 1.

Se destaca que sólo dos de las actividades presentaron respuestas categorizadas como *Regular*: 13 en la actividad 1.*a* y 30 en la actividad 1.*c*. Además, sólo en tres actividades el número de respuestas categorizadas como *Bien* supera a la cantidad de respuestas categorizadas como *Mal* (actividad 1.*a*; actividad 1.*b* y actividad 3. En las actividades 2.*c* y 4, se encontró una cantidad similar de respuestas categorizadas como *Bien*, como de respuestas categorizadas como *Mal*. En las restantes actividades, el número de respuestas categorizadas como *Mal* supera ampliamente al número de respuestas categorizadas como *Bien*.

Figura 1

Distribución de las respuestas según categorías



Por otra parte, el análisis de las estrategias de resolución se condujo mediante la asignación de códigos; esto permitió agrupar a todas las respuestas idénticas o que, al menos, aparezcan como equivalentes para evidenciar cierto grado de homogeneidad entre ellas. A partir de este análisis se construyeron los códigos que siguen:

- LG: este código identifica aquellas respuestas en las que se evidencia el uso exclusivo del lenguaje gráfico.
- RA: este código fue asignado a aquellas respuestas en las que se evidencia el uso exclusivo de la aritmética.
- LG-RA: este código identifica las respuestas que evidencian tanto el uso de lenguaje gráfico como aritmético.
- LC: este código identifica aquellas respuestas en las que se evidencia el uso exclusivo del lenguaje coloquial.

La construcción de estos códigos no responde, por si sola, a las preguntas de investigación formuladas, aunque es un requisito necesario que permitió un análisis e interpretación minuciosa y exhaustiva de las estrategias utilizadas por los alumnos. En la Tabla 3, se muestra la distribución de la totalidad de las respuestas (860) atendiendo a la categorización y al código que le fue asignado. Esta tabla incluye los porcentajes de repuestas de cada código y de cada categoría junto con los porcentajes fila de cada código dentro de cada una de las tres categorías.

Tabla 3

Distribución de respuestas según categorías y códigos

Códigos / Categorías	LG	RA	LG-RA	LC	Total
Bien	29 8,7%	73 22%	147 44,3%	83 25%	332 38,6%
Regular	10 23,3%	0 0%	3 7%	30 69,7%	43 5%
Mal	117 24,1%	82 17%	50 10,3%	236 48,6%	485 56,4%
Total	156 18,1%	155 18%	200 23,3%	349 40,6%	860

Atendiendo a los códigos asignados a las respuestas, se destaca que el mayor porcentaje de las mismas se asocia a aquellas respuestas a las que se asignó el código LC (40,6%). En tanto que las restantes respuestas fueron codificadas en forma relativamente homogénea como LG (18,1%), RA (18%) y LG-RA (23,3%).

Considerando la distribución conjunta de categorías y códigos se puede señalar que entre las respuestas categorizadas como *Bien* (332), el mayor porcentaje (44,3%) se asocia a la categoría LG-RA; esto permite afirmar que además de una correcta resolución de las actividades, estas respuestas corresponden a alumnos que utilizaron tanto el lenguaje aritmético como las representaciones gráficas. Un menor porcentaje (25%) de respuestas de la categoría *Bien*, se asocia a alumnos que utilizaron exclusivamente el lenguaje coloquial en la resolución de las actividades, lo que evidencia un uso preponderante del conocimiento predicativo, desestimando las representaciones gráficas como técnicas de resolución. Se destaca que, entre las respuestas categorizadas como *Bien*, sólo el 29 (8,7%) han sido formuladas a partir de la simple utilización del escaso empleo del lenguaje gráfico LG. Por último, el 22% de las respuestas de la categoría *Bien*, evidencia el empleo de la respuesta aritmética, codificadas como RA. Se evidencia en la resolución de las actividades de la ED un total de 332 (38,6%) de alumnos que respondieron a la actividad de manera experta.

Además, se evidencia un total de 43 respuestas el 5%, correspondientes a la categoría *Regular*; el 69,7% de las respuestas de esta categoría 30 ha sido codificado como LC, no encontrándose respuestas de esta categoría en las que se haya empleado la técnica aritmética exclusivamente. Sólo un 23,3% de las respuestas categorizadas como *Regular* exhibe lenguaje gráfico para su resolución y 3 (7%) incorporan además el lenguaje gráfico como aritmético.

A pesar del elevado porcentaje de respuestas categorizadas como *Mal* 56,4%, se observó que los alumnos emplearon alguna estrategia de resolución que incluyó el lenguaje coloquial en el 48,6% de esta categoría de respuestas; el lenguaje gráfico en el 24,1% de respuestas; a la aritmética en el 17% de esta categoría de respuestas y un 10,3% de las respuestas incorrectas exhibieron la utilización tanto del lenguaje gráfico como de la aritmética. Finalmente 485 (56,4%) de las respuestas, fueron realizada de forma inexperta, por lo que se infiere que un amplio porcentaje del total de las 860 respuestas, se resolvió de manera inapropiada.

A continuación, se presentan las actividades propuestas en la ED, seguidas de los resultados obtenidos. En la descripción de las actividades se detallan de forma más especifica el desempeño y la comprensión lograda por los alumnos, las estrategias utilizadas, los *conceptos-en-acto*, los *teoremas-en-acto*, los errores y dificultades encontradas durante el proceso de resolución. Se describen los resultados del estudio, poniéndose el énfasis en el instrumento empleado en la recolección de la información, la comprensión del concepto de fracción depende de cómo se entienda cada significado.

Un elemento crucial, para la ED, es la caracterización de los diferentes significados e interpretaciones de las fracciones y los objetivos propuestos. Los protocolos seleccionados son representativos de resoluciones prototípicas de los alumnos involucrados en este estudio.

Complementariamente se presentan ejemplares prototípicos que dan cuenta de los significados y conceptos que, en relación a las fracciones, poseen los alumnos a través del análisis e interpretación de las respuestas de la ED.

Figura 2

Actividad 1 de la ED

1) Si 5 amigos han comprado un turrón y quieren compartirlo de modo que todos coman igual cantidad, ¿Cómo puede efectuarse el reparto?

a) ¿Cuánto le corresponde a cada uno?

b) ¿Y si quieren compartir 4 turrones, en las mismas condiciones?

c) Escribe el procedimiento que empleaste para responder a cada una de las preguntas anteriores.

Aquí, la pregunta general del reparto no presupone el uso de las fracciones; el modo en el cual el reparto se lleva a cabo es el relato de la experiencia concreta de repartir. Esta actividad tiene como objetivo determinar si el alumno podía dividir *un todo* en partes iguales, a la vez, identificar la fracción que representa cada parte en que está dividido el todo (continuo o discreto); esta situación se presenta cuando un *todo* se divide en partes *congruentes.*

> El todo recibe el nombre de unidad. Esta relación parte-todo depende directamente de la habilidad de dividir un objeto en partes o trozos iguales. La fracción aquí es siempre “fracción de un objeto”. Sobre esta interpretación se basan generalmente las secuencias de enseñanza cuando se introducen las fracciones (normalmente en su representación continua). (Llinares y Sánchez, 1988, p. 55)

Los ítems *a* y *b* de la actividad 1 refieren al significado parte-todo de la fracción, en contextos continuo y discreto; en tanto que el ítem *c* está destinado a indagar el conocimiento predicativo de los alumnos.

En la Tabla 4, se presenta la distribución de las respuestas al ítem 1.*a* según categoría y código asignados.

Tabla 4

Distribución de respuestas a la actividad 1.a

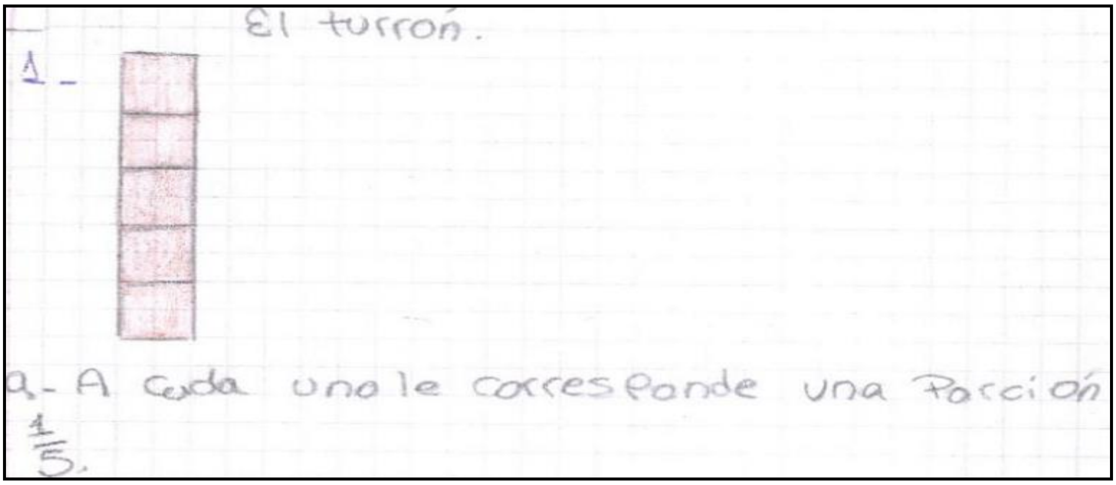
Códigos / Categorías	**LG**	**RA**	**LG-RA**	**LC**	**Porcentajes**
Bien	0	0	42	0	**49**
Regular	10	0	3	0	**15**
Mal	1	0	0	30	**36**
Porcentajes	**13**	**0**	**52**	**35**	**100 Total**

En esta actividad se evidencia que los estudiantes presentan dificultades en su resolución. Se observó que, de los 86 estudiantes, 42 presentaron respuestas en la categoría *Bien* 49%. Se destaca que la totalidad de estos estudiantes construyeron sus respuestas a través de la ejecución de operaciones adecuadas y utilizando representaciones gráficas de manera experta LG-RA. Estos alumnos identificaron el *todo* o *unidad* y asumieron que el turrón representaba *el todo;* este todo contenía 5 partes equivalentes como cantidad de volumen; la fracción que representa cada una de estas partes es 1/5 del turrón.

Un ejemplar prototípico de respuesta clasificada como *Bien* LG-RA se presenta en la Figura 3.

Figura 3

Respuesta Bien LG-RA al inciso 1.a



Nota. Tomado de protocolo *36216*

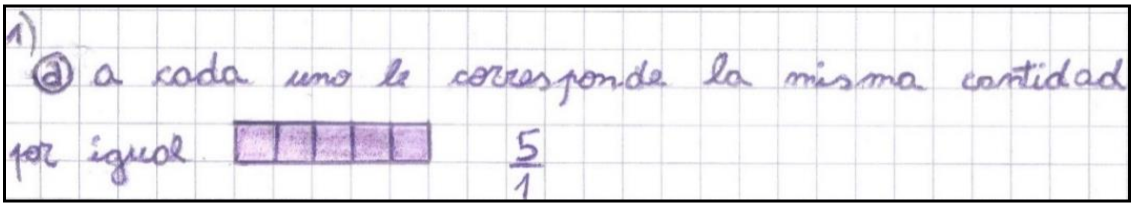
Se infiere que el alumno resolvió la actividad a través del concepto del *todo o unidad*, la división indicada y la utilización de la representación gráfica de dividir *el todo* (el turrón) en cinco partes iguales.

Por otro lado, dentro del 15% de estudiantes que respondió a la actividad 1.*a* en forma *Regular*, 10 lo hicieron a partir de respuestas codificadas como LG y 3 con respuestas codificadas como LG-RA.

Un ejemplar prototípico de respuesta *Regular* LG-RA se presenta en la Figura 4.

Figura 4

Respuesta Regular LG-RA al inciso 1.a



Nota. Tomado de protocolo *46201*

Aquí se observa que el alumno puso en acción los conceptos del *todo o unidad*, la división indicada y la utilización de la representación gráfica de dividir *el todo* (el turrón) en cinco partes iguales en la representación gráfica; sin embargo, la escritura incorrecta de la fracción deja inferir que no pudo diferenciar el numerador del denominado. Aquí el alumno sabe que es una división lo que tiene que hacer, pero pone de manifiesto un teorema en acto inapropiado: el numerador corresponde a las partes iguales en que se divide al todo y el denominador al entero mismo. Esto queda exhibido en la anotación que a cada uno le corresponde 5/1 del turrón; no identifica en la fracción el numerador del denominador, por lo tanto, no comprende que el todo se conserva, es decir, que la división está formada por cada parte del turrón (porción) y la suma de las partes forma, *el todo.*

Por otra parte, 31 estudiantes 36% resolvieron la actividad 1.*a* mediante respuestas que fueron categorizadas como *Mal*. En este conjunto de respuestas se encontró una codificada como LG y las 30 restantes codificadas como LC. Se destaca la ausencia de respuestas regulares empleando la representación aritmética exclusivamente o junto con el lenguaje gráfico.

Un ejemplar prototípico de respuesta clasificada como *Mal* LG se muestra en la Figura 5.

Figura 5

Respuesta Mal LG al inciso 1.a

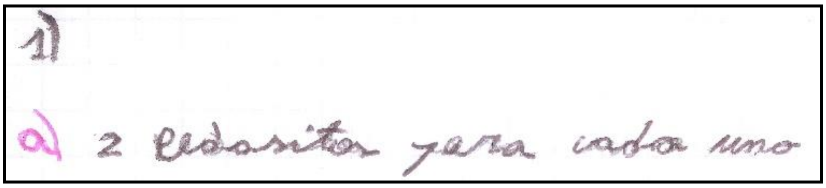
Nota. Tomado de protocolo *60213*

De esta respuesta, se infiere que el alumno sabe que es una división lo que tiene que hacer, dado que divide "el turrón" pero no comprende la relación parte-todo; pone en acto un concepto que no es adecuado; realiza siete marcas verticales al turrón, con lo cual, éste queda dividido en seis partes y, además, las partes son de distinto tamaño. Se infiere que no comprende que la división está formada por cada parte del turrón (porción) y estas partes deben ser iguales. Además, considera que, con sólo realizar la representación gráfica, la actividad está resuelta dado que no indica la fracción del turrón que corresponde a cada uno de los amigos; no señala en el gráfico la parte que quiere representar. Su conocimiento es incompleto y aún no ha alcanzado la conceptualización de la noción de fracción.

Un ejemplar prototípico de respuesta clasificada como *Mal* LC se muestra en la Figura 6.

Figura 6

Respuesta Mal LC al inciso 1.a



Nota. Tomado de protocolo *60208*

Se infiere que el alumno está asignando 2/10 a cada uno de los cinco amigos; si ese fuera el caso, la respuesta sería adecuada (divide al turrón en 10 partes iguales y le da 2 trozos a cada uno); esa escasez de lenguaje predicativo no permite hacer inferencia sobre la completitud de un conocimiento, por lo tanto no se puede deducir el tipo de conocimiento que tiene este alumno; sólo se infiere que no responde a la consigna de la actividad por la escasez del desarrollo del lenguaje predicativo.

En la Tabla 5, se presenta la distribución de las respuestas al ítem 1.*b* según la categoría y código asignados.

Tabla 5

Distribución de respuestas a la actividad 1.b

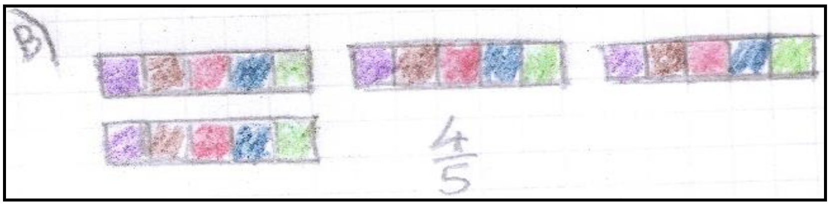
Códigos / Categorías	LG	RA	LG-RA	LC	Porcentajes
Bien	0	0	46	0	**53**
Regular	0	0	0	0	**0**
Mal	31	0	1	8	**47**
Porcentajes	**36**	**0**	**55**	**9**	**100 Total**

La actividad 1.*b* difiere de la anterior porque aquí se requiere determinar el *todo* que va a ser dividido; ya no es un único turrón, sino cuatro. De la tabla 5, se evidencia que los estudiantes presentan dificultades en su resolución, dado que sólo 46 de los 86 estudiantes presentaron respuestas en la categoría *Bien* 53%. Se destaca que la totalidad de estos estudiantes construyeron sus respuestas a través de la ejecución de operaciones adecuadas y utilizando representaciones gráficas de manera experta LG-RA.

Un ejemplar prototípico de respuesta clasificada como *Bien* LG-RA se presenta en la Figura 7.

Figura 7

Respuesta Bien LG-RA al inciso 1.b



Nota. Tomado de protocolo *36209*

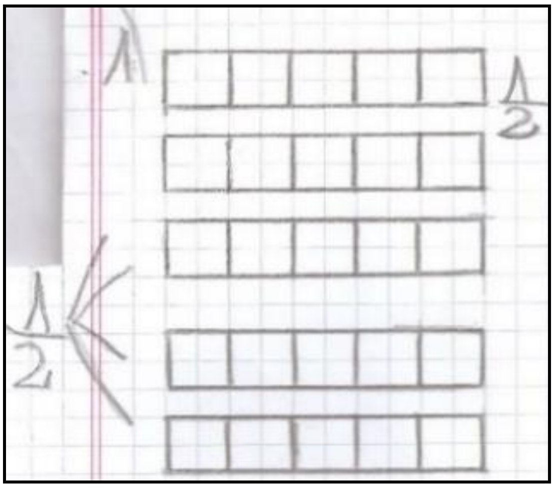
Esta respuesta permite deducir que el alumno reconoce el *todo o unidad*, en un contexto discreto, empleando la división indicada para designar la fracción y la utilización de la representación gráfica (los cuatro turrones); representó la quinta parte que debería darle a cada amigo, indicándolo con un color diferente. Así, puso en acción que 4 veces 1/5 corresponde a 4/5.

Además, 40 estudiantes 47% resolvieron la actividad 1.*b* mediante respuestas que fueron categorizadas como *Mal*. En este conjunto de respuestas se encuentran 31 codificadas como LG, 1 como LG-RA y las 8 restantes codificadas como LC.

Un ejemplar prototípico de respuesta clasificada como *Mal* LG-RA se muestra en la Figura 8.

Figura 8

Respuesta Mal LG-RA al inciso 1.b



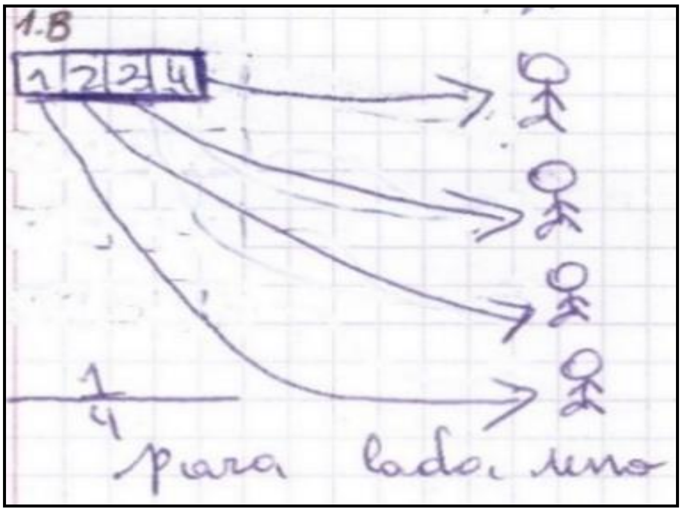
Nota. Tomado de protocolo *60206*

Aquí, se infiere que el alumno utiliza la representación gráfica para dividir el *todo* en partes iguales; es decir, sabe que es una división lo que tiene que hacer; sin embargo, realiza la representación gráfica de cinco turrones y los divide a cada uno en cinco partes iguales; de allí se puede inferir que su concepto de reparto se asocia al caso en que el *todo* (los turrones) tienen igual número de partes iguales a la cantidad que se quiere repartir. Además, incluye las fracciones 1/2 lo que pone de manifiesto que su conocimiento sobre la noción de fracción es incompleto.

Un ejemplar prototípico de respuesta clasificada como *Mal* LG se muestra en la Figura 9.

Figura 9

Respuesta Mal LG al inciso 1.b



Nota. Tomado de protocolo *60204*

Se entiende que el alumno sabe que es una división lo que tiene que hacer, dado que divide el turrón, pero no comprende la relación parte-todo; son cuatro turrones y cinco amigos. En la respuesta queda evidenciado que el alumno pone en acto un concepto que no es adecuado; asigna a igual número de objetos de igual tamaño, igual número de destinatarios, no comprende que son cinco amigos. Se infiere que su conocimiento es incompleto y aún no ha alcanzado la conceptualización de la noción de fracción como la relación parte-todo en contexto discreto.

Se destaca, además, que ninguno de los estudiantes respondió a la actividad 1.*b* en forma *Regular*.

En la Tabla 6, se presenta la distribución de las respuestas al ítem 1.*c* según la categoría y código asignados.

Tabla 6

Distribución de respuestas a la actividad 1.c

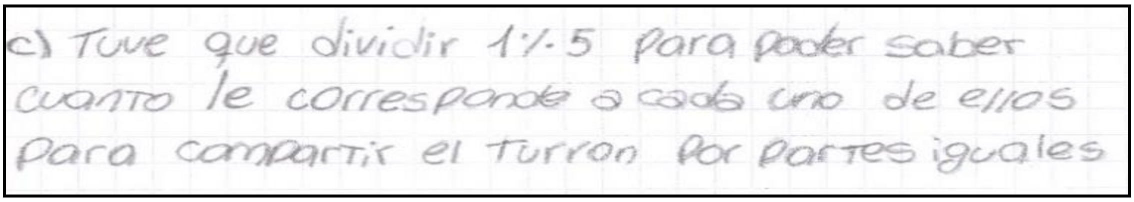
Códigos / Categorías	LG	RA	LG-RA	LC	Porcentajes
Bien	0	0	0	17	**20**
Regular	0	0	0	30	**35**
Mal	0	0	0	39	**45**
Porcentajes	**0**	**0**	**0**	**100**	**100 Total**

De los valores del cuadro se desprende la dificultad que conlleva el expresar en lenguaje coloquial el conocimiento operatorio; es decir, el obstáculo que constituye el conocimiento predicativo solicitado para responder los incisos *a* y *b*. En esta actividad se evidencia que los estudiantes presentan serias dificultades en su resolución; se observó que sólo 17 estudiantes presentaron respuestas en la categoría *Bien* 20%, todas codificadas como LC. Se destaca que la totalidad de estos estudiantes justificaron sus respuestas describiendo el procedimiento gráfico o aritmético utilizado para responder a los incisos *a* y *b*.

Un ejemplar prototípico de respuesta clasificada como *Bien* LC se presenta en la Figura 10.

Figura 10

Respuesta Bien LC al inciso 1.c



c) Tuve que dividir 1÷5 para poder saber cuanto le corresponde a cada uno de ellos para compartir el turron por partes iguales

Nota. Tomado de protocolo *46219*

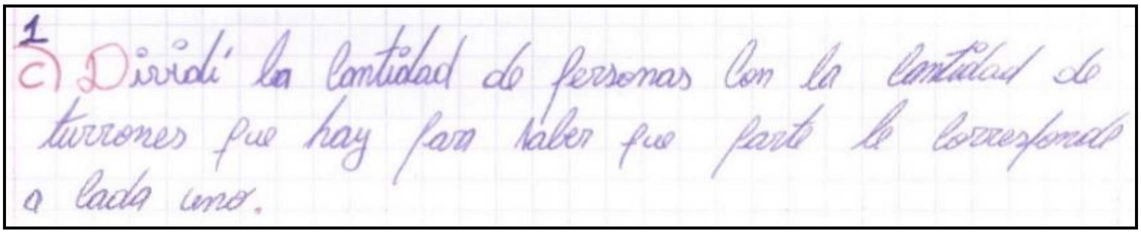
La información que provee la respuesta permite inferir el modo en que el alumno la obtuvo. Es de suponer la utilización del lenguaje grafico y/o aritmético.

Por otro lado, el 35% de estudiantes respondió de manera *Regular* a esté inciso.

Un ejemplar prototípico de respuesta clasificada como *Regular* LC se presenta en la Figura 11.

Figura 11

Respuesta Regular LC al inciso 1.c


1
c) Dividí la Cantidad de personas Con la Cantidad de turrones que hay para saber que parte le Corresponde a Cada uno.

Nota. Tomado de protocolo *46214*

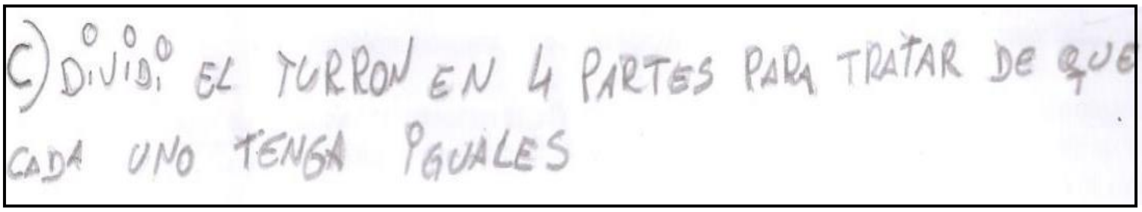
En este protocolo el estudiante respondió a la actividad 1.*c* en forma *Regular*, se explicita el procedimiento que emplearon los alumnos para responder los incisos *a* y *b*. Se deduce que los conceptos utilizados por el alumno fueron a través del no reconocimiento del concepto del *todo o unidad*. Aquí se infiere que el alumno tiene un conocimiento intuitivo, sabe que es una división lo que tiene que hacer, pero el concepto de parte-todo no lo tiene internalizado, no comprende que la división está formada por las partes iguales del turrón (porción). Se puede inferir la dificultad que el alumno presenta en responder a este ítem debido a la ausencia del hábito de justificar.

Además, 39 estudiantes 45% resolvieron la actividad 1.*c* mediante respuestas que fueron categorizadas como *Mal.*

Un ejemplar prototípico de respuesta se muestra en la Figura 12.

Figura 12

Respuesta Mal LC al inciso 1.c


C) DIVIDI EL TURRON EN 4 PARTES PARA TRATAR DE QUE CADA UNO TENGA IGUALES

Nota. Tomado de protocolo *46208*

Aquí el alumno utilizó el concepto de parte-todo, la división. Asumió como podía efectuarse el reparto, desestimando el resto del enunciado y por tal motivo se inclina por la respuesta equivocada. Este alumno dividió un turrón en cuatro partes, es decir 1/4. El alumno sabe que tiene que justificar, pero se evidencia en la respuesta que no tiene el hábito.

En la Figura 13 se presenta la actividad 2.

Figura 13

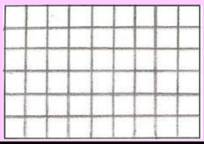
Actividad 2 de la ED

2) El embaldosado del piso de un patio se realizó en tres días: el primer día, se colocaron las baldosas de la tercera parte del patio; el segundo día, se colocaron 0,25 de las baldosas restantes y, el tercer día, se completó el trabajo.

a) Represente en el gráfico la parte del patio que se embaldosó cada día.

b) ¿Qué parte del patio se embaldosó el tercer día?

c) ¿Qué día se colocaron más baldosas?



Los ítems *a* y *b* de esta actividad refieren al significado de la fracción como cociente y expresión decimal, en contextos continuo y discreto; en tanto que el ítem *c* está destinado a indagar la relación de orden en Q.

En la Tabla 7, se presenta la distribución de las respuestas al ítem 2.*a* según categoría y código asignados.

Tabla 7

Distribución de respuestas a la actividad 2.a

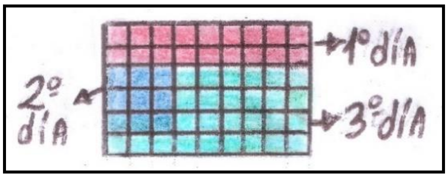
Códigos / **Categorías**	**LG**	**RA**	**LG-RA**	**LC**	**Porcentajes**
Bien	29	0	0	0	**34**
Regular	0	0	0	0	**0**
Mal	57	0	0	0	**66**
Porcentajes	**100**	**0**	**0**	**0**	**100** **Total**

En esta actividad se evidencia que los estudiantes presentan serias dificultades en su resolución. Se observó que 29 estudiantes presentaron respuestas en la categoría *Bien* 34%. Se destaca que la totalidad de estos estudiantes construyeron sus respuestas a través del uso exclusivo del lenguaje gráfico LG.

Un ejemplar prototípico de respuesta clasificada como *Bien* LG se presenta en la Figura 14.

Figura 14

Respuesta Bien LG al inciso 2.a



Nota. Tomado de protocolo *36220*

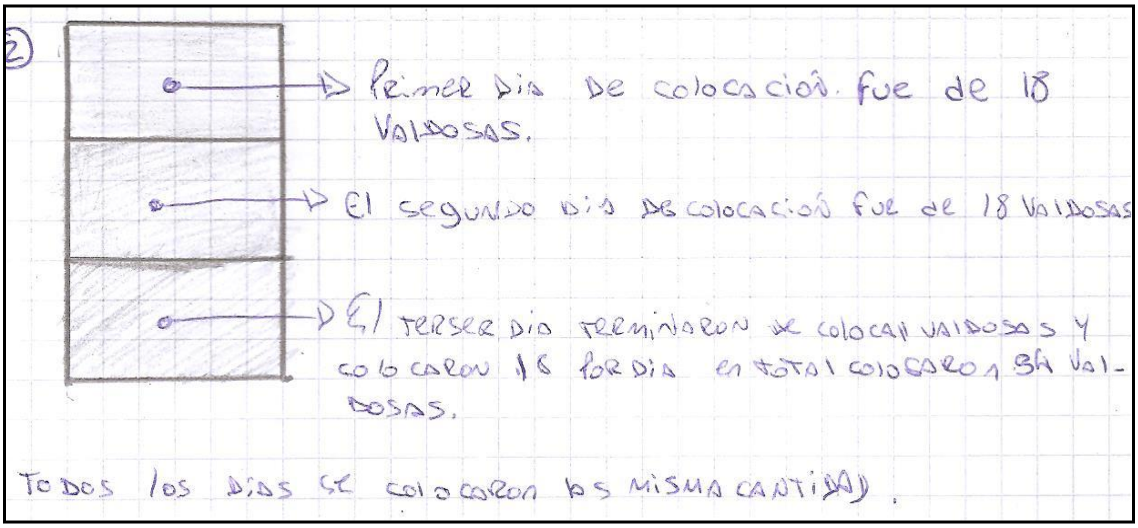
Aquí se infiere que el alumno puso en acción el concepto de fracción pudiendo poner en correspondencia la representación decimal y la división del todo en partes iguales. Asumió que, inicialmente, *el todo o unidad*, se conformaba con 54 baldosas; el primer día, se colocaron las baldosas de la tercera parte del patio, donde la fracción que la representa es 1/3; es decir, este día se colocaron 18 baldosas (1/3 de 54); el segundo día, se colocaron 0,25 de las baldosas restantes; aquí, se identificó la expresión decimal que corresponde a la fracción 1/4; de esta forma, el alumno indicó 1/4 de las 54-18=36 baldosas restantes; es decir, este día se colocaron 9 baldosas (1/4 de 36). El resto del patio se embaldosó el tercer día.

Además, 57 estudiantes 66% resolvieron la actividad 2.*a* mediante respuestas que fueron categorizadas como *Mal*. El total de este conjunto de respuestas fue codificado como LG.

Un ejemplar prototípico de respuesta clasificada como *Mal* LG se muestra en la Figura 15.

Figura 15

Respuesta Mal LG al inciso 2.a



Nota. Tomado de protocolo *60202*

Aquí, se observa que el alumno no comprende la consigna, dado que responde (incorrectamente) al número de baldosas que se colocaron en cada uno de los días y no a la fracción que se le asocia. Aun atendiendo a este hecho, el alumno asocia la división del patio en tres días suponiendo que en cada uno de ellos se colocaron el mismo número de baldosas; es decir, asumió que cada día se colocó 1/3 del total.

Por otro lado, no se encontraron respuestas a la actividad 2.*a* que pudieran ser categorizadas como *Regular*.

En la Tabla 8 se presenta la distribución de las respuestas al ítem 2.*b* según la categoría y código asignados.

Tabla 8

Distribución de respuestas a la actividad 2.b

Códigos / **Categorías**	**LG**	**RA**	**LG-RA**	**LC**	**Porcentajes**
Bien	0	18	0	0	**21**
Regular	0	0	0	0	**0**
Mal	0	26	0	42	**79**
Porcentajes	**0**	**51**	**0**	**49**	**100** **Total**

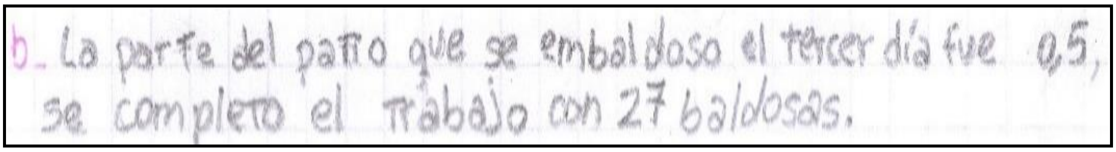
Para resolver esta situación pudieron expresar la parte del patio embaldosada el tercer día a partir de la gráfica del inciso *a*, o bien, utilizando operaciones entre fracciones. En la primera alternativa, de las 54 baldosas quedaron marcadas 18; así podrían escribir la fracción que representa esta porción del patio como 18/54 que, reduciéndola, conduce a la fracción 1/3 cuya expresión decimal es $0,\overset{\frown}{3}$. La segunda alternativa demanda calcular la parte embaldosada en los dos primeros días (1/3.54+1/4.36) =27 para luego restarla del entero; es decir 54-27=27.

En esta actividad se evidencia que los estudiantes presentan serias dificultades en su resolución. Se observó que 18 estudiantes presentaron respuestas en la categoría *Bien* 21%. Se destaca que la totalidad de estos estudiantes construyeron sus respuestas a través del uso exclusivo de la aritmética, RA.

Un ejemplar prototípico de respuesta se presenta en la Figura 16.

Figura 16

Respuesta Bien RA al inciso 2.b



Nota. Tomado de protocolo *46212*

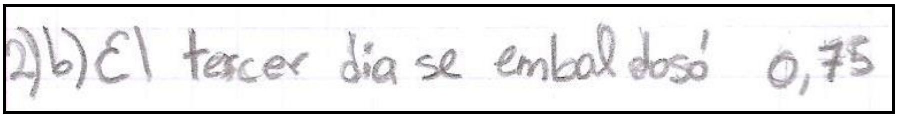
Aquí los conceptos utilizados por el alumno fueron la fracción como cociente y su expresión decimal; además, se desprende que el alumno puso en acción la equivalencia de fracciones.

Por otra parte 68 estudiantes 79% resolvieron la actividad 2.*b* mediante respuestas que fueron categorizadas como *Mal.* En este conjunto de respuestas se encuentran 26 codificadas como RA y 42 codificadas como LC.

Un ejemplar prototípico de respuesta clasificada como *Mal* LC se muestra en la Figura 17.

Figura 17

Respuesta Mal LC al inciso 2.b



Nota. Tomado de protocolo *46218*

Aquí el alumno no tuvo en cuenta la parte del patio embaldosada el primero y segundo día; consideró, además, que 0,25 del patio se encontraba asociado a lo embaldosado en el primero y segundo día, entonces respondió que el tercer día se completó el embaldosado con el 0,75 restante.

Se destaca, además, la ausencia de respuestas a la actividad 2.*b* categorizadas como *Regular*.

En la Tabla 9, se presenta la distribución de las respuestas al ítem 2.*c* según la categoría y código asignados.

Tabla 9

Distribución de respuestas a la actividad 2.c

Códigos / Categorías	LG	RA	LG-RA	LC	Porcentajes
Bien	0	0	0	42	**49**
Regular	0	0	0	0	**0**
Mal	0	0	0	44	**51**
Porcentajes	**0**	**0**	**0**	**100**	**100 Total**

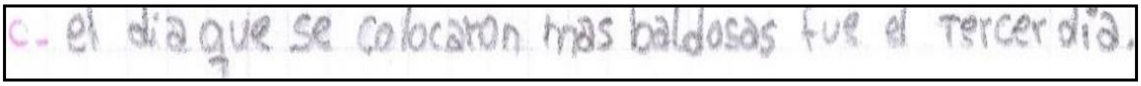
La resolución de esta actividad pudo hacerse a partir del gráfico del inciso *a*; esto lleva a comparar áreas de figuras planas. Sin embargo, otra estrategia complementaria contempla el orden en el conjunto de los números racionales. Así, debiera compararse las fracciones 1/3; 1/4.2/3 y 1/2. Además, en esta actividad se evidencia que los estudiantes presentan dificultades en su resolución.

Se observó que 42 estudiantes presentaron respuestas en la categoría *Bien* 49%. Se destaca que la totalidad de estos estudiantes construyeron sus respuestas a través del lenguaje coloquial LC.

Un ejemplar prototípico de respuesta clasificada como *Bien* LC se presenta en la Figura 18.

Figura 18

Respuesta Bien LC al inciso 2.c



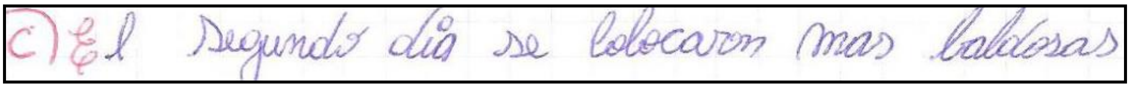
Nota. Tomado de protocolo *46213*

La escasa información que provee la respuesta no permite inferir el modo en que el alumno la obtuvo. Es de suponer que la falta del lenguaje aritmético da cuenta de la mera observación del gráfico del inciso *a*. En este sentido, el alumno puso en juego que, a mayor área del sector del patio, mayor es la fracción; equivalentemente, a mayor parte del todo, mayor es la fracción que lo representa. Además, 44 estudiantes 51% resolvieron la actividad 2.*c* mediante respuestas que fueron categorizadas como *Mal* y codificadas como LC.

Un ejemplar prototípico de respuesta se muestra en la Figura 19.

Figura 19

Respuesta Mal LC al inciso 2.c



Nota. Tomado de protocolo 46214

Aquí se infiere que el alumno consideró la parte decimal de 0,25, desestimando el resto del enunciado y por tal motivo decidió por la respuesta equivocada. Este alumno comparó los números naturales 3 y 25.

Se destaca que no hubo respuestas en la actividad 2.*c* en forma *Regular*.

Figura 20

Actividad 3 de la ED

3) La razón entre el número de botellas de agua mineral y el número de gaseosas del kiosco de la escuela, es de tres a cinco. Si hoy se vendieron 25 gaseosas, ¿cuántas aguas vendieron?

La actividad presupone el uso de las fracciones; aquí se requiere la interpretación de fracción como una razón. Esta actividad tiene como objetivo determinar si el alumno podía identificar la fracción como un índice comparativo de las cantidades relativas de dos magnitudes.

En particular, la actividad refiere al significado de razón de la fracción, en contextos discretos. La razón entre el número de botellas de agua y el número de gaseosas admite una identificación con la fracción 3/5. Suponiendo que la relación se mantiene, todo cambio en el número de botellas de agua producirá un cambio en el número de botellas de gaseosa; es posible establecer una proporción, empleando la razón entre las botellas de agua y gaseosa disponibles y las vendidas. Esto permite desarrollar o integrar la noción de fracciones equivalentes. De este modo, la equivalencia entre las fracciones 3/5 y 15/25 conduce a encontrar la respuesta 15, a la actividad.

En la Tabla 10, se presenta la distribución de la actividad 3 según la categoría y código asignados.

Tabla 10

Distribución de respuestas a la actividad 3

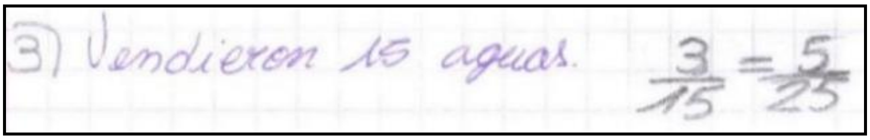
Códigos / Categorías	LG	RA	LG-RA	LC	Porcentajes
Bien	0	47	2	0	**57**
Regular	0	0	0	0	**0**
Mal	0	26	0	11	**43**
Porcentajes	**0**	**85**	**2**	**13**	**100 Total**

En esta actividad se evidencia que los estudiantes presentan dificultades en su resolución; se observó que 49 estudiantes presentaron respuestas categorizadas como *Bien* 57%. En este conjunto de respuestas se destaca que 47 estudiantes construyeron sus respuestas exhibiendo la realización de operaciones adecuadas con fracciones, aunque, lo hicieron a través del uso exclusivo de la aritmética RA; en tanto que 2 estudiantes 2% construyeron sus respuestas a través de la ejecución de operaciones adecuadas y utilizando representaciones gráficas de manera experta LG-RA.

Un ejemplar prototípico de respuesta *Bien* RA se presenta en la Figura 21.

Figura 21

Respuesta Bien RA a la actividad 3



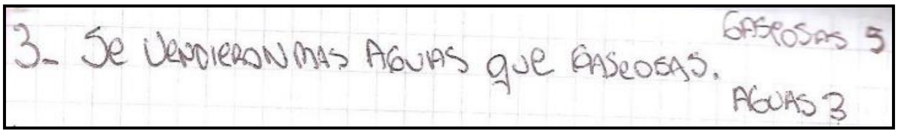
Nota. Tomado de protocolo *36218*

El alumno puso en acción la noción de proporcionalidad directa: el número de botellas de gaseosa es directamente proporcional al número de botellas de agua. La constante de proporcionalidad es, precisamente, 3/5. Además, se puede inferir que la propiedad fundamental de las proporciones no le es ajena al estudiante; así, 3.25 = 5.15. Por otra parte, es posible deducir que este alumno puso en juego la noción de equivalencia de fracciones; probablemente haya comprendido que la fracción que representa la relación entre el número de bebidas en el kiosco se mantiene entre el número de bebidas vendidas.

Además, 37 estudiantes 43% resolvieron la actividad 3 mediante respuestas que fueron categorizadas como *Mal*. En este conjunto de respuestas se encuentran 26 codificadas como RA y 11 como LC. Un ejemplar prototípico de respuesta clasificada como *Mal* LC se muestra en la Figura 22.

Figura 22

Respuesta Mal LC a la actividad 3



Nota. Tomado de protocolo *60205*

Aquí, el alumno ha utilizado solo lenguaje coloquial y no responde a la consigna de la actividad. Queda explícito en el enunciado la relación *3 aguas a 5 gaseosas*. Se manifiesta una relación de orden entre el número de aguas y gaseosas, aunque en esta relación sólo se refiere a las disponibles en el kiosco y no a las vendidas. Aquí, se identifica un conocimiento débil e incompleto en relación a la fracción como razón.

Es de destacar que no hay respuestas en la actividad 3 en forma *Regular*.

Figura 23

Actividad 4 de la ED

4) En un concurso de cocina se presentaron 60 participantes y 10 obtuvieron algún premio. ¿Cómo podría representarse gráficamente al conjunto de los ganadores? Explica el procedimiento que utilizaste.

La pregunta general de la actividad presupone el uso de las fracciones como porcentaje. Esta actividad tiene como objetivo determinar si el alumno puede representar el porcentaje de los participantes que obtuvieron algún premio.

Si bien, los porcentajes tienen asignado un aspecto de operador, la representación de los mismos mediante fracciones, se asocia a la comparación de una parte y el todo. Esta actividad presupone el significado de la fracción representada como porcentaje, en contexto discreto, la pregunta está destinada a indagar el conocimiento operativo y predicativo de los alumnos. Para resolver esta situación se asume que el conjunto (el todo) estaba formado por 60 participantes, de los cuales 50 perdieron y 10 participantes obtuvieron algún premio. Esto da cuenta que la parte del todo que representa a los participantes ganadores se puede indicar como 10/60, o en forma equivalente, 1/6. Así, resta encontrar la expresión porcentual de esta fracción. Para ello, es necesario comprender que un porcentaje x establece *cada 100, x;* así, si cada 60 participantes, 10 ganaron premio, cada 100 ¿cuántos lo harán?, suponiendo proporcionalidad. De esta forma, planteando la igualdad de razones 10/60=x/100 se tiene que, aproximadamente, el 17% se asocia al subconjunto de participantes ganadores.

En la Tabla 11, se presenta la distribución de las respuestas de la actividad 4 según categoría y código asignados.

Tabla 11

Distribución de respuestas a la actividad 4

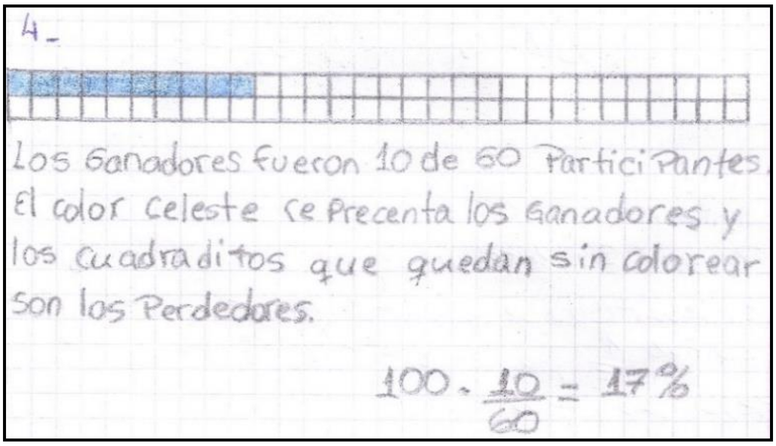
Códigos / Categorías	**LG**	**RA**	**LG-RA**	**LC**	**Porcentajes**
Bien	0	0	43	0	**50**
Regular	0	0	0	0	**0**
Mal	28	0	15	0	**50**
Porcentajes	**33**	**0**	**67**	**0**	**100 Total**

En esta actividad se evidencia que los estudiantes presentan dificultades en su resolución. Se observó que 43 estudiantes exhibieron respuestas en la categoría *Bien* 50%. Se destaca que la totalidad de estos estudiantes construyeron sus respuestas a través del uso exclusivo del lenguaje gráfico como aritmético LG-RA.

Un ejemplar prototípico de respuesta se presenta en la Figura 24.

Figura 24

Respuesta Bien LG-RA a la actividad 4



Nota. Tomado de protocolo *36216*

Aquí se infiere que el alumno pone en acción la representación de la fracción como la relación parte-todo; este hecho se exhibe en la gráfica que construyó. Además, encuentra el porcentaje que se solicita, aunque no describe el modo para determinarlo. Su respuesta permite suponer que es capaz de identificar una fracción con su expresión porcentual.

Además, 43 estudiantes 50% resolvieron la actividad mediante respuestas que fueron categorizadas como *Mal*. En este conjunto de respuestas 28 fueron codificadas como LG evidenciando el uso exclusivo del lenguaje gráfico; en tanto que 15 respuestas fueron codificadas como LG-RA, dado que exhibieron tanto el uso de lenguaje gráfico como aritmético.

Un ejemplar prototípico de respuesta clasificada como *Mal* LG se muestra en la Figura 25.

Figura 25

Respuesta Mal LG a la actividad 4

Nota. Tomado de protocolo *36202*

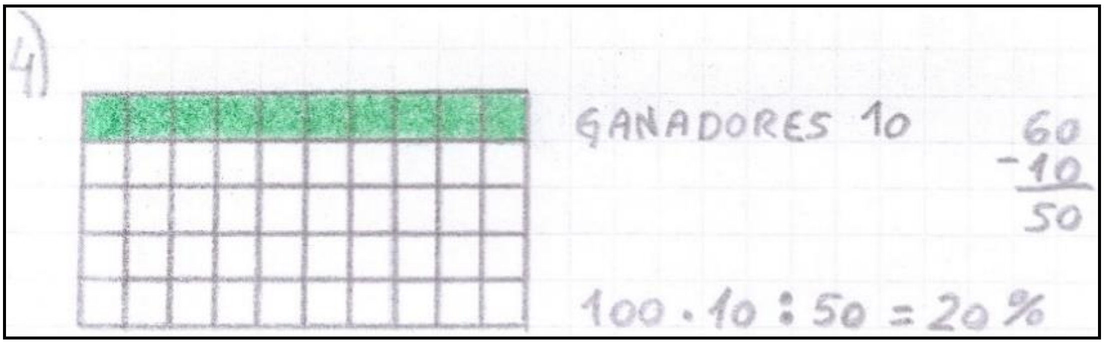
Para resolver esta actividad, el alumno representa gráficamente 70 personas: 60, en blanco y negro y 10, en color. La falta de lenguaje verbal no habilita la interpretación de su respuesta. Una alternativa permite sospechar que los participantes en color fueron extraídos del grupo total; siendo así, el alumno pone en acción la noción de fracción bajo la representación de parte-todo. Sin embargo, podría inferirse que el alumno confunde el *todo*, considerándolo constituido con los 60 participantes junto a los 10 ganadores. Cualquiera sea la situación, la falta de respuesta a la pregunta formulada, permite inferir un conocimiento débil e incompleto en relación a las diferentes representaciones de la fracción, particularmente, a su formulación porcentual.

De los 43 estudiantes con respuestas categorizadas como *Mal*, 15 17% fueron codificadas como LG-RA; sus respuestas evidencian tanto el uso de lenguaje gráfico como aritmético.

Un ejemplar prototípico de respuesta *Mal* LG-RA se muestra en la Figura 26.

Figura 26

Respuesta Mal LG-RA a la actividad 4



Nota. Tomado de protocolo 60219

Aquí, el alumno utiliza inicialmente, la representación gráfica para resolver esta actividad; sin embargo, responde incorrectamente; representa gráficamente el conjunto de los 50 participantes; en blanco indica el conjunto de los "perdedores" y, en color verde, los que recibieron algún premio; no tuvo en cuenta que el total era 60 participantes. Además, expresa 100.10:50=20% lo que presupone que, si bien comprende el modo de encontrar el porcentaje, la cantidad de referencia no es la correcta; de allí que su conocimiento es incompleto.

Se destaca, además, que ninguno de los estudiantes respondió a la actividad 4 en forma *Regular*.

Figura 27

Actividad 5 de la ED

5) En una bolsa color negra, de la que no se puede observar su interior, un mago colocó tres fichas negras y dos blancas, de la misma forma y tamaño. Si un espectador saca una ficha al azar, ¿cuál es la probabilidad de que sea negra? Explica tu respuesta.

Esta actividad presupone el uso de las fracciones para indicar una probabilidad. Tiene como objetivo determinar si el alumno puede identificar a la fracción *a/b* para indicar la relación entre el número de casos favorables *a* y el número de casos posibles *b*, del experimento aleatorio que consiste en extraer una ficha al azar de la bolsa. La experiencia tiene cinco resultados posibles pues, en la bolsa, hay cinco fichas con idéntica forma y tamaño; el cardinal del espacio muestral es, entonces 5. Por otra parte, todas las fichas tienen las mismas chances de ser extraídas; es decir, los sucesos elementales son equiprobables. Además, definiendo el suceso *A*: "la ficha extraída es de color negro", se concluye que tres es el cardinal de dicho suceso. De esta forma, la definición clásica de Laplace conduce a la probabilidad requerida: $P(A) = \#A/\#\Omega$. Así, la probabilidad $P(A)$=3/5.

Esta actividad hace referencia al significado de probabilidad de la fracción, en contexto discreto. Además, se propone indagar el conocimiento predicativo de los alumnos.

En la Tabla 12, se presenta la distribución de las respuestas a la actividad 5 según la categoría y código asignados.

Tabla 12

Distribución de respuestas a la actividad 5

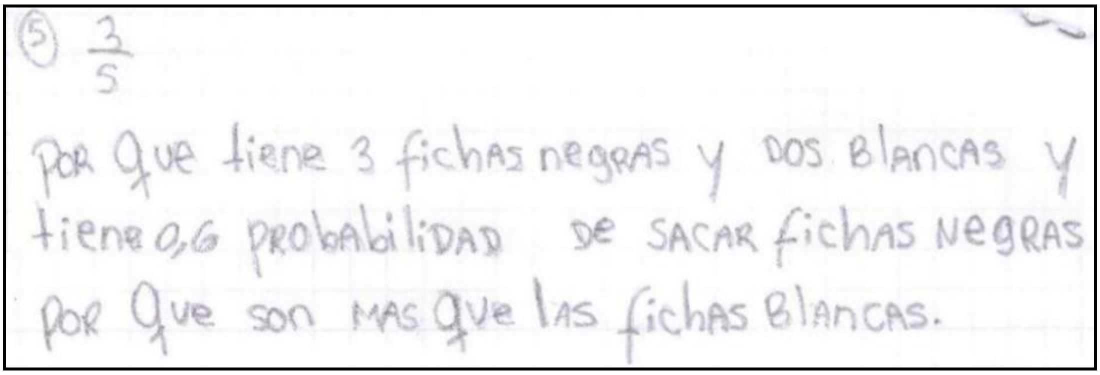
Códigos / Categorías	LG	RA	LG-RA	LC	Porcentajes
Bien	0	8	14	0	**26**
Regular	0	0	0	0	**0**
Mal	0	30	34	0	**74**
Porcentajes	**0**	**44**	**56**	**0**	**100 Total**

En esta actividad se evidencia que los estudiantes presentan serias dificultades en su resolución; se observó que sólo 22 estudiantes presentaron respuestas en la categoría *Bien* 26%; en este conjunto de respuestas se encontraron 8 codificadas como RA. Estos estudiantes construyeron sus respuestas a través del uso de la aritmética. En tanto que, 14 estudiantes construyeron sus respuestas a través del uso tanto del lenguaje gráfico como aritmético, de forma tal que fueron codificadas como LG-RA.

Un ejemplar prototípico de respuesta clasificada como *Bien* RA se presenta en la Figura 28.

Figura 28

Respuesta Bien RA a la actividad 5



Nota. Tomado de protocolo 36214

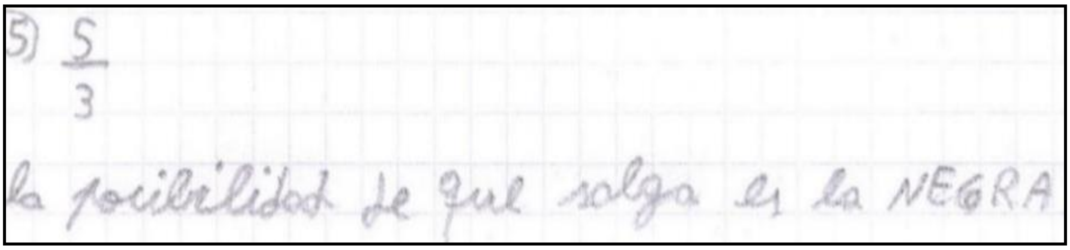
Aquí se infiere que el alumno reconoce el espacio muestral y el suceso de interés y encuentra sus respectivos cardinales. En este protocolo se observa que el alumno identifica a la probabilidad con una fracción. La explicitación de la respuesta en lenguaje coloquial da cuenta que el alumno es capaz de relacionar la expresión decimal con la fracción.

Por otro lado, dentro del 74% de estudiantes que respondió a esta actividad con respuestas categorizadas como *Mal*, se encontraron 30 codificadas como RA, evidenciando el uso de la aritmética; en tanto que, 34 estudiantes construyeron sus respuestas a través del uso tanto del lenguaje gráfico como aritmético, de forma tal que fueron codificadas como LG-RA. En este sentido, se evidencia poca destreza en la justificación.

Un ejemplar prototípico de la respuesta RA se presenta en la Figura 29.

Figura 29

Respuesta Mal RA a la actividad 5

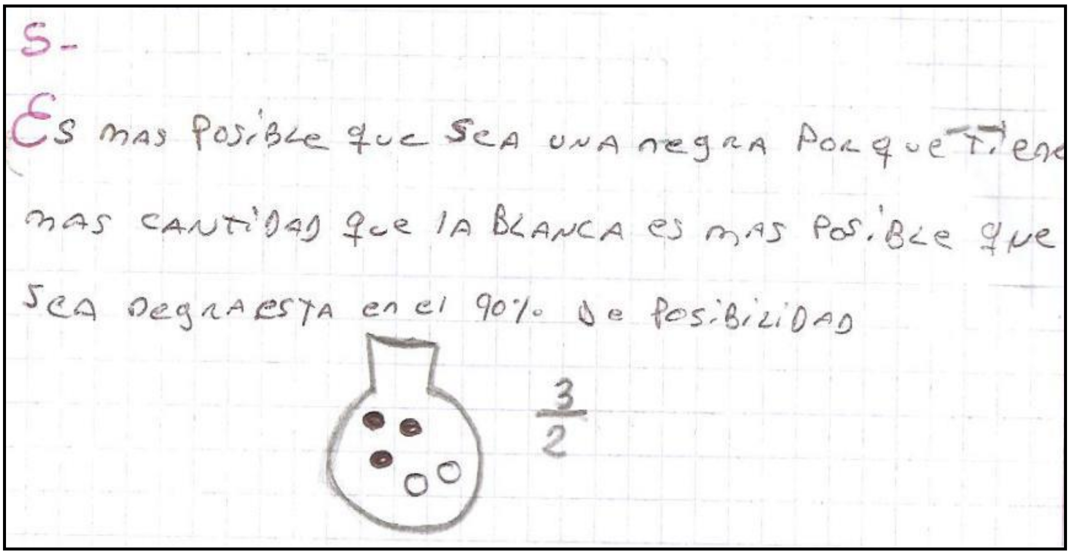


Nota. Tomado de protocolo 46216

Del protocolo, se infiere que el alumno pone en acción la representación de una probabilidad como una fracción; sin embargo, la expresión 5/3 que indica, permite inferir que el alumno considera que una probabilidad se expresa mediante un número mayor que uno. Además, la formulación coloquial de su respuesta no responde a la consigna; aquí no indica el modo en que resolvió la actividad; sabe que tiene que justificar, pero se evidencia en la respuesta que no tiene el hábito; la explicitación de la respuesta en lenguaje coloquial da cuenta que el alumno no responde a la consigna. Un ejemplar prototípico de respuesta codificada como *Mal* LG-RA se presenta en la Figura 30.

Figura 30

Respuesta Mal LG-RA a la actividad 5



Nota. *Tomado de protocolo 36204*

En esta respuesta el alumno encuentra el valor de un riesgo relativo (RR), es decir, el cociente entre las chances de éxito (que salga una ficha negra) y las chances de fracaso (que salga blanca). Esto permite señalar que, si bien asocia la probabilidad a una fracción, el modo en que ésta se encuentra no es claro para él. Además, identifica adecuadamente la relación entre la probabilidad de que se extraiga una ficha negra y la probabilidad de que la ficha extraída sea blanca, al efectuar la comparación entre los cardinales de A y A^C. Sin embargo, pone en acción que el porcentaje (90%) asociado sólo responde al hecho de ser un porcentaje elevado. La explicitación de la respuesta en lenguaje coloquial da cuenta que el alumno no responde a la consigna; aquí no indica el modo en que resolvió la actividad. En este sentido se evidencia poca destreza en la justificación de la respuesta; la explicitación de la respuesta en lenguaje coloquial da cuenta que el alumno no responde a la consigna.

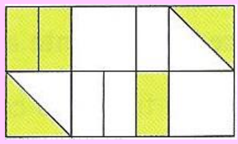
Además, ninguno de los estudiantes respondió a la actividad 5 en forma *Regular*.

Figura 31

Actividad 6 de la ED

6) Marca con una cruz la opción que **no representa** la zona sombreada de la siguiente figura. Explica los motivos de tu elección.

☐ $\frac{5}{14}$ ☐ 35,$\overline{714285}$% ☐ 0,3$\overline{5714285}$ ☐ $\frac{5}{7}$



La actividad presupone el uso de las fracciones y refiere al significado de la fracción como expresión de una medida. Para resolver esta situación se debe asumir que la figura admite ser dividida en *b* partes equivalentes en área; así, se debe atender al hecho que el cuadrado amarillo ubicado en el extremo superior izquierdo, equivale, por una parte, a dos rectángulos que se obtienen al trazar una de sus bases media y, por otra, a los dos triángulos que se determinan al trazar una de sus diagonales; de esta forma, los rectángulos son equivalentes, en área, a los triángulos. A partir de ello, la figura se encuentra conformada por 14 rectángulos cuya área puede considerarse como la unidad de medida. De esta forma, considerando que el área total de la figura es b=14 y el área de la zona sombreada a=5, la fracción que la representa es 5/14; así la primera alternativa es correcta.

Por otra parte, la actividad pretende que los estudiantes asocien diferentes representaciones de una misma fracción; así, una vez establecida la fracción que se asocia a la zona amarilla, la simple división entre el numerador y denominador, permite encontrar su expresión decimal; en este caso, 5/14=0,3$\overline{571428}$. La expresión porcentual requiere de un razonamiento similar al efectuado en la actividad 4: si de 14 partes, 5 se encuentran pintadas, de 100 partes, manteniendo la proporcionalidad se tendrán pintadas 35,$\overline{714285}$; resulta, entonces que la región pintada representa el 35,$\overline{714285}$% de toda la figura. De lo expuesto, se tiene que la alternativa que responde a la consigna es la última. Además, los argumentos exhibidos permiten indagar el conocimiento de los estudiantes en esta situación.

En la Tabla 13 se presenta la distribución de las respuestas a la actividad 6 según categoría y código asignados.

Tabla 13

Distribución de respuestas a la actividad 6

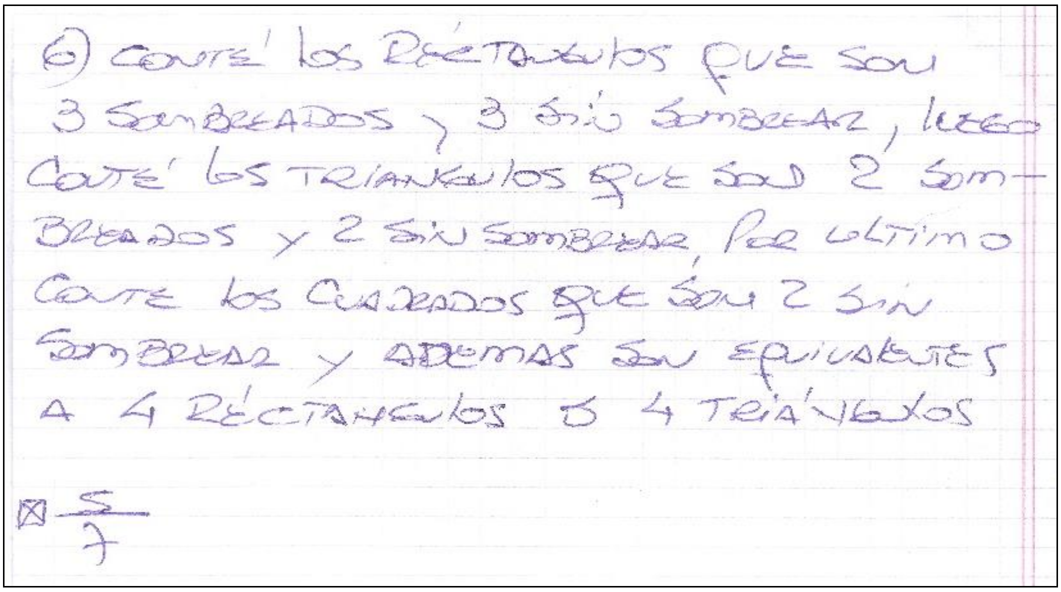
Códigos / Categorías	LG	RA	LG-RA	LC	Porcentajes
Bien	0	0	0	24	**28**
Regular	0	0	0	0	**0**
Mal	0	0	0	62	**72**
Porcentajes	**0**	**0**	**0**	**100**	**100 Total**

Los resultados obtenidos evidencian que los estudiantes presentan serias dificultades en su resolución; se observó que sólo 24 estudiantes presentaron respuestas en la categoría *Bien* 28%. Se destaca que la totalidad de estos estudiantes construyeron sus respuestas a través del uso exclusivo del lenguaje coloquial LC.

Un ejemplar prototípico de respuesta clasificada como *Bien* LC se presenta en la Figura 32.

Figura 32

Respuesta Bien LC a la actividad 6


6) CONTÉ LOS RECTÁNGULOS QUE SON
3 SOMBREADOS Y 3 SIN SOMBREAR, LUEGO
CONTÉ LOS TRIANGULOS QUE SON 2 SOM-
BREADOS Y 2 SIN SOMBREAR, POR ÚLTIMO
CONTE LOS CUADRADOS QUE SON 2 SIN
SOMBREAR Y ADEMAS SON EQUIVALENTES
A 4 RÉCTANGULOS O 4 TRIÁNGULOS

$\boxtimes$ $\frac{5}{7}$

Nota. Tomado de protocolo 60213

Se infiere que el concepto utilizado para resolver esta situación fue el de área; para identificar las distintas representaciones de las zonas sombreadas, el alumno admite que la figura es dividida en partes equivalentes en área; asume que el área total de la figura está formada por tres rectángulos sombreados y dos sin sombrear; por dos triángulos sombreados y dos sin sombrear y por dos cuadrados sin sombrear. El área de los cuadrados es equivalente a cuatro rectángulos o a cuatro triángulos. Asumiendo que el área de la zona sombreada es 5, el alumno marca con una cruz la opción que *no representa* la zona sombreada, es decir la opción 5/7. Se evidencia en la justificación la explicitación de la respuesta que da cuenta que el alumno responde a la consigna.

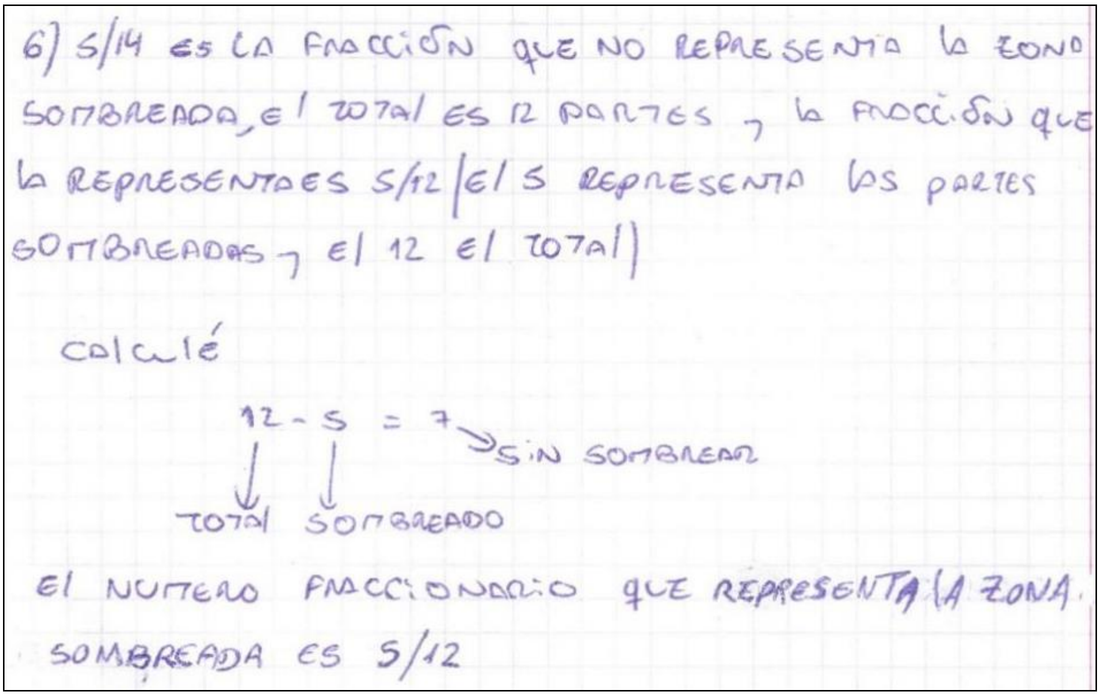
Se destaca que ninguno de los estudiantes respondió a la actividad 6 en forma *Regular*.

Además, 62 estudiantes 72% resolvieron la actividad 6 mediante respuestas que fueron categorizadas como *Mal*. Estas respuestas se encuentran codificadas como LC; se evidencia el uso exclusivo del lenguaje coloquial.

Un ejemplar prototípico de la respuesta LC se presenta en la Figura 33.

Figura 33

Respuesta Mal LC a la actividad 6



6) 5/14 es la fracción que no representa la zona sombreada, el total es 12 partes, y la fracción que la representa es 5/12 (el 5 representa las partes sombreadas y el 12 el total)

calculé

12 - 5 = 7 → sin sombrear

total sombreado

el numero fraccionario que representa la zona sombreada es 5/12

Nota. *Tomado de protocolo 60217*

Aquí se deduce que el concepto de área fue utilizado para resolver esta actividad, donde el alumno identifica la zona sombreada y admite que la figura es dividida en partes y esas partes forman el área total; se infiere que el alumno asumió que el área total de la figura estaba formada por 12 partes congruentes y la fraccion que representa la zona amarilla es 5/12 (5 representa la zona sombreada, 12 representa el área total de la figura). Para el alumno el área total es 12, se infiere que conto la cantidad de figuras sin tener en cuenta que el área de los triángulos es la mitad de la de los cuadrados, por lo tanto, deja evidenciado en la respuesta 5/12 que representa la zona sombreada y responde que 5/14 es la fracción que *no representa* la zona sombreada; se infiere que no tuvo en cuenta los números decimales para la resolución de la actividad. En este protocolo el alumno no identificó a la fracción como expresión de una medida. Con el desarrollo del lenguaje predicativo no responde a la consigna de la actividad. Esto da cuenta que el alumno intuye que es 5/14. En este inciso el alumno no interpreta la consigna, sabe que tiene que justificar, pero se evidencia en la respuesta que no tiene el hábito.

Para dar respuesta a los interrogantes es necesario analizar los resultados de los diferentes significados del concepto de fracción, a partir de la Teoría de los Campos Conceptuales (Vergnaud, 1990).

5.2. Análisis de Resultados

En este apartado desarrollamos un compendio del análisis efectuado enmarcado en la teoría que orientó este estudio: la Teoría de los Campos Conceptuales (Vergnaud, 1990, 2013, 2016, Otero 2006 y Parra y Otero 2021) y las seis interpretaciones del concepto de fracción adoptadas de Llinares y Sánchez (1988); Pujadas y Equiluz (2000); Maza y Arce (1991) y Ponce (2004), entre otros.

Parra y Otero (2021), "[…] La TCC es el referente principal porque nos interesa el nivel del sujeto que aprende, no como una "persona" en particular sino en tanto sujeto epistémico y social, que asimila un artefacto a sus esquemas de acción" (p. 337).

Además, estas autoras aseguran que,

> […] La TCC es una teoría pragmática de la conceptualización de lo real que ofrece instrumentos teóricos para analizar la actividad del sujeto en situación, la forma de la actividad, lo que se conserva y lo que cambia, los esquemas que el sujeto pone en juego, y las condiciones pragmáticas y epistémicas que producen el aprendizaje, la conceptualización y el desarrollo en un cierto dominio. (Parra y Otero 2021, p. 337)

Para Vergnaud (2016), "Es útil precisar que un teorema-en-acto, es simplemente una "proposición tenida por cierta sobre lo real" (p. 292).

> Un alumno expresa sus conocimientos científicos a la vez por su manera de actuar en situación (forma operatoria), y por los enunciados y explicaciones que

> es capaz de expresar (forma predicativa). El sentido está en la actividad que desarrolla y no solamente en las formas lingüísticas que enuncia. El concepto de situación didáctica va a la par con el de actividad en situación, y más precisamente con el concepto de "esquema". Conceptualizaciones importantes están contenidas en los esquemas. La perspectiva de desarrollo cogniivo [*sic*], herdada [*sic*] de Piaget y de Vigotski, es una referencia indispensable para seguir analizando, a largo y mediano plazo, las filiaciones y rupturas (Vergnaud, 2016, p. 285).

(Vygotsky, como se citó en Vergnaud, 2016), […] "Es verdad que la enunciación, la puesta en palabras, la puesta en símbolos gráficos, juega un rol importante, incluso decisivo en los procesos de conceptualización" (p. 298).

Para Vergnaud, "La conceptualización puede ser definida como la identificación de los objetos del mundo, de sus propiedades, relaciones y transformaciones; esta identificación puede que sea directa o cuasi-directa, o que resulte de una construcción" (Vergnaud, 2016, p. 299).

La TCC surgió como una necesidad para el estudio del funcionamiento cognitivo del *sujeto-en-situación*.

Sureda y Otero (2011), sugieren "Pues es a través de las *situaciones* y de los problemas que se pretenden resolver como un *concepto* adquiere sentido para el alumno" (p. 2).

En general, se observaron muchas dificultades para resolver las actividades de la ED. En particular, en la interpretación de la fracción como parte-todo, muchos alumnos al resolver la actividad asociada al contexto continuo tuvieron serias dificultades. Al aplicar *la forma operatoria* del conocimiento, no comprendieron que la división estaba formada por cada parte del *todo* y estas partes debían ser congruentes, de este modo el *concepto-en-acto* utilizado fue inapropiado; además, la escasez del conocimiento de *forma predicativa* no permitió hacer inferencias sobre la completitud de su conocimiento, por lo tanto, no se puede deducir el tipo de conocimiento que tienen los alumnos.

Para Sureda y Otero (2013) "Si bien la *forma predicativa*, es una forma compleja, resulta ser esencial, en el proceso de conceptualización; aunque las palabras no dan cuenta del conocimiento operatorio del sujeto, la operatoria es condición necesaria para la conceptualización" (p. 12).

En las actividades asociadas a contextos discretos, los alumnos demostraron mayor conocimiento operatorio que predicativo; se infiere que no responden a la consigna de la actividad por la escasez del desarrollo del lenguaje, esto queda expuesto en la escritura. La complejidad no está sólo en el hacer, sino también en el decir. La enunciación es esencial en el proceso de *conceptualización*.

Así mismo al resolver actividades que involucran la interpretación de la fracción como cociente y su expresión decimal, algunos protocolos permitieron inferir la falta de consideración de la parte entera de un número real; los estudiantes construyeron sus respuestas a través de la utilización del conocimiento en *forma operatoria*; además, un gran número de alumnos desestimó el resto del enunciado lo que condujo a una respuesta equivocada.

Respecto a las actividades relacionadas a la fracción como una razón, mayoritariamente los alumnos dieron respuesta a la actividad utilizando los conocimientos en *forma operatoria*; la razón fue comparar dos cantidades de una misma magnitud medidas con la misma unidad. Se infiere que estos alumnos supieron expresar una relación de orden. Sin embargo, en algunos protocolos se observó la imposibilidad de establecer una relación de orden entre diferentes fracciones. Además, la escasez de la utilización de la *forma predicativa* no permitió hacer inferencias sobre la completitud de su conocimiento.

En relación a la interpretación de la fraccion como porcentaje, de lo hecho por un grupo de alumnos se infiere que, si bien comprenden el modo de encontrar el porcentaje, la cantidad de referencia no es la correcta. De aquí se desprende que esta noción del conocimiento en *forma operatoria* es débil e incompleto; en cuanto al conocimiento en *forma predicativa*, no fue desarrollado.

Por otra parte, se puede inferir que los alumnos, en la utilización del conocimiento en *forma operatoria*, desconocen la interpretación probabilística de la fracción; algunos consideraron que una probabilidad se expresaba mediante un número mayor que uno y no indicaron el modo en que encuentran la fracción asociada a la probabilidad. A pesar de esto algunos alumnos identifican a la probabilidad con una fracción, reconocen el espacio muestral y el suceso de interés y encuentran sus respectivos cardinales; en cuanto al conocimiento en *forma predicativa* no fue desarrollado.

Respecto a las fracciones como expresión de una medida y la recta numérica, los alumnos no utilizaron el conocimiento en *forma operatoria*. Se evidencia que muchos alumnos explicitaron sus respuestas utilizando el conocimiento en *forma predicativa*, aunque no pudieron identificar la fracción demandada. La falta de descripción del proceso que los condujo a una fracción inadecuada no permitió hacer inferencias sobre el conocimiento que estos alumnos tenían.

(Payne et al., 1976, como se citó en Pujadas et al., 2000), afirman que, “Estudios realizados por destacados investigadores, adjudican a este modelo dificultades en niños de 8 a 12 años” (p. 29).

A pesar de esto un grupo de alumnos realizó la tarea de manera exitosa y en forma coherente con la justificación del proceso realizado.

El análisis de los resultados de la aplicación de la ED se corresponde con lo afirmado por Vergnaud,

> El dominio de las fracciones hace parte de un campo conceptual constituido por un conjunto de situaciones cuyo dominio progresivo requiere la utilización de una variedad de procedimientos, de conceptos y de representaciones que están en estrecha conexión” (Morales, 2011, p. 11).

Además, como señala (Harting, 1958, citado en Morales, 2011), “El concepto de fracción es complejo y no es posible aprehenderlo enseguida. Es preciso adquirirlo a través de un prolongado proceso de desarrollo secuencial”; ese proceso debe incluir los diferentes significados e interpretaciones (p. 11).

Por otro lado, un concepto no se forma aislado sino conjuntamente con otros. Un campo conceptual es entonces también un conjunto de conceptos que forman un sistema referido a una clase de situaciones, y que se originan en la actividad del sujeto en esas situaciones. (Vergnaud, 2013)

En la realización de las situaciones incluidas en la ED se detectó falta de articulación entre el conocimiento operatorio y predicativo; “[…] las rupturas que existen entre las *formas operatorias* y las *formas predicativas* de los conocimientos matemáticos, engendran dificultades para los alumnos. Rupturas de las cuales todavía, se tiene escaso conocimiento” (Sureda y Otero, 2011, p. 13).

Según Moreira (2002), tal vez esto se deba a que “el conocimiento se encuentra organizado en lo que denomina Vergnaud campos conceptuales, los que serán dominados por parte del sujeto, luego de un periodo extenso de tiempo, a través de experiencia, madurez y aprendizaje” (p. 2). En esa misma dirección, Morales (2011), propone

> Iniciar a los estudiantes desde temprana edad en actividades que permitan, la comprensión del concepto de fracción y sus diferentes significados, utilizando la estrategia de solución de problemas, para darle sentido al concepto. Teniendo

> presente cuales son los conocimientos previos de los estudiantes, hacia dónde pretendía llevarlos con lo planteado y qué se desea confrontar. (p. 78)

Este trabajo de investigación ayuda a identificar las dificultades y estrategias utilizadas por los alumnos, dimensiona el gran desfase que existe entre los objetivos de aprendizaje propuestos en los Diseños Curriculares y el nivel real de comprensión del concepto de fracción por parte de los alumnos.

Realizando un análisis a las distintas situaciones problemáticas que se abordaron a lo largo de la ED (y a lo largo de la escolaridad primaria y secundaria), se observa que este contenido se repite en toda la escolaridad, variando su complejidad. Además, se evidenció que los alumnos, durante su trayectoria escolar, continúan presentando dificultades en la resolución de actividades que involucran el concepto de fracción y sus diferentes significados, en ambos contextos. Esto se infiere de los *conceptos-en-acto* que pusieron en juego al momento de la realización de las actividades de la ED, mostrando falta de comprensión en el campo de este conocimiento.

Con estos resultados se puede inferir que son muchísimos los alumnos que, avanzaron a lo largo de los años escolares habiendo quedado muy lejos de lograr los objetivos de aprendizajes esperados, lo que conlleva a las siguientes conclusiones.

Las concepciones, modelos y teorías de los alumnos están formadas por las situaciones con las cuales se han encontrado. Pujadas y Equiluz (2000), “Partimos de problemas, porque afirmamos, con Gerard Vergnaud, que un concepto adquiere su sentido en función de la multiplicidad de problemas a los cuales responder” (p. 45).

Es claro que, como señala (Vergnaud, 1982, citado en Pujadas y Equiluz, 2000), “el conocimiento surge a partir de los problemas a resolver y de las situaciones a dominar” (p. 46).

Sin embargo, en el caso de las fracciones, la multiplicidad de significados que encierra su uso incrementa su complejidad. “Es decir, que la idea de fracción puede ser utilizada tanto en situaciones que parecieran no tener nada en común, como para referirse a conceptos muy diferentes entre sí”. (Ponce, 2004, p. 46)

Pujadas y Equiluz (2000), afirman que […] “Este proceso de aprendizaje se halla condicionado por la variedad de estructuras cognitivas a las que están conectadas las diferentes interpretaciones del concepto de fracción” (p. 19).

Por otro lado, Pujadas y Equiluz (2000), “Partimos de problemas, porque afirmamos, con Gerard Vergnaud, que un concepto adquiere su sentido en función de la multiplicidad de problemas a los cuales responde. Según sus propias palabras” (p. 45).

Vergnaud afirma que,

> No sólo en sus aspectos prácticos, sino también en sus aspectos teóricos, el conocimiento surge a partir de los problemas a resolver y de las situaciones a dominar. Esto que vale para la historia de las ciencias y tecnologías, también vale para el desarrollo de los instrumentos cognitivos en los niños (organizando su representación del espacio, simbolizando, categorizando objetos). También debería ser válido para la educación, especialmente la enseñanza de la matemática. (…) Las concepciones, modelos y teorías de los alumnos están formadas por las situaciones con las cuales se han encontrado. (Vergnaud 1982, como se citó en Pujadas et al., 2000, p. 46).

Muchas veces al proponer a los alumnos de la escuela secundaria una determinada actividad matemática donde involucramos el concepto de fracción nos encontramos con que la forma de resolverla por parte de los alumnos no se ajusta a aquella que nosotros habíamos esperado.

A veces las estrategias y conceptos empleados dan respuestas a las actividades, aunque el camino seguido por estos alumnos, no sea el que nosotros como docentes pensábamos que sería lógico.

> En el conjunto de las clases de problemas, se puede identificar las filiaciones “favorables”, aquellas que permite a los alumnos apoyarse sobre los conocimientos anteriores y progresar un poco en la complejidad (se está entonces en la zona de desarrollo proximal, más accesible), y aquellas que son “rupturas”, y que apelan a la desestabilización de los alumnos: estamos entonces en una zona de desarrollo proximal menos accesible, para la cual el trabajo de mediación del profesor es más importante y más complejo. (Vergnaud, 2016, pp 295-296)

Otras por las estrategias o conceptos utilizados, los resultados no son los esperados, y tradicionalmente estas dificultades son consideradas como un error.

> Hay otros tipos de errores debidos o bien a la existencia de defectos en la comprensión del concepto o a la aplicación sistemática de procedimientos erróneos. Estos procedimientos utilizados por los niños pueden ser debidos o a la elaboración de métodos personales alternativos a los enseñados por el profesor o a la modificación u olvido de algún paso de un algoritmo enseñado. (Llinares y Sanchez, 1988, p. 156)

> Ausubel formulo cuando estableció con total claridad que el aprendizaje significativo requiere necesariamente de alguien que quiera aprender, y que lo aprendido dependa de lo que ese alguien ya sabe. (Ausubel, 1963, como se citó en Otero, 2006, p. 39)

El análisis realizado a los protocolos de los alumnos permitió llegar a conclusiones con las que responder a las preguntas de investigación. En el capítulo siguiente se expondrán dichas conclusiones.

CAPÍTULO 6

CONCLUSIONES

En esta tesina se ha abordado la problemática de la enseñanza y aprendizaje de las fracciones en la escuela secundaria. Adoptando como referencial teórico la Teoría de los Campos Conceptuales, se desarrolló una investigación de corte exploratorio y descriptivo que permitió dar respuesta a las preguntas de investigación, a través del logro del objetivo general y de los objetivos específicos que siguen:

Objetivo General

- ✓ Diseñar, desarrollar, analizar y evaluar dispositivos didácticos para el estudio de las fracciones en la escuela secundaria.

Objetivos Específicos

- ✓ Determinar cuáles son los significados de las fracciones que poseen los estudiantes de los primeros años de las Escuelas ES Nº 36; ES Nº 46 y ES Nº 60 del distrito de Florencio Varela.
- ✓ Identificar las dificultades que, el concepto de fracción y sus diferentes significados, generan a los alumnos de los primeros años al resolver problemas que los involucren.
- ✓ Describir las estrategias utilizadas por los alumnos de los primeros años de la EES ex ESB para resolver situaciones problemáticas que involucren el uso de fracciones.

Con la participación de los estudiantes de segundo año de tres escuelas secundarias de Florencio Varela, se condujeron las acciones descriptas en los capítulos anteriores. Como resultado de dichas acciones se dio respuesta a las preguntas de investigación formuladas en el Capítulo 1.

6.1. Respuestas a las preguntas de investigación

En este apartado, se exponen las tres preguntas de investigación y se presentan, brevemente, las respuestas que se aportaron a partir de la investigación desarrollada.

¿Cuáles son los significados, que, en relación a las fracciones, poseen los estudiantes de los primeros años de las Escuelas ES Nº 36; ES Nº 46 y ES Nº 60 del distrito de Florencio Varela?

Diversos autores (Novillis, 1976; Llinares y Sánchez, 1988, 1997; Morales, 2011; Pujadas y Eguiluz, 2000; Colindres, 2010) definen los diferentes significados de las fracciones: parte-todo, cociente y su expresión decimal, razón, porcentaje, probabilidad y expresión de una medida. En la actividad donde los alumnos debían aplicar el significado de la fracción como parte-todo, en particular en los ítems *a* y *b*, un número similar de alumnos recurrieron a este conocimiento, y las respuestas fueron categorizadas como *Bien*; mientras que, en el último ítem, esta categoría de respuesta fue asignada a un menor número de resoluciones, se evidencia que la mayoría fue categorizada como *Mal*.

En la actividad donde los alumnos debían poner en acción el significado de la fracción como cociente y su expresión decimal, en los ítems *a*, *b* y *c*, las preguntas, mayoritariamente, no fueron respondidas como se esperaba; esto llevó a que las respuestas fueran categorizadas como *Mal*.

En relación al significado de la fracción como razón, mayoritariamente los alumnos respondieron a la actividad de modo que sus respuestas fueron categorizadas como *Bien*.

En la actividad donde los alumnos indagan el conocimiento de la fracción como porcentaje, un número igual de respuestas fueron categorizadas como *Bien* y como *Mal*.

En la actividad donde se indaga el conocimiento de los alumnos sobre el significado de la fracción como probabilidad, un escaso número de respuestas fue categorizado como *Bien*.

Por último, en la actividad donde se requiere del significado de la fracción como expresión de una medida, mayoritariamente las respuestas fueron categorizadas como *Mal*.

Del análisis de los protocolos de los alumnos, se infiere que el significado de las fracciones que ponen en juego la mayoría de los estudiantes corresponden a la fracción como parte-todo y como razón; en igual medida indagan el conocimiento de la fracción como porcentaje; finalmente, en menor medida a la relación de la fracción como cociente y su expresión decimal, y el conocimiento de las fracciones como probabilidad y expresión de una medida es escaso.

¿Cuáles son las dificultades que el concepto de fracción, y sus diferentes significados, generan a los alumnos de los primeros años de la Escuela Secundaria de Florencio Varela, al resolver problemas que los involucren?

Al resolver las actividades en los diversos contextos, los alumnos pusieron de manifiesto la *forma operatoria* y la *forma predicativa del conocimiento.* Los items *a*, *b* de la actividad referida al significado parte-todo, permitió que algunos alumnos actuaran en situación poniendo en evidencia que solamente importaba el número de partes del todo y no tenían en cuenta la equivalencia de las partes; tampoco identificaban el todo en el contexto discreto y, especialmente en la representación gráfica, el todo era mayor al que se solicitaba en la actividad. Además, en el último ítem vinculado a la *forma predicativa del conocimiento* se encontró, en casi la totalidad de las respuestas, dificultades en la descripción del procedimiento utilizado por cada alumno.

En la actividad vinculada al significado de la fracción como cociente y su expresión decimal, particularmente en los items *a* y *b* la operatoria les permitió a muy pocos alumnos actuar en situación; aquí se identificaron muchas dificultades en la escritura fraccionaria de un número racional decimal; representaron en el grafico tres partes equivalentes. Un gran número de alumnos evidencian no comprender el texto. En tanto que, en las respuestas al último ítem de dicha actividad, que requería la explicitación verbal de lo realizado, se encontraron dificultades en la descripción del procedimiento utilizado en la mayoría de los protocolos.

Además, en la actividad vinculada al significado de la fracción como razón, la *forma operatoria del conocimiento* se puso en evidencia la acción de los alumnos en situación. Aquí, se encontraron pocas dificultades en la escritura de la fracción como razón. Sin embargo, algunos alumnos no diferenciaban el numerador del denominador y, además, se encontró falta de comprensión del texto.

Al resolver la actividad de la fracción como porcentaje, la mitad de los alumnos actuó en situación, poniendo en evidencia la *forma operatoria del conocimiento,* aunque la cantidad de referencia utilizada no era la correcta; graficaron más o menos personas de las que correspondía por lo que se infiere falta de comprensión del texto. Además, en la *forma predicativa del conocimiento* no se encontraron respuestas en la descripción del procedimiento utilizado por los alumnos.

En la actividad de la fracción como probabilidad, muchos alumnos tuvieron dificultades en la *forma operatoria del conocimiento* y expresaron la probabilidad requerida mediante un número mayor que uno. Otros confundían el numerador con el denominador o no tenían en cuenta el denominador. Tampoco supieron explicar la respuesta obtenida en la *forma predicativa del conocimiento.*

Por último, muchos alumnos tuvieron dificultades al resolver la actividad de la fracción como expresión de una medida en la *forma operatoria del conocimiento*, al marcar la opción que representaba la zona sombreada de la figura presentada. La mayoría evidenció dificultades para identificar el área total de la figura y la zona sombreada; representaron el área total con un número menor al que se encontraba en la gráfica debido a la falta de relación entre las áreas de las diferentes figuras involucradas. Al resolver la actividad en ningún momento tuvieron en cuenta los números decimales, marcaron las opciones representadas por una fracción. Se evidencia en las respuestas la falta de comprensión del texto. En la *forma predicativa del conocimiento* se evidencia poca destreza en la justificación, lo que deja inferir que no responde a la consigna de la actividad.

Lo expuesto por los alumnos genera, en muchos casos, inconsistencia entre los datos de la actividad y el resultado encontrado. La representación gráfica no refleja lo escrito en el enunciado. El *conocimiento predicativo* evidencia, en casi todos los protocolos, poca destreza en la respuesta o falta de respuesta a la pregunta formulada o la respuesta carece del *conocimiento predicativo*, o simplemente los alumnos no saben la respuesta correcta y proponen un resultado al azar, lo que evidencia que no tienen el hábito de la utilización de este lenguaje.

> Si bien la *forma predicativa*, es una forma compleja, resulta ser esencial, en el proceso de conceptualización; aunque las palabras no dan cuenta del conocimiento operatorio del sujeto, la operatoria es condición necesaria para la conceptualización. Este cuestionamiento teórico de la relación entre la *forma operatoria* y la *forma predicativa* del conocimiento, se debe a que la complejidad no está sólo en el hacer, sino también en el decir. La enunciación es esencial en el proceso de *conceptualización.* (Sureda y Otero, 2013, p. 12)

La mayor dificultad se asocia al significado de la fracción como cociente y su expresión decimal, en la *forma operatoria del conocimiento*; los alumnos no actuaron en situación (y eventualmente no tuvieron éxito en la resolución); se identificaron muchas dificultades en la escritura fraccionaria de un número racional decimal; la representación gráfica no refleja lo escrito en el enunciado. Se evidenció la falta de comprensión del texto. En la respuesta, que requería la *forma predicativa del conocimiento* se encontraron dificultades en la explicitación de lo realizado; principalmente en la enunciación de los objetos de pensamiento y procedimientos. Además, se hallaron dificultades en la resolución de la actividad vinculada al significado de la fracción como probabilidad y como expresión de una medida; éstas fueron categorizadas como *Bien* en un escaso número de respuestas y en una mayor parte de las respuestas fueron categorizadas como *Mal*. Los alumnos con frecuencia confundían los casos favorables con los casos posibles, de modo que no podían fundamentar la respuesta. Por último, tuvieron dificultades al marcar la opción de la fracción como expresión de una medida, por desconocimiento del concepto. En ningún momento tuvieron en cuenta el enunciado y las opciones con los números decimales, marcaron las opciones representadas por una fracción. En la respuesta se evidencia la falta de comprensión de texto y dificultades en el dominio del concepto de fracción que requiere de la utilización de procedimientos, propiedades y representaciones.

¿Cuáles son las estrategias utilizadas por los alumnos de los primeros años de la EES (Ex ESB) para resolver situaciones problemáticas que involucren el uso de fracciones?

De acuerdo con los resultados obtenidos en la ED, se identificaron las estrategias utilizadas por los alumnos que fueron codificadas.

En las propuestas donde los alumnos debían aplicar el significado de la fracción como parte-todo, recurrieron a las estrategias LG, LG-RA y LC mayoritariamente; mientras que en el ítem 1.*c*, fue utilizada la estrategia LC por la totalidad de estudiantes.

En la actividad donde los alumnos debían poner en acción el significado de la fracción como cociente y su expresión decimal, la totalidad del grupo recurrió a la estrategia LG en el ítem *a*; mientras que en el ítem *b*, las preguntas fueron respondidas con las estrategias codificadas como RA y LC en porcentajes similares; en el último ítem, la totalidad de estrategias utilizadas codificada como LC.

En relación al significado de la fracción como razón, mayoritariamente los alumnos respondieron a la actividad de modo que sus respuestas fueron codificadas como RA; un número menor de respuesta fue codificada como LC y un escaso número de respuestas por parte de los alumnos, fue codificada como LG-RA.

En la actividad donde los alumnos indagan el conocimiento de la fracción como porcentaje, un elevado número de respuestas fue codificado como LG-RA; mientras que un número menor de respuestas fue codificado como LG.

En la actividad donde se indaga el conocimiento de los alumnos sobre el significado de la fracción como probabilidad, mayoritariamente utilizaron las estrategias que fueron codificadas como LG-RA y en un número menor de respuestas codificado como RA.

Por último, en la actividad donde se requiere del significado de la fracción como expresión de una medida, las estrategias utilizadas en las respuestas, en su totalidad, fueron codificadas como LC.

Del análisis de los protocolos de los alumnos, se infiere que las estrategias que ponen en juego la mayoría de los estudiantes corresponden a los códigos LC; en menor medida, a LG-RA; finalmente, un número menor de respuestas en igual medida, fue codificado como LG, y en igual medida como RA.

En general, los alumnos no fueron capaces de explicar en *forma predicativa*, las estrategias utilizadas; resolvieron las situaciones problemáticas en *forma operatoria*, de manera relativamente correcta, aunque se evidenciaron dificultades en la conceptualización. Estos resultados convalidan la definición de concepto aportada por Vergnaud, evidenciando que los conceptos cambian si cambia el sistema de representación, que es un componente de las ternas que define al concepto.

No es fácil llegar a la comprensión de lo que en verdad es una fracción. Mencionan (Llinares et al.,1997, como se citó en Morales et al., 2011),

> Llegar a la comprensión del concepto de fracción es un largo camino debido a sus múltiples interpretaciones, sin mencionar a las ya establecidas desde el lenguaje cotidiano, cuestión que suele estar presente en los procesos de aprendizaje de estos temas (p. 21).

6.2. Reflexiones finales

Con base en estas respuestas y a modo de síntesis de la investigación, se propone a continuación un conjunto de reflexiones finales.

Es fundamental iniciar a los alumnos desde temprana edad en actividades que desarrollen la comprensión del concepto de fracción en sus diferentes interpretaciones, buscando fortalecer el aprendizaje de los alumnos a partir de situaciones problemáticas que favorezcan la comprensión conceptual de la fracción. Es en este sentido que *conceptos-en-acción* y *teoremas-en-acción* pueden, progresivamente, tornarse verdaderos conceptos y teoremas científicos. No es un proceso simple o rápido, incluso, puede no lograrse.

Se proponen, entonces, algunas recomendaciones finales para la enseñanza del concepto de fracción en la escuela secundaria:

-Plantear situaciones variadas que impliquen los distintos significados del concepto de fracción en base a los distintos contextos (continuo y discreto).

-Incentivar a que los alumnos para que se expresen en forma oral y escrita.

-Fomentar la representación gráfica como estrategia para la comprensión de los conceptos implicados en las situaciones dadas.

-Alentar a participar a todos los alumnos frente a una situación dada, es importante que participen en forma activa, ellos tendrán algo para hacer o decir al respecto ya que la discusión y comprobación de los resultados conlleva a la experimentación de la implementación de diferentes estrategias y procedimientos.

-Fomentar la fundamentación de lo realizado, compartiendo las estrategias utilizada con los compañeros.

-Presentarles a los alumnos situaciones problemáticas que propicien el aprendizaje de los diferentes significados de las fracciones que los lleve a un uso relacionado con la realidad.

Se sugiere posibles investigaciones futuras:

-Dar continuidad a este estudio para responder a otras preguntas que pueden surgir en el tiempo para mejorar el desarrollo de las competencias matemáticas de los alumnos.

-Investigar la manera en que las fracciones se introducen en la escuela primaria, ya que es aquí donde los alumnos se enfrentan por primera vez a este concepto. Sería interesante saber si esta primera aproximación se circunscribe solamente al modelo parte-todo, o si se consideran además otros significados.

6.3. Reflexiones personales

Finalmente, puedo concluir de manera general y personal, que la realización de este trabajo de investigación fue muy provechosa. Viví nuevas experiencias que contribuyen a mi crecimiento como profesional docente, dado que la información que he podido recabar de las ED me ha resultado de suma utilidad para tratar de comprender las dificultades que los diferentes significados de las fracciones generan en los alumnos de los primeros años de la escuela secundaria, como también, indagar las estrategias que estos alumnos emplean en la resolución de situaciones problemáticas. He obtenido respuestas muy interesantes de las que puedo concluir que la construcción del concepto de fracción y de sus diferentes significados, es muy compleja y su aprendizaje es prolongado en el tiempo.

Referencias bibliográficas

Boyer Carl (1968). *Historia de la matemática: Egipto.* New York: Brooklyn.

Bravin, C. y Pievi, N. (2008). *Documento Metodológico Orientado para la Investigación Educativa.* Buenos Aires, Argentina: Ministerio de Educación Presidencia de la Nación.

Colindres, M. (2010). *Concepciones matemáticas en los estudiantes de séptimo grado de la escuela normal mixta "Pedro Nufio" acerca de las fracciones y sus diferentes significaciones.* Disponible en: www.cervantesvirtual.com/.../concepciones-matemáticas-en-los-estudiantes.

Diccionario de la lengua española-Real Academia Española (2012). *Informe de Resultados*. Disponible en: https://www.dle.rae.es.

Dirección general de Cultura y Educación (2006). *Diseño Curricular para la Educación Secundaria 1º año (7º ESB).* Gobierno de la Provincia de Buenos Aires.

Dirección general de Cultura y Educación (2008). *Diseño Curricular para la Educación Primaria.* Gobierno de la Provincia de Buenos Aires.

Garaventa, L. Legorburu, N. Rodas, P. y Turano, C. (2008). *Nueva carpeta de Matemática II*. Buenos Aires, Argentina: Aique.

Llinares, S. y Sánchez M. (1988). *Fracciones 4.* Madrid, España: Ed. Síntesis.

Maza, C. y Arce, C. (1991). *Ordenar y clasificar 31.* Madrid, España: Ed. Síntesis.

Ministerio de Educación (2010). *Operativo Nacional de Evaluación 2010 3º y 6º año de la educación primaria. Informe de Resultados*. Disponible en: http://www.mapeal.cippec.org.org/wp-content/uploads/2014/06/2010-primaria.

Morales, C. (2011). *Construyendo el concepto de fracción y sus diferentes significados, con los docentes de primaria de la institución educativa San Andrés de Girardota*. Medellín, Colombia. Disponible en: www.bdigital.unal.edu.co/6084/.

Moreira, M. (2002). *La teoría de los conceptos de Vergnaud, la enseñanza de las ciencias y la investigación en el área.* Porto Alegre, Brasil: Instituto de Física, UFRGS. Disponible en: https://www.if.ufrgs.br/moreira/vergnaudespanhol.

Moreira, M. (2009). *Subsidios Teóricos para el Profesor Investigador en Enseñanza de las Ciencias*. Porto Alegre, Brasil: Instituto de Física, UFRGS. Disponible en: www.if.ufrgs.br/~moreira/Subsidios12.pdf.

Otero, Maria Rita. (2006). Emociones, Sentimientos y Razonamientos en Didáctica de las Ciencias. Revista electrónica de investigación en educación en ciencias, 1(1), 24-53. Recuperado en 23 de marzo de 2023, de http://www.scielo.org.ar/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1850-66662006000100003&lng=es&tlng=pt.

Otero, M., Fanaro, A., Sureda, P. Llanos y V. Ariego, M. (2014). *La teoría de los campos conceptuales y la conceptualización en el aula de matemática y física.* Buenos Aires, Argentina: Ed. Dunken.

Parra, V. y Otero, M. R. (2021). Invariantes Operatorios e Instrumentalización del Artefacto Recorrido de Estudio e Investigación para la Escuela Secundaria: un Estudio de Caso. Acta Scientiae, 23(6), 334-362. Disponible en: https://doi.org/10.17648/acta.scientiae.6167

Ponce, H. (2004). *Enseñar y aprender matemática.* (2a ed.). Buenos Aires: Ediciones Novedades Educativas.

Pujadas, M. y Eguiluz, M. (2000). *Fracciones ¿Un quebradero de Cabeza?* Buenos Aires, Argentina: Ediciones Novedades Educativas.

Robles, G. (2010*). Unidad didáctica: Fracciones.* (Tesis de Maestría). Universidad de Granada. España. Disponible en: www.fqm193.ugr.es/media/grupos/FQM193/cms/Gloria_Leon.pdf.

Sampieri, R. (2010). *Metodología de la Investigación.* (5a ed.). México: McGraw-Hill.

Sánchez, C. (14 de junio de 2019). *Resumen*. Normas APA (7ma edición). https://normas-apa.org/estructura/resumen/

Sureda, P. y Otero, M. R. (2011). *Nociones fundamentales de la Teoría de los Campos Conceptuales*. Buenos Aires. Revista electrónica de investigación en educación en ciencias. Disponible en: https://www.dialnet.unirioja.es/descarga/articulo4460277.pdf.

Sureda, P. y Otero, M. R. (2013). Estudio sobre el proceso de conceptualización de la función exponencial. *Educación Matemática*, *25*(2), 89-118.

Vergnaud, G. (1990). La théorie des champs conceptuels. *Récherches en Didactique des Mathematiques*, *10*(2,3), 133-170.

Vergnaud, G. (2013). ¿Por qué La teoría de los campos conceptuales? *Infancia y Aprendizaje*, *36*(2), 131-161.

Vergnaud, G. (2016). ¿En qué sentido la teoría de los campos conceptuales puede ayudarnos para facilitar aprendizaje significativo? *Investigações Em Ensino De Ciências*, *12*(2), 285–302. Recuperado de: http://143.54.40.221/index.php/ienci/article/view/475

Anexo

Universidad Tecnológica Nacional

Facultad Regional Avellaneda

Licenciatura en Enseñanza de la Matemática

El uso de las fracciones y de sus diferentes significados en la resolución de problemas. Un estudio exploratorio en 1° año de la escuela secundaria.

Instrumento de evaluación diagnóstica.

Concepto de fracción y sus diferentes significados.

Evaluación diagnóstica

---

1) Si 5 amigos han comprado un turrón y quieren compartirlo de modo que todos coman igual cantidad, ¿Cómo puede efectuarse el reparto?

a) ¿Cuánto le corresponde a cada uno?

b) ¿Y si quieren compartir 4 turrones, en las mismas condiciones?

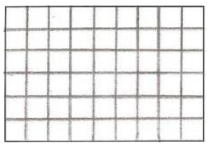
c) Escribe el procedimiento que empleaste para responder a cada una de las preguntas anteriores.

2) El embaldosado del piso de un patio se realizó en tres días: el primer día, se colocaron las baldosas de la tercera parte del patio; el segundo día, se colocaron 0,25 de las baldosas restantes y, el tercer día, se completó el trabajo.

a) Represente en el gráfico la parte del patio que se embaldosó cada día.

b) ¿Qué parte del patio se embaldosó el tercer día?

c) ¿Qué día se colocaron más baldosas?



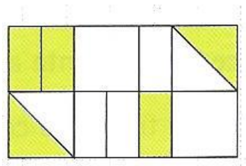
3) La razón entre el número de botellas de agua mineral y el número de gaseosas del kiosco de la escuela, es de tres a cinco. Si hoy se vendieron 25 gaseosas, ¿cuántas aguas vendieron?

4) En un concurso de cocina se presentaron 60 participantes y 10 obtuvieron algún premio. ¿Cómo podría representarse gráficamente al conjunto de los ganadores?

Explica el procedimiento que utilizaste.

5) En una bolsa color negra, de la que no se puede observar su interior, un mago colocó tres fichas negras y dos blancas, de la misma forma y tamaño. Si un espectador saca una ficha al azar, ¿cuál es la probabilidad de que sea negra? Explica tu respuesta.

6) Marca con una cruz la opción que **no representa** la zona sombreada de la siguiente figura. Explica los motivos de tu elección.



☐ $\frac{5}{14}$ ☐ $35,\overline{714285}\%$ ☐ $0,35\overline{714285}$ ☐ $\frac{5}{7}$