

## ESTUDIO TEÓRICO-EXPERIMENTAL DEL COMPORTAMIENTO ELASTOPLÁSTICO A FLEXIÓN DE TUBOS UTILIZADOS EN ESTRUCTURAS DE PROTECCIÓN CONTRA VUELCO DE VEHÍCULOS

**Cazzola Gustavo José, Mirassou Horacio Martín, Santelli José**

Facultad Regional General Pacheco, Universidad Tecnológica Nacional  
Departamento de Ingeniería Mecánica  
Hipólito Irigoyen 288, General Pacheco (B1617FRP), Buenos Aires, Argentina  
Correo-e: gcazzola@docentes.frgp.utn.edu.ar

### RESUMEN

Cuando un vehículo experimenta un choque la energía del impacto causa deformaciones de su estructura, las que deben estar limitadas para evitar que los pasajeros sean “aplastados” por componentes de la propia estructura u otros. A tales efectos, se han emitido numerosas normas y reglamentos que exigen la evaluación de la energía de deformación elasto-plástica de los componentes de las estructuras de protección contra vuelco de vehículos, generalmente tubos de sección circular o rectangular de acero u otro material.

Por ejemplo, para automóviles, una de las normas de USA es FMVSS 216 TP-216-05 (2006), para vehículos de transporte de pasajeros está vigente el Reglamento N° 66 de la Comisión Económica de las Naciones Unidas para Europa (CEPE) 2011, para máquinas de trabajo fuera de ruta una de las normas es SAE J1040 1994, para tractores agrícolas una de las normas es SAE J1194\_201611.

En todos los casos la energía de deformación elasto-plástica está determinada por las fuerzas del impacto y por las deformaciones de la estructura, cuyos valores pueden calcularse con programas de elementos finitos especializados.

Para simplificar los procesos de cálculo, en este trabajo se propone un método, basado en una hipótesis de resistencia de materiales en el rango elasto-plástico, para relacionar los valores del momento flexor actuante y del resultante radio de curvatura de un tubo de acero, de sección circular o rectangular, cuyo espesor es suficiente para evitar el aplastamiento de la sección.

El método se validó mediante ensayos. Se determinó la curva tensión-deformación del acero de un tubo de sección circular ensayando probetas fabricadas con tramos del mismo. Con esos datos se realizaron los cálculos. Se ensayó a flexión pura normal una viga formada por el tubo. Las diferencias entre valores calculados y medidos de flechas elásticas resultan menores a 3%.

**Palabras Clave:** Vehículo, Vuelco, Resistencia, Elasto-plástica.

## 1. INTRODUCCIÓN

En algunas normas de estructuras de protección contra vuelco se definen los puntos de aplicación, las direcciones y los valores de las fuerzas a aplicar en un ensayo de prototipo, por ejemplo: “Laboratory Test Procedure for FMVSS 216 Roof Crush Resistance” TP-216-05 (2006) [1], norma de la cual se tomó la Figura 1a. En otras normas, como la SAE J1194 SEP94 [2], para el ensayo de prototipo estático (Figuras 2a, 2b) se definen los puntos de aplicación y las direcciones de las fuerzas, las máximas deformaciones permitidas y el valor de la energía de deformación elasto-plástica a aplicar (Figura 1b), pero no se definen los valores de las fuerzas, éstos resultan en función de la energía a aplicar y de las deformaciones permitidas. Para el diseño y dimensionamiento de componentes de estructuras de protección contra vuelco se requiere utilizar métodos de cálculo que relacionen las variables mencionadas: fuerzas, deformaciones y energía de deformación elasto-plástica de la estructura, y tensiones en las secciones principales. En las siguientes páginas se propone un método de cálculo que contribuye a resolver ese problema.

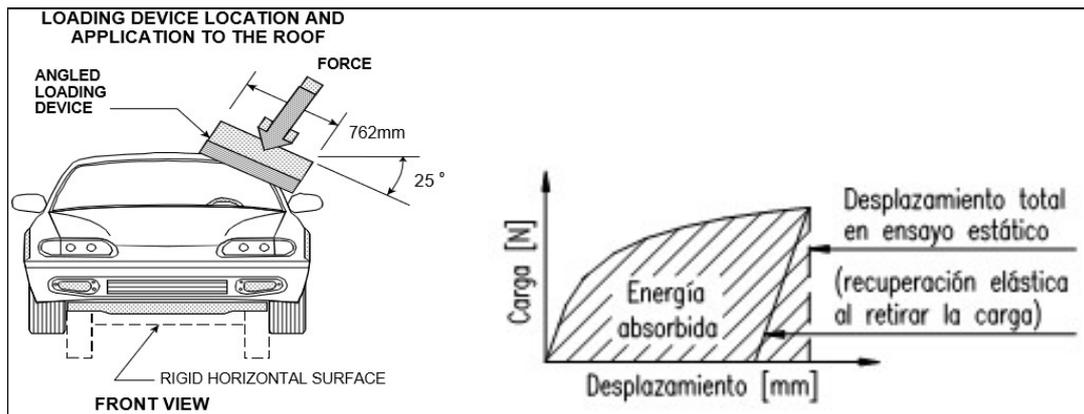


Figura 1: (a) Ensayo según norma TP-216-05; (b) Curva Fuerza-Desplazamiento (F-D)

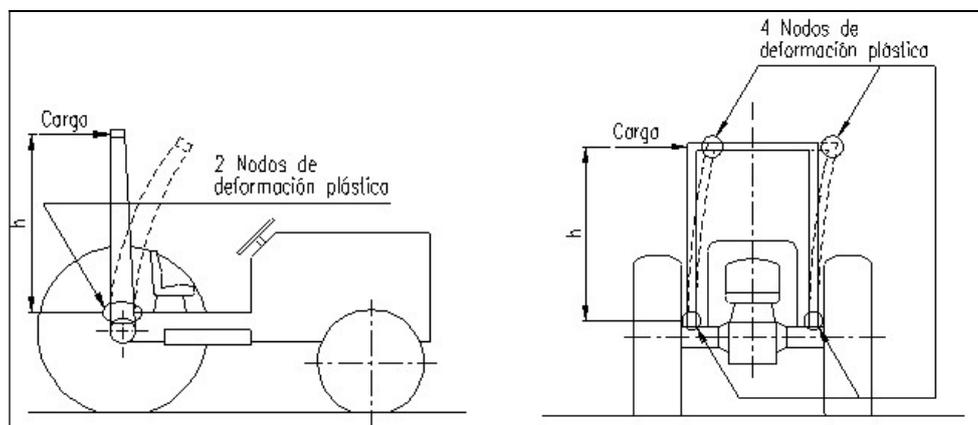


Figura 2: (a) Carga desde atrás en ensayo estático; (b) Carga lateral en ensayo estático

### 1.1 Análisis simplificado de un pórtico hiperestático con deformaciones plásticas

Muchas estructuras de protección contra vuelco vehiculares forman sistemas hiperestáticos.

Para calcular sus tensiones y deformaciones en el período elástico se pueden aplicar los métodos establecidos, como el método de las fuerzas o el de los desplazamientos. Pero cuando se producen deformaciones plásticas se deben utilizar otros métodos, como los expuestos en [3]. La Figura 3 se obtuvo de [3] Sección 8.12 pág. 253, donde se explica este ejemplo de aplicación del método del trabajo virtual.

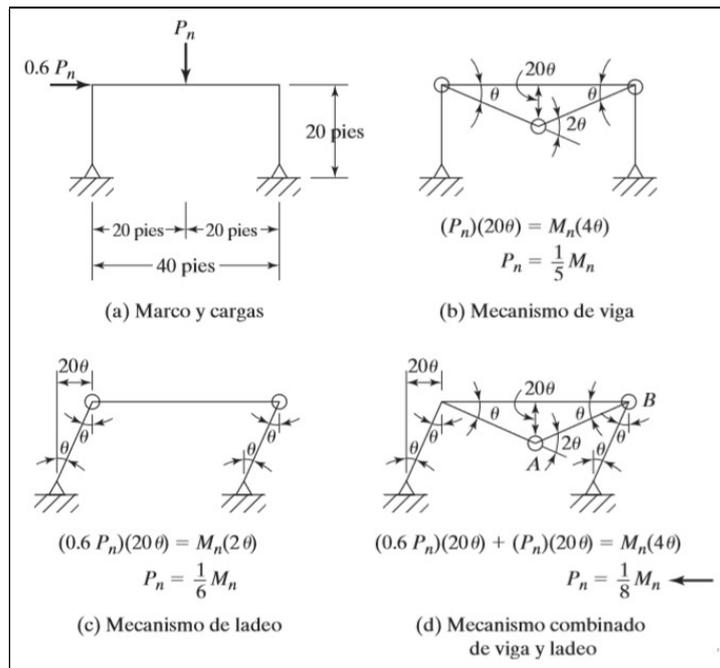


Figura 3: (a) Pórtico hiperestático ejemplo; (b,c,d) 3 hipótesis posibles deformaciones plásticas.

En la Figura 3 se muestra un pórtico estáticamente indeterminado de primer grado, formado por una viga y dos columnas cuyas secciones son iguales. Muchas estructuras de protección contra vuelco tienen esas características. El desarrollo de una articulación plástica lo convertirá en estáticamente determinado, y la formación de una segunda articulación puede crear un mecanismo. Pero podrían ocurrir varios tipos de mecanismos, por ejemplo: la Figura 3b muestra un posible mecanismo de viga, la Figura 3c muestra un posible mecanismo de lado, la Figura 3d muestra un posible mecanismo combinado de viga y lado. La condición crítica es aquella en la cual el valor de la fuerza  $P_n$  resulte ser el menor. La superposición de efectos no es aplicable en el análisis plástico. Para cada mecanismo se debe considerar la situación en la que se tenga el menor número posible de articulaciones plásticas que causen el colapso. El valor menor de  $P_n$  ocurre en la Figura 3d, en donde se forman dos articulaciones plásticas marcadas A y B. En [3] pág. 241 se define a  $M_n$  como "momento nominal de la sección" y se lo calcula como el producto de la tensión de fluencia del material  $F_y$  por el módulo resistente plástico de la sección  $W_{xp}$ . En aceros sin "escalón" de fluencia,  $F_y$  es  $\sigma$  cuando  $\mathcal{E}$  es 0,2 %.

$W_{xp}$  es igual al momento estático de las áreas sometidas a tracción y a compresión respecto del eje neutro plástico. En las secciones de uso habitual el valor de  $W_{xp}$  es mayor al del módulo resistente elástico  $W_x$  en un porcentaje que depende de la forma de la sección.

El momento de fluencia  $M_y$  se calcula como el producto de  $F_y$  por  $W_x$ . Entonces  $M_n$  es mayor a  $M_y$  con el mismo porcentaje con el que  $W_{xp}$  es mayor a  $W_x$ . Cuando sobre una barra actúa un momento flexor menor a  $M_y$ , las deformaciones son solamente elásticas, si  $F_y$  es también igual al límite elástico, esto se cumple en aceros con “escalón” de fluencia en su diagrama  $\sigma$ - $\mathcal{E}$ .

Cuando el momento actuante es  $M_n$ , con la hipótesis simplificada de este enfoque, en todas las fibras de la sección el valor absoluto de la tensión debería ser igual a  $F_y$ . En los casos reales esta hipótesis se aproxima mejor al comportamiento real si el material de la barra es por ejemplo un acero dúctil de bajo contenido de carbono. En este análisis simplificado no se incluye el estudio del sistema cuando el momento flexor es mayor a  $M_y$  pero menor a  $M_n$ , en cambio ese rango sí es considerado en el método explicado a continuación.

## 1.2. Flexión elastoplástica de barra recta de sección con dos ejes de simetría normales

En la Figura 4a, tomada de [4] pág. 384, se muestra un trazado que forma parte de un método semigráfico para relacionar el momento flexor  $Mf$  aplicado en una sección de una barra, con el radio de curvatura  $\rho$  resultante, considerando tensiones y deformaciones elastoplásticas.

Feodosiev [4] págs. 384 a 386, expone este método para flexión pura normal aplicada a barras rectas de sección transversal constante con dos ejes de simetría normales entre sí, y cuyo material presenta diagramas iguales de tensiones  $\sigma$  de tracción y de compresión en función de la deformación específica  $\mathcal{E}$ . Entonces el eje neutro, en ambos períodos elástico y plástico, coincide con el eje de simetría normal al plano del momento flexor. Se considera como hipótesis que las secciones permanecen planas en ambos períodos elástico y plástico, por eso la deformación específica  $\mathcal{E}$  de cada fibra de la sección es directamente proporcional a su distancia  $y$  al eje neutro, e inversamente proporcional al radio de curvatura  $\rho$  de la línea elástica que pasa por el eje neutro de la sección estudiada. Se debe conocer el diagrama  $\sigma$ - $\mathcal{E}$  del material, que en la Figura 4a está ubicado en su zona superior. Para un determinado radio de curvatura  $\rho$  se calcula la máxima deformación específica  $\mathcal{E}_{max}$  como  $y_{max}$  de la sección dividida por  $\rho$ . Para  $\mathcal{E}_{max}$  se obtiene del diagrama  $\sigma$ - $\mathcal{E}$  del material el valor de  $\sigma_{max}$  que actúa en la fibra más alejada  $y_{max}$ . Para cada fibra de coordenada  $y$ , se obtiene del diagrama  $\sigma$ - $\mathcal{E}$  del material el valor de  $\sigma$  correspondiente. En la Figura 4a se representa este proceso: a la derecha de la sección se traza un diagrama de las tensiones  $\sigma$  que actúan en cada fibra. A la derecha de ese diagrama se traza otro: para cada fibra el producto  $\sigma \cdot y \cdot b$ , el área encerrada por este diagrama es igual al  $Mf$  actuante, esto se demuestra en [4] con el desarrollo de este método. Si a una barra recta de esas características se le aplica un  $Mf$  cuyo valor es el calculado, se curvará con radio de curvatura  $\rho$  cuyo valor en esa sección es igual al definido inicialmente en este proceso, el cual se repite para otros valores de  $\rho$ , obteniéndose para cada uno el correspondiente valor de  $Mf$ . Con varios pares de valores  $Mf$  y  $1/\rho$  se traza otro diagrama como el de la Figura 4b, tomado de [4] pág. 386, que es la curva que relaciona al radio de curvatura  $\rho$  con el momento flexor  $Mf$  aplicado en una sección de la barra ( $Mf$  está denominado como  $M$ ).

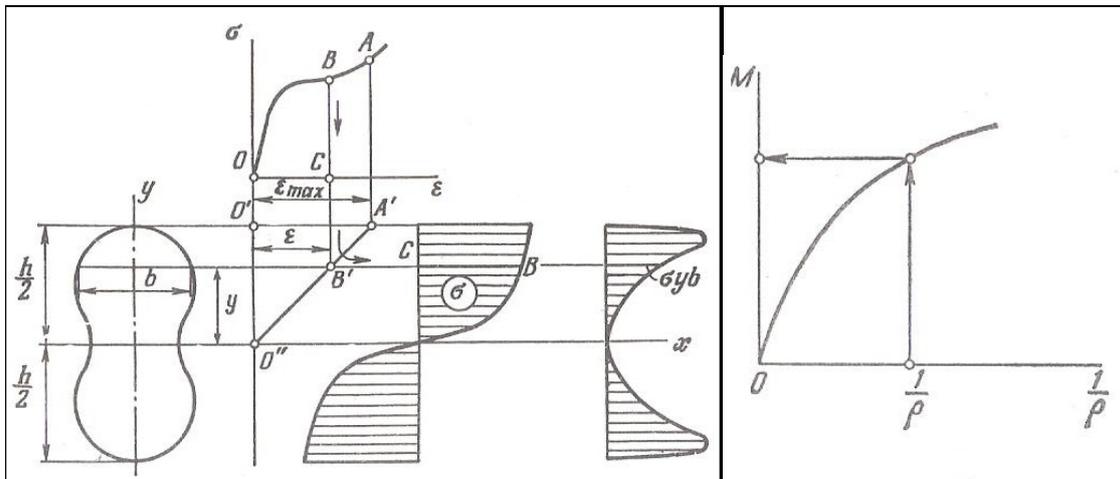


Figura 4: (a) Trazado para relacionar el momento flexor con el radio de curvatura de una barra; (b) Curva que relaciona el momento flexor  $M$  con el radio de curvatura  $\rho$  de una barra.

## 2. MÉTODO NUMÉRICO QUE RELACIONA MOMENTO FLEXOR Y RADIO DE CURVATURA

En esta Sección se propone un método numérico, basado en el método semigráfico explicado en la Subsección 1.2, para relacionar el momento flexor actuante y el resultante radio de curvatura de un tubo de acero, de sección circular o rectangular, cuyo espesor es suficiente para evitar el aplastamiento de la sección. El material debe presentar diagramas iguales de tensiones  $\sigma$  de tracción y de compresión en función de la deformación específica  $\epsilon$ .

Se asumen las mismas hipótesis definidas en la Subsección 1.2. Las secciones permanecen planas en ambos períodos elástico y plástico, por eso la deformación específica  $\epsilon$  de cada fibra de la sección es directamente proporcional a su distancia  $y$  al eje neutro, e inversamente proporcional al radio de curvatura  $\rho$  de la línea elástica que pasa por el eje neutro de la sección estudiada. Se explica este método con un ejemplo de flexión pura normal aplicada a un tubo de sección circular que se utilizó en el ensayo de validación experimental, cuyos datos son: diámetro ext.  $D = 26,8$  mm | espesor  $e = 2,53$  mm | radio ext.  $R = 13,4$  mm | radio int.  $r = 10,87$  mm | momento de inercia  $J_x = 1,435766$  cm<sup>4</sup> | módulo resistente elástico  $W_x = 1,071467$  cm<sup>3</sup> | área  $A = 192,903528$  mm<sup>2</sup> | módulo resistente plástico  $W_{xp} = 1,495651$  cm<sup>3</sup> | acero ASTM A 53. Para calcular el valor de  $W_{xp}$  se obtuvo la ubicación del baricentro de la semisección utilizando la ecuación correspondiente para un sector de sección circular hueca, de [7] Tabla A.1 caso 21. Luego  $W_{xp}$  es igual al producto de la distancia entre ese baricentro y el eje neutro por el área de la sección, eso equivale a dos veces el producto de esa distancia por el área de la semisección.

### 2.1. Modelo matemático para representar la curva tensión-deformación del material

El método propuesto requiere conocer la curva de ingeniería del material del tubo que relaciona a la tensión  $\sigma$  con la deformación  $\epsilon$ . Para determinar la curva en este ejemplo se fabricaron dos probetas de longitud 50 mm cada una, mecanizadas con un torno, a partir de tramos cortados

del tubo que se utilizó luego en el ensayo de validación experimental. Se midió su dureza y se realizaron dos ensayos de compresión axial en una máquina de ensayos del Laboratorio de Ingeniería Mecánica de UTN FRGP, la cual grafica la fuerza aplicada en función del desplazamiento. Con los datos obtenidos se trazó la curva mostrada en la Figura 5. Para esto también se consultó la norma ASTM A 53 [5] y el libro Atlas of Stress-Strain Curves [6]. Se calculó  $\sigma$  como la fuerza dividida por el área de la sección original, se calculó  $\mathcal{E}$  como el porcentaje del decremento de la longitud con respecto a la longitud original de 50 mm.

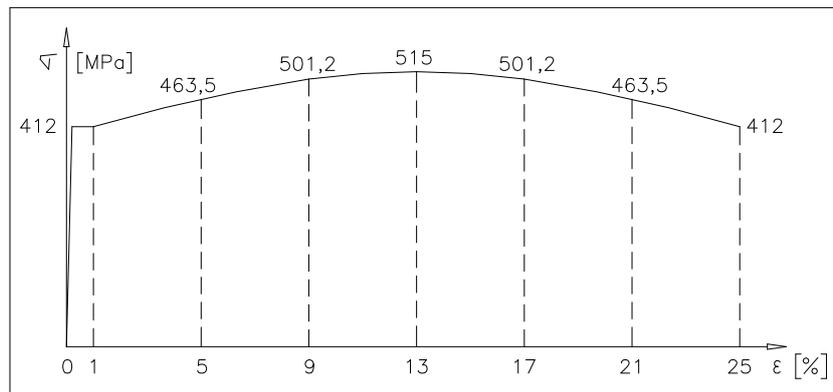


Figura 5: Relación  $\sigma$ -  $\mathcal{E}$  del material del tubo definida en base a datos de ensayos de probetas

En este tubo las tensiones de fluencia y rotura resultaron ser mayores a las mínimas definidas en la norma de su material. Esta curva debe expresarse con ecuaciones de regresión que permitan calcular  $\sigma$  en función de  $\mathcal{E}$ . Las siguientes relaciones, que representan los resultados de los ensayos realizados, se definieron por aproximación:

$$\text{Para: } 0 \leq \mathcal{E} < 0,00206 \text{ corresponde: } \sigma = 200000 \mathcal{E} \text{ [MPa]} \quad (1)$$

$$\text{Para: } 0,00206 \leq \mathcal{E} < 0,01 \text{ corresponde: } \sigma = 412 \text{ [MPa]} \quad (2)$$

$$\text{Para: } 0,01 < \mathcal{E} \leq 0,25 \text{ corresponde: } \sigma = (412 + 103 \text{ sen } (90^\circ \cdot (\mathcal{E} - 0,01) / 0,12)) \text{ [MPa]} \quad (3)$$

De este modo, se puede calcular  $\sigma$  en función de  $\mathcal{E}$  en todo el rango de variación de  $\mathcal{E}$ . Se tiene la hipótesis de que este diagrama es igual en tracción y en compresión.

## 2.2. Modelo matemático para calcular momento flexor en función del radio de curvatura

En la Figura 6 se muestra un cuarto de la sección del tubo ensayado, dividida en 30 elementos de igual área  $A_0$  para el cálculo del momento flexor  $M_f$  en función del radio de curvatura  $\rho$  mediante el valor medio de  $\mathcal{E}$  correspondiente a cada elemento  $i$ , calculado con la relación:

$$\mathcal{E}_i = Y_i / \rho \quad (4)$$

$Y_i$  es la coordenada del baricentro de cada elemento respecto del eje neutro. Esta relación se deduce de la hipótesis de que las secciones siempre permanecen planas. Con  $\sigma_i = f(\mathcal{E}_i)$  multiplicada por  $A_0$  y por  $Y_i$  se obtiene el momento  $M_i$  que aporta cada elemento  $i$ , luego el

momento flexor total  $M_f$  se obtiene con la suma de todos los momentos  $M_i$ . Para simplificar el cálculo se sacó  $A_o$  como factor común, que luego multiplica a la suma de los productos  $Y_i \cdot \sigma_i$  de un cuarto de sección, multiplicando esto por 4 se obtiene el momento flexor  $M_f$  total.

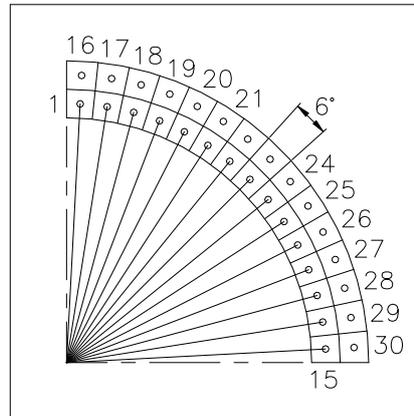


Figura 6: Un cuarto de la sección del tubo dividida en 30 elementos de igual área  $A_o$ .

$$A_o = A_{sección} / (4 \times 30) = \pi (R^2 - r^2) / 120 = 1,6075294 \text{ mm}^2 \quad (5)$$

Para que todos los elementos tengan el mismo valor de área  $A_o$ , el radio  $r_o$  del círculo que separa las 2 capas se calcula con la Ecuación (6):

$$r_o = ((R^2 + r^2) / 2)^{0,5} \quad (6)$$

Para determinar las distancias radiales  $R_1$  y  $R_2$  de los baricentros de los elementos de las capas 1 y 2 se calcula la ubicación del baricentro de un elemento de cada capa utilizando la ecuación correspondiente, para un sector de sección circular hueca, de [7] Tabla A.1 caso 21. Denominamos  $\Theta_i$  al ángulo formado entre el eje horizontal y un segmento que une el baricentro del elemento  $i$  con el baricentro de la sección del tubo.  $R_1$  es la longitud del segmento en la capa 1 y  $R_2$  en la capa 2. Las coordenadas  $Y_i$  se calculan con las Ecuaciones (7) y (8):

$$\text{En la capa 1: } Y_i = R_1 \cdot \text{sen } \Theta_i \quad (7)$$

$$\text{En la capa 2: } Y_i = R_2 \cdot \text{sen } \Theta_i \quad (8)$$

Se puede utilizar una hoja de cálculo para determinar la relación entre el momento flexor  $M_f$  y el radio de curvatura  $\rho$ , con un archivo para cada valor de  $\rho$ . Se calculan  $R_1$  y  $R_2$ . Para cada elemento  $i$  se calcula: su ángulo  $\Theta_i$  ( $\Delta\Theta = 6^\circ = 0,1047198$  radianes),  $Y_i$  con las Ecuaciones (7) u (8),  $\varepsilon_i$  con la Ecuación (4), se determina  $\sigma_i$ , se realiza el producto  $\sigma_i \cdot Y_i$ , se suman los productos  $\sigma_i \cdot Y_i$ , esta suma se multiplica por  $A_o$  y por 4, este resultado es el momento flexor  $M_f$  para ese radio  $\rho$ . En la Figura 7 se muestra como ejemplo la hoja de cálculo para radio  $\rho = 1,2$  m. Para definir cada valor de  $\sigma_i$  se utilizó la correspondiente Ecuación (1), (2) o (3), según cada valor de  $\varepsilon_i$ . Se calculó  $M_f$  para 24 valores de  $\rho$ , se presentan en la Tabla 1 ( $Rc = \rho$ ). En las Figuras 8a y 8b se muestra la curva de la relación entre  $M_f$  y  $1/\rho$  trazada con los valores de la Tabla 1.

Flexión elástico-plástica de tubo de sección circular					20,3,2020
Dimensiones:		R = 13,4	r = 10,87		
Cantidad de elementos en un cuarto de sección:		30	(2 x 15)		
Distancia radial de baricentros de capa 1 y capa 2:					
R1 = 11,54326		R2 = 12,80352	radianes:		
Ángulo abarcado por cada elemento:		90/15 = 6 grados	0,10472		
Área de cada elemento:		Ao = 1,607529		mm <sup>2</sup>	
Radio de curvatura en baricentro sección del tubo =		1200 mm			
Ángulo [rad]	Yi [mm]	épsilon	Sigma	Sigma.Yi	
1	1,5184364	11,52744	0,009606	412	4749,305
2	1,4137166	11,40114	0,009501	412	4697,271
3	1,3089968	11,14993	0,009292	412	4593,772
4	1,204277	10,77656	0,00898	412	4439,943
5	1,0995572	10,28512	0,008571	412	4237,469
6	0,9948374	9,680991	0,008067	412	3988,568
7	0,8901176	8,970796	0,007476	412	3695,968
8	0,7853978	8,162314	0,006802	412	3362,874
9	0,680678	7,264405	0,006054	412	2992,935
10	0,5759582	6,286906	0,005239	412	2590,205
11	0,4712384	5,240525	0,004367	412	2159,096
12	0,3665186	4,136729	0,003447	412	1704,332
13	0,2617988	2,987609	0,00249	412	1230,895
14	0,157079	1,805756	0,001505	300,9594	543,4594
15	0,0523592	0,60412	0,000503	100,6866	60,82678
16	1,5184364	12,78598	0,010655	412,8831	5279,113
17	1,4137166	12,64589	0,010538	412,7257	5219,284
18	1,3089968	12,36725	0,010306	412,4126	5100,411
19	1,204277	11,95312	0,009961	412	4924,684
20	1,0995572	11,40802	0,009507	412	4700,105
21	0,9948374	10,73794	0,008948	412	4424,03
22	0,8901176	9,950204	0,008292	412	4099,484
23	0,7853978	9,053455	0,007545	412	3730,023
24	0,680678	8,057514	0,006715	412	3319,696
25	0,5759582	6,973294	0,005811	412	2872,997
26	0,4712384	5,812672	0,004844	412	2394,821
27	0,3665186	4,588366	0,003824	412	1890,407
28	0,2617988	3,313788	0,002761	412	1365,281
29	0,157079	2,002904	0,001669	333,8174	668,6043
30	0,0523592	0,670076	0,000558	111,6793	74,83363
Sumatoria de (Sigma.Yi) =				95110,69	[N/mm]
Mf = 4.Ao.(Sumatoria de Sigma.Yi)/1000 =				611,573	[Nm]
Mf = Momento flexor que provoca el radio de curvatura de la barra					

Figura 7: Una página de hoja de cálculo como ejemplo con radio de curvatura  $\rho = 1200$  mm.

Tabla 1. Relación calculada entre el momento flexor  $Mf$  y el radio de curvatura  $\rho$  ( $Rc = \rho$ )

Rc [m]	1/Rc [1/m]	Mf [Nm]	Rc [m]	1/Rc [1/m]	Mf [Nm]	Rc [m]	1/Rc [1/m]	Mf [Nm]
$\infty$	0	0	5,000	0,200	530,710	0,600	1,667	627,450
10,000	0,1000	286,630	4,000	0,250	564,870	0,300	3,333	659,740
7,000	0,1429	409,470	3,000	0,333	588,270	0,100	10,000	746,820
6,505	0,1537	440,634	2,000	0,500	604,050	0,090	11,111	752,100
6,500	0,1538	440,970	1,500	0,667	609,410	0,085	11,765	753,750
6,493	0,1540	441,448	1,200	0,833	611,570	0,075	13,333	753,330
6,490	0,1541	441,650	1,167	0,857	611,940	0,060	16,667	733,080
6,000	0,1667	475,760	0,900	1,111	617,210	0,052	19,231	702,910

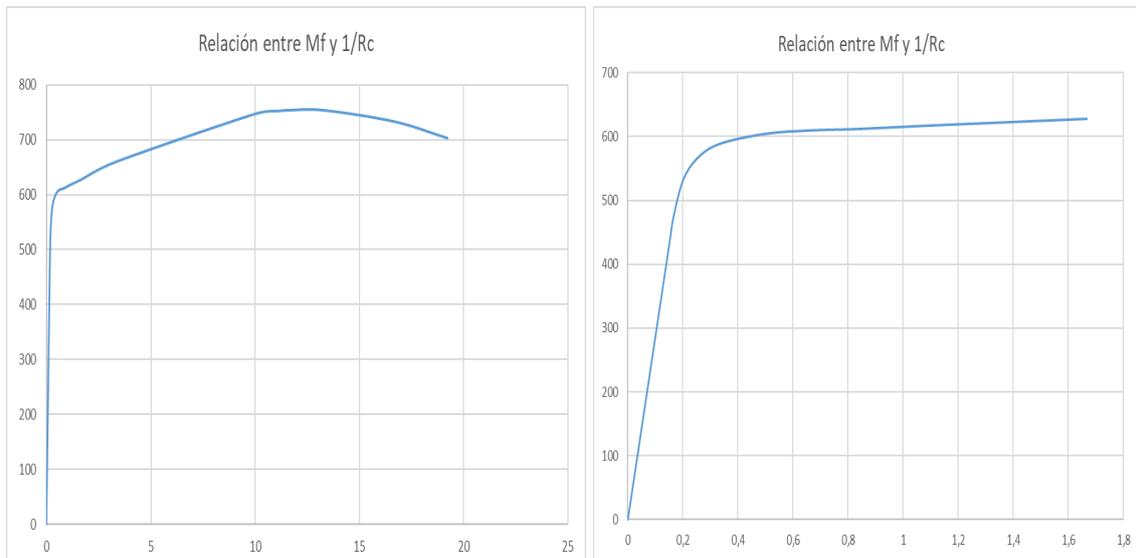


Figura 8: Relación entre  $Mf$  [Nm] y  $1/\rho$  [1/m]; (a) curva completa; (b) curva para  $0 < 1/\rho < 1,6$

### 3. EVALUACIÓN DE LOS RESULTADOS

#### 3.1. Validación de la discretización con cálculos exactos clásicos en el período elástico

Para el tubo del ejemplo se puede calcular el momento flexor  $M_y$  que causa el inicio de tensiones de fluencia, en las fibras más alejadas al eje neutro, con la relación exacta clásica:

$$M_y = F_y \cdot W_x = 412 \text{ [N/mm}^2\text{]} \times 1,071467 \text{ [cm}^3\text{]} = 441,444 \text{ [Nm]} \quad (9)$$

De [4] pág. 137 se obtiene la ecuación exacta clásica que relaciona  $Mf$  con  $\rho$ :

$$\rho = E \cdot J_x / Mf = 200000 \text{ [N/mm}^2\text{]} \times 1,435766 \text{ [cm}^4\text{]} / 441,444 \text{ [Nm]} = 6,505 \text{ [m]} \quad (10)$$

En la Tabla 1 a este valor de  $\rho$  le corresponde un  $Mf$  de 440,634 [Nm], el error relativo  $\epsilon$  es:

$$\begin{aligned} \Delta Mf &= (440,634 - 441,444) \text{ [Nm]} = - 0,81 \text{ [Nm]} \\ \epsilon &= \Delta Mf / Mf = - 0,81 / 441,444 = - 0,001835 = - 0,1835 \% \end{aligned} \quad (11)$$

Es un error pequeño para cálculos de estructuras, entonces la discretización realizada es aceptable para el período elástico. Luego en el período plástico, la relación entre  $\sigma$  y  $\mathcal{E}$  no es un valor constante, por eso es conveniente validar el método con un ensayo experimental.

#### 3.2. Validación del método con un ensayo experimental

Se ensayó a flexión pura normal una viga formada por un tubo recto cuyos datos se dan en la Sección 2. En la Figura 9 se muestra un esquema del montaje y cargas aplicadas. La longitud del tubo es 4,080 m, con apoyos simples inmóviles con luz de 3,630 m y extremos en voladizo iguales de 0,225 m. El tubo se desliza sobre los apoyos cuando las deflexiones son grandes. En la Figura 9 la carga aplicada  $2 \cdot P_1$  incluye el peso propio del dispositivo (33 N) pero no el peso propio del tubo (60,6 N), que se considera aparte. La distancia  $L = 380$  mm está referida a centros de placas del dispositivo separadas por  $Li = 368$  mm. Dimensiones  $a$  y  $c$  en mm.

El montaje fue diseñado para lograr momentos flexores mayores a  $M_y$  con esfuerzos de corte  $Q$  muy pequeños (menores a 2,83 N) en el tramo central de longitud  $L$ . En la sección central la flexión normal es pura porque se tiene:  $Q = 0$ , y es prácticamente pura en todo el tramo de longitud  $L$ . Con  $L$  y  $\Delta y_1$  se puede calcular, con una relación geométrica, el radio de curvatura de valor prácticamente constante en el tramo central, dado que es muy pequeña la variación del momento flexor entre el centro y los extremos del tramo central (0,266 Nm), causada por el peso propio del tubo. El momento nominal de la sección es:  $M_n = F_y \cdot W_{xp} = 616,2 \text{ Nm}$ .

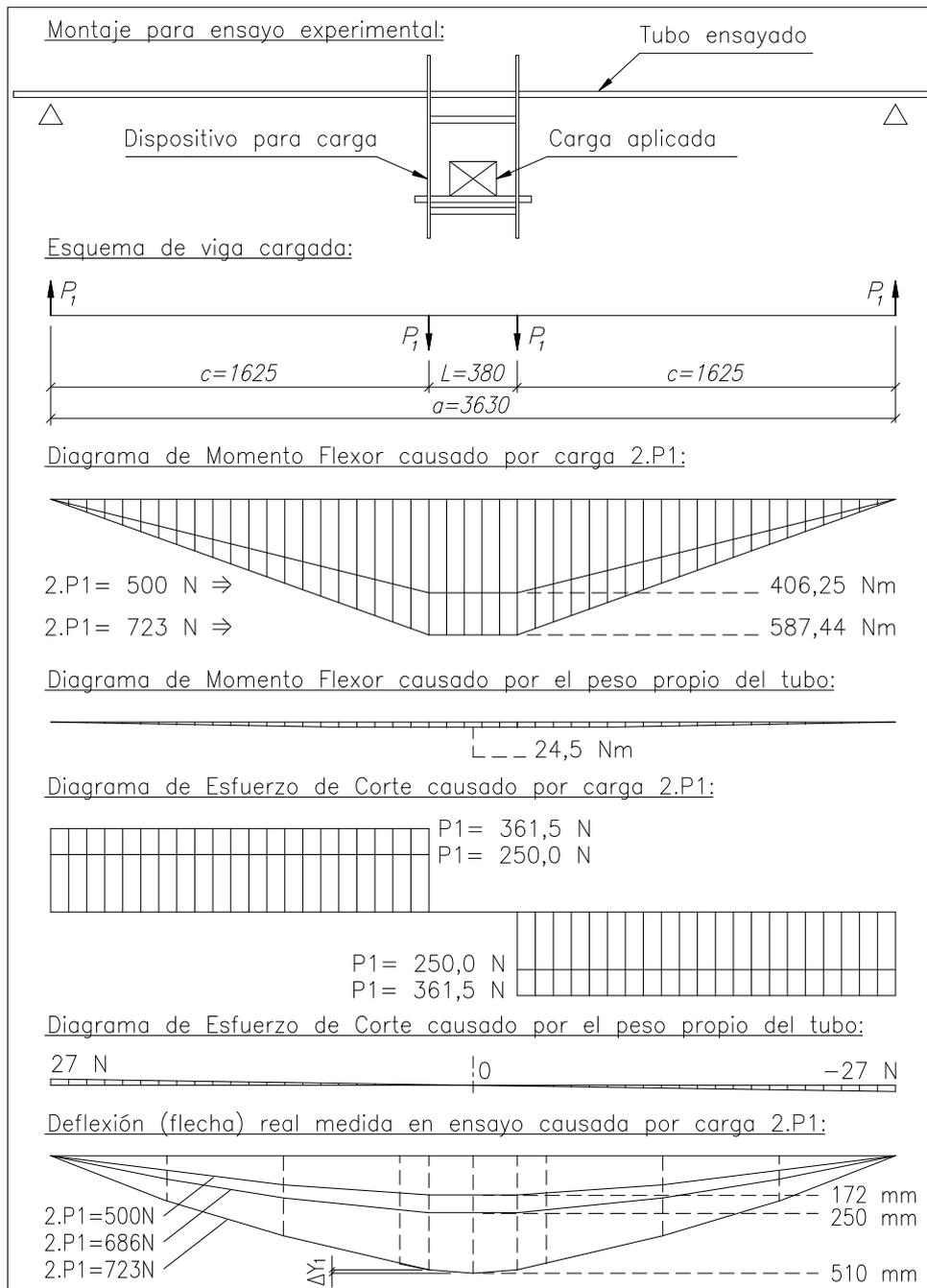


Figura 9: Montaje para ensayo experimental a flexión pura normal del tubo ejemplo.

De [8] Tabla 10.2.2.1.9.3. caso 13 pág. 1110 se obtiene la ecuación exacta para calcular la flecha máxima elástica causada por el peso propio entre apoyos del tubo ( $P_p = 54N$ ), para simplificar no se considera el efecto del peso de los extremos (3,3 N c/u), entonces aprox. es:

$$y_p = 5 P_p \cdot a^3 / (384 E \cdot J_x) = 11,7 \text{ mm} \quad (12)$$

De [8] Tabla 10.2.2.1.9.2. caso 7 pág. 1109 (pie de página) se obtiene la ecuación para la flecha máxima causada por las dos cargas  $P_1$ , solamente en el período elástico se cumple:

$$y_1 = P_1 \cdot c (3 a^2 - 4 c^2) / (24 E \cdot J_x) = 0,68305 P_1 \quad (13)$$

En la Ecuación (13) se obtiene  $y_1$  en mm ingresando  $P_1$  en N. En la Tabla 2 se dan valores de las variables, cada columna es: A) carga aplicada (se adicionaron pesos conocidos), B) flecha  $y_1$  medida (causada por  $2 \cdot P_1$ ), C) flecha calculada con la Ecuación (13), D)  $\Delta y_1$  medida (aprox.), E) radio de curvatura (aprox.) determinado con relaciones geométricas entre  $\Delta y_1$  medida y  $L_i$ , F) radio de curvatura calculado con la Ecuación (10) válido sólo en el período elástico, G) radio de curvatura determinado con el método presentado en la Subsección 2.2, H) momento flexor total causado por carga  $2 \cdot P_1$  y peso propio del tubo  $P_p$ . En las columnas C y F los datos entre corchetes no son válidos, se calcularon para compararlos con las mediciones. La Figura 10 es una fotografía del tubo con deformación permanente luego del ensayo. El tubo no se aplastó ni deformó diametralmente más de 0,2 mm en ninguna sección. En el ensayo, con carga máxima se alcanzó  $\rho = 1,19$  m en el tramo central, al retirar la carga la recuperación elástica finalizó con  $\rho = 1,65$  m. Para estudiar casos con radios de curvatura menores se puede consultar [9]. El  $M_f$  máx. alcanzado (611,9 Nm) difiere del momento nominal de la sección  $M_n$  (616,2 Nm) en 0,7 %.

Tabla 2. Resultados obtenidos con cálculos y en el ensayo experimental

A	B	C	D	E	F	G	H	I
Carga	Flecha		$\Delta$ Flecha	Radio de curvatura			Momento flexor	Deformación
(medida)	(medida)	(c. clásico)	(medida)	(medido)	(c. clásico)	(c. método)	(calculado)	
$2 \cdot P_1$	$Y_1$	$Y_1$	$\Delta Y_1$	$\rho$	$\rho$	$\rho$	$M_f$	
[N]	[mm]	[mm]	[mm]	[m]	[m]	[m]	[Nm]	
0	0	0			117,205	116,993	24,500	Elástica
240	80	82,0			13,082	13,058	219,500	Elástica
426	145	145,5			7,748	7,734	370,625	Elástica
500	172	170,8			6,666	6,654	430,750	Elástica
534	177	[182,4]			[6,265]	6,253	458,375	Elastoplástica
578	193	[197,4]			[5,811]	5,713	494,125	Elastoplástica
612	202	[209,0]	3,0	5,650	[5,504]	5,211	521,750	Elastoplástica
686	250	[234,3]	5,0	3,400	[4,935]	3,309	581,875	Elastoplástica
723	510	[247,6]	14,5	1,188	[4,680]	1,167	611,937	Elastoplástica



Figura 10: Tubo ensayado a flexión pura normal con deformación permanente

### 3.3. Trazado de la viga deformada en función de los radios de curvatura calculados

En las Figuras 11 y 12 se definieron 9 tramos, se trazaron arcos (tangentes en sus extremos) con radios de curvatura en función del  $M_f$  medio de cada tramo. Resultó una flecha máxima de 515,6 mm (causada por  $2.P_1$  mas  $P_p$ ). Según la Ecuación (12), la flecha causada por  $P_p$  es 11,7 mm, al restar ese valor a 515,6 mm se obtiene 503,9 mm, que es la flecha debida solo a  $2.P_1$ . Este valor es menor a la flecha real medida (510 mm) en 1,2 %. El trazado se puede mejorar dividiendo la viga en mayor cantidad de tramos. Este método gráfico también se aplicó con carga  $2.P_1$  de 500 N, resultó una flecha causada por  $2.P_1$  de 169,3 mm, esto es 0,86 % menor al valor 170,76 mm calculado con la Ecuación (13), exacta para el período elástico.

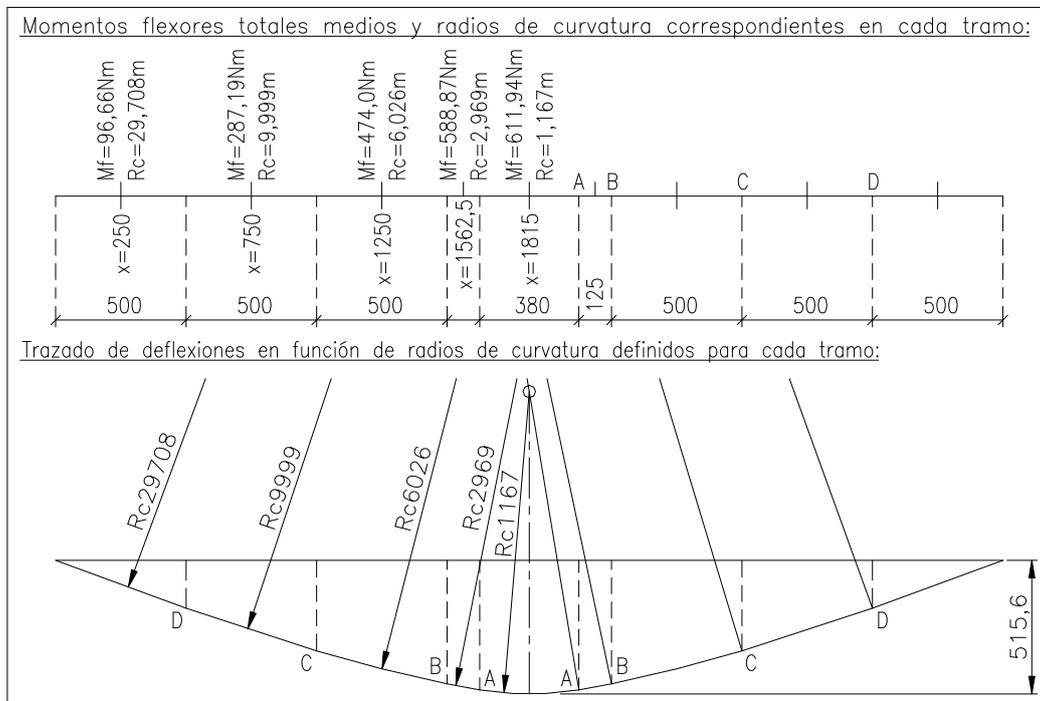


Figura 11: Trazado de la viga deformada para comparar con mediciones

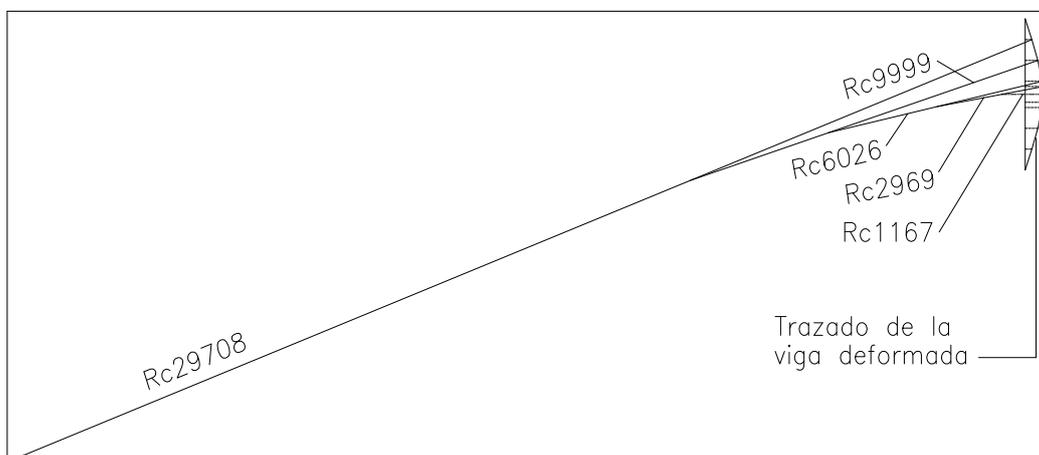


Figura 12: Trazado de la viga deformada (dibujo rotado 90°).

#### 4. CONCLUSIONES

El método presentado en la Sección 2 permite encontrar el radio de curvatura  $\rho$  en una sección de una barra (formada por un tubo como el del ejemplo dado en su explicación) en función del momento flexor  $Mf$  aplicado en esa sección. En ese ejemplo se obtuvieron diferencias menores a 0,2 % con respecto al cálculo clásico de  $\rho$  en función de  $Mf$  en el período elástico, y diferencias menores a 9 % con respecto a mediciones realizadas en el ensayo experimental de validación en el rango elastoplástico de  $Mf$  variando entre  $M_y$  y  $M_n$ . Esos porcentajes resultan de comparar los datos registrados en la Tabla 2 en las columnas E, F, G. El método de la Sección 2 permite generar curvas de  $Mf$  en función de  $1/\rho$  como la de la Figura 8, trazada con los datos de la Tabla 1. Con esos datos y el método gráfico descrito en la Subsección 3.3 se puede trazar la viga deformada, en el ejemplo planteado la diferencia de la flecha máxima obtenida con el trazado y la flecha máxima de la barra ensayada es 1,2 %.

#### 5. AGRADECIMIENTOS

Los autores de este trabajo agradecen a la Secretaría de Ciencia y Tecnología, al CIDIV y al Departamento de Ingeniería Mecánica de UTN FRGP por el apoyo brindado para realizarlo.

#### 6. REFERENCIAS

- [1] Laboratory Test Procedure for FMVSS 216 Roof Crush Resistance TP-216-05, U.S. Department of Transportation National Highway Traffic Safety Administration. 2006.
- [2] SAE. *Construction, Agricultural, and Off-Road Machinery Standards Manual SAE HS-2800, 1996 Edition*. Society of Automotive Engineers Inc., USA, 1996.
- [3] McCormac J.C., Csernak S.F. *Diseño de Estructuras de Acero Método LRFD, Quinta Edición*. Alfaomega, México, 2013.
- [4] Feodosiev V.I. *Resistencia de Materiales, Segunda Edición*. Editorial Mir, Rusia, 1980.
- [5] ASTM A 53/A 53M – 99b. Standard Specification for Pipe, Steel, Black and Hot-Dipped, Zinc-Coated, Welded and Seamless. American Society for Testing and Materials. 1999.
- [6] ASM International edited by Moosbrugger Ch. *Atlas of Stress-Strain Curves, Second Edition First Printing*. ASM International, USA, 2002.
- [7] Young W.C., Budynas R.G. *Roark's Formulas for Stress and Strain, Seventh Edition*. McGraw-Hill, USA, 2002.
- [8] Verein Deutscher Eisenhüttenleute (Asociación de trabajadores del hierro alemanes). *El acero en la construcción*. Editorial Reverté, España, 1980.
- [9] Alcántara Alza V., Noriega Z. D., Azabache Vásquez E. *Determinación de los coeficientes de recuperación elástica en el doblado de tubos de acero SAE 1009-ISO 65*. VI Congreso Argentino de Ingeniería Mecánica, ISBN 978-987-46987-0-4, 10 al 12 Octubre 2018 Tucumán.