

**MAESTRÍA EN INSTRUMENTOS
SATELITALES**

INFORME DE TESIS

**“Influencia de estabilidad de apuntamiento en la
calidad de imágenes para cámaras satelitales ”**

Tesista:

Ing. Ismael Omar Ibañez

Director de tesis: Ing. Jose M. Relloso

Co-Directora de tesis: Dra. Marianela Carubelli



Córdoba, 19 de mayo de 2017

Índice

1. Introducción	3
2. Aproximación del NIIRS	4
2.1. Parámetros intervinientes en la GIQE	5
2.1.1. Respuesta de Borde	5
2.1.2. GSD (Ground Sampled Distance)	6
2.1.3. SNR (Signal to Noise Ratio)	7
2.1.4. H (Overshoot Value)	9
2.1.5. G(Noise Gain in Post Processing)	11
3. Base Teórica	11
3.1. Representación matemática de un sistema Óptico	11
3.2. Efecto del apuntamiento de una cámara en la calidad de las imágenes	13
4. Calculo de la Transferencia Radiativa	15
5. Modelado matemático de Parámetros de NIIRS	18
5.1. Selección del Muestreo Espacial	18
5.2. Calculo de MTF por Difracción	20
5.3. MTF del Detector	22
5.3.1. MTF por Footprint	22
5.3.2. MTF por muestreo (sampling)	24
5.4. MTF por Movimiento de la Linea de Visión	26
5.4.1. MTF Smear	26
5.4.2. MTF Smear con TDI	27
5.4.3. MTF Jitter	28
5.4.4. MTF de Sincronismo TDI	32
5.5. Calculo de MTF de Compensación	33
5.6. MTF por Ineficiencia de Transferencia de Cargas	34
5.7. Calculo de GSD	35
5.8. Validación de Modelo de GSD	39
5.9. Calculo de la Relación señal a ruido	41
5.9.1. Ruido del Detector	41
5.9.2. Calculo de la SNR	43
6. Validación	43
7. Conclusiones	43
Anexo	43
Referencias	44

1. Introducción

Definir las prestaciones de un sistema electro-óptico no es trivial debido a la gran cantidad de factores involucrados: parámetros de la óptica, del detector, las perturbaciones a los que está sujeto durante una captura, radiometría de la escena, y geometría del apuntamiento. La dificultad de especificar la calidad del producto de un sistema de captura de imágenes deriva usualmente en el sobre-dimensionamiento del mismo, para asegurar un rendimiento aceptable del mismo. Sin embargo, un sistema sobre-dimensionado implica mayores costos, tiempos de desarrollo, peso, consumo y volumen que un sistema diseñado de manera óptima. Por ello, es de gran utilidad realizar un análisis de completo del proceso de captura de imágenes y así identificar que parámetros influyen de que forma en la calidad del producto final. Este proceso involucra la integración de la radiación emitida y/o reflejada por la escena de interés, el muestreo y utilización digital de la misma, su procesamiento y posterior reconstrucción para ser visualizada. Los efectos que influyen en la calidad de un sistema de adquisición de imágenes son muchos, entre ellos se encuentran la técnica de adquisición del detector utilizado, el ruido que produce el mismo, la relación entre el movimiento relativo de escena y detector y el tiempo en el que se integra radiación, la estabilidad de apuntamiento del instrumento, entre otros. Muchos estudios se llevaron a cabo para relacionar específicamente cómo afectan las perturbaciones en el apuntamiento a la calidad de la imagen, la gran mayoría de los cuales se basan en definiciones dadas en términos de *jitter* (oscilaciones mecánicas de alta frecuencia de la Línea de visión (*Line Of Sight*) (LOS)) y *drift* (oscilaciones mecánicas de baja frecuencia de la LOS). La relevancia de dichos estudios radica en cuantificar los efectos de borronado sobre la imagen en función de la frecuencia de oscilación mecánica de la línea de visión, con lo que se evita sobredimensionar los sistemas de control de actitud en un satélite. El estudio de que efectos tiene la estabilidad de apuntamiento es relevante debido a que estas pueden ser controladas en cierta medida mediante operaciones sobre la plataforma que transporta el sistema de adquisición de imágenes. El accionamiento de algún mecanismo en el momento de adquisición de imágenes puede o no ser clave en la calidad del producto obtenido.

El análisis de la calidad de una imagen y del sistema de captura de imágenes usualmente se especifica en términos de parámetros técnicos, que definen algunos aspectos de la calidad. Estos son útiles para nivel de diseño detallado, pero no para diseño preliminar (ya que no abarcan todos los aspectos de desempeño) o para comunicación con un posible usuario a nivel de aplicación (debido a que comprender estos parámetros técnicos requiere de conocimientos específicos). Por ello, es deseable utilizar un factor, índice o escala de calidad que apele a la interpretabilidad o la utilización de una imagen. Se utilizará el índice denominado Escalas de Clasificación de Interpretación de Imagen Nacional (*National Image Interpretability Rating Scales*) (NIIRS), que permite asignar un valor numérico a la utilidad de imágenes aéreas o de observación terrestre. Este índice se genera

mediante un grupo de analistas de imágenes que determinan la interpretabilidad de una imagen mediante identificación de objetos en las mismas. Los valores de NIIRS están tabulados [2] especificando que tipo de objetos son observables (desde poder distinguir simplemente entre terreno rural y urbano, hasta poder contar animales o identificar espigas individuales en los durmientes de las vías de trenes) para cada rango del NIIRS, que va de 0 (peor calidad) a 9 (mejor calidad).

2. Aproximación del NIIRS

A partir de estudios realizados para relacionar parámetros de calidad técnica como el Muestreo Espacial en Tierra (*Ground Sampled Distance*) (GSD), Funcion de Transferencia de Modulación (*Modulation Transfer Function*) (MTF), Relacion Señal a Ruido (*Signal to Noise Ratio*) (SNR), etc. con medidas de calidad a nivel de aplicación, se desarrollo la Ecuacion General de Calidad de Imagen (*General Image Quality Ecuation*) (GIQE) [6] [10] [14]. Esta es una ecuación empírica que estima el NIIRS a través de estos parámetros técnicos. La versión 3 fue lanzada en diciembre de 1994, y su posterior versión 4 en Noviembre de 1997 [6]. Se utiliza la versión 4 porque es mas reciente, y porque asume que el GSD es definido en tierra y no su proyección ortogonal a la LOS como en la versión 3 de la GIQE. Usando esta ecuación se estima la interpretabilidad de una imagen a partir de especificaciones técnicas del sistema que las obtiene:

$$NIIRS_{GIQE} = A_{sys} - a \cdot \text{Log}_{10}(GSD_{GM}) + b \cdot \text{Log}_{10}(RER_{GM}) - 0,656 \cdot H_{GM} - 0,344 \cdot \frac{H}{SNR} \quad (1)$$

En la ecuación 1:

- A_{sys} es una constante dependiente de la naturaleza espectral de la radiacion capturada, y vale 10,251 para sistemas de luz visible y 10,751 para sistemas de radiacion infrarroja.
- GSD_{GM} es la media geométrica del GSD .
- RER_{GM} es el promedio geométrico de la respuesta relativa de borde.
- H_{GM} es la altura geométrica del rebasamiento debido a realces de bordes en pos-procesamiento
- G es la ganancia de ruido debido al pos-procesamiento, y SNR es la relación señal a ruido.

Los coeficientes $a = 3,32$ y $b = 1,559$ se utilizan cuando $RER \geq 0,9$. Para $RER < 0,9$, valores son $a = 3,16$ y $b = 2,817$

La Respuesta Relativa de Borde (*Relative Edge Response*) (RER) se calcula a través de la MTF , lo que hace a la misma uno de los grandes factores que

aportan al $NIIRS$ calculado con la $GIQE$, y por lo tanto a la estimación de la calidad de una imagen. En la imagen 1 se observa una curva ejemplo de ER, junto con RER y H.

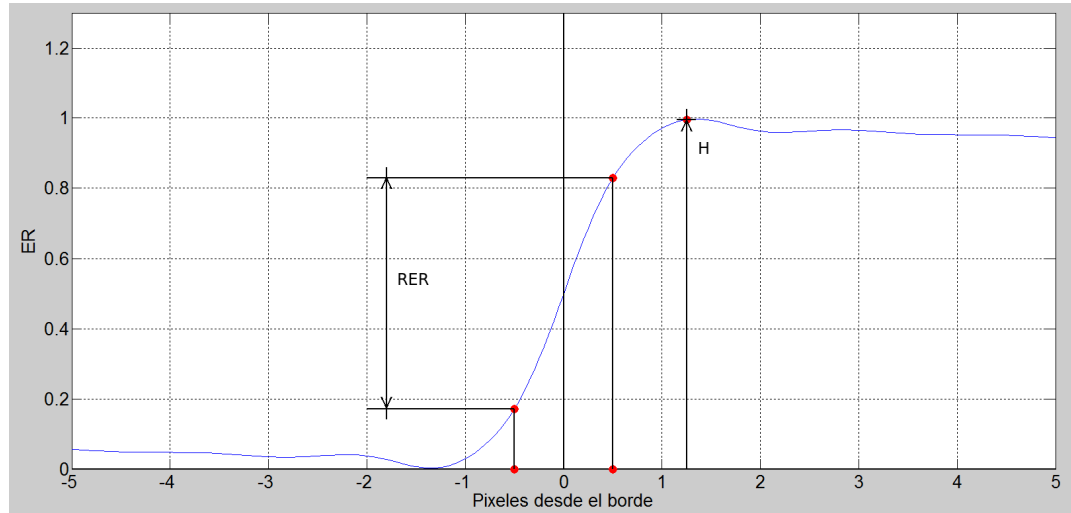


Figura 1 – Respuesta de Borde

2.1. Parámetros intervinientes en la GIQE

2.1.1. Respuesta de Borde

La ER es una medida de la capacidad de un sistema de reproducir bordes abruptos del plano objeto al plano imagen [3], que esta definida según la siguiente ecuación:

$$ER(\xi) = 0,5 + \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{\frac{1}{Q}} \frac{MTF(\chi)}{\chi} \cdot \text{sen}(\pi\chi\xi) d\chi \quad (2)$$

donde Q es el cociente de la frecuencia de corte por muestreo sobre la frecuencia de corte por difracción, ξ es la cantidad de píxeles medida desde el borde, χ es la frecuencia espacial normalizada con $\frac{1}{IFOV}$, que es la frecuencia de corte de muestreo del sistema. El muestreo espacial está definido por $IFOV$, que representa la apertura angular de un píxel, para la distancia focal f del sistema óptico.

La RER es la pendiente de la ER, y se obtiene como la diferencia de la ER tomada medio píxel hacia cada lado del borde:

$$RER = ER(0,5) - ER(-0,5) \quad (3)$$

$$RER = 2 \cdot \int_0^{\frac{1}{Q}} \left(MTF(\chi) \cdot \frac{\text{sen}(2\pi\chi)}{\pi\chi} \right) d\chi \quad (4)$$

La MTF de un sistema esta relacionada con la calidad del mismo de reproducir en su imagen el *contraste* presente en la imagen original. Además, si los sistemas considerados son lineales e invariantes respecto a los corrimientos, cada efecto se define completamente por su MTF y entonces el modelado del sistema completo se realiza como un producto de las $MTFs$ individuales, como se aprecia en la ecuación 2, representada en la imagen 2.

$$MTF_{sistema} = MTF_{Optica} \cdot MTF_{muestreo} \cdot MTF_{jitter} \quad (5)$$

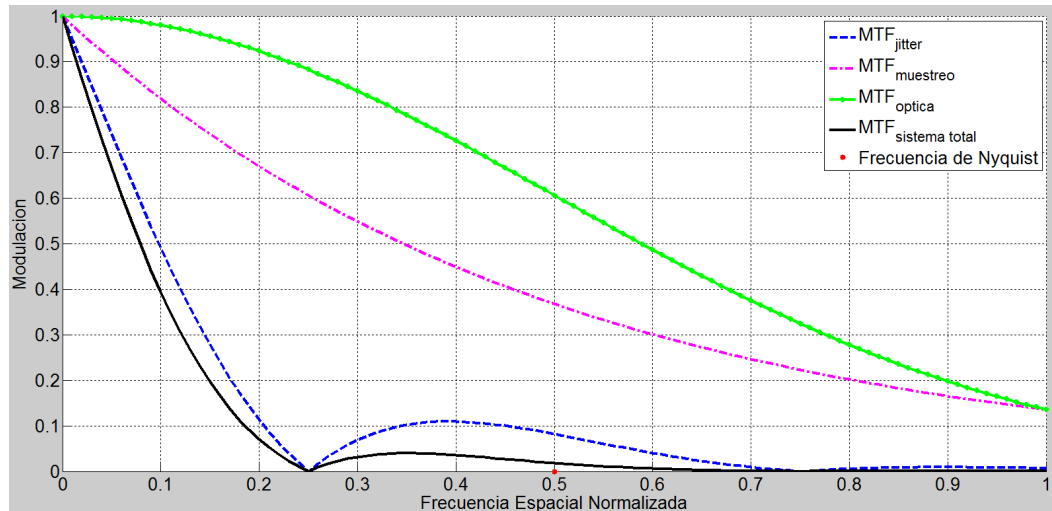


Figura 2 – MTF de un sistema óptico

En la figura 2 se observa también la *frecuencia de Nyquist* del sistema. Esta frecuencia es aquella que asegura que para una señal de banda limitada (es decir, componentes en frecuencia que no se extienden hasta el infinito) el espectro de la señal muestreada no tiene alias [11].

2.1.2. GSD (Ground Sampled Distance)

Este parámetro depende de la geometría del apuntamiento del sistema (es decir, de la distancia a la escena y la inclinación con la que se la observa), de características de la óptica (en el caso mas simple, la distancia focal de la misma) y de características geométricas del detector (la forma y el tamaño de los pixeles que posee). Representa la porción de terreno de la cual se obtiene la energía que llega a un pixel [9].

La figura 3 representa un caso simple: un pixel cuadrado, apuntando directamente a *nadir* (distancia mas corta posible entre Tierra y satélite). En este caso, el modelo del GSD responde a la ecuación 6, donde h es la altura del satélite, f es la distancia focal y p es el tamaño del pixel como se observa en

la figura 3. El modelo utilizado para este trabajo abarca otras variables que se trataran mas adelante.

$$GSD = \frac{p \cdot h}{f} \quad (6)$$

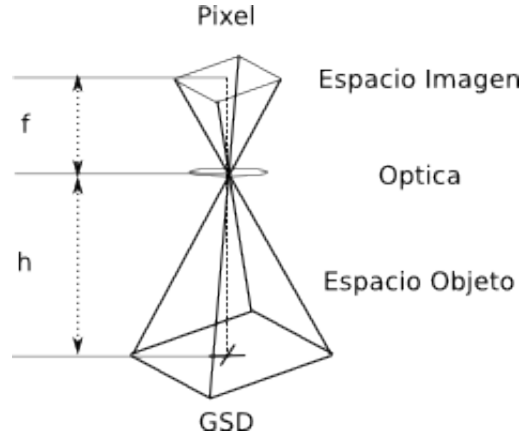


Figura 3 – Geometria del GSD

2.1.3. SNR (Signal to Noise Ratio)

La SNR se define como la relación entre la señal obtenida y el ruido que entra al sistema inevitablemente en cada captura [9].

$$SNR = \frac{Señal}{Ruido_{total}} \quad (7)$$

donde la Señal esta compuesta por todos los electrones capturados por el detector (cuantificados digitalmente) y el Ruido_{total} esta compuesto por

$$Ruido_{total} = Ruido_{shot} + Ruido_{darkcurrent} + Ruido_{Transferencia} + Ruido_{Readout} + Ruido_{cuantizacion} \quad (8)$$

El ruido *Shot* surge de la naturaleza aleatoria de la emisión de fotones de una fuente de luz [9] [13] [15]. Se modela como una señal con distribución de *Poisson*. Esta componente del ruido es la limitante absoluta de la SNR, ya que esta presente siempre, inherente a la señal. Aun en ausencia de las otras fuentes de ruido, el ruido *Shot* existe, limitando la máxima SNR posible a $\sqrt{Señal}$, como se ve en la ecuación 9

$$SNR_{MAX} = \frac{Señal}{Ruido_{shot}} = \frac{Señal}{\sqrt{Señal}} \quad (9)$$

El ruido por *Dark Current* (corriente oscura) surge de portadores de carga asociados a imperfecciones o impurezas en el semiconductor o en las interfaces del mismo. Esta corriente depende de la temperatura y del tiempo de exposición. La corriente oscura aporta al ruido de la misma forma que la señal, ya que su fluctuación también responde a una distribución de Poisson [13] [7]. Entonces, como se ve en 10

$$Ruido_{darkcurrent} = \text{sqr}[2]darkcurrent(t_{integracion}, Temp) \quad (10)$$

El ruido por Ineficiencia de Transferencia de Cargas (*Charge Transfer Inefficiency*) (CTI) es una consecuencia de la ineficiencia de los detectores al mover las cargas de un pozo de potencial a otro, debido a la Técnica de Integración con Retraso de Tiempo (*Time Delay and Integration*) (TDI), o al movimiento de las cargas necesario para que lleguen a los amplificadores y la cadena de conversión analógico a digital. En cada movimiento de la carga, se transfiere una cantidad de carga que es un porcentaje de la señal adquirida por el pixel, dada por la ecuación 11, y en el pozo del detector queda una cantidad remanente dada en la ecuación 12. La carga no se pierde, ni se genera. Simplemente se redistribuye [?].

$$Q_{transferida} = CTE \cdot Q_{señal} = (CTI - 1) \cdot Q_{señal} \quad (11)$$

$$Q_{remanente} = CTI \cdot Q_{señal} = (1 - CTI) \cdot Q_{señal} \quad (12)$$

La ecuacion que modela el ruido generado es la siguiente

$$\sigma_{CTI} = \sqrt{2 \cdot CTI \cdot N_p \cdot S} \quad (13)$$

donde N_p es el numero de transferencias de carga y S es la señal original.

El ruido por *Readout* esta asociado a los elementos de lectura de cada pixel, que consisten en un *seguidor de fuente* o *drenador común*¹ y al ruido de reset de los elementos de lectura, generados por agitación térmica en la resistencia del canal del MOSFET y almacenados en el capacitor de lectura [8]. Este se especifica en las hojas de datos de los detectores.

El ruido por *Cuantizacion* es aquel que se genera cuando la señal analógica es cuantizada por el Conversor Analógico a Digital (*Analog to Digital Conversion*) (ADC). Este ruido se calcula según al ecuación 14, donde FWC es Carga Maxima de Pixel (*Full Well Charge*) (FWC) y Nbits es la profundidad de bits del ADC

$$\sigma_{Cuantizacion} = \frac{FWC}{2^{Nbits} \cdot \sqrt{12}} \quad (14)$$

¹Circuito con transistores MOSFET [5]

2.1.4. **H (Overshoot Value)**

Es un valor de sobre pico que se obtiene a partir de la ER [9]. Se calcula como el pico máximo de la ER para valores de ξ en el rango de 1 a 3. Si la ER crece sin que su pendiente sea negativa en ningún punto en este rango, se toma el valor de ER para ξ de 1.25. En la figura 4 se observa la curva de ER, donde se aprecia **H**

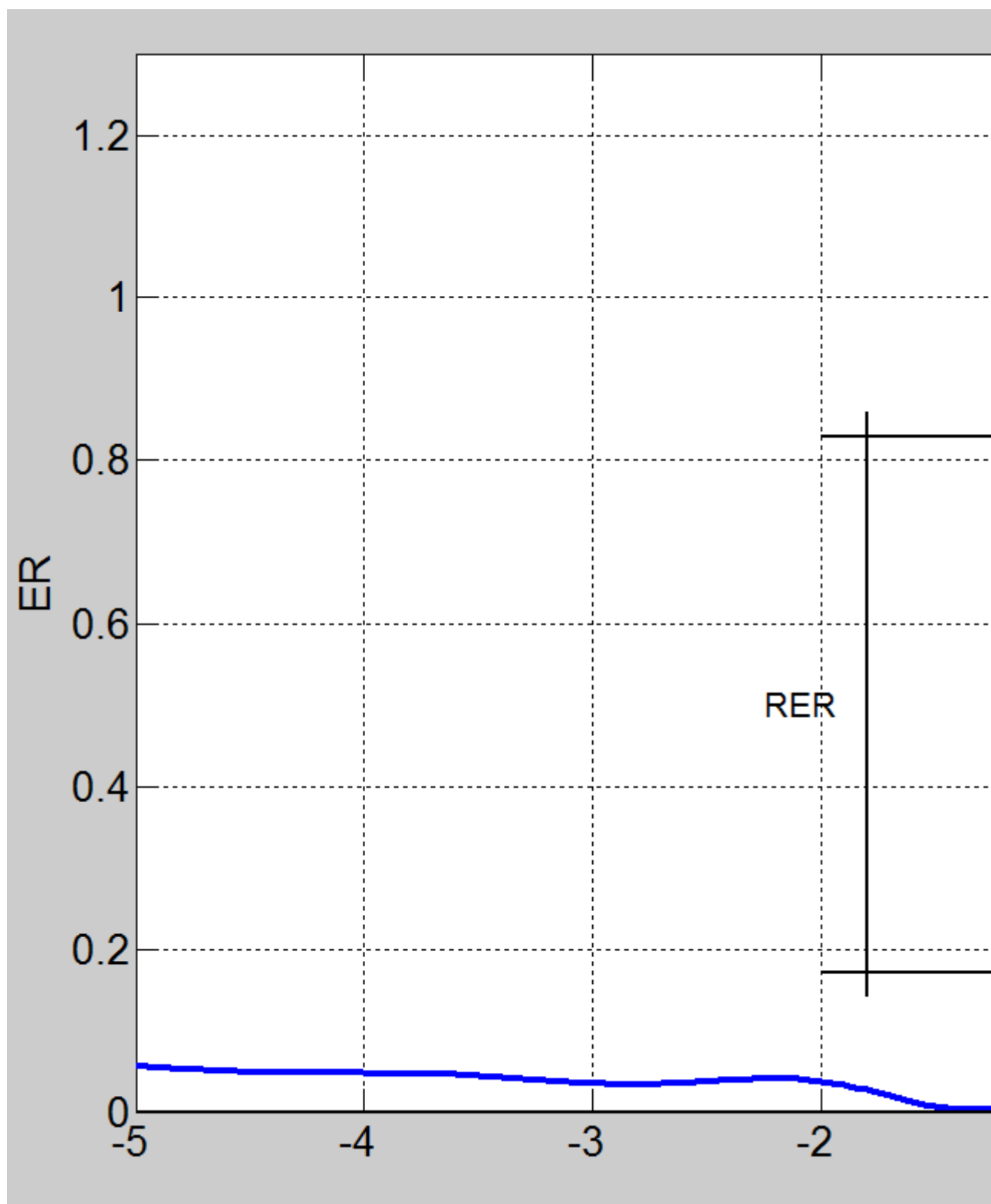


Figura 4 – Medición del rebasamiento de borde

2.1.5. G(Noise Gain in Post Processing)

Es una ganancia relacionada al pos procesamiento del sistema [9], obtenida del kernel utilizado para implementar la mejora de la imagen, conocido como Funcion de Transferencia de Compensacion (*Compensation Modulation Transfer Function*) (MTFC). Este procesamiento realza bordes pero tambien amplifica el ruido. De ahi el termino **ganancia de ruido**.

3. Base Teórica

3.1. Representación matemática de un sistema Óptico

Cuando la energía proveniente de un punto en un objeto pasa a través de un sistema óptico, éste se mapea en el plano de la imagen en forma dispersa, debido a diversos factores como la difracción de la luz, las aberraciones de las lentes, etc. Si el punto en el plano objeto lo consideramos un impulso ideal que ocurre en la posición (x_0, y_0) [4], podemos representarlo como:

$$P_{objeto}(x, y) = \delta(x - x_o, y - y_o) \quad (15)$$

Al pasar por el sistema óptico, este punto en el plano objeto se traduce en una función espacial diferente. Si atribuimos al sistema óptico las características de un sistema Lineal e Invariante con la Posicion (*Lineal Shift Invariant*) (LIE) obtenemos en el plano imagen de coordenadas (x, y) la respuesta al impulso del sistema de la forma:

$$P_{imagen}(x, y) = h(x - x_o, y - y_o) \quad (16)$$

Donde h representa la respuesta al impulso del sistema en cuestion. Una forma de caracterizar los sistemas ópticos es a través de una función que describe cómo se ve un punto brillante luego de que su luz pasa por el sistema óptico. Esta función se denomina Point Spread Function y representa la respuesta del sistema en el plano imagen a un punto brillante en el plano objeto. Si ahora consideramos que una imagen está compuesta por una suma de impulsos desplazados, multiplicados por una función que determina el brillo en cada punto de coordenadas (x, y) en ambos ejes como:

$$Objeto(x, y) = \sum_{n=0}^N \sum_{m=0}^M f_{RadianciaObjeto}(n, m) \cdot \delta(x - n, y - m) \quad (17)$$

Entonces, la imagen estará compuesta por respuestas al impulso desplazadas multiplicadas por una función que determina el brillo en el lado imagen para cada punto en los ejes x e y :

$$Imagen(x, y) = \sum_{n=0}^N \sum_{m=0}^M f_{RadianciaObjeto}(n, m) \cdot h(x - n, y - m) \quad (18)$$

Si consideramos al objeto compuesto por infinitos puntos muy cercanos entre sí, podemos representar al objeto como una integral de impulsos en ambas coordenadas:

$$\text{Objeto}(x, y) = \int \int f_{\text{RadianciaObjeto}}(n, m) \cdot \delta(x - n, y - m) dn dm \quad (19)$$

De forma similar, la imagen se representa como:

$$\text{Imagen}(x, y) = \int \int f_{\text{RadianciaImagen}}(n, m) \cdot h(x - n, y - m) dn dm \quad (20)$$

Es decir, la imagen es la convolución de la respuesta al impulso del sistema con la función que determina el brillo en cada punto del plano imagen:

$$\text{Imagen}(x, y) = f_{\text{RadianciaImagen}}(x, y) * h(x, y) \quad (21)$$

A estas ecuaciones en el dominio espacial se les puede aplicar una transformada de Fourier, pasando al dominio de la frecuencia espacial de forma que el análisis de una imagen se ve desde el punto de vista de sus componentes en este dominio. La frecuencia espacial tiene unidades de ciclos por unidades de espacio. La transformada de Fourier de la Point Spread Function es conocida como OTF (Optical Transfer Function) y el módulo de esta transformada como MTF (Modulation Transfer Function). Esta última es utilizada para caracterizar los sistemas, ya que una cascada de sistemas se resuelve como producto de sus MTFs por las propiedades de la convolución en el dominio de la frecuencia espacial.

Un sistema óptico ideal sin aberraciones está limitado por difracción, ya que la apertura del sistema es finita. Esto repercute en una MTF cuya frecuencia de corte está limitada por la apertura del sistema (D) y de la distancia focal del mismo (f) y depende de la longitud de onda promedio de la luz que se capta λ_{prom} de la siguiente forma:

$$f_{\text{difraccion}} = \frac{D}{f \cdot \lambda_{prom}} \quad (22)$$

Además, el detector con el cual se digitaliza la señal también tiene una MTF asociada, y además como este muestrea la señal, una frecuencia de Nyquist por encima de la cual se produce un aliasing de la señal adquirida. La MTF del detector tiene una frecuencia de corte dada por el cociente del tamaño de un pixel (p) sobre la distancia focal (f) del sistema óptico

$$f_{\text{muestreo}} = \frac{f}{p} = \frac{1}{IFOV} \quad (23)$$

en la ecuación anterior se relaciona la frecuencia de corte de la MTF por muestreo con el IFOV, parámetro que mide que porción angular de la señal proveniente del plano objeto es adquirida por cada pixel en el plano imagen.

Las limitaciones anteriormente expuestas son inherentes a un sistema ideal. Los sistemas reales además se ven afectados por otros fenómenos que se modelan como MTFs. A continuación se listan algunos de los factores más importantes que afectan a la MTF total de un sistema:

- MTF geométrica: es la forma en que las aberraciones del sistema óptico afectan a la MTF total
- Filtro antialiasing: El efecto de aliasing (confundir frecuencias espaciales muy rápidas por otras más lentas debido a que no se pueden muestrear correctamente) requiere a veces de filtrado, y este filtro (óptico) introduce su propia MTF a la cadena.
- Crosstalk: En algunos sensores, detectores contiguos pueden desbordar energía el uno sobre el otro, o pueden retener parte de la energía de una captura anterior. Esto introduce un factor a la MTF total.
- MTF de la Electrónica: la electrónica con la que se maneja el detector opera a una frecuencia dada. Al moverse el sistema, esto ocasiona una correspondencia con una frecuencia espacial de muestreo limitante.
- Movimiento: El movimiento del objeto o la plataforma sobre la cual está afirmado el sistema óptico ocasionan degradación de la MTF.
- Jitter: Las oscilaciones de la plataforma aportan un factor más a la MTF.

De esta manera, se modelan las perturbaciones que degradan la calidad de los sistemas ópticos como una cascada de MTFs que se multiplican para resultar en una única MTF del sistema.

3.2. Efecto del apuntamiento de una cámara en la calidad de las imágenes

Lo usual para definir especificaciones de control de actitud es requerir que el movimiento de la plataforma esté acotado, de tal forma que éste sea menor a una cantidad angular X en un intervalo de tiempo dado ΔT . Como la degradación de la calidad de la imagen depende de la frecuencia del movimiento de la línea de visión, es menester analizar el efecto de la frecuencia del movimiento para hacer un diseño más óptimo, como se describe en “*New Definitions of Pointing Stability: AC and DC Effects*” [3].

Se definen dos componentes esenciales en el error de apuntamiento de un instrumento:

- Componentes de frecuencias suficientemente bajas (respecto al tiempo en el que se captura energía con el detector) como para causar un efecto de corrimiento. Estas frecuencias son agrupadas bajo el nombre de *drift* (deriva).
- Componentes de frecuencia alta respecto al tiempo de captura de energía, que causan un efecto de distorsión en la imagen, o borroneo, que se denominan *jitter* (temblequeo).

El análisis de los efectos de la frecuencia de las señales parte de suponer una señal senoidal de amplitud RMS A , con frecuencia única f , relacionado con el tiempo $t_{integracion}$ que dura una captura de imagen según la ecuación

$$C = 2 \cdot \pi \cdot f \cdot t_{integracion} \quad (24)$$

donde C es la pulsación relativa de la perturbación dentro del tiempo de integración. Esta señal produce un corrimiento s (componente de DC del error de apuntamiento) cuadrático promedio de la imagen dado por

$$s^2 = \frac{2 \cdot A^2}{C^2} \cdot (1 - \cos(C)) \quad (25)$$

La distorsión d (componente de AC del error en apuntamiento) cuadrática media está dada por

$$d^2 = A^2 \cdot \left(1 - \frac{2 \cdot (1 - \cos(C))}{C^2}\right) \quad (26)$$

En el siguiente gráfico se muestran las curvas de s y d en función de la frecuencia relativa C y en función de la frecuencia de la perturbación:

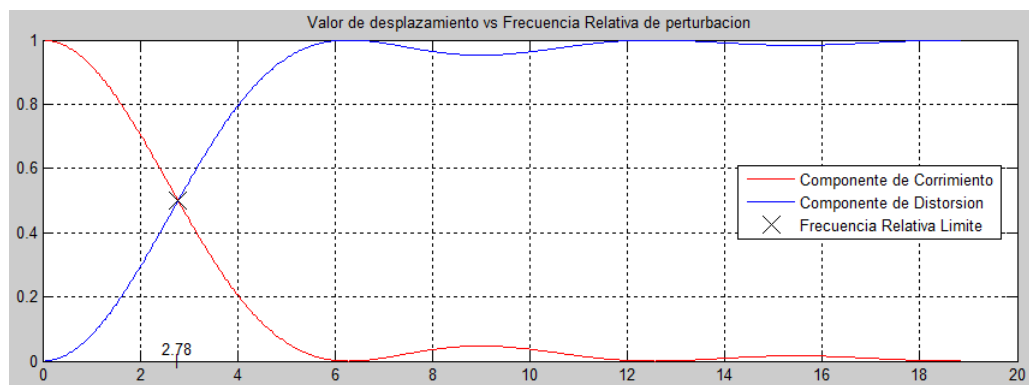


Figura 5 – Funciones de peso de Desplazamiento y Jitter

Observando ambos gráficos se puede ver que para una frecuencia relativa $C = 2.78$, las frecuencias más altas comienzan a tener más efecto sobre la distorsión que sobre el corrimiento, lo que implica mayor aporte al borroneo que al corrimiento fijo de la LOS. Basándonos en esta conclusión, el análisis inicial de permitir un desplazamiento en un cierto tiempo produce resultados poco óptimos y requiere de un estudio más fino que tenga en cuenta la dependencia de estas funciones con la frecuencia.

4. Calculo de la Transferencia Radiativa

Si asumimos que la superficie que emite es lambertiana (emite radiancia de igual magnitud respecto a cualquier ángulo con el que se la observe), se puede caracterizar la radiación emitida por un elemento de la escena de tamaño Y_1 y área A_r por una radiancia espectral L_λ dada en $\frac{Watts}{m^2 \cdot sr \cdot \mu m}$. Esta energía es capturada por una lente y concentrada en un elemento detector de tamaño Y_2 y área A_d . Las distancias del elemento radiador y el detector respecto de la lente son X_1 y X_2 respectivamente. El área de la lente es A_l . En la figura 6 se observa un diagrama del sistema. La potencia recibida por el elemento detector viene dada por:

$$P = L_\lambda \cdot A_r \cdot \Omega \cdot \Delta\lambda \cdot \cos(\Theta) \quad (27)$$

El área A_d viene dada por:

$$A_r = Y_2^2 \quad (28)$$

y el ángulo sólido Ω :

$$\Omega = \frac{A_l}{R^2} \cdot \cos(\Theta) \quad (29)$$

Donde R es la distancia del elemento radiante a la lente dada por:

$$R = X_1 / \cos(\Theta) \quad (30)$$

De 29 y 30

$$\Omega = \pi \cdot \frac{D^2}{4 \cdot X_1^2} \cdot \cos(\Theta)^3 \quad (31)$$

Y el área de la lente:

$$A_l = \pi \cdot r^2 = \pi \cdot \frac{D^2}{4} \quad (32)$$

Reemplazando en la (27):

$$P = L_\lambda \cdot A_r \cdot \pi \cdot \frac{D^2}{4 \cdot X_1^2} \cdot \Delta\lambda \cdot \cos(\Theta)^4 \quad (33)$$

El área del elemento radiante esta relacionado con el área del elemento detector mediante:

$$A_d = A_r \cdot \frac{X_2^2}{X_1^2} \quad (34)$$

Reemplazando en la ecuación 33

$$P = L_\lambda \cdot A_d \cdot \pi \cdot \frac{X_1^2}{X_2^2} \cdot \frac{D^2}{4 \cdot X_1^2} \cdot \Delta\lambda \cdot \cos(\Theta)^4 \quad (35)$$

Si se asocia D^2 con $\frac{1}{X_2^2}$ y se hace X_1^2 muy grande, X_2^2 tiende a f , distancia focal del sistema:

$$P = L_\lambda \cdot A_d \cdot \pi \cdot \frac{D^2}{4 \cdot f^2} \cdot \Delta\lambda \cdot \cos(\Theta)^4 \quad (36)$$

Asociando D con f se obtiene la ecuación 36 en función del $F\#$:

$$P = L_\lambda \cdot \pi \cdot \frac{A_d}{4 \cdot F\#^2} \cdot \Delta\lambda \cdot \cos(\Theta)^4 \quad (37)$$

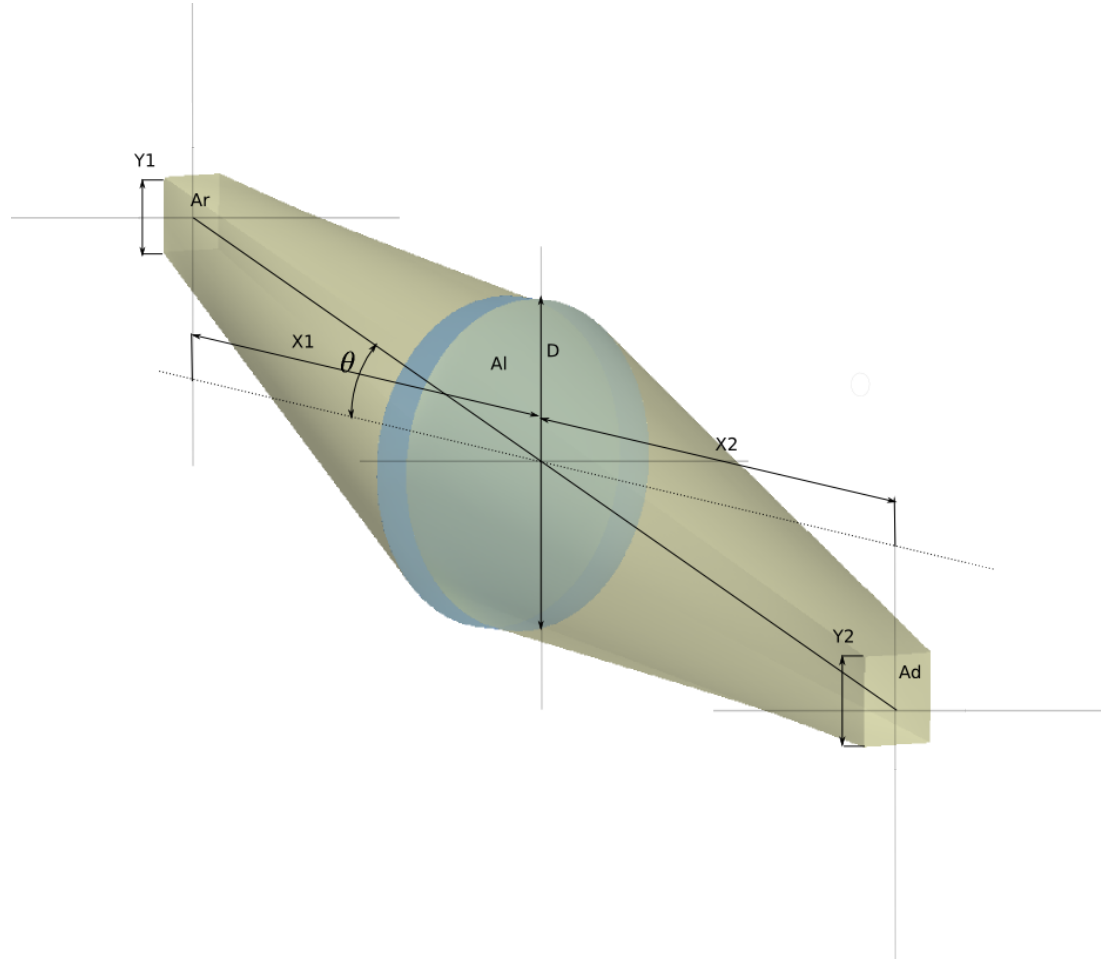


Figura 6 – Esquema de transferencia radiativa entre dos elementos a través de una lente

Una vez obtenida la potencia, se calcula la energía recibida por el detector multiplicando la misma por el tiempo de integración t_{int} del sistema. Esta energía viene dada en la ecuación 38:

$$E = L_{\lambda} \cdot \pi \cdot \frac{A_d}{4 \cdot F\#^2} \cdot \Delta\lambda \cdot \cos(\Theta)^4 \cdot t_{int} \quad (38)$$

Luego se calcula para cada longitud de onda interviniente una energía de fotón dependientes de la constante de plank h y de la frecuencia ν .

$$E_{foton\lambda} = h \cdot \nu = \frac{h \cdot c}{\lambda} \quad (39)$$

y se divide la energía obtenida para cada banda por la de un fotón promedio que representa dicha banda.

$$N_{fotones\lambda} = \frac{E}{E_{foton\lambda}} \quad (40)$$

finalmente se calcula con la eficiencia cuántica cuantos de estos fotones alcanzan a generar electrones en el detector:

$$N_{electrones\lambda} = \eta \cdot N_{fotones\lambda} \quad (41)$$

5. Modelado matemático de Parámetros de NIIRS

5.1. Selección del Muestreo Espacial

El muestreo espacial esta actualmente seleccionado como 15 veces la frecuencia de muestreo del sistema (obtenido de la Transformada de Fourier del pixel pitch). El criterio adoptado es que las señales participantes en el proceso generan espectros infinitos. Por ello, cualquier muestreo causaría alias. Se busca un valor de frecuencia de muestreo espacial (f_{es}) tal que la energía que esta por encima de dicha frecuencia de muestreo sea de 5 % o menos de la energía original de la serie espacial (muestras en el dominio del espacio). Se hace uso del teorema de Parseval para este calculo en la ecuación 42. La relación $fsamp$ (frecuencia de muestreo por pixel pitch) con la f_{es} se encontró empíricamente revisando los resultados de la ecuación 43 para cada señal, donde se han multiplicado ambos miembros por el muestreo temporal para obtener unidades de energía.

$$\sum_{n=0}^{N-1} s_n^2 = \frac{\sum_{k=0}^{N-1} |S_k|^2}{N} \quad (42)$$

$$\Delta s \cdot \sum_{n=0}^{N-1} s_n^2 = \frac{\sum_{k=0}^{N-1} \Delta s \cdot |S_k|^2}{N} \quad (43)$$

Donde en 42 y 43 los elementos s_n son los valores de la serie espacial de la señal, y los elementos S_k son los valores absolutos de la la serie espectral de la señal.

Cuando se muestrea una señal, el proceso implica una frecuencia de muestreo f_s , y una frecuencia denominada *Frecuencia de Nyquist*, cuyo valor es de

$$f_{Nyquist} = \frac{f_{muestreo}}{2} \quad (44)$$

Las componentes de frecuencias presentes en el espectro en el dominio de las variables continuas de la señal cuyos valores son superiores a $f_{Nyquist}$ son confundidas con componentes que se hallen a una frecuencia mas baja, tal que

$$f_{Alias} = f_n - f_{muestreo} \quad (45)$$

donde f_{Alias} es una componente de frecuencia dentro del espectro deseado, a la cual se le suma el valor de la componente f_n como se aprecia en 7

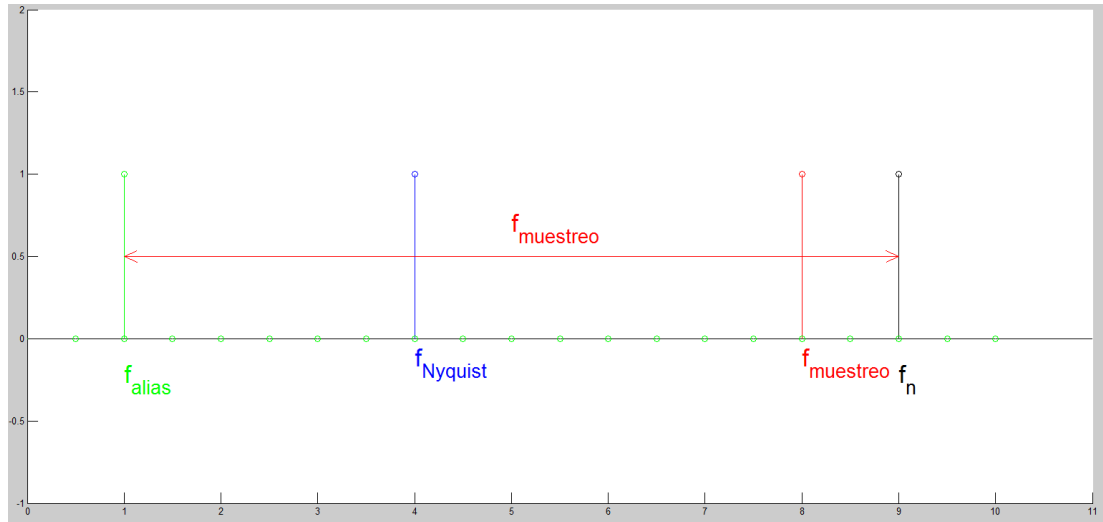


Figura 7 – Frecuencia f_n que toma el alias de la frecuencia f_{alias}

Cuando las señales con las que se trabajan tienen un espectro no acotado en frecuencia (es decir, tienen valores distintos de cero para componentes de frecuencias hasta el infinito), el proceso de muestreo causa que el espectro de la señal se "doble" sobre sí mismo a partir de la frecuencia de Nyquist del esquema digital ², y la energía que se encuentra por encima de la misma se mezcla con la de la señal original. Entonces, escogiendo la frecuencia de muestreo del sistema adecuadamente, se logra conocer una cota máxima de la energía no deseada que se encuentra mezclada con la parte útil de la señal. Para el sistema considerado, las señales de banda no acotada son en su mayoría senos cardinales. Entre ellas, la que mayor energía espuria lleva en su banda útil es la que mayor frecuencia de corte tenga (puesto que entonces porciones con valores más grandes de su espectro quedarían en frecuencias más altas). La energía que lleva una señal cuya ley de variación es la de un seno cardinal está definida por la ecuación 46, donde T es la duración de la señal rectangular en el dominio del espacio que da origen al seno cardinal.

$$\epsilon_{sinc}|_0^\infty = \int_0^\infty sinc^2(T \cdot \pi \cdot f) df = \frac{1}{2 \cdot T} \quad (46)$$

se tomara como cota máxima de alias una proporción de esta energía, dada por la ecuación 47

$$\epsilon_{sinc}|_{f_{Nyquist}}^\infty \leq K \cdot \epsilon_{sinc}|_0^\infty = \frac{K}{2 \cdot T} \quad (47)$$

donde K representa la proporción de energía tolerada como alias.

La energía de una función seno cardinal es sumamente compleja de calcular para intervalos menores que infinito. Por ello, se tomara una cota superior

²Entiéndase por esquema digital al procesamiento matemático asistido por software realizado como soporte a la teoría para este trabajo

haciendo uso de la envolvente de la señal, una hipérbola, ya que la energía de la misma es mayor o igual a la del seno cardinal que envuelve, como se ve expresado en la ecuación 48

$$\epsilon_{hiperbola}|_{f_{Nyquist}}^{\infty} = \int_0^{\infty} \frac{1}{(T \cdot \pi \cdot f)^2} df = \frac{1}{f_{Nyquist} \cdot (T \cdot \pi)^2} \quad (48)$$

la energía que contiene la hipérbola por encima de la frecuencia de Nyquist es una buena cota superior para la energía que tendría el seno cardinal en este rango de valores, de forma que se cumple lo que establece la ecuación 49

$$\epsilon_{sinc}|_{f_{Nyquist}}^{\infty} \leq \epsilon_{hiperbola}|_{f_{Nyquist}}^{\infty} \quad (49)$$

de las ecuaciones 49 y 47 se desprende que

$$\epsilon_{hiperbola}|_{f_{Nyquist}}^{\infty} = K \cdot \epsilon_{sinc}|_0^{\infty} \quad (50)$$

y finalmente que

$$\frac{1}{f_{Nyquist} \cdot (T \cdot \pi)^2} = \frac{K}{2 \cdot T} \quad (51)$$

Despejando $f_{Nyquist}$ de la ecuación 51 se obtiene que

$$f_{Nyquist} = \frac{2}{K \cdot \pi^2 \cdot T} \quad (52)$$

y finalmente la frecuencia de muestreo es el doble de la frecuencia de Nyquist.

Calculando $f_{Nyquist}$ para un $K = 5\%$, se obtiene una frecuencia de muestreo tal que:

$$f_{muestreo} = \frac{4}{0,05 \cdot \pi^2 \cdot T} = \frac{8,1}{T} \quad (53)$$

5.2. Cálculo de MTF por Difracción

Esta MTF surge de la naturaleza ondulatoria de la luz y su interacción con la materia. Los frentes de onda incidentes sobre la apertura son modificados debido a esta obstrucción. Esto da lugar a efectos de interferencia entre los frentes de onda que pasan la apertura, conocido como difracción. Este efecto limita a todo sistema conformador de imágenes, de manera que detalles estructurales menores que el tamaño de la imagen de un punto brillante son indistinguibles. Para una apertura circular, un punto brillante produce una imagen consistente en un disco central (que concentra un 84% de la energía incidente), rodeado de anillos concéntricos. El disco central es conocido como *Disco de Airy*, y los anillos concéntricos como *Anillos de Difracción de orden n*, donde el orden se relaciona con máximos y mínimos locales de interferencia de los frentes de onda que producen la imagen del punto. El tamaño del *Disco de Airy* está relacionado con la longitud de onda

de la luz incidente, y la relacion entre el tamaño de la apertura del sistema optico con su distancia focal, dado por la ecuacion 54.

$$d = 1,22 \cdot \lambda \cdot \frac{f}{D} \quad (54)$$

Si se toma el modulo de la transformada de Fourier de esta imagen, se obtiene la MTF por difraccion de este sistema. Este es el limite maximo del sistema, asumiendo que no hay aberraciones opticas o fallas de fabricacion que deterioren aun mas la formacion de la imagen de un punto.

Para el calculo de la MTF por difracción se utilizaron las ecuaciones 55 y 56. Estas representan la MTF de una apertura rectangular de lados a y b , y una apertura circular de radio c respectivamente.

$$diffMTF_{rec} = 1 - |f|/fca \quad (55)$$

$$diffMTF_{circ} = \left| \left(\frac{2}{\pi} \right) \cdot (acos(|f|/fcc - (|f|/fcc) \cdot \sqrt{1 - (|f|/fcc)^2}) \right) \quad (56)$$

La ecuación 55 representa la MTF para una apertura rectangular donde fca es la frecuencia de corte de la MTF y esta dada por $fca = \frac{lado}{\lambda \cdot fd}$. Al ser una apertura rectangular, hay una ecuación para cada dirección de la MTF (horizontal y vertical) donde $lado$ es igual al tamaño del lado paralelo a cada eje. La ecuación 56 representa la MTF para una apertura circular, donde fcc es la frecuencia de corte dada por $fcc = \frac{diametro}{\lambda \cdot fd}$

Los resultados de aplicar estas ecuaciones para los parámetros de la CAR (distancia focal fd), con el eje de frecuencias normalizado a la frecuencia de muestreo del detector) son los siguientes para una apertura circular de 0.46 metros:

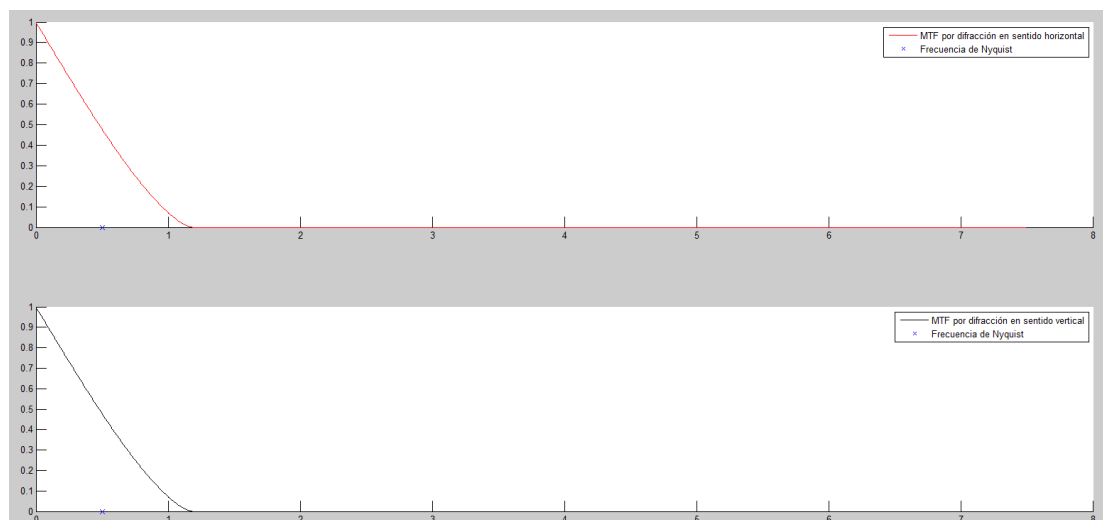


Figura 8 – MTF por difracción

Fuente: Boreman, Glenn D. Modulation transfer function in optical and electro-optical systems. Vol. 21. Bellingham, WA: SPIE press, 2001.

Limite: Frecuencia de corte $f_c = \frac{\text{apertura}}{(\lambda \cdot f)}$

5.3. MTF del Detector

5.3.1. MTF por Footprint

La imagen generada por el sistema optico es sensada por un conjunto de detectores de tamaño finito. Esto genera que la energia de puntos contiguos se mezcle en los pixeles, como se aprecia en la figura ??.

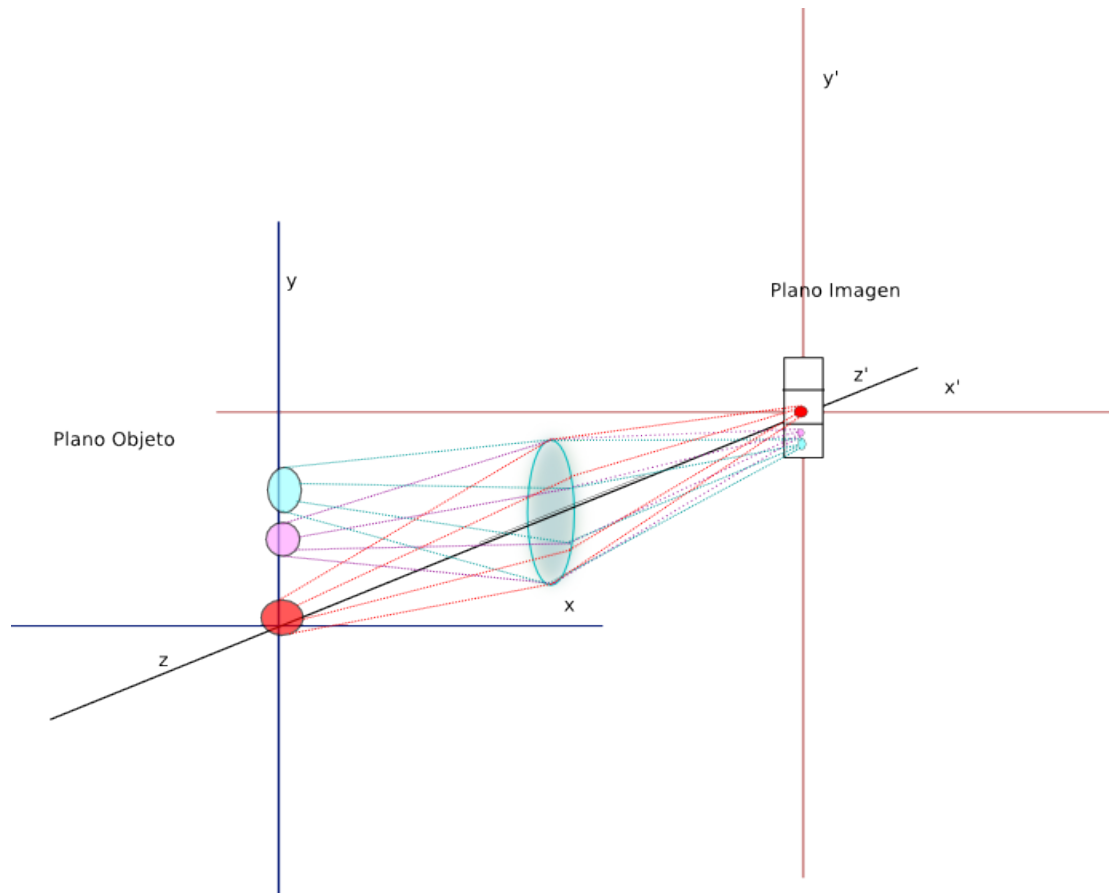


Figura 9 – Esquema de mezcla de señal de puntos muy cercanos en plano objeto

La apertura de los elementos detectores se modela con una función *rect*.

$$\text{rect} = \begin{cases} 1 & \text{si } \frac{-pixz}{2} \leq x \leq \frac{pixz}{2} \\ 0 & \text{si } \frac{-pixz}{2} > x > \frac{pixz}{2} \end{cases} \quad (57)$$

La transformada de fourier de la ecuación 57 es un seno cardinal, cuya frecuencia de corte depende del tamaño del pixel. Las curvas normalizadas para

la CAR son las siguientes:

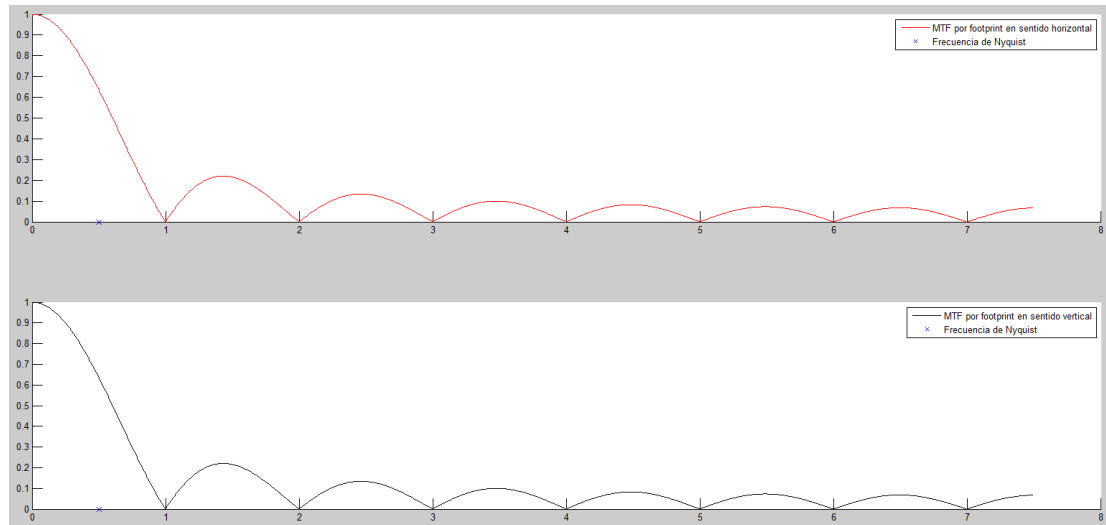


Figura 10 – *MTF por footprint*

De esta ecuación se desprende que mientras mas pequeño es el tamaño de los detectores, mas alta es la frecuencia de corte del sistema, lo que es coherente con la noción intuitiva de que a menor tamaño de pixel, mayor granularidad se obtiene en una imagen de un tamaño constante y se distinguen objetos de menor tamaño. En la figura 11 se observa un esquema de como afecta un tamaño de pixel finito en términos de mezcla de señal entre plano objeto e imagen.

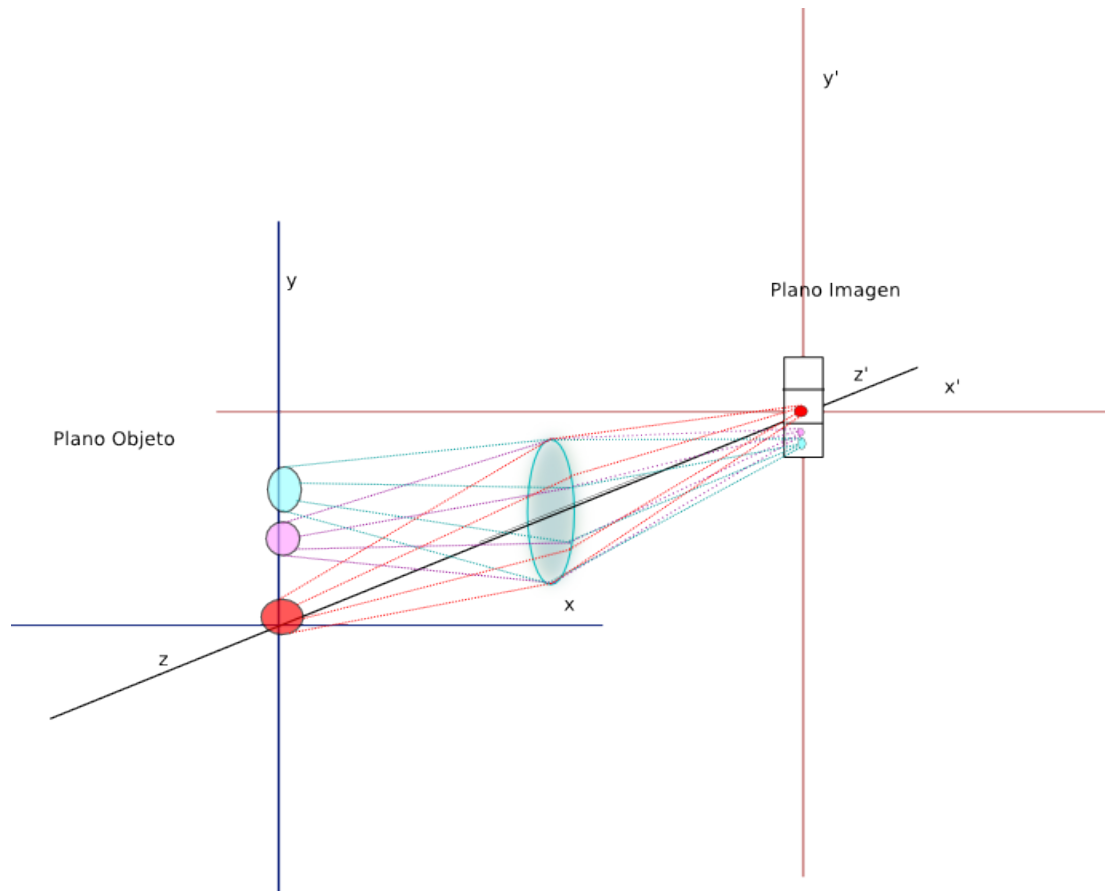


Figura 11 – Esquema de píxel finito y su efecto en la transferencia de información de objeto a imagen

Fuente: Boreman, Glenn D. Modulation transfer function in optical and electro-optical systems. Vol. 21. Bellingham, WA: SPIE press, 2001.

Limite: inf

5.3.2. MTF por muestreo (sampling)

FALTA COMPLETAR ANALISIS DE SHIFT VARIANCE DEL MUESTREO Y PORQUE ESTO GENERA UNA MTF. LEER papers en carpeta 'Sampling MTF'

El proceso de muestreo es inherente a la cadena de adquisición de datos de todo sistema electro-óptico. Esta limitado usualmente por la memoria disponible, la capacidad de procesamiento del sistema, y por la cantidad de detectores presentes en el sistema. Este proceso es inherentemente variante con la posición de la imagen sobre el detector. Por ello, para poder aplicar el proceso normal de productos de MTFs en cascada, se generaliza el concepto de respuesta impulsiva para definir una cualidad invariante en el espacio [4] . Se procede a definir una respuesta impulsiva promediada en el espacio [12], lo que genera una componente

de MTF inherente al proceso de muestreo que surge de asumir que la escena esta posicionada de forma azarosa con respecto a los puntos de muestreo del detector. Ademas, el muestreo produce alias, que ocurre cuando la frecuencia de muestreo utilizada es insuficiente, y una frecuencia alta se percibe como una mas baja. El alias es simétrico respecto a la frecuencia de Nyquist, por lo que las frecuencias altas son percibidas tan bajas como su diferencia con la frecuencia de Nyquist, dada por la ecuación 58

$$F_{Nyquist} = \frac{1}{2 \cdot \Delta X_{muestreo}} \tag{58}$$

donde $\Delta X_{muestreo}$ es la distancia entre una muestra espacial y otra. Una vez que la imagen fue muestreada, el alias no puede ser corregido debido a que las componentes de altas frecuencias fueron efectivamente confundidas con componentes de baja frecuencia, mezcladas de forma indistinguible. Para evitar el alias (o disminuirlo) se aplica un filtro a la señal, cuya respuesta ideal debería eliminar todas las componentes espectrales cuya frecuencia sea mayor a la frecuencia de Nyquist. Sin embargo, esta respuesta es impracticable en la realidad (teniendo en cuenta que las MTFs usualmente responden a senos cardinales, y la MTF de la óptica a una autocorrelacion). Es deseable por este motivo que la MTF del sistema sea lo mas baja posible luego de la frecuencia de Nyquist. Esto se consigue aumentando la frecuencia de muestreo espacial, lo que equivale a reducir $\Delta X_{muestreo}$.

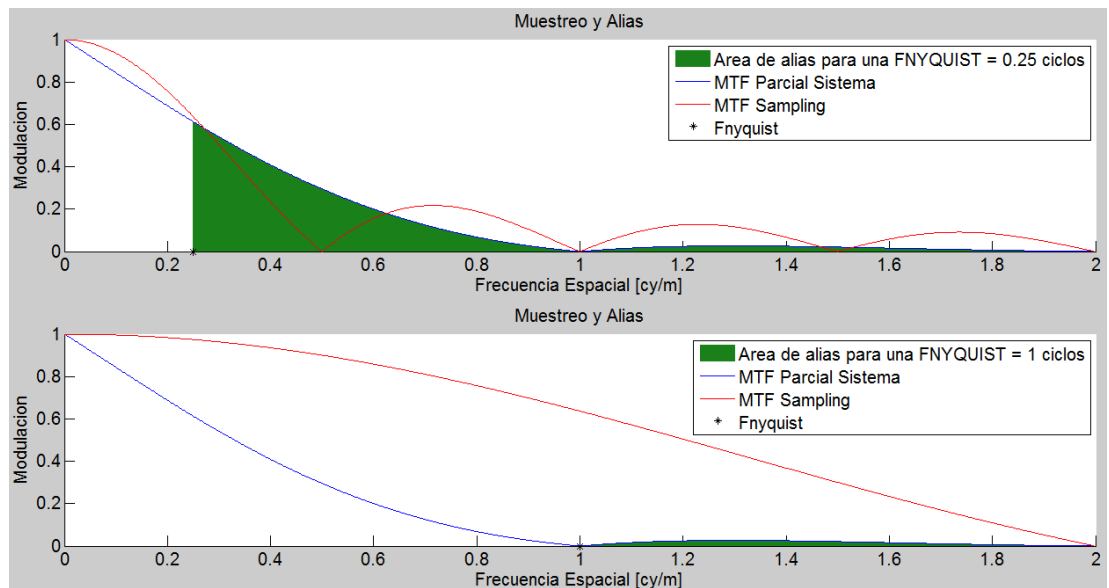


Figura 12 – *Muestreo y Alias*

En la figura 12 se aprecia la diferencia de señal que produce alias dependiendo de la frecuencia de Nyquist. Tambien se aprecia la MTF producida por el

muestreo. Idealmente, la MTF del sistema debería ser lo mas baja posible mas allá de la frecuencia de Nyquist, idealmente cero. Las ecuaciones son idénticas a las de la *Footprint MTF* salvando la diferencia que ahora el parámetro importante es la distancia entre pixeles, o *Pixel Pitch* y no el tamaño del pixel en si.

$$rect = \begin{cases} 1 & \text{si } -pixp/2 \leq x \leq pixp/2 \\ 0 & \text{si } -pixp/2 > x > pixp/2 \end{cases} \quad (59)$$

Las curvas para la CAR son las siguientes:

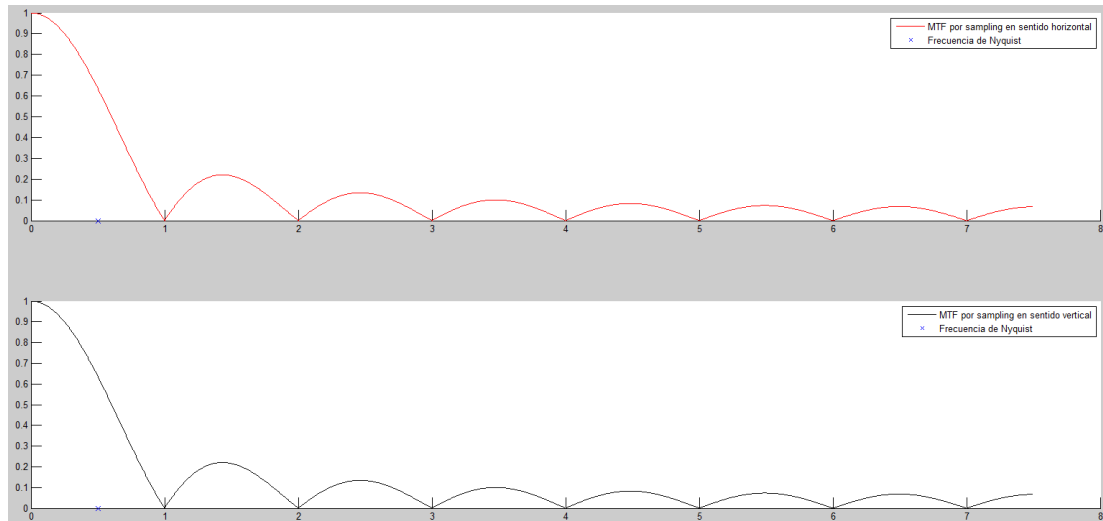


Figura 13 – *MTF por sampling*

Fuente: Boreman, Glenn D. Modulation transfer function in optical and electro-optical systems. Vol. 21. Bellingham, WA: SPIE press, 2001.

Limite: Frecuencia de corte $f_c = \frac{apertura}{(\lambda \cdot f)}$

5.4. MTF por Movimiento de la Línea de Visión

La calidad de la imagen se degrada por movimientos del objetivo, del sistema de captura de imágenes, o de la línea de visión durante el tiempo de integración t_{int} .

5.4.1. MTF Smear

El movimiento del satélite genera un efecto similar al de la apertura finita que posee el detector por tener un pixel de tamaño finito. Esta componente de la MTF total depende de la velocidad del satélite v_{sat} , el tiempo de integración t_{int} y de la dirección de vuelo con respecto a los ejes del detector, dada por el ángulo θ .

$$rect = \begin{cases} 1 & \text{si } -smear/2 \leq x \leq smear/2 \\ 0 & \text{si } -smear/2 > x > smear/2 \end{cases} \quad (60)$$

Para un satélite moviéndose a $6987 \frac{m}{s}$, con un tiempo de integración de $t_{int} = 140 \mu s$:

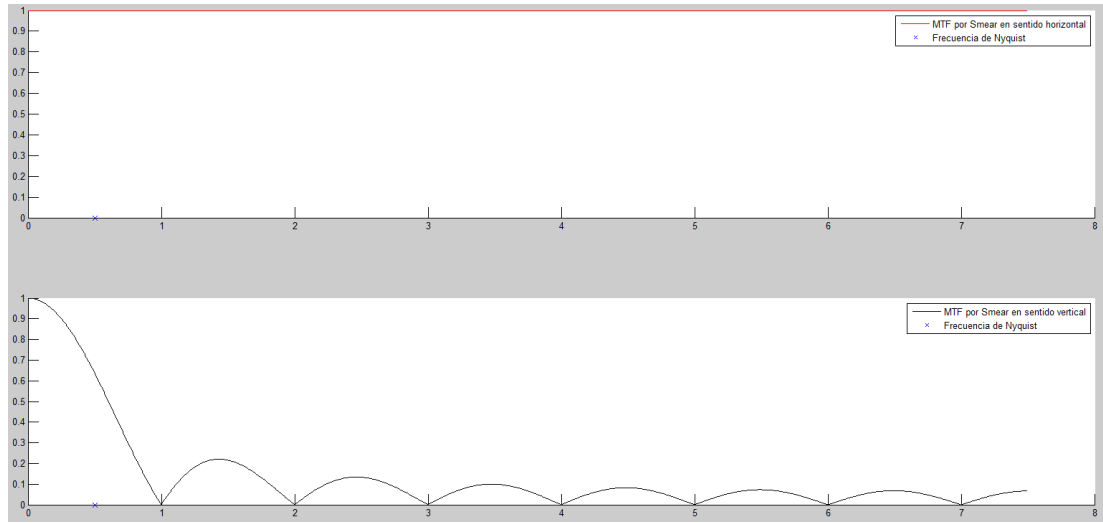


Figura 14 – MTF por smear

Fuente: Boreman, Glenn D. Modulation transfer function in optical and electro-optical systems. Vol. 21. Bellingham, WA: SPIE press, 2001.

Limite: ínf

5.4.2. MTF Smear con TDI

Esta componente de la MTF total depende de la velocidad del satélite v_{sat} , el tiempo de integración t_{int} , de la dirección de vuelo con respecto a los ejes del detector, dada por el ángulo θ , la cantidad de fases de transporte de carga intrapixel, y la cantidad de etapas de Time Delay and Integration (TBC) $NTDI$.

$$MTF_{SmearTDI} = \frac{\text{sinc}(f \cdot \varepsilon \cdot p)}{\text{sinc}\left(\frac{f \cdot \varepsilon \cdot p}{M_{phases} \cdot NTDI}\right)} \cdot \text{sinc}\left(\frac{f \cdot c \cdot d \cdot t \cdot p}{M_{phases}} + \frac{f \cdot \varepsilon \cdot p}{M_{phases} \cdot NTDI}\right) \quad (61)$$

Para un satélite moviéndose a $6987 \frac{m}{s}$, con un tiempo de integración de $t_{int} = 140 \mu s$ con 8 etapas de TDI, 4 fases de transferencia de carga, y un smear fijo de $\varepsilon = 1 \text{ pixel}$:

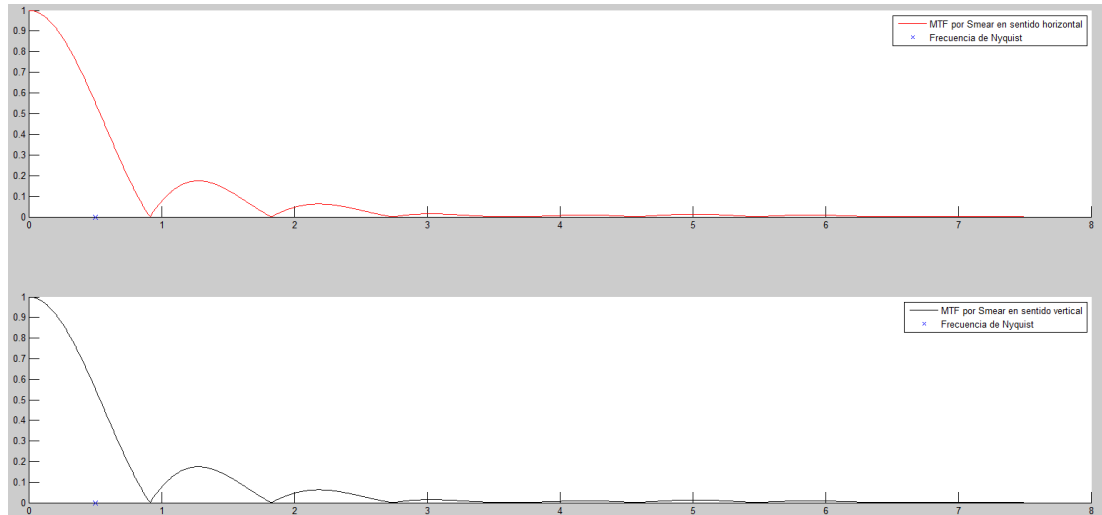


Figura 15 – MTF por smear con TDI

Para modelar los cambios instantáneos de velocidad y altitud que son introducidos por diversas perturbaciones orbitales, se suma el desplazamiento en dirección del TDI una distancia en pixeles cuya distribución corresponde a una Gaussiana con $\mu = 0$ y $\sigma = 0,15\text{pixel}$. Se obtienen PONER CANTIDAD MTFs con aplicando este desplazamiento aleatorio, y se promedian los resultados para obtener la MTF final.

Fuente: Cota, Steve A., et al. "PICASSO: an end-to-end image simulation tool for space and airborne imaging systems." *Journal of Applied remote sensing* 4.1 (2010): 043535-043535.

Limite: inf

5.4.3. MTF Jitter

El satélite experimenta un movimiento de vibración superimpuesto al de movimiento uniforme. La posición del pixel con respecto a la imagen se modela como una variable aleatoria cuya función de densidad de probabilidad es la de la vibración del sistema (la apertura espacial del pixel vibra respecto a la imagen que se mueve sobre el). Como la señal en el detector es función de una variable aleatoria, esta señal es también una función aleatoria relacionada con las vibraciones mediante la ecuación 62

$$Q_{detector} = \int_{-\text{inf}}^{\text{inf}} f(\rho) \cdot S(\rho) \quad (62)$$

donde ρ es el vector que ubica el centro del pixel sobre la imagen que se mueve sobre el detector, cuya varianza es la de la vibración (conocida como Jitter), y puede obtenerse directamente o derivada de la densidad de potencia espectral de la oscilación (y a través de una integración obtener la varianza como se ve en la ecuación 63).

$$\sigma^2 = \int_0^\infty W(f_{temporal}) \cdot |PSD(f_{temporal})|^2 \quad (63)$$

donde $W(f_{temporal})$ es una función que pesa a las componentes de frecuencia de la PSD, obtenida de "*New Definitions of Pointing Stability: AC and DC Effects*".

$$W(f_{temporal}) = 1 - \frac{-2 \cdot [1 - \cos(2 \cdot \pi f_{temporal} \cdot t_{int})]}{(2 \cdot \pi \cdot f_{temporal} \cdot t_{int})^2} \quad (64)$$

Para obtener la MTF por estas vibraciones se parte de la ecuación 65 que representa la carga obtenida por un pixel debido a radiación óptica de frecuencia única:

$$Q_N(\rho, t_1, \lambda, k_0, v + \Delta v, \phi) = NTDI \cdot pixv \cdot pixh \cdot t_{int} \cdot R_0(\lambda) \cdot \tau(\lambda) \cdot H_0(\lambda) \cdot \{1 + m \cdot MTF(k_0, \lambda) \cdot \cos(k_0 \cdot \rho_1 - k_0 \cdot (v + \Delta v) \cdot t_1 + \phi + \Phi(k_0, \lambda) + \delta)\} \quad (65)$$

donde $NTDI$ es el numero de etapas TDI, $pixv$ y $pixh$ son las dimensiones verticales y horizontales del pixel respectivamente, t_{int} es el tiempo de integración de energía, R_0 es la responsividad del pixel a la radiación óptica, τ es la transmitancia del sistema de lentes, H_0 es la magnitud de la radiación óptica, m un factor de modulación, MTF representa la transferencia del sistema sin considerar vibraciones, k_0 es el vector de onda espacial cuyo modulo es $|k| = 2 \cdot \pi \cdot f$, siendo f la frecuencia espacial de la irradiancia sobre el pixel, ρ_1 es el vector que ubica el centro del pixel en el plano, v y Δv son la velocidad de la radiación óptica sobre el detector y la diferencia entre esta y la velocidad de desplazamiento de cargas del detector, t_1 el tiempo de inicio de la integración, ϕ la fase inicial de la onda espacial, Φ la fase introducida por el sistema óptico, y δ la fase que surge del sincronismo. Considerando que ρ_1 oscila de forma aleatoria, y que este es un vector de componentes x_1 e y_1 , el valor esperado para la carga seria el valor medio de la ecuación 65, calculado como la integral de la ecuación 66 :

$$\mu_{Q_N} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} FDP_{x_1, y_1}(x_1, y_1) \cdot Q_N(\rho_1, t_1, \lambda, k_0, v + \Delta v, \phi) \cdot dx_1 \cdot dy_1 \quad (66)$$

Si las variaciones en x e y son independientes (no están correlacionadas), sus funciones de distribución de probabilidad son independientes y la distribución conjunta es el producto de ambas, como se aprecia en la ecuación 67

$$FDP_{x,y}(x, y) = FDP_x(x) \cdot FDP_y(y) \quad (67)$$

Entonces, la ecuación 66 se puede expresar como en 68 :

$$\mu_{Q_N} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} FDP_x(x) \cdot FDP_y(y) \cdot Q_N(\rho_1, t_1, \lambda, k_0, v + \Delta v, \phi) \cdot dx_1 \cdot dy_1 \quad (68)$$

Si se define que las distribuciones de x e y son ambas Gaussianas, y se resuelve la integral planteada en 68:

$$Av(x_1) = \int_{-\infty}^{+\infty} A \cdot \left\{ 1 + \frac{1}{\sigma_x \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \frac{(x_1 - \mu_x)^2}{\sigma_x^2}} m \cdot MTF(k_0, \lambda) \cdot \cos(k_{0x}x_1 + D) \right\} dx_1 \quad (69)$$

donde $A = NTDI \cdot pixv \cdot pixh \cdot t_{int} \cdot R_0(\lambda) \cdot \tau(\lambda) \cdot H_0(\lambda)$, y $D = k_{0y}y_1 - k_0 \cdot (v + \Delta v) \cdot t + \varphi + \Phi(k_0, \lambda) + \delta$.

Si se separa la ecuación 69 en dos términos, se tiene

$$Av(x_1) = Av_A(x_1) + Av_D(x_1) \quad (70)$$

donde el primer termino del segundo miembro de 70 queda como:

$$\begin{aligned} Av_A(x_1) &= \int_{-\infty}^{\infty} FDP_x(x) \cdot NTDI \cdot pixv \cdot pixh \cdot t_{int} \cdot R_0(\lambda) \cdot \tau(\lambda) \cdot H_0(\lambda) \cdot dx_1 \\ &= NTDI \cdot pixv \cdot pixh \cdot t_{int} \cdot R_0(\lambda) \cdot \tau(\lambda) \cdot H_0(\lambda) \end{aligned} \quad (71)$$

ya que la integral de una FPD entre $-\infty$ e ∞ es 1. Para resolver el segundo termino del segundo miembro, se sustituye $x_1 - \mu_x$ por u . Entonces $x_1 = u + \mu_x$ y $dx_1 = du$ y la ecuación a resolver es 72

$$Av_D(x_1) = A \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sigma_x \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \frac{u^2}{\sigma_x^2}} m \cdot MTF(k_0, \lambda) \cdot \cos(k_{0x}\mu_x + k_{0x}u + D) du \quad (72)$$

aplicando identidades trigonométricas al coseno

$$\begin{aligned} Av_D(x_1) &= A \cdot m \cdot MTF(k_0, \lambda) \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sigma_x \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \frac{u^2}{\sigma_x^2}} [\cos(k_{0x}\mu_x + D) \cdot \cos(k_{0x}u) \\ &\quad - \text{sen}(k_{0x}\mu_x + D) \text{sen}(k_{0x}u)] du \end{aligned} \quad (73)$$

ahora bien, la función $\frac{1}{\sigma_x \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \frac{u^2}{\sigma_x^2}}$ es una función par, y $\text{sen}(k_{0x}u)$ es una función impar ($\text{sen}(k_{0x}\mu_x + D)$ es constante desde el punto de vista de la integral). Un producto de una señal par por una impar da como resultado otra señal impar. La integral de una señal impar entre $-\infty$ y $+\infty$ da como resultado 0. Luego el termino que prevalece es

$$Av_D(x_1) = A \cdot m \cdot MTF(k_0, \lambda) \cdot \frac{\cos(k_{0x}\mu_x + D)}{\sigma_x \sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2} \frac{u^2}{\sigma_x^2}} \cos(k_{0x}u) du \quad (74)$$

la integral en 74 es una integral de una función par, por lo que sus límites de integración pueden cambiarse de $-\infty$ a $+\infty$ por 0 a $+\infty$, sabiendo que el resultado debe ser el doble de esta integral. Entonces queda

$$Av_D(x_1) = A \cdot m \cdot MTF(k_0, \lambda) \cdot 2 \frac{\cos(k_{0x}\mu_x + D)}{\sigma_x \sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{1}{2} \frac{u^2}{\sigma_x^2}} \cos(k_{0x}u) du \quad (75)$$

la integral en la ecuación 75 se resuelve aplicando una fórmula estándar del libro [1], página 302, ecuación número 7.4.6 que establece que

$$\int_0^{+\infty} e^{-at^2} \cos(2xt) dt = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{x^2}{a}} \quad (76)$$

haciendo $a = \frac{1}{2\sigma^2}$ y $x = \frac{k_{0x}}{2}$ y haciendo uso de 76 y 75, se obtiene

$$\begin{aligned} Av_D(x_1) &= 2 \cdot A \cdot m \cdot MTF(k_0, \lambda) \cdot \frac{\cos(k_{0x}\mu_x + D)}{\sigma_x \sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{1}{2} \frac{u^2}{\sigma_x^2}} \cos(k_{0x}u) du \\ &= 2 \cdot A \cdot m \cdot MTF(k_0, \lambda) \frac{\cos(k_{0x}\mu_x + D)}{\sigma_x \sqrt{2\pi}} \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{\frac{1}{2\sigma^2}}} e^{-\frac{\frac{k_{0x}^2}{4}}{2\sigma^2}} \end{aligned} \quad (77)$$

simplificando expresiones

$$Av_D(x_1) = A \cdot m \cdot MTF(k_0, \lambda) \cdot \cos(k_{0x}\mu_x + D) e^{-\frac{k_{0x}^2 \sigma^2}{2}} \quad (78)$$

Reemplazando D por su valor original y procediendo de la misma manera se obtiene la relación para la *variable aleatoria* y_1

$$Av_D(y_1) = A \cdot m \cdot MTF(k_0, \lambda) \cdot e^{-\frac{k_{0x}^2 \sigma^2}{2}} e^{-\frac{k_{0y}^2 \sigma^2}{2}} \cos(k_{0y}\mu_y + D') \quad (79)$$

donde $D' = k_{0x}x_1 - k_0 \cdot (v + \Delta v) \cdot t + \varphi + \Phi(k_0, \lambda) + \delta$

Una vez obtenida la varianza se calcula la MTF por Jitter como

$$MTF_{Jitter} = e^{\frac{(-2 \cdot \pi \cdot f \cdot \sigma)^2}{2}} \quad (80)$$

Para estos parámetros no se cuentan con datos para la CAR. Se simula una PSD con un código de MATLAB que arroja los siguientes valores, para frecuencias de oscilación entre $0Hz$ y $200Hz$, con una densidad de potencia espectral dada por una distribución gaussiana. Esto arroja una varianza de $\sigma_h = 1,31e^{-06}$ y una $\sigma_v = 2,219e^{-06}$.

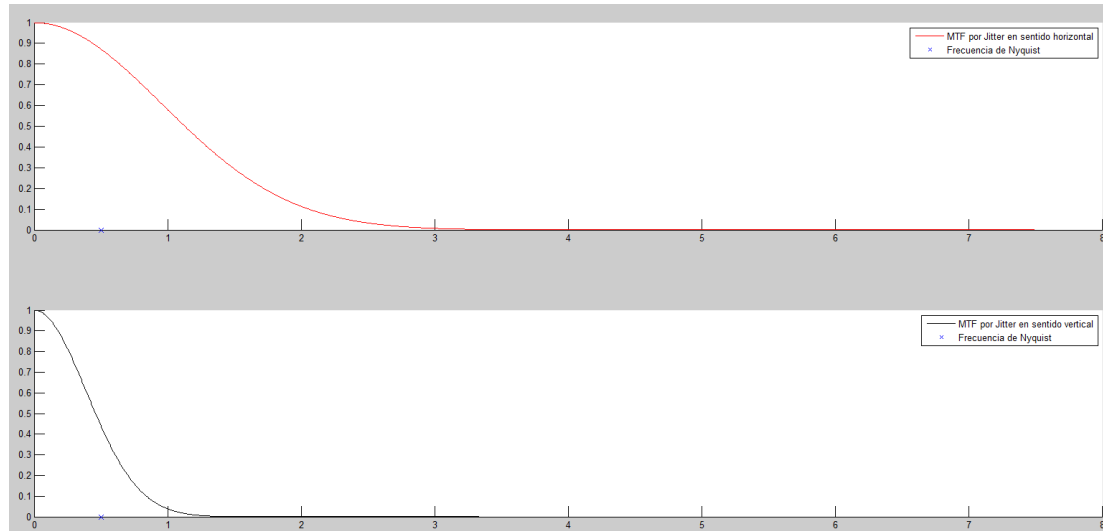


Figura 16 – MTF por oscilaciones de la línea de visión

Fuente: Johnson, Jerris F. "Modeling imager deterministic and statistical modulation transfer functions.." *Applied optics* 32.32 (1993): 6503-6513.

Limite: inf

5.4.4. MTF de Sincronismo TDI

La técnica de TDI, utilizada para incrementar la SNR del sistema, conlleva una componente adicional de MTF que surge del sincronismo entre el movimiento del satélite y el movimiento de las cargas en el detector. Esto causa que parte de la información de una porción de terreno se mezcle con otras. La velocidad a la que se mueve la imagen sobre el detector viene dada por:

$$v_{scan_v} = \sin(\theta) \cdot v_{sat} \cdot \frac{fd}{h} \quad (81)$$

la ecuación 81 representa la velocidad de escaneo en sentido vertical. θ es el ángulo entre el desplazamiento del satélite y el eje horizontal del detector, v_{sat} es la velocidad del satélite, fd es la distancia focal del sistema y h es la altura del satélite sobre la superficie de la tierra. La velocidad a la que la carga es transferida de un pixel a otro viene dada por:

$$v_{line} = \frac{pixz}{t_{int}} \quad (82)$$

La velocidad en las ecuaciones 81 y 82 deberían diferir lo menos posible para que la MTF por sincronismo sea máxima. La ecuación para esta MTF es la siguiente:

Agregar de donde sale esta ecuacion, o de lo contrario poner en el anexo el desarrollo y referenciar.

$$MTF_{Sync} = \frac{senc(k_0 \cdot \Delta v \cdot \frac{1}{2} \cdot t_{int} \cdot N)}{senc(k_0 \cdot \Delta v \cdot \frac{1}{2} \cdot t_{int})} \cdot \frac{senc(k_0 \cdot \Delta v \cdot \frac{1}{2} \cdot t_{int})}{senc(k_0 \cdot \Delta v \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{t_{int}}{M})} \quad (83)$$

en la ecuación 83, Δv es la diferencia entre las velocidades de línea y de escaneo para la componente vertical, $NTDI$ es la cantidad de etapas de TDI, y M es la cantidad de fases que posee internamente cada pixel. Para un satélite moviéndose a $6987 \frac{m}{s}$, con un tiempo de integración de $t_{int} = 140 \mu s$ con un tamaño de pixel de $7 \times 10^{-6} m$, y utilizando un error en la señal de clock de $0,5 \mu s$, con 8 etapas de TDI y 4 fases por pixel la curva queda:

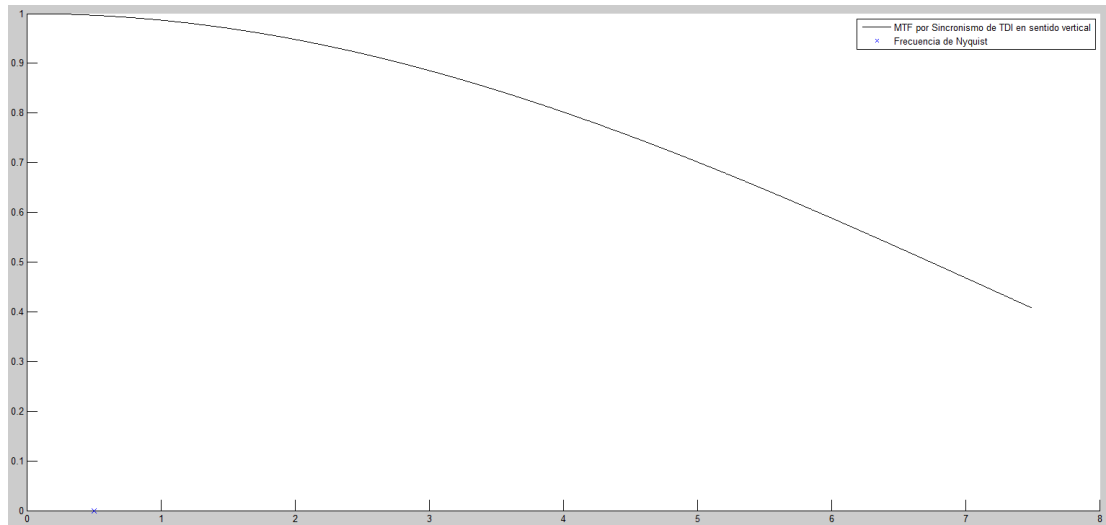


Figura 17 – MTF por sincronismo para 8 etapas de TDI y 4 fases por pixel

Fuente: Johnson, Jerris F. "Modeling imager deterministic and statistical modulation transfer functions.."Applied optics 32.32 (1993): 6503-6513.

Limite: No esta claro el limite. No esta expresado y no hay graficas de ejemplo. Ademas, esta MTF no esta calculada partiendo de una transformada de fourier, lo que dificulta hacer un analisis de periodicidad.

5.5. Calculo de MTF de Compensación

Las imágenes obtenidas por un sistema satelital usualmente son filtradas para realzar características. Estos filtros traen aparejados una MTF denominada de compensación. Para este estudio selecciono un filtro simple , pero debería utilizarse la que realmente se utilizara en el sistema particular considerado, en este caso la CAR. La MTFC viene dada por:

$$MTFC = a + 2 \cdot b \cdot (1 + \cos(2 \cdot \pi \cdot \frac{f}{f_{samp}})) + 4 \cdot c \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot \frac{f}{f_{samp}}); \quad (84)$$

en la ecuación 84, los valores para a , b y c son parámetros obtenidos de tablas. Este filtro tiene una ganancia de ruido G calculada como

$$G = \sqrt{a^2 + 4 \cdot b^2 + 4 \cdot c^2} \quad (85)$$

Los valores utilizados son $a = 2,707$, $b = -0,3536$ y $c = -0,0732$ y la MTFC resultante es la siguiente:

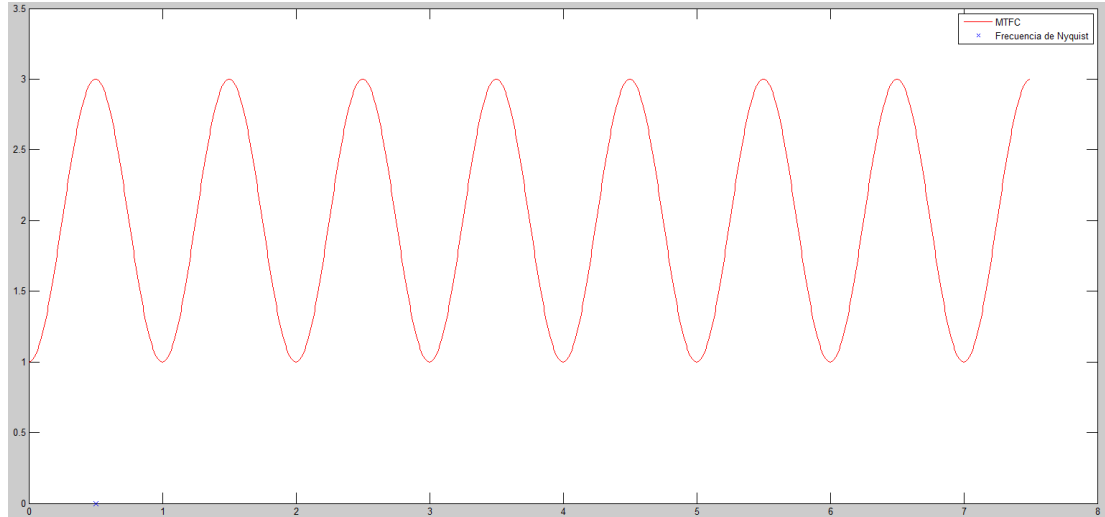


Figura 18 – *MTF de Compensación*

Fuente: R. R. Auelmann. "Image Quality Metrics."

Limite: Valido de 0 a $+f_{samp}$, pero esta replicada cada f_{samp} hasta ∞ si consideramos que es una transformada de tiempo discreto de fourier de una señal discreta de duracion finita.

5.6. MTF por Ineficiencia de Transferencia de Cargas

Cuando se transfieren cargas en el detector, ya sea por un proceso de TDI o para hacer una lectura de una linea, una porción de carga remanente queda en los pixeles a medida que esta se mueve de uno a otro. Esto viene especificado por la CTE (Charge Transfer Efficiency) de los detectores, y la componente de MTF esta dada por:

$$MTF_{CTE_h} = e^{(-nh \cdot (1-CTE_h) \cdot (1-\cos(2\pi \cdot f)))} \quad (86)$$

$$MTF_{CTE_v} = e^{(-nv \cdot (1-CTE_v) \cdot (1-\cos(2\pi \cdot f)))} \quad (87)$$

en las ecuaciones 86 y 87, los parámetros $CTE_x S$ donde $x = h, v$ representan la eficiencia de transferencia de cargas del detector en sentido de filas y columnas respectivamente. nh y nv representan la cantidad de pixeles que la

carga debe moverse hasta llegar a donde sera leída. Para valores de $CTE_h = 0,99998$ y $CTE_v = 0,99995$ y asumiendo que la carga se mueve a lo largo de los 12288 pixeles , la componente de MTF esta dada por:

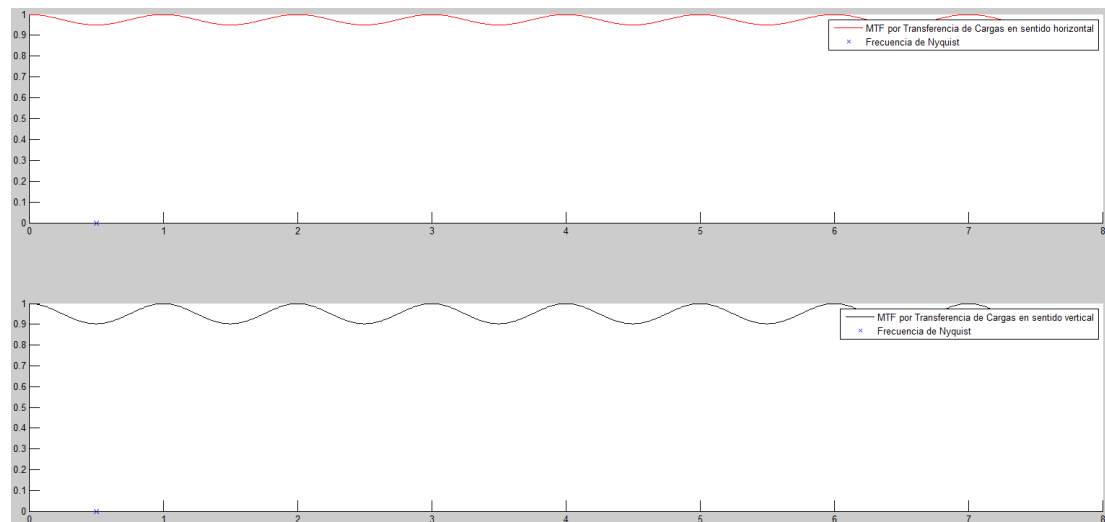


Figura 19 – MTF por ineficiencia de transferencia de cargas

Fuente: Boreman, Glenn D. Modulation transfer function in optical and electro-optical systems. Vol. 21. Bellingham, WA: SPIE press, 2001.

Limite: Valido de 0 a $\frac{f_{samp}}{2}$. Sin embargo, como las frecuencias mas allá de la de Nyquist ($\frac{f_{samp}}{2}$) se doblaran sobre esta ultima, se podría extender hasta infinito teniendo en cuenta que esta espejada respecto a $\frac{f_{samp}}{2}$. Así podríamos utilizarla hasta ínf.

5.7. Calculo de GSD

Debido a la gran cantidad de diferentes ecuaciones encontradas para el GSD, se tomó la decisión de modelarlo de acuerdo a condiciones de contorno especificadas en este trabajo. Particularmente, el modelo aplicado considera solo rotación en pitch. Para el modelado se procede a suponer un sistema óptico definido por su distancia focal efectiva (EFL), y se considera solo un pixel. Las rotaciones se hacen en un sistema de ejes cuyo origen esta en el punto focal. El sistema esta a una altura H sobre la superficie de la tierra, considerada esférica. Se trazan vectores que unen los vértices del pixel con el punto focal, y luego calcular la intersección de estos vectores con la esfera que representa la tierra. Esto genera puntos sobre la superficie que se unen con arcos cuyo centro y radio de curvatura coinciden con los de la tierra. Así se calcula el GSD en sentido x e y . En el gráfico 20 se observa la posición inicial del sistema, sin rotación alguna.

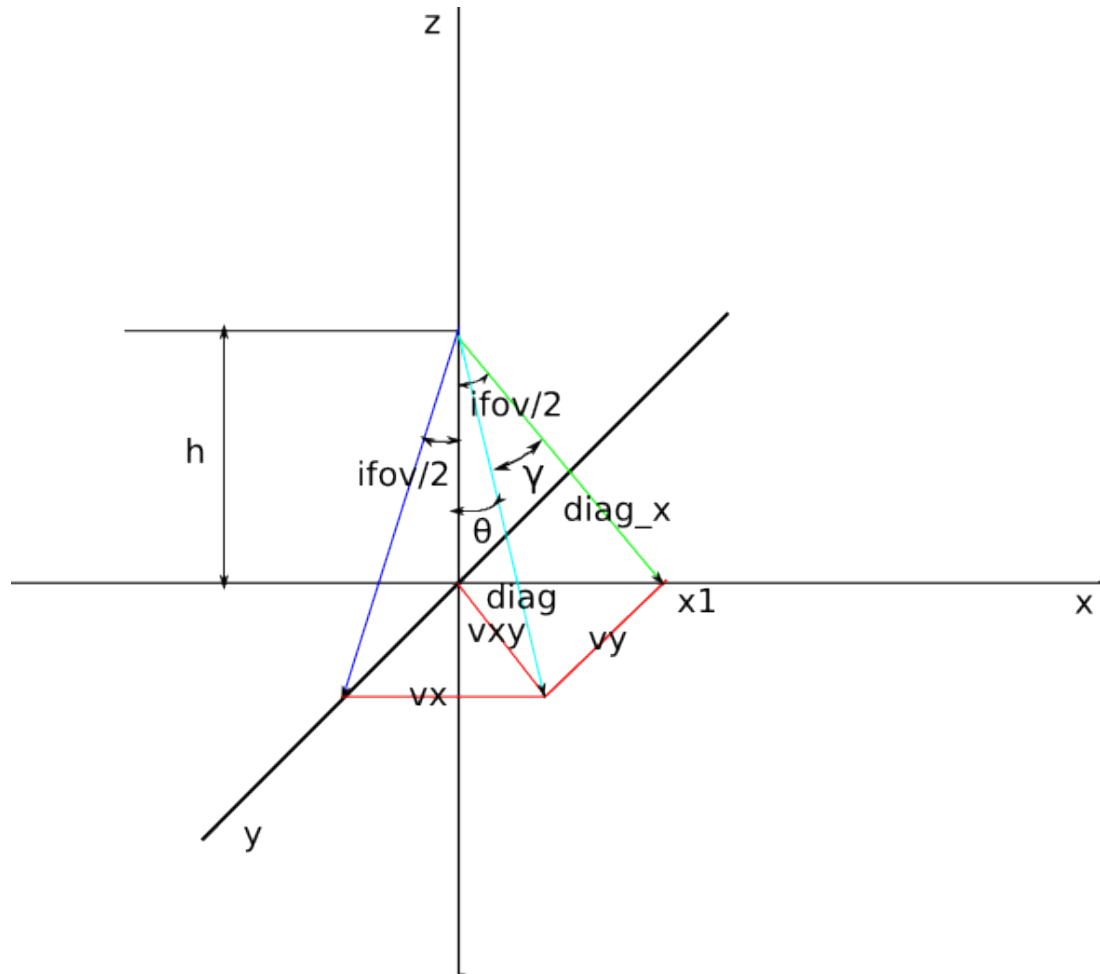


Figura 20 – Elementos del GSD sin ninguna rotación.

Nótese que en la figura 20 no está presente la esfera que representa la tierra. Esto es así porque el interés está en calcular la dirección de los vectores que unen el punto focal con los vértices del píxel. En la imagen 21 se observan los elementos que aparecen al rotar el detector en pitch:

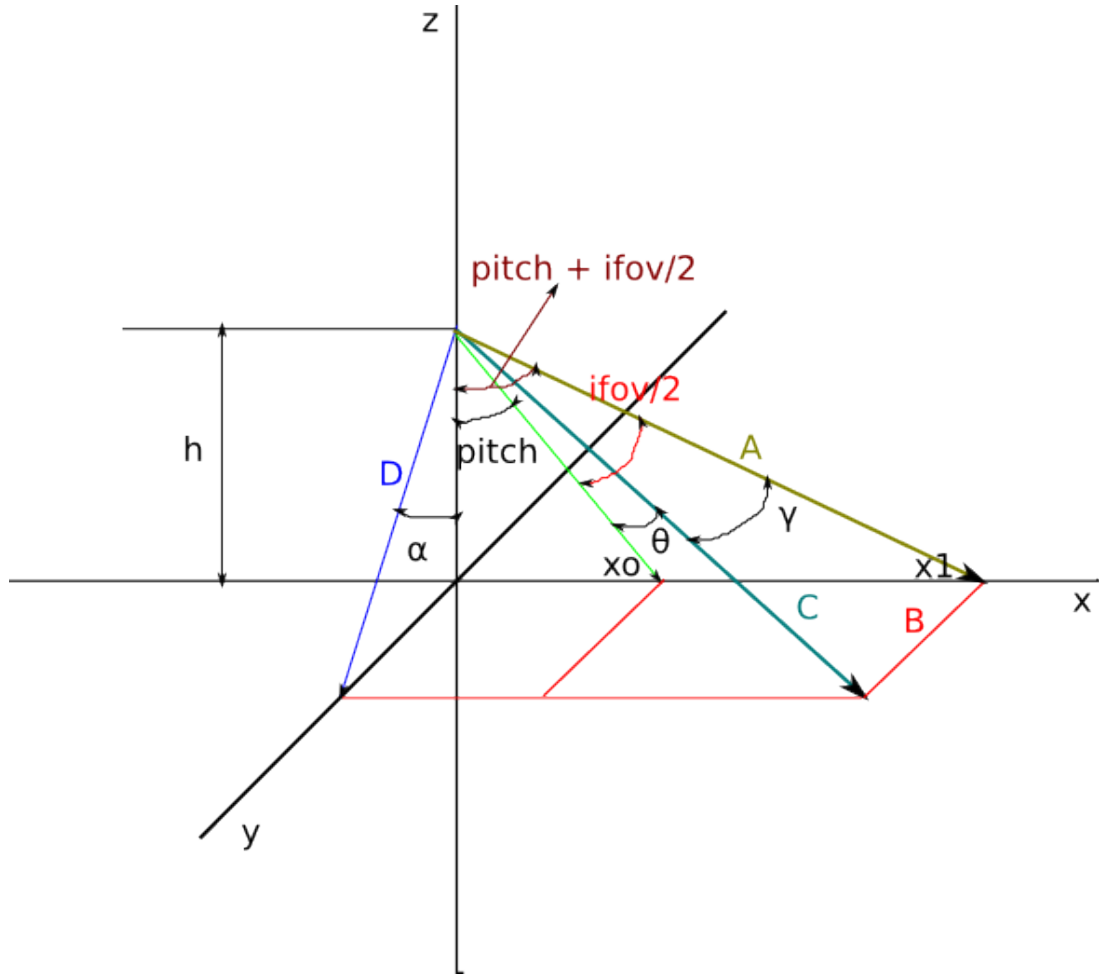


Figura 21 – Elementos del GSD con rotación en pitch.

El parámetro importante de la geometría de la imagen 20 a obtener es γ , un ángulo constructivo que no cambia aunque se rote el sistema.

$$vx = \tan\left(\frac{ifov}{2}\right) \cdot h \quad (88)$$

$$vy = \tan\left(\frac{ifov}{2}\right) \cdot h \quad (89)$$

$$vxy = \text{sqrt}(vx^2 + vy^2) \quad (90)$$

$$tita = \text{atan}\left(\frac{vxy}{h}\right) \quad (91)$$

$$diag_x = \frac{h}{\cos\left(\frac{ifov}{2}\right)} \quad (92)$$

$$diag = \frac{h}{\cos(tita)} \quad (93)$$

$$\gamma = \text{acos}((vy^2 - \text{diag}_x^2 - \text{diag}^2)/(-2 * \text{diag} * \text{diag}_x)) \quad (94)$$

Una vez obtenido γ , se procede a analizar de la figura 21 como quedan los vectores que pasan por los extremos del pixel y por el punto focal. Las ecuaciones obtenidas para los vectores son:

$$A_1 = \frac{h}{\cos(\text{pitch} + \frac{\text{ifov}}{2})} \quad (95)$$

$$A_2 = \frac{h}{\cos(\text{pitch} - \frac{\text{ifov}}{2})} \quad (96)$$

$$B_1 = A_1 \cdot \tan(\gamma) \quad (97)$$

$$B_2 = A_2 \cdot \tan(\gamma) \quad (98)$$

$$x_1 = h \cdot \tan(\text{pitch} + \frac{\text{ifov}}{2}) \quad (99)$$

$$x_2 = h \cdot \tan(\text{pitch} - \frac{\text{ifov}}{2}) \quad (100)$$

$$(101)$$

Los vectores que unen dos esquinas sobre el eje x estan dados por:

$$V_1 = [x_1 \ B_1 \ -h] \quad (102)$$

$$V_2 = [x_2 \ B_2 \ -h] \quad (103)$$

$$(104)$$

Y los versores se obtienen dividiendo estos vectores por su modulo:

$$\hat{l}_1 = \| V_1 \| \quad (105)$$

$$\hat{l}_2 = \| V_2 \| \quad (106)$$

$$(107)$$

Una vez obtenidos estos vectores, se utiliza la siguiente ecuación: -

$$d = -(l_n \cdot (o - c)) \pm \sqrt{(l_n \cdot (o - c))^2 - \| o - c \|^2 + r^2} \quad (108)$$

en la ecuación 108, d representa la distancia sobre una recta con dirección definida por el versor l y el origen o, a la que esta intercepta una esfera de radio r y centro c. Con estas distancias, se aplica la ecuación 109 para obtener las coordenadas de los puntos de intersección.

$$x = o + d \cdot l \quad (109)$$

con los puntos de intersección se calculan los arcos que tienen por centro y radio de curvatura los de la tierra, y por angulo el que hay entre las rectas que unen el centro de la tierra y los puntos de intersección.

5.8. Validación de Modelo de GSD

El primer problema que surge en el modelo es que los arcos reales no son los que tienen por centro y radio de curvatura los de la tierra, sino los generados por la intersección de la esfera que representa la tierra y los planos formados por las aristas del pixel y el punto focal. Este error fue tenido en cuenta con el uso de la herramienta para corroborar las ecuaciones obtenidas para rectas y puntos de intersección: el SolidWorks. En la imagen 22 se observan los elementos utilizados en SolidWorks para medir las distancias y ángulos utilizados en las ecuaciones de Matlab.

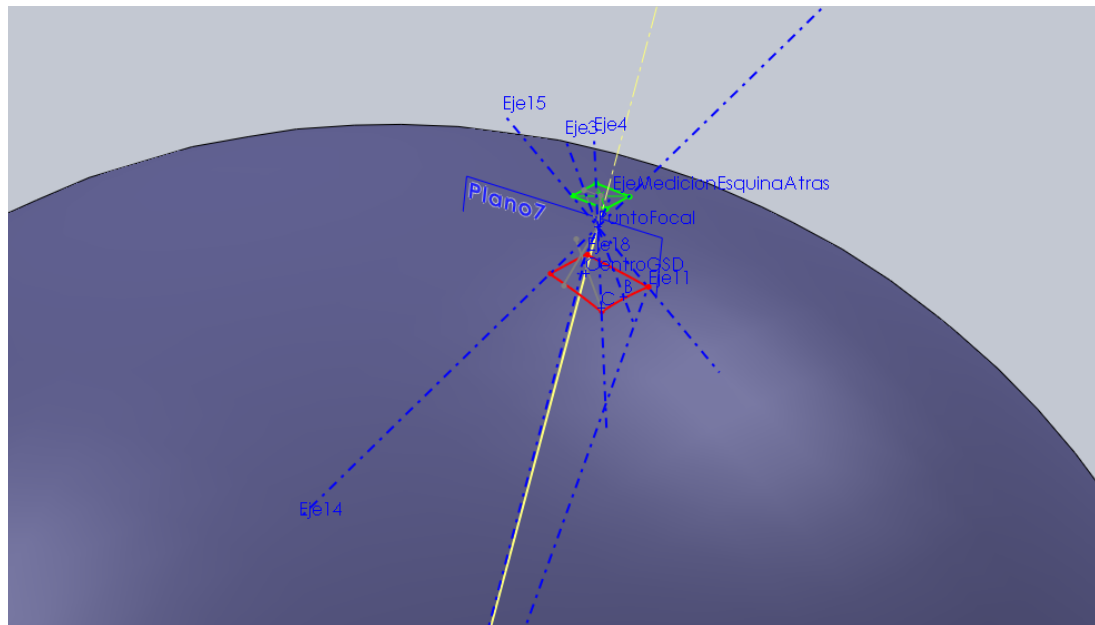


Figura 22 – Elementos de validación para cálculos de GSD.

En la imagen 23 se observan los planos que interceptan a la esfera generando la proyección del pixel, y en la imagen 24 se observan las intersecciones de dichos planos con la esfera.

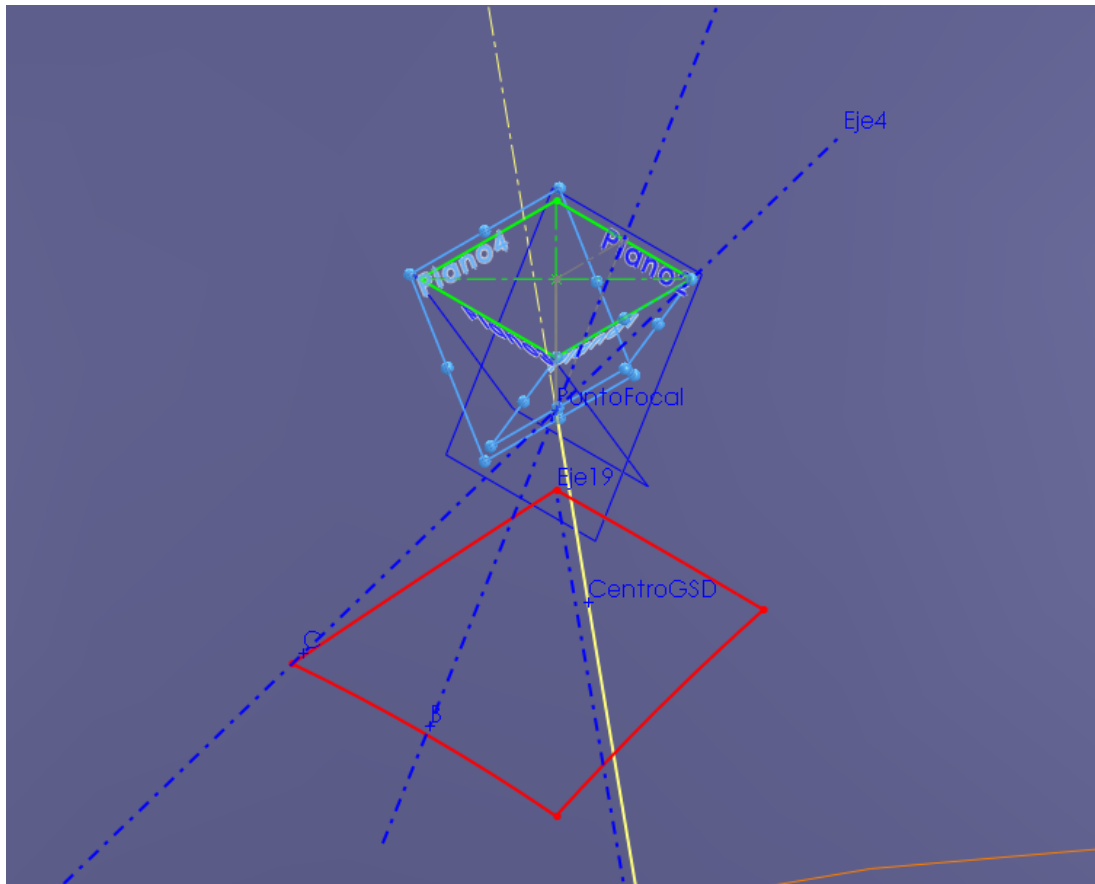


Figura 23 – Planos que interceptan a la esfera y forman la proyección del píxel.

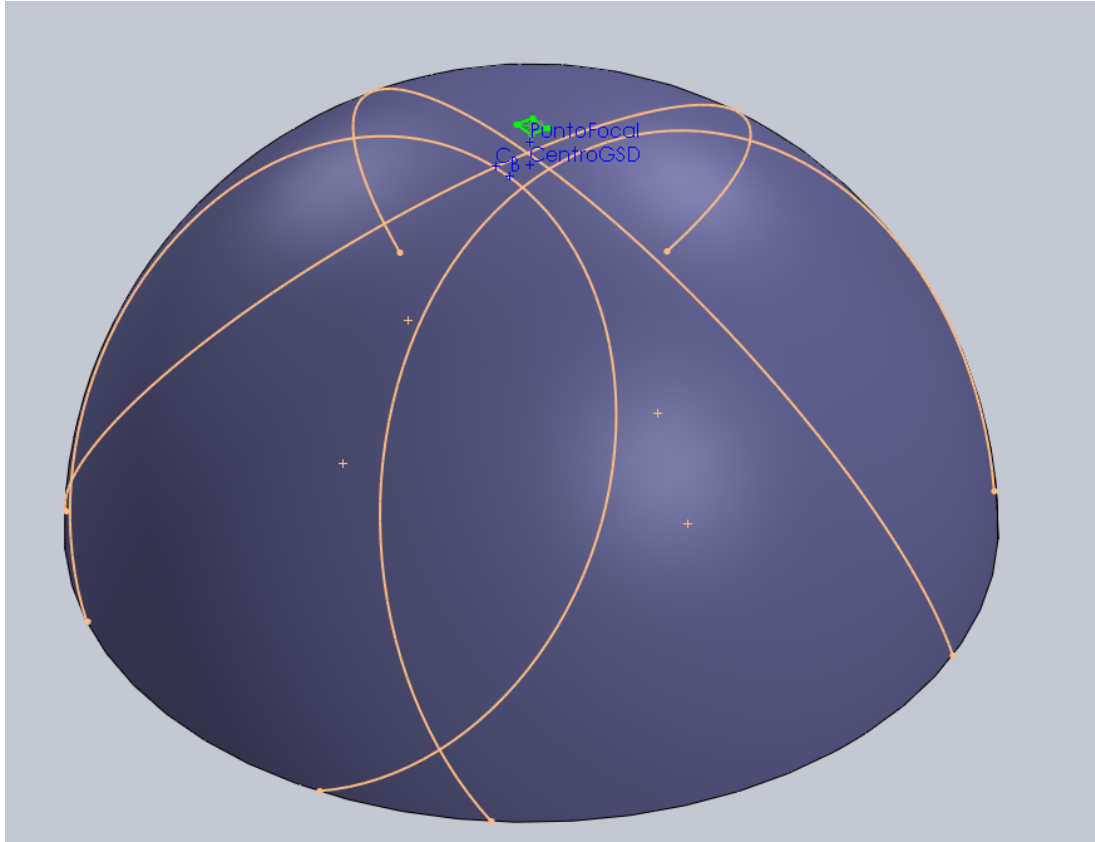


Figura 24 – Curvas resultantes de la intersección de los planos con la esfera

Todas las ecuaciones fueron corroboradas con mediciones sobre el modelo de SolidWorks, resultando en valores exactamente iguales. Además, la diferencia entre los arcos reales y los arcos utilizados con centro y radio iguales a los de la tierra es de 0.033 % en el peor caso y de 0.0037 % en el mejor caso.

5.9. Cálculo de la Relación señal a ruido

5.9.1. Ruido del Detector

Para calcular la SNR, deben cuantificarse las fuentes de ruido del detector.

Corriente Oscura

Esta es una señal que existe en los detectores debido a la agitación térmica de los átomos que lo componen. Es dependiente de la temperatura y del tiempo de exposición. Agrega un bias a la señal, además de un ruido:

$$Bias_{DC} = I_o \cdot t_{exposición} \quad (110)$$

$$\sigma_{DC} = \sqrt{Bias_{DC}} \quad (111)$$

Ruido Shott

Es la fuente de ruido predominante para señales fuertes, existe en todas las señales y marca la máxima relación señal a ruido posible. Corresponde a la forma aleatoria en que se mueven los electrones de la señal.

$$\sigma_{Shot} = \sqrt{Signal + Bias_{DC}} \quad (112)$$

Ruido de Cuantizacion

Este ruido viene aparejado a la conversión de la señal a cuentas digitales, y esta dada por:

$$\sigma_{Cuant} = \frac{FWC}{2^n \cdot \sqrt{12}} \quad (113)$$

donde FWC es la máxima cantidad de electrones que puede alojar un detector, y n es la cantidad de bits del ADC.

Ruido por ineficiencia en la transferencia de carga

Este ruido esta relacionado con la carga remanente en un pixel luego de transferir la señal que en el se hallaba alojada. Ocurre porque la transferencia de cargas no es perfecta, y en el caso de un detector TDI no solo se transfiere la carga en sentido horizontal para leer las lineas, sino que se hace una transferencia vertical para sumar señal.

Sentido vertical

En sentido vertical, se suman tantas lineas como etapas se requiera para el proceso de TDI. El ruido viene dado por:

$$\sigma_{CTIv} = \sqrt{2 \cdot CTIv \cdot N \cdot signal} \quad (114)$$

donde $CTIv$ es el porcentaje de carga remanente en un pixel luego de una transferencia en sentido vertical, N es la cantidad de etapas del TDI y $signal$ es la señal útil.

Sentido horizontal

En sentido horizontal se mueven las cargas hacia la celda conectada a la electrónica de conversión AD. Las lineas están divididas en taps, de manera que no necesariamente la señal del ultimo pixel tiene el ruido agregado de todos los primeros. El ruido viene dado por:

$$\sigma_{CTIh} = \sqrt{2 \cdot CTIh \cdot \frac{npix}{ntaps} \cdot signal} \quad (115)$$

donde $CTIh$ es el porcentaje de carga remanente en un pixel luego de una transferencia en sentido horizontal, $npix$ es la cantidad de pixeles de una linea, $ntaps$ es la cantidad de taps por linea y $signal$ es la señal útil.

Ruido de Lectura

Este ruido viene aparejado a la electrónica que hace el reset de la carga en un pixel y se extrae directamente de la hoja de datos del detector.

$$\sigma_{Read} \quad (116)$$

5.9.2. Cálculo de la SNR

Finalmente, se calcula la SNR como el cociente entre la señal y el ruido obtenidos:

$$\frac{Signal}{\sqrt{\sigma_{Shot}^2 + \sigma_{Cuant}^2 + \sigma_{CTIv}^2 + \sigma_{CTIh}^2 + \sigma_{Read}^2}} \quad (117)$$

en esta ecuación, el ruido se suma en cuadratura porque es ruido no correlacionado.

6. Validación

7. Conclusiones

Anexo

A. TDI

La tecnología denominada **TDI**, "*Time Delay and Integration*" se utiliza en detectores CCD para obtener mayor nivel de señal. Esta consiste en que una misma porción del plano objeto es muestreada múltiples veces por diferentes detectores. El proceso aprovecha el movimiento del satélite para obtener energía de un mismo punto con diferentes líneas de detectores. Luego se pasan las cargas obtenidas por los detectores que ya pasaron por el punto en cuestión a los que pasaran inmediatamente después. Este proceso se repite tantas veces como líneas de detectores se designen para este propósito. En la imagen A.1 se observa un esquema de un detector TDI.

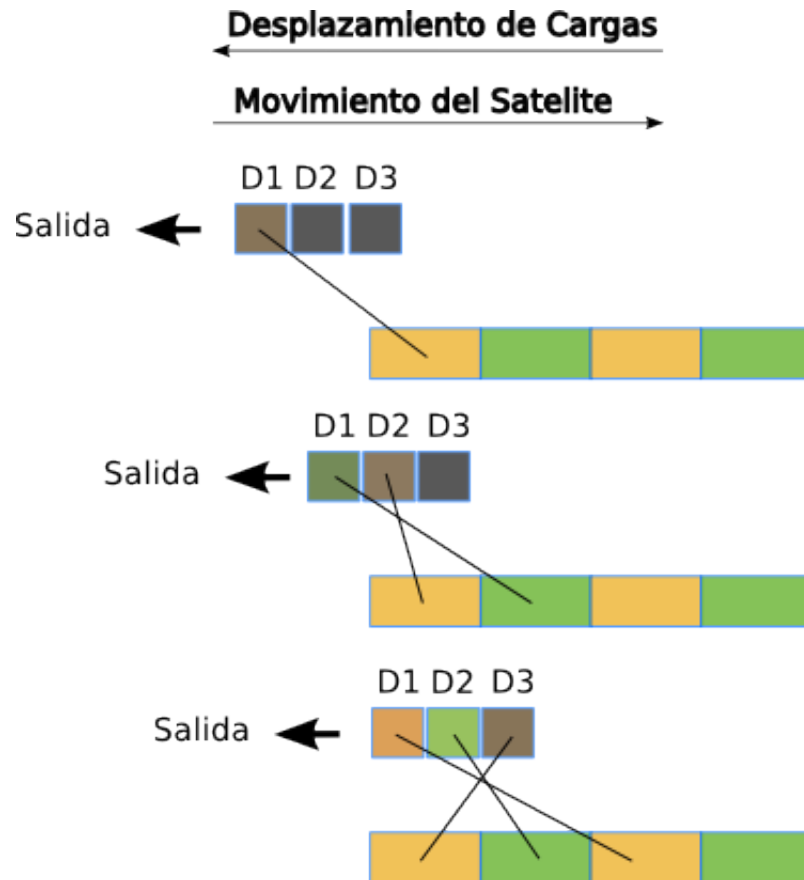


Figura A.1 – Esquema de un detector con TDI en vuelo

Referencias

- [1] Milton Abramowitz and Irene A Stegun. *Handbook of mathematical functions: with formulas, graphs, and mathematical tables*, volume 55. Courier Corporation, 1964.
- [2] Imagery Resolution Assessments. Reporting standards (irars) committee, civil niirs reference guide, 1996.
- [3] RR Auelmann. Image quality metrics. *Richard R. Auelmann Technical Archive*, 5, 2012.
- [4] Glenn D Boreman. *Modulation transfer function in optical and electro-optical systems*, volume 21. SPIE press Bellingham, WA, 2001.
- [5] Robert L Boylestad, Louis Nashelsky, and Franz Monssen. *Electronic devices and circuit theory*, volume 11. Prentice Hall Englewood Cliffs, NJ, 2002.

-
- [6] Doug Griffith. General image quality equation (gige). In *Proc. of Joint Agency Commercial Imagery Evaluation (JACIE) Conf*, 2012.
- [7] James R Janesick. *Scientific charge-coupled devices*, volume 83. SPIE press, 2001.
- [8] James R Janesick. *Photon transfer*. SPIE press San Jose, 2007.
- [9] George Joseph. Building earth observation cameras.
- [10] Jon C Leachtenauer, William Malila, John Irvine, Linda Colburn, and Nanette Salvaggio. General image-quality equation: Gige. *Applied optics*, 36(32):8322–8328, 1997.
- [11] Alan V Oppenheim. *Discrete-time signal processing*. Pearson Education India, 1999.
- [12] Stephen K Park, Robert Schowengerdt, and Mary-Anne Kaczynski. Modulation-transfer-function analysis for sampled image systems. *Applied optics*, 23(15):2572–2582, 1984.
- [13] Rainer Sandau. *Digital airborne camera: introduction and technology*. Springer Science & Business Media, 2009.
- [14] Samuel T Thurman and James R Fienup. Analysis of the general image quality equation. In *SPIE Defense and Security Symposium*, pages 69780F–69780F. International Society for Optics and Photonics, 2008.
- [15] Wikipedia. Shot noise — wikipedia, the free encyclopedia, 2017. [Online; accessed 8-May-2017].