

# Formulation, implementation and validation of a scalar damage model for brittle materials applied to three-dimensional solid elements

## Formulación, implementación y validación de un modelo de daño escalar para materiales frágiles aplicado a elementos sólidos tridimensionales

G. González del Solar <sup>1\*</sup>, P. Martín \*, N. Maldonado \*

\* Universidad Tecnológica Nacional, Mendoza. ARGENTINA

Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Tecnológicas (CONICET), ARGENTINA

Fecha de Recepción: 02/09/2017

Fecha de Aceptación: 13/03/2018

PAG 111-122

### Abstract

*Continuum Damage Mechanics describes the progressive degradation of the material properties based on a phenomenological model. This work presents the formulation, implementation and validation of a scalar damage model applied to three-dimensional solid elements. It is a highly versatile model defined from a fault surface and a scalar damage variable. Isotropic elastic materials with softening behavior and a single threshold surface can be simulated by this model. Four parameters are necessary to define the model and they derive from the classical stress-strain test. The model is implemented through a user-defined UMAT subroutine in software ABAQUS. The non-linear equilibrium equations are solved by an implicit algorithm based on the Backward Euler Method. The tensile stress validation shows an adequate correlation between the numerical and experimental results, with a 6% dispersion of dissipated energy. Finally, an illustrative example is presented. The results show that it is a simple but powerful tool for the numerical analysis of brittle materials.*

*Keywords: Damage model, non-linear analysis, softening, fracture energy, finite elements*

### Resumen

La mecánica del daño continuo describe el deterioro progresivo de las propiedades mecánicas de los materiales a partir de un modelo fenomenológico. En este trabajo se presenta la formulación, implementación y validación de un modelo de daño escalar aplicado a elementos sólidos tridimensionales. Se trata de un modelo de gran versatilidad definido a partir de una superficie de falla y una variable de daño escalar. Su campo de aplicación es la modelación numérica de materiales elásticos isotrópicos con degradación de la rigidez cuya tensión límite a tracción es igual a la de compresión. El modelo queda definido a partir de cuatro propiedades del material determinables en un ensayo Tensión-Desplazamiento. El modelo es implementado en el software ABAQUS por medio de una subrutina UMAT. Para la resolución de las ecuaciones de equilibrio no lineal se propone un algoritmo de tipo implícito (Método de Backward Euler). La validación a esfuerzos de tracción muestra una adecuada correlación entre los resultados numéricos y los experimentales, con una dispersión de la energía disipada del 6%. Finalmente, se presenta un ejemplo de aplicación. Los resultados alcanzados demuestran que se trata de una herramienta sencilla y, a la vez, poderosa para el análisis numérico de materiales frágiles.

**Palabras clave:** Modelo de daño, análisis no lineal, ablandamiento, energía de fractura, elementos finitos

## 1. Introducción

El daño en un material se pone de manifiesto por la reducción de la capacidad de resistir esfuerzos conforme aumentan las solicitaciones. Para simular este fenómeno se han propuesto diferentes enfoques que pueden ser resumidos en dos grandes grupos. El primero corresponde a los modelos de fractura los cuales concentran el proceso de iniciación y crecimiento de fisuras como una discontinuidad. En el segundo, los modelos de fisura distribuida distribuyen los efectos del daño sobre un volumen determinado, es decir utiliza variables continuas relacionadas con la densidad de estos defectos para describir el deterioro del material.

En este sentido, la Mecánica de Daño Continuo (MDC) ha sido empleada por numerosos autores (Lemaitre, 1985; Oliver et al., 1990; Rodríguez, 2012; Amirpour, 2017) para simular el proceso de degradación de las propiedades elásticas del material. Esta herramienta provee las ecuaciones constitutivas y de evolución del daño dentro del marco de la termodinámica de procesos irreversibles, la teoría de variables de estado internas y de consideraciones físicas relevantes. De

esta manera, la MDC se trata de un modelo fenomenológico que considera el daño indirectamente a través de una variable interna.

Para la definición de la variable interna existen diversos modelos. Los modelos de daño escalar son los más simples al considerar la degradación de la rigidez a través de una sola variable escalar que afecta por igual a todas las componentes del tensor de rigidez elástico manteniendo las condiciones de isotropía (Kachanov, 1958; Lubliner et al., 1989; Faria et al., 1998; Grassl et al., 2013; Juarez-Luna et al., 2014). Cuando se consideran las propiedades direccionales del material, la variable de daño debe ser definida en el campo tensorial dando lugar a los modelos anisótropos (Lee et al., 1997; Carol et al., 2001; Pelá et al., 2013; Wang et al., 2014). A su vez, en el caso de cargas reversibles, la direccionalidad de la fuerza en los materiales friccionales puede activar la fisura reduciendo la sección neta (caso de esfuerzos de tracción), o bien permanecer inactiva (caso de esfuerzos de compresión). La consideración de este comportamiento diferenciado da lugar a una segunda clasificación, denominando a aquellos que consideran este fenómeno como modelos de daño unilateral (Chaboche, 1993; Martín, 2001; Maimì et al., 2007; Mazars et al., 2015). En ellos se establecen dos variables de daño, una

<sup>1</sup> Autor de correspondencia:

CeReDeTeC, Facultad Regional Mendoza, Universidad Tecnológica Nacional, Mendoza, Argentina.  
E-mail: gerardo.gdelsolar@frm.utn.edu.ar



para daño a tracción y otra para daño a compresión, las cuales evolucionan de manera independiente pudiendo ser variables escalares o tensoriales.

La necesidad de implementar un modelo elástico con daño, cuya definición sea simple, conduce a establecer como objetivo para este trabajo la formulación, implementación y validación de un modelo de daño escalar, aplicado a sólidos tridimensionales basado en el Método de los Elementos Finitos. La simplicidad del modelo propuesto se fundamenta en la existencia de una única variable interna escalar, cuya definición se establece a partir de cuatro parámetros del material, dos asociados a las propiedades elásticas (Módulo de Elasticidad, Coeficiente de Poisson) y dos a las propiedades de daño (Tensión máxima, Energía de fractura). De esta manera, se requiere sólo del ensayo Fuerza-Desplazamiento para obtener los parámetros necesarios.

La implementación del modelo se realiza en el software de elementos finitos ABAQUS (Simulia D.S., 2010) por medio de la subrutina UMAT. La validación resulta de la contrastación con los resultados obtenidos en los ensayos experimentales de Gopalaratnam y Shah (1985) y en las modelaciones numéricas de Paredes et al. (2016) para el caso de un elemento sometido a tracción axial creciente. Adicionalmente, se emplea el modelo para el análisis del comportamiento de una viga con entalladura sometida a esfuerzos de flexión simple.

## 2. Modelo de daño escalar

Los modelos de daño escalar son modelos muy simples y versátiles (Oliver et al., 1990) debido a que el comportamiento no lineal del material queda definido a partir de una variable interna escalar llamada variable de daño,  $d$ . Esta variable, introducida por Kachanov (1958), es una medida de la pérdida de rigidez secante del material y está definida entre 0, para el material virgen, y 1, para el material totalmente dañado.

En este modelo, el tensor de tensiones de Cauchy, expresado en notación indicial, está dado por:

$$\sigma_{ij} = (1 - d) \bar{\sigma}_{ij} = (1 - d) C_{ijkl}^0 \epsilon_{kl} \quad (1)$$

Donde  $\sigma_{ij}$  es el tensor de tensiones en el espacio real,  $\bar{\sigma}_{ij}$  es el tensor de tensiones efectivo medido en el espacio "no dañado",  $C_{ijkl}^0$  es el tensor constitutivo virgen,  $\epsilon_{kl}$  el tensor de deformaciones y  $d$  es la variable de daño que debe ser interpretada físicamente como el cociente entre área de la superficie dañada y el área de superficie total (nominal) en un punto material local. Los subíndices  $i, j, k, l$  varían de 1 a 3.

De esta manera, el factor  $(1-d)$  es un factor de reducción que produce la transformación desde el espacio equivalente no dañado al espacio dañado real.

## 3. Formulación general del modelo

La densidad de energía libre de Helmholtz para un proceso de degradación escalar es:

$$\Psi(\epsilon_{ij}, d) = (1 - d) \bar{\Psi}(\epsilon_{ij}) \quad (2)$$

En particular para el caso planteado, la energía libre del material virgen se obtiene como una función cuadrática en  $\epsilon_{ij}$ , según:

$$\bar{\Psi}(\epsilon_{ij}) = \frac{1}{2} \epsilon_{ij} C_{ijkl}^0 \epsilon_{kl} = \frac{1}{2} \epsilon_{ij} \bar{\sigma}_{ij} \quad (3)$$

Para procesos termo-mecánicos isotérmicos, puede desacoplarse el problema térmico del problema mecánico. Aplicando la inecuación de Clausius-Plank (Oller, 2001):

$$\dot{\mathfrak{z}}_m = \left( \sigma_{ij} - \frac{\partial \Psi(\epsilon_{ij}, d)}{\partial \epsilon_{ij}} \right) \dot{\epsilon}_{ij} - \frac{\partial \Psi(\epsilon_{ij}, d)}{\partial d} \dot{d} \geq 0 \quad (4)$$

Aplicando el procedimiento de Coleman-Noll (Gurtin et al., 2010) se garantiza una disipación no negativa,  $\dot{\mathfrak{z}}_m \geq 0$ , de manera que la ecuación constitutiva, la fuerza termodinámica y la disipación mecánica resultan:

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial \Psi(\epsilon_{ij}, d)}{\partial \epsilon_{ij}} = (1 - d) \frac{\partial \bar{\Psi}(\epsilon_{ij})}{\partial \epsilon_{ij}} = (1 - d) C_{ijkl}^0 \epsilon_{kl} \quad (5)$$

$$y = - \frac{\partial \Psi(\epsilon_{ij}, d)}{\partial d} = \bar{\Psi}(\epsilon_{ij}) \quad (6)$$

$$\dot{\mathfrak{z}}_m = y \dot{d} = \bar{\Psi}(\epsilon_{ij}) \dot{d} \geq 0 \quad (7)$$

La ecuación constitutiva muestra que para el modelo de daño escalar propuesto, todas las componentes del tensor de tensiones efectivas se degradan por igual, esto significa que el coeficiente de Poisson se mantiene constante (comportamiento isotrópico).

La fuerza termodinámica asociada a la variable de daño es la energía libre del material no dañado,  $\bar{\Psi}$ . De manera que la regla de evolución de la variable de daño debe ser escrita en términos de la energía no dañada (Luccioni, 2003).

De esto se desprende que para definir el modelo de daño es necesario establecer: (1) una tensión equivalente, (2) un criterio de daño y (3) la ley de evolución de la variable interna de daño.

### 3.1 Tensión uniaxial equivalente

A partir del tensor de tensiones efectivas se define la tensión uniaxial equivalente como una función del segundo invariante del tensor desviador,  $J_2'$ , como:

$$\bar{\sigma}_{eq} = \sqrt{3 J_2'} \quad (8)$$

De esta manera, un estado de tensiones complejo como el triaxial puede ser reducido a un escalar de comparación.

### 3.2 Criterio de daño

Para la definición de la función umbral de daño y de la función potencial de daño se proponen las siguientes funciones, respectivamente:



$$\mathbf{F}(\bar{\sigma}, \mathbf{r}, \mathbf{d}) = \mathbf{f}(\bar{\sigma}) - \mathbf{c}(\mathbf{r}, \mathbf{d}) \leq \mathbf{0} \quad (9)$$

$$\mathbf{F}(\bar{\sigma}, \mathbf{r}, \mathbf{d}) = \mathbf{G}[\mathbf{f}(\bar{\sigma})] - \mathbf{G}[\mathbf{c}(\mathbf{r}, \mathbf{d})] \leq \mathbf{0} \quad (10)$$

Donde  $\mathbf{f}(\bar{\sigma})$  es una función escalar del tensor de tensiones efectivas y  $\mathbf{c}(\mathbf{r}, \mathbf{d})$  es una función escalar que depende del umbral de daño,  $\mathbf{r}$ , y de la variable de daño,  $\mathbf{d}$ . El umbral de daño está definido en el intervalo cerrado comprendido entre 0 y el umbral de daño inicial,  $\mathbf{r}^0$ , el cual es una propiedad del material.

El criterio de daño define una superficie límite que distingue entre un estado de comportamiento elástico y otro en el que se verifica el proceso de degradación de las propiedades del material.

### 3.3 Ley de evolución de la variable de daño

Análogamente a la teoría de la plasticidad incremental (Lubliner et al., 1989), se emplea una ley de evolución para la variable de daño definida por:

$$\dot{\mathbf{d}} = \dot{\lambda} \frac{\partial \mathbf{F}[\mathbf{f}(\bar{\sigma})]}{\partial \mathbf{f}(\bar{\sigma})} \cong \dot{\lambda} \frac{\partial \mathbf{G}[\mathbf{f}(\bar{\sigma})]}{\partial \mathbf{f}(\bar{\sigma})} \quad (11)$$

Donde  $\dot{\lambda}$  es un escalar no negativo denominado parámetro de consistencia de daño que define las condiciones de carga, descarga y recarga a través de las condiciones de Kuhn-Tucker:

$$(a) \dot{\lambda} \geq 0 \quad (b) \mathbf{F}(\bar{\sigma}, \mathbf{r}, \mathbf{d}) \leq \mathbf{0} \quad (c) \dot{\lambda} \mathbf{F}(\bar{\sigma}, \mathbf{r}, \mathbf{d}) = \mathbf{0} \quad (12)$$

Estas condiciones corresponden a problemas que poseen restricciones unilaterales. Si  $\mathbf{F}(\bar{\sigma}, \mathbf{r}, \mathbf{d}) < \mathbf{0}$ , por la condición (c), la evolución del factor de consistencia,  $\dot{\lambda}$ , deberá ser nulo. De esto se desprende que la variación temporal del daño debe ser nula,  $\dot{\mathbf{d}} = \mathbf{0}$  y por lo tanto el material no sufre degradación y se comporta de manera elástica. Si por el contrario,  $\dot{\lambda} > \mathbf{0}$ , se está en presencia de una evolución del daño  $\dot{\mathbf{d}} = \dot{\lambda}$ , y, por la condición (c),  $\mathbf{F}(\bar{\sigma}, \mathbf{r}, \mathbf{d})$  deberá ser nulo lo que significa que el material se encuentra en el umbral de daño.

La magnitud del parámetro de consistencia de daño queda definida a partir de la condición de consistencia de daño:

$$\mathbf{F}(\bar{\sigma}, \mathbf{r}, \mathbf{d}) = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{G}[\mathbf{f}(\bar{\sigma})] = \mathbf{G}[\mathbf{c}(\mathbf{r}, \mathbf{d})] \Rightarrow \mathbf{f}(\bar{\sigma}) = \mathbf{c}(\mathbf{r}, \mathbf{d}) \Rightarrow \frac{\partial \mathbf{G}[\mathbf{f}(\bar{\sigma})]}{\partial \mathbf{f}(\bar{\sigma})} = \frac{\partial \mathbf{G}[\mathbf{c}(\mathbf{r}, \mathbf{d})]}{\partial \mathbf{c}(\mathbf{r}, \mathbf{d})} \quad (13)$$

Considerando la variación temporal de la función potencial de daño:

$$\dot{\mathbf{F}}(\bar{\sigma}, \mathbf{r}, \mathbf{d}) = \mathbf{0} \Rightarrow \frac{\partial \mathbf{G}[\mathbf{f}(\bar{\sigma})]}{\partial \mathbf{f}(\bar{\sigma})} \dot{\mathbf{f}}(\bar{\sigma}) = \frac{\partial \mathbf{G}[\mathbf{c}(\mathbf{r}, \mathbf{d})]}{\partial \mathbf{c}(\mathbf{r}, \mathbf{d})} \dot{\mathbf{c}}(\mathbf{r}, \mathbf{d}) \Rightarrow \dot{\mathbf{f}}(\bar{\sigma}) = \dot{\mathbf{c}}(\mathbf{r}, \mathbf{d}) \quad (14)$$

Adicionalmente, la variación temporal de la función  $\mathbf{G}$  puede ser expresada como:

$$\dot{\mathbf{G}}[\mathbf{f}(\bar{\sigma})] = \frac{\partial \mathbf{G}[\mathbf{f}(\bar{\sigma})]}{\partial \mathbf{f}(\bar{\sigma})} \dot{\mathbf{f}}(\bar{\sigma}) \quad (15)$$

Considerando (11), se tiene que  $\dot{\mathbf{d}} = \dot{\mathbf{G}}[\mathbf{f}(\bar{\sigma})]$ , y teniendo en cuenta (14) y (15):

$$\dot{\lambda} = \dot{\mathbf{f}}(\bar{\sigma}) = \dot{\mathbf{c}}(\mathbf{r}, \mathbf{d}) = \frac{\partial \mathbf{f}(\bar{\sigma})}{\partial \bar{\sigma}} : \dot{\bar{\sigma}} \quad (16)$$

Es posible obtener la ley de evolución de la variable de daño como:

$$\dot{\mathbf{d}} = \frac{\partial \mathbf{G}[\mathbf{f}(\bar{\sigma})]}{\partial \mathbf{f}(\bar{\sigma})} \frac{\partial \mathbf{f}(\bar{\sigma})}{\partial \bar{\sigma}} : \dot{\bar{\sigma}} \quad (17)$$

Finalmente, de lo establecido en (7), la variación temporal de la variable de daño resulta:

$$\dot{\mathbf{d}}_m = \bar{\Psi} \left\{ \frac{\partial \mathbf{G}[\mathbf{f}(\bar{\sigma})]}{\partial \mathbf{f}(\bar{\sigma})} \frac{\partial \mathbf{f}(\bar{\sigma})}{\partial \bar{\sigma}} : \dot{\bar{\sigma}} \right\} \quad (18)$$

### 3.4 Disipación de energía.

Los modelos de daño asumen que el proceso de degradación en un punto material comienza cuando la tensión equivalente alcanza el valor umbral de inicio de daño, momento en el que el daño se activa y produce la degradación de la rigidez del material. Durante un ensayo de deformación uniaxial, a medida que se incrementa el alargamiento también lo hace, de manera proporcional, la tensión hasta alcanzar la capacidad máxima del material. Este comportamiento sigue una evolución elástica de manera que, ante un proceso de descarga, el material recupera su estado original. En caso de que el alargamiento aumente más allá del umbral elástico, dará comienzo al proceso de fisuración lo que se manifestará como una disminución de la tensión a medida que la deformación aumente, fenómeno denominado "ablandamiento". La forma en que evolucionará el ablandamiento puede variar y dependerá del tipo de material. A su vez, el comportamiento del punto material está relacionado con la cantidad de energía que es capaz de disipar el material una vez iniciado el daño. Esta energía, denominada energía de fractura ( $G_f$ ), es una propiedad intensiva y estrictamente positiva del material. La energía de fractura y la curva de ablandamiento son parámetros particulares de cada material y su valor se determina a través de ensayos de laboratorio (Graffe et al., 2010).

- **Caso de ablandamiento lineal**

Se puede particularizar la ley evolutiva al caso de ablandamiento lineal. Para ello, se establece la función explícita que define la evolución de la variable interna de daño.



$$\mathbf{d} = \mathbf{k}_{\text{lineal}} \times \left( \mathbf{1} - \frac{r^0}{\bar{\sigma}_{\text{eq}}} \right) \quad (19)$$

Siendo  $k_{\text{lineal}} = \left( 1 - \frac{1}{2} \times \frac{r^{0^2}}{g_f E^0} \right)^{-1}$  una constante que depende del módulo de elasticidad uniaxial del material virgen,  $E^0$ , el umbral de inicio de daño,  $r^0$ , y la energía específica del modelo continuo,  $g_f$ . Este último parámetro se obtiene como el cociente entre la energía de fractura,  $G_f$ , y una longitud característica,  $l_c$ , dependiente del tipo y tamaño del elemento empleado.

Por otro lado, se puede establecer la función umbral de daño en términos del incremento de la tensión equivalente.

$$r^t(\bar{\sigma}_{\text{eq}}) = r^{t-1} + H^d(\bar{\sigma}_{\text{eq}}^t - \bar{\sigma}_{\text{eq}}^{t-1}) \quad (20)$$

Siendo  $H^d = -\frac{r^{0^2}}{2 \times g_f \times E^0 - r^{0^2}}$  el módulo de ablandamiento lineal que determina la contracción del dominio elástico y que depende de los parámetros del material y de la zona del sólido cuyo comportamiento es disipativo.

- **Caso de ablandamiento exponencial**

Se establece la ley de evolución explícita que define la variable interna de daño:

$$\mathbf{d} = \mathbf{1} - \frac{r^0}{\bar{\sigma}_{\text{eq}}} \times \exp \left[ \mathbf{k}_{\text{exp}} \left( \mathbf{1} - \frac{\bar{\sigma}_{\text{eq}}}{r^0} \right) \right] \quad (21)$$

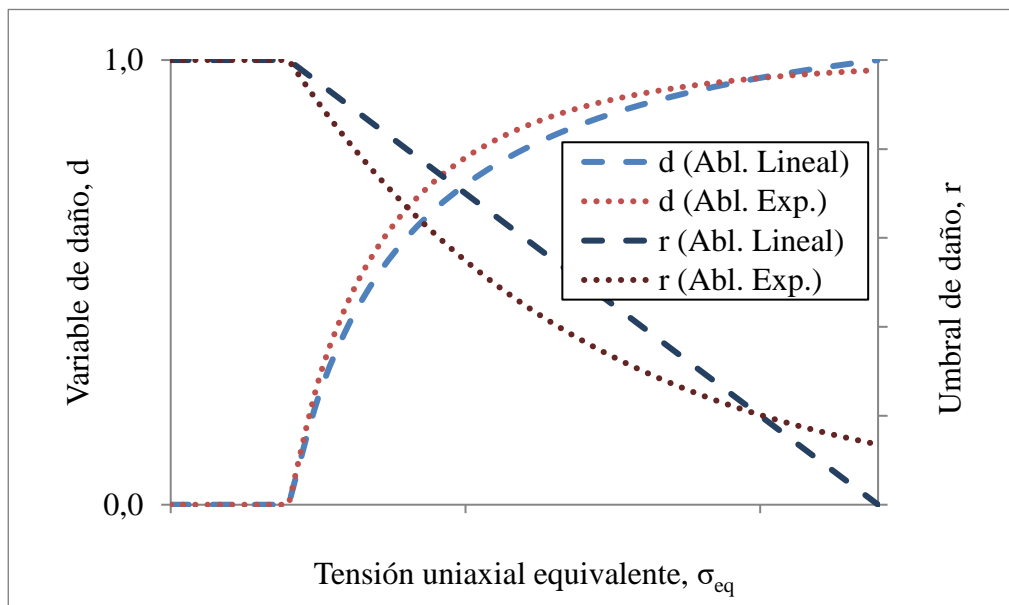
Siendo  $k_{\text{exp}} = \left( \frac{g_f E^0}{r^{0^2}} - \frac{1}{2} \right)^{-1}$  una constante que depende de las mismas propiedades elásticas que en el caso de ablandamiento lineal.

Por otro lado, la función umbral de daño queda definida a partir de la tensión equivalente según:

$$r^t(\bar{\sigma}_{\text{eq}}) = r^0 \times \exp \left[ H^d \left( \mathbf{1} - \frac{\bar{\sigma}_{\text{eq}}}{r^0} \right) \right] \quad (22)$$

Siendo  $H^d = \left( \frac{g_f \times E^0}{r^{0^2}} - \frac{1}{2} \right)^{-1}$ , el módulo de ablandamiento exponencial.

La Figura 1 expone las leyes de evolución explícita correspondientes a la variable de daño y a la función umbral de daño, para los casos de ablandamiento lineal y exponencial presentados.



**Figura 1.** Leyes de evolución explícita de la variable de daño y del umbral de daño para los casos de ablandamiento lineal y exponencial

## 4. Implementación numérica del modelo propuesto

El modelo propuesto fue implementado en la plataforma ABAQUS (Simulia D.S., 2010). Para ello, se desarrolló un algoritmo de cálculo basado en la subrutina UMAT (User-defined Mechanical Material Behavior), la cual permite definir el comportamiento constitutivo mecánico de

materiales que no están incorporados en la librería interna del software.

En cada incremento de tiempo, y para cada punto de integración, el software llama a la subrutina UMAT y le provee el tensor de deformaciones al comienzo del paso incremental y el incremento de deformaciones previsto. El código UMAT debe ser capaz de permitir la determinación del tensor constitutivo tangente, del tensor de tensiones reales y de la actualización de las variables de estado  $d$  y  $r$ , al finalizar cada paso incremental de tiempo. Para ello es necesaria la

declaración de la matriz jacobiana inicial y las leyes que permitan determinar la evolución de las variables internas. El algoritmo implementado resuelve las ecuaciones no lineales por medio de un proceso implícito (Método de Backward Euler). Este método permite determinar el tamaño del incremento de daño al imponer como condición que la fuerza residual entre la tensión equivalente y el umbral de daño de la iteración anterior es nula. Mediante la comparación entre dos iteraciones consecutivas puede determinarse si es posible

alcanzar la convergencia en un número razonable de iteraciones. En caso de que la convergencia sea poco probable, el algoritmo ajusta el incremento de carga. Si bien la integración implícita requiere de mayor tiempo para la resolución de las ecuaciones, se trata de un método más robusto y estable.

La Figura 2 presenta el diagrama de flujo del algoritmo de cálculo desarrollado.

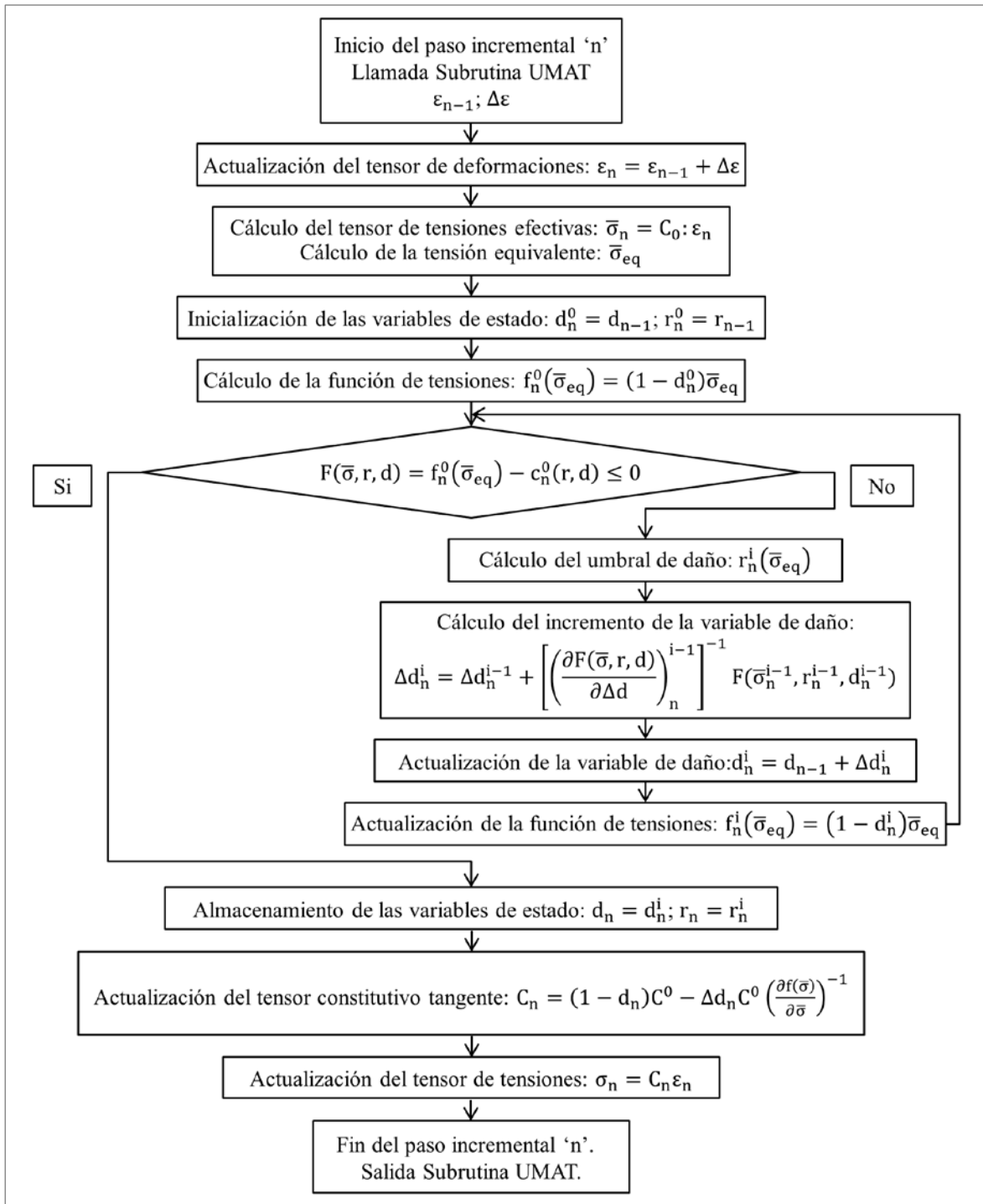


Figura 2. Diagrama de flujo del proceso de integración del modelo constitutivo



## 5. Validación

El modelo implementado es validado a partir de la comparación de los resultados numéricos alcanzados con resultados experimentales tomados de la literatura. Posteriormente se realiza un análisis de sensibilidad de malla.

### 5.1 Carga axial a tracción monotónica

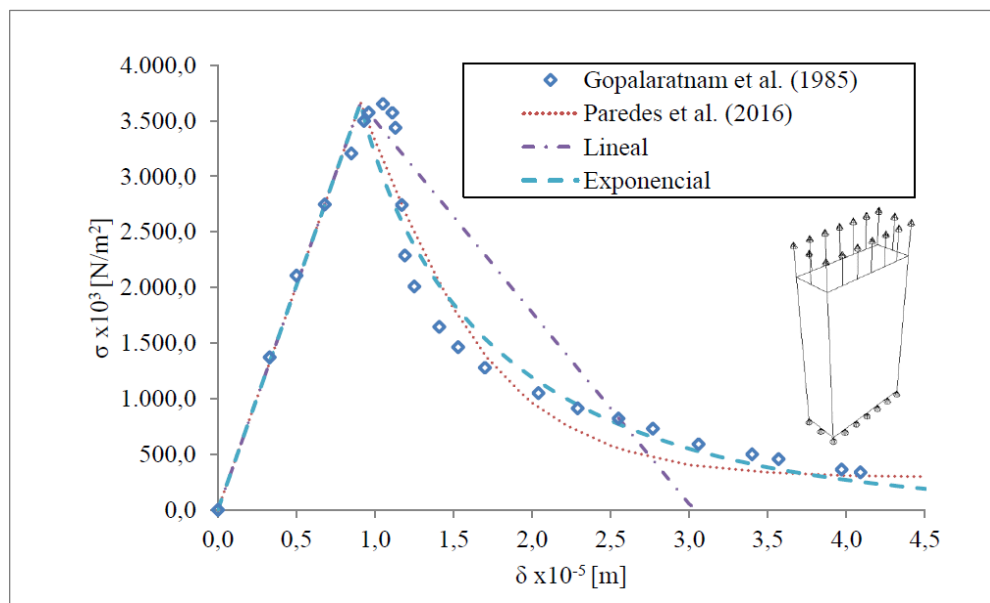
Para la validación del modelo bajo esfuerzos a tracción directa se emplean los resultados experimentales publicados por Gopalaratnam et al. (1985) en probetas de concreto simple. A su vez, también se incorporan los resultados alcanzados por el modelo numérico con ablandamiento exponencial desarrollado por Paredes et al. (2016).

La geometría del caso en estudio posee una sección transversal de 19.0 mm x 76.2 mm y una longitud de 82.6 mm. Las propiedades del material se resumen en la Tabla 1. El modelo posee un total de 312 elementos hexaédricos lineales de 8 nodos con un total de 504 nodos. Para obtener una falla localizada, se introdujo un debilitamiento en los elementos ubicados en la zona de anclaje.

La Figura 3 presenta los resultados obtenidos por el modelo numérico propuesto tanto para el caso de ablandamiento lineal como para el de ablandamiento exponencial, y realiza una comparación con los resultados experimentales y numéricos antes citados.

**Tabla 1.** Propiedades del material

Propiedad	Magnitud
Tensión Máxima a la tracción [N/m <sup>2</sup> ]	3662.1 x10 <sup>3</sup>
Módulo de Elasticidad secante [N/m <sup>2</sup> ]	33.469 x10 <sup>9</sup>
Coefficiente de Poisson	0.00
Energía de fractura, Gf [J/m <sup>2</sup> ]	56.4



**Figura 3.** Curvas Tensión-Desplazamiento obtenidas de los modelos a tracción axial con ablandamiento lineal y exponencial comparados con los resultados de referencia

Del análisis de las áreas bajo las curvas se determinan las energías de fractura resumidas en la Tabla 2. A partir de estos resultados se establece la dispersión de cada modelo con respecto al valor experimental de referencia. Puede observarse

que el modelo con ablandamiento lineal presenta una mejor correspondencia en la magnitud de energía disipada, sin embargo el modelo con ablandamiento exponencial posee una mejor aproximación al verdadero proceso disipativo.

**Tabla 2.** Energía de fractura disipada bajo esfuerzo axial a tracción

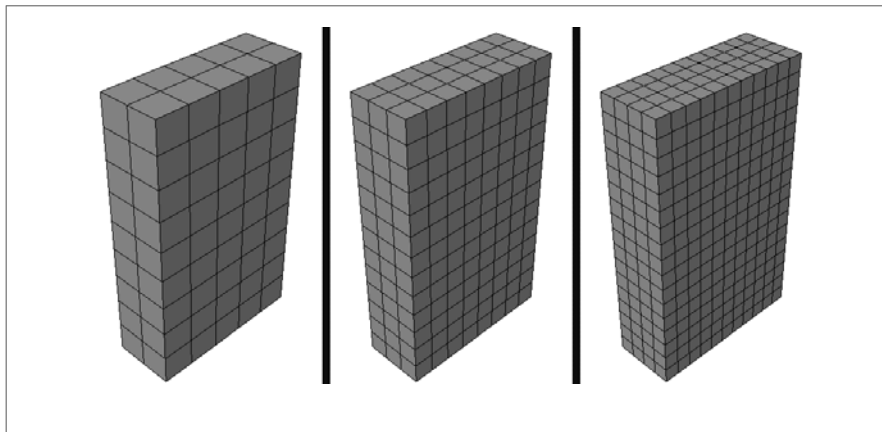
	Energía disipada por unidad de área, $G_f$ ,	Dispersión respecto del valor experimental
	[Nm/m <sup>2</sup> ]	[%]
Gopalaratnam et al. (1985) (*)	56.4	--
Paredes et al. (2016) (*)	43.6	22.69
Ley de disipación lineal	55.4	1.77
Ley de disipación Exponencial	53.4	5.32

(\*) Extraído de Paredes et al. (2016)

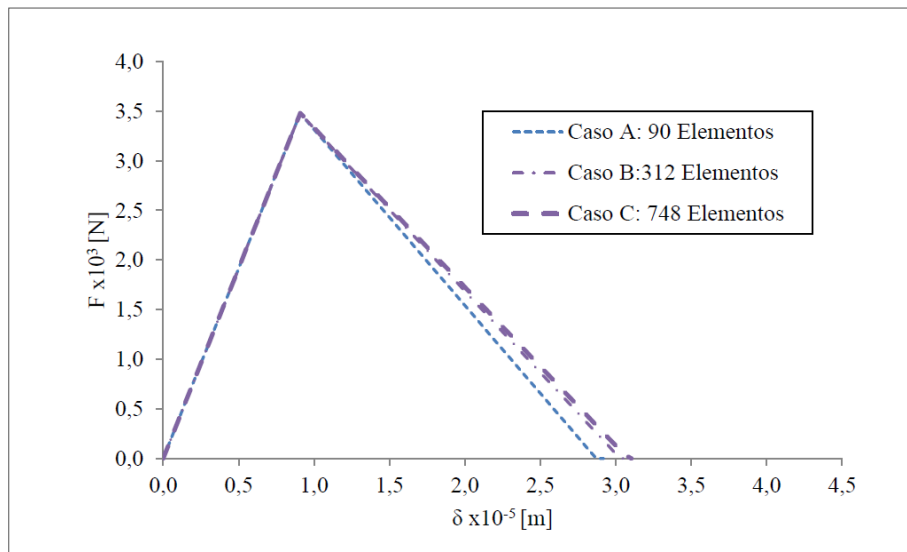
### 5.2 Análisis de sensibilidad de malla

Se realiza un análisis de sensibilidad de malla para el modelo con ablandamiento lineal. Para el estudio se proponen tres densidades de malla constituidas por 90, 312 y 748

elementos, respectivamente (Figura 4). La Figura 5 muestra las curvas Fuerza-Desplazamiento para cada caso de análisis. Puede observarse la convergencia de malla lo que asegura independencia del tamaño de elemento.



**Figura 4.** Densidad de malla. Malla por 90, 312 y 748 elementos, respectivamente



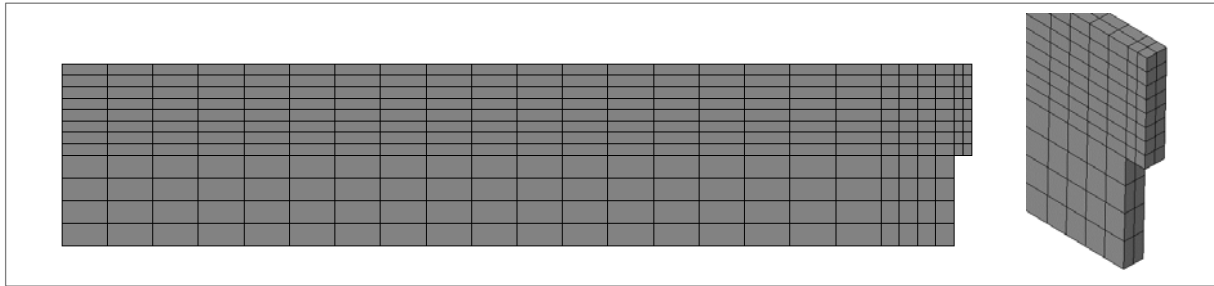
**Figura 5.** Curva Fuerza-Desplazamiento para el análisis de sensibilidad de malla

## 6. Ejemplo de aplicación: viga con entalladura a flexión

Con el fin de estudiar el comportamiento del modelo propuesto para elementos sólidos tridimensionales sometidos a un estado tensional complejo, se realiza un ejemplo de aplicación consistente en una viga con entalladura central apoyada en sus extremos y sometida a flexión debido a un desplazamiento impuesto en el centro del elemento. Sus dimensiones son de 2.00 m de largo, 0.20 m de alto y un espesor de 0.02 m, en tanto que la muesca mide 0.04 m x 0.10

m x 0.02 m, respectivamente. Debido a las características de simetría del elemento, se modela únicamente la mitad con lo que se obtiene una malla formada por 560 elementos hexaédrico lineal de 8 nodos sumando un total de 951 nodos con una densificación de la malla en la zona próxima a la entalladura y en la entalladura misma (Ver Figura 6). La viga se somete a un desplazamiento vertical en el centro con un valor máximo de 0.0015 m.

Las propiedades del material se resumen en la Tabla 3. Se adopta una ley de evolución de la variable de daño de tipo exponencial.



**Figura 6.** Izq. Vista frontal de la geometría y mallado de la sección modelada. Der. Vista en perspectiva de la densificación de malla en la zona de entalladura

**Tabla 3.** Propiedades del material

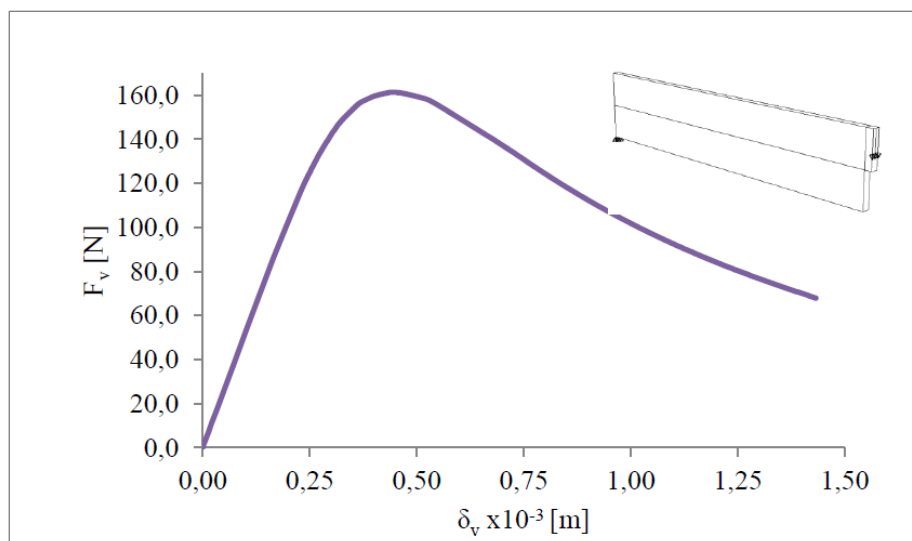
Propiedad	Magnitud
Tensión Máxima a la tracción [N/m <sup>2</sup> ]	3330 x10 <sup>3</sup>
Módulo de Elasticidad secante [N/m <sup>2</sup> ]	30.0 x10 <sup>9</sup>
Coefficiente de Poisson	0.20
Energía de fractura, G <sub>f</sub> [J/m <sup>2</sup> ]	124

Debido a la inestabilidad del comportamiento de la viga a medida que evoluciona la fisuración del elemento se adopta el método Riks en ABAQUS/Standar.

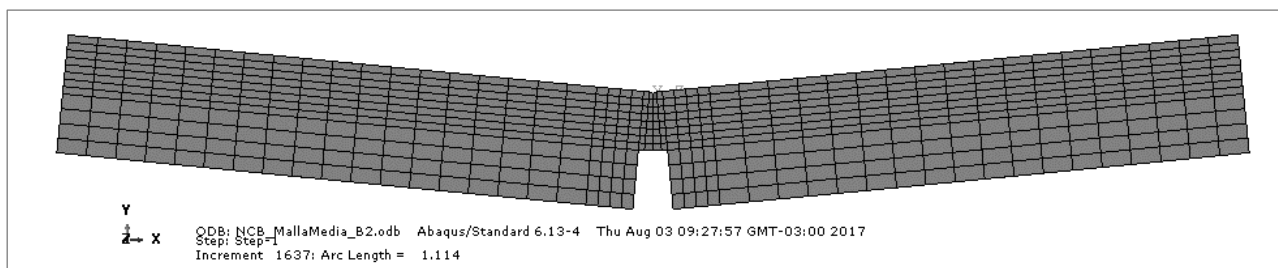
La Figura 7 presenta la curva fuerza vertical-desplazamiento vertical del modelo. Se observa que el proceso de deformación de la estructura cesa al alcanzar un desplazamiento de 1.43 x10<sup>-3</sup> m, correspondiente al 96% del

desplazamiento final impuesto. Esto se debe a que los nodos que conforman la entalladura han alcanzado un nivel de daño tal que deja a la estructura sin rigidez flexional suficiente para admitir incrementos de desplazamiento produciendo problemas de convergencia. La Figura 8 presenta la estructura deformada para el estado último de carga.





**Figura 7.** Curva Fuerza vertical-Desplazamiento vertical del modelo con ablandamiento exponencial solicitado a flexión simple



**Figura 8.** Deformada de la estructura para un desplazamiento vertical de  $1,43 \times 10^{-3}$  m. Factor de escala de deformación: 70

La Figura 9 y la Figura 10 presentan el proceso de degradación de la sección de entalladura a medida que evoluciona el desplazamiento vertical impuesto. El daño ha sido calculado como el promedio del daño registrado en los nodos del espesor ubicados equidistantes al eje neutro. El proceso de daño se inicia en los nodos sometidos a tracción para un desplazamiento vertical de 0,23 mm. Este proceso finaliza cuando los nodos ubicados fuera del eje neutro, tanto en la zona a tracción como a compresión, registran un daño promedio de 0,98.

La Figura 11 presenta la evolución del daño en función al incremento del desplazamiento para los nodos comprendidos en la zona a tracción. Se observa que los nodos más alejados al eje neutro presentan un comportamiento similar con una rápida evolución del daño, alcanzando un

valor de 0,90 para un desplazamiento de 0,50 mm. Los nodos ubicados a 25,0 mm y a 12,5 mm desarrollan ese nivel de daño para los desplazamientos verticales de 0,60 mm y 0,79 mm, respectivamente. De acuerdo a lo observado en Figura 9, puede concluirse un comportamiento similar en los nodos equidistantes en la zona a compresión. Esto pone de manifiesto que para una aplicación del 55% del desplazamiento último, la sección ha disminuido un 90% su rigidez.

Por otro lado, la Figura 12 expone la curva Tensión - Deformación específica en la dirección del eje 1 de los puntos de integración ubicados en las zonas de máxima compresión y máxima tensión de la sección crítica. Se verifica un comportamiento similar en ambos sentidos del esfuerzo tal como se esperaba.

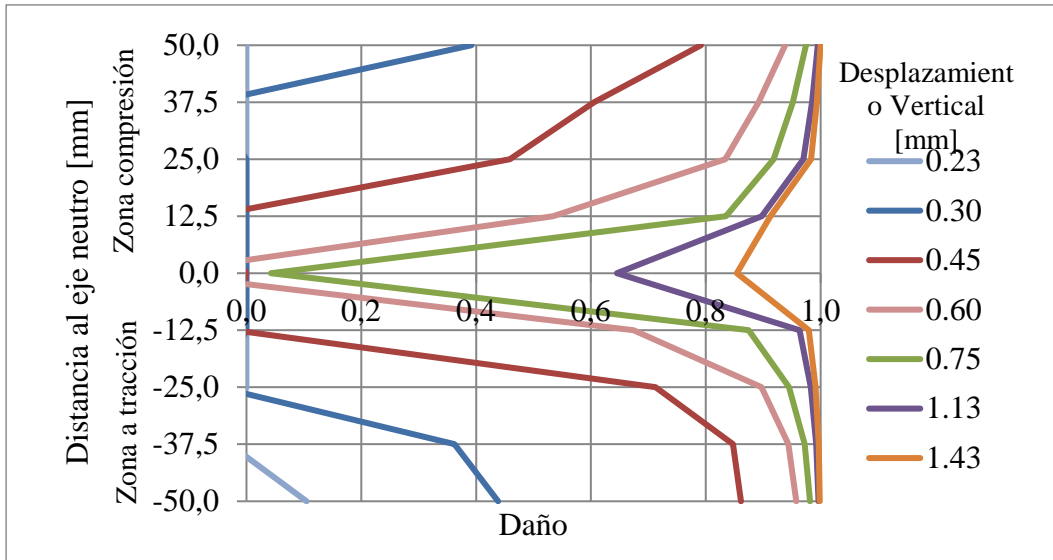


Figura 9. Análisis del daño en la sección de entalladura conforme aumenta el desplazamiento vertical aplicado

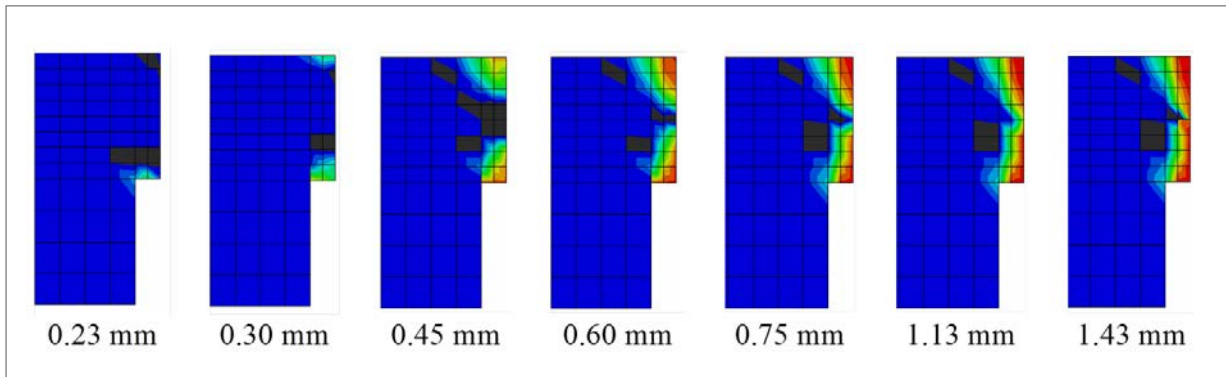


Figura 10. Proceso de evolución del daño en la sección de entalladura conforme aumenta el desplazamiento vertical aplicado

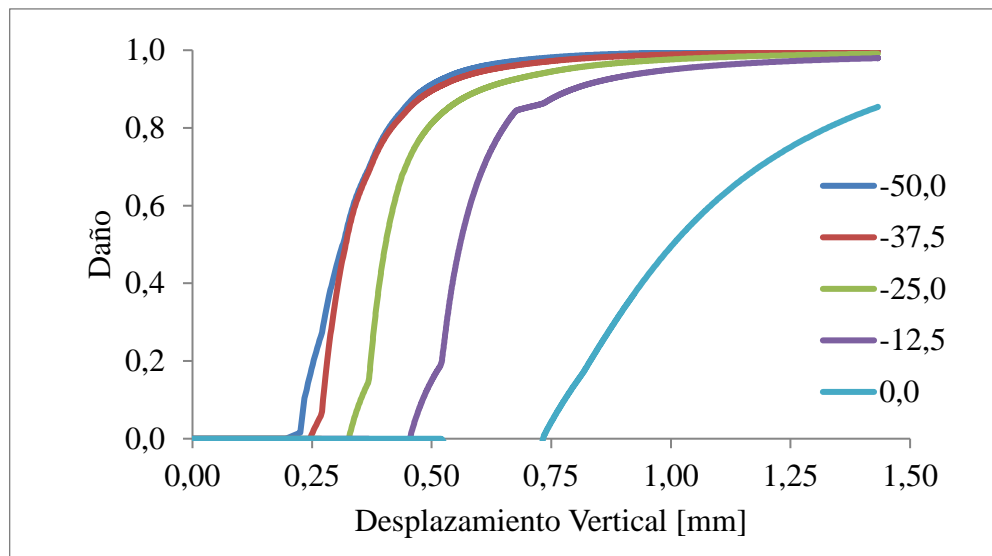
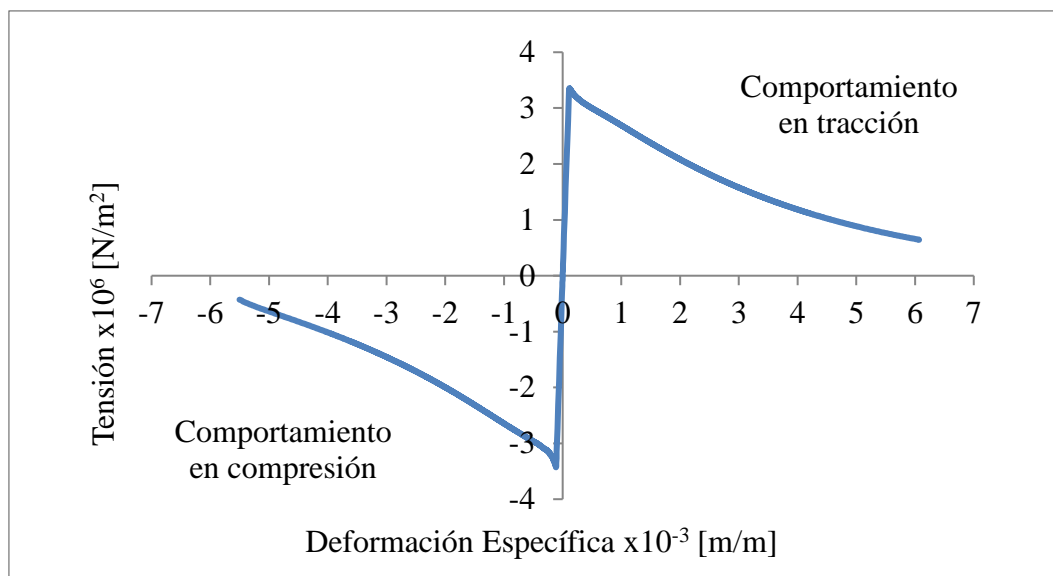


Figura 11. Curva de evolución de la variable interna de daño conforme aumenta el desplazamiento vertical para los nodos ubicados en la sección de entalladura



**Figura 12.** Curva Tensión-Deformación en la dirección del eje 1 de los puntos de integración ubicados en la sección crítica de la viga, en las caras superior e inferior

## 7. Conclusiones

Los modelos de daño escalar permiten representar el comportamiento de materiales elásticos isotrópicos con ablandamiento de manera adecuada a partir de una variable de daño. Debido a su gran simplicidad estos modelos resultan muy atractivos. En este trabajo se presentó la formulación, implementación y validación de un modelo de daño escalar aplicado a elementos sólidos tridimensionales.

Se trata de un modelo dependiente de una variable de daño y con una misma superficie de falla, tanto para la tracción como para la compresión. Estas simplificaciones permiten definir el modelo a partir de cuatro propiedades del material determinadas en un ensayo clásico de Tensión-Desplazamiento. El campo de aplicación del modelo se extiende a materiales elásticos isotrópicos cuya tensión límite a tracción es igual a la de compresión, asumiendo una misma curva de ablandamiento. Debido a que el modelo presenta una única variable interna, la degradación del tensor constitutivo producto de una fuerza a tracción se mantiene constante en el caso de producirse una inversión en el sentido de la carga.

Para distinguir entre un estado de comportamiento elástico y otro en el que se verifica el proceso de degradación de las propiedades del material, el modelo realiza una transformación desde el tensor de tensiones a un escalar equivalente y lo compara con un escalar denominado umbral de daño. De esta manera, el modelo tiene una respuesta adecuada a estados de sollicitación complejos tales como los

triaxiales. La ley de evolución de la variable de daño puede ser establecida a partir de las propiedades elásticas del material, de la tensión umbral de daño y de la energía de fractura.

Las ecuaciones constitutivas que gobiernan el problema fueron implementadas en el software comercial ABAQUS por medio de una subrutina de usuario UMAT. El código desarrollado permite la determinación del tensor constitutivo tangente, del tensor de tensiones reales y de la actualización de las variables de estado al finalizar cada paso incremental de tiempo. Para la actualización de la variable interna de daño se desarrolló un algoritmo de cálculo de tipo implícito basado en el método Backward Euler.

La contrastación de los resultados numéricos con los obtenidos de bibliografía da cuenta de una adecuada correlación entre los mismos. El modelo con ablandamiento exponencial presenta un comportamiento más ajustado al observado experimentalmente que el modelo con evolución lineal, sin embargo la dispersión de la energía disipada del primero es del 5.32% contra una dispersión del 1.77% del segundo modelo. El análisis de sensibilidad de malla muestra que es posible alcanzar resultados satisfactorios con un número reducido de elementos. Por otro lado, el ejemplo de aplicación permite arribar a la conclusión que se trata de una herramienta poderosa para la modelación numérica de materiales isotrópicos con degradación de la rigidez y desafía a los autores a desarrollar modelos que permitan considerar la naturaleza direccionada del daño en elementos sólidos sollicitados triaxialmente.

## 8. Referencias

- Amirpour M., Das R., Bickerton S. (2017)**, An elasto-plastic damage model for functionally graded plates with in-plane material properties variation: Material model and numerical implementation. *Composite Structures*, 163, 331-341, doi: <http://dx.doi.org/10.1016/j.compstruct.2016.12.020>
- Carol I., Rizzi E., Willam K. (2001)**, On the formulation of anisotropic elastic degradation. I. Theory based on a pseudo-logarithmic damage tensor rate. *International Journal of Solids and Structures*, 38(4): 491-518, doi: [https://doi.org/10.1016/S0020-7683\(00\)00031-7](https://doi.org/10.1016/S0020-7683(00)00031-7).

- Chaboche J. L. (1993)**, Development of continuum damage mechanics for elastic solids sustaining anisotropic and unilateral damage. *International Journal of Damage Mechanics*, 2(4): 311-329, doi: <https://doi.org/10.1177/105678959300200401>.
- Faria R., Oliver J., Cervera M. (1998)**, A strain-based plastic viscous-damage model for massive concrete structures. *International Journal of Solids and Structures*, 35(14): 1533-1558, doi: [https://doi.org/10.1016/S0020-7683\(97\)00119-4](https://doi.org/10.1016/S0020-7683(97)00119-4)
- Gopalaratnam V. S., Shah S. P. (1985)**, Softening response of plain concrete in direct tension. *J. Amm. Concr. Inst.*, 82(3): 310-323.
- Graffe R., Linero D. (2010)**, Numerical modeling of the fracture process in mode I of concrete beams with known cracking path by means of a discrete model of cohesive crack. *Revista Ingeniería de Construcción*, 25(3): 399-418, doi: <https://doi.org/10.4067/S0718-50732010000300005>.
- Grassl P., Xenos D., Nyström U., Rempling R., Gylltoft K. (2013)**, CDPm2: A damage-plasticity approach to modelling the failure of concrete. *International Journal of Solids and Structures*, 50(24): 3805-3816, doi: <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2013.07.008>
- Gurtin M. E., Fried E., Anand L. (2010)**, *The mechanics and thermodynamics of continua*, p. 232, Cambridge, U.K.: Cambridge University Press, doi: <https://doi.org/10.1017/CBO9780511762956>
- Juárez-Luna G., Méndez-Martínez H., Ruiz-Sandoval M. E. (2014)**, An isotropic damage model to simulate collapse in reinforced concrete elements. *Latin American Journal of Solids and Structures*, 11(13): 2444-2459, doi: <https://doi.org/10.1590/S1679-78252014001300007>
- Kachanov L. M. (1958)**, Time of the Rupture Process under Creep Conditions, *Izvestia Akademii Nauk SSSR, Otdelenie tekhnicheskich nauk* . 8: 26-31.
- Lee U., Lesieutre G. A., Fang L. (1997)**, Anisotropic damage mechanics based on strain energy equivalence and equivalent elliptical microcracks. *International Journal of Solids and Structures*, 34(33-34): 4377-4397, doi: [https://doi.org/10.1016/S0020-7683\(97\)00022-X](https://doi.org/10.1016/S0020-7683(97)00022-X)
- Lemaitre J. (1985)**, A continuous damage mechanics model for ductile fracture. *Journal of Engineering Materials and Technology, ASME*, 107(1): 83-89, doi: <https://doi.org/10.1115/1.3225775>
- Lubliner J., Oliver J., Oller S. y O-ate E. (1989)**, A Plastic-Damage Model for Concrete. *International Journal of Solids and Structures*, 25(3): 229-326, doi: [https://doi.org/10.1016/0020-7683\(89\)90050-4](https://doi.org/10.1016/0020-7683(89)90050-4).
- Luccioni B. (2003)**, *Mecánica de daño continuo*, p. 4.1, Barcelona, España: CIMNE.
- Maimí P., Camanho P. P., Mayugo J. A., Dávila C. G. (2007)**, A continuum damage model for composite laminates: Part I—Constitutive model. *Mechanics of Materials*, 39(10): 897-908, doi: <https://doi.org/10.1016/j.mechmat.2007.03.005>.
- Martín P. E. (2001)**, *Modelo de daño anisótropo*. Tucumán, Argentina, Universidad Nacional de Tucumán.
- Mazars J., Hamon F., Grange S. (2015)**, A new 3D damage model for concrete under monotonic, cyclic and dynamic loadings. *Materials and Structures*, 48(11): 3779-3793, doi: <https://doi.org/10.1617/s11527-014-0439-8>.
- Oliver J., Cervera M., Oller S., Lubliner J. (1990)**, Isotropic damage models and smeared crack analysis of concrete. En *Proc. 2nd. Int. Conf. on Computer Aided Analysis and Design of Concrete Structures* (pp. 945-958). Swansea, U.K.: Pineridge Press.
- Oller S. (2001)**, *Fractura mecánica. Un enfoque global*, p. 199, Barcelona, España: CIMNE.
- Paredes J. A., Oller S., Barbat A. H. (2016)**, New Tension-Compression Damage Model for Complex Analysis of Concrete Structures. *Journal of Engineering Mechanics*, 142(10): 1-16, doi: [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)EM.1943-7889.0001130](https://doi.org/10.1061/(ASCE)EM.1943-7889.0001130).
- Pelà L., Cervera M., Roca P. (2013)**, An orthotropic damage model for the analysis of masonry structures. *Construction and Building Materials*, 41: 957-967, doi: <https://doi.org/10.1016/j.conbuildmat.2012.07.014>.
- Rodríguez L., Linero D. (2012)**, Modelación numérica del concreto simple con elementos finitos mediante la teoría de la plasticidad y la función de fluencia de Hu y Schnobrich. *Revista Ingeniería de Construcción*, 27(3): 129-144, doi: <https://doi.org/10.4067/S0718-50732012000300002>.
- Simulia D. S. (2010)**, *Abaqus analysis user's manual*. Pawtucket, USA: Dassault Systemes.
- Wang, Z., Jin, X., Jin, N., Shah, A. A., Li, B. (2014)**, Damage based constitutive model for predicting the performance degradation of concrete. *Latin American Journal of Solids and Structures*, 11(6): 907-924, doi: <https://doi.org/10.1590/S1679-78252014000600001>