

# SIMULACIÓN DE PROBLEMAS DE IMPACTO UTILIZANDO UN MÉTODO LAGRANGIANO AUMENTADO EN EL MARCO DE LA DINÁMICA NO SUAVE

Eliana Sánchez <sup>†</sup>, Alberto Cardona <sup>†</sup> y Federico Cavalieri <sup>†</sup>

<sup>†</sup>*Centro de Investigación de Métodos Computacionales (CIMEC), Universidad Nacional del Litoral-CONICET, Santa Fe, Argentina, [esanchez,acardona,fcavalieri]@cimec.unl.edu.ar*

**Resumen:** Los problemas de contacto e impacto han sido analizados a lo largo de los años desde un punto de vista exclusivamente matemático a partir del estudio de desigualdades variacionales, con aplicaciones a problemas de geometría simple. Más recientemente, las formulaciones variacionales fueron utilizadas junto a herramientas de análisis numérico para resolver problemas de ingeniería haciendo uso de técnicas de optimización en conjunto con el método de los elementos finitos. En este trabajo se presenta una formulación dual mixta basada en un Lagrangiano aumentado y el método de los elementos finitos aplicada a la solución de problemas de impacto. Las ecuaciones del movimiento se resuelven por medio del integrador temporal implícito  $\alpha$  generalizado no suave, donde las restricciones a nivel de posición y velocidad se satisfacen de manera exacta.

**Palabras clave:** *contacto, impacto, Lagrangiano aumentado, subdiferenciales*  
2000 AMS Subject Classification: 74M20

## 1. INTRODUCCIÓN

La solución de problemas de contacto mecánico o impacto, presentan severos problemas de convergencia cuando se usan técnicas del tipo Newton-Raphson debido a que son relaciones no suaves y multi-valuadas. Una de las aproximaciones ampliamente utilizadas para resolver este tipo de problemas es el de *penalidad*. Este método agrega un término al funcional de energía el cual regulariza las restricciones. En este caso, el desplazamiento es la única variable primaria en la formulación y, consecuentemente, la implementación computacional es relativamente sencilla. La principal desventaja es que el método admite penetración entre los cuerpos y el usuario debe elegir en forma arbitraria el valor de un parámetro, denominado factor de penalidad. La solución exacta es únicamente obtenida cuando el factor de penalidad toma un valor infinito, sin embargo, en términos computacionales, valores elevados de penalidad producen matrices mal condicionadas [8].

Una forma de evitar este inconveniente es por medio del uso de *multiplicadores de Lagrange*, que generan un problema de punto de silla que es resuelto en cada iteración. Normalmente, el método de multiplicadores de Lagrange se utiliza conjuntamente con un método de doble lazo tipo Uzawa [7]. De esta forma se resuelve el problema del mal condicionamiento, aunque produce un incremento en el tamaño de las matrices y en los tiempos de cómputo debido a la incorporación de los multiplicadores de Lagrange como variables globales del problema y a la utilización de un esquema de doble lazo.

Una combinación del método de penalidad y de multiplicadores de Lagrange es el denominado *Lagrangiano aumentado* el cual fue inicialmente propuesto por Hestenes y Powell [6, 4] para la resolución de problemas de optimización con restricciones de igualdad. La adición del término de penalidad a las restricciones del Lagrangiano permite obtener una función objetivo convexa la cual mejora la convergencia sin alterar la precisión de los resultados. Por ejemplo, Alart y Curnier [2] inspirados en el trabajo seminal de Rockafellar aplicado a optimización no lineal [5], utilizaron un Lagrangiano aumentado orientado a la resolución de problemas de contacto. Este Lagrangiano permite la regularización de los términos no diferenciales asociados al contacto dando un funcional diferenciable hasta su primera derivada, permitiendo utilizar un método Newton-Raphson estándar con excelentes tasas de convergencia.

En este trabajo se presenta una formulación para la simulación de impacto entre cuerpos rígidos y/o flexibles, donde la regularización del problema variacional se realiza con una aproximación dual mixta basada en el Lagrangiano aumentado de Alart y Curnier [2]. Por otro lado, las ecuaciones del movimiento son integradas con el integrador temporal  $\alpha$  generalizado no suave [9] y la descripción de la cinemática de los cuerpos se realiza mediante el Método de los Elementos Finitos (MEF).

## 2. DEFINICIÓN CONTACTO - LEY DE CONTACTO UNILATERAL

La solución general al problema del contacto unilateral en el marco del método de los elementos finitos viene dada por el siguiente problema no lineal de minimización sujeto a restricciones con desigualdad,

$$(\mathbf{U}, \boldsymbol{\nu}) = \operatorname{argmin} [II^c(\mathbf{U}, \boldsymbol{\nu})] \quad (1a)$$

$$g_N \geq 0, \quad \nu_N \geq 0, \quad \nu_N g_N = 0 \quad (1b)$$

donde  $II^c = -g_N \nu_N$  es el potencial de contacto,  $g_N$  es el huelgo en la dirección normal a la superficie de contacto de uno de los cuerpos contactores,  $\nu_N$  es un multiplicador de Lagrange que representa la fuerza de contacto (en problemas cuasi-estáticos) con la misma dirección que  $g_N$ ,  $\mathbf{U}$  es el vector de desplazamientos globales y por último,  $\boldsymbol{\nu}$  es el vector de multiplicadores de Lagrange globales. En contacto sin fricción se pueden presentar dos escenarios: i) *huelgo*, donde los cuerpos no están en contacto, entonces  $g_N > 0$  y  $\nu_N = 0$ , ver Fig.1-a y ii) *contacto*, donde  $g_N = 0$  y  $\nu_N > 0$ , ver Fig. 1-b. Estas dos condiciones se formulan matemáticamente mediante el conjunto de ecuaciones definidas en la Ec.(1b). Por último, en la tercera condición de la Ec.(1b), se presenta la condición de complementariedad que indica que  $g_N$  y  $\nu_N$  no pueden ser simultáneamente no nulos.

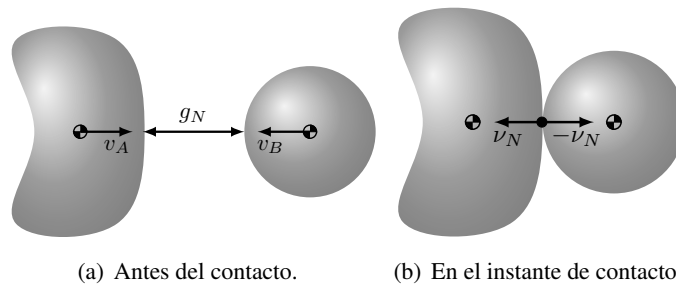


Figura 1: Contacto entre dos cuerpos rígidos

## 3. ENFOQUE SUBDIFERENCIAL PARA PROBLEMAS DE CONTACTO SIN FRICCIÓN

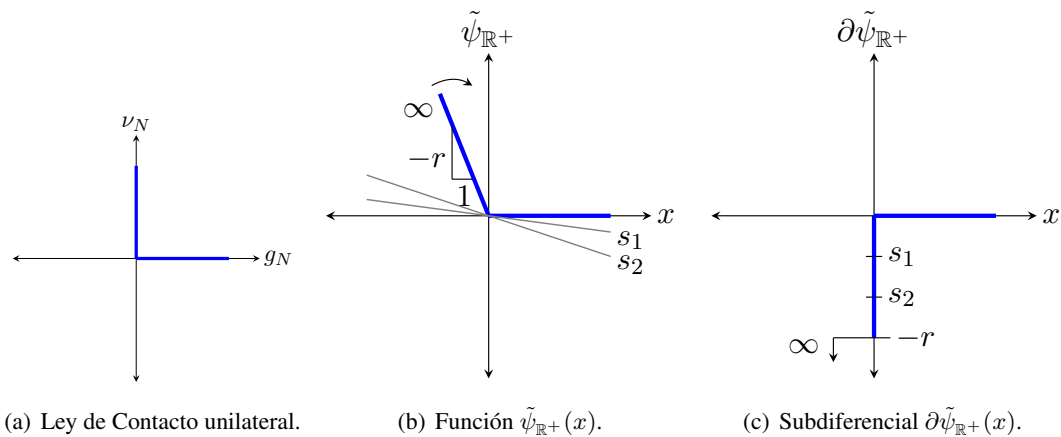


Figura 2: Contacto entre dos cuerpos rígidos

La Figura 1-a, que surge de una representación gráfica de las desigualdades de la Ec.(1b), muestra que la ley de contacto es una relación no suave y multi-valuada. En esta sección, se utilizará el concepto de subdiferencial para considerar la no diferenciabilidad del problema de contacto. Para ello, primero se define una función no diferenciable  $\psi$  en  $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} | x \geq 0\}$ , denominada función indicadora,

$$\psi_{\mathbb{R}^+}(x) = 0 \quad \text{si } x \geq 0 \quad \psi_{\mathbb{R}^+}(x) = \infty \quad \text{si } x < 0 \quad (2)$$

Luego,  $\psi_{\mathbb{R}^+}(x)$  puede aproximarse con una función lineal-constante (por partes)  $\tilde{\psi}_{\mathbb{R}^+}(x)$ , esto es,

$$\tilde{\psi}_{\mathbb{R}^+}(x) = 0 \quad \text{si } x \geq 0 \quad \tilde{\psi}_{\mathbb{R}^+}(x) = -rx \quad \text{si } x < 0 \quad \text{y } r \gg 1. \quad (3)$$

ver Fig. 2-b. Finalmente, derivando la función de la Ec. (3) cuando  $x \neq 0$  se tiene,

$$\frac{d}{dx} \tilde{\psi}_{\mathbb{R}^+}(x) = 0 \quad \text{si } x > 0 \quad \frac{d}{dx} \tilde{\psi}_{\mathbb{R}^+}(x) = -r \quad \text{si } x < 0 \quad (4)$$

cuya representación gráfica se muestra en la Fig.2-c. En un sentido clásico de análisis matemático, la función de la Ec.(3) no es diferenciable en el origen. Sin embargo, las derivadas a izquierda y a derecha existen y son las que se presentan en la Ec.(4). A partir del análisis convexo, la generalización de la derivada de  $\tilde{\psi}$  en el origen es el segmento  $[0, -r]$ . Este conjunto se llama subdiferencial de  $\tilde{\psi}$  en  $x = 0$  y se denota como  $\partial\tilde{\psi}(0)$ . Luego, cualquier elemento  $s$  de este conjunto se llama subgradiente y se escribe de la siguiente manera,

$$s \in \partial\tilde{\psi}(0) = [0, -r] \quad (5)$$

En el marco del análisis convexo [3], el subdiferencial de una función  $f(x)$  en un punto  $\bar{x}$  también se define como,

$$\partial f(\bar{x}) = \{s | f(x) \geq f(\bar{x}) + s(x - \bar{x})\} \quad (6)$$

Desde un punto de vista geométrico, un subgradiente en  $\bar{x}$  es la pendiente de cualquier línea que soporta la gráfica de una función convexa en ese punto, ver por ejemplo  $s_1$  y  $s_2$  en la Fig. 2-b. En la Eq.(5), haciendo que  $r$  tienda al infinito, el subdiferencial  $\partial\psi_{\mathbb{R}^+}(x)$  de la función indicadora  $\psi_{\mathbb{R}^+}(x)$  es

$$\partial\psi_{\mathbb{R}^+}(0) = [0, -\infty) \quad \text{si } x = 0. \quad \partial\psi_{\mathbb{R}^+}(x) = \frac{d}{dx} \tilde{\psi}_{\mathbb{R}^+}(x) = 0 \quad \text{si } x > 0 \quad (7)$$

Notar que  $\partial\psi_{\mathbb{R}^+}(x)$  no está definido para  $x < 0$ . La Figura 2-c muestra que el subdiferencial de la función indicadora es análoga a la función de la Fig. 2-a y que representa las condiciones de contacto, ver Ec.(1b). Por lo tanto, la Ec.(1b) se puede escribir de manera equivalente utilizando la Ec.(7), como una inclusión subdiferencial, es decir, están representadas por el subdiferencial de la función indicadora.

$$-\nu_N \in \partial\psi_{\mathbb{R}^+}(g_N) \quad (8)$$

Esto muestra que la función indicadora  $\psi_{\mathbb{R}^+}(x)$  se puede considerar como una función de pseudopotencial y la fuerza de contacto  $\nu_N$  se deriva de ella en forma subdiferencial.

#### 4. MÉTODO DEL LAGRANGIANO AUMENTADO

El problema de optimización con restricciones de la Ec. (1) se reformula siguiendo la propuesta de Alart y Curnier para problemas cuasi estáticos [2] por medio de un Lagrangiano aumentado:

$$\mathcal{L}^p(\mathbf{q}_{n+1}, \nu_{N,n+1}) = -kg_{N,n+1}\nu_{N,n+1} + \frac{p}{2}(g_{N,n+1})^2 - \frac{1}{2p} \text{dist}^2 [k\nu_{N,n+1} - pg_{N,n+1}, \mathbb{R}^+] \quad (9)$$

donde  $p > 0$  es un parámetro de penalización,  $k > 0$  es un factor de escala para los multiplicadores de Lagrange y  $\mathbf{q}$  es el vector de coordenadas nodales. Tanto  $p$  como  $k$  contribuyen a mejorar la tasa de convergencia sin afectar los resultados. Finalmente, la función  $\text{dist}(z, C)$  representa la distancia entre un punto  $z \in \mathbb{R}^n$  y un conjunto convexo  $C$ , ver [1]. En el caso de considerar efectos de impacto, se tiene que resolver la Ec.(1), pero a nivel de velocidad. En este caso, el Lagrangiano aumentado está dado por:

$$\mathcal{L}^v(\mathbf{v}_{n+1}, \Lambda_{N,n+1}) = -k\mathring{g}_{N,n+1}\Lambda_{N,n+1} + \frac{p}{2}(\mathring{g}_{N,n+1})^2 - \frac{1}{2p} \text{dist}^2 [k\Lambda_N - p\mathring{g}_N, \mathbb{R}^+] \quad (10)$$

donde  $\mathbf{v}_{n+1}$  es el vector de velocidades generalizadas,  $\Lambda_N$  es un multiplicador de Lagrange que representa el impulso en la dirección normal y  $\mathring{g}_{N,n+1} = g_{N\mathbf{q},n+1}\mathbf{v}_{n+1} + e_N g_{N\mathbf{q},n}\mathbf{v}_n$  es la ley de impacto de Newton con  $e_N \in [0, 1]$  denominado coeficiente de restitución y  $g_{N\mathbf{q}}$  el gradiente de la restricción. Las variaciones virtuales de los Lagrangianos de las Ecs.(9,10) dan como resultado los vectores de fuerzas correspondientes a nivel posición y velocidad, respectivamente y la linealización de estos vectores resulta en las matrices Hessianas correspondientes.

## 5. EJEMPLO NUMÉRICO

Para demostrar la capacidad del método propuesto, se resuelve el problema de un péndulo flexible, inicialmente en posición horizontal, que tiene una masa puntual  $m = 0,14$  kg unida a uno de sus extremos y que cae debido a la acción de la gravedad y luego impacta contra un obstáculo rígido en  $(0,-0.3)$ . El péndulo se discretiza con 4 elementos finitos de viga cuyas propiedades mecánicas y geométricas se muestran en la Fig. 3-a. El desplazamiento y la velocidad del extremo libre de la viga se presentan en las Figs. 3-b-c, respectivamente. Se observa que el desplazamiento es continuo pero no diferenciable en los instantes en que se produce el contacto, a diferencia de la velocidad que presenta saltos instantáneos en esos instantes así como también oscilaciones debido a la flexibilidad del péndulo.

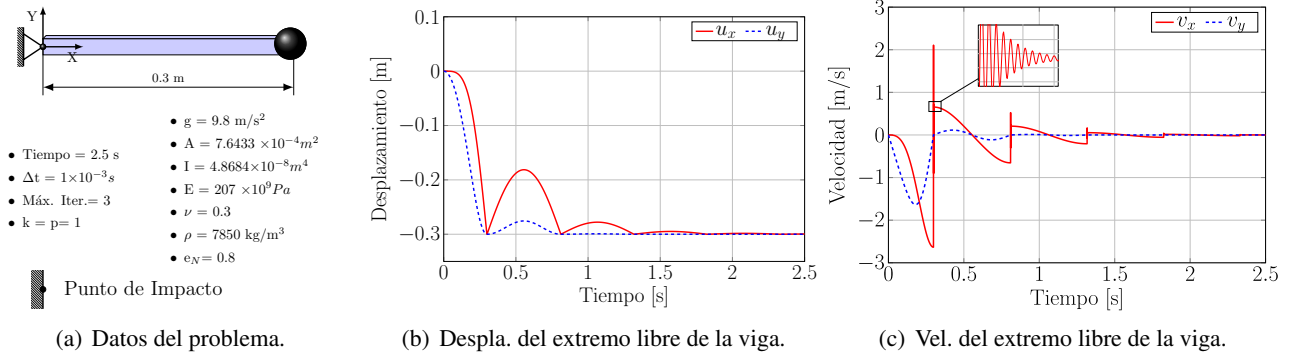


Figura 3: Péndulo simple que impacta contra un obstáculo rígido.

## 6. CONCLUSIONES

En este trabajo se presentó una formulación que permite resolver problemas de impacto entre cuerpos rígidos y/o flexibles mediante el método de los elementos finitos. A partir del ejemplo numérico, se observa que las restricciones de contacto se cumplen exactamente tanto a nivel posición como velocidad, es decir, no hay penetración entre los cuerpos contactores. Como principal ventaja, a diferencia del método de penalidad, los resultados numéricos obtenidos no dependen de la definición específica de ningún coeficiente de penalidad.

## AGRADECIMIENTOS

Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas a través del proyecto PIP11220200101688CO y de la Universidad Tecnológica Nacional a través de los proyectos AMECAFE0008102TC.

## REFERENCIAS

- [1] R.I. LEINE AND N. WOUW, *Stability and Convergence of Mechanical Systems with Unilateral Constraints*, Berlin Heidelberg/Germany, Springer, (2008).
- [2] P. ALART AND A. CURNIER, *A mixed formulation for frictional contact problems prone to Newton like solution methods*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 92 (1991), pp. 353-375.
- [3] M.M. MÄKELÄ AND P. NEITTAANMÄKI, *Nonsmooth optimization: analysis and algorithms with applications to optimal control*, World Scientific, (1992).
- [4] POWELL, M.J.D., *A method for nonlinear constraints in optimization*, In: Fletcher R (ed) Optimization. Academic, New York, (1969), pp. 283-298.
- [5] R.T. ROCKAFELLAR, *A dual approach to solving nonlinear programming problems by unconstrained optimization*, Math.Prog. 5, (1973), pp. 354-373.
- [6] M.R. HESTENES, *Multiplier and gradient methods*, J. Optim. Theory and Applic., Vol. 4 (1969), pp. 303-320.
- [7] R. GLOWINSKI AND P. LETALLEC, *Augmented Lagrangian and Operator-Splitting Methods in Nonlinear Mechanics*. SIAM, Vol. 79 (1989), pp. 379-416.
- [8] N. KIKUCHI AND J.T. ODEN, *Contact Problems in Elasticity: A Study of variational Inequalities Constrains and Finite Element Method*, SIAM, Philadelphia, (1988).
- [9] A. COSIMO, J.GALVEZ, F.J.CAVALIERI, A.CARDONA AND O.BRÜLS, *A robust nonsmooth generalized- $\alpha$  scheme for flexible systems with impacts*. *Multibody System Dynamics*, Multibody System Dynamics, Vol 2, (2020), pp. 127-149.