

TENDENCIAS EN EL EMPLEO DE MATEMÁTICAS DISCRETAS PARA EL DISEÑO CONCEPTUAL DE MECANISMOS

Martín A. Pucheta[†] y Alberto Cardona[‡]

[†]*Centro de Investigación en Informática para la Ingeniería (CIII) y CONICET, Facultad Regional Córdoba - Universidad Tecnológica Nacional, Maestro M. López esq. Cruz Roja Argentina, X5016ZAA Córdoba, Argentina, mpucheta@frc.utn.edu.ar, ciiii.frc.utn.edu.ar*

[‡]*Centro de Investigación de Métodos Computacionales (CIMEC), Universidad Nacional del Litoral-CONICET, Predio CONICET "Dr. Alberto Cassano", Colectora Ruta 168 s/n, Paraje "El Pozo", 3000 Santa Fe, Argentina, acardona@unl.edu.ar, www.cimec.org.ar*

Resumen: En el diseño conceptual de mecanismos se emplea un modelado de los mecanismos mediante grafos y multigrafos. La enumeración de estos mecanismos es un problema combinatorio difícil. Sobre los vértices y aristas de estos grafos deben realizarse asignaciones de propiedades estructurales y funcionales sin repetición. Utilizando el grupo de automorfismos de vértices o aristas de un multigrafo, se pueden realizar asignaciones en forma eficiente minimizando y evitando la detección de isomorfismos para generar, por ejemplo, grafos de cadenas cinemáticas. En este trabajo se describen las aplicaciones existentes en el estado del arte para la enumeración de cadenas cinemáticas de mecanismos y se presentan las herramientas matemáticas empleadas en una implementación computacional eficiente para la enumeración estructural de cadenas cinemáticas de mecanismos.

Palabras clave: *multigrafos, grupo de automorfismos, combinatoria, cadenas cinemáticas, mecanismos*

2000 AMS Subject Classification: 05C30 - 53A17 - 20B25 - 20B40

1. INTRODUCCIÓN

El diseño conceptual de mecanismos es una actividad en la cual se pueden emplear eficientemente métodos computacionales para asistencia en la toma de decisiones del diseñador incrementando las posibilidades de lograr una innovación en el diseño del producto al cual pertenece el mecanismo. Sin herramientas computacionales y técnicas combinatorias sería prácticamente imposible evaluar las numerosas alternativas que se presentan como solución a un problema de diseño de mecanismos.

En la etapa de diseño conceptual se pretende generar en forma automática alternativas que cumplan, desde un principio, la mayor cantidad de requerimientos, y evaluar los requerimientos restantes a posteriori, en el diseño detallado. El diseño detallado del mecanismo incluyendo la flexibilidad de las partes, puede ser automatizado mediante herramientas de mecánica computacional de multicuerpos y sólidos flexibles, lo cual se puede combinar, además, con técnicas de optimización. Todas estas etapas forman parte del prototipo que admite un modelado matemático y numérico. Luego sigue la etapa de seleccionar los conceptos más prometedores para construir los prototipos reales, probarlos y medirlos, evaluando el resto de los requerimientos. El éxito de esta etapa es fuertemente dependiente de lo abarcativa que fue la generación de conceptos.

Dentro del área de investigación de los mecanismos existe una rama de estudio denominada síntesis estructural que consiste en generar topologías de mecanismos para un problema dado. El diseño de mecanismos mediante intuición es milenario mientras que el diseño mediante técnicas sistemáticas y computacionales se remonta a los años 60 del siglo pasado [13]. En esta área de enumeración matemática de alternativas se aplicó fructíferamente la representación de mecanismos con grafos, y con ellos, se implementaron algoritmos haciendo uso de las matemáticas discretas y el análisis combinatorio [1]. Las simetrías en grafos de cadenas cinemáticas de mecanismos utilizando grupos de automorfismos se identificaron recién en los años 90 [14, 3] y la enumeración no isomórfica de grafos propuesta por McKay [2] se aplicó para enumerar cadenas cinemáticas en el 2005 por Sunkari y Schmidt [12], y en 2009 por Simoni *et al.* [11].

Un problema abierto generado por el gran tamaño de las bases de datos de cadenas cinemáticas y mecanismos [7] es el acceso automático o búsqueda mediante reglas de la cadena que satisfagan ciertos requerimientos estructurales (grados de libertad, cuerpo fijo, cuerpo actuador) y funcionales (cuerpos, juntas, o subcadenas con determinada funcionalidad) del producto que posee al mecanismo [5, 8]. Otro foco de las investigaciones está en hallar una ecuación de movilidad válida para todo tipo de cadena cinemática

(incluyendo sus subcadenas) cuando en la misma se generan todos los mecanismos posibles mediante la consideración de todas las formas sin repetición de elegir el eslabón fijo, de elegir todo tipo de unión cinemática y cualquier condición geométrica de sus eslabones. Si se consideran, además, todas los posibles cambios de grados de libertad obtenidos por modificar los vínculos en las uniones cinemáticas o por admitir que se generen contactos entre sus eslabones, se obtienen mecanismos denominados metamórficos que pueden cambiar de función. En este contexto aparece la mayor explosión combinatoria. Un ejemplo de mecanismos metamórficos, son los contenidos en los interruptores de circuitos eléctricos de bajo voltaje con accionamiento externo manual e interno del tipo térmico y diferencial electromagnético [6]. Éstos tienen la función de abrir un circuito ante un desperfecto (sobrecalentamiento o puesta a tierra) para cualquier posición de la palanca manual (aún cuando esté trabada).

En este trabajo se presentan las generalidades sobre el modelado matemático del diseño conceptual de mecanismos, las herramientas matemáticas empleadas en la enumeración de cadenas cinemáticas y finalmente se describen las investigaciones a seguir desarrollando en esta línea.

2. GENERALIDADES

Un *grafo no dirigido*, denotado como $G(V, E)$, es una estructura algebraica (bajo la operación de composición de permutaciones descrita en la Subsec. 2.2) compuesta por un conjunto no vacío de *vértices* V y un conjunto de *aristas* no dirigidas $E \subseteq V \times V$ conectando los vértices. Se asume que cada arista conecta un par de vértices distintos y no hay autoaristas. Una *cadena cinemática* se puede representar por un grafo en donde n cuerpos (o eslabones) son representados por los vértices del grafo y las j uniones cinemáticas entre cuerpos están representadas por aristas que conectan los vértices asociados. El tamaño del conjunto de vértices V se denota por $v = n = |V|$, y el del conjunto de aristas por $e = j = |E|$. Con esta representación pueden modelarse matemáticamente a los mecanismos si uno de los cuerpos es seleccionado como el eslabón fijo o de referencia; véase por ejemplo, el mecanismo de la Figura 1.

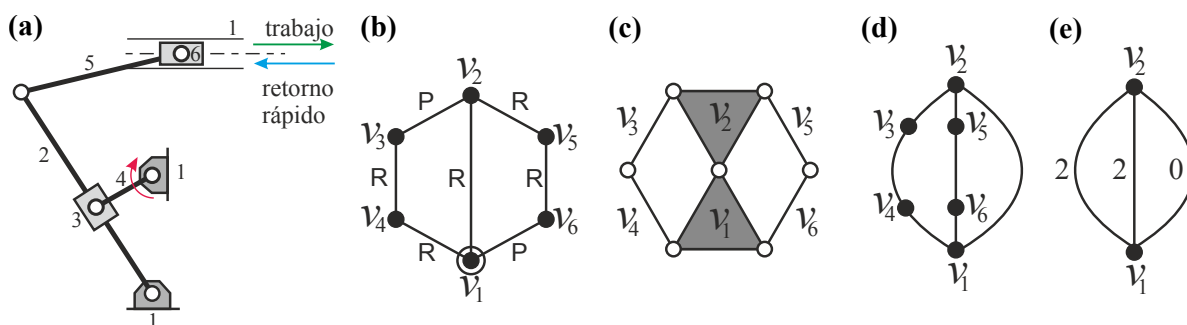


Figura 1: Mecanismo de retorno rápido (a) y su grafo asociado (b). La cadena cinemática, sin tener en cuenta el tipo de junta y eslabón fijo, es la (c), su grafo correspondiente es el (d), que se obtiene de expandir en cadenas binarias el multigrafo base (e).

Un problema cinemático en donde hay partes a actuar y partes a mover con una cinemática precisa también tiene representación de grafo, digamos que sea $G_{ini}(V_{ini}, E_{ini})$, pero éste no es necesariamente un grafo conexo. Si este grafo se busca en una base de datos de mecanismos como un subgrafo de algún grafo de mecanismo, lo que se obtiene son las formas válidas de agregarle partes a las iniciales del problema para lograr un mecanismo factible con ciertas propiedades estructurales, por ejemplo, con ciertos grados de libertad. Una detección del grafo $G_{ini}(V_{ini}, E_{ini})$ como subgrafo de un grafo de mecanismo $G(V, E)$ satisface $V_{ini} \subseteq V$ y $E_{ini} \subseteq E$ donde $E_{ini} \subseteq V_{ini} \times V_{ini}$; esto se puede escribir como $G_{ini} \subseteq G$. Esto se puede realizar con facilidad empleando algoritmos en grafos [5].

Para construir la base de datos de cadenas cinemáticas y mecanismos, primero se deben enumerar las cadenas cinemáticas asumiendo que sólo poseen pares cinemáticos simples de un grado de libertad y que los cuerpos sólo entran en contacto entre sí a través de dichos pares. Para simplificar la complejidad algorítmica de la enumeración de cadenas cinemáticas se utiliza un enfoque jerárquico o por niveles, en el cual

primero se enumeran multigrafos con vértices de grado superior a 2 y luego se agregan los vértices de grado 2 o binarios, formando cadenas binarias. Los multigrafos, llamados así porque admiten múltiples aristas entre dos vértices, son relativamente pocos para mecanismos de pocos lazos o ciclos (1 a 5). Los grafos obtenidos deben satisfacer un conjunto de restricciones: (i) deben cumplir una ecuación de grado de libertad requerido, (ii) deben ser biconexos, (iii) no deben tener subgrafos biconexos o subcadenas bloqueadas con grado de libertad nulo o negativo, (iv) no debe existir fraccionamiento de vértice o arista. Es para destacar que no hay restricción de planaridad del grafo, es decir, existen cadenas cinemáticas válidas cuyos grafos son homeomorfos al conocido grafo bipartito no plano $K_{3,3}$. Sobre las aristas de cada grafo o multigrafo base se asignan las cadenas binarias, sin repetición, y se obtiene un elevado número de cadenas cinemáticas [13].

2.1. GRAFOS Y PROPIEDADES ESTRUCTURALES DE MECANISMOS

La cadena cinemática asociada a un grafo tiene, según la ecuación de Euler [1], un número de lazos independientes $L = j - n + 1$ y un número total de lazos $\tilde{L} = L + 1$ si se considera a un lazo periférico. La movilidad F de una cadena cinemática de n cuerpos y j uniones cinemáticas se puede calcular como la diferencia entre las libertades de los cuerpos y las restricciones impuestas por las uniones cinemáticas

$$F = \underbrace{\lambda(n - 1)}_{\text{libertades de cuerpos}} - \underbrace{(\lambda - 1)j}_{\text{restricciones de uniones}} = j - \lambda L \quad (1)$$

donde un cuerpo es el fijo y es referencia del movimiento relativo de los otros cuerpos, todas las uniones son simples (permiten sólo un grado de libertad relativo de movimiento entre dos cuerpos), y λ es un parámetro que describe el espacio de movimiento (vale $\lambda = 2$ para trenes de engranajes, $\lambda = 3$ para mecanismos planos y esféricos, y $\lambda = 6$ para mecanismos espaciales). Esta ecuación se conoce como el criterio de movilidad de Cheychev-Grübler-Kutzbach (CGK) [13] y puede no ser satisfecha cuando se asignan propiedades geométricas a las uniones y a los eslabones.

2.2. GRUPOS FINITOS Y APLICACIÓN A LA ASIGNACIÓN SIN REPETICIÓN EN MULTIGRAFOS

Los grupos permiten calcular algorítmicamente las simetrías en grafos y multigrafos para realizar asignaciones sin repetición de propiedades específicas, ya sea sobre vértices o aristas. Las cadenas cinemáticas se obtienen mediante la asignación de cadenas binarias de diferentes longitudes sobre las aristas de grafos y multigrafos denominados bases.

Una operación binaria \bullet sobre un conjunto G es una función de $G \times G \mapsto G$ tal que: (I) Si H es un subconjunto de G , luego H es *cerrado* bajo \bullet sí y sólo si $h_1 \bullet h_2 \in H$ para todo $h_1, h_2 \in H$; lo cual significa que \bullet es también una operación binaria sobre H . (II) La operación binaria \bullet es *asociativa* en G si $(g_1 \bullet g_2) \bullet g_3 = g_1 \bullet (g_2 \bullet g_3)$ para todo $g_1, g_2, g_3 \in G$; estas operaciones se pueden expresar sin ambigüedad como $g_1 \bullet g_2 \bullet g_3$. La operación binaria no necesita ser *conmutativa*. Luego, un *grupo* se define como el conjunto de elementos G junto con una operación binaria asociativa \bullet definida sobre G tal que: (A) Existe un elemento único $I \in G$, denominado *elemento identidad*, que satisface $g \bullet I = I \bullet g = g$, para todo $g \in G$; y (B) para cada $g \in G$ existe un único elemento $g^{-1} \in G$, denominado *elemento inverso*, tal que $g^{-1} \bullet g = g \bullet g^{-1} = I$.

En el contexto de los grafos, la operación binaria es la composición de permutaciones del conjunto de los vértices sujeto a una condición impuesta sobre lo que ocurre con las aristas. En adelante se retoma la notación de la letra G para el grafo.

Sea el par ordenado $\{u, v\}$ una arista del grafo $G(V, E)$ y p una permutación de V . Una permutación de arista está definida como el par no ordenado resultante de los vértices permutados $p(\{u, v\}) \triangleq \{p(u), p(v)\}$. Una permutación p de $V \in G$ es un *automorfismo del grafo* G , denotado como G^p , si $p(u, v) \in E$ cuando $\{p(u), p(v)\} \in E$ [3]. En otras palabras, un automorfismo es una permutación de vértices que preserva la adyacencia de aristas y por lo tanto, el grafo reetiquetado como G^p es isomorfo a G , es decir, existe una biyección entre sus vértices. Luego, el *grupo de automorfismos de un grafo* $G(V, E)$, denotado $\text{Aut}(G)$, es el conjunto de todas las permutaciones sobre V que son automorfismos de G e induce al conjunto de todos

los grafos que son isomorfos a G . Para calcular el grupo de automorfismos en multigrafos, al requerimiento de preservar adyacencia de aristas se le agrega el requerimiento de preservar multiplicidad. Desde el grupo de automorfismos, se pueden identificar los vértices que son simétricos o las aristas que son simétricas para realizar asignaciones sin repetición.

3. RESULTADOS

Siguiendo el enfoque de Tuttle [14] se utilizaron los grupos de simetría de aristas en grafos y multigrafos con vértices de grado mayor que 2 considerados como *bases*, para asignarles cadenas binarias de vértices de grado 2 sin repetición. En esta asignación se utilizaron los grupos de simetría de aristas para elegir un representante de las aristas y en forma recursiva se eliminaron las asignaciones isomórficas. En un trabajo reciente de Pucheta y Cardona [9], se extendió por primera vez esta metodología para incluir todo el espacio de movimiento $\lambda = \{2, \dots, 6\}$, los grados de libertad $F = \{1, \dots, 6\}$ y los números de lazos $L = \{2, \dots, 5\}$, configurando una base de datos de un elevado número de cadenas cinemáticas de mecanismos en donde se eliminaron las cadenas cinemáticas que contenían subcadenas biconexas bloqueadas. Esta base de datos fue exhaustivamente validada con las ya existentes en la literatura [13, 12, 11].

4. CONCLUSIONES

El empleo de matemáticas discretas en el diseño conceptual de mecanismos es un área de vigente interés porque permite resolver problemas de alta complejidad combinatoria. En particular, el cálculo computacional de los grupos de automorfismos del grafo que representan las simetrías subyacentes en el mecanismo permite abordar el problema de enumerar cadenas cinemáticas en una forma simple. A futuro, se pueden utilizar las cadenas cinemáticas obtenidas junto con los grupos de automorfismos y en combinación con teoría de helicoides [4] para asignar tipos de uniones cinemáticas con sus restricciones geométricas para enumerar mecanismos paralelos y mecanismos espaciales sofisticados con aplicación práctica en dispositivos mecánicos y en robótica moderna [10].

AGRADECIMIENTOS

Este trabajo recibió apoyo económico del *Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas* (PIP 1105), la *Agencia Nacional de Promoción Científica y Tecnológica* (PICT 2013-2894), la *Universidad Tecnológica Nacional* (PID 3935) y la *Universidad Nacional del Litoral* (CAI+D2011 PI 506).

REFERENCIAS

- [1] A. GIBBONS, *Algorithmic graph theory*, Cambridge University Press, Cambridge, Great Britain, 1985.
- [2] B. D. MCKAY, *Practical Graph Isomorphism*, *Congressus Numerantium*, 30 (1981), pp. 45–87.
- [3] D. L. KREHER, D. R. STINSON, *Combinatorial algorithms: generation, enumeration and search*, CRC Press, 1999.
- [4] X. KONG, C. GOSSELIN, *Type Synthesis of Parallel Mechanisms*, Springer T. in Adv. Robotics, Vol. 33, Berlin, 2007.
- [5] M. PUCHETA, A. CARDONA, *An automated method for type synthesis of planar linkages based on a constrained subgraph isomorphism detection*, *Multibody Syst. Dyn.* 18 (2) (2007), pp. 233–258.
- [6] M. PUCHETA, A. BUTTI, V. TAMELLINI, A. CARDONA, L. GHEZZI, *Topological synthesis of planar metamorphic mechanisms for low-voltage circuit breakers*, *Mech. Based Des. Struc.* 40 (4) (2012), pp. 453–468.
- [7] M. A. PUCHETA, N. E. ULRICH, A. CARDONA, *Automated sketching of non-fractionated kinematic chains*, *Mech. Mach. Theory* 68 (2013), pp. 67–82.
- [8] M. PUCHETA, A. CARDONA, *Topological and dimensional synthesis of planar linkages for multiple kinematic tasks*, *Multibody Syst. Dyn.* 29 (2) (2013), pp. 189–211.
- [9] M. PUCHETA, A. CARDONA, *Enumeration of Non-fractionated Kinematic Chains*, (en revisión) (2017).
- [10] B. SICILIANO, O. KHATIB, *Springer Handbook of Robotics*, Advanced Textbooks in Control and Signal Processing, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, Würzburg, 2008.
- [11] R. SIMONI, D. MARTINS, A. CARBONI, *Enumeration of kinematic chains and mechanisms*, *Proc. Inst. Mech. Eng. C J. Mech. Eng. Sci.* 223 (4) (2009), pp. 1017–1024.
- [12] R. P. SUNKARI, L. C. SCHMIDT, *Structural synthesis of planar kinematic chains by adapting a McKay-type algorithm*, *Mech. Mach. Theory* 41 (9) (2006), pp. 1021–1030.
- [13] L. TSAI, *Mechanism Design: Enumeration of Kinematic Structures According to Function*, CRC Press, Boca Raton, 2001.
- [14] E. R. TUTTLE, *Generation of planar kinematic chains*, *Mech. Mach. Theory* 31 (6) (1996), pp. 729–748.