

*Un enfoque basado en la teoría de estabilidad de Lyapunov*

## “Análisis del control de posición de un manipulador robótico con compensación de gravedad”

### RESUMEN

*El control de posición (regulación) es una temática de gran importancia en diferentes ámbitos de aplicación; tales como pintado de objetos y estibado. Este problema se analiza en base al movimiento del efector terminal del manipulador desde cualquier posición inicial hacia la posición deseada. Este hecho se traduce en que la  $i$ -ésima articulación del manipulador debe moverse hacia la  $i$ -ésima posición deseada. En el presente artículo se propone un método de análisis sustentado en dos fases. En la primera se construye la correspondiente ecuación en lazo cerrado en términos de las variables de estado que definen el problema del control de posición con compensación de gravedad, combinando la ley de control con la ecuación del modelo dinámico del manipulador. En la segunda fase, se lleva a cabo el análisis de estabilidad en el sentido de Lyapunov y la unicidad del punto de equilibrio del sistema dinámico en estudio.*

*Palabras Clave: manipulador; modelo dinámico; control de posición; sistema dinámico; estabilidad*

### ABSTRACT

*Position control (regulation) is a topic of great importance in different fields of application; such as painting of objects and stowage. This problem is analyzed based on the movement of the end effector of the manipulator from any initial position towards a certain desired position. This fact means that the  $i$ -th joint of the manipulator must move towards the  $i$ -th desired position. This article proposes an analysis method based on two phases. In the first one, the corresponding closed-loop equation is constructed in terms of the state that define the gravity compensated position control problem, combining the control law with the equation of the dynamic model of the manipulator. In the second phase, the analysis of stability in the sense of Lyapunov and the uniqueness of the equilibrium point of the dynamical system under study is carried out.*

*Keywords: handler; dynamic model; position control; dynamic system; stability*

### 1. Introducción

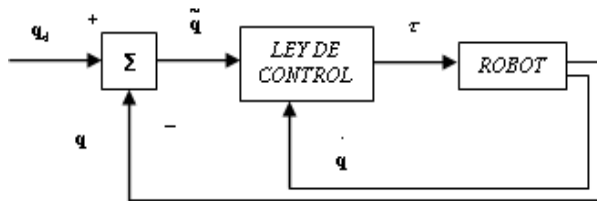
El problema general de control descrito en términos de las coordenadas articulares de robots manipuladores, es el control de trayectoria o “control de movimiento”; el cual consiste en la obtención de los pares  $\tau$  aplicados a los servos actuadores que forman las articulaciones, a los efectos de que las posiciones asociadas a las coordenadas articulares del manipulador  $q(t)$  sigan con la mayor precisión posible a la posición articular deseada  $q_d(t)$ . Asimismo, el efector terminal del manipulador debe seguir dicha trayectoria tan cerca como sea posible en el marco del espacio de trabajo del robot [1].

Un caso especial de control de movimiento es el de control de posición, en el cual no existe una referencia variable en el tiempo que el manipulador lleve a cabo seguimiento, tal como sucede en el control de trayectoria. En otros términos, la trayectoria especificada en el espacio de trabajo del robot constituye un punto en dicho espacio; siendo entonces que en el espacio articular, la posición deseada  $q_d$  es constante en el tiempo (set point) [2]. Este es el caso

que se aborda en el presente trabajo. Desde un punto de vista formal, el problema de control de posición se focaliza en hallar una ley de control  $\tau$  (función vectorial) que suministre los pares que se deben aplicar a las articulaciones o servomotores, de manera que la posición actual  $q(t)$  del robot se aproxime asintóticamente hacia la posición deseada  $q_d$ , y la velocidad articular tienda a cero ( $\dot{q}(t) \rightarrow 0$ ), sin importar las condiciones iniciales. Si se plantea el problema de control en función del vector de errores de posicionamiento  $e(t) = q_d - q(t)$ , el objetivo del control de posición se cumple si el vector de error de posicionamiento y el de velocidad articular tienden a cero [3]. La ecuación (1) refleja estos conceptos en términos del vector de estados  $q(t)$  y  $\dot{q}(t)$ .

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \begin{bmatrix} \dot{q}(t) \\ q(t) \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \forall t \geq 0 \quad (1)$$

En la Fig. 1 se ilustra el diagrama de bloques para un sistema de control de posición en lazo cerrado de un robot, donde la variable  $\tau$  representa la señal de control.



La posición instantánea del robot la suministra el sensor encoder, y por diferenciación numérica se puede obtener la velocidad articular.

**Figura1. Diagrama de bloques para control de posición en lazo cerrado**

Es importante destacar en esta instancia de exposición, que un algoritmo de control de posición se focaliza en generar una zona de atracción en la ecuación de lazo cerrado formada por el modelo dinámico del robot y la estructura matemática de dicho algoritmo; esto significa que el punto de equilibrio sea asintóticamente estable. En este sentido y tomando al robot manipulador como un sistema dinámico, la idea central del esquema de control se manifiesta en la estabilidad asintótica global, lo que explicita la existencia y unicidad del punto de equilibrio. También resulta sustancial la convergencia asintótica de la solución  $x(t)$  del sistema al punto de equilibrio conforme el tiempo tiende a infinito. El estudio de la función candidata de Lyapunov, teorema de Lasalle y conceptos como el de zona de atracción, punto de equilibrio y estabilidad asintótica se desarrollan en la siguiente sección y se aplican en el caso de estudio.

En esta primera fase de experimentación, el grupo de investigación realiza el abordaje de estas cuestiones a partir de la propuesta de una estrategia de control con compensación de gravedad que cumpla con el objetivo de control reflejado en la ecuación (1).

## 2. Marco teórico

Los modelos dinámicos de los manipuladores robóticos se caracterizan por ecuaciones diferenciales ordinarias no lineales y no autónomas. De esta forma, las técnicas de diseño y los procedimientos de sintonía que se emplean en sistemas lineales, puedan ser aplicados de manera limitada en la síntesis de controladores con alto desempeño para estos dispositivos. Por tal razón, y en función de la elevada precisión y velocidad en los movimientos que requieren estos dispositivos, es que se emplean técnicas de control más elaboradas a los efectos de obtener controladores con mayor nivel de prestaciones. El diseño de algoritmos de control para un robot manipulador de “n” grados de libertad requiere

conocer su modelo dinámico; en especial, cuando la técnica de diseño del controlador se sustenta en la estructura de dicho modelo, tal como es el caso de la teoría de estabilidad de Lyapunov [4]. Por lo tanto, los conceptos de control clásico como Bode, root locus y Nyquist entre otros son específicos de sistemas lineales [5]; y, en consecuencia, no son aplicables a robots manipuladores, dado que su estructura es la de un sistema dinámico no lineal.

### A. Modelo Dinámico de robots manipuladores

Este modelo exhibe de manera explícita los principales fenómenos físicos presentes en la estructura mecánica del sistema – robot; tales como, fuerzas centrífugas y de Coriolis, efectos inerciales, par gravitacional y fenómenos de fricción (viscosa, Coulomb y estática). La descripción matemática del modelo dinámico de un robot manipulador de n grados de libertad, está dada por la ecuación diferencial no lineal (2):

$$\tau(t) = M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) + F_f(\dot{q}, f_e) \quad (2)$$

Donde  $\tau(t)$  es el vector de fuerzas o pares que se aplica a cada articulación,  $q(t) \in \mathbb{R}^n$  es el vector de posiciones articulares,  $\dot{q}(t) \in \mathbb{R}^n$  es el vector de velocidades articulares,  $\ddot{q}(t) \in \mathbb{R}^n$  es el vector de aceleraciones articulares,  $M(q) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es la matriz de inercia que representa el cambio de estado de movimiento del robot,  $C(q, \dot{q}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es la matriz de fuerzas centrífugas (fuerzas radiales en movimientos curvilíneos hacia adentro del centro de curvatura) y de Coriolis (esta fuerza representa la desviación del movimiento de traslación a raíz de su componente de rotación),  $G(q) \in \mathbb{R}^n$  es el vector de pares gravitacionales (vector gradiente de la energía potencial) y

$F_f(\dot{q}, f_e) \in \mathbb{R}^n$  es el vector de pares de fricción (viscosa, Coulomb y estática) de cada articulación del robot. Cabe señalar, que la expresión (2) es una ecuación diferencial compleja, multivariable con dinámica fuertemente acoplada y “no lineal” en el vector de

estados  $[q^T, \dot{q}^T]^T$ ; además de ser válida cuando el robot tiene una estructura en cadena cinemática abierta y que no incluye el fenómeno de elasticidad [6].

### B. Formulación Lagrangiana

Las ecuaciones de movimiento de Lagrange constituyen una potente herramienta analítica para el modelado de robots manipuladores [7]; dado que permiten describir la dinámica del robot a partir de un balance de energía, la cual se expresa en términos de la energía cinética y potencial de sus eslabones. Para realizar la formulación Lagrangiana, es preciso contar con las expresiones de la cinemática directa del manipulador, que permite llevar a

cabo cuatro procedimientos de cálculo: 1) cálculo de la energía cinética  $(K(q(t), \dot{q}(t)))$ , 2) cálculo de la energía potencial  $(U(q(t)))$ , 3) cálculo del Lagrangiano  $(L = K(q(t), \dot{q}(t)) - U(q(t)))$  y 4) formulación de las ecuaciones escalares dinámicas de movimiento de Lagrange para un robot manipulador de n grados de libertad (gdl); las cuales se desarrollan para cada uno de ellos (3), y donde el miembro  $\tau - F_f(q, \dot{q})$  se refiere a fuerzas o pares no conservativos en cada articulación.

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial L(q, \dot{q})}{\partial \dot{q}_i} \right] - \frac{\partial L(q, \dot{q})}{\partial q_i} = \tau - F_f(q, \dot{q}) \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (3)$$

### C. Sistemas dinámicos

Los sistemas dinámicos son modelos matemáticos con ecuaciones diferenciales que describen los fenómenos físicos presentes en el manipulador. Para el análisis y el diseño en robótica es habitual transformar el modelo dinámico a una ecuación diferencial de primer orden (ode), haciendo uso de la representación en variables de estado. La estructura de una ecuación diferencial ordinaria de primer orden es como la (4), pudiendo ser la representación de un sistema mecánico con dinámica lineal y no lineal [8].

$$\dot{x} = f(x) \quad (4)$$

Donde  $x \in \mathbb{R}^n$  es la variable de estado fase que suministra información interna acerca de la dinámica del sistema mecánico, siendo función continua del tiempo  $x = x(t)$  y  $n \in \mathbb{N}$ . La derivada temporal de la variable de estado existe y es continua en el tiempo:  $\dot{x} \in \mathbb{R}^n$  y  $\dot{x} = \dot{x}(t)$ . La función  $f(x)$  es un mapeo vectorial  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  en la variable de estado  $x(t)$ . La estructura (4) se corresponde con un sistema dinámico autónomo, dado que el tiempo  $t$  como variable independiente está presente de forma implícita, es decir  $x = x(t)$ . Una gran mayoría de los sistemas mecánicos son de esta forma, teniendo en cuenta que los parámetros del modelo dinámico permanecen invariantes en la línea de tiempo.

### D. Estabilidad en el sentido de Lyapunov

Esta teoría permite analizar el comportamiento de sistemas dinámicos lineales y no lineales de acuerdo a la ecuación (4); para lo cual, es necesario fijar ciertos conceptos:

- Punto de equilibrio: es un vector constante  $x_e \in \mathbb{R}^n$  del sistema (4) si  $f(x_e) = \mathbf{0} \forall t \geq 0$ . Como consecuencia de esta definición, si la condición inicial  $x(0) \in \mathbb{R}^n$  es un equilibrio ( $x(0) = x_e \in \mathbb{R}^n$ ), entonces se satisface  $x(t) = x_e \forall t \geq 0$  y  $\dot{x}(t) = 0 \forall t \geq 0$ .

Generalmente se asume que el origen  $x = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$  es un equilibrio de un sistema dinámico representado por la ecuación (4). El vector  $x_e$  constituye un ente dinámico en el cual todas las fuerzas del sistema hallan su equilibrio; siendo fundamental en control de robots analizar la estabilidad del vector  $x_e$ .

- Estabilidad del punto de equilibrio y zona de atracción: en la zona de atracción sucede que cada solución de la trayectoria  $x(t)$  que comienza suficientemente cercana a  $\mathbf{0}$ , a partir de  $t_0$  se aproxima al origen  $\mathbf{0}$  a medida que  $t \rightarrow \infty$ . El origen  $x = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$  es un punto de equilibrio *asintóticamente estable en forma global* si: 1) el origen es estable; esta condición se cumple si para cada número  $\varepsilon > 0$   $\exists$  un número  $\delta / \|x(0)\| < \delta \rightarrow \|x(t)\| < \varepsilon \forall t \geq 0$  y 2) el origen es atractivo en forma global; condición que se cumple si  $\|x(t)\| \rightarrow 0$  cuando  $t \rightarrow \infty \forall x(0) \in \mathbb{R}^n$ . La estabilidad asintótica global en sistemas dinámicos autónomos indica que el punto de equilibrio  $x_e = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$  es único y no depende de la condición inicial  $x(0) \in \mathbb{R}^n$ . La estabilidad asintótica local significa varios puntos de equilibrio y la convergencia de la trayectoria  $x(t)$  es con respecto a uno de esos puntos (origen de estados  $x = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$  en general) y en consecuencia, sí depende de las condiciones iniciales dentro de la zona de atracción del origen de estados. En síntesis, la existencia de un único  $x_e$  es una condición necesaria para establecer sobre éste estabilidad asintótica en forma global [9]. Cabe señalar, que estos conceptos de estabilidad son propiedades intrínsecas deseables del punto de equilibrio  $x_e$  de un sistema dinámico caracterizado por la ecuación (4)  $\square x = f(x)$ .

- Método directo de Lyapunov: el núcleo central de la teoría de estabilidad de Lyapunov asume que el punto de equilibrio de un sistema dinámico autónomo como el caracterizado por la ecuación (4), es estable si su energía total es una función definida positiva continuamente decreciente hasta alcanzar un estado de equilibrio, el cual está asociado con el mínimo global de la energía total. De esta forma, la derivada temporal de esta función de energía (potencia del sistema) es definida negativa hasta alcanzar el llamado equilibrio. En síntesis, una función  $V(x)$  para el equilibrio  $x = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$  es una función candidata de Lyapunov de la ecuación (4) si  $V: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$  si:  $V(x)$  es un función definida positiva y  $\frac{\partial V(x)}{\partial x}$  y

$$\frac{dV(x)}{dt} \text{ son funciones continuas respecto a } x. \text{ De}$$

acuerdo a estos conceptos, se tienen dos teoremas fundamentales para el análisis de estabilidad en el sentido de Lyapunov. El primero establece que el origen  $x = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$  es un estado de equilibrio

estable de la ecuación (4) si existe una función candidata de Lyapunov  $V(\mathbf{x})$  con derivadas parciales continuas respecto a  $\mathbf{x}$  y tal que su derivada temporal satisfaga  $\frac{dV(\mathbf{x})}{dt} = \dot{V}(\mathbf{x}) \leq 0 \forall t \geq 0 \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ . Si esto se cumple, entonces  $V(\mathbf{x})$  es un función decreciente y las soluciones  $\mathbf{x}(t)$  de un sistema dado por la ecuación (4) están acotadas para toda condición inicial  $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ . El segundo dice que el origen  $\mathbf{x} = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$  es un estado de equilibrio estable en forma global de la ecuación (4) si existe una función candidata de Lyapunov  $V(\mathbf{x})$  tal que su derivada temporal satisfaga  $\dot{V}(\mathbf{x}) = 0 \forall t \geq 0$  y  $\dot{V}(\mathbf{x}) < 0 \forall t \geq 0, \forall \mathbf{x} \neq \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$ . Se cumple para la variable de estado  $\mathbf{x}(t)$  que  $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{x}(t) = \mathbf{0}$ .

### E. Teorema de Lasalle

Para un sistema dado por la ecuación (4) cuyo origen  $\mathbf{x} = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$ , y aun cuando la función candidata de Lyapunov  $V(\mathbf{x})$  presenta una derivada temporal semidefinida negativa, en ciertos casos se puede demostrar estabilidad asintótica global. Se define a un conjunto invariante  $\Omega$  para un sistema dinámico como aquel en el cual cada trayectoria que comienza en  $\Omega$  permanece en  $\Omega \forall t \geq 0$ . En este sentido, cualquier punto de equilibrio estable es ejemplo de un conjunto invariante, dado que ninguna trayectoria puede permanecer en forma indefinida en un punto distinto al de equilibrio estable. De esta manera, si es posible construir una función Lyapunov ( $V(\mathbf{x})$ ), tal que sus derivadas a lo largo de las trayectorias del sistema son semidefinidas negativas, y no existe otra trayectoria del sistema que pueda permanecer indefinidamente en puntos donde las derivadas se disipan, entonces el punto de equilibrio presenta estabilidad asintótica en forma global. Más precisamente, definiendo el conjunto  $\Omega$  en base a la expresión (5):

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n : \dot{V}(x) = 0\} \quad (5)$$

Si  $\mathbf{x}(0) = \mathbf{0}$  es la única condición inicial en  $\Omega$  para la cual se cumple que  $\mathbf{x}(t) \in \Omega \forall t \geq 0$ , entonces el origen  $\mathbf{x} = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$  es un equilibrio asintóticamente estable [10].

### F. Control PD en robots manipuladores

La ecuación en lazo cerrado conformada por el modelo dinámico del manipulador robótico y la estructura matemática del control proporcional derivativo (PD) con compensación de gravedad, posee un origen asintóticamente estable en forma global en términos del vector de estados  $[q^T, \dot{q}^T]^T$ . A tal efecto, se elige una función de Lyapunov conformada por la energía cinética del manipulador más una función cuadrática del error de posición, de forma tal que la

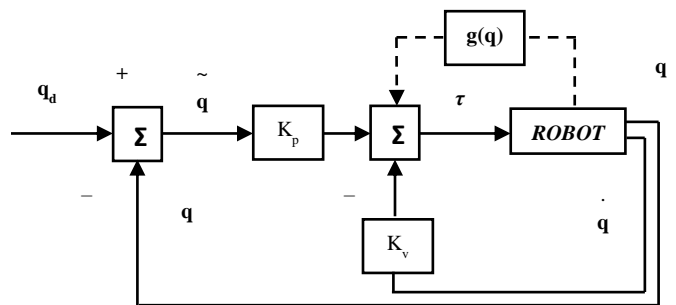
derivada temporal sea semidefinida negativa. Y empleando el teorema de Lasalle, se demuestra estabilidad asintótica global del punto de equilibrio. El modelo dinámico de un robot manipulador de  $n$  gdl sin término de fricción, está dada por la ecuación (6); y la ley de control PD con compensación de gravedad por la ecuación (7):

$$\tau(t) = M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) \quad (6)$$

$$\tau(t) = K_p q - K_v \dot{q} + g(q) \quad (7)$$

En la (7)  $K_p$  y  $K_v \in \mathbb{R}^{n \times n}$  representan las ganancias proporcional y derivativa, y deben ser matrices definidas positivas para garantizar la estabilidad asintótica global del origen de la (7). Y  $\mathbf{g}(q)$  es el vector de pares gravitacionales, el cual se puede obtener como  $g(q) = -\frac{\partial U(q)}{\partial q}$ , siendo  $U(q)$  la energía potencial gravitatoria del robot. El término  $\mathbf{g}(q)$  en la ecuación (7) del algoritmo de control, indica que el controlador hace uso en forma parcial del modelo dinámico del sistema robótico. El término de compensación de gravedad  $\mathbf{g}(q)$ , junto con las condiciones establecidas para las matrices  $K_p$  y  $K_v$ , es fundamental para garantizar la unicidad del punto de equilibrio [11]. Combinando la (6) y (7) se obtiene la ecuación en lazo cerrado (8) en variables de estado que precisan el problema de control de posición; y en Fig. 2 se ilustra el diagrama de bloques para un control PD con compensación de gravedad.

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} q \\ \dot{q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{q} \\ M(q)^{-1} [K_p q - K_v \dot{q} - C(q, \dot{q})\dot{q} + g(q)] \end{bmatrix} \quad (8)$$

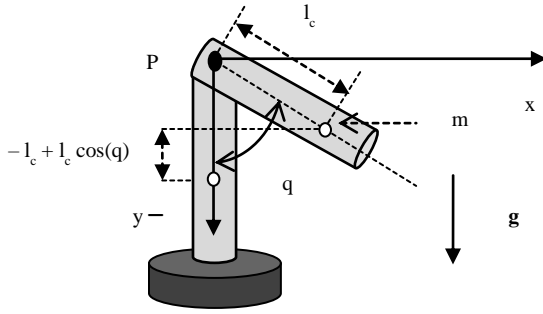


**Figura2. Diagrama de bloques de control PD con compensación de gravedad**

La posición articular  $q(t)$  se retroalimenta formando la señal de error  $q̃(t) = q_d - q(t)$ . La velocidad articular  $\dot{q}(t)$  actúa como inyección de amortiguamiento, de forma de dosificar la energía del término de control proporcional  $K_p q̃$  mejorando de esta forma el funcionamiento [12].

### 3. Análisis de caso

Se analiza el caso de un robot de 1 gdl en 2 fases: en la 1ra se obtiene la ecuación en lazo cerrado empleando un algoritmo de control PD con compensación de gravedad, siempre en términos de las variables de estado que definen el problema del control de posición; y en la 2da, se lleva a cabo el análisis de estabilidad en el sentido de Lyapunov y la unicidad del punto de equilibrio. La Fig. 3 muestra los parámetros físicos del robot: la masa  $m$ , el centro de masa  $l_c$ , el momento de inercia  $I_P = ml_c^2 + I$  y la posición articular variable en el tiempo  $q(t)$ .



**Figura3. Movimiento del centro de masa  $l_c$  del robot manipulador**

1<sup>RA</sup> Fase: la formulación Lagrangiana brinda el modelo dinámico del robot, cuya cinemática directa la da (9):

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_c \sin(q) \\ -l_c \cos(q) \end{bmatrix}; v = \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_c \cos(q) \dot{q} \\ l_c \sin(q) \dot{q} \end{bmatrix} \quad (9)$$

Se obtiene la energía cinética  $K$  mediante la ecuación y la energía potencial por medio de la (11).

$$K(q(t), \dot{q}(t)) = \frac{1}{2} [v^T v + I \dot{q}^2] = \frac{1}{2} [ml_c^2 + I] \dot{q}^2 \quad (10)$$

$$U(q) = mgl_c(1 - \cos(q)) \quad (11)$$

Se obtiene el Lagrangiano mediante la ecuación (12).

$$L(q, \dot{q}) = K(q, \dot{q}) - U(q) = \frac{1}{2} [ml_c^2 + I] \dot{q}^2 - mgl_c(1 - \cos(q)) \quad (12)$$

La (12) adquiere el formato de una ecuación escalar (13).

$$\tau = \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial L(q, \dot{q})}{\partial \dot{q}} \right] - \frac{\partial L(q, \dot{q})}{\partial q} + b \dot{q} \quad (13)$$

Se llega al modelo dinámico (14) combinando (12) y (13).

$$\tau = [ml_c^2 + I] \ddot{q} + b \dot{q} + mgl_c \sin(q) \quad (14)$$

El problema se focaliza en posicionar el brazo en un punto deseado  $q_d$ , desde una inicial como  $q = 0$ . El modelo de control PD más compensación gravitatoria para este robot lo da la ecuación (15).

$$\tau = k_p (q_d - q) + k_v \dot{q} + mgl_c \sin(q) \quad (15)$$

Es preciso transformar la ecuación (14) a una estructura de una ecuación diferencial de primer orden como la (4); a partir de escoger adecuadamente las variables de estado. El problema de posición del robot se define en términos de las variables de estado  $q, \dot{q}$ ; luego se determina la ecuación en lazo cerrado (16) que vincula el modelo dinámico (14) con la estrategia de control (15).

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} q \\ \dot{q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{q} \\ \frac{1}{ml_c^2 + I} [k_p (q_d - q) + k_v \dot{q} - b \dot{q}] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ \frac{k_p}{ml_c^2 + I} & -\frac{(k_v + b)}{ml_c^2 + I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q \\ \dot{q} \end{bmatrix}$$

(16) 2<sup>DA</sup> Fase: del análisis de la (16) se infiere lo siguiente:

- La 1ra componente de (16) indica que  $-\dot{q} = -1 \dot{q} = 0 \leftrightarrow \dot{q} = 0$
- Empleando  $\dot{q} = 0$  en la 2da componente de (16), se tiene que  $[k_p + b] \dot{q} = 0 \leftrightarrow \dot{q} = 0 \wedge k_p \in \mathbb{R}_+; b \in \mathbb{R}_+$ . Siendo que también se tiene que  $k_p \dot{q} = 0 \leftrightarrow \dot{q} = 0 \wedge k_p \in \mathbb{R}_+$ .

Se demuestra que el origen del espacio de estados es el punto de equilibrio y es único; a saber:  $\begin{bmatrix} q \\ \dot{q} \end{bmatrix}^T = [0, 0]^T$ .

Para el análisis de la estabilidad del punto de equilibrio (origen de estados) se propone la siguiente función de Lyapunov (17), teniendo en cuenta que  $I_P = ml_c^2 + I$ :

$$V \begin{pmatrix} q \\ \dot{q} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} I_P \dot{q}^2 + \frac{1}{2} k_p q^2 \quad (17)$$

El primer término de la ecuación (17) hace referencia a la energía cinética, mientras que el segundo refiere a la energía potencial que es una función cuadrática del error de posición y por diseño  $k_p$  es definida positiva. En virtud de esto, se infiere que  $V$  es una función definida positiva.

Dado que  $q_d = \text{constante}$  y de la 2da componente de la (16), se tienen las ecuaciones (18) y (19):

$$\ddot{q}(t) = \ddot{q}_d - \dot{q}(t) \Rightarrow \dot{q}(t) = \dot{q}_d - \dot{q}(t) \Rightarrow \dot{q}(t) = -\dot{q}(t) \quad (18)$$

$$I_p \ddot{q} = k_p \ddot{q} - k_v \dot{q} - b \dot{q} \Rightarrow I_p \ddot{q} = k_p \ddot{q} - [k_v + b] \dot{q} \quad (19)$$

Se deriva con respecto al tiempo la (17) considerando las expresiones (18) y (19), llegando a la ecuación (20):

$$\begin{aligned} \dot{V}(\ddot{q}, \dot{q}) &= I_p \ddot{q} \dot{q} + k_p \ddot{q} \dot{q} = I_p \ddot{q} \dot{q} - k_p \dot{q} \dot{q} = k_p \dot{q} \dot{q} - [k_v + b] \dot{q}^2 - k_p \dot{q} \dot{q} \\ \dot{V}(\ddot{q}, \dot{q}) &= -[k_v + b] \dot{q}^2 \leq 0 \quad (20) \end{aligned}$$

Esta derivada temporal de la función de Lyapunov es semidefinida negativa; habida cuenta de que depende solo de la variable  $\dot{q}$ , y dado que no se identifica en la (20) la otra variable de estado correspondiente al error  $\ddot{q}$ . Se concluye que  $\dot{V}(\ddot{q}, \dot{q}) = 0$  si  $\dot{q} = 0$  y el error  $\ddot{q}$  adopta un valor cualquiera. De esta forma, la función candidata de Lyapunov (17) permite demostrar la estabilidad del punto de equilibrio. Pero la derivada temporal de la función candidata dada por la expresión (20), indica que no se satisfacen las condiciones necesarias de estabilidad asintótica en forma global (es decir para toda condición inicial) para la ecuación autónoma de lazo cerrado (16). Como la ecuación (16) es autónoma, es posible hacer uso del teorema de Lasalle para demostrar la estabilidad asintótica global del punto de equilibrio [13], complementando así la función candidata de Lyapunov. Para este caso de estudio, la aplicación de dicho teorema sugiere que el conjunto  $\Omega$  está dado por la expresión (21).

$$\Omega = \left\{ \begin{bmatrix} \ddot{q} \\ \dot{q} \\ q \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 : \dot{V}(\ddot{q}, \dot{q}) = 0 \Leftrightarrow \dot{q} = 0 \in \mathbb{R}, q \in \mathbb{R} \right\} \quad (21)$$

De (21) se infiere que  $\dot{V}(\ddot{q}, \dot{q}) = 0 \Leftrightarrow \dot{q} = 0 \wedge q \in \mathbb{R}$ . Una

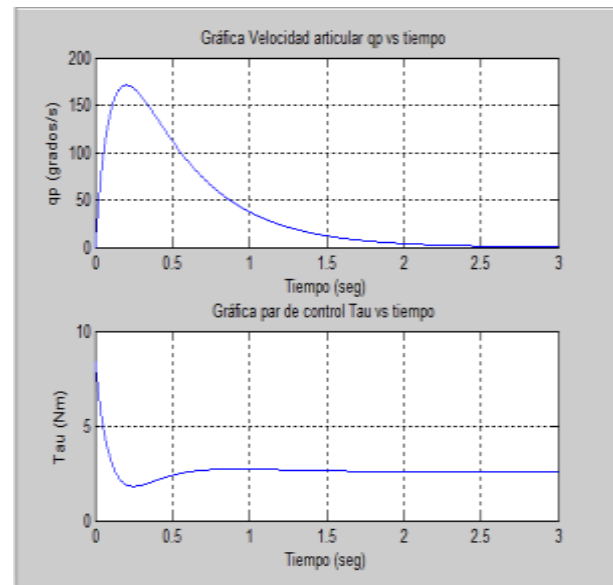
solución  $\begin{bmatrix} \ddot{q}(t), \dot{q}(t) \end{bmatrix}^T \in \Omega \forall t \geq 0$  si  $\dot{q}(t) = 0 \forall t \geq 0$ ; en cuyo caso la posición articular  $q(t)$  es una constante, siendo la misma la posición deseada  $q_d$ . Entonces el error de posición  $\ddot{q}(t) = \ddot{q}_d - \ddot{q}(t) = 0$ . En función de lo expuesto y observando en detalle la expresión (20), se tiene que  $k_p \ddot{q} = 0 \Leftrightarrow \ddot{q} = 0 \forall t \geq 0$ . Esto significa que el conjunto  $\begin{bmatrix} \ddot{q}(0), \dot{q}(0) \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$  es la única condición inicial en  $\Omega$  para la cual se cumple que  $\mathbf{x}(t) \in \Omega \forall t \geq 0$ . De esta forma y en virtud de la aplicación del teorema de Lasalle, se demuestra estabilidad asintótica global del origen (punto de equilibrio) de la ecuación en lazo cerrado (16). Este hecho asegura este tipo de estabilidad para el punto de equilibrio de sistemas dinámicos que poseen la estructura de la ecuación (4) para toda condición inicial  $\mathbf{x}(0) \in \mathbb{R}^n$  del vector de estados que se halla dentro de la región de atracción.

#### 4. Resultados

Se muestra una primera simulación de un robot prototipo de 1 gdl cuyo extremo se desea posicionar en  $120^\circ$  con condiciones iniciales igual a cero en el vector de estados, es decir que parte del reposo y de una posición inicial de  $0^\circ$ . Una masa  $m = 6 \text{ Kg}$ , fricción viscosa  $b = 0.21 \text{ Nms/rad}$ , centro de masa  $l_c = 0.05 \text{ m}$ , longitud  $l = 0.4 \text{ m}$ , momento de inercia del rotor  $I_r = 0.18 \text{ Nms}^2/\text{rad}$  (siendo el momento de inercia total del robot  $I = 0.18 + 6 \cdot 0.05^2 = 0.195$ ). La ganancia proporcional es de  $k_p = 4$  y se adopta una ganancia derivativa de un 50% de  $k_p$  ( $k_v = 0.5 \times 4 = 2$ ). Posee un servomotor con un torque máximo de  $15 \text{ Nm}$ .

La primer Fig. 4 ilustra como la posición articular  $q(t)$  del brazo robótico converge hacia los  $120^\circ$ , con lo que la señal del error converge a  $0^\circ$ . Se observa que la fase transitoria para  $q(t)$  se caracteriza por un comportamiento suave, tendiendo a estabilizarse en los  $120^\circ$  entre los 2 y 2,5seg. Un análisis similar cabe para la evolución temporal del error de posición  $\dot{q}$  que se observa en la segunda Fig. 4, el cual converge a 0 entre los 2 y 2,5seg. Esta peculiar característica se debe a la energía que suministra el término de control proporcional  $k_p \ddot{q}$ . Esta energía a su vez, se ve dosificada en virtud de la inyección de amortiguamiento que proporciona la acción de control derivativo, dada por el término  $-k_v \dot{q}$ , donde el signo menos en el modelo de control es el que gradúa la energía entregada por el término de control proporcional  $k_p \ddot{q}$ . Una vez que el brazo llega a la posición deseada  $q_d = 120^\circ$ , la primera Fig. 5 refiere a que la velocidad articular se aproxima a 0 entre los 2 y 2,5seg. Este hecho refiere a

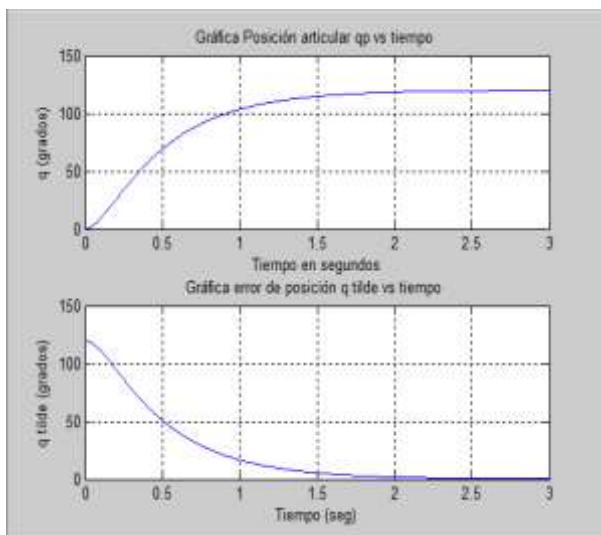
que el brazo permanece estático en el estado estacionario, lo cual indica que el mismo ingresa en la zona del atractor del punto de equilibrio. El robot se mantiene de forma indefinida en esa posición; salvo que se re programe otra posición deseada o tenga lugar una acción perturbadora. Es interesante observar el incremento de la velocidad articular en el estado transitorio hasta alcanzar un pico de casi 170 grados/s a los 0,2 seg; para luego ir descendiendo por la influencia del efecto de amortiguamiento. En otras palabras, el efecto de amortiguamiento originado por la acción de control derivativa se manifiesta, principalmente, en el estado transitorio. En estado estacionario la posición tiende a ser una constante y la velocidad es 0, con lo que se diluye el efecto de amortiguamiento. Por su parte, la segunda Fig. 5 hace referencia a la evolución temporal de la señal de control dada por el par aplicado de la ley de control. Se observa una ligera similitud con el perfil del error, con un alto par inicial de casi 8 Nm para procurar disminuir el error inicial de  $120^\circ$ ; así como también, comenzar a movilizar el mecanismo desde el reposo ( $q_p = 0$  grados/s en  $t = 0$  seg). Se observa que el par de control se estabiliza en unos 2,5 Nm en 1 seg; detectándose un pequeño pico por debajo del valor estable de 2,5 Nm en concordancia con el pico de velocidad de 170 grados/s que alcanza el dispositivo a los 0,2 seg. Este pico de la señal del par de control no influye en la curva del error de posición  $\dot{q}$  que continua su decaimiento suave hasta alcanzar la nulidad a los 2 seg, dado que es absorbido por la energía de amortiguamiento proporcionada por la acción derivativa.



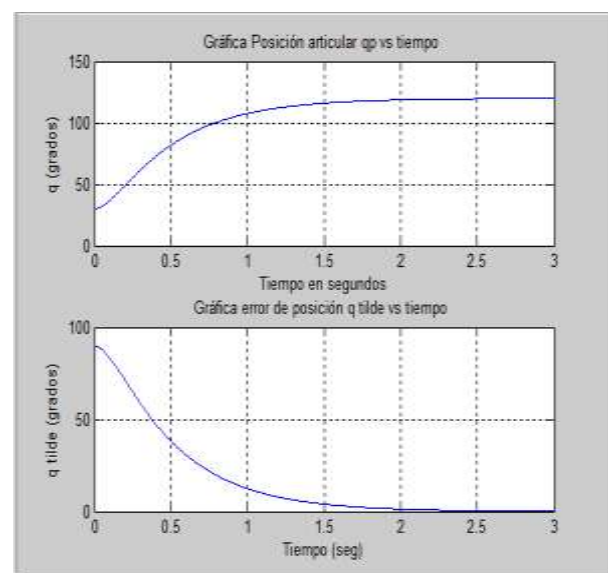
**Figura 5. Respuesta del robot de un grado de libertad para velocidad articular y par de control con condiciones iniciales nulas en el vector de estados.**

A continuación, se muestran respuestas similares del robot para distintas condiciones iniciales; manteniendo la misma ley de control, los mismos parámetros dimensionales y la misma sintonía de ganancias.

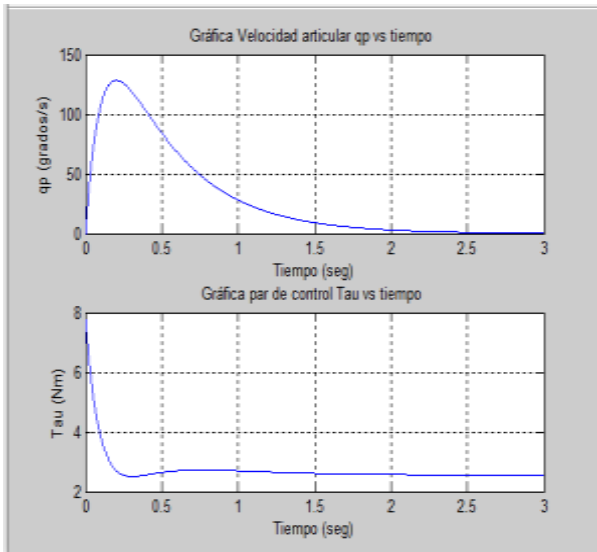
En las Figs. 6 y 7, se ve que los perfiles presentan similitud con el obtenido para condiciones iniciales nulas, dado que los valores estacionarios se alcanzan en instantes muy parecidos. En la primera figura 7, la velocidad articular alcanza el pico también a los 0,2 seg, adquiriendo un valor de 125 grados/s, en lugar de los 170 grados/s registrados con condiciones iniciales nulas.



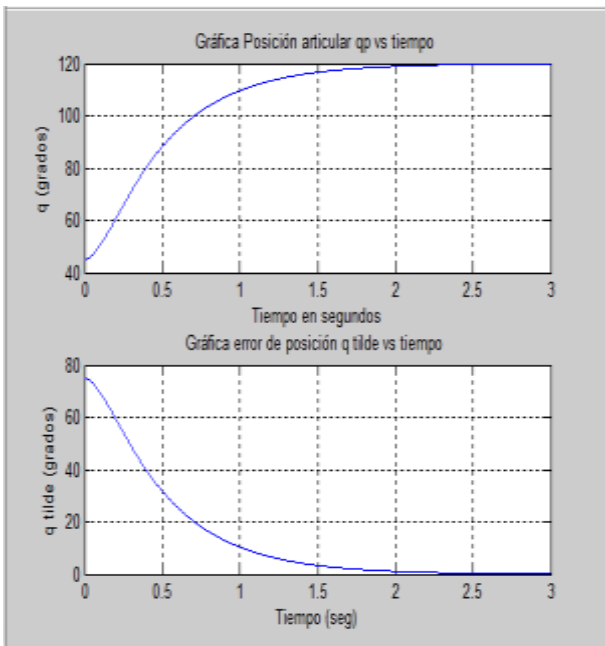
**Figura4. Respuesta del robot de un grado de libertad para posición articular y señal de error con condiciones iniciales nulas en el vector de estados.**



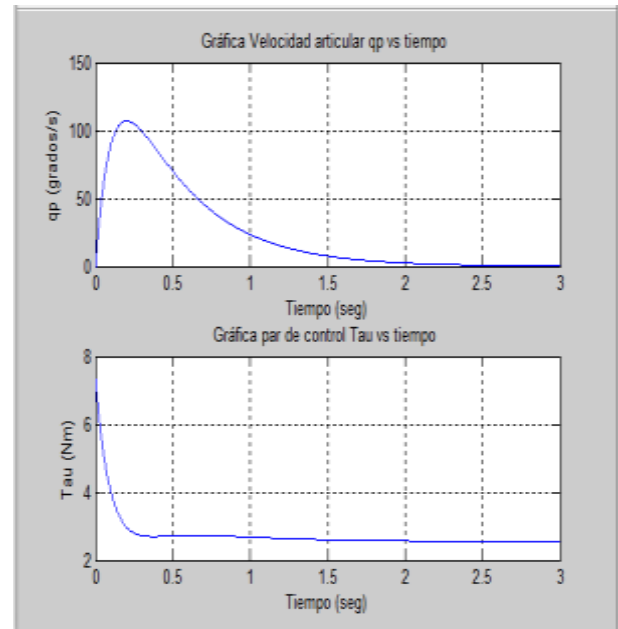
**Figura6.** Respuesta del robot de un grado de libertad para posición articular y señal de error con posición articular inicial de  $30^\circ$  y velocidad articular nula.



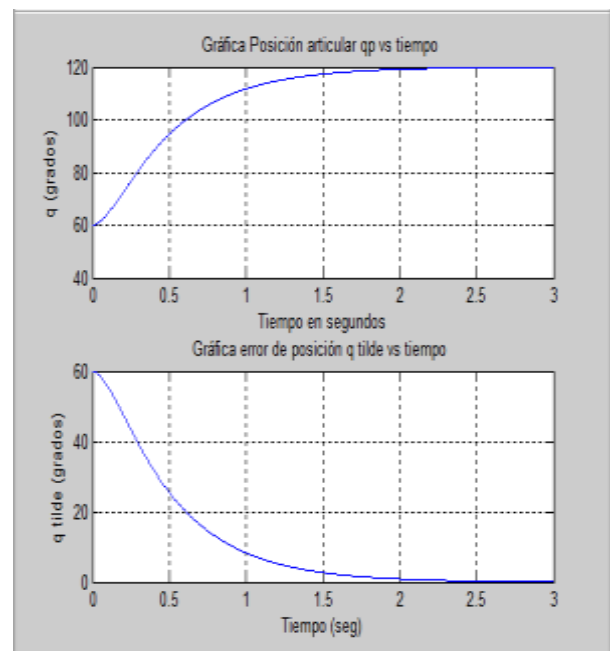
**Figura7.** Respuesta del robot de un grado de libertad para velocidad articular y par de control con posición articular inicial de  $30^\circ$  y velocidad articular nula.



**Figura8.** Respuesta del robot de un grado de libertad para posición articular y señal de error con posición articular inicial de  $45^\circ$  y velocidad articular nula.

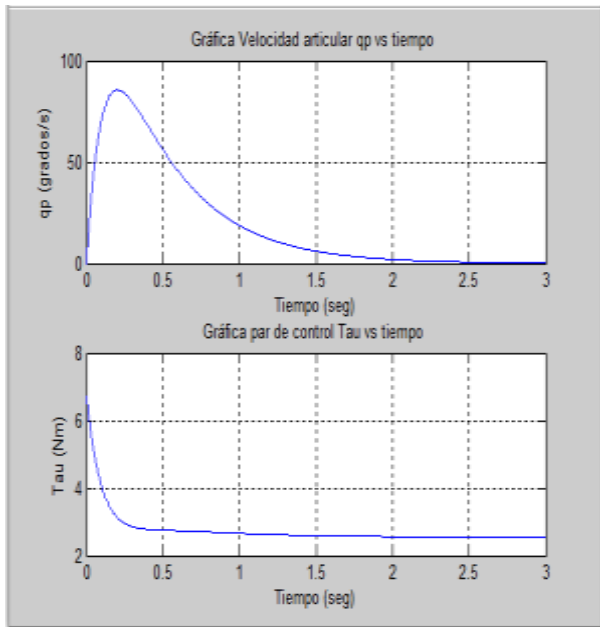


**Figura9.** Respuesta del robot de un grado de libertad para velocidad articular y par de control con posición articular inicial de  $45^\circ$  y velocidad articular nula.



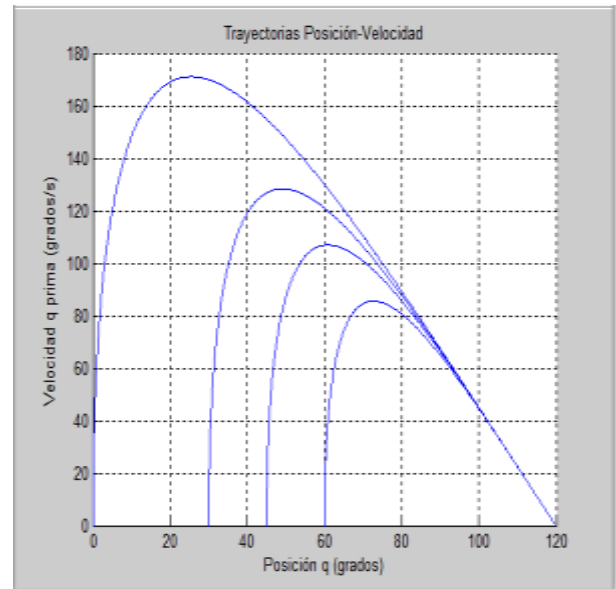
**Figura10.** Respuesta del robot de un grado de libertad para posición articular y señal de error con posición articular inicial de  $60^\circ$  y velocidad articular nula.





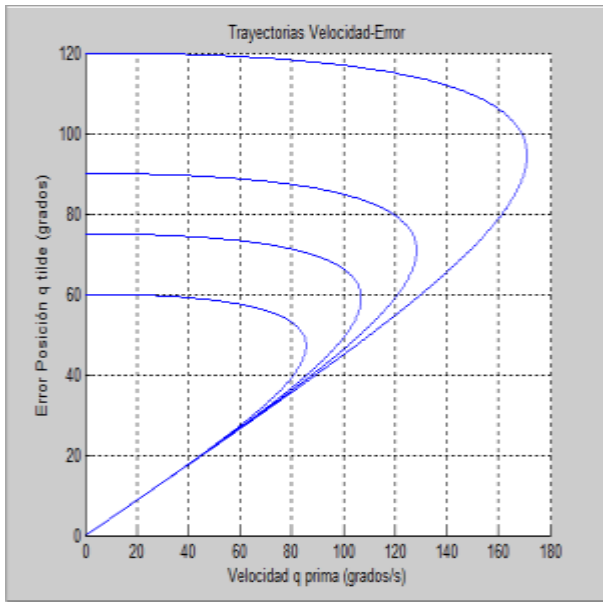
**Figura11. Respuesta del robot de un grado de libertad para velocidad articular y par de control composición articular inicial de  $60^\circ$  y velocidad articular nula.**

Con respecto a las Figs. 8, 9, 10 y 11 se observan perfiles de características muy similares en la evolución temporal de la posición articular (primera figura 8 respecto a primera figura 10) y señal de error (segunda figura 8 respecto a segunda figura 10), especialmente en términos de cómo convergen asintóticamente al punto de equilibrio ( $120^\circ$ , 0 grados/s). Por su parte, se ve una disminución del pico de la velocidad articular (en todos los casos a los 0,2 seg), a medida que el mecanismo parte de una posición mayor. Se tiene: 170 grados/s para condición inicial nula (primera figura 5), 125 grados/s para condición inicial ( $30^\circ$ , 0 grados/s) (primera figura 7), 110 grados/s para condición inicial ( $45^\circ$ , 0 grados/s) (primera figura 9) y 85 grados/s para condición inicial ( $60^\circ$ , 0 grados/s) (primera figura 11). En lo que respecta a la señal de control, cabe señalar observando la segunda figura 11 para condición inicial ( $60^\circ$ , 0 grados/s), que el par inicial es un poco inferior (poco más de 6Nm) y sin que se registre pico por debajo del valor estable de 2,5 Nm. Este fenómeno se explica en base al menor recorrido que desarrolla el brazo partiendo de esta condición inicial.



**Figura12. Diagrama del plano fase del robot de un grado de libertad para distintas condiciones iniciales y para velocidad articular vs posición articular.**

La figura 12 muestra el diagrama de plano fase que representa una herramienta que permite deducir información acerca de la estabilidad del sistema. La idea central es generar un conjunto de trayectorias o curvas de contorno para varias condiciones iniciales en el espacio de estados. En ordenadas se lleva la velocidad articular y en abscisas la posición articular. En forma alternativa se puede llevar la señal de error en el eje horizontal, lo que no hace variar la interpretación. A modo ilustrativo, la figura 13 muestra esta representación. En la Fig. 12 se observan las distintas trayectorias del sistema para las condiciones iniciales propuestas. El comportamiento cualitativo de estas trayectorias permite inferir características dinámicas del sistema. Por ejemplo, para condiciones iniciales nulas, se ve que para la posición articular de  $25^\circ$  aproximadamente, la velocidad articular alcanza su valor máximo de 170 grados/s (lo que se puede verificar por simple observación de la primera figura 4 y primera figura 5). A la misma conclusión se arriba para condiciones iniciales de ( $30^\circ$ , 0 grados/s), donde se ve que para una posición articular de unos  $45^\circ$ , la velocidad articular alcanza su valor máximo de 125 grados/s (lo que se puede verificar por simple observación de la primera figura 6 y primera figura 7). A conclusiones similares se arriban para las demás condiciones iniciales.



**Figura 13. Diagrama del plano fase del robot de un grado de libertad para distintas condiciones iniciales y para velocidad articular vs señal de error.**

Un concepto de suma importancia dentro del contexto de esta discusión de resultados se refleja del análisis de las figuras 12 y/o 13. El punto de equilibrio (ya sea  $(120^\circ, 0 \text{ grados/s})$  para la Fig. 12 o  $(0^\circ, 0 \text{ grados/s})$  para la Fig. 13 donde se representa la señal de error en lugar de la posición articular), de la ecuación en lazo cerrado (ecuación general (8) o ecuación (16) en el marco del análisis de caso) formada por el modelo dinámico del robot y la ley de control PD con compensación de gravedad, posee la propiedad de ser asintóticamente estable. Por ejemplo, colocando el foco en la figura 12 el entorno del punto de equilibrio ejerce una fuerza de atracción sobre las señales de velocidad articular y posición articular hacia el origen del espacio de estados; que en este caso sería  $(120^\circ, 0 \text{ grados/s})$ . Enfocando el diagrama de fase de figura 13, la fuerza de atracción sería sobre las señales de velocidad articular y de error hacia el origen del espacio de estados; que en este caso sería  $(0^\circ, 0 \text{ grados/s})$ . El atractor conduce necesariamente al error de posición y velocidad articular al del espacio de estados sin tener en cuenta las condiciones iniciales. Cabe señalar, que esto es así si las condiciones iniciales se hallan dentro de la región de atracción.

## 5. Conclusiones y futura línea de investigación

### A. Conclusiones

A nivel de conclusiones:

- Se analiza el control de posición de un robot manipulador en términos de las variables de estado error de posición y velocidad articular.

### B. Futuras Líneas de Investigación

A nivel de futuras líneas de investigación:

- Se obtiene la ecuación en lazo cerrado combinando la ley de control con la ecuación del modelo dinámico haciendo uso de un modelo de control PD con compensación de gravedad.
- El término  $-k_v \dot{q}$  amortigua la energía suministrada por el término de control proporcional  $K_p q$ ; su acción central se da en el estado transitorio, eliminando así los sobrepicos.
- Se lleva a cabo el análisis de estabilidad del punto de equilibrio (origen del espacio de estados) mediante la función de Lyapunov.
- Se demuestra que el origen del espacio de estados es el único punto de equilibrio, y se aplica el teorema de Lasalle para demostrar estabilidad asintótica en forma global del origen de la ecuación en lazo cerrado (16).
- Se observa que una vez que el robot se detiene en el estado estacionario, el término de la compensación de gravedad tiende a una constante ( $g(q_d) = mg \cos(q_d)$ ) para mantener al robot en la posición deseada  $q_d$ .
- En estado transitorio la única energía que entrega el algoritmo de control es la del par gravitacional ( $g(q_d) = mg \cos(q_d)$ ); de lo que se infiere la importancia de incluir esta componente en la ley de control, y así compensar parcialmente la dinámica del brazo.
- Si no fuese así, dicho brazo se desplazaría hacia abajo aumentando el error de posición  $q(t)$ , por lo que el controlador envía energía para volverlo a la posición deseada  $q_d$  ( $120^\circ$  para el caso de estudio). Así el brazo podría quedar oscilando; y es el par gravitacional el que se requiere para que el manipulador se mantenga en los  $120^\circ$ .
- Se realizó un estudio complementario para distintas condiciones iniciales, generando diferentes perfiles de las evoluciones temporales de posición articular, señal de error, velocidad articular y par de control.
- Se complementó este análisis con la construcción de los diagramas de plano fase en las variables de estado  $\begin{pmatrix} q(t) \\ \dot{q}(t) \end{pmatrix}$  y  $\begin{pmatrix} q(t) \\ \dot{q}(t) \end{pmatrix}$ , y se verificó que las trayectorias del sistema convergen asintóticamente hacia el punto de equilibrio con independencia de las condiciones iniciales.

- El grupo de investigación se encuentra analizando el control de posición para robot de 2 gdl.
- El grupo de investigación se encuentra analizando una ley de control adaptable que permita un análisis detallado de la sintonización de las ganancias.
- En este sentido, está en estudio el algoritmo de control PID con ciertas condiciones de sintonía.
- En próxima fase de investigación, se analiza el control de trayectoria donde la posición deseada  $q_d$  es variable en el tiempo.
- En línea con el punto anterior, se encuentra en fase de estudio y experimentación la implementación de las leyes de control por par computado y par calculado +.

#### REFERENCIAS

---

- [1] Barrientos, Antonio; Peñín, Luis Felipe; Balaguer Carlos y Aracil Rafael. “Fundamentos de Robótica”. Editorial McGraw – Hill. Madrid – España, 2007.
- [2] Reyes Cortés, F., “Robótica – Control de Robots Manipuladores”. Ed. Alfaomega, México, 2011
- [3] Reyes Cortés, F., “Mecatrónica, Control y Automatización”. Ed. Alfaomega, México, 2013.
- [4] Poliak, B., “Lyapunov Functions: An Optimization Theory Perspective”. IFAC 2017
- [5] Hernandez Gaviño, R., “Introducción a los Sistemas de Control”. Ed. Pearson, México, 2003.
- [6] Saltaren, R., “Robótica Aplicada. Analisis y Diseño de Robots Paralelos y Seriales con Matlab”. Ed. Dextra, 2014.
- [7] StrictLyapunovfunctionsfor control of robot manipulators. VictorSantibáñez, RafaelKelly. AutomaticaVolume 33, Issue 4, April 1997, Pages 675-682.
- [8] Taylor, J., “Mecánica Clásica”. Ed. Reverte, España, 2018.
- [9] Salgado, E. M., “Análisis de sistemas lineales”. Ed. Pearson Education, 2005.
- [10] OlleroBaturone, A. “Robótica. Manipuladores y Robots Móviles”. Ed. Marcombo, España, 2001.
- [11] Kelly, R., “Control de Robots Manipuladores”. Ed. Pearson Prentice Hall, España, 2003.
- [12] Dorf, R., “Sistemas de Control Moderno”. Ed. Alhambra, España, 2005.
- [13] A Reviewof Fundamentals ofLyapunovTheory.ChutiponPukdeboon. TheJournalofAppliedScience, [2011] Vol. 10 No. 2.