



**UNIVERSIDAD  
TECNOLÓGICA NACIONAL  
FACULTAD REGIONAL DELTA**

*Doctorado en Ingeniería  
Mención Ensayos Estructurales*

Tesis de Doctorado:

***IDENTIFICACIÓN DE FISURAS EN VIGAS: CAPACIDAD DE UN  
MÉTODO ANALÍTICO QUE UTILIZA MEDICIONES DE  
FRECUENCIAS NATURALES DE VIBRACIÓN.***

Por:

***Ing. Marcos Rubén Carrizo***

*Tesis presentada como requerimiento parcial para acceder  
al grado académico de Doctor en Ingeniería.*

***14/02/2024***

Director de Tesis:

***Dr. Esp. Ing. Javier Raffo,***

***Universidad Tecnológica Nacional***

Co-director de Tesis:

***Dr. Ing. Ricardo Grossi,***

***Universidad Nacional de Salta***

# RESUMEN

El estudio del comportamiento dinámico de componentes estructurales con presencias de fisuras y el desarrollo de métodos de identificación de fisuras basados en mediciones de frecuencias naturales de vibración son de gran interés en ingeniería y un área de relevancia en las investigaciones científicas.

Según el estado del arte son numerosos los trabajos presentados en este sentido. Sin embargo, son escasos los aportes realizados en responder cuál es el defecto más pequeño que estos métodos pueden lograr identificar. O sí acaso, los pequeños cambios en las frecuencias asociados a los diferentes escenarios de daño estructural pueden ser medidos con la suficiente precisión. Además, si esos cambios pueden pasar desapercibidos debido a cambios en las condiciones ambientales y operativas. Esta tesis pretende dar a respuestas a parte de estas cuestiones.

La presente tesis emplea el cálculo de variaciones por ser una poderosa herramienta que permite describir el comportamiento de las vibraciones transversales libres en vigas Euler-Bernoulli, homogéneas e isotrópicas, con restricciones elásticas intermedias y en los extremos.

Primero, se analiza en forma analítica y experimental la influencia de los vínculos en el comportamiento vibratorio de vigas, determinando para una vinculación real el valor de las constantes elásticas a utilizar en los modelos analíticos.

Luego se obtienen novedosos resultados analíticos en forma de mapeos que describen el comportamiento vibratorio de vigas con fisuras y apoyos elásticos en los extremos, apoyos simples y rotulas intermedias.

Posteriormente, se implementan dos métodos de identificación de fisuras abiertas a superficie basados en mediciones de frecuencias naturales de vibración.

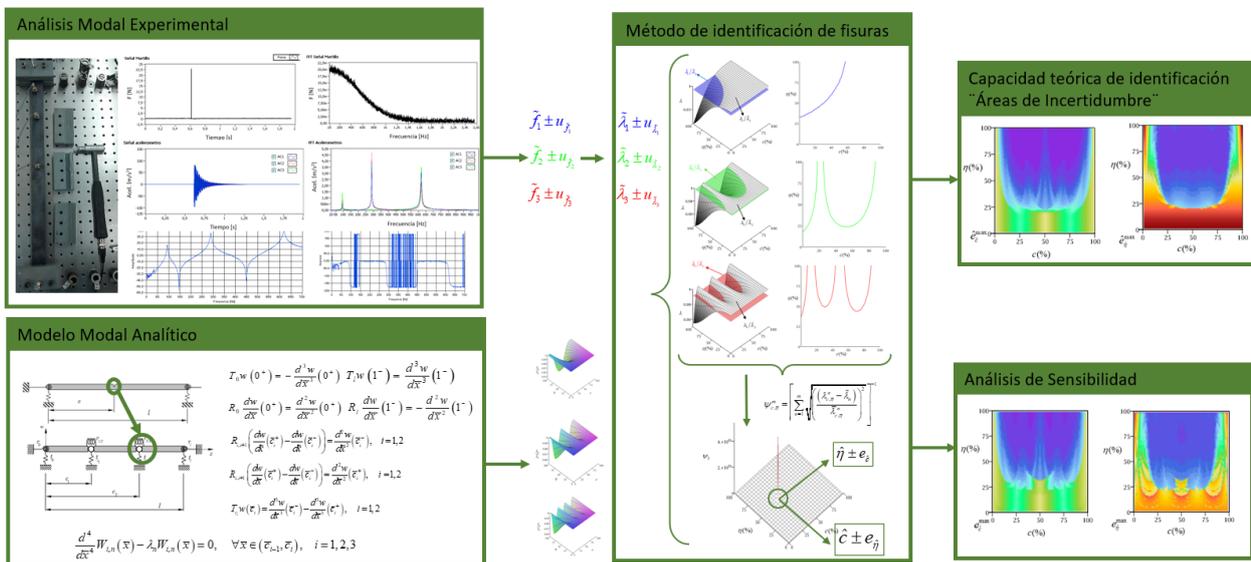
Por primera vez fueron formuladas hipótesis para predecir la capacidad teórica de identificación de uno de los métodos propuestos. Para esto, fue establecida una relación entre la incertidumbre en los coeficientes adimensionales de frecuencias y la incertidumbre en la determinación de la posición y profundidad de fisura pronosticada por el método. Las hipótesis fueron contrastadas mediante un análisis de sensibilidad y se halló cuál de ellas fue más asertiva.

Otro aporte original de esta tesis es analizar la factibilidad en la implementación de un método de identificación de fisuras basado en mediciones de frecuencias naturales de vibración: Resultados inéditos de exhaustivos análisis de sensibilidad son presentados. En los mismos se relacionan errores en los coeficientes de frecuencias con los errores del método de identificación de fisuras. Se estableció cuál es el defecto más pequeño que se puede detectar para una

incertidumbre dada en la determinación experimental de las frecuencias naturales de vibración. Se analizó si es factible la implementación con la instrumentación actual disponible.

Son exhibidos desarrollos de equipos, conocidos como shakers, necesarios para la ejecución de los ensayos. Se muestran las técnicas del análisis modal experimental utilizadas para determinar los parámetros modales de las vigas ensayadas. La incertidumbre en la cadena de medición de vibraciones mecánicas fue establecida, en particular, en la determinación de las frecuencias naturales de vibración. Así como la relación de esta con la incertidumbre en los coeficientes adimensionales de frecuencias; que son el dato de entrada del método de identificación de fisuras en vigas vibrantes.

**Graphical Abstract.**



**Take away**

Es implementado un método de identificación de fisuras en vigas basado en la medición de frecuencias naturales de vibración y un modelo modal analítico obtenido mediante la aplicación del cálculo de variaciones. Se destaca por ser capaz de predecir la posición y profundidad de la fisura con una incertidumbre dada en función de la incertidumbre en la medición de las frecuencias de vibración. Esta incertidumbre en la posición y profundidad de fisura fue constatada con exhaustivos análisis de sensibilidad llegando a auspiciosos resultados.

La presente tesis sienta las bases metodológicas y presenta numerosos resultados para la evaluación de la factibilidad práctica de implementar métodos de identificación de fisuras basados en mediciones de frecuencias naturales de vibración en componentes estructurales y mecánicos que puedan considerarse como vigas.

---

# DEDICATORIA Y AGRADECIMIENTOS

Para algunos, entre los que me incluyo, el motor de la historia es la lucha de clases. Pero sin un excedente acumulable de producción que pueda ser apropiado por otros, no existiese ni lucha ni clases. Y sin trabajo, no hay producción ni excedente. Por tanto, la historia de la humanidad es la historia de su trabajo. Bajo este razonamiento, si esta tesis es parte de mi historia personal es porque es también fruto de mi trabajo. Pero no existe producción como acto individual, en el vacío. Toda actividad humana es una producción social. Entonces, esta humilde producción académica es también el fruto del trabajo de muchos otros, que me precedieron y/o fuimos contemporáneos.

El trabajo vivo, el trabajo presente, aumenta su productividad sobre la base del trabajo muerto, del trabajo pretérito, del trabajo pasado; siendo esencial la labor de quienes abrieron surcos primero. La tesis de mi director fue la base de la mía; así como su trabajo es la continuidad del trabajo de su director de tesis; quien además es el co-director de esta tesis. En este sentido quiero agradecer a ambos por permitirme ser parte de una línea de trabajo y de un legado. A su vez, nuestro trabajo es el fruto de muchos otros matemáticos, físicos e ingenieros que nos precedieron y a quienes también quiero agradecer.

Este trabajo fue desarrollado en una Universidad pública, gratuita, laica y científica. La que existe por aquellos jóvenes que encendieron la chispa de la Reforma Universitaria que pronto se extendió de Córdoba al continente. De los claustros que lucharon y conquistaron que no existiesen aranceles ni acceso restringido. Que dieron la pelea de la laica o libre. Y que seguimos luchando contra la asfixia presupuestaria, por paritarias libres y contra las reformas anti-educativas y el proceso de mercantilización de la academia.

Este trabajo fue desarrollado en un grupo de investigación. Y, por lo tanto, de algún modo, es también fruto del trabajo de aquellos que resistieron a la noche de los bastones largos y a los ministros de economía que mandaron a los científicos a lavar los platos.

Pero es sobre todo el esfuerzo de cada uno de los argentinos que ha contribuido a sostener un sistema público de educación e investigación dentro de las universidades nacionales. Es gracias al trabajo de miles y millones de anónimos obreros, campesinos, jefas de hogar, desocupados e indigentes que quizás pudieron acceder a alguna de las instancias de educación formal pero probablemente no a todas. Somos los trabajadores de este país, que con nuestro esfuerzo hemos

sostenido, a pesar de la precarización laboral, del trabajo informal, de las sucesivas reformas flexibilizadoras, un Estado que consolide esta universidad.

Además, pude acceder y permanecer en la Universidad, por grandes esfuerzos de trabajadores muy queridos por mí. Fue gracias a mi viejo, que en lugar de comer el sándwich que le daban en su trabajo, me lo guardaba para que yo tuviera algo para el recreo. Fue gracias a mi tío que ayudaba a costear el pasaje de Baradero a Campana. A mi vieja que guardaba que me esperaba con la comida cuando regresaba a la medianoche. Gracias a mi hermana y mis sobrinos.

Pero los apoyos no son solo económicos. Sin un entorno que nos acobije somos animales indefensos y seres miserables. Aún más importante son las palabras de aliento ante cada adversidad y frustración, son el consejo a tiempo y soportar mi insoportable humor. Y no solo estuvo mi familia ahí, también estuvieron mis compañeros de militancia, amigos y mi compañera de vida, Vanina. Y no menos importantes, mis compañeros de trabajo: les docentes investigadores, becarios, estudiantes y no docentes.

Y este modesto, muy modesto, trabajo intelectual, solo puede ser posible sobre la base del trabajo manual, rutinario y cansador de aquellos que día a día garantizan la reproducción de nuestra vida material. Sin esos héroes anónimos que garantizan el agua, los alimentos, la energía, el esparcimiento y el ocio, entre otras, no existen las condiciones materiales que (me) permitan problematizar ciertas cuestiones abstractas para desarrollar un trabajo de tipo intelectual.

Y, a pesar de que muchos consideren que ese trabajo intelectual es un trabajo que da lugar a la creatividad, sin coste para la salud psicofísica y que permite el desarrollo personal, no deja de ser un trabajo alienante, como todo trabajo bajo el régimen social capitalista. Solo que adquiere formas peculiares de alienación, cada día más demostradas, incluso científicamente, con el crecimiento de los padecimientos físicos y sobre todo psicológicos. Aún más, cuando se da en un contexto de precariedad laboral, sin derechos laborales, como sucede en la mayor de los sistemas científicos- tecnológicos del mundo.

Así como es injusto que quienes realicen un trabajo manual no puedan desarrollar un trabajo intelectual; es injusto que quienes realizamos un trabajo intelectual no podamos también desarrollar un trabajo manual. La división del trabajo en intelectual y manual es la primera enajenación del hacer humano. Para que el trabajo sea (la) verdadera condición humana es necesario que esté integrado y complementado entre trabajo manual e intelectual. Solo así el hombre podrá ser íntegro y libre, y su quehacer una realización personal y colectiva.

Trabajo que transforme la naturaleza a partir de comprenderla. Porque, si la doblega, la somete y la destruye, no merece ser llamado trabajo. El desarrollo de las fuerzas productivas es tal cuando es en armonía con la naturaleza. De lo contrario, aunque lo disfracen de progreso, es un ataque a la propia humanidad y sus posibilidades ulteriores de desarrollo. La humanidad no puede

---

escindir del mundo natural. Así como el trabajo lo es en un contexto social, lo es también en la naturaleza y por lo tanto requiere de ser simbiótico con ella.

Y si hablamos de división del trabajo, también es menester considerar que existe una división internacional del trabajo, donde Argentina como país semicolonial, es colocado como un productor de materias primas, donde prima el extractivismo y la desindustrialización sistemática. Lo que favorece intercambios comerciales desiguales, proceso que se inscribe en un desarrollo desigual y combinado.

Este es el contexto y el horizonte de mi pequeño e insignificante aporte. Solo puedo estar agradecido, honesta y profundamente agradecido. A todos, a los anónimos y a quienes conozco. A todos los que de una u otra forma fueron y son parte de este proceso. A todos mis antepasados, a mis ancestros, a la familia que pude conocer y a la que las líneas temporales no me lo permitieron. A las personas que se cruzaron en mi vida y yo en la de ellas, con las que intercambie alegrías y sin sabores. A quienes me hicieron ser quien soy. Y también a las personas por llegar. En especial a León Nehuen que ha sido mi principal motivación para pueda dar celeridad a la culminación de este proceso. Te espero con ansias y miedos, pero sobre todo deseoso. A Uds. se los dedico.

*Por una UTN de los trabajadores para los trabajadores. Por un sistema científico y tecnológico cuya misión sea la emancipación social de la humanidad y la liberación nacional de nuestro país.*

*“Por un mundo donde seamos socialmente iguales, humanamente diferentes y totalmente libres.” Rosa Luxemburgo.*

*“La vida es hermosa. Que las futuras generaciones la libren de todo mal, opresión y violencia y la disfruten plenamente.” León Trotsky*

# RECONOCIMIENTOS

Quiero reconocer al estado nacional argentino y a su pueblo por haber puesto en pie y sostenido un sistema educativo y científico. Al Ministerio de Educación y a la Secretaría de Políticas Universitarias.

A la Universidad Tecnológica Nacional y las diferentes autoridades que la condujeron por su apuesta a la investigación. Por la creación del programa becas doctorales para docentes de la UTN para fortalecer las áreas de I + D + i. Por haberme otorgado dicha beca, la que me sostuvo económicamente durante muchos años para poder desarrollar este trabajo.

A la Facultad Regional Delta y a sus autoridades: Al Sr. Ing. Decano Miguel Ángel Sosa por apoyar el surgimiento de nuevos laboratorios y grupos de investigación. Fundamentalmente, al Dr. Jorge Torga, por consolidar y desarrollar la Secretaría de Ciencia, Tecnología y Posgrado, por escuchar las demandas de los investigadores y becarios, buscar siempre una solución a cada adversidad. Por un apoyo incondicional a mi persona.

Al Grupo de Mecánica Computacional y Experimental donde desarrollé mis tareas. Al Dr. Javier Leandro Raffo quien levantó este laboratorio desde cero, construyó una nueva línea de trabajo en la Facultad y nos abrió las puertas. A cada uno de mis compañeros de Laboratorio: A Nacho Cardozo, Lucas Brolliat, Pablo Carcache, Luis Martinez, Federico Ovejero Trigás, Andrés Felipe Saavedra, Tomás Ribes y Maximiliano Carnelutto; entre otros. Quienes todo el tiempo prestaron colaboración en diferentes temas. Al grupo de Vibraciones Mecánicas y al de Optoelectrónica y fotónica aplicada por su guía y apoyo. Por haberme prestado libros y equipos, por haberme enseñarme técnicas y darme recomendaciones.

A todos los becarios, pasantes y estudiantes de intercambiando que realizaron tareas de apoyo para poder llevar adelante esta tesis. A todos los que colaboraron con esta tesis. En particular Pablo Carcache quien estuvo en cada desarrollo y fabricación de componentes. A Esteban Quirino por sus aportes en electrónica. A Maximiliano Carnelutto por sus aportes en estudio de shakers.

A mis compañeros de doctorado: A Andres Aguilar, Guido Ferrari, Pablo Paupy, Marina Gutierrez, Marcelo Sallese, Santiago Cerrota, José María Folgueiras, Lesly Cusato, Maria Yanela Paredes y Pablo Tabla. Con ellos cursamos juntos. En particular, agradecido los que compartimos tema de estudio: Federico Ovejero, Luis Martinez y Maximiliano Carnelutto.

A los docentes investigadores y amigos de la Facultad. Especialmente a Alberto Scarpettini, Pablo Paupy y Eneas Morel y por su compañerismo y por haber colaborado en la revisión de esta tesis.

# ÍNDICE

## ÍNDICE GENERAL

	Descripción	Página
	<i>Resumen</i>	<i>1</i>
	<i>Dedicatoria y agradecimientos</i>	<i>3</i>
	<i>Reconocimientos</i>	<i>6</i>
	<i>Índice</i>	<i>7</i>
	<i>Índice general.</i>	<i>7</i>
	<i>Índice de figuras.</i>	<i>11</i>
	<i>Índice de tablas.</i>	<i>17</i>
<b>CAPÍTULO 1</b>	<b>PRESENTACIÓN E INTRODUCCIÓN</b>	<b>20</b>
1.1	Presentación del problema	20
1.2	Motivación	20
1.3	Formulación del problema	25
1.4	Acotamiento del problema	26
1.5	Objetivos	30
1.6	Metodología	31
1.7	Contenido	33
1.8	Publicaciones científicas originada en la tesis	34
1.9	Cursos o seminarios realizados	36
<b>CAPÍTULO 2</b>	<b>ESTADO DEL ARTE Y MARCO TEÓRICO</b>	<b>37</b>
2.1	Introducción.	37
2.2	Desarrollos analíticos.	37
2.3	Métodos de identificación de daños basados en medición de frecuencias naturales de vibración.	41
2.4	Desarrollos experimentales.	48
<b>CAPÍTULO 3</b>	<b>VIBRACIONES TRANSVERSALES LIBRES EN VIGAS HOMOGÉNEAS E ISÓTROPAS CON RESTRICCIONES ELÁSTICAS</b>	<b>¡ERROR! MARCADOR NO DEFINIDO.1</b>
3.1	Introducción.	51
3.2	Estudio analítico y experimental de la influencia de la rigidez de los vínculos en los coeficientes adimensionales de frecuencias de vigas.	52

3.3	Estudio analítico de la influencia de fisuras en los coeficientes adimensionales de frecuencias de vigas.	65
3.4	Aportes y conclusiones de este capítulo.	74
<b>CAPÍTULO 4</b>	<b>MÉTODOS ANALÍTICOS DE IDENTIFICACIÓN DE FISURAS BASADOS EN MEDICIONES DE FRECUENCIAS NATURALES DE VIBRACIÓN</b>	<b>75</b>
4.1	Introducción.	75
4.2	Método identificación de fisuras 1: intersección de las curvas de rigidez.	78
4.3	Método identificación de fisuras 2: intersección de las curvas de nivel de las superficies de frecuencias.	106
4.4	Comparativa entre métodos 1 y 2. Discusión de resultados.	113
4.5	Aportes y conclusiones de este capítulo.	114
<b>CAPÍTULO 5</b>	<b>CAPACIDAD TEÓRICA DE IDENTIFICACIÓN DE FISURAS EN VIGAS VIBRANTES</b>	<b>117</b>
5.1	Introducción.	117
5.2	Hipotesis 1: sensibilidad de la respuesta vibratoria al daño presente.	118
5.3	Hipotesis 2: áreas de incertidumbre.	128
5.4	Aportes y conclusiones de este capítulo.	141
<b>CAPÍTULO 6</b>	<b>ANÁLISIS DE SENSIBILIDAD</b>	<b>142</b>
6.1	Introducción.	142
6.2	Análisis de sensibilidad en algunos casos particulares.	143
6.3	Contrastación existencial de la hipótesis de las áreas de incertidumbre.	148
6.4	Mapeos de análisis de sensibilidad.	171
6.5	Contrastación universal de la hipótesis de las áreas de incertidumbre.	180
6.6	Aportes y conclusiones de este capítulo.	185
<b>CAPÍTULO 7</b>	<b>DETERMINACIÓN EXPERIMENTAL DE LOS COEFICIENTES ADIMENSIONALES DE LAS FRECUENCIAS NATURALES DE VIBRACIÓN DE VIGAS CON PRESENCIA DE UNA FISURA</b>	<b>187</b>
7.1	Introducción.	187
7.2	Errores e incertidumbres en la determinación de los coeficientes adimensionales de las frecuencias naturales de vibración.	188
7.3	Aportes y conclusiones de este capítulo.	209
<b>CAPÍTULO 8</b>	<b>DISCUSIÓN DE RESULTADOS, CONCLUSIONES Y FUTURAS LÍNEAS DE INVESTIGACIÓN</b>	<b>210</b>
8.1	Discusión de resultados.	210
8.2	Conclusiones.	213
8.3	Trabajos a futuro inmediato	220
8.4	Futuras líneas de investigación	221

<b>APÉNDICE 1</b>	<b><i>Desarrollo de un modelo analítico de vibraciones transversales libres en vigas homogéneas e isotrópicas con restricciones elásticas</i></b>	<b>222</b>
A1.1	Hipótesis básicas	222
A1.2	Deducción de las Energías Intervinientes en el Sistema.	224
A1.3	Energía total del sistema	226
A1.4	El principio de Hamilton	228
A1.5	Variación primera del funcional de energía	229
A1.6	Integración por partes	233
A1.7	Espacios de funciones y direcciones admisibles	236
A1.8	El lema fundamental del cálculo de variaciones	236
A1.9	Deducción del problema de contorno	238
A1.10	Deducción de las Constantes adimensionales de rigidez de los resortes traslacionales y rotacionales.	245
A1.11	Condiciones de contorno adimensionalizadas	248
A1.12	Método de separación de variables.	251
A1.13	Autovalores y Autovectores.	253
A1.14	Solución de la Ecuación Diferencial de Vibraciones.	258
<b>APÉNDICE 2</b>	<b><i>Fisuras: Clasificación, parámetros y modelos</i></b>	<b>260</b>
A2.1	Clasificación de las fisuras.	261
A2.2	Parámetros característicos de la fisura	264
A2.3	Modelo de fisura: Deducción de la rigidez del resorte rotacional.	265
A2.4	Modelos de fisuras utilizados por diferentes autores	268
<b>APÉNDICE 3</b>	<b><i>Resultados del estudio analítico de la influencia de fisuras en los coeficientes adimensionales de frecuencias de vigas</i></b>	<b>272</b>
A3.1	Condiciones de vinculación clásicas en los extremos.	272
A3.2	Condiciones de vinculación clásicas en los extremos con un apoyo simple intermedio.	284
A3.3	Condiciones de vinculación clásicas en los extremos con una rotula intermedia.	302
A3.4	Condiciones de vinculación elásticas en los extremos.	314
<b>APÉNDICE 4</b>	<b><i>Implementación del método 1A cuando la fisura se encuentre en un punto de inflexión de la forma modal</i></b>	<b>326</b>
A4.1	Ubicación de nodos, puntos de inflexión, giros y momentos nulos en vigas con vinculaciones típicas.	326
A4.2	Coefficientes adimensionales de frecuencias de vigas con fisuras, cuya posición de fisura corresponde a los puntos de inflexión de las formas modales	332

<b>APÉNDICE 5</b>	<b>Capacidad teórica de identificación de fisuras en vigas vibrantes. Resultados de la hipótesis 1: Sensibilidad de la respuesta vibratoria al daño presente</b>	<b>335</b>
A5.1	Condiciones de vinculación clásicas.	335
A5.2	Vinculaciones clásicas con apoyos intermedios.	337
A5.3	Vinculaciones elásticas en los extremos.	340
<b>APÉNDICE 6</b>	<b>Capacidad teórica de identificación de fisuras en vigas vibrantes. Resultados universales de la hipótesis 2: Áreas de incertidumbre</b>	<b>342</b>
A6.1	Condiciones de bordes clásicas.	343
A6.2	Condiciones clásicas con apoyos intermedios	367
A6.3	Apoyos elásticos en los extremos	385
<b>APÉNDICE 7</b>	<b>Resultados del análisis de sensibilidad del método de identificación de fisuras para algunos casos particulares</b>	<b>397</b>
A7.1	Análisis de sensibilidad para diferentes condiciones de vinculación.	397
A7.2	Análisis de sensibilidad para casos con diferentes posiciones y profundidades de fisura.	403
A7.3	Análisis de sensibilidad para casos con diferentes niveles de error en los coeficientes de frecuencia.	410
<b>APÉNDICE 8</b>	<b>Mapeos de análisis de sensibilidad</b>	<b>414</b>
A8.1	Condiciones de vinculación clásicas en los extremos.	414
A8.2	Condiciones de vinculación clásicas en los extremos con un apoyo simple intermedio.	438
A8.3	Condiciones de vinculación con apoyos elásticos en los extremos	456
<b>APÉNDICE 9</b>	<b>Resultados de la contrastación universal de la hipótesis de las áreas de incertidumbre</b>	<i>¡Error! Marcador no definido.</i>
A9.1	Condiciones de vinculación clásicas en los extremos.	
<b>APÉNDICE 10</b>	<b>Sistemas de excitación de la estructura</b>	<i>¡Error! Marcador no definido.</i>
A10.1	Caracterización y uso de un sistema de excitación electroacústico.	<b>¡Error! Marcador no definido.</b>
A10.2	Desarrollo y fabricación de un excitador electromagnético.	<b>¡Error! Marcador no definido.</b>
A10.3	Desarrollo de excitador electrodinámico de electroimán.	<b>¡Error! Marcador no definido.</b>
A10.4	Desarrollo de excitador electrodinámico de imán permanente.	<b>¡Error! Marcador no definido.</b>
A10.5	Desarrollo de sistemas de generación y amplificación de señales para shakers.	<b>¡Error! Marcador no definido.</b>

---

A10.6	Desarrollo de accesorios para shakers.	<b>¡Error! Marcador no definido.</b>
A10.7	Selección, compra y uso de un Martillo Instrumentando.	<b>¡Error! Marcador no definido.</b>
<hr/>		
<b>APÉNDICE 11</b>	<b><i>Análisis modal experimental</i></b>	<b>543</b>
A11.1	Planificación del ensayo (test plan).	543
A11.2	Montaje, puesta a punto y prueba inicial.	552
A11.3	Prueba	558

## ÍNDICE DE FIGURAS

### Capítulo 1

Figura	Descripción	Página
1.1	Clasificación de los Ensayos No Destructivos.	22
1.2	Sistema de identificación de fisuras.	25
1.3	Procedimiento de identificación de fisuras.	25
1.4	Acotamiento del problema.	26
1.5	Clasificación de los métodos de identificación de fisuras según el modelo base.	26
1.6	Clasificación de los métodos de identificación de fisuras según el modelo base analítico.	27
1.7	Clasificación de los métodos de identificación de fisura según el parámetro modal.	28
1.8	Clasificación de los métodos de identificación de fisuras según el nivel de daño.	28
1.9	Clasificación de los métodos de identificación de fisuras según el tipo de daño.	29
1.10	Clasificación de los métodos de identificación de fisuras según la estructura a monitorear.	29

### Capítulo 3

Figura	Descripción	Página
3.1	Viga sin fisuras y con vínculos elásticos en los extremos.	53
3.2	Ensayo viga bi-articulada sujeta por mordazas clásicas.	55
3.3	Señal temporal de los acelerómetros.	55
3.4	FFT de la señal de los acelerómetros.	56
3.5	FRF del acelerómetro ubicado en $x = l/6$ cuando se impacta con el martillo en la misma posición.	56
3.6	Viga sostenida por resortes.	57
3.7	Viga empotrada en un extremo y restringida elásticamente por otra viga.	57
3.8	Error relativo porcentual de los 3 primeros $\lambda$ para diferentes condiciones de vínculo clásicas.	59
3.9	Valores de los 3 primeros $\lambda$ para diferentes restricciones elásticas iguales en ambos extremos.	60
3.10	Error relativo porcentual de los 3 primeros $\lambda$ para diferentes restricciones elásticas iguales en ambos extremos.	60
3.11	Valores de los 3 primeros $\lambda$ para $R_0 = R_l = 0$ , $T_l = 10^{30}$ , $10^{-7} \leq T_0 \leq 10^{30}$ .	61
3.12	Valores de los 3 primeros $\lambda$ para $R_0 = R_l = 0$ , $10^{-7} \leq T_0 = T_l \leq 10^{30}$ .	61
3.13	Valores de los 3 primeros $\lambda$ para $R_0 = R_l = 0$ , $T_0 + T_l = 10^{30}$ , $10^{-7} \leq T_0 \leq 10^{30}$ .	61
3.14	Valores de los 3 primeros $\lambda$ para $T_l = 10^{30}$ , $R_l = 0$ , $10^{-7} \leq R_0 = T_0 \leq 10^{30}$ .	62
3.15	Valores de los 3 primeros $\lambda$ para $T_0 = T_l = 10^{30}$ , $R_l = 0$ , $10^{-7} \leq R_0 \leq 10^{30}$ .	62
3.16	Valores de los 3 primeros $\lambda$ del ensayo de una viga empotrada en un extremo y restringida elásticamente por otra viga.	63

3.17	Error relativo porcentual de los 3 primeros $\lambda$ del ensayo de una viga empotrada en un extremo y restringida elásticamente por otra viga.	63
3.18	Valores de los 3 primeros $\lambda$ del ensayo de una viga bi-articulada cuando se varía el ángulo de apriete.	64
3.19	Relación entre los $\lambda$ del modo 1, medidos y analíticos, de una viga bi-articulada cuando se varía el ángulo de apriete.	64
3.20	Relación entre el ángulo de apriete y la rigidez del resorte rotacional.	64
3.21	Valores de los 3 primeros $\lambda$ al variar el apriete de la mordaza en ambos extremos.	65
3.22	Viga de tres tramos con restricciones elásticas intermedias y en los extremos.	66
3.23	a) Viga con una fisura superficial a un solo lado. b) Esquema de fisura superficial abierta.	69
3.24	Superficie de los coeficientes adimensionales de frecuencias, modo 1, L-L.	70
3.25	Superficie de los coeficientes adimensionales de frecuencias normalizados, modo 1, L-L.	70
3.26	Superficie de los coeficientes adimensionales de frecuencias para la condición L-L.	72

## Capítulo 4

Figura	Descripción	Página
4.1	Esquema de los problemas directos.	75
4.2	Esquema de los problemas inverso de causalidad.	75
4.3	Esquema de los problemas inverso de especificación.	76
4.4	Sistema físico de una viga vibrante con fisura y vinculaciones en sus extremos.	76
4.5	Modelo de una viga vibrante con fisura y vinculaciones en sus extremos.	76
4.6	Sistema de identificación de fisuras.	77
4.7	Esquema del problema inverso de identificación de fisuras como problema directo.	77
4.8	Valores de $r_{1,2}$ obtenidos para cada valor de $\lambda_n$ .	79
4.9	Valores de $\sigma$ en función de la posición $\bar{x}$ , para los resultados de $R_{1,2}$ representados en la Figura 4.8.	80
4.10	Detalle del mallado alrededor en la zona de fisura en la simulación por MEF.	81
4.11	Implementación del método de identificación de fisuras para una viga E-L con una fisura ubicada en $c = 0.2165$ , y $\eta = 0.10$ . (a) Todos los modos; (b) Modos 1, 3, 4,5 y 6.	84
4.12	Implementación del método de identificación de fisuras para una viga E-L con una fisura ubicada en $c = 0.1323$ , y $\eta = 0.10$ . (a) Todos los modos; (b) Modos 1, 2, 4,5 y 6.	85
4.13	Implementación del método de identificación de fisuras para una viga E-L con una fisura ubicada en $c = 0.4964$ , y $\eta = 0.10$ . (a) Todos los modos; (b) Modos 1, 2, 4,5 y 6.	85
4.14	Implementación del método de identificación de fisuras para una viga E-L con una fisura ubicada en $c = 0.7834$ y $\eta = 0.10$ . (a) Rigidez de todos los modos; (b) Desvío Estándar.	85
4.15	Implementación del método de identificación de fisuras para una viga E-L con una fisura ubicada en $c = 0.4708$ y $\eta = 0.10$ . (a) Rigidez de todos los modos; (b) Desvío Estándar.	86
4.16	Diagrama de bloques de la propuesta de optimización del método 1A.	89
4.17	Implementación del método de identificación de fisuras 1B para una viga A-A con una fisura ubicada en $c = 0.25$ , y $\eta = 0.99$ sin un apoyo simple intermedio.	95
4.18	Implementación del método de identificación de fisuras 1B para una viga A-A con una fisura ubicada en $c = 0.25$ , y $\eta = 0.99$ ; con un apoyo simple intermedio ubicado en $c_1 = 0.30$ .	96

4.19	Implementación del método de identificación de fisuras para viga A-A con fisuras en $c = 0.15$ y diferentes profundidades.	102
4.20	Análisis de sensibilidad en la implementación del método de identificación de fisuras para viga A-A con fisuras en $c = 0.15$ y $\eta = 0.03$ .	104
4.21	Superficies de los coeficientes adimensionales de frecuencias, planos de los coeficientes adimensionales de frecuencias medidos y respectivas curvas de nivel, para los modos 1 a 3, para la condición empotrado-libre.	107
4.22	Aplicación del método de identificación de fisuras, para una viga empotrado-libre, $\hat{c} = 0.3$ y $\hat{\eta} = 0.5$ .	108
4.23	Valores de $\psi_3$ para una viga empotrado-libre, con fisura $\hat{c} = 0.3$ y $\hat{\eta} = 0.5$ .	108
4.24	Superficies de los coeficientes adimensionales de frecuencias, planos de los coeficientes adimensionales de frecuencias medidos y respectivas curvas de nivel, para los modos 1 a 3, para la condición libre-libre.	110
4.25	Aplicación del método de identificación de fisuras, para una viga libre-libre, $\hat{c} = 0.50$ y $\hat{\eta} = 0.10$ .	111

## Capítulo 5

Figura	Descripción	Página
5.1	Superficies de los coeficientes adimensionales de frecuencias y Margen Teórico de Detección (MTD) de los modos 1 a 3 planos, para la condición A-A. a) Modo 1. b) Modo 2. c) Modo 3.	119
5.2	$\phi_{c,\eta}^3$ obtenido como promedio de los $\phi_{c,\eta}^n$ de los modos 1 a 3 planos, para la condición A-A.	120
5.3	a) Superficie de los coeficientes adimensionales de frecuencias promedio de los modos 1 a 3, condición A-A. b) $\phi_{c,\eta}^3$ del método de identificación de fisuras propuesto.	121
5.4	Margen teórico de detección $\phi_{c,\eta}^3$ para diferentes condiciones de vinculación clásicas.	122
5.5	Superficie de los coeficientes adimensionales de frecuencias normalizados de los modos 1 a 3 para la condición A-A. Planos de medición y planos de medición con incertidumbre. a) Modo 1. b) Modo 2. c) Modo 3.	123
5.6	Superficie de los coeficientes adimensionales de frecuencias normalizados promedio de los modos 1 a 3 planos para la condición A-A. Planos de medición y planos de medición con incertidumbre.	124
5.7	Escala de valores de los mapeos de los errores pronosticados.	125
5.8	Error pronosticado máximo $\hat{e}^{\max}$ para vínculos clásicos simétricos.	126
5.9	Superficies de los coeficientes adimensionales de frecuencias, planos de los coeficientes adimensionales de frecuencias medidos y respectivas curvas de nivel, para los modos 1 a 3, para la condición empotrado-libre.	128
5.10	Aplicación del método de identificación de fisuras, para la condición empotrado-libre, para $\hat{c} = 0.3$ y $\hat{\eta} = 0.5$ .	129
5.11	Curvas de nivel para $\tilde{\lambda}_n/\bar{\lambda}_n - u_{r,\tilde{\lambda}_n}$ , $\tilde{\lambda}_n/\bar{\lambda}_n$ y $\tilde{\lambda}_n/\bar{\lambda}_n + u_{r,\tilde{\lambda}_n}$ para: a) Modo 1. b) Modo 2. c) Modo 3.	130
5.12	Áreas de incertidumbres.	130
5.13	Aplicación del método de identificación de fisuras, con y sin error.	131
5.14	Hipótesis área de incertidumbre para E-L, con $\hat{c} = 0.3$ , $\hat{\eta} = 0.5$ y $u_{\tilde{\lambda}_n} = 0.1\%$ . a) Superposición de las curvas de nivel $\tilde{\lambda}_n/\bar{\lambda}_n - e_{r,\tilde{\lambda}_n}$ y $\tilde{\lambda}_n/\bar{\lambda}_n + e_{r,\tilde{\lambda}_n}$ . b) Área de incertidumbre.	131
5.15	Área de incertidumbre para L-L, $c = 0.15$ y $\eta = 0.50$ , cuando $u_{\tilde{\lambda}_n} = 0.1\%$ .	133

5.16	Área de incertidumbre y errores máximos.	134
5.17	Explicación gráfica de la hipótesis universal denominada área de incertidumbre.	135
5.18	Escala de valores de los mapeos de los errores pronosticados.	136
5.19	Error máximo pronosticado en la determinación de la posición ( $\hat{e}_c^{\max}$ ) y profundidad ( $\hat{e}_\eta^{\max}$ ) para la condición L-L.	137
5.20	Error promedio pronosticado en la determinación de la posición ( $\hat{e}_c^{pro}$ ) y profundidad ( $\hat{e}_\eta^{pro}$ ) para la condición L-L.	139

## Capítulo 6

Figura	Descripción	Página
6.1	Área de incertidumbre para diferentes condiciones de vinculación típica, para fisura tipo $c = 0.15$ y $\eta = 0.50$ , cuando $u_{\lambda_n} = 0.1\%$ ; superpuesta al análisis de sensibilidad cuando $e_{\lambda_n} = 0.1\%$ , para errores máximos.	149
6.2	Área de incertidumbre para la condición A-A, para fisuras con diferentes posiciones y profundidades cuando $u_{\lambda_n} = 0.1\%$ ; superpuesta al análisis de sensibilidad cuando $e_{\lambda_n} = 0.1\%$ , para errores máximos.	150
6.3	Área de incertidumbre para la condición A-A, para fisura tipo $c = 0.30$ y $\eta = 0.50$ , con diferentes niveles de incertidumbre; superpuesta al análisis de sensibilidad para diferentes niveles de errores máximos.	151
6.4	Distribución uniforme de probabilidades de los 3 primeros coeficientes adimensionales de frecuencias.	153
6.5	Distribución uniforme de probabilidades de los errores en los 3 primeros coeficientes adimensionales de frecuencias.	153
6.6	Resultados del análisis de sensibilidad, posición y profundidad de fisuras, para datos de entrada con distribución uniforme de probabilidades $e_{\lambda_n} = 0.01\%$ .	154
6.7	Resultados del análisis de sensibilidad, error en la determinación de la posición y profundidad, para datos de entrada con distribución uniforme de probabilidades $e_{\lambda_n} = 0.10\%$ .	154
6.8	Análisis de convergencia para datos de entrada con distribución uniforme de probabilidades. a) Media móvil. b) Desvío estándar móvil.	155
6.9	Área de incertidumbre para diferentes condiciones de vinculación típica, para fisura tipo $c = 0.15$ y $\eta = 0.50$ , cuando $u_{\lambda_n} = 0.1\%$ ; superpuesta al análisis de sensibilidad de una distribución uniforme cuando $e_{\lambda_n} = 0.1\%$ .	156
6.10	Área de incertidumbre para la condición A-A, para fisuras con diferentes posiciones y profundidades cuando $u_{\lambda_n} = 0.1\%$ ; superpuesta al análisis de sensibilidad de una distribución uniforme cuando $e_{\lambda_n} = 0.1\%$ .	157
6.11	Área de incertidumbre para la condición A-A, para fisura tipo $c = 0.30$ y $\eta = 0.50$ , con diferentes niveles de incertidumbre; superpuesta al análisis de sensibilidad de una distribución uniforme para diferentes niveles de error inducido.	158
6.12	Análisis de sensibilidad, error en la determinación de la posición y profundidad, cuando $e_{\lambda_n} = 0.50\%$ , para datos de entrada con distribución uniforme de probabilidades.	159
6.13	Análisis de sensibilidad, error en la determinación de la posición y profundidad, cuando $e_{\lambda_n} = 1.00\%$ , para datos de entrada con distribución uniforme de probabilidades.	159
6.14	Distribución normal de probabilidades de los 3 primeros coeficientes adimensionales de frecuencias.	160

6.15	Distribución normal de probabilidades de los errores en los 3 primeros coeficientes adimensionales de frecuencias.	161
6.16	Resultados del análisis de sensibilidad, posición y profundidad de fisuras, para datos de entrada con distribución normal de probabilidades.	161
6.17	Resultados del análisis de sensibilidad, error en la determinación de la posición y profundidad, para datos de entrada con distribución normal de probabilidades.	162
6.18	Análisis de convergencia para datos de entrada con distribución uniforme de probabilidades. a) Media móvil. b) Desvío estándar móvil.	162
6.19	Área de incertidumbre para la condición A-A, para fisura tipo $c = 0.30$ y $\eta = 0.50$ , con incertidumbre $u_{\lambda_n} = 0.10\%$ . Superpuesta al análisis de sensibilidad con errores de entrada con distribución uniforme $e_{\lambda_n} = 0.10\%$ para a) $k=1$ , b) $k=2$ y c) $k=3$ .	163
6.20	Área de incertidumbre para diferentes condiciones de vinculación típica, para fisura tipo $c = 0.15$ y $\eta = 0.50$ , cuando $u_{\lambda_n} = 0.1\%$ ; superpuesta al análisis de sensibilidad de una distribución normal cuando $e_{\lambda_n} = 0.1\%$ .	164
6.21	Área de incertidumbre para la condición A-A, para fisuras con diferentes posiciones y profundidades cuando $u_{\lambda_n} = 0.1\%$ ; superpuesta al análisis de sensibilidad de una distribución normal cuando $e_{\lambda_n} = 0.1\%$ .	165
6.22	Área de incertidumbre para la condición A-A, para fisura tipo $c = 0.30$ y $\eta = 0.50$ , con diferentes niveles de incertidumbre; superpuesta al análisis de sensibilidad de una distribución normal para diferentes niveles de error inducido.	166
6.23	Mapeo de los resultados de la implementación del método de identificación de fisuras para A-A cuando $e_{\lambda_1} = e_{\lambda_2} = e_{\lambda_3} = 0.1\%$ . a) Posición. b) Profundidad.	171
6.24	Mapeo de los errores en los resultados de la implementación del método de identificación de fisuras para A-A cuando $e_{\lambda_1} = e_{\lambda_2} = e_{\lambda_3} = 0.1\%$ . a) Posición. b) Profundidad.	172
6.25	Mapeo del error en la determinación de la posición para la condición A-A para 8 combinaciones de error $e_{\lambda_n}$ en el intervalo $(-0.1\%, +0.1\%)$ .	173
6.26	Mapeo del error en la determinación de la profundidad para la condición A-A para 8 combinaciones de error $e_{\lambda_n}$ en el intervalo $(-0.1\%, +0.1\%)$ .	174
6.27	Superposición de los 8 resultados obtenidos de las 8 combinaciones de error máximo $e_{\lambda_n}$ en el intervalo $(-0.1\%, +0.1\%)$ para el caso A-A. a) Error en la posición ( $e_c$ ). b) Error en la profundidad ( $e_{\eta}$ ). c) Casos.	175
6.28	a) Error máximo en la determinación de la posición ( $e_c^{\max}$ ) y b) error máximo en la determinación de la profundidad ( $e_{\eta}^{\max}$ ) entre los 8 resultados obtenidos de las 8 combinaciones de error máximo $e_{\lambda_n}$ en el intervalo $(-0.1\%, +0.1\%)$ para el caso A-A. c) Escala de colores.	176
6.29	a) Error promedio en la determinación de la posición ( $e_c^{pro}$ ) y b) error promedio en la determinación de la profundidad ( $e_{\eta}^{pro}$ ) entre los 8 resultados obtenidos de las 8 combinaciones de error máximo $e_{\lambda_n}$ en el intervalo $(-0.1\%, +0.1\%)$ para el caso A-A. c) Escala de colores.	176
6.30	Escala de valores de los mapeos de los errores pronosticados.	177
6.31	Errores máximos en la determinación de la posición ( $e_c^{\max}$ ) y profundidad ( $e_{\eta}^{\max}$ ) para la condición L-L.	178
6.32	Para la condición A-A, a) Error máximo esperado de la posición ( $\hat{e}_c^{\max}$ ) y b) error máximo esperado profundidad de la fisura ( $\hat{e}_{\eta}^{\max}$ ), con una incertidumbre de los coeficientes de frecuencias de $u_{r,\lambda_n} = 0.1\%$ .	180

6.33	Para la condición A-A, a) Error máximo esperado de la posición ( $e_{\hat{c}}^{\max}$ ) y b) error máximo esperado profundidad de la fisura ( $e_{\hat{\eta}}^{\max}$ ), con una incertidumbre de los coeficientes de frecuencias de $e_{\lambda_n} = 0.1\%$ .	181
6.34	Para la condición A-A, a) error en el pronóstico en la determinación de la posición ( $e_{\text{pron-}\hat{c}}$ ) y b) error en el pronóstico en la determinación de la profundidad de la fisura ( $e_{\hat{\eta}}^{\max}$ ), con $u_{r_{\lambda_n}} = 0.1\%$ y $e_{\lambda_n} = 0.1\%$ .	182
6.35	Error en el pronóstico de la hipótesis de las áreas de las incertidumbres para la condición L-L.	183

## Capítulo 7

Figura	Descripción	Página
7.1	Características del acelerómetro empleado.	192
7.2	Experimento numérico: Relación entre errores en los coeficientes adimensionales y las frecuencias naturales de vibración.	197

## ÍNDICE DE TABLAS

### Capítulo 3

Tabla	Descripción	Página
3.1	Valores de las restricciones elásticas para representar algunas condiciones de apoyo clásicas en los extremos de la viga.	54
3.2	Coefficientes adimensionales de frecuencias para vínculos típicos.	58
3.3	Constante elástica de los resortes empleados.	59
3.4	Valores de las restricciones elásticas en las condiciones de contorno y transición de los 16 casos en estudio.	71

### Capítulo 4

Tabla	Descripción	Página
4.1	Propiedades de las vigas con fisura analizadas.	80
4.2	Primeros seis valores de $\lambda_n$ para las vigas E-L.	82
4.3	Primeros seis valores de $\lambda_n$ para las vigas E-E.	82
4.4	Primeros seis valores de $\lambda_n$ para las vigas A-A.	82
4.5	Estimación de los valores de $\hat{c}$ y de $\hat{\eta}$ con el método inverso propuesto.	83
4.6	Formas modales para viga E-L. Ubicación de nodos, puntos de inflexión, giros y momentos nulos.	86
4.7	Posición de la fisura, los primeros 6 coeficientes adimensionales de frecuencias y en qué modo se presentan valores de rigideces varios ordenes de magnitud mayor a los esperados para el caso E-L.	88
4.8	Primeros seis valores de $\lambda_n$ obtenidos con la solución analítica para vigas A-A con presencia de fisuras y los correspondientes resultados de los métodos de identificación de fisuras, $\hat{c}$ y $\hat{\eta}$ .	90
4.9	Primeros seis valores de $\lambda_n$ obtenidos con la solución analítica para vigas A-A con presencia de fisuras y los correspondientes resultados del método optimizado de identificación de fisuras, $\hat{c}$ y $\hat{\eta}$ .	92
4.10	Primeros seis valores de $\lambda_n$ obtenidos por el método de los elementos finitos para vigas E-E con presencia de fisuras y los correspondientes resultados del método optimizado de identificación de fisuras, $\hat{c}$ y $\hat{\eta}$ .	92
4.11	Primeros seis valores de $\lambda_n$ obtenidos en forma experimental para vigas E-E con presencia de fisuras y los correspondientes resultados del método optimizado de identificación de fisuras, $\hat{c}$ y $\hat{\eta}$ .	93
4.12	Análisis de sensibilidad del método 1B para una viga A-A con $c = 0.25$ y $\eta = 0.5$ cuando $\varepsilon_{\lambda_n} = \pm 1\%, \pm 2\%, \pm 3\%, \pm 4\%, \pm 5\%, \pm 7\%, \pm 10\%$ .	94
4.13	Primeros seis valores de $\lambda_n$ para vigas A-A con y sin apoyo intermedio y los valores $\hat{c}$ , $\hat{\eta}$ , $e_{\hat{c}}$ y $e_{\hat{\eta}}$ .	97
4.14	Análisis de sensibilidad con errores inducidos en $\lambda_1$ .	97
4.15	Análisis de sensibilidad con errores inducidos en $\lambda_2$ .	97
4.16	Análisis de sensibilidad con errores inducidos en $\lambda_3$ .	98

4.17	Análisis de sensibilidad con errores inducidos en $\lambda_4$ .	98
4.18	Análisis de sensibilidad con errores inducidos en $\lambda_5$ .	98
4.19	Análisis de sensibilidad con errores inducidos en $\lambda_6$ .	99
4.20	Análisis de sensibilidad con errores inducidos en los primeros seis valores de $\lambda_n$ .	99
4.21	Primeros seis valores exactos de $\lambda_n$ . para una viga E-L con $c=0.7$ , $\eta=0.8$ y una viga RE-RE representada por $T_1=1$ , $R_1=1$ , $T_2=10$ , $R_2=0.1$ , con $c=0.6$ y $\eta=0.6$ .	99
4.22	Análisis de sensibilidad con errores inducidos en los primeros seis valores de $\lambda_n$ para una viga E-L con $c=0.7$ y $\eta=0.8$ .	100
4.23	Análisis de sensibilidad con errores inducidos en los primeros seis valores de $\lambda_n$ para una viga con restricciones elásticas en ambos extremos con $c=0.6$ y $\eta=0.6$ .	100
4.24	Primeros tres valores exactos de $\lambda_n$ . para una viga A-A con $c=0.15$ .	101
4.25	Primeros tres valores de $\lambda_n$ para una viga con una fisura en $c=0.15$ y con $\eta=0.50$ . y los valores $\hat{c}$ , $\hat{\eta}$ , $e_{\hat{c}}$ y $e_{\hat{\eta}}$ .	109
4.26	Posición de la fisura, primeros 3 valores de $\lambda_n$ y los valores $\hat{c}$ , $\hat{\eta}$ , $e_{\hat{c}}$ y $e_{\hat{\eta}}$ . para el caso E-L.	111
4.27	Posición de la fisura, primeros 3 valores de $\lambda_n$ y los valores $\hat{c}$ , $\hat{\eta}$ , $e_{\hat{c}}$ y $e_{\hat{\eta}}$ . para el caso A-L.	111
4.28	Posición de la fisura, primeros 3 valores de $\lambda_n$ y los valores $\hat{c}$ , $\hat{\eta}$ , $e_{\hat{c}}$ y $e_{\hat{\eta}}$ . para el caso E-A.	112
4.29	Posición de la fisura, primeros 3 valores de $\lambda_n$ y los valores $\hat{c}$ , $\hat{\eta}$ , $e_{\hat{c}}$ y $e_{\hat{\eta}}$ . para el caso L-L	112
4.30	Posición de la fisura, primeros 3 valores de $\lambda_n$ y los valores $\hat{c}$ , $\hat{\eta}$ , $e_{\hat{c}}$ y $e_{\hat{\eta}}$ . para el caso A-A.	112
4.31	Posición de la fisura, primeros 3 valores de $\lambda_n$ y los valores $\hat{c}$ , $\hat{\eta}$ , $e_{\hat{c}}$ y $e_{\hat{\eta}}$ . para el caso E-E.	112
4.32	Comparativas de métodos para $c=0.30$ y $\eta=0.30$ .	113

## Capítulo 6

Tabla	Descripción	Página
6.1	Análisis de sensibilidad para vigas L-L con $c=0.15$ y $\eta=0.50$ .	145
6.2	Análisis de sensibilidad para vigas A-A con $c=0.15$ y $\eta=0.30$ .	146
6.3	Análisis de sensibilidad para vigas A-A con $c=0.30$ y $\eta=0.50$ con $e_{\lambda_n}=0.01\%$ .	147
6.4	Primeros 3 coeficientes adimensionales de frecuencias para viga A-A con $c=0.30$ y $\eta=0.50$	152
6.5	Comparativa de los análisis de sensibilidad en los errores de posición para diferentes posiciones y profundidades de fisura, para determinado grado de error y único tipo de vinculación.	168
6.6	Comparativa de los análisis de sensibilidad en los errores de profundidad para diferentes posiciones y profundidades de fisura, para determinado grado de error y único tipo de vinculación.	168
6.7	Comparativa de los análisis de sensibilidad en los errores de posición para diferentes tipos de vinculación, para determinado grado de error y único típico de fisura.	169
6.8	Comparativa de los análisis de sensibilidad en los errores de profundidad para diferentes tipos de vinculación, para determinado grado de error y único típico de fisura.	169
6.9	Comparativa de los análisis de sensibilidad en los errores de posición para diferentes grados de error, mismo tipo de vinculación y único típico de fisura.	169
6.10	Comparativa de los análisis de sensibilidad en los errores de profundidad para diferentes grados de error, mismo tipo de vinculación y único típico de fisura.	169

## Capítulo 7

Tabla	Descripción	Página
7.1	Mediciones de frecuencias naturales de vibración y su desvío estándar.	189
7.2	Mediciones de frecuencias naturales de vibración e incertidumbre.	190
7.3	Incertidumbre relativa del acelerómetro.	192
7.4	Incertidumbre del adquisidor de datos.	195
7.5	Incertidumbre total del en la determinación de las frecuencias naturales de vibración.	195
7.6	Parámetros de los coef. de frecuencias e incertidumbres relativas.	203
7.7	Incertidumbre en la determinación de los coeficientes adimensionales de frecuencias que contempla la incertidumbre de todos los parámetros.	204
7.8	Incertidumbre en la determinación de los coeficientes adimensionales de frecuencias que contempla solo la incertidumbre de en la determinación de la frecuencia.	205
7.9	Incertidumbre relativa del sensor.	206
7.10	Incertidumbre total del en la determinación de las frecuencias naturales de vibración considerando un sensor mejor prestación.	206
7.11	Incertidumbre en la determinación de los coeficientes adimensionales de frecuencias para una aproximación simplificada de la teoría de incertidumbres y menor error del sensor.	206
7.12	Determinación del factor de Zero Setting para medición patrón: Viga A-A con fisura cuyas características son $0.50$ y $(0, \infty) 0.30$ .	207
7.13	Procedimiento de Zero Setting para una viga A-A con $0.10$ y $0.30$ .	208

# CAPÍTULO 1

## PRESENTACIÓN E INTRODUCCIÓN

### 1.1 PRESENTACIÓN DEL PROBLEMA

Los componentes mecánicos y estructurales comúnmente presentan fisuras debido a factores como imperfecciones en el material, errores de manufactura y montaje, o bien por sobrecargas durante el servicio. Estas fisuras evolucionan con el tiempo, pudiendo provocar fracturas catastróficas. Para evitar estos fallos y minimizar impactos económicos, sociales y ambientales, las técnicas de ensayos estructurales y no destructivos se presentan como un aliado fundamental aspirando a identificar el daño presente, cuantificarlo y estimar la vida útil restante; sin comprometer la funcionalidad.

La presente tesis aborda el estudio del comportamiento vibratorio de vigas con fisuras mediante tres enfoques interconectados: el análisis analítico, las simulaciones numéricas y los ensayos experimentales para obtener soluciones exactas, aproximadas y validar resultados, respectivamente. El objetivo principal de esta investigación es implementar un método de identificación de fisuras utilizando la medición de frecuencias naturales de vibración y discutir su eficacia operacional bajo condiciones empíricas a partir de incorporar incertidumbres al modelo de identificación.

### 1.2 MOTIVACIÓN

#### *1.2.1 Relevancia*

Se requiere que las estructuras y componentes mecánicos funcionen de forma segura durante toda su vida útil. Pero los daños inician un período de avería, que además de producir pérdidas económicas por parálisis de la producción y aumento de los costes en mantenimiento correctivo, pueden terminar en una falla catastrófica con consecuencia sobre la vida de las personas y el ambiente. De los diferentes tipos de daños estructurales, las fisuras son uno de los más encontrados. Se definen como discontinuidades no intencionales en el material. Inicialmente

tienen pequeño tamaño, pero con el transcurso del tiempo se propagan debido a condiciones de tensión fluctuantes. Si alcanzan su tamaño crítico puede ocurrir una falla estructural repentina. Por lo que se las considera peligrosas tanto para condiciones de cargas estáticas como dinámicas.

La falla estructural se refiere a la pérdida de la capacidad de carga de un componente o miembro dentro de una estructura o de la estructura misma. La falla se inicia cuando el material es tensionado hasta su límite de resistencia, lo que provoca la fractura o deformaciones excesivas. Cuando se alcanza este límite, el material se ha dañado y su capacidad de carga se reduce de forma permanente, significativa y rápidamente. En un sistema bien diseñado, una falla localizada no debería causar un colapso inmediato o incluso progresivo de toda la estructura. La resistencia máxima a la falla es uno de los estados límite que deben tenerse en cuenta en la ingeniería y diseño estructural.

Esto ha motivado que científicos e ingenieros hayan realizado una intensa investigación para encontrar metodologías eficaces para predecir la ubicación e intensidad del daño, lo que juega un papel importante en las aplicaciones de monitoreo de salud estructural. Métodos de evaluación no destructiva (END) convencionales (como ser tintas penetrantes, partículas magnetizables, ultrasonido, corrientes inducidas, radiografía, etc.) son tecnologías maduras, bien conocidas e implementadas en equipos ampliamente comercializados y aceptados por la industria y las agencias reguladoras. Sin embargo, pueden presentar algún tipo de limitación, por ejemplo: requieren que se conozca a priori la vecindad del daño, que la parte de la estructura que se inspecciona sea fácilmente accesible, solo detectar daños en las proximidades de la superficie, solo pueden ser aplicadas para ciertos tipos de materiales, ser laboriosas y consumir de mucho tiempo, requerir de un técnico calificado para realizar las pruebas e interpretar los resultados y ser costosas; entre otras. Por otra parte, el enfoque intensivo en mano de obra y las condiciones de trabajo peligrosas (altura, ambientes tóxicos y/o radiactivos, etc.) potencialmente introducen errores que pueden tener graves implicaciones en la seguridad de una estructura. Por lo tanto, es relevante desarrollar técnicas alternativas que pretendan superar, aunque sea parcialmente, a las ya precedentes.

Existen métodos de Ensayos No Destructivos que aún están en desarrollo y/o que fueron implementados de manera limitada y que aún no son totalmente aceptados por la industria y las agencias reguladoras como aplicables en la práctica. Un sistema robusto de detección de daños debiese detectar los daños a tiempo, localizarlos, dar una indicación de la extensión del daño y pronosticar por cuánto tiempo la estructura puede seguir funcionando. Además, es conveniente que se presente sustancialmente automatizado, sin depender del juicio del usuario o del modelo y ser capaz de tener en cuenta las limitaciones operativas.

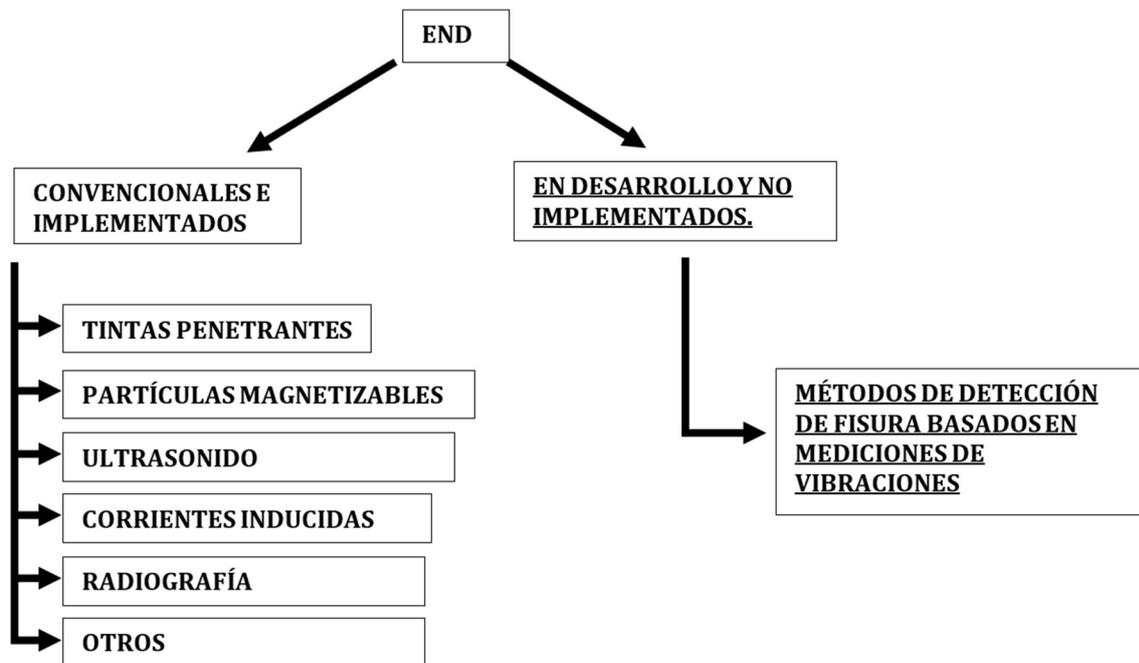


Figura 1.1 – Clasificación de los Ensayos No Destructivos.

El monitoreo estructural basado en mediciones de vibraciones potencialmente puede satisfacer estos requerimientos y por lo tanto lo convierten en un enfoque viable. Analizar periódicamente los cambios en las características dinámicas ofrece una serie de ventajas: Los parámetros modales tienen una naturaleza global lo que permite sensor la estructura en algún punto donde se tenga fácil acceso a la misma pudiendo igualmente identificar un daño ubicado en una zona de difícil acceso. Por otra parte, obtener mediciones de vibraciones es una tecnología madura y relativamente barata, lo que ofrece una técnica de control de la salud estructural de bajo costo. Además, se han desarrollado sensores sin contacto (láseres, por ejemplo), inalámbricos y monitoreados de forma remota, lo que simplifica la implementación de cadenas de medición en grandes estructuras o condiciones ambientales desfavorables (altas temperaturas, radiación, etc.). Los avances en el campo de la informática, que incluyen computadoras de mayor velocidad de procesamiento, mayor memoria y menores precios, han permitido el desarrollo de modelos matemáticos que pueden predecir con mayor exactitud el comportamiento dinámico de los componentes estructurales con presencia de fisuras.

Sin embargo, ha tomado un largo tiempo en ser formal y ampliamente adoptada por la comunidad moderna de ingeniería debido a que es difícil su implementación en la práctica. Por citar algunas de sus desventajas: si la respuesta del sistema tiene frecuencias mayores que las que se pueden sensor, los modos identificados no proporcionarán ninguna información. Además, dentro del rango de frecuencias de la respuesta medida, a menudo es difícil identificar todos los modos debido al acoplamiento entre modos que están estrechamente espaciados en frecuencia. A su vez, el daño es típicamente un fenómeno local, y la respuesta local es capturada por modos de

mayor frecuencia, mientras que los modos de baja frecuencia tienden a capturar la respuesta global de la estructura y, por lo tanto, son menos sensibles a los cambios locales de la estructura. Por otra parte, en la cadena de medición se introducen errores (visualización de datos, resolución en frecuencia finita. A lo que hay que sumarle el cambio del comportamiento dinámico de la estructura por condiciones ambientales cambiantes durante la prueba). Todo esto tenderá a hacer que los parámetros modales identificados sean menos representativos de las verdaderas propiedades dinámicas de la estructura. Analizar estos limitantes y como superarlos es un campo aún poco explorado.

De lo expuesto anteriormente se desprende que el estudio del comportamiento dinámico de componentes estructurales con presencias de fisuras y el desarrollo de métodos de detección de fisura es de un gran interés en ingeniería y un área de relevancia en las investigaciones científicas. En particular, el estudio del problema inverso de detección de fisuras en vigas a partir de valores de frecuencias naturales de vibración obtenidas experimentalmente mediante análisis dinámicos.

### ***1.2.2 Identificación del aporte***

Numerosos autores han estudiado el tema, desarrollado diferentes modelos y métodos de identificación de fisuras. Algunos han realizado exhaustivas revisiones de la literatura disponible, donde por lo general concluyen con propuestas de futuras líneas de trabajo. Por citar algunos ejemplos:

Deobling et. Al (1996) concluyen su revisión de literatura sobre monitoreo de salud estructural, planteando cuatro preguntas que debiéramos formularnos los investigadores que trabajamos sobre método de identificación de daños en vigas y que al momento no tenían una respuesta disponible: ¿Cuál es el defecto más pequeño que se puede detectar? ¿Se pueden medir con la suficiente precisión los pequeños cambios de frecuencia asociados con los escenarios de daño estudiados? ¿Cómo afecta el comportamiento no lineal la precisión del método? ¿Es factible la implementación de métodos de identificación de fisuras basados en medición de frecuencias naturales con la instrumentación actual?

Narkis et al (1996) consideraron que la ubicación de fisuras en las estructuras se puede determinar utilizando las variaciones en sus frecuencias naturales, entre el estado inicial sin daños y una configuración posterior con daños. Sin embargo, la aplicación de este método a vigas en voladizo puede resultar en errores inaceptables, debido a cambios en la rigidez del empotramiento.

Kim et al (2007) sostienen que la característica más atractiva asociada con el uso de frecuencias naturales es que son relativamente simples de medir. Sin embargo, la viabilidad de usar estos métodos para la detección de daños es limitada por al menos dos razones. En primer

lugar, un daño significativo puede causar cambios muy pequeños en los parámetros modales, particularmente para estructuras grandes. En segundo lugar, estos cambios pueden pasar desapercibidos debido a cambios en las condiciones ambientales y operativas.

Sinou (2013), en su análisis del estado del arte sobre detección de daños y monitoreo de sistemas mecánicos basados en cambios de las mediciones de vibraciones mecánicas, considera como temas de interés para trabajos a futuro el desarrollo de técnicas de monitoreo de estructuras que contemplen la adición de teorías que tengan en cuenta las incertidumbres debidas a las condiciones ambientales o la evolución de las condiciones de contorno. Así como mejorar la correlación entre el análisis experimental y numérico para técnicas de monitoreo de estructuras con la inclusión de errores e incertidumbres en el modelado.

Bovsunovsky (2015) sostiene que la búsqueda de características de vibración que sean más sensibles a la presencia de daños y fáciles de aplicar aún continúa en la actualidad.

La presente tesis intentar dar respuesta a los problemas que, según varios autores reconocidos, deben abordarse en las investigaciones futuras para que la identificación de daños mediante mediciones de vibraciones sea una tecnología viable, práctica y comúnmente implementada. De hallarse en forma satisfactoria, abre potencialmente las puertas a que numerosos y diversos modelos matemáticos puedan ser efectivamente aplicados al monitoreo de estructuras.

Es importante para la aplicación estas técnicas establecer cuál es el grado de error del método de identificación de fisuras, para así generar la confianza de que el daño será reconocido mientras la estructura aún tenga la integridad suficiente para permitir la reparación. Determinar el número y la ubicación de los sensores de medición es otro tema importante. Como así poder cuantificar el nivel de incertidumbre en las mediciones, ya que un alto valor evitará la detección de pequeños niveles de daño. Determinar los efectos de los cambios en la rigidez de los vínculos y/o de las condiciones ambientales de los ensayos sobre el comportamiento vibratorio y que estos no enmascaren el efecto sobre los parámetros modales producido por la presencia de daños estructurales.

Son aportes originales de esta tesis analizar la factibilidad de la aplicación de métodos de identificación de fisuras basados en mediciones de frecuencias naturales de vibración. Para ello, se estudió desde un punto de vista analítico y experimental la influencia de vínculos no ideales al comportamiento vibratorio de la estructura. Se determinó la incertidumbre en la cadena de medición de vibraciones mecánicas y su relación con la incertidumbre en los coeficientes adimensionales de frecuencias. Se formuló por primera vez una hipótesis para predecir la capacidad teórica de identificación del método de identificación de fisuras propuesto. Se estableció una relación entre la incertidumbre en las mediciones de las frecuencias naturales de vibración y los resultados en la aplicación del método.

### 1.3 FORMULACIÓN DEL PROBLEMA

La estructura bajo inspección está sometida a fuerzas de excitación, inducidas artificialmente mediante algún tipo de instrumento, como ser un shaker o un martillo instrumentado; o bien por fuerzas ambientales propias de las condiciones de funcionamiento. Esto produce una respuesta vibratoria que es adquirida por algún tipo de transductor, típicamente acelerómetros. Mediante técnicas del análisis modal experimental se pueden obtener fácil y económicamente los parámetros modales que caracterizan la estructura.

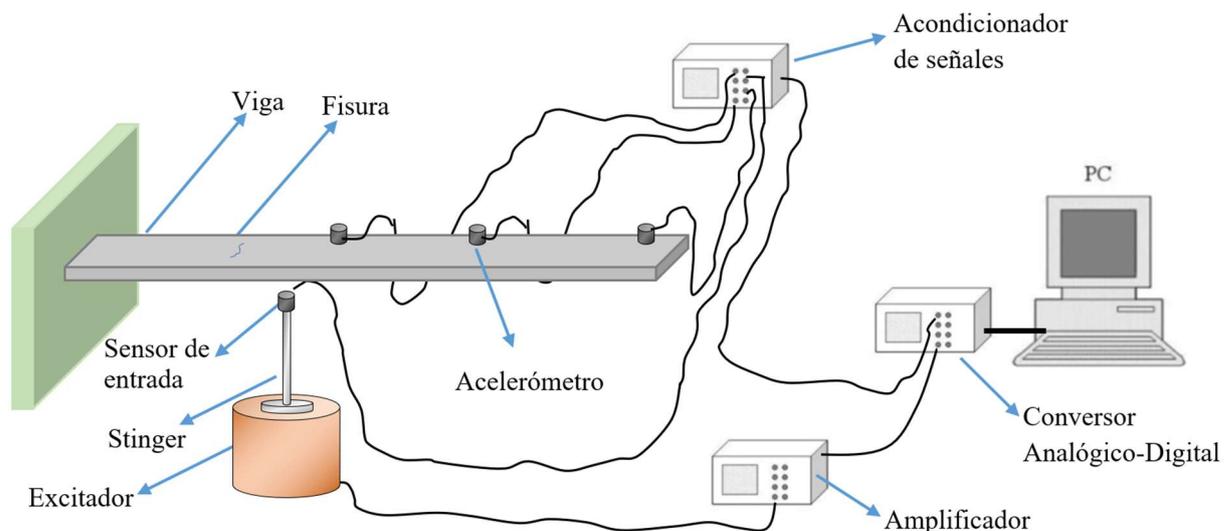


Figura 1.2 – Sistema de identificación de fisuras.

El concepto fundamental sobre el que se sustentan los sistemas de identificación de fisuras basados en mediciones de vibraciones es que el daño estructural (fisuras, grietas, poros, etc.) produce determinados cambios en las propiedades físicas de la estructura (masa, amortiguamiento y rigidez), los cuales pueden causar cambios detectables en los parámetros modales (frecuencias, amortiguamiento y formas modales).

Los parámetros modales extraídos a partir de la ejecución de técnicas del análisis modal experimental son comparados a los obtenidos a partir de los modelos modales. Tras la aplicación de algún algoritmo, se puede detectar, localizar y caracterizar daños en sistemas mecánicos y estructurales.

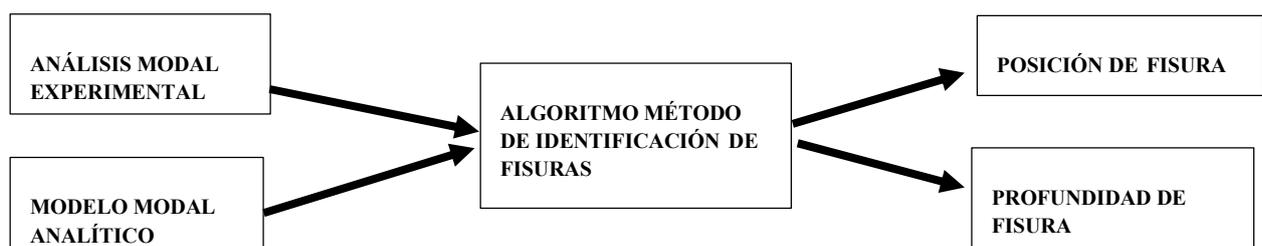


Figura 1.3 – Procedimiento de identificación de fisuras.

## 1.4 ACOTAMIENTO DEL PROBLEMA

### 1.4.1 Según los campos de conocimiento comprendidos

Se puede considerar que los métodos de identificación de fisuras basado en mediciones de vibraciones son un campo de la mecánica que se da en la intersección entre el campo de la mecánica de la fractura y el campo las vibraciones mecánicas.

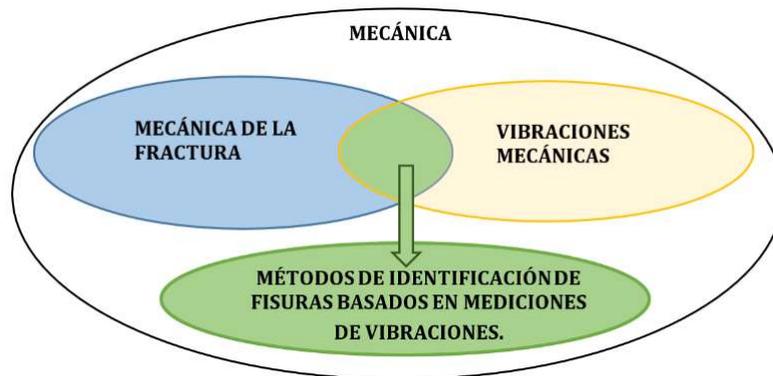


Figura 1.4 – Acotamiento del problema.

### 1.4.2 Según el tipo de modelo base

Pueden clasificarse según el modelo base en "método basado en modelos" o "método basado en respuestas." El método basado en modelos supone que para la identificación de daños se dispone de un modelo analítico o numérico de la estructura; mientras que el método basado en la respuesta depende solo de los datos de respuesta experimental de las estructuras (Fan y Qiao, 2010).

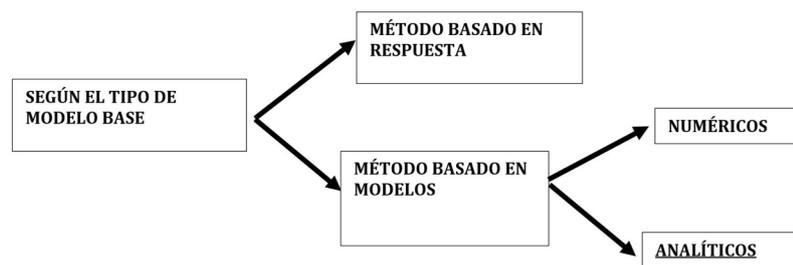


Figura 1.5 – Clasificación de los métodos de identificación de fisuras según el modelo base.

Una de las técnicas de simulación numérica por computador más difundidas en ingeniería es el análisis por elementos finitos (FEA, siglas en inglés de Finite Element Analysis). Existen muchos paquetes de software, tanto libres como comerciales. En estas aplicaciones, el objeto o sistema se representa por un modelo geoméricamente similar que consta de múltiples regiones discretas simplificadas y conectadas. Siendo un método aproximado, la precisión de los métodos

FEA puede ser mejorada refinando la discretización en el modelo, usando más elementos y nodos. Con FEA se pueden manejar sistemas complejos cuyas soluciones analíticas son difícilmente calculables. Con este fin, se utilizaron en la presente tesis. También para comparar resultados con los obtenidos por modelos analíticos.

Por otra parte, los modelos analíticos pueden utilizar diferentes herramientas matemáticas, como ser el cálculo de variaciones y los métodos variacionales, que dan soluciones analíticas exactas y aproximadas respectivamente; y ser aplicables al estudio de vigas con fisuras de material homogéneo y sección constante o vigas de materiales compuestos laminados y espesor variable.

En la presente tesis se ha establecido conveniente el uso de un modelo modal analítico ya que se obtiene una solución exacta, con un bajo coste computacional en comparación a simulaciones por el método de los elementos finitos; y por supuesto, un sustancial ahorro de tiempo frente a establecer el modelo modal de forma experimental.

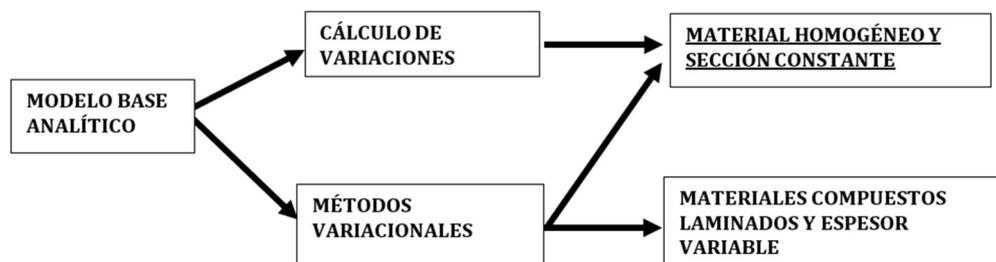


Figura 1.6 – Clasificación de los métodos de identificación de fisuras según el modelo base analítico.

### 1.4.3 Según parámetros modales

Se pueden considerar métodos basados en cambios en las frecuencias naturales, en las formas modales, en la curvatura de la forma modal o cambios en la deformación modal; entre otros. En la presente tesis se aborda el estudio de métodos que utilizan mediciones de frecuencias naturales de vibración. Este parámetro modal presenta ventajas y desventajas.

Las mediciones de frecuencia se pueden realizar rápidamente y, a menudo, son fiables. Esto hace que los métodos de localización de daños que utilizan cambios en las frecuencias de resonancia sean de los más útiles y difundidos (Salawu, 1997). La elección del cambio de frecuencia natural es atractiva porque las frecuencias naturales se pueden medir convenientemente desde unos pocos puntos accesibles de la estructura y, por lo general, están menos contaminadas por el ruido experimental (Fan y Qiao, 2010). Estudios recientes han demostrado que las frecuencias de resonancia tienen una variación estadística mucho menor de las fuentes de error aleatorio que otros parámetros modales (Farrar, et al., 1997).

Los cambios de frecuencia tienen importantes limitaciones prácticas para las aplicaciones: La sensibilidad algo baja de los cambios de frecuencia al daño requiere mediciones muy precisas o grandes niveles de daño. Por otra parte, los múltiples cambios de frecuencia pueden proporcionar

información espacial sobre el daño estructural porque los cambios en la estructura en diferentes ubicaciones causarán diferentes combinaciones de cambios en las frecuencias modales. Sin embargo, como lo señalaron varios autores, a menudo hay un número insuficiente de frecuencias con cambios suficientemente significativos para determinar la ubicación del daño de forma única. Por lo que, debido a que las frecuencias modales son una propiedad global de la estructura, no está claro que los cambios en este parámetro se puedan usar para identificar más de un daño de nivel 1. Se produce una excepción a esta limitación en frecuencias modales más altas, donde los modos están asociados con respuestas locales. No obstante, las limitaciones prácticas involucradas con la excitación y extracción de estos modos altos pueden hacer que sean difíciles de identificar.

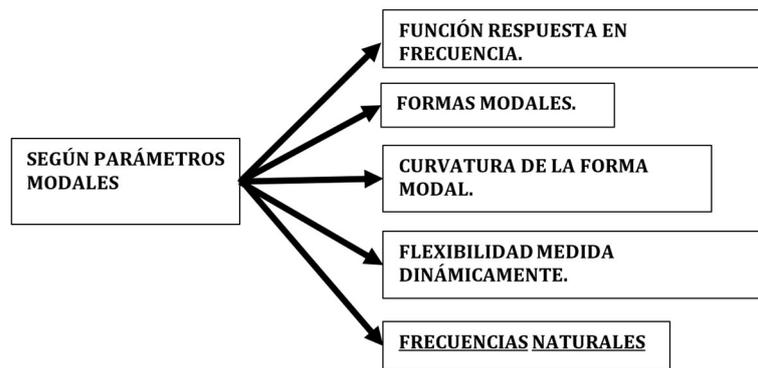


Figura 1.7 – Clasificación de los métodos de identificación de fisuras según el parámetro modal.

#### 1.4.4 Según niveles de identificación de daños

Un sistema de clasificación para métodos de identificación de daños, presentado por Rytter (1993), define cuatro niveles de identificación de daños, de la siguiente manera:

- Nivel 1: Determinación de que el daño está presente en la estructura.
- Nivel 2: Determinación de la ubicación geométrica del daño.
- Nivel 3: Cuantificación de la gravedad del daño.
- Nivel 4: Predicción de la vida útil restante de la estructura

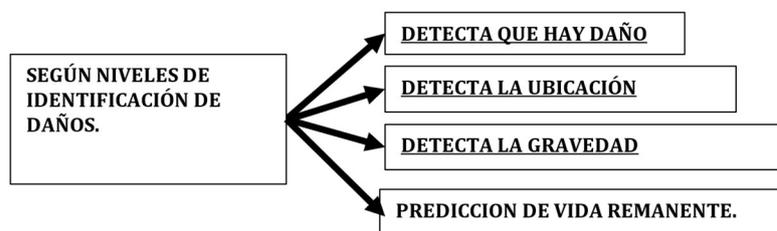


Figura 1.8 – Clasificación de los métodos de identificación de fisuras según el nivel de identificación del daño.

#### 1.4.5 Según el tipo de daños

Los efectos del daño en una estructura se pueden clasificar como lineales o no lineales. En el caso en que la estructura se comporte de forma lineal-elástica antes y después del daño, se

considera que la presencia del daño tiene un comportamiento lineal. Los cambios en las propiedades modales son el resultado de cambios en la geometría y / o las propiedades del material de la estructura, pero la respuesta estructural aún se puede modelar usando una ecuación lineal de movimiento. El daño no lineal se define como el caso en el que la estructura inicialmente lineal-elástica se comporta de manera no lineal después de que se ha introducido el daño. Un ejemplo de daño no lineal es la formación de una grieta por fatiga que posteriormente se abre y se cierra Doebeling et. Al (1996). Si bien los modelos no lineales son de mayor interés para la comunidad, su resolución es más compleja. Por este motivo, en la presente tesis se abordarán únicamente modelos lineales.

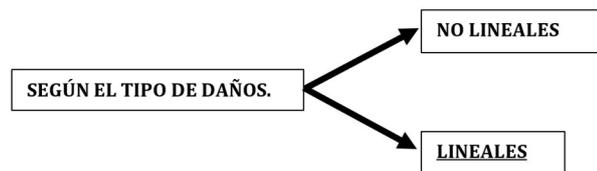


Figura 1.9 – Clasificación de los métodos de identificación de fisuras según el tipo de daño.

#### 1.4.6 Según la estructura a monitorear

Los métodos de identificación de daños basados en mediciones de vibraciones pueden ser aplicados a estructuras complejas como ser centrales nucleares, plataformas marítimas de extracción de petróleo o puentes. Al momento, su éxito ha sido escaso. También se pueden aplicar a estructuras más simples. Los componentes estructurales arquetípicos son las vigas, pórticos y placas. En particular, las vigas son uno de los más utilizados en maquinaria y construcción. Hay dos razones principales para centrarse en estructuras simples: la mayoría de las estructuras o sus componentes principales en la ingeniería civil y mecánica se pueden simplificar como una viga o placa. El problema de identificar un daño específico en una viga o placa proporciona un punto de referencia importante para la eficacia y precisión de las técnicas de identificación (Fan y Qiao, 2010). El trabajo de esta tesis se centró en el estudio de monitoreo de vigas.

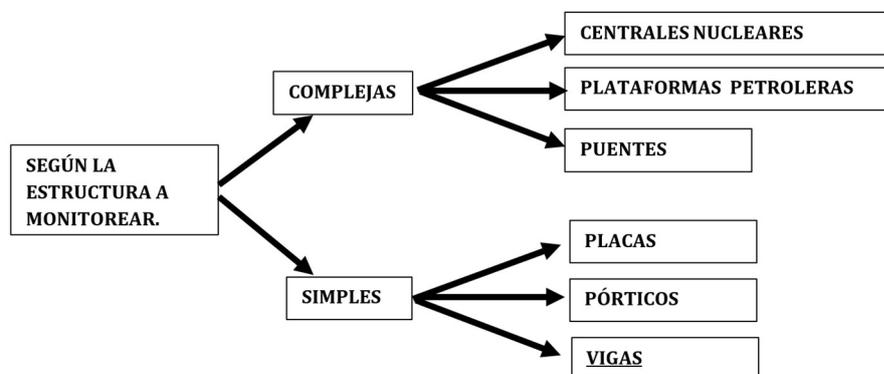


Figura 1.10 – Clasificación de los métodos de identificación de fisuras según la estructura a monitorear.

## 1.5 OBJETIVOS

### *1.5.1 Objetivo general*

Implementar un método analítico de identificación de fisuras en vigas basado en mediciones de frecuencias naturales de vibración.

### *1.5.2 Objetivos específicos*

- Obtener, mediante la aplicación del cálculo de variaciones, la solución exacta del problema de vibraciones de vigas Euler Bernoulli, cuya sección es constante y su material es isótropo y homogéneo.
- Obtener, por la aplicación de métodos variacionales, soluciones aproximadas del problema de vibraciones de vigas de sección variable.
- Analizar, empleando modelos matemáticos de vigas con vinculaciones elásticas en sus extremos, la influencia que tiene en las frecuencias naturales de vibración la variación de la rigidez de los vínculos que la soportan.
- Desarrollar métodos analíticos de detección de fisuras en vigas Euler Bernoulli, donde las fisuras son emuladas por rótulas internas.
- Programar algoritmos para la implementación de los métodos analíticos de detección de fisuras.
- Determinar la capacidad teórica de identificación de los métodos propuestos.
- Realizar análisis de sensibilidad del método analítico de detección de fisuras propuesto.
- Determinar cuál es la incertidumbre admisible en la determinación de las frecuencias naturales de vibración para una posible implementación del método propuesto.
- Analizar qué tipo de vinculaciones facilitan la implementación del método propuesto.
- Desarrollar diferentes prototipos de equipos para inducir vibraciones mecánicas.
- Aplicar técnicas del análisis modal experimental para determinar parámetros modales.

## 1.6 METODOLOGÍA

La presente tesis abordó el estudio del comportamiento vibratorio, en particular el análisis de vibraciones libres, de componentes estructurales con presencia de fisuras. Concentró su atención en el desarrollo e implementación de métodos de identificación de fisuras basados en mediciones de frecuencias naturales de vibración.

El trabajo de investigación comenzó por realizar una intensa búsqueda bibliográfica y de artículos referidos a los temas tratados, selección y lectura de estos. Este proceso se mantuvo hasta la actualidad.

Metodológicamente, se abordó el estudio de vibraciones en vigas con presencia de fisuras desde tres perspectivas diferentes: por modelos analíticos implementados en algoritmos, mediante simulaciones numéricas y de forma experimental.

Desde el punto de vista analítico, se obtuvo mediante la aplicación del cálculo de variaciones Dym y Shames, (2013), la solución exacta del problema de vibraciones de vigas Euler Bernoulli de sección constante y material isótropo y homogéneo. Para esto, se presentaron aplicaciones rigurosas del principio de Hamilton y se obtuvieron las ecuaciones diferenciales, las condiciones de contorno y las condiciones de transición que describen los respectivos comportamientos. Para la obtención de resultados numéricos se desarrollaron diferentes algoritmos en el programa Maple. Se determinaron soluciones exactas de vigas con varios tramos uniformes proponiendo soluciones analíticas en cada tramo y aplicando el método de separación de variables.

Para modelar los efectos de fallas localizadas se divide a la viga dañada en dos tramos unidos con una restricción elástica rotacional conectada a ambos tramos. Si la amplitud de la deformación mantiene a la fisura siempre abierta, se puede aplicar un modelo lineal y en consecuencia permite obtener una solución analítica exacta. Algunos autores proponen considerar una disminución en la rigidez a la flexión donde se encuentra la fisura, entre ellos, Rizos et al. (1990), Ostachowicz y Krawezuk, (1991), Narkis (1994), Dimarogonas (1996), Chondros y otros (1997), Tada et al. (2000).

Se presentaron resultados de frecuencias naturales y formas modales de los elementos estructurales analizados, donde en algunos casos fueron comparados con los obtenidos por otros autores, y en otros con los resultados obtenidos con un programa de elementos finitos.

Para vigas, de sección constante y material isótropo y homogéneo, se implementó el problema inverso de detectar la posición y profundidad de fisuras. El método aplicado consiste en resolver la ecuación de frecuencias. Conociendo las frecuencias medidas, se asignan posiciones y se determina la curva de rigidez de cada modo. La intersección de las curvas es la solución del

problema Raffo y Carrizo (2013); Raffo y Carrizo (2014). Posteriormente, utilizando el mismo método, se analizó la detección de fisuras en vigas con un apoyo intermedio Raffo y Carrizo (2016).

Los modelos analíticos que emplean restricciones elásticas intermedias y en sus extremos permitieron analizar la influencia que tiene la variación de la rigidez de los vínculos en las frecuencias naturales de vibración. Ver Carrizo y Raffo, (2019b).

Se propuso e implemento otro método de detección de fisuras basado en mediciones de frecuencias naturales. El cual consiste en determinar las superficies de coeficientes adimensionales de frecuencias de cada modo, que es la representación gráfica de los valores de frecuencias naturales de vibración normalizados, obtenidos para cada posición y profundidad de fisura. Con las frecuencias medidas se establece las líneas de contorno, a partir de cuales se puede aplicar un algoritmo y obtener la solución del problema inverso. Se aplicó un análisis de sensibilidad sobre el método propuesto, para una condición de vínculo clásica y un valor de incertidumbre en la determinación del coeficiente adimensional de frecuencia, Carrizo y Raffo, (2019a).

Posteriormente se analizó la capacidad teórica de detección del método propuesto. También, la influencia de la incertidumbre en las mediciones de vibraciones utilizadas como dato de entrada por el método de detección de fisuras, en las incertidumbres en la determinación de la posición y profundidad de la fisura.

Para poder estudiar el comportamiento dinámico de las vigas fisuradas desde un punto experimental fue necesario contar con una serie de equipos para inducir vibraciones mecánicas en la estructura bajo prueba. Los excitadores electrodinámicos o shaker, son equipos muy costosos y que no se produce en el país. Lo que motivó el desarrollo de diferentes prototipos propios, cuyas ecuaciones de diseño fueron deducidas de las leyes fundamentales del electromagnetismo. Mediante un análisis cualitativo de las ecuaciones propuestas, se extrajeron importantes consideraciones sobre el diseño de excitadores electrodinámicos. Partiendo de los requerimientos propuestos, se definieron los parámetros constructivos del prototipo. Se seleccionaron los materiales. Se realizó el modelado tridimensional utilizando software CAD y se verificó el diseño utilizando análisis por elementos finitos. Se diseñó un prototipo de excitador electrodinámico de baja potencia y bajo costo. El equipo dispone de una fuerza máxima de 85 N, desplazamiento máximo de 5 mm y puede operar en un rango de frecuencias entre 7 Hz y 2.1kHz. Ver Raffo y Carrizo (2018) y Carrizo, Raffo, Carcache (2020).

Con este equipo se estuvo en condiciones de inducir vibraciones sobre la viga, realizar un barrido de frecuencias y observarse el fenómeno de resonancia. Al analizar el espectro de frecuencias de la señal proveniente de un acelerómetro montado sobre la pieza en estudio, se pudo determinar fácilmente las frecuencias naturales de vibración.

Para determinar los parámetros modales necesarios para ejecutar el método de identificación de fisuras y para comparar con los resultados analíticos se aplicaron técnicas del análisis modal experimental. Se elaboró un apunte sobre análisis modal experimental, que fue confeccionado tras una intensa búsqueda de material bibliográfico y traducción al español de literatura de muy reciente data. Fue necesario el desarrollo de un algoritmo para la determinación experimental del coeficiente de frecuencias mediante la aplicación de técnicas de vibraciones mecánicas, que simplifique el ensayo, disminuya los tiempos y la complejidad, como así también disminuya la incertidumbre en la determinación de dichos coeficientes.

Se ejecutaron ensayos y se analizó la incertidumbre en la cadena de medición con acelerómetros. Finalmente se analizó la posible implementación de los métodos de detección de fisuras basados en mediciones de frecuencias naturales de vibración al monitoreo de la condición estructural de componentes mecánicos y estructuras en general.

## **1.7 CONTENIDO**

Esta tesis está estructurada en 8 capítulos y 11 apéndices, detallados de la siguiente manera:

Capítulo 1: Introducción y presentación de la problemática abordada.

Capítulo 2: Breve descripción del estado actual del conocimiento, recopilando en la literatura presente técnicas y métodos que tratan los problemas estudiados.

Capítulo 3: Obtención del modelo matemático que rige las vibraciones transversales en vigas homogéneas e isotrópicas con restricciones elásticas, analizando la influencia de cambios en las condiciones de vinculación y la presencia de fisuras.

Capítulo 4: Presentación de dos métodos analíticos de identificación de fisuras basados en mediciones de frecuencias naturales de vibración, con un análisis detallado de su implementación, ventajas y desventajas.

Capítulo 5: Formulación de hipótesis sobre la capacidad teórica de identificación de fisuras.

Capítulo 6: Exposición de los resultados de exhaustivos análisis de sensibilidad, permitiendo contrastar las hipótesis sobre la capacidad teórica de identificación de fisuras y comprender el alcance de los métodos de detección de fisuras basados en mediciones de frecuencias naturales.

Capítulo 7: Determinación de la incertidumbre en la medición de frecuencias naturales de vibración y su relación con los coeficientes adimensionales de frecuencias.

Capítulo 8: Presentación de conclusiones generales derivadas de las metodologías y resultados, junto con sugerencias para futuras líneas de investigación.

Este trabajo se complementa con una serie de apéndices que sintetizan aspectos fundamentales para facilitar la comprensión de las formulaciones y metodologías propuestas

Apéndice 1: Detalle exhaustivo del modelo analítico de vibraciones transversales libres de una viga homogénea e isotrópica de N tramos con restricciones elásticas, punto de partida para los desarrollos analíticos presentados en la tesis.

Apéndice 2: Clasificación de fisuras, sus parámetros característicos y modelos asociados.

Apéndice 3: Extensión de los resultados del Capítulo 3, mostrando la influencia de fisuras en los coeficientes adimensionales de frecuencias para diversas condiciones de vinculación.

Apéndice 4: Observación de la implementación del método de identificación de fisuras 1A, específicamente cuando la fisura se encuentra en un punto de inflexión de la forma modal.

Apéndice 5: Ampliación de los resultados sobre la capacidad teórica de identificación de fisuras, abordando la hipótesis 1: Sensibilidad de la respuesta vibratoria al daño presente.

Apéndice 6: Extensión de los resultados sobre la capacidad teórica de identificación de fisuras, tratando la hipótesis 2: Áreas de incertidumbre.

Apéndices 7 y 8: Presentación de más resultados del análisis de sensibilidad del método de identificación de fisuras 2, el 7 para casos particulares y el 8 exhibiendo resultados del mapeo de análisis de sensibilidad para diversas condiciones de vinculación.

Apéndice 9: Ofrece más resultados de la contrastación universal de la hipótesis de las áreas de incertidumbre.

Apéndices 10 y 11: Tratan sobre los sistemas de excitación de la estructura y las consideraciones tenidas en cuenta en los ensayos de análisis modal experimental, respectivamente.

## **1.8 PUBLICACIONES CIENTÍFICAS ORIGINADA EN LA TESIS**

Los temas desarrollados en esta tesis doctoral permitieron producir 2 artículos en revistas internacionales indexadas, 1 artículo en revista nacional, 2 trabajos en congresos internacionales, y 8 trabajos en congresos nacionales.

### ***1.8.1 REVISTAS INTERNACIONALES***

- Carrizo, M. y Raffo, J. (2022). “A direct based method with an analytical capability parameter to detect open cracks on free vibrating beams”, NED University Journal of Research - Structural Mechanics, Vol XIX, no. 3.
- Carrizo, M., Carcache, P. y Raffo, J. (2021). “Design of a Low Cost Electrodinamic Shaker”, Revista Tecnología y Ciencia.

### **1.8.2 REVISTAS NACIONALES**

- Raffo, J. L. y Carrizo, M. R. (2015). “Método analítico de detección de fisuras en vigas vibrantes”, Revista Argentina de Ingeniería, RADI, ISSN 2314-0925, Año 3, Vol. V, 97-103.

### **1.8.3 CONGRESOS INTERNACIONALES**

- Carrizo, M. R., Carnelutto, M. y Raffo, J. L. (2023). “Analytical study of the influence of cracks on the natural vibration frequencies of Euler Bernoulli beams with elastic supports”, 21<sup>st</sup> LACCEI International Multi-Conference for Engineering, Education and Technology, LACCEI 2023, July 17-21, Buenos Aires, Argentina.
- Carrizo, M. R. y Raffo, J. L. (2019). “Theoretical and experimental analysis of the elastic support rigidity coefficient’s value on the natural frequencies in beams”, XIV Congreso Iberoamericano de Ingeniería Mecánica, XIV CIBIM, Cartagena, Colombia, del 12 al 15 de noviembre.

### **1.8.4 CONGRESOS NACIONALES**

- Carrizo, M. R. y Raffo, J. L. (2019). “Study of the effectiveness of an analytical crack detection method based on frequency measurements”, XXIV Congreso sobre Métodos Numéricos y sus Aplicaciones, XXIV ENIEF, Mecánica Computacional Vol. XXXVII, ISSN 2591-3522, 149-158, Santa Fe, Argentina, del 5 al 7 de noviembre.
- Raffo, J. L. y Carrizo, M. R. (2018). “Diseño y Construcción de un Sistema Electromagnético para Inducir Vibraciones Forzadas”, VI Congreso Argentino de Ingeniería Mecánica y I Congreso Argentino de Ingeniería Ferroviaria, VI CAIM - I CAIFE, ISBN 978-987-46987-0-4, Trabajo J-126, Tucumán, Argentina, del 10 al 12 de octubre.
- Raffo, J. L. y Carrizo, M. R. (2016). “Estudio de Detección de Fisuras en Vigas con un Apoyo Intermedio”, XXII Congreso sobre Métodos Numéricos y sus Aplicaciones, XXII ENIEF, Mecánica Computacional Vol. XXXIV, ISSN 1666-6070, 1521-1535, Córdoba, Argentina, del 8 al 11 de noviembre.
- Raffo, J. L. y Carrizo, M. R. (2016). “Determinación de Deformaciones, Tensiones y Desplazamientos en la Enseñanza de Resistencia de Materiales”, V Congreso Argentino de Ingeniería Mecánica, V CAIM, ISBN 978-987-1676-63-7, Trabajo A-015, 103-113, Santiago del Estero, Argentina, del 5 al 7 de octubre.
- Raffo, J. L. y Carrizo, M. R. (2016). “Diseño y Construcción de un Banco de Ensayos para Mejorar la Enseñanza de las Materias Estabilidad I y II de la Carrera de Ingeniería

Mecánica de la Facultad Regional Delta – UTN”, V Congreso Argentino de Ingeniería Mecánica, V CAIM, ISBN 978-987-1676-63-7, Trabajo A-036, 230-241, Santiago del Estero, Argentina, del 5 al 7 de octubre.

- Raffo, J. L. y Carrizo, M. R. (2014). “Método analítico de detección de fisuras en vigas vibrantes”, IV Congreso Argentino de Ingeniería Mecánica, IV CAIM, ISBN 978-987-45571-0-0, Resistencia, Argentina, del 2 al 5 de septiembre.
- Raffo J. L. y Carrizo M. R. (2013). “Vibraciones de Vigas y Pórticos ante la Presencia de Fisuras. Implementación del Problema Inverso”, XX Congreso sobre Métodos Numéricos y sus Aplicaciones, XX ENIEF, Mecánica Computacional Vol. XXXII, ISSN 1666-6070, 1715-1735, Mendoza, Argentina, del 19 al 22 noviembre.
- Carrizo M., Raffo J., Morel E. N. y Torga J. R. (2012). “Resultados Numéricos y Experimentales para el Análisis de Vibraciones Libres en una Placa Rectangular Delgada”, III Congreso Argentino de Ingeniería Mecánica, III CAIM, ISBN 978-987-1978-08-3, 166-176, Buenos Aires, Argentina, del 2 al 5 octubre.

## 1.9 CURSOS O SEMINARIOS REALIZADOS

En el marco de la carrera de doctorado he realizado una serie de cursos y seminarios que han contribuido al avance de las investigaciones que originaron esta tesis.

- Metodología de la investigación, Lic. Juan Manuel Menazzi, 50 hs, UTN – FRDelta, 2015.
- Epistemología de la ciencia, Lic. Juan Manuel Menazzi, 50 hs, UTN – FRDelta, 2015.
- Análisis matemático Avanzado, Dr. Ricardo Grossi, 80 hs, UTN – FRDelta, 2015.
- Introducción a las Ondas elásticas, Dr. José Ruzzante, 40Hs, UTN – FRDelta, 2015.
- Cálculo de variaciones, Dr. Ricardo Grossi, 80 hs, UTN – FRDelta, 2016.
- Matemática superior aplicada, Dr. Ricardo Grossi, 80 hs, UTN – FRDelta, 2016.
- Análisis de señales, Lic. Julio Piñeyro y Dr. Eneas Morel, 80Hs, UTN – FRDelta, 2016.
- Métodos Variacionales, Dr. R. Grossi y Dr. J. Raffo 80 hs, UTN – FRDelta, 2017.
- Vibraciones Mecánicas, Ing. Andreas Klemppnow, 80 hs, UTN – FRDelta, 2018.

# CAPÍTULO 2

## ESTADO DEL ARTE Y MARCO TEÓRICO

### 2.1 INTRODUCCIÓN

En los temas a desarrollar en la presente propuesta de plan de trabajo, se abarcarán diferentes temáticas correspondientes al área de la matemática aplicada, incluyendo aplicaciones en ingeniería entre las que se destaca la incorporación de modelos de fisuras al análisis de vibraciones mecánicas. En particular, el desarrollo y aplicación de métodos de identificación de fisuras basados en mediciones de frecuencias naturales de vibración. Como ya se explicó en el apartado anterior, estos combinan desarrollos analíticos y experimentales. Dada la gran cantidad de trabajos existentes en la literatura actual; a continuación, se hará una reseña de los trabajos de investigación de mayor relevancia relacionados con las temáticas que pretenden ser tratadas.

### 2.2 DESARROLLOS ANALÍTICOS

#### 2.2.1 *Cálculo de variaciones*

En la actualidad, el cálculo de variaciones se ha constituido en una herramienta esencial para la construcción de modelos matemáticos en el área de la dinámica estructural, entre otras. Es particularmente eficaz para la determinación de las expresiones analíticas de las ecuaciones diferenciales y de las condiciones de contorno que describen el comportamiento dinámico de elementos estructurales. Una gran variedad de textos vigentes se han escrito sobre los aspectos teóricos del cálculo de variaciones y las aplicaciones en la determinación de problemas de contorno (Gelfand y Fomin, 1963; Kantorovich y Krylov, 1964; Mikhlin, 1964; Courant y Hilbert, 1966; Sagan, 1969; Weinstock, 1974; Leitmann, 1986; Brechtken-Manderscheid, 1991; Blanchard y Brüning, 1992; Troutman, 1996; Giaquinta y Hildebrandt, 1996; Dym y Shames, 2013). Uno de los más recientes textos en castellano es el de Grossi (2010) donde se presentan desarrollos de la

teoría del cálculo de variaciones y aplicaciones a problemas de ingeniería, basados en trabajos de investigación desarrollados por el autor y colaboradores.

### **2.2.2 Vibraciones en vigas con restricciones elásticas**

Existe una gran cantidad de trabajos publicados en revistas científicas sobre vibraciones de vigas con restricciones elásticas en los extremos y en un punto intermedio.

El tratamiento de las condiciones de contorno con restricciones elásticas en los extremos, que permite generar infinidad de condiciones de contorno incluyendo las condiciones clásicas, fue presentado por varios autores (Grant, 1975; Hibbeler, 1975; Maurizi et al., 1976; Goel 1976a, b; Grossi y Laura, 1982; Laura y Grossi, 1982; Rao y Mirza, 1989; Cortinez y Laura, 1985; Laura y Gutierrez, 1986; Grossi y Bhat, 1991; Grossi et al., 1993; Nallim y Grossi, 1999).

El problema de vibraciones libres de vigas con restricciones elásticas intermedias también ha recibido un extenso tratamiento. Chun (1972) obtuvo la ecuación de frecuencias de una viga con un extremo libre y el otro con una restricción contra rotación. Rutemberg (1978) determinó las frecuencias de vibraciones libres de una viga uniforme en voladizo con una restricción elástica rotacional en un punto intermedio. Lau (1984) presentó una extensión del trabajo de Rutemberg (1978) al incluir un vínculo elástico traslacional. Laura et al. (1984) utilizaron el método de separación de variables para determinar la ecuación de frecuencias de una viga de sección constante, con una restricción elástica traslacional en uno de sus extremos, y una masa concentrada en el otro. Rao (1989) determinó las frecuencias de vibración de una viga empotrada en ambos extremos, pero con una restricción elástica intermedia. De Rosa et al. (1995) concretaron un estudio sobre vibraciones libres de vigas de espesor variable con restricciones elásticas intermedias. Grossi y Albarracín (1998) demostraron que la utilización de polinomios ortogonales que satisfacen las condiciones de contorno naturales en problemas de vibración de vigas con restricciones elásticas en los extremos puede conducir a resultados menos precisos que cuando éstas son ignoradas. Arenas y Grossi (1999) determinaron soluciones exactas y aproximadas para una viga uniforme con un extremo y un punto intermedio elásticamente restringidos. Grossi y Albarracín (2003) determinaron las frecuencias de vibración de una viga con restricciones contra rotación y contra traslación en los extremos y en un punto intermedio. Raffo y Grossi (2012) realizaron un estudio de sensibilidad sobre las primeras frecuencias naturales que consiste en la influencia de la posición y el valor de una restricción elástica intermedia en vigas con rótulas intermedias. Wang (2003a) estudió los modos fundamentales de vibración de una viga soportada por dos apoyos elásticos intermedios ubicados en forma simétrica obteniendo la ecuación de frecuencias en forma analítica. Naguleswaran (2004) obtuvo la ecuación de frecuencias por el

método de separación de variables, para el caso de una viga con tres cambios bruscos de la sección transversal y 5 apoyos elásticos contra traslación y rotación, incluyendo los puntos extremos. Maiz et al. (2007) obtuvieron la solución exacta de las vibraciones transversales de una viga Bernoulli-Euler con masas concentradas, teniendo en cuenta su inercia rotatoria, con soportes elásticos contra rotación y traslación en los extremos de la viga.

### ***2.2.3 Vibraciones en vigas con rótulas internas***

Hay un número limitado de trabajos que tratan el problema de vibraciones de vigas con rótulas internas. Ewing y Mirsafian (1996), analizaron las vibraciones forzadas de dos vigas unidas con una unión rotacional no lineal con sus extremos empotrados y simplemente apoyados. Wang y Wang (2001) estudiaron la frecuencia fundamental de una viga con una rótula interna con una carga axial. Chang et al. (2006) investigaron la respuesta dinámica de una viga doblemente empotrada con una rótula interna libre en una cama elástica con un dispositivo que provoca movimiento oscilatorio. Grossi y Quintana (2008) resolvieron en forma rigurosa la obtención de las frecuencias naturales y formas modales de una viga no homogénea con un salto de rigidez sujeta a una carga axial general, con una rótula interna y restricciones elásticas ubicadas arbitrariamente, con sus extremos también restringidos elásticamente contra rotación y traslación. Quintana et al. (2010) trataron las vibraciones transversales libres de vigas Timoshenko restricciones elásticas en los extremos y rótulas internas intermedias. Ratazzi et al. (2011) extienden este análisis a una estructura aporticada.

### ***2.2.4 Modelos de fisuras***

Dimarogonas (1996) realizó un estado del arte en cuanto a vibraciones de estructuras en presencia de fisuras, donde describe que más de 500 trabajos fueron publicados en la última década. Lo que pone de manifiesto que el análisis del comportamiento dinámico de elementos estructurales con fisuras fue aumentando notoriamente, es un tema de gran interés en ingeniería y que ha sido extensamente estudiado.

Para modelar los efectos de fallas localizadas, algunos autores proponen considerar una disminución en la rigidez a la flexión donde se encuentra la fisura. Así se divide a la viga dañada en dos tramos unidos con una restricción elástica rotacional conectada a ambos tramos. Si la amplitud de la deformación mantiene a la fisura siempre abierta, se puede aplicar un modelo lineal y en consecuencia permite obtener una solución analítica exacta. El modelo de rótula con una

restricción elástica rotacional, con una constante elástica que depende de la profundidad de la fisura, se verificó que es adecuado y ha sido notoriamente utilizado.

Una fisura en un elemento estructural elástico introduce una considerable flexibilidad local debido a la concentración de energía de deformación en la vecindad de la punta de la grieta bajo carga. Irwin (1957) reconoció este efecto y utilizó la idea de un resorte equivalente para cuantificar de forma macroscópica la relación entre la carga aplicada y la concentración de deformaciones alrededor de la punta de la fisura. Brown y Srawley (1966) usando las relaciones de la mecánica de la fractura entre la tasa de liberación de energía de deformación, el factor de intensidad de tensiones y el teorema de Castigliano, calcularon la flexibilidad local de la región fisurada para la deformación plana. También Liebowitz et al. (1967) utilizaron los resultados de la mecánica de la fractura para calcular la flexibilidad rotacional local para una fisura uniforme en vigas de sección rectangular. Tada et al. en 1973 determinaron el factor de intensidad de tensiones para una viga fisurada sometida a flexión pura, que fue publicado luego en Tada et al. (1985) y Tada et al. (2000).

A partir de entonces, numerosos autores se han basado en estos desarrollos para proponer sus propios modelos de fisuras variando el polinomio que se encuentra dentro del factor de intensidad de tensiones. Rizos et al. (1990) presentaron una fórmula que fue empleada en varios trabajos (Shifrin y Ruotolo, 1999; Binici, 2005; Khiem y Toan, 2014 y Liu et al., 2019). Otra es la presentada por Ostachowicz y Krawezuk, (1991), que fue empleada en numerosos artículos (Nandwana y Maiti, 1997a; Lin et al., 2002; Patil y Maiti, 2005; Khaji et al., 2009; Lee, 2009; Khaji y Mehrjoo, 2014). El modelo más utilizado en la literatura es el formulado por Chondros et al. (1998) y que fue empleada en numerosos trabajos (Khien y Lien, 2001; Khien y Lien, 2002; Khien y Lien, 2004; Liu y Barkey, 2017; Huang, 2019, Diaferio et al., 2019). Otros autores han presentado sus propias formulaciones, como ser Narkis (1994), Lele y Maiti (2002), Ruotolo (2004), Yoon et al. (2007), Behzad et al. (2010); entre otros. En un reciente trabajo Yan et al. (2016) presenta una tabla con la variación de los coeficientes de estos polinomios para cinco formulas propuestas por diferentes autores.

Cawley y Ray (1988) investigaron en forma experimental los cambios en las frecuencias producidos por fisuras y ranuras. Nandwana y Maiti (1997b), Ma et al. (2016) y Srivastava y Sethuraman (2017) analizan el comportamiento vibratorio de vigas con fisuras inclinadas. Respecto de los modelos de fisuras, en el último tiempo la atención se centró en el estudio de características no lineales de fisuras que se abren y cierra. Bovsunovsky y Surace (2015) presentan un interesante estado del arte al respecto.

### ***2.2.5 Vibraciones en vigas con fisuras***

Thomson (1943) y Kirmsher (1944) parecen ser los primeros estudios de las características vibratorias de una viga con discontinuidades locales en forma de una pequeña ranura. Más cerca de la actualidad, Ostachowicz y Krawczuk (1991) analizaron el efecto de dos fisuras abiertas en las frecuencias naturales de una viga cantiléver. Shen y Pierre (1994) presentan un estudio sobre vibraciones de vigas con una fisura. Chondros et al. (1997) presentaron una teoría consistente de vibraciones en barras con fisuras. Chondros et al. (1998) extendieron el estudio a vibraciones laterales de vigas Euler Bernoulli con fisuras. Varios autores presentaron trabajos con modelos analíticos de vigas con la presencia de una fisura, donde la fisura se modela con la presencia de un resorte rotacional unido a ambos lados de los tramos de una viga. Fernández-Sáez y Navarro (2002) realizan una aproximación analítica de las frecuencias fundamentales de vigas Euler Bernoulli con fisuras. Ruotolo y Surace (2004) determinan las frecuencias naturales axiales en barras con múltiples fisuras. Binici (2005) propone un nuevo método para obtener los autovalores y autovectores de vigas sujetas a una fuerza axial y múltiples fisuras abiertas. Hsu (2005) analizan las vibraciones de vigas fisuradas en fundaciones elásticas con una carga axial usando el método de la cuadratura diferencial. Raffo y Grossi (2013) tratan las vibraciones libres transversales de una viga Timoshenko con restricciones elásticas intermedias que emulan fisuras. Bakhtiari et al. (2014) presentan una estimación analítica basada en el método de Rayleigh de las frecuencias y formas modales de una viga con 2 fisuras. Neves et al. (2016) estudiaron el comportamiento vibratorio no lineal de vigas con fisuras.

## **2.3 MÉTODOS DE IDENTIFICACIÓN DE DAÑOS BASADOS EN MEDICIÓN DE FRECUENCIAS NATURALES DE VIBRACIÓN**

El desarrollo de métodos de detección de fisura es de un gran interés en ingeniería. En particular, el estudio del problema inverso de determinación de la posición y profundidad de fisuras en vigas, a partir de valores medidos de frecuencias naturales.

### ***2.3.1 Revisiones de literatura***

Algunos autores han realizado una exhaustiva revisión de literatura sobre métodos de identificación de daños basados en medición de vibraciones. Wauer (1990) presenta una revisión

sobre artículos que tratan sobre el monitoreo de vibraciones de rotores con fisuras. Se destacan Doebling et al. (1996) que reportan diferentes técnicas concernientes a la detección, localización y caracterización del daño estructural por medio del examen de los cambios en la respuesta vibratoria de las estructuras. Analizan aplicaciones en diferentes estructuras arquetípicas y también para estructuras complejas de ingeniería. Además, indican cuestiones críticas para la futura investigación en identificación de daños. Dimarogonas (1996) describe una serie de artículos en donde se evidencia que la presencia de fisuras introduce una flexibilidad local de los miembros estructurales que afecte su respuesta vibratoria. Menciona que los métodos de detección y monitoreo comenzaron en los inicios de los años 1970 en la industria de la producción de energía. Salawu (1997) presenta una revisión extensa de publicaciones tratando sobre métodos de detección basados en cambios de frecuencias. Sabnavis et al. (2004) presentan una revisión sobre detección y diagnóstico de ejes agrietados. Fan y Qiao (2010) presentaron una clasificación de los métodos de identificación de daños basados en el parámetro modal considerado (Frecuencias, formas modales, curvatura y deformación). Sinou (2013) realiza una revisión de métodos de monitoreo basados en mediciones de vibraciones lineales y no lineales. Bovsunovsky y Surace (2015) presentan una revisión de artículos sobre vibraciones no lineales en estructuras elásticas con fisuras. Gayen et al. (2019) presentan una revisión sobre el comportamiento estático y dinámico de componentes estructurales laminados con presencia de fisuras.

Una serie de tesis doctorales también son frecuentemente citadas, entre ellas Rytter (1993), Hemez (1993), Kaouk (1993), and Doebling (1995).

### ***2.3.2 Métodos de detección de fisura basados en mediciones de frecuencias***

Si bien los métodos de detección e identificación de fisuras basados en mediciones de frecuencias naturales comenzaron a desarrollarse hace ya muchos años, su investigación aún continúa hasta la actualidad. Uno de los primeros trabajos de localización de defectos en estructuras a partir de medición de frecuencias naturales de vibración es el de Cawley y Adams (1979). Rizos y otros (1990) propusieron un método no destructivo de detección de fisuras a partir de valores medidos de amplitud y frecuencia en dos puntos de la viga con una fisura superficial y uniforme en toda su profundidad, para estimar con métodos analíticos la posición y profundidad de la fisura. Narkis (1994) obtiene las frecuencias naturales de una viga fisurada mediante una solución analítica aproximada y esta es empleada para aplicar el problema inverso. Kim y Stubbs (2003) formularon un modelo de localización de identificación de fisuras que relaciona los cambios fraccionarios en la energía modal con los cambios en las frecuencias naturales. Kin et al. (2003) extienden este análisis a métodos basados en la forma modal. Lee (2009) identifica

múltiples fisuras. Rubio et al. (2015) presentan un sistema de identificación de fisuras en barras no uniformes por medición de 2 frecuencias. Fernández-Sáez et al. (2016) extienden el análisis para vibraciones en vigas uniformes y Rubio et al. (2016) para vigas no uniformes. Teidj et al. (2016) resuelven el problema inverso utilizando un modelo analítico que analiza la energía de deformación, luego aplica mínimos cuadrados a una función de error dada por la diferencia entre las frecuencias medidas y las dadas por el modelo, para hallar la solución. Ravi et al. (2018) presentaron un estudio analítico y experimental para la detección de fisuras longitudinales, L y T invertidas en vigas de 2 materiales isotrópicos.

Existen números métodos empleados para resolver el problema inverso a partir de mediciones de frecuencias naturales y otros parámetros modales. Una de las técnicas es el método de la matriz de rigidez dinámica (Khien y Lien, 2001; Khien y Lien, 2002; Lee y Shin, 2002; Khien y Lien, 2004). Otro método es de las energías modales Kumar et al. (2009). También existe el método de índice de daño utilizado por Eraky et al. (2015).

En la presente tesis se abordan fundamentalmente dos métodos, que se presenta en el subapartado a continuación.

### ***2.3.3 Métodos de detección de fisura que utilizan el método de las curvas de rigidez de la rótula***

Para resolver el problema inverso, que consiste en hallar la posición y profundidad de la fisura, algunos autores lo hacen utilizando el método de las curvas de rigidez. El cual consiste en, conociendo las frecuencias naturales de vibración medidas y asignando posiciones arbitrarias a la rótula intermedia, resolver la ecuación de frecuencias para así determinar la curva que indica el valor de la rigidez de la rótula para cada punto y para cada modo considerado. Al superponer las curvas de rigidez de diferentes modos, se arriba a la solución del problema inverso cuando se identifica intersección de las curvas. Una vez obtenida la posición y la rigidez, con esta última se puede obtener la severidad del daño utilizando los modelos de fisura descritos en el apartado anterior.

Uno de los primeros trabajos que emplea este método es el presentado por Liang et al. (1991). Chinchalkar (2001) utiliza elementos finitos para resolver el mismo el problema para vigas de sección variable. Lele y Maiti (2002) extendieron el método de detección de fisura para vigas Timoshenko. Lin et al. (2002) extendió el estudio a múltiples fisuras. Khaji et al. (2009) implementaron un método para identificar fisuras analíticamente para algunos casos particulares de vigas Timoshenko. Dilena y Morassi (2004) utilizan el corrimiento de las frecuencias naturales y las anti-resonancias para hallar una fisura en una viga con vinculaciones simétricas. Raffo y

Carrizo, 2013; 2014 implementaron el método e incorporaron herramientas estadísticas para analizar pórticos y vigas con la presencia de fisuras.

#### ***2.3.4 Métodos de detección de fisura que utilizan el método de líneas de contorno de frecuencias normalizadas***

Otro método de identificación de fisuras es el conocido como líneas de contorno de frecuencias normalizadas. En este caso, se definen los valores de las frecuencias naturales de vibración de diferentes modos para diferentes posiciones y profundidades de fisuras. Se grafican estos resultados como superficies de frecuencias. Con las frecuencias medidas, se pueden establecer una curva de nivel para cada modo. Las líneas de contorno para diferentes modos se pueden trazar juntas, y los puntos de intersección indicaran la ubicación y la profundidad de la grieta.

Uno de los primeros trabajos que determinan las superficies de frecuencias para vigas y pórticos es el de Nikolakopoulos et al. (1997). Yang et al. (2001) determina las superficies de frecuencias para vigas simplemente apoyadas y empotradas. Una continuidad de este trabajo fue presentada por Owolabi et al. (2003), donde se emplean valores de amplitud y frecuencia de las resonancias de la función respuesta en frecuencia para determinar identificar la fisura y se determina experimentalmente las superficies de frecuencias. Dong et al. (2004) aplican este método a rotores de sección circular. Swamidas et al. (2004) identifican fisuras en vigas Euler y Timoshenko. Nahvi y Jabbari (2005) aplican este método usando análisis modal experimental y el método de los elementos finitos. Sinou (2007) analiza además picos de anti-resonancia para hacer más robusto al método y utiliza las frecuencias de vibraciones verticales y horizontales para determinar posición, profundidad y orientación de la fisura. Yu y Chua (2009) mediante elementos finitos determinan las superficies de frecuencias para vigas con un gradiente en las propiedades del material. Thalapil y Maiti (2014) resuelven de manera numérica para detectar fisuras longitudinales en vigas cortas y largas. Liu y Barkey (2017) proponen como método de análisis la minimización de una función de error dada por la diferencia entre el coeficiente de frecuencias medido y el obtenido analíticamente.

#### ***2.3.5 Trabajos más recientes***

Gillich G. R. et al. (2017) analizaron el corrimiento de las frecuencias naturales de vibración debido a la pérdida de masa y decremento de la rigidez de vigas que presentan corrosión. Tufisi y Gillich (2018) modelaron fisuras de forma compleja. Tufisi et al. (2018) analizaron el

comportamiento estático y dinámico de una grieta ramificada en forma de Y. Tufisi et al. (2018) realizan un estudio numérico sobre la influencia de la extensión longitudinal de una fisura en forma de T en la disminución de las frecuencias propias de vigas en voladizo. Pop et al. (2020) presentan un modelo de fisura donde estiman la severidad del daño de una manera simple y rápida mediante simulación por elementos finitos. Hai y Nam (2023) para una viga fisurada establecen una comparativa entre un modelo que utiliza resortes rotacionales y otro de un sistema de un solo grado de libertad (SDOF), examinan las FRFs y establece un índice de daño espectral (SDI).

Furdui et al. (2015) analizaron la influencia de las condiciones operacionales en la detección de fisuras en vigas encontrando que la temperatura en sí misma tiene un efecto muy limitado en los cambios de frecuencia, pero si influyen las tensiones originadas por las restricciones impuestas a las dilataciones térmicas. Gillich, N et al. (2019) presentan un método estadístico para estimar la gravedad del daño y la caída de frecuencia de una viga fisurada utilizando datos de una prueba estática. Tufisi et al. (2019) analizan el efecto sobre las frecuencias de vibración de una viga en voladizo cuando existe una fisura cerca del empotramiento. Heryudono y Lee (2019) abordan el análisis de vibración libre de vigas Euler-Bernoulli con condiciones de contorno no ideales mediante la aproximación de Padé, que es una combinación lineal de condiciones de contorno idealmente simplemente soportadas e idealmente empotradas. Lupu et al. (2020) presentan un método para detectar fisuras en vigas con condiciones de contorno imperfectas. Nedelcu y Gillich, G. R. (2021) presentan un código en Python para poder detectar pequeños cambios en frecuencias.

Sha et al. (2019) presentan un método novedoso para la detección de daños únicos y múltiples en vigas utilizando cambios de frecuencia naturales. Gillich G. R. et al. (2021) muestran un algoritmo para localizar grietas transversales presentes en vigas de acero Euler-Bernoulli, considerando los cambios de frecuencia relativa medidos para los modos de vibración del eje débil y las curvaturas de las formas modales. Tufisi et al. (2021) detectan fisuradas por un método basado en corrimientos de frecuencias y el uso de inteligencia artificial. Ta et al. (2023) proponen mejorar la detección de fisuras en vigas al utilizar un subconjunto de modos sin que uno tenga su curvatura cercana a cero en el lugar del supuesto daño. Khiem et al. (2023) para la identificación de fisuras en vigas proponen un indicador extraído de las funciones de respuesta en frecuencia (FRF) y basado en el criterio de aseguramiento de modos (MAC) denominado criterio de aseguramiento espectral (SAC). Grebla et al. (2023) evalúan la severidad de las fisuras mediante cambios en las frecuencias medidas.

Sarvestan et al. (2017) analizan las vibraciones de una viga Timoshenko con una carga móvil primero a velocidad y luego a aceleración constante. Chouiyakh et al. (2017) presentaron un método de identificación de múltiples fisuras abiertas en vigas sometidas a una carga armónica móvil mediante el análisis de la respuesta vibratoria no lineal empleando la transformada de

Hilbert y el método de la cuadratura diferencial. Khiem y Hang (2017) obtienen la respuesta vibratoria de la viga dependiendo de la velocidad de la carga móvil, la frecuencia y los parámetros de grieta. Luego, desarrollan un procedimiento para detectar múltiples fisuras. Mousavi et al. (2019) identifican simultáneamente posición y severidad del daño en vigas usando una carga móvil. Xiang et al. (2019) analizan y evalúan cuatro métodos de identificación de daños en puentes por procesamiento de la respuesta dinámica de cargas móviles. Nie et al. (2019) consideran que una masa en movimiento representa un vehículo que se mueve a través del puente, y las respuestas de vibración estructural se miden a partir de un par de sensores. Khiem et al. (2023) estudian la vibración de una viga fisurada con un piezoeléctrico adherido sumado al efecto de una carga móvil. Khiem y Hang (2022) proponen un nuevo índice de daño extraído de la respuesta en frecuencia de una viga Timoshenko agrietada bajo carga armónica en movimiento utilizando el concepto llamado Modal Assurance Criterion (MAC).

Hamzeloo et al. (2020) detectan daños pórticos mediante la respuesta de impedancia electromecánica de un piezoeléctrico. Wang et al. (2020) aplicaron un método similar y sus resultados revelaron que la frecuencia pico de admitancia disminuye con el aumento del tamaño de la grieta, y la frecuencia de resonancia más alta es más sensible al daño a pequeña escala. Botta et al. (2021) controlan vibraciones tanto de manera pasiva como activa usando piezoeléctricos. Khiem y Huong (2023) identifican fisuras en vigas en la que las propiedades varían gradualmente a lo largo de su longitud utilizando sensores piezoeléctricos distribuidos. Hai et al. (2024) abordan el problema de identificación de fisuras en vigas Timoshenko mediante el uso de un sensor piezoeléctrico distribuido y una carga móvil controlada, se examina la variación de la respuesta electromecánica en frecuencia frente a parámetros de fisura y carga móvil con el objetivo de proponer un indicador novedoso, denominado criterio de seguridad espectral.

### ***2.3.6 Incertidumbre***

Doebbling et al. (1996) se preguntan ¿Por qué esta tecnología ha tardado tanto en ser adoptada formal y generalmente por la comunidad de ingenieros moderna? Responden que existen varios factores que hacen que la identificación de daños basada en vibraciones sea difícil de implementar en la práctica. Kim et al. (2007) sostuvieron que la viabilidad de usarlos para la detección de daños es limitada por al menos dos razones. En primer lugar, un daño significativo puede causar cambios muy pequeños en los parámetros modales, particularmente para estructuras grandes. En segundo lugar, estos cambios pueden pasar desapercibidos debido a cambios en las condiciones ambientales y operativas.

La sensibilidad algo baja de los cambios de frecuencia al daño requiere mediciones muy precisas; y, por lo tanto, de muy baja incertidumbre. Las fuentes de incertidumbre de los métodos de identificación de fisuras pueden ser atribuibles a las condiciones ambientales (cambios de temperatura, viento, paso de vehículos), a cambios en las condiciones de apoyo (degradación de los vínculos, aflojamiento de tornillos, etc.), a incertidumbres en la geometría y propiedades del material de la estructura bajo ensayo, a las mediciones de los parámetros modales (instrumental, ruido eléctrico, errores sistemáticos, etc.) y a la propia incertidumbre del modelo matemático utilizado en el método de identificación.

Los primeros artículos que indagan acerca de estas cuestiones son los de Stubbs (1987), Stubbs et al. (1991), Beck y Katafygiotis (1991). Algunos autores analizaron estudiaron la identificación de fisuras contemplando incertidumbres en las condiciones de contorno (Ju y Mimovich, 1988; Stubbs y Osegueda, 1990; Narkis y Elmalah, 1996, Mohtasebi y Khaji, 2018). Otros autores analizaron los errores experimentales y la capacidad de detección de daños (Juneja et al., 1997; Farrar et al., 1997 y Doebling et al., 1997). Kim y Stubbs (1995) evalúan el impacto de la incertidumbre del modelo en la precisión de la predicción de daños. Fritzen et al. (1998) presentan un sistema de detección de daños según métodos de actualización de modelo que contempla los errores en la medición de la salida del sistema. Cacciola et al (2003) analiza la detección y localización de daño en una viga vibrante bajo ruido blanco utilizando el método de monte carlo. Diaferio et al. (2019) para explorar la precisión del procedimiento propuesto, son utilizados datos simulados numéricamente con ruido aleatorio. Varios autores concentraron sus esfuerzos en analizar los efectos debido a la incertidumbre inducida por variaciones de temperatura (Cornwell et al., 1999; Farrar et al., 2000; Peeters y De Roeck, 2000; Ni et al 2005; Kim et al., 2007).

Al momento no se ha encontrado trabajos que presenten un método de identificación de fisuras basados en mediciones de frecuencias naturales de vibración con la capacidad teórica de detección asociada al mismo, ni mapeos que indiquen en que ubicación y para que severidad de daño es en mayor o menor medida plausible la identificación del daño, ni análisis que determine qué relación existe entre la incertidumbre en la medición de las frecuencias naturales y la incertidumbre en la determinación de la posición y profundidad de la fisura. Esta tesis pretende dar a respuestas a parte de estas cuestiones.

## 2.4 DESARROLLOS EXPERIMENTALES

### 2.1.1 *Sistemas para inducir vibraciones mecánicas*

Los excitadores electrodinámicos, también conocidos como "shakers", son instrumentos fundamentales para inducir vibraciones mecánicas y realizar ensayos. Sus numerosas aplicaciones los convierten en equipos de sumo interés en el campo de las ingenierías mecánica, aeronáutica y aeroespacial. Si bien existen equipos comerciales desde hace años, estos son de un alto valor económico. Esto motivo el estudio y desarrollo de excitadores de bajo costo, en particular los shakers magnéticos y electromecánicos. Son dispositivo que transforma por métodos electromagnéticos la potencia eléctrica en potencia mecánica, produciendo fuerza y desplazamiento según se requiera.

Si bien su invención no es reciente, numerosas patentes dan cuenta que su estudio continúa hasta la fecha. Efromson (1957) presentó la patente Electrodynamic vibration test equipment donde describe los componentes y el funcionamiento de un prototipo de shaker. Hunt (1962) patenta el proceso de pegado en el armado de la armadura. Brown (1965) describe un montaje en la armadura que tiene por objeto reducir el volumen de material en el gap que no genera fuerza y proporciona una mejor disipación de calor en la bobina. Schloss (1966) patenta la idea de tabla suspendida por restricciones elásticas. Grootenhuis (1966) describe una forma constructiva de la armadura que le permite funcionar satisfactoriamente a frecuencias relativamente altas a partir de una unión rígida de la bobina móvil a la armadura y de una elevada resonancia de la tabla. Larsen (1967) patenta un sistema de control que regula la corriente de excitación según la velocidad y desplazamiento de la armadura. Masuda (1969) propone en su patente un conjunto de núcleos I y E, aumentando la relación potencia peso. El autor también determina una expresión de la fuerza. Zamparo (1970) presenta un elemento móvil cuya frecuencia natural más baja es incrementada mediante bandas de un material con módulo de elasticidad elevado, como el Berilio, que interconectan la bobina con la mesa. Gearng (1970) exhibe vigas que actúan como elementos de suspensión de la armadura. Yamada (1977) presenta un mini shaker que excita una silla, arquetipo de las sillas para gamers. Lerwill (1980) presenta un dispositivo que se coloca en la mesa del shaker para ajustar su impedancia mecánica de salida. Para esto desarrolla un modelo eléctrico y un modelo mecánico equivalente, que relaciona con una serie de ecuaciones. Emerson (1985) reclama un procedimiento constructivo de la armadura empleando fibra de carbono, fibra de vidrio con resinas epoxicas y un sistema de refrigeración con agua. Butts (1987) patenta una guía lineal de bolas re-circulantes para guiar el movimiento de la armadura y mesa. En otra, propone una estructura de panel de abeja combinada con laminados, aumentando las frecuencias de resonancias

de la armadura. También registra una patente de un brazo de suspensión de 3 miembros que permiten el movimiento vertical y previene el lateral de la armadura. Stuart (1994) propone un parlante de imanes permanentes en una nueva disposición. Lucas (1994) presenta elementos de suspensión circunferenciales. Fukuoka (1996) presenta un aparato para inducir vibraciones en asientos de automóviles. Leist (2000) presenta elementos de suspensión en un ensamblaje flexible que disminuye el ruido y el rozamiento. Lee (2001) describe un aparato capaz de producir sonido y vibraciones. Crowson (2006) patenta un shaker robusto de pequeña altura, con resorte distribuido. Clamme (2016) presenta shakers compuestos por imanes permanentes, bobinas electromagnéticas y un resorte espaciador formado por materiales elastómeros.

Varios artículos tratan el tema de la transducción eléctrico-mecánica que es común a shaker y parlantes. Yorke (1970) presenta los principios de la transducción eléctrica-mecánica que es utilizada en los shakers. Tomlinson (1979) analiza la distorsión al usar excitadores electrodinámicos. Lang (1997) explica los fundamentos de los shakers mediante ensayos. Lang (2001) desarrolla un modelo con acople mecánico eléctrico de 3 gdl para comprender el comportamiento de los shakers y da una estimación del desempeño del equipo. Varoto et al. (2002) analiza la interacción entre el shaker y la estructura bajo test, para esto desarrolla un análisis del shaker como un modelo de 2 gdl. Klippel (1999) presenta modelos para las mediciones de parámetros lineales, no lineales y térmicos de woofer. Klippel (2000) analiza la distorsión en parlantes. Peres et al. (2010, 2011) presentan los principios de funcionamiento de shakers y aspectos prácticos del análisis modal experimental. Waimer et al. (2016) desarrolla un modelo para el shaker de 5 gdl y realiza un análisis modal experimental sobre la cabeza expansora y vigas. Tiwari et al. (2017) desarrolla un modelo para simular el comportamiento de un shaker y mide parámetros eléctricos y mecánicos. Lütkenhöner (2017) desarrolla diferentes modelos para caracterizar un shaker para aplicaciones en salud. Raffo y Carrizo (2018) presentaron el diseño y construcción de un sistema electromagnético para inducir vibraciones forzadas. En algunos libros se presentan los principios de funcionamiento de los shakers y de parlantes, Ewins (1984) y Borwick (2001), respectivamente.

### ***2.1.2 Análisis modal experimental***

La vibración tiene un efecto importante en la naturaleza de los diseños en ingeniería puesto que a veces pueden llegar a ser un factor limitante en la performance de este. El estudio de la dinámica estructural nos ha dado las principales contribuciones en nuestro esfuerzo por comprender y controlar la mayoría de los problemas de vibración.

Entre los objetivos principales de dinámica estructural se encuentra, determinar la Respuesta Estructural (naturaleza y niveles de vibración de una estructura), la modificación Dinámica

Estructural (SDM) para obtener la respuesta estructural deseada, la validación de modelos teóricos y de las predicciones obtenidas por medio de ellos y el estudio de materiales bajo cargas dinámicas (capacidad de amortiguación, fricción y durabilidad a la fatiga, etc.). Las características dinámicas son inherentes a la estructura y son caracterizadas por las frecuencias naturales, la amortiguación y las formas modales de vibración. A fin de poder determinar esas características dinámicas de la estructura y que son inherentes a ella, se apela al análisis modal.

Dentro de una más vasta bibliografía que aborda el análisis modal experimental, se destacan los libros de Ewins (2009), Rao (2010) y Avitabile (2018).

# CAPÍTULO 3

## VIBRACIONES TRANSVERSALES LIBRES EN VIGAS HOMOGÉNEAS E ISÓTROPAS CON RESTRICCIONES ELÁSTICAS

### 3.1 INTRODUCCIÓN

El estudio del comportamiento vibratorio de estructuras es de un gran interés en ingeniería, en particular para diversas aplicaciones mecánicas y estructurales. El cálculo de variaciones se ha constituido en una herramienta particularmente eficaz para la determinación de las expresiones analíticas que describen el comportamiento dinámico de elementos estructurales.

Raffo (2014) presentó por primera vez el análisis del problema de vibraciones transversales libres de vigas Euler-Bernoulli, de múltiples tramos uniformes de secciones homogéneas e isotropas, con  $N$  restricciones elásticas traslacionales y rotacionales ubicadas arbitrariamente, tanto en los extremos como en posiciones intermedias. Se enfoca en un desarrollo analítico donde se aplica en forma rigurosa los principios del cálculo de variaciones para obtener la solución exacta del problema de vibraciones propuesto por Grossi (2010). Para esto se determina la energía cinética y potencial del sistema, se aplica el principio de Hamilton y el lema fundamental del cálculo de variaciones para arribar las ecuaciones diferenciales, las condiciones de contorno y las condiciones en las transiciones. El desarrollo analítico completo de las vibraciones transversales libres de vigas homogéneas e isotropas se puede apreciar en el Apéndice 1 de la presente tesis.

El modelo modal analítico empleado considera restricciones elásticas intermedias y en los extremos, lo que permite analizar respectivamente la presencia de fisuras y vinculaciones no clásicas. En este capítulo, se aborda el estudio analítico y experimental de la influencia de la rigidez de los vínculos en las frecuencias naturales de vibración de vigas. También, el estudio analítico de la influencia de la presencia de fisuras en las frecuencias naturales de vigas.

### 3.2 ESTUDIO ANALÍTICO Y EXPERIMENTAL DE LA INFLUENCIA DE LA RIGIDEZ DE LOS VÍNCULOS EN LOS COEFICIENTES ADIMENSIONALES DE FRECUENCIAS DE VIGAS

El estudio de las vibraciones transversales libres en vigas homogéneas e isotrópicas ha sido ampliamente abordado bajo condiciones de vinculación clásicas. Sin embargo, en aplicaciones prácticas de ingeniería, las condiciones de los vínculos en las estructuras raramente se comportan de manera ideal y pueden variar con el tiempo. Una manera efectiva de modelar estas condiciones no ideales es mediante el uso de modelos modales analíticos que incorporan restricciones elásticas.

La influencia de las condiciones de vinculación en las frecuencias naturales y las formas modales es significativa. Varios autores han explorado estos efectos en estudios previos. Carne et al. (2007) examinaron cómo la rigidez y el amortiguamiento de los soportes afectan los resultados de análisis modal experimental. Ritto et al. (2008) analizaron la coincidencia de frecuencias naturales determinadas tanto experimental como analíticamente en una viga Cantilever, variando las condiciones de contorno. Silva et al. (2009) se centraron en el correcto modelado de las propiedades elásticas de los soportes de un rotor.

Una de las claves para la implementación exitosa de modelos de identificación de fisuras basados en mediciones de vibraciones reside en comprender cómo los cambios en las condiciones ambientales, como el estado de las vinculaciones, afectan el comportamiento vibratorio de la estructura o componente mecánico monitoreado.

En esta sección de la tesis, exploraremos de manera analítica y experimental la influencia de la rigidez de los vínculos en las frecuencias naturales de vibración de vigas (Carrizo y Raffo, 2019).

#### 3.2.1 *Determinación analítica de los coeficientes adimensionales de frecuencias naturales de vibración de vigas sin fisuras y con vínculos elásticos en los extremos*

En la Figura 3.1 se presenta una viga tipo Euler Bernoulli, de longitud total  $l$ , de un único tramo, cuyas dimensiones de sección y material son uniformes a lo largo de la misma. El sistema estructural tiene en sus extremos restricciones rotacionales definidas por los parámetros  $r_0$  y  $r_l$  y restricciones traslacionales dadas por  $t_0$  y  $t_l$ . El desplazamiento transversal de la viga en cualquier instante de tiempo  $t$  está descripta por la función  $w = w(x, t)$ ,  $x \in [0, l]$ .

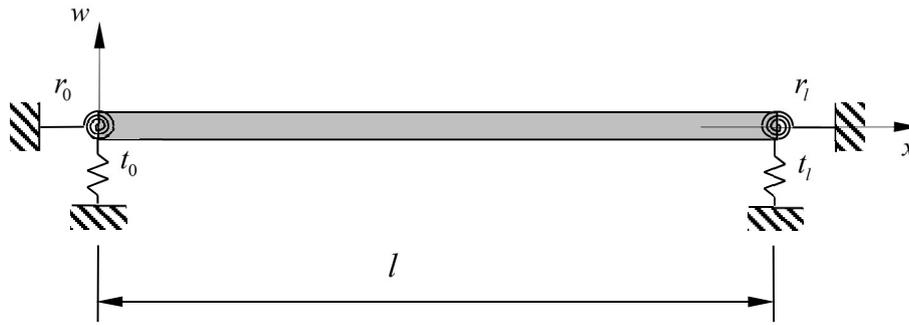


Figura 3.1 – Viga sin fisuras y con vínculos elásticos en los extremos.

Una vez aplicado el método de separación de variables y al aplicar el cambio de variable  $\bar{x} = x/l$ , la parte espacial de la ecuación diferencial que describe el comportamiento vibratorio libre queda dada por:

$$\frac{d^4}{d\bar{x}^4} W_n(\bar{x}) - \left( \frac{(\rho A)(\bar{x})}{(EI)(\bar{x})} l^4 \omega_n^2 \right) W_n(\bar{x}) = 0. \quad 3.1$$

Siendo  $W_n(x)$  las formas modales del  $n$ -ésimo modo. Siendo que el coeficiente adimensional de frecuencias  $\lambda_n$  esta dado por:

$$\lambda_n^4 = \frac{(\rho A)_i}{(EI)_i} l^4 \omega_n^2 \text{ con } n=1,2,\dots,m \quad 3.2$$

el problema de describir el comportamiento vibratorio del sistema mecánico detallado arriba consiste en resolver el problema de autovalores (frecuencias naturales de vibración) y autovectores (formas modales de vibración) según:

$$\frac{d^4}{d\bar{x}^4} W_n(\bar{x}) - \lambda_n W_n(\bar{x}) = 0. \quad 3.3$$

Dicha ecuación diferencial ordinaria (E.D.O) de cuarto orden tiene como posible solución a la función:

$$W_n(\bar{x}) = A_1 \cosh(\lambda_n \bar{x}) + A_2 \sinh(\lambda_n \bar{x}) + A_3 \cos(\lambda_n \bar{x}) + A_4 \sin(\lambda_n \bar{x}) \quad 3.4$$

A su vez, las ecuaciones de contorno del problema ya adimensionalizado están dadas por:

$$R_0 \frac{dw}{dx}(0^+) = \frac{d^2w}{dx^2}(0^+) \quad 3.5$$

$$T_0 w(0^+) = -\frac{d^3w}{dx^3}(0^+) \quad 3.6$$

$$R_l \frac{dw}{dx}(1^-) = -\frac{d^2w}{dx^2}(1^-) \quad 3.7$$

$$T_l w(1^-) = \frac{d^3w}{dx^3}(1^-) \quad 3.8$$

Reemplazando la Ecuación 3.4 en las Ecuaciones 3.5 a 3.8, se obtiene un sistema lineal de ecuaciones homogéneas. Dicho sistema puede ser escrito en notación matricial. Agrupando los coeficientes del sistema, se obtiene la matriz  $A$  de coeficientes del sistema.

Al tratarse de un sistema compatible indeterminado (SCI), al menos una de sus ecuaciones se puede hallar como combinación lineal del resto, es decir, que son linealmente dependientes.

Es condición necesaria para que un sistema sea compatible indeterminado que el rango de la matriz ampliada sea menor al número de incógnitas. Desde un punto de vista algebraico, los SCI se caracterizan porque el determinante de la matriz es igual a cero:

$$\text{Det}[A] = 0 \quad 3.9$$

Entonces, la solución no trivial se obtiene al encontrar las raíces del polinomio característico  $P(\lambda_n)$ . Siendo así denominada como ecuación característica a:

$$P(\lambda_n) = \text{Det}[A] = G(T_0, R_0, T_l, R_l, \lambda_n) = 0. \quad 3.10$$

Adoptando valores adecuados de  $R_1, R_2$  y  $T_1, T_2$  se pueden generar todas las combinaciones posibles de restricciones de apoyo clásicas (empotrado, simplemente apoyado, libre); o bien especificar un valor de constante elastica determinada.

Vínculos en los extremos	Condición de Contorno			
	$T_0$	$R_0$	$T_l$	$R_l$
L-L	0	0	0	0
A-L	$\infty$	0	0	0
A-A	$\infty$	0	$\infty$	0
E-L	$\infty$	$\infty$	0	0
E-A	$\infty$	$\infty$	$\infty$	0
E-E	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$

Tabla 3.1 - Valores de las restricciones elásticas para representar algunas condiciones de apoyo clásicas en los extremos de la viga.

**3.2.2 Determinación experimental de los coeficientes adimensionales de frecuencias**

El análisis modal experimental reúne un conjunto de técnicas destinadas a identificar los parámetros modales como ser la frecuencia natural, la forma modal y el factor de amortiguamiento. En particular, se determinan las frecuencias naturales de vibración de los primeros 3 modos normales, mediante una cadena de medición compuesta por 3 acelerómetros tipo IEPE Brüel & Kjaer modelo 4508B y un módulo de adquisición de señales dinámicas de alta precisión de 24 bit de resolución NI 9234. Los acelerómetros son colocados en los anti nodos del modo1, 2 y 3; en las posiciones  $x = l/2, l/4, l/6$ . La estructura es excitada mediante una prueba de impacto con un martillo instrumentado YMC piezotronics IH-05. La viga de acero SAE1020, cuya densidad es  $\rho = 7850 \text{ Kg/m}^3$  y módulo de elasticidad longitudinal  $E = 2.06E^{+11} \text{ N/m}^2$ , tiene una longitud de  $l = 49 \text{ cm}$ , un ancho de  $b = 3.16 \text{ cm}$  y un espesor de  $h = 0.344 \text{ cm}$ .

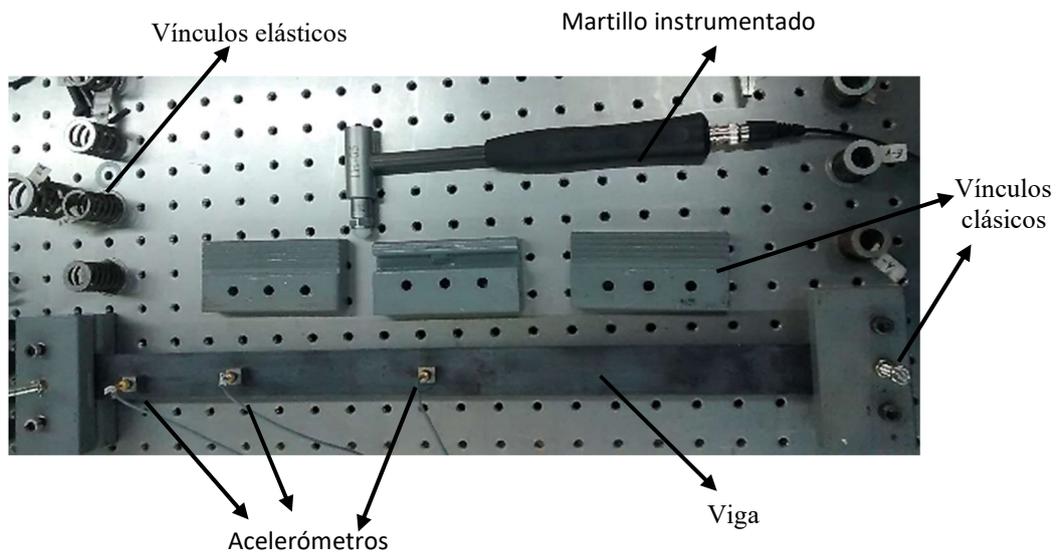


Figura 3.2 – Ensayo viga bi-articulada sujeta por mordazas clásicas.

En un entorno Labview se programa el proceso de adquisición de datos, almacenaje y el correspondiente análisis de señales.

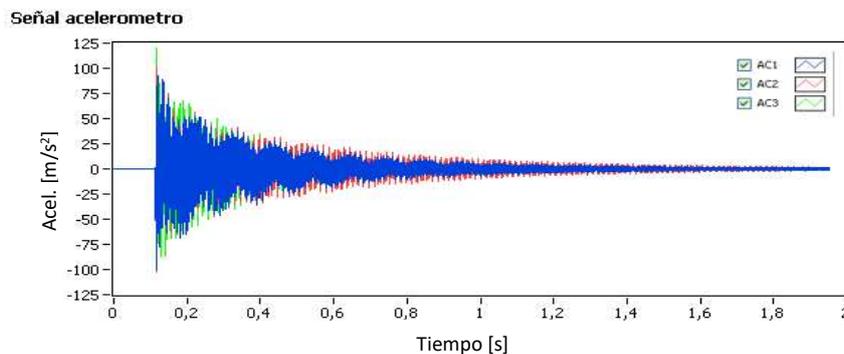


Figura 3.3 – Señal temporal de los acelerómetros

Las frecuencias naturales son determinadas mediante la transformada rápida de Fourier (FFT) de las señales de los acelerómetros, ver Figura 3.4.

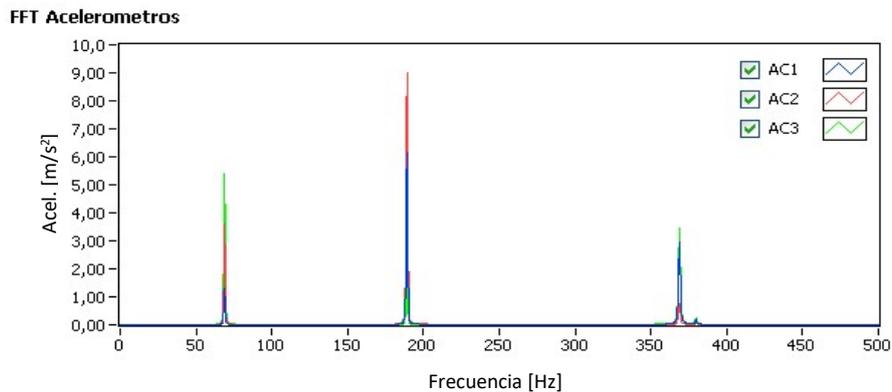


Figura 3.4 – FFT de la señal de los acelerómetros.

Otra forma de determinarlas es a partir de la función respuesta en frecuencia (FRF) que relaciona la señal de entrada y de salida del sistema mecánico bajo ensayo. En la Figura 3.5 se observa que todas las resonancias (picos) están separadas por antirresonancias. La fase pierde 180 grados cuando pasa por una resonancia y gana 180 grados al pasar por una antirresonancia.

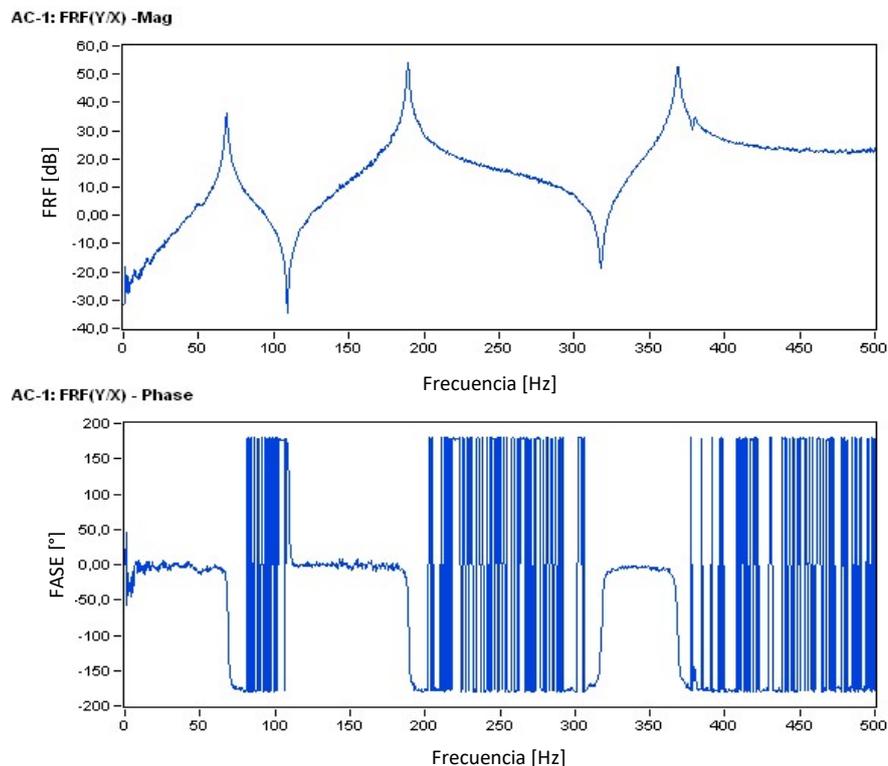


Figura 3.5 – FRF del acelerómetro ubicado en  $x = l/6$  cuando se impacta con el martillo en la misma posición.

Es aplicado el procedimiento de "zero settings" establecido por Nandwana y Maiti (1997), a fin de hacer coincidir para cada modo  $n$ , los resultados analíticos  $\lambda_A^n = \lambda_A = \lambda$  y experimentales

$\lambda_E^n$  con el objetivo de reducir los errores sistemáticos, según  $k_{ZS}^n = \lambda_A^n / \lambda_E^n$ . Así se obtiene el coeficiente adimensional de frecuencias corregido  $\lambda_C^n$ , según  $\lambda_C^n = k_{ZS}^n \lambda_E^n$ . Se establece el coeficiente de error relativo porcentual como la relación  $e_{\%} = \frac{(\lambda_C^n - \lambda_A^n)}{\lambda_A^n} 100$ .

Se diseñaron, construyeron y caracterizaron diferentes vinculaciones. Desde mordazas que emulan condiciones de apoyo clásicas, (ver Figura 3.2) como restricciones elásticas empleando resortes de compresión (ver Figura 3.6) o vigas de apoyo (ver Figura 3.7).

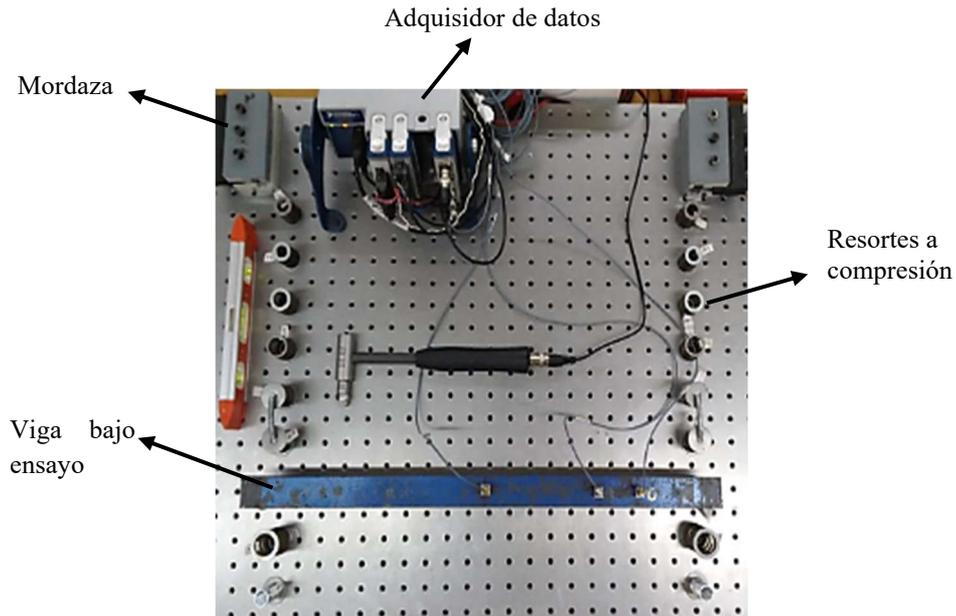


Figura 3.6 – Viga sostenida por resortes.

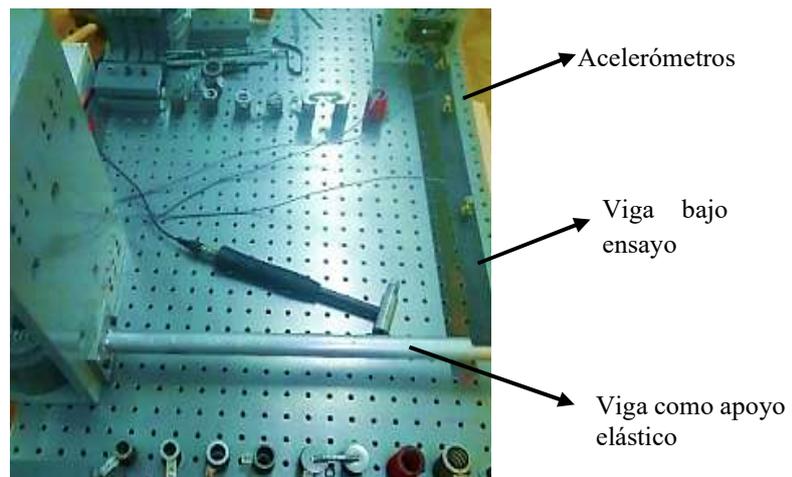


Figura 3.7 – Viga empotrada en un extremo y restringida elásticamente por otra viga.

### 3.2.3 Resultados

#### 3.2.3.1 Coeficientes adimensionales de frecuencias determinados para vinculaciones típicas.

Se determinan los coeficientes adimensionales de frecuencias naturales analíticamente ( $\lambda_A$ ), experimentalmente ( $\lambda_E$ ) y corregidos tras aplicar el procedimiento de zero settings ( $\lambda_C$ ), para los primeros 3 primeros modos normales de vibración, para condiciones de contorno clásicas. Se compararon los resultados exactos con la bibliografía (Blevins, 1979), dando absoluta concordancia.

Vínculos en Los extremos	$n$	$\lambda_A$	$\lambda_E$	$\lambda_C$
<b>L-L</b>	1	4.73004074	ND	ND
	2	7.85320462	ND	ND
	3	10.99560783	ND	ND
<b>A-L</b>	1	3.92660231	ND	ND
	2	7.06858275	ND	ND
	3	10.21017612	ND	ND
<b>E-L</b>	1	1.87510406	1.832478444	1.875104175
	2	4.69409113	4.548467295	4.694091222
	3	7.85475743	7.590374376	7.854757442
<b>A-A</b>	1	3.14159265	3.205821044	3.141622167
	2	6.28318531	6.270446449	6.283197273
	3	9.42477796	9.431465034	9.424805723
<b>E-A</b>	1	3.92660231	3.867028648	3.926606303
	2	7.06858275	6.921423788	7.068585372
	3	10.21017612	9.923037811	10.21018013
<b>E-E</b>	1	4.73004074	4.464015255	4.730051777
	2	7.85320462	7.4456077	7.853206856
	3	10.9956079	9.971872618	10.99560907

Tabla 3.2 - Coeficientes adimensionales de frecuencias para vínculos típicos.

\*Nota: ND (No determinados).

Para cada condición de vínculo típica descrita en la Tabla 3.2 se tomaron 5 mediciones de las frecuencias naturales de vibración de los primeros 3 modos y se calculó el valor promedio para cada modo y vinculación. Con este valor, se determinó el coeficiente adimensional de frecuencias experimental ( $\lambda_E$ ). En la Figura 3.8 se presenta el error promedio al comparar los coeficientes adimensionales de frecuencias determinados analítica y experimentalmente.

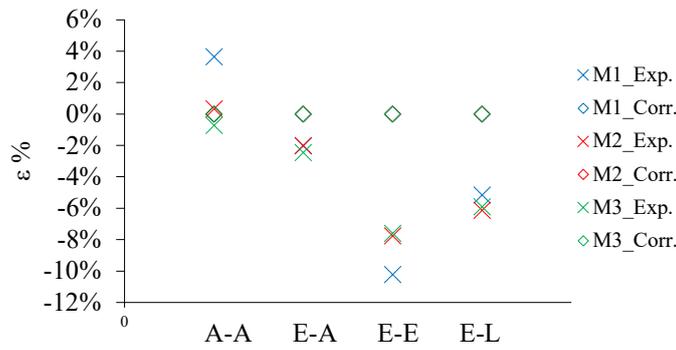


Figura 3.8 – Error relativo porcentual de los 3 primeros  $\lambda$  para diferentes condiciones de vínculo clásicas.

3.2.3.2 Coeficientes adimensionales de frecuencias para vínculos elásticos empleando resortes.

Se dispone de 16 resortes a compresión cuyas respectivas constantes elásticas fueron determinadas en unidades de N/m de manera analítica según la ecuación  $k_{Anal} = d^4G/8D^3N$ . De forma experimental la constante se determinó empleando pesas calibradas y un reloj comparador marca Mitutoyo SWU785, trazando una curva, obteniendo un valor promedio ( $k_{Exp\_Pro}$ ) y un valor de interpolación ( $k_{Exp\_Int}$ ).

Id	$k_{Anal}$	$k_{Exp\_Pro}$	$k_{Exp\_Int}$	$\epsilon_{Pro} \%$	$\epsilon_{Int} \%$
A1	6800	6972	6860	2%	1%
A2	6800	6740	6614	1%	3%
A3	6800	7851	7459	13%	9%
A4	6800	7169	6884	5%	1%
B1	17627	16935	16563	4%	6%
B2	17627	16282	16227	8%	9%
B3	17627	17147	18459	3%	5%
B4	17627	15338	17256	15%	2%
C1	13246	14521	14296	9%	7%
C2	13246	13741	13598	4%	3%
C3	13246	14151	14896	6%	11%
C4	13246	15956	18027	17%	27%
D1	26866	27496	27537	2%	2%
D2	26866	19763	21080	36%	27%
F1	2283	2499	2388	9%	4%
F2	2283	2067	2104	10%	9%

Tabla 3.3 - Constante elástica de los resortes empleados.

Los resortes han sido combinados de diferentes formas tal que, en la Figura 3.9 se presentan 11 casos de estudio, donde se determina el coeficiente de frecuencias, del modo 1 al 3, en forma analítica, experimental y corregida. El estudio se realizó para una viga de acero SAE1020, cuya densidad es  $\rho = 7850 \text{ Kg/m}^3$  y módulo de elasticidad longitudinal  $E = 2.06E^{+11} \text{ N/m}^2$ , tiene una

longitud de  $l = 47.5\text{cm}$ , un ancho de  $b = 3.15\text{cm}$  y un espesor de  $h = 0.80\text{cm}$ . El error relativo porcentual se muestra en la Figura 3.10.

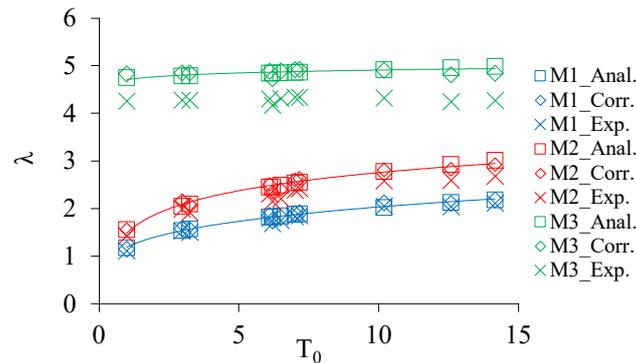


Figura 3.9 – Valores de los 3 primeros  $\lambda$  para diferentes restricciones elásticas iguales en ambos extremos.

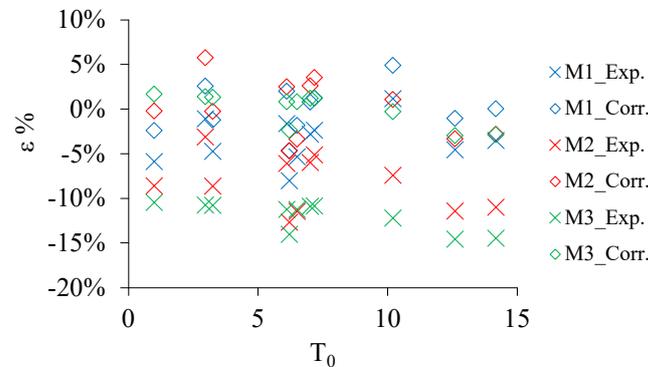


Figura 3.10 – Error relativo porcentual de los 3 primeros  $\lambda$  para diferentes restricciones elásticas iguales en ambos extremos.

### 3.2.3.3 Análisis analítico de la influencia de la rigidez de las restricciones elásticas en la variación de los coeficientes adimensionales de frecuencias.

Se determina analíticamente los coeficientes adimensionales de frecuencias naturales, para los primeros 3 modos normales de vibración, al variar la rigidez del resorte traslacional del extremo izquierdo, desde un valor  $T_0 = 1e^{-7}$  a  $T_0 = 1e^{30}$ , mientras que los resortes rotacionales son nulos. En la Figura 3.11, se observa la presencia de tres regiones definidas. Una primera zona con un comportamiento asintótico, en donde para el modo 1,  $\lambda \rightarrow 0$  a medida que  $T_0 \rightarrow 0$ . Para el resto de los modos,  $\lambda_n \rightarrow \lambda_{A_n-L}$  cuando  $T_0 \rightarrow 0$ . Se observa una zona de transición en  $1 \leq T_0 \leq 10^4$ . Finalmente un comportamiento asintótico donde  $\lambda \rightarrow \lambda_A^{A-A}$  cuando  $T_0 \rightarrow \infty$ .

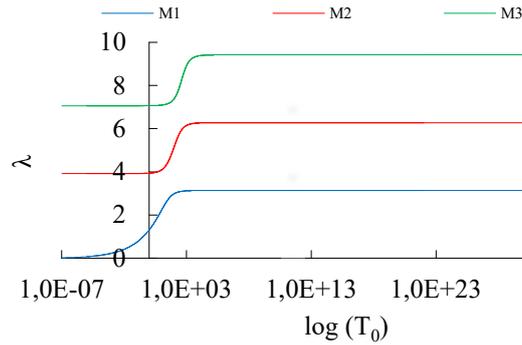


Figura 3.11 – Valores de los 3 primeros  $\lambda$  para  $R_0 = R_l = 0$ ,  $T_l = 10^{30}$ ,  $10^{-7} \leq T_0 \leq 10^{30}$ .

Al variar la rigidez de los resortes traslacionales de igual manera  $T_0 = T_l$  en ambos extremos, para cada caso de estudio, desde un valor  $T_0 = T_l = 10^{-7}$  a  $T_0 = T_l = 10^{30}$ , se observa que para los modos 1 y 2,  $\lambda \rightarrow 0$  a medida que  $T_0 \rightarrow 0$ . Para el resto de los modos,  $\lambda_n \rightarrow \lambda_{n-2}^{L-L}$  cuando  $T_0 \rightarrow 0$ . Luego de la zona de transición,  $\lambda \rightarrow \lambda_A^{A-A}$  cuando  $T_0 \rightarrow \infty$ , ver Figura 3.12.

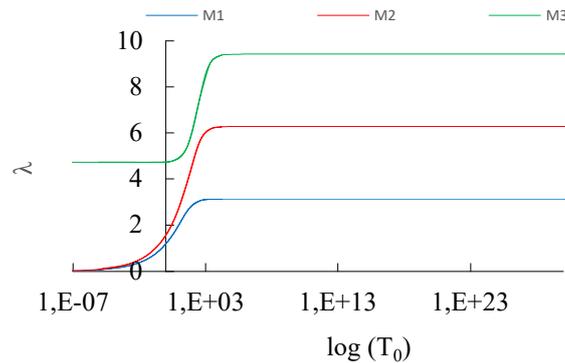


Figura 3.12 – Valores de los 3 primeros  $\lambda$  para  $R_0 = R_l = 0$ ,  $10^{-7} \leq T_0 = T_l \leq 10^{30}$ .

En la Figura 3.13 se muestran los resultados de variar la rigidez de los resortes traslacionales en ambos extremos de manera tal que  $T_0 + T_l = 10^{30}$ , con  $R_0 = R_l = 0$ .

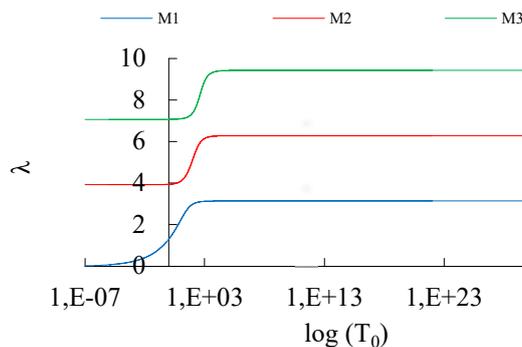


Figura 3.13 – Valores de los 3 primeros  $\lambda$  para  $R_0 = R_l = 0$ ,  $T_0 + T_l = 10^{30}$ ,  $10^{-7} \leq T_0 \leq 10^{30}$ .

Al variar la rigidez del resorte traslacional y del resorte rotacional del extremo izquierdo, de igual manera desde un valor  $T_0 = R_0 = 10^{-7}$  a  $T_0 = R_0 = 10^{30}$ , mientras que los resortes traslacionales y rotacionales en el extremo derecho se mantienen fijo en  $T_l = 10^{30}$  y  $R_l = 0$ , se observa que  $\lambda_n \rightarrow \lambda_{A_n-L}^{A-L}$  cuando  $T_0 = R_0 \rightarrow 0$  y  $\lambda \rightarrow \lambda_A^{E-A}$  a medida que  $T_0 = R_0 \rightarrow \infty$ . Ver Figura 3.14.

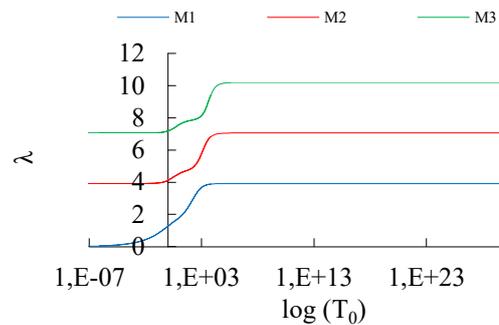


Figura 3.14 – Valores de los 3 primeros  $\lambda$  para  $T_l = 10^{30}$ ,  $R_l = 0$ ,  $10^{-7} \leq R_0 = T_0 \leq 10^{30}$ .

Si se mantiene constante la rigidez de los resortes traslacionales de ambos extremos, y se varía la rigidez del resorte rotacional del extremo izquierdo, desde  $R_0 = 10^{-7}$  a  $R_0 = 10^{30}$ , y se mantiene nulo el resorte rotacional del extremo derecho, se observa que  $\lambda \rightarrow \lambda_A^{A-A}$  a medida que  $R_0 \rightarrow 0$ . En la Figura 3.15 se puede observar una zona de transición dada por  $10^{-4} \leq T_0 \leq 10^4$ . Finalmente  $\lambda \rightarrow \lambda_A^{E-A}$  cuando  $R_0 \rightarrow \infty$ .

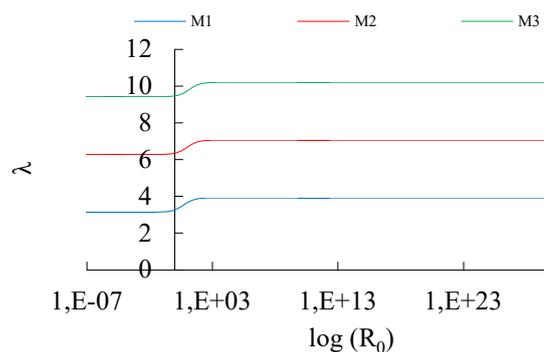


Figura 3.15 – Valores de los 3 primeros  $\lambda$  para  $T_0 = T_l = 10^{30}$ ,  $R_l = 0$ ,  $10^{-7} \leq R_0 \leq 10^{30}$ .

3.2.3.4 Análisis experimental de la influencia de la rigidez de las restricciones elásticas en la variación de los coeficientes adimensionales de frecuencias.

Se utiliza una viga de acero de longitud  $l = 49cm$ , ancho  $b = 3.16cm$  y espesor  $h = 0.344cm$ , empotrada en un extremo y restringida elásticamente en el otro. La restricción elástica traslacional consiste en una viga de aluminio, de sección circular hueca,  $\phi_{ext} = 2.5cm$  y  $\phi_{int} = 2.27cm$ , empotrada-libre, que al variar la distancia desde su empotramiento al punto de contacto con la otra viga, varía su constante elástica según  $k_{Anal} = EI/l^3$ . En la Figura 3.16 se determina el coeficiente adimensional de frecuencias, del modo 1 a 3, en forma analítica, experimental y corregida aplicando el procedimiento de zero setting. A partir de los cuales se determina el error relativo porcentual que se observa en la Figura 3.17.

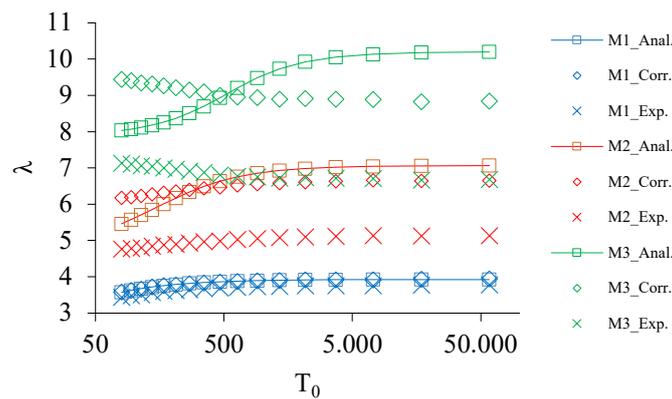


Figura 3.16 – Valores de los 3 primeros  $\lambda$  del ensayo de una viga empotrada en un extremo y restringida elásticamente por otra viga.

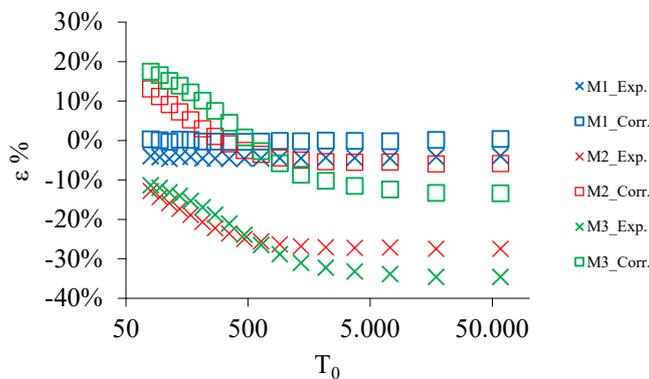


Figura 3.17 – Error relativo porcentual de los 3 primeros  $\lambda$  del ensayo de una viga empotrada en un extremo y restringida elásticamente por otra viga.

La misma viga de acero fue analizada cuando se encuentra simplemente apoyada en ambos extremos sobre mordazas. Dichas mordazas tienen 2 cuerpos independientes, entre ellos se apoya

la viga y la presión de sujeción se ajusta mediante el apriete de tornillos que empaquetan los cuerpos de la mordaza. En la Figura 3.18, se presentan los coeficientes de frecuencias analíticos y experimentales de una viga bi-articulada cuando se varía el ángulo de apriete del tornillo de las mordazas.

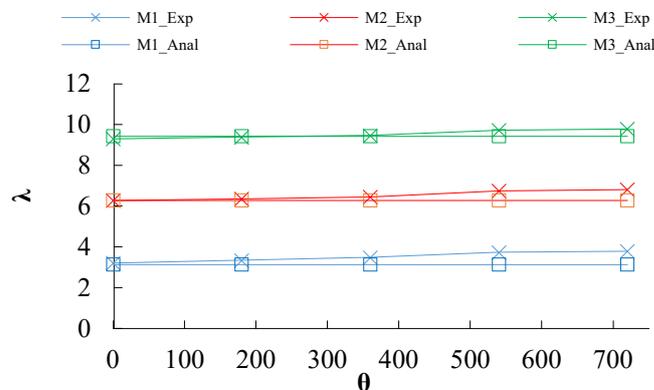


Figura 3.18 – Valores de los 3 primeros  $\lambda$  del ensayo de una viga bi-articulada cuando se varía el ángulo de apriete.

De los resultados experimentales obtenidos y al compararlos con los analíticos, se infiere que a medida que el ajuste de los tornillos aumente y por ende la presión de contacto entre los cuerpos de la mordaza y la viga, el vínculo simple comienza a comportarse como un resorte traslacional que se mantiene constante y uno rotacional que se va incrementado. Al comparar los primeros valores de  $\lambda_E$  y  $\lambda_A$  cuando se varía en el ensayo el ángulo de giro del tornillo  $\theta$  de una de las mordazas, se puede determinar una relación entre ellos, tal como se indica en la Figura 3.19 y Figura 3.20.

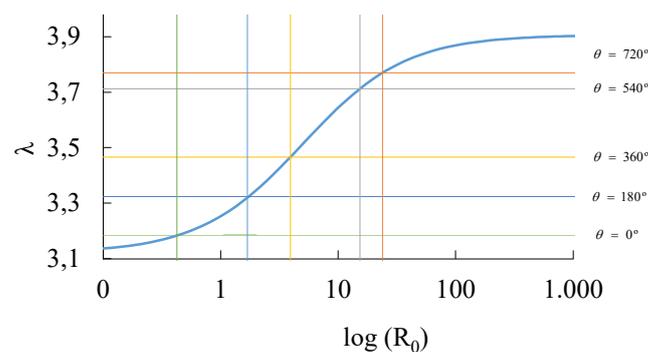


Figura 3.19 – Relación entre los  $\lambda$  del modo 1, medidos y analíticos, de una viga bi-articulada cuando se varía el ángulo de apriete.

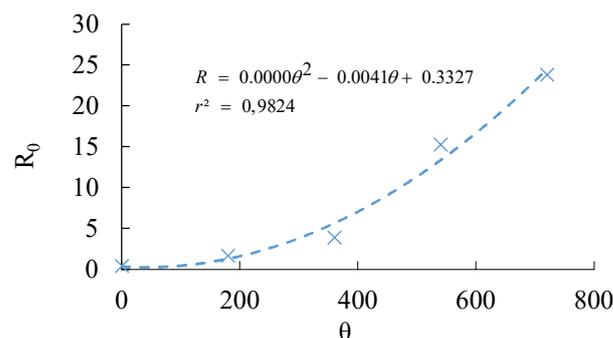


Figura 3.20 – Relación entre el ángulo de apriete y la rigidez del resorte rotacional.

El mismo análisis se repitió para una viga de longitud  $l = 52.5\text{cm}$ , ancho  $b = 3.15\text{cm}$  y espesor  $h = 0.8\text{cm}$ , variando el ángulo de apriete en las mordazas de ambos extremos obteniéndose similares resultados, ver Figura 3.21.

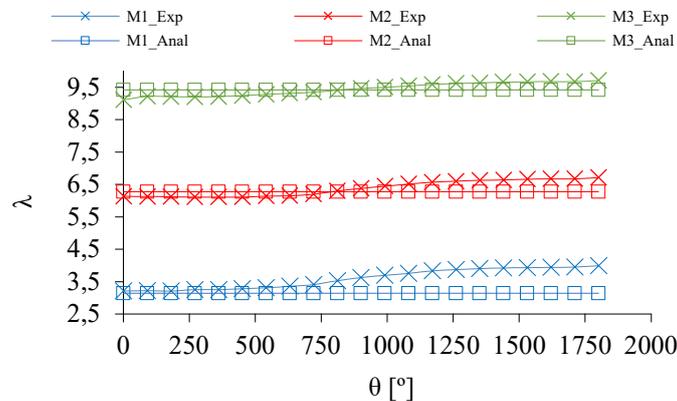


Figura 3.21 – Valores de los 3 primeros  $\lambda$  al variar el apriete de la mordaza en ambos extremos.

### 3.3 ESTUDIO ANALÍTICO DE LA INFLUENCIA DE FISURAS EN LOS COEFICIENTES ADIMENSIONALES DE FRECUENCIAS DE VIGAS

En los componentes mecánicos y estructurales, las fisuras representan un problema común que impacta de manera significativa en su comportamiento dinámico. La presencia y evolución de estas fisuras alteran las características dinámicas del sistema, enfatizando la importancia de resolver el problema directo, que consiste en determinar los parámetros modales en estructuras con fisuras conocidas.

La caracterización de la respuesta libre de vigas con fisuras es esencial por varias razones. En primer lugar, permite comprender la respuesta dinámica de la estructura ante cargas conocidas. Además, es un requisito fundamental para la implementación de ciertos métodos de identificación de fisuras basados en mediciones de frecuencias naturales.

El desarrollo de modelos modales analíticos con restricciones elásticas intermedias, asociadas a modelos fractomecánicos de fisuras, se presenta como una herramienta robusta y efectiva para modelar las vibraciones transversales libres en vigas Euler-Bernoulli con fisuras en su superficie.

Es relevante señalar que, si bien resultados para las superficies de frecuencias bajo condiciones clásicas han sido previamente documentados en trabajos como los de Yang et al. (2001), Owolabi et al. (2003) y Liu y Barkey (2017), los resultados obtenidos mediante la metodología descrita en esta tesis son idénticos a estos. Además, las superficies de frecuencias

presentadas para vigas con fisuras y vinculaciones no clásicas, como apoyos intermedios, rotulas y vínculos elásticos en los extremos, constituyen una contribución original y valiosa de este trabajo.

### 3.3.1 Determinación analítica de los coeficientes adimensionales de frecuencias de una viga con una fisura, una vinculación elástica intermedia y en ambos extremos

En la Figura 3.22 se describe una viga tipo Euler Bernoulli, de longitud total  $l$ , compuesta por tres tramos, cuyas dimensiones de sección y material son uniformes a lo largo de cada uno. Los mismos, que se corresponden a los intervalos  $[0, c_1]$ ,  $[c_1, c_2]$  y  $[c_2, l]$ , están vinculados entre sí por dos rótulas internas y dos restricciones elásticas rotacionales  $r_{i,i+1}$  con  $i=1,2$ . En cada rótula actúa un resorte traslacional  $t_{c_i}$  con  $i=1,2$ ; cuyo otro extremo está fijo. El sistema estructural tiene en sus extremos restricciones rotacionales definidas por los parámetros  $r_0$  y  $r_l$  y restricciones traslacionales dadas por  $t_0$  y  $t_l$ . El desplazamiento transversal de la viga en cualquier instante de tiempo  $t$  está descrita por la función  $w = w(x, t)$ ,  $x \in [0, l]$ .

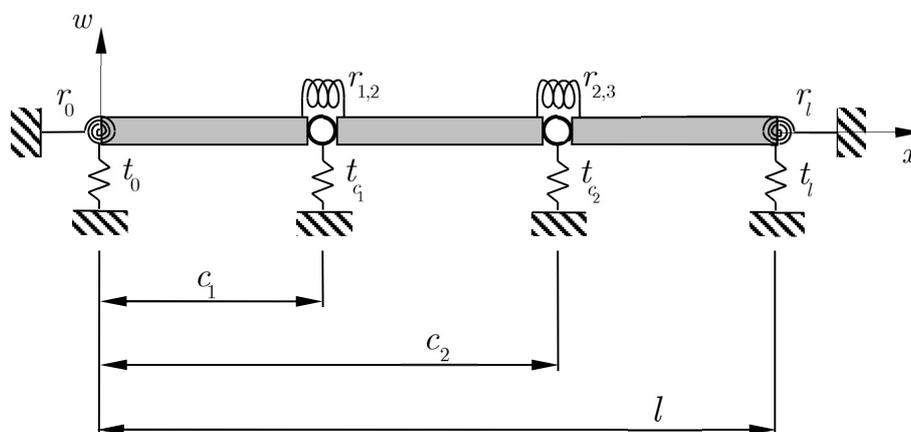


Figura 3.22 – Viga de tres tramos con restricciones elásticas intermedias y en los extremos.

A partir de las expresiones de la energía mecánica del sistema, la aplicación del principio de Hamilton y el cálculo de variaciones, se obtienen, ya adimensionalizadas, la ecuación diferencial que describe el comportamiento vibracional, las condiciones de contorno y transición (Raffo y Carrizo, 2013; 2014; 2016) y (Carrizo y Raffo, 2019).

$$\frac{d^4}{d\bar{x}^4} W_{i,n}(\bar{x}) - \lambda_n W_{i,n}(\bar{x}) = 0, \quad \forall \bar{x} \in (\bar{c}_{i-1}, \bar{c}_i), \quad i = 1, 2, 3 \quad 3.11$$

$$R_0 \frac{dw}{d\bar{x}}(0^+) = \frac{d^2 w}{d\bar{x}^2}(0^+) \quad 3.12$$

$$T_0 w(0^+) = -\frac{d^3 w}{d\bar{x}^3}(0^+) \quad 3.13$$

$$w(\bar{c}_i^-) = w(\bar{c}_i^+), \quad i = 1, 2 \quad 3.14$$

$$R_{i,i+1} \left( \frac{dw}{d\bar{x}}(\bar{c}_i^+) - \frac{dw}{d\bar{x}}(\bar{c}_i^-) \right) = \frac{d^2 w}{d\bar{x}^2}(\bar{c}_i^-), \quad i = 1, 2 \quad 3.15$$

$$R_{i,i+1} \left( \frac{dw}{d\bar{x}}(\bar{c}_i^+) - \frac{dw}{d\bar{x}}(\bar{c}_i^-) \right) = \frac{d^2 w}{d\bar{x}^2}(\bar{c}_i^+), \quad i = 1, 2 \quad 3.16$$

$$T_{c_i} w(\bar{c}_i) = \frac{d^3 w}{d\bar{x}^3}(\bar{c}_i^-) - \frac{d^3 w}{d\bar{x}^3}(\bar{c}_i^+), \quad i = 1, 2 \quad 3.17$$

$$R_l \frac{dw}{d\bar{x}}(1^-) = -\frac{d^2 w}{d\bar{x}^2}(1^-) \quad 3.18$$

$$T_l w(1^-) = \frac{d^3 w}{d\bar{x}^3}(1^-) \quad 3.19$$

donde el cambio de variable está dado por  $\bar{x} = x/l$  y por lo tanto la posición adimensional de las transiciones son  $\bar{c}_i = c_i/l$ . Las constantes adimensionales de rigidez de las restricciones

elásticas en los extremos están dadas por  $T_0 = \frac{t_0 l^3}{EI}$ ,  $R_0 = \frac{r_0 l}{EI}$ ,  $T_l = \frac{t_l l^3}{EI}$ ,  $R_l = \frac{r_l l}{EI}$  y las internas

por  $T_{c_i} = \frac{t_{c_i} l^3}{EI}$ ,  $R_{i,i+1} = \frac{r_{i,i+1} l}{EI}$ ,  $i = 1, 2$ .

El coeficiente adimensional de frecuencias  $\lambda_n$  esta definido como:

$$\lambda_n^4 = \frac{(\rho A)_i}{(EI)_i} l^4 \omega_n^2, \quad n=1,2,\dots,m \quad 3.20$$

y  $W_{i,m}(x)$  describen las formas modales del  $n$ -ésimo modo.

Las ecuaciones diferenciales ordinarias (E.D.O) de cuarto orden dadas en Ecuación 3.11 tiene como posible solución a la función:

$$W_{i,n}(\bar{x}) = A_{i,1} \cosh(\lambda_n \bar{x}) + A_{i,2} \sinh(\lambda_n \bar{x}) + A_{i,3} \cos(\lambda_n \bar{x}) + A_{i,4} \sin(\lambda_n \bar{x}) \quad i = 1, 2, 3 \quad 3.21$$

Reemplazando la Ecuación 3.21 en las Ecuaciones 3.11 a 3.19, se obtiene un sistema lineal de ecuaciones homogéneas. Dicho sistema puede ser escrito en notación matricial. Agrupando los coeficientes del sistema, se obtiene la matriz  $A$  de coeficientes del sistema. Entonces, la solución no trivial se obtiene al encontrar las raíces del polinomio característico  $P(\lambda_n)$ . Siendo así denominada como ecuación característica a:

$$P(\lambda_n) = Det[A] = G(T_0, R_0, T_l, R_l, R_{i,i+1}, T_{c_i}, \lambda_n) = 0. \quad 3.22$$

Adoptando valores adecuados de  $T_0$ ,  $R_0$ ,  $T_l$  y  $R_l$  se pueden generar todas las combinaciones posibles de restricciones de apoyo clásicas (empotrado, simplemente apoyado, libre, etc.); ya descrito en la Tabla 3.1. Por otra parte, utilizando la restricción elástica intermedia  $T_{c_i}$  con  $i = 1, 2$ , se pueden considerar efectos vinculaciones en los puntos intermedios  $\bar{x} = \bar{c}_i$ ,  $i = 1, 2$ .

Se han considerado 27 casos de estudio, cuyas condiciones de contorno y transición del problema están definidas por las constantes elásticas y que se detallan en la Tabla 3.4.

Los casos 1 a 6 se corresponden a condiciones de vinculación clásicas en los extremos. En los mismos, se considera que en la primera transición no existe apoyo intermedio ni fisura, y por lo tanto,  $T_{c_1} = 0$  y  $R_{1,2} = \infty$ . Por otra parte, siendo que se considera que la fisura está presente en algún sitio del segundo tramo de la viga y que la misma tiene cierta profundidad, esto implica que  $\bar{c}_2 \in (0, 1)$ ,  $R_{2,3} \in (0, \infty)$ . Además, al no existir apoyo en la posición de la fisura entonces  $T_{c_2} = 0$ .

Los casos 7 a 15 se corresponden con condiciones de vinculación clásicas en los extremos con un apoyo simple intermedio. Por lo tanto, se define la posición  $\bar{c}_1$  y la rigidez del mismo, al ser un apoyo simple,  $T_{c_1} = \infty$ . Como en la primera transición no hay fisura presente, se asume  $R_{1,2} = \infty$ . En forma análoga a los casos 1 a 6, la fisura está presente en algún sitio del segundo tramo de la viga y la misma tiene cierta profundidad, esto implica que  $\bar{c}_2 \in (0, 1)$  y  $R_{2,3} \in (0, \infty)$ . Además, al no existir apoyo en la posición de la fisura entonces  $T_{c_2} = 0$ .

Mientras que los casos 16 a 21 se corresponden a condiciones de vinculación clásicas en los extremos con una rotula intermedia. Por lo tanto, las restricciones elásticas de la primera transición adoptan los valores  $T_{c_1} = 0$  y  $R_{1,2} = 0$ . Los valores de las constantes elásticas de la segunda transición son los mismos que los descritos antes.

Finalmente, los casos 22 a 27 se corresponden a apoyos elásticos en los extremos. Las condiciones de la primera y segunda transición son iguales a los casos 1 a 6, y solo se adoptan

valores específicos para  $T_0$ ,  $R_0$ ,  $T_l$  y  $R_l$ . Vale aclarar, que en caso de que la fisura este antes que el apoyo, los valores de las restricciones elásticas de la primera transición pasan a la segunda y de la segunda a la primera.

Para la implementación del modelo de fisura, se considera el modelo que Ostachowicz y Krawezuk (1991) propusieron formulado con herramientas fractomecánicas, basado en el factor de intensidad de tensiones para fisuras superficiales simples y abiertas. La rigidez del resorte está dada por

$$r_{i,i+1} = \frac{Ebh^2}{72\pi\eta^2\Phi(\eta)}, \quad 3.23$$

donde

$$\Phi(\eta) = 0.6384 - 1.035\eta + 3.7201\eta^2 - 5.1773\eta^3 + 7.553\eta^4 - 7.332\eta^5 + 2.4909\eta^6. \quad 3.24$$

Siendo  $\eta = a/h$ , la relación entre la profundidad de la fisura ( $a$ ) y el alto de la viga ( $h$ ), ver Figura 3.23. Para más detalle sobre el modelo de fisura consultar el Apéndice 2.

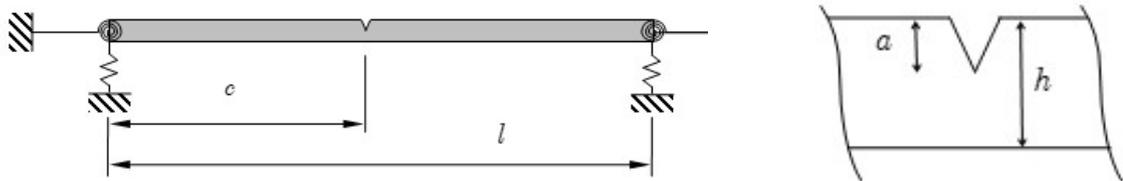


Figura 3.23 – a) Viga con una fisura superficial a un solo lado. b) Esquema de fisura superficial abierta.

### 3.3.2 Resultados

Para diferentes condiciones de vinculación se determina en forma exacta el valor de los coeficientes adimensionales de frecuencias que corresponde a una viga fisurada  $\lambda_n$ , con determinada posición  $c$  y profundidad  $\eta$  de fisura, donde el subíndice  $n$  indica el modo normal de vibración considerado.

Si bien los desarrollos analíticos permiten considerar tantos modos como se necesite y la discretización se puede hacer tan pequeña como se desee, el análisis está acotado a los modos 1 a 5, variando  $c$  y  $\eta$  desde 0.01 a 0.99 con paso 0.01. Al graficar los 99 x 99 casos obtenidos, se conforma en una gráfica tridimensional una superficie, donde para cada posición y profundidad de

fisura se corresponde un valor de coeficiente adimensional de frecuencias. A la misma, se la denomina superficie de los coeficientes adimensionales de frecuencias. Al tratarse de problemas adimensionalizados, cuyo intervalo es (0,1), para facilidad de lectura y comprensión las gráficas son presentadas en términos porcentuales; y por lo tanto con un intervalo de (0,100). Ver Figura 3.24.

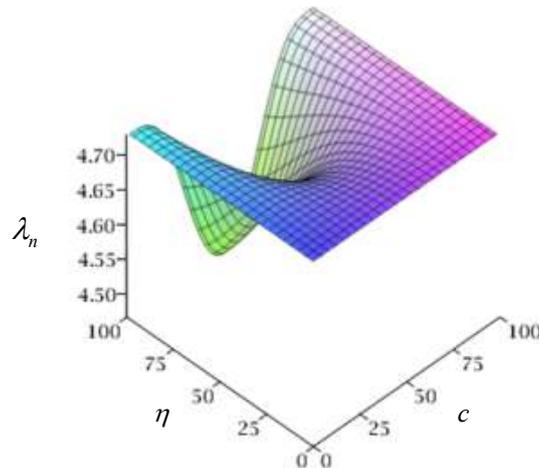


Figura 3.24 – Superficie de los coeficientes adimensionales, modo 1, L-L.

Anteriormente se determinó el valor de los coeficientes adimensionales de frecuencias que corresponden a una viga sin presencia de fisuras  $\bar{\lambda}_n$ . Si para cada posición y profundidad, el valor de  $\lambda_n$  es dividido por  $\bar{\lambda}_n$ , se puede trazar una superficie que se denomina superficie de los coeficientes adimensionales de frecuencias normalizados ( $\lambda_n/\bar{\lambda}_n$ ). Ver Figura 3. 25.

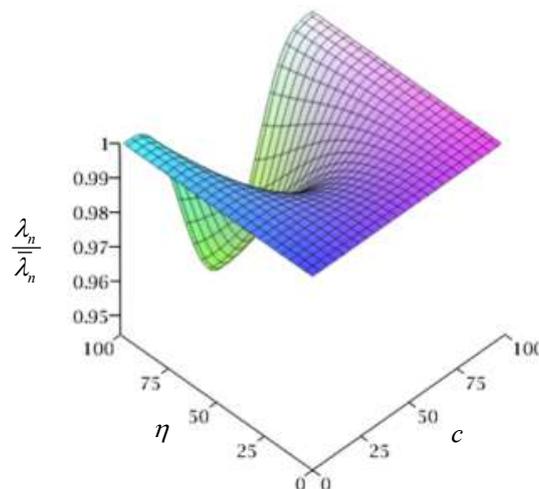


Figura 3.25 – Superficie de los coeficientes adimensionales de frecuencias normalizados, modo 1, L-L.

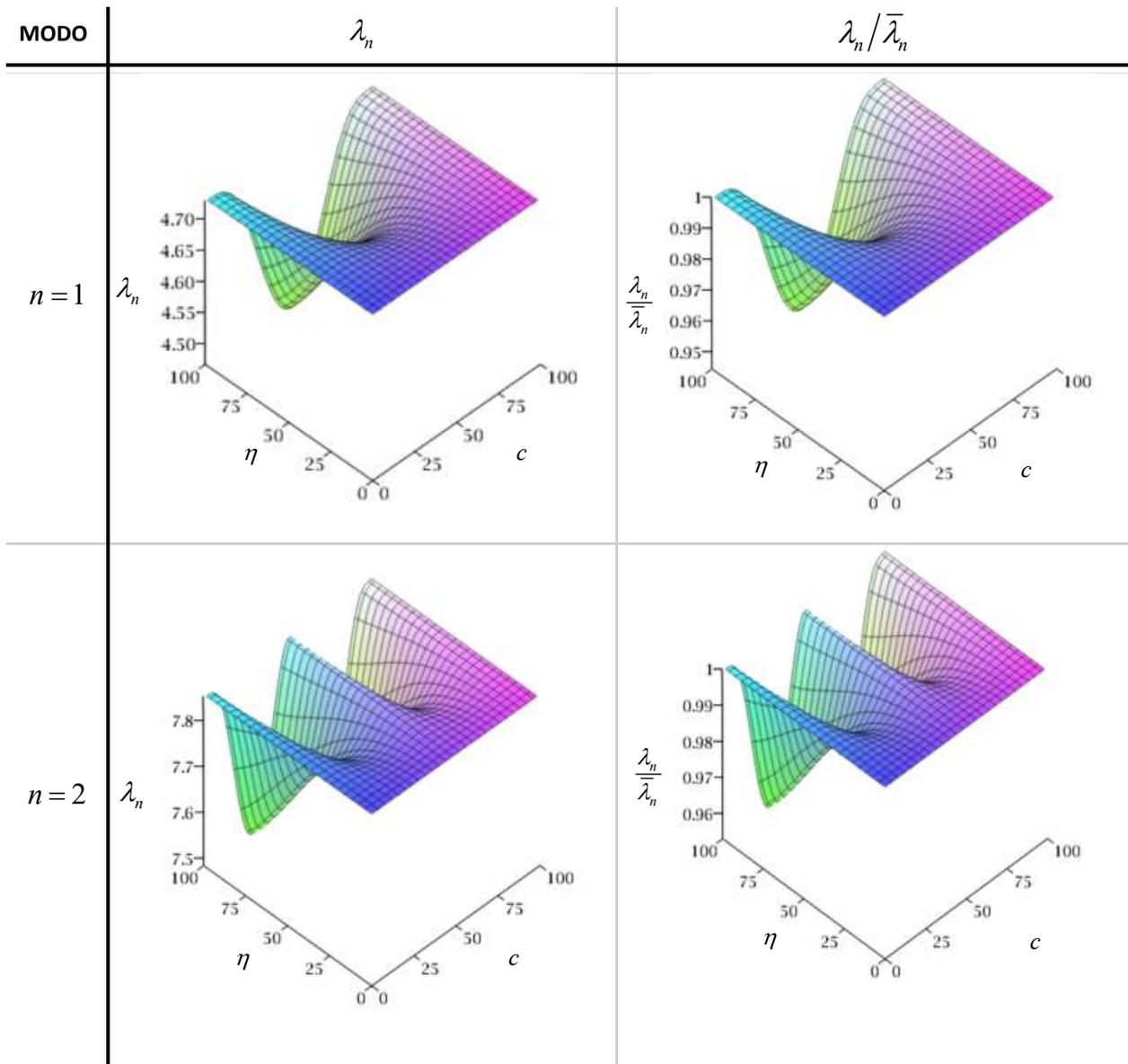
Caso Nº	Condición de Contorno				1era Condición de transición.			2da Condición de transición.			Observaciones.
	$T_0$	$R_0$	$T_l$	$R_l$	$\bar{c}_1$	$T_{c_1}$	$R_{1,2}$	$\bar{c}_2$	$T_{c_2}$	$R_{2,3}$	
1	0	0	0	0	0	0	$\infty$	(0,1)	0	(0, $\infty$ )	L-L
2	$\infty$	0	0	0	0	0	$\infty$	(0,1)	0	(0, $\infty$ )	A-L
3	$\infty$	$\infty$	0	0	0	0	$\infty$	(0,1)	0	(0, $\infty$ )	E-L
4	$\infty$	0	$\infty$	0	0	0	$\infty$	(0,1)	0	(0, $\infty$ )	A-A
5	$\infty$	$\infty$	$\infty$	0	0	0	$\infty$	(0,1)	0	(0, $\infty$ )	E-A
6	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	0	0	$\infty$	(0,1)	0	(0, $\infty$ )	E-E
7	0	0	0	0	0.30	$\infty$	$\infty$	(0,1)	0	(0, $\infty$ )	L-L con AS en $c = 0.30$
8	$\infty$	0	0	0	0.30	$\infty$	$\infty$	(0,1)	0	(0, $\infty$ )	A-L con AS en $c = 0.30$
9	$\infty$	$\infty$	0	0	0.30	$\infty$	$\infty$	(0,1)	0	(0, $\infty$ )	E-L con AS en $c = 0.30$
10	$\infty$	0	$\infty$	0	0.15	$\infty$	$\infty$	(0,1)	0	(0, $\infty$ )	A-A con AS en $c = 0.15$
11	$\infty$	0	$\infty$	0	0.30	$\infty$	$\infty$	(0,1)	0	(0, $\infty$ )	A-A con AS en $c = 0.30$
12	$\infty$	0	$\infty$	0	0.45	$\infty$	$\infty$	(0,1)	0	(0, $\infty$ )	A-A con AS en $c = 0.45$
13	$\infty$	0	$\infty$	0	0.50	$\infty$	$\infty$	(0,1)	0	(0, $\infty$ )	A-A con AS en $c = 0.50$
14	$\infty$	$\infty$	$\infty$	0	0.30	$\infty$	$\infty$	(0,1)	0	(0, $\infty$ )	E-A con AS en $c = 0.30$
15	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	0.30	$\infty$	$\infty$	(0,1)	0	(0, $\infty$ )	E-E con AS en $c = 0.30$
16	0	0	0	0	0.33	0	0	(0,1)	0	(0, $\infty$ )	L-L con rotula en $c = 0.33$
17	$\infty$	0	0	0	0.33	0	0	(0,1)	0	(0, $\infty$ )	A-L con rotula en $c = 0.33$
18	$\infty$	$\infty$	0	0	0.33	0	0	(0,1)	0	(0, $\infty$ )	E-L con rotula en $c = 0.33$
19	$\infty$	0	$\infty$	0	0.33	0	0	(0,1)	0	(0, $\infty$ )	A-A con rotula en $c = 0.33$
20	$\infty$	$\infty$	$\infty$	0	0.33	0	0	(0,1)	0	(0, $\infty$ )	E-A con rotula en $c = 0.33$
21	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	0.33	0	0	(0,1)	0	(0, $\infty$ )	E-E con rotula en $c = 0.33$
22	10	0	0	0	0	0	$\infty$	(0,1)	0	(0, $\infty$ )	L-L=> A-L
23	10	0	10	0	0	0	$\infty$	(0,1)	0	(0, $\infty$ )	L-L=> A-A
24	10	10	0	0	0	0	$\infty$	(0,1)	0	(0, $\infty$ )	L-L => E-L
25	10	10	10	0	0	0	$\infty$	(0,1)	0	(0, $\infty$ )	E-L => E-A
26	$\infty$	10	$\infty$	10	0	0	$\infty$	(0,1)	0	(0, $\infty$ )	A-A => E-E
27	10	10	10	10	0	0	$\infty$	(0,1)	0	(0, $\infty$ )	A-A => E-E

Tabla 3.4 - Valores de las restricciones elásticas en las condiciones de contorno y transición de los 16 casos en estudio.

En la Figura 3.26 se presenta la superficie de frecuencias sin adimensionalizar y adimensionalizada para el caso Libre-Libre. Dicha gráfica resume los valores de los coeficientes adimensionales de frecuencias para vigas fisuradas en diferentes ubicaciones y con diferente severidad. A partir de la misma, se puede apreciar el efecto de las fisuras en el comportamiento vibratorio de la viga fisurada.

Para observar todos los resultados disponibles donde se encuentran los apoyos clásicos, apoyos clásicos con apoyos intermedios, apoyos clásicos con rotulas y apoyos elásticos en los extremos, consultar Apéndice 3: Resultados del estudio analítico de la influencia de fisuras en los coeficientes adimensionales de frecuencias de vigas.

• CASO 1: L-L.



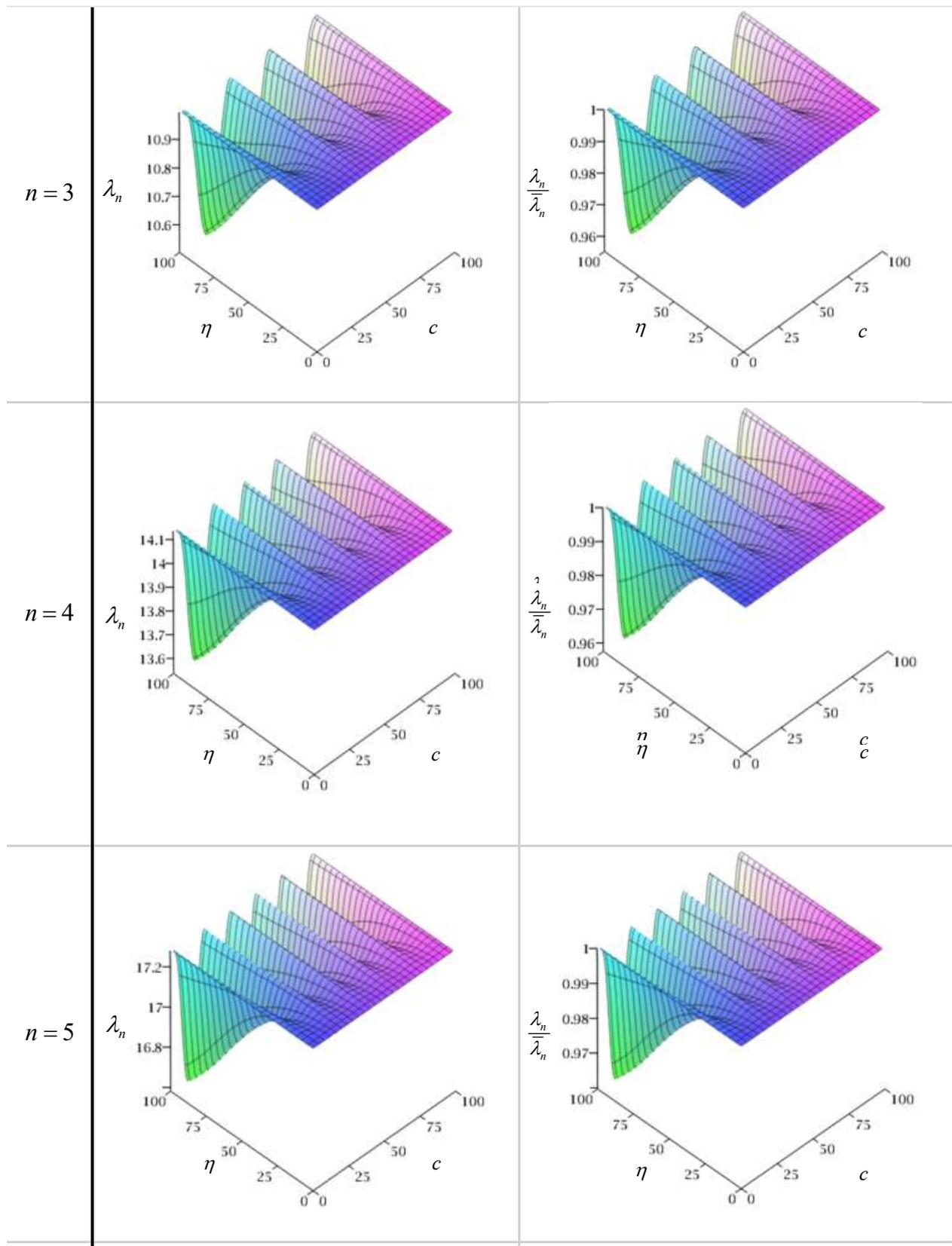


Figura 3.26 – Superficie de los coeficientes adimensionales de frecuencias para la condición L-L.

### **3.4 APORTES Y CONCLUSIONES DE ESTE CAPÍTULO**

El cálculo de variaciones demostró ser una herramienta robusta y eficaz para modelar las vibraciones transversales libres en vigas Euler Bernoulli, homogéneas e isotrópicas. Como ventajas del método utilizado se puede mencionar que resulta de fácil implementación y que los resultados obtenidos son exactos y no aproximados.

Se obtuvieron en forma analítica los valores exactos del coeficiente adimensional de frecuencias para los tres primeros modos de una viga Euler Bernoulli con vínculos clásicos. Los resultados presentaron absoluta concordancia con la bibliografía relevada.

Es sabido que, en experimentos y aún más en aplicaciones de ingeniería, se dificulta encontrar el valor de la rigidez de un vínculo que se comporte con correspondencia perfecta una vinculación clásica. El modelo computacional presentado permite analizar condiciones no clásicas, ya que las restricciones elásticas que emulan las condiciones de vinculación pueden adquirir el valor que se desee. Es un aporte de esta tesis el haber analizado la influencia de las condiciones de vinculación en el comportamiento vibratorio de una viga sin fisuras para un amplio rango de valores del coeficiente de rigidez de los vínculos elásticos. Se determinó el comportamiento vibratorio para valores de rigidez intermedios respecto a los vínculos clásicos.

Además, se determinó en forma experimental el valor del coeficiente de frecuencias de los primeros tres modos de vibrar, para vigas con diferentes vínculos clásicos como elásticos. Se aplicó el procedimiento de "zero setting", verificando una disminución del error sistemático en la determinación experimental del coeficiente de frecuencias.

Al comparar los resultados analíticos y experimentales se pudo inferir el comportamiento de las vinculaciones, llegando a relacionar el apriete de la mordaza utilizada como vínculo, con el valor analítico del coeficiente de rigidez del resorte rotacional.

Con este mismo modelo, a partir del empleo de una restricción elástica intermedia asociada a un modelo fractomecánico de fisura, se obtuvieron en forma analítica los primeros cinco valores de los coeficientes adimensionales de frecuencias para vigas con una sola fisura abierta a superficie y vinculaciones clásicas. En el estado del arte se pudo encontrar a algunos de todos los casos presentados en esta tesis, obteniendo plena correspondencia.

Las superficies de frecuencias presentadas para vigas con fisuras y vinculaciones clásicas con apoyos intermedios, clásicas con rotulas y vínculos elásticos en los extremos son resultados inéditos y otro aporte de esta tesis.

# CAPÍTULO 4

## MÉTODOS ANALÍTICOS DE IDENTIFICACIÓN DE FISURAS BASADOS EN MEDICIONES DE FRECUENCIAS NATURALES DE VIBRACIÓN

### 4.1 INTRODUCCIÓN

El desarrollo de métodos de detección e identificación de fisuras es de un gran interés en ingeniería. En particular, la detección de fisuras en vigas a partir de conocer los valores de sus frecuencias naturales de vibración. Dichas frecuencias son obtenidas experimentalmente mediante análisis dinámicos. Este tipo de problemas, tanto desde un punto de vista epistemológico (Bunge, 2006) como matemático (Otero et. al., 2014), se conocen como problemas inversos. Han sido denominados así porque recorren el camino inverso a los problemas directos, Groetsch (2001). Martinez-Luaces et al. (2021) proporcionaron una clasificación de los problemas inversos, dividiéndolos en causalidad y especificación. El problema inverso de causalidad implica indagar sobre una posible entrada para que, a través de un proceso o modelo conocido, se obtenga un resultado o efecto también conocido. En cambio, en el problema inverso de especificación, se conocen tanto la entrada como la salida, y la pregunta se centra en el proceso intermedio.

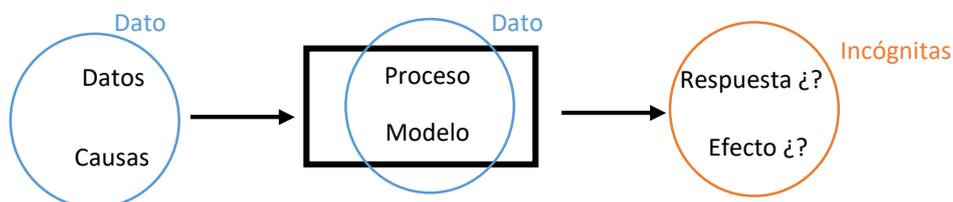


Figura 4.1 – Esquema de los problemas directos.

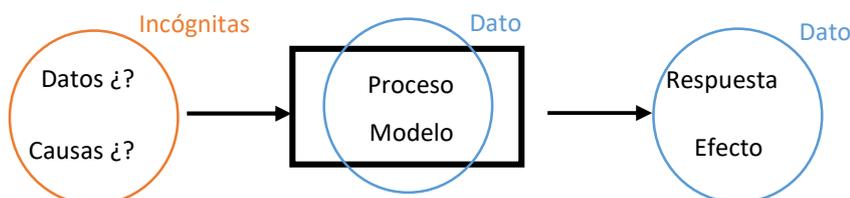


Figura 4.2 – Esquema de los problemas inverso de causalidad.

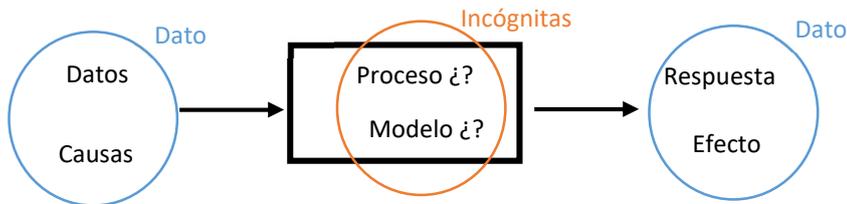


Figura 4.3 – Esquema de los problemas inverso de especificación.

Lo antedicho es aplicado al problema de una viga Euler Bernoulli, de sección constante y homogénea. La misma tiene asociada  $n$  frecuencias naturales y formas modales de vibración. Ahora, si apareciere una fisura cuya ubicación real está en la posición  $c$  y cuya profundidad real es  $a$ , las frecuencias naturales y formas modales de vibración se verán modificadas.

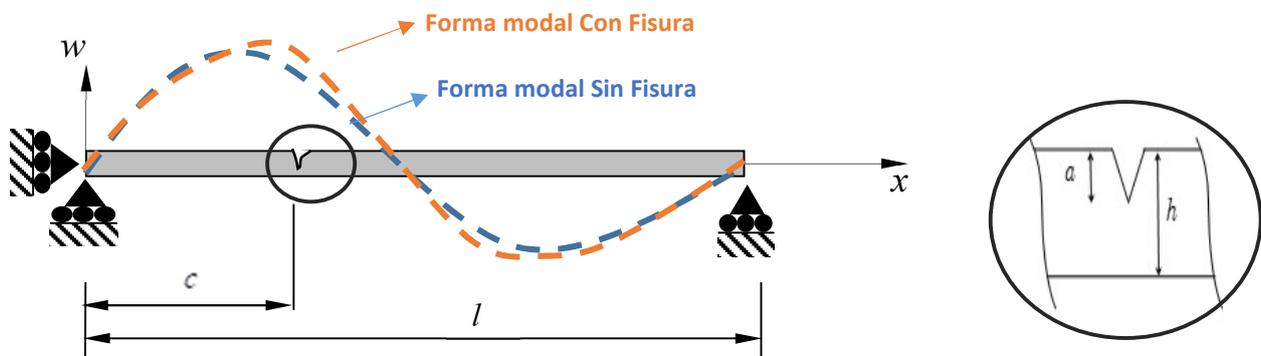


Figura 4.4 – Sistema físico de una viga vibrante con fisura y vinculaciones en sus extremos.

Entonces, el problema inverso consiste en pronosticar estos parámetros característicos de la fisura a partir de conocer algunos valores del coeficiente adimensional de las frecuencias naturales  $\lambda_n$ . Siendo  $\hat{c}$  la posición de la fisura pronosticada por el método y  $\hat{\eta}$  la profundidad de la fisura pronosticada por el método. La misma se puede modelar, como ya se describió en capítulos anteriores, mediante un modelo de fisura que emplea restricciones elásticas rotacionales.

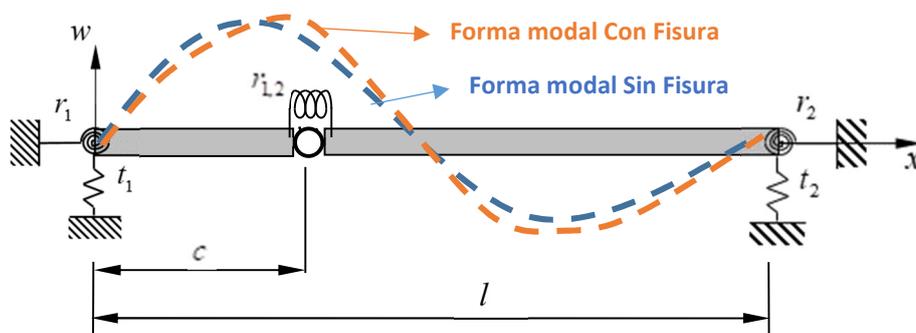


Figura 4.5 – Modelo de una viga vibrante con fisura con vinculaciones en sus extremos.

Una implementación práctica del sistema de identificación de fisura es representada en la Figura 4.6. La estructura bajo ensayo vibra, mediante sensores es relevado dicho comportamiento y las frecuencias naturales de vibración son determinadas por técnicas del análisis modal experimental.

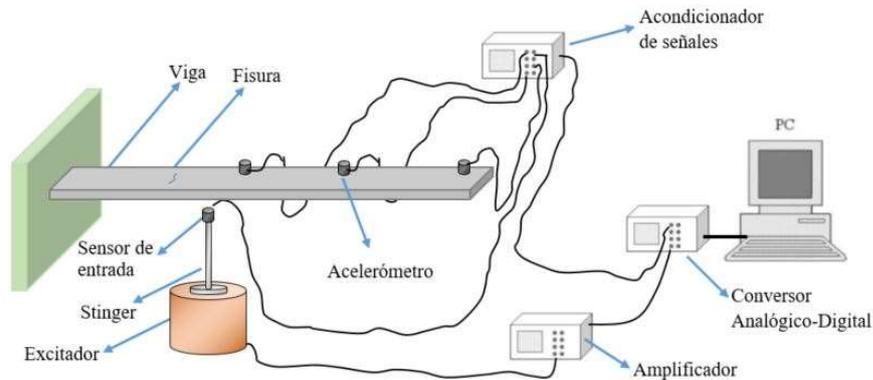


Figura 4.6 – Sistema de identificación de fisuras.

Esta respuesta del sistema es comparada con el modelo analítico.



Figura 4.7 – Esquema del problema inverso de identificación de fisuras como problema directo.

A continuación, se presentan 2 métodos analíticos de identificación de fisuras que emplean como dato de entrada las mediciones de las frecuencias naturales de vibración de la viga bajo estudio:

- Método 1: Emplea un modelo analítico basado en la obtención para cada modo de vibración de la curva de rigidez del resorte rotacional que emula la fisura y la intersección de dichas curvas como solución del problema inverso.
- Método 2: El modelo analítico empleado está basado en la obtención de las superficies de frecuencias y la intersección de sus curvas de nivel.

A su vez, cada modelo analítico fue implementado computacionalmente por diferentes algoritmos. Dando lugar a la implementación A, B, etc. Lo que da lugar a sub-clasificarlos como Método 1A, 1B, etc.

## 4.2 MÉTODO IDENTIFICACIÓN DE FISURAS 1: INTERSECCIÓN DE LAS CURVAS DE RIGIDEZ

### 4.2.1 Metodología del método 1

En los capítulos anteriores se demostró que al reemplazar las ecuaciones solución de las ecuaciones diferenciales que describen el comportamiento vibratorio de vigas, en las ecuaciones diferenciales dadas por las condiciones de contorno y transición del problema, se obtiene un sistema de ecuaciones. Para que el mismo tenga una solución no trivial, el determinante del sistema de los coeficientes  $A_i$  debe ser igual a cero. Así la ecuación de frecuencias queda dada por

$$G\left(T_0, R_0, T_l, R_l, \left(T_{c_i}, R_{i,i+1}, c_i\right)\Big|_{i=1,2}, \lambda_n\right) = 0. \quad 4.1$$

El método analítico de detección de fisuras basado en la intersección de las curvas de rigidez consiste en introducir en la ecuación de frecuencias, los valores conocidos del problema: las constantes elásticas de las restricciones elásticas  $\left(T_0, R_0, T_l, R_l, T_{c_i}\Big|_{i=1,2}\right)$  y el valor del coeficiente adimensional de frecuencias  $\lambda_n$  de alguno de los modos del sistema analizado. De esta manera, la ecuación de frecuencias queda dada tan solo en función de los parámetros que representan la posición  $c$  y la rigidez rotacional de la rótula  $R_{1,2}$ , tal como indica la Ec. 4.2

$$H(c, R_{1,2}) = 0. \quad 4.2$$

El valor de  $c$  esta acotado al intervalo  $(0,1)$ . Por lo tanto, al introducir diferentes valores de  $c$  se puede obtener los valores de  $R_{1,2}$  y por lo tanto de  $r_{1,2}$  para todo el intervalo dado, para el modo en cuestión. El procedimiento se repite en forma sucesiva para los diferentes modos considerados. Como la fisura tiene una determinada profundidad su valor de rigidez debe ser el mismo para todos los modos considerados. Por lo tanto, la solución del problema inverso está por hallar el punto donde el valor rigidez sea coincidente para todos los modos analizados.

Para ejemplificar el procedimiento se considera el caso particular de una viga E-L, con una fisura simple ubicada en  $c = 0.60$  y con  $\eta = 0.03$ , donde los valores de  $\lambda$  obtenidos con el método exacto son:  $\lambda_1 = 1.875097$ ,  $\lambda_2 = 4.693946$  y  $\lambda_3 = 7.854614$ . Para cada valor de  $\lambda_n$  se obtiene de la Ec. 4.2 los valores de  $r_{1,2}$  en función de la posición  $\bar{x}$ , como se muestra en la Figura 4.8.

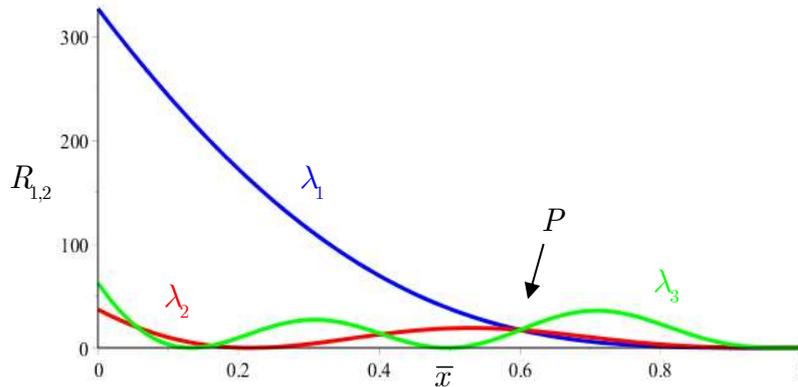


Figura 4.8 – Valores de  $r_{1,2}$  obtenidos para cada valor de  $\lambda_n$ .

Se puede observar que el punto  $P$  donde se cortan las tres curvas indica en forma directa la posición  $\bar{x} = \hat{c}$  donde el método pronostica la posición de la fisura y el valor  $R_{1,2}$ . Tal como se detalló en el capítulo 3, en esta tesis se emplea el modelo de fisura formulado por Ostachowicz y Krawezuk (1991). Aplicando el mismo, a partir de conocer la rigidez del resorte rotacional se puede determinar la profundidad de fisura que pronostica el método  $\hat{\eta}$ .

$$\hat{\eta} = f(R_{1,2}). \tag{4.3}$$

No en todos los casos es fácilmente determinable el punto  $P$ . Debido a la discretización de  $c$  en el intervalo  $[0,1]$  o bien porque los parámetros de entrada, valores de  $\lambda_n$ , no son exactos porque provengan de simulaciones numéricas o mediciones experimentales puede ocurrir que no exista un punto donde los valores de  $R_{1,2}$  sean coincidentes. Frente a este obstáculo en la implementación se propone utilizar, debido a su simpleza, una herramienta estadística, como ser la desviación estándar  $\sigma$  entre los valores de rigidez  $R_{1,2}$  de cada modo. Siendo

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{n=1}^M (R_{1,2}^n - \bar{R}_{1,2})^2}{(M - 1)}, \tag{4.4}$$

donde  $R_{1,2}^n$  denota el valor de  $R_{1,2}$  para el modo  $n$ ,  $\bar{R}_{1,2}$  denota el valor medio de los  $R_{1,2}^n$  y  $M$  es la cantidad total de modos empleados. Cuando los valores de rigidez son idénticos, y por lo tanto solución del problema, el desvío es nulo.

En la Figura 4.9 se observa que  $\sigma$  tiene dos valores nulos en  $\bar{x} = 0.60$  y en el borde libre de la viga. Para  $\bar{x} = 0.60 \rightarrow \bar{R}_{1,2} = 17.30$ , por lo tanto el método pronostica una fisura cuyas características son  $\hat{c} = 0.60$  y  $\hat{\eta} = 0.30$ .

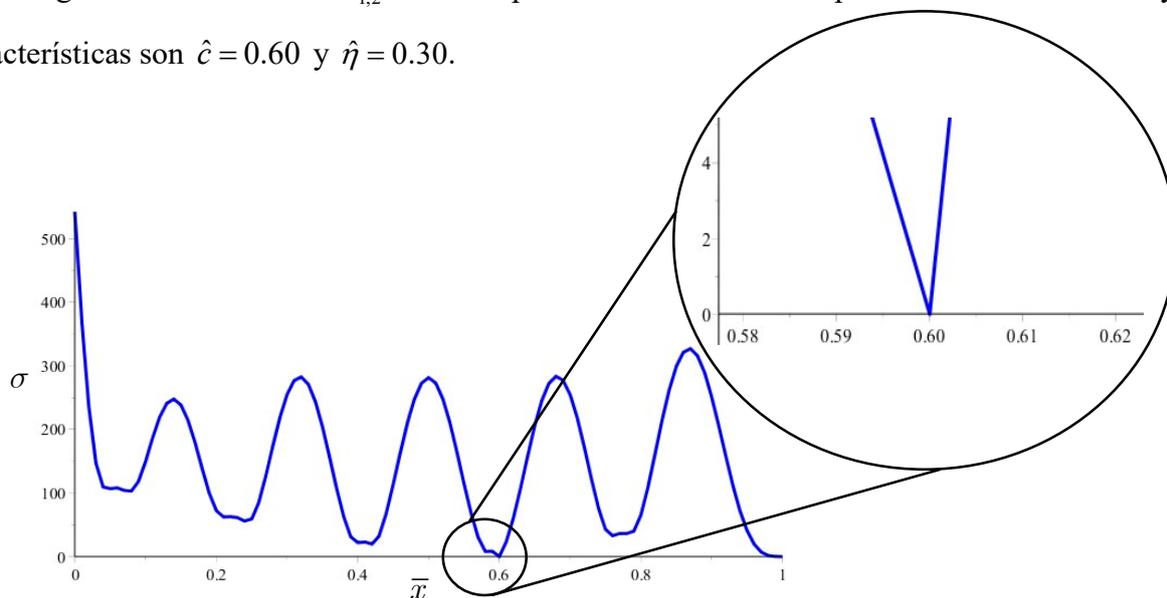


Figura 4.9 – Valores de  $\sigma$  en función de la posición  $\bar{x}$ , para los resultados de  $R_{1,2}$  representados en la Figura 4.8.

#### 4.2.2 Método 1, implementación A (M1A)

A continuación, se presenta la implementación del método de identificación de fisuras basado en la intersección de las curvas de rigidez para vigas con vinculaciones típicas en sus extremos. Se consideran 11 casos de estudio, los que se resumen en la Tabla 4.1.

Caso	Condiciones de contorno	Propiedades de la fisura		
		$c$	$\eta$	Tipo de fisura
1	E-L	0.0963	0.3045	Simple
2	E-L	0.6715	0.2956	Simple
3	E-L	0.1927	0.4543	Doble
4	E-L	0.3882	0.5185	Doble
5	E-E	0.0986	0.3045	Simple
6	E-E	0.1972	0.2661	Simple
7	E-E	0.2947	0.2956	Simple
8	E-E	0.1972	0.4543	Doble
9	E-E	0.4000	0.5185	Doble
10	A-A	0.4990	0.2964	Simple
11	A-A	0.3996	0.5458	Simple

Tabla 4.1 - Propiedades de las vigas con fisura analizadas.

#### 4.2.2.1 Obtención de las frecuencias naturales

Los coeficientes adimensionales de frecuencias  $\lambda_n$  son los datos de entrada del método analítico de identificación de fisuras. Los mismos han sido obtenidos en forma analítica exacta, con valores calculados numéricamente mediante el programa de elementos finitos Abaqus y en forma experimental.

Se desarrolló en el software Maple una rutina que resuelve el problema directo del problema de vibraciones en vigas con fisuras, donde a partir de la implementación del cálculo de variaciones se obtiene una solución analítica exacta de los coeficientes adimensionales de frecuencias  $\lambda_n$ .

Por otra parte, en el programa de elementos finitos Abaqus se dibujó el plano del perfil de la viga con la fisura como una discontinuidad con un semicírculo en el extremo. Esta zona de interés fue discretizada con mayor densidad y se realizó un análisis de convergencia para comprobar que la densidad de malla era adecuada. Se utilizaron elementos sólidos homogéneos 2D Shell deformables rectangulares planos de 8 nodos, bi-cuadráticos de tensiones planas, denominados CPS8.

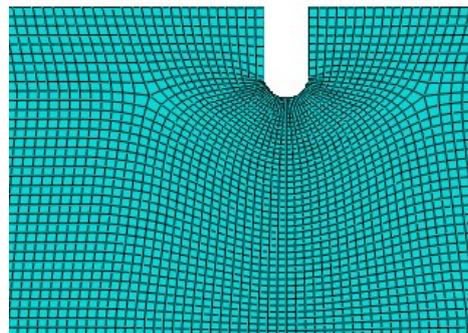


Figura 4.10 – Detalle del mallado alrededor en la zona de fisura en la simulación por MEF.

Finalmente, se fabricaron vigas con mecanizados que emulan fisuras abiertas a la superficie. También mordazas que emulan diferentes condiciones de borde, como ser empotramiento y apoyos simples. Se procedió a montar las vigas en diferentes configuraciones: Empotrado-Empotrado, Empotrado-Libre y Articulado-Articulado. Se obtuvo la respuesta en frecuencia de las vibraciones libres de la viga analizada con técnicas del análisis de vibraciones mecánicas. Se empleó un mecanismo de excitación de ondas mecánicas, que consiste en un generador de señales conectado a un parlante colocado en la proximidad del componente en estudio. Para determinar las vibraciones se instrumentó con un acelerómetro marca Brüel & Kjær modelo 4374, un preamplificador de carga Brüel & Kjær modelo NEXUS 2692-C de 4-canales, una bornera National Instruments SCC-68 y una placa digitalizadora/adquisidora National

Instruments PCI-6132. Mediante un barrido de frecuencias se pusieron de manifiesto las frecuencias naturales del componente estructural en estudio al entrar el mismo en resonancia.

En las Tabla 4.2 a Tabla 4.4 se presentan los valores de coeficientes de frecuencias obtenidos para los casos de estudio presentados en la Tabla 4.1.

Caso	Método	Secuencia modal					
		$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_3$	$\lambda_4$	$\lambda_5$	$\lambda_6$
1	Analítico	1.6297	4.5177	7.7938	10.9951	14.0057	16.7871
	Numérico	1.8087	4.5595	7.6502	10.7075	13.7321	16.7168
	Experimental	1.68	4.52	7.58	10.59	13.54	16.58
2	Analítico	1.8638	4.3743	7.2654	10.9198	13.7278	16.4657
	Numérico	1.8385	4.5776	7.6335	10.7474	13.7658	16.7318
	Experimental	1.84	4.53	7.56	10.64	13.61	16.60
3	Analítico	1.6235	4.6859	7.6208	10.2564	13.5093	17.0474
	Numérico	1.8062	4.5822	7.6391	10.6127	13.6300	16.7194
	Experimental	1.80	4.54	7.56	10.50	13.48	16.45
4	Analítico	1.6918	4.2005	7.4530	10.7261	13.0517	17.2425
	Numérico	1.7894	4.4640	7.4821	10.5399	13.3207	16.5045
	Experimental	1.77	4.43	7.43	10.41	13.17	16.22

Tabla 4.2 - Primeros seis valores de  $\lambda_n$  para las vigas E-L.

Caso	Método	Secuencia modal					
		$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_3$	$\lambda_4$	$\lambda_5$	$\lambda_6$
5	Analítico	4.5469	7.7998	10.9935	13.9788	16.7446	19.6068
	Numérico	4.7087	7.8401	10.9733	14.0687	17.1241	20.1502
	Experimental	4.74	7.79	10.89	13.89	16.82	20.05
6	Analítico	4.7224	7.6919	10.4712	13.6647	17.1176	20.4068
	Numérico	4.7175	7.8121	10.8901	13.9839	17.1063	20.1890
	Experimental	4.71	7.73	10.77	13.76	16.75	20.14
7	Analítico	4.6757	7.3554	10.7541	14.0763	16.4075	19.7976
	Numérico	4.7231	7.7913	10.9340	14.0628	17.0563	20.1293
	Experimental	4.74	7.74	10.88	13.89	16.95	20.10
8	Analítico	4.7181	7.6015	10.2533	13.5287	17.0735	20.4019
	Numérico	4.6974	7.8118	10.8531	13.9468	17.1093	20.2103
	Experimental	4.68	7.70	10.70	13.67	16.79	19.17
9	Analítico	4.3464	7.4319	10.7200	13.0560	17.2452	19.3222
	Numérico	4.6768	7.7685	10.9127	13.8161	17.1387	19.9336
	Experimental	4.45	7.27	10.24	12.54	16.15	18.99

Tabla 4.3 - Primeros seis valores de  $\lambda_n$  para las vigas E-E.

Caso	Método	Secuencia modal					
		$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_3$	$\lambda_4$	$\lambda_5$	$\lambda_6$
10	Analítico	2.8524	6.2832	8.7698	12.5662	14.8371	18.8492
	Numérico	3.1256	6.4064	9.3811	12.7801	15.6028	18.4333
	Experimental	3.23	6.38	9.37	12.29	15.51	18.54
11	Analítico	2.4136	5.9328	8.9459	11.5118	15.7079	17.5374
	Numérico	3.0371	6.2040	9.2988	12.1845	15.6259	17.6935
	Experimental	3.12	6.06	9.49	13.13	15.45	17.48

Tabla 4.4 - Primeros seis valores de  $\lambda_n$  para las vigas A-A.

#### 4.2.2.2 Resultados

El método de identificación de fisuras descrito en 4.2.1 es aplicado para los coeficientes de frecuencias obtenidos en forma analítica, numérica y experimental descritos en 4.2.2.1.

En la Tabla 4.5 se presentan los resultados del método, que caracterizan a la posición  $\hat{c}$  y profundidad  $\hat{\eta}$  de fisura para los valores de frecuencia de las 4.2 , Tabla 4.3 y Tabla 4.4.

Caso	Analítico		Numérico		Experimental	
	$\hat{c}$	$\hat{\eta}$	$\hat{c}$	$\hat{\eta}$	$\hat{c}$	$\hat{\eta}$
1	0.10	0.3	0.21	0.27	0.20	0.34
2	0.67	0.29	0.55	0.36	0.57	0.33
3	0.19	0.45	0.19	0.40	0.20	0.49
4	0.40	0.52	0.37	0.39	0.37	0.43
5	0.10	0.31	0.13	0.09	0.14	0.17
6	0.20	0.29	0.16	0.12	0.16	0.20
7	0.29	0.30	0.29	0.11	0.29	0.15
8	0.20	0.50	0.17	0.23	0.16	0.35
9	0.40	0.52	0.38	0.29	0.45	0.42
10	0.50	0.30	0.50	0.14	0.50	0.08
11	0.40	0.44	0.38	0.29	0.50	0.09

Tabla 4.5 - Estimación de los valores de  $\hat{c}$  y de  $\hat{\eta}$  con el método inverso propuesto.

#### 4.2.2.3 Discusión de los resultados

Se observa, en general, una mayor precisión en la determinación del valor de  $\hat{c}$  que en la determinación del valor de  $\hat{\eta}$ . El método responde para el caso articulado - articulado con mayor precisión cuando  $c$  se encuentra alejado de los bordes de la viga. Por otra parte, se observa que hay casos muy sensibles a los valores de  $\lambda_n$ , debido a que el valor de  $c$  se encuentra cercano a puntos de inflexión de las formas modales.

### 4.2.3 Método 1, implementación B (M1B)

Al correr sucesivos casos del método 1A, se observó que para ciertas posiciones de fisura la solución del problema inverso era incongruente. Por lo tanto, se hizo necesario proponer una optimización del método 1A, dando lugar al método 1B.

#### 4.2.3.1 Análisis de la implementación del método 1A cuando la posición de la fisura se encuentre en un punto de inflexión de la forma modal

Al realizar un análisis más minucioso del por qué el método daba resultados incongruentes, se halló que, para determinado modo, los valores de rigidez para todos los puntos de la viga eran mayores en varios ordenes de magnitud a los esperados. Haciendo imposible la correcta identificación de la fisura. De las propias observaciones se encontró que esto sucede cuando la fisura se encuentra en la misma posición que el punto de inflexión de la deformada de alguna de las formas modales de la viga.

A fin de ejemplificar esto, en la Figura 4.11 se presentan los valores de rigidez para una viga empotrada-libre, con una fisura cuya profundidad es  $\eta = 0.1$  y está ubicada en  $c = 0.2165$ , que se corresponde con el punto de inflexión de la segunda forma modal

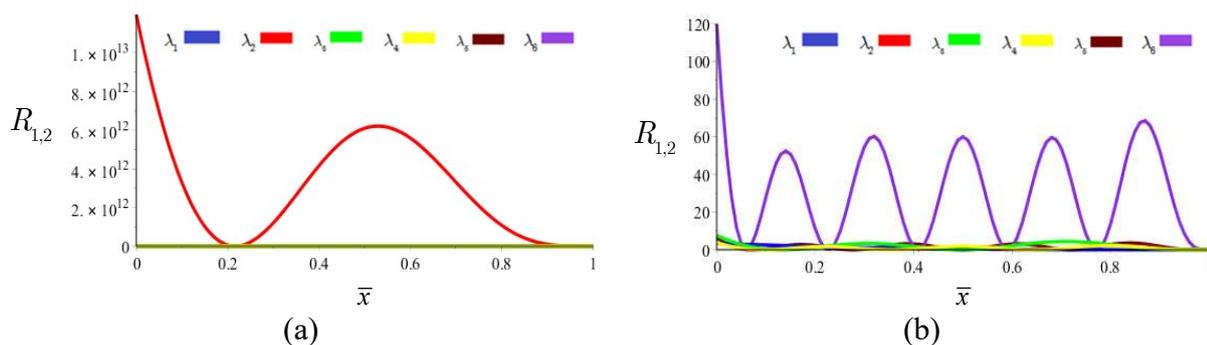


Figura 4.11 – Implementación del método de identificación de fisuras para una viga E-L con una fisura ubicada en  $c = 0.2165$ , y  $\eta = 0.10$ . (a) Todos los modos; (b) Modos 1, 3, 4,5 y 6.

Continuando con la descripción, en la Figura 4.12 se presentan los valores de rigidez para una viga empotrada-libre, con una fisura cuya profundidad es  $\eta = 0.1$  y está ubicada en  $c = 0.1323$ , que se corresponde con el primer punto de inflexión de la tercera forma modal.

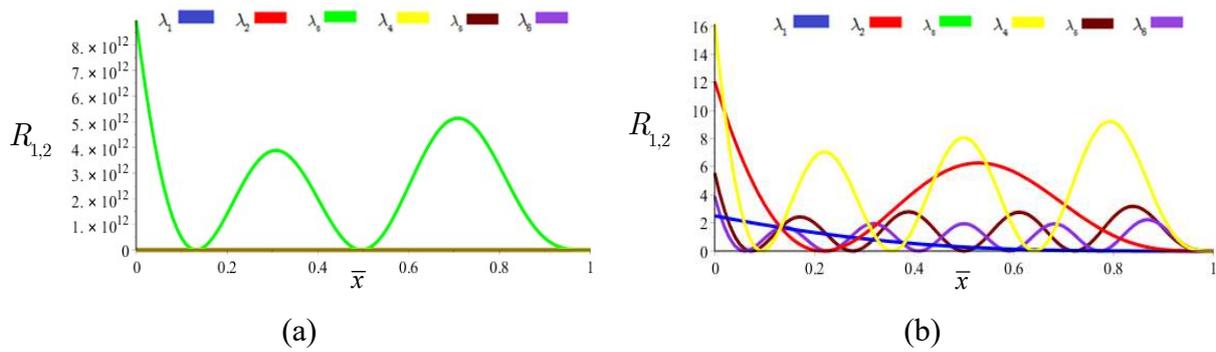


Figura 4.12 – Implementación del método de identificación de fisuras para una viga E-L con una fisura ubicada en  $c = 0.1323$ , y  $\eta = 0.10$ . (a) Todos los modos; (b) Modos 1, 2, 4, 5 y 6.

Además, en la Figura 4.13 se repite el estudio considerando que la fisura está ubicada en  $c = 0.4964$ , que se corresponde con el primer punto de inflexión de la tercera forma modal.

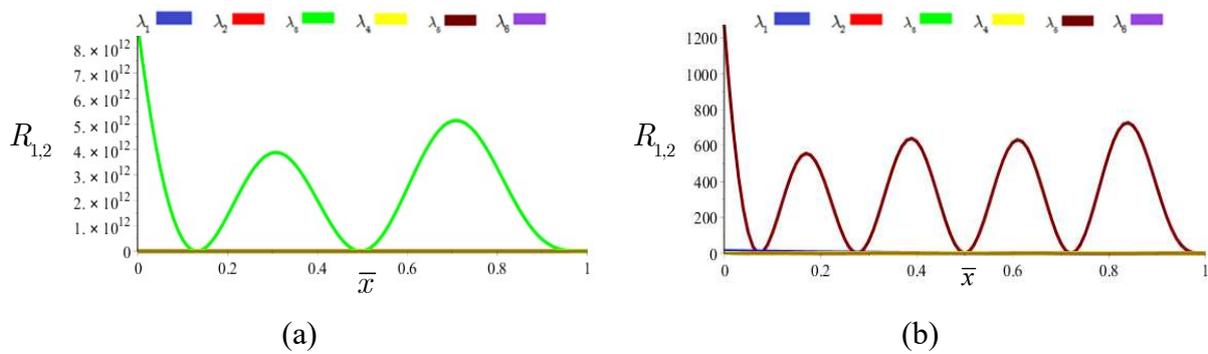


Figura 4.13 – Implementación del método de identificación de fisuras para una viga E-L con una fisura ubicada en  $c = 0.4964$ , y  $\eta = 0.10$ . (a) Todos los modos; (b) Modos 1, 2, 4, 5 y 6.

Este procedimiento se ha repetido para cada uno de los puntos de inflexión de las formas modales de la condición E-L desde el modo 1 a 6. Se ha verificado, que en todos los casos ocurre el mismo fenómeno. Por otra parte, al considerar que la fisura se encuentra en  $c = 0.7834$ , que se corresponde al nodo de la segunda forma modal de la condición E-L, se observa que el método de identificación funciona correctamente. Ver Figura 4.14.

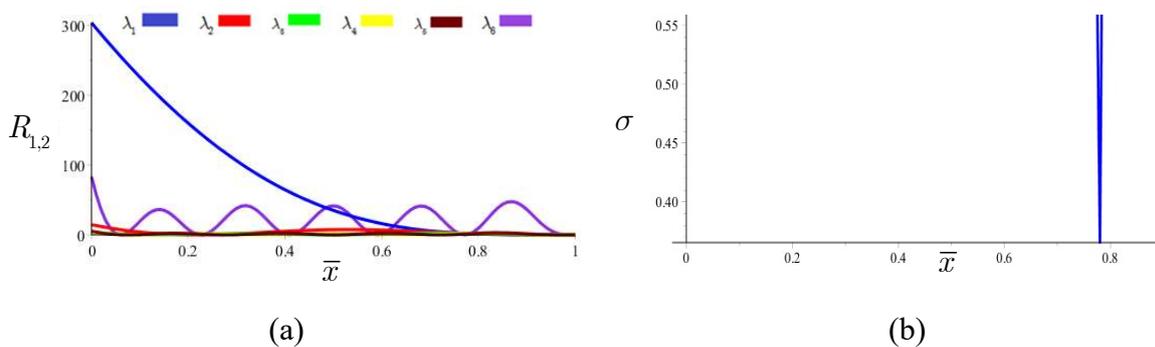


Figura 4.14 – Implementación del método de identificación de fisuras para una viga E-L con una fisura ubicada en  $c = 0.7834$  y  $\eta = 0.10$ . (a) Rigidez de todos los modos; (b) Desvío Estándar.

Al considerar que la fisura se encuentra en  $c = 0.4708$ , que se corresponde a la posición del giro nulo de la segunda forma modal de la condición E-L, se observa que el método de identificación funciona correctamente.

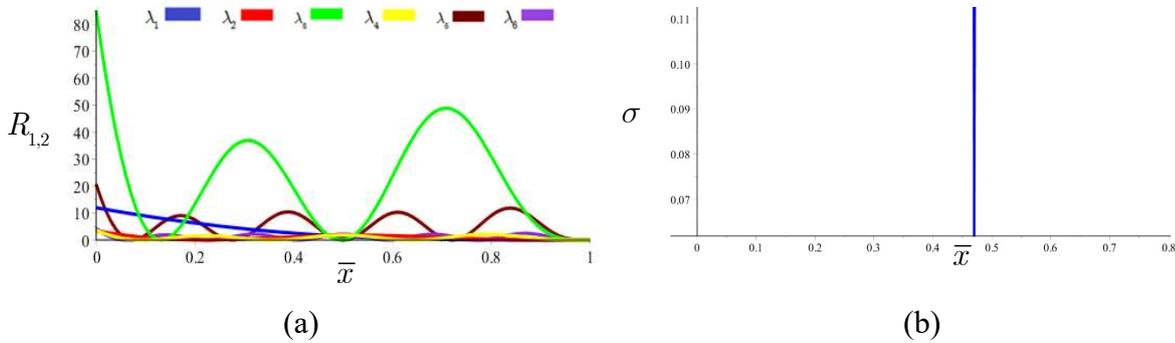


Figura 4.15 – Implementación del método de identificación de fisuras para una viga E-L con una fisura ubicada en  $c = 0.4708$  y  $\eta = 0.10$ . (a) Rigidez de todos los modos; (b) Desvío Estándar.

Estos resultados, aunque parciales, permiten inferir que los resultados incongruentes suceden cuando la posición de la fisura coincide con un punto de inflexión de determinada forma modal. Pero que tanto la deflexión nula (nodo de la forma modal) o giro nulo, no afectan el correcto funcionamiento del método de identificación de fisuras. En la Tabla 4.6 se detalla la ubicación de nodos, puntos de inflexión, giros y momentos nulos de una viga E-L. Resultados para otros tipos de vinculaciones son presentados en el Apéndice 4.

Modo	Puntos de Inflexión	Deflexión Nula (Nodos)	Giro Nulo	Momento Nulo	Formas Modales	Giro	Momento Flector
1		0.000	0.000	1.000			
2	0.217	0.000 0.783	0.000 0.471	0.217 1.000			
3	0.132 0.496	0.000 0.504 0.868	0.000 0.291 0.692	0.132 0.496 1.000			
4	0.094 0.356 0.642	0.000 0.358 0.644 0.906	0.000 0.208 0.501 0.927	0.094 0.356 0.642 1.000			

5	0.073	0.000	0.000	0.073	
	0.277	0.279	0.162	0.277	
	0.500	0.500	0.389	0.500	
	0.721	0.723	0.611	0.721	
		0.927	0.829	1.000	
6	0.060	0.000	0.000	0.060	
	0.226	0.228	0.132	0.226	
	0.409	0.409	0.318	0.409	
	0.591	0.591	0.500	0.591	
	0.772	0.774	0.682	0.772	
	0.940	0.860	1.000		

Tabla 4.6 – Formas modales para viga E-L.  
Ubicación de nodos, puntos de inflexión, giros y momentos nulos.

Para comprender mejor este fenómeno y dar una explicación general al mismo, se propone el siguiente razonamiento. Se conoce que el punto de inflexión de una función es aquel punto en el que la gráfica que la representa cambia de concavidad. Es decir, pasa de ser cóncavo a ser convexo, o viceversa. El punto de inflexión, en otras palabras, es ese momento en el que la función cambia de tendencia. Para la existencia de un punto de inflexión es condición necesaria que la derivada segunda de la función sea igual a cero. Ahora bien, de la resistencia de materiales se conoce que la derivada primera de la deformada  $w(\bar{x})$  es el ángulo de giro o rotación,

$$\varphi(\bar{x}) = \frac{d}{d\bar{x}} w(\bar{x}) \quad 4.5$$

Y su derivada segunda se relaciona con el momento flector según:

$$M(\bar{x}) = -EI_{zz} \frac{d^2}{d^2\bar{x}} w(\bar{x}) \quad 4.6$$

Por lo tanto, es condición que, en la posición de los puntos de inflexión de la deformada de la forma modal, el momento flector sea nulo. Ahora bien, en su modelo de fisura Ostachowicz y Krawezuk (1991) proponen que la variación de energía por la presencia de fisura en la viga está dada por:

$$\Delta U = (U_M - U) = \frac{M^2}{2r_{1,2}} \Rightarrow r_{1,2} = \frac{M^2}{2(U_M - U)} \quad 4.7$$

donde  $U_M$  es la energía de la viga sin fisura,  $U$  es la energía de la viga fisurada,  $M$  es el momento flector y  $r_{1,2}$  la rigidez del resorte rotacional. Es de esperar que si  $U_M - U = 0 \Rightarrow r_{1,2} \rightarrow \infty$ .

Por otra parte, si para el modo en cuestión, el momento flector es cero en el punto de la viga que se considere, entonces la variación de energía también es cero. Por lo tanto, la energía de la viga sin fisura y la energía de la viga con fisura, es la misma.  $M = 0 \Rightarrow U_M - U = 0$ . Siendo así, es de esperar entonces que el coeficiente de frecuencias para la viga con y sin fisura sea el mismo para el modo considerado.

Este fenómeno se observa claramente en la Tabla 4.7. Donde se describen los primeros 6 coeficientes adimensionales de frecuencias de vigas con fisuras, cuya posición de fisura corresponde a los puntos de inflexión de las formas modales para determinada condición de vinculación típica. En gris se resaltan las celdas, donde coincide el valor de la frecuencia natural de la viga fisura con el valor de la viga sin fisura (SF). Además, se detalla en qué modo se presentan valores de rigideces varios ordenes de magnitud mayor a los esperados.

c	Secuencia modal						Modo de elevadas rigideces
	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_3$	$\lambda_4$	$\lambda_5$	$\lambda_6$	
SF	1.875104	4.694091	7.854757	10.995541	14.137168	17.278760	Detecta ok
0.217	1.874475	4.694091	7.853590	10.992287	14.134631	17.278596	2
0.132	1.874253	4.693649	7.854757	10.994766	14.134285	17.273745	3
0.496	1.874954	4.692476	7.854757	10.991818	14.137156	17.272931	3
0.094	1.874141	4.693129	7.854371	10.995541	14.136626	17.276575	4
0.356	1.874763	4.693338	7.852801	10.995541	14.133304	17.275051	4
0.642	1.875059	4.692824	7.852387	10.995541	14.133256	17.275317	4
0.073	1.874076	4.692750	7.853785	10.995221	14.137168	17.278344	5
0.277	1.874612	4.693914	7.852599	10.993503	14.137168	17.275369	5
0.500	1.874957	4.692468	7.854755	10.991814	14.137168	17.272909	5
0.721	1.875086	4.693352	7.851722	10.993206	14.137168	17.275277	5
0.060	1.874034	4.692475	7.853264	10.994650	14.136897	17.278760	6
0.226	1.874499	4.694086	7.853390	10.992300	14.135241	17.278760	6
0.409	1.875086	4.693352	7.851722	10.993206	14.137168	17.275277	6
0.591	1.875031	4.692565	7.853489	10.994479	14.132781	17.278760	6
0.772	1.875096	4.693663	7.852281	10.991464	14.134992	17.278760	6

Tabla 4.7 - Posición de la fisura, los primeros 6 coeficientes adimensionales de frecuencias y en qué modo se presentan valores de rigideces varios ordenes de magnitud mayor a los esperados para el caso E-L.

Resultados análogos para otros tipos de vinculaciones son presentados en el Apéndice 4.

#### 4.2.3.2 Propuesta de optimización y análisis de resultados

Para subsanar el inconveniente descrito en el inciso anterior, donde se evidenció que, si la ubicación de la fisura coincide con un punto de inflexión de la forma modal, se propone una optimización en la implementación del método de identificación de fisuras. El mismo consiste en descartar el modo normal de vibración cuyos valores de rigidez tengan un promedio de 8 órdenes de magnitud por encima a la media del resto de los modos.

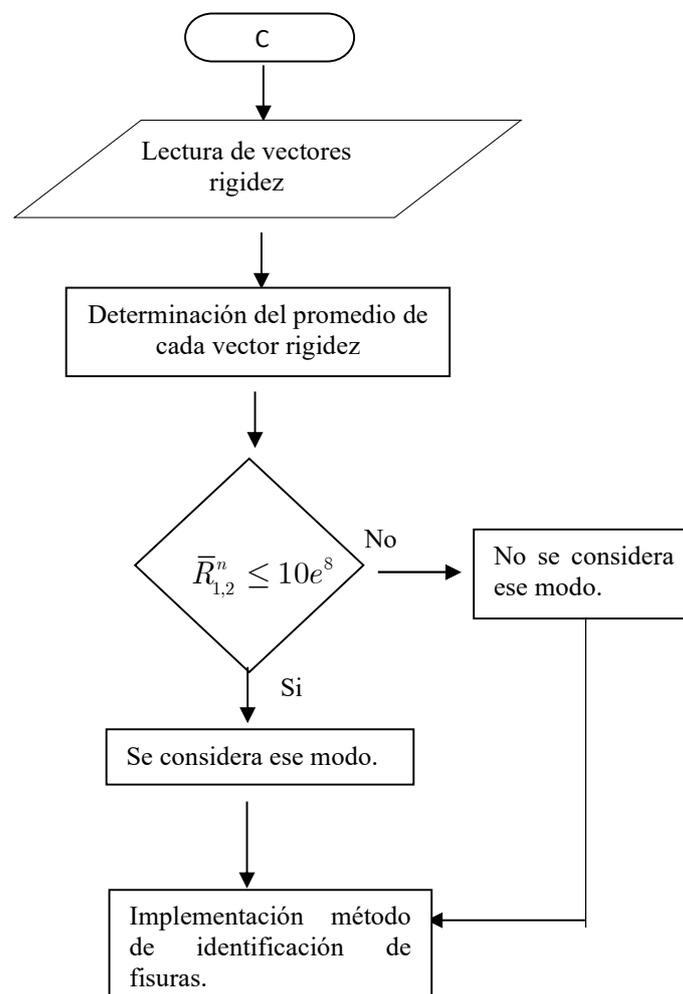


Figura 4.16 – Diagrama de bloques de la propuesta de optimización del método 1A.

Para comprobar la robustez de la propuesta de optimización del método 1A, denominado método1 implementación B (M1B), se procede a correr diferentes casos de estudio. Entiéndase por caso de estudio, diferentes combinaciones de posiciones y profundidades de fisuras, para diferentes tipos de vinculación.

A su vez, para cada caso de estudio se emplea el método 1A considerando como dato de entrada los coeficientes de frecuencias de los seis primeros modos, sólo los tres primeros modos impares y sólo de los primeros tres modos pares. Además, a fin de realizar una comparativa, se emplea el método 1B.

En la Tabla 4.8 se presentan los primeros seis valores de  $\lambda_n$  obtenidos en forma analítica para una viga A-A con presencia de fisuras con diferentes valores de  $c$  y  $\eta$ . En la misma se presentan para cada caso de estudio los resultados de los métodos de identificación de fisuras,  $\hat{c}$  y  $\hat{\eta}$ . Los casos 12, 16, 17 y 19 se corresponden a posición de la fisura en punto de inflexión de la forma modal.

Caso	$c$	$\eta$	Método directo						Método inverso				
			$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_3$	$\lambda_4$	$\lambda_5$	$\lambda_6$	Metodología	$\hat{c}$	$\hat{\eta}$	$e_{\hat{c}}$	$e_{\hat{\eta}}$
12	0.4	0.99	1.843	5.832	8.822	11.37	15.708	17.386	M1A: 6 modos	0.40	IND.	0.0%	-
									M1A: Impares	0.40	IND.	0.0%	-
									M1A: Pares	0.40	0.99	0.0%	0.0%
									M1B	0.40	0.99	0.0%	0.0%
13	0.43	0.99	1.826	6.021	8.439	11.77	15.336	17.532	M1A: 6 modos	0.43	0.99	0.0%	0.0%
									M1A: Impares	0.43	0.99	0.0%	0.0%
									M1A: Pares	0.43	0.99	0.0%	0.0%
									M1B	0.43	0.99	0.0%	0.0%
14	0.45	0.99	1.818	6.135	8.226	12.065	14.9	17.939	M1A: 6 modos	0.45	0.99	0.0%	0.0%
									M1A: Impares	0.45	0.99	0.0%	0.0%
									M1A: Pares	0.45	0.99	0.0%	0.0%
									M1B	0.45	0.99	0.0%	0.0%
15	0.48	0.99	1.811	6.257	8.015	12.459	14.346	18.621	M1A: 6 modos	0.48	0.99	0.0%	0.0%
									M1A: Impares	0.48	0.99	0.0%	0.0%
									M1A: Pares	0.48	0.99	0.0%	0.0%
									M1B	0.48	0.99	0.0%	0.0%
16	0.5	0.99	1.809	6.283	7.972	12.566	14.205	18.85	M1A: 6 modos	0.50	IND.	0.0%	-
									M1A: Impares	0.50	0.99	0.0%	0.0%
									M1A: Pares	0.50	IND.	0.0%	-
									M1B	0.50	0.99	0.0%	0.0%
17	0.4	0.75	2.075	5.863	8.857	11.41	15.708	17.426	M1A: 6 modos	0.40	IND.	0.0%	-
									M1A: Impares	0.40	IND.	0.0%	-
									M1A: Pares	0.40	0.75	0.0%	0.0%
									M1B	0.40	0.75	0.0%	0.0%
18	0.45	0.75	2.048	6.147	8.289	12.084	14.926	17.96	M1A: 6 modos	0.45	0.75	0.0%	0.0%
									M1A: Impares	0.45	0.75	0.0%	0.0%
									M1A: Pares	0.45	0.75	0.0%	0.0%
									M1B	0.45	0.75	0.0%	0.0%
19	0.5	0.75	2.039	6.283	8.049	12.566	14.253	18.85	M1A: 6 modos	0.50	IND.	0.0%	-
									M1A: Impares	0.50	0.75	0.0%	0.0%
									M1A: Pares	0.50	IND.	0.0%	-
									M1B	0.50	0.75	0.0%	0.0%

Tabla 4.8 - Primeros seis valores de  $\lambda_n$  obtenidos con la solución analítica para vigas A-A con presencia de fisuras y los correspondientes resultados de los métodos de identificación de fisuras,  $\hat{c}$  y  $\hat{\eta}$ .

Siendo  $\hat{c}$  la posición de la fisura pronosticada por el método y  $\hat{\eta}$  la profundidad de la fisura pronosticada por el método. El error del método inverso en la determinación de la posición ( $e_{\hat{c}}$ ) y de la profundidad ( $e_{\hat{\eta}}$ ) estará dado respectivamente por:

$$e_{\hat{c}} = |(\hat{c} - c)| \cdot 100\% \text{ y } e_{\hat{\eta}} = |(\hat{\eta} - \eta)| \cdot 100\%. \quad 4.8$$

Vale aclarar, que siendo que los parámetros  $c \in [0,1]$  y  $\eta \in [0,1]$ , la posición y profundidad ya están normalizadas, y por ende los errores están dados en términos relativos.

De los resultados obtenidos, se observa que para valores de posición de fisura que no corresponden a un punto de inflexión de la formal modal, cualquiera de los métodos de identificación de fisuras (1A o 1B) logra identificar la posición y profundidad de la fisura sin inconveniente alguno.

Por el contrario, si la posición de la fisura se encuentra en un punto de inflexión de la formal modal de un modo par, el método 1A que utiliza sólo los modos pares como para el que utiliza los 6 modos logra identificar correctamente la posición, pero falla al identificar la profundidad de la fisura. En forma análoga, en caso de que la posición de la fisura se encuentre en un punto de inflexión de la formal modal de un modo impar, el método 1A que utiliza los modos impares y el que utiliza los 6 modos, no logran identificar correctamente la profundidad de la fisura.

Solo el método 1B logra poder identificar correctamente la posición y profundidad de la fisura cuando la posición de la fisura se corresponde con la posición de un punto de inflexión de la formal modal.

Para la condición A-A, existe en  $c = 0.25$  un punto de inflexión en la forma modal para el cuarto modo de vibración. En torno a este punto de interés se propone realizar un análisis en la sensibilidad del método de identificación de fisuras. En la Tabla 4.9 se presentan los primeros seis valores de  $\lambda_n$  y los valores de  $c$  y  $\eta$  determinados con el método 1B, para el caso de una viga A-A donde la posición y profundidad varían según  $c = 0.22, 0.23, 0.25, 0.27, 0.29$ ; y  $\eta = 0.01, 0.25, 0.5, 0.75, 0.99$ .

Caso	$c$	$\eta$	Método directo						Método inverso (1B)			
			$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_3$	$\lambda_4$	$\lambda_5$	$\lambda_6$	$\hat{c}$	$\hat{\eta}$	$e_{\hat{c}}$	$e_{\hat{\eta}}$
20		0.010	3.141	6.282	9.425	12.566	15.706	18.848	0.29	0.01	0.0%	0.0%
21		0.250	2.997	5.935	9.345	12.394	14.983	18.480	0.29	0.25	0.0%	0.0%
22	0.290	0.500	2.621	5.471	9.259	12.177	14.445	18.289	0.29	0.5	0.0%	0.0%
23		0.750	2.210	5.249	9.224	12.084	14.287	18.240	0.29	0.75	0.0%	0.0%
24		0.990	1.974	5.181	9.214	12.056	14.246	18.227	0.29	0.99	0.0%	0.0%
25		0.010	3.141	6.282	9.424	12.566	15.706	18.847	0.27	0.01	0.0%	0.0%
26		0.250	3.010	5.913	9.271	12.521	15.055	18.244	0.27	0.25	0.0%	0.0%
27	0.270	0.500	2.654	5.406	9.121	12.464	14.478	17.942	0.27	0.5	0.0%	0.0%
28		0.750	2.249	5.159	9.064	12.438	14.288	17.868	0.27	0.75	0.0%	0.0%
29		0.990	2.012	5.082	9.047	12.430	14.237	17.849	0.27	0.99	0.0%	0.0%
30		0.010	3.141	6.282	9.424	12.566	15.707	18.847	0.25	0.01	0.0%	0.0%
31		0.250	3.023	5.900	9.189	12.566	15.262	18.078	0.25	0.25	0.0%	0.0%
32	0.250	0.500	2.689	5.351	8.972	12.566	14.798	17.653	0.25	0.5	0.0%	0.0%
33		0.750	2.293	5.078	8.894	12.566	14.629	17.547	0.25	0.75	0.0%	0.0%
34		0.990	2.055	4.992	8.872	12.566	14.582	17.520	0.25	0.99	0.0%	0.0%
35		0.010	3.141	6.282	9.424	12.566	15.707	18.847	0.23	0.01	0.0%	0.0%
36		0.250	3.036	5.895	9.106	12.528	15.521	18.070	0.23	0.25	0.0%	0.0%
37	0.230	0.500	2.728	5.310	8.822	12.493	15.303	17.525	0.23	0.5	0.0%	0.0%
38		0.750	2.343	5.006	8.724	12.480	15.215	17.375	0.23	0.75	0.0%	0.0%
39		0.990	2.106	4.909	8.697	12.476	15.190	17.336	0.23	0.99	0.0%	0.0%
20		0.010	3.141	6.282	9.424	12.566	15.708	18.848	0.22	0.01	0.0%	0.0%
21		0.250	3.043	5.897	9.066	12.486	15.624	18.154	0.22	0.25	0.0%	0.0%
22	0.220	0.500	2.749	5.295	8.749	12.418	15.526	17.592	0.22	0.5	0.0%	0.0%
23		0.750	2.370	4.975	8.640	12.395	15.485	17.422	0.22	0.75	0.0%	0.0%
24		0.990	2.134	4.872	8.610	12.388	15.473	17.378	0.22	0.99	0.0%	0.0%

Tabla 4.9 - Primeros seis valores de  $\lambda_n$  obtenidos con la solución analítica para vigas A-A con presencia de fisuras y los correspondientes resultados del método optimizado de identificación de fisuras,  $\hat{c}$  y  $\hat{\eta}$ .

En la Tabla 4.10 se analiza la aplicación del método 1B cuando los coeficientes adimensionales de frecuencias fueron obtenidos mediante el método de los elementos finitos.

CASO	$c$	$\eta$	Método elementos finitos						Método inverso (1B)			
			$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_3$	$\lambda_4$	$\lambda_5$	$\lambda_6$	$\hat{c}$	$\hat{\eta}$	$e_{\hat{c}}$	$e_{\hat{\eta}}$
25	0.10	0.30	4.709	7.840	10.973	14.069	17.124	20.150	0.11	0.12	1.1%	18.3%
26	0.20	0.27	4.717	7.812	10.890	13.984	17.106	20.189	0.16	0.14	3.7%	13.1%
27	0.29	0.30	4.723	7.791	10.934	14.063	17.056	20.129	0.29	0.11	0.5%	18.1%
28	0.40	0.40	4.690	7.788	10.927	13.882	17.152	20.016	0.39	0.15	1.0%	25.3%
29	0.50	0.30	4.701	7.840	10.880	14.067	17.036	20.224	0.45	0.10	5.0%	19.2%

Tabla 4.10 - Primeros seis valores de  $\lambda_n$  obtenidos por el método de los elementos finitos para vigas E-E con presencia de fisuras y los correspondientes resultados del método optimizado de identificación de fisuras,  $\hat{c}$  y  $\hat{\eta}$ .

En la Tabla 4.11 se analiza la aplicación del método 1B cuando los coeficientes adimensionales de frecuencias fueron obtenidos en forma experimental.

CASO	$c$	$\eta$	Experimental						Método inverso (1B)			
			$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_3$	$\lambda_4$	$\lambda_5$	$\lambda_6$	$\hat{c}$	$\hat{\eta}$	$e_{\hat{c}}$	$e_{\hat{\eta}}$
30	0.10	0.30	4.735	7.787	10.881	13.886	16.816	20.051	0.09	0.35	0.9%	4.4%
31	0.20	0.27	4.708	7.726	10.770	13.758	16.748	20.142	0.16	0.23	3.7%	3.6%
32	0.29	0.30	4.742	7.738	10.876	13.894	16.950	20.103	0.29	0.19	0.5%	10.6%
33	0.40	0.40	4.646	7.637	10.704	13.542	16.628	19.735	0.14	0.36	26.0%	4.0%
34	0.50	0.30	4.627	7.660	10.635	13.691	16.509	19.854	0.14	0.35	36.0%	5.8%

Tabla 4.11 - Primeros seis valores de  $\lambda_n$  obtenidos en forma experimental para vigas E-E con presencia de fisuras y los correspondientes resultados del método optimizado de identificación de fisuras,  $\hat{c}$  y  $\hat{\eta}$ .

#### 4.2.3.3 Análisis de sensibilidad de la propuesta de optimización (método 1B)

Se analiza la respuesta del método optimizado cuando se emplean como dato de entrada valores de  $\lambda_n$  con determinado grado de error. Así, el error en la determinación del coeficiente adimensional de frecuencias está dado por

$$e_{\lambda} = \left| \frac{\tilde{\lambda}_n - \lambda_n}{\lambda_n} \right| 100\%, \quad 4.9$$

donde  $\lambda_n$  es el coeficiente adimensional de frecuencias determinado analíticamente para una viga con posición y profundidad de fisura conocidas y el parámetro  $\tilde{\lambda}_n$  corresponde al valor  $\lambda_n$  de una viga fisurada con la posición y profundidad desconocida.

En la tabla 4.12 se presentan los casos de análisis para una viga A-A con  $c = 0.25$  y  $\eta = 0.5$  cuando  $\varepsilon_{\lambda_n} = \pm 1\%, \pm 2\%, \pm 3\%, \pm 4\%, \pm 5\%, \pm 7\%, \pm 10\%$ , con el mismo error en todos los modos.

Caso	$e_\lambda$	$\tilde{\lambda}_1$	$\tilde{\lambda}_2$	$\tilde{\lambda}_3$	$\tilde{\lambda}_4$	$\tilde{\lambda}_5$	$\tilde{\lambda}_6$	$\hat{c}$	$\hat{\eta}$	$e_\epsilon$	$e_\eta$
35	-10%	2.420	4.816	8.075	11.310	13.318	15.888	0.21	0.84	3.7%	33.6%
36	-7%	2.501	4.977	8.344	11.687	13.762	16.417	0.23	0.70	2.1%	20.4%
37	-5%	2.555	5.084	8.523	11.938	14.058	16.770	0.24	0.64	1.4%	13.6%
38	-4%	2.582	5.137	8.613	12.064	14.206	16.947	0.24	0.30	1.0%	20.2%
39	-3%	2.609	5.191	8.703	12.189	14.354	17.123	0.24	0.58	0.6%	7.5%
40	-2%	2.636	5.244	8.792	12.315	14.502	17.300	0.25	0.30	0.2%	20.2%
41	-1%	2.662	5.298	8.882	12.441	14.650	17.476	0.23	0.81	1.9%	30.7%
42	0	2.689	5.351	8.972	12.566	14.798	17.653	0.25	0.50	0.0%	0.0%
43	1%	2.716	5.405	9.061	12.692	14.946	17.829	0.25	0.50	0.3%	0.1%
44	2%	2.743	5.459	9.151	12.818	15.094	18.006	0.26	0.30	0.6%	20.2%
45	3%	2.770	5.512	9.241	12.943	15.242	18.183	0.26	0.31	1.1%	18.6%
46	4%	2.797	5.566	9.331	13.069	15.390	18.359	0.36	0.30	10.8%	20.2%
47	5%	2.824	5.619	9.420	13.195	15.538	18.536	0.35	0.37	9.5%	12.9%
48	7%	2.878	5.726	9.600	13.446	15.834	18.889	0.18	0.38	7.4%	12.0%
49	10%	2.958	5.887	9.869	13.823	16.278	19.418	0.36	0.30	11.2%	20.2%

Tabla 4.12 - Análisis de sensibilidad del método 1B para una viga A-A con  $c = 0.25$  y  $\eta = 0.5$  cuando  $\epsilon_{\lambda_n} = \pm 1\%$ ,  $\pm 2\%$ ,  $\pm 3\%$ ,  $\pm 4\%$ ,  $\pm 5\%$ ,  $\pm 7\%$ ,  $\pm 10\%$ .

#### 4.2.3.4 Discusión de los resultados

La limitación del método de identificación de fisuras previo (método 1A) estaba dada por la incapacidad de detectar correctamente la profundidad de la fisura cuando la posición de esta se encuentra en un punto de inflexión de la forma modal de la viga considerada. De los resultados se observa que la optimización propuesta (método 1B) resultó de utilidad para superar esta limitación.

Cuando los datos de entrada, o sea los coeficientes adimensionales de frecuencias, son determinados en forma analítica, el método de identificación de fisuras detecta tanto la posición como profundidad de la fisura sin error.

Si estos datos de entrada se corresponden a resultados de simulaciones por elementos finitos o han sido obtenidos de manera experimental, y por lo tanto difieren de los del modelo analítico, el método de identificación de fisuras arroja resultados con algún grado de error.

Es de suponer que estos errores son consecuencia de las diferencias, para un mismo caso de estudio, entre los coeficientes adimensionales de frecuencias obtenidos por simulaciones numéricas respecto de la obtenida en forma analítica, o bien de los obtenidos en forma experimental respecto de la obtenida en forma analítica. Para analizar esto se ha realizado un análisis de sensibilidad en el inciso 4.2.3.3.

Para un posición y profundidad puntual se observa que los errores tanto en la determinación de la posición como profundidad tienden a ser mayores a medida que aumenta el error en la determinación de los coeficientes adimensionales de frecuencias.

**4.2.4 Uso del Método 1- implementación B (M1B) en el estudio de detección de fisuras en vigas con un apoyo intermedio**

En este apartado se analiza el efecto que causa el agregado de un apoyo simple intermedio en el Método 1- implementación B (M1B) ante perturbaciones sobre los valores de entrada correspondientes a los primeros valores del coeficiente de frecuencias.

Siguiendo los procedimientos antes descriptos, se resuelve el caso de una viga articulada en ambos extremos (viga A-A) con una fisura ubicada en  $c = 0.41$ , con  $\eta = 0.03$ .

En la Figura 4.17, se presenta el caso de la viga sin apoyo intermedio siendo la figura superior correspondiente a las soluciones de la ecuación para los primeros seis valores de  $\lambda_n$ , y en la figura inferior se presenta el valor de  $\sigma$  cuando  $n = 6$  en la Ecuación 4.4

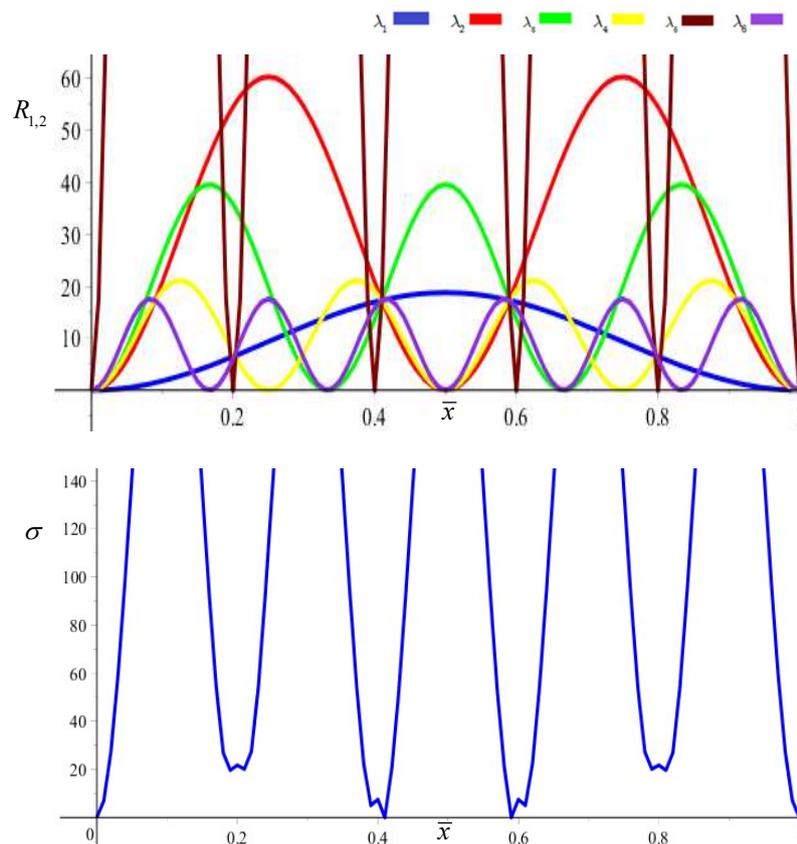


Figura 4.17 – Implementación del método de identificación de fisuras 1B para una viga A-A con una fisura ubicada en  $c = 0.25$ , y  $\eta = 0.99$  sin un apoyo simple intermedio.

En la Figura 4.18, se presentan los mismos valores que en la figura anterior pero cuando se agrega un apoyo intermedio en  $c_1 = 0.30$ .

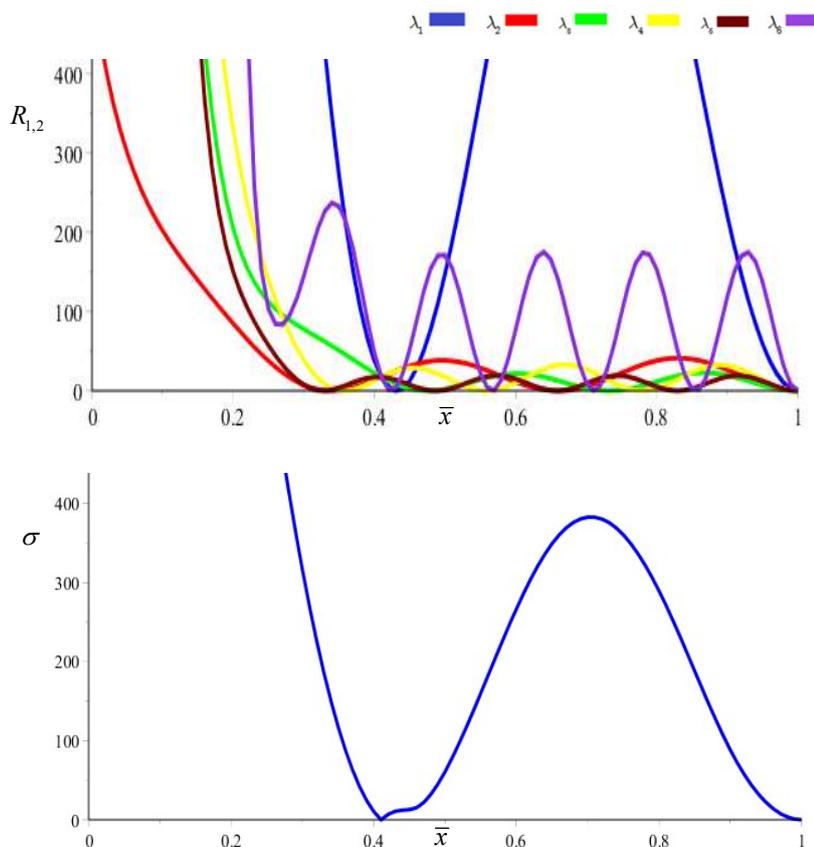


Figura 4.18 – Implementación del método de identificación de fisuras 1B para una viga A-A con una fisura ubicada en  $c = 0.25$ , y  $\eta = 0.99$ ; con un apoyo simple intermedio ubicado en  $c_1 = 0.30$ .

#### 4.2.4.1 Resultados y consideraciones

Se analiza vigas A-A con y sin apoyo intermedio según indica el valor de  $c_1$ . Las fisuras están ubicadas en  $c = 0.25$  y  $0.5$ , con profundidades que varían según  $\eta = 0.5, 0.75$  y  $0.99$ . En la Tabla 4.13 se presentan los primeros seis valores exactos de  $\lambda_n$  obtenidos en forma analítica y los valores obtenidos de la implementación del método de identificación de fisuras. Se consideran a los valores de  $\lambda_n$  sin ningún error inducido.

Caso	$c_1$	$c$	$\eta$	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_3$	$\lambda_4$	$\lambda_5$	$\lambda_6$	$\hat{c}$	$\hat{\eta}$	$e_{\hat{c}}$	$e_{\hat{\eta}}$
50	-	0.5	0.75	3.056	6.283	9.190	12.566	15.347	18.850	0.50	0.75	0.0%	0.0%
51	0.1	0.5	0.75	4.159	7.555	10.906	14.235	17.820	20.901	0.50	0.75	0.0%	0.0%
52	0.2	0.5	0.75	4.564	8.216	12.146	15.337	17.828	20.213	0.50	0.75	0.0%	0.0%
53	-	0.5	0.99	3.000	6.283	9.056	12.566	15.166	18.850	0.50	0.99	0.0%	0.0%
54	0.1	0.5	0.99	4.115	7.509	10.823	14.111	17.773	20.708	0.50	0.99	0.0%	0.0%
55	0.2	0.5	0.99	4.529	8.116	12.137	15.145	17.809	20.104	0.50	0.99	0.0%	0.0%
56	-	0.25	0.5	3.126	6.221	9.380	12.566	15.631	18.675	0.25	0.50	0.0%	0.0%
57	0.05	0.25	0.5	4.065	7.302	10.500	13.776	17.120	20.372	0.25	0.50	0.0%	0.0%
58	0.1	0.25	0.5	4.221	7.621	10.973	14.349	17.818	21.327	0.25	0.50	0.0%	0.0%
59	0.15	0.25	0.5	4.395	7.986	11.545	15.056	18.542	21.848	0.25	0.50	0.0%	0.0%
60	0.2	0.25	0.5	4.590	8.384	12.159	15.631	17.761	20.457	0.25	0.50	0.0%	0.0%
61	0.25	0.25	0.5	4.804	8.792	12.566	14.236	17.301	21.307	0.25	0.50	0.0%	0.0%
62	-	0.25	0.99	3.066	6.019	9.253	12.566	15.392	18.251	0.25	0.99	0.0%	0.0%
63	0.1	0.25	0.99	4.203	7.587	10.729	14.014	17.611	21.289	0.25	0.99	0.0%	0.0%

Tabla 4.13 - Primeros seis valores de  $\lambda_n$  para vigas A-A con y sin apoyo intermedio y los valores  $\hat{c}$ ,  $\hat{\eta}$ ,  $e_{\hat{c}}$  y  $e_{\hat{\eta}}$ .

Para una viga A-A con  $c=0.25$  y  $\eta=0.99$ , en las Tablas 4.14 a 4.19 se presenta los resultados de un análisis de sensibilidad que consiste en inducir un error  $\varepsilon_\lambda$  solamente en un modo a la vez para cada tabla. Se compararán los resultados obtenidos de la implementación del método de identificación de fisuras en casos con y sin apoyo intermedio.

Caso	$\varepsilon_\lambda$	Sin apoyo				Con apoyo			
		$\hat{c}$	$\hat{\eta}$	$e_{\hat{c}}$	$e_{\hat{\eta}}$	$\hat{c}$	$\hat{\eta}$	$e_{\hat{c}}$	$e_{\hat{\eta}}$
64	-5%	0.37	1.58	12.0%	58.6%	0.25	1.35	0.0%	35.7%
65	-4%	0.37	1.57	12.0%	57.6%	0.25	1.34	0.0%	35.4%
66	-3%	0.25	1.26	0.0%	26.6%	0.25	1.34	0.0%	34.9%
67	-2%	0.25	1.10	0.0%	10.8%	0.25	1.33	0.0%	33.9%
68	-1%	0.25	1.05	0.0%	5.6%	0.25	1.30	0.0%	30.7%
69	1%	0.25	0.91	0.0%	7.9%	0.25	1.46	0.0%	47.0%
70	2%	0.25	0.99	0.0%	0.0%	0.25	1.40	0.0%	40.6%
71	3%	0.36	1.27	11.0%	28.0%	0.25	1.38	0.0%	39.2%
72	4%	0.23	1.49	2.0%	50.1%	0.25	1.38	0.0%	38.6%
73	5%	0.37	1.23	12.0%	24.3%	0.25	1.37	0.0%	38.3%

Tabla 4.14 – Análisis de sensibilidad con errores inducidos en  $\lambda_1$ .

Caso	$\varepsilon_\lambda$	Sin apoyo				Con apoyo			
		$\hat{c}$	$\hat{\eta}$	$e_{\hat{c}}$	$e_{\hat{\eta}}$	$\hat{c}$	$\hat{\eta}$	$e_{\hat{c}}$	$e_{\hat{\eta}}$
74	-5%	0.25	1.30	0.0%	30.6%	0.25	1.35	0.0%	35.6%
75	-4%	0.25	1.26	0.0%	27.1%	0.25	1.34	0.0%	35.2%
76	-3%	0.25	1.11	0.0%	12.0%	0.25	1.34	0.0%	34.7%
77	-2%	0.25	1.07	0.0%	7.6%	0.25	1.33	0.0%	33.6%
78	-1%	0.25	1.03	0.0%	3.9%	0.25	1.29	0.0%	30.0%
79	1%	0.25	0.94	0.0%	4.5%	0.25	1.46	0.0%	47.3%
80	2%	0.25	0.99	0.0%	0.0%	0.25	1.39	0.0%	40.5%
81	3%	0.45	0.95	20.0%	4.1%	0.25	1.38	0.0%	39.0%
82	4%	0.45	0.88	20.0%	11.1%	0.25	1.37	0.0%	38.3%
83	5%	0.47	1.04	22.0%	5.0%	0.25	1.37	0.0%	37.9%

Tabla 4.15 - Análisis de sensibilidad con errores inducidos en  $\lambda_2$ .

Caso	$e_\lambda$	Sin apoyo				Con apoyo			
		$\hat{c}$	$\hat{\eta}$	$e_\varepsilon$	$e_\eta$	$\hat{c}$	$\hat{\eta}$	$e_\varepsilon$	$e_\eta$
84	-5%	0.24	1.39	1.0%	40.3%	0.25	1.30	0.0%	31.5%
85	-4%	0.25	1.35	0.0%	36.3%	0.25	1.28	0.0%	29.4%
86	-3%	0.24	1.38	1.0%	38.6%	0.25	1.14	0.0%	15.2%
87	-2%	0.24	1.36	1.0%	36.9%	0.25	1.08	0.0%	9.2%
88	-1%	0.24	0.01	1.0%	98.0%	0.25	1.04	0.0%	4.7%
89	1%	0.27	0.89	2.0%	9.9%	0.25	0.93	0.0%	6.2%
90	2%	0.25	0.99	0.0%	0.0%	0.25	0.82	0.0%	17.2%
91	3%	0.37	1.52	12.0%	52.6%	0.43	0.66	18.0%	32.9%
92	4%	0.37	1.52	12.0%	53.0%	0.25	1.62	0.0%	62.6%
93	5%	0.37	1.51	12.0%	52.2%	0.25	1.48	0.0%	48.5%

Tabla 4.16 - Análisis de sensibilidad con errores inducidos en  $\lambda_3$ .

Caso	$e_\lambda$	Sin apoyo				Con apoyo			
		$\hat{c}$	$\hat{\eta}$	$e_\varepsilon$	$e_\eta$	$\hat{c}$	$\hat{\eta}$	$e_\varepsilon$	$e_\eta$
94	-5%	0.25	1.37	0.0%	38.3%	0.25	1.33	0.0%	34.3%
95	-4%	0.25	1.37	0.0%	38.2%	0.25	1.32	0.0%	32.8%
96	-3%	0.25	1.37	0.0%	38.1%	0.25	1.29	0.0%	30.1%
97	-2%	0.25	1.37	0.0%	38.0%	0.25	1.11	0.0%	12.2%
98	-1%	0.25	1.37	0.0%	37.9%	0.25	1.05	0.0%	5.6%
99	1%	0.25	1.37	0.0%	37.7%	0.25	0.92	0.0%	6.5%
100	2%	0.25	0.99	0.0%	0.0%	0.25	0.83	0.0%	16.3%
101	3%	0.25	1.36	0.0%	37.2%	0.54	0.64	29.0%	35.4%
102	4%	0.25	1.36	0.0%	37.4%	0.54	0.70	29.0%	28.8%
103	5%	0.25	1.36	0.0%	37.2%	0.25	1.56	0.0%	57.5%

Tabla 4.17 - Análisis de sensibilidad con errores inducidos en  $\lambda_4$ .

Caso	$e_\lambda$	Sin apoyo				Con apoyo			
		$\hat{c}$	$\hat{\eta}$	$e_\varepsilon$	$e_\eta$	$\hat{c}$	$\hat{\eta}$	$e_\varepsilon$	$e_\eta$
104	-5%	0.25	1.35	0.0%	36.3%	0.25	1.38	0.0%	38.7%
105	-4%	0.26	1.37	1.0%	38.0%	0.25	1.37	0.0%	37.9%
106	-3%	0.26	1.36	1.0%	36.7%	0.25	1.36	0.0%	36.7%
107	-2%	0.26	1.33	1.0%	34.3%	0.25	1.34	0.0%	34.5%
108	-1%	0.26	1.13	1.0%	14.3%	0.25	1.23	0.0%	23.8%
109	1%	0.24	0.91	1.0%	7.8%	0.27	1.07	2.0%	7.6%
110	2%	0.25	0.99	0.0%	0.0%	0.28	1.37	3.0%	38.5%
111	3%	0.39	1.45	14.0%	46.5%	0.27	1.48	2.0%	48.7%
112	4%	0.39	1.45	14.0%	45.9%	0.27	1.45	2.0%	46.3%
113	5%	0.23	1.38	2.0%	38.7%	0.25	1.45	0.0%	46.0%

Tabla 4.18 - Análisis de sensibilidad con errores inducidos en  $\lambda_5$ .

Caso	$e_\lambda$	Sin apoyo				Con apoyo			
		$\hat{c}$	$\hat{\eta}$	$e_{\hat{c}}$	$e_{\hat{\eta}}$	$\hat{c}$	$\hat{\eta}$	$e_{\hat{c}}$	$e_{\hat{\eta}}$
114	-5%	0.25	1.37	0.0%	37.7%	0.25	1.40	0.0%	41.1%
115	-4%	0.25	1.35	0.0%	36.5%	0.25	1.40	0.0%	40.8%
116	-3%	0.25	1.34	0.0%	34.6%	0.25	1.39	0.0%	40.4%
117	-2%	0.25	1.30	0.0%	30.7%	0.25	1.39	0.0%	39.8%
118	-1%	0.25	1.07	0.0%	8.1%	0.24	1.09	1.0%	10.4%
119	1%	0.26	0.91	1.0%	8.0%	0.26	1.41	1.0%	41.7%
120	2%	0.25	0.99	0.0%	0.0%	0.26	1.40	1.0%	41.4%
121	3%	0.35	1.35	10.0%	36.5%	0.26	1.40	1.0%	41.1%
122	4%	0.34	1.47	9.0%	48.3%	0.26	1.40	1.0%	40.9%
123	5%	0.35	1.50	10.0%	51.3%	0.25	1.40	0.0%	40.6%

Tabla 4.19 - Análisis de sensibilidad con errores inducidos en  $\lambda_1$ .

En la Tabla 4.20 para una viga A-A con  $c = 0.25$  y  $\eta = 0.99$ , se presentan los resultados de un análisis de sensibilidad donde se induce un error  $e_\lambda$  en forma simultánea en cada modo.

Caso	$e_\lambda$	Sin apoyo				Con apoyo			
		$\hat{c}$	$\hat{\eta}$	$e_{\hat{c}}$	$e_{\hat{\eta}}$	$\hat{c}$	$\hat{\eta}$	$e_{\hat{c}}$	$e_{\hat{\eta}}$
124	-5%	0.25	1.85	0.0%	85.5%	0.20	1.72	5.0%	72.9%
125	-4%	0.25	1.69	0.0%	69.9%	0.21	1.84	4.0%	84.7%
126	-3%	0.25	1.61	0.0%	61.8%	0.22	1.67	3.0%	67.6%
127	-2%	0.25	1.54	0.0%	55.5%	0.27	1.68	2.0%	68.7%
128	-1%	0.27	1.47	2.0%	47.6%	0.24	1.50	1.0%	51.1%
129	1%	0.25	0.79	0.0%	20.3%	0.26	1.62	1.0%	63.0%
130	2%	0.38	0.73	13.0%	25.8%	0.15	1.40	10.0%	41.4%
131	3%	0.17	1.44	8.0%	44.7%	0.17	1.45	8.0%	46.1%
132	4%	0.47	1.43	22.0%	44.2%	0.16	1.45	9.0%	46.4%
133	5%	0.47	1.44	22.0%	45.1%	0.17	1.46	8.0%	47.0%

Tabla 4.20 - Análisis de sensibilidad con errores inducidos en los primeros seis valores de  $\lambda_n$ .

En la Tabla 4.21 se presentan los primeros seis valores de  $\lambda_n$  para una viga empotrada en su extremo izquierdo y libre en su extremo derecho (E-L) con  $c = 0.7$ ,  $\eta = 0.8$  y una viga con restricciones elásticas (RE-RE) en ambos extremos siendo  $T_1 = 1$ ,  $R_1 = 1$ ,  $T_2 = 10$ ,  $R_2 = 0.1$  con  $c = 0.6$  y  $\eta = 0.6$ .

C. B.	$c_1$	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_3$	$\lambda_4$	$\lambda_5$	$\lambda_6$
E-L	-	1.872739	4.608432	7.593212	10.886190	14.101427	16.868768
	0.5	3.100411	7.559361	9.276836	14.101122	15.526534	20.072726
RE-RE	-	1.438407	2.635281	4.928072	7.938296	11.058944	14.017661
	0.4	2.633977	4.211034	7.161080	10.723361	12.588063	17.269499

Tabla 4.21 - Primeros seis valores exactos de  $\lambda_n$  para una viga E-L con  $c = 0.7$ ,  $\eta = 0.8$  y una viga RE-RE representada por  $T_1 = 1$ ,  $R_1 = 1$ ,  $T_2 = 10$ ,  $R_2 = 0.1$ , con  $c = 0.6$  y  $\eta = 0.6$ .

En la Tabla 4.22 para una viga empotrada en su extremo izquierdo y libre en su extremo derecho (E-L) con  $c=0.7$ ,  $\eta=0.8$ , se presentan los resultados de un análisis de sensibilidad donde se induce el error en todos los modos a la vez. Se compararán los resultados obtenidos de la implementación del método de identificación de fisuras en casos sin apoyo intermedio y con apoyo en  $c_1 = 0.5$ .

Caso	$e_\lambda$	Sin apoyo				Con apoyo en $c_1 = 0.5$ .			
		$\hat{c}$	$\hat{\eta}$	$e_{\hat{c}}$	$e_{\hat{\eta}}$	$\hat{c}$	$\hat{\eta}$	$e_{\hat{c}}$	$e_{\hat{\eta}}$
134	-5%	0.30	0.93	40.0%	13.1%	0.710	1.379	1.0%	57.9%
135	-4%	0.30	0.92	40.0%	11.8%	0.710	1.375	1.0%	57.5%
136	-3%	0.30	0.01	40.0%	78.7%	0.710	1.369	1.0%	56.9%
137	-2%	0.30	0.87	40.0%	6.5%	0.710	0.961	1.0%	16.1%
138	-1%	0.70	0.86	0.0%	6.1%	0.710	0.937	1.0%	13.7%
139	0%	0.70	0.80	0.0%	0.0%	0.700	0.800	0.0%	0.0%
140	1%	0.70	0.88	0.0%	8.3%	0.740	0.821	4.0%	2.1%
141	2%	0.70	0.88	0.0%	7.6%	0.740	0.800	4.0%	0.0%
142	3%	0.70	0.87	0.0%	7.4%	0.710	1.461	1.0%	66.1%
143	4%	0.70	0.87	0.0%	7.3%	0.710	1.439	1.0%	63.9%
144	5%	0.70	0.87	0.0%	7.2%	0.710	1.428	1.0%	62.8%

Tabla 4.22 - Análisis de sensibilidad con errores inducidos en los primeros seis valores de  $\lambda_n$  para una viga E-L con  $c=0.7$  y  $\eta=0.8$ .

En la Tabla 4.23 para una viga con restricciones elásticas (RE-RE) en ambos extremos siendo  $T_1 = 1$ ,  $R_1 = 1$ ,  $T_2 = 10$ ,  $R_2 = 0.1$  con  $c=0.6$  y  $\eta=0.6$ , se presentan los resultados de un análisis de sensibilidad donde se induce el error en todos los modos a la vez. Se compararán los resultados obtenidos de la implementación del método de identificación de fisuras en casos sin apoyo intermedio y con apoyo en  $c_1 = 0.4$ . En los resultados donde aparece la leyenda Obs significa que no se pudo determinar el parámetro.

Caso	$e_\lambda$	Sin apoyo				Con apoyo en $c_1 = 0.4$ .			
		$\hat{c}$	$\hat{\eta}$	$e_{\hat{c}}$	$e_{\hat{\eta}}$	$\hat{c}$	$\hat{\eta}$	$e_{\hat{c}}$	$e_{\hat{\eta}}$
145	-5%	0.42	1.63	18.0%	102.8%	0.54	1.61	6.0%	100.5%
146	-4%	0.42	1.58	18.0%	97.7%	0.54	1.55	6.0%	94.6%
147	-3%	0.42	1.52	18.0%	92.5%	0.55	1.50	5.0%	89.8%
148	-2%	0.42	1.46	18.0%	85.8%	0.55	1.41	5.0%	81.0%
149	-1%	0.42	1.07	18.0%	47.2%	0.56	0.92	4.0%	32.0%
150	0%	0.60	0.60	0.0%	0.0%	0.60	0.60	0.0%	0.0%
151	1%	0.47	1.45	13.0%	84.8%	Obs	Obs	-	-
152	2%	0.25	1.43	35.0%	83.0%	0.49	1.43	11.0%	82.9%
153	3%	Obs	Obs	-	-	0.50	1.44	10.0%	84.0%
154	4%	Obs	Obs	-	-	0.52	1.45	8.0%	84.8%
155	5%	Obs	Obs	-	-	0.52	1.46	8.0%	85.7%

Tabla 4.23 - Análisis de sensibilidad con errores inducidos en los primeros seis valores de  $\lambda_n$  para una viga con restricciones elásticas en ambos extremos con  $c=0.6$  y  $\eta=0.6$ .

#### 4.2.4.2 Discusión de los resultados

Una ventaja de la implementación del apoyo simple es que rompe con la simetría, por lo tanto, existe un único valor de la posición de la fisura.

Se observa que el método de identificación de fisuras 1B, con y sin apoyo intermedio, detectan sin error la posición y profundidad de la fisura siempre que no exista error en los coeficientes de frecuencias.

Cuando existe error en los coeficientes de frecuencias, tanto con y sin apoyo intermedio existe un error en la identificación de la fisura. Para algunos casos, la implementación del apoyo intermedio presenta una mejora en la detección de la posición y profundidad.

El análisis de sensibilidad evidencia que hay casos que  $\eta > 1$ . Pero una fisura no puede ser mayor a la altura de la viga.

#### 4.2.5 Análisis de los límites de la implementación del método 1 de identificación de fisuras

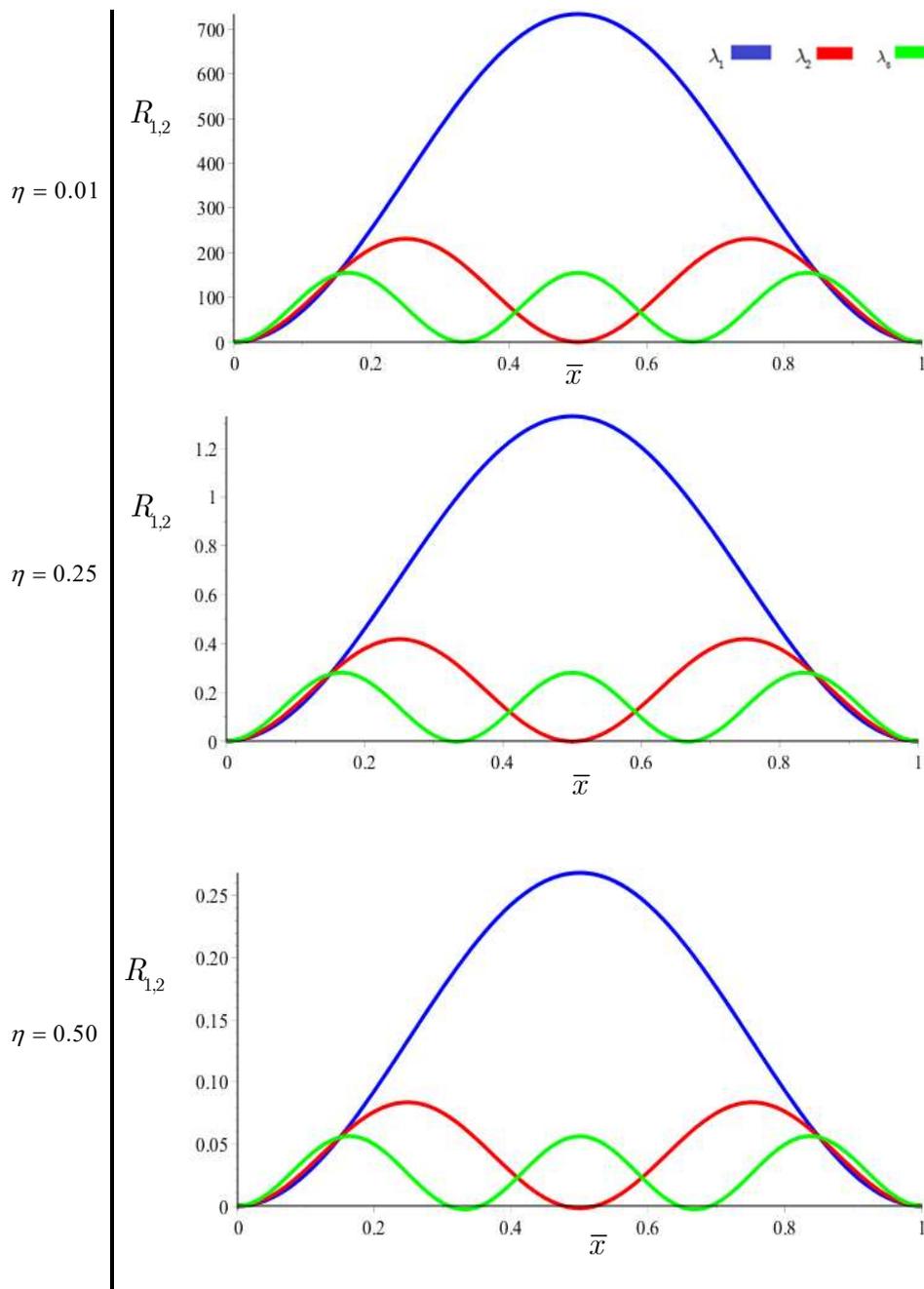
De realizar sucesivos análisis en la implementación del método de identificación de fisuras 1, inherente tanto a su implementación A como B, se ha observado que será posible o no identificar la fisura dependiendo del tipo de error en los datos de entrada, o sea los coeficientes de frecuencias. Por ejemplo, sean estos errores positivos o negativos, según su magnitud, en qué modo está el error, si en todos los modos existe el mismo error.

El análisis de los límites de esta metodología parte de estudiar una viga A-A, con una fisura en  $c = 0.15$  y diferentes profundidades. Para estos casos de estudio, se determinó en forma analítica los primeros tres coeficientes adimensionales de frecuencia, que se presentan en la Tabla 4.24.

$\eta$	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_3$
0.01	3.1416	6.2832	9.4247
0.25	3.1403	6.2747	9.4059
0.50	3.1350	6.2415	9.3346
0.75	3.1229	6.1680	9.1897
0.99	3.1092	6.0884	9.0516

Tabla 4.24 - Primeros tres valores exactos de  $\lambda_n$ , para una viga A-A con  $c = 0.15$ .

A partir de los valores de la Tabla 4.24 se implementa el método de identificación de fisuras. En la Figura 4.19 se observan los valores de rigidez de la rótula elástica intermedia punto a punto a lo largo de la viga, para cada caso de estudio.



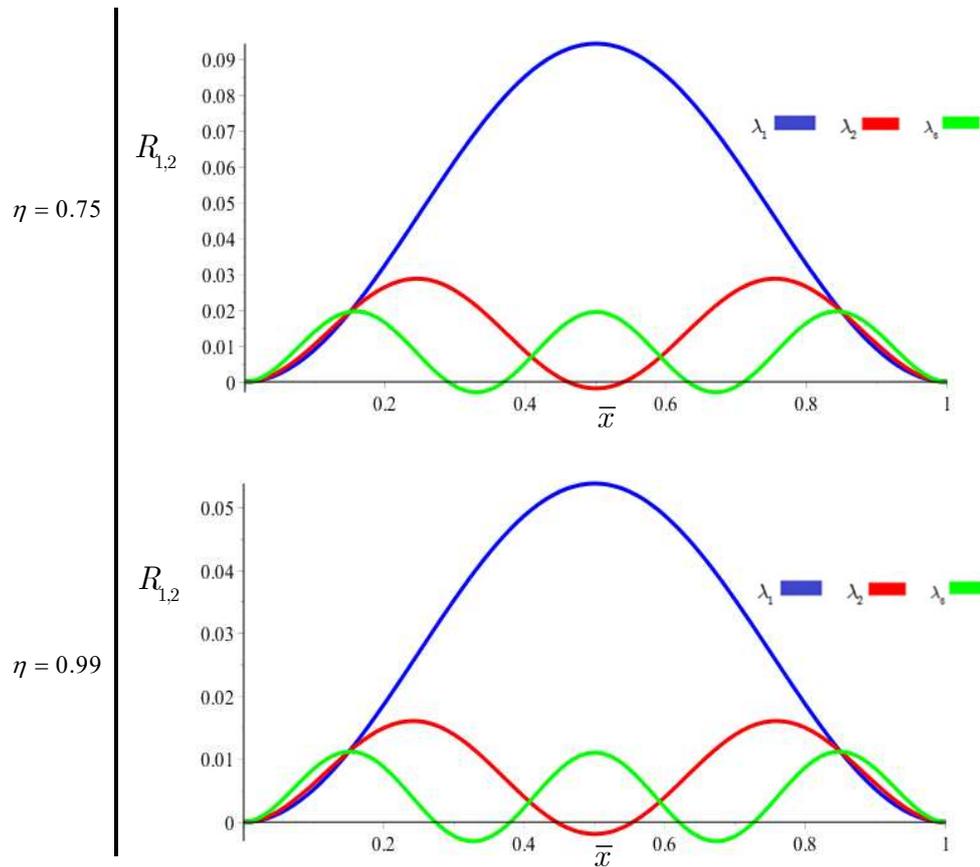
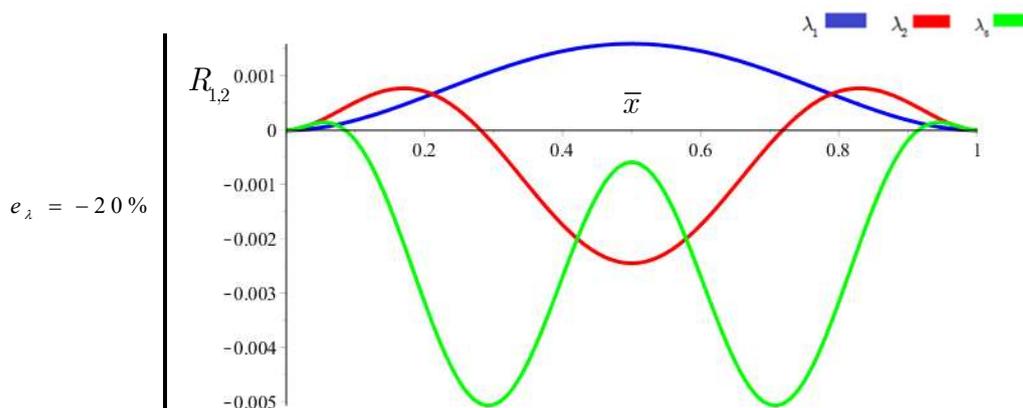


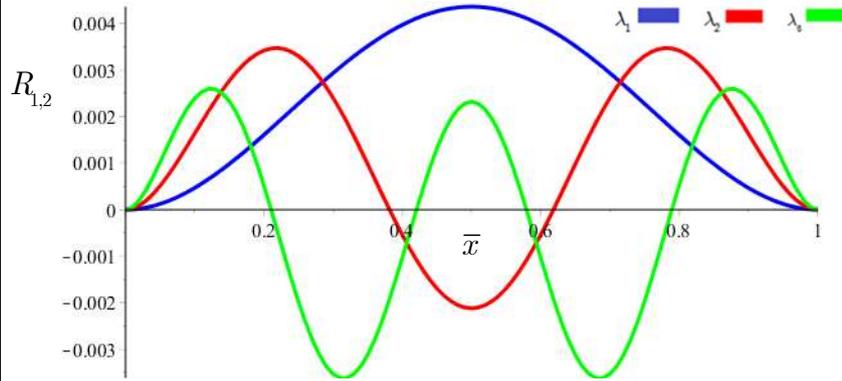
Figura 4.19 – Implementación del método de identificación de fisuras para viga A-A con fisuras en  $c = 0.15$  y diferentes profundidades.

Se observa, para esta posición de fisura, que los valores de rigidez están sensiblemente afectados por la profundidad de la fisura. Además, que el cambio en la rigidez es menor a medida que aumenta la profundidad de la fisura.

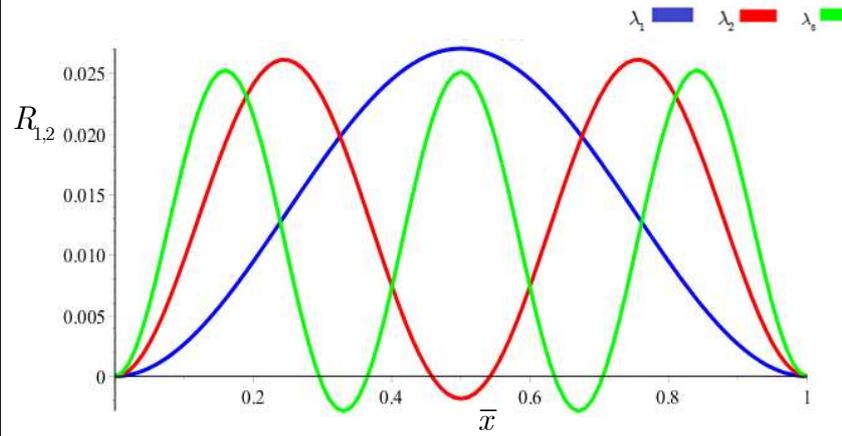
En la Figura 4.20 se presenta un análisis de sensibilidad en la implementación del método de identificación de fisuras para viga A-A con fisuras en  $c = 0.15$  y  $\eta = 0.03$ . Se induce un error en los coeficientes adimensionales de frecuencias como porcentaje de los mismos, siendo el mismo para cada modo. Y se observa los valores de rigidez de la rótula elástica intermedia punto a punto a lo largo de la viga, del modo 1 a 3, para cada caso de estudio.



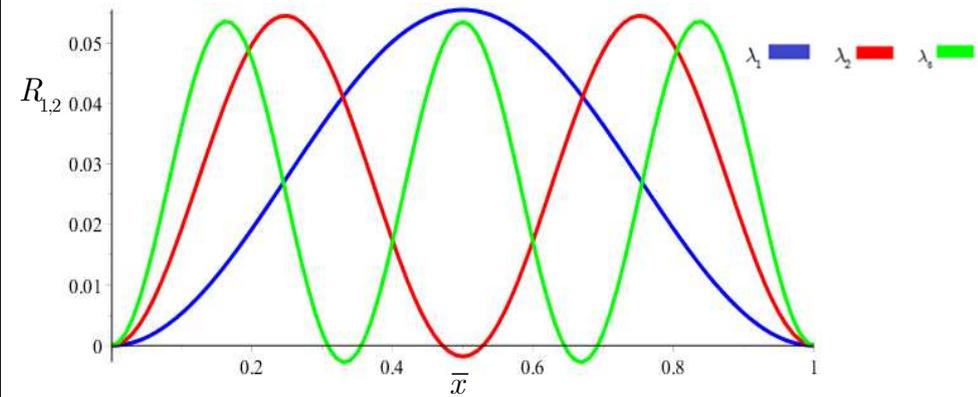
$e_{\lambda} = -10\%$



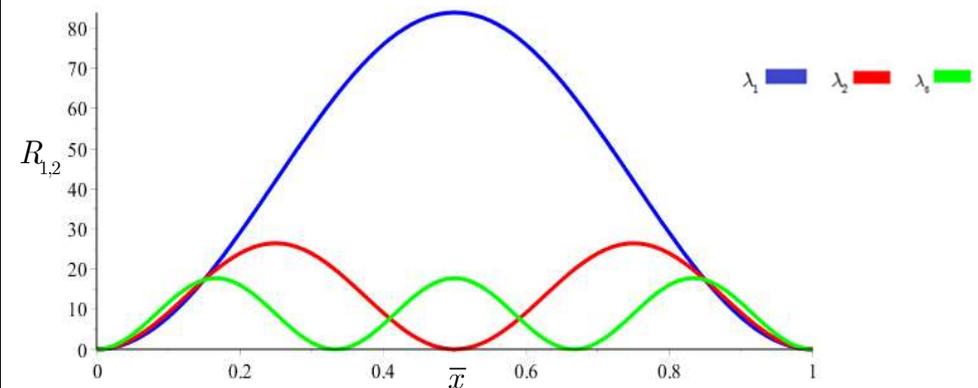
$e_{\lambda} = -2\%$



$e_{\lambda} = -1\%$



$e_{\lambda} = 0\%$



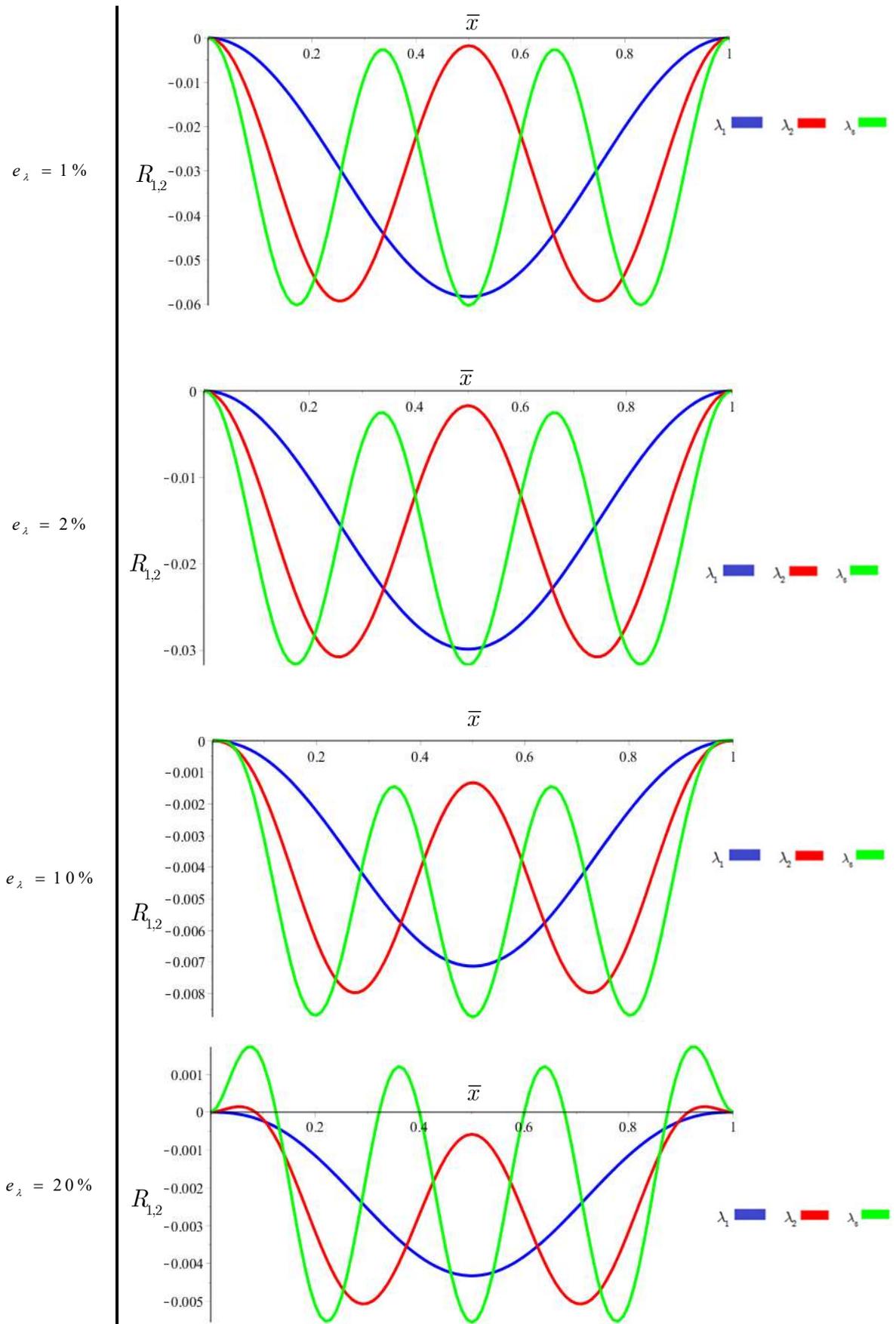


Figura 4.20 – Análisis de sensibilidad en la implementación del método de identificación de fisuras para viga A-A con fisuras en  $c = 0.15$  y  $\eta = 0.03$ .

#### 4.2.5.1 Discusión de los resultados

Se observa que, al inducir pequeños errores en la determinación del coeficiente de frecuencias, las variaciones del comportamiento de la rigidez son muy significativas. Con el agravante, de que en el caso de que el error sea positivo, las rigideces se vuelven negativas. Esto representa un gran límite para la implementación de esta metodología. Para buscar subsanar esto, se han propuesto diferentes alternativas de implementación del método 1 pero ninguna ha resultado satisfactoria; motivo por el cual no se han presentado en esta tesis.

### 4.3 MÉTODO IDENTIFICACIÓN DE FISURAS 2: INTERSECCIÓN DE LAS CURVAS DE NIVEL DE LAS SUPERFICIES DE FRECUENCIAS

#### 4.3.1 Metodología del método 2

Conocido el valor del parámetro  $\tilde{\lambda}_n$ , el cual corresponde al valor  $\lambda_n$  de una viga fisurada con la posición y profundidad desconocida, se procede a normalizarlo dividiendo a este por  $\bar{\lambda}_n$ , el cual corresponde al valor  $\lambda_n$  de una viga sin presencia de fisuras.

Luego se establece la curva de nivel que se obtiene de la intersección de la superficie de los coeficientes adimensionales de frecuencias normalizados con el plano dado por el valor de  $\tilde{\lambda}_n/\bar{\lambda}_n$ .

A modo de ejemplificar esta metodología, en la Figura 4.21 se pueden observar las superficies adimensionales de frecuencias normalizadas, los planos de los coeficientes adimensionales de frecuencias medidos y las curvas de nivel, para los modos 1 a 3, para la condición empotrado-libre.

La intersección entre las curvas de nivel de los modos considerados arroja la solución del problema, es decir la posición ( $\hat{c}$ ) y profundidad ( $\hat{\eta}$ ) de la fisura pronosticada por el método.

En la Figura 4.22 se presenta como se obtiene solución del método propuesto para  $\hat{c} = 0.3$  y  $\hat{\eta} = 0.5$ . Una importante aclaración, es que en las gráficas se presenta la posición y profundidad de la fisura como porcentaje, razón por la cual los ejes tienen una extensión de 0 a 100.

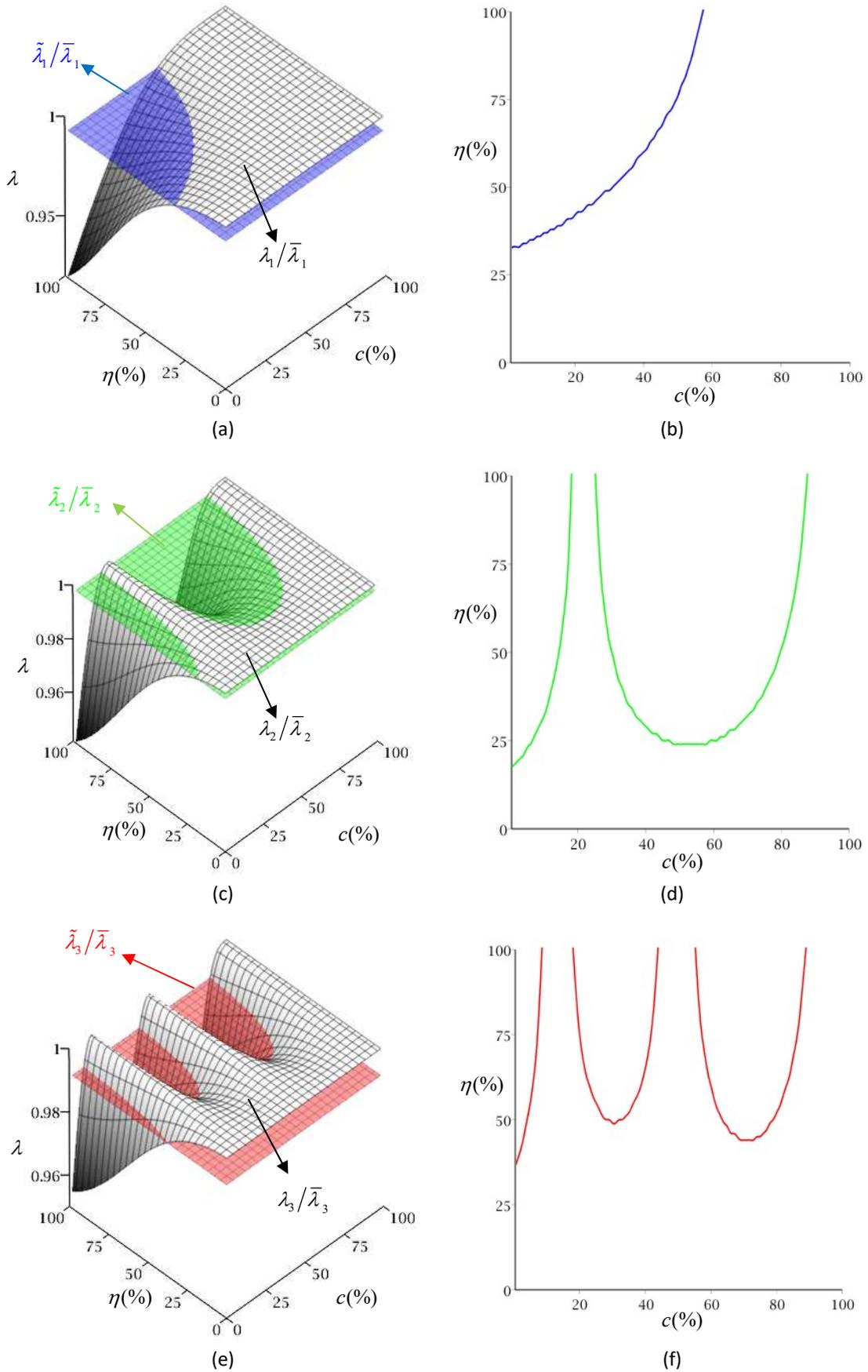


Figura 4. 21 – Superficies de los coeficientes adimensionales de frecuencias, planos de los coeficientes adimensionales de frecuencias medidos y respectivas curvas de nivel, para los modos 1 a 3, para la condición empotrado-libre.

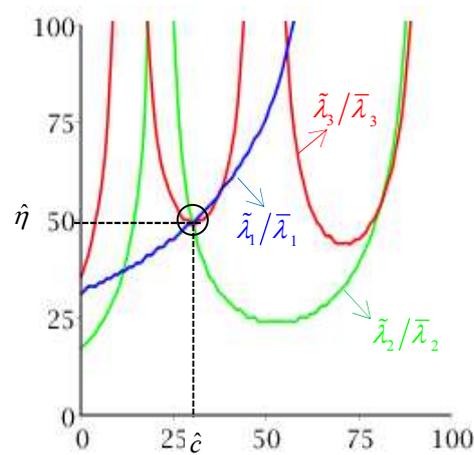


Figura 4.22 – Aplicación del método de identificación de fisuras, para una viga empotrada-libre,  $\hat{c} = 0.3$  y  $\hat{\eta} = 0.5$ .

En la presente tesis se propone implementar esta metodología mediante la función

$$\psi_{c,\eta}^m = \left[ \sum_{n=1}^m \sqrt{\left( \frac{(\lambda_{c,\eta}^n - \tilde{\lambda}_n)^2}{\bar{\lambda}_{c,\eta}^n} \right)} \right]^{-1}, \quad 4.10$$

donde  $m$  es el mayor modo considerado. Para esta implementación se utilizan los 3 primeros modos. Dicha función se evalúa en  $c$  y  $\eta$  desde 0.1 a 0.99 con un paso de 0.01 para cada variable. Las coordenadas del punto  $(c, \eta)$  que maximizan el valor de  $\psi_{c,\eta}^m$  indican la posición  $\hat{c}$ , y la profundidad  $\hat{\eta}$ , de la fisura en la viga analizada. La misma fue seleccionado dentro de un conjunto de funciones propuestas porque tiene un bajo coste computacional, facilidad de implementación y demostró ser muy robusta debido a su simpleza.

La función  $\psi_m$  es representada gráficamente en la Figura 4.23 como una superficie.

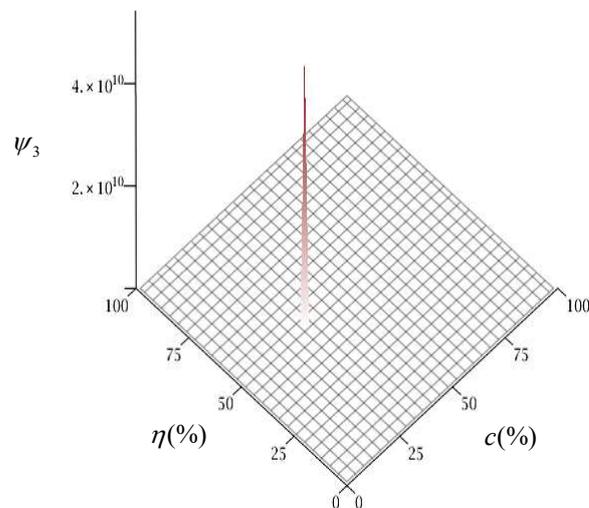


Figura 4.23 – Valores de  $\psi_3$  para una viga empotrada-libre, con fisura  $\hat{c} = 0.3$  y  $\hat{\eta} = 0.5$ .

### 4.3.2 Estudio de detección de fisuras en vigas sin un apoyo intermedio

Para diferentes condiciones de vinculación se han obtenido en forma analítica los coeficientes adimensionales de frecuencias para una viga con una fisura en  $c = 0.15$  y con  $\eta = 0.50$ . Con estos valores, se aplicó el método inverso y se determinó la posición y profundidad de la fisura. En la Tabla 4.25 se presentan los resultados obtenidos. Se observa que el método funciona correctamente para las diferentes condiciones de vinculación.

Caso	C.B.	Secuencia modal			Método inverso			
		$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_3$	$\hat{c}$	$\hat{\eta}$	$e_{\hat{c}}$	$e_{\hat{\eta}}$
1	L-L	4.726403	7.824020	10.905577	0.15	0.50	0%	0%
2	A-A	3.134969	6.241540	9.334643	0.15	0.50	0%	0%
3	E-E	4.721080	7.851084	10.953393	0.15	0.50	0%	0%
4	A-L	3.913423	7.014591	10.111389	0.15	0.50	0%	0%
5	E-L	1.851614	4.686334	7.852696	0.15	0.50	0%	0%
6	E-A	3.913423	7.068534	10.182362	0.15	0.50	0%	0%
7	$T_1 = 10, R_1 = R_2 = T_2 = 0$	2.453353	4.824956	7.846309	0.15	0.50	0%	0%
8	$T_1 = R_1 = 10, R_2 = T_2 = 0$	1.500503	2.595079	5.330647	0.15	0.50	0%	0%
9	$T_1 = R_1 = T_2 = 10, R_2 = 0$	2.055385	2.977475	5.395335	0.15	0.50	0%	0%
19	$T_1 = R_1 = T_2 = R_2 = 10$	2.088250	3.258365	5.899530	0.15	0.50	0%	0%

Tabla 4.25 - Primeros tres valores de  $\lambda_n$  para una viga con una fisura en  $c = 0.15$  y con  $\eta = 0.50$ . y los valores  $\hat{c}$ ,  $\hat{\eta}$ ,  $e_{\hat{c}}$  y  $e_{\hat{\eta}}$ .

En el capítulo 6 de esta tesis se realiza un riguroso análisis de sensibilidad de este método, razón por la cual no se presentan más resultados aquí.

### 4.3.3 Análisis de la implementación del método cuando la posición de la fisura se encuentre en un punto de inflexión de la forma modal de algún modo utilizado como dato de entrada

A continuación, se analiza la implementación del método basado en la intersección de las curvas de nivel de las superficies de frecuencias cuando la posición de la fisura se encuentre en un punto de inflexión de la forma modal.

A modo de ejemplificar, se considera el caso L-L, donde existe para el segundo modo normal de vibración un punto de inflexión en  $\bar{x} = 0.5$ . En la Figura 4.24 se presentan las superficies de los coeficientes adimensionales de frecuencias, los planos de los coeficientes adimensionales de frecuencias medidos y las respectivas curvas de nivel, de los modos 1 a 3, para este caso.

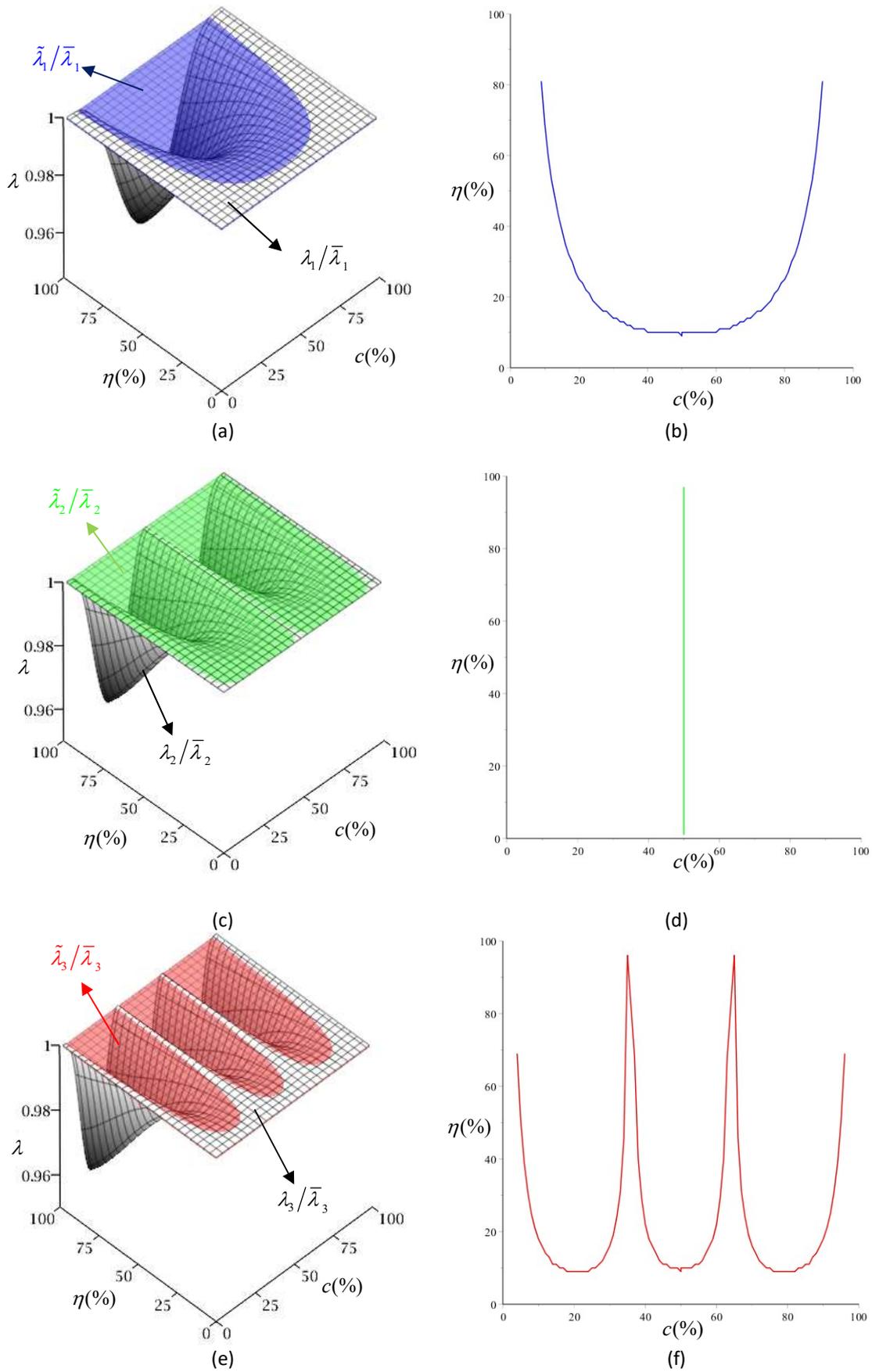


Figura 4. 24 – Superficies de los coeficientes adimensionales de frecuencias, planos de los coeficientes adimensionales de frecuencias medidos y respectivas curvas de nivel, para los modos 1 a 3, para la condición libre-libre.

Se observa en el modo 2, que la frecuencia de la viga fisurada coincide con la frecuencia de la viga sin fisura. Pero a pesar de esto, se obtiene la correspondiente curva de nivel. En la Figura 4.25 se observan las curvas de nivel de cada modo. El método funciona correctamente sin necesidad de ninguna propuesta de optimización.

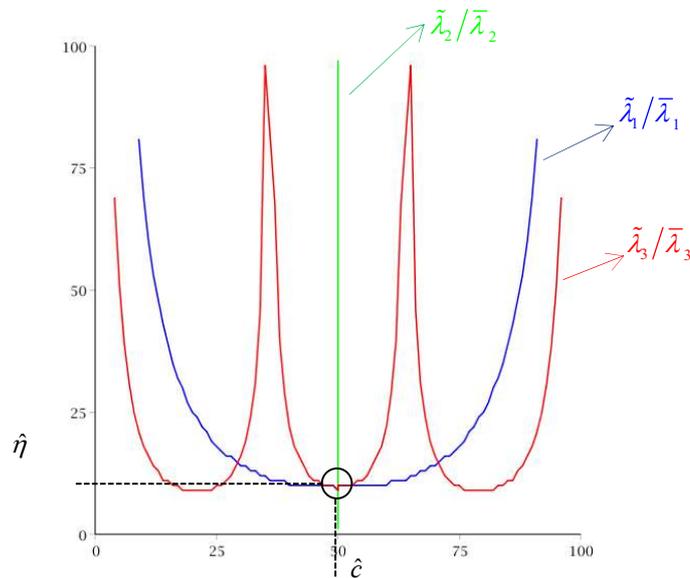


Figura 4.25 – Aplicación del método de identificación de fisuras, para una viga libre-libre,  $\hat{c} = 0.50$  y  $\hat{\eta} = 0.10$ .

El análisis antes descrito se repite cada vez que la posición de la fisura coincide con el punto de inflexión de las formas modales del modo 1 a 3 para las vinculaciones típicas. En todos los casos, se consideran vigas con una fisura de profundidad  $\hat{\eta} = 0.10$ . Los resultados de la aplicación del método analítico de identificación de fisuras basado en la intersección de las curvas de nivel de las superficies de frecuencias son presentados en las Tablas 4.26 a 4.31.

$c$	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_3$	$\hat{c}$	$\hat{\eta}$	$e_{\hat{c}}$	$e_{\hat{\eta}}$
0.217	1.874475	4.694091	7.853590	0,220	0,100	0,3%	0,0%
0.132	1.874253	4.693649	7.854757	0,130	0,100	-0,2%	0,0%
0.496	1.874954	4.692476	7.854757	0,500	0,100	0,4%	0,0%

Tabla 4.26 - Posición de la fisura, primeros 3 valores de  $\lambda_n$  y los valores  $\hat{c}$ ,  $\hat{\eta}$ ,  $e_{\hat{c}}$  y  $e_{\hat{\eta}}$ . para el caso E-L.

$c$	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_3$	$\hat{c}$	$\hat{\eta}$	$e_{\hat{c}}$	$e_{\hat{\eta}}$
0.443	3.925096	7.068583	10.206860	0,440	0,100	-0,3%	0,0%
0.308	3.925328	7.066981	10.210176	0,310	0,100	0,2%	0,0%
0.614	3.925702	7.066291	10.210176	0,610	0,100	-0,4%	0,0%

Tabla 4.27 - Posición de la fisura, primeros 3 valores de  $\lambda_n$  y los valores  $\hat{c}$ ,  $\hat{\eta}$ ,  $e_{\hat{c}}$  y  $e_{\hat{\eta}}$ . para el caso A-L.

$c$	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_3$	$\hat{c}$	$\hat{\eta}$	$e_c$	$e_{\hat{\eta}}$
0.264	3.926602	7.067147	10.207407	0,260	0,100	-0,4%	0,0%
0.147	3.926117	7.068583	10.209319	0,150	0,100	0,3%	0,0%
0.554	3.925509	7.068583	10.206779	0,550	0,100	-0,4%	0,0%
0.102	3.925640	7.068178	10.210176	0,100	0,100	-0,2%	0,0%
0.383	3.926264	7.066678	10.210176	0,380	0,100	-0,3%	0,0%
0.692	3.925540	7.066938	10.210176	0,690	0,100	-0,2%	0,0%

Tabla 4.28 - Posición de la fisura, primeros 3 valores de  $\lambda_n$  y los valores  $\hat{c}$ ,  $\hat{\eta}$ ,  $e_c$  y  $e_{\hat{\eta}}$  para el caso E-A.

$c$	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_3$	$\hat{c}$	$\hat{\eta}$	$e_c$	$e_{\hat{\eta}}$
0.500	4.728016	7.853205	10.991924	0,500	0,100	0,0%	0,0%
0.358	4.728623	7.850879	10.995608	0,360	0,100	0,2%	0,0%
0.642	4.728623	7.850879	10.995608	0,640	0,100	-0,2%	0,0%

Tabla 4.29 - Posición de la fisura, primeros 3 valores de  $\lambda_n$  y los valores  $\hat{c}$ ,  $\hat{\eta}$ ,  $e_c$  y  $e_{\hat{\eta}}$  para el caso L-L.

$c$	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_3$	$\hat{c}$	$\hat{\eta}$	$e_c$	$e_{\hat{\eta}}$
0.500	3.140526	6.283185	9.421583	0,500	0,100	0,0%	0,0%
0.333	3.140793	6.281587	9.424778	0,330	0,100	-0,3%	0,0%
0.667	3.140793	6.281587	9.424778	0,670	0,100	0,3%	0,0%

Tabla 4.30 - Posición de la fisura, primeros 3 valores de  $\lambda_n$  y los valores  $\hat{c}$ ,  $\hat{\eta}$ ,  $e_c$  y  $e_{\hat{\eta}}$  para el caso A-A.

$c$	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_3$	$\hat{c}$	$\hat{\eta}$	$e_c$	$e_{\hat{\eta}}$
0.224	4.730041	7.851868	10.992359	0,220	0,100	-0,4%	0,0%
0.776	4.730041	7.851868	10.992359	0,780	0,100	0,4%	0,0%
0.132	4.729549	7.853205	10.994842	0,130	0,100	-0,2%	0,0%
0.500	4.728855	7.853205	10.991838	0,500	0,100	0,0%	0,0%
0.868	4.729549	7.853205	10.994842	0,870	0,100	0,2%	0,0%
0.094	4.729026	7.852821	10.995608	0,090	0,100	-0,4%	0,0%
0.356	4.729451	7.851203	10.995608	0,365	0,100	0,9%	0,0%
0.644	4.729451	7.851203	10.995608	0,635	0,100	-0,9%	0,0%
0.906	4.729026	7.852821	10.995608	0,910	0,100	0,4%	0,0%

Tabla 4.31 - Posición de la fisura, primeros 3 valores de  $\lambda_n$  y los valores  $\hat{c}$ ,  $\hat{\eta}$ ,  $e_c$  y  $e_{\hat{\eta}}$  para el caso E-E.

En todos los casos analizados se observa que el método responde satisfactoriamente a pesar que la posición de la fisura coincide con la posición de los puntos de inflexión. En la determinación de la posición, se observa que existe un pequeño error. El mismo está relacionado con la discretización de las superficies de frecuencias.

#### 4.4 COMPARATIVA ENTRE MÉTODOS 1 y 2. DISCUSIÓN DE RESULTADOS

En las anteriores secciones de este capítulo se implementaron métodos de identificación de fisuras. Uno basado en la intersección de las curvas de rigidez (método 1) y el otro basado en la intersección de las curvas de nivel de las superficies de frecuencias (método 2).

Para poder comparar estos dos métodos de identificación, es necesario hacerlo en igualdad de condiciones. Para esto se analiza el caso de una viga A-A con  $c = 0.30$  y con  $\eta = 0.30$ , donde se consideran los primeros tres  $\lambda_n$  como dato de entrada de ambos métodos. Para cada caso de análisis, se induce un error  $\lambda_n$  tal como se describió en el análisis de sensibilidad 4.2.3.3.

Los resultados junto a los errores máximos, mínimos y promedios se presentan en la Tabla 4.32.

Caso	Error inducido			Método 1B				Método 2			
	$e_{\lambda_1}$	$e_{\lambda_2}$	$e_{\lambda_3}$	$\hat{c}$	$\hat{\eta}$	$e_{\hat{c}}$	$e_{\hat{\eta}}$	$\hat{c}$	$\hat{\eta}$	$e_{\hat{c}}$	$e_{\hat{\eta}}$
1	0,000%	0,000%	0,000%	0,30	0,30	0%	0%	0,30	0,30	0%	0%
2	0,100%	0,100%	0,100%	0,33	0,28	3%	-2%	0,30	0,24	0%	-6%
3	0,100%	0,100%	-0,100%	0,24	0,25	-6%	-5%	0,23	0,24	-7%	-6%
4	0,100%	-0,100%	0,100%	0,32	0,31	2%	1%	0,29	0,34	-1%	4%
5	0,100%	-0,100%	-0,100%	0,24	0,27	-6%	-3%	0,26	0,33	-4%	3%
6	-0,100%	0,100%	0,100%	0,34	0,36	4%	6%	0,37	0,32	7%	2%
7	-0,100%	0,100%	-0,100%	0,39	0,34	9%	4%	0,40	0,32	10%	2%
8	-0,100%	-0,100%	0,100%	0,33	0,42	3%	12%	0,31	0,35	1%	5%
9	-0,100%	-0,100%	-0,100%	0,27	0,35	-3%	5%	0,27	0,34	-3%	4%
10	0,066%	0,031%	0,031%	0,33	0,33	3%	3%	0,30	0,28	0%	-2%
11	0,029%	0,033%	-0,062%	0,27	0,29	-3%	-1%	0,26	0,27	-4%	-3%
12	0,004%	-0,078%	0,086%	0,33	0,38	3%	8%	0,29	0,33	-1%	3%
13	0,062%	-0,011%	-0,080%	0,26	0,28	-4%	-2%	0,26	0,29	-4%	-1%
14	-0,019%	0,051%	0,061%	0,33	0,36	3%	6%	0,33	0,29	3%	-1%
15	-0,011%	0,093%	-0,082%	0,39	0,32	9%	2%	0,35	0,28	5%	-2%
16	-0,005%	-0,033%	0,098%	0,33	0,37	3%	7%	0,29	0,31	-1%	1%
17	-0,072%	-0,042%	-0,059%	0,28	0,33	-2%	3%	0,31	0,33	1%	3%
18	-0,001%	0,020%	-0,012%	0,29	0,29	-1%	-1%	0,30	0,29	0%	-1%
19	0,036%	0,011%	-0,069%	0,27	0,29	-3%	-1%	0,27	0,29	-3%	-1%
20	-0,009%	-0,010%	0,062%	0,30	0,30	0%	0%	0,31	0,31	1%	1%
		Error máx.		0,39	0,42	9%	12%	0,40	0,35	10%	5%
		Error mín.		0,24	0,25	-6%	-5%	0,23	0,24	-7%	-6%
		Error prom.		0,31	0,32	1%	2%	0,30	0,30	0%	0%

Tabla 4.32 – Comparativas de métodos para  $c = 0.30$  y  $\eta = 0.30$  con errores inducidos en  $\lambda_n$ .

Si bien los resultados no arrojan diferencias significativas, cabe mencionar que el método 1B no se puede automatizar fácilmente. Por lo que requiere un avezado entrenamiento del operador, el cual debe analizar las gráficas de los resultados y completar ciertos parámetros en el algoritmo. Eso, sucede en particular para los casos que hay errores inducidos que producen los efectos mencionados en el análisis de los límites en la sección 4.2.5. En cambio, el método 2, se presenta más robusto y no requiere de un operador entrenado.

En la sección anterior se mostró que la implementación método analítico de identificación de fisuras basado en la intersección de las curvas de rigidez presentaba inconvenientes cuando la posición de la fisura se encuentra en un punto de inflexión de la forma modal. Para subsanarlo, fue necesario proponer una optimización del método. En cambio, el método 2 no presenta este inconveniente.

Por otra parte, al comparar el tiempo de procesamiento, se observa que el método 1 tarda en promedio en correr 19.87 segundos, más el tiempo de análisis del operador. Mientras que el método 2 tarda apenas 3.71 segundos en promedio. Vale aclarar que esta diferencia en el tiempo de procesamiento se da sustancialmente porque el método 2, previamente tiene almacenada las matrices de resultados que al graficarse da lugar a las superficies de frecuencias. Si se aumentase la discretización de dicha grilla no afectaría el tiempo de ejecución del método 2, ya que este sólo ejecuta la función dada por la Ec. 4.10.

De lo anteriormente expuesto, se considera que el método de identificación de fisuras basado en la intersección de las curvas de nivel de las superficies de frecuencias presenta mejores prestaciones que el basado en la intersección de las curvas de rigidez.

#### **4.5 APORTES Y CONCLUSIONES DE ESTE CAPÍTULO**

Se implementaron 2 métodos analíticos de identificación de fisuras basados en mediciones de frecuencias naturales de vibración. El método 1 fue denominado como modelo analítico basado en la intersección de las curvas de rigidez. El método 2 como modelo analítico basado en la intersección de las curvas de nivel de las superficies de frecuencias.

Se presentó una primera implementación del método de identificación de fisuras basado en la intersección de las curvas de rigidez, la que tiene por aporte novedoso que la intersección de dichas curvas fue obtenida por una simple herramienta estadística como lo es el desvío estándar. La misma pudo determinar la posición y profundidad de una fisura a priori desconocida, a partir de los valores de las primeras frecuencias naturales de vibración obtenidas con mediciones en

ensayos de laboratorio, por simulaciones numéricas con un programa de elementos finitos y por resolución del problema directo en forma analítica exacta.

Una primera limitación de este método, denominado método 1A, estuvo dado por la incapacidad de detectar correctamente la profundidad de la fisura cuando la posición de esta se encuentra en un punto de inflexión de la forma modal de la viga considerada. Al realizar un análisis más minucioso del por qué el método daba resultados incongruentes bajo esta condición, se halló por observación que, para el modo en cuestión, los valores de rigidez para todos los puntos de la viga eran mayores en varios ordenes de magnitud a los esperados. Esto desde un punto de vista físico se justifica por el hecho que el momento flector es nulo en los puntos de inflexión de la deformada de la forma modal y, por ende, la energía de la viga sin fisura y la energía de la viga con fisura es la misma. Y, este hecho causa que la rigidez del resorte rotacional que representa a la fisura tiende a infinito.

Así fue propuesta una segunda implementación del método de identificación de fisuras basado en la intersección de las curvas de rigidez, denominada método 1B. La misma pudo superar el inconveniente observado en el método 1A, al agregar al algoritmo una condición que descarte del análisis los modos que presentan este comportamiento. Dicha implementación se mostró robusta al respecto, siendo que cuando los datos de entrada, o sea los coeficientes adimensionales de frecuencias, son determinados en forma analítica, el método de identificación de fisuras detecta tanto la posición como profundidad de la fisura sin error alguno.

Sin embargo, si estos datos de entrada se corresponden a resultados de simulaciones por elementos finitos o han sido obtenidos de manera experimental, y por lo tanto difieren de los del modelo analítico, el método de identificación de fisuras arroja resultados con algún grado de error. Para analizar esto, se realizó un análisis de sensibilidad. Se observó que en el caso de que el error sea positivo, las rigideces obtenidas son negativas. Esto representa un gran límite para la implementación de esta metodología. Se intentó subsanar este problema siguiendo diferentes alternativas de implementación del método 1 pero ninguna ha resultado satisfactoria; motivo por el cual se logró desarrollar el método 2 descrito a continuación.

Visto los límites del método 1, se recurrió a implementar el método de identificación de fisuras basado en la intersección de las curvas de nivel de las superficies de frecuencias, denominado método 2. Se observó que el dicho método no presentaba inconvenientes respecto de su funcionamiento cuando la posición de la fisura coincidía con un punto de inflexión de la forma modal; lo que representó una primera ventaja sobre el método 1. Al realizar un análisis de sensibilidad de casos con los métodos 1B y 2, se observó que los resultados no arrojan diferencias significativas. Si bien el tiempo de cálculo para obtener las superficies de frecuencias que lo sustentan es grande, sólo son necesarias obtenerlas una vez. Por lo tanto, no requiere de la

resolución de sistemas ecuaciones y sólo basta con implementar un sencillo algoritmo que encuentre el punto de intersección de las curvas de nivel para los datos de entrada ingresados. Con lo cual, los tiempos de cálculo del método 2 se vieron reducidos al 15% de los tiempos del método 1. Por otra parte, el método 2 es más robusto, matemáticamente directo y simple de implementar respecto al método 1.

# CAPÍTULO 5

## CAPACIDAD TEÓRICA DE IDENTIFICACIÓN DE FISURAS EN VIGAS VIBRANTES

### 5.1 INTRODUCCIÓN

Si bien, en el Capítulo 4 se presentaron dos métodos de identificación de fisuras, a partir de aquí solo se tratará sobre desarrollos respecto del método de identificación de fisuras basado en la intersección de las curvas de nivel de los coeficientes adimensionales de frecuencias medidos; denominado método 2.

El estado del arte de la presente tesis da cuenta que son numerosos los trabajos que tratan sobre métodos de identificación de fisuras basados en mediciones de las frecuencias naturales de vibración. Sin embargo, son escasos los aportes realizados en responder cuál es el defecto más pequeño que estos métodos pueden lograr identificar. O sí acaso, los pequeños cambios en las frecuencias asociados a los diferentes escenarios de daño estructural pueden ser medidos con la suficiente precisión. En esta sección se pretende dar respuesta a dichos interrogantes.

Para ello, se presenta el desarrollo de dos hipótesis para predecir la capacidad teórica de detección del método de identificación de fisuras 2. Ambas pueden considerarse como hipótesis causales, ya tratan de explicar la relación entre la incertidumbre en la determinación de los coeficientes adimensionales de frecuencias y el error obtenido en la identificación de la fisura con el método propuesto.

Una primera hipótesis determina la incertidumbre relativa admisible promedio en la determinación del coeficiente adimensional de frecuencias medido  $(\bar{\mu}_{r\lambda}^{adm})$  que el método de identificación de fisuras es capaz de soportar. Luego, el corolario de la primera hipótesis y una segunda hipótesis relacionan la incertidumbre en la determinación de los datos de entrada del método de identificación de fisuras, o sea la incertidumbre en los coeficientes adimensionales de frecuencias medidos  $(u_{r\lambda_n})$ , con el error de salida esperado  $(\hat{e}^{\max})$ , o sea con el error esperado en la determinación de la posición  $(\hat{e}_c^{\max})$  y profundidad de la fisura  $(\hat{e}_f^{\max})$ .

## 5.2 HIPOTESIS 1: SENSIBILIDAD DE LA RESPUESTA VIBRATORIA AL DAÑO PRESENTE

### 5.2.1 Formulación de la hipótesis

Para formular esta hipótesis, se parte de considerar que la capacidad de detección del método de identificación de fisura basado en mediciones de frecuencias naturales de vibración está asociada a cuan sensible es la respuesta vibratoria de la viga al daño presente. Es de suponer que mientras más sensible sea la respuesta vibratoria al daño presente, mayor será la probabilidad de detectarlo. Entonces, para las combinaciones de posiciones y profundidades de fisuras que maximicen la diferencia entre las frecuencias naturales entre la viga sin fisurar y la viga fisurada, mayor será la capacidad de detección del método propuesto. Por lo tanto, el margen teórico de detección (MTD) es proporcional a la diferencia entre  $\bar{\lambda}_n$ , el cual corresponde a una viga sin presencia de fisuras, y  $\lambda_n$ , que corresponde a una viga fisurada con determinada posición y profundidad. Que se puede expresar según:

$$MTD \propto (\bar{\lambda}_n - \lambda_n) \quad 5.1$$

Al considerar para cada modo la superficie de los coeficientes adimensionales de frecuencias normalizados dada por  $\lambda_n/\bar{\lambda}_n$ , se puede re-expresar el margen teórico de detección (MTD) para cada posición y profundidad de fisura como:

$$MTD|_{c,\eta} \propto \left( \max \left( \left( \lambda_n/\bar{\lambda}_n \right) \Big|_{c,\eta} \right) - \left( \lambda_n/\bar{\lambda}_n \right) \Big|_{c,\eta} \right) 100\% \quad 5.2$$

Ahora bien, cuando  $\eta \rightarrow 0$ , entonces  $\lambda_n \rightarrow \bar{\lambda}_n$ , y por lo tanto  $\lambda_n/\bar{\lambda}_n = 1$ . Teóricamente ninguna viga fisurada debiese ser más rígida que una viga sin fisura, y por lo tanto nunca  $\lambda_n > \bar{\lambda}_n$ .

Siendo que para todos los casos de estudio  $\max \left( \left( \lambda_n/\bar{\lambda}_n \right) \Big|_{c,\eta} \right) = 1$ , se puede expresar

$$MTD|_{c,\eta} \propto \left( 1 - \left( \lambda_n/\bar{\lambda}_n \right) \Big|_{c,\eta} \right) 100\% \quad 5.3$$

A fin de ejemplificar, en la Figura 5.1 se presentan las superficies de los coeficientes adimensionales de frecuencias normalizados  $\left( \lambda_n/\bar{\lambda}_n \right)$  de los modos 1 a 3 para la condición articulado-articulado.

Y para cada caso, el MTD que se obtiene como gráfica de superficie para cada posición y profundidad de fisura, de restar el plano 1 al valor de  $(\lambda_n/\bar{\lambda}_n)$  para cada posición y profundidad. Para los diferentes modos, y las para los diferentes casos de estudios, los valores máximos y mínimos de dichas superficies MTD varían y por lo tanto no se trabajará con una escala única de colores. Basta con mencionar que la zona azul se correspondería a una mayor probabilidad de detección y la zona roja a escasa probabilidad de detección.

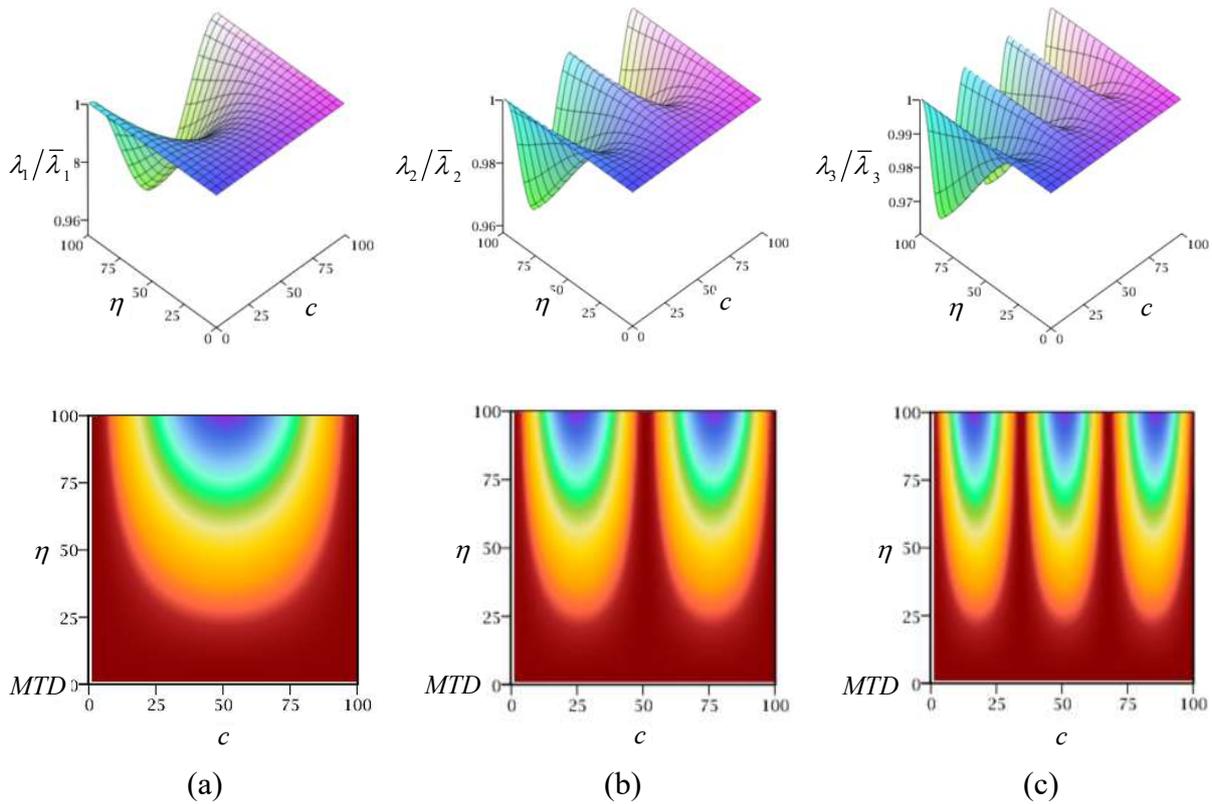


Figura 5.1 – Superficies de los coeficientes adimensionales de frecuencias y Margen Teórico de Detección (MTD) de los modos 1 a 3 planos, para la condición A-A. a) Modo 1. b) Modo 2. C) Modo 3.

Ahora bien, el método de identificación de fisuras utiliza  $m$  modos. Suponiendo que cada uno de ellos contribuye de igual manera a la detección de la fisura, se puede suponer que el margen teórico de detección (MTD) del método, para cada posición y profundidad de fisura, es igual al promedio de los márgenes teóricos de detección (MTD) de cada modo para cada posición y profundidad de fisura. A partir de aquí se denota al margen teórico de detección (MTD) como  $\phi$  y queda dado según la expresión:

$$\phi_{|c,\eta}^m = \left( \frac{1}{m} \sum_{n=1}^m \left[ 1 - \left( \lambda_n / \bar{\lambda}_n \right) \Big|_{c,\eta} \right] \right) 100\% \quad 5.4$$

En la Figura 5.2 se presenta para la condición A-A el margen teórico de detección del método ( $\phi$ ), obtenido como el promedio de los  $\phi_{c,\eta}^n$  de los primeros 3 modos.

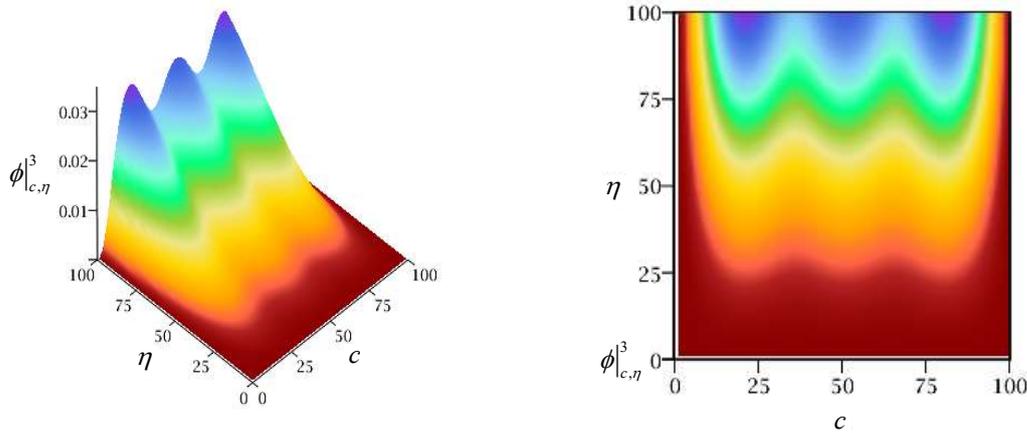


Figura 5.2 –  $\phi_{c,\eta}^3$  obtenido como promedio de los  $\phi_{c,\eta}^n$  de los modos 1 a 3 planos, para la condición A-A.

Otra forma de obtener el margen teórico de detección (MTD) del método es a partir de la construcción de una superficie de frecuencias promedio, dada por  $\frac{1}{m} \sum_{n=1}^m (\lambda_n / \bar{\lambda}_n)$ . Así el margen teórico de detección (MTD) del método, para cada posición y profundidad de fisura, queda dado por la diferencia entre el máximo valor de la superficie de frecuencias promedio y el valor de la superficie de frecuencias promedio en ese punto, según:

$$\phi_{c,\eta}^m = \left( \max \left( \frac{1}{m} \sum_{n=1}^m (\lambda_n / \bar{\lambda}_n) \Big|_{c,\eta} \right) - \frac{1}{m} \sum_{n=1}^m (\lambda_n / \bar{\lambda}_n) \Big|_{c,\eta} \right) 100\% \quad 5.5$$

Siendo que para todos los casos  $\max \left( \frac{1}{m} \sum_{n=1}^m (\lambda_n / \bar{\lambda}_n) \Big|_{c,\eta} \right) = 1$ , se puede expresar

$$\phi_{c,\eta}^m = \left( 1 - \frac{1}{m} \sum_{n=1}^m (\lambda_n / \bar{\lambda}_n) \Big|_{c,\eta} \right) 100\% \quad 5.6$$

En la Figura 5.3 se presenta la superficie de frecuencias promedio de los modos 1 a 3 para la condición A-A y el margen teórico de detección del método (MTD), obtenido según la expresión anterior, constatando que son completamente análogos.

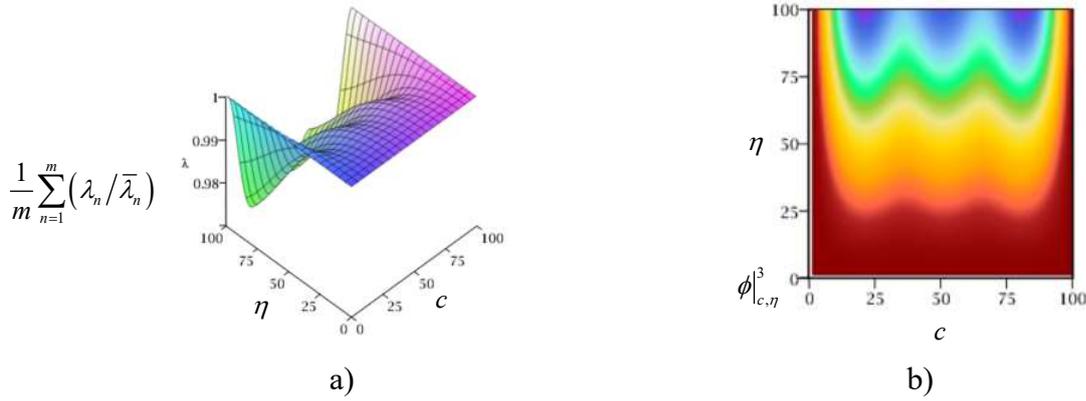


Figura 5.3 – a) Superficie de los coeficientes adimensionales de frecuencias promedio de los modos 1 a 3, condición A-A. b)  $\phi_{c,\eta}^3$  del método de identificación de fisuras propuesto.

Así la hipótesis 1 queda establecida como: **“La capacidad de detección del método es proporcional a la sensibilidad de la respuesta vibratoria al daño presente en la viga, el cual se manifiesta como la diferencia entre el máximo valor de la superficie de frecuencias normalizada y el valor de la superficie de frecuencias normalizada para una determinada posición y profundidad de fisura”.**

### 5.2.2 Resultados de la hipótesis 1 para diferentes condiciones de vinculación

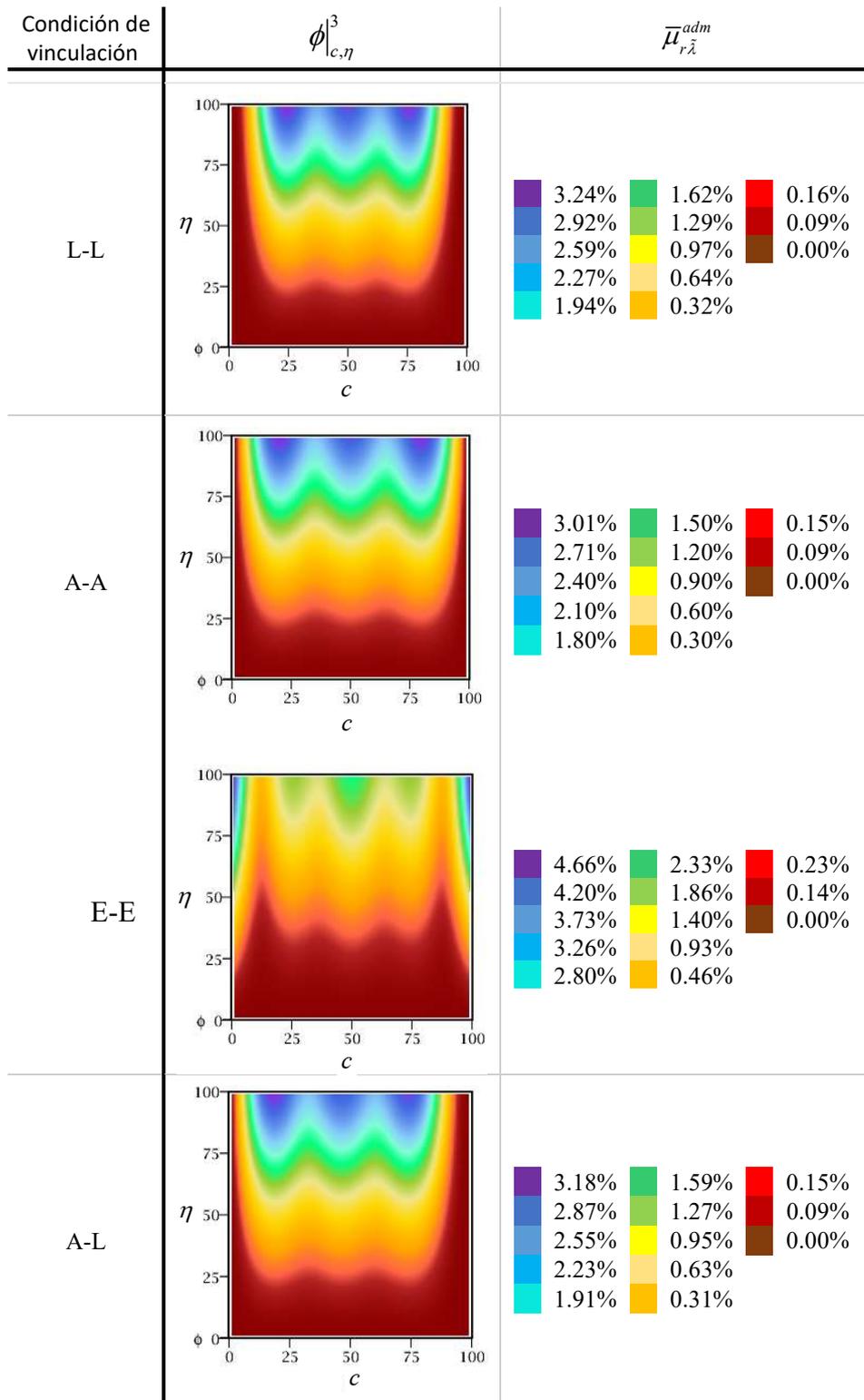
Siendo que, a mayor sensibilidad de la respuesta vibratoria al daño presente, mayor será la diferencia mencionada; por lo tanto, es de suponer que el método admita una mayor incertidumbre en la determinación de los coeficientes de frecuencias. Por eso, se considera como hipótesis que el margen teórico de detección del método ( $\phi_{c,\eta}^m$ ) es igual a la incertidumbre relativa admisible promedio (teórica) en la determinación del coeficiente adimensional de frecuencias medido ( $\bar{\mu}_{r,\tilde{\lambda}}^{adm}$ ), obtenida como el promedio de las incertidumbres relativas admisibles (teóricas) de cada modo ( $\mu_{r,\tilde{\lambda}_n}^{adm}$ ).

$$\phi_{c,\eta}^m = \bar{\mu}_{r,\tilde{\lambda}}^{adm} = \frac{1}{m} \sum_{n=1}^m \mu_{r,\tilde{\lambda}_n}^{adm} \quad 5.7$$

Repitiendo el procedimiento descrito en la formulación de la hipótesis 1, se obtienen los resultados de la incertidumbre relativa admisible en la determinación del coeficiente adimensional de frecuencias medido ( $\bar{\mu}_{r,\tilde{\lambda}}^{adm}$ ), para cada posición y profundidad de fisura, configurando mapeos

donde se indica para cada zona que incertidumbre admite el método de identificación de fisuras. El análisis se repite para diferentes condiciones de vinculación.

A continuación, se presentan los resultados para los casos de vinculaciones clásicas. El resto de los casos analizados son presentados en el Apéndice 5: Capacidad teórica de identificación de fisuras en vigas vibrantes. Resultados de la hipótesis 1 - Sensibilidad de la respuesta vibratoria al daño presente.



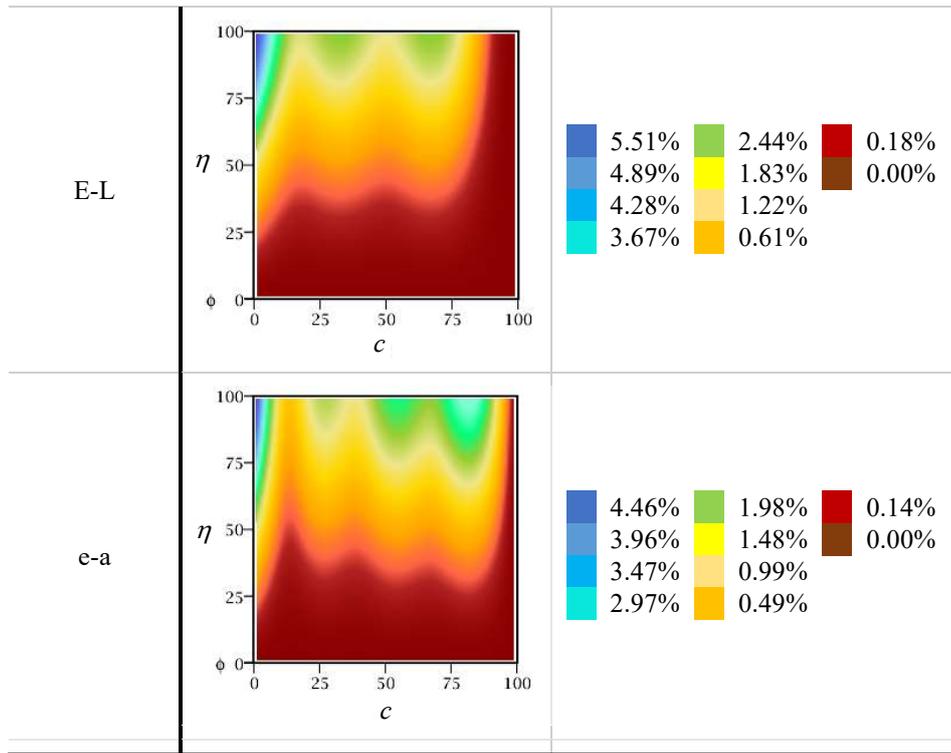


Figura 5.4 – Margen teórico de detección  $\phi_{c,\eta}^3$  para diferentes condiciones de vinculación clásicas.

### 5.2.3 Corolario de la hipótesis

Toda medición tiene asociada una incertidumbre. La misma establece que existe cierta probabilidad de que el coeficiente adimensional de frecuencias medido  $\tilde{\lambda}_n$  se encuentre en el intervalo  $\tilde{\lambda}_n \pm u_{\tilde{\lambda}_n}$ . Al normalizar las superficies adimensionales de frecuencias dividiendo la misma por el coeficiente de una viga sin fisurar  $\bar{\lambda}_n$ , se obtiene el plano medido  $\tilde{\lambda}_n/\bar{\lambda}_n$  y los planos de incertidumbre relativa dados por  $\tilde{\lambda}_n/\bar{\lambda}_n \pm \mu_{r\tilde{\lambda}_n}$ .

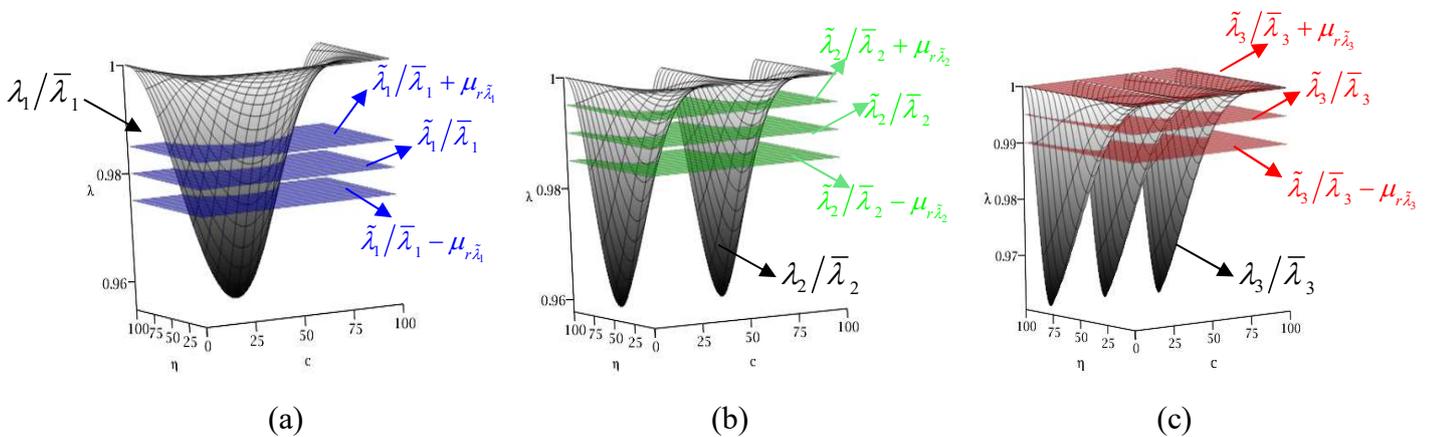


Figura 5.5 –Superficie de los coeficientes adimensionales de frecuencias normalizados de los modos 1 a 3 para la condición A-A. Planos de medición y planos de medición con incertidumbre. a) Modo 1. b) Modo 2. c) Modo 3.

A partir de los cuales se puede establecer un plano medido normalizado promedio dado por  $\frac{1}{m} \sum_{n=1}^m (\tilde{\lambda}_n / \bar{\lambda}_n)$ , una incertidumbre relativa promedio dada por  $\frac{1}{m} \sum_{n=1}^m \mu_{r\tilde{\lambda}_n}$  y una superficie de frecuencias promedio dada por  $\frac{1}{m} \sum_{n=1}^m (\lambda_n / \bar{\lambda}_n)$ . En la figura a continuación se presenta el análisis considerando 3 modos.

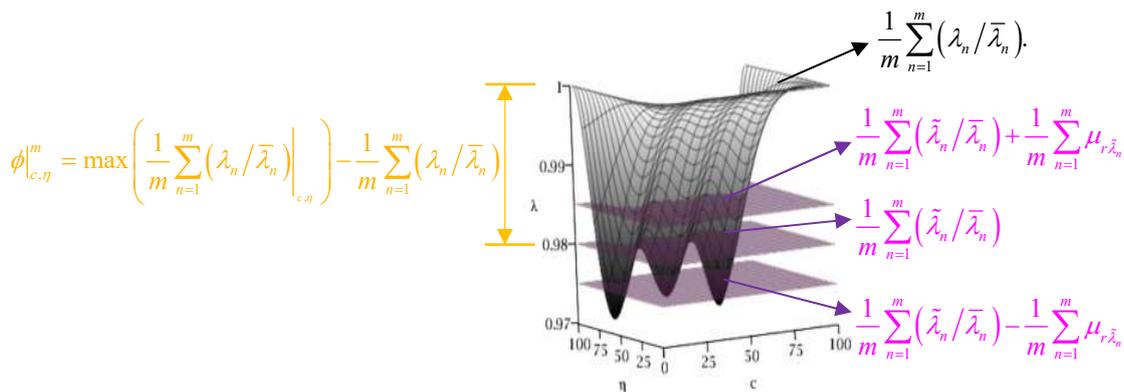


Figura 5.6 –Superficie de los coeficientes adimensionales de frecuencias normalizados promedio de los modos 1 a 3 planos para la condición A-A. Planos de medición y planos de medición con incertidumbre.

Una mayor incertidumbre en la determinación del coeficiente adimensional de frecuencias medido ( $\mu_{r\tilde{\lambda}_n}$ ) implica mayor error la identificación de la posición y profundidad de fisura que brinda el método. Por otra parte, en el inciso anterior se estableció que la capacidad de detección del método es proporcional a la diferencia entre el máximo valor de la superficie de frecuencias y el valor de la superficie de frecuencias para una determinada posición y profundidad de fisura. O sea, que esta diferencia guarda una relación inversa con el error del método. Al observar la Figura 5.6, se observa que en las regiones donde  $\mu_{r\tilde{\lambda}_n} \leq \phi_{c,\eta}^m$  el método podría funcionar pero no cuando

$$\phi_{c,\eta}^m \leq \mu_{r\tilde{\lambda}_n}.$$

Por lo tanto, se plantea como corolario de la hipótesis 1 que: **“el error máximo pronosticado ( $\hat{e}^{\max}$ ) es proporcional a la incertidumbre relativa en la medición ( $\bar{\mu}_{r\tilde{\lambda}}$ ) e inversamente proporcional a la sensibilidad de la respuesta vibratoria al daño presente en la viga ( $\phi_{c,\eta}^m$ )”**.

El mismo queda expresado matemáticamente según:

$$\hat{e}^{\max} = \frac{\bar{\mu}_{r\tilde{\lambda}}}{\phi_{c,\eta}^m} = \frac{\frac{1}{m} \sum_{n=1}^m \mu_{r\tilde{\lambda}_n}}{\max\left(\frac{1}{m} \sum_{n=1}^m (\lambda_n / \bar{\lambda}_n)\right) - \left(\frac{1}{m} \sum_{n=1}^m (\lambda_n / \bar{\lambda}_n)\right)} 100\% \quad 5.8$$

### 5.2.4 Resultados del corolario de la hipótesis 1

A continuación, se presentan los resultados del experimento propuesto para validar el corolario de la hipótesis antes formulada. Estos resultados que han sido predichos deben ser contrastados con los resultados de los análisis de sensibilidad. De esta manera confirmar o refutar la validez de esta. Dichos análisis de sensibilidad son presentados en el siguiente capítulo.

Los resultados se presentan en forma de mapeo. Para cada posición y profundidad de fisura, y para ciertas incertidumbres en la determinación de los coeficientes adimensionales de frecuencias, se ha establecido el error máximo pronosticado en la determinación de la posición y de la profundidad.

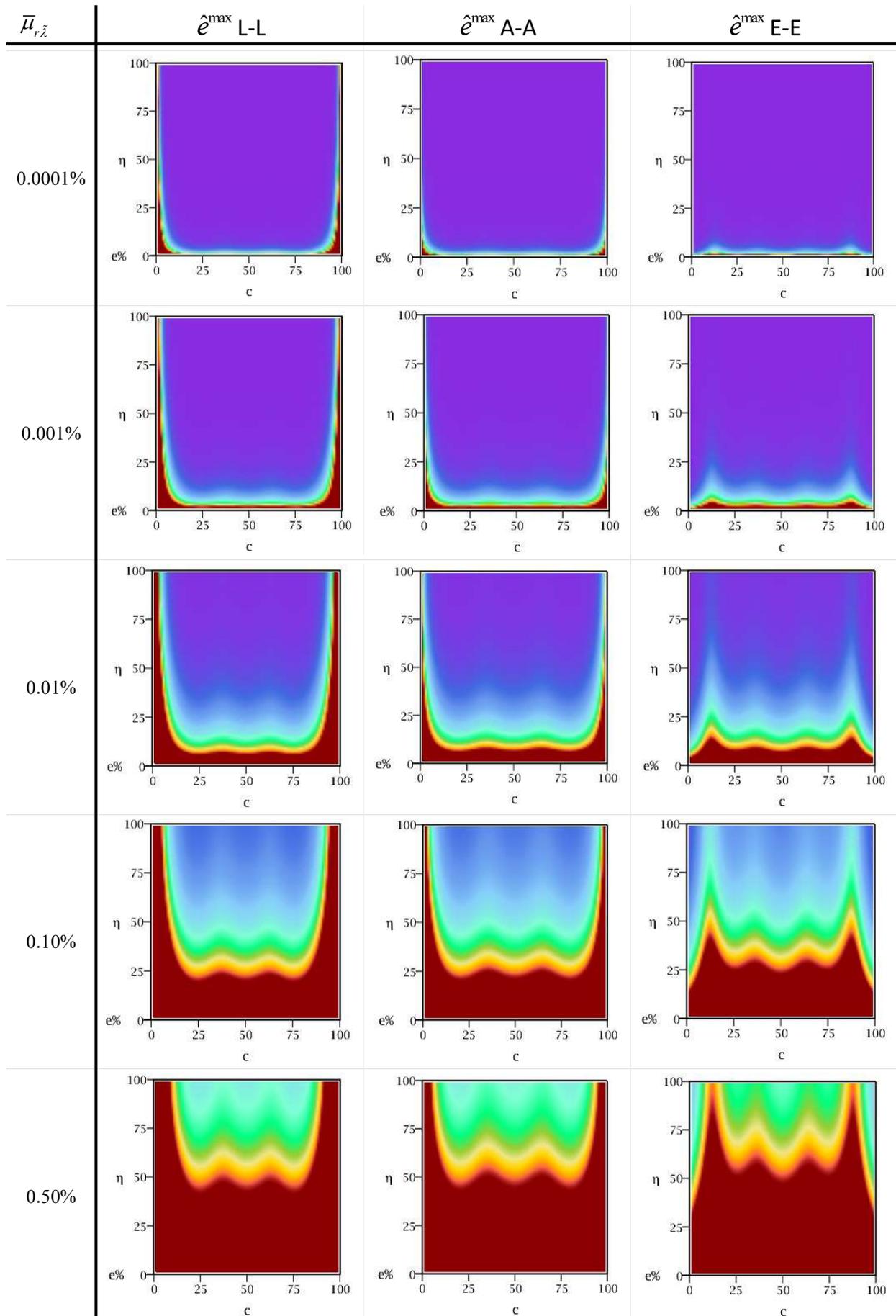
Se ha considerado en el análisis, que en los 3 modos se mantiene la misma incertidumbre en la determinación de los coeficientes adimensionales de frecuencias. Por otra parte, han sido considerados los siguientes valores de incertidumbre relativa, 0.0001%, 0.001%, 0.01%, 0.1%, 0.5%, 1%, 1.25%, 1.5% y 2%. Un rango de incertidumbres lo suficientemente grande como para representar una condición ideal donde el método funciona perfectamente para casi toda posición y profundidad de fisura y otra condición muy adversa donde el método de identificación funciona solo para fisuras muy grandes. Por otra parte, el intervalo considerado cuenta con la suficiente discretización como para analizar con precisión los estadios intermedios.

Los mapeos de error tienen una escala de valores que es la que se detalla en la Figura 5.7.

			3%		20%		50%		80%
	0%		5%		30%		60%		90%
			10%		40%		70%		100%

Figura 5.7 – Escala de valores de los mapeos de los errores pronosticados.

Se han considerado para este análisis tanto condiciones de bordes clásicas, como restricciones elásticas intermedias y en los bordes. A continuación, solo se presentan las condiciones clásicas. Para ver el resto de los casos analizados, dirigirse al Apéndice 6.



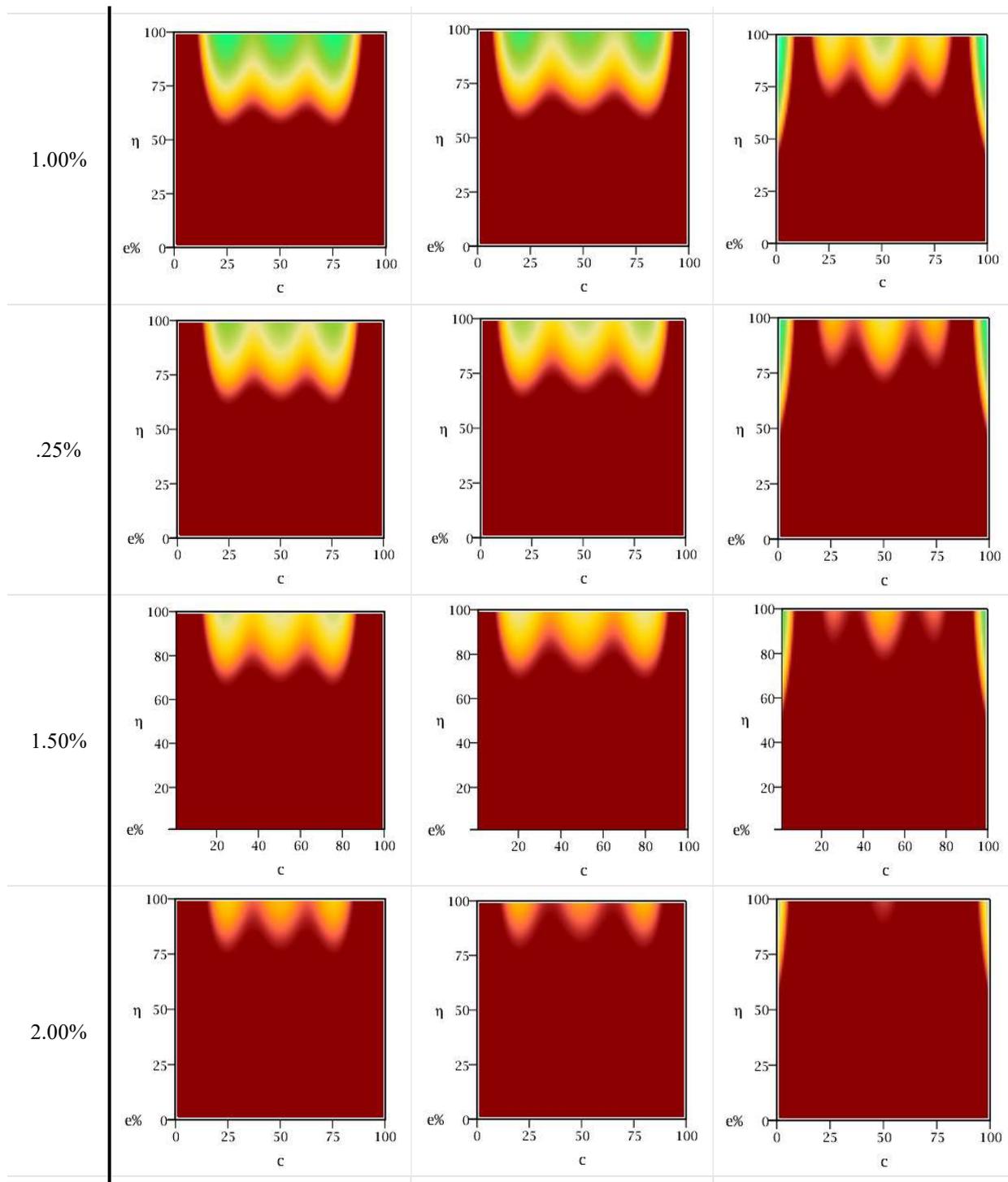


Figura 5.8 – Error pronosticado máximo  $\hat{e}^{\max}$  para vínculos clásicos simétricos.

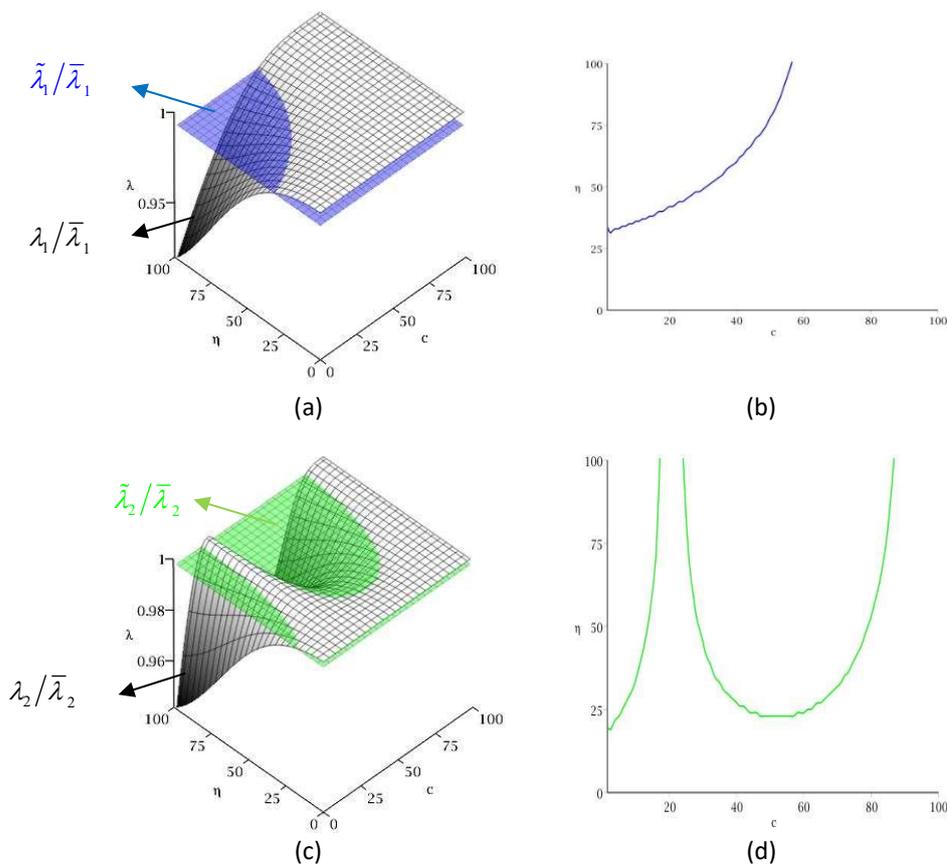
### 5.3 HIPOTESIS 2: ÁREAS DE INCERTIDUMBRE

#### 5.3.1 Formulación de la hipótesis

Para formular esta hipótesis, se parte de analizar cómo funciona el método de identificación de fisuras. Conocido el valor del parámetro  $\tilde{\lambda}_n$ , el cual corresponde al valor  $\lambda_n$  de una viga fisurada con la posición y profundidad desconocida, se procede a normalizarlo dividiendo a este por  $\bar{\lambda}_n$ , el cual corresponde al valor  $\lambda_n$  de una viga sin presencia de fisuras.

Luego se establece la curva de nivel que se obtiene de la intersección de la superficie de los coeficientes adimensionales de frecuencias normalizados con el plano dado por el valor de  $\tilde{\lambda}_n/\bar{\lambda}_n$ .

A modo de ejemplificar, en la Figura 5.9 se pueden observar las superficies adimensionales de frecuencias normalizadas, los planos de los coeficientes adimensionales de frecuencias medidos y las curvas de nivel, para los modos 1 a 3, para la condición empotrado-libre.



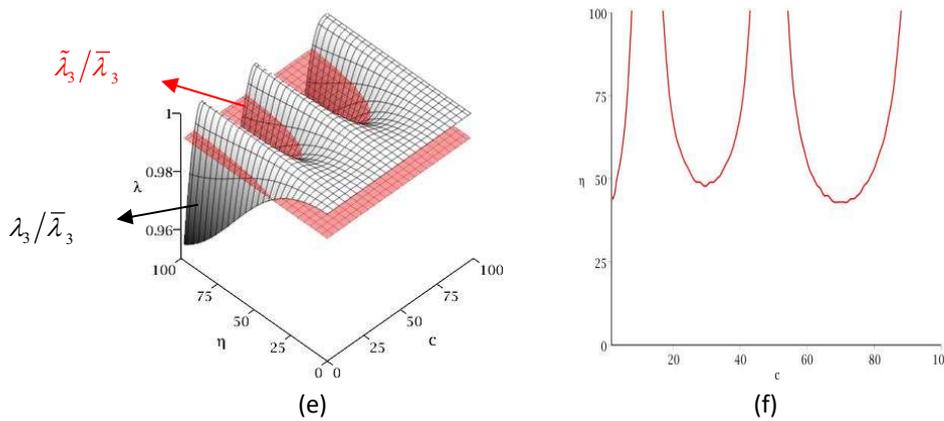


Figura 5.9 – Superficies de los coeficientes adimensionales de frecuencias, planos de los coeficientes adimensionales de frecuencias medidos y respectivas curvas de nivel, para los modos 1 a 3, para la condición empotrado-libre.

La intersección entre las curvas de nivel de los modos considerados arroja la solución del problema, es decir la posición ( $\hat{c}$ ) y profundidad ( $\hat{\eta}$ ) de la fisura pronosticada por el método. En la Figura 5.10 se presenta como se obtiene solución del método propuesto para  $\hat{c} = 0.3$  y  $\hat{\eta} = 0.5$ .

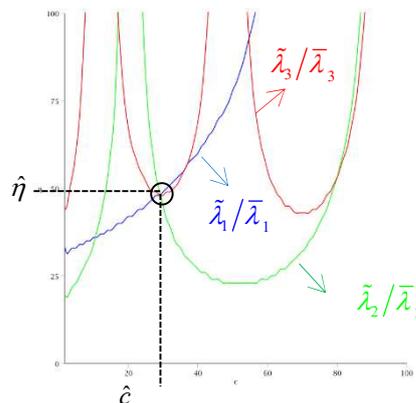


Figura 5.10 – Aplicación del método de identificación de fisuras, para la condición empotrado-libre, para  $\hat{c} = 0.3$  y  $\hat{\eta} = 0.5$ .

Desde el punto de vista de una aplicación ingenieril, el parámetro  $\tilde{\lambda}_n$  se obtiene a partir de las frecuencias naturales de vibración medidas. Toda medida experimental, tiene asociada cierta incertidumbre relativa ( $\mu_{r\tilde{\lambda}_n}$ ). La misma establece que existe cierta probabilidad de que la medida se encuentre en el intervalo  $\tilde{\lambda}_n \pm \mu_{r\tilde{\lambda}_n}$ .

Se pueden establecer las curvas de nivel para los valores extremos de esa incertidumbre. En la Figura 5.11 se observan las curvas de nivel para los valores  $\tilde{\lambda}_n - \mu_{r\tilde{\lambda}_n}$ ,  $\tilde{\lambda}_n$  y  $\tilde{\lambda}_n + \mu_{r\tilde{\lambda}_n}$  para cada modo en particular.

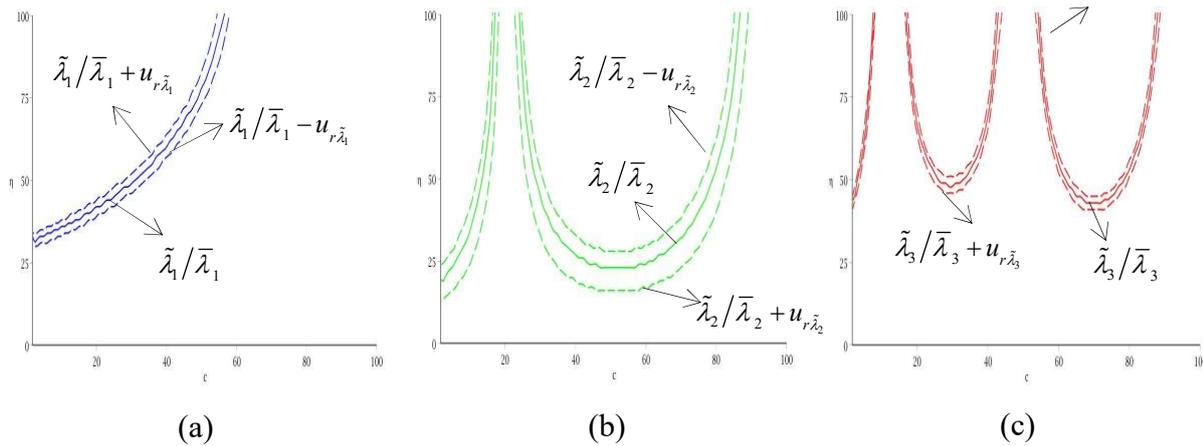


Figura 5.11 – Curvas de nivel para  $\tilde{\lambda}_n/\bar{\lambda}_n - u_{r\tilde{\lambda}_n}$ ,  $\tilde{\lambda}_n/\bar{\lambda}_n$  y  $\tilde{\lambda}_n/\bar{\lambda}_n + u_{r\tilde{\lambda}_n}$  para:  
a) Modo 1. b) Modo 2. c) Modo 3.

Entre las curvas de las cotas inferiores  $\tilde{\lambda}_n/\bar{\lambda}_n - u_{r\tilde{\lambda}_n}$  y las cotas de las curvas superiores  $\tilde{\lambda}_n/\bar{\lambda}_n + u_{r\tilde{\lambda}_n}$  de cada modo, se puede establecer un área para cada modo. En la Figura 5.12 se observa en color verde las zonas comprendidas por el área de un modo, en amarillo las zonas donde se superponen las áreas dos modos y en rojo las zonas donde se superponen las áreas de los 3 modos, la que es denominada como “área de incertidumbre.”

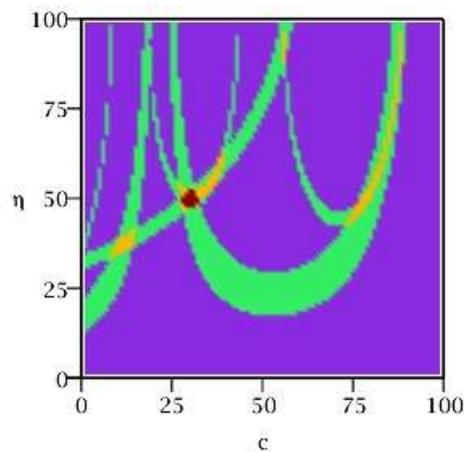


Figura 5.12 – Áreas de incertidumbres.

La solución del método de identificación de fisuras está dada por la intersección de las curvas de nivel de cada modo. Entonces, de la observación surge que al considerar al parámetro  $\tilde{\lambda}_n$  como el valor verdadero, o sea  $\tilde{\lambda}_n = \lambda_n$ , el método logra identificar perfectamente la posición ( $\hat{c}$ ) y profundidad ( $\hat{\eta}$ ) de la fisura; o sea, sin error. Se establece a  $\bar{c}$  como el valor verdadero de la posición y  $\bar{\eta}$  el valor verdadero de la profundidad. Pero si existiese en la determinación del

parámetro  $\tilde{\lambda}_n$  un error relativo ( $e_{r\tilde{\lambda}_n}$ ), la posición y profundidad de la fisura es determinada por el método de identificación propuesto contendrá un cierto error en la determinación de la posición ( $e_c$ ) y un cierto error en la de la profundidad ( $e_{\tilde{\eta}}$ ).

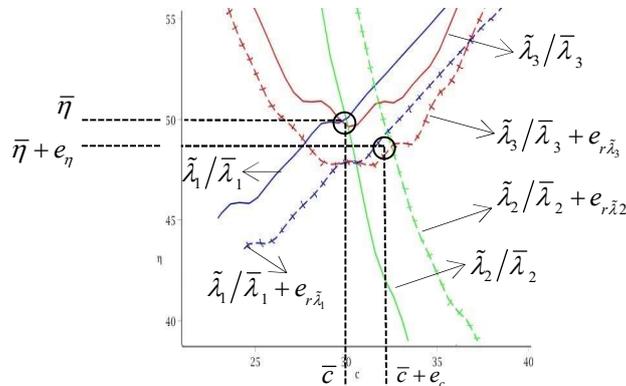


Figura 5.13 – Aplicación del método de identificación de fisuras, con y sin error.

Por lo tanto, la hipótesis 2 que se propone en la presente tesis establece que:

**“Cuando es conocida la incertidumbre relativa en la determinación del coeficiente adimensional de frecuencias para cada modo ( $u_{r\tilde{\lambda}_n}$ ), la ubicación y profundidad de la fisura obtenida por el método propuesto, estará dentro de la región comprendida por la intersección de las curvas de nivel  $(\tilde{\lambda}_n/\bar{\lambda}_n) \pm u_{r\tilde{\lambda}_n}$ , definida como área de incertidumbre”.**

En las figuras 5.14. se observan las curvas de nivel y el área de incertidumbre.

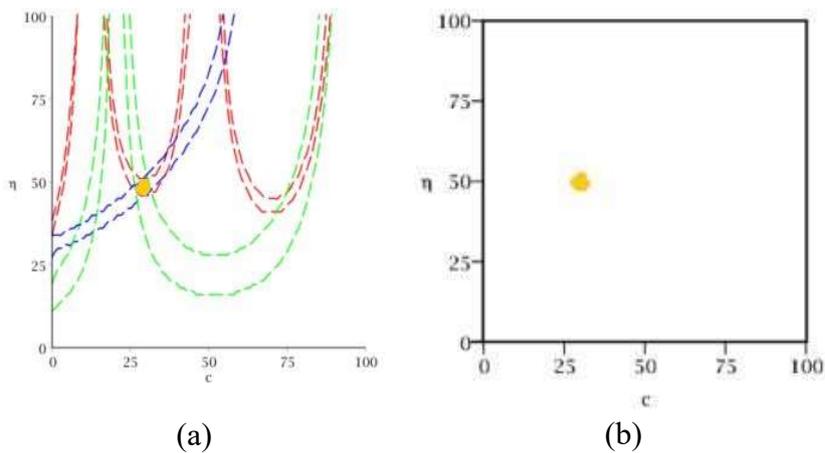


Figura 5.14 – Hipótesis área de incertidumbre para E-L, con  $\hat{c} = 0.3$ ,  $\hat{\eta} = 0.5$  y  $u_{\tilde{\lambda}_n} = 0.1\%$ .  
 a) Superposición de las curvas de nivel  $\tilde{\lambda}_n/\bar{\lambda}_n - e_{r\tilde{\lambda}_n}$  y  $\tilde{\lambda}_n/\bar{\lambda}_n + e_{r\tilde{\lambda}_n}$ . b) Área de incertidumbre.

### **5.3.2 Validación de la hipótesis**

Como toda hipótesis, se trata de un enunciado no verificado, que ha sido formulado a través de la recolección de datos, la observación y el análisis, que se intenta confirmar o refutar. Se requiere de un proceso de validación de la misma, por lo tanto, ser falsable, es decir debe estar formulada de una forma que se pueda construir un experimento que potencialmente pueda corroborar o contradecir la hipótesis.

Ahora bien, según la hipótesis antes formulada, para cada posición y profundidad de fisura, y para cada incertidumbre en la determinación de los coeficientes adimensionales de frecuencias, existe un área de incertidumbre. Y cada área de incertidumbre a su vez tiene infinitos puntos (posición y profundidad de fisuras obtenidas por la aplicación del método de identificación de fisuras, que surgen de las infinitas combinaciones de errores en la determinación de los coeficientes de frecuencias). Así planteado, es imposible desarrollar un experimento que sea capaz de validar la hipótesis haciendo un estudio sobre toda la población.

Metodológicamente se busca sobrepasar este inconveniente abordando la validación de la hipótesis de 2 maneras diferentes: Por un lado, apelando a reducir la hipótesis universal a una existencial. Por el otro, a reformular la hipótesis universal para que el experimento pueda ser realizado.

Entiéndase por hipótesis existenciales a las que se centran en un hecho concreto, buscan ser singulares y específicas de un contexto muy determinado. En cambio, las hipótesis universales a aquellas que intentan demostrar algo que sea aplicable siempre (Cabrera Fischer, 2013).

### **5.3.3 Validación de la hipótesis existencial**

Reducir la hipótesis universal antes postulada a una existencial, consiste en plantear una serie de casos ejemplo o una muestra de la población, en donde se cumpla lo enunciado anteriormente en la hipótesis original. Si bien no es científicamente concluyente, es un aporte a la validación de la hipótesis descripta.

Metodológicamente, se induce un error conocido en el coeficiente adimensional de frecuencias para cada modo, siempre menor o igual a la incertidumbre en la determinación de dicho coeficiente, y se procede a identificar la fisura empleando el método propuesto. Los resultados de este análisis de sensibilidad deben dar cuenta que las posiciones y profundidades halladas se encuentran dentro del área de incertidumbre.

A su vez, se desprende que los errores en la determinación de la posición y profundidad no deben ser mayores que los obtenidos en las peores combinaciones de los errores en la determinación de los coeficientes adimensionales de frecuencias, o sea la combinación de los valores extremos de error, cuando  $e_{\tilde{\lambda}_n} = u_{\tilde{\lambda}_n}$ .

Los resultados de la hipótesis existencial se encuentran en la sección siguiente. Los experimentos para su constatación son presentados en el Capítulo 6: Análisis de sensibilidad.

### 5.3.4 Resultados de la hipótesis existencial

A continuación, se presentan los resultados de la hipótesis existencial de las áreas de incertidumbre para el caso L-L. Se analizaron diferentes condiciones de vinculación, tanto clásicos como apoyos elásticos, para una incertidumbre en la determinación del coeficiente adimensional de frecuencias para cada modo constante,  $u_{\tilde{\lambda}_n} = 0.1\%$ . Los mismos están presentes en el Apéndice 5C.

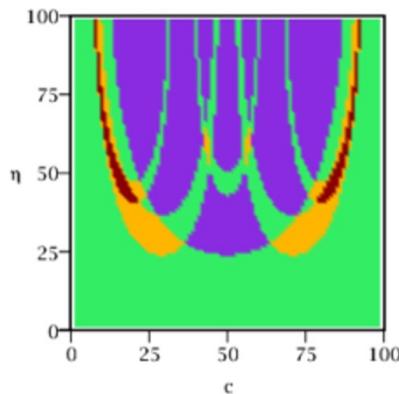


Figura 5.15 –Área de incertidumbre para L-L,  $c = 0.15$  y  $\eta = 0.50$ , cuando  $u_{\tilde{\lambda}_n} = 0.1\%$ .

### 5.3.5 Reformulación y validación de la hipótesis universal

El área de incertidumbre contiene infinitos puntos que representan la posición y profundidad determinada al aplicar el método de identificación de fisuras. Para cada uno de estos puntos, por lo tanto, se puede establecer un error en la determinación de la posición ( $e_{\tilde{c}}$ ) y profundidad ( $e_{\tilde{\eta}}$ ). Por otra parte, de la propia definición de incertidumbre, es muy poco probable que el error relativo en la determinación del coeficiente adimensional de frecuencias ( $e_{r_{\tilde{\lambda}_n}}$ ) sea mayor a la incertidumbre relativa en la determinación del coeficiente adimensional de frecuencias para cada modo ( $u_{r_{\tilde{\lambda}_n}}$ ).



Esta hipótesis permite idear un experimento para validarla. En este sentido, para cierto nivel de incertidumbre relativa en los coeficientes adimensionales de frecuencias ( $u_{r\tilde{\lambda}_n}$ ) de los  $n$  modos empleados en el método de identificación de fisuras, para determinada posición ( $\bar{c}$ ) y profundidad ( $\bar{\eta}$ ) de fisura, se puede establecer el área de incertidumbre. Y, por consiguiente, determinar el valor máximo ( $c_A^{\max}$ ) y mínimo ( $c_A^{\min}$ ) de la posición de dicha área y el valor máximo ( $\eta_A^{\max}$ ) y mínimo ( $\eta_A^{\min}$ ) de la profundidad del área de incertidumbre. Así el error pronosticado máximo en la determinación de la posición ( $\hat{e}_{\bar{c}}^{\max}$ ), será el mayor valor entre  $\hat{e}_{\bar{c}}^{\max} = |c_A^{\max} - \bar{c}|$  y  $\hat{e}_{\bar{c}}^{\max} = |\bar{c} - c_A^{\min}|$ . En forma análoga, el error pronosticado máximo en la determinación de la profundidad ( $\hat{e}_{\bar{\eta}}^{\max}$ ) será el mayor valor entre  $\hat{e}_{\bar{\eta}}^{\max} = |\eta_A^{\max} - \bar{\eta}|$  y  $\hat{e}_{\bar{\eta}}^{\max} = |\bar{\eta} - \eta_A^{\min}|$ . Esto se observa claramente en la Figuras 5.17.

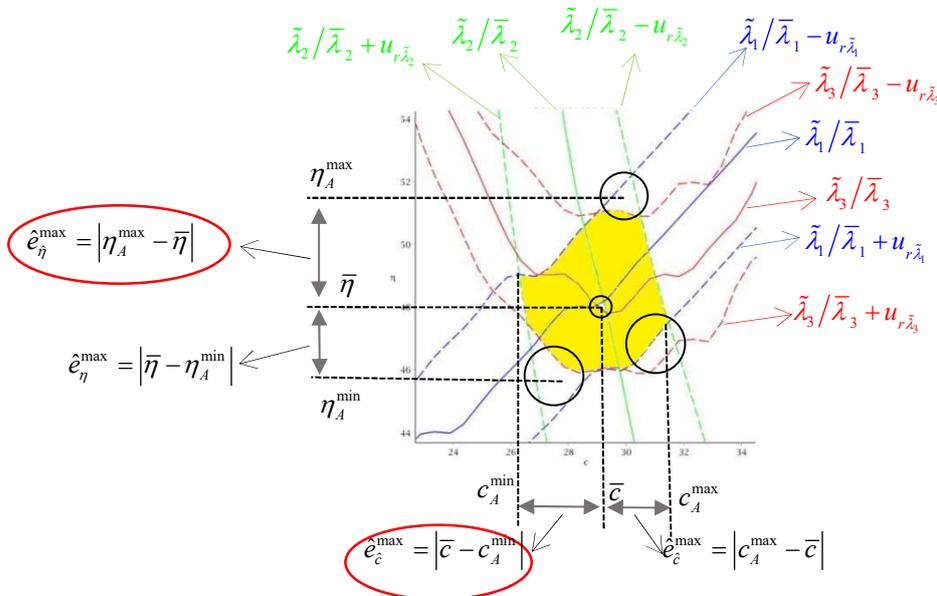


Figura 5.17 – Explicación gráfica de la hipótesis universal denominada área de incertidumbre.

Así para cada posición y profundidad de fisura se pueden establecer los errores pronosticados máximos  $\hat{e}_{\bar{c}}^{\max}$  y  $\hat{e}_{\bar{\eta}}^{\max}$ . Considerar el error máximo, si bien metodológicamente es útil para validar la hipótesis, al tomar valores de errores extremos resulta ser un criterio severo con el método de identificación de fisuras propuesto. En la realidad, al aplicar el método de identificación de fisuras, es más probable que los errores en la determinación de los coeficientes adimensionales de frecuencia sean menores y por lo tanto los errores del método de identificación también lo sean. Un criterio arbitrario, pero más realista es considerar un error promedio. Se propone que el error

pronosticado promedio en la determinación de la posición  $\hat{e}_c^{pro}$  y de la profundidad  $\hat{e}_\eta^{pro}$  sean obtenidos respectivamente como  $\hat{e}_c^{pro} = \hat{e}_c^{max} / 2$  y  $\hat{e}_\eta^{pro} = \hat{e}_\eta^{max} / 2$ .

Entonces, establecidos los errores pronosticados para cada posición y profundidad de fisura posible, se pueden establecer mapeos de los errores pronosticados. Estos a su vez, se los puede comparar con los mapeos de errores obtenidos del análisis de sensibilidad. De la correlación entre los errores pronosticados y efectivamente obtenidos, confirmar o refutar las hipótesis planteadas.

### 5.3.6 Resultados de la hipótesis universal

Los resultados se presentan en forma de mapeo. Para cada posición y profundidad de fisura, y para ciertas incertidumbres en la determinación de los coeficientes adimensionales de frecuencias, se ha pronosticado el error máximo y el error promedio en la determinación de la posición y de la profundidad. Se ha considerado en el análisis, que en los 3 modos se mantienen las mismas incertidumbres en la determinación de los coeficientes adimensionales de frecuencias ( $u_{r\tilde{\lambda}_n}$ ). Por otra parte, han sido considerados los siguientes valores de incertidumbre, 0.0001%, 0.001%, 0.01%, 0.1%, 0.5%, 1%, 1.25%, 1.5% y 2%. Un rango de incertidumbres lo suficientemente grande como para representar una condición ideal donde el método funciona perfectamente para casi toda posición y profundidad de fisura y otra condición muy adversa donde el método de identificación funciona solo para fisuras muy grandes. Por otra parte, el intervalo considerado cuenta con la suficiente discretización como para analizar con precisión los estadios intermedios. Los mapeos de errores pronosticados, tanto máximos como promedios, tienen una escala de valores que es la que se detalla en la Figura 5.18.

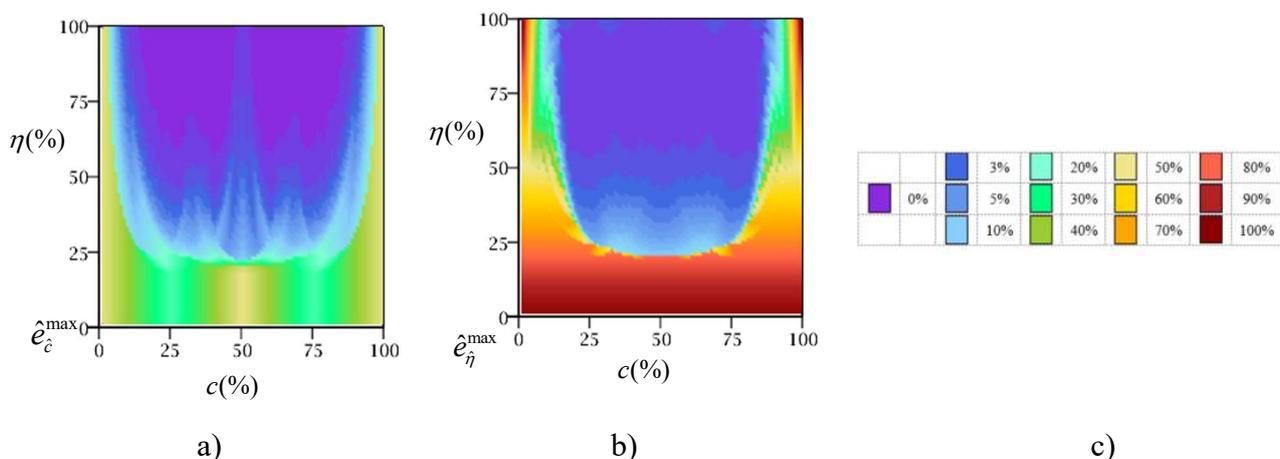
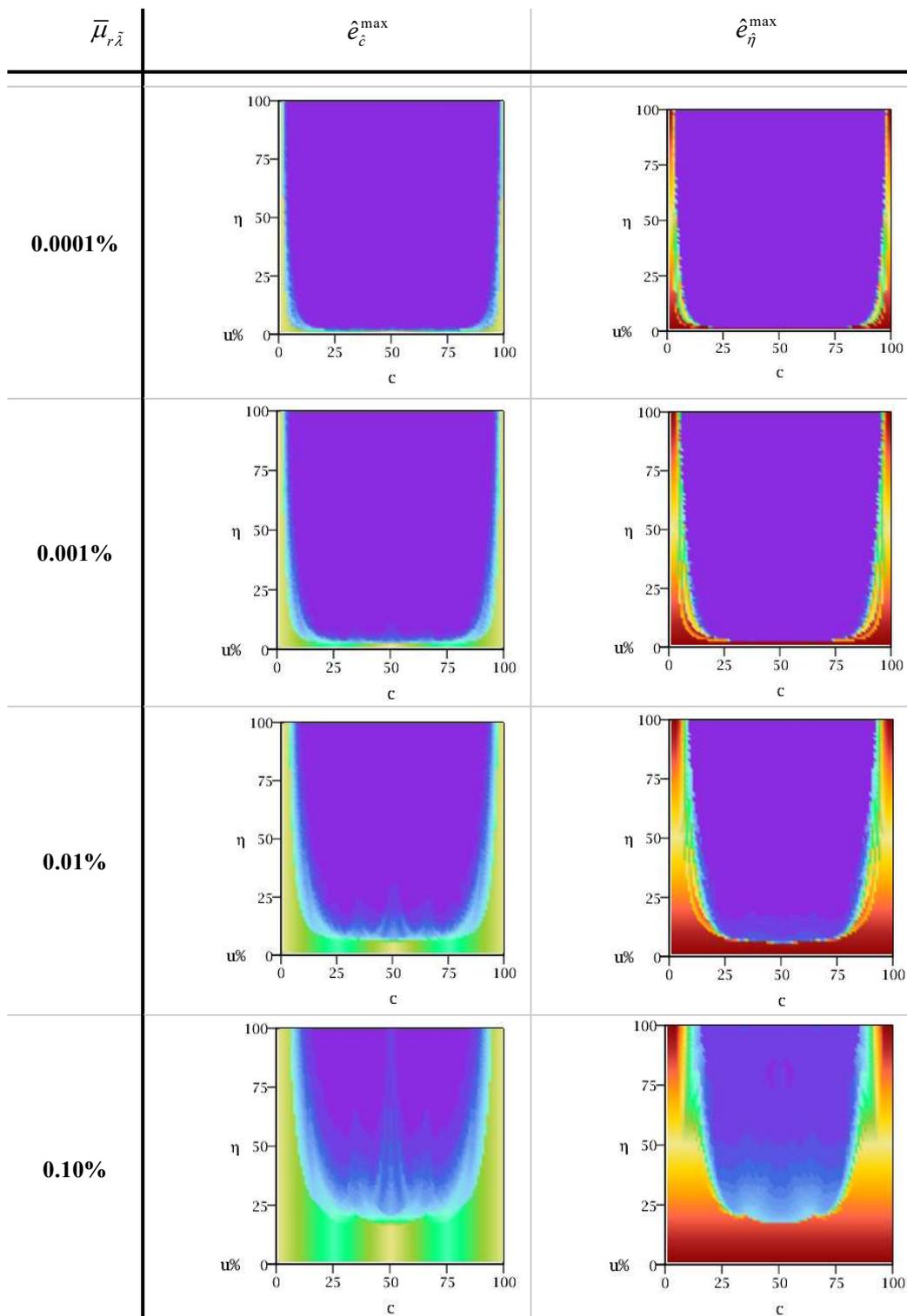


Figura 5.18 – a) Errores pronosticados en la determinación de la posición ( $\hat{e}_c^{max}$ ) y b) error pronosticados en la determinación de la profundidad ( $\hat{e}_\eta^{max}$ ) cuando la incertidumbre promedio en los coeficientes de frecuencias ( $\bar{u}_{r\tilde{\lambda}}$ ) está en el intervalo  $(-0.1\%, +0.1\%)$  para el caso A-A. c) Escala de colores

Se han considerado para este análisis tanto condiciones de bordes clásicas, como restricciones elásticas intermedias y en los bordes. A continuación, se presenta a modo de ejemplo el caso L-L y el resto de los casos estudiados se hallan en Apéndice 6.



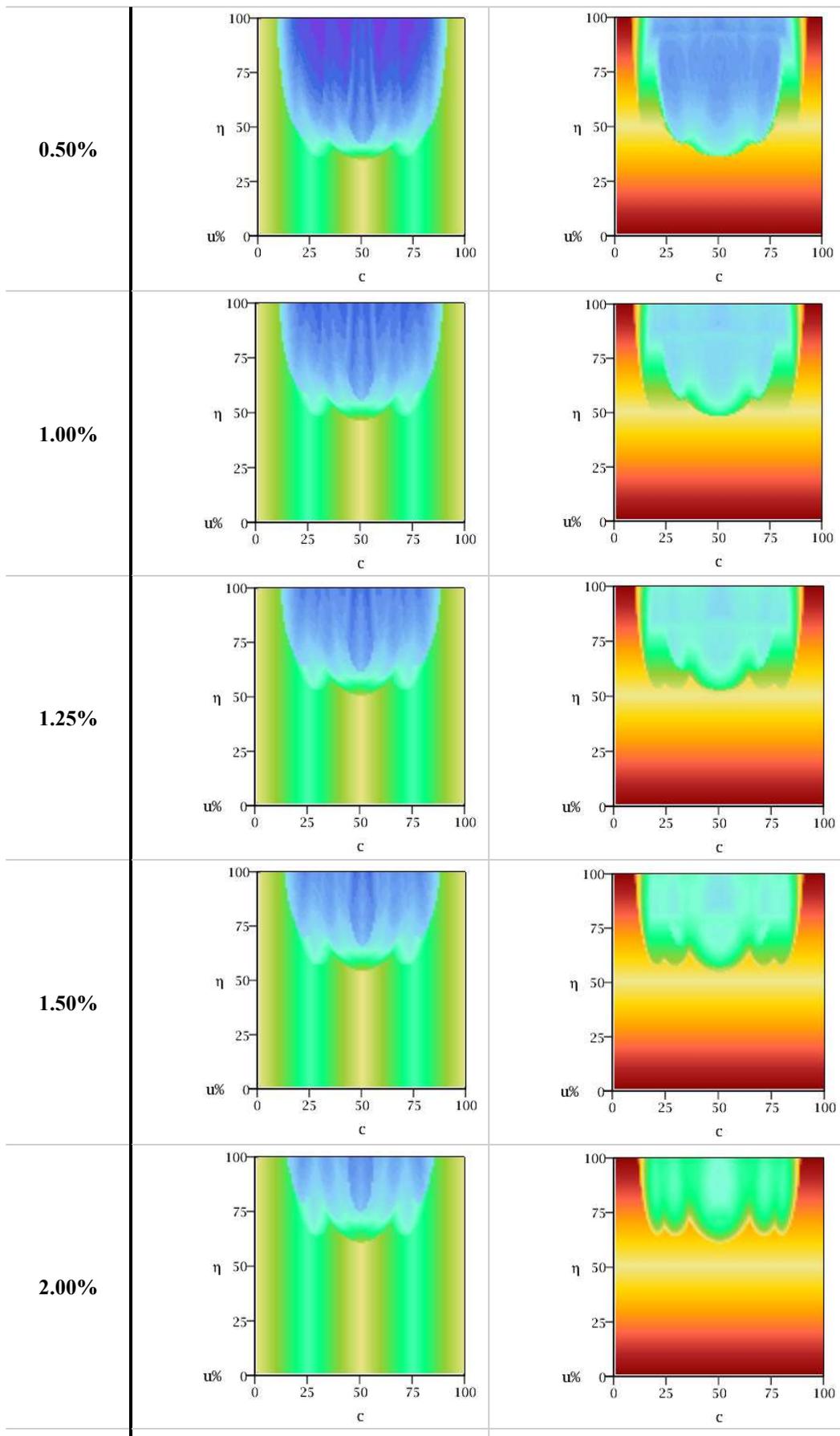
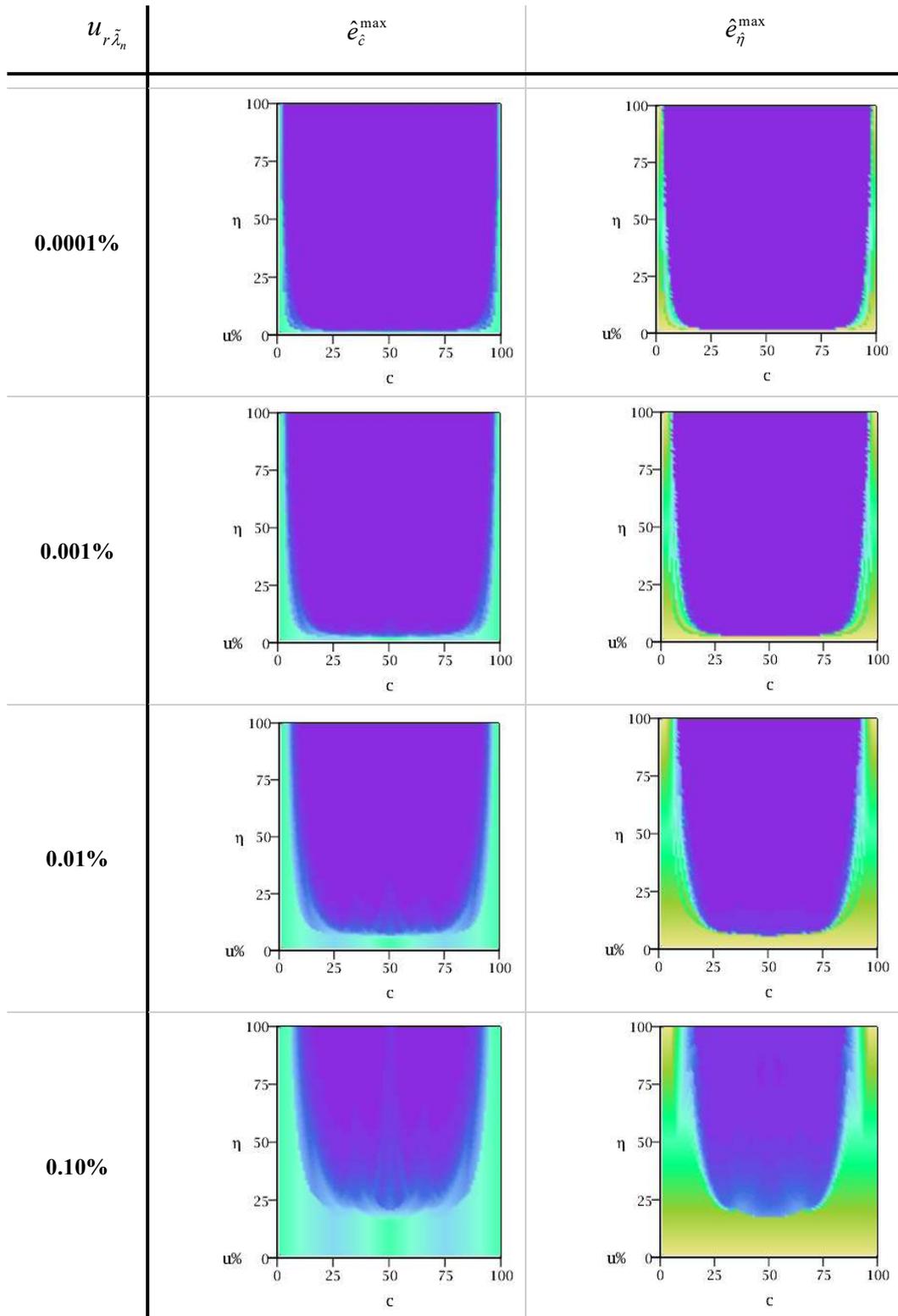


Figura 5.19 – Error máximo pronosticado en la determinación de la posición ( $\hat{\epsilon}_c^{\max}$ ) y profundidad ( $\hat{\epsilon}_\eta^{\max}$ ) para la condición L-L.



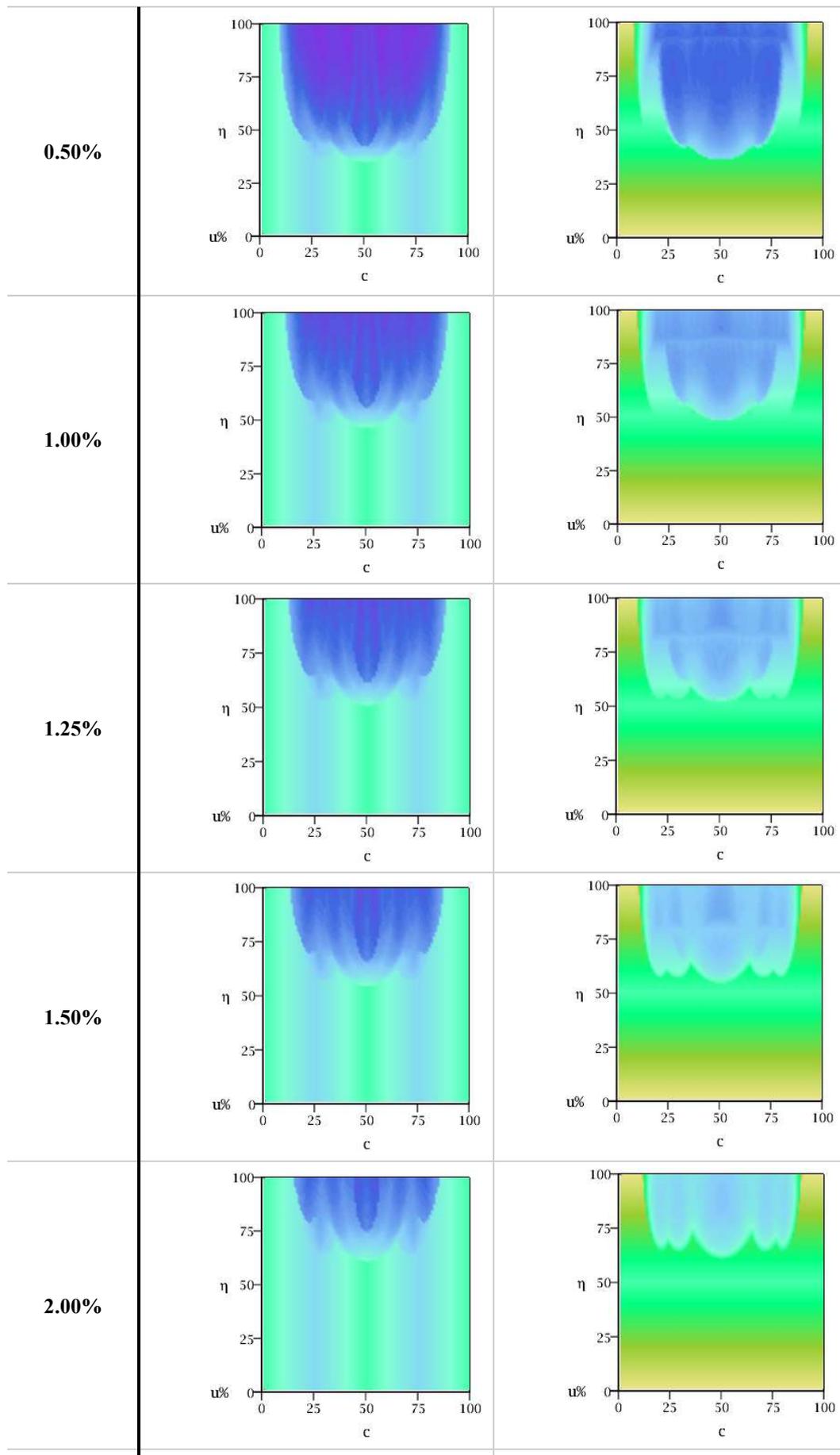


Figura 5.20 – Error promedio pronosticado en la determinación de la posición ( $\hat{e}_c^{pro}$ ) y profundidad ( $\hat{e}_\eta^{pro}$ ) para la condición L-L.

## 5.4 APORTES Y CONCLUSIONES DE ESTE CAPÍTULO

Para el método analítico de identificación de fisuras basados en mediciones de frecuencias naturales de vibración que utiliza la intersección de las curvas de nivel de las superficies de frecuencias, denominado en el capítulo 4 como método 2, se desarrollaron dos hipótesis sobre la capacidad teórica de identificación.

La primera establece que "La capacidad de detección del método es proporcional a la sensibilidad de la respuesta vibratoria al daño presente en la viga, el cual se manifiesta como la diferencia entre el máximo valor de la superficie de frecuencias normalizada y el valor de la superficie de frecuencias normalizada para una determinada posición y profundidad de fisura." La misma permite establecer la incertidumbre relativa admisible promedio en la determinación del coeficiente adimensional de frecuencias medido ( $\bar{\mu}_{r\tilde{\lambda}}^{adm}$ ) que el método de identificación de fisuras es capaz de tolerar.

Su corolario establece que "el error máximo pronosticado es igual al cociente entre la incertidumbre relativa en la medición y la distancia disponible." Así, se relacionan la incertidumbre en los coeficientes adimensionales de frecuencias medidos ( $u_{r\tilde{\lambda}_n}$ ), con el error de salida esperado ( $\hat{e}^{\max}$ ). Una de las ventajas de este método es que el algoritmo es de fácil implementación y los resultados presentados como mapeos son muy rápidos de obtener. Su limitante es que determina un error de salida del método, sin diferenciarse entre el error en la determinación de la posición y profundidad de la fisura.

Luego, en la segunda hipótesis se relacionan la incertidumbre en la determinación de los datos de entrada del método de identificación de fisuras, o sea ( $u_{r\tilde{\lambda}_n}$ ), con el error esperado en la determinación de la posición ( $\hat{e}_c^{\max}$ ) y profundidad de la fisura ( $\hat{e}_{\tilde{\eta}}^{\max}$ ). El desarrollo y su implementación en un algoritmo es más compleja, obtener sus resultados lleva más tiempo, pero tiene como ventaja que especifica el error para cada salida del método.

Ambas hipótesis como así sus corolarios, reformulaciones y resultados son completamente novedosas.

# CAPÍTULO 6

## ANÁLISIS DE SENSIBILIDAD

### 6.1 INTRODUCCIÓN

En el capítulo anterior se analizó la capacidad teórica de detección del método de identificación de fisuras basado en la intersección de las curvas de nivel de los coeficientes adimensionales de frecuencias medidos (Método 2). Se plantearon dos hipótesis de trabajo que fueron originadas a partir de la observación y experimentos preliminares; dando lugar a deducciones lógicas. Para ser aceptadas como válidas, las hipótesis propuestas necesitan ser verificadas experimentalmente.

A tal fin, se recurre al análisis de sensibilidad, un experimento numérico que consiste en inducir alteraciones conocidas en las variables de entrada, o sea en los coeficientes de frecuencias, y observar que resultados arroja como variables de salida el método de identificación de fisuras, o sea la posición y profundidad de la fisura.

Los resultados obtenidos no solo pretenden validar las hipótesis y las deducciones lógicas que dieron lugar a las mismas, sino también establecer una cuantiosa recolección de datos que hace que la muestra tienda a alcanzar la población; y, por lo tanto, establecer respuestas a los problemas que esta tesis formula como objeto de su investigación.

## 6.2 ANÁLISIS DE SENSIBILIDAD EN ALGUNOS CASOS PARTICULARES

Las diferentes combinaciones de posiciones y profundidades de fisuras arrojan una infinidad de posibilidades. Razón por lo cual, en esta sección el análisis de sensibilidad se concentra en algunos casos particulares.

### 6.2.1 Metodología

El análisis de sensibilidad es el estudio de como diferentes fuentes de incertidumbre en las entradas de un modelo matemático o sistema (numérico u otro) puede producir incertidumbre en sus salidas. Son de suma utilidad para probar la robustez del modelo.

En este caso, el análisis de sensibilidad se aplica al método de identificación de fisuras basado en la intersección de las curvas de nivel de los coeficientes adimensionales de frecuencias. El mismo consiste en inducir un error conocido en las entradas del sistema, o sea en el  $\tilde{\lambda}$  de cada modo, resolver el problema inverso obteniendo las variables de salida del sistema, o sea la posición,  $\hat{c}$ , y la profundidad,  $\hat{\eta}$ , de la fisura. A partir de cuales, se puede determinar el error en la determinación de la posición ( $e_c$ ) y de la profundidad ( $e_{\eta}$ ).

El parámetro  $\tilde{\lambda}_n$  es definido como el valor exacto de  $\lambda_n$  con un error máximo inducido  $e_n$ , con  $n = 1, 2, 3$ . Así, el error relativo porcentual en la determinación del coeficiente adimensional de frecuencias,  $e_{\lambda_n}$ , está dado por:

$$e_{\lambda_n} = \left| \frac{\tilde{\lambda}_n - \lambda_n}{\lambda_n} \right| 100\%. \quad 6.1$$

El error relativo porcentual en la determinación de la ubicación  $e_c$  y profundidad  $e_{\eta}$  de la fisura están dados por la diferencia entre la coordenada de la fisura  $(c, \eta)$  y los valores obtenidos con el método de identificación propuesto  $(\hat{c}, \hat{\eta})$ , de acuerdo a:

$$e_c = (c - \hat{c})100\% \quad y \quad e_{\hat{\eta}} = (\eta - \hat{\eta})100\%. \quad 6.2$$

Es necesario notar que se trata de un error relativo ya que tanto la posición y profundidad ya se encuentran normalizadas en el intervalo (0,1).

A continuación, se presentan 3 estudios de análisis de sensibilidad. En todos ellos, las variables controladas del experimento serán los valores de los coeficientes de frecuencias y las variables observadas serán la posición y profundidad de fisura pronosticada por el método de identificación.

Sin embargo, el objetivo de cada estudio es distinto. En el primero, se pretende analizar la respuesta del método de identificación de fisuras para diferentes condiciones de vinculación. En el segundo, se analiza la respuesta para fisuras con diferentes ubicación y severidad. Por último, se analiza la salida del método de identificación de fisuras para diferentes niveles de error inducido en la entrada.

Metodológicamente se modifica un parámetro a la vez, asumiendo que todos los demás permanecen sin alteración alguna. Por ejemplo, en el primer estudio se fija la ubicación y severidad de fisura, como el intervalo de error admisible, mientras se repite el estudio para diferentes condiciones de vinculación. En el segundo, se fija la condición de vinculación y el intervalo de error admisible, mientras se repite el estudio para para fisuras con diferentes ubicación y severidad. En el tercer análisis, se fija la condición de vinculación y la ubicación y severidad de fisura, cuando se varía el intervalo de error admisible en los datos de entrada.

En experimentos numéricos preliminares, se observó que inducir error en uno solo de los modos, daba como resultado que el método lograba identificar las características de la fisura sin errores. Considerando, además, que toda medida experimental tendrá asociado un error, se determinó inducir un error conocido en los 3 modos. Se presentan todas las combinaciones posibles de errores máximos en los 3 primeros modos y algunas combinaciones de errores aleatorios.

### 6.2.2 Análisis de sensibilidad para diferentes condiciones de vinculación

Vale notar que Doleček y Ekinovic (2005) establecen que la resolución en la determinación de las frecuencias naturales de estructuras ligeramente amortiguadas es típicamente 0.1%. Este valor se toma como parámetro para la mayoría de los análisis que se presentan en la sección.

Se presenta el análisis para diferentes condiciones de vinculación, en todos para la misma posición y profundidad de fisura,  $c=0.15$  y  $\eta=0.50$ . En cada una de las tablas, en el caso 1 no se induce error. Los casos 2 a 9 se corresponden a la peor combinación de los valores extremos de  $e_{\lambda_n}$  y los casos 10 a 20 se corresponden a errores aleatorios en el intervalo  $(-e_{\lambda_n}, e_{\lambda_n})$ . Los máximos errores inducidos son  $e_{\lambda_n} = 0.1\%$ . En la Tabla 6.1 se presenta el caso L-L, el resto de los análisis se pueden consultar en el Apéndice 6A: Análisis de sensibilidad para diferentes condiciones de vinculación.

Caso	$e_{\lambda_1}$	$e_{\lambda_2}$	$e_{\lambda_3}$	$\hat{c}$	$\hat{\eta}$	$e_{\hat{c}}$	$e_{\hat{\eta}}$
1	0.00%	0.00%	0.00%	0.15	0.50	0%	0%
2	0.10%	0.10%	0.10%	0.20	0.48	5%	-2%
3	0.10%	0.10%	-0.10%	0.19	0.54	4%	4%
4	0.10%	-0.10%	0.10%	0.23	0.47	8%	-3%
5	0.10%	-0.10%	-0.10%	0.22	0.52	7%	2%
6	-0.10%	0.10%	0.10%	0.20	0.48	5%	-2%
7	-0.10%	0.10%	-0.10%	0.17	0.60	2%	10%
8	-0.10%	-0.10%	0.10%	0.23	0.47	8%	-3%
9	-0.10%	-0.10%	-0.10%	0.22	0.52	7%	2%
10	0.03%	0.05%	0.04%	0.20	0.50	5%	0%
11	0.10%	0.01%	-0.03%	0.21	0.50	6%	0%
12	0.00%	-0.09%	0.09%	0.23	0.47	8%	-3%
13	0.07%	-0.04%	-0.04%	0.21	0.51	6%	1%
14	-0.10%	0.05%	0.02%	0.20	0.50	5%	0%
15	-0.04%	0.07%	0.00%	0.19	0.52	4%	2%
16	-0.04%	-0.09%	0.00%	0.22	0.50	7%	0%
17	-0.07%	-0.04%	-0.06%	0.21	0.51	6%	1%
18	-0.04%	0.02%	0.00%	0.20	0.51	5%	1%
19	0.05%	0.00%	-0.02%	0.20	0.51	5%	1%
20	-0.02%	-0.02%	0.00%	0.21	0.50	6%	0%

Tabla 6.1 – Análisis de sensibilidad para vigas L-L con  $c=0.15$  y  $\eta=0.50$ .

### 6.2.3 *Análisis de sensibilidad para casos con diferentes posiciones y profundidades de fisura*

En este análisis solo es considerado el caso articulado-articulado, el error en los coeficientes de frecuencias es de  $e_{\lambda_n} = 0.1\%$ , y se consideran diferentes posiciones y profundidades de fisura.

Se presentan los valores de  $\hat{c}$  y  $\hat{\eta}$  predichos con el método de identificación de fisuras. Donde el caso 1 no tiene error inducido, los casos 2 a 9 corresponden a la peor combinación de valores extremos de  $e_{\lambda_n}$  y los casos 10 a 20 corresponden a errores aleatorios en el intervalo  $(-e_{\lambda_n}, e_{\lambda_n})$ . En la Tabla 6.2 se presenta el análisis de sensibilidad para vigas A-A con  $c=0.15$  y  $\eta=0.30$ , el resto de los análisis se pueden consultar en el Apéndice 6A: Análisis de sensibilidad para casos con diferentes posiciones y profundidades de fisura.

Caso	$e_{\lambda_1}$	$e_{\lambda_2}$	$e_{\lambda_3}$	$\hat{c}$	$\hat{\eta}$	$e_{\hat{c}}$	$e_{\hat{\eta}}$
1	0.00%	0.00%	0.00%	0.15	0.30	0%	0%
2	0.10%	0.10%	0.10%	0.07	0.38	-8%	8%
3	0.10%	0.10%	-0.10%	0.03	0.98	-12%	68%
4	0.10%	-0.10%	0.10%	0.23	0.30	8%	0%
5	0.10%	-0.10%	-0.10%	0.16	0.43	1%	13%
6	-0.10%	0.10%	0.10%	0.50	0.23	35%	-7%
7	-0.10%	0.10%	-0.10%	0.03	0.98	-12%	68%
8	-0.10%	-0.10%	0.10%	0.24	0.31	9%	1%
9	-0.10%	-0.10%	-0.10%	0.17	0.34	2%	4%
10	0.05%	0.02%	0.07%	0.18	0.26	3%	-4%
11	0.07%	0.04%	-0.06%	0.03	0.92	-12%	62%
12	0.04%	-0.08%	0.03%	0.20	0.30	5%	0%
13	0.03%	-0.02%	0.00%	0.16	0.30	1%	0%
14	-0.08%	0.02%	0.02%	0.15	0.29	0%	-1%
15	-0.03%	0.07%	-0.08%	0.03	0.94	-12%	64%
16	-0.03%	-0.07%	0.01%	0.19	0.30	4%	0%
17	-0.04%	-0.07%	-0.08%	0.17	0.33	2%	3%
18	-0.02%	0.00%	-0.03%	0.13	0.33	-2%	3%
19	0.04%	0.02%	0.00%	0.11	0.34	-4%	4%
20	-0.03%	0.00%	0.00%	0.15	0.30	0%	0%

Tabla 6.2 – Análisis de sensibilidad para vigas A-A con  $c = 0.15$  y  $\eta = 0.30$ .

#### 6.2.4 Análisis de sensibilidad para casos con diferentes niveles de error en los coeficientes de frecuencia

En esta oportunidad el análisis de sensibilidad se realiza para una única posición y profundidad de fisura,  $c=0.30$  y  $\eta=0.50$ , para una única condición de vinculación, A-A, mientras el error inducido en el coeficiente adimensional de frecuencias varía según  $e_{\lambda_n} = 0.01\%$ ,  $0.10\%$ ,  $0.50\%$ ,  $1.00\%$ .

Se presentan los valores de  $\hat{c}$  y  $\hat{\eta}$  predichos con el método de identificación de fisuras. Donde el caso 1 no tiene error inducido, los casos 2 a 9 corresponden a la peor combinación de valores extremos de  $e_{\lambda_n}$  y los casos 10 a 20 corresponden a errores aleatorios en el intervalo  $(-e_{\lambda_n}, e_{\lambda_n})$ . En la Tabla 6.3 se presenta el análisis de sensibilidad para vigas A-A con  $c=0.30$  y  $\eta=0.50$  con  $e_{\lambda_n} = 0.01\%$ . El resto de los casos analizados son presentados en el Apéndice 7: Análisis de sensibilidad para casos con diferentes niveles de error en los coeficientes de frecuencia.

CASO	$e_{\lambda_1}$	$e_{\lambda_2}$	$e_{\lambda_3}$	$\hat{c}$	$\hat{\eta}$	$e_{\hat{c}}$	$e_{\hat{\eta}}$
1	0.000%	0.000%	0.000%	0.30	0.50	0%	0%
2	0.010%	0.010%	0.010%	0.30	0.50	0%	0%
3	0.010%	0.010%	-0.010%	0.30	0.50	0%	0%
4	0.010%	-0.010%	0.010%	0.30	0.50	0%	0%
5	0.010%	-0.010%	-0.010%	0.30	0.50	0%	0%
6	-0.010%	0.010%	0.010%	0.30	0.50	0%	0%
7	-0.010%	0.010%	-0.010%	0.30	0.50	0%	0%
8	-0.010%	-0.010%	0.010%	0.30	0.50	0%	0%
9	-0.010%	-0.010%	-0.010%	0.30	0.50	0%	0%
10	0.004%	0.007%	0.005%	0.30	0.50	0%	0%
11	0.003%	0.006%	-0.006%	0.30	0.50	0%	0%
12	0.005%	-0.002%	0.001%	0.30	0.50	0%	0%
13	0.009%	-0.008%	-0.008%	0.30	0.50	0%	0%
14	-0.007%	0.003%	0.005%	0.30	0.50	0%	0%
15	-0.002%	0.009%	-0.003%	0.30	0.50	0%	0%
16	-0.002%	-0.008%	0.002%	0.30	0.50	0%	0%
17	-0.004%	0.000%	-0.006%	0.30	0.50	0%	0%
18	0.000%	0.002%	-0.003%	0.30	0.50	0%	0%
19	0.001%	0.001%	-0.007%	0.30	0.50	0%	0%
20	-0.001%	-0.006%	0.000%	0.30	0.50	0%	0%

Tabla 6.3 – Análisis de sensibilidad para vigas A-A con  $c = 0.30$  y  $\eta = 0.50$  con  $e_{\lambda_n} = 0.01\%$ .

### **6.3 CONTRASTACIÓN EXISTENCIAL DE LA HIPÓTESIS DE LAS ÁREAS DE INCERTIDUMBRE**

En el capítulo 5 de esta tesis han sido presentadas 2 hipótesis para predecir la capacidad teórica de identificación de fisuras. En esta sección es de interés analizar los resultados obtenidos por la hipótesis 2: Áreas de Incertidumbre. En particular, de su hipótesis existencial que ha sido presentada en la sección 5.3.4. En la misma, se han determinado, para ciertas características de fisuras, para diferentes condiciones de vinculación y un grado de incertidumbre de los coeficientes adimensionales de frecuencias, las zonas que representan los valores esperados de posición y profundidad de fisura.

Para verificar o refutar dicha hipótesis es necesario contrastar la misma. Para esto se procede a realizar un análisis de sensibilidad. En el cual, se induce un error en los coeficientes adimensionales de frecuencias igual a la incertidumbre considerada en la hipótesis propuesta.

En primer lugar, para cada caso de estudio, el análisis de sensibilidad se concentra en inducir en los 3 primeros coeficientes adimensionales de frecuencia, las 8 combinaciones posibles de errores máximos. En segundo término, en los primeros 3 coeficientes adimensionales de frecuencia son inducidos errores que responden a una distribución uniforme de probabilidades, analizando un total de 3 mil combinaciones posibles de error para cada caso de estudio. En tercer análisis, se repite la metodología considerando que los errores responden a una distribución normal de probabilidades.

Los diferentes tipos de análisis de sensibilidad antes descriptos, contemplan en todos los casos, el estudio para diferentes condiciones de vinculación típica, para un mismo grado de error inducido y para un mismo tipo de fisura; el estudio para diferentes posiciones y profundidades de fisura, para un mismo grado de error inducido y un único tipo de vinculación; y finalmente, el estudio para diferentes niveles de error inducido, para un mismo tipo de fisura y un único tipo de vinculación.

A continuación, se presentan los diferentes casos de análisis. Los resultados son expuestos mediante figuras, donde con cuadrados rojos se representan las áreas determinadas por la hipótesis antes descripta; superpuesta a los resultados obtenidos en el análisis de sensibilidad representados como círculos negros.

### 6.3.1 Análisis de sensibilidad con datos de entrada con error máximo

En la Figura 6.1 se presentan las áreas de incertidumbre de la sección 5.3.4 en color rojo. Superpuestas a estas, los resultados del análisis de sensibilidad. En esta oportunidad, de los resultados obtenidos en las secciones 6.2.2, 6.2.3 y 6.2.4 solo se presentan los casos 2 a 9, que se corresponden a la peor combinación de los valores extremos de  $e_{\lambda_n}$ .

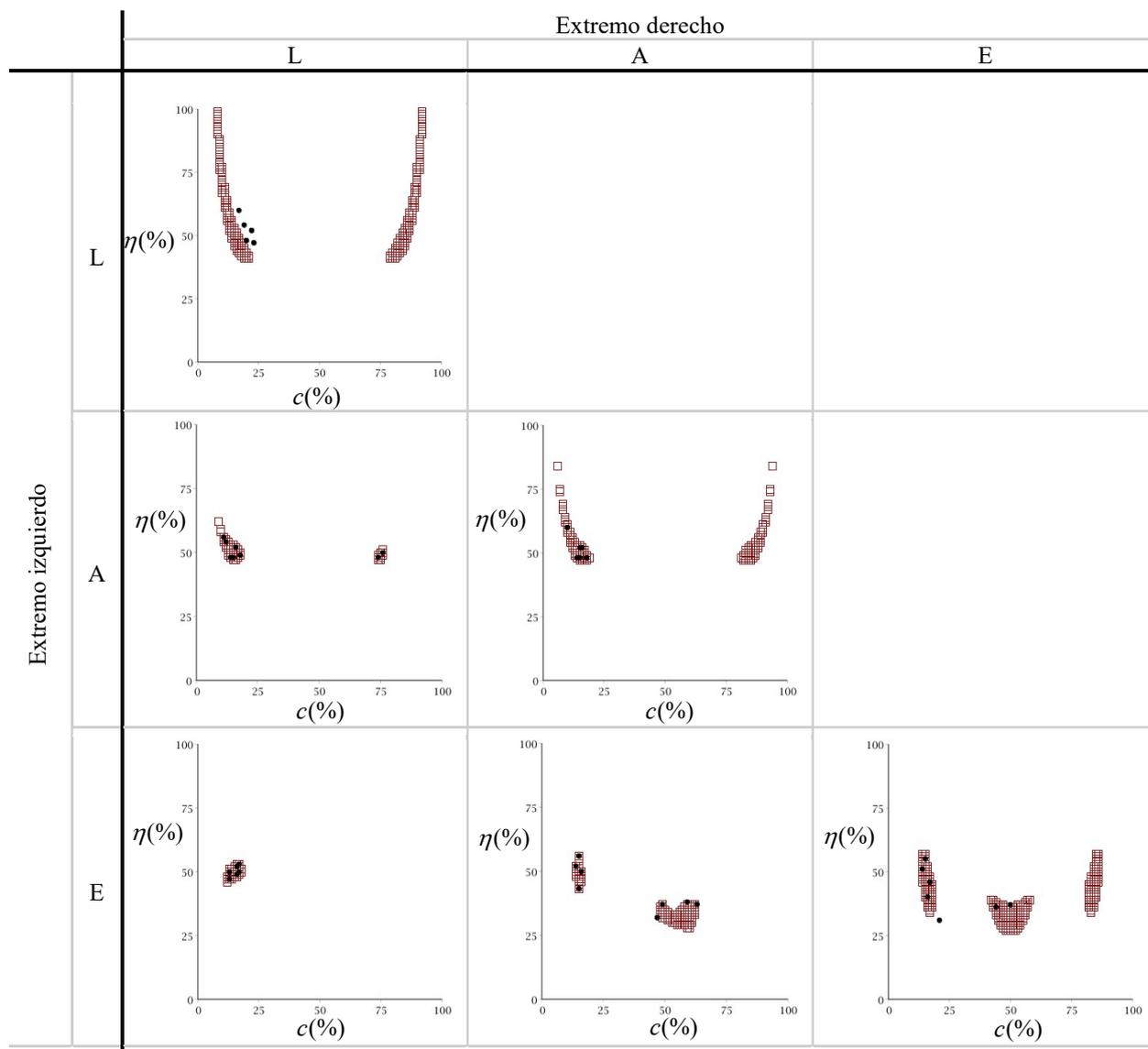


Figura 6.1 – Área de incertidumbre para diferentes condiciones de vinculación típica, para fisura tipo  $c = 0.15$  y  $\eta = 0.50$ , cuando  $u_{\lambda_n} = 0.1\%$ ; superpuesta al análisis de sensibilidad cuando  $e_{\lambda_n} = 0.1\%$ , para errores máximos.

En la Figura 6.2 se presentan las áreas de incertidumbre de la sección 5.3.4 junto a los resultados del análisis de sensibilidad. Aquí los parámetros de estudio son la posición y profundidad de la fisura.

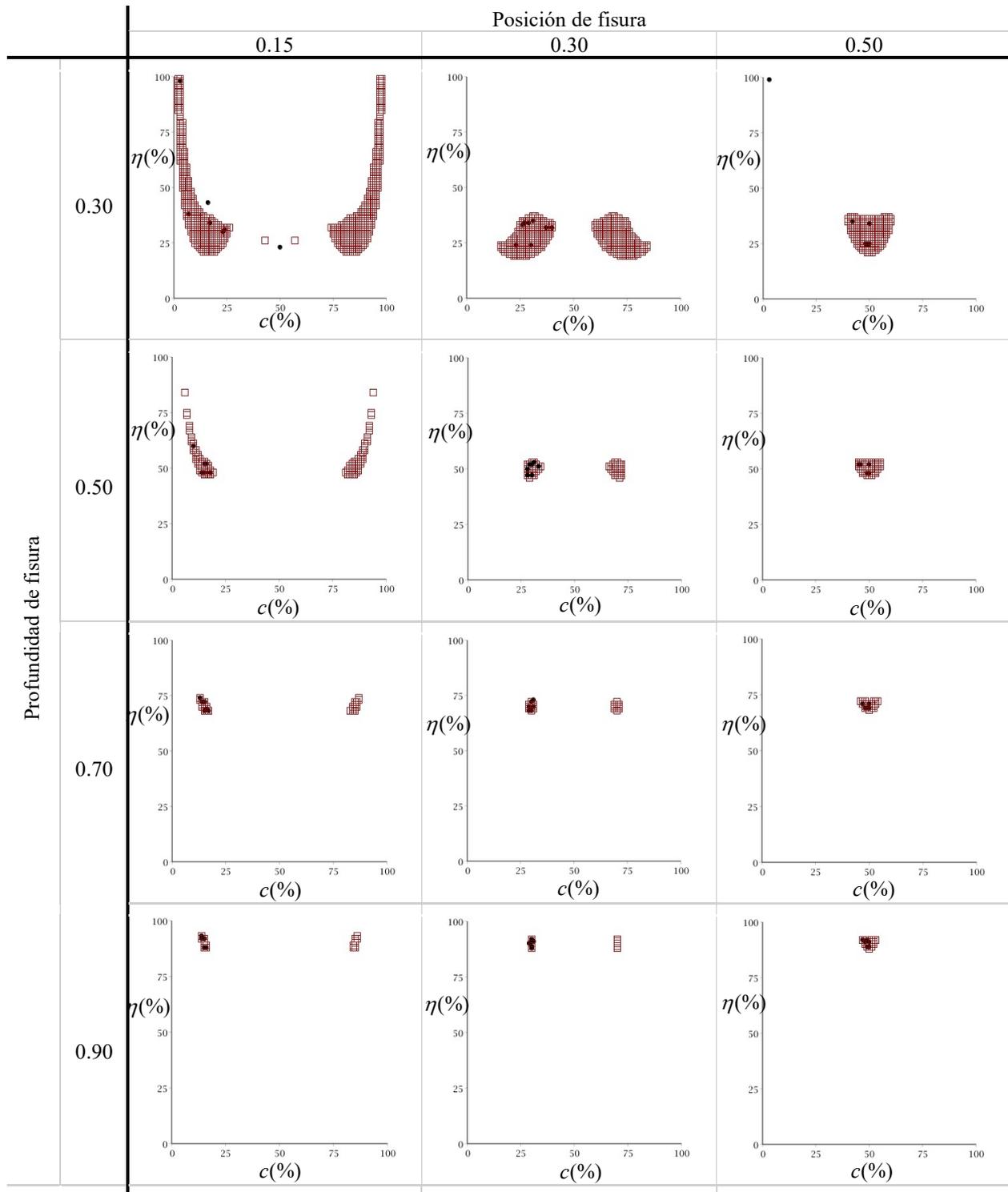


Figura 6.2 – Área de incertidumbre para la condición A-A, para fisuras con diferentes posiciones y profundidades cuando  $u_{\tilde{\lambda}_m} = 0.1\%$ ; superpuesta al análisis de sensibilidad cuando  $e_{\tilde{\lambda}_m} = 0.1\%$ , para errores máximos.

En la Figura 6.3 se presentan las áreas de incertidumbre de la sección 5.3.4 junto a los resultados del análisis de sensibilidad. En este caso, el parámetro de estudio es el grado de error en la determinación de los coeficientes de frecuencias.

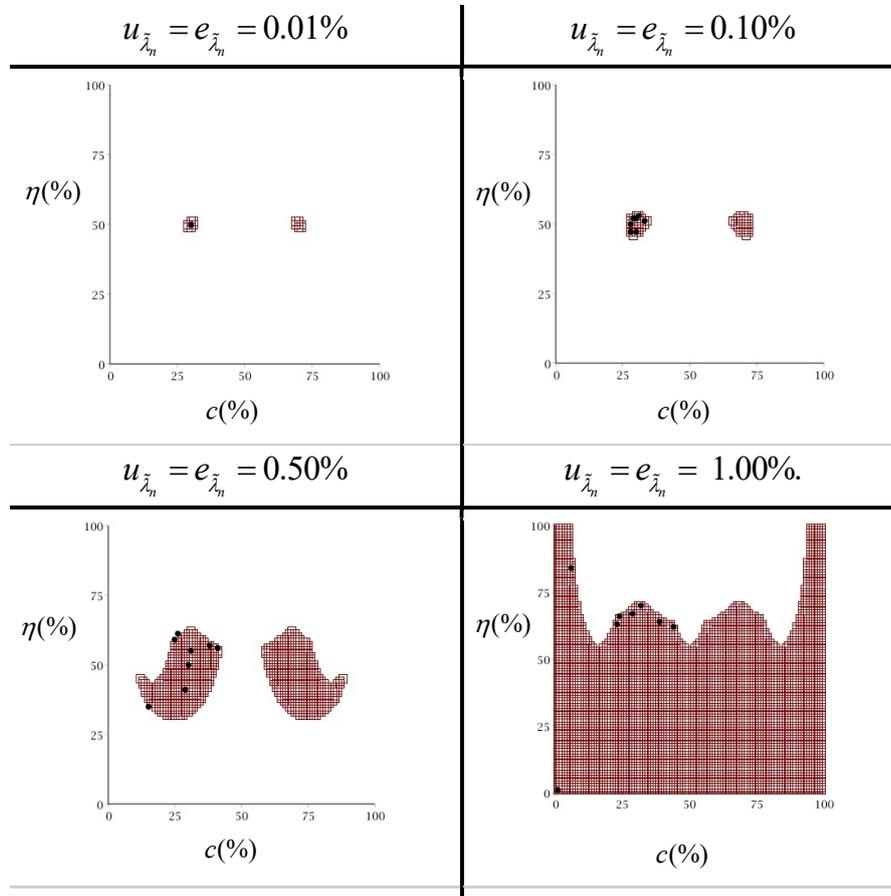


Figura 6.3 – Área de incertidumbre para la condición A-A, para fisura tipo  $c = 0.30$  y  $\eta = 0.50$ , con diferentes niveles de incertidumbre; superpuesta al análisis de sensibilidad para diferentes niveles de errores máximos.

Existe una buena correlación entre los resultados predichos mediante la hipótesis propuesta y los resultados obtenidos del análisis de sensibilidad. Sin embargo, la cantidad de casos analizados es escasa, por lo que el análisis no es concluyente. Por esto, en la sección siguiente los diferentes análisis de sensibilidad antes descritos son repetidos considerando numerosos casos de estudios que se correspondan con distribuciones de probabilidades tanto uniformes como normales.

**6.3.2 Análisis de sensibilidad con datos de entrada con distribución uniforme de probabilidad**

En la presente sección, es abordado el estudio del análisis de sensibilidad considerando que los datos de entrada del método de identificación de fisura se corresponden con una distribución uniforme de probabilidades.

La distribución uniforme discreta describe el comportamiento de una variable discreta que puede tomar n valores distintos con la misma probabilidad cada uno de ellos. O sea, asigna igual probabilidad a todos los valores enteros entre el límite inferior y el límite superior que definen el recorrido de la variable.

En este análisis, los datos de entrada son los coeficientes adimensionales de frecuencias de los modos 1 a 3, donde el límite inferior y superior están dados por el error inducido; de manera tal que  $\tilde{\lambda}_n (1 - e_{\tilde{\lambda}_n}) \leq \tilde{\lambda}_n \leq \tilde{\lambda}_n (1 + e_{\tilde{\lambda}_n})$ .

En la Tabla 6.4 se presentan los primeros 3 coeficientes adimensionales de frecuencias para una viga articulada-articulada, cuya fisura tiene por características  $c = 0.30$  y  $\eta = 0.50$ .

$\tilde{\lambda}_1$	$\tilde{\lambda}_2$	$\tilde{\lambda}_3$
3.1207937023	6.2275795617	9.4160735273

Tabla 6.4 – Primeros 3 coeficientes adimensionales de frecuencias para viga A-A con  $c = 0.30$  y  $\eta = 0.50$

En la Figura 6.4 se observa la distribución uniforme de probabilidades de los 3 primeros coeficientes adimensionales de frecuencias para un análisis de sensibilidad que contempla unos  $k=50.000$  casos de estudio. En la misma, se incluye el valor promedio ( $\bar{\tilde{\lambda}}_n$ ) y el desvío estándar ( $\sigma_{\tilde{\lambda}_n}$ ) de los coeficientes de frecuencias que responden a la distribución uniforme.

En consecuencia, los errores relativos en la determinación de los coeficientes de frecuencias, se corresponden también a una distribución uniforme, que tiene como valores extremos  $\pm 0.1\%$ , tal como se observa en la Figura 6.5. En la misma, se incluye el valor promedio ( $\bar{e}_{\tilde{\lambda}_n}$ ) y el desvío estándar ( $\sigma_{e_{\tilde{\lambda}_n}}$ ) del error de los coeficientes de frecuencias que responden a la distribución uniforme.

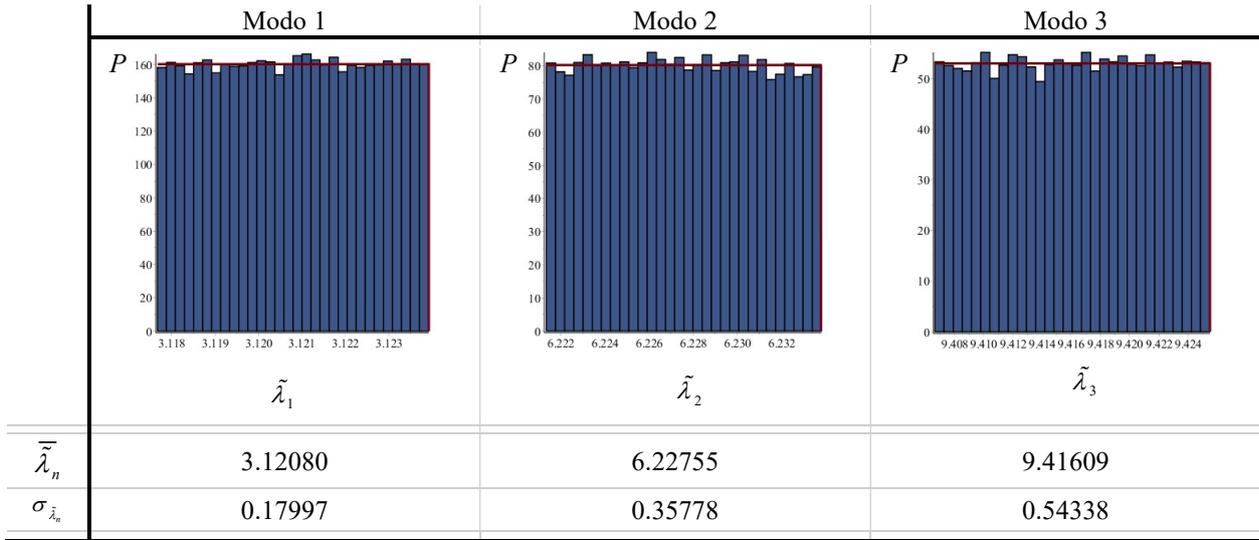


Figura 6.4– Distribución uniforme de probabilidades de los 3 primeros coeficientes adimensionales de frecuencias.

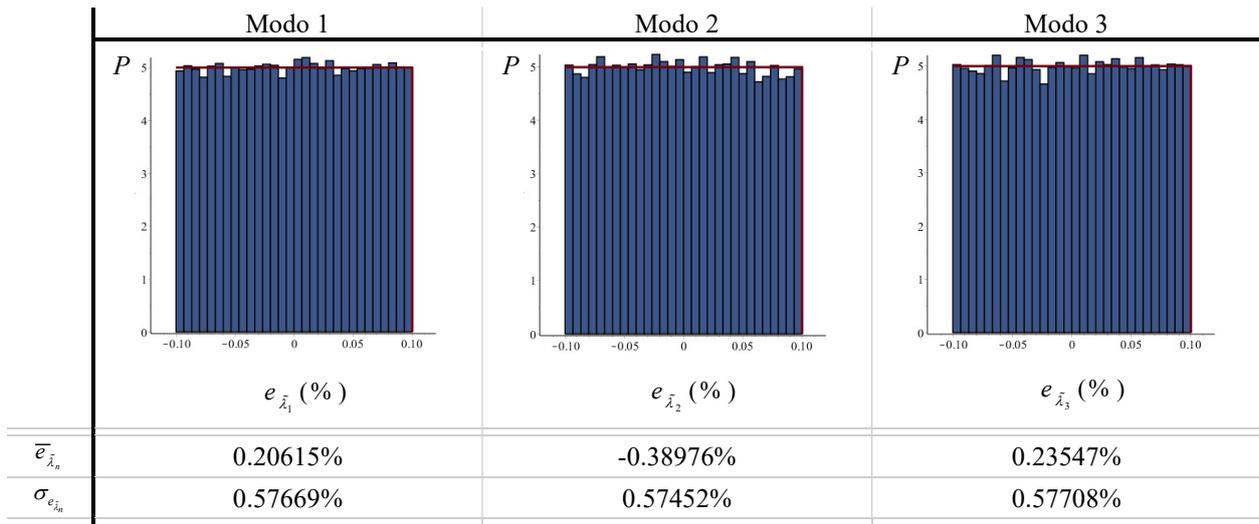


Figura 6.5– Distribución uniforme de probabilidades de los errores en los 3 primeros coeficientes adimensionales de frecuencias.

Los datos de salida del análisis de sensibilidad se corresponden con la posición ( $\hat{c}$ ) y profundidad ( $\hat{\eta}$ ) determinada por el método de identificación de fisuras. Los mismos se presentan en la Figura 6.6. El valor promedio de la posición pronosticada ( $\bar{c}$ ) y la profundidad pronosticada ( $\bar{\eta}$ ) son determinados según  $\bar{c} = \sum_i \hat{c}_i / k$  y  $\bar{\eta} = \sum_i \hat{\eta}_i / k$  respectivamente. Por otra parte, sus

respectivos desvíos estándares se obtienen según  $\sigma_{\bar{c}} = \sqrt{\frac{\sum_i (\hat{c}_i - \bar{c})^2}{k}}$  y  $\sigma_{\bar{\eta}} = \sqrt{\frac{\sum_i (\hat{\eta}_i - \bar{\eta})^2}{k}}$

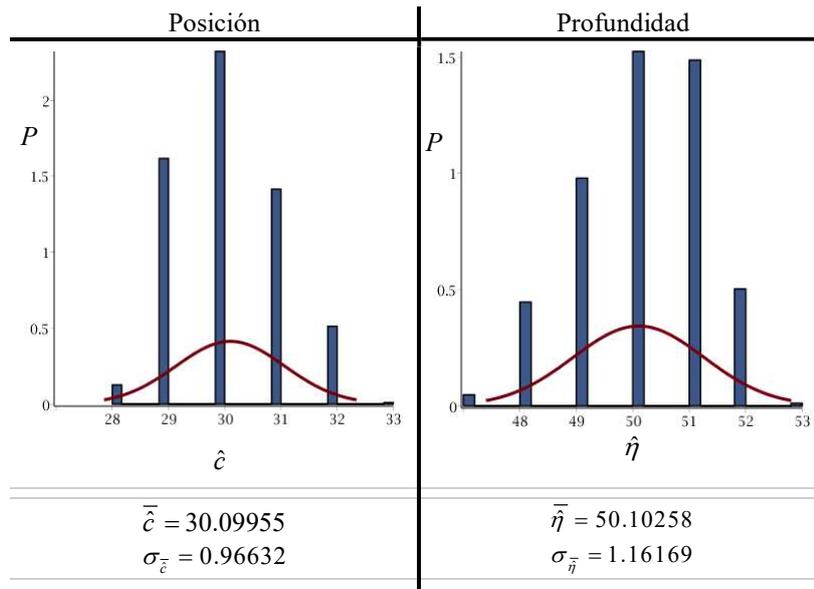


Figura 6.6 – Resultados del análisis de sensibilidad, posición y profundidad de fisuras, para datos de entrada con distribución uniforme de probabilidades  $e_{\lambda_n} = 0.01\%$ .

A partir de estos resultados, los errores relativos porcentuales han sido determinados, tal como se presenta en la Figura 6.7.

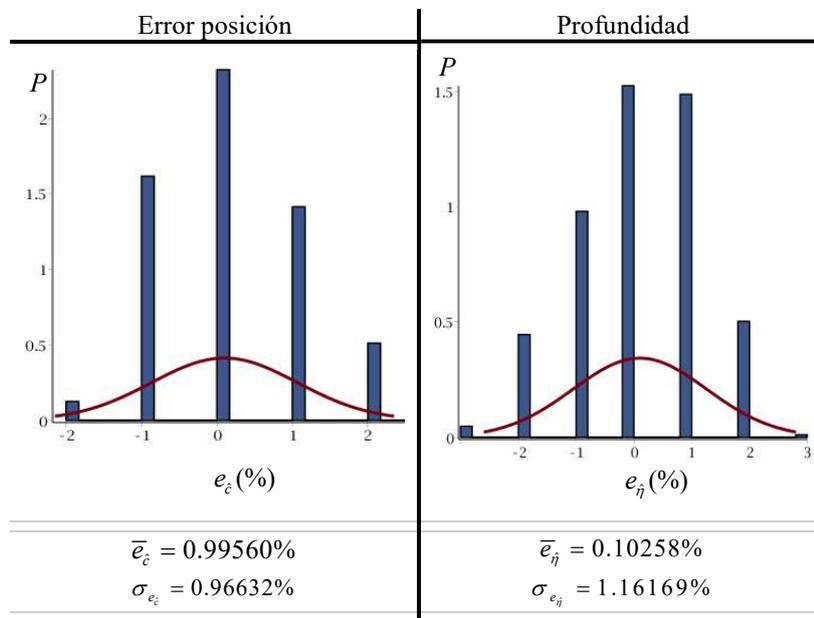


Figura 6.7 –Resultados del análisis de sensibilidad, error en la determinación de la posición y profundidad, para datos de entrada con distribución uniforme de probabilidades  $e_{\lambda_n} = 0.10\%$ .

Para determinar si el número de casos del estudio era suficiente fue realizado un análisis de convergencia. En la Figura 6.8a se observa la media móvil en la determinación de la posición ( $\bar{c}$ ) y de la profundidad ( $\bar{\eta}$ ) versus el número de casos ( $N^\circ$ ). En la Figura 6.8b se observa el desvío estándar de la media móvil en la determinación de la posición ( $\sigma_{\bar{c}}$ ) y de la profundidad ( $\sigma_{\bar{\eta}}$ ) versus el número de casos ( $N^\circ$ ). Se considera que los 50.000 casos de estudio son suficientes para tener una muestra representativa y que para los 1.000 casos las medias móviles ya se encontraban estabilizadas y los desvíos tenían valores aceptables. Por lo que para el resto del análisis se consideraron 3.000 casos.

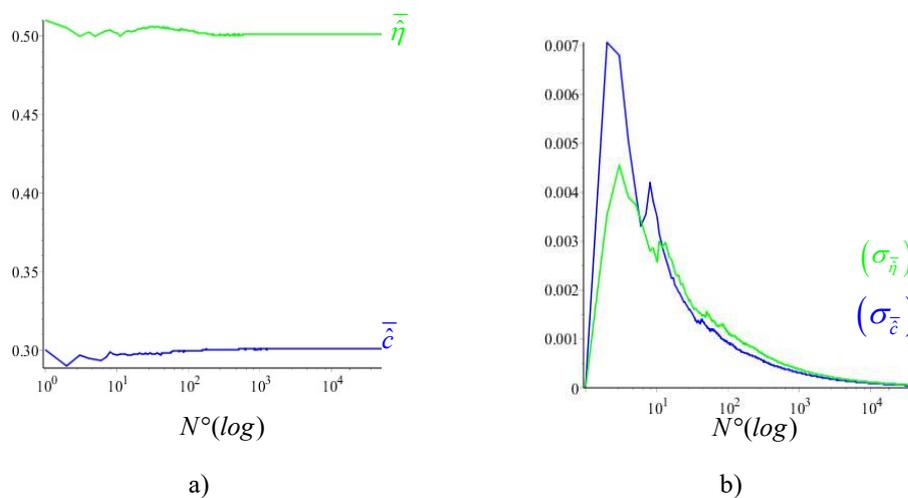


Figura 6.8 – Análisis de convergencia para datos de entrada con distribución uniforme de probabilidades.  
 . a) Media móvil. b) Desvío estándar móvil.

A continuación, se repite el análisis de sensibilidad para la contrastación de la hipótesis existencial de las áreas de incertidumbre, pero esta vez utilizando como datos de entrada una distribución uniforme con 3.000 casos de estudio.

En la Figura 6.9 se presenta un análisis de sensibilidad que estudia el comportamiento frente a diferentes condiciones de vinculación típica.

En la Figura 6.10 se presentan las áreas de incertidumbre junto a los resultados del análisis de sensibilidad para estudiar el comportamiento para diferentes combinaciones de posiciones y profundidades de fisuras para el caso articulado-articulado.

Finalmente, en la Figura 6.11 se presentan las áreas de incertidumbre y los resultados del análisis de sensibilidad cuando varía el grado de error en la determinación de los coeficientes de frecuencias.

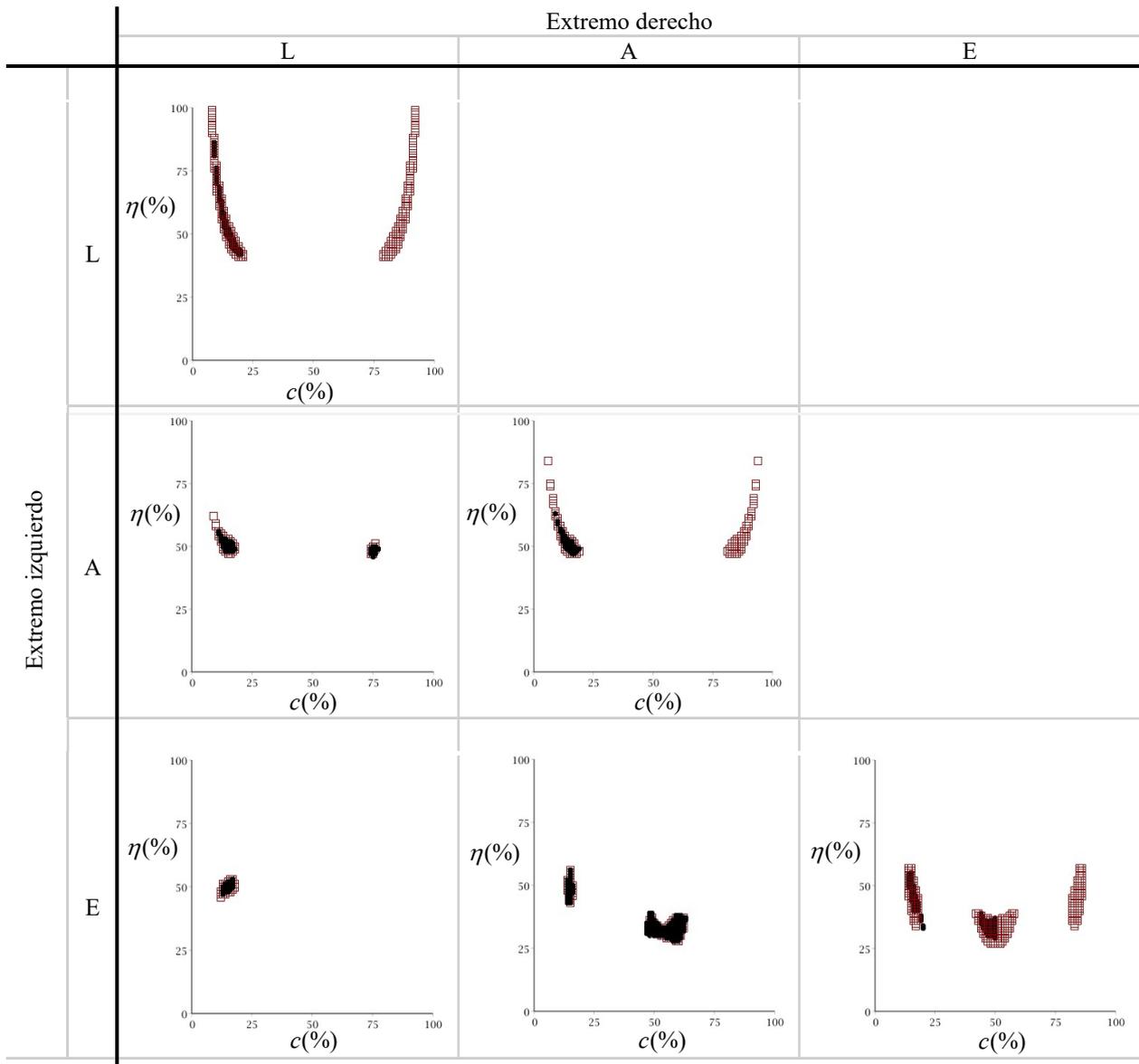


Figura 6.9 – Área de incertidumbre para diferentes condiciones de vinculación típica, para fisura tipo  $c = 0.15$  y  $\eta = 0.50$ , cuando  $u_{\lambda_n} = 0.1\%$ ; superpuesta al análisis de sensibilidad de una distribución uniforme cuando

$$e_{\lambda_n} = 0.1\%.$$

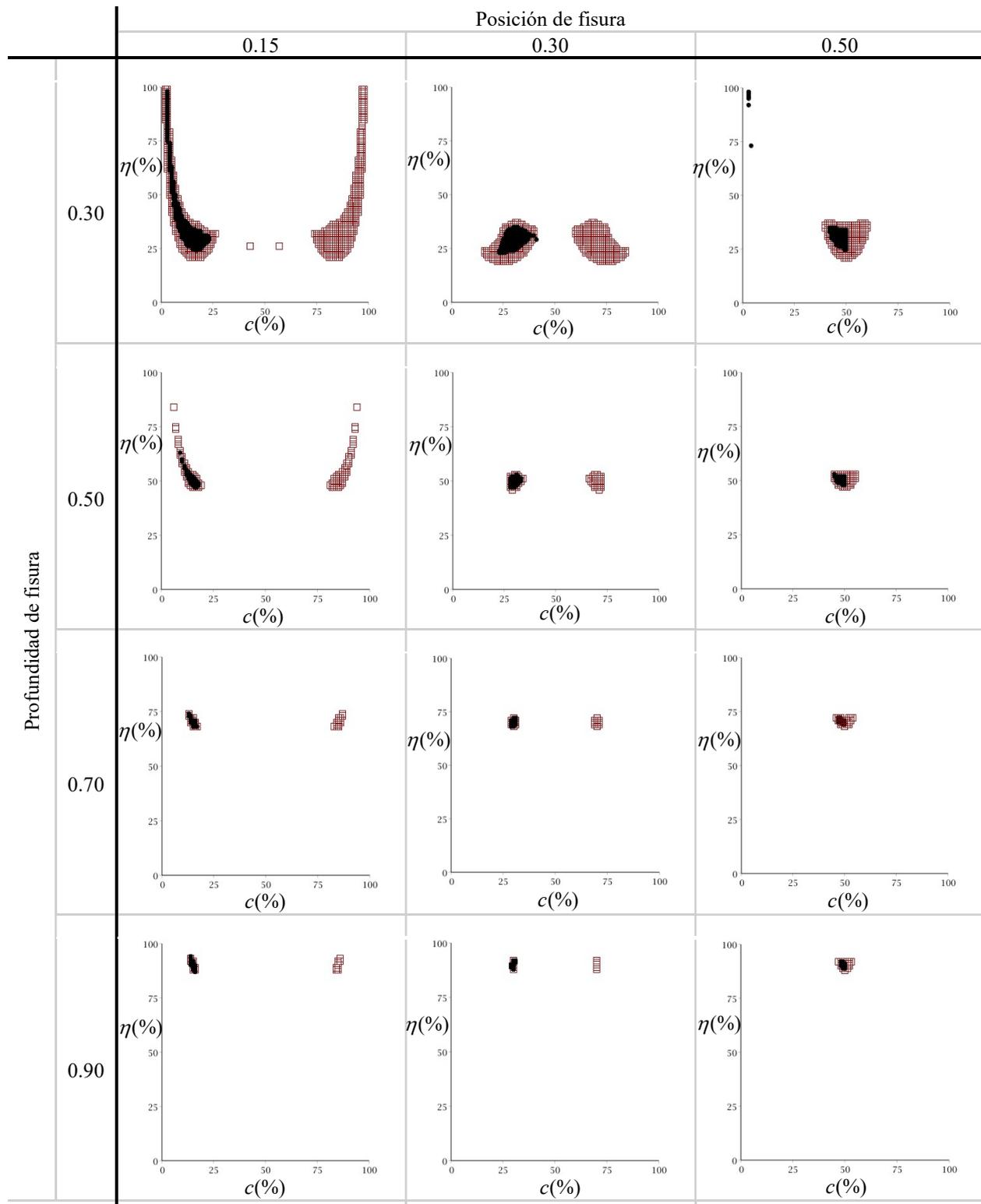


Figura 6.10 – Área de incertidumbre para la condición A-A, para fisuras con diferentes posiciones y profundidades cuando  $u_{\lambda_n} = 0.1\%$ ; superpuesta al análisis de sensibilidad de una distribución uniforme cuando  $e_{\lambda_n} = 0.1\%$ .

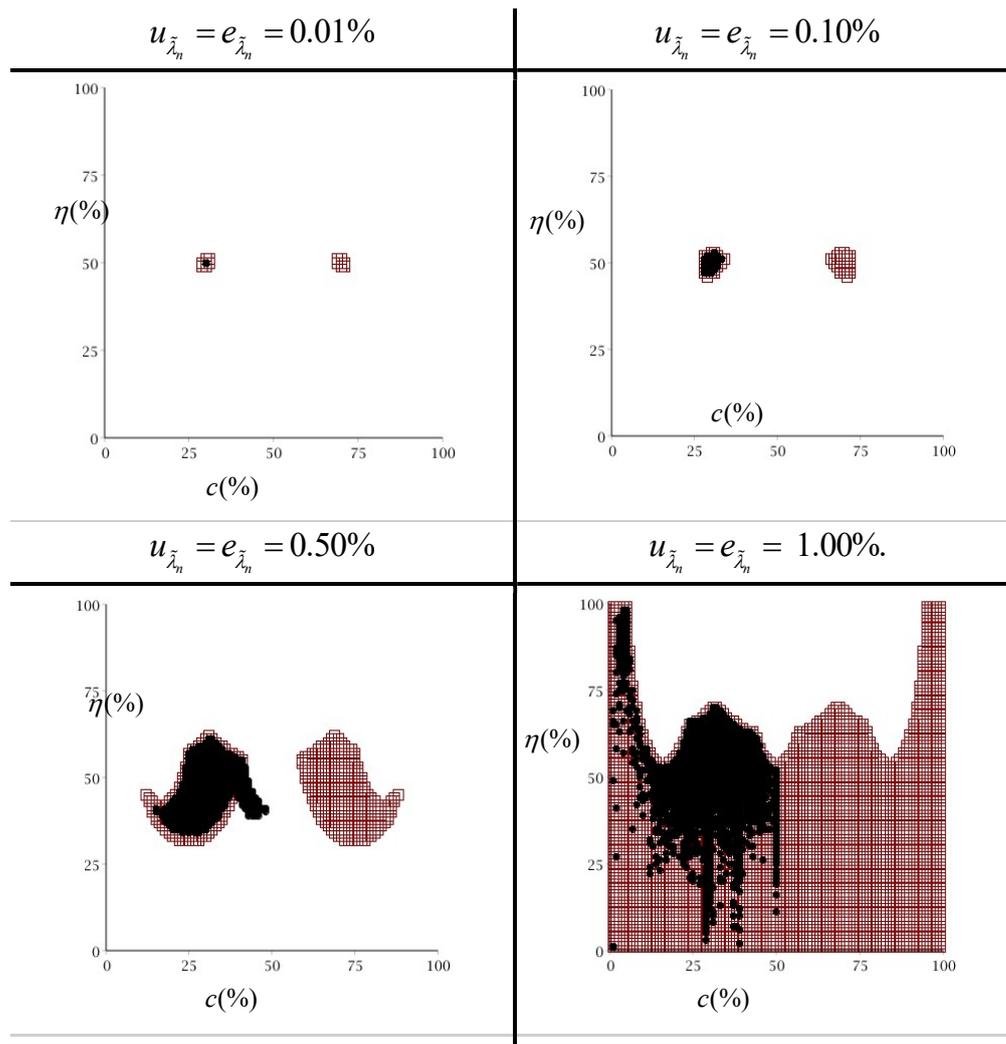


Figura 6.11 – Área de incertidumbre para la condición A-A, para fisura tipo  $c = 0.30$  y  $\eta = 0.50$ , con diferentes niveles de incertidumbre; superpuesta al análisis de sensibilidad de una distribución uniforme para diferentes niveles de error inducido.

Es interesante notar que la distribución de errores de salida (errores en la determinación de posición y profundidad) cambian su comportamiento cuando varía el nivel del error inducido en el análisis de sensibilidad. En las Figuras 6.6 y 6.7 se observa que la distribución de probabilidades de la posición como de la profundidad pronosticada tienen una forma aproximada a la normal y se corresponden a los casos en que los errores inducidos respectivamente son  $e_{\lambda_n} = 0.01\%$  y  $e_{\lambda_n} = 0.10\%$ .

Mientras que en las Figuras 6.12 y 6.13, donde los errores inducidos respectivamente son  $e_{\lambda_n} = 0.50\%$  y  $e_{\lambda_n} = 1.00\%$ , las distribuciones de probabilidades ya no se corresponden con una normal. Además, es de notar que el cambio en la dispersión de los errores de salida es mayor que el cambio en el valor medio.

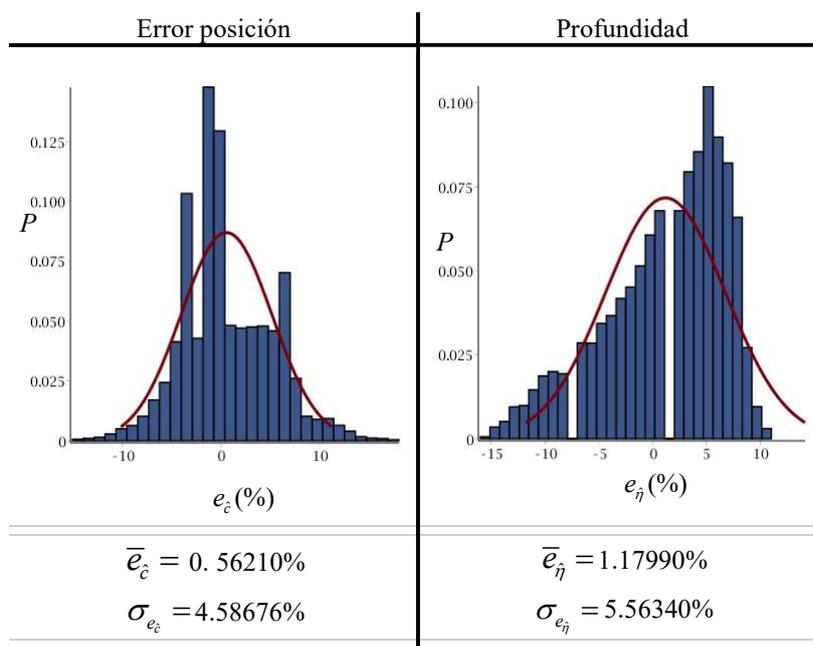


Figura 6.12 –Análisis de sensibilidad, error en la determinación de la posición y profundidad, cuando  $e_{\lambda_n} = 0.50\%$ , para datos de entrada con distribución uniforme de probabilidades.

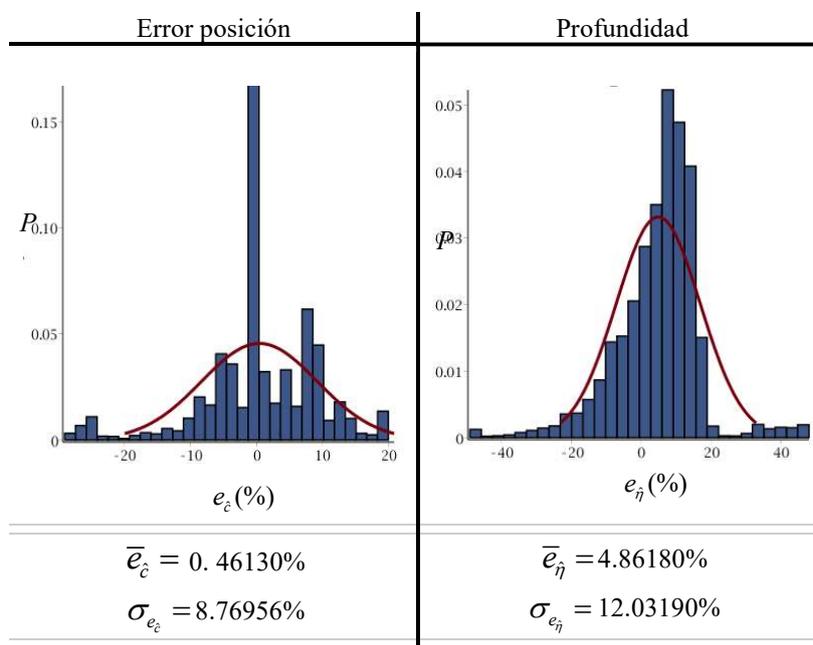


Figura 6.13 – Análisis de sensibilidad, error en la determinación de la posición y profundidad, cuando  $e_{\lambda_n} = 1.00\%$ , para datos de entrada con distribución uniforme de probabilidades.

**6.3.3 Análisis de sensibilidad con datos de entrada con distribución normal de probabilidad**

Ahora es abordado el estudio del análisis de sensibilidad considerando que los datos de entrada del método de identificación de fisura se corresponden con una distribución normal de probabilidades. La distribución normal ( $P$ ) queda totalmente definida mediante la media ( $\mu$ ) y la desviación estándar ( $\sigma$ ). En este análisis, los datos de entrada son los coeficientes adimensionales de frecuencias de los modos 1 a 3, cuyo valor medio se corresponde a los presentados en la Tabla 6.4; y la desviación estándar se corresponde al error inducido; de manera tal que la distribución queda dada según  $P(\tilde{\lambda}_n, e_{\tilde{\lambda}_n})$ .

En la Figura 6.14 se observa la distribución normal de probabilidades de los 3 primeros coeficientes adimensionales de frecuencias para un análisis de sensibilidad que contempla unos 50.000 casos de estudio. En la misma, se incluye el valor promedio ( $\tilde{\lambda}_n$ ) y el desvío estándar ( $\sigma_{\tilde{\lambda}_n}$ ) de los coeficientes de frecuencias que responden a la distribución uniforme.

En consecuencia, los errores relativos en la determinación de los coeficientes de frecuencias, se corresponden también a una distribución normal, que tiene aproximadamente como desvío  $\pm 0.1\%$ , tal como se observa en la Figura 6.15. En la misma, se incluye el valor promedio ( $\bar{e}_{\tilde{\lambda}_n}$ ) y el desvío estándar ( $\sigma_{\bar{e}_{\tilde{\lambda}_n}}$ ) del error de los coeficientes de frecuencias que responden a la distribución uniforme.

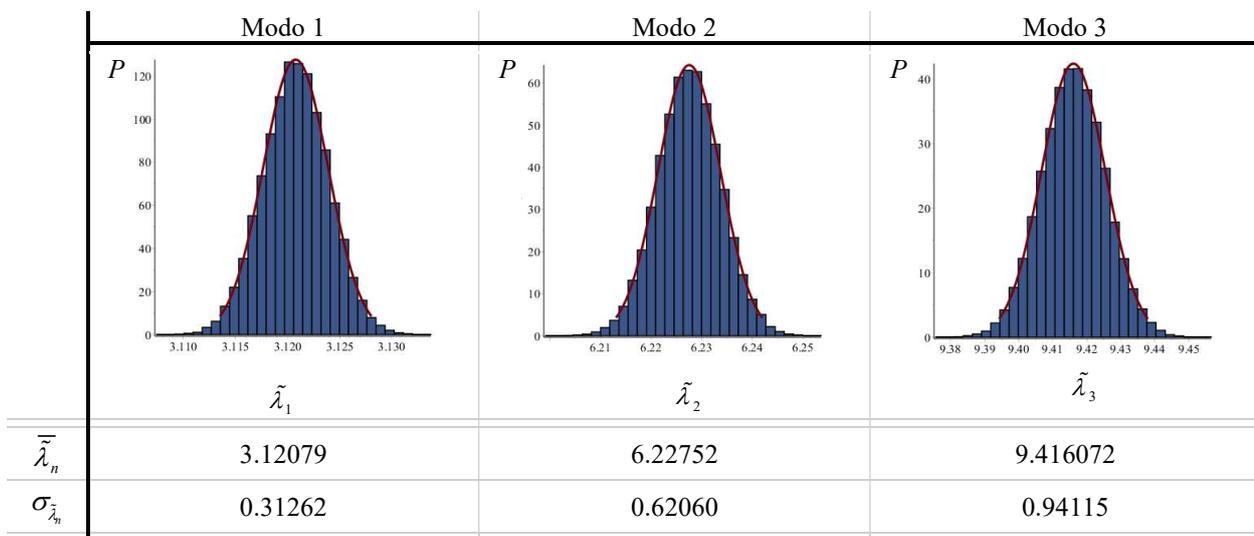


Figura 6.14 – Distribución normal de probabilidades de los 3 primeros coeficientes adimensionales de frecuencias.

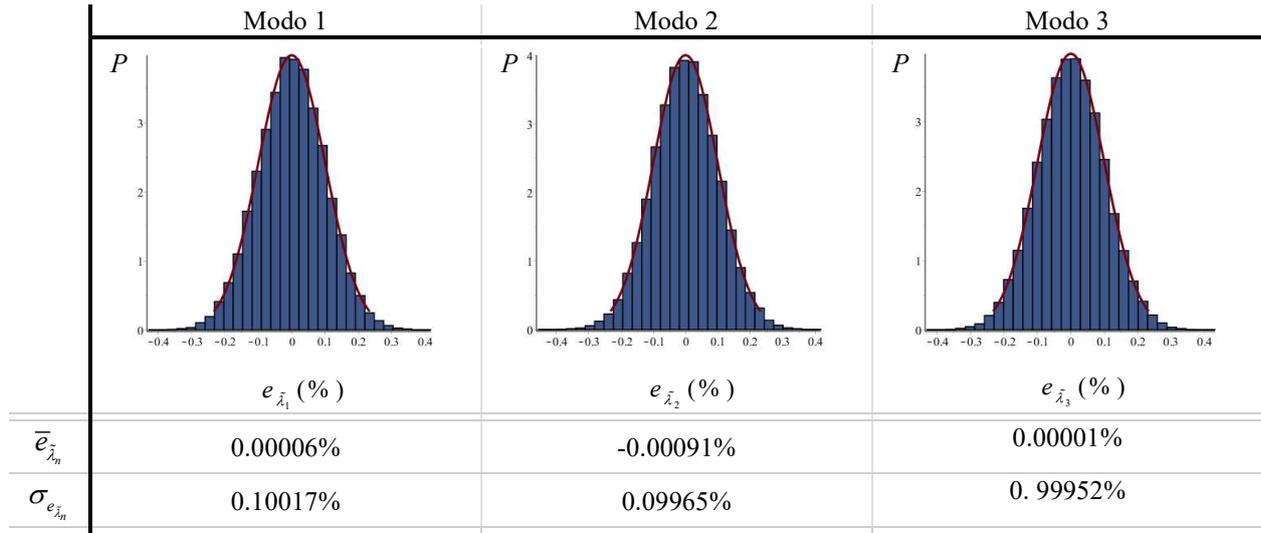


Figura 6.15 – Distribución normal de probabilidades de los errores en los 3 primeros coeficientes dimensionales de frecuencias.

Los datos de salida del análisis de sensibilidad se corresponden con la posición ( $\hat{c}$ ) y profundidad ( $\hat{h}$ ) determinada por el método de identificación de fisuras. Los mismos se presentan en la Figura 6.16 junto al valor promedio de la posición ( $\bar{\hat{c}}$ ) y profundidad ( $\bar{\hat{h}}$ ) determinadas; y sus respectivos desvíos estándares

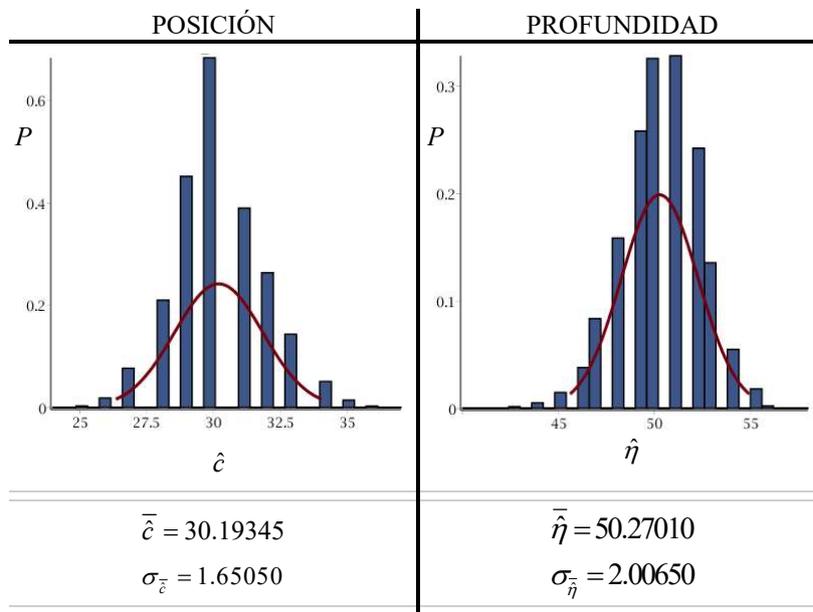


Figura 6.16 – Resultados del análisis de sensibilidad, posición y profundidad de fisuras, para datos de entrada con distribución normal de probabilidades.

A partir de estos resultados, los errores relativos porcentuales han sido determinados, tal como se presenta en la Figura 6.17.

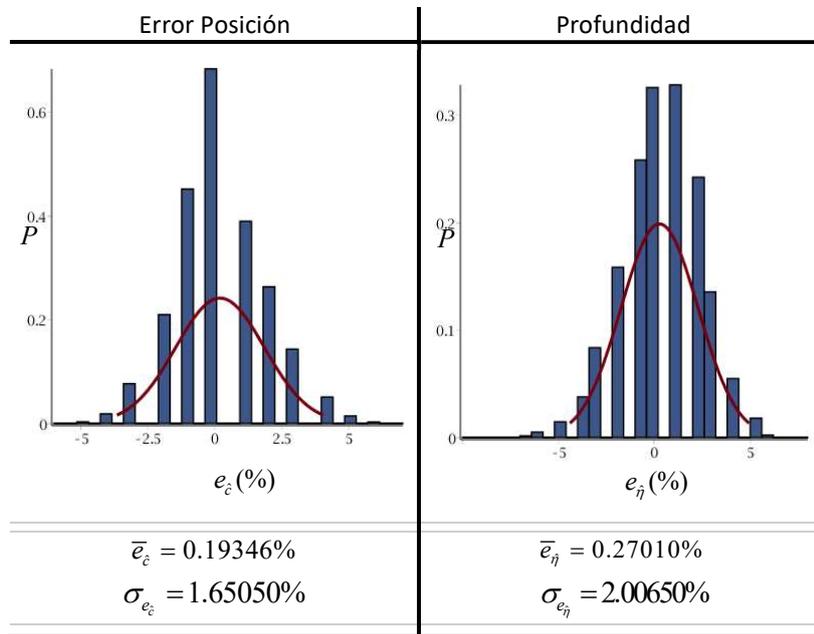


Figura 6.17 –Resultados del análisis de sensibilidad, error en la determinación de la posición y profundidad, para datos de entrada con distribución normal de probabilidades.

Para determinar si el número de casos del estudio era suficiente fue realizado un análisis de convergencia que se observa en la Figura 6.18.

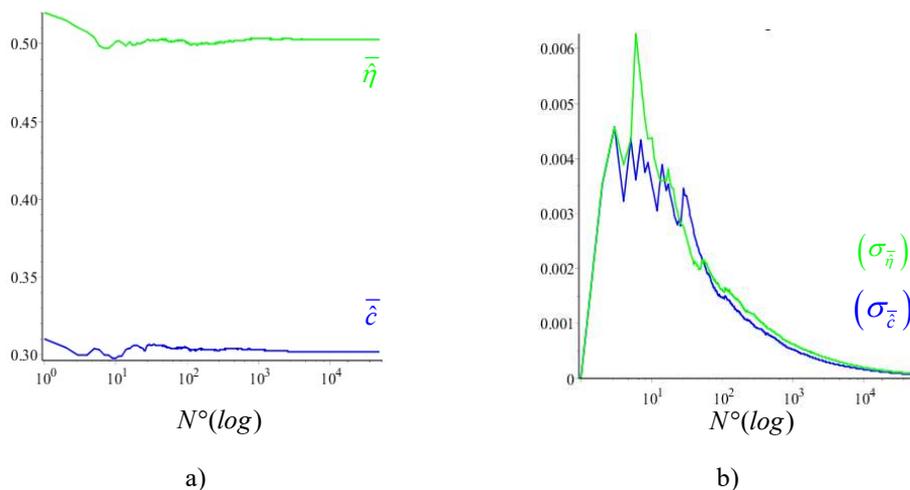


Figura 6.18 – Análisis de convergencia para datos de entrada con distribución uniforme de probabilidades. a) Media móvil. b) Desvío estándar móvil.

De las propiedades de la distribución normal se sabe que el 68,26 % de la distribución normal de probabilidad  $P(\tilde{\lambda}_n, e_{\tilde{\lambda}_n})$  se encuentra en el intervalo  $[\tilde{\lambda}_n - e_{\tilde{\lambda}_n}, \tilde{\lambda}_n + e_{\tilde{\lambda}_n}]$ , el 95,44 % de la distribución se encuentra  $[\tilde{\lambda}_n - 2e_{\tilde{\lambda}_n}, \tilde{\lambda}_n + 2e_{\tilde{\lambda}_n}]$ , mientras que para el intervalo  $[\tilde{\lambda}_n - 3e_{\tilde{\lambda}_n}, \tilde{\lambda}_n + 3e_{\tilde{\lambda}_n}]$  se encuentra el 99.74% de los casos. Lo que se conoce como intervalos de confianza. En la Figura 6.19 se presenta para una viga A-A cuya fisura tiene por características  $c=0.30$  y  $\eta=0.50$  los resultados del análisis de sensibilidad para datos de entradas que corresponden a una distribución normal de probabilidad  $P(\tilde{\lambda}_n, e_{\tilde{\lambda}_n})$  con un factor de cobertura  $k=1, 2, 3$ . Donde el error expandido ( $E_{\tilde{\lambda}_n}$ ) se obtiene de multiplicar al error inducido ( $e_{\tilde{\lambda}_n}$ ) por un factor de cobertura ( $k$ ), según  $E_{\tilde{\lambda}_n} = ke_{\tilde{\lambda}_n}$ .

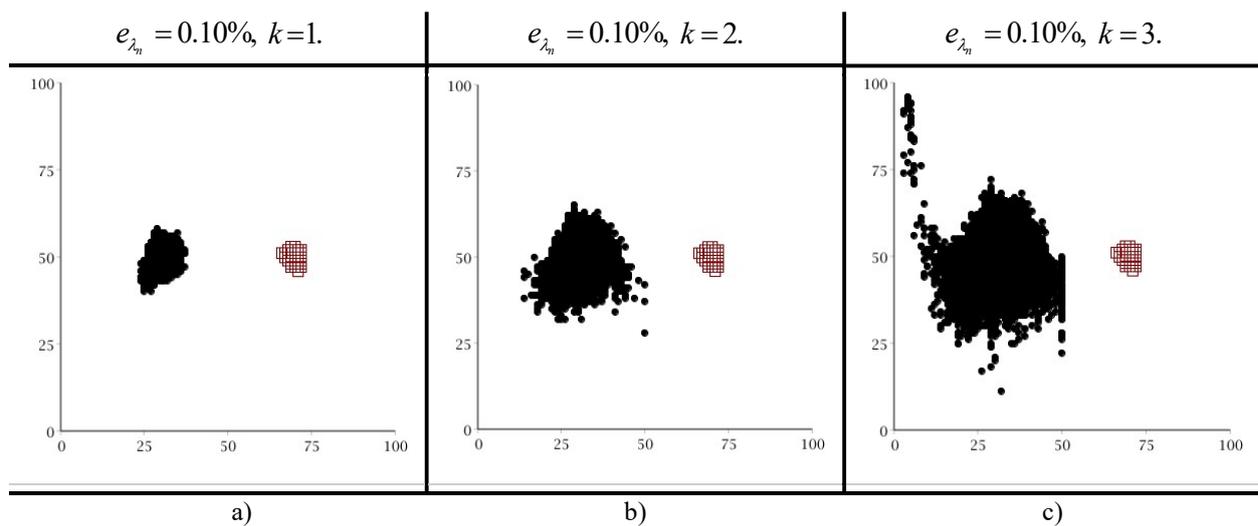


Figura 6.19 – Área de incertidumbre para la condición A-A, para fisura tipo  $c=0.30$  y  $\eta=0.50$ , con incertidumbre  $u_{\lambda_n} = 0.10\%$ . Superpuesta al análisis de sensibilidad con errores de entrada con distribución uniforme  $e_{\lambda_n} = 0.10\%$  para a)  $k=1$ , b)  $k=2$  y c)  $k=3$ .

Del mismo se desprende que para un error inducido  $e_{\lambda_n} = 0.10\%$ , y  $k=1$ , el 68.26% de los errores inducidos estarán dentro del rango  $(-0.1\%, 0.1\%)$ . El resto se encuentra por fuera de dicho intervalo, por lo que los resultados obtenidos del análisis de sensibilidad presentan casos que quedan por fuera del área establecida por la hipótesis área de incertidumbres cuando  $u_{\tilde{\lambda}_n} = 0.1\%$ . Entonces, para asegurar que el 99.74% de los casos se encuentre dentro del rango  $(-0.1\%, 0.1\%)$ , el error inducido tiene que tener un valor de  $e_{\lambda_n} = 0.10\%/3 = 0.0333\%$  y  $k=3$ .

Los análisis de sensibilidad que se presentan a continuación responden a una distribución normal de probabilidades  $P(\tilde{\lambda}_n, e_{\tilde{\lambda}_n})$ . con  $e_{\tilde{\lambda}_n} = 0.0333\%$  y  $k = 3$ , que aseguran que el 99.74% de los errores inducidos se encuentren dentro del intervalo  $(-0.1\%, 0.1\%)$ .

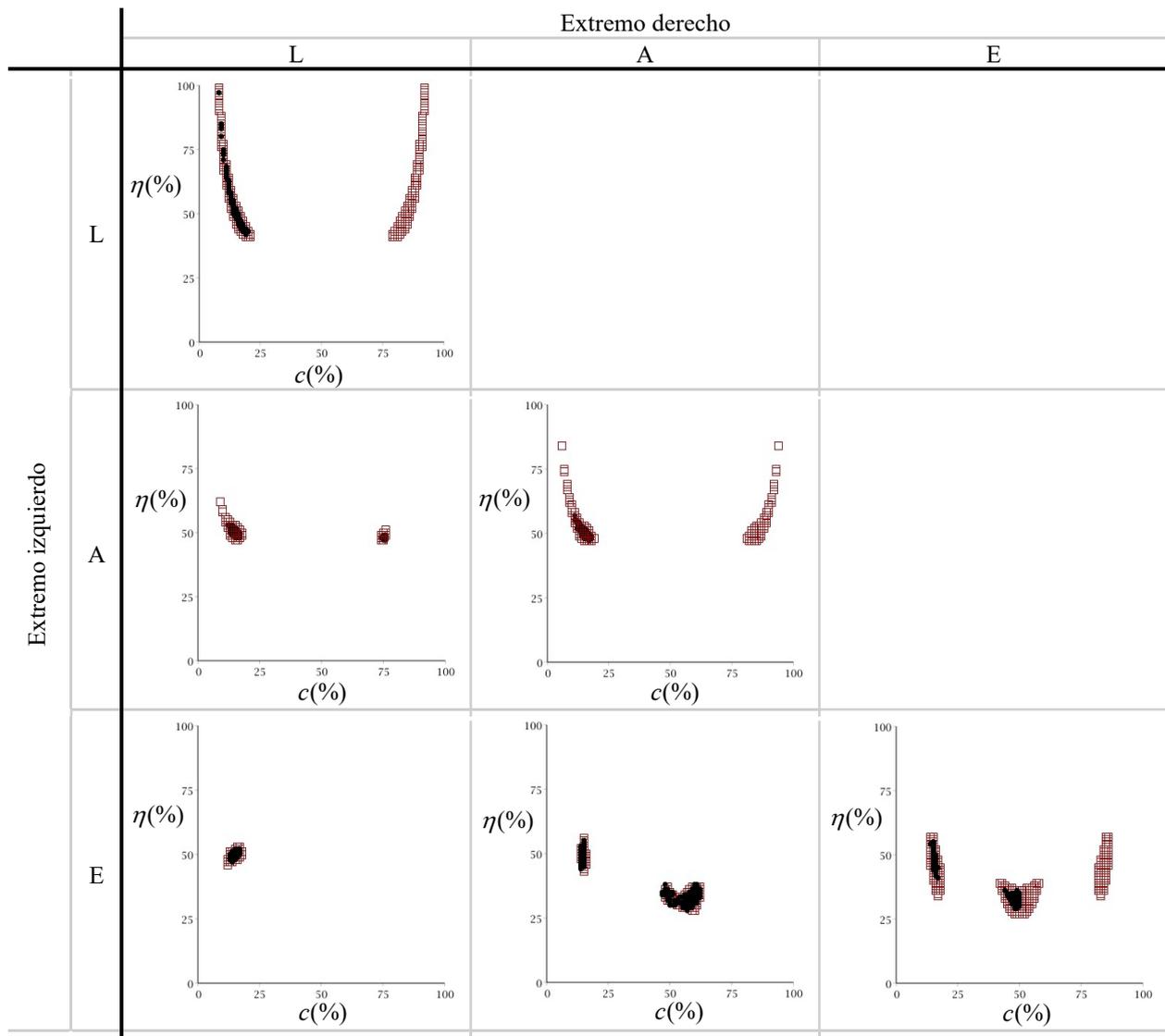


Figura 6.20 – Área de incertidumbre para diferentes condiciones de vinculación típica, para fisura tipo  $c = 0.15$  y  $\eta = 0.50$ , cuando  $u_{\tilde{\lambda}_n} = 0.1\%$ ; superpuesta al análisis de sensibilidad de una distribución normal cuando  $e_{\tilde{\lambda}_n} = 0.1\%$ .

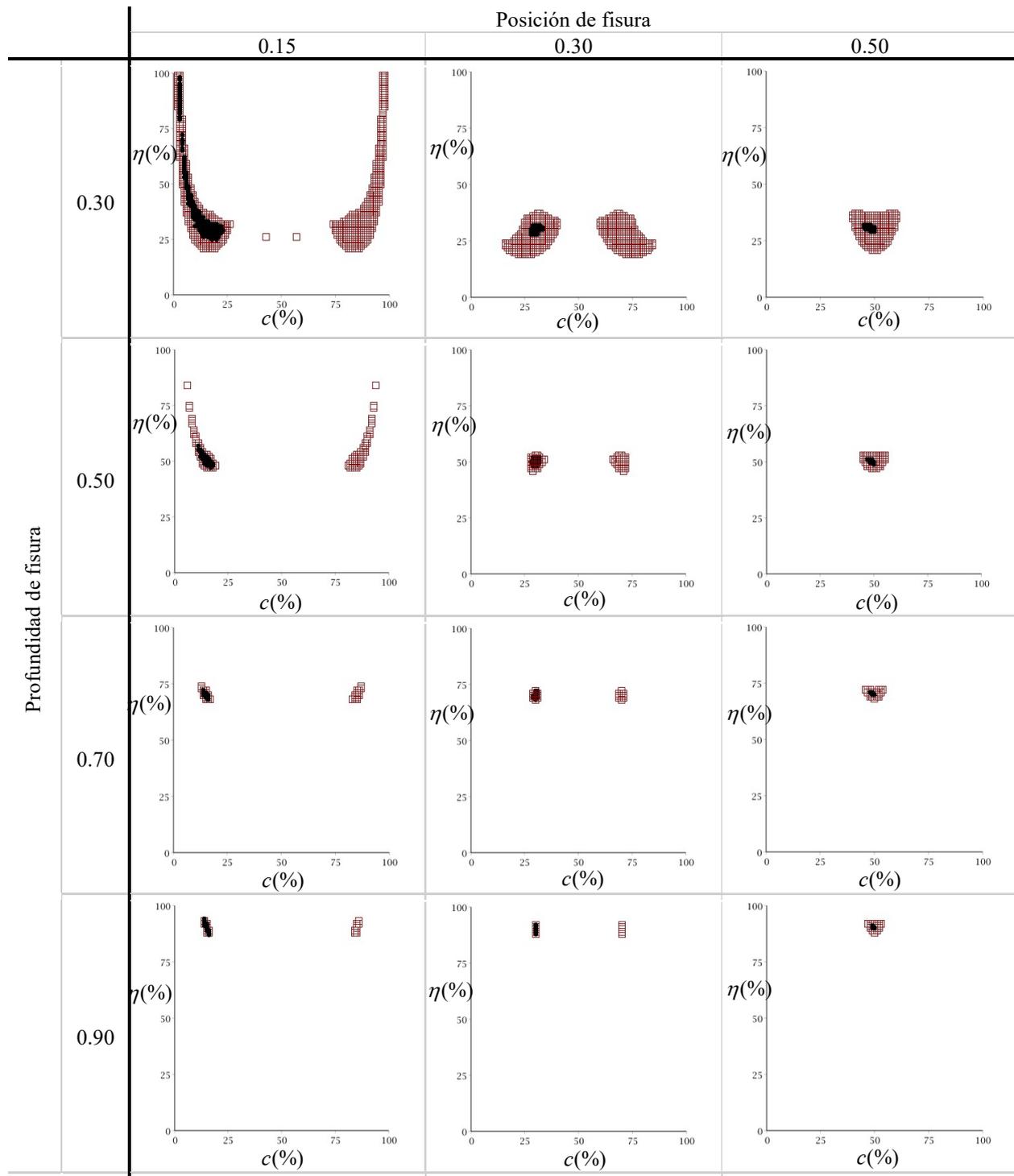


Figura 6.21 – Área de incertidumbre para la condición A-A, para fisuras con diferentes posiciones y profundidades cuando  $u_{\lambda_n} = 0.1\%$ ; superpuesta al análisis de sensibilidad de una distribución normal cuando  $e_{\lambda_n} = 0.1\%$ .

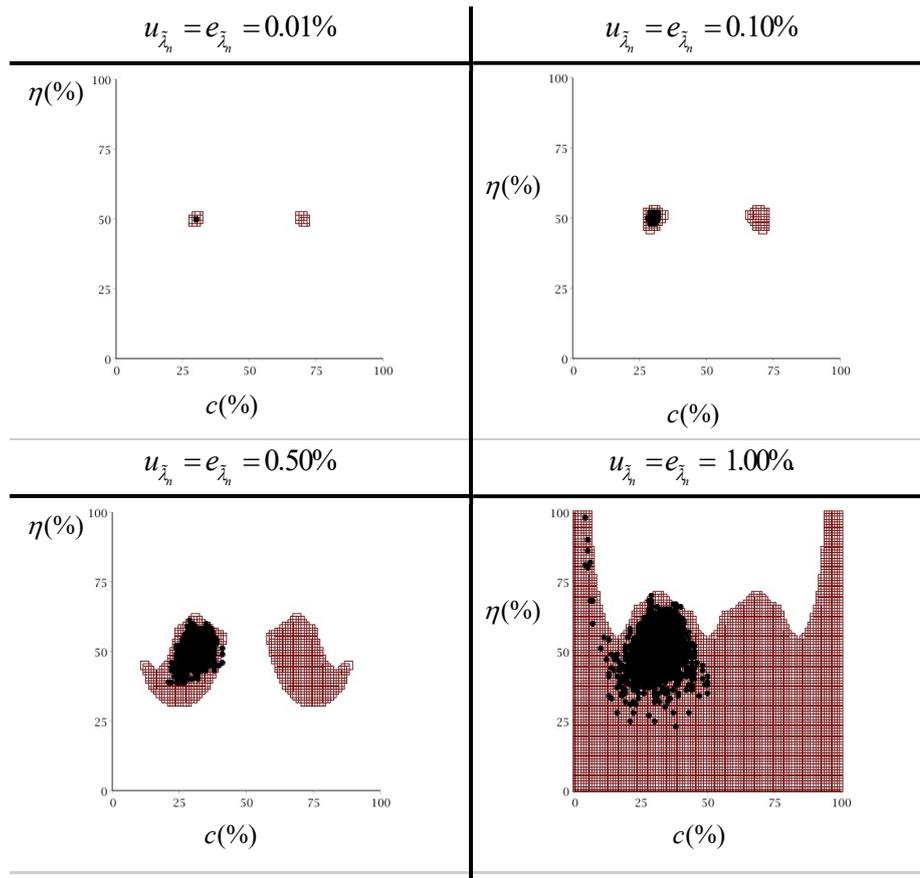


Figura 6.22 – Área de incertidumbre para la condición A-A, para fisura tipo  $c = 0.30$  y  $\eta = 0.50$ , con diferentes niveles de incertidumbre; superpuesta al análisis de sensibilidad de una distribución normal para diferentes niveles de error inducido.

### 6.3.4 *Comparativa de resultados de los análisis de sensibilidad con datos de entrada con errores máximos, distribución de probabilidad uniforme y normal*

La distribución normal de probabilidades es la que más se ajusta a la distribución que se obtiene al recolectar las mediciones de frecuencias naturales de vibración de una viga; y, por ende, de los coeficientes adimensionales de frecuencias, que son los datos de entrada del método de identificación de fisuras. Por otra parte, si bien la distribución uniforme no es la más representativa de la determinación experimental de los coeficientes adimensionales de frecuencias, presenta todas las combinatorias posibles de errores de entrada del método de identificación de fisuras. Visto desde esta óptica, realizar análisis de sensibilidad utilizando distribuciones de probabilidades, representa una ventaja metodológica.

Por el contrario, los análisis de sensibilidad basados en distribuciones de probabilidades, al tratar con errores aleatorios, para poder obtener resultados representativos requieren analizar por lo menos unas mil combinatorias de error por cada caso de estudio. Debido al alto coste computacional que implica, hace inviable poder realizar una constatación de la hipótesis universal. Lo que representa una importante desventaja metodológica. En breves palabras, sería la metodología ideal, pero se vuelve impracticable.

En el análisis de sensibilidad de los máximos errores en los datos de entrada, existen 2 errores posibles,  $-e_{\lambda_n}$  y  $+e_{\lambda_n}$ . Los que se agrupan según la cantidad  $M$  de modos considerados. Desde el punto de vista de la probabilidad y estadística, debido a que importa el orden de los elementos y que los mismos se pueden repetir, se trata de una variación con repetición,  $VR_m^n = m^n$ , de  $m$  elementos que se agrupan de  $n$ . Para ejemplificar, si se consideran 3 modos normales de vibración y el error puede tomar 2 valores, entonces existen  $VR_2^3 = 2^3 = 8$  combinaciones posibles de error. Lo que facilita poder realizar una constatación de la hipótesis universal. Esto representa una clara ventaja respecto del análisis de sensibilidad con las distribuciones de probabilidades.

Para asegurar que los resultados del análisis de sensibilidad de los máximos errores en los datos de entrada sean representativos se procede a realizar una comparativa. En las Tablas 6.5 a 6.10 se presentan los errores mínimos, promedios y máximos en la determinación de la posición ( $e_{\hat{c}}$ ) y profundidad ( $e_{\hat{h}}$ ) de la fisura, para los 3 tipos de análisis de sensibilidad que fueron

considerados en la secciones anteriores; o sea cuando los errores en la determinación de los coeficientes adimensionales de frecuencias se corresponden a la combinación de los errores máximos, cuando se corresponden a una distribución uniforme y a una distribución normal de probabilidades.

$e_{\lambda_n}$	Vinc.	Fisura		$e_{\lambda_n}$ : Máximos			$e_{\lambda_n}$ : Distr. uniforme			$e_{\lambda_n}$ : Distr. normal		
		c	$\eta$	$e_{\hat{c}}$			$e_{\hat{c}}$			$e_{\hat{c}}$		
				Min	Pro	Max	Min	Pro	Max	Min	Pro	Max
0,10%	AA	0,15	0,3	-12%	3%	35%	-12%	-2%	8%	-12%	-1%	8%
0,10%	AA	0,15	0,5	-5%	0%	3%	-6%	0%	3%	-4%	0%	3%
0,10%	AA	0,15	0,7	-2%	0%	2%	-2%	0%	2%	-1%	0%	1%
0,10%	AA	0,15	0,9	-1%	0%	1%	-1%	0%	1%	-1%	0%	1%
0,10%	AA	0,3	0,3	-7%	0%	10%	-2%	1%	3%	-2%	0%	3%
0,10%	AA	0,3	0,5	-2%	0%	3%	-2%	0%	2%	-2%	0%	2%
0,10%	AA	0,3	0,7	-1%	0%	1%	-1%	0%	1%	-1%	0%	1%
0,10%	AA	0,3	0,9	-1%	0%	1%	0%	0%	0%	0%	0%	0%
0,10%	AA	0,5	0,3	-47%	-8%	0%	-5%	-1%	0%	-5%	-1%	0%
0,10%	AA	0,5	0,5	-5%	-1%	0%	-5%	-1%	0%	-3%	-1%	0%
0,10%	AA	0,5	0,7	-3%	-1%	0%	-3%	1%	0%	-2%	0%	0%
0,10%	AA	0,5	0,9	-3%	-1%	0%	-2%	-1%	0%	-1%	0%	0%

Tabla 6.5 – Comparativa de los análisis de sensibilidad en los errores de posición para diferentes posiciones y profundidades de fisura, para determinado grado de error y único tipo de vinculación.

$e_{\lambda_n}$	Vinc.	Fisura		$e_{\lambda_n}$ : Máximos			$e_{\lambda_n}$ : Distr. uniforme			$e_{\lambda_n}$ : Distr. normal		
		c	$\eta$	$e_{\hat{\eta}}$			$e_{\hat{\eta}}$			$e_{\hat{\eta}}$		
				Min	Pro	Max	Min	Pro	Max	Min	Pro	Max
0,10%	AA	0,15	0,3	-7%	19%	68%	-6%	12%	68%	-5%	4%	68%
0,10%	AA	0,15	0,5	-2%	2%	10%	-3%	1%	13%	-3%	0%	7%
0,10%	AA	0,15	0,7	-2%	0%	4%	-2%	0%	4%	-2%	1%	2%
0,10%	AA	0,15	0,9	-2%	0%	3%	-3%	0%	4%	-3%	0%	4%
0,10%	AA	0,3	0,3	-6%	1%	5%	-2%	1%	2%	-2%	1%	2%
0,10%	AA	0,3	0,5	-3%	0%	3%	-2%	0%	2%	-2%	0%	2%
0,10%	AA	0,3	0,7	-2%	0%	3%	-2%	1%	2%	-2%	0%	2%
0,10%	AA	0,3	0,9	-2%	0%	3%	-2%	0%	2%	-2%	0%	2%
0,10%	AA	0,5	0,3	-5%	9%	69%	-1%	0%	2%	-1%	0%	2%
0,10%	AA	0,5	0,5	-2%	0%	2%	-2%	23%	3%	-1%	0%	1%
0,10%	AA	0,5	0,7	-1%	0%	1%	-1%	0%	2%	0%	0%	1%
0,10%	AA	0,5	0,9	-1%	0%	2%	-1%	0%	2%	0%	0%	1%

Tabla 6.6 – Comparativa de los análisis de sensibilidad en los errores de profundidad para diferentes posiciones y profundidades de fisura, para determinado grado de error y único tipo de vinculación.

$e_{\lambda_n}$	Vinc.	Fisura		$e_{\lambda_n}$ : Máximos			$e_{\lambda_n}$ : Distr. uniforme			$e_{\lambda_n}$ : Distr. normal		
				$e_{\hat{c}}$			$e_{\hat{c}}$			$e_{\hat{c}}$		
		$c$	$\eta$	Min	Pro	Max	Min	Pro	Max	Min	Pro	Max
0,10%	AL	0,15	0,5	-4%	15%	61%	-4%	6%	62%	-3%	1%	61%
0,10%	EL	0,15	0,5	-2%	0%	2%	-2%	0%	2%	-2%	0%	2%
0,10%	EA	0,15	0,5	-1%	20%	48%	-1%	26%	48%	-1%	23%	47%
0,10%	LL	0,15	0,5	2%	6%	8%	-6%	0%	5%	-7%	0%	5%
0,10%	AA	0,15	0,5	-5%	-1%	3%	-6%	0%	4%	-4%	0%	3%
0,10%	EE	0,15	0,5	-1%	9%	35%	-1%	8%	35%	-1%	4%	35%

Tabla 6.7 – Comparativa de los análisis de sensibilidad en los errores de posición para diferentes tipos de vinculación, para determinado grado de error y único típico de fisura.

$e_{\lambda_n}$	Vinc.	Fisura		$e_{\lambda_n}$ : Máximos			$e_{\lambda_n}$ : Distr. uniforme			$e_{\lambda_n}$ : Distr. normal		
				$e_{\hat{c}}$			$e_{\hat{c}}$			$e_{\hat{c}}$		
		$c$	$\eta$	Min	Pro	Max	Min	Pro	Max	Min	Pro	Max
0,10%	AL	0,15	0,5	-2%	1%	6%	-4%	0%	6%	-3%	1%	3%
0,10%	EL	0,15	0,5	-3%	0%	3%	-3%	0%	3%	-3%	0%	2%
0,10%	EA	0,15	0,5	-18%	-7%	6%	-22%	-10%	6%	-22%	-9%	5%
0,10%	LL	0,15	0,5	-3%	1%	10%	-8%	4%	36%	-8%	1%	47%
0,10%	AA	0,15	0,5	-2%	2%	10%	-3%	1%	13%	-3%	0%	7%
0,10%	EE	0,15	0,5	-19%	-7%	5%	-21%	-5%	5%	-21%	-2%	5%

Tabla 6.8 – Comparativa de los análisis de sensibilidad en los errores de profundidad para diferentes tipos de vinculación, para determinado grado de error y único típico de fisura.

$e_{\lambda_n}$	Vinc.	Fisura		$e_{\lambda_n}$ : Máximos			$e_{\lambda_n}$ : Distr. uniforme			$e_{\lambda_n}$ : Distr. normal		
				$e_{\hat{c}}$			$e_{\hat{c}}$			$e_{\hat{c}}$		
		$c$	$\eta$	Min	Pro	Max	Min	Pro	Max	Min	Pro	Max
0,01%	AA	0,3	0,5	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%
0,10%	AA	0,3	0,5	-2%	0%	3%	-2%	0%	3%	-2%	0%	2%
0,50%	AA	0,3	0,5	-15%	-1%	11%	-15%	1%	18%	-9%	0%	11%
1,00%	AA	0,3	0,5	-29%	-5%	14%	-29%	0%	20%	-26%	1%	20%

Tabla 6.9 – Comparativa de los análisis de sensibilidad en los errores de posición para diferentes grados de error, mismo tipo de vinculación y único típico de fisura.

$e_{\lambda_n}$	Vinc.	Fisura		$e_{\lambda_n}$ : Máximos			$e_{\lambda_n}$ : Distr. uniforme			$e_{\lambda_n}$ : Distr. normal		
				$e_{\hat{c}}$			$e_{\hat{c}}$			$e_{\hat{c}}$		
		$c$	$\eta$	Min	Pro	Max	Min	Pro	Max	Min	Pro	Max
0,01%	AA	0,3	0,5	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%
0,10%	AA	0,3	0,5	-3%	0%	3%	-3%	0%	3%	-2%	0%	2%
0,50%	AA	0,3	0,5	-15%	3%	11%	-16%	1%	11%	-11%	1%	11%
1,00%	AA	0,3	0,5	-49%	10%	34%	-49%	5%	48%	-27%	2%	48%

Tabla 6.10 – Comparativa de los análisis de sensibilidad en los errores de profundidad para diferentes grados de error, mismo tipo de vinculación y único típico de fisura.

En las figuras de los análisis de sensibilidad se observa que, en algunos casos de estudio, los errores en la determinación de posición y profundidad de fisura son mayores para los análisis que responden a distribuciones uniformes y normales que los que responden a errores máximos.

Esto mismo se verifica en las Tablas presentadas en esta sección. Sin embargo, para todos los casos de estudio, estas discrepancias no fueron significativas. Y en buena parte de los casos de estudio, los errores en la determinación de posición y profundidad de fisura son mayores para los análisis que responden a errores máximos de los datos de entrada que los que responden a distribuciones uniformes y normales.

Por lo tanto, se considera que utilizar análisis de sensibilidad que responden a la combinación de los máximos errores de entrada ofrece resultados representativos sin la necesidad de considerar miles de combinaciones posibles, reduciendo así significativamente el coste computacional. Lo que permite realizar una constatación de la hipótesis universal, siendo esta superadora de la constatación de la hipótesis existencial. En pocas palabras, si bien no es la metodología ideal, sigue siendo representativa y es factible de aplicación.

## 6.4 MAPEOS DE ANÁLISIS DE SENSIBILIDAD

### 6.4.1 Metodología para la determinación de los errores máximos en la determinación de la posición y profundidad de la fisura

Para contrastar la hipótesis universal es necesario realizar un análisis de sensibilidad para cada posición y profundidad de fisura, lo que implica una infinidad de combinaciones posibles; y por lo tanto es inviable. Para superar esta limitante, se procede a realizar una discretización del 1% tanto posición como en profundidad, dando lugar a 10.000 casos de estudio.

Así, para cada caso de estudio, o sea una determinada posición ( $c$ ) y profundidad de fisura ( $\eta$ ), se induce un error en los coeficientes adimensionales de frecuencias de los modos considerados ( $e_{\lambda_n}$ ). Dado que, en capítulos anteriores, el método de identificación de fisuras basado en la intersección de las curvas de nivel y la hipótesis área de incertidumbre, fueron ambos implementados empleando 3 modos, en este caso serán considerados las misma cantidad de modos.

Luego se aplica el método de identificación de fisuras propuesto. Finalmente, los resultados de posición ( $\hat{c}$ ) y profundidad ( $\hat{\eta}$ ) son almacenados y presentados como superficies tridimensionales o mapeos, tal como se muestra en la Figura 6.23.

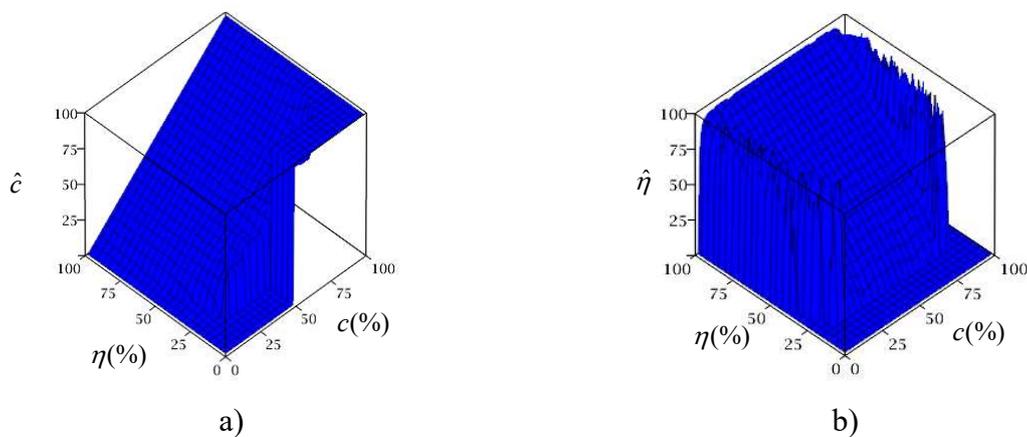


Figura 6.23 – Mapeo de los resultados de la implementación del método de identificación de fisuras para A-A cuando  $e_{\lambda_1} = e_{\lambda_2} = e_{\lambda_3} = 0.1\%$ . a) Posición. b) Profundidad.

A partir de los resultados obtenidos, son calculados el error relativo porcentual en la determinación de la ubicación ( $e_{\hat{c}}$ ) y profundidad ( $e_{\hat{\eta}}$ ) de acuerdo a las Ecuaciones 6.2.

Dichos errores, son también presentados en forma de superficies tridimensionales, tal como se muestra en la Figura 6.24.

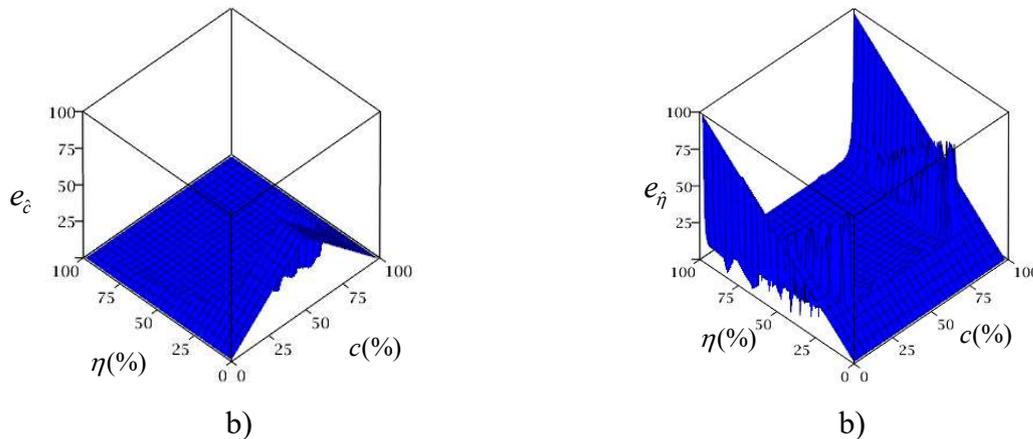


Figura 6.24 – Mapeo de los errores en los resultados de la implementación del método de identificación de fisuras para A-A cuando  $e_{\lambda_1} = e_{\lambda_2} = e_{\lambda_3} = 0.1\%$ . a) Posición. b) Profundidad.

Ahora bien, los errores inducidos en los coeficientes de frecuencias, que posiblemente respondan a una distribución normal de probabilidades, pueden adoptar cualquier valor. Realizar un análisis de sensibilidad que contemple todas estas posibilidades para hallar el error máximo en los resultados del método de identificación es también inviable.

Sin embargo, en el inciso anterior se comprobó que en buena parte los errores en la determinación de posición y profundidad de fisura son mayores para los análisis que responden a errores máximos de los datos de entrada que los que responden a distribuciones uniformes y normales. Esto hecho es tomado para poder viabilizar la contrastación de la hipótesis universal.

Así, por ejemplo, si se considera los errores en la determinación de los coeficientes de frecuencias del modo 1 a 3 se obtiene 8 combinaciones posibles de error y por lo tanto 8 superficies de resultados y de errores.

En la Figura 6.25 se presentan los errores en la determinación de la posición y en la Figura 6.26 los errores en la determinación de la profundidad para la condición A-A y  $e_{\lambda_n} = (-0.1\%, +0.1\%)$ .

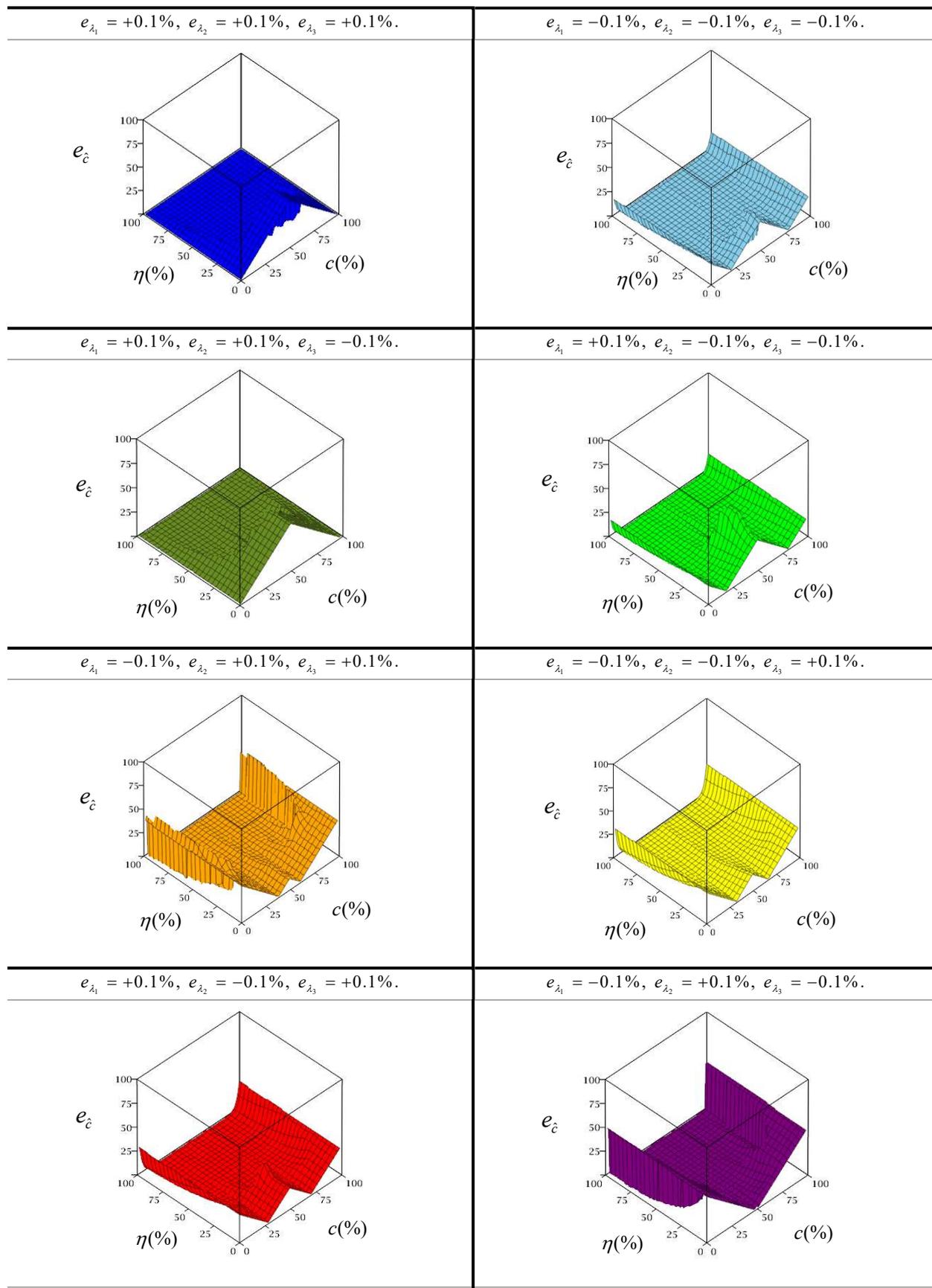


Figura 6.25 – Mapeo del error en la determinación de la posición para la condición A-A para 8 combinaciones de error  $e_{\lambda_n}$  en el intervalo  $(-0.1\%, +0.1\%)$ .

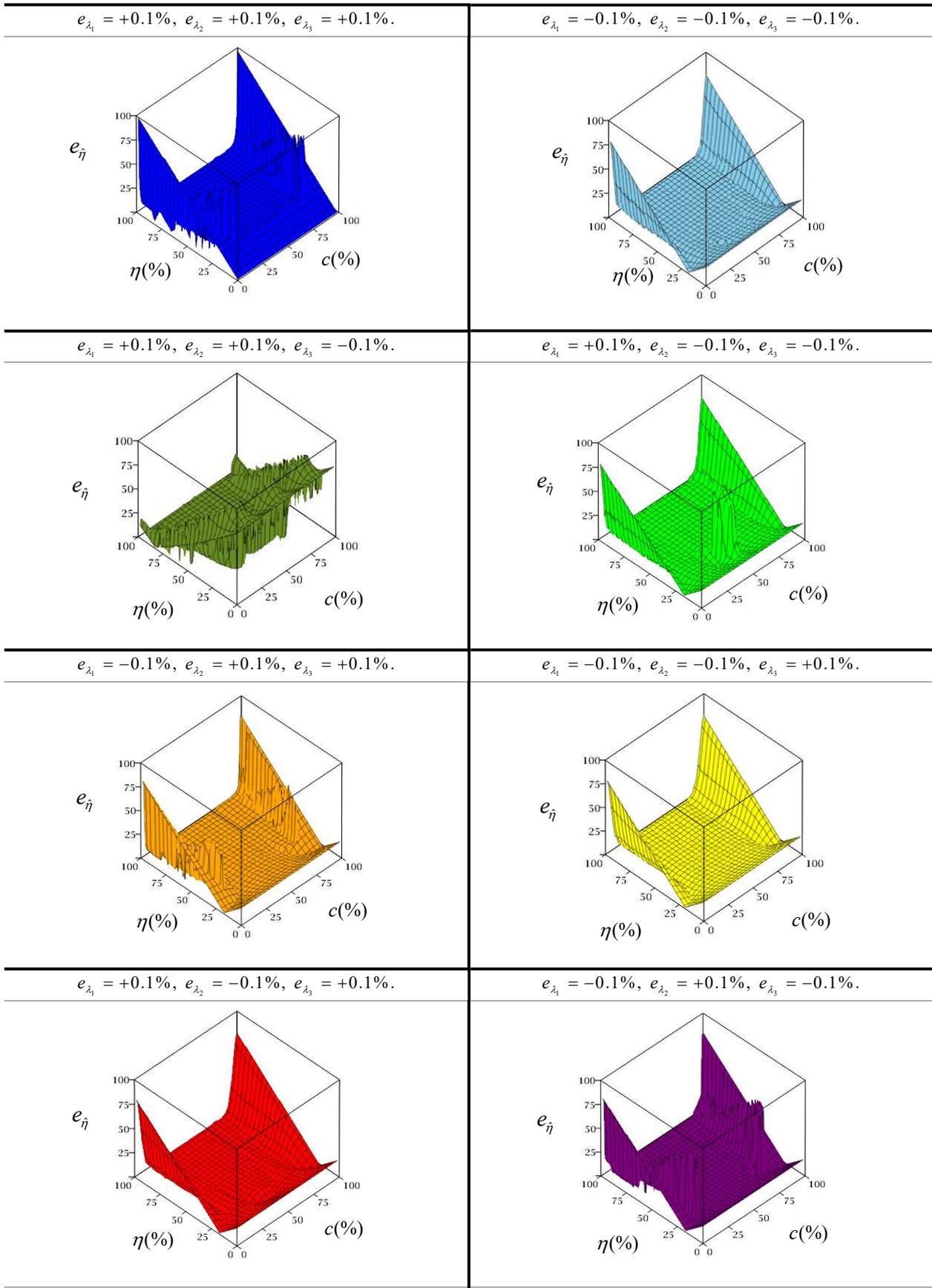


Figura 6.26 – Mapeo del error en la determinación de la profundidad para la condición A-A para 8 combinaciones de error  $e_{\lambda_n}$  en el intervalo  $(-0.1\%, +0.1\%)$ .

En la Figura 6.27 para la condición A-A y  $e_{\lambda_n}$  en el intervalo  $(-0.1\%, +0.1\%)$ , se presentan superpuestos los errores en la determinación de la posición de la Figura 6.25 y superpuestos los errores en la determinación de la profundidad de la Figura 6.26. Se observa que, para algunas combinaciones de posiciones y profundidades de fisura, el error en los resultados del método de identificación es mayor para alguna combinatoria de los errores en la determinación de los coeficientes adimensionales que para otros.

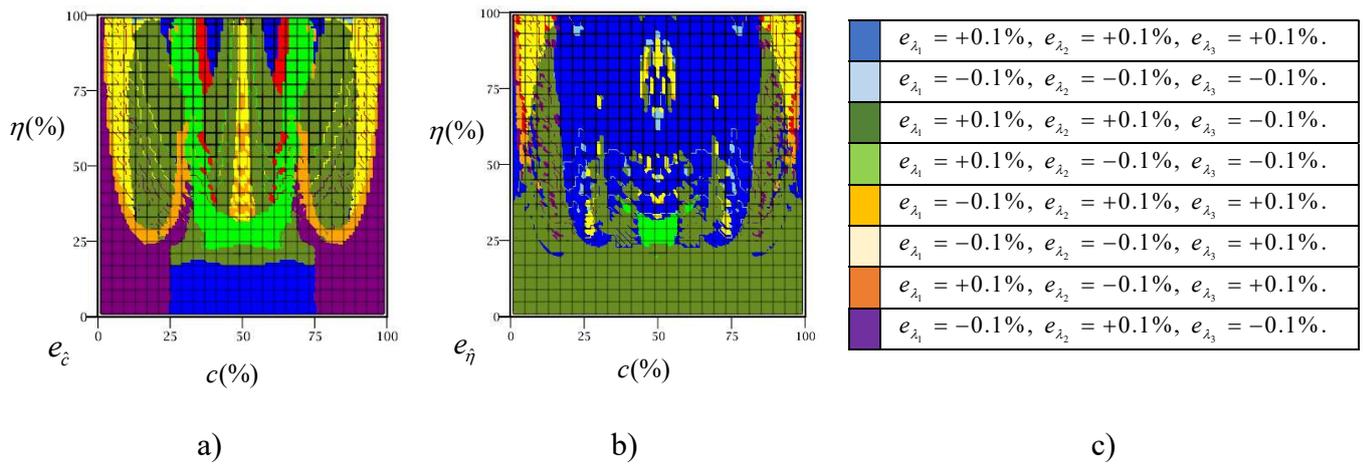


Figura 6.27 – Superposición de los 8 resultados obtenidos de las 8 combinaciones de error máximo  $e_{\lambda_n}$  en el intervalo  $(-0.1\%, +0.1\%)$  para el caso A-A. a) Error en la posición ( $e_c$ ). b) Error en la profundidad ( $e_\eta$ ). c) Casos.

Para cada posición y profundidad de fisura, se toma el error máximo en la determinación de la posición ( $e_c^{\max}$ ) y la profundidad ( $e_\eta^{\max}$ ) entre los errores en la determinación de la posición ( $e_c$ ) y profundidad ( $e_\eta$ ) obtenidos de implementar el método de identificación de fisuras para las 8 combinaciones de error máximo en la determinación de los coeficientes adimensionales de frecuencias; tal como se muestra en la Figura 6.28.

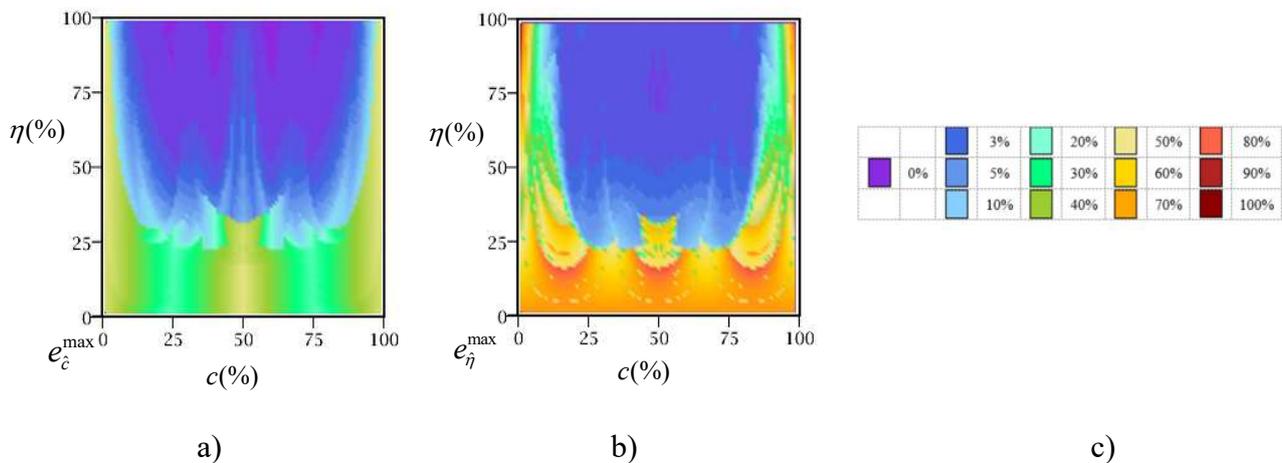


Figura 6.28 – a) Error máximo en la determinación de la posición ( $e_c^{\max}$ ) y b) error máximo en la determinación de la profundidad ( $e_\eta^{\max}$ ) entre los 8 resultados obtenidos de las 8 combinaciones de error máximo  $e_{\lambda_n}$  en el intervalo  $(-0.1\%, +0.1\%)$  para el caso A-A. c) Escala de colores.

Los errores promedios en la determinación de la posición ( $e_c^{pro}$ ) y profundidad ( $e_\eta^{pro}$ ) son obtenidos por la media aritmética de entre los errores en la determinación de la posición ( $e_c$ ) y profundidad ( $e_\eta$ ) obtenidos de implementar el método de identificación de fisuras para las 8 combinaciones de error máximo en la determinación de los coeficientes adimensionales de frecuencias. Los mismos son presentados en la Figura 6.29.

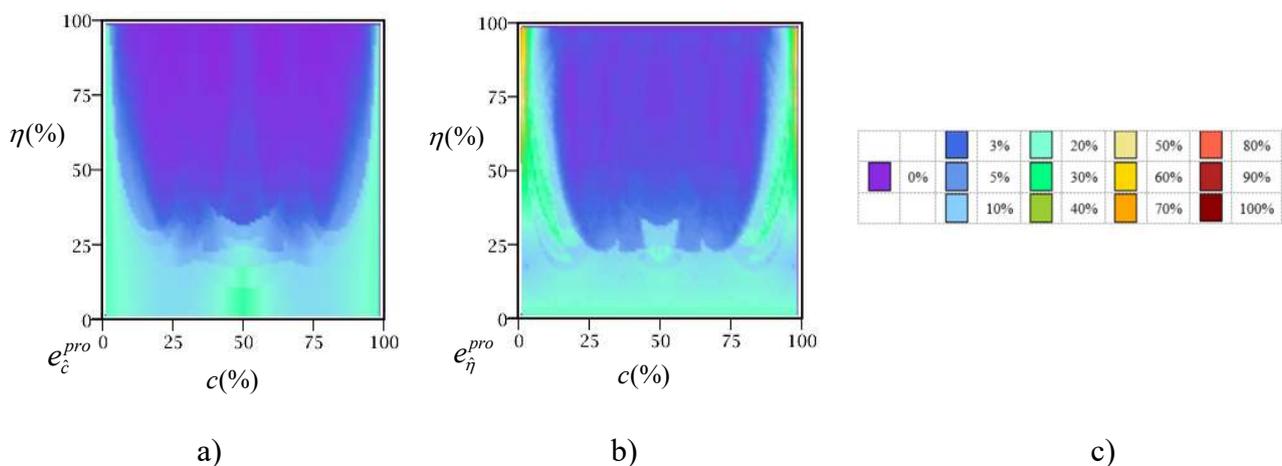


Figura 6.29 – a) Error promedio en la determinación de la posición ( $e_c^{pro}$ ) y b) error promedio en la determinación de la profundidad ( $e_\eta^{pro}$ ) entre los 8 resultados obtenidos de las 8 combinaciones de error máximo  $e_{\lambda_n}$  en el intervalo  $(-0.1\%, +0.1\%)$  para el caso A-A. c) Escala de colores.

#### 6.4.2 Resultados del análisis de sensibilidad universal

A continuación, se presentan los resultados del análisis de sensibilidad según la metodología antes descrita. Los resultados se presentan en forma de mapeo, donde para cada posición y profundidad de fisura, y para ciertos errores en la determinación de los coeficientes adimensionales de frecuencias, se ha determinado el error máximo y el error promedio en la determinación de la posición y de la profundidad que arroja el método de identificación de fisuras propuesto.

Han sido considerados los siguientes valores de error en los coeficientes adimensionales de frecuencias: 0.0001%, 0.001%, 0.01%, 0.1%, 0.5%, 1%, 1.25%, 1.5% y 2%. Un rango lo suficientemente grande como para representar una condición ideal donde el método funciona perfectamente para casi toda posición y profundidad de fisura y otra condición muy adversa donde el método de identificación funciona solo para fisuras muy grandes. Por otra parte, el intervalo considerado cuenta con la suficiente discretización como para analizar con precisión los estadios intermedios.

Los mapeos de error tienen una escala de valores que es la que se detalla en la Figura 6.30.

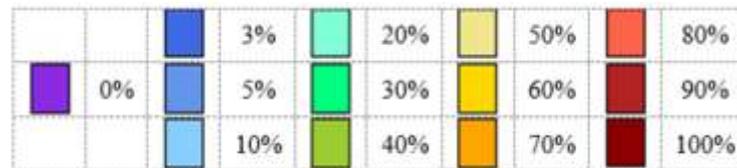
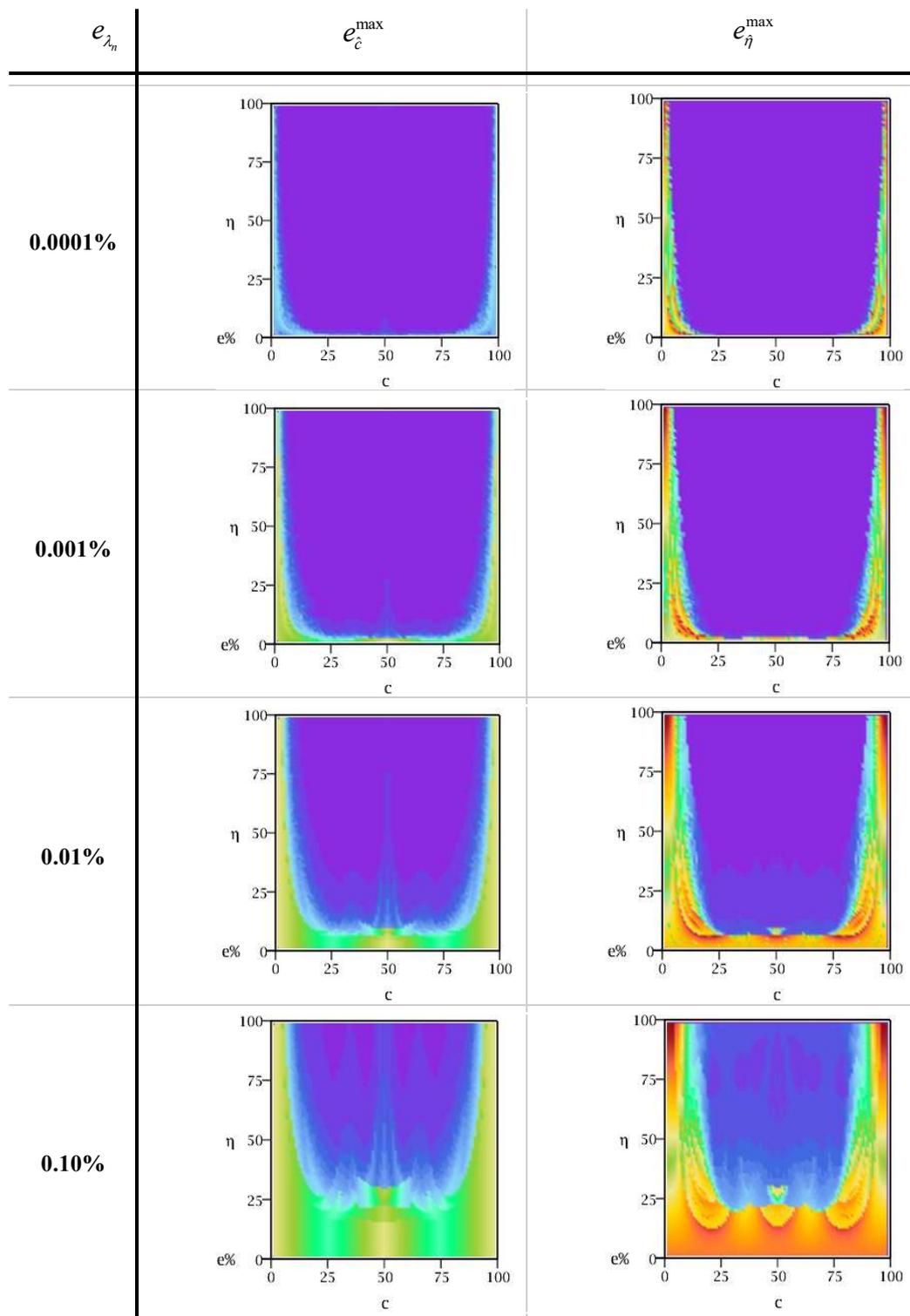


Figura 6.30 – Escala de valores de los mapeos de los errores pronosticados.

Se han considerado para este análisis tanto condiciones de vinculación clásicas, como restricciones elásticas en los bordes y restricciones elásticas en los bordes y posiciones intermedias.

En la Figura 6.31 se puede observar el mapeo de los errores máximos en la determinación de la posición ( $e_c^{\max}$ ) y profundidad ( $e_f^{\max}$ ) para la condición L-L. El resto de los casos de estudio pueden ser observados en Apéndice 8.



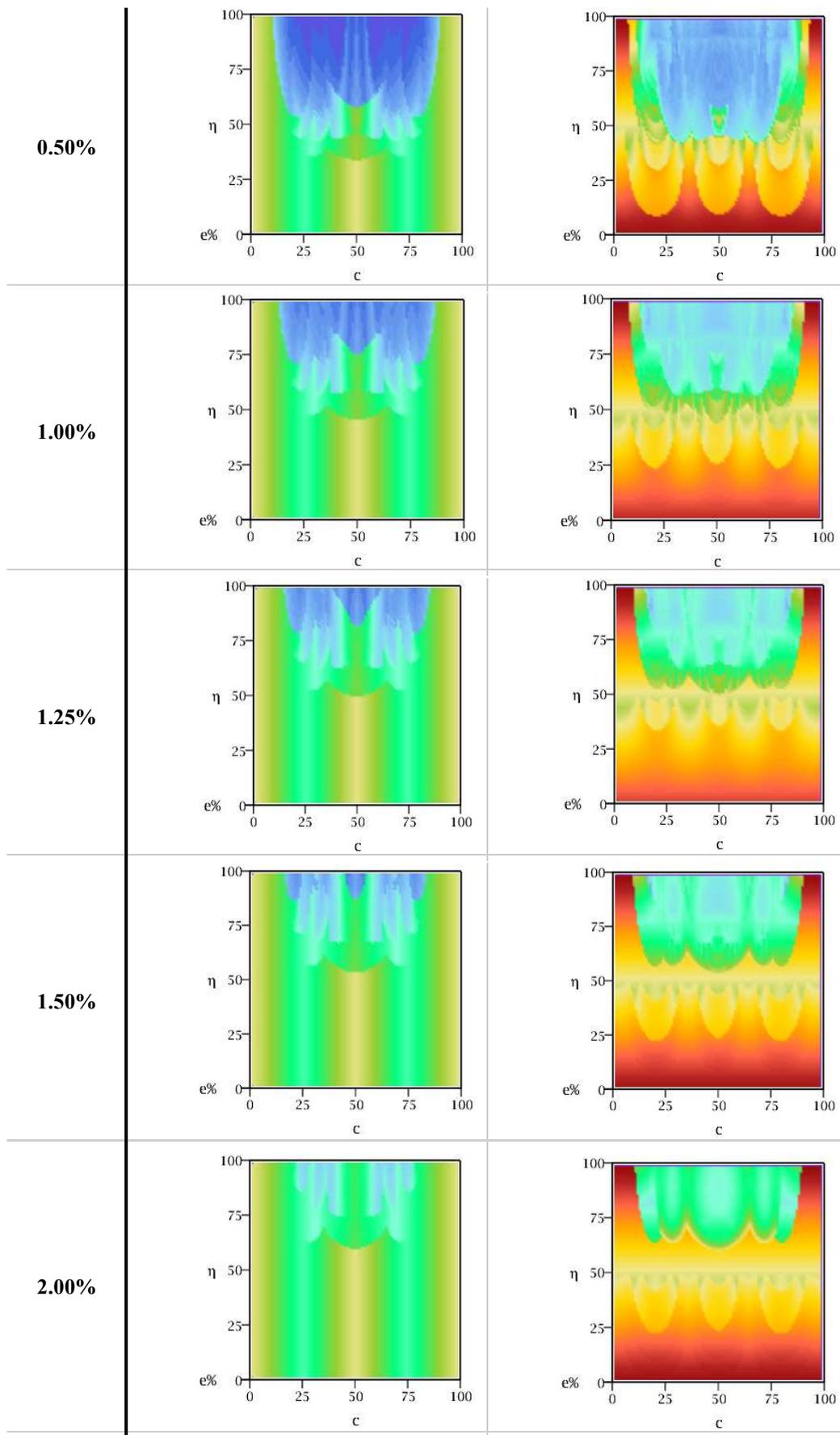


Figura 6.31 – Errores máximos en la determinación de la posición ( $e_c^{\max}$ ) y profundidad ( $e_\eta^{\max}$ ) para la condición L-L.

## 6.5 CONTRASTACIÓN UNIVERSAL DE LA HIPÓTESIS DE LAS ÁREAS DE INCERTIDUMBRE

El objetivo de este inciso es contrastar la hipótesis de las áreas de incertidumbre con los resultados obtenidos del análisis de sensibilidad. Para esto, sencillamente se compara el error pronosticado por la hipótesis con el error obtenido en el análisis de sensibilidad.

### 6.5.1 Metodología

La hipótesis para predecir la capacidad teórica de identificación de fisuras del método propuesto, denominada como de las áreas de incertidumbre, ha sido plasmada universalmente, o sea en toda la población, a partir de mapeos que indican el error máximo pronosticados en la determinación de la posición ( $\hat{e}_c^{\max}$ ) y profundidad de la fisura ( $\hat{e}_\eta^{\max}$ ), para cierta incertidumbre en la determinación de los coeficientes adimensionales de frecuencias ( $u_{r\tilde{\lambda}_n}$ ) de los 3 primeros modos.

En el inciso 5.3.6 de esta tesis están todos los resultados pronosticados para diferentes combinaciones de posiciones, profundidades, tipo de vinculaciones e incertidumbres. A modo de ejemplo, en la Figura 6.32 se presentan los errores máximos pronosticados para el caso A-A cuando  $u_{r\tilde{\lambda}_n} = 0.1\%$ .

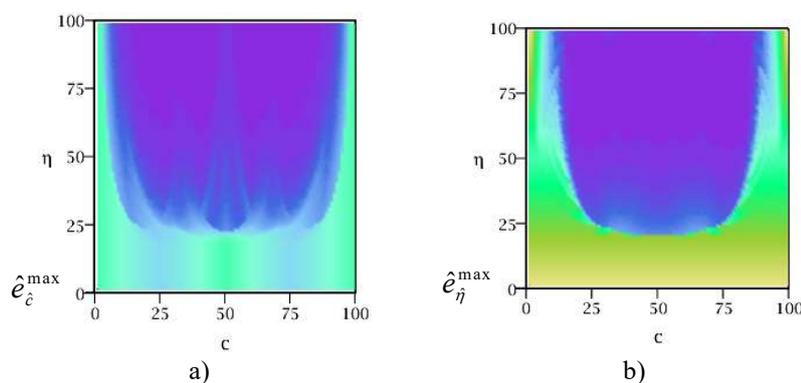


Figura 6.32 – Para la condición A-A, a) Error máximo esperado de la posición ( $\hat{e}_c^{\max}$ ) y b) error máximo esperado profundidad de la fisura ( $\hat{e}_\eta^{\max}$ ), con una incertidumbre de los coeficientes de frecuencias de  $u_{r\tilde{\lambda}_n} = 0.1\%$ .

La escala de color se corresponde a las mismas que fueron utilizadas en el capítulo 5, inciso 5.3.6 y que fueron representadas en la Figura 5.18.

Por otra parte, en la sección 6.4 de este capítulo ha sido formulado un análisis de sensibilidad que establece el error máximo en la determinación de la posición ( $e_c^{\max}$ ) y la profundidad de la fisura ( $e_{\hat{\eta}}^{\max}$ ), para un error conocido en los coeficientes adimensionales de frecuencias de los modos considerados ( $e_{\lambda_n}$ ).

Los resultados de este han sido presentados en forma de mapeos para diferentes combinaciones de posiciones y profundidades. A modo de ejemplo, en la Figura 6.33 se presentan los errores máximos obtenidos en el caso A-A cuando  $e_{\lambda_n} = 0.1\%$ . La escala de color se corresponde a las mismas que fueron utilizadas en el capítulo 6, inciso 6.4.2 y que fueron representadas en la Figura 6.30.

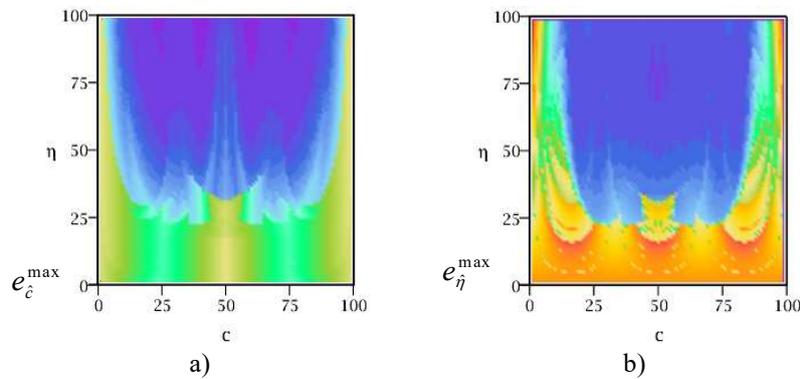


Figura 6.33 – Para la condición A-A, a) Error máximo esperado de la posición ( $e_c^{\max}$ ) y b) error máximo esperado profundidad de la fisura ( $e_{\hat{\eta}}^{\max}$ ), con una incertidumbre de los coeficientes de frecuencias de  $e_{\lambda_n} = 0.1\%$ .

Una forma eficaz de constatar los resultados de la hipótesis para predecir la capacidad teórica de identificación de fisuras con los resultados del análisis de sensibilidad del método propuesto es a partir de cuantificar la diferencia entre ambos.

Así se confecciona un nuevo mapeo que establece para cada combinación de posición y profundidad de fisura posible, el error en el pronóstico de la hipótesis de las áreas de las incertidumbres tanto para la determinación de la posición ( $e_{\text{Pron}_c}$ ) como de la profundidad

( $e_{\text{Pron}_{\hat{\eta}}}$ ), según:

$$e_{\text{Pron}_c} = \hat{e}_c^{\max} - e_c^{\max} .$$

$$e_{\text{Pron}_{\hat{\eta}}} = \hat{e}_{\hat{\eta}}^{\max} - e_{\hat{\eta}}^{\max} .$$

6.3

Así se obtiene un mapeo como el de la Figura 6.34, que muestra el grado de coincidencia entre los errores máximos pronosticados y los obtenidos.

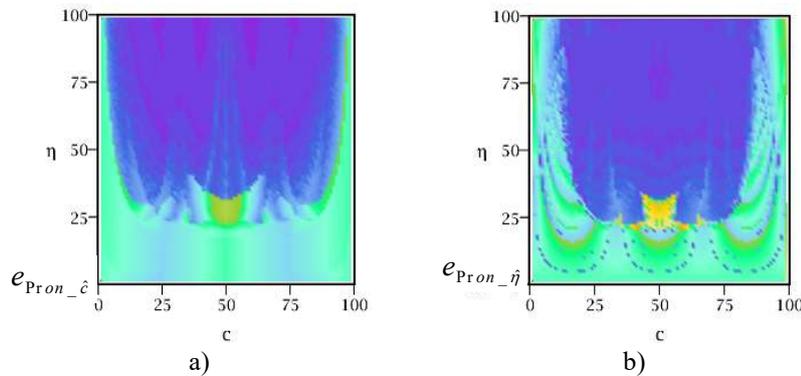


Figura 6.34 – Para la condición A-A, a) error en el pronóstico en la determinación de la posición ( $e_{Pron_{\hat{c}}}$ ) y b) error en el pronóstico en la determinación de la profundidad de la fisura ( $e_{\hat{\eta}}^{\max}$ ), con  $u_{r_{\hat{\lambda}_n}} = 0.1\%$ . y  $e_{\lambda_n} = 0.1\%$ .

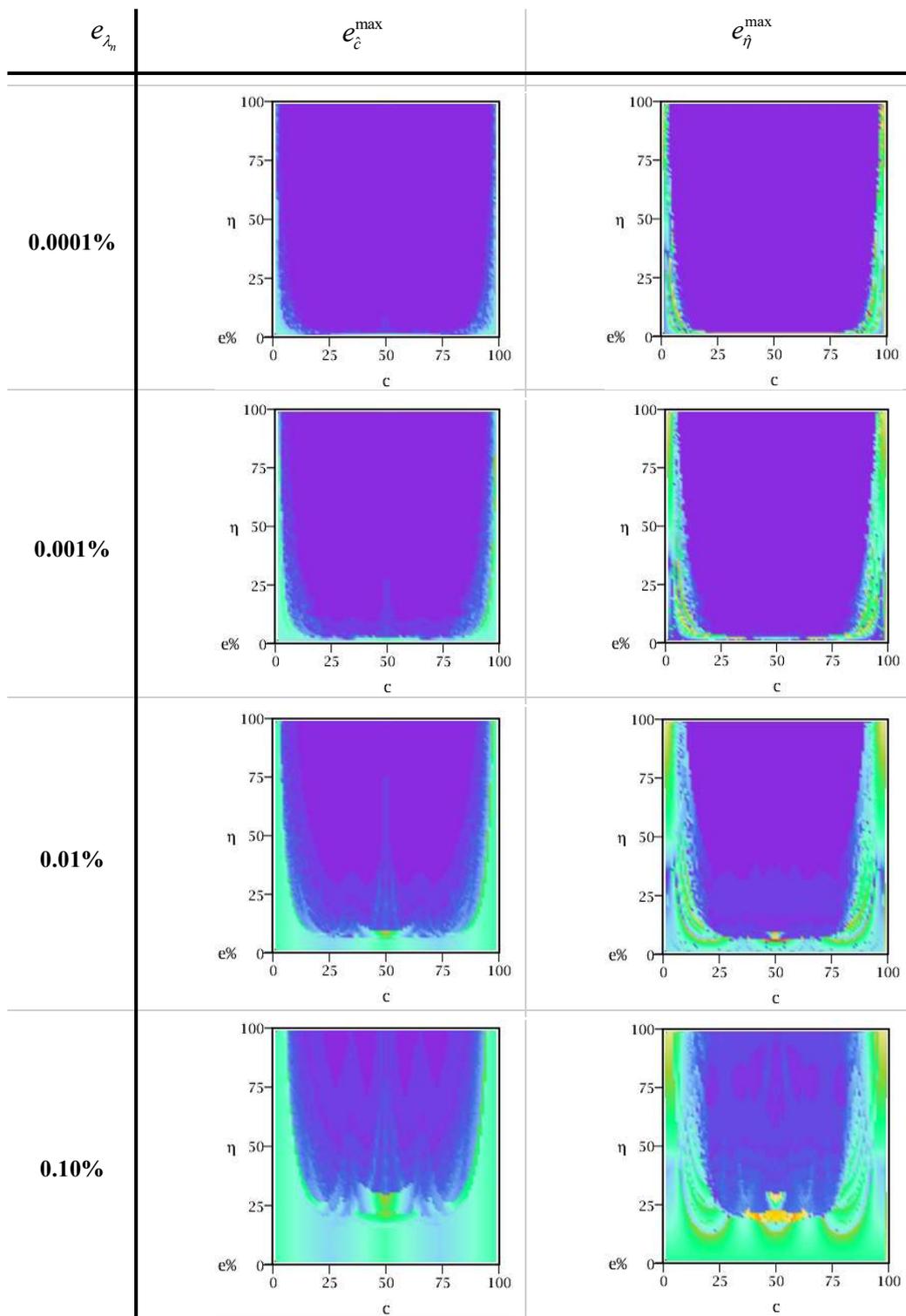
La escala de color es la misma que la utilizada en las Figura 6.32 y 6.33 donde se presentan respectivamente los resultados de los errores pronosticados y de los obtenidos.

### 6.5.2 Resultados del análisis de contratación universal de la hipótesis de las áreas de incertidumbre

Los resultados de la metodología antes descrita se presentan en la sección a continuación. Con el fin de limitar el contenido, solo las condiciones de vinculación clásicas han sido consideradas.

En la Figura 6.35 se presenta el error en el pronóstico de la hipótesis de las áreas de las incertidumbres para la condición L-L.

Para poder observar el resto de los casos correspondientes a las condiciones de vinculación clásicas dirigirse al Apéndice 9.



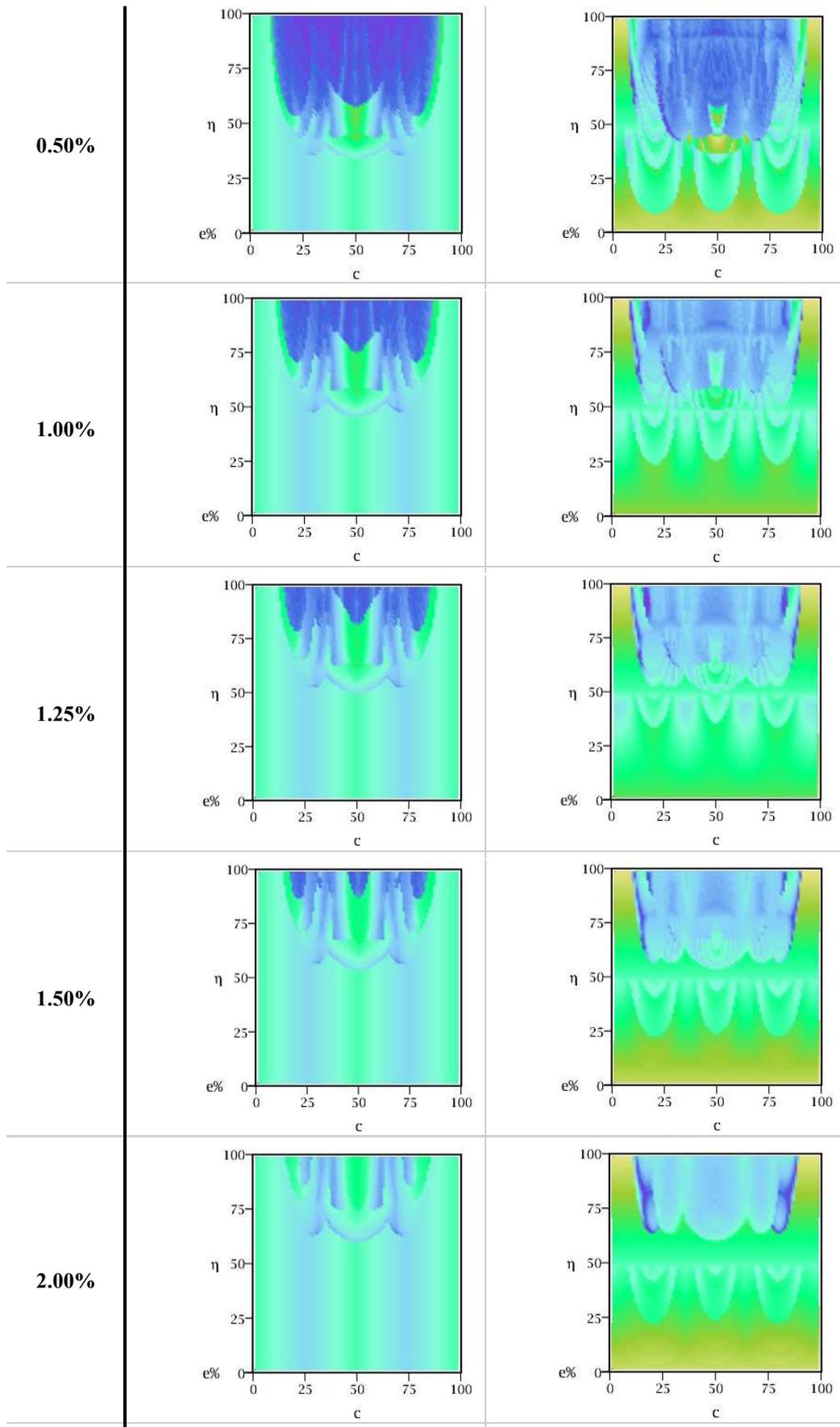


Figura 6.35 – Error en el pronóstico de la hipótesis de las áreas de las incertidumbres para la condición L-L.

## 6.6 APORTES Y CONCLUSIONES DE ESTE CAPÍTULO

Se presentó un análisis de sensibilidad del método analítico de identificación de fisuras basados en mediciones de frecuencias naturales de vibración que utiliza la intersección de las curvas de nivel de las superficies de frecuencias. El mismo consiste en inducir alteraciones en las variables de entrada, o sea en los coeficientes de frecuencias, y observar que resultados arroja el método como variables de salida, o sea la posición y profundidad de la fisura.

Además, permitió una cuantiosa recolección de datos que hace que la muestra tienda a alcanzar la población y por lo tanto establecer respuestas a los problemas que esta tesis formula como objeto de su investigación.

### 6.6.1 *Análisis de sensibilidad en algunos casos particulares*

Se demostró que, si no existiese error en la medición de los coeficientes adimensionales de frecuencias, algo que no se espera en una aplicación ingenieril real, el método analítico de identificación de fisuras basados en mediciones de frecuencias naturales de vibración que utiliza la intersección de las curvas de nivel de las superficies de frecuencias determinaría siempre la posición y profundidad de fisura en forma correcta, o sea sin error.

También se comprobó, en todos los casos analizados, que al inducir error en uno solo de los 3 primeros coeficientes adimensionales de frecuencias no hay error en la determinación de la posición y profundidad de fisura. Pero en caso que sean inducidos errores en 2 de los 3 primeros coeficientes adimensionales de frecuencias, se demostró que si existirá un cierto grado de error.

Se observó que a medida que aumenta el error en los datos de entrada, aumenta el error en los datos de salida. Pero no existe una relación lineal entre los mismos que sea aplicable a todos los casos de estudio, entiéndase diferentes condiciones de vinculación y diferente posición y profundidad de fisura. En general, se obtuvieron errores menores en la determinación de la posición y profundidad de la fisura cuando era mayor el nivel de daño en la viga.

### 6.6.2 *Contrastación existencial de la hipótesis de las áreas de incertidumbre*

Se observó que, en la mayoría de los casos, al inducir errores en los datos de entrada en el intervalo  $(-e_{\lambda_n}, e_{\lambda_n})$ , los máximos errores en la determinación de la posición  $(e_c)$  y profundidad  $(e_{\eta})$  se correspondían a alguna combinación de los máximos errores de entrada.

Se observó que en el caso que el método analítico de identificación de fisuras emplee como dato de entrada tres modos, existirán 8 combinaciones posibles de máximos errores de entrada.

Se verificó que no existe una combinación de máximos errores de entrada entre estas 8 posibles, que sea la más desfavorable para todas las posibles combinaciones de posiciones y profundidades de fisura. Sino por el contrario, según la ubicación y profundidad de la fisura, una de las 8 posibles combinaciones será la que produzca el mayor error en la determinación de la posición y profundidad de la fisura. Esto a su vez, para cada condición de vinculación.

El análisis de sensibilidad viabilizó la demostración de la hipótesis existencial de capacidad teórica de identificación denominada las áreas de incertidumbre. Y, además demostró que la misma es efectiva para predecir el comportamiento del modelo.

### **6.6.3 Mapeos de análisis de sensibilidad**

Se logró desarrollar una metodología para la determinación de los errores máximos en la determinación de la posición y profundidad de la fisura.

Los mapeos de los análisis de sensibilidad viabilizo la demostración de la hipótesis universal de capacidad teórica de identificación denominada las áreas de incertidumbre. Y, además, demostró que la misma es efectiva para predecir el comportamiento del modelo.

Los mapeos resumen una cuantiosa cantidad de información, que permite que cualquiera que desee implementar el método analítico de identificación de fisuras basados en mediciones de frecuencias naturales de vibración que utiliza la intersección de las curvas de nivel de las superficies de frecuencias, pueda conocer de antemano los límites del mismo y evaluar si puede ser útil para su aplicación ingenieril.

# CAPÍTULO 7

## DETERMINACIÓN EXPERIMENTAL DE LOS COEFICIENTES ADIMENSIONALES DE LAS FRECUENCIAS NATURALES DE VIBRACIÓN DE VIGAS CON PRESENCIA DE UNA FISURA

### 7.1 INTRODUCCIÓN

Entre los objetivos principales del estudio de la dinámica estructural se encuentra determinar la naturaleza y niveles de vibración de una estructura, la verificación de modelos teóricos y las predicciones obtenidas por medio de ellos. Un estudio particular es el análisis modal, proceso mediante el cual se describe una estructura en términos de sus propiedades dinámicas o parámetros modales que son la frecuencia, el amortiguamiento y los modos de vibración para todos los modos en el rango de frecuencias de interés. El análisis modal experimental reúne un conjunto de técnicas destinadas a identificar los parámetros modales. En general el ensayo consiste en hacer vibrar el componente con algún tipo conocido de fuerza, se adquiere la respuesta de varios sensores (acelerómetros en general) colocados en distintos puntos de la estructura y se obtiene la función respuesta en frecuencia (FRF). Su aplicación en procesos productivos industriales, productos manufacturados y ensayos de laboratorio; entre otras, es numerosa.

El sistema de excitación es el encargado de poner en movimiento al sistema, y la forma física de dichos componentes pueden ser el de un martillo de impacto o un agitador/excitador (shaker). Estos últimos, se clasifican en sistemas de tipo mecánico, hidráulico, electrodinámico y electromagnético. Para profundizar sobre los desarrollos de shakers consultar el Apéndice 10.

El análisis modal es un proceso mediante el cual se describe una estructura en términos de sus propiedades dinámicas o parámetros modales que son la frecuencia, el amortiguamiento y los modos de vibración para todos los modos en el rango de frecuencias de interés. Todas las estructuras poseen frecuencias naturales y modos de vibración, que dependen básicamente de la masa y de la rigidez de la estructura. La respuesta de la estructura es una superposición lineal de todos los modos de vibración excitados. En el análisis modal, una deformación compleja de una estructura se descompone en una serie de simples modos de deformación con parámetros de frecuencia y amortiguamiento individuales. Su fin último es la construcción de un Modelo Modal del comportamiento de la estructura. Para profundizar sobre la técnica de análisis modal experimental, consultar el Apéndice 11.

En este capítulo se centra en los errores e incertidumbres en la determinación de los coeficientes adimensionales de frecuencias.

## **7.2 ERRORES E INCERTIDUMBRES EN LA DETERMINACIÓN DE LOS COEFICIENTES ADIMENSIONALES DE LAS FRECUENCIAS NATURALES DE VIBRACIÓN**

El método de identificación de fisuras emplea como dato de entrada a los coeficientes adimensionales de frecuencias. Estos son una función de las frecuencias naturales de vibración. Las mismas son determinadas experimentalmente.

Al comparar las frecuencias naturales de vibración determinadas en forma analítica y experimental, es común que existan diferencias en los resultados. Si se considera a los resultados analíticos como valor verdadero, estas diferencias pueden ser tratadas como errores.

De hecho, en toda medición existen errores asociados. Pueden clasificarse en aleatorios (precisión/dispersión) y sistemáticos (exactitud). Los errores aleatorios corresponden a la variabilidad propia del muestreo, dependen de la incertidumbre de la cadena de medición, responden al azar y tienden a tener un valor medio. Los errores sistemáticos corresponden a los que se producen de igual modo en todas las mediciones que se realizan de una magnitud.

Por eso, en el presente capítulo se analiza en primer término la incertidumbre en la determinación de las frecuencias naturales de vibración. Luego se analiza qué relación existe entre las frecuencias y los coeficientes de frecuencias, y la relación entre sus incertidumbres. Finalmente se implementa un método para disminuir los errores sistemáticos.

**7.2.1 Incertidumbre en la determinación de las frecuencias naturales de vibración**

La incertidumbre en la determinación de las frecuencias naturales de vibración ( $u_f$ ) está compuesta por la incertidumbre propia del ensayo ( $u_{test}$ ), la incertidumbre del acelerómetro sensor ( $u_{acl}$ ), la incertidumbre del adquirente de datos ( $u_{daq}$ ), según:

$$u_f = \sqrt{(u_{test})^2 + (u_{acl})^2 + (u_{daq})^2} \tag{7.1}$$

**7.2.1.1 Incertidumbre del ensayo ( $u_{test}$ ).**

La incertidumbre propia del ensayo puede ser considerada tipo A. Por lo tanto, basta con tomar  $N$  mediciones, calcular su media, su desvío estándar y su incertidumbre; según:

$$E(f) \approx \bar{f} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f_i \tag{7.2}$$

$$S(f) = \sqrt{\sigma(f)} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (f_i - \bar{f})^2}{(N-1)}} \tag{7.3}$$

$$u_A(\bar{f}) = S(\bar{f}) = \frac{S(f)}{\sqrt{N}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (f_i - \bar{f})^2}{N(N-1)}} \tag{7.4}$$

Para determinar las frecuencias se emplearon 2 técnicas de análisis de señales, la FFT y la FRF. Se emplearon 3 acelerómetros y el golpe con un martillo instrumentado. Tras tomar 12 mediciones, se obtuvieron 48 resultados, cuyos valores esperados y desvío estándar se presentan a continuación.

Modo	FFT		FRF1		FRF2		FRF3		PROMEDIO	
	$\bar{f}$ [Hz]	$\sigma(\bar{f})$								
1	94.428	0.241	93.996	0.262	93.995	0.262	93.995	0.262	94.104	0.313
2	289.985	0.174	289.791	0.273	289.791	0.273	-	-	289.855	0.251
3	619.991	0.554	619.733	0.596	619.690	0.684	619.733	0.596	619.787	0.602
									Promedio	0.388

Tabla 7.1 – Mediciones de frecuencias naturales de vibración y su desvío estándar.

A partir de los cuales se calcula la varianza, la incertidumbre absoluta y relativa del ensayo, según:

Modo	$\bar{f}$ [Hz]	$\sigma(\bar{f})$	$S(\bar{f})$	$S(\bar{f}) = u_{test}(\bar{f})$	$u_{test}(\bar{f})_{\%}$
1	94.104	0.313	0.095	0.097	0.104%
2	289.855	0.251	0.060	0.063	0.022%
3	619.787	0.602	0.355	0.362	0.059%
	Promedio	0.388	0.170	0.174	0.061%

Tabla 7.2 – Mediciones de frecuencias naturales de vibración e incertidumbre.

La incertidumbre absoluta promedio del test es  $u_{test}(\bar{f}) = 0.174$ . Mientras que la relativa es  $u_{test}(\bar{f})_{\%} = 0.061\%$ .

#### 7.2.1.2 Incertidumbre del acelerómetro ( $u_{acl}$ ).

El acelerómetro es un transductor que convierte la aceleración mecánica en una señal eléctrica proporcional. El utilizado en las pruebas es uno marca Bruel and Kjaer modelo 4508B, de tipo IEPE (con amplificador incluido), por lo que necesita ser alimentado con corriente de 4mA y tiene al voltaje como variable de salida.

Para estimar su incertidumbre se sigue la metodología de la GUM “Guide to the expression of uncertainty in measurement”. Dentro de sus características se encuentran:

- **Sensibilidad:** Proporción de la producción eléctrica del sensor a la entrada de mecánica (mV/g o PC/g). En general establecida a 100 Hz, 25±5°C, 5g o 10g. Ronda los ± 5% a ± 10%.
- **No linealidad:** Medida de cuán lineal es la salida. Está definida como la máxima desviación de la salida en voltaje, respecto de la recta de interpolación; expresado como porcentaje de la escala completa de salida. Por lo general es del orden del ± 1% en todo el rango completo de escala.
- **Respuesta de frecuencia:** Es la sensibilidad especificada en todo el rango de frecuencias, en relación con la sensibilidad de referencia, en general unos 100 Hz. Se puede especificar en porcentaje o en decibelios, con bandas de tolerancias típicas de ±10%, ±1dB, y ± 3dB.
- **Error de offset:** Desplazamiento del cero.
- **Sensibilidad transversal:** Es la sensibilidad a los 90 grados a la sensibilidad axial expresada como porcentaje de la sensibilidad axial. Lo ideal, sería del 0%, pero

debido a las tolerancias de fabricación, que puede ser de hasta 5%. Los valores del 3% o menos están disponibles bajo pedido especial.

- **Desalineación:** Debido a problemas en el montaje puede aparecer una desalineación entre el eje que se desea medir y el que efectivamente se hace.
- **Sensibilidad magnética:** Alteraciones en las mediciones debido a la presencia de campos magnéticos.
- **Efectos de temperatura:** Cambio de los coeficientes de ajuste debido a efectos de la temperatura.
- **Efectos de humedad:** Cambio de los coeficientes de ajuste debido a efectos de la humedad.

Considerando las especificaciones del acelerómetro, su incertidumbre podría ser calculada mediante la siguiente formula:

$$u_{acl} = \sqrt{u_k^2 + u_{kt}^2 + u_{rf}^2 + u_{CM}^2 + u_T^2 + u_H^2 + 2u_T u_H r(T, H)} \quad 7.5$$

Donde:

- $u_k$  : Incertidumbre debido a la sensibilidad o ganancia.
- $u_{kt}$  : Incertidumbre debido a la sensibilidad transversal.
- $u_{rf}$  : Incertidumbre debido a la repuesta en frecuencia o no-linealidad.
- $u_{CM}$  : Incertidumbre campo magnético.
- $u_T$  : Incertidumbre debido a la temperatura.
- $u_H$  : Incertidumbre debido a la humedad.
- $r(T, H)$  : Correlación entre temperatura y humedad.

Debido a que todas las incertidumbres del transductor no pudieron ser recabadas, su incertidumbre queda reducida a:

$$u_{acl} = \sqrt{u_k^2 + u_{kt}^2 + u_{rf}^2 + u_T^2} \quad 7.6$$

**Calibration Chart for  
DeltaTron® Accelerometer  
Type 4508 B 004**



**Brüel & Kjær**

Serial No.: 30317

Reference Sensitivity <sup>1)</sup> at 159.2 Hz ( $\omega = 1000 \text{ s}^{-1}$ ), 20  $\text{ms}^{-2}$  RMS,  
4 mA supply current and 24.6 °C: 49.93  $\text{mV/ms}^2$  ( 489.6  $\text{mV/g}$ )

$u_k = 0.1\%$

Frequency Range: Amplitude ( $\pm 10\%$ ): 0.2 Hz to 8 kHz  
Phase ( $\pm 5^\circ$ ): 1 Hz to 5 kHz

Mounted Resonance Frequency: 25 kHz

Transverse Sensitivity:  
Maximum (at 30 Hz, 100  $\text{ms}^{-2}$ ): < 5% re Reference Sensitivity

$u_{kt} = 5\%$

Transverse Resonance Frequency: > 18 kHz

Calculated values for TEDS <sup>3)</sup>: Resonance frequency: 23.8 kHz  
Quality factor @  $f_{res}$ : 9.65  
Amplitude slope: -2.2 %/decade  
High pass cut-off frequency: 0.18 Hz  
Low pass cut-off frequency: 2000 kHz

Measuring Range:  $\pm 140 \text{ ms}^{-2}$  peak ( $\pm 14 \text{ g}$  peak)

Polarity of the electrical signal is positive for an acceleration in the direction of the arrow on the drawing.

<sup>1)</sup> This calibration is obtained on a modified Brüel & Kjær Calibration System Type 9610 System No.: 150157.1 and is traceable to the National Institute of Standards and Technology, USA and Physikalisch-Technische Bundesanstalt, Germany.  
The expanded uncertainty is 1.0% determined in accordance with EAL-R2. A coverage factor  $k=2$  is used. This corresponds to a coverage probability of 95% for a normal distribution.

<sup>3)</sup> Transducer Electronic Data Sheet according to IEEE P1451.4.

<sup>4)</sup> Deviation from Reference Sensitivity.

Patents involved: US 08387851, JP 50952694 and DK 169653.

For further information, please see <http://www.bk.dk> and Product Data Sheet BP 1841.

**Environmental:**

Temperature Range: - 54 to + 100°C (- 65 to + 212°F)

Temperature Coefficient of Sensitivity: + 0.12%/°C

$u_T = 0.12\%$

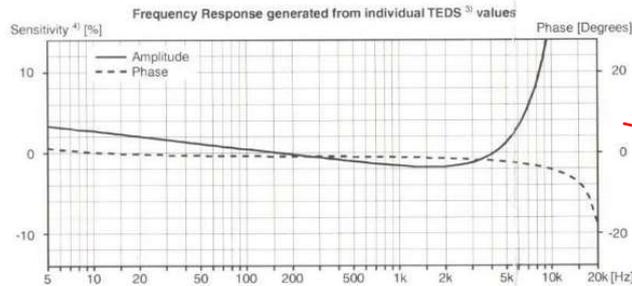
Temp. Transient Sensitivity (3 Hz Low. Lim. Frq. (-3 dB, 6 dB/oct)): 0.3  $\text{ms}^{-2}/^\circ\text{C}$

Magnetic Sensitivity (50 Hz, 0.038 T): 3  $\text{ms}^{-2}/\text{T}$

Base Strain Sensitivity (at 250  $\mu\epsilon$  in base plane):  
Mounted on adhesive tape 0.09 mm thick: 0.005  $\text{ms}^{-2}/\mu\epsilon$

Max. Non-destructive Shock: 50  $\text{kms}^{-2}$  peak (5000 g peak)

Humidity: 100 % RH non-condensing



$u_{rf} = 4\% - 10\%$

Figura 7.1– Características del acelerómetro empleado.

El certificado de calibración del acelerómetro usado se puede observar en la Figura 7.1. Los valores hallados para cada incertidumbre y la general del instrumento se presentan en la Tabla 7.3

$u_k$	$u_{kt}$	$u_{rf}$	$u_T$	$u_{aci}$
0.05%	5.00%	2.00%	0.12%	5.39%

Tabla 7.3 – Incertidumbre relativa del acelerómetro.

### 7.2.1.3 Incertidumbre del adquirente de datos ( $u_{daq}$ ).

Para las pruebas se dispone de un adquirente de datos de 4 canales NI-9234. El adquirente de datos registra tanto valores de amplitud de aceleración como valores de tiempo, por lo que se puede establecer una incertidumbre para cada tipo de medida. Por lo tanto, la incertidumbre del adquirente es la incertidumbre combinada de la incertidumbre de la amplitud y de la frecuencia.

$$u_{daq} = \sqrt{(u_{daq\_a})^2 + (u_{daq\_f})^2} \quad 7.7$$

Si consideramos la amplitud de la aceleración registrada por el DAQ, la misma está dada por la lectura del voltaje que produjo el acelerómetro IEPE, de la forma  $a = GV + O$ , donde  $G$  es ganancia,  $V$  es el voltaje medido y  $O$  es el offset. Al aplicar la fórmula de propagación de errores para variables independientes, para determinar la incertidumbre del adquirente de datos en el campo de las amplitudes de las aceleraciones ( $u_{daq\_a}$ ), se obtiene:

$$u_{daq\_a} = \sqrt{\left(\frac{\partial a}{\partial V} u_v\right)^2 + \left(\frac{\partial a}{\partial G} u_G\right)^2 + \left(\frac{\partial a}{\partial O} u_o\right)^2} = \sqrt{(Gu_v)^2 + (Vu_G)^2 + (u_o)^2} \quad 7.8$$

Si consideramos que la ganancia es la inversa de la constante de sensibilidad del acelerómetro,  $G = \frac{1}{49.93 \text{ mV/ms}^{-2}} \frac{1000 \text{ mV}}{1 \text{ V}} = 20.028 \frac{\text{ms}^{-2}}{\text{V}}$ . La incertidumbre de la resolución del

adquirente de datos cuando capta el voltaje de entrada ( $u_{V_a}$ ) es

$u_v = \frac{\text{Rango}}{2^{\text{ADCresolución}}} = \frac{5.1 \text{ V}}{2^{24}} = 3.039 \text{ E}^{-7} \text{ V}$ . Por lo tanto, reemplazando se obtiene

$$u_{daq\_a} = \sqrt{(20.028 \cdot 3.039 \text{ E}^{-7})^2 + (5.15 \text{ E}^{-4})^2 + (3 \text{ E}^{-4})^2} = 2.56 \text{ E}^{-3}$$

Para obtener la incertidumbre del adquirente de datos en el campo de las frecuencias ( $u_{daq\_f}$ ) determinan las relaciones entre la resolución en tiempo, la resolución en frecuencia el número de muestreo, la tasa de muestreo y el ancho de banda. El tiempo total de adquisición de datos ( $T$ ) es igual al producto de del número de puntos muestreados ( $N$ ) y el intervalo de

muestreo o resolución temporal ( $\Delta t$ ), tal que:  $T = N\Delta t$ . La resolución en frecuencia ( $\Delta f$ ), es la inversa del el tiempo total de adquisición de datos  $\Delta f = 1/T = 1/(N\Delta t)$ . La frecuencia de sampleo ( $f_s$ ) es la inversa de resolución temporal ( $\Delta t$ ), por lo tanto  $\Delta t = 1/f_s$ . Entonces la resolución puede ser expresada como  $\Delta f = 1/T_s = 1/(N\Delta t) = f_s/N$ . Para extraer información de frecuencia valida, Nyquist propone que la frecuencia de muestreo ( $f_s$ ) debe ser por lo menos el doble de la frecuencia máxima de interés o ancho de banda ( $f_{\max}$ ), estableciendo la relación  $f_s > 2f_{\max}$ . Y por lo tanto,

$$\Delta f = \frac{1}{T} = \frac{1}{N\Delta t} = \frac{f_s}{N} = \frac{2f_{\max}}{N} \quad 7.9$$

De lo que se desprende, que en principio si la frecuencia se mantiene constante según la necesidad del propio ensayo, entonces  $N \rightarrow \infty$  y por lo tanto  $\Delta f \rightarrow 0$ . Según las especificaciones del adquisidor de datos, la base de tiempo interna maestra ( $f_M$ ) tiene un valor de  $f_M = 13.1072MHz$  y una precisión de  $\pm 50ppm$ . La base de tiempo interna maestra controla la velocidad de muestreo de datos ( $f_s$ ) según la ecuación  $f_s = f_M/256n$ . Donde  $n$  es un entero de 1 a 31. Por lo tanto, según, a cada  $n$  se corresponde una frecuencia de sampleo y una incertidumbre asociada a la misma. La incertidumbre del adquisidor de datos en el campo de las frecuencias ( $u_{daq\_f}$ ), estará dada por la incertidumbre que le corresponde a la velocidad de muestreo más próxima que brinda el clock del adquisidor respecto de las necesidades de nuestro problema.

Siendo que la máxima frecuencia de interés de este estudio es  $f_{\max} = 3000Hz$ , por lo tanto la frecuencia de muestreo que cumple el requerimiento de Nyquist y es la próxima inmediata superior según la discretización del clock es la de  $f_s = 6400Hz$ , donde se desprende que la incertidumbre del adquisidor en términos de las frecuencias es  $u_{daq\_f} = 0.32$ .

Finalmente, la incertidumbre total del adquisidor es

$$u_{daq} = \sqrt{(u_{daq\_a})^2 + (u_{daq\_f})^2} = \sqrt{(0.00256)^2 + (0.32)^2} = 0.32 \quad 7.10$$

Como no tiene sentido que la resolución espectral sea superior a la incertidumbre de propia del clock, se determina el número de muestras a tomar, según  $\Delta f = f_s / N \Rightarrow N = f_s / \Delta f = (6400KS / s) / (0.32Hz) = 20KS$ . Que implica un tiempo de refresco de  $T = 1 / \Delta f = 1 / (0.32Hz) = 3.125s$ .

Las incertidumbres relativas del DAQ para cada modo, se resumen en la Tabla 7.4

Modo	$f [Hz]$	$u_{daq} [Hz]$	$u_{daq\_r}$
1	94.104	0.32	0.34%
2	289.856	0.32	0.11%
3	619.787	0.32	0.05%
Promedio		0.32	0.17%

Tabla 7.4 – Incertidumbre del adquisidor de datos.

7.2.1.4 Incertidumbre total del en la determinación de las frecuencias naturales de vibración.

Anteriormente fue determinada las incertidumbres del ensayo y de la cadena medición, en algunos casos en términos absolutos y en otros relativos. Para poder establecer valores semejantes entre sí, se consideran las incertidumbres relativas. La incertidumbre total relativa en la determinación de la frecuencia está dada por:

$$u_{f\%} = \sqrt{(u_{test\_r})^2 + (u_{acl\_r})^2 + (u_{daq\_r})^2} \tag{7.11}$$

$$u_{f\%} = \sqrt{(0.06\%)^2 + (5.39\%)^2 + (0.17\%)^2} = 5.39\%$$

Por otra parte, al tratarlo en termino de incertidumbres absolutas, se observa:

Modo	$\bar{f} (Hz)$	$u_{test\_r}$	$u_{acl\_r}$	$u_{daq\_r}$	$u_{f\%}$	$u_f$
1	94.104	0.10%	5.39%	0.34%	5.40%	5.08
2	289.856	0.02%	5.39%	0.11%	5.39%	15.61
3	619.787	0.06%	5.39%	0.05%	5.39%	33.41
Promedio		0.06%	5.39%	0.17%	5.39%	18.03

Tabla 7.5 – Incertidumbre total del en la determinación de las frecuencias naturales de vibración.

La incertidumbre relativa total en la determinación promedio de las frecuencias naturales de vibración del modo 1 a 3 es  $\bar{u}_{f\%} = 5.393\%$ .

### 7.2.2 Relación entre las incertidumbres en la determinación de las frecuencias naturales de vibración de vigas y en sus coeficientes adimensionales de frecuencias

En el presente apartado se aborda el estudio de la relación existente entre las incertidumbres en la determinación de las frecuencias naturales de vibración y las incertidumbres en los coeficientes adimensionales de frecuencias.

En un primer subapartado se realiza una aproximación simplificada a la relación existente entre dichas incertidumbres empleando la teoría de propagación de errores. Luego, se analiza el mismo problema recurriendo a la teoría de incertidumbres. Finalmente se considera un análisis más exhaustivo también utilizando la teoría de incertidumbre.

En todos los casos, se parte de la relación que existe entre el coeficiente adimensional de frecuencias y la frecuencia natural de vibración.

$$\lambda_n^4 = \frac{(\rho A)_i}{(EI)_i} l^4 \omega_n^2 \Rightarrow \begin{cases} \lambda = \left( \sqrt[4]{\left( \frac{\rho A}{EI} \right) l^4} \right) \sqrt{2\pi f_n} \\ f = \left( \frac{1}{2\pi L^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho A}} \right) \lambda^2 \end{cases} \quad 7.12$$

#### 7.2.2.1 Aproximación simplificada mediante la teoría de propagación de errores.

Al considerar como una constante sin error al término  $\left( \frac{1}{2\pi L^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho A}} \right)$  de la Ecuación 7.12,

según la regla para la potencia de la teoría de propagación de errores, se obtiene

$$\frac{\delta f}{|f|} = |n| \frac{\delta \lambda}{|\lambda|} \rightarrow e_{f\%} = 2 e_{\lambda\%} \quad 7.13$$

A fin de constatar este resultado, se realizó un experimento numérico. El mismo consiste en determinar analíticamente los coeficientes adimensionales de frecuencias para una viga sin fisura, con condiciones de contorno A-A. A estos valores se les induce un error conocido. Y a partir de los mismos y de su relación con las frecuencias naturales de vibración, se obtienen los valores de frecuencias naturales de vibración con cierto grado de error. En la Figura 7.2 se puede observar que los resultados del experimento numérico coinciden con lo deducido en forma analítica mediante el uso de la teoría de propagación de errores.

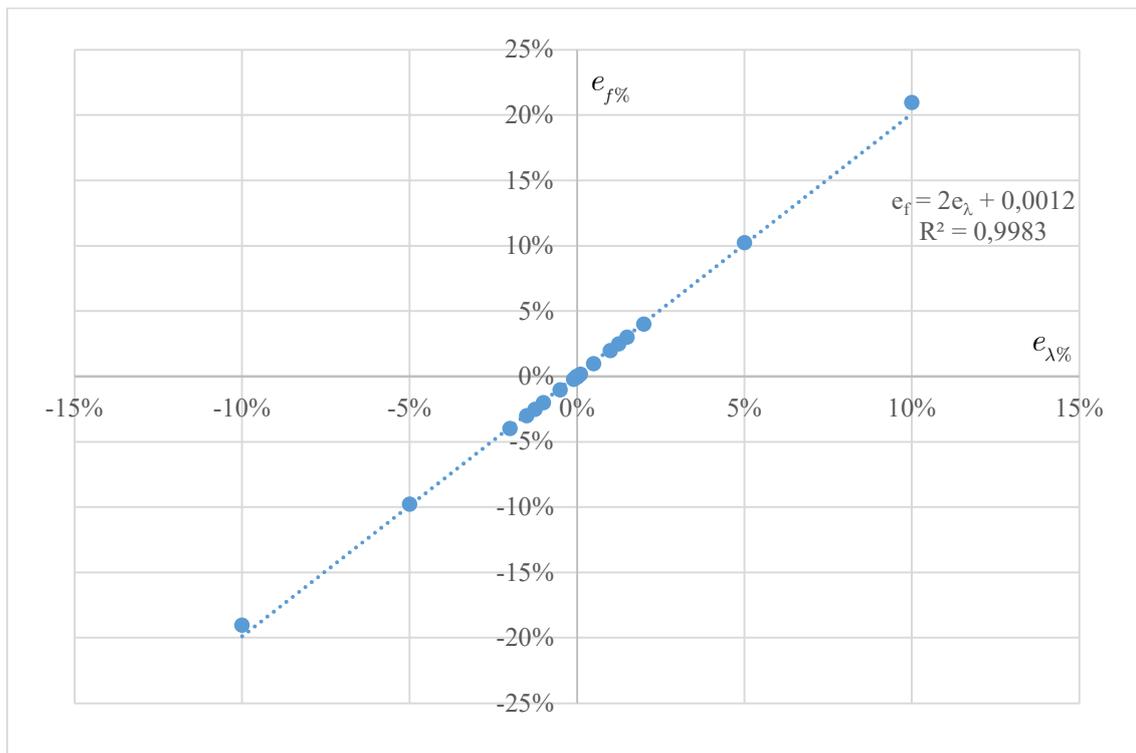


Figura 7.2– Experimento numérico: Relación entre errores en los coeficientes adimensionales y las frecuencias naturales de vibración.

7.2.2.2 Aproximación simplificada mediante la teoría de incertidumbre.

Al considerar la determinación del coeficiente adimensional de frecuencias, como una medida indirecta que solo depende del valor de la frecuencia, su incertidumbre puede ser determinada mediante el cálculo de la incertidumbre típica combinada, según

$$u_{\lambda} = \sqrt{\left(\left(\frac{\partial}{\partial f} \lambda(f)\right) u_f\right)^2} = \left(\frac{\partial}{\partial f} \lambda(f)\right) u_f, \tag{7.14}$$

Siendo la derivada 
$$\frac{\partial}{\partial f} \lambda(f) = \frac{\partial}{\partial f} \left( \sqrt[4]{\frac{\rho A}{EI} l^4 (2\pi f)^2} \right) = \left( \frac{\sqrt[4]{4\pi^2 (\rho A l^4 f^2)}}{4EI \left( \frac{\rho A}{EI} l^4 \pi^2 f^2 \right)^{3/4}} \right) \frac{1}{f}$$
 Así, se

establece una la relación entre la incertidumbre en la determinación del coeficiente adimensional y la de las frecuencias según:

$$u_{\lambda} = \left( \frac{\sqrt[4]{4\pi^2 (\rho A l^4 f^2)}}{4EI \left( \frac{\rho A}{EI} l^4 \pi^2 f^2 \right)^{3/4}} \right) \frac{u_f}{f} \tag{7.15}$$

### 7.2.2.3 Aproximación compleja mediante la teoría de incertidumbre.

Al considerar la incertidumbre asociada en la determinación de las propiedades del material como ser el módulo de elasticidad y la densidad o al tomar las dimensiones de la pieza y que luego se propagasen en los cálculos para determinar el momento de inercia o el área de la sección, la relación entre los errores en la determinación de las frecuencias naturales de vibración y los coeficientes de frecuencias se vuelve algo más compleja.

En este caso, el coeficiente de frecuencias es función de las variables mencionadas,

$$\lambda = f(\rho, E, I, A, l, f), \text{ según la relación } \lambda = \sqrt[4]{\frac{\rho A}{EI}} \omega^2 l.$$

Al considerar que las variables se tratasen de medidas independientes, se puede emplear la fórmula general de propagación de errores (incertidumbre estándar combinada) y aplicar errores cuadráticos medios, según:

$$u_z = \sqrt{\left(\left|\frac{\partial}{\partial x} f(x, y, w)\right| u_x\right)^2 + \dots + \left(\left|\frac{\partial}{\partial w} f(x, y, w)\right| u_w\right)^2} \quad 7.16$$

Para este caso particular, la incertidumbre en la determinación del coeficiente adimensional de frecuencias naturales de vibración será:

$$\begin{aligned} u_\lambda = & \sqrt{\left(\left|\frac{\partial}{\partial \rho} \lambda(\rho, E, A, I, L, f)\right| u_\rho\right)^2 + \left(\left|\frac{\partial}{\partial E} \lambda(\rho, E, A, I, L, f)\right| u_E\right)^2 +} \\ & \left(\left|\frac{\partial}{\partial A} \lambda(\rho, E, A, I, L, f)\right| u_A\right)^2 + \left(\left|\frac{\partial}{\partial I} \lambda(\rho, E, A, I, L, f)\right| u_I\right)^2 +} \\ & \left(\left|\frac{\partial}{\partial L} \lambda(\rho, E, A, I, L, f)\right| u_L\right)^2 + \left(\left|\frac{\partial}{\partial f} \lambda(\rho, E, A, I, L, f)\right| u_f\right)^2} \end{aligned} \quad 7.17$$

Al realizar las derivadas parciales, se obtiene

$$\frac{\partial}{\partial \rho} \left( \sqrt[4]{\frac{\rho A}{EI}} l^4 (2\pi f)^2 \right) = \left( \frac{\sqrt[4]{4\pi^2 (\rho A l^4 f^2)}}{4EI \left( \frac{\rho A}{EI} l^4 \pi^2 f^2 \right)^{3/4}} \right) \frac{1}{\rho} \quad 7.18$$

$$\frac{\partial}{\partial E} \left( \sqrt[4]{\frac{\rho A}{EI} l^4 (2\pi f)^2} \right) = - \frac{\sqrt[4]{4\pi^2 (\rho A l^4 f^2)}}{4EI \left( \frac{\rho A}{EI} l^4 \pi^2 f^2 \right)^{3/4}} \frac{1}{E} \quad 7.19$$

$$\frac{\partial}{\partial A} \left( \sqrt[4]{\frac{\rho A}{EI} l^4 (2\pi f)^2} \right) = \frac{\sqrt[4]{4\pi^2 (\rho A l^4 f^2)}}{4EI \left( \frac{\rho A}{EI} l^4 \pi^2 f^2 \right)^{3/4}} \frac{1}{A} \quad 7.20$$

$$\frac{\partial}{\partial I} \left( \sqrt[4]{\frac{\rho A}{EI} l^4 (2\pi f)^2} \right) = - \frac{\sqrt[4]{4\pi^2 (\rho A l^4 f^2)}}{4EI \left( \frac{\rho A}{EI} l^4 \pi^2 f^2 \right)^{3/4}} \frac{1}{I} \quad 7.21$$

$$\frac{\partial}{\partial l} \left( \sqrt[4]{\frac{\rho A}{EI} l^4 (2\pi f)^2} \right) = \frac{\sqrt[4]{4\pi^2 (\rho A l^4 f^2)}}{4EI \left( \frac{\rho A}{EI} l^4 \pi^2 f^2 \right)^{3/4}} \frac{1}{l} \quad 7.22$$

$$\frac{\partial}{\partial f} \left( \sqrt[4]{\frac{\rho A}{EI} l^4 (2\pi f)^2} \right) = \frac{\sqrt[4]{4\pi^2 (\rho A l^4 f^2)}}{4EI \left( \frac{\rho A}{EI} l^4 \pi^2 f^2 \right)^{3/4}} \frac{1}{f} \quad 7.23$$

Y, por lo tanto, se puede obtener la incertidumbre en la determinación del coeficiente adimensional de frecuencias a partir de conocer los valores de los parámetros medidos y sus respectivas incertidumbres, según:

$$u_\lambda = \sqrt{\left( \left( \frac{\sqrt[4]{4\pi^2 (\rho A l^4 f^2)}}{4EI \left( \frac{\rho A}{EI} l^4 \pi^2 f^2 \right)^{3/4}} \frac{1}{\rho} u_\rho \right)^2 + \left( \left( - \frac{\sqrt[4]{4\pi^2 (\rho A l^4 f^2)}}{4EI \left( \frac{\rho A}{EI} l^4 \pi^2 f^2 \right)^{3/4}} \frac{1}{E} u_E \right)^2 + \left( \frac{\sqrt[4]{4\pi^2 (\rho A l^4 f^2)}}{4EI \left( \frac{\rho A}{EI} l^4 \pi^2 f^2 \right)^{3/4}} \frac{1}{A} u_A \right)^2 + \left( - \frac{\sqrt[4]{4\pi^2 (\rho A l^4 f^2)}}{4EI \left( \frac{\rho A}{EI} l^4 \pi^2 f^2 \right)^{3/4}} \frac{1}{I} u_I \right)^2 + \left( \frac{\sqrt[4]{4\pi^2 (\rho A l^4 f^2)}}{4EI \left( \frac{\rho A}{EI} l^4 \pi^2 f^2 \right)^{3/4}} \frac{1}{l} u_L \right)^2 + \left( \frac{\sqrt[4]{4\pi^2 (\rho A l^4 f^2)}}{4EI \left( \frac{\rho A}{EI} l^4 \pi^2 f^2 \right)^{3/4}} \frac{1}{f} u_f \right)^2 \right)} \quad 7.24$$

reagrupando, finalmente se obtiene la expresión:

$$u_{\lambda} = \left( \frac{\sqrt[4]{4\pi^2 (\rho A l^4 f^2)}}{4EI \left( \frac{\rho A}{EI} l^4 \pi^2 f^2 \right)^{3/4}} \right) \sqrt{\left( \frac{u_{\rho}}{\rho} \right)^2 + \left( \frac{u_E}{E} \right)^2 + \left( \frac{u_A}{A} \right)^2 + \left( \frac{u_I}{I} \right)^2 + \left( \frac{u_L}{l} \right)^2 + \left( \frac{u_f}{f} \right)^2} \quad 7.25$$

Esta formulación, es la más completa, ya que no solo incluye la incertidumbre en la determinación de las frecuencias naturales de vibración, sino también en las propiedades del material y las propiedades de sección de la viga bajo ensayo.

Resta obtener las incertidumbres de cada caso  $u_{\rho}, u_E, u_A, u_I, u_L$  y  $u_f$ .

- Incertidumbre en la determinación de la densidad del material.

La densidad es una función de la masa y del volumen, se puede determinar al medir el diámetro de una bola acero y su peso, según  $\rho = 6m/\pi D^3$ . Su incertidumbre es dada por

$$u_\rho = \sqrt{\left(\frac{\partial \rho}{\partial D} u_D\right)^2 + \left(\frac{\partial \rho}{\partial m} u_m\right)^2} = \sqrt{\left(-\frac{18m}{\pi D^4} u_D\right)^2 + \left(\frac{6}{\pi D^3} u_m\right)^2}$$

$$u_\rho = \sqrt{\left(-\frac{18m}{\pi D^4} 0.015\right)^2 + \left(\frac{6}{\pi D^3} 0.1\right)^2} = 0.14641703 \text{ g / cm}^3 \quad 7.26$$

$$u_\rho = 0.00014641703 \text{ kg / cm}^3 = 146.41703 \text{ kg / m}^3$$

- Incertidumbre en la determinación del módulo de elasticidad del material.

La forma más exacta de determinar el módulo de Young es por el método dinámico. En forma aproximada se puede estimar que la incertidumbre de este tipo de ensayos ronda el 5%.

$$u_E = 4.85\% \quad 7.27$$

- Incertidumbre en las propiedades de sección (Área y momento de inercia).

El área y el momento de inercia son funciones de dos mediciones,  $b$  y  $h$ , según  $A = bh$  y  $I = bh^3/12$  respectivamente. Para encontrar sus incertidumbres respectivas es necesario primero conocer la incertidumbre en la medición de  $b$  y  $h$ . Al tratarse las mediciones directas, se debe de combinar la incertidumbre en las mediciones (Tipo A) y del instrumento (Tipo B). El instrumento de medición es un calibre cuya resolución es de  $0.02\text{mm} = 0.00002\text{m}$ . Si se tomaron 15 medidas del ancho y de la altura de la sección de la viga, se calculan los valores medios y el desvío estándar de cada variable, de la cual se obtiene la incertidumbre tipo A, como el desvío del valor medio.

Para el caso del ancho de la viga, el valor medio es  $\bar{b} = 0.038607\text{m}$  y su incertidumbre de medición está dada por  $u_{\bar{b}} = \sigma_{\bar{b}} = \sigma_b / \sqrt{N} = 0.007988086\text{m} / \sqrt{15} = 0.000020625\text{m}$ .

Análogamente, para el alto de la viga, el valor medio es  $\bar{h} = 0.00850m$  y su incertidumbre de medición está dada por  $u_{\bar{h}} = \sigma_{\bar{h}} = \sigma_h / \sqrt{N} = 0.0084515m / \sqrt{15} = 0.000021821m$ .

Finalmente, la incertidumbre total en la determinación de  $b$  y  $h$ , será respectivamente:

$$Y \ u_h = \sqrt{u_{\bar{h}}^2 + u_{Cal}^2} = \sqrt{(0.0021821m)^2 + (0.002m)^2} = 0.0000296m.$$

Siendo la determinación del área una medida indirecta, su incertidumbre puede ser determinada mediante el cálculo de la incertidumbre típica combinada, según:

$$u_A = \sqrt{\left(\left|\frac{\partial}{\partial B} A(B, H)\right|u_B\right)^2 + \left(\left|\frac{\partial}{\partial H} A(B, H)\right|u_H\right)^2} \quad 7.28$$

$$u_A = \sqrt{(|h|u_B)^2 + (|b|u_H)^2} = 0.000001168578m^2$$

De forma análoga se determina la incertidumbre el momento de inercia según:

$$u_I = \sqrt{\left(\left|\frac{\partial}{\partial B} I(B, H)\right|u_B\right)^2 + \left(\left|\frac{\partial}{\partial H} I(B, H)\right|u_H\right)^2} = \quad 7.29$$

$$u_I = \sqrt{\left(\left|\frac{1}{12} h^3\right|u_B\right)^2 + \left(\left|\frac{1}{4} bh^2\right|u_H\right)^2} = 2.0694E^{(-11)}m^4$$

- Incertidumbre en la determinación la longitud.

La incertidumbre en la determinación de la longitud ( $u_L$ ) depende de la incertidumbre en las mediciones (Tipo A) y del instrumento (Tipo B), por lo que debemos obtener su incertidumbre combinada. El instrumento bien podría ser una regla calibrada, cuya resolución es de 1mm.

Se toman 15 mediciones de la longitud de la viga y se arriba a que su valor medio es  $\bar{l} = 0.5375m$ . Su incertidumbre de medición está dada por

$$u_{\bar{l}} = \sigma_{\bar{l}} = \sigma_L / \sqrt{N} = 0.0005669m / \sqrt{15} = 0.00101065m.$$

Finalmente, la incertidumbre total en la determinación longitud está dada por:

$$u_L = \sqrt{u_{\bar{l}}^2 + u_{Regla}^2} = \sqrt{(0.00101065m)^2 + (0.001m)^2} = 0.001422m \quad 7.30$$

Recapitulando los valores de los parámetros y sus respectivas incertidumbres absolutas, se pueden obtener sus incertidumbres relativas:

Parámetro	Incertidumbre relativa
$\rho = (7850.00 \pm 146.41) \text{ kg/m}^3$	$u_\rho = 1.86\%$
$E = (2.06 \pm 0.10) \text{ E}^{11} \text{ Pa}$	$u_E = 4.85\%$
$A = (0.0003281 \pm 0.0000012) \text{ m}^2$	$u_A = 0.38\%$
$I = (1.975 \text{ E}^{(-9)} \pm 2.069 \text{ E}^{(-11)}) \text{ m}^4$	$u_I = 0.10\%$
$l = (0.5375 \pm 0.0015) \text{ m}$	$u_L = 0.27\%$

Tabla 7.6 – Parámetros de los coef. de frecuencias e incertidumbres relativas.

### 7.2.3 Incertidumbre en la determinación del coeficiente adimensional de frecuencias

Visto que han sido determinadas las relaciones entre las incertidumbres de las frecuencias y los coeficientes de 3 maneras diferentes, a continuación, se configuran diferentes escenarios.

#### 7.2.3.1 Mediante aproximación simplificada de la teoría de propagación de errores.

Para lograr una aproximación más conservativa, se considera la condición más desfavorable. Dada ahora la incertidumbre en la determinación de los coeficientes adimensionales de frecuencias deducida a partir de la teoría de propagación de errores.

$$e_{\lambda\%} = \frac{e_{f\%}}{2} \rightarrow u_{\lambda\%} [\%] = \frac{u_{f\%}}{2} = \frac{5.39\%}{2} = 2.695\% \quad 7.31$$

Al observar estos resultados y los análisis de los capítulos anteriores, el método propuesto no podría ser implementado.

#### 7.2.3.2 Mediante aproximación simplificada de la teoría de propagación de errores y menor error en el sensor.

Finalmente, se determina la incertidumbre de los coeficientes adimensionales de frecuencias a partir de la teoría de propagación de errores y un sensor de una incertidumbre menor. De lo cual, se obtiene el valor:

$$e_{\lambda\%} = \frac{e_{f\%}}{2} \rightarrow u_{\lambda\%} [\%] = \frac{u_{f\%}}{2} = \frac{0.502\%}{2} = 0.251\% \quad 7.32$$

### 7.2.3.3 Mediante aproximación simplificada de la teoría de incertidumbres.

Mediante la teoría de incertidumbre se obtuvo una relación simplificada entre las incertidumbres en la determinación de los coeficientes adimensionales y las incertidumbres en la determinación de las frecuencias naturales de vibración, sin considerar las incertidumbres de los parámetros que caracterizan al material y sus propiedades de sección.

$$u_{\lambda} = \left( \frac{\sqrt[4]{4\pi^2 \left( (7850 \text{ kg/m}^3) (0.00032 \text{ m}^2) (0.5375 \text{ m})^4 f^2 \right)}}{4(2.06 \text{ E}^{11} \text{ Pa})(1.975 \text{ E}^{-9} \text{ m}^4)} \right) \frac{u_f}{f} \quad 7.33$$

En la Tabla 7.7 se presentan los resultados en términos absolutos y relativos.

Modo	$f$ [Hz]	$u_{f\%}$	$u_f$	$u_{\lambda}$ [Hz]	$u_{\lambda\%}$ [%]
1	94.104	5.40%	5.08	0.01	0.11%
2	289.856	5.39%	15.61	0.17	0.06%
3	619.787	5.39%	33.41	0.26	0.041%
Promedio				0.12	0.06%

Tabla 7.7 – Incertidumbre en la determinación de los coeficientes adimensionales de frecuencias que contempla solo la incertidumbre de en la determinación de la frecuencia.

### 7.2.3.4 Mediante aproximación simplificada de la teoría de incertidumbres y menor incertidumbre en el sensor.

Se analiza una tercera posibilidad. La misma consiste en considerar que la componente en la incertidumbre en la determinación de las frecuencias naturales de vibración puede reducirse. Por ejemplo, sea porque en el cálculo de la incertidumbre del sensor solo se tome en cuenta los parámetros que afectan el corrimiento en frecuencia y no el resto de las incertidumbres del sensor vinculadas a la amplitud de vibración (transversal, ganancia, etc.). O bien, por el uso de un mejor sensor que el disponible al momento. En dicho caso la incertidumbre en el sensor está dada por:

$u_k$	$u_{jf}$	$u_{\text{sensor}_r}$
0.05%	0.5%	0.502%

Tabla 7.8 – Incertidumbre relativa del sensor.

Y, por lo tanto, las incertidumbres en la determinación de las frecuencias naturales de vibración, queda dado por:

$u_{\text{test}_r}$	$u_{\text{sensor}_r}$	$u_{\text{daq}_r}$	$u_{f\%}$
0.10%	0.50%	0.34%	0,61%
0.02%	0.50%	0.11%	0,51%

0.06%	0.50%	0.05%	0,51%
0.06%	0.50%	0.17%	0.54%

Tabla 7.9 – Incertidumbre total del en la determinación de las frecuencias naturales de vibración considerando un sensor de mejor prestación.

Así la incertidumbre en el coeficiente adimensional de frecuencias queda dada por:

$$u_{\lambda} = \left( \frac{\sqrt[4]{4\pi^2 \left( (7850 \text{ kg/m}^3) (0.00032 \text{ m}^2) (0.5375 \text{ m})^4 f^2 \right)}}{4(2.06 \text{ E}^{11} \text{ Pa})(1.975 \text{ E}^{-9} \text{ m}^4)} \right) \frac{u_f}{f} \quad 7.34$$

Cuyos resultados se presentan en la Tabla 7.10.

Modo	$f [Hz]$	$u_{f\%}$	$u_f$	$u_{\lambda} [Hz]$	$u_{\lambda\%} [\%]$
1	94.104	5.40%	5.08	0.0092	0.009%
2	289.856	5.39%	15.61	0.016	0.005%
3	619.787	5.39%	33.41	0.023	0.003%
Promedio				0.016	0.005%

Tabla 7.10 – Incertidumbre en la determinación de los coeficientes adimensionales de frecuencias para una aproximación simplificada de la teoría de incertidumbres y menor error del sensor.

### 7.2.3.5 Mediante aproximación compleja de la teoría de incertidumbres.

En la determinación de las frecuencias naturales de vibración se observó que la principal componente de incertidumbre está asociado al sensor empleado (acelerómetro), seguido muy detrás por la causada del equipo adquirente y, por último, por las componentes de ensayo. Vale aclarar que el ensayo ha sido realizado en laboratorio, con muchos resguardos, logrando una excelente repetitividad.

Mediante la teoría de incertidumbre se obtuvo la relación entre las incertidumbres en la determinación de los coeficientes adimensionales y las incertidumbres en la determinación de las frecuencias naturales de vibración, la obtención de las características del material y sus propiedades de sección. Reemplazando los valores de los parámetros y sus respectivas incertidumbres absolutas, se puede obtener la incertidumbre de los coeficientes adimensionales de frecuencias según:

$$\begin{aligned}
 u_{\lambda} = & \left( \frac{\sqrt[4]{4\pi^2} \left( (7850 \text{ kg/m}^3) (0.00032 \text{ m}^2) (0.5375 \text{ m})^4 f^2 \right)}{4(2.06 \text{ E}^{11} \text{ Pa})(1.975 \text{ E}^{-9} \text{ m}^4)} \right) \\
 & \cdot \left( \left( \frac{(7850 \text{ kg/m}^3)(0.00032 \text{ m}^2)}{(2.06 \text{ E}^{11} \text{ Pa})(1.975 \text{ E}^{-9} \text{ m}^4)} (0.5375 \text{ m})^4 \pi^2 f^2 \right)^{3/4} \right)^{-1} \\
 & \cdot \left( \sqrt{\left( \frac{(146.41 \text{ kg/m}^3)}{(7850 \text{ kg/m}^3)} \right)^2 + \left( \frac{(0.10 \text{ E}^{11} \text{ Pa})}{(2.06 \text{ E}^{11} \text{ Pa})} \right)^2 + \left( \frac{(0.0000012 \text{ m}^2)}{(0.0003200 \text{ m}^2)} \right)^2} + \right. \\
 & \left. + \left( \frac{(2.069 \text{ E}^{-11} \text{ m}^4)}{(1.975 \text{ E}^{-9} \text{ m}^4)} \right)^2 + \left( \frac{(0.0015 \text{ m})}{(0.5375 \text{ m})} \right)^2 + \left( \frac{u_f}{f} \right)^2} \right)
 \end{aligned} \tag{7.35}$$

En la Tabla 7.11 se presentan los resultados en términos absolutos y relativos.

Modo	$f$ [Hz]	$u_{f\%}$	$u_f$	$u_{\lambda}$ [Hz]	$u_{\lambda\%}$ [%]
1	94.104	5.40%	5.08	0.11	0.12%
2	289.856	5.39%	15.61	0.10	0.036%
3	619.787	5.39%	33.41	0.13	0.024%
Promedio				0.12	0.06%

Tabla 7.11 – Incertidumbre en la determinación de los coeficientes adimensionales de frecuencias que contempla la incertidumbre de todos los parámetros.

Al analizar estos valores, se observa que son muy auspiciosos para lograr una implementación de los métodos de identificación de fisuras basados en mediciones de frecuencias naturales de vibración.

### 7.2.4 Errores sistemáticos y Zero Setting

En el caso de los errores en la determinación de las frecuencias naturales de vibración, podemos mencionar como fuentes de errores sistemáticos, entre otros, a:

- Diferencias en la rigidez de las condiciones de borde utilizadas en el modelo analítico respecto de las del ensayo.
- Diferencias en las dimensiones de la estructura consideradas en el modelo analítico respecto de las del ensayo.
- Diferencias en las propiedades intensivas del material de la estructura empleadas en el modelo analítico respecto de las del ensayo.
- Cambios ambientales, como ser variaciones de la temperatura ambiente.

Nandwana y Maiti (1997) para poder acoplar los resultados experimentales con el modelo analítico, proponen normalizar las frecuencias por medio de un procedimiento denominado “zero setting.” En esta tesis, el mismo fue adoptado y adaptado para corregir los coeficientes adimensionales de frecuencias medidos. El procedimiento consiste en, para una medición de referencia o patrón, obtener el factor  $Z_n$ , donde  $n$  es el  $n$ -ésimo modo, mediante la relación:

$$Z_n = \frac{\lambda_{n,P}}{\hat{\lambda}_{n,P}}. \quad 7.36$$

Siendo  $\lambda_{n,P}$  el valor del coeficiente adimensional de frecuencia del modo  $n$  determinada analíticamente para el caso patrón y  $\hat{\lambda}_{n,P}$  el valor del coeficiente adimensional de frecuencia del modo  $n$  determinada experimentalmente para el caso patrón.

$n$	$\lambda_{n,P}$	$\hat{\lambda}_{n,P}$	$Z_n$
1	2.85237921	3.23437722	0.881894417
2	6.28316509	6.38467556	0.98410092
3	8.76981415	9.36919562	0.936026369
4	12.56624331	12.28996516	1.022479978
5	14.83705527	15.51013475	0.956603892
6	18.84920153	18.54048849	1.01665075

Tabla 7.12 – Determinación del factor de Zero Setting para medición patrón: Viga A-A con fisura cuyas características son  $c=0.50$  y  $\eta=0.30$ .

Una vez determinado el factor de corrección  $Z_n$  para cada modo de interés, es posible multiplicar el mismo por el valor del coeficiente adimensional de frecuencia del modo  $n$  determinada experimentalmente ( $\hat{\lambda}_n$ ). Así obtener el coeficiente de frecuencia corregido ( $\vec{\lambda}_n$ ), según la relación:

$$\vec{\lambda}_n = Z_n \cdot \hat{\lambda}_n \quad 7.37$$

A modo de ejemplo, en la Tabla 7.13 se presenta el coeficiente adimensional de frecuencia del modo  $n$  determinada analíticamente ( $\lambda_n$ ), el factor de corrección ( $Z_n$ ), el valor del coeficiente adimensional de frecuencia del modo determinada experimentalmente ( $\hat{\lambda}_n$ ) y el coeficiente de frecuencia corregido ( $\vec{\lambda}_n$ ). A su vez se determina el error relativo porcentual de la medición sin corrección ( $e_{\hat{\lambda}_n}$ ) entre el valor de  $\hat{\lambda}_n$  considerando como valor verdadero a  $\lambda_n$ . Por otra parte, se determina el error relativo porcentual de la medición con corrección ( $e_{\vec{\lambda}_n}$ ) entre el valor de  $\vec{\lambda}_n$  considerando como valor verdadero a  $\lambda_n$ .

$n$	$\lambda_n$	$Z_n$	$\hat{\lambda}_n$	$\vec{\lambda}_n$	$e_{\hat{\lambda}_n}$	$e_{\vec{\lambda}_n}$
1	2,41358765	0.881894417	3.11685139	2.748733838	29%	14%
2	5,93280143	0.98410092	6.05921223	5.96287633	2%	1%
3	8,94586655	0.936026369	9.48865309	8.881629501	6%	-1%
4	11,51175571	1.022479978	13.12546726	13.42052748	14%	17%
5	15,70790346	0.956603892	15.45272306	14.78213503	-2%	-6%
6	17,53742563	1.01665075	17.47587247	17.76685886	0%	1%
Promedio					8.2%	4.3%
Desvío					11.7%	8.9%

Tabla 7.13 – Procedimiento de Zero Setting para una viga A-A con  $c=0.10$  y  $\eta=0.30$ .

Al tratarse de errores sistemáticos, es de suponer que los mismos se mantienen constantes entre la medición patrón y la medición donde se aplica la corrección por zero setting. Por lo tanto, se deduce que la utilización del procedimiento de zero setting implica una reducción en el error sistemático, y por ende del error total en los coeficientes adimensionales de frecuencias.

En los anteriores capítulos de la presente tesis se demostró que minimizar el error en la determinación de dichos coeficientes aumentan las probabilidades de encontrar con éxito la posición y profundidad de la fisura. Al viabilizar la aplicación ingenieril del método de identificación de fisuras, es que la aplicación del procedimiento de zero setting adquiere una gran relevancia.

### 7.3 APORTES Y CONCLUSIONES DE ESTE CAPÍTULO

Se determinó que la incertidumbre relativa del ensayo para determinar las frecuencias naturales de vibración es  $\mu_{test}(\bar{f})_{\%} = 0.061\%$ . Por otra parte, se arribó a que la incertidumbre total en la cadena de medición para determinar las frecuencias naturales de vibración es  $\bar{\mu}_{(\bar{f})_{\%}} = 5.393\%$ . Sin embargo, vale mencionar que este último se trató de un cálculo muy conservativo.

Por otra parte, se establecieron varias relaciones entre las incertidumbres en la determinación de las frecuencias naturales de vibración y las incertidumbres de los coeficientes adimensionales de frecuencias. En una primera aproximación mediante la teoría de propagación de errores se arriba a  $\mu_{\lambda} = \bar{\mu}_{(\bar{f})_{\%}} / 2 = 2,697\%$ . Mediante aproximación simplificada de la teoría de propagación de errores y menor incertidumbre en el sensor, la incertidumbre queda  $\mu_{\lambda} = \bar{\mu}_{(\bar{f})_{\%}} / 2 = 0,251\%$ . Si se considerase la incertidumbre propia del test y no de toda la cadena de medición, la misma queda dada por  $\mu_{\lambda} = \mu_{test}(\bar{f})_{\%} / 2 = 0,030\%$ . Utilizando la teoría de incertidumbres, según una aproximación compleja y también por la simplificada, la incertidumbre en la determinación de los coeficientes de frecuencias es de  $\mu_{\lambda} = 0,060\%$ .

Además, se comprobó la utilidad del procedimiento de “zero-setting”, el cual ayudó a disminuir el error sistemático en la determinación de los coeficientes adimensionales de frecuencias.

En el apéndice 10 se expone el desarrollo, fabricación y caracterización de diferentes sistemas de excitación. Entre ellos sistemas electro-acústico, electromagnético, electrodinámicos tanto de electro-imanés como de imanes permanentes. Todos desarrollos realizados durante esta tesis.

Finalmente, en el apéndice 11 se expone el test plan de un ensayo de análisis modal experimental. Se presenta el montaje, puesta a punto y prueba inicial del “setup”, los resultados de las pruebas y la extracción de los parámetros modales de interés.

# CAPÍTULO 8

## DISCUSIÓN DE RESULTADOS, CONCLUSIONES Y FUTURAS LÍNEAS DE INVESTIGACIÓN

### 8.1 DISCUSIÓN DE RESULTADOS

Dadas las significativas implicaciones económicas, ambientales y sociales asociadas con las fallas catastróficas en estructuras y componentes mecánicos, se ha impulsado activamente el desarrollo de Ensayos No Destructivos (END) y técnicas de monitoreo de integridad estructural. La presencia de fisuras es como una causa fundamental de fallas y eventos catastróficos. El estado del arte refleja claramente que el estudio del comportamiento dinámico de componentes estructurales con fisuras y el desarrollo de métodos de detección de fisuras en vigas basados en mediciones de vibraciones mecánicas se han consolidado como áreas de gran relevancia en las investigaciones científicas contemporáneas en ingeniería. Aunque existen diversos métodos de identificación de fisuras basados en la medición de distintos parámetros modales, los más ampliamente difundidos son aquellos que utilizan las frecuencias naturales de vibración, dada la relativa simplicidad de medición de éstas.

En la presente tesis, se han aplicado principios energéticos y técnicas del cálculo de variaciones, posibilitando el desarrollo con rigurosidad matemática de las ecuaciones diferenciales, condiciones de contorno y transiciones que describen el comportamiento de las vibraciones transversales libres en vigas Euler-Bernoulli, homogéneas e isotropas. Cabe destacar que el método utilizado ofrece resultados exactos, constituyendo una ventaja significativa.

El avance en la capacidad de cálculo de las computadoras y el acceso a software de cálculo simbólico facilitan la implementación de esta metodología, evidenciándose también un bajo costo computacional en comparación con otros métodos disponibles. No obstante, es crucial señalar una limitación intrínseca, ya que este enfoque tiende a modelar problemas arquetípicos que no siempre

pueden extrapolarse a sistemas de mayor complejidad, como es común en las aplicaciones ingenieriles.

En esta investigación, se han presentado en forma de gráficas de superficies los coeficientes de frecuencias obtenidos para vigas con fisuras. Se han contemplado casos de estudio con vinculaciones clásicas, clásicas con apoyos intermedios, rotulas intermedias y vínculos elásticos en los extremos. Aunque la determinación analítica de las frecuencias naturales de vibración en vigas Euler-Bernoulli fisuradas fue divulgada por diversos autores desde hace varios años, hasta el momento solo se han expuesto análisis sobre vinculaciones clásicas, cuyos resultados concuerdan con los obtenidos en esta tesis. Sin embargo, se observaba falta de resultados presentados por autores que aborden vinculaciones no clásicas. Por lo que muchos de los resultados presentados en esta tesis de vinculaciones no clásica son inéditos.

Por otro lado, es esencial destacar que las superficies de frecuencias para vigas con fisuras son un requisito fundamental para la implementación del método analítico de identificación de fisuras basado en las frecuencias naturales de vibración, denominado en esta tesis como el "método de la intersección de las curvas de nivel de las superficies de frecuencias (Método 2)".

El método de identificación de fisuras previamente mencionado demostró un rendimiento superior en comparación con el denominado "método de la intersección de las curvas de rigidez". Este último exhibió diversas limitaciones en su implementación, las cuales fueron abordadas progresivamente, aunque finalmente se encontró un obstáculo insuperable. En contraste, el enfoque basado en las curvas de nivel de las superficies de frecuencias no presentó tales inconvenientes, mostrándose como una alternativa más robusta y matemáticamente directa. Además, el tiempo de cálculo se redujo significativamente, alcanzando tan solo el 15% del requerido por el método anterior, y no demanda la intervención de un operador experimentado en su aplicación.

Es importante destacar que, aunque los conceptos generales de ambos métodos ya habían sido desarrollados por otros autores, los algoritmos utilizados en las implementaciones presentadas en esta tesis difieren de los empleados previamente. Esta distinción contribuye a la originalidad y efectividad de los métodos propuestos.

Narkis et al. (1996) y Kim et al. (2007) expresaron con justificación la preocupación de que daños significativos puedan ocasionar cambios mínimos en los parámetros modales, los cuales podrían pasar desapercibidos debido a variaciones en las condiciones ambientales y operativas, como alteraciones en la temperatura o cambios en las condiciones de vinculación. El modelo

matemático implementado en esta investigación permitió analizar la influencia de las condiciones de vinculación en el comportamiento vibratorio de una viga sin fisuras, abarcando un amplio rango de valores para los coeficientes de rigidez de los vínculos elásticos.

Este análisis condujo a la identificación de zonas de transición en el comportamiento vibratorio entre las esperadas para condiciones de vinculación clásicas. La comparación entre los resultados analíticos y experimentales permitió inferir el comportamiento de las vinculaciones, llegando a establecer una relación entre el apriete de la mordaza y el valor analítico del coeficiente de rigidez del resorte rotacional que lo representa. Este hallazgo resulta fundamental para determinar la condición inicial de la estructura sujeta a monitoreo, proporcionando información clave sobre las constantes elásticas de los resortes traslacionales y rotacionales a utilizar en el modelo analítico.

Sinou (2013) destaca la relevancia de desarrollar técnicas de monitoreo de estructuras que consideren la incorporación de teorías que aborden las incertidumbres. Esta tesis aporta al campo al formular, para el método analítico de identificación de fisuras basado en la intersección de las curvas de nivel de las superficies de frecuencias, dos hipótesis fundamentales sobre su capacidad teórica de identificación. Estas hipótesis permiten pronosticar el error máximo del método de identificación de fisuras ante una determinada incertidumbre en los coeficientes adimensionales de frecuencias.

Hasta el momento, no se han encontrado trabajos de otros autores que presenten un método de identificación de fisuras basado en mediciones de frecuencias naturales que posea la capacidad teórica de detección asociada al mismo. Este enfoque novedoso contribuye a llenar un vacío en la literatura existente, ofreciendo una perspectiva única y prometedora en la identificación de fisuras con consideraciones teóricas más avanzadas.

Deobling et al. (1996) concluyen, en su revisión de literatura sobre monitoreo de salud estructural, que es imperativo determinar el tamaño mínimo de defecto que se puede detectar y evaluar la posibilidad de medir con suficiente precisión los pequeños cambios de frecuencia asociados a los escenarios de daño. En esta tesis, se desarrolló una respuesta a estos interrogantes a través de un análisis de sensibilidad.

Se ha desarrollado una metodología que permite determinar los errores máximos en la identificación de la posición y profundidad de la fisura para distintos valores conocidos de error en los coeficientes adimensionales de frecuencias. Los resultados se presentan en forma de mapeos, donde permiten cuantificar la posibilidad de identificación de la fisura según su ubicación y severidad. Estos mapeos también han servido para verificar las hipótesis formuladas sobre la

capacidad de identificación del método analítico propuesto. Este enfoque proporciona una contribución sustancial al campo del monitoreo estructural al ofrecer una evaluación detallada y cuantificable de la sensibilidad y precisión del método en la detección de fisuras.

Deobling et al. (1996) también cuestionan la viabilidad de implementar métodos de identificación de fisuras basados en la medición de frecuencias naturales con la instrumentación actual. Con este propósito, se llevó a cabo una evaluación detallada de la incertidumbre en la cadena de medición de vibraciones mecánicas y su relación con la incertidumbre en los coeficientes adimensionales de frecuencias.

Además, se presentan numerosos avances que fueron indispensables para llevar a cabo los ensayos de análisis modal experimental, entre los cuales se destaca el diseño de excitadores electrodinámicos. Estos desarrollos proporcionan una base sólida para la implementación práctica de los métodos propuestos, abordando las preocupaciones sobre la factibilidad de la instrumentación actual en la identificación de fisuras mediante la medición de frecuencias naturales.

## **8.2 CONCLUSIONES**

Se ha abordado de manera integral el desafío de desarrollar y mejorar métodos analíticos basados en la medición de frecuencias naturales de vibración capaces de identificar fisuras únicas y abiertas a superficie en vigas Euler Bernoulli, homogéneas e isotrópicas y de sección constante.

El método finalmente propuesto, basado en la intersección de las curvas de nivel de las superficies de frecuencias, se destacó por su capacidad teórica de identificación y su rendimiento superior en comparación con métodos previos.

Además, se estableció para el método propuesto la capacidad teórica de identificación evaluando el impacto de las incertidumbres en los resultados.

La metodología desarrollada permitió determinar errores máximos en la identificación de la posición y profundidad de fisuras, contribuyendo así a la comprensión de la sensibilidad y precisión del método propuesto.

La factibilidad práctica de implementar métodos de identificación de fisuras se evaluó considerando la instrumentación disponible.

En resumen, esta tesis ha avanzado significativamente en la mejora de los métodos de identificación de fisuras, ofreciendo contribuciones teóricas y prácticas valiosas. Los resultados obtenidos proporcionan una base sólida para futuras investigaciones y aplicaciones en el campo del monitoreo de estructural.

### **8.2.1 Aplicaciones del cálculo de variaciones**

#### *8.2.1.1 Aplicaciones del cálculo de variaciones para analizar cómo afecta la rigidez de los vínculos a los coeficientes adimensionales de las frecuencias naturales de vibración de vigas*

Este estudio analítico proporcionó valores exactos del coeficiente adimensional de frecuencias para una viga Euler-Bernoulli en sus primeros tres modos, considerando vínculos en los extremos, ya sean clásicos o elásticos. Se exploró la influencia de la rigidez de las restricciones elásticas en el comportamiento vibratorio de la viga, identificando zonas de transición al variar el coeficiente de rigidez de los vínculos en los extremos.

Se diseñaron y construyeron diversos tipos de vínculos, tanto clásicos como elásticos, y se determinaron los coeficientes de rigidez de manera analítica y experimental. Se realizó una comparación entre los resultados analíticos y experimentales, lo que permitió inferir el comportamiento de las vinculaciones. Además, se estableció una relación entre el ángulo de apriete del tornillo de una mordaza y el valor del coeficiente de rigidez del resorte rotacional en el modelo analítico. En el ámbito experimental, se aplicó el procedimiento de “zero setting”, logrando una reducción del error sistemático en la determinación experimental del coeficiente de frecuencias. Estos hallazgos contribuyen al entendimiento detallado de los comportamientos vibratorios y las características de los vínculos en vigas, aportando valiosa información para futuras investigaciones y aplicaciones prácticas en ingeniería estructural.

#### *8.2.1.2 Aplicaciones del cálculo de variaciones para analizar cómo afecta la presencia de fisuras a los coeficientes adimensionales de las frecuencias naturales de vibración de vigas*

La utilización del cálculo de variaciones, mediante el empleo de restricciones elásticas intermedias asociadas a modelos fractomecánicos de fisuras, se mostró como una herramienta robusta y efectiva para modelar las vibraciones transversales libres en vigas Euler-Bernoulli con fisuras abiertas en su superficie. Se proporcionaron valores analíticos de los coeficientes adimensionales de frecuencias, tanto normalizados como sin normalizar, para vigas con una sola fisura y diferentes tipos de vinculaciones: clásicas, con apoyos intermedios, con rotulas, y con vínculos elásticos en los extremos. Los resultados obtenidos para las vinculaciones clásicas coinciden con los reportados por otros investigadores, mientras que el análisis de casos de estudio en vinculaciones con apoyos intermedios, rotulas, y vínculos elásticos en los extremos representan

nuevos aportes presentados en esta tesis. Estos resultados son fundamentales tanto para poder caracterizar el comportamiento vibratorio de estructuras como para abordar la implementación de métodos de identificación de fisuras basados en mediciones de frecuencias naturales.

### ***8.2.2 Métodos analíticos de identificación de fisuras basados en mediciones de frecuencias naturales de vibración***

Se implementaron 2 métodos analíticos de identificación de fisuras basados en mediciones de frecuencias naturales de vibración.

#### *8.2.2.1 Método de la intersección de las curvas de rigidez*

Se presentó una implementación inicial del método de identificación de fisuras (1A) basado en la intersección de curvas de rigidez, destacando la innovación de utilizar el desvío estándar como herramienta estadística para obtener la intersección de dichas curvas. No obstante, el método 1A presentó limitaciones al no detectar correctamente la profundidad de la fisura en puntos de inflexión de la forma modal de la viga. Se propuso una mejora, el método 1B, que superó este inconveniente mediante la adición de una condición al algoritmo. Aunque el método 1B demostró robustez al identificar sin error la posición y profundidad de fisuras en datos analíticos, presentó inconvenientes cuando se aplicó a datos provenientes de simulaciones numéricas o experimentales, o sea ante la presencia de perturbaciones en los datos de entrada. Se observó que en el caso de que el error sea positivo, las rigideces obtenidas son negativas, lo que represento un límite insalvable para la implementación de esta metodología.

#### *8.2.2.2 Método de la intersección de las curvas de nivel de las superficies de frecuencias*

El método 2 basado en la intersección de curvas de nivel de las superficies de frecuencias tiene como ventaja clave su capacidad para abordar casos donde la posición de la fisura coincide con un punto de inflexión en la forma modal, superando así una limitación del método 1.

Un análisis de sensibilidad comparativo entre los métodos 1B y 2 reveló resultados consistentes, sin diferencias significativas entre ambos. A pesar de que el tiempo de cálculo para obtener las superficies de frecuencias en el método 2 es considerable, este proceso solo se requiere realizar una vez, reduciendo los tiempos totales de cálculo al 15% en comparación con el método 1. Además, el método 2 demostró ser más robusto, matemáticamente directo y simple de

implementar en comparación con el método 1. Estas características hacen que el método 2 sea una alternativa eficiente y efectiva para la identificación precisa de fisuras en estructuras.

### 8.2.3 *Capacidad teórica de identificación fisuras en vigas vibrantes*

Para el método analítico de identificación de fisuras basados en mediciones de frecuencias naturales de vibración que utiliza la intersección de las curvas de nivel de las superficies de frecuencias (método 2), se presentaron dos hipótesis sobre la capacidad teórica de identificación. Ambas pretenden relacionar la incertidumbre en la determinación de los datos de entrada del método de identificación de fisuras, o sea en los coeficientes adimensionales de frecuencias medidos, con el error de salida esperado, o sea con el error esperado en la determinación de la posición y profundidad de la fisura.

#### 8.2.3.1 *Hipótesis 1: sensibilidad de la respuesta vibratoria al daño presente*

La hipótesis 1 plantea “*La capacidad de detección del método es proporcional a la sensibilidad de la respuesta vibratoria al daño presente en la viga, el cual se manifiesta como la diferencia entre el máximo valor de la superficie de frecuencias y el valor de la superficie de frecuencias para una determinada posición y profundidad de fisura*”. Tanto la hipótesis 1 como su corolario han dado lugar a un mapeo que establece para diferentes condiciones de vinculación clásicas como elásticas una relación entre la incertidumbre de los datos de entrada y el error pronosticado en la solución del problema inverso. Se trata de un aporte de esta tesis al conocimiento científico en cuestión, que partiendo de sencillas relaciones pudo establecer una relación con un coste computacional muy bajo. Sin embargo, al comparar los pronósticos con los resultados de los análisis de sensibilidad, se observan ciertas discrepancias. Por lo que el uso de dicha hipótesis se ve restringido a obtener una estimación aproximada de la capacidad de detección del método, que se obtiene muy rápida y fácilmente pero no es tan certera. En particular es útil para establecer las incertidumbres en los datos de entrada que son admisibles para un correcto funcionamiento del método.

#### 8.2.3.2 *Hipótesis 2: áreas de incertidumbre*

La hipótesis 2 plantea que “*Siendo conocida la incertidumbre relativa en la determinación del coeficiente adimensional de frecuencias para cada modo, la ubicación y profundidad de la fisura obtenida por el método propuesto, estará dentro de la región comprendida dentro del área*

*de incertidumbre*”. Dicha hipótesis fue contrastada en forma existencial, o sea con una serie de casos de ejemplo o muestra de la población, con los resultados obtenidos del análisis de sensibilidad; dando excelentes resultados. Demostró ser eficiente para establecer cuándo es aplicable el método de identificación de fisuras finalmente propuesto como para poder predecir con bastante exactitud, los valores de error esperado para determinada incertidumbre en los datos de entrada del problema. El desarrollo y su implementación en un algoritmo es más complejo, obtener sus resultados lleva más tiempo, pero tiene como ventaja que especifica el error para cada salida del método.

#### **8.2.4 *Análisis de sensibilidad de identificación fisuras en vigas vibrantes***

La metodología utilizada abarcó diversas condiciones de vinculación, posiciones y profundidades de fisura, así como niveles variables de error en los coeficientes de frecuencia, marcando la diferencia, respecto a trabajos previos, por la amplitud y detallada variedad de resultados presentados.

Otro aporte de esta investigación es el de contrastar la hipótesis de las áreas de incertidumbre utilizando resultados específicos obtenidos mediante el análisis de sensibilidad. La correlación exitosa entre los resultados pronosticados por la hipótesis y los obtenidos por el análisis de sensibilidad valida la hipótesis, representando un aporte significativo al conocimiento científico.

Una innovación crucial presentada en esta tesis es la introducción de una metodología novedosa que, a partir del análisis de sensibilidad, genera mapeos de errores en la determinación de la posición y profundidad de la fisura. Estos mapeos permiten establecer la aplicabilidad del método bajo condiciones específicas de vinculación y niveles de incertidumbre de los datos de entrada, ofreciendo una valiosa herramienta para los usuarios. Este enfoque representa un aporte central a la vanguardia del campo.

Finalmente, el análisis de sensibilidad en forma de mapeo también respalda y valida la hipótesis universal de las áreas de incertidumbre, consolidando así los resultados satisfactorios obtenidos a lo largo de esta investigación.

### ***8.2.5 Determinación experimental de las frecuencias naturales de vibración de vigas con presencia de una fisura***

#### *8.2.5.1 Sistemas de excitación de la estructura*

Dentro de los sistemas de excitación ha sido posible:

- Caracterizar un sistema de excitación electro-acústico. El mismo resulta útil para hacer vibrar la estructura en todo el rango de frecuencias de interés. Si bien su fuerza es limitada, al tratarse de pequeñas estructuras pudo cumplir su función. No tiene contacto con la estructura y por lo tanto no altera su masa ni su rigidez, lo que representa una ventaja. En contrapartida, no es posible medir la entrada del sistema mecánico y por lo tanto no se puede establecer su Función Respuesta en Frecuencia (FRF). Además, como el rango de frecuencias de interés está dentro del espectro audible humano, el ensayo resulta incómodo para el operador.
- Desarrollar, fabricar y caracterizar un sistema de excitación electromagnético. De los resultados obtenidos se observa que la fuerza magnética varía con el cuadrado de la intensidad de campo y esta depende del tamaño de la bobina. Existe una relación aproximadamente lineal entre el peso de la bobina y la densidad de campo que se produce, por lo que la relación de la densidad de campo y el peso se mantiene constante. A mayor relación de alto/ancho de la bobina se mejora la densidad de campo obtenida, ya que las espiras contribuyen con mayor eficiencia cuanto más cercanas se encuentran al núcleo.
- Aplicar los principios físicos del electromagnetismo para establecer las ecuaciones de diseño de excitadores electrodinámicos tanto de imanes permanentes como de electroimanes. Se han diseñado prototipos de ambos tipos de excitadores electrodinámicos. Se han presentado diseños innovadores de excitadores electrodinámicos y mesas vibratorias. Se aplicaron las ecuaciones de diseño para definir los parámetros constructivos del prototipo. Se seleccionaron los materiales del núcleo ferromagnético, los cables conductores, el material del respaldo y de la armadura. Se realizó el modelado tridimensional utilizando software CAD. Mediante análisis por elementos finitos se verificó el diseño de la armadura para que cumpla con el requerimiento de tensiones admisibles y se determinó el modo axial de vibración. De las simulaciones realizadas para analizar el diseño de la armadura se

concluyó que el factor limitante no serán las tensiones sino la rigidez. La cual es necesaria para aumentar el valor de la frecuencia natural de vibración que corresponde al modo axial y que limita el rango de operación en frecuencias del shaker. Las nervaduras rigidizadoras fueron de mucha utilidad a este propósito. Se diseñó un prototipo de excitador electrodinámico de baja potencia y bajo costo. El equipo dispone de una fuerza máxima de 85 N, desplazamiento máximo de 5 mm y puede operar en un rango de frecuencias entre 7 Hz y 2.1kHz.

- Se ha diseñado y construido un sistema de generación y amplificación de las señales para shakers. El mismo presenta bajo costo y resultado ser funcional para la aplicación requerida.

#### 8.2.5.2 Ensayo de análisis modal experimental

Se estableció un “test plan”. Se realizó el montaje, puesta a punto y prueba inicial del “setup”.

Se ha implementado una cadena de medición, adquisición de datos y análisis de señales que viabilizo los ensayos de análisis modal experimental.

La prueba del martillo instrumentando permite conocer la fuerza de excitación del sistema, su excitación abarca todas las frecuencias de interés, no presenta contacto con la estructura y no genera ruidos molestos. Razón por la cual, ha resultado ser la forma de excitación más apropiada.

El análisis SIMO (Single Input- Multiple Output) fue el que mejor resultados permitió obtener, ya que en un único ensayo se obtiene una vector de 3 FRF. En cada una de las FRF se presentan gráficos de amplitud, fase, componente real e imaginaria.

#### 8.2.5.3 Incertidumbre en la determinación de los coeficientes adimensionales de frecuencias

Se determinó que la incertidumbre relativa del ensayo para determinar las frecuencias naturales de vibración es  $\mu_{test}(\bar{f})_{\%} = 0.061\%$ . Por otra parte, se arribó a que la incertidumbre total en la cadena de medición para determinar las frecuencias naturales de vibración es  $\bar{\mu}_{(\bar{f})_{\%}} = 5.393\%$ .

Se establecieron varias relaciones entre los errores medición de las frecuencias naturales de vibración y los coeficientes adimensionales de frecuencias. Utilizando la teoría de incertidumbres, según una aproximación compleja y también por la simplificada. La incertidumbre en la determinación de los coeficientes de frecuencias es de  $\mu_{\lambda} = 0,060\%$ .

Se disminuyó el error en la determinación de los coeficientes adimensionales de frecuencias mediante la aplicación del proveimiento de “zero-setting”.

### 8.3 TRABAJOS A FUTURO INMEDIATO

- Publicar un artículo en congreso nacional sobre los límites del método analítico de identificación de fisuras basados en mediciones de frecuencias naturales de vibración que utiliza la intersección de las curvas de rigidez. En particular, las incongruencias obtenidas cuando la fisura se encuentra en un punto de inflexión de la forma modal.
- Publicar un artículo en revista internacional sobre el análisis de sensibilidad del método analítico de identificación de fisuras basados en mediciones de frecuencias naturales de vibración que utiliza la intersección de las curvas de nivel de las superficies de frecuencias.
- Publicar un artículo en revista internacional sobre la capacidad teórica de identificación denominada áreas de incertidumbre.
- Fabricar los accesorios como el adaptador y el “stinger” para poder utilizar con confiabilidad el shaker desarrollado por el grupo de vibraciones mecánicas.
- Fabricar y caracterizar los nuevos prototipos de excitadores electromagnéticos presentados en esta tesis.
- Concluir con la fabricación del excitador electromagnético de electroimán. Caracterizarlo. Transferirlo a demandantes que están interesados en adquirirlos.
- Concluir con la fabricación del excitador electromagnético de imanes permanentes. Caracterizar su comportamiento mediante ensayos. Publicar los resultados en revista nacional o regional indexada.
- Fabricar y caracterizar los diseños preliminares de shakers presentados. Analizar posible protección de propiedad intelectual.
- Programar en lenguaje arduino, el sistema integral de generación y amplificación de señales de excitación para shakers.
- Optimizar el desarrollo de un software de análisis modal experimental.
- Implementar experimentalmente el método de identificación de fisuras de forma exhaustiva.

## 8.4 FUTURAS LÍNEAS DE INVESTIGACIÓN

En este trabajo se han dejado asentados resultados, primeras conclusiones y bases metodológicas para extender esta investigación a implementaciones sobre otro tipo de componentes estructurales (pórticos y placas), con otras características del material (laminados) y su implementación en aplicaciones concretas (estructuras no arquetípicas). Sobre la base de lo presentado se enumeran a continuación futuras líneas que se generan a partir de esta tesis:

- Establecer relaciones entre las características de la fisura (ancho, profundidad, forma) y los modelos de fisura que emplean un resorte rotacional. O sea, analizar los cambios en las frecuencias naturales de vibración debido a los cambios en los parámetros que caracterizan la fisura. Para esto, desde un punto de vista experimental es necesario mecanizar con extrema precisión ranuras en las vigas a ser ensayadas y utilizar técnicas ópticas para obtener un patrón de su superficie. Luego realizar una batería de ensayos de análisis modal experimental. Contrastar estos resultados con los obtenidos por el método de los elementos finitos y en forma analítica.
- Aplicar las metodologías del análisis de sensibilidad y la capacidad teórica de detección propuestas en esta tesis para analizar:
  - ✓ Si el uso de mayor cantidad de modos mejora la capacidad de detección del método de identificación de fisuras.
  - ✓ Si el uso de modos superiores mejora la capacidad de detección del método de identificación de fisuras.
  - ✓ Si el uso de medición “online” continua mejora la capacidad de detección del método de identificación de fisuras.
- Implementar un algoritmo para modelar mediante el cálculo de variaciones el comportamiento vibracional de vigas Timoshenko, vigas Timoshenko de sección variable, vigas Timoshenko laminadas. Aplicar las metodologías del análisis de sensibilidad y la capacidad teórica de detección propuestas en esta tesis.
- Extender esta investigación a implementaciones específicas y concretas que ameritan un estudio particular de sus peculiaridades. Por ejemplo, líneas de tuberías, chasis, arboles, puentes, etc.

# APÉNDICE 1

## Desarrollo de un modelo analítico de vibraciones transversales libres en vigas homogéneas e isotrópicas con restricciones elásticas

### A1.1 Hipótesis básicas

Se considera una viga elástica delgada de sección transversal uniforme, homogénea e isotrópica que ejecuta vibraciones transversales. A efectos de obtener la ecuación diferencial que describe el comportamiento de la viga se asumen como válidas las hipótesis de la teoría de Euler-Bernoulli, que son:

- Las secciones transversales se mantienen planas.
- El material de la viga es lineal y elástico.
- Se desprecia la inercia rotatoria.
- La tensión perpendicular a la fibra neutra es nula.

Sea una viga que ejecuta vibraciones transversales y está sometida a una fuerza externa transversal dada por una función  $q = q(x, t)$  de dirección opuesta al desplazamiento transversal  $w$ .

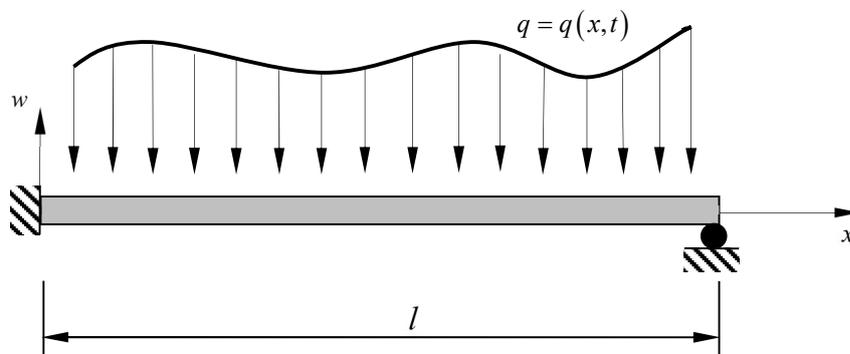


Figura A1.1 – Viga que ejecuta vibraciones transversales. Nota. Adaptado de

Se puede considerar que la viga de longitud  $l$  tiene  $N$  tramos. Los extremos y puntos intermedios de la viga están elásticamente restringidos contra rotación y traslación, tal como se muestra en la Figura A1.1. Los vínculos rotacionales están caracterizados por los coeficientes de rigidez  $r_0, r_l, r_{c_i}$  y  $r_{i,i+1}$  los vínculos traslacionales por  $t_0, t_l$  y  $t_{c_i}$ . Las restricciones  $r_{c_i}$  y  $t_{c_i}$  con  $i=1, \dots, N+1$  están conectadas a un punto fijo mientras que las restricciones  $r_{i,i+1}$  con  $i=1, \dots, N-1$  indican que las mismas están conectadas a ambos lados de la viga, en los puntos intermedios ubicados en  $c_i$ .

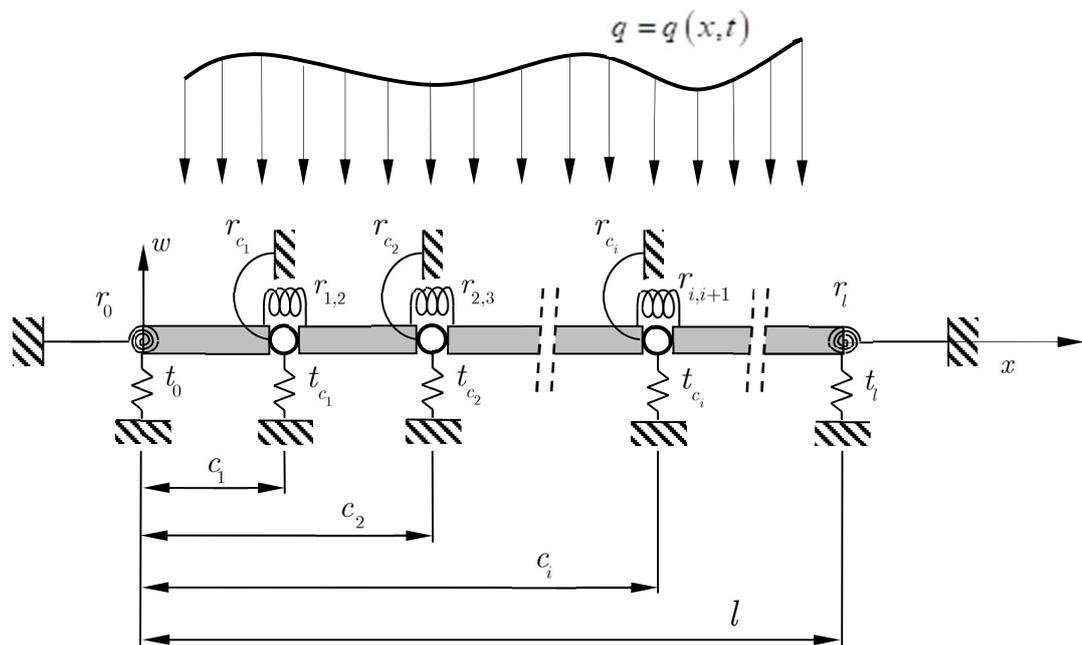


Figura A1.2 – Viga de  $N$  tramos que ejecuta vibraciones transversales.

Nota. Adaptado de Tesis "Mecánica de elementos estructurales con fallas localizadas", Figura 3.2, Raffo J. L., 2014.

Al adoptar valores adecuados de los parámetros correspondientes a los vínculos en los extremos, se pueden generar distintas combinaciones de apoyos clásicos, esto es: empotrado, simplemente apoyado y libre. Por otra parte, al dar valores adecuados a las restricciones elásticas intermedias, se pueden generar el caso de una viga con fisuras o apoyos intermedios.

## A1.2 Deducción de las Energías Intervinientes en el Sistema

A continuación, se deducen las energías presentes en una viga con vibraciones transversales a su eje longitudinal.

### A1.2.1 Energía cinética de la viga

La energía cinética de una partícula está dada por la relación entre su masa ( $m$ ) y su velocidad ( $v$ ), según:

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2 \quad \text{A1.1}$$

La masa total por área de viga está dada por  $m_A = \rho A$  y la velocidad de la línea media de la viga en el instante  $t$ , por  $v = \frac{\partial w}{\partial t}(x, t)$ . Por lo tanto, la energía cinética de la viga está dada por:

$$E_c = \frac{1}{2} \int_0^L (\rho A)(x) \left( \frac{\partial w}{\partial t}(x, t) \right)^2 dx \quad \text{A1.2}$$

Donde  $\rho$  es la densidad y  $A$  el área de la sección de la viga.

### A1.2.2 Energía potencial de la viga sometida a flexión

En una viga de longitud  $L$ , sometida a flexión, la energía elástica acumulada en el periodo elástico es el área bajo la curva del diagrama momento – giro.

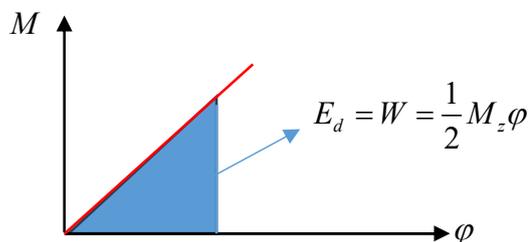


Figura A1.3 – Energía de deformación elástica de una viga flexionada.

Por lo tanto, matemáticamente está dada por:

$$E_d = W = \int_0^L \frac{M_z(x) \cdot d\varphi}{2}. \quad \text{A1.3}$$

Recordando la relación momento curvatura

$$\frac{M_z(x)}{E(x)I_{zz}(x)} = \frac{1}{\rho} = \frac{d\varphi}{dx} \Rightarrow d\varphi = \frac{M_z(x)}{E(x)I_{zz}(x)} dx, \quad A1.4$$

la energía puede expresarse como:

$$E_d = W = \int_0^L \frac{M_z(x)^2}{2E(x)I_{zz}(x)} dx \quad A1.5$$

La ecuación de la elástica establece una relación entre el desplazamiento transversal y el momento actuante según:

$$\frac{\partial^2 w(x)}{\partial^2 x} = -\frac{M_z(x)}{EI_{zz}} \Rightarrow M_z(x) = EI_{zz} \frac{\partial^2 w(x)}{\partial^2 x}. \quad A1.6$$

Reemplazando la Ecuación A1.6 en la Ecuación A1.5 se obtiene para vigas Euler-Bernoulli una expresión de la energía potencial almacenada tras la deformación del sistema

$$E_d = \frac{1}{2} \int_0^L \frac{\left( E(x)I_{zz}(x) \frac{\partial^2 w(x)}{\partial^2 x} \right)^2}{E(x)I_{zz}(x)} dx = \frac{1}{2} \int_0^L E(x)I_{zz}(x) \left( \frac{\partial^2 w(x)}{\partial^2 x} \right)^2 dx \quad A1.7$$

### A1.2.3 Energía potencial de las restricciones elásticas

Un resorte traslacional cuando es deformado por una carga almacena energía potencial en forma proporcional a su constante elástica y el cuadrado de la distancia recorrida. Si la constante elástica está dada por  $t_{c_i}$  y la línea media de la viga en el punto que está restringida por el resorte tiene un desplazamiento  $w$ , es inmediato que su energía potencial queda dada por:

$$E_{t_i} = \frac{1}{2} t_{c_i} (w(c_i, t))^2. \quad A1.8$$

Un resorte rotacional cuando es deformado almacena energía potencial en forma proporcional a su constante elástica y el cuadrado del ángulo rotado. Si la constante elástica está dada por  $r_{c_i}$  y el giro de la línea media de la viga en el punto en que está restringida este dado por

$\varphi = \frac{\partial w}{\partial x}(c_i^-, t)$ , es inmediato que su energía potencial queda dada por:

$$E_{r_i} = \frac{1}{2} r_{c_i} \left( \frac{\partial w}{\partial x}(c_i^-, t) \right)^2. \quad A1.9$$

En el caso de restricciones elásticas que conectan dos tramos de vigas, el giro total que experimenta el resorte rotacional es igual a la diferencia del giro de la línea media en un tramo respecto del otro. Por lo tanto, la energía que acumula queda dado por:

$$E_{r_i} = \frac{1}{2} r_{i,i+1} \left( \frac{\partial w}{\partial x}(c_i^+, t) - \frac{\partial w}{\partial x}(c_i^-, t) \right)^2. \quad A1.10$$

#### A1.2.4 Trabajo de una carga distribuida

Si el trabajo de una fuerza es la integral del producto vectorial de la misma por su camino recorrido  $W_F = \int \vec{F} \cdot d\vec{r}$ , el trabajo de una carga distribuida ( $q_i$ ) que actúa en forma perpendicular al eje longitudinal de la viga queda dado por el producto de esta y el desplazamiento de la línea media de la viga ( $w$ ), según:

$$E_q = -W = -\int_{c_{i-1}}^{c_i} q_i(x, t) w(x, t) dx. \quad A1.11$$

### A1.3 Energía total del sistema

Si el desplazamiento transversal de la línea media correspondiente a un punto  $x$  y en un instante  $t$ , es descrito por la función  $w = w(x, t)$ ,  $\forall x \in [0, l]$ , la energía cinética de la viga está dada por:

$$E_c = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \int_{c_{i-1}}^{c_i} (\rho A)_i(x) \left( \frac{\partial w}{\partial t}(x, t) \right)^2 dx \quad A1.12$$

Donde  $c_0 = 0$ ,  $c_N = l$ , y  $(\rho A)_i = \rho_i A_i$ ,  $i = 1, \dots, N$  es el valor de la función resultante del producto de la densidad  $\rho$  por el área de la sección  $A$  correspondiente al tramo entre  $c_{i-1}$  y  $c_i$ .

De acuerdo con la teoría del modelo denominado de Euler-Bernoulli para vigas se obtiene que la energía potencial almacenada tras la deformación del sistema debido al momento flector está dada por:

$$E_d = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \int_{c_{i-1}}^{c_i} (EI)_i(x) \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(x, t) \right)^2 dx, \quad A1.13$$

donde  $(EI)_i = E_i I_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$  denota la rigidez a la flexión, dada por el módulo de elasticidad longitudinal  $E$  y el momento de inercia  $I$ , correspondiente al tramo entre  $c_{i-1}$  y  $c_i$ .

La energía potencial elástica de las restricciones traslacionales a un punto fijo está dada por

$$E_{T_i} = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^N t_{c_i} (w(c_i, t))^2, \quad \text{A1.14}$$

y las rotacionales a un punto fijo por:

$$E_{r_i} = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^N r_{c_i} \left( \frac{\partial w}{\partial x}(c_i^-, t) \right)^2. \quad \text{A1.15}$$

Mientras que la de las rotulas internas están dadas por:

$$E_{r_i} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N-1} r_{i,i+1} \left( \frac{\partial w}{\partial x}(c_i^+, t) - \frac{\partial w}{\partial x}(c_i^-, t) \right)^2. \quad \text{A1.16}$$

La energía potencial debido a la carga distribuida está dada por:

$$E_q = - \sum_{i=1}^N \int_{c_{i-1}}^{c_i} q_i(x, t) w(x, t) dx. \quad \text{A1.17}$$

Por lo tanto, la energía potencial total del sistema es:

$$U = \frac{1}{2} \left\{ \sum_{i=1}^N \int_{c_{i-1}}^{c_i} \left[ (EI)_i(x) \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(x, t) \right)^2 - 2q_i(x, t) w(x, t) \right] dx + \right. \\ \left. + \sum_{i=1}^{N+1} \left[ r_{c_i} \left( \frac{\partial w}{\partial x}(c_i^-, t) \right)^2 + t_{c_i} (w(c_i, t))^2 \right] + \sum_{i=1}^{N-1} r_{i,i+1} \left( \frac{\partial w}{\partial x}(c_i^+, t) - \frac{\partial w}{\partial x}(c_i^-, t) \right)^2 \right\}. \quad \text{A1.18}$$

donde  $c_i^-$  es el límite lateral izquierdo y  $c_i^+$  el límite lateral derecho.

#### A1.4 El principio de Hamilton

El principio de Hamilton establece que de todas las configuraciones  $w$  posibles que el sistema puede tener al pasar de una configuración inicial dada en un instante  $t_a$  a otra dada en un instante  $t_b$ , la que realmente adopta el sistema es la que hace estacionario al funcional

$$F(w) = \int_{t_a}^{t_b} L dt, \quad \text{A1.19}$$

en el espacio de funciones admisibles, donde el Lagrangeano  $L$  es igual a la diferencia entre la energía cinética y la potencial,  $L = E_c - U$ . Por lo tanto, el funcional energético a considerar será:

$$\begin{aligned} F(w) = & \frac{1}{2} \int_{t_a}^{t_b} \left\{ \sum_{i=1}^N \int_{c_{i-1}}^{c_i} \left[ (\rho A)_i(x) \left( \frac{\partial w}{\partial t}(x,t) \right)^2 \right. \right. \\ & - (EI)_i(x) \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(x,t) \right)^2 \\ & \left. \left. + 2q(x,t)w(x,t) \right] dx \right. \\ & - \sum_{i=0}^N \left[ r_{c_i} \left( \frac{\partial w}{\partial x}(c_i^-, t) \right)^2 + t_{c_i} w^2(c_i, t) \right] \\ & \left. - \sum_{i=1}^{N-1} r_{i,i+1} \left( \frac{\partial w}{\partial x}(c_i^+, t) - \frac{\partial w}{\partial x}(c_i^-, t) \right)^2 \right\} dt. \end{aligned} \quad \text{A1.20}$$

Para facilitar los desarrollos analíticos se adopta una única sumatoria que empiece en 0 y termine en N, según:

$$\begin{aligned} F(w) = & \frac{1}{2} \int_{t_a}^{t_b} \left\{ \sum_{i=0}^N \left[ \int_{c_{i-1}}^{c_i} \left[ (\rho A)_i(x) \left( \frac{\partial w}{\partial t}(x,t) \right)^2 \right. \right. \right. \\ & \left. \left. - (EI)_i(x) \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(x,t) \right)^2 + 2q_i(x,t)w(x,t) \right] dx \right. \\ & \left. - r_{c_i} \left( \frac{\partial w}{\partial x}(c_i^-, t) \right)^2 - t_{c_i} w^2(c_i, t) - \left( r_{i,i+1} \left( \frac{\partial w}{\partial x}(c_i^+, t) - \frac{\partial w}{\partial x}(c_i^-, t) \right)^2 \right) \right] \right\} dt. \end{aligned} \quad \text{A1.21}$$

Como el tramo cero no existe, y por lo tanto no hay material, se puede considerar  $(\rho A)_0 = 0$ ,  $(EI)_0 \equiv (EI)_1$ . Donde, las restricciones conectadas a ambos lados de la viga, en el inicio y en el final de la misma son:  $r_{0,1} = r_{N,N+1} = 0$ . Las restricciones conectadas a un punto fijo, en los extremos de la viga, se la define como  $r_{c_0} = r_0$ ,  $r_{c_l} = r_l$ ,  $t_{c_0} = t_0$  y  $t_{c_l} = t_l$ .

### A1.5 Variación primera del funcional de energía

La condición de funcional estacionario que requiere el principio de Hamilton está dada por

$$\delta F(w; v) = 0, \quad \forall v \in D_a, \quad A1.22$$

donde  $D_a$  es el espacio de direcciones admisibles antes descripto.

La variación primera de  $F$  en  $w$  la dirección de  $v$  está definido por (Grossi, 2010):

$$\delta F(w; v) = \left. \frac{d}{d\varepsilon} F(w + \varepsilon v) \right|_{\varepsilon=0} \quad A1.23$$

Haciendo el desarrollo

$$\begin{aligned} \delta F(w; v) &= \left. \frac{d}{d\varepsilon} F(w + \varepsilon v) \right|_{\varepsilon=0} = \\ &= \left. \frac{d}{d\varepsilon} \left( \frac{1}{2} \int_{t_a}^{t_b} \sum_{i=0}^N \int_{c_{i-1}}^{c_i} \left[ (\rho A)_i(x) \left( \frac{\partial(w + \varepsilon v)}{\partial t}(x, t) \right)^2 \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - (EI)_i(x) \left( \frac{\partial^2(w + \varepsilon v)}{\partial x^2}(x, t) \right)^2 \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + 2q(x, t)(w + \varepsilon v)(x, t) \right] dx dt \right) \Big|_{\varepsilon=0} - \\ &\quad \left. \frac{d}{d\varepsilon} \left( \frac{1}{2} \int_{t_a}^{t_b} \sum_{i=0}^N \left[ r_{c_i} \left( \frac{\partial(w + \varepsilon v)}{\partial x}(c_i^-, t) \right)^2 + t_{c_i} (w + \varepsilon v)^2(c_i, t) \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \sum_{i=0}^N r_{i,i+1} \left( \frac{\partial(w + \varepsilon v)}{\partial x}(c_i^+, t) - \frac{\partial(w + \varepsilon v)}{\partial x}(c_i^-, t) \right)^2 \right] dt \right) \right) \Big|_{\varepsilon=0} \end{aligned} \quad A1.24$$

Para facilitar el seguimiento de la deducción, se plantea el variacional primero, término a término de la integral, y se evalúa en  $\varepsilon = 0$ . Se obtiene:

$$\begin{aligned}
 \left. \frac{d}{d\varepsilon} I_1(w + \varepsilon v) \right|_{\varepsilon=0} &= \left. \frac{d}{d\varepsilon} (\rho A)_i(x) \left( \frac{\partial(w + \varepsilon v)}{\partial t}(x, t) \right)^2 \right|_{\varepsilon=0} = \\
 &= \left. \frac{d}{d\varepsilon} (\rho A)_i(x) \left( \frac{\partial w}{\partial t}(x, t) + \varepsilon \frac{\partial v}{\partial t}(x, t) \right)^2 \right|_{\varepsilon=0} = \\
 &= 2(\rho A)_i(x) \left( \frac{\partial w}{\partial t}(x, t) + \varepsilon \frac{\partial v}{\partial t}(x, t) \right) \frac{\partial v}{\partial t}(x, t) \Big|_{\varepsilon=0} \\
 &= 2(\rho A)_i(x) \frac{\partial w}{\partial t}(x, t) \frac{\partial v}{\partial t}(x, t)
 \end{aligned}
 \tag{A1.25}$$

$$\begin{aligned}
 \left. \frac{d}{d\varepsilon} I_2(w + \varepsilon v) \right|_{\varepsilon=0} &= \left. \frac{d}{d\varepsilon} (EI)_i(x) \left( \frac{\partial^2(w + \varepsilon v)}{\partial x^2}(x, t) \right)^2 \right|_{\varepsilon=0} = \\
 &= \left. \frac{d}{d\varepsilon} (EI)_i(x) \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(x, t) + \varepsilon \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x, t) \right)^2 \right|_{\varepsilon=0} = \\
 &= 2(EI)_i(x) \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(x, t) + \varepsilon \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x, t) \right) \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x, t) \Big|_{\varepsilon=0} = \\
 &= 2(EI)_i(x) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(x, t) \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x, t)
 \end{aligned}
 \tag{A1.26}$$

$$\begin{aligned}
 \left. \frac{d}{d\varepsilon} I_3(w + \varepsilon v) \right|_{\varepsilon=0} &= \left. \frac{d}{d\varepsilon} 2q(x, t)(w + \varepsilon v)(x, t) \right|_{\varepsilon=0} = \\
 &= 2q(x, t) \frac{\partial w}{\partial x}(x, t) v(x, t)
 \end{aligned}
 \tag{A1.27}$$

$$\begin{aligned}
 \left. \frac{d}{d\varepsilon} I_4(w + \varepsilon v) \right|_{\varepsilon=0} &= \left. \frac{d}{d\varepsilon} r_{c_i} \left( \frac{\partial(w + \varepsilon v)}{\partial x}(c_i^-, t) \right)^2 \right|_{\varepsilon=0} = \\
 &= \left. \frac{d}{d\varepsilon} r_{c_i} \left( \frac{\partial w}{\partial x}(x, t) + \varepsilon \frac{\partial v}{\partial x}(x, t) \right)^2 \right|_{\varepsilon=0} = \\
 &= 2r_{c_i} \left( \frac{\partial w}{\partial x}(x, t) + \varepsilon \frac{\partial v}{\partial x}(x, t) \right) \frac{\partial v}{\partial x}(x, t) \Big|_{\varepsilon=0} = \\
 &= 2r_{c_i} \frac{\partial w}{\partial x}(x, t) \frac{\partial v}{\partial x}(x, t)
 \end{aligned}
 \tag{A1.28}$$

$$\begin{aligned}
\left. \frac{d}{d\varepsilon} I_5(w + \varepsilon v) \right|_{\varepsilon=0} &= \left. \frac{d}{d\varepsilon} t_{c_i} (w + \varepsilon v)^2(c_i, t) \right|_{\varepsilon=0} = \\
&= \left. \frac{d}{d\varepsilon} t_{c_i} (w(c_i, t) + \varepsilon v(c_i, t))^2 \right|_{\varepsilon=0} = \\
&= 2t_{c_i} (w(c_i, t) + \varepsilon v(c_i, t))v(c_i, t) \Big|_{\varepsilon=0} = \\
&= 2t_{c_i} w(c_i, t)v(c_i, t)
\end{aligned} \tag{A1.29}$$

$$\begin{aligned}
\left. \frac{d}{d\varepsilon} I_6(w + \varepsilon v) \right|_{\varepsilon=0} &= r_{i,i+1} \left. \frac{d}{d\varepsilon} \left( \frac{\partial(w + \varepsilon v)}{\partial x}(c_i^+, t) - \frac{\partial(w + \varepsilon v)}{\partial x}(c_i^-, t) \right)^2 \right|_{\varepsilon=0} = \\
&= r_{i,i+1} \left. \frac{d}{d\varepsilon} \left\{ \left( \frac{\partial w}{\partial x}(c_i^+, t) + \varepsilon \frac{\partial v}{\partial x}(c_i^+, t) \right)^2 - \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - 2 \left( \frac{\partial w}{\partial x}(c_i^+, t) + \varepsilon \frac{\partial v}{\partial x}(c_i^+, t) \right) \left( \frac{\partial w}{\partial x}(c_i^-, t) + \varepsilon \frac{\partial v}{\partial x}(c_i^-, t) \right) + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \left( \frac{\partial w}{\partial x}(c_i^-, t) + \varepsilon \frac{\partial v}{\partial x}(c_i^-, t) \right)^2 \right\} \right|_{\varepsilon=0} = \\
&= r_{i,i+1} \left\{ 2 \left( \frac{\partial w}{\partial x}(c_i^+, t) + \varepsilon \frac{\partial v}{\partial x}(c_i^+, t) \right) \frac{\partial v}{\partial x}(c_i^+, t) \Big|_{\varepsilon=0} - \right. \\
&\quad \left. - 2 \frac{\partial v}{\partial x}(c_i^+, t) \left( \frac{\partial w}{\partial x}(c_i^-, t) + \varepsilon \frac{\partial v}{\partial x}(c_i^-, t) \right) - \right. \\
&\quad \left. - 2 \frac{\partial v}{\partial x}(c_i^-, t) \left( \frac{\partial w}{\partial x}(c_i^+, t) + \varepsilon \frac{\partial v}{\partial x}(c_i^+, t) \right) \Big|_{\varepsilon=0} + \right. \\
&\quad \left. + 2 \left( \frac{\partial w}{\partial x}(c_i^-, t) + \varepsilon \frac{\partial v}{\partial x}(c_i^-, t) \right) \frac{\partial v}{\partial x}(c_i^-, t) \Big|_{\varepsilon=0} \right\} = \\
&= r_{i,i+1} \left[ 2 \frac{\partial w}{\partial x}(c_i^+, t) \frac{\partial v}{\partial x}(c_i^+, t) - 2 \frac{\partial w}{\partial x}(c_i^-, t) \frac{\partial v}{\partial x}(c_i^+, t) \right. \\
&\quad \left. - 2 \frac{\partial w}{\partial x}(c_i^+, t) \frac{\partial v}{\partial x}(c_i^-, t) + 2 \frac{\partial w}{\partial x}(c_i^-, t) \frac{\partial v}{\partial x}(c_i^-, t) \right] = \\
&= 2r_{i,i+1} \left[ \left( \frac{\partial w}{\partial x}(c_i^+, t) - \frac{\partial w}{\partial x}(c_i^-, t) \right) \frac{\partial v}{\partial x}(c_i^+, t) - \left( \frac{\partial w}{\partial x}(c_i^+, t) - \frac{\partial w}{\partial x}(c_i^-, t) \right) \frac{\partial v}{\partial x}(c_i^-, t) \right] = \\
&= 2r_{i,i+1} \left[ \left( \frac{\partial w}{\partial x}(c_i^+, t) - \frac{\partial w}{\partial x}(c_i^-, t) \right) \left( \frac{\partial v}{\partial x}(c_i^+, t) - \frac{\partial v}{\partial x}(c_i^-, t) \right) \right]
\end{aligned} \tag{A1.30}$$

Dentro de las integrales del funcional, la variación queda

$$\begin{aligned}
 \delta F(w; v) = & \frac{1}{2} \int_{t_a}^{t_b} \sum_{i=1}^N \int_{c_{i-1}}^{c_i} \left[ 2(\rho A)_i(x) \frac{\partial(w + \varepsilon v)}{\partial t}(x, t) \frac{\partial(v)}{\partial t}(x, t) - \right. \\
 & - 2(EI)_i(x) \frac{\partial^2(w + \varepsilon v)}{\partial x^2}(x, t) \frac{\partial^2(v)}{\partial x^2}(x, t) \\
 & \left. + 2q(x, t)v(x, t) \right] dx dt \Big|_{\varepsilon=0} - \\
 & - \frac{1}{2} \int_{t_a}^{t_b} \sum_{i=0}^N \left[ 2r_{c_i} \left( \frac{\partial(w + \varepsilon v)}{\partial x}(c_i^-, t) \frac{\partial v}{\partial x}(c_i^-, t) \right) + 2t_{c_i} (w + \varepsilon v)(c_i, t)v(c_i^-, t) \right] dt \Big|_{\varepsilon=0} - \\
 & - \frac{1}{2} \int_{t_a}^{t_b} \left[ \sum_{i=1}^{N-1} 2r_{i,i+1} \left( \frac{\partial(w + \varepsilon v)}{\partial x}(c_i^+, t) - \frac{\partial(w + \varepsilon v)}{\partial x}(c_i^-, t) \right) \left( \frac{\partial v}{\partial x}(c_i^+, t) - \frac{\partial v}{\partial x}(c_i^-, t) \right) \right] dt \Big|_{\varepsilon=0}
 \end{aligned} \tag{A1.31}$$

Al evaluar en  $\varepsilon = 0$  obtenemos la variación del funcional en el punto  $w$  y en la dirección de  $v$ , según

$$\begin{aligned}
 \delta F(w; v) = & \int_{t_a}^{t_b} \left\{ \sum_{i=0}^N \int_{c_{i-1}}^{c_i} \left[ (\rho A)_i(x) \frac{\partial w}{\partial t}(x, t) \frac{\partial v}{\partial t}(x, t) - \right. \right. \\
 & - (EI)_i(x) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(x, t) \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x, t) + \\
 & \left. \left. + q(x, t)v(x, t) \right] dx - \right. \\
 & - \sum_{i=0}^N \left[ r_{c_i} \left( \frac{\partial w}{\partial x}(c_i^-, t) \frac{\partial v}{\partial x}(c_i^-, t) \right) + t_{c_i} w(c_i, t)v(c_i, t) \right] - \\
 & \left. \left. - \sum_{i=0}^N \left[ r_{i,i+1} \left( \frac{\partial w}{\partial x}(c_i^+, t) - \frac{\partial w}{\partial x}(c_i^-, t) \right) \left( \frac{\partial v}{\partial x}(c_i^+, t) - \frac{\partial v}{\partial x}(c_i^-, t) \right) \right] \right\} dt
 \end{aligned} \tag{A1.32}$$

La condición de funcional estacionario está dada por  $\delta I(w_0, v) = 0, \forall v \in D_a$ , por lo tanto

$$\begin{aligned}
 \delta F(w; v) = & \int_{t_a}^{t_b} \left\{ \sum_{i=0}^N \int_{c_{i-1}}^{c_i} \left[ (\rho A)_i(x) \frac{\partial w}{\partial t}(x, t) \frac{\partial v}{\partial t}(x, t) - \right. \right. \\
 & - (EI)_i(x) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(x, t) \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x, t) + \\
 & \left. \left. + q(x, t)v(x, t) \right] dx - \right. \\
 & - \sum_{i=0}^N \left[ r_{c_i} \left( \frac{\partial w}{\partial x}(c_i^-, t) \frac{\partial v}{\partial x}(c_i^-, t) \right) + t_{c_i} w(c_i, t)v(c_i, t) \right] - \\
 & \left. \left. - \sum_{i=0}^N \left[ r_{i,i+1} \left( \frac{\partial w}{\partial x}(c_i^+, t) - \frac{\partial w}{\partial x}(c_i^-, t) \right) \left( \frac{\partial v}{\partial x}(c_i^+, t) - \frac{\partial v}{\partial x}(c_i^-, t) \right) \right] \right\} dt = 0
 \end{aligned} \tag{A1.33}$$

### A1.6 Integración por partes

Se parte de la variación primera del funcional de energía, recordando que la integración por partes está dada por:

$$\int_a^b uv' dt = uv \Big|_a^b - \int_a^b u'v dt, \quad \text{A1.34}$$

Al considerar el término de la integral A1.33 correspondiente a la energía cinética dado por

$$J_1 = \int_{t_a}^{t_b} \left\{ \sum_{i=0}^N \int_{c_{i-1}}^{c_i} (\rho A)_i(x) \frac{\partial w}{\partial t}(x,t) \frac{\partial v}{\partial t}(x,t) dx \right\} dt, \quad \text{A1.35}$$

dado que  $w(x, \bullet), v(x, \bullet) \in C^2[t_0, t_1]$ , se puede integrar por partes respecto de la variable  $t$ , y dado que  $v(x, t_0) = v(x, t_1) = 0, \forall x \in [0, l]$ . Este procedimiento conduce a

$$\begin{aligned} J_1 &= \int_{t_a}^{t_b} \left\{ \sum_{i=0}^N \int_{c_{i-1}}^{c_i} (\rho A)_i(x) \frac{\partial w}{\partial t}(x,t) \frac{\partial v}{\partial t}(x,t) dx \right\} dt = \\ &= \sum_{i=0}^N \int_{c_{i-1}}^{c_i} (\rho A)_i(x) \frac{\partial w}{\partial t}(x,t) v(x,t) dx \Big|_{t_a}^{t_b} - \int_{t_a}^{t_b} \left\{ \sum_{i=0}^N \int_{c_{i-1}}^{c_i} (\rho A)_i \left( \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}(x,t) \right) v(x,t) dx \right\} dt \end{aligned} \quad \text{A1.36}$$

Como el espacio de direcciones admisibles implica  $v(x, t_a) = v(x, t_b) = 0 \quad \forall x \in [0, l]$ ,

entonces  $\sum_{i=0}^N \int_{c_{i-1}}^{c_i} (\rho A)_i(x) \frac{\partial w}{\partial t}(x,t) v(x,t) dx \Big|_{t_a}^{t_b} = 0$  y por lo tanto

$$J_1 = - \int_{t_a}^{t_b} \left\{ \sum_{i=0}^N \int_{c_{i-1}}^{c_i} (\rho A)_i \left( \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}(x,t) \right) v(x,t) dx \right\} dt \quad \text{A1.37}$$

De igual forma si se considera el término de la integral A1.33 que corresponde a la energía de deformación

$$J_2 = \int_{t_a}^{t_b} \left\{ \sum_{i=0}^N \int_{c_{i-1}}^{c_i} (EI)_i(x) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(x,t) \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x,t) dx \right\} dt, \quad \text{A1.38}$$

dado que  $w(x, \bullet), v(x, \bullet) \in C^2[t_0, t_1]$ , se puede integrar por partes respecto de la variable  $x$ , y dado que  $v(x, t_0) = v(x, t_1) = 0, \forall x \in [0, l]$ .

Este procedimiento conduce a

$$\begin{aligned}
 J_2 &= \int_{t_a}^{t_b} \left\{ \sum_{i=0}^N \int_{c_{i-1}}^{c_i} (EI)_i(x) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(x,t) \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x,t) dx \right\} dt = \\
 &= \int_{t_a}^{t_b} \sum_{i=0}^N (EI)_i(x) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(x,t) \frac{\partial v}{\partial x}(x,t) \Big|_{c_{i-1}}^{c_i} dt \\
 &\quad - \int_{t_a}^{t_b} \left\{ \sum_{i=0}^N \int_{c_{i-1}}^{c_i} \frac{\partial}{\partial x} \left( (EI)_i(x) \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(x,t) \right) \right) \frac{\partial v}{\partial x}(x,t) dx \right\} dt
 \end{aligned} \tag{A1.39}$$

Si se le aplica integración por partes respecto de la variable  $x$  al segundo término de A1.39 se obtiene

$$\begin{aligned}
 J_{2'} &= \int_{t_a}^{t_b} \left\{ \sum_{i=0}^N \int_{c_{i-1}}^{c_i} \frac{\partial}{\partial x} \left( (EI)_i(x) \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(x,t) \right) \right) \frac{\partial v}{\partial x}(x,t) dx \right\} dt = \\
 &= \int_{t_a}^{t_b} \sum_{i=0}^N \frac{\partial}{\partial x} \left( (EI)_i(x) \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(x,t) \right) \right) v(x,t) \Big|_{c_{i-1}}^{c_i} dt \\
 &\quad - \int_{t_a}^{t_b} \left\{ \sum_{i=0}^N \int_{c_{i-1}}^{c_i} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( (EI)_i(x) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(x,t) \right) v(x,t) dx \right\} dt
 \end{aligned} \tag{A1.40}$$

Al reemplazar  $J_{2'}$  de A1.40 en  $J_2$  de A1.39, se obtiene

$$\begin{aligned}
 J_2 &= \int_{t_a}^{t_b} \left\{ \sum_{i=0}^N \int_{c_{i-1}}^{c_i} (EI)_i(x) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(x,t) \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x,t) dx \right\} dt = \\
 &= \int_{t_a}^{t_b} \sum_{i=0}^N (EI)_i(x) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(x,t) \frac{\partial v}{\partial x}(x,t) \Big|_{c_{i-1}}^{c_i} dt - \\
 &\quad - \int_{t_a}^{t_b} \sum_{i=0}^N \frac{\partial}{\partial x} \left( (EI)_i(x) \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(x,t) \right) \right) v(x,t) \Big|_{c_{i-1}}^{c_i} dt \\
 &\quad + \int_{t_a}^{t_b} \left\{ \sum_{i=0}^N \int_{c_{i-1}}^{c_i} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( (EI)_i(x) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(x,t) \right) v(x,t) dx \right\} dt
 \end{aligned} \tag{A1.41}$$

Al reemplazar  $J_1$  y  $J_2$  en la variación primera del funcional del Langreano, resulta

$$\begin{aligned}
\delta F(u; v) = & \int_{t_a}^{t_b} \left\{ \sum_{i=0}^N \left[ \int_{c_{i-1}}^{c_i} -(\rho A)_i(x) \left( \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}(x, t) \right) v(x, t) dx - \right. \right. \\
& - (EI)_i(x) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(x, t) \frac{\partial v}{\partial x}(x, t) \Big|_{c_{i-1}}^{c_i} + \frac{\partial}{\partial x} \left( (EI)_i(x) \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(x, t) \right) \right) v(x, t) \Big|_{c_{i-1}}^{c_i} \\
& - \int_{c_{i-1}}^{c_i} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( (EI)_i(x) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(x, t) \right) v(x, t) dx \\
& - s(x, t) \frac{\partial w}{\partial x}(x, t) v(x, t) \Big|_{c_{i-1}}^{c_i} + \int_{c_{i-1}}^{c_i} \frac{\partial}{\partial x} \left( s(x, t) \frac{\partial w}{\partial x}(x, t) \right) v(x, t) dx \\
& + \int_{c_{i-1}}^{c_i} q(x, t) v(x, t) dx - \\
& \left. - \sum_{i=0}^N \left[ r_{c_i} \left( \frac{\partial w}{\partial x}(c_i^-, t) \frac{\partial v}{\partial x}(c_i^-, t) \right) + t_{c_i} w(c_i, t) v(c_i, t) \right] - \right. \\
& \left. - \sum_{i=0}^N \left[ r_{i,i+1} \left( \frac{\partial w}{\partial x}(c_i^+, t) - \frac{\partial w}{\partial x}(c_i^-, t) \right) \left( \frac{\partial v}{\partial x}(c_i^+, t) - \frac{\partial v}{\partial x}(c_i^-, t) \right) \right] \right\} dt = 0
\end{aligned} \tag{A1.42}$$

Al agrupar los términos que tienen la integral en el dominio espacial y sacar factor común  $v(x, t)$ , finalmente se obtiene

$$\begin{aligned}
\delta F(u; v) = & \int_{t_a}^{t_b} \left\{ \sum_{i=0}^N \left[ \int_{c_{i-1}}^{c_i} \left[ -(\rho A)_i(x) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}(x, t) - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( (EI)_i(x) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(x, t) \right) + \right. \right. \\
& + \frac{\partial}{\partial x} \left( s_i(x, t) \frac{\partial w}{\partial x}(x, t) \right) + q_i(x, t) \Big] v(x, t) dx - \\
& - s(x, t) \frac{\partial w}{\partial x}(x, t) v(x, t) \Big|_{c_{i-1}}^{c_i} + \frac{\partial}{\partial x} \left( (EI)_i(x) \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(x, t) \right) \right) v(x, t) \Big|_{c_{i-1}}^{c_i} - \\
& - (EI)_i(x) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(x, t) \frac{\partial v}{\partial x}(x, t) \Big|_{c_{i-1}}^{c_i} - \\
& - r_{c_i} \left( \frac{\partial w}{\partial x}(c_i^-, t) \frac{\partial v}{\partial x}(c_i^-, t) \right) - t_{c_i} w(c_i, t) v(c_i, t) - \\
& \left. - r_{i,i+1} \left( \frac{\partial w}{\partial x}(c_i^+, t) - \frac{\partial w}{\partial x}(c_i^-, t) \right) \left( \frac{\partial v}{\partial x}(c_i^+, t) - \frac{\partial v}{\partial x}(c_i^-, t) \right) \right] \right\} dt = 0
\end{aligned} \tag{A1.43}$$

### A1.7 Espacios de funciones y direcciones admisibles

Dado que las derivadas clásicas  $(\partial^n w(x,t))/\partial x^n$ ,  $n=2,3,4$  se pueden extender como funciones continuas hasta el extremo  $x=c_i$ , las derivadas laterales  $(\partial^n w(c_i^-,t))/\partial x^n$  y  $(\partial^n w(c_i^+,t))/\partial x^n$  existen, pero  $(\partial^n w(x,t))/\partial x^n$  no es necesariamente continua en  $x=c_i$ . No obstante tiene como máximo un punto de discontinuidad de primera especie.

En consecuencia, el espacio de funciones admisibles está dado por

$$D = \left\{ w; w(x,\cdot) \in C^2[t_a, t_b], w(\cdot, t) \in C^1[0, l], w(\cdot, t)|_{[c_{i-1}, c_i]} \in C^4[c_{i-1}, c_i], \right. \\ \left. i=1, 2, \dots, N-1, w(x, t_a), w(x, t_b) \forall x \in C[0, l] \right\}. \quad A1.44$$

El espacio de direcciones admisibles se construye teniendo en cuenta que las únicas direcciones admisibles  $v$  en  $w \in D$  son aquellas para las cuales  $w + \varepsilon v \in D$  para un  $\varepsilon$  suficientemente pequeño y  $\delta F(w; v)$  existe. En consecuencia, el espacio de direcciones admisibles  $D_a$  está dada por

$$D_a = \left\{ v; v(x,\cdot) \in C^2[t_a, t_b], v(\cdot, t) \in C^1([0, l]), v(\cdot, t)|_{[c_{i-1}, c_i]} \in C^4[c_{i-1}, c_i], \right. \\ \left. i=1, 2, \dots, N, v(x, t_a) = v(x, t_b) = 0, \forall x \in [0, l] \right\}. \quad A1.45$$

### A1.8 El lema fundamental del cálculo de variaciones

Suponiendo que los extremos de la viga y donde se encuentran los puntos intermedios están rígidamente empotrados, que se logra haciendo tender a infinito a todas las restricciones elásticas, se cumple que  $w(c_i, t) = \frac{\partial w}{\partial x}(c_i^-, t) = 0$  con  $i=1, 2, \dots, N$ .

Como consecuencia de estas consideraciones, se obtiene  $w(c_i, t) + \varepsilon v(c_i, t) = 0$ ,  $\forall \varepsilon > 0$ , y  $(\partial w(c_i^-, t))/\partial x^n + \varepsilon (\partial v(c_i^-, t))/\partial x = 0$ ,  $\forall \varepsilon > 0$ , entonces  $v(c_i, t) = 0$  y  $(\partial v(c_i^-, t))/\partial x = 0$  con  $i=1, 2, \dots, N$ ,  $\forall t \in [t_a, t_b]$ .

Introduciendo estas consideraciones en A1.43 y operando, se obtiene

$$\begin{aligned} \delta F(w; v) = \int_{t_a}^{t_b} \left\{ \sum_{i=0}^N \int_{c_{i-1}}^{c_i} \left[ -(\rho A)_i(x) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}(x, t) \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( (EI)_i(x) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(x, t) \right) + q(x, t) \right] v(x, t) dx \right\} dt = 0, \end{aligned} \quad \text{A1.46}$$

$\forall v \in D_a^*$ . el espacio de direcciones admisibles está dado por

$$\begin{aligned} D_a^* = \{v; v(x, \cdot) \in C^2[t_a, t_b], v(\cdot, t) \in C^4([0, l]), v(\cdot, t)|_{[c_{i-1}, c_i]} \in C^4[c_{i-1}, c_i], \\ i = 1, 2, \dots, N, v(x, t_a), v(x, t_b) \forall x \in C[0, l]\} \end{aligned} \quad \text{A1.47}$$

que satisface las condiciones  $v(c_i, t) = 0, \quad (\partial v(c_i^-, t))/\partial x = 0,$   
 $v(x, t_a) = v(x, t_b) = 0, \quad \forall x \in [0, l].$

El lema fundamental del cálculo de variaciones postula:

Sea  $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua en  $[a, b]$  y tal que se satisface la condición  $\int_a^b F(x)v(x)dx = 0$ , para toda función  $v : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  continua en  $[a, b]$  y que verifica  $v(a), v(b) = 0$  entonces  $F(x) = 0, \forall x \in [a, b].$

Al comparar con la expresión dada en el lema fundamental del cálculo  $\int_a^{b_i} F(x)v(x)dx = 0$ , se observa de forma inmediata que

$$F(x) = -(\rho A)_i(x) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}(x, t) - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( (EI)_i(x) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(x, t) \right) + q(x, t) = 0, \quad \text{A1.48}$$

de donde se deduce que la función  $w$  debe satisfacer las ecuaciones diferenciales en derivadas parciales de grado cuarto:

$$(\rho A)_i(x) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}(x, t) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( (EI)_i(x) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(x, t) \right) = q(x, t), \quad \forall t > 0, i=1, \dots, N. \quad \text{A1.49}$$

**A1.9 Deducción del problema de contorno**

Si ahora se vuelve al caso original, que es cuando existen restricciones elásticas, dado que se verifica  $D_a^* \subset D_a$ , resulta que se verifica la condición  $\delta F(w; v) = 0, \forall v \in D_a^*$ . De donde surge que la función  $w$  debe satisfacer la ecuación A1.43 por lo que la condición para funcional estacionario se reduce a

$$\begin{aligned} \delta F(w; v) = & \int_{t_a}^{t_b} \left\{ \sum_{i=0}^N \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( (EI)_i(x) \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(x, t) \right) \right) v(x, t) \right]_{c_{i-1}}^{c_i} - \right. \\ & - (EI)_i(x) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(x, t) \frac{\partial v}{\partial x}(x, t) \Big|_{c_{i-1}}^{c_i} - \\ & - r_{c_i} \left( \frac{\partial w}{\partial x}(c_i^-, t) \frac{\partial v}{\partial x}(c_i^-, t) \right) - t_{c_i} w(c_i, t) v(c_i, t) - \\ & \left. - r_{i,i+1} \left( \frac{\partial w}{\partial x}(c_i^+, t) - \frac{\partial w}{\partial x}(c_i^-, t) \right) \left( \frac{\partial v}{\partial x}(c_i^+, t) - \frac{\partial v}{\partial x}(c_i^-, t) \right) \right\} dt = 0 \end{aligned} \tag{A1.50}$$

Para clarificar el siguiente desarrollo se presenta el esquema de la Figura A1.4.

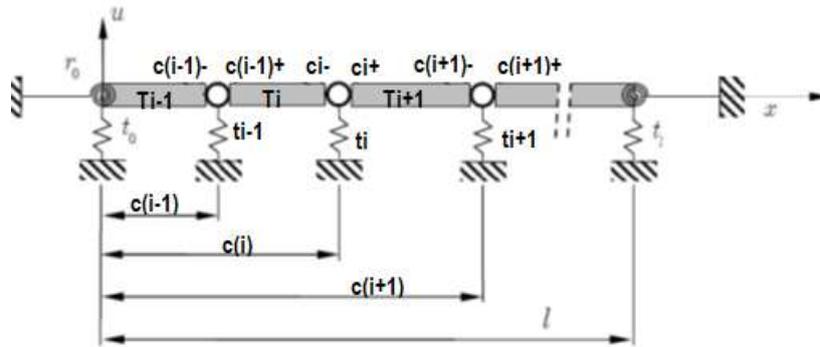


Figura A1.4 – Esquema de la viga analizada

Cuando se analiza el tramo  $i$ , se observa que el mismo comienza en la posición  $c_{i-1}$  y finaliza en la posición  $c_i$ . Por lo que al evaluar las funciones, en el tramo  $i$ , en la posición  $c_{i-1}$  lo hacemos por derecha ( $c_{i-1}^+$ ). Mientras que al evaluar las funciones, en el tramo  $i$ , en la posición  $c_i$  lo hacemos por izquierda ( $c_i^-$ ).

Al evaluar la expresión anterior, considerando que  $c_i \rightarrow c_i^-$  y  $c_{i-1} \rightarrow c_{i-1}^+$  se obtiene:

$$\begin{aligned}
\delta F(w; v) = & \int_{t_a}^{t_b} \left\{ \sum_{i=0}^N \left[ + \frac{\partial}{\partial x} \left( (EI)_i \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} (c_i^-, t) \right) \right) v(c_i^-, t) \right. \right. \\
& - \frac{\partial}{\partial x} \left( (EI)_i \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} (c_{i-1}^+, t) \right) \right) v(c_{i-1}^+, t) \\
& \left. \left. - (EI)_i \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} (c_i^-, t) \frac{\partial v}{\partial x} (c_i^-, t) + (EI)_i \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} (c_{i-1}^+, t) \frac{\partial v}{\partial x} (c_{i-1}^+, t) \right] \right. \\
& - r_{c_i} \left( \frac{\partial w}{\partial x} (c_i^-, t) \frac{\partial v}{\partial x} (c_i^-, t) \right) - t_{c_i} w(c_i, t) v(c_i, t) \\
& \left. \left. - \left[ r_{i,i+1} \left( \frac{\partial w}{\partial x} (c_i^+, t) - \frac{\partial w}{\partial x} (c_i^-, t) \right) \left( \frac{\partial v}{\partial x} (c_i^+, t) - \frac{\partial v}{\partial x} (c_i^-, t) \right) \right] \right\} = 0
\end{aligned} \tag{A1.51}$$

Al expandir la sumatoria y al agrupar los términos que efectivamente se están evaluando en  $c_i$ , se obtienen los términos provenientes del tramo  $i$  y del tramo  $i+1$ . De forma de evidenciar esto, se analiza la sumatoria para estos dos tramos quedando:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=i}^{i+1} = & \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left( (EI)_i \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} (c_i^-, t) \right) \right) v(c_i^-, t) - \frac{\partial}{\partial x} \left( (EI)_i \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} (c_{i-1}^+, t) \right) \right) v(c_{i-1}^+, t) \right. \\
& \left. - (EI)_i \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} (c_i^-, t) \frac{\partial v}{\partial x} (c_i^-, t) + (EI)_i \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} (c_{i-1}^+, t) \frac{\partial v}{\partial x} (c_{i-1}^+, t) \right] \\
& - r_{c_i} \left( \frac{\partial w}{\partial x} (c_i^-, t) \frac{\partial v}{\partial x} (c_i^-, t) \right) - t_{c_i} w(c_i, t) v(c_i, t) \\
& - \left[ r_{i,i+1} \left( \frac{\partial w}{\partial x} (c_i^+, t) - \frac{\partial w}{\partial x} (c_i^-, t) \right) \left( \frac{\partial v}{\partial x} (c_i^+, t) - \frac{\partial v}{\partial x} (c_i^-, t) \right) \right] \left. \right\} \\
& + \left\{ + \frac{\partial}{\partial x} \left( (EI)_{i+1} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} (c_{i+1}^-, t) \right) \right) v(c_{i+1}^-, t) - \frac{\partial}{\partial x} \left( (EI)_{i+1} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} (c_i^+, t) \right) \right) v(c_i^+, t) \right. \\
& \left. - (EI)_{i+1} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} (c_{i+1}^-, t) \frac{\partial v}{\partial x} (c_{i+1}^-, t) + (EI)_{i+1} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} (c_i^+, t) \frac{\partial v}{\partial x} (c_i^+, t) \right] \\
& - r_{c_{i+1}} \left( \frac{\partial w}{\partial x} (c_{i+1}^-, t) \frac{\partial v}{\partial x} (c_{i+1}^-, t) \right) - t_{c_{i+1}} w(c_{i+1}, t) v(c_{i+1}, t) \\
& - \left[ r_{i,i+1} \left( \frac{\partial w}{\partial x} (c_{i+1}^+, t) - \frac{\partial w}{\partial x} (c_{i+1}^-, t) \right) \left( \frac{\partial v}{\partial x} (c_{i+1}^+, t) - \frac{\partial v}{\partial x} (c_{i+1}^-, t) \right) \right] \left. \right\} = 0
\end{aligned} \tag{A1.52}$$

Si agrupamos los términos que tienen  $c_i$ , (lo resaltado en azul más arriba) y considerando que habrá tantos términos de la sumatoria como tramos de vigas.

$$\begin{aligned}
 \delta F(w;v) = & \int_{t_a}^{t_b} \left\{ \sum_{i=0}^N \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( (EI)_i \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(c_i^-, t) \right) \right) v(c_i^-, t) \right. \right. \\
 & - \frac{\partial}{\partial x} \left( (EI)_{i+1} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(c_i^+, t) \right) \right) v(c_i^+, t) \\
 & \left. \left. - (EI)_i \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(c_i^-, t) \frac{\partial v}{\partial x}(c_i^-, t) + (EI)_{i+1} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(c_i^+, t) \frac{\partial v}{\partial x}(c_i^+, t) \right] \right. \\
 & - r_{c_i} \left( \frac{\partial w}{\partial x}(c_i^-, t) \frac{\partial v}{\partial x}(c_i^-, t) \right) - t_{c_i} w(c_i, t) v(c_i, t) \\
 & \left. \left. - \left[ r_{i,i+1} \left( \frac{\partial w}{\partial x}(c_i^+, t) - \frac{\partial w}{\partial x}(c_i^-, t) \right) \left( \frac{\partial v}{\partial x}(c_i^+, t) - \frac{\partial v}{\partial x}(c_i^-, t) \right) \right] \right\} = 0
 \end{aligned} \tag{A1.53}$$

Debido a la continuidad del desplazamiento  $v(c^+, t) = v(c^-, t) = v(c, t)$ . Por lo que se puede sacar factor común  $v(c, t)$ , reordenando la expresión según:

$$\begin{aligned}
 & \left[ - \frac{\partial}{\partial x} \left( (EI)_i \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(c_i^-, t) \right) \right) + \right. \\
 & \left. + \frac{\partial}{\partial x} \left( (EI)_{i+1} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(c_i^+, t) \right) \right) - t_{c_i} w(c_i, t) \right] v(c_i, t) = 0
 \end{aligned} \tag{A1.54}$$

Como  $v(c, t) \neq 0$ , se reordena la expresión tal que:

$$-t_{c_i} w(c_i, t) + \frac{\partial}{\partial x} \left( (EI)_i \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(c_i^-, t) \right) \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left( (EI)_{i+1} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(c_i^+, t) \right) \right) = 0 \tag{A1.55}$$

La viga necesariamente debe de presentar continuidad y por lo tanto

$$w(c_i^+, t) - w(c_i^-, t) = 0 \tag{A1.56}$$

Las derivadas parciales a izquierda y derecha, no pueden ser iguales debido a esta presente la rótula. Al sacar factor común  $\frac{\partial v}{\partial x}(c_i^-, t)$ , se obtiene:

$$\left[ +r_{i,i+1} \left( \frac{\partial w}{\partial x}(c_i^+, t) - \frac{\partial w}{\partial x}(c_i^-, t) \right) - r_{c_i} \frac{\partial w}{\partial x}(c_i^-, t) - (EI)_i \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(c_i^-, t) \right] \frac{\partial v}{\partial x}(c_i^-, t) = 0 \tag{A1.57}$$

Como  $\frac{\partial v}{\partial x}(c_i^-, t) \neq 0$ , entonces

$$r_{i,i+1} \left( \frac{\partial w}{\partial x}(c_i^+, t) - \frac{\partial w}{\partial x}(c_i^-, t) \right) - r_{c_i} \frac{\partial w}{\partial x}(c_i^-, t) - (EI)_i \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(c_i^-, t) = 0 \quad A1.58$$

Al sacar factor común  $\frac{\partial v}{\partial x}(c_i^+, t)$ , se obtiene:

$$\left[ (EI)_{i+1} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(c_i^+, t) - r_{i,i+1} \left( \frac{\partial w}{\partial x}(c_i^+, t) - \frac{\partial w}{\partial x}(c_i^-, t) \right) \right] \frac{\partial v}{\partial x}(c_i^+, t) = 0 \quad A1.59$$

Si  $\frac{\partial v}{\partial x}(c_i^+, t) \neq 0$ , se reordena la expresión tal que:

$$-r_{i,i+1} \left( \frac{\partial w}{\partial x}(c_i^+, t) - \frac{\partial w}{\partial x}(c_i^-, t) \right) + (EI)_{i+1} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(c_i^+, t) = 0 \quad A1.60$$

Si retomamos la expresión A1.50, al evaluar en  $i = 0$  y  $i + 1 = 1$ ; se obtiene:

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{i+1} = & \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left( (EI)_0 \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(0^-, t) \right) \right) v(0^-, t) - \frac{\partial}{\partial x} \left( (EI)_0 \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(c_{0-1}^+, t) \right) \right) v(c_{0-1}^+, t) \right. \\ & - (EI)_0 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(0^-, t) \frac{\partial v}{\partial x}(0^-, t) + (EI)_0 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(c_{0-1}^+, t) \frac{\partial v}{\partial x}(c_{0-1}^+, t) - \\ & - r_0 \left( \frac{\partial w}{\partial x}(0^-, t) \frac{\partial v}{\partial x}(0^-, t) \right) - t_0 w(0, t) v(0, t) - \\ & - \left[ r_{0,1} \left( \frac{\partial w}{\partial x}(0^+, t) - \frac{\partial w}{\partial x}(0^-, t) \right) \left( \frac{\partial v}{\partial x}(0^+, t) - \frac{\partial v}{\partial x}(0^-, t) \right) \right] \left. \right\} + \\ & + \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left( (EI)_1 \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(c_1^-, t) \right) \right) v(c_1^-, t) - \frac{\partial}{\partial x} \left( (EI)_1 \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(0^+, t) \right) \right) v(0^+, t) \right. \\ & - (EI)_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(c_1^-, t) \frac{\partial v}{\partial x}(c_1^-, t) + (EI)_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(0^+, t) \frac{\partial v}{\partial x}(0^+, t) - \\ & - r_1 \left( \frac{\partial w}{\partial x}(c_1^-, t) \frac{\partial v}{\partial x}(c_1^-, t) \right) - t_1 w(c_1, t) v(c_1, t) - \\ & - \left[ r_{1,2} \left( \frac{\partial w}{\partial x}(c_1^+, t) - \frac{\partial w}{\partial x}(c_1^-, t) \right) \left( \frac{\partial v}{\partial x}(c_1^+, t) - \frac{\partial v}{\partial x}(c_1^-, t) \right) \right] \left. \right\} = 0 \quad A1.61 \end{aligned}$$

Eliminando lo que no tiene sentido físico, funciones evaluadas  $0^-$  o en  $c_{0-1}^+$  (rojo), y las que están evaluadas en  $c_1$  (magenta), se obtiene:

$$\begin{aligned}
 & -r_0 \left( \frac{\partial w}{\partial x}(0^-, t) \frac{\partial v}{\partial x}(0^-, t) \right) - t_0 w(0, t) v(0, t) - r_{0,1} \left( \frac{\partial w}{\partial x}(0^+, t) \frac{\partial v}{\partial x}(0^+, t) \right) \\
 & - \frac{\partial}{\partial x} \left( (EI)_1 \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(0^+, t) \right) \right) v(0^+, t) + (EI)_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(0^+, t) \frac{\partial v}{\partial x}(0^+, t) = 0
 \end{aligned} \tag{A1.62}$$

Debido a la continuidad del desplazamiento  $v(0^+, t) = v(0, t)$ . Por lo que se puede sacar factor común  $v(0, t)$ ,

$$\left[ -t_0 w(0, t) - \frac{\partial}{\partial x} \left( (EI)_1 \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(0^+, t) \right) \right) \right] v(0, t) = 0. \tag{A1.63}$$

Como  $v(0, t) \neq 0$ , se desprende que:

$$-t_0 w(0, t) - \frac{\partial}{\partial x} \left( (EI)_1 \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(0^+, t) \right) \right) = 0. \tag{A1.64}$$

Tomando lo términos de A1.61 que tiene  $\frac{\partial v}{\partial x}(c_i^+, t)$ , se obtiene:

$$\begin{aligned}
 & -r_0 \left( \frac{\partial w}{\partial x}(0^-, t) \frac{\partial v}{\partial x}(0^-, t) \right) - r_{0,1} \left( \frac{\partial w}{\partial x}(0^+, t) \frac{\partial v}{\partial x}(0^+, t) \right) \\
 & + (EI)_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(0^+, t) \frac{\partial v}{\partial x}(0^+, t) = 0
 \end{aligned} \tag{A1.65}$$

Considerando que  $r_{0,1} = 0$  y que  $-r_0 \left( \frac{\partial w}{\partial x}(0^-, t) \frac{\partial v}{\partial x}(0^-, t) \right) = -r_0 \left( \frac{\partial w}{\partial x}(0^+, t) \frac{\partial v}{\partial x}(0^+, t) \right)$ , se

saca factor común  $\left[ -r_0 \left( \frac{\partial w}{\partial x}(0^+, t) \right) + (EI)_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(0^+, t) \right] \frac{\partial v}{\partial x}(0^+, t) = 0$ , y por lo tanto

$$-r_0 \left( \frac{\partial w}{\partial x}(0^+, t) \right) + (EI)_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(0^+, t) = 0 \tag{A1.66}$$

Si retomamos la expresión A1.50 , al evaluar en  $i = N$  se obtiene:

$$\begin{aligned} & \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left( (EI)_N \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} (l^-, t) \right) \right) v(l^-, t) - \frac{\partial}{\partial x} \left( (EI)_N \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} (c_{N-1}^+, t) \right) \right) v(c_{N-1}^+, t) \right. \\ & - (EI)_N \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} (l^-, t) \frac{\partial v}{\partial x} (l^-, t) + (EI)_N \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} (c_{N-1}^+, t) \frac{\partial v}{\partial x} (c_{N-1}^+, t) - \\ & - r_l \left( \frac{\partial w}{\partial x} (l^-, t) \frac{\partial v}{\partial x} (l^-, t) \right) - t_l w(l, t) v(l, t) - \\ & \left. - \left[ r_{N, N+1} \left( \frac{\partial w}{\partial x} (l^+, t) - \frac{\partial w}{\partial x} (l^-, t) \right) \left( \frac{\partial v}{\partial x} (l^+, t) - \frac{\partial v}{\partial x} (l^-, t) \right) \right] \right\} = 0 \end{aligned} \quad \text{A1.67}$$

Al considerar solo lo que esta evaluado en  $l$  y que  $r_{N, N+1} \equiv 0$ , la expresión anterior se reduce

a:

$$\begin{aligned} & \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left( (EI)_N \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} (l^-, t) \right) \right) v(l^-, t) - (EI)_N \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} (l^-, t) \frac{\partial v}{\partial x} (l^-, t) \right. \\ & \left. - r_l \left( \frac{\partial w}{\partial x} (l^-, t) \frac{\partial v}{\partial x} (l^-, t) \right) - t_l w(l, t) v(l, t) \right\} = 0 \end{aligned} \quad \text{A1.68}$$

Debido a la continuidad del desplazamiento  $v(l^-, t) = v(l, t)$ . Por lo que se puede sacar factor común  $v(l, t)$ ,

$$\left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( (EI)_N \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} (l^-, t) \right) \right) - t_l w(l, t) \right] v(l, t) = 0 \quad \text{A1.69}$$

Como  $v(l, t) \neq 0$ , se desprende que:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( (EI)_N \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} (l^-, t) \right) \right) - t_l w(l, t) = 0 \quad \text{A1.70}$$

De A1.67 , al sacar factor común  $\frac{\partial v}{\partial x} (l^-, t)$ , se obtiene:

$$\left[ - (EI)_N \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} (l^-, t) - r_l \left( \frac{\partial w}{\partial x} (l^-, t) \right) \right] \frac{\partial v}{\partial x} (l^-, t) = 0 \quad \text{A1.71}$$

Como  $\frac{\partial v}{\partial x}(l^-, t) \neq 0$ , por lo tanto

$$r_l \left( \frac{\partial w}{\partial x}(l^-, t) \right) + (EI)_N \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(l^-, t) = 0 \quad \text{A1.72}$$

Resumiendo, se deduce que la función  $w$  debe satisfacer  $\forall t \geq 0$ , las siguientes condiciones.

$$-t_0 w(0, t) - \frac{\partial}{\partial x} \left( (EI)_1 \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(0^+, t) \right) \right) = 0. \quad \text{A1.73}$$

$$-r_0 \left( \frac{\partial w}{\partial x}(0^+, t) \right) + (EI)_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(0^+, t) = 0 \quad \text{A1.74}$$

$$-t_{c_i} w(c_i, t) + \frac{\partial}{\partial x} \left( (EI)_i \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(c_i^-, t) \right) \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left( (EI)_{i+1} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(c_i^+, t) \right) \right) = 0 \quad \text{A1.75}$$

$$w(c_i^+, t) - w(c_i^-, t) = 0 \quad \text{A1.76}$$

$$r_{i,i+1} \left( \frac{\partial w}{\partial x}(c_i^+, t) - \frac{\partial w}{\partial x}(c_i^-, t) \right) - r_{c_i} \frac{\partial w}{\partial x}(c_i^-, t) - (EI)_i \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(c_i^-, t) = 0 \quad \text{A1.77}$$

$$-r_{i,i+1} \left( \frac{\partial w}{\partial x}(c_i^+, t) - \frac{\partial w}{\partial x}(c_i^-, t) \right) + (EI)_{i+1} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(c_i^+, t) = 0 \quad \text{A1.78}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( (EI)_N \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(l^-, t) \right) \right) - t_l w(l, t) = 0 \quad \text{A1.79}$$

$$r_l \left( \frac{\partial w}{\partial x}(l^-, t) \right) + (EI)_N \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(l^-, t) = 0 \quad \text{A1.80}$$

Conocidas como condiciones de contorno y transición.

### A1.10 Deducción de las Constantes adimensionales de rigidez de los resortes traslacionales y rotacionales

Se parte de las condiciones naturales de contorno y de las condiciones de transición. Se observa que las derivadas dependen solo de la posición. Si realizamos un cambio de variables  $\bar{x} = \frac{x}{l} \Rightarrow X(\bar{x}) = \bar{x}l$ . Donde  $X = f(x)$  es una función derivable de  $w$  y si además  $x = g(\bar{x})$  es una función derivable de  $x$  entonces  $X = f(g(\bar{x}))$  es una función derivable, entonces recordando las fórmulas de Faa di Bruno o regla de la cadena, obtenemos:

$$\frac{\partial X}{\partial x} = \frac{\partial X}{\partial \bar{x}} \frac{\partial \bar{x}}{\partial x} \quad \text{A1.81}$$

$$\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 X}{\partial \bar{x}^2} \frac{\partial \bar{x}}{\partial x} \frac{\partial \bar{x}}{\partial x} + \frac{\partial X}{\partial \bar{x}} \frac{\partial^2 \bar{x}}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 X}{\partial \bar{x}^2} \left( \frac{\partial \bar{x}}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial X}{\partial \bar{x}} \frac{\partial^2 \bar{x}}{\partial x^2} \quad \text{A1.82}$$

$$\frac{\partial^3 X}{\partial x^3} = \frac{\partial^3 X}{\partial \bar{x}^3} \left( \frac{\partial \bar{x}}{\partial x} \right)^3 + 3 \frac{\partial^2 X}{\partial \bar{x}^2} \frac{\partial \bar{x}}{\partial x} \frac{\partial^2 \bar{x}}{\partial x^2} + \frac{\partial X}{\partial \bar{x}} \frac{\partial^3 \bar{x}}{\partial x^3} \quad \text{A1.83}$$

$$\frac{\partial^4 X}{\partial x^4} = \frac{\partial^4 X}{\partial \bar{x}^4} \left( \frac{\partial \bar{x}}{\partial x} \right)^4 + 6 \frac{\partial^3 X}{\partial \bar{x}^3} \left( \frac{\partial \bar{x}}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial^2 \bar{x}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 X}{\partial \bar{x}^2} \left\{ 4 \frac{\partial \bar{x}}{\partial x} \frac{\partial^3 \bar{x}}{\partial x^3} + 3 \left( \frac{\partial^2 \bar{x}}{\partial x^2} \right)^2 \right\} + \frac{\partial X}{\partial \bar{x}} \frac{\partial^4 \bar{x}}{\partial x^4} \quad \text{A1.84}$$

Ahora bien,  $\frac{\partial}{\partial x}(\bar{x}) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{x}{l} \right) = \frac{1}{l}$  y  $\frac{\partial^2}{\partial x^2}(\bar{x}) = \frac{\partial}{\partial \bar{x}} \left( \frac{1}{l} \right) = 0$ , como las derivadas sucesivas.

Por lo tanto, las expresiones anteriores quedan dadas por:

$$\frac{\partial X}{\partial x} = \frac{\partial X}{\partial \bar{x}} \frac{\partial \bar{x}}{\partial x} \quad \text{A1.85}$$

$$\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 X}{\partial \bar{x}^2} \left( \frac{\partial \bar{x}}{\partial x} \right)^2 = \frac{\partial^2 X}{\partial \bar{x}^2} \left( \frac{1}{l} \right)^2 \quad \text{A1.86}$$

$$\frac{\partial^3 X}{\partial x^3} = \frac{\partial^3 X}{\partial \bar{x}^3} \left( \frac{\partial \bar{x}}{\partial x} \right)^3 = \frac{\partial^3 X}{\partial \bar{x}^3} \left( \frac{1}{l} \right)^3 \quad \text{A1.87}$$

$$\frac{\partial^4 X}{\partial x^4} = \frac{\partial^4 X}{\partial \bar{x}^4} \left( \frac{\partial \bar{x}}{\partial x} \right)^4 = \frac{\partial^4 X}{\partial \bar{x}^4} \left( \frac{1}{l} \right)^4 \quad \text{A1.88}$$

Ahora, se reemplaza en las condiciones de contorno y continuidad. Al considerar  $-r_0 \frac{\partial w}{\partial x}(0^+, t) + (EI)_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(0^+, t) = 0$  y aplicar el cambio de variable se obtiene  $r_0 \left(\frac{1}{l}\right) \frac{\partial w}{\partial \bar{x}}(0^+, t) = (EI)_1 \left(\frac{1}{l}\right)^2 \frac{\partial^2 w}{\partial \bar{x}^2}(0^+, t)$ , de lo que se desprende  $\frac{r_0 l}{(EI)_1} \frac{\partial w}{\partial \bar{x}}(0^+, t) = \frac{\partial^2 w}{\partial \bar{x}^2}(0^+, t)$ .

De lo que resulta inmediato que la expresión de la constante adimensional de rigidez del resorte rotacional está dado por

$$R_0 = \frac{r_0 l}{(EI)_1} \tag{A1.89}$$

De forma análoga, partiendo de  $-r_l \frac{\partial w}{\partial x}(l^-, t) + (EI)_N (l) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(l^-, t) = 0$  se obtiene

$$R_l = \frac{r_l l}{(EI)_N} \tag{A1.90}$$

Al partir,  $t_0 w(0, t) = \frac{\partial}{\partial x} \left( (EI)_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(0^+, t) \right)$ . Al hacer el cambio de variable

$t_0 w(0, t) = \left(\frac{1}{l}\right)^3 \frac{\partial}{\partial \bar{x}} \left( (EI)_1 \frac{\partial^2 w}{\partial \bar{x}^2}(0^+, t) \right)$  se desprende  $\frac{t_0 l^3}{(EI)_1} w(0, t) = \frac{\partial}{\partial \bar{x}} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial \bar{x}^2}(0^+, t) \right)$ . De lo que

resulta inmediato que la expresión de la constante adimensional de rigidez del resorte traslacional está dado por

$$T_0 = \frac{t_0 l^3}{(EI)_1} \tag{A1.91}$$

De forma análoga, partiendo de  $-t_l w(l, t) + \frac{\partial}{\partial x} \left( (EI)_N (l) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(l^-, t) \right) = 0$  se obtiene

$$T_l = \frac{t_0 l^3}{(EI)_N} \tag{A1.92}$$

Al considerar  $(EI)_{i+1} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(c_i^+, t) - r_{i,i+1} \left( \frac{\partial w}{\partial x}(c_i^+, t) - \frac{\partial w}{\partial x}(c_i^-, t) \right) = 0$

y aplicar el cambio de variable  $r_{i,i+1} \left(\frac{1}{l}\right) \left( \frac{\partial w}{\partial \bar{x}}(c_i^+, t) - \frac{\partial w}{\partial \bar{x}}(c_i^-, t) \right) = (EI)_{i+1} \left(\frac{1}{l}\right)^2 \frac{\partial^2 w}{\partial \bar{x}^2}(c_i^+, t)$  se

desprende  $\frac{r_{i,i+1} l}{(EI)_{i+1}} \left( \frac{\partial w}{\partial \bar{x}}(c_i^+, t) - \frac{\partial w}{\partial \bar{x}}(c_i^-, t) \right) = (EI)_{i+1} \frac{\partial^2 w}{\partial \bar{x}^2}(c_i^+, t)$ .

De lo que resulta inmediato que la expresión de la constante adimensional de rigidez del resorte rotacional que vincula dos tramos de viga está dada por

$$R_{i,i+1} = \frac{r_{i,i+1}l}{(EI)_i} \quad \text{A1.93}$$

Al considerar  $-t_{c_i}w(c_i,t) + \frac{\partial}{\partial x} \left( (EI)_i (c_i^-) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(c_i^-,t) \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left( (EI)_{i+1} (c_i^+) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(c_i^+,t) \right) = 0$ ,

aplicar el cambio de variable de variable

$$t_{c_i}w(c_i,t) = \left(\frac{1}{l}\right)^3 \left[ \frac{\partial}{\partial \bar{x}} \left( (EI)_i (c_i^-) \frac{\partial^2 w}{\partial \bar{x}^2}(c_i^-,t) \right) - \frac{\partial}{\partial \bar{x}} \left( (EI)_{i+1} (c_i^+) \frac{\partial^2 w}{\partial \bar{x}^2}(c_i^+,t) \right) \right]. \text{ se desprende}$$

$$\frac{t_{c_i}l^3}{(EI)_i} w(c_i,t) = \frac{\partial}{\partial \bar{x}} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial \bar{x}^2}(c_i^-,t) \right) - \frac{\partial}{\partial \bar{x}} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial \bar{x}^2}(c_i^+,t) \right). \text{ Así la expresión de la constante adimensional}$$

de rigidez del resorte traslacional queda dada por

$$T_{c_i} = \frac{t_{c_i}l^3}{(EI)_i} \quad \text{A1.94}$$

Al considerar  $-r_{c_i} \frac{\partial w}{\partial x}(c_i^-,t) + r_{i,i+1} \left( \frac{\partial w}{\partial x}(c_i^+,t) - \frac{\partial w}{\partial x}(c_i^-,t) \right) - (EI)_i (c_i^-) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(c_i^-,t) = 0$ , si no

hay restricciones rotacionales entre los tramos de la viga,  $r_{c_i} \frac{\partial w}{\partial x}(c_i^-,t) = -(EI)_i (c_i^-) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(c_i^-,t)$ .

Al aplicar el cambio de variable se arriba a  $r_{c_i} \left(\frac{1}{l}\right) \frac{\partial w}{\partial \bar{x}}(c_i^-,t) = -(EI)_i \left(\frac{1}{l}\right)^2 \frac{\partial^2 w}{\partial \bar{x}^2}(c_i^-,t)$ . De lo que

se desprende  $\frac{r_{c_i}l}{(EI)_i} \frac{\partial w}{\partial \bar{x}}(c_i^-,t) = -\frac{\partial^2 w}{\partial \bar{x}^2}(c_i^-,t)$  y por lo tanto

$$R_{c_i} = \frac{r_{c_i}l}{(EI)_i} \quad \text{A1.95}$$

Al analizar las unidades, se observa que los resortes rotacionales y traslacionales tienen constantes de rigideces dadas por ejemplo en  $r_1 = |kgfcm|$ ,  $t_1 = |kgf/cm|$ . Al aplicar la adimensionalización hallamos que

$$R_1 = \frac{\eta l}{EI} = \frac{|kgfcm||cm|}{\left| \frac{kgf}{cm^2} ||cm^4| \right|} = |1| \quad T_1 = \frac{\eta l^3}{EI} = \frac{\left| \frac{kgf}{cm} ||cm^3| \right|}{\left| \frac{kgf}{cm^2} ||cm^4| \right|} = |1| \quad \text{A1.96}$$

### A1.11 Condiciones de contorno adimensionalizadas

Se pueden separar la variable espacial de la temporal y por lo tanto trabajar con derivadas ordinarias de la función  $W$ . Al reemplazar  $w(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} W_n(x) \cos(\omega_n t - \varphi)$ , en las condiciones de contorno y transición dadas, se obtiene:

$$-t_0 W(0) - \frac{d}{dx} \left( (EI)_1(0^+) \frac{d^2 W}{dx^2}(0^+) \right) = 0 \quad \text{A1.97}$$

$$-r_0 \frac{dW}{dx}(0^+) + (EI)_1(0) \frac{d^2 W}{dx^2}(0^+) = 0 \quad \text{A1.98}$$

$$-t_{c_i} W(c_i) + \frac{d}{dx} \left( (EI)_i \left( \frac{d^2 W}{dx^2}(c_i^-) \right) \right) - \frac{d}{dx} \left( (EI)_{i+1} \left( \frac{d^2 W}{dx^2}(c_i^+) \right) \right) = 0 \quad \text{A1.99}$$

$$W(c_i^+, t) - W(c_i^-, t) = 0 \quad \text{A1.100}$$

$$-r_{c_i} \frac{dW}{dx}(c_i^-) + r_{i,i+1} \left( \frac{dW}{dx}(c_i^+) - \frac{dW}{dx}(c_i^-) \right) - (EI)_i(c_i^-) \frac{d^2 W}{dx^2}(c_i^-) = 0 \quad \text{A1.101}$$

$$-r_{i,i+1} \left( \frac{dW}{dx}(c_i^+) - \frac{dW}{dx}(c_i^-) \right) + (EI)_{i+1}(c_i^+) \frac{d^2 W}{dx^2}(c_i^+) = 0 \quad \text{A1.102}$$

$$-t_l W(l) + \frac{d}{dx} \left( (EI)_N(l) \frac{d^2 W}{dx^2}(l^-) \right) = 0 \quad \text{A1.103}$$

$$-r_l \frac{dW}{dx}(l^-) + (EI)_N(l) \frac{d^2 W}{dx^2}(l^-) = 0 \quad \text{A1.104}$$

Al realizar el cambio de variables  $\bar{x} = x/l$  se obtiene

$$-t_0 W(0) - \frac{d}{d\bar{x}} \left( (EI)_1 (0^+) \frac{d^2 W}{d\bar{x}^2} (0^+) \right) \frac{1}{l^3} = 0 \quad \text{A1.105}$$

$$-r_0 \frac{dW}{d\bar{x}} (0^+) \frac{1}{l} + (EI)_1 (0) \frac{d^2 W}{d\bar{x}^2} (0^+) \frac{1}{l^2} = 0 \quad \text{A1.106}$$

$$-t_{c_i} W(c_i) + \frac{d}{d\bar{x}} \left( (EI)_i \left( \frac{d^2 W}{d\bar{x}^2} (c_i^-) \right) \right) \frac{1}{l^3} - \frac{d}{d\bar{x}} \left( (EI)_{i+1} \left( \frac{d^2 W}{d\bar{x}^2} (c_i^+) \right) \right) \frac{1}{l^3} = 0 \quad \text{A1.107}$$

$$W(c_i^+, t) - W(c_i^-, t) = 0 \quad \text{A1.108}$$

$$-r_{c_i} \frac{dW}{d\bar{x}} (c_i^-) \frac{1}{l} + r_{i,i+1} \left( \frac{dW}{d\bar{x}} (c_i^+) - \frac{dW}{d\bar{x}} (c_i^-) \right) \frac{1}{l} - (EI)_i (c_i^-) \frac{d^2 W}{d\bar{x}^2} (c_i^-) \frac{1}{l^2} = 0 \quad \text{A1.109}$$

$$-r_{i,i+1} \left( \frac{dW}{d\bar{x}} (c_i^+) - \frac{dW}{d\bar{x}} (c_i^-) \right) \frac{1}{l} + (EI)_{i+1} (c_i^+) \frac{d^2 W}{d\bar{x}^2} (c_i^+) \frac{1}{l^2} = 0 \quad \text{A1.110}$$

$$-t_l W(l) + \frac{d}{d\bar{x}} \left( (EI)_N (l) \frac{d^2 W}{d\bar{x}^2} (l^-) \right) \frac{1}{l^3} = 0 \quad \text{A1.111}$$

$$-r_l \frac{dW}{d\bar{x}} (l^-) \frac{1}{l} + (EI)_N (l) \frac{d^2 W}{d\bar{x}^2} (l^-) \frac{1}{l^2} = 0 \quad \text{A1.112}$$

Al multiplicar por  $l^4/(EI)_i$  sacar factor común y simplificar, se obtiene

$$-t_0 \frac{l^3}{(EI)_i} W(0) - \frac{d}{d\bar{x}} \left( \frac{d^2 W}{d\bar{x}^2} (0^+) \right) = 0 \quad \text{A1.113}$$

$$-r_0 \frac{l}{(EI)_1} \frac{dW}{d\bar{x}} (0^+) + \frac{d^2 W}{d\bar{x}^2} (0^+) = 0 \quad \text{A1.114}$$

$$-t_{c_i} \frac{l^3}{(EI)_i} W(c_i) + \frac{d}{d\bar{x}} \left( \frac{d^2 W}{d\bar{x}^2} (c_i^-) \right) - \frac{d}{d\bar{x}} \left( \frac{d^2 W}{d\bar{x}^2} (c_i^+) \right) = 0 \quad \text{A1.115}$$

$$W(c_i^+, t) - W(c_i^-, t) = 0 \quad \text{A1.116}$$

$$-r_{c_i} \frac{l}{(EI)_i} \frac{dW}{d\bar{x}} (c_i^-) + r_{i,i+1} \frac{l}{(EI)_i} \left( \frac{dW}{d\bar{x}} (c_i^+) - \frac{dW}{d\bar{x}} (c_i^-) \right) - \frac{d^2 W}{d\bar{x}^2} (c_i^-) = 0 \quad \text{A1.117}$$

$$-r_{i,i+1} \frac{l}{(EI)_i} \left( \frac{dW}{d\bar{x}} (c_i^+) - \frac{dW}{d\bar{x}} (c_i^-) \right) + \frac{d^2 W}{d\bar{x}^2} (c_i^+) = 0 \quad \text{A1.118}$$

$$-t_l \frac{l^3}{(EI)_i} W(l) + \frac{d}{d\bar{x}} \left( \frac{d^2 W}{d\bar{x}^2} (l^-) \right) = 0 \quad \text{A1.119}$$

$$-r_l \frac{l}{(EI)_N} \frac{dW}{d\bar{x}} (l^-) + \frac{d^2 W}{d\bar{x}^2} (l^-) = 0 \quad \text{A1.120}$$

Al reemplazar por las constantes adimensionales de rigidez, se obtienen las condiciones de contorno adimensionalizadas.

$$-T_0 W(0) - \left( \frac{d^3 W}{d\bar{x}^3} (0^+) \right) = 0 \quad \text{A1.121}$$

$$-R_0 \frac{dW}{d\bar{x}} (0^+) + \frac{d^2 W}{d\bar{x}^2} (0^+) = 0 \quad \text{A1.122}$$

$$-T_{c_i} W(c_i) + \frac{d^3 W}{d\bar{x}^3} (c_i^-) - \frac{d^3 W}{d\bar{x}^3} (c_i^+) = 0 \quad \text{A1.123}$$

$$W(c_i^+, t) - W(c_i^-, t) = 0 \quad \text{A1.124}$$

$$-R_{c_i} \frac{dW}{d\bar{x}} (c_i^-) + R_{i,i+1} \left( \frac{dW}{d\bar{x}} (c_i^+) - \frac{dW}{d\bar{x}} (c_i^-) \right) - \frac{d^2 W}{d\bar{x}^2} (c_i^-) = 0 \quad \text{A1.125}$$

$$-R_{i,i+1} \left( \frac{dW}{d\bar{x}} (c_i^+) - \frac{dW}{d\bar{x}} (c_i^-) \right) + \frac{d^2 W}{d\bar{x}^2} (c_i^+) = 0 \quad \text{A1.126}$$

$$-T_l W(l) + \frac{d^3 W}{d\bar{x}^3} (l^-) = 0 \quad \text{A1.127}$$

$$-R_l \frac{dW}{d\bar{x}} (l^-) + \frac{d^2 W}{d\bar{x}^2} (l^-) = 0 \quad \text{A1.128}$$

### A1.12 Método de separación de variables

Las ecuaciones diferenciales en derivadas parciales, Ecs. A1.49, describen el comportamiento vibratorio del sistema mecánico considerado. Al considerar que en todos los tramos se supone el mismo material y espesor, esto es  $(\rho A)_i = \rho A$  y  $(EI)_i = EI$ ,  $i=1,2,\dots,N$ , y que las cargas externas transversales son nulas  $q(x,t)=0$ , y la carga axial es constante en el tiempo  $s_i(x,t) = s_i(x)$ , se obtiene

$$(\rho A)_i(x) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}(x,t) + (EI)_i(x) \frac{\partial^4 w}{\partial x^4}(x,t) = 0, \quad \forall t > 0, i=1,\dots,N. \quad A1.129$$

Se propone aplicar el método de separación de variables para transformarla en dos ecuaciones diferenciales ordinarias que son de más fácil solución. Para la aplicación del método de separación de variables se propone como solución no trivial de la ecuación diferencial A1.129 a:

$$w(x,t) = \sum_{m=1}^{\infty} W_m(x) \cos(\omega_m t - \varphi), \quad A1.130$$

donde  $W(x) = W_m(x)$  son las formas modales del  $m$ -ésimo modo de vibración natural,  $\omega$  representa la frecuencia de oscilación de la viga en su estado libre por lo cual se denomina frecuencia natural y  $\varphi$  es un desfase de la vibración que no depende de  $t$ . Haciendo las respectivas derivadas

$$\frac{\partial}{\partial x} (W_m(x) \cos(\omega_m t - \varphi)) = \left( \frac{\partial}{\partial x} W_m(x) \right) (\cos(\omega_m t - \varphi)) \quad A1.131$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} (W_m(x) \cos(\omega_m t - \varphi)) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \left( \frac{\partial}{\partial x} W_m(x) \right) (\cos(\omega_m t - \varphi)) \right) = \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} W_m(x) \right) (\cos(\omega_m t - \varphi)) \quad A1.132$$

$$\frac{\partial^4}{\partial x^4} (W_m(x) \cos(\omega_m t - \varphi)) = \left( \frac{\partial^4}{\partial x^4} W_m(x) \right) (\cos(\omega_m t - \varphi)) \quad A1.133$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} (W_m(x) \cos(\omega_m t - \varphi)) = \frac{\partial}{\partial t} (-W_m(x) \omega_m \text{sen}(\omega_m t - \varphi)) = -W_m(x) \omega_m^2 \cos(\omega_m t - \varphi) \quad A1.134$$

Al reemplazar en la ecuación diferencial se obtiene

$$\begin{aligned} & -(\rho A)_i(x) W_m(x) \omega_m^2 \cos(\omega_m t - \varphi) \\ & + (EI)_i(x) \left( \frac{\partial^4}{\partial x^4} W_m(x) \right) (\cos(\omega_m t - \varphi)) = 0 \end{aligned} \quad \text{A1.135}$$

Al sacar factor común la parte temporal, se observa que se han separado las variables y que por lo tanto se convierten en ecuaciones diferenciales ordinarias

$$\left[ -(\rho A)_i(x) W_m(x) \omega_m^2 + (EI)_i(x) \left( \frac{d^4}{dx^4} W_m(x) \right) \right] (\cos(\omega_m t - \varphi)) = 0 \quad \text{A1.136}$$

Se obtiene la parte espacial

$$-(\rho A)_i(x) W_m(x) \omega_m^2 + (EI)_i(x) \left( \frac{d^4}{dx^4} W_m(x) \right) = 0 \quad \text{A1.137}$$

Al aplicar el cambio de variable  $\bar{x} = x/l$

$$-(\rho A)_i(\bar{x}) \omega_m^2 W_m(\bar{x}) + \frac{1}{l^4} (EI)_i(\bar{x}) \left( \frac{d^4}{d\bar{x}^4} W_m(\bar{x}) \right) = 0 \quad \text{A1.138}$$

Al multiplicar por  $l^4/(EI)_i$  se obtiene

$$-\frac{(\rho A)_i(\bar{x})}{(EI)_i(\bar{x})} l^4 \omega_m^2 W_m(\bar{x}) + \left( \frac{d^4}{d\bar{x}^4} W_m(\bar{x}) \right) = 0 \quad \text{A1.139}$$

Si definimos al coeficiente adimensional de frecuencias (una de sus expresiones, en este caso será el valor del autovalor del problema) como

$$\lambda_m^4 = \frac{(\rho A)_i}{(EI)_i} l^4 \omega_m^2, \quad m=1,2,..M \quad \text{A1.140}$$

Finalmente se obtiene el problema de autovalores y autovectores

$$\frac{d^4}{d\bar{x}^4} W_m(\bar{x}) - \lambda_m W_m(\bar{x}) = 0 \quad \text{A1.141}$$

## A1.13 Autovalores y Autovectores

### A1.13.1 Definición

$V$  representa un espacio lineal y  $S$  un subespacio de  $V$ . Los espacios  $S$  y  $V$  no han de ser necesariamente de dimensión finita.

Sea  $T: S \rightarrow V$  una transformación de  $S$  en  $V$ . Un escalar  $\lambda$  se denomina autovalor de  $T$  si existe un elemento no nulo  $x$  en  $S$  tal que  $T(x) = \lambda \cdot x$

El elemento  $x$  se llama autovector de  $T$  perteneciente a  $\lambda$ . El escalar  $\lambda$  se llama autovalor correspondiente a  $x$ .

### A1.13.2 Independencia lineal de autovectores correspondientes a autovalores distintos

Si  $\mu_1, \dots, \mu_k$  son autovectores de una transformación lineal  $T: S \rightarrow V$ , y los autovalores  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$  son distintos, entonces los autovectores  $\mu_1, \dots, \mu_k$  son independientes.

Si  $\dim V = n$ , toda transformación lineal  $T: V \rightarrow V$  tiene por lo menos  $n$  autovalores distintos. Si  $T$  tiene exactamente  $n$  autovalores distintos, entonces los autovectores correspondientes forman una base para  $V$  y la matriz de  $T$  relativa a esa base es una matriz diagonal con los autovalores como elementos diagonales

### A1.13.3 Transformaciones lineales representadas mediante matrices diagonales

Dada una transformación  $T: V \rightarrow V$ , donde  $\dim V = n$ .

Si  $T$  tiene una representación en matriz diagonal, existe entonces un conjunto de elementos independientes  $u_1, \dots, u_n$  de  $V$  y un correspondiente conjunto de escalares  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  tales que  $T(u_k) = \lambda_k u_k$  para  $k=1, 2, \dots, n$ .

Recíprocamente, si existe un conjunto independiente  $u_1, \dots, u_n$  en  $V$  y un conjunto correspondiente de escalares  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  que satisfacen,  $T(u_k) = \lambda_k u_k$  para  $k=1, 2, \dots, n$ . entonces la matriz  $A = \text{dia}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  es una representación de  $T$  respecto a la base  $u_1, \dots, u_n$ .

### 11.13.4 Caso de dimensión finita

Si  $\dim V = n$ , el problema de determinar los autovalores de una transformación lineal  $T: V \rightarrow V$  puede resolverse con la ayuda de los determinantes. Deseamos hallar aquellos escalares  $\lambda$ , tales que la ecuación  $T(x) = \lambda \cdot x$  tenga una solución  $x \neq 0$ .

La ecuación  $T(x) = \lambda \cdot x$  puede escribirse en la forma  $0 = \lambda \cdot x - T(x) = (\lambda \cdot I - T)(x)$

Donde  $I$  es la transformación identidad. Si ponemos  $T_\lambda = (\lambda \cdot I - T)$ , entonces  $\lambda$  es un autovalor si y sólo si la ecuación  $T_\lambda(x) = 0$  tiene una solución  $x$  no nula, en cuyo caso  $T_\lambda$  no es invertible.

Una solución no nula existe si y sólo si la matriz de  $T_\lambda$  es singular. La matriz es singular si y sólo si su determinante es igual a cero.

Si  $A$  es una representación matricial de  $T$ , entonces  $(\lambda \cdot I - A)$  es una representación matricial para  $T_\lambda$ .

Así pues, si  $\lambda$  es un autovalor para  $T$  se debe satisfacer la ecuación:  $\det(\lambda \cdot I - A) = 0$ .

Recíprocamente, cualquier  $\lambda$  del cuerpo fundamental de escalares que satisfaga  $\det(\lambda \cdot I - A) = 0$  es un autovalor. Esto sugiere que el determinante  $\det(\lambda \cdot I - A) = 0$  debería estudiarse como una función de  $\lambda$ .

### 11.13.5 Cálculo de autovalores y autovectores en el caso de dimensión finita

En el caso de dimensión finita los autovalores y autovectores de una transformación lineal  $T$  se llaman autovalores y autovectores de la representación matricial de  $T$ .

Supongamos que la transformación puede ser representada por una matriz  $A$  que transforma un vector  $x$ . Buscamos los vectores que al ser transformados por  $A$  se mantienen en la misma dirección.

Un vector propio o Autovector de  $A$  es un vector  $x$  distinto de cero tal que  $A \cdot x = \lambda \cdot x$  para algún  $\lambda \in \mathbb{R}$ . A  $\lambda$  se le llama valor propio o Autovalor asociado a  $A$ .

#### ¿Cómo encontramos los autovalores $\lambda$ ?

Despejando en la expresión  $A \cdot x = \lambda \cdot x$  tenemos  $(A \cdot x) - (\lambda \cdot I \cdot x) = (A - \lambda \cdot I) \cdot x = 0$

El sistema puede ser escrito en notación matricial:  $D \cdot x = 0$  donde  $D = (A - \lambda \cdot I)$

Un conjunto de ecuaciones homogéneas como estas tiene siempre una solución, ya que la matriz ampliada y la del sistema presentan el mismo rango.

Si el rango  $r$  de la matriz de los coeficientes del conjunto de ecuaciones es igual al orden  $n$ , el sistema tiene una única solución, que es la denominada SOLUCIÓN TRIVIAL ( $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$ ).

Lo que implica, todas las ecuaciones del sistema son linealmente independientes por lo que el determinante es distinto de cero.  $\text{Det } D \neq 0$ .

Existen soluciones NO TRIVIALES si, y solo si,  $r < n$ . Donde  $r$  es el número de ecuaciones linealmente independientes o rango de la matriz  $D$  y  $n$  el número de ecuaciones. Por lo tanto, el número de ecuaciones linealmente dependientes es  $n-r$ . Entonces el determinante de  $D$  es igual a cero.

Para este tipo de soluciones, no se encuentran valores únicos para las incógnitas. Se establecen relaciones entre las incógnitas. Cualquier combinación de valores de  $x$  que satisfice estas relaciones constituye una solución.

Retomando el problema, tenemos que  $(A - \lambda \cdot I) \cdot x = 0$ . Por la definición de autovector  $x \neq 0$  por lo tanto necesitamos que el sistema tenga soluciones no triviales.

Dado que  $\lambda$  aparece como incógnita, es posible, hacer que el determinante de dicha matriz sea igual a cero.  $\text{Det}(A - \lambda \cdot I) = \text{Det}(D) = 0$

Es decir  $\lambda$  es el autovalor que hace al determinante igual a cero. El desarrollo algebraico del determinante  $D$  produce un polinomio de grado  $n$ , de la forma:  $\lambda^n + p_1 \cdot \lambda^{n-1} + \dots + p_{n-1} \cdot \lambda + p_n = 0$

Este polinomio recibe el nombre de polinomio característico de  $A$  es  $P_A(\lambda) = \text{det}(A - \lambda \cdot I)$ . Así pues, los autovalores de una matriz cuadrada  $A$  son las raíces del polinomio característico  $f(\lambda) = \text{det}(\lambda \cdot I - A)$ .

$$f(\lambda) = \left| \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \right| = \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & \lambda - a_{mn} \end{vmatrix} = \lambda^n + p_1 \cdot \lambda^{n-1} + \dots + p_{n-1} \cdot \lambda + p_n = 0$$

Importante: Los autovalores  $\lambda$  de la transformación  $A$  son las raíces del polinomio característico, es decir  $P_A(\lambda) = \text{det}(A - \lambda \cdot I) = 0$ .

### *¿Cómo encontramos los autovectores?*

Los autovectores correspondientes a un autovalor  $\lambda$  son aquellos vectores no nulos  $x = (x_1, \dots, x_n)$  considerados como matrices columna  $n \times 1$  que satisfacen la ecuación matricial  $A \cdot x = \lambda \cdot x \rightarrow (\lambda I - A) \cdot x = 0$

Esto es equivalente a un conjunto de  $n$  combinaciones lineales, donde  $n$  es el número de vectores de la base. En esta ecuación, los  $x = (x_1, \dots, x_n)$  son desconocidos.

Este es un sistema de  $n$  ecuaciones lineales para los componentes  $x = (x_1, \dots, x_n)$ . En cuanto se conoce  $\lambda$  podemos obtener los autovectores resolviendo ese sistema.

Los valores característicos, se sustituyen, uno a la vez, en el conjunto original de ecuaciones para obtener un sistema correspondiente de relaciones entre las incógnitas  $x$  para cada sustitución

Como los componentes  $x = (x_1, \dots, x_n)$  son dependientes, es un sistema sea compatible indeterminado y el determinante de la matriz del sistema sea cero. O que el rango de la matriz ampliada sea menor al número de incógnitas.

En este tipo de sistemas, la solución genérica consiste en expresar una o más variables como función matemática del resto. En los sistemas lineales compatibles indeterminados, al menos una de sus ecuaciones se puede hallar como combinación lineal del resto, es decir, es linealmente dependiente.

Las relaciones dependerán del  $r$  de la matriz  $D = (A - \lambda I)$ . Si es  $r = n - 1$ , las relaciones serán tales que la hipótesis de un valor para una incógnita, producirá un valor correspondiente para cada una de las ecuaciones restantes. Si  $r = n - 2$ , las relaciones serán tales que se tendrán que suponer los valores de dos incógnitas para poder obtener un valor correspondiente a  $c/u$  de las incógnitas restantes.

### ***A1.13.6 Cálculo de autovalores y autovectores (autofunciones) en el caso de dimensión infinita***

A veces es poco natural o incluso imposible escribir la ecuación de autovector en forma matricial. Esto ocurre, por ejemplo, cuando el espacio vectorial es de dimensión infinita, como por ejemplo en el caso del análisis de las vibraciones de una cuerda. Dependiendo de la naturaleza de la transformación  $T$  y el espacio al que se aplica, puede ser ventajoso representar la ecuación de autovalor como un conjunto de ecuaciones diferenciales, donde los autovectores reciben a menudo el nombre de autofunciones del operador diferencial que representa a  $T$ .

Sea  $T$  una transformación lineal, entonces el problema de Autovalores para la transformación  $T$  es el problema de encontrar  $x$  y  $\lambda$  que satisfagan  $T \cdot x = \lambda \cdot x$

Donde  $\lambda$  es por lo general un número complejo. Si  $T$  es un operador diferencial definido en el dominio  $\Omega$  con contorno  $\Gamma$ , entonces solo es necesario especificar condiciones de contorno homogéneas de la forma  $B \cdot x = 0$  en la cual  $B$  es también un operador lineal.

La característica definitoria de un problema de Autovalores es primero que  $x=0$  es una solución, conocida como la solución trivial. Segundo, que hay valores especiales que no son cero, llamados autovalores, para los cuales las ecuaciones  $T \cdot x = \lambda \cdot x$  y  $B \cdot x = 0$  tienen una solución no trivial.

Un problema de contorno que contiene un parámetro  $\lambda$ , se denomina problema de autovalores. Las soluciones no triviales se denominan autofunciones y el número correspondiente  $\lambda$ , se denomina autovalor. Es de interés determinar cuáles son los valores de  $\lambda$ , para los cuales existe una solución no trivial del problema de contorno.

### A1.14 Solución de la Ecuación Diferencial de Vibraciones

El comportamiento vibratorio del sistema mecánico quedó descrito por el problema de autovalores y autovectores

$$\frac{d^4}{d\bar{x}^4} W_n(\bar{x}) - \lambda_n W_n(\bar{x}) = 0. \quad \text{A1.142}$$

Se trata de una ecuación diferencial ordinaria lineal homogénea, de orden cuarto y con coeficientes constantes. Se propone como solución

$$W_n(\bar{x}) = e^{r\bar{x}} \quad \text{A1.143}$$

Derivando sucesivamente:

$$\frac{d}{d\bar{x}} W_n(\bar{x}) = \frac{d}{d\bar{x}} (e^{r\bar{x}}) = r e^{r\bar{x}} \quad \text{A1.144}$$

$$\frac{d^2}{d\bar{x}^2} W_n(\bar{x}) = \frac{d^2}{d\bar{x}^2} (e^{r\bar{x}}) = r^2 e^{r\bar{x}} \quad \text{A1.145}$$

$$\frac{d^3}{d\bar{x}^3} W_n(\bar{x}) = \frac{d^3}{d\bar{x}^3} (e^{r\bar{x}}) = r^3 e^{r\bar{x}} \quad \text{A1.146}$$

$$\frac{d^4}{d\bar{x}^4} W_n(\bar{x}) = \frac{d^4}{d\bar{x}^4} (e^{r\bar{x}}) = r^4 e^{r\bar{x}} \quad \text{A1.147}$$

Y reemplazando en la Ecuación A1.142, se obtiene

$$\frac{d^4 W_n(\bar{x})}{d\bar{x}^4} - \lambda_n W_n(\bar{x}) = r^4 e^{r\bar{x}} - \lambda_n e^{r\bar{x}} = e^{r\bar{x}} (r^4 - \lambda_n^4) = 0 \quad \text{A1.148}$$

Cuya ecuación característica es  $(r^4 - \lambda_n^4) = 0$ , y cuyo polinomio característico queda dado por  $P_{(r)} = r^4 - \lambda_n^4$ . Al realizar cambio de variables,  $r^2 = u$ , se puede re-expresar como  $P_{(r)} = r^4 - \lambda_n^4 = u^2 - \lambda_n^4$ .

Según la cuadrática, sus raíces son  $u = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{\pm \sqrt{4\alpha^4}}{2} = \pm \lambda_n^2$ .

Al cambiar nuevamente de variable, se observa que son raíces solución:

$$r = \pm \sqrt{u} \Rightarrow \begin{cases} r = \pm \sqrt{\lambda_n^2} \\ r = \pm \sqrt{-\lambda_n^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r = \lambda_n \\ r = -\lambda_n \\ r = i\lambda_n \\ r = -i\lambda_n \end{cases}$$

Como podemos observar,  $r_1 = \lambda_n$ ,  $r_2 = -\lambda_n$ ,  $r_3 = 0 + i\lambda_n$ ,  $r_4 = 0 - i\lambda_n$ . tenemos dos raíces reales distintas y dos raíces complejas conjugadas. En consecuencia, la solución está dada por:

$$W_n(\bar{x}) = a_1 e^{\lambda_n \bar{x}} + a_2 e^{-\lambda_n \bar{x}} + e^{0\bar{x}} [a_3 \cos(\lambda_n \bar{x}) + a_4 \text{sen}(\lambda_n \bar{x})] \quad \text{A1.149}$$

Como  $e^0 = 1$ , se obtiene  $W_n(\bar{x}) = a_1 \cdot e^{\lambda_n \bar{x}} + a_2 \cdot e^{-\lambda_n \bar{x}} + a_3 \cdot \cos(\lambda_n \bar{x}) + a_4 \cdot \text{sen}(\lambda_n \bar{x})$ .

Si ahora se le suma y resta el mismo término,  $e^{-\lambda_n \bar{x}} - e^{-\lambda_n \bar{x}}$ , y se reagrupa se obtiene:

$$W_n(\bar{x}) = (a_1 e^{\lambda_n \bar{x}} + e^{-\lambda_n \bar{x}}) + (a_2 e^{-\lambda_n \bar{x}} - e^{-\lambda_n \bar{x}}) + a_3 \cos(\lambda_n \bar{x}) + a_4 \text{sen}(\lambda_n \bar{x}). \quad \text{A1.150}$$

El coseno hiperbólico de está definido mediante la fórmula  $\cosh(\bar{x}) = \frac{e^{\bar{x}} + e^{-\bar{x}}}{2}$ , y por tanto se puede suponer que  $a_1 e^{\lambda_n \bar{x}} + e^{-\lambda_n \bar{x}} = c_1 \left( \frac{e^{\lambda_n \bar{x}} + e^{-\lambda_n \bar{x}}}{2} \right) = C_1 \cosh(\lambda_n \bar{x})$ .

En forma análoga, el seno hiperbólico está definido por  $\sinh(\bar{x}) = \frac{e^{\bar{x}} - e^{-\bar{x}}}{2}$ , y por tanto se puede suponer que  $a_2 e^{-\lambda_n \bar{x}} - e^{-\lambda_n \bar{x}} = c_2 \left( \frac{e^{-\lambda_n \bar{x}} - e^{-\lambda_n \bar{x}}}{2} \right) = C_2 \sinh(\lambda_n \bar{x})$ .

Entonces queda demostrado que la ecuación diferencial ordinaria (E.D.O) de cuarto orden que describe el comportamiento vibratorio de una viga tiene como posible solución a la función:

$$W_n(\bar{x}) = A_1 \cosh(\lambda_n \bar{x}) + A_2 \sinh(\lambda_n \bar{x}) + A_3 \cos(\lambda_n \bar{x}) + A_4 \text{sen}(\lambda_n \bar{x}) \quad \text{A1.151}$$

# APÉNDICE 2

## Fisuras: Clasificación, parámetros y modelos

Las fisuras o defectos tipo fisuras están presentes en todas las estructuras ingenieriles o bien podrían desarrollarse durante el servicio. Las fisuras presentan serias amenazas para un desempeño adecuado de la estructura. En la mayoría de los casos los defectos son detectables por medio de ensayos no destructivos (END) y se produce la discusión si el defecto deberá ser reparado o no. La situación se complica cuando se sabe, o se sospecha, que el defecto puede crecer lentamente por fatiga o por acción del medio ambiente.

Si la fractura se propaga puede dar lugar a la fractura de la estructura. Se puede definir a la fractura como la culminación del proceso de deformación plástica. Se manifiesta como la separación o fragmentación de un cuerpo sólido en dos o más partes bajo la acción de un estado de cargas dado. La mayoría de las fallas por fractura rápida de estructuras en servicio, fueron iniciadas por tensiones nominales aplicadas inferiores a las de diseño. Esto contribuyó al carácter catastrófico de las fallas y llevó a que ellas fueran consideradas en general como fracturas frágiles, independientemente de la naturaleza de los micro-mecanismos de rotura asociados al vértice de las fisuras. La mecánica de fractura busca cuantificar, tanto en micro como en macro escala, las combinaciones críticas de los defectos semejantes a fisuras, las propiedades de los materiales y las tensiones actuantes para evitar que se produzca la extensión de la fisura, condición que conduce a la fractura de la estructura. Esto mejora las condiciones de diseño porque los efectos de los defectos y las condiciones de operación son explícitamente tomados en cuenta para reducir las consecuencias de una posible fractura.

La fatiga del material puede considerarse como la razón principal de falla de las estructuras. La importancia de la detección temprana de fisuras ha motivado el estudio de varios aspectos del comportamiento de estructuras defectuosas por fisuras. Uno de estos aspectos es su respuesta vibratoria. La creación y el desarrollo de fisuras en un sistema cambian el comportamiento dinámico y vibratorio de ese sistema. Con la medición y el análisis de estas vibraciones, se pueden identificar con mucha antelación las fisuras y se pueden tomar acciones para evitar más daños al sistema.

## A2.1 Clasificación de las fisuras

Las fisuras se pueden clasificar según diferentes criterios.

### A2.1.1 Por su orientación respecto al eje longitudinal de la viga

- **Fisura transversal:** Perpendiculares al eje de la viga. Estas son los más comunes y más graves ya que reducen la sección transversal. Introducen una flexibilidad local en la rigidez de la viga. Se produce una concentración de energía de deformación en las proximidades o la punta de la fisura.
- **Fisura longitudinal:** Paralelas al eje de la viga. No son tan comunes, pero representan un peligro cuando la carga se aplica en forma perpendicular al eje de la viga.
- **Fisura inclinada:** En ángulo con el eje de la viga. No son muy comunes. El efecto sobre la vibración lateral es menor que el de las grietas transversales de gravedad comparable.

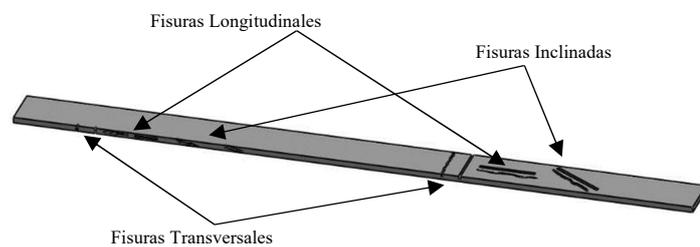


Figura A2.1 – Fisura transversal, longitudinal e inclinada.

### A2.1.12 Por su orientación respecto al eje neutro de la viga

- **Fisura Vertical:** Perpendicular al eje neutro de la viga.



Figura A2.2 – Fisura vertical.

- **Fisura Horizontal:** Paralela al eje neutro de la viga.

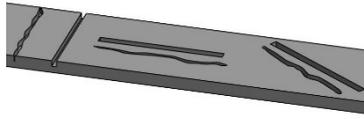


Figura A2.3 – Fisura horizontal.

### A2.1.3 Por su tipo de frente

- **Fisura de frente recto:** Las fisuras presentes en las vigas suelen ser de frente recto.
- **Fisura de frente elíptico:** En la gran mayoría de elementos giratorios fisurados, como por ejemplo árboles y ejes, la fisura presenta un frente elíptico.

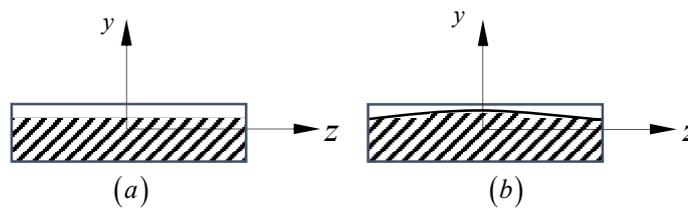


Figura A2.4 – Fisura de frente recto (a) y de frente elíptico (b).

### A2.1.4 Abierta a superficie o sub superficial

- **Fisura superficial:** Están abiertas a la superficie. Normalmente se pueden detectar mediante tintas penetrantes o inspección visual. Tienen un efecto mayor que las fisuras sub-superficiales en el comportamiento de vibración de los ejes.
- **Fisura sub-superficial:** No se muestran en la superficie. Se necesitan técnicas como ultrasonidos, partículas magnéticas o radiografía para detectarlos.

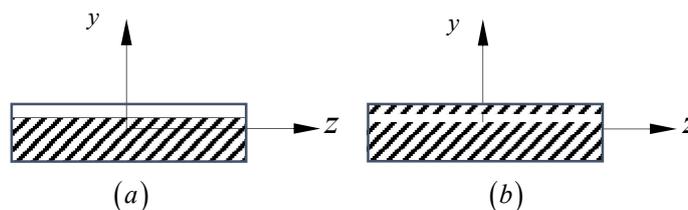


Figura A2.5 – Fisura superficial (a) y sub superficial (b).

### A2.1.5 Abierta o batiente

- **Fisura abierta:** Permanecen siempre abiertas. Por lo que tiene un comportamiento lineal en la vibración de la viga. Las grietas abiertas son fáciles de hacer en un entorno de laboratorio y, por lo tanto, la mayor parte del trabajo experimental se centra en este tipo de grietas.
- **Fisura batiente (efecto breathing):** Se abre cuando está sometida a tracción y se cierra cuando se comprime. Se comporta en parte como una fisura completamente abierta, y en parte como si no hubiese fisura presente. Lo que genera en estructuras sometidas a cargas cíclicas un cambio en la rigidez dependiente del tiempo. Lo que da como resultado una falta de linealidad en el comportamiento vibratorio de la viga. Los efectos no lineales de la fisura se traducen en resonancias armónicas que pueden incrementar los desplazamientos<sup>y</sup> en ciertas zonas del espectro de frecuencias. La mayoría de los esfuerzos de investigación teórica se concentran en este tipo de fisuras debido a su relevancia práctica directa.

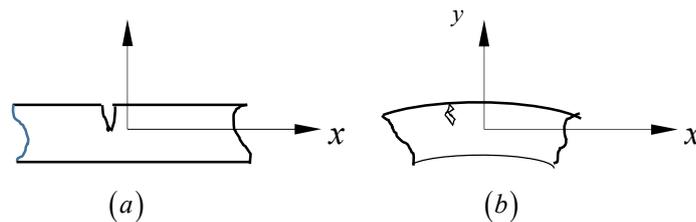


Figura A2.6 – Fisura abierta (a) o batiente (b).

## A2.2 Parámetros característicos de la fisura

El tipo de fisura presente en un elemento mecánico depende de los parámetros característicos de la misma (longitud característica y factor de forma), y estos, a su vez, dependen de las características geométricas de la viga.

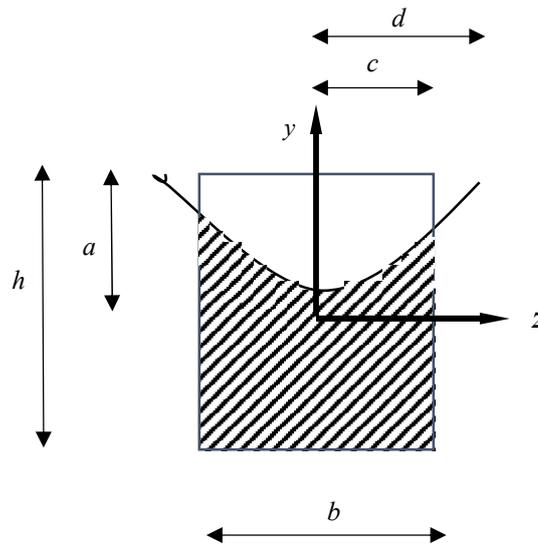


Figura A2.7 – Parámetros característicos de la fisura.

La longitud característica de la fisura ( $\eta$ ) se define como el cociente entre la profundidad de la fisura ( $a$ ) y la altura ( $h$ ) de la sección transversal.

$$\eta = a / h \quad \text{A2.1}$$

El factor de forma de la fisura ( $\beta$ ) se define como el cociente entre la profundidad de la fisura ( $a$ ) y el semieje mayor del frente elíptico ( $d$ ).

$$\beta = a / d \quad \text{A2.2}$$

Por tanto, si  $\beta = 1$  la fisura será de frente semicircular, mientras que si  $\beta = 0$  la fisura será de frente recto.

Si la fisura es inclinada, se establece un ángulo  $\theta$  entre el eje de la fisura y el eje de viga a considerar según la orientación de la fisura.

### A2.3 Modelo de fisura: Deducción de la rigidez del resorte rotacional

Según Behzad et al. (2010) existen tres métodos para el modelado de vibraciones de vigas con fisuras transversales horizontales:

1. Modelos discretos con modelo de flexibilidad local para fisuras.
2. Modelos continuos con modelo de flexibilidad local de fisuras.
3. Modelos continuos con un modelo continuo de la fisura.

Dimarogonas y Paipetis en su libro *Analytical Methods in Rotor Dynamics* (1983) sugirió por primera vez el modelo de flexibilidad local para la fisura. Reemplazó la viga fisurada con dos medias vigas sin daños conectadas por un resorte rotacional.

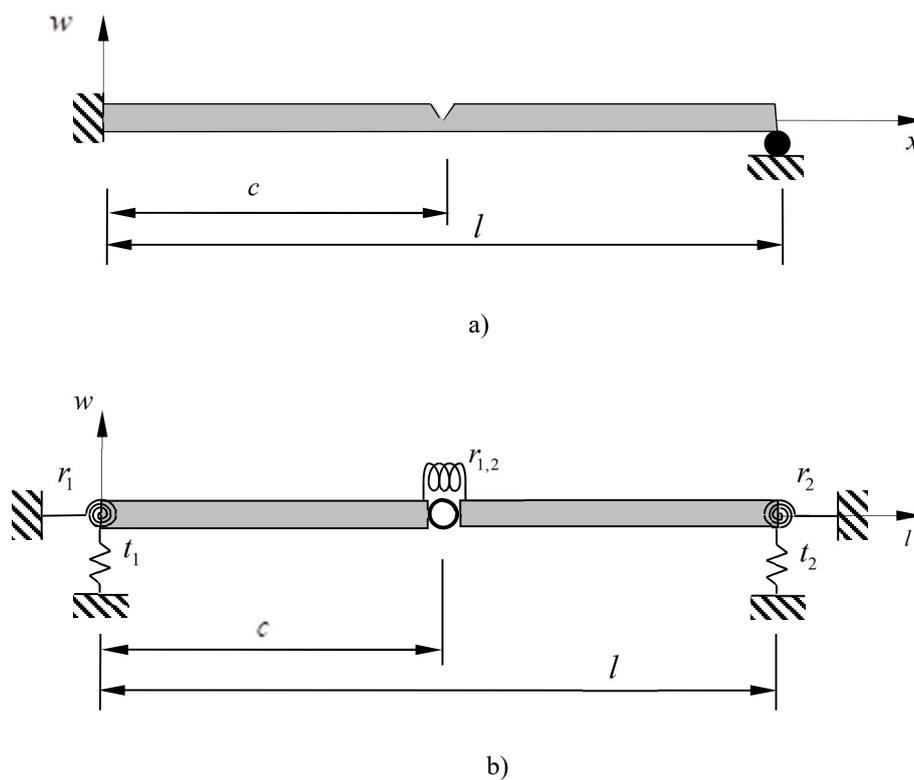


Figura A2.8 – a) Viga con fisura de un solo lado. b) Modelo de fisura con rigidez rotacional propuesto.

La rigidez de este resorte se obtiene empleando principios de la mecánica de fractura. La deducción que se presenta a continuación fue extraída de la segunda edición del mismo libro (Dimarogonas, Paipetis y Chondros, 2013). Se parte de considerar una viga de un material cuyo módulo de elasticidad longitudinal es  $E$  y que tiene un coeficiente de Poisson  $\nu$ . La misma tiene

una sección rectangular, cuyo ancho es  $b$  y su alto es  $h$ . Por lo tanto, su momento de inercia es  $I = bh^3/12$ .

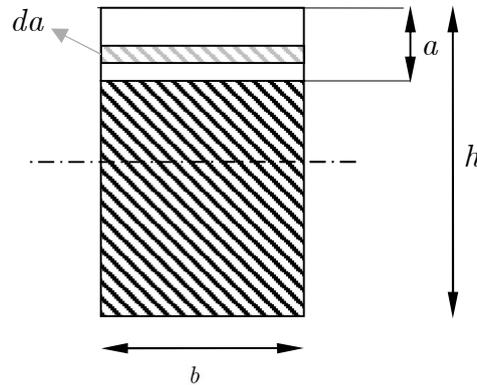


Figura A2.9 – Dimensiones de una fisura simple abierta a superficie.

Siendo que la viga está sometida a un momento flector  $M$ , la rotación adicional  $\phi$  debido a la presencia de la fisura pueden ser calculados por el teorema de Castigliano, según:

$$\phi = \frac{\partial U_T}{\partial M}. \quad \text{A2.3}$$

De la mecánica de la fractura, la energía de deformación ( $U_T$ ) está definida como:

$$U_T = \int_0^a \frac{\partial U_T}{\partial a} da = b \int_0^a J_S da. \quad \text{A2.4}$$

Siendo  $b$  el ancho de la viga. A su vez, la densidad de energía de deformación generalizada ( $J_S$ ) es

$$J_S = \frac{1-\nu^2}{E} \left[ \left( \sum_{i=1}^6 K_{Ii} \right)^2 + \left( \sum_{i=1}^6 K_{IIi} \right)^2 + (1+\nu) \left( \sum_{i=1}^6 K_{IIIi} \right)^2 \right], \quad \text{A2.5}$$

donde  $K$  son los factores de intensidad de tensión (SIF) para los modos de fractura I, II, III respectivamente. Que puede re-expresarse como:

$$J_S = \frac{1}{\hat{E}} \left[ \left( \sum_{i=1}^6 K_{Ii} \right)^2 + \left( \sum_{i=1}^6 K_{IIi} \right)^2 + m \left( \sum_{i=1}^6 K_{IIIi} \right)^2 \right]. \quad \text{A2.6}$$

El factor de intensidad de tensiones para una fisura de un solo lado de la viga con momento  $M$  aplicado es

$$K_I = \sigma \sqrt{\pi a} f(\eta) \quad \text{A2.7}$$

Donde  $f(\eta)$  es una función adimensional que depende de la geometría del elemento fisurado

$$f(\eta) = 1.12 - 1.40\eta + 7.33\eta^2 - 13.1\eta^3 + 14.0\eta^4 \quad \text{A2.8}$$

y  $\sigma$  es la máxima tensión debido a la flexión para la viga rectangular dada por

$$\sigma = \frac{M}{W} = \frac{M(h/2)}{(bh^3/12)} = \frac{6M}{bh^2}. \quad \text{A2.9}$$

Y por lo tanto, introduciendo A2.7 en A2.6, siendo  $\hat{E} = \frac{1-v^2}{E}$ , se obtiene:

$$J_s = \frac{K_I^2}{\hat{E}} = \frac{1-v^2}{E} \sigma^2 \pi a (f(\eta))^2 = \frac{1-v^2}{E} \left( \frac{6M}{bh^2} \right)^2 \pi a (f(\eta))^2. \quad \text{A2.10}$$

Siendo  $da = h d\eta$ , al resolver la integral A2.4, se obtiene

$$U_T = b \int_0^a J_s da = b \int_0^a \frac{1-v^2}{E} \left( \frac{6M}{bh^2} \right)^2 \pi \eta h (f(\eta))^2 h d\eta \quad \text{A2.11}$$

$$U_T = 36\pi \frac{1-v^2}{Ebh^2} M^2 \int_0^a \eta (f(\eta))^2 d\eta.$$

Resolviendo la integral, se obtiene

$$\Phi(\eta) = \int_0^a \eta (f(\eta))^2 d\eta = \int_0^a \eta (1.12 - 1.40\eta + 7.33\eta^2 - 13.1\eta^3 + 14.0\eta^4)^2 d\eta$$

$$\Phi(\eta) = 0.6272\eta^2 - 1.04533\eta^3 + 4.5948\eta^4 - 9.9736\eta^5 + 20.2948\eta^6$$

$$- 33.0351\eta^7 + 47.1063\eta^8 - 40.7556\eta^9 + 19.6\eta^{10} \quad \text{A2.12}$$

Reemplazando A2.11 en A2.3, la expresión de la rotación adicional  $\phi$  queda dada por

$$\phi = \frac{\partial U_T}{\partial M} = \frac{\partial}{\partial M} \left( 36\pi \frac{(1-v^2)}{Ebh^2} \Phi(\eta) M^2 \right) = 72\pi \frac{(1-v^2)}{Ebh^2} \Phi(\eta) M \quad \text{A2.13}$$

Y, por lo tanto, la flexibilidad local está dada por

$$\frac{\phi}{M} = 72\pi \frac{(1 - \nu^2)}{Ebh^2} \Phi(\eta), \quad \text{A2.14}$$

y siendo que la rigidez rotacional es la inversa de la flexibilidad local debido a la presencia de la fisura se obtiene finalmente:

$$r_{i,i+1} = \frac{Ebh^2}{72\pi(1 - \nu^2)\Phi(\eta)} = \frac{\hat{E}I}{6\pi\Phi(\eta)}. \quad \text{A2.15}$$

#### A2.4 Modelos de fisuras utilizados por diferentes autores

Diferentes autores se han preocupado por analizar y proponer formulaciones para modelar la influencia de la fisura en el comportamiento vibratorio de vigas.

Dimarogonas (1996) realizó un estado del arte en cuanto a vibraciones de estructuras en presencia de fisuras, donde describe que desde 1957 varios autores relacionaron el factor de intensidad de tensiones con una flexibilidad local para varios tipos de geometrías de fisura y componentes estructurales. Bovsunovsky y Surace (2015) presentan una interesante revisión del estado del arte donde enumeran varias formulaciones para modelar la influencia de la fisura. En un reciente trabajo Yan et al. (2016) presenta una tabla donde resumen las propuestas de cinco diferentes autores.

A continuación, se presentan los modelos más empleados y algunos más recientes.

##### A2.4.1 Rizos et. Al (1990)

Rizos et. Al (1990) proponen que la rigidez está dada por:

$$r_{i,i+1} = \frac{EI}{5.346h\Phi(\eta)}, \quad \text{A2.16}$$

donde

$$\begin{aligned} \Phi(\eta) = & 1.8624\eta^2 - 3.95\eta^3 + 16.375\eta^4 - 37.226\eta^5 \\ & + 76.81\eta^6 - 126.9\eta^7 + 172\eta^8 - 143.97\eta^9 + 66.56\eta^{10} \end{aligned} \quad \text{A2.17}$$

El mismo fue utilizado en varios trabajos (Shifrin y Ruotolo, 1999; Binici, 2005; Khiem y Toan, 2014 y Liu et al., 2019).

#### A2.4.2 Ostachowicz y Krawezuk (1991)

Un modelo muy similar es el presentado por Ostachowicz y Krawezuk, (1991), que fue empleada en numerosos artículos (Nandwana y Maiti, 1997a; Lin et al., 2002; Patil y Maiti, 2005; Khaji et al., 2009; Lee, 2009; Khaji y Mehrjoo, 2014). El mismo considera un estado plano de tensiones en lugar de un estado plano de deformaciones, que es el caso del modelo de Dimaragonas. Así, la rigidez del resorte está dada por

$$r_{i,i+1} = \frac{Ebh^2}{72\pi\eta^2\Phi(\eta)}, \quad \text{A2.18}$$

donde

$$\begin{aligned} \Phi(\eta) = & 0.6384 - 1.035\eta + 3.7201\eta^2 - 5.1773\eta^3 + 7.553\eta^4 \\ & - 7.332\eta^5 + 2.4909\eta^6. \end{aligned} \quad \text{A2.19}$$

#### A2.4.3 Chondros (1998)

El modelo de fisura utilizado por Chondros (1998) es el más utilizado en la literatura. Fue empleado en numerosos trabajos (Khien y Lien, 2001; Khien y Lien, 2002; Khien y Lien, 2004; Liu y Barkey, 2017; Huang, 2019, Diaferio et al., 2019).

$$r_{i,i+1} = \frac{Ebh^2}{72\pi(1-\nu^2)\Phi(\eta)} = \frac{\hat{E}I}{6\pi\Phi(\eta)} \quad \text{A2.20}$$

con

$$\begin{aligned} \Phi(\eta) = & \int_0^a \eta (f(\eta))^2 d\eta = \int_0^a \eta (1.12 - 1.40\eta + 7.33\eta^2 - 13.1\eta^3 + 14.0\eta^4)^2 d\eta \\ \Phi = & 0.6272\eta^2 - 1.04533\eta^3 + 4.5948\eta^4 - 9.9736\eta^5 + 20.2948\eta^6 \\ & - 33.0351\eta^7 + 47.1063\eta^8 - 40.7556\eta^9 + 19.6\eta^{10} \end{aligned} \quad \text{A2.21}$$

**A2.4.4 Lele y Maiti (2002)**

Lele y Maiti (2002) proponen

$$r_{i,i+1} = \frac{Ebh^4}{72\pi \int_0^a a\Phi(\eta)^2 da} \quad \text{A2.22}$$

donde

$$\begin{aligned} \Phi(\eta)^2 = & \eta(1.2769 - 3.105\eta + 14.878\eta^2 - 25.8\eta^3 + 45.32\eta^4 - 51.33\eta^5 \\ & + 64.39\eta^6 - 62.96\eta^7 + 200.9\eta^8 - 243.2\eta^9 + 83.16\eta^{10} + 225.6\eta^{12}) \end{aligned} \quad \text{A2.23}$$

**A2.4.5 Yoon et. Al (2007)**

Yoon et. Al (2007) definen

$$\Phi(\eta) = \sqrt{\frac{\tan(\xi)}{\xi} \left[ \frac{0.923 + 0.199(1 - \sin \xi)^4}{\cos \xi} \right]} \quad \text{A2.24}$$

Donde

$$\xi = \frac{\pi\alpha}{2h} \quad \text{A2.25}$$

# APÉNDICE 3

## Resultados del estudio analítico de la influencia de fisuras en los coeficientes adimensionales de frecuencias de vigas

En las Figuras A3.1 a A3.27 se presentan los resultados del estudio analítico de la influencia de fisuras en los coeficientes adimensionales de frecuencias de vigas, que fue desarrollado en el capítulo 3 de la presente tesis.

Se han considerado 27 casos de estudio, cuyas condiciones de contorno y transición del problema están definidas por las constantes elásticas del problema.

Los casos 1 a 6 corresponden a condiciones de vinculación clásicas en los extremos.

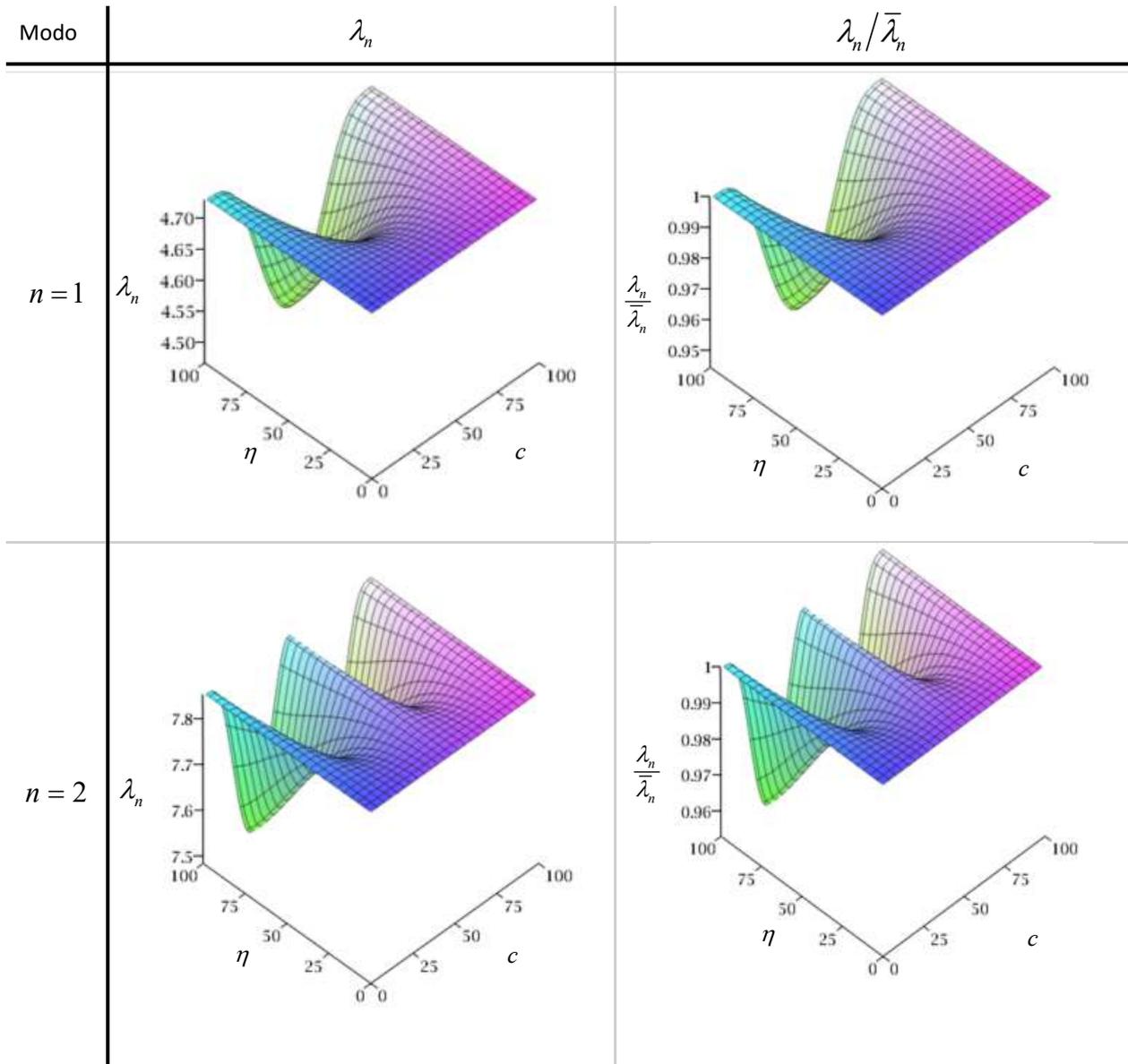
Los casos 7 a 15 se corresponden con condiciones de vinculación clásicas en los extremos con un apoyo simple intermedio.

Mientras que los casos 16 a 21 se corresponden a condiciones de vinculación clásicas en los extremos con una rótula intermedia.

Finalmente, los casos 22 a 27 se corresponden a apoyos elásticos en los extremos.

**A3.1 Condiciones de vinculación clásicas en los extremos**

- L-L



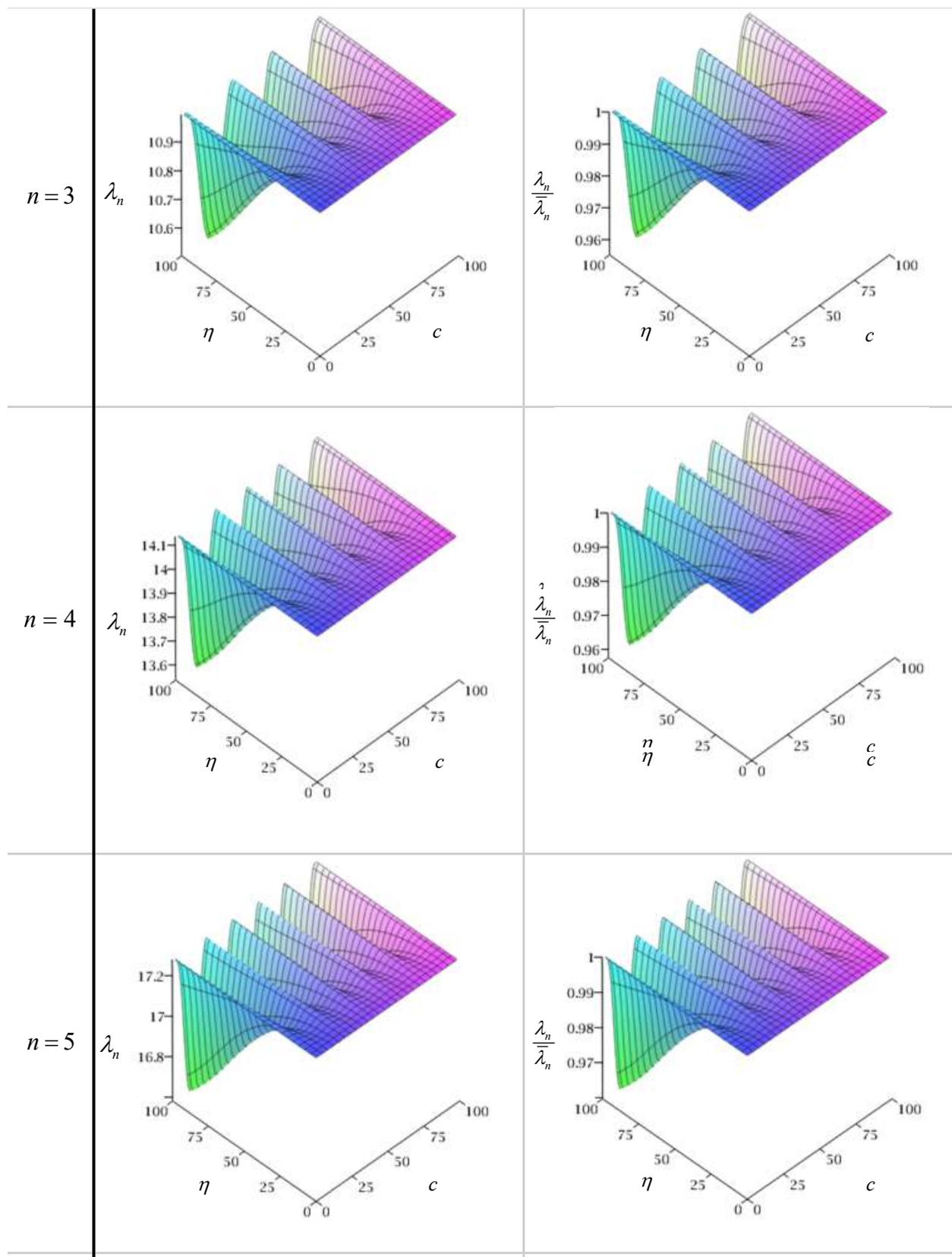
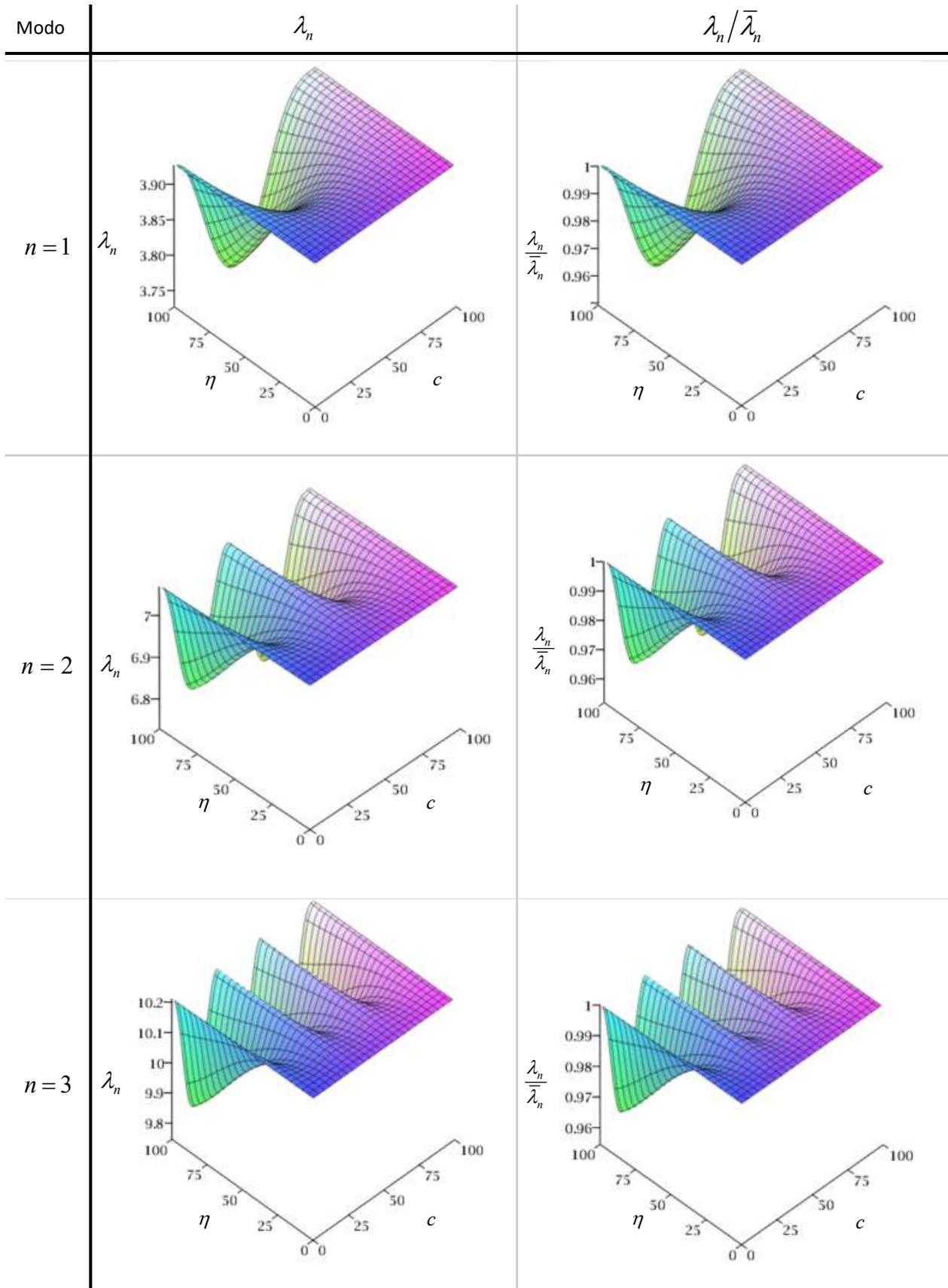


Figura A3.1 – Superficie de los coeficientes adimensionales de frecuencias para la condición L-L.

• A-L



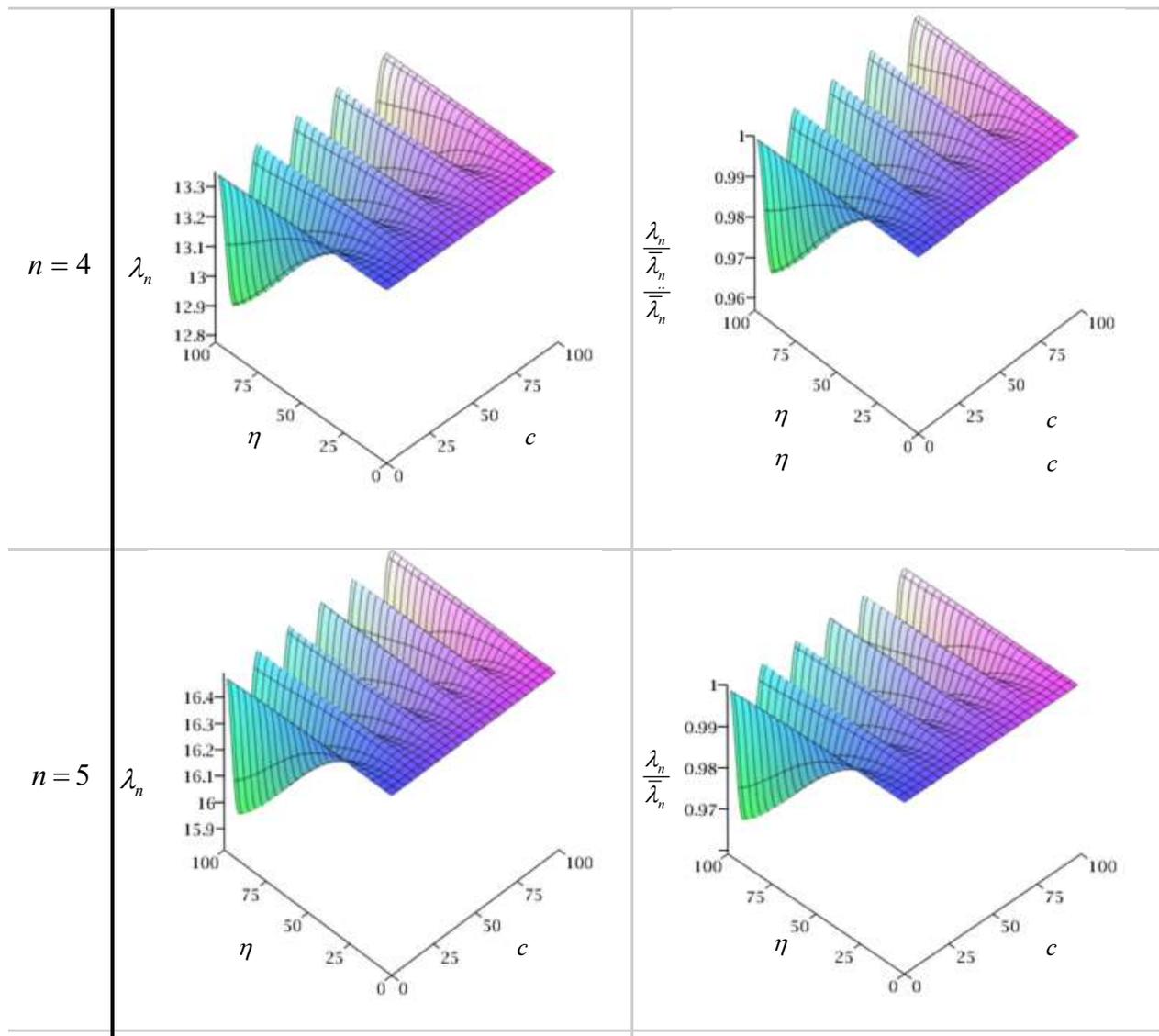
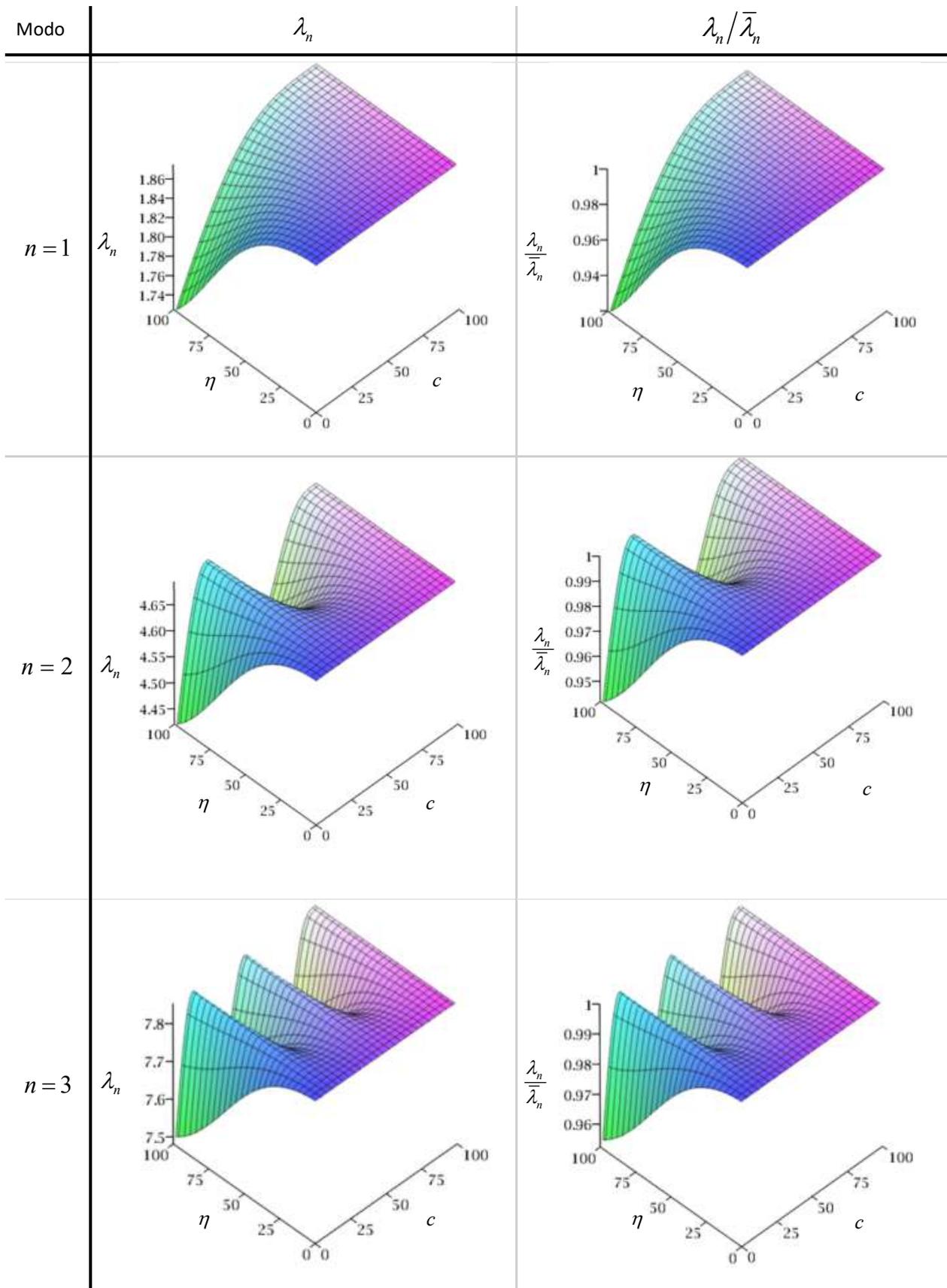


Figura A3.2 – Superficie de los coeficientes adimensionales de frecuencias para la condición A-L.

• E-L



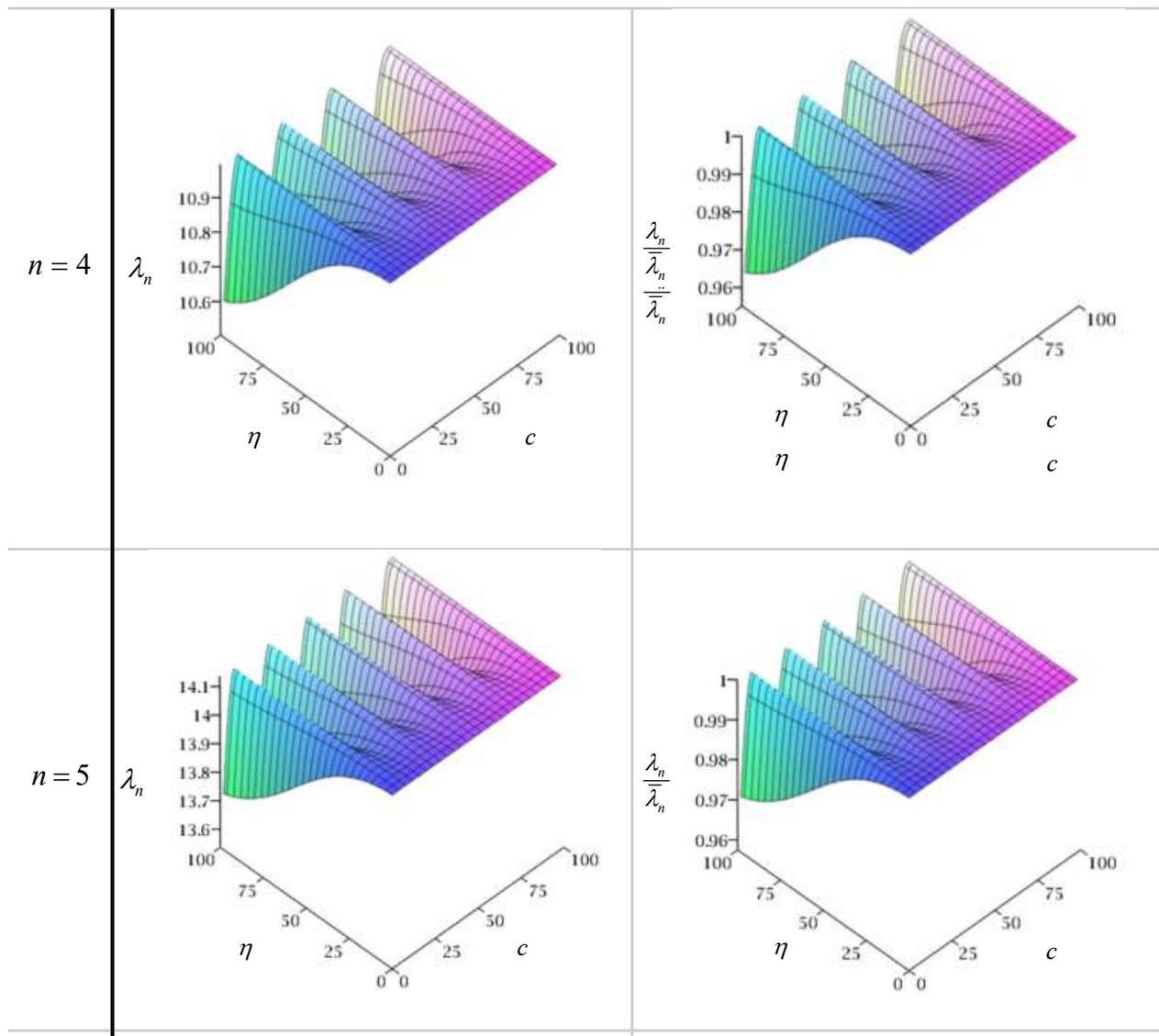
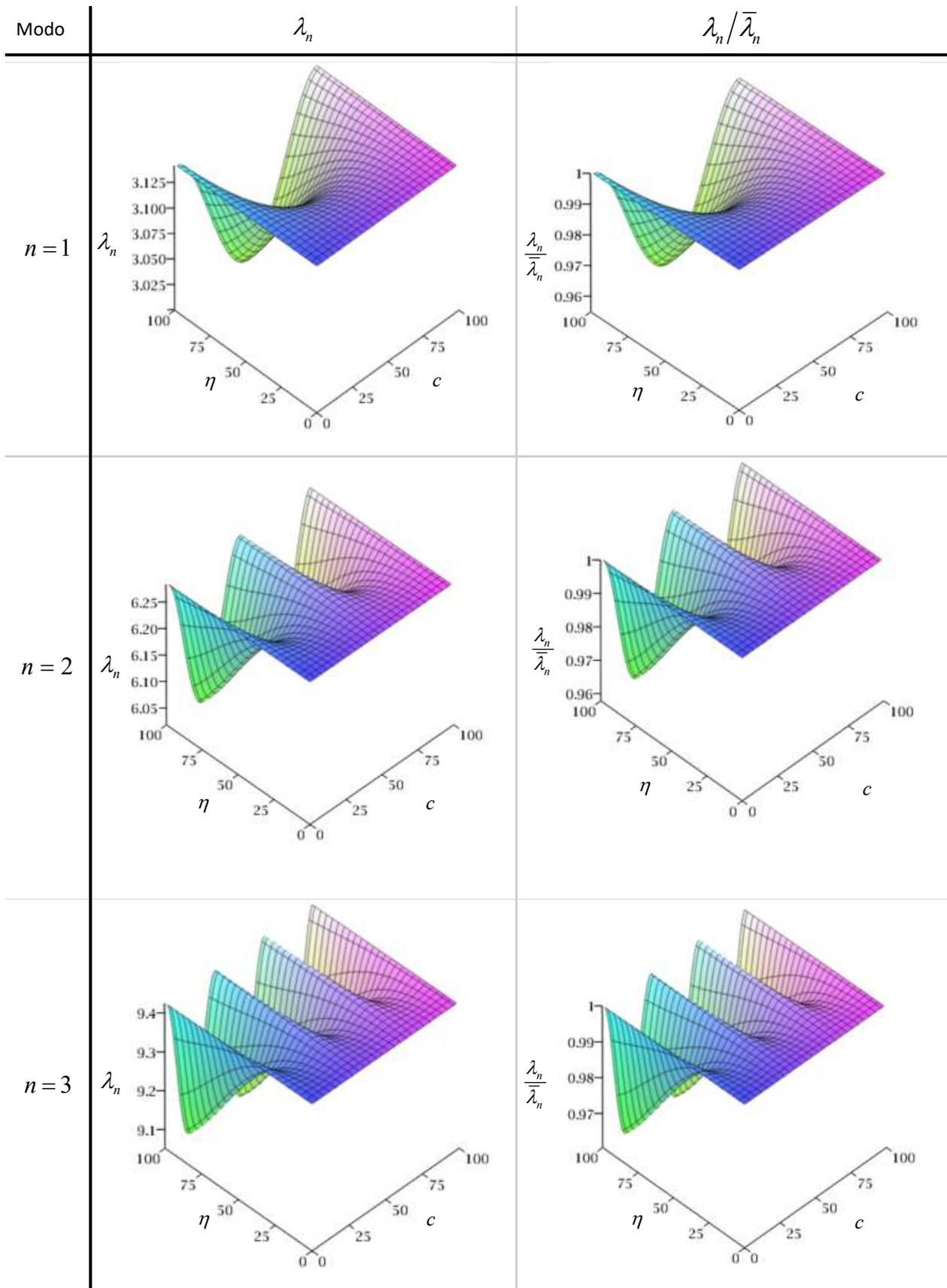


Figura A3.3 – Superficie de los coeficientes adimensionales de frecuencias para la condición E-L.

• A-A



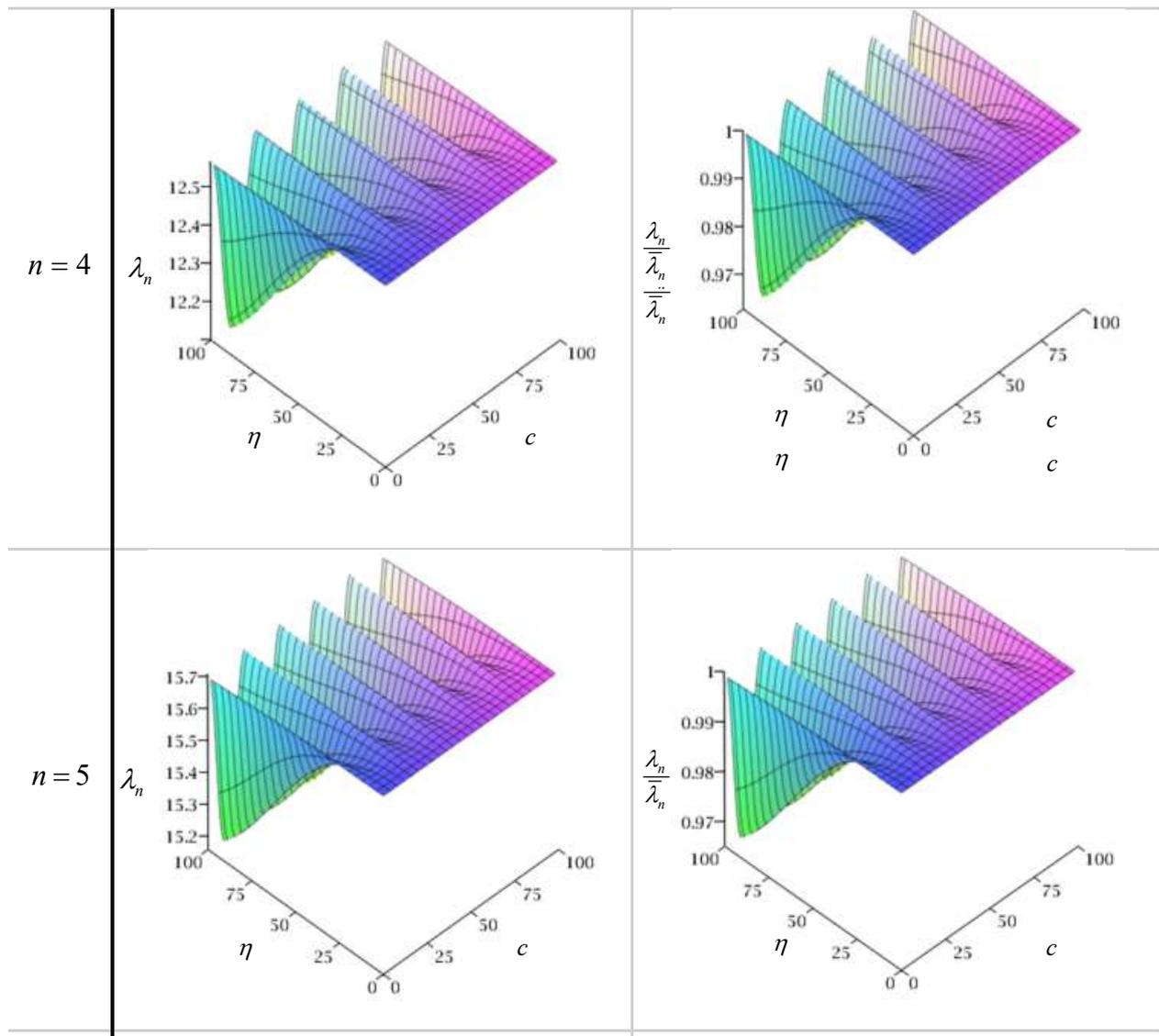
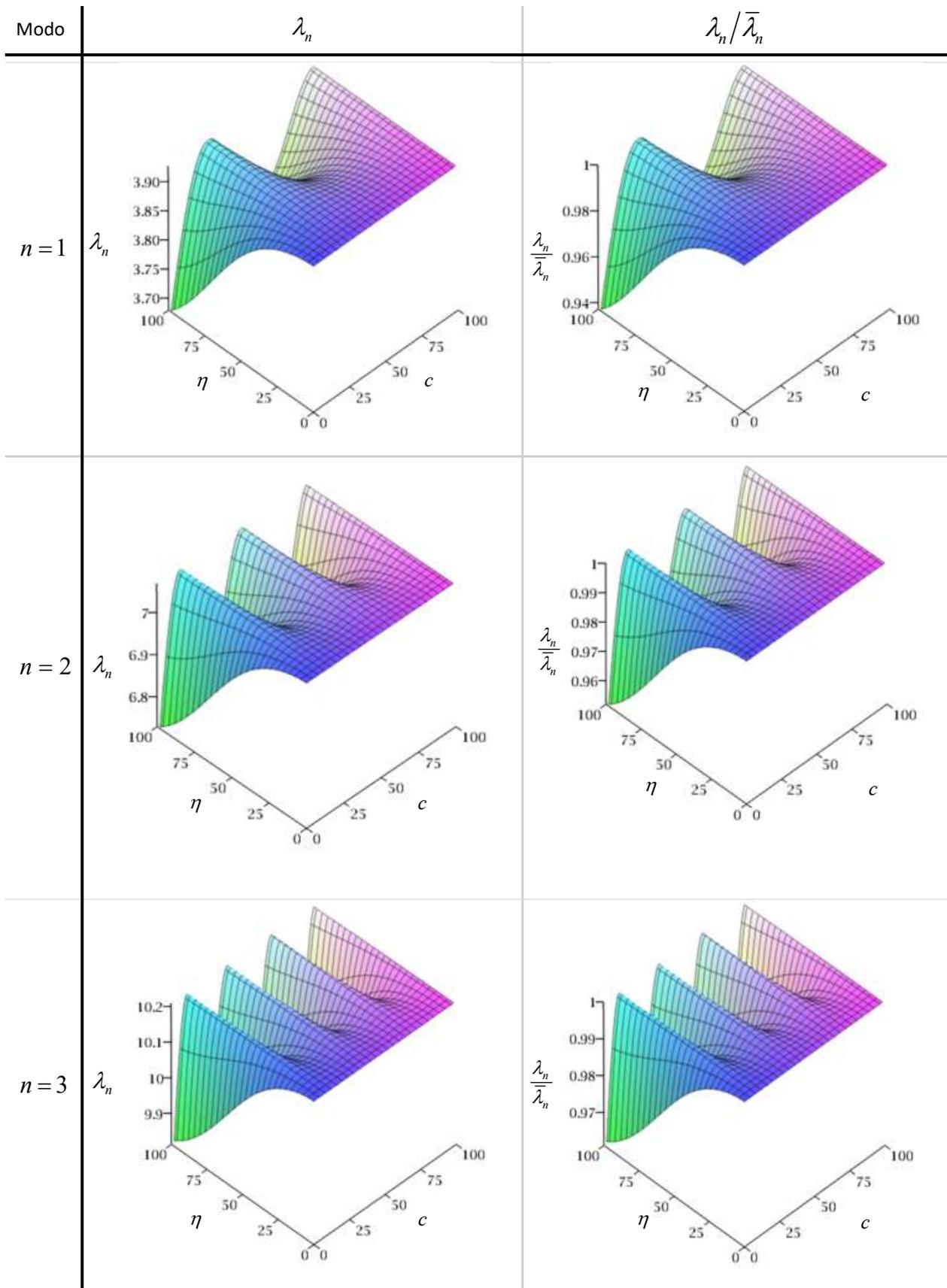


Figura A3.4 – Superficie de los coeficientes adimensionales de frecuencias para la condición A-A.

• E-A



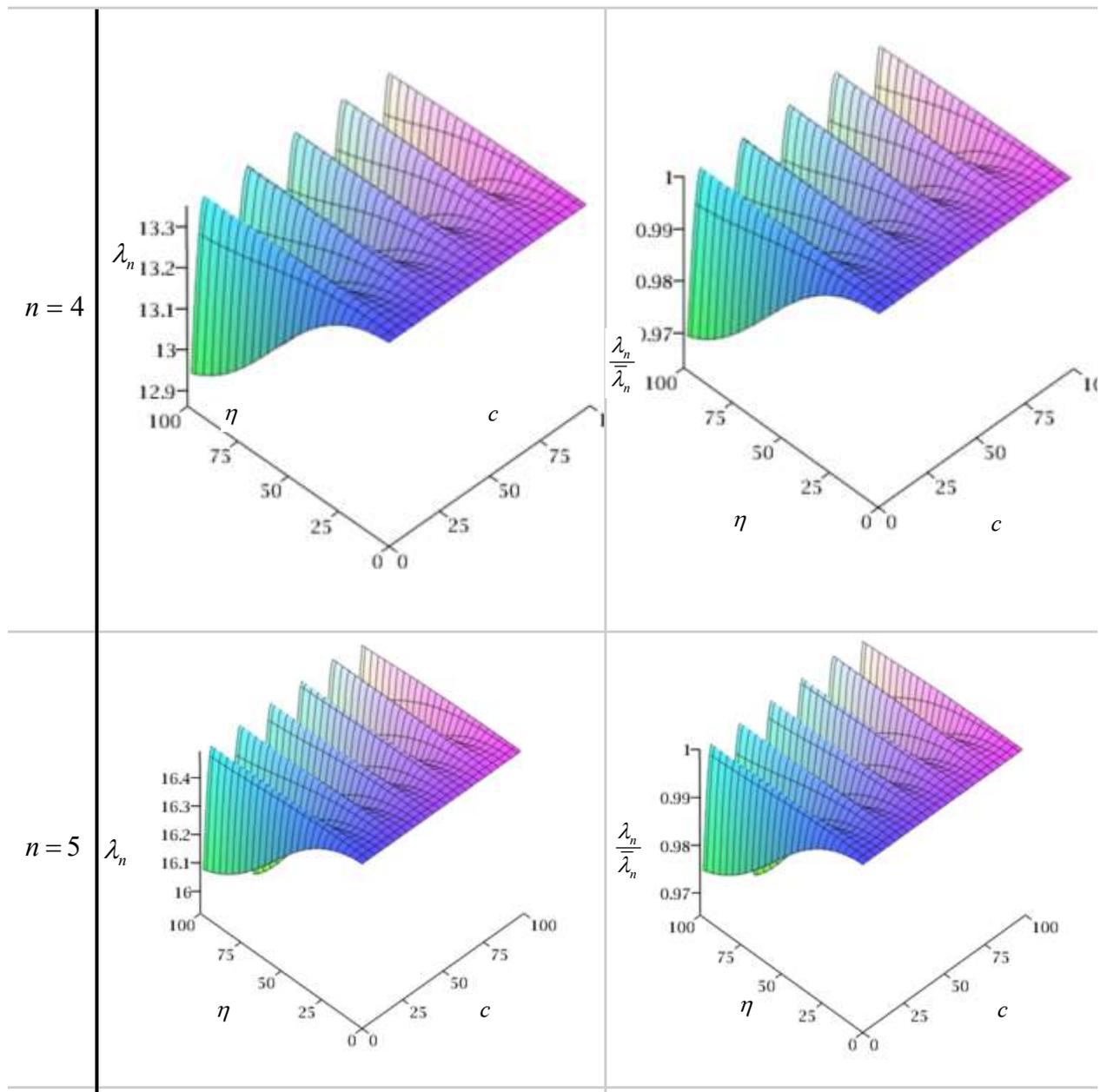
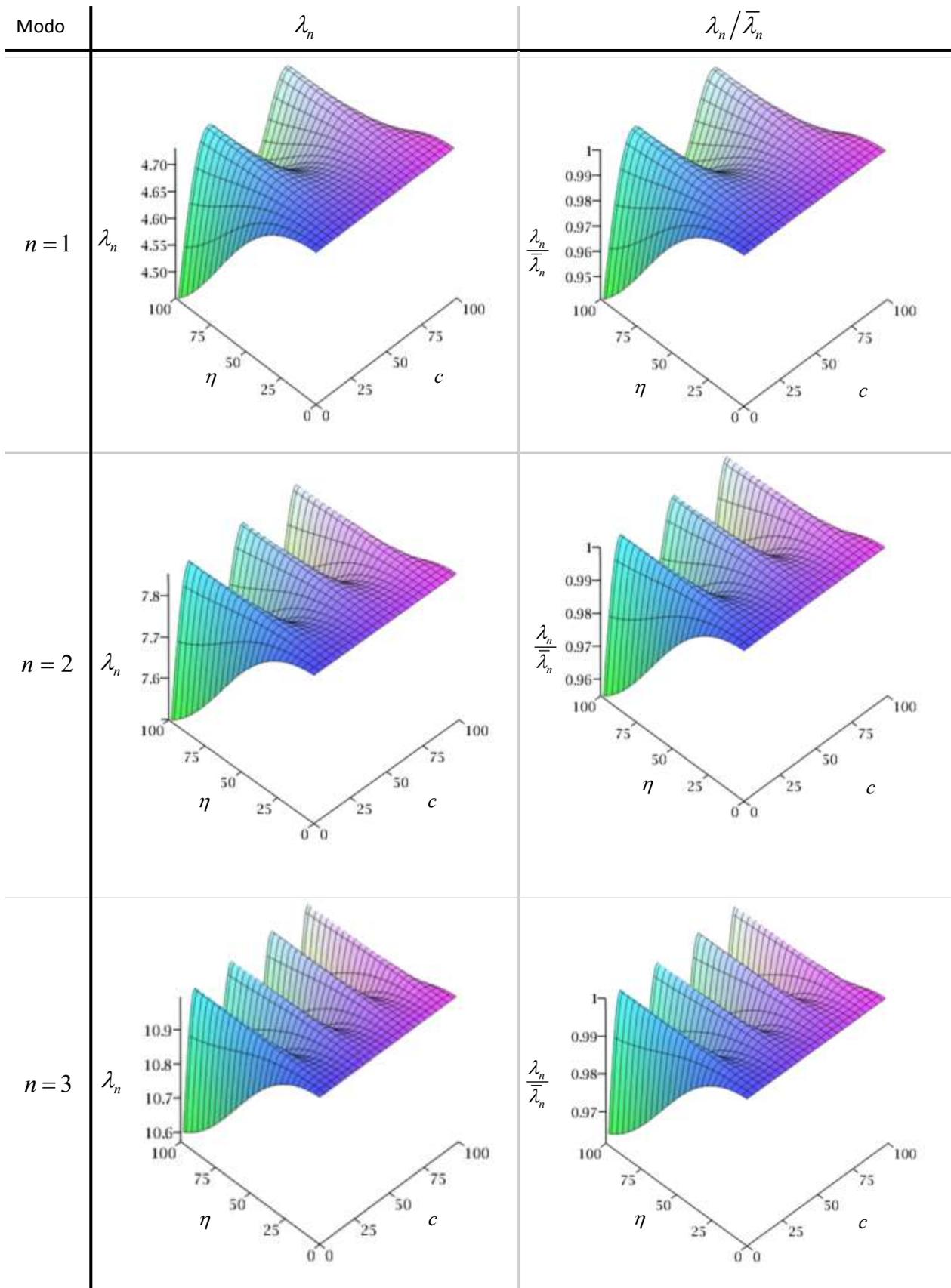


Figura A3.5 – Superficie de los coeficientes adimensionales de frecuencias para la condición E-A.

• E-E



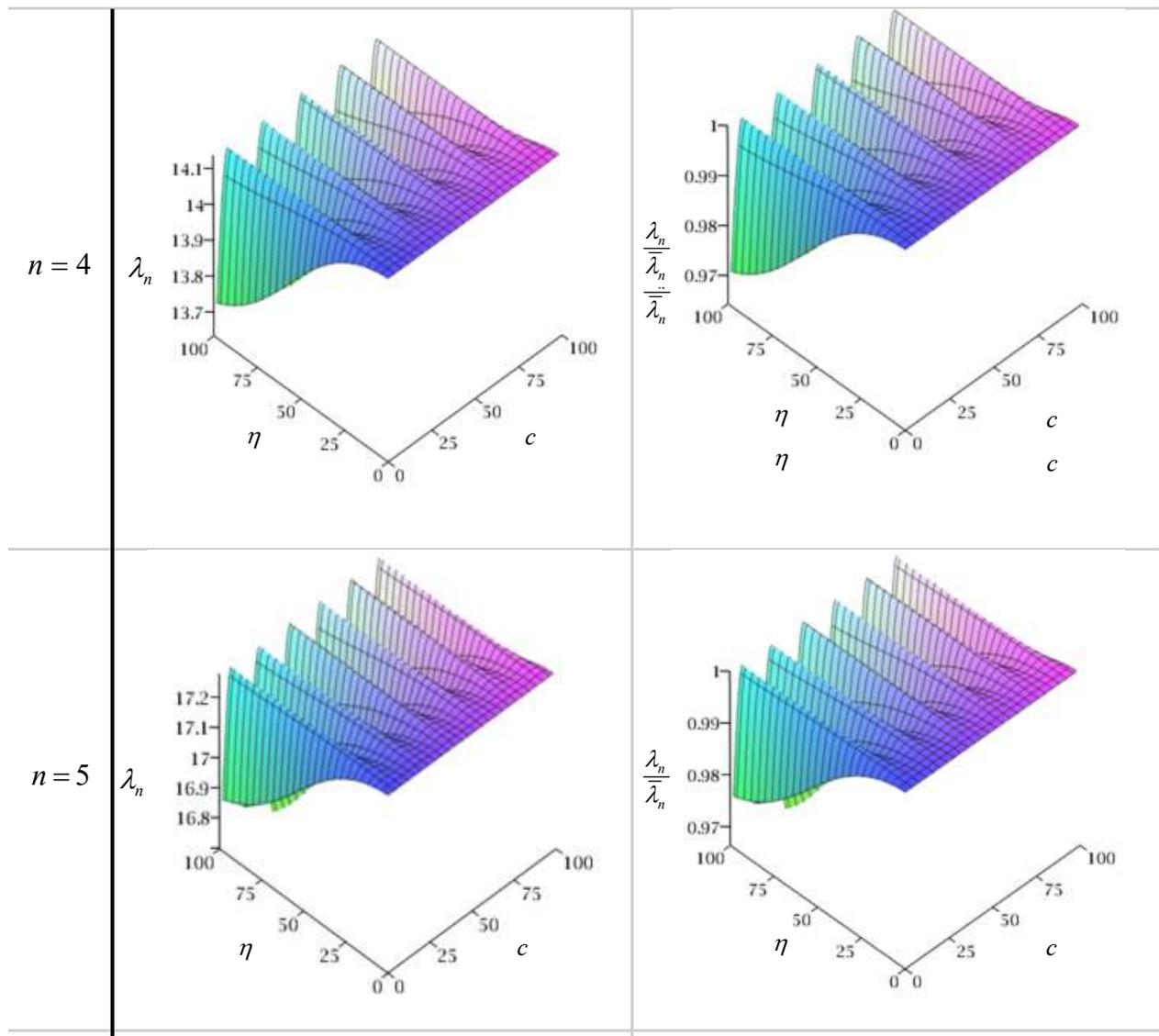
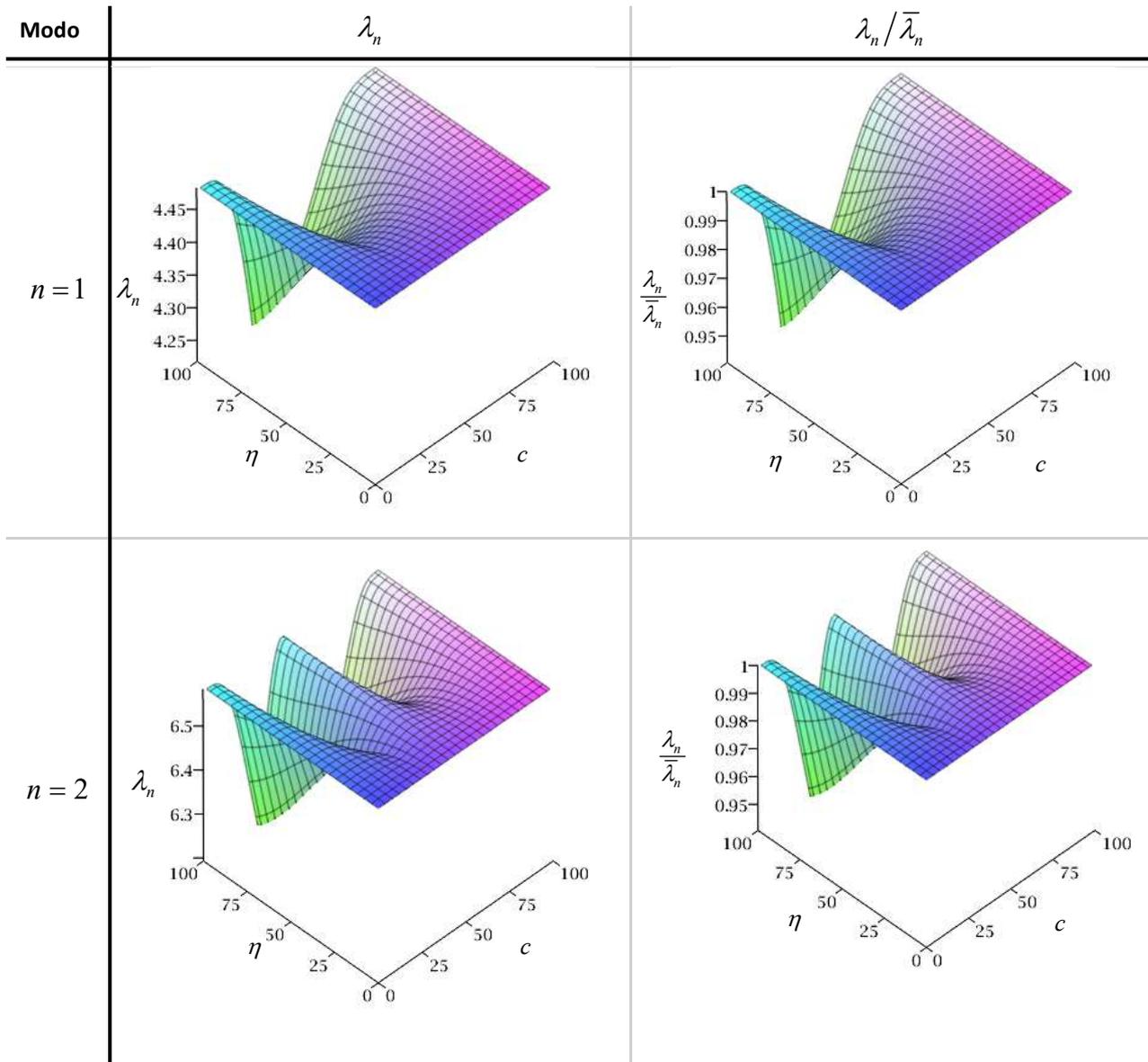


Figura A3.6 – Superficie de los coeficientes adimensionales de frecuencias para la condición E-E.

**A3.2 Condiciones de vinculación clásicas en los extremos con un apoyo simple intermedio**

- L-L con un apoyo simple en  $c=0.30$



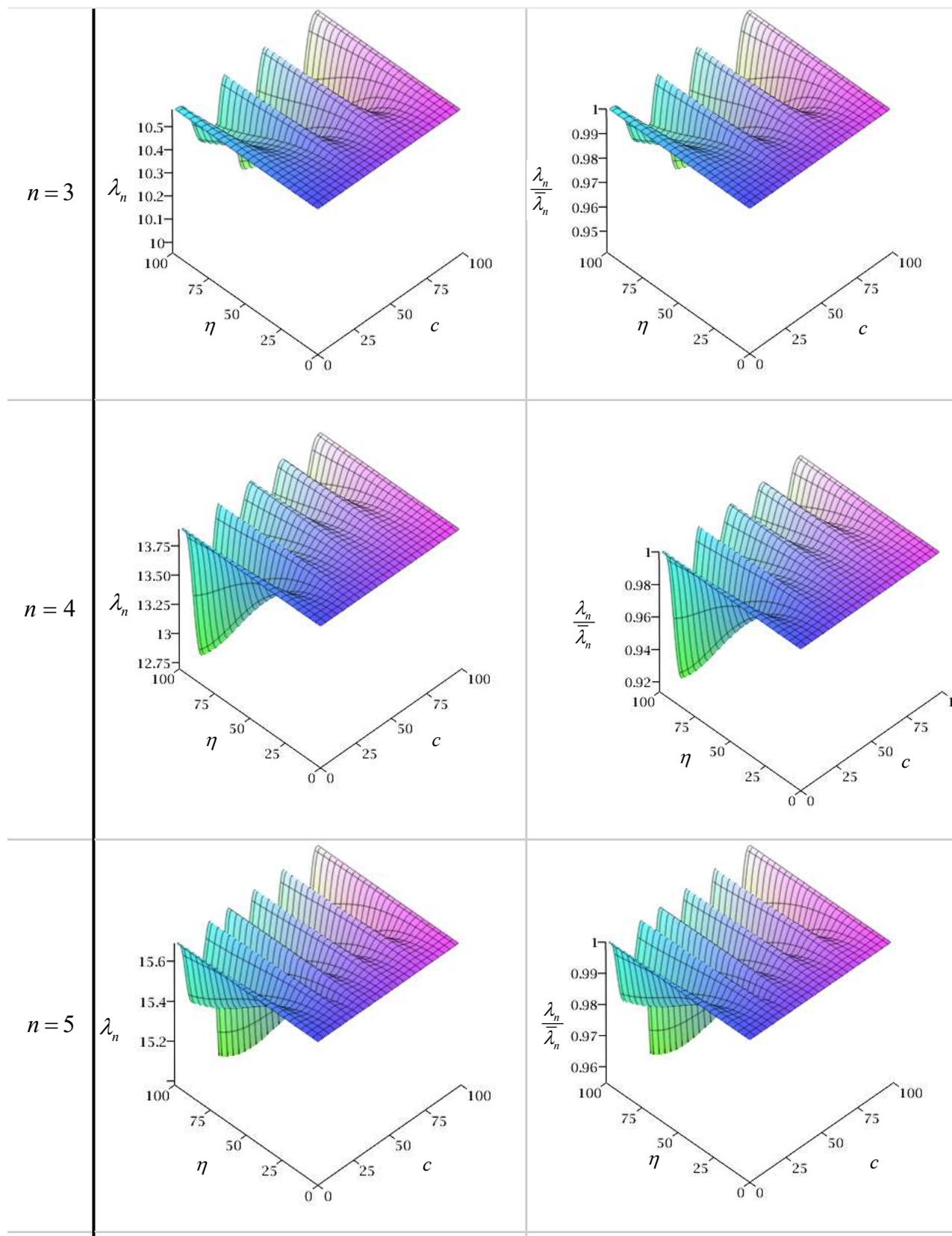
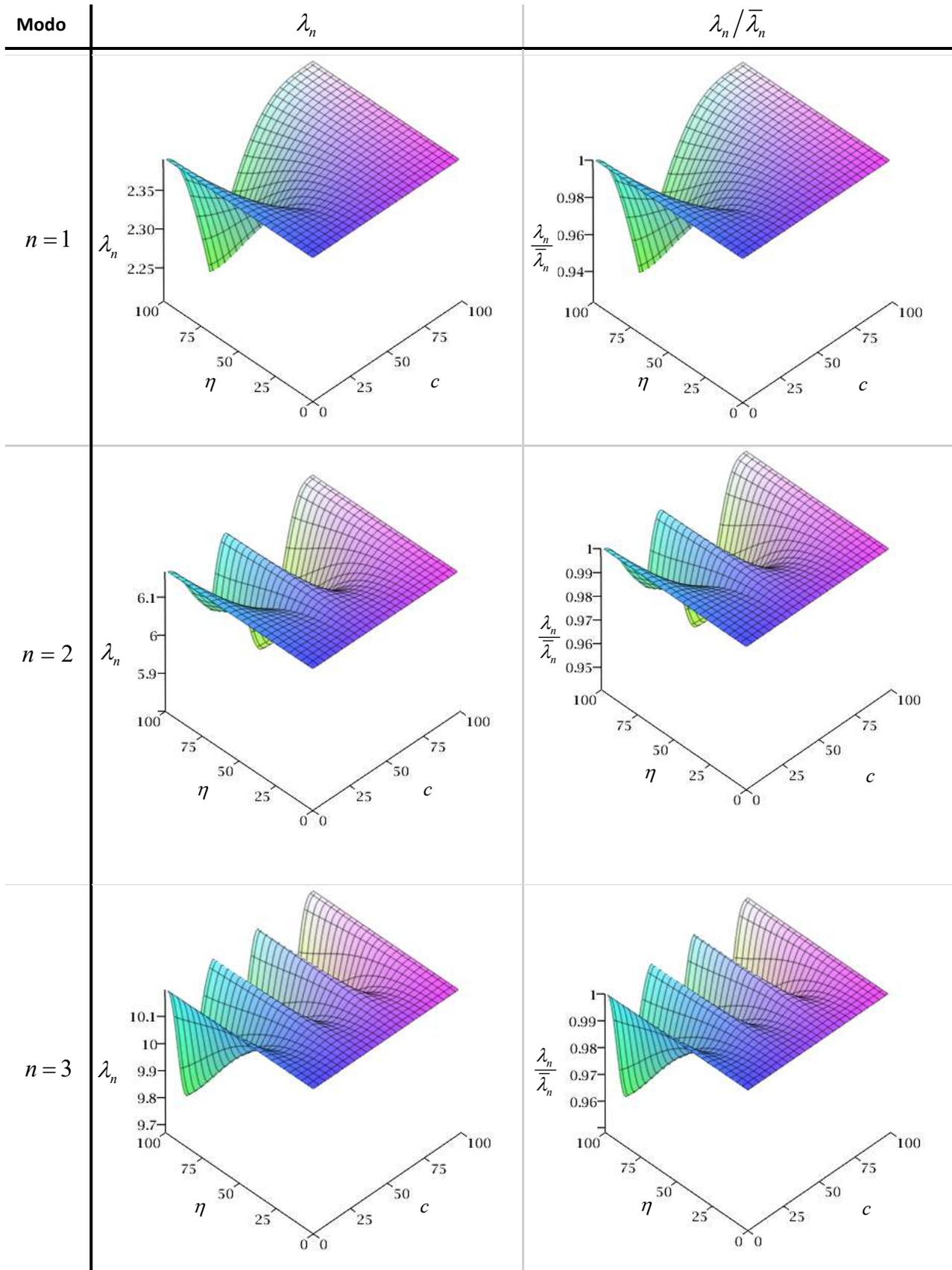


Figura A3.7 – Superficie de los coeficientes adimensionales de frecuencias para la condición L-L con un apoyo simple en  $c = 0.30$ .

• A-L con un apoyo simple en  $c=0.30$



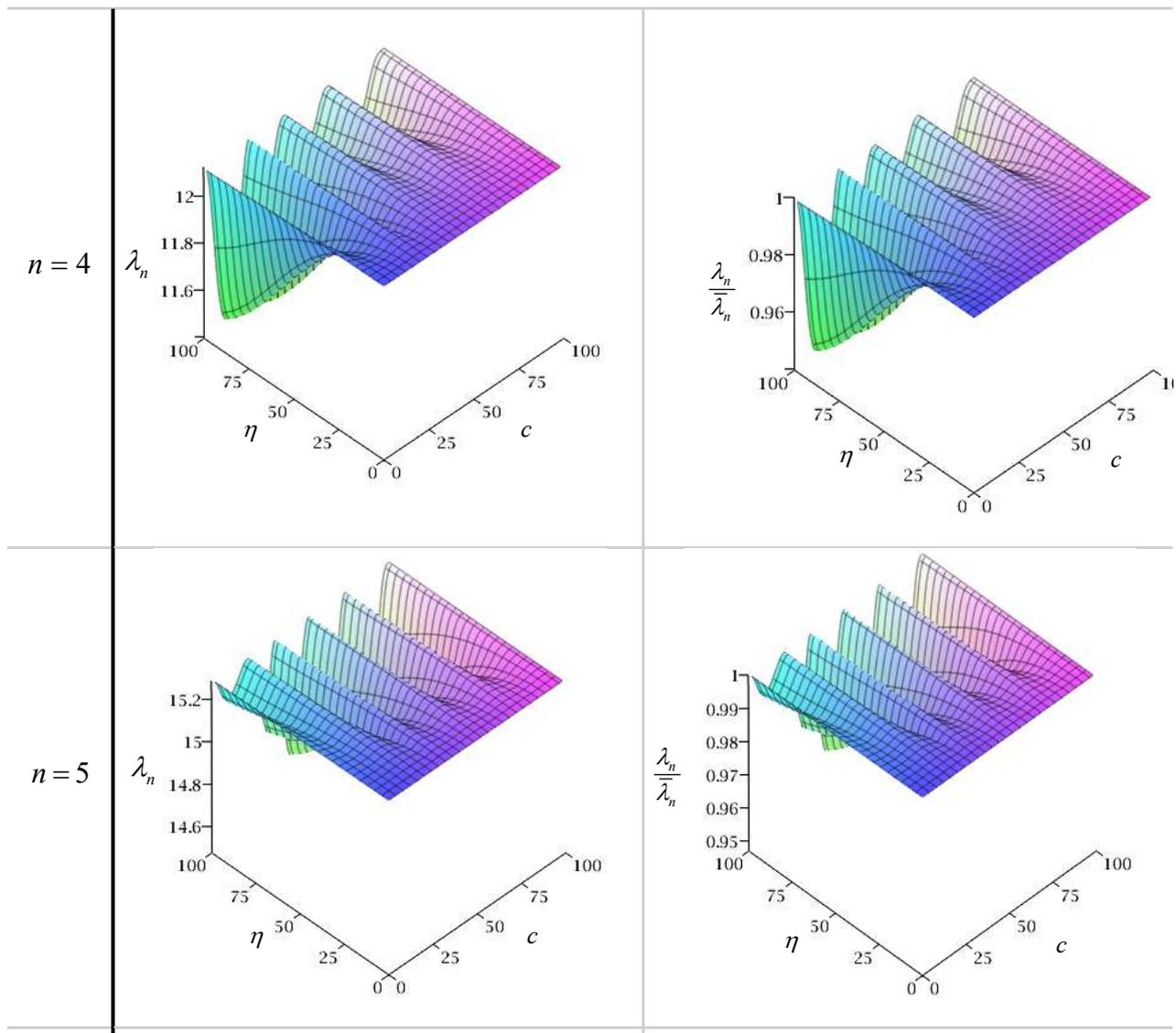
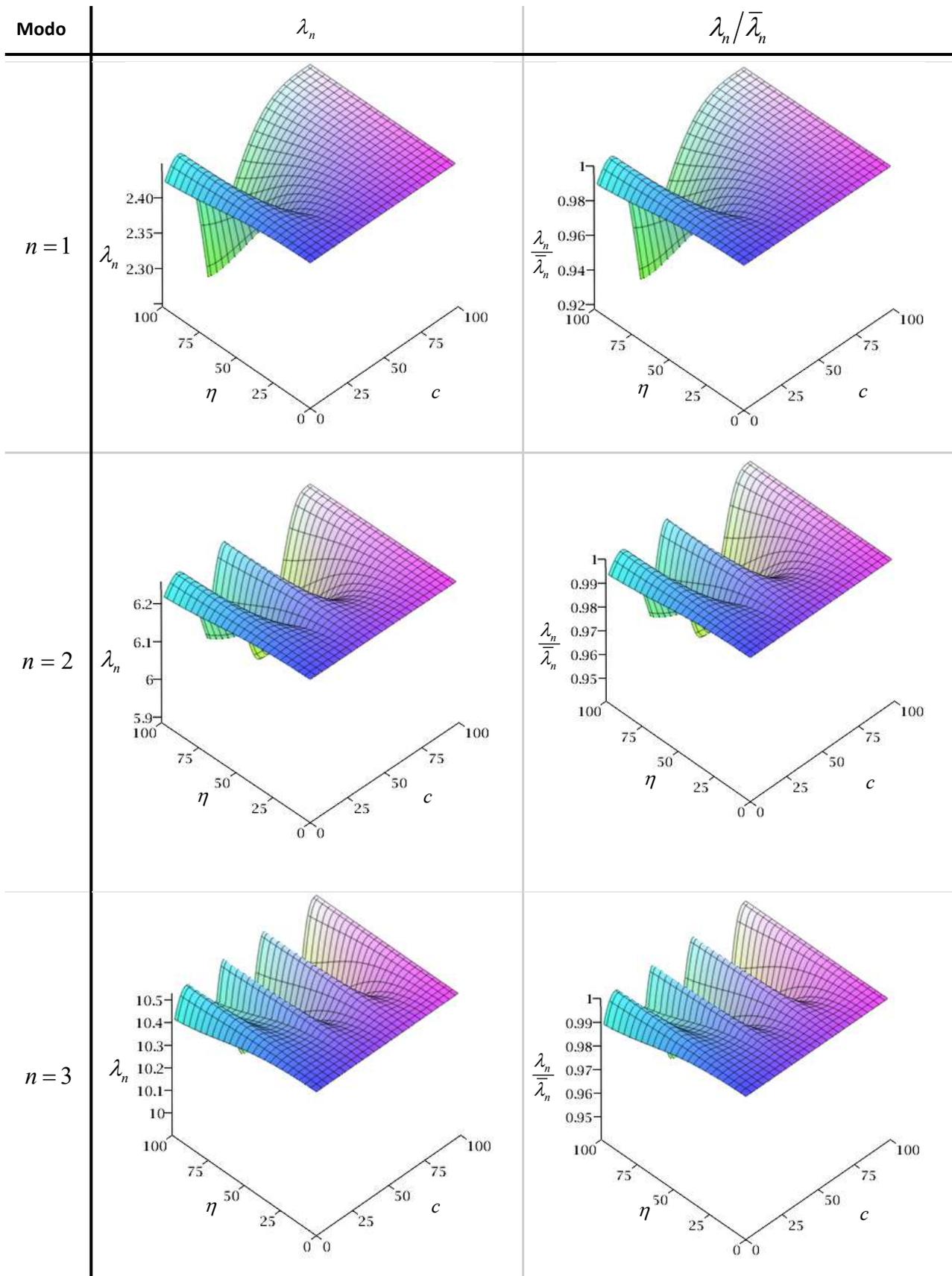


Figura A3.8 – Superficie de los coeficientes adimensionales de frecuencias para la condición A-L con un apoyo simple en  $c = 0.30$ .

• E-L con un apoyo simple en  $c=0.30$



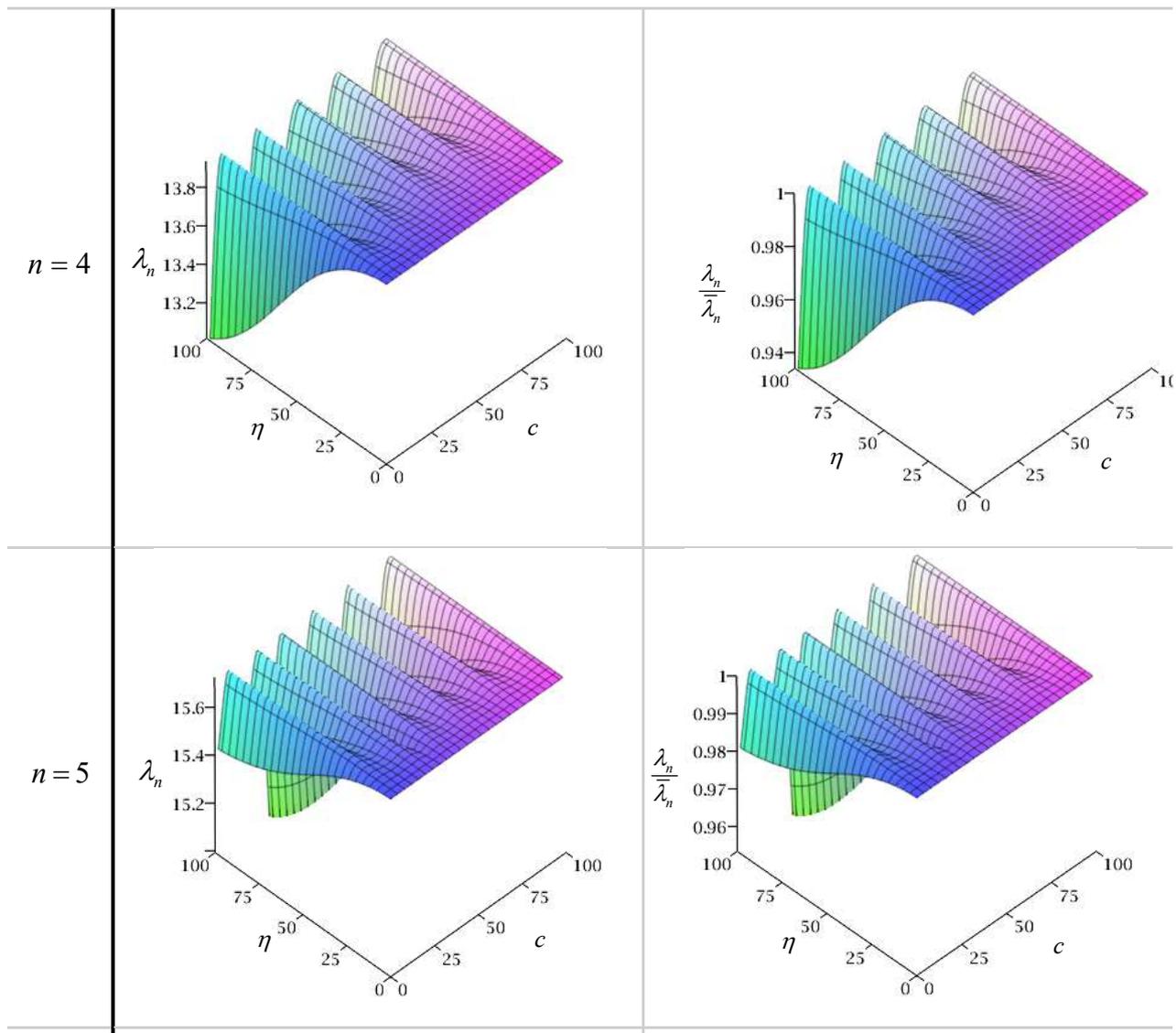
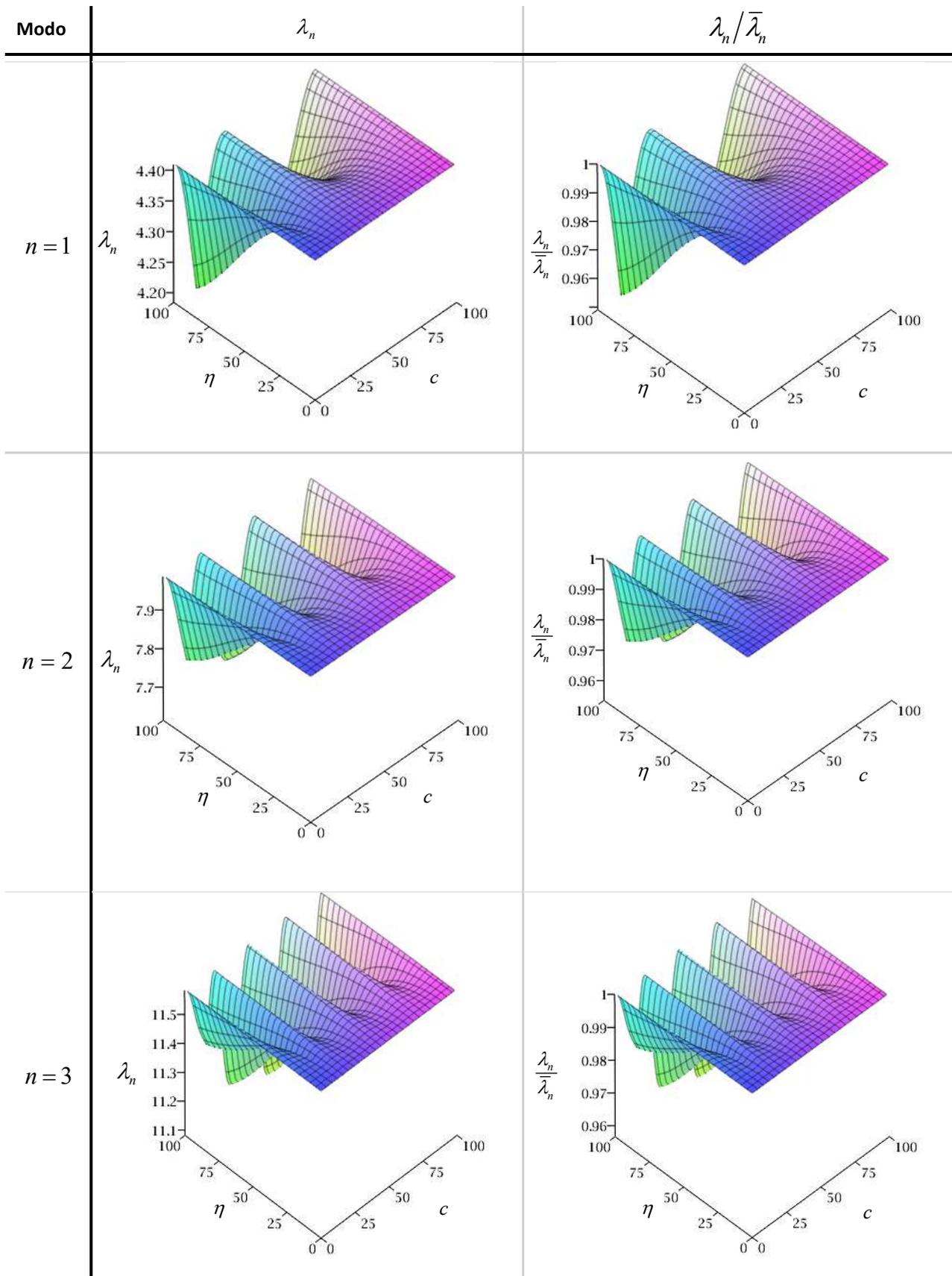


Figura A3.9 – Superficie de los coeficientes adimensionales de frecuencias para la condición E-L con un apoyo simple en  $c = 0.30$ .

- A-A con un apoyo simple en  $c=0.15$



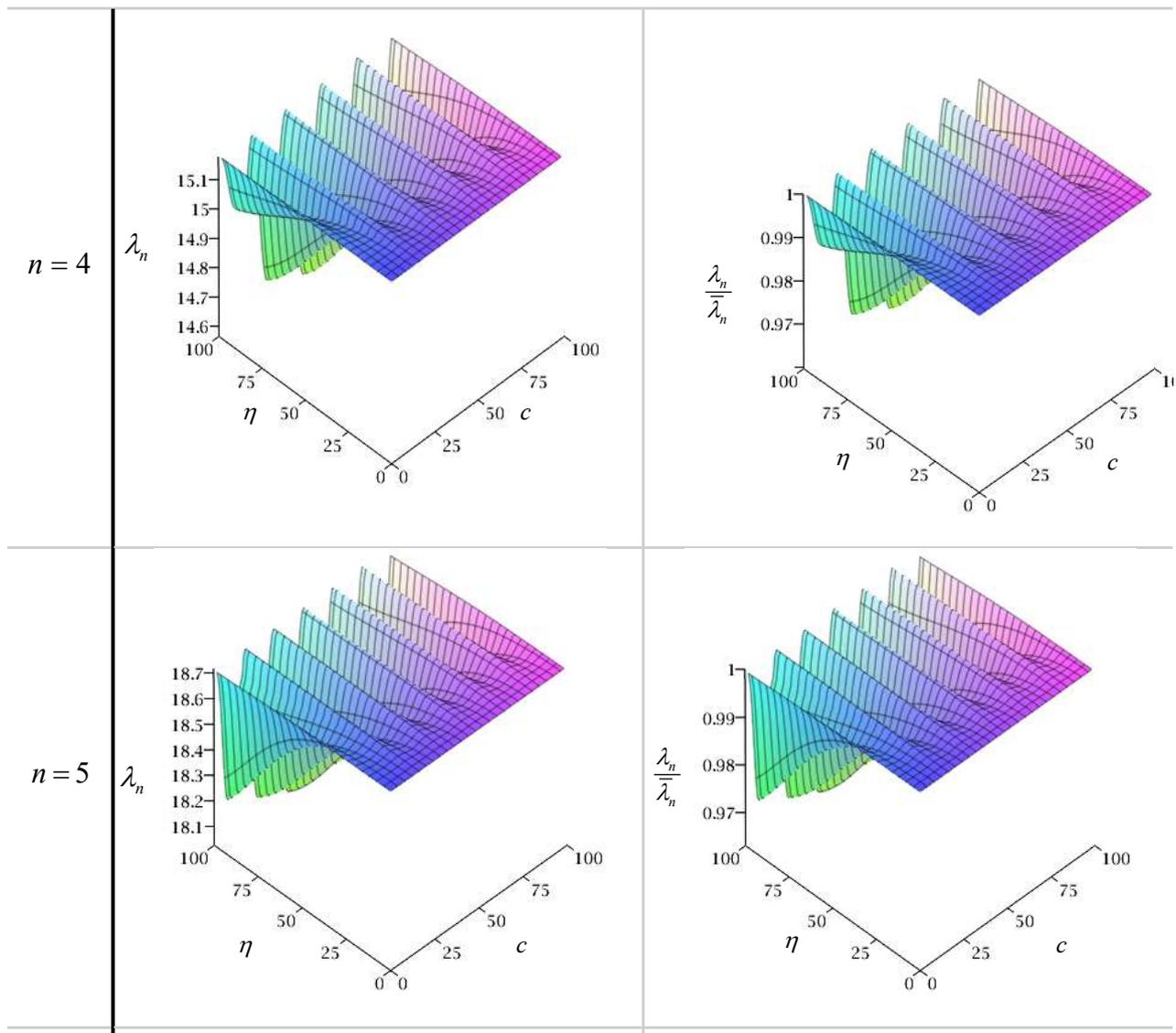
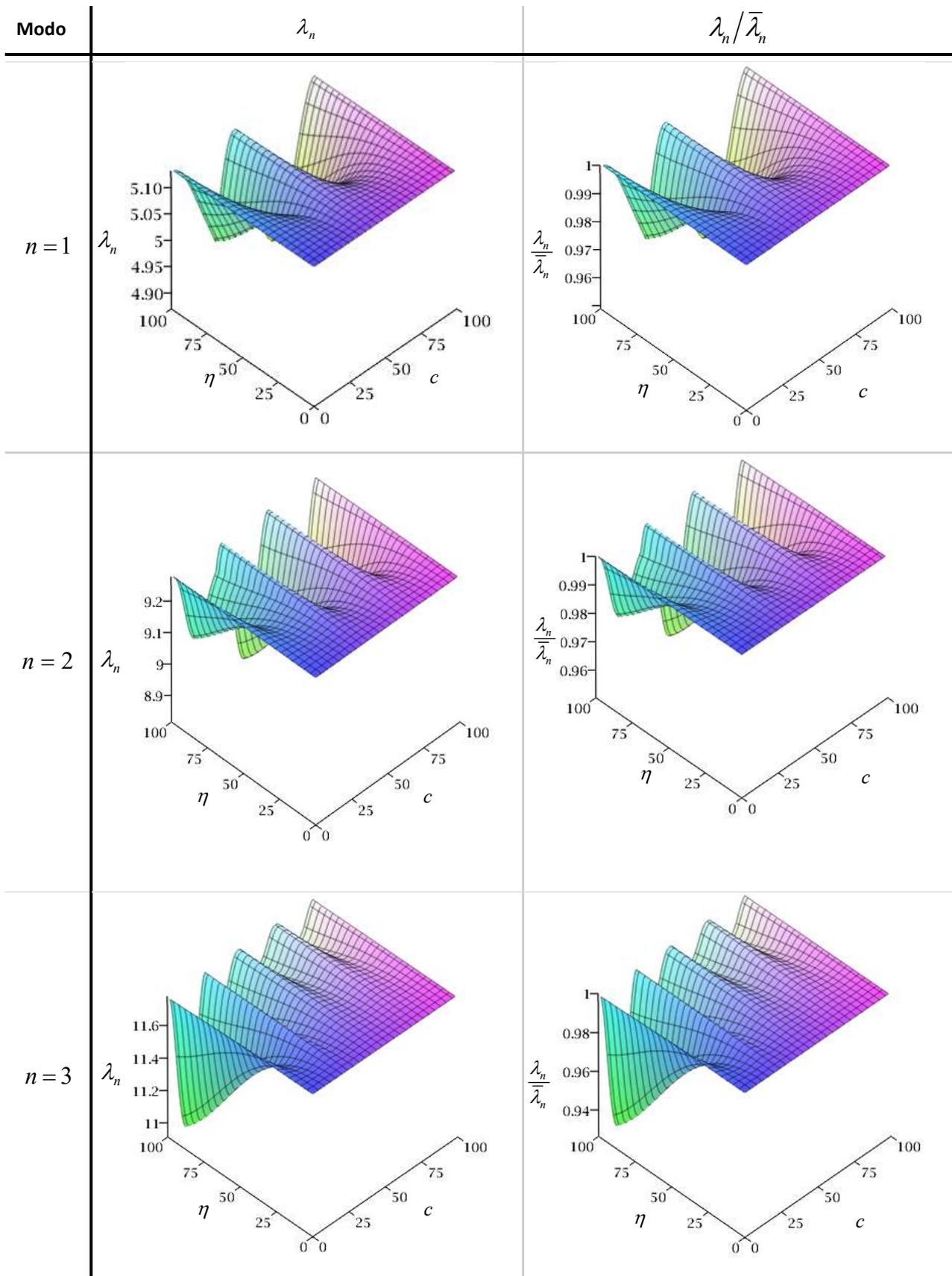


Figura A3.10 – Superficie de los coeficientes adimensionales de frecuencias para la condición A-A con un apoyo simple en  $c = 0.15$ .

- A-A con un apoyo simple en  $c=0.30$



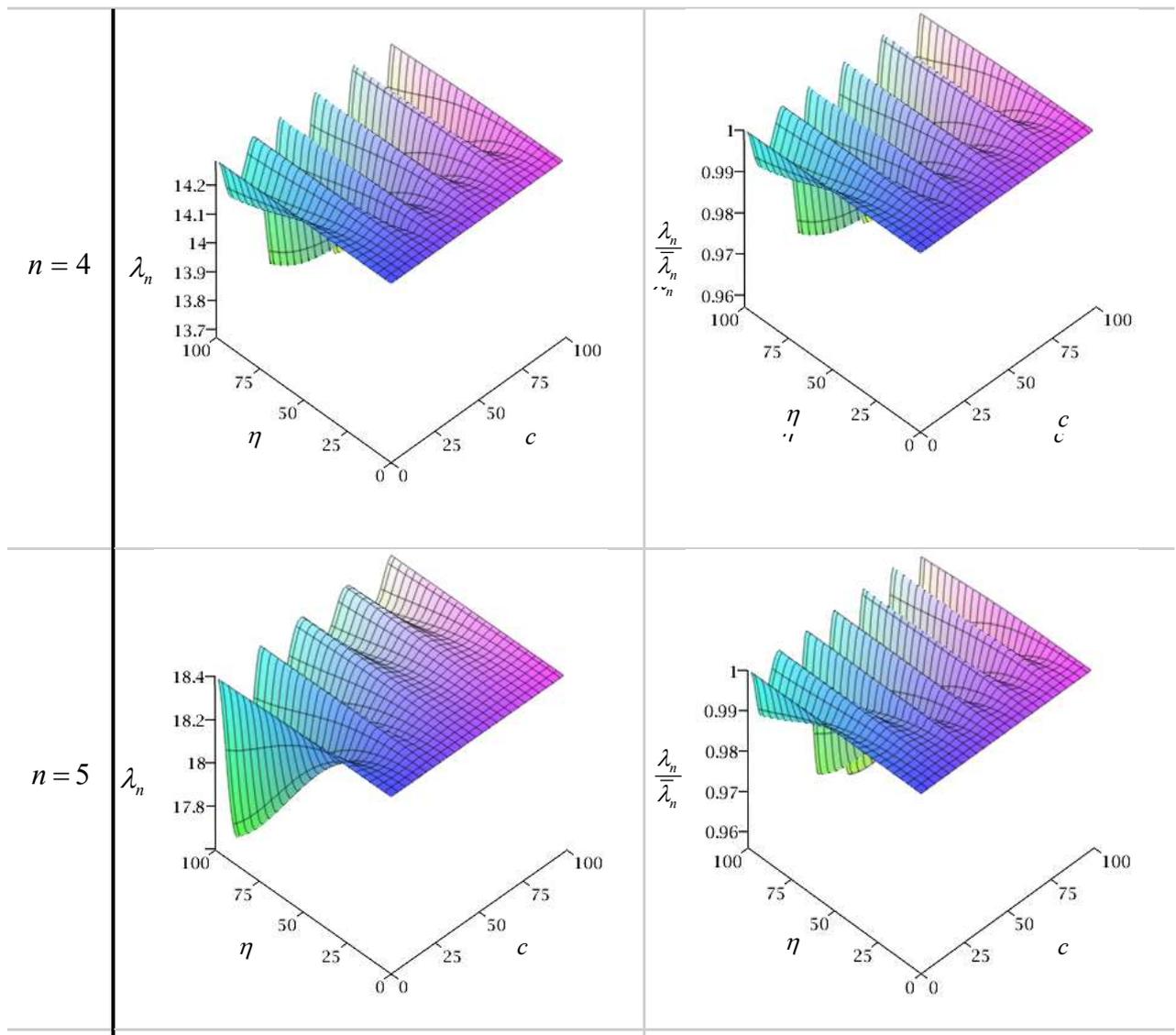
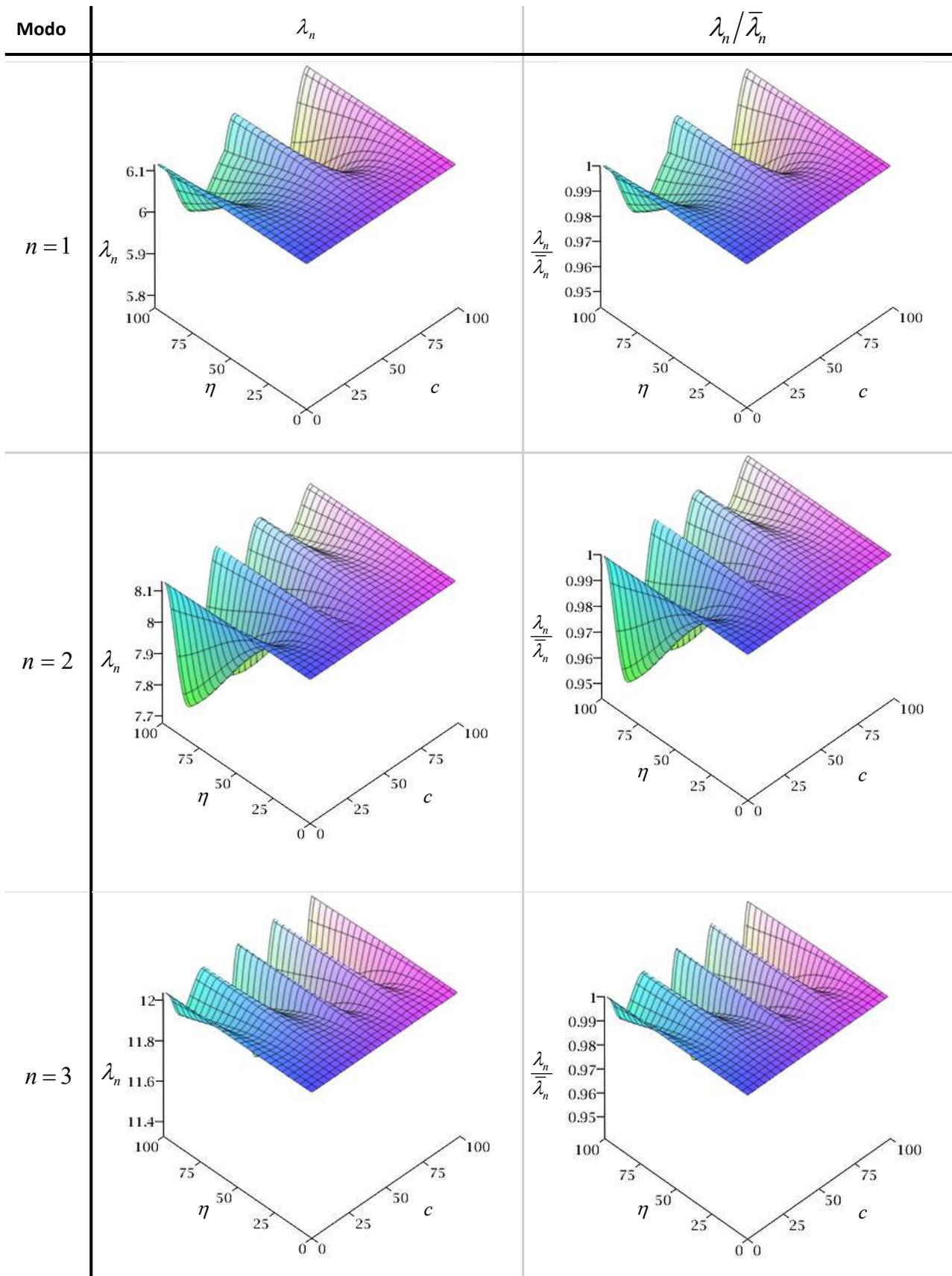


Figura A3.11 – Superficie de los coeficientes adimensionales de frecuencias para la condición A-A con un apoyo simple en  $c = 0.30$ .

• A-A con un apoyo simple en  $c=0.45$



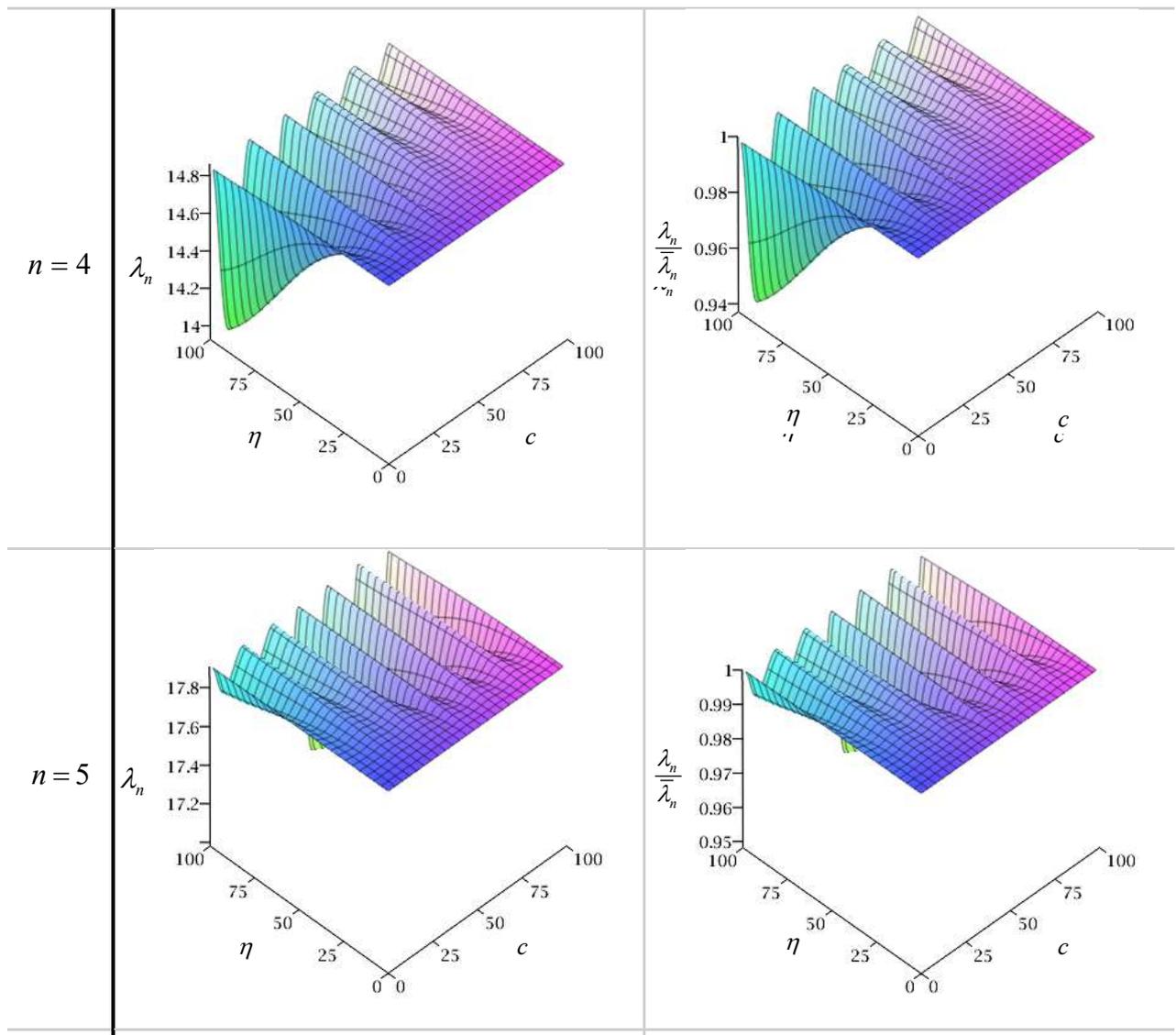
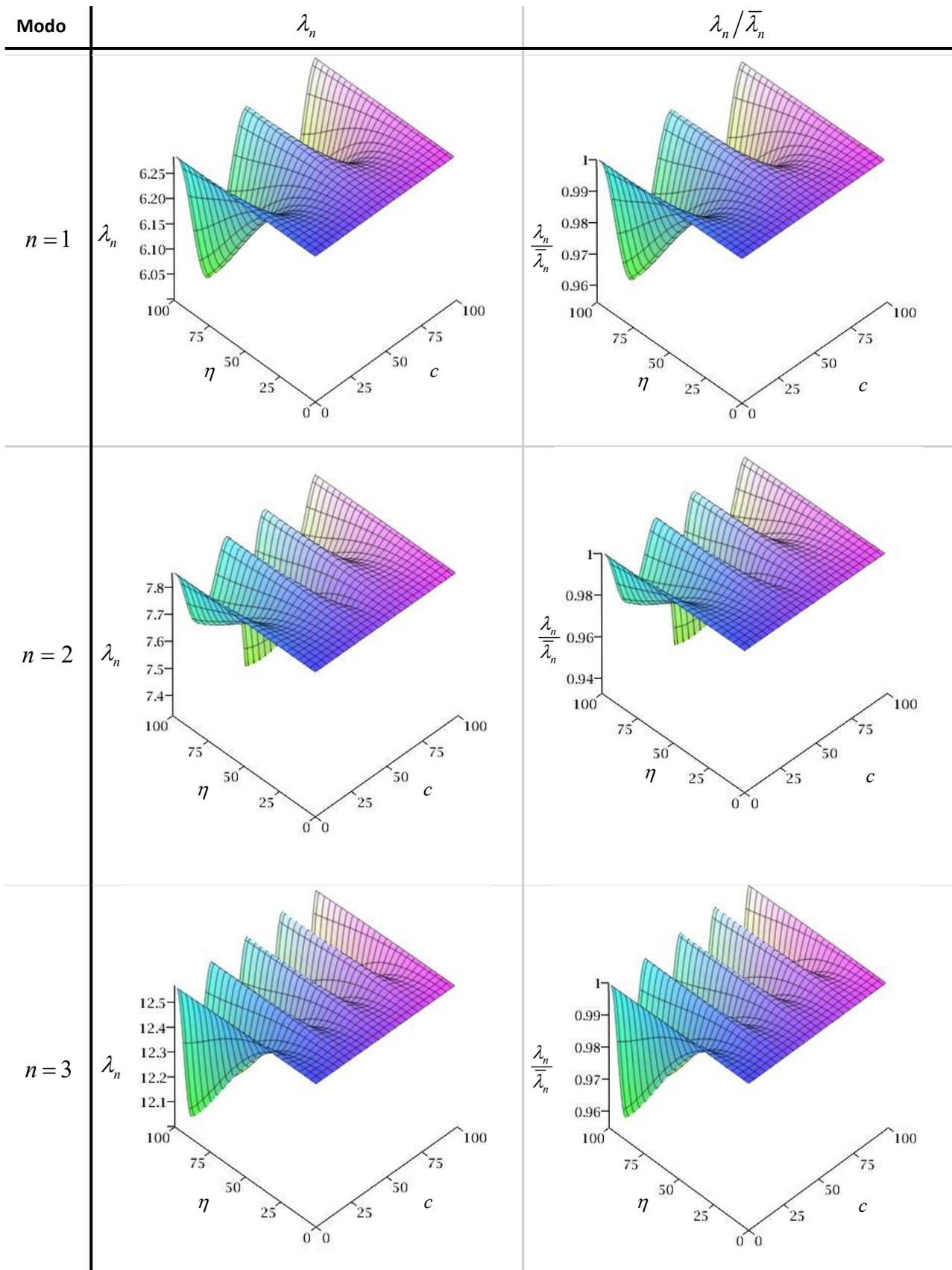


Figura A3.12 – Superficie de los coeficientes adimensionales de frecuencias para la condición A-A con un apoyo simple en  $c = 0.45$ .

• A-A con un apoyo simple en  $c=0.50$



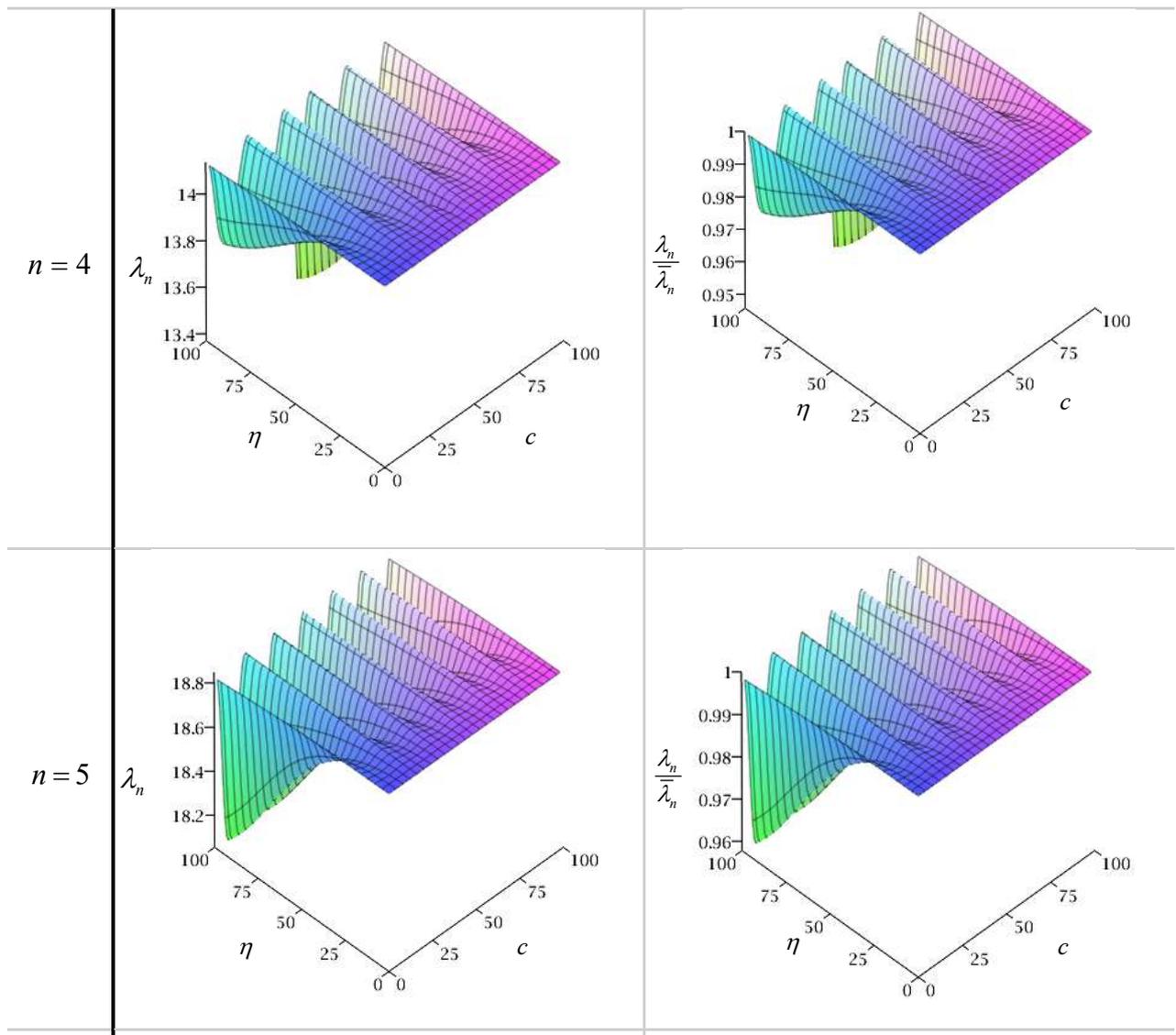
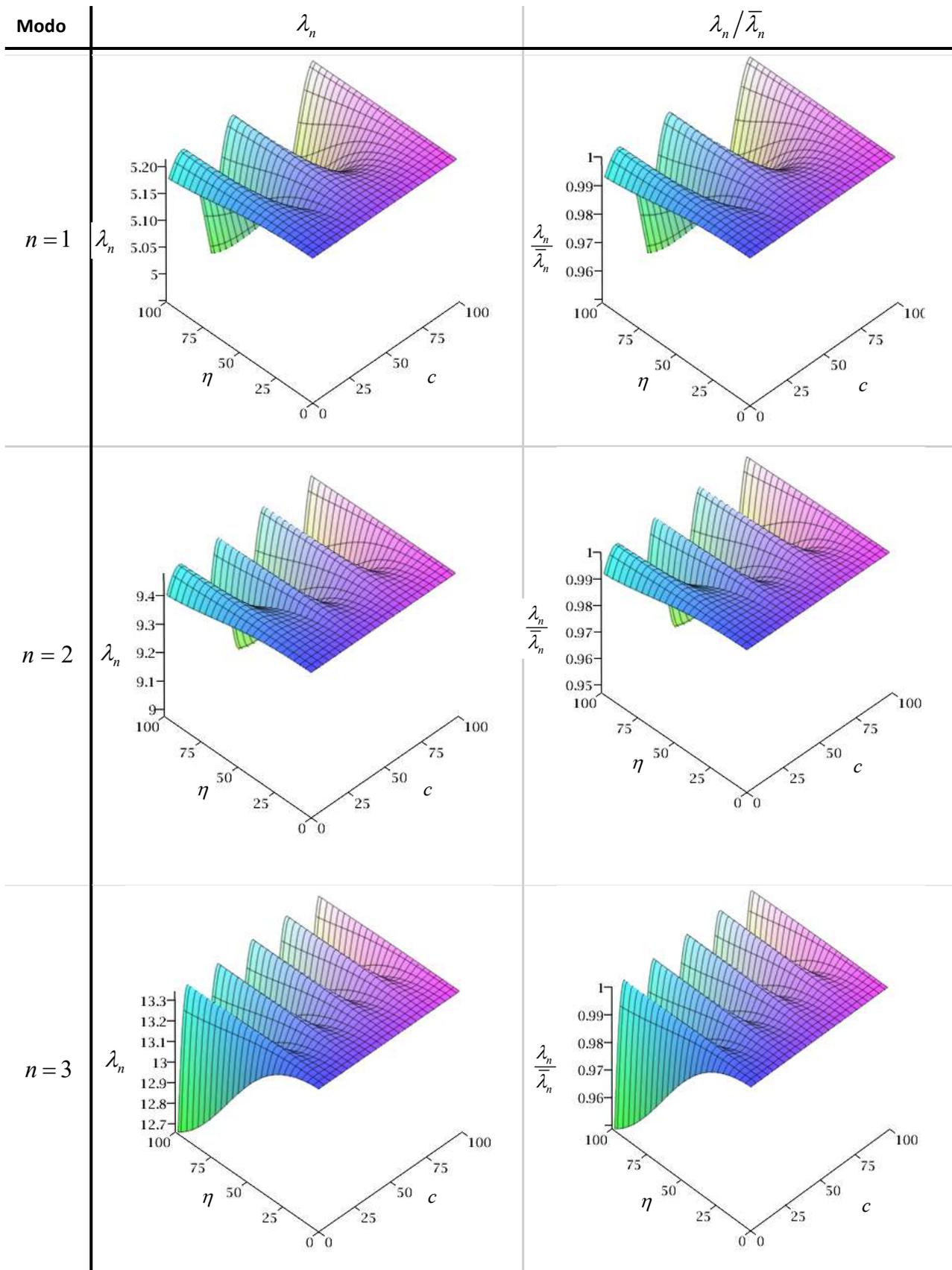


Figura A3.13 – Superficie de los coeficientes adimensionales de frecuencias para la condición A-A con un apoyo simple en  $c = 0.50$ .

• E-A con un apoyo simple en  $c=0.30$



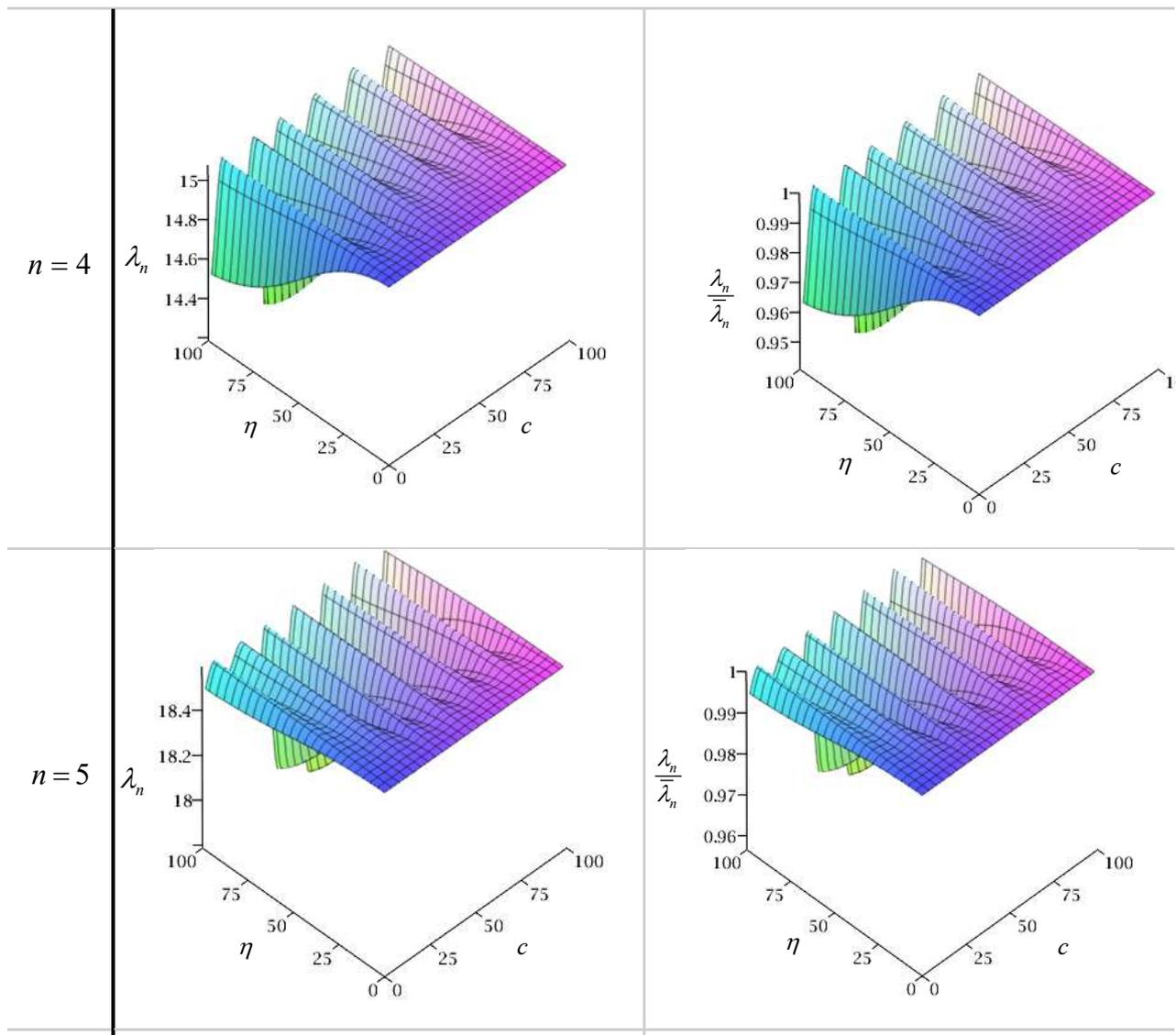
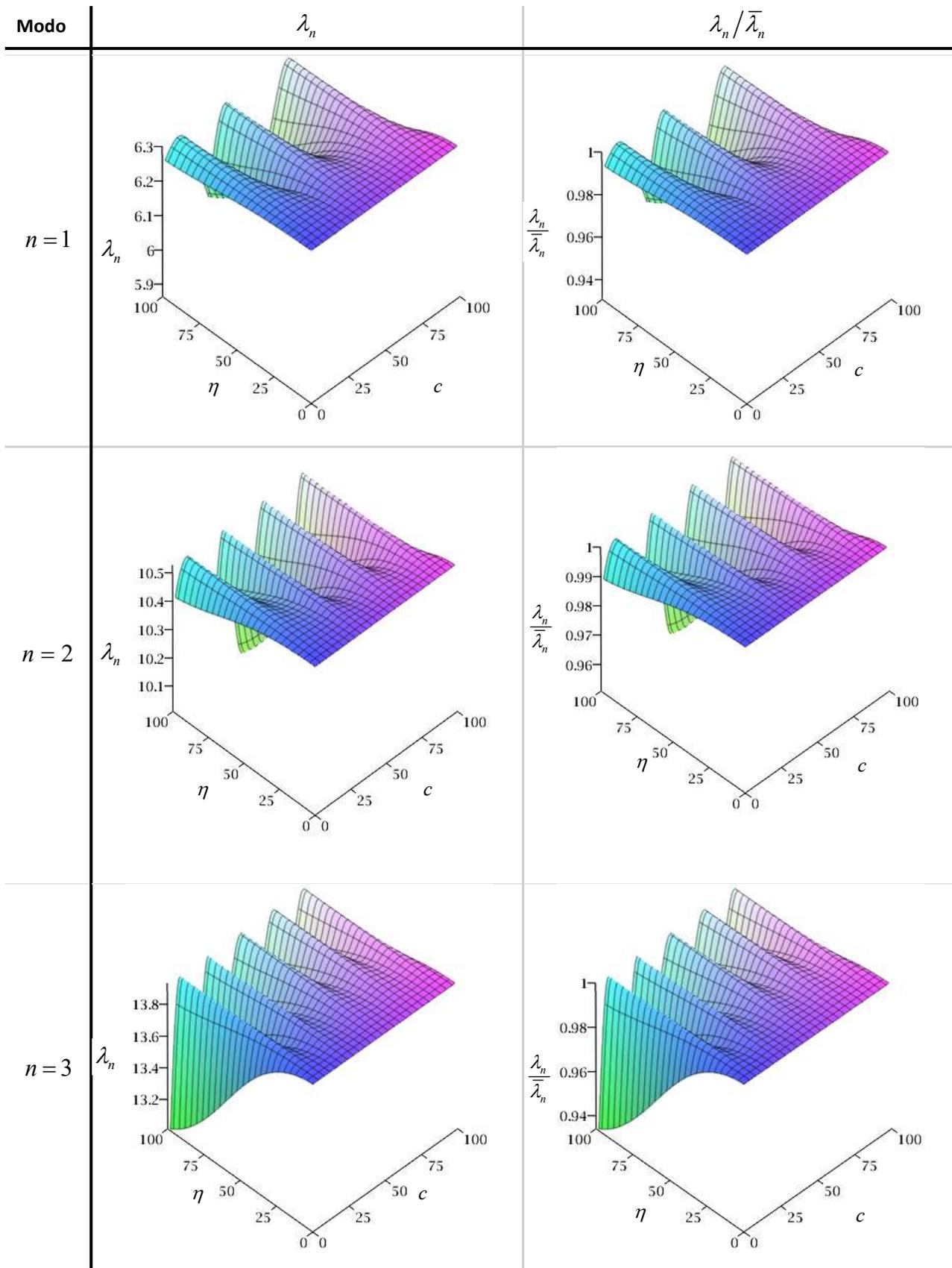


Figura A3.14 – Superficie de los coeficientes adimensionales de frecuencias para la condición E-A con un apoyo simple en  $c = 0.30$ .

• E-E con un apoyo simple en  $c=0.30$



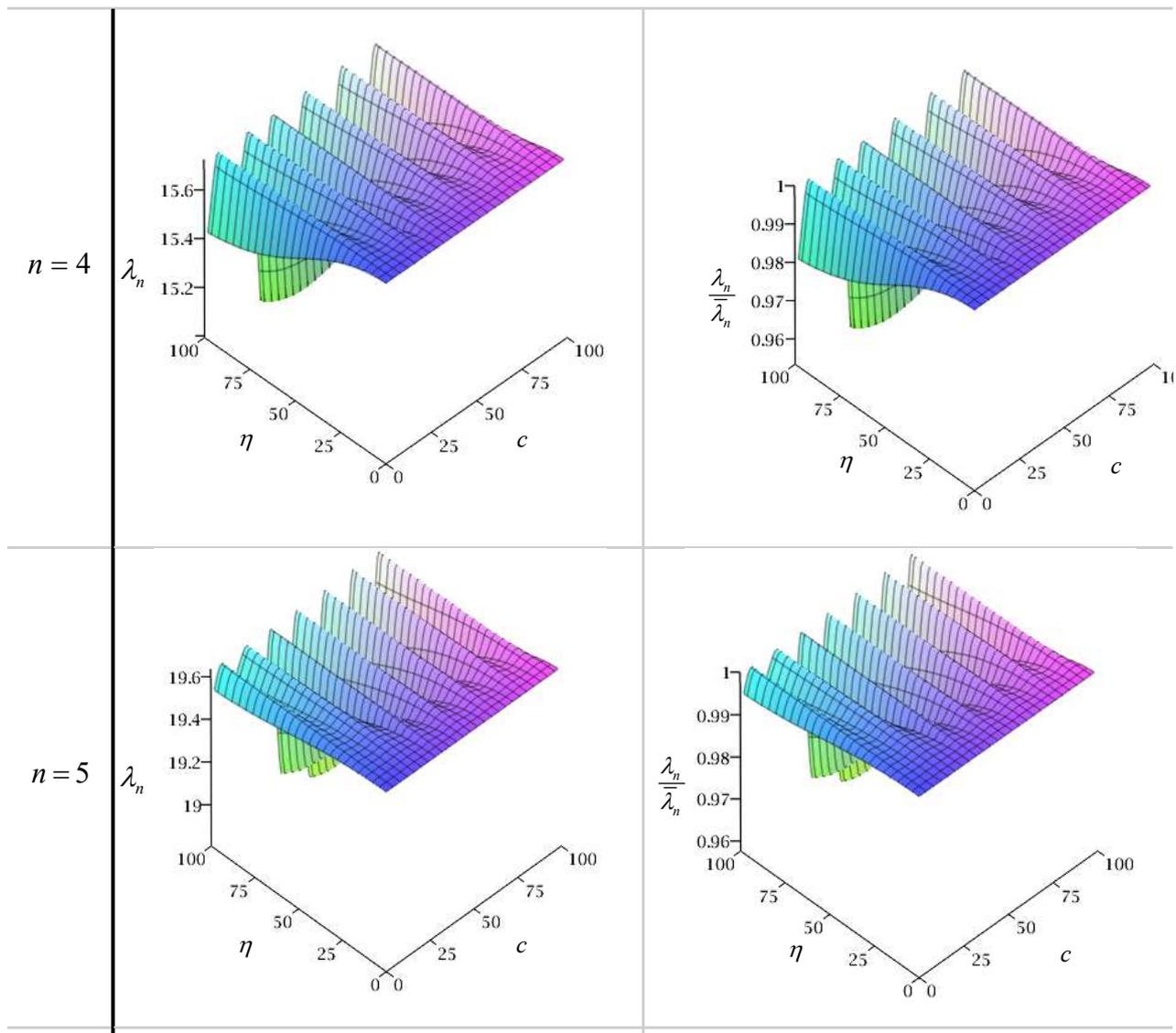
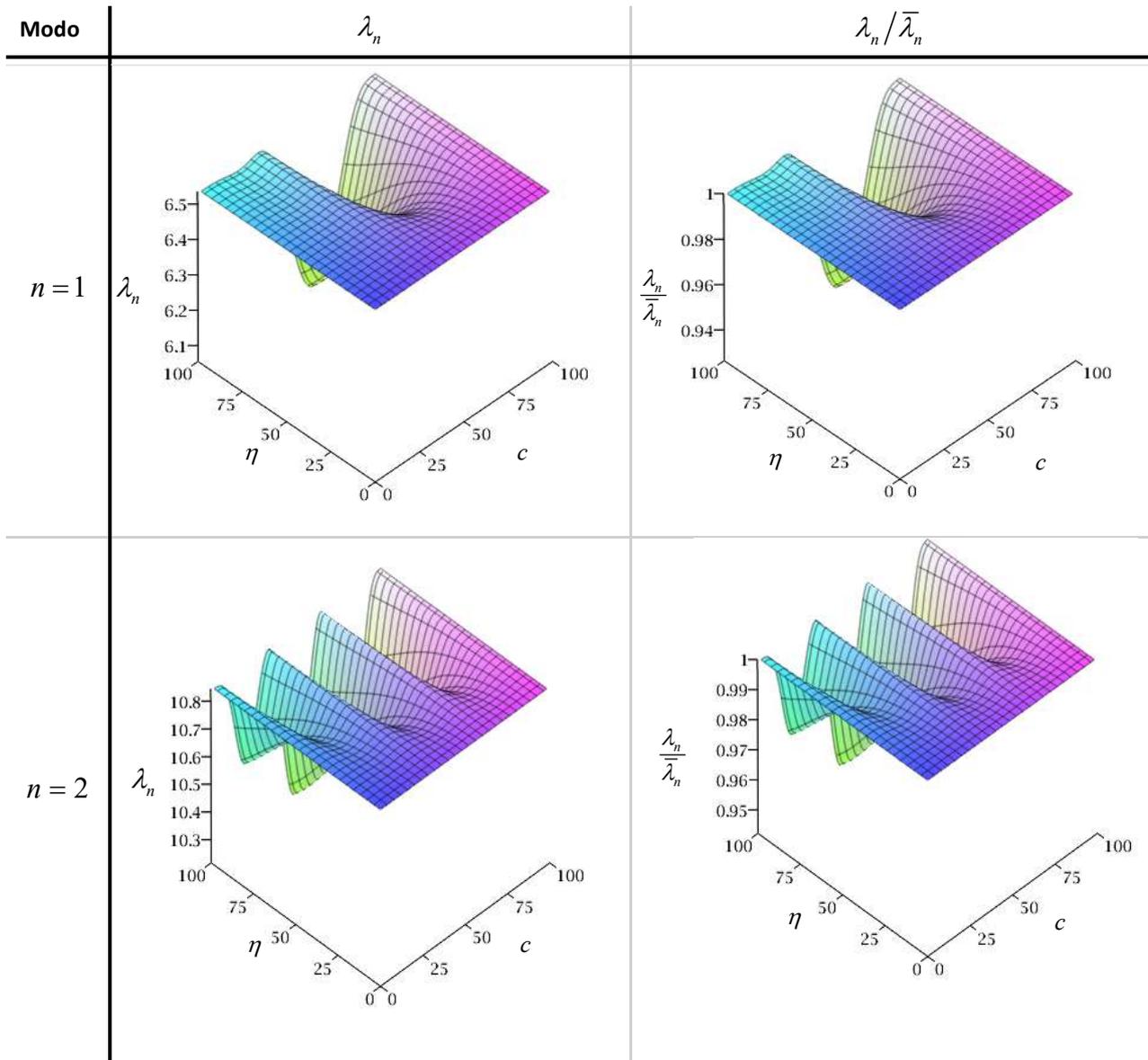


Figura A3.15 – Superficie de los coeficientes adimensionales de frecuencias para la condición E-E con un apoyo simple en  $c = 0.30$ .

**A3.3 Condiciones de vinculación clásicas en los extremos con una rotula intermedia**

- L-L con una rotula en  $c=0.33$



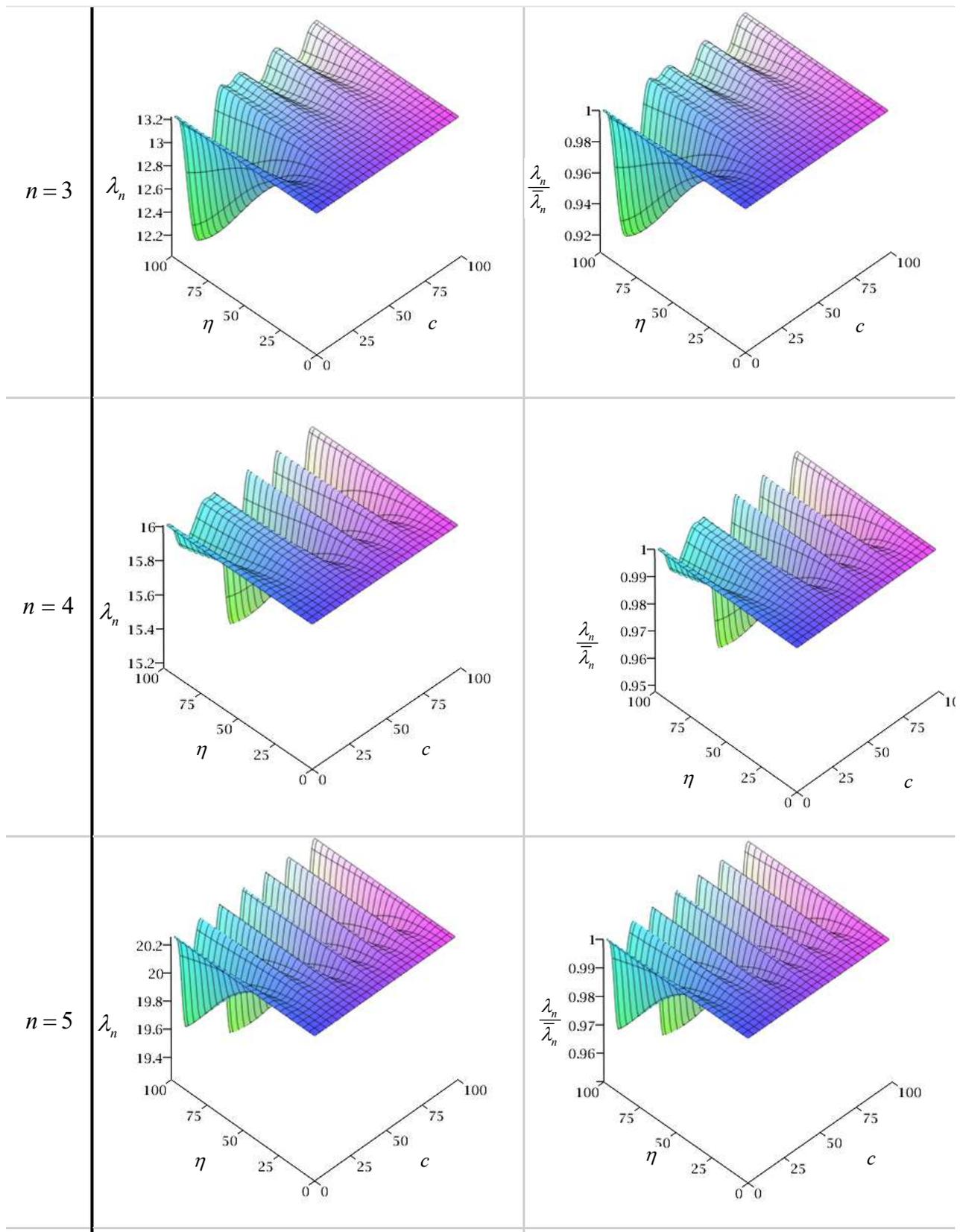
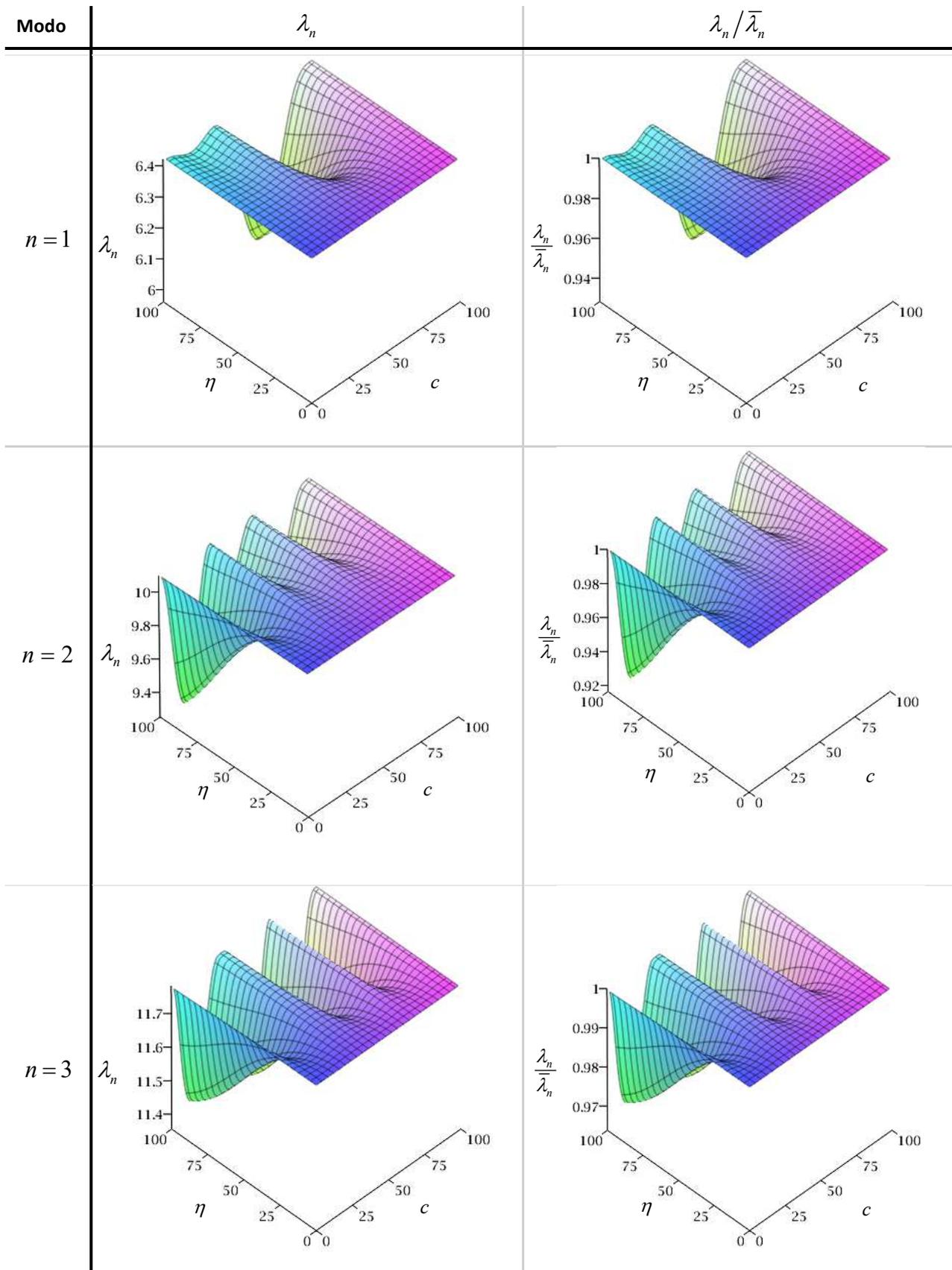


Figura A3.16 – Superficie de los coeficientes adimensionales de frecuencias para la condición L-L con una rotula en  $c = 0.33$ .

• A-L con una rotula en  $c=0.33$



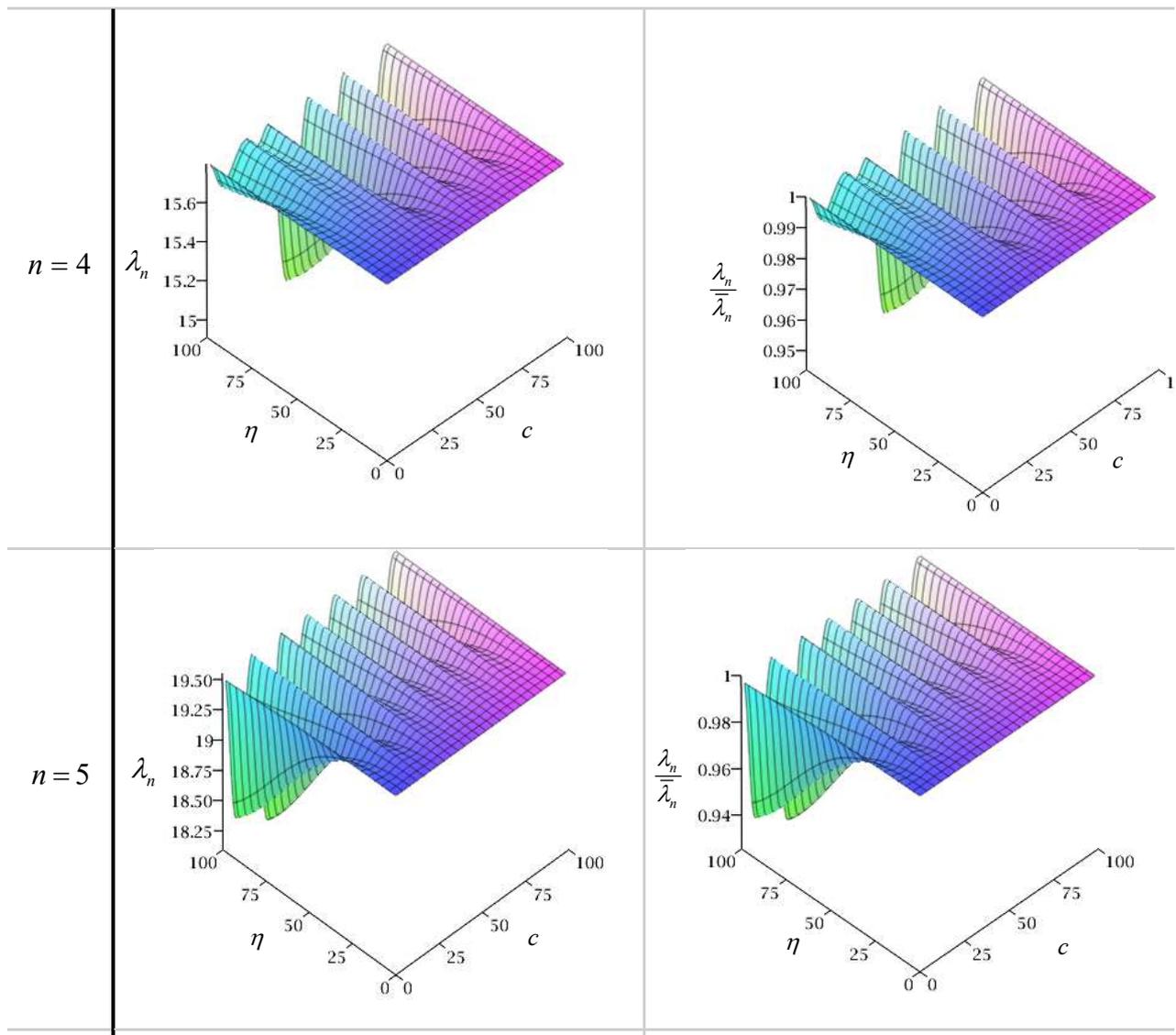
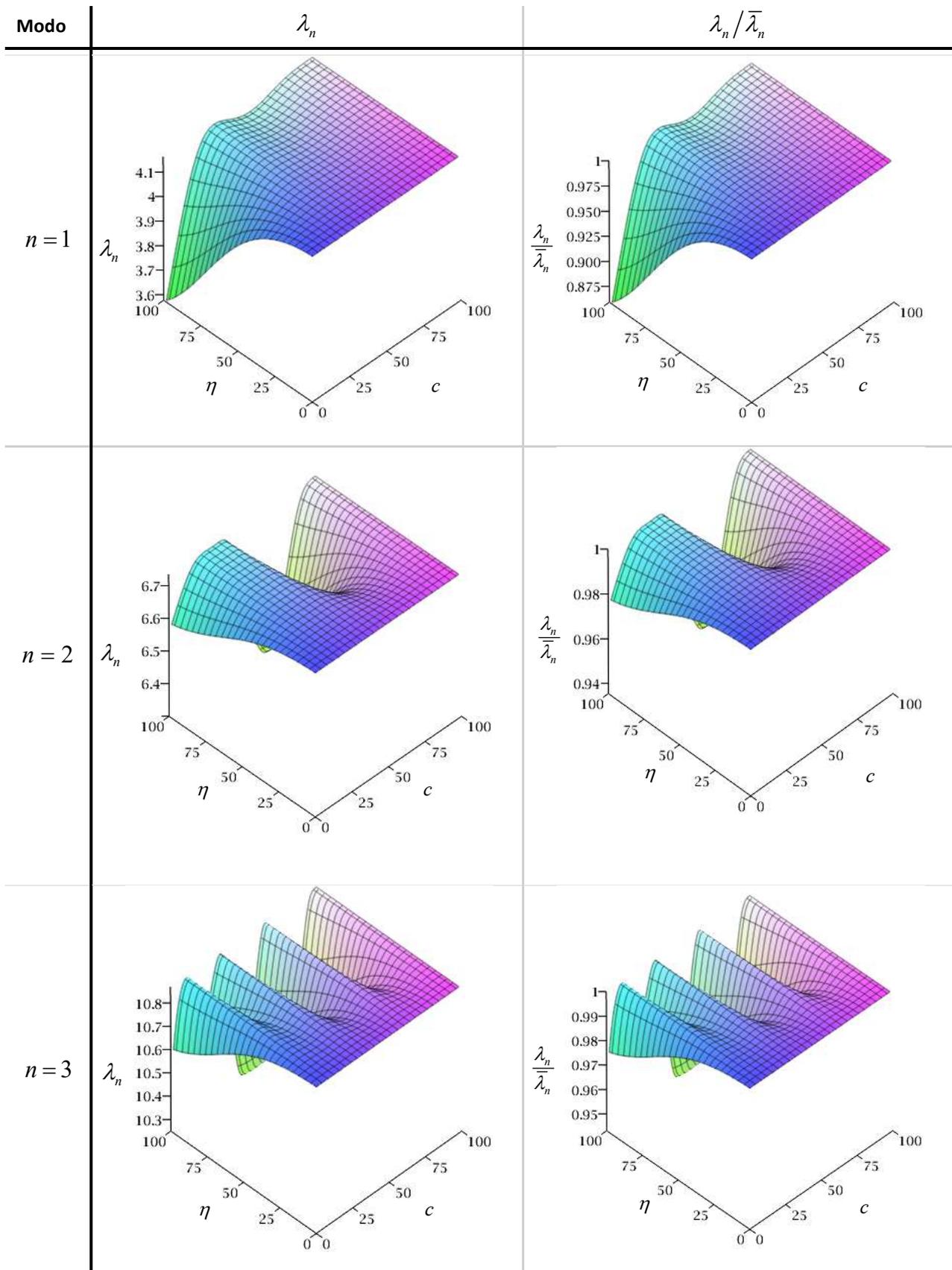


Figura A3.17 – Superficie de los coeficientes adimensionales de frecuencias para la condición A-L con una rotula en  $c = 0.33$ .

• E-L con una rotula en  $c=0.33$



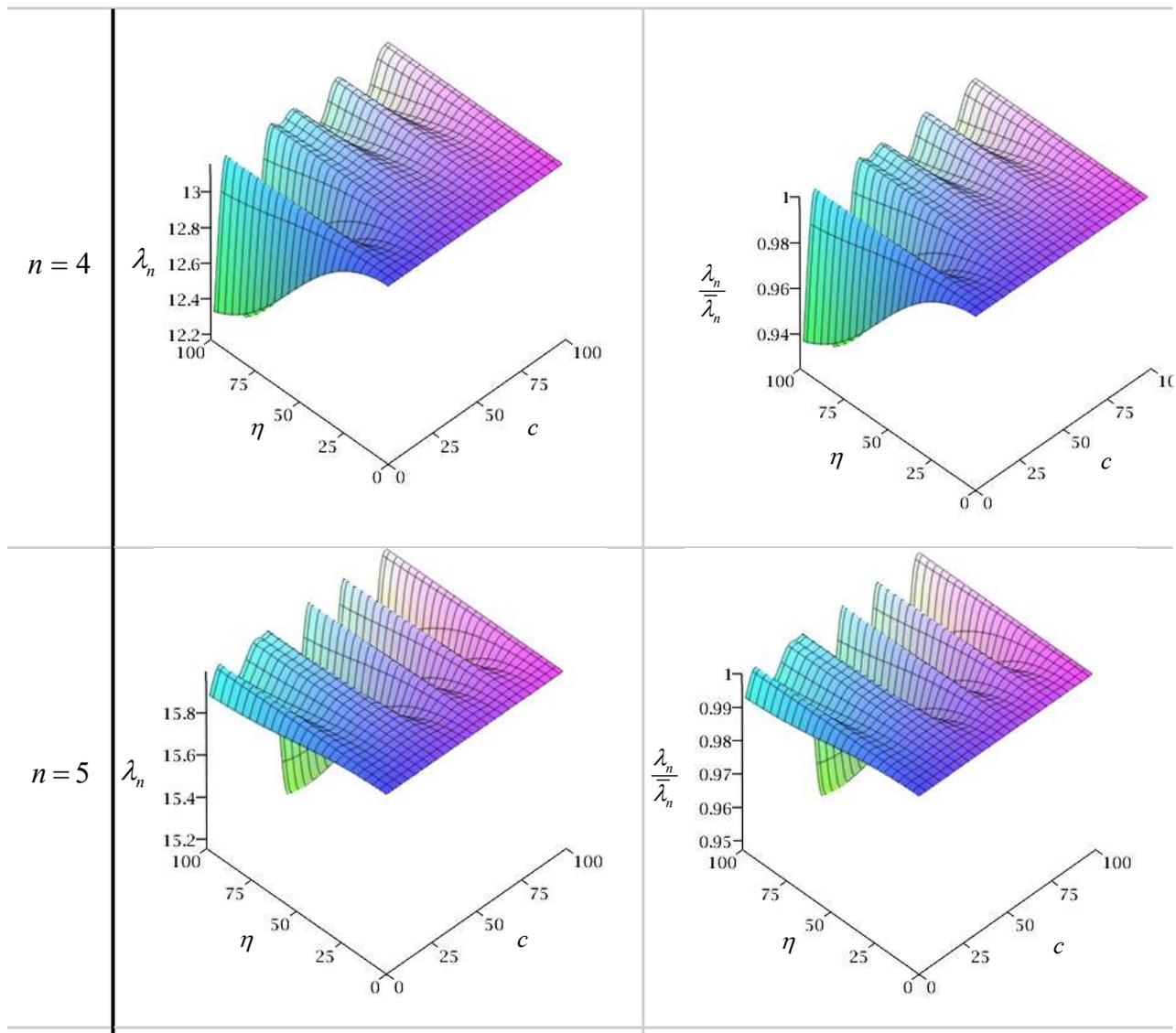
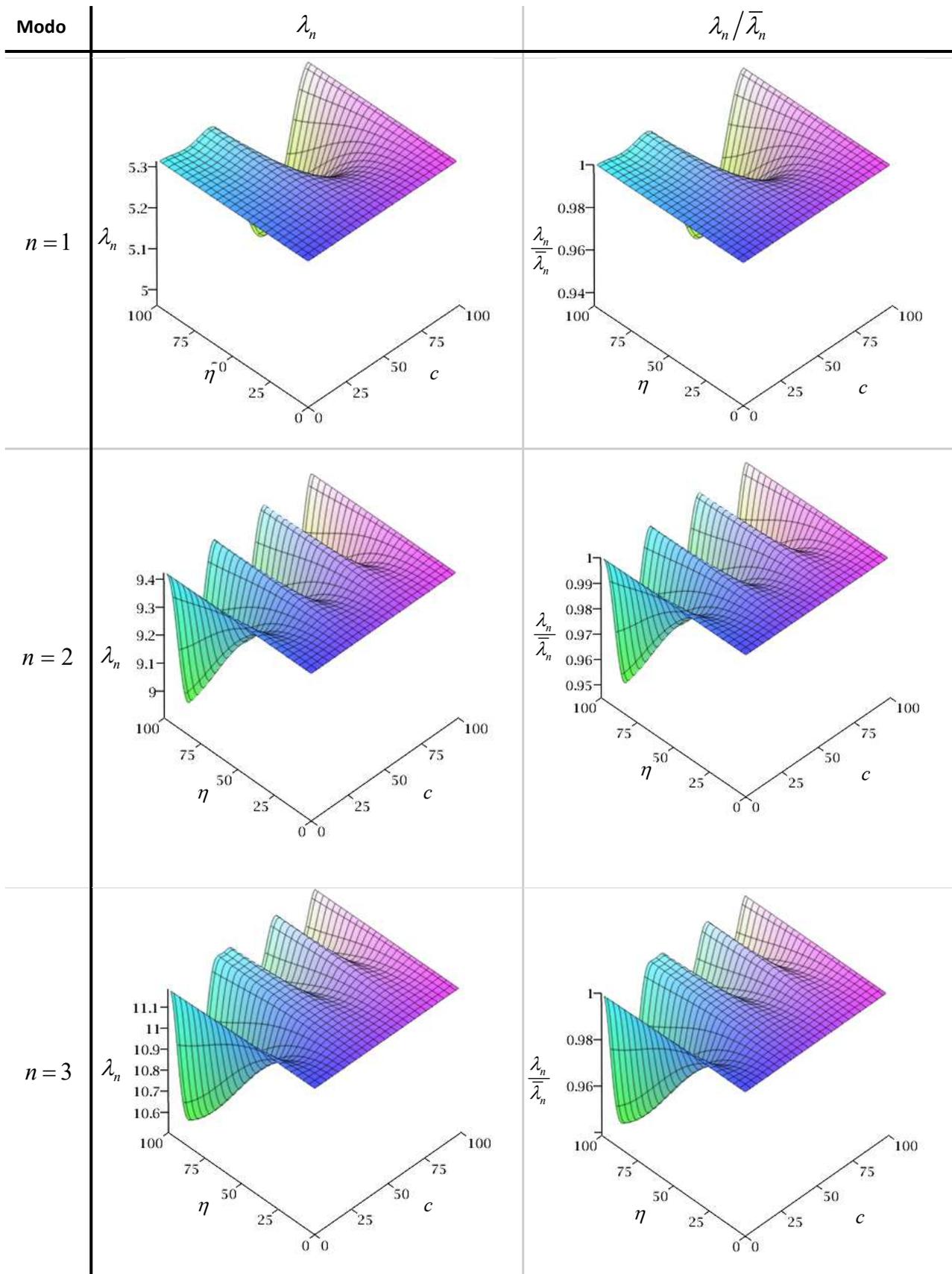


Figura A3.18 – Superficie de los coeficientes adimensionales de frecuencias para la condición E-L con una rotula en  $c = 0.33$ .

• A-A con una rotula en  $c=0.33$



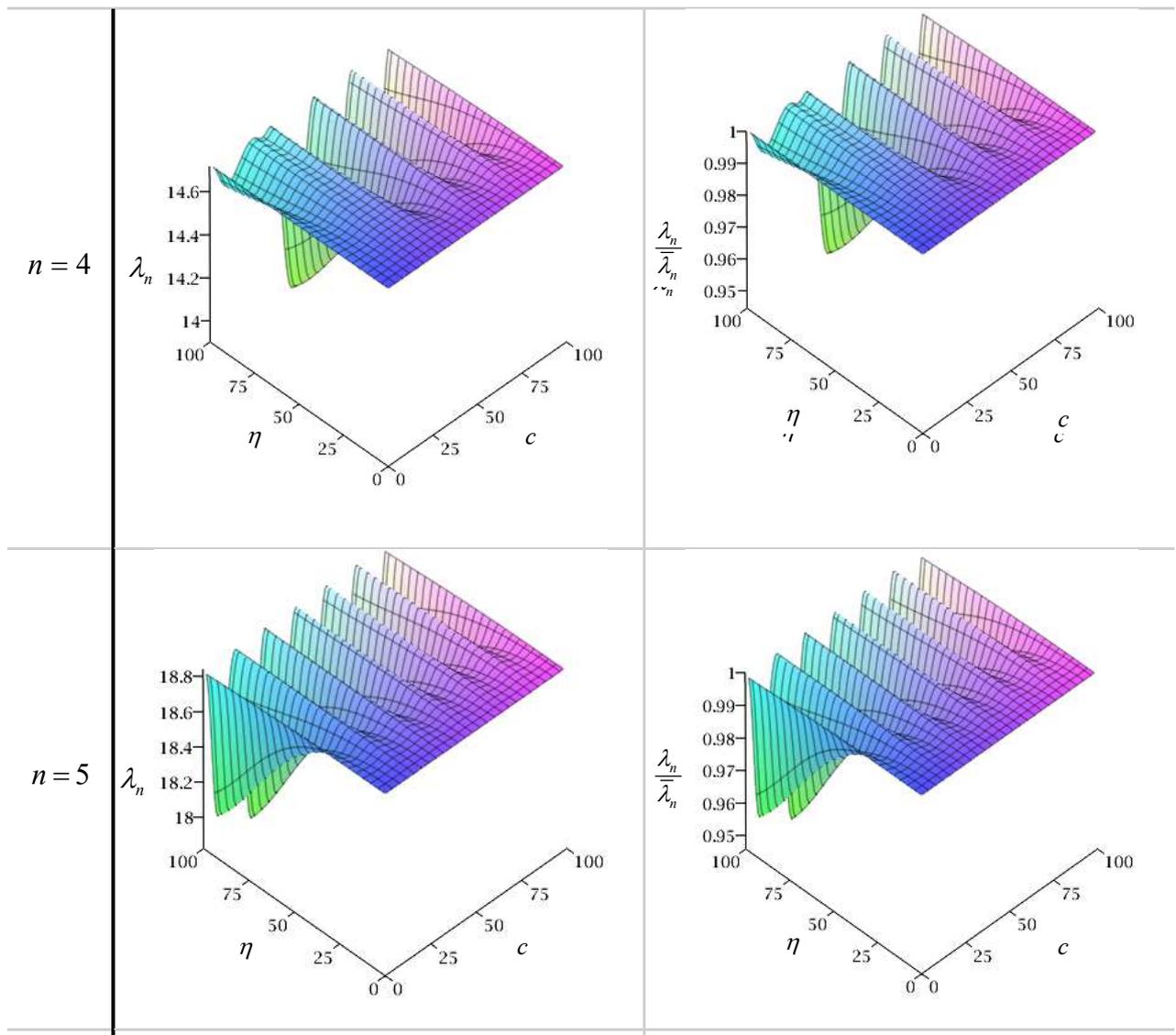
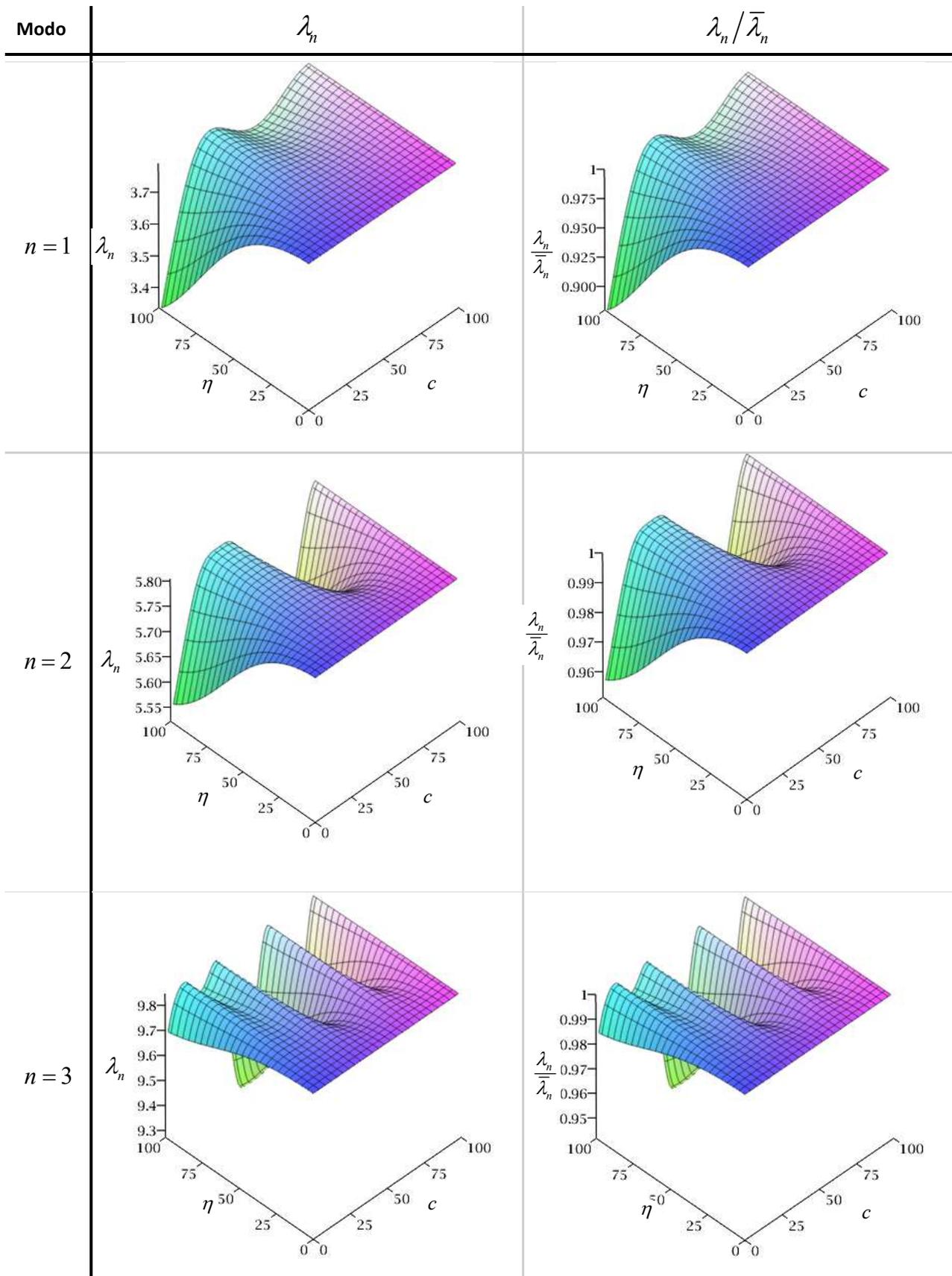


Figura A3.19 – Superficie de los coeficientes adimensionales de frecuencias para la condición A-A con una rotula en  $c=0.33$ .

• E-A con una rotula en  $c=0.33$



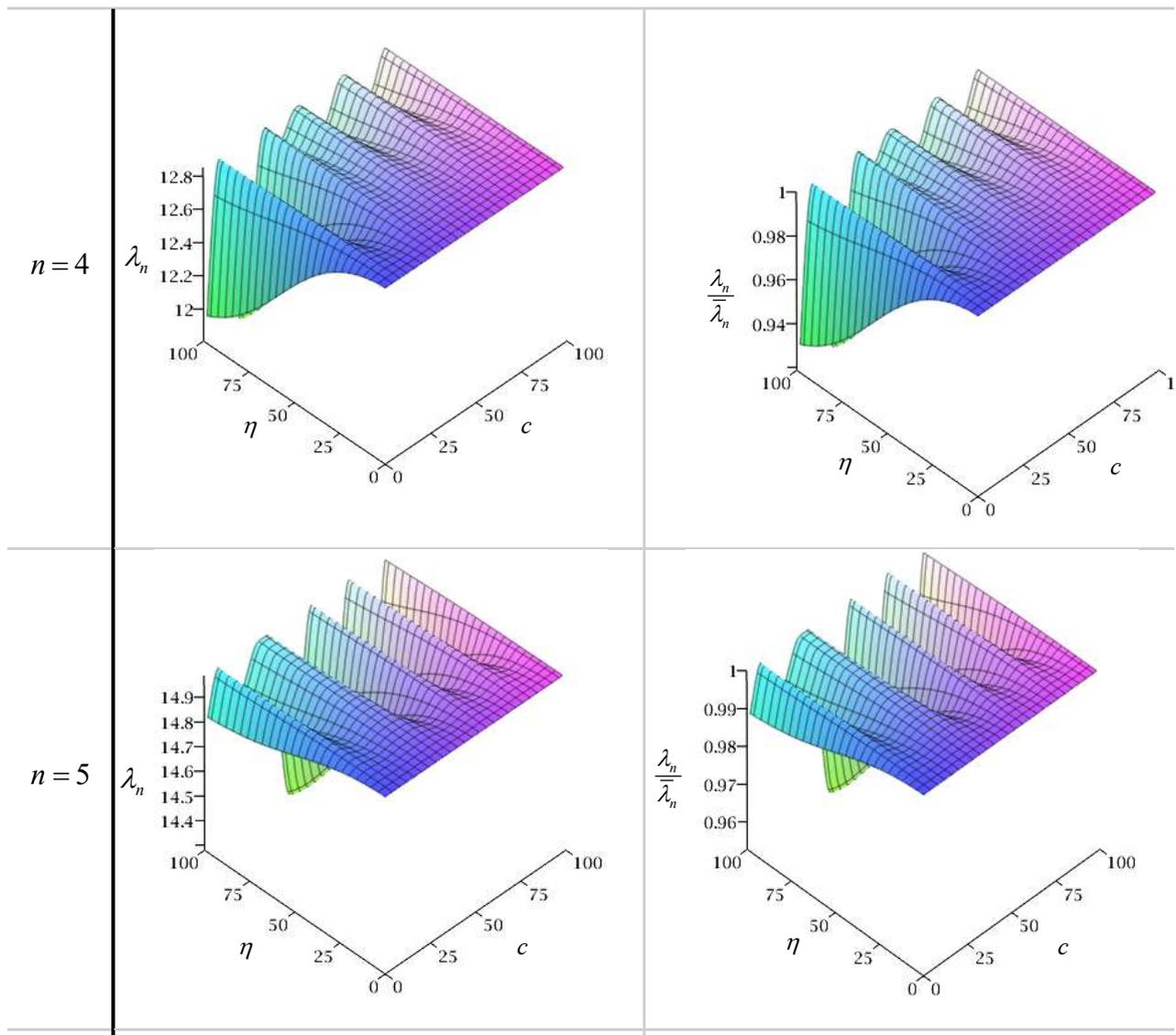
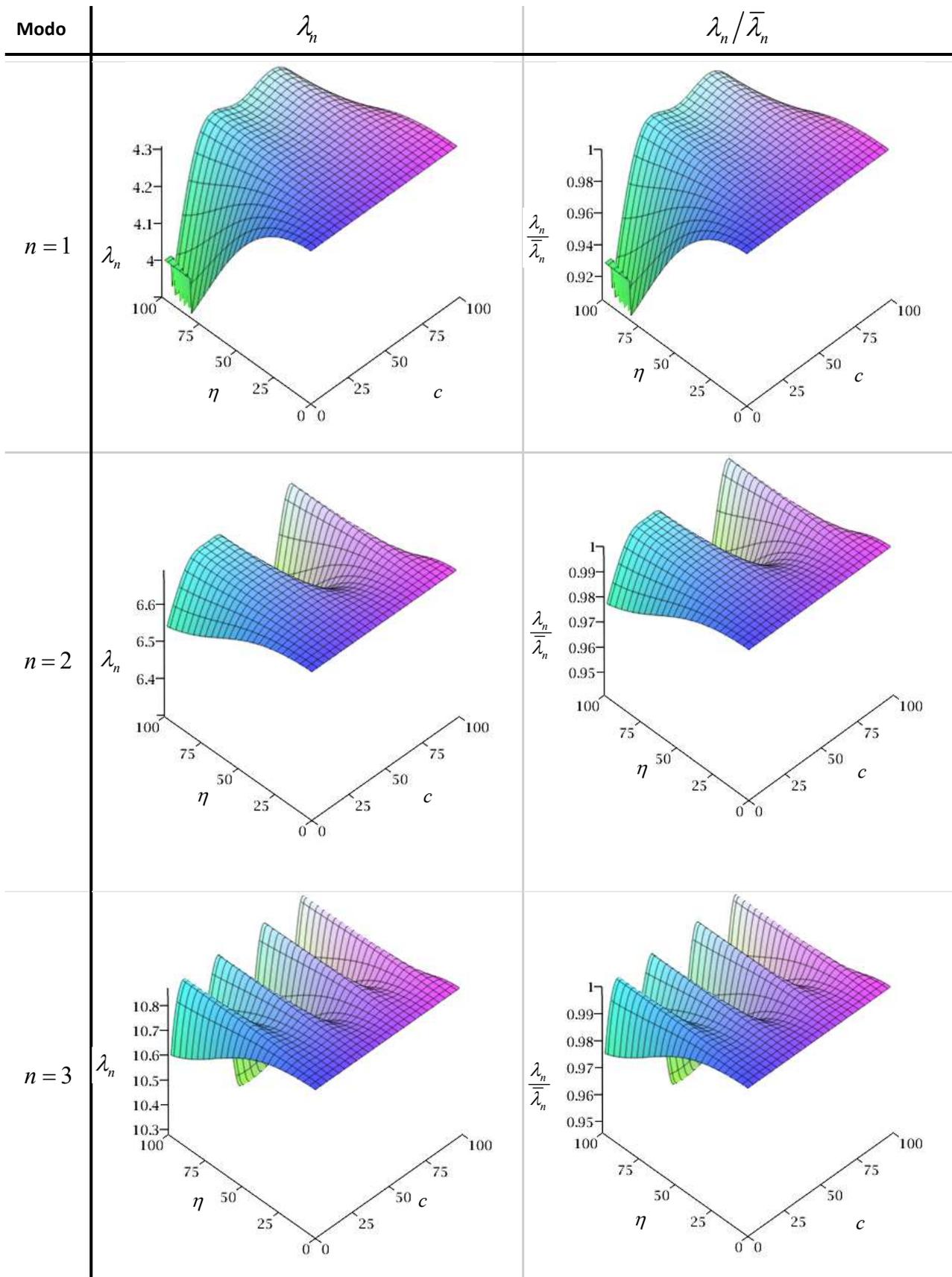


Figura A3.20 – Superficie de los coeficientes adimensionales de frecuencias para la condición E-A con una rotula en  $c=0.33$ .

• E-E con una rotula en  $c=0.33$



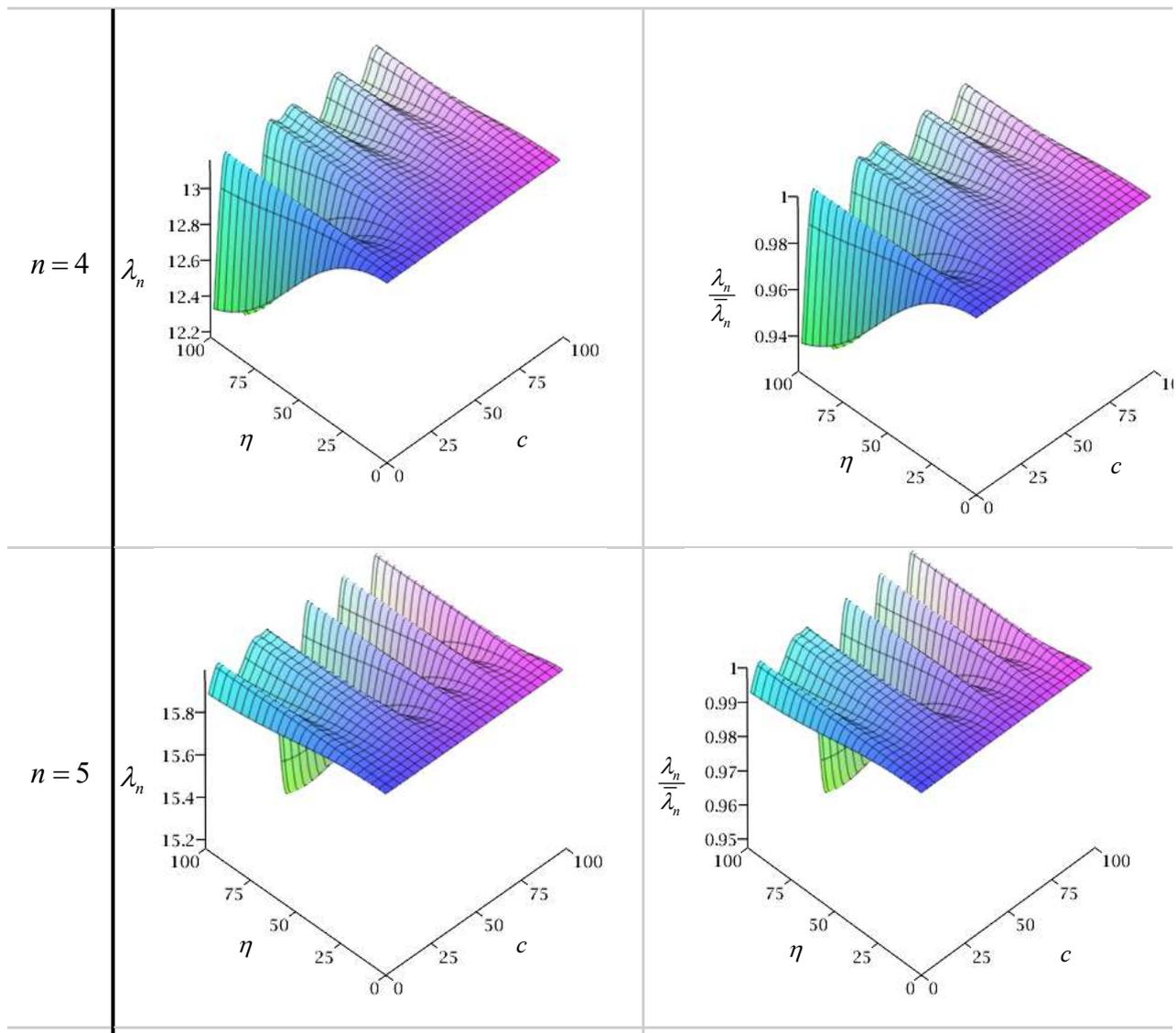
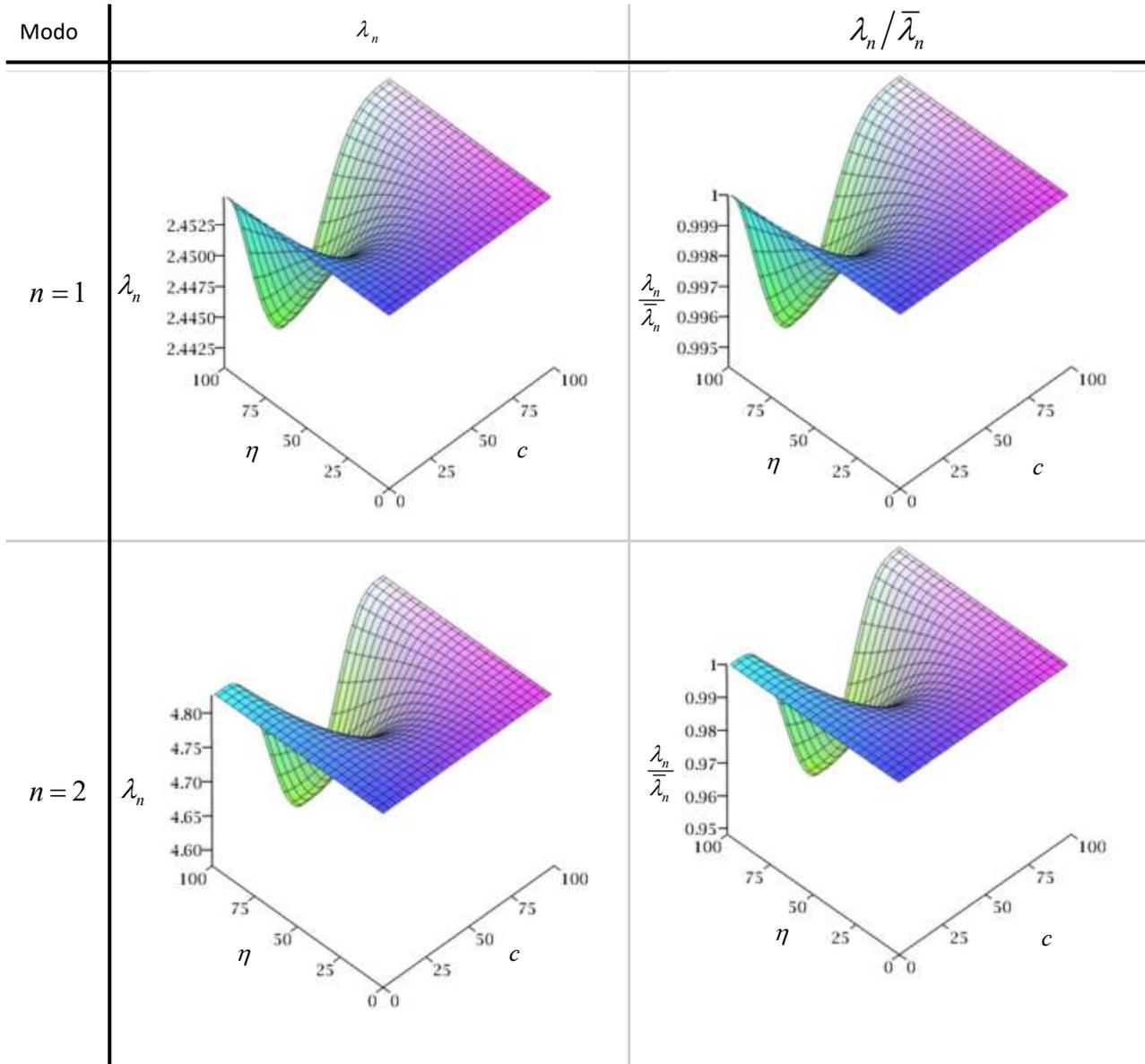


Figura A3.21 – Superficie de los coeficientes adimensionales de frecuencias para la condición E-E con una rotula en  $c = 0.33$ .

**A3.4 Condiciones de vinculación elásticas en los extremos**

- L-L  $\Rightarrow$  A-L:  $T_1 = 10, R_1 = T_2 = R_2 = 0.$



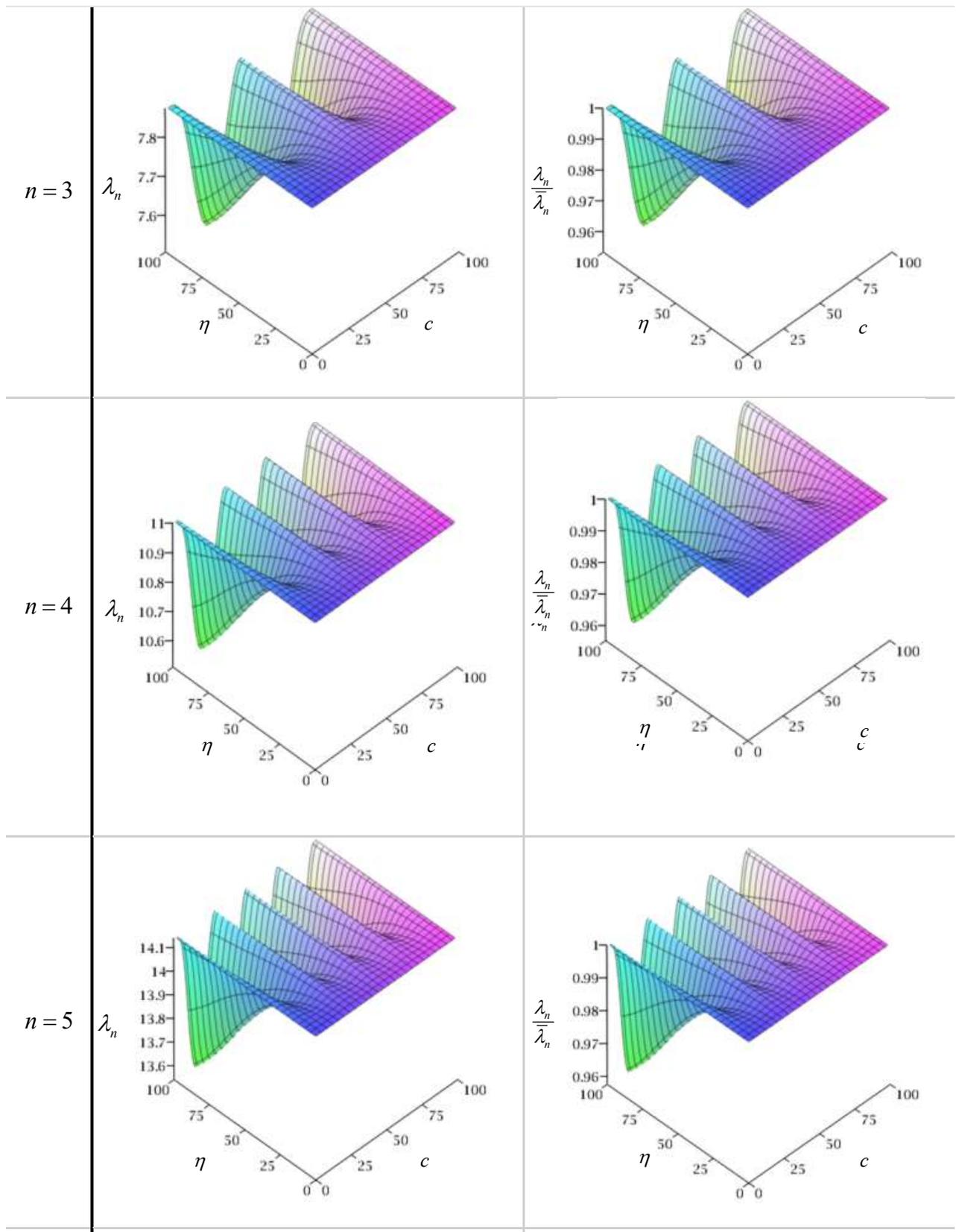
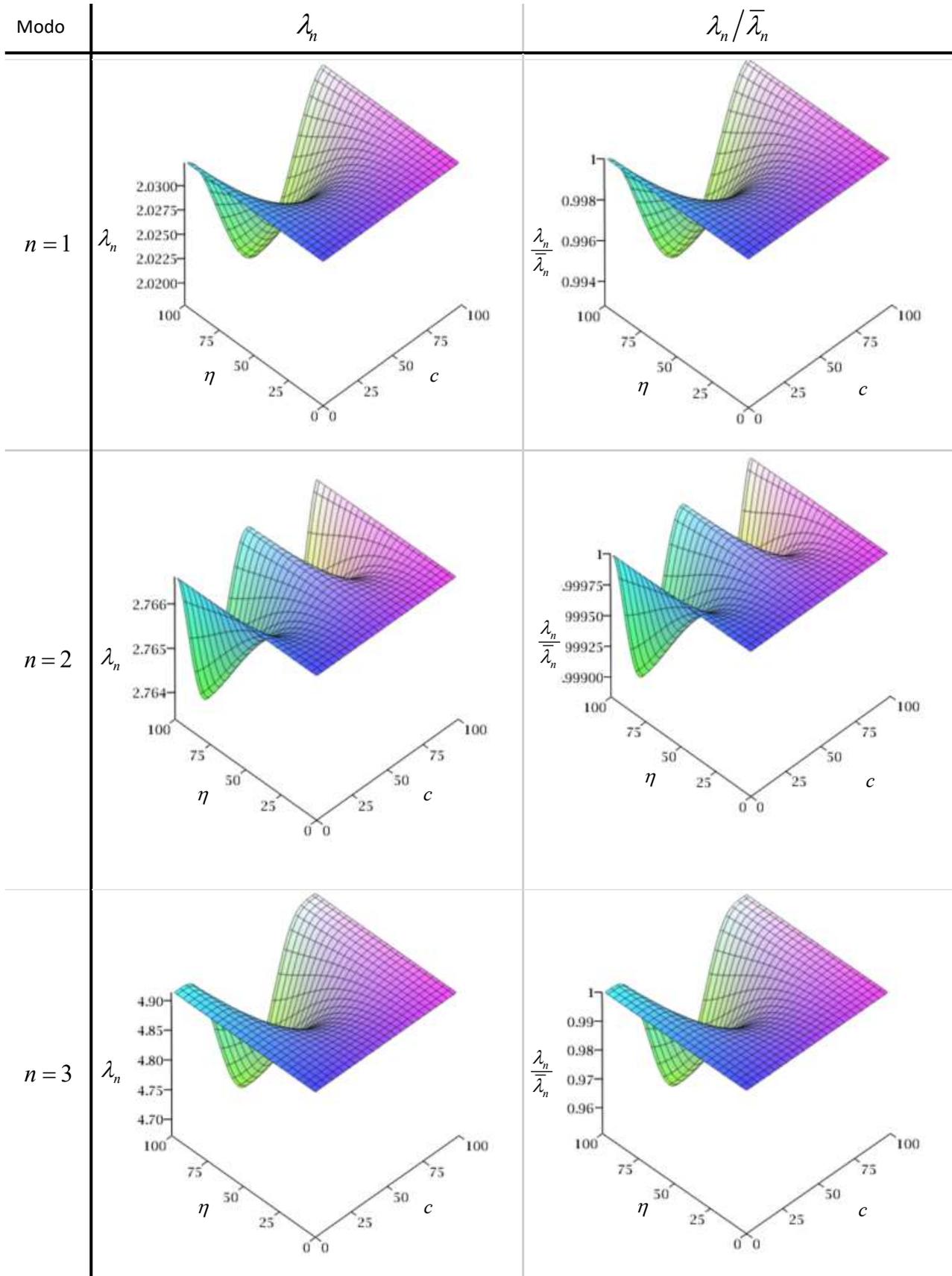


Figura A3.22 – Superficie de los coeficientes adimensionales de frecuencias para la condición  $T_1 = 10$ ,  $R_1 = T_2 = R_2 = 0$ .

- L-L  $\Rightarrow$  A-A:  $T_1=T_2=10$ ,  $R_1=R_2=0$ .



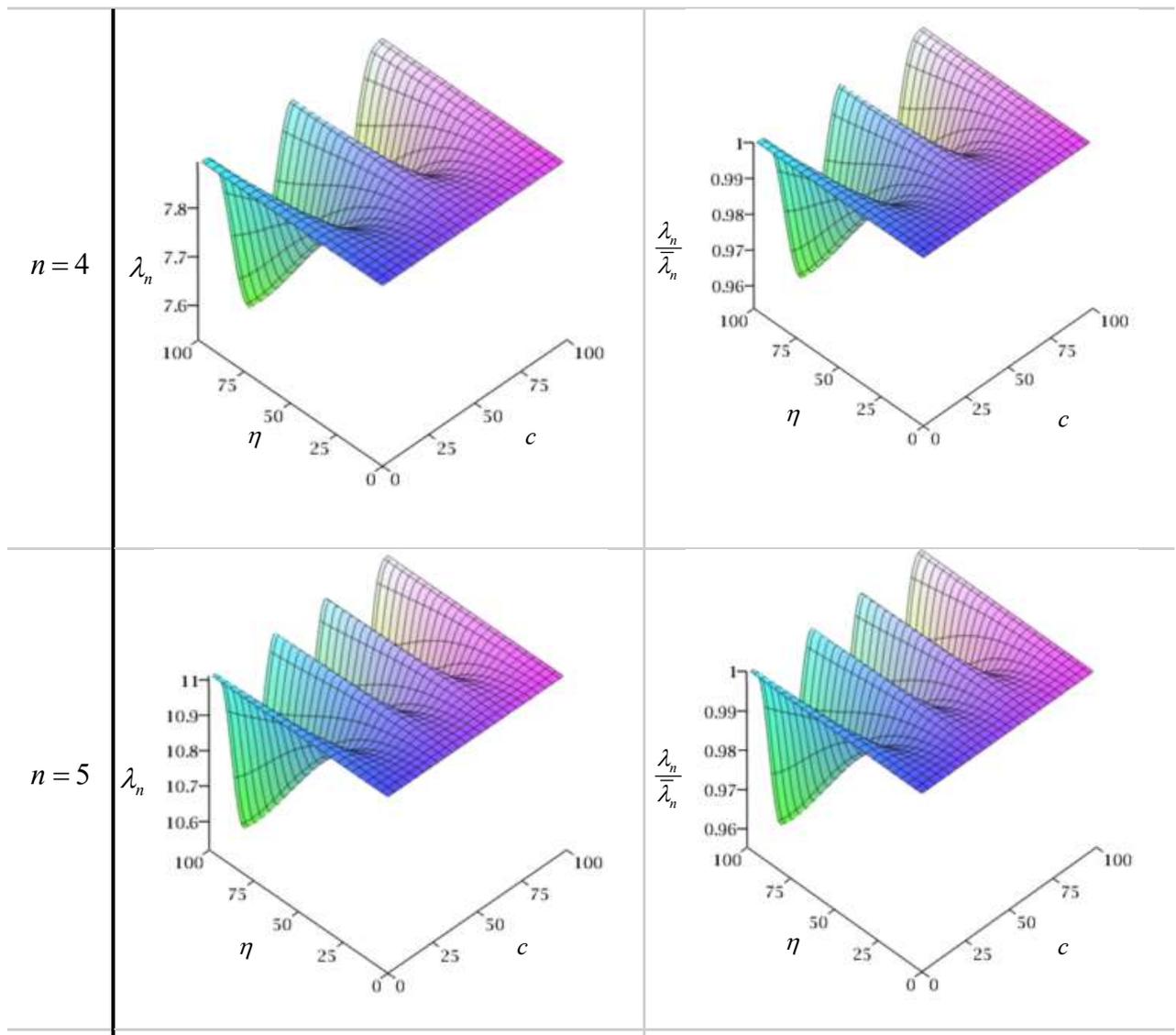
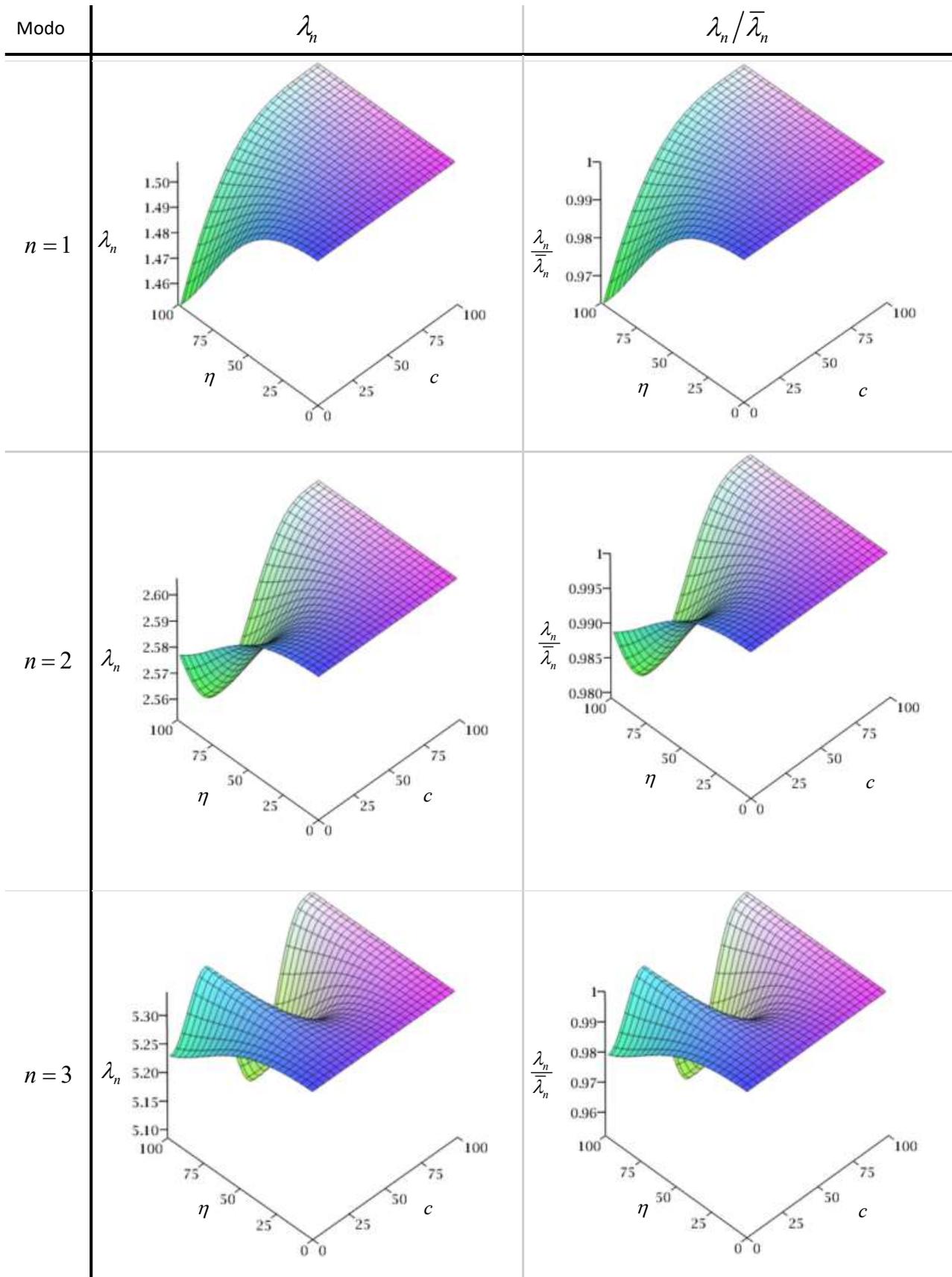


Figura A3.23 – Superficie de los coeficientes adimensionales de frecuencias para la condición  $T_1 = T_2 = 10$ ,  $R_1 = R_2 = 0$ .

- L-L  $\Rightarrow$  E-L:  $T_1=R_1=10, T_2=R_2=0$ .



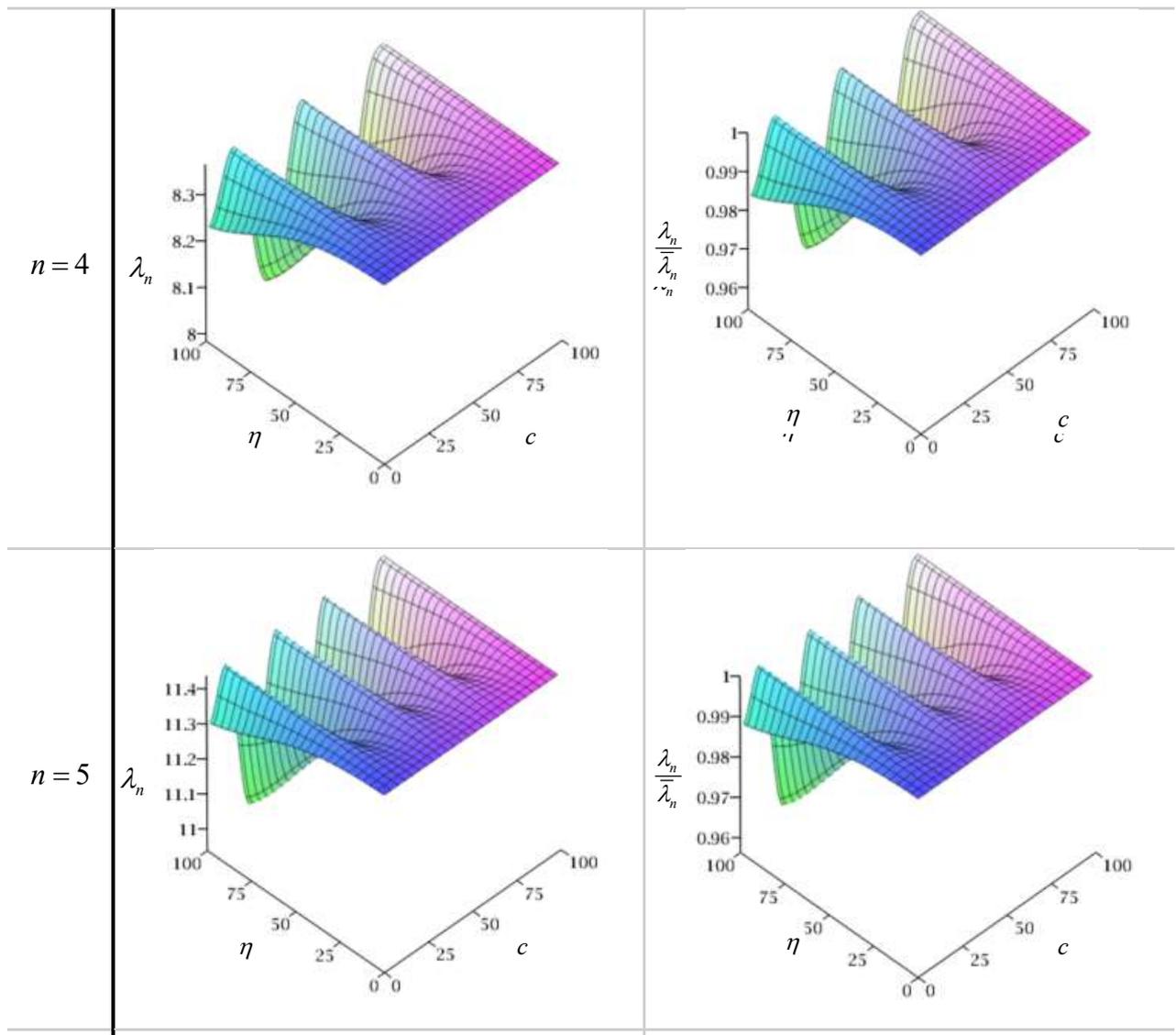
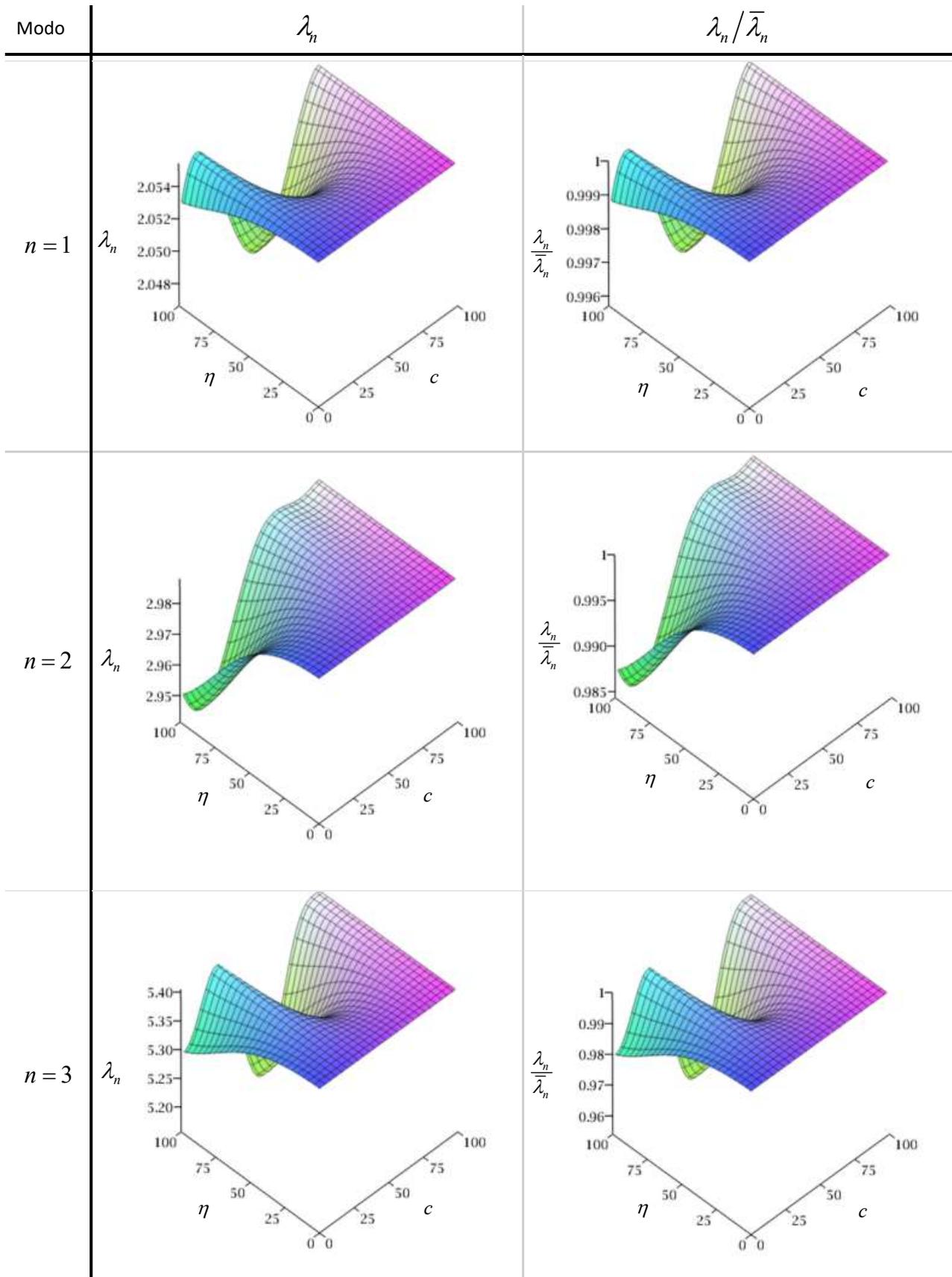


Figura A3.24 – Superficie de los coeficientes adimensionales de frecuencias para la condición  $T_1 = R_1 = 10$ ,  $T_2 = R_2 = 0$ .

- E-L  $\Rightarrow$  E-A:  $T_1 = R_1 = T_2 = 10, R_2 = 0$ .



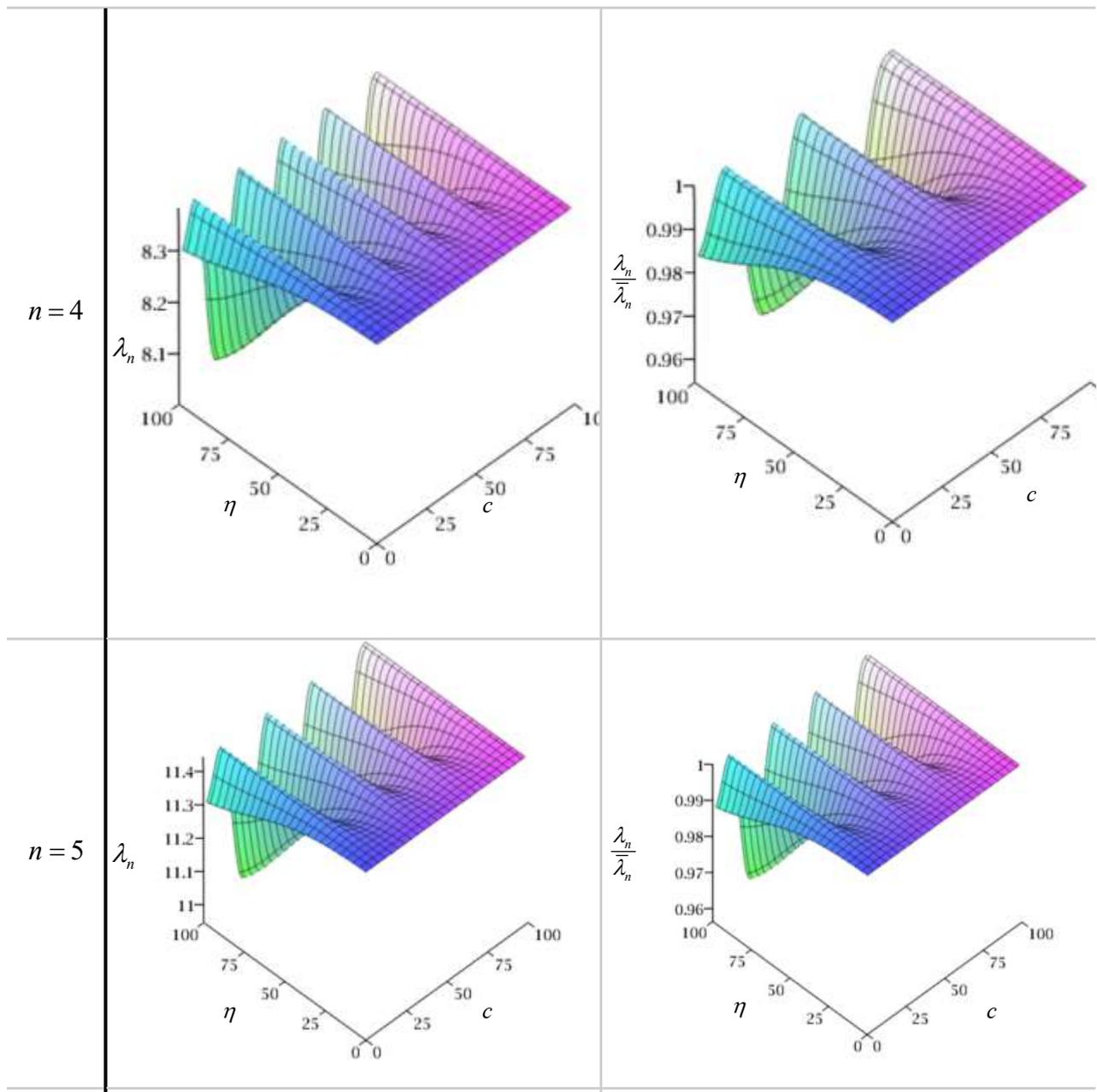
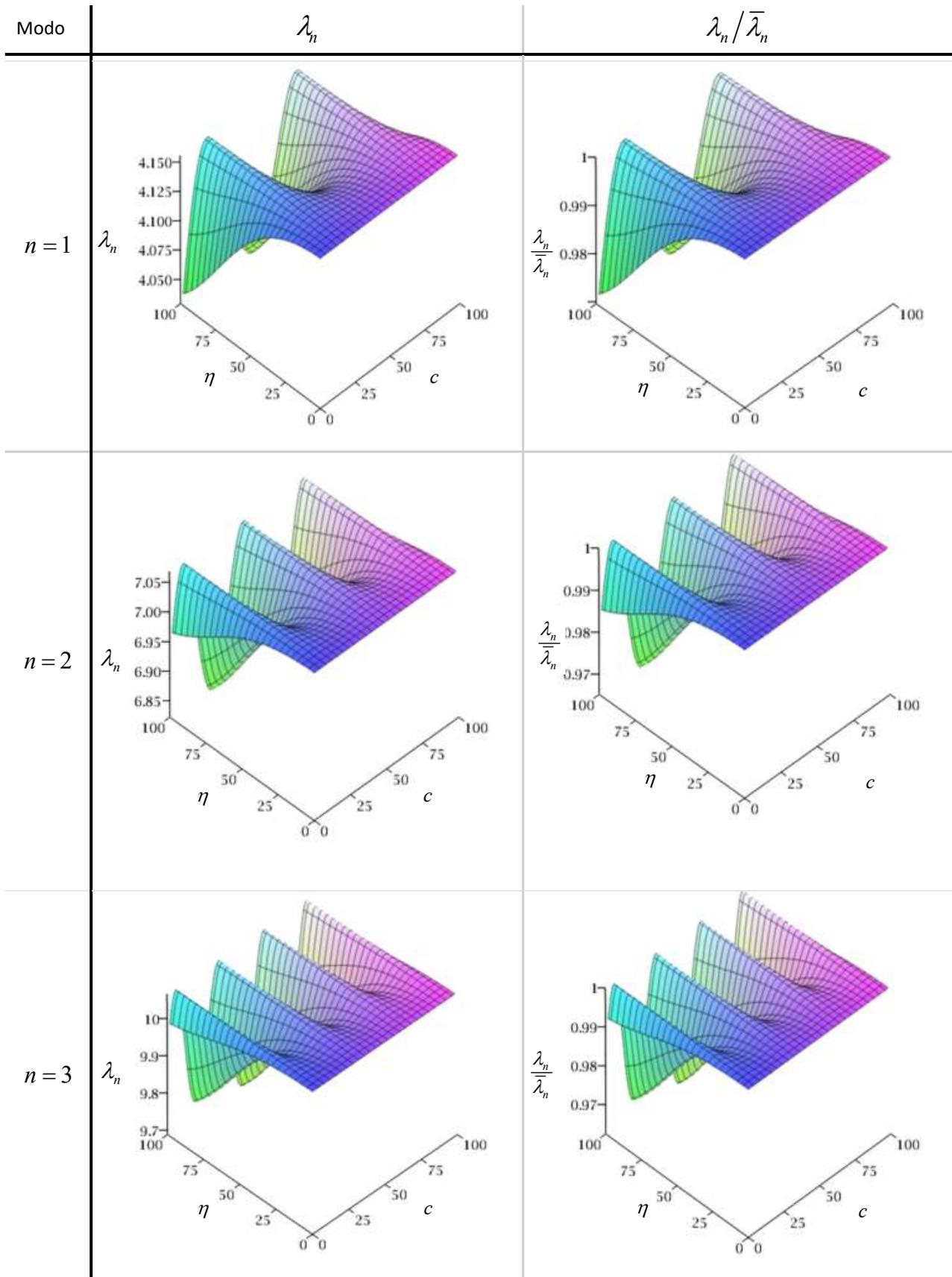


Figura A3.25 – Superficie de los coeficientes adimensionales de frecuencias para la condición  $T_1 = R_1 = T_2 = 10$ ,  $R_2 = 0$ .

- A-A => E-E:  $T_1 = T_2 = \infty$ ,  $R_1 = R_2 = 0$ .



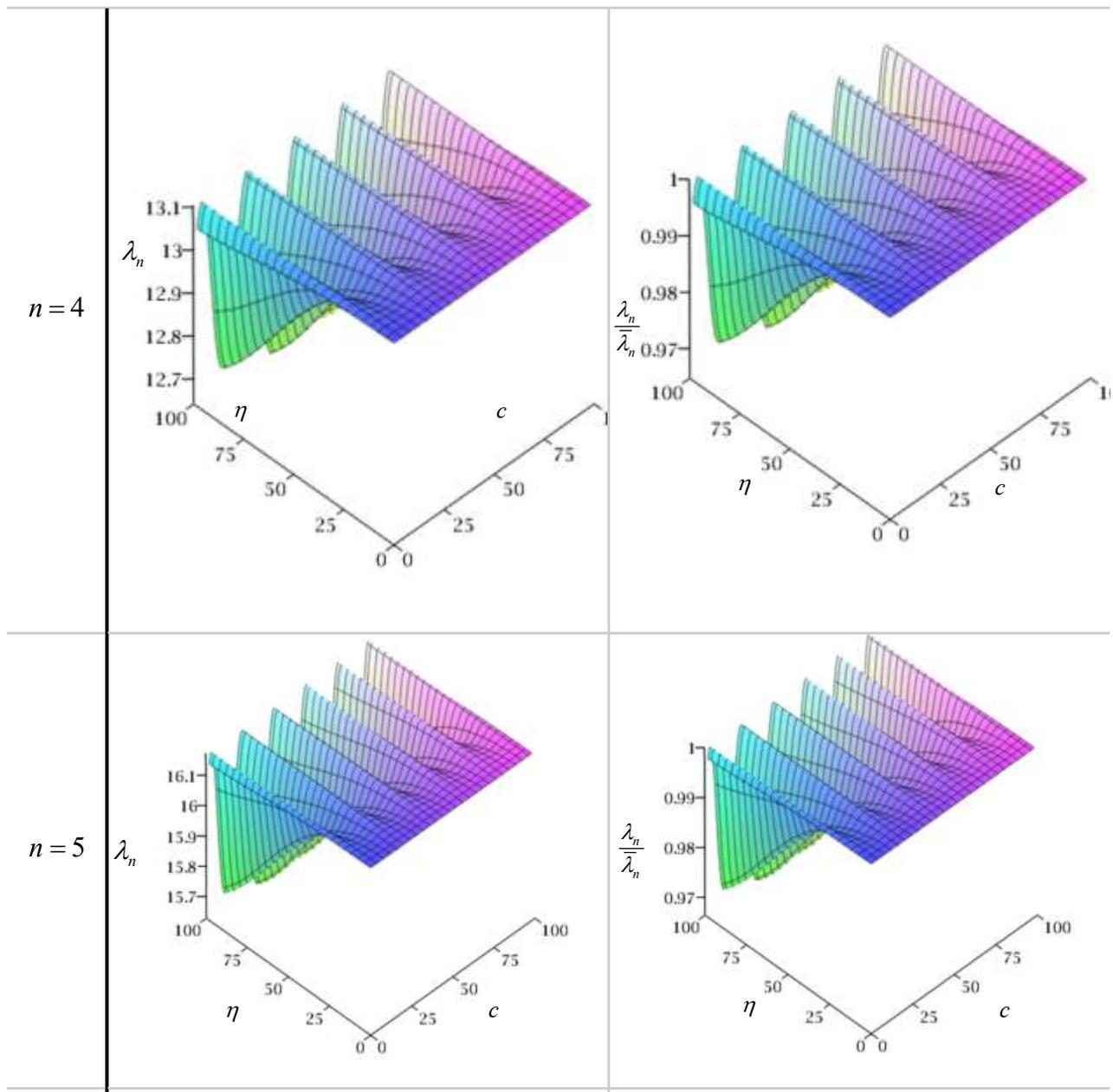
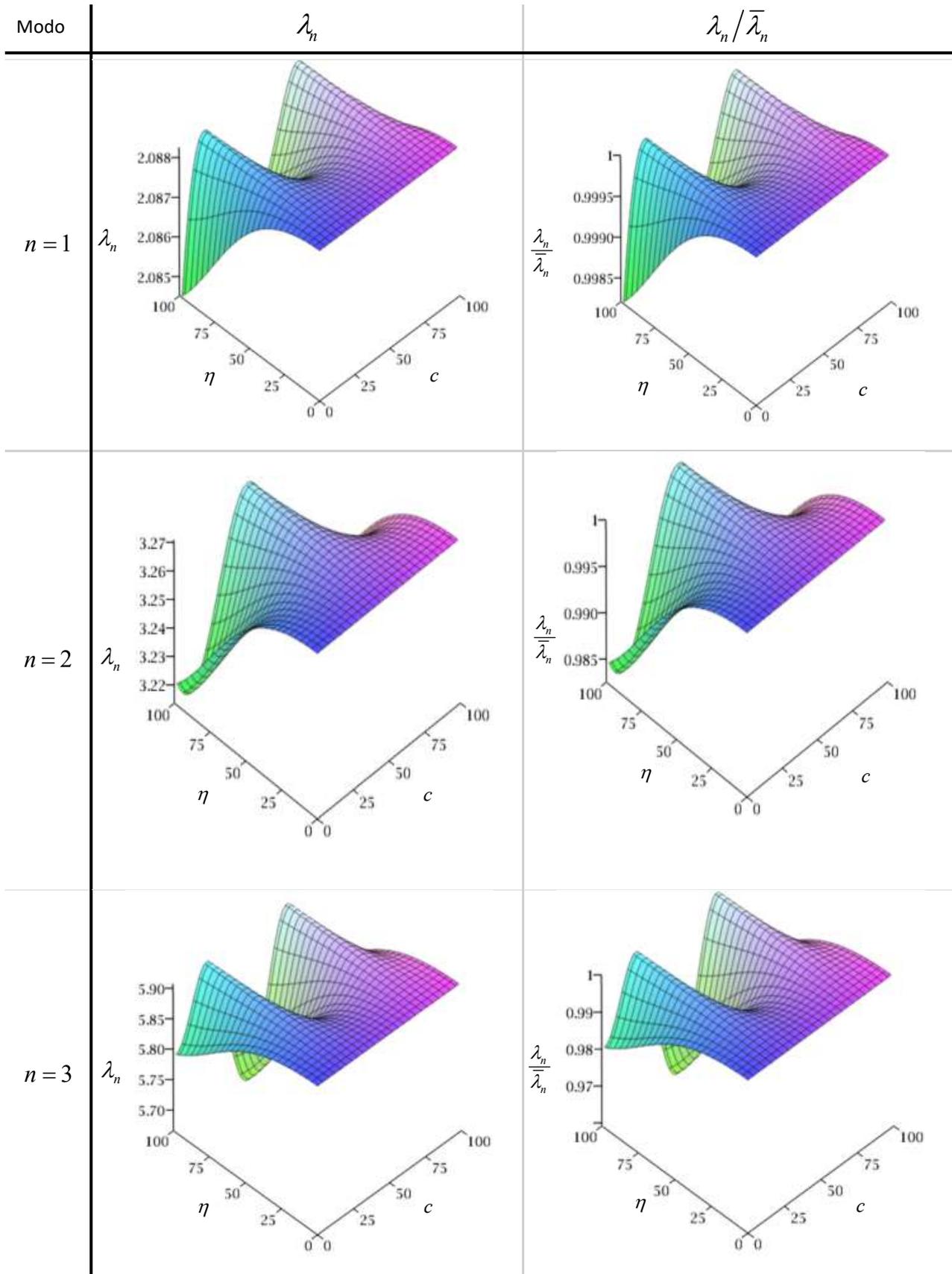


Figura A3.26 – Superficie de los coeficientes adimensionales de frecuencias para la condición  $T_1 = T_2 = \infty$ ,  $R_1 = R_2 = 0$ .

- A-A => E-E:  $T_1 = T_2 = R_1 = R_2 = 10$ .



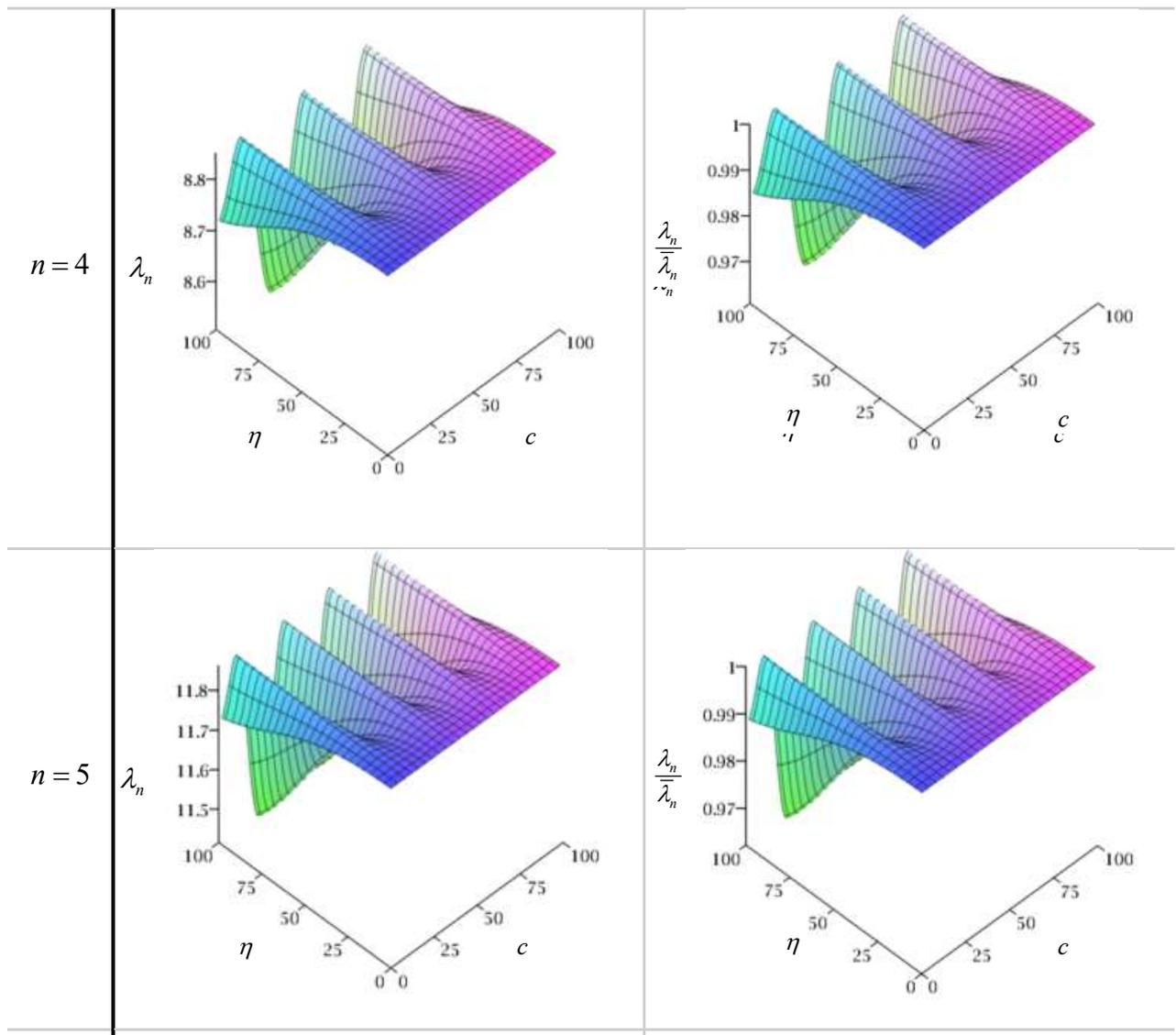


Figura A3.27 – Superficie de los coeficientes adimensionales de frecuencias para la condición  $T_1 = T_2 = R_1 = R_2 = 10$ .

# APÉNDICE 4

## Implementación del método 1A cuando la fisura se encuentre en un punto de inflexión de la forma modal

### A4.1 Ubicación de nodos, puntos de inflexión, giros y momentos nulos en vigas con vinculaciones típicas

Modo	Puntos de Inflexión	Deflexión Nula (Nodos)	Giro Nulo	Momento Nulo	Formas Modales	Giro	Momento Flector
1		0.000	0.000	1.000			
2	0.217	0.000 0.783	0.000 0.471	0.217 1.000			
3	0.132 0.496	0.000 0.504 0.868	0.000 0.291 0.692	0.132 0.496 1.000			
4	0.094 0.356 0.642	0.000 0.358 0.644 0.906	0.000 0.208 0.501 0.927	0.094 0.356 0.642 1.000			
5	0.073 0.277 0.500 0.721	0.000 0.279 0.500 0.723 0.927	0.000 0.162 0.389 0.611 0.829	0.073 0.277 0.500 0.721 1.000			
6	0.060 0.226 0.409 0.591 0.772	0.000 0.228 0.409 0.591 0.774 0.940	0.000 0.132 0.318 0.500 0.682 0.860	0.060 0.226 0.409 0.591 0.772 1.000			

Tabla A4.1 – Formas modales para viga E-L.  
Ubicación de nodos, puntos de inflexión, giros y momentos nulos.

Modo	Puntos de Inflexión	Deflexión Nula (Nodos)	Giro Nulo	Momento Nulo	Formas Modales	Giro	Momento Flector	
1	0.000	0.000	0.383	0.000				
	1.000	0.736		1.000				
2	0.000	0.000	0.223	0.000				
	0.443	0.446		0.443				
	1.000	0.853		1.000				
3	0.000	0.000	0.154	0.000				
	0.308	0.308		0.308				
	0.614	0.617		0.614				
	1.000			1.000				
4	0.000	0.000	0.118	0.000				
	0.235	0.235		0.235				
	0.471	0.471		0.471				
	0.705	0.707		0.705				
	1.000	0.922		1.000				
5	0.000	0.000	0.095	0.000				
	0.190	0.190		0.190				
	0.381	0.381		0.476				0.381
	0.571	0.571		0.667				0.571
	0.761	0.763		0.853				0.761
	1.000	0.937		1.000				
6	0.000	0.000	0.080	0.000				
	0.160	0.160		0.240				0.160
	0.320	0.320		0.400				0.320
	0.480	0.480		0.560				0.480
	0.640	0.640		0.720				0.640
	0.799	0.801		0.877				0.799
	1.000	0.947		1.000				

Tabla A4.2 – Formas modales para viga A-L.  
Ubicación de nodos, puntos de inflexión, giros y momentos nulos.

Modo	Puntos de Inflexión	Deflexión Nula (Nodos)	Giro Nulo	Momento Nulo	Formas Modales	Giro	Momento Flector
1	0.264	0.000	0.000	0.264			
	1.000	1.000	0.581	1.000			
2	0.147	0.000	0.000	0.147			
	0.554	0.557	0.323	0.554			
	1.000	1.000	0.778	1.000			
3	0.102	0.000	0.000	0.102			
	0.383	0.386	0.224	0.383			
	0.692	0.692	0.539	0.692			
	1.000	1.000	0.846	1.000			
4	0.078	0.000	0.000	0.078			
	0.293	0.295	0.171	0.293			
	0.529	0.529	0.412	0.529			
	0.765	0.765	0.647	0.765			
	1.000	1.000	0.882	1.000			
5	0.063	0.000	0.000	0.063			
	0.237	0.239	0.138	0.237			
	0.429	0.429	0.334	0.429			
	0.619	0.619	0.524	0.619			
	0.810	0.810	0.714	0.810			
	1.000	1.000	0.905	1.000			
6	0.053	0.000	0.000	0.053			
	0.199	0.201	0.116	0.199			
	0.360	0.360	0.280	0.360			
	0.520	0.520	0.440	0.520			
	0.680	0.680	0.600	0.680			
	0.840	0.840	0.760	0.840			
	1.000	1.000	0.920	1.000			

Tabla A4.3 – Formas modales para viga E-A.  
Ubicación de nodos, puntos de inflexión, giros y momentos nulos.

Modo	Puntos de Inflexión	Deflexión Nula (Nodos)	Giro Nulo	Momento Nulo	Formas Modales	Giro	Momento Flector
1	0.000	0.224	0.500	0.000			
	1.000	0.776		1.000			
2	0.000	0.132	0.308	0.000			
	0.500	0.500	0.692	0.500			
	1.000	0.868	1.000				
3	0.000	0.094	0.220	0.000			
	0.358	0.356	0.500	0.358			
	0.642	0.644	0.780	0.642			
	1.000	0.906	1.000				
4	0.000	0.073	0.171	0.000			
	0.279	0.277	0.389	0.279			
	0.500	0.500	0.611	0.500			
	0.721	0.723	0.829	0.721			
	1.000	0.927	1.000				
5	0.000	0.060	0.140	0.000			
	0.228	0.226	0.318	0.228			
	0.409	0.409	0.500	0.409			
	0.591	0.591	0.682	0.591			
	0.772	0.774	0.860	0.772			
	1.000	0.940	1.000				
6	0.000	0.051	0.118	0.000			
	0.193	0.192	0.269	0.193			
	0.346	0.346	0.423	0.346			
	0.500	0.500	0.577	0.500			
	0.654	0.654	0.731	0.654			
	0.807	0.808	0.882	0.807			
	1.000	0.949	1.000				

Tabla A4.4 – Formas modales para viga L-L.  
Ubicación de nodos, puntos de inflexión, giros y momentos nulos.

Modo	Puntos de Inflexión	Deflexión Nula (Nodos)	Giro Nulo	Momento Nulo	Formas Modales	Giro	Momento Flector
1	0.000	0.000	0.500	0.000			
	1.000	1.000		1.000			
2	0.000	0.000	0.250	0.000			
	0.500	0.500	0.750	0.500			
	1.000	1.000		1.000			
3	0.000	0.000	0.167	0.000			
	0.333	0.333	0.500	0.333			
	0.667	0.667	0.833	0.667			
	1.000	1.000		1.000			
4	0.000	0.000	0.125	0.000			
	0.250	0.250	0.375	0.250			
	0.500	0.500	0.625	0.500			
	0.750	0.750	0.875	0.750			
	1.000	1.000		1.000			
5	0.000	0.000	0.100	0.000			
	0.200	0.200	0.300	0.200			
	0.400	0.400	0.500	0.400			
	0.600	0.600	0.700	0.600			
	0.800	0.800	0.900	0.800			
	1.000	1.000		1.000			
6	0.000	0.000	0.083	0.000			
	0.167	0.167	0.250	0.167			
	0.333	0.333	0.417	0.333			
	0.500	0.500	0.583	0.500			
	0.667	0.667	0.750	0.667			
	0.833	0.833	0.917	0.833			
	1.000	1.000		1.000			

Tabla A4.5 – Formas modales para viga A-A.  
Ubicación de nodos, puntos de inflexión, giros y momentos nulos.

Modo	Puntos de Inflexión	Deflexión Nula (Nodos)	Giro Nulo	Momento Nulo	Formas Modales	Giro	Momento Flector
1	0.224	0.000	0.000	0.224			
	0.776	1.000	0.500	0.776			
			1.000				
2	0.132	0.000	0.000	0.132			
	0.500	0.500	0.290	0.500			
	0.868	1.000	0.710	0.868			
			1.000				
3	0.094	0.000	0.000	0.094			
	0.356	0.358	0.208	0.356			
	0.644	0.642	0.500	0.644			
	0.906	1.000	0.792	0.906			
			1.000				
4	0.073	0.000	0.000	0.073			
	0.277	0.279	0.162	0.277			
	0.500	0.500	0.389	0.500			
	0.723	0.721	0.611	0.723			
	0.927	1.000	0.838	0.927			
			1.000				
5	0.060	0.000	0.000	0.060			
	0.226	0.228	0.132	0.226			
	0.409	0.409	0.318	0.409			
	0.591	0.591	0.500	0.591			
	0.774	0.772	0.682	0.774			
	0.940	1.000	0.868	0.940			
			1.000				
6	0.051	0.000	0.000	0.051			
	0.192	0.193	0.112	0.192			
	0.346	0.346	0.269	0.346			
	0.500	0.500	0.423	0.500			
	0.654	0.654	0.577	0.654			
	0.808	0.807	0.731	0.808			
	0.949	1.000	0.888	0.949			
			1.000				

Tabla A4.6 – Formas modales para viga E-E.  
Ubicación de nodos, puntos de inflexión, giros y momentos nulos.

**A4.2 Coeficientes adimensionales de frecuencias de vigas con fisuras, cuya posición de fisura corresponde a los puntos de inflexión de las formas modales**

c	Secuencia modal						Modo de elevadas rigideces
	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_3$	$\lambda_4$	$\lambda_5$	$\lambda_6$	
SF	1.875104	4.694091	7.854757	10.995541	14.137168	17.278760	Detecta ok
0.217	1.874475	4.694091	7.853590	10.992287	14.134631	17.278596	2
0.132	1.874253	4.693649	7.854757	10.994766	14.134285	17.273745	3
0.496	1.874954	4.692476	7.854757	10.991818	14.137156	17.272931	3
0.094	1.874141	4.693129	7.854371	10.995541	14.136626	17.276575	4
0.356	1.874763	4.693338	7.852801	10.995541	14.133304	17.275051	4
0.642	1.875059	4.692824	7.852387	10.995541	14.133256	17.275317	4
0.073	1.874076	4.692750	7.853785	10.995221	14.137168	17.278344	5
0.277	1.874612	4.693914	7.852599	10.993503	14.137168	17.275369	5
0.500	1.874957	4.692468	7.854755	10.991814	14.137168	17.272909	5
0.721	1.875086	4.693352	7.851722	10.993206	14.137168	17.275277	5
0.060	1.874034	4.692475	7.853264	10.994650	14.136897	17.278760	6
0.226	1.874499	4.694086	7.853390	10.992300	14.135241	17.278760	6
0.409	1.875086	4.693352	7.851722	10.993206	14.137168	17.275277	6
0.591	1.875031	4.692565	7.853489	10.994479	14.132781	17.278760	6
0.772	1.875096	4.693663	7.852281	10.991464	14.134992	17.278760	6

Tabla A4.7 - Posición de la fisura, los primeros 6 coeficientes adimensionales de frecuencias y en qué modo se presentan valores de rigideces varios ordenes de magnitud mayor a los esperados para el caso E-L.

c	Secuencia modal						Modo de elevadas rigideces
	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_3$	$\lambda_4$	$\lambda_5$	$\lambda_6$	
SF	3.926602	7.068583	10.210176	13.351769	16.493361	19.634954	Detecta ok
0.443	3.925096	7.068583	10.206860	13.351161	16.489328	19.631958	2
0.308	3.925328	7.066981	10.210176	13.348698	16.488485	19.634577	3
0.614	3.925702	7.066291	10.210176	13.347794	16.491038	19.633368	3
0.235	3.925689	7.066220	10.208605	13.351769	16.490822	19.628363	4
0.471	3.925137	7.068486	10.206767	13.351769	16.487822	19.634732	4
0.705	3.926144	7.065930	10.207814	13.351769	16.489759	19.628911	4
0.190	3.925943	7.066313	10.207178	13.350335	16.493361	19.632841	5
0.381	3.925114	7.068150	10.208580	13.347848	16.493361	19.629192	5
0.571	3.925493	7.066986	10.209552	13.347489	16.493361	19.628636	5
0.761	3.926357	7.066568	10.206301	13.349548	16.493361	19.631825	5
0.160	3.926111	7.066626	10.206728	13.348548	16.492067	19.634954	6
0.320	3.925279	7.067181	10.210122	13.348062	16.489383	19.634954	6
0.480	3.925158	7.068412	10.206860	13.351698	16.487797	19.634954	6
0.640	3.925834	7.066001	10.209930	13.349123	16.488808	19.634954	6
0.799	3.926462	7.067185	10.206398	13.347279	16.491325	19.634954	6

Tabla A4.8 - Posición de la fisura, los primeros 6 coeficientes adimensionales de frecuencias y en qué modo se presentan valores de rigideces varios ordenes de magnitud mayor a los esperados para el caso A-L.

c	Secuencia modal						Modo de elevadas rigideces
	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_3$	$\lambda_4$	$\lambda_5$	$\lambda_6$	
SF	3.926602	7.068583	10.210176	13.351769	16.493361	19.634954	Detecta ok
0.264	3.926602	7.067147	10.207407	13.351157	16.492343	19.628871	1
0.147	3.926117	7.068583	10.209319	13.348697	16.488479	19.630448	2
0.554	3.925509	7.068583	10.206779	13.351316	16.489016	19.632463	2
0.102	3.925640	7.068178	10.210176	13.351182	16.491026	19.630257	3
0.383	3.926264	7.066678	10.210176	13.347833	16.490770	19.633666	3
0.692	3.925540	7.066938	10.210176	13.348706	16.488478	19.634570	3
0.078	3.925318	7.067598	10.209842	13.351769	16.492920	19.633141	4
0.293	3.926578	7.066765	10.208130	13.351769	16.489845	19.628711	4
0.529	3.925580	7.068516	10.206722	13.351769	16.487826	19.634727	4
0.765	3.925815	7.066191	10.208608	13.351769	16.490822	19.628363	4
0.063	3.925095	7.067101	10.209264	13.351487	16.493361	19.634602	5
0.237	3.926579	7.067582	10.207150	13.349807	16.493361	19.631925	5
0.429	3.926035	7.067243	10.209496	13.347450	16.493361	19.628636	5
0.619	3.925429	7.068113	10.208568	13.347852	16.493361	19.629192	5
0.810	3.926026	7.066293	10.207180	13.350335	16.493361	19.632841	5
0.053	3.924933	7.066703	10.208696	13.350942	16.493118	19.634954	6
0.199	3.926461	7.068178	10.207637	13.348070	16.491543	19.634954	6
0.360	3.926370	7.066524	10.209992	13.349039	16.488775	19.634954	6
0.520	3.925613	7.068455	10.206813	13.351697	16.487800	19.634954	6
0.680	3.925507	7.067139	10.210121	13.348063	16.489383	19.634954	6
0.840	3.926170	7.066611	10.206730	13.348548	16.492067	19.634954	6

Tabla A4.9 - Posición de la fisura, los primeros 6 coeficientes adimensionales de frecuencias y en qué modo se presentan valores de rigideces varios ordenes de magnitud mayor a los esperados para el caso E-A.

c	Secuencia modal						Modo de elevadas rigideces
	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_3$	$\lambda_4$	$\lambda_5$	$\lambda_6$	
SF	4.730041	7.853205	10.995608	14.137165	17.278760	20.420352	Detecta ok
0.500	4.728016	7.853205	10.991924	14.137165	17.272906	20.420352	2, 4 Y 6
0.358	4.728623	7.850879	10.995608	14.133246	17.275328	20.419924	3
0.642	4.728623	7.850879	10.995608	14.133246	17.275328	20.419924	3
0.279	4.729238	7.850193	10.993270	14.137165	17.275277	20.413736	4
0.721	4.729238	7.850193	10.993270	14.137165	17.275277	20.413736	4
0.228	4.729581	7.850740	10.991529	14.134990	17.278760	20.417333	5
0.409	4.728287	7.851984	10.994555	14.132774	17.278760	20.413989	5
0.591	4.728287	7.851984	10.994555	14.132774	17.278760	20.413989	5
0.772	4.729581	7.850740	10.991529	14.134990	17.278760	20.417333	5
0.193	4.729765	7.851404	10.991437	14.132591	17.276770	20.420352	6
0.346	4.728716	7.850658	10.995538	14.133962	17.274192	20.420352	6
0.654	4.728716	7.850658	10.995538	14.133962	17.274192	20.420352	6
0.807	4.729765	7.851404	10.991437	14.132591	17.276770	20.420352	6

Tabla A4.10 - Posición de la fisura, los primeros 6 coeficientes adimensionales de frecuencias y en qué modo se presentan valores de rigideces varios ordenes de magnitud mayor a los esperados para el caso L-L.

c	Secuencia modal						Modo de elevadas rigideces
	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_3$	$\lambda_4$	$\lambda_5$	$\lambda_6$	
SF	3.141593	6.283185	9.424778	12.566371	15.707963	18.849556	Detecta ok
0.500	3.140526	6.283185	9.421583	12.566371	15.702643	18.849556	2, 4 y 6
0.333	3.140793	6.281587	9.424778	12.563175	15.703976	18.849556	3 y 6
0.667	3.140793	6.281587	9.424778	12.563175	15.703976	18.849556	3 y 6
0.250	3.141059	6.281054	9.423181	12.566371	15.705299	18.843175	4
0.750	3.141059	6.281054	9.423181	12.566371	15.705299	18.843175	4
0.200	3.141224	6.281256	9.421889	12.564901	15.707963	18.847347	5
0.400	3.140628	6.282449	9.423673	12.562520	15.707963	18.843782	5
0.600	3.140628	6.282449	9.423673	12.562520	15.707963	18.843782	5
0.800	3.141224	6.281256	9.421889	12.564901	15.707963	18.847347	5
0.167	3.141326	6.281585	9.421582	12.563180	15.706635	18.849556	6
0.833	3.141326	6.281585	9.421582	12.563180	15.706635	18.849556	6

Tabla A4.11 - Posición de la fisura, los primeros 6 coeficientes adimensionales de frecuencias y en qué modo se presentan valores de rigideces varios ordenes de magnitud mayor a los esperados para el caso A-A.

c	Secuencia modal						Modo de elevadas rigideces
	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_3$	$\lambda_4$	$\lambda_5$	$\lambda_6$	
SF	4.730041	7.853205	10.995608	14.137165	17.278760	20.420352	Detecta ok
0.224	4.730041	7.851868	10.992359	14.135095	17.278751	20.417752	1
0.776	4.730041	7.851868	10.992359	14.135095	17.278751	20.417752	1
0.132	4.729549	7.853205	10.994842	14.134295	17.273751	20.414829	2
0.500	4.728855	7.853205	10.991838	14.137165	17.272912	20.420352	2, 4 Y 6
0.868	4.729549	7.853205	10.994842	14.134295	17.273751	20.414829	2
0.094	4.729026	7.852821	10.995608	14.136623	17.276575	20.415843	3
0.356	4.729451	7.851203	10.995608	14.133308	17.275041	20.420089	3
0.644	4.729451	7.851203	10.995608	14.133308	17.275041	20.420089	3
0.906	4.729026	7.852821	10.995608	14.136623	17.276575	20.415843	3
0.073	4.728648	7.852236	10.995288	14.137165	17.278344	20.418639	4
0.277	4.729918	7.851019	10.993573	14.137165	17.275369	20.413574	4
0.723	4.729918	7.851019	10.993573	14.137165	17.275369	20.413574	4
0.927	4.728648	7.852236	10.995288	14.137165	17.278344	20.418639	4
0.060	4.728375	7.851715	10.994717	14.136894	17.278760	20.420017	5
0.226	4.730040	7.851822	10.992369	14.135238	17.278760	20.417435	5
0.409	4.729121	7.852137	10.994480	14.132740	17.278760	20.413987	5
0.591	4.729121	7.852137	10.994480	14.132740	17.278760	20.413987	5
0.774	4.730040	7.851822	10.992369	14.135238	17.278760	20.417435	5
0.940	4.728375	7.851715	10.994717	14.136894	17.278760	20.420017	5
0.051	4.728172	7.851284	10.994140	14.136359	17.278525	20.420352	6
0.192	4.729984	7.852529	10.992701	14.133364	17.276979	20.420352	6
0.346	4.729515	7.851082	10.995568	14.133876	17.274160	20.420352	6
0.654	4.729515	7.851082	10.995568	14.133876	17.274160	20.420352	6
0.808	4.729984	7.852529	10.992701	14.133364	17.276979	20.420352	6
0.949	4.728172	7.851284	10.994140	14.136359	17.278525	20.420352	6

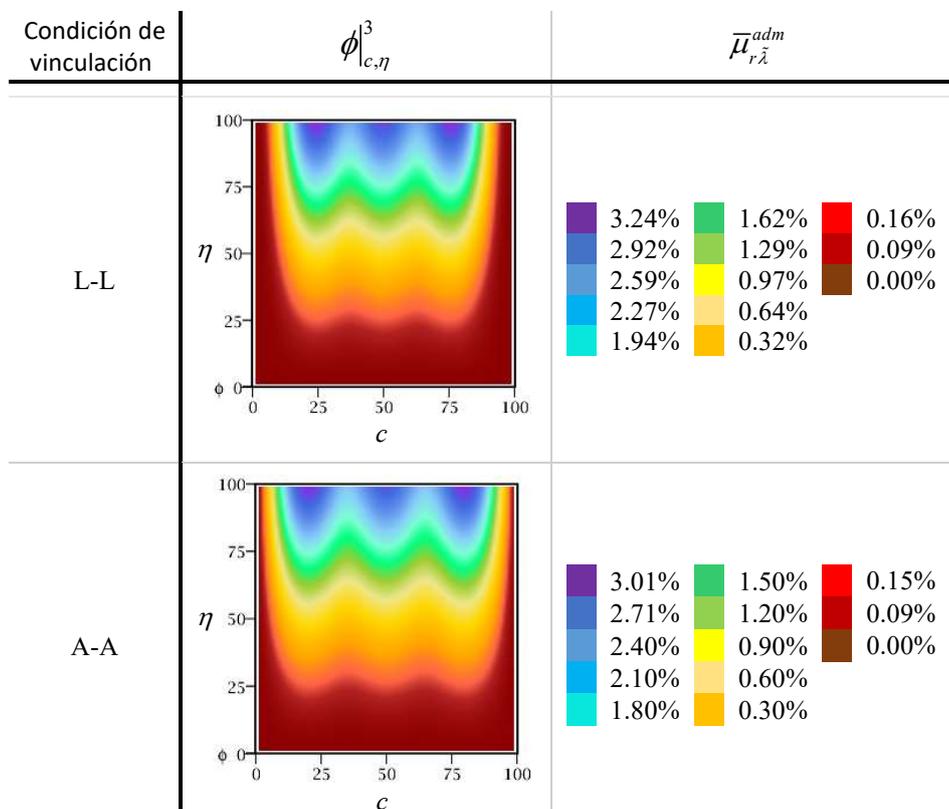
Tabla A4.12 - Posición de la fisura, los primeros 6 coeficientes adimensionales de frecuencias y en qué modo se presentan valores de rigideces varios ordenes de magnitud mayor a los esperados para el caso E-E.

# APÉNDICE 5

## Capacidad teórica de identificación de fisuras en vigas vibrantes. Resultados de la hipótesis 1: Sensibilidad de la respuesta vibratoria al daño presente

En la Figura A5.1 a A5.5 se presentan los resultados de la hipótesis 1: Sensibilidad de la respuesta vibratoria al daño presente, desarrollada en el capítulo 5 de la presente tesis.

### A5.1 Condiciones de vinculación clásicas



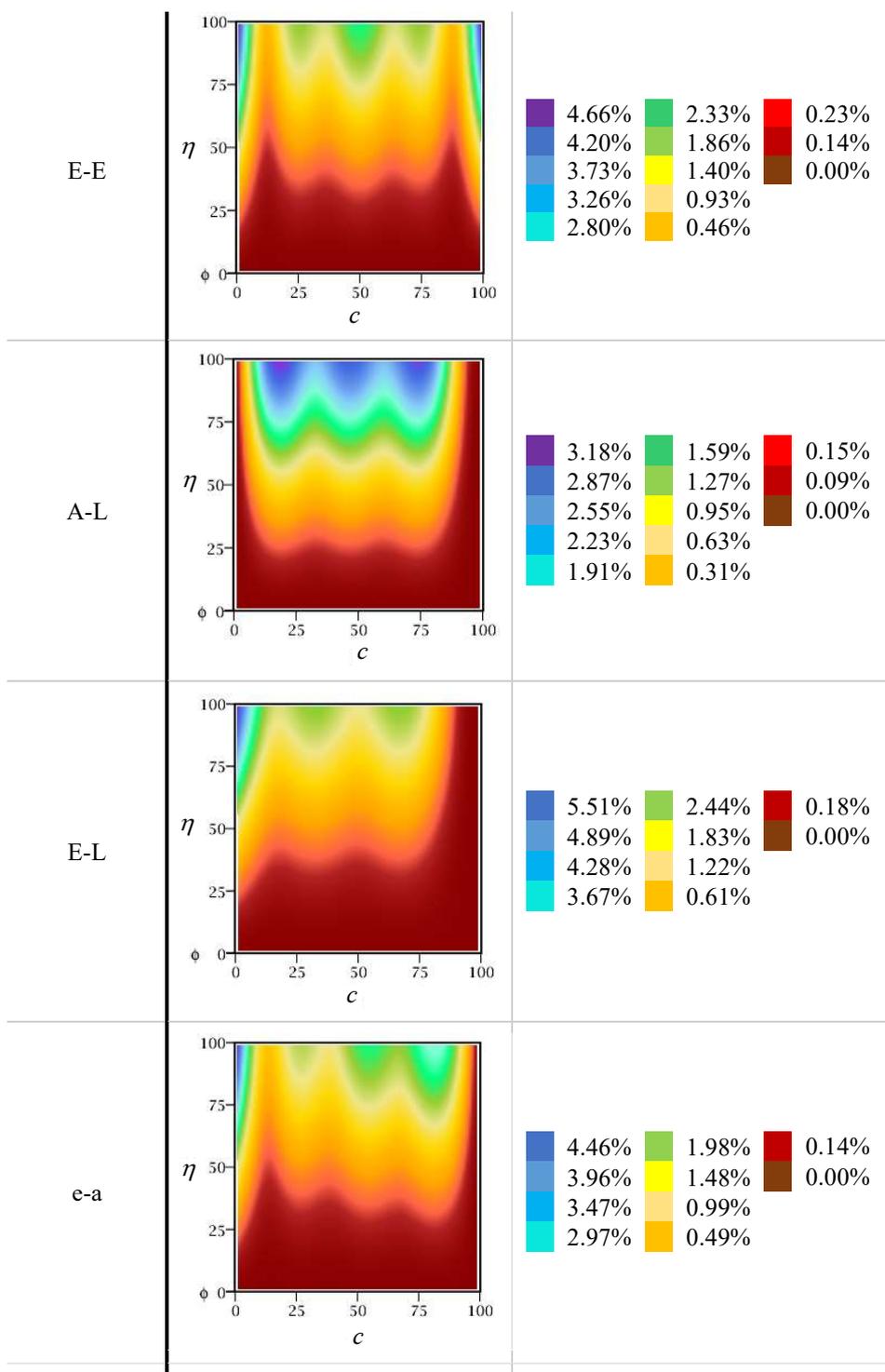


Figura A5.1 – Margen teórico de detección  $\phi|_{c,\eta}^3$  para diferentes condiciones de vinculación clásicas.

## A5.2 Vinculaciones clásicas con apoyos intermedios

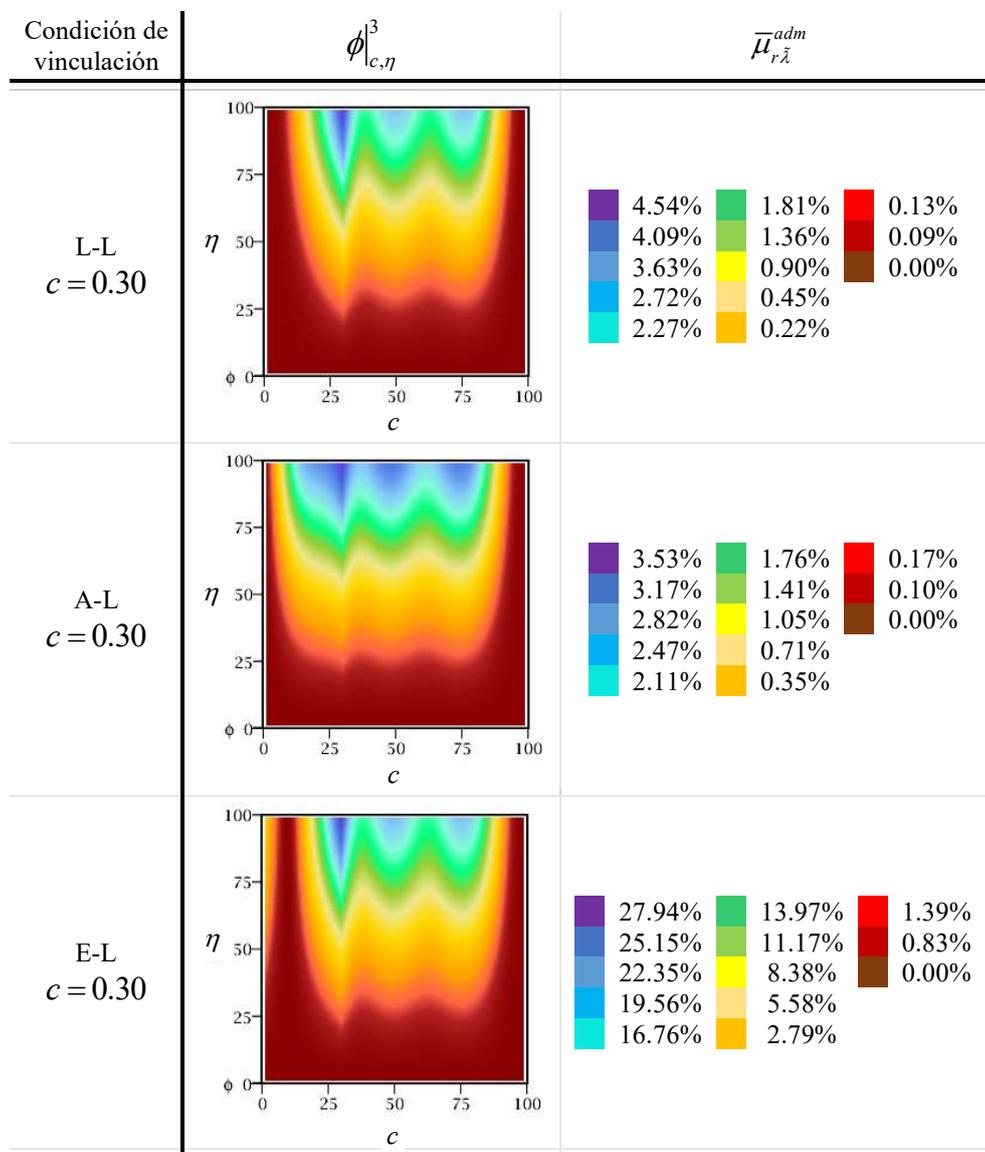


Figura A5.2 – Margen teórico de detección  $\phi_{c,\eta}^3$  para la condición L\_L, A-L y E-L, todas ellas con apoyos intermedios en  $c = 0.30$ .

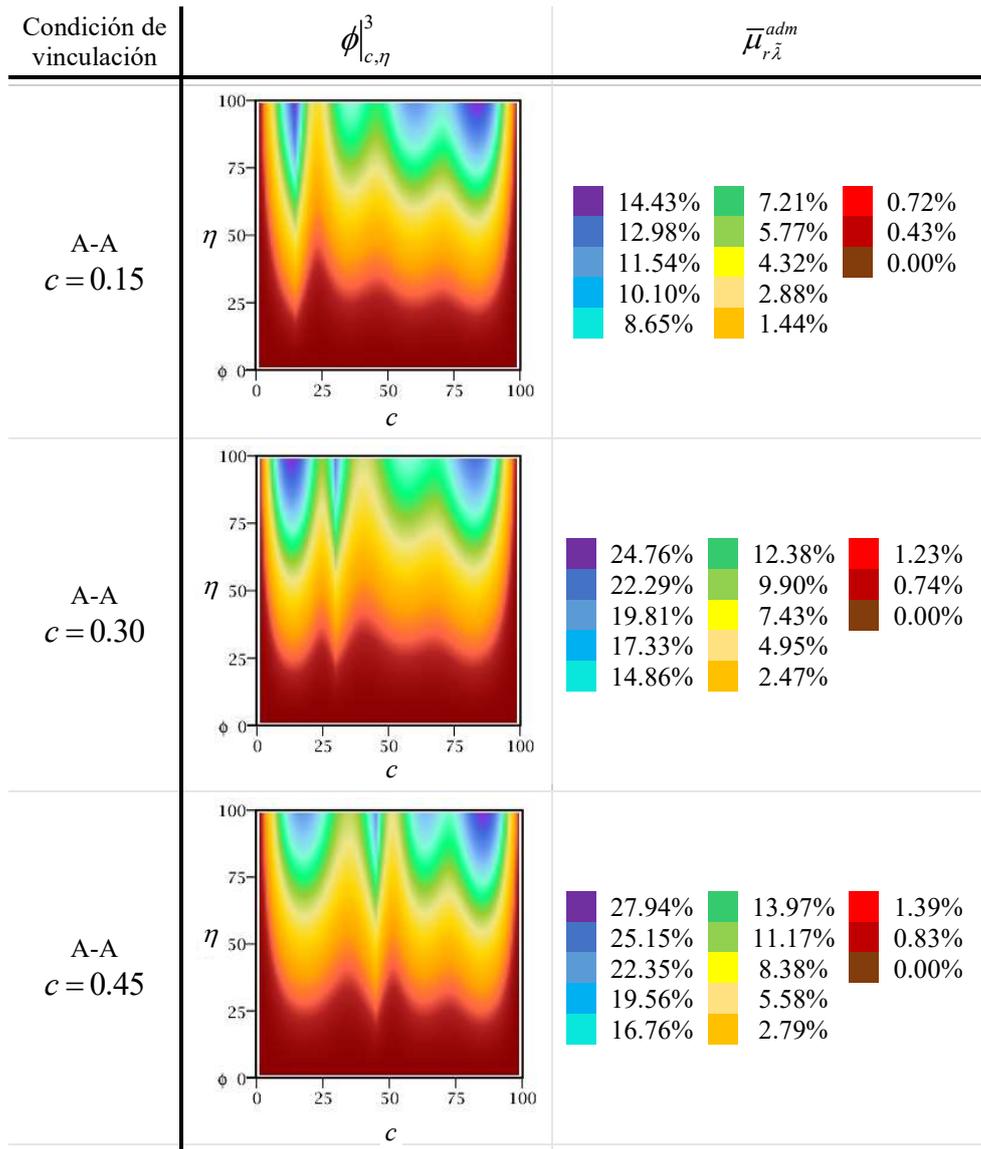


Figura A5.3 – Margen teórico de detección  $\phi_{c,\eta}^3$  para la condición A-A con apoyos intermedios en diferentes posiciones.

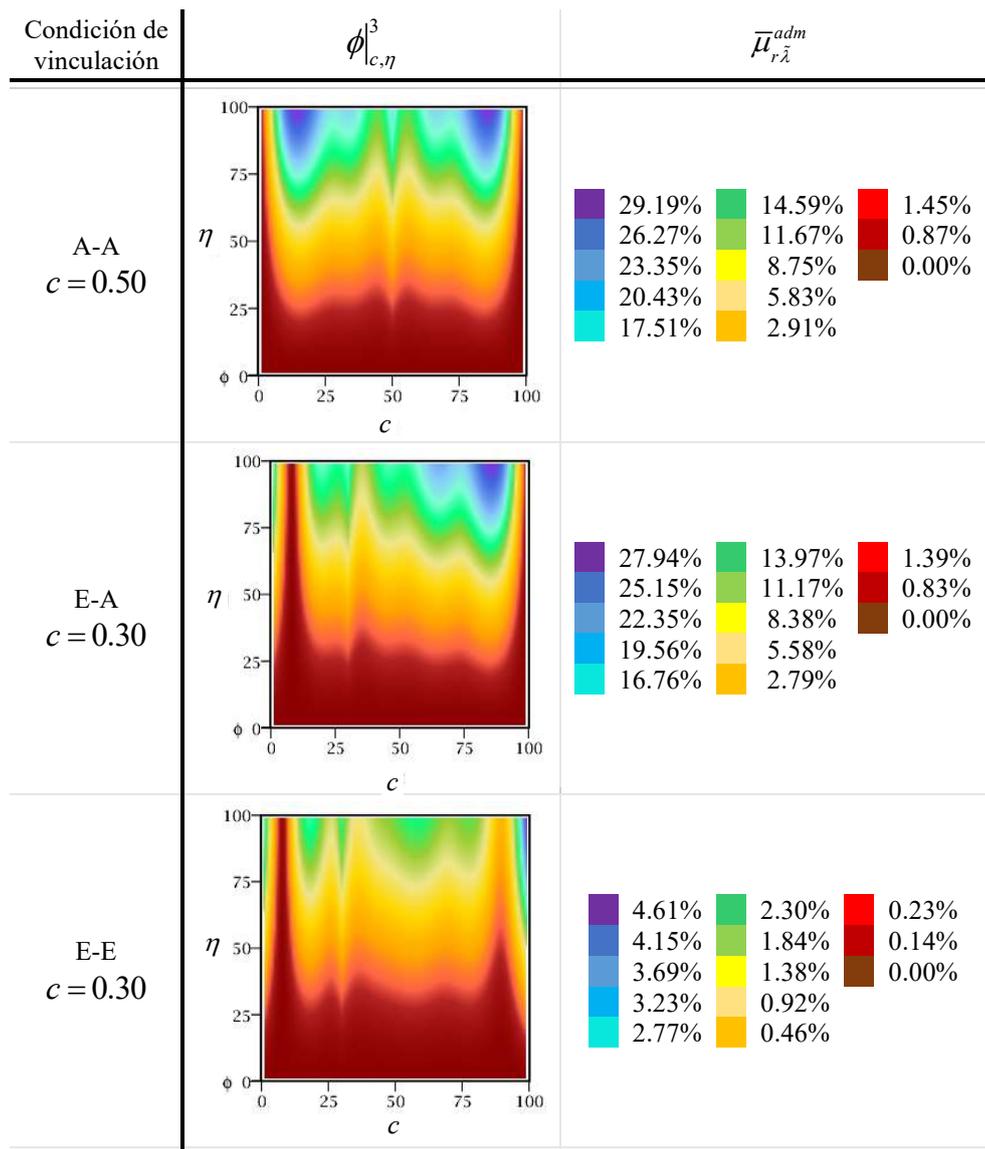
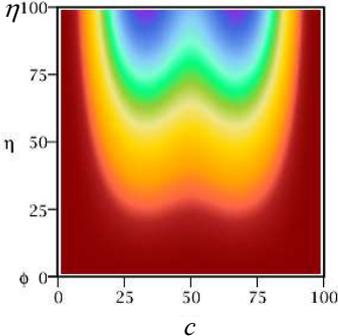
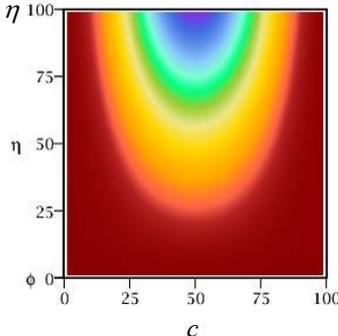
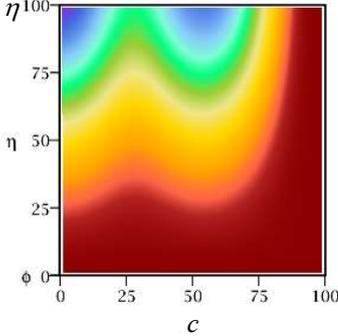
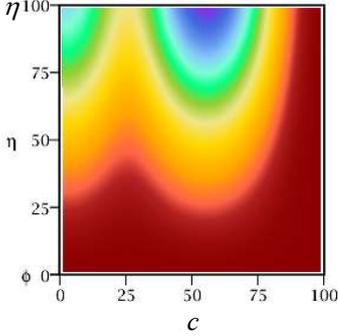
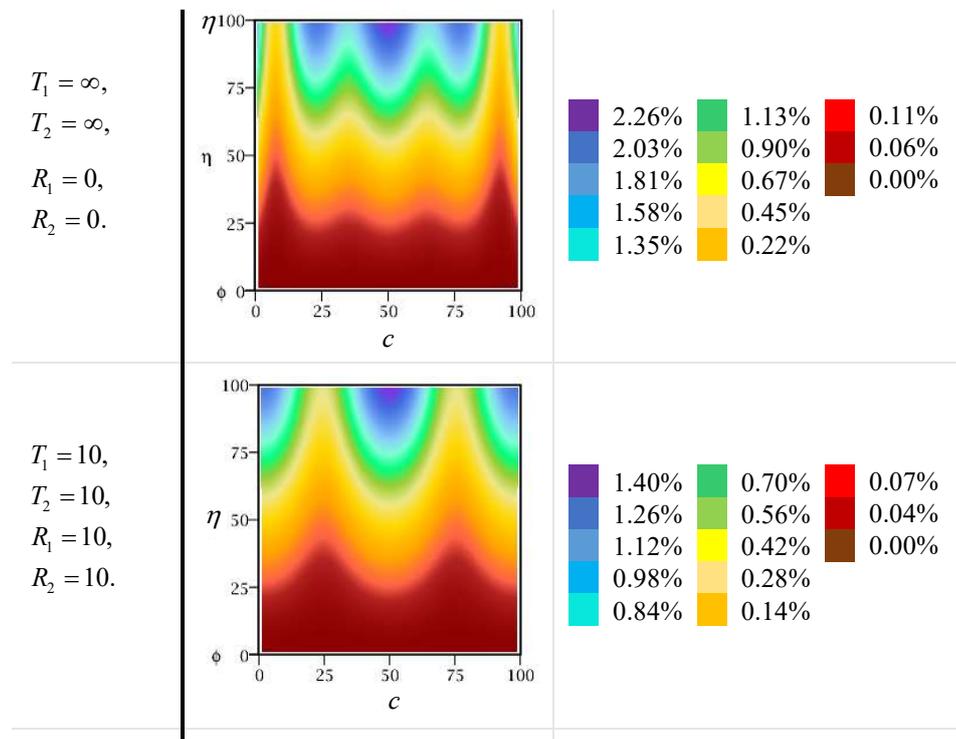


Figura A5.4 – Margen teórico de detección  $\phi_{c,\eta}^3$  para la condición A-A con apoyos intermedios en  $c = 0.50$ , y para E-A y E-E con apoyos en  $c = 0.30$ .

**A5.3 Vinculaciones elásticas en los extremos**

Condición de vinculación	Mapeo de MTD	$\bar{\mu}_{r\lambda}^{adm}$															
$T_1 = 10,$ $R_1 = 0$ $T_2 = 0$ $R_2 = 0.$		<table border="0"> <tr> <td>2.56%</td> <td>1.28%</td> <td>0.12%</td> </tr> <tr> <td>2.31%</td> <td>1.02%</td> <td>0.07%</td> </tr> <tr> <td>2.05%</td> <td>0.77%</td> <td>0.00%</td> </tr> <tr> <td>1.79%</td> <td>0.51%</td> <td></td> </tr> <tr> <td>1.54%</td> <td>0.25%</td> <td></td> </tr> </table>	2.56%	1.28%	0.12%	2.31%	1.02%	0.07%	2.05%	0.77%	0.00%	1.79%	0.51%		1.54%	0.25%	
2.56%	1.28%	0.12%															
2.31%	1.02%	0.07%															
2.05%	0.77%	0.00%															
1.79%	0.51%																
1.54%	0.25%																
$T_1 = 10,$ $T_2 = 10,$ $R_1 = 0,$ $R_2 = 0.$		<table border="0"> <tr> <td>1.87%</td> <td>0.93%</td> <td>0.09%</td> </tr> <tr> <td>1.68%</td> <td>0.74%</td> <td>0.05%</td> </tr> <tr> <td>1.49%</td> <td>0.56%</td> <td>0.00%</td> </tr> <tr> <td>1.31%</td> <td>0.37%</td> <td></td> </tr> <tr> <td>1.12%</td> <td>0.18%</td> <td></td> </tr> </table>	1.87%	0.93%	0.09%	1.68%	0.74%	0.05%	1.49%	0.56%	0.00%	1.31%	0.37%		1.12%	0.18%	
1.87%	0.93%	0.09%															
1.68%	0.74%	0.05%															
1.49%	0.56%	0.00%															
1.31%	0.37%																
1.12%	0.18%																
$T_1 = 10,$ $R_1 = 10,$ $T_2 = 0,$ $R_2 = 0.$		<table border="0"> <tr> <td>2.31%</td> <td>1.15%</td> <td>0.11%</td> </tr> <tr> <td>2.08%</td> <td>0.92%</td> <td>0.06%</td> </tr> <tr> <td>1.85%</td> <td>0.69%</td> <td>0.00%</td> </tr> <tr> <td>1.61%</td> <td>0.46%</td> <td></td> </tr> <tr> <td>1.38%</td> <td>0.23%</td> <td></td> </tr> </table>	2.31%	1.15%	0.11%	2.08%	0.92%	0.06%	1.85%	0.69%	0.00%	1.61%	0.46%		1.38%	0.23%	
2.31%	1.15%	0.11%															
2.08%	0.92%	0.06%															
1.85%	0.69%	0.00%															
1.61%	0.46%																
1.38%	0.23%																
$T_1 = 10,$ $R_1 = 10,$ $T_2 = 10,$ $R_2 = 0.$		<table border="0"> <tr> <td>1.71%</td> <td>0.85%</td> <td>0.08%</td> </tr> <tr> <td>1.54%</td> <td>0.68%</td> <td>0.05%</td> </tr> <tr> <td>1.37%</td> <td>0.51%</td> <td>0.00%</td> </tr> <tr> <td>1.20%</td> <td>0.34%</td> <td></td> </tr> <tr> <td>1.02%</td> <td>0.17%</td> <td></td> </tr> </table>	1.71%	0.85%	0.08%	1.54%	0.68%	0.05%	1.37%	0.51%	0.00%	1.20%	0.34%		1.02%	0.17%	
1.71%	0.85%	0.08%															
1.54%	0.68%	0.05%															
1.37%	0.51%	0.00%															
1.20%	0.34%																
1.02%	0.17%																



# APÉNDICE 6

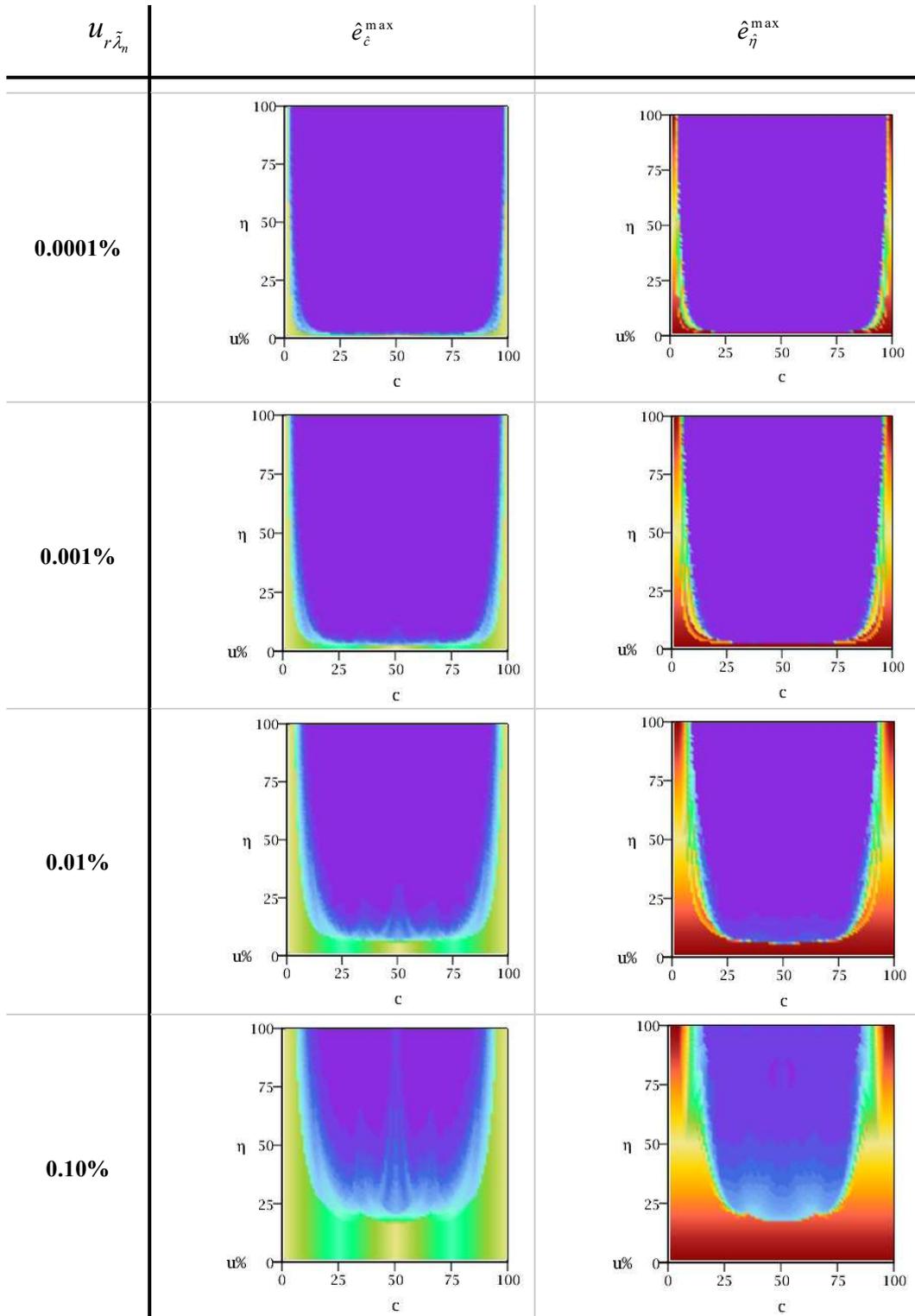
## Capacidad teórica de identificación de fisuras en vigas vibrantes. Resultados universales de la hipótesis 2: Áreas de incertidumbre

A continuación, se presentan los resultados universales de la capacidad teórica de identificación de fisuras en vigas vibrantes dadas por la hipótesis denominada áreas de incertidumbre.

Los mismos se presentan en forma de mapeo. Para cada posición y profundidad de fisura, y para ciertas incertidumbres en la determinación de los coeficientes adimensionales de frecuencias, se ha pronosticado el error máximo y el error promedio en la determinación de la posición y de la profundidad.

**A6.1 Condiciones de bordes clásicas**

- L-L



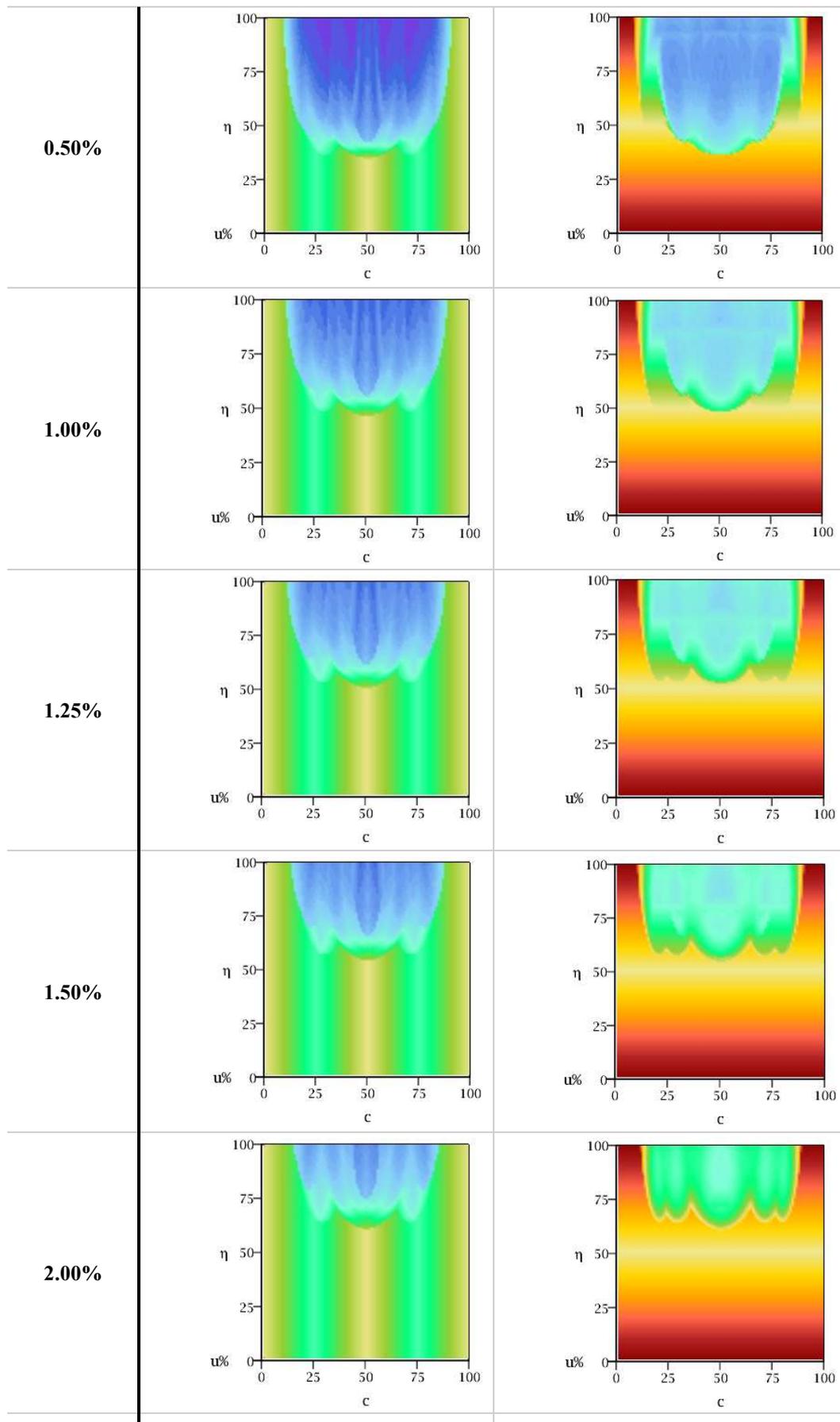
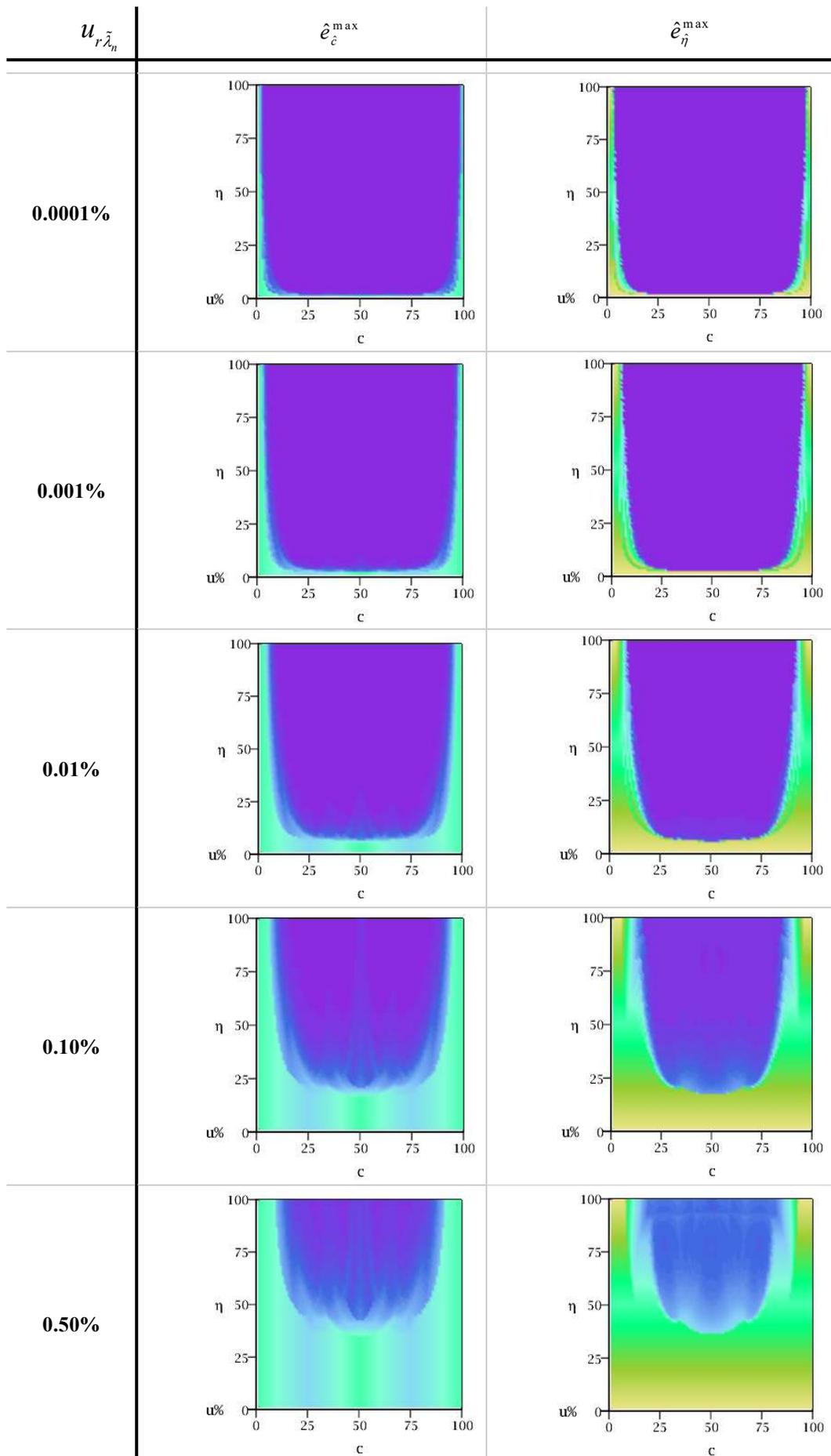


Figura A6.1 – Error máximo pronosticado en la determinación de la posición ( $\hat{e}_c^{\max}$ ) y profundidad ( $\hat{e}_\eta^{\max}$ ) para la condición L-L.



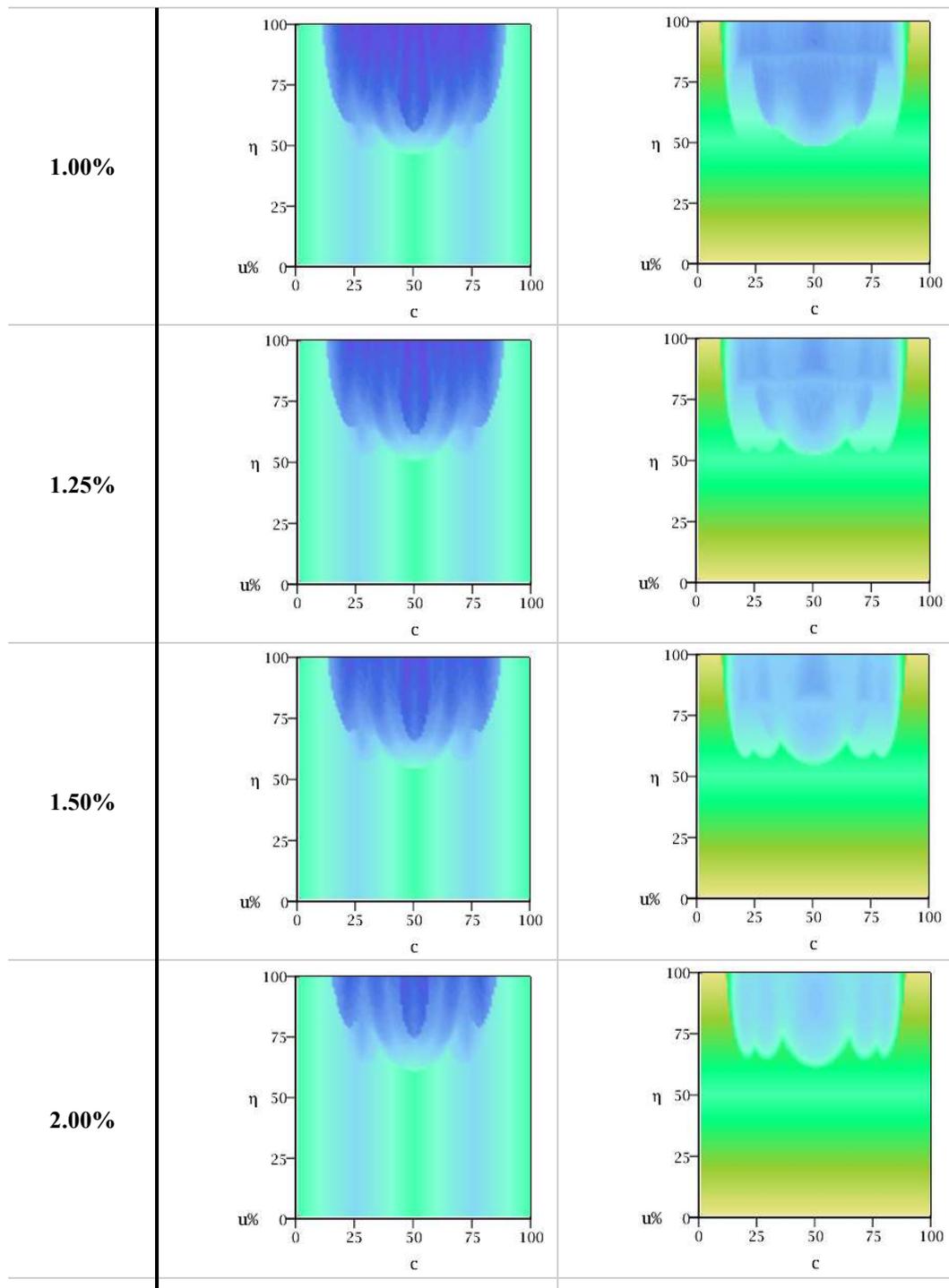
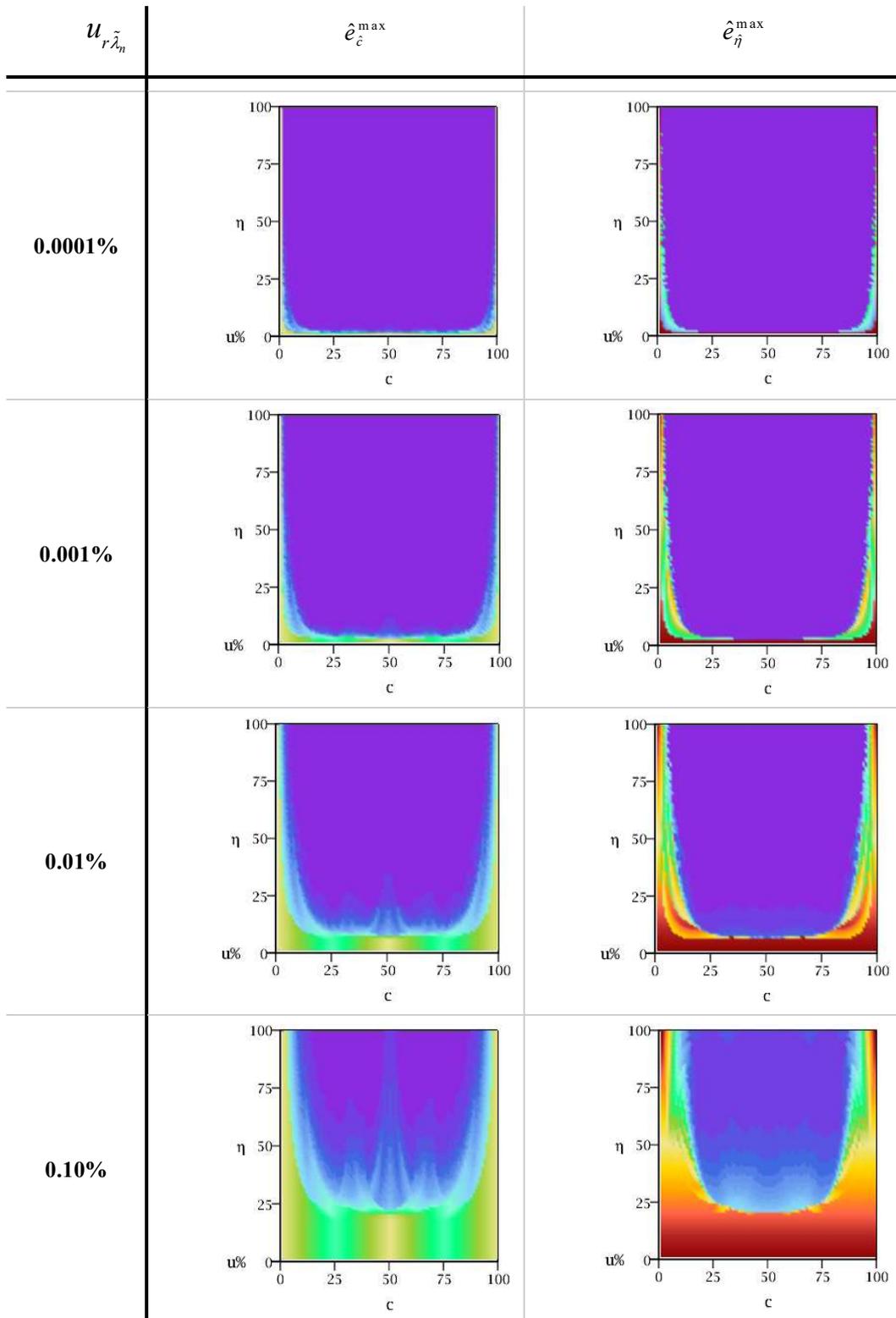


Figura A6.2 – Error promedio pronosticado en la determinación de la posición ( $\hat{e}_c^{pro}$ ) y profundidad ( $\hat{e}_\eta^{pro}$ ) para la condición L-L.

- A-A



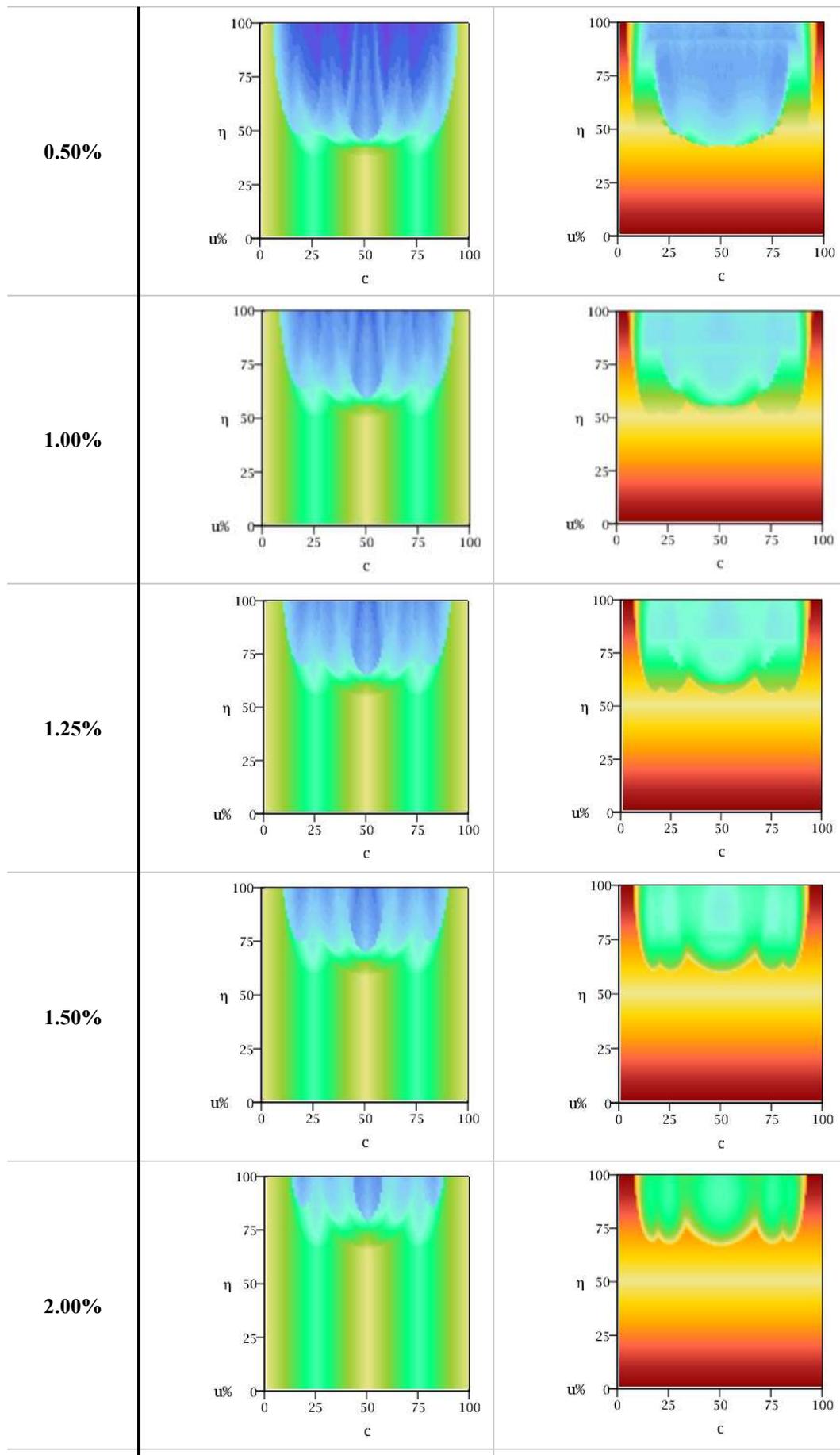
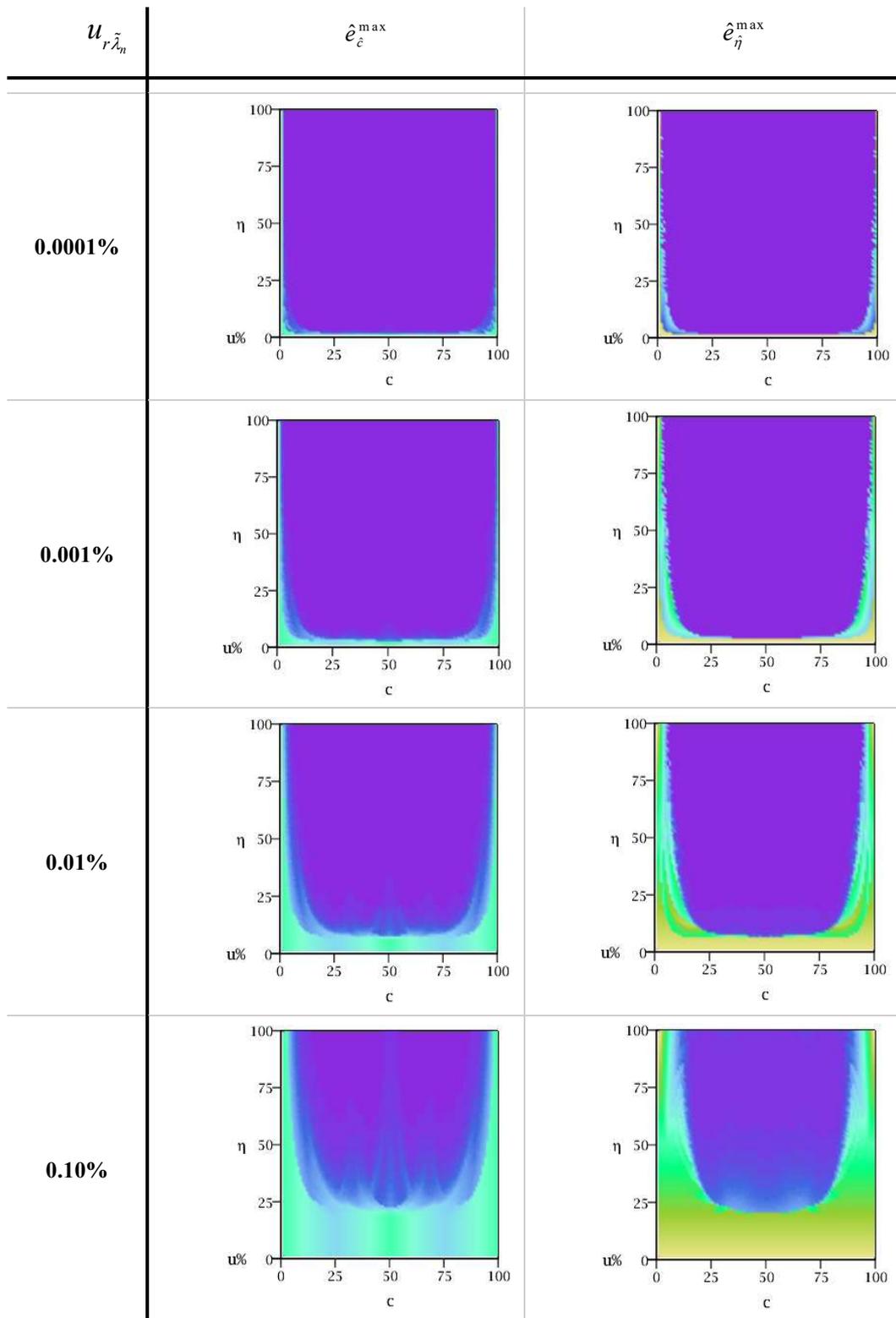


Figura A6.3 – Error máximo pronosticado en la determinación de la posición ( $\hat{\epsilon}_c^{\max}$ ) y profundidad ( $\hat{\epsilon}_\eta^{\max}$ ) para la condición A-A.



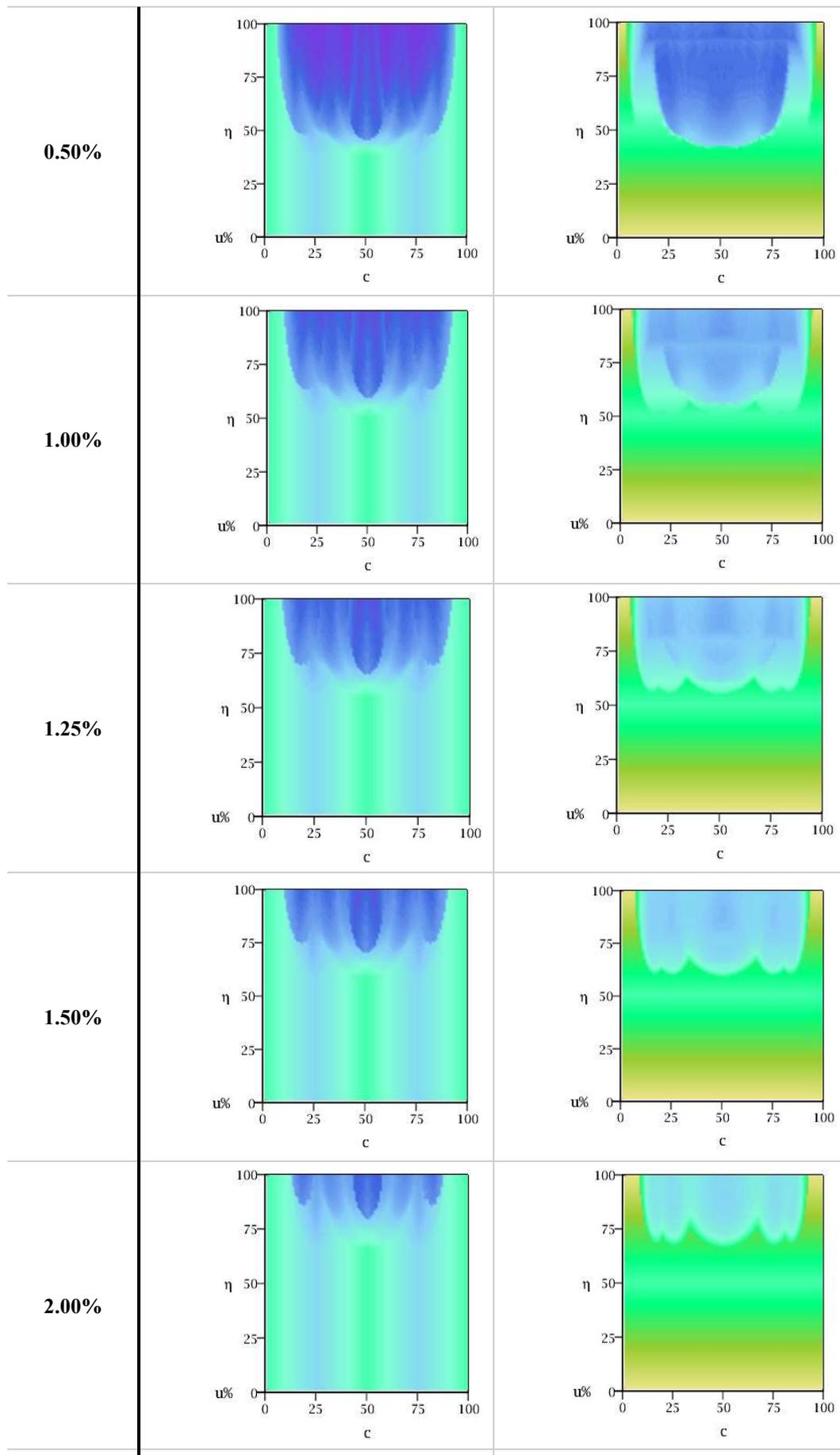
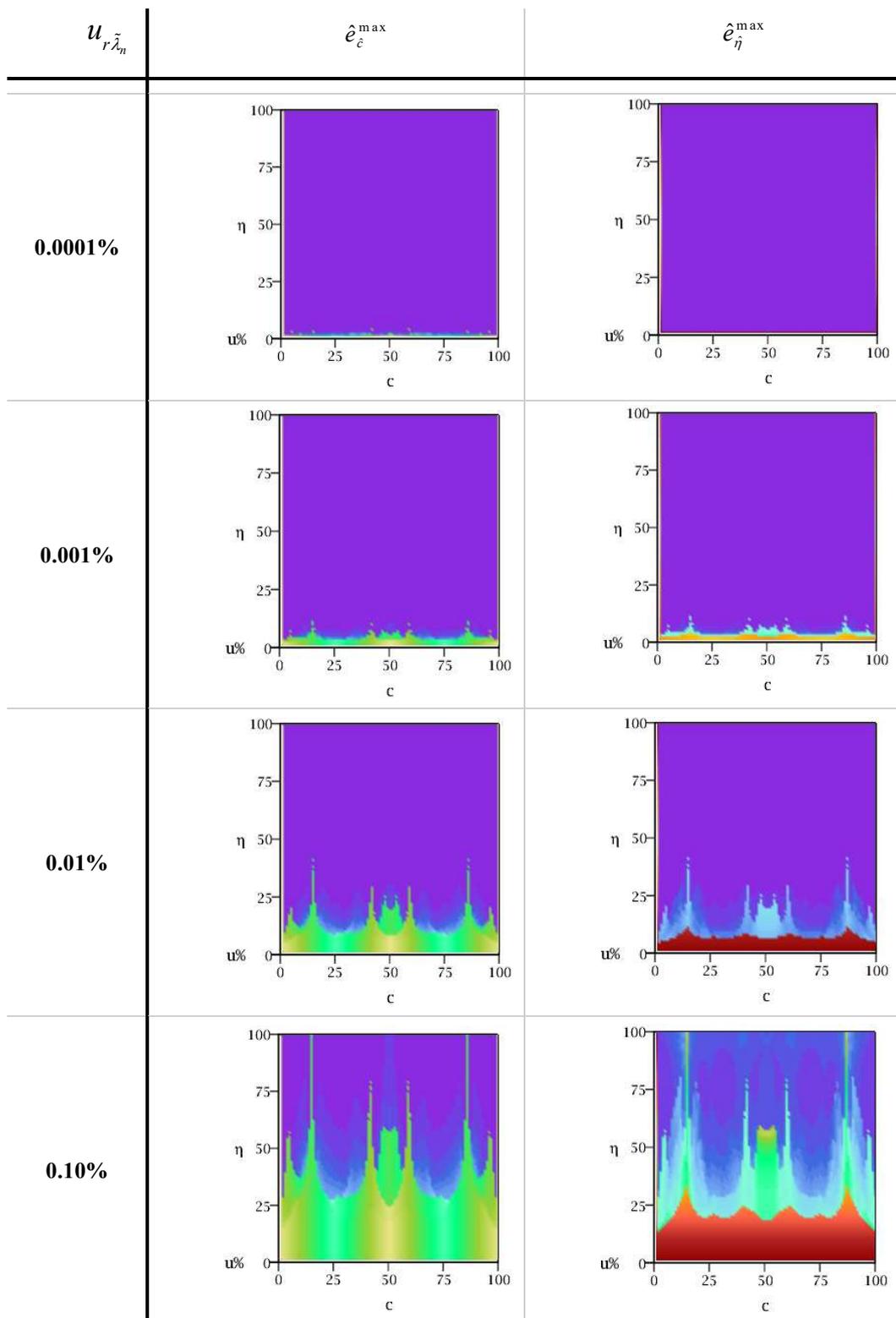


Figura A6.4 – Error promedio pronosticado en la determinación de la posición ( $\hat{\epsilon}_c^{pro}$ ) y profundidad ( $\hat{\epsilon}_\eta^{pro}$ ) para la condición A-A.

- E-E



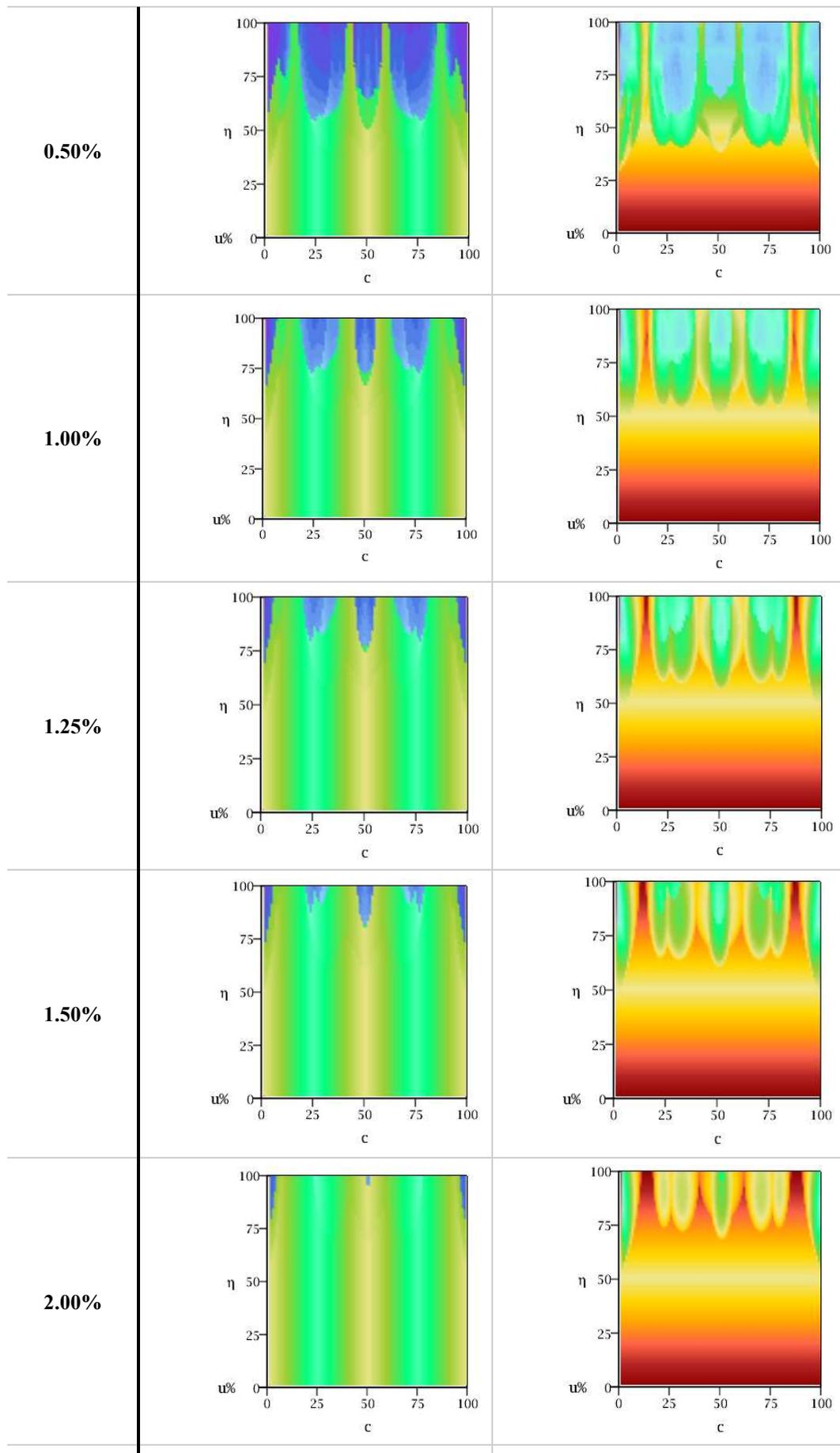
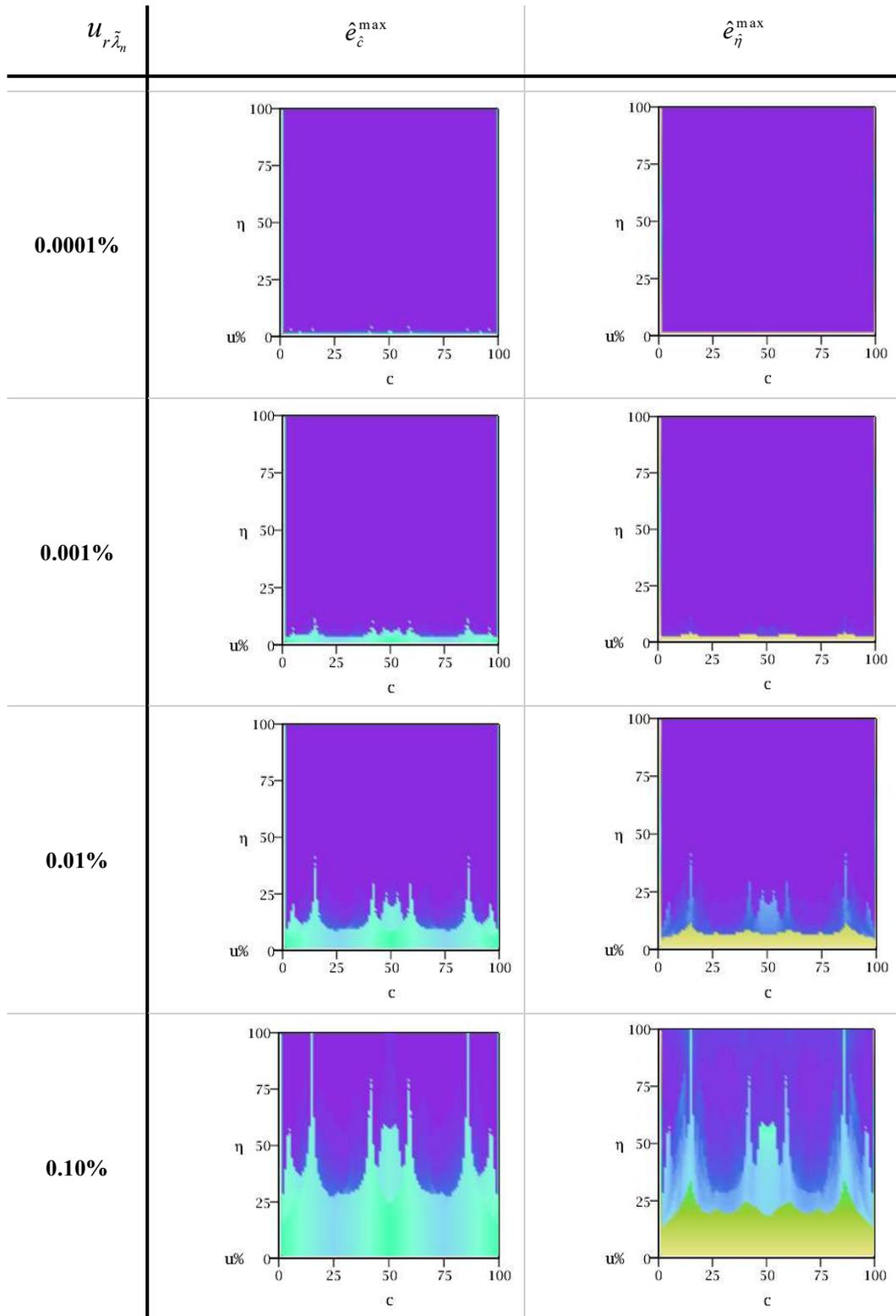


Figura A6.5 – Error máximo pronosticado en la determinación de la posición ( $\hat{\epsilon}_c^{\max}$ ) y profundidad ( $\hat{\epsilon}_\eta^{\max}$ ) para la condición E-E.



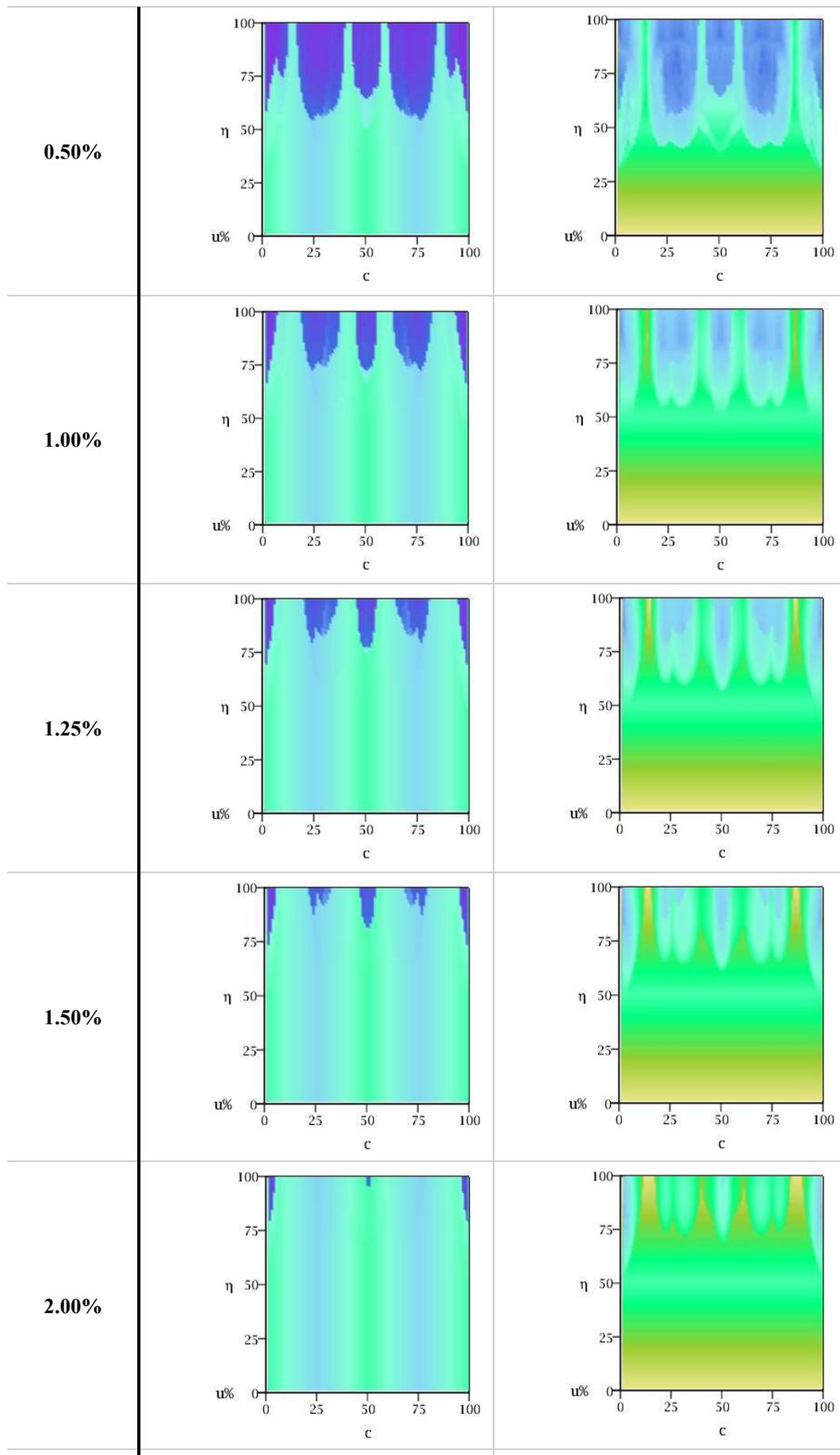
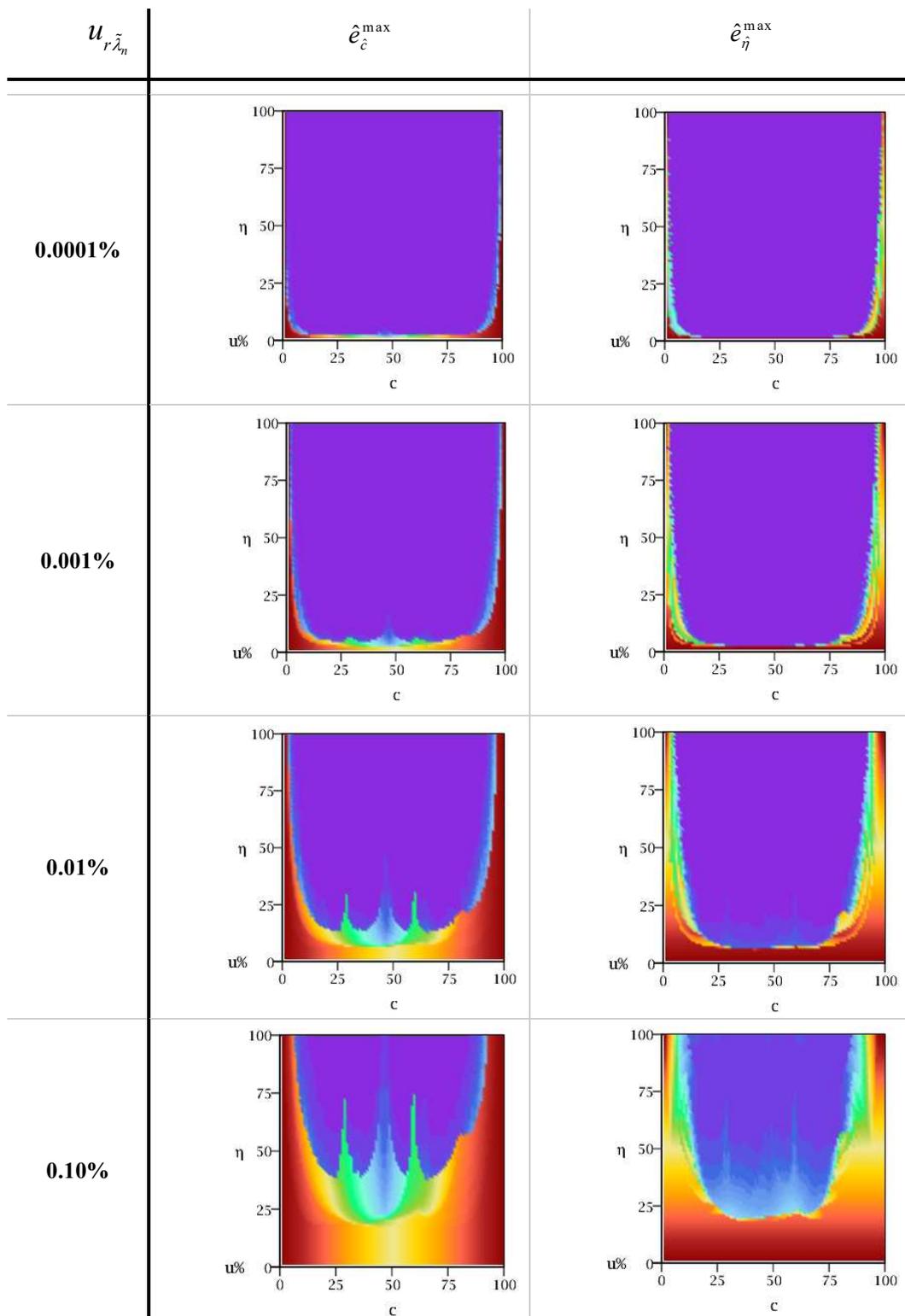


Figura A6.6 – Error promedio pronosticado en la determinación de la posición ( $\hat{\epsilon}_c^{pro}$ ) y profundidad ( $\hat{\epsilon}_\eta^{pro}$ ) para la condición E-E.

- A-L



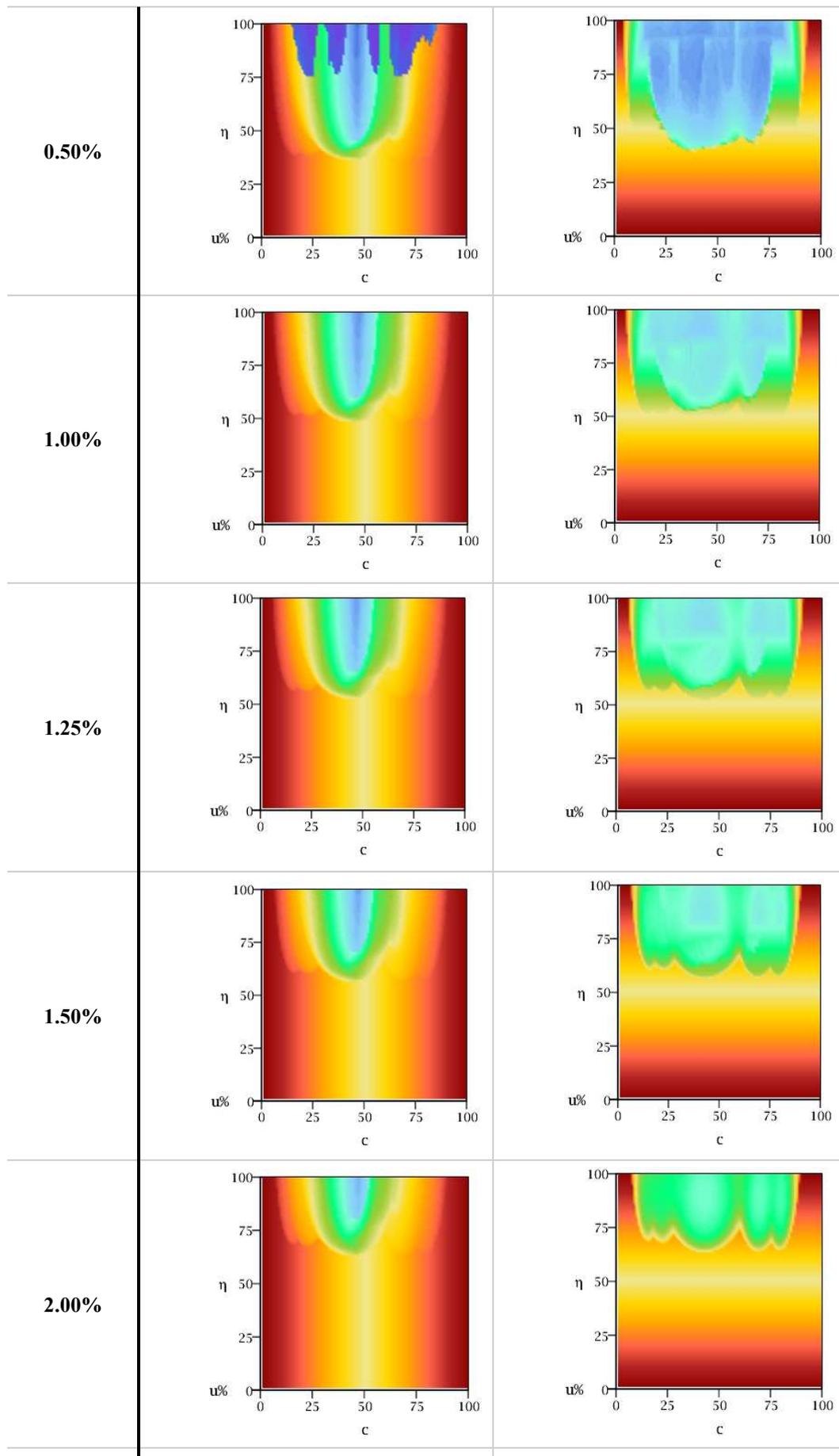
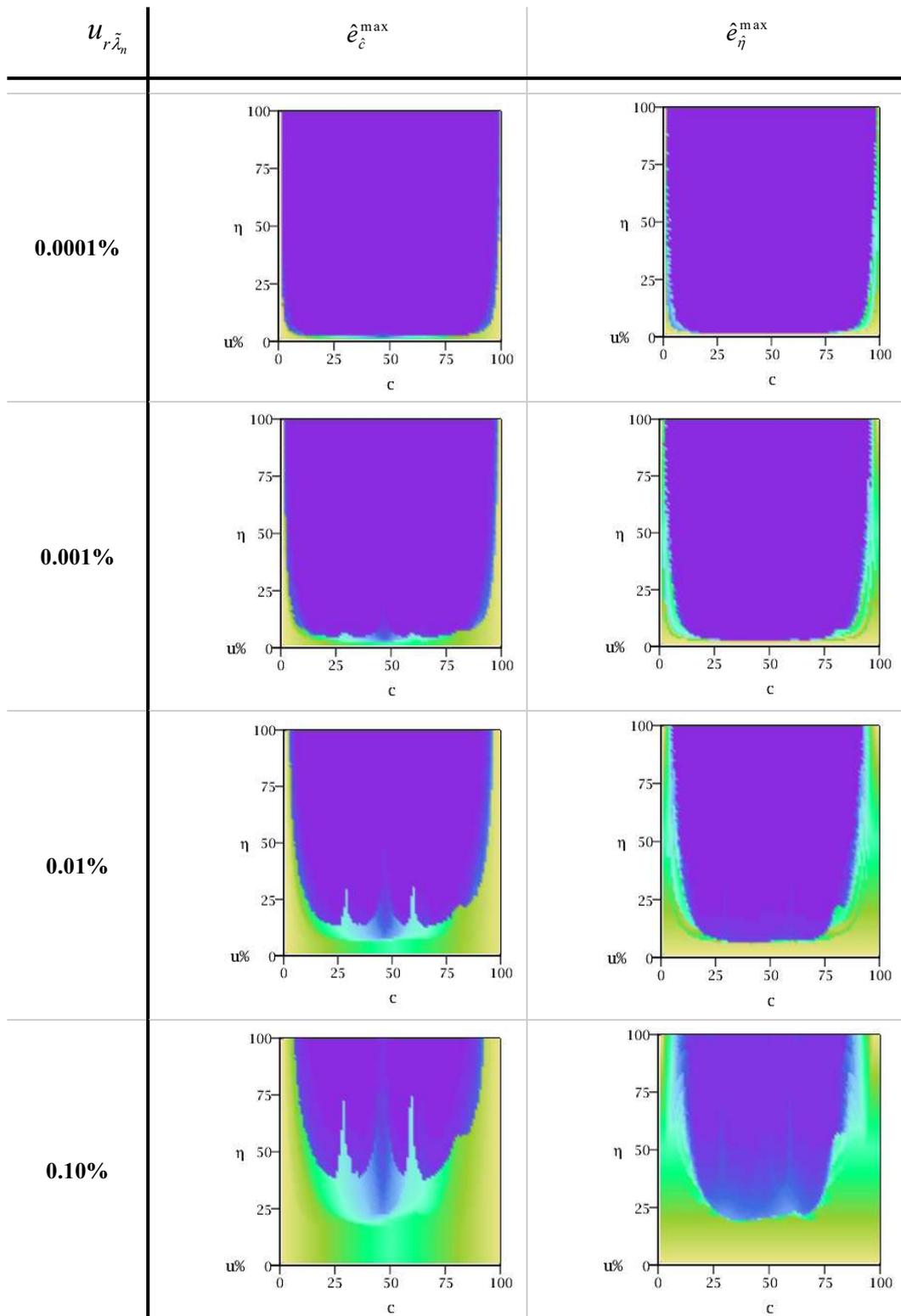


Figura A6.7 – Error máximo pronosticado en la determinación de la posición ( $\hat{\epsilon}_c^{\max}$ ) y profundidad ( $\hat{\epsilon}_\eta^{\max}$ ) para la condición A-L.



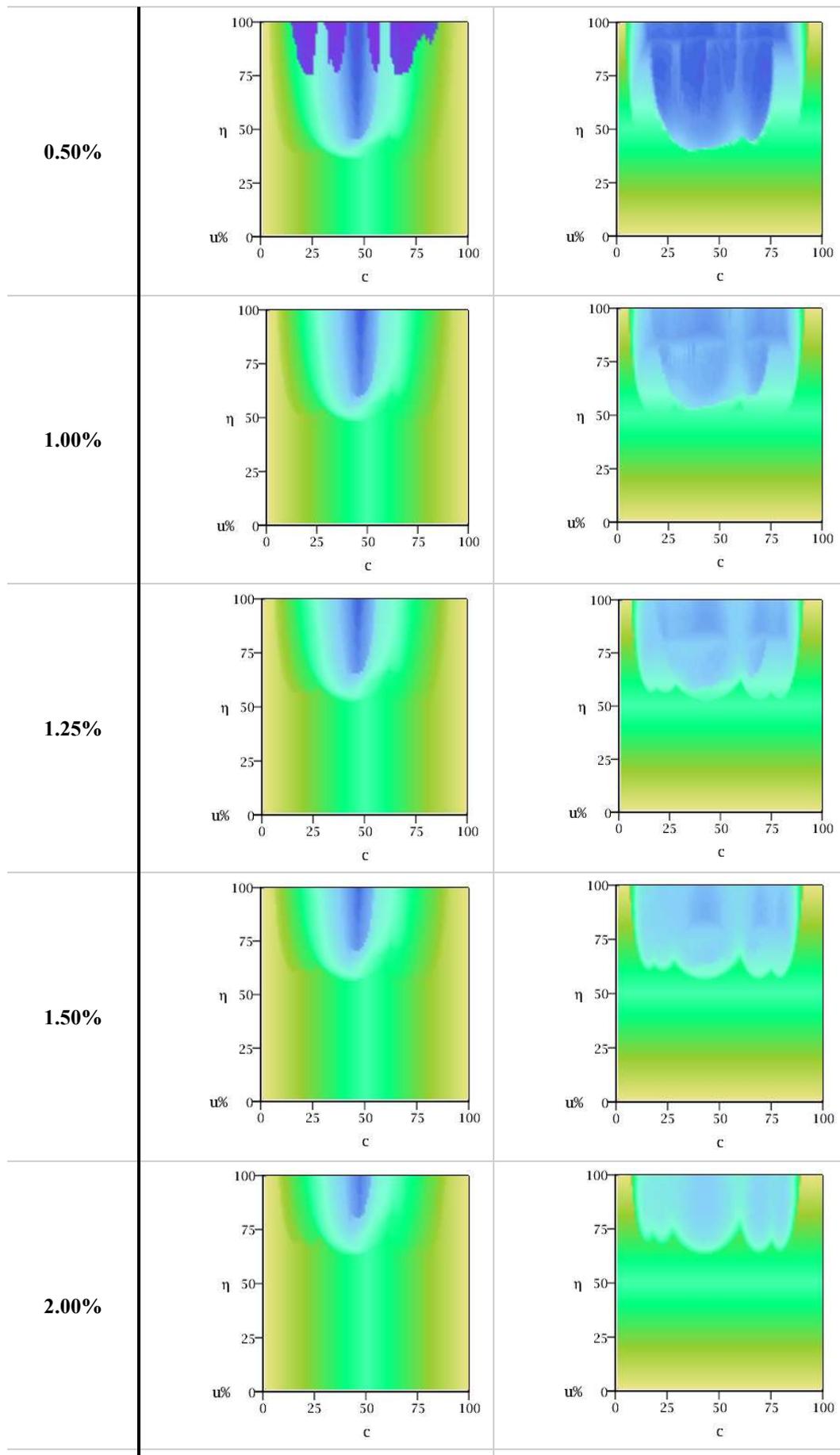
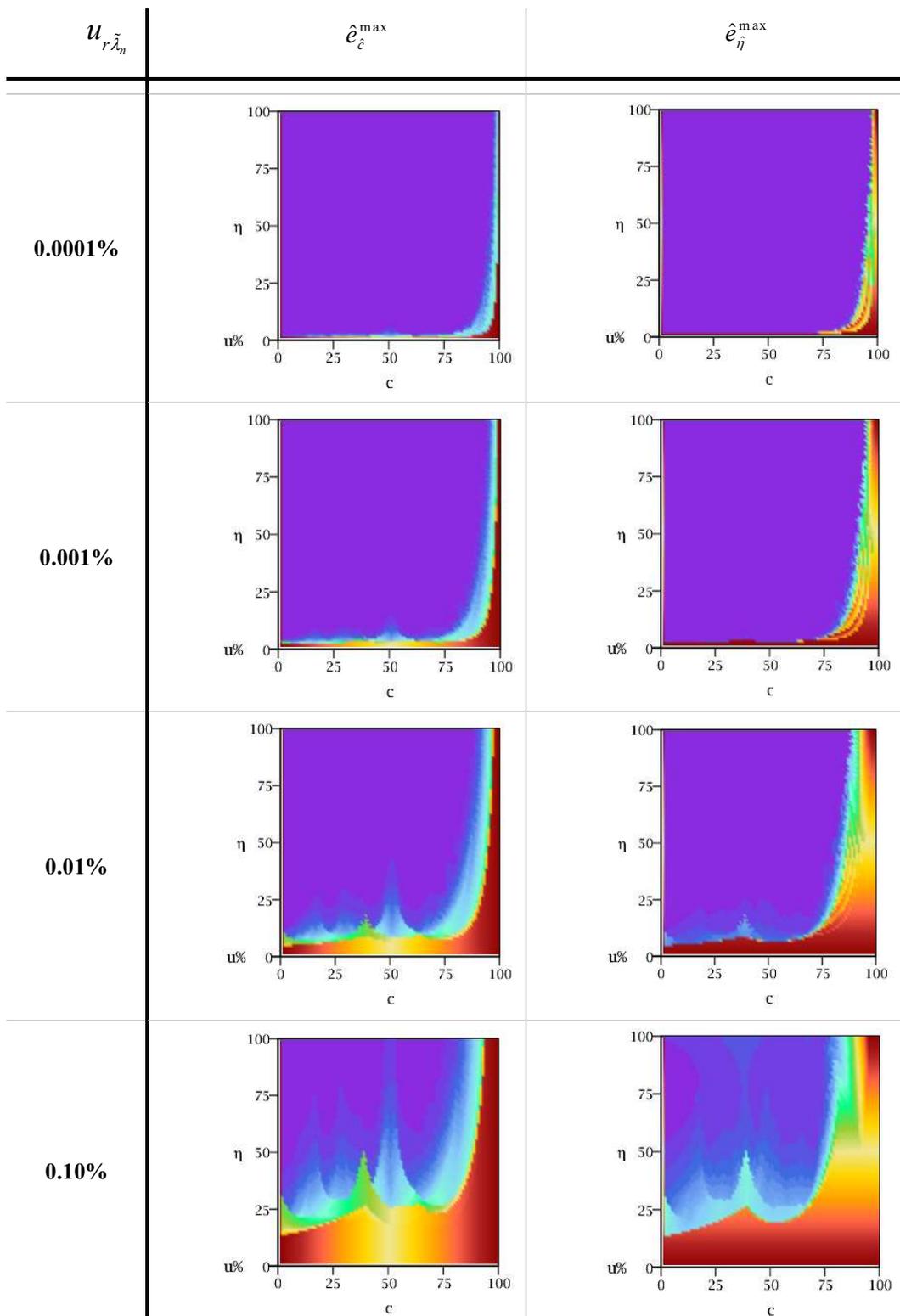


Figura A6.8 – Error promedio pronosticado en la determinación de la posición ( $\hat{\epsilon}_{\epsilon}^{pro}$ ) y profundidad ( $\hat{\epsilon}_{\eta}^{pro}$ ) para la condición A-L.

- E-L



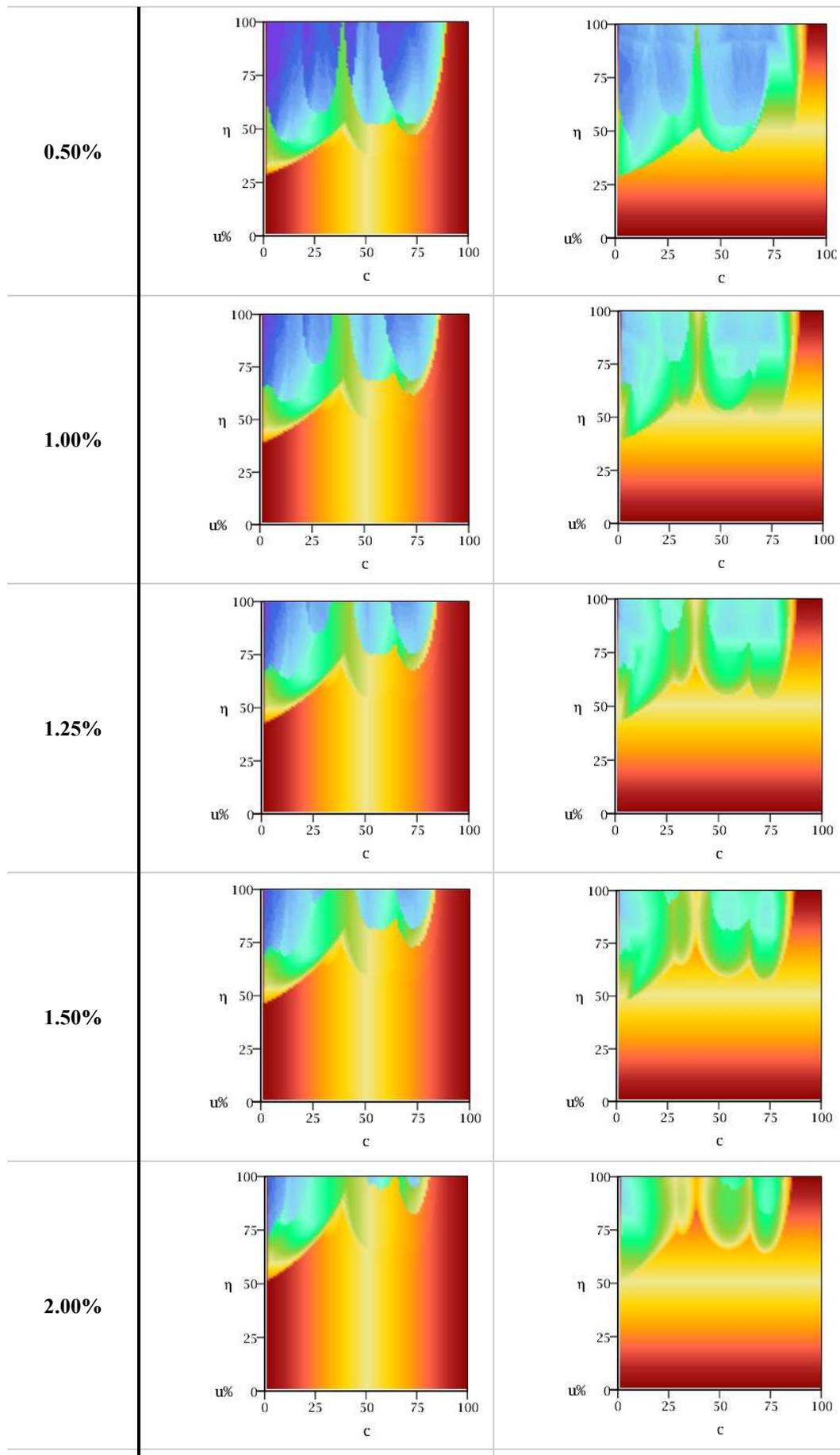
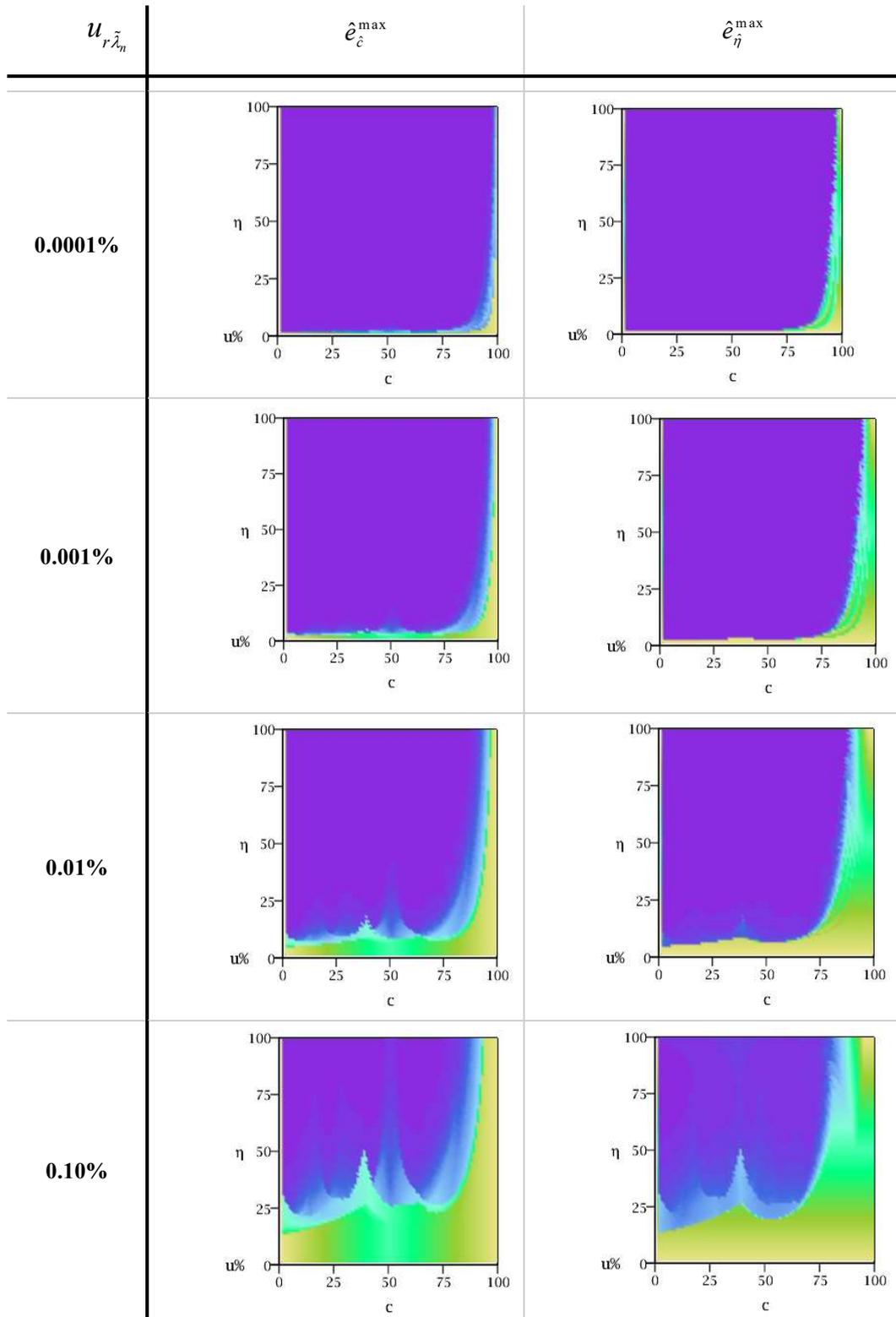


Figura A6.9 – Error máximo pronosticado en la determinación de la posición ( $\hat{e}_c^{\max}$ ) y profundidad ( $\hat{e}_\eta^{\max}$ ) para la condición E-L.



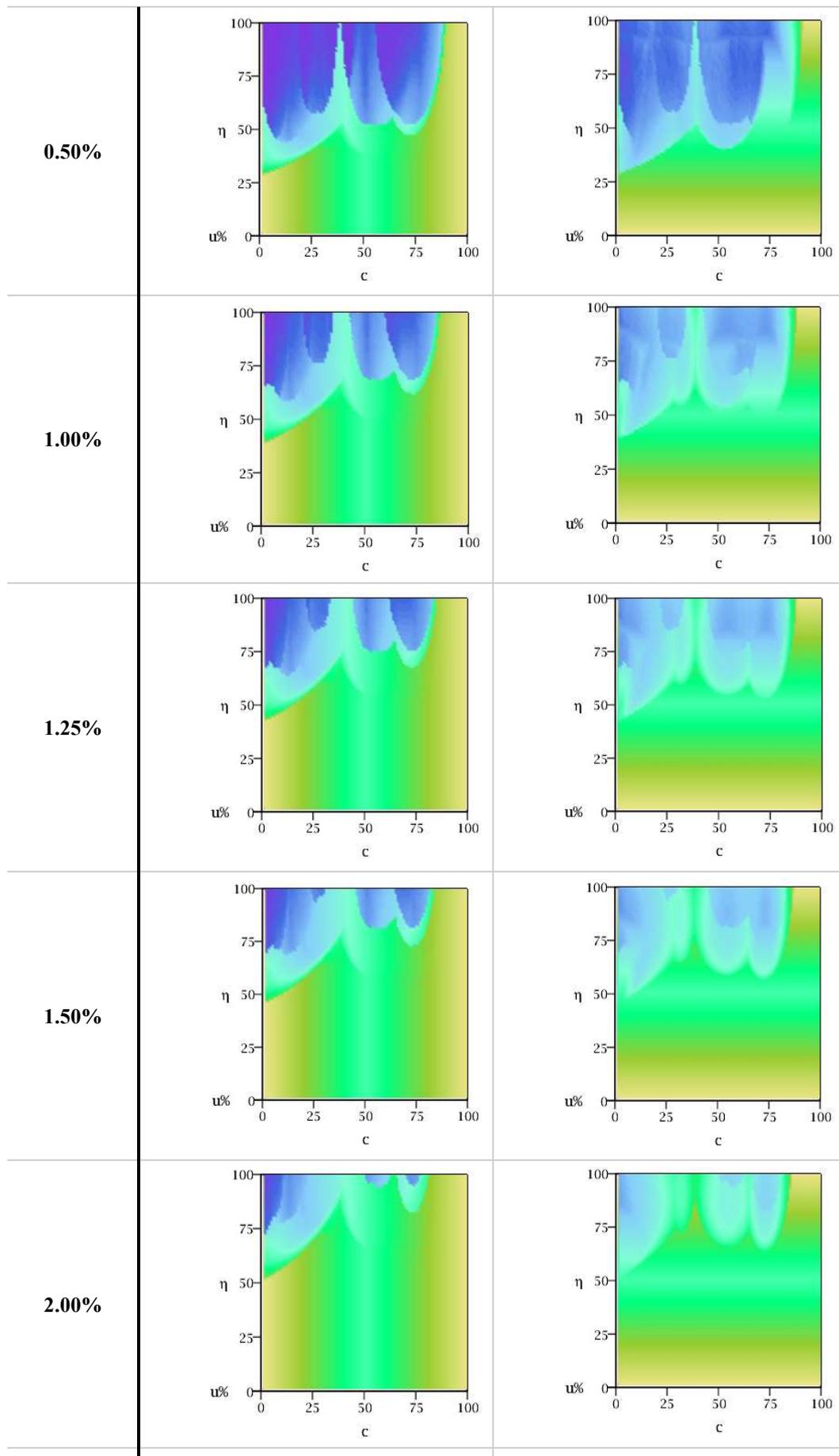
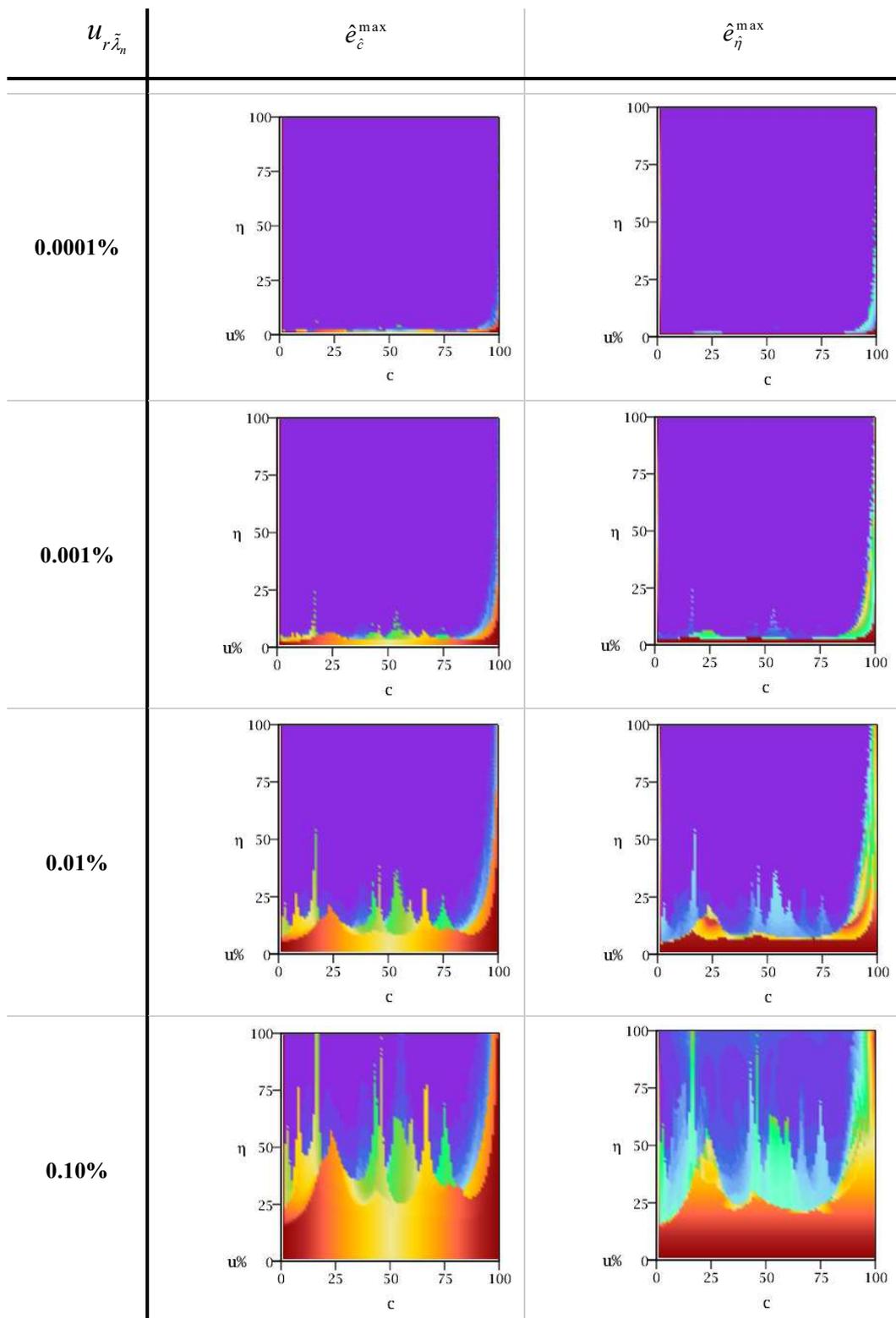


Figura A6.10 – Error promedio pronosticado en la determinación de la posición ( $\hat{c}_c^{pro}$ ) y profundidad ( $\hat{\eta}_\eta^{pro}$ ) para la condición E-L.

- E-A



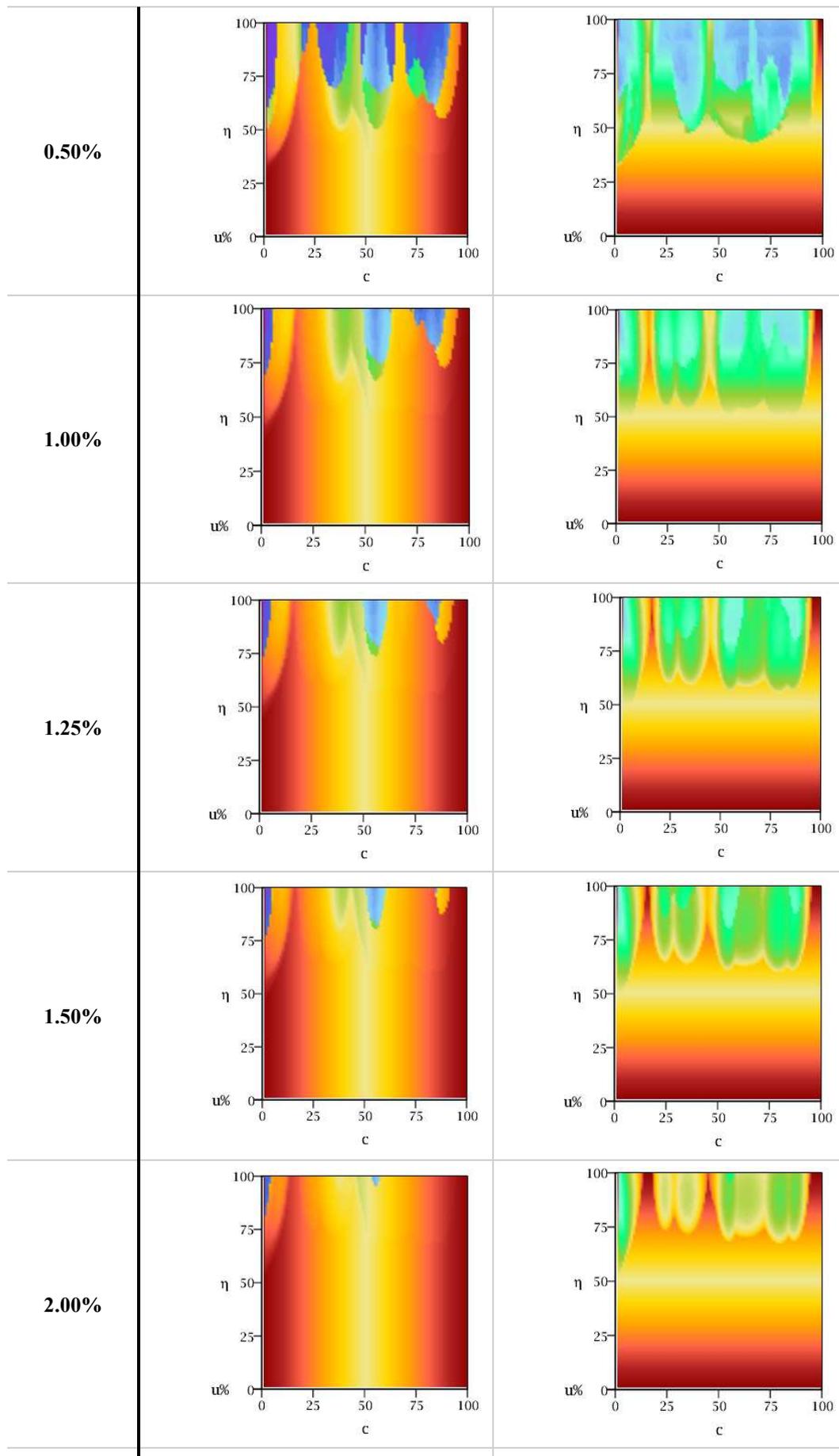
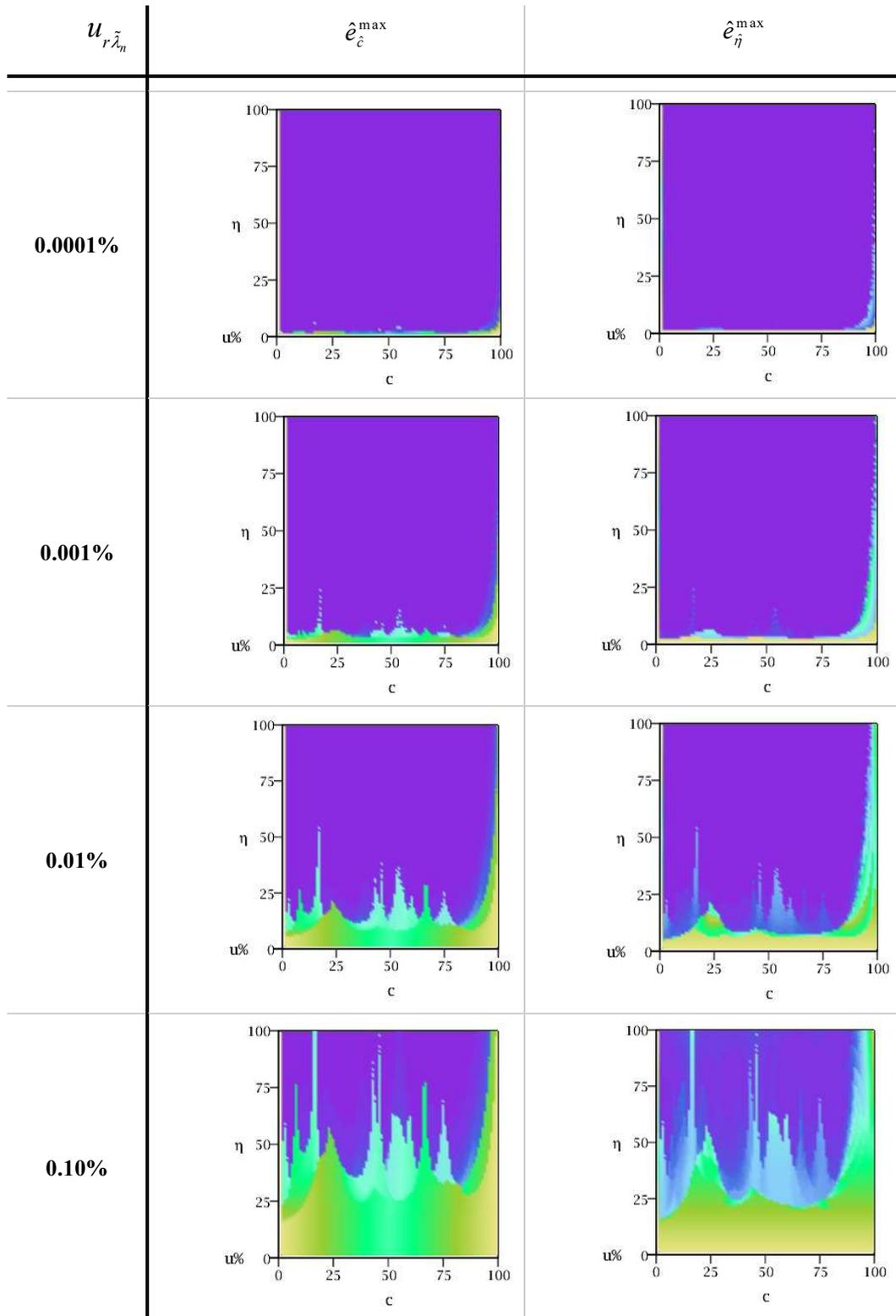


Figura A6.11 – Error máximo pronosticado en la determinación de la posición ( $\hat{e}_c^{\max}$ ) y profundidad ( $\hat{e}_\eta^{\max}$ ) para la condición E-A.



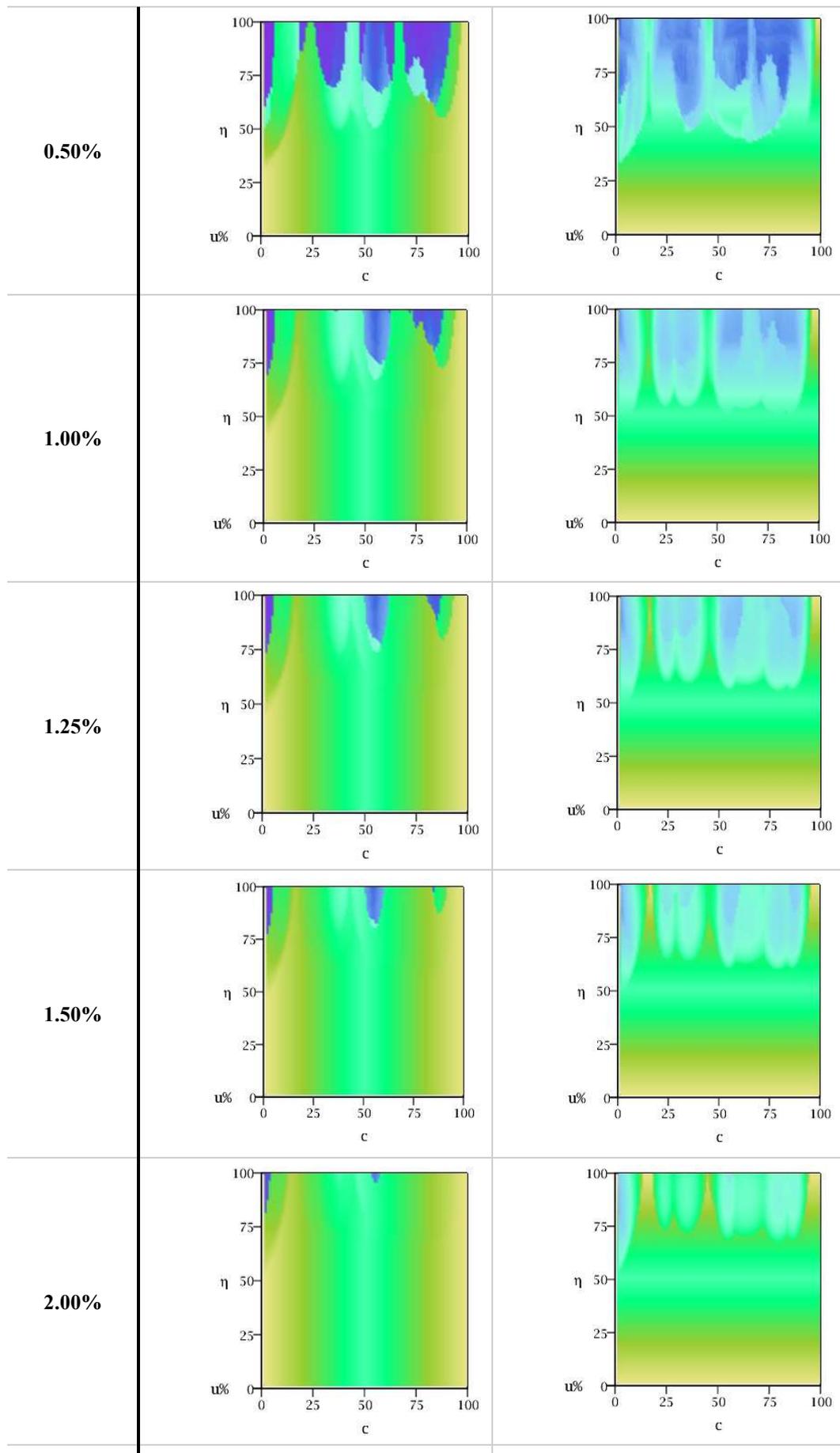
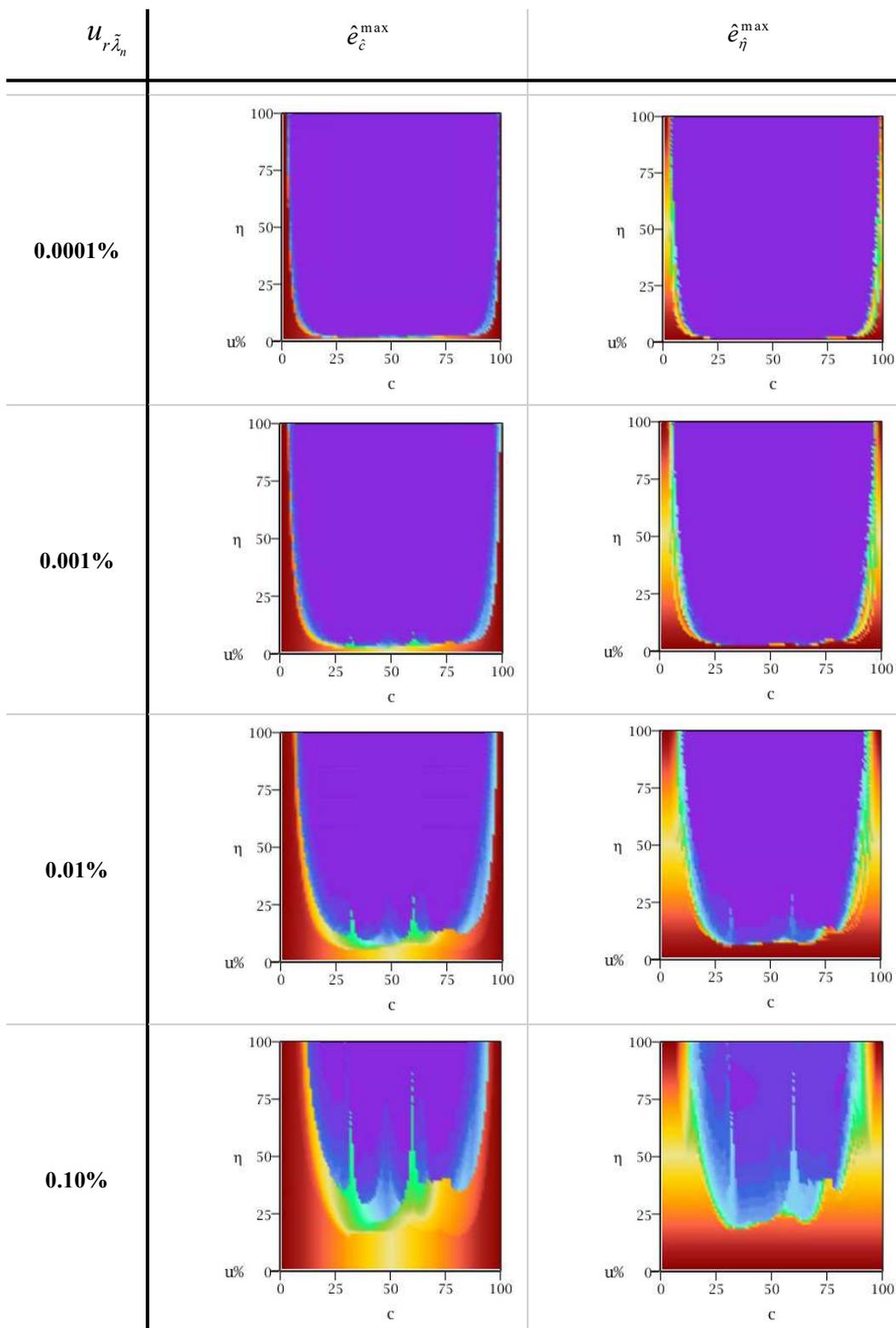


Figura A6.12 – Error promedio pronosticado en la determinación de la posición ( $\hat{\epsilon}_c^{pro}$ ) y profundidad ( $\hat{\epsilon}_\eta^{pro}$ ) para la condición E-A.

**A6.2 Condiciones clásicas con apoyos intermedios**

- L-L con un apoyo simple en  $c=0.30$



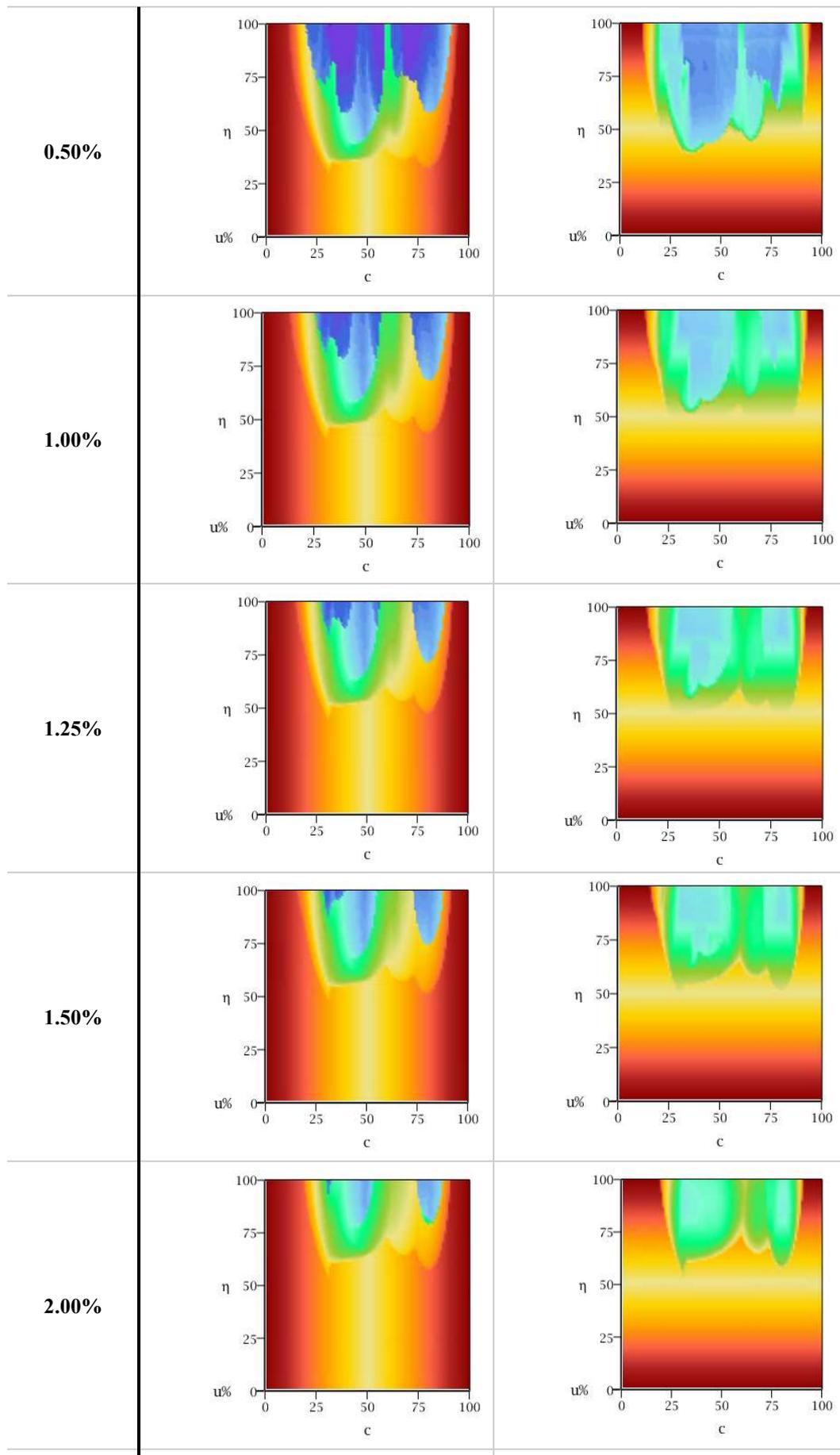
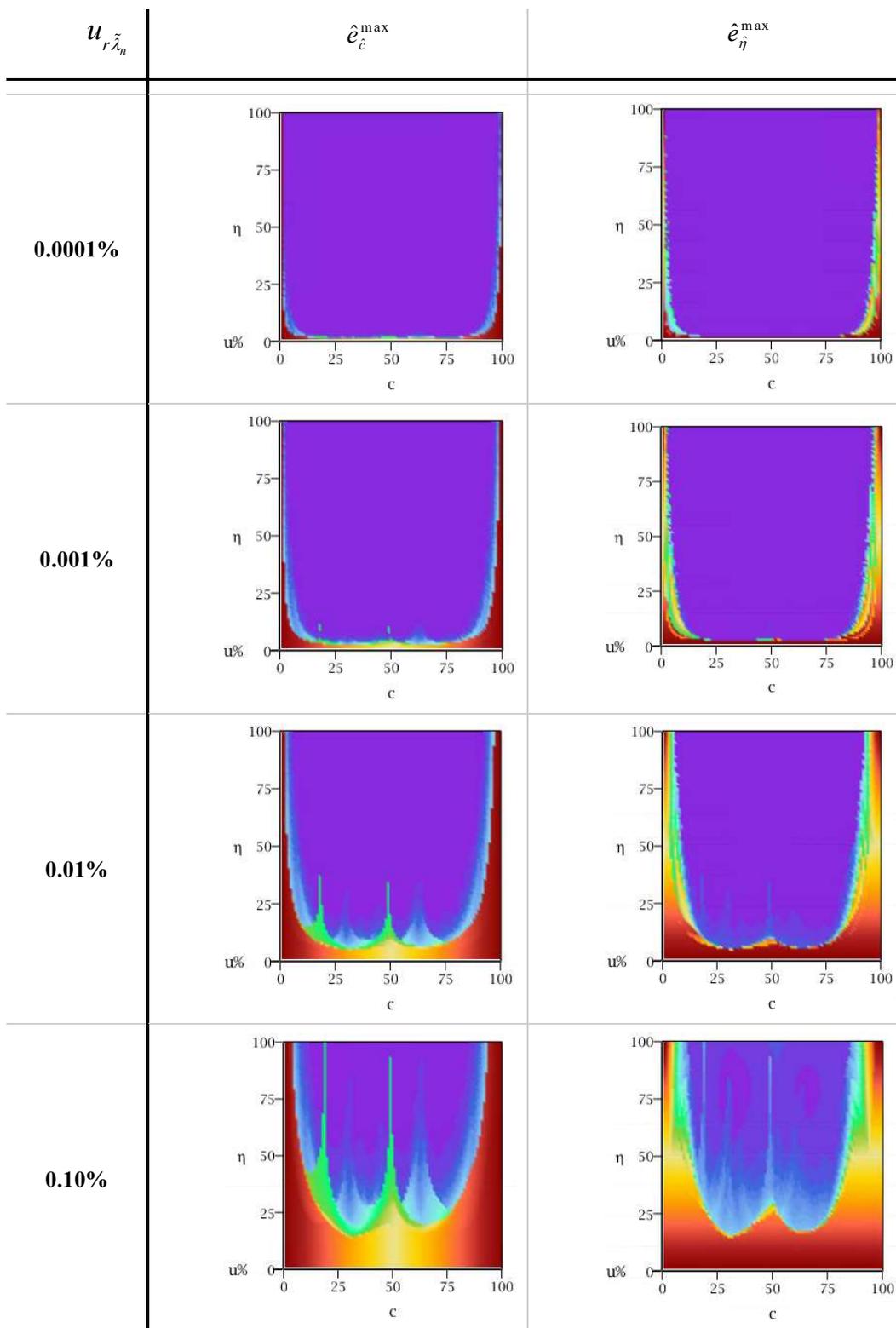


Figura A6.13 – Error máximo pronosticado en la determinación de la posición ( $\hat{e}_c^{\max}$ ) y profundidad ( $\hat{e}_\eta^{\max}$ ) para la condición L-L con un apoyo simple en  $c = 0.30$ .

- A-L con un apoyo simple en  $c=0.30$



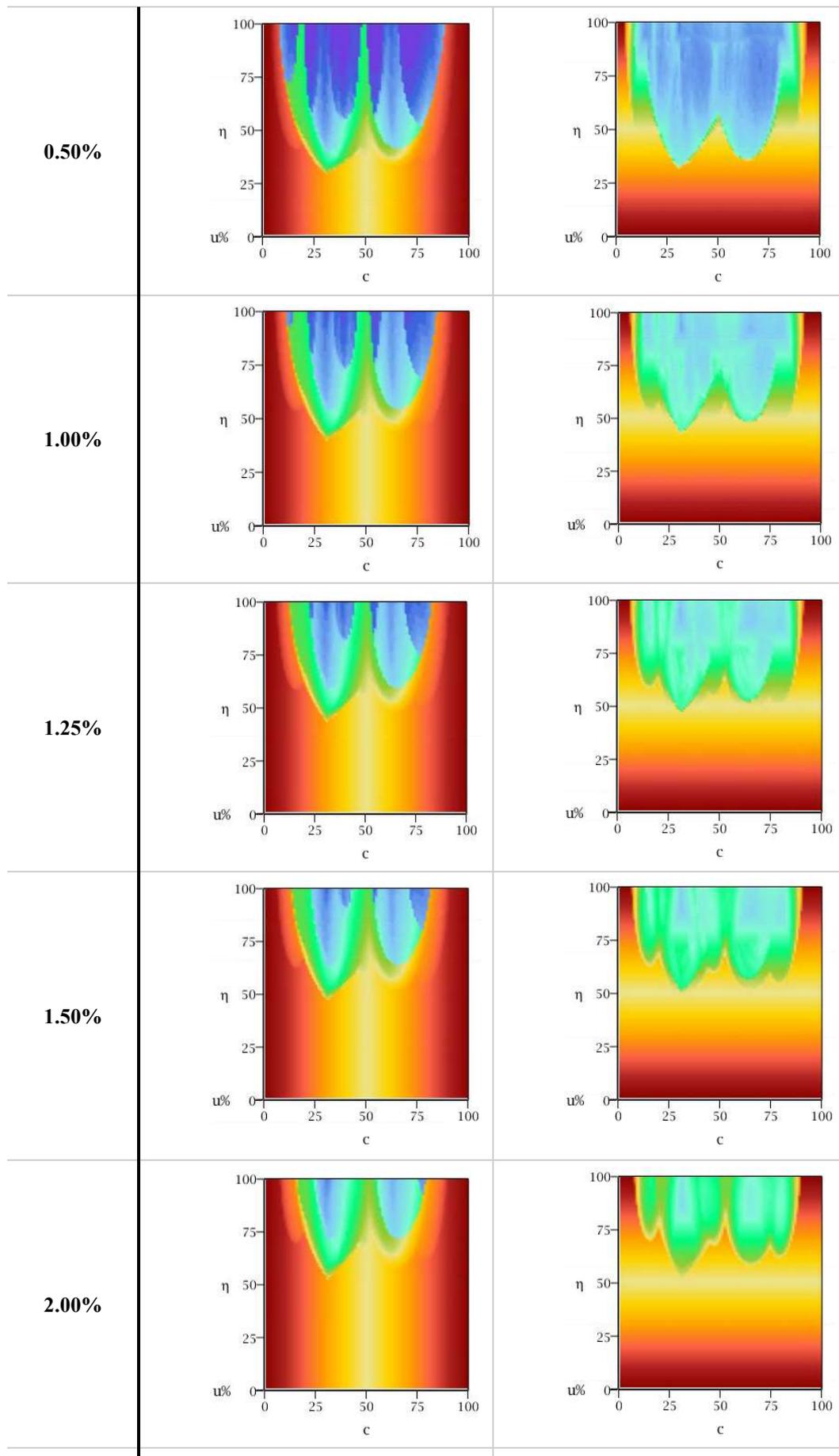
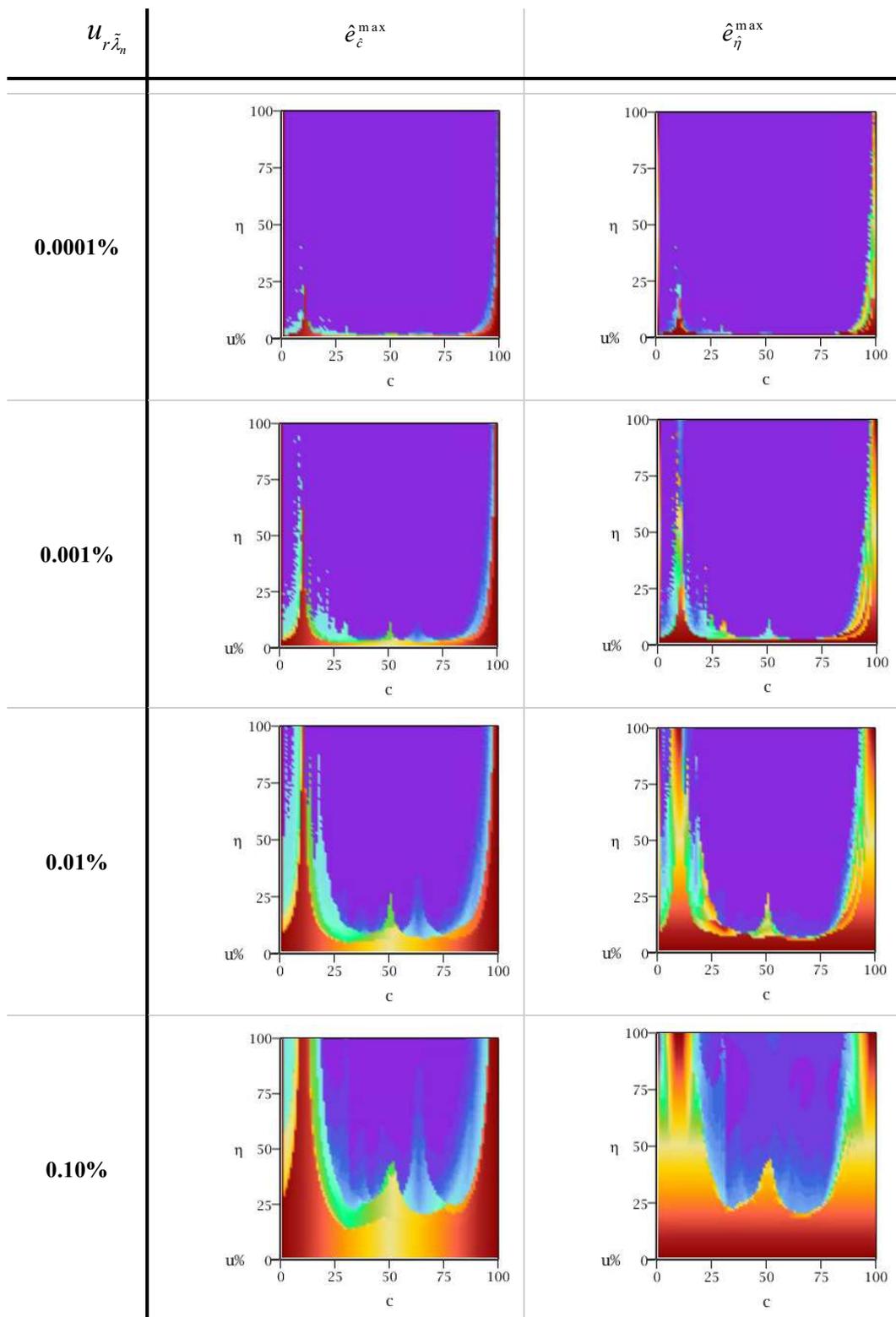


Figura A6.14 – Error máximo pronosticado en la determinación de la posición ( $\hat{e}_c^{\max}$ ) y profundidad ( $\hat{e}_\eta^{\max}$ ) para la condición A-L con un apoyo simple en  $c = 0.30$ .

- E-L con un apoyo simple en  $c=0.30$



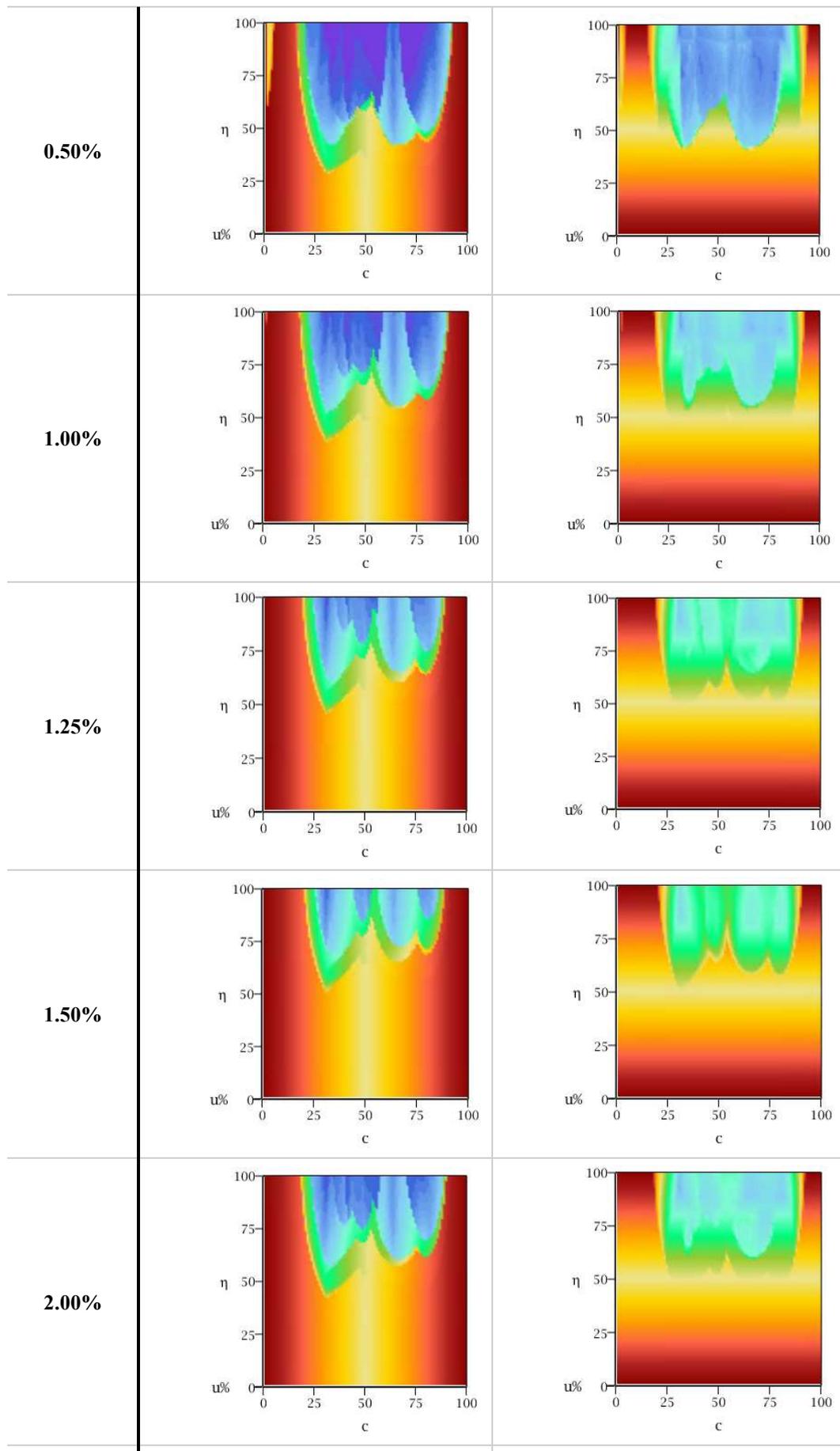
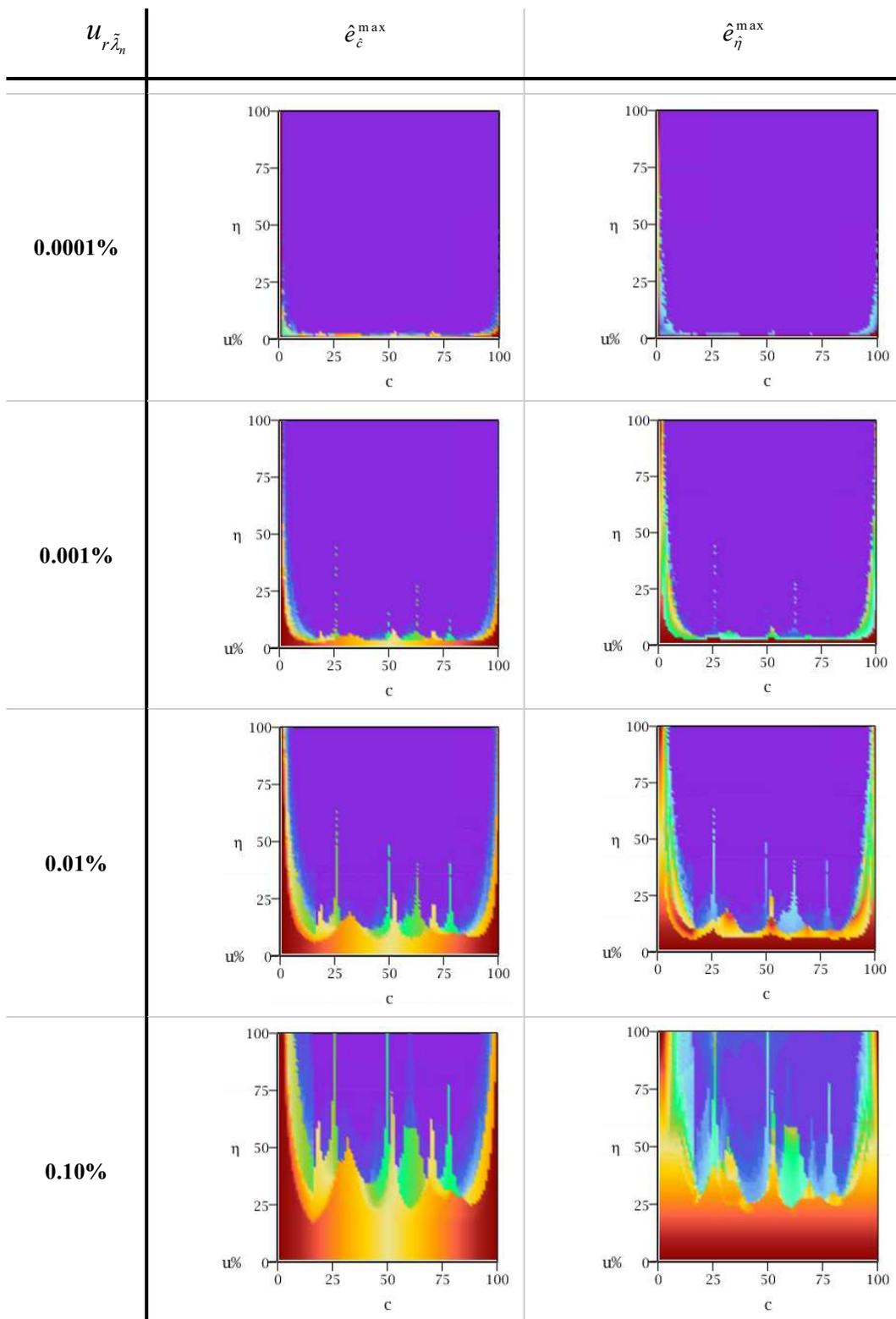


Figura A6.15 Error máximo pronosticado en la determinación de la posición ( $\hat{c}^{\max}$ ) y profundidad ( $\hat{\eta}^{\max}$ ) para la condición E-L con un apoyo simple en  $c = 0.30$ .

- A-A con un apoyo simple en  $c=0.15$



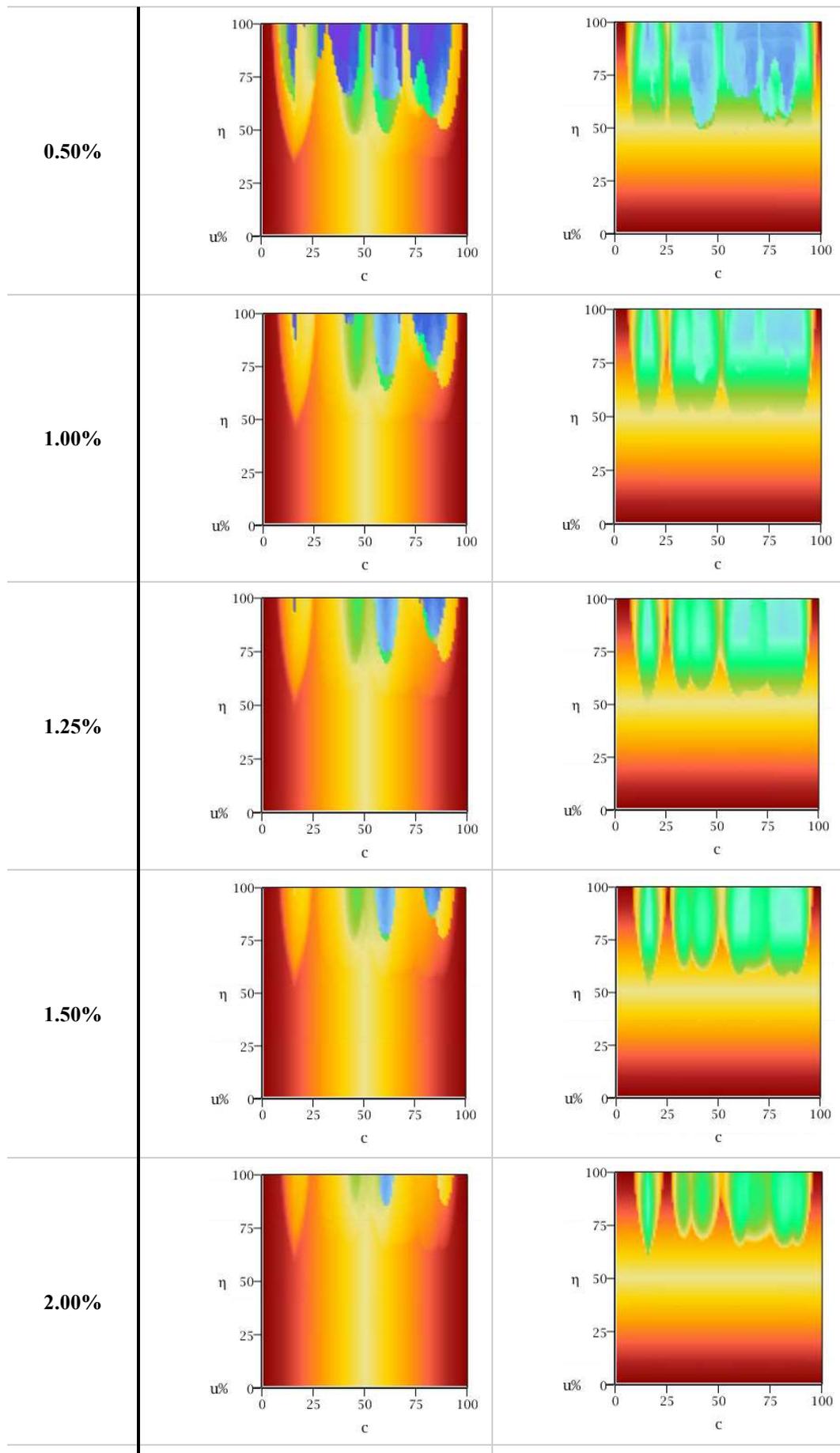
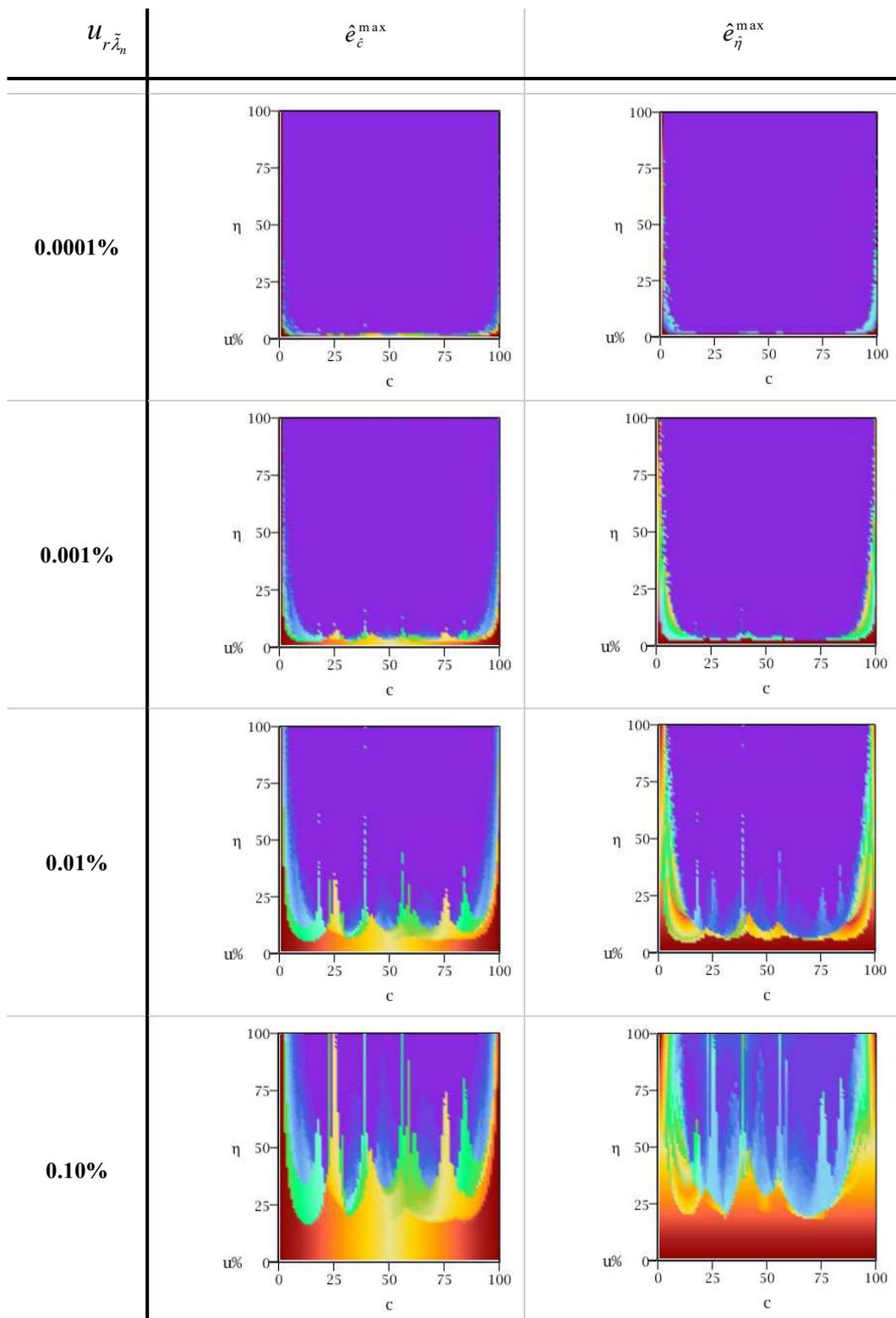


Figura A6.16 – Error máximo pronosticado en la determinación de la posición ( $\hat{e}_c^{\max}$ ) y profundidad ( $\hat{e}_\eta^{\max}$ ) para la condición A-A con un apoyo simple en  $c = 0.15$ .

- A-A con un apoyo simple en  $c=0.30$



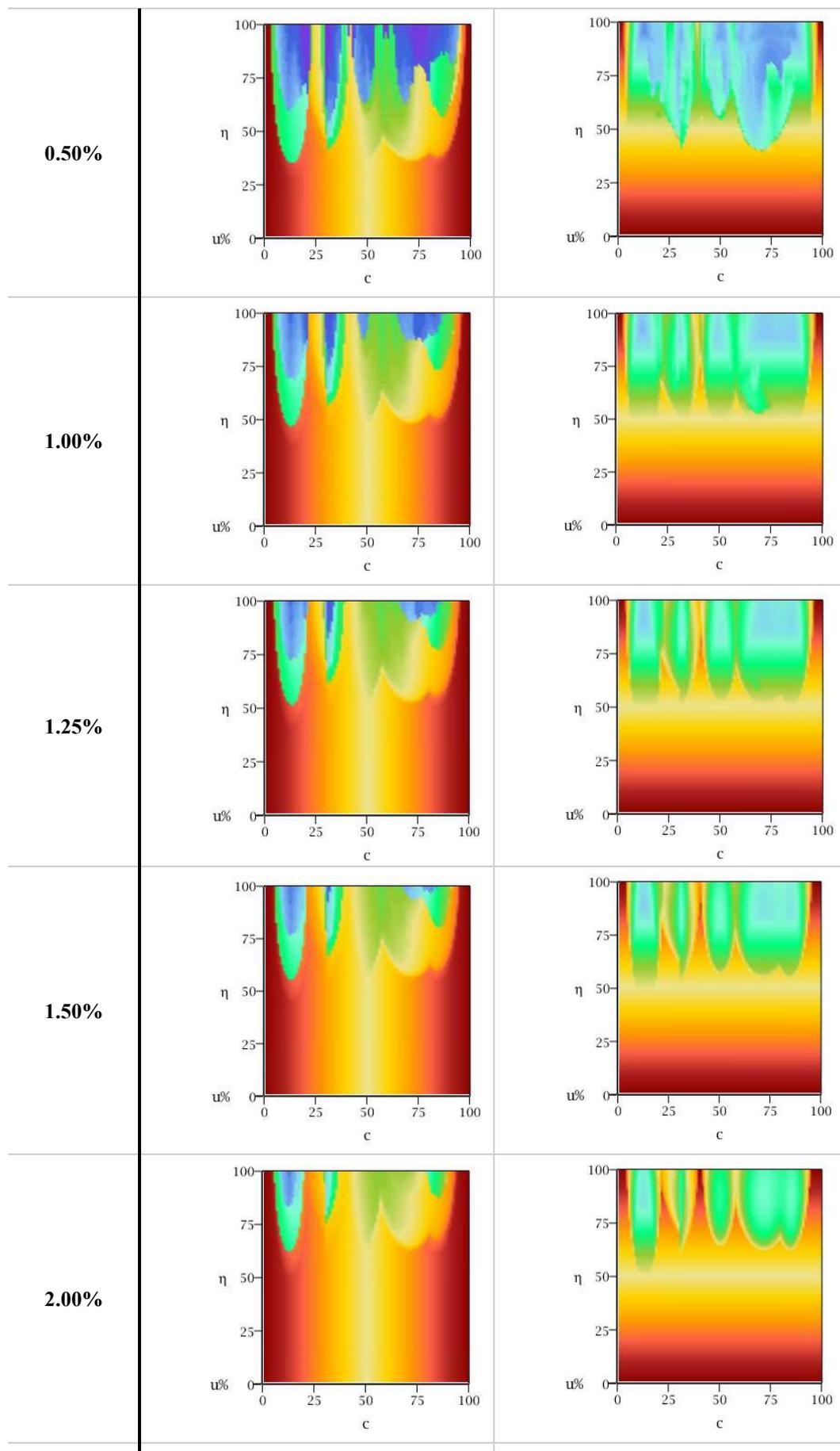
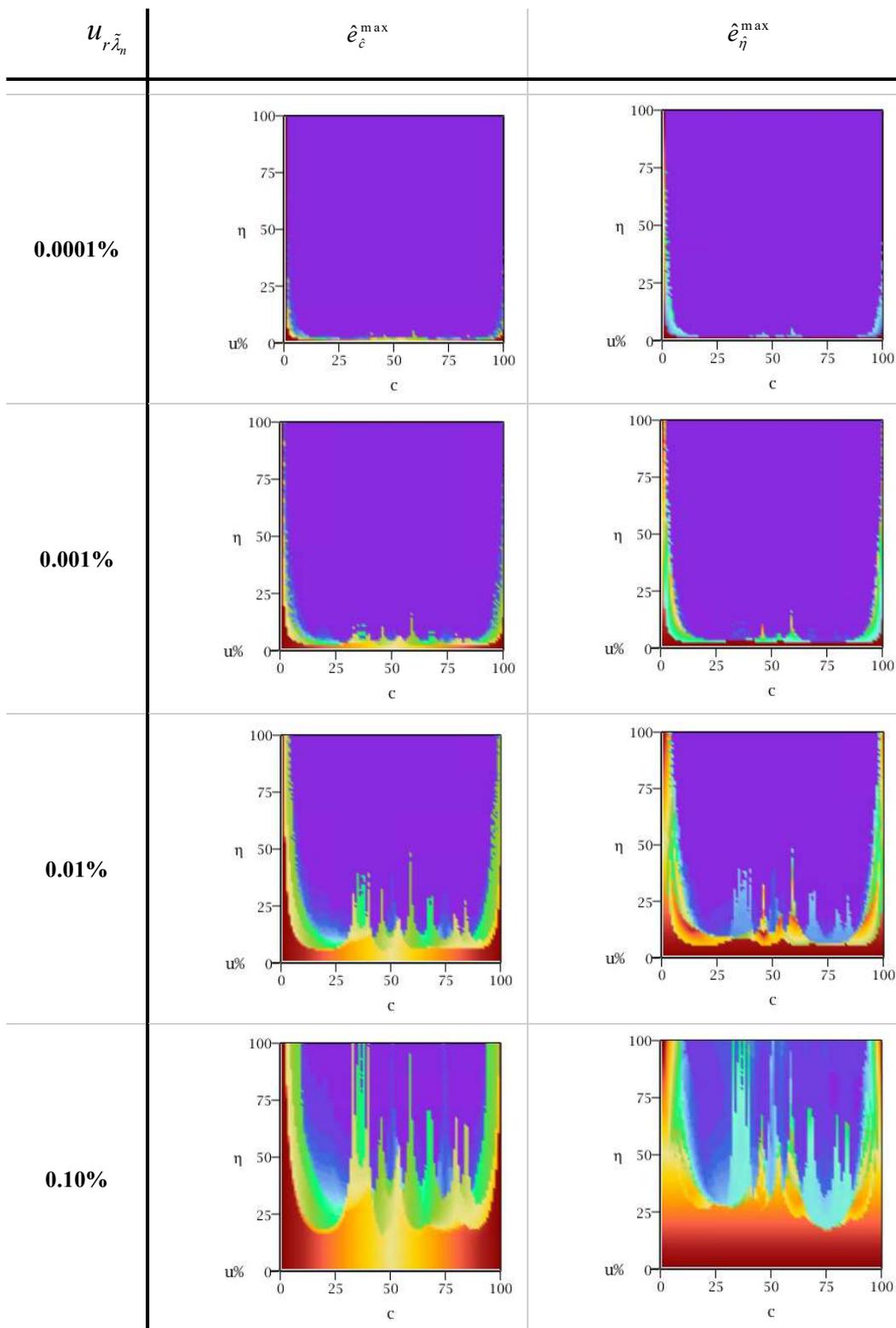


Figura A6.17 – Error máximo pronosticado en la determinación de la posición ( $\hat{e}_c^{\max}$ ) y profundidad ( $\hat{e}_\eta^{\max}$ ) para la condición A-A con un apoyo simple en  $c = 0.30$ .

- A-A con un apoyo simple en  $c=0.45$



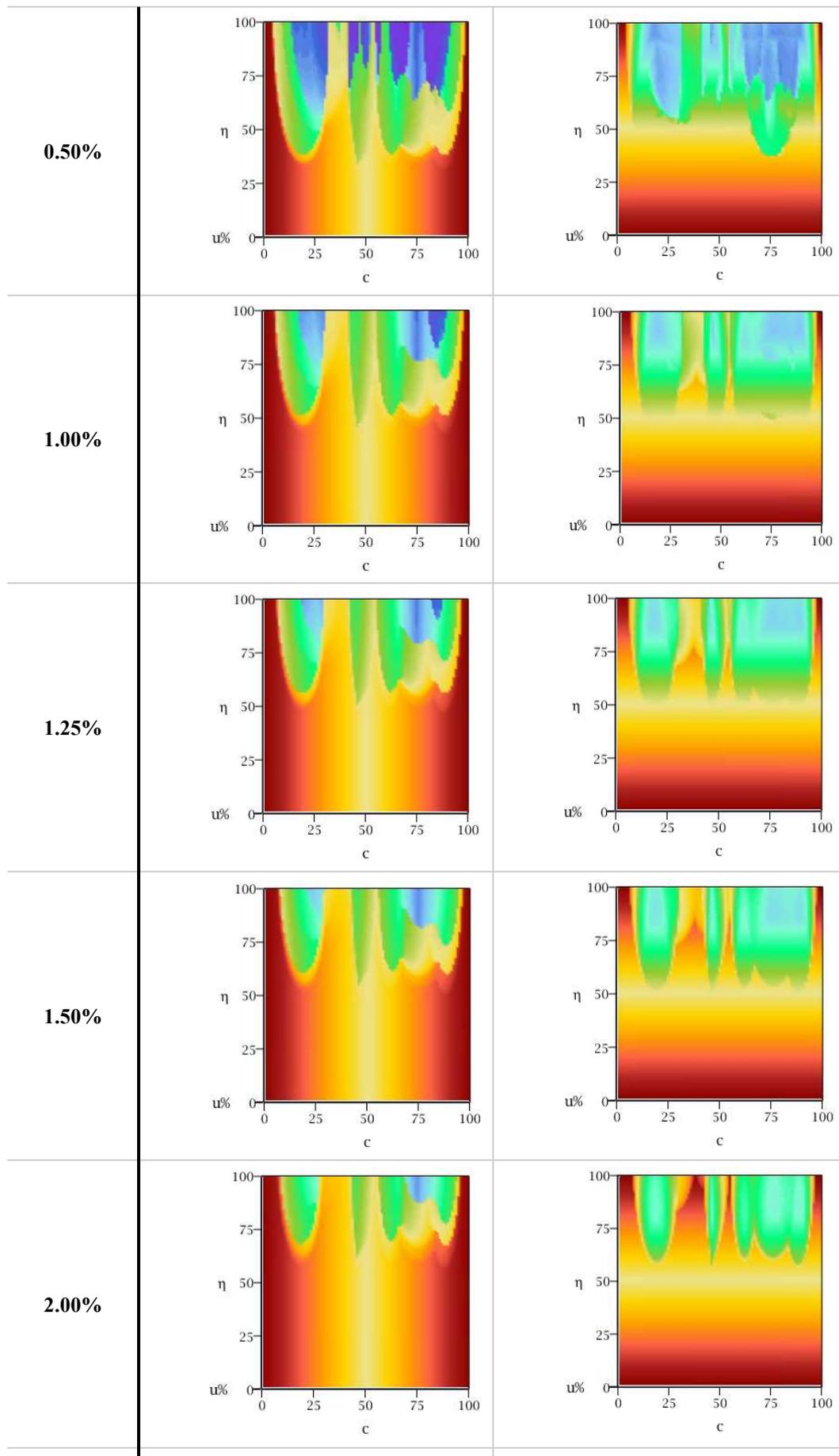
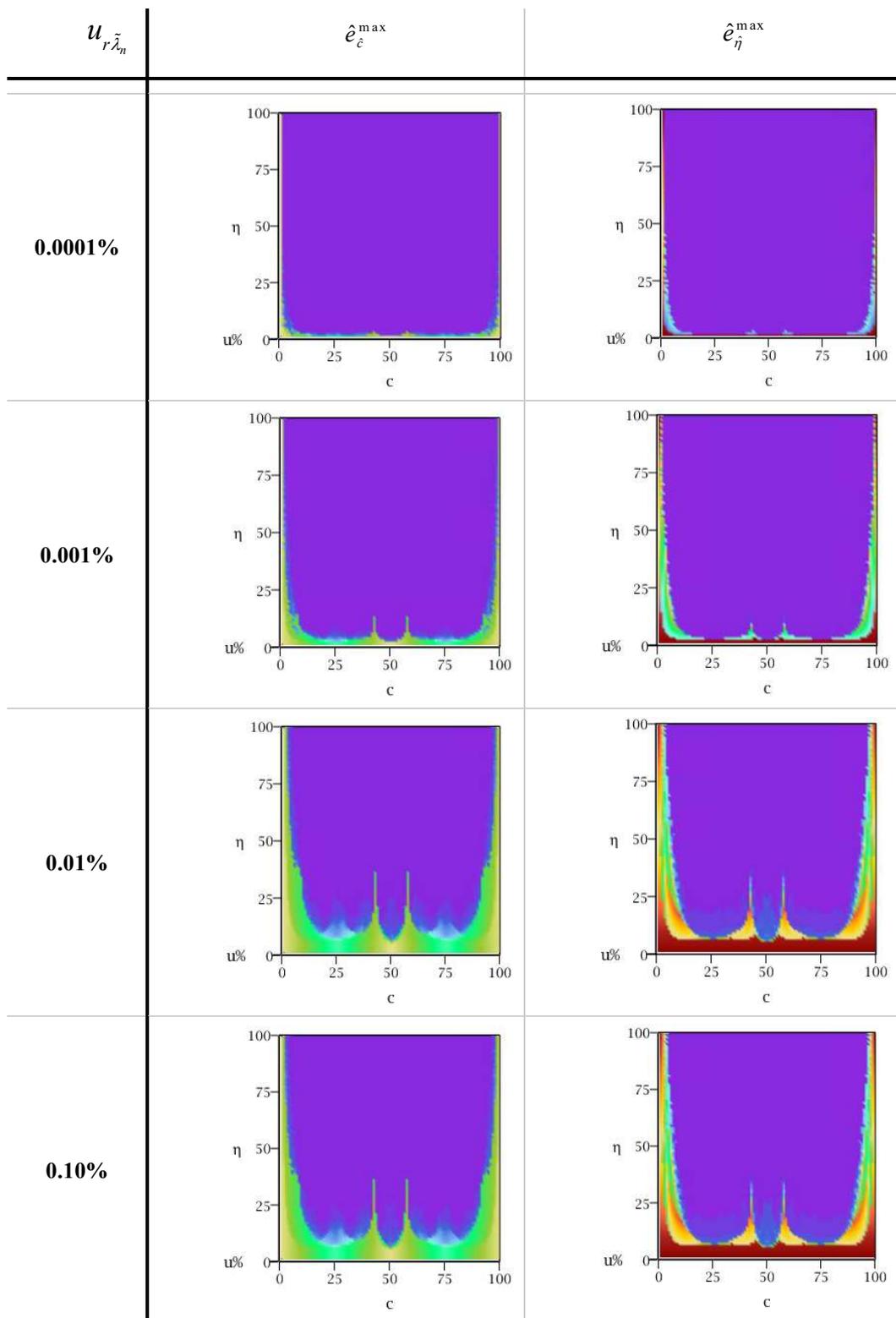


Figura A6.18 – Error máximo pronosticado en la determinación de la posición ( $\hat{e}_c^{\max}$ ) y profundidad ( $\hat{e}_\eta^{\max}$ ) para la condición A-A con un apoyo simple en  $c = 0.45$ .

- A-A con un apoyo simple en  $c=0.50$



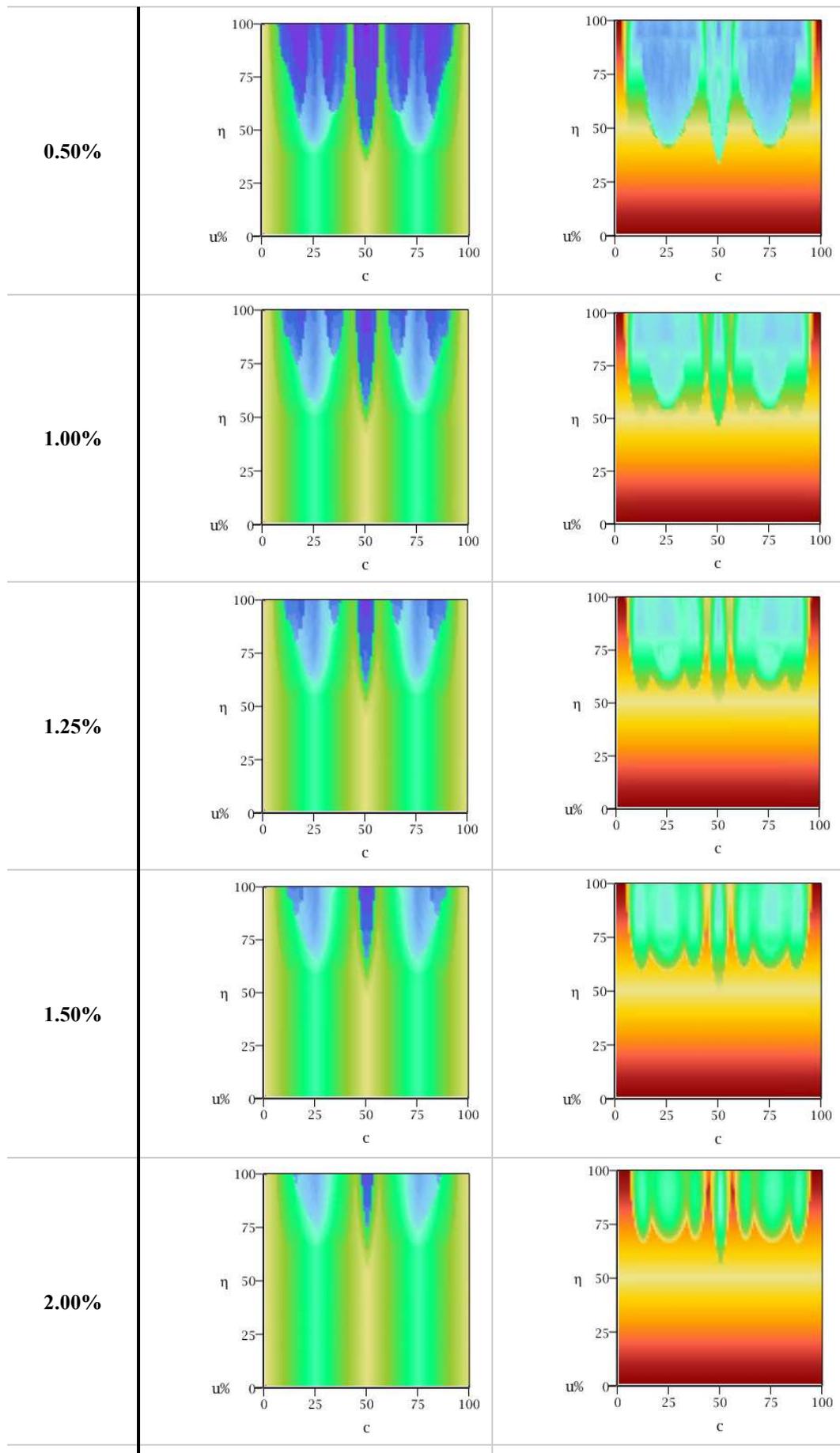
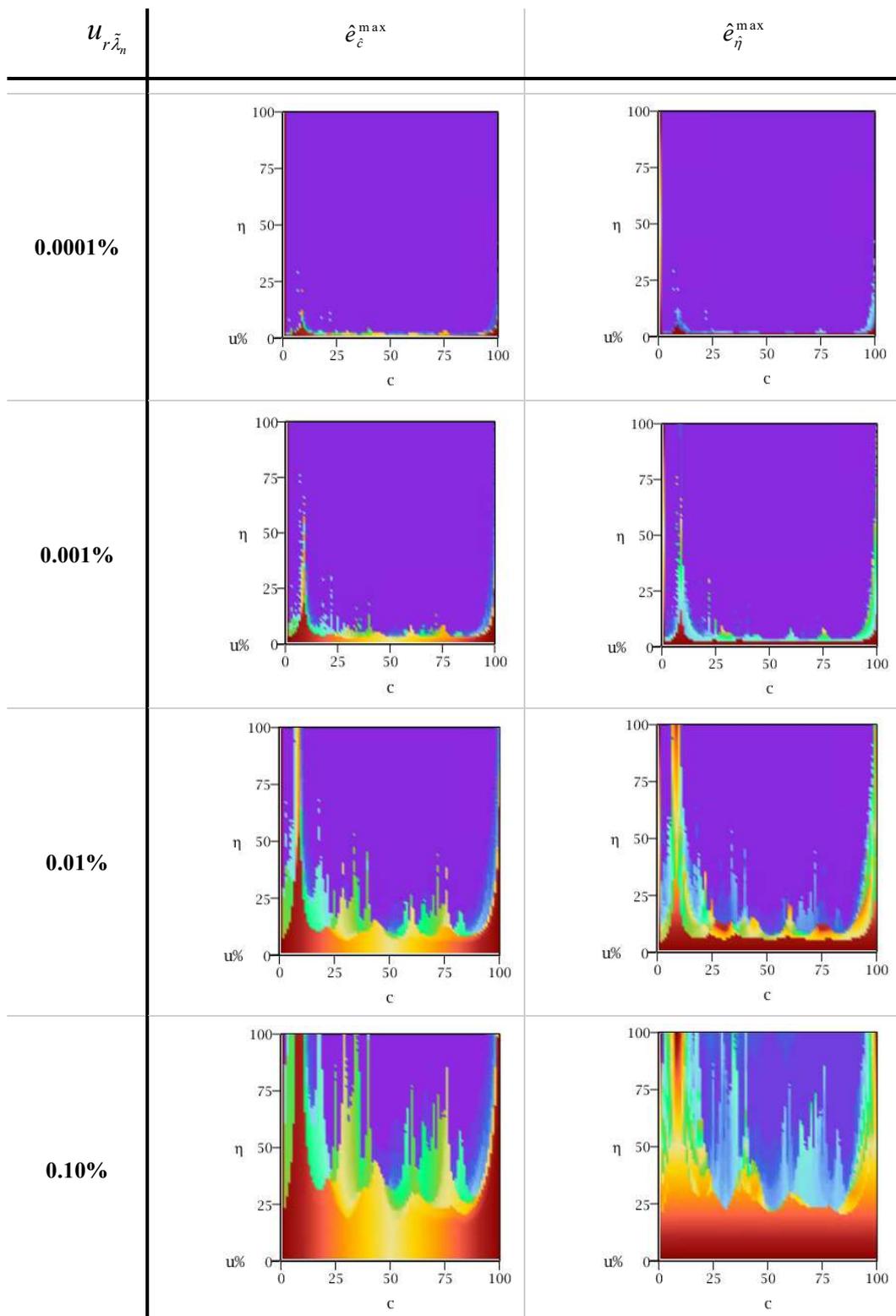


Figura A6.19 – Error máximo pronosticado en la determinación de la posición ( $\hat{e}_c^{\max}$ ) y profundidad ( $\hat{e}_\eta^{\max}$ ) para la condición A-A con un apoyo simple en  $c = 0.50$ .

- E-A con un apoyo simple en  $c=0.30$



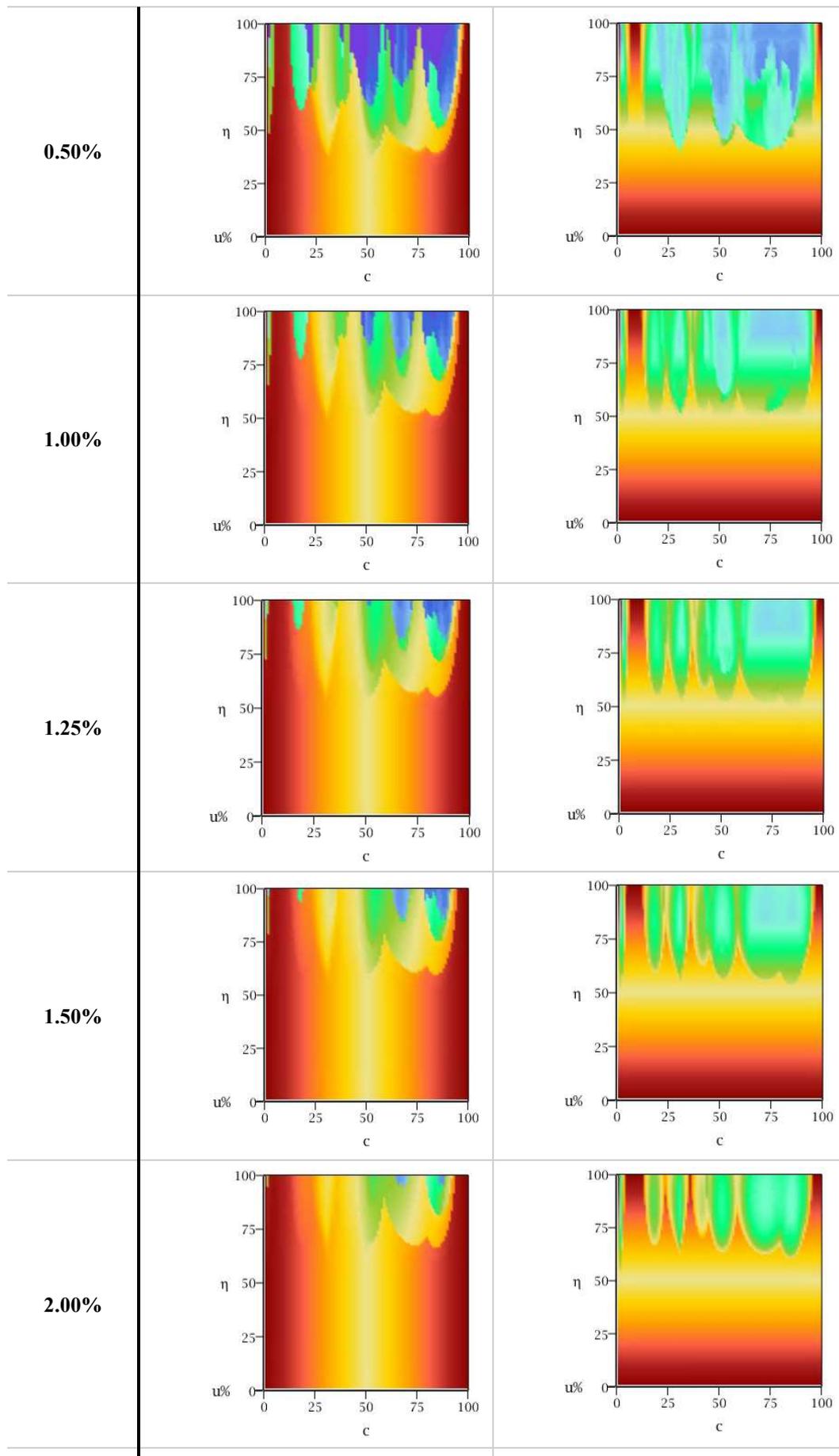
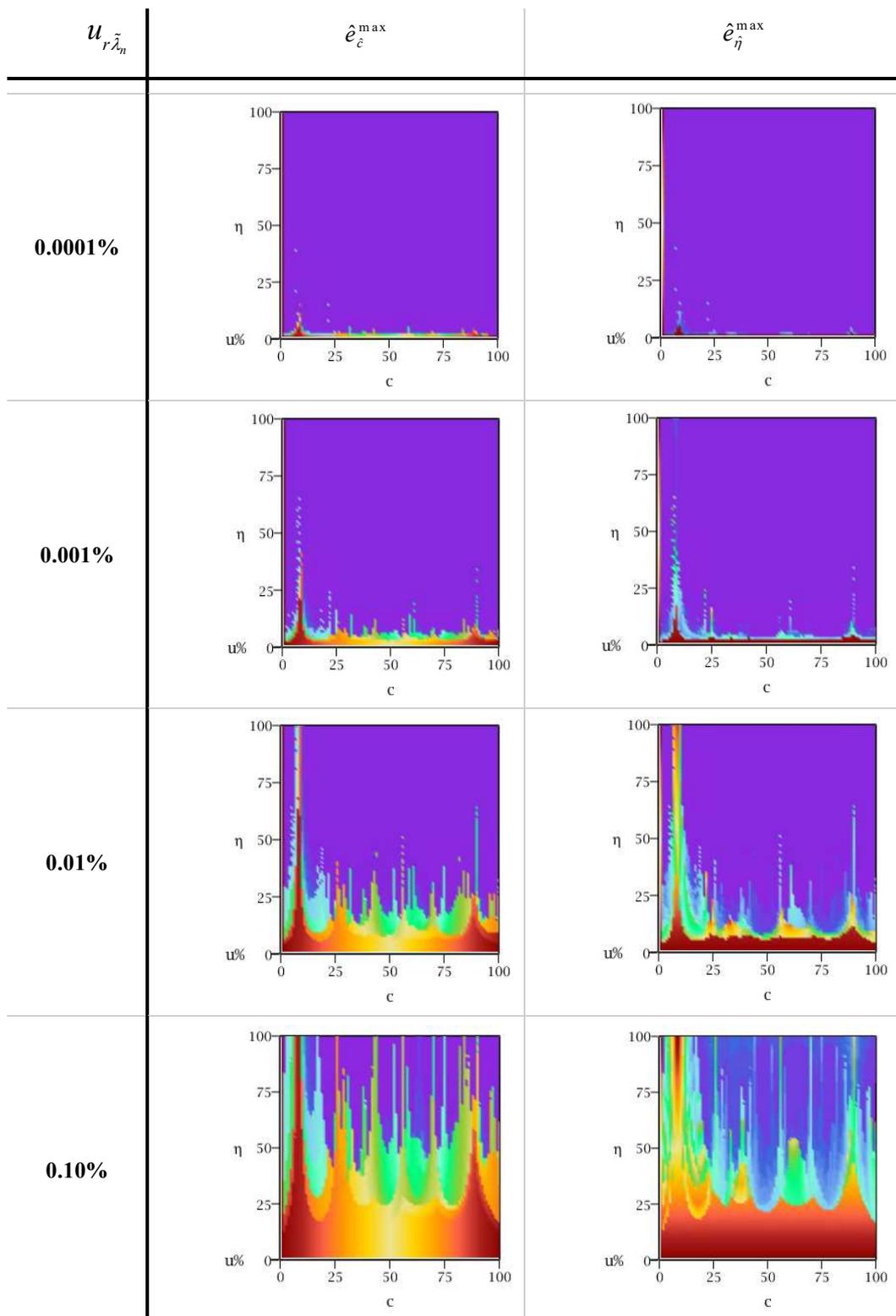


Figura A6.20 – Error máximo pronosticado en la determinación de la posición ( $\hat{e}_c^{\max}$ ) y profundidad ( $\hat{e}_\eta^{\max}$ ) para la condición E-A con un apoyo simple en  $c = 0.30$ .

- E-E con un apoyo simple en  $c=0.30$



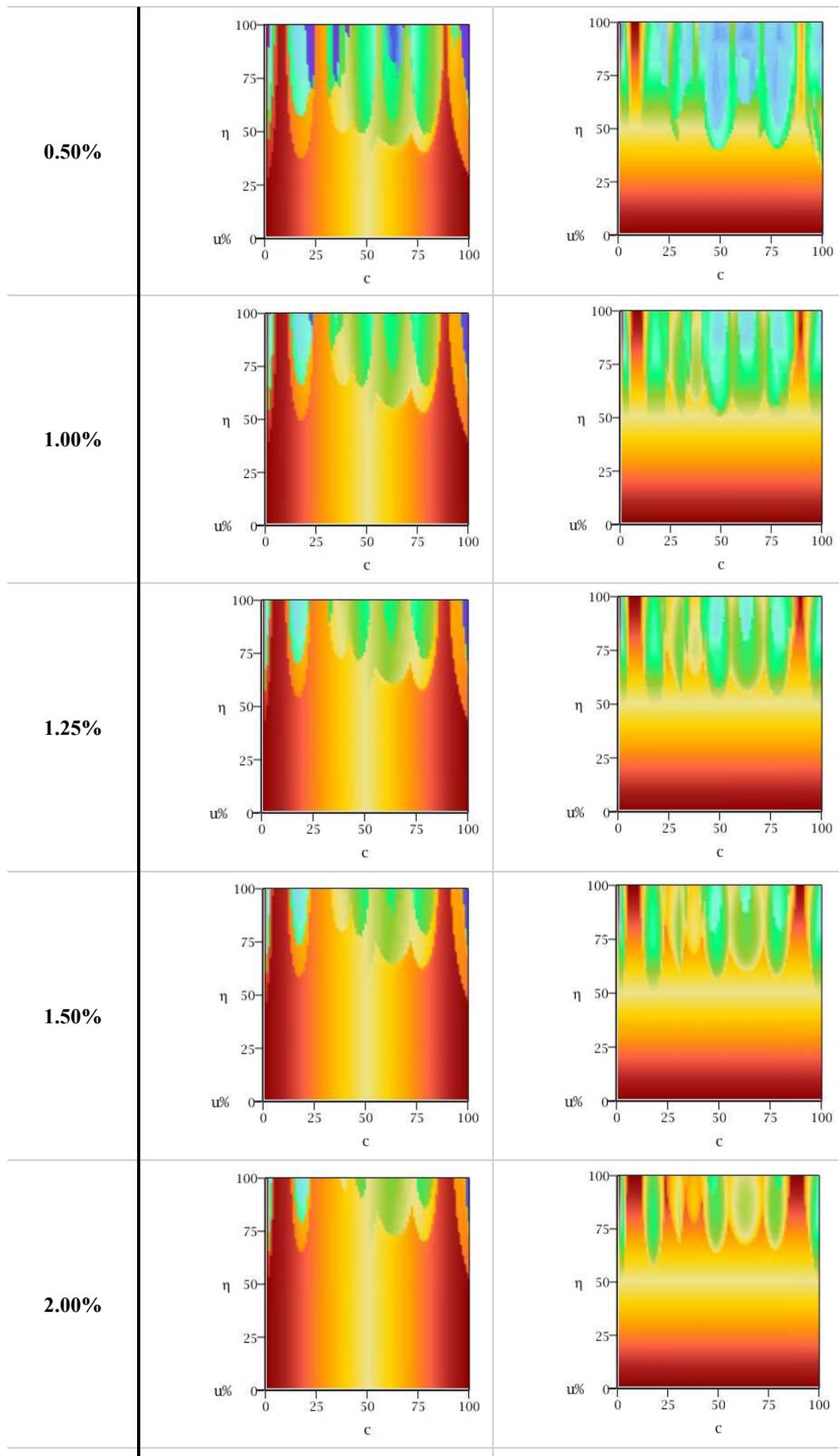
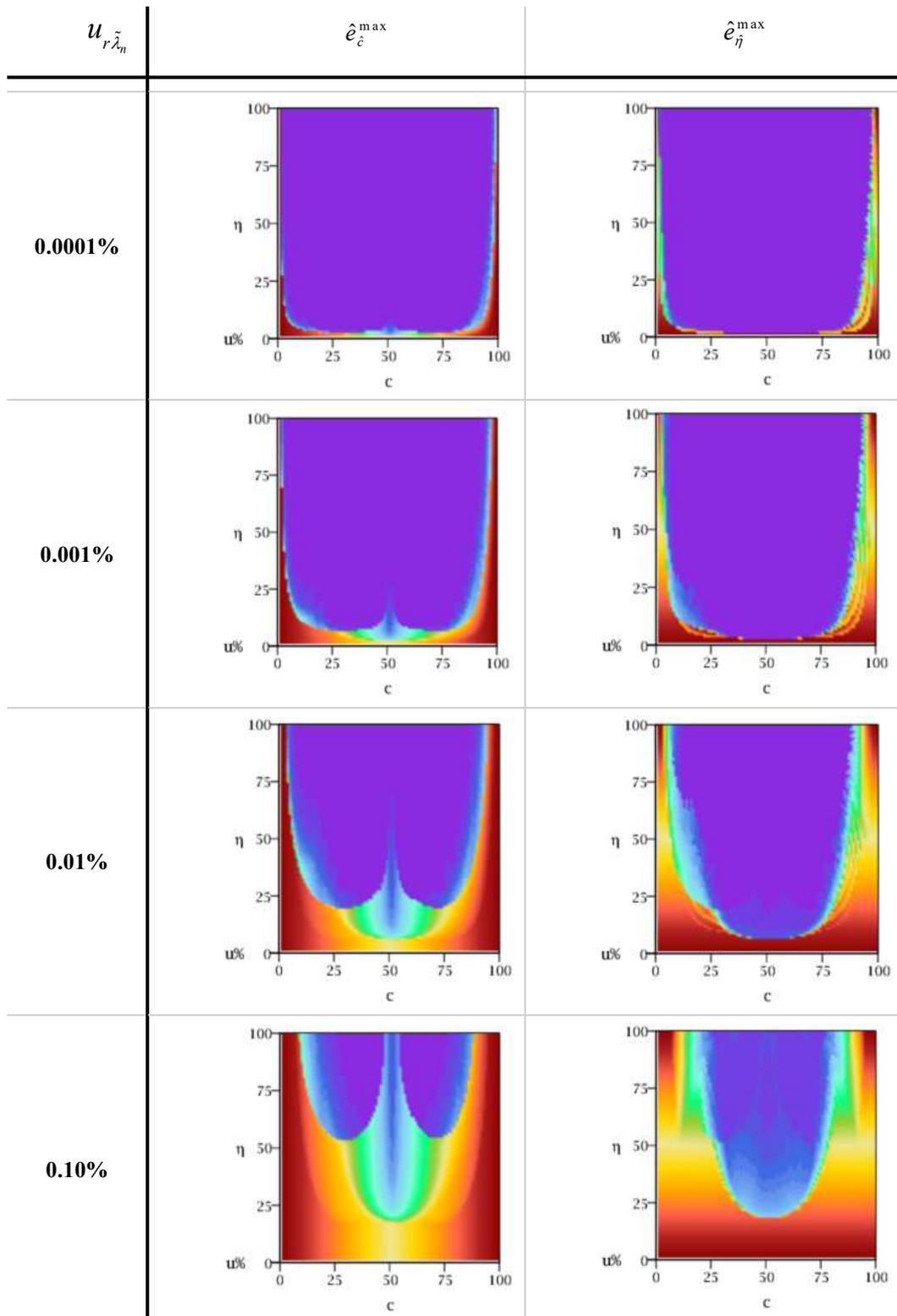


Figura A6.21 – Error máximo pronosticado en la determinación de la posición ( $\hat{e}_c^{\max}$ ) y profundidad ( $\hat{e}_\eta^{\max}$ ) para la condición E-E con un apoyo simple en  $c = 0.30$ .

**A6.3 Apoyos elásticos en los extremos**

- L-L => A-L:  $T_1 = 10, R_1 = T_2 = R_2 = 0$ .



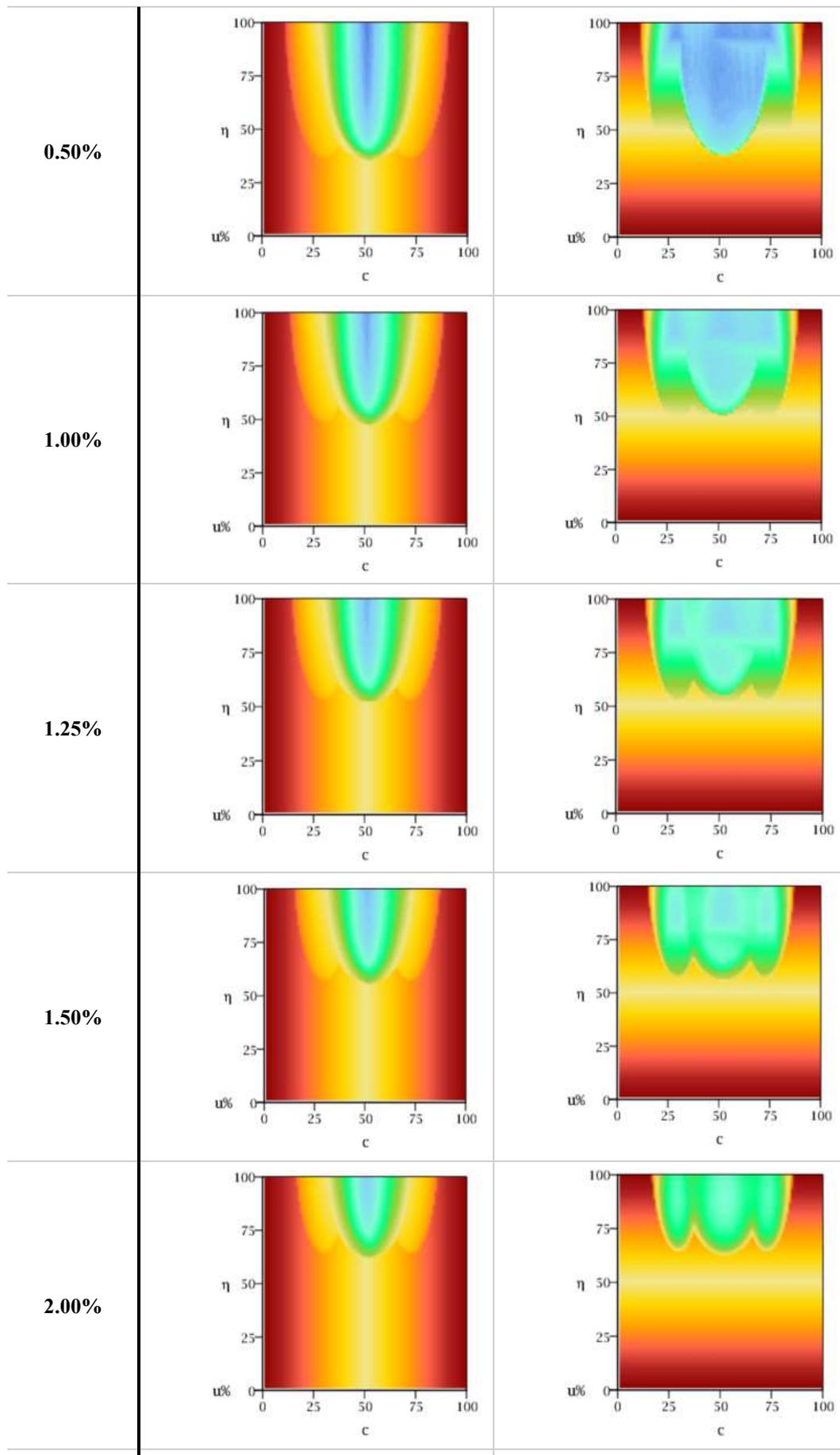
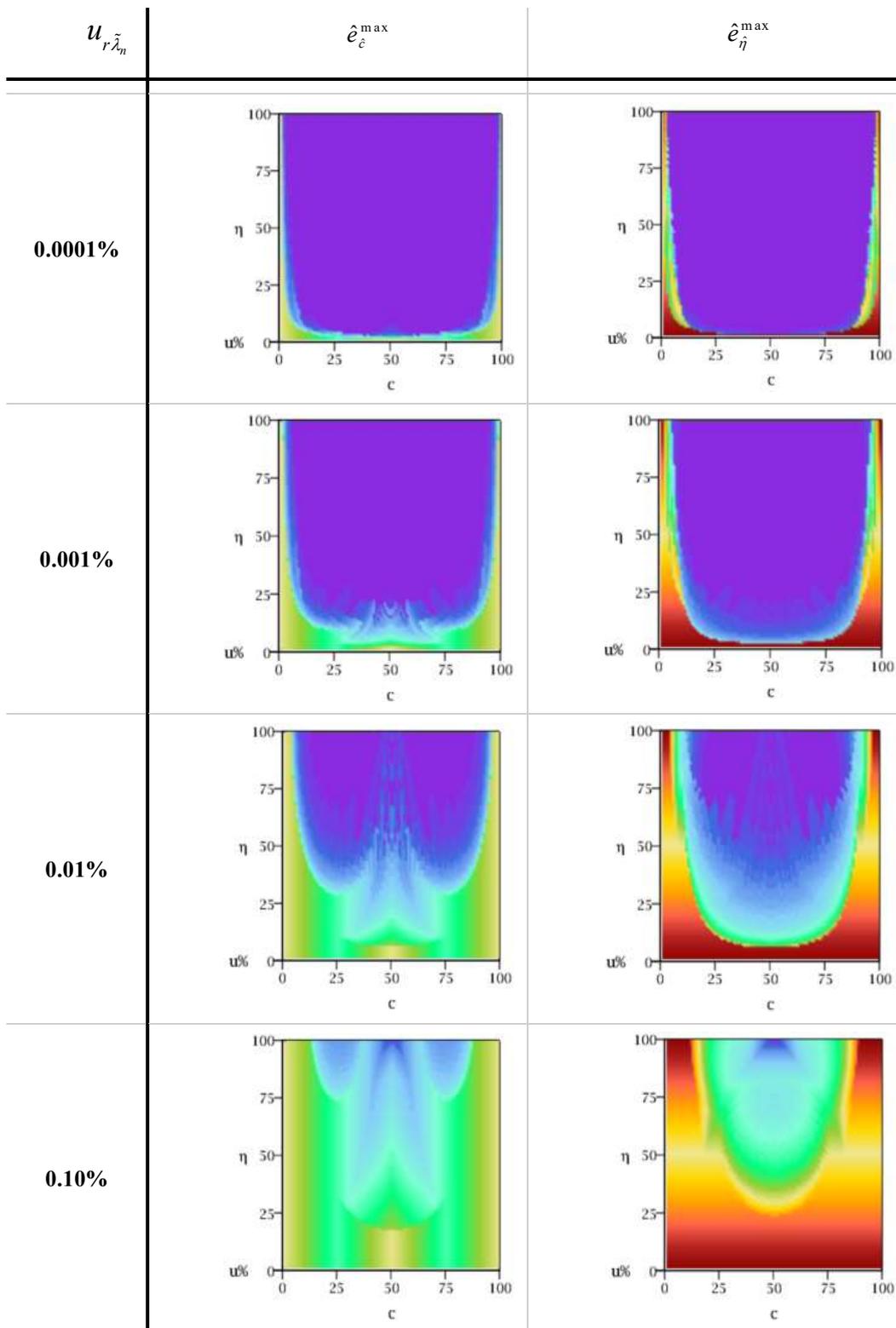


Figura A6.22 – Error máximo pronosticado en la determinación de la posición ( $\hat{e}_c^{\max}$ ) y profundidad ( $\hat{e}_\eta^{\max}$ ) para la condición  $T_1 = 10$ ,  $R_1 = T_2 = R_2 = 0$ .

- L-L => A-A:  $T_1 = T_2 = 10$ ,  $R_1 = R_2 = 0$ .



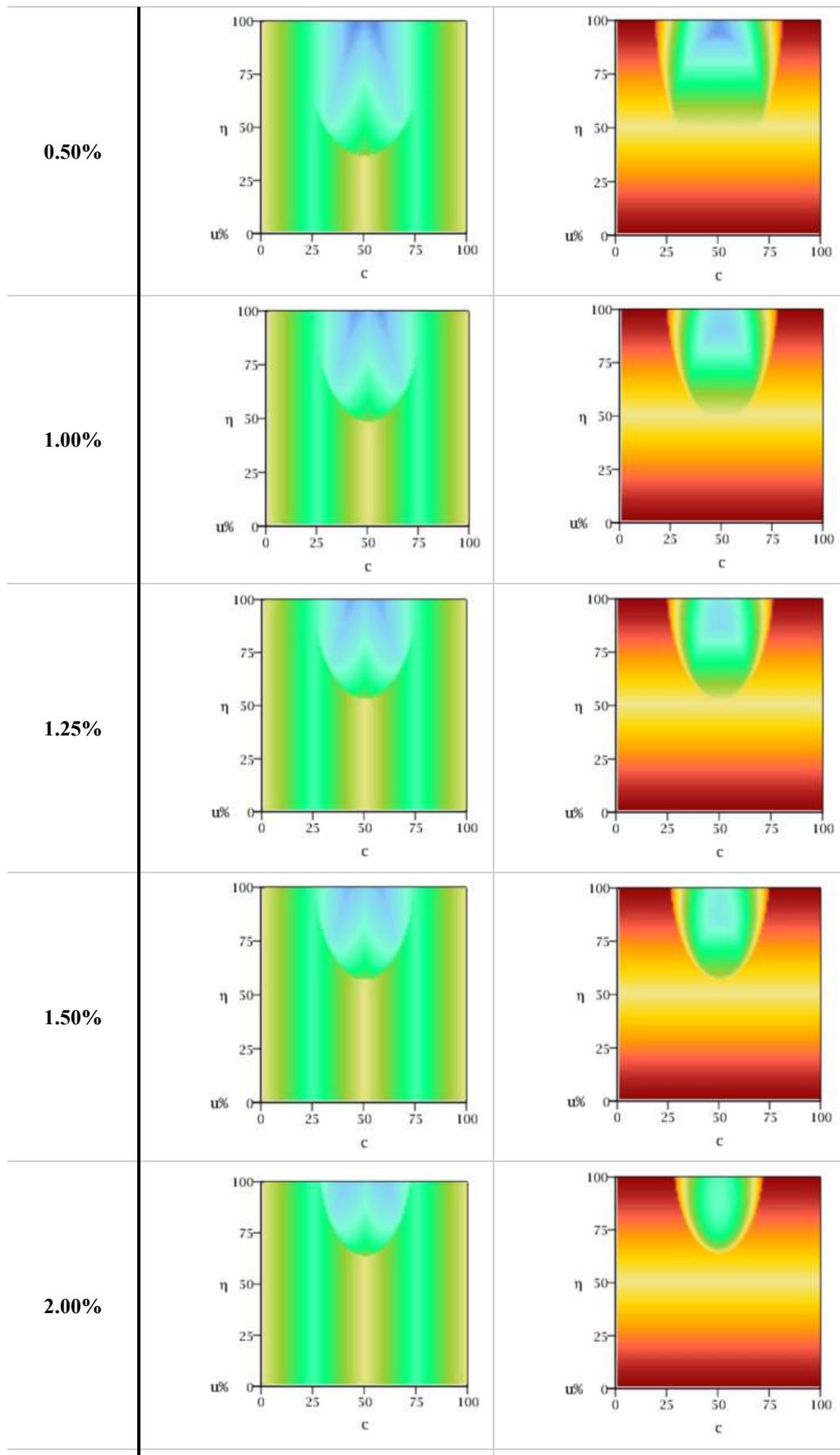
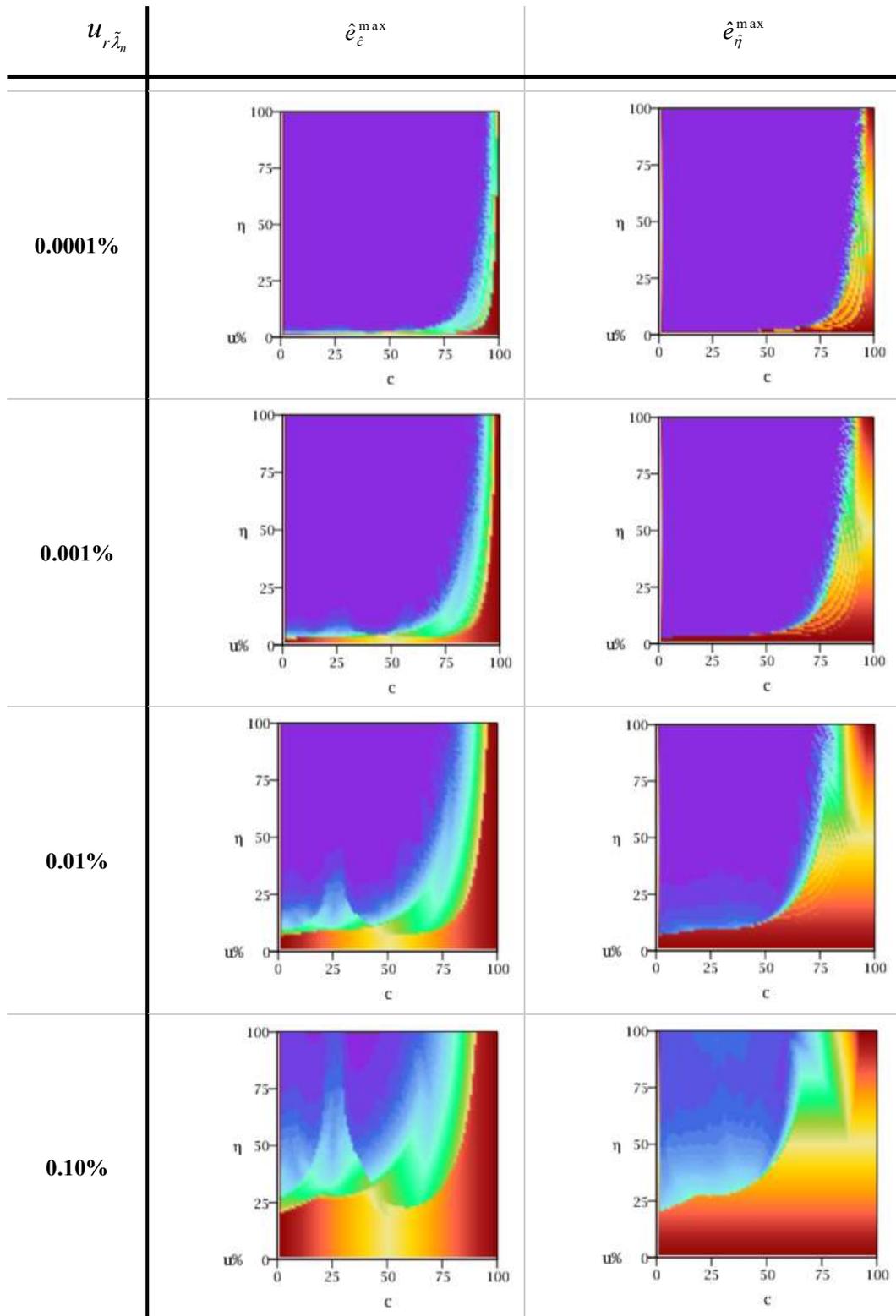


Figura A6.23 – Error máximo pronosticado en la determinación de la posición ( $\hat{c}^{\max}$ ) y profundidad ( $\hat{\eta}^{\max}$ ) para la condición  $T_1 = T_2 = 10$ ,  $R_1 = R_2 = 0$ .

- L-L => E-L:  $T_1 = R_1 = 10, T_2 = R_2 = 0.$



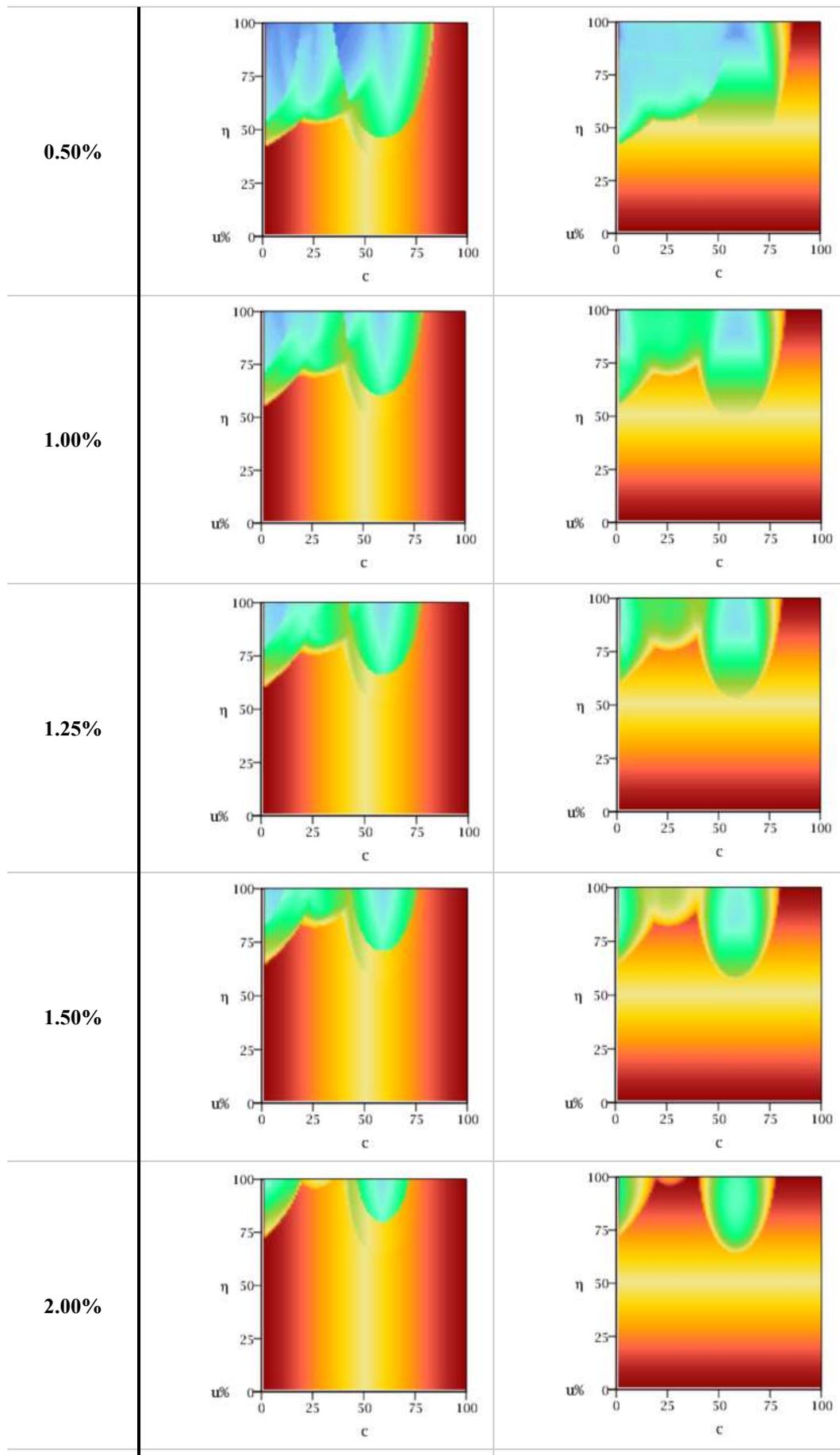
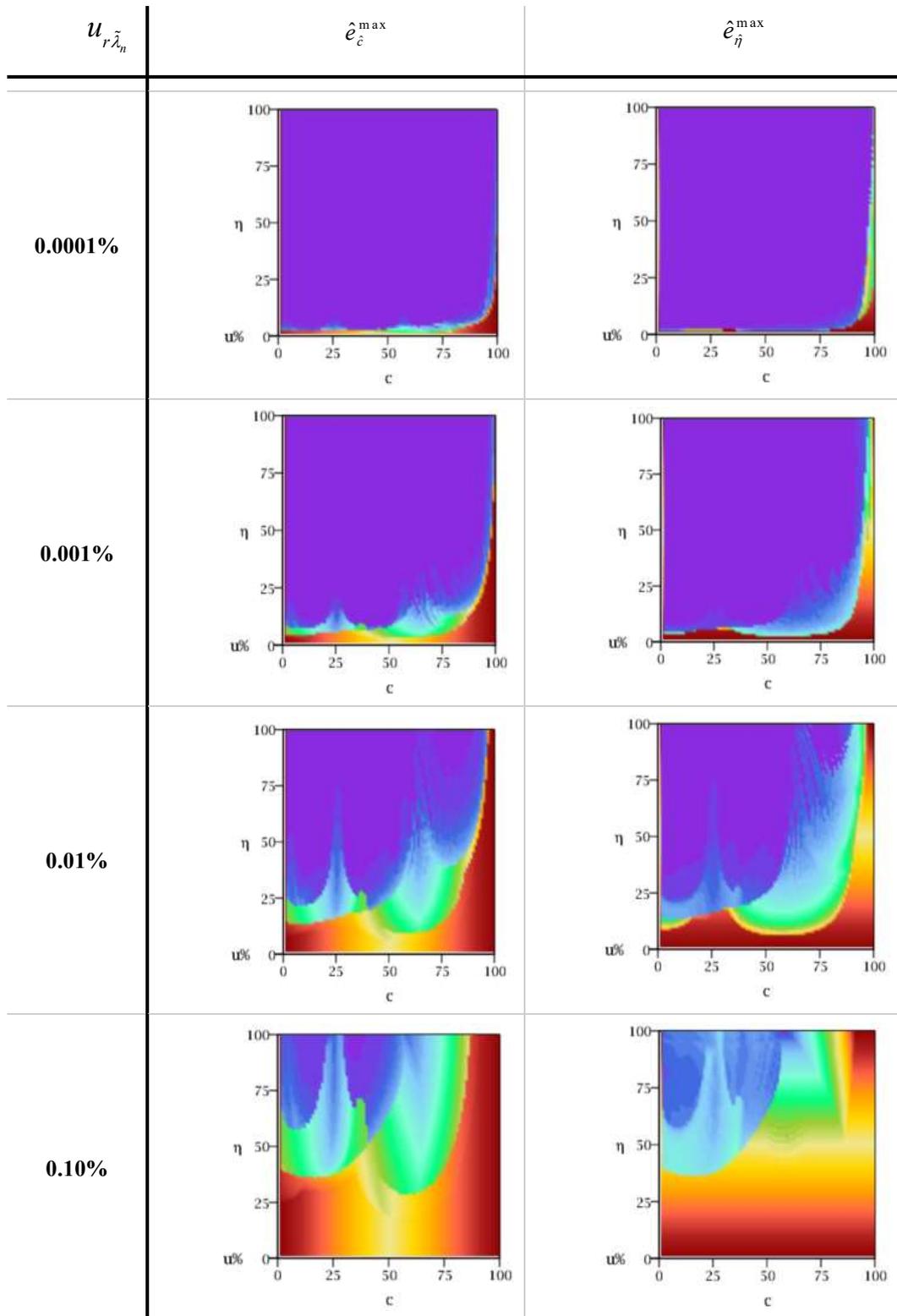


Figura A6.24 – Error máximo pronosticado en la determinación de la posición ( $\hat{e}_c^{\max}$ ) y profundidad ( $\hat{e}_\eta^{\max}$ ) para la condición  $T_1 = R_1 = 10$ ,  $T_2 = R_2 = 0$ .

- E-L => E-A:  $T_1 = R_1 = T_2 = 10, R_2 = 0.$



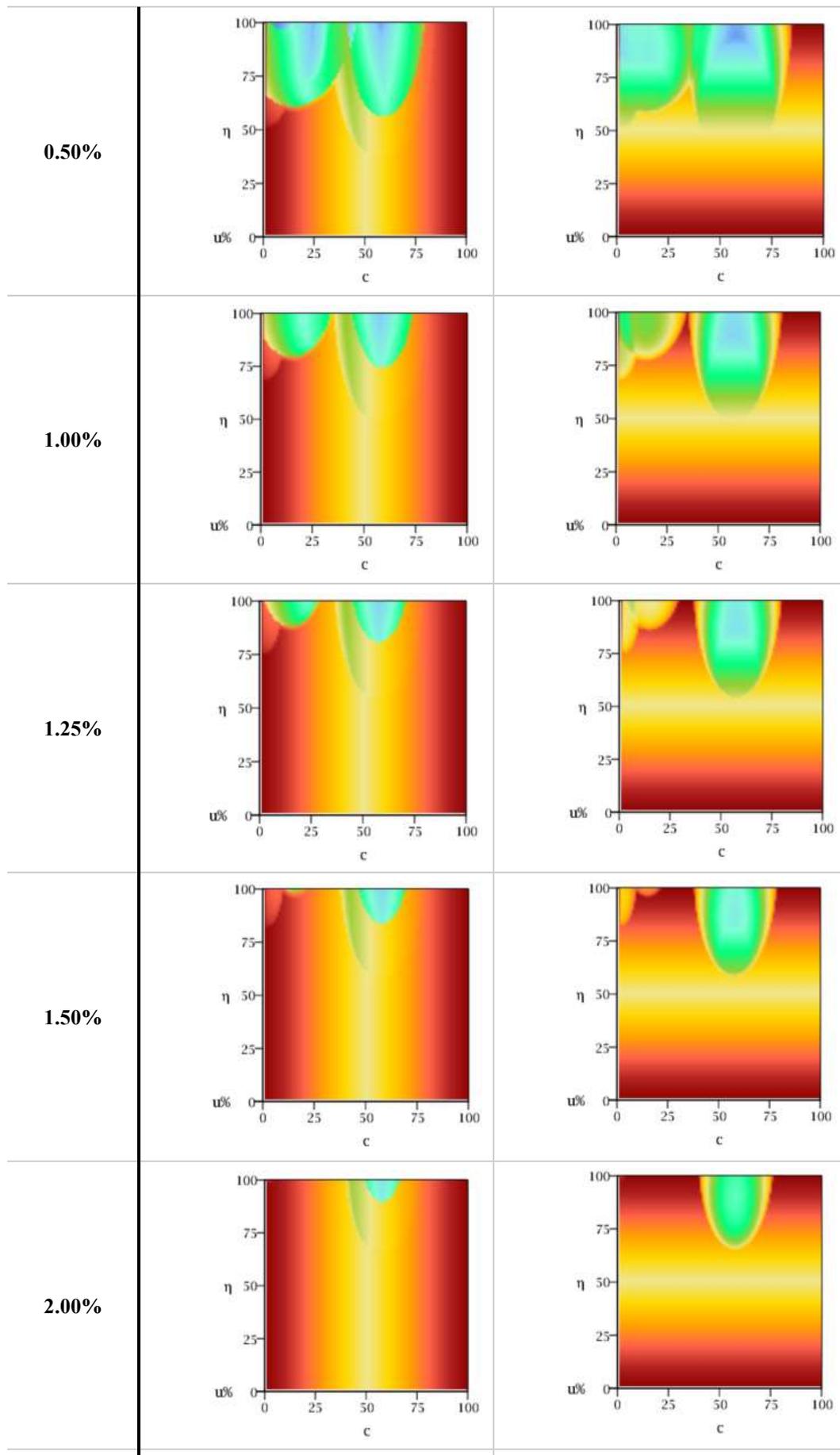
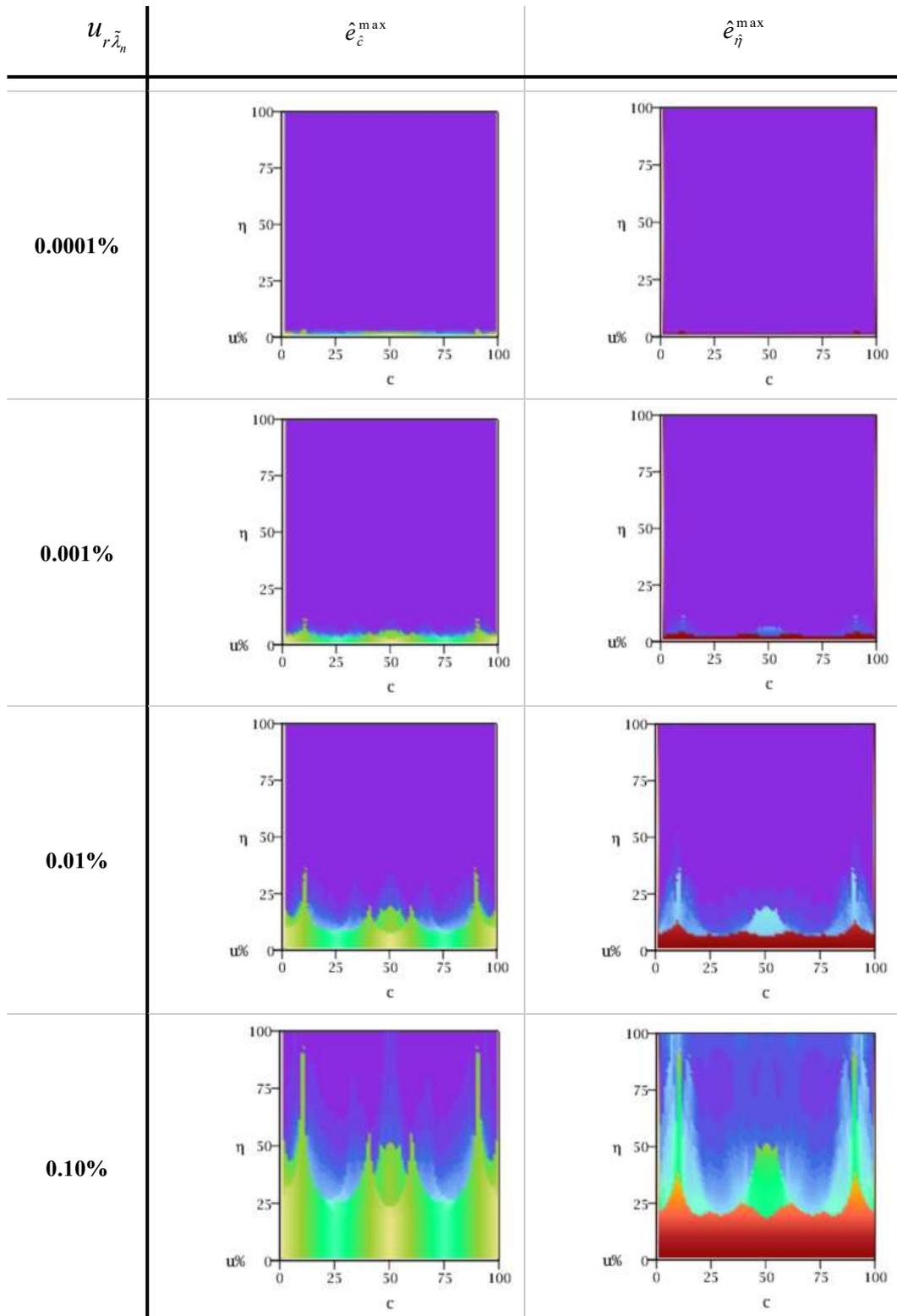


Figura A6.25 – Error máximo pronosticado en la determinación de la posición ( $\hat{e}_c^{\max}$ ) y profundidad ( $\hat{e}_\eta^{\max}$ ) para la condición  $T_1 = R_1 = T_2 = 10$ ,  $R_2 = 0$ .

- A-A => E-E:  $T_1 = T_2 = \infty$ ,  $R_1 = R_2 = 0$ .



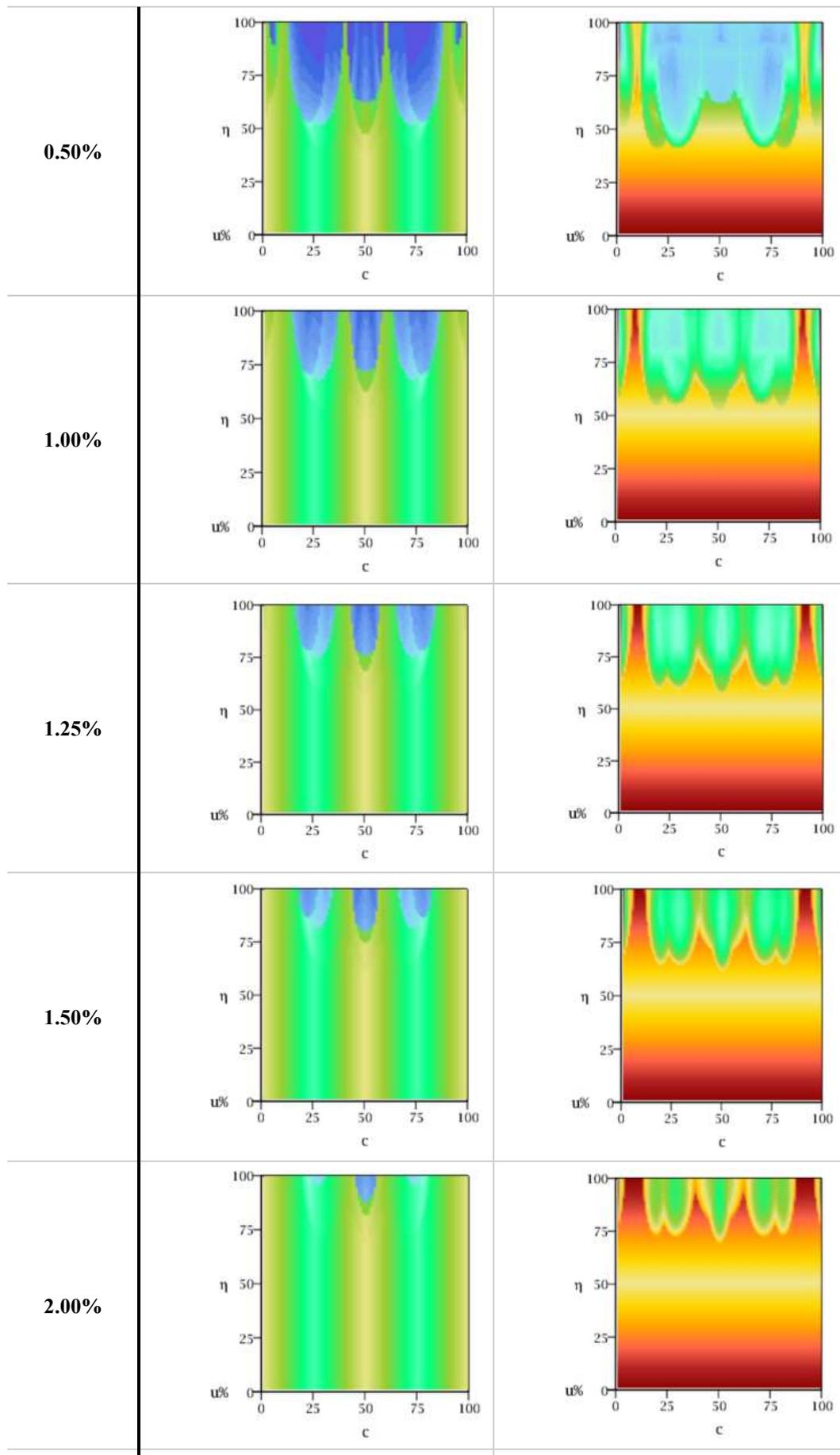
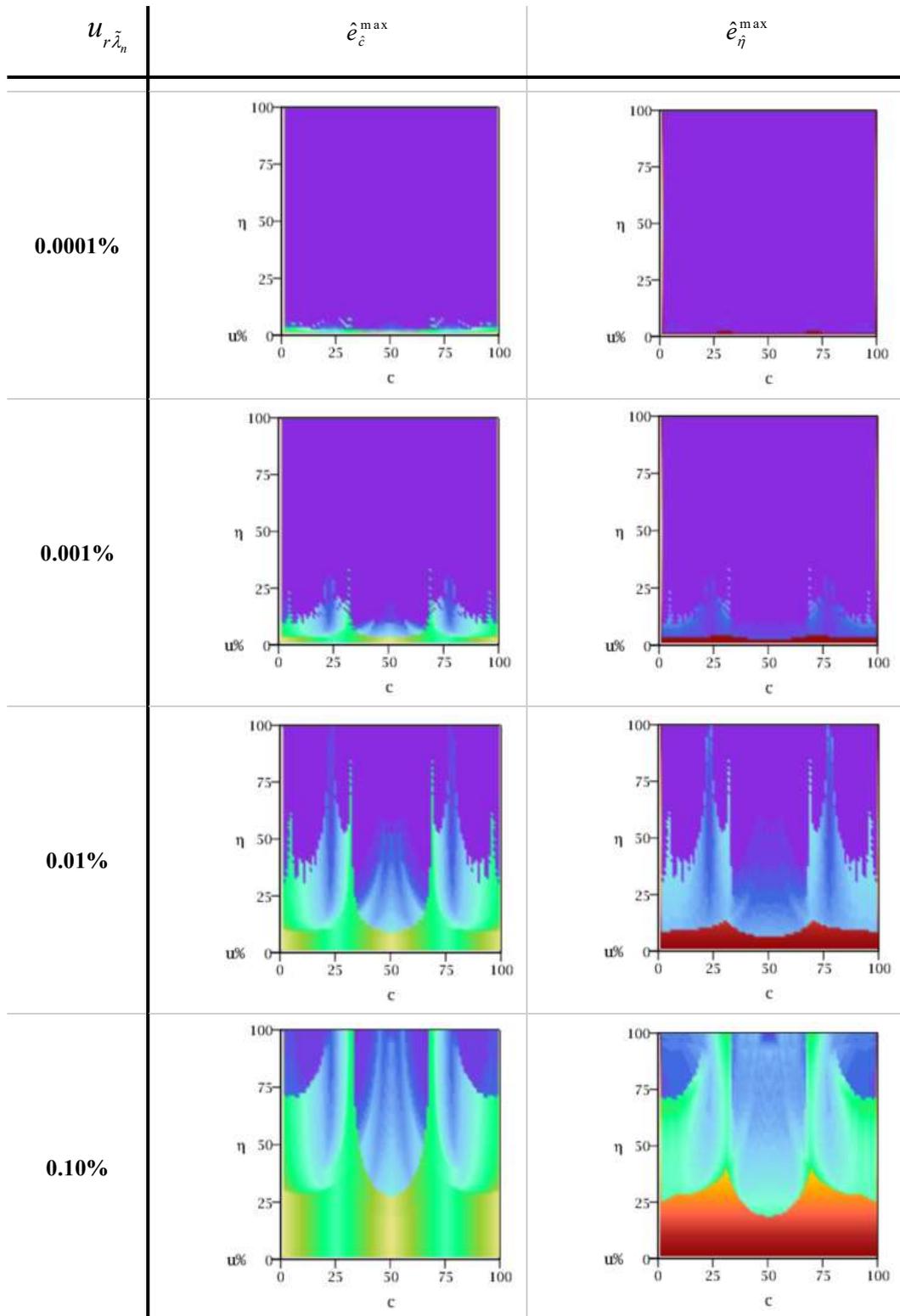


Figura A6.26 – Error máximo pronosticado en la determinación de la posición ( $\hat{e}_c^{\max}$ ) y profundidad ( $\hat{e}_\eta^{\max}$ ) para la condición  $T_1 = T_2 = \infty$ ,  $R_1 = R_2 = 0$ .

- A-A => E-E:  $T_1 = T_2 = R_1 = R_2 = 10$ .



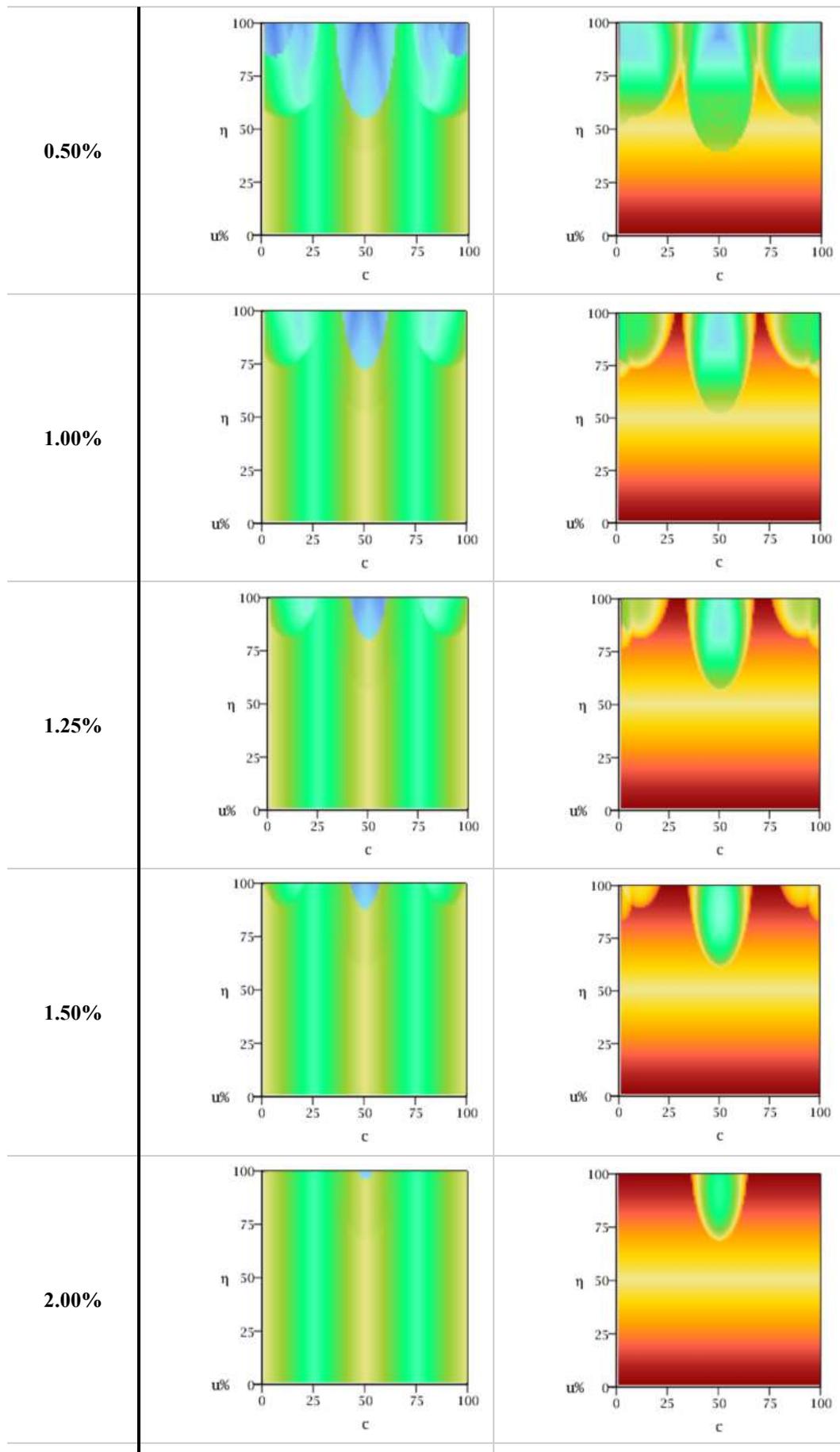


Figura A6.27 – Error máximo pronosticado en la determinación de la posición ( $\hat{e}_c^{\max}$ ) y profundidad ( $\hat{e}_\eta^{\max}$ ) para la condición  $T_1 = T_2 = R_1 = R_2 = 10$ .

# APÉNDICE 7

## Resultados del análisis de sensibilidad del método de identificación de fisuras para algunos casos particulares

### A7.1 Análisis de sensibilidad para diferentes condiciones de vinculación

En las Tablas A7.1. a A7.10. se presenta el análisis de sensibilidad para diferentes

En cada una de las tablas, en el caso 1 no se induce error. Los casos 2 a 9 se corresponden a la peor combinación de los valores extremos de  $e_{\lambda_n}$  y los casos 10 a 20 se corresponden a errores aleatorios en el intervalo  $(-e_{\lambda_n}, e_{\lambda_n})$ . Los máximos errores inducidos son  $e_{\lambda_n} = 0.1\%$ .

Caso	$e_{\lambda_1}$	$e_{\lambda_2}$	$e_{\lambda_3}$	$\hat{c}$	$\hat{\eta}$	$e_{\hat{c}}$	$e_{\hat{\eta}}$
1	0.00%	0.00%	0.00%	0.15	0.50	0%	0%
2	0.10%	0.10%	0.10%	0.20	0.48	5%	-2%
3	0.10%	0.10%	-0.10%	0.19	0.54	4%	4%
4	0.10%	-0.10%	0.10%	0.23	0.47	8%	-3%
5	0.10%	-0.10%	-0.10%	0.22	0.52	7%	2%
6	-0.10%	0.10%	0.10%	0.20	0.48	5%	-2%
7	-0.10%	0.10%	-0.10%	0.17	0.60	2%	10%
8	-0.10%	-0.10%	0.10%	0.23	0.47	8%	-3%
9	-0.10%	-0.10%	-0.10%	0.22	0.52	7%	2%
10	0.03%	0.05%	0.04%	0.20	0.50	5%	0%
11	0.10%	0.01%	-0.03%	0.21	0.50	6%	0%
12	0.00%	-0.09%	0.09%	0.23	0.47	8%	-3%
13	0.07%	-0.04%	-0.04%	0.21	0.51	6%	1%
14	-0.10%	0.05%	0.02%	0.20	0.50	5%	0%
15	-0.04%	0.07%	0.00%	0.19	0.52	4%	2%
16	-0.04%	-0.09%	0.00%	0.22	0.50	7%	0%
17	-0.07%	-0.04%	-0.06%	0.21	0.51	6%	1%
18	-0.04%	0.02%	0.00%	0.20	0.51	5%	1%
19	0.05%	0.00%	-0.02%	0.20	0.51	5%	1%
20	-0.02%	-0.02%	0.00%	0.21	0.50	6%	0%

Tabla A7.1 – Análisis de sensibilidad para vigas L-L con  $c=0.15$  y  $\eta = 0.50$ .

Caso	$e_{\lambda_1}$	$e_{\lambda_2}$	$e_{\lambda_3}$	$\hat{c}$	$\hat{\eta}$	$e_{\hat{c}}$	$e_{\hat{\eta}}$
1	0.00%	0.00%	0.00%	0.15	0.50	0%	0%
2	0.10%	0.10%	0.10%	0.14	0.48	-1%	-2%
3	0.10%	0.10%	-0.10%	0.10	0.60	-5%	10%
4	0.10%	-0.10%	0.10%	0.18	0.48	3%	-2%
5	0.10%	-0.10%	-0.10%	0.15	0.52	0%	2%
6	-0.10%	0.10%	0.10%	0.15	0.48	0%	-2%
7	-0.10%	0.10%	-0.10%	0.10	0.60	-5%	10%
8	-0.10%	-0.10%	0.10%	0.18	0.48	3%	-2%
9	-0.10%	-0.10%	-0.10%	0.16	0.52	1%	2%
10	0.04%	0.04%	0.02%	0.14	0.50	-1%	0%
11	0.05%	0.10%	-0.09%	0.10	0.60	-5%	10%
12	0.08%	-0.05%	0.05%	0.16	0.49	1%	-1%
13	0.06%	-0.07%	-0.03%	0.16	0.50	1%	0%
14	-0.05%	0.10%	0.03%	0.13	0.51	-2%	1%
15	-0.06%	0.00%	-0.07%	0.14	0.52	-1%	2%
16	-0.07%	-0.03%	0.06%	0.17	0.48	2%	-2%
17	-0.02%	-0.05%	-0.02%	0.16	0.50	1%	0%
18	-0.02%	0.06%	-0.07%	0.13	0.53	-2%	3%
19	0.05%	0.02%	0.00%	0.14	0.51	-1%	1%
20	-0.02%	-0.01%	0.04%	0.16	0.49	1%	-1%

Tabla A7.2 – Análisis de sensibilidad para vigas A-A con  $c = 0.15$  y  $\eta = 0.50$ .

Caso	$e_{\lambda_1}$	$e_{\lambda_2}$	$e_{\lambda_3}$	$\hat{c}$	$\hat{\eta}$	$e_{\hat{c}}$	$e_{\hat{\eta}}$
1	0.00%	0.00%	0.00%	0.15	0.50	0%	0%
2	0.10%	0.10%	0.10%	0.16	0.40	1%	-10%
3	0.10%	0.10%	-0.10%	0.17	0.46	2%	-4%
4	0.10%	-0.10%	0.10%	0.21	0.31	6%	-19%
5	0.10%	-0.10%	-0.10%	0.17	0.46	2%	-4%
6	-0.10%	0.10%	0.10%	0.14	0.51	-1%	1%
7	-0.10%	0.10%	-0.10%	0.50	0.37	35%	-13%
8	-0.10%	-0.10%	0.10%	0.44	0.36	29%	-14%
9	-0.10%	-0.10%	-0.10%	0.15	0.55	0%	5%
10	0.03%	0.08%	0.06%	0.15	0.47	0%	-3%
11	0.06%	0.03%	-0.06%	0.16	0.48	1%	-2%
12	0.07%	-0.08%	0.05%	0.16	0.43	1%	-7%
13	0.02%	-0.10%	-0.09%	0.16	0.50	1%	0%
14	-0.08%	0.08%	0.08%	0.14	0.52	-1%	2%
15	0.00%	0.07%	-0.03%	0.15	0.51	0%	1%
16	-0.10%	-0.04%	0.04%	0.45	0.36	30%	-14%
17	-0.02%	-0.04%	-0.07%	0.15	0.53	0%	3%
18	-0.02%	0.01%	-0.02%	0.15	0.51	0%	1%
19	0.04%	0.02%	-0.01%	0.15	0.50	0%	0%
20	0.00%	-0.06%	0.01%	0.15	0.50	0%	0%

Tabla A7.3 – Análisis de sensibilidad para vigas E-E con  $c = 0.15$  y  $\eta = 0.50$ .

Caso	$e_{\lambda_1}$	$e_{\lambda_2}$	$e_{\lambda_3}$	$\hat{c}$	$\hat{\eta}$	$e_{\hat{c}}$	$e_{\hat{\eta}}$
1	0.00%	0.00%	0.00%	0.15	0.50	0%	0%
2	0.10%	0.10%	0.10%	0.14	0.48	-1%	-2%
3	0.10%	0.10%	-0.10%	0.11	0.56	-4%	6%
4	0.10%	-0.10%	0.10%	0.74	0.48	59%	-2%
5	0.10%	-0.10%	-0.10%	0.76	0.50	61%	0%
6	-0.10%	0.10%	0.10%	0.15	0.48	0%	-2%
7	-0.10%	0.10%	-0.10%	0.12	0.54	-3%	4%
8	-0.10%	-0.10%	0.10%	0.18	0.49	3%	-1%
9	-0.10%	-0.10%	-0.10%	0.16	0.52	1%	2%
10	0.00%	0.08%	0.04%	0.15	0.49	0%	-1%
11	0.07%	0.06%	-0.04%	0.13	0.52	-2%	2%
12	0.06%	-0.04%	0.03%	0.75	0.48	60%	-2%
13	0.03%	-0.02%	-0.02%	0.15	0.50	0%	0%
14	-0.01%	0.06%	0.07%	0.15	0.49	0%	-1%
15	-0.02%	0.04%	-0.05%	0.14	0.51	-1%	1%
16	-0.05%	-0.08%	0.02%	0.16	0.50	1%	0%
17	-0.04%	-0.04%	-0.10%	0.15	0.52	0%	2%
18	-0.01%	0.02%	-0.02%	0.14	0.51	-1%	1%
19	0.06%	0.04%	-0.01%	0.13	0.51	-2%	1%
20	0.00%	0.00%	0.01%	0.15	0.50	0%	0%

Tabla A7.4 – Análisis de sensibilidad para vigas A-L con  $c = 0.15$  y  $\eta = 0.50$ .

Caso	$e_{\lambda_1}$	$e_{\lambda_2}$	$e_{\lambda_3}$	$\hat{c}$	$\hat{\eta}$	$e_{\hat{c}}$	$e_{\hat{\eta}}$
1	0.00%	0.00%	0.00%	0.15	0.50	0%	0%
2	0.10%	0.10%	0.10%	0.16	0.49	1%	-1%
3	0.10%	0.10%	-0.10%	0.17	0.50	2%	0%
4	0.10%	-0.10%	0.10%	0.13	0.47	-2%	-3%
5	0.10%	-0.10%	-0.10%	0.13	0.47	-2%	-3%
6	-0.10%	0.10%	0.10%	0.16	0.52	1%	2%
7	-0.10%	0.10%	-0.10%	0.17	0.53	2%	3%
8	-0.10%	-0.10%	0.10%	0.13	0.50	-2%	0%
9	-0.10%	-0.10%	-0.10%	0.13	0.50	-2%	0%
10	0.06%	0.08%	0.07%	0.15	0.49	0%	-1%
11	0.04%	0.01%	-0.08%	0.17	0.51	2%	1%
12	0.01%	-0.05%	0.01%	0.14	0.49	-1%	-1%
13	0.04%	-0.09%	-0.10%	0.13	0.48	-2%	-2%
14	-0.09%	0.10%	0.02%	0.16	0.52	1%	2%
15	0.00%	0.04%	-0.05%	0.16	0.51	1%	1%
16	-0.08%	-0.08%	0.02%	0.14	0.51	-1%	1%
17	-0.02%	-0.03%	-0.09%	0.16	0.51	1%	1%
18	-0.01%	0.04%	-0.02%	0.16	0.51	1%	1%
19	0.07%	0.00%	-0.02%	0.15	0.49	0%	-1%
20	0.00%	-0.05%	0.01%	0.14	0.49	-1%	-1%

Tabla A7.5 – Análisis de sensibilidad para vigas E-L con  $c = 0.15$  y  $\eta = 0.50$ .

Caso	$e_{\lambda_1}$	$e_{\lambda_2}$	$e_{\lambda_3}$	$\hat{c}$	$\hat{\eta}$	$e_{\hat{c}}$	$e_{\hat{\eta}}$
1	0.00%	0.00%	0.00%	0.15	0.50	0%	0%
2	0.10%	0.10%	0.10%	0.15	0.43	0%	-7%
3	0.10%	0.10%	-0.10%	0.16	0.50	1%	0%
4	0.10%	-0.10%	0.10%	0.47	0.32	32%	-18%
5	0.10%	-0.10%	-0.10%	0.49	0.37	34%	-13%
6	-0.10%	0.10%	0.10%	0.14	0.52	-1%	2%
7	-0.10%	0.10%	-0.10%	0.15	0.56	0%	6%
8	-0.10%	-0.10%	0.10%	0.63	0.37	48%	-13%
9	-0.10%	-0.10%	-0.10%	0.59	0.38	44%	-12%
10	0.06%	0.06%	0.05%	0.15	0.46	0%	-4%
11	0.03%	0.03%	-0.07%	0.56	0.33	41%	-17%
12	0.01%	-0.07%	0.00%	0.59	0.33	44%	-17%
13	0.09%	-0.03%	-0.04%	0.51	0.32	36%	-18%
14	-0.03%	0.01%	0.01%	0.15	0.51	0%	1%
15	-0.02%	0.07%	-0.01%	0.15	0.51	0%	1%
16	-0.01%	-0.01%	0.03%	0.60	0.33	45%	-17%
17	0.00%	-0.08%	0.00%	0.60	0.34	45%	-16%
18	0.00%	0.01%	-0.01%	0.15	0.50	0%	0%
19	0.04%	0.03%	-0.01%	0.58	0.32	43%	-18%
20	-0.01%	-0.01%	0.02%	0.60	0.34	45%	-16%

Tabla A7.6 – Análisis de sensibilidad para vigas E-A con  $c = 0.15$  y  $\eta = 0.50$ .

Caso	$e_{\lambda_1}$	$e_{\lambda_2}$	$e_{\lambda_3}$	$\hat{c}$	$\hat{\eta}$	$e_{\hat{c}}$	$e_{\hat{\eta}}$
1	0.00%	0.00%	0.00%	0.15	0.50	0%	0%
2	0.10%	0.10%	0.10%	0.92	0.99	77%	49%
3	0.10%	0.10%	-0.10%	0.90	0.89	75%	39%
4	0.10%	-0.10%	0.10%	0.69	0.26	54%	-24%
5	0.10%	-0.10%	-0.10%	0.77	0.37	62%	-13%
6	-0.10%	0.10%	0.10%	0.09	0.84	-6%	34%
7	-0.10%	0.10%	-0.10%	0.10	0.93	-5%	43%
8	-0.10%	-0.10%	0.10%	0.32	0.27	17%	-23%
9	-0.10%	-0.10%	-0.10%	0.26	0.35	11%	-15%
10	0.04%	0.01%	0.09%	0.91	0.82	76%	32%
11	0.06%	0.07%	-0.10%	0.90	0.88	75%	38%
12	0.04%	-0.01%	0.01%	0.91	0.93	76%	43%
13	0.05%	-0.06%	-0.04%	0.79	0.37	64%	-13%
14	-0.01%	0.02%	0.09%	0.11	0.64	-4%	14%
15	-0.10%	0.07%	-0.06%	0.10	0.89	-5%	39%
16	-0.02%	-0.08%	0.09%	0.31	0.27	16%	-23%
17	-0.06%	-0.07%	-0.07%	0.11	0.78	-4%	28%
18	-0.02%	0.00%	-0.06%	0.14	0.57	-1%	7%
19	0.08%	0.01%	0.00%	0.91	0.94	76%	44%
20	-0.10%	-0.02%	0.08%	0.09	0.87	-6%	37%

Tabla A7.7 – Análisis de sensibilidad para vigas con  $c = 0.15$  y  $\eta = 0.50$ .  $T_1 = 10$ ,  $R_1 = R_2 = T_2 = 0$ .

Caso	$e_{\lambda_1}$	$e_{\lambda_2}$	$e_{\lambda_3}$	$\hat{c}$	$\hat{\eta}$	$e_{\hat{c}}$	$e_{\hat{\eta}}$
1	0.00%	0.00%	0.00%	0.15	0.50	0%	0%
2	0.10%	0.10%	0.10%	0.17	0.45	2%	-5%
3	0.10%	0.10%	-0.10%	0.11	0.45	-4%	-5%
4	0.10%	-0.10%	0.10%	0.24	0.53	9%	3%
5	0.10%	-0.10%	-0.10%	0.35	0.55	20%	5%
6	-0.10%	0.10%	0.10%	0.17	0.45	2%	-5%
7	-0.10%	0.10%	-0.10%	0.10	0.47	-5%	-3%
8	-0.10%	-0.10%	0.10%	0.19	0.54	4%	4%
9	-0.10%	-0.10%	-0.10%	0.14	0.54	-1%	4%
10	0.02%	0.05%	0.01%	0.14	0.48	-1%	-2%
11	0.04%	0.00%	-0.06%	0.14	0.50	-1%	0%
12	0.09%	-0.08%	0.00%	0.33	0.54	18%	4%
13	0.09%	-0.02%	-0.04%	0.14	0.51	-1%	1%
14	-0.08%	0.03%	0.05%	0.16	0.48	1%	-2%
15	-0.07%	0.02%	-0.08%	0.13	0.51	-2%	1%
16	-0.06%	-0.09%	0.05%	0.17	0.54	2%	4%
17	-0.03%	-0.02%	-0.01%	0.15	0.51	0%	1%
18	-0.02%	0.00%	-0.03%	0.14	0.50	-1%	0%
19	0.00%	0.00%	-0.02%	0.15	0.50	0%	0%
20	-0.01%	-0.02%	0.05%	0.16	0.51	1%	1%

Tabla A7.8 – Análisis de sensibilidad para vigas con  $c = 0.15$  y  $\eta = 0.50$ .  $T_1 = R_1 = 10$ ,  $R_2 = T_2 = 0$ .

Caso	$e_{\lambda_1}$	$e_{\lambda_2}$	$e_{\lambda_3}$	$\hat{c}$	$\hat{\eta}$	$e_{\hat{c}}$	$e_{\hat{\eta}}$
1	0.00%	0.00%	0.00%	0.15	0.50	0%	0%
2	0.10%	0.10%	0.10%	0.17	0.44	2%	-6%
3	0.10%	0.10%	-0.10%	0.09	0.44	-6%	-6%
4	0.10%	-0.10%	0.10%	0.19	0.56	4%	6%
5	0.10%	-0.10%	-0.10%	0.14	0.55	-1%	5%
6	-0.10%	0.10%	0.10%	0.30	0.50	15%	0%
7	-0.10%	0.10%	-0.10%	0.35	0.54	20%	4%
8	-0.10%	-0.10%	0.10%	0.29	0.62	14%	12%
9	-0.10%	-0.10%	-0.10%	0.32	0.65	17%	15%
10	0.02%	0.05%	0.01%	0.15	0.47	0%	-3%
11	0.04%	0.00%	-0.06%	0.13	0.50	-2%	0%
12	0.09%	-0.08%	0.00%	0.16	0.54	1%	4%
13	0.09%	-0.02%	-0.04%	0.14	0.51	-1%	1%
14	-0.08%	0.03%	0.05%	0.31	0.55	16%	5%
15	-0.07%	0.02%	-0.08%	0.33	0.58	18%	8%
16	-0.06%	-0.09%	0.05%	0.30	0.62	15%	12%
17	-0.03%	-0.02%	-0.01%	0.15	0.51	0%	1%
18	-0.02%	0.00%	-0.03%	0.14	0.50	-1%	0%
19	0.00%	0.00%	-0.02%	0.15	0.50	0%	0%
20	-0.01%	-0.02%	0.05%	0.17	0.51	2%	1%

Tabla A7.9 – Análisis de sensibilidad para vigas con  $c = 0.15$  y  $\eta = 0.50$ .  $T_1 = R_1 = T_2 = 10$ ,  $R_2 = 0$ .

Caso	$e_{\lambda_1}$	$e_{\lambda_2}$	$e_{\lambda_3}$	$\hat{c}$	$\hat{\eta}$	$e_{\hat{c}}$	$e_{\hat{\eta}}$
1	0.00%	0.00%	0.00%	0.15	0.50	0%	0%
2	0.10%	0.10%	0.10%	0.19	0.46	4%	-4%
3	0.10%	0.10%	-0.10%	0.09	0.43	-6%	-7%
4	0.10%	-0.10%	0.10%	0.20	0.58	5%	8%
5	0.10%	-0.10%	-0.10%	0.13	0.54	-2%	4%
6	-0.10%	0.10%	0.10%	0.25	0.51	10%	1%
7	-0.10%	0.10%	-0.10%	0.09	0.43	-6%	-7%
8	-0.10%	-0.10%	0.10%	0.24	0.62	9%	12%
9	-0.10%	-0.10%	-0.10%	0.28	0.68	13%	18%
10	0.01%	0.10%	0.07%	0.17	0.45	2%	-5%
11	0.10%	0.06%	-0.04%	0.13	0.47	-2%	-3%
12	0.01%	-0.06%	0.06%	0.17	0.54	2%	4%
13	0.04%	-0.10%	-0.02%	0.15	0.55	0%	5%
14	-0.04%	0.04%	0.05%	0.27	0.58	12%	8%
15	-0.08%	0.06%	-0.05%	0.29	0.59	14%	9%
16	-0.01%	0.00%	0.04%	0.17	0.51	2%	1%
17	-0.04%	-0.02%	-0.02%	0.28	0.63	13%	13%
18	-0.02%	0.04%	-0.04%	0.28	0.60	13%	10%
19	0.02%	0.03%	-0.02%	0.14	0.48	-1%	-2%
20	-0.02%	-0.02%	0.04%	0.17	0.52	2%	2%

Tabla A7.10 – Análisis de sensibilidad para vigas con  $c = 0.15$  y  $\eta = 0.50$ .  $T_1 = R_1 = T_2 = R_2 = 10$ .

### A7.2 Análisis de sensibilidad para casos con diferentes posiciones y profundidades de fisura

En este análisis solo es considerado el caso articulado-articulado, el error en los coeficientes de frecuencias es de  $e_{\lambda_n} = 0.1\%$ , y se consideran diferentes posiciones y profundidades de fisura.

Las Tablas A7.11 a A7.22 se presentan los valores de  $\hat{c}$  y  $\hat{\eta}$  predichos con el método de identificación de fisuras. Donde el caso 1 no tiene error inducido, los casos 2 a 9 corresponden a la peor combinación de valores extremos de  $e_{\lambda_n}$  y los casos 10 a 20 corresponden a errores aleatorios en el intervalo  $(-e_{\lambda_n}, e_{\lambda_n})$ .

Caso	$e_{\lambda_1}$	$e_{\lambda_2}$	$e_{\lambda_3}$	$\hat{c}$	$\hat{\eta}$	$e_{\hat{c}}$	$e_{\hat{\eta}}$
1	0.00%	0.00%	0.00%	0.15	0.30	0%	0%
2	0.10%	0.10%	0.10%	0.07	0.38	-8%	8%
3	0.10%	0.10%	-0.10%	0.03	0.98	-12%	68%
4	0.10%	-0.10%	0.10%	0.23	0.30	8%	0%
5	0.10%	-0.10%	-0.10%	0.16	0.43	1%	13%
6	-0.10%	0.10%	0.10%	0.50	0.23	35%	-7%
7	-0.10%	0.10%	-0.10%	0.03	0.98	-12%	68%
8	-0.10%	-0.10%	0.10%	0.24	0.31	9%	1%
9	-0.10%	-0.10%	-0.10%	0.17	0.34	2%	4%
10	0.05%	0.02%	0.07%	0.18	0.26	3%	-4%
11	0.07%	0.04%	-0.06%	0.03	0.92	-12%	62%
12	0.04%	-0.08%	0.03%	0.20	0.30	5%	0%
13	0.03%	-0.02%	0.00%	0.16	0.30	1%	0%
14	-0.08%	0.02%	0.02%	0.15	0.29	0%	-1%
15	-0.03%	0.07%	-0.08%	0.03	0.94	-12%	64%
16	-0.03%	-0.07%	0.01%	0.19	0.30	4%	0%
17	-0.04%	-0.07%	-0.08%	0.17	0.33	2%	3%
18	-0.02%	0.00%	-0.03%	0.13	0.33	-2%	3%
19	0.04%	0.02%	0.00%	0.11	0.34	-4%	4%
20	-0.03%	0.00%	0.00%	0.15	0.30	0%	0%

Tabla A7.11 – Análisis de sensibilidad para vigas A-A con  $c = 0.15$  y  $\eta = 0.30$ .

Caso	$e_{\lambda_1}$	$e_{\lambda_2}$	$e_{\lambda_3}$	$\hat{c}$	$\hat{\eta}$	$e_{\hat{c}}$	$e_{\hat{\eta}}$
1	0.00%	0.00%	0.00%	0.15	0.50	0%	0%
2	0.10%	0.10%	0.10%	0.14	0.48	-1%	-2%
3	0.10%	0.10%	-0.10%	0.10	0.60	-5%	10%
4	0.10%	-0.10%	0.10%	0.18	0.48	3%	-2%
5	0.10%	-0.10%	-0.10%	0.15	0.52	0%	2%
6	-0.10%	0.10%	0.10%	0.15	0.48	0%	-2%
7	-0.10%	0.10%	-0.10%	0.10	0.60	-5%	10%
8	-0.10%	-0.10%	0.10%	0.18	0.48	3%	-2%
9	-0.10%	-0.10%	-0.10%	0.16	0.52	1%	2%
10	0.04%	0.04%	0.02%	0.14	0.50	-1%	0%
11	0.05%	0.10%	-0.09%	0.10	0.60	-5%	10%
12	0.08%	-0.05%	0.05%	0.16	0.49	1%	-1%
13	0.06%	-0.07%	-0.03%	0.16	0.50	1%	0%
14	-0.05%	0.10%	0.03%	0.13	0.51	-2%	1%
15	-0.06%	0.00%	-0.07%	0.14	0.52	-1%	2%
16	-0.07%	-0.03%	0.06%	0.17	0.48	2%	-2%
17	-0.02%	-0.05%	-0.02%	0.16	0.50	1%	0%
18	-0.02%	0.06%	-0.07%	0.13	0.53	-2%	3%
19	0.05%	0.02%	0.00%	0.14	0.51	-1%	1%
20	-0.02%	-0.01%	0.04%	0.16	0.49	1%	-1%

Tabla A7.12 – Análisis de sensibilidad para vigas A-A con  $c=0.15$  y  $\eta = 0.50$ .

Caso	$e_{\lambda_1}$	$e_{\lambda_2}$	$e_{\lambda_3}$	$\hat{c}$	$\hat{\eta}$	$e_{\hat{c}}$	$e_{\hat{\eta}}$
1	0.00%	0.00%	0.00%	0.15	0.7	0%	0%
2	0.10%	0.10%	0.10%	0.15	0.68	0%	-2%
3	0.10%	0.10%	-0.10%	0.13	0.74	-2%	4%
4	0.10%	-0.10%	0.10%	0.16	0.69	1%	-1%
5	0.10%	-0.10%	-0.10%	0.15	0.72	0%	2%
6	-0.10%	0.10%	0.10%	0.15	0.68	0%	-2%
7	-0.10%	0.10%	-0.10%	0.14	0.72	-1%	2%
8	-0.10%	-0.10%	0.10%	0.17	0.68	2%	-2%
9	-0.10%	-0.10%	-0.10%	0.15	0.72	0%	2%
10	0.08%	0.08%	0.06%	0.14	0.7	-1%	0%
11	0.08%	0.08%	-0.03%	0.14	0.71	-1%	1%
12	0.08%	-0.04%	0.04%	0.15	0.7	0%	0%
13	0.01%	-0.05%	0.00%	0.15	0.7	0%	0%
14	-0.05%	0.08%	0.02%	0.14	0.71	-1%	1%
15	-0.01%	0.08%	-0.06%	0.14	0.71	-1%	1%
16	-0.09%	-0.05%	0.10%	0.16	0.69	1%	-1%
17	-0.08%	0.00%	-0.09%	0.15	0.71	0%	1%
18	-0.06%	0.06%	-0.02%	0.14	0.71	-1%	1%
19	0.06%	0.03%	0.00%	0.15	0.7	0%	0%
20	0.00%	0.00%	0.09%	0.16	0.68	1%	-2%

Tabla A7.13 – Análisis de sensibilidad para vigas A-A con  $c=0.15$  y  $\eta = 0.70$ .

Caso	$e_{\lambda_1}$	$e_{\lambda_2}$	$e_{\lambda_3}$	$\hat{c}$	$\hat{\eta}$	$e_{\hat{c}}$	$e_{\hat{\eta}}$
1	0.00%	0.00%	0.00%	0.15	0.9	0%	0%
2	0.10%	0.10%	0.10%	0.15	0.88	0%	-2%
3	0.10%	0.10%	-0.10%	0.14	0.92	-1%	2%
4	0.10%	-0.10%	0.10%	0.16	0.88	1%	-2%
5	0.10%	-0.10%	-0.10%	0.15	0.92	0%	2%
6	-0.10%	0.10%	0.10%	0.15	0.88	0%	-2%
7	-0.10%	0.10%	-0.10%	0.14	0.93	-1%	3%
8	-0.10%	-0.10%	0.10%	0.16	0.88	1%	-2%
9	-0.10%	-0.10%	-0.10%	0.15	0.92	0%	2%
10	0.02%	0.07%	0.09%	0.15	0.89	0%	-1%
11	0.06%	0.04%	-0.10%	0.14	0.93	-1%	3%
12	0.02%	-0.04%	0.07%	0.15	0.89	0%	-1%
13	0.07%	-0.01%	-0.01%	0.15	0.9	0%	0%
14	-0.08%	0.02%	0.01%	0.15	0.9	0%	0%
15	0.00%	0.09%	-0.04%	0.15	0.9	0%	0%
16	-0.06%	-0.04%	0.04%	0.15	0.9	0%	0%
17	-0.05%	-0.04%	-0.09%	0.15	0.91	0%	1%
18	-0.02%	0.00%	-0.03%	0.15	0.9	0%	0%
19	0.01%	0.01%	0.00%	0.15	0.9	0%	0%
20	0.00%	-0.01%	0.04%	0.15	0.9	0%	0%

Tabla A7.14 – Análisis de sensibilidad para vigas A-A con  $c=0.15$  y  $\eta=0.90$ .

Caso	$e_{\lambda_1}$	$e_{\lambda_2}$	$e_{\lambda_3}$	$\hat{c}$	$\hat{\eta}$	$e_{\hat{c}}$	$e_{\hat{\eta}}$
1	0.00%	0.00%	0.00%	0.30	0.30	0%	0%
2	0.10%	0.10%	0.10%	0.30	0.24	0%	-6%
3	0.10%	0.10%	-0.10%	0.23	0.24	-7%	-6%
4	0.10%	-0.10%	0.10%	0.29	0.34	-1%	4%
5	0.10%	-0.10%	-0.10%	0.26	0.33	-4%	3%
6	-0.10%	0.10%	0.10%	0.37	0.32	7%	2%
7	-0.10%	0.10%	-0.10%	0.40	0.32	10%	2%
8	-0.10%	-0.10%	0.10%	0.31	0.35	1%	5%
9	-0.10%	-0.10%	-0.10%	0.27	0.34	-3%	4%
10	0.07%	0.03%	0.03%	0.30	0.28	0%	-2%
11	0.03%	0.03%	-0.06%	0.26	0.27	-4%	-3%
12	0.00%	-0.08%	0.09%	0.29	0.33	-1%	3%
13	0.06%	-0.01%	-0.08%	0.26	0.29	-4%	-1%
14	-0.02%	0.05%	0.06%	0.33	0.29	3%	-1%
15	-0.01%	0.09%	-0.08%	0.35	0.28	5%	-2%
16	-0.01%	-0.03%	0.10%	0.29	0.31	-1%	1%
17	-0.07%	-0.04%	-0.06%	0.31	0.33	1%	3%
18	0.00%	0.02%	-0.01%	0.30	0.29	0%	-1%
19	0.04%	0.01%	-0.07%	0.27	0.29	-3%	-1%
20	-0.01%	-0.01%	0.06%	0.31	0.31	1%	1%

Tabla A7.15 – Análisis de sensibilidad para vigas A-A con  $c=0.30$  y  $\eta=0.30$ .

Caso	$e_{\lambda_1}$	$e_{\lambda_2}$	$e_{\lambda_3}$	$\hat{c}$	$\hat{\eta}$	$e_{\hat{c}}$	$e_{\hat{\eta}}$
1	0.00%	0.00%	0.00%	0.30	0.50	0%	0%
2	0.10%	0.10%	0.10%	0.30	0.47	0%	-3%
3	0.10%	0.10%	-0.10%	0.28	0.47	-2%	-3%
4	0.10%	-0.10%	0.10%	0.30	0.52	0%	2%
5	0.10%	-0.10%	-0.10%	0.28	0.50	-2%	0%
6	-0.10%	0.10%	0.10%	0.33	0.51	3%	1%
7	-0.10%	0.10%	-0.10%	0.33	0.51	3%	1%
8	-0.10%	-0.10%	0.10%	0.31	0.53	1%	3%
9	-0.10%	-0.10%	-0.10%	0.29	0.52	-1%	2%
10	0.04%	0.07%	0.05%	0.31	0.49	1%	-1%
11	0.03%	0.06%	-0.06%	0.29	0.48	-1%	-2%
12	0.05%	-0.02%	0.01%	0.30	0.50	0%	0%
13	0.09%	-0.08%	-0.08%	0.28	0.50	-2%	0%
14	-0.07%	0.03%	0.05%	0.31	0.51	1%	1%
15	-0.02%	0.09%	-0.03%	0.31	0.49	1%	-1%
16	-0.02%	-0.08%	0.02%	0.30	0.51	0%	1%
17	-0.04%	0.00%	-0.06%	0.30	0.50	0%	0%
18	0.00%	0.02%	-0.03%	0.30	0.50	0%	0%
19	0.01%	0.01%	-0.07%	0.29	0.49	-1%	-1%
20	-0.01%	-0.06%	0.00%	0.30	0.51	0%	1%

Tabla A7.16 – Análisis de sensibilidad para vigas A-A con  $c = 0.30$  y  $\eta = 0.50$ .

Caso	$e_{\lambda_1}$	$e_{\lambda_2}$	$e_{\lambda_3}$	$\hat{c}$	$\hat{\eta}$	$e_{\hat{c}}$	$e_{\hat{\eta}}$
1	0.00%	0.00%	0.00%	0.3	0.7	0%	0%
2	0.10%	0.10%	0.10%	0.3	0.68	0%	-2%
3	0.10%	0.10%	-0.10%	0.29	0.68	-1%	-2%
4	0.10%	-0.10%	0.10%	0.29	0.7	-1%	0%
5	0.10%	-0.10%	-0.10%	0.29	0.7	-1%	0%
6	-0.10%	0.10%	0.10%	0.31	0.7	1%	0%
7	-0.10%	0.10%	-0.10%	0.31	0.7	1%	0%
8	-0.10%	-0.10%	0.10%	0.31	0.73	1%	3%
9	-0.10%	-0.10%	-0.10%	0.3	0.72	0%	2%
10	0.04%	0.01%	0.00%	0.3	0.7	0%	0%
11	0.03%	0.05%	-0.08%	0.3	0.69	0%	-1%
12	0.06%	-0.06%	0.03%	0.3	0.7	0%	0%
13	0.04%	-0.02%	-0.07%	0.3	0.7	0%	0%
14	-0.01%	0.02%	0.06%	0.3	0.7	0%	0%
15	-0.08%	0.06%	-0.03%	0.3	0.7	0%	0%
16	0.00%	-0.08%	0.10%	0.3	0.71	0%	1%
17	-0.08%	-0.03%	-0.09%	0.3	0.71	0%	1%
18	-0.04%	0.00%	0.00%	0.3	0.7	0%	0%
19	0.06%	0.03%	-0.02%	0.3	0.69	0%	-1%
20	-0.07%	-0.02%	0.04%	0.3	0.71	0%	1%

Tabla A7.17 – Análisis de sensibilidad para vigas A-A con  $c = 0.30$  y  $\eta = 0.70$ .

Caso	$e_{\lambda_1}$	$e_{\lambda_2}$	$e_{\lambda_3}$	$\hat{c}$	$\hat{\eta}$	$e_{\hat{c}}$	$e_{\hat{\eta}}$
1	0.00%	0.00%	0.00%	0.3	0.9	0%	0%
2	0.10%	0.10%	0.10%	0.3	0.88	0%	-2%
3	0.10%	0.10%	-0.10%	0.3	0.88	0%	-2%
4	0.10%	-0.10%	0.10%	0.3	0.89	0%	-1%
5	0.10%	-0.10%	-0.10%	0.29	0.9	-1%	0%
6	-0.10%	0.10%	0.10%	0.31	0.91	1%	1%
7	-0.10%	0.10%	-0.10%	0.3	0.91	0%	1%
8	-0.10%	-0.10%	0.10%	0.3	0.92	0%	2%
9	-0.10%	-0.10%	-0.10%	0.3	0.92	0%	2%
10	0.08%	0.01%	0.09%	0.3	0.89	0%	-1%
11	0.05%	0.10%	-0.09%	0.3	0.89	0%	-1%
12	0.07%	-0.02%	0.10%	0.3	0.89	0%	-1%
13	0.10%	-0.02%	-0.03%	0.3	0.9	0%	0%
14	-0.08%	0.06%	0.05%	0.3	0.89	0%	-1%
15	-0.03%	0.08%	-0.04%	0.3	0.9	0%	0%
16	-0.10%	-0.05%	0.00%	0.3	0.91	0%	1%
17	-0.04%	-0.07%	-0.01%	0.3	0.91	0%	1%
18	-0.04%	0.05%	-0.01%	0.3	0.9	0%	0%
19	0.09%	0.03%	-0.01%	0.3	0.89	0%	-1%
20	-0.03%	-0.02%	0.00%	0.3	0.9	0%	0%

Tabla A7.18 – Análisis de sensibilidad para vigas A-A con  $c=0.30$  y  $\eta=0.90$ .

Caso	$e_{\lambda_1}$	$e_{\lambda_2}$	$e_{\lambda_3}$	$\hat{c}$	$\hat{\eta}$	$e_{\hat{c}}$	$e_{\hat{\eta}}$
1	0.00%	0.00%	0.00%	0.50	0.30	0%	0%
2	0.10%	0.10%	0.10%	0.49	0.25	-1%	-5%
3	0.10%	0.10%	-0.10%	0.50	0.25	0%	-5%
4	0.10%	-0.10%	0.10%	0.48	0.25	-2%	-5%
5	0.10%	-0.10%	-0.10%	0.03	0.99	-47%	69%
6	-0.10%	0.10%	0.10%	0.42	0.35	-8%	5%
7	-0.10%	0.10%	-0.10%	0.50	0.34	0%	4%
8	-0.10%	-0.10%	0.10%	0.42	0.35	-8%	5%
9	-0.10%	-0.10%	-0.10%	0.50	0.34	0%	4%
10	0.03%	0.02%	0.09%	0.45	0.29	-5%	-1%
11	0.04%	0.01%	-0.08%	0.50	0.29	0%	-1%
12	0.03%	-0.03%	0.08%	0.45	0.29	-5%	-1%
13	0.06%	-0.06%	-0.06%	0.50	0.28	0%	-2%
14	-0.01%	0.04%	0.00%	0.50	0.30	0%	0%
15	-0.08%	0.05%	-0.08%	0.50	0.33	0%	3%
16	-0.04%	-0.04%	0.03%	0.45	0.32	-5%	2%
17	-0.03%	-0.06%	-0.10%	0.50	0.32	0%	2%
18	-0.01%	0.01%	-0.05%	0.50	0.31	0%	1%
19	0.02%	0.01%	-0.01%	0.50	0.29	0%	-1%
20	-0.05%	-0.06%	0.01%	0.45	0.33	-5%	3%

Tabla A7.19 – Análisis de sensibilidad para vigas A-A con  $c=0.50$  y  $\eta=0.30$ .

Caso	$e_{\lambda_1}$	$e_{\lambda_2}$	$e_{\lambda_3}$	$\hat{c}$	$\hat{\eta}$	$e_{\hat{c}}$	$e_{\hat{\eta}}$
1	0.00%	0.00%	0.00%	0.50	0.50	0%	0%
2	0.10%	0.10%	0.10%	0.49	0.48	-1%	-2%
3	0.10%	0.10%	-0.10%	0.50	0.48	0%	-2%
4	0.10%	-0.10%	0.10%	0.49	0.48	-1%	-2%
5	0.10%	-0.10%	-0.10%	0.50	0.48	0%	-2%
6	-0.10%	0.10%	0.10%	0.46	0.52	-4%	2%
7	-0.10%	0.10%	-0.10%	0.50	0.52	0%	2%
8	-0.10%	-0.10%	0.10%	0.45	0.52	-5%	2%
9	-0.10%	-0.10%	-0.10%	0.50	0.52	0%	2%
10	0.03%	0.02%	0.10%	0.48	0.49	-2%	-1%
11	0.08%	0.10%	-0.03%	0.50	0.49	0%	-1%
12	0.02%	0.00%	0.05%	0.49	0.49	-1%	-1%
13	0.00%	-0.08%	-0.03%	0.50	0.50	0%	0%
14	-0.08%	0.02%	0.10%	0.46	0.52	-4%	2%
15	-0.10%	0.07%	-0.07%	0.49	0.52	-1%	2%
16	-0.04%	-0.05%	0.01%	0.47	0.51	-3%	1%
17	-0.06%	-0.08%	-0.05%	0.50	0.51	0%	1%
18	-0.05%	0.01%	-0.03%	0.49	0.51	-1%	1%
19	0.03%	0.02%	-0.01%	0.50	0.50	0%	0%
20	-0.05%	-0.06%	0.01%	0.47	0.51	-3%	1%

Tabla A7.20 – Análisis de sensibilidad para vigas A-A con  $c = 0.50$  y  $\eta = 0.50$ .

Caso	$e_{\lambda_1}$	$e_{\lambda_2}$	$e_{\lambda_3}$	$\hat{c}$	$\hat{\eta}$	$e_{\hat{c}}$	$e_{\hat{\eta}}$
1	0.00%	0.00%	0.00%	0.5	0.7	0%	0%
2	0.10%	0.10%	0.10%	0.49	0.69	-1%	-1%
3	0.10%	0.10%	-0.10%	0.5	0.69	0%	-1%
4	0.10%	-0.10%	0.10%	0.48	0.69	-2%	-1%
5	0.10%	-0.10%	-0.10%	0.5	0.69	0%	-1%
6	-0.10%	0.10%	0.10%	0.47	0.71	-3%	1%
7	-0.10%	0.10%	-0.10%	0.5	0.71	0%	1%
8	-0.10%	-0.10%	0.10%	0.47	0.71	-3%	1%
9	-0.10%	-0.10%	-0.10%	0.5	0.71	0%	1%
10	0.07%	0.01%	0.04%	0.5	0.69	0%	-1%
11	0.06%	0.04%	-0.01%	0.5	0.7	0%	0%
12	0.09%	-0.07%	0.02%	0.5	0.69	0%	-1%
13	0.05%	-0.01%	-0.02%	0.5	0.7	0%	0%
14	-0.05%	0.01%	0.10%	0.47	0.71	-3%	1%
15	-0.05%	0.03%	-0.08%	0.5	0.71	0%	1%
16	-0.10%	-0.08%	0.09%	0.47	0.71	-3%	1%
17	-0.02%	-0.01%	-0.04%	0.5	0.7	0%	0%
18	0.00%	0.01%	-0.06%	0.5	0.7	0%	0%
19	0.10%	0.04%	-0.01%	0.5	0.69	0%	-1%
20	-0.05%	-0.01%	0.05%	0.49	0.7	-1%	0%

Tabla A7.21 – Análisis de sensibilidad para vigas A-A con  $c = 0.50$  y  $\eta = 0.70$ .

Caso	$e_{\lambda_1}$	$e_{\lambda_2}$	$e_{\lambda_3}$	$\hat{c}$	$\hat{\eta}$	$e_{\hat{c}}$	$e_{\hat{\eta}}$
1	0.00%	0.00%	0.00%	0.5	0.9	0%	0%
2	0.10%	0.10%	0.10%	0.49	0.89	-1%	-1%
3	0.10%	0.10%	-0.10%	0.5	0.89	0%	-1%
4	0.10%	-0.10%	0.10%	0.49	0.89	-1%	-1%
5	0.10%	-0.10%	-0.10%	0.5	0.89	0%	-1%
6	-0.10%	0.10%	0.10%	0.48	0.91	-2%	1%
7	-0.10%	0.10%	-0.10%	0.5	0.91	0%	1%
8	-0.10%	-0.10%	0.10%	0.47	0.92	-3%	2%
9	-0.10%	-0.10%	-0.10%	0.49	0.92	-1%	2%
10	0.07%	0.01%	0.04%	0.5	0.89	0%	-1%
11	0.06%	0.04%	-0.01%	0.5	0.9	0%	0%
12	0.09%	-0.07%	0.02%	0.5	0.89	0%	-1%
13	0.05%	-0.01%	-0.02%	0.5	0.9	0%	0%
14	-0.05%	0.01%	0.10%	0.48	0.91	-2%	1%
15	-0.05%	0.03%	-0.08%	0.5	0.91	0%	1%
16	-0.10%	-0.08%	0.09%	0.48	0.91	-2%	1%
17	-0.02%	-0.01%	-0.04%	0.5	0.9	0%	0%
18	0.00%	0.01%	-0.06%	0.5	0.9	0%	0%
19	0.10%	0.04%	-0.01%	0.5	0.89	0%	-1%
20	-0.05%	-0.01%	0.05%	0.48	0.91	-2%	1%

Tabla A7.22 – Análisis de sensibilidad para vigas A-A con  $c = 0.50$  y  $\eta = 0.90$ .

**A7.3 Análisis de sensibilidad para casos con diferentes niveles de error en los coeficientes de frecuencia**

En esta oportunidad el análisis de sensibilidad se realiza para una única posición y profundidad de fisura,  $c = 0.30$  y  $\eta = 0.50$ , para una única condición de vinculación, A-A, mientras el error inducido en el coeficiente adimensional de frecuencias varía según  $e_{\lambda_n} = 0.01\%, 0.10\%, 0.50\%, 1.00\%$ .

Las Tablas A7.23 a A7.26 presentan los valores de  $\hat{c}$  y  $\hat{\eta}$  predichos con el método de identificación de fisuras. Donde el caso 1 no tiene error inducido, los casos 2 a 9 corresponden a la peor combinación de valores extremos de  $e_{\lambda_n}$  y los casos 10 a 20 corresponden a errores aleatorios en el intervalo  $(-e_{\lambda_n}, e_{\lambda_n})$ .

CASO	$e_{\lambda_1}$	$e_{\lambda_2}$	$e_{\lambda_3}$	$\hat{c}$	$\hat{\eta}$	$e_{\hat{c}}$	$e_{\hat{\eta}}$
1	0.000%	0.000%	0.000%	0.30	0.50	0%	0%
2	0.010%	0.010%	0.010%	0.30	0.50	0%	0%
3	0.010%	0.010%	-0.010%	0.30	0.50	0%	0%
4	0.010%	-0.010%	0.010%	0.30	0.50	0%	0%
5	0.010%	-0.010%	-0.010%	0.30	0.50	0%	0%
6	-0.010%	0.010%	0.010%	0.30	0.50	0%	0%
7	-0.010%	0.010%	-0.010%	0.30	0.50	0%	0%
8	-0.010%	-0.010%	0.010%	0.30	0.50	0%	0%
9	-0.010%	-0.010%	-0.010%	0.30	0.50	0%	0%
10	0.004%	0.007%	0.005%	0.30	0.50	0%	0%
11	0.003%	0.006%	-0.006%	0.30	0.50	0%	0%
12	0.005%	-0.002%	0.001%	0.30	0.50	0%	0%
13	0.009%	-0.008%	-0.008%	0.30	0.50	0%	0%
14	-0.007%	0.003%	0.005%	0.30	0.50	0%	0%
15	-0.002%	0.009%	-0.003%	0.30	0.50	0%	0%
16	-0.002%	-0.008%	0.002%	0.30	0.50	0%	0%
17	-0.004%	0.000%	-0.006%	0.30	0.50	0%	0%
18	0.000%	0.002%	-0.003%	0.30	0.50	0%	0%
19	0.001%	0.001%	-0.007%	0.30	0.50	0%	0%
20	-0.001%	-0.006%	0.000%	0.30	0.50	0%	0%

Tabla A7.23 – Análisis de sensibilidad para vigas A-A con  $c = 0.30$  y  $\eta = 0.50$  con  $e_{\lambda_n} = 0.01\%$ .

CASO	$e_{\lambda_1}$	$e_{\lambda_2}$	$e_{\lambda_3}$	$\hat{c}$	$\hat{\eta}$	$e_{\hat{c}}$	$e_{\hat{\eta}}$
1	0.000%	0.000%	0.000%	0.30	0.50	0%	0%
2	0.100%	0.100%	0.100%	0.30	0.47	0%	-3%
3	0.100%	0.100%	-0.100%	0.28	0.47	-2%	-3%
4	0.100%	-0.100%	0.100%	0.30	0.52	0%	2%
5	0.100%	-0.100%	-0.100%	0.28	0.50	-2%	0%
6	-0.100%	0.100%	0.100%	0.33	0.51	3%	1%
7	-0.100%	0.100%	-0.100%	0.33	0.51	3%	1%
8	-0.100%	-0.100%	0.100%	0.31	0.53	1%	3%
9	-0.100%	-0.100%	-0.100%	0.29	0.52	-1%	2%
10	0.035%	0.067%	0.052%	0.31	0.49	1%	-1%
11	0.029%	0.062%	-0.056%	0.29	0.48	-1%	-2%
12	0.048%	-0.018%	0.006%	0.30	0.50	0%	0%
13	0.086%	-0.076%	-0.077%	0.28	0.50	-2%	0%
14	-0.070%	0.027%	0.052%	0.31	0.51	1%	1%
15	-0.018%	0.088%	-0.034%	0.31	0.49	1%	-1%
16	-0.016%	-0.076%	0.016%	0.30	0.51	0%	1%
17	-0.042%	-0.002%	-0.059%	0.30	0.50	0%	0%
18	-0.003%	0.023%	-0.029%	0.30	0.50	0%	0%
19	0.007%	0.008%	-0.067%	0.29	0.49	-1%	-1%
20	-0.008%	-0.062%	0.003%	0.30	0.51	0%	1%

Tabla A7.24 – Análisis de sensibilidad para vigas A-A con  $c = 0.30$  y  $\eta = 0.50$  con  $e_{\lambda_n} = 0.10\%$ .

CASO	$e_{\lambda_1}$	$e_{\lambda_2}$	$e_{\lambda_3}$	$\hat{c}$	$\hat{\eta}$	$e_{\hat{c}}$	$e_{\hat{\eta}}$
1	0.000%	0.000%	0.000%	0.30	0.50	0%	0%
2	0.500%	0.500%	0.500%	0.30	0.35	0%	-15%
3	0.500%	0.500%	-0.500%	0.15	0.41	-15%	-9%
4	0.500%	-0.500%	0.500%	0.29	0.59	-1%	9%
5	0.500%	-0.500%	-0.500%	0.25	0.57	-5%	7%
6	-0.500%	0.500%	0.500%	0.38	0.56	8%	6%
7	-0.500%	0.500%	-0.500%	0.41	0.55	11%	5%
8	-0.500%	-0.500%	0.500%	0.31	0.61	1%	11%
9	-0.500%	-0.500%	-0.500%	0.26	0.58	-4%	8%
10	0.176%	0.334%	0.259%	0.32	0.43	2%	-7%
11	0.147%	0.311%	-0.280%	0.24	0.41	-6%	-9%
12	0.241%	-0.088%	0.029%	0.29	0.51	-1%	1%
13	0.428%	-0.381%	-0.384%	0.26	0.55	-4%	5%
14	-0.350%	0.135%	0.262%	0.35	0.54	5%	4%
15	-0.089%	0.441%	-0.169%	0.39	0.47	9%	-3%
16	-0.080%	-0.379%	0.081%	0.29	0.56	-1%	6%
17	-0.210%	-0.008%	-0.295%	0.26	0.49	-4%	-1%
18	-0.017%	0.114%	-0.144%	0.32	0.49	2%	-1%
19	0.034%	0.040%	-0.333%	0.25	0.47	-5%	-3%
20	-0.042%	-0.310%	0.014%	0.29	0.55	-1%	5%

Tabla A7.25 – Análisis de sensibilidad para vigas A-A con  $c = 0.30$  y  $\eta = 0.50$  con  $e_{\lambda_n} = 0.50\%$ .

CASO	$e_{\lambda_1}$	$e_{\lambda_2}$	$e_{\lambda_3}$	$\hat{c}$	$\hat{\eta}$	$e_{\hat{c}}$	$e_{\hat{\eta}}$
1	0.000%	0.000%	0.000%	0.30	0.50	0%	0%
2	1.000%	1.000%	1.000%	0.01	0.01	-29%	-49%
3	1.000%	1.000%	-1.000%	0.06	0.84	-24%	34%
4	1.000%	-1.000%	1.000%	0.29	0.67	-1%	17%
5	1.000%	-1.000%	-1.000%	0.23	0.63	-7%	13%
6	-1.000%	1.000%	1.000%	0.39	0.64	9%	14%
7	-1.000%	1.000%	-1.000%	0.44	0.62	14%	12%
8	-1.000%	-1.000%	1.000%	0.32	0.70	2%	20%
9	-1.000%	-1.000%	-1.000%	0.24	0.66	-6%	16%
10	0.353%	0.668%	0.519%	0.36	0.33	6%	-17%
11	0.293%	0.622%	-0.560%	0.04	0.94	-26%	44%
12	0.482%	-0.175%	0.058%	0.29	0.53	-1%	3%
13	0.855%	-0.763%	-0.768%	0.24	0.60	-6%	10%
14	-0.701%	0.270%	0.525%	0.38	0.59	8%	9%
15	-0.179%	0.882%	-0.338%	0.42	0.47	12%	-3%
16	-0.160%	-0.758%	0.163%	0.29	0.63	-1%	13%
17	-0.421%	-0.016%	-0.590%	0.35	0.57	5%	7%
18	-0.034%	0.229%	-0.288%	0.24	0.42	-6%	-8%
19	0.068%	0.080%	-0.665%	0.20	0.48	-10%	-2%
20	-0.084%	-0.620%	0.027%	0.29	0.61	-1%	11%

Tabla A7.26 – Análisis de sensibilidad para vigas A-A con  $c = 0.30$  y  $\eta = 0.50$  con  $e_{\lambda_n} = 1.00\%$ .

# APÉNDICE 8

## Mapeos de análisis de sensibilidad

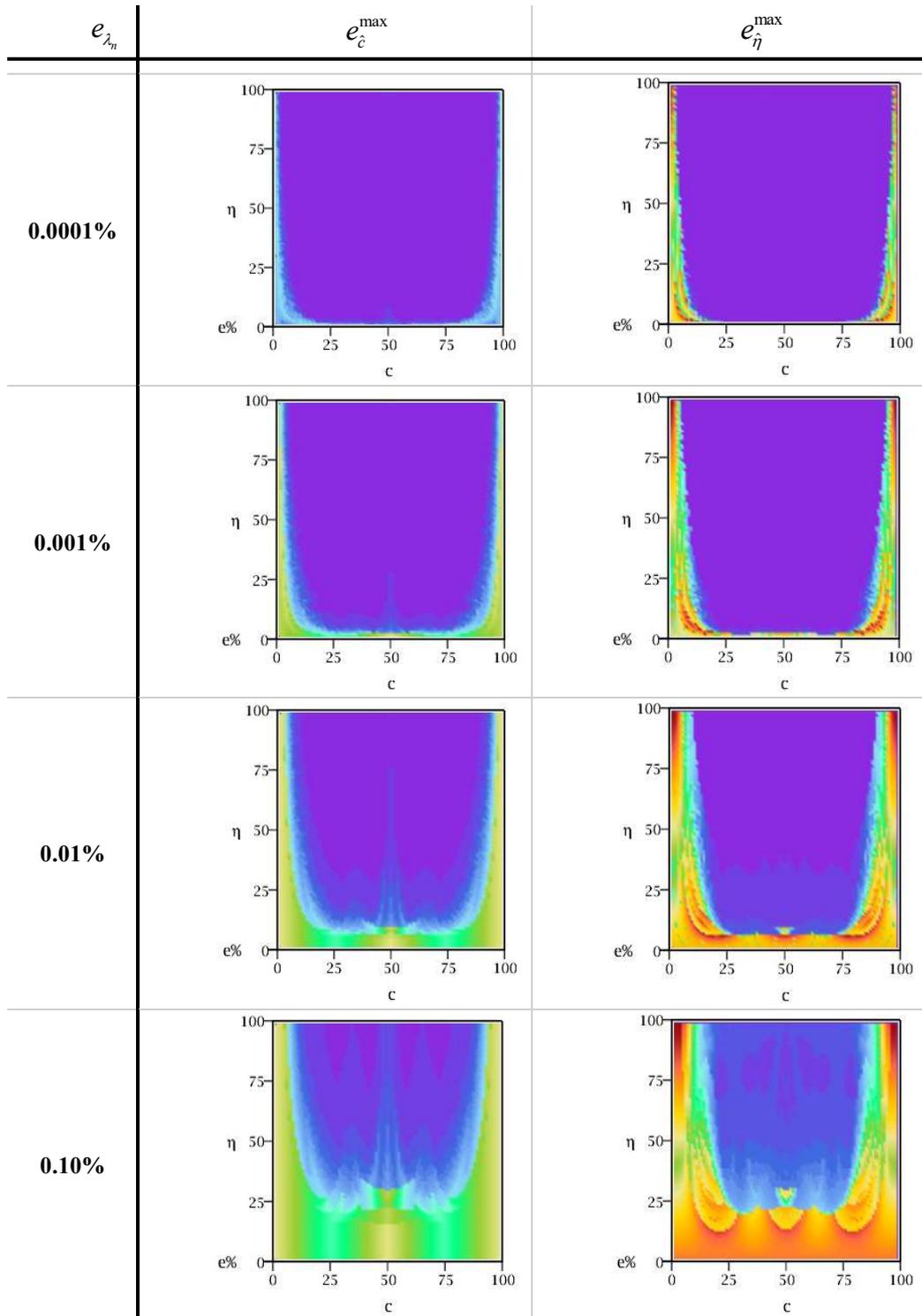
A continuación, se presentan los resultados del análisis de sensibilidad según la metodología antes descrita en el Capítulo 6 Inciso 4 de la presenta tesis. Los mismos son representados en forma de mapeo, donde para cada posición y profundidad de fisura, y para ciertos errores en la determinación de los coeficientes adimensionales de frecuencias, se ha determinado el error máximo y el error promedio en la determinación de la posición y de la profundidad que arroja el método de identificación de fisuras propuesto.

Se han considerado para este análisis tanto condiciones de vinculación clásicas, como restricciones elásticas en los bordes y restricciones elásticas en los bordes y posiciones intermedias.

Los errores promedios son presentados solo para los casos de condiciones de vinculación clásicas a fin de reducir la extensión del análisis.

*A8.1 Condiciones de vinculación clásicas en los extremos*

- L-L



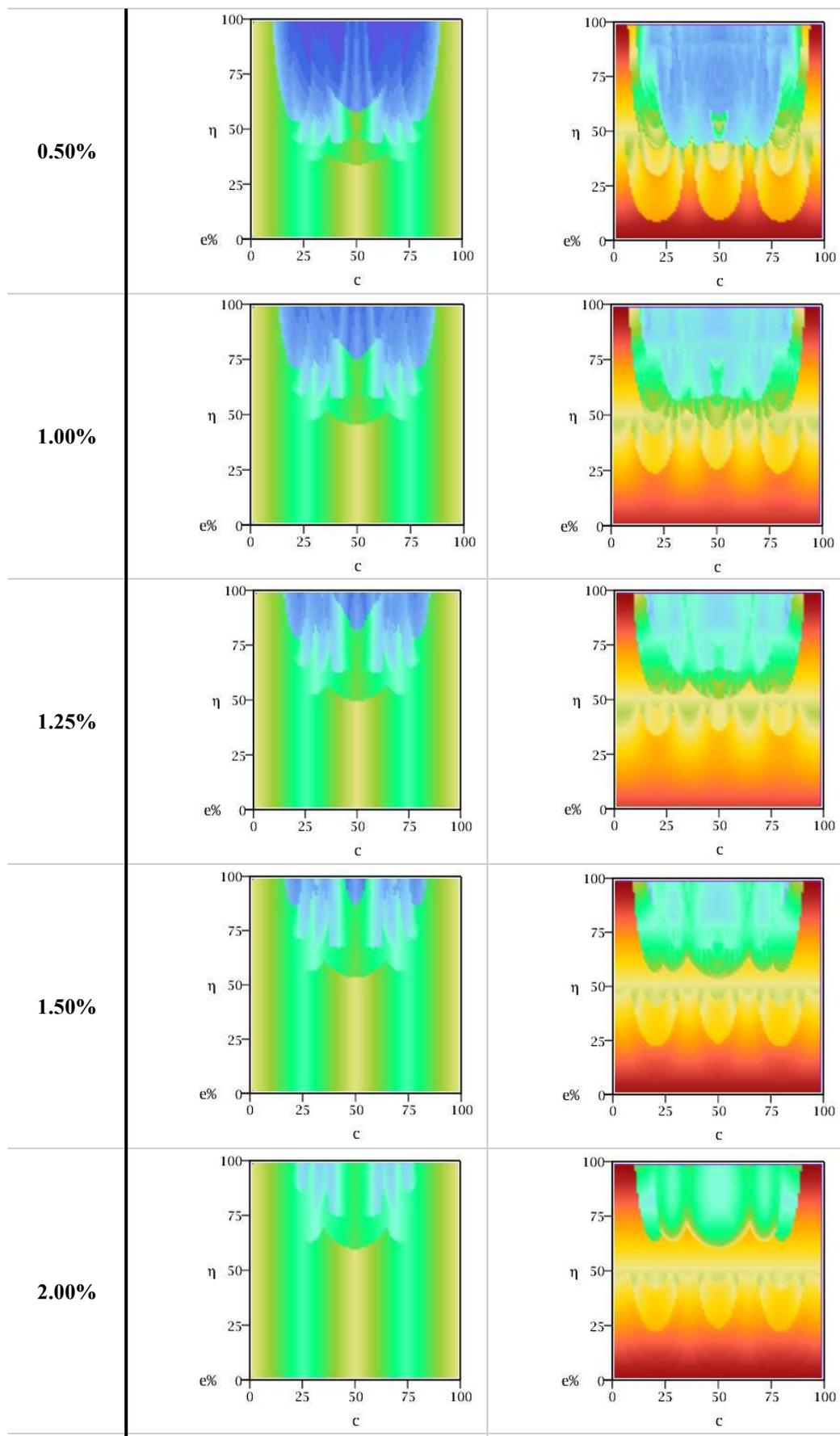
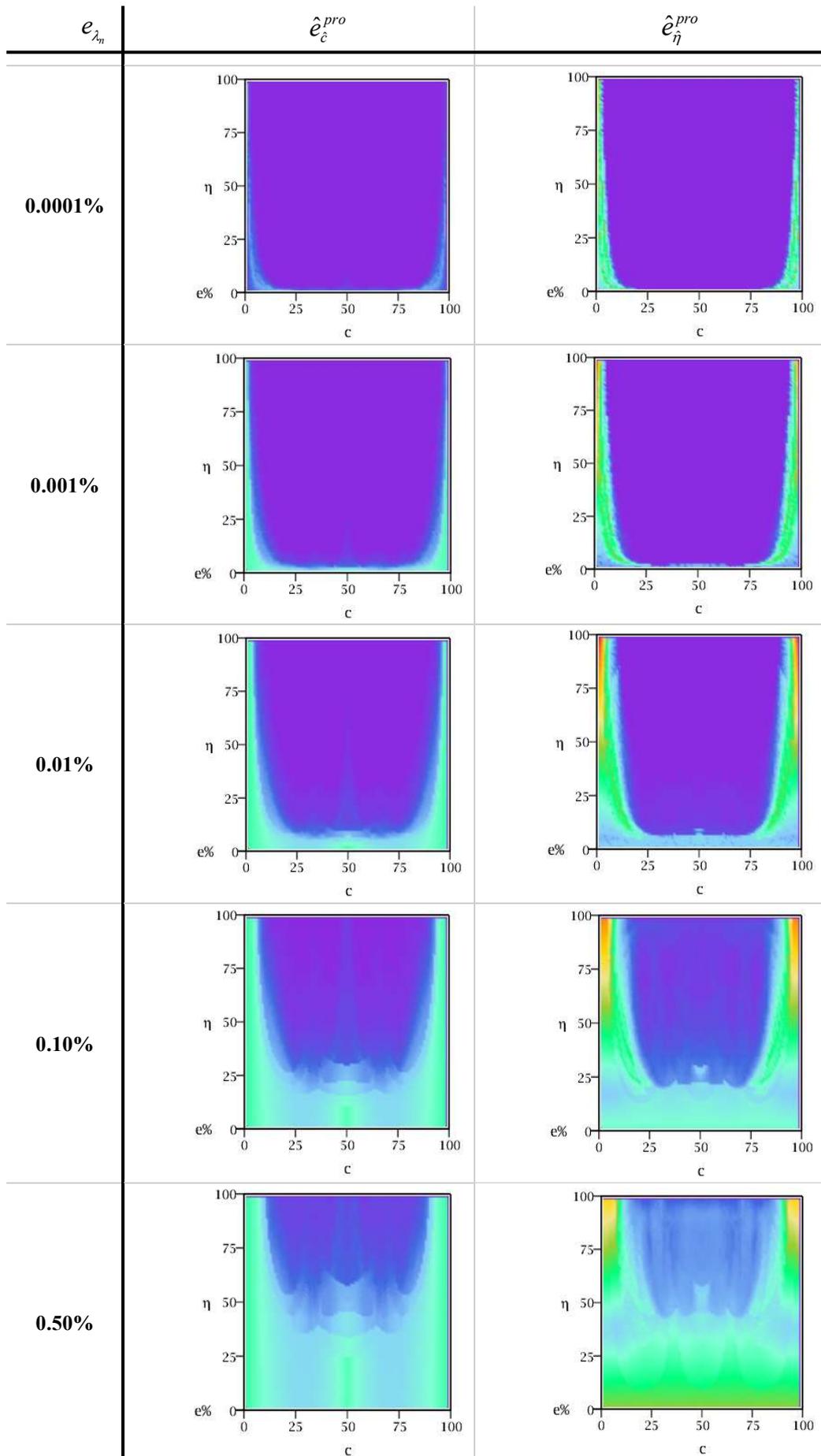


Figura A8.1 – Errores máximos en la determinación de la posición ( $e_c^{\max}$ ) y profundidad ( $e_\eta^{\max}$ ) para la condición L-L.



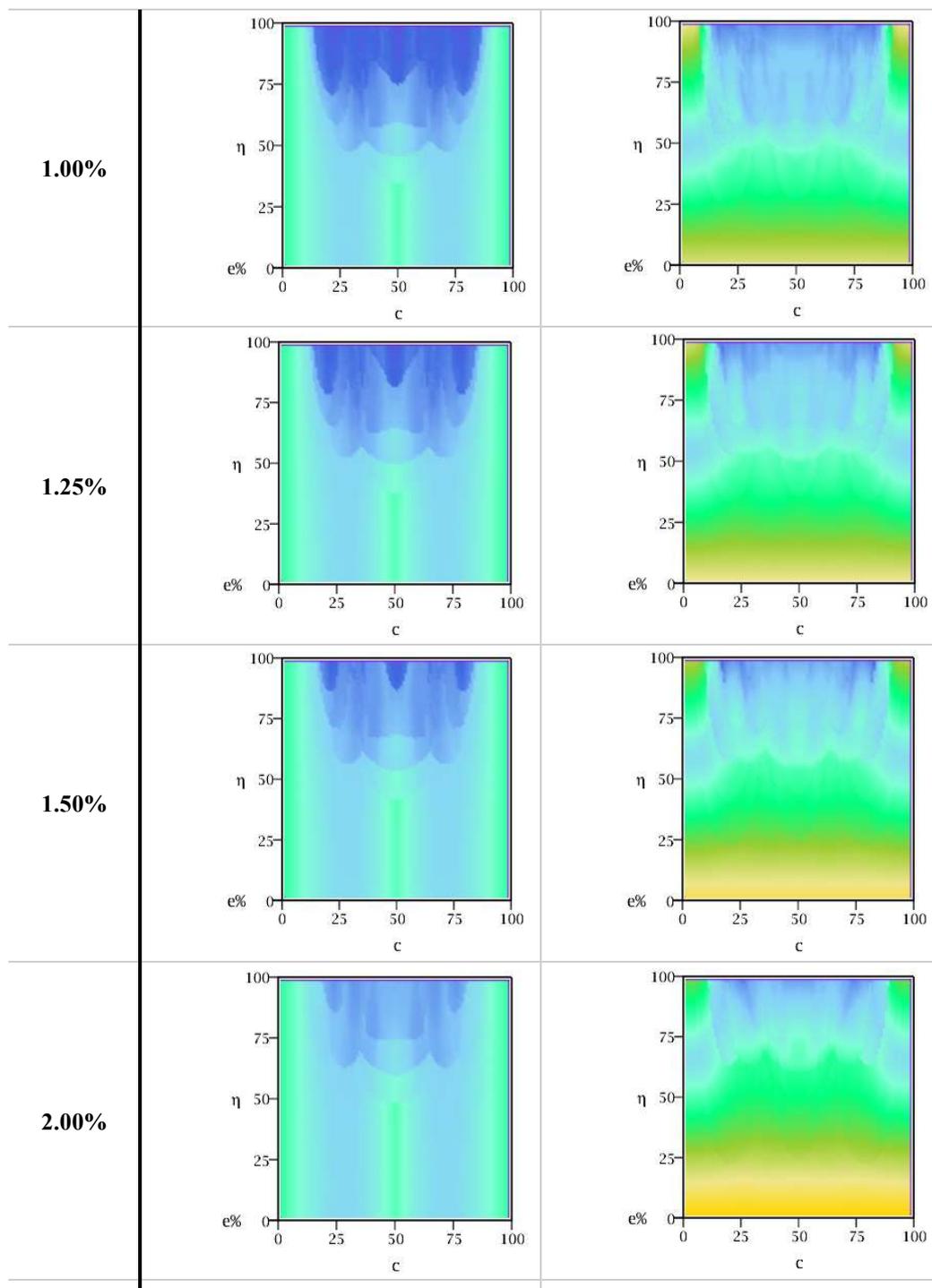
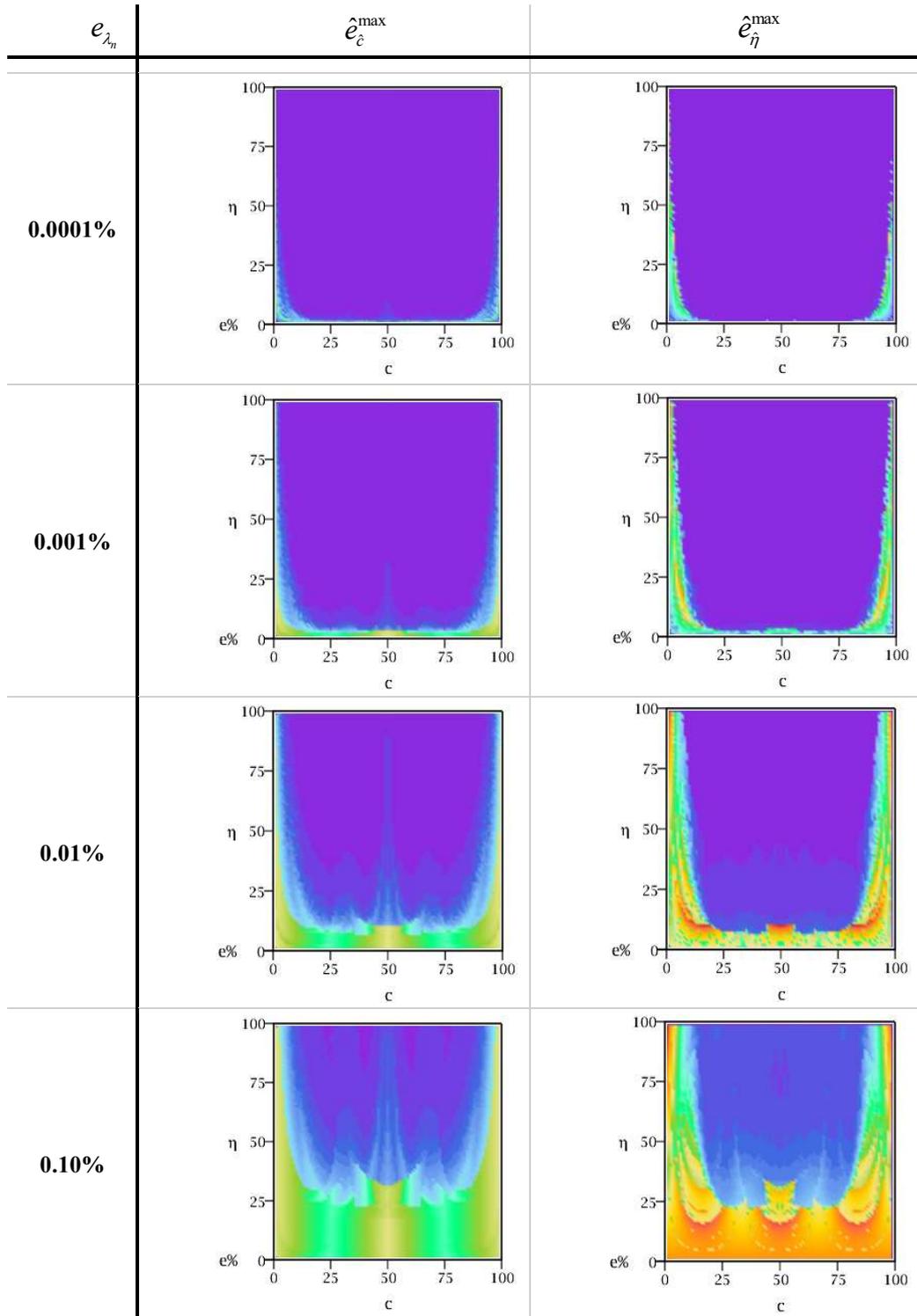


Figura A8.2 – Errores promedio en la determinación de la posición ( $e_{\xi}^{pro}$ ) y profundidad ( $e_{\eta}^{pro}$ ) para la condición L-L

- A-A



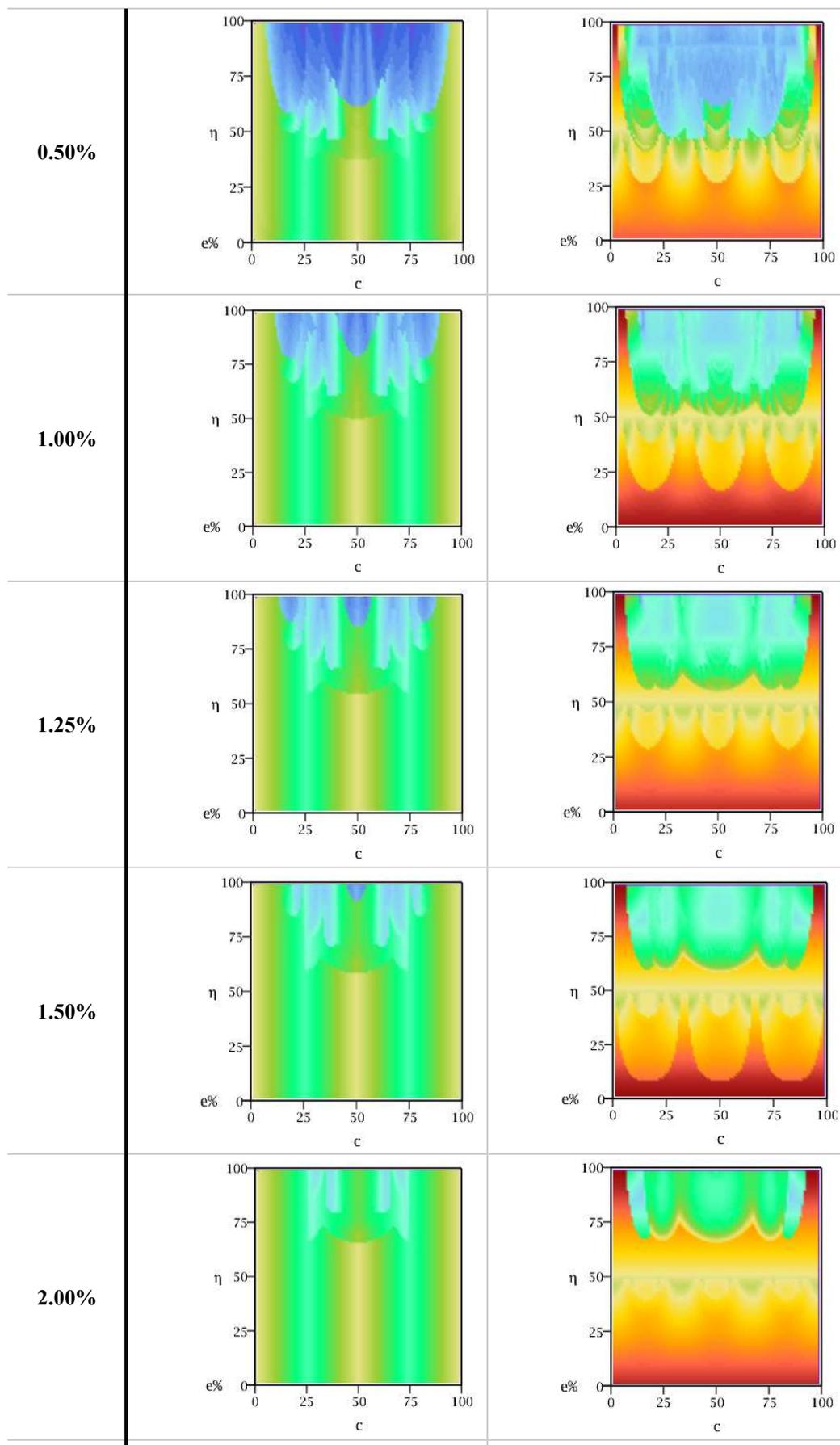
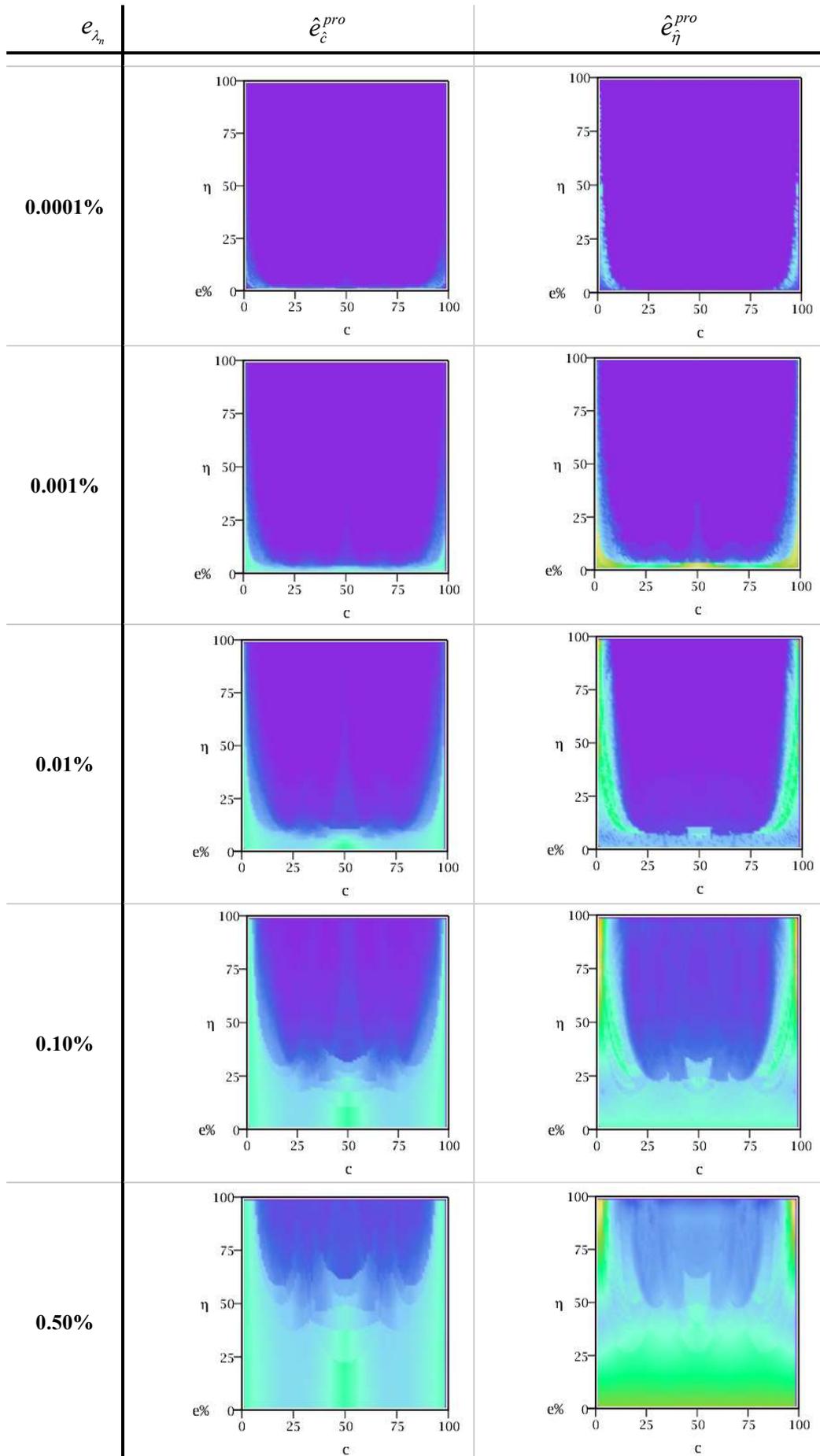


Figura A8.3 – Errores máximos en la determinación de la posición ( $e_c^{\max}$ ) y profundidad ( $e_\eta^{\max}$ ) para la condición A-A.



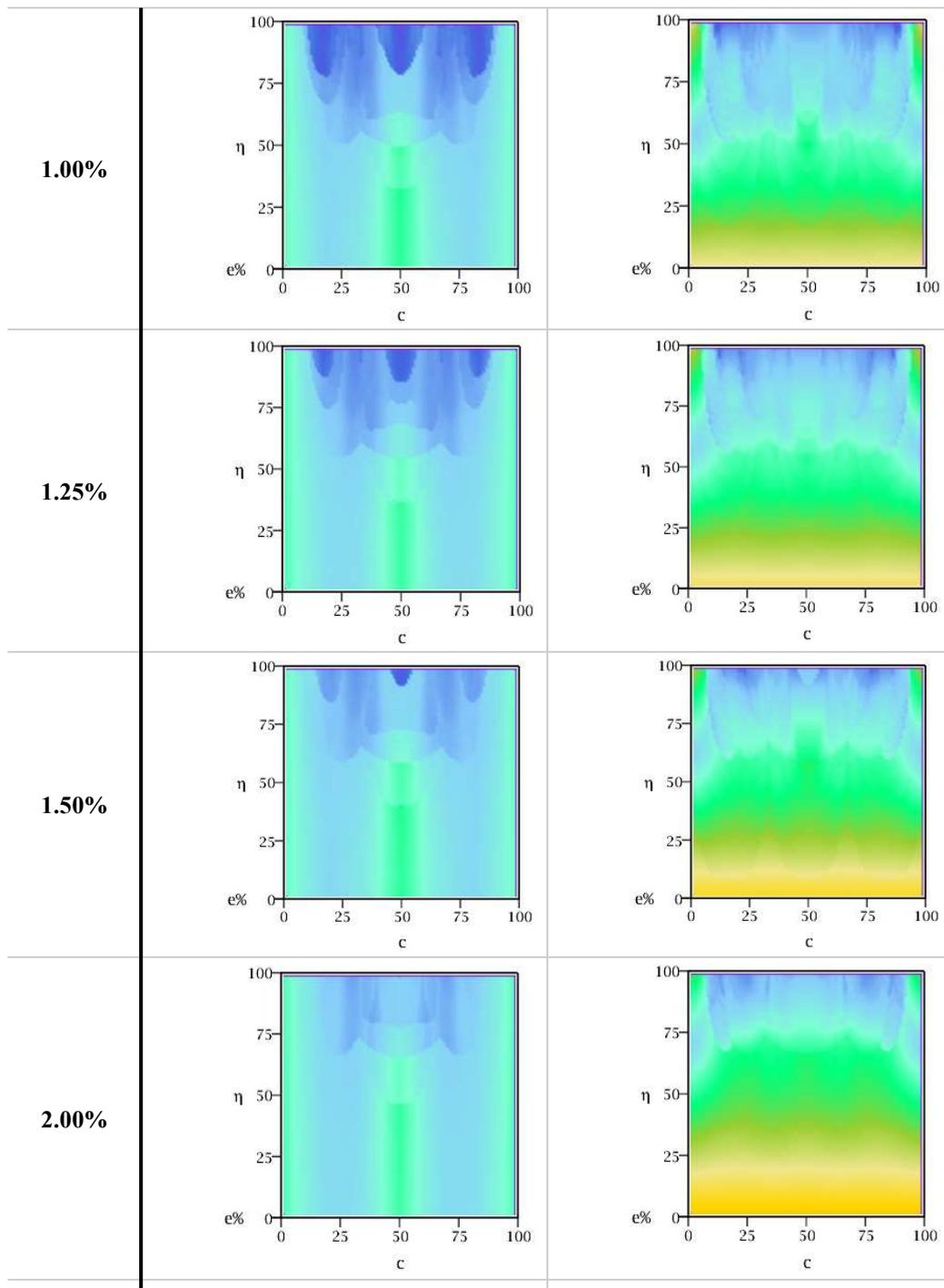
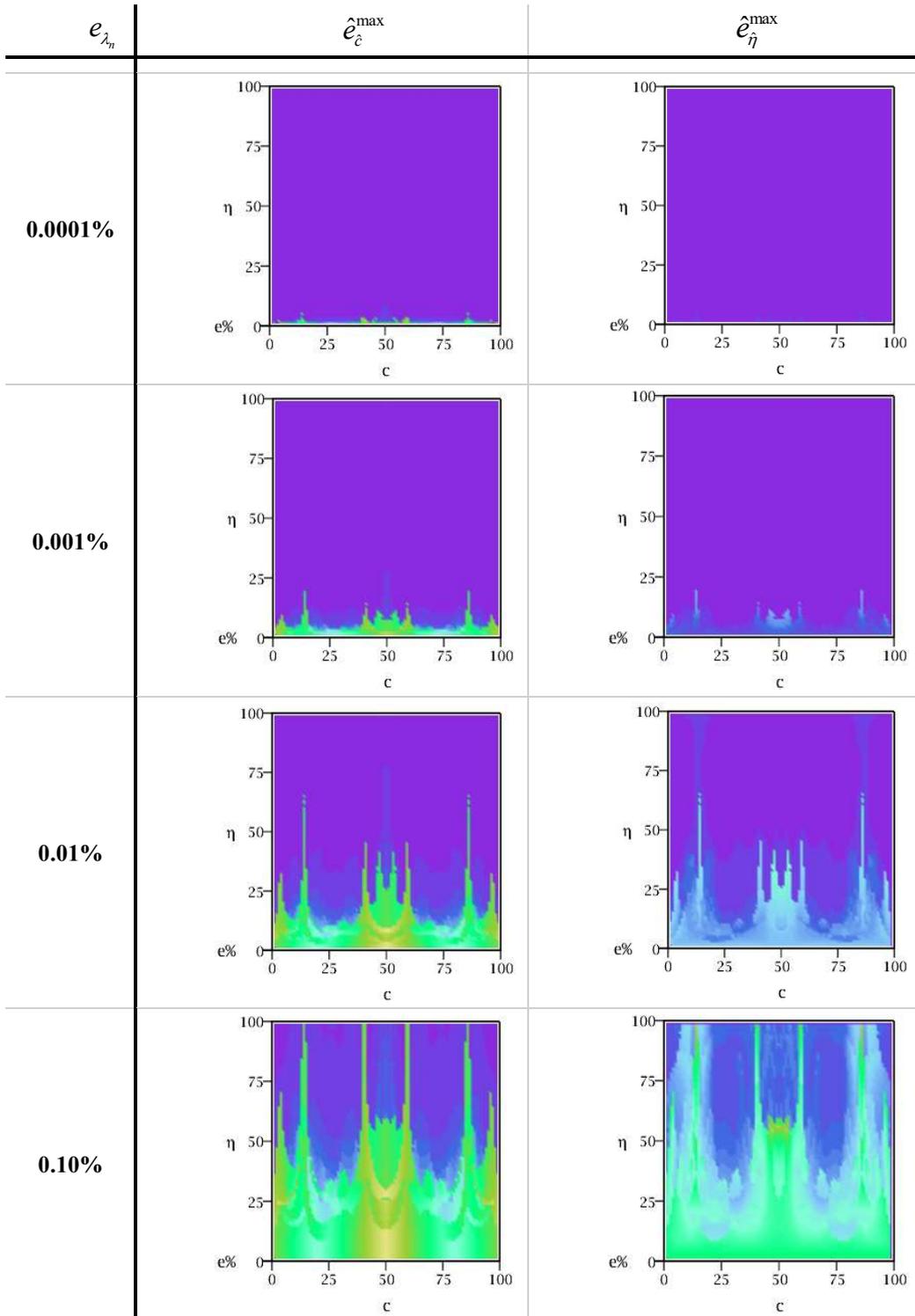


Figura A8.4 – Errores promedio en la determinación de la posición ( $e_c^{pro}$ ) y profundidad ( $e_\eta^{pro}$ ) para la condición A-A.

- E-E



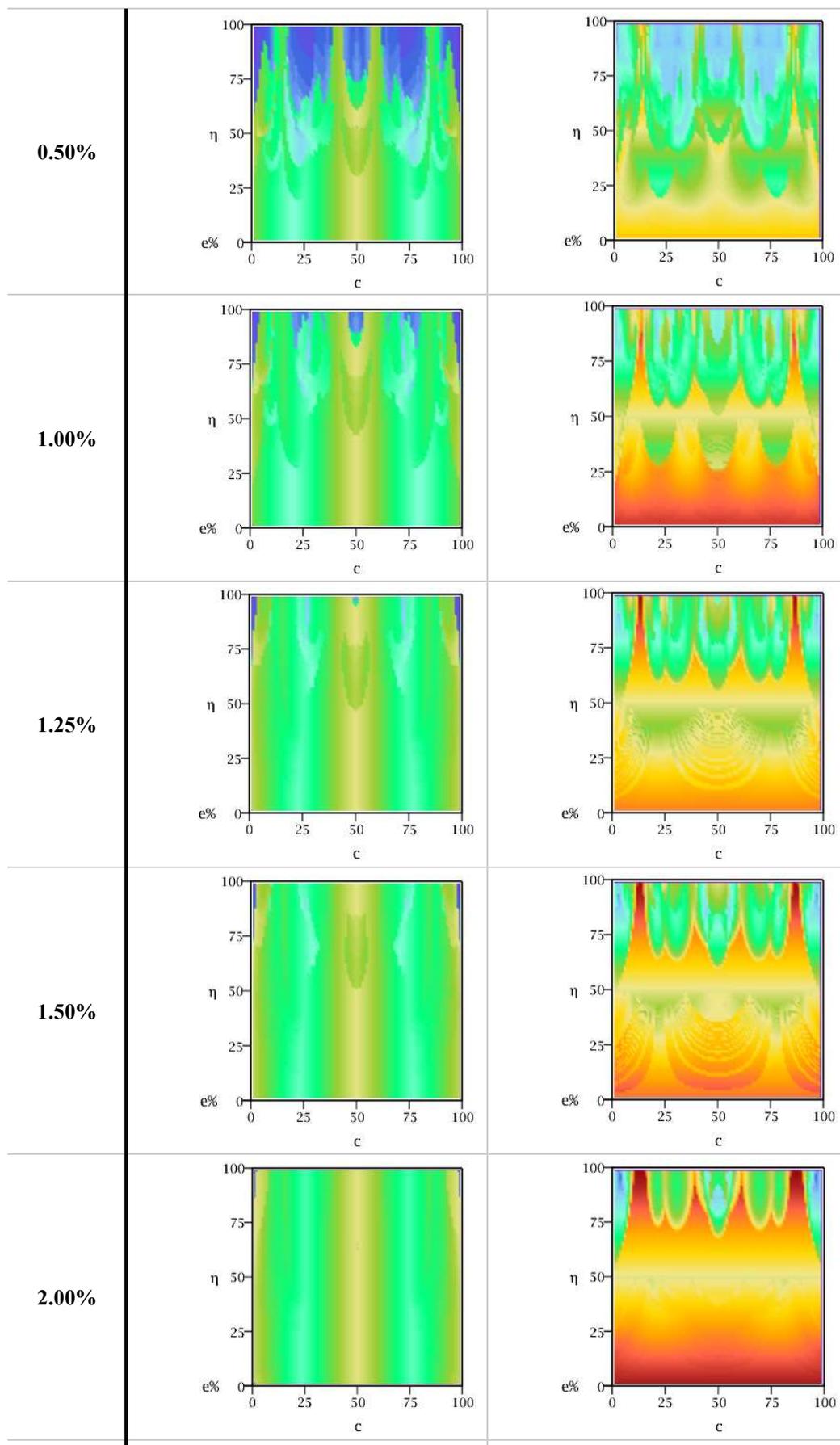
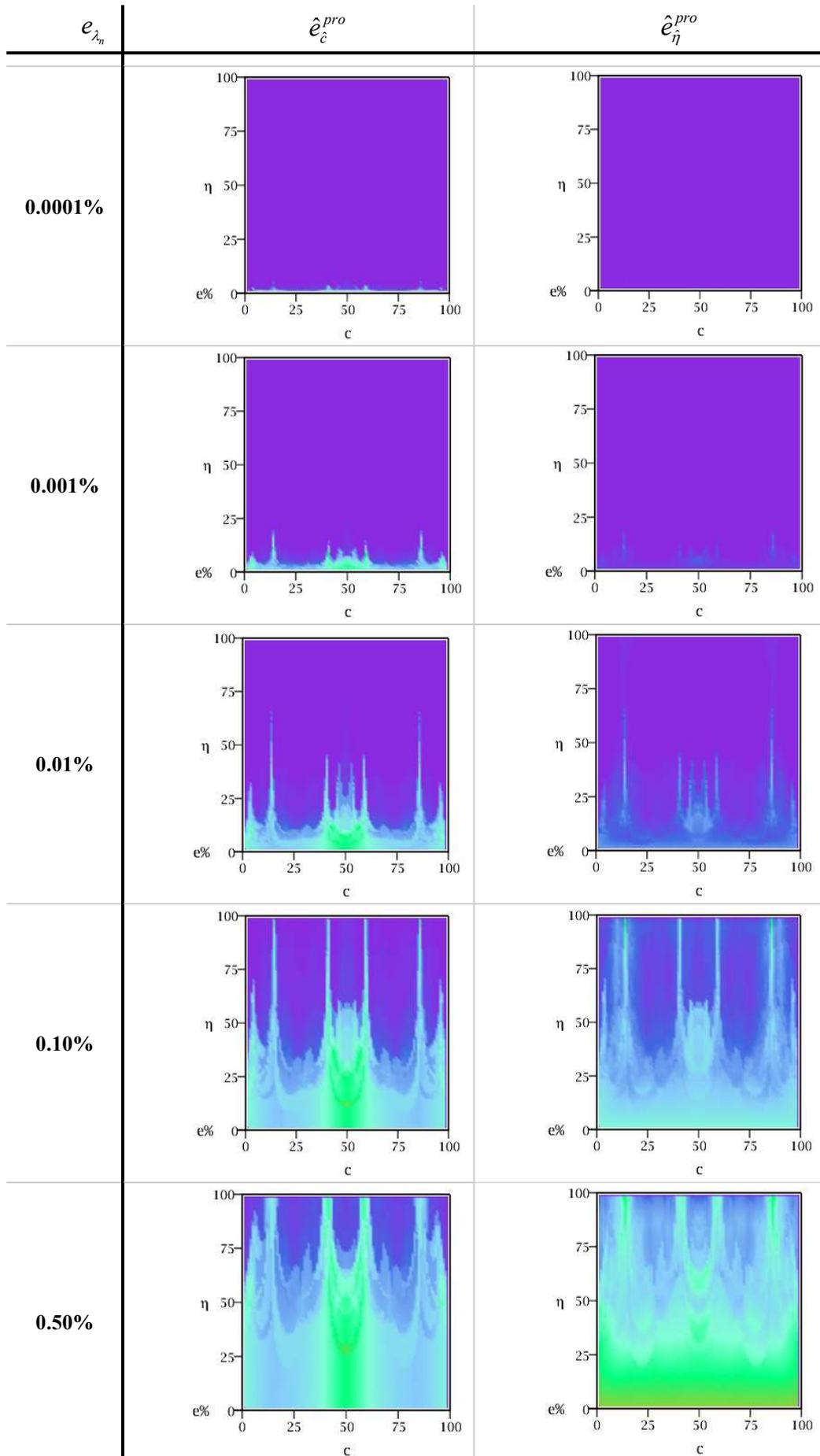


Figura A8.5 – Errores máximos en la determinación de la posición ( $e_c^{\max}$ ) y profundidad ( $e_f^{\max}$ ) para la condición E-E..



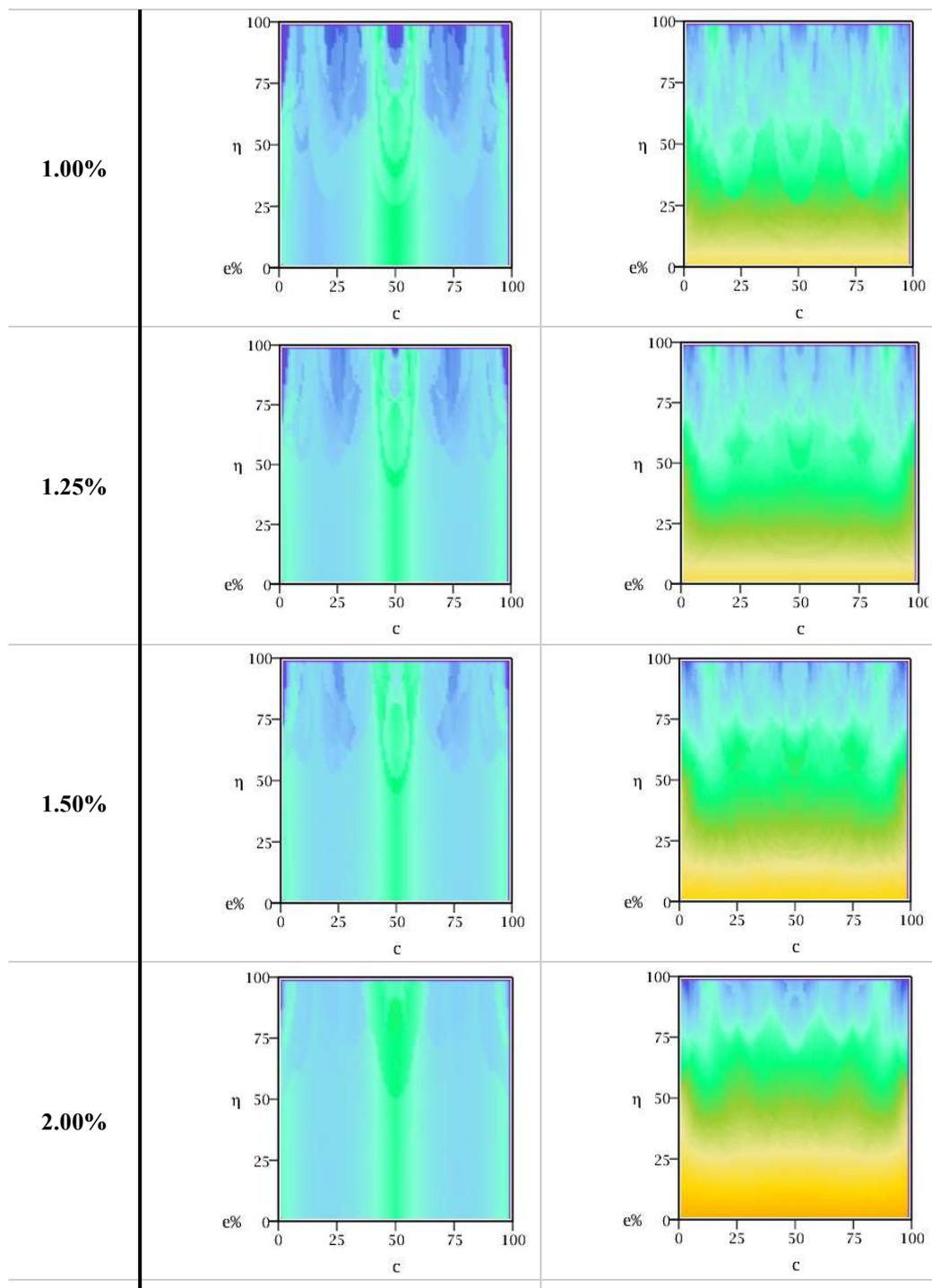
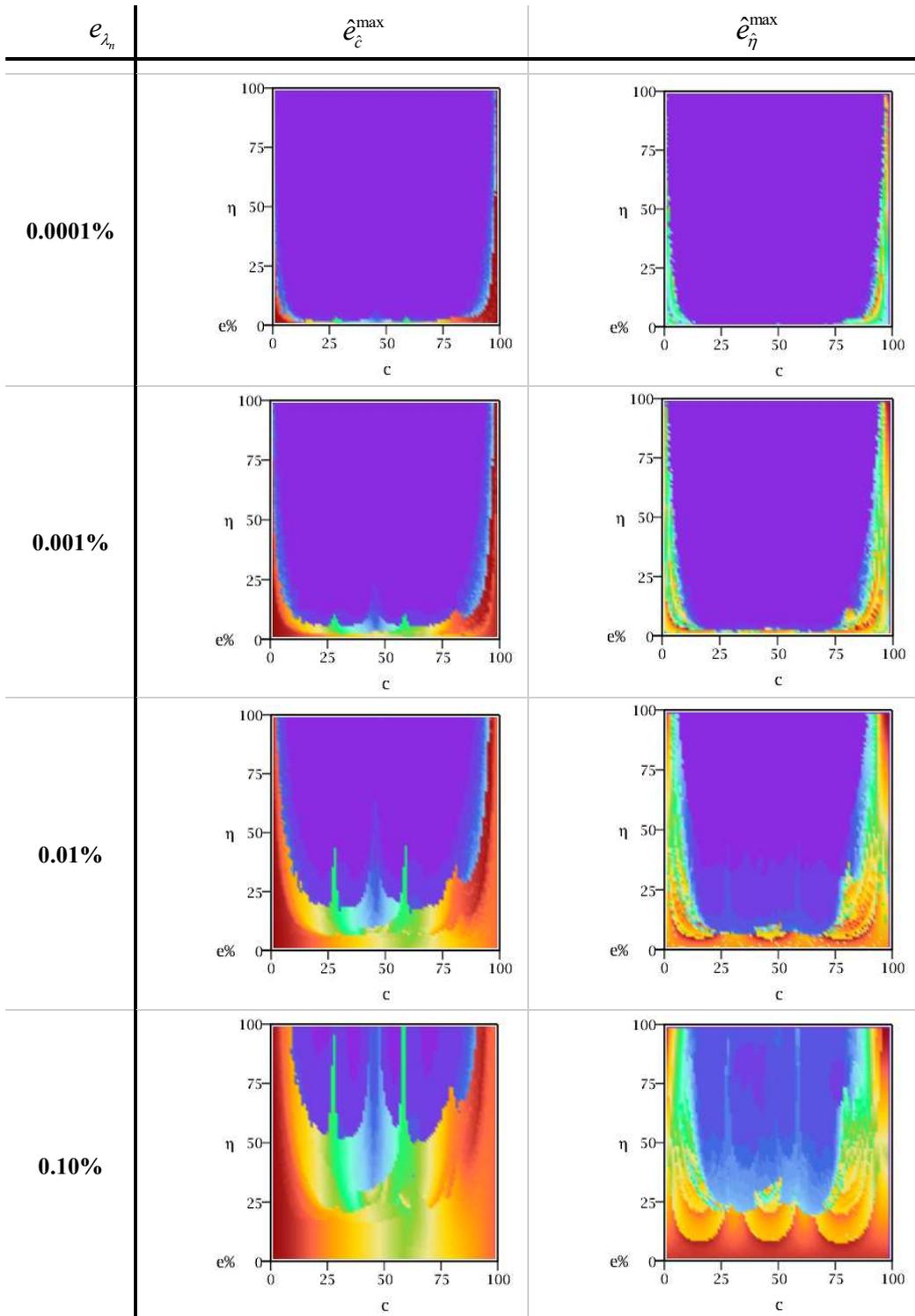


Figura A8.6 – Errores promedios en la determinación de la posición ( $e_c^{pro}$ ) y profundidad ( $e_\eta^{pro}$ ) para la condición E-E..

- A-L



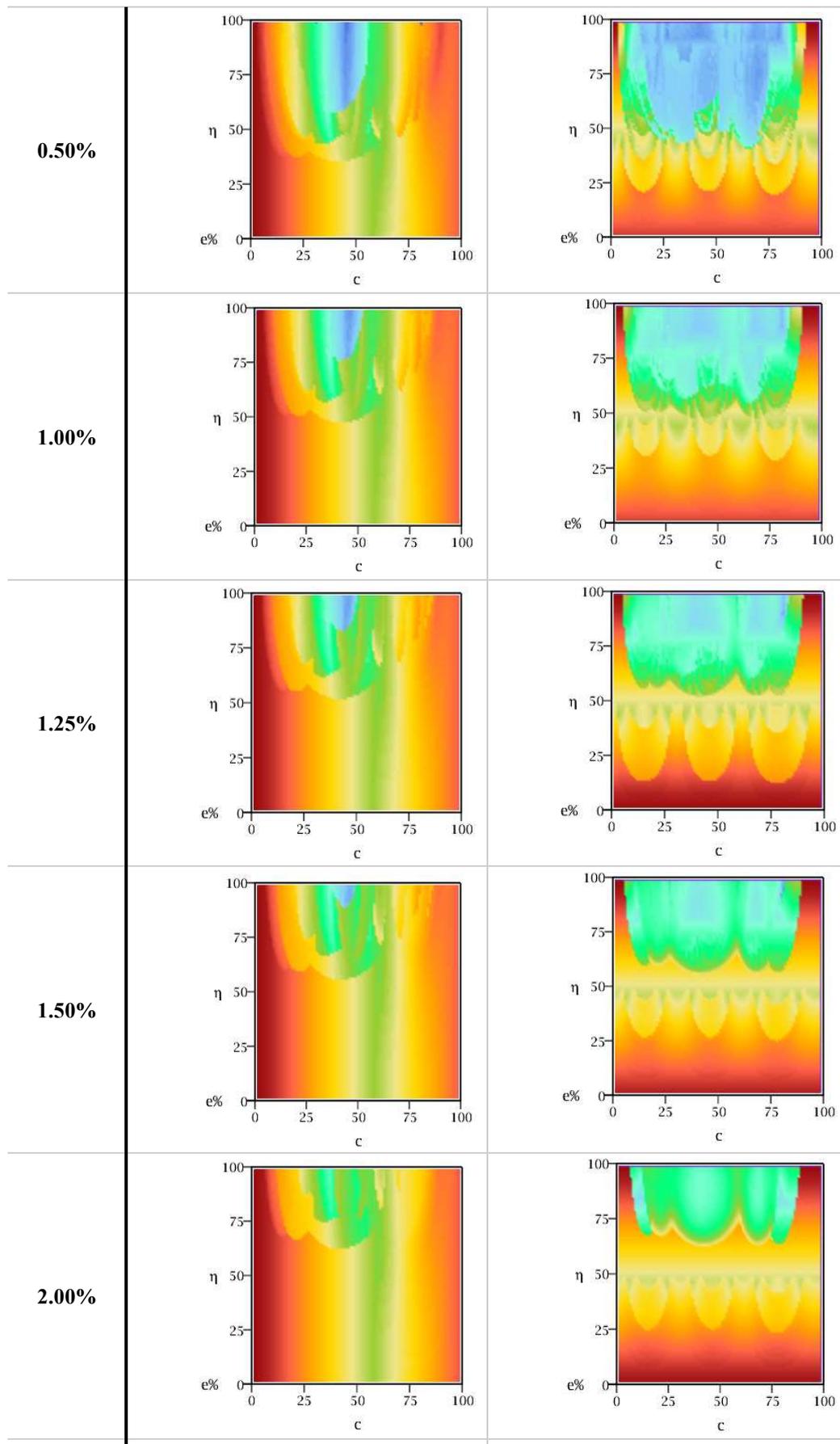
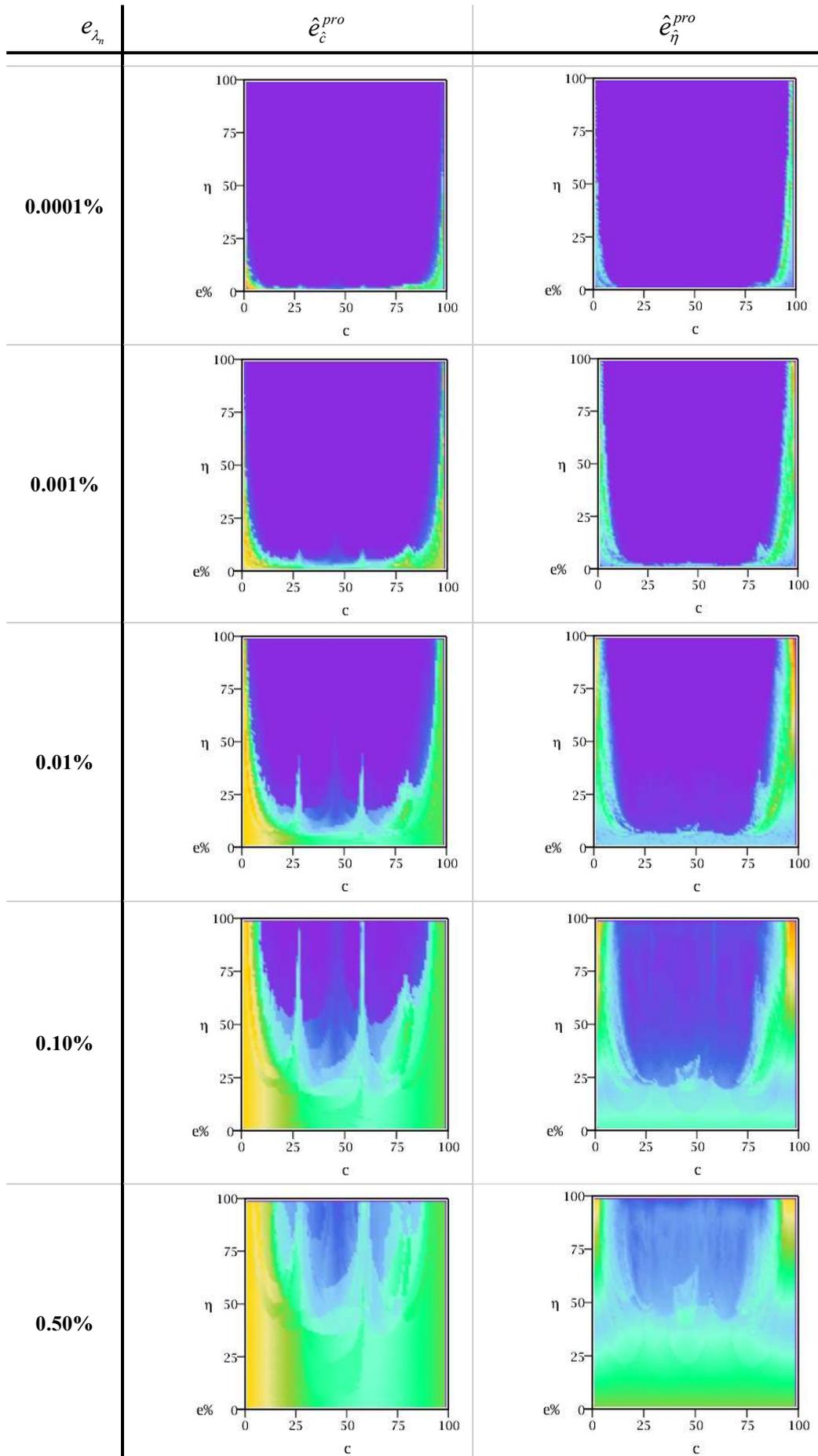


Figura A8.7 – Errores máximos en la determinación de la posición ( $e_c^{\max}$ ) y profundidad ( $e_\eta^{\max}$ ) para la condición A-L



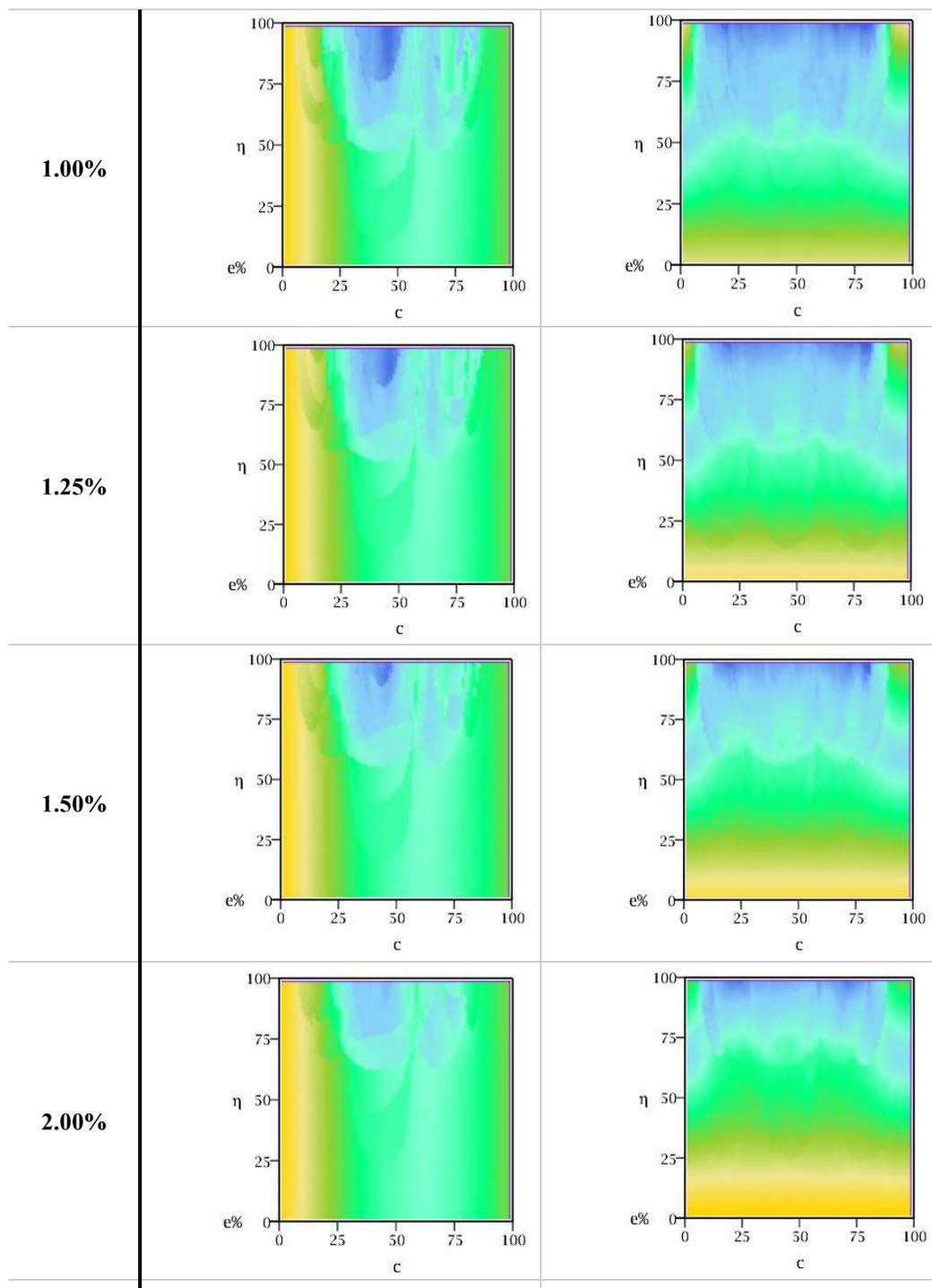
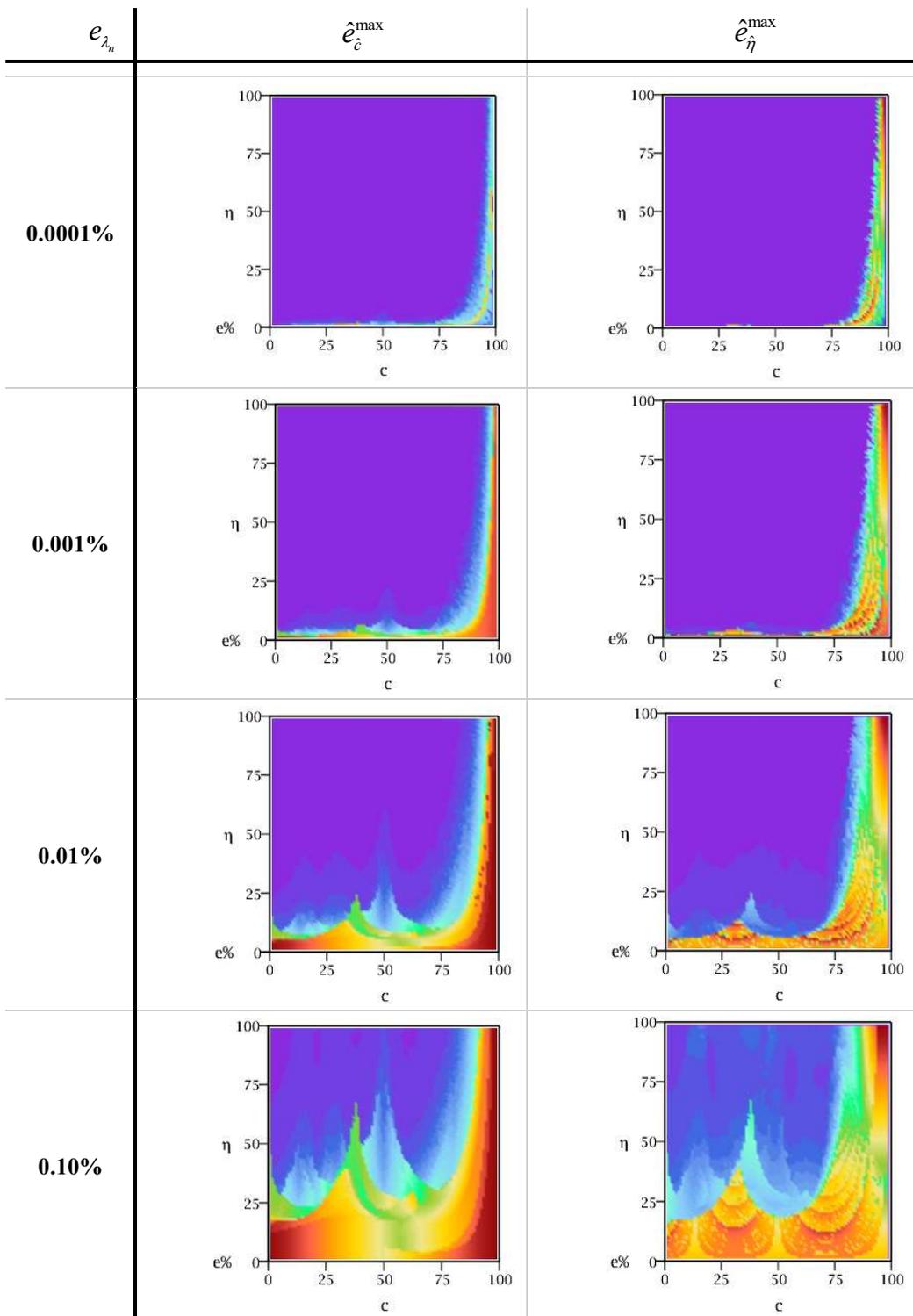


Figura A8.8 – Errores promedio en la determinación de la posición ( $e_c^{pro}$ ) y profundidad ( $e_\eta^{pro}$ ) para la condición A-L.

- E-L



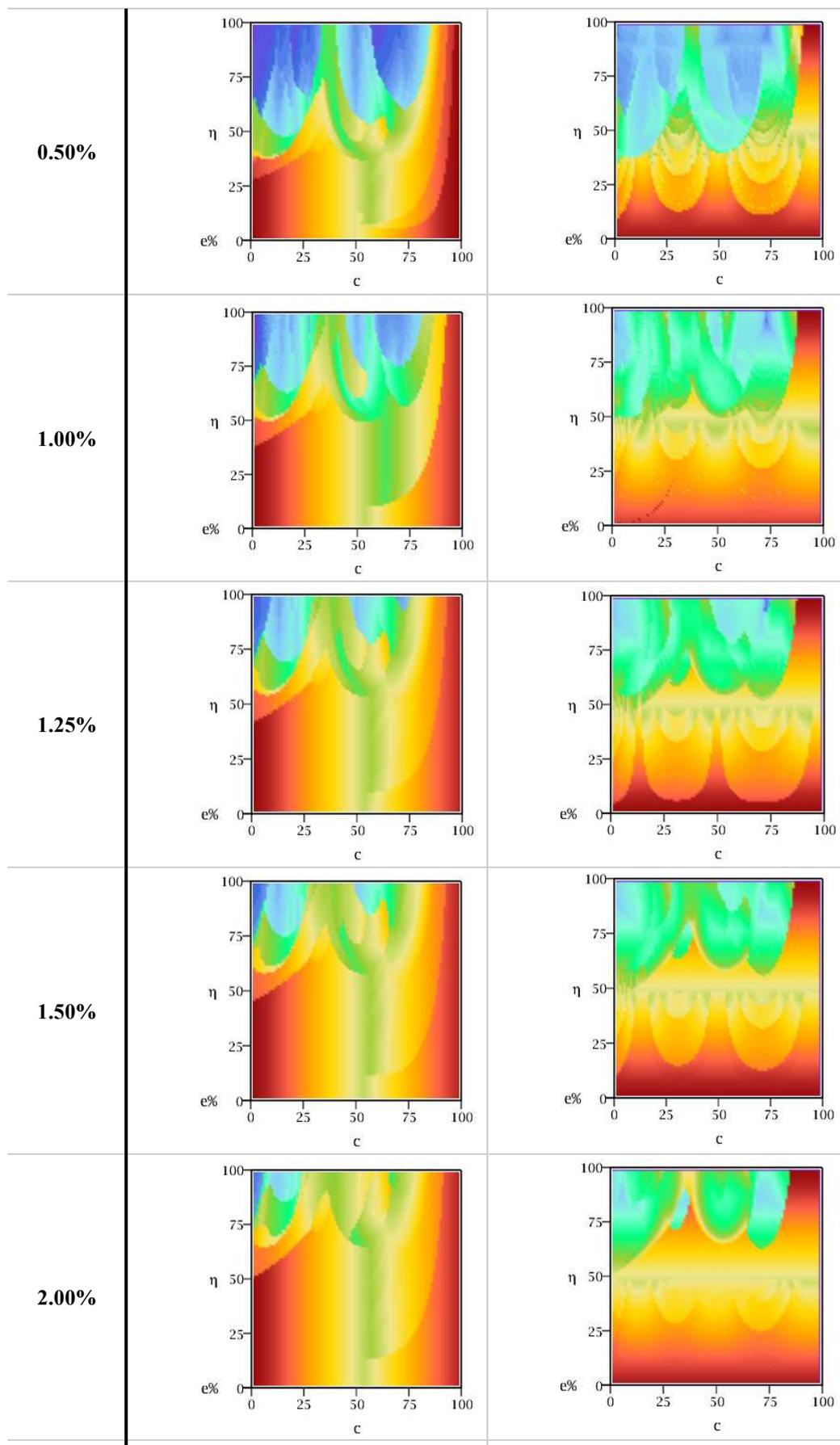
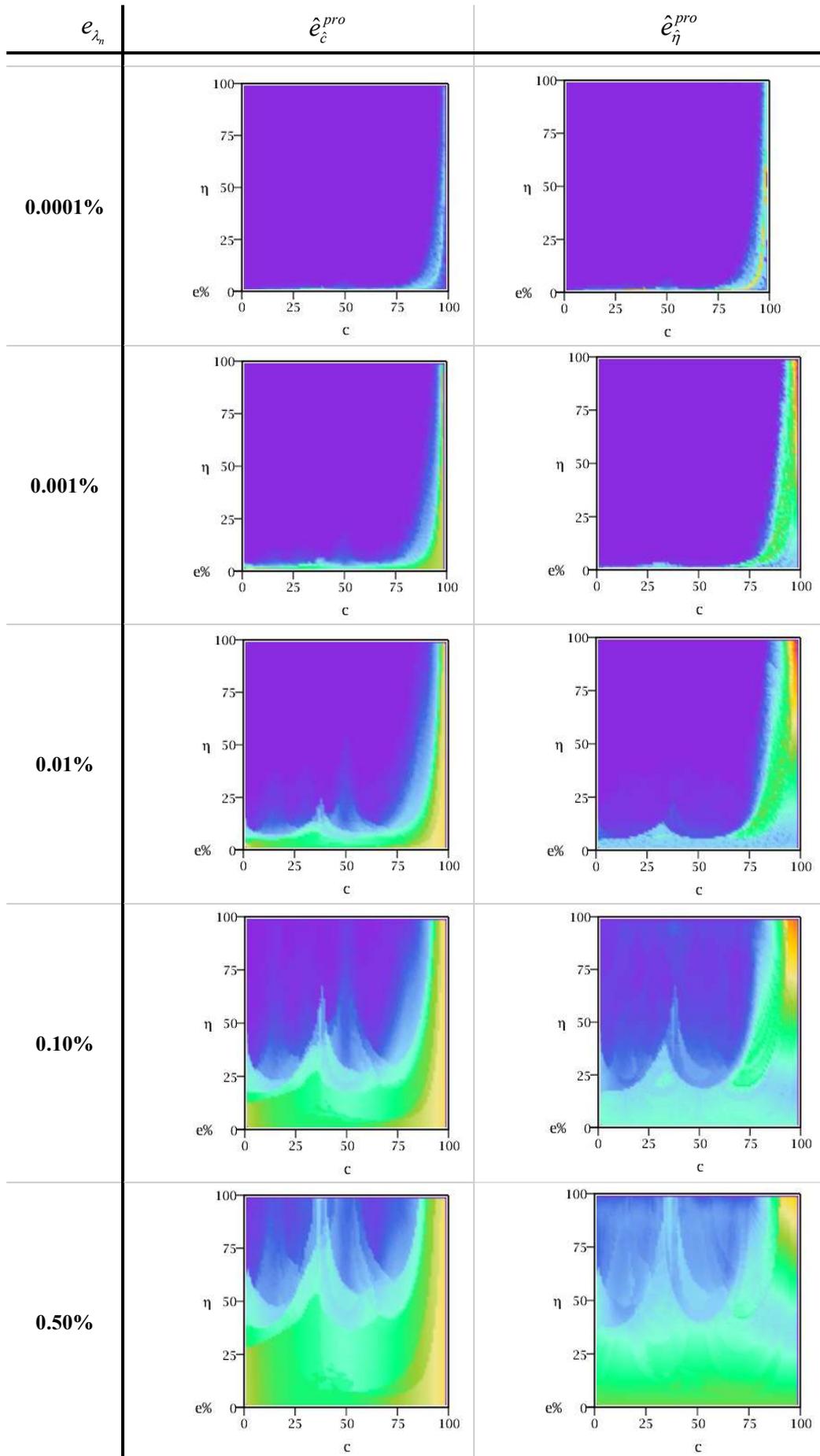


Figura A8.9 – Errores máximos en la determinación de la posición ( $e_c^{\max}$ ) y profundidad ( $e_f^{\max}$ ) para la condición E-L.



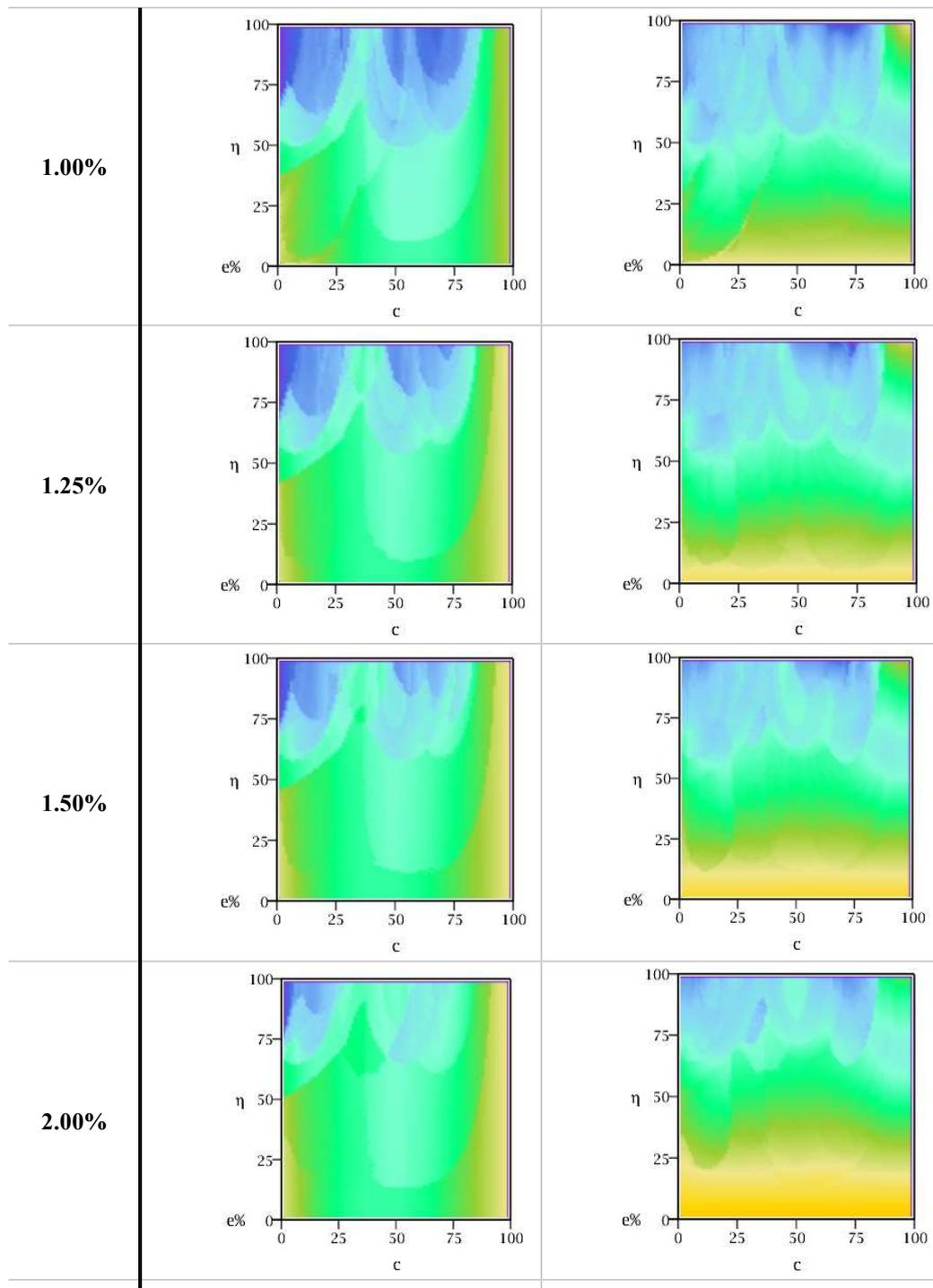
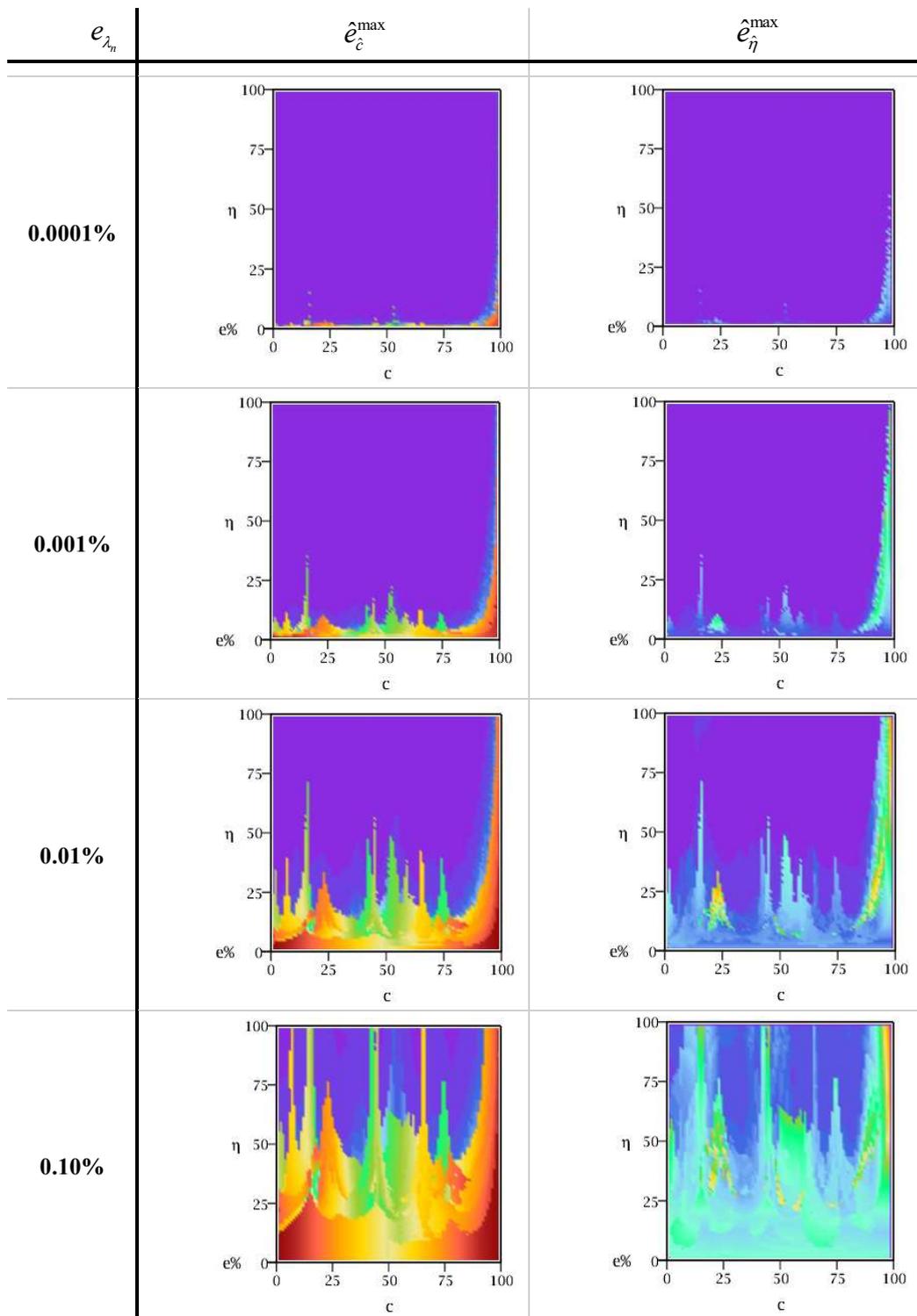


Figura A8.10 – Errores promedios en la determinación de la posición ( $e_c^{pro}$ ) y profundidad ( $e_\eta^{pro}$ ) para la condición E-L..

- E-A



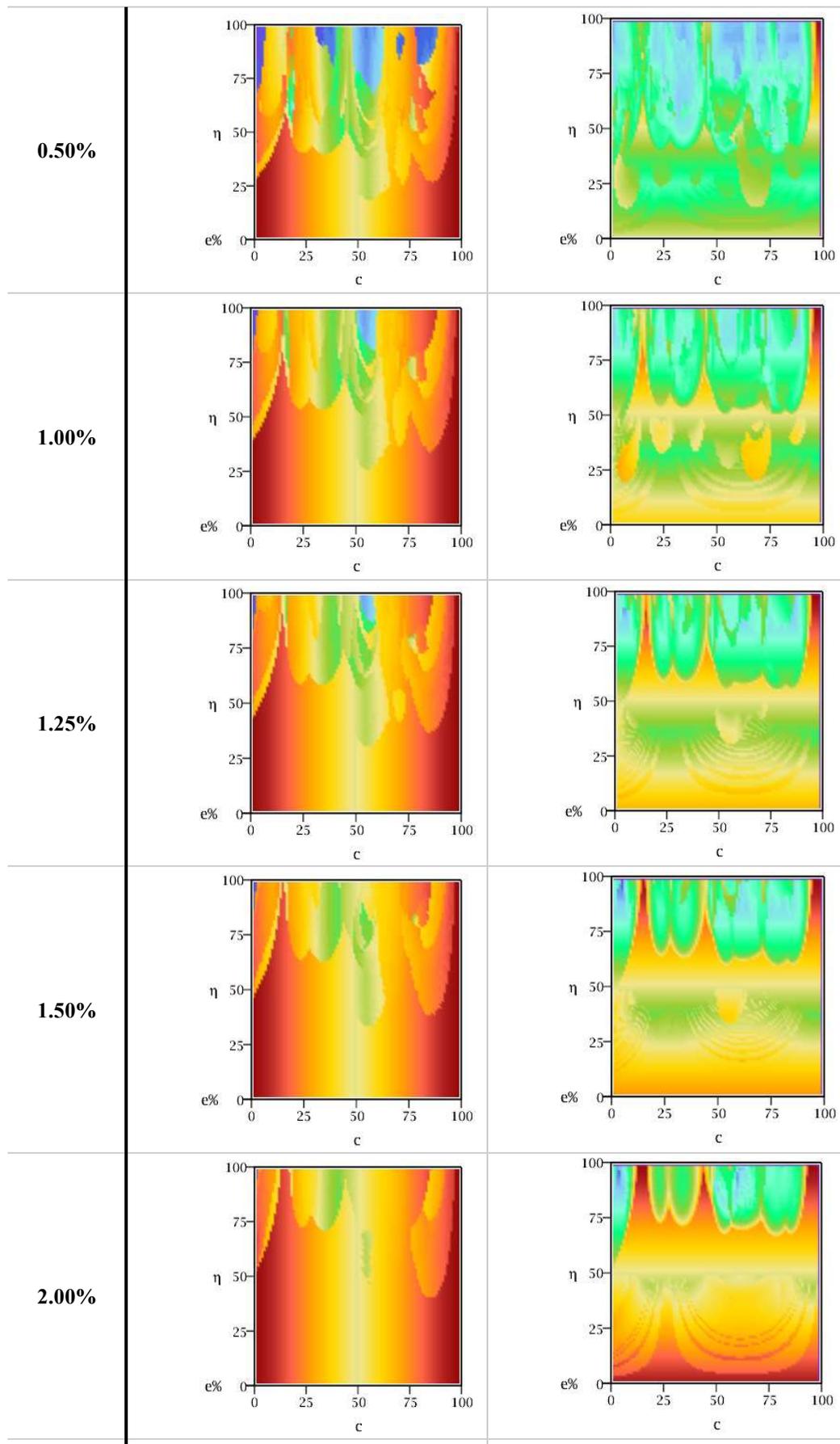
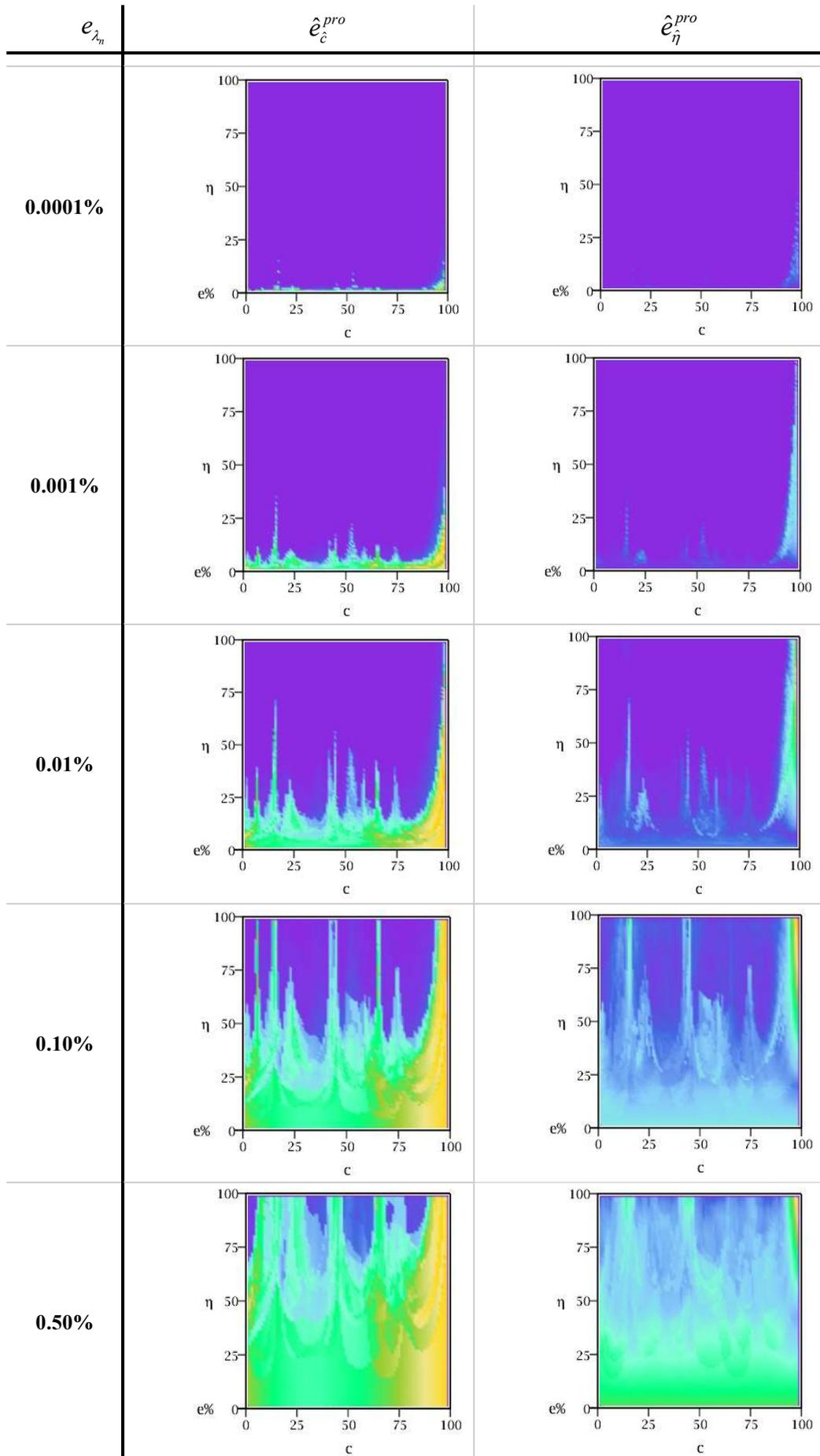


Figura A8.11 – Errores máximos en la determinación de la posición ( $e_c^{\max}$ ) y profundidad ( $e_\eta^{\max}$ ) para la condición E-A



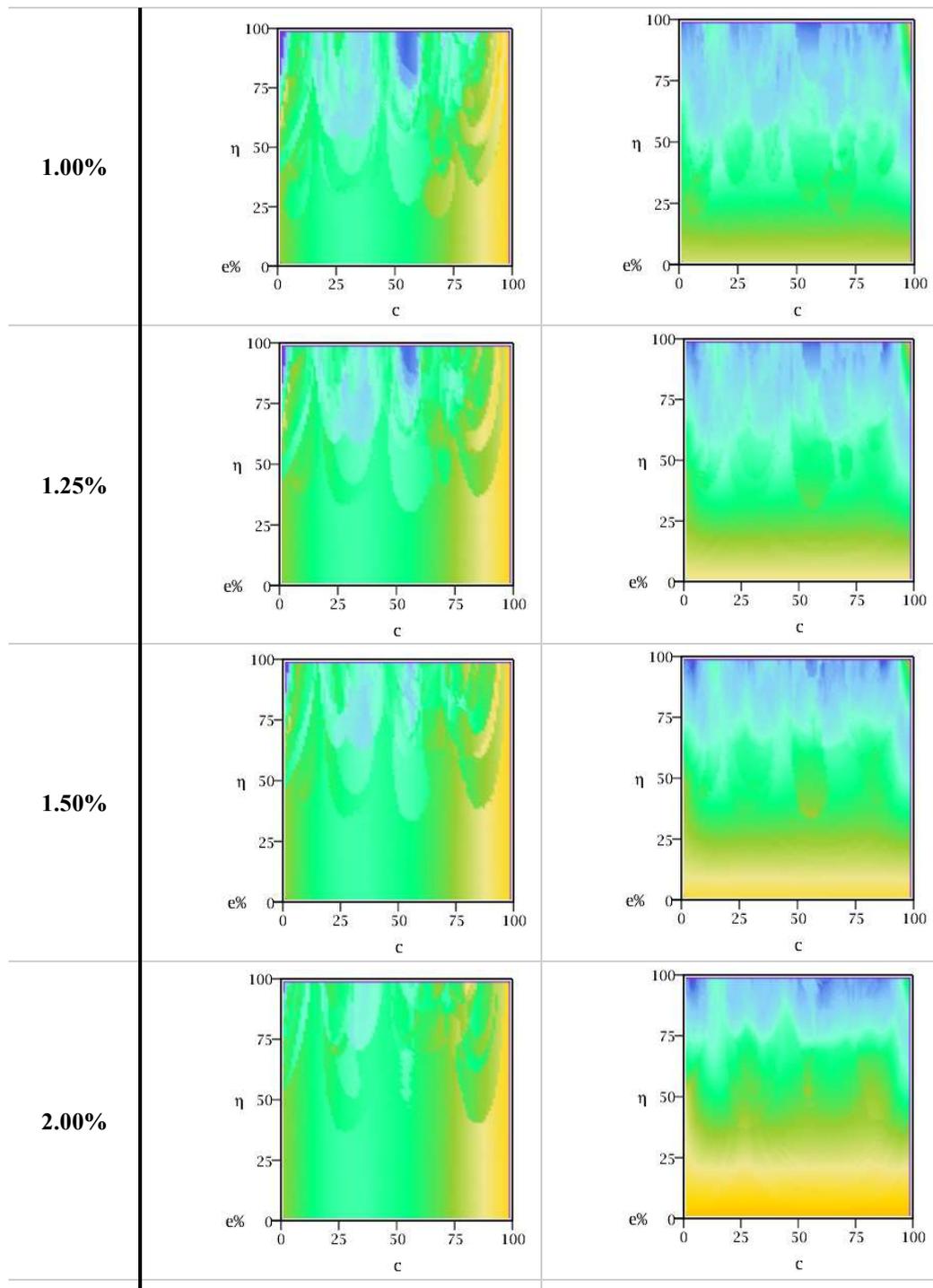
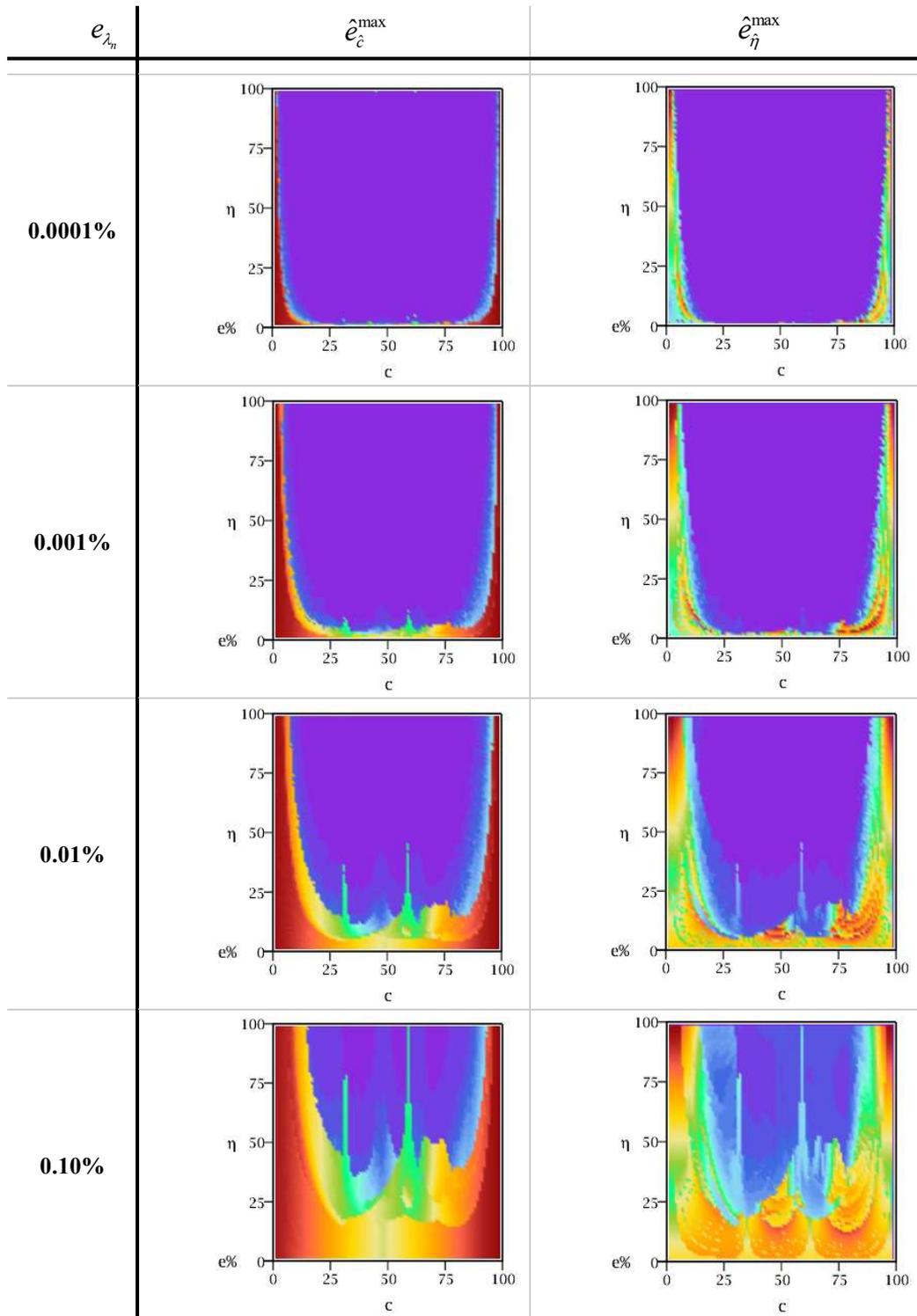


Figura A8.12 – Errores promedios en la determinación de la posición ( $e_c^{pro}$ ) y profundidad ( $e_\eta^{pro}$ ) para la condición E-A

*A8.2 Condiciones de vinculación clásicas en los extremos con un apoyo simple intermedio*

- L-L con un apoyo simple en  $c=0.30$



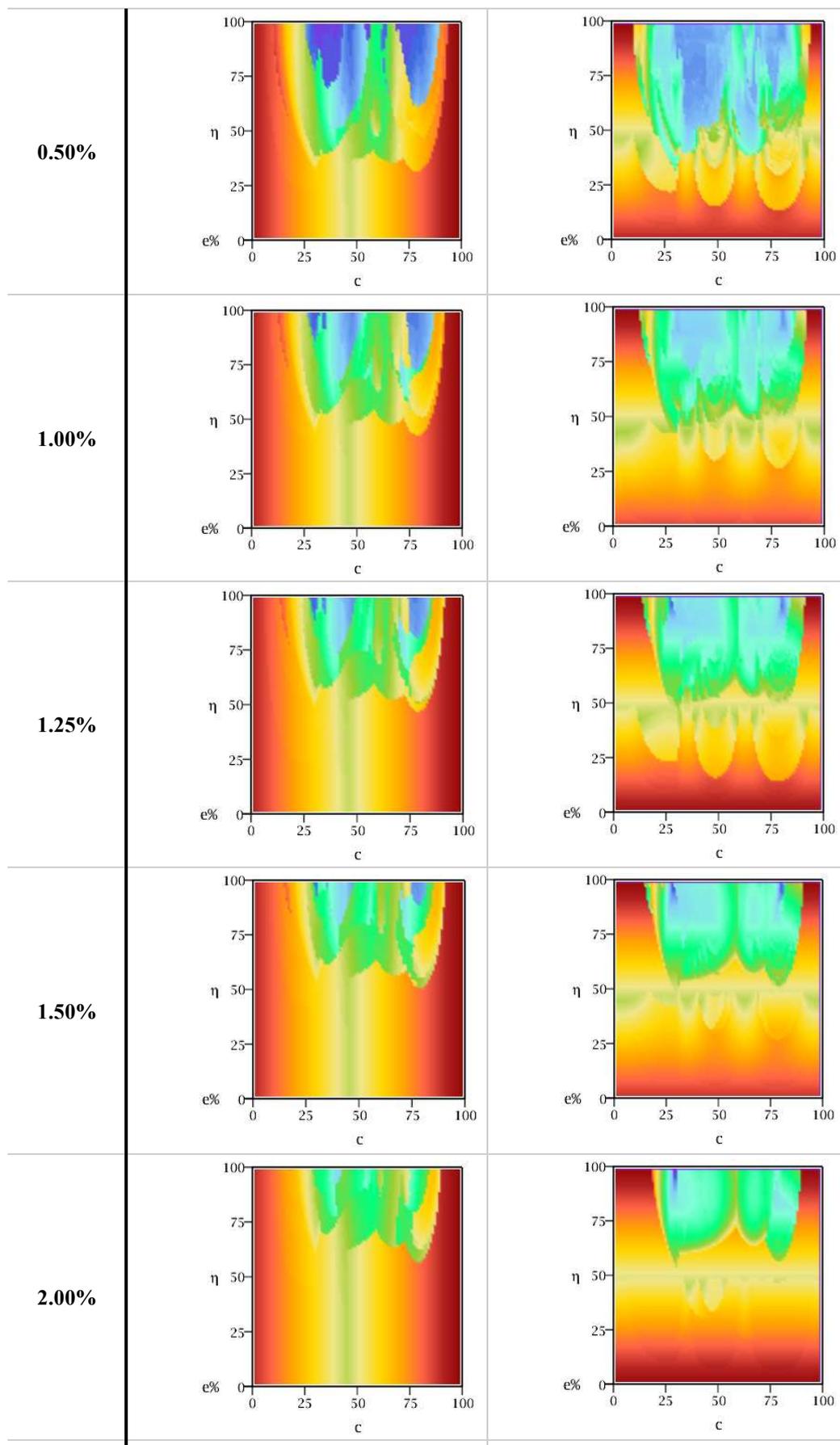
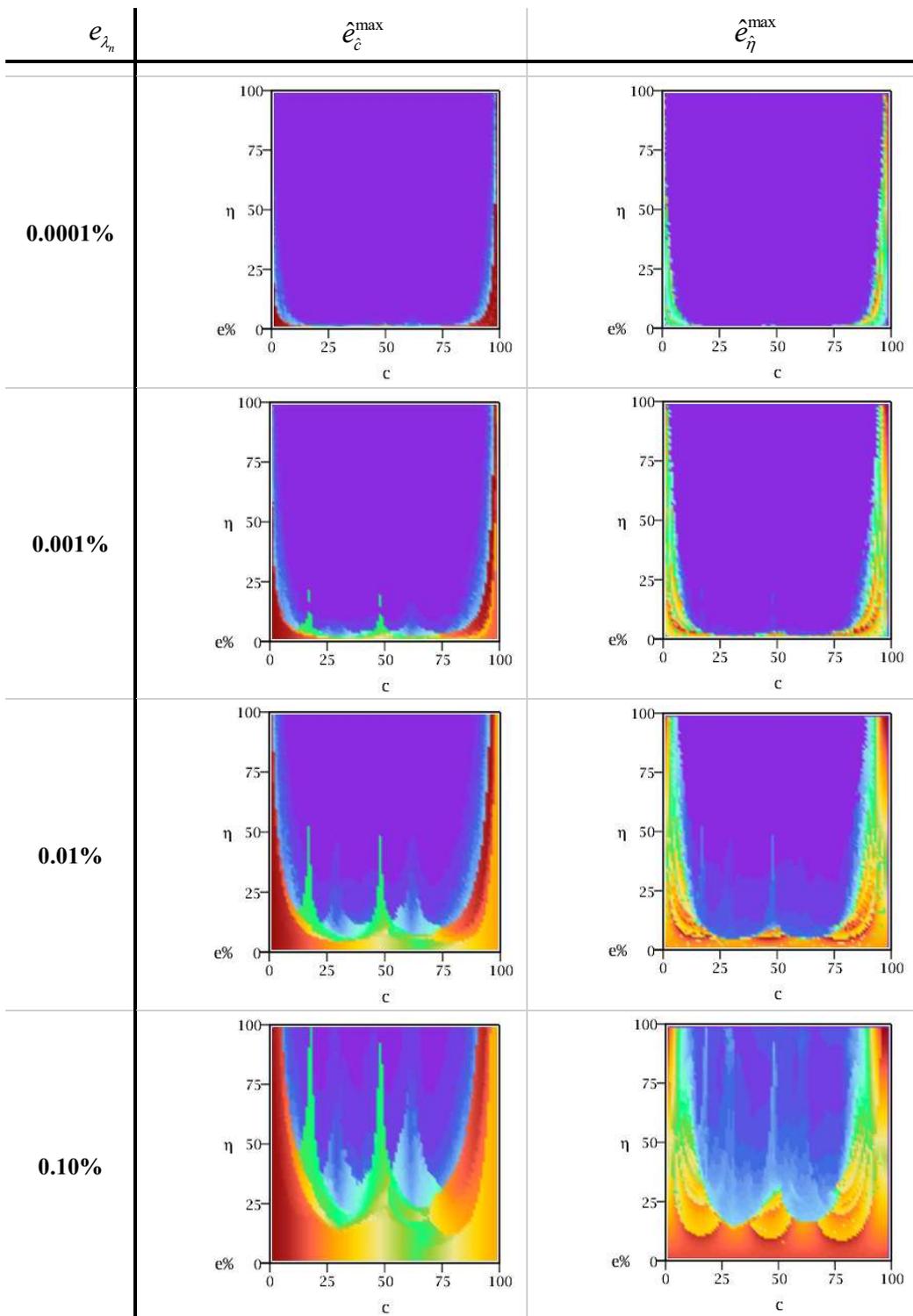


Figura A8.13 – Errores máximos en la determinación de la posición ( $e_c^{\max}$ ) y profundidad ( $e_\eta^{\max}$ ) para la condición L-L con un apoyo simple en  $c = 0.30$ .

- A-L con un apoyo simple en  $c=0.30$



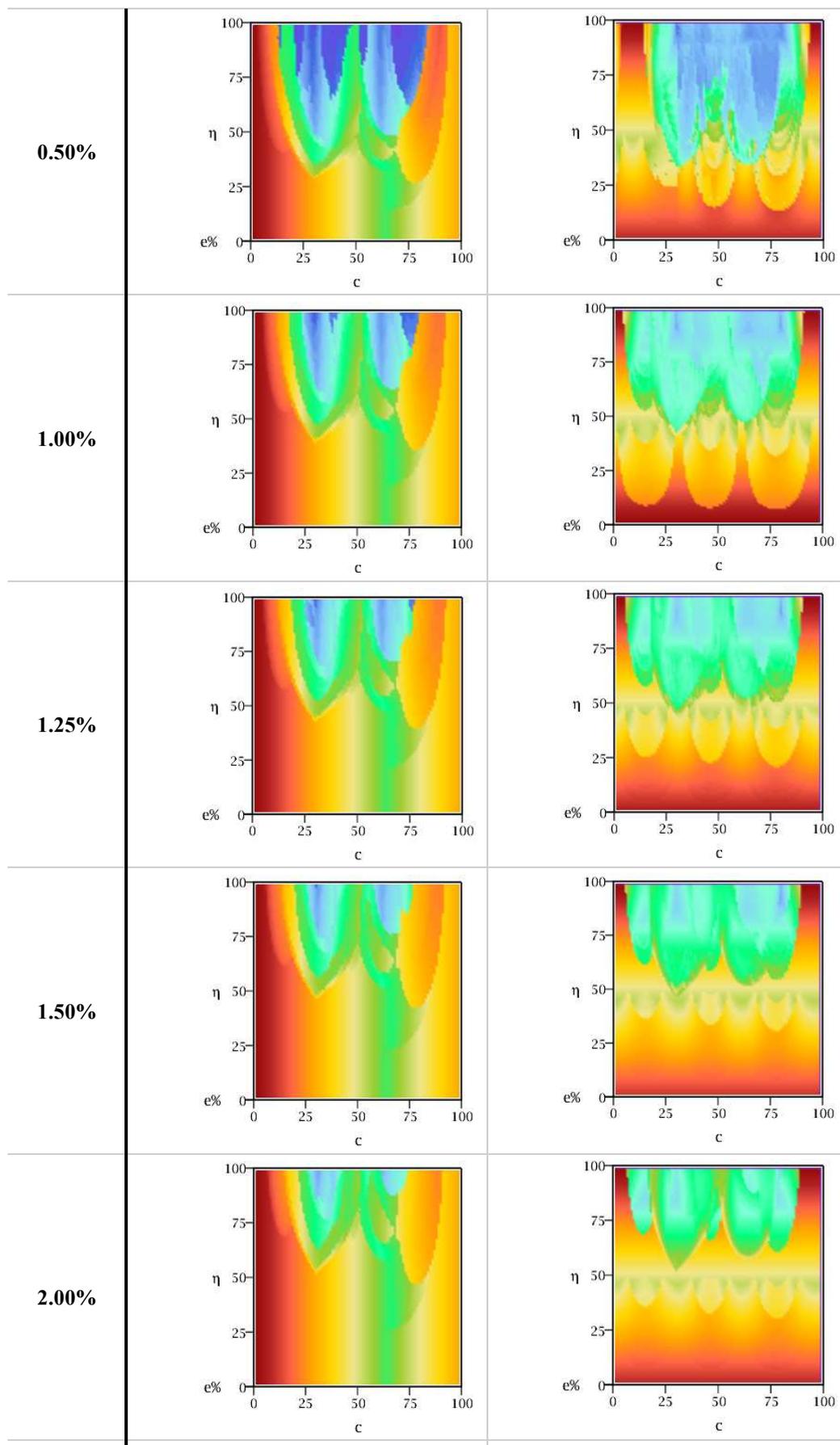
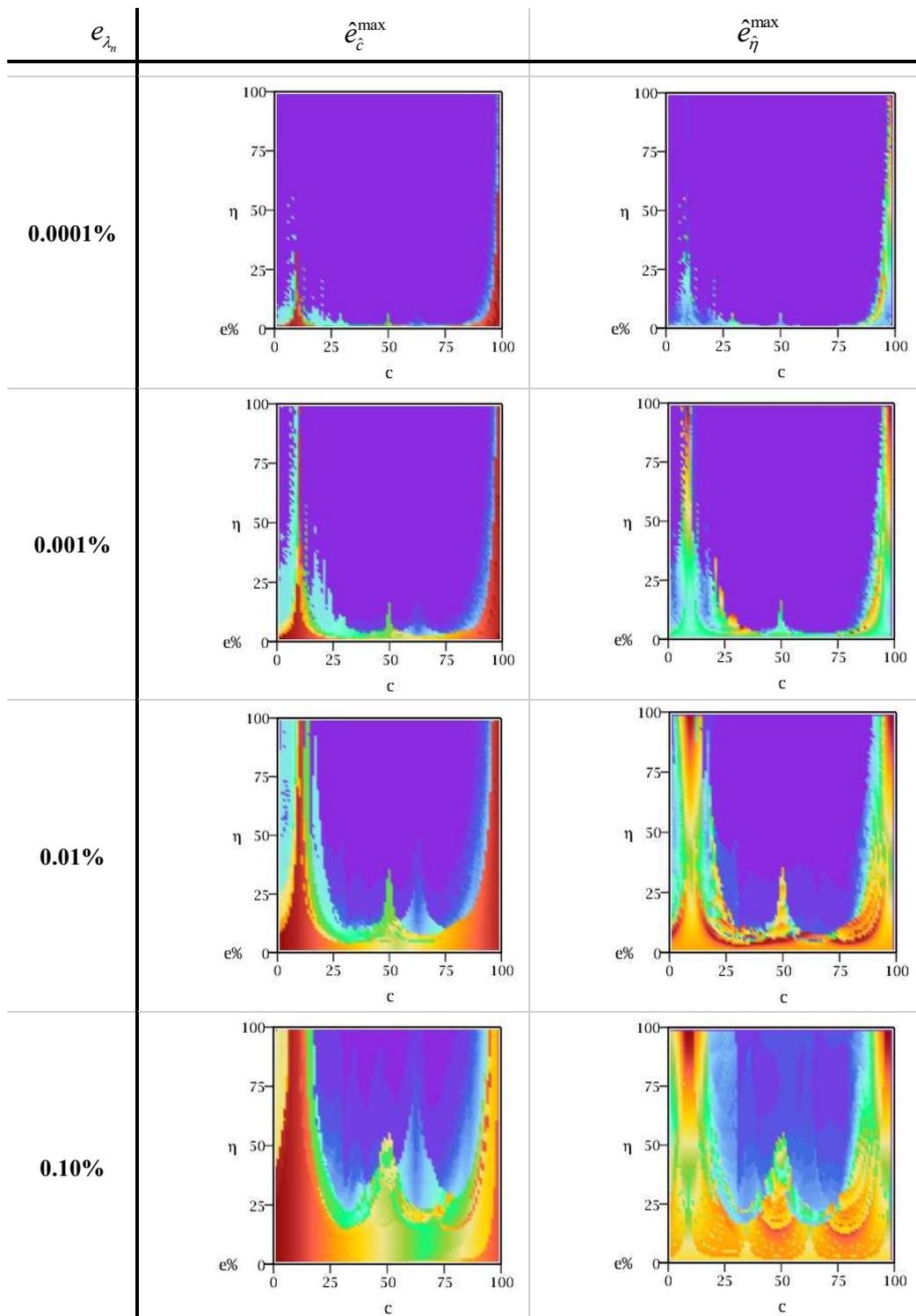


Figura A8.14 – Errores máximos en la determinación de la posición ( $e_c^{\max}$ ) y profundidad ( $e_\eta^{\max}$ ) para la condición A-L con un apoyo simple en  $c = 0.30$ .

- E-L con un apoyo simple en  $c=0.30$



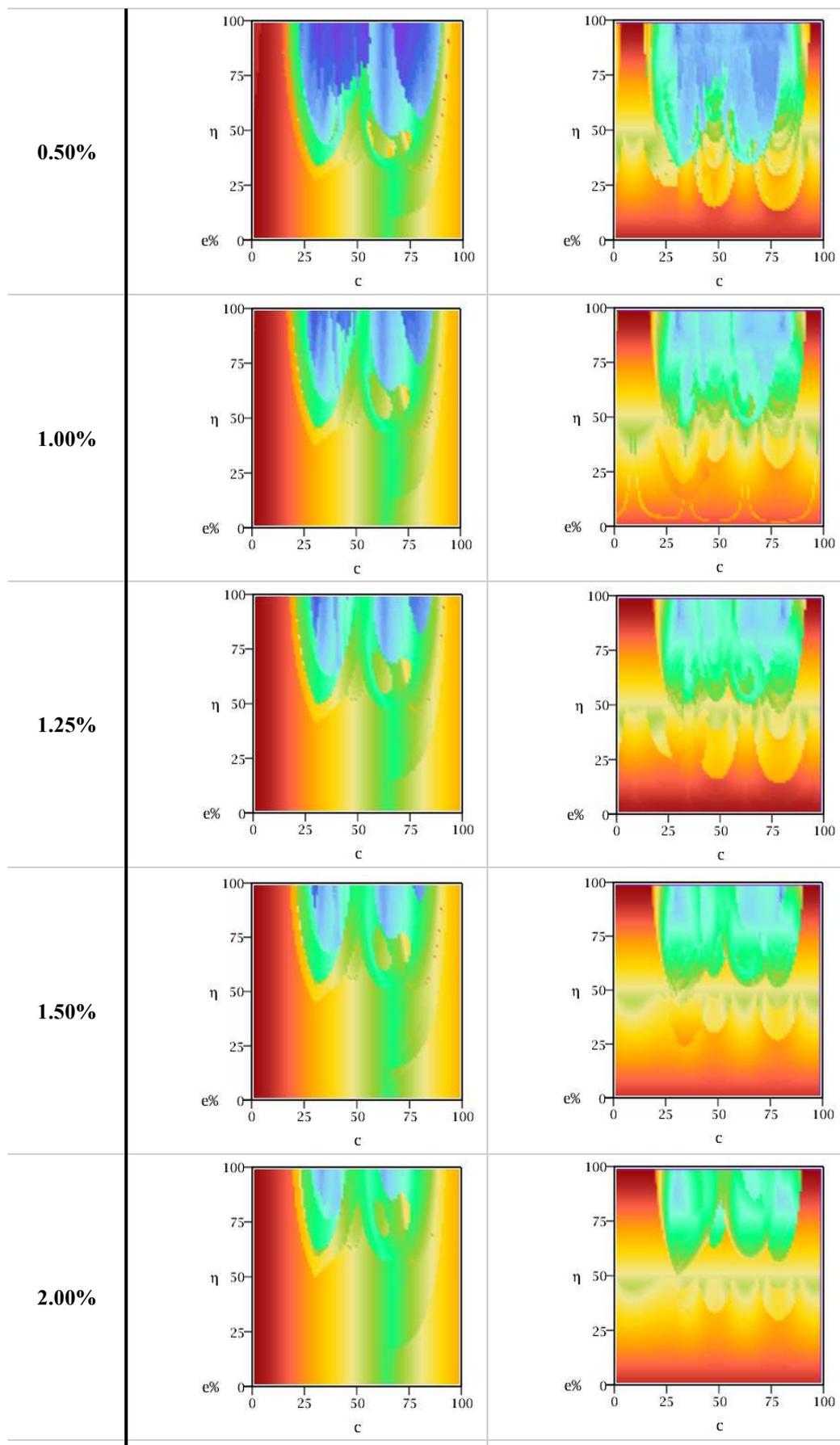
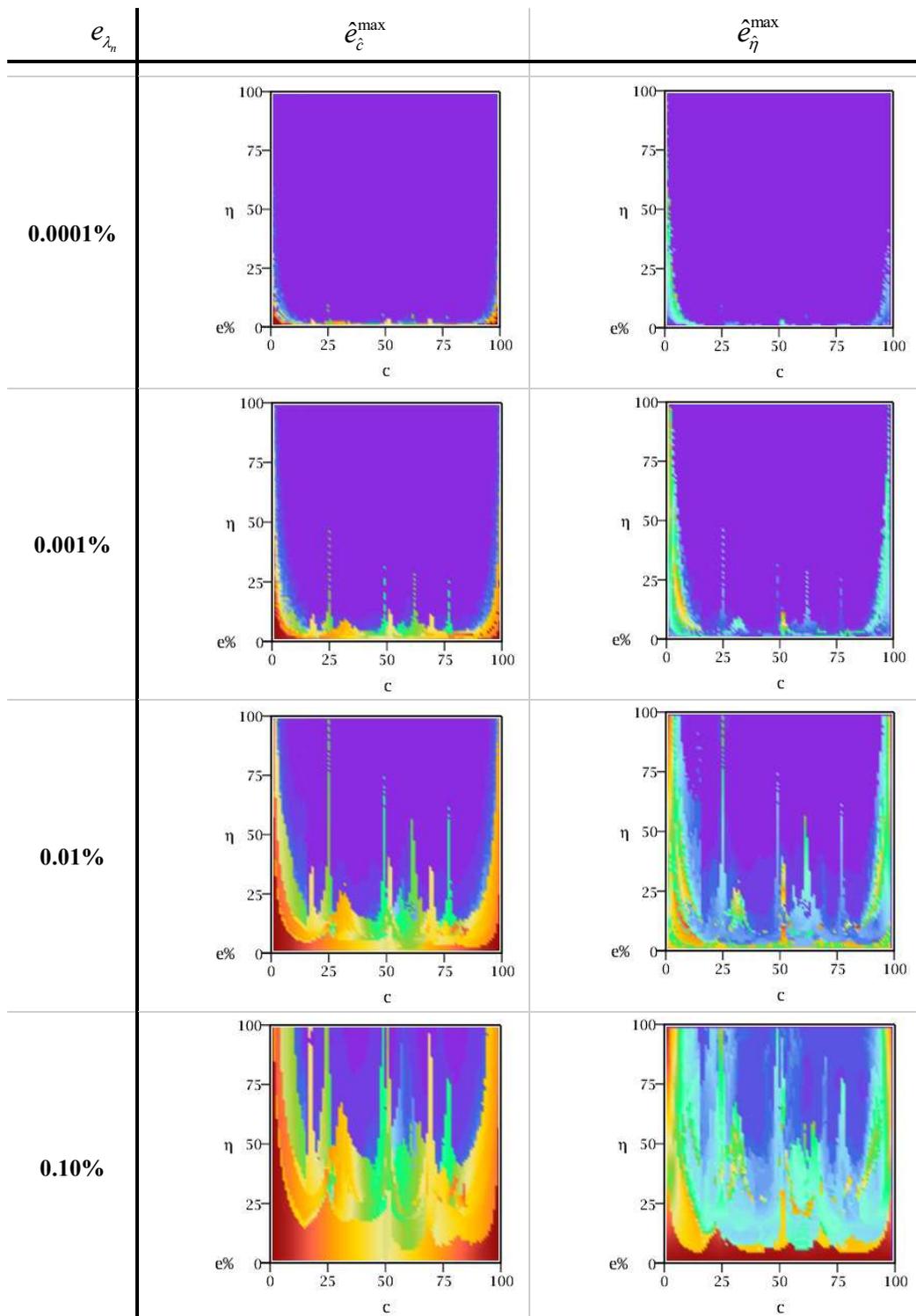


Figura A8.15 – Errores máximos en la determinación de la posición ( $e_c^{\max}$ ) y profundidad ( $e_\eta^{\max}$ ) para la condición E-L con un apoyo simple en  $c = 0.30$ .

- A-A con un apoyo simple en  $c=0.15$



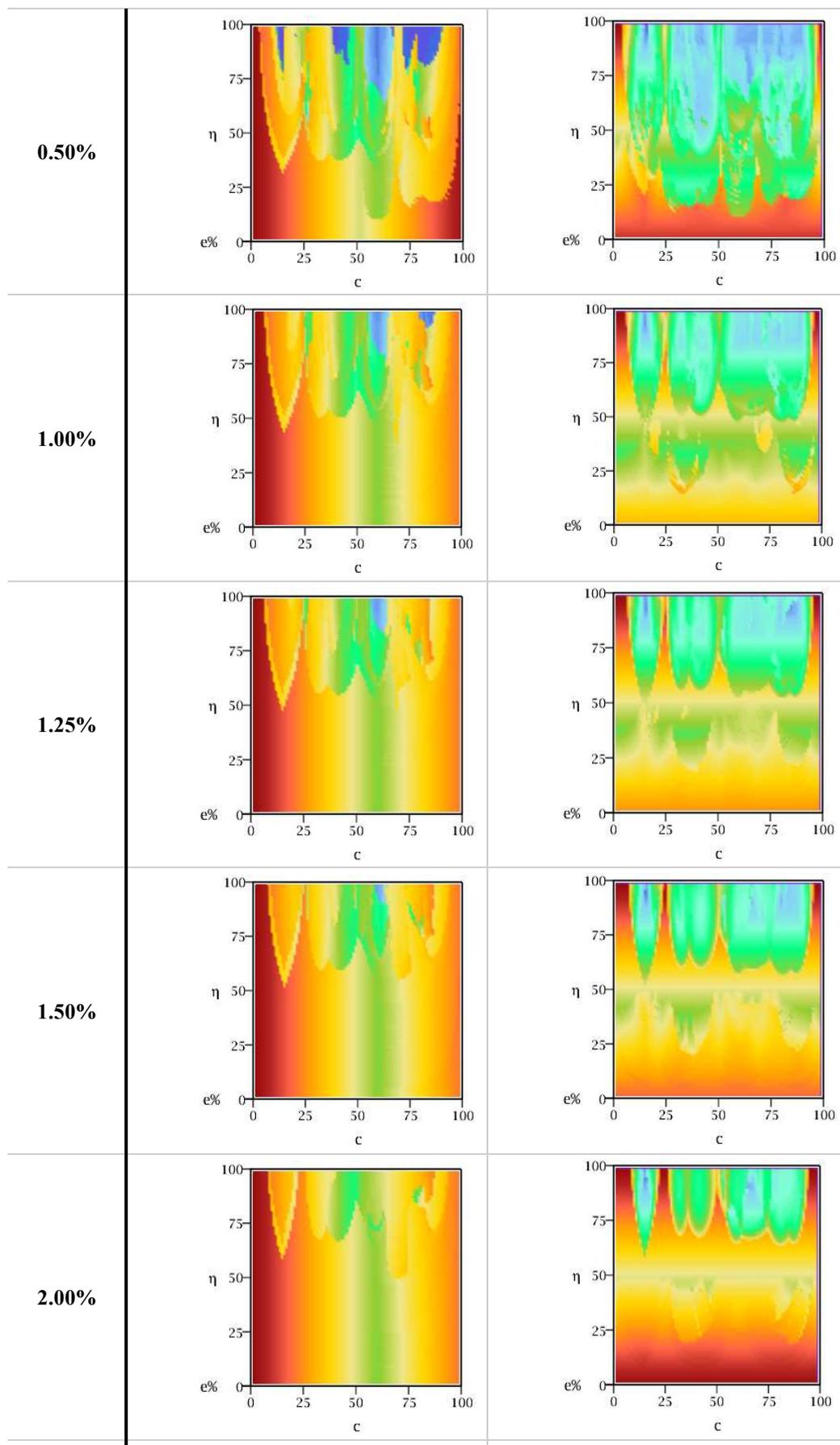
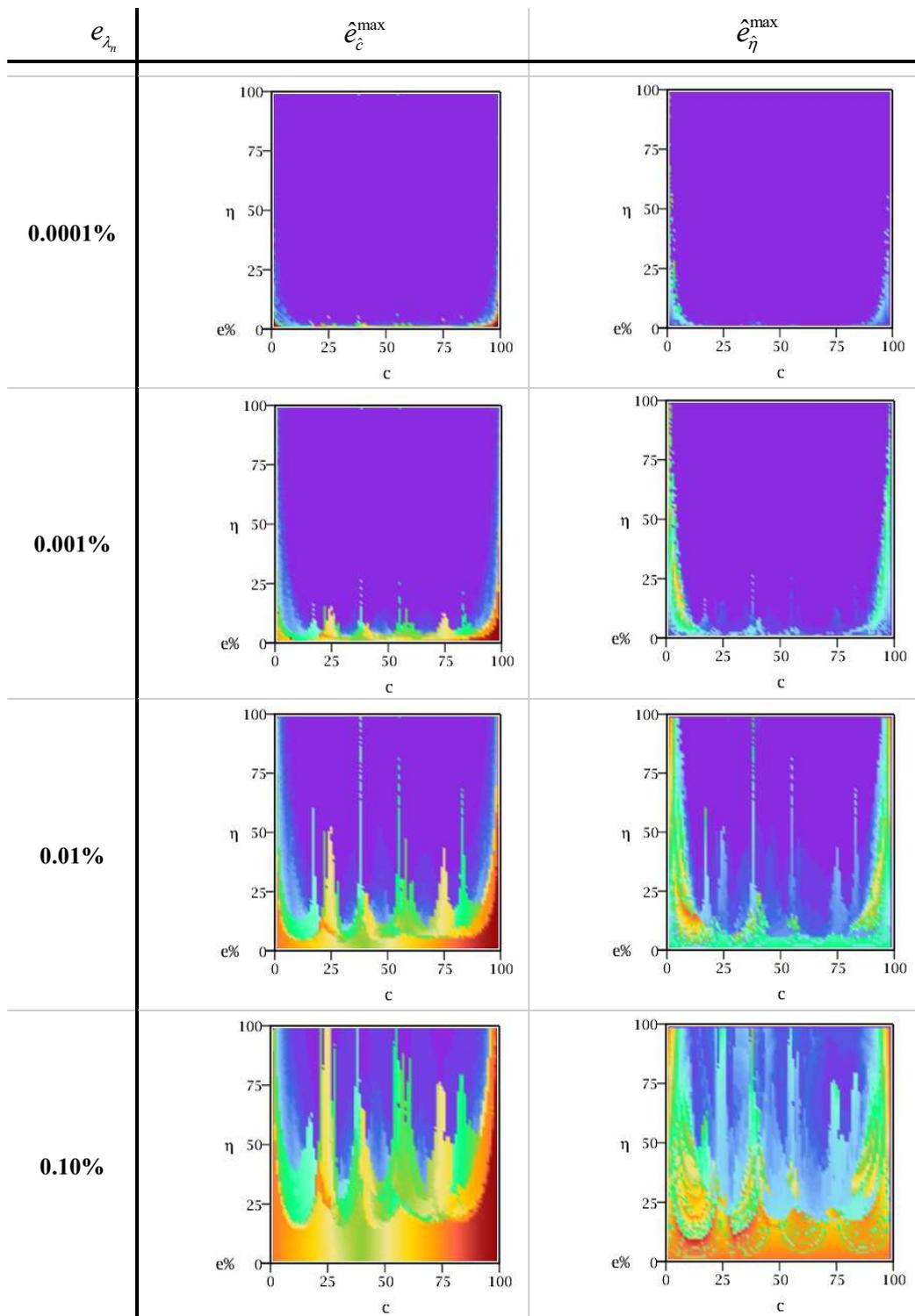


Figura A8.16 – Errores máximos en la determinación de la posición ( $e_c^{\max}$ ) y profundidad ( $e_\eta^{\max}$ ) para la condición A-A con un apoyo simple en  $c = 0.15$ .

- A-A con un apoyo simple en  $c=0.30$



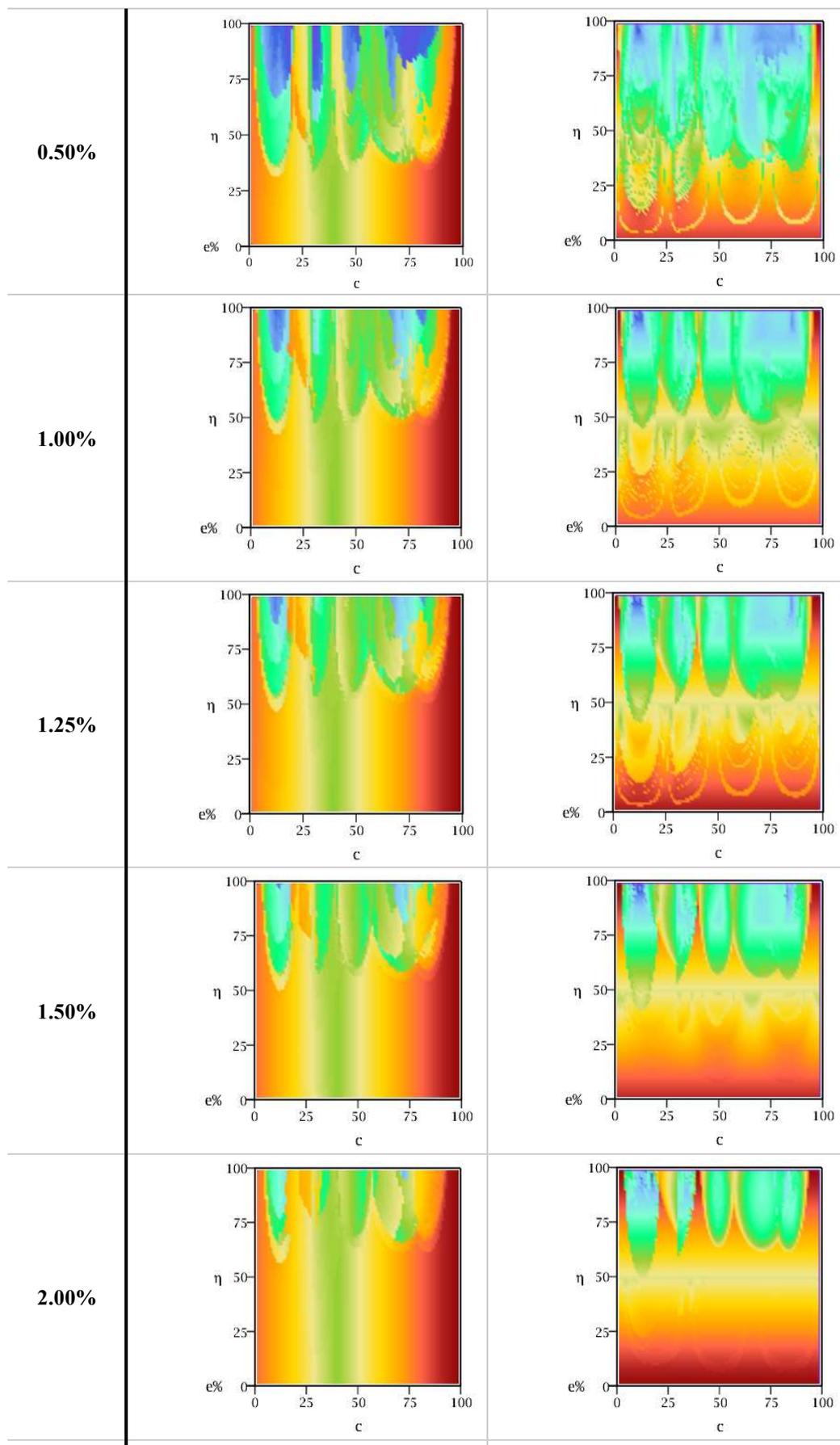
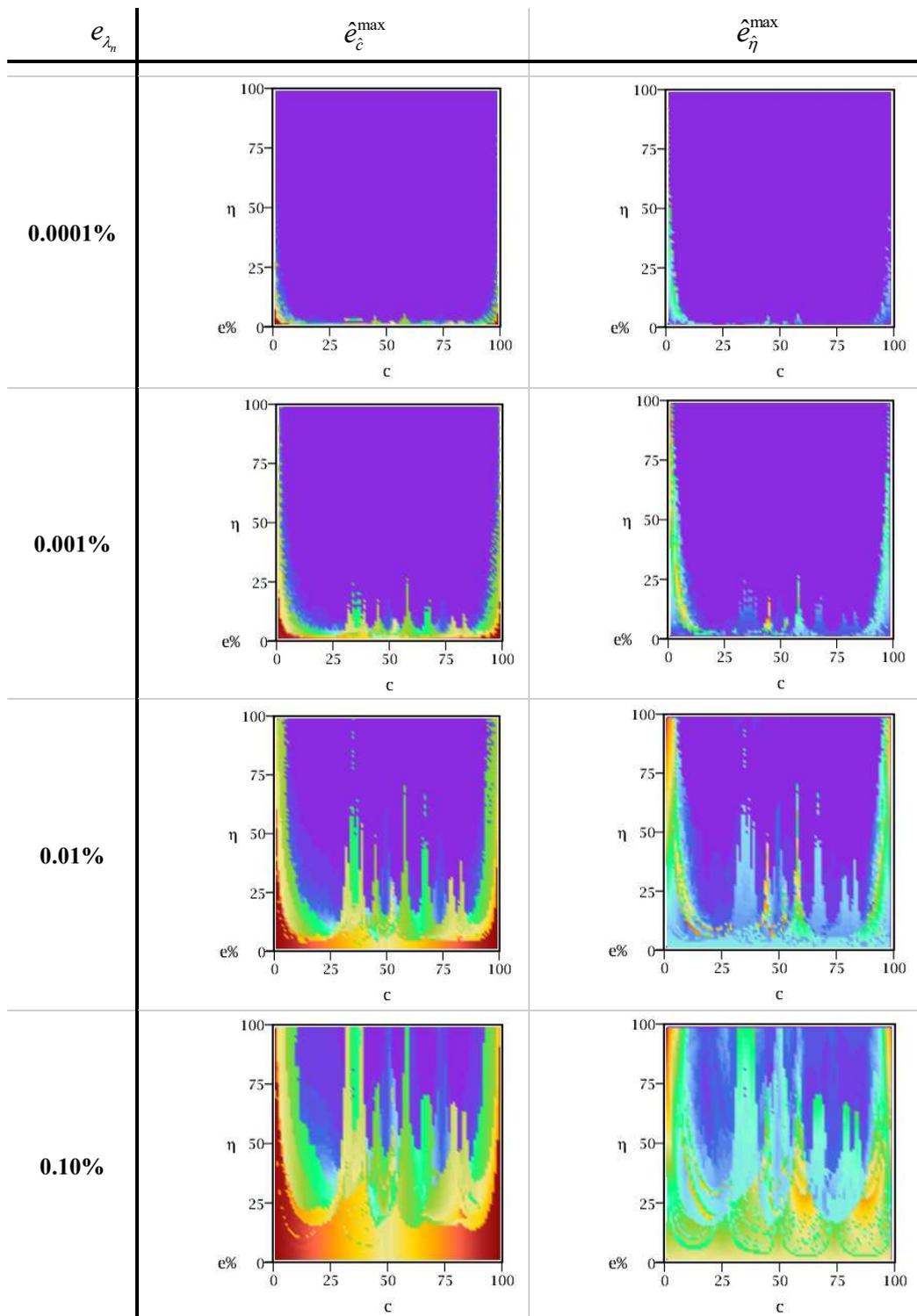


Figura A8.17 – Errores máximos en la determinación de la posición ( $e_c^{\max}$ ) y profundidad ( $e_\eta^{\max}$ ) para la condición A-A con un apoyo simple en  $c = 0.30$ .

- A-A con un apoyo simple en  $c=0.45$



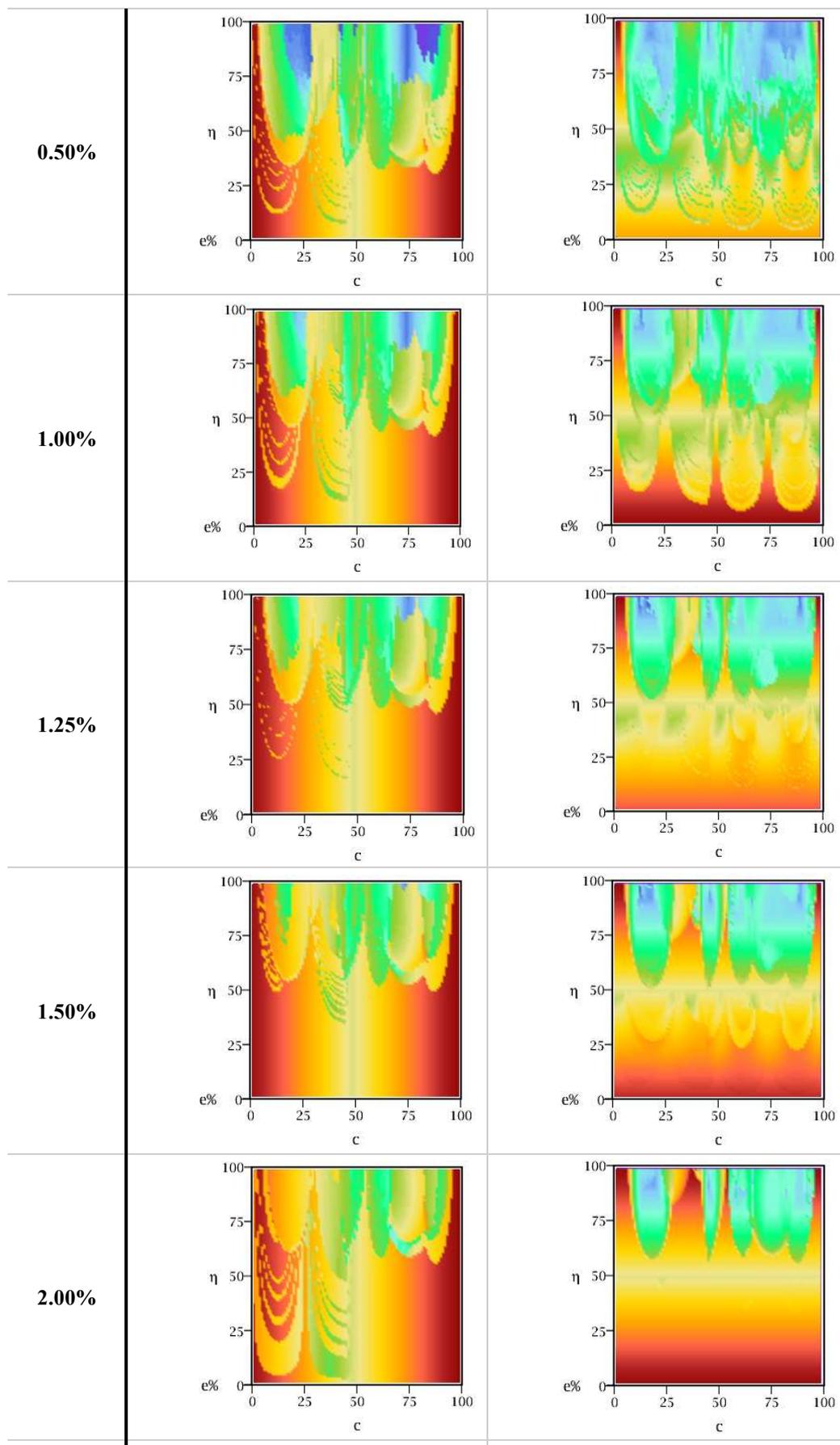
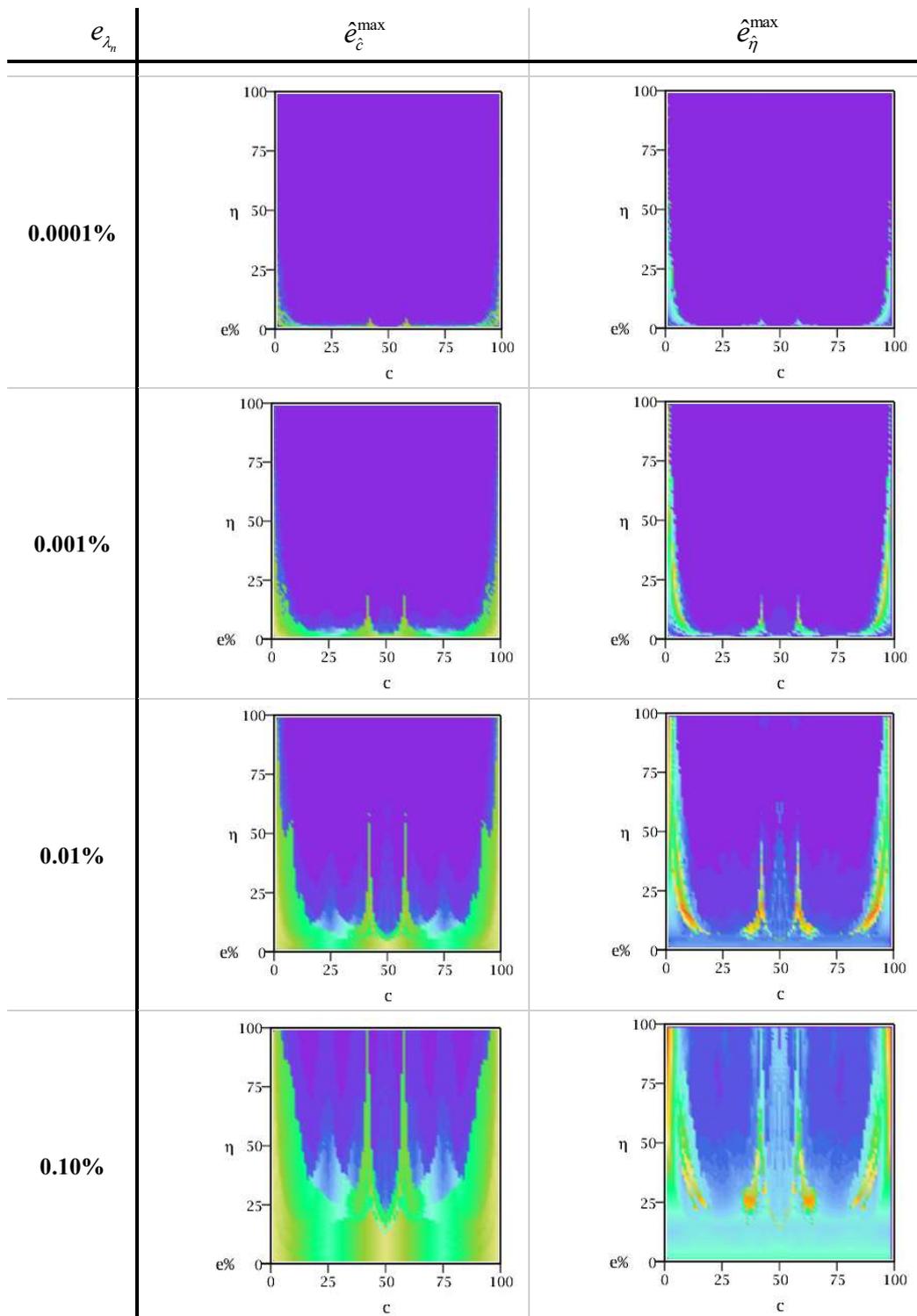


Figura A8.18 – Errores máximos en la determinación de la posición ( $e_c^{\max}$ ) y profundidad ( $e_\eta^{\max}$ ) para la condición A-A con un apoyo simple en  $c = 0.45$ .

- A-A con un apoyo simple en  $c=0.50$



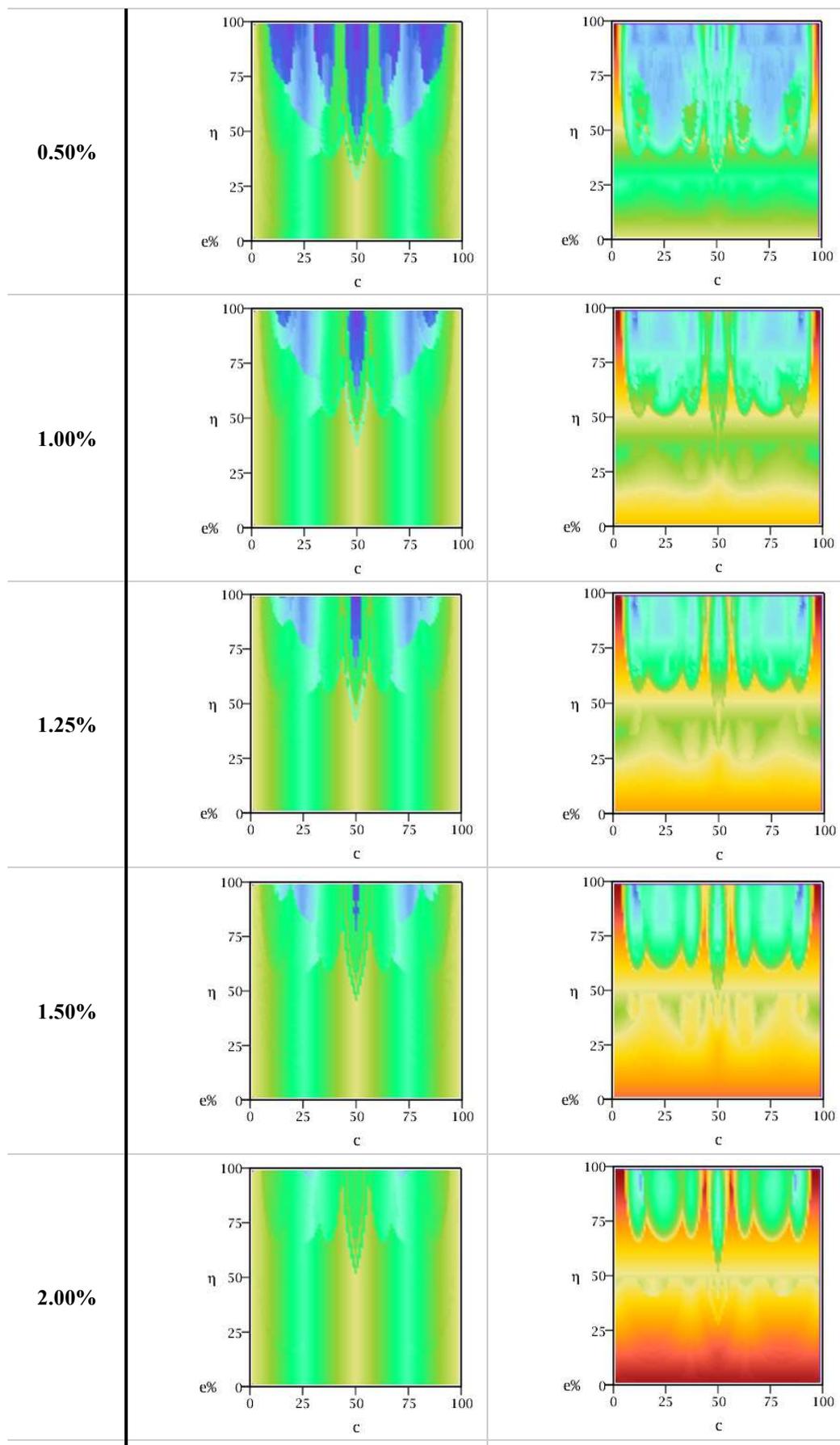
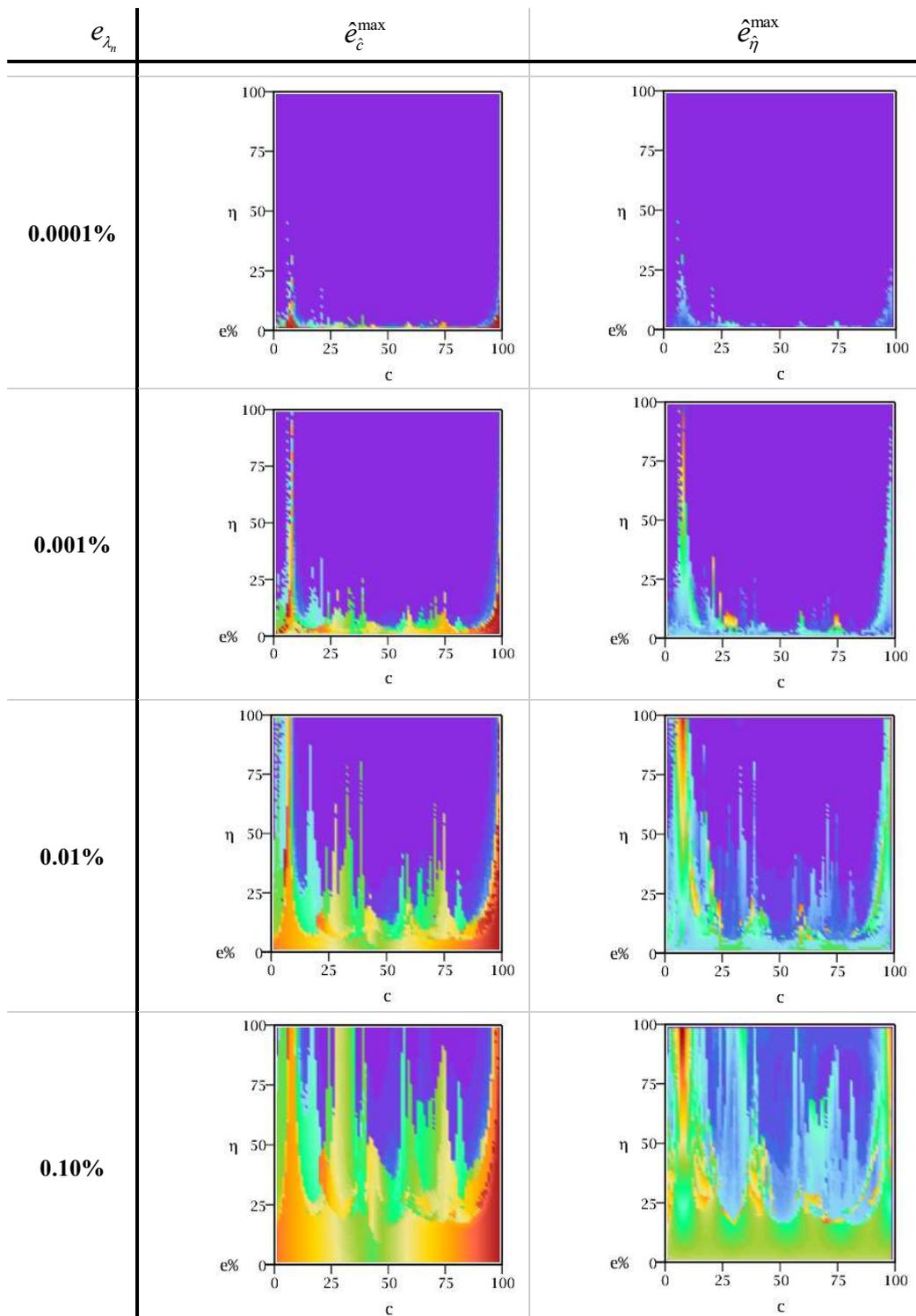


Figura A8.19 – Errores máximos en la determinación de la posición ( $e_c^{\max}$ ) y profundidad ( $e_\eta^{\max}$ ) para la condición A-A con un apoyo simple en  $c = 0.50$ .

- E-A con un apoyo simple en  $c=0.30$



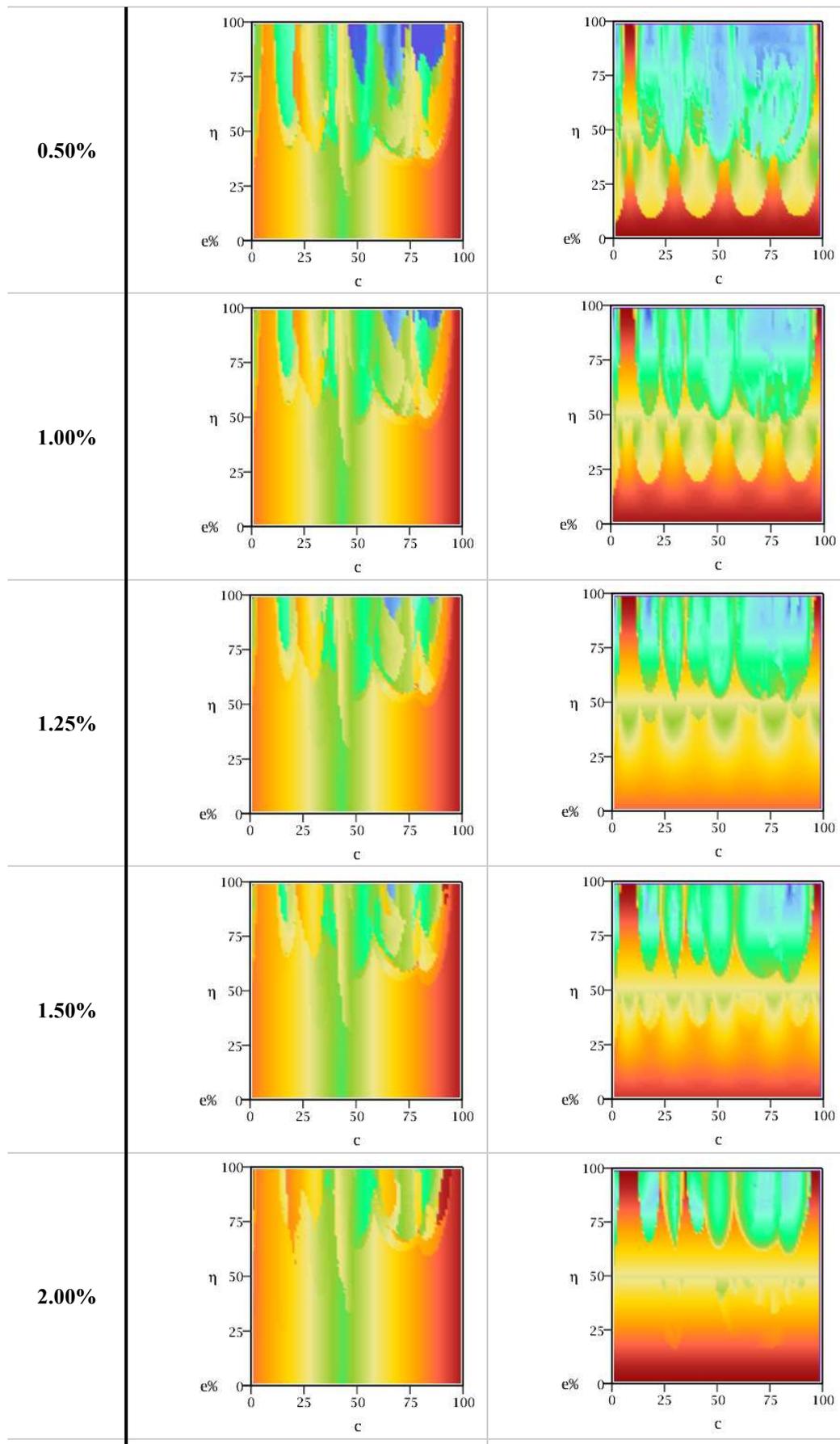
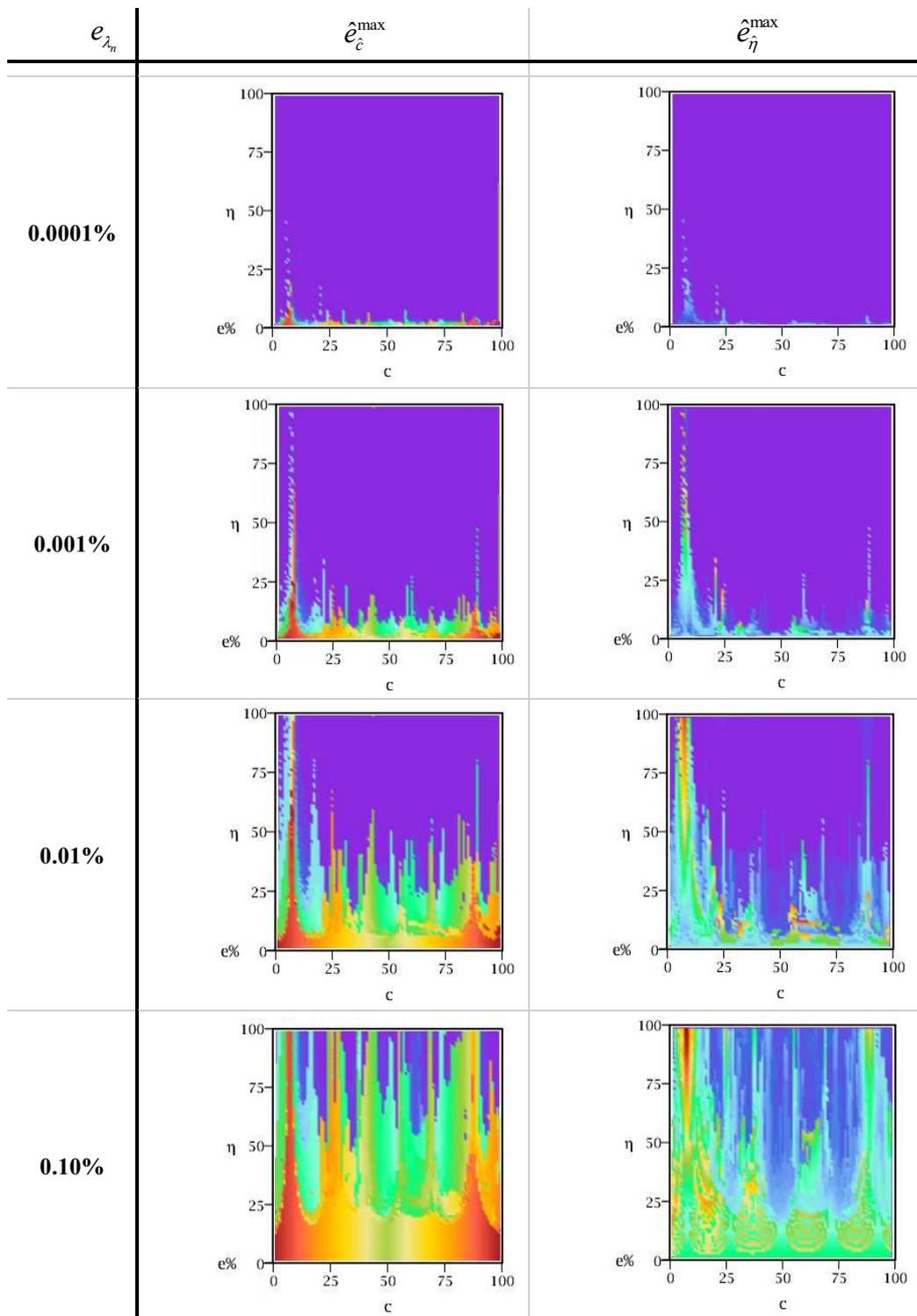


Figura A8.20 – Errores máximos en la determinación de la posición ( $e_c^{\max}$ ) y profundidad ( $e_\eta^{\max}$ ) para la condición E-A con un apoyo simple en  $c = 0.30$ .

- E-E con un apoyo simple en  $c=0.30$



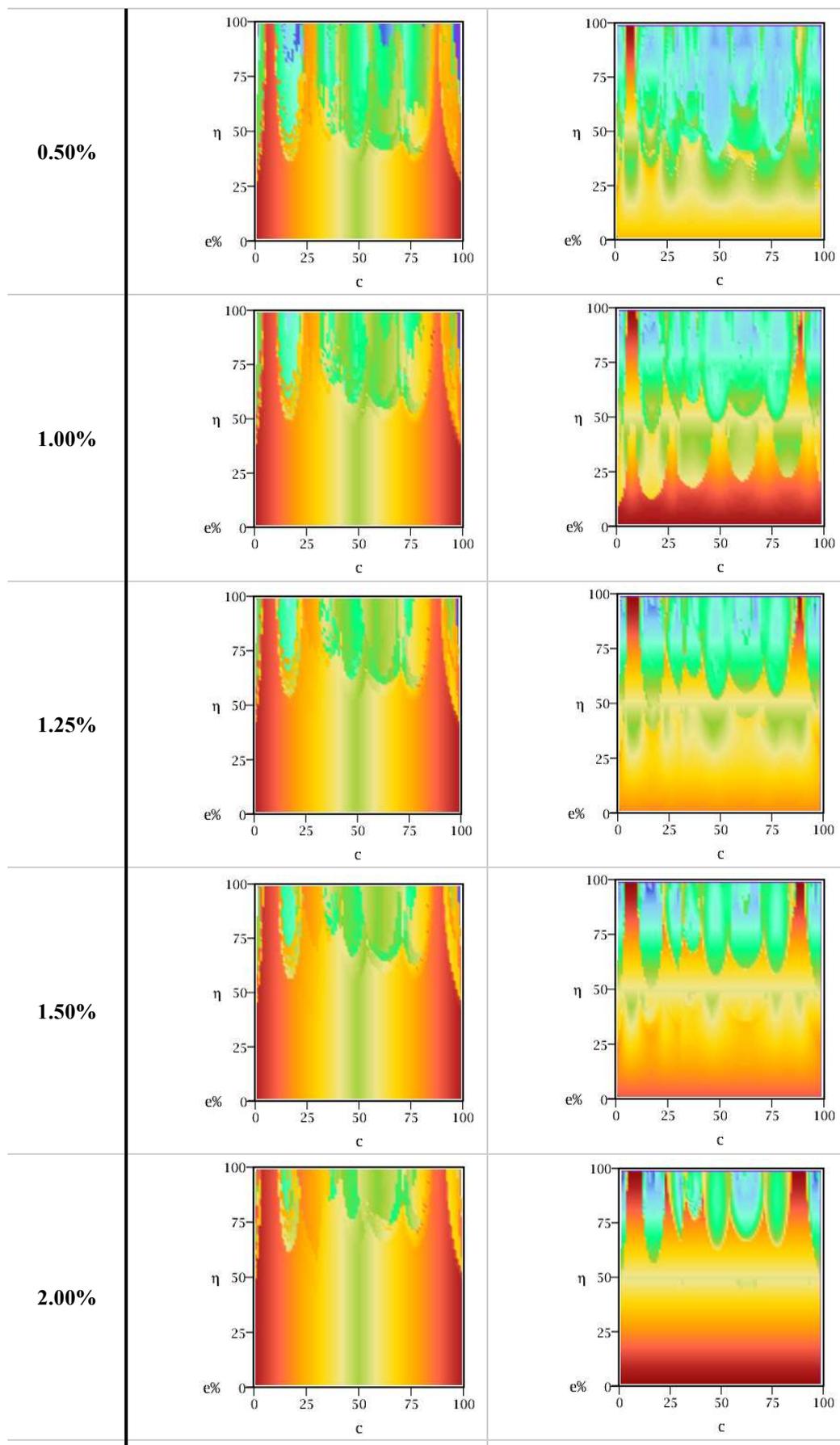
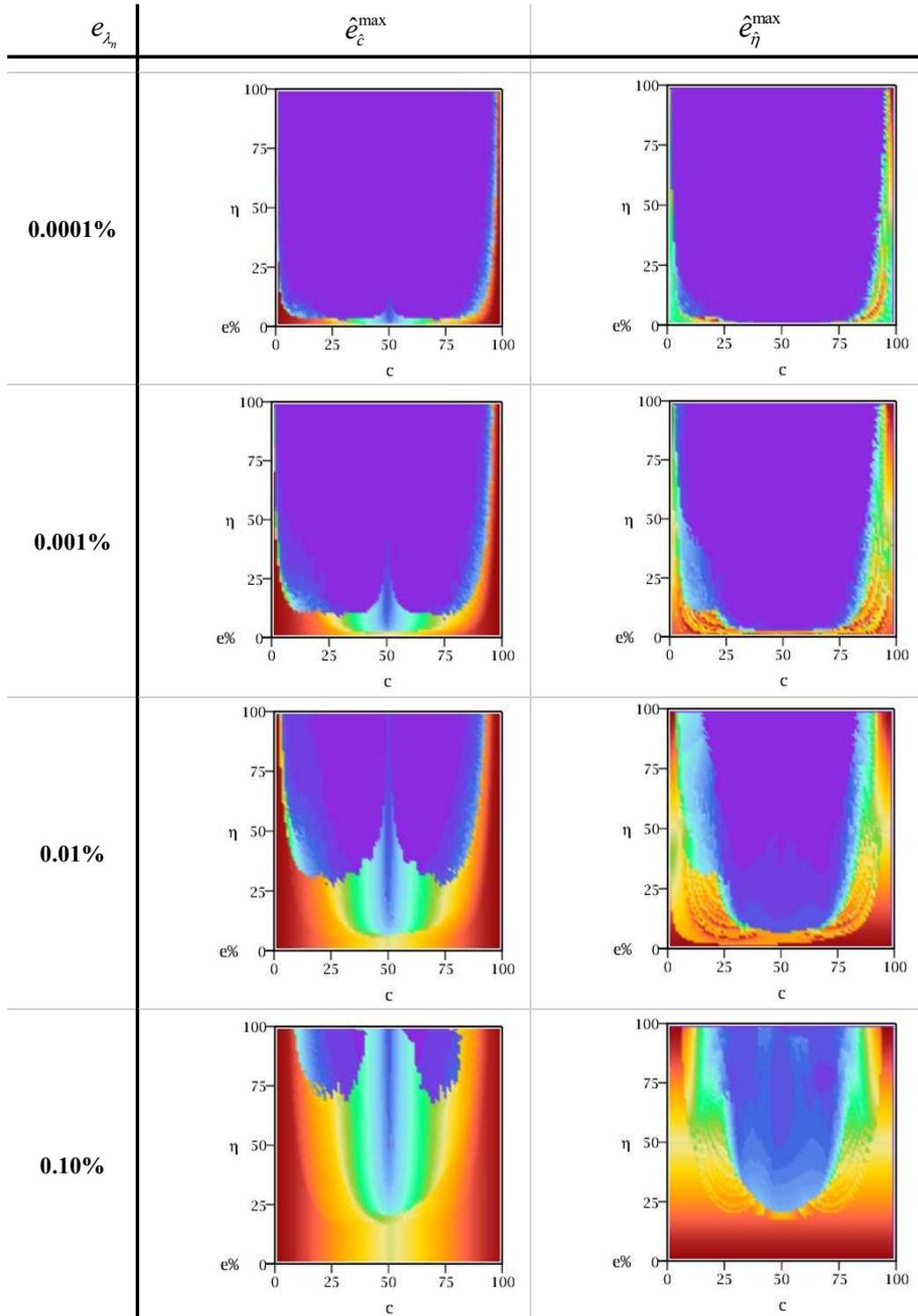


Figura A8.21 – Errores máximos en la determinación de la posición ( $e_c^{\max}$ ) y profundidad ( $e_\eta^{\max}$ ) para la condición E-E con un apoyo simple en  $c = 0.30$ .

**A8.3 Condiciones de vinculación con apoyos elásticos en los extremos**

- L-L => A-L:  $T_1 = 10, R_1 = T_2 = R_2 = 0.$



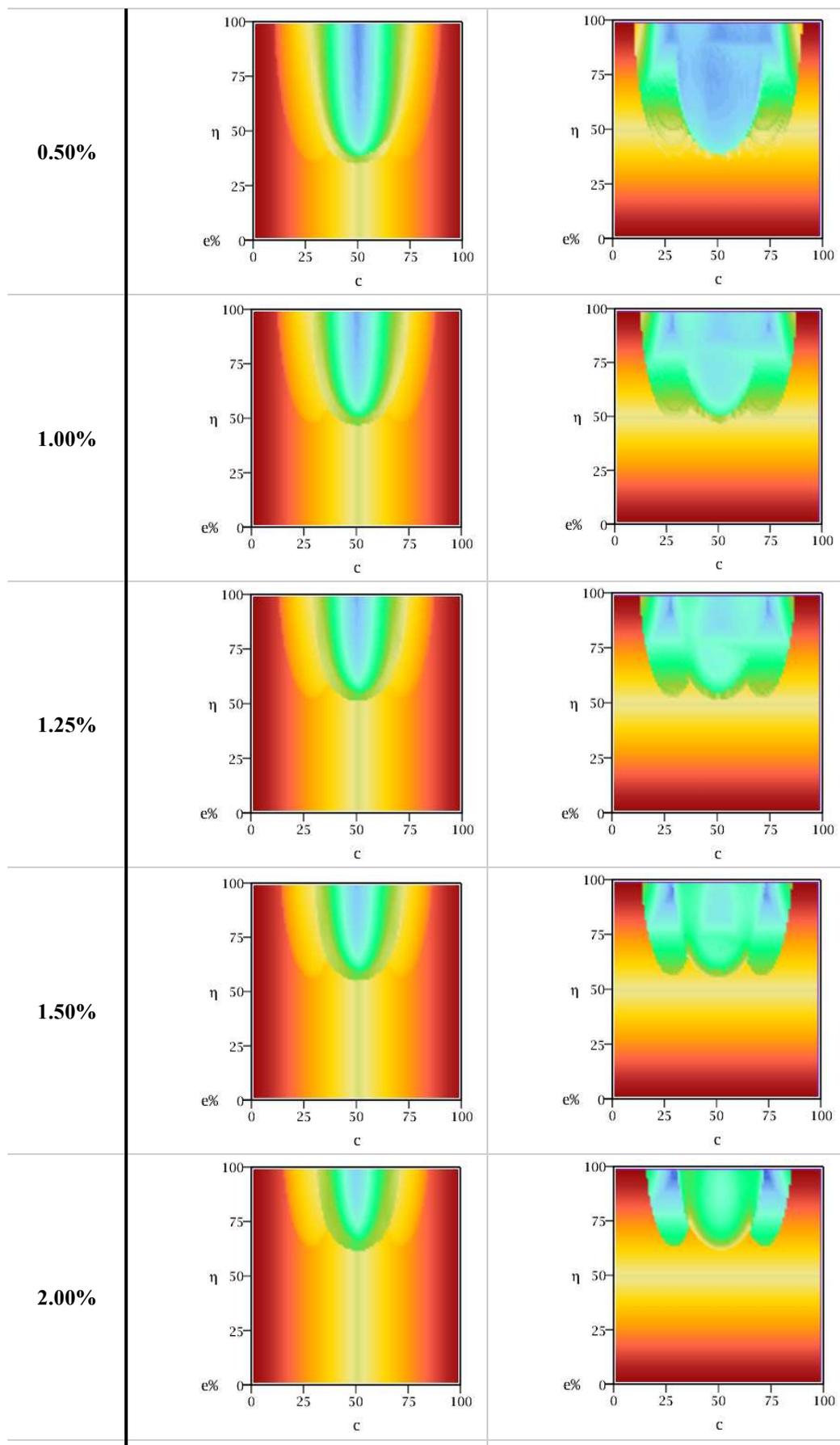
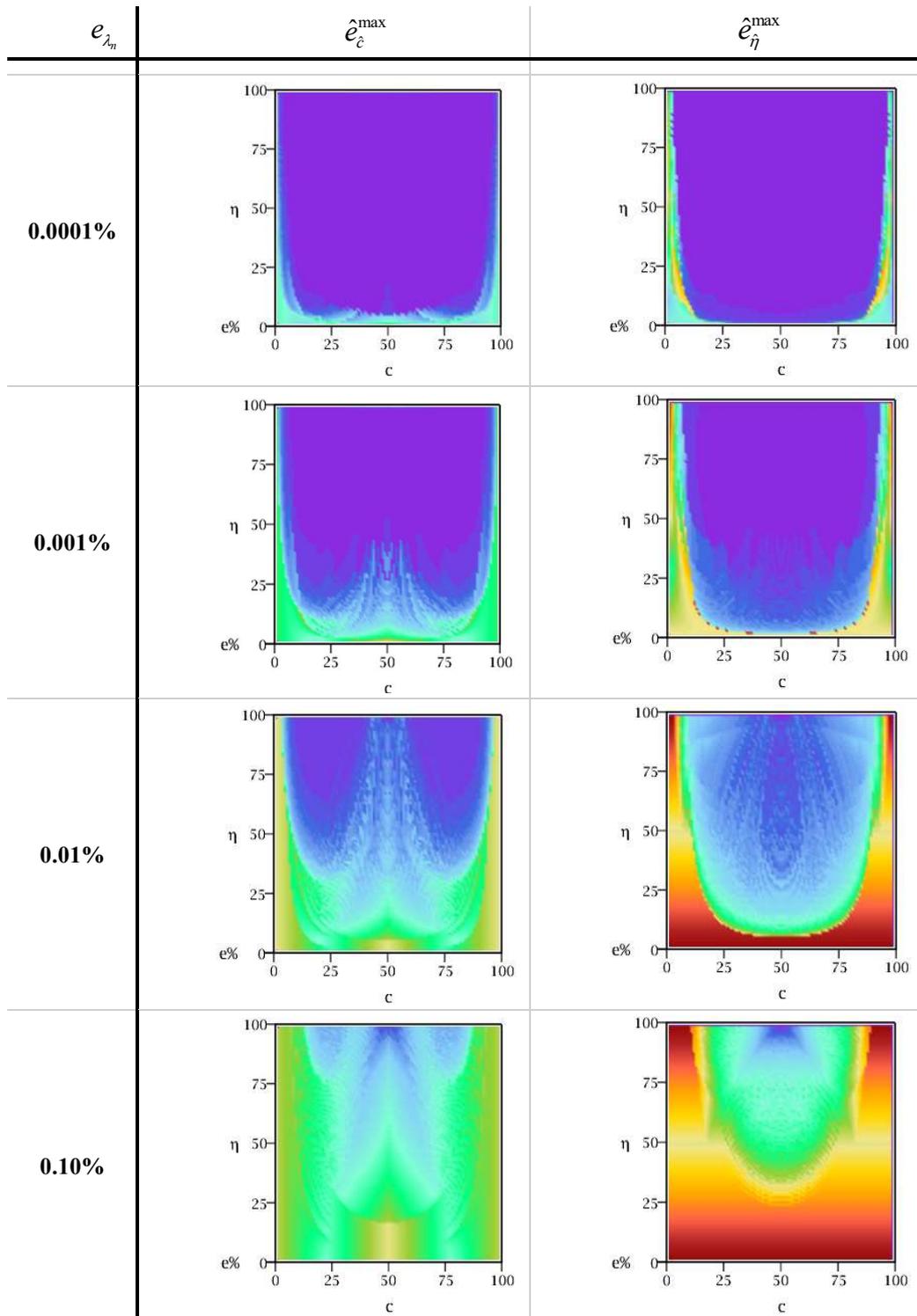


Figura A8.22 – Errores máximos en la determinación de la posición ( $e_c^{\max}$ ) y profundidad ( $e_\eta^{\max}$ ) para la condición  $T_1 = 10$ ,  $R_1 = T_2 = R_2 = 0$ .

- L-L => A-A:  $T_1 = T_2 = 10$ ,  $R_1 = R_2 = 0$ .



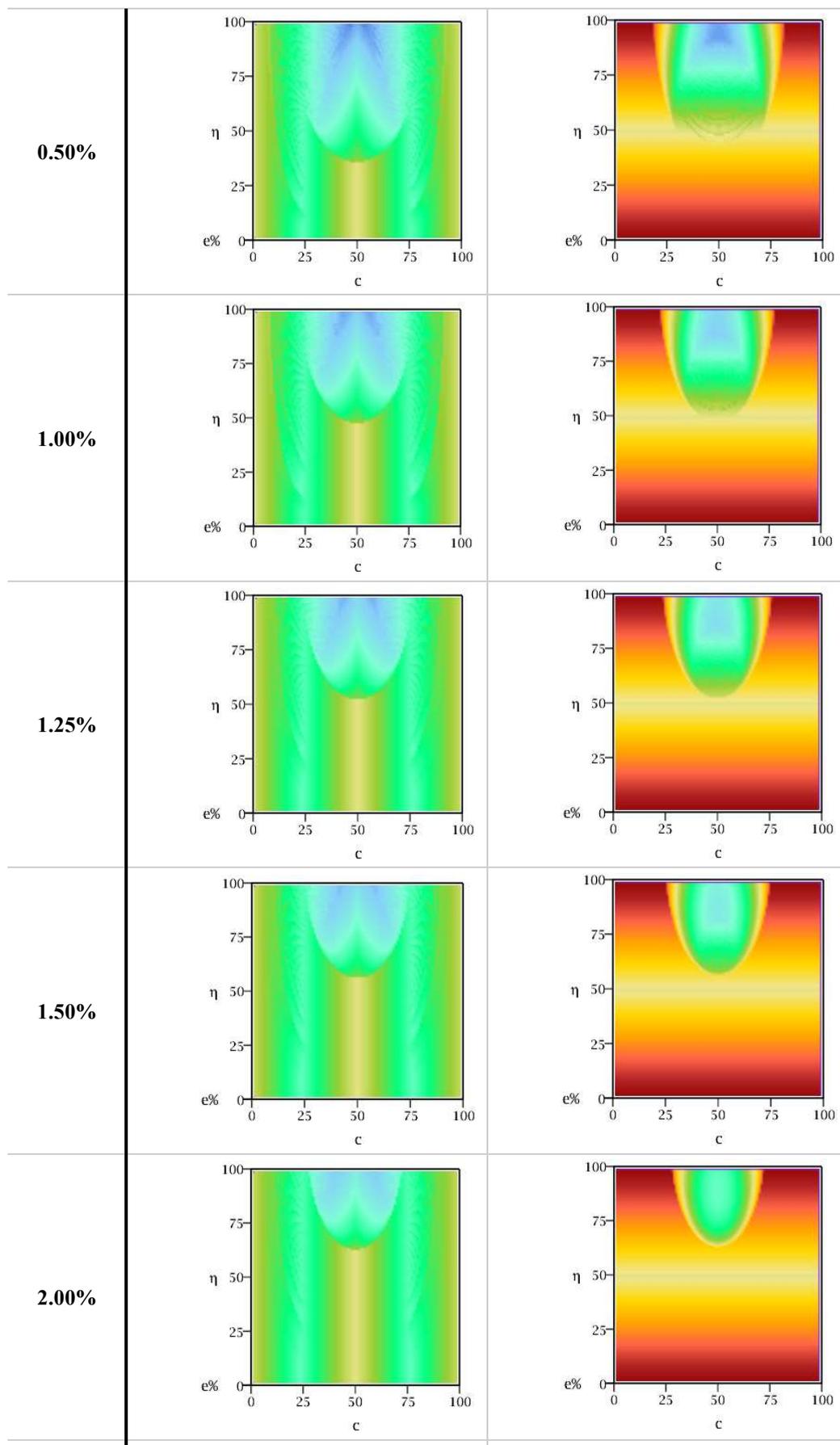
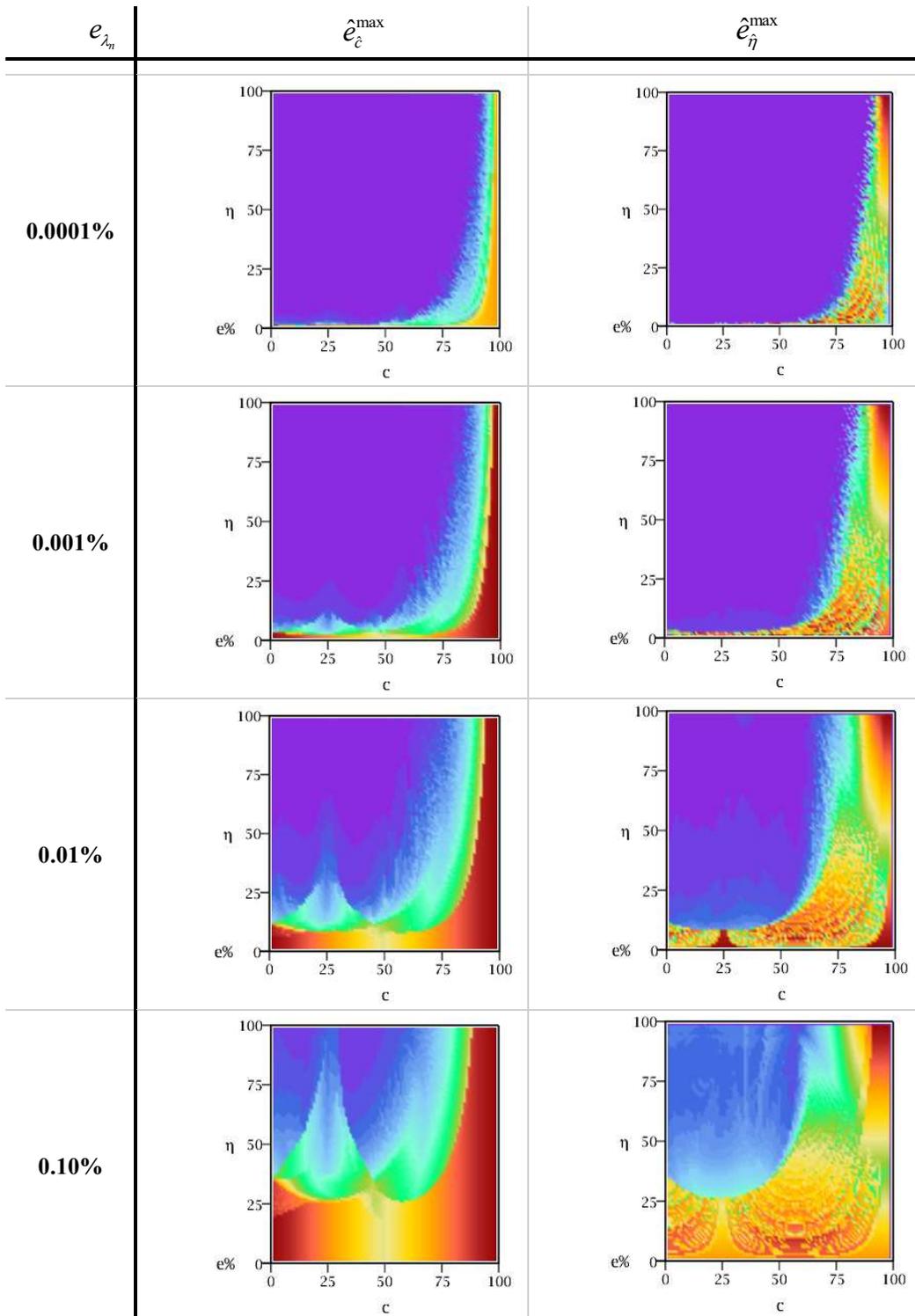


Figura A8.23 – Errores máximos en la determinación de la posición ( $e_c^{\max}$ ) y profundidad ( $e_\eta^{\max}$ ) para la condición  $T_1 = T_2 = 10$ ,  $R_1 = R_2 = 0$ .

- L-L => E-L:  $T_1 = R_1 = 10, T_2 = R_2 = 0.$



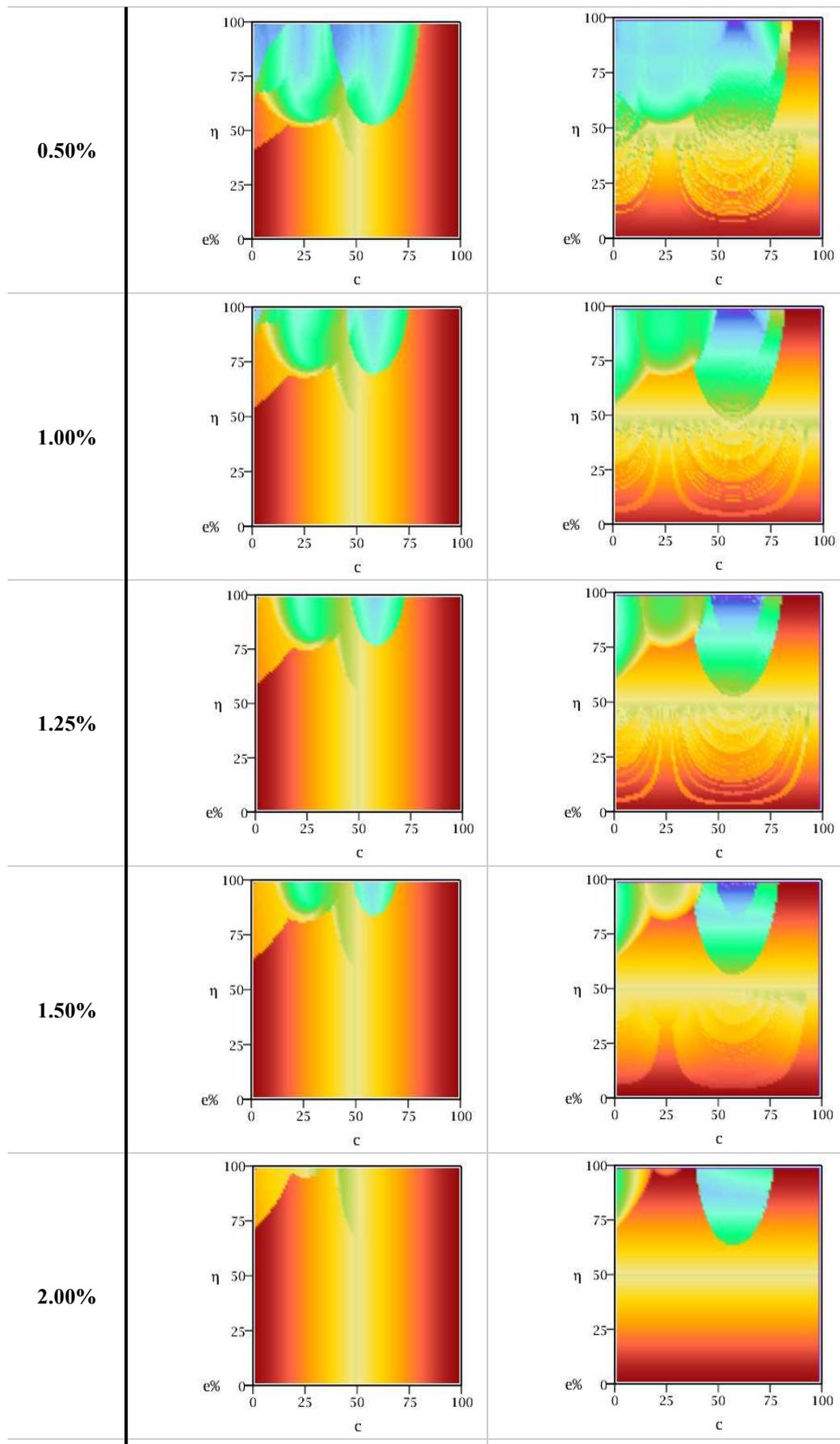
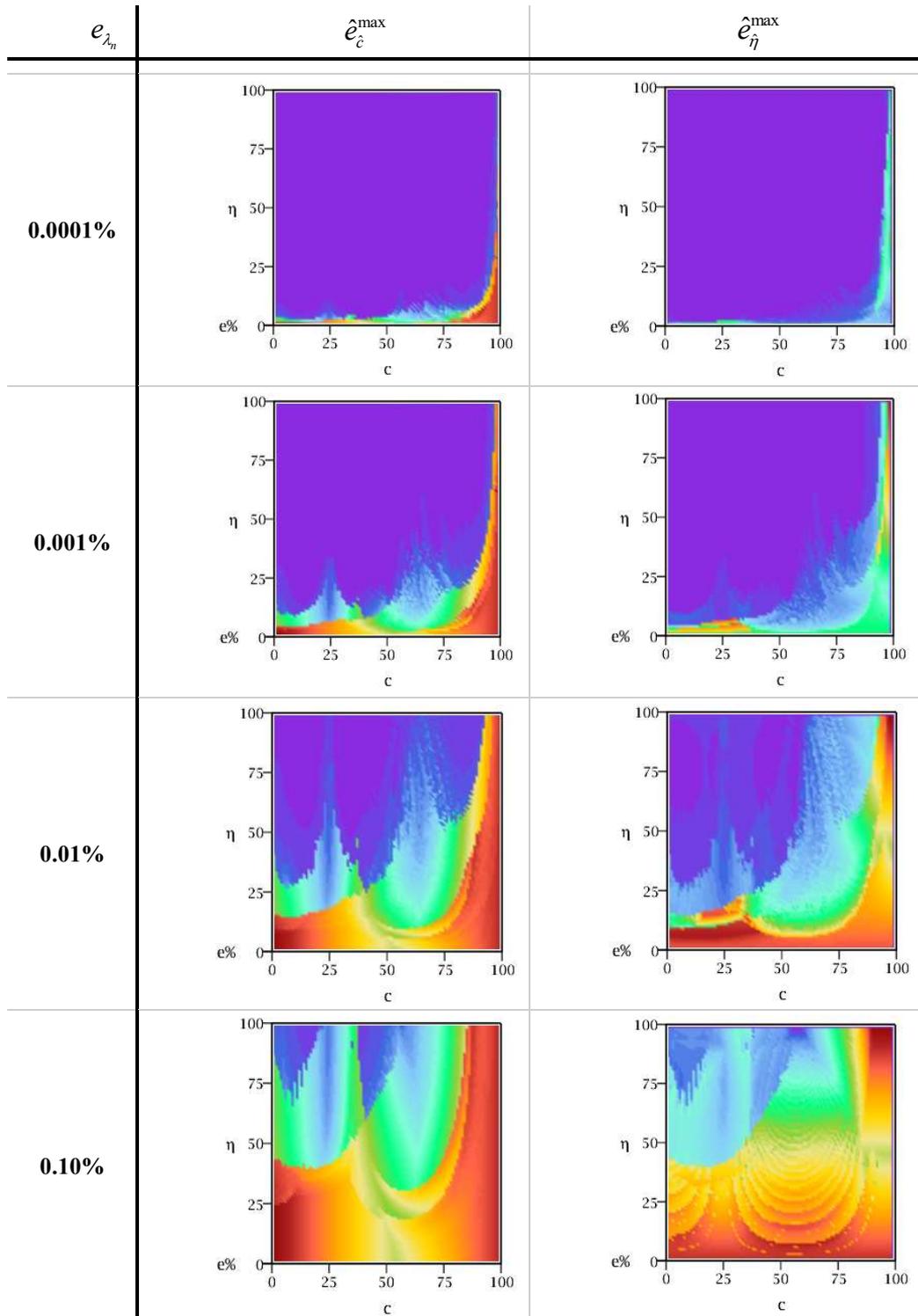


Figura A8.24 – Errores máximos en la determinación de la posición ( $e_c^{\max}$ ) y profundidad ( $e_\eta^{\max}$ ) para la condición  $T_1 = R_1 = 10$ ,  $T_2 = R_2 = 0$ .

- E-L => E-A:  $T_1 = R_1 = T_2 = 10, R_2 = 0$ .



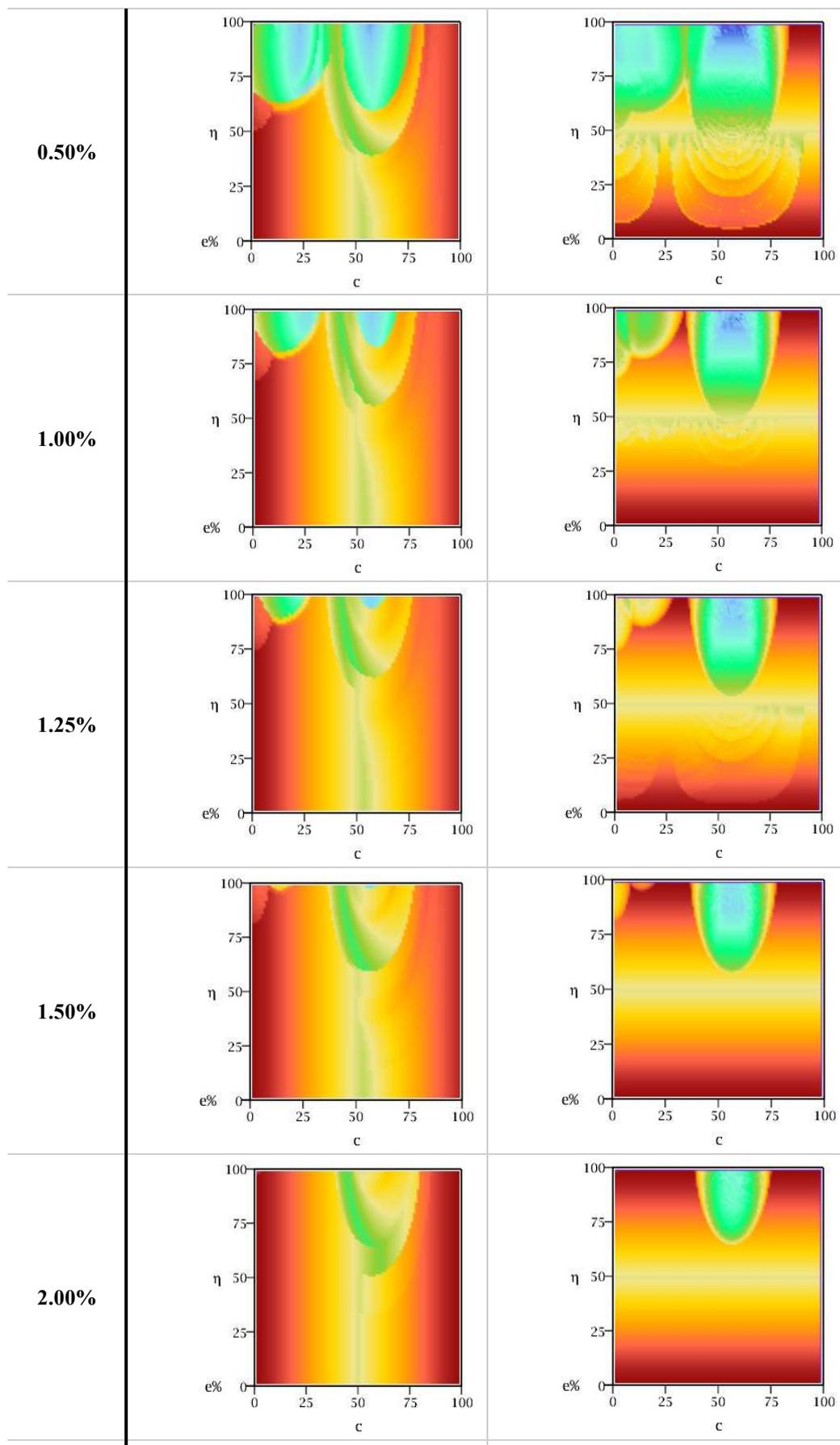
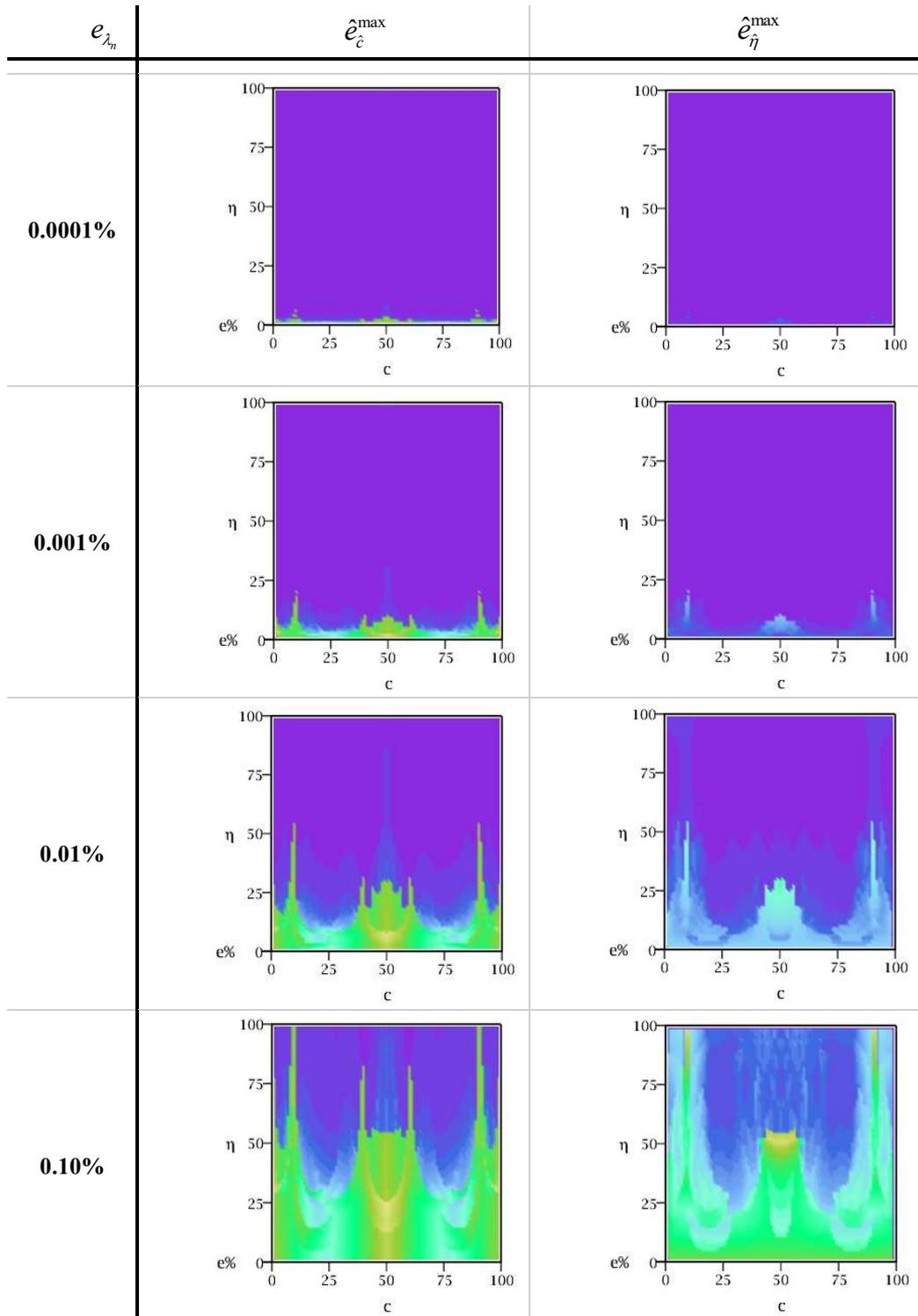


Figura A8.25 – Errores máximos en la determinación de la posición ( $e_c^{\max}$ ) y profundidad ( $e_\eta^{\max}$ ) para la condición  $T_1 = R_1 = T_2 = 10$ ,  $R_2 = 0$ .

- A-A => E-E:  $T_1 = T_2 = \infty$ ,  $R_1 = R_2 = 0$ .



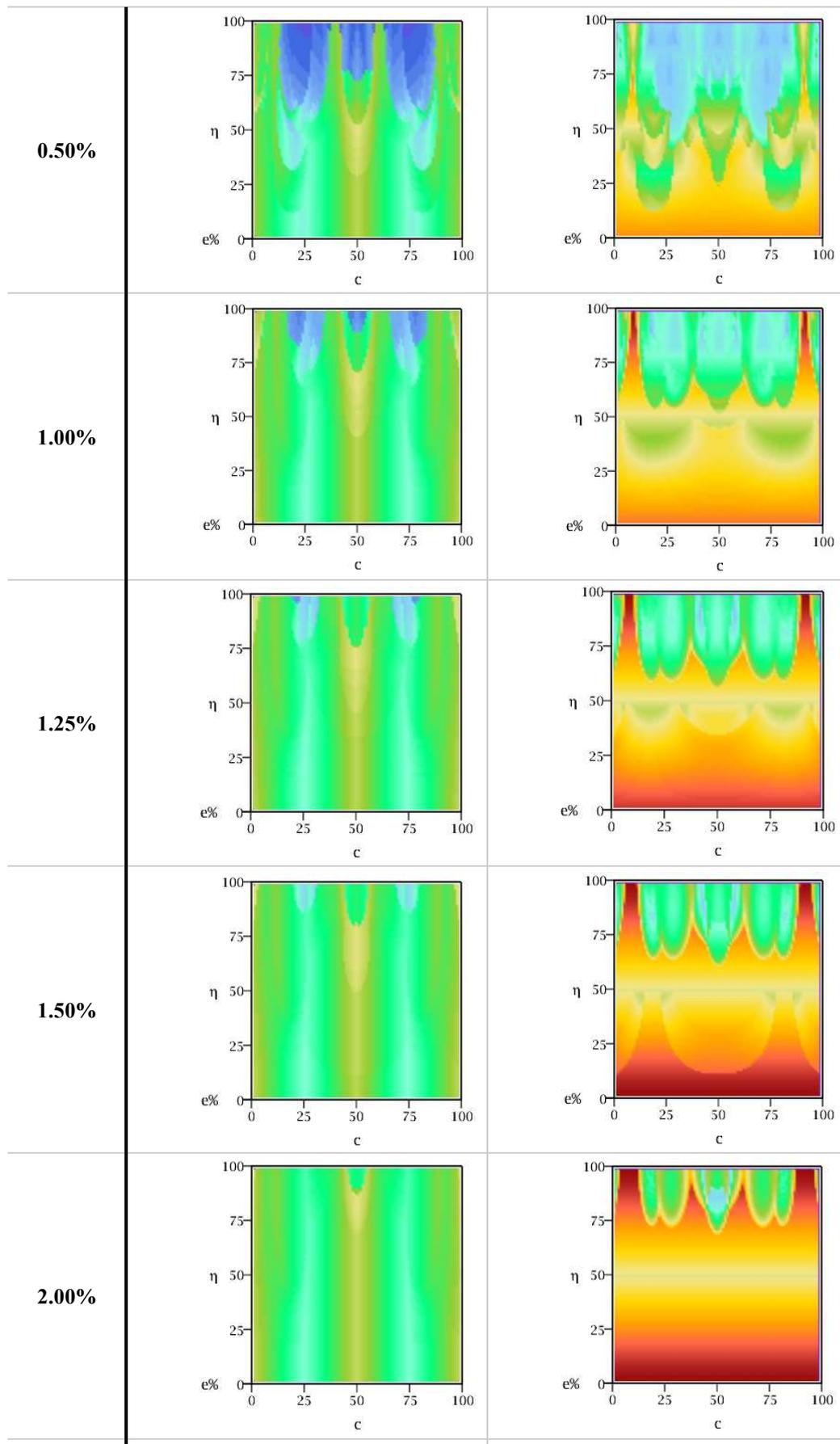
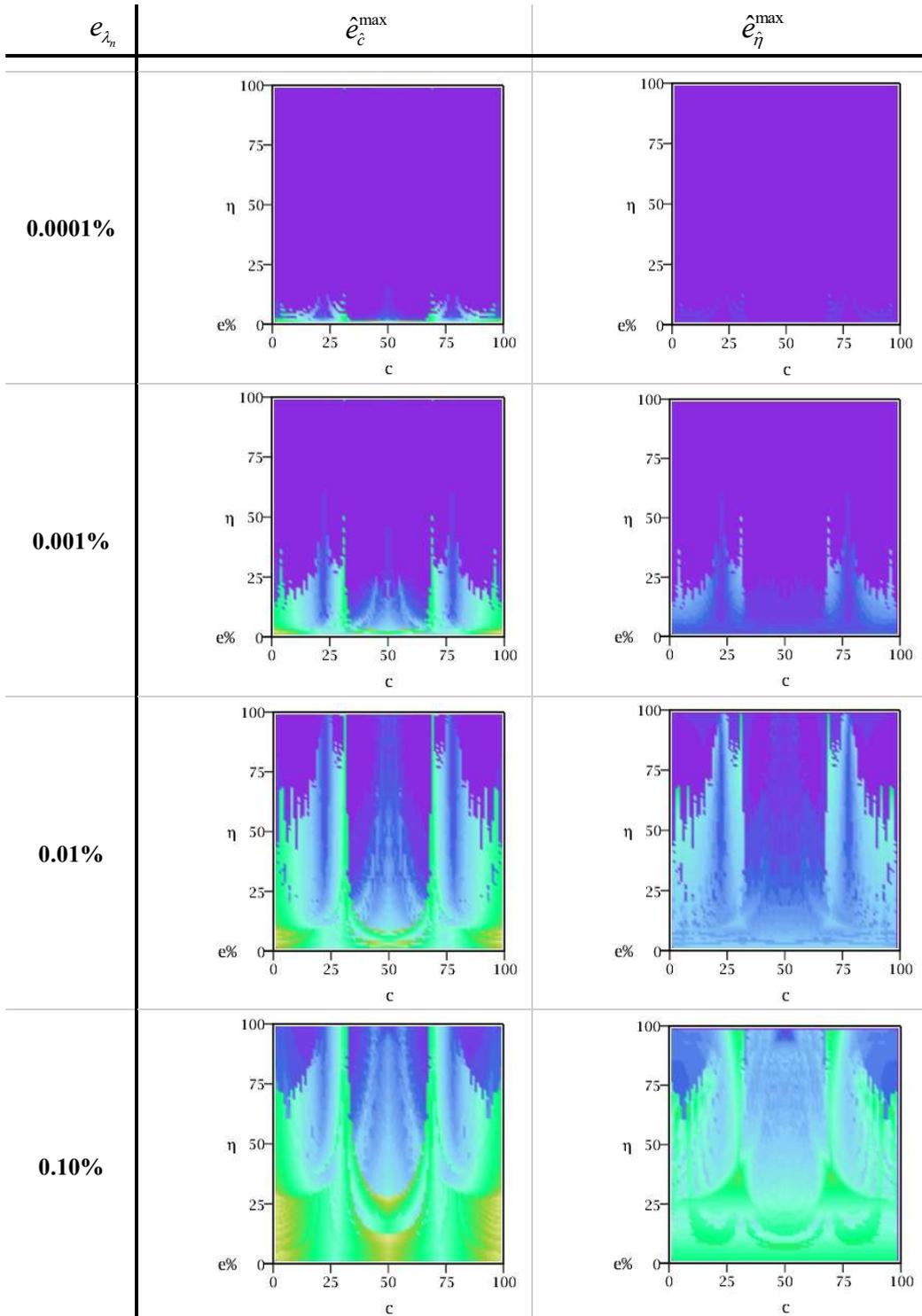


Figura A8.26 – Errores máximos en la determinación de la posición ( $e_c^{\max}$ ) y profundidad ( $e_f^{\max}$ ) para la condición  $T_1 = T_2 = \infty$ ,  $R_1 = R_2 = 0$ .

- A-A => E-E:  $T_1 = T_2 = R_1 = R_2 = 10$ .



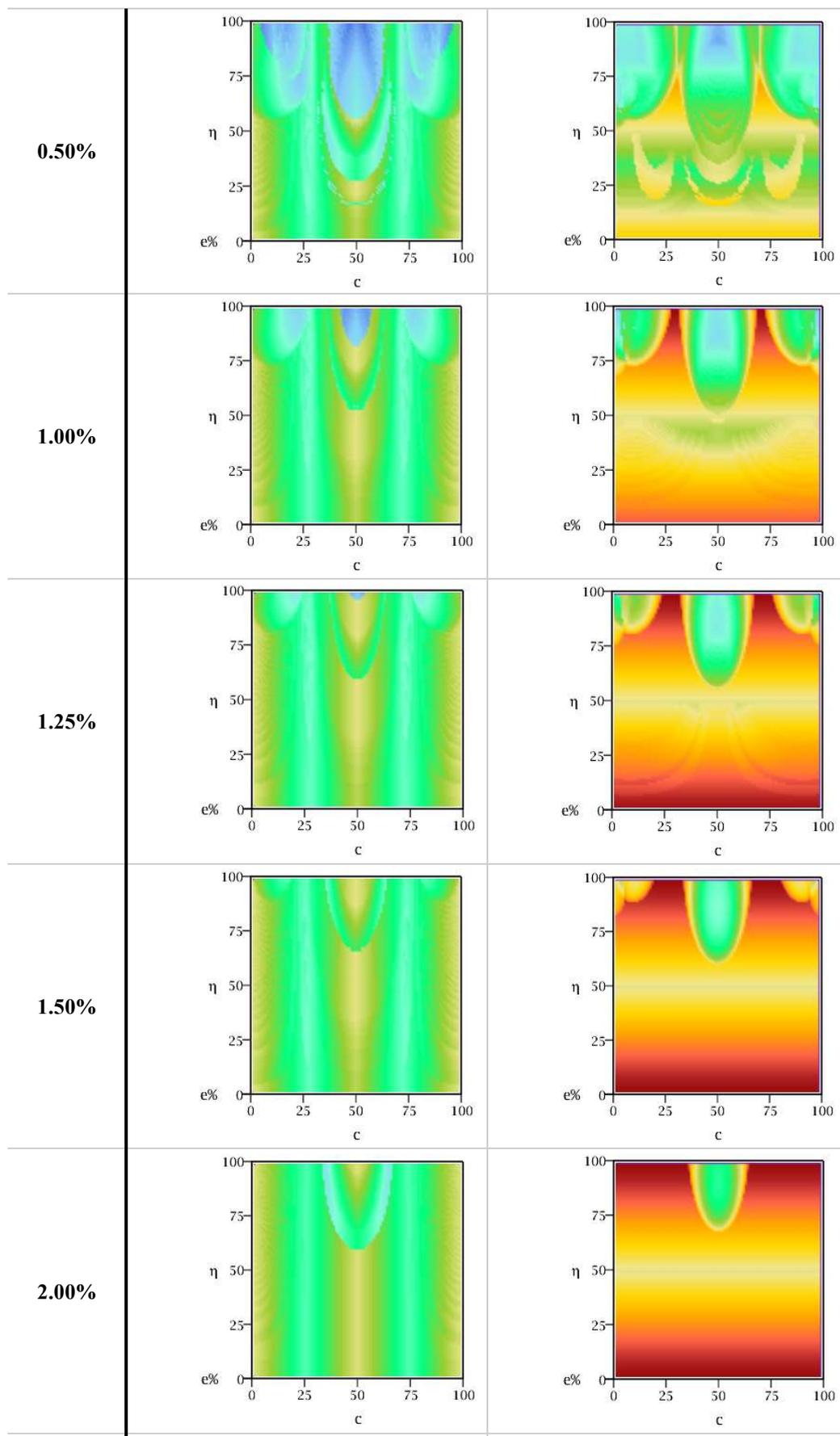


Figura A8.27 – Errores máximos en la determinación de la posición ( $e_c^{\max}$ ) y profundidad ( $e_\eta^{\max}$ ) para la condición  $T_1 = T_2 = R_1 = R_2 = 10$ .

# APÉNDICE 9

## Resultados de la contrastación universal de la hipótesis de las áreas de incertidumbre

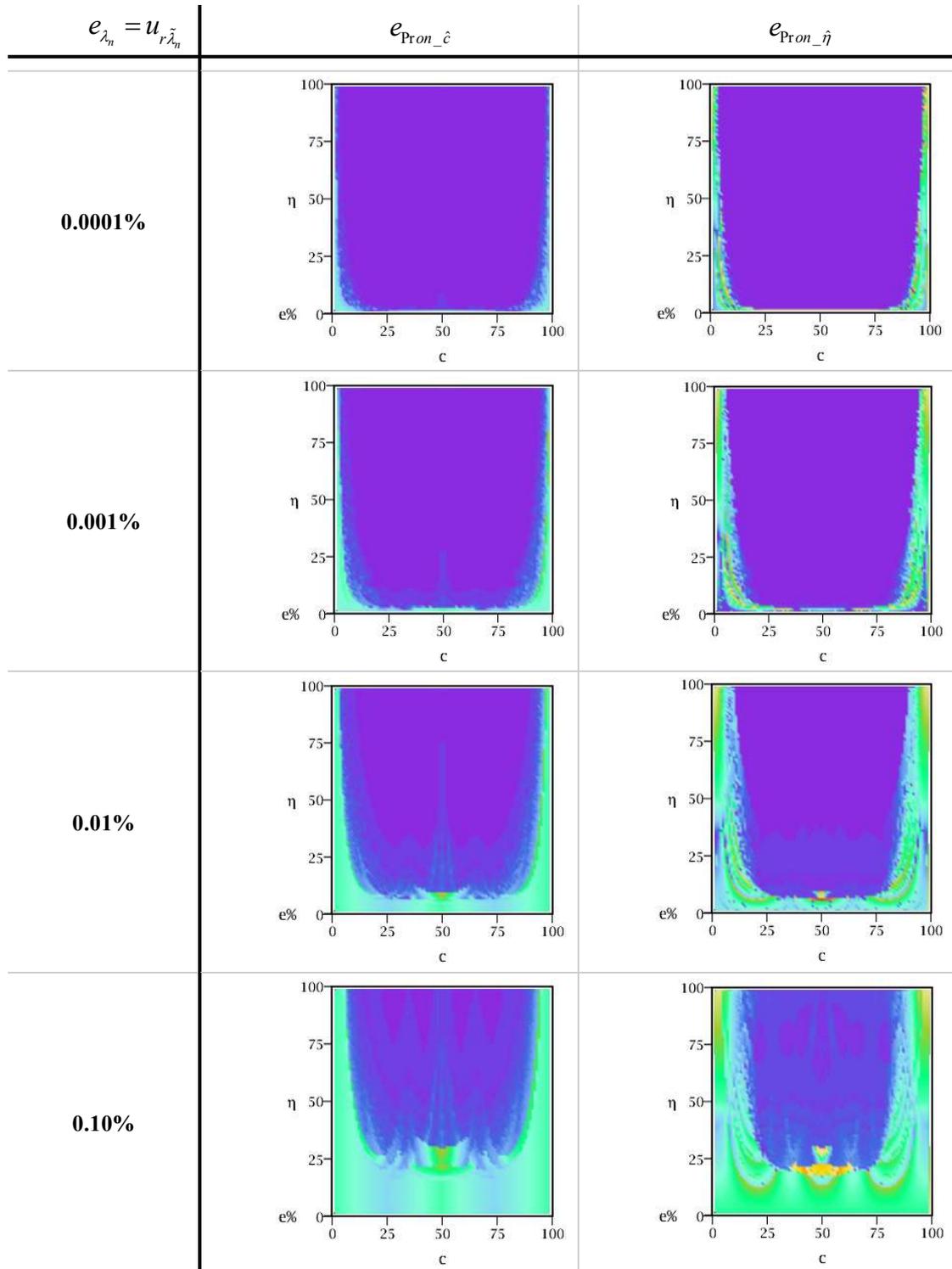
En la Figura A9.1 a A9.6 se presentan los resultados de la contrastación universal de la hipótesis de las áreas de incertidumbre. Los mismos se corresponden a la metodología descrita en el Capítulo 6 Inciso 5.

Con el fin de limitar el contenido, solo las condiciones de vinculación clásicas han sido consideradas.

Las escalas de colores son las mismas tanto para los errores pronosticas y obtenidos como para la diferencia entre ellos.

**A9.1 Condiciones de vinculación clásicas en los extremos**

- L-L



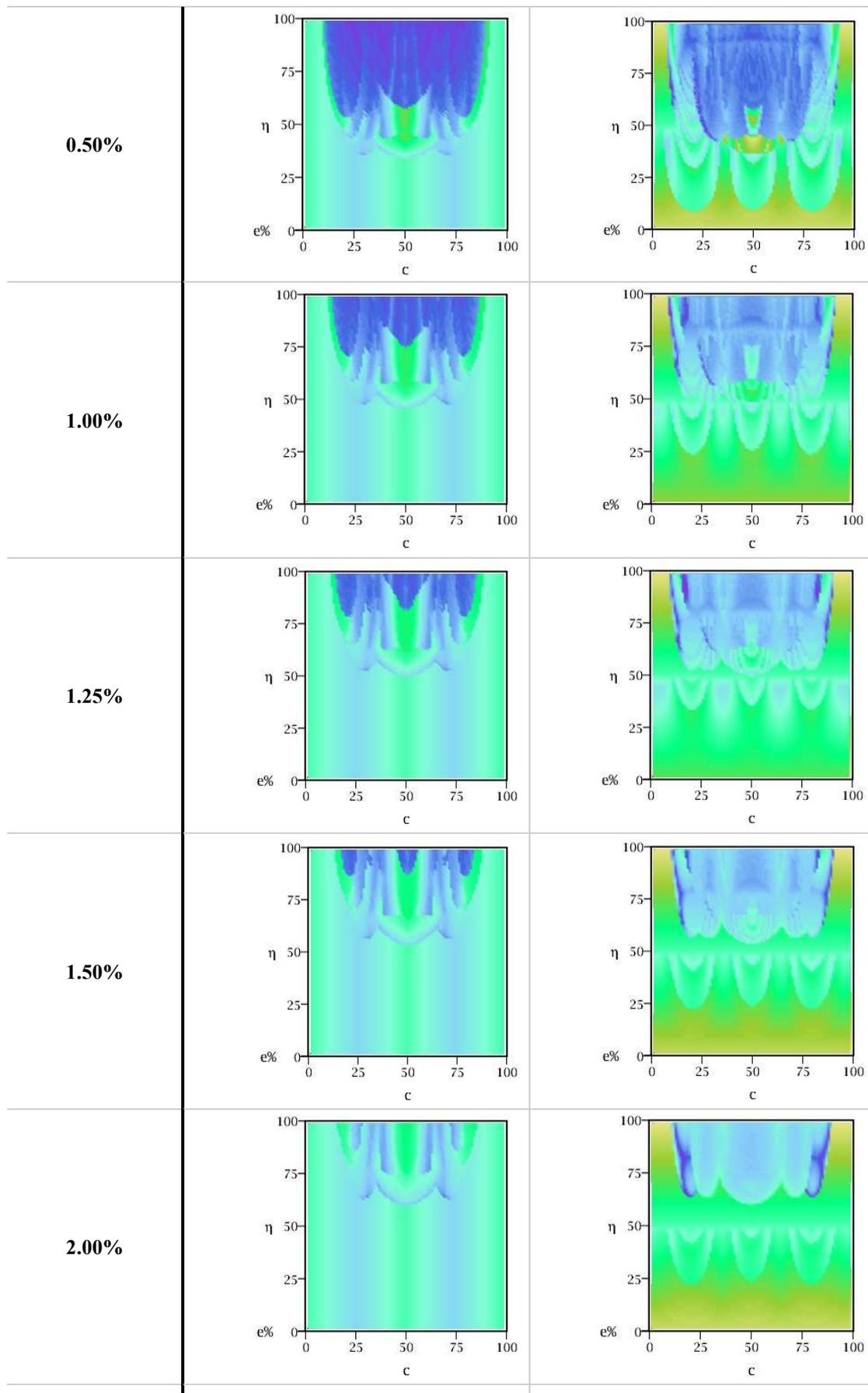
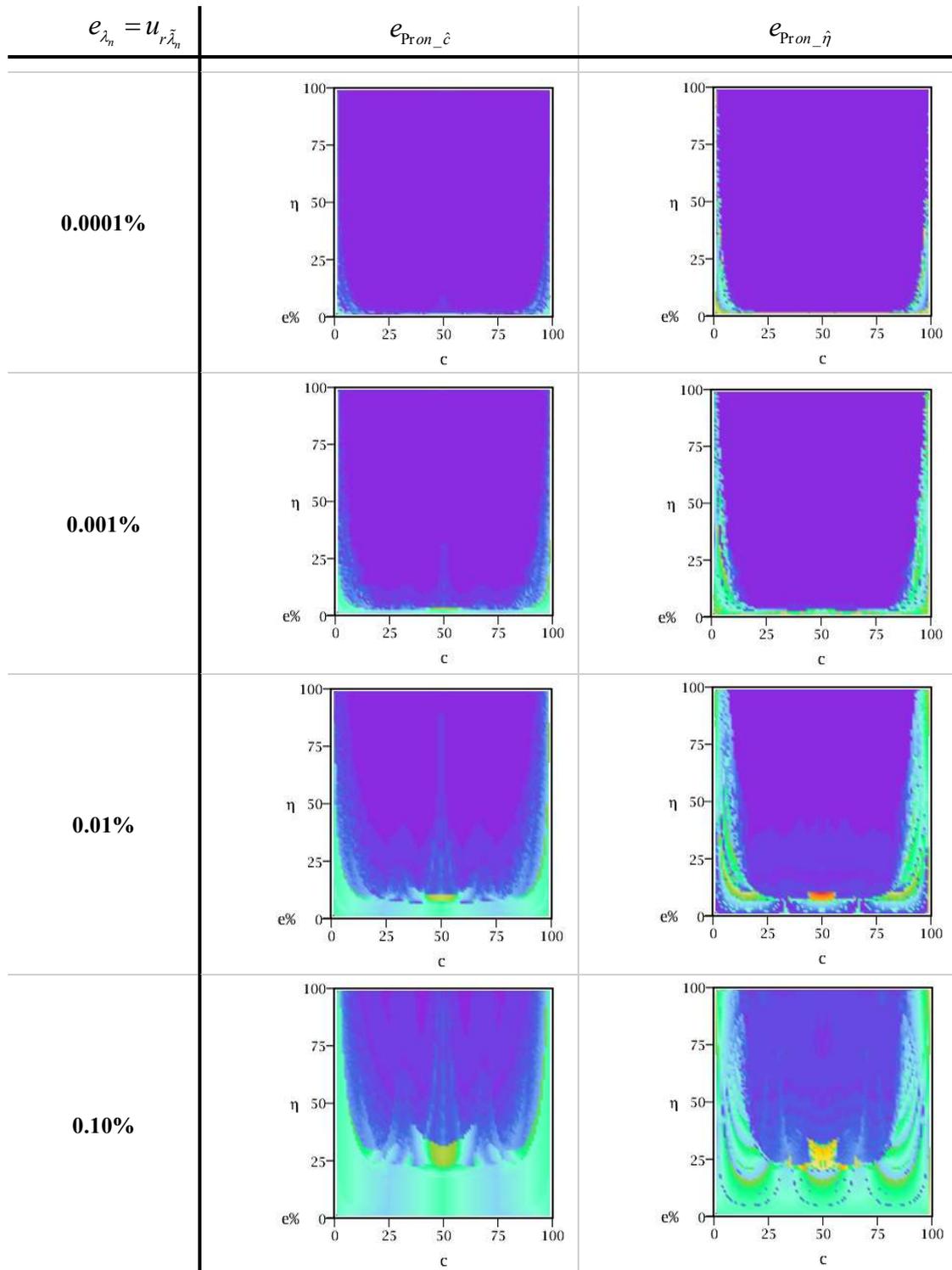


Figura A9.1 – Error en el pronóstico de la hipótesis de las áreas de las incertidumbres para la condición L-L

- A-A



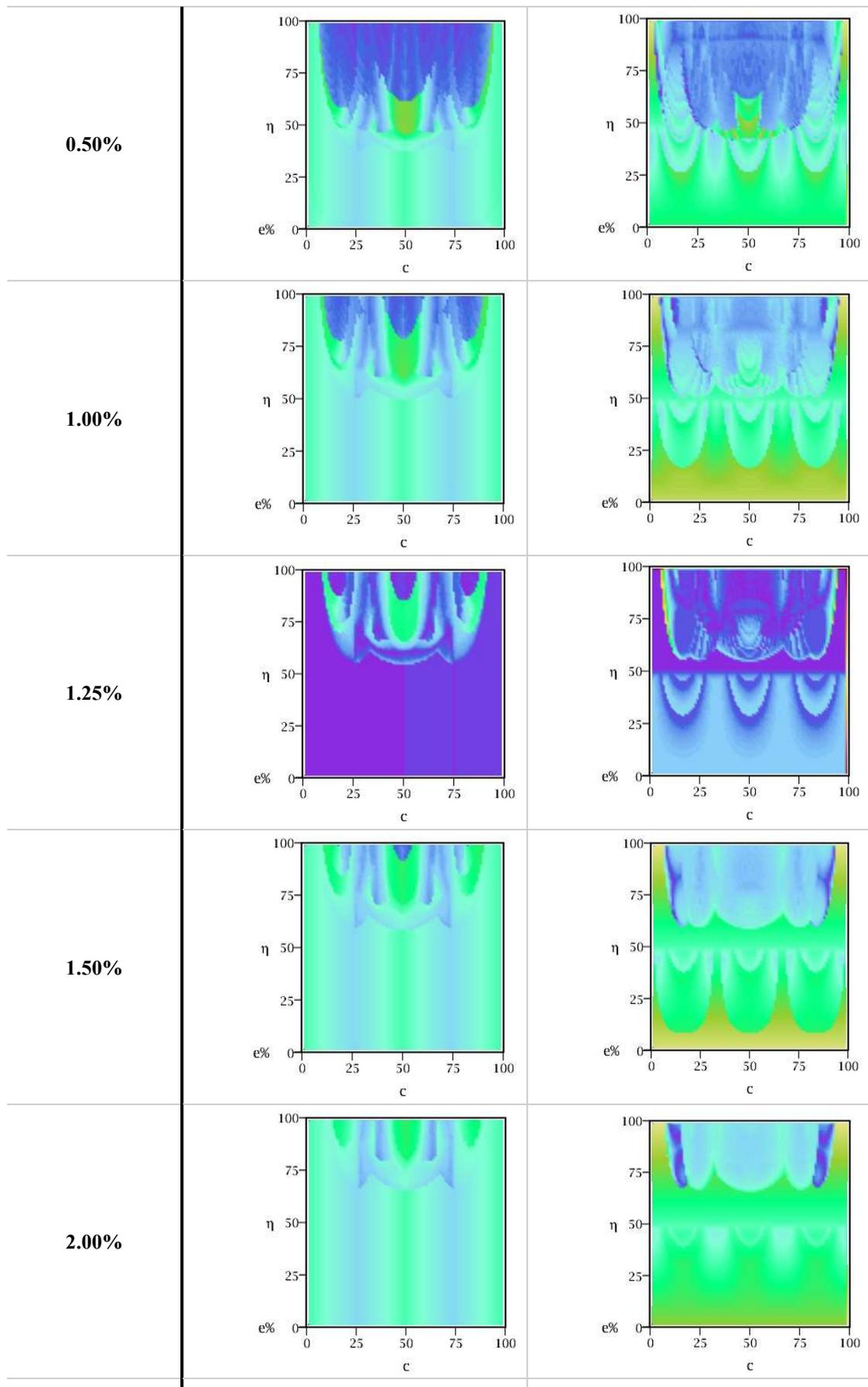
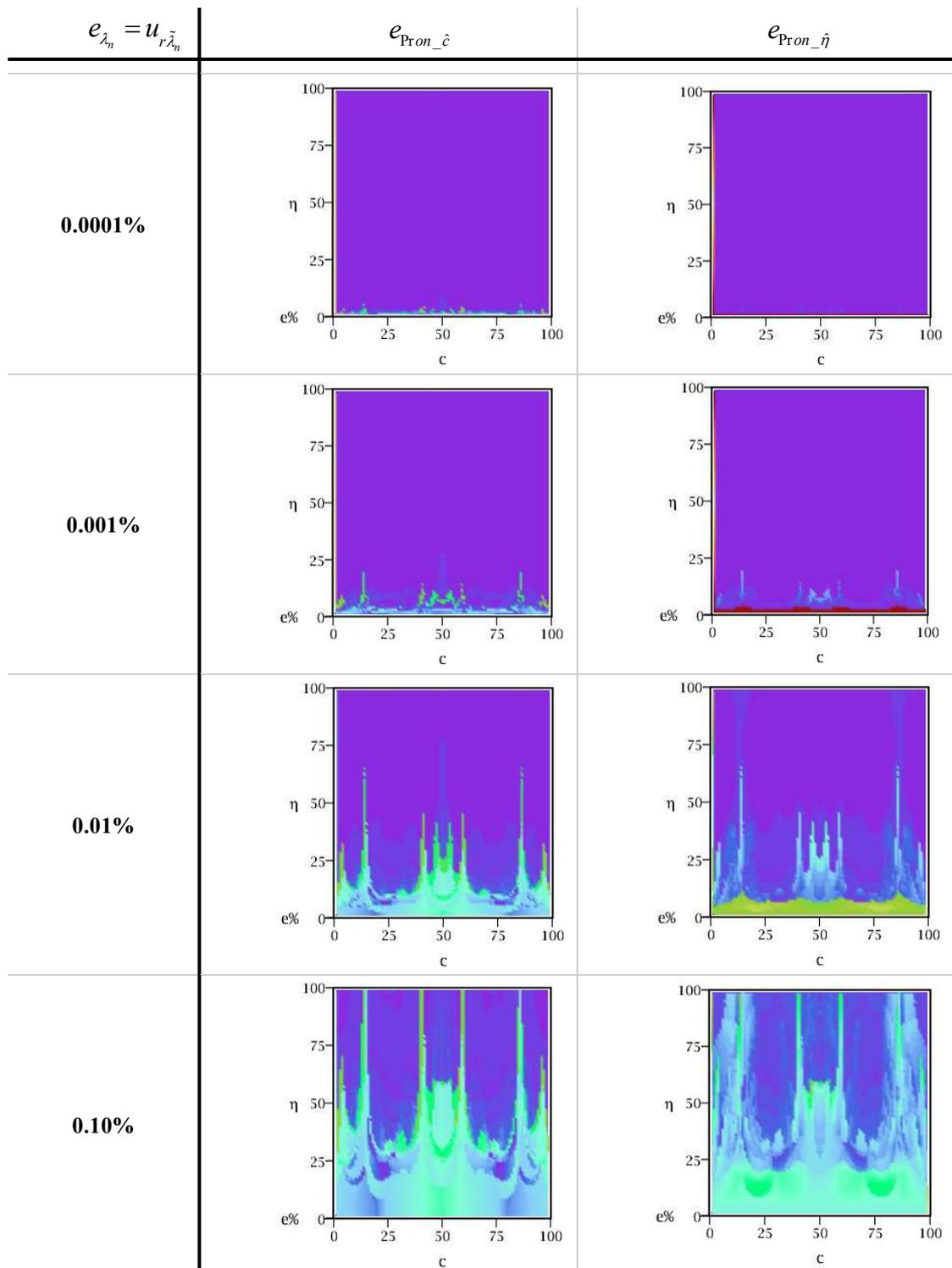


Figura A9.2 – Error en el pronóstico de la hipótesis de las áreas de las incertidumbres para la condición A-A.

- E-E



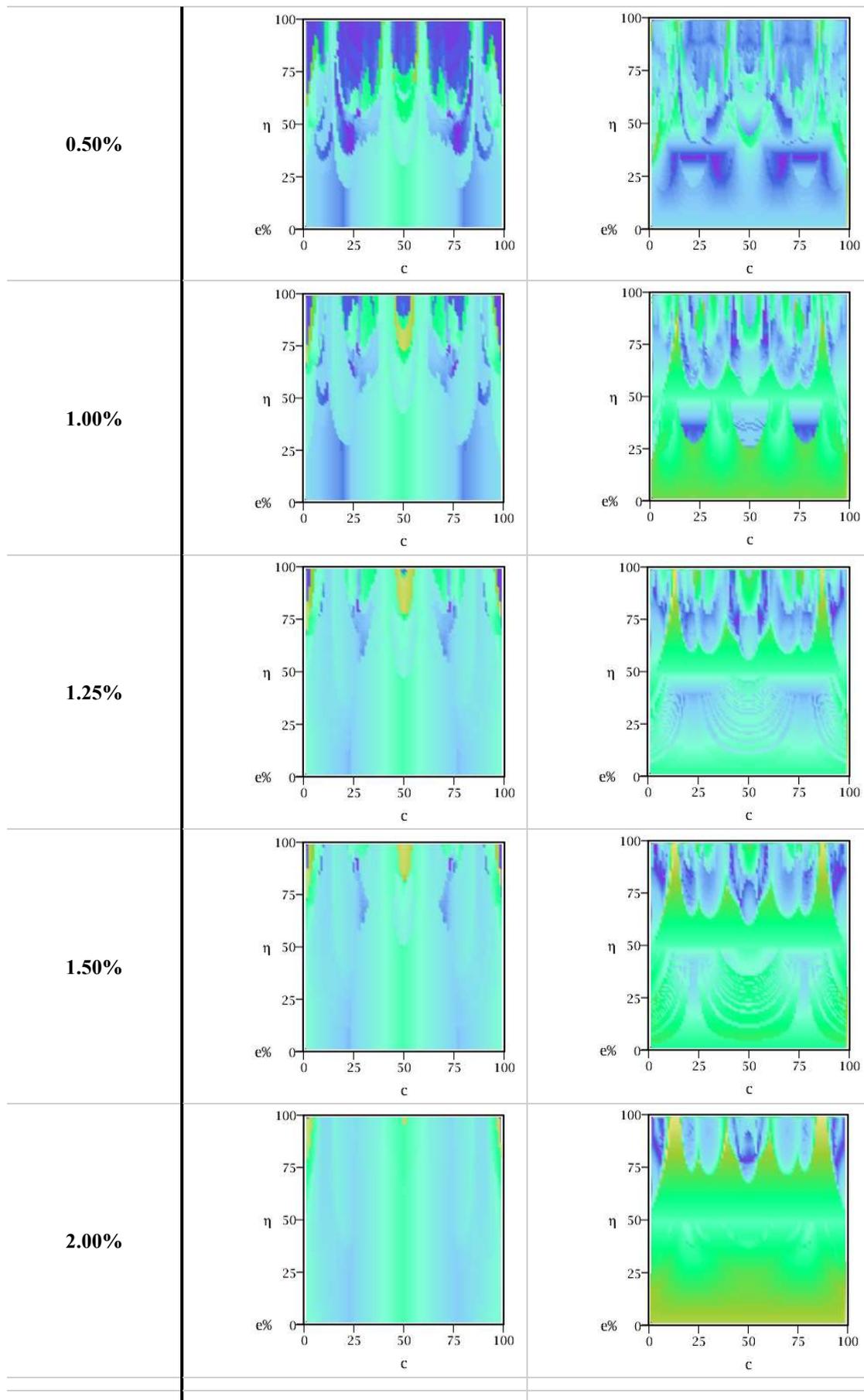
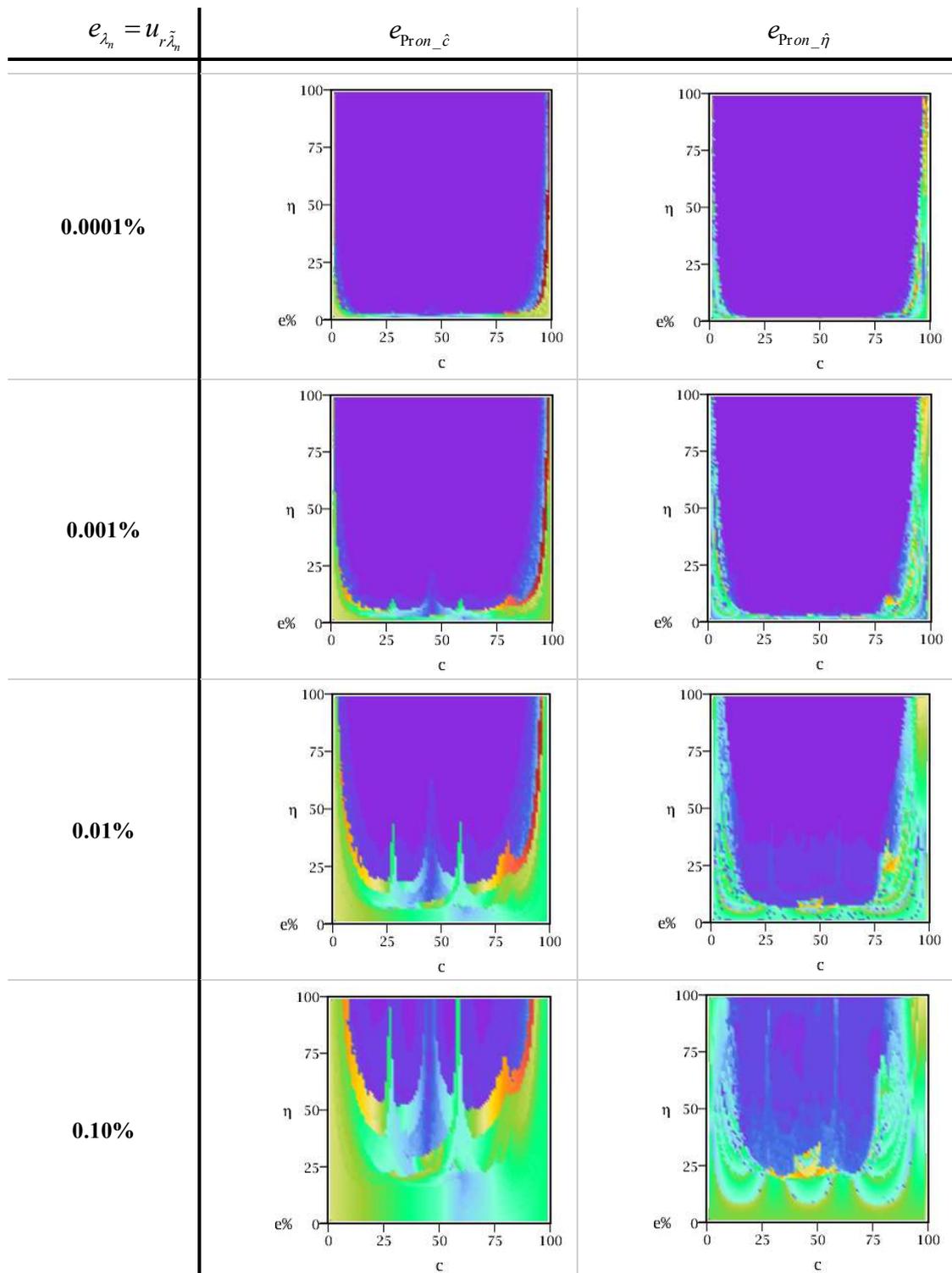


Figura A9.3 – Error en el pronóstico de la hipótesis de las áreas de las incertidumbres para la condición E-E.

- A-L



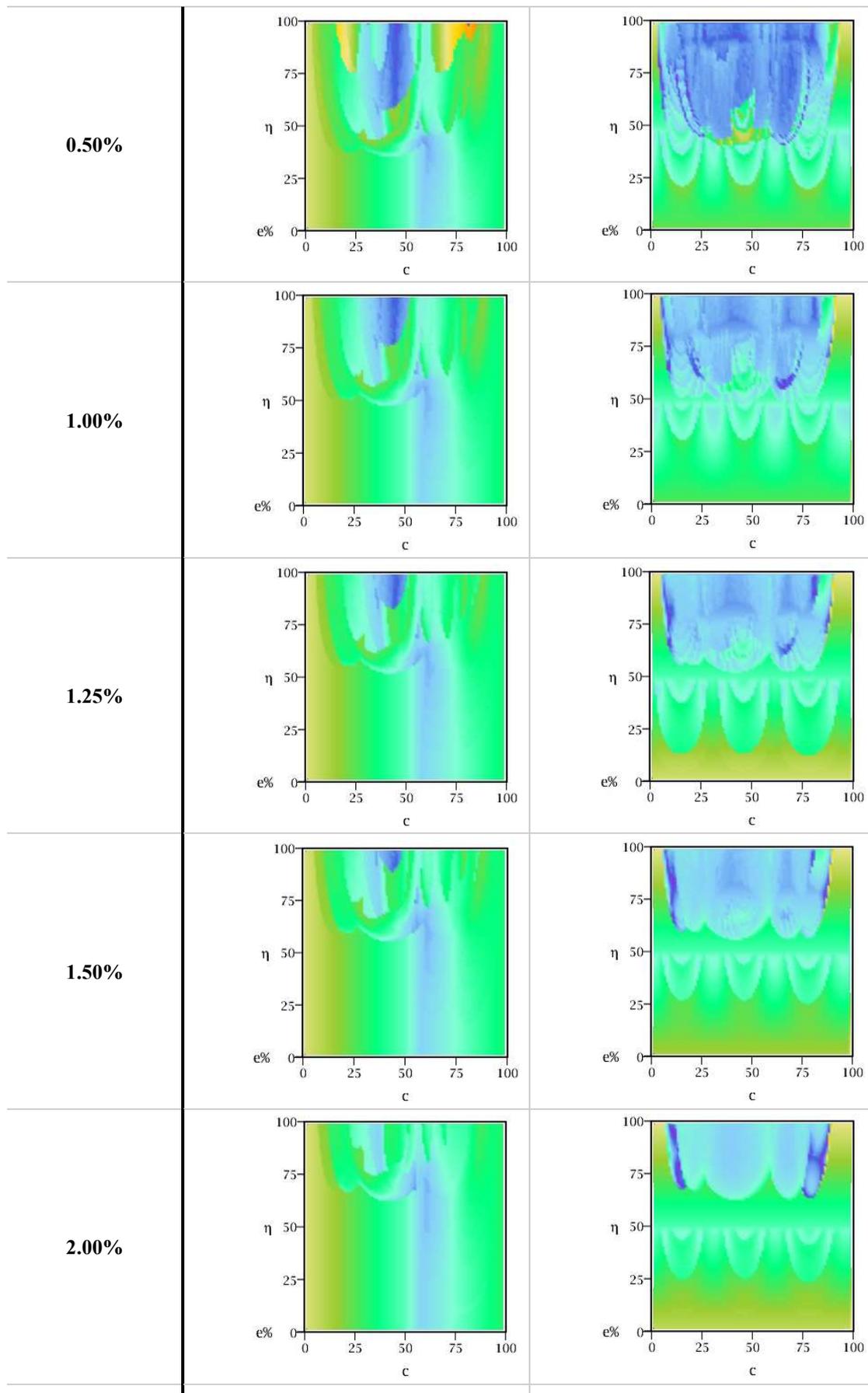
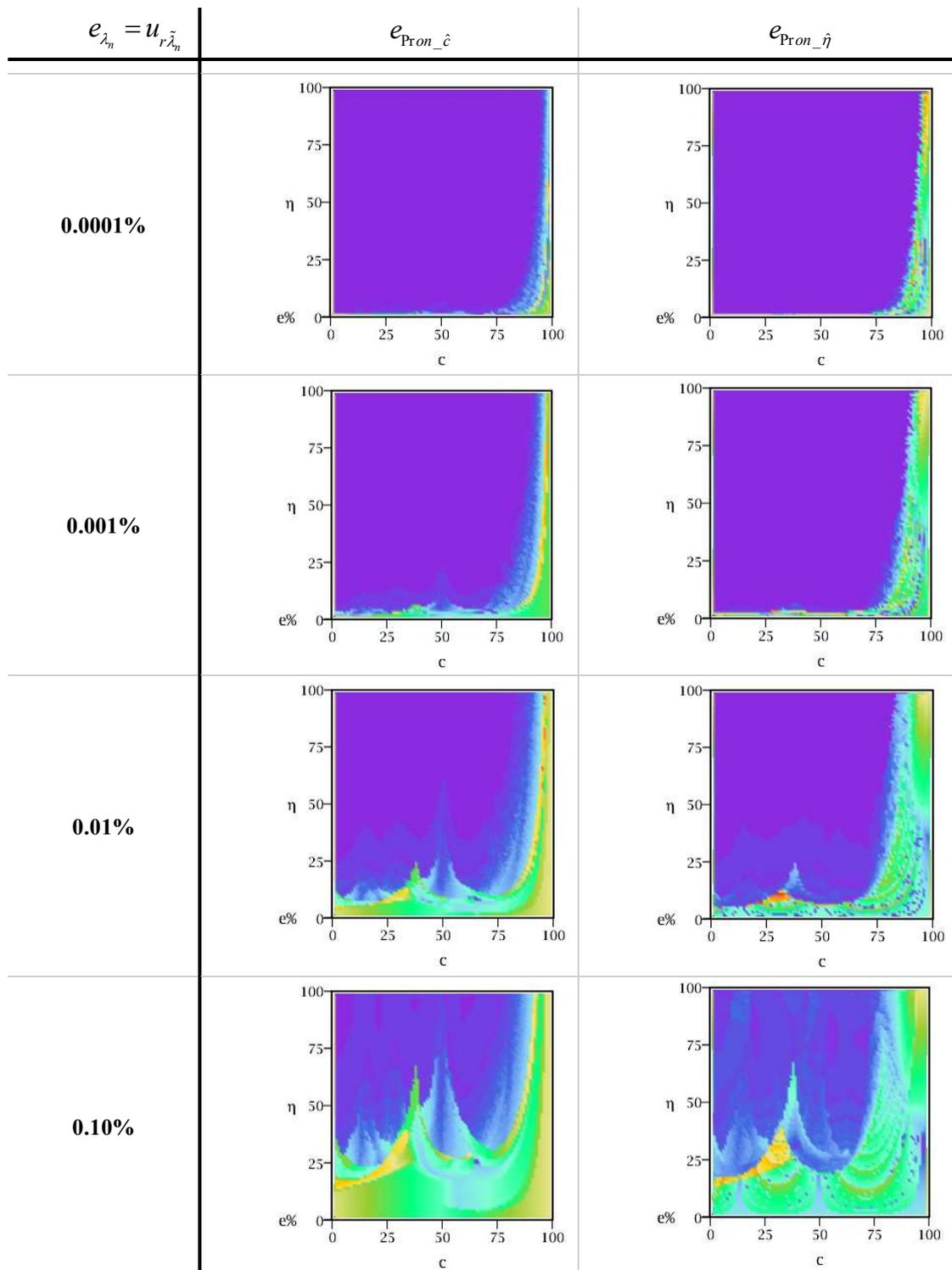


Figura A9.4 – Error en el pronóstico de la hipótesis de las áreas de las incertidumbres para la condición A-L.

- E-L



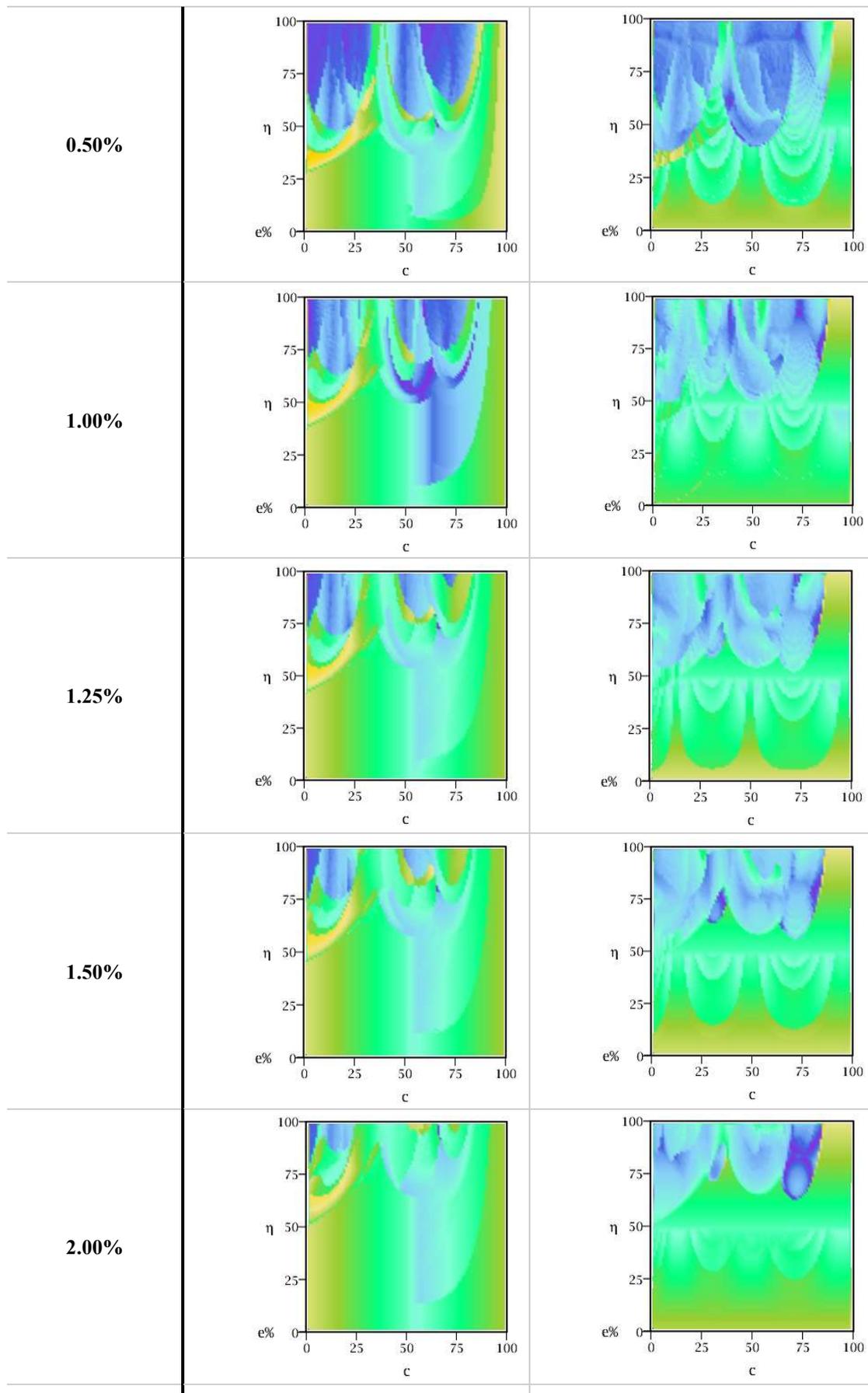
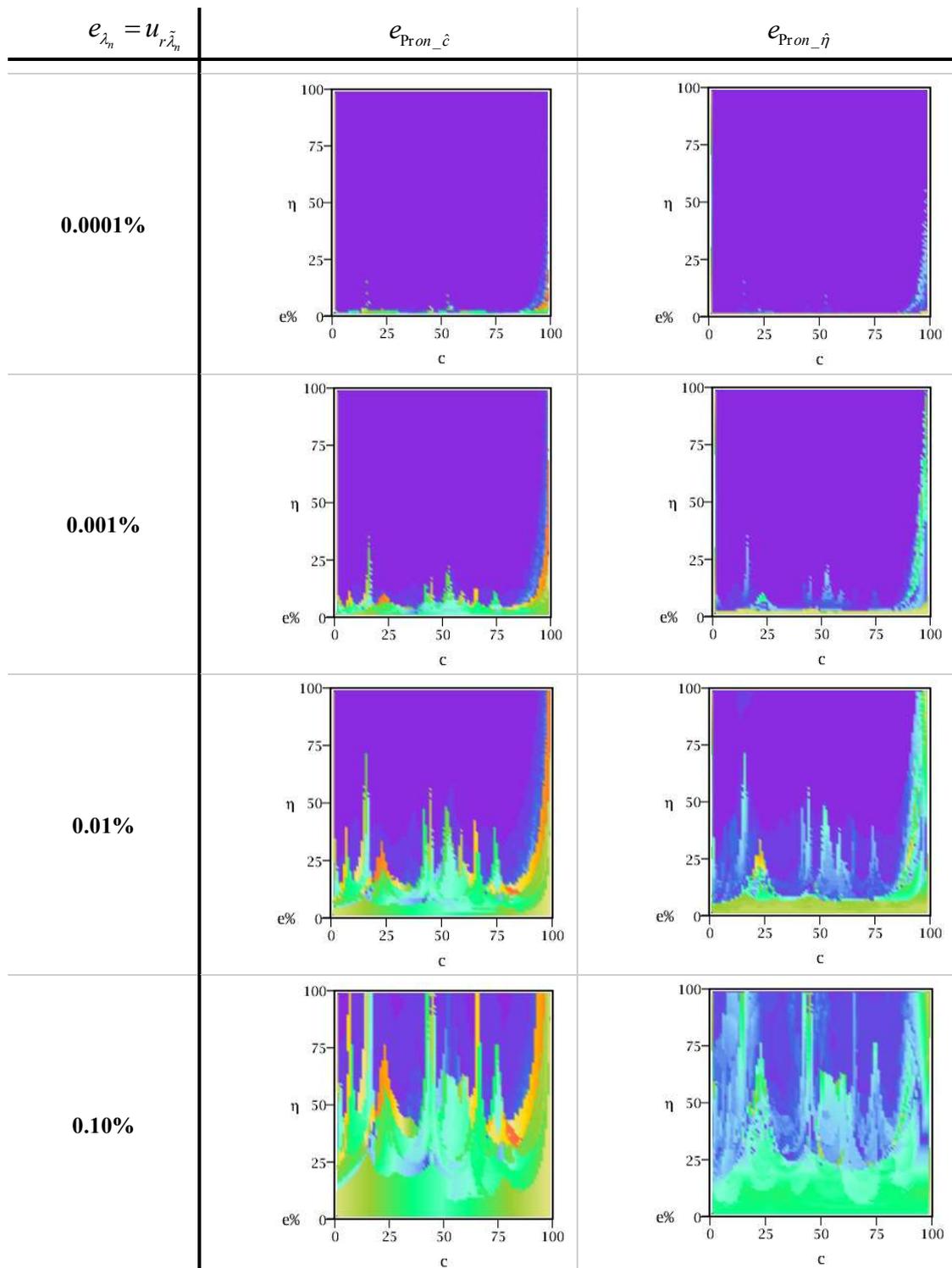


Figura A9.5 – Error en el pronóstico de la hipótesis de las áreas de las incertidumbres para la condición E-L.

- E-A



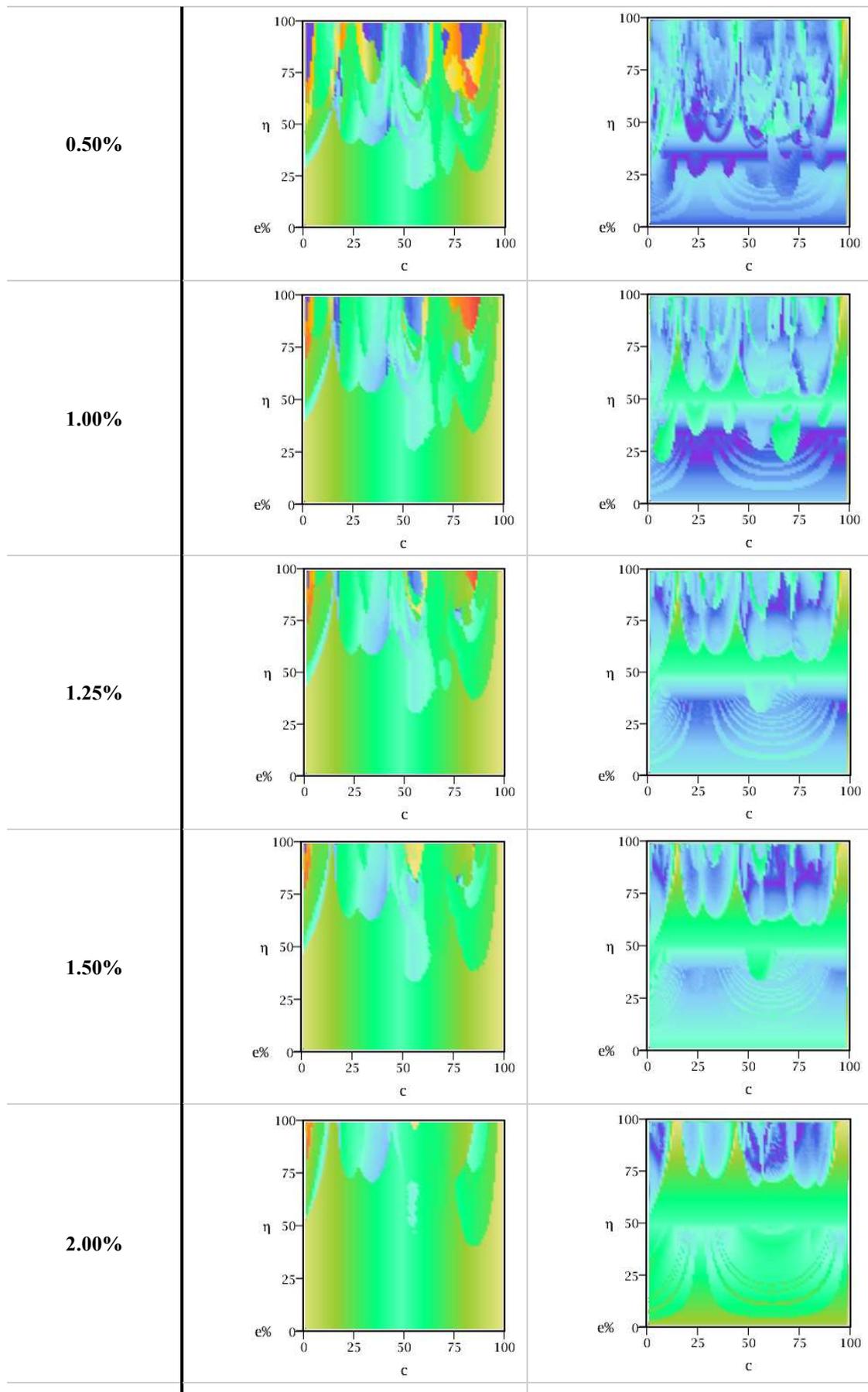


Figura A9.6 – Error en el pronóstico de la hipótesis de las áreas de las incertidumbres para la condición E-A.

# APÉNDICE 10

## Sistemas de excitación de la estructura

A fin de excitar la estructura se debe seleccionar una función de excitación (por ejemplo, ruido aleatorio) junto con un sistema de excitación (por ejemplo, un shaker) que mejor se adapte a la aplicación requerida. El sistema de excitación es el mecanismo físico utilizado para proveer la señal. Existen diversos mecanismos de excitación: shaker, martillo de impacto, relajación escalonada (punteo) y operación.

La elección de la función de excitación dicta la elección del sistema de excitación. Por ejemplo, una función aleatoria o aleatoria de ráfaga requiere un shaker para su implementación. En general, lo contrario también es cierto. Elegir un martillo para el sistema de excitación dicta una función de excitación de tipo impulsivo. Las funciones de excitación se dividen en cuatro categorías generales: estado estacionario, aleatorio, periódico y transitorio.

La dinámica de la estructura también es importante para elegir función de excitación. El nivel de no linealidades puede medirse y caracterizarse efectivamente con barridos sinusoidales o chirps, pero puede ser necesaria una función aleatoria para estimar el mejor modelo linealizado de un sistema no lineal. La cantidad de amortiguamiento y la densidad de los modos dentro de la estructura también pueden dictar el uso de funciones de excitación específicas. Si los modos están estrechamente acoplados y / o ligeramente amortiguados, una función de excitación que puede implementarse sin fugas (por ejemplo, ráfaga aleatoria) suele ser la más adecuada.

Si bien existen muchos tipos de excitación, generalmente no proporcionan una fuerza de entrada conocida o medida. Como estas técnicas de excitación no miden la fuerza aplicada a la estructura, por lo tanto, no se puede obtener una función de respuesta de frecuencia y las formas de modo no se pueden escalar.

Otro método de clasificación del mecanismo de excitación es dividirlos en dispositivos conectados y no conectados. Un shaker es un dispositivo conectado, mientras que un martillo no lo es (aunque hace contacto por un corto período de tiempo). Que el sistema de excitación esté conectado a la estructura bajo ensayo implica que puede modificar su masa y rigidez y por lo tanto alterar su respuesta dinámica.

A continuación, se enumeran una serie de excitadores que fueron objeto de estudio, diseño, desarrollo, construcción, adquisición y aplicación durante la realización de esta tesis.

En un principio se analizan los shakers y su importancia comercial. Todo producto (como por ejemplo celulares, automóviles, barcos, aviones, satélites, etc.), en algún momento de su vida útil (fabricación, transporte o uso) se encuentra sometidos a vibración. La realización de ensayos de vibración en un laboratorio nos proporciona información sobre cómo estos productos se comportan ante la vibración. El propósito de los sistemas de ensayo y simulación de vibraciones es, por tanto, emular en condiciones controladas de laboratorio sollicitaciones vibratorias sobre elementos, tipificadas y normalizadas, para caracterizarlos en sus diferentes etapas del ciclo de vida.

Entre sus aplicaciones se puede mencionar:

- Calibración de acelerómetros.
- Ensayos de vibración de componentes y montajes pequeños.
- Análisis modal y estructural.
- Pruebas de componentes electrónico.
- Experimentos de laboratorio y diversos fines médicos.
- En establecimientos educativos y de investigación para investigar el comportamiento dinámico de estructuras y materiales.
- Pruebas de fatiga y resonancia.
- Utilizar como transductor de velocidad o actuador de alta velocidad

Las pruebas pueden ser del tipo:

- Vibración uniaxial simultánea.
- Vibración multiaxial simultánea y secuencial.
- Vibración combinada.

Los shakers se pueden clasificar por principios de funcionamiento en:

- Mecánicos.
- Hidráulicos.
- Acústicos.
- Electromagnéticos.
- Electromecánicos, que pueden subdividirse en de imanes permanentes y de electroimanes.

A continuación, se presenta una tabla donde se comparan sus principales características.

Tipo	Principio de funcionamiento	Características
Mecánico	Motores eléctricos de rotación fija o variable. Levas, brazos articulados, biela manivela	Rango de frecuencias muy limitadas, entre 5 a 60 Hz. Funcionan a desplazamiento constantes. Carencia de servo control.
Hidráulico	Actuador hidráulico instrumentado y controlado mediante servo válvulas de altas prestaciones que modulan el paso de aceite al pistón. La superficie de vibración puede alcanzar grandes dimensiones	Rangos de frecuencias desde 0.1hz hasta 500hz. Aplicaciones especiales hasta 1000hz. Grandes desplazamientos. Grandes superficies de ensayos. Sistemas muy amortiguados, permiten ensayos con cargas descentradas, elevadas y piezas sueltas.
Acústico	Un parlante genera una onda sonora que se propaga por el aire hasta excitar la estructura.	No necesita contacto con la pieza. Rango de frecuencias de 20 a 20KHz. Ruidosos y molestos. Poca fuerza de excitación. No direccionable. La misma no se puede medir.
Magnético	Una bobina por la cual circula una corriente variable contiene un material ferromagnético, induce un campo magnético. El mismo atrae o repulsa la estructura bajo ensayo.	Solo para probetas ferromagnéticas o que tengan incorporadas algún elemento que lo sea. No tiene contacto, por lo cual no hay cambio ni en la rigidez ni la masa del sistema en estudio. Poco difundido uso comercial. Prototipos de laboratorio.
Electrodinámico	Amplificador electrónico de potencia con salida en corriente de alto nivel. Elemento rígido con bobina móvil que vibra en presencia de un campo electromagnético producido por un electroimán o un imán permanente. Convierte potencia eléctrica en potencia mecánica por métodos electromagnéticos.	Buen rango de frecuencias, 5 a 2000 Hz (pesados) y hasta 12khz (livianos). Altos niveles de aceleración y de velocidad. Desplazamientos limitados (25 mm, 50mm, 75 mm). Funcionamiento muy condicionado a bajas frecuencias (<5hz). Resistencia limitada a momentos. Baja distorsión (<5%). Poco inerciales (bueno en búsqueda de resonancias) y poco amortiguados (malo para ensayos con piezas sueltas).

Tabla A10.1 – Comparativa entre tipos de shakers de sus principios de funcionamiento y características.

\*Tabla basada en Alvarez, P. J., elección de sistema de ensayos de vibración.

En la presente tesis, se aborda el estudio de los shakers de tipo magnéticos y electrodinámicos.

### A10.1 Caracterización y uso de un sistema de excitación electroacústico

Un sistema de excitación electroacústico es básicamente un parlante que genera una onda sonora, la que se propaga por el aire hasta excitar la estructura. La forma de onda responde a la señal de corriente que circula por la bobina de este. Presenta numerosas ventajas: bajo costo, disponibilidad, buen rango de frecuencias (rango audible 20Hz-20kHz), no tiene contacto con la SUT. Sus principales desventajas son: baja fuerza de excitación, no se puede caracterizar la fuerza de excitación y es molesto para el operador por la generación de ruido durante el ensayo.

En la Figura A10.1 se observa un setup experimental para caracterizar el comportamiento de un parlante comercial que fue empleado como sistema de excitación electroacústico. El mismo consiste en un interferómetro de Michelson. Usa como fuente de luz un haz láser, el cual es dividido por un divisor de haz. Dos espejos alineados reflejan la luz y el divisor de haz lo recombina nuevamente. Cada haz recorre una distancia distinta, que es la que existe entre los espejos y el divisor de haz, generando una diferencia de fase entre ellos. El parlante es excitado mediante un generador de señales marca Agilent modelo 33220A lo que permite controlar amplitud y frecuencia. La señal de interferencia es detectada con un fotodiodo, cuya señal es digitalizada con un osciloscopio marca Tektronix modelo TDS3052B. Posteriormente se realiza en Matlab el análisis de la señal por autocorrelación.

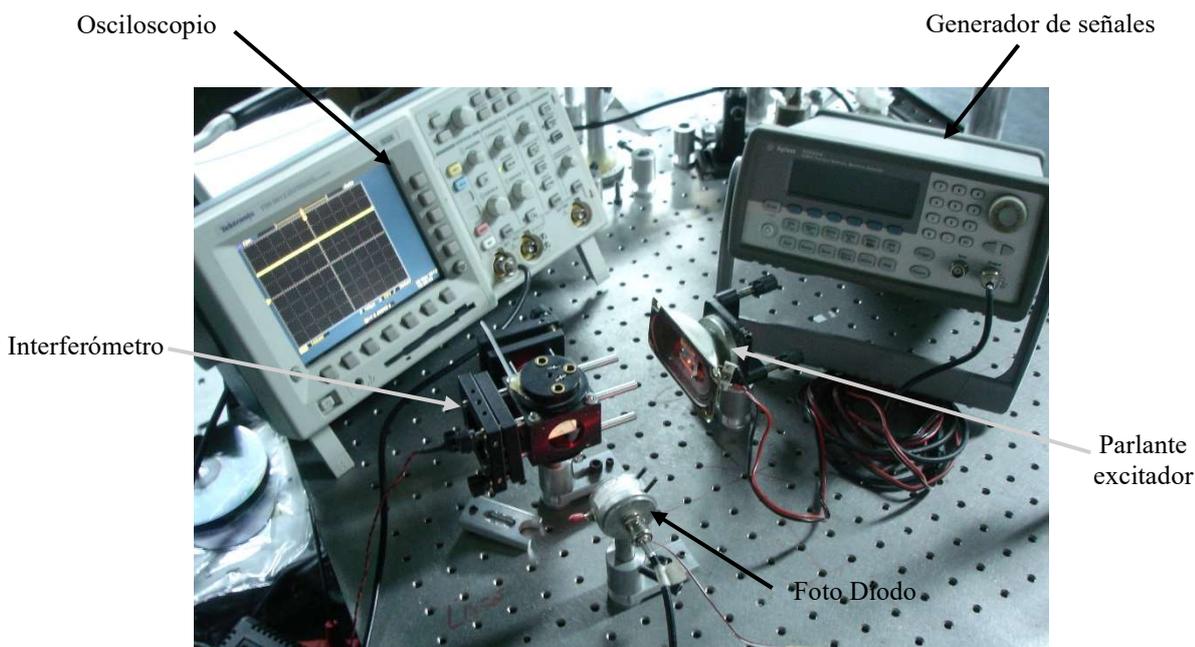


Figura A10.1– Caracterización de un sistema de excitación electroacústico.

En el Figura A10.2 se muestra como los máximos de la autocorrelación coinciden para el período de oscilación de la señal de interferencia. En este caso la frecuencia de vibración es 10 Hz.

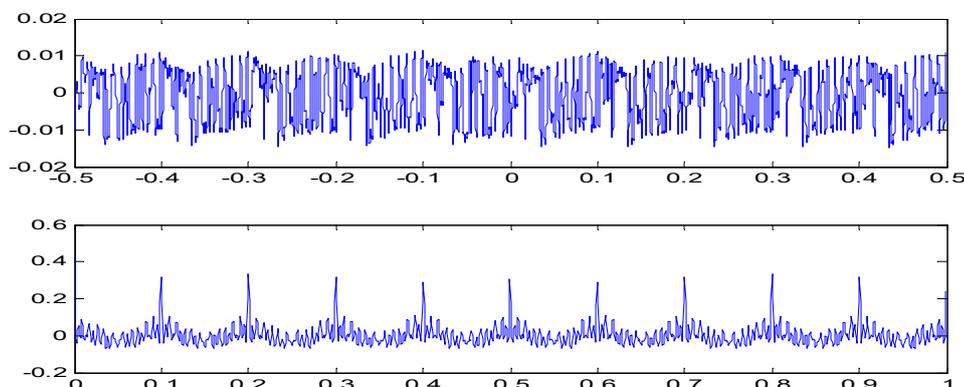


Figura A10.2– Señal de interferencia (sup.) y señal autocorrelación (inf.).

Los resultados del ensayo de caracterización del parlante se pueden observar en la Tabla A10.2

Generador de Señales		Osciloscopio	
Frecuencia [Hz]	Amplitud [mV]	Frecuencia [Hz] determinada por auto correlación	Amplitud [mV]
40	100	40.0000	2
70	100	69.9301	2
130	100	129.8700	2
160	100	158.7302	2
240	100	243.9024	2
370	100	370.3704	2
520	100	526.3158	2
660	100	666.6667	2
830	100	833.3333	2
1040	100	1111.1243	2

Tabla A10.2 – Resultados de la caracterización del parlante.

De los mismos se concluye que el sistema electroacústico es una forma de excitación con una buena respuesta en frecuencia, para un amplio rango de frecuencias, con un coste muy bajo. Su limitante es que el ruido producido es molesto para el operador del equipo y que la fuerza que excita la estructura no es cuantificable.

### A10.2 Desarrollo y fabricación de un excitador electromagnético

Un excitador electromagnético para inducir vibraciones forzadas en estructuras consiste en un sistema el que a partir de un campo magnético produce una fuerza magnética, la que actúa sobre la estructura bajo ensayo. El campo puede ser producido por un imán permanente y/o un electroimán. Para que la fuerza sea variable en el tiempo, se pueden variar la distancia entre el excitador y la estructura y/o la densidad de campo magnético. En el caso que la estructura no sea magnetizable se puede adherir a la misma un imanen permanente o un material ferromagnético que sí sea susceptible a la variación del campo magnético.

Es posible diseñar un electroimán con un pequeño polo localizado cerca de la estructura de prueba y accionarse a la frecuencia deseada para generar una fuerza alterna. La fuerza aplicada a la estructura no se puede medir directamente, pero su reacción en el cuerpo del imán se puede medir con un transductor de fuerza.

El desarrollo de electroimanes es de interés ya que tienen numerosas aplicaciones industriales, no solo la aquí propuesta, como ser: frenos magnéticos, electroválvulas, timbres, sistemas de separación de materiales magnéticos, relés y contactores, sistemas de transporte de levitación magnética y rodamientos sin contacto; entre otros.

Se diseñó, construyó y ensayó un excitador electromagnético para inducir vibraciones mecánicas. La estructura ensayada es excitada mediante una fuerza electromagnética sin contacto mecánico con la misma. El sensor de impedancia mecánica YMC504AF01 es solidario al núcleo ferromagnético y es fijado sobre la mesa anti vibratoria, el cual registra la reacción de vínculo; que es igual y opuesta a la fuerza que actúa sobre la estructura. Ver Figura A10.1.

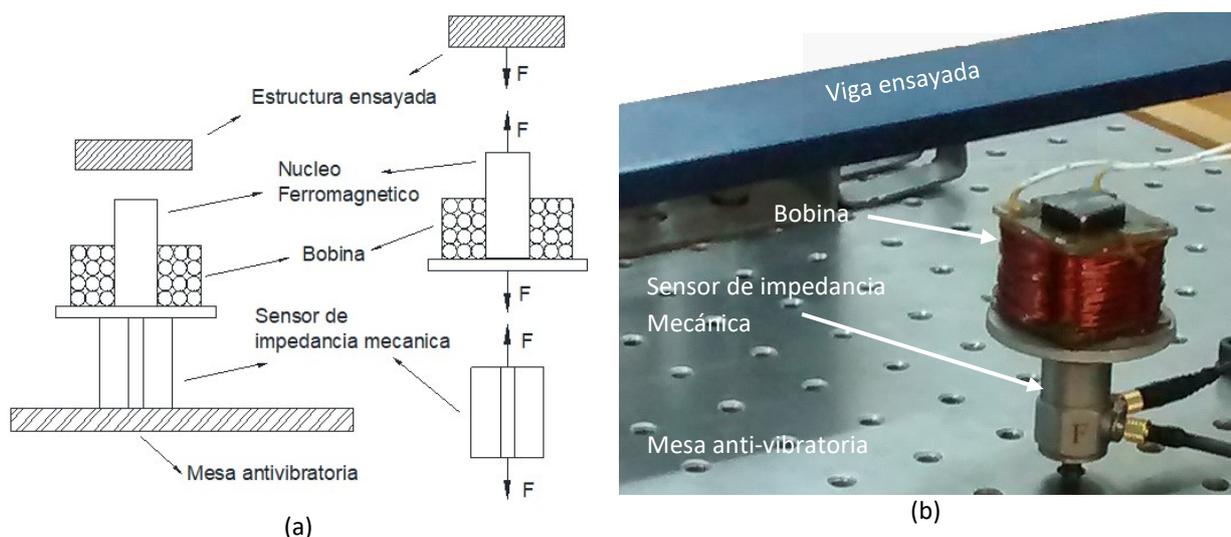


Figura A10.3– Prototipo de excitador electromagnético para inducir vibraciones mecánicas.  
a) Esquema. b) Foto del ensayo.

### A10.2.1 Fuerza ejercida por un electroimán

En Serway (2015), se propone que la fuerza magnética de un electroimán está dada por

$$F = \frac{B^2 A}{2\mu_0} = \frac{\mu_0 H^2 A}{2} = \frac{BH}{2} A, \quad \text{A10.1}$$

donde  $H$  es la intensidad de campo magnético,  $B$  es la densidad de campo magnético,  $\mu_0$  la permeabilidad magnética del aire y  $A$  es el área. El flujo magnético total es

$$\phi = \int BdA = BA = \frac{F_{mm}}{\mathfrak{R}_t} = \frac{NI}{\mathfrak{R}_t}, \quad \text{A10.2}$$

donde  $F_{mm}$  es la fuerza magnetomotriz,  $\mathfrak{R}_t$  es la reluctancia magnética total del circuito magnético,  $I$  la intensidad de corriente y  $N$  el número de espiras. Al reemplazar la Ecuación A10.2 en la Ecuación A10.1, se obtiene

$$F = \frac{\phi^2}{2A\mu_0} = \frac{\left(\frac{NI}{\mathfrak{R}_t}\right)^2}{2A\mu_0} = \frac{N^2 I^2}{2A\mu_0 \mathfrak{R}_t^2}. \quad \text{A10.3}$$

La reluctancia total se puede determinar según

$$\mathfrak{R}_t = \frac{L}{A_1 \mu} + \frac{G}{A_2 \mu_0}, \quad \text{A10.4}$$

donde  $G$  es la distancia del gap de aire que existe en el entrehierro,  $L$  es el camino medio del núcleo ferromagnético y  $\mu$  la permeabilidad del material del núcleo ferromagnético. Si la reluctancia del núcleo ferromagnético es despreciable frente a la del entre hierro, se obtiene la expresión de la fuerza magnética que ejerce un electroimán con un entrehierro:

$$F = \frac{N^2 I^2}{2A\mu_0 \left(\frac{G}{A\mu_0}\right)^2} = \frac{\mu_0 N^2 I^2 A}{2G^2}. \quad \text{A10.5}$$

Nótese que el entrehierro es el gap entre el núcleo ferromagnético de la bobina y la estructura magnética bajo ensayo.

### *A10.2.2 Número óptimo de espiras y diámetro óptimo del cable conductor para optimizar la intensidad de campo ( $H$ ) de la bobina*

La American Wire Gauge (AWG) estandarizó los calibres de cables conductores y su corriente admisible, al interpolar estos valores extraídos de tabla se obtiene la relación

$$I_{max} = 2.242\phi_c^2, \quad A10.6$$

donde  $I_{max}$  es la mayor intensidad de corriente que puede conducir cable conductor y  $\phi_c$  es el diámetro de éste.

Al realizar una vista de corte transversal de la bobina e igualar el área que ocupan los cables conductores con el área de la bobina se puede determinar el número total de espiras de la bobina, según

$$N = \frac{(\phi_{eb} - \phi_{ib})}{2\phi_c^2} l_b, \quad A10.7$$

donde  $\phi_{eb}$  es el diámetro exterior,  $\phi_{ib}$  es el diámetro interior y  $l_b$  la altura de la bobina.

La intensidad de campo máxima que puede proporcionar una bobina es función de la intensidad de corriente máxima que puede circular por el conductor y el número de espiras de la bobina; por lo tanto, su valor está dado por

$$H_{max} = \frac{NI_{max}}{l_b} = \left[ \frac{(\phi_{ebp} - \phi_{ibp})}{2\phi_{cbp}^2} l_b \right] \frac{2.242\phi_{cbp}^2}{l_b} = 1.121(\phi_{ebp} - \phi_{ibp}). \quad A10.8$$

### ***A10.2.3 Relación de campo magnético producido por la espira en diferentes capas y determinación de la relación de aspecto de la bobina***

Conforme se incrementa la longitud del solenoide, el campo interior se vuelve más uniforme y el exterior más débil. La densidad de campo dentro de un solenoide puede calcularse según

$$B = \frac{\mu NI}{l_b}, \quad \text{A10.9}$$

siendo la mitad en su extremo.

Una forma de aumentar  $B$  es recubrir el solenoide con otra capa de vueltas de alambre conductor. El campo magnético producido por una espira a una distancia  $r$  de su centro es

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}. \quad \text{A10.10}$$

De lo que se deduce, que a medida que aumente el número de capas de espiras, la espira más alejada del núcleo ferromagnético produce un campo magnético que contribuye en menor medida que una más próxima. La relación entre el campo que produce la espira que se encuentra más próxima al núcleo ferromagnético a una distancia  $r_1$  y una más alejada a un radio  $r_2$ , es

$$B_2 = \beta B_1 \Rightarrow \frac{\mu_0 i}{2\pi r_2} = \beta \frac{\mu_0 i}{2\pi r_1} \Rightarrow \beta = \frac{r_1}{r_2}. \quad \text{A10.11}$$

Por ejemplo, al esperar que el alambre más alejado contribuya con el 70% del campo de la espira más próxima, la relación de radios será de  $r_1 = 0.7r_2$  o  $r_2 = 1.43r_1$ .

Rairán et al (2005) mediante simulaciones por elementos finitos se analizó la proporción alto-ancho del devanado manteniendo su área constante, los resultados evidencian que una mayor proporción alto-ancho mejora la densidad de campo obtenida. Cuando la relación es de 3 alcanza los 2.09T, frente los 1.62T de la relación 0.33. Se selecciona una relación de aspecto de 3.

#### A10.2.4 Propiedades extensivas de la bobina

La longitud de cable empleado en el bobinado se determina por:

$$Long = \pi \frac{(\phi_{cb} + \phi_{ib})}{2} N. \quad A10.12$$

El peso de éste se determina según

$$P = \delta Long, \quad A10.13$$

Siendo  $\delta$  la densidad lineal del conductor.

La resistencia eléctrica de la bobina se puede calcular, multiplicando la longitud del cable conductor por la resistencia lineal del mismo, según:

$$R = R_{lineal} Long. \quad A10.14$$

La inductancia de una bobina se puede determinar por diversos cálculos analíticos, uno de los más difundidos es el que emplea el factor de corrección de Nagaoka ( $k$ ), el cual se presenta a continuación:

$$L = k \mu \frac{N^2 A}{l_b}; \quad k = \frac{1}{1 + 0,9 \left( (\phi_{cb} + \phi_{ib}) / 2l_b \right) - 2 \times 10^{-2} \left( (\phi_{cb} + \phi_{ib}) / 2l_b \right)^2}. \quad A10.15$$

La proximidad entre las espiras da lugar a una capacidad distribuida que no puede ignorarse en altas frecuencias. La bobina puede verse como un circuito equivalente de una resistencia en serie con un inductor, que se encuentran paralelos a un capacitor. La bobina se desvía de su comportamiento ideal, presentando una impedancia inductiva mucho mayor que la de la bobina ideal. A partir de la resonancia la impedancia que presenta la bobina es capacitiva. La frecuencia de resonancia es

$$f_o = \frac{1}{2\pi \sqrt{LC}}. \quad A10.16$$

Si la capacidad autoinducida se considera despreciable, la impedancia del circuito solo depende de la resistencia y de la componente inductiva. El comportamiento que se espera, comparable al de una bobina ideal, es que aumente la impedancia con el aumento de la frecuencia y por lo tanto se reduzca la corriente del circuito según:

$$V = IZ \Rightarrow I = \frac{V}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} \quad \text{A10.17}$$

### ***A10.2.5 Saturación del núcleo ferromagnético, determinación del punto de trabajo y selección del material***

El efecto de saturación se puede observar claramente en la curva de magnetización BH o curva de histéresis. Mientras que  $H$  se incrementa,  $B$  se aproxima a un valor máximo de manera asintótica, que es el nivel de saturación. Por sobre el nivel de saturación, el campo  $B$  continúa aumentando, pero de manera paramagnética, la cual es tres órdenes de magnitud más pequeña que la tasa de aumento ferromagnética observada por debajo del nivel de saturación. La permeabilidad magnética de los materiales ferromagnéticos no es constante, sino que depende de la intensidad de campo. En los materiales saturables la permeabilidad relativa se incrementa con  $H$  hasta un máximo, y luego mientras el material se aproxima a saturación, el efecto se invierte y la curva decrece hasta la permeabilidad relativa del aire que es igual a uno. La permeabilidad disminuye al aumentar la frecuencia y la temperatura Peter (2001).

Se considera como punto de trabajo óptimo, al valor de permeabilidad magnética máxima del material ferromagnético ( $\mu_{\max}$ ), lo que reduce la reluctancia del circuito magnético y por ende el tamaño requerido de la bobina. Además de asegurar que la densidad de campo  $B$  este por debajo del nivel de saturación.

La intensidad de campo magnético requerida es la máxima que debe aportar la bobina y se obtiene según:

$$H_{req} = H_{\max} = \frac{B_{codo}}{\mu_{\max}} \quad \text{A10.18}$$

Diferentes materiales poseen diferentes niveles de saturación. Por ejemplo, las aleaciones de hierro de alta permeabilidad (desde 7000 a 800.000) utilizadas en la fabricación de núcleos de transformadores alcanzan la saturación a valores de 1,6 a 2,2 Tesla.

Las pérdidas magnéticas en el núcleo se pueden dar por histéresis (Los materiales magnéticos blandos son fáciles de imantarles y desimantarles presentando curvas de histéresis de apariencia estrecha con bajos campos coercitivos y alta saturación, teniendo por tanto altas permeabilidades magnéticas). O por corrientes parásitas (son función del espesor de la chapa al cuadrado, por lo que los circuitos magnéticos son “laminados” para reducir los caminos de las pérdidas).

Debido al bajo costo, buena disponibilidad, soldabilidad, maquinabilidad y relativamente buenas propiedades magnéticas (material blando, alta densidad de saturación y permeabilidad magnética máxima), se opta por un acero laminado en frío, tipo SAE 1020, en formato de varilla maciza.

#### ***A10.2.6 Forma del núcleo ferromagnético, posición de las bobinas, saturación local***

Existen diversas formas de electroimanes, los más usados son los rectos, los de herradura, los acorazados, entre otros. El problema de utilizar la configuración recta es que las líneas de campo deben recorrer un espacio de aire muy amplio y, por tanto, la densidad de campo disminuye. Una solución es dar curvatura al núcleo; así el flujo recorre un menor entrehierro.

Las bobinas pueden ocupar diferentes posiciones. Según Rairán et al (2005) se evidencia la ventaja de seleccionar un núcleo en forma de “C” con una bobina en cada brazo del núcleo porque tiene una distribución más pareja del campo y es 8,29 veces más que en la configuración recta.

Radio de curvatura agudos, implican caminos magnéticos más cortos, lo que lleva a que se concentren las líneas de campo, lo que puede producir la saturación local y la subutilización del resto de material.

### A10.2.7 Resultados de Ensayos del prototipo

A fin de validar las ecuaciones determinadas en los incisos anteriores, se procedió a fabricar tres bobinas, las cuales fueron ensayadas en diferentes experiencias y así analizar la concordancia entre los resultados analíticos y experimentales.

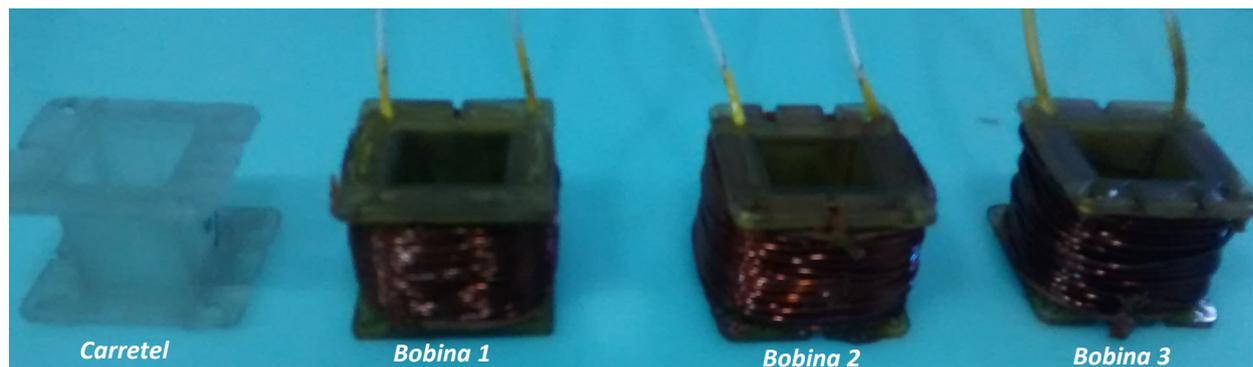


Figura A10.4– Bobinas para ensayos de excitador electromagnético.

Con un micrómetro Mitutoyo modelo 2046S se determinó experimentalmente el diámetro del cable conductor. Se realizaron 5 mediciones para cada bobina y se determinó el diámetro promedio. Con un calibre Mitutoyo modelo 530-312B-10 se determinó experimentalmente el diámetro exterior de las bobinas.

Bobina	Diámetro alambre (mm)	N.º de vueltas	Diámetro bobinas (mm)	Peso bobinado (g)
1	0.37	900	31.8	55.73
2	0.7	300	36.2	78.095
3	1.04	100	33	59.15

Tabla A10.3 – Características de las bobinas para ensayos de excitador electromagnético.

A continuación, se presentan una serie de resultados. Los analíticos corresponden a los que fueron determinados mediante las ecuaciones antes mencionadas.

- Determinación del número de vueltas y el peso del bobinado.

Mediante una balanza RADWAG Modelo AS60/220/C/2 se determinó el peso del carretel y de las bobinas, así por diferencia se determinó el peso del cable conductor.

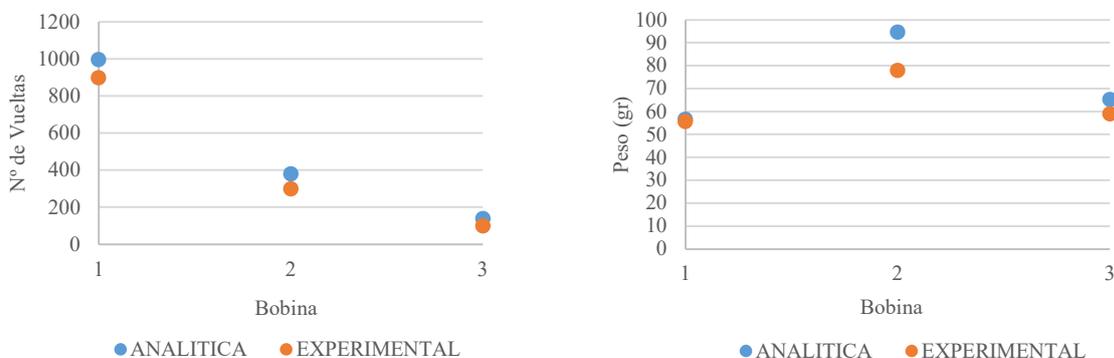


Figura A10.5– Resultados analíticos y experimentales. a) Número de vueltas. b) Peso de la bobina.

- Determinación de la resistencia e inductancia del bobinado.

Con un multímetro ZURICH modelo ZR-680 se determinó el valor de la resistencia. Mediante ensayo se determinó la inductancia. Al colocar una resistencia de precisión conocida en serie con la bobina, se hizo variar la frecuencia de la tensión de alimentación proveniente de un generador de ondas hasta igualar la caída de tensión en ambos componentes, condición tal que hace iguales las impedancias y por lo tanto se puede determinar la inductancia según  $L = R/2\pi f$ .

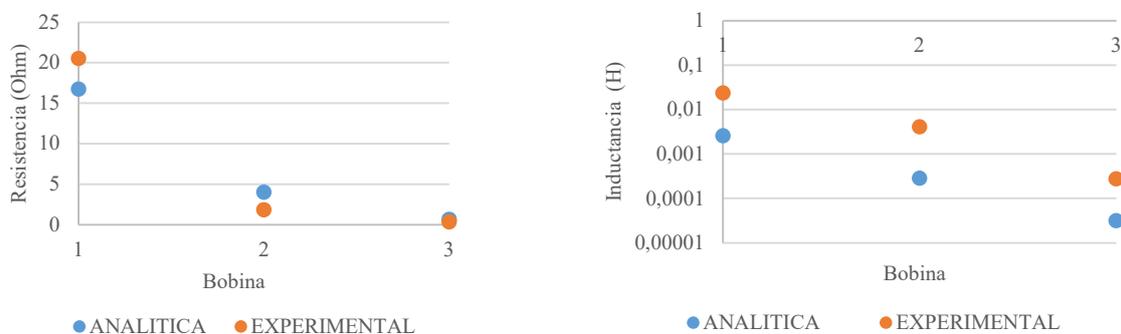


Figura A10.6– Resultados analíticos y experimentales. a) Resistencia eléctrica. b) Inductancia.

- Determinación de la relación entre corriente, campo magnético y peso.

Con un Gaussímetro Pasco Modelo PS-2162 se determinó la densidad de campo magnético en el extremo de los 3 solenoides, para diferentes intensidades de corriente. Se evidencia que un mismo nivel de densidad de campo magnético se alcanza con menor corriente al utilizar menor diámetro de cable. Cuando las tres bobinas estaban sometidas a una corriente continua de un amperaje tal que fuera el máximo que soportare el calibre del conductor de cada una de ellas, se observa una relación aproximadamente lineal entre el peso de la bobina y la densidad de campo que producen. Y que, por lo tanto, la ratio densidad de campo vs peso se mantiene aproximadamente constante.

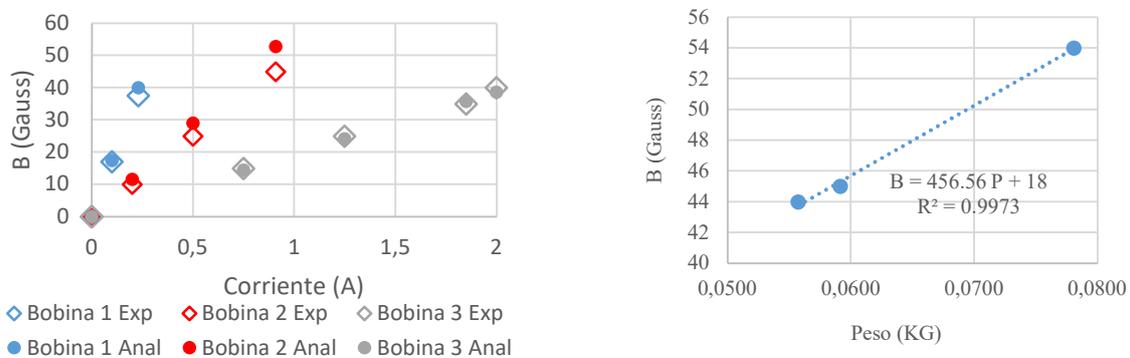


Figura A10.7– a) Densidad de campo magnético vs corriente, analítico y experimental para cada bobina. b) Relación de la densidad de campo magnético y el peso de las bobinas.

- Determinación de la fuerza del electroimán.

Se programó un algoritmo en Labview donde se genera una señal senoidal de cierta amplitud y frecuencia. La misma mediante un módulo NI-9263 se transforma en una salida de voltaje, que luego pasa por un amplificador de audio marca LEPAI modelo LP-269FS para finalmente alimentar la bobina. Con un módulo NI-9205 se adquieren las señales de voltaje provenientes de la bobina y de un sensor de intensidad de corriente ACS712 5A y de un sensor de densidad de campo magnético por efecto Hall 49E. La señal de una celda de carga marca FLEXAR modelo CZI-50 fue adquirida por un módulo NI-9237. Se varió la distancia entre el núcleo ferromagnético y la probeta solidaria a la celda de carga. A continuación, se presentan los resultados de la fuerza magnética para diferentes intensidades de corriente y distancia de GAP.

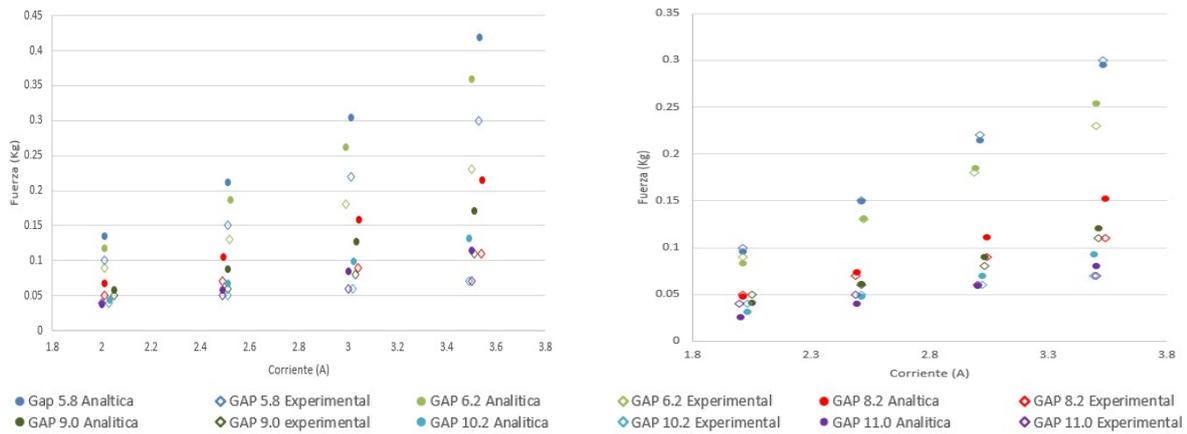


Figura A10.8– Fuerza magnética, analítica y experimental, para diferentes valores de corrientes y gap. a) Sin corrección. b) Con factor de corrección  $\beta = 0.7$ .

- Determinación de la respuesta en frecuencia del electroimán.

Para un gap fijo de 6mm se realiza un barrido de frecuencia desde 20 a 1000hz, adquiriendo las señales de voltaje y corriente que alimentan la bobina, la densidad de campo magnético y la fuerza por ella producida. Al comparar los resultados analíticos y experimentales, se observa buena correlación tanto para la corriente como la densidad de campo magnético. Para el caso de la fuerza, se esperaba que esta disminuya conforme aumente la frecuencia siguiendo a la variación de la corriente; pero presentó un comportamiento plano similar a la curva de voltaje.

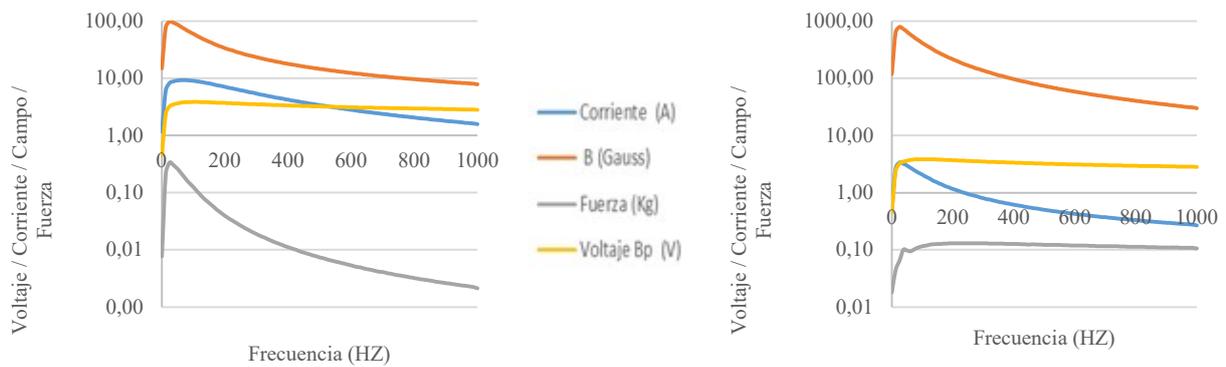


Figura A10.9– Respuesta en frecuencia del voltaje, la corriente, la densidad de campo y la fuerza. a) Analítica. b) Experimental.

### A10.2.8 Otros prototipos diseñados

A partir de las ecuaciones de diseño y de los resultados obtenidos en los ensayos se consideró la posibilidad de fabricar nuevos prototipos de excitadores electromagnéticos.

- Excitador Solenoide con diferentes extremos.

Entre mayor concentración de las líneas de campo, mayor fuerza magnética. Por eso se consideró diseñar diferentes alternativas de extremo del núcleo de la bobina de excitación.

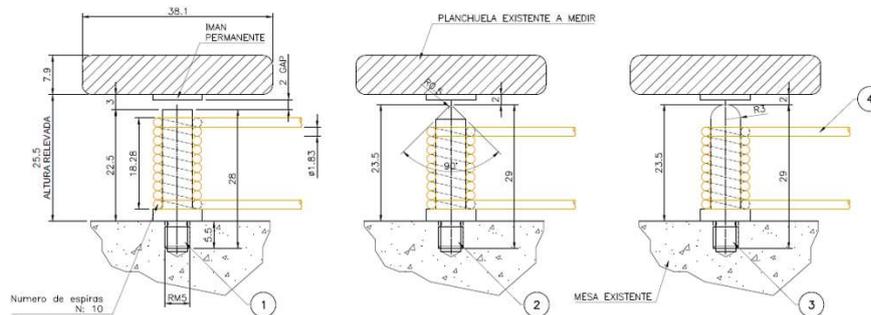


Figura A10.10– Excitadores solenoide con diferentes alternativas de extremo del núcleo de la bobina de excitación.

- Excitador yugo.

Disminuir el camino magnético recorrido sobre aire reduce la reluctancia magnética y por lo tanto mejora el nivel fuerza magnética producida. A tal fin, se consideró el diseño de un prototipo tipo yugo. El mismo permite tener un GAP ajustable, lo que además facilita el uso en aplicaciones con estructuras de tamaños disimiles.

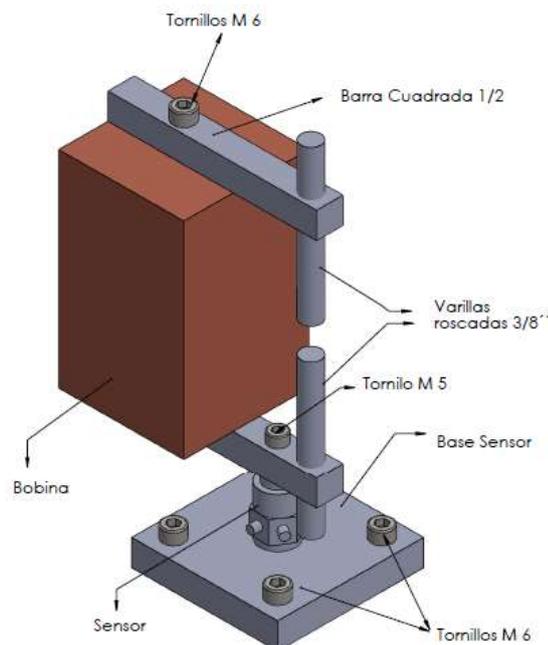


Figura A10.11– Excitador yugo con GAP ajustable.

- Excitador acorazado tipo 1.

Otra opción para disminuir el camino magnético sobre aire y además aprovechar el flujo disperso es una configuración de tipo acorazado.

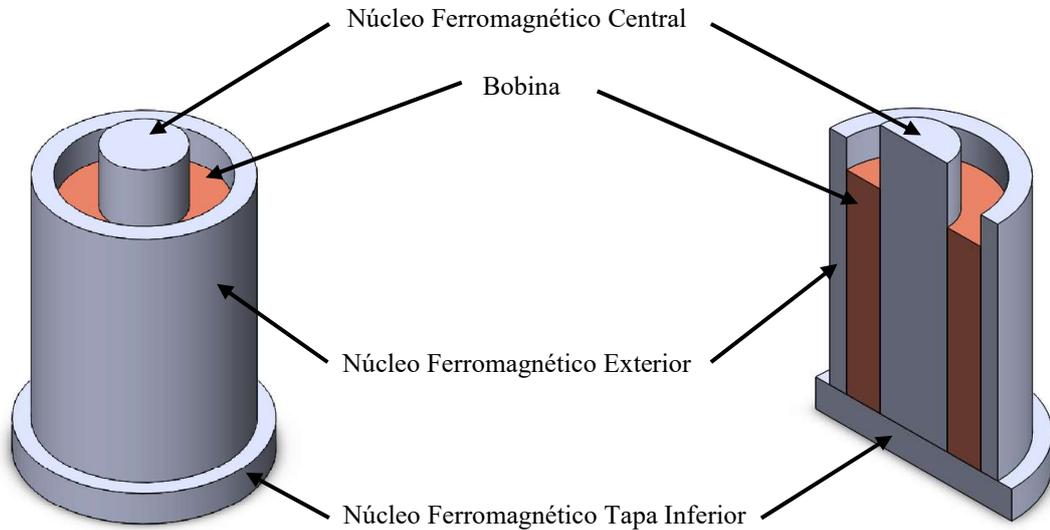


Figura A10.12– Excitador acorazado tipo 1.

- Excitador acorazado tipo 2.

Una forma de lograr mayor concentración de líneas de campo y menor camino magnético por aire es la configuración que se muestra a continuación.

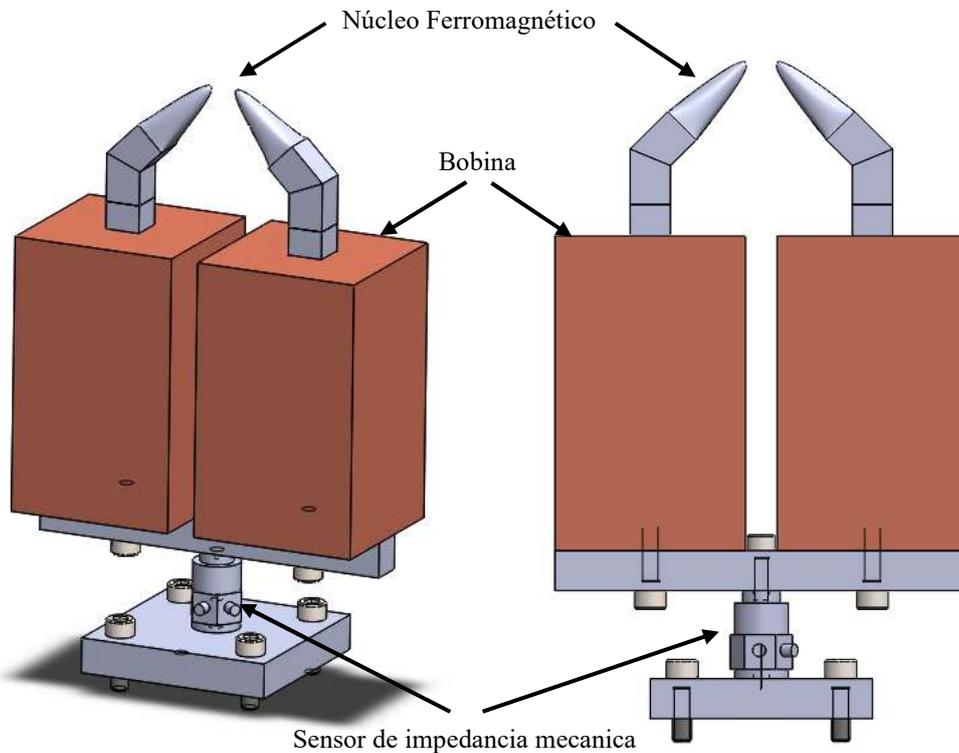


Figura A10.13– Excitador acorazado tipo 2.

### **A10.3 Desarrollo de excitador electrodinámico de electroimán**

El excitador electrodinámico, también conocido como shaker, es un dispositivo que transforma por métodos electromagnéticos la potencia eléctrica en potencia mecánica, produciendo fuerza y desplazamiento según se requiera. En comparación con los excitadores mecánicos e hidráulicos, pueden operar en un amplio rango de frecuencias (5Hz-14Khz), con buenos niveles de aceleración y velocidad, aunque sus niveles de fuerzas y desplazamientos son limitados. Su aplicación en procesos productivos industriales y ensayos de laboratorio es numerosa, lo que los convierte en equipos de interés.

Si bien su invención no es reciente, numerosas patentes dan cuenta que su estudio continúa hasta la fecha. Efromson (1957) presentó la patente *Electrodynamic vibration test equipment* donde describe los componentes y el funcionamiento de un prototipo de shaker. Hunt (1962) patenta el proceso de pegado en el armado de la armadura. Brown (1965) describe un montaje en la armadura que tiene por objeto reducir el volumen de material en el gap que no genera fuerza y proporcionar una mejor disipación de calor en la bobina. Schloss (1966) patenta la idea de tabla suspendida por restricciones elásticas. Grootenhuis (1966) describe una forma constructiva de la armadura que le permite funcionar satisfactoriamente a frecuencias relativamente altas a partir de una rígida unión de la bobina móvil a la armadura y de una elevada resonancia de la mesa. Larsen (1967) patenta un sistema de control que regula la corriente de excitación según la velocidad y desplazamiento de la armadura. Masuda (1969) propone en su patente un conjunto de núcleos I y E, que aumenta la relación potencia peso. También da una expresión de la fuerza. Zamparo (1970) presenta un elemento móvil cuya frecuencia natural más baja es elevada mediante bandas de un material de elevado módulo de elasticidad, como el Berilio, que interconectan la bobina con la mesa. Gearng (1970) exhibe vigas que actúan como elementos de suspensión de la armadura. Yamada (1977) presenta un mini shaker que excita una silla, arquetipo de las sillas para gamers. Lerwill (1980) presenta un dispositivo que se coloca en la mesa del shaker para ajustar su impedancia mecánica de salida. Para esto desarrolla un modelo eléctrico y un modelo mecánico equivalente, que relaciona con una serie de ecuaciones. Emerson (1985) reclama un procedimiento constructivo de la armadura empleando fibra de carbono, fibra de vidrio con resinas epóxicas y un sistema de refrigeración con agua. Butts (1987) patenta una guía lineal de bolas recirculantes para guiar el movimiento de la armadura y mesa. En otra, propone una estructura de panel de abeja combinada con laminados para aumentar las frecuencias de resonancias de la armadura. También

registra una patente de un brazo de suspensión de 3 miembros que permiten el movimiento vertical de la armadura y previene el lateral. Stuart (1994) propone un parlante de imanes permanentes en una nueva disposición. Lucas (1994) presenta elementos de suspensión circunferenciales. Fukuoka (1996) presenta un aparato para inducir vibraciones en asientos de automóviles. Leist (2000) presenta elementos de suspensión en un ensamblaje flexible que disminuye el ruido y el rozamiento. Lee (2001) describe un aparato capaz de producir sonido y vibraciones. Crowson (2006) patenta un shaker robusto de pequeña altura, con resorte distribuido. Clamme (2016) presenta shakers compuestos por imanes permanentes, bobinas electromagnéticas y un resorte espaciador formado por materiales elastómeros.

Varios artículos tratan el tema de la transducción eléctrico-mecánica que es común a shaker y parlantes. Yorke (1970) presenta los principios de la transducción eléctrica-mecánica que es utilizada en los shakers. Tomlinson (1979) analiza la distorsión al usar excitadores electrodinámicos. Lang (1997) explica los fundamentos de los shakers mediante ensayos. Lang (2001) desarrolla un modelo con acople mecánico eléctrico de 3 gdl para comprender el comportamiento de los shakers y da una estimación del desempeño de los equipos. Varoto et al. (2002) analiza la interacción entre el shaker y la estructura bajo test, para esto desarrolla un análisis del shaker como un modelo de 2 gdl. Klippel (1999) presenta modelos para las mediciones de parámetros lineales, no lineales y térmicos de woofer. Klippel (2000) analiza la distorsión en parlantes. Peres et al. (2010, 2011) presentan los principios de funcionamiento de shakers y los aspectos prácticos del análisis modal experimental. Waimer et al. (2016) desarrolla un modelo para el shaker de 5 gdl y realiza un análisis modal experimental sobre la cabeza expansora y vigas. Tiwari et al. (2017) desarrolla un modelo para simular el comportamiento de un shaker y mide parámetros eléctricos y mecánicos. Lütkenhöner (2017) desarrolla diferentes modelos para caracterizar un shaker para aplicaciones en salud. Raffo y Carrizo (2018) presentaron el diseño y construcción de un sistema electromagnético para inducir vibraciones Forzadas. Algunos libros, como Ewins (1984), se presentan los principios de funcionamiento de los shakers y otros, como Borwick (2001), tratan sobre parlantes

### A10.3.1 Componentes y principio de funcionamiento

El principio de funcionamiento de los excitadores electrodinámicos es similar al de los parlantes. La corriente continua que circula por la bobina primaria ( $i_{bp}$ ) produce un flujo magnético fijo ( $\Phi$ ), que circula a través del núcleo ferromagnético. La bobina secundaria se encuentra suspendida en el campo magnético radial que existe en el entrehierro. Cuando circula por ella una corriente portadora de la señal de excitación ( $i_{bs}$ ), se produce una fuerza axial ( $F_M$ ) que provoca el movimiento de la armadura que esta solidaria al artículo de prueba. Ver Figura A10.14

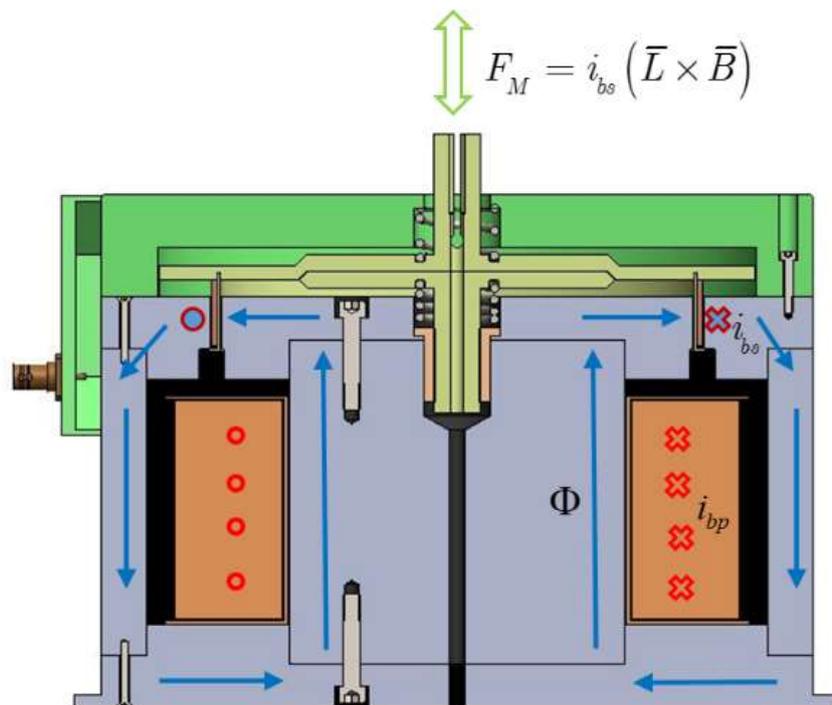


Figura A10.14– Principio de funcionamiento del excitador electrodinámico de electroimán.

En la Figura A10.15 se muestra el despiece del prototipo propuesto. La bobina primaria (Fig A10.15-a) es la encargada de producir un intenso campo magnético, cuyo flujo circulara a través del circuito magnético fabricado de un material ferromagnético. El mismo está conformado por cinco piezas: la tapa inferior (Fig A10.15-b), un núcleo central (Fig A10.15-c), un tubo exterior (Fig A10.15-d), la tapa superior exterior (Fig A10.15-e) y la tapa superior central (Fig A10.15-f). Entre la tapa superior exterior y central, existe un espacio de aire o entre hierro, por donde salta el campo

magnético entre los polos. En dicho gap, se aloja la bobina secundaria (Fig A10.15-g) que se encuentra solidaria al respaldo y la mesa, conjunto que se conoce como armadura (Fig A10.15-h). La misma está suspendida alrededor de una posición de equilibrio mediante resortes (Fig A10.15-i). El resorte superior se apoya en la tapa externa (Fig A10.15-j). Para prevenir el movimiento lateral de la armadura, la misma presenta un eje que se desliza entre 2 bujes (Fig A10.15-k), uno colocado en la tapa externa y el otro alojado en el núcleo central. Sobre la mesa es ajustado el stinger, que es una barra que hace de nexo mecánico entre el shaker y la estructura bajo ensayo. Finalmente se observan los apoyos (Fig A10.15-l) de los maguitos para posicionar el dispositivo y la bornera (Fig A10.15-m) para conexión del dispositivo a la fuente de energía y la señal de excitación.

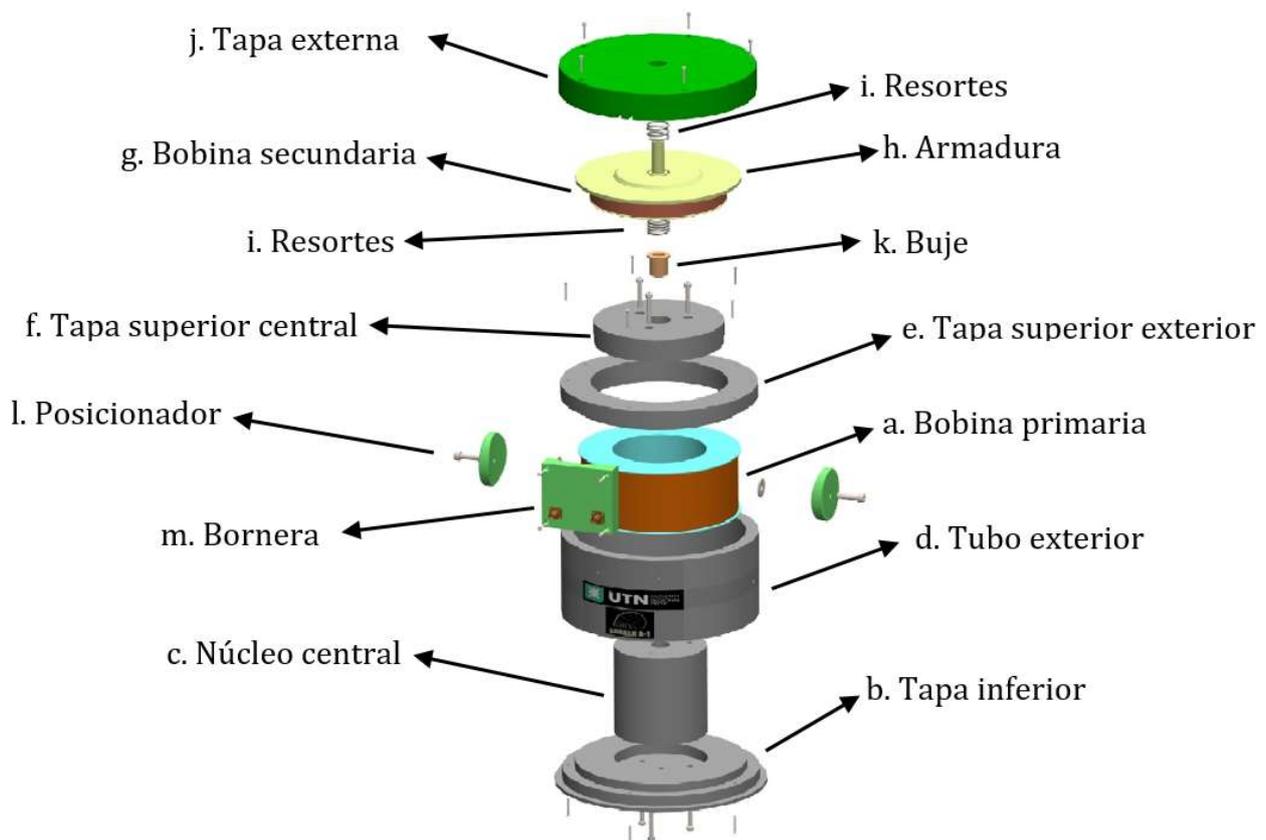


Figura A10.15– Despiece del excitador electrodinámico de electroimán.

### A10.3.2 Ecuaciones de diseño

Los factores limitantes de diseño son la carrera de la mesa (desplazamiento máximo), la velocidad máxima, la fuerza máxima, el rango de operación, la masa en movimiento y la masa total del shaker, el límite de potencia térmica de la bobina y la tensión mecánica que determina factor de seguridad de la armadura.

A partir de leyes fundamentales del electromagnetismo (Serway, 2015), se deducen las principales ecuaciones de diseño. La reluctancia magnética del circuito magnético ( $\mathfrak{R}_T$ ) se obtiene como la suma de reluctancias en serie, las que depende de la permeabilidad magnética ( $\mu$ ), del camino medio recorrido por el flujo ( $L_m$ ) y de la sección ( $S_e$ ). Debido a que la permeabilidad del aire es muy baja en comparación a la de un material ferromagnético, la reluctancia del núcleo se vuelve despreciable frente a la del gap de aire. La que está dada por el espacio del ente hierro ( $e_{eh}$ ), la permeabilidad del aire ( $\mu_0$ ) y la sección del entrehierro ( $S_{eh}$ ). La sección media del entrehierro puede expresarse a partir de del diámetro medio del entrehierro ( $\phi_{meh}$ ) y la altura del entrehierro ( $h_{eh}$ ).

$$\mathfrak{R}_T = \sum_{i=1}^N \frac{L_i}{\mu_i S_i} = \left( \sum_{i=1}^N \frac{L_{acero}}{\mu_{acero} S_{acero}} \right) + \frac{e_{eh}}{\mu_0 S_{eh}} \approx \frac{e_{eh}}{\mu_0 S_{eh}} = \frac{e_{eh}}{\mu_0 \pi \phi_{meh} h_{eh}} \quad A10.19$$

El flujo magnético ( $\Phi$ ) es una función de la densidad de campo magnético ( $B$ ) y la sección perpendicular a las líneas de campo,  $\Phi = BS_e$ . Por su parte, la fuerza magnetomotriz ( $F_{mm}$ ) está dada por la relación entre el flujo magnético ( $\Phi$ ) y la reluctancia magnética,  $F_{mm} = \Phi \mathfrak{R}_T$ . Igualando ambas se desprende una expresión para hallar la fuerza magnetomotriz requerida ( $F_{mm\_Req}$ ) según un valor dado de la densidad de campo en el entrehierro ( $B_{eh}$ ).

$$\Phi = B_{eh} S_{eh} = \frac{F_{mm}}{\mathfrak{R}_T} \Rightarrow F_{mm\_Req} = B_{eh} S_{eh} \mathfrak{R}_T = \frac{B_{eh} e_{eh}}{\mu_0} \quad A10.20$$

La bobina primaria, cuyo número de vueltas ( $n_{bp}$ ) por donde circula una corriente continua ( $i_{bp}$ ) produce una fuerza magnetomotriz ( $F_{mm\_Prod}$ ) que debe ser superior a la requerida.

$$F_{mm\_Req} = B_{eh} S_{eh} \mathfrak{R}_T \leq F_{mm\_Prod} = n_{bp} i_{bp} \quad A10.21$$

Se debe seleccionar la sección del núcleo ferromagnético ( $S_{NF}$ ) tal que la  $F_{mm}$  producida por la bobina primaria no sature el material seleccionado. Aunque el punto de trabajo óptimo es el valor de densidad de campo que hace máxima la permeabilidad magnética del material ( $B_{\mu\_Max}$ ). Esta sección se debe mantener constante en cada componente del núcleo ferromagnético, con la posibilidad de reducirla en el gap para alcanzar la densidad de saturación.

$$\Phi = B_{\mu\_Max} S_{NF} \Rightarrow S_{NF} = \frac{\Phi}{B_{\mu\_Max}} \quad A10.22$$

La bobina secundaria está suspendida en el campo magnético, cuando la corriente portadora de la señal de excitación ( $i_{bs}$ ) circula a través de ella, se produce una fuerza mecánica ( $F_M$ ) según la ley de Lorentz. Asumiendo un campo magnético radial, perpendicular al flujo de corriente y que la longitud de cable conductor expuesto al campo está dada en función del diámetro medio del entre hierro ( $\phi_{meh}$ ) y el número de vueltas ( $n_{bs}$ ), se arriba a la expresión:

$$F_M = \int_L i_{bs} (d\bar{l} \times \bar{B}) = i_{bs} \bar{L} \times \bar{B} = [B(\pi\phi_{meh} n_{bs})] i_{bs} = K_f i_{bs} \quad A10.23$$

Para obtener linealidad en el movimiento, la bobina debería ser más corta o más larga que la altura del entrehierro. Si fuese más corta, se desaprovecharía campo primario, por lo que el diseño resultaría más pesado y costoso. Siendo más larga que el gap, se aprovecha parte del flujo disperso. Para asegurar cumplir con los requerimientos de carrera máxima ( $\Delta_{Req}$ ), se define una la altura de la bobina secundaria ( $h_{bs}$ ) según:

$$h_{bs} = h_{eh} + \Delta_{Req} \quad A10.24$$

Existen 3 modos de vibración a considerar en el diseño de un shaker: El modo de aislación, el modo de suspensión y el modo de bobina. El modo de aislación está asociado a la vinculación del excitador con el suelo, ocurre a muy bajas frecuencias. El modo de suspensión, asociado al

movimiento relativo de la armadura respecto del cuerpo del shaker, ocurre entre 4 y 40 Hz. Se considera que la mesa y la bobina se mueven juntas con relación al cuerpo shaker. El modo de bobina sucede a altas frecuencias cuando la estructura de la armadura entra en resonancia, la bobina y la mesa se mueven fuera de fase, por lo que la armadura se deforma elásticamente produciendo elevadas tensiones, que puede provocar la falla del componente. El funcionamiento en zonas próximas a estas resonancias es perjudicial para la vida útil del equipo. Por lo que, en general, el rango de operación del shaker está comprendido entre el modo de suspensión y el modo de bobina. (Tomlinson, 1979; Stuart, 1994; Lang, 2001; Varoto, 2002).

La frecuencia natural del modo de suspensión puede estimarse a partir de la rigidez equivalente ( $k_{eq}$ ) de los elementos de suspensión y de la masa total de la armadura ( $M_{eq}$ ), que se obtiene como la suma de la masa de la bobina de cobre ( $M_{bs}$ ), la masa del respaldo ( $M_{r\_bs}$ ) y la masa de la tabla o mesa ( $M_m$ ) (Lütkenhöner, 2017).

$$\omega_s = 2\pi f_s = \sqrt{\frac{k_{eq\_s}}{M_{eq\_s}}} \Rightarrow f_s = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k_{eq\_s}}{M_{eq\_s}}} \quad A10.25$$

Si la armadura se considera como una barra, cuya rigidez equivalente ( $k_{eq\_A}$ ) está dada en función del área ( $A$ ), el módulo de elasticidad longitudinal ( $E$ ) y el largo de la misma ( $L$ ), tal que  $k_{eq\_A} = EA/L$ . Cuya masa está en función de la densidad del material ( $\delta$ ) y del volumen,  $M_{eq\_A} = \rho AL$ . Se arriba a una ecuación que estima la frecuencia de la armadura, que está fuertemente influenciada por las propiedades del material y el largo de la misma (Hunt, 1962; Brown, 1965; Grootenhuis, 1966; Zamparo, 1970; Emerson, 1985).

$$\omega_A = 2\pi f_A = \sqrt{\frac{k_{eq\_A}}{M_{eq\_A}}} \Rightarrow f_A = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{EA/L}{\delta AL}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{E}{\delta L^2}} \quad A10.26$$

La velocidad máxima ( $V_M$ ) de la mesa vacía no es una limitación estructural, sino eléctrica que se obtiene a partir de analizar la potencia ( $P_M$ ) e involucra el voltaje máximo del amplificador ( $e_{Amp\_M}$ ), la máxima corriente que puede soportar la bobina ( $i_{bs\_M}$ ), la resistencia de la bobina ( $R_{bs}$ ) y la fuerza de diseño ( $F_{M\_Req}$ ). Se puede obtener de forma aproximada (Lang, 2001), según:

$$P_M = F_{M\_M} V_M = 2 \left[ (e_{Amp\_M} i_{bs\_M}) - (i_{bs\_M}^2 R_{bs}) \right] \Rightarrow V_M = \frac{2 \left[ (e_r i_{bs\_M}) - (i_{bs\_M}^2 R_{bs}) \right]}{F_{M\_Req}} \quad A10.27$$

### A10.3.3 Análisis cualitativo de las ecuaciones de diseño

- Diámetro óptimo de cable conductor de la bobina secundaria.

Por el cable conductor de la bobina secundaria de diámetro  $(\phi_{c\_bs})$  puede circular una intensidad de corriente máxima  $(i_{bs\_M})$ , tal que  $i_{bs\_M} = 2.242 \phi_{c\_bs}^2$ . Al igualar el área que ocupan los cables conductores con el área del entrehierro se puede determinar el número total de espiras de la bobina, según  $n_{bs} = e_{eh} h_{eh} / \phi_{c\_bs}^2$ . Reemplazando estas expresiones en la Ecuación A10.23, se desprende que la fuerza producida es independiente del diámetro del cable conductor y es dependiente de los parámetros del entrehierro y de la densidad de campo.

$$F_M = [B_{eh} (\pi \phi_{meh} n_{bs})] i_{bs} = \pi \phi_{meh} B_{eh} \left( \frac{e_{eh} h_{eh}}{\phi_{c\_bs}^2} \right) (2.2 \phi_{c\_bs}^2) = 2.2 \pi \phi_{meh} e_{eh} h_{eh} B_{eh} \quad A10.28$$

- Altura del entre hierro óptima.

Al suponer que se tiene 2 tapas del núcleo ferromagnético, de igual diámetro medio  $\phi_{meh1} = \phi_{meh2}$ , una de altura mayor  $h_{eh2}$  que la otra  $h_{eh1}$ . Las secciones del entrehierro están dadas respectivamente por  $S_{eh1} = \pi \phi_{meh1} h_{eh1}$  y  $S_{eh2} = \pi \phi_{meh2} h_{eh2}$ . Si la densidad de flujo magnético se mantiene constante implica que existe una relación entre las densidades de campo dadas por  $\Phi = B_1 S_{eh1} = B_2 S_{eh2} \Rightarrow B_2 = (\phi_{meh1} h_{eh1} B_1) / (\phi_{meh2} h_{eh2})$ . Al reemplazar esta expresión en la Ecuación A10.28 se obtiene

$$F_{M1} = 2.2 \pi \phi_{meh1} e_{eh} h_{eh1} B_1 = F_{M2} = 2.2 \pi \phi_{meh2} e_{eh} h_{eh2} \frac{\phi_{meh1} h_{eh1}}{\phi_{meh2} h_{eh2}} B_1 \quad A10.29$$

De la cual se deduce que aumentar la altura del entrehierro se produce una disminución de la densidad de campo magnético, tal que a pesar de aumentar en número la cantidad de espiras de la bobina secundaria, la fuerza magnética se mantiene constante.

- Diámetro medio del entrehierro óptimo.

Al comparar la relación de densidad de campos de secciones del entrehierro ( $S_{eh}$ ) de igual altura ( $h_{eh}$ ) y diferentes diámetros medios ( $\phi_{meh}$ ), siendo  $S_{eh} = \pi\phi_{meh}h_{eh}$ , se obtiene  $B_1S_1 = B_2S_2 \Rightarrow B_2 = \phi_{meh1}B_1/\phi_{meh2}$ . Siguiendo el mismo procedimiento que en A10.29 se llega a:

$$F_{M1} = 2.2\pi\phi_{meh1}e_{eh}h_{eh}B_1 = F_{M2} = 2.2\pi\phi_{meh2}e_{eh}h_{eh}\frac{\phi_{meh1}}{\phi_{meh2}}B_1 \quad A10.30$$

Se pone de manifiesto que, al aumentar el diámetro medio, aumenta el área del entrehierro y disminuye la densidad de campo; por lo tanto, la fuerza magnética permanece constante.

- Espacio entrehierro óptimo.

El número de espiras horizontales ( $n_{h\_bs}$ ) que pueden entrar en el entrehierro está dado por  $e_{eh} = n_{h\_bs}\phi_{c\_bs}$ . Al aumentar el entrehierro, lo hace la reluctancia magnética y por lo tanto disminuye el flujo según  $\Phi = F_{mm}/\mathbb{R} = F_{mm}/(e_{eh}/\mu_0S_{eh})$ . A su vez, el flujo está dado por  $\Phi = B_{eh}S_{eh}$ . Al igualar estas expresiones se obtiene  $B_{eh} = (\mu_0F_{mm})/e_{eh}$ . Al remplazar dicha expresión en la Ecuación A10.23, se alcanza

$$F_M = \pi\phi_{meh}B_{eh}n_{bs}i_{bs} = \pi\phi_{meh}\left(\mu_0\frac{F_{mm}}{e_{eh}}\right)\left(\frac{e_{eh}}{\phi_{c\_bs}}\right)(2.2\phi_{c\_bs}^2) = 2.2\pi\mu_0\phi_{meh}\phi_{c\_bs}F_{mm} \quad A10.31$$

Se evidencia que la Ecuación A10.31 es una expresión de la Ecuación A10.23 que no depende de la distancia del entrehierro. Esto implica que aumentar el espacio del entrehierro produce una disminución de la densidad de campo magnético, tal que a pesar de aumentar en número la cantidad de espiras de la bobina secundaria, la fuerza magnética se mantiene constante.

### A10.3.4 Selección de materiales

- Núcleo Ferromagnético.

En la curva de magnetización de materiales ferromagnéticos, densidad de campo ( $B$ ) vs intensidad de campo ( $H$ ), se observa el efecto de saturación donde  $B$  continúa aumentando, pero de manera paramagnética (tres órdenes de magnitud más pequeña). Su permeabilidad magnética relativa ( $\mu_r$ ) no es constante, se incrementa con  $H$  hasta un máximo y mientras se aproxima a la saturación la curva decrece. Por otra parte,  $\mu_r$  disminuye al aumentar la frecuencia y la temperatura. Las pérdidas magnéticas en el núcleo se pueden dar por histéresis o por corrientes parásitas. En el caso de histéresis, los materiales magnéticos blandos son fáciles de imantar y desimantar presentando curvas de histéresis de apariencia estrecha con bajos campos coercitivos y alta saturación, teniendo altas permeabilidades magnéticas. Las pérdidas por corrientes parásitas son función del espesor de la chapa al cuadrado, por lo que los circuitos magnéticos son “laminados” para reducir los caminos de las pérdidas (Serway, 2015). En la selección de un material para el núcleo ferromagnético se considera deseable una alta densidad de saturación, una alta permeabilidad y bajas pérdidas por histéresis y corrientes parásitas (Raffo y Carrizo, 2018). En la Tabla 4 se presentan materiales típicos para la fabricación de núcleos ferromagnéticos.

MATERIAL	$\mu_{Max} (TmA^{-1})$	$B_{Sat} (T)$
Acero laminado en frío	2000	2.10
Hierro	5000	2.15
Hierro purificado	180000	2.15
Hierro 4% silicio (g.o.)	30000	2.00
Permalloy 45	50000	1.60
Supermalloy	800000	0.80
Permendur	5000	2.45
Hiperco	10000	2.42

Tabla A10.4 – Materiales para la fabricación de núcleos ferromagnéticos.

Debido a que el campo magnético es continuo, no se producen importantes pérdidas por histéresis o corrientes parásitas. Por lo tanto, no se necesita de aislamiento interlaminar o de un acero al sílice tipo para transformadores. Se ha seleccionado acero dulce, porque si bien su permeabilidad no es alta en comparación a otros, la mayor reluctancia se da en el gap. Además, posee una densidad de saturación similar a materiales más costosos. Por otra parte, tiene una gran disponibilidad, buena maquinabilidad y bajo costo.

- Cables conductores bobina secundaria.

El mejor material para el cable conductor de la bobina secundaria es el que tenga el menor producto densidad ( $\delta$ ) - resistividad ( $\rho$ ). Aunque la conductividad del aluminio es apenas el 60% del cobre, su peso específico es 3 veces menor; lo que lo hace ideal desde el punto de vista técnico (Borwick, 2001). Pero su coste es elevado frente al de los cables de cobre, por esto se han seleccionado éste último. Ver Tabla A10.5

MATERIAL	$\delta$ (kgf/m <sup>3</sup> )	$\rho$ ( $\Omega m$ )	$\delta\rho$ (kgf $\Omega$ /m <sup>2</sup> )
Aluminio	2.7 X 10 <sup>3</sup>	2.67 X 10 <sup>-8</sup>	7.21 X 10 <sup>-5</sup>
Cobre	8.96 X 10 <sup>3</sup>	1.6 X 10 <sup>-8</sup>	14.34 X 10 <sup>-5</sup>
Plata	10.4 X 10 <sup>3</sup>	1.59 X 10 <sup>-8</sup>	16.54 X 10 <sup>-5</sup>

Tabla A10.5 – Materiales conductores para cables

- Material del respaldo de la bobina secundaria.

La bobina disipa energía en forma de calor según el cuadrado de la corriente. El respaldo que la sostiene debe ser capaz de resistir este aumento de la temperatura. En parlantes de alta potencia se emplean diferentes materiales tales como las poliamidas Nomex, que es capaz de resistir 150°C, o Kapton, que soporta temperaturas de hasta 350°C. También se puede emplear fibra de carbono o aluminio dejando un gap para evitar la formación de corrientes parasitas. (Borwick, 2001).

- Armadura.

En la Ecuación A10.26 se arribó a que la frecuencia de la armadura está fuertemente influenciada por las propiedades del material según la velocidad de propagación de ondas en medios sólidos  $c = \sqrt{E/\rho}$ . En la Tabla A10.6 se presenta materiales utilizados para la fabricación de armaduras. El Berilio tiene una buena resistencia estructural, baja densidad y alto módulo de elasticidad, lo que le da alta velocidad de propagación de ondas y altas frecuencias resonantes. Es el material ideal pero también excepcionalmente costoso.

Se optó por un diseño de armaduras intercambiables. Una de acrilonitrilo butadieno estireno (ABS) por sus costos y porque permite una simple manufactura utilizando impresoras 3D. La otra, maquinada en aluminio ya que tiene propiedades muy superiores al ABS, aunque no alcance las del Berilio y con un coste mucho menor a éste último.

MATERIAL	$E$ (GPa)	$\rho$ (kg/m <sup>3</sup> )	$c$ (m/s)	$\sigma$ (MPa)
ABS	2.4	1050	1512	41
PA	2.6	1130	1516	78
Titanio	114	4540	5011	1040
Aluminio	69	2700	5050	483
Magnesio	45	1738	5088	250
Acero	200	7850	5148	841
Alúmina	375	3900	9805	370
Berilio	303	1840	12800	448

Tabla A10.6 – Propiedades de materiales utilizados para fabricar armaduras.

### A10.3.5 Análisis de elementos finitos de la armadura

Establecidos los parámetros constructivos que se desprenden de la aplicación de las ecuaciones de diseño, el software de diseño asistido por computadora conocido como SolidWorks fue utilizado para realizar el modelado tridimensional del prototipo; detallando cada pieza, subconjunto y ensamble. El método de los elementos finitos fue empleado para verificar el diseño mecánico. Diferentes tipos de mallados, densidad de malla y condiciones de borde fueron probados arribando a resultados convergentes. Elementos sólidos tetraédricos de segundo orden fueron utilizados en todas las simulaciones.

En la Figura A10.16 se muestran los resultados de un análisis estático lineal para poder determinar las tensiones presentes en la armadura del shaker. Se consideró una carga equivalente

a la máxima fuerza producida, distribuida en la superficie de contacto de la armadura con la bobina secundaria y un empotramiento en la zona de contacto del stinger con la armadura. Se propuso un diseño de la armadura sin y con nervaduras de refuerzos.

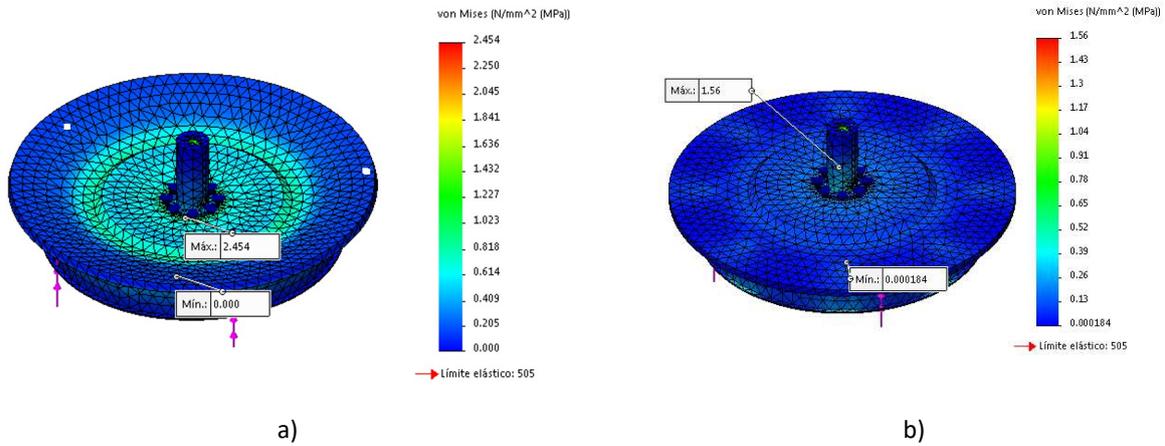


Figura A10.16– Análisis de tensiones en la armadura a) Sin nervaduras. b) Con nervaduras.

Por otra parte, se realizó un análisis modal para determinar las primeras frecuencias y modos naturales de vibración de la armadura, en particular el modo axial que está asociado al modo de bobina que limita el rango de frecuencias de funcionamiento. A fin de establecer una comparativa, se consideraron 4 casos de estudio, empleando 2 materiales diferentes y un diseño con y sin nervaduras rigidizadoras. Los materiales seleccionados fueron el polímero ABS y el aluminio 7075 – T6. Ver Figura A10.17

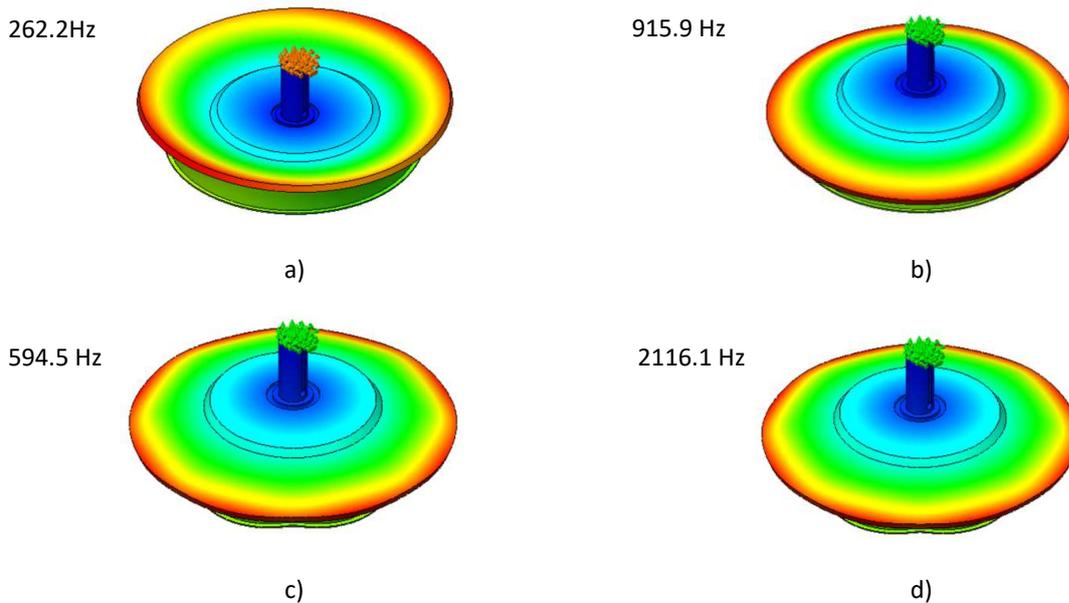


Figura A10.17– Análisis modal de la armadura. a) ABS sin nervaduras. b) Aluminio 7075 sin nervaduras. c) ABS con nervaduras. d) Aluminio 7075 con nervaduras.

### A10.3.6 Diseño definitivo, parámetros y consideraciones constructivas

Se diseñó un prototipo de excitador electrodinámico de baja potencia y bajo costo. El equipo dispone de una fuerza máxima de 85 N, desplazamiento máximo de 5 mm y puede operar en un rango de frecuencias entre 7 Hz y 2.1kHz. Su masa total es de 70Kg y su masa móvil es de 1.1Kg. En la Figura A10.18 se muestra una imagen del diseño definitivo.

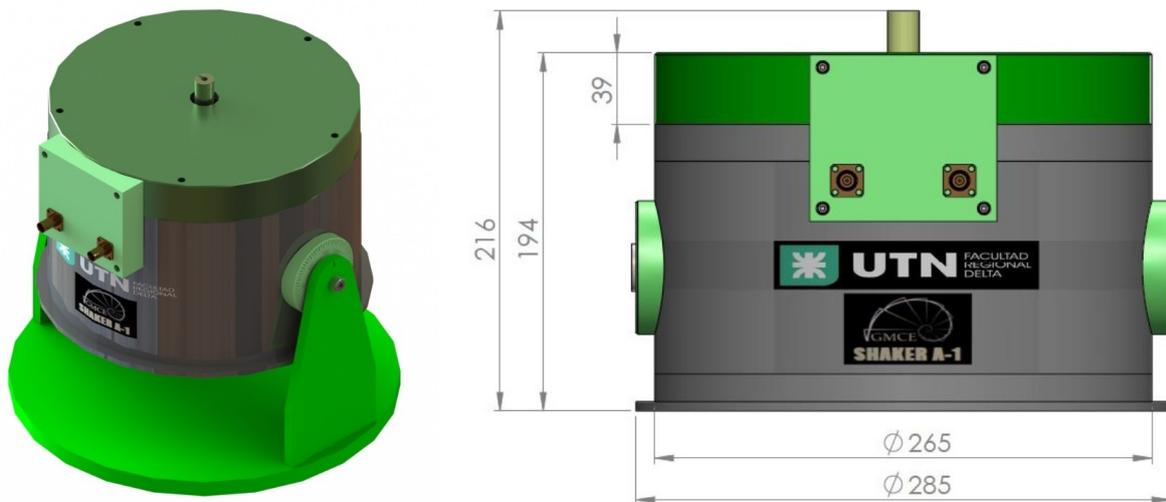


Figura A10.18– Diseño definitivo de prototipo de excitador electrodinámico de electroimán.

De la Ecuación A10.19 se observa que, para reducir la reluctancia, y por lo tanto la bobina primaria, es preferible disminuir al máximo el espacio del entrehierro y ampliar la altura y el diámetro medio del entrehierro. Para permitir el movimiento axial de la armadura, es necesario dejar un juego interior y exterior entre la bobina y los polos. Aunque se debe reducir al máximo el volumen del gap que no produzca fuerza magnética útil. Cables cuadrados requieren de un menor gap que uno de sección circular de igual área. Si la sección fuese rectangular, se puede disminuir el gap entre 10 y 15%. Si además fuera auto soportado, lo que implica eliminar el respaldo, el ahorro de espacio puede llegar al 25% (Borwick, 2001). Pero cables con estas secciones, son de mayor costo, por lo que se optó por los típicos de sección circular. Se ha seleccionado cables de bajo diámetro ya que alcanzan mismos valores de densidad de campo con menores corrientes (Raffo y Carrizo, 2018).

Para evitar distorsión en el campo es necesario que exista una distribución simétrica de flujo en el gap. Para esto es necesario un diseño del núcleo ferromagnético apropiado, dejando suficiente distancia en los cambios de dirección del flujo como para que el mismo sea homogéneo (Borwick, 2001). Radios de curvatura agudos, implican caminos magnéticos más cortos, lo que lleva a que se concentren las líneas de campo, lo que puede producir la saturación local y la subutilización del resto de material. Por esto, deben evitarse (Raffo y Carrizo, 2018).

Debido a que el propósito del shaker es realizar ensayos de análisis modal experimental en pequeñas estructuras de laboratorio, no se incluyó cabeza expansora y se unificó en una sola pieza la mesa y armadura junto al carretel de la bobina primaria. Esto permite acortar el componente elevando su frecuencia de resonancia.

En el diseño se contempló una armadura de agujero pasante para facilitar la colocación del stinger. El shaker está sostenido por un sistema de posicionamiento de coordenadas esféricas, lo que lo dota de una gran versatilidad en la ejecución de ensayos.

En la Tabla A10.7 se presentan los principales parámetros constructivos del prototipo diseñado.

Gap	$\phi_{meh}$ (mm) 180	$e_{eh}$ (mm) 4	$h_{eh}$ (mm) 20	$B_{eh}$ (T) 2.0
Bobina secundaria	$\phi_{c\_bs}$ (mm) 0.37	$i_{bs\_Max}$ (A) 0.3	$n_{bs}$ 307	$M_{armadura}$ (kg) 1.1
Bobina primaria	$\phi_{c\_bp}$ (mm) 1.024	$i_{bp\_Max}$ (A) 2.35	$n_{bp}$ 3200	$S_{NF}$ (mm <sup>2</sup> ) 12227

Tabla A10.7 – Principales parámetros constructivos de shaker electrodinámico.

### ***A10.3.7 Conclusiones***

Se presentan las ecuaciones de diseño para un excitador electrodinámico de doble campo magnético, cuyo campo primario es producido por un electroimán.

Mediante un análisis cualitativo de las ecuaciones propuestas, se extrajeron importantes consideraciones sobre el diseño de excitadores electrodinámicos.

Partiendo de los requerimientos propuestos, se aplicaron las ecuaciones de diseño para definir los parámetros constructivos del prototipo. Se seleccionaron los materiales del núcleo ferromagnético, los cables conductores, el material del respaldo y de la armadura.

Se realizó el modelado tridimensional utilizando software CAD y se verificó el diseño utilizando análisis por elementos finitos. Se concluyó que las tensiones en la armadura son muy bajas y el factor limitante en el diseño de la misma será su rigidez. Las nervaduras rigidizadoras fueron de mucha utilidad a este fin.

Se diseñó un prototipo de excitador electrodinámico de baja potencia y bajo costo. Aproximadamente el 35% de un equipo comercial de similares características en cuanto rango de operación y fuerza. El equipo dispone de una fuerza máxima de 85 N, desplazamiento máximo de 5 mm y puede operar en un rango de frecuencias entre 7 Hz y 2.1kHz.

#### A10.4 Desarrollo de excitador electrodinámico de imán permanente

Un shaker de imanes permanentes es también un equipo para inducir vibraciones. Es similar al excitador electromagnético de electroimán salvo que, en lugar de éste, el campo primario es producido por un imán permanente.

Los excitadores con menor tamaño alcanzarán frecuencias muy altas, pero fuerzas máximas bajas, mientras que excitadores de mayor tamaño conseguirán fuerzas grandes y frecuencias pequeñas.

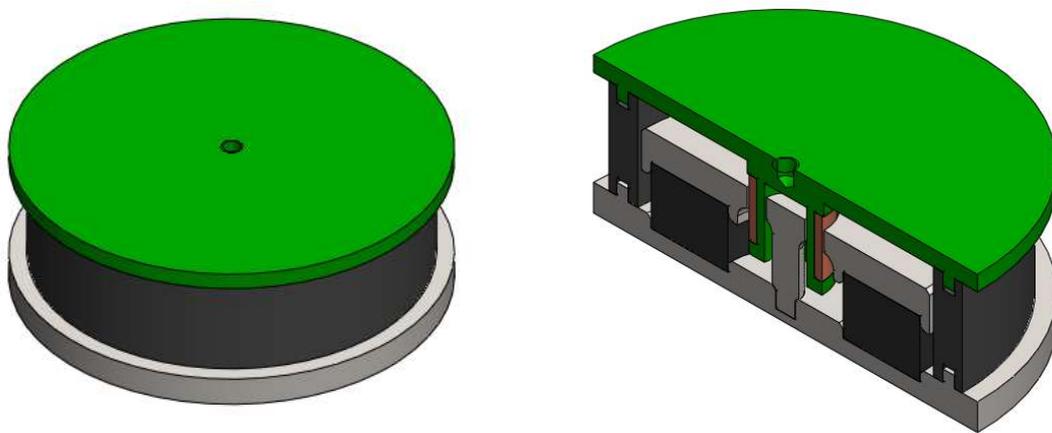


Figura A10.19– Diseño de prototipo de excitador electrodinámico de imanes permanentes.

Sus principales características pueden resumirse en:

- Pequeño tamaño. (Mejor disposición).
- Bajo costo.
- Baja fuerza, para pequeñas estructuras o análisis de múltiple entrada (MISO – MIMO).
- Pequeños desplazamientos.
- Buen rango de frecuencias.

### A10.4.1 Componentes y principio de funcionamiento

Un imán permanente, de forma anular, con polaridad en las caras superior e inferior, cuyo material es conocido como tierras raras; actúa como fuerza magnetomotriz. La capacidad de dicha fuerza magnetomotriz depende del volumen del imán y sus propiedades magnéticas (BH). Tres piezas de acero dulce componen el núcleo ferromagnético: la tapa inferior, un núcleo central y la tapa superior. Las tapas superiores se posan por sobre el imán, mientras que la tapa inferior sostiene al imán y al núcleo central. Entre la parte superior del núcleo ferromagnético central y la tapa superior, existe un gap de aire. Así queda conformado el circuito magnético; cuya reluctancia magnética depende principalmente del gap. En dicho gap, se posiciona una bobina de cable conductor, por donde circula una corriente que responde a la señal de excitación. Cuando la corriente circula por la bobina que, al estar ubicada en el gap del circuito magnético, se encuentra expuesta al campo magnético, se produce una fuerza según la ley de Lorentz. Esta bobina, esta solidaria a un carretel que se encuentra integrado a la armadura del shaker. En este diseño en particular, la armadura actúa además como tabla de ensayo; por lo que en una sola pieza se integran estos 3 componentes, cuyo material es un polímero de buena rigidez y resistencia mecánica. La armadura/mesa/carretel de bobina son posicionados mediante un elastómero que circunda al imán y actúa como elemento elástico suspensor, el que además actúa como carcasa exterior.

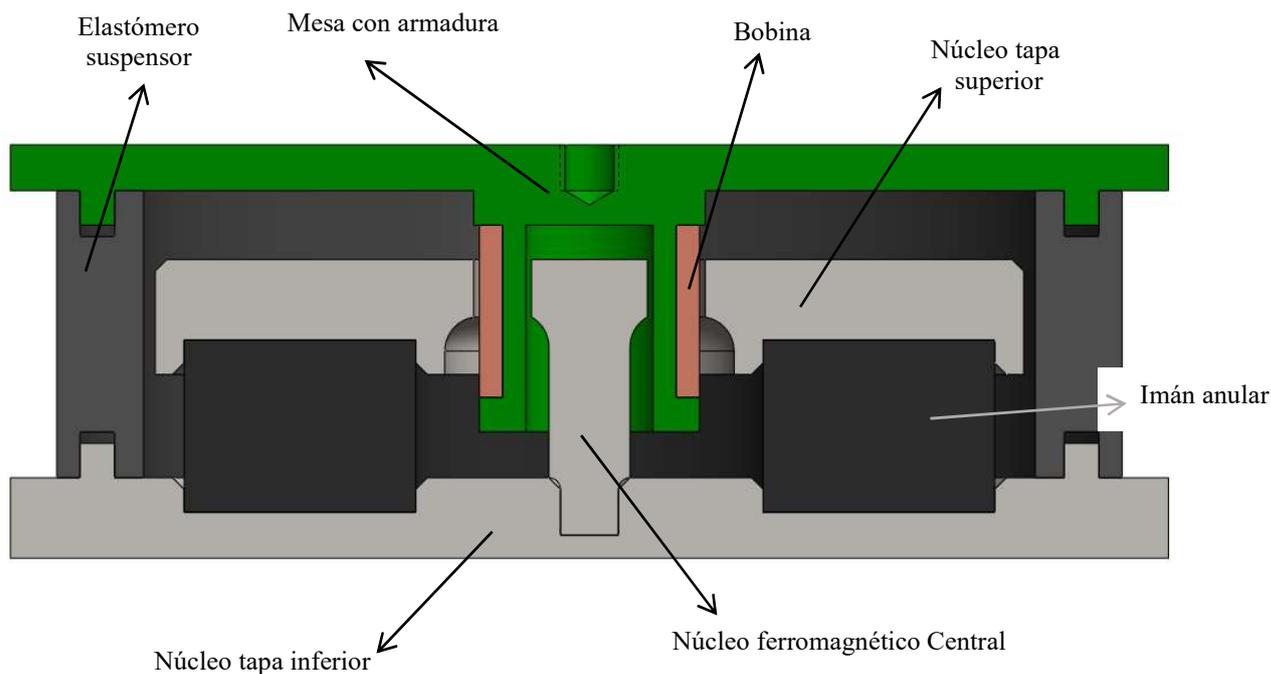


Figura A10.20– Principio de funcionamiento del excitador electrodinámico de electroimán.

### A10.4.2 Ecuaciones de diseño

Los imanes permanentes se construyen utilizando materiales ferromagnéticos con un alto magnetismo remanente ( $B_r$ ), por lo que mantienen una magnetización ( $M$ ) elevada en ausencia de campo magnético externo y, por lo tanto, son capaces de generar una inducción magnética por sí mismos, sin necesidad de que ninguna causa externa dé lugar a una excitación que produzca una intensidad de campo ( $H$ ). Mientras mayor sea el valor del campo coercitivo ( $H_c$ ) más difícil es que el material pierda su magnetización. Estos materiales que presentan una curva de histéresis de gran área se conocen como "duros."

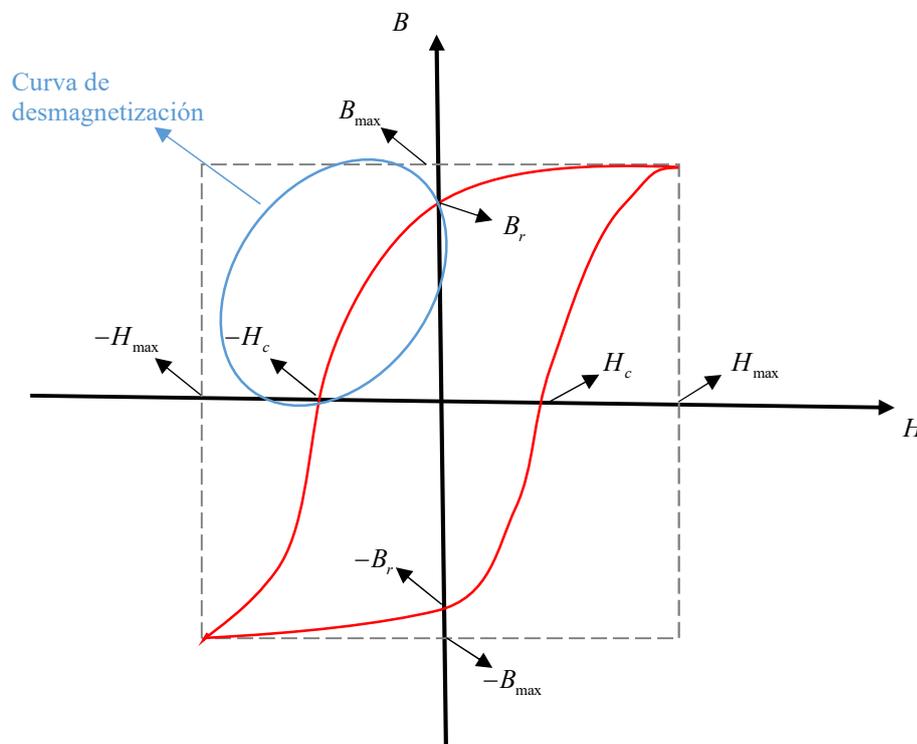


Figura A10.21– Histéresis magnética del material de un imán permanente.

La porción del ciclo de histéresis dentro del segundo cuadrante constituye la curva de desmagnetización. Donde la inducción  $B$  es positiva y la excitación  $H$  es negativa, y por lo tanto según la relación  $B = \mu_0 (H + M)$ , conlleva que la magnetización  $M$  es positiva. (Pozueta, M. A. R.)

En la Figura A10.22 se observa el circuito magnético con un imán permanente. Dicho imán tiene un sección ( $S_{iman}$ ) y una longitud ( $L_{iman}$ ). En cual existe un flujo ( $\Phi_{iman}$ ), una densidad de campo ( $B_{iman}$ ) y una intensidad de campo ( $H_{iman}$ ). Por otra parte, en el entre hierro existe un flujo ( $\Phi_{eh}$ ), una densidad de campo ( $B_{eh}$ ) y una intensidad de campo ( $H_{eh}$ ).

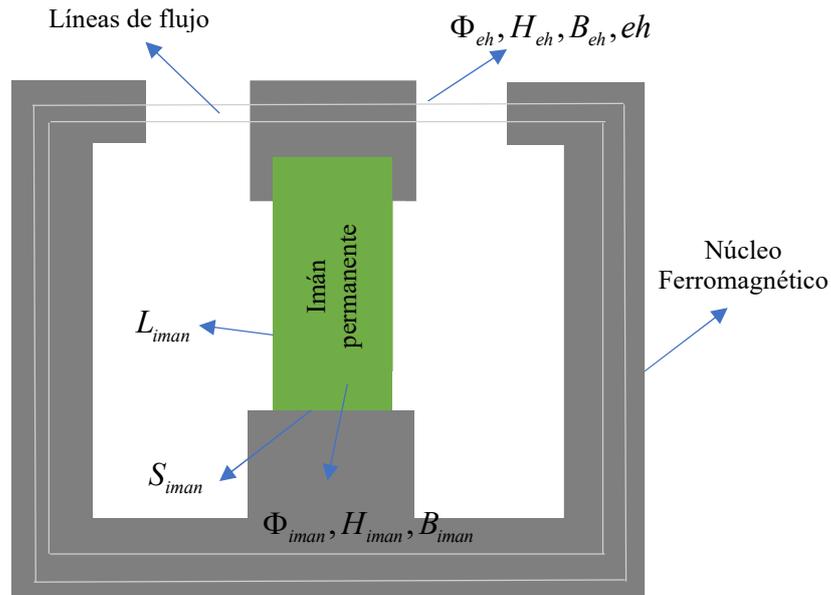


Figura A10.22– Circuito magnético con un imán permanente.

Aplicando el Teorema de Ampere al circuito magnético y teniendo en cuenta que no hay ninguna corriente eléctrica actuando en este circuito magnético, se deduce que

$$H_{iman}L_{iman} + H_{eh}eh = 0 \rightarrow H_{iman} = -\frac{eh}{L_{iman}}H_{eh} \quad A10.32$$

Si no hubiera entrehierro la excitación magnética en el imán  $H_{iman}$  sería nula y, según su curva de desmagnetización, su inducción magnética tendría un valor igual a la remanente  $B_{iman} = B_R$ . El hecho de que el circuito magnético tenga un entrehierro no nulo ( $eh \neq 0$ ) hace que aparezca en el imán una excitación negativa ( $H_{iman} < 0$ ) y que la inducción sea menor que la remanente ( $B_{iman} < B_r$ ).

Como la permeabilidad magnética en el entrehierro es prácticamente igual a la del vacío  $H_{eh} = \frac{B_{eh}}{\mu_0}$ , se obtiene una expresión de la intensidad del campo magnético en el entrehierro que depende de la distancia del entre hierro, el largo del imán y su intensidad de campo.

$$H_{iman} L_{iman} + \frac{B_{eh}}{\mu_0} eh = 0 \Rightarrow B_{eh} = -\mu_0 \frac{L_{iman}}{eh} H_{iman} \quad A10.33$$

Otra forma de deducir esta expresión es a partir de las perdidas por flujo disperso en el entrehierro. El entrehierro se ve atravesado por el flujo útil en el entrehierro  $\Phi_{eh}$ , lo que hace que su inducción sea  $B_{eh}$  y su excitación sea  $H_{eh}$ . El imán tiene un flujo de dispersión  $\Phi_d$  y un coeficiente de Hopkinson  $\nu_m$  por lo que el flujo total  $\Phi_{iman}$  que lo atraviesa es:

$$\Phi_{iman} = \Phi_{eh} + \Phi_d = \nu_m \Phi_{eh} \quad A10.34$$

La inducción y la excitación magnéticas en el imán son  $B_{iman}$  y  $H_{iman}$ , respectivamente. De la relación se deduce que:

$$\Phi_{iman} = \Phi_{eh} + \Phi_d = \nu_m \Phi_{eh} \rightarrow B_{iman} S_{iman} = \nu_m B_{eh} S_{eh} \Rightarrow B_{eh} = \frac{1}{\nu_m} \frac{S_{iman}}{S_{eh}} B_{iman} \quad A10.35$$

Se deduce que para conseguir un valor de inducción en el entrehierro  $B_{eh}$  no es necesario que el imán tenga una inducción  $B_{iman}$  de ese mismo valor. En efecto,  $B_{iman}$  puede ser más pequeña que  $B_{eh}$  y, aun así, se puede obtener el valor deseado para  $B_{eh}$  dando al imán y al entrehierro las secciones  $S_{iman}$  Sm y  $S_{eh}$  adecuadas. Igualando la Ecuación A10.33 con A10.35 se obtiene

$$-\mu_0 \frac{L_{iman}}{eh} H_{iman} = \frac{1}{\nu_m} \frac{S_{iman}}{S_{eh}} B_{iman} \Rightarrow B_{iman} = - \left[ \nu_m \frac{\mu_0}{eh} \frac{S_{eh}}{S_{iman}} L_{iman} \right] H_{iman} \quad A10.36$$

Recordando la expresión de la reluctancia magnética, se puede re expresar como

$$B_{iman} = - \left[ \nu_m \frac{L_{iman}}{S_{iman}} \frac{1}{\mathbb{R}_{eh}} \right] H_{iman} \quad A10.37$$

La relación entre  $B_{iman}$  y  $H_{iman}$  es lineal, cuya ecuación es denominada recta de carga. Por otra parte, las características magnéticas del material con que se fabrica el imán obligan a que, al menos inicialmente, la relación entre estas dos magnitudes sea la mostrada mediante su curva de desmagnetización. Como se tienen que cumplir simultáneamente ambas condiciones, el circuito magnético trabaja en el punto de funcionamiento M obtenido por corte de la curva de desmagnetización del imán y de la recta de carga del circuito magnético. Ver Figura A10.23.

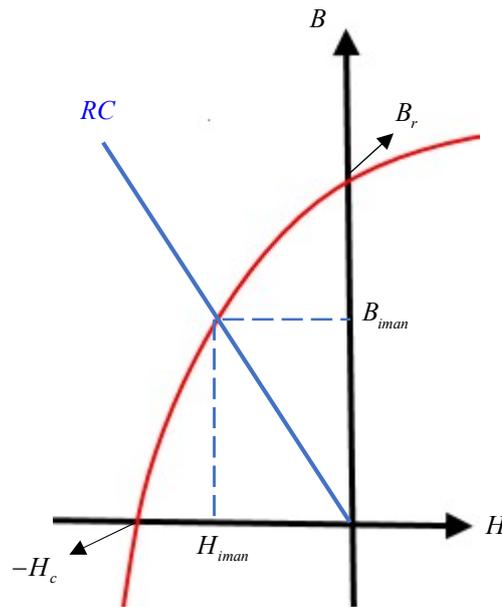


Figura A10.23– Punto de funcionamiento del circuito magnético con imán permanente.

De A10.37 se deduce que  $B_{iman} H_{iman} = - \left[ \nu_m \frac{L_{iman}}{S_{iman}} \frac{1}{\mathbb{R}_{eh}} \right] H_{iman}^2$ . Siendo que

$$B_{eh} = -\mu_0 \frac{L_{iman}}{eh} H_{iman} \rightarrow H_{iman} = -\frac{eh}{\mu_0 L_{iman}} B_{eh} = -\frac{eh}{\mu_0 L_{iman}} \frac{\Phi_{eh}}{S_{eh}} = -\frac{\mathbb{R}_{eh}}{L_{iman}} \Phi_{eh}, \text{ se desprende que}$$

$$B_{iman} H_{iman} = - \left[ \nu_m \frac{L_{iman}}{S_{iman}} \frac{1}{\mathbb{R}_{eh}} \right] \left[ \frac{\mathbb{R}_{eh}}{L_{iman}} \Phi_{eh} \right]^2 = - \left[ \nu_m \frac{\mathbb{R}_{eh}}{L_{iman} S_{iman}} \right] \Phi_{eh}^2 \Rightarrow B_{iman} H_{iman} = - \left[ \nu_m \frac{\mathbb{R}_{eh}}{V_{iman}} \right] \Phi_{eh}^2.$$

Donde  $V_{iman}$  es el volumen del imán y el producto  $(B_{iman} H_{iman})$  se denomina producto energético o producto de energía. De la relación se infiere que, si se tiene un circuito magnético con un entrehierro de dimensiones predeterminadas y, por consiguiente, con un valor fijado para la reluctancia  $\mathbb{R}_{eh}$  y se desea conseguir que, mediante un imán, el flujo magnético en dicho

entrehierro sea  $\Phi_{eh}$ , dicho imán tendrá un volumen mínimo si se trabaja con el valor máximo del producto de energía ( $B_{iman}H_{iman}$ ).

$$V_{iman} = - \left[ \nu_m \frac{\mathbb{R}_{eh}}{B_{iman}H_{iman}} \right] \Phi_{eh}^2 \quad \text{A10.38}$$

### A10.4.3 Selección de materiales

- Imán Permanente.

Las características importantes en la selección de un material para usar en imanes permanentes son:

- Alta remanencia: Cuanto mayor es la remanencia mayor es el flujo magnético que puede crear un imán.
- Alta coercividad: Cuanto mayor es la coercividad es más difícil que el imán se desmagnetice por acciones mecánicas o cambios de temperatura.
- Alto producto  $(BH)_{m\acute{a}x}$ : Cuanto mayor es este valor, se requerirá menos material para producir un dado flujo magnético en un circuito.

Entre los materiales más conocidos se puede mencionar Ferrita Isotrópica, Ferrita Anisotrópica, alnico, Neodimio, Samario, etc.

- Elemento suspensor.

Se decidió que el elemento suspensor fuera fabricado mediante una impresora 3D. El material seleccionado fue el Filamento Flex de Grilon3. Se trata de un caucho sintético También llamados PUR o TPU. Su principal cualidad es poder lograr piezas elásticas, dada su flexibilidad y su condición de elastómero de termoplástico (permite estirarse y retraerse en ciclos muy elevados sin alteraciones dimensionales). Se probaron diferentes parámetros de impresión y se realizaron pruebas hasta dar con una pieza que se comporte adecuadamente.

#### A10.4.4 Otros diseños preliminares de shakers

##### A10.4.4.1 Shaker de simple campo.

A diferencia de los shakers convencionales donde actúan 2 campos magnéticos, en este diseño solo actúa un campo magnético, el cual es variable y es el que produce la fuerza en la armadura/mesa que se encuentra solidaria a la estructura bajo ensayo. A diferencia del excitador electromagnético (antes propuesto) no requiere que la estructura de prueba sea magnética. Pero si requiere estar conectado a la misma.

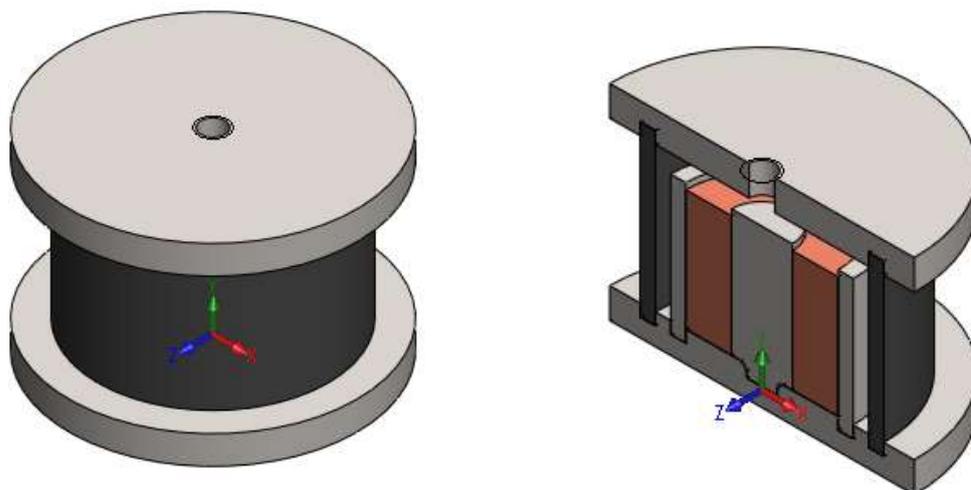


Figura A10.24– Shaker de simple campo.

Características:

- Pequeño tamaño.
- Bajo costo.
- Baja fuerza, para pequeñas estructuras o análisis de múltiple entrada (MISO – MIMO).
- Pequeños desplazamientos.
- Buen rango de frecuencias.

Posibilidad de combinaciones series y paralelos.

Tres piezas de acero dulce componen el núcleo ferromagnético: la tapa inferior, un núcleo central y tubo exterior. Una bobina de cable conductor rodea al núcleo central, por donde circula

una corriente que responde a la señal de excitación. La misma induce un campo magnético variable que recorre el circuito magnético. La armadura/mesa es también de un material ferromagnético. Al estar próxima al campo magnético variable experimenta fuerzas. La armadura se encuentra posicionada mediante un elastómero que circunda a electroimán y actúa como elemento elástico suspensor. Además, actúa como carcasa exterior.

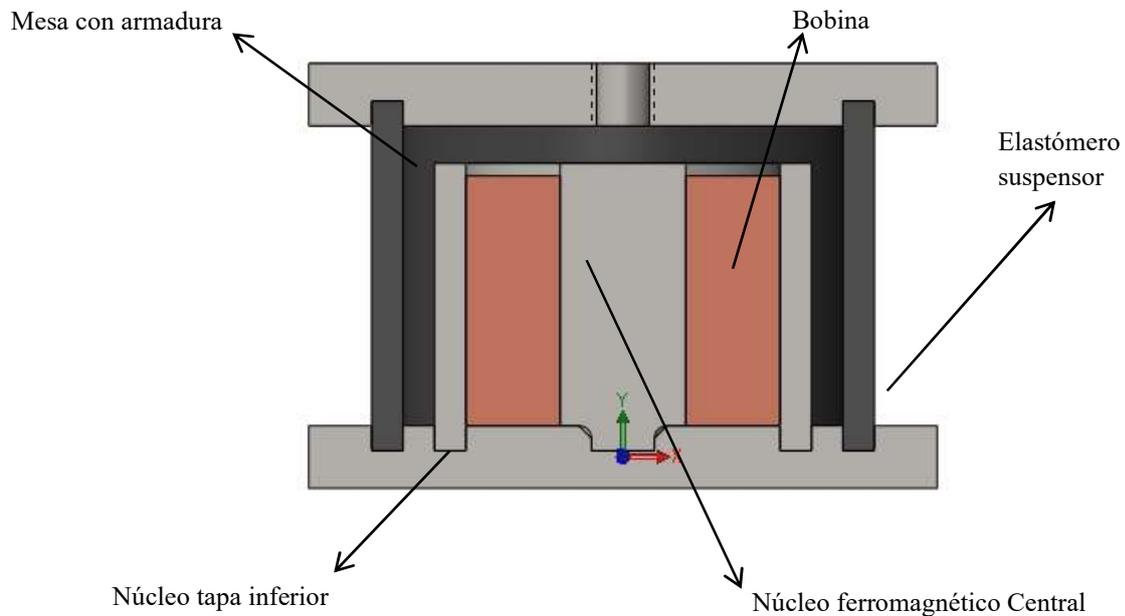


Figura A10.25– Shaker de simple campo. Corte transversal.

Se pueden generar configuraciones en serie y paralelo.

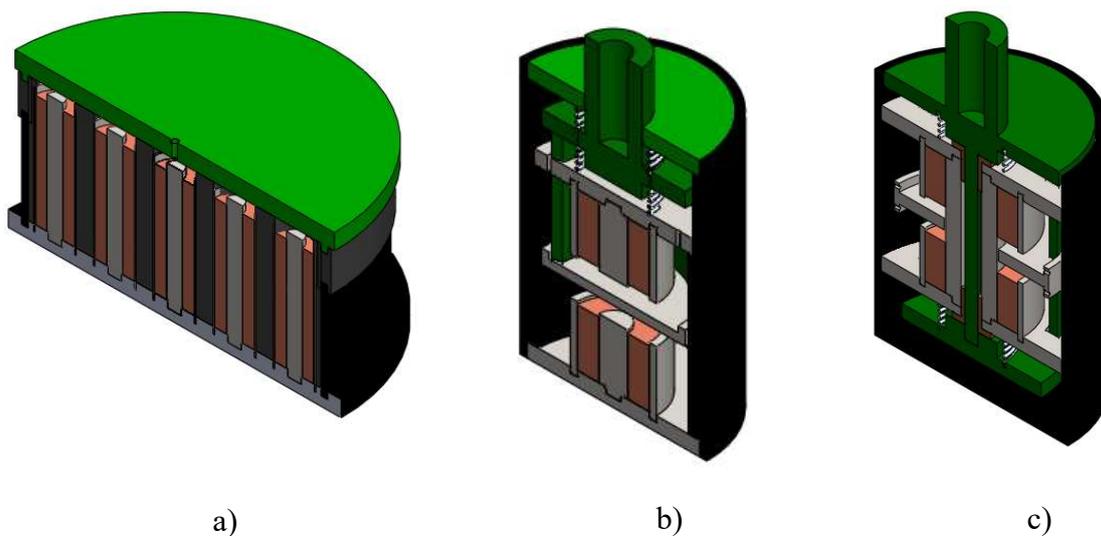


Figura A10.26– Shaker de simple campo. a) Paralelo. b) Serie tipo 1. c) Serie tipo 2.

#### A10.4..4.2 Shaker de doble campo enfrentado.

Dispositivo para inducir vibraciones caracterizado porque comprende dos electroimanes enfrentados entre sí, el primero solidario a la tierra y el segundo suspendido mediante un elemento flexible. El segundo electroimán es que el queda solidario al componente sobre cual se inducen vibraciones.

En cada electroimán, tres piezas de acero dulce componen el núcleo ferromagnético: la tapa inferior, un núcleo central y tubo exterior. Una bobina de cable conductor rodea al núcleo central, por donde circula una corriente que responde a la señal de excitación. La misma induce un campo magnético variable que recorre el circuito magnético.

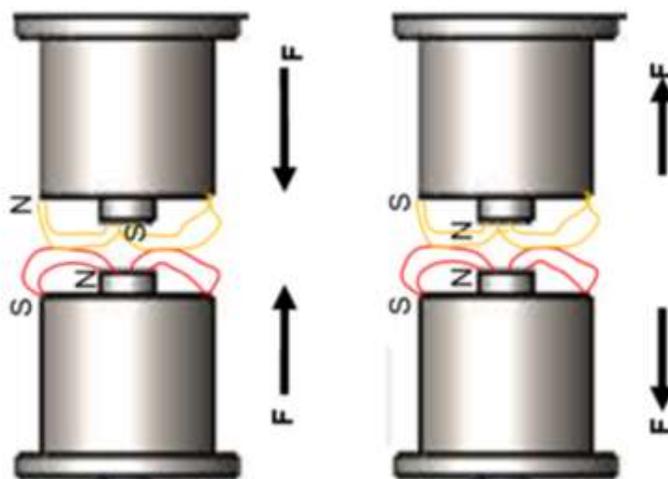


Figura A10.27– Polaridad y fuerzas en un shaker de doble campo enfrentado.

Los sentidos de circulación de corriente de cada uno de ellos son tales que generan una polarización de los electroimanes que generan fuerzas de atracción o de repulsión. Además, por la simetría del dispositivo, las fuerzas en un sentido y en el otro, serán de igual intensidad. Cosa que no se podría asegurar al utilizar un solo electroimán.

La fuerza variable en el tiempo que experimenta el electroimán suspendido, y por lo tanto el componente sobre el que se inducen las vibraciones, responde a la ecuación de fuerza entre dos polos magnéticos dada por:

$$F = \mu_0 \frac{q_{m1}q_{m2}}{4\pi x^2} \quad \text{A10.39}$$

Donde:

- $F$ :  $F$  es fuerza (unidad SI: newton)
- $q_{m1}$  y  $q_{m2}$  son las magnitudes de carga magnética en los polos magnéticos (unidad SI: amperios metro).
- $\mu_0$  es la permeabilidad del medio (aire – vacío) (unidad SI: tesla metros por amperio, Henry por metro o newton por amperio cuadrado)
- $x$  es la separación (unidad SI: metro)

Que bajo ciertas suposiciones se puede re expresar como:

$$F(x) = \frac{3 \mu_0 m_1 m_2}{2 \pi x^4} = \frac{3 \mu_0 (n_{bp} i_{bp} A_{bp})(n_{bs} i_{bs} A_{bs})}{2 \pi x^4} \quad A10.40$$

Donde:

- $m_1$ : Momento magnético del electroimán inferior.
- $m_2$ : Momento magnético del electroimán superior.
- $i_{bp}$ : Corriente de bobina primaria o inferior.
- $n_{bp}$ : Numero de vueltas de la bobina primaria o inferior
- $i_{bs}$ : Corriente de bobina secundaria o superior.
- $n_{bs}$ : Numero de vueltas de la bobina secundaria o superior.
- $A_{bp}$ : Área de la sección de núcleo central del circuito magnético del electroimán inferior.
- $A_{bs}$ : Área de la sección de núcleo central del circuito magnético del electroimán superior.

Este principio de funcionamiento facilita el desarrollo de modelos apilados (stacks), que, si son correctamente sincronizados, permiten un desplazamiento tan amplio como se desea. Esto es una clara mejora respecto de los diseños actuales que tienen limitada su carrera según la altura del entrehierro.

Son numerosos los Modelos de Utilidad que se pueden establecer a partir de aplicar este principio de funcionamiento. A continuación, se presenta uno que consta de una mesa integrada en la armadura, conectada a la tierra mediante elementos de suspensión con amortiguador regulable incorporado, y electroimanes enfrentados que son los encargados de producir el movimiento del sistema.

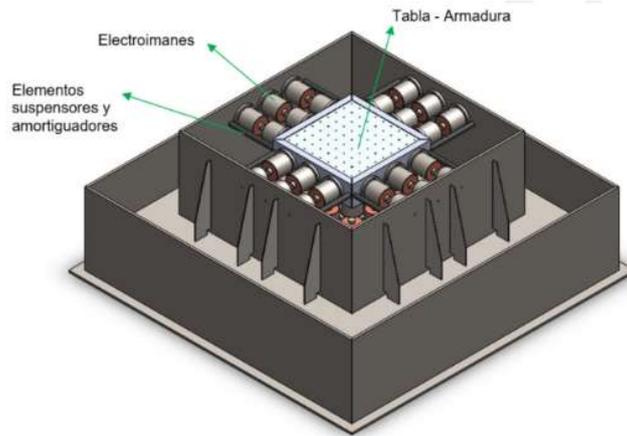
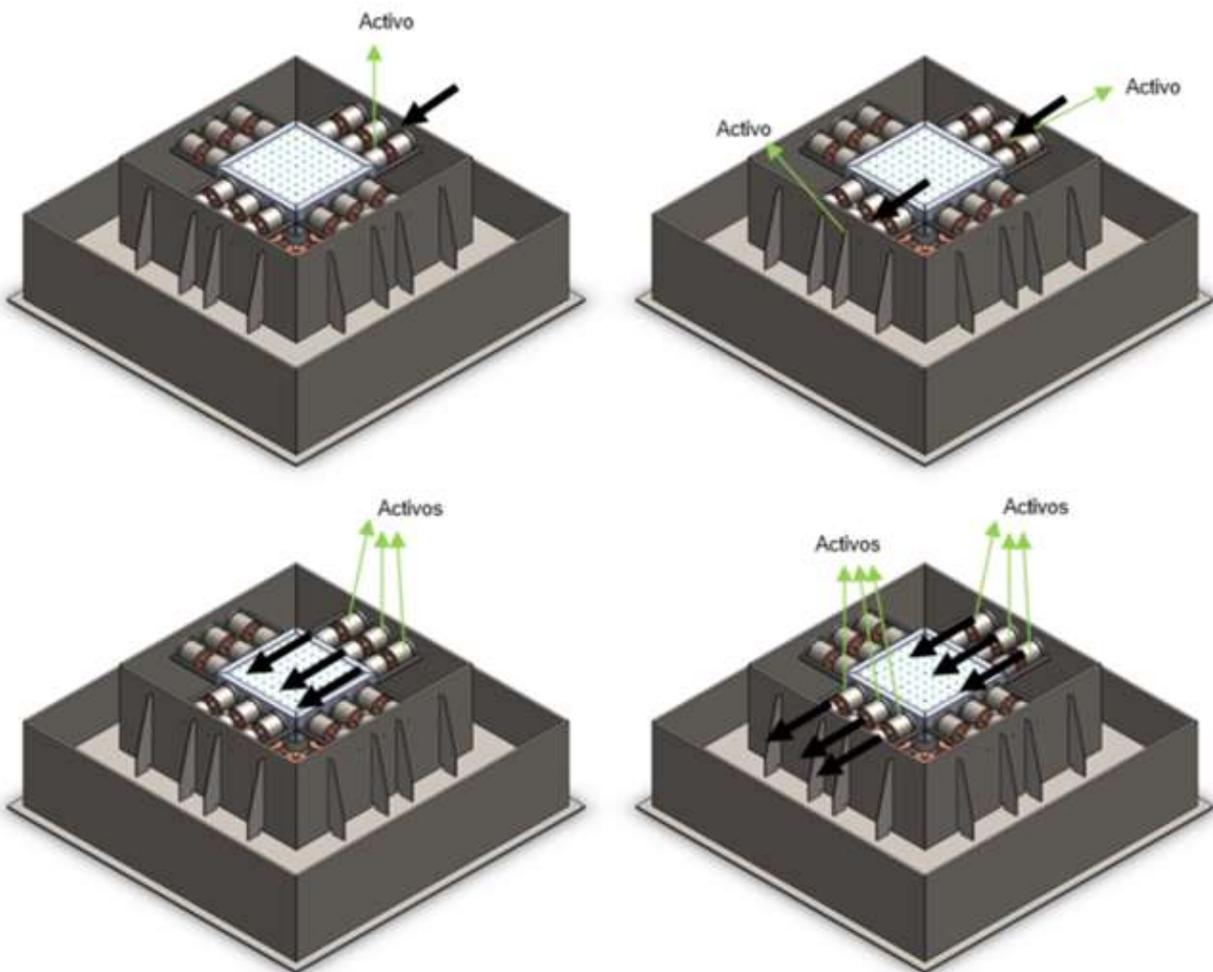


Figura A10.28– Mesa vibratoria basada en shakers de doble campo enfrentados.

Los conjuntos de electroimanes están dispuestos tanto en serie, como en paralelo. Lo que permite tener 6 grados de libertad en la tabla-armadura, 3 de traslación y 3 de rotación. Además, control de la intensidad de la fuerza por el nivel de corriente y el número de imanes activos.



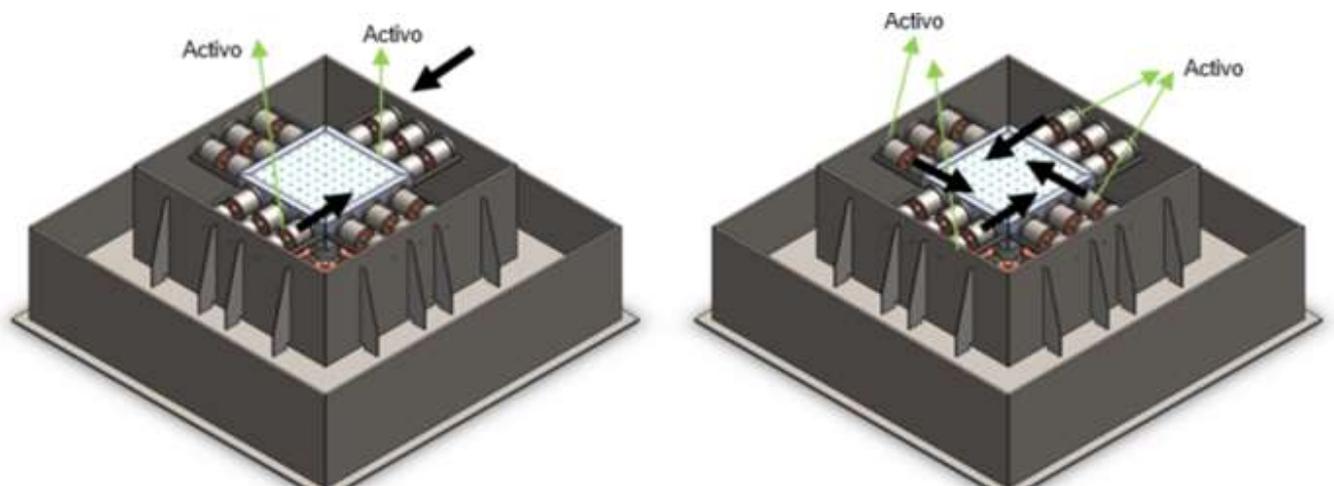


Figura A10. 29– Mesa vibratoria basada en shakers de doble campo enfrentados. Grados de libertad.

La configuración de stacks permite mayor rango de desplazamientos. Para tener un desplazamiento máximo mayor, solo basta con agregar otra pila de imanes.

En este diseño las fuerzas producidas actúan directamente sobre la mesa. Lo que elimina la armadura como componente fundamental del shaker y la necesidad de una cabeza expansora. Esto, no solo implica una reducción de la cantidad de componentes, sino que además permite la posibilidad de diseños más rígidos y de bajo peso, con el consiguiente aumento de las frecuencias normales de vibración axiales. Lo que aumenta el rango de operación en frecuencias.

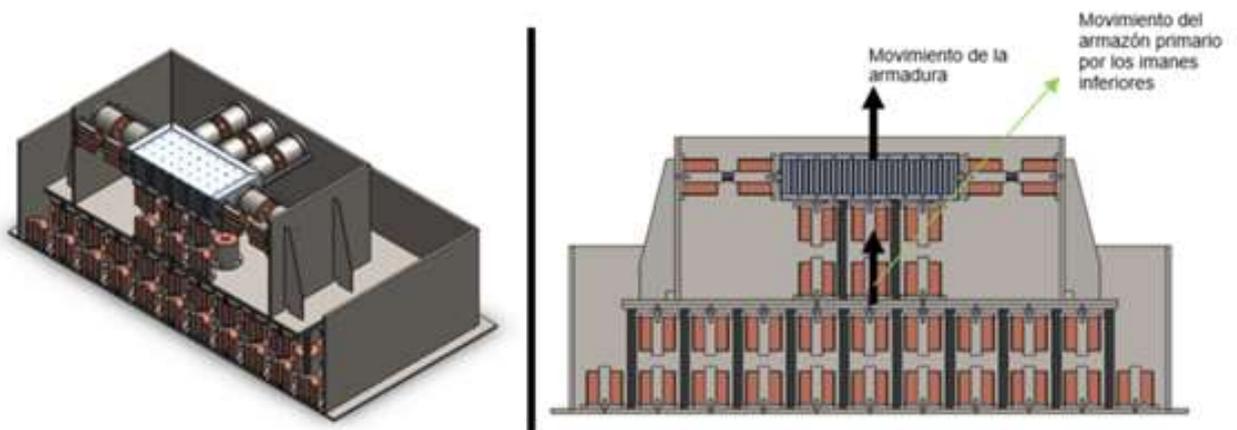


Figura A10. 30– Mesa vibratoria basada en shakers de doble campo enfrentados. Grandes desplazamientos.

Se prevé que tenga la posibilidad de desarrollar más fuerza que los tipos de shakers actuales. A fin de establecer que diseño resultaría más eficiente se procede a realizar una comparativa, mediante expresiones analíticas, suponiendo que se utiliza la misma cantidad de bobinado para los 3 modelos en comparación. Se observa que el diseño propuesto, genera un 58% más de fuerza que los modelos tradicionales.

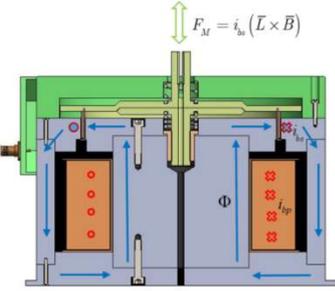
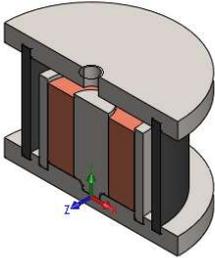
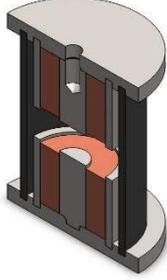
Electrodinámico (convencional)	Electromagnético simple campo	Electromagnético doble campo
		
$F = \int_L i (dl \times B)$	$F = \frac{B^2 A}{2\mu_0}$	$F = \frac{3 \mu_0 m_1 m_2}{2 \pi x^4}$
$F_M = i_{bs} \cdot B_{eh} \cdot \pi \cdot \phi_{meh} \cdot n_{bs\_act}$ $F_M = \pi \mu_0 \left( \frac{\phi_{meh}}{e_{eh}} \right) (n_{bs} i_{bs}) (n_{bp} i_{bp})$	$F = \frac{1}{2} \mu_0 \frac{N^2 I^2 A}{x^2}$	$F = \frac{3}{2\pi} \mu_0 \frac{(n_{bp} i_{bp} A_{bp})(n_{bs} i_{bs} A_{bs})}{x^4}$
<p>86.7N</p>	<p>7.41N</p>	<p>138.41N</p>

Figura A10. 31– Comparativa de fuerza desarrollada por diferentes tipos de shakers.

## A10.5 Desarrollo de sistemas de generación y amplificación de señales para shakers

Según los principios de funcionamiento descritos anteriormente se evidencia la necesidad de que los shakers para poder funcionar cuenten con una fuente y un generador de señales que sea capaz de generar respectivamente corrientes que al circular por las bobinas provean de un campo magnético primario y uno secundario. A continuación, se presentan los sistemas utilizados a tal fin.

### A10.5.1 Primer sistema generación y amplificación de señales para shakers

En una primera instancia se recurrió a los recursos preexistentes en el laboratorio para armar un sistema de generación y amplificación de señales para shakers.

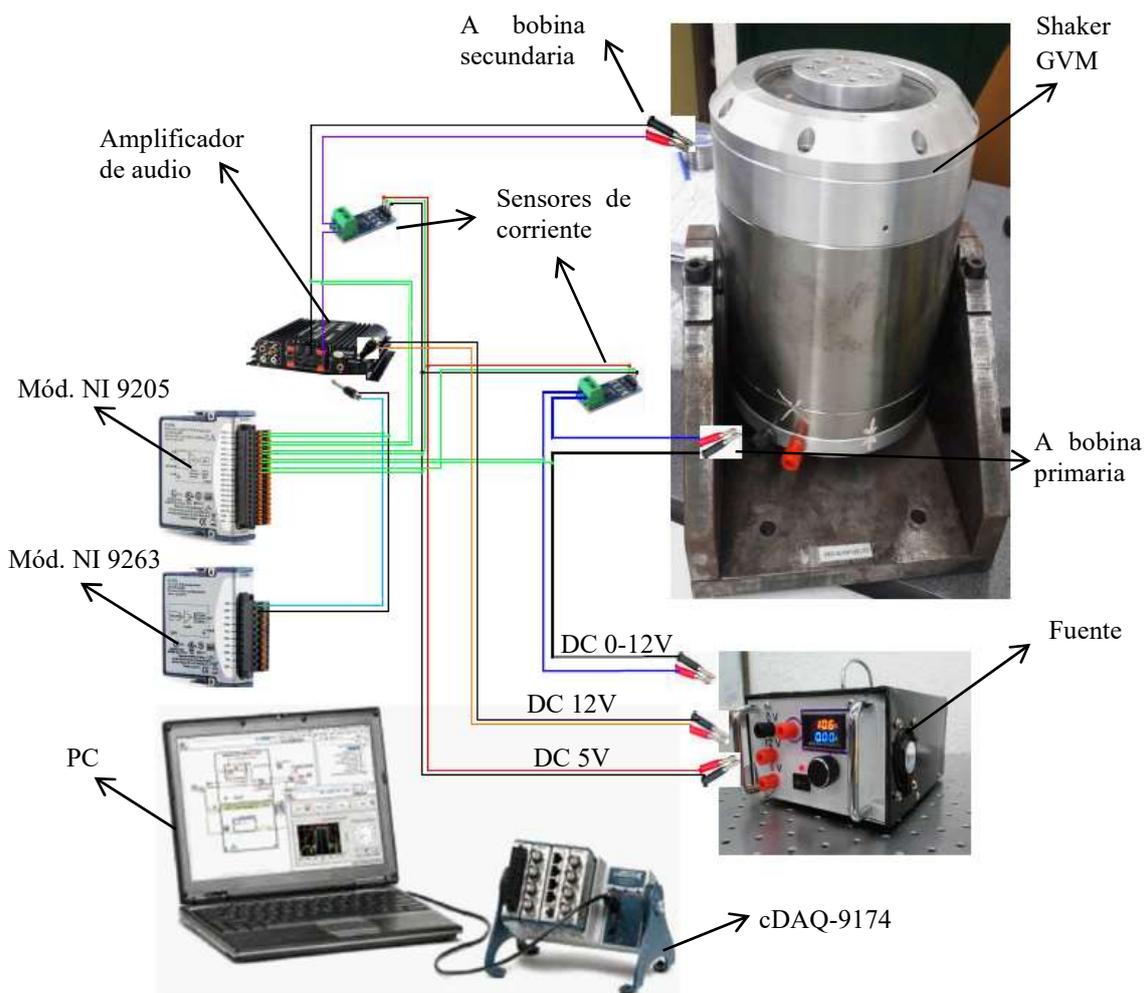


Figura A10. 32– Diagrama unifilar del Sistema generación y amplificación de señales para shakers 1

- Componentes

El sistema está compuesto por:

- Por una PC con Labview disponible.
- Un chasis Compact DAQ 9174 de la marca NI.
- Un módulo de salida de voltaje analógico de marca NI modelo 9263, de 4 canales, de  $\pm 10V$ .
- Un módulo de entrada de voltaje analógico de marca NI modelo 9205, de 32 canales simple o 16 canales diferenciales, de  $\pm 10V$ .
- Un amplificador de audio marca Lepai modelo LP-269FS, de 4 salidas de 45W, con un rango de frecuencias de 20Hz a 20KHz.
- Una fuente de construcción propia.
- 2 sensores de corriente ACS712.

La fuente dispone de una salida regulable de voltaje continuo. La misma está en serie con la bobina primaria. Por lo tanto, se puede regular la cantidad de corriente que circula por la bobina y por ende la intensidad de campo magnético en el electroimán. A su vez, la fuente dispone de salidas de voltaje continuo de 5V y 12V, las cuales son usadas para alimentar los sensores de corriente y el amplificador respectivamente.

La PC tiene instalado el entorno de programación Labview. A través de un cable USB tiene comunicación con el Compact DAQ 9174. Este controla la temporización, la sincronización y la transferencia de datos entre los módulos de E/S de la Serie C y la PC. Tiene cuatro contadores/temporizadores de uso general de 32 bits. Con varios motores de temporización, puede ejecutar siete operaciones simultáneamente y temporizadas por hardware con tres frecuencias independientes para entrada analógica.

El NI-9263 es un módulo de la serie C, de salida analógica de actualización simultánea. Cuenta con protección de sobrevoltaje, protección de cortocircuito, baja interferencia entre canales (crosstalk), rápida velocidad de respuesta, alta precisión relativa y certificados de calibración trazable expedidos por el NIST. Este módulo incluye doble barrera de aislamiento de canal a tierra para seguridad e inmunidad a ruido. Posee 4 Canales de  $\pm 10 V$ , con una tasa de escritura de 100 kS/s/canal simultáneo. La señal de excitación programa en Labview es convertida en una señal analógica en dicho módulo.

La potencia que dispone el NI-9263 es poca y la corriente de la señal es de apenas unos mili-Amper. Para que el shaker tenga un adecuado funcionamiento se requiere una corriente sustancialmente mayor. Por lo que es necesario amplificar la señal. Un amplificador de audio es ideal porque el rango de frecuencias audibles es coincidente con los requerimientos de excitación de los shakers electromecánicos, porque tiene baja distorsión, es de bajo precio y tiene buena disponibilidad. Una vez amplificada la señal de excitación recorre la bobina secundaria provocando el movimiento de la armadura del shaker.

Los sensores de corriente ACS712 funcionan por el principio del efecto hall. Son alimentados con 5V y su salida es proporcional a la corriente que por ellos circula.

El NI-9205 es módulo de entrada de voltaje de la Serie C, con un rango de  $\pm 10$  V, una tasa de muestreo de 250 kS/s, una resolución de 16 Bits, 32 canales. Incluye hasta 60 V de protección contra sobrevoltajes entre canales de entrada y común. Tiene doble barrera de aislamiento de canal a tierra para seguridad, inmunidad de ruido y alto rango de voltaje en modo común. Está diseñado para protección de sobrevoltaje transitorio de 1,000 Vrms. Es el encargado de sensar el voltaje de la señal que sale del módulo NI-9263, del voltaje de la señal luego de pasar por el amplificador, de la señal de voltaje continua que entrega la fuente a la bobina primaria, y finalmente, de sensar las salidas de voltaje de los sensores de corriente ACS712 que indican las corrientes que circulan por la bobina primaria y secundaria.

- Programación de la señal de excitación

Para poder configurar la señal de excitación se procedió a programar en entorno de Labview un generador de señales. A partir del mismo se podía configurar el tipo de señal de excitación (seno, cuadrada, triangular, etc.), la frecuencia, la amplitud y la fase. Además, se incorporó un ciclo for para posibilitar hacer un barrido de frecuencias entre una frecuencia mínima de interés hasta una máxima de interés, con un cierto paso determinado.

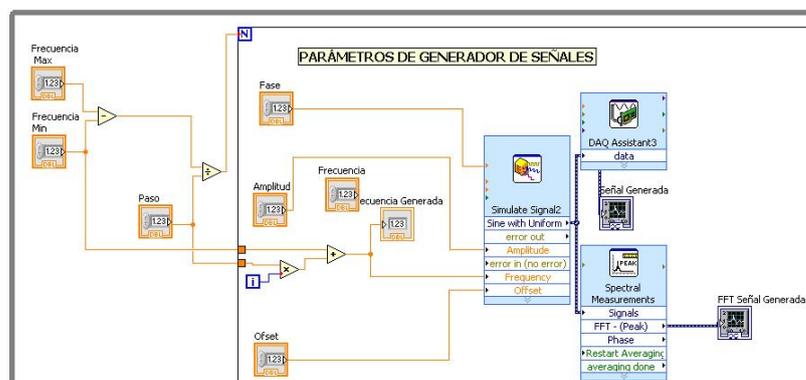


Figura A10. 33– Generador de señales programado en Labview.

### *A10.5.2 Segundo sistema generación y amplificación de señales para shaker*

El inconveniente que presentaba el sistema antes descrito es un elevado costo. Los equipos de NI son de una calidad muy buena, de altas prestaciones técnicas y un costo accesible dentro de los precios de mercado de equipamiento de precisión para laboratorio. Pero costosos en el marco de desarrollos nacionales.

Es por eso que se consideró apropiado para abaratar costos el uso de tecnología de sistemas embebidos. Los mismos se tratan de un microprocesador diseñado para realizar una o algunas pocas funciones dedicadas.

Entre numerosas opciones, se encuentra Arduino. Una empresa basada en software y hardware libre. Sus placas usan generalmente un microcontrolador Atmel AVR, conectado sobre una placa de circuito impreso a la que se le pueden conectar placas de expansión (shields) a través de la disposición de los puertos de entrada y salida. Las shields complementan la funcionalidad del modelo de placa empleada, agregando circuitería, sensores y módulos de comunicación externos a la placa original.

El sistema está compuesto por:

- Fuente conmutada de PC.
- Fuente conmutada WX-DC2416- AC/DC.
- Convertidor de voltaje DC-DC Step Down X14016.
- Una placa Arduino DUE.
- Una placa de expansión generadora de señales AD9833.
- Un display LCD.
- Un amplificador digital de potencia TPA3116D2.
- 3 sensores de corriente ACS712.
- 3 sensores de voltaje FZ0430.
- 3 sensores de campo magnético Ky-035



En la Figura A10.35 se puede observar con mayores detalles el Pin-Out del arduino Due, del generador de señales y del display.

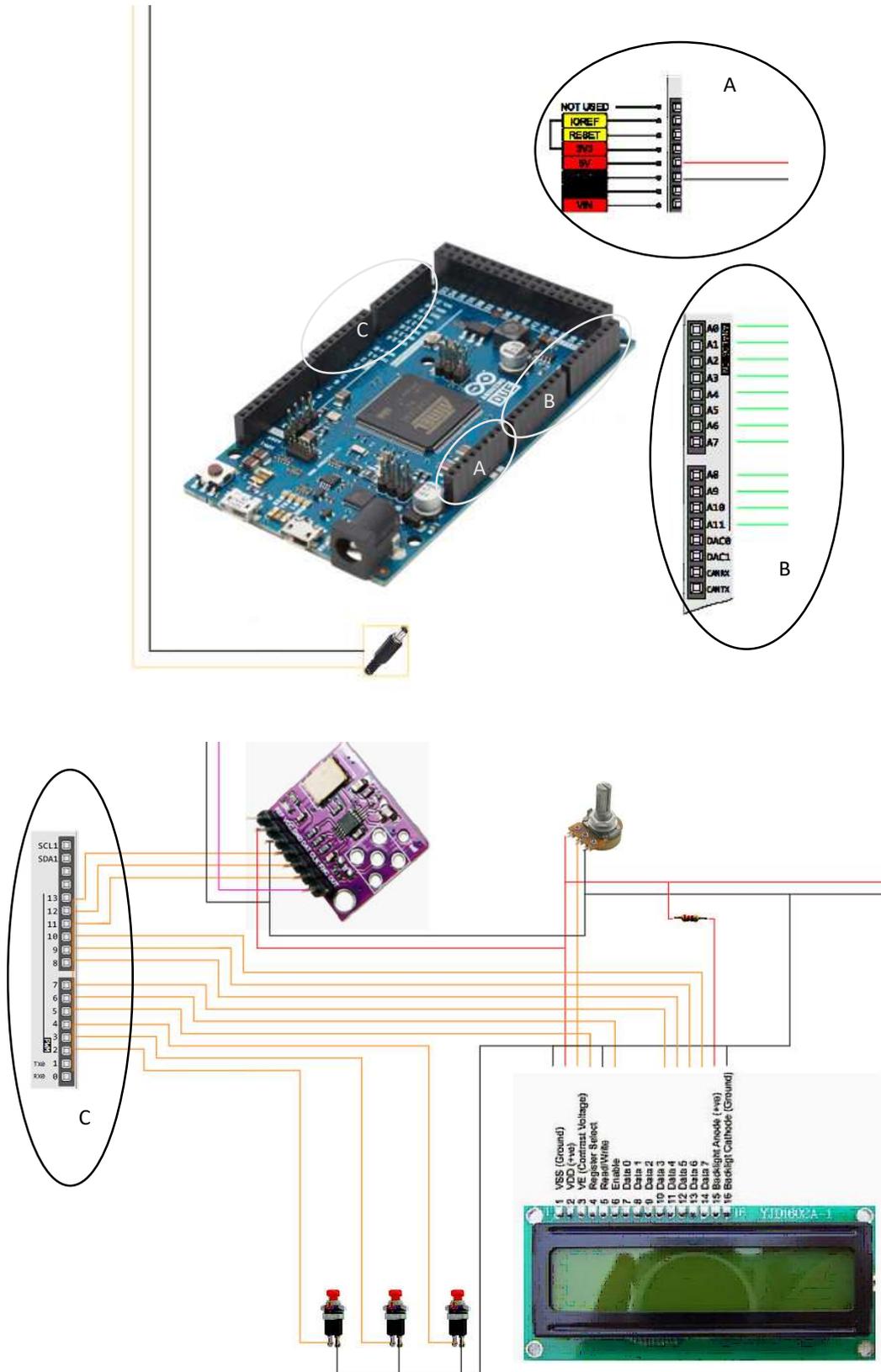


Figura A10. 35- Amplificación del diagrama de conexionado y pin-out de arduino

En la Figura A10.36 se presentan fotos del segundo sistema generación y amplificación de señales para shakers. Como se puede apreciar en las mismas, en un único dispositivo se puede alimentar en forma controlada la bobina primaria para generar el campo magnético constante de un shaker electrodinámico de electroimán, 3 bobinas secundarias para shakers electrodinámicos de imanes permanentes o electroimanes con una señal programada desde PC o bien configurada mediante botones e indicaciones del display, también regulables y con sus parámetros de tensión y corriente medidos y registrados.



Figura A10. 36- Fotos del segundo sistema generación y amplificación de señales para shakers.

## A10.6 Desarrollo de accesorios para shakers

### A10.6.1 Diseño de stinger

Si el shaker se uniera directamente a la estructura bajo ensayo (SUT), sus efectos dinámicos se impondrían sobre la estructura. Por lo tanto, la función respuesta en frecuencia determinada no se correspondería a la SUT sino a la combinación SUT + Shaker.

El estinger (aguijón) es una herramienta que persigue el propósito de desacoplar dinámicamente el shaker de la estructura. Para lo que se requiere que sea capaz de transmitir fuerza axial (solo en la dirección de empuje del actuador) pero no transmitir corte, flexión o torsión. Por lo tanto, debe presentar buena rigidez axial y el menor efecto de rigidez posible en las otras direcciones.

Un extremo del stinger se fija al shaker y en el otro a instrumentación (celda de carga, acelerómetros o sensor de impedancia mecánica) solidaria a la estructura bajo ensayo. Dicha instrumentación es necesaria para conocer la variable de entrada (Fuerza, aceleración, impedancia) y así poder determinar las funciones de respuesta en frecuencia que caracterizan al del sistema mecánico (viga con fisura). Es importante notar que los sensores siempre se deben montar directamente a la SUT, sino la dinámica del stinger se convierte en parte de la función medida; lo que no sería correcto.

Típicamente los stinger pueden ser alambres de piano a varillas de metal o plástico. Generalmente, los menos rígidos se usan en estructuras más pequeñas y flexibles, mientras que los más grandes y rígidos se usan en estructuras más grandes.

Para los ensayos en vigas ligeras se ha utilizado un alambre de acero de pesca pre-tensionado. De esta forma, el cable siempre se encuentra sometido a tracción, con una oscilación en la carga según requiera el ensayo. Así se asegura que no existe rigidez lateral y por lo tanto el stinger no puede tomar momento. Para su dimensionamiento fue considerado que el mismo se encuentra pre-tensionado con una carga 4 veces mayor a la carga alterna, o sea la fuerza de accionamiento máxima del shaker

$$P_{diseño} = 4P_{Max\_Shaker} \quad A10.41$$

Por otra parte, para vigas más robustas fue diseñado un stinger tipo varilla. Como criterio de diseño de este se consideró:

- Longitud: Con stinger más cortos, se aumenta la rigidez y por lo tanto hay un corrimiento hacia la derecha de las frecuencias naturales en la FRF. Si el stinger es demasiado largo puede introducir picos adicionales debido a resonancias propias.
- Alineación: Si existe desalineación el sensor de impedancia mide cargas que no son normales a la superficie. Esto puede causar una distorsión de la medición. Por otra parte, una desalineación significativa puede causar daños y / o desgaste innecesario a la armadura del shaker debido a las cargas laterales resultantes.

Para el dimensionamiento del stinger se consideró que *la fuerza de accionamiento máxima del shaker* es la máxima carga axial que soporta el shaker (tracción y compresión).

$$\sigma = \frac{N}{A} = \frac{P_{Max\_Shaker}}{A} \leq \sigma_{adm} = \frac{\sigma_y}{C_s} \quad A10.42$$

A su vez, al tratarse de un elemento esbelto, debe comprobarse que no se supere la carga crítica de pandeo.

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L^2} \geq P_{Max\_Shaker} \quad A10.43$$

### ***A10.6.2 Diseño de conector armadura – stinger***

Es necesario un mecanismo que sirva de nexo entre la armadura del shaker y el stinger. Para el criterio de diseño se consideró como objetivo que permita:

- Longitud del stinger regulable.
- Fácil de montar.
- Rápido de montar.
- Confiabilidad en el ajuste.
- Simplicidad de Fabricación.
- Costo.
- Bajo peso.

Se propusieron 4 prototipos.

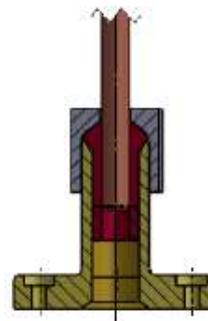
Prototipo 1: Consiste en una barra roscada en los extremos con tuerca y contratuerca para fijar la conexión. Dado que para la regulación es necesario girar la varilla es incómodo su ajuste. Además, las vibraciones pueden aflojar el sistema.



Prototipo 2: Utiliza un mandril donde se regula y fija la varilla. El mandril es comercial por lo que no se necesita fabricarlo. Pero solo hará contacto con la barra en 3 puntos.



Prototipo 3: El adaptador consiste en 3 partes principales: La tuerca con asiento cónico para collet de ¼ (comercial), el collet de ¼ (comercial) y unión Shaker- collet. Tiene un alto coste.



Prototipo 4: Una pieza de aluminio para reducir peso es unida a la armadura mediante tornillos. Tiene un tubo con una ranura longitudinal, lo que permite generar apriete con 2 tornillos de apriete.

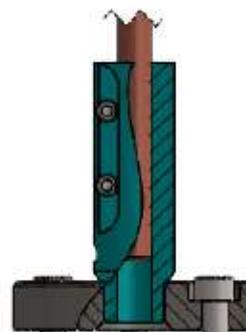


Figura A10.37- Prototipos de conectores armadura - stinger.

Después de comparar los anteriores prototipos se determinó que el que mejor satisface los objetivos es el prototipo N°4.

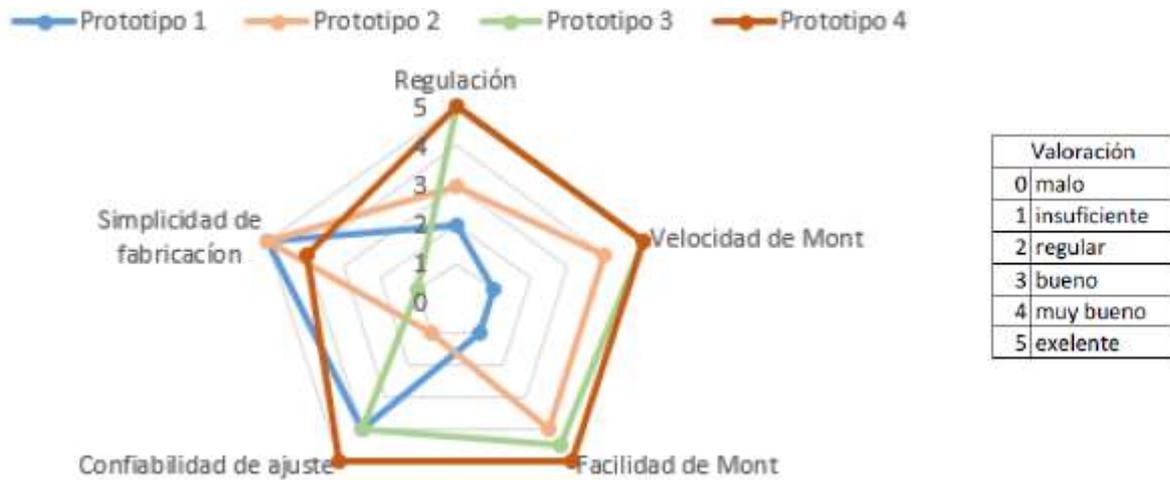


Figura A10.38- Gráfico de araña de los 4 prototipos de conectores armadura - stinger.

El diseño finalmente adoptado es el que se presenta a continuación.

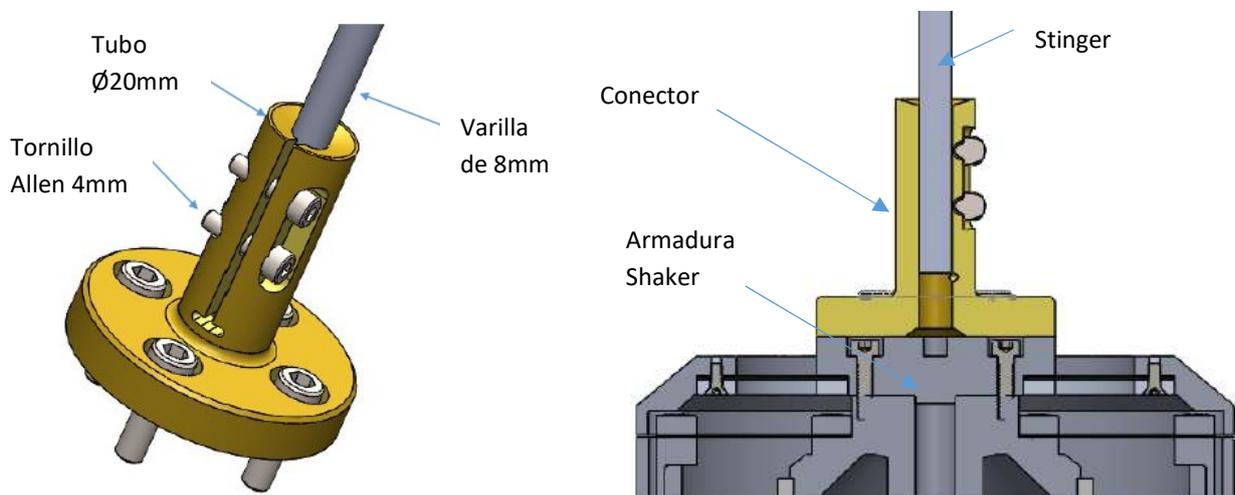


Figura A10.39- Diseño de conector armadura – stinger seleccionado.

### A10.7 Selección, compra y uso de un Martillo Instrumentando

El martillo de impacto consiste en un martillo con un sensor de fuerza montado en la cabeza de este. Presenta como ventajas su portabilidad y simplicidad. Además, no tiene un contacto con la estructura bajo test (SUT), por lo que no altera ni su masa ni rigidez. Pude equiparse con puntas de diferentes materiales, que van desde cápsulas de aire, goma muy blanda, puntas de plástico y de metal. La dureza de la punta proporciona cierta personalización de la banda de frecuencia de excitación, a mayor dureza de la punta se consiguen excitar frecuencias más altas.

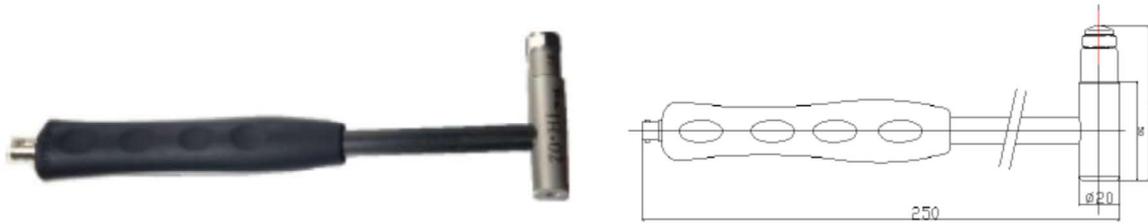


Figura A10.40– Martillo YMC Piezotronics utilizado modelo IH-02/IH-05.

#### A10.7.1 El martillo como función de excitación

Se denomina Delta de Dirac a un pulso unitario de ancho centrado en  $t$  y de área unitaria. Un impulso unitario resulta como caso límite del pulso unitario cuando  $t = \tau$ , y se lo suele designar formalmente como  $\delta(t - \tau)$ .

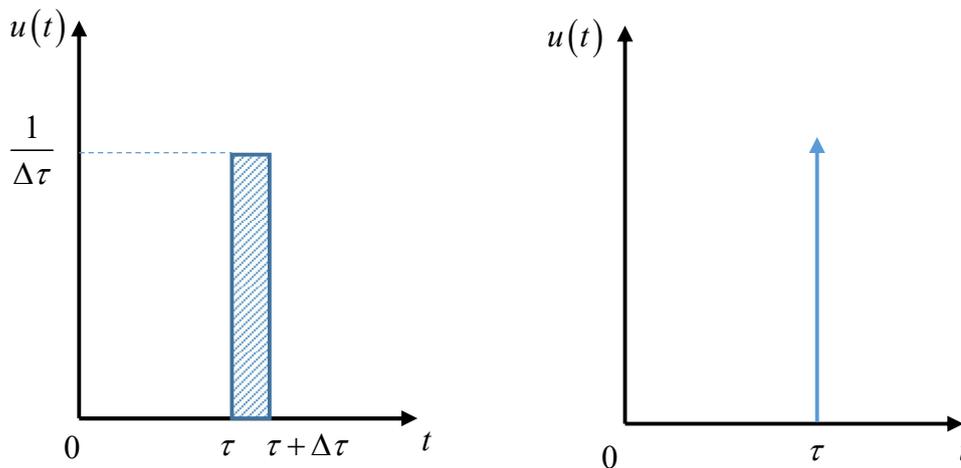


Figura A10.41– Delta de Dirac.

Matemáticamente se define con las siguientes propiedades:

$$\delta(t-\tau) \begin{cases} 0 & \text{si } t \neq \tau \\ \infty & \text{si } t = \tau \end{cases} \quad \text{y} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-\tau) \cdot d\tau = 1 \quad \text{A10.44}$$

Con la siguiente propiedad sobre cualquier función

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) \delta(t-\tau) \cdot d\tau = f(t) \quad \text{A10.45}$$

La transformada de Fourier de la Función Delta de Dirac  $\delta(t)$  es

$$F\{\delta(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) e^{-j2\pi ft} \cdot dt = e^{-j2\pi f \cdot 0} = 1 \quad \text{A10.46}$$

Gráficamente se puede observar en la Figura A10.42.

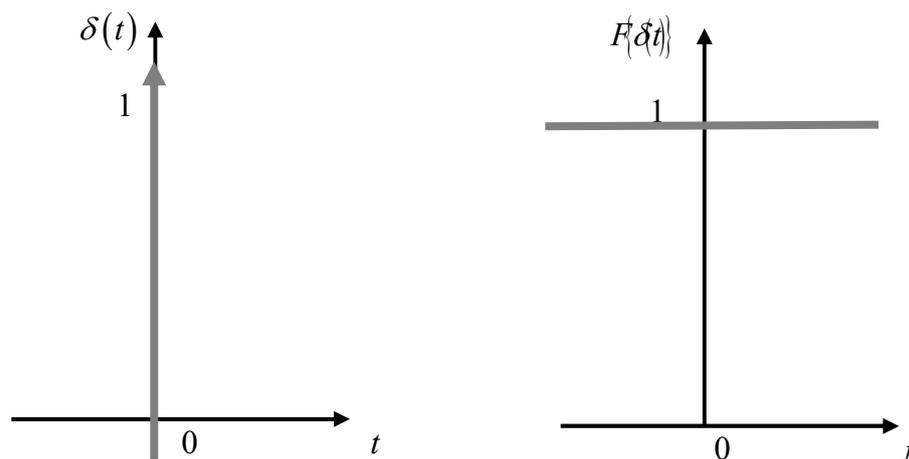


Figura A10.42– Transformada de Fourier de Delta de Dirac.

### A10.7.2 Selección de puntas de martillos de impacto

El contenido de frecuencia del espectro de fuerza de entrada se controla en gran medida por la longitud del pulso de tiempo (tiempo de duración del impacto) aplicado al sistema. Esto está controlado en gran medida por la rigidez de la punta del martillo (aunque el espectro de fuerza de entrada a veces puede controlarse principalmente por la flexibilidad local de la estructura bajo prueba). En general, cuanto más dura es la punta, más amplio es el espectro de frecuencias que se excita; cuanto más suave es la punta, más estrecho es el espectro de frecuencia que se excita.

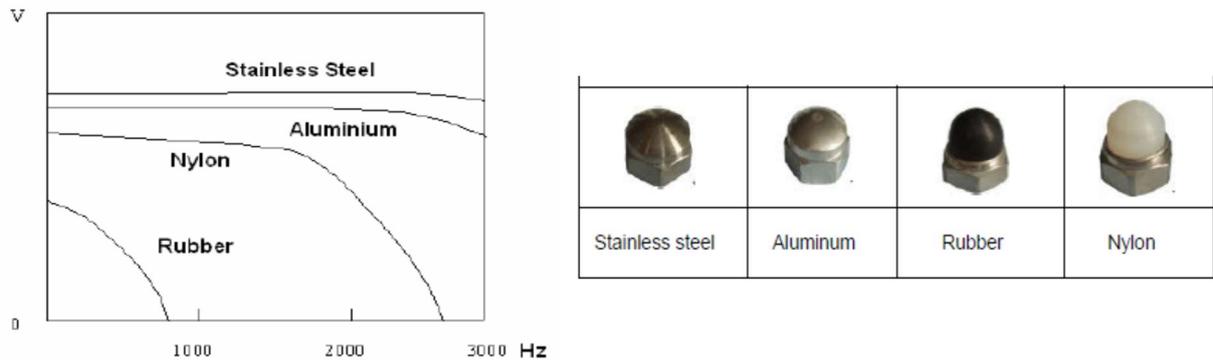


Figura A10.43– Contenido de frecuencias del espectro de fuerza del martillo utilizado.

Un pulso largo en el dominio del tiempo da como resultado un espectro de frecuencia corto o estrecho. Un pulso corto en el dominio del tiempo da como resultado un amplio espectro de frecuencia. Para definir si la excitación con el martillo fue apropiada, es razonable observar la medición de la respuesta de frecuencia y la coherencia

### A10.7.3 Precauciones en el uso

Un problema común en las pruebas de impacto es el doble impacto. A menudo, se produce debido a una excitación inadecuada con el martillo. Otras veces, sin embargo, la estructura puede estar ligeramente amortiguada y es extremadamente receptiva en ciertos lugares. En estos casos, la estructura se excita con la excitación impulsiva y la estructura responde e impacta el martillo de impacto antes de que el martillo pueda alejarse de la estructura. Si bien los impactos dobles no son deseables y deben evitarse, hay situaciones en las que los impactos dobles no se pueden prevenir.

A menudo el pulso de fuerza parece oscilar alrededor del cero después del pulso inicial. Este problema ocurre porque los filtros analógicos anti aliasing del convertidor analógico a digital (ADC) pueden mostrar una respuesta en sus propias frecuencias naturales, que posiblemente estén excitadas por el impulso de fuerza.

Debido a que puede haber algo de ruido no deseado en el canal de impacto, puede ser necesario el uso de una ventana de fuerza para minimizar el efecto. Esta ventana generalmente se implementa como una ventana rectangular.

La respuesta del sistema debido a la excitación del impacto será el resultado de la respuesta exponencial amortiguada de todos los modos activados por la entrada. Para estructuras ligeramente amortiguadas, la respuesta no se extingue al final del intervalo de muestra. El uso de la ventana exponencial minimizará los efectos de la fuga espectral, pero trae su propia distorsión de la señal.

# APÉNDICE 11

## Análisis modal experimental

El análisis modal es un proceso mediante el cual se describe una estructura en términos de sus propiedades dinámicas o parámetros modales que son la frecuencia, el amortiguamiento y los modos de vibración para todos los modos en el rango de frecuencias de interés. Todas las estructuras poseen frecuencias naturales y modos de vibración, que dependen básicamente de la masa y de la rigidez de la estructura.

La respuesta de la estructura es una superposición lineal de todos los modos de vibración excitados. En el análisis modal, una deformación compleja de una estructura se descompone en una serie de simples modos de deformación con parámetros de frecuencia y amortiguamiento individuales. Su fin último es la construcción de un Modelo Modal del comportamiento de la estructura.

### **A11.1 Planificación del ensayo (test plan)**

A continuación, se presenta el test plan. El mismo da cuenta de la planificación necesaria para poder llevar adelante el ensayo en forma satisfactoria. A tal fin se analiza la característica de la estructura, los vínculos, las condiciones ambientales, se desarrolla un modelo modal para estimar los parámetros modales a partir de los cuales seleccionar los sensores apropiados, los parámetros de adquisición, el equipamiento y los recursos humanos.

#### ***A11.1.1 Requerimientos del ensayo***

Identificar los parámetros modales de los tres primeros modos normales de vibración de una viga bi empotrada. La resolución de la determinación de las frecuencias debe ser de 0.1Hz. El ensayo será llevado adelante en condiciones de laboratorio, en el grupo de mecánica computacional y experimental.

### A11.1.2 Características de la estructura

- Dimensiones.

La estructura bajo ensayo es una viga de sección rectangular homogénea. Las dimensiones se presentan a continuación.

Ancho	b [m]	0.03861
Altura	h [m]	0.00850
Longitud	l [m]	0.53747

Tabla A11. – Dimensiones de la viga.

- Material

Está fabricada de un acero SAE1020, cuyas propiedades mecánicas se describen abajo.

Densidad	$\rho$ [Kg/m <sup>3</sup> ]	7850
Mód. Elasticidad Long.	E [N/m <sup>2</sup> ]	2.06E <sup>+11</sup>

Tabla A11.1 – Propiedades mecánicas del material de la viga.

- Volumen y peso.

Se presenta el volumen y el peso de la estructura bajo ensayo.

Volumen	V [m <sup>3</sup> ]	0.000126
Peso	P [kg]	0.9957

Tabla A11.2 – Volumen y peso de la viga.

- Propiedades de sección.

Sus propiedades de sección son:

Área de sección	A [m <sup>2</sup> ]	0.000328
Momento de Inercia	I [m <sup>4</sup> ]	1.976E <sup>-09</sup>

Tabla A11.3 – Propiedades de sección de la viga.

### *A11.1.3 Apoyos de la estructura*

La estructura se encuentra empotrada-empotrada.

### *A11.1.4 Condiciones ambientales*

Se describen las condiciones ambientales de la zona de ensayo. Desde el lugar donde está ubicada la estructura bajo ensayo y por ende donde están montados los sensores. Como las zonas de ruteo de cables y donde están dispuestos los equipos de acondicionamiento de señal y de adquisición. También se deben de prever y luego registrar las variaciones de las condiciones ambientales a lo largo del ensayo.

Se determinan las condiciones que puedan poner en peligro la integridad física de los trabajadores, de los equipos o influir en la calidad de la medición.

Al ser un ensayo en condiciones de laboratorio, las variaciones de las principales características se encuentran en un rango aceptable. Las mismas se enumeran en la tabla de abajo.

CONDICIONES AMBIENTALES	
Rango de temperatura del ensayo:	Ambiente
Presencia de elevada humedad:	No
Presencia de campos magnéticos:	No
Presencia de radiación ionizante:	No

Tabla A11.4 – Condiciones ambientales del ensayo.

### *A11.1.5 Modelo modal preliminar*

Se requiere identificar los primeros 3 modos normales de vibración. Para este caso particular, es de interés identificar hasta la frecuencia natural del tercer modo normal de vibración. De simulaciones por MEF en el programa Abaqus se obtuvieron los siguientes resultados.

MODO	Viga sin fisura, vinculación A-A		Viga sin fisura, vinculación E-E	
	f (simulada)	$\lambda$ (simulada)	f (simulada)	$\lambda$ (simulada)
1	68.6440	3.1410	157.310	4.7271
2	274.2500	6.2782	432.740	7.8402
3	615.8600	9.4082	846.000	10.9623
4	1091.9000	12.5272	1393.600	14.0697
5	1700.2000	15.6320	2073.100	17.1604
6	2438.0000	18.7189	2881.300	20.2307

Tabla A11.5 – Frecuencias naturales del modelo modal preliminar.

### *A11.1.6 Selección de la cantidad de puntos de medición*

Para evitar el fenómeno de aliasing espacial se necesita de suficientes puntos de medición para ver la forma definida, para esto es necesario contar con un modelo modal. Se recomienda que existan, por lo menos, tantos puntos de medición como modos a observar. Aunque puedan requerirse mayor cantidad de puntos de medición que modos a observar.

En este caso, se dispone de 4 canales, 4 acelerómetros y un sensor de la fuerza de excitación. Por lo tanto, se utilizarán 3 canales para la respuesta del sistema y uno para determinar la fuerza de excitación.

Con 3 sensores, al ser una estructura sencilla, podemos determinar los primeros tres modos normales de vibración.

### A11.1.7 Selección de la ubicación de los puntos de medición

A fin de seleccionar la ubicación de la posición de los sensores, se realizó un estudio de las formas modales de la viga para diferentes condiciones de vinculación. Se presentan los primeros tres valores de  $\lambda$  y sus correspondientes formas modales.

Se obtuvieron los modos 1, 2 y 3 con sus respectivas formas modales de las vigas uniformes sin restricciones intermedias para obtener el valor de la posición del nodo del modo 2, que se denota  $c_{21}$ , y la posición de los nodos 1 y 2 del modo 3 que se los denota  $c_{31}$  y  $c_{32}$  respectivamente. Los ceros de las formas modales 2 y 3 de las vigas analizadas se detallan en la tabla.

C. C.	$c_{31}$	$c_{21}$	$c_{32}$
A-A	0.3333	0.5000	0.6667
E-E	0.3584	0.5000	0.6416
E-L	0.5035	0.7834	0.8677
E-A	0.3859	0.5575	0.6922

Tabla A11.6 – Posición de los nodos de las vigas.

Se determinaron las posiciones de los nodos y las crestas y valles (antinodos), las cuales se enumeran a continuación.

MODO	ANTINODOS	NODO
1	1/2	0 Y 1
2	1/4 Y 3/4.	0, 1/2 Y 1
3	1/6, 1/2, 5/6	0, 1/3, 2/3 Y 1

Tabla A11.7 – Posición de los nodos y crestas de las vigas A-A dadas como fracciones de la longitud de la viga.

A partir del análisis, se determinan las posiciones donde se van a colocar los acelerómetros:

POSICIÓN (X/L)	OBSERVA	CIEGO
1/2	Modo 1 y 3 (máx.)	Modo 2
3/4	Modo 2 (máx.) – modo 1 y 3 (=)	
1/6	Modo 3 (máx.) – modo 2 y 1	

Tabla A11.8 – Ubicación de los acelerómetros para las vigas A-A.

### ***A11.1.8 Tipos de pruebas a realizar***

El martillo de impacto permite realizar un ensayo rápido y efectivo para determinar los parámetros modales de la estructura bajo test. Por esto fue seleccionado como el tipo de prueba a desarrollar. Debido a que la estructura es pequeña, con un pequeño martillo será suficiente para excitarla por completo. Como límite, no se podrá determinar el nivel de no linealidades de la estructura.

Se adopta la prueba de martillo itinerante, con los 3 sensores montados. Por cada impacto, considerado como martillo estacionario, se obtiene una columna de la matriz FRF. Se golpea en 3 posiciones diferentes, obteniendo las 3 columnas. Y, por lo tanto, toda la matriz FRF.

Se repite el procedimiento unas 5 veces para obtener parámetros estadísticos.

### ***A11.1.9 Selección de los tipos de sensores***

- Requerimientos del ensayo

Rango de frecuencias del ensayo:	950 Hz
Nivel de rigidez de la estructura:	Bajo – poca sensibilidad del sensor

Tabla A11.9 – Requerimientos del ensayo.

- Condiciones ambientales.

Rango de temperatura del ensayo:	Ambiente
Presencia de elevada humedad:	No
Presencia de campos magnéticos:	No
Presencia de radiación ionizante:	No

Tabla A11.10 – Condiciones ambientales para selección del sensor.

- Relación masa del sensor / masa de la estructura.

Masa del sensor:	25 g
Masa de la estructura:	9957 g
Relación de masas:	0.251%

Tabla A11.11 – Relación masa del sensor y de la estructura.

Cumple con la regla general, de que la masa del acelerómetro no debe ser mayor a 1/10 de la masa dinámica del sistema sobre el que está montado.

- Sensor seleccionado.

A fin de poder medir correctamente los parámetros en estudio, se procede a seleccionar el instrumental a emplear. En el GMCyE se dispone de acelerómetros tipo IEPE Brüel & Kjaer modelo 4508B que cumplen con los requerimientos del ensayo (rango de frecuencias, amplitud, etc.).

#### ***A11.1.10 Montaje del sensor***

Al tratarse de una pequeña estructura a la que no se le debe ni quitar ni adicionar masa, la temperatura del ensayo y por el rango de frecuencias requerido, se optó por emplear como método de montaje del acelerómetro a la cera de abeja.

#### ***A11.1.11 Selección del cable***

Debido a que las condiciones ambientales son "benévolas" no es necesario algún cable especial (protección a la temperatura, humedad, campos electromagnéticos ni radiación ionizante). Por lo tanto, se ha optado por un cable coaxial RG 6 con conectores BNC.

#### ***A11.1.12 Selección de los sistemas e instrumentos de excitación***

El contenido de frecuencia del espectro de fuerza de entrada se controla en gran medida por la longitud del pulso de tiempo (tiempo de duración del impacto) aplicado al sistema. Esto depende fundamentalmente de la rigidez de la punta del martillo y de la estructura.

Con una punta dura metálica, como ser aluminio o acero, con un golpe moderado o suave respectivamente, se puede excitar frecuencias de hasta 2500 a 2700 Hz, que cubren por completo el rango de intereses del ensayo. Si existiese demasiada excitación de entrada, afectando la coherencia, se recurrirá a puntas más blandas.

#### ***A11.1.13 Métodos de estimación de parámetros modales***

Para la extracción de los parámetros modales se utilizarán las técnicas de recolección de picos para hallar las frecuencias naturales de vibración. El factor de amortiguación será estimado mediante el método de la potencia media. El coeficiente modal será determinado por el valor del pico en la parte imaginaria de la FRF.

### ***A11.1.14 Selección del adquisidor***

El equipo seleccionado para la adquisición dinámica de señales es el módulo de la firma National Instruments 9234, ya que cumple con todos los requerimientos del ensayo.

### ***A11.1.15 Selección y configuración del equipo adquisidor de datos***

- Selección de los parámetros de muestreo.

Para determinar la frecuencia de muestreo, la cantidad de muestras y el tiempo de buffer, se procedió a considerar:

La frecuencia máxima  $f_{MAX} = 900\text{Hz}$ . Si la resolución en frecuencia pretendida es  $\Delta f = 0.1\text{Hz}$  entonces partiendo de la definición de resolución de frecuencia, se obtiene el tiempo de Buffer.  $\Delta f = \frac{1}{N\Delta} = \frac{1}{T} \Rightarrow T = \frac{1}{\Delta f} = \frac{1}{0.1\text{hz}} = 10\text{s}$

Del Teorema de Nyquist,  $f_s \geq 2f_{MAX}$ , se deduce la frecuencia de muestreo según:  
 $f_s = 5f_{MAX} = 5 \cdot 900\text{Hz} = 4500\text{Hz}$

Por lo tanto, la cantidad de muestras en cada bloque de medición es

$$f_s = \frac{N}{T} \Rightarrow N = f_s T = 4500\text{Hz} \cdot 10\text{s} = 45000 \text{ muestras}$$

Para determinar la frecuencia de corte del filtro anti-aliasing, se procede según la regla práctica  $f_s = 2.56f_c \Rightarrow f_c = \frac{f_s}{2.56} = \frac{4500\text{Hz}}{2.56} = 1758 \text{ Hz}$ .

Y según los datos del DAQ,  $f_c = 0.45f_s = 0.45 \cdot 4500\text{Hz} = 2025 \text{ Hz}$ .

**A11.1.16 Almacenamiento de datos**

A fin de asegurar una correcta documentación del ensayo, establece una línea cronológica de los ensayos a efectuar y los directorios donde ha de ser almacenado la información del ensayo.

Para determinar una matriz FRF serán necesarios 3 impactos, y por lo tanto 3 mediciones. Como el ensayo se repite 5 veces, será necesario adquirir 15 mediciones. En la tabla 12 se detalla cómo se almacenan los datos de la medición.

Medición	Golpe en x=	Directorio principal	Directorio secundario	Directorio
1	1	Med1	Punto1	Med1/punto1
	2	Med1	Punto2	Med1/punto2
	3	Med1	Punto3	Med1/punto3
2	1	Med1	Punto1	Med2/punto1
	2	Med1	Punto2	Med2/punto2
	3	Med1	Punto3	Med2/punto3
3	1	Med1	Punto1	Med3/punto1
	2	Med1	Punto2	Med3/punto2
	3	Med1	Punto3	Med3/punto3
4	1	Med1	Punto1	Med4/punto1
	2	Med1	Punto2	Med4/punto2
	3	Med1	Punto3	Med4/punto3
5	4	Med1	Punto4	Med5/punto1
	5	Med1	Punto5	Med5/punto2
	6	Med1	Punto6	Med5/punto3

Tabla A11.12 – Almacenamiento de las mediciones de vibraciones.

## A11.2 Montaje, puesta a punto y prueba inicial

### A11.2.1 Montaje

Se procedió al montaje de los acelerómetros en los puntos de medición seleccionados. Se utilizó como adherente cera de abeja, mostrando buena capacidad.



Figura A11.1– Setup experimental - Montaje de los acelerómetros.

Se realizó el cableado hasta el equipo de adquisición de datos.

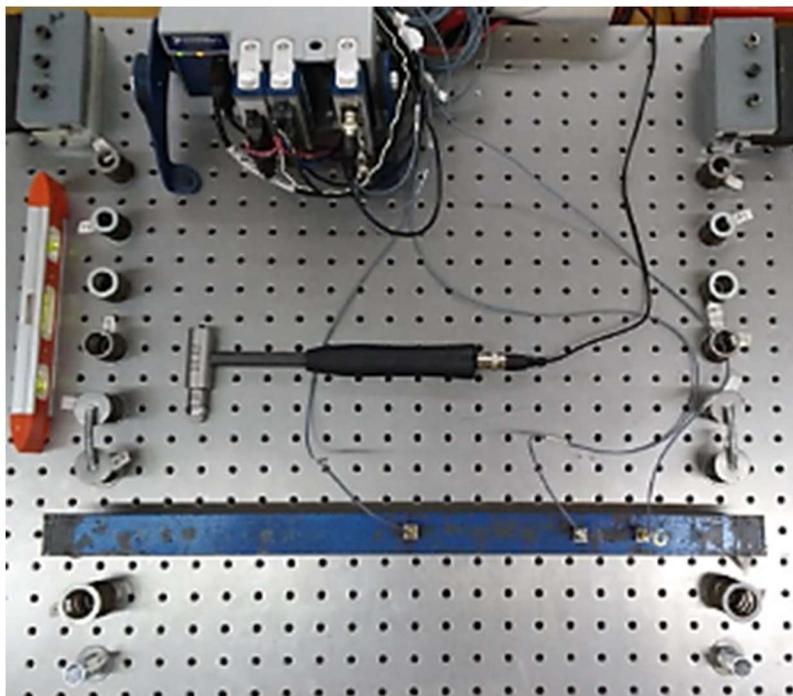


Figura A11.2– Setup experimental - Cableado.

### A11.2.2 Prueba de encendido y conexionado

Se procedió a encender la PC y los sistemas de acondicionamiento y adquisición de señales.

Se verificó el conexionado, dando golpecitos a cada uno de los acelerómetros. Se comprobó que eran coincidentes los puntos de medición en el programa con los del sistema físico.

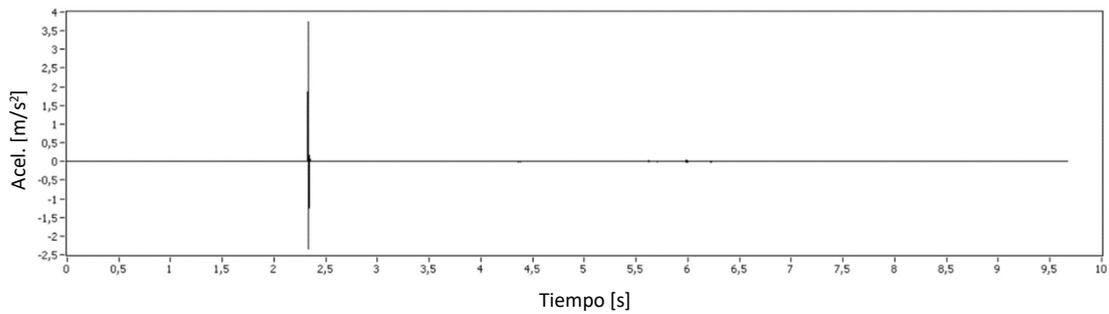


Figura A11.3– Prueba de sensores.

Se verificó que la señal no sature.

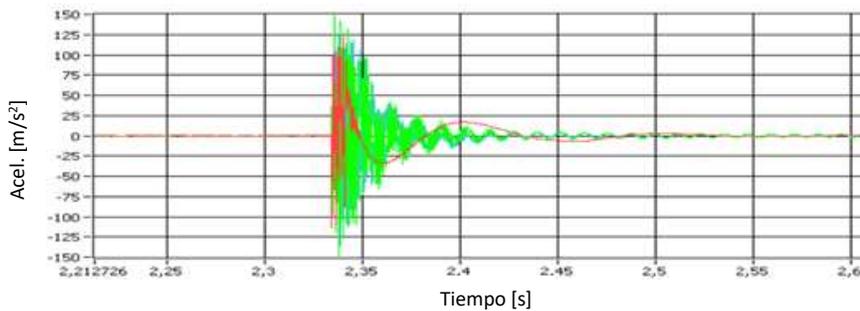


Figura A11.4– Comprobación de no saturación de la señal de los sensores.

También que el nivel de ruido sea el apropiado

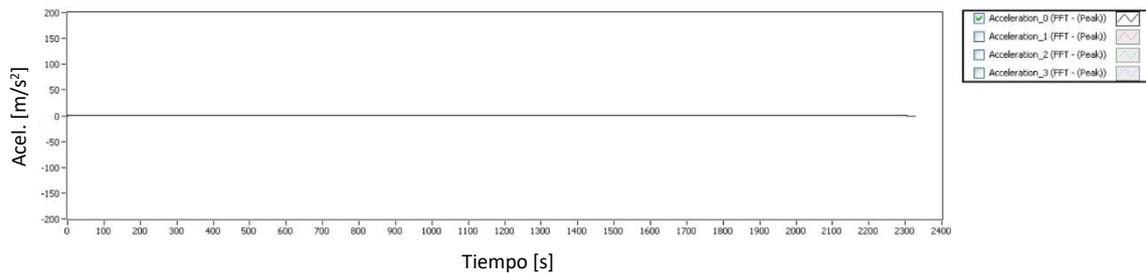


Figura A11.5– Control del nivel de ruido.

**A11.2.3 Análisis de la señal temporal y espectro de entrada**

Se impactó con el martillo instrumentado, se verificó que las puntas seleccionadas excitaban frecuencias en todo el rango requerido y que la FFT tiene un solo lóbulo.

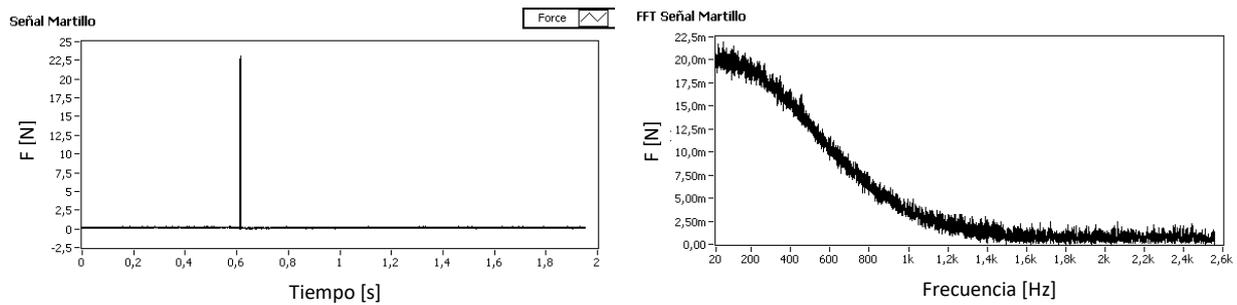


Figura A11.6– Control de la señal del sistema de excitación. a) Señal temporal. b) FFT.

**A11.2.4 Prueba de anillo y ausencia de doble impacto**

Una verificación adicional respecto de la excitación de la estructura fue asegurarse que no existía efecto de anillo (saturación y excitación propia del adquisidor). Se muestra una señal típica de este efecto que busca evitarse.

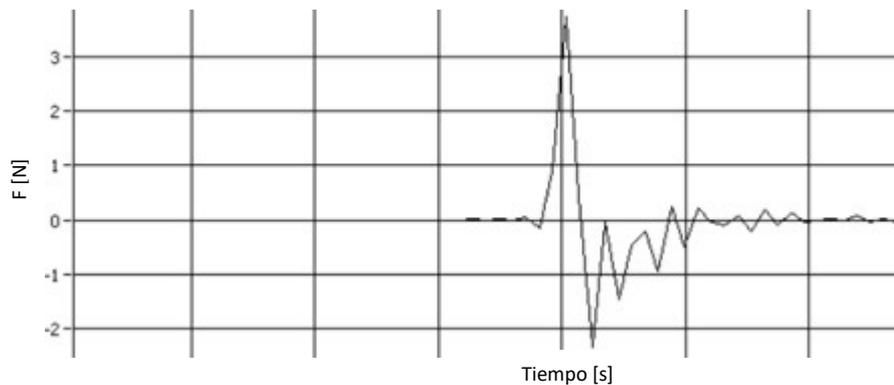


Figura A11.7– Control ausencia de doble impacto.

Por otra parte, el doble golpe se produce cuando el analista no retira la mano lo suficientemente rápido y la estructura vuelve a impactar contra el martillo instrumentado. A veces, suele ser imperceptible en la señal temporal, pero se manifiesta claramente en el campo de las frecuencias.

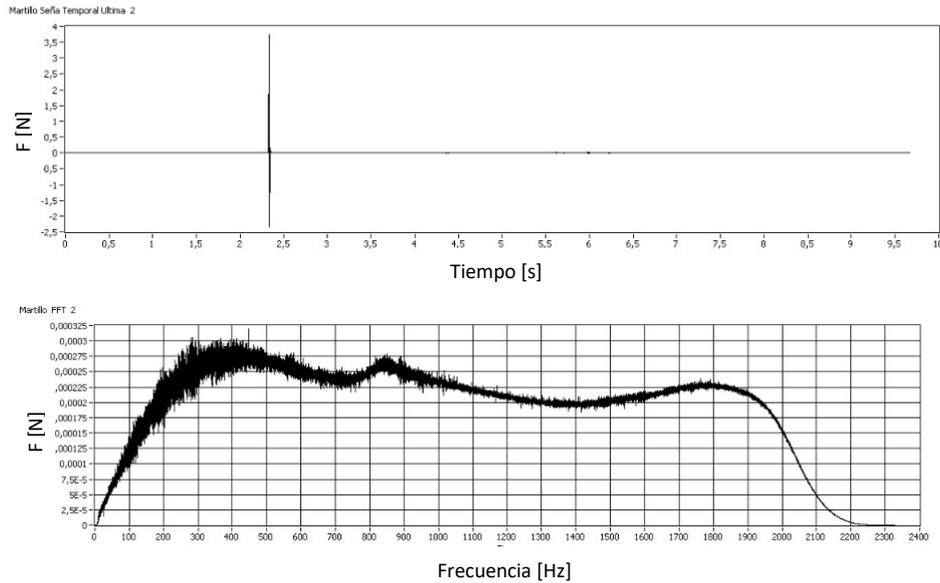


Figura A11.8– Ejemplo de doble impacto con martillo instrumentado

### A11.2.5 Análisis de la FFT, la FRF y la coherencia

Se verificó que todos los modos de interés estaban presentes en la FFT y que exista una buena separación entre los modos de cuerpo rígido y los modos flexibles. Y también que la separación entre los propios modos flexibles sea la suficiente.

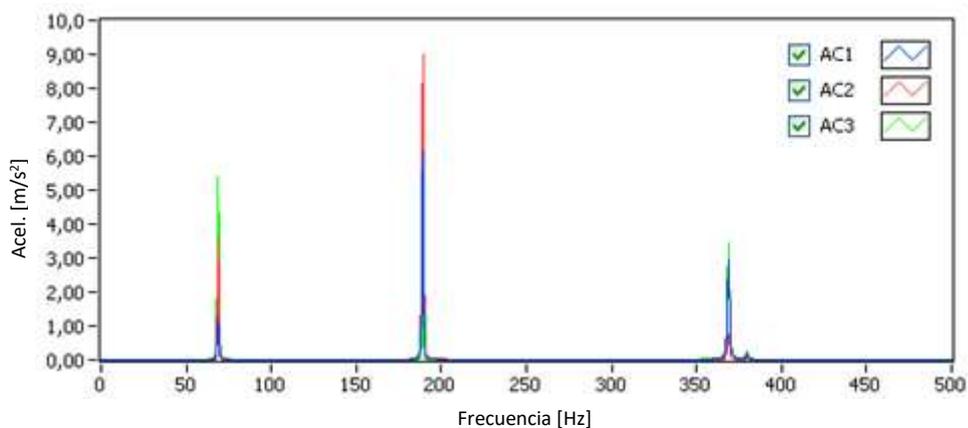
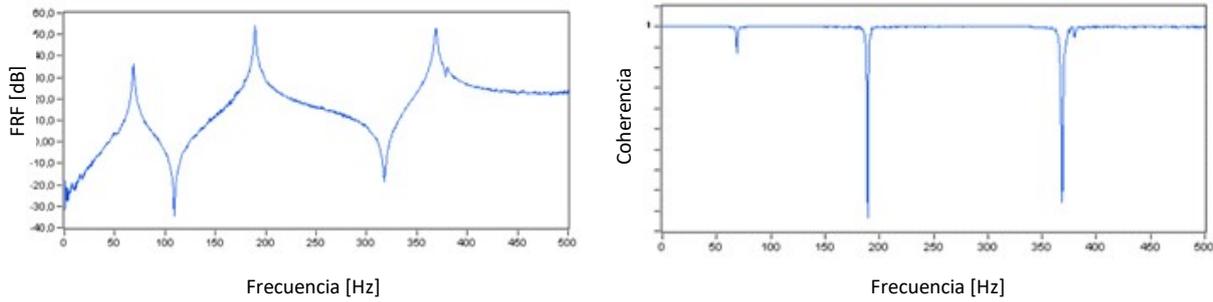


Figura A11.9– Comprobación de la existencia de todos los modos de interés.

Se verificó que la FRF y la coherencia estaban bien definidas para todo el rango de interés.



a) b)  
 Figura A11.10– Comprobación de a) FRF y b) coherencia en el rango de interés.

**A11.2.6 Prueba de doble acelerómetro**

Para verificar que la masa de los acelerómetros es la apropiada, o sea que no modifica la respuesta dinámica de la estructura, se debe tomar una FRF con un solo acelerómetro montado.

Luego se repitió, montando otro acelerómetro igual en la misma posición.

Al comparar se observa que no se produjo un cambio en la FRF, por lo tanto, la masa del acelerómetro propuesto no ha alterado el comportamiento vibratorio de la estructura.

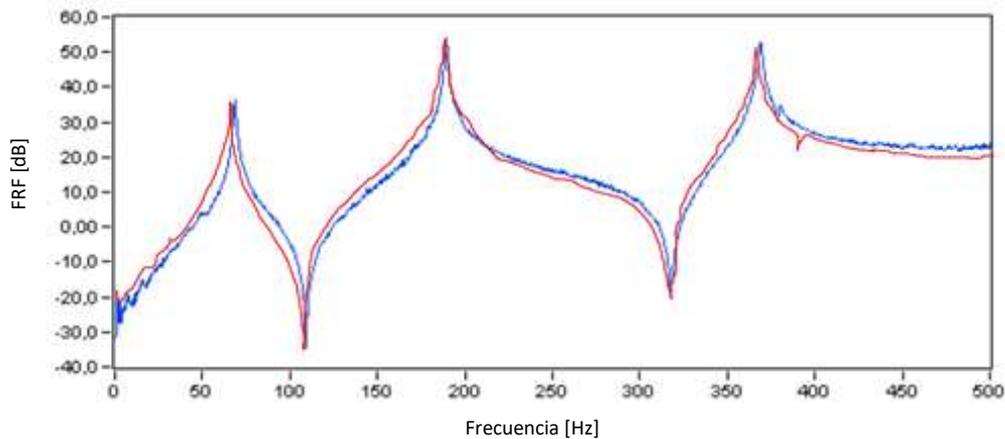


Figura A11.11– Prueba de doble acelerómetro.

### ***A11.2.7 Prueba de Masa móvil***

Se cambió la posición del acelerómetro y se obtuvo FRF nuevamente.

Al comparar con las mediciones anteriores, se comprobó que no ha variado.

Por lo que el acelerómetro propuesto no ha alterado el comportamiento vibratorio de la estructura. De lo contrario, se debiera de utilizar acelerómetros más pequeños o agregar acelerómetros dummy.

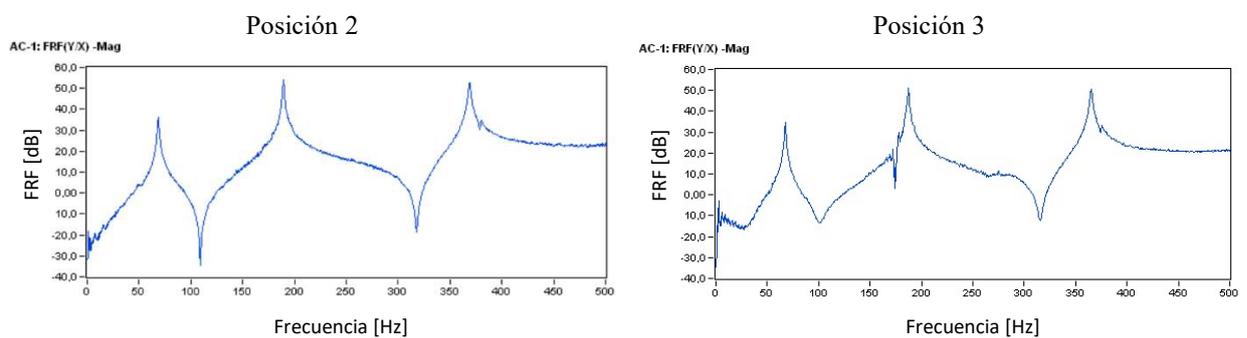


Figura A11.12– Prueba de masa móvil.

### ***A11.2.8 Prueba de repetitividad***

Se procedió a repetir el ensayo en diferentes horarios del día, con diferentes operadores y montando y desmontando todo el sistema, arrojando similares resultados.

### ***A11.2.9 Prueba de reciprocidad***

Tanto en martillo estacionario como martillo itinerante, se obtuvo la misma FRF.

### A11.3 Prueba

#### A11.3.1 Adquisición y procesamiento

A continuación, se presentan figuras características de las señales de excitación, respuesta y el procesamiento de estas.

- Señal de excitación.

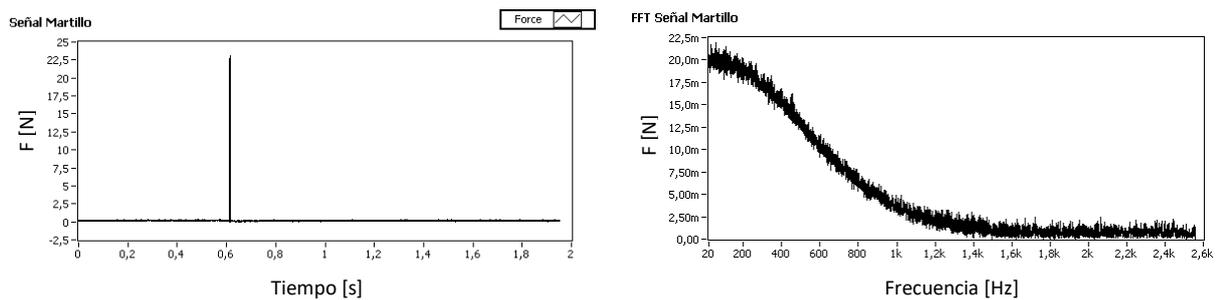


Figura A11.13– Señal de excitación.

- Señal de los acelerómetros.

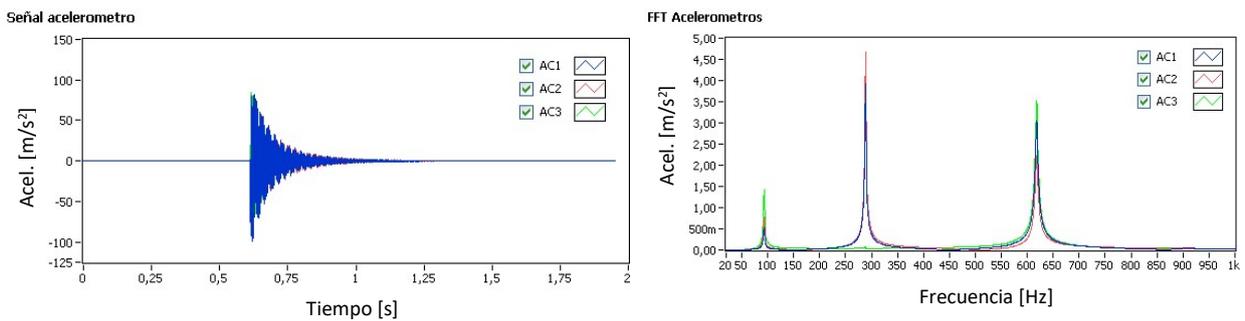


Figura A11.14– Señal de la respuesta de la estructura.

- Matriz FRF Magnitud.

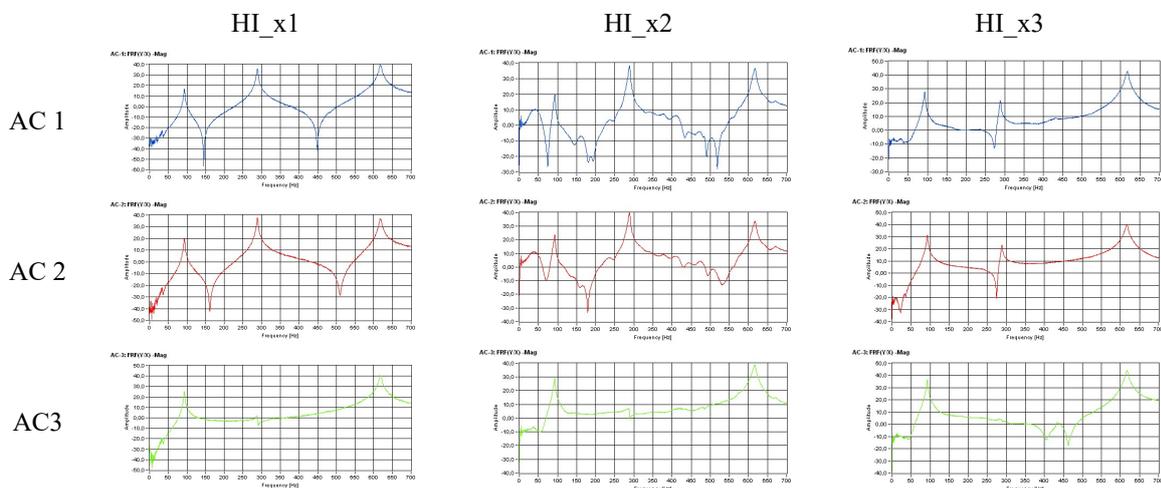


Figura A11.15– FRF Magnitud.

- Matriz FRF Fase.

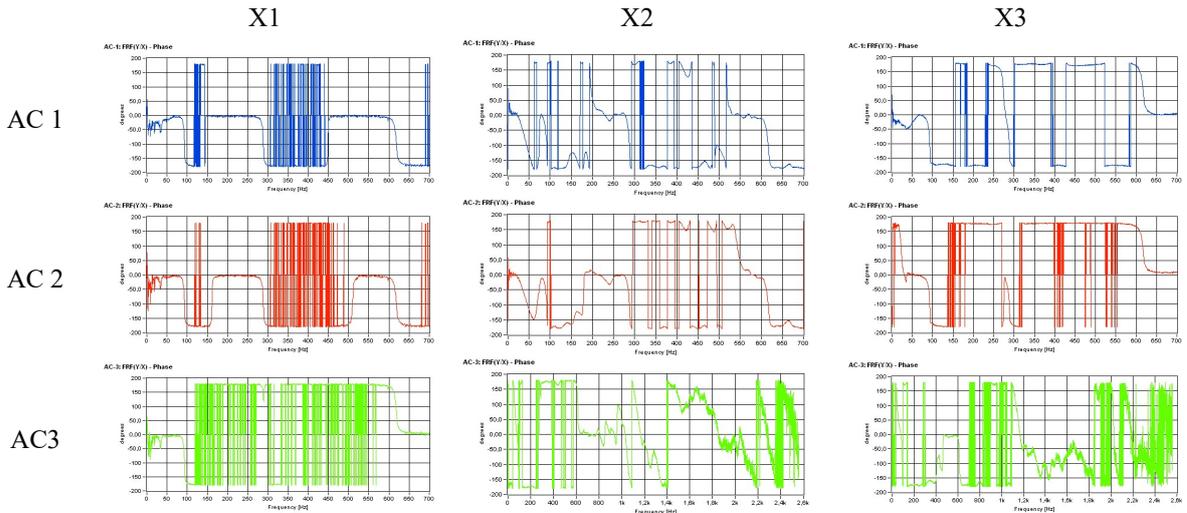


Figura A11.16– FRF Fase.

- Matriz FRF Real.

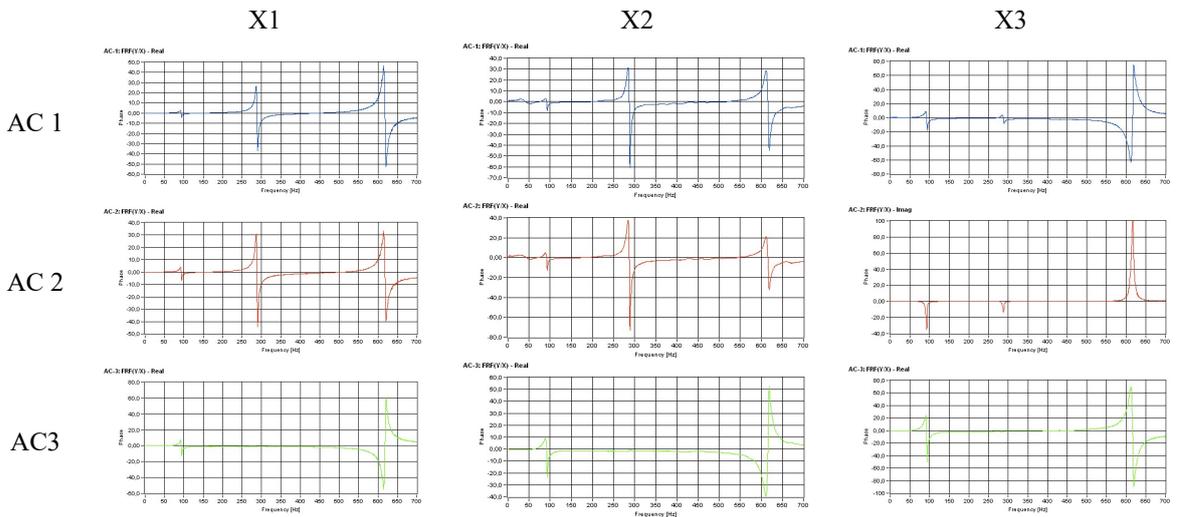


Figura A11.17– FRF Componente Real.

- Matriz FRF Imaginaria.

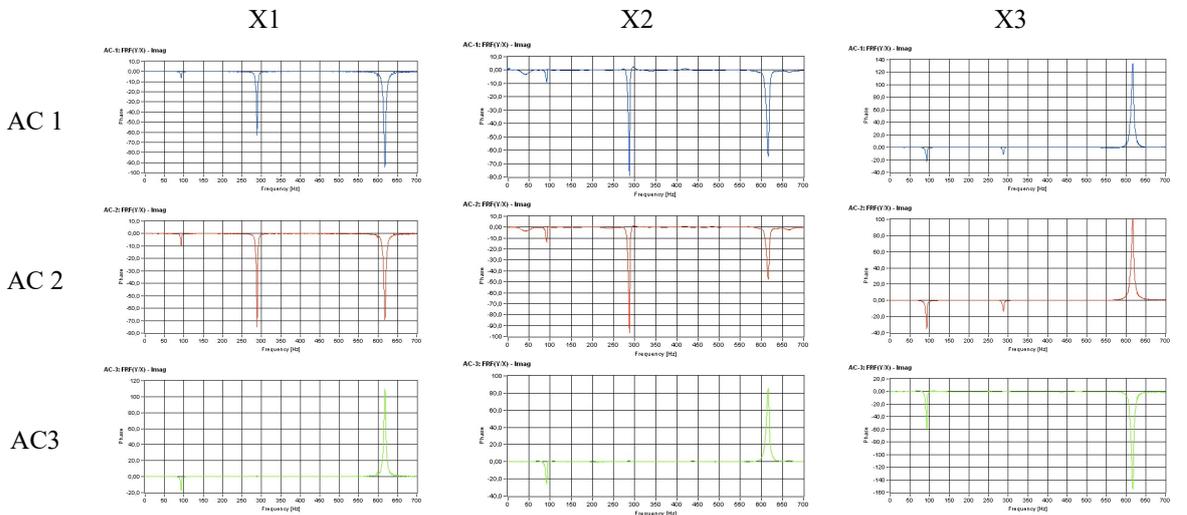


Figura A11.18– FRF Componente Imaginaria.

### *A11.3.2 Obtención de las Frecuencias Naturales de vibración*

- Técnica de recolección de picos.

La suposición básica para las aproximaciones de modo único es que, en la vecindad de una resonancia, la respuesta se debe principalmente a ese modo único.

La frecuencia de resonancia se puede estimar a partir de los datos de respuesta de frecuencia observando la frecuencia con la que ocurre cualquiera de las siguientes tendencias:

La magnitud de la respuesta de frecuencia es máxima.

La parte imaginaria de la respuesta de frecuencia es máxima o mínima.

La parte real de la respuesta de frecuencia es cero.

La respuesta retrasa la entrada en una fase de  $90^\circ$ .

En la Tabla A11.13 se pueden observar los resultados obtenidos.

	Frecuencias	
	Promedio	Desv.
Modo 1	94.10421	0.313002
Modo 2	289.8557	0.25174
Modo 3	619.7873	0.602175

Tabla A11.13 – Resumen de resultados: Frecuencias Naturales.

Que fue determinada según la Figura A11.19.

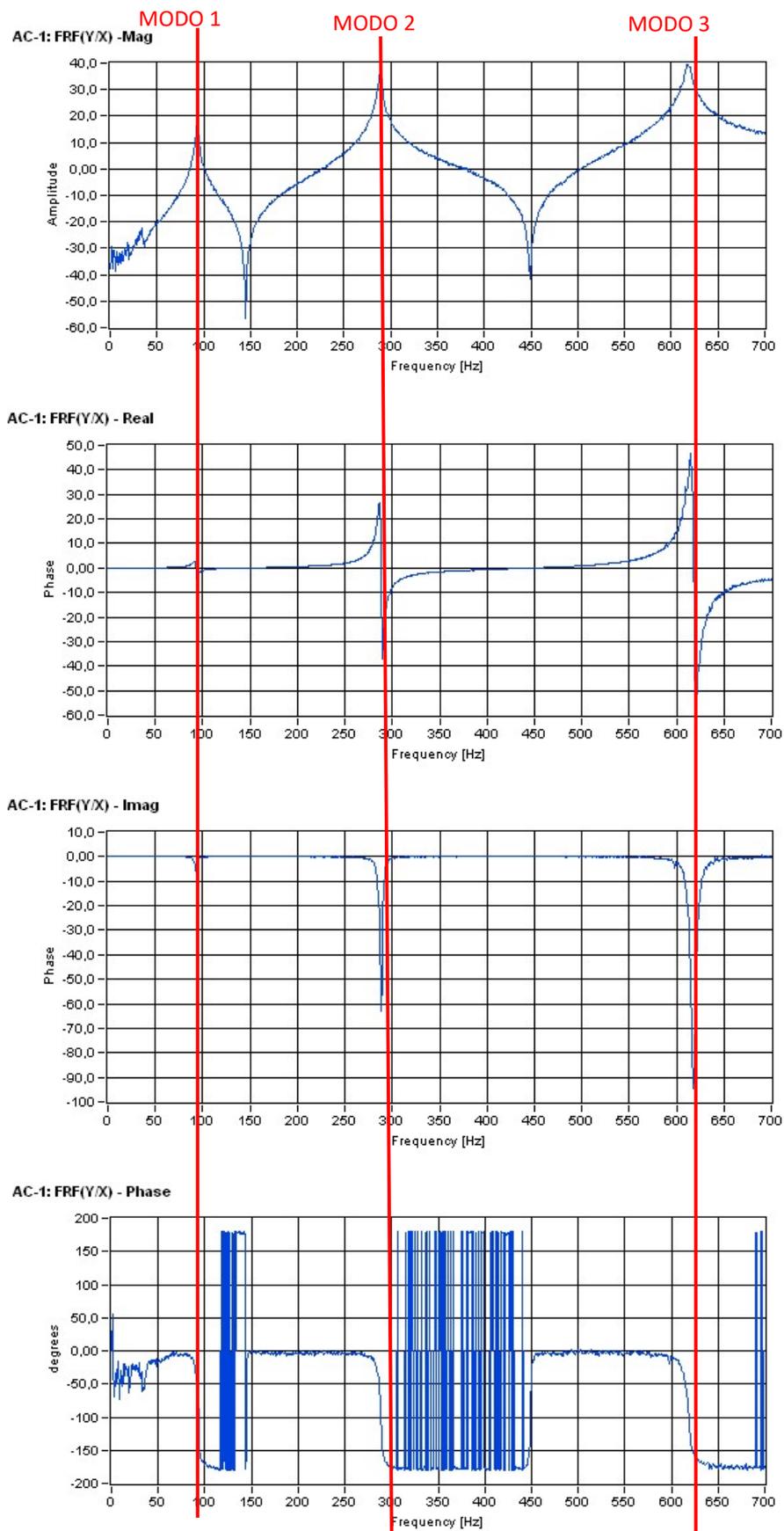


Figura A11.19– Obtención de las Frecuencias Naturales de vibración.

### A11.3.3 Factor de amortiguamiento

- Técnica de la potencia media.

El factor de amortiguación puede estimarse mediante el método de la potencia. La amortiguación se estima determinando lo agudo del pico resonante. Se establecen los puntos por debajo y por encima del pico resonante en el que la magnitud de respuesta es 0.7071 veces la magnitud resonante.

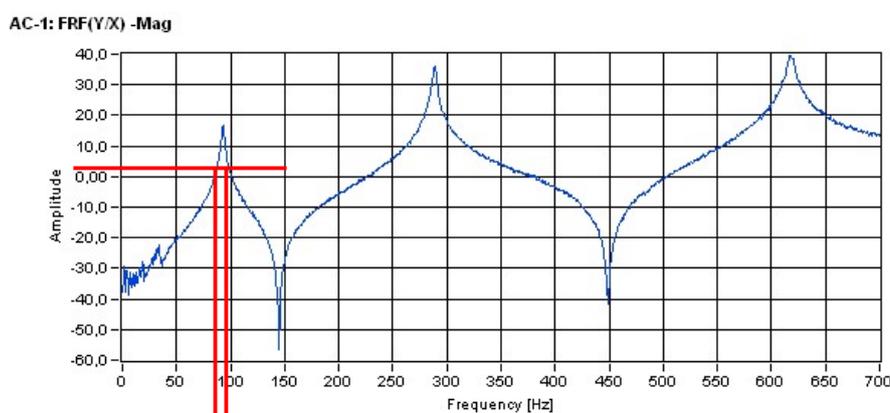


Figura A11.20– Obtención del factor de amortiguamiento por técnica de la potencia media.

El valor del amortiguamiento se establece según

$$\xi = \frac{(\omega_2 - \omega_1)}{2\omega_n} = \frac{(94.71516 - 93.28484)}{2 \cdot 94.10} = 0.075$$

- Transformada de Hilbert.

La Transformada de Hilbert es usada para obtener la envolvente de una señal. Si se supone un sistema libre amortiguado de un grado de libertad (se analiza un modo predominante), la respuesta está dada por:  $y(t) = Ae^{-\zeta\omega_n t} \text{sen}(\omega_d t + \phi)$   $t \geq 0$ . Donde

$a_x(t) = A_x(t)e^{j\phi_x(t)} \approx (Ae^{-\zeta\omega_n t})e^{j(\omega_d t + \phi - \pi/2)}$ . Por lo que el  $\ln A_x(t) \approx \ln A - \xi\omega_n t$ . De esta expresión se puede obtener el coeficiente de amortiguamiento

Se parte de una señal temporal que contiene todos los modos excitados. Se pasa por un filtro pasa banda, sintonizado con la frecuencia natural de determinada para el modo que se analiza.

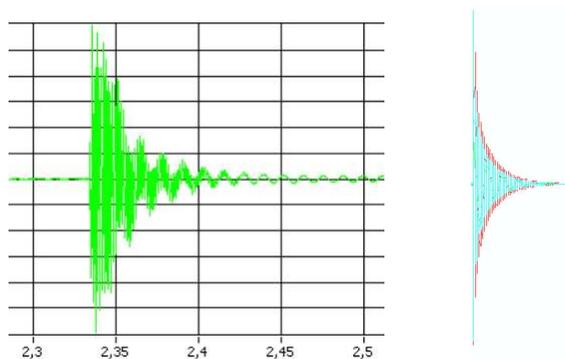


Figura A11.21– Señal temporal  
a) contiene todos los modos. b) Un modo aislado.

Luego se aplica la transformada de Hilbert para hallar la envolvente de la señal temporal. Y se determina el logaritmo de esta.

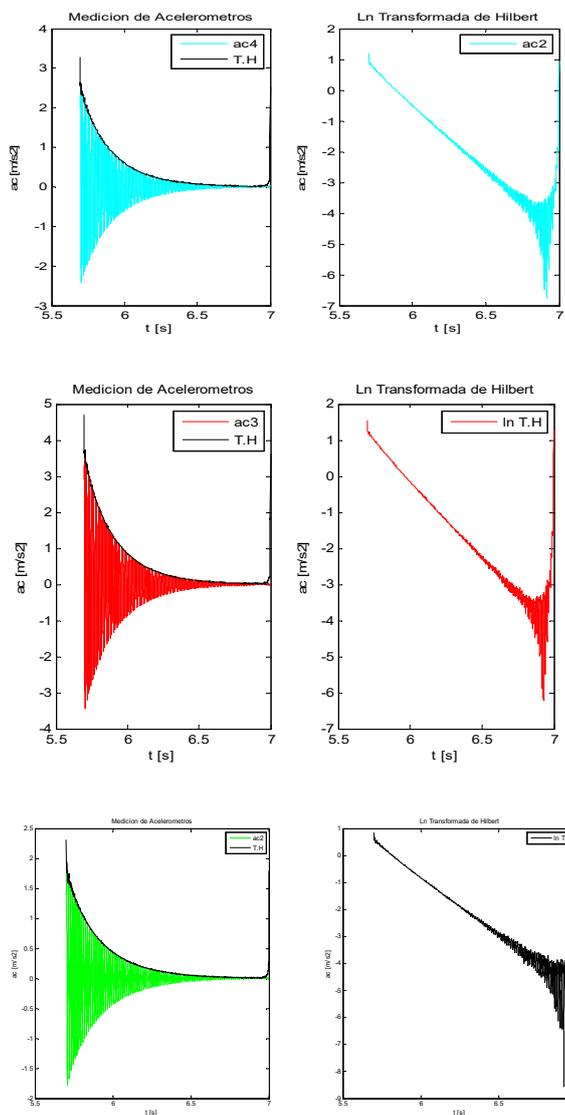


Figura A11.22– Obtención del factor de amortiguamiento por técnica de la transformada de Hilbert.

Se interpola el logaritmo natural de cada transformada con un polinomio de grado 1 (recta) y se determinan las respectivas pendientes. Se hace un promedio de las 3 pendientes obtenidas Finalmente, el coeficiente de amortiguamiento se determina según:

$$\zeta = \frac{m_{recta}}{\omega_n} = \frac{3.8907}{2 \cdot \pi \cdot 81.4} = 0.0076$$

- Decremento logarítmico.

En forma análoga al procedimiento anterior, se filtra la señal de los acelerómetros, aislando la respuesta de cada modo.

El decremento logarítmico, denotado por  $\delta$ , está definido como  $\delta = \ln \frac{x(t)}{x(t+T)}$ . Donde T es el periodo de oscilación. Se aplicó un algoritmo detector de picos para encontrar los valores máximos  $x(t), x(t+T_1), \dots, x(t+T_n)$

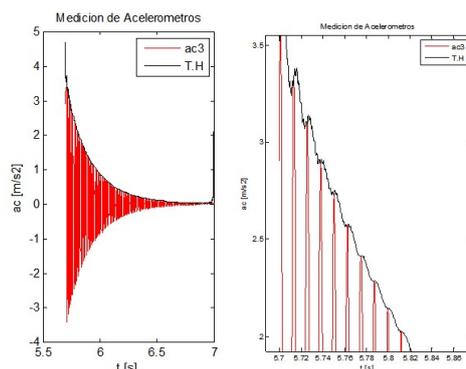


Figura A11.23– Obtención del factor de amortiguamiento por técnica del decaimiento logarítmico.

El coeficiente de amortiguamiento se obtiene a partir de

$$\xi = \frac{\delta}{\sqrt{4\pi^2 + \delta^2}} \approx \frac{\bar{\delta}}{\sqrt{4\pi^2 + \bar{\delta}^2}} = \frac{0.0590}{\sqrt{4\pi^2 + 0.0590^2}} = 0.0094.$$

Los resultados de las 3 metodologías empleadas para determinar el coeficiente de amortiguamiento son promediados.

	Amortiguamiento	
	Promedio	Desv.
Modo 1	0.0076	0.000023
Modo 2	0.0058	0.000057
Modo 3	0.0093	0.000062

Tabla A11.14 – Resumen de resultados: Coeficientes de amortiguamiento.

### A11.3.4 Coeficiente modal

El coeficiente modal coincide con el valor del pico de la parte imaginaria.

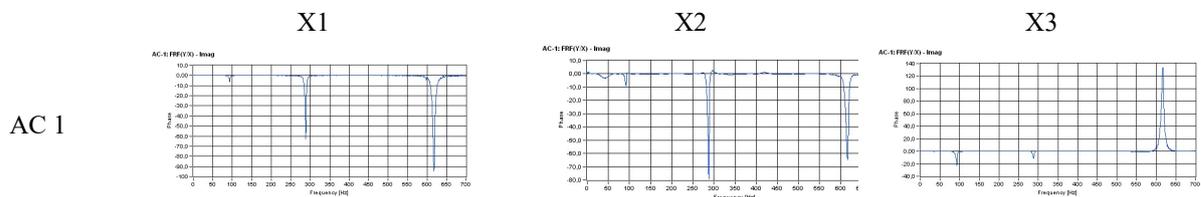


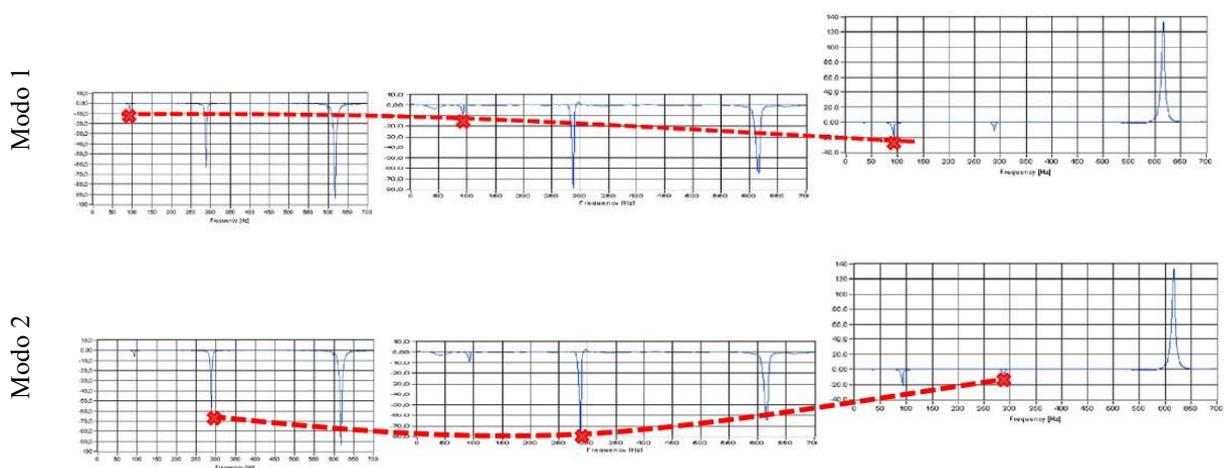
Figura A11.24– Parte Imaginaria de la señal del acelerómetro AC1 para excitación en diferentes puntos.

Al considerar la fila 1 de la matriz FRF, que corresponde a la respuesta medida por el acelerómetro 1, se extraen los valores de los coeficientes modales para las 3 primeras frecuencias, para cada FRF que corresponde al golpe del martillo instrumentado en una posición determinada.

	X1	X2	X3
Modo 1	-5	-9.9	-22
Modo 2	-63	-79	-7
Modo 3	-94	-63	135

Tabla A11.15 – Valor de la componente imaginaria para cada modo y posición de excitación.

El patrón de deformación de los modos, se pueden determinar a partir de las amplitudes de estos coeficientes modales. Para esto, se debe unir los picos correspondientes a cada modo en las 3 FRF.



Modo 3

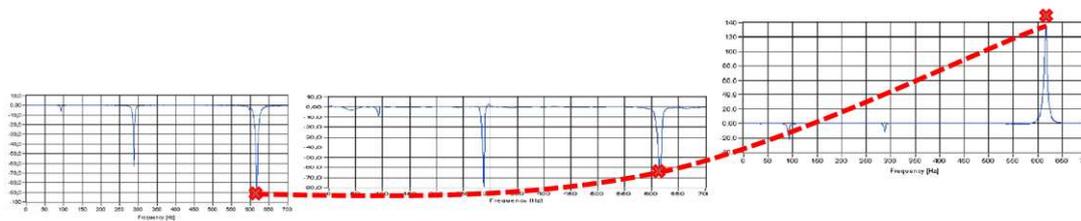


Figura A11.25– Metodología para determinar las formas modales.

Para facilitar la visualización de las formas modales, es conveniente reordenar la información de los coeficientes modales. Prestar atención a la simetría y considerar las condiciones de borde.

Posición de Acelerómetro	0	8.55	13.25	26.5	38.475	42.75	51.3
Posición normalizada	0	0.1667	0.25	0.5	0.75	0.833	1
Modo 1	0	-5	-9.9	-22	-9.9	-5	0
Modo 2	0	-63	-79	-7	79	63	0
Modo 3	0	-94	-63	135	-63	-94	0

Tabla A11.16 – Valor de la componente imaginaria, incluida las simetrías y cond. de borde.

Al interpolar los coeficientes modales con una función polinómica, se observa más claramente las formas modales.

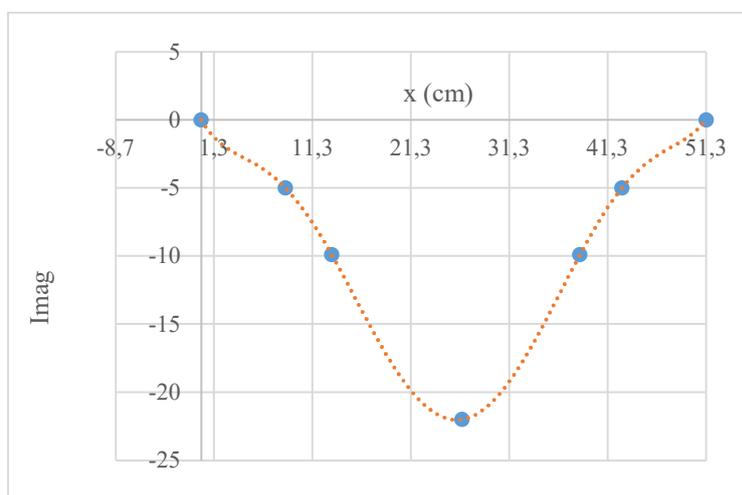


Figura A11.26– Primera forma modal.

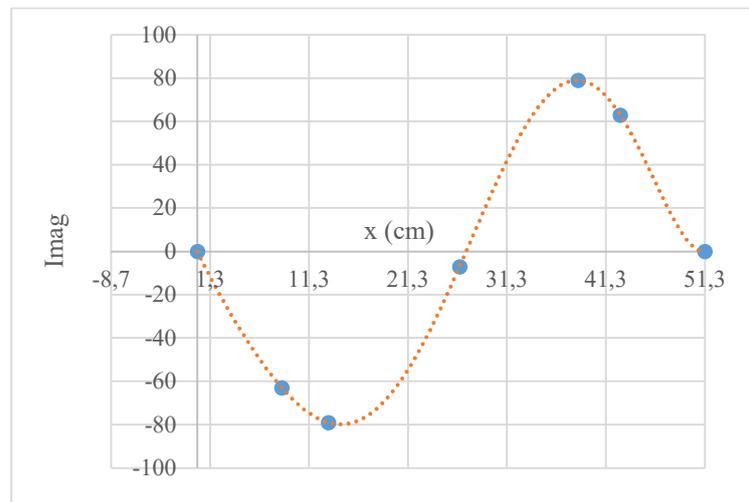


Figura A11.27– Segunda forma modal.

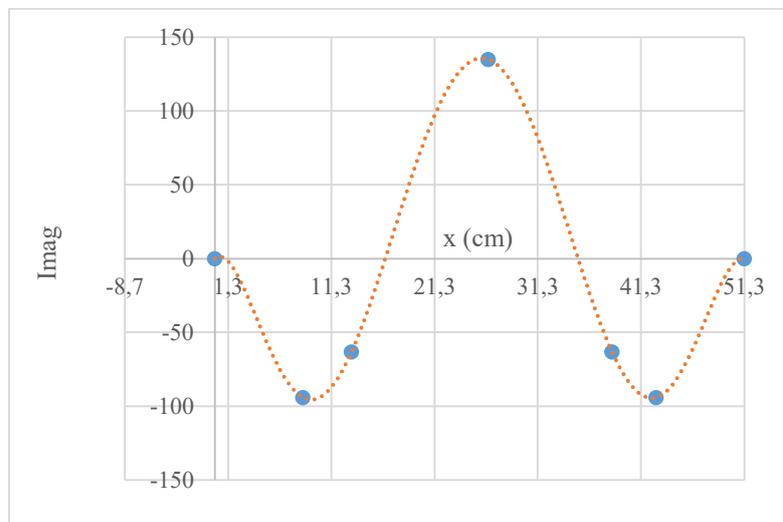


Figura A11.28– Tercera forma modal.

# REFERENCIAS

- Arenas, B. B. y Grossi, R. O. (1999). Vibration frequencies for a beam with a rotational restraint in an adjustable position, *Applied Acoustics*, 57:197-202.
- Avitabile, P. (2018). *Modal testing a practitioner's guide*. 1st edition. Wiley. University of Massachusetts Lowell.
- Bakhtiari-Nejad, F., Khorram, A. y Rezaeian, M. (2014). *Analytical estimation of natural frequencies and mode shapes of a beam having two cracks*. *International Journal of Mechanical Sciences* 78, 193–202.
- Beck, J.L. y Katafygiotis, L. S. (1991). *Updating of a Model and its Uncertainties Utilizing Dynamic Test Data*. *Computational Stochastic Mechanics*, 125-136.
- Behzad, M., Ebrahimi, A. y Meghdari, A. (2010). *A Continuous Vibration Theory for Beams with a Vertical Edge Crack*. *Transaction B: Mechanical Engineering* Vol. 17, No. 3, pp. 194-204.
- Binici, B. (2005). *Vibration of beams with multiple open cracks subjected to axial force*. *Journal of Sound and Vibration* 287:277–295.
- Blanchard, P. y Brüning E. (1992). *Variational Methods in Mathematical Physics*. Springer –Verlag, New York.
- Borwick, J. (2001). *Loudspeaker and Headphone Handbook*. London: Focal Press - Third Edition.
- Botta, F., Rossi, A. y Belfiore, N. P. (2021). A novel method to fully suppress single and bi-modal excitations due to the support vibration by means of piezoelectric actuators. *Journal of Sound and Vibration*, 510, 116260.
- Bovsunovsky, A. y Surace, C. (2015). *Non-linearities in the vibrations of elastic structures with a closing crack: A state of the art review*. *Mechanical Systems and Signal Processing* 62-63, 129–148.
- Brechtken-Manderscheid, U. (1991). *Introduction to the Calculus of Variations*. Chapman and Hall, London.
- Brown, A. L., “Electrodynamic type vibration generator”, Pat. Num. 3194992A, United States Patent Office – USA - (1965).

- Brown, A. L., “Electrodynamic type vibration generator”, Pat. Num. 3194992A, United States Patent Office – USA - (1965).
- Brown, F. W. y Srawley, Jr, J. E. (1966). *Plane strain crack toughness testing of high strength metallic materials*. ASTM STP, 410, 12.
- Bunge, M. (2006). Problemas directos e inversos, Recuperado el 30 de abril de 2010 de <http://grupobunge.wordpress.com/2006/07/20/119>
- Butts, G., “Apparatus for vibration testing”, Pat. Num. 4715229A, United States Patent Office – USA - (1987).
- Butts, G., “Link arm suspension”, Pat. Num. 4858488A, United States Patent Office – USA - (1989).
- Butts, G., “Recirculating bearing”, Pat. Num. 4678347A, United States Patent Office – USA - (1987).
- Cabrera Fischer, E. (2013). Metodología de la investigación científica: obra orientada hacia las ingenierías. Forschung Ediciones, 1<sup>era</sup> edición, Buenos Aires.
- Cacciola, P., Impollonia, N. y Muscolino, G. (2003). *Crack detection and location in a damaged beam vibrating under white noise*. Computers and Structures 81, 1773–1782.
- Carne T., Griffith D. y Casias M., “Support Conditions for Experimental Modal Analysis,” Sound and Vibration, 2007.
- Carrizo, M. R. y Raffo, J. L. (2019). “Study of the effectiveness of an analytical crack detection method based on frequency measurements”, XXIV Congreso sobre Métodos Numéricos y sus Aplicaciones, XXIV ENIEF, Mecánica Computacional Vol. XXXVII, ISSN 2591-3522, 149-158, Santa Fe, Argentina, del 5 al 7 de Noviembre.
- Carrizo, M. R. y Raffo, J. L. (2019). “Theoretical and experimental analysis of the elastic support rigidity coefficient’s value on the natural frequencies in beams”, XIV Congreso Iberoamericano de Ingeniería Mecánica, XIV CIBIM, Cartagena, Colombia, del 12 al 15 de Noviembre.
- Cawley, P. y Adams, R. D. (1979). *The location of defects in structures from measurements of natural frequencies*. Journal of strain analysis, vol 14 no 2.
- Cawley, P. y Ray, R. (1988). *A Comparison of the Natural Frequency Changes Produced by Cracks and Slots*. Journal of Vibration and Acoustics, Stress, and Reliab., 110(3): 366-370.
- Chang, T. P., Lin, G. L. y Chang, E. (2006). *Vibrations analysis of a beam with an internal hinge subjected to a random moving oscillator*. International Journal of Solid and Structures, 43, 6398-6412.

- 
- Chinchalkar, S. (2001). *Determination of crack location in beams using natural frequencies*. Journal of Sound and Vibration, 247(3), 417-429.
  - Chondros, T. G., Dimarogonas, A. D. y Yao, J. (1997). “A consistent cracked bar vibration theory. Journal of Sound and Vibration”, 200: 303-313.
  - Chondros, T. G., Dimarogonas, A. D. y Yao, J. (1998). A continuous cracked beam vibration theory. Journal of Sound and Vibration, 215(1): 17-34.
  - Chouiyakh, H., Azrar, L., Akourri, O. y Alnefaie, K. (2017). Vibration and multi-crack identification of Timoshenko beams under moving mass using differential quadrature method, J. Mech. Sci. 120 (2017) 1–11, <https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2016.11.014>.
  - Chun, R. (1972). *Free vibration of a beam with one end spring-hinged and the other free*. Journal of Applied Mechanics, 39, 1154-1155.
  - Clamme, M.L., “Vibration transducer and actuator”, Pat. Num. 9331558B2, United States Patent Office – USA - (2016).
  - Cornwell, P., Farrar, C. R., Doebling, S. W. y Sohn, H. (1999). *Environmental variability of modal properties*. Experimental Techniques, 45–8.
  - Cortinez, H. y Laura, P. A. A. (1985). *Vibration and buckling of a non-uniform beam elastically restrained against rotation at one end and with concentrated mass at the other*. Journal of Sound and Vibration, 99:144-148,
  - Courant, R. y Hilbert, D. (1966). *Methods of Mathematical Physics*, Tomos I y II. Interscience Publ., New York.
  - Crowson, R. J., “Robust low profile shaker”, Pat. Num. 7069787, United States Patent Office – USA - (2006).
  - De Rosa, M. A., Bellés, P. M. y Maurizi, M. J. (1995). *Free vibrations of stepped beams with intermediate elastic supports*. Journal of Sound and Vibration, 181:905-910.
  - Diaferio, M., Sepe, V. y Bellizzotti, G. (2019). *Modal identification of localised damage in beams and trusses: experimental and numerical results*. International Journal of Advanced Structural Engineering 11:421–437.
  - Dilena, M. y Morassi, A. (2004). *The use of antiresonances for crack detection in beams*. Journal of Sound and Vibration 276, 195–214.
  - Dimarogonas A. D. (1996). “Vibration of cracked structures: a state of the art review”, Engineering Fracture Mechanics, 55: 831-857.
  - Dimarogonas, A.D. y Paipetis, S.A. (1983). *Analytical Methods in Rotor Dynamics*. London, Applied science publisher.

- Dimarogonas, A.D., Paipetis, S.A. y Chondros T. G. (2013). *Analytical Methods in Rotor Dynamics*, Second Edition, Springer, ISSN 2211-0984
- Doebling, S. W., Farrar C. R., Prime M. B. y Shevitz D. W. (1996). “Damage Identification and Health Monitoring of Structural and Mechanical Systems from Changes in Their Vibration Characteristics: A Literature Review”, *The Shock and Vibration Digest*, DOI: 10.2172/249299.
- Doebling, S. W., Farrar, C. R. y Goodman, R. S. (1997). “Effects of Measurement Statistics on the Detection of Damage in the Alamosa Canyon Bridge.” *Proceedings 15th International Modal Analysis Conference*, Orlando, FL, pp. 919-929.
- Doebling, S.W. (1995). *Measurement of Structural Flexibility Matrices for Experiments with Incomplete Reciprocity*, Ph. D. Dissertation, University of Colorado, Boulder, CO, Department of Aerospace Engineering Sciences, CU-CAS-95-10.
- Dong, G.M., Chen, J. y Zou, J. (2004). Parameter identification of a rotor with an open crack. *European Journal of Mechanics A/Solids* 23, 325–333
- Dym, C. y Shames, I. (2013). “*Solid Mechanics: A Variational Approach*”, Mc Graw Hill Book Company, New York.
- Efromson, P. C., “Electrodynamic vibration test equipment”, Pat. Num. 2789237A, United States Patent Office – USA - (1957).
- Emerson, A. C., “Electrodynamic shakers”, EP Pat. Num. 0159765A1, European Patent Office – UK - (1985).
- Eraky, A., Anwar, A. M., Saad, A. y Abdo, A. (2015). Damage detection of flexural structural systems using damage index method – Experimental approach. *Alexandria Engineering Journal* 54, 497–507.
- Ewing, M. S. y Mirsafian, S. (1996). *Forced vibration of two beams joined with a non-linear rotational joint: clamped and simply supported end conditions*. *Journal of Sound and Vibration*, 193(2), 483-496.
- Ewins, D. J. (1984). *Modal Testing: Theory and Practice*. London: Research Studies Press.
- Ewins, D. J. (2009). *Modal Testing: Theory, Practice and Application*. 2nd edition. Wiley-Blackwell.
- Fan, W. y Qiao, P. (2010). “Vibration-based Damage Identification Methods: A Review and Comparative Study”, *Structural Health Monitoring*, DOI: 10.1177/1475921710365419
- Farrar CR, Cornwell PJ, Doebling SW, Prime MB, et al. (2000). *Structural health monitoring studies of the alamosa canyon and I-40 bridges*. Los Alamos National Laboratory report LA-13635-MS.

- 
- Farrar, C. R., Doebling, S. W., Cornwell, P. J., and Straser, E. G. (1997). “Variability of Modal Parameters Measured on the Alamosa Canyon Bridge.” Proc. 15th International Modal Analysis Conf., Orlando, FL, pp. 257-263.
  - Farrar, C.R., James, G.H. (1997). “System identification from ambient vibration measurements on a bridge”, *Journal of Sound and Vibration*, 205, 1–18.
  - Fernández-Sáez, J. y Navarro, C. (2002). *Fundamental frequency of cracked beams in bending vibrations: an analytical approach*. *Journal of Sound and Vibration*, 256:17-31.
  - Fernández-Sáez, J., Morassi, A., Pressacco, M. y Rubio, L. (2016). Unique determination of a single crack in a uniform simply supported beam in bending vibration. *Journal of Sound and Vibration* 371, 94–109.
  - Fritzen, C. –P, Jennewein, D. y Kiefer, T. (1998). Damage detection based on model updating methods. *Mechanical Systems and Signal Processing* 12(1), 163-186.
  - Fukuoka, M., “Apparatus for vibrating seats”, Pat. Num. 5516192A, United States Patent Office – USA - (1996).
  - Furdui, H., Muntean, F., Minda, A. A., Praisach, Z. I., & Gillich, N. (2015). The influence of operational and environmental loads on the process of assessing damages in beams. In 11th International Conference on Damage Assessment of Structures (DAMAS 2015), *Journal of Physics: Conference Series* (Vol. 628, 012021). <https://doi.org/10.1088/1742-6596/628/1/012021>
  - Gayen, D., Tiwari, R., Chakraborty, D. (2019). “Static and dynamic analyses of cracked functionally graded structural components: A review”, *Composites Part B* 173 (2019) 106982.
  - Gearng, J. W., “Electro-magnetic vibrator suspension”, Pat. Num. 3529188A, United States Patent Office – USA - (1970).
  - Gelfand, I. M. y Fomin, S. V. (1963). *Calculus of Variations*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey.
  - Giaquinta, M. y Hildebrandt, S. (1996). *Calculus of Variations I*, Springer-Verlag, Berlín.
  - Gillich, G. R., Abdel Wahab, M., Praisach, Z. I. y Ntakpe, J. L. (2014). The influence of transversal crack geometry on the frequency changes of beams. ISMA 2014 - International Conference on Noise and Vibration Engineering and USD 2014 - International Conference on Uncertainty in Structural Dynamics (Leuven, Belgium), 485-498.
  - Gillich, G. R., Furdui, H., Wahab, M. A. y Korca, Z. I. (2019) A robust damage detection method based on multi-modal analysis in variable temperature conditions. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 115: 361-379.

- Gillich, G. R., Stanciu, E., Korca, Z. I., Praisach, Z.-I., & Hamat, C. (2017). Assessing Corrosion Damage from the Natural Frequency Changes. *Romanian Journal of Acoustics and Vibration (RJAV)*, volumen XIV.
- Gillich, G.R., Tufisi, C., Abdel Wahab, M., Hamat, C.O. (2021). Crack Assessment Based on the Use of Severity-Adjusted Modal Curvatures of the Healthy Beam. In: Herisanu, N., Marinca, V. (eds) *Acoustics and Vibration of Mechanical Structures—AVMS 2019*. Springer Proceedings in Physics, vol 251. Springer, Cham. [https://doi.org/10.1007/978-3-030-54136-1\\_50](https://doi.org/10.1007/978-3-030-54136-1_50)
- Gillich, N., Tufisi, C., Vasile, O., & Gillich, G.-R. (2019). Statistical Method for Damage Severity and Frequency Drop Estimation for a Cracked Beam using Static Test Data. *Romanian Journal of Acoustics and Vibration (RJAV)*, 16(1).
- Goel, P. (1976). *Free vibrations of a beam-mass system with elastically restrained ends*. *Journal of Sound and Vibration*, 47: 9-14.
- Grant, A. (1975). *Vibration frequencies for a uniform beam with one end elastically supported and carrying a mass at the other end*. *Journal of Applied Mechanics*, 42: 878-880.
- Grebla, H.-A., Rusu, V. C., Gillich, G.-R., & Bui, T. H. (2023). Assessment of cracks in beams using changes in the measured frequencies and Particle Swarm Optimization. En 65th International Conference on Vibroengineering in Resita, Romania, October 20-21, 2023.
- Groetsch, C.W. (2001). Inverse problems: the other two-thirds of the story, *Quaestiones Mathematicae*, Supplementary Issue (1), 89-93.
- Grootenhuis, P., “Electromechanical vibrators”, Pat. Num. 3234782A, United States Patent Office – USA - (1966).
- Grossi, R. O. (2010). *Cálculo de variaciones. Teoría y aplicaciones*. CIMNE, Barcelona.
- Grossi, R. O. y Albarracín, C. (2003). *Eigenfrequencies of generally restrained beams*. *Journal of Applied Mathematics*, 10:503-516.
- Grossi, R. O. y Albarracín, C.M. (1998). *A variant of method of orthogonal polynomials*. *Journal of Sound and Vibration*, 212, 749-752.
- Grossi, R. O. y Bhat, R. B. (1991). *A note on vibrating tapered beams*. *Journal of Sound and Vibration*, 47:174-178.
- Grossi, R. O. y Laura, P. A. A. (1982). *Further results on a vibrating beam with a mass and spring at the end subjected to an axial force*. *Journal of Sound and Vibration*, 84:593-594.

- 
- Grossi, R. O. y Quintana, M. V. (2008). *The transition conditions in the dynamics of elastically restrained beams*. Journal of Sound and Vibration, 316, 274-297.
  - Grossi, R. O., Aranda, A. y Bhat, R. B. (1993). *Vibration of tapered beams with one end spring hinged and the other end with tip mass*. Journal of Sound and Vibration, 160:175-178.
  - Hadamard, J.: *Lectures on Cauchy's Problem in Linear Partial Differential Equations*. Yale Univ. Press (1923)
  - Hai, T. T., Hang, P. T., & Khiem, N. T. (2024). A novel criterion for crack identification in beam-like structures using distributed piezoelectric sensor and controlled moving load. Journal of Sound and Vibration, 572, 118155.
  - Hamzelo, S. R., Barzegar, M. y Mohsenzadeh, M. (2020). Damage Detection of L-Shaped Beam Structure with a Crack by Electromechanical Impedance Response: Analytical Approach and Experimental Validation. Journal of Nondestructive Evaluation, 39(47). <https://doi.org/10.1007/s10921-020-00692-3>.
  - Hemez, F.M. (1993). *Theoretical and Experimental Correlation Between Finite Element Models and Modal Tests in the Context of Large Flexible Space Structures*, Ph. D. Dissertation, Dept. of Aerospace Engineering Sciences, University of Colorado, Boulder, CO.
  - Heryudono, A. R. H., & Lee, J. (2019). Free vibration analysis of Euler-Bernoulli beams with non-ideal clamped boundary conditions by using Padé approximation. Journal of Mechanical Science and Technology, 33(3), 1169–1175. <https://doi.org/10.1007/s12206-019-0216-2>
  - Hibbeler, C. (1975). *Free vibrations of a beam supported with unsymmetrical spring-hinges*. Journal of Applied Mechanics, 42:501-502.
  - Hsu, M-H. (2005). *Vibration analysis of edge-cracked beam on elastic foundation with axial loading using the differential quadrature method*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 194:1-17.
  - Huang, Y., Chen, J., Ge W., Bianc, X. y Hu, W. (2019). *Research on geometric features of phase diagram and crack identification of cantilever beam with breathing crack*. Results in Physics 15, 102561.
  - Hunt, F. C., “Armature assembly and method of making the same”, Pat. Num. 3018541A, United States Patent Office – USA - (1962).
  - Irwin, G. R. (1957). *Analysis of stresses and strains near the end of a crack traversing a plate*. Journal of Applied Mechanics 24, 361-364.
-

- Ju, F.D. y Mimovich, M. E. (1988). Experimental diagnosis of fracture damage in structures by the modal frequency method. *J. Vibr. Acoust. Stress Reliability Design* 110, 456-463.
- Juneja, V., Haftka, R. T. y Cudney, H. H. (1997). Damage detection and damage detectability analysis and experiments. *Journal of aerospace engineering* 10: 135-142.
- Kantorovich, L. y Krylov, V. (1964). *Approximate Methods of Higher Analysis*. Interscience Publishers, New York.
- Kaouk, M. (1993). Finite Element Model Adjustment and Damage Detection Using Measured Test Data, Ph. D. Dissertation, Dept. of Aerospace Engineering Mechanics and Engineering Science, Univ. of Florida, Gainesville, FL.
- Khaji, N. y Mehrjoo, M. (2014). *Crack detection in a beam with an arbitrary number of transverse cracks using genetic algorithms*. *Journal of Mechanical Science and Technology* 28 (3), 823-836.
- Khaji, N., Shafiei, M. y Jalalpour, M. (2009). Closed-form solutions for crack detection problem of Timoshenko beams with various boundary conditions. *International Journal of Mechanical Sciences* 51: 667–681.
- Khiem NT, Hai TT y Huong LQ. (2023). Crack identification of functionally graded beam using distributed piezoelectric sensor. *Journal of Vibration and Control*, 29(15-16):3401-3417. doi:10.1177/10775463221095649
- Khiem, N. T. y Lien, T. V. (2001). *A simplified method for natural frequency analysis of a multiple cracked beam*. *Journal of Sound and vibration*, 245(4), 737-751.
- Khiem, N. T. y Lien, T. V. (2002). *The dynamic stiffness matrix method in forced vibration analysis of multiple-cracked beam*. *Journal of Sound and vibration*, 254(3), 541-555.
- Khiem, N. T. y Lien, T. V. (2004). *Multi-crack detection for beam by the natural frequencies*. *Journal of Sound and vibration*, 273, 175-184.
- Khiem, N. T., & Hang, P. T. (2022). A novel damage index extracted from frequency response of cracked Timoshenko beam subjected to moving harmonic load. *Vietnam Journal of Mechanics*, 44(3), 280–290. <https://doi.org/10.15625/0866-7136/17546>
- Khiem, N. T., Hai, T. T., Toan, L. K., Lan, N. T., & Quyet, H. Q. (2023). A novel criterion for crack detection in beam structures by frequency response functions. *Vietnam Journal of Mechanics*, 45(3), 273–286. <https://doi.org/10.15625/0866-7136/19040>
- Khiem, N.T. y Toan, L.K. (2014). *A novel method for crack detection in beam-like structures by measurements of natural frequencies*. *Journal of Sound and Vibration* 333, 4084–4103.

- 
- Khiem, N.T., Huan, D.T. y Hieu, T.T. (2023). Vibration of Cracked FGM Beam with Piezoelectric Layer Under Moving Load. *J. Vib. Eng. Technol.* 11, 755–769. <https://doi.org/10.1007/s42417-022-00607-8>
  - Khiem, NT; Hang, PT (2017). Analysis and identification of multiple-cracked beam subjected to moving harmonic load. *Journal of Vibration and Control*, (), 107754631769449–. doi:10.1177/1077546317694496
  - Kim, J. T. y Stubbs, N (2003). Crack detection in beam-type structures using frequency data. *Journal of Sound and Vibration* 259(1), 145–160.
  - Kim, J. T. y Stubbs, N. (1995). Model-uncertainty impact and damage-detection accuracy in plate girder. *Journal of structural engineering.* 121:1409-1417.
  - Kim, J. T., Ryu, Y. S, Cho, H. M. y Stubbs, N. (2003). Damage identification in beam-type structures: frequency-based method vs mode-shape-based method. *Engineering Structures* 25: 57–67.
  - Kim, J.-T, Park, J.-H. y Lee, B.-J. (2007). Vibration-based damage monitoring in model plate-girder bridges under uncertain temperature conditions. *Engineering Structures* 29: 1354–1365.
  - Kirmsher, P. G. (1944). *The effect of discontinuities on the natural frequency of beams.* *Proceedings of the american society of testing and materials* 44, 897-904.
  - Klippel, W. (1999). “*Measurement of Large-Signal Parameters of Electrodynamic Transducer*”, *Journal of The Audio Engineering Society*, Corpus ID: 109180720.
  - Klippel, W. (2000). “*Distortion analyzer – a new tool for assessing and improving electrodynamic transducer*”, *Journal of The Audio Engineering Society*, Corpus ID: 56288660.
  - Kumar, M., Shenoi, R.A., y Cox S.J. (2009). Experimental validation of modal strain energies based damage identification method for a composite sandwich beam. *Composites Science and Technology* 69: 1635–1643.
  - Lang, G. F. (1997). “*Electrodynamic shaker fundamentals*”, *Journal of Sound and Vibration*, 14–25.
  - Lang, G. F. y Snyder, D. (2001). “*Understanding the physics of electrodynamic shaker performance*”, *Journal of Sound and Vibration*, 24–33.
  - Larsen, H. W., “*Electrodynamic vibration producing apparatus*”, Pat. Num. 3331239, United States Patent Office – USA - (1967).
  - Lau, J. H. (1984). *Vibration frequencies and mode shapes for a constrained cantilever.* *Journal of Applied Mechanics*, 57:182-187.

- Laura, P. A. A., Verniere de Irassar, P. L. y Ficcadenti, G. M. (1984). *Forced vibrations of a continuous beam with ends elastically restrained against rotation*. Applied Acoustics, 17, 345-356.
- Laura, P. A. y Gutierrez, R. H. (1986). *Vibration of a elastically restrained cantilever beam of varying cross section with tip mass of finite length*. Journal of Sound and Vibration, 108:123-131.
- Laura, P.A.A., Grossi, R. O. y Alvarez, S. (1982). *Transverse vibrations of a beam elastically restrained at one end and with a mass and spring at the other subjected to an axial force*. Nuclear Engineering and Design, 74:299-302.
- Lee, I. H., “Vibration apparatus capable of generating and externally transmitting a sound wave of audible frequency and transmitting a vibration for notification”, Pat. Num. 6211775B1, United States Patent Office – USA - (2001).
- Lee, J. (2009). Identification of multiple cracks in a beam using natural frequencies. Journal of Sound and Vibration 320: 482–490.
- Lee, U. y Shin, J. (2002). A frequency-domain method of structural damage identification formulated from the dynamic stiffness equation of motion. Journal of Sound and vibration 257(4), 615-63.
- Leist, T., “Patent Flexure assembly”, Pat. Num. 6131461A, United States Patent Office – USA - (2000).
- Leitmann, G. (1986). *The Calculus of Variations and Optimal Control*. Plenum Press, New York.
- Lele, S. P. y Maiti, S. K. (2002). Modelling of transverse vibration of short beams for crack detection and measurement of crack extensión. Journal of Sound and Vibration, 257(3), 559-583.
- Lerwill, W. E., “Vibration generators”, Pat. Num. 4222455A, United States Patent Office – USA - (1980).
- Liang, R. Y., Choy, F. K. y Hu, J. (1991). Detection of Cracks in Beam Structures Using Measurements of Natural Frequencies. Journal of the Franklin Institute Vol. 328, No. 4. pp. 505-518.
- Liebowitz, H., Vanderveldt, H. y Harris, D. W. (1967). *Carrying capacity of notched column*. International Journal of Solids and Structures 3, 489-500.
- Lin, H. P., Chang, S. C. y Wu, J. D. (2002). *Beam vibrations with an arbitrary number of cracks*. Journal of Sound and Vibration, 258(5), 987–999. doi:10.1006/jsvi.2002.5184.

- Liu, H., Wei, Z., Tan, G., Han, Y. y Liu, Z. (2019). *Vibratory characteristics of cracked non-uniform beams with different boundary conditions*. Journal of Mechanical Science and Technology 33 (1), 377-392.
- Liu, W. y Barkey, M. (2017). Frequency error based identification of cracks in beam-like structures, Journal of Mechanical Science and Technology, 10: 4657-4667.
- Lucas, J. H., “Electromagnetic vibration generators”, Pat. Num. 5351545A, United States Patent Office – USA - (1994).
- Lupu, D., Gillich, G. R., Nedelcu, D., Gillich, N., & Manescu, T. (2020). A method to detect cracks in beams with imperfect boundary conditions. Journal of Physics: Conference Series, 1781(1), 012012. DOI: 10.1088/1742-6596/1781/1/012012
- Lütkenhöner, B. (2017). “*What the electrical impedance can tell about the intrinsic properties of an electrodynamic shaker*”, PLoS ONE 12(3):e0174184 . DOI: 10.1371/journal.pone.0174184
- Ma, H., Zeng, J., Lang, Z., Zhang, L., Guo, Y. y Wen, B. (2016). *Analysis of the dynamic characteristics of a slant-cracked cantilever beam*. Mechanical Systems and Signal Processing 75, 261–279.
- Maiz, S. Bambill, D.V., Rossit, C.A. y Laura, P.A.A. (2007). *Transverse vibration of Bernoulli-Euler beams carrying point masses and taking into account their rotatory inertia: Exact solution*. Journal of Sound and Vibration, 303, 895-908.
- Martínez, V. (2011). Problemas inversos: los casi olvidados de la matemática educativa. En Lestón, Patricia (Ed.), Acta Latinoamericana de Matemática Educativa (pp. 439-447). México, DF: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.
- Martinez-Luaces, V., Fernández-Plaza, J. A., Rico L. y Ruiz-Hidalgo, J. F. (2021). Inverse reformulations of a modelling problem proposed by prospective teachers in Spain. International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 52:4, 491-505, DOI: 10.1080/0020739X.2019.1683773
- Masuda, M., “Electromagnetic vibration apparatus”, Pat. Num. 3467925A, United States Patent Office – USA - (1969).
- Maurizi, R., Rossi, R. y Reyes, J. (1976). *Vibration frequencies for a uniform beam with one end spring hinged and subjected to a translational restraint at the other end*. Journal of Sound and Vibration, 48: 565-568.
- McConnell, K. G. (1995). *Vibration Testing: Theory and Practice*. Nueva York: John Wiley & Sons.

- Mikhlin, S. (1964). *Variational Methods of Mathematical Physics*. MacMillan Co., New York.
- Mohtasebi, S. M. y Khaji, N. (2018). An Analytical Method for Crack Detection of Beams with Uncertain Boundary Conditions by a Concentrated Test Mass. *Civil Engineering Journal* Vol. 4, No. 7. <http://dx.doi.org/10.28991/cej-03091100>
- Mousavi, M., Holloway, D. y Olivier, J. C. (2019). Using a moving load to simultaneously detect location and severity of damage in a simply supported beam. *Journal of Vibration and Control*, 25 (15) (2019) 2108–2123. doi:10.1177/1077546319849772
- Naguleswaran, S. (2004). *Transverse vibration of a uniform Euler–Bernoulli beam under linearly varying axial force*. *Journal of Sound and Vibration*, 275, 47–57.
- Nahvi, H. y Jabbari, M. (2005). Crack detection in beams using experimental modal data and finite element model. *International Journal of Mechanical Sciences* 47, 1477–1497.
- Nallim, L. y Grossi, R. O. (1999). *A general algorithm for the study of the dynamical behaviour of beams*. *Applied Acoustics*, 57:345-356.
- Nandwana, B. P. y Maiti, S. K. (1997). *Detection of the location and size of a crack in stepped cantilever beams based on measurements of natural frequencies*. *Journal of Sound and Vibration* 203(3), 435-446.
- Nandwana, B. P. y Maiti, S. K. (1997). *Modelling of vibration of beam in presence of inclined edge or internal crack for its possible detection based on frequency measurements*. *Engineering Fracture Mechanics* Vol. 58, No. 3, pp. 193-205,
- Narkis (1994). “Identification of crack location in vibrating simply supported beams”, *Journal of sound and vibration*, 172(4), 549-558.
- Narkis, Y. y Elmalah, E. (1996). Crack identification in a cantilever beam under uncertain end conditions. *Int. J. Mech. Sci.* Vol. 38, No. 5, pp. 499-507.
- Nedelcu, D. y Gillich, G. R. (2020) PyLOC - a Python application to localize cracks in beams with uncertain boundary conditions.
- Nedelcu, D. y Gillich, G.-R. (2021). A structural health monitoring Python code to detect small changes in frequencies. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 147, 107087.
- Neves, A.C., Simões, F.M.F. y Pinto da Costa, A. (2016). *Vibrations of cracked beams: Discrete mass and stiffness models*. *Computers and Structures*, 168, 68–77.
- Ni, Y. Q., Hua, X. G., Fan, K. Q., Ko J.M. (2005). Correlating modal properties with temperature using long-term monitoring data and support vector machine technique. *Engineering Mechanics*; 27: 1762–73.

- 
- Nie, Zhenhua; Lin, Jun; Li, Jun; Hao, Hong; Ma, Hongwei (2019). Bridge condition monitoring under moving loads using two sensor measurements. *Struct. Health Monit.* 19 (3) 917–937, doi:10.1177/1475921719868930.
  - Nikolakopoulos, P. G., Katsareas, D. E. y Papadopoulou, C. A. (1997). Crack identification in frame structures. *Computers & Structures* Vol. 64, No. 14, pp. 389-406.
  - Ostachowicz, W. M. y Krawczuk, M., (1991). Analysis of the effect of cracks on the natural frequencies of a cantilever beam. *Journal of Sound and Vibration*, 150: 191-201.
  - Owolabi, G.M., Swamidias, A.S.J. y Seshadri, R. (2003). Crack detection in beams using changes in frequencies and amplitudes of frequency response functions, *Journal of Sound and Vibration*, 265:1–22.
  - Patil, D.P. y Maiti, S.K. (2005). *Experimental verification of a method of detection of multiple cracks in beams based on frequency measurements*. *Journal of Sound and Vibration* 281, 439–451.
  - Peeters, B. y De Roeck, G. (2000). One-year monitoring of the Z24-bridge: Environmental influences versus damage events. In: *Proc. of the 18th IMAC*, 1570–76.
  - Peres, M. A., Bono, R. W. y Brown, D. L. (2010). “*Practical Aspects of Shaker Measurements for Modal Testing*”, *Proceedings of ISMA*, USD2010.
  - Peres, M. A., Bono, R. W. y Brown, D. L. (2011). “*Modal Testing Excitation Guidelines*”, *Journal of Sound and Vibration*.
  - Peter Bastián, *Electrotecnia*, Ediciones AKAL, 2001.
  - Pop, M.-V., Gillich, G.-R., Tufisi, C., Praisach, Z.-I., y Păun, L. (2020). Estimation of the severity of damage produced by a transverse crack. *STUDIA UNIVERSITATIS BABEȘ-BOLYAI Engineering*, 65(1). doi:10.24193/subbeng.2020.1.15
  - Pozueta M.A.R. *Materiales y circuitos magnéticos*. Universidad de Cantabria, Departamento de ingeniería eléctrica y energética.
  - Quintana, V., Raffo, J. L y Grossi, R. O. (2010). *Eigenfrequencies of generally restrained timoshenko beams with an internal hinge*. *Mecánica Computacional* Vol XXIX, págs. 2499-2516.
  - Raffo J. L y Carrizo, M R. (2018). “*Diseño y Construcción de un Sistema Electromagnético para Inducir Vibraciones Forzadas*”, VI Congreso Argentino de Ingeniería Mecánica y I Congreso Argentino de Ingeniería Ferroviaria, VI CAIM - ICAIFE 2018, Tucumán, Argentina, 10 al 12 de Octubre.
  - Raffo J. L. y Carrizo M. R. (2013). “*Vibraciones de Vigas y Pórticos ante la Presencia de Fisuras. Implementación del Problema Inverso*”, XX Congreso sobre Métodos Numéricos
-

- y sus Aplicaciones, XX ENIEF, Mecánica Computacional Vol. XXXII, ISSN 1666-6070, 1715-1735, Mendoza, Argentina, del 19 al 22 Noviembre.
- Raffo, J. L y Grossi, O. R. (2013). *Variational Approach of Timoshenko Beams with Internal Elastic Restraints*. Journal of Mechanics Engineering and Automation, 3, 491-498.
  - Raffo, J. L. y Carrizo, M. R. (2014). “Método analítico de detección de fisuras en vigas vibrantes”, IV Congreso Argentino de Ingeniería Mecánica, IV CAIM, ISBN 978-987-45571-0-0, Resistencia, Argentina, del 2 al 5 de septiembre.
  - Raffo, J. L. y Carrizo, M. R. (2016). “Estudio de Detección de Fisuras en Vigas con un Apoyo Intermedio”, XXII Congreso sobre Métodos Numéricos y sus Aplicaciones, XXII ENIEF, Mecánica Computacional Vol. XXXIV, ISSN 1666-6070, 1521-1535, Córdoba, Argentina, del 8 al 11 de Noviembre.
  - Raffo, J. L. y Carrizo, M. R. (2018). “Diseño y Construcción de un Sistema Electromagnético para Inducir Vibraciones Forzadas”, VI Congreso Argentino de Ingeniería Mecánica y I Congreso Argentino de Ingeniería Ferroviaria, VI CAIM - I CAIFE, ISBN 978-987-46987-0-4, Trabajo J-126, Tucumán, Argentina, del 10 al 12 de Octubre.
  - Raffo, J. L. y Grossi, R. O. (2012). *A study on mode shapes of beams with internal hinges and intermediate elastic restraints*. *Mecánica Computacional*, 26: 2593-2610.
  - Raffo, Javier Leandro (2014). *Mecánica de Elementos Estructurales con fallas localizadas*. Tesis de Doctorado. Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de Salta.
  - Rairán Antolines, Buitrago, Castañeda Martín. *Electromagnet design by finite element method*. Tecnura, ISSN: 0123-921X, vol. 9, núm. 17, 2005, pp. 38-46
  - Rao, C. K. y Mirza, S. (1989). *Note on vibrations of generally restrained beams*. *Journal of Sound and Vibration*, 130: 453-465.
  - Rao, S. S. (2010). *Mechanical Vibrations*. 5th edition. Prentice Hall.
  - Ratazzi, A. R., Grossi, R. O. y Bambill, D. V. (2011). *Vibraciones de una estructura aporticada con una rótula intermedia elásticamente restringida contra rotación y traslación*. *Mecánica Computacional*, Vol. XXX, págs. 1351-1364.
  - Ravi, J.T., Nidhan, S., Muthu, N. y Maiti, S.K. (2018). Analytical and experimental studies on detection of longitudinal, L and inverted T cracks in isotropic and bi-material beams based on changes in natural frequencies. *Mechanical Systems and Signal Processing* 101, 67–96.

- 
- Raymond A. Serway, John W. Jewett, Jr. Física para ciencias e ingeniería con Física Moderna, USA, 9ª Edición, 2015.
  - Ritto T., Aguiar R., Sampaio R., Cataldo E., “How to match theoretical and experimental boundary conditions of a cantilever beam,” 7th European Conference on Structural Dynamics, 2008
  - Rizos, P. F, Aspragathos N. y Dimarogonas, A. D. (1990). Identification of crack location and magnitude in a cantilever beam from the vibration modes, *Journal of sound and vibration*, 138 (3), 381 – 388.
  - Rubio, L., Fernández-Sáez, J., y Morassi, A. (2015). Crack identification in non-uniform rods by two frequency data. *International Journal of Solids and Structures* 75–76 (2015) 61–80.
  - Rubio, L., Fernández-Sáez, J., y Morassi, A. (2016). Identification of an open crack in a beam with variable profile by two resonant frequencies. *Journal of Vibration and Control* 1–21. DOI: 10.1177/1077546316671483
  - Ruotolo, R. y Surace, C. (2004). *Natural frequencies of a bar with multiple cracks*. *Journal of Sound and Vibration*, 272:301-316.
  - Rutenberg, A. (1978). *Vibration frequencies for a uniform cantilever with a rotational constraint at a point*. *Journal of Applied Mechanics*, 45, 422-423.
  - Rytter, A. (1993). “Vibration Based Inspection of Civil Engineering Structures”, Ph. D. Dissertation, Department of Building Technology and Structural Engineering, Aalborg University, Denmark.
  - Sabnavis G., Kirk R. G., Kasarda M. y Quinn D. (2004). “Cracked Shaft Detection and Diagnostics: A Literature Review”, *The Shock and Vibration Digest* 2004; 36; 287. DOI: 10.1177/0583102404045439
  - Sagan, H. (1969). *Introduction to the Calculus of Variations*. Mc Graw Hill Book Co., New York.
  - Salawu, O.S. (1997). “Detection of structural damage through changes in frequency: A review”, *Engineering Structures*, 19, 718–723.
  - Sarvestan, V., Mirdamadi, H. R., Ghayour, M. (2017). Vibration analysis of cracked Timoshenko beam under moving load with constant velocity and acceleration by spectral finite element method. *International Journal of Mechanical Sciences*, 122(), 318–330. doi:10.1016/j.ijmecsci.2017.01.035
  - Schloss, F., “Vibrating table structure”, Pat. Num. 3262308A, United States Patent Office – USA - (1966).

- Serway, R. A. y Jewett, J. W. (2015). Física para ciencias e ingeniería con Física Moderna. México, D.F: Cengage Learning.
- Sha G., Radzienski M., Cao M. and Ostachowicz W. (2019). A novel method for single and multiple damage detection in beams using relative natural frequency changes. *Mechanical Systems and Signal Processing* 132, 335-352.
- Shen, M. H. H. y Pierre, C. (1994). *Free vibrations of beams with a single edge crack*. *Journal of sound and vibration* 170 (2), 237-259.
- Shifrin, E. I. y Ruotolo, R. (1999). *Natural frequencies of a beam with an arbitrary number of cracks*. *Journal of Sound and Vibration* 222(3), 409-423.
- Silva T., Maia N., Roque A., Travassos J., “Identification of Elastic Support Properties on a Bernoulli-Euler Beam,” *IMAC-XXVII*, 2009.
- Sinou, J. J. (2013). “A review of damage detection and health monitoring of mechanical systems from changes in the measurement of linear and non-linear vibrations”, *Mechanical Vibrations: Measurement, Effects and Control*, Nova Science Publishers, Inc., pp.643-702, 978-1-60692-037-4.
- Sinou, J.-J. (2007). Damage Assessment Based on the Frequencies' Ratio Surfaces Intersection Method for the Identification of the Crack Depth, Location and Orientation.
- Srivastava, S. y Sethuraman, R. (2017). *Differential Quadrature Method Based Study of Vibrational Behaviour of Inclined Edge Cracked Beams*. *MATEC Web of Conferences* 95, 07006 ICMME. DOI: 10.1051/mateconf/20179507006
- Stuart, K., “Voice coil actuator”, Pat. Num. 5321762, United States Patent Office – USA - (1994).
- Stubbs N. (1987) A General Theory of Non-Destructive Damage Detection in Structures. In: Leipholtz H.H.E. (eds) *Structural Control*. Springer, Dordrecht. [https://doi.org/10.1007/978-94-009-3525-9\\_44](https://doi.org/10.1007/978-94-009-3525-9_44)
- Stubbs, N. y Osegueda, R. (1990). Global damage detection in solids - experimental verification. *Int. J. Analyt. Exper. Modal Analysis* 5, 81-97.
- Stubbs, N., Kim, K. G. y Topole, K. G. (1991) The effect of model uncertainty on the accuracy of global nondestructive damage detection in structures.
- Swamidass, A. S. J., Yang, X. y Seshadri, R. (2004). Identification of Cracking in Beam Structures Using Timoshenko and Euler Formulations. *Journal of engineering mechanics* 130:1297-1308.
- Ta, D.-T., Le, T.-P., & Burman, M. (2023). An enhanced single damage identification in beams using natural frequency shifts and analytic modal curvatures. *Journal of Science and*

- 
- Technology in Civil Engineering, HUCE (NUCE), 17(1), 1–15. [https://doi.org/10.31814/stce.nuce2023-17\(1\)-01](https://doi.org/10.31814/stce.nuce2023-17(1)-01)
- Tada, H. (1985). *The Stress Analysis of Cracks Handbook*. Del Research Corporation, Hellertown, Pennsylvania.
  - Tada, H., Paris, P. C. y Irwin, G. R. (2000). “The Stress Analysis of Cracks Handbook”, ASME Press, New York.
  - Teidj, S., Khamlichi, A. y Driouacha, A. (2016). Identification of Beam Cracks by Solution of an Inverse Problem. *Procedia Technology* 22 (2016) 86 – 93.
  - Thalapil, J. y Maiti, S.K. (2014). Detection of longitudinal cracks in long and short beams using changes in natural frequencies, *International Journal of Mechanical Sciences*, 83:38–47.
  - Thomson, W. J. (1943). *Vibration of slender bars with discontinuities in stiffness*. *Journal of applied mechanics* 17, 203-207.
  - Tiwari, N., Puri, A. y Saraswat, A. (2017). “Lumped parameter modelling and methodology for extraction of model parameters for an electrodynamic shaker”, *Journal of Low Frequency Noise, Vibration and Active Control*, Vol. 36(2) 99–115. DOI: 10.1177/0263092317693511.
  - Tomlinson, G. R. (1979). “Force Distortion in Resonance Testing of Structures with Electrodynamic Vibration Exciters”, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 63, No. 3, pp. 337-350.
  - Tran Thanh Hai y Do Nam. (2023). A single degree of freedom model for cracked beam. *Vietnam Journal of Mechanics*, 45(2), 183–196. <https://doi.org/10.15625/0866-7136/18464>
  - Troutman, J. L. (1996). *Variational Calculus and Optimal Control*. Springer-Verlag, New York.
  - Tufisi, C., & Gillich, G.-R. (2018). A numerical study regarding the influence of the longitudinal extent of a T-shaped crack on the eigenfrequency decrease of cantilever beams. *Journal of Engineering Studies and Research*, 24(4).
  - Tufisi, C., Gillich, G. R. (2018). Modeling of Complex Shaped Cracks. *Analele Universitatii "Eftimie Murgu" Resita. Fascicula de Inginerie*, 25(2), 155-159. <https://europub.co.uk/articles/-A-442163>
  - Tufisi, C., Gillich, G.-R., & Aman, A. T. (2019). The effect of a crack near the fixed end on the natural frequencies of a cantilever beam. *Vibroengineering Procedia*, 23.
-

- Tufisi, C., Gillich, G.-R., Hamat, C. O., Gillich, N., & Praisach, Z.-I. (2018). Numerical study of the stiffness degradation caused by branched cracks and its influence on the natural frequency drop. *Romanian Journal of Acoustics and Vibration (RJAV)*, volumen XIV.
- Tufisi, C., Gillich, N., Ardeljan, M., Paun, R. L., & Gillich, G. R. (2021). A cost function to assess cracks in simply supported beams with artificial intelligence. *Romanian Journal of Acoustics and Vibration*, 18(1).
- Varoto, P. S. y Oliveira, L. P. R. (2002). “*Interaction between a Vibration Exciter and the Structure Under Test*”, *Journal of sound and vibration*.
- Waimer, S., Manzato, S., Gentile, E., Peeters, B., Wagner, M. y Guillaume, P. (2016). “*Modelling and experimental validation of a coupled electrodynamic shaker and test structure simulation model*”, *Proceedings of ISMA*.
- Wang, C. Y. (2003). *Fundamental frequency of a beam on two elastic supports*. *Journal of Sound and Vibration*, 259(3), 711 714.
- Wang, C. Y. y Wang, C. M. (2001). *Vibration of a beam with an internal hinge*. *International Journal of Structural Stability and Dynamics*, 1, 163 167.
- Wang, T., Tan, B., Lu, M., Zhang, Z., & Lu, G. (2020). Piezoelectric Electro-Mechanical Impedance (EMI) Based Structural Crack Monitoring. *Applied Sciences*, 10(13), 4848. <https://doi.org/10.3390/app10134648>
- Wauer J. (1990). “On the dynamics of cracked rotors: A literature survey”, *Appl Mech Rev* vol 43, no 1.
- Weinstock, R. (1974). *Calculus of Variations with Applications to Physics and Engineering*. Dover Publications, Toronto.
- Yamada, K., “Sound reproduction system and device”, Pat. Num. 4064376A, United States Patent Office – USA - (1977).
- Yan, Y., Ren, Q., Xia, N. y Zhang, L. (2016). *A close-form solution applied to the free vibration of the Euler–Bernoulli beam with edge cracks*. *Arch Appl Mech* 86, 1633–1646. <https://doi.org/10.1007/s00419-016-1140-x>
- Yang, X. F., Swamidass, A. S. J. y Seshadri R. (2001). Crack identification in vibrating beams using the energy method, *Journal of Sound and Vibration*, 244(2): 339-357.
- Yoon, H., Son, I. y Ahn, S. (2007). *Free Vibration Analysis of Euler-Bernoulli Beam with Double Cracks*. *Journal of Mechanical Science and Technology* 21, 476-485.
- Yorke, R. (1970). “*Determination of the parameters of an electrodynamic transducer*”, *Radio and Electronic Engineer* 39(4) 215. doi:10.1049/ree.1970.0035.

- Yu, Z. y Chua, F. (2009). Identification of crack in functionally graded material beams using the p-version of finite element method, *Journal of Sound and Vibration*, 325:69–84.
- Zamparo, O. J., “Moving element for a vibration exciter”, Pat. Num. 3536942, United States Patent Office – USA - (1970).
- Zhu, Xiang; Cao, Maosen; Ostachowicz, Wieslaw; Xu, Wei (2019). Damage Identification in Bridges by Processing Dynamic Responses to Moving Loads: Features and Evaluation. *Sensors*, 19(3), 463–. doi:10.3390/s19030463