

# SISTEMA DE MEDICIÓN OPTO-DIGITAL PARA EXPERIENCIAS DE DINÁMICA EN 2D

## OPTO-DIGITAL MEASURING SYSTEM FOR DYNAMIC EXPERIENCES IN 2D

**E. M. Farías de la Torre, M. E. Tempo, D. González Dondo, G. J. Bergues**

**J. C. Mansilla, D. Novillo.**

Facultad Regional Córdoba - Universidad Tecnológica Nacional  
Maestro M. López y Cruz Roja Argentina  
Ciudad universitaria-Córdoba- Argentina  
*e-mail: fariasdelatorre@gmail.com*

Recibido 28/02/11; aprobado 10/08/11

Se describe un sistema de medición de posiciones en 2D mediante el uso de una cámara digital de alta velocidad, y posterior procesamiento de imágenes. Este sistema se presenta como particularmente útil para el estudio de experiencias en 2D tales como el choque de discos y movimiento de placas en general. La velocidad de obturación, del orden de 100 cuadros por segundo, permite analizar con cierto grado de exactitud la evolución temporal de las variables físicas de interés: momento lineal y fuerza interactiva en el intervalo de interacción. En este trabajo, en particular, el sistema de medición se aplica al choque de discos muñidos de un mecanismo de interacción elástica; obteniéndose resultados acordes con lo esperado con un error del orden 10%, en promedio.

Palabras Claves: choque, interacción, elástica, imagen, procesamiento.

It describes a 2D position measurement system using a high-speed digital camera and subsequent image processing. This system is presented as particularly useful for the study of experiences in 2D such as the collision of discs and plate movement in general. The shutter speed, of about 100 frames per second, enable analyze with any degree of accuracy the time evolution of the physical variables of interest: linear momentum and interactive strength during the interaction interval. In this work, in particular, the measurement system is applicable to the shock of discs armed with an elastic interaction mechanism obtaining results as expected with an error of order 10%, in average..

Key Word: collision, elastic, interaction, image, processing.

### I. INTRODUCCIÓN

Como se sabe, el estudio del movimiento de placas rígidas en 2D es un caso particular del movimiento de un rígido en 3D y reviste importancia para asignaturas tales como mecánica y las relativas a mecanismos en las carreras de ciencia e ingeniería <sup>(1)</sup>. En este sentido, el enfoque que se aborda tradicionalmente está limitado a la solución analítica de las ecuaciones de movimiento y a la interpretación de los resultados alcanzados. En el aspecto experimental se dispone, de equipamiento muy restringido, por ejemplo, el referido al estudio de las leyes de conservación del momento lineal para el choque de dos discos <sup>(2)</sup>.

Por otra parte, el amplio desarrollo en el ámbito de la robótica <sup>(3)</sup>, del software de captura y procesamiento de imágenes ofrece una importante herramienta para la detección de movimientos de placas rígidas. Esto permitiría complementar el análisis teórico, tradicional, con la correspondiente verificación experimental.

En el presente trabajo se realiza una aplicación de un sistema de medición, diseñado a partir de estas herramientas y aplicado al estudio del choque elástico entre discos. Se aborda, por una parte, el análisis de la

conservación del momento lineal y el momento angular para la experiencia global y, en segundo término se enfoca el estudio de la dependencia temporal, durante la colisión, de la velocidad relativa y la fuerza de interacción comparándose a estas con los valores teóricos esperados.

### II. CHOQUE PERCUSIVO Y CHOQUE ELÁSTICO

En el choque percusivo, la fuerza de interacción se asocia a una función delta de Dirac, es decir, de intensidad infinita y aplicada durante un intervalo de tiempo nulo. Además, su integral en el tiempo da por resultado el impulso transferido de un disco a otro.

Para su análisis se definen dos ejes centrados en el punto de contacto entre los discos (figura 1) y se considera el caso más general de discos con distinto radio a los cuales denominaremos disco H y disco M con radios  $R_H$  y  $R_M$ , respectivamente, siendo  $R_M > R_H$ .

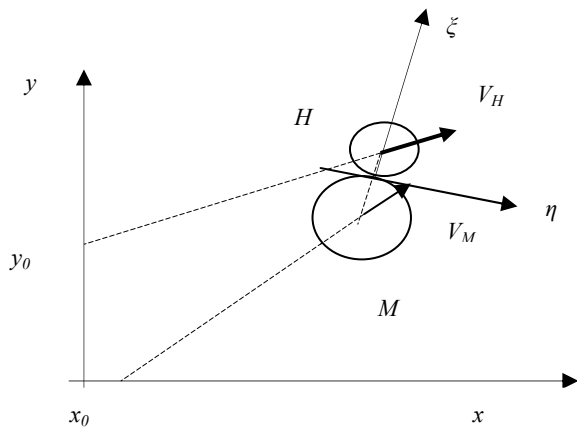


Figura 1. choque percusivo y oblicuo entre discos (caso más general de choque percusivo).  $\xi$  y  $\eta$  son, respectivamente, los ejes de choque y transversal.

La situación más general del choque de discos es, en relación a sus condiciones iniciales, cuando la dirección de las velocidades es arbitraria respecto del sistema de coordenadas ( $\xi$ ,  $\eta$ ); y, respecto de la interacción, cuando la misma determina la transferencia de impulso lineal e impulso angular. La primera ocurre cuando la fuerza ejercida es radial y, en este caso se modifica sólo el momento lineal en la dirección  $\xi$ . La segunda sucede si la interacción, adicionalmente, aplica a los discos una fuerza tangencial que afecta, también, al momento lineal en la dirección  $\eta$  y les imprime un impulso angular a ambos modificando sus momentos angulares iniciales.

Cuando la interacción es de duración finita es necesario considerar la sucesión de instantes de tiempo y el cambio de posición del sistema de los ejes. Este análisis resultaría complicado. En su lugar consideramos conveniente realizar una aproximación consistente en que, el intervalo de interacción y las velocidades tangenciales previas al choque satisfacen la relación:

$$\frac{(V_{H\eta} - V_{M\eta}) \cdot \Delta t}{2(R_H + R_M)} \ll 2\pi \quad (1)$$

La cual significa que la rotación del sistema ( $\xi$ ,  $\eta$ ) es pequeña durante la interacción. En esta expresión  $V_{H\eta}$  y  $V_{M\eta}$  representan las velocidades tangenciales antes del choque;  $R_H$ ,  $R_M$  los respectivos radios y  $\Delta t$  el intervalo de interacción. El factor 2 en el denominador se debe a que la rotación se refiere a la posición del sistema al instante  $t_E$ , que promedia la interacción (figura 2).

Para una interacción arbitraria, el coeficiente de restitución,  $e$ , resulta <sup>(1)</sup>:

$$\frac{\int R(t) dt}{\int P(t) dt} \quad (2)$$

y, mide el grado de restitución del impulso recibido durante la deformación del elemento interactivo. La función  $P(t)$  representa la fuerza mutua durante la deformación mientras que,  $R(t)$  es la fuerza ejercida en la recuperación.

Alternativamente, y en nuestro caso, usaremos una expresión en función de las velocidades relativas antes y después del choque:

$$\frac{V'_{H\xi} - V'_{M\xi}}{V_{M\xi} - V_{H\xi}} \quad (3)$$

donde, las variables no primadas corresponden a instantes anteriores al choque mientras que, las variables primadas se refieren a los instantes posteriores a la colisión.

En el presente Trabajo se abordó el estudio de una interacción elástica para la cual su coeficiente de restitución es muy próximo a uno. Su intervalo de interacción, su amplitud de deformación e intensidad de la fuerza se muestran en la figura 2, en la cual se compara con el choque percusivo.

En esta figura se presenta, en ordenadas, la posición relativa de los centros de los discos (a y d), su derivada (b y e) y la fuerza mutua (c y f) para los dos tipos de choque;  $\omega = (2k/m)^{1/2}$  siendo  $k$ , la constante elástica y,  $m$ : la masa del disco H. Finalmente, el intervalo de interacción resulta,  $\Delta t = \pi / \omega$ .

La situación límite y teórica de constante elástica infinita nos conduce al choque percusivo (figura 2d, 2e y 2f).

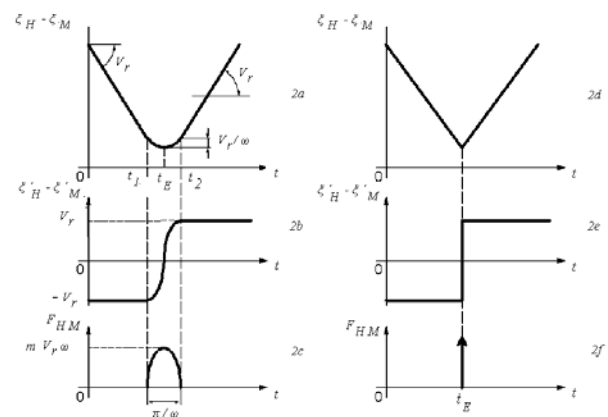


Figura 2. comparación entre el choque elástico y el choque percusivo.  $F_{HM}$  es la fuerza ejercida por M sobre H.

### III. DESCRIPCIÓN DEL EQUIPO

En la figura 3 se muestra una vista general del equipo para experiencias en 2D. En la figura 4 los discos utilizados para la experiencia de choque.

Este equipo consta de una mesa para suspensión por aire de 1mx1m la cual presenta orificios de 1mm de diámetro ubicados según un retículo con constante de red igual a 2,5cm. Con esta disposición y diámetro de orificios se logra una suspensión del orden de 0.2mm. Tiene, asimismo, dos lanzadores contruidos con resortes y con guías cilíndricas de acrílico. Cada uno de los cuales presenta una escala longitudinal para calibración.



Figura 3. equipo para experiencias en 2D: a) discos; b) lanzadores; c) mesa de suspensión por aire; d) puente para suspensión de la cámara; e) cámara; f) péndulo para nivelación de la mesa; g) PC.



Figura 4. sistema de discos utilizados para la experiencia de choque elástico.

La cámara de alta velocidad utilizada fue una Basler (s c A780) de 54 cuadros por segundo (color) con una velocidad de captura monocromo de hasta 100 cuadros por segundo y, se la ubica en el puente que atraviesa la pista, a una altura de 1,3m, suficientes para efectuar el enfoque sobre la misma a fin de capturar las imágenes de la experiencia completa.

Finalmente los discos han sido construidos en acrílico y son de dos tipos: un primer disco, disco H, presenta un par de discos (superior) y otro par (inferior) todos de  $R_H = 53\text{mm}$  separados por un eje de sección cuadrada de 10mm de lado. El par interno presenta 180 orificios distribuidos en la periferia los que permiten disponer el hilo elástico. Los exteriores sirven para aumentar la inercia e igualar la masa a la del disco M.

Un segundo disco, disco M, observa en su estructura un disco superior, uno inferior y uno intermedio de mayor diámetro ( $R_M = 63\text{ mm}$ ) a fin de deformar la pared de elásticos del disco H.

Ambos discos presentan el disco superior con un revestimiento blanco mate que contrasta con la pista de negro mate a fin de mejorar la captura de las imágenes evitando reflejos. Asimismo, y a una distancia  $b=35\text{mm}$  del centro del disco superior se ha dibujado, en negro mate, un disco de radio inferior el cual permitirá medir el desplazamiento angular del centro de este segundo disco respecto del primero.

#### IV. REALIZACIÓN DE LA EXPERIENCIA

La realización de la experiencia supone varios pasos: diseño, calibración, captura y procesamiento de las imágenes obtenidas

##### Diseño

En el diseño de la experiencia de choque se debe buscar una forma simple que permita ubicar los ejes  $\xi$  y  $\eta$  en forma inmediata con su transformación a los ejes  $x$  y  $y$  de laboratorio.

De las experiencias posibles se optó por la indicada en la figura (5) por ser la mas simple, coincidiendo en ella: el eje  $\xi$  con el eje  $y$ ; por una parte, y el eje  $\eta$  con el eje  $x$  por otra. La aplicación de la ecuación (1) da por resultado un ángulo de  $6.7^\circ$  para  $V_{H,\eta} = 235\text{ cm/s}$ .

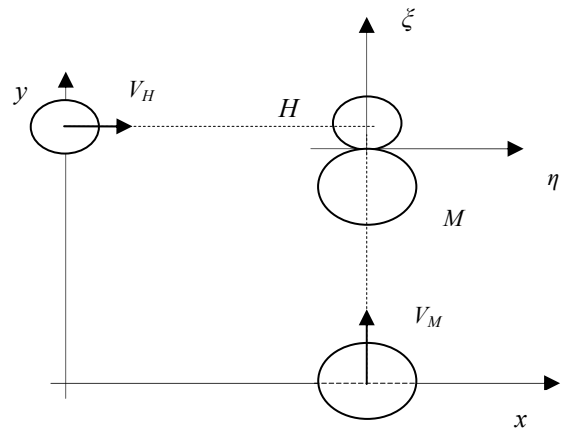


Figura 5. caso particular de (1) donde el eje  $\xi$  coincide con el eje  $y$ , mientras que el eje  $\eta$  coincide con el eje  $x$ .

##### Calibración

La calibración del equipo supone las siguientes etapas:

1. *Calibración de los lanzadores:* tiene por objeto obtener la dependencia de la velocidad de ambos discos como función de la deformación del resorte respectivo. Se realizó para ambos lanzadores presentando pequeñas diferencias. Esta calibración reviste importancia porque, de acuerdo al diseño de la experiencia, permite asegurar el encuentro entre los discos. Como ejemplo se presenta, en la figura 6 la calibración del lanzador asignado al disco H.

2. *Calibración de la cámara:* esta calibración permite obtener la equivalencia entre píxel y centímetro; incorporar la aberración de la cámara y la corrección por respecto de la pista<sup>(3)</sup>. Como consecuencia de esta calibración se obtiene una equivalencia de: 1 píxel = 0,1308cm.

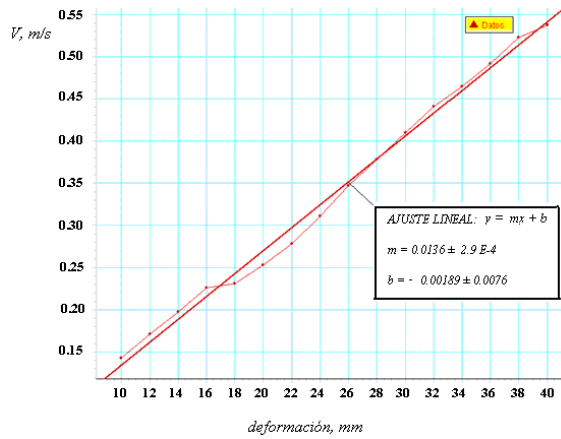


Figura 6. calibración del lanzador H.

### Captura de las imágenes

La parte superior de ambos discos presenta, además del círculo que la delimita y, que denominaremos círculo mayor un segundo círculo, círculo menor, con su centro ubicado a una distancia  $b$  del primero. El proceso de captura de imágenes se refiere al seguimiento de ambos discos mientras dure la experiencia. Se realiza mediante una cámara Basler la cual asegura, en modo monocromático, 100 cuadros/segundo. Esta velocidad de captura nos permite observar y medir el desplazamiento de los centros de los discos durante la interacción elástica para su posterior procesamiento.

En la figura 7 se muestran tres imágenes a de las cuales la primera es previa al choque, la segunda en el instante de máxima deformación y, finalmente la tercera luego de la separación. En estas imágenes también es posible apreciar la rotación de los discos luego de la interacción.



(a)



(b)



(c)

Figura 7. captura de imágenes: (a) previa a la interacción; (b) durante la interacción y, (c) posterior a la interacción.

### Procesamiento de las imágenes

A partir de las imágenes obtenidas y, mediante las librerías disponibles de Open CV <sup>(4,5)</sup> se logra determinar las sucesivas posiciones de los centros de los discos. De la posición relativa de los centros de los círculos mayores es posible, por derivaciones sucesivas, obtener la fuerza de interacción entre ambos. Esta resulta en la dirección  $\zeta$  (ó  $\gamma$ ) y su valor depende de la posición relativa en esa dirección. Por otra parte, el desplazamiento del círculo menor respecto del mayor nos permite medir la rotación intrínseca de ambos discos. Los resultados del procesamiento de imágenes para las coordenadas  $y$  de los discos se muestran en las figuras 8 y 9. En las figuras 10 y 11 se presenta la diferencia de coordenadas para los respectivos ejes.

En la figura 12 y, mediante la gráfica de la función arco seno, se visualiza la dependencia temporal del ángulo barrido por el radio vector  $b$  que une los centros de los círculos mayor y menor del disco H. La ordenada se mide en radianes y el eje temporal en milisegundos. Una gráfica similar se obtiene para el disco M.

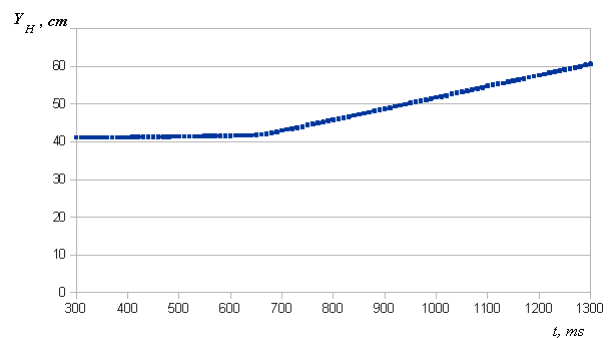


Figura 8. posición Y del centro de H.

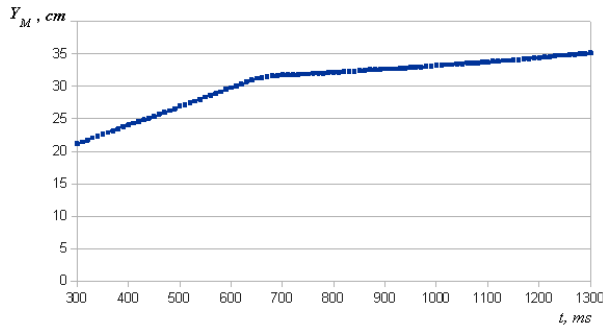


Figura 9. posición Y del disco M.

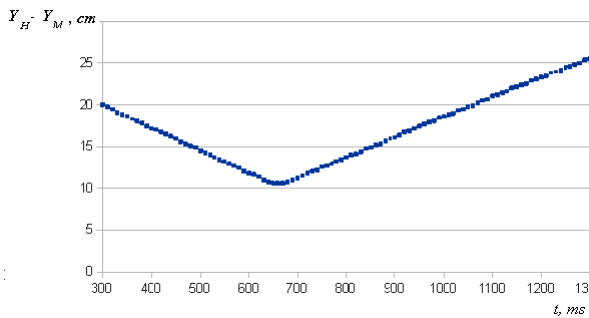


Figura 10. posición relativa en Y.

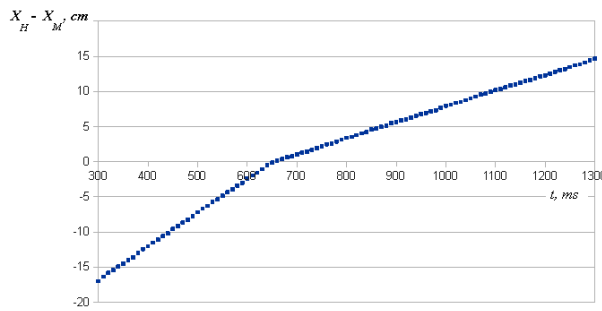


Figura 11. posición relativa en X.

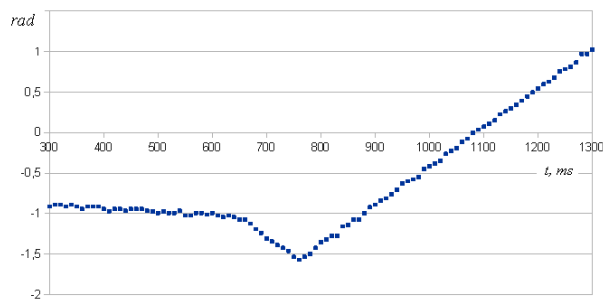


Figura 12. función arco seno  $[(Y_{PH}-Y_H)/b]$ ; donde  $b$  es la distancia entre los centros del círculo menor y el círculo mayor.

## V. ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS

Con los resultados previos aportados por el procesamiento de las imágenes se obtiene la velocidad y aceleración de los centros de los discos. Con la primera se puede verificar la conservación del momento lineal y la segunda permite medir la fuerza de interacción. Así mismo y, como resultado de analizar la dependencia temporal del ángulo barrido por el radio vector que uno

los centros de los círculos, se puede medir la velocidad angular de los discos después del choque. Con este resultado es factible comprobar la conservación del momento angular.

La figura 10 evidencia, por la simetría respecto del mínimo, un choque aproximadamente elástico. Usando la ecuación (3) se obtiene un coeficiente de restitución,  $e \approx 0.96$ .

### Conservación del momento lineal

Del análisis numérico de los resultados obtenidos para el momento lineal,  $P$ , se infiere un acuerdo con los valores teóricos esperados con un error de hasta 13% dependiendo del eje. Las componentes de los momentos lineales según los ejes observan una disminución luego del choque y atribuible a la existencia de un momento mecánico respecto de la base debido, a que la fuerza interactiva se aplica a media altura del separador (figura 4) y esto determinaría roce con la pista. Para realizar la comprobación de la conservación del momento lineal se asume la siguiente convención para los subíndices: El primer subíndice corresponde a la designación del disco (H ó M) el segundo a la instancia del choque: antes o después de la colisión; y, el tercero al eje sobre el cual está la componente. Así se tiene (figura 13):  $P_{Hax} = -4229$ ;  $P_{Hay} = 147$ ;  $P_{Hdx} = -2717$ ;  $P_{Hdy} = 2791$ ;  $P_{Max} = 222$ ;  $P_{May} = 2740$ ;  $P_{Mdx} = -761$ ;  $P_{Mdy} = 0$ . Donde todos los valores están en gr.cm/seg.

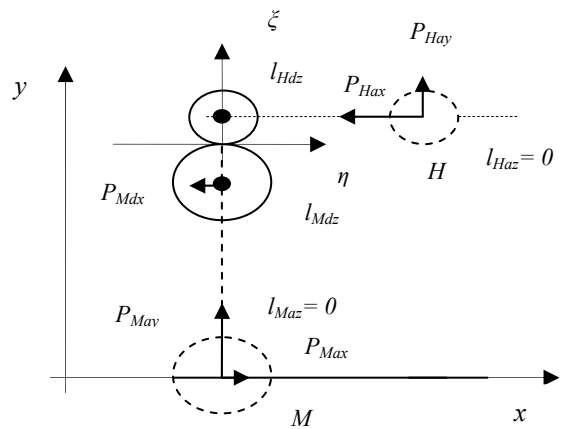


Figura 13. análisis de la conservación del momento lineal y angular. Con punto lleno se indica el momento angular intrínseco de los discos (saliente de la hoja). Por simplicidad no se representa el momento de la cantidad de movimiento lineal. Éste está aplicado en el centro del disco M durante la interacción.

### Conservación del momento angular

La cortina formada por los hilos elásticos permite no solo que los discos se ejerzan fuerzas radiales sino también tangenciales, aplicadas en la periferia de ambos discos. Estas acciones determinan un torque sobre cada disco y el consiguiente giro o momento angular intrínseco de cada uno. Así mismo, la fuerza se traslada al centro de masa de los discos y modifica su impulso lineal en esa dirección (eje  $\eta$ ) como indica la figura 14.

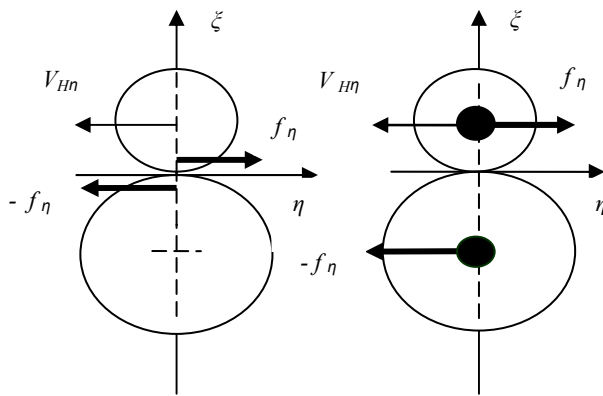


Figura 14. aplicación de fuerzas tangenciales a los discos y la consecuente aparición del momento angular intrínseco como consecuencia de la equivalencia mecánica de ambos sistemas, mostrado en la figura. El torque es perpendicular y saliente al plano del movimiento (está indicado por el círculo lleno en el centro de ambos discos).

Para el análisis de la conservación del momento angular se elige como centro de momento el punto sobre el eje  $y$ , de coordenadas:  $(0, -RM)$ . Teniendo presente que, si la conservación se verifica para un centro de momentos también se infiere para otro punto del plano.

La convención adoptada para los subíndices es la misma que para el momento lineal y teniendo como tercer subíndice el  $z$ , para todas las magnitudes analizadas. Asimismo, se adopta como notación para el momento de la cantidad de movimiento lineal la letra  $L$  y para el momento angular intrínseco la minúscula,  $l$ .

Los valores numéricos obtenidos que permiten comprobar, dentro de los errores experimentales, la conservación del momento angular total son los siguientes:  $L_{Hz} = 51705$ ;  $L_{Hdz} = 32212$ ;  $l_{Hz} = 0$ ;  $l_{Hdz} = 6601$ ;  $L_{Maz} = 0$ ;  $L_{Mdz} = 0$ ;  $l_{Maz} = 0$ ;  $l_{Mdz} = 9506$  (figura 13). Donde la unidad utilizada es  $\text{gr.cm}^2/\text{s}$ .

Luego del choque se observa un detrimento en el momento angular total inicial del orden del 7%; atribuible, principalmente, a la fuerza tangencial, de roce, entre el disco medio de  $M$  y la cadena de hilos pertenecientes a  $H$ .

Los resultados, tanto del momento lineal como angular, se hallan esquematizados en la figura 13 en la cual las magnitudes de los vectores son sólo indicativas de direcciones y sentidos y no guardan relación con los valores reales.

### Intervalo de interacción: velocidad relativa y fuerza interactiva

Para la obtención de la velocidad relativa y la fuerza actuante sobre cada disco y, en particular, sobre el disco  $H$  se procede a derivar numéricamente dos veces sucesivas la coordenada relativa,  $\xi$ . Para cada derivación es necesario efectuar un acondicionamiento de la función en cuestión mediante un filtro pasa-bajo (4,5). Finalmente, la fuerza se obtiene multiplicando la

segunda derivada por la masa del disco en cuestión, disco  $H$ , de  $0.094\text{kg}$ . Las curvas respectivas se muestran en las figuras 15 y 16. En la primera se observa una velocidad relativa, antes del choque de, aproximadamente,  $2.6\text{ m/s}$  en valor absoluto; mientras que, después del choque, ha disminuido a  $2.5\text{ m/s}$  determinando un coeficiente de restitución, como ya se indicó previamente de, aproximadamente,  $0.96$ .

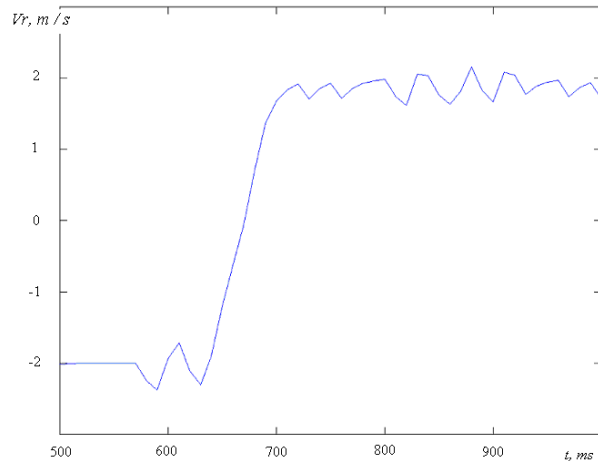


Figura 15. velocidad relativa en la dirección del eje de choque.

La segunda de las figuras muestra una fuerza interactiva nula hasta el instante  $t \approx 620\text{ ms}$ . Entre este instante y  $t \approx 720\text{ ms}$ , se observa la fuerza interactiva con un máximo de, aproximadamente  $7.5\text{ N}$ , para anularse, finalmente a posteriori y como consecuencia del despegue de los discos.

Los resultados obtenidos para el valor máximo de la fuerza y a partir de figura 17 resultan coherentes, dentro de los errores experimentales con la aplicación de la fórmula, para la misma:  $m \cdot V_r \cdot \omega$ , del análisis teórico (ver II), con  $\omega \approx 31.4$  y el intervalo de interacción,  $\Delta t \approx 0.1\text{ seg}$ . (Ver figura 16).

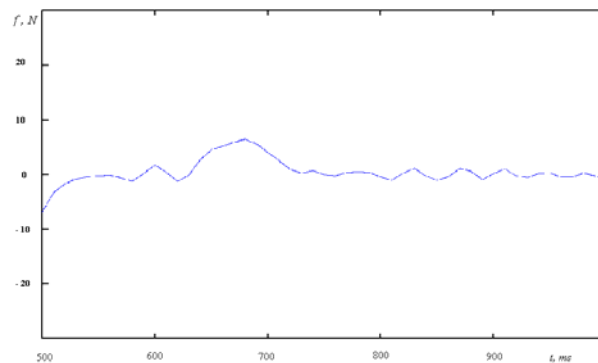


Figura 16. fuerza interactiva (fuerza actuante sobre el disco  $H$ ).

## VI. CONCLUSIONES

Los resultados obtenidos están en un acierto con los esperados teóricamente dentro de un margen máximo de error de 13% dependiendo de la variable física

analizada, así, para la conservación del momento angular se puede considerar un error de hasta 7%.

Consideramos como principal factor de error el momento mecánico respecto de la base de la fuerza interactiva radial que puede determinar un aumento de la fricción.

Se espera mejorar el error disminuyendo la altura del eje separador pero que sea compatible con una constante elástica adecuada para las mediciones en el intervalo interactivo.

Consideramos que esta experiencia constituye un aporte significativo para la mejora de la enseñanza curricular del tema abordado, especialmente en dos aspectos: por un lado la utilización del sistema de detección de posiciones para 2D el cual puede aplicarse a otras experiencias de dinámica y, en lo referido al tema específico, por el análisis experimental en el intervalo de interacción.

### Referencias

- 1 – Beer, F. P. Johnston, E. R. *Mecánica Vectorial para ingenieros, (Dinámica)* VI Ed. Mc. Graw Hill, México (1998).
- 2 – Leybold, *Leybold didactic GMBH* (2007).
- 3 - Bradski, G. Kaehler, A. *Learning Open CV*. 2 Ed. O' reilly Media (2005).
- 4 - Martín Sanz G. P; García J. *Visión por computador, imágenes digitales y aplicaciones* 1Ed Alfaomega Ra-Ma, México (2002).
- 5 - Forsyth, D. Ponce, J. *Computer vision: A modern approach*. Prentice Hall, New Jersey (2003).