Historia de la Matemática en un ambiente de Geometría Dinámica: un nuevo enfoque en la enseñanza de las Cónicas.

Profesora Soraya Buccino

Licenciatura en Enseñanza de la Matemática de la

Universidad Tecnológica Nacional

Obtención de la Licenciatura en Enseñanza de la Matemática

Directora: Licenciada Alicia Noemí Fayó

2011

TESIS DE LICENCIATURA

Historia de la Matemática en un ambiente de Geometría

Dinámica: un nuevo enfoque en la enseñanza de las cónicas.

Tesista: Prof. Soraya Buccino

Firma

Directora de Tesis: Lic. Alicia Noemí Fayó

Firma

TRIBUNAL

Firma

Firma

Firma

Agradecimientos

Esta tesina, si bien ha requerido de mucho esfuerzo y dedicación de mi parte, no menos ha significado para mi directora de tesis, la Lic. Alicia Noemí Fayó. A quien agradezco por su colaboración, paciencia, valiosos consejos y por transmitir tanta pasión en todo lo que hace.

Al Director de la Licenciatura, Lic. Mario Di Blasi por colaborar y brindar incondicional y desinteresadamente su apoyo a todos los alumnos de la LEM, generando espacios a través de talleres y conferencias, para ayudarnos en este largo proceso.

A la profesora Inés Cánepa, que amablemente me posibilitó realizar la prueba de campo en su clase y colaboró incansablemente para que todo saliera lo mejor posible.

Esta carrera ha puesto en mi camino a dos personas que han sido “mi equipo” durante todo el periodo de estudio y han estado presentes en todo momento. A Marcela Bottazzini y Zulma Bretón gracias por la amistad brindada.

A mi familia y amigos por alentarme constantemente.

A mi esposo Ariel Amadio, por ser mi columna vertebral, por hacerme reír y porque juntos hemos tenido la dicha de compartir grandes aventuras.

Y a mi hijo Gianfranco, por todas las veces que ha tenido que esperar a que mamá se desocupe y porque con apenas 2 años, me enseña todos los días, que lo más hermoso y maravilloso está en sus ojos, cuando me miran.

Planeamiento y Resumen de la Tesis

En los últimos años son muchas las investigaciones que proponen la incorporación de los entornos digitales como recursos en el proceso de enseñanza aprendizaje. Siguiendo con esta idea, en esta investigación abordamos el uso del Software de Geometría Dinámica (SGD) y diseñamos a partir de éste una Ingeniería Didáctica para la enseñanza de las Cónicas en el último año del nivel Polimodal.

Los Contenidos Básicos Comunes (CBC) proponen *"Presentarlas desde ópticas diferentes (como intersecciones planas de una Superficie Cónica, como lugares geométricos y a través de sus ecuaciones), como representativas de situaciones problemáticas reales (órbitas planetarias, trayectorias de proyectiles, curvatura de espejos, etc.)"* pero finalmente las prácticas en las aulas nos muestran una realidad totalmente alejada a esta propuesta, en donde el enfoque suele resultar puramente analítico, desaprovechando los problemas interesantes que la Geometría elemental y la evolución histórica del concepto pueden aportar.

En vista a esta problemática, nuestra investigación se basará en la hipótesis de que el problema histórico que llevó a construir el concepto de Cónicas, los obstáculos que se debieron sortear en el pasado y las innumerables aplicaciones que tiene en el presente, nos permitirá organizar y secuenciar la ingeniería didáctica que permitirá a los alumnos construir este concepto, dejando su descripción analítica para una etapa posterior.

El presente trabajo está organizado en 6 capítulos. A continuación se detalla el contenido de los mismos:

Capítulo 1: Se describe el problema de investigación y la incidencia que tiene sobre el mismo la enseñanza tradicional de la Geometría y las concepciones de los alumnos, respecto a esta rama de la matemática. Se plantean los objetivos de la investigación y las hipótesis de trabajo.

Capítulo 2: Se realiza un rastreo por la evolución histórica de las Cónicas, haciéndose énfasis en aquellos aspectos que serán considerados para el diseño de la Ingeniería Didáctica.

Capítulo 3: Se describen las teorías que sirven como fundamento de esta investigación, para confeccionar el diseño metodológico e interpretar de los resultados de la misma.

Capítulo 4: Se presenta la secuencia didáctica y se describen detalladamente las variables (actividades, tiempo, metodología, etc.), como así también los resultados que se desean obtener con el propósito de anticipar el comportamiento de los alumnos, la dinámica de la clase y las intervenciones del docente, durante la prueba de campo.

Capítulo 5: Se presentan y analizan los datos recolectados a lo largo de la experimentación. Es decir, las grabaciones de audio realizadas durante las secuencias de enseñanza y las producciones de los alumnos en el aula (a través del grabado se sesiones a intervalos de un segundo cada una).

Capítulo 6: Se realizan las conclusiones finales a través de la confrontación del análisis a priori, a posteriori y las hipótesis planteadas.

ÍNDICE

Capítulo 1

1. Tema de Investigación

Un estudio sobre la enseñanza de las Cónicas en el 3° año del nivel Polimodal, atendiendo a la evolución histórica del concepto y las ventajas que supone el uso de los recursos informáticos.

1.1. Introducción

Se sabe que la Geometría ha ocupado un papel importante en el desarrollo de la cultura del hombre. En innumerables contextos aparece involucrada en forma directa o indirecta e históricamente ha ofrecido al hombre medios para describir, analizar, comprender el mundo y ver la belleza en sus estructuras.

La importancia fundamental de las Cónicas en Geometría, concepto que en particular analizaremos en este trabajo, radica en su constante aparición en situaciones reales y en la posibilidad de abordar su estudio desde diversas formas u ópticas diferentes.

Si bien, durante mucho tiempo, la enseñanza de la Matemática escolar no utilizó elementos de la realidad para desarrollar sus teorías, basando las mismas solo en sistemas axiomáticos. Hoy en día, en la búsqueda de nuevas ideas que expliquen el ser y el saber de la Matemática, la historia de esta ciencia puede desempeñar un papel importante en el proceso de enseñanza aprendizaje. Sin embargo, pensamos que para estudiarla desde este punto de vista no se la debe considerar como una colección de datos y anécdotas, sino un recurso que incentive la reflexión y la actitud crítica en los alumnos, promoviendo el interés y la motivación hacia la Matemática, *humanizándose* de esta manera, los conceptos que se pretenden enseñar.

Siguiendo la idea de Jean-Pierre Friedelmeyer (2001), se sitúa a la Matemática, y a su enseñanza, dentro de la historia. Entonces, el sentido y el rigor ya no son absolutos, contradictorios o inaccesibles sino que se construyen a través de la interacción.

Desde esta perspectiva, consideramos muy importante generar en clase situaciones significativas, que sorprendan e intriguen a los alumnos. Es decir, un contexto que les posibilite recorrer el mismo camino que históricamente transitaron los matemáticos para desarrollar la teoría de las Cónicas.

Cabe entonces preguntarnos sobre la estrategia didáctica: ¿Cuáles son las ventajas de un enfoque histórico en la enseñanza de las Cónicas en Geometría?

Por otro lado, en este trabajo se abordará la enseñanza de las Cónicas a través de Software de Geometría Dinámica (SGD). En particular, nos interesa analizar el aprendizaje del concepto de Cónicas cuando la enseñanza se realiza por medio del recurso del SGD *Cabri II plus y Cabri 3D*.

Creemos que el desarrollo de las nuevas tecnologías, gracias al potencial de la visualización y la manipulación, además de imponer cambios metodológicos cada vez más alejados del tradicional entorno tiza-pizarrón, facilita a los alumnos, mediante la exploración de las situaciones, la adquisición de habilidades y el desarrollo de sus capacidades tales como explorar, conjeturar, construir, argumentar, comunicar, etc.

La visión pedagógica de este proyecto, en relación al aprendizaje, es constructivista. Por ello, consideramos que el aprendizaje se produce en mejores condiciones cuando los alumnos se involucran en la "construcción" de sus propias estrategias.

Y en este sentido metodológico, también cabe preguntarnos: ¿Es posible complementar estos dos recursos (histórico e informático) para favorecen la construcción de los conocimientos por parte de los alumnos?

El propio Vygotsky señala que el aprendizaje se da mediante la adquisición de *capacidades especializadas*[1] para el pensamiento, que implican una mediación cultural y una actividad humana.

Según Vygotsky (1996), las funciones psicológicas[2] humanas están culturalmente mediadas, se desarrollan históricamente, y surgen de la actividad práctica. Esta actividad humana (tanto en el plano interpsicológico, como en el plano intrapsicológico) solo puede ser entendida si se toman en cuenta los instrumentos técnicos[3] y los instrumentos psicológicos que median esa actividad.

Sin embargo como el propio Godino (2005) señala*: "En general, los recursos, tanto manipulativos como virtuales, son inertes en sí mismos. Para que desempeñen un papel en el aprendizaje es necesario formular tareas que inciten la actividad y reflexión matemática. El grado de pertinencia de un recurso depende del uso que el profesor haga del mismo, y por tanto los conocimientos didácticos específicos que tenga el profesor sobre su uso."*

En este sentido, más que herramienta inerte, el software será utilizado como mediador entre el alumno y el conocimiento. Pero para ello, los problemas propuestos deben ser pensados para tal fin. A la hora de enfrentarse a un problema de este tipo, tienen que tomar decisiones y construir estrategias que los resuelvan.

Entonces, también nos hacemos preguntas sobre los instrumentos tecnológicos:¿Es posible abordar las Cónicas, desde los diferentes enfoques que se proponen en los CBC, en un

---

[1] De acuerdo con Vygotsky, la mente no es una red compleja de capacidades generales, sino un conjunto de capacidades específicas, el aprendizaje es la adquisición de muchas capacidades especializadas.

[2] Las funciones psicológicas, (comprenden los procesos cotidianos de razonamiento y de la memoria humana) no pueden entenderse como independientes del medio social. Para el autor, el desarrollo de las funciones psicológicas superiores se da primero en el plano social y después en el plano individual.

[3] El instrumento técnico utilizado en esta investigación es el SGD.

entorno de Geometría Dinámica? ¿Qué errores comunes cometen en el camino de la construcción del concepto en cuestión?

1.2. El problema de Investigación

El matemático griego Apolonio de Perga (262-190 A.C.) fue el primero en estudiar detalladamente las curvas cónicas. Las propiedades más interesantes y útiles que descubrió Apolonio son utilizadas en la actualidad en ingeniería, arquitectura, óptica y otras ramas. Sin embargo, las Cónicas hacen su primera aparición en la historia para resolver uno de los *problemas clásicos*[4] de la Geometría griega: el problema de la duplicación del cubo.

En el siglo XVI el filósofo y matemático René Descartes (1596-1650) desarrolló un método para relacionar las curvas con ecuaciones. Este estudio sobre las mismas dio origen a lo que más tarde conoceríamos como Geometría Analítica. Quizás el resultado más sorprendente de la Geometría Analítica es que todas las ecuaciones de segundo grado en dos variables representan secciones cónicas.

Sin lugar a duda las Cónicas son las curvas más importantes que la Geometría ofrece a la Física. Por ejemplo, las propiedades de reflexión que son de gran utilidad en la óptica o las órbitas de los planetas alrededor del Sol para la Astronomía. El astrónomo alemán Johannes Kepler (1570-1630) fue quien descubrió que las órbitas de los planetas alrededor del Sol son elipses que tienen al Sol como uno de sus focos. Y más tarde el célebre matemático y físico inglés Isaac Newton (1642-1727) demostró que la órbita de un cuerpo sometido a una fuerza gravitatoria es una curva cónica.

Si bien nadie puede negar la importancia de la enseñanza de la Geometría en la escuela debido a su vinculación directa con otras disciplinas e incluso con las situaciones cotidianas

[4] Los tres problemas clásicos de la Geometría griega son la duplicación del cubo, la cuadratura del círculo y la bisección del ángulo. Tuvo que pasar más de 2200 años para demostrar que eran irresolubles utilizando únicamente regla y compás.

de los alumnos, tampoco podemos negar el poco tiempo que se dedica realmente a su enseñanza. En particular, la enseñanza del concepto de Cónicas en la Provincia de Buenos Aires está relegada al último año del nivel Polimodal y advertimos que no se dedica a éste ni el tiempo ni los recursos adecuados para su enseñanza.

De las planificaciones anuales, correspondientes al 3° año del nivel Polimodal, analizadas (ver Anexo I):

- en 3 de 5 no están contempladas las Cónicas como contenido a abordar,
- en el resto, están contempladas como última unidad del año,
- sólo en 1 se considera el uso de recursos tecnológicos, pero no se aclara cómo será utilizado dicho recurso,
- en ninguna se menciona el uso de SGD.

A estos aspectos se agrega, la dificultad que tienen los docentes de proponer actividades que ayuden a los alumnos a construir los conocimientos, consecuencia quizás del enfoque tradicional en la enseñanza de la Geometría. Es decir, se presenta esta rama de la Matemática, como algo terminado, estático, centrado en un aprendizaje memorístico de conceptos y fórmulas.

Las dificultades anteriores ponen en evidencia la necesidad de incorporar en los distintos niveles educativos, nuevas estrategias y metodologías, que favorezcan el proceso de enseñanza aprendizaje de la Geometría.

En esta investigación trataremos de analizar de qué manera influye proponer a los alumnos situaciones basadas en la experimentación y la construcción del concepto de Cónicas, asistidos por SGD.

El estudio de la historia de las Cónicas puede dotar a los conceptos de mayor sentido. Desde nuestro planteo constituiría una mirada distinta del problema frecuente en las aulas, porque la experiencia nos indica que enseñar los conceptos descontextualizados, a través de procesos totalmente algorítmicos, no lleva a la construcción de los conceptos.

Como señalan Rico y Castro (1997) respecto a las razones que apuntan a la integración de la historia en la enseñanza de la Matemática: *"Para el profesor constituye un antídoto contra el formalismo y el aislamiento del conocimiento matemático y un conjunto de medios que le permiten apropiarse mejor de dicho conocimiento, a la vez que le ayudan a ordenar la presentación de los temas del currículo. […] Para los alumnos prepara un terreno donde la Matemática deja de jugar el papel de edificio acabado, restableciéndose su estatus de actividad cultural, de actividad humana, a la vez que les ayuda en su motivación para el aprendizaje. Además facilita conocer la génesis de los conceptos y los problemas que se han pretendido resolver, ayudando a su comprensión".*

Consideramos que mostrar, cómo un simple problema dio origen a un concepto, cómo fue abordado a lo largo de la historia de distintas maneras y desde distintos marcos conceptuales[5] (permitiéndoles a los alumnos reproducir el camino que históricamente recorrieron los hombres), constituiría una manera de "*humanizar*" el concepto matemático acercándolo a la realidad de los mismos.

Es normal escuchar en los alumnos "*y esto para que sirve*", lo que enfatiza un llamado a los profesores para que no los hagamos perder tiempo con conocimientos abstractos sin utilidad inmediata o evidente para ellos. Por esta razón, fundamentamos la propuesta en el enfoque histórico, dado que la mayoría de éstos fueron ***construidos*** a partir de problemas concretos y ***aplicados*** en algún contexto. Es decir, que en este trabajo no solo se aborda la construcción del concepto de Cónicas, sino además, que el alumno pueda reconocer en distintas situaciones

[5] De acuerdo al enfoque de Regine Douady (1986). El juego de marcos hace referencia al hecho de que la mayoría de los conceptos pueden intervenir en distintos dominios, diversos marcos: físico, geométrico, numérico, gráfico y otros. En cada uno de ellos se traduce un concepto en término de objetos y relaciones que podemos llamar los significados del concepto en el marco.

(pasadas y presentes) la aplicación de las Cónicas (propagación de la luz, trayectoria, obras arquitectónicas, etc.).

1.2.1. La enseñanza de la Geometría Tradicional y sus efectos

A comienzo del siglo XX hubo un movimiento de renovación en educación matemática, gracias al interés inicialmente despertado por el matemático alemán Felix Klein, con sus proyectos de renovación de la enseñanza media y con sus lecciones sobre *Matemática elemental desde un punto de vista superior* (1908). El mismo ejerció en nuestro país una gran influencia a partir de 1972, tal es así, que Rey Pastor publicó una traducción al castellano.

Entre los años 1960 y 1970 la enseñanza de la Matemática sufrió una transformación en sus contenidos y fundamentos como consecuencia del movimiento conocido como "Matemática Moderna". La exclamación que en 1959 realizara el matemático Jean Dieudonné: *"¡Abajo Euclides!*" impulsaría a no incluir la Geometría como objetivo prioritario de enseñanza, cuyas características y efectos fueron los siguientes (Miguel de Guzmán, 2001):

- Se subrayaron las estructuras abstractas en diversas áreas, especialmente en el Álgebra.
- Se pretendió profundizar en el rigor lógico.
- Se puso el acento sobre la teoría de conjuntos y el trabajo sobre el Álgebra, donde el rigor es fácilmente alcanzable.
- La Geometría elemental y la intuición espacial sufrió un gran detrimento. (La Geometría es, en efecto, mucho más difícil de fundamentar rigurosamente).
- Con respecto a las actividades fomentadas, la consecuencia natural fue el vaciamiento de problemas interesantes (en los que la Geometría elemental tanto abunda).

En los años 1970 se empezó a percibir que muchos de los cambios introducidos no habían resultado muy acertados. En el ICME (Congreso Internacional de Educación Matemática) de

1976, el geómetra Michael Atiyah aseguró necesaria la Geometría como objetivo prioritario de enseñanza al expresar que la intuición geométrica sigue siendo una fuente muy eficaz para la comprensión de muchos temas, por lo que su enseñanza y aprendizaje debían estimularse.

Entre los años 1970 y 1980 se abrió una discusión sobre las tendencias en la enseñanza de la Geometría y se inició una búsqueda de formas adecuadas para su enseñanza.

En los últimos treinta años la importancia de la Geometría euclidiana pasó por diferentes estadios. Esta cuestión se evidencia en diferentes posturas en cuanto a la enseñanza de la Geometría:

- una que contempla una enseñanza basada en enunciados, demostración de propiedades y resolución de problemas específicos;
- otra, donde prácticamente queda excluida de los aprendizajes;
- y la última, donde se declara su importancia básicamente como campo de motivación en relación a problemas concretos.

Alsina Catalá, Fortuny Aymemí y Pérez Gómez (1997) señalan que las consecuencias de la Matemática Moderna se pueden apreciar claramente en los profesores en ejercicio, ya sea por desconocimiento geométrico como por carencias en la didáctica específica, evidenciándose inseguridad para enseñar contenidos geométricos.

El profesor de Matemática de hoy en día ha transitado en su formación previa al menos por alguno de los períodos mencionados. Esta formación, sumada muchas veces a la falta de inclusión de nuevas estrategias pedagógicas, provoca que el docente no siempre responda a lo pretendido en los Diseño Curriculares. La inseguridad frente a la Geometría que su propia formación puede provocarle, la falta de tiempo (por un uso de recursos inapropiados) muchas veces induce a que el abordaje de la enseñanza de las Cónicas, solo lo haga por medio de ecuaciones; centrándose en un enfoque algebraico que resulta totalmente abstracto y casi imposible de tratar desde la intuición. Esto termina privando a los alumnos de la posibilidad que brinda la Geometría: poder construir desde la intuición y recurrir a una gran variedad de problemas que permitan construir el concepto en cuestión.

Otra de las ventajas que brinda la geometría es la posibilidad de estudiar las propiedades "geométricas" de las Cónicas, a través de la modelización de las mismas. Por ejemplo, la Óptica (espejos parabólicos), la propia Astronomía (trayectorias elíptica), etc.

1.2.2. Concepciones de los estudiantes, dificultades y obstáculos

En nuestro estudio, el término concepción hace referencia a «creencias, conceptos, significados, reglas, imágenes mentales y preferencias, conscientes o inconscientes» (Thompson, 1992, p. 132).

Barrantes y Blanco (2004) en su trabajo de investigación sobre las expectativas y concepciones de los alumnos sobre la Geometría escolar señalan:

- **Sobre el aprendizaje de la Geometría**

  Los alumnos conciben la Geometría como una materia difícil, influidos por las condiciones desfavorables (poca dedicación, es impartida al término de la materia, etc.)

- **Sobre las dificultades de la Geometría**

  Los estudiantes tienen lagunas de conceptos de Geometría escolar. Los contenidos que declaran conocer mejor son los relacionados con la Geometría plana. Han trabajado menos la Geometría espacial.

- **Sobre la finalidad de la Geometría**

  Para algunos alumnos la finalidad de la Geometría es solo adquirir conocimientos.

- **Sobre los materiales y recursos**

Recuerdan que en Geometría utilizaban materiales (figuras de madera e instrumentos para dibujar), aunque de forma esporádica, por lo que conciben que, en un principio, son motivantes por sí mismos y no por las actividades que se pueden realizar con ellos.

En general, la falta de estrategias metodológicas y de experiencias les hace concebir que la Geometría, en comparación con otras ramas de la Matemática, es difícil de comprender. Sus concepciones están lejos de la utilización de diferentes materiales y recursos y de la realización de actividades orientadas a que los alumnos comprendan la Geometría.

1.3. Objetivos de Investigación

1.3.1. Objetivos Generales

Analizar las ventajas que supone el uso de la Historia de la Matemática y la Geometría Dinámica, como recursos metodológicos en el proceso de enseñanza aprendizaje del concepto de Cónicas en el 3° año de Polimodal.

1.3.2. Objetivos Específicos

i. Detectar y analizar qué estrategias ponen en juego los alumnos al abordar problemas que responden al desarrollo histórico del concepto de Cónicas con la ayuda de los software *Cabri II plus y Cabri 3D.*

ii. Detectar y analizar los errores o dificultades que tienen los alumnos al construir el concepto de Cónicas en este nuevo contexto.

1.3.3. Hipótesis de trabajo

La utilización de la Geometría Dinámica apoyada en la evolución histórica de las Cónicas, favorece significativamente la construcción y apropiación del conocimiento por parte de los alumnos.

Capítulo 2

2.1. Introducción

Los Contenidos Básicos Comunes (CBC) de Matemática para la Educación Polimodal se organizan en bloques, que proponen trabajarse tanto desde la intuición geométrica como desde otras perspectivas (algebraica, analítica, etc.), no descartándose el uso de modelos físicos y software matemáticos.

Con respecto a las Cónicas, en los CBC (ver Anexos) se sugiere: *“Presentarlas desde ópticas diferentes (como intersecciones planas de una Superficie Cónica, como lugares geométricos y a través de sus ecuaciones), como representativas de situaciones problemáticas reales (órbitas planetarias, trayectorias de proyectiles, curvatura de espejos, etc.)”*

Sin embargo, después de haber observado planificaciones docentes (ver anexo I) de distintos establecimientos, respecto al estudio de las Cónicas, se deduce que:

- es relegado al 3° año del nivel Polimodal.
- en varios casos, como último tema del programa.
- se propone un enfoque generalmente analítico.

Las dos primeras cuestiones provocan que no se le dedique el tiempo, ni tampoco los recursos necesarios para su enseñanza.

Con respecto al tercero, las Cónicas son presentadas a los alumnos como las curvas de intersección de un cono con un plano (de forma breve y sin ahondar demasiado en dicho enfoque), poniéndose mayor énfasis en su estudio analítico. La elipse es definida como *el lugar geométrico de los puntos del plano tales que la suma de las distancias a dos puntos fijos es constante*, la hipérbola como *el lugar geométrico de los puntos del plano tales que la diferencia (en valor absoluto) de las distancias a dos puntos fijos es constante* y la parábola como *el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de una recta dada y de un punto fijo exterior a esta*. A partir de estas definiciones, se establecen sus ecuaciones.

Este paso, a nuestro modo de ver, es realizado de manera prematura, ocultándose así (a través de sus ecuaciones) no solo las propiedades fundamentales de las Cónicas y sus elementos notables, sino también, el origen de las mismas (contrario a lo que se propone en los CBC).

Consideramos que, si debieron pasar siglos hasta que se introdujera un sistema coordenado para su estudio (de la mano de Descartes, quien consideraba que la Geometría Sintética[6] no proporcionaba un método riguroso de estudio, pero sin duda, utilizó lo conocido hasta ese momento para desarrollar sus aportes), los docentes no deberían ignorar dicho proceso en la enseñanza de las Cónicas.

Por otro lado, la aparición de los Software de Geometría Dinámica (SGD) pueden resultar una herramienta favorable para la exploración y visualización de propiedades geométricas, ofreciendo así la posibilidad de dar un nuevo enfoque al estudio de estas curvas.

En esta investigación se pretende complementar estos dos recursos (histórico e informático). Como ya se ha dicho, nos interesa buscar en la historia de las Cónicas, junto con los aportes de la Geometría Dinámica, situaciones que favorezcan el aprendizaje

Para ello y con el fin de fundamentar y secuenciar la propuesta didáctica, respecto a los acontecimientos históricos que dieron origen y acompañaron la evolución del concepto, nos preguntamos: ¿Qué problema dio origen a la aparición de las Cónicas? ¿Cuáles fueron las primeras propiedades que las definían? ¿En qué momento de la historia, las Cónicas son tratadas solamente en el plano y sin referencia al cono? ¿Y cómo lugares geométricos? ¿En qué hechos trascendentes fueron aplicadas? ¿Y en qué situaciones cotidianas podemos encontrarlas? Estas y otras cuestiones trataremos de vislumbrar a lo largo de este capítulo.

[6] En la Geometría Sintética, los axiomas son proposiciones o afirmaciones que relacionan conceptos, definidos en función del punto, la recta y el plano.

2.2. El origen de las Cónicas

Los matemáticos de la Grecia Antigua (VI – IV a. C.) desarrollaron demostraciones en las que probaron la irracionalidad de algunos números. El primero que encontraron, lo obtuvieron al intentar calcular la hipotenusa de un triángulo rectángulo. Hasta ese momento creían que todos los números eran racionales, situación que sostuvieron al considerar los números como segmentos.

Este hallazgo significó un quiebre en el desarrollo de la Aritmética, permitiendo así, la creación de un cálculo general en forma geométrica.

Los elementos del *Álgebra Geométrica* eran los segmentos de recta. A partir de ellos, definieron las operaciones básicas: suma de segmentos, diferencia de segmentos, producto de segmentos y cociente (siempre que la longitud del divisor fuese menor que la del dividendo y distinta de cero). Estas dos últimas operaciones, producto y cociente, eran equivalentes a la anexión de áreas.

Los instrumentos empleados en los métodos de construcción del *Álgebra Geométrica* fueron la regla y el compás. Sin embargo, esta forma de cálculo, no llegó a convertirse en una teoría matemática general ya que es posible enunciar problemas que no admiten solución utilizando únicamente regla y compás. El problema de *la duplicación del cubo* es un claro ejemplo de este inconveniente. Muchos fueron los matemáticos que intentaron inútilmente resolver este problema (con las herramientas del Álgebra Geométrica).

En la Matemática griega, la influencia de este problema contribuyó a que las Secciones Cónicas se convirtieran en un método de abordar aquellos que no podían ser resueltos con regla y compás.

El interés por estas curvas fue en aumento. En la Época Helenista, sobresalieron por sus contribuciones e importantes logros los matemáticos Euclides, Arquímedes y Apolonio.

En el siglo XVII se descubrió de la mano de René Descartes, gracias a su interés por las Cónicas, la conexión entre el Álgebra y la Geometría, dos ramas de la Matemática entre las que se creía, que no existía relación.

Se expone a continuación un resumen cronológico sobre los más importantes matemáticos que han trabajado sobre este tema:

Los griegos	Los árabes	Siglo XVI	Siglo XVII	Siglo XVIII	Siglo XIX
600 a.C – 500	500 – 1500	1500 – 1600	1600 – 1700	1700 – 1800	1800 – 1900
Menecmo	Banu Musa	Werner	Kepler	L´Hospital	Brianchon
Aristeo	Thabit Ibn Qurra	Maurolico	Cabalieri	Euler	Quetelet
Euclides	Ibrahim Sinan	Guidobaldo	Fermat	Simson	Dandelin
Arquímedes	Al-Sijzi		Descartes	Boscovitch	Poncelet
Apolonio	Al-Quhi		Desargues	Hamilton	Chasles
Diocles	Al-Haytham		Pascal		Steiner
Pappus	Omar Kashamm		Saint Vincent		Von Staudi
Serenus	Al-Tusi		John Wallis		
Proclus	Al-Kashi		Jan de Witt		
Eutocius			Newton		

Tabla 1. Fuente: "*La caracterización de las Cónicas con Cabri-géomètre en formación continua de los enseñantes. Estudio de una secuencia de actividades y concepción de un documento interactivo".* Vincenzo Bongiovani (2002). Tesis Doctoral. Universidad Joseph Fourier.

2.3. Los griegos

El descubrimiento de las Cónicas estuvo íntimamente ligado a uno de *los tres problemas clásicos*[7] de la Geometría griega, la duplicación del cubo (construir un cubo de doble volumen que otro dado) o problema de Delos.

[7] Los tres problemas clásicos de la Geometría griega son la duplicación del cubo, la cuadratura

Según la leyenda, hay dos narraciones diferentes sobre los orígenes del problema. Una de ellas cuenta que en Atenas por el año 430 a.C. una peste se llevó una cuarta parte de la población ateniense. Según Teón de Esmirna:

> *Eratóstenes, en su obra titulada Platonicus relata que, cuando el dios anunció a los delianos a través del oráculo que, para deshacerse de una plaga, debían construir un altar del doble del que había, sus artesanos quedaron desconcertados en sus esfuerzos por descubrir cómo podían hacer un sólido que fuera el doble de otro sólido similar; por ello fueron a preguntarle al respecto a Platón, quien respondió que el oráculo no quería decir que el dios quisiera un altar del doble del tamaño, sino que deseaba al imponerles la tarea, avergonzar a los griegos por su descuido de las matemáticas y su desprecio por la Geometría.*

Por otro lado, Eutocio en su comentario sobre la esfera y el cilindro de Arquímedes, dio una versión un tanto distinta, a través de una supuesta carta de Eratóstenes al Rey Tolomeo:

> *La anécdota dice que uno de los poetas trágicos antiguos representaba a Minos haciendo construir una tumba para Glauco y que, cuando Minos descubrió que la tumba medía cien pies de cada lado, dijo: "Demasiado pequeña es la tumba que habéis señalado como el sitio real de descanso. Hacedla el doble de grande. Sin arruinar la forma, rápidamente duplicad cada lado de la tumba". Esto claramente era un error. Ya que si los lados se duplican, la superficie se multiplica por cuatro y el volumen por ocho. (Figura 2.1)*

---

del círculo y la bisección del ángulo. Tuvo que pasar más de 2200 años para demostrar que eran irresolubles utilizando únicamente regla y compás.

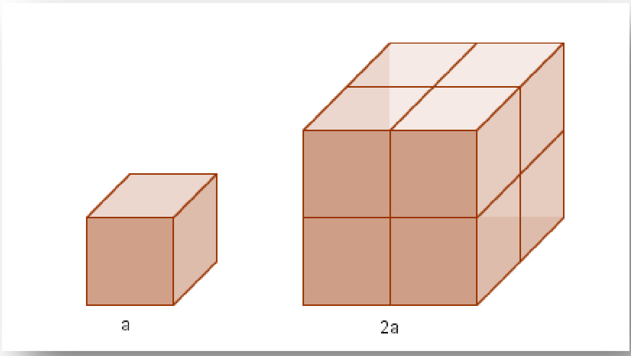


Figura 1: Error en la duplicación del cubo

Los griegos sabían cómo resolver el problema de duplicar el cuadrado. Para lo cual, consideraron el cuadrado *ABCD* de la figura 2.2 y trazaron la diagonal *DB*. Se puede construir otro cuadrado *BDEF* usando *BD* como lado de este último, tal que *BDEF* es el doble de *ABCD*.

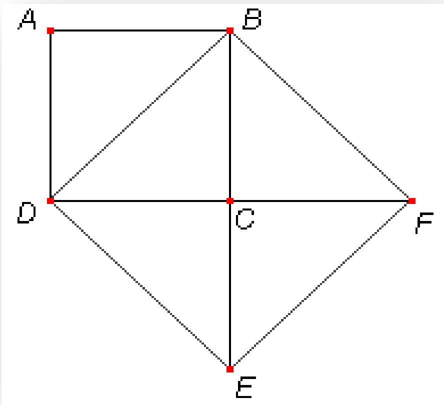


Figura 2: Duplicación del cuadrado

Los griegos también sabían cómo duplicar el rectángulo y Euclides lo presenta en el Libro II de los Elementos.

Ahora bien, el primer paso importante en la duplicación del cubo fue dado por Hipócrates de Quíos (entre 470 y 410 a. C.), probablemente no mucho después que el problema apareciera por primera vez. Sin embargo, parece posible que estuvieran pensando en una forma más general del problema como se puede ver en el siguiente enunciado:

i) *Encontrar un cubo tal que su razón a un cubo dado sea igual a la razón entre dos líneas dadas:*

$$\frac{a^3}{x^3} = \frac{a}{b}$$

ii) *Hipócrates redujo el problema al de intercalar dos medias geométricas o proporcionales entre la magnitud que representa la arista del cubo primitivo y la correspondiente al doble de la misma. Es decir, dadas las líneas a , b encontrar x , y tales que*:

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{b}$$

Aplicando el concepto de proporción se puede ver que (i) y (ii) son equivalentes:

$$\frac{a^3}{x^3} = \left(\frac{a}{x}\right)^3 = \left(\frac{a}{x}\right)\left(\frac{x}{y}\right)\left(\frac{y}{b}\right) = \frac{a}{b}$$

Por lo tanto, dado un cubo de lado a, si se quiere construir un cubo b/a veces el volumen de este, entonces se necesita construir un cubo de lado x.

2.3.1. Las cónicas según Menecmo

Menecmo, hacia el 350 a.C. se ocupó del problema de la duplicación del cubo: "*Dado un cubo de arista a, encontrar la arista de otro, cuyo volumen sea el doble"*.

Como se dijo anteriormente, el problema de las dos medias proporcionales entre a y b consiste en hallar x, tal que:

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{2a}$$

De aquí se pueden obtener las siguientes ecuaciones:

$$x^2 = a \cdot y \quad ; \quad y^2 = 2a \cdot x \quad ; \quad xy = 2a^2$$

Encontrar los valores de x e y, equivale a resolver, por ejemplo, el siguiente sistema de ecuaciones cuadráticas:

$$\begin{cases} x^2 = ay \\ y^2 = 2a.x \end{cases} \rightarrow x^3 = 2a^3$$

Menecmo se dio cuenta de que geométricamente, el problema consistía en encontrar el punto de corte de dos *cónicas*: dos parábolas, o una parábola y una hipérbola (Figura 2.3).

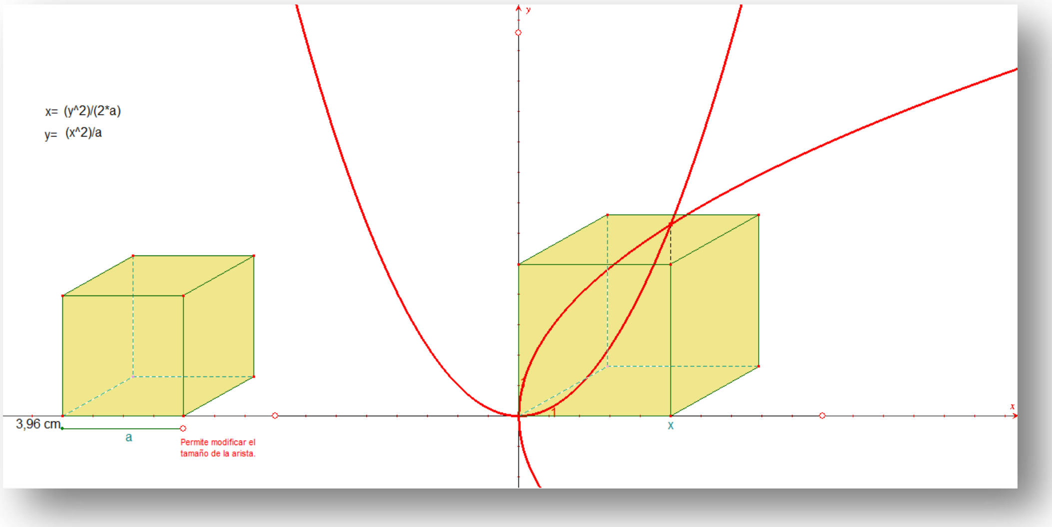


Figura 3: Intersección de una parábola con una hipérbola para obtener el punto cuya abscisa es la arista del cubo buscado. (en *Cabri 2D*)

Es así, que las Cónicas hacen su primera aparición en la historia para resolver el problema de la duplicación del cubo.

Menecmo introduce dichas curvas como secciones (las secciones en aquellos tiempos sólo se consideraban perpendiculares a la generatriz) de conos circulares rectos (ortotoma), agudos (oxitoma) y obtusos (amblitoma).

Por eso la parábola fue llamada sección de cono rectángulo. Es decir, ***sección de un cono cuyo ángulo de apertura es recto, cortado por un plano perpendicular a una generatriz.*** (Figura 2.4)

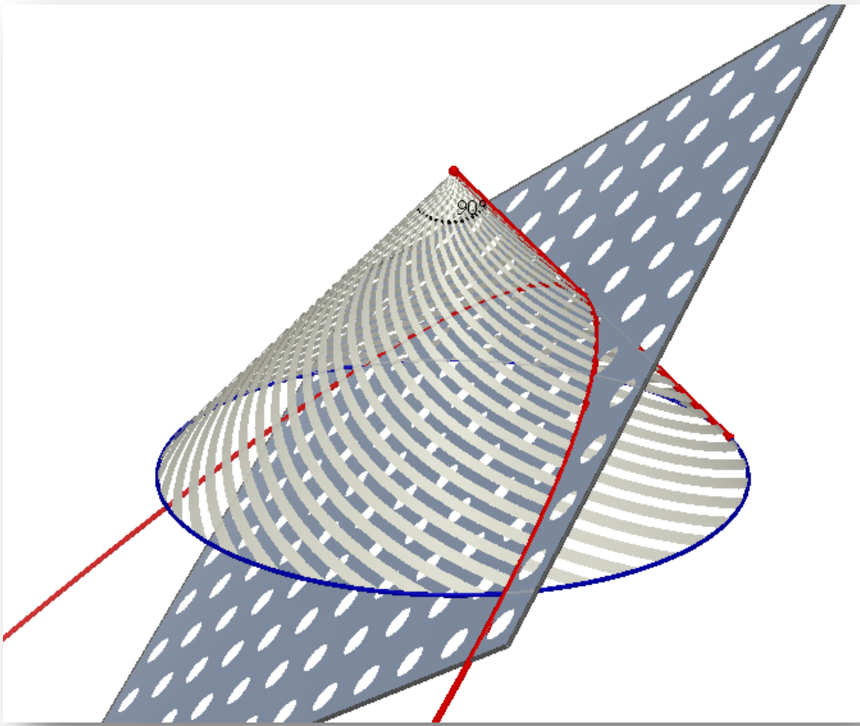


Figura 4: Determinación de una parábola a partir de la sección perpendicular de un cono rectángulo.

La elipse, ***sección de un cono acutángulo cortado por un plano perpendicular a una generatriz.*** (Figura 2.5)

Y la hipérbola (hasta Apolonio, solo se consideró una rama de ella), ***sección de un cono obtusángulo cortado por un plano perpendicular a una generatriz.*** (Figura 2.6)

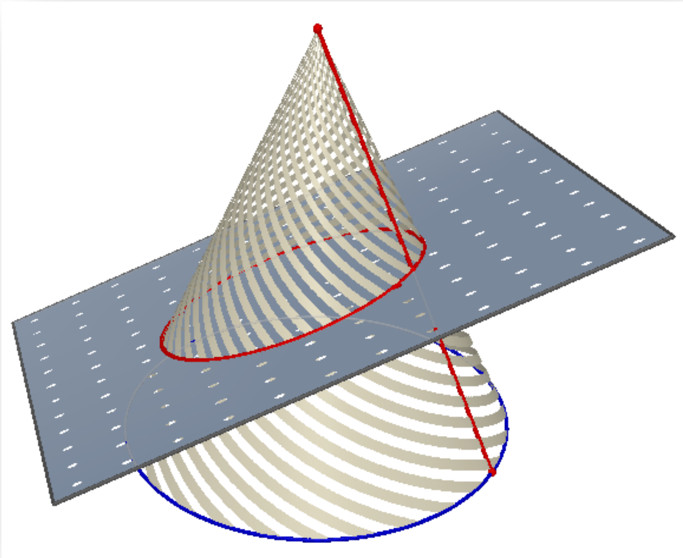


Figura 5: Determinación de la elipse a partir de la

Sección perpendicular de un cono acutángulo.

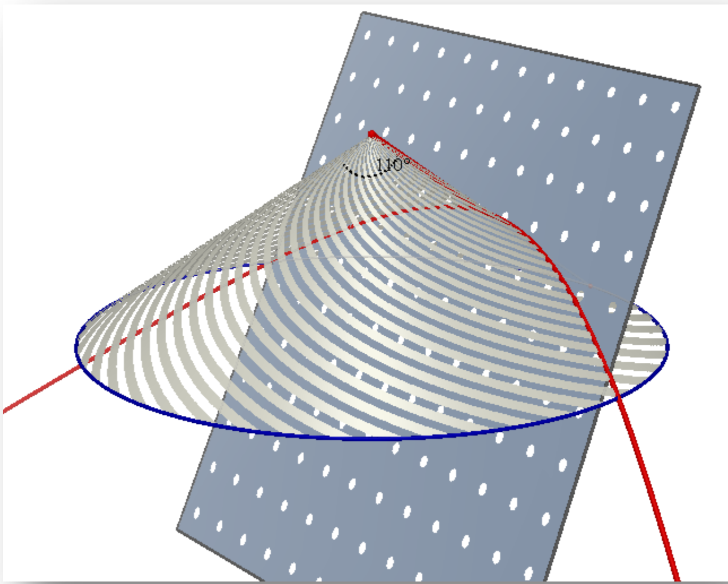


Figura 6: Obtención de la hipérbola (una rama) a partir

de la sección perpendicular de un cono obtusángulo.

En síntesis, en el siglo *IV* a. C., Menecmo planteó problemas de intersección de superficies, secciones de un cono circular recto por un plano perpendicular a una generatriz. Aplicó técnicas que no incluían todavía un sistema de coordenadas, pero que de cierta forma estaba *implícito*[8] en su tratamiento conceptual.

2.3.2. Las cónicas según Apolonio

El matemático griego Apolonio (262-190 a.C.) fue el primero en estudiar detalladamente las curvas Cónicas y encontrar las propiedades que las definen. De hecho, una de las obras más importantes de Apolonio es sin duda *Las Cónicas* (el matemático árabe **Thabit ibn Qurra** tradujo tres libros al árabe antes de que despareciera su versión griega).

Muchos consideran *Los Elementos de Euclides* y *Las Cónicas de Apolonio*, como las mejores obras en su género en la Matemática antigua.

Esta obra está compuesta de ocho libros. Los contenidos generales de los mismos son:

I. *Modos de obtención y propiedades fundamentales de las cónicas. Incluye también teoremas sobre el trazado de tangentes.*
II. *Teoría de los ejes principales, las asíntotas y los diámetros conjugados.*
III. *Teoremas notables. Propiedades.*
IV. *División armónica de rectas. Mayor número de puntos de intersección y de contacto de dos secciones cónicas.*
V. *Se resuelven problemas extremales: segmento de máxima y mínima distancia a las Cónicas, normal, evoluta, centro de curvatura.*

[8] Si bien todavía no se había desarrollado la Geometría Analítica, algunos historiadores sostienen que Menecmo debía tener algún conocimiento sobre la misma, cuestión que nunca se podrá probar ya que se perdieron todos sus trabajos.

VI. *Análisis del problema de semejanza de las secciones cónicas y la generalización del problema sobre la construcción de una familia de conos que pasan a través de una sección cónica dada.*

VII. *Se investigan las cuestiones relacionadas con las funciones de las longitudes de los diámetros conjugados, parámetros, etc.*

VIII. *Se desconoce su contenido. Halley trabajando sobre la reconstrucción del texto extraviado, interpretó que contendría problemas relacionados al material teórico del libro VII.*

Anteriormente a Apolonio la elipse, la parábola y la hipérbola se obtenían como secciones por medio de un plano de tres tipos de conos circulares rectos distintos, según el ángulo en el vértice fuese agudo, recto u obtuso.

Apolonio demostró por primera vez que no es necesario considerar exclusivamente secciones perpendiculares a una generatriz del cono, y que de un cono único pueden obtenerse los tres tipos de secciones cónicas al variar la inclinación del plano que corta al cono; paso muy importante en el proceso de unificar los tres tipos de curvas en cuestión.

Otra generalización importante se llevó a cabo cuando Apolonio demostró que el cono no necesita ser un cono recto, sino que puede tomarse por ejemplo, un cono circular oblicuo y las propiedades siguen siendo las mismas.

Por último, Apolonio llevó el estudio de las antiguas curvas a un punto de vista más moderno al sustituir el cono simple por un *cono doble*[9] (superficie cónica). De hecho, Apolonio da la misma definición que se utiliza actualmente: ***Si una línea recta de longitud indefinida y que pasa siempre por un punto fijo se hace mover sobre la circunferencia de un círculo que no está en el mismo plano que el punto dado, de tal manera que pase sucesivamente por todos***

[9] Par de conos orientados en sentido opuesto, con vértices coincidentes y ejes sobre la misma recta.

los puntos de dicha circunferencia, entonces la recta móvil describirá la superficie de un cono doble. (Figura2.7)

Este cambio en el punto de vista convierte a la hipérbola en la curva de dos ramas tal como la conocemos hoy. Hasta entonces solían hablar de "las dos hipérbolas" en vez de "las dos ramas" de una hipérbola única, pero en cualquier caso el carácter dual de la curva fue reconocido claramente a partir de Apolonio.

Tal es así, que el *libro I* comienza con la generación del cono oblicuo, que seccionado por un plano, dará lugar a los diferentes tipos de cónicas.

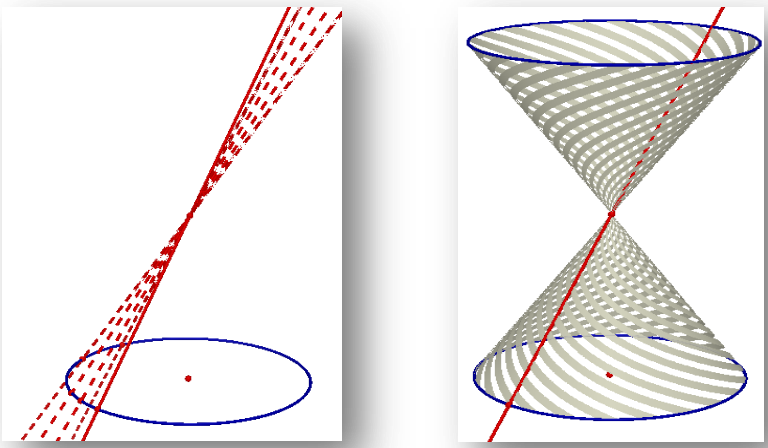


Figura 7: Generación del cono.

Apolonio fue el primero en captar cómo a partir de un único cono es posible obtener todas las Cónicas, según la inclinación del plano y además identificó la hipérbola como una curva de dos ramas, logrando así una visión más unitaria que la de sus antecesores (véase Figura 2.8).

Los geómetras griegos clasificaban las curvas en tres categorías, conocidas bajo el nombre de:

- *Lugares planos*, contenía a todas las líneas rectas y circunferencias.
- *Lugares sólidos*, constituida por todas las secciones cónicas.
- *Lugares lineales*, constituida por todas las curvas restantes.

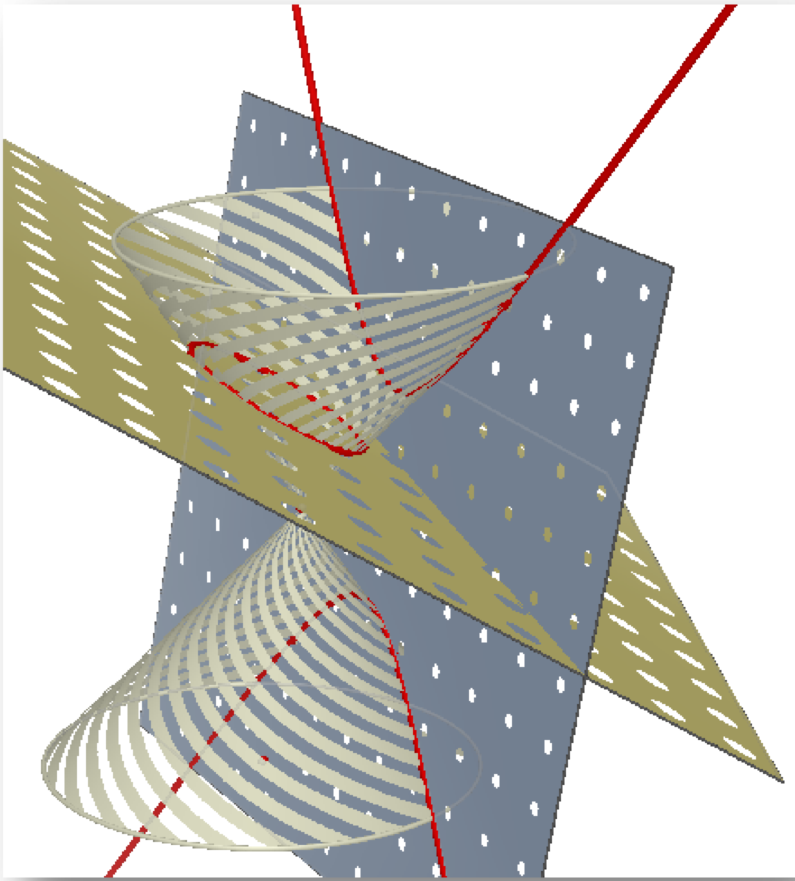


Figura 8: Obtención de la elipse y la hipérbola (con sus dos ramas), a partir de un único cono oblicuo. (*Cabri 3D*)

Lo interesante de destacar es que el nombre dado a la segunda clase se debía al hecho de que las Cónicas no se definían como lugares geométricos de puntos del plano que satisfacen una determinada condición, como se suele hacer hoy, sino que se describían de una manera estereométrica como secciones de una figura tridimensional por un plano. Sin embargo, Apolonio logró prescindir del cono y a partir de este dedujo una propiedad plana fundamental, que le permitió dar una condición necesaria y suficiente para que un punto esté situado sobre la curva, logrando de ese modo abandonar el cono definitivamente.

En síntesis Apolonio define las Cónicas:

i) Como la intersección de un cono circular oblicuo de dos hojas seccionado por un plano, donde las diferentes curvas se obtienen según la inclinación del plano. Además identifica la hipérbola como una curva con dos ramas.

ii) Como lugares geométricos:

Parábola: ***Es el lugar geométrico de todos los puntos del plano que equidistan de una recta dada y un punto fijo exterior a la misma****.*

Elipse: ***Es el lugar geométrico de todos los puntos del plano cuyas distancias a dos puntos fijos tienen suma constante****.*

Hipérbola: ***Es el lugar geométrico de todos los puntos del plano cuyas distancias a dos puntos fijos tienen diferencia constante.***

Durante un siglo y medio aproximadamente estas curvas no tuvieron otro nombre específico más que descripciones de la manera como habían sido descubiertas: secciones de un cono agudo (oxitoma), secciones de un cono rectángulo (ortotoma) y secciones de un cono obtuso (amblitoma).

Fue Apolonio quién introdujo por primera vez los nombres de las Cónicas tal y como las conocemos actualmente: *elipse* (deficiencia), *parábola* (equiparación) e *hipérbola* (exceso). Estas palabras no eran nuevas, sino que fueron adaptadas a partir de un uso anterior, debido quizá a los pitagóricos en la solución de ecuaciones cuadráticas por el método de aplicación de áreas.

Los teoremas de Apolonio sobre máximos y mínimos son en realidad problemas sobre tangentes y normales a las secciones cónicas. Gracias a las propiedades de las tangentes a la parábola fue posible, siglos después, un análisis preciso de la trayectoria de un proyectil, como así también, un estudio detallado de las trayectorias de los planetas utilizando las propiedades de las tangentes a una elipse.

Tal como se define las Cónicas hoy en día, los focos juegan un papel de gran importancia. Sin embargo, Apolonio ni siquiera les dio nombres especiales a estos puntos y se refirió a ellos de manera indirecta.

En la Geometría griega, las ecuaciones estaban determinadas por las curvas, pero no era posible vislumbrar todavía que las curvas estuvieran determinadas por las ecuaciones.

2.4. Los árabes

El estudio de las secciones cónicas por los árabes comenzó no sólo a causa de los problemas geométricos heredados de la Antigüedad, como la duplicación del cubo, sino por sus aplicaciones a dominios no previstos por los primeros matemáticos como la óptica, la estática y la astronomía. Este interés fue el que impulsó el estudio sobre las Cónicas.

Entre los siglos VIII y IX un gran número de obras científicas griegas son traducidas al árabe por los hermanos Banu Musa. Entre las que se encuentran *"Las Cónicas"* de Apolonio.

2.4.1. Las Cónicas según al-Quhi e Ibn Sahl

A mediados del siglo X, al-Quhi en el tratado titulado *"El libro de los centros de las circunferencias tangentes, situados sobre líneas, por el método del análisis"*, determina el lugar geométrico de los centros de las circunferencias que verifican ciertas condiciones. Por ejemplo, se interesa por los centros de las circunferencias tangentes a una recta dada, por un punto dado.

El lugar geométrico es la parábola cuya directriz es la recta dada y foco el punto dado. Para demostrar que se trata de una parábola, procura encontrar la relación establecida en la definición de Apolonio.

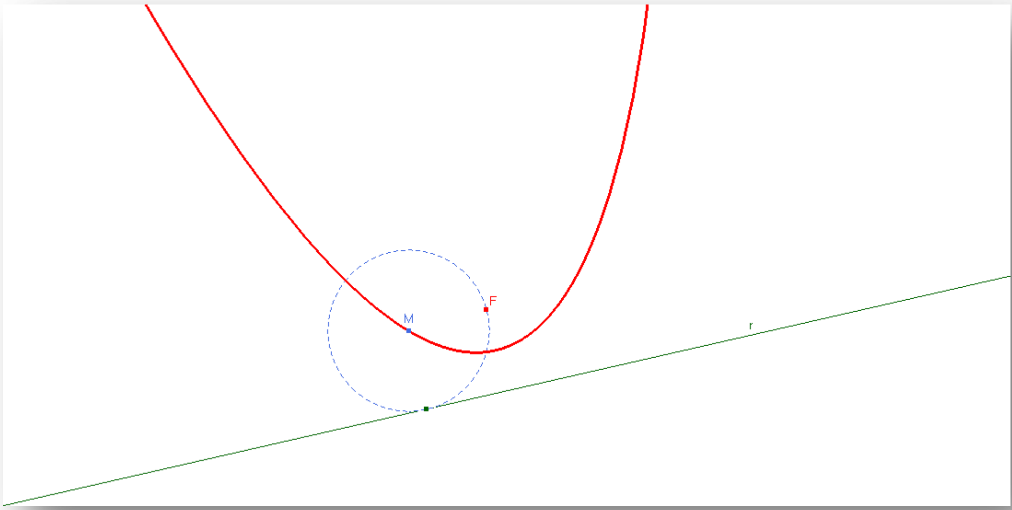


Figura 9: Determinación de la parábola como lugar geométrico a partir de un punto M que equidista de un punto fijo F y una recta r.

En otro ejemplo del mismo tratado busca el lugar geométrico de los centros de las circunferencias que pasan por un punto dado y son tangentes a una circunferencia dada. El lugar geométrico es una Cónica, hipérbola o elipse según el punto sea interior o exterior a la circunferencia. Trata ambos casos al mismo tiempo y también utiliza las definiciones del tratado de Apolonio para la demostración.

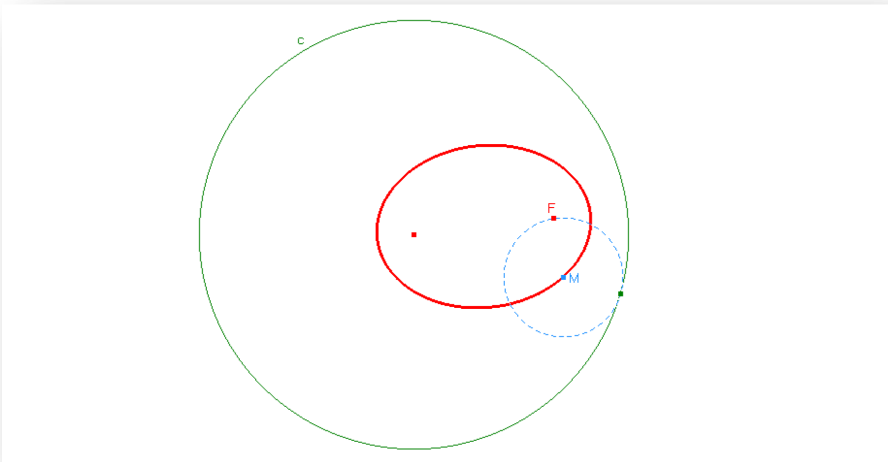


Figura 10: Determinación de una elipse como lugar geométrico a partir de un punto M que equidista de una circunferencia c y un punto fijo F interior a la circunferencia.

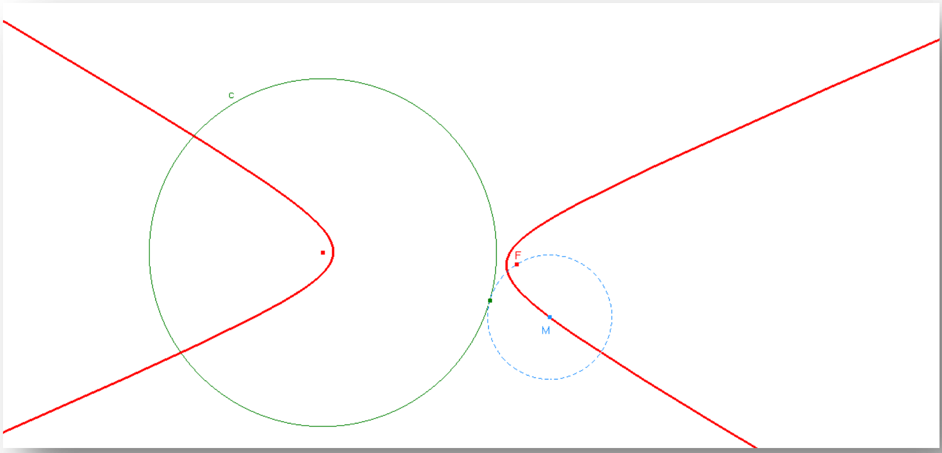


Figura 11: Determinación de una hipérbola como lugar geométrico a partir de un punto M que equidista de una circunferencia c y un punto fijo F exterior a la circunferencia.

El manuscrito del Kitāb al-parraqāt (El libro sobre los instrumentos incendiarios) de Ibn Sahl, matemático y físico del siglo X, fue encontrado y estudiado por Roshdi Rashed. Este tratado de óptica geométrica demuestra que la ley de la refracción de la luz había sido descubierta seis siglos antes de Snell[10], del que actualmente lleva el nombre.

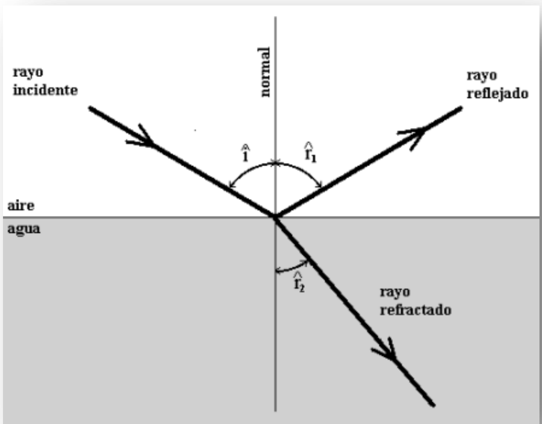


Figura 12: Rayos incidentes, reflejados y refractados.

[10] Willebrord van Roijen Snell (1580 - 1626), físico holandés del siglo XVII.

La reflexión es el cambio de dirección del rayo luminoso que incide sobre una superficie reflectante. Las leyes que la describen, conocidas ya por los antiguos griegos, son:

i. el rayo incidente, el rayo reflejado y la normal a la superficie reflectante se hallan en el mismo plano;

ii. el ángulo de reflexión es igual al ángulo de incidencia.

La refracción es el cambio de dirección del rayo luminoso cuando pasa de un medio transparente a otro. Se rige por las siguientes leyes:

i. el rayo incidente, el rayo refractado y la normal a la superficie de separación entre los dos medios están en el mismo plano;

ii. conociendo los dos medios, la relación entre el seno del ángulo de incidencia y el seno del ángulo de refracción es constante.

En la actualidad la ley de los senos se formula de la siguiente manera:

$$\sin(i) = n.\sin(r)$$

En este caso se supone que el primer medio en cuestión es el vacío (o el aire, cuyo índice de refracción es muy parecido). i es el ángulo del rayo incidente, mientras que r es el ángulo del rayo refractado.

Los espejos ustorios

La leyenda cuenta que Arquímedes quemó la mayor parte de la flota de Claudio Marcelo[11], anclada en las proximidades del puerto, con unos espejos ustorios que había puesto sobre las murallas y que apuntaban hacia los barcos.

[11] Marco Claudio Marcelo (268 - 208 a. C.) fue un político y militar romano, comandante del ejército romano durante la Segunda Guerra Púnica y el conquistador de la ciudad de Siracusa, en la isla de Sicilia.

No sabemos hasta qué punto la leyenda es verídica; a pesar de que ha sido comprobada la consistencia histórica de un gran número de sus inventos y descubrimientos.

Desde el siglo III a. C., el estudio de los espejos ustorios ha sido un campo de investigación peculiar porque abarca diferentes disciplinas: estudio de las propiedades de las secciones cónicas, técnicas de construcción de los espejos y óptica teórica.

En este contexto se introduce Ibn Sahl, que es el primero en extender el análisis también a las lentes: escribe un libro sobre los instrumentos ustorios.

Ibn Sahl escribió dos manuscritos sobre espejos ustorios en los que trata el siguiente problema: se quiere incendiar un objeto ubicado en un punto dado, con una fuente luminosa cercana o lejana, por medio de reflexión o refracción. De la combinación de estas cuatro posibilidades obtenemos cuatro diferentes instrumentos:

i. si los rayos se pueden considerar paralelos (es decir, que la fuente luminosa se halla a una tal distancia que se puede considerar infinita, por lo que el ángulo de divergencia entre los rayos es despreciable), y utilizamos la reflexión, tenemos un espejo parabólico.

ii. también por reflexión, pero usando una fuente luminosa a distancia finita, tenemos un espejo elipsoidal.

iii. por refracción y con fuente luminosa a distancia infinita obtenemos una lente planoconvexa.

iv. por último, en el caso de una fuente luminosa a distancia finita y de un instrumento refractante, usaremos una lente biconvexa.

2.5. Las Cónicas a partir del siglo XVII

En 1609 Johannes Kepler (1571-1630) publicó, utilizando las observaciones de su maestro Tycho Brahe, su obra *Astronomía Nova* en donde enunció las dos primeras leyes referentes a las órbitas de los planetas. Posteriormente, en 1619, en el libro *Harmonices Mundi Libri*, Kepler publicaría la tercera Ley.

Aproximadamente 80 años más tarde, Isaac Newton (1642-1727) probaba a través de la ley de la gravitación universal que las órbitas de los planetas eran elípticas. Las leyes de Kepler fueron enunciadas para explicar el movimiento de los planetas alrededor del Sol. Aunque él no las enunció en el mismo orden, en la actualidad las leyes se numeran como sigue:

- Primera Ley (Ley de las trayectorias elípticas): todos los planetas se desplazan alrededor del Sol describiendo órbitas elípticas, estando el Sol situado en uno de los focos.
- Segunda Ley (Ley de las áreas): el radiovector que une el planeta y el Sol barre áreas iguales en tiempos iguales.
- Tercera Ley (Ley de los tiempos): para cualquier planeta, el cuadrado de su período orbital (tiempo que tarda en dar una vuelta alrededor del Sol) es directamente proporcional al cubo de la distancia media con el Sol.

En el Renacimiento, si la elipse es la curva de Kepler, la parábola será la de Galileo, el padre de la cinemática. Será él quien descubra que cualquier proyectil lanzado al aire describe una trayectoria parabólica.

Newton con su ley de gravitación universal y con la demostración de que toda órbita de un objeto celeste es una de las tres cónicas completarán la obra maestra de Apolonio. Ya que mientras que este último realizó un estudio exhaustivo de esta familia de curvas, Galileo, Kepler y Newton las colocaron en el centro de la explicación de los movimientos celestes.

2.6. Las Cónicas y el origen de la Geometría Analítica

En el siglo XVI el filósofo y matemático René Descartes (1596-1650) desarrolló un método para relacionar las curvas con ecuaciones. El obtener esta algebrización de las secciones cónicas fue el logro principal de René Descartes. Quien intentó desprenderse del estudio puramente geométrico de Euclides y Apolonio, a los cuales el criticaba por la ausencia de un método general[12]. Este método es la llamada Geometría Analítica.

Uno de los aportes interesantes de la Geometría Analítica (geometría de coordenadas) es que todas las ecuaciones de segundo grado en dos variables representan secciones cónicas. Descartes logra obtener las mismas mediante la introducción de un sistema de coordenadas. Tal fue la importancia matemática de su obra *La Géometrie* (1637) que, poco después de su aparición, se publicó separadamente del *Discurso*[13].

Independientemente, Pierre de Fermat (1601-1665) también desarrolló una geometría de coordenadas. Fermat, en contraste con Descartes, pensaba en la geometría analítica sólo como una extensión de las ideas de Euclides y Apolonio.

> El *Libro Primero* de la *Geometría* trata de los problemas que pueden resolverse sin emplear más que círculos y líneas rectas.

---

[12] Los métodos, desarrollados por Euclides, Apolonio y sus sucesores anteriores al desarrollo de la geometría analítica, para tratar las cuestiones geométricas son conocidos ahora bajo el nombre de geometría sintética.

[13] *El Discurso del Método*, es una obra escrita por René Descartes en 1637 que pretende dar a conocer el método para poder llegar al conocimiento verdadero y encontrar la verdad, utilizando la razón. Es una de sus obras más importantes, considerada como una de las primeras de la filosofía moderna.

El *Libro Segundo* se titula *De la naturaleza de las líneas curvas.* Trata especialmente de las de grado superior y, sobre todo, de la construcción y propiedades de tangentes y normales, cuya importancia deriva de los problemas de la reflexión de la luz sobre las superficies curvas.

El *Libro Tercero* está dedicado a los problemas sólidos, lo cual lo lleva al estudio de la resolución de ecuaciones, discusión de sus raíces, y relaciones entre los coeficientes. Muestra que una ecuación puede tener tantas raíces como dimensiones tiene el grado, y da luego su famosa regla de los signos. Por último, trata los célebres problemas: la trisección del ángulo y la duplicación del cubo y señala que a ellos puede reducirse cualquier otro problema de 3er grado.

Este nuevo lenguaje (gracias a las aportaciones de muchos geómetras) permite expresar ciertas curvas, no ya por medio de una característica geométrica, sino por medio de una expresión algebraica, una ecuación polinómica en dos variables.

Cabe destacar que en todo momento, lo que Descartes hace (así lo indica el título del ensayo, *Géométrie*) es geometría. De ahí la importancia de una construcción geométrica efectiva y completa.

Sin embargo, el filósofo era consciente que su método debía ir más allá y resolver problemas que en la geometría griega eran difícilmente resolubles o incluso eran imposibles resolver. Por esta razón plantea, a modo de colofón del Libro I, el problema de las tres y las cuatro rectas que había sido estudiado por Apolonio y resuelto parcialmente por Pappos. En síntesis, establece:

“Dadas cuatro rectas, dos de las cuales pueden ser la misma, el lugar geométrico de los puntos C del plano tales que el producto de las distancias a dos de las rectas es proporcional al producto de las distancias a las otras en una proporción dada, es una sección cónica.”

El éxito de Descartes es doble. Por un lado, puede reescribir el problema en función de las coordenadas x, y del punto C. Obtiene una ecuación general de segundo grado en x, y.

Entonces, en el *Libro II*, establece que toda ecuación de la forma:

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Ex + 2Fy + G = 0$$

es una cónica y su naturaleza depende del signo del discriminante:

$$\Delta = B^2 - 4AC$$

Por otro lado, mientras que Descartes comúnmente empezaba con una curva y derivaba su ecuación algebraica, Fermat comenzaba con una ecuación algebraica y derivaba de ella las propiedades geométricas de la curva correspondiente. Por ejemplo, él comenzó con la ecuación de segundo grado en dos variables mostrando mediante técnicas de traslación y rotación que su lugar geométrico es una sección cónica (excepto para casos degenerados), y clasificó la variedad de casos de esa ecuación como elipse, hipérbola o parábola. Una discusión de este trabajo puede encontrarse en el *capítulo 3* de *Mahoney*, la Biografía Matemática de Fermat. Así, los trabajos de Descartes y Fermat consideraron los dos aspectos complementarios de la Geometría Analítica, estudiando ecuaciones a través del significado de las curvas y estudiando curvas definidas por ecuaciones.

Este estudio le resultó imposible en las curvas que llamó “mecánicas“, y que **Leibniz** llamará “trascendentes” por considerar que estas curvas no dependían de la Geometría Analítica.

Capítulo 3

3.1. Sobre el proceso de E-A en la Matemática

Nuestra concepción de conocimiento matemático adhiere a la perspectiva socio-constructivista. Es decir, se concibe como una construcción social que en su esencia encuentra factores históricos y contingentes irreducibles. Según Vygotsky (1996), es imprescindible que la construcción del conocimiento por parte de un sujeto deba ser entendida como un proceso social, constante y progresivo, del acto epistémico, y por lo cual todo sujeto accede a la vida cognoscente de aquellos que lo rodean.

Siguiendo con esta idea, adherimos a la Teoría de las Situaciones de Brousseau, la cual se centra en la producción de conocimientos matemáticos en el ámbito escolar. Producir conocimiento supone validarlos como históricamente lo hizo el hombre. En esta teoría, la clase es concebida como una pequeña comunidad matemática de producción de conocimiento. *"Una buena reproducción por el alumno de una actividad científica exigiría que intervenga, que formule, que pruebe, que construya modelos, lenguajes, conceptos, teorías, que los intercambie con otros, que reconozca los que están conformes con la cultura, que tome los que le son útiles, etc."* (Brousseau, 1993).

Al igual que Brousseau sostenemos que el conocimiento matemático se va constituyendo a partir de reconocer, abordar y resolver problemas.

Desde esta perspectiva, la Didáctica se centra en situaciones que permitan a los alumnos apoderarse de un problema "adecuado" con miras a provocar la necesidad de construir un conocimiento nuevo. En este contexto, el trabajo del profesor no puede limitarse a la comunicación de conocimientos, sino que debe preocuparse por "crear problemas".

Un docente que considere la enseñanza de la Matemática como la transmisión de un conjunto de algoritmos o reglas, desarrollará en el alumno la idea de que hacer o aplicar la Matemática es un ejercicio repetitivo, sin ninguna creatividad y poca utilidad práctica. En cambio, un docente que combine la enseñanza teórica con experiencias propias del trabajo de investigación matemática, va a estimular en el alumno el desarrollo de su capacidad de análisis, la habilidad en la resolución de problemas, su capacidad creadora y las destrezas necesarias para abordar la Matemática a través del uso de distintos recursos (Jiménez, 2006).

Es decir, la concepción epistemológica que tenga el docente de matemática determinará el papel que juegue el aprendizaje de esta disciplina en el proceso de formación de sus alumnos.

Siguiendo con esta idea, adherimos a la concepción de Régine Douady acerca de qué significa *saber, enseñar y aprender* Matemática:

- *Saber Matemática* implica dos aspectos: Por un lado, se refiere a la capacidad de manipular correctamente algunas nociones y propiedades matemáticas para resolver problemas e interpretar nuevas situaciones. En este momento, las nociones matemáticas adquieren un carácter de *herramienta*, entonces la elección que haga el docente de las situaciones problemáticas es fundamental. Por otro lado, implica identificar las nociones y los teoremas como elementos de un todo reconocido social y científicamente. Aquí es donde adquieren el carácter de *objeto*.
- *Enseñar Matemática* implica crear condiciones adecuadas para favorecer la construcción del conocimiento por parte de los alumnos.
- *Aprender Matemática*, significa involucrarse en una actividad intelectual cuya consecuencia final es la disponibilidad de un conocimiento con su doble estatus de *herramienta* y de *objeto* (Douady, 1995).

Consideramos además que las situaciones de aprendizaje deben permitir una interacción entre un aporte de información exterior al alumno y el saber "ya existente" de este último (Johsua y Dupin, 1993).

3.2. Sobre la Teoría de las Situaciones Didácticas de Guy Brousseau

En esta Investigación las actividades propuestas a los alumnos, responden a la Teoría de las Situaciones Didácticas. Según Brousseau (2007) una "situación" es un modelo de interacción entre un sujeto y un *medio* (textos, materiales, etc.). Este "entorno" del alumno es diseñado y manipulado por el docente. Es decir, que en toda situación intervienen tres sujetos: alumno, profesor y el medio didáctico.

Una *Situación Didáctica* se refiere, entonces, al conjunto de interrelaciones entre estos tres elementos. Dentro de esta dinámica tenemos otra dimensión: la *Situación A-didáctica*.

- La **Situación A- Didáctica** es el proceso en el que el docente le plantea al alumno un problema que podrá abordar a través de sus conocimientos previos, y que le permitirán generar además, hipótesis y conjeturas que simulen el trabajo que se realiza en una comunidad científica. Sin la intervención directa del docente.
- La **Situación Didáctica** es el proceso en el cual el docente proporciona el medio didáctico en donde el alumno construye su conocimiento. Por lo tanto, en este proceso se engloba el anterior.

En síntesis, la interacción entre los sujetos de la Situación Didáctica se sucede en el medio didáctico, que el docente elaboró para que se lleve a cabo la construcción del conocimiento (*situación didáctica*) y pueda el alumno, a su vez, resolver el problema sin la participación del docente (*situación a-didáctica*).

Por otro lado, Brousseau sostiene que la reproducción de una actividad científica por parte de un estudiante implica poder actuar, formular, probar y reconocer el conocimiento. Esto lo lleva a considerar diferentes *funciones del saber*, que en el aula se vislumbran en distintas situaciones:

- **Situaciones de acción:** en ellas se propone al alumno un problema "adecuado" para favorecer la construcción de un conocimiento determinado. El alumno debe poder actuar sobre la situación, hacer elecciones y anticipar resultados posibles. La situación tiene que devolverle información en base a sus acciones, permitiéndole así juzgarlas sin la intervención del docente. Lográndose de esta manera, una interacción entre el alumno y el medio.
- **Situaciones de formulación:** en ellas el alumno intercambia información con otros (alumnos) para su posterior debate en la clase. Es decir, se toma contacto con otros procedimientos de resolución y se logra además la construcción de un lenguaje. Las nociones se utilizan conscientemente como instrumentos que permiten describir objetos matemáticos, pero que no son objeto de estudio en sí mismo.
- **Situaciones de validación:** en ellas el alumno debe probar la validez, exactitud y pertinencia de su modelo. Las acciones realizadas pueden ser reformuladas o desechadas (si son reconocidas como falsas) lo que implicará la búsqueda de un nuevo procedimiento. Las nociones dominantes en esta situación son las *nociones matemáticas*, objetos matemáticos construidos, listos para ser enseñados y utilizados. Son objeto de estudio en sí mismos y también instrumento para el estudio de otros.

En las tres situaciones mencionadas, la tarea del docente consiste en la devolución del problema al estudiante, es decir, ubicarlo en situación a-didáctica.

- **Situaciones de institucionalización:** son las que permiten establecer convenciones sociales. En esta etapa reaparece explícitamente la intencionalidad didáctica. El conjunto de los alumnos asume la significación social que tiene el saber establecido por ellos en las situaciones anteriores. Esta situación está a cargo del docente y, junto con la devolución del problema, son sus dos momentos de control. De esta manera, los saberes institucionalizados, es decir con estatus de saberes culturales, estarán disponibles para ser reutilizados.

3.3. Sobre la Ingeniería Didáctica

La Ingeniería Didáctica surgió dentro de la didáctica de la Matemática francesa, a principios de los años ochenta, como una metodología de investigación, con el objeto de optimizar los modos de apropiación del saber por parte del alumno.

El nombre emerge de la analogía con la actividad de un ingeniero, según Artigue (1995):

"Para realizar un proyecto determinado, se basa en los conocimientos científicos de su dominio y acepta someterse a un control de tipo científico. Sin embargo, al mismo tiempo, se encuentra obligado a trabajar con objetos mucho más complejos que los depurados por la ciencia y, por lo tanto, tiene que abordar prácticamente, con todos los medios disponibles, problemas de los que la ciencia no quiere o no puede hacerse cargo."

El término Ingeniería Didáctica se utiliza con una doble función: como metodología de investigación y como producción de situaciones de enseñanza y aprendizaje, según señala Douady (1995):

"…el término Ingeniería Didáctica designa un conjunto de secuencias de clase concebidas, organizadas y articuladas en el tiempo de forma coherente por un profesor-ingeniero para efectuar un proyecto de aprendizaje de un contenido matemático dado para un grupo

concreto de alumnos. A lo largo de los intercambios entre el profesor y los alumnos, el proyecto evoluciona bajo las reacciones de los alumnos en función de las decisiones y elecciones del profesor. Así, la Ingeniería Didáctica es, al mismo tiempo, un producto, resultante de un análisis a priori, y un proceso, resultante de una adaptación de la puesta en funcionamiento de un producto acorde con las condiciones dinámicas de una clase."

Como metodología de investigación la Ingeniería Didáctica se caracteriza por ser un esquema experimental basado en la realización, observación y análisis de secuencias de enseñanza. Cuya validación se basa en la confrontación entre el análisis *a priori* y *a posteriori*.

3.3.1. Fases de la metodología de la ingeniería didáctica

El proceso experimental de la ingeniería didáctica consta de cuatro fases:

Primera fase: *Los análisis preliminares*

Son los conocimientos teóricos, didácticos y específicos del campo de estudio. Según Artigue (1995), teniendo en cuenta los objetivos de la investigación, los análisis se realizan bajo las siguientes dimensiones:

- *Dimensión Epistemológica*: asociada a las características del saber puesto en funcionamiento.
- *Dimensión Cognitiva:* asociada a las características cognitivas de los alumnos a los que se dirige la enseñanza (concepciones, dificultades y obstáculos, etc.).
- *Dimensión Didáctica:* asociada a las características del funcionamiento del sistema de enseñanza.

A continuación, describimos sintéticamente cómo han sido adaptadas para este trabajo:

- Se realiza un rastreo de la evolución Histórica de las Cónicas (ver Capítulo 2).
- Se describen concepciones (de alumnos y docentes), dificultades y obstáculos (de los alumnos) respecto a la enseñanza de la Geometría (ver Capítulo 1).

Segunda fase: *Concepción y análisis a priori de las situaciones didácticas*

Esta segunda fase constituye el “diseño” de la Ingeniería. Aquí el investigador toma la decisión de actuar sobre un determinado número de variables del sistema. Estas son las *variables de comando* que él percibe como adecuadas para el problema estudiado.

Artigue distingue dos tipos de variables de comando:

- Variables macro-didácticas: concernientes a la organización global de la ingeniería.
- Variables micro-didácticas: concernientes a la organización local de la ingeniería, o sea, la organización de una secuencia o fase.

Por otro lado, este análisis a priori se basa en un conjunto de hipótesis. En esta instancia el investigador, antes de la clase, explicita supuestos referidos: a los procesos de enseñanza aprendizaje que se generarán en la situación y los resultados que se desea obtener.

Artigue argumenta que tradicionalmente este análisis *a priori* comprende una parte descriptiva y una predictiva.

En esta segunda fase se presenta la secuencia didáctica, la elección y análisis de las variables que se consideran pertinentes, con el propósito de anticipar el comportamiento de los estudiantes, la dinámica de la clase y las intervenciones del docente durante la prueba de campo (ver Capítulo 4).

Tercera fase: ***La Experimentación***

Es la fase de la “realización” de la ingeniería con una cierta población de alumnos. Esta etapa se inicia cuando se produce el contacto entre el investigador/profesor y la población de los alumnos objeto de la investigación.

La experimentación supone:

- La explicitación de los objetivos y condiciones de realización de la investigación a los estudiantes que participarán de la experimentación.
- El establecimiento del contrato didáctico.
- La aplicación de los instrumentos de investigación.
- El registro de las observaciones realizadas.

Durante la experimentación se busca respetar las elecciones y consideraciones hechas en los análisis *a priori*.

Cuarta fase: ***El análisis a posteriori***

Esta última fase se basa en el conjunto de datos recolectados a lo largo de la experimentación, es decir, las observaciones realizadas de las secuencias de enseñanza, al igual que las producciones de los alumnos en el aula o fuera de ella. Estos datos se pueden complementar con otros obtenidos mediante la utilización de metodologías externas: cuestionarios, entrevistas, etc.

A continuación, describimos sintéticamente cómo han sido implementadas estas dos etapas, para este trabajo:

- En la fase de **experimentación**, se describe la implementación de la secuencia de enseñanza.

- En la última fase del **análisis a posteriori**, se realiza la confrontación entre lo planificado y lo observado durante la implementación, además de las producciones de los estudiantes (a través de capturas de pantalla y grabado de sesiones), respetando así la validación interna, particularidad distintiva de esta metodología.

La validación o refutación de las hipótesis formuladas en la investigación se fundamenta en la confrontación de los análisis, *a priori* y *a posteriori*.

3.4. Sobre la Historia de la Matemática

Sin duda la Matemática es el resultado de innumerables esfuerzos del hombre, que posteriormente conformaron nuestra herencia cultural. No solo es una de las disciplinas más bellas, prósperas y útiles, sino también, como el propio Andrew Russ Forsyth (1897) dijo: *"La matemática es una de las ciencias más viejas; también es una de las más activas; ya que su fuerza es el vigor de la juventud perpetua*", esta cuestión nos indica una particularidad de la matemática: el pasado, el presente y el futuro están íntimamente ligados y esto, sin duda, debe ser tenido en cuenta en la enseñanza de la misma.

Miguel de Guzmán (2001) afirma que el conocimiento de la Historia de la Matemática debería formar parte del conocimiento del profesor de cualquier nivel. No solo para utilizarlo como instrumento en la enseñanza, sino porque la Historia le puede proporcionar una visión verdaderamente *humana* de la Matemática.

Es allí donde se pueden buscar las ideas originales en toda su sencillez y originalidad, todavía con su sentido de aventura, que muchas veces se hace desaparecer de los libros de texto.

Como el orden lógico de los conceptos no es necesariamente el orden histórico de los mismos, en esta investigación nos proponemos revalorar este último para:

- Comprender mejor las dificultades del hombre en la elaboración de las ideas matemáticas y a partir de ellas las de los propios alumnos.
- Utilizarlo como una guía pedagógica para el docente, que muchas veces se “ata” a la secuenciación propuesta por los libros de textos, no siempre acertada.

Cuando se piensa en la posibilidad de incorporar la Historia de la Matemática como recurso en el aula, no se debe confundir con incorporar solo fechas y anécdotas. Sino como una fuente de la que se pueden extraer problemas reales (surgidos en el pasado o en el presente) que posibiliten:

- Hacer patente la forma peculiar de aparecer las ideas en Matemática.
- Considerar a la Matemática como una ciencia que interactúa y nutre a otras.
- Enmarcar temporalmente y espacialmente un concepto.

Así, el conocimiento de la Historia de la Matemática le otorga a esta última un carácter dinámico. Según Juan Nápoles (2010): *“la Matemática es un conjunto de conocimientos en evolución continua y en dicha evolución desempeña un papel de primer orden su interrelación con otros conocimientos y la necesidad de resolver determinados problemas prácticos.”*

Esta visión dinámica de la Matemática permite que el alumno considere a esta ciencia como una ciencia en constante crecimiento, o sea, no como algo acabado o estático. Y por otra parte, considere a los matemáticos, como hombres y mujeres con dificultades y errores, y no como seres endiosados.

Se busca así invitar al alumno a recorrer el camino y no a contemplarlo, como quien ve pasar una sucesión de imágenes sin sentido. Justamente ese sentido y el aprendizaje significativo es lo que se intenta revalorar en esta investigación.

3.5. Sobre los Recursos Informáticos

En los Diseños Curriculares de la Provincia de Buenos Aires se plantea la necesidad de que: *"…las escuelas preparen a las futuras generaciones en un conjunto más amplio, diverso y complejo de capacidades, entre las que se destacan las de utilizar tecnologías y entornos digitales."* (Palamidessi, 2006).

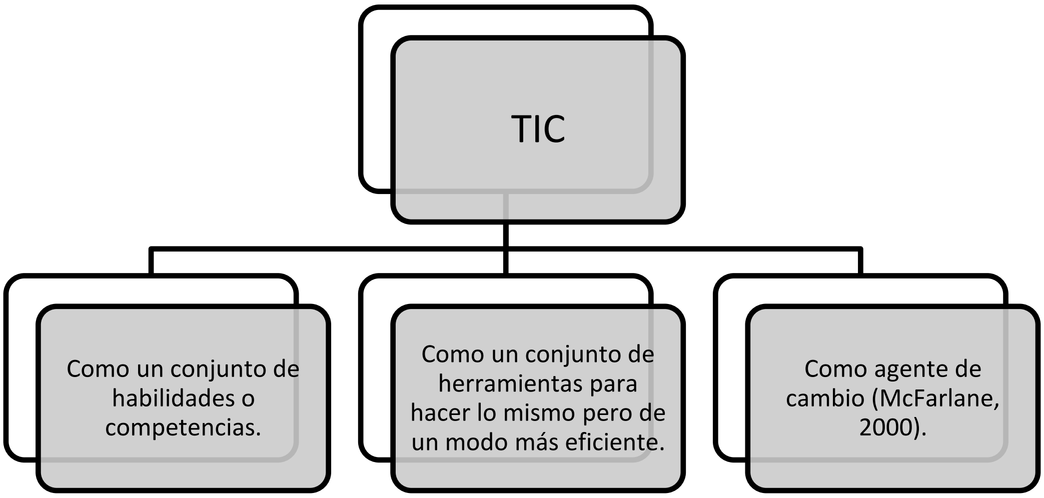
Turégano Moratalla (1998), teniendo en cuenta los avances tecnológicos, también cree necesario que el profesor replantee sus prácticas pedagógicas, considerando que el soporte informático puede desempeñar un papel importante gracias a su potencia visual. Esto permitiría, debido a la facilidad para realizar cálculos, que el alumno pueda centrarse en la exploración, el debate y la construcción de los conceptos matemáticos.

Diversas investigaciones señalan que los alumnos presentan una actitud más favorable frente a la Matemática cuando el aprendizaje se da en un entorno tecnológico. Pero, aunque la motivación es un aspecto importante a tener en cuenta desde la enseñanza, no es suficiente que un estudiante esté motivado para que construya el conocimiento y pueda disponer de él de manera flexible. Es necesario, entonces, tener en claro cuál es el uso adecuado de este recurso en el aula. *"Ciertamente estas tecnologías son socialmente y científicamente legítimas. Pero a nivel de la escuela, esas legitimidades no son suficientes para asegurar la integración. Lo que se necesita entonces es asegurar la legitimidad pedagógica de estas herramientas, y eso es bien distante de asegurar su legitimidad científica o social" (Alves y Artigue, 1995).*

El uso de las tecnologías en la escuela tiene ya una historia de más de 20 años, si consideramos los diversos intentos llevados a cabo en distintos países. Sin embargo, la incorporación sistemática y oficial de estas herramientas al sistema educativo es reciente, y aún más las investigaciones que dan cuenta de los resultados de dicha incorporación. En general, las más relevantes coinciden en que:

- los alumnos experimentan un aprendizaje significativo a través de un *uso apropiado* de las TIC (Rojano, 2003),
- los docentes con poca experiencia en el uso de las TIC tienen gran dificultad en apreciar *su poder como herramientas de aprendizaje,*
- uno de los hallazgos más consistentes es el impacto de las TIC en la motivación y la concentración del alumno. Esto normalmente está asociado a las posibilidades dinámicas e interactivas para presentar conceptos a través de animaciones, simulaciones, etc. (Claro, 2010).

En la actualidad podemos considerar tres concepciones bien diferenciadas:



La tercera concepción, que considera a las TIC como agentes de cambio, posibilita replantear lo que hay que enseñar, cómo enseñarlo y el rol del profesor. En esta investigación consideramos esta tercera concepción, a fin de conducir a los alumnos hacia un aprendizaje significativo y satisfactorio en el que se prioriza:

- Explorar.
- Formular y validar hipótesis.

- Expresar y debatir ideas.
- Aprender a partir del análisis de sus propios errores.

Con respecto a las investigaciones, que se refieren específicamente al trabajo con modelos visuales de Geometría, Pérez (1995) señala algunas de las ventajas de la utilización de la imagen como recurso didáctico en el proceso de enseñanza-aprendizaje:

- *Permite el estudio dinámico de distintos momentos (significativos) de un proceso.*
- *Posibilita simplificar realidades complejas, difícilmente aprehensibles y aprendibles en su estructura y configuración natural.*
- *Permite aproximarse a fenómenos difícilmente accesibles o reproducibles desde el aula. (Simulaciones, animaciones, etc.).*

Pérez también plantea una reflexión de cómo los medios audiovisuales, en nuestro caso el software *Cabri-Géomètre*, como recurso didáctico, están provocando en los alumnos grandes cambios en sus hábitos de percepción y en sus procesos mentales.

3.6. Sobre el Software *Cabri-Géomètre*

En 1985 Jean-Marie Laborde, informático, matemático e investigador en Matemáticas Discretas, propone la creación de un **Ca**hier **br**ouillon **i**nteractif (Cuaderno borrador interactivo), un **Cabri**-géomètre, que permita la exploración de propiedades de los objetos de la Geometría y de sus relaciones. Colaborando con él, en la realización del programa, Philippe Cayet, Yves Baulac y Franck Bellemain.

En 1988, una primera versión de *Cabri-géomètre* es remarcada por Apple que le otorga el Premio de Educación.

En 1989, *Cabri-géomètre* está disponible para la utilización en la educación francesa con la aprobación del Ministerio de Educación Nacional. Más tarde, sería incorporado en numerosos países con las versiones de MacOS o DOS.

A partir de 1990 el equipo de Jean Marie Laborde reunirá en el seno de un gran proyecto del Instituto de Informática y de Matemáticas Aplicadas (IMAG) de Grenoble, Investigadores en Informática, en Didáctica de la Matemática, en Matemática, en Inteligencia Artificial y en Psicología.

Los trabajos tienen lugar en el laboratorio LSD2, como también en los establecimientos escolares de la región Grenoble, en particular en el colegio Moirans, donde Bernard Capponi, monta un verdadero observatorio de los usos de *Cabri-géomètre. L*as investigaciones son ampliamente diversificadas, tanto en el aspecto didáctico, bajo el impulso de Colette Laborde; como en lo referido a la Inteligencia artificial bajo la dirección de Laurent Trilling, responsable del equipo PLIAGE; y también sobre tecnología de la enseñanza a distancia dentro del cuadro del proyecto *TéléCabri* dirigido por Nicolás Balacheff.

En 1994, la primera generación de *Cabri-géomètre* cedió el lugar a una nueva generación ***Cabri II*** gracias a los desarrollos de Jean-Marie Laborde, Franck Bellemain y Sylvie Tessier y el soporte de *Texas Instruments*.

En 1995 la alianza de *Cabri-géomètre* y de *Texas Instruments* pone a disposición del docente y los alumnos calculadoras con entornos de cálculo y de Geometría Dinámica. Este mismo año, el desarrollo de la WEB permite presentar figuras geométricas interactivas a través de los navegadores corrientes.

En 1998 sale la primera versión beta de *Cabrijava*, adoptada por los profesores inmediatamente, con el fin de enriquecer sus sitios WEB con pedagogía. Gilles Kuntz seguirá con la puesta a punto, para llegar en el 2001 a una compatibilidad de todas las funciones esenciales de *Cabri II*.

En el 2000 Jean-Marie Laborde crea la empresa **Cabrilog**, sociedad de edición y de desarrollo de los programas *Cabri* a fin de elaborar nuevos productos para micro computadoras y calculadoras.

A comienzos del 2003, una nueva versión está disponible sobre la plataforma Windows: *Cabri-géomètre II Plus* y una nueva versión para las calculadoras: *Cabri Junior*.

En 2004, en el congreso Cabriworld en Roma, Jean-Marie Laborde presenta la versión de *Cabri-géomètre II Plus* para MacOS y un nuevo programa, **Cabri 3D**, el programa de geometría interactiva 3D. *"Se abren perspectivas de descubrimientos insospechados, de posibilidades de ilustración y manipulación en las clases inéditas…"* (Jean-Marie Laborde, Sep. 2004)

La nueva versión ***Cabri 3D v2*** difundida en 2006 fue premiada por el prestigioso trofeo BETT Awards 2007 dentro de la categoría de los Materiales principales del secundario. Este año, continúa el desarrollo de Cabri-Géomètre II con la versión 1.4 donde las principales novedades son:

- El acompañamiento de videos, más de 60 actividades matemáticas de empleo en las clases (de Álgebra, Trigonometría, Geometría Analítica, etc.)
- Exportar imágenes en formato *png*, para preparar las actividades o notas del curso.
- Exportar al formato WEB, para compartir las actividades con los alumnos sobre un sitio WEB.
- Integración de figuras en los documentos MS Office (Word, PowerPoint).
- Manipulación de figuras exportadas gracias al modelo (plugin). Cabri II Plus en Versión PC y Mac.

- Versión MacOS incluyendo todas las funcionalidades de la versión PC y las más específicas.

Actualmente los dos programas ***Cabri II plus*** y ***Cabri 3D*** también funcionan en Linux. En el Congreso IberoCabri 2008 realizado en la Universidad Nacional de Córdoba, se dio a conocer el programa ***CABRI ELEM***, para el nivel primario que conjuga dos y tres dimensiones (2D y 3D) en un mismo software.

Rojano (2003) sostiene que: *"El software se rige por las reglas de la Geometría euclidiana y permite a los alumnos explorar y elaborar conjeturas. La manipulación directa de representaciones formales de los objetos matemáticos ayuda a cerrar la brecha entre percepción y Geometría, debido a que el software cuenta con elementos que brindan la posibilidad de animar las construcciones y de percibir transformaciones de trazos y figuras geométricas. Esto permite un acercamiento práctico a la enseñanza de la Geometría".*

Por otro lado el Software permite la simulación de situaciones del mundo físico. Un claro ejemplo de lo que se puede realizar con el software es el trabajo de Rubén Sabbadini, *Fisicabri*. Además de poder visualizar fenómenos que no pueden reproducirse en un laboratorio tradicional, el alumno puede comparar las simulaciones con el comportamiento real de ciertos fenómenos.

La elección para esta Investigación, de este software, se fundamenta esencialmente en alguna de sus características más importantes:

- es útil para abordar situaciones que no pueden estudiarse con los medios tradicionales de enseñanza, por ejemplo obtener las Cónicas como lugares geométricos;

- puede utilizarse con base en el diseño de actividades que promuevan un acercamiento de construcción social del conocimiento por ejemplo la posibilidad de colocar una imagen de un monumento o construcción y estudiar cómo el arquitecto, ingeniero o artista, utilizó los principios geométricos para obtener las Cónicas,
- permite promover prácticas en el aula, en las que el profesor guía el intercambio de ideas y las discusiones grupales, al mismo tiempo que actúa como mediador entre el estudiante y la herramienta.

Nos proponemos entonces, a partir de lo descripto anteriormente, trabajar con el enfoque de la Geometría Dinámica, utilizando software de Geometría dinámica ***Cabri II plus*** y ***Cabri 3D***.

3.7. Sobre los errores en Geometría

Para Franchi (2003), un error es una oportunidad que permite al alumno tomar una decisión al percatarse de no haber llegado a la solución correcta del problema. Según la autora, para superarlo, el docente debe diseñar situaciones didácticas que conduzcan al alumno a sustituir conocimientos errados por conocimientos verdaderos identificando, clasificando y conociendo la naturales de los errores.

En esta investigación se considerará la siguiente tipología[14] de errores:

1. Errores debido al manejo incorrecto de conceptos previos.
2. Errores debido al mal uso e interpretación del lenguaje geométrico.
3. Errores debido al mal uso de definiciones, propiedades, etc.
4. Errores debido al mal uso de las herramientas del software.
5. Errores debido a la interpretación incorrecta de una solución.

[14] Basada en los aportes de la investigación de Franchi Lissette (2003).

6. Errores debido a la rigidez del pensamiento (pensamiento dinámico vs pensamiento estático).
7. Errores técnicos (cálculo, procedimientos algorítmicos, etc.)

3.8. Sobre las investigaciones

La tesis doctoral de Vicenzo Bongiovanni (2001), titulada: *Las características de las cónicas con Cabri-géomètre en formación contínua de enseñantes: estudio de una secuencia didáctica* es el único trabajo sobre el estudio de las Cónicas en un ambiente de Geometría Dinámica considerando la evolución histórica del concepto.

Capítulo 4

4.1. Introducción

En este capítulo realizaremos el análisis *a priori* de las situaciones didácticas de la ingeniería. Este análisis *a priori* es pensado como un *análisis de control de significado*. Según Artigue (1995) quiere decir que:

> *"Si la teoría constructivista sienta el principio de la participación del alumno en la construcción de sus conocimientos a través de la interacción de un medio determinado, la teoría de las situaciones didácticas que sirve de referencia a la metodología de la ingeniería ha pretendido, desde su origen, constituirse en una teoría de control de las relaciones entre el significado y las situaciones."*

Entonces, el objetivo de este análisis *a priori* es determinar y controlar los comportamientos de los alumnos y su significado.

Por lo tanto, se basa en un conjunto de hipótesis. La validación de las mismas está indirectamente en juego en la confrontación que se llevará a cabo, en el Capítulo 5, entre el análisis *a priori* y el análisis *a posteriori*.

Artigue sostiene que este análisis *a priori* comprende una parte descriptiva y una predictiva, y se debe:

- Describir las selecciones y las características de la situación didáctica.
- Analizar qué podría ser lo que está en juego en esta situación para un alumno, en función de las posibilidades de acción, de selección, de decisión, de control y de validación de las que él dispone.
- Prever los campos de comportamientos posibles y demostrar cómo el análisis realizado permite controlar su significado y asegurar que los comportamientos

esperados, sean resultado de la puesta en práctica del conocimiento contemplado por el aprendizaje.

Cabe aclarar que el estudiante es el actor principal del sistema y el profesor estará poco presente en este análisis (excepto durante las situaciones de devolución e institucionalización).

4.2. Análisis a priori de la Secuencia Didáctica

Este análisis se inicia con los alcances del contenido "Cónicas", la formulación de los objetivos propuestos y los conocimientos previos de los alumnos. Se describen y analizan las variables de la situación, ligadas al contenido y cada una de las consignas que conforman la secuencia didáctica.

4.2.1. Alcances del contenido "Cónicas"

- Las Cónicas (parábola, elipse e hipérbola) como secciones de un cono.
- Las Cónicas como lugares geométricos.
- Puntos notables de las Cónicas: vértice/s, foco/s, eje/s de simetría.
- Propiedades geométricas de las Cónicas y alguna de sus aplicaciones prácticas.

4.2.2. Objetivos de la Secuencia Didáctica

- Reconocer y diferenciar las Cónicas como secciones de un cono. Establecer las definiciones correspondientes para elipse, parábola e hipérbola.
- Reconocer y diferenciar las Cónicas como lugares geométricos. Establecer las definiciones correspondientes para elipse, parábola e hipérbola.
- Reconocer los elementos de las Cónicas (focos, vértice, etc.) en el plano.

- Conocer y describir propiedades geométricas de las Cónicas y sus aplicaciones reales.

4.2.3. Conocimientos previos de los alumnos

- Posición relativa de planos y rectas:

  Paralelismo, perpendicularidad, tangencia, etc.
- Vectores. Operación elemental entre vectores:

  Suma de vectores, módulo de un vector.
- Movimientos en el plano (Traslación).
- Proporción. Medias proporcionales.
- Resolución de sistemas de ecuaciones cuadráticas.
- Funciones. Trabajo con funciones presentadas algebraica y gráficamente (pasaje de un registro a otro).

4.2.4. Variables de la situación

1. *Metodología de trabajo en el aula*

Considerando que el trabajo se realizará sobre software, se implementará una metodología de trabajo grupal (3 o 4 alumnos), pero la disposición de los mismos frente a la computadora será individual (de permitirlo el número de máquinas). La conformación de los grupos se mantendrá durante todas las clases que insuma la prueba de campo.

Cabe aclarar que el trabajo de un alumno por máquina no significa que se trate de un trabajo individual, ya que la dinámica de la clase apuntará constantemente a la construcción social del conocimiento.

Además de las computadoras individuales, se utilizará una computadora a la que se conectará un cañón, para que todos los alumnos puedan tener acceso a las construcciones que se realicen sobre ésta (incluso el docente, de ser necesario, se referirá a las construcciones que se realicen sobre la misma).

2. Tiempo

La secuencia invertirá un total de 3 (tres) clases. Cada clase tendrá 3 horas de duración, aunque se planificará para un rendimiento de aproximadamente 2 hora y media (previendo cualquier tipo de inconvenientes o desfasaje de los tiempos). Con respecto a este último, estarán destinados al trabajo de producción de los alumnos la comunicación de dichas producciones y la institucionalización.

3. Comunicación de las producciones de los grupos

Para comunicar lo que cada grupo produce se utilizarán dos modalidades:

- Puesta en común: cada grupo expondrá las conclusiones del trabajo grupal, a través de un integrante. Éste reproducirá su construcción en la computadora (en la que se encuentra conectada el cañón) y los otros grupos podrán intervenir con observaciones, cuestionamientos, preguntas e incluso realizar también sus construcciones, si estas son diferente a la del grupo anterior (permiten hacer un aporte nuevo) o el docente considera valiosa para el aprendizaje.
- Síntesis: el docente dirige una discusión tendiente a recoger información y conclusiones obtenidas a partir del trabajo en los grupos, promoviendo la participación de todos para crear un clima de discusión. Durante esta etapa el docente no realizará

correcciones de los resultados expuestos pero sí intervendrá para aclarar o solicitar precisiones en aquellos momentos en que la discusión se pueda tornar confusa.

4. Actividad del docente

Las intervenciones del docente estarán pautadas, tanto en los momentos de trabajo grupal como en las puestas en común, síntesis e institucionalizaciones. Durante el trabajo de producción grupal, promoverá la interacción en cada grupo. Las consultas individuales serán devueltas al grupo para su discusión posterior. No intervendrá dando o validando resultados, sino propiciando el debate interno.

5. Estructura de la secuencia de enseñanza.

No se entregará a los alumnos la totalidad de la actividad por realizar sino que serán entregadas en forma individual y secuencial. Para evitar que la lectura de consignas posteriores induzca la resolución de una consigna anterior.

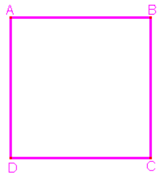
4.2.5 Análisis de la secuencia didáctica

Cuestiones generales (referidas a todas las actividades):

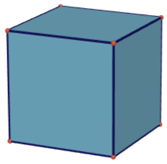
Etapas	Los alumnos	El profesor
Acción	No saben qué hacer	Ayudará a entender la actividad sin decir qué deben hacer ni cómo. Orientará con preguntas del estilo: ¿Podrías leer en voz alta la consigna? ¿Qué se pide en la actividad? ¿Qué parte del enunciado no entiendes o te trae dificultades? Se ayudará a encarar las actividades y activar sus procesos de pensamiento en torno a qué herramientas y conceptos puede utilizar, dejando luego a los alumnos plantear nuevamente sus construcciones. Este proceso se repetirá tantas veces como el tiempo estipulado para la actividad lo permita.
Formulación	Realizan una construcción, ya sea correcta o incorrecta.	El docente no dirá si está bien o mal. En primer lugar pedirá que expliquen y justifiquen oralmente. Si la resolución es incorrecta, el docente no lo hará evidente, pedirá que expliquen su resolución y preguntará en qué se basan para dar la respuesta. Pedirá que expliciten las herramientas que usaron, haciendo preguntas que los hagan “ir y venir” entre esas herramientas y su resolución. Con esto el docente buscará que sea el propio alumno quien advierta su error o contradicción. Si a pesar del intercambio con el docente la resolución que proponen sigue siendo incorrecta se deja que sea presentada en la puesta en común.
Validación	Presentan alguna resolución incorrecta	Durante la puesta en común, no decidirá si las resoluciones propuestas son correctas o no. Propiciará el intercambio entre los distintos grupos para que se corrijan entre sí y discutan sobre la validez de las distintas respuestas. Pregunta: ¿Están de acuerdo con las resoluciones presentadas? • Si se dan cuenta de su error, se pedirá que explique en qué se equivocó y cómo se dio cuenta. El error se tomará siempre como un elemento que favorezca el aprendizaje. • Si nadie dice nada sobre la resolución incorrecta, intervendrá con preguntas o comentario que apunten a revisar las resoluciones incorrectas.
	Presentan una construcción o resolución diferente (entre grupos)	Se pedirá que comparta la misma (independientemente de que sea *correcta* o *no*). Si se trata del primer caso para enriquecer la clase y si se trata del segundo caso, se buscará que los alumnos indiquen en dónde estuvo el error y porqué.

4.2.5.1. Actividad N°1

a) ***Los griegos fueron unos de los primeros que solo utilizando regla y compás pudieron resolver el problema de duplicar el cuadrado. En un archivo de Cabri 2D, a partir de un cuadrado ABCD, intenta construir otro cuadrado cuya superficie sea el doble de la anterior.***



b) ***En un archivo de Cabri 3D, a partir de un cubo dado, intenta también encontrar otro cubo cuyo volumen sea el doble del anterior.***



Esta *construcción* parte de un problema clásico de la geometría griega, *la duplicación del cubo*. Sin embargo, como se explicó en el C*apítulo 2,* los griegos no tuvieron mayores inconvenientes para duplicar el cuadrado y tampoco el rectángulo. Ya que ambos problemas se pueden resolver con reglas y compás.

Es esperable que los alumnos al encarar el ítem **b)** cometan los mismos errores que cometieron los griegos: suponer, por ejemplo, que al duplicar las aristas del cubo original es posible duplicar el volumen del mismo.

En esta actividad introductoria pretendemos que los alumnos:

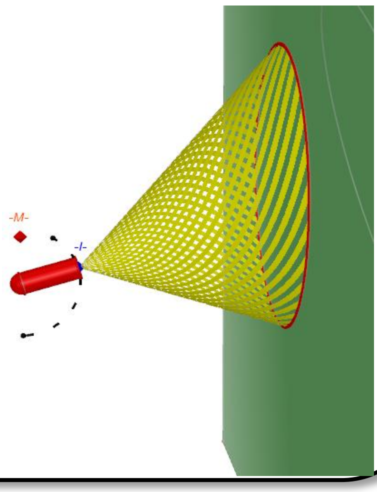
- comiencen a transitar el mismo camino que históricamente recorrieron los matemáticos para desarrollar la teoría de las cónicas,
- aprecien la necesidad de incorporar un nuevo conocimiento, al enfrentar un problema que no pueden resolver con las herramientas conocidas por ellos,
- comprendan cómo la matemática ha podido evolucionar a lo largo de siglos, a partir de la necesidad de resolver problemas.

<table>
<tr><th>Etapas</th><th colspan="2">Los alumnos</th><th>Intervenciones del profesor</th><th>Tiempo</th></tr>
<tr><td rowspan="3">Desarrollo de la actividad</td><td colspan="2">Realizan la duplicación del cuadrado de forma incorrecta</td><td>Propicia el uso del software como herramienta para validar o no la construcción (a través del arrastre, medición, calculadora, etc.). Si persiste el error y en el grupo no advierten el mismo, dejará que la construcción sea presentada a los otros grupos, en la puesta en común.</td><td rowspan="3">15 min.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Realizan la duplicación del cuadrado de forma correcta</td><td>Solicita al alumno justificar/validar su construcción.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Intentan encontrar una forma de duplicar el cubo con los conocimientos previos</td><td>Realiza preguntas con el fin de que los alumnos expongan sus estrategias y las limitaciones o inconvenientes de las mismas.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Comunicación de las producciones grupales</td><td rowspan="2">Cada grupo expone y /o justifica sus construcciones</td><td>Si se presenta una construcción incorrecta de la duplicación de cuadrado</td><td>Solicita argumentos que evidencien contradicciones y los somete al análisis de los demás grupos.</td><td rowspan="2">10 min.</td></tr>
<tr><td>Presentan las construcciones correspondientes a la duplicación del cubo</td><td>Propone analizar todas las construcciones. Contrasta las mismas con la primera interpretación realizada por los griegos.
Sugiere la necesidad de incorporar nuevas herramientas para abordar el problema.</td></tr>
</table>

4.2.5.2. Actividad N°2

En la siguiente actividad, puedes observar una linterna que proyecta su luz sobre una pared recta.
A través de los puntos M (Movimiento horizontal de la linterna) y A (Ángulo de inclinación) podrás notar que para distintas inclinaciones de la linterna, la curva obtenida al intersecar los rayos de luz con la pared sufre ligeras variaciones.

- ***a) ¿En qué posición, respecto de la pared, se debe colocar la linterna para generar las distintas curvas?***
- ***b) A partir de una superficie cónica y de las conjeturas establecidas en el punto anterior, en un archivo de Cabri 3D, construye el plano que te permita obtener cada una de las cónicas.***



Esta actividad representa un nivel intermedio, entre trabajar con objetos concretos y reales como una linterna y trabajar con objetos matemáticos totalmente abstractos, como una superficie cónica y un plano. La finalidad de la misma es que los alumnos descubran las Cónicas como curvas de intersección (basándonos en los aportes de Menecmo, quien trabajó inicialmente con un cono simple y posteriormente introducir la superficie cónica, tal como propondría Apolonio siglos después).

Se conjugan además dos formas diferentes de trabajar con software de Geometría Dinámica:

- en el ítem **a)**, a través de la exploración,
- y en el ítem **b)**, a través de la construcción.

En la primera actividad *exploratoria*, pretendemos un primer acercamiento al concepto, ya que es posible que algunos alumnos no diferencien la parábola de la hipérbola, por ejemplo. Lo esperado no es, entonces, que los alumnos encuentren en esta primera instancia todas las Cónicas, sino, que a través de la exploración:

- se den cuenta que existe más de una;
- se cuestionen si las encontradas por ellos, son las únicas posibles;
- enfaticen la importancia que tiene la posición del plano respecto al cono.

Las intervenciones del docente solo se realizarán, en esta primera instancia, con el fin de poner “nombre” a las curvas encontradas por los alumnos. Para que sea más sencillo nombrarlas y poder así comunicarse entre los distintos grupos de discusión con un vocabulario común a todos.

<table>
<tr><th>Etapas</th><th colspan="2">Los alumnos</th><th>Intervenciones del profesor</th><th>Tiempo</th></tr>
<tr><td>Desarrollo de la actividad</td><td colspan="2">Exploran el archivo y buscan regularidades</td><td>Comunica a los alumnos que al posicionarse con el cursor sobre la curva, el software automáticamente indica el nombre de la misma.</td><td>10 min.</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Comunicación de las producciones grupales</td><td rowspan="3">Cada grupo expone y justifica las conclusiones a las que llegó</td><td>Encuentran todas las cónicas, pero no justifican correctamente la relación que existe entre la posición del cono y el plano, para obtener las mismas.</td><td>Hace preguntas con la intención de que los estudiantes evidencien alguna contradicción. Si a pesar de ello ningún alumno advierte el error, el docente no efectuará correcciones y dejará que el alumno lo descubra en el próximo ítem cuando intente construir él mismo las Cónicas.</td><td rowspan="3">10 min.</td></tr>
<tr><td>No aparecen todas las cónicas (el caso de la parábola).</td><td>Hace ver la conveniencia de analizar todos los casos posibles, respecto a los elementos que determinan el cono (eje de simetría y generatriz).</td></tr>
<tr><td>Aun así no surge la parábola o cualquier otra Cónica.</td><td>Sugiere por ejemplo analizar la relación que existe entre los ángulos de conicidad y el determinado por el plano y el eje del cono (si ambos surgieron de la indagación de los alumnos).</td></tr>
</table>

En el ítem **b)** la actividad deja de ser de *exploración* y pasa a ser de *construcción.* En la misma, se pretende que los alumnos validen o rechacen sus conjeturas, ya que deberán construir las distintas Cónicas, a partir de las relaciones establecidas por ellos, en el ítem anterior.

Es esperable que en esta instancia los obstáculos se hagan más evidentes, por el grado de abstracción que requiere la actividad y la cantidad de conocimientos previos que el alumno deberá poner en juego.

Como ambas actividades se realizarán en diferentes archivos, los alumnos podrán alternar entre ellos, tantas veces como sea necesario, con el fin de reformular conjeturas (si alguna fue realizada erróneamente en el ítem anterior) y establecer las relaciones necesarias, que les permitan construir el concepto de secciones cónicas. Además los alumnos dispondrán de material concreto (confeccionado en acrílico) cuyo fin será:

- Hacer uso de la intuición.
- Por su carácter exploratorio, favorecer en los alumnos el uso del razonamiento.
- Utilizarlo como referencia para juzgar la validez de las afirmaciones.
- Recurrir a este como marco para la resolución de problemas, discusión, comunicación y reflexión.

En la medida que los alumnos trabajen con los materiales, validen o rechacen sus conjeturas iniciales y desarrollen el entendimiento de los conceptos matemáticos, podrán prescindir de estos ya que su fin es solo utilizarlos como puente hacia el entendimiento de las ideas abstractas. Pero creemos que el uso de material concreto permitirá que los alumnos sean más independientes, y por lo tanto, seguros de sí mismos.

Etapas	Los alumnos		Intervenciones del profesor	Tiempo
Desarrollo de la actividad	Utilizan las conjeturas establecidas en el ítem anterior y sus conocimientos previos, sobre posición relativa entre rectas y planos, para la construcción de las Cónicas en Cabri 3D.		Pide a los alumnos que abran el archivo en Cabri 3D, sobre el que se construyó previamente una superficie cónica, para realizar las secciones pedidas en el enunciado de la actividad.	15 min.
Comunicación de las producciones grupales	Cada grupo expone y/o justifica sus construcciones	Las conjeturas son correctas pero no así la construcción.	Hace preguntas con la intención de que los estudiantes evidencien los obstáculos. Si los mismos se asocian a inconvenientes a la hora de utilizar las herramientas del software el docente explicita las condiciones requeridas (por ejemplo, el alumno podría necesitar trazar un plano paralelo a una recta determinada y no indicar correctamente los objetos necesarios para dicha construcción) posibilitando así que los alumnos reformulen la construcción.	15 min.
		Las conjeturas son incorrectas y por lo tanto también la construcción.	El docente interviene haciendo preguntas con la intención de que los estudiantes adviertan alguna error en su estrategia o construcción.	

En la *institucionalización*: (al término de la puesta en común) (tiempo estimado: 5 minutos)

- Se establece la definición formal de parábola, elipse e hipérbola (si no surgieron en la puesta en común) como secciones de un cono.
- Se enfatiza el hecho de que el cono puede ser cualquier cono (recto u oblicuo).

4.2.5.3. Actividad N°3

a) Toma la hoja de acetato (entregada por la docente) y marca un punto sobre ella, llámalo F. Considera un borde de la hoja (recta directriz) y a continuación dobla la hoja de manera tal que se superpongan cualquier punto del borde con el punto F. Desdobla la hoja y repite este procedimiento varias veces, considerando siempre un punto distinto del borde.

***¿Qué representan las rectas obtenidas?*______________________________**

***¿Qué curva se obtiene?*____**

Cada recta obtenida por un pliegue, ¿qué relación guarda con la curva obtenida?
____

A continuación con la ayuda de Cabri 2D, reproduce la actividad realizada (pero ahora) con las herramientas del software.

b) Toma otra hoja, en ella dibuja una circunferencia y un punto interior a la misma, llámalo F. A continuación dobla la hoja de tal manera que cualquier punto de la circunferencia coincida con el punto marcado en su interior. Desdobla la hoja y repite este procedimiento varias veces considerando siempre un punto distinto de la circunferencia.

***¿Qué representan las rectas obtenidas con cada pliegue?*________________**

***¿Qué curva se obtiene?*____**

¿Cada recta determinada por un pliegue, qué relación guarda con la curva obtenida?
____

Nuevamente con la ayuda del software, reproduce la actividad realizada. Considera el punto F exterior o interior a la circunferencia. ¿Qué curva se obtiene?
____

Siguiendo la idea de Apolonio, quien pudo estudiar las Cónicas de forma independiente del cono y como lugares geométrico, en esta actividad de *construcción* pretendemos hacer el pasaje del espacio (cono) al plano.

Las validaciones de las conjeturas establecidas por los alumnos, se realizarán en dos instancias: primero a través de la puesta en común, de los grupos, durante el trabajo sobre material concreto y en un segundo momento durante la reproducción de la actividad a través del software.

Las intervenciones del docente sólo se realizarán con el fin de poner “nombre” a los objetos geométricos (recta directriz, foco, etc.), para poder utilizar un vocabulario común a todos.

Se introduce la actividad con material concreto, a fin de que los alumnos en el *ítem* ***a):***

- reconozcan los elementos característicos de la parábola (recta directriz, foco, vértice, tangentes, etc.) y establezcan relaciones entre ellos;
- construyan un acercamiento a la definición de parábola (como lugar geométrico).

<table>
<tr><th>Etapas</th><th colspan="2">Los alumnos</th><th>Intervenciones del profesor</th><th>Tiempo</th></tr>
<tr><td>Desarrollo de la actividad</td><td colspan="2">Realizan el plegado de la hoja de acetato y completan el cuestionario.</td><td>Solo realizan sugerencias que favorezcan la visualización de la construcción (por ejemplo, probar con utilizar la hoja de forma apaisada, considerar un punto próximo al borde, etc.)</td><td>10 min.</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Comunicación de las producciones grupales</td><td>Cada grupo responde el cuestionario oralmente y justifica su respuesta.</td><td>Si no aparecen los términos buscados: “mediatriz”, “tangente” y “parábola”.</td><td>Hace preguntas con la intención de corroborar si el concepto y las relaciones fueron comprendidas pero simplemente no recuerdan el nombre (en cuyo caso será el docente quien introducirá el vocabulario correspondiente) o si en cambio no descubren las relaciones pretendidas (es decir, no se dan cuenta que cada pliegue representa una recta que está a la misma distancia del foco y el punto considerado sobre la directriz), el docente propondrá volver a analizar la construcción haciendo preguntas del tipo: ¿las rectas obtenidas son interiores o exteriores a la curva?¿Qué relación guarda cada recta obtenida, con los puntos considerados para obtener las mismas?</td><td>5 min.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Cada grupo expone y /o justifica sus construcciones</td><td>Si la construcción es incorrecta</td><td>Hace ver la conveniencia de analizar las conjeturas obtenidas en los ítems anteriores y plantea preguntas que posibiliten a los alumnos rever los posibles errores.</td><td rowspan="2">10 min.</td></tr>
<tr><td>Si la construcción es correcta</td><td>Sugiere por ejemplo analizar la relación que existe entre el lugar geométrico obtenido y la posición del foco respecto a la recta directriz (desplazar el foco de manera de ubicarlo próximo a la recta, encima, sobre o debajo de la misma.)</td></tr>
</table>

Y en el *ítem* ***b)***:

- reconozcan los elementos característicos de la elipse e hipérbola y establezcan relaciones entre ellos;
- diferencien a partir de la construcción realizada, las condiciones necesarias para obtener la elipse e hipérbola (según sea el punto, interior o exterior a la circunferencia).

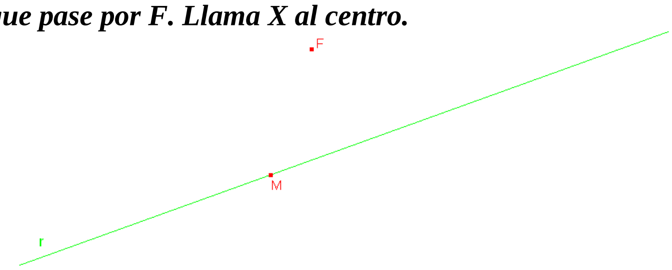
<table>
<tr><th>Etapas</th><th colspan="2">Los alumnos</th><th>Intervenciones del profesor</th><th>Tiempo</th></tr>
<tr><td>Desarrollo de la actividad</td><td colspan="2">Realizan el plegado de la hoja de acetato y completan el cuestionario.</td><td>Realiza sugerencias que favorezcan la visualización de la construcción (por ejemplo, proponer circunferencias que no sean muy pequeñas y dificulten así la construcción, considerar distintas posiciones del punto para observar las variantes, etc.)
Aclara que el punto considerado por ellos, se llama Foco.</td><td>10 min.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Comunicación de las producciones grupales</td><td rowspan="2">Cada grupo expone y /o justifica sus construcciones</td><td>Si la construcción es correcta pero al considerar los puntos interiores o exteriores a la circunferencia la curva que obtienen entre los distintos grupos es diferente.</td><td>Pregunta en qué pudo influir la elección realizada por ellos a la hora de obtener el lugar geométrico.
En el caso que no surja de los alumnos, se les hará ver que estas curvas tienen dos focos. Pero no se hará en esta actividad ninguna otra apreciación respecto a los mismos.
Sugiere analizar la relación que existe entre el lugar geométrico obtenido y la posición de uno de los focos respecto a la circunferencia (desplazar el foco de manera de ubicarlo próximo, interior, exterior o sobre la misma.)</td><td rowspan="2">10 min.</td></tr>
<tr><td>Si la construcción es incorrecta</td><td>Hace ver la conveniencia de analizar las conjeturas obtenidas en los ítems anteriores y plantea preguntas que posibiliten a los alumnos rever los posibles errores.</td></tr>
</table>

En la *institucionalización* (tiempo estimado: 5 minutos):

- Se establecen los elementos característicos de las Cónicas: recta directriz, focos (uno en el caso de la parábola y dos en el caso de la elipse e hipérbola).

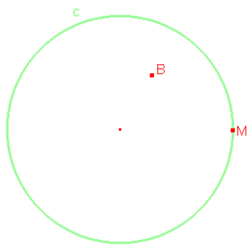
4.2.5.4. Actividad N°4

a) A partir de una recta r, marca un punto móvil M perteneciente a la recta y un punto fijo F (foco) exterior a la misma, encuentra la circunferencia tangente a la recta en M que pase por F. Llama X al centro.



Desplaza M sobre la recta: Qué curva describe X?

b) A partir de una circunferencia c, un punto que le pertenece (móvil) M y un punto fijo B (foco) exterior o interior a la circunferencia, encuentra la circunferencia tangente a c en el punto M y que pase por B. Llama X al centro de la circunferencia encontrada.



Desplaza M sobre la circunferencia. ¿Qué traza tiene X?
Manipula el punto B por el plano y observa qué sucede con el lugar geométrico determinado en el punto anterior. Extrae conclusiones.

Debido a que, en general, el concepto de lugar geométrico no es trabajado habitualmente en las aulas, propondremos varias actividades donde se refuerce dicho concepto:

- En la actividad anterior el trabajo con plegado de hojas y posteriormente, a través de *Cabri 2D*, se obtuvieron las Cónicas como envolvente.
- En esta actividad se trabaja nuevamente sobre la construcción de las Cónicas como lugar geométrico.

Pero ahora, no como el conjunto de rectas tangentes a la curva, sino como el conjunto de puntos que pertenecen a la misma. En esta instancia, los alumnos estarán en condiciones de establecer la definición de parábola, elipse e hipérbola y trabajar directamente sobre las curvas.

Etapas	Los alumnos		Intervenciones del profesor	Tiempo
Desarrollo de la actividad	Realizan la construcción de la circunferencia tangente a la recta (o a la circunferencia), ya sea en forma correcta o no.		Propicia el uso del software como herramienta para validar o no la construcción (a través del arrastre). Detectado el error, solicita al grupo revisar lo planteado.	10 min.
Comunicación de las producciones grupales	Cada grupo expone y /o justifica sus construcciones	Si se presenta una construcción incorrecta	Solicita argumentos que evidencien contradicciones y los somete al análisis de los demás grupos.	10 min.
		Si la construcción de la parábola es correcta	Si no surgió de las intervenciones de los grupos, pregunta ¿Qué elemento de la circunferencia tangente determina la parábola? ¿Qué condición cumplen todos los puntos determinados por el lugar geométrico en cuestión? Sugiere por ejemplo analizar la relación que existe entre el lugar geométrico obtenido y la posición del foco respecto a la recta directriz.	
		Si la construcción de la elipse (o hipérbola) es correcta	Si no surgió de las intervenciones de los grupos, pregunta ¿Qué elemento de la circunferencia tangente determina la elipse (o hipérbola)? Sugiere por ejemplo analizar la relación que existe entre, el lugar geométrico obtenido y la posición entre los focos o respecto a la	

			circunferencia. Propone trazar y analizar los segmentos que van de los focos a un punto cualquiera (móvil) de la Cónica obtenida. En caso de que no surja de ningún grupo, pregunta: ¿Qué condición cumple todo punto del lugar geométrico en cuestión, respecto a su distancia a los focos?	

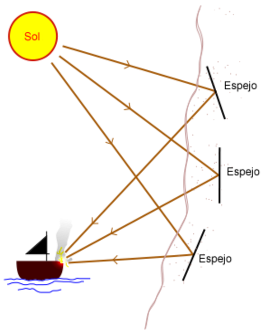
En la *institucionalización* (al término de la puesta en común) (tiempo estimado: 5 minutos):

- Se establece la definición formal de parábola, elipse e hipérbola como lugar geométrico.

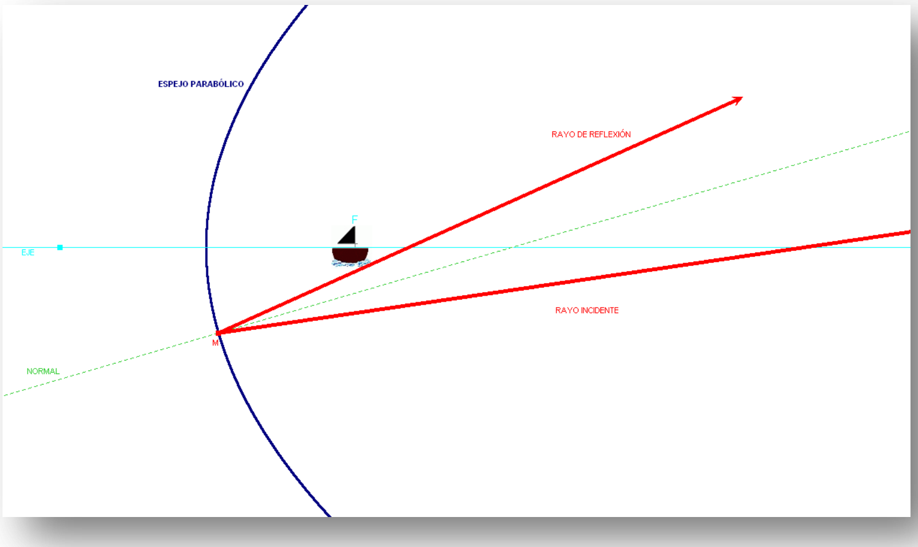
4.2.5.5. Actividad N°5

Los espejos de Arquímedes ¿mito o realidad?

La leyenda cuenta que en año 213 a.C, cuando los romanos pretendían invadir la isla de Sicilia, el gran geómetra Arquímedes consiguió hundir una flota entera de barcos romanos. Para lograrlo, Arquímedes construyó espejos parabólicos gigantes de bronce o cristal que enfocados a las naves romanas, lograron incendiarlas.
Muchos años después y aún en nuestros días se realizaron numerosos intentos con el fin de probar esta teoría.
Veamos y analicemos este hecho en un archivo de Cabri 2D:



Se tiene un espejo parabólico sobre el cual inciden los rayos del Sol y los mismos son reflejados hacia el exterior:



a) Manipula (para distintas posiciones en el plano) la semirrecta que representa al rayo incidente y establece relaciones entre dicha recta, la normal al punto M (recta perpendicular a la tangente en el punto M) y el rayo de reflexión.
b) Obtiene el lugar geométrico determinado por todos los rayos de reflexión cuando el punto M recorre la parábola (espejo parabólico). ¿Qué sucede en torno a nuestro barco a medida que desplazas nuevamente la semirrecta que representa al rayo incidente?
c) ¿Qué condición deberán cumplir los rayos incidentes para que todos los rayos reflejados se concentren en nuestro barco? ¿En condiciones normales esto es posible? ¿Qué posibilidades de éxito habría tenido Arquímedes?

Es normal escuchar en los alumnos: "*¿y esto para qué sirve?*", esto sin duda es un llamado de atención a los profesores, para que no los hagamos perder tiempo con conocimientos abstractos sin ninguna utilidad para ellos.

Por esto mismo y considerando que históricamente la mayoría de los conocimientos fueron ***construidos*** a partir de un problema concreto y ***aplicados*** en algún contexto, se propusieron este grupo de actividades.

En esta instancia, en la que los alumnos ya han construido la parábola como sección de un cono y como lugar geométrico, se busca afianzar conceptos y propiedades. Pero además pretendemos que puedan reconocerla en distintas situaciones cotidianas y trabajar sobre modelos en los que esta intervenga.

En esta actividad de *simulación* y *exploración* proyectamos trabajar con las propiedades de la parábola (reflexión) e introducir nuevos elementos característicos (vértice, eje de simetría, etc.), dentro de un contexto de aplicación. Se refuerza nuevamente el concepto de lugar geométrico y envolvente, pero además se comienza a vincular a la matemática con otras disciplinas (Física).

<table>
<tr><th>Etapas</th><th colspan="2">Los alumnos</th><th>Intervenciones del profesor</th><th>Tiempo</th></tr>
<tr><td>Desarrollo de la actividad</td><td colspan="2">Exploran el archivo y buscan regularidades</td><td>En caso de que los alumnos no adviertan la relación existente, el docente propondrá utilizar distintas herramientas del software, por ejemplo: en el ítem a) medida de ángulos y en el ítem c) trazado de paralelas.</td><td>5 min.</td></tr>
<tr><td>Comunicación de las producciones grupales</td><td>Cada grupo expone y justifica las conclusiones a las que llegó</td><td>Si advierten que posicionando la semirrecta que representa el rayo incidente en forma paralela al eje de simetría, el rayo reflejado pasa por el foco.</td><td>Hace ver la necesidad de realizar la construcción para corroborar esta afirmación. Ya que el arrastre, en este caso, sirve para dar una "idea" de la condición buscada pero no es una demostración.</td><td>10 min.</td></tr>
</table>

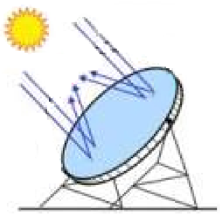
		Advierten que todos los rayos incidentes deben ser paralelos al eje de simetría para concentrar los rayos reflejados en el foco.	Pregunta sobre la posibilidad real de este fenómeno. Si no surge de la discusión grupal el docente plantea: ¿Cómo es la parábola respecto al eje de simetría? ¿Qué puntos característicos de la parábola se encuentran sobre dicho eje? Propone reflexionar sobre la existencia o no de eje y vértice en la elipse e hipérbola.	

En la *institucionalización* (al término de la puesta en común) (tiempo estimado: 5 minutos): Se definen formalmente los términos eje de simetría, vértice y la propiedad de reflexión de la parábola.

4.2.5.6. Actividad N°6

¿Es posible determinar un espejo parabólico (parábola) conociendo las ubicaciones del vértice del mismo y del navío a incendiar?

Para ello vamos a considerar dos puntos alineados: O (vértice de la parábola) y F (foco de la misma):



Utilizando la herramienta cónica determina la parábola definida por estos dos puntos. ¡Atención!: La herramienta cónica construye la cónica determinada por 5 puntos que le pertenecen. Por lo tanto, deberás encontrar primero cinco puntos cualesquiera que se encuentren sobre la parábola buscada.

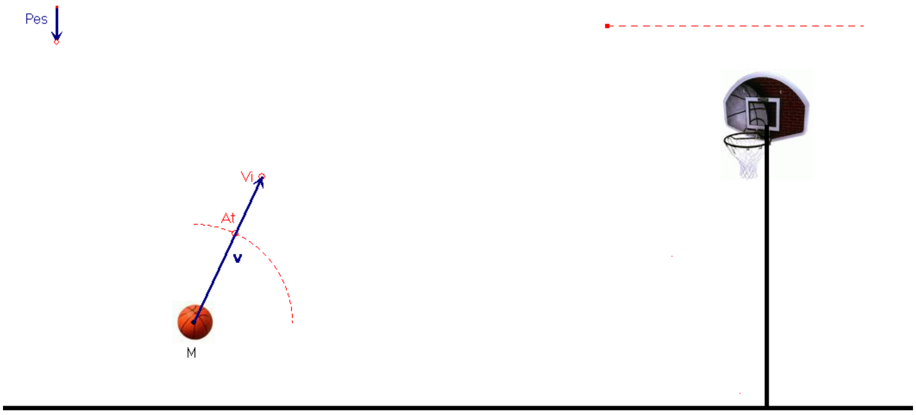
En esta actividad de *evaluación* y *construcción* se les da a los alumnos las condiciones a partir de las cuales deberán construir "una" cónica en particular. El software tiene una herramienta que permite construir cualquier cónica indicando 5 puntos del plano. Haciendo uso de dicha herramienta, los alumnos deberán aplicar los conceptos construido hasta ese momento. Con esta actividad de control podremos evaluar cuál es el estado (status) de conocimientos de los alumnos: (herramienta u objeto, según Regine Douady).

<table>
<tr><th>Etapas</th><th colspan="2">Los alumnos</th><th>Intervenciones del profesor</th><th>Tiempo</th></tr>
<tr><td rowspan="2">Desarrollo de la actividad</td><td colspan="2">Utilizan los conocimientos construidos (en términos de la Teoría de Brosseau) hasta el momento, para encontrar los 5 puntos necesarios y determinar con ellos la parábola buscada.</td><td>Pide a los alumnos que abran el archivo en Cabri 2D, sobre el que se construyó previamente solo el eje de simetría, el foco y el vértice de la parábola. Unicamente interviene para aclarar sobre el uso de la herramienta del software necesaria en esta construcción.</td><td rowspan="2">10 min.</td></tr>
<tr><td colspan="2">No saben cómo encontrar 5 puntos que pertenezcan a la parábola.</td><td>Propone revisar los conceptos, propiedades y definiciones establecidas hasta el momento sobre la parábola, en las actividades anteriores, con el fin de facilitar el uso de estrategias por parte de los alumnos.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Comunicación de las producciones grupales</td><td rowspan="2">Cada grupo expone y/o justifica sus construcciones</td><td>Las conjeturas son correctas pero no así la construcción.</td><td>Hace preguntas con la intención de que los estudiantes evidencien el error en su construcción. Si los mismos se asocian a inconvenientes, a la hora de utilizar las herramientas del software, el docente lo somete al análisis de los grupos y de ser necesario explicita las condiciones requeridas (por ejemplo, el alumno podría haber utilizado de forma incorrecta la herramienta Cónicas).</td><td rowspan="2">5 min.</td></tr>
<tr><td>Las conjeturas son incorrectas y por lo tanto también la construcción.</td><td>Hace preguntas con el fin de que los estudiantes evidencien alguna contradicción y nuevamente somete las conjeturas y la construcción al análisis de los demás grupos.</td></tr>
</table>

4.2.5.7. Actividad N°7 *(Actividad extraída del seminario presentado por Colette Laborde en La Cumbre, Córdoba)*

¿Es posible determinar las condiciones necesarias para lanzar una pelota de básquet y asegurar canasta?...
Esta y otras cuestiones, al respecto analizaremos en un archivo de Cabri 2D:

Se tiene un vector $\vec{v}$que representa la velocidad inicial (de lanzamiento), el punto M que representa la posición inicial de la pelota y un vector $\vec{P}$, cuyo módulo representa el peso de la misma (perpendicular al piso).



a) Si una pelota de básquet (representada por el punto M) es lanzada con una velocidad inicial (representada por el vector $\vec{v}$). Encontrar la nueva posición de la pelota M_1, transcurrida una unidad de tiempo y suponiéndola sometida a un campo gravitacional (representado por el vector $\vec{P}$).
b) Repetir el proceso y encontrar las sucesivas posiciones M_2, M_3, M_4, M_5, M_6 y M_7 de M, después de 7 unidades de tiempo. (Podrías construir una macro-construcción que te permita agilizar este proceso).
c) Analiza el comportamiento de los puntos encontrados en los ítems anteriores. ¿Qué describe la pelota en su recorrido?
d) ¿Existe un único ángulo de tiro que permite asegurar canasta?

En esta actividad de *construcción* y *simulación* se presenta una nueva aplicación del concepto de parábola, a partir del análisis de una trayectoria.

De esta manera, el alumno puede ir concibiendo el concepto de curva no como algo "estático", sino, como una representación de una situación "dinámica".

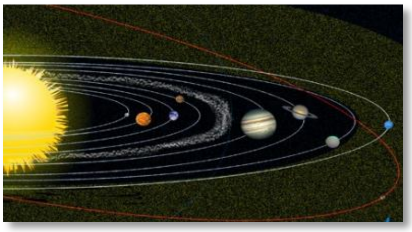
Pero además pretendemos, que puedan seguir reconociéndola en distintas situaciones cotidianas y trabajar sobre modelos en los que ésta intervenga.

<table>
<tr><th>Etapas</th><th colspan="2">Los alumnos</th><th>Intervenciones del profesor</th><th>Tiempo</th></tr>
<tr><td rowspan="3">Desarrollo de la actividad</td><td colspan="2">Exploran el archivo y buscan estrategias para encontrar las distintas posiciones de la pelota.</td><td>Pide a los alumnos que abran el archivo en Cabri 2D, creado para la actividad y de ser necesario les recuerda las herramientas disponibles en el software (suma de vectores, simetría, traslación, etc.).</td><td rowspan="3">10 min.</td></tr>
<tr><td colspan="2">No pueden encontrar las distintas posiciones de la pelota.</td><td>Plantea interrogantes tales como: ¿Qué vectores influirán en la nueva posición de la pelota? ¿Habrá asociado a esa nueva posición un nuevo vector velocidad? ¿Cómo se obtiene este nuevo vector?
Plantea la necesidad de recordar el concepto de vectores libres (es decir, es suficiente con que dos vectores tengan la misma dirección, sentido y módulo para ser considerados vectores iguales).</td></tr>
<tr><td colspan="2">Asumen que la curva obtenida es o no una parábola.</td><td>Sugiere la necesidad de probar dicha conjetura con alguna de las herramientas del programa (cónica determinada por cinco puntos, aplicar animación al punto que representa la pelota para poder observar su trayectoria, etc.) o alguna propiedad abordada en las actividades anteriores.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Comunicación de las producciones grupales</td><td rowspan="2">Cada grupo expone y justifica las conclusiones a las que llegó.</td><td>Si advierten que existe más de un ángulo de tiro que posibilita asegurar canasta.</td><td>Hace ver la necesidad de comprobar esta afirmación. La herramienta arrastre, en este caso, resultaría de buena utilidad.</td><td rowspan="2">10 min.</td></tr>
<tr><td>Consideran un único ángulo de tiro.</td><td>Lo somete al análisis de los otros grupos que permita refutar dicha afirmación o de ser necesario sugiere una nueva exploración y análisis de las distintas posiciones de los vectores (modificando el ángulo de tiro o la altura de la canasta).</td></tr>
</table>

4.2.5.8. Actividad N°8

El movimiento planetario…

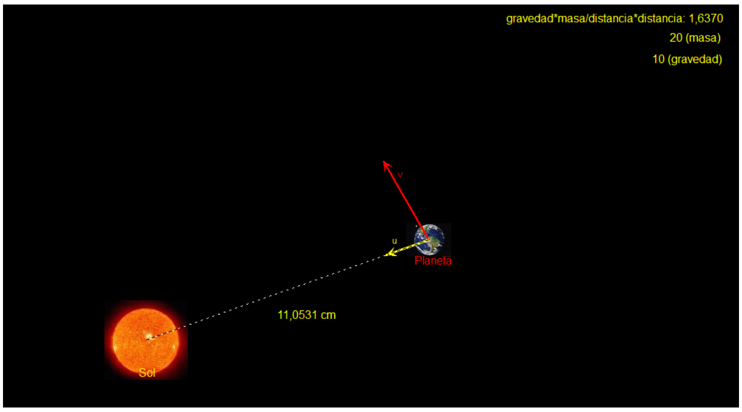
La obsesión de Johannes Kepler por la Geometría y la supuesta armonía del Universo le permitieron enunciar las tres leyes que describen con extraordinaria precisión, el movimiento de los planetas alrededor del Sol. Desde una posición cosmológica copernicana, que en esa época era más una creencia filosófica que una teoría científica, Kepler lo logró de manera totalmente empírica, sin más teoría que su propio convencimiento sobre el carácter fundamental (divino) de la Geometría y utilizando la gran cantidad de datos experimentales obtenidos por Sophie y Tycho Brahe[15].



Veamos y analicemos esta trayectoria en un archivo de Cabri 2D…

Se tienen dos puntos, P y S que representan el planeta y el Sol, respectivamente, un vector $\vec{v}$ que representa la velocidad inicial (de rotación), y otro vector $\vec{u}$ que representa la atracción ejercida por el Sol, sobre dicho planeta.

Para analizar como interactúa este sistema se creó una macro construcción que tiene por <u>objetos iniciales</u>: el punto P, el vector $\vec{v}$, el punto S, la distancia entre los dos puntos y tres constantes. Y por <u>objetos finales</u>: la nueva posición del planeta, con su vector velocidad asociado y el vector $\vec{u}$.



a) ***Utiliza la macro-construcción "Rotac2"y obtiene las primeras 5 posiciones del planeta. ¿Qué describe el planeta en su trayectoria?***
b) ***Comprueba la primera ley de Kepler.***

---

[15] Bajo el patrocinio de Federico II de Dinamarca Sophie Brahe realiza observaciones astronómicas junto a su hermano Tycho. Fueron los primeros en conocer la posición exacta de los planetas y compilaron un catálogo que fue crucial para los trabajos posteriores para la determinación de las órbitas planetarias. Datos extraídos de Cátedra Unesco otorgada por la universidad FLACSO sobre Ciencia, Tecnología y Sociedad. Aportes del Enfoque de Género.

En esta actividad se intenta afianzar (al igual que se realizó con la parábola) el concepto y las propiedades de la elipse. Profundizar en su definición y en sus elementos característicos a partir de trabajar con la primera *Ley de Kepler* (la misma será recordada o explicada a los alumnos ya que no se pretende que la conozcan ni la hayan trabajado, pero tampoco se descarta algún conocimiento sobre la misma):

1° Ley de Kepler: Los planetas describen órbitas elípticas estando el Sol en uno de sus focos.

<table>
<tr><th>Etapas</th><th colspan="2">Los alumnos</th><th>Intervenciones del profesor</th><th>Tiempo</th></tr>
<tr><td rowspan="3">Desarrollo de la actividad</td><td colspan="2">Exploran el archivo y buscan estrategias para encontrar las distintas posiciones de la pelota.</td><td>Pide a los alumnos que abran el archivo en Cabri 2D, creado para la actividad y de ser necesario les recuerda las herramientas disponibles en el software.</td><td rowspan="3">15 min.</td></tr>
<tr><td colspan="2">No pueden encontrar las distintas posiciones del planeta.</td><td>Propone leer nuevamente la consigna de la actividad y formula las siguientes preguntas: ¿Qué vectores influirán en la nueva posición del planeta? ¿Cuáles son los objetos iniciales de la macro construcción? ¿Qué objeto final devuelve la macro?</td></tr>
<tr><td colspan="2">Suponen que la curva obtenida es o no una elipse</td><td>Sugiere la necesidad de probar dicha conjetura con alguna de las herramientas del programa (cónica determinada por cinco puntos) o alguna propiedad / definición elaborada en las actividades anteriores. En esta instancia se explicitan las dos primeras leyes de Kepler.</td></tr>
<tr><td>Comunicación de las producciones grupales</td><td>Cada grupo expone y justifica las conclusiones a las que llegó</td><td>Afirman que la 1° ley de Kepler se cumple</td><td>Somete la afirmación a discusión y solicita argumentar la postura de cada grupo a través de propiedades ya vistas o herramientas del software.</td><td>10 min.</td></tr>
</table>

		Afirman que la 1° ley de Kepler no se cumple	Pregunta, ¿Todos opinan lo mismo? Si nadie puede probar lo contrario, solicitará a los alumnos argumentos y con preguntas buscará contradicciones que evidencien a la clase el error de su afirmación.	

4.2.5.9. Actividad N°9

Creemos que en esta instancia, los alumnos han reunido una serie de conocimiento sobre Cónicas, que les permitirán retomar la Actividad N°1 y poder encarar el problema de *la duplicación del cubo*.

Pero esta actividad no solo tiene como fin resolver el problema que dio origen a las Cónicas, sino también, creemos que es la actividad a partir de la cual se puede introducir su estudio, desde la Geometría Analítica. Es decir, abordar sus ecuaciones características.

Los alumnos podrán apreciar que dependiendo del sistema de ecuaciones planteado por ellos (a partir de la doble igualdad propuesta por Menecmo), podrán obtener la solución del problema como: la intersección de una parábola con una hipérbola o la intersección de dos parábolas. Aquí se introduce por primera vez, en esta secuencia didáctica, un sistema coordenado y se plantea la primera ecuación de segundo grado. Se espera que el alumno:

- encuentren el sistema de ecuaciones solución del problema,
- adviertan el grado de las ecuaciones obtenidas.

Ahora bien, regresemos a nuestra primera actividad: "la duplicación del cubo".
El primer paso importante en la duplicación del cubo fue dado por Hipócrates de Quíos, probablemente no mucho después de que el problema apareciera por primera vez. Sin embargo parece posible que ya antes estuvieran pensando en una forma más general del problema. Hipócrates redujo el problema al de intercalar dos medias geométricas[16] o proporcionales entre la magnitud que representa la arista del cubo primitivo y la correspondiente al doble de la misma.

Es decir, dados a, b ***encontrar*** x, y ***tales que:***

$$\frac{a}{x}=\frac{x}{y}=\frac{y}{b}$$

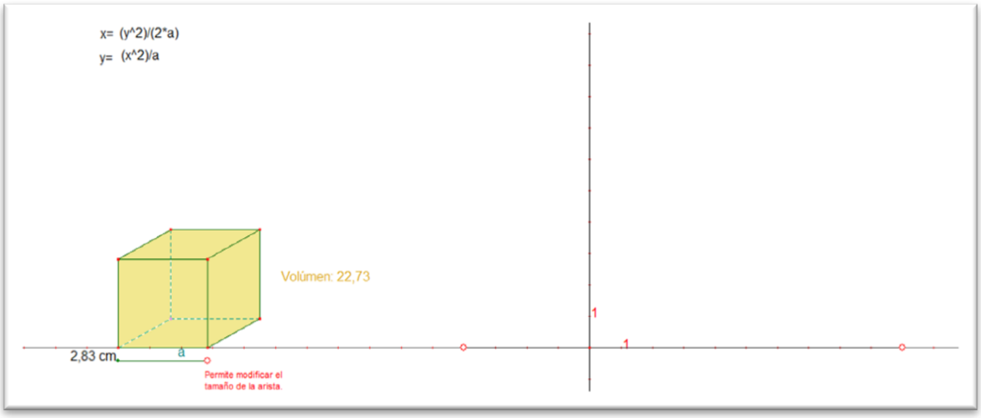
Por lo tanto, dado un cubo de lado a, ***si se quiere construir un cubo*** b/a ***veces el volumen de este, entonces se necesita construir un cubo de lado*** x. ***Para el caso particular de "duplicar" el cubo, Menecmo planteó:***

$$\frac{a}{x}=\frac{x}{y}=\frac{y}{2a}$$

a) Plantear el sistema de ecuaciones correspondiente. ¿Es único? ¿Qué tipo de ecuaciones resultan?

Vamos a comprobar el planteo de Menecmo: Para ello, en el siguiente archivo se tiene un cubo variable de arista a.

b) Obtiene utilizando los ejes, la gráfica de las dos ecuaciones del sistema propuesto. ¿Qué curvas resultan?
c) ¿Qué representa la intersección de las curvas? Determina el volumen del cubo obtenido y compáralo con el del cubo dado.



[16] La media geométrica es cuando tres números están en proporción constante: $a:b=b:c$. Ej.: $2:4=4:8$

<table>
<tr><th>Etapas</th><th colspan="2">Los alumnos</th><th>Intervenciones del profesor</th><th>Tiempo</th></tr>
<tr><td rowspan="2">Desarrollo de la actividad</td><td colspan="2">Plantean un sistema de ecuaciones de forma incorrecta.</td><td>No realiza ningún tipo de corrección solo responderá preguntas relacionadas con el enunciado, las demás preguntas serán devueltas al grupo.</td><td rowspan="2">5 min.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Plantean un único sistema de ecuaciones pero de forma correcta</td><td>Pregunta: ¿el sistema es único? Si la respuesta es afirmativa, no informará lo contrario y esperará a la puesta en común. Si la respuesta es negativa, pedirá que escriban el o los otros sistemas.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Comunicación de las producciones Grupales</td><td rowspan="2">Cada grupo expone y/o justifica sus hallazgos</td><td>Plantean un sistema de ecuaciones de forma incorrecta.</td><td>Hace preguntas con la intención de que los estudiantes adviertan el error en su expresión. Si el error persiste, lo somete al análisis de los demás grupos.</td><td rowspan="2">10 min.</td></tr>
<tr><td>Plantean un único sistema de ecuaciones pero de forma correcta.</td><td>Propone comparar las expresiones halladas por otros grupos y una vez validadas aquellas que sean correctas, pregunta: ¿A qué se debe que el sistema no sea único? ¿Cuántos podrían armar que sean distintos?
Se espera aquí que el alumno advierta que siempre se trata de un sistema de ecuaciones de segundo grado.</td></tr>
</table>

En el ítem **b)** se espera que los alumnos:

- hallen la representación gráfica de las ecuaciones de segundo grado encontradas en el punto anterior,
- encuentren la solución gráfica del sistema y comparen el volumen del cubo encontrado con la del volumen del cubo dado.

Etapas	Los alumnos		Intervenciones del profesor	Tiempo
Desarrollo de la actividad	A través de las herramientas del software (*Expresión* y *Aplicar expresión)realizan la representación gráfica de las ecuaciones del sistema obtenido en el ítem a)*		Luego de pedir a los alumnos que abran el archivo en Cabri 2D, sobre el que se construyó un cubo al que se le puede modificar la longitud de la arista y ver dinámicamente como varía también su volumen. Recorre los grupos de trabajo con el fin de intervenir solo en cuestiones que se asocien a la interpretación de la consigna o la utilización de las herramientas del software.	10 min.
	Representan gráficamente las dos ecuaciones pero no pueden resolver el problema a partir de ellas.		Plantea la necesidad de releer el enunciado. Pregunta luego: ¿En dónde leerían la solución gráfica de un sistema de ecuaciones? ¿Qué representan la abscisa y la ordenada del punto de intersección de las dos curvas representadas?	
Comunicación de las producciones grupales	Cada grupo expone y/o justifica sus construcciones	Presentan una solución correcta	Pregunta si otros grupos tienen otras soluciones y propone comparar dichos hallazgos, para mismos valores de la arista del cubo primitivo. Propone de ser necesario utilizar la herramienta calculadora para verificar la solución. Si todavía no surgió, se remarca el hecho de que cada curva hallada por los distintos grupos representa una cónica (parábola o hipérbola) que responden ambas a ecuaciones de segundo grado.	10 min.
		Presentan una solución incorrecta	Hace preguntas con la intención de que los estudiantes evidencien el error en su construcción. Si los mismos se asocian a inconvenientes a la hora de utilizar las herramientas del software, el docente lo somete al análisis de los grupos y de ser necesario explicita las condiciones requeridas. Pero si el error está por ejemplo en la mala lectura de la solución (considerar la ordenada como longitud de la arista del cubo buscado), se someterá la solución al análisis grupal.	

Capítulo 5

5.1. Introducción

En este capítulo realizaremos el análisis *a posteriori* de las situaciones didácticas de la ingeniería. Consiste en el análisis del conjunto de datos obtenido a través de las observaciones realizadas de las secuencias de enseñanzas, las producciones individuales y/o grupales, las grabaciones de audio y el grabado se sesiones registradas por el software a intervalos de 1 segundo cada una.

La muestra utilizada en esta prueba de campo se realizó con alumnos de 1° año del Instituto de Enseñanza Superior Alicia Moreau de Justo durante el primer cuatrimestre en la asignatura correspondiente a Geometría. Con esta cuestión nos aseguramos que los conocimientos previos de los alumnos son los correspondientes al último año del nivel polimodal (en la Provincia de Buenos Aires) o el último año del nivel secundario (en la Ciudad de Bs. As.).

La disposición de las máquinas se realizó en forma circular y la máquina conectada al cañón, se ubicó en el centro del aula para proyectar su imagen sobre una pared libre. Teniendo acceso a la misma todos los alumnos, no solo visualmente sino también como un instrumento para el debate y la puesta en común.

Respecto de la dinámica de las clases, la misma quedó constituida por cinco grupos formados espontáneamente por una cantidad que variaba entre 2 y 4 alumnos. Se detectó que durante los momentos de producción grupal y puestas en común los alumnos se mostraron interesados y participaron activamente. No obstante, se percibió a un grupo como el más lento para emprender y resolver las actividades, que no siempre pudieron completar en el tiempo previsto.

Hubo momentos de la clase en donde cada alumno trabajó solo en su máquina y otros en los que interactuó con sus compañeros. Es decir, naturalmente surgía la necesidad de compartir las construcciones e incluso hubo momentos en los que compartían la máquina y las construcciones se realizaban cooperativamente en una de ellas (por grupo). Se movilizaban por el aula libremente buscando espacios que les resultaran más cómodos, cuando se les proponía trabajar con material concreto o cuando querían utilizar la máquina con acceso al cañón y defender sus construcciones.

Por problemas vinculados a la organización de la materia, la prueba de campo fue realizada en dos encuentros y no tres como se había programado en el análisis a priori. Por este motivo, se decidió eliminar las actividad 8 y las construcciones en Cabri 3D de las Cónicas (no así las de exploración) ya que la profesora consideró poco conveniente, debido a las dificultades que podría ocasionar para los alumnos el no manejar habitualmente este software asociado al poco tiempo disponible en dos clases de 3 horas.

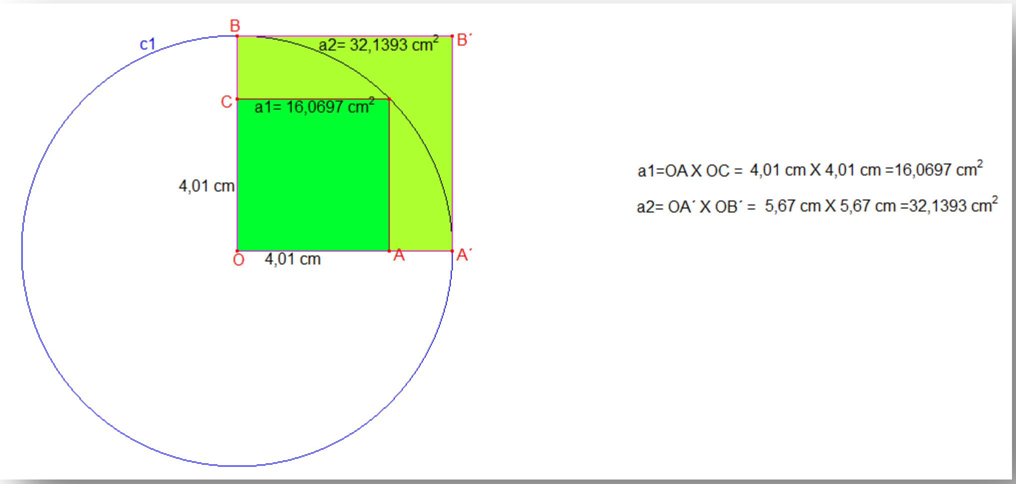
En el primer encuentro se trabajaron las actividades 1, 2, 3 y 4. Mientras que en el segundo encuentro se abordaron las actividades 5, 6, 7 y 9.

5.2. Análisis de la secuencia didáctica

5.2.1. Actividad N°1

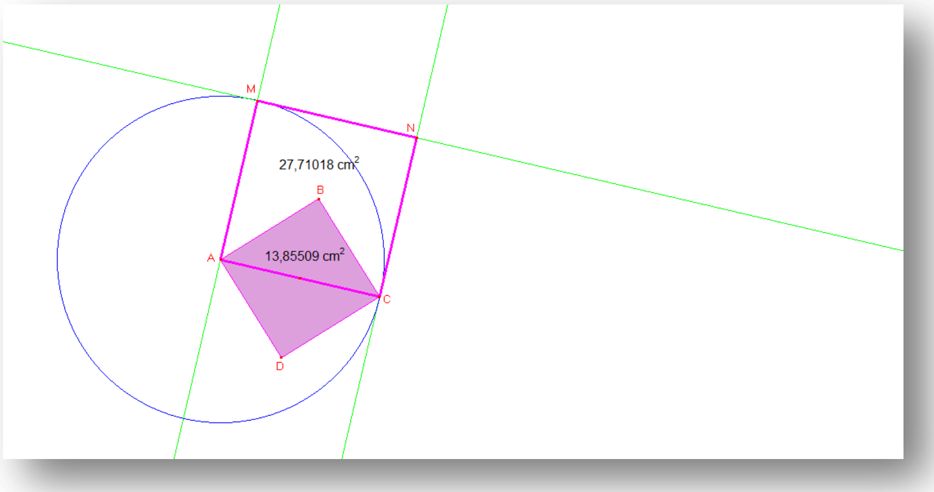
Ítem a)

El grupo 1 realizó su construcción a partir de un cuadrado, con el cual construyó la circunferencia que tiene como centro uno de los vértices del cuadrado y como radio la diagonal del mismo. A partir de dicha circunferencia, trazando perpendiculares, construye el cuadrado buscado (OBB´A´) que tiene como lados el radio de la circunferencia. Justifica dicha construcción con propiedades de la circunferencia y Teorema de Pitágoras.

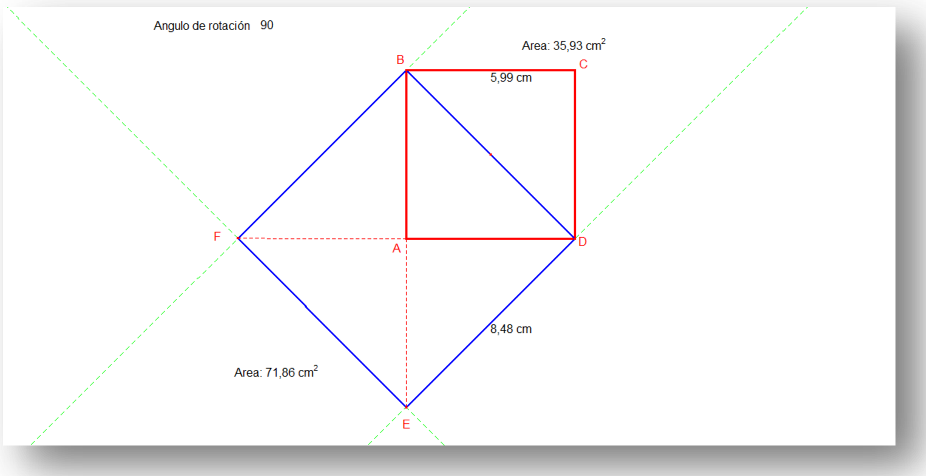


Captura de pantalla 1

El grupo 2 y 3 realizan sus construcciones a partir de una de las diagonales del cuadrado inicial. Pero, mientras que el grupo 2 traza perpendiculares y paralelas a la misma para construir otro cuadrado cuyo lado es la diagonal del anterior (ver captura de pantalla 2), el grupo 3 aplica una rotación de 90° a la diagonal respecto de uno de sus extremos. En la puesta en común también surge la posibilidad de aplicar una simetría de la diagonal BD respecto al vértice A (ver captura de pantalla 3).



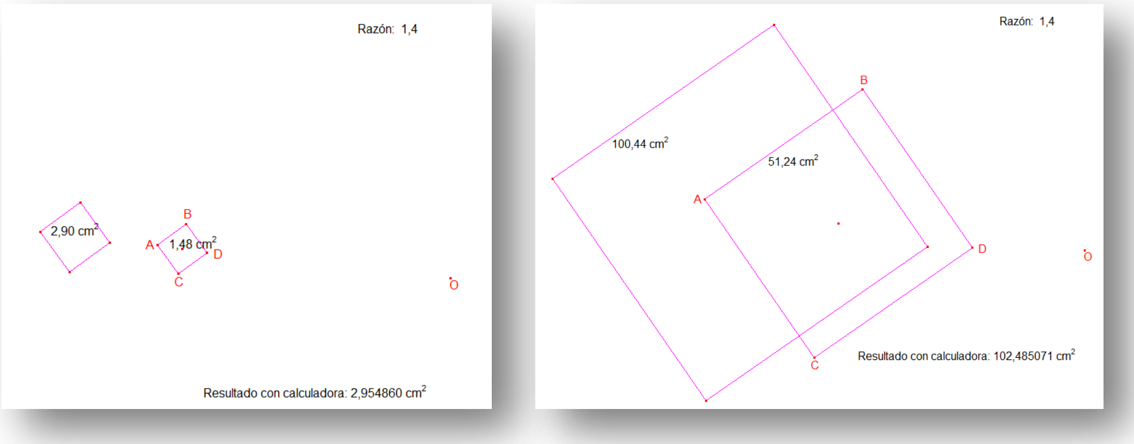
Captura de pantalla 2



Captura de pantalla 3

El grupo 4 realizó su construcción a partir de una cuadrado ABCD al que se le aplicó una homotecia de centro O (un punto libre cualquiera) y razón 1,4 (una aproximación de la raíz cuadrada de 2). Cuando se les pidió que justificaran su estrategia en la puesta en común se obtuvo la siguiente justificación:

"Utilizamos primero homotecia de este polígono (señala el cuadrado) con respecto a este punto (señala el punto O) y utilizamos factor 2. Pero verificamos (con la calculadora del software) y no nos dió. Seguimos probando con otros factores: 0,25 ; 1,25 y tampoco nos daba. Hasta que a él (señala a su compañero de grupo) se le ocurrió raíz de 2 que es más o menos 1,41 y ahí sí obtuvimos el doble del área."



Captura de pantalla 4

Cuando se les pidió que observaran como respondía el área del cuadrado duplicado a medida que se aumenta el tamaño del cuadrado inicial (ver captura de pantalla 4) y compararan para varios dígitos proporcionados por la calculadora del software pudieron apreciar que el área perdía exactitud. En la síntesis surge la idea de aumentar el número de decimales de la aproximación de la raíz de 2, pero conscientes de que la solución no sería exacta.

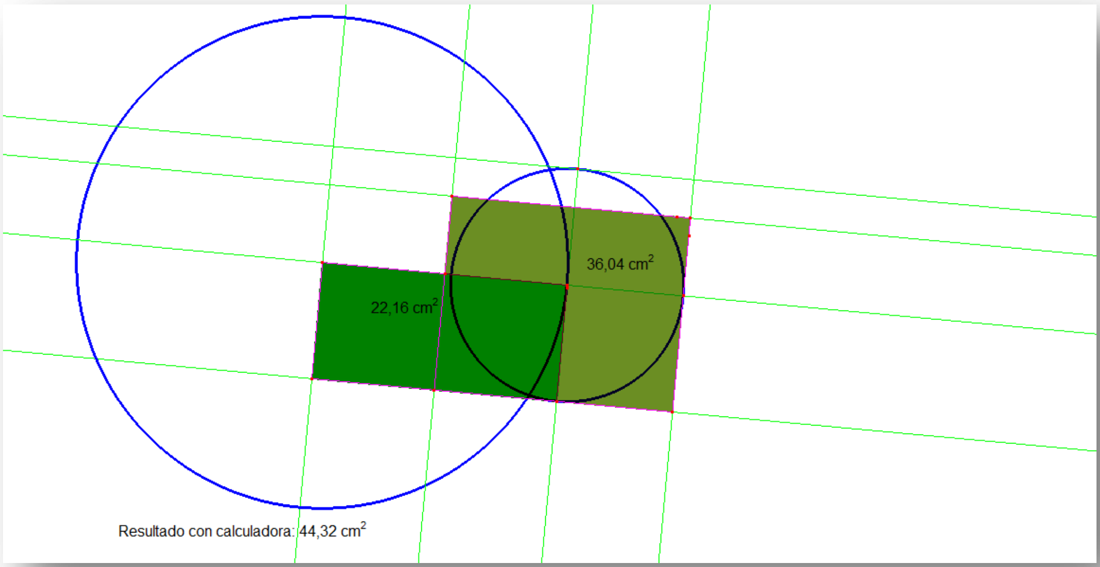
Finalmente el grupo 5, en el momento de la puesta en común no tiene resuelto el problema ya que la construcción que realizan no es válida. Durante el desarrollo de la actividad el docente se acerca al grupo y revisa su construcción (Captura de pantalla 5), los alumnos anticipan: *"no nos da el doble del área… se nos pasa."*

Captura de pantalla 5

El docente al interrogar sobre las propiedades utilizadas en la construcción, advierte que los alumnos resuelven la actividad sin ninguna estrategia clara: *"usamos circunferencia y perpendiculares, pero…no sé... no sale",* afirma uno de los alumnos.

El docente pide que tomen uno de los vértices del cuadrado original y arrastren el mismo por el plano, obteniéndose la captura de pantalla 6.

Se puede observar que se construyó un paralelogramo rectángulo (en lugar de un cuadrado, a partir de las propiedades del mismo y las herramientas del software, como era lo esperado) y a continuación se modificó el vértice hasta obtener lo que "parece" visualmente un cuadrado.



Captura de pantalla 6

Los alumnos advierten que la construcción inicial es incorrecta, pero seguido a esto tampoco encuentran una estrategia para revertir el error (a pesar de conocer las propiedades del mismo). Es decir, no pueden utilizar estos conceptos o definiciones como herramientas para resolver la situación propuesta.

Durante la puesta en común los alumnos analizan el error cometido en esta construcción.

En esta actividad, de la tipología de errores considerada en el marco teórico, se detectan:

- Errores debido al manejo incorrecto de conceptos previos.
- Errores debido al mal uso de las herramientas del software.
- Errores debido a la rigidez del pensamiento (pensamiento dinámico vs pensamiento estático).

Tiempo empleado para la actividad: 35 minutos.

Ítem b)

Durante la actividad se les ofreció a los alumnos cubos de acrílico para poder apoyar su conjeturas sobre material concreto ya que no se utilizaría el software en esta población. Los cinco grupos plantearon como primera idea duplicar las aristas del mismo, posición que descartaron algunos de forma inmediata al advertir el error en su conjetura inicial.

Dos grupos (3 y 5) propusieron tomar la diagonal de la cara del cubo y determinaron con la misma los lados del cubo buscado. Pero al considerar un cubo de lado 1 observaron que el volumen de este último no cumplía la condición pedida.

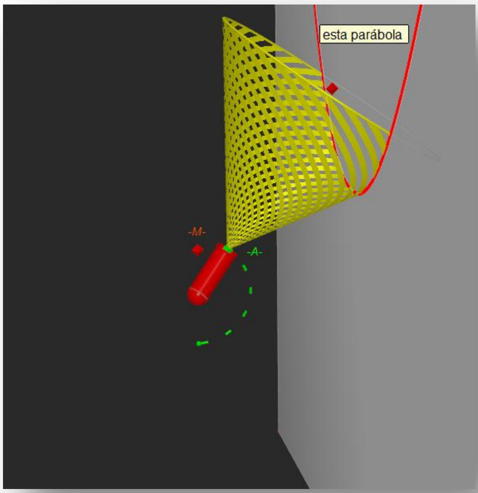
En general, a 3 de los 5 grupos no se los veía seguros trabajando con conceptos geométricos en el espacio. Trabajar generalmente con Cabri 2D y dejar Cabri 3D solo como recurso para el docente, podría estar indicando el hecho de que en el espacio los alumnos suelen mostrar mayores dificultades, situación que los docentes, tal vez inconscientemente, intentan evitar. Si bien los alumnos habían trabajado con conceptos espaciales en clases previas, en general los mismos no se manifestaron, en las estrategias (muy pocas) que proponían.

Se discutieron y compararon las propuestas formuladas por los grupos y las estrategias que utilizaron los griegos para afrontar el mismo problema.

5.2.2. Actividad N°2

Ítem a)

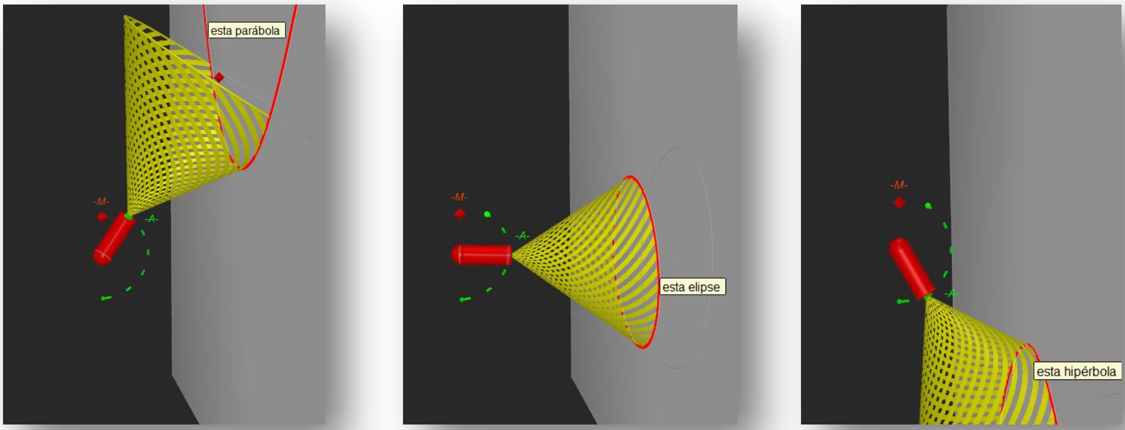
Durante la exploración solo los grupos 1,3 y 4 hallaron la parábola en una primera instancia ya que para obtener la misma es necesario llevar el punto A al extremo superior del arco (punto en el cual la generatriz del cono es paralelo al plano que representa la pared), como se muestra en la captura de pantalla 10.



Captura de pantalla 7

En esta primera instancia se pudo observar que aquellos 3 grupos que manipularon los distintos puntos y que aprovecharon la dinamicidad de la actividad tuvieron mayor éxito en la misma que aquellos que intentaron realizar su análisis sin aprovechar las ventajas que supone la exploración. En estos dos grupos predominó una forma de trabajo casi estática, producto quizás del tipo de enseñanza recibida a lo largo de su escolaridad.

Durante la puesta en común, el grupo 2 plantea: *"Si llevamos el punto al extremo (superior) obtenemos la parábola, en el medio las elipses y en las demás posiciones, son hipérbolas."* Acompaña la afirmación con el arrastre del punto A, obteniéndose así, las siguientes capturas:



Captura de pantalla 8

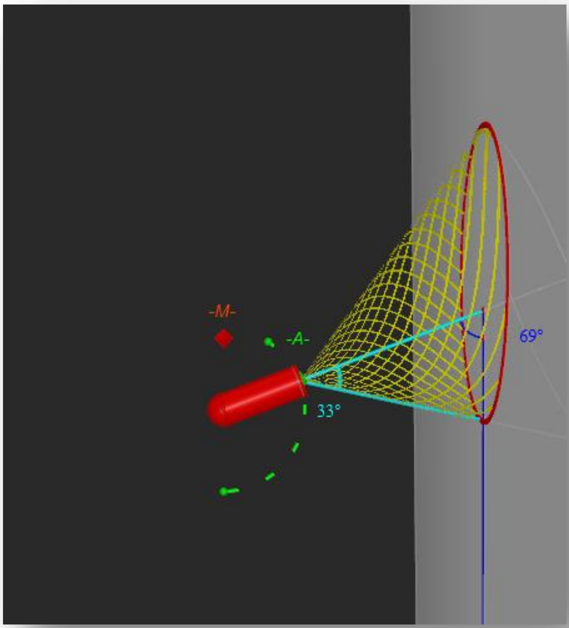
El Grupo 3 comienza su argumentación: “*Toda la luz (cono) debe apuntar a la pared, es decir cortarlo todo para obtener la elipse y si es perpendicular la linterna a la pared, es una circunferencia. Para obtener la parábola, la linterna debe apuntar de forma oblicua”.*

La docente pide que sean más específicos respecto a la última afirmación. Un alumno del Grupo 1 plantea: *“para mí tiene que ver con el ángulo de inclinación”.*

Entonces la docente propone trazar la recta que representa el eje de simetría y una generatriz cualquiera del cono. Los alumnos exploran nuevamente y acuerdan que la parábola resulta cuando una generatriz es paralela al plano.

Nuevamente el Grupo 1 aseguran*: “Si el eje del cono es paralelo a la pared obtenemos la hipérbola”* (la docente, sin mediar palabra, inclina el cono nuevamente y sigue siendo una hipérbola)… *“Entonces no es el único caso. Tiene que ver con los ángulos de inclinación.”*

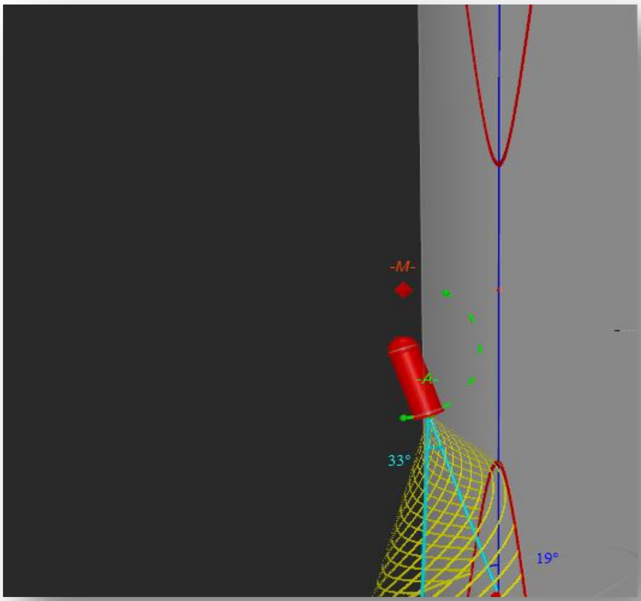
La docente sugiere abrir otro archivo en el que se encuentra representada la misma situación, pero en el que se agregaron el ángulo de conicidad y el ángulo que forma el eje con el plano:



Captura de pantalla 9

Luego, pide al Grupo 5 que explique sus conclusiones y concluyen sin inconvenientes que cuando el ángulo de conicidad es igual al ángulo que forma el eje con el plano, se obtiene la parábola. Cuando el ángulo que forma el eje con el plano es mayor al ángulo de conicidad se obtiene la elipse (Captura de pantalla 11) y caso contario, la hipérbola (Captura de pantalla 12).

En esta exploración los alumnos advierten (otros recuerdan) que la hipérbola tiene dos ramas. Durante la discusión del por qué de dicha situación, sugieren que si consideramos el eje del cono y su generatriz como rectas, el cono tiene su simétrico respecto del punto (aquí la docente introduce el concepto de superficie cónica).



Captura de pantalla 10

Durante la institucionalización se define formalmente el concepto de superficie cónica y secciones cónicas.

En esta actividad, de la tipología de errores considerada en el marco teórico, se detectan:

- Errores debido al mal uso de las herramientas del software.
- Errores debido a la rigidez del pensamiento (pensamiento dinámico vs pensamiento estático).

Duración de la actividad: 40 minutos.

5.2.3. Actividad N°3

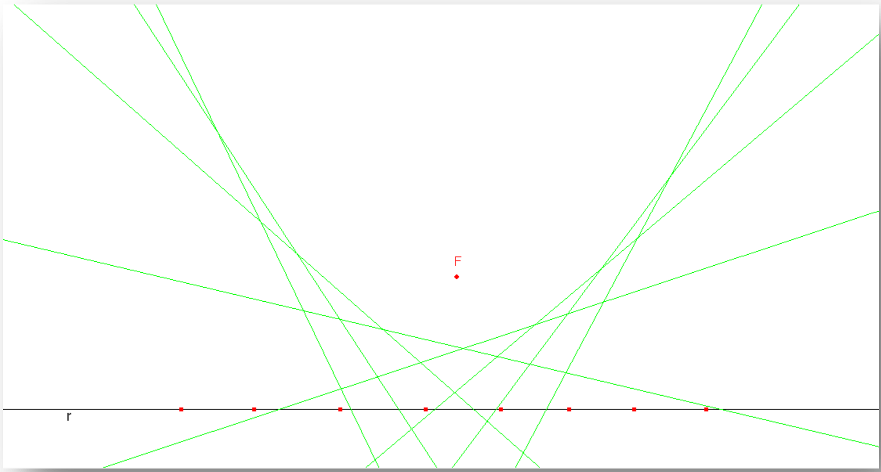
Ítem a)

Durante la actividad todos los grupos sostienen que la curva obtenida en el plegado es una parábola. Los grupos 2,3 y 4 no tuvieron inconvenientes en advertir que la recta determinada por cada pliegue representaba la mediatriz entre el foco y el punto considerado sobre el borde.

El grupo 1 uno confunde el término bisectriz por mediatriz y el grupo 5 expresa: *"la recta es la mitad… pasa por la mitad*" (no recuerdan el nombre).

Un alumno pregunta, durante la puesta en común: "*¿si el punto lo representamos en la mitad de la hoja, obtenemos una circunferencia?"* Algunos sostienen que no y otros no contestan. El docente, sugiere a continuación, realizar la construcción y retomar allí la discusión.

Durante la construcción los grupos 1,3,4 y 5 pensaron la actividad estáticamente, es decir, marcaron varios puntos y obtuvieron varias mediatrices (ver Captura de pantalla 14) en lugar de trazar una mediatriz respecto de un punto cualquiera sobre la recta y luego pedir el lugar geométrico que describe la mediatriz, cuando ese punto recorre la recta (ver Captura de pantalla 15).



Captura de pantalla 11

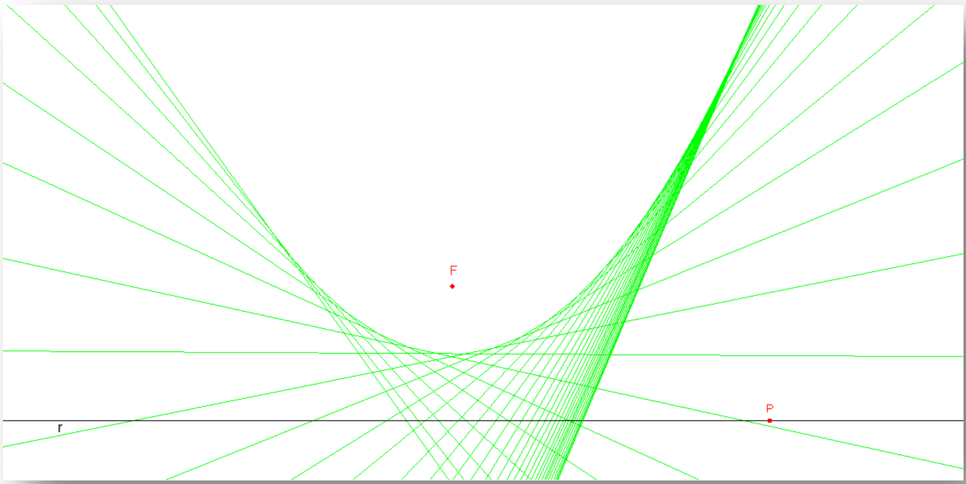
Nuevamente podemos apreciar como condiciona el pensamiento estático, la búsqueda de estrategias de resolución.

Solo el Grupo 2 utilizó la herramienta traza (ver captura de pantalla 15) sobre la mediatriz, a partir de un único punto P. Ningún alumno utilizó la herramienta lugar geométrico.

Se retoma el interrogante planteado por el alumno sobre la posición del foco respecto del plano y los alumnos concluyen que la curva obtenida no depende de la posición respecto del plano, sino respecto a la recta directriz.

Durante la institucionalización se establece la directriz y el foco como elementos característicos de la parábola. Se define la parábola como envolvente*: Curva que es tangente a todas las mediatrices entre el foco y un punto de la directriz.*

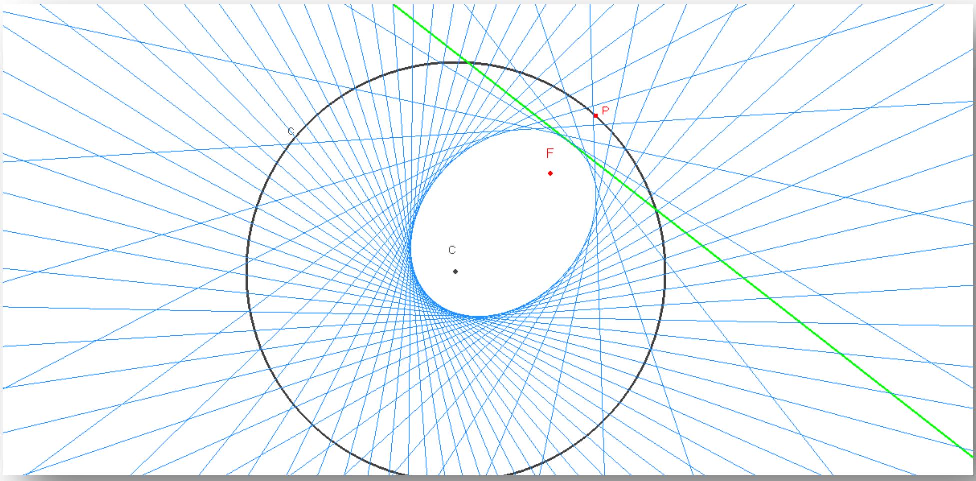
La docente recuerda a los alumnos, la herramienta "lugar geométrico" y sus beneficios respecto de utilizar la traza.



Captura de pantalla 12

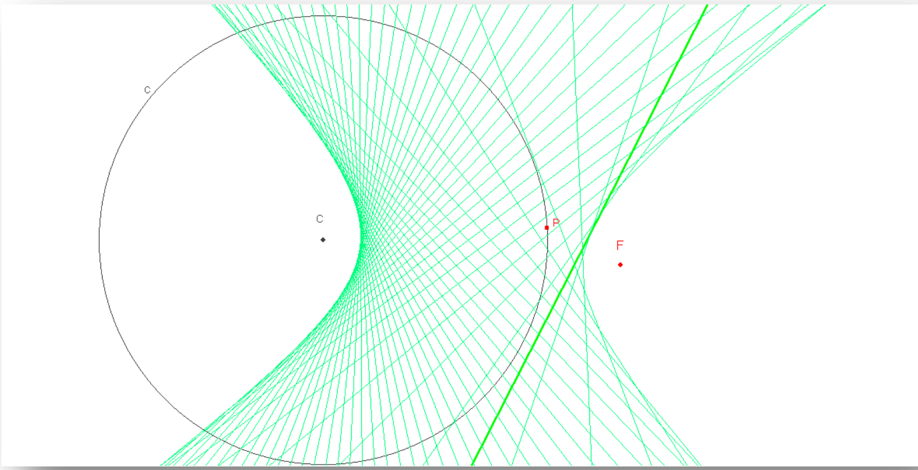
Ítem b)

Debido a la similitud en la construcción de esta actividad, respecto al ítem anterior, ningún grupo tuvo inconvenientes en la construcción. Los grupos 1,2,4 y 5 consideraron el punto F interior a la circunferencia. Obteniéndose, por consiguiente, la elipse en primera instancia (ver captura de pantalla 16).



Captura de pantalla 13

El grupo 4 consideró el punto F exterior a la circunferencia, obteniéndose la hipérbola en primer instancia (ver captura de pantalla 17).



Captura de pantalla 14

Solo los grupos 1, 3 y 4 manifiestan haber explorado, a partir de ésta, todas las posibilidades (considerar el punto interior, exterior a la circunferencia, coincidente con el centro de la misma, etc.) Solo un alumno plantea el interrogante sobre considerar el punto sobre la circunferencia misma. La docente devuelve la pregunta al grupo y luego de la exploración se llega a la conclusión que en dicho punto no hay curva definida.

Los cinco grupos utilizaron la herramienta lugar geométrico (no podemos asegurar, pero es posible que esto se deba más a la sencillez y comodidad del procedimiento que a un pensamiento dinámico, pretendido en esta propuesta).

Durante la institucionalización se instaura la circunferencia y los focos (el centro de la circunferencia considerada y el punto interior a la misma) como elementos característicos de la elipse. Se establece la idea de elipse como envolvente*: Curva que es tangente a todas las mediatrices entre el foco y un punto interior a una circunferencia dada.*

Con un procedimiento análogo se establece la idea de hipérbola como envolvente (cuando el punto considerado es exterior a la circunferencia).

En esta actividad, de la tipología de errores considerada en el marco teórico, se detectan:

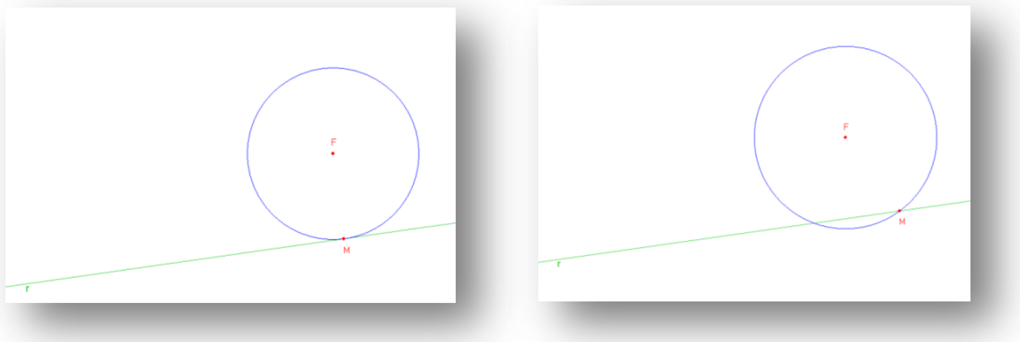
- Errores debido al manejo incorrecto de conceptos previos.
- Errores debido al mal uso de las herramientas del software.
- Errores debido a la rigidez del pensamiento (pensamiento dinámico vs pensamiento estático).

Duración de la actividad: 50 minutos.

5.2.4. Actividad N°4

Ítem a)

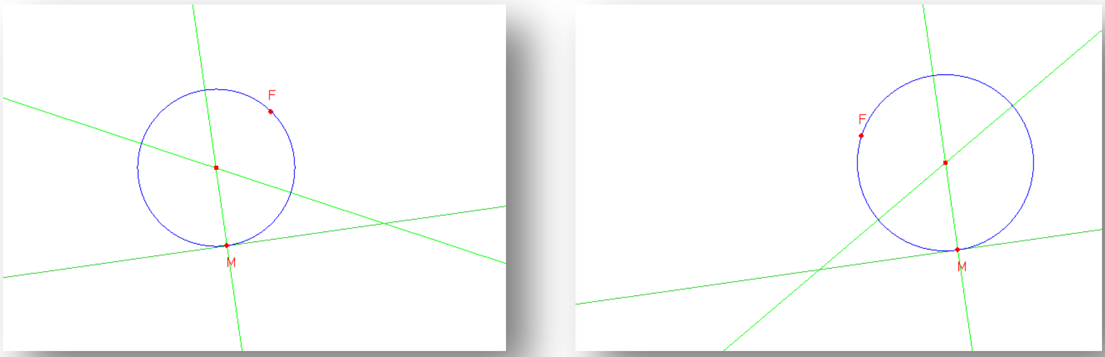
Durante esta actividad solo los grupos 3 y 4 realizaron correctamente la construcción de la circunferencia de centro ***F***, tangente a una recta por un punto ***M***. A pesar de que en actividades anteriores ya se había trabajado.



Captura de pantalla 15

En esta actividad se observa nuevamente que los alumnos a pesar de conocer la definición de un concepto, no siempre pueden utilizarlo satisfactoriamente como herramienta en la resolución de una actividad. Además, resulta también usual utilizar la posibilidad del arrastre como una herramienta de construcción (situación obviamente errónea), en lugar de utilizar las definiciones y propiedades para las construcciones (aspecto que la docente tuvo que señalar reiteradas veces). Un claro ejemplo de esta situación se ve en la captura de pantalla 15 (grupo 5), en la que es posible apreciar cómo se representa una circunferencia que “parece” a simple vista tangente, a la recta r, en el punto móvil M. Pero cuando dicho punto se desliza (arrastra) sobre la recta queda en evidencia que la circunferencia no conserva dicha relación.

Como se ha mencionado, esto puede deberse a dos motivos: por un lado la construcción se realiza ignorando la definición de circunferencia tangente a una recta por un punto (el radio debe ser perpendicular a la recta) y por otro lado, el alumno “acomoda” el punto M convenientemente para que la circunferencia resulte tangente en ese punto, porque siguen pensando de forma estática, ignorando así el hecho de que M es un punto “móvil”.



Captura de pantalla 16

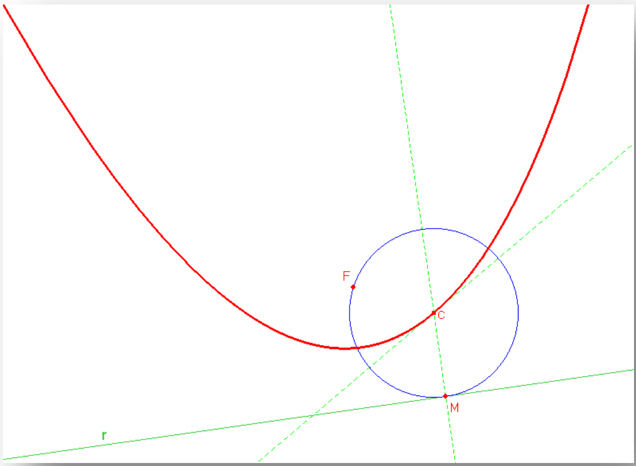
El resto de los grupos realizó la construcción correctamente, utilizando la definición correspondiente, como se puede ver en la construcción del grupo 1 (captura de pantalla 16).

Para distintas posiciones del punto M, la circunferencia sigue siendo tangente a la recta, debido a que la misma está "atada" a la construcción a través de sus propiedades.

En base a los inconvenientes observados en esta instancia de la actividad, la docente decide hacer en este punto una puesta común para que los grupos presenten sus construcciones y a partir de la socialización de las construcciones sean ellos quienes adviertan el error. Como se planteó en otros capítulos, se utilizó el error en todo momento como estrategia en la clase.

En la segunda instancia de la actividad y con las correcciones pertinentes realizadas sobre el ítem anterior, los alumnos advierten que el centro de la circunferencia es un punto móvil (porque depende de M, punto de tangencia, que también es móvil) y que está siempre a la misma distancia de F (centro de la circunferencia) y de M.

Los cinco grupos realizan la construcción correcta de la parábola como lugar geométrico (ver captura de pantalla 17).

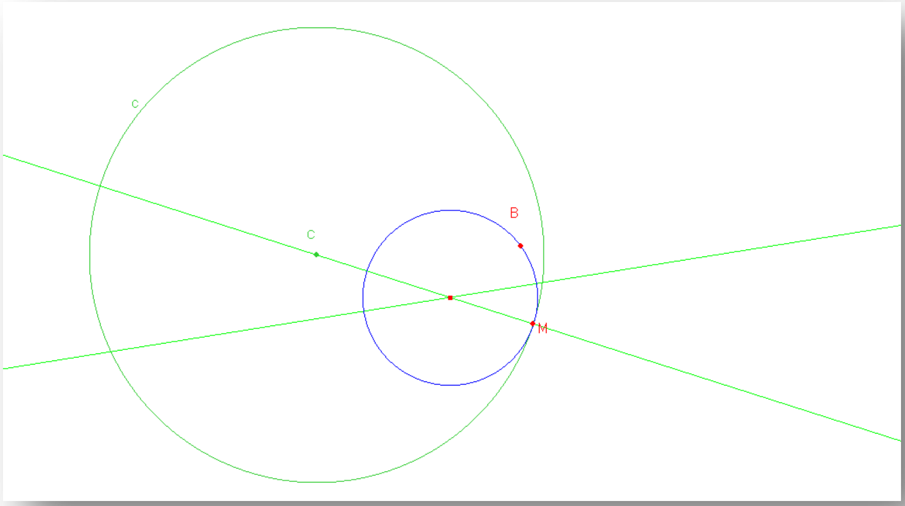


Captura de pantalla 17

Pero en el momento de plantear una definición para la parábola ningún grupo hizo referencia a la recta directriz r, sino al punto móvil M. Definición propuesta por el grupo 1: *"Son los puntos que están a la misma distancia de F y M"* solo el grupo 3 hace mención al punto M como punto móvil: *"Es el lugar geométrico de los puntos que están a igual distancia del punto F y el punto móvil M".* El resto de los grupos propuso una definición similar al grupo 1.
Esto podría deberse a dos cuestiones, por un lado, no advertir la diferencia entre los puntos F (fijo) y M (móvil) y sus correspondientes propiedades (es decir, si M es móvil y está atado a una recta, entones M representa un punto cualquiera que describe esa recta, es decir M es un punto genérico). Por otro lado, que los alumnos conozcan la definición de recta, como *conjunto de infinitos "puntos"* no asegura que este concepto resulte significativo hasta que se presente la necesidad de utilizarlo por ejemplo, en la resolución de un problema.
A partir de las intervenciones de la docente, se aclaran estos aspectos y los alumnos reformulan satisfactoriamente la definición.

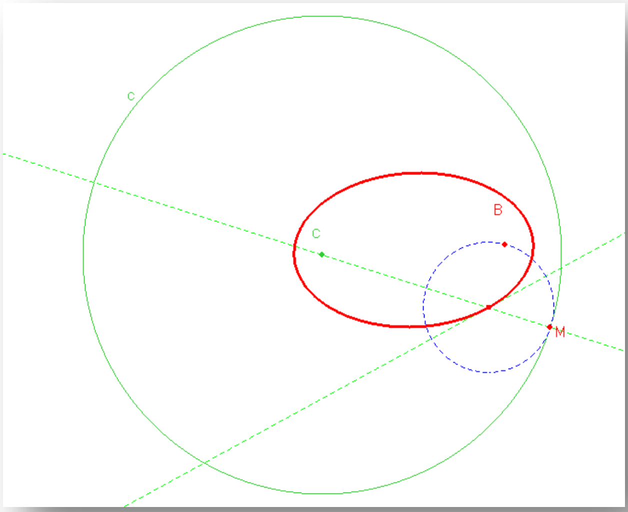
Ítem b)

Solo los grupos 3 y 4 resolvieron satisfactoriamente la construcción (ver captura de pantalla 18) de la circunferencia tangente a otra, por un punto (móvil) M. El grupo 1 ,2 y 3 solo pudieron realizar una parte de la construcción (sabían que necesitaban la recta mediatriz de los puntos F y M), en general el problema estuvo en reemplazar la recta perpendicular, que se utilizó en la construcción de la circunferencia tangente a una recta, por la recta que contiene al diámetro, de la circunferencia c y el punto M.



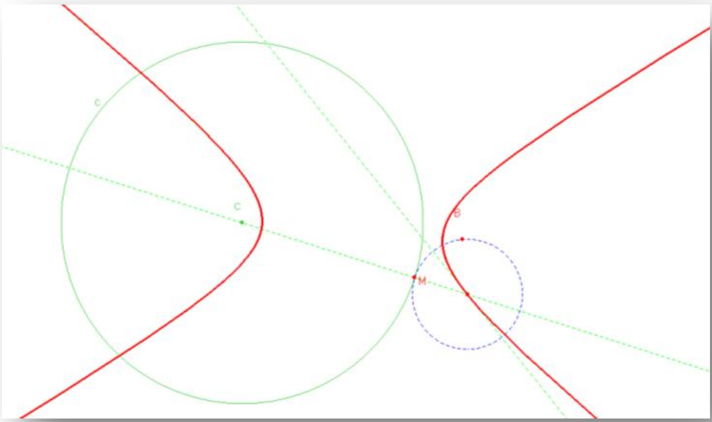
Captura de pantalla 18

En la puesta en común de la actividad y con las intervenciones pertinentes, los alumnos advierten el error en sus construcciones. Reformulan exitosamente sus construcciones y hallan la elipse (los grupos 3, 4 y 5):



Captura de pantalla 19

por considerar inicialmente al punto B, interior a la circunferencia y la hipérbola (los grupos 1 y 2) por considerarlo exterior a la misma:



Captura de pantalla 20

No aparecen inconvenientes en lo que resta de la actividad. La docente en la puesta en común pide a los alumnos: “*Tomar un punto cualquiera de la elipse y trazar los segmentos que van de dicho punto a los focos y buscar a partir de ellos una relación*”. El grupo 1 advierte la suma constante y el resto de los grupos corrobora con la calculadora del software. (Con respecto a la hipérbola buscan la misma relación y advierten que no se cumple, tampoco el producto y finalmente lo comprueban con la resta).

Durante la institucionalización se establece las definiciones de parábola, elipse e hipérbola a partir de sus elementos característicos.

En esta actividad, de la tipología de errores considerada en el marco teórico, se detectan:

- Errores debido al manejo incorrecto de conceptos previos.
- Errores debido al mal uso de definiciones y propiedades.
- Errores debido al mal uso de las herramientas del software.
- Errores debido a la rigidez del pensamiento (pensamiento dinámico vs pensamiento estático).

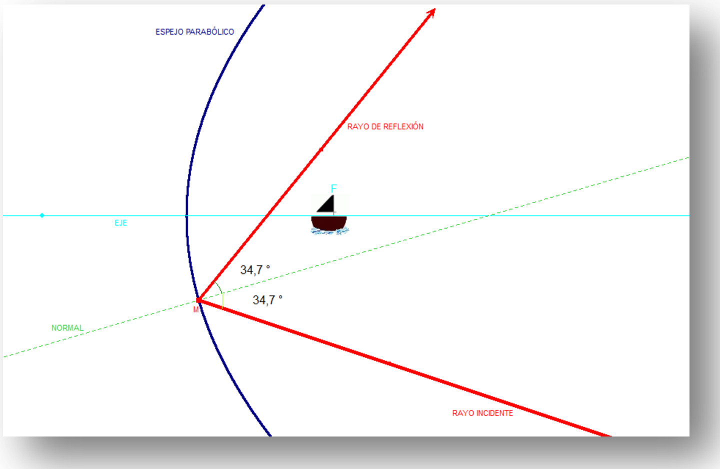
Duración de la actividad: 40 minutos.

5.2.5. Actividad N°5

Con respecto a la primera consigna los cinco grupos responden correctamente: Los grupos 1,3 y 5 contestan que la normal es bisectriz del ángulo formado por el rayo incidente y el rayo de reflexión. Mientras que los grupos 2 y 4 contestan que el ángulo formado por el rayo incidente y la normal es igual al ángulo formado por la normal y el rayo de reflexión.

Sin embargo, aunque los cinco grupos responden correctamente solo dos grupos (1 y 4) justifican su afirmación. En el primer caso construye la bisectriz y comprueba que la misma se superpone con la normal, y en el segundo caso miden los dos ángulos y comprueban que para distintas posiciones de la semirrecta que representa el rayo incidente los ángulos tienen siempre la misma medida (ver captura de pantalla 21).

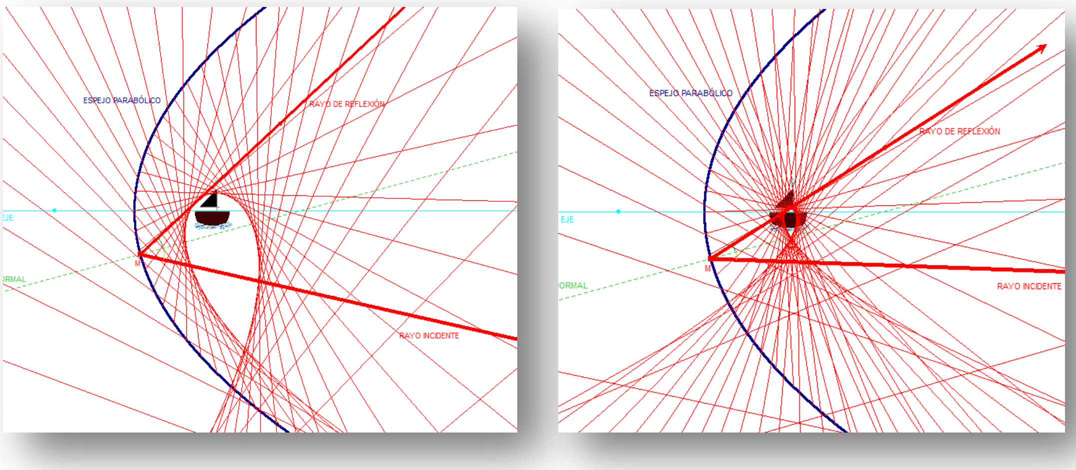
Los grupos 2, 3, 4 y 5 obtienen correctamente el lugar geométrico. El grupo 1 no lee correctamente la consigna y determina el lugar geométrico de la recta determinada por el rayo incidente y no por el rayo de reflexión (los alumnos tardan en advertir el error y no tienen tiempo suficiente para analizar en profundidad la actividad).



Captura de pantalla 21

Respecto a la pregunta, ¿qué sucede en torno a nuestro barco? El grupo 5 comenta: "*El lugar geométrico es el mismo… el barco queda afuera cuando el punto M sube o baja"* (se dan cuenta que el error en la lectura es cometido porque en lugar de desplazar la semirrecta que representa el rayo incidente, desplazan el punto M).

El grupo 2 contesta: "*Todos los rayos reflejados se concentran en el barco o no, dependiendo de la posición del rayo incidente"*. (Ver captura de pantalla 22)



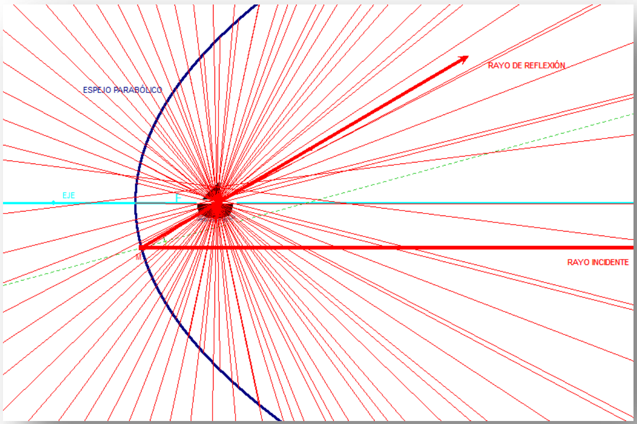
Captura de pantalla 22

El grupo 1,3 y 4 coincide con la afirmación del grupo 2.

Respecto a la pregunta, ¿Qué condición deberán cumplir los rayos incidentes para que todos los rayos reflejados se concentren en nuestro barco? Los alumnos a través de la exploración advierten que el mismo debe ser paralelo pero solo el grupo 4 valida su afirmación (construye la paralela al eje que contiene al punto M y haya su simétrica respecto de la normal. Comprobando luego que esta recta simétrica pasa por el foco). El resto de los grupos nuevamente considera que aquello que visualmente parece cumplir una propiedad no requiere validarse (ver captura de pantalla 23).

Se puede observar en esta captura que todos los rayos reflejados se concentran en el barco (ubicado en el foco de la parábola) pero esto se logró manipulando la semirrecta que representa al rayo incidente que “parece” paralela al eje.

Es importante destacar que la imagen visual puede servir para elaborar conjeturas pero no para justificar o validar las mismas, sobre esta cuestión se hizo hincapié durante la puesta en común.



Captura de pantalla 23

Se discutió también sobre las posibilidades reales y los inconvenientes históricos del problema. Hubo una participación activa de todos los grupos.

Durante la institucionalización se estableció formalmente la propiedad focal de la parábola, como así también se recordaron los elementos característicos de la misma (incorporando eje de simetría y vértice).

En esta actividad, de la tipología de errores considerada en el marco teórico, se detectan:

- Errores debido al mal uso de las herramientas del software.
- Errores técnicos (cálculo, procedimientos, etc.)

Duración de la actividad: 20 minutos.

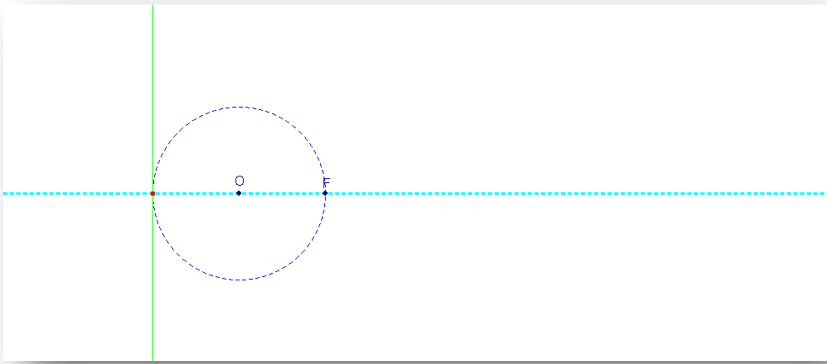
5.2.6. Actividad N°6

Durante los primeros cinco minutos de la actividad se vio a los alumnos desorientados con respecto a la misma.

La docente interviene y pregunta *¿cuántos puntos conocemos de la parábola?*

Uno de los alumnos responde: "*dos*"

Otro alumno interviene: "*No, solo uno sobre la parábola, el vértice. Tenemos el vértice y el foco, nos falta la directriz.*" (Refiriéndose a los puntos: vértice O y foco F).



Captura de pantalla 24

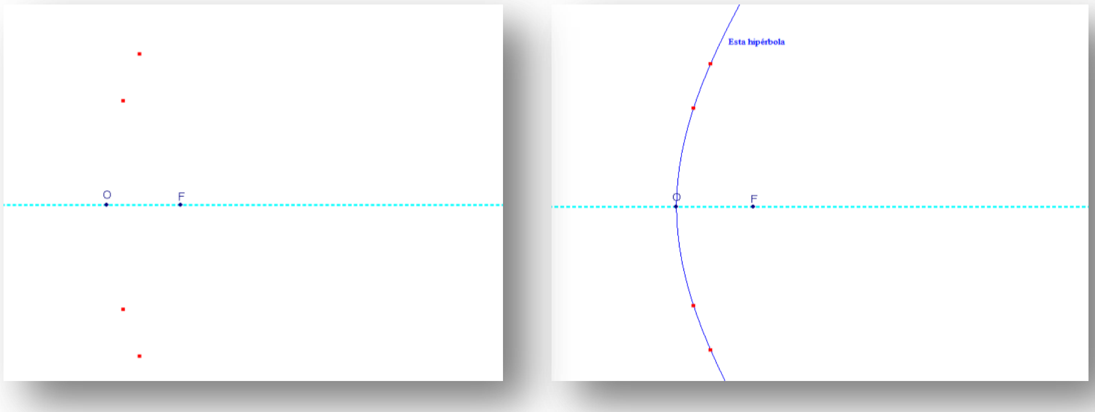
A partir de estos aportes la docente sugiere rever las propiedades y definiciones analizadas y reanudar la actividad.

Los grupos 1 y 2 utilizan la definición de parábola para encontrar la recta directriz.

El grupo 1 utiliza simétrico del foco respecto del vértice y traza la recta perpendicular al eje que pasa por dicho punto (simétrico).

El grupo 2 utiliza circunferencia con centro en el vértice y radio OF. Luego determina la directriz, perpendicular al eje por el punto de intersección obtenido (ver captura de pantalla 24).

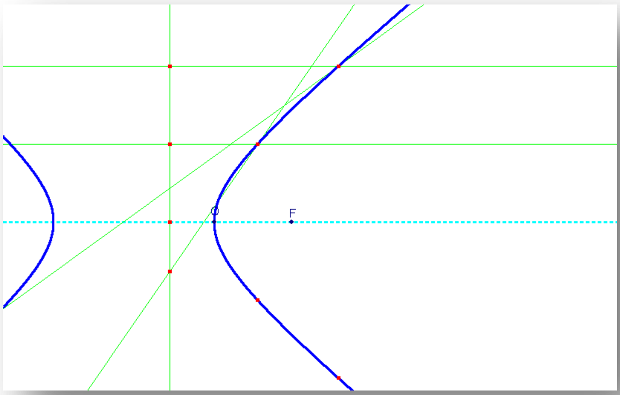
El grupo 3 no considera la directriz en su construcción. Toma dos puntos (cualesquiera) y halla el simétrico respecto del eje de simetría (ver captura de pantalla 25). Es decir, aplican parcialmente una propiedad de la parábola, pero parten de puntos que no cumplen su definición.



Captura de pantalla 25

Como se puede ver en la captura de pantalla, a la derecha, la curva finalmente obtenida no es una parábola.

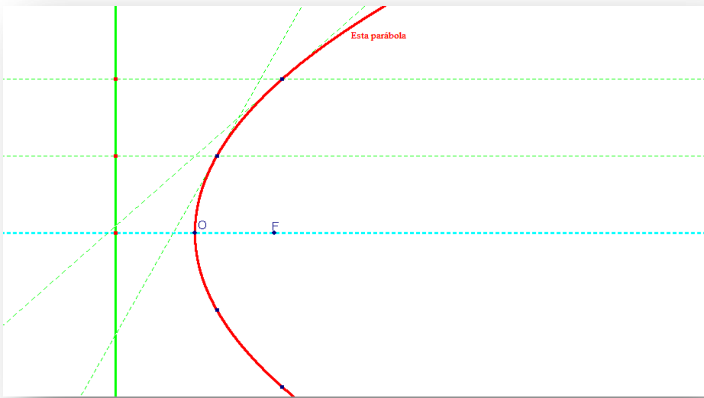
Los grupos 4 y 5 trazan la perpendicular al eje, por un punto cualquiera del mismo. A partir de esta perpendicular (considerada por ambos grupos como recta directriz) toman dos puntos sobre la misma y encuentran, aplicando la definición de parábola, dos puntos que pertenecen a la curva buscada (esta finalmente no resulta una parábola como plantea el enunciado, ya que la construcción parte de la recta directriz, mal construida por ellos). A continuación se puede ver en la captura de pantalla, las dos ramas de una hipérbola:



Captura de pantalla 26

Uno de los alumnos del grupo 4 al no obtener la parábola advierte un error en la construcción, revisa en los apuntes de la clase anterior la definición y señala: *"El vértice tiene que estar a la misma distancia que el foco"*.

Finalmente durante la puesta en común los grupos 1, 2 y 4 presentan construcciones válidas (ver captura de pantalla 27) y se discute sobre los errores cometidos por los grupos 3 y 5. El docente remarca la importancia de justificar cada construcción. (Duración total: 40 minutos)



Captura de pantalla 27

En esta actividad, de la tipología de errores considerada en el marco teórico, se detectan:

- Errores debido al mal uso de definiciones, propiedades, etc.

5.2.7. Actividad N°7

Ítem a) y b)

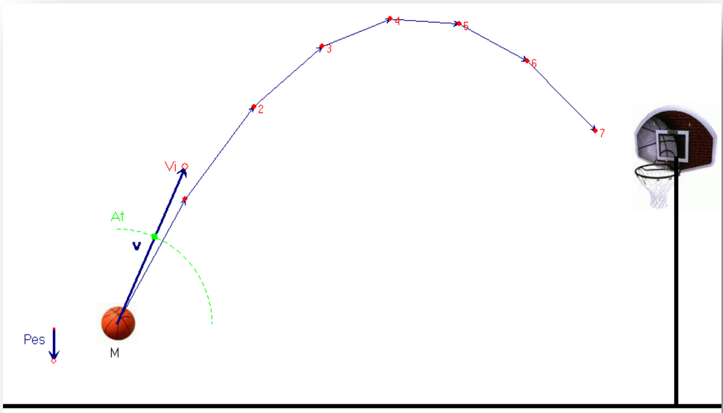
Como se había previsto en el análisis a priori el obstáculo en esta actividad estuvo asociado al concepto de vectores libres. Los alumnos no lograban comprender que pudiera plantearse un sistema de vectores sin un mismo punto de aplicación. En general suman y restan vectores geométricamente sin inconvenientes pero con un mismo punto de aplicación. La docente interviene recordando la definición de vectores iguales.

Los grupos 3 y 5 realizan mal la construcción ya que la suma de vectores la realizan considerando el origen de la resultante en el extremo del vector ***V*** (y no en el origen). Solo el grupo 3 advierte el error antes de la puesta en común. Es decir, obtiene el nuevo vector velocidad, realizando la suma $\vec{V} + \overrightarrow{Pes}$ con origen en el punto ***M***.

Captura de pantalla 28

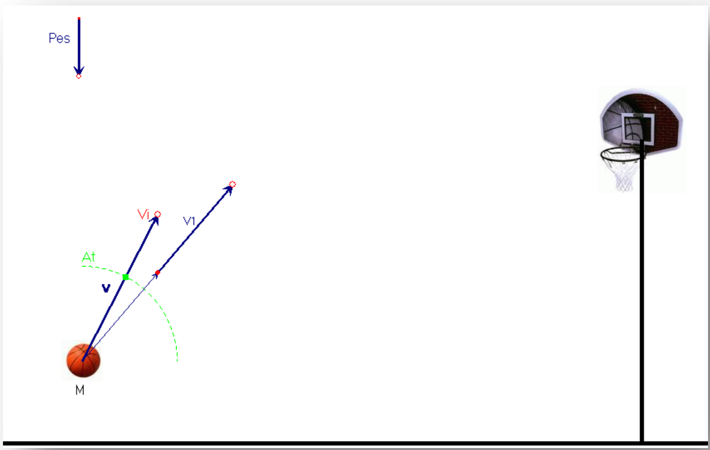
Los grupos 1y 2 encuentran de forma correcta la primera posición de la pelota transcurrida la primera unidad de tiempo (ver captura de pantalla 28).

Repiten el procedimiento para encontrar las sucesivas posiciones de la pelota (ver captura de pantalla 29).



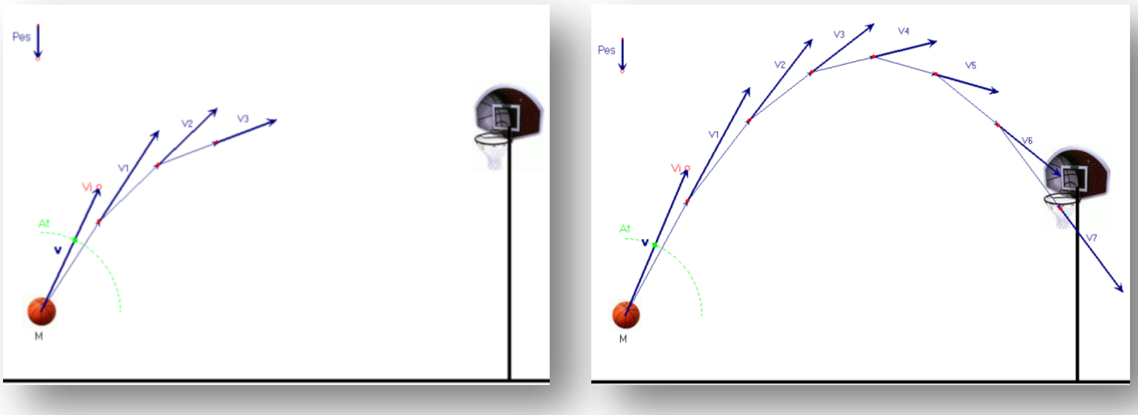
Captura de pantalla 29

El grupo 4 encuentra la posición de la pelota transcurrida una unidad de tiempo aplicando suma de vectores, pero luego realiza una traslación del vector velocidad (traslación del vector V_1 según V_1):



Captura de pantalla 30

Repite el procedimiento para las restantes posiciones (ver captura de pantalla 31). Cuando se les pide que expliquen el por qué de la construcción un alumno contesta: “Aplicamos una traslación para ubicar el punto y luego el vector velocidad como está en la posición inicial”.



Captura de pantalla 31

Ningún grupo utilizó macro-construcciones para agilizar el procedimiento.

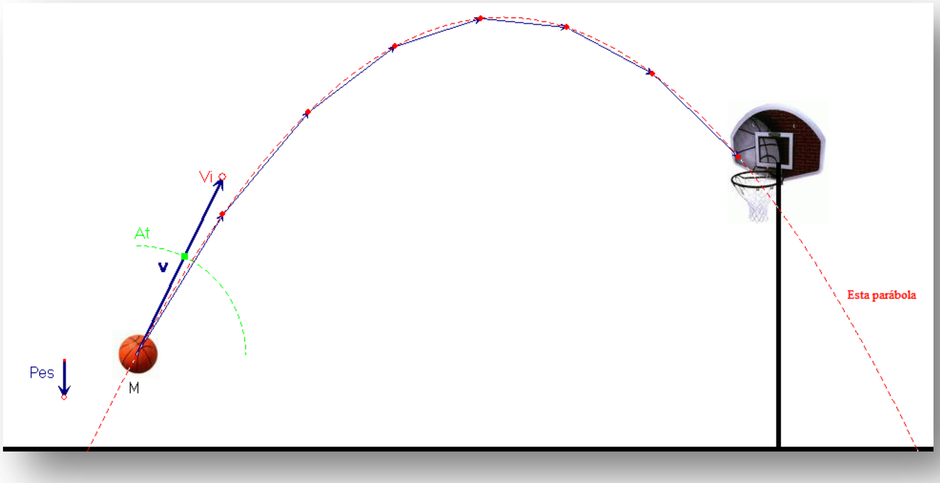
En esta actividad, de la tipología de errores considerada en el marco teórico, se detectan:

- Errores debido al mal uso de las herramientas del software.
- Errores debido al manejo incorrecto de conceptos previos.

Ítem c)

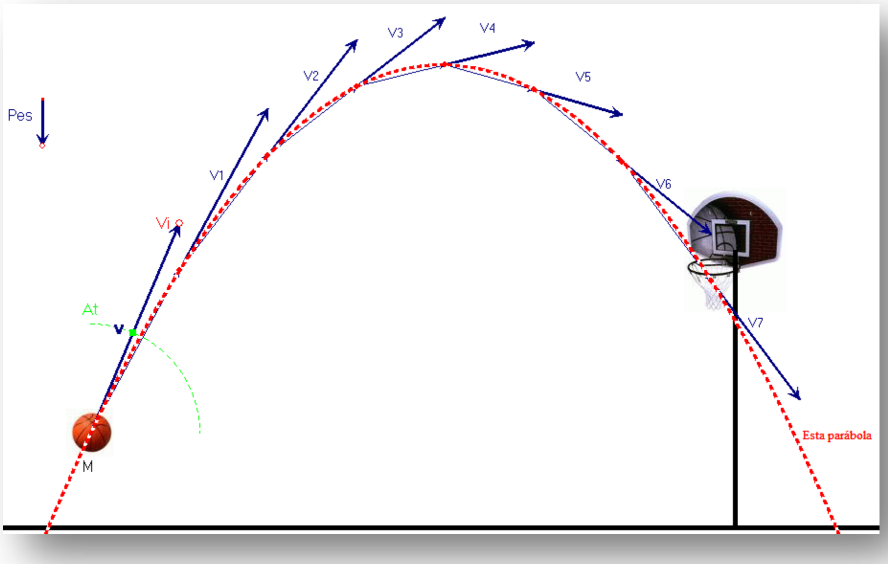
Los grupos 1,2,3 y 4 plantean que la curva resultante es una parábola y todos justifican a través de la herramienta “cónica” provista por el software. Donde señalaron cinco puntos de los encontrados en el ítem anterior. El grupo 5 no logra resolver el obstáculo inicial y durante la puesta común reformula el error cometido y llega a la construcción después de la misma.

A continuación se exponen las dos trayectorias parabólicas:



Captura de pantalla 32

Corresponde a la expuesta por los grupos 1,2 y 3.



Captura de pantalla 33

Corresponde a la expuesta por el grupo 4.

A partir de las trayectorias obtenidas los alumnos exploran el archivo modificando el ángulo de tiro y los vectores y visualmente comprueban las condiciones necesarias para asegurar canasta.

Durante la institucionalización la docente menciona otro tipo de trayectorias.

Duración de la actividad: 40 minutos.

5.2.8. Actividad N°8

Debido a que el tiempo empleado hasta el momento para el desarrollo de las actividades fue mayor al planificado, se decidió quitar esta actividad de la experiencia para poder dedicar el tiempo restante en la implementación de la actividad N°9.

5.2.9. Actividad N°9

Ítem a)

Durante el desarrollo de la actividad un alumno pregunta: "*¿Tenemos cuatro incógnitas?"* La docente le pide al alumno que menciones cuáles son, a lo que él responde, *"**x**, **y**, **a**, **b**".*

El propone releer la consigna en voz alta y recuerda: "***a*** *es la longitud del cubo que quiero duplicar y como no sabemos cuánto debe medir la arista, del cubo cuyo volumen será el doble del anterior, llamamos* **x** *a la arista de este cubo".*

Los alumnos advierten que ***x*** , ***y*** son incógnitas, ***a*** es una constante y ***b*** por ser el doble de ésta, también lo es.

Los alumnos acuerdan que es necesario plantear un sistema de ecuaciones por tratarse de un problema con dos incógnitas.

Ningún alumno hace mención al grado de la ecuación de forma explícita. Los cinco grupos reconocen la parábola a partir de las ecuaciones obtenidas (por tratarse, tal vez, de una curva que trabajan bastante a lo largo de su escolaridad). Solo un alumno reconoció la hipérbola a partir de su ecuación.

Todos los grupos plantearon un único sistema de ecuaciones. Pero al comparar con sus compañeros observaron (algunos lo advirtieron antes) que el sistema variaba dependiendo de las igualdades elegidas por ellos.

Recordemos a partir de la doble igualdad:

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{2a}$$

<u>Caso I</u>:

Considerando las igualdades:

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{y} \quad \text{y} \quad \frac{a}{x} = \frac{y}{2a}$$

se obtiene:

$$\begin{cases} ay = x^2 \\ yx = 2a^2 \end{cases}$$ *una hipérbola y una parábola orientada respecto al eje x.*

<u>Caso II</u>:

Considerando las igualdades:

$$\frac{a}{x} = \frac{y}{2a} \quad \text{y} \quad \frac{x}{y} = \frac{y}{2a}$$

se obtiene:

$$\begin{cases} yx = 2a^2 \\ 2a.x = y^2 \end{cases}$$ *una hipérbola y una parábola orientada respecto al eje y.*

<u>Caso III</u>:

Considerando las igualdades:

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{y} \quad \text{y} \quad \frac{y}{2a} = \frac{x}{y}$$

se obtiene:

$$\begin{cases} ay = x^2 \\ 2a.x = y^2 \end{cases}$$ *dos parábolas.*

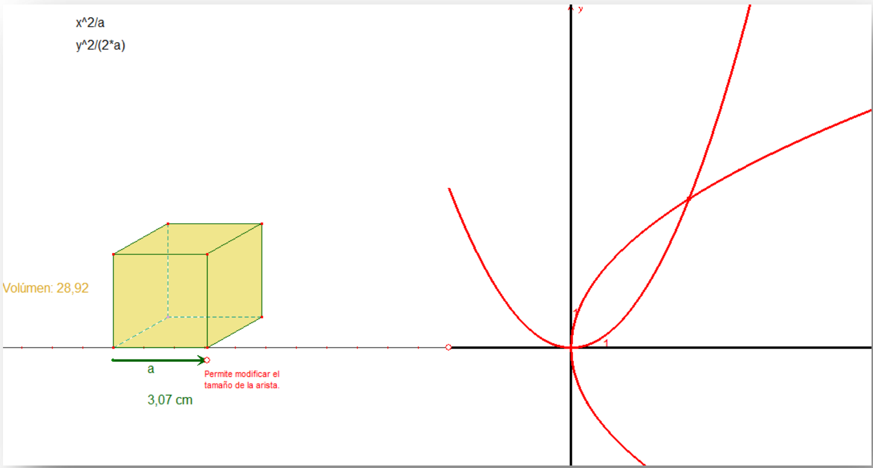
Los grupos 1,2, y 5 plantearon el *caso III*. Los grupos 3 y 4 el *caso II*.

Durante la puesta en común se discutió sobre la existencia o no de otra u otras posibilidades expuestas, a partir de las intervenciones de la docente, se concluye en una tercera posibilidad, que no había surgido en las propuestas por los grupos.

El docente propone analizar el grado de las ecuaciones y los alumnos advierten en ese momento que el grado de todas las ecuaciones obtenidas por los distintos grupos es 2.

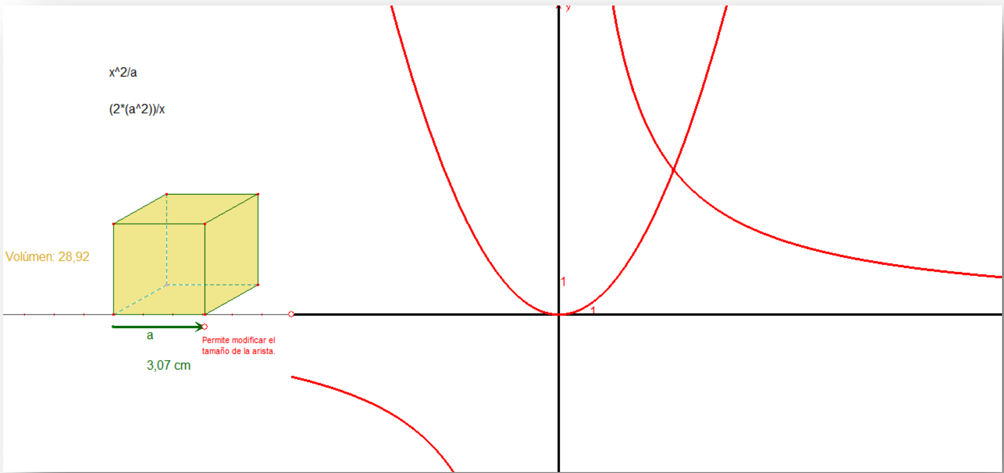
Ítem b)

Los grupos 1,2 y 5 que plantearon el *caso III* (ver captura de pantalla 34) representaron la solución del problema como la intersección de la representación gráfica de las ecuaciones obtenidas:



Captura de pantalla 34

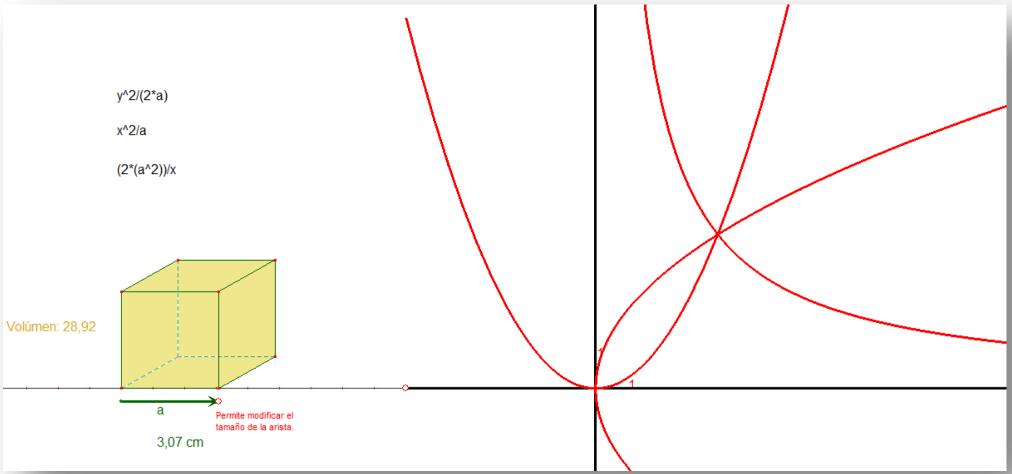
Los grupos 3 y 4 que plantearon el *caso II* (ver captura de pantalla 35) y también representaron la solución del problema como la intersección de la representación gráfica de las ecuaciones obtenidas:



Captura de pantalla 35

A partir de las gráficas obtenidas, los alumnos no tuvieron inconvenientes en identificar las cónicas. Algunos utilizaron cinco puntos sobre las mismas y validaron con el software, otros concluyeron a partir de la “observación” de la gráfica.

La docente propone la representación de las tres curvas posibles que resultan del problema (captura de pantalla 36).

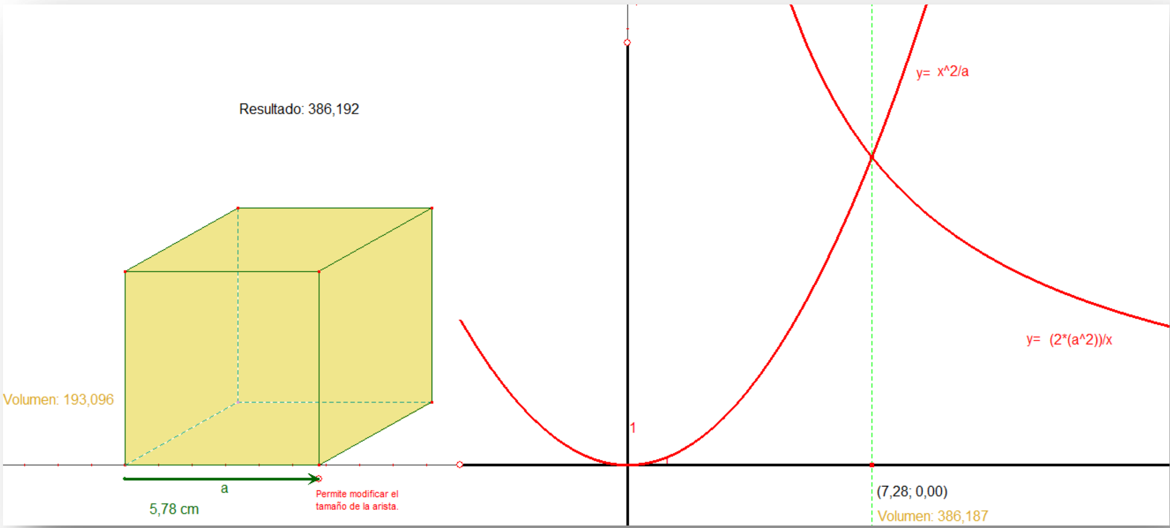


Captura de pantalla 36

Para ello se utiliza nuevamente la computadora conectada al cañón y en la misma se agrega la tercera ecuación. Los alumnos advierten que el punto de intersección es el mismo para las tres cónicas.

Ítem c)

Todos los grupos pudieron leer la solución del problema y utilizaron herramientas similares para la misma: los grupos 1 y 4 trazaron la perpendicular al eje de abscisas por el punto de intersección y pidieron luego coordenadas. Los grupos 2, 3 y 5 realizaron la misma construcción pero tomaron la distancia entre el origen y la intersección de la perpendicular con el eje (en lugar de utilizar coordenadas). Para verificar la solución los alumnos utilizaron la calculadora del software (captura de pantalla 37).



Captura de pantalla 37

Durante la institucionalización se retoman los conceptos trabajados en clase y se reformulan los resultados obtenidos durante la puesta en común.

Duración de la actividad: 40 minutos.

Capítulo 6

6.1. Conclusiones finales

En lo que se refiere a la actuación de los alumnos frente a las actividades, en las distintas etapas de acción, formulación y validación (respecto a la Teoría de las Situaciones Didácticas) podemos concluir que:

Durante las situaciones de acción si bien los alumnos han tenido dificultades en las construcciones, las situaciones planteadas les han ofrecido un margen amplio para la exploración y la acción sobre los problemas. El software gracias a las posibilidades de desplazar, construir y medir los objetos geométricos favoreció la comprensión, la búsqueda de relaciones y dependencias.

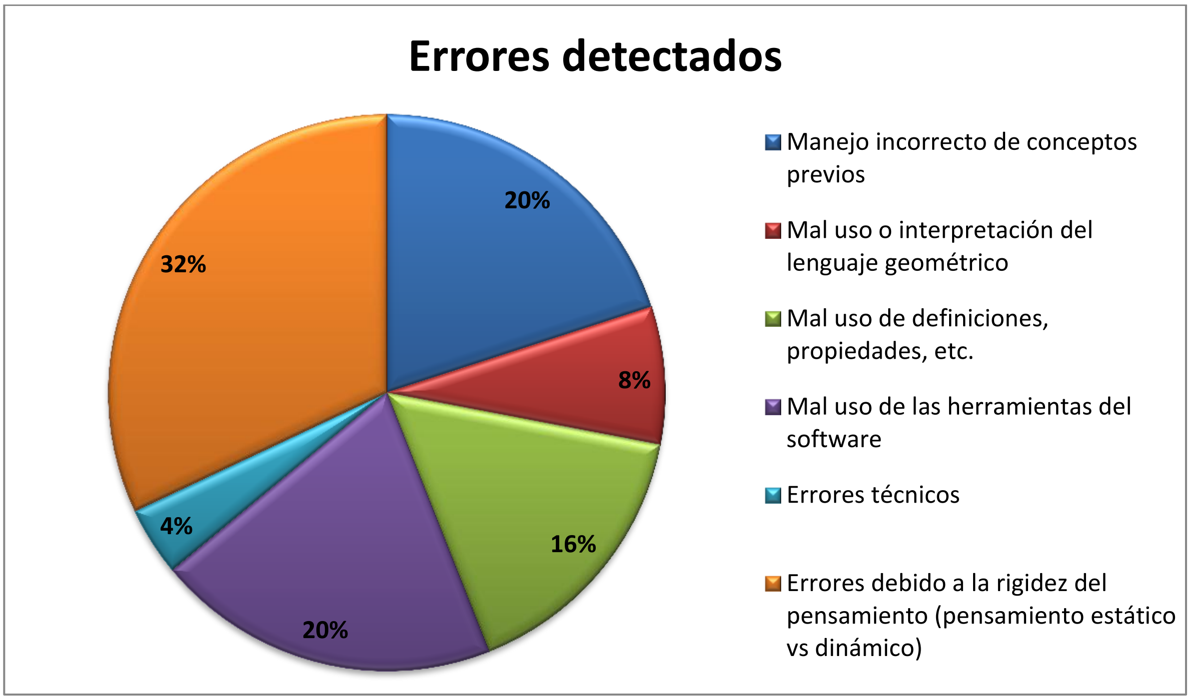
En cuanto a las situaciones de formulación los alumnos lograron explicitar procedimientos y formas de resolución que se vieron favorecidas por las distintas herramientas que brinda el software. El trabajo previo en los grupos fue fundamental para que las elaboraciones, parciales, incompletas o incluso erróneas, se expusieran luego para su discusión.

Respecto de las situaciones de validación, los estudiantes argumentaron defendiendo sus construcciones y elaboraron justificaciones. En dicho proceso, la Geometría Dinámica como recurso resultó muy útil para estimular la experimentación, verificar conjeturas, y construir contraejemplos, pero en algunas instancias recurrieron de forma errónea al software como herramienta para validar, por ejemplo, al considerar que aquello que se "percibe" visualmente alcanza como justificación.

El enfoque histórico favoreció no solo la motivación, visible a través de la participación activa de los alumnos y las discusiones fructíferas sino que también, facilitó y potenció la secuenciación de las actividades.

Durante las actividades los alumnos hicieron referencia a conceptos trabajados en otras asignaturas, como por ejemplo física. Es decir, se logró relacionar la matemática con otras ciencias.

Respecto a los errores cometidos durante la implementación de las actividades, se obtuvo:



Se puede observar que los errores cometidos, en general se debieron a un manejo incorrecto de conceptos previos, a un mal uso de las herramientas del software, pero fundamentalmente a la rigidez del pensamiento, provocado por una predominancia del pensamiento estático sobre la percepción dinámica a la que se apuntó en este trabajo.

Los errores técnicos (cálculos, procedimientos, etc.) prácticamente no se hicieron presentes gracias a que los mismos son realizados por el software dejando al alumno tiempo libre para dedicarlo a la exploración y el debate (Turégano Moratalla, 1998).

Finalmente y por lo descripto anteriormente, podemos afirmar que la propuesta ha dado lugar a múltiples intervenciones y producciones de los estudiantes a lo largo de la implementación, las que han puesto de manifiesto muy diferentes formas de abordaje al contenido. Podemos decir, en términos generales, que los alumnos han hecho un aprendizaje significativo del tema. También mencionamos como positivo dentro de esta experiencia que la misma haya dado lugar a la manifestación de errores o concepciones erróneas tanto del tema en cuestión como de otros considerados previos ya que éstos fueron retomados y trabajados en la clase con el fin de favorecer la construcción del conocimiento por parte de los alumnos.

6.2. Propuesta y/o recomendaciones para futuro

Consideramos importante incorporar en las prácticas cotidianas recursos que faciliten no solo la comprensión y construcción de los conceptos por parte de los alumnos, sino también la organización y secuenciación de los contenidos por parte del docente. En este sentido la Historia de la Matemática puede desempeñar un rol importante.

Por otro lado, nuestros alumnos pertenecen a una nueva sociedad “digital” y debemos considerar los recursos tecnológicos vigentes, en nuestras propuestas pedagógicas. Pero debemos considerar también los errores u obstáculos que pueden presentarse en este nuevo contexto.

BIBLIOGRAFÍA

ALSINA CATALÁ, CLAUDIA; FORTUNY AYMEMÍ, JOSEP y PÉREZ GÓMEZ, RAFAEL (1997). *¿Por qué Geometría?* Propuestas didácticas para la ESO. Editorial Síntesis. Madrid.

ARTIGUE, MICHÈLE y DOUADY, REGINE (1995). *Ingeniería Didáctica en educación matemática.* Grupo Editorial Iberoamérica. Bogotá

BARRANTES, MANUEL Y BLANCO, LORENZO (2004). *Análisis de las concepciones de los profesores en formación sobre la enseñanza y aprendizaje de la Geometría*. Números, 62. 33 - 44

BONGIOVANNI, VINCENZO (2001). Tesis Doctoral: *Les caractérisations des coniques avec Cabri-géomètre en formation continue d´enseignants: étude d´une sequence d´activités et conception d´un hyperdocument interactif*. Universidad Joseph Fourier. Francia.

BOYER, CARL (1992). *Historia de las Matemáticas*. Alianza Editores. España

BROUSSEAU, GUY (1993). *Fundamentos y métodos de la didáctica de la Matemática.* Serie B. Trabajos de Matemática, FAMAF, UNC. Córdoba. Argentina.

BROUSSEAU, GUY (2007). *Iniciación al estudio de la teoría de las Situaciones Didácticas*. Editorial Libros del Zorzal. Buenos Aires.

CHEVALLARD, YVES; BOSCH, MARIANNA y GASCÓN, JOSEP (1997). *Cuadernos de educación. Estudiar matemáticas*. Universidad de Barcelona.

CERANTOLA, SARA (2004). *La ley física de Ibn Sahl*. Anaquel de Estudios Árabes. Vol. 15 Universidad Ca´ Foscari de Venecia.

CLARO, MAGDALENA (2010). *Impacto de las TIC en los aprendizajes de los estudiantes*. CEPAL – Colección Documentos de proyectos. Santiago de Chile.

CONTRERAS, ANGEL; QUESADA, MARÍA. GARCÍA ARMENTEROS, MANUEL (2002). *Sobre la Geometría sintética y analítica*. Relime: Revista Latinoamericana de investigación en matemática educativa. (Relime). Vol. 5 Núm. 2.

CUPPENS, ROGER (2003). *Faire de la Géomètrie supérieure en jouant avec Cabri-géomètre II*. Editorial Apmep. Francia.

DÍAZ BARRIGA ARCEO, EUGENIO (2006). *Geometría Dinámica con Cabri-géomètre.* Editorial Kali. México.

DOUADY, REGINE (1986). *Jeux de cadres et Dialectique outil-objet.* Recherches en Didactique des Mathématiques. Vol 7.N°2.

DOUADY, REGINE (1995). *La ingeniería didáctica y la evolución de su relación con el conocimiento.* En Ingeniería Didáctica en Educación Matemática. Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Gomez Pedro. Grupo Editorial Iberoamérica, Bogotá.

FRANCHI, LISSETTE y HERNÁNDEZ, ANA (2003). *Tipología de errores en el área de geometría plana.* Educere, Investigación Arbitrada. Año 8, Núm. 24, pp. 63-71

FRIEDELMEYER, JEAN-PIERRE (2001). *La enseñanza de las matemáticas: puntos de referencia entre los saberes, los programas y las prácticas*. Ed. Blanchard.

GASCON, JOSEP (2000). *Incidencia del modelo epistemológico de las matemáticas sobre las prácticas docentes*. Relime: Revista Latinoamericana de investigación en matemática educativa.

GODINO, JUAN; RECIO, ANGEL; RUIZ, FRANCISCO y PAREJA, JUAN (2005). *Criterios de diseño y evaluación de situaciones didácticas basadas en el uso de medios informáticos para el estudio de las matemáticas.* Proyecto de investigación "Edumat-Maestros". Universidad de Granada.

GUZMÁN, MIGUEL de (2001). *Tendencias actuales de la Educación Matemática*. Sigma: revista de matemáticas = matematika aldizkaria. ISSN 1131-7787, Nº. 19, pags. 5-25

HERNÁNDEZ SAMPIERI, ROBERTO; COLLADO, CARLOS y BAPTISTA LUCIO, PILAR (1998) *Metodología de la Investigación*. Editorial Mc. Graw Hill. México.

JANKVIST, UFFE T. (2009). O*n empirical research in the field of using history in mathematics education.*Relime: Revista Latinoamericana de investigación en matemática educativa. Vol. 12(1).

MASSA ESTEVE, MARÍA R. (2004). *Aportacions de la història de la matemática a l'ensenyament de la matemática.* Revista BIAIX. Vol.21

NÁPOLES VALDÉZ, JUAN (2010). *Sobre la relación entre la Historia y la Educación Matemática*. Conferencia presentada en UTN. Facultad Regional General Pacheco. Buenos Aires.

PALAMIDESSI, MARIANO (2006). *La escuela en la sociedad de redes.* Buenos Aires, Fondo de Cultura Económica.

PÉREZ SANZ, ANTONIO (1995). *Las tecnologías audiovisuales: Hábitos perceptivos y enseñanza de la Geometría*. UNO.

PÉREZ SERRANO, GLORIA (1994). *Investigación cualitativa. Métodos y técnicas*. Fundación Universidad a distancia Hernandarias.

RICO LUIS, CASTRO ENCARNACIÓN Y OTROS (1997). *La educación matemática en la enseñanza secundaria.* Ed. Horsori. España.

RICO ROMERO, LUIS (coordinador) (1997). *La educación Matemática en la enseñanza secundaria*. Ed. Horsori: Universidad de Barcelona, Instituto de Ciencias de la Educación.

ROJANO, TERESA (2003). *Incorporación de entornos tecnológicos de aprendizaje a la cultura escolar: proyecto de innovación educativa en matemáticas y ciencias en escuelas secundarias públicas de México*. Revista Iberoamericana de Educación. Número 33.

SADOVSKY, PATRICIA; ALAGIA, HUMBERTO y BRESSAN, ANA (2005). *Reflexiones teórica para la Educación Matemática*. Ed. Del zorzal. Buenos Aires.

THOMPSON, A. G. (1992). *Teachers' beliefs and conceptions*: A synthesis of the research. In D. A. Grouws (Ed.), Handbook of research in mathematics teaching and learning (pp. 127-146). New York, NY: Macmillan.

TRIANA, ISRAEL (2000). *La Historia de la Matemática y de la ciencia como estrategia en la didáctica de resolución de problemas.* Revista de educación Universitaria. Vol.2.

TUERÉGANO MORATALLA, PILAR (1998). *Del área integral: Un estudio en el contexto educativo.* Enseñanza de las ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas, ISSN 0212-4521, Vol. 16, Nº 2, págs. 233-250

VYGOTSKI, LEV (1996). *El desarrollo de los procesos psicológicos superiores*. Grijalbo Mondadori, Barcelona.

ÍNDICE DE FIGURAS

ANEXOS

Anexo I

Planificaciones anuales, correspondientes al 3° año del nivel Polimodal.

Anexo II

Contenidos Básicos Comunes para la Educación polimodal.

Anexo I

Planificación: A

Espacio Curricular: Matemática
Curso: 3ro 3ra

Expectativas de logro: Utilizar los conceptos de límites, derivadas e integrales para resolver situaciones problemáticas, seleccionando los modelos y las estrategias de resolución en función de la situación planteada. Utilizar los conceptos de límite y derivada de funciones en el análisis y la resolución de problemas. Inculcar hábitos de estudio y normas de convivencia. Inducir a los alumnos a ser respetuosos y a cumplir con las normas de la escuela.						
Eje temático	Contenidos	Estrategias Didácticas y Metodológicas	Tiempo	Recursos	Instrumentos de evaluación	Criterios de evaluación
Límites y Continuidad Derivadas Integrales	Límite de una función. Asintotas. Límites indeterminados. Continuidad. Límites de sucesiones. Regla de L`Hospital. Derivada de una función en un punto. Propiedades de las derivadas. Fórmulas de las derivadas de funciones usuales. Derivadas de funciones compuestas. Crecimiento y decrecimiento de una función. Máximos y mínimos. Definición. Propiedades de	*Resolución de problemas. *Aplicación de propiedades. *Utilización de dinámicas grupales. *Exposición dialogada. *Puesta en común y debate de procedimientos y resultados. *Ejercitación ordenada, suficiente, variada y progresiva.	Marzo Abril Mayo Junio Julio Agosto Septiembre Octubre Noviembre El tiempo será distribuido de acuerdo a las necesidades del grupo.	*Bibliografía de consulta *Fotocopias *Calculadora *Software *Internet Bibliografía: Arroyo, Daniel - Berio, Adriana- D'Albano,Carina, "Matemática 3" Editorial, Puerto de Palos,2003. Itzcovich, Horacio - Novembre, Andrea "Matemática 2" Editorial,Tinta Fresca,2006. Itzcovich, Horacio - Novembre, Andrea "Matemática 3" Editorial,Tinta Fresca,2006. Altman, Silvia - Kurzrok, Liliana, "Matemática I Polimodal",libros: 1,2,5 y 6.	Con la observación sistemática y pautada del desempeño diario de los alumnos. *Por medio de producciones individuales y grupales (trabajos prácticos, evaluaciones orales y escritas). *Propiciando evaluaciones formuladas como situaciones Problemáticas que permitan evidenciar: la estructura conceptual de la información, las relaciones integradoras del conocimiento, la transferencia	*Disciplina, esfuerzo y perseverancia en el estudio y en el trabajo. *Valoración de la palabra ajena y el trabajo en equipo. *Valoración del trabajo matemático en la modelización de situaciones de la vida diaria. *Valoración y práctica de distintas estrategias de búsqueda, recolección y organización de información tratamiento de problemas y la colaboración

	las integrales definidas. Integración gráfica. Cálculo de integrales definidas. Valor medio. Cálculo de áreas.			Editorial, Longseller, 2005.	de los saberes adquiridos.	de tomar decisiones. *Valoración de la matemática en sus aspectos lógicos e industrial.

Planificación: B

Espacio Curricular: Matemática

Curso: 3^{ro} 2^{da}

Expectativas de logro:

Utilizar funciones para resolver situaciones problemáticas, seleccionando los modelos y las estrategias de resolución en función de la situación planteada.
Utilizar los conceptos de límite y derivada de funciones en el análisis y la resolución de problemas.
Inculcar hábitos de estudio y normas de convivencia.
Inducir a los alumnos a ser respetuosos y a cumplir con las normas de la escuela.

Eje temático	Contenidos	Estrategias Didácticas y Metodológicas	Tiempo	Recursos	Instrumentos de evaluación	Criterios de evaluación
Álgebra de funciones Límites y Continuidad Derivadas Curvas Planas	Funciones. Intervalos reales. Entornos. Dominio e Imagen. Representaciones gráficas. Límite de una función. Límites laterales. Propiedades. Asintotas. Límites indeterminados. Continuidad. Derivada de una función en un punto. Propiedades de las derivadas. Fórmulas de las derivadas de funciones usuales.	*Resolución de problemas. *Aplicación de propiedades. *Utilización de dinámicas grupales. *Exposición dialogada. *Puesta en común y debate de procedimientos y resultados. *Ejercitación ordenada, suficiente, variada y progresiva.	Marzo Abril El tiempo será distribuido de acuerdo a las necesidades del grupo. Mayo Junio Julio Agosto Septiembre Octubre Noviembre	*Bibliografía de consulta *Fotocopias *Calculadora *Software *Internet Bibliografía: Sadosky - Guber, " Cálculo diferencial e integral", Editorial Alsina, Argentina, 1980. Arroyo, Daniel - Berio, Adriana- D'Albano,Carina, "Matemática 3" Editorial, Puerto de Palos,2003. Itzcovich, Horacio - Novembre, Andrea "Matemática 2" Editorial,Tinta Fresca,2006. Itzcovich, Horacio - Novembre, Andrea "Matemática 3" Editorial,Tinta	Con la observación sistemática y pautada del desempeño diario de los alumnos. *Por medio de producciones individuales y grupales (trabajos prácticos, evaluaciones orales y escritas). *Propiciando evaluaciones formuladas como situaciones Problemáticas que permitan evidenciar: la estructura conceptual de la información, las relaciones integradoras del conocimiento, la	*Disciplina, esfuerzo y perseverancia en el estudio y en el trabajo. *Valoración de la palabra ajena y el trabajo en equipo. *Valoración del trabajo matemático en la modelización de situaciones de la vida diaria. *Valoración y práctica de distintas estrategias de búsqueda, recolección y organización de información tratamiento de problemas y la colaboración de tomar decisiones.

	Cónicas como lugar geométrico y como secciones de un cono de revolución. Ecuaciones de la circunferencia, la elipse, la hipérbola y la parábola.			Fresca,2006. Altman, Silvia - Kurzrok, Liliana, ”Matemática I Polimodal”,libros: 1,2,5 y 6. Editorial, Longseller, 2005.	transferencia de los saberes adquiridos. *Propiciando espacios de debates, a partir de los trabajos grupales.	*Valoración del lenguaje claro y preciso como expresión y organización el pensamiento. *Valoración de la matemática en sus aspectos lógicos e industrial.

Planificación: C

Espacio Curricular: Matemática

Cursos: 3º 4º/5º

TIEMPO	CONTENIDOS CONCEPTUALES	CONTENIDOS PROCEDIMENTALES	CONTENIDOS ACTITUDINALES	EVALUACIÓN
10 / 3 al 31 / 5	Conjuntos numéricos: operaciones y propiedades. Cálculo exacto y aproximado. Técnicas de redondeo y truncamiento, estimación de errores.	Resolución de problemas. Validación de los resultados obtenidos. Operar en distintos campos. Aplicar propiedades de las operaciones.	Ser personas activas y participativas, curiosas y constructivamente cuestionadoras en su proceso de aprendizaje.	Trabajo en clase. Resolución de
1 / 6 al 31 / 8	Logaritmos: notación. Resolución de logaritmos con calculadora. Propiedades de los logaritmos. Función logarítmica: asíntotas, gráfico, dominio, ceros, njunto de positividad y negatividad. Ecuaciones: exponenciales, logarítmicas. Resolución de problemas.	Resolución analítica y gráfica. Análisis de funciones. Interpretación de gráficos Modelización. Modelización. Resolución de ecuaciones. Resolución de problemas.	Lograr aceptar equivocarse y probar-ensayar, explorar e investigar encontrando mejores niveles de producción y reflexión. Valorar la investigación.	trabajos prácticos. Evaluaciones escritas.
1/ 9 Al 30 / 11	Revisión de: función lineal, cuadrática, exponencial, logarítmicas, polinómicas. Modelización de fenómenos del mundo real y de otras áreas usando Funciones.	Determinar dominio e imagen. Resolución analítica y gráfica. Análisis de funciones. Interpretación de gráficos	Lograr aceptar equivocarse y probar-ensayar, explorar e investigar producción y reflexión. Valorar la investigación.	Participación en trabajos grupales.

Planificación: D
Espacio Curricular: **Matemática**
Curso: **3º 3ra Polimodal**

Contenidos Procedimentales:

- Reconocer y operar los distintos campos numéricos
- Reconocer, analizar y operar con funciones de variable real.
- Resolver situaciones problemáticas relativo a las distintas funciones involucradas.
- Reconocer las distintas figuras geométricas.
- Resolver situaciones problemáticas que involucren nociones geométricas.
- Resolver problemas generando estrategias propias y ajenas, juzgando la validez de los razonamientos de sus pares.

Contenidos Actitudinales

- Motivar el entusiasmo por la matemática.
- Estimular el razonamiento.
- Estimular el sentido crítico para poder ser aplicado en la vida cotidiana.
- Generar confianza en los alumnos para resolver problemas.
- Incentivar el trabajo grupal.
- Estimular la capacidad de razonar para defender ideas y poder eventualmente modificar los modelos que sustentan determinadas convicciones.
- Capacitar para el uso correcto del lenguaje matemático.

Expectativas de Logro:

- Desarrollar habilidades y estrategias para el abordaje de situaciones problemáticas.
- Formular situaciones problemáticas.
- Predecir y validar resultados y factibilidad de resolución.
- Diseñar algoritmos y estrategias de resolución de situaciones problemáticas.
- Relacionar la metodología de resolución de problemas con otros espacios curriculares y situaciones de la vida real en función de la orientación elegida.
- Comunicar los resultados obtenidos en forma escrita y oral.
- Resolución de problemas seleccionando, generando estrategias, aplicando y justificando matemáticamente los razonamientos propios y ajenos, utilizando el lenguaje y la notación adecuada para la comunicación de los argumentos relacionados con las soluciones propuestas a los problemas resueltos.

Contenidos conceptuales:

- **Funciones**: relaciones entre variable, dependencia funcional en una expresión algebraica de dos variables, expresión a través de fórmulas, tablas, gráficos. Análisis del comportamiento global de funciones y en entornos reducidos. Interpretación de gráficos. lineales, cuadráticas, racionales, polinómicas, trigonométricas

- **Ecuaciones:** concepto de ecuación. Ecuaciones lineales y racionales. Ecuaciones cuadráticas. Sistema de ecuaciones lineales. Sistema de ecuaciones mixtos.

- **Trigonometría**: sistema circular de medición de ángulos. Valores de las relaciones trigonométricas de los ángulos fundamentales. Valor exacto y aproximado. Resolución de triángulos rectángulos y no rectángulos.

- **Conceptos geométricos** básicos: noción de distancia. Figuras planas: triángulos, cuadriláteros, polígonos regulares, círculo y circunferencia. Cuerpos: cubo, prisma recto, cilindro circular recto, pirámide, esfera. Propiedades: perímetro, área, volumen.

Estrategias metodológicas

Como estrategia didáctica, esta propuesta apunta a que los alumnos desarrollen la capacidad de reflexionar y resolver situaciones cotidianas a partir del análisis de problemas donde puedan poner en juego los marcos teóricos y el diseño de alternativas de acción que evidencien creación y reflexión.

Para ello, se pretende introducir el tema de los problemas de matemáticas, acertijos y las dificultades que se les presentan para su solución.

Puesta en común a través de cuadros, gráficos y exposición oral de las conclusiones.

Técnica de trabajo

Resolver situaciones problemáticas utilizando problemas disparadores de las distintas nociones involucradas, aplicando métodos inductivos, deductivos, falsos supuestos, por analogía, etc.

Recursos

Tiza, pizarrón, calculadoras científicas, libros, PC, Internet.

Evaluación:

Entendiendo a la evaluación como un proceso continuo, serán evidencias de aprendizajes:
- Su participación en clase, incluyendo la propiedad y adecuación en el empleo de la terminología técnica de la disciplina.
- La elaboración y entrega oportuna de las producciones requeridas, tanto grupales como individuales, que formarán parte de la carpeta de trabajos.
- Asistencia obligatoria.
- Aprobación de evaluaciones parciales, que se llevará a cabo a lo largo del año.

Aprobación de una evaluación sumativa, comprendiendo los temas dados a lo largo de todo el año.

Planificación: E
Espacio Curricular: **Matemática**
Curso: **3º 3ra Polimodal**

Contenidos Procedimentales:

- Reconocer y operar los distintos campos numéricos
- Reconocer, analizar y operar con funciones de variable real.
- Resolver situaciones problemáticas relativo a las distintas funciones involucradas.
- Reconocer las distintas figuras geométricas.
- Resolver situaciones problemáticas que involucren nociones geométricas.
- Resolver problemas generando estrategias propias y ajenas, juzgando la validez de los razonamientos de sus pares.

Contenidos Actitudinales

- Motivar el entusiasmo por la matemática.
- Estimular el razonamiento.
- Estimular el sentido crítico para poder ser aplicado en la vida cotidiana.
- Generar confianza en los alumnos para resolver problemas.
- Incentivar el trabajo grupal.
- Estimular la capacidad de razonar para defender ideas y poder eventualmente modificar los modelos que sustentan determinadas convicciones.
- Capacitar para el uso correcto del lenguaje matemático.

Expectativas de Logro:

- Desarrollar habilidades y estrategias para el abordaje de situaciones problemáticas.
- Formular situaciones problemáticas.
- Predecir y validar resultados y factibilidad de resolución.
- Diseñar algoritmos y estrategias de resolución de situaciones problemáticas.
- Relacionar la metodología de resolución de problemas con otros espacios curriculares y situaciones de la vida real en función de la orientación elegida.
- Comunicar los resultados obtenidos en forma escrita y oral.
- Resolución de problemas seleccionando, generando estrategias, aplicando y justificando matemáticamente los razonamientos propios y ajenos, utilizando el lenguaje y la notación adecuada para la comunicación de los argumentos relacionados con las soluciones propuestas a los problemas resueltos.

Contenidos conceptuales:

Ecuaciones: características de una ecuación. Ecuaciones de primer grado. Ecuaciones con expresiones racionales. Ecuaciones de segundo grado. Ecuaciones con expresiones racionales de segundo grado. Situaciones problemáticas.

Conceptos geométricos básicos: los cincos postulados. Noción de punto, plano y recta en el plano. Figuras planas: triángulos, cuadriláteros, polígonos regulares, círculo y circunferencia. Espacio tridimensional: plano, punto, recta en el espacio. Propiedades: perímetro, área, volumen.

Ecuación de la recta: ecuación de una recta en el plano. Forma explícita, implícita y segmentaria. Pendiente y ordenada al origen. Representación gráfica. Recta que pasa por dos puntos. Rectas paralelas y perpendiculares. Sistemas de ecuaciones lineales. Sistema de ecuaciones mixtos.

Logaritmo y Exponencial: funciones logarítmica y exponencial. Función inversa. Caracterización de las funciones exponenciales y logarítmicas. Interpretación de gráficos. Modelización de fenómenos del mundo real a través del empleo de funciones. Resolución de cálculos y ecuaciones a partir de la aplicación de las propiedades.

Cónicas: cónicas como lugar geométrico y como secciones de un cono de revolución. Ecuaciones de la circunferencia. Ecuaciones de la elipse. Ecuaciones de la hipérbola. Ecuaciones de la parábola. Interpretación geométrica de la ecuación de una cónica.

Estrategias metodológicas

Como estrategia didáctica, esta propuesta apunta a que los alumnos desarrollen la capacidad de reflexionar y resolver situaciones cotidianas a partir del análisis de problemas donde puedan poner en juego los marcos teóricos y el diseño de alternativas de acción que evidencien creación y reflexión.

Para ello, se pretende introducir el tema de los problemas de matemáticas, acertijos y las dificultades que se les presentan para su solución.

Puesta en común a través de cuadros, gráficos y exposición oral de las conclusiones.

Técnica de trabajo

Resolver situaciones problemáticas utilizando problemas disparadores de las distintas nociones involucradas, aplicando métodos inductivos, deductivos, falsos supuestos, por analogía, etc.

Recursos

Tiza, pizarrón, calculadoras científicas, libros, PC, Internet.

Anexo II

MINISTERIO DE CULTURA Y EDUCACION DE LA NACION

CONSEJO FEDERAL DE CULTURA Y EDUCACION

CONTENIDOS BASICOS COMUNES PARA LA EDUCACION POLIMODAL

Matemática

República Argentina

I. Introducción

La Formación General del fundamento de matemática brinda conocimientos básicos para todas las modalidades. Tal como lo establece la Ley Federal de Educación N 24.195, se trata de que los jóvenes adquieran competencias para su desenvolvimiento como ciudadanos y ciudadanas, para su inserción en el mundo del trabajo y para continuar estudiando, ya sea en el nivel superior o en relación con los procesos de trabajo en los que les toque participar.

Los contenidos de la EGB que se recuperan deberán ser ampliados y profundizados, ya sea para mejorar su organización, su forma de comunicación o su aplicación a nuevos temas o problemas; de manera que el alumno/a pueda acceder a un mayor nivel de sistematización, integración y abstracción en lo conceptual y metodológico. Para ello, se pondrá especial énfasis tanto en la cohesión interna de esta disciplina -atreves de las miradas múltiples pero no contradictorias hacia conceptos únicos- como en su significatividad y funcionalidad -dada por su conexión con el mundo real, con otras disciplinas y entre sus diversas ramas-. Se tendrá en cuenta también, en los temas en que aparezca como útil e incluso necesario, el tratamiento desde problemas directamente relacionados con la modalidad en que se trabaja.

Es así que se profundiza el estudio de los números reales, ya trabajados en la EGB, y se extiende el campo numérico a los números complejos; se amplía el estudio de las funciones y su comportamiento en relación tanto a sus gráficos como a su expresión analítica, incursionando brevemente en nociones de cálculo infinitesimal.

Se ahonda en el estudio de las ecuaciones como lenguaje algebraico, íntimamente ligado a las funciones polinómicas, curvas planas, rectas y cónicas, y como herramientas útiles en la modelización de situaciones problemáticas provenientes de diversos ámbitos.

Los contenidos proponen también una sistematización de los temas de probabilidades y estadística para variable discreta, tendiente a la utilización de estos elementos en la toma de decisiones.

Desde los procedimientos generales se plantea el acceso, ligado a las posibilidades e intereses de cada uno, a la forma de trabajo propia de esta ciencia, destacando la comprensión conceptual -mostrando la multiplicidad de usos y la presentación con distinto grado de abstracción de los contenidos a estudiar- y el gusto por hacer matemática –resaltando la faz lúdica de esta disciplina.

El desarrollo de estos temas, el acceso a la construcción histórica de algunos de ellos, y su tratamiento y utilización en diferentes ámbitos y de diferentes maneras, se realizara en relación a la resolución de problemas con variedad de estrategias, atendiendo especialmente a los procesos de modelización, que incluyen generar el modelo matemático, resolverlo y validar su solución en la situación original, analizando las limitaciones del mismo y permitiendo hacer predicciones, y al uso de nuevas tecnologías como medio de explorar contenidos en el aula, y de avanzar en el estudio independiente (realizando investigaciones de su interés, probando ejemplos adicionales, recopilando datos para proyectos). Esta forma de trabajo, además de proveer a los alumnos y las alumnas de las herramientas matemáticas necesarias para avanzar en el estudio de las otras ciencias, acercara a los mismos a las formas de trabajo de la disciplina, permitiéndoles valorarlas y utilizarlas tanto para la formación de la propia personalidad como para el mejoramiento de la sociedad.

II. Organización de los CBC de Matemática para la Educación Polimodal

Esta organización está pensada para presentar los CBC y no prescribe una organización curricular para su enseñanza. Los CBC de Matemática para la Educación Polimodal se organizan en los siguientes bloques:

Bloque 1: Números y funciones.

Bloque 2: Algebra y geometría.

Bloque 3: Estadística y probabilidad.

Bloque 4: Contenidos procedimentales del quehacer matemático.

Bloque 5: Contenidos actitudinales.

Respecto de la organización en bloques cabe señalar:

a) Los bloques permiten integraciones e interconexiones mediante la selección de temas que integren diferentes enfoques.

b) Los bloques 4 (de contenidos procedimentales) y 5 (de contenidos latitudinales) han de vincularse permanentemente con los contenidos de los bloques restantes.

En la caracterización de cada bloque se detalla:

- una síntesis explicativa de los contenidos a desarrollar;

- las expectativas de logros al finalizar la Educación Polimodal (este punto se exceptúa en el bloque de contenidos latitudinales);
- una propuesta de alcance de los contenidos.

III. Caracterización de los bloques de Matemática para la Educación Polimodal

Bloque 2: Algebra y Geometría

Síntesis explicativa:

A diferencia de su tratamiento en la EGB como lenguaje, en el Nivel Polimodal el álgebra se trabajara en su marco lógico específico y en su consistencia, es decir, no solo como lenguaje sino también como método para la resolución de problemas. El alumno y la alumna deben ampliar su visión tanto de los objetos matemáticos (puntos, vectores, polinomios, etc.) como de las operaciones (incluyéndose en ellas la composición de funciones, la disyunción o la conjunción lógicas, etc.) que pueden estar representados por sistemas formales. Esta comprensión de la representación algebraica es lo que posibilita un trabajo formal aplicable a todas las ramas de la matemática y a situaciones provenientes de otras ciencias.

Los contenidos de este bloque deben trabajarse tanto desde la intuición geométrica como desde otras perspectivas (algebraica, analítica, etc.), no descartándose el uso de modelos físicos y de programas de computación adecuados para su tratamiento numérico.

El álgebra como medio de representación, encuentra su utilidad inmediata en la traducción de relaciones cuantitativas a las ecuaciones y a los gráficos de las funciones involucradas. El uso de ecuaciones en modelos matemáticos da lugar a posibles generalizaciones (interpolar y extrapolar valores, analizar y predecir comportamientos, etc.). Es en este marco que adquieren especial relevancia las funciones poli nómicas como herramientas para representar situaciones funcionales en una variable (real) que describen situaciones de la vida real desde las ecuaciones poli nómicas.

Las calculadoras, calculadoras graficad oras y computadoras son una herramienta útil para comprender y valorar los procedimientos de cálculo de raíces de polinomios por métodos gráficos y métodos iterativos (como el de aproximaciones sucesivas), la determinación de dominio e imagen de funciones relacionados con los posibles valores de las variables en juego, etc. Los vectores en el plano y el espacio, que se trabajan tanto desde sus aplicaciones (como representativos de fuerzas, traslaciones, velocidades, etc.) como desde la geometría (como generadores de rectas), permiten relacionar nuevamente diferentes expresiones de un mismo objeto geométrico. Es importante que el alumno y la alumna logren recuperar las nociones de distancia y Angulo (y con ella las de paralelismo y perpendicularidad) que ya han utilizado en la EGB, y que puedan trabajar indistintamente con diferentes representaciones de un mismo objeto según las necesidades. En este marco se introducen las nociones de producto escalar y vectorial.

Las cónicas trabajadas desde ópticas diferentes (como intersecciones planas de una superficie cónica, como lugares geométricos y a través de sus ecuaciones), además del valor intrínseco como representativas de situaciones problemáticas reales (orbitas planetarias, trayectorias de proyectiles, curvatura de espejos, etc.) contribuyen a formar en el alumno la capacidad de elegir el ámbito matemático más conveniente, es decir, seleccionar el contexto matemático en el que miran el objeto según que les interesa del mismo.

Un uso adecuado de recursos audiovisuales e informáticos para el desarrollo de los temas geométricos, afianzara la percepción espacial de los alumnos y las alumnas, constituyendo también un instrumento de acceso al conocimiento.

Expectativas de logros

Al finalizar la Educación Polimodal, los estudiantes estarán en condiciones de:

- Utilizar funciones, ecuaciones, inecuaciones y sistemas sencillos para resolver situaciones problemáticas, seleccionando los modelos y las estrategias de resolución en función de la situación planteada.
- Saber trabajar con vectores en el plano y en el espacio y con curvas planas, pudiendo seleccionar la representación adecuada a la situación problemática a resolver.

Propuesta de alcance de los contenidos Conceptuales

Ecuaciones e inecuaciones. Formas de resolución de ecuaciones, inecuaciones y sistemas (analítica, grafica, etc.).

Funciones polinómicas en una variable. Operaciones. Raíces de una función poli nómica. Vectores en el plano y en el espacio. Operaciones: suma y producto por un escalar, producto interno (escalar) en el plano, producto interno y vectorial en el espacio.

Curvas planas. Ecuaciones de la recta y el plano. Cónicas como lugar geométrico y como secciones de un cono de revolución. Ecuaciones de la circunferencia, la elipse, la parábola y la hipérbola.

Procedimentales

Modelización de situaciones problemáticas expresando las condiciones como ecuaciones o sistemas de ecuaciones y/o inecuaciones (por ejemplo, problemas de programación lineal). Resolución analítica y gráfica, por distintos métodos, de ecuaciones de primer grado con dos incógnitas; sistemas de dos y tres ecuaciones y/o inecuaciones de primer grado; ecuaciones e inecuaciones de segundo grado (y de mayor grado reducibles a estas); ecuaciones logarítmicas, exponenciales y trigonométricas (casos simples); sistemas de dos ecuaciones (una de ellas no lineal).

Comparación de métodos y discusión del número de soluciones en la resolución de distintos tipos de ecuaciones, inecuaciones y sistemas.

Resolución de ecuaciones usando las propiedades de las funciones (por ej. logarítmica y exponencial).

Operaciones con vectores del plano y del espacio, descomposición y composición de vectores, determinación de modulo y dirección, su utilización en la resolución de problemas. Relaciones entre la ecuación general de la recta y su grafico (variaciones del grafico según cambian los parámetros de la ecuación, pendiente, cantidad de datos necesarios para determinar una recta y obtener su ecuación, generadores de rectas en el plano), distintas formas de representar una recta (ecuación general o vectorial en el plano, generador o ecuaciones en el espacio).

Establecimiento de las relaciones entre el producto vectorial y la normal a un plano y el producto interno o escalar y la distancia, resolviendo problemas que involucren el cálculo de distancias (entre dos puntos, un punto y una recta, un punto y un plano) y ángulos (entre vectores, formado por dos rectas).

Determinación de la ecuación de una cónica definida como lugar geométrico y de intersecciones entre cónicas y rectas.

Bloque 4: Contenidos procedimentales del quehacer matemático

Síntesis explicativa:

Estos procedimientos, que se corresponden con los del bloque de procedimientos generales para la EGB, buscan poner al alumno y la alumna en condiciones de sistematizar y formalizar conocimientos, conceptos, información, etc., acercándolo a hacer matemática del modo como la hacen los matemáticos profesionales. Por ser independientes del tema específico de que se trate, son generales y transversales a todos los bloques anteriores.

En los alcances correspondientes a este bloque se presenta una síntesis categorizada de los que ya han sido tratados ampliamente en el documento de los CBC para la EGB, desarrollando aquellos más ligados a las formas de trabajo de la disciplina.

Cuanto más haya progresado el estudiante en las distintas ramas de la matemática y sus conexiones, más conciencia tomara de la naturaleza abstracta y múltiple de los objetos que maneja. Al mismo tiempo, irán cobrando significado y valor las formas de trabajo, que la hacen avanzar tanto en el plano de la abstracción como en el de la aplicación misma.

La presentación de sistemas axiomáticos (del ámbito de la geometría o del algebra) con pocos axiomas, su uso como modelos de situaciones -no solo de dentro de la matemática sino también de ámbitos ajenos a ella-, la deducción, demostración e interpretación de algunos teoremas sencillos, ayudarán a los estudiantes a comprender la naturaleza de la prueba deductiva y la riqueza de esta ciencia. Diferenciar las formas de prueba, conjetura y justificación válidas para la matemática de las que lo son en otras ciencias (por ejemplo las ciencias fácticas) en estrecha relación con los contenidos de lógica y epistemología del capítulo de humanidades, los acercara al uso correcto de los métodos y del lenguaje correspondiente al ámbito en que trabajan.

La historia de la matemática constituye un valioso aliado para mostrarla como un proceso de construcción humana, lento y laborioso, con contribuciones diversas, que se libera poco a poco de la experiencia sensible tendiendo a una mayor generalidad, unidad y armonía.

Los alcances de este bloque estarán estrechamente ligados a las vinculaciones logradas por los estudiantes con la disciplina y a sus intereses y posibilidades, ya que, de acuerdo con los mismos, se podrá elegir que rama de la matemática trabajar, los ejemplos adecuados y los niveles de problemas para que todos puedan tener alguna experiencia en el tema.

Las categorías consideradas son:

- Respecto de la investigación y resolución de problemas.
- Respecto del razonamiento matemático.
- Respecto de la comunicación.

Expectativas de logros

Al finalizar la Educación Polimodal, los estudiantes estarán en condiciones de:

- Resolver problemas seleccionando y/o generando estrategias; juzgar la validez de razonamientos y resultados y utilizar el vocabulario y la notación adecuados en la comunicación de los mismos.

Propuesta de alcance de los contenidos

Respecto de la investigación y resolución de problemas Formulación de problemas y situaciones. Creación y desarrollo de estrategias para la resolución de problemas (descripción de un patrón, construcción de tablas, construcción de gráficos, análisis sistemático de posibilidades, reducción a problemas más simples, actuar o experimentar). Predicción, estimación y verificación de resultados y procedimientos.

Respecto del razonamiento matemático

Desarrollo de notación y vocabulario, elaboración de definiciones. Simulación y desarrollo de algoritmos y modelización (nociones de interpretación y modelo, relaciones entre el modelo y la situación que modélica, validación de la solución del modelo en la situación original, limitaciones del modelo, desarrollo de modelos para resolver situaciones problemáticas concretas). Relaciones, generalizaciones, particularizaciones y aplicaciones de resultados (ejemplificaciones de razonamientos paradójicos).

Diferenciación de las formas de prueba, conjetura y justificación en las ciencias fácticas y formales. Demostraciones (distinción entre métodos de demostración directos e indirectos, por el absurdo, uso de contraejemplos para negar afirmaciones, interpretación de la afirmación y la negación de los conectivos lógicos y de los cuantificadores, demostraciones simples). Axiomatización (interpretación de un sistema formal determinado por un reducido número de axiomas y deducción valida de enunciados).

BIOGRAFÍA DEL AUTOR

Soraya Buccino, profesora de Matemática, nacida el 01 de Mayo de 1975 en la Provincia de Buenos Aires.

En el año 1993 obtiene el Título de Técnica en Electrónica, otorgado por la E.E.T. N°1 de José C. Paz.

En el año 1995 ingresa a la carrera de Analista de Sistemas y dos años después obtiene el título de Operadora de Equipos de PC otorgado por el I.S.F.T. y D. N°182.

En el año 1997 comienza a trabajar como docente en el área de Informática y Matemática. Dos año después abandona la carrera de Analista de Sistemas para ingresa al profesorado de Matemática.

En el año 2002 realiza la Capacitación docente para Técnicos en el Instituto Superior Fundación Suzuki.

En el año 2004 obtiene el título de Profesora de Matemática otorgado por el I.S.F.D N°42 y se le entrega, el mismo año, el *Premio al mérito* por el desempeño a lo largo de la carrera.

En el año 2005 ingresa a la UTN Facultad Regional Pacheco para cursar la Licenciatura en Enseñanza de la Matemática. Desde entonces ha participado en Congresos (**VIII** Conferencia Argentina de Educación Matemática, **IV Congreso** Iberoamericano de Cabri, **I** Encuentro Nacional sobre Enseñanza de la Matemática), a través de propuestas vinculadas a entornos digitales y Software de Geometría Dinámica (Cabri II y 3D).

En el año 2008 formó parte del Comité organizador y evaluador de las propuestas para **el IV Congreso Iberoamericano de Cabri**, llevado a cabo en la ciudad de Córdoba, Argentina.

Actualmente es integrante del Proyecto de Investigación sobre *La reformulación de la enseñanza de conceptos de Matemática en carreras de Ingeniería utilizando Geometría Dinámica* (Red Geométrica), desarrollado en la UTN (Facultad Regional Pacheco).

Se desempeña como docente en el área de Matemática en la E.E.M N°5 de Pilar y en la UNM (Universidad Nacional de Moreno).