

INVESTIGACIÓN SOBRE EL APRENDIZAJE DE LA
MODELIZACIÓN GEOMÉTRICA DE LA INTERPRETACIÓN DE
LA DANZA CLÁSICA, EN UN CONTEXTO DE GEOMETRÍA
DINÁMICA.

Carrera: Licenciatura en Enseñanza de la Matemática

Tesina para la obtención de título de Licenciada en Enseñanza de la Matemática

Autora: Mariela Stella Maris Boccioni

Profesora de Matemática y Astronomía

Directora: Alicia Noemí Fayó

Magister en Enseñanza de la Matemática

Co-directora: Claudia Soraya Buccino

Licenciada en Enseñanza de la Matemática

2015

PLANEAMIENTO Y RESUMEN

Las Escuelas de Arte en nuestro país ofrecen al alumnado, además de una carrera específica en dicha modalidad, la posibilidad de cursar el bachillerato en la misma institución. Se observa habitualmente cierto desinterés por las materias relacionadas con las ciencias. Consideramos que esta situación es el producto de no ofrecer los beneficios que estos estudios tienen para la especialidad artística que siguen. En el caso de Matemática y Danzas, hemos recurrido a la modelización en 3 dimensiones, con el objetivo de mostrar a los futuros bailarines la importancia que tiene el conocimiento científico en su preparación. Obtuvimos como resultados despertar el interés en el alumnado y el reconocimiento de la utilidad que les reporta el conocimiento de la Matemática.

AGRADECIMIENTOS

Agradezco a todas las personas que hicieron posible este proyecto tan importante en mi carrera docente. A mis padres que me alentaron a seguir estudiando y estuvieron siempre a mi lado. A mi novio que me contuvo, me acompañó y me aconsejó durante el proceso de creación. A mi nona que de cierta forma me dio fuerzas para seguir.

Le agradezco inmensamente a mi directora de tesina Alicia Noemí Fayó. Ella fue mi docente en Fundamentos de la Geometría y mi más grato recuerdo fue su mirada y su sonrisa cuando expuse el tema “ángulos por inversión”. Desde ese momento supe que ella sería mi directora de tesina. Durante estos tres años de trabajo fue el pilar que me sostuvo en los momentos de incertidumbre y de cansancio. Siempre estuvo a mi lado, aún a la distancia y compartió conmigo los frutos de este trabajo. Sin ella no hubiese podido lograrlo.

A mi co-directora Soraya Buccino le agradezco el tiempo que me brindó y sus consejos.

Le agradezco a los directivos de la Escuela de Danzas Aída V. Mastrazzi que me apoyaron para desarrollar este trabajo en su institución, y a las profesoras que me brindaron sus opiniones y sugerencias.

A la docente Cecilia Barros Tomé que le dedicó su tiempo y esfuerzo a la experimentación.

A mis compañeras de Licenciatura que me alentaron y me acompañaron en toda la carrera.

ÍNDICE

1. CAPÍTULO 1: TEMA DE INVESTIGACIÓN	7
1.1. INTRODUCCIÓN.....	7
2. CAPÍTULO 2: PREGUNTAS DE INVESTIGACIÓN	9
3. CAPÍTULO 3: OBJETIVOS DE INVESTIGACIÓN	10
3.1. OBJETIVOS GENERALES.....	10
3.2. OBJETIVOS ESPECÍFICOS.....	10
4. CAPÍTULO 4: ESTADO DEL ARTE	11
4.1. LAS PROPORCIONES EN EL CUERPO.....	11
4.2. LAS RELACIONES ENTRE MATEMÁTICA Y DANZA.....	14
4.3. MODELOS GEOMÉTRICOS EN LA DANZA.....	18
4.3.1. DANZA MODERNA: RUDOLF LABAN.....	18
4.3.2. TANGO: RODOLFO DINZEL.....	22
4.3.3. DANZA CLÁSICA.....	28
5. CAPÍTULO 5: MARCO TEÓRICO.	
DESDE UN ENFOQUE INTERPRETATIVO	33
5.1. LA TEORÍA DE SITUACIONES DIDÁCTICAS DE GUY BROUSSEAU.....	33
5.2. LA MODELIZACIÓN MATEMÁTICA.....	35
5.3. LAS DIFICULTADES Y ERRORES EN MATEMÁTICA.....	36
5.4. HABILIDADES GEOMÉTRICAS DE LOS ESTUDIANTES.....	42
5.5. EL USO DE LAS TIC EN LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA.....	44
5.5.1. ELECCIÓN DEL SOFTWARE.....	46
6. CAPÍTULO 6: METODOLOGÍA DE INVESTIGACIÓN	47
6.1. LA INGENIERIA DIDÁCTICA.....	47

6.2. LAS FASES EN NUESTRA INVESTIGACIÓN.....	49
6.2.1 ANÁLISIS PRELIMINARES.....	49
6.2.1.1 DIMENSIÓN EPISTEMOLÓGICA.....	49
6.2.1.2 DIMENSIÓN COGNITIVA.....	49
6.2.1.3 DIMENSIÓN DIDÁCTICA.....	52
6.2.2 ANÁLISIS A PRIORI.....	53
6.2.2.1 ACTIVIDADES PREVIAS.....	54
6.2.2.2 ACTIVIDADES PARA LA EXPERIMENTACIÓN.....	56
6.2.2.2.1 ACTIVIDAD 1.....	56
6.2.2.2.2 ACTIVIDAD 2.....	61
6.2.2.2.3 ACTIVIDAD 3.....	64
6.2.2.2.4 ACTIVIDAD 4.....	69
6.2.2.2.5 ACTIVIDAD 5.....	74
6.2.2.2.6 ACTIVIDAD 6.....	76
6.2.3 EJECUCIÓN DE LA EXPERIMENTACIÓN.....	77
6.2.4 ANÁLISIS A POSTERIORI.....	119
6.2.4.1 ACTIVIDAD 1.....	120
6.2.4.2 ACTIVIDAD 2.....	124
6.2.4.3 ACTIVIDAD 3.....	128
6.2.4.4 ACTIVIDAD 4.....	133
6.2.4.5 ACTIVIDAD 5.....	137
6.2.4.6 ACTIVIDAD 6.....	139
7. CAPÍTULO 7: CONCLUSIONES Y PROPUESTAS PARA EL FUTURO.....	141
8. CAPÍTULO 8: GLOSARIO DE DANZA.....	144

9. CAPÍTULO 9: BIBLIOGRAFÍA	147
10. CAPÍTULO 10: ANEXO	152
10.1. TRADUCCIONES.....	152
10.2. DETALLE POR AÑO DE LOS CONOCIMIENTOS EN DANZA DE LAS ALUMNAS.....	154
10.3. ENCUESTAS A LAS ALUMNAS.....	155
10.4. ENTREVISTAS A DOCENTES.....	158

1. CAPÍTULO 1: TEMA DE INVESTIGACIÓN

1.1. INTRODUCCIÓN

La Ciudad Autónoma de Buenos Aires posee una variedad de establecimientos con formación específica en el nivel medio. Entre ellas encontramos las escuelas artísticas con especialidad en: danzas, teatro, bellas artes, música y cerámica. Todas tienen en su estructura un bachillerato orientado o no, en arte.

Nuestra vocación nos llevó a desempeñar la tarea docente en una de estas instituciones, específicamente en la Escuela de Danzas “Aida Victoria Mastrazzi”. Año tras año observamos el desinterés por la Matemática, puesto que los estudiantes creen que para ser bailarines no necesitan saber dicha materia. Desde una postura de investigador nos cuestionamos: ¿Cómo realizar un aporte a la enseñanza de la Matemática para incentivar el interés¹ de aquellas personas que tienen como vocación la Danza? ¿Qué conceptos matemáticos pueden ser útiles para ellos?

Como primer paso rastreamos los trabajos que se realizaron sobre la conexión de Danza y Matemática, que detallamos en el estado del arte. A partir de esto creamos un camino para responder nuestras preguntas. Entendemos que la clave está en lograr la visualización geométrica, por parte del alumno, del movimiento corporal. Ahí encontrarán formas, figuras, cuerpos geométricos, medida, proporcionalidad, velocidad, entre otros conceptos, para llegar finalmente a la noción que es eje de la currícula: “construir un modelo matemático de la realidad”. Nuestra investigación se encuadró bajo el marco de la Teoría de Situaciones Didácticas (STD) (Brousseau, G. 2007) con el fin de que los alumnos creen un modelo geométrico de la bailarina de Danza Clásica.

¹ Según la RAE interés es la inclinación del ánimo hacia un objeto, una persona, una narración, etc. Extraído el 25 de marzo de 2015 desde <http://lema.rae.es/drae/?val=inter%C3%A9s>

Aclaremos que nuestro trabajo apuntó al estudio de la Danza Clásica, pero bien puede ser utilizado para otras danzas con sus respectivas modificaciones.

Acotando nuestro tema de investigación a la modelización realizamos las preguntas que detallamos a continuación.

2. **CAPÍTULO 2: PREGUNTAS DE INVESTIGACIÓN**

- ¿Cómo utilizar el concepto de modelización geométrica para que sea de utilidad al bailarín de Danza Clásica?
- ¿Qué estrategias utilizarán los alumnos al abordar el estudio de la modelización matemática, mediante la creación de un modelo geométrico de la interpretación de la Danza Clásica utilizando Geometría Dinámica?
- ¿Cuáles son los errores o dificultades que tendrán los alumnos al construir el concepto de modelización en este nuevo contexto?
- ¿Qué ventajas ofrecerá el análisis del modelo geométrico de la interpretación de la Danza Clásica a la enseñanza de la modelización matemática utilizando Geometría Dinámica?

3. CAPÍTULO 3: OBJETIVOS DE INVESTIGACIÓN

3.1. OBJETIVOS GENERALES

- Realizar un aporte a la enseñanza del concepto de modelización matemática en las Escuelas de Danzas de la Ciudad Autónoma de Buenos Aires, mediante la creación, por parte de los alumnos, del modelo geométrico en la interpretación de la Danza Clásica, utilizando Geometría Dinámica.

3.2. OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Elaborar una propuesta didáctica que facilite y colabore con el aprendizaje de la modelización matemática, mediante la creación de un modelo geométrico de la interpretación de la Danza Clásica, utilizando Geometría Dinámica.
- Describir cuáles son las estrategias que utilizan los alumnos al crear de un modelo geométrico de la interpretación de la Danza Clásica, utilizando Geometría Dinámica.
- Analizar y caracterizar los errores y dificultades que tienen los alumnos al construir el concepto de modelización en este nuevo contexto.

4. CAPÍTULO 4: ESTADO DEL ARTE

4.1. LAS PROPORCIONES EN EL CUERPO

Antes de comenzar con el análisis matemático de las danzas, es necesario hablar sobre el estudio del cuerpo humano. En nuestra investigación pretendemos crear un modelo de la interpretación de la Danza Clásica y para esto, debemos construir a escala el cuerpo humano (que será nuestra bailarina) en el software Cabri 3D. Investigando hallamos el concepto de canon² que está asociado al ideal de belleza, caracterizado por la proporcionalidad y la simetría del cuerpo. Los egipcios usaron esta noción para representar esculturalmente la figura humana. Por ejemplo para ellos la altura era 18 veces el tamaño del puño (dos para el rostro, diez desde los hombros a las rodillas y seis desde éstas hasta los pies). El arquitecto romano Vitruvio (siglo I a.C.) fue el primero que plasmó en un tratado sobre arquitectura, las medidas y proporciones ideales de la belleza de la construcción, nombrando también las del cuerpo humano.

En la antigua Grecia el escultor Policleto en su libro titulado el Kanon (de ahí proviene el término canon), determinó como unidad de medida la cabeza y con esto la altura de un hombre equivale a 7 cabezas. Muchos artistas renacentistas investigaron y teorizaron acerca de los cánones haciendo al hombre más alto y esbelto o más bajo y corpulento. Estos variaron según la moda o la tendencia de la época y de la sociedad. Leonardo Da Vinci retomando la idea de Marco Vitruvio (I a. C) realizó un dibujo que lo

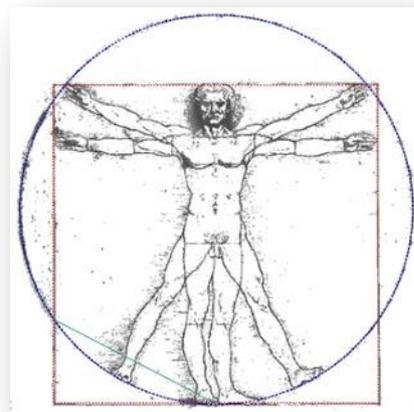


Fig.1. Hombre Vitruvio

denominó el “Hombre Vitruvio” (Fig. 1). En éste detalló las proporciones de cada parte del

² Según la RAE el canon es: Regla de las proporciones de la figura humana, conforme al tipo ideal aceptado por los escultores egipcios y griegos. Extraído el 25 de marzo de 2015 de <http://lema.rae.es/drae/srv/search?id=2aviZKEFKDXX2Sr7hZvY>

cuerpo, como por ejemplo: la cabeza, desde la barbilla hasta su coronilla, mide la octava parte de todo el cuerpo. Esto significa que el cuerpo, equivale a 8 cabezas. Aquí no detallaremos todas las proporciones descritas por Vitruvio ya que sólo nos interesan las de los brazos, piernas, tórax, cabeza y cuello, pero no las específicas como la medida de la mano, partes de la cara u otras. Nuestra representación no tendrá tantos detalles.

Las proporciones armónicas que detalló Da Vinci son actualmente las más acertadas. En la figura 1 se observa que el cuerpo humano con los brazos extendidos paralelos al suelo y los pies juntos se inscribe en un cuadrado cuyo lado mide igual que la altura del hombre y el centro son los genitales. En cambio, el individuo con los brazos levantados y las dos piernas levemente abiertas se ve inscrito en un círculo con el centro en el ombligo.

Tomaremos como datos para representar en escala el cuerpo humano las medidas de las partes tomando como unidad la cabeza (la altura de la cara), entonces:

- La longitud de los brazos extendidos de un hombre es igual a su altura.
- El cuello estando erguido medirá entre un cuarto y media cabeza.
- El brazo medirá 3 cabezas y tres cuartos desde donde se articula el hombro hasta la articulación de la mano. Además la línea del ombligo coincide casi exactamente con el codo.
- La pierna tendrá 4 cabezas de longitud. El punto medio de la pierna coincide con la rodilla.
- El pie nos alargará la pierna aproximadamente un cuarto de cabeza.
- El ancho de los hombros es igual a un cuarto de la altura de un hombre, es decir 2 cabezas.

- En cuanto a la parte posterior del torso (espalda), la medida es 3 cabezas y media de longitud, partiendo de una línea a la altura de los hombros, hasta debajo de los glúteos.

A modo de síntesis, en la figura 2 se pueden ver las medidas del cuerpo humano tomando como unidad la cabeza y en la figura 3 en cambio están en función de la altura cuerpo humano. Estas imágenes serán de mucha utilidad a los alumnos para visualizar fácilmente las proporciones del cuerpo y luego realizar su representación en Cabri 3D.

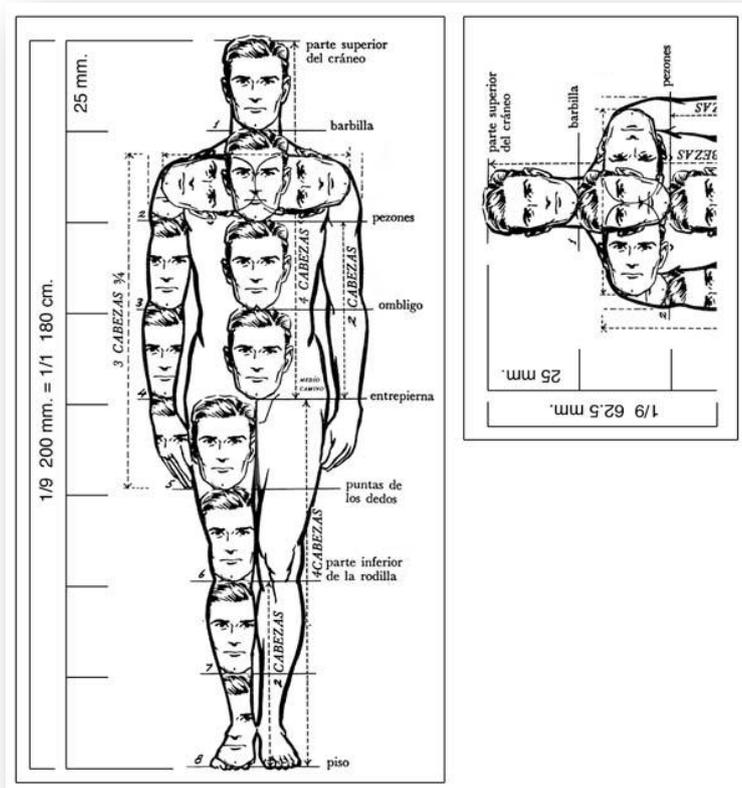


Fig.2. Proporciones del cuerpo tomando como unidad la cabeza (altura de la cara) siendo la relación de la izquierda la escala adoptada. (Por ejemplo los 25 mm para la representación de la cabeza)

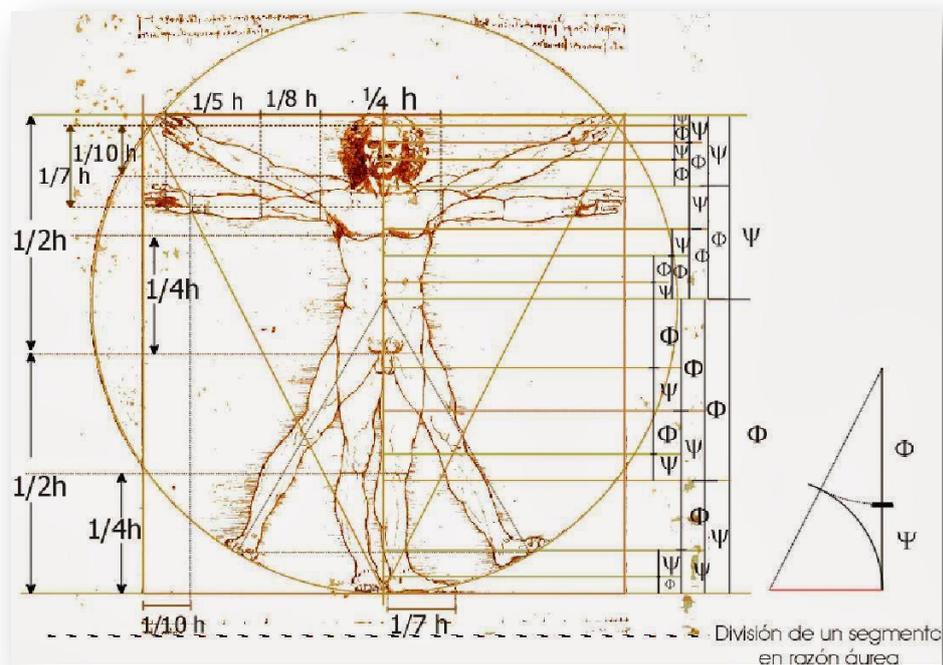


Fig.3. Proporciones del cuerpo tomando como unidad la altura.

4.2. LAS RELACIONES ENTRE MATEMÁTICA Y DANZA

Existen numerosas investigaciones de especialistas interesados en la conexión entre la Matemática y la Danza. A modo de introducción nombraremos algunas de ellas. Veremos que esta relación es un terreno fértil en más de un tema específico de Matemática.

En la revista Marthi Mag de Montreal, Canadá, encontramos tres artículos en francés del matemático Robert Bilinski (2007). Según el autor la Matemática es una herramienta para interpretar, visualizar y entender la danza y aún más, puede ser útil para la creación de una coreografía. Él observa el uso de la aritmética en ella. Por ejemplo para contar los tiempos musicales, así como para contar los pasos, el famoso “1, 2, 3... 1, 2, 3”. También la utilización de los números primos en la cantidad de bailarines, que crea un efecto de exclusión.

Introduce el término de proporcionalidad explicando que los coreógrafos y los directores utilizan dicho concepto. Por ejemplo, si hay un solo bailarín en el escenario el público enfoca su atención un 100% en las acciones de este. En cambio si hay dos, cada uno representa el 50% de la acción y así sucesivamente. La cantidad y la proporción entre bailarines extras y principales en una escena generan distintas emociones. Una acción dramática con una bailarina que colapsa en un escenario vacío no genera el mismo efecto que si hubiese otro bailarín u otros 9 (Fig. 4).

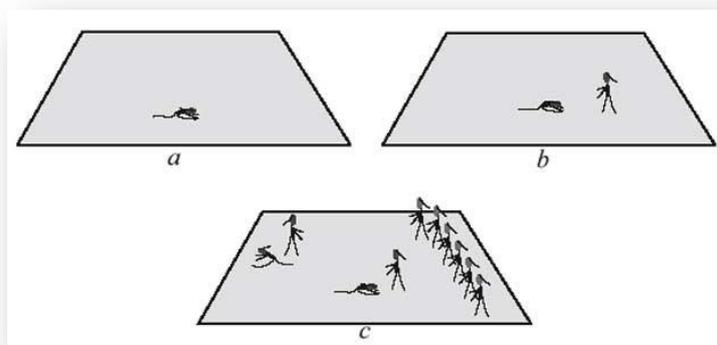


Fig.4. Coreografías que explotan la proporcionalidad.

Según el autor, la aplicación de la proporcionalidad no es tan sencilla. Agregar bailarines no necesariamente diluye el efecto emocional, puede ampliarlo. Dependerá si los bailarines agregados contribuyen a resaltar el hecho o no.

Luego expone las simetrías presentes en las coreografías. En la mayoría de las danzas se busca la simetría, pues se relaciona con el orden y la seguridad, por el contrario, su ruptura genera un desequilibrio y perturba al espectador.

Complejizado el tema, en la revista se nombra una conferencia de Matemáticas en 2004 en Montreal, donde el matemático francés, Jean-Jacques Dahan, expuso la representación

matemática de los campos de vectores utilizando el software Cabri Geometry³. Él vio la semejanza de estos con los pasos de baile. Karin Waehner (1993) muestra además que se encuentran todos los elementos de un campo vectorial: atractores, repelentes y fuerza. Los bailarines representan el movimiento de las partículas en un campo vectorial. Esto sirve para resaltar la estructura del espacio en el que se mueven siendo el mismo de dos dimensiones (Fig. 5).

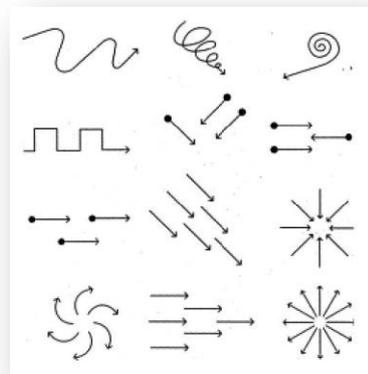


Fig.5. El movimiento de las partículas en un campo vectorial⁴.

Siguiendo con las investigaciones de especialistas encontramos a Erik Stern, licenciado en Biología, y Karl Schaffer, profesor de Matemática. En 1989 después de haber trabajado 3 años en la danza encontraron varias relaciones entre esta y la Matemática.

Karl Schaffer, Erik Stern y Scott Kim (2001) escribieron un libro llamado Math Dance, dirigido a docentes que trabajan con alumnos de 4 a 12 años de edad. En la introducción del libro exponen varias ideas. Identifican que al momento de crear una coreografía o investigar un problema matemático, se realiza una “exploración creativa de los patrones en

³Nombre del software en EEUU. En Canadá y en América latina se conoce con el nombre de Cabri Géomètre dado su origen francés.

⁴Imagen extraída el 19 de agosto de 2013 desde http://www.marthiii.com/Marthy_mag/2007-08-aout/marthy_mag_conceptuel.htm.

el espacio y tiempo con la mirada puesta en el potencial estético” (Schaffer, Stern, Kim, 2001, p. 5).

Observan vínculos como el siguiente:

Notamos que la Matemática y la danza tratan sobre conceptos codificados, tales como simetría, conciencia espacial, problemas de conteo y patrones. Además notamos similitudes estéticas: la necesidad de consistencia interna, el objetivo de lograr un equilibrio entre el análisis y la intuición, y como se puede ser abstracto así como mundano. (Schaffer, Stern, Kim, 2001, p. 6)

Y se preguntan:

¿Qué es la Matemática en el nivel más básico? Cantidad, tamaño, relación, forma y espacio, razonamiento, patrones de discernimiento, representación de un concepto con una palabra o símbolo. E incluso antes de estas ideas consideran habilidades que podrían ser llamadas habilidades de pensamiento “pre-matemáticas”. Incluyendo en esta categoría de conceptos pre-matemáticos: es más grande y más pequeño, igual o diferente, antes y después, incluyendo o excluyendo, dentro y afuera y (sic) agregando también dónde estás y dónde vas a ir. Creemos que la comprensión de la matemática comienza en el reino físico con estos conceptos.

Siguiendo nuestra línea de pensamiento, esta lista de habilidades pre-matemáticas es muy parecida a las habilidades pre-danzarinas (para acuñar una palabra). Un bailarín joven necesita conocer: el antes y el después, lo igual y diferente, etc. Estas habilidades son las predecesoras de la danza y de la matemática, y constituyen lo esencial de la superposición de las disciplinas. (Schaffer, Stern, Kim, 2001, p. 8)

En 1990 realizaron una primera actuación de lo que ellos denominan Math Dance, allí mostraron números artísticos relacionados con conceptos de: combinatoria, simetría, patrones y aritmética asociada a esos patrones.

Karl Schaffer, Erik Stern y Scott Kim (2001) en su libro, no proponen actividades con la danza que reemplacen la enseñanza tradicional de la Matemática. Está pensado para aquellos docentes interesados en trabajar con ambas y para los momentos en donde es necesario cambiar la rutina de la clase. Consideran que las propiedades interactivas, visuales y comunicativas del baile pueden ayudar a llevar a la Matemática a un nivel comprensible.

4.3. MODELOS GEOMÉTRICOS EN LA DANZA

Ya teniendo un pantallazo de varias investigaciones, citaremos algunas referidas a la relación entre Geometría y Danza desde una mirada modelizadora. Nombraremos tres obras: la de Rudolf Laban, en Danza Moderna, Rodolfo Dinzel con el Tango y por último a Lincoln Kirstein en Danza Clásica.

4.3.1 DANZA MODERNA: RUDOLF LABAN

Rudolf Jean-Marie Attila Laban nació en Bratislava, Hungría en 1879, fue bailarín y coreógrafo. Estudió artes y ciencias como Matemática, Física, Química, Anatomía y Fisiología para poder comprender mejor el movimiento. Fue uno de los precursores de la Danza Moderna, pero luego sus estudios fueron útiles para disciplinas como expresión corporal, teatro, gimnasia, entre otros.

Laban (1978) explica que la danza es una composición de movimientos, y estos están formados por elementos. En una danza libre, como es la moderna, se practica la gama

total del movimiento, por ende surge una cantidad casi ilimitada de pasos y gestos que puede hacer el bailarín. Estos son básicamente los mismos que se utilizan en las actividades diarias. Expresa que:

Uno de los fines del entrenamiento es permitir a la persona que se mueve alcanzar cada punto de la esfera espacial que rodea su cuerpo. Se puede hacer que la gente tome conciencia de aquellas áreas del espacio a las que ciertas partes del cuerpo llegan con más facilidad, de acuerdo con su estructura anatómica. (Laban, 1978, pp. 35-36).

En su libro *Choreutics*, denomina a estas áreas como zonas normales.

Pensando en estas regiones donde el bailarín puede moverse, Laban desarrolla otro concepto, el de la “Kinesfera”: es la esfera de movimiento cuya circunferencia puede alcanzarse con las extremidades extendidas normalmente sin cambiar el lugar de apoyo. La pared interna imaginaria de esta esfera puede ser alcanzada por el bailarín con manos y pies. Al moverse por el espacio, su kinesfera también se desplaza, la lleva consigo como un caparazón. Dentro de ella tenemos las zonas normales, es decir las que puede alcanzar con cada extremidad o cada parte del cuerpo, sin muchos movimientos adicionales (si tiene ayuda de alguna otra parte del cuerpo las denomina súper-zonas). Las mismas están interconectadas por gestos que crean trayectorias en el espacio. Estos caminos pueden formar líneas cerradas, que las llama circuitos o anillos si vuelven al punto inicial, y líneas o curvas abiertas si conducen de un punto a otro de la kinesfera. También pueden tener forma de zigzag, de círculos, de espiral o de polígonos que estén contenidos o no en un plano, entre otras formas.

Cada movimiento está dirigido a un cierto punto en el espacio que rodea el cuerpo, Laban especifica las direcciones principales como:

- Las dimensionales: arriba, abajo, derecha, izquierda, hacia adelante y hacia atrás. Si se los ubica en la kinesfera forman los vértices de un octaedro.
- Las cuatro diagonales: arriba derecha adelante, arriba izquierda adelante, abajo derecha adelante, abajo izquierda adelante, arriba derecha atrás, arriba izquierda atrás, abajo derecha atrás, abajo izquierda atrás. Si se los ubica en la kinesfera forman los vértices de un cubo.
- Y doce diametrales: arriba derecha, arriba izquierda, abajo derecha, abajo izquierda, adelante derecha, adelante izquierda, atrás derecha, atrás izquierda, arriba adelante, arriba atrás, abajo adelante, abajo atrás. Si se los ubica en la kinesfera forman los vértices de un icosaedro.
- Y el centro del cuerpo

La división del espacio que realiza el autor, demuestra que cada extremidad o parte del cuerpo puede moverse desde cualquiera de estos 27 puntos de orientación hacia cualquier otro. Estas son las consideradas principales. Laban (2011) nombra otras direcciones aunque en realidad existen infinitas.

Siguiendo con su teoría, el hombre no puede hacer movimientos puramente unidimensionales, sino que los realiza dentro de un plano. Puede ser en el plano vertical, u horizontal o sagital.

El vertical está compuesto por las direcciones arriba, abajo, derecha e izquierda

El horizontal está compuesto por las direcciones adelante, atrás, derecha e izquierda

El sagital está compuesto por las direcciones arriba, abajo, adelante y atrás.

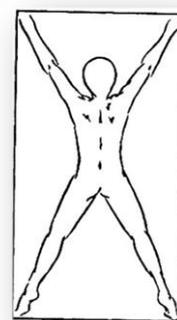


Fig.6. Plano vertical.

Aquí debemos hacer una aclaración, Laban (2011) explica que las figuras que se describen en esos planos al estirar brazos y piernas no son cuadrados sino que son rectángulos pues siempre una dirección va a primar, por ejemplo en el plano vertical prima la dirección arriba y abajo con respecto a la horizontal (Fig. 6). Los vértices de estas tres figuras unidas de forma adecuada, forman el icosaedro.

Laban inscribe a este icosaedro dentro de la kinesfera y lo utiliza como un andamio⁵ (“scaffolding”). Su invención surgió del estudio del movimiento y la danza, que salió a la luz en la actividad profesional de él como bailarín y docente. Este cuerpo geométrico es la forma que ofrece una vía más natural y más armónica para nuestro movimiento. Contiene una serie rica de combinaciones interiores y exteriores de trazado-formas. Y además aporta más detalles, más orientaciones, que el cubo o el octaedro.

Laban (2011) detalla las secuencias naturales que cualquier persona sigue en sus actividades diarias como por ejemplo: el trabajo, la limpieza, defensa, natación, etc. Para él todos estos movimientos son de lucha, con un objeto o elemento. En su libro *Choreutics* muestra secuencias como los brazos en la brazada de crol. Expresa que este circuito sinuoso nos acerca a los movimientos oscilantes que aparecen en la danza. Existen además otras cadenas que representan actividades diarias que forman figuras geométricas como hexágonos, cuadriláteros, triángulos, etc., y figuras cerradas que no están contenidas en un plano y que los denomina variaciones plásticas.

Laban hace una descripción geométrica del movimiento y del espacio donde se desenvuelve el bailarín. Una de las utilidades de sus investigaciones fue la creación de

⁵ El concepto de andamiaje kinesférico es similar a los conceptos psicológicos de "redes conceptuales", "redes" o "mapas cognitivos" del espacio corporal que construimos y que almacenamos en nuestra memoria con el fin de ayudar al aprendizaje, recordando y controlando los movimientos. Extraído 21 de enero de 2014 desde <http://www.laban-analyses.org/lab-analyses-reviews/lab-analyses-notation/space-harmony-choreutics/kinesphere-scaffolding/polyhedra.htm>

una notación, la labanotación, que permite plasmar en un papel una coreografía entera. Pero a nivel Matemático creemos que hizo un trabajo excepcional. Para ver una de las utilidades de su investigación citaremos a Langlade el cual expresa que:

El mérito del icosaedro consiste en permitir que los estudiantes de danza vean los puntos hacia y desde los cuales se mueven. Esto es, aumenta la precisión del movimiento, la precisión del entrenamiento para el movimiento, la precisión de las ideas sobre el movimiento. El entrenamiento de Laban es, con otras palabras, una severa disciplina mental y física (Langlade, 1986, p. 75).

4.3.2 TANGO: RODOLFO DINZEL

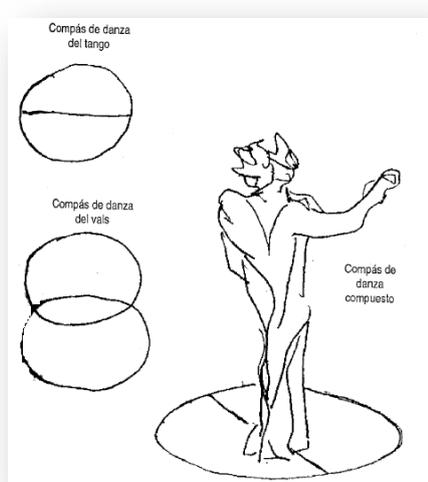


Fig.7. Dibujo del compás de danza.

Dinzel, R. (2011).

Rodolfo Dinzel fue un bailarín, investigador y docente de Tango. Escribió un libro publicado en 2011 llamado “El Tango una Danza” que contiene un análisis matemático y físico de esta tradicional danza argentina.

Rodolfo Dinzel (2011) introduce el término “compás de danza”. El nombre hace alusión a los brazos del instrumento de Geometría, el compás, pensando que los pies de los bailarines lo imitan y describen

así, en el suelo, una circunferencia. En el Tango el mango de este artefacto se encuentra en las rodillas, que deberán estar lo más juntas posible y así, media circunferencia es trazada por el hombre y la otra mitad por la mujer. Para ejecutar bien este baile la pareja

deberá mantenerse dentro de ella. El autor amplía el concepto diciendo que en la Danza Clásica el mango de este compás está en la pelvis y en la contemporánea, en el plexo solar. En el Vals, comenta que hay dos circunferencias, una completa para el hombre y otra para la mujer, compartiendo solo una pequeña parte (Fig. 7).

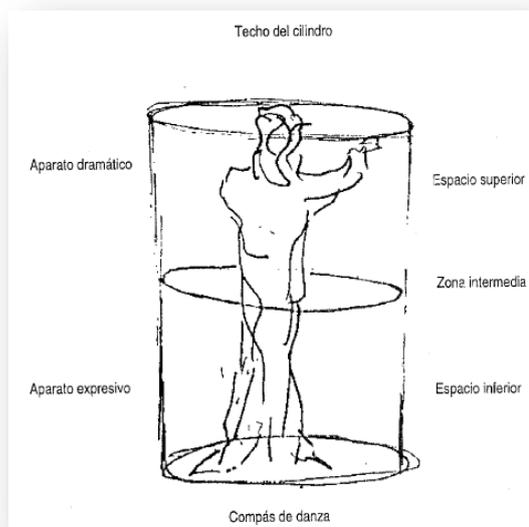


Fig. 8. Dibujo del cilindro de contención.

Dinzel, R. (2011).

dentro de este cuerpo geométrico. Si los bailarines sobrepasan ese espacio, significa que sus movimientos no están dentro de la técnica ni de la estética del Tango. Dentro de dicho cilindro, el autor realiza una división en dos partes: de la cintura hacia arriba lo denomina “aparato dramático”, y de la cintura hacia abajo el “aparato expresivo” (Fig. 8).

El autor aclara que los diseños en el Tango, al igual que las danzas de origen popular, son curvos, redondos o redondeados. Todos los movimientos del hombre son alrededor de la mujer y viceversa. Son envolventes, esto creará figuras más naturales, más redondas. Las únicas líneas rectas coherentes con esta danza son el radio, el diámetro y la cuerda del compás de danza. Ninguna otra. Por ejemplo la tangente, no es una línea compatible con esta danza, si la trazaran se irían de la pareja, perderían el equilibrio (Fig. 9).

El autor especifica que en el Tango la circunferencia es una, y que utilizando como base esa figura se puede formar un cilindro en el aire, que lo denomina espacio de contención. La pareja se moverá dentro de este cuerpo geométrico.

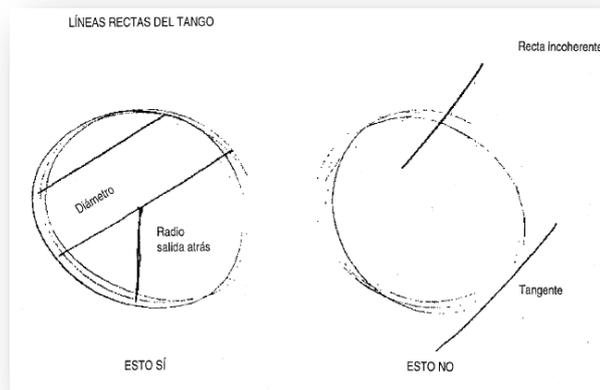


Fig. 9. Líneas coherentes e incoherentes con el Tango.

Dinzel, R. (2011).

El autor ilustra un esquema en improvisación (Fig.10) y el paso básico donde se puede observar que las únicas rectas son las antes mencionadas.

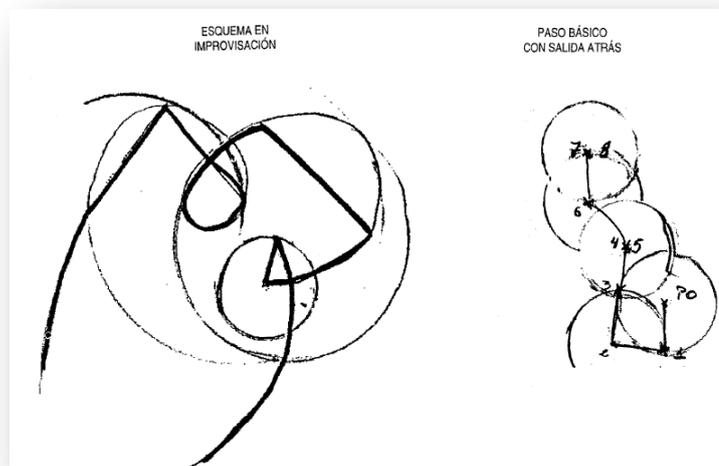


Fig. 10. Esquema en improvisación y paso básico con salida hacia atrás.

Dinzel, R. (2011).

Continuando con el detalle del cilindro de contención, Dinzel expresa la existencia de tres volúmenes que conforman dicho cuerpo geométrico: el volumen que ocupa la mujer, el

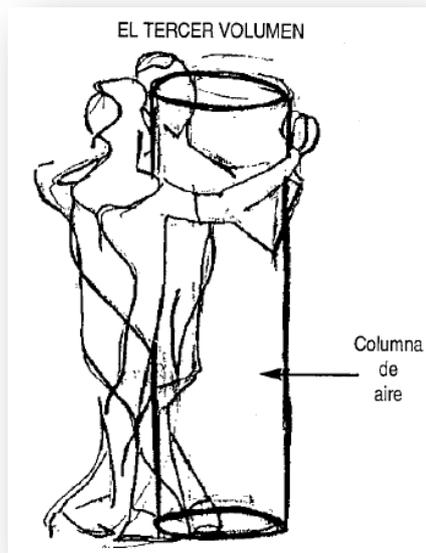


Fig. 11. El tercer volumen. Dinzel, R. (2011).

del hombre y el tercero que es el equivalente al de otra persona y que está delimitado por el arco conformado por los brazos (el izquierdo del hombre y derecho de la mujer) donde se toman las manos (Fig.11). El autor, con un pensamiento muy geométrico, visualiza la ejecución del Tango como tres volúmenes que se trasladan en el espacio a través del tiempo.

Dinzel menciona una generalidad muy interesante para nuestra investigación, que cito a continuación:

Cada cultura, está encuadrada dentro de un concepto estético elemental y fundamental. En todas las épocas o cada tanto, existen períodos en que se dan conceptos estéticos que están enmarcados dentro de una figura geométrica. (...) En la época que se gestó el tango, toda expresión cultural estaba basada en el triángulo. La influencia de París con el Art Decó regía la cultura de Occidente. En la moda lo vemos muy claro, con el estilo Divito, que fue un prototipo, a punto tal que el hombre de tango lo adoptó para ir a la milonga. El traje entallado con hombreras, el pantalón bombilla haciendo punta hacia abajo. La mujer también muy entallada, pero muy grande arriba. Esto derivó en un concepto sobre la elegancia, cuanto más triangular era su aspecto, más elegante era considerado. (Dinzel, 2011, p.89).

En nuestra investigación trabajaremos con la Danza Clásica y veremos que la figura que regía en esos tiempos era la circunferencia como signo de elegancia y perfección.

Siguiendo con el Tango el autor comienza a detallar los triángulos que se pueden visualizar (Fig. 12):

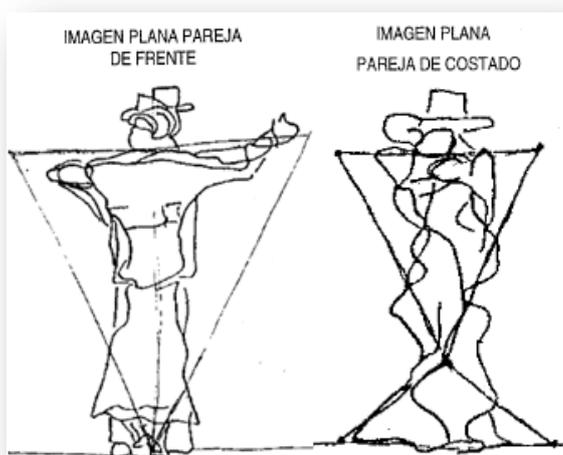


Fig. 12. Triangulación de la imagen.

Dinzel, R. (2011).

las rodillas, y otro menor con base en el piso (es menor pues en el tango se realizan movimientos cerrados con las piernas y abiertos con la parte superior del cuerpo).

Hasta acá el autor considera una mirada plana de los triángulos en la pareja, pero toma algunos de estos y los hace girar dentro del cilindro de contención y se encuentra con cuerpos geométricos como los siguientes:

- Cuando vemos a la pareja de frente (hombre de frente y mujer de espaldas) hay un triángulo. Como está apoyado en el vértice y no en la base, esto da una sensación de fragilidad en el equilibrio, como si flotara. Este triángulo está dentro del espacio de contención.

- Si vemos a la pareja de perfil, hay dos triángulos: el mayor cuya base está en la cintura escapular y vértice en

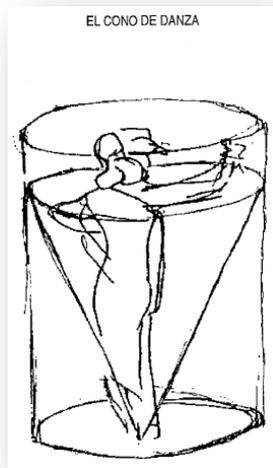


Fig 13. Cono de danza.

Dinzel, R. (2011).

a. Un cono al hacer girar (alrededor del eje de equilibrio que pasa por el centro del compás de danza y es perpendicular a esa circunferencia) el triángulo de la pareja vista de frente. Este se encuentra dentro del cilindro de contención y tiene como base una circunferencia equivalente al compás de danza. El cono está apoyado en el centro de la circunferencia (Fig.13).

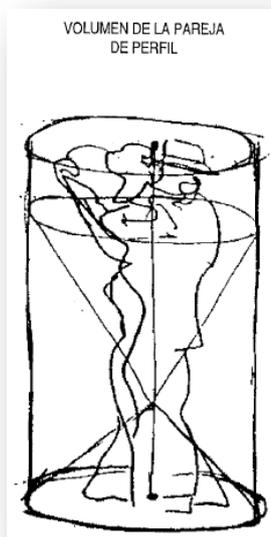


Fig. 14. Volumen pareja de perfil.

Dinzel, R. (2011).

b. Dos conos que se generan haciendo girar los dos triángulos de la pareja vista de perfil con el mismo eje que en la figura anterior. El cono superior y el inferior tienen sus vértices en las rodillas (Fig.14).

El autor expone que estas técnicas salen de la observación del Tango con el objetivo de guiar al bailarín para no salirse de la técnica, ni de la estética de esta danza y así lograr una ejecución correcta.

4.3.3. DANZA CLÁSICA

Existen investigaciones que muestran el gran contenido matemático y geométrico de la Danza Clásica. Nosotros citaremos a Lincoln Edward Kirstein, estadounidense nacido en 1907, fue coreógrafo, bailarín, escritor y co-fundador de New York City Ballet. Escribió más de quinientos libros, artículos y monografías sobre las artes, además de críticas, poesías, novelas, trabajos históricos y autobiográficos. Nosotros citaremos, debido a nuestro interés, la obra

llamada “Classic Ballet, Basic Technique and Terminology”. En él hay más de seiscientos dibujos que describen e ilustran en detalle la posición adecuada del cuerpo, su punto de equilibrio, el movimiento, la actitud de cada posición y paso en el repertorio de la

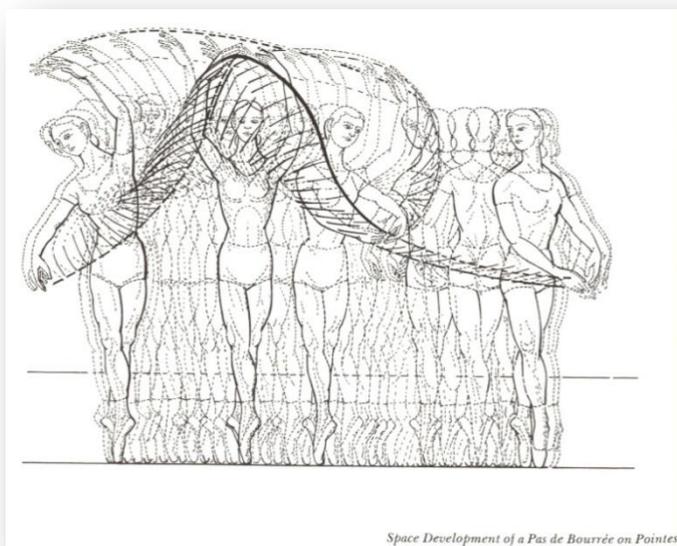


Fig. 15. Desarrollo espacial del *pas de bourrée on pointes*⁶

Danza Clásica. Lo que nos atrajo de este trabajo es que acompaña las explicaciones con dibujos bajo la denominación de desarrollo espacial del movimiento (el encargado de las

⁶Imagen extraída el 1 de julio de 2015 de <http://thegirlwiththeleatherrucksack.blogspot.com.ar/2011/05/classic-ballet.html>

ilustraciones fue Carlus Dyer). Un ejemplo se muestra en la figura 15 que representa el desarrollo espacial del *pas de bourrée*⁷ *on pointes* (en puntas). Allí se observan las curvas y líneas de esta danza. El autor afirma en su libro que “el Ballet (Danza Clásica) es una síntesis de anatomía humana, geometría sólida y composición musical...”⁸

En la búsqueda de más datos geométricos presentes en la Danza Clásica, hallamos a otra autora llamada María Torija Ángel. Nacida en Madrid, comenzó sus estudios de Ballet Clásico en esa ciudad, es Profesora y Licenciada en Danza Clásica, además de ser Máster y Doctora en Artes Escénicas. En su tesis doctoral manifestó que la Danza Clásica contiene un sentido muy estético de alargamiento de las líneas del cuerpo y esto le brinda elegancia a la ejecución de la misma. Los movimientos dan una sensación de liviandad, de rechazo a la tensión y a la brusquedad. Los brazos tienen posiciones redondas, curvas y largas pero nunca las extremidades superiores se estiran totalmente para evitar la tensión. En las manos también se observa una posición muy natural y relajada, inspirada en esculturas y pinturas.

Según la autora, la Danza Clásica incluye un desafío a la gravedad, que se visualiza en los saltos y movimientos en el aire, giros y en el hecho de bailar sobre las puntas de los pies (o media punta), representando la idea de flotar sobre el suelo y de liviandad. El concepto de retar a la gravedad está conectado con el centro de equilibrio del cuerpo humano. Este está dispuesto de tal manera que nos permite mantener ciertas posturas o formas al realizar determinados movimientos. Básicamente en la simetría y anatomía de nuestro cuerpo se encuentra la base que ha facilitado el desarrollo del movimiento de la Danza Clásica.

⁷*Pas de bourrée*: Paso que se utiliza para desplazarse. Hay algunas variaciones del *pas de bourrée* y se lo efectúa en distintas direcciones. Puede ser con cambios de piernas o sin éste (Vaganova, 1945, p. 85).

⁸Kirstein, L; Stuart, M. (2004). *The Classic Ballet: Basic Technique and Terminology*. New York: Alfred. a. Knopf. p. 4 (traducida por María Torija Ángel)

Torija Ángel (2011) expresa que:

La Danza Clásica es enormemente geométrica porque la capacidad de nuestro cuerpo, desde el en *dehors*⁹, dibuja líneas rectas y curvas imaginarias en el suelo o en el aire. Al mismo tiempo que las articulaciones, como las de las caderas y hombros o la misma espina dorsal, por ejemplo, nos permiten sin desplazamiento movernos en la tercera dimensión y así podemos visualizarnos, dentro de un cubo que, a su vez, incluye un círculo y diferentes líneas transversales, que obedecen a los diferentes movimientos. Este cubo y este círculo son parte de los movimientos de la danza y acompañan al bailarín hasta en sus desplazamientos.

Para crear más volumen o la tercera dimensión y dar más color artístico, se utiliza el *epaulement*¹⁰ que además acentúa el efecto de todos los movimientos en los cuales es aplicado. A todo esto se añaden las direcciones en el espacio o la escena, en *face*¹¹, de espaldas, *croisé*¹² y *effacé*¹³ (Torija Ángel, 2011, pp. 45-47).

⁹*Dehors*: Hacia afuera. Indica que el movimiento de la pierna se ejecuta en dirección circular, desde adelante hacia atrás (Vaganova, 1945, p. 245).

¹⁰*Epaulement*: Giro al dar las espaldas. Término que indica una posición particular de los hombros en relación con la posición del cuerpo. La espalda gira sobre la cintura mantenida fija como eje, quedando la cadera y piernas de frente al público (Vaganova, 1945, p. 248).

¹¹*Face*: De frente (Vaganova, 1945, p. 248).

¹²*Croisé*: Cruzado. El cruce de las piernas es su rasgo principal. Hay *croisé* hacia adelante y hacia atrás (Vaganova, 1945, p. 42).

¹³*Effacé*: Inversamente al *croisé*, las piernas están abiertas (Vaganova, 1945, p. 43).

En el dibujo que realizó Carlus Dyer en el libro de Kirstein citado anteriormente (Fig.16) se puede visualizar la idea de Ángel Torrija cuando se refiere al bailarín dentro de un cubo que, a su vez, incluye un círculo y diferentes líneas transversales, que obedecen a los diferentes movimientos que acompañan al bailarín en todos sus desplazamientos.

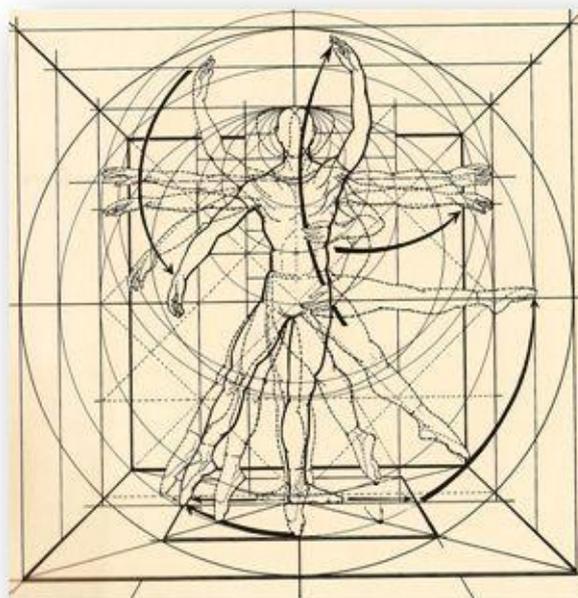


Fig. 16. El espacio del bailarín de Danza Clásica.

Dibujo de Carlus Dyer.

Esta concepción es similar a la de Laban con su kinesfera que fue descrita en el ítem 4.3.1 de nuestra investigación. Kirstein (1953) ha propuesto que los miembros también tienen sus propias kinesferas individuales que son dinámicas, esto lo podemos ver en la figura 17. Estas kinesferas individuales definen los espacios de movimiento de las dos piernas y de los dos brazos como "módulos espaciales" de movimiento en el que reside la base del estilo y la técnica. A diferencia de Laban encierra al bailarín en un cubo. Acá vemos la influencia de otros artistas contemporáneos. El hecho que marque al bailarín dentro de un cubo donde describe un círculo y líneas se puede pensar que está relacionado con el cuadrado y la circunferencia en la que encierra Da Vinci al hombre Vitruvio (desarrollado en el ítem 4.1 de nuestra investigación).

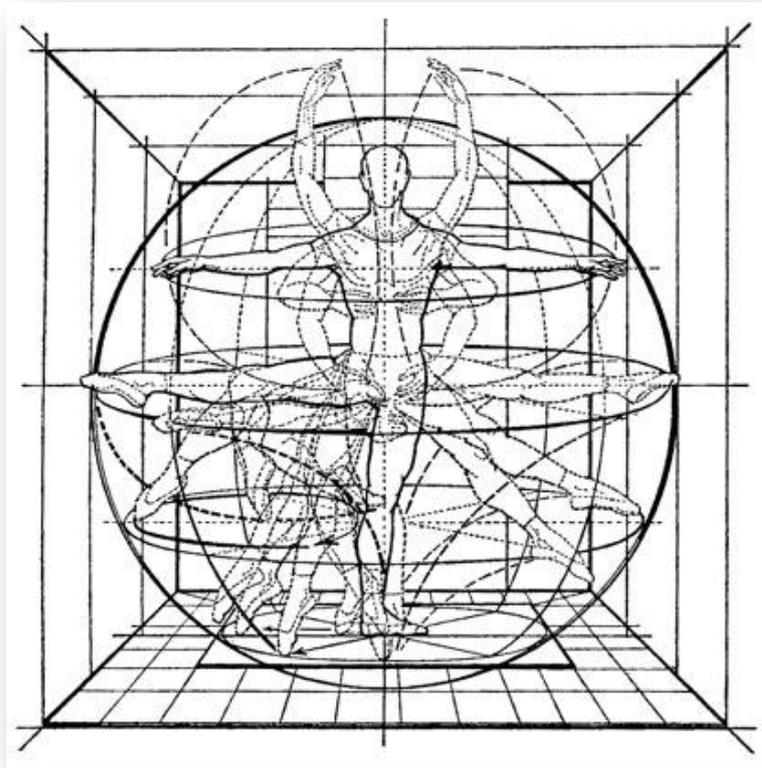


Fig. 17. Módulos Espaciales de los brazos y piernas I (Kirstein1953)¹⁴.

¹⁴Imagen extraída el 11 de julio de 2015 desde <http://www.mudanx.nl/PhD/4.4.2.html>

5. CAPÍTULO 5: MARCO TEÓRICO. DESDE UN ENFOQUE INTERPRETATIVO

5.1 LA TEORÍA DE SITUACIONES DIDÁCTICAS DE GUY BROUSSEAU

La Teoría de situaciones tiene una concepción constructivista del conocimiento, siguiendo el enfoque de Piaget. Tiene el supuesto de que todo conocimiento es una respuesta, una adaptación ante una situación o problema. Desde esta mirada, los alumnos podrían aprender por la adaptación a un medio, entendiéndose a este como todo lo que rodea al alumno: el problema a resolver, los recursos, los compañeros, etc.

El recurso que le permite al alumno construir un conocimiento nuevo, a partir de un medio, es lo que denomina “situación”. Según Brousseau (2007) una “situación” es un modelo de interacción entre un sujeto y un medio. Estas y el medio, son manipulados y diseñados por el docente a partir de una ingeniería didáctica (ver Cap. 8).

Existen dos tipos de fases dentro de una situación didáctica: las didácticas propiamente y las a-didácticas. La primera se refiere a aquellas donde se muestra directa o indirectamente la voluntad de enseñar, por ende el alumno sabe que va adquirir un conocimiento determinado. En la a-didácticas el estudiante no sabe qué va a aprender. Se le presenta la situación a resolver para lo cual utilizará sus conocimientos previos y el que se pretende enseñar. Lo realizará motivado por el problema, sin intervención del docente en lo referido al nuevo saber. Esta última tiene que tener ciertas características para concebirse como tal: el concepto que se quiere enseñar debe ser necesario para resolver el problema y el alumno debe poder evaluar por si solo si es correcta su resolución o no.

Bajo este esquema el docente da una consigna al alumno, la cual debe ser clara, autoexplicativa y atractiva. El estudiante puede hacer algo con sus conocimientos anteriores y sobretodo debe aceptar la responsabilidad de la resolución de la situación. Brousseau (1986) denominó a este hecho como devolución: “La devolución es el acto por

el cual el enseñante hace aceptar al alumno la responsabilidad de una situación de aprendizaje (a-didáctica) o de un problema y acepta él mismo las consecuencias de esta transferencia” (p.5).

Cuando se encuentra frente al problema se suceden diferentes situaciones de aprendizaje que a saber son:

- **Acción:** El alumno actúa sobre un medio, arma estrategias de resolución, toma decisiones, encuentra relaciones, etc.
- **Formulación:** Explica a sus compañeros lo que realizó sin dar razones y en consecuencia actúa sobre el medio.
- **Validación:** Debe debatir y exponer sus fundamentos ante sus pares y ponerse de acuerdo sobre la falsedad o veracidad de sus resultados.
- **Institucionalización:** Se descontextualiza el saber y el alumno puede considerarlo como tal. El docente puede cerciorarse del aprendizaje del alumno.

El momento de acción, validación y formulación son situaciones a-didácticas donde la intervención del docente es casi nula. Las únicas instancias que están a cargo del docente son el acto de la devolución y la institucionalización.

A modo de cierre lo que se busca, bajo este enfoque, es una reproducción de la acción desarrollada dentro de una comunidad científica y:

Una buena reproducción de una actividad científica exigiría que el alumno: intervenga, formule, pruebe, construya modelos, lenguajes, conceptos, teorías, que los intercambie con otros, que reconozca los que están conformes con la cultura, que tome los que le son útiles, etc. (Brousseau, 1986).

En nuestra investigación el alumno tendrá la oportunidad de formular, probar, construir modelos, conceptos, teorías en la interpretación de la Danza Clásica. Podrá así, imitar una actividad científica a pequeña escala.

5.2. LA MODELIZACIÓN MATEMÁTICA

La currícula de Matemática presentada por el Gobierno de la Ciudad de Buenos Aires tiene como eje central: “construir un modelo matemático de la realidad”, y es el tema elegido para desarrollar en nuestro trabajo. Morten Blomhøj especifica que “Un modelo matemático es una relación entre ciertos objetos matemáticos y sus conexiones por un lado, y por el otro, una situación o fenómeno de naturaleza no matemática” (Blomhøj, 2008, p. 21).

Según el autor, para crear un modelo matemático y usarlo, posteriormente, es necesario transitar por un proceso de modelización que puede constar (no obligatoriamente) de seis sub-procesos (Blomhøj y Højgaard Jensen, 2003):

- **Formulación del problema:** Formulación de una situación, que permita la identificación de las características de la realidad a ser modelizada.
- **Sistematización:** Selección de objetos relevantes y relaciones, entre otros, de la realidad observada y la posterior idealización de ellos, para hacer posible una representación matemática. Nosotros consideramos a estos objetos y relaciones como las variables del modelo matemático.
- **Matematización:** Traducción de esos objetos y relaciones al lenguaje matemático.
- **Análisis del sistema matemático:** Uso de métodos matemáticos para arribar a resultados matemáticos y conclusiones.
- **Interpretación:** Análisis de los resultados y conclusiones.

- Evaluación: De la validez del modelo contrastando los datos (observados o predichos) y el conocimiento teórico o práctico (por experiencia).

El autor aclara que un proceso de modelización es un proceso cíclico donde las reflexiones sobre el modelo y la intención de uso de éste, conduce a una redefinición del modelo.

Investigando encontramos un proyecto llamado “Mañanas Matemáticas” desarrollado e implementado por Blomhøj y Mikael Skånstrøm, en una escuela de Dinamarca. En dicho trabajo los alumnos de 8^{vo} grado fueron desafiados a usar la matemática para modelizar un fenómeno de “sus mañanas de todos los días”. Al finalizar la experiencia observó el alto nivel de compromiso, y sobre todo, el hecho que nadie cuestionó la relevancia del proyecto. Los estudiantes emplearon mucho tiempo en tareas como, recolectar datos, diseñar posters, realizar cálculos y diversas representaciones gráficas de sus propios datos. Además observó que los alumnos se mostraron ansiosos por tener que aprender nuevos conceptos matemáticos para realizar mejor su trabajo.

5.3 LAS DIFICULTADES Y ERRORES EN MATEMÁTICA

Nos planteamos como objetivo específico de nuestra investigación analizar y posteriormente caracterizar los errores o dificultades que tendrán los alumnos al resolver las situaciones didácticas propuestas, por lo tanto desarrollaremos en esta sección del marco teórico dichos conceptos.

Para comenzar debemos tener en cuenta la diferencia entre errores y dificultades. En el proceso de enseñanza y aprendizaje de la Matemática, el alumno se encuentra con diversas dificultades y estas son generadoras de errores (Abrate, R. Pochulu, M., Vargas, J. 2006).

Para enriquecer nuestro análisis a posteriori, detallaremos a continuación la clasificación de dificultades propuesta por Di Blasi Regner et al. (2003):

- Dificultades asociadas a la complejidad de los objetos matemáticos: Muchas veces cuando queremos explicar el significado de cierto objeto matemático utilizando el lenguaje habitual, esto es comunicado por alusión o asociación. Puesto que el lenguaje de la Matemática es más preciso, genera un conflicto producido por el uso de lenguaje ordinario dentro del contexto matemático.
- Dificultades asociadas a los procesos de pensamiento matemático: Son aquellas originadas por el aspecto deductivo formal de la Matemática. La incapacidad de algunos alumnos para seguir un argumento lógico genera la mayor dificultad en el aprendizaje de esta materia.
- Dificultades asociadas a los procesos de enseñanza: Estas se relacionan con los aspectos de la institución escolar, la currícula de Matemática y los métodos de enseñanza.
- Dificultades asociadas al desarrollo cognitivo de los alumnos: Corresponden a los estadios generales del desarrollo intelectual del alumno. En cada uno de estos estadios, el estudiante tiene un cierto nivel de razonamiento y es capaz de hacer determinadas tareas específicas de Matemática.
- Dificultades asociadas a las actitudes afectivas y emocionales: Sentimientos de ansiedad por finalizar una tarea, miedo al fracaso, etc., generan bloqueos de origen emocional que afectan al alumno en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la Matemática.

Continuando con nuestro marco teórico, citaremos a Brousseau (1983), quien considera que el error no es sólo la evidencia de la ignorancia, de la inseguridad o del azar. Este puede ser producto de un conocimiento anterior, que en su momento fue exitoso para resolver distintas situaciones pero ahora se revela falso o simplemente inadaptado. A estas concepciones el autor las denomina obstáculos y son previsibles. Para lograr eliminar un obstáculo, se requiere de mucho trabajo. Es necesario enfrentar al alumno a una cantidad suficiente de situaciones nuevas que lo desestabilice para que luego reestructure sus conocimientos previos. Si esto no ocurre seguirá siendo una barrera para el nuevo aprendizaje.

Para profundizar el concepto de error, tomaremos tres autores que especificaron distintas tipologías de estos. Así tendremos una amplia y detallada visión.

Para comenzar citaremos la obra de Astolfi (1999) que considera al error como señal del proceso de aprendizaje del alumno que, a su vez, nos permite identificar las dificultades que posee. El autor propone una clasificación basada en la naturaleza de los mismos y los clasifica en:

- Errores debidos a la redacción y comprensión de las instrucciones de trabajo: Asociados a la dificultad en la comprensión de las consignas de trabajo o situaciones problemáticas que son presentadas a los alumnos. Estas pueden ser en forma oral o escrita.
- Errores que provienen de los hábitos escolares o de una mala interpretación de las expectativas: Están relacionados a los hábitos que adquieren los estudiantes en su vida escolar. Por ejemplo, creer que un cierto problema se resuelve solo utilizando los nuevos conceptos que aprendieron, responder a una consigna en función de lo que cree que el docente espera que se haga, etc.

- Los errores como resultado de las concepciones alternativas de los alumnos: El alumno se equivoca al tener presente un conocimiento que era exitoso para resolver cierto problema, pero ya no es adecuado para la situación nueva. Está relacionado con el concepto de obstáculo de Brousseau.
- Errores ligados a las operaciones intelectuales implicadas: Cuando las operaciones que el estudiante tiene que poner en juego para resolver una situación o problema no están disponibles en él. Puede que sea porque su nivel cognitivo aún no se lo permite o exista un retraso o dificultad para adquirirlo.
- Errores debidos a los procesos adoptados: Esto ocurre cuando el alumno deja de lado el método enseñado por el docente y utiliza otro procedimiento.
- Errores debidos a la sobrecarga cognitiva en la actividad: Suceden cuando la situación requiere que el alumno ponga en funcionamiento la memoria de trabajo, sin tener tiempo para pensarlo, buscar información, ratificar datos, etc.
- Errores que tienen su origen en otra disciplina: Aparecen cuando la actividad demanda conocimientos de otras disciplinas y el alumno no los posee.
- Errores causados por la complejidad del contenido: Cuando el alumno resuelve una situación o problema realiza un esfuerzo cognitivo cuya intensidad dependerá de la complejidad del mismo. Una tarea es más compleja en cuanto requiera de más habilidades para poder resolverla. Estas habilidades están relacionadas con la capacidad de tratar, relacionar y procesar los contenidos estudiados.

Otra autora que nos interesa citar es Movshovitz-Hadar (1987). Ella fundamenta que la mayor parte de los errores que cometen los alumnos no son accidentales, sino que son

producto de un proceso que de alguna manera tiene sentido para el estudiante. Determina seis categorías para clasificarlos:

- Errores debido a datos mal utilizados: Son producto de alguna discrepancia entre los datos que aparecen en la situación o problema y el tratamiento que le dio el alumno. Por ejemplo, cuando el alumno agrega datos extraños, se hace una lectura incorrecta del enunciado, etc.
- Errores debidos a una interpretación incorrecta del lenguaje: Ocurren cuando el alumno realiza una traducción incorrecta de hechos matemáticos a un lenguaje coloquial y viceversa.
- Errores debidos a inferencias no validas lógicamente: Surgen de un razonamiento incorrecto generado por el estudiante. El alumno toma esta nueva información, inválida, y la utiliza para resolver el problema ocasionando una respuesta errónea.
- Errores debido al uso de teoremas o definiciones deformadas: Son producidos por una distorsión o deformación de un principio, una regla, teorema o definición. Por ejemplo, errores que surgen de aplicar teoremas sin que se cumplan las condiciones necesarias, por aplicar propiedades que no corresponden, por realizar un desarrollo inadecuado de una definición, teorema o fórmula.
- Errores debidos a la falta de verificación de la solución: Cuando el alumno realiza en forma correcta cada paso del desarrollo del problema o situación, pero el resultado final no es la solución a la pregunta. Son errores que si el estudiante hubiese contrastado la solución con la consigna se podría haber evitado.
- Errores técnicos: Errores de cálculo, o en la extracción de datos de una tabla, o en la manipulación de símbolos algebraicos, etc.

Por último citaremos a Radatz (1979) quien considera a los errores como consecuencia de procesos definidos cuya naturaleza debe ser descubierta. Además no deben ser tratados como sencillamente la ausencia de respuestas correctas o el resultado de sucesos desafortunados. Propone las siguientes categorías:

- Errores debidos a la dificultad del lenguaje: Cuando el alumno ve al aprendizaje de conceptos, símbolos y vocabulario matemático como una situación similar a aprender una "lengua extranjera". Por ejemplo, la falta de comprensión semántica de textos matemáticos puede generar errores.
- Errores debidos a dificultades para obtener información espacial: Estos errores aparecen cuando la tarea requiere para su realización pensar mediante imágenes espaciales o visuales. Esto implica una demanda considerable para algunos alumnos, presentando dificultades y produciendo errores.
- Errores debidos a un aprendizaje deficiente de hechos, destrezas y conceptos previos: Son cometidos por falta de conocimiento de cierto contenido o de procedimientos específicos para resolver el problema o situación. Por ejemplo pueden originarse por el desconocimiento de algoritmos, o el manejo inadecuado de hechos básicos o símbolos o conceptos necesarios, etc.
- Errores debidos a la rigidez de pensamiento: Cuando la experiencia del alumno en resolver problemas anteriores similares le genera falta de flexibilidad en el pensamiento. Flexibilidad asociada a la adaptación de esa información a una nueva situación.
- Errores debidos a la aplicación de reglas o estrategias irrelevantes: Surgen por emplear con éxito reglas o estrategias similares en áreas de contenidos diferentes.

Dichas clasificaciones serán tomadas en cuenta para analizar los hechos y las actitudes de los alumnos dentro del aula durante la experimentación.

5.4 HABILIDADES GEOMÉTRICAS DE LOS ESTUDIANTES

Astolfi en su clasificación de errores, nombra a aquellos causados por la complejidad del contenido. Considera que una tarea es más compleja cuando requiere de más habilidades para poder resolverla. Para profundizar este concepto, citaremos a Campistrous (1989) quien define a las habilidades matemáticas como "un complejo formado por conocimientos específicos, sistemas de operaciones y conocimientos y operaciones lógicas" (p.7).

El alumno frente a una situación deberá utilizar diferentes habilidades para resolverla, que dependen obviamente de la consigna. Puede que el estudiante tenga ciertas habilidades disponibles y otras no, lo cual determina sus acciones para resolver el problema y los errores que pueda cometer.

Particularmente el aprendizaje de la Geometría requiere del desarrollo de ciertas habilidades que son más prácticas y tienen una naturaleza geométrica. Hoffer (1981), Bressa, Bogisic, Crego (2000) y García & López (2008) consideran a estas habilidades como: visuales, verbales o de comunicación, de dibujo o construcción, lógicas o de razonamiento y de aplicación o transferencia, que detallaremos a continuación.

Habilidad de visualización: Esta es la primera habilidad que el alumno adquiere. La visualización no es solo percibir el objeto, sino reflejar el concepto y las propiedades de este en el pensamiento y en el lenguaje del estudiante.

Habilidad verbal o de comunicación: Una vez que el alumno haya adquirido la habilidad de visualización deberá poder transmitir, en forma oral o escrita, la información que obtiene de la interpretación del objeto. Para esto es importante que utilice el vocabulario correspondiente a su nivel de aprendizaje y a sus conocimientos previos.

Habilidad de dibujo o construcción: El estudiante deberá ser capaz de realizar sus propias construcciones o representaciones que utilizará como medio para construir o profundizar ciertos conocimientos. Para esto, él debe ser capaz de percibir los patrones necesarios para construir el objeto.

Habilidad lógica o de razonamiento: El estudiante debería llegar a desarrollar, utilizando algún método, una demostración argumentativa de la situación que se le plantea. Algunas de las acciones que demuestran cierto nivel de razonamiento es cuando el alumno realiza conjeturas y trata de justificarlas, demostrarlas o ver su falsedad, cuando hace deducciones lógicas o identifica que no lo son, entre otras.

Habilidad de aplicación o transferencia: Esta habilidad será adquirida cuando el estudiante sea capaz de aplicar lo aprendido a nuevos contextos. Ya sea otros ejercicios o problemas, como también moldear geoméricamente situaciones de su entorno.

5.5. EL USO DE LAS TIC¹⁵ EN LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Las escuelas pertenecientes a la Ciudad Autónoma de Buenos Aires están atravesando un período de transición entre la escuela actual y la llamada Nueva Escuela Secundaria (que abreviaremos como NES). Esta comenzó, en el caso de la Escuela de Danzas Mastrazzi, en el 2015 (otras han iniciado en el 2013 o 2014). Dichos establecimientos deberán adecuarse a los lineamientos establecidos en Ley de Educación Nacional 26.206 sancionada en el 2006. Dicha ley exige varios cambios en la estructura del plan de estudios, currícula, horarios, modo de enseñar, etc. Particularmente nos referiremos a la obligatoriedad de la implementación del uso de las TIC (Tecnologías de la Información y de la Comunicación) en la enseñanza, para esto citamos el artículo 88: “el acceso y dominio de las tecnologías de la información y la comunicación formarán parte de los contenidos curriculares indispensables para la inclusión en la sociedad del conocimiento”.

El diseño curricular redactado en el 2013 para la NES, plantea como fundamento que:

La sociedad actual es muy diferente de aquella que dio origen a los sistemas educativos modernos. En este contexto, es necesario integrar a las escuelas las prácticas contemporáneas de la cultura digital, para garantizar que la construcción de conocimiento se produzca a través de interacciones con la realidad del siglo XXI.

(Ministerio de Educación, 2013, p. 113)

Luego agrega que:

Es fundamental la incorporación de las TIC, que son parte de la sociedad y la cultura actual. Es necesario que los jóvenes del siglo XXI reciban en las escuelas una formación integral que incluya el acercamiento a la cultura digital, a través de las

¹⁵TIC: Es una sigla que significa Tecnologías de la Información y de la Comunicación. Estas son un conjunto de tecnologías aplicadas para proveer a las personas de la información y comunicación a través de medios tecnológicos de última generación. Extraído el 11 de noviembre de 2014 desde <http://www.cosasdeeducacion.es/ue-significa-tic/>

distintas disciplinas y contenidos curriculares. En este sentido, la presencia de las TIC en la Nueva Escuela Secundaria es obligatoria y de carácter curricular. (Ministerio de Educación, 2013, p. 120)

Este carácter de obligatoriedad nos condiciona, como docentes e investigadores, a crear propuestas de enseñanza e investigaciones incluyendo las TIC.

Es importante citar de las páginas 126 y 127 del Diseño curricular para la NES, donde se muestra el detalle de las propuestas de educación digital en Matemática. Allí se enumeran entre otras, las siguientes ideas:

- Realizar simulaciones para la explicación de modelos científicos y la demostración de hipótesis.
- Utilizar modelos dinámicos para graficar en 2 o 3 dimensiones, comunicar e interpretar datos.
- Modelar diferentes escenarios con el uso de aplicaciones específicas para el área curricular, identificando patrones y verificando hipótesis.
- Generar un ambiente donde los alumnos puedan argumentar sus conocimientos matemáticos favoreciéndolos y potenciándolos con TIC.
- Compartir con sus pares las estrategias logradas para una mejor resolución de los problemas específicos con TIC.
- Recolectar, organizar y analizar datos para evaluar teorías o comprobar hipótesis a través de la selección y uso de distintos recursos digitales.
- Utilizar aplicaciones TIC específicas para el área curricular que permitan la interacción dinámica de geometría, álgebra, estadísticas y recursos de análisis y cálculo.

5.5.1. ELECCIÓN DEL SOFTWARE

En nuestro proyecto utilizamos el Software Cabri 3D. v2., programa de Geometría Dinámica en 3 dimensiones creado por el Dr. Jean-Marie Laborde y su equipo en 2004, siendo reformado en 2006.

La elección del software fue definida por sus ventajas y su carácter dinámico. Debido a que el trabajo se debe realizar con figuras en 3 dimensiones, el dibujo con lápiz y papel o la utilización de material concreto resulta insuficiente. El software permite crear elementos en 3D y visualizarlos desde diferentes puntos de vista. Hace visible el error de carácter matemático, lo cual nos será de utilidad para lograr nuestro tercer objetivo específico. Nos posibilita crear un modelo, ponerlo a prueba (realizando los movimientos correspondientes a cada paso de Danza Clásica) y en caso de necesitarlo, modificarlo fácilmente.

6. CAPÍTULO 6: METODOLOGÍA DE INVESTIGACIÓN

6.1. LA INGENIERÍA DIDÁCTICA

Como metodología de investigación, la Ingeniería Didáctica se caracteriza por ser un esquema experimental basado en la realización, observación y análisis de secuencias de enseñanza. Su validación se fundamenta en la confrontación entre el análisis a priori y a posteriori. Resulta así un enfoque de gran utilidad para este tipo de investigación. A continuación pasamos a describir sus fases.

Fases de la Ingeniería Didáctica

El proceso experimental de la ingeniería didáctica consta de cuatro fases a seguir en la investigación y que detallamos a continuación.

Primera fase: Análisis preliminares

Están conformados por los conocimientos teóricos, didácticos y específicos del campo de estudio. Artigue (1998) nombra tres dimensiones a tener en cuenta para dicho análisis, las cuales están ligadas a los objetivos de la investigación:

- La Dimensión Epistemológica de los contenidos, que está asociada a las características del saber matemático puesto en funcionamiento.
- La Dimensión Cognitiva que se basa en las concepciones, dificultades y obstáculos de los estudiantes, que determinan su evolución.
- La Dimensión Didáctica la cual está ligada al análisis de la enseñanza tradicional y sus efectos, relacionada además con las particularidades del funcionamiento del sistema de enseñanza.

Segunda fase: Concepción y análisis a priori de las situaciones didácticas.

En esta segunda fase el investigador toma la decisión de actuar sobre un determinado número de variables del sistema. Estas variables pueden ser globales o locales. Las globales tienen que ver con la organización general de la ingeniería y las locales se relacionan puntualmente con una secuencia o una fase de esta. Artigue (1998) argumenta que, tradicionalmente este análisis a priori comprende una parte descriptiva y una predictiva. Aquí se detalla la secuencia de actividades, las variables, y se hace una predicción del posible comportamiento del alumno, del grupo y de las intervenciones del docente. Todo esto se valida en la cuarta fase cuando se confronta con el análisis a posteriori.

Tercera fase: Experimentación.

Como el nombre lo indica, en esta fase se pone en marcha la realización de la ingeniería didáctica diseñada. No solo el profesor ejecuta en su clase las secuencias sino también observa lo que sucede con los alumnos cuando se enfrentan al problema.

Es importante recoger información que sea útil para evaluar las actividades. Para esto se debería observar la actuación del profesor, del alumno y el funcionamiento del problema mismo. Se pueden utilizar video-grabaciones, audio-grabaciones, observación de un colega externo a la clase, entrevistas individuales o grupales a los estudiantes, entre otros. Es recomendable, cuando la experimentación tarda más de una clase, hacer análisis a posteriori locales confrontando con los análisis a priori, con el fin de hacer las correcciones necesarias.

Cuarta fase: Análisis a posteriori y evaluación

Tomando la información obtenida en la fase anterior, mediante las observaciones, entrevistas, etc., el investigador contrasta lo que sucedió en la experimentación con las previsiones hechas en el análisis a priori y saca conclusiones al respecto.

6.2. LAS FASES EN NUESTRA INVESTIGACIÓN

6.2.1. ANÁLISIS PRELIMINARES

Detallaremos las tres dimensiones que tendremos en cuenta para el análisis preliminar.

6.2.1.1. DIMENSIÓN EPISTEMOLÓGICA

Se realizó un rastreo de los modelos geométricos utilizados en las Danzas, detallados en el marco teórico

6.2.1.2. DIMENSIÓN COGNITIVA

La Escuela de Danzas Aida V. Mastrazzi, es una institución educativa municipal de nivel medio que cuenta con dos carreras artísticas, además de un Bachillerato exclusivo para alumnos que cursan dichas carreras. Se dictan 2 especialidades: Intérprete en Danza Clásica y Contemporánea y por otro lado el de Intérprete en Danzas Folklóricas Argentinas y Tango. La primera especialidad tiene una duración de 7 años distribuidos en dos ciclos: Ciclo Iniciación que consta de dos años (1ero y 2do iniciación) y un Ciclo Medio de 5 años. Esta carrera puede ser cursada por alumnos desde los 11 años de edad en el turno mañana o tarde. La segunda especialidad tiene un solo Ciclo Medio con una duración de 5 años, que solo se cursa en el turno mañana.

El Bachillerato, funciona a contra turno de la especialidad. Cabe aclarar que los años de las carreras artísticas no están ligados a un año particular del Bachillerato, por lo que en cada curso hay alumnos de distintos niveles de danza. Por ejemplo en un 3^{er} año de Bachiller nos podemos encontrar con estudiantes de Iniciación o de Ciclo Medio de 1^{er}, 2^{do}, 3^{er} año, etc. correspondiente a la carrera de Intérprete.

Hemos elegido para esta investigación el 4^{to} año Bachiller del turno mañana de la escuela Mastrazzi, el cual cuenta con 19 alumnas (todas mujeres). La totalidad del curso estudia en contraturno la carrera de Intérprete en Danza Clásica y Contemporánea, detallando a continuación el nivel de danza de las mismas:

1ero iniciación: 0 alumnas

2do iniciación: 3 alumnas (Rocío, Victoria y Romina)

1ero ciclo medio: 2 alumnas (Denise y Diana)

2do ciclo medio: 7 alumnas (María, Azul, Micaela, Stefanía, Sofía, Sabrina y Jimena)

3ero ciclo medio: 5 alumnas (Paula, Priscila, Tatiana, Belén y Melody)

4to ciclo medio: 2 alumnas (Gala y Sol)

5to ciclo medio: 0 alumnas

Desde ahora en adelante se hará referencia a “las alumnas” dado que el grupo está conformado por jovencitas. Atendiendo a los intereses del grupo el modelo que se construirá será el de una bailarina de Danza Clásica y ejecutará pasos de danza de mujer.

En cada año de la carrera las alumnas adquieren ciertos conocimientos sobre la danza. Tienen materias tales como Danza Clásica, Danza Contemporánea, Anatomía, Preparación Física para la Danza, Teatro, Música, Canto, Danza Jazz, Francés, Folklore,

Historia de la Danza, Artes Plásticas, Composición Coreográfica, entre otras. A continuación describiremos en primer lugar, una síntesis de los conocimientos que adquieren por año con respecto a la Danza Clásica (se amplían en el anexo 10.2.). Y en segundo lugar, los conocimientos matemáticos.

Conocimientos de Danzas

En 1^{er} y 2^{do} Iniciación las alumnas logran la postura apropiada para la ejecución de la Danza Clásica. Aprenden los pasos básicos sobre media punta¹⁶.

En 1^{er} Ciclo Medio las alumnas, a la mitad del año de cursada, utilizan las puntas¹⁷. Aprenden el eje y control del equilibrio en uno y dos pies en planta, en media punta y punta en la barra. Ejecutan saltos e incorporan el dominio del eje de pirueta (*pirouette*¹⁸).

En 2^{do} Ciclo Medio trabajan sobre las puntas para perfeccionar el movimiento y se les agrega el manejo de saltos simples con batería¹⁹ e incorporación de grandes saltos.

En 3^{ro}, 4^{to} y 5^{to} Ciclo Medio perfeccionan el trabajo realizado en los años anteriores para lograr una buena interpretación de la danza (expresividad).

La materia de Anatomía Funcional y Biomecánica que se encuentra en 1^{er} y 2^{do} Ciclo Medio de la carrera de Intérprete en Danza Clásica y Contemporánea posee contenidos que se relacionan con nuestro proyecto. En dichos años aprenden el concepto de sistemas de referencias y los usos de la posición anatómica. Planos y Ejes del movimiento. Analizan los principales movimientos articulares. Aprenden los conceptos de velocidad, aceleración, equilibrio, puntos de apoyo, rotación, traslación, entre otros.

¹⁶ Las medias puntas son zapatillas de danza con suela flexible.

¹⁷ Las puntas son zapatillas especiales con punta de de yeso, cartón u otro material que permite a la bailarina sostenerse sobre las puntas de sus pies.

¹⁸ *Pirouette*: Pirueta. Giro en que el cuerpo da una o más vueltas completas, sostenido en un pie en media punta o punta (Vaganova, 1945, pp. 255 y 256).

¹⁹ Batería: Término genérico aplicado a todo movimiento en que se trenzan los pies en el aire, o en que las piernas se golpean entre sí igualmente en el aire (Vaganova, 1945, p. 239).

Conocimientos previos de Matemática

Las alumnas de 4to año Bachiller deben tener los siguientes conocimientos que fueron adquiridos en los años anteriores:

- Punto, puntos alineados, segmento, recta, semirrecta, plano, semiplano, perpendicular, paralela, circunferencia, radio, cuerda, diámetro, arcos.
- Figuras geométricas: triángulo, cuadriláteros, pentágonos, etc.
- Cuerpos geométricos y sus partes. Esfera: arcos, diámetro, radio, circunferencias máximas. Conos y cilindros.
- Perímetro de una circunferencia, longitud de arco, longitud de un segmento, distancia entre puntos.
- Proporcionalidad, medida, velocidad.
- Movimientos en el espacio: simetría central, axial, rotación, traslación.

6.2.1.3 DIMENSIÓN DIDÁCTICA

La currícula de C.A.B.A.²⁰ tiene como idea central un aspecto esencial de la actividad matemática que es la de construir un *modelo matemático de la realidad*. Buscando esta idea en los contenidos propuestos para cada año, vemos que la modelización está presente en todos los bloques: números y álgebra, funciones y álgebra, geometría y medida, estadística y probabilidades.

²⁰ C.A.B.A.: Abreviación de Ciudad Autónoma de Buenos Aires

Hemos elegido para desarrollar nuestra investigación el 4to año del nivel medio, donde los alumnos poseen un equilibrio entre conocimientos avanzados en Danza Clásica y en Matemática.

6.2.2 ANÁLISIS A PRIORI

La secuencia didáctica será puesta en el aula por la docente de Matemática Cecilia Barros Tomé, quien trabaja en la misma institución (Escuela de Danzas Aida V. Mastrazzi). Ella no conoce al curso pues no fue docente de estas alumnas.

La secuencia de actividades está diseñada con un carácter ascendente en complejidad. Se les presentará una consigna por día, sin que vean o sepan cual es la siguiente, con la intención de mantener la curiosidad y el interés de las alumnas. Además, permitirá al docente reformular o no la consigna siguiente, en base a las dificultades o facilidades encontradas en el aula, de acuerdo al tercero y cuarto objetivo específico que nos proponemos. Esta situación forma parte del análisis local de la ingeniería didáctica.

Para el trabajo en el aula, cada alumna dispondrá de una netbook, interactuando siempre con sus compañeras. En dichas computadoras se encontrará instalado el software Cabri 3D. Las estudiantes podrán autoevaluar sus producciones mediante la manipulación de los objetos o la utilización de la animación, contrastando lo obtenido con la realidad. Al finalizar cada actividad, o cuando sea necesario, se hará una puesta en común con el uso del proyector. De esta manera las alumnas verán diferentes formas de representación, notando que algunas de ellas, son más accesibles y fáciles de manejar que otras. En la secuencia explicada estarán presentes los momentos de acción, formulación, validación y el de institucionalización que estará a cargo del profesor. Esta última se realizará luego de una puesta en común de lo realizado por las alumnas.

A continuación, detallaremos la actividad previa y las seis actividades para la experimentación. De cada una de ellas, especificaremos:

- El tiempo estimado, para planificar la duración.
- Los objetivos, que estarán detallados en función del aprendizaje del concepto de modelización matemática. Para esto citamos del marco teórico los seis subprocesos del proceso de modelización de Blomhøj y Højgaard Jensen (2003) descritos en el capítulo 5.2. Tendremos en cuenta además las habilidades geométricas consideradas por Hoffer (1981), Bressa, Bogisic, Crego (2000) y García & López (2008) en el capítulo 5.4. En el análisis a posteriori analizaremos el cumplimiento de estos objetivos que serán considerados como indicios del aprendizaje del concepto de modelización.
- Las dificultades, los errores y estrategias posibles, para luego contrastarlo con la experiencia y cumplir tres de nuestros objetivos específicos. Para detallar éstos, nos basamos en diversos autores del marco teórico que citamos en el capítulo 5.3.
- Algunas de las construcciones esperables, para cotejarlas con las que surjan en el aula.

6.2.2.1 ACTIVIDADES PREVIAS:

Recrear, en Cabri 3D, el movimiento continuo de:

- 1) Una puerta
- 2) Una ventana con carril
- 3) Una tijera
- 4) _____ (a elección)

Tiempo estimado: 3 clases.

Objetivos: Es una actividad introductoria, que estará guiada por el docente, con la que se pretende que las alumnas:

- Logren interpretar geoméricamente el movimiento de objetos sencillos.
- Afiancen el manejo del software y su animación.
- Practiquen la validación.
- Sean creativas²¹.

Dificultades esperables:

Pueden surgir dificultades de origen cognitivo, por ejemplo, alumnas que no posean la habilidad de visualización para crear imágenes mentales de los objetos en 3 dimensiones. Y todas aquellas vinculadas a las habilidades que requiere el trabajo con Geometría (detalladas en el marco teórico capítulo 5.4). Dificultades de origen emocional, al ser actividades diferentes a las que están acostumbradas en la clase de Matemática, puede originar sentimientos como el miedo al fracaso.

Errores posibles:

Se esperan errores asociados a la comprensión de las instrucciones de trabajo, como ya dijimos, no son las habituales en una clase de Matemática. Errores que provienen de las operaciones intelectuales o de dificultades para obtener información espacial, cuando la alumna no posea desarrollada la capacidad de visualizar mentalmente los objetos en 3D. Errores que tienen origen en otra disciplina, no es lo mismo dibujar en Plástica un objeto 3D en un papel, que en un software. Errores por la falta de verificación de la solución, si

²¹ Según la RAE creativo es aquel que es capaz de crear algo. Extraído el 10 de septiembre de 2015 desde <http://lema.rae.es/drae/srv/search?key=creativo>

no han corroborado la construcción utilizando la animación. Errores por un aprendizaje deficiente de conceptos previos, si la alumna no tiene en claro alguno de los conceptos previos que detallamos en el análisis preliminar.

6.2.2.2 ACTIVIDADES PARA LA EXPERIMENTACIÓN

Se les presentarán las siguientes actividades (una por vez, sin mostrar la siguiente)

6.2.2.2.1 ACTIVIDAD 1

Actividad 1: Representar una pierna con Cabri. Utilizando la animación del software, comprobar que pueda efectuar todos los movimientos posibles.

Tiempo estimado: 2 clases

Objetivos: Que las alumnas:

- Transiten los seis subprocesos²² del proceso de modelización donde: identifiquen las características de la realidad a ser modelizada, seleccionen los elementos, relaciones, variables, los idealicen, y posteriormente, los traduzcan a lenguaje matemático, utilicen métodos matemáticos para llegar a resultados, interpreten y analicen la validez del modelo.
- Desarrollen las habilidades geométricas de visualización, de comunicación, de dibujo, de razonamiento y de aplicación²³.

²² Detallados en el marco teórico en el capítulo 5.2.

²³ Detalladas en el marco teórico en el capítulo 5.4.

Dificultades esperables:

Asociadas a la complejidad de los objetos matemáticos, el lenguaje que utilizarán las alumnas para describir sus ideas no será tan exacto como el lenguaje matemático lo cual podría generar errores. Dificultades relacionadas con los procesos de enseñanza, están acostumbradas a que el docente les marque los errores y les diga cómo se resuelve. En nuestra experiencia trabajaran bajo el encuadre de la teoría de situaciones didácticas donde las alumnas se harán cargo de sus producciones y correcciones. Creemos que a medida que avancen las clases esta dificultad ira paulatinamente desapareciendo. Dificultades de origen cognitivo, vinculadas a las habilidades que requiere el trabajo con Geometría. Y de origen afectivas o emocionales, por esta nueva responsabilidad que tienen sobre sus producciones.

Errores posibles:

Errores debidos a la comprensión de las instrucciones de trabajo. Errores ligados a operaciones intelectuales que no tengan desarrolladas las alumnas. Errores que tienen origen en otra disciplina, por ejemplo en Educación Plástica.

Por la complejidad del contenido, esta actividad requiere del manejo de muchas habilidades geométricas para resolverla. Si no desarrollan la habilidad verbal, para poder transmitir sus ideas con claridad, pueden deformar la idea y generar errores en sus compañeras. Si no disponen de la habilidad de dibujo construirán la pierna utilizando uno o dos segmentos en el plano sin una medida exacta. Pero el software mostrará el error al no poder animarlo y por ende deberán reformular la construcción. Con respecto a la habilidad de visualización si no la poseen, es posible que consideren que la rodilla y el pie se muevan sobre segmentos o sobre dos circunferencias concéntricas. Cuando

realicen la animación verán que la pierna se estira. Se requiere además de la habilidad de razonamiento geométrico, para llegar a una conjetura sobre el movimiento de la pierna y poder justificarla.

Se esperan también errores técnicos, relacionados a cómo se construye un objeto en Cabri. Errores debidos a la falta de verificación de la solución, por ejemplo si al construir la pierna no utilizan la animación para validar o no la construcción. Errores debidos a la dificultad de obtener información espacial. Deficiencia en el aprendizaje de hechos, destrezas y conceptos previos, como la definición de segmento, circunferencia, esfera, etc.

Estrategias posibles:

Una posible estrategia para poder resolver esta situación es recurrir a elementos materiales para visualizar el movimiento de la pierna. Por ejemplo que coloquen biromes en la rodilla, pie y cadera, apoyen la pierna sobre un papel y realicen los movimientos. Luego verán las curvas que se generan para arribar a una hipótesis. Otra táctica consistiría en utilizar sogas o algo similar, para ver la figura que forma la pierna al desplazarse.

Puede que comparen las medidas de cada parte de la pierna, utilizando su cuerpo. Por ejemplo, al flexionar la pierna verán que la parte inferior y superior de esta extremidad, tienen la misma longitud.

Podrán representar también en una hoja todos los movimientos de la pierna para poder luego inferir lo general.

Las construcciones esperables:

Dependiendo de la concepción del movimiento que cada una de las alumnas desarrolle en función de sus conocimientos previos puede que surjan diversas construcciones. Aquí solo detallaremos tres.

Si conciben al movimiento de de la rodilla y el pie sobre dos circunferencias secantes en un plano obtendrán lo que se muestra en la figura 18. De aquí en adelante cuando nos referiremos a este modelo diremos que es el modelo de pierna con dos circunferencias.

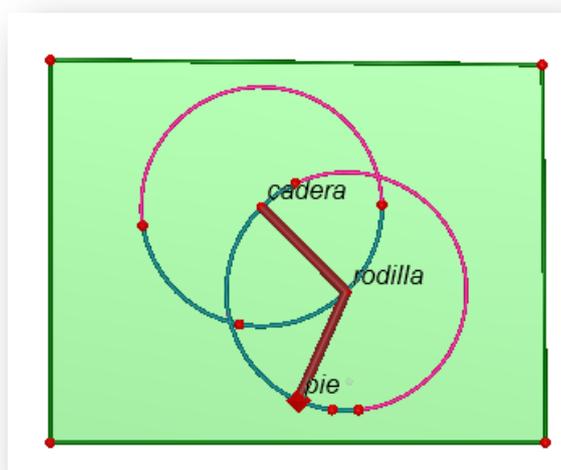


Fig. 18. Modelo de pierna con dos circunferencias.

Si poseen el concepto de mediatriz podrían pensar a la rodilla como un punto de la mediatriz de un segmento cuyos extremos son la cadera y el pie. Si conciben además que el espacio de contención (según Dinzel) o la zona normal (según Laban) de la pierna es una esfera de radio la longitud de la pierna estirada arribarán a una construcción similar a la que se muestra en la figura 19 (esta construcción puede pensarse sin la esfera como otra opción).

De aquí en adelante cuando hablemos de este modelo diremos que es el modelo de pierna con esfera y dos circunferencias sobre un plano, a modo de síntesis.

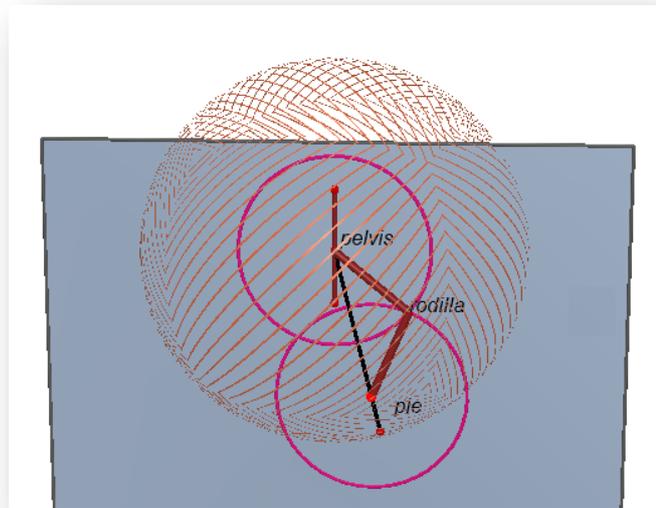


Fig. 19. Modelo de pierna con esfera y dos circunferencias sobre un plano.

Y por último si imaginan al movimiento de la rodilla y del pie sobre dos esferas secantes llegarán a la construcción que se ejemplifica en la figura 20. A modo de síntesis llamaremos a este modelo: Modelo de pierna con dos esferas.

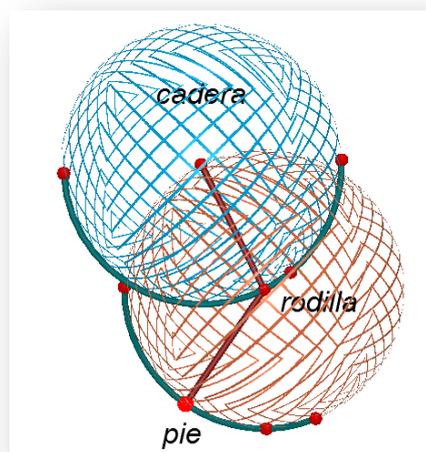


Fig. 20. Modelo de pierna con dos esferas.

6.2.2.2 ACTIVIDAD 2

Actividad 2: Recrear un *battement tendu jeté*²⁴ con la construcción de la pierna realizada, pero incorporando la otra pierna. Si es necesario, pueden modificar la construcción.

Tiempo estimado: 1 clase

Objetivos: Que las alumnas:

- Transiten los seis subprocesos del proceso de modelización donde: identifiquen las características de la realidad a ser modelizada, seleccionen los elementos, relaciones, variables, los idealicen, y posteriormente, los traduzcan a lenguaje matemático, utilicen métodos matemáticos para llegar a resultados, interpreten y analicen la validez del modelo realizado en el ítem anterior o de un nuevo modelo.
- Puedan ser críticas de sus producciones y sean capaces de reformularlas.
- Desarrollen las habilidades geométricas de visualización, de comunicación, de dibujo, de razonamiento y de aplicación.

Dificultades esperables:

Dificultades asociadas al desarrollo cognitivo de los alumnos descriptas en el ítems anterior.

²⁴*Battement tendu jeté*: Separación y atracción de la pierna. La pierna sigue su curso en el aire sin tocar el piso con la punta. (Vaganova, 1945, pp.49 y 51)

Errores posibles:

Errores ligados a las operaciones intelectuales implicadas o para obtener información espacial. Errores causados por la complejidad del contenido. Si no tienen desarrollada la habilidad de visualización y de razonamiento puede que no consideren correctamente el movimiento de la rodilla, pie y cadera.

Errores causados por la falta de verificación de la solución, si no cotejan la animación lograda con el movimiento del *battement tendu jeté*. Errores técnicos con Cabri. Errores debidos a deficiencias en los conceptos previos de velocidad y de proporcionalidad para lograr la recreación de este movimiento.

Estrategias posibles:

Pueden surgir estrategias similares a las mencionadas en el ítem anterior. Puede que coloquen sogas en la rodilla y el pie para ver el desplazamiento en este paso o que utilicen un fibrón, lápiz u otra herramienta similar. O que simplemente realicen un esquema en la hoja de papel.

Las construcciones esperables:

Si utilizan la construcción realizada con dos circunferencias en un mismo plano. Podrían dibujar dos arcos de igual tamaño. Sobre uno de ellos, se moverá el punto que representa la rodilla y en el otro el punto que representa el pie. Los extremos estarán ubicados de tal forma que comience la animación con la pierna apoyada en el suelo y la pierna quede extendida y asignarle igual velocidad a ambos puntos. La construcción se muestra en la figura 21.

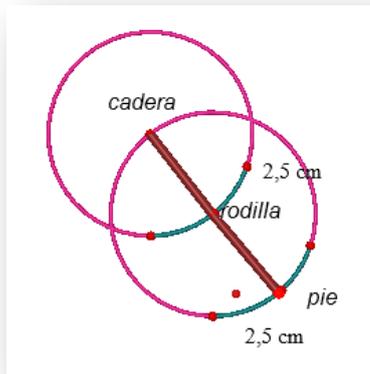


Fig. 21. *Battement tendu jeté* con dos circunferencias en un plano.

Si en cambio, utilizan el modelo que consta de una esfera y dos circunferencias sobre un plano solo deberán agregar una circunferencia máxima y sobre esta, un arco donde se animará el pie. Se muestra en la figura 22.

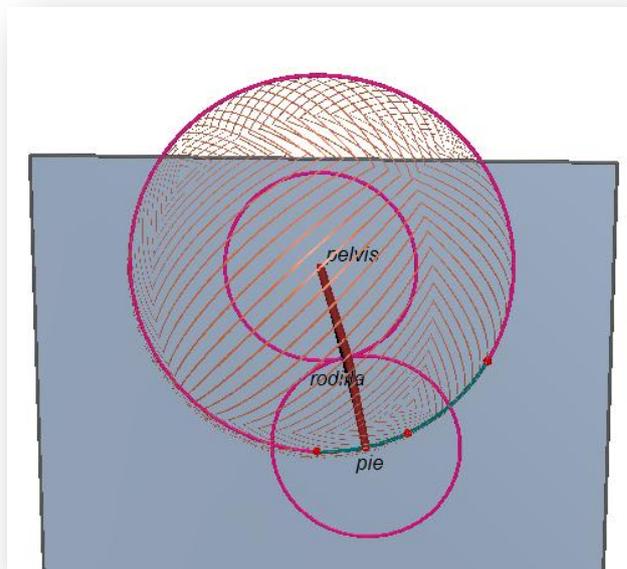


Fig. 22. *Battement tendu jeté* con una esfera y tres circunferencias sobre un plano.

Si realizan la construcción con dos esferas tendrán que hacer un razonamiento similar a la primera resolución propuesta. La construcción se muestra en la figura 23.

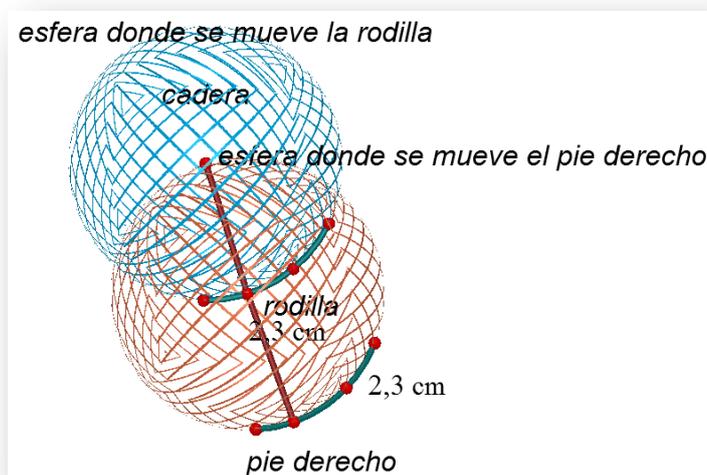


Fig. 23. *Battement tendu jeté* con dos esferas

6.2.2.2.3 ACTIVIDAD 3

Actividad 3: Recrear con en la construcción realizada de las piernas, el *battement fondu*²⁵ hacia adelante. Si es necesario modificar la construcción.

Tiempo estimado: 2 clases

Objetivos: Que las alumnas:

- Transiten los seis subprocesos del proceso de modelización donde: identifiquen las características de la realidad a ser modelizada, seleccionen los elementos,

²⁵*Battement fondu*: la pierna derecha efectúa un *demi-plié* luego la pierna derecha se abre hacia adelante, la izquierda se endereza y se extiende en la rodilla al mismo tiempo que la derecha (Vaganova, 1945, pp.58).

relaciones, variables, los idealicen, y posteriormente, los traduzcan a lenguaje matemático, utilicen métodos matemáticos para llegar a resultados, interpreten y analicen la validez del modelo realizado en el ítem anterior o de un nuevo modelo.

- Sean críticas de sus producciones y capaces de reformularlas.
- Aprendan a trabajar en equipo.
- Buscando economizar el tiempo, reflexionen sobre los posibles errores en la nueva construcción, al ejecutar otros pasos básicos de Danza Clásica. Busquen la generalización.
- Desarrollen las habilidades geométricas de visualización, de comunicación, de dibujo, de razonamiento y de aplicación.

Dificultades esperables:

Dificultades asociadas al desarrollo cognitivo de las alumnas. Dificultades en los procesos de pensamiento matemático, no logrando deducir qué elementos geométricos son los que se mueven al realizar el paso, ni la relación entre las velocidades y la distancia recorrida de los objetos que deben moverse.

Errores posibles:

Ligados a operaciones intelectuales implicadas o para obtener información espacial. Errores causados por la complejidad del contenido. Si no tienen desarrollada la habilidad de visualización, de dibujo y de razonamiento, puede que realicen la construcción de las dos piernas en un mismo plano. Errores asociados a la imagen mental de este movimiento que no condice con la realidad, o a alguna conjetura falsa que desarrollen. Por ejemplo, que consideren que en el *battement fondu* la cadera permanece fija durante el

movimiento.

Errores causados por la falta de verificación de la solución, si no cotejan la animación lograda con el movimiento esperado. Errores técnicos con Cabri. Errores debidos a deficiencias en los conceptos previos, por ejemplo los de velocidad y de proporcionalidad.

Aquí pueden surgir errores debido a la rigidez de pensamiento²⁶. Puesto que el modelo que construyeron de las piernas les sirvió para hacer el *battement tendu jeté*, pero para este nuevo paso puede que no. Deberán ser flexibles para adaptar la nueva información que surja de analizar este movimiento.

Estrategias posibles:

Que realicen dibujos secuenciales del paso de danza. Que utilicen a una de sus compañeras como modelo, ejecutando el *battement fondu* lentamente para poder armar conjeturas al respecto. Otra estrategia posible es que busquen en internet el paso y el desarrollo espacial del mismo, como se encuentra en el libro de Kirstein que se mostró en el marco teórico (cap. 4.3.3).

Las construcciones esperables:

Si el modelo de piernas que construyeron constaba de un plano y dos circunferencias, para dibujar la otra pierna deberán realizar otro plano. Para permitir el desplazamiento de los planos y en consecuencia el de las piernas, se puede utilizar otra circunferencia en el suelo. En la cual se moverá uno de los puntos que define el plano. Y para ejecutar este

²⁶ Cuando hablemos de rigidez del pensamiento, nos referimos al concepto de detalla Radatz (1979): cuando la experiencia del alumno en resolver problemas anteriores similares le genera falta de flexibilidad en el pensamiento. Flexibilidad asociada a la adaptación de esa información a una nueva situación. Detallada en el capítulo 5.3

paso se necesita que la pierna de base se flexione, por ende armar un arco para el desplazamiento de la rodilla y del pie. Para la pierna que se mueve hacia adelante, deslizar el plano que contiene a esta y el punto *pie* en un arco. Además de agregar un segmento donde se debe mover el punto que representa la *cadera*, para que esta suba y baje. Como se muestra en la figura 24.

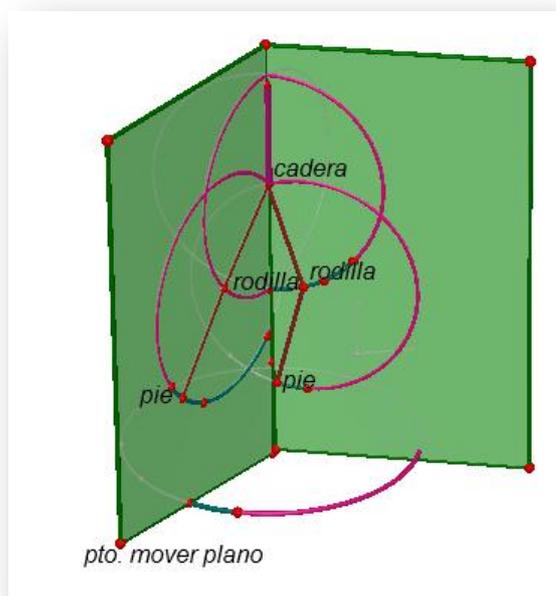


Fig. 24. *Battement fondu* con planos y circunferencias.

La construcción con esfera y dos circunferencias deberán hacer modificaciones similares a la anterior. Si la construcción que habían realizado era con dos esferas, deberán agregar otra más para el pie restante, realizar cuatro arcos para que se muevan las rodillas y los pies. Además de un segmento para que se desplace el punto que representa la cadera. Como se muestra en la figura 25.

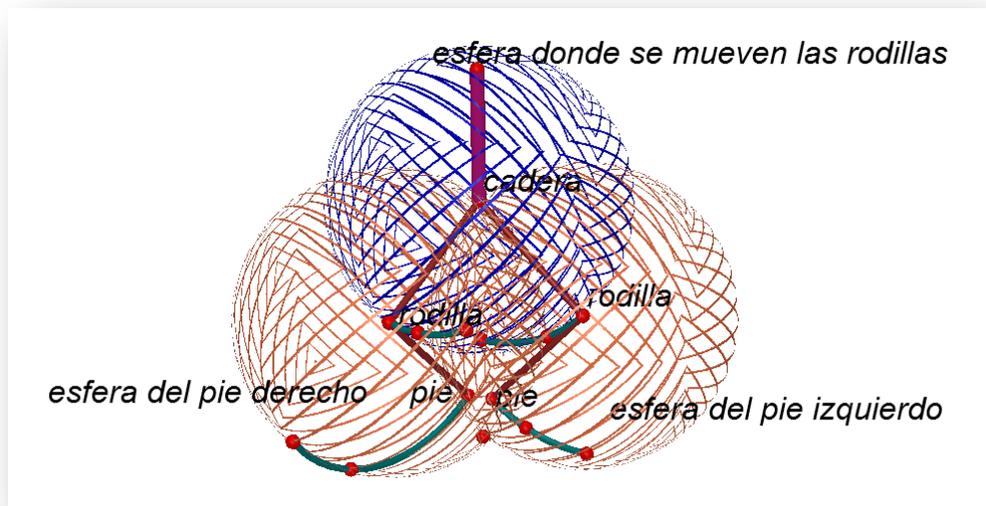


Fig. 25. *Battement fondu* con tres esferas

Finalizada esta actividad se hará una puesta en común y la Institucionalización de lo aprendido hasta aquí. Se prevé que se institucionalice ciertos conceptos como el de proporcionalidad, de velocidad y todos los que hayan surgido en la clase. En este momento no se hablará de que es un modelo matemático (esto aparecerá luego de la actividad 4).

6.2.2.2.4 ACTIVIDAD 4

Actividad 4: Sobre la construcción anterior, representar el torso, la cabeza, los hombros y los brazos. Teniendo en cuenta que la construcción debe permitirles realizar todos los movimientos de los pasos básicos de la Danza Clásica.

Sugerencia: Recuerden las características del cuerpo:

- Es un todo, por ejemplo, no se pueden separar las piernas del torso.
- Los miembros tienen medidas fijas. Por ejemplo: al mover el brazo la longitud de este no cambia.
- Esas medidas no son arbitrarias.

Tiempo estimado: 2 o 3 clases

Objetivos: Que las alumnas:

- Transiten los seis subprocesos del proceso de modelización donde: identifiquen las características de la realidad a ser modelizada, seleccionen los elementos, relaciones, variables, los idealicen, y posteriormente, los traduzcan a lenguaje matemático, utilicen métodos matemáticos para llegar a resultados, interpreten y analicen la validez del modelo.
- Veán la necesidad de investigar las proporciones del cuerpo para representarlo con más exactitud.
- Sean críticas de sus producciones y capaces de reformularlas.
- Aprendan a trabajar en equipo
- Desarrollen las habilidades geométricas de visualización, de comunicación, de dibujo, de razonamiento y de aplicación.

Dificultades esperables:

Dificultades asociadas a la complejidad de los objetos matemáticos, que las alumnas no puedan expresar matemáticamente los objetos que visualizan. Dificultades asociadas al desarrollo cognitivo, si alguna alumna no logra crear imágenes mentales de su cuerpo y del movimiento.

Errores posibles:

Errores vinculados a las operaciones intelectuales que implica esta actividad, como el crear imágenes mentales del cuerpo y de su movimiento. Una posible construcción errónea sería recrear la parte superior del cuerpo sobre un único plano. Dentro de este tipo de errores, también pueden surgir aquellos debidos al poco desarrollo de las habilidades de dibujo y de razonamiento.

Errores debidos a los procesos adoptados, que el alumno construya el cuerpo con segmentos separados. Que dibujen las piezas sin conectarlas, es decir, que al mover los puntos las extremidades, la cabeza o el torso se desarme. Otros errores asociados a inferencias no válidas lógicamente, deducir incorrectamente el movimiento o la falta de este en alguna parte corporal. Como por ejemplo creer que el torso no se mueve cuando la bailarina baja y sube. También errores por no verificar la solución, utilizando la animación. Errores producidos por un deficiente aprendizaje de hechos, destrezas y conceptos previos.

Estrategias posibles:

Que busquen en internet las proporciones del cuerpo o que las deduzcan comparando sus partes corporales. Otra estrategia puede ser que tomen como modelo a una compañera y

la hagan realizar varios pasos básicos de Danza Clásica para analizar los movimientos posibles. Puede surgir la idea de consultar a sus profesoras de Danza. Que dibujen en el papel esquemas de cómo conciben los movimientos, para luego volcarlos al Cabri 3D.

Las construcciones esperables:

Si la construcción es sobre planos utilizando circunferencias, puede que arriben a una representación similar a la que se muestra en la figura 26.

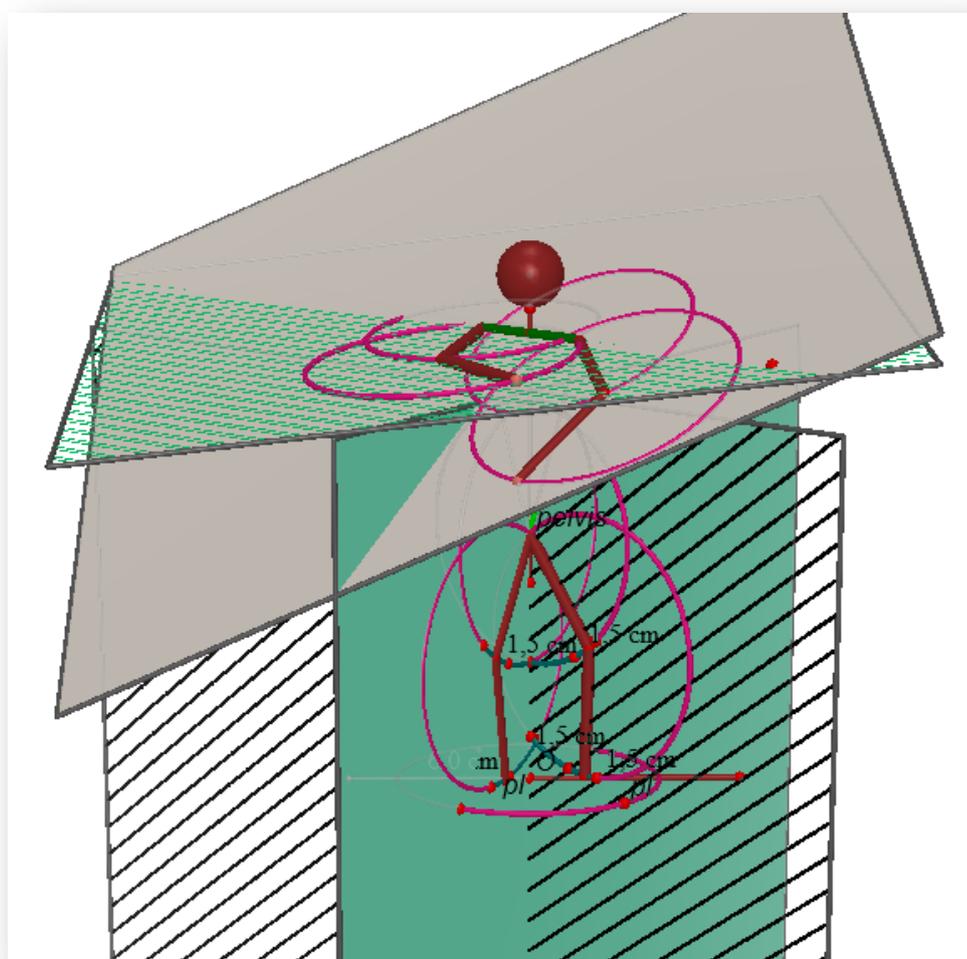


Fig. 26. Cuerpo realizado con planos y circunferencias.

En cambio si la representación es utilizando algunas esferas y circunferencias sobre planos, la construcción puede ser la que se expone en la figura 27

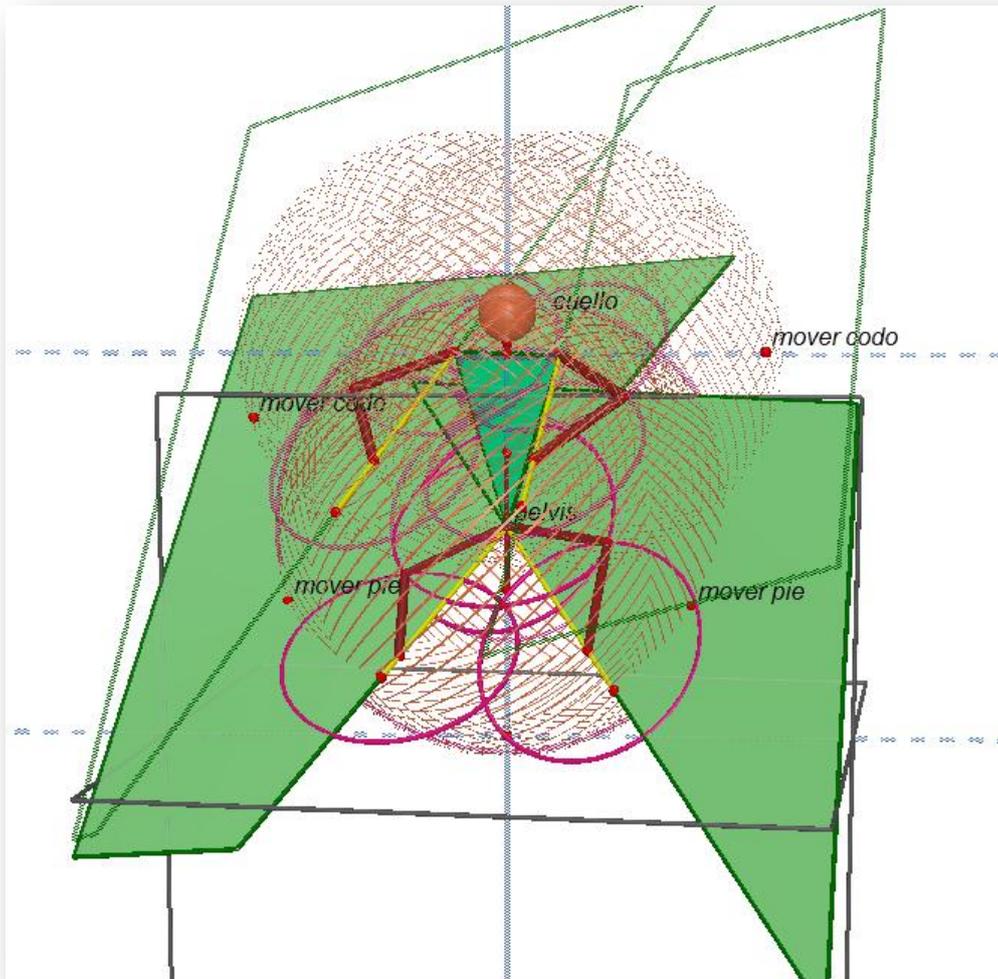


Fig. 27. Cuerpo realizado con esferas y circunferencias sobre planos.

Y por último si en la construcción utilizaron esferas, se observará algo similar a la figura 28.

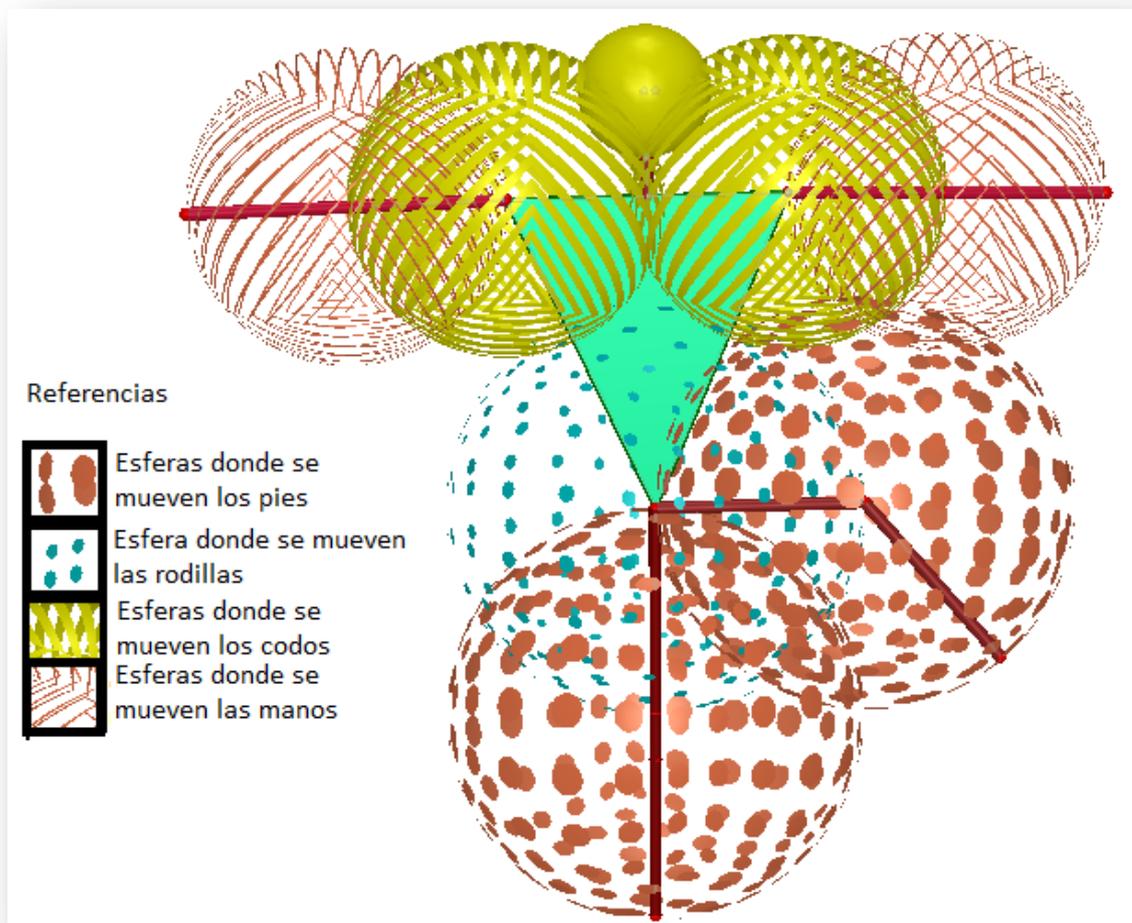


Fig. 28. Cuerpo realizado con esferas.

Finalizada esta actividad se hará una puesta en común y la Institucionalización. El alumno verá que el conocimiento que fue construyendo a lo largo de estas actividades fue el concepto de modelo matemático.

6.2.2.2.5 ACTIVIDAD 5

Actividad 5: Con la representación del cuerpo ya obtenida, realizar un paso básico de Danza Clásica a elección. Realizar modificaciones al modelo si es necesario.

Tiempo estimado: 1 o 2 clases

Objetivos: Que las alumnas:

- Analicen la validez del modelo creado en el ejercicio anterior.
- Puedan ser críticas de sus producciones y sean capaces de reformularlas.
- Aprendan a trabajar en equipo
- Sean creativas.
- Desarrollen las habilidades geométricas de visualización, de comunicación, de dibujo, de razonamiento y de aplicación.

Dificultades esperables:

Pueden surgir dificultades asociadas a la visualización geométrica del movimiento. Además de aquellas asociadas a las actitudes afectivas, puede que las alumnas se frustren al ver que el modelo obtenido no es el correcto y al enfrentarse a la idea de tener que seguir modificándolo. Pero al final será gratificante, para la alumna, ver a su modelo de bailarina danzar.

Errores posibles:

Los errores posibles estarán relacionados con las dificultades para obtener información espacial. Además de las producidas por la rigidez del pensamiento, cuando la alumna no

pueda adaptar el modelo para que realice determinado movimiento. Errores causados por la complejidad del contenido. Que podrían surgir al no lograr el desarrollo completo de las habilidades geométricas, como la de visualización, de comunicación, de razonamiento y de aplicación.

Estrategias posibles:

Puede que realicen dibujos secuenciales del paso de danza elegido. Que utilicen a una de sus compañeras como modelo, ejecutándolo lentamente para poder armar conjeturas al respecto. Otra estrategia posible es que busquen en internet el paso y el desarrollo espacial del mismo. Que realicen filmaciones y luego analicen estas imágenes en cámara lenta.

Las construcciones esperables:

A modo de ejemplificar este ítem, podrán elegir recrear un *arabesque*²⁷. Si tomamos el modelo del cuerpo creado con esferas y circunferencias sobre planos, se dibujará tres arcos: uno para la pierna y otros dos para cada brazo como se muestra en la figura 29.

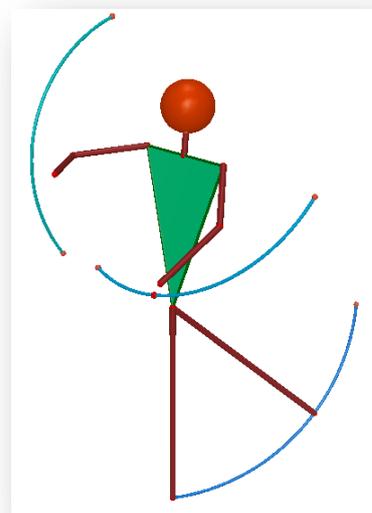


Fig. 29. *Arabesque*

²⁷*Arabesque*: lit. Arabesco. Posición de baile generalmente de perfil al espectador que presenta las siguientes características: cuerpo sostenido en una pierna, la otra extendida en cuarta posición posterior; los brazos extendidos armonizando con la línea de la pierna levantada (Vaganova, 1945, p.234).

6.2.2.2.5 ACTIVIDAD 6

Actividad 6: A partir de las pruebas realizadas a los distintos modelos propuestos, representar un único modelo de bailarina, teniendo en cuentas todas las modificaciones y conjeturas realizadas en los distintos grupos. Este trabajo debe realizarse entre todas.

Tiempo estimado: 1 clase.

Objetivo: Es una actividad de cierre para sintetizar lo trabajado y producir un único modelo de bailarina consensuado por el curso.

Dificultades esperables:

Pueden surgir dificultades asociadas a los procesos de enseñanza, debido a que generalmente no se trabaja en grupo en las clases de Matemática.

Errores posibles:

Errores producidos por la rigidez del pensamiento, cuando una alumna no pueda ver en la opinión del otro un error en su trabajo, puesto que su modelo le sirvió para realizar el paso elegido.

Las construcciones esperables:

Son las mostradas en la consigna 4.

Al finalizar esta actividad se hará una puesta en común como cierre de la experimentación.

6.2.3. EJECUCIÓN DE LA EXPERIMENTACIÓN

La experiencia se llevó a cabo desde el 16 de abril de 2015 hasta el 20 de agosto del mismo año. Constando con un total de 15 clases de 80 minutos cada una (2 horas cátedras).

En las cuatro primeras clases se trabajó con las actividades previas para introducir el software.

La primera impresión con el software Cabri fue de sorpresa. Los cuerpos geométricos que se pueden formar, la posibilidad de abrir un poliedro, la animación, ver los objetos desde diferentes ángulos, fueron algunos aspectos que les atrajo. Priscila, una de las alumnas, dijo que parecía un software de arquitectura. Varias estudiantes manifestaron sentir presión por el proyecto, pues no se sentían capacitadas para resolver las situaciones sin la intervención constante de un docente.

Se les presentó la primera actividad de la secuencia: Recrear el movimiento continuo de una puerta. Recordemos que esta actividad está pensada como introducción al manejo del software y por ende va a ser guiada por el docente, explicando cómo se construyen los objetos.

Utilizando la puerta del aula, se les mostró la animación a realizar. Se les preguntó que veían del movimiento, y como se producía. Dijeron que veían un cilindro, un eje, una circunferencia.

Se percibió a las alumnas entusiasmadas diciendo muchas ideas de cómo dibujar la puerta en Cabri 3D. Las ideas que surgían estaban asociadas a sus interpretaciones para

dibujar la puerta en una hoja de papel y no en el espacio. Determinaban rectas o segmentos sin ninguna condición y cuando cambiaban de perspectiva veían que las líneas no quedaban “derechas” como debían serlo. Ahí apareció el concepto de perpendicularidad y la necesidad de utilizarlo para que la puerta no quede torcida.

El paralelismo de las aristas de la puerta fue otro conocimiento que surgió. Se les dificultó dibujar las rectas paralelas en el espacio por los elementos iniciales que se necesitaban, que devela la deficiencia en el aprendizaje de algunos conceptos matemáticos involucrados. Para la construcción de una recta paralela era necesario elegir una recta y un punto exterior a ella. Muchas seleccionaban el plano y el software dibujaba otro plano paralelo. Igual sucedía cuando querían construir una circunferencia en el espacio. Para lo cual primero debían elegir el plano, luego el centro y por último un punto o el radio, y ellas no consideraban el plano.

Otro error que se produjo fue al dibujar un arco, ellas tomaban solo dos puntos (los extremos) sin visualizar la necesidad de un tercero para definirlo. En los diálogos que se daban en el aula, se advirtió la deficiencia en el concepto de radio, plano, perpendicularidad, la diferencia

entre recta, semirrecta y segmento. Lo descrito era producto de la falta de conocimientos de las definiciones de los objetos geométricos y de sus propiedades que salían a la luz al representarlos en Cabri.

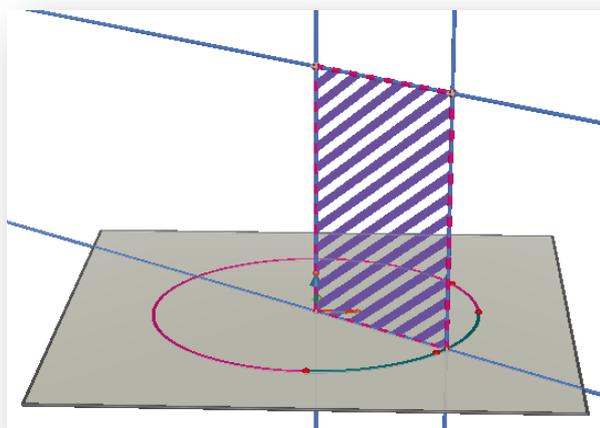


Fig. 30. Puerta realizada por Victoria

Finalmente pudieron recrear el movimiento de la puerta. En la figura 30 se muestra la construcción realizada por Victoria.

En la siguiente clase, la docente presentó la actividad: Recrear el movimiento continuo de una ventana con carril. La profesora pidió que describieran con sus palabras el movimiento de la ventana. La respuesta fue: “se mueve de lado a lado”, “se mueve en una recta”. Se observó cierta dificultad en verbalizarlo y muchas recurrían a recrear el movimiento con su cuerpo. Junto con la docente, las alumnas debatieron si la ventana se movía en una recta, la cual advirtieron que era infinita, o sobre un segmento. Consensuaron que se movía sobre este último.

Las alumnas querían participar y expresaban sus ideas con mucho entusiasmo. Otro aspecto que les resultó atractivo fue el carácter estético del Cabri. Por ejemplo, el hecho de cambiar los colores de los objetos y los estilos de superficies. En base a esto crearon ventanas de diferentes colores y tramas.

Al finalizar la actividad de la construcción del movimiento de una ventana, la docente marco la siguiente situación: Recrear el movimiento continuo de una tijera.

Se detectó en los diálogos que no todas las alumnas distinguían el movimiento de las puntas de las cuchillas sobre una única circunferencia. Algunas expresaron que se movían en dos arcos de dos circunferencias diferentes. Otras veían que se desplazaban sobre un segmento. Con ayuda de un fibrón de pizarra y una tijera la docente marcó el movimiento y de esa manera descubrieron que describían un arco de una circunferencia.

Otro error fue dibujar a las cuchillas como cuerdas que no siempre pasaban por el centro de la circunferencia (y no como diámetros). Cuando realizaban la animación no coincidía con la realidad. Apareció el concepto de diámetro y de cuerda. En la recreación del movimiento de las cuchillas, descubrieron que las puntas de estas se mueven en arcos congruentes y simétricos

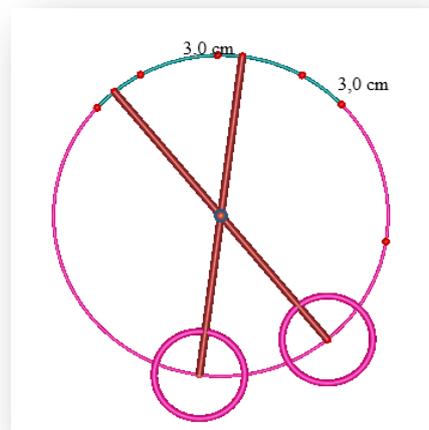


Fig. 31. Tijera realizada por Belén

(Fig. 31).

Otro concepto que surgió en esta actividad fue el error por redondeo de los decimales. Las medidas de los arcos que utilizaron para mover las puntas de las cuchillas de la tijera, fueron a “ojo”. Movían los extremos de los arcos hasta que las longitudes fueran de 3 cm. Pero el software solo les mostraba el primer decimal de las medidas (no sabían cómo leer más decimales). En apariencia los arcos tenían la misma longitud teniendo en cuenta el primer decimal y no el resto, por ende no eran exactamente iguales. Entonces a medida que la animación avanzaba, las dos partes de la tijera perdían la sincronización y, según las alumnas, la tijera “dejaba de cortar”. Algunas lograron corregir este error construyendo el segundo arco con simetría axial.

Se observó que algunas alumnas se ayudaban mutuamente mientras otras consultaban a la docente.

En la cuarta clase, el 7 de mayo, la docente les presentó la actividad de recrear el movimiento de un objeto a elección. Tatiana eligió el movimiento de un globo que subía y bajaba. María dibujó un payaso que sonreía y se enojaba (movía la boca). Belén realizó la animación de un corazón latiendo. No se observaron grandes dificultades.

Luego de las clases de introducción al software y al manejo de las animaciones, el 14 de mayo, la profesora les marcó la siguiente situación:

Actividad 1: Representar una pierna con Cabri. Utilizando la animación del software, comprobar que pueda efectuar todos los movimientos posibles.

Durante la construcción se produjo el siguiente dialogo:

Docente: ¿Cómo se compone el movimiento de una pierna?

Tatiana: Sumisión, extensión, elevación.

Micaela: Rotación.

Docente: Y digamos ¿cómo es la pierna?

Tatiana: Larga, gorda.

Sofía: Son dos palos.

Romina: Redonda.

Gala: Un cono, es más flaca en la rodilla y más gorda debajo.

Sofía: Son dos cilindros.

María: Son dos óvalos alargados.

Docente: Pensémoslo en función de cómo lo vamos a graficar en Cabri.

Tatiana: Dos segmentos.

Sofía: Entre segmento y segmento hay un eje (señalo la rodilla).

María: Es un circulito, una circunferencia.

Docente: Bueno, pueden ayudarse dibujando en una hoja el esquema y luego en el software lo recreamos mejor.

Se observaron muchos conocimientos que adquirieron en Anatomía (materia que se dicta

en la carrera de Intérprete en Danza Clásica y Contemporánea). Pensaban a la pierna en función de su mecánica.

Las alumnas realizaron en sus hojas algunos esquemas. Allí se pudo ver el grado de abstracción del movimiento que cada una poseía. Mientras algunas dibujaron movimientos particulares otras buscaron el movimiento general de las articulaciones (Fig. 32).

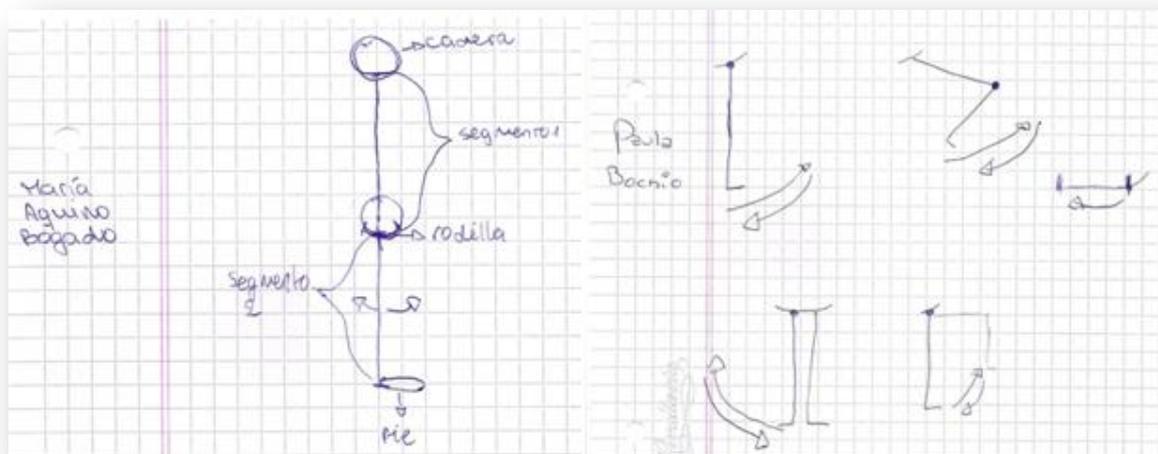


Fig. 32. Esquemas del movimiento de la pierna, realizados por las alumnas

Se observó una gran dificultad, por parte de las alumnas, en el análisis del movimiento general de una pierna. Querían hacer un movimiento específico, por ejemplo que flexione. Esto es lo que sucede normalmente en las clases de Matemática, la generalización no es lo primero que surge, se comienza por casos particulares para llegar a la generalización.

Algunas alumnas realizaban dibujos en la hoja y otras utilizaban elementos como biromes para poder ver el movimiento. María dibujó en Cabri dos segmentos sin tomar medidas y movía con el cursor los puntos, pero no podía animarlos. Además la pierna se podía estirar y achicar. María le dijo a la docente que le explicara cómo se debe hacer, porque ella sola no podía. La docente le aclaró que podía trabajarlo con sus compañeras, que no lo tenía que hacer sola.

Romina construyó la pierna como se muestra en la figura 33. Expresó que quería realizar un *rond de jambe*²⁸, pero que no lograba activar la animación.

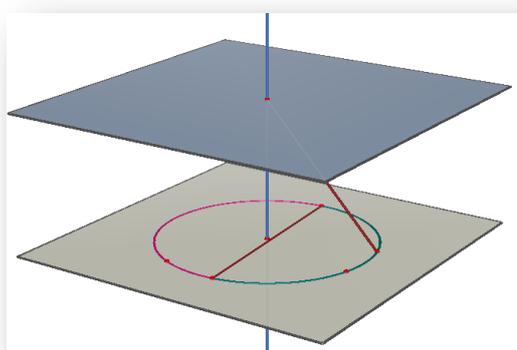


Fig. 33. Pierna realizada por Romina.

Priscila, que normalmente no participaba en la clase de Matemática, expresó haber encontrado la forma de dibujar la pierna y poderla animar. Les explicó a las compañeras que se necesitaban dos circunferencias para dibujar el movimiento de la pierna y que la cadera era un punto fijo.

Ella realizó un dibujo en la pizarra que explicaba lo que pensaba (Fig. 34). Esta construcción tenía un error, el punto que



Fig. 34. Pierna errónea hecha por Priscila.

representaba el pie se desplazaba sobre una circunferencia que contenía también a la rodilla. Teniendo la posibilidad de que el pie coincidiera con la rodilla, lo cual era un

²⁸*Rond de jambe*: Movimiento circular de la pierna con la rodilla tensa y el pie en el suelo o en el aire (Vaganova, 1945, p.260).

equivoco que fue destacado por la docente. Priscila corrigió este error en su dibujo como se muestra en la figura 35. Muchas alumnas no lograban ver lo mismo, hasta que ella lo explicó con su cuerpo.

Además, remarcó que el talón no recorre toda la circunferencia pues la parte inferior de la pierna solo puede flexionarse hacia atrás y no hacia adelante. Acá reapareció el concepto de arco de circunferencia.

Romina agregó que la circunferencia donde se mueve el pie debía ser más chica que la otra donde se mueve la rodilla. Priscila llevó el talón al muslo y le contestó a Romina que la parte superior e inferior de la pierna miden lo mismo (se notó sorprendida).

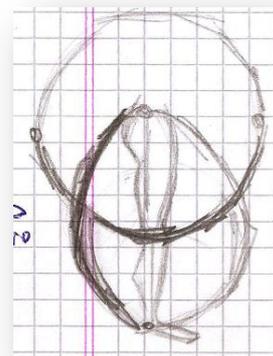


Fig. 35. Pierna correcta realizada por Priscila.

Las alumnas volvieron al trabajo con la netbook. Sofía, por ejemplo, logró una buena construcción aunque el radio de ambas circunferencias no era fijo, pero si iguales. Luego animó el punto de la rodilla y el talón para que se movieran (Fig. 36).

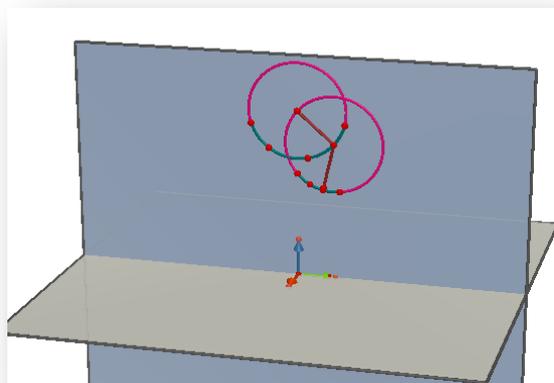


Fig. 36. Pierna realizada por Sofía.

Denise quería recrear en el software un *battement tendu jeté*, pero no sabía cómo, no comprendía lo que hacían sus compañeras, ella pretendía el movimiento particular.

Jimena le dijo a Tatiana que el movimiento que veía en su netbook estaba mal, porque

parecía que la pierna se dislocaba. Tenía intención de ponerle una “barrera” para que no pasara eso. Utilizó un arco sobre la circunferencia.

Notamos en esta clase que las chicas estuvieron motivadas pero percibimos poca comunicación entre ellas, las discusiones se hacían dentro de grupos y no con la clase entera.

El encuentro siguiente fue el 21 de mayo. El aula se organizó con los bancos en forma circular para mejorar la comunicación entre las alumnas. A modo de repaso Sofía pasó a la netbook conectada al proyector para mostrar como realizó su construcción de la pierna y la animación. Se notaba que las alumnas la seguían atentamente. Le realizaban consultas como: ¿por qué es el mismo radio para ambas circunferencias? Ella contestó: “porque mide igual o casi igual la parte de arriba de la pierna y la de abajo”. También realizaron consultas sobre cómo construir la circunferencia, cómo hacer para animar un punto que hiciera el mismo movimiento que Sofía recreaba en su netbook. Remarcó que el pie y la rodilla se mueven sobre arcos y no en la circunferencia completa, por las limitaciones propias del cuerpo.

Sofía agregó a su construcción otra circunferencia para dibujar el pie, con centro en el tobillo y pasando por un punto. Se percató que el arco en el que se movía la punta del pie era pequeño. Cuando animó el punto que representaba la punta del pie, se encontró con el error que el pie se le agrandaba y achicaba. Le atribuía el error a colocar mal el arco. Luego construyó nuevamente la circunferencia, pero ahora con un radio fijo de 0,5 cm. Así logró animarlo sin que se le modifique la longitud, aunque el pie no seguía el movimiento deseado por ella. Lo dejó así y se retiró a su lugar.

La docente propuso la siguiente actividad:

Actividad 2: Recrear un *battement tendu jeté* con la construcción de la pierna realizada, pero incorporando la otra pierna. Si es necesario, pueden modificar la construcción.

Trabajaron con la netbook, algunas alumnas de a dos y otras solas. Priscila, trabajando con Rocío, realizó una animación pero reconoció que el movimiento no correspondía a un *battement tendu jeté* sino a un *battement frappe*²⁹. Tatiana y María estaban realizando otra construcción de la pierna, no concebían que el modelo que se había construido en la clase anterior fuera útil para realizar el paso solicitado.

Diana todavía no interpretaba el dibujo, le preguntó a la docente qué era cada elemento. Observamos que algunas alumnas como Romina, Diana y Jimena realizaban dibujos del movimiento en un papel. Denise, en cambio, utilizaba biromes para simular las piernas y María analizaba el movimiento recreándolo con los dedos de la mano.

Priscila, continuando con su actividad, dijo que le salió un *développé*³⁰, pero que todavía no había logrado el *battement tendu jeté*. Jimena junto con Stefania trabajaron sobre el modelo creado la clase anterior, pero ellas interpretaban que en este paso se movía solo la rodilla, por ende, animaban únicamente ese punto. En consecuencia veían la pierna flexionarse. La docente observó que era necesario un momento de puesta en común para conocer las ideas y los problemas que fueron surgiendo en cada grupo. En ese momento se dio el siguiente diálogo:

²⁹*Battement frappe*: En este ejercicio el movimiento comprende la rodilla y el pie. Se gira el muslo hacia el costado, al máximo posible. Extensión acentuada de la pierna y del empeine y regreso suave para evitar un esfuerzo innecesario (Vaganova, 1945, p.238).

³⁰*Développé*: Se refiere al despliegue lento de la pierna en acción, hasta su extensión completa (Vaganova, 1945, p.246).

Jimena: Es imposible, no se puede dejar inmóvil la parte inferior de la pierna. La pierna no la hagan como dos segmentos (parte inferior y superior de la pierna) sino como uno solo.

Priscila: Entonces la pierna le quedaría enyesada.

Romina: Para mí debemos dibujar otra circunferencia con un arco donde se mueva la cadera. En el *battement tendu jeté*, la rodilla y el pie quedan fijos y lo que se mueve es la cadera.

Realizó en la pizarra la figura 37 y les marcó el arco que nombraba. Mostró el movimiento con su cuerpo para explicarlo.

Paula: En realidad la cadera esta fija.

Romina: Yo veo el movimiento de esa forma. La rodilla y el tobillo para mí no se mueven sino la cadera.

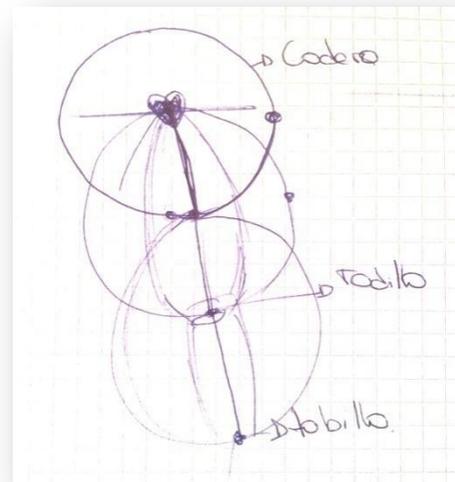


Fig. 37. Pierna según Romina.

Las alumnas se quedaron pensando y Romina volvió a probar en la netbook su idea. María, felizmente, mostró la construcción que hizo (Fig. 38). Creó un nuevo modelo, pero la pierna al moverse se achicaba y agrandaba. Reconoció el error pero no sabía cómo corregirlo.

Micaela preguntó cómo hacer para que

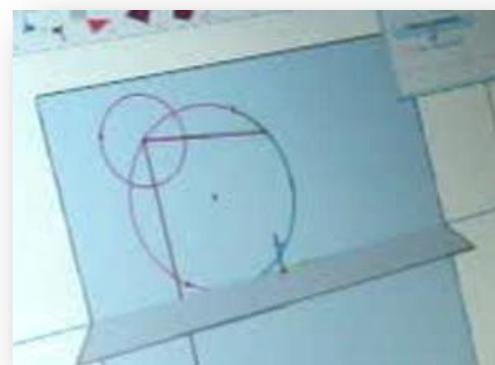


Fig. 38. Construcción de las piernas realizada por María.

coordinen. La docente se acercó y observó que había logrado el movimiento salvo por la rodilla que se flexionaba levemente. Esta alumna es muy callada pero logró muy buenas construcciones. Cuando le preguntó como había hecho la animación, ella argumentó que fue probando, modificando la velocidad y consiguió eso. No podía justificarlo matemáticamente. La docente invitó a Micaela a mostrar su producción con el proyector. Esto disparó el siguiente dialogo:

Docente: Acá Micaela pregunta cómo hacer para que coordinen, ¿qué les parece?

Jimena: ¿Qué es lo que hay que coordinar?

Micaela: El punto de la rodilla con el del talón.

Priscila: Es necesario que la rodilla se mueva a la par con el talón porque si no se ve mal.

Docente: ¿Qué es lo que necesitamos coordinar?

Sofía: La velocidad y el espacio del arco (longitud del arco). Con la calculadora haría un arco de 0,5 cm para la rodilla y para el talón uno de 1 cm (Visualizó que el arco en el que se mueve el talón es más grande que el de la rodilla).

Priscila: Creo que los arcos deberían ser iguales y las velocidades también así la rodilla y el talón suben juntos y la pierna queda extendida.

Priscila probó animando los puntos *rodilla* y *pie* con una velocidad de 1 cm/s y luego lo cambió a 2,5 cm/s. Pues, según ella, el *battement tendu jeté* es más rápido.

Tatiana alegremente dijo que logró hacer el paso (Fig.39). Se observó que no utilizó el

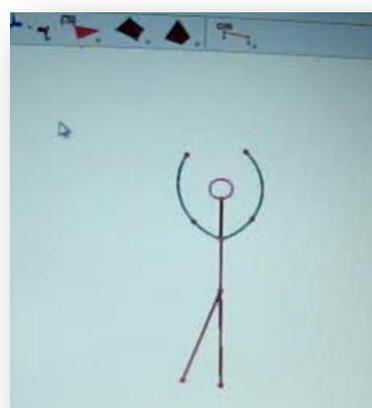


Fig. 39. *Battement tendu jeté* realizado por Tatiana.

modelo creado anteriormente. Solo dibujó una circunferencia con centro en la cadera y radio la medida de la pierna extendida. Y sobre un arco de esa circunferencia colocó un punto que representaba el pie y lo animó. Obteniendo el paso de danza pedido. Además le agregó el resto del cuerpo, pero todo está contenido en un único plano.

Sofía, por su parte, creó un nuevo modelo donde utilizó dos circunferencias (Fig.40).

Ella afirmó que el arco que recorre el talón es mucho más grande que el de la rodilla.

Dibujó el arco donde se mueve el talón sin la circunferencia, pero luego advirtió que el centro de esta se encuentra en la cadera.

Luego de unos minutos, Sofía, mostró a la docente su nueva construcción (Fig. 41).

Logró recrear el *battement tendu jeté*, pero no mantenía las condiciones anatómicas si se deslizaba el punto que representaba el pie sin mover la rodilla. Sofía reconoció el error.

La docente invitó a Priscila a mostrar lo que hizo en su netbook. La alumna contó que realizó dos circunferencias, sobre ellas dos arcos que los midió y les dio la misma longitud. Luego tomó los dos puntos, *rodilla* y *pie*, les asignó la misma velocidad y logró lo que se ve en la figura 42. Advirtió que el

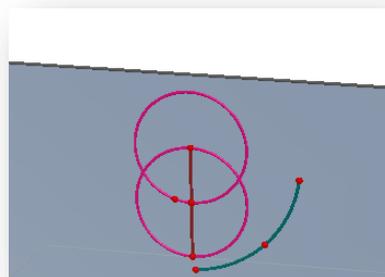


Fig. 40. Primer intento del *battement tendu jeté* de Sofía.

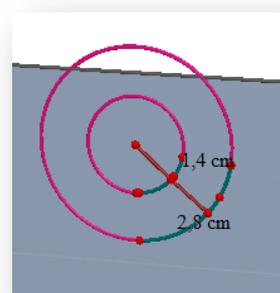


Fig. 41. Segundo intento del *battement tendu jeté* de Sofía.

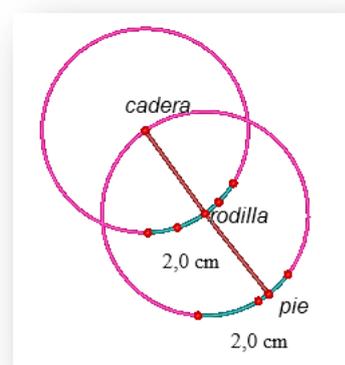


Fig. 42. *Battement tendu jeté* de Priscila.

arco que utilizó no es cualquiera pues en el *battement tendus jetés* la rodilla no llega a la línea de la cadera. Aclaró que el ángulo es casi de 90° (ángulo central correspondiente al arco).

Ella se preguntó si funcionaría igualmente si alargaba los dos arcos, lo comprobó con la netbook y concluyó su afirmación. Luego le mostró a Romina que también se puede hacer un *frappe* si deja el punto de la rodilla inmóvil. Romina aclaró que le faltaba dibujar la otra pierna que queda extendida apoyada en el suelo.

Casi todas las alumnas dibujaron la otra pierna como un solo segmento en el mismo plano. Salvo Priscila que lo dibujó utilizando las dos circunferencias, pero contenidas en un solo plano.

El 28 de mayo, fue la clase siguiente, la docente les dio la siguiente consigna:

Actividad 3: Recrear con en la construcción realizada de las piernas, el *battement fondu* hacia adelante. Si es necesario modificar la construcción.

Sofía pasó a mostrar como es el movimiento con su cuerpo. Realizó el paso hacia adelante y hacia el costado. La docente preguntó cuál es la diferencia entre ambos. Priscila dijo que en el paso hacia el costado las piernas están en un mismo plano y, en cambio, hacia adelante están en distintos. La docente aclaró que en la consigna dice recrear el *battement fondu* hacia adelante.

Se observó a las alumnas preocupadas por cómo hacerlo, ellas dijeron que es más difícil hacia adelante que hacia el costado. Sofía dijo: “hay que hacer dos paredes”. Priscila hacía el movimiento de las piernas por debajo del banco y también gestos con las dos manos recreando los dos planos. Romina habló con Priscila y le mostró con sus manos como serían los planos a dibujar. Priscila comenzó dibujando dos circunferencias congruentes y secantes, luego un segmento que iba del centro de una al de la otra, eso representaría la línea de la cadera (Fig. 43). La construcción la realizó sobre un único plano, y le comentó a Romina que quería ver primero el *battement fondu* hacia el costado. Y que luego lo haría hacia adelante. La clase fue interrumpida por una asamblea estudiantil.

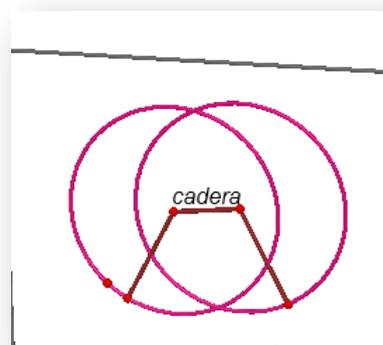


Fig. 43. Piernas y cadera según Priscila.

La escuela sufrió una toma por parte de los alumnos. La actividad de recrear el *battement fondu* se retomó el 16 de julio. Queremos aclarar que Priscila y Melody se fueron de la escuela durante ese receso.

La docente les recordó la actividad a realizar. Sofía efectuó un dibujo en la pizarra mostrando cómo pensaba recrear el *battement fondu* en Cabri. Se observó que no se basó en propiedades

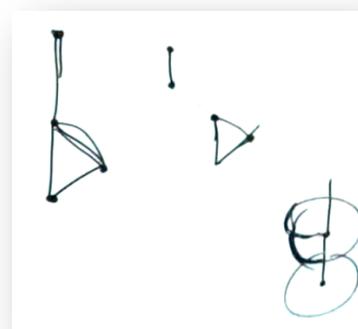


Fig. 44. *Battement fondu* según Sofía.

geométricas y las partes estaban separadas, sin poder explicar demasiado (Fig.44).

La docente le pidió a Romina que pase a mostrar su idea. Romina dibujó en la pizarra un plano y en él dos circunferencias con dos segmentos (partes de la pierna). Ella aclaró que esa es la pierna de base que flexiona. Se nota una gran dificultad para representarlo en la pizarra, sobretodo el plano oblicuo. Ella dibujaba y borraba, a lo que Sofía le dijo como debía hacerlo. Luego representó la cadera utilizando una elipse y ocurrió el siguiente diálogo:

Romina: La cadera sube y baja. Pero no sé cómo hacer para que esté ligado y pueda subir y bajar.

Jimena: Lo están pensando como un movimiento de cadera y un *fondue* es una flexión de dos piernas. La cadera no se mueve.

Romina: Pero cuando se flexionan las piernas la cadera baja y sube como consecuencia, que no puede quedar fija.

Sofía: Cuando flexionas la rodilla la cadera baja por reacción de la flexión.

Jimena comprendió la idea. Romina continuó dibujando el otro plano y en él la pierna que hace el movimiento hacia adelante.

Romina: La cadera es otra circunferencia.

María: Es un óvalo.

Profesora: Esa figura se llama elipse.

Romina: ¿La elipse puede estar en la unión de esos dos planos?

Profesora: ¿Qué objeto es la intersección de esos dos planos?

Romina: Una línea.

Jimena: Entonces no puede estar ahí.

Romina: Pero es re difícil dibujar esto y que suba y baje homogéneamente.

Jimena: Mejor dibujémoslo como un punto, así las piernas no parecen abiertas, ¡es horrible!

Romina: Puede ser, voy aprobarlo con un segmento primero.

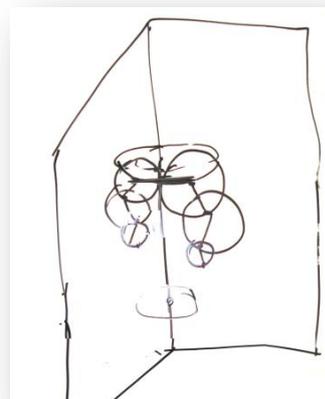


Fig. 45. Piernas para el *battement fondu* según Romina.

El dibujo que realizó Romina en la pizarra se muestra en la figura 45 y cada alumna continuó trabajando en su netbook. Se observó dificultades en construir un plano en el software. No sabían cómo hacerlo o los planos les quedaban “torcidos” y no les era útil.

La clase siguiente, el 21 de julio, se volvió sobre lo trabajado la clase anterior. Cada una contó lo que pudieron hacer y lo que no. Se observó que algunas alumnas hicieron las piernas en un mismo plano, según ellas porque no podían hacerlo de otra forma. En cambio Romina, logró dibujarlos pero los planos estaban oblicuos (Fig. 46).

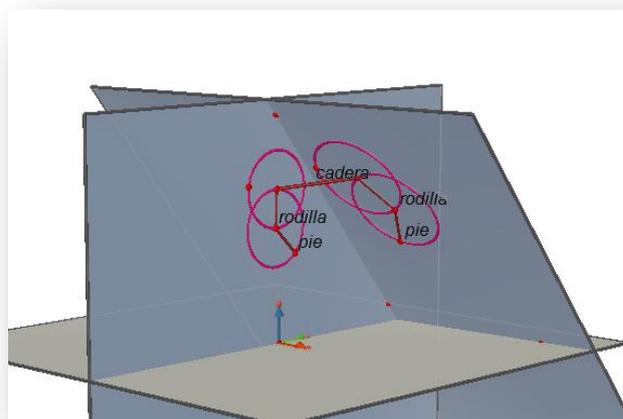


Fig. 46. Primer intento de Romina de representar su esquema de las piernas en Cabri 3D, para el *battement fondu*.

La docente sugirió que trabajaran todas juntas, con Romina en la netbook conectada al proyector, para corregir conjuntamente los errores.

Romina comenzó creando una recta perpendicular al plano inicial que pasaba por un punto. Luego por esa recta dibujó un plano. La docente preguntó porque tiene que ser perpendicular. María dijo porque la persona está parada. Romina advirtió que el otro plano también tenía que ser perpendicular al piso entonces. Utilizó el menú del Cabri y solucionó su error. Gala comentó que parece la casa de los Sims³¹. Se observa el agrado de trabajar con un software en 3D.

Romina siguió dibujando las dos circunferencias junto con los segmentos y los arcos, para armar la pierna entera como se muestra en la figura 47.

Mientras tanto Sofía se preocupaba por cómo hacer para que la cadera baje. Observó que con el dibujo que hizo Romina en la pizarra la clase anterior no iba a poder lograrlo. Hizo un dibujo en su hoja (Fig. 48).

Constantemente se observó a las chicas hacer el *fondue* con su cuerpo para poder ver cada movimiento y así recrearlo. Sofía marcó que como ella no tiene una rotación perfecta, para dibujar la pierna de base, el plano debería estar en “diagonal” (los dos planos que contienen a las piernas no forma un ángulo de 90°).

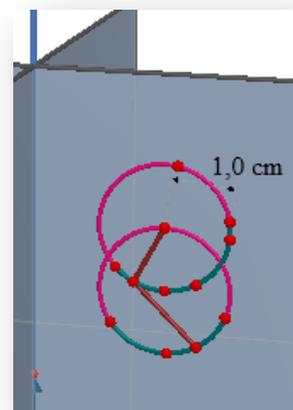


Fig. 47. Segundo intento de Romina.

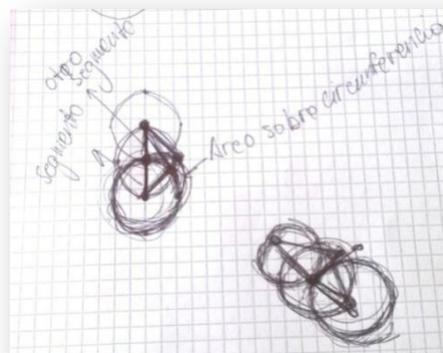


Fig. 48. Esquema del *battement fondu* según Sofía.

³¹Los Sims es un videojuego de simulación social y estrategia. El juego consiste en crear personajes llamados Sims y "construirles" una vida, satisfacer sus necesidades, concretar sus aspiraciones y cumplir sus sueños. El juego, en perspectiva isométrica pseudotrídimensional, permite diseñarles a los Sims una casa y abastecerla con todos los objetos que se requieran para satisfacer sus necesidades. Extraído el 24 de julio de 2015 desde https://es.wikipedia.org/wiki/Los_Sims

Entonces Romina movió uno de los planos.

Jimena dijo que esa era la pierna de base entonces debían hacer que flexione. Sofía mostró a sus compañeras, sobre la proyección del archivo en Cabri, el movimiento que debía hacer la pierna de base con sus dedos índices y pulgares (Fig. 49). Indicó que hay que dibujar dos círculos

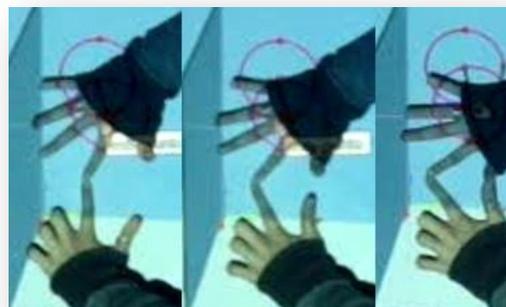


Fig. 49. Recreación del movimiento de la pierna de base según Sofía.

unidos en la rodilla. Ninguna alumna remarcó que con el movimiento realizado por Sofía, el pie de base sube, y eso no es correcto.

Se armaron varios diálogos a la vez: Sofía con Azul, Romina y Micaela y las demás alumnas en sus bancos. Jimena sugirió que el punto *cadera* suba y baje para solucionar el problema. Romina aceptó esa sugerencia y dijo que va a hacer un segmento chiquito para animar el punto *cadera*. Azul propuso que el segmento debería llegar hasta el pie. Romina replicó que en ese segmento se va a mover la cadera y si lo pone hasta el piso haría un *grand plie*³².

Romina siguió analizando el movimiento y dijo que al hacer un *demi-plié*³³ la parte superior de la pierna se desplaza formando un ángulo de 45° y modificó el arco.

Sofía le mostró a la docente la construcción que hizo en su netbook (Fig. 50). Justificó su construcción

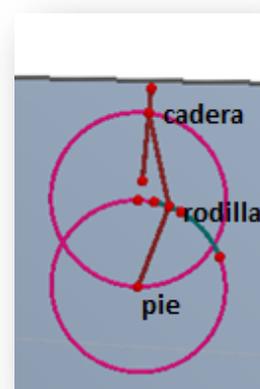


Fig. 50. Construcción de la pierna de base, según Sofía.

³² *Grand plie*: Gran flexión de piernas (Vaganova, 1945, p. 38).

³³ *Demi-plié*: Semiflexión (Vaganova, 1945, p. 256).

afirmando que de esa forma el pie quedaba fijo. Pero advirtió que la parte superior de la pierna se agrandaba y achicaba cuando la cadera subía y bajaba. Sofía dijo que lo revisaría.

Romina probó su construcción animando los puntos (*cadera*, *rodilla* y *pie*). Observó una descoordinación de los mismos y que el pie no quedaba quieto. Jimena le sugirió que eliminara el arco donde se movía este y que el segmento donde se desplaza la cadera debía ser más chico. Siguió probando. Romina volvió a preguntar cómo hacer para que el pie quedara quieto. Intentó colocar el segmento donde se desplaza la cadera en diagonal (Fig. 51). Pero el movimiento no era el correcto. Modificó las medidas del segmento que recorre la cadera y el arco que recorre la rodilla para que midieran 1 cm. Y les dio velocidad 1cm/s. Comenzó la animación y vio que se descoordinaban. Micaela le remarcó que estaba mal porque cuando la rodilla flexiona, la cadera debería subir. Aportó la idea que cuando comienza el movimiento la cadera debería estar en el extremo inferior del segmento, la rodilla flexionada y ahí comenzar la animación (Fig. 52).



Fig.51. Prueba de Romina para que el pie le quede quieto.

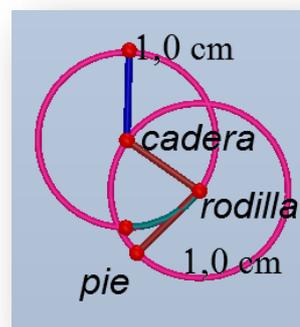


Fig.52. Pose inicial de la pierna de base en el *battement fondu* según Micaela.

Romina volvió a agregar un arco en la circunferencia donde se mueve el punto *pie*, para animarlo nuevamente. Denise preguntó porque hizo eso. Romina contestó que era para crear una “ilusión óptica” y así el punto *pie* simulaba estar quieto. Siguió intentando con las medidas de los arcos y las velocidades. Se observó que estaba logrando el movimiento deseado.

Comenzaron con la creación de la otra pierna (separada de la anterior) y llegaron a la construcción que se muestra en la figura 53. Finalizó la clase.

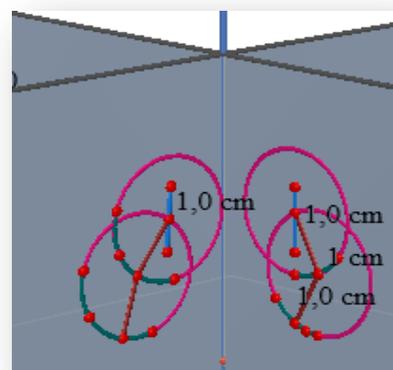


Fig.53. Las dos piernas para el *battement fondu*.

En la siguiente clase, el 28 de julio, analizaron como debía ser el movimiento de la segunda pierna. Micaela pasó a trabajar en la netbook conectada al proyector a partir de la construcción hecha por Romina.

La docente observó que algunas alumnas no interpretaban lo que dibujaban, o no recordaban que representaba cada punto o segmento, por ende, cometían varios errores. No sabían dónde poner los arcos, que se debía mover y que no. La docente le pidió a Micaela que les explique que representaba cada elemento geométrico.

Luego de esto, Micaela continuó con la construcción de la pierna que se mueve hacia adelante en el *fondu*. Jimena, Azul y Micaela intercambiaron ideas sobre cuál era el movimiento que hace cada parte de esa pierna como se muestra en el siguiente dialogo:

Azul: La cadera no se mueve.

Jimena: Si se mueve, cuando haces el *fondu* (se lo mostró con su cuerpo) la cadera se

mueve como consecuencia del *demi-plié*.

Otra cuestión fue si la rodilla se movía o no:

Azul: La rodilla flexiona y extiende.

Jimena: La rodilla no se mueve, solo se mueve el pie y el segmento de abajo.

Azul: Está bien, entonces le sacamos el arco.

Micaela: Y el arco del pie tiene que ser de 1 cm.

(Probó con la animación y observó que no estaba bien el movimiento).

Jimena: Está mal, estira la pierna cuando baja y es al revés. Cuando sube la cadera debe estirar la pierna.

Micaela encontró el error, llevó el punto cadera al extremo inferior del segmento. Entonces quedó como posición inicial lo que se muestra en la figura 54.



Fig.54. Pose inicial de la pierna que va hacia adelante en el *battement fondu* según Micaela.

Validó la construcción utilizando la animación. Pero las piernas entre sí no coordinaban y además estaban separadas. Romina sugirió unir las dos caderas con un segmento. Jimena dijo: “mejor que sea un punto, así el dibujo no es tan complicado”. Micaela redefinió los dos puntos *cadera* como uno solo y así logró la construcción de la figura 55.

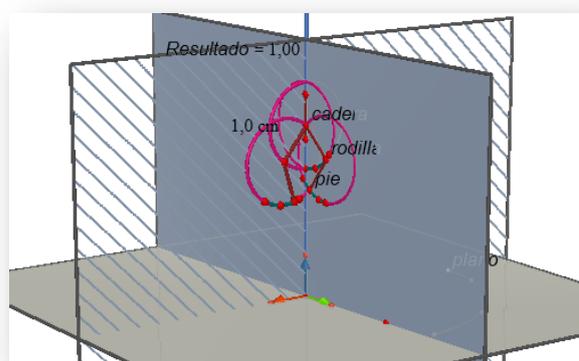


Fig.55. Piernas para realizar el *battement fondu* realizada por Micaela.

Cuando iniciaron la animación, encontraron otro problema. Jimena mostró nuevamente el paso y recreó con su cuerpo lo que hacía en el software. Explicó que en la animación lo está “haciendo cerrado”. Sofía dijo que hay que cambiar el movimiento de la rodilla.

Después de haberlo analizado, llegaron a la conclusión que cuando el pie comienza en *demi-plié*, las dos piernas están casi en el mismo plano. Luego al estirar, la pierna que va hacia adelante, queda en un plano perpendicular al de la otra. Entonces debieron animar el plano también para que permitiera este cambio. Para esto crearon otra circunferencia y redefinieron el punto del plano

sobre un arco en esta nueva circunferencia (Fig. 56). La siguiente pregunta, que les surgió, fue cuánto debía medir el arco donde se desliza el punto del plano. Comenzaron tomando arcos pequeños hasta que Sofía dijo que debía ser de unos 90° (indicando el ángulo central correspondiente a ese arco).

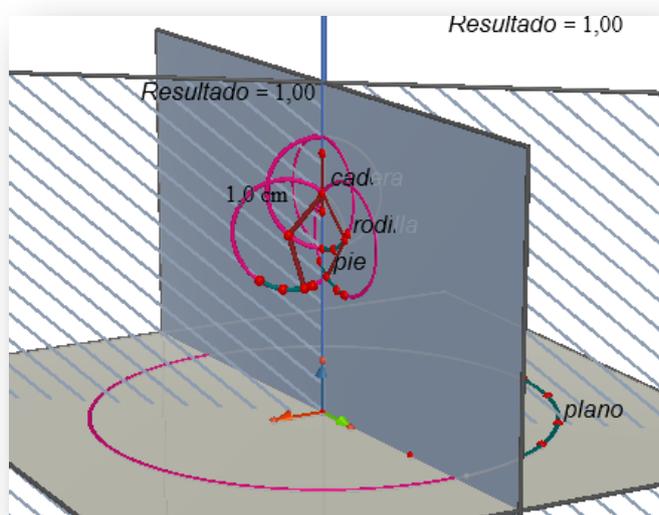


Fig.56. Piernas para realizar el *battement fondu* con el desplazamiento de uno de los planos que contiene a la pierna.

Jimena le indicó a Micaela que deslice los puntos de tal forma que las piernas queden en *demi-plié*, para poder comenzar la animación. Vieron que la pierna que se movía hacia adelante estiraba antes que el plano llegara a estar perpendicular al otro. Sofía remarcó que se deslizaba más despacio. Propuso tomar la medida del arco e ir probando con las velocidades. Micaela acotó que si los demás puntos tenían arcos de 1 cm y la velocidad era de 1cm/s, la velocidad del plano debería ser de 6 cm/s pues el arco que recorre era de

6 cm. Luego de varios intentos lograron el *battement fondu*. Recordaron que como los arcos no tenían medidas exactas sino aproximadas, el movimiento se deformaba al transcurrir las repeticiones.

Se observó a las alumnas muy animadas. Discutieron como eran los planos de las piernas en algunos pasos de danza. Todo esto fue dicho verbalmente, sin llegar a trabajarlo con Cabri.

Ese mismo día, recibieron la visita de la profesora de Danza Clásica y Contemporánea, Mariana Topatigh. Las alumnas le explicaron la actividad y los problemas que tuvieron que afrontar para realizarla. La docente, al escuchar todos los comentarios, manifestó su desconocimiento respecto a que la rodilla se mueve sobre un arco de circunferencia. Ella pensaba que era un segmento. Agregó que le gustó mucho la idea del trabajo, siendo enriquecedora para las dos disciplinas, Danza y Matemática (en el anexo 10.4 se detalla la entrevista realizada a Mariana).

Cuando finalizó esta actividad la docente realizó una puesta en común y la institucionalización del saber. Se dio el siguiente dialogo:

Docente: ¿Qué fue lo que aprendieron con esta actividad?

María: Al igual que la profe Mariana, que la rodilla y el pie se mueven sobre arcos en una circunferencia y no sobre segmentos rectos.

Docente: ¿Por qué creen que describe una circunferencia y no un segmento u otra cosa?

María: Porque sino parte de la pierna subiría y bajaría.

Romina: Porque es circular.

Docente: ¿Saben cuál es la característica de la circunferencia o su definición?

(Las alumnas manifestaron no saberlo).

Docente: Una circunferencia es el lugar geométrico de todos los puntos en el plano que

equidistan de un punto llamado centro. La rodilla describe una circunferencia porque al moverse se ubica en puntos del plano que equidistan del punto cadera, que más precisamente sería el extremo del fémur. Si no fuese así, la pierna se agrandaría y achicaría. ¿Qué más aprendieron?

Sofía: Que las piernas se mueven en dos planos.

Docente: ¿Porqué la pierna está contenida en un plano?

María: Porque es el eje.

Paula: Porque la pierna va recta, no tenemos la pierna redonda.

Tatiana: La pierna es como un rectángulo.

Docente: Tomemos tres puntos ideales. Digo ideales porque vamos a pensar que no tienen espesor. Porque en realidad nuestra cadera, rodilla y pie tienen volumen. Muéstrenme tres puntos en el espacio que no estén en un plano. No es necesario que lo hagan en Cabri sino en nuestro espacio.

Sofía: Como tres puntos de esta taza (muestra el objeto).

Docente: ¿Qué les parece, están en un plano o no?

María: ¿El plano puede estar torcido, ser curvo?

Docente: No puede ser curvo.

María: Entonces no están en un plano.

La docente toma un papel y lo corta de tal forma que entre por la taza y pase por esos puntos.

Romina: Ah, ¡eso es hacer trampa!

Tatiana: Entonces pasa un plano.

Docente: Bueno, muéstrenme otros tres puntos que para ustedes no estén en un plano.

Se las observó buscando objetos, otras señalaban puntos dentro del aula que estaban muy distantes, pero en todos los casos pasaba un plano o más.

Docente: Chicas, por tres puntos pasa siempre un plano o infinitos, si los puntos están alineados. Por ende es imposible que los puntos cadera, rodilla y pie no estén contenidos en un plano. ¿Qué otros conceptos aparecieron en estas clases?

Tatiana: Que la velocidad de los objetos tenía que ser la misma que lo que medía el arco.

Docente: No siempre la velocidad debe coincidir con la longitud del arco o del segmento. Si no que, como en el *fondue*, necesitábamos que las piernas comiencen el movimiento juntas en *demi-plié*, la cadera abajo, los puntos pie y rodilla en el extremo del arco y los planos casi paralelos. Luego que estiren ambas, la cadera arriba y los puntos rodilla y pie en el otro extremo del arco y los planos perpendiculares. Y por último que terminen juntas de nuevo en *demi-plié*. En realidad, necesitábamos que las velocidades y las longitudes de los arcos o segmentos sean proporcionales.

Escribió lo siguiente en la pizarra:

$$\begin{array}{ccccc}
 \text{Velocidad del punto} & & \text{Velocidad del punto} \\
 \text{cadera} & & \text{pie derecho} & & \text{pie izquierdo} & & \text{rodilla} & & \text{del plano de la pierna} & & \text{derecha} \\
 & \uparrow & \\
 & \frac{1\text{ cm/s}}{1\text{ cm}} & = & \frac{6\text{ cm/s}}{6\text{ cm}} & \\
 & \downarrow & \\
 \text{longitud del segmento} & & \text{longitud del arco} \\
 \text{donde se mueve la} & & \text{donde se mueve el} & & \text{donde se mueve el} & & \text{donde se mueve la} & & \text{donde se mueve el} & & \text{donde se mueve el} \\
 \text{cadera} & & \text{pie derecho} & & \text{pie izquierdo} & & \text{rodilla izquierda} & & \text{punto del plano de la} & & \text{pierna derecha}
 \end{array}$$

Y aclaró que puede ser que en otros movimientos no todo sea proporcional.

La docente volvió a preguntar si aprendieron otra cosa. Micaela dijo que para que el pie

quedara quieto, se podía hacer otro movimiento para generar una “ilusión óptica”. Jimena dijo que analizó como hacer mejor el *fondue* y las características del mismo. Romina agregó que además aprendió como describirlo y recrearlo. La docente aclaró que más adelante volverían a plantearse esta pregunta. La clase finalizó.

Luego de esta actividad se realizó las entrevistas a las alumnas que se muestran en el anexo 10.3.

En la clase siguiente, el 30 de julio, la docente planteo la siguiente consigna:

Actividad 4: Sobre la construcción anterior, representar el torso, la cabeza, los hombros y los brazos. Teniendo en cuenta que la construcción debe permitirles realizar todos los movimientos de los pasos básicos de la Danza Clásica.

Sugerencia: Recuerden las características del cuerpo:

- Es un todo, por ejemplo, no se pueden separar las piernas del torso.
- Los miembros tienen medidas fijas. Por ejemplo: al mover el brazo la longitud de este no cambia.
- Esas medidas no son arbitrarias.

María dijo que había que dibujar primero un segmento para el torso y que la construcción de los brazos debería ser igual que la de las piernas. Gala aportó que los segmentos de los brazos son más chicos que los de la pierna. Romina queriendo comprobar lo que dijo su compañera colocó su antebrazo sobre la parte superior de la pierna y dijo que eran

iguales. Las alumnas compararon las medidas utilizando sus cuerpos. Confrontaron las longitudes del brazo con el antebrazo y observaron que el brazo era más corto que el antebrazo. Luego compararon sus piernas con el torso. Y observaron que el brazo era un poco más chico que el antebrazo el cual mide igual que la parte superior de la pierna. No podían deducir cuanto menor era.

Gala, con su celular, buscó en internet las medidas y dijo que solo le aparecía como tonificar el cuerpo. Romina sugirió que busque como proporcionalidad del cuerpo.

María recordó que en Educación Plástica vieron este tema. Tatiana se levantó de la silla con un lápiz y María se colocó contra la pared. Se observó que trasponía la medida de la cabeza de su compañera en el lápiz. Y tomándola como unidad básica, contaba cuántas veces entraba en los brazos, piernas, etc. como se observa en la figura 57.



Fig.57. Tatiana analizando las proporciones del cuerpo de María.

Gala encontró las medidas exactas en internet y lo mostró en la pizarra. Cada alumna en su netbook comenzó la construcción del cuerpo. Se las observó concentradas en la

actividad y compartiendo opiniones con sus compañeras de cómo hacerlo. Probaron diversas formas, realizaron la animación, encontraban errores y volvían de nuevo al comienzo. Se las vio entretenidas y riéndose de los movimientos que hacían las piernas y el cuerpo. Se observó de nuevo que las alumnas pensaban en un cierto paso de danza. Por ejemplo, como en el *fondue* pueden colocar los brazos en un plano paralelo al suelo, lo realizaban así. Pero no sería útil para hacer otros movimientos.

Victoria, por ejemplo, construyó los brazos con segmentos contenidos en el plano de una de las piernas, como muestra la figura 58. Reconoció que no podía animar los brazos y que éstos le quedaron “chatos” (en un plano perpendicular al suelo) según expresó.

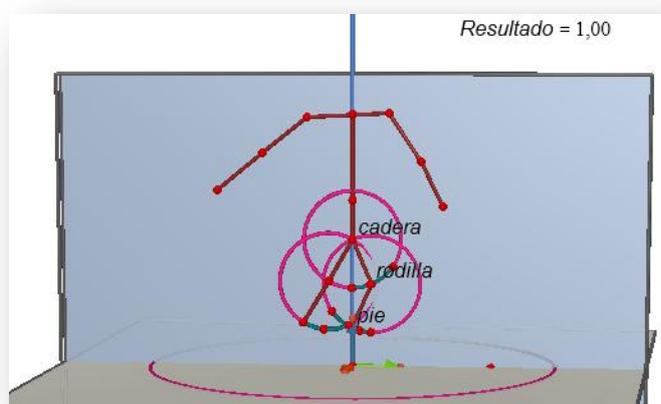


Fig.58. Primer intento de cuerpo realizado por Victoria.

Belén construyó los brazos sobre un plano paralelo al suelo (Fig. 59). Los hombros los dibujó como un punto y éste no quedó unido al torso. Además al subir y bajar la cadera, el torso se agrandaba y achicaba. El plano que contenía a los brazos

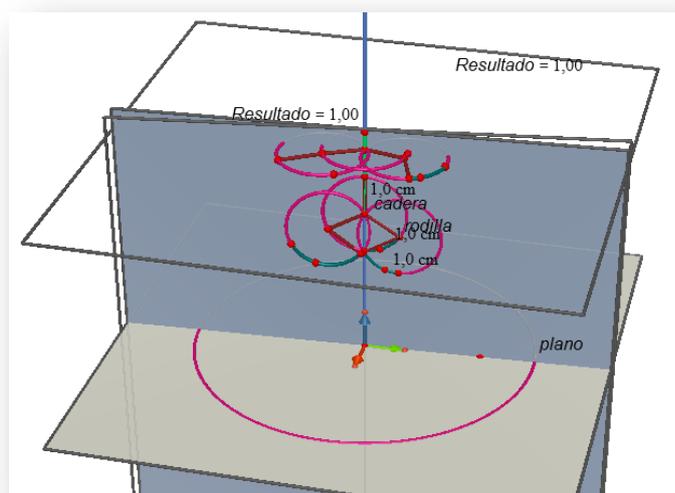


Fig. 59. Primer intento de cuerpo realizado por Belén.

quedaba quieto (no descendía para acompañar el movimiento). Manifestó sus errores y dijo que buscaría otras ideas para corregirlo.

Micaela y Diana comenzaron construyendo el brazo en un archivo nuevo, utilizando dos planos, como se muestra en la figura 60.

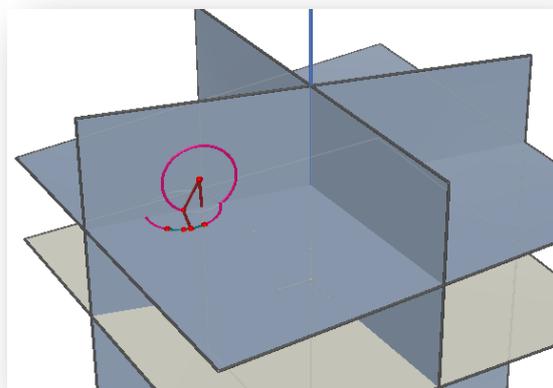


Fig.60. Construcción del brazo según Micaela y Diana.

Luego lo unieron al resto del cuerpo (Fig. 61)

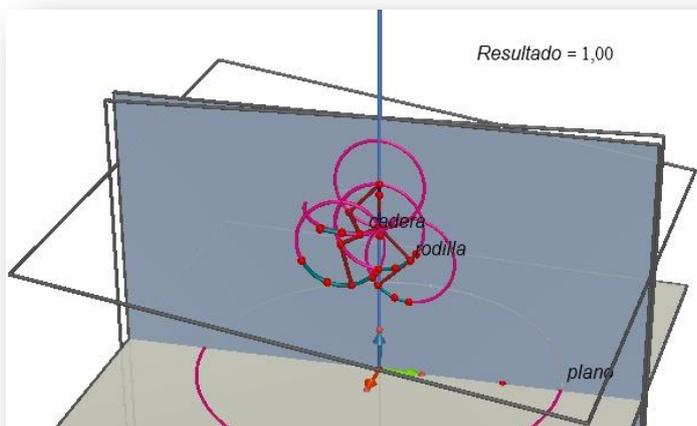


Fig.61. Cuerpo según Micaela y Diana.

Romina construyó el cuerpo utilizando varias circunferencias, pero todas sobre el plano que contiene a una de las piernas (Fig. 62). Reconoció que su bailarina “quedó contra la pared”.

Se observó que la alumna podía

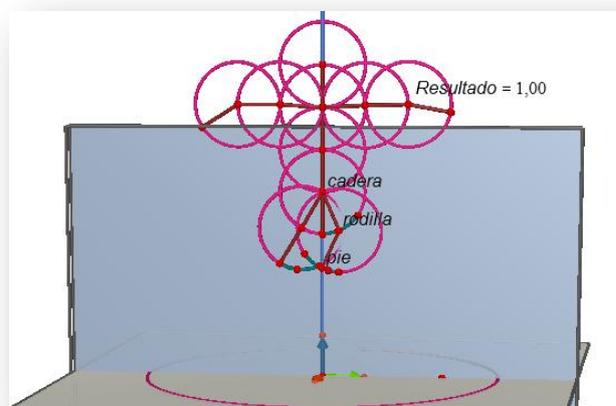


Fig.62. Cuerpo según Romina.

mover las circunferencias dentro del plano, lo cual mostró que las construyó sin alguna característica que las hiciera ser parte del cuerpo.

Victoria, reformulando su modelo, ubicó los brazos sobre un plano paralelo al suelo. Según ella, porque la bailarina estaba apoyada en la barra³⁴. Dibujó con segmentos el torso, los hombros y los brazos.

Se observó que los hombros quedaron separados del torso (solo están unidos a “ojo”). Para los antebrazos utilizó circunferencias, pues según ella, en el *battement fondu* solo se mueve estos (Fig.63).

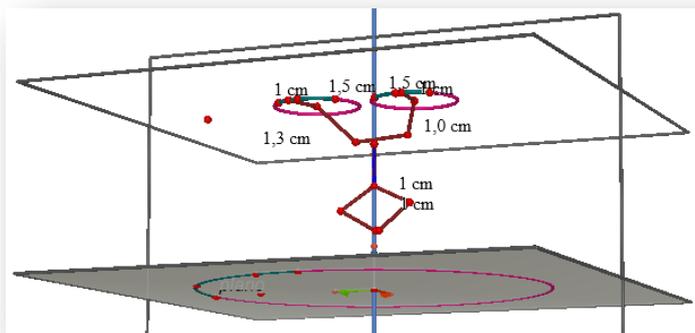


Fig.63. Cuerpo según Victoria.

Las alumnas mostraban su preocupación por no saber cómo dibujar un plano que no fuese ni paralelo ni perpendicular al suelo. Investigaron en la ayuda del software y fueron probando ideas en sus netbooks. Finalizó la clase.

La clase siguiente fue el 6 de agosto. La docente sugirió que sociabilizaran el trabajo hecho la clase anterior. Cada alumna pasó con su netbook y utilizando el proyector mostraron sus archivos. Explicaron brevemente las construcciones y marcaron los errores. Como que el torso se agrandaba y achicaba. Que los brazos no acompañaban el movimiento. No habían considerado las proporciones del cuerpo (reconocieron la ausencia de este concepto en las construcciones), y que los brazos no estaban contenidos

³⁴Barra: Pieza de metal u otra materia (madera), de forma generalmente prismática o cilíndrica y mucho más larga que gruesa. La sujeta horizontalmente a la altura conveniente para hacer ciertos ejercicios gimnásticos o el aprendizaje de la danza. Extraído el 12 de octubre de 2015 desde <http://lema.rae.es/drae/srv/search?id=WNT1k0qcfDXX2thjpCLz>

en dos planos diferentes.

María sugirió que armarán un archivo nuevo entre todas, porque según ella “entre todas surgen más ideas que cuando lo hago sola, yo sola colapso cuando no se me cae ni una idea”.

Romina pasó a trabajar con la netbook conectada al cañón. Analizaron las proporciones del cuerpo a partir de compararla con la medida de la cabeza. Consideraron que una cabeza equivale 1 cm. Corrigieron que la parte superior y la inferior de las piernas debían medir 2 cm cada una.

Trataron de crear el torso sobre la intersección de los dos planos de las piernas. Pero al moverse la cadera se achicaba y agrandaba. Romina sugirió utilizar transferencia de medida, para que siempre quede a la misma distancia de la cadera. Luego construyeron la espalda sobre el plano de la pierna derecha (el ancho era de 2 cabezas) y surgió el siguiente diálogo:

María: Los hombros tienen que estar rectos.

Gala: Tienen que estar a la mitad.

Romina: Tiene que ser perpendicular al eje.

Micaela: Paralela al suelo.

Romina: Es lo mismo.

Romina construyó la recta perpendicular al eje, pasando por un punto que era el cuello y contenida en el plano de la pierna derecha. Tatiana cuestionó si siempre los hombros quedan así. María mostró con su cuerpo algunos pasos y dijo que siempre quedan en el plano de una de las piernas y paralelos al suelo, salvo algunas poses de danza (pero no en los pasos básicos).

Luego uso nuevamente transferencia de medida de 1 cm, para ubicar los dos hombros. Al

momento de dibujar la cabeza, Gala sugirió utilizar una circunferencia y Micaela agregó que mejor debería ser una esfera. Romina dijo que la esfera tenía que tener radio de 1 cm. Micaela remarcó que lo que mide 1 cm es el diámetro de la cabeza no el radio (sino la cabeza medía 2 cm). El cuello lo tomaron de unos 0,2 cm. Se observó en la discusión que las alumnas tenían conocimientos de anatomía.

Al momento de crear los brazos se dio el siguiente diálogo:

Romina: Hay que usar tres puntos y dibujar el plano.

María: No, hay que hacer igual que con las piernas pero un brazo no se mueve, el que esta agarrado en la barra.

Micaela: El ejercicio dice que tiene que valer para cualquier paso, así que se tienen que mover los dos brazos.

María: Entonces un plano paralelo al suelo.

Micaela: Pero los brazos me van a quedar como bailarín cosaco (se escucharon risas)

Tatiana: ¿Por qué no usamos esa recta (refiriéndose a la de los hombros) y un punto?

Romina: Ahhhh, es como que cuando me muevo traslado mi propio plano. Pero ¿hay que hacer uno solo o dos?

Micaela: Dos, porque un brazo puede subir y el otro quedar en la barra o bajar o hacer otro movimiento.

Romina: Listo.

Crearon los planos y sobre cada uno las circunferencias de igual modo que lo realizaron con la construcción de las piernas. La diferencia era la medida de los radios, para el brazo tomaron 1,75 cm y para el antebrazo 2 cm (Fig. 64). Y finalizó la clase.

Esta clase fue observada por dos colegas de la institución: Mariel La Salvia, profesora de Danza Clásica y Contemporánea y Silvia Alfaro, profesora de Matemática, en el anexo se

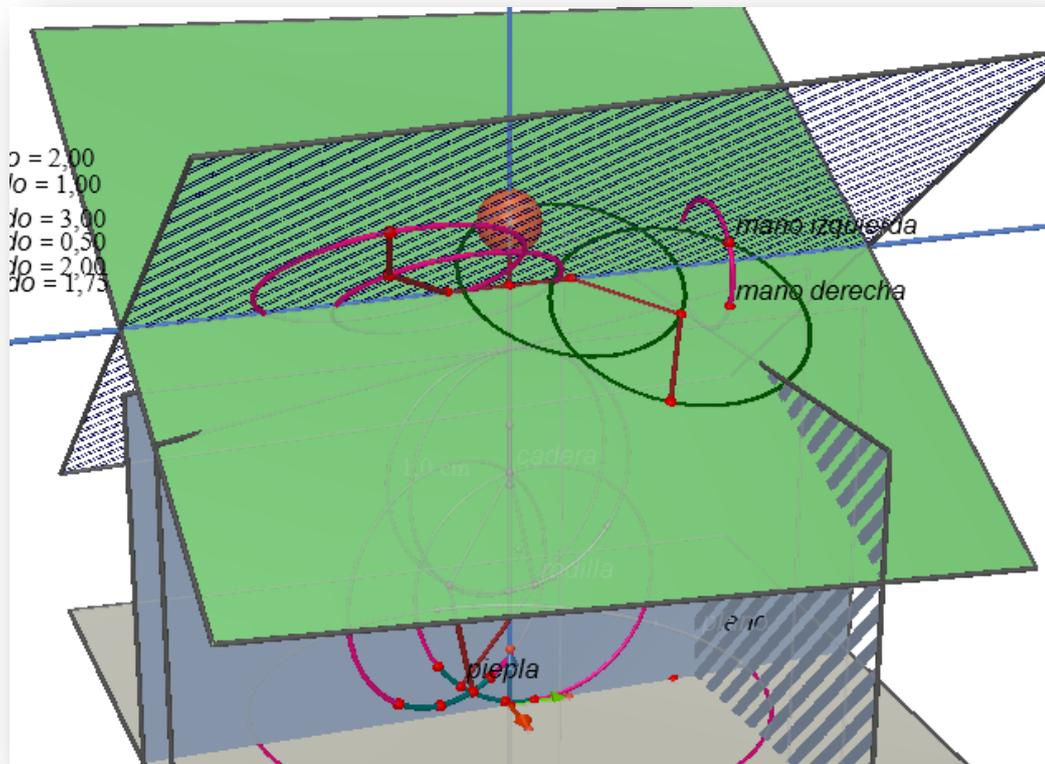


Fig.65. Segundo cuerpo creado con los aportes de todas las alumnas.

Luego le agregaron detalles como los ojos, la boca, el rodete, a los segmentos de las piernas y de los brazos los hicieron más “gordos” y le cambiaron el color. Al momento de dibujar el torso, surgieron ideas como utilizar un cono, un cilindro, una pirámide, un rectángulo, un triángulo, una circunferencia, una esfera. Fueron probando las opciones y la elegida fue el triángulo.

La construcción con los planos y otros elementos ocultos quedó como se muestra en la figura 66.

Finalizada la realización de la consigna la docente comenzó una puesta en común, para luego llegar al momento de institucionalización, donde se dio el siguiente dialogo:

Docente: ¿Qué les gustó de esta actividad? ¿Qué aprendieron?

Sofía: Que para representar al cuerpo humano teníamos que

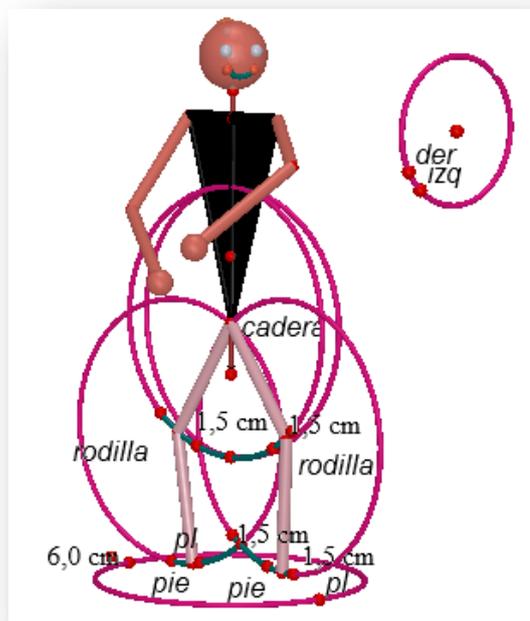


Fig.66. Construcción del cuerpo con elementos ocultos.

pensar en los elementos de geometría que tiene cada parte y sus proporciones.

Tatiana: Me gusto que no fuera solo cuentas.

María: Para armar algo hay que hacer muchas cosas y eso me ayudo a comprender mejor ciertos conceptos.

Gala: Vi que la matemática puede estar asociada al arte y me gusto.

Victoria: Calcular que todo debía ser proporcional, las medidas.

Micaela: Fue algo diferente para ver en Matemática distinto a lo que estamos habituados.

Romina: Nunca se me hubiese ocurrido que se podía armar una persona y un paso de danza con elementos de geometría y menos en una computadora. Y me ayudo a aclarar algunos conceptos de matemática como radio, segmento, recta, perpendicular, etc.

Victoria: Me ayudo a tomar conciencia de los pasos de la danza.

Docente: Esta muy bien lo que dijeron. Pero hay otra cosa en el fondo, que es el concepto de Modelo Matemático ¿Saben que es eso?

(Las alumnas dijeron que no).

Docente: Por ejemplo cuando vieron el sistema solar y el movimiento de los planetas alrededor del sol. Analizaron que estos realizan recorridos elípticos y que a la vez nuestro planeta tiene una luna que gira alrededor de la tierra y sucede lo mismo con algunos planetas más. Eso es un modelo matemático del sistema solar. Otro modelo que tuvieron que haber visto es el del átomo. Que hay protones y neutrones dentro de un núcleo y electrones orbitando alrededor de él describiendo ciertas curvas. Aunque actualmente hay otro modelo que está bajo la teoría de las cuerdas. Esos son modelos matemáticos, físicos que describen el movimiento de los planetas dentro del sistema solar o de las partículas dentro de un átomo. Si el modelo es cierto debería poder representar todos los movimiento posibles dentro de ese espacio, sea el sistema solar o el átomo. Lo que ustedes hicieron fue crear un borrador de modelo matemático, sin analizar la física, de una bailarina de Danza Clásica. Que veremos si es correcta o no, y si necesita más modificaciones. ¿Cómo nos daríamos cuenta si es correcta la modelización hecha?

Sofía: Yo creo que debería poder hacerse todos los pasos de Danza Clásica.

María: Por ejemplo no se puede hacer los movimientos que tienen desplazamiento, por ejemplo un *jeté*³⁵.

Docente: A los científicos les suceden estas cosas, crean un modelo lo prueban y resulta que les falta algo u otra cosa no está bien y tienen que rehacerlo. Además para crear un modelo no es basta con un matemático, si no que se requiere de más especialistas como

³⁵*Jeté*: Movimiento saltado en que se traslada el equilibrio del cuerpo de una pierna a la otra (Vaganova, 1945, p.251).

físicos, anatomistas, etc.

Tatiana: Ahhh, lo que vimos en anatomía del punto de equilibrio y el eje corporal. ¿Nos faltaría eso?

Docente: Claro, pero dado el nivel de complejidad, lo que podemos hacer es analizar el punto de equilibrio con nuestro cuerpo y transponerlo a la construcción en Cabri. Otro aspecto importante de crear un modelo matemático es el trabajo en equipo, un científico solo no podría crearlo. La mirada del otro especialista es importante en el desarrollo de la ciencia.

María: ¡Que copado!

Tatiana: ¡Somos una comunidad científica!

Docente: En pequeña escala sí.

Docente: Además cuando ustedes crearon el modelo transitaron ciertos subprocesos del proceso de modelización. Primero identificaron las características de la realidad.

Sofía: ¿Cómo que la parte superior de la pierna es igual que la inferior, que la rodilla, pie, codo, manos...todo... se mueve en circunferencias?

María: La cadera no se mueve en circunferencia sino en un segmento.

Docente: Claro, la proporcionalidad del cuerpo también, que las piernas y brazos están contenidos en planos. Después analizaron las variables de nuestro modelo, por ejemplo, cuando debían cambiar los arcos, las velocidades, que algún plano debía moverse en cierto sentido, todas estas son variables que les permitían hacer cada uno de los pasos de la Danza Clásica. De esta forma tradujeron lo que observaban en la realidad a un lenguaje matemático.

Tatiana: ¡Somos grosas! pudimos hablar en lenguaje matemático.

(Se escuchan risas)

Docente: ¡Claro que sí! Luego interpretaron los resultados, para ver si la bailarina lograba ejecutar el paso o no, como cuando hicimos el *battement fondu*. En la próxima clase, pondremos a prueba el modelo que construimos hoy, para ver si es correcto o hay que hacerle más modificaciones, ya hoy María comento una de las modificaciones que hay que hacer.

María: Si, yo y mi bocota.

Luego de esto terminó la clase.

La clase siguiente fue el 18 de agosto. La consigna que dio la docente fue:

Actividad 5: Con la representación del cuerpo ya obtenida, realizar un paso básico de Danza Clásica a elección. Realizar modificaciones al modelo si es necesario.

Micaela y Azul eligieron hacer un *jeté*. Observaron que necesitaba que su bailarina se desplace. Preguntaron al curso en general, cómo hacer eso. María dijo “hay que hacer un segmento para que se mueva sobre él”. Ellas asintieron pues era lo mismo que habían pensado hacer. Agregaron un segmento en la base y

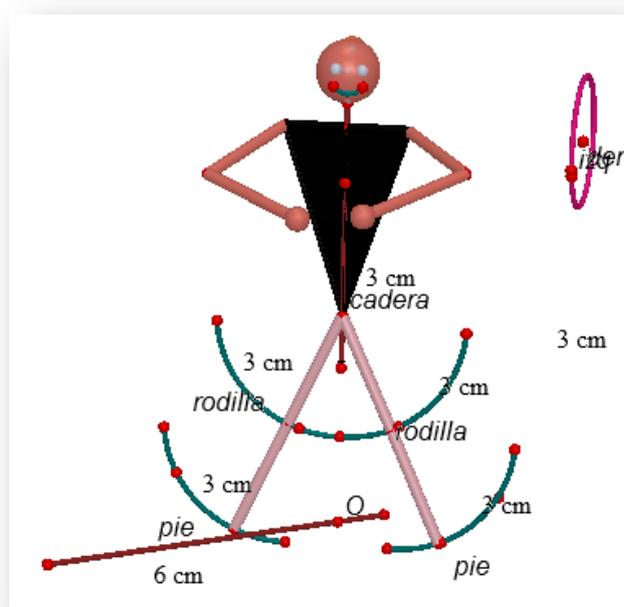


Fig.67. *Jeté* realizado por Micaela y Azul.

redefinieron el punto donde pasaba la recta perpendicular inicial. La construcción quedó como se muestra en la figura 67. Se observó que tuvieron dificultades para coordinar el movimiento. Le asignaban velocidad 3 cm/s a los puntos *rodilla*, *pie* y *cadera*, que se movían sobre arcos de 3 cm, y al punto O que muestra el desplazamiento de la bailarina, le establecieron velocidad de 6 cm/s, puesto que el segmento que recorre era de 6 cm. Entonces observaban que la bailarina cuando llegaba al extremo final del segmento se elevaba por completo y el movimiento no era el correcto. En ese punto debía la cadera llegar a lo más bajo. Entonces, dedujeron que cuando la cadera llegase a la mitad del segmento, debía estar en su punto más alto. Para eso la velocidad del punto O debía ser de la mitad: 3 cm/s.

Sofía eligió un *souplé*³⁶ y trabajó con su netbook. Se percató que tenía que hacerle una modificación al modelo. Por eso dibujó una circunferencia contenida en un plano perpendicular al segmento torso, con radio de 3 cm (medida del torso) y centro en la cadera. Allí ubicó el punto cuello. Esto permitió que la bailarina pueda hacer un *souplé*.

Romina eligió recrear un *cabriole*³⁷.

Realizó un dibujo en la pizarra de

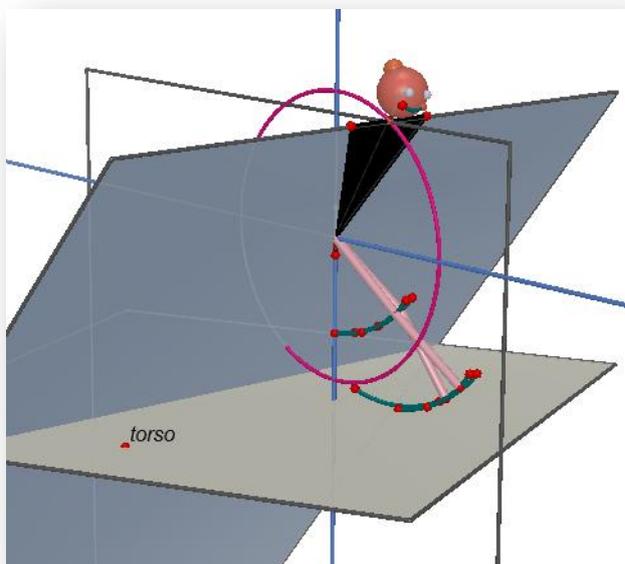


Fig.68. *Cabriole* realizado por Romina, Belén y Sabrina.

³⁶*Souplé*: Lit. Flexión. Es un ejercicio en el cual el torso y la cadera ejecutan una flexión en relación a las piernas. El souplé o Souplesse, es usado en la ejercitación de la barra en danza clásica y también en pasos de centro, por lo tanto debe ser practicado indistintamente y combinado con otros ejercicios. Extraído el 24 de septiembre de 2015 desde <http://rekinectando.blogspot.com.ar/2012/01/escuela-nacional-de-danza-nellie-y.html>.

³⁷ *Cabriole*: Paso de batterie, en que una pierna se levanta extendida en una posición dada y la pierna que sostiene el cuerpo ejecuta un salto, levantándose hasta golpear contra la otra en el aire (Vaganova, 1945, p.240).

los pasos intermedios del movimiento y le solicitó a María que hiciera el paso con su cuerpo. Se observó una buena participación de las compañeras. Luego al momento de tener que construir, se retiró a su banco para trabajar con su netbook junto a Belén y Sabrina. Se observó que al momento de tener que coordinar los movimientos utilizaron una ecuación para que fueran proporcionales.

Cuando realizaron la animación, vieron que el paso no era exactamente el *cabriole*. No veían cual era el problema, hasta que María les dijo: “la bailarina lo hace de costado al paso y es hacia adelante”. Luego de un rato se percataron que en el *cabriole* el torso de la bailarina no queda en el mismo plano que las piernas. Entonces tuvieron que rehacer el torso en otro plano y le agregaron la circunferencia que dijo Sofía. Según Romina para que “quede con más detalles y sea multiuso” (Fig. 68).

María junto con Tatiana recreo en Cabri un *cecchetti*³⁸. Paula junto con Stefania construyó un *petit changement de pieds*³⁹. Victoria con Gala eligieron un *assemble*⁴⁰. No se observaron grandes dificultades para realizar dichos pasos, salvo al momento de tener que coordinar el movimiento de cada punto, pero utilizando la proporcionalidad lo lograron.

Esta actividad tuvo su cierre en la clase del 20 de agosto, con una puesta en común donde las alumnas mostraron sus producciones con el proyector y comentaron sus dificultades y las modificaciones que le realizaron al modelo como se describió arriba.

³⁸ *Cecchetti*: Las alumnas nombran así al salto en donde las dos piernas se flexionan en el aire.

³⁹ *Petit changement de pieds*: Ligerito cambio de pies (Vaganova, 1945, p. 97).

⁴⁰ *Assemblé*: Una pierna se levanta en el aire en una posición dada, se ejecuta un salto con el pie que sostiene el cuerpo, bajándose en los dos pies simultáneamente de manera de llegar a tierra en una posición cerrada (Vaganova, 1945, p. 235).

La docente les dio la última consigna:

Actividad 6: A partir de las pruebas realizadas a los distintos modelos propuestos, representar un único modelo de bailarina, teniendo en cuentas todas las modificaciones y conjeturas realizadas en los distintos grupos. Este trabajo debe realizarse entre todas.

Por elección de las compañeras, pasó Romina a mostrar su trabajo desde la netbook conectada al proyector. En su construcción, solo faltaba agregar el segmento para que la bailarina se desplazara, entonces crearon un nuevo modelo y las alumnas reflexionaron sobre su validez.

Sofía: Creo que quedó perfecto.

María: Seguro que hacemos otro paso y nos damos cuenta que falta algo.

Paula: Necesitaríamos como 3 días más para ver si está bien.

Stefanía: Tendría que hacer todos los pasos en persona, grabarme y ponerlo en cámara lenta, y ver si puedo hacerlo con el Cabri. Pero llevaría mucho tiempo, ¡más que tres días!

Tatiana: Buscaría en la técnica, pensaría en todo lo que se da en Danza Clásica y lo probaría con la compu.

Docente: Obviamente que se necesita mucho tiempo para crearlo sin errores. Además de agregar elementos de física y anatomía. Este trabajo fue una introducción para que vivan lo que es un proceso de creación de un modelo matemático y para que puedan comprender mejor el concepto. Y que no sea lo habitual: que yo les traigo un modelo hecho por otro. Además de ver la utilidad de la Matemática en algo que para ustedes es

cotidiano: el bailar.

Romina: Si profe, ahora voy a ser consciente de la Matemática que necesito para coordinar un paso. Si no me sale voy a hacerlo en Cabri.

María: ¡Que nerd!

Victoria: Analizando el movimiento geoméricamente seguro que voy a mejorar como hago los pasos de danza. No soy muy buena.

Docente: Me quedo contenta que vean la utilidad de lo aprendido para que puedan ser mejores bailarinas y mejores alumnas de Matemática.

Chicas: ¡Gracias profe!

Finalizó la experimentación.

6.2.4 ANÁLISIS A POSTERIORI

Nuestro análisis a posteriori fue organizado por actividad. Hemos comparado las predicciones a priori con las producciones de los alumnos a posteriori junto con nuestro marco teórico.

Cabe aclarar que las actividades previas no fueron analizadas pues no afectaron a nuestras conclusiones.

De acuerdo a las clasificaciones de errores y dificultades expuestos, cuando analizamos y caracterizamos los efectuados por las alumnas, tuvimos en cuenta que algunos estaban contenidos en más de una tipología.

6.2.4.1 ACTIVIDAD 1

Actividad 1: Representar una pierna con Cabri. Utilizando la animación del software, comprobar que pueda efectuar todos los movimientos posibles.

El tiempo estimado era de 2 clases pero en la experimentación solo requirió de una clase (14 de mayo). Aunque se tomó unos 20 minutos de la clase siguiente para repasar la construcción lograda. Esta reducción en el tiempo se debió a que surgieron las ideas rápidamente.

Objetivos

Se observó en la experimentación que varias alumnas transitaron los seis subprocesos del proceso de modelización. En sus dibujos en papel, en las construcciones en Cabri y en sus diálogos se detectó la formulación del problema y los intentos por identificar las características del movimiento de la pierna. Luego analizaron las relaciones y las idealizaron tomando dos circunferencias secantes de igual radio, logrando la matematización. Interpretaron los resultados y dijeron que los puntos que representaban la rodilla y el pie no se movían en toda la circunferencia sino en arcos. Encontraron como variables la longitud de los arcos y la velocidad de los puntos *rodilla* y *pie*. Continuamente se las observó contrastando con la realidad lo hecho en Cabri, evaluando la validez del modelo. Aunque la palabra modelo no apareció en ese momento en el aula. Siendo coherente con nuestro encuadre didáctico (teoría de situaciones didácticas) las

alumnas no sabían que estaban aprendiendo el concepto de modelo matemático. De hecho se percibía en el aula la incertidumbre de saber qué estaban aprendiendo y qué tenía que ver esto con Matemática, dado que para ellas consistía en hacer cuentas nada más.

Analizaron algunas características de las piernas, por ejemplo, que la parte superior y la inferior miden lo mismo. Como dijimos anteriormente, vieron que la rodilla y el pie solo pueden moverse formando un arco de circunferencia. Debemos aclarar que la idea de que la rodilla y pie se mueven sobre esferas no surgió en el aula.

Se vislumbró al finalizar la actividad que algunas alumnas desarrollaron: varias habilidades geométricas, la visualización y reflexión sobre los componentes geométricos de la pierna y su desplazamiento, la habilidad de comunicación logrando expresar sus ideas con lenguaje matemático, la habilidad de dibujo arribando a una construcción en Cabri, el razonamiento realizando conjeturas de cómo se desplaza la pierna, y, la refutación de sus conjeturas. Por ejemplo, cuando Priscila probó que el pie podía llegar a tocar el muslo, entonces dedujo que su construcción no era correcta. Entonces corrigió la circunferencia, tomando el centro en la rodilla y radio la longitud de la parte inferior de la pierna. Con respecto a la habilidad de aplicación, se vio a varias alumnas intentar hacer algún paso de Danza Clásica con la construcción en Cabri.

Con lo dicho anteriormente, damos por cumplido nuestros objetivos para esta actividad.

Dificultades

Con respecto a las dificultades, observamos en la experiencia que las alumnas al comienzo utilizaban un lenguaje que no era matemático, además de las dificultades que tenían para expresarse (falta de la habilidad de comunicación). En el diálogo se observan términos como “dos palos” al referirse a dos segmentos y “dos óvalos alargados” en vez

de elipses. Otra dificultad que fue predicha y surgió en el aula, son las relacionadas al proceso de enseñanza. María, por ejemplo, esperaba que la docente le explicará cómo se debía hacer, porque según ella, no podía hacerlo sola. Esto es normal, pues no están acostumbradas a aceptar la responsabilidad de la resolución. También generó en la alumna dificultades de origen emocional, al ver que su construcción no era la correcta. Surgieron dificultades de origen cognitivo, alumnas como Romina y Denise, buscaban recrear un movimiento en particular de la pierna, no llegaban a tener un cierto nivel de razonamiento para arribar a la generalización del movimiento. Además se observó en Denise, quien viendo el dibujo de Priscila y el de sus compañeras, no lograba visualizar la idea. Ella no tiene desarrollada la habilidad geométrica de visualización (García & López, 2008).

Errores

Surgieron errores en la comprensión de las instrucciones de trabajo, Denise quería hacer un *battement tendu jeté* y Romina un *rond de jambe*, sin pensar en la generalización que se solicitaba en la consigna. Estos también pueden considerarse como errores relacionados a las operaciones intelectuales, no demanda el mismo esfuerzo recrear un cierto movimiento que la generalización. Surgieron errores con origen en otra disciplina como Educación Plástica. En una hoja dibujaban la pierna como segmentos sueltos y en Cabri si los dibujan así, no cumplía con ciertas características de la realidad, por ejemplo los segmentos al moverse modificaban su medida. Errores debidos a la falta de verificación, como cuando Priscila mostró su esquema donde el pie podía llegar a coincidir con la rodilla.

Se observó que la construcción final de las alumnas estaba construida sobre un plano

inmóvil, lo cual constituía un error. Esto se debió a la dificultad de obtener información espacial, no salían mentalmente del dibujo plano y por ende no pensaban en el recorrido de la pierna en las 3 dimensiones. La actividad 3 hizo salir a la luz este error. Errores de origen técnico, como cuando Romina en su construcción no podía animar el punto pie, pues quería que se moviera sobre dos objetos distintos (un arco y un segmento) y no lo lograba con el software (Fig. 33). Errores debido a la deficiencia en el aprendizaje de conceptos previos, como por ejemplo la construcción de Romina, donde el pie se movía en una circunferencia y luego en su diámetro y el segmento que representaba a la pierna modificaba su longitud. Esto se podría haber analizado desde el concepto de cono, pues la generatriz no mide igual que la altura, pero este error no fue notado por la alumna.

Estrategias

Como estrategia las alumnas utilizaron un papel para dibujar los movimientos de las piernas o las articulaciones de la misma (Fig.32). Utilizando su cuerpo, flexionaron la rodilla para comparar la medida de la parte inferior y superior de la pierna. Utilizaron biromes simulando las piernas, para recrear el movimiento y realizar conjeturas. Usaron de modelo a una de sus compañeras para poder visualizar los movimientos.

Algunas de las estrategias previstas no surgieron.

Construcciones

De las construcciones esperables, solo surgió la que se muestra en la figura 18. Utilizando dos circunferencias sobre un plano. Pero podría haber surgido otra, a partir del dibujo realizado por María (Fig.32), donde el movimiento lo analizó a partir de las articulaciones. Esta construcción no trascendió porque no lograron recrearla en Cabri y

además consideraron más accesible la construcción realizada por Priscila. Esta posible construcción no fue pensada en el análisis preliminar. Esto muestra la fuente de creatividad que posee esta actividad y las diversas formas de construir el modelo.

6.2.4.2 ACTIVIDAD 2

Actividad 2: Recrear un *battement tendu jeté* con la construcción de la pierna realizada, pero incorporando la otra pierna. Si es necesario, pueden modificar la construcción.

El tiempo predicho para esta actividad fue de una clase y coincidió con el tiempo requerido en la experimentación.

Objetivos

Respecto a los objetivos que nos planteamos se observaron los seis subprocesos del proceso de modelización. Identificaron las características del *battement tendu jeté*, seleccionaron los elementos y relaciones geométricas. Esto se observó en Micaela y Priscila quienes identificaron que la rodilla y el pie se movían sobre arcos de circunferencia congruentes y se desplazaban con igual velocidad. Identificaron las variables como la longitud de los arcos, la velocidad de los puntos *rodilla* y *pie*. También Tatiana, María, Jimena, Sofía y Romina, realizaron otras interpretaciones de la realidad, que cuando evaluaron su validez algunas tuvieron éxito y otras no. Aunque el éxito era parcial, pues no era representativo para otro movimiento.

Muchas alumnas al encontrar cierta dificultad con el modelo construido en el ítem anterior, reformularon sus representaciones. Se observó a María, por ejemplo, reconocer que en su modelo, la pierna cambiaba de tamaño al moverse. Sofía construyó dos modelos. Ella admitió que en la representación que se muestra en la figura 41, la parte inferior de la pierna podía agrandarse y achicarse.

Se observó que las alumnas están en continuo desarrollo de las habilidades geométricas de visualización, de comunicación, de dibujo, de razonamiento y de aplicación. En los diálogos se manifestó mayor claridad en las expresiones, producto de una mejor visualización de las características de los objetos. Aunque algunas alumnas, todavía percibían en forma confusa el movimiento, producto de ciertos errores que se describirán más adelante. Con respecto a las habilidades de dibujo, hay muchos desniveles entre ellas. Esto se ve en la construcción por ejemplo de María (Fig. 38) la cual tiene errores, comparada con la construcción exitosa de Priscila (Fig. 42). La habilidad de razonamiento y de aplicación fueron puestas en práctica cuando realizaron diversas conjeturas del movimiento.

Con lo expuesto damos por cumplido los objetivos que planteamos para esta actividad.

Dificultades

Analizando las dificultades, vemos que nuevamente surgieron dificultades relacionadas al desarrollo cognitivo de las alumnas. Asociadas a la habilidad de construcción como se muestra en la figura 40 que realizó Sofía, donde el arco lo dibujó por fuera del recorrido de la pierna. Dificultades en el razonamiento, Jimena por ejemplo, no encontraba la razón por la cual al animar solo la rodilla (que es centro de una circunferencia) el punto pie se movía y la pierna no quedaba estirada.

Surgieron dificultades relacionadas con los procesos de enseñanza, más exactamente con los hábitos escolares, que se detallará en el ítem siguiente. Pero no, como habíamos predicho, vinculados a no querer asumir su responsabilidad de la resolución de la actividad. Se vio a las alumnas trabajar solas y en grupo con la compañera, produciendo muchas ideas para resolver la actividad.

No surgieron dificultades asociadas a la complejidad de los objetos matemáticos.

Errores

Estas dificultades generaron variados errores. Algunos producidos por los hábitos escolares. Varias alumnas modificaron el modelo de pierna, motivadas por el hecho que en la consigna decía: “si es necesario, pueden modificar la construcción”. Es posible que hayan pensado que la aclaración de la consigna, era un indicio de lo que debían hacer si o si. Este error no fue previsto.

Errores producidos por la complejidad del contenido. Denise, por ejemplo, no logró visualizar la construcción realizada por sus compañeras. Jimena y Stefanía concebían que en este paso solo se movía la rodilla y el pie quedaba inmóvil. Sofía dibujó el arco del pie por fuera de las circunferencias (Fig. 40), visualizando algo incoherente. Luego modificó la construcción, logrando una nueva que solo era útil para pasos donde las piernas quedaban extendidas (Fig. 41). Creemos que la habilidad de transferencia a otras situaciones no estuvo presente en su razonamiento. Este error puede ser visto también, como una deficiencia del concepto de distancia entre dos puntos cualesquiera de dos circunferencias concéntricas.

También surgieron errores producto de otras disciplinas. Como en Anatomía ven que en el *battement tendu jeté* lo que se mueve es la articulación de la cadera, Romina por

ejemplo, interpretaba que solo se mueve esta y no el pie ni la rodilla. Pero en el modelo armado por ellas no se puede aplicar esa idea.

Errores debidos a la deficiencia de hechos, destrezas y conceptos previos. María construyó un nuevo modelo (Fig. 38) considerando a las piernas como cuerdas de una circunferencia. Un extremo era móvil sobre un arco y por lo tanto, al desplazarse, su longitud se modificaba. Este error es cometido por falta de conocimiento de las características de las cuerdas de una circunferencia.

Por último, errores debidos a la falta de verificación no surgieron, pues siempre validaban la construcción con la animación. Errores técnicos surgían de vez en cuando, por no recordar los elementos necesarios para construir ciertas figuras.

Estrategias

Las estrategias que utilizaron fueron varias. Algunas alumnas realizaron un esquema del movimiento en papel. Otras recrearon el *battement tendu jeté* utilizando biromes o los dedos de la mano como si fuesen sus piernas. Además de recrearlo con su cuerpo para poder analizar las características.

Construcciones

De las construcciones esperadas solo surgió la que se muestra en la figura 21, además de otras que lograron recrear el *battement tendu jeté*, pero no son válidas para otros movimientos. Por ejemplo, la construcción de Tatiana (Fig. 39) o la de Sofía (Fig. 41).

6.2.4.3 ACTIVIDAD 3

Actividad 3: Recrear con en la construcción realizada de las piernas, el *battement fondu* hacia adelante. Si es necesario modificar la construcción.

El tiempo estimado fue de dos clases pero en la experimentación se requirió de 4 clases para completar la actividad. Esta necesidad se debió al corte de un mes y medio producido por la toma del establecimiento, que se produjo luego de comenzar esta actividad.

Objetivos

Las alumnas en el desarrollo de esta actividad, transitaron los seis subprocesos de modelización. Identificaron las características de la realidad a ser modelizada. Seleccionaron los elementos, relaciones y los idealizaron, considerando un plano para cada pierna, el segmento para que la cadera suba y baje, los arcos de circunferencia, etc. Otro ejemplo fue el de Sofía que remarcó que ella no tiene una rotación perfecta, en consecuencia los dos planos de las piernas formaban un ángulo menor a 180° . De esta forma lo tradujeron al lenguaje matemático, identificando las variables: los planos donde se mueven las piernas y sus desplazamientos, los arcos donde se mueven los puntos *rodilla* y *pie*, sus velocidades, las posiciones iniciales para el movimiento, etc. Utilizaron la animación del software para llegar a resultados y analizar la validez del modelo. Ellas fueron críticas de sus producciones y las reformulaban constantemente. Sofía, por ejemplo, buscaba otra forma de representarlo que no fuese el modelo que dibujó Romina.

Ellas trabajaron en equipo, se demostró en los diálogos expuestos y en la respuesta de Sol a la entrevista donde dijo que la utilidad de esta actividad fue aprender a trabajar en equipo (anexo 10.3). Con respecto al objetivo pretendido de que las alumnas sintieran la necesidad de buscar la generalización no se cumplió. Cuando realizaron la construcción en el software, solo pensaron en el movimiento del *battement fondu*.

Fueron adquiriendo las habilidades geométricas de visualización, de comunicación, de dibujo, de razonamiento y de aplicación. Esto se observó en varios momentos de la resolución de la actividad. A modo de ejemplo destacaremos la discusión que surgió de la pregunta: ¿cómo hacer para que el pie quede quieto? En el intercambio de ideas entre Romina, Micaela y Jimena se detectó la visualización del movimiento y el poder comunicarse con lenguaje matemático. Además el dibujo les permitió sacar conclusiones, realizaron razonamientos que las llevaron a lograr su objetivo. La habilidad de transferencia se vio presente en las entrevistas realizadas a las alumnas. Stefania dijo: “Me interesa el trabajo con el *fondu* y el *battement* porque me permite ver los mecanismo de cómo hacerlo, también, como no se debe hacer el paso”. En el comentario de Romina también se observó dicha habilidad: “creo que para mí me ayudo a ver de otra forma como se maneja mi cuerpo. Creo que si me dedico a la danza, me va servir ver y poder explicar de otra forma cómo funcionan los movimientos”. La intención de desarrollar la habilidad de dibujo se detectó en la entrevista realizada a Sofía quien dijo que esto es “arquitectura pura. Aprendemos un montón de cosas, profundizas la creatividad de creación con lo técnico y eso después te ayuda un montón en el caso de querer seguir dibujo, arquitectura, técnica, etc.”.

Dificultades

Aparecieron dificultades asociadas al desarrollo cognitivo de los alumnos. Se observó en la figura 44, que realizó Sofía, falta de claridad en la visualización del movimiento y una insuficiencia en la habilidad de dibujo, que son necesarias para analizar los elementos de la modelización. Además de no poder explicar con claridad su razonamiento. Para realizar un esquema en papel, esta actividad requería saber dibujar en perspectiva. Por ejemplo en Romina se notó que desconocía como representar dos planos oblicuos, y esta dificultad se trasladó a la construcción en Cabri. Se observó que las alumnas percibían como un gran obstáculo el hecho de tener que dibujar otro plano.

Dificultades en los procesos de pensamiento matemático para seguir un argumento lógico, por ejemplo si se mueve el punto *rodilla*, en consecuencia se mueve el punto *pie*. No surgieron grandes dificultades en encontrar sobre qué objeto se mueve cada punto.

Errores

Errores ligados a la complejidad del contenido, producidos por la imagen mental que poseían las alumnas de este movimiento. Por ejemplo, Jimena concebía el paso solo como un movimiento de piernas y decía que la cadera quedaba quieta. Ella tenía una imagen mental del movimiento a partir de su ejecución. Este error puede tener su origen también en otro disciplina. Debido al modo con el cual le explicaron el paso en la materia de Danza Clásica. La alumna remarcó que el *battement fondu* era una flexión de piernas, posiblemente así se lo explicó su profesora de danza. Otro error que surgió en Jimena, fue al considerar que el pie debía quedar quieto, entonces no debía animarlo. Esto denota falta de razonamiento lógico. Si el punto *rodilla* se traslada, el punto *pie* se mueve por consecuencia del movimiento de la circunferencia siguiendo este modelo (si fuese otro

puede que si sea correcto el pensamiento). Por ende, se debía realizar la animación del punto *pie* para que contrarreste el movimiento de la rodilla, y así dar la ilusión de estar quieto.

Otro error que surgió, fue que no consideraron otra variable dentro de este modelo como era el movimiento del plano de una de las piernas. Esto se debió a la dificultad para obtener información espacial, no visualizaron ese cambio de posición del plano de la pierna, en el *battement fondu*. El origen de este error pudo haber sido producto de un desarrollo escaso de la visualización en 3 dimensiones.

Errores causados por la falta de verificación de la solución. Azul, por ejemplo, consideró que el segmento donde se debía mover la cadera tenía que llegar al suelo. Realizó un razonamiento erróneo, producto de no analizar la consecuencia de esta acción ni verificarlo.

Errores debidos a deficiencias en los conceptos previos. Por ejemplo, cuando Romina dijo que la elipse (que representaba la cadera) podía estar en la unión de dos planos oblicuos, se evidenció la falta de conocimiento de la intersección de dos planos. También cuando no lograban coordinar el movimiento, esto se debió a poseer una deficiencia del concepto de coordinación y de lo que implica esto en términos matemáticos, o sea la necesidad de considerar la proporcionalidad entre velocidad y espacio recorrido. Además del desconocimiento del hecho de que para realizar un movimiento hubo que considerar una posición inicial y otra final, para que el resultado fuese el deseado. Otro ejemplo de este tipo de error, es lo que hizo Sofía en la construcción que se muestra en la figura 50. La circunferencia se le agrandaba y achicaba pues la parte superior de la pierna era un fragmento de una cuerda y no el radio. Se evidencia, falta de conocimiento sobre las partes de una circunferencia y sus características. Debemos destacar que la animación en

Cabri 3D pone de manifiesto los errores de origen conceptual.

Los errores debidos a la rigidez de pensamiento, no surgieron. Ellas aceptaron tener que cambiar el modelo utilizando dos planos. Tampoco surgieron errores técnicos de consideración.

Estrategias

Se observó constantemente la estrategia de utilizar a una compañera como modelo, ejecutando el *battement fondu* lentamente para poder armar conjeturas al respecto. Se observó a Jimena analizar el movimiento recreándolo con sus brazos. A Priscila se la vio ejecutar el movimiento con sus piernas aún sentada en la silla y realizar gestos con sus manos. Además, Priscila, decidió recrear en Cabri el *battement fondu* hacia el costado primero y luego lo hubiera hecho también hacia adelante, pero esto no sucedió, pues la alumna se retiró de la escuela antes de finalizar la actividad.

Construcciones

Lograron solo una de las construcciones que predijimos. Sofía realizó un intento de crear un nuevo modelo pero no fue exitoso.

6.2.4.4 ACTIVIDAD 4

Actividad 4: Sobre la construcción anterior, representar el torso, la cabeza, los hombros y los brazos. Teniendo en cuenta que la construcción debe permitirles realizar todos los movimientos de los pasos básicos de la Danza Clásica.

Sugerencia: Recuerden las características del cuerpo:

- Es un todo, por ejemplo, no se pueden separar las piernas del torso.
- Los miembros tienen medidas fijas. Por ejemplo: al mover el brazo la longitud de este no cambia.
- Esas medidas no son arbitrarias.

Esta actividad requirió 3 clases para ser finalizada y estuvo acorde a lo planificado.

Objetivos

Las alumnas transitaron los seis subprocesos del proceso de modelización. Identificaron las características, seleccionaron los elementos, relaciones y variables. Analizaron como son los movimientos de cada parte corporal dentro de esta danza y los elementos que le permiten realizar los movimientos. De esta forma los idealizaron traduciéndolos a lenguaje matemático y volcándolos en Cabri. Realizaron algunas pruebas para ver la validez del modelo, momento en el cual advirtieron un error: al mover el plano de los brazos estos se movían sin intención. Luego lo corrigieron.

Se observó la necesidad de investigar las proporciones del cuerpo, cuando Gala creyó que los brazos eran más chicos que las piernas. Entonces algunas chicas intentaron deducirlas

comparando sus partes del cuerpo con la longitud de la parte superior de la pierna, pero no siempre daba exacto. Gala, no convencida de ese método buscó la información en Internet.

Fueron críticas de sus producciones y capaces de reformularlas. Por ejemplo, Victoria reconoció que en su modelo los brazos le quedaron “chatos”, es decir, solo se podían mover sobre el mismo plano que las piernas. Lo reformuló creando un plano paralelo al plano inicial (que representa el piso) y construyó los brazos en este.

Aprendieron a trabajar en equipo, esto se observó en la clase del 6 de agosto donde decidieron trabajar todas juntas en la creación de un solo archivo considerando los errores vistos. Para ellas era más fácil así porque generaban más ideas.

Se observó que las alumnas a medida que avanzaba la experimentación iban desarrollando las habilidades geométricas de visualización, de comunicación, de dibujo, de razonamiento y de aplicación. Surgió una idea de Romina que representó muchas de estas habilidades, ella dijo: “Ahhhh, es como que cuando me muevo, traslado mi propio plano”

Por lo dicho, consideramos cumplidos los objetivos propuestos para esta actividad.

Dificultades

Dificultades asociadas al desarrollo cognitivo, se les dificultaba pensar en la generalización del movimiento. Pensaban en lo particular. Además Romina y Victoria no lograban manipular los objetos en 3 dimensiones en Cabri. Y verbalizarlo matemáticamente también fue dificultoso, esto se debe a la complejidad de los objetos matemáticos. Esta dificultad surgió en casi todas a las alumnas, en mayor o menor medida.

Errores

Aparecieron errores vinculados a las operaciones intelectuales que implica esta actividad. Por ejemplo Romina creó todo el cuerpo sobre un único plano, y esta actividad requiere del pensamiento del movimiento hacia el espacio tridimensional. Otra situación que se dio en gran parte de las alumnas, fue dibujar los brazos en un solo plano paralelo al suelo justificando que la bailarina estaba apoyada en la barra. Esta actividad requiere del pensamiento general del movimiento, no de lo particular. Igualmente cuando buscaron lo general, llegaban a conclusiones que no eran ciertas, por ejemplo María dijo que el torso siempre quedaba en el mismo plano que una de las piernas.

Errores debidos a los procesos adoptados, como por ejemplo Victoria en su primera construcción (Fig. 58) dibujó los brazos como segmentos sueltos, dejando de lado el método que utilizaron antes para dibujar las piernas y que además, María sugirió al comenzar la clase.

Otros errores asociados a inferencias no válidas lógicamente, dedujeron incorrectamente la falta de movimiento del torso o del plano de los brazos, cuando la cadera baja y sube. Esto se vio en las construcciones donde el torso se agrandaba y achicaba, por ejemplo en la realizada por Belén (Fig. 59). Este error se puede interpretar también como una deficiencia en los conocimientos sobre las relaciones geométricas que debería asignarle al segmento *torso* para que su longitud quede invariante.

Errores debido a un aprendizaje deficiente de hechos, destrezas y conceptos previos, hubo muchos, por ejemplo, en el segundo modelo de Victoria (Fig. 63) el torso quedó separado de los brazos. No estaba correctamente definida la intersección del segmento *torso* y el segmento *hombros* para que quede todo unido. Otro caso fue cuando observaron que al

subir y bajar la cadera el plano que contenía al brazo se movía sin desearlo. Esto se debió a la falta de conocimientos de las consecuencias de ciertos movimientos. Si el plano fue creado por una recta y un punto, cuando la cadera baje dicha recta acompañará el movimiento pero el punto no, entonces el plano se moverá.

Los errores detallados anteriormente de Romina, Belén y Victoria pueden también ser producidos por el poco desarrollo de las habilidades de dibujo y de razonamiento (errores debidos a la complejidad del contenido).

Surgieron errores por no verificar la solución, utilizando la animación. Por ejemplo Romina realizó un modelo (Fig. 62), no del todo correcto, en el cual solo reconoció que su bailarina quedo “contra la pared”. Pero había errores como, que las circunferencias se podían mover, pero no los reconoció porque no realizó la verificación.

Además surgieron errores debidos a la rigidez de pensamiento, que no fueron predichos. Por ejemplo Romina dibujó todo el cuerpo con circunferencias, tomando la misma estrategia que utilizó para dibujar la pierna

Estrategias

Las estrategias utilizadas por las alumnas fueron varias. Para hallar las proporciones del cuerpo, algunas intentaron deducirlas comparando las distintas partes del cuerpo con la longitud de la parte superior de la pierna, pero no siempre daba exacto. Gala por ejemplo buscó en Internet las proporciones. María recordó una técnica que habían aprendido en Educación Plástica, la cual se explicó en la experimentación.

Al momento de representar el cuerpo completo surgió la idea de que María representara, con su cuerpo, varios pasos básicos de Danza Clásica. A partir de esto analizaron, por ejemplo, la posición de los hombros, el plano de los brazos, la ubicación del torso, etc.

Una estrategia que surgió en el grupo de Micaela y Diana, fue la de construir los brazos en otro archivo y luego agregarlo al resto del cuerpo.

No surgió la estrategia de consultar a sus profesoras de Danza, ni dibujar en el papel esquemas de cómo concebían los movimientos. Solo utilizaron sus imágenes mentales, posiblemente por la dificultad de representar en papel (2 dimensiones) tantos objetos en 3 dimensiones.

Construcciones

Solo surgió una construcción similar a la que se muestra en la figura 26.

6.2.4.5 ACTIVIDAD 5

Actividad 5: Con la representación del cuerpo ya obtenida, realizar un paso básico de Danza Clásica a elección. Realizar modificaciones al modelo si es necesario.

El tiempo que demandó esta actividad fue de una clase, teniendo la puesta en común en la siguiente, cumpliendo con el tiempo planificado.

Objetivos

Las alumnas analizaron la validez del modelo creado, realizando otras animaciones de pasos básicos de Danza Clásica. Ahí encontraron otras falencias que fueron poco a poco corregidas. Se las observó siendo críticas de sus producciones y capaces de reformularlas, sin grandes dificultades. Se las vio trabajar en grupos de 2 o 3 alumnas, pero a la vez

prestando atención a las correcciones que hacían sus compañeras al modelo.

Se percibió un clima de creatividad en el aula, pensando en los pasos de danza que podían hacer. En las entrevistas realizadas a las alumnas (anexo 10.3) se detectó el deseo de elección en el paso a recrear. Por ejemplo, María dijo: “Quiero ejercicios libres”. Victoria expresó: “poder recrear algo nosotras sin tener un tema que seguir” y Stefanía agregó: “quiero que dé para hacer un *rond de jambe*”.

Continuaron además desarrollando las habilidades geométricas de visualización, de comunicación, de dibujo, de razonamiento y de aplicación

Por lo dicho damos por cumplidos los objetivos de esta actividad.

Dificultades

Surgieron algunas dificultades debidas al desarrollo cognitivo, asociadas a la visualización geométrica de algún movimiento, pero con la ayuda de las compañeras, fueron superadas. Dificultades de origen emocional no surgieron finalmente.

Errores

Surgió un error que no fue predicho relacionado a datos mal utilizados. Micaela y Azul cometieron un error en la asignación de las velocidades de los puntos, pues tomaron la longitud total del recorrido del punto O (ver Fig. 67) para analizar la proporcionalidad. Pero en realidad deberían haber tomado la primera mitad, pues es el momento en que la cadera llega al extremo superior del segmento, al igual que los puntos *pie* y *rodilla*.

Surgieron errores relacionados a las dificultades para obtener información espacial o por la complejidad del contenido. Romina, Belén y Sabrina no visualizaban que en el paso elegido, el *cabriole*, el torso de la bailarina no estaba contenido en el mismo plano que las

piernas.

Errores debidos a la rigidez de pensamiento no surgieron.

Estrategias

Realizaron dibujos secuenciales del paso de danza elegido. Utilizaron a sus compañeras como modelo para visualizar las figuras intermedias del paso elegido.

No surgieron estrategias como el hecho de buscar en Internet el paso y el desarrollo espacial del mismo. Se debió al desconocimiento de la existencia de estos o por la confianza de saber que podían hacerlo solas. Tampoco realizaron filmaciones de ellas ejecutando el paso.

Construcciones

Eligieron pasos muy variados, pero el paso que predijimos no surgió en el aula.

6.2.4.6 ACTIVIDAD 6

Actividad 6: A partir de las pruebas realizadas a los distintos modelos propuestos, representar un único modelo de bailarina, teniendo en cuentas todas las modificaciones y conjeturas realizadas en los distintos grupos. Este trabajo debe realizarse entre todas.

El tiempo que necesito esta actividad fue de una clase, como se planificó.

Objetivos

Se obtuvo un modelo de bailarina consensuado por todas las compañeras del curso.

Dificultades

No surgieron dificultades asociadas a los procesos de enseñanza, debido a que ya venían trabajando en grupo.

Errores

No se detectaron errores producidos por la rigidez del pensamiento.

7. CAPÍTULO 7: CONCLUSIÓN Y PROPUESTAS PARA EL FUTURO

Consideramos que, con la ingeniería didáctica desarrollada en nuestra investigación, hemos realizado un aporte innovador a la enseñanza de la modelización matemática, aplicada a la Danza Clásica utilizando como recurso tecnológico un software de Geometría dinámica (Cabri 3D). Debemos destacar además, que este modelo pudo ser abordado por estudiantes de un 4^{to} bachiller en una Escuela de Danzas situada en la Ciudad Autónoma de Buenos Aires.

Hemos cotejado que las alumnas construyeron el concepto de modelización, pues transitaron los seis subprocesos descritos por Blomhøj y Højgaard Jensen (2003) a partir de la creación grupal de un modelo de bailarina de Danza Clásica con Cabri 3D. Esta secuencia de situaciones didácticas despertó, en las alumnas, el interés por el estudio de la Matemática, en particular la Geometría, área que en general no resulta sencilla de comprender y por tal motivo es muchas veces relegada en la enseñanza. Stefanía, una de las alumnas, dijo en su entrevista (ver anexo 10.3) que el análisis de los elementos geométricos presentes en los pasos básicos, es una herramienta para mejorar la visualización de estos y por ende su ejecución. De esta forma contestamos la primera pregunta de nuestra investigación⁴¹.

En el análisis a posteriori se describieron las diversas estrategias que utilizaron las alumnas al abordar el estudio de la modelización en este nuevo entorno. Este análisis permitió advertir que dichas estrategias están al alcance de cualquier alumno del mismo nivel académico. Esto demuestra que la secuencia didáctica bien podría ser aplicada en otros contextos, agregando la utilización de videos, con los pasos de Danza Clásica, para aquellos alumnos que los desconozcan.

⁴¹ La primera pregunta era: ¿Cómo utilizar el concepto de modelización geométrica para que sea de utilidad al bailarín de Danza Clásica?

En el análisis a posteriori también caracterizamos y analizamos las dificultades que enfrentaron las alumnas. Arribando a la conclusión que las dificultades que con mayor frecuencia se observaron, a lo largo de toda la experimentación, fueron las relacionadas al desarrollo cognitivo de las alumnas, producidas por la escasez de las habilidades geométricas que poseían (Cap. 5.4). Las dificultades debidas a los procesos de enseñanza, a las actitudes emocionales, a la complejidad del contenido y a los procesos de pensamiento matemático fueron significativamente menores.

A partir del análisis de los errores que surgieron en la experimentación, se presenta a continuación una tipología de éstos. Ordenados a partir de la frecuencia observada, comenzando por los más frecuentes y finalizando con aquellos que en menor medida se registraron:

- Errores causados por la complejidad del contenido: En todas las actividades surgieron errores de este tipo, producidas por el poco desarrollo de las habilidades geométricas de las alumnas.
- Errores debidos a un aprendizaje deficiente de hechos, destrezas y conceptos previos: En todas las situaciones surgieron errores de este tipo en mayor o menor medida. Se debieron a la falta de conceptos matemáticos.
- Errores producidos por falta de verificación de la solución, por otras disciplinas o por dificultades en obtener información espacial: Estas aparecieron en tres de las actividades dadas.
- Errores técnicos: Asociados al uso de Cabri. Aparecieron en las dos primeras actividades y muy levemente en las restantes.

- Errores ocasionados por rigidez en el pensamiento, por procesos adoptados, por operaciones intelectuales implicadas, por hábitos escolares y por la comprensión de las instrucciones de trabajo: Solo surgieron en una sola de las actividades propuestas.

A partir de este análisis podemos ver que la mayoría de los errores estuvieron ligados a la falta de desarrollo de las habilidades geométricas y la deficiencia en los conceptos matemáticos. Creemos que estas actividades lograron subsanar varias de estas deficiencias. Esto se observa en los diálogos de las alumnas y en las producciones finales realizadas en Cabri.

Queremos destacar que en esta propuesta las alumnas construyeron el concepto de modelo matemático desde su vivencia y no a partir de la imposición de un modelo creado por otros. Además esta propuesta respondió a los intereses de nuestras alumnas. Ellas se sentían expertas en la disciplina de la Danza y estos conocimientos, que fueron aprovechados en las clases, les brindaron cierta seguridad al momento de crear el modelo. Al no tener un lenguaje totalmente ajeno a ellas se constituyó un trabajo interdisciplinar entre Danza y Matemática, que es sumamente novedoso.

Debemos aclarar que debido a que el grupo elegido estaba conformado solo por mujeres, tuvimos que adaptar la ingeniería didáctica a los pasos ejecutados por la bailarina, basándonos en las necesidades e intereses de las jovencitas. Queda para más adelante, como una extensión del trabajo, con cursos más heterogéneos, modelizar los pasos del bailarín como así también elaborar secuencias didácticas para el estudio de modelos de otras danzas.

8. CAPÍTULO 8: GLOSARIO DE DANZA

Aquí se muestran las definiciones de los términos utilizados en la tesina, referidos a la Danza Clásica.

Arabesque: *lit.* Arabesco. Posición de baile generalmente de perfil al espectador que presenta las siguientes características: cuerpo sostenido en una pierna, la otra extendida en cuarta posición posterior; los brazos extendidos armonizando con la línea de la pierna levantada (Vaganova, 1945, p.234).

Assemblé: Una pierna se levanta en el aire en una posición dada, se ejecuta un salto con el pie que sostiene el cuerpo, bajándose en los dos pies simultáneamente de manera de llegar a tierra en una posición cerrada (Vaganova, 1945, p. 235).

Batería: Término genérico aplicado a todo movimiento en que se trenzan los pies en el aire, o en que las piernas se golpean entre sí igualmente en el aire (Vaganova, 1945, p. 239).

Battement frappe: En este ejercicio el movimiento comprende la rodilla y el pie. Se gira el muslo hacia el costado, al máximo posible. Extensión acentuada de la pierna y del empeine y regreso suave para evitar un esfuerzo innecesario (Vaganova, 1945, p.238).

Battement tendus jetés: Separación y atracción de la pierna. La pierna sigue su curso en el aire sin tocar el piso con la punta (Vaganova, 1945, pp.49-51).

Cabriole: Paso de *batterie* (batería), en que una pierna se levanta extendida en una posición dada y la pierna que sostiene el cuerpo ejecuta un salto, levantándose hasta golpear contra la otra en el aire (Vaganova, 1945, p.240).

Cecchetti: Las alumnas nombran así al salto en donde las dos piernas se flexionan en el aire.

Croisé: Cruzado. El cruce de las piernas es su rasgo principal. Hay *croisé* hacia adelante y hacia atrás (Vaganova, 1945, p. 42).

Dehors: Hacia afuera. Indica que el movimiento de la pierna se ejecuta en dirección circular,

desde adelante hacia atrás (Vaganova, 1945, p. 245).

Demi-plié: Semiflexión (Vaganova, 1945, p. 256).

Développé: Se refiere al despliegue lento de la pierna en acción, hasta su extensión completa (Vaganova, 1945, p.246).

Effacé: Inversamente al *croisé*, las piernas están abiertas (Vaganova, 1945, p. 43).

Epaulement: Giro al dar las espaldas. Término que indica una posición particular de los hombros en relación con la posición del cuerpo. La espalda gira sobre la cintura mantenida fija como eje, quedando la cadera y piernas de frente al público (Vaganova, 1945, p. 248).

Face: De frente (Vaganova, 1945, p. 248).

Grand plie: Gran flexión de piernas (Vaganova, 1945, p.38).

Jeté: Movimiento saltado en que se traslada el equilibrio del cuerpo de una pierna a la otra (Vaganova, 1945, p.251).

Pas de Bourrée: Paso que se utiliza para desplazarse. Hay algunas variaciones del pas de bourrée y se lo efectúa en distintas direcciones. Hay con cambios de piernas o sin éste (Vaganova, 1945, p. 85).

Pas de chat: *lit.* Paso de gato. Llamado así por su semejanza con el salto del gato. Se inicia siempre en quinta posición posterior, y según la elevación se llama *grand* o *petit pas de chat* (grande o pequeño paso de gato). El pie que da impulso para el salto debe bajar al suelo casi simultáneamente con el otro pie (Vaganova, 1945, p. 254).

Petit changement de pieds: Ligero cambio de pies (Vaganova, 1945, p. 97).

Pirouette: Pirueta. Giro en que el cuerpo da una o más vueltas completas, sostenido en un pie en media punta o punta (Vaganova, 1945, pp. 255-256).

Rond de jambe: Movimiento circular de la pierna con la rodilla tensa y el pie en el suelo o en el aire (Vaganova, 1945, p.260).

Souplé: lit. Flexión. Es un ejercicio en el cual el torso y la cadera ejecutan una flexión en relación a las piernas. El *souplé* o *Souplesse*, es usado en la ejercitación de la barra en danza clásica y también en pasos de centro, por lo tanto debe ser practicado indistintamente y combinado con otros ejercicios (Extraído el 24 de septiembre de 2015 desde <http://rekinectando.blogspot.com.ar/2012/01/escuela-nacional-de-danza-nellie-y.html>).

9. CAPÍTULO 9: BIBLIOGRAFÍA

- Abrate, R. Pochulu, M., Vargas, J. (2006). Errores y dificultades en Matemática. Análisis de causas y sugerencias de trabajo. Buenos Aires: Universidad Nacional de Villa María.
- Alagia, H., Bressan, A., y Sadovsky, P. (2005). Reflexiones teóricas para la educación matemática. Buenos Aires: Libros del Zorzal.
- Astolfi, J. P. (1999). El “error”, un medio para enseñar. España: Diada.
- Bressan, A. Bogisic, B & Crego, K. (2000) Razones para enseñar Geometría en la Educación Básica. Mirar, construir, decir y pensar. Buenos Aires: Novedades Educativas.
- Brousseau, G. (1983). Les obstacles epistemologiques et les problemes en mathématiques. Recherches en didactique des mathématiques. Grenoble. Editorial La pensée sauvage: Vol 4 (2) pp.165-198.
- Brousseau, Guy. (1986). Fundamentos y Métodos de la Didáctica de las Matemáticas. Córdoba, Argentina. Facultad de Matemática, Astronomía y Física. Universidad Nacional de Córdoba.
- Brousseau, G. (1998). Théorie des Situations Didactiques. Grenoble: La Pensée Sauvage.
- Brousseau, G. (2007). Iniciación al estudio de la teoría de las situaciones didácticas. Buenos Aires: Libros del Zorzal.
- Campistrous, L. y Otros. (1989). Matemática. Orientaciones Metodológicas, décimo grado. Ciudad de La Habana: Editorial Pueblo y Educación.
- De Faria Campos, E. (2006). Ingeniería Didáctica. Cuadernos de investigación y formación en Educación Matemática. Año 1, Número 2. Extraído el 15 de enero de 2014 desde <http://www.cimm.ucr.ac.cr/cuadernos/cuaderno2/Cuadernos%202%20c%205.pdf>

- Di Blasi Regner, M. et al. (2003). Dificultades y Errores: Un estudio de caso. Actas del II Congreso Internacional de Matemática Aplicada a la Ingeniería y Enseñanza de la Matemática en Ingeniería, Buenos Aires, Argentina.
- Dinzel, R. (2011). El Tango una Danza. Esa ansiosa búsqueda de la libertad. Buenos Aires: Corregidor.
- García, S. & López, O. L. (2008). La enseñanza de la geometría: Materiales para apoyar la práctica educativa. Mexico D. F.: Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación.
- Godino, J., Batanero, C., Contreras, A., Estepa, A., Lacasta, E., y Wilhelmi, M.(2013). La Ingeniería Didáctica como Investigación basada en el diseño. Extraído el 15 de enero de 2014 desde http://www.ugr.es/~jgodino/eos/JDGodino%20et%20al_2013%20Ingenieria%20didactica.pdf
- González Millos, E. y González Otero, L. (s.f). El hombre Vitrubio. Cuadernos de Matemática de Xunta de Galicia. Extraído el 25 de marzo de 2015 desde <http://centros.edu.xunta.es/iesramoncabanillas/cuadmat/8cabezas.htm>
- Guzmán Nava, C., Reyes Grajales, O. y Velázquez Basulto M. (18 de enero del 2012). Rekinectando la danza [Mensaje en un blog]. Recuperado de <http://rekinectando.blogspot.com.ar/2012/01/escuela-nacional-de-danza-nellie-y.html>.
- Hoffer, A. (1981). “Geometry is more than Proof”, en The Mathematics Teachers.Vol. 74 (1) pp. 11-18.
- Hume Eriksson, M. (2009). Técnica de Trabajo Corporal. El sistema de la técnica en la pared. Barcelona: Editorial Paidó tribó.

- Kirstein, L, Muriel, S. &Dyer, C. (1953).The Classic Ballet, Basic Technique and Terminology. Revised ed. New York: Longmans, Green & Co.
- Laban, Rudolf. (2011). Choreutics. United Kingdom: Dance Books Ltd.
- Laban, Rudolf. (1978). Danza Educativa Moderna. Buenos Aires: Editorial Paidós.
- Longstaff,J. (s.f.). Laban Analysis. Extraído el 21 de enero de 2014 desde http://www.laban-analyses.org/labán_analysis_reviews/labán_analysis_notation/space_harmony_choreutics/kinesphere_scaffolding/polyhedra.htm
- Langlade, A. (1986). Teoría general de la Gimnasia. Buenos Aires: Editorial Stadium S.R.L.
- Extraído el 2 de enero de 2014 desde<http://books.google.com.ar/books?id=z0QNVew7Fd8C&printsec=frontcover&q=Teor%C3%ADa+general+de+la+Gimnasia&hl=es&sa=X&ei=5FjFUr-8GdepsATzp4G4DQ&ved=0CC0Q6AEwAA#v=onepage&q&f=false>.
- Ministerio de Educación. (2009). Matemática. Orientaciones para la planificación de la enseñanza. Gobierno de la Ciudad de Buenos Aires.
- Ministerio de Educación del Gobierno de la Ciudad de Buenos Aires. (2013). Nueva Escuela Secundaria de la Ciudad Autónoma de Buenos Aires. Diseño Curricular.Ciclo Básico. 2014-2020. Gobierno de la Ciudad de Buenos Aires.
- Miranda R. (11 de agosto de 2011). Bitácora III Periodo [Mensaje en un blog]. Recuperado de <http://bitacoraricardomiranda.blogspot.com.ar/>
- Morten Blomhøj. (2008). Modelización Matemática - Una Teoría para la Práctica.(María Mina, trad.). Revista de Educación Matemática, 23, 20-35. (Obra original publicada en 2004). Obtenido el 24 de octubre de 2014 desde: <http://www.famaf.unc.edu.ar/~revm/Volumen23/digital23-2/Modelizacion1.pdf> .

- Movshovitz-Hadar, N.; Zaslavski, O.; Inbar, S. (1987). An empirical classification model for errors in high school mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*. Vol. 18, pp. 3-14.
- Nevot Luna, A y Aguirre Estibález, J. (2007). Dibujo técnico y matemáticas: una consideración interdisciplinar. Extraído el 31 de marzo de 2015 desde <https://books.google.com.ar/books?id=cLYNoqJP3F8C&printsec=frontcover#v=onepage&q&f=false>
- Pérez Serrano, G. (1994). *Investigación Cualitativa. Retos e Interrogantes. Técnicas y Análisis de los datos*. Vol. II. Madrid: La Muralla.
- Radatz, H. (1979). Error analysis in mathematics education. *Journal for Research in Mathematics Education*. Vol 9, pp.163-172.
- Real Academia Española. Diccionario de la lengua española. Extraído el el 14 de Noviembre de 2014 desde <http://lema.rae.es/drae/?val=inter%C3%A9s>
- Revista Marthi Mag. Bilinski, R. (2007). Danse et Mathématiques. Deux disciplines plus unies qu'on le croit. Extraído el 19 de agosto de 2013 desde http://www.marthiii.com/Marthi_mag/2007-07-jui/marthi_mag_conceptuel.htm.
- Revista Marthi Mag. Bilinski, R. (2007). Danse et Mathématiques. Deux disciplines plus unies qu'on le croit. Extraído el 19 de agosto de 2013 desde http://www.marthiii.com/Marthi_mag/2007-08-aout/marthi_mag_conceptuel.htm.
- Schaffer, K., Stern, E. y Kim, S. (2001). Math Dance. Extraído el 21 de octubre de 2013 desde <http://www.mathdance.org/html/about.html>.
- Torija Ángel, M. (2011). Crisis y evolución de la danse d'école (danza académica) de 1890 a 1946, en el contexto de las bellas artes. Tesis doctoral. Universidad Rey Juan Carlos,

Madrid, España. Extraída el 1 de abril de 2015 desde https://www.google.com.ar/url?sa=t&rct=j&q=&esrc=s&source=web&cd=2&ved=0C CIQFjAB&url=https%3A%2F%2Feciencia.urjc.es%2Fbitstream%2Fhandle%2F10115%2F7886%2FISDAA_Tesis_Maria_Torija.pdf%3Bjsessionid%3D37FF76BD79A95639C5052E268DFADEBE%3Fsequence%3D1&ei=oTohVZv8GMadNu6MgrAL&usg=AFQjCNE2HO4WmnQXm-utoLLGh0ctatID-w&bvm=bv.89947451,d.eXY&cad=rja

Vaganova, A. (1945). Las bases de la Danza Clásica. Buenos Aires: Ediciones Centurión

Vargas Vargas, G.(2013). El modelo de Van Hiele y la enseñanza de la Geometría. Uniciencia Vol. 27, No. 1, 74-94. Extraído el 14 de enero de 2014 desde <https://www.google.com.ar/url?sa=t&rct=j&q=&esrc=s&source=web&cd=1&ved=0C DAQFjAA&url=http%3A%2F%2Fwww.revistas.una.ac.cr%2Findex.php%2Funicien ia%2Farticle%2Fdownload%2F4944%2F4738&ei=D4vVUonkOMW5kQedi4GgBQ&usg=AFQjCNFnZ0uIEoJd7Zc-8FyCRnPv75EY-g&sig2=2zde35yPRnwscljFZjO4g&bvm=bv.59378465,d.eW0&cad=rja>

Verey K. (9 de mayo de 2011). The girl with the leather rucksack [Mensaje en un blog]. Recuperado de <http://thegirlwiththeleatherrucksack.blogspot.com.ar/2011/05/classic-ballet.html>

Waehner, K. (1993). Outillage chorégraphique: Manuel de composition. Paris: Vigot.

10. CAPÍTULO 10: ANEXO

10.1. TRADUCCIONES

En este anexo figuran las citas textuales en inglés con su correspondiente traducción.

Schaffer, K., Stern, E. Kim, S. (2001, p. 5) expresan: Creatively exploring patterns in space and time with an eye toward aesthetic potential.

Traducción⁴²: Exploración creativa de los patrones en el espacio y tiempo con la mirada puesta en el potencial estético.

Schaffer, K., Stern, E. Kim, S. (2001, p. 6) comentan: We noticed that math and dance both deal with codified concepts, such as symmetry, spatial awareness, counting problems and patterns. We also noticed aesthetic similarities: the need for internal consistency, the goal of striking a balance between analysis and intuition, and how either one could be abstract as well as worldly.

Traducción⁴³: Notamos que la Matemática y la danza tratan sobre conceptos codificados, tales como simetría, conciencia espacial, problemas de conteo y patrones. Además notamos similitudes estéticas: la necesidad de consistencia interna, el objetivo de lograr un equilibrio entre el análisis y la intuición, y como se puede ser abstracto así como mundano.

Schaffer, K., Stern, E. Kim, S. (200,1 p. 8) se preguntan: But what is mathematics at its most basic level? Quantity, size, relationship, shape and space, reasoning, discerning patterns, representing a concept by a word or a symbol. And even before these ideas come abilities which could be called “pre-mathematical” thinking skills.

⁴² Traducción de la Prof. Mariela Boccioni.

⁴³ Traducción de la Prof. Mariela Boccioni.

Included in the pre-mathematical category of concepts are bigger and smaller, same and different, before and after, including and excluding, inside and outside; and also remembering where you are and where you are going. We believe that the understanding of mathematics begins in the physical realm with these concepts.

To our way of thinking, this list of premathematical skills is very close to pre-dancical (to coin a word) skills. A young dancer also needs to know before and after, same and different, and so on. These essential skills are the predecessors to dance and mathematics, and constitute the essential overlap of the disciplines.

Traducción⁴⁴: ¿Qué es la Matemática en el nivel más básico? Cantidad, tamaño, relación, forma y espacio, razonamiento, patrones de discernimiento, representación de un concepto con una palabra o símbolo. E incluso antes de estas ideas consideran habilidades que podrían ser llamadas habilidades de pensamiento “pre-matemáticas”. Incluyendo en esta categoría de conceptos pre-matemáticos es más grande y más pequeño, igual o diferente, antes y después, incluyendo o excluyendo, dentro y afuera y (sic) agregando también dónde estás y dónde vas a ir. Creemos que la comprensión de la matemática comienza en el reino físico con estos conceptos.

Siguiendo nuestra línea de pensamiento, esta lista de habilidades prematemáticas es muy parecida a las habilidades pre-danzarinas (para acuñar una palabra). Un bailarín joven necesita conocer el antes y el después, lo igual y diferente, etc. Estas habilidades son las predecesoras de la danza y de la matemática, y constituyen lo esencial de la superposición de las disciplinas.

⁴⁴ Traducción de la Prof. Mariela Boccioni.

10.2. DETALLE POR AÑO DE LOS CONOCIMIENTOS EN DANZA DE LAS ALUMNAS

En 1^{er} Iniciación deben lograr tener la postura apropiada para la ejecución de la Danza Clásica. En forma más detallada deben tener control y una buena colocación de brazos, torso, caderas, piernas y pies, tanto en quietud como en movimiento. Dominio y distribución del peso sobre uno y dos pies. Eje y control del equilibrio en uno, dos pies en planta y sobre los dos pies en media punta. Tener dominio, flexibilidad y amplitud articular coxo-femoral y elasticidad muscular en tronco, piernas y pies. Tener dominio de extensión de rodillas en los cierres de posiciones y en posiciones abiertas. Extensión de pies en dehors. Con respecto a los saltos, rechazo, altura de despegue, extensión de piernas y pies, amortización en los descensos. Deberán tener el dominio de la coordinación de brazos, piernas y cabeza durante la ejecución de las secuencias de movimiento, logrando la coordinación en tiempo musical con el manejo del espacio parcial y total.

En 2^{do} Iniciación a todo lo anterior hay que agregarle el dominio del traslado del eje del cuerpo sobre la base de la media punta. Elevación y alineación sobre la media punta alta en uno y dos pies. Y las dinámicas⁴⁵ correspondientes en cada paso.

En 1^{er} Ciclo Medio las alumnas, en la mitad del año de cursada, utilizan las puntas. Además se agrega el control y la colocación en equilibrio sobre las medias puntas. Traslado del eje de apoyo en planta a la media punta y de la media punta a la punta. Dominio y amplitud articular en las posiciones por tierra (parterre) y en el aire (en l'air) sobre uno y dos pies, en quietud y en movimiento y sobre los relevés. Extensión de las rodillas sobre las medias puntas y puntas sobre uno o dos pies. Dominio del ascenso y descenso articulado de los pies hasta la punta. Eje y control del equilibrio en uno y dos pies en planta

⁴⁵Perteneciente o relativo a la fuerza cuando produce movimiento. Extraído el 19 de julio del 2015 desde <http://lema.rae.es/drae/srv/search?key=din%C3%A1mica>

y en media punta y punta en la barra. Manejo de las dinámicas propias de cada salto. Dominio del eje de pirueta (pirouette)⁴⁶ en media punta y en punta, en giros sin y con desplazamiento, manejo de brazos y cabeza durante la ejecución del giro. Retención de secuencias.

En 2^{do} Ciclo Medio se trabaja sobre las puntas para perfeccionar el movimiento y se les agrega el manejo de saltos simples con batería⁴⁷ e incorporación de grandes saltos.

En 3^{ro}, 4^{to} y 5^{to} Ciclo Medio se perfecciona el trabajo realizado en los años anteriores para lograr una buena interpretación de la Danza. Agregando la mecanización de baterías en saltos de cruce⁴⁸ y de choque⁴⁹. Expresividad. Dominio del ascenso y descenso articulado de los pies hasta la punta.

10.3. ENCUESTAS A LAS ALUMNAS

El 28 de julio (al finalizar la actividad 3) se realizaron entrevistas a las alumnas con las siguientes preguntas:

1. Según tu opinión ¿cuál será la utilidad de estas actividades? ¿qué te interesa de ellas?
2. ¿Qué ves de positivo y de negativo en este trabajo?
3. ¿Te parece que esto es hacer matemática? ¿Por qué?
4. Sugerencias.

⁴⁶ Pirueta. Giro en que el cuerpo da una o más vueltas completas, sostenido en un pie en media punta o punta (Vaganova, 1945, pp. 255 y 256).

⁴⁷ Término genérico aplicado a todo movimiento en que se trenzan los pies en el aire, o en que las piernas se golpean entre sí igualmente en el aire (Vaganova, 1945, p. 239).

⁴⁸ Se trenzan los pies en el aire (Vaganova, 1945, p. 239).

⁴⁹ Las piernas se golpean entre sí en el aire (Vaganova, 1945, p. 239).

Las respuestas recibidas fueron:

1. “Utilizar la computadora para algo útil” (Tatiana) “La utilidad es para el cerebro, porque te hace pensar mucho y te ayuda en la creatividad” (María). “poder pasar a lo virtual las actividades que uno hace en la vida real y ponerlas en movimiento” (Sabrina). “creo que para mí me ayudo a ver de otra forma como se maneja mi cuerpo. Creo que si me dedico a la danza, me va servir ver y poder explicar de otra forma cómo funcionan los movimientos” (Romina). “La utilidad de esta actividad es saber utilizar el programa y poder trabajar en grupo” (Sol). “Me interesa el trabajo con el *fondue* y el *battement* porque me permite ver los mecanismo de cómo hacerlo también como no se debe hacer el paso” (Stefanía). “Arquitectura pura. Aprendemos un montón de cosas, profundizas la creatividad de creación con lo técnico y eso después te ayuda un montón en el caso de querer seguir dibujo, arquitectura, técnica, etc.” (Sofía). “El uso de las formas geométricas me parece muy bueno” (Micaela).
2. “lo positivo, profundizar en algo de la computadora que no sea lo que habitualmente usamos, como el facebook y lo negativo, traer la netbook, ¡pesa mucho!” (Tatiana) “Positivo, la creatividad, negativo, nada” (María). “De positivo podemos aprender a utilizar más la computadora, de negativo nada” (Sabrina). “De positivo, veo que me ayudo a pensar la forma de cómo se mueve el cuerpo y de negativo que a veces me estreso cuando no me salen las cosas” (Romina). “Veo de positivo que aprendí que era cada cosa, ejemplo, circunferencia, segmento, etc. diferenciarlas” (Stefanía). “De positivo, nos sirve de experiencia” (Azul). “Es bueno y puedes realizar movimientos, objetos, etc.” (Micaela). “Trabajar con pasos de danza y con las computadoras es

- positivo, de negativo no veo nada” (Jimena). “Conocer más sobre los movimientos del cuerpo, de negativo nada” (Victoria).
3. “Si, porque es Geometría” (Tatiana). “Si, porque tenemos que medir y pensar” (Sabrina). “Para mí no es matemática, porque no hay cuentas” (Romina). “En parte sí porque se usan elementos de geometría y relacionados con la danza” (Sol). “Creo que es Geometría porque hay segmentos, rectas, puntos, perpendiculares, etc.” (Belén). “Para mí no es Matemática, puede ser computación” (Gala). “Si creo que es matemática, porque yo lo relaciono con la Geometría que es Matemática” (Stefanía). “Si, porque tiene muchas cosas de Matemática, si no tuviera Matemática no podríamos armar las cosas” (Rocío). “Sí, porque tenes que medir, ser exacto, trabajas con Geometría, pensar, descubrir” (Sofía). “Si, a veces para realizar algunos movimientos tienen que tener las mismas medidas o proporcionales, y también se trabaja Geometría” (Jimena).
4. La mayoría no dio sugerencias. Las pocas fueron las siguientes: “Quiero ejercicios libres” (María). “no hacer pasos tan difíciles” (Gala). “poder recrear algo nosotras sin tener un tema que seguir” (Victoria). “quiero que dé para hacer un *rond de jambe*” (Stefanía). “Podemos crear el *pas de chat*⁵⁰” (Sofía).

⁵⁰ *Pas de chat*: lit. Paso de gato. Llamado así por su semejanza con el salto del gato. Se inicia siempre en quinta posición posterior, y según la elevación se llama grand o petit pas de chat (grande o pequeño paso de gato). El pie que da impulso para el salto debe bajar al suelo casi simultáneamente con el otro pie (Vaganova, 1945, p. 254).

10.3. ENTREVISTAS A DOCENTES

Durante la investigación se realizaron entrevistas a 3 docentes que observaron alguna clase.

Mariana Topatigh, profesora de Danza Clásica observó la clase del 28 de julio, cuando las alumnas intentaban recrear el *battement fondu*. Debajo narraré la entrevista que le realicé:

I: Investigadora, Mariela P: Profesora Mariana

I: ¿Conocías a alguna de las alumnas?

P: Algunas fueron o son alumnas mías de Danza Clásica y del Ballet Institucional.

I: ¿Qué observaste que me quieras contar sobre la actividad que realizaron?

P: Vi que tenían dificultades en la recreación de la pierna soporte de dicho paso, por momentos parecía una “pata loca”.

I: ¿Pero en algún momento viste que se recreara el *battement fondu*?

P: Si al principio pero luego ¡se iba como loca! Yo les sugerí que como la pierna soporte no quedaba apoyada en el piso, se podría realizar la recreación del paso *cecchetti*, que es un salto donde se flexionan las dos rodillas al mismo tiempo.

I: ¿Viste algo en la clase que vos desconocieras, algún concepto matemático, algo que dijeron las alumnas?

P: Yo no sabía que al flexionar la rodilla de la pierna soporte describe un arco de circunferencia. Yo pensaba que era una línea recta.

I: ¿Con qué actitud viste a las alumnas?

P: Las vi muy activas y entusiasmadas.

I: ¿Cuál es tu opinión sobre el trabajo?

P: Me pareció muy acertado articular la Matemática con la danza, puesto que creo que las alumnas pueden profundizar los conocimientos de las 2 disciplinas y comprenderlas mejor. Observé que las alumnas en este intercambio se responsabilizaron de ser conocedoras de la técnica de la Danza y aportaron muchas ideas a la clase. También que no sólo era el alumno el que aprendía, sino los docentes pudieron adquirir conocimientos de otras asignaturas.

I: ¿Algún aspecto negativo que hayas observado en la clase o el trabajo?

P: Para mí nada, es genial el trabajo que hicieron, ojala cuando yo era alumna me hubiesen planteado algo así. Mi secundario lo hice en esta escuela y nunca me gustó Matemática. Lo estudiaba para aprobar y listo.

I: Muchas gracias por tu opinión Mariana.

P: De nada, gracias por invitarme.

Silvia Alfaro, Profesora de Matemática observó la clase del 6 de agosto, donde las alumnas estaban construyendo el cuerpo completo de la bailarina. La entrevista fue la siguiente:

S: Profesora Silvia

I: ¿Conocías a alguna de las alumnas?

S: No, yo soy docente del turno tarde.

I: ¿Qué observaste que me quieras contar sobre la actividad que realizaron, crear el cuerpo completo?

S: Vi que las alumnas trabajaban en sus netbook tratando de simular el tronco humano, al que le debían adosar los movimientos que realizan con sus piernas y brazos, que por lo que veo esos movimientos los simulaban las clases anteriores.

I: ¿Viste algo en la clase que vos desconocieras, algún concepto matemático, algo que dijeron las alumnas?

S: Lo que desconocía es el software y la complejidad del mismo. Y obviamente la conexión que mostraban entre la Danza y la Matemática.

I: ¿Con qué actitud viste a las alumnas?

S: El clima se percibía cordial, de mucha participación. Por momentos las alumnas se sorprendían de cómo eran los movimientos de sus piernas y que nunca le habían prestado atención. Por otro lado, veían la simulación y detectaban errores y exponían sus opiniones para corregirlo. Además veían la posibilidad de agregarle elementos a la bailarina, como el rodete, la malla, etc.

I: ¿Cuál es tu opinión sobre el trabajo?

S: Fue bueno y me gustó que había chicas comprometidas con el trabajo y que sabían de lo que estaban hablando.

I: ¿Algún aspecto negativo que hayas observado en la clase o el trabajo?

S: No sé si es un aspecto negativo o una duda personal, pero tenía dudas si el tema que se daba estaba en la currícula de 4to.

I: En realidad la currícula tiene como eje central crear un modelo matemático de la realidad. No específicamente en la Danza ni en ese año.

S: Ah si es así, está bien.

I: Muchas gracias por tu opinión.

Mariel La Salvia, Profesora de Danza Clásica observó la clase del 6 de agosto, donde las alumnas estaban construyendo el cuerpo completo de la bailarina. La entrevista fue la siguiente:

M: Profesora Mariel.

I: ¿Conocías a alguna de las alumnas?

M: Si, algunas son alumnas actuales y otras de años anteriores. Me sorprendió que Tatiana, que no es muy buena en Danza, estuviera tan comprometida con este trabajo. Se ve que es buena en la teoría pero no en la práctica.

I: ¿Qué observaste que me quieras contar sobre la actividad que realizaron, crear el cuerpo completo?

M: Vi que la figura que crearon se puede mover, pero no desplazarse. Pueden experimentar, con este trabajo, los ejes, planos y trayectorias de diferentes pasos de Danza Clásica.

I: ¿Viste algo en la clase que vos desconocieras, algún concepto matemático, algo que dijeron las alumnas?

M: Desconocía el programa que utilizaron.

I: ¿Con qué actitud viste a las alumnas?

M: Las vi muy comprometidas con el trabajo y expresaban bien lo realizado.

I: ¿Cuál es tu opinión sobre el trabajo?

M: Me parece una herramienta interesante para el análisis del movimiento y su comprensión geométrica. Es una buena manera de trabajar la transversalidad entre la Danza y la Matemática. La Matemática siempre está asociada a la música, pero en la Danza también está muy presente. Comprender el recorrido, la dirección, cuando un

movimiento es segmentado o infinito, los motores del movimiento, la visualización geométrica del espacio, son todas posibilidades que se pueden trabajar a partir del programa que están utilizando. Me parece una excelente oportunidad para trabajar en conjunto la docente de Matemática con la de Danza, ya que ante la representación teórica debe quedar claro la manera correcta e incorrecta de la realización fáctica. Creo que es un trabajo que además abre la posibilidad de transversalidad con materias como física, como influye la gravedad en ese cuerpo. Anatomía, que sistemas musculares u óseos están involucrados, Biología, cómo acompaña la respiración o cómo el cerebro da las órdenes, etc. ¡Las posibilidades con este trabajo son infinitas!

I: ¿Algún aspecto negativo que hayas observado en la clase o el trabajo?

M: No, ninguno.