EMCI 2017

Facultad de Ciencias Exactas y Tecnologías

UNSE Universidad Nacional de Santiago del Estero

XX ENCUENTRO NACIONAL Y XII INTERNACIONAL

EDUCACIÓN MATEMÁTICA EN CARRERAS DE INGENIERÍA

LIBRO DE ACTAS

Facultad de Ciencias Exactas y Tecnologías
Universidad Nacional de Santiago de Estero
17, 18 y 19 de mayo de 2017 - Santiago del Estero, Argentina

1

XX ENCUENTRO NACIONAL Y XII INTERNACIONAL

EDUCACIÓN MATEMÁTICA EN CARRERAS DE INGENIERÍA

Libro de Actas

Facultad de Ciencias Exactas y Tecnologías
Universidad Nacional de Santiago de Estero
17, 18 y 19 de mayo de 2017 - Santiago del Estero, Argentina

Universidad Nacional de Santiago del Estero – Facultad de Ciencias Exactas y Tecnologías

EDUCACIÓN MATEMÁTICA EN CARRERAS DE INGENIERÍA
XX ENCUENTRO NACIONAL Y XII INTERNACIONAL

Libro de actas: XX Encuentro Nacional y XII Internacional de Educación Matemática en Carreras de Ingeniería / Patricia Alejandra Có ... [et al.] ; compilado por María Inés Morales ; coordinación general de Nori Esther Cheeín de Auat. - 1a ed . - Santiago del Estero: Lucrecia, 2017.
Libro digital, PDF

Archivo Digital: descarga y online
ISBN 978-987-720-151-2

1. Educación. 2. Matemática. I. Có, Patricia Alejandra II. Morales, María Inés, comp. III. Cheeín de Auat, Nori Esther, coord.
CDD 510.7

ISBN 978-987-720-151-2
9 789877 201512

PRESENTACIÓN

PRESENTACIÓN

El XX Encuentro Nacional y XII Internacional de Educación Matemática en Carreras de Ingeniería (EMCI), se llevó a cabo durante los días 17, 18 y 19 de mayo de 2017 y fue organizado por el Departamento Académico de Matemática de la Facultad de Ciencias Exactas y Tecnologías de la Universidad Nacional de Santiago del Estero.

El evento se propuso generar un espacio que reúna a docentes de Matemática en Carreras de Ingeniería, para un diálogo reflexivo, un lugar de convergencia y concertación de experiencias, vínculos y nuevos acuerdos, de comunicación de resultados de investigación, de análisis de proyectos colaborativos y de extensión en el área.

A partir de los propósitos mencionados, la participación giró en torno de los siguientes Ejes Temáticos:

• Aplicaciones de la Matemática
• Investigación Educativa
• Experiencias de Cátedra
• Articulación y Extensión

Durante el encuentro se desarrollaron dos Conferencias:

- **Sistema Nacional de Reconocimiento Académico de la Educación Superior**
  A cargo de la Sra. Directora Ejecutiva del Programa de Calidad Universitaria, Dra. Mónica Marquina.
- **Competencias de Egreso y el Perfil del Ingeniero Iberoamericano**
  A cargo del Sr. Decano de la Facultad de Ciencias Exactas y Tecnologías de la Universidad Nacional de Santi ago del Estero, Ing. Héctor Rubén Paz.

Se aceptaron 11 Talleres:

- **Herramientas de Google Drive para el diseño de evaluaciones**
  Adriana Favieri, Roxana Scorzo, Betina Williner
- **Variedades lineales en R^2**
  Liliana N. Caputo, Itatí S. Sosa, Paula D. Bordón
- **Análisis de Textos para Seleccionar y Organizar Contenidos de Enseñanza**
  Gustavo Enrique Menocal
- **Cinemática en el aula de matemática**
  María de las Mercedes Trípoli, Eugenio Devece, Patricia Torroba, Luisina Aquilano
- **Aplicaciones de GeoGebra en 2D y 3D para la Optimización de Recursos en Ingeniería. Experiencia Didáctica en un Entorno Virtual**
  Zulma Elizabeth Zamudio, Segundo B. Marcos Ernesto Paredes, Gustavo Daniel Medina, Juan Carlos Barreto
- **Cómo aportar a la formación de la competencia de resolución de problemas desde la Evaluación: Una reflexión desde la práctica docente**
  Carolina Carrere, Alberto Miyara, Emiliano Ravera, Leandro Escher, Iván Lapyckyj, Gustavo Pita De Dios, Diana Waigandt, Marisol Perassi
- **Tensores y Aplicaciones a La Ingeniería**
  Pedro M. A. Santucho, Estela E. Reyna
- **Pescando Números Irracionales con Polinomios Enteros. Una Propuesta de Articulación entre La Aritmética y El Álgebra**
  Elsa Fernández, Juan Pablo Simonetti
- **Propuesta de enseñanza de las Cónicas con GeoGebra**
  Ana Cecilia Larrán, Lilian Nadia Plaza, Eugenia Elizabeth Gallardo
- **Aplicación de indicadores para el desarrollo del pensamiento estadístico en alumnos de Ingeniería**
  Graciela H. Carnevali, Noemí M. Ferreri
- **Aprovechando los cursos de Matemática para enseñar a razonar**
  María V. Artigue, Patricia M. Cerizola, José J. Flores, Eduardo M. Lacues

El Libro de Actas del XX Encuentro Nacional y XII Internacional de Educación Matemática en Carreras de Ingeniería contiene 106 trabajos, los cuales se muestran en cuatro capítulos respetando los Ejes Temáticos abordados durante el evento. Esperamos que esta publicación electrónica permita una gran difusión de los trabajos contenidos en ella, fomentando de este modo el diálogo de docentes e investigadores interesados en la temática del encuentro.

Santiago del Estero, mayo de 2017

Auspiciaron el Encuentro

Municipalidad de la ciudad
de Santiago del Estero

Declararon al Encuentro de Interés Académico/Educativo

Poder Legislativo
Santiago del Estero

La Cámara de Diputados de la Provincia de Santiago del Estero Declaró de Interés Provincial, Legislativo y Educativo; mediante Declaración N° 758.

AUTORIDADES

COMISIÓN PERMANENTE

María Inés Lecich
Marys Margarita Arlettaz
Nori Cheeín de Auat
María de las Mercedes Suárez
Irma Beatriz Ruffiner
Ana María Narváez
María Beatriz Bouciguez
Mónica Graciela Scardigli
Gloria Prieto
Silvia Graciela Seluy
Marta Graciela Caligaris

COMISIÓN EVALUADORA

Ana Elena Gruszycki
Pedro Daniel Leguiza
Nori Cheeín de Auat
María de las Mercedes Suárez
Irma Beatriz Ruffiner
Ana María Narváez
María Beatriz Bouciguez
Mónica Scardigli
Gloria Prieto
Silvia Graciela Seluy
Marta Graciela Caligaris
Mario José Mantulak
Jorge Omar Morel
María del Carmen Ibarra

MIEMBROS HONORARIOS

Veremundo Fernández
Carlos Enrique Wüst
Roberto H. Fanjul
Teresa Haydée Codagnone

COMISIÓN ORGANIZADORA

Miriam Alagastino
Cristina Basualdo Soria
Lilia Susana Cañete
Nori Cheeín de Auat
Ricardo Cordero
Diego Coria
Lidia De Pablo
Segundo Marcelo Díaz
Marcela Domski
Norma Beatriz Fernández
Ariel Gerez
Pedro González Ruíz
Lucía B. Hilal
Viviana Ledda
Alejandra Lima
Gustavo López
Marcelo Lugones
María Inés Morales
Yris Bettiana Rafael
Miriam Ríos
Grabiela Robles
Ángel Rossi
Pablo Saracho
María Mercedes Simonetti de Velázquez
Elvio Suarez
Andrea Torres
Walter Torres
Mario R. Varone
Ximena Villarreal
Julio E. Zurita
Pablo Zurita Bianchini
María Susana Palliotto

ÍNDICE

ÍNDICE

CAPÍTULO 1: Aplicaciones de la Matemática

CAPÍTULO 2: Investigación Educativa

CAPÍTULO 3: Experiencias de Cátedra

CAPÍTULO 4: Articulación y Extensión

Capítulo 1

Aplicaciones de la Matemática

Hacia el Uso de Tópicos de las Ciencias Básicas en el Marco de un Proceso de Diseño Instruccional. Una Aplicación en el Campo de la Ingeniería

Alejandro Hossian, Lilian Cejas
Grupo de Investigación en Ciencias Básicas aplicadas a la Ingeniería – Facultad Regional Neuquén – Universidad Tecnológica Nacional – Plaza Huincul – Provincia de Neuquén – Argentina.
alejandrohossian@yahoo.com.ar, lilicejas@yahoo.com

Resumen. La presente propuesta metodológica se enmarca dentro de un proyecto de investigación con asentamiento en el departamento de Ciencias Básicas de la Facultad Regional Neuquén de la Universidad Tecnológica Nacional. La metodología propuesta incluye cuatro fases que se desarrollan en forma gradual para que el estudiante esté en condiciones de desarrollar un análisis conceptual del caso de estudio. En este sentido, se analiza un caso de aplicación en el campo de la Ingeniería con una marcada inclinación a la exploración de las ecuaciones que conforman el modelo matemático del caso de aplicación, en aras de la consecución de un diseño robusto en un nivel que sea alcanzable por un estudiante medio de la carrera de Ingeniería. Los autores se basan en las teorías prescriptivas del diseño instruccional para su investigación, dado que las mismas están orientadas hacia la práctica y estimulan el análisis crítico y reflexivo de situaciones problemáticas ingenieriles.

Palabras Clave: Ciencias básicas, Proceso de instrucción, Modelo matemático, Teorías prescriptivas, Desarrollo cognitivo.

1 Introducción

El principal soporte del presente trabajo de investigación lo constituye la tesis de maestría en el campo de la Ingeniería de Software desarrollada y defendida en la Universidad Politécnica de Madrid: *"Sistema de Asistencia para la Selección de Estrategias Instruccionales"*, que consistió en la construcción de un sistema experto que recomienda estrategias y actividades de enseñanza en función de variables educativas tales como: características del estudiante, tipo de contenido a enseñar, objetivos y ambiente de aprendizaje entre otras [1].

Se asume como hipótesis de partida de este trabajo que el estudiante medio de la carrera de ingeniería atraviesa por una serie de etapas hasta adquirir el grado de madurez suficiente para elaborar y resolver un modelo simplificado de la realidad asociada con un determinado problema que se le presenta. En este sentido, se analiza un caso de estudio en el campo de la Ingeniería con una fuerte impronta de tópicos de las Ciencias Básicas, entre los cuales se destacan contenidos curriculares pertenecientes a asignaturas tales como: Análisis Matemático I, Análisis Matemático II, Álgebra y Geometría Analítica y Física I; entre otras.

Esta interesante experiencia intercátedra, en la cual colaboran a modo de soporte los equipos de las cátedras de las materias mencionadas a los efectos de que los estudiantes logren un análisis robusto y satisfactorio del caso presentado, tiene lugar en un escenario de cooperación entre las asignaturas que intervienen en el proceso de instrucción se ilustra en la Fig. 1:

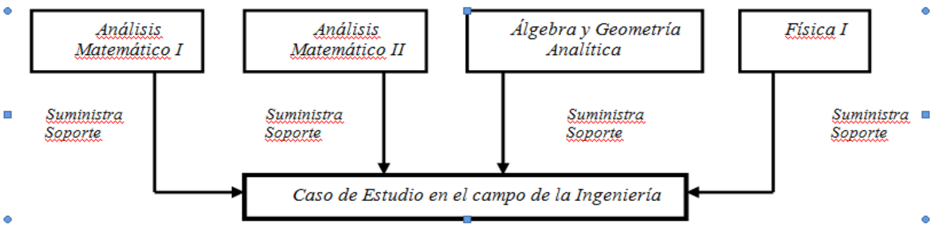


Fig. 1. Escenario de cooperación entre las asignaturas del Ciclo Básico de las carreras de Ingeniería para dar soporte al análisis de caso en el campo de la Ingeniería.

La idea central de esta experiencia, se basa en proporcionar al estudiante las herramientas necesarias que le permitan alcanzar el grado de madurez suficiente para abordar la tarea de construcción y resolución de modelos asociados a un problema real.

2 Marco Teórico

En esta sección se exponen los fundamentos de los conceptos de *"instrucción"* y de las *"teorías de la instrucción"*, los cuales constituyen la base teórica de este proceso de instrucción.

2.1 Concepto de Instrucción

La instrucción puede ser vista como la creación intencional de condiciones en el ambiente de aprendizaje con el objeto de facilitar la obtención de ciertos objetivos educacionales [2, 3].

Desde un punto de vista didáctico, la instrucción consiste en un conjunto de actividades de aprendizaje que se vinculan con todo lo que se espera que realicen los estudiantes con la finalidad de aprender, practicar, aplicar y evaluar entre otras cosas [4]. Estas actividades se articulan en determinadas estrategias de instrucción [5], las cuales ofrecen una guía explícita acerca de la forma más adecuada de implementar estas actividades.

2.2 Teorías de Instrucción

Los fundamentos teóricos que sustentan lo expuesto en la sección anterior se pueden analizar desde una perspectiva *"descriptiva"* o *"prescriptiva"* [6]:

- Perspectiva Descriptiva: se consideran a estas teorías como un conjunto de descripciones concernientes a qué resultados se observan como consecuencia de la aplicación de un proceso de instrucción dado y bajo ciertas condiciones del entorno de aprendizaje. Es decir, ayudan a describir los efectos que se producen cuando tiene lugar una determinada clase de sucesos causales.
- Perspectiva Prescriptiva: estas teorías pueden ser vistas como un conjunto de prescripciones tendientes a identificar cuál será el proceso de instrucción óptimo para obtener los resultados deseados bajo determinadas condiciones del ambiente educativo. A estas teorías se las llama "Teorías del Diseño Instruccional" o "Teorías de Diseño Educativo" [7, 8] y están orientadas hacia la práctica o hacia un objetivo. Por ejemplo, si se desea fomentar la retención a largo plazo de algún tipo de información nueva (un objetivo educativo), se sugiere ayudar al estudiante a que relacione esa información con otro tipo de conocimientos asociados que haya recibido con anterioridad (un método educativo).

3 Caso de estudio en el campo de la Ingeniería

Este caso de estudio tiene lugar en el marco de un proceso de instrucción que se compone de cuatro *"etapas"*, donde el estudiante comienza introduciendo aquellos conceptos que conforman la base del dominio correspondiente al problema que debe resolver, luego elabora las asociaciones existentes entre estos conceptos [9, 10], confecciona el modelo matemático que mejor representa la realidad del caso y resuelve el modelo haciendo uso de una batería de tópicos de las Ciencias Básicas que dispone en esta instancia del proceso de instrucción.

A continuación, se detallan cada una de las cuatro fases del proceso de instrucción propuesto.

Etapa I: *Incorporación de los conceptos base del domino del problema a la estructura cognitiva del estudiante.*

En esta etapa el estudiante incorpora los conceptos más relevantes en relación con el dominio que se le presenta. Los procesos cognitivos que se presentan con mayor frecuencia en esta etapa son la adquisición de conocimientos y la comprensión, y las estrategias de enseñanza más apropiadas son:

1) Formulación de preguntas con una fluida retroalimentación acerca de las respuestas que proporciona el estudiante.

2) Estrategias que promueven la asociación de los conocimientos previos que posee el estudiante con los conceptos que están presentes en el problema.

A continuación se presenta un caso de estudio real en el campo de la Ingeniería en el cual se analiza el problema del análisis y diseño de una montaña rusa en ausencia de fricción. Se considera una situación a nivel de proyecto preliminar, sin datos numéricos (lo que permite realizar un análisis más profundo de la situación), donde se asume como condición de diseño que la fuerza normal ejercida sobre el carro no exceda de un valor admisible estipulado en las especificaciones del proyecto si la curva representativa de la montaña se corresponde con una función de segundo grado. En base a esta condición se necesita obtener dicha función.

En Fig. 2 se representa la situación real en estudio de acuerdo a la siguiente configuración:

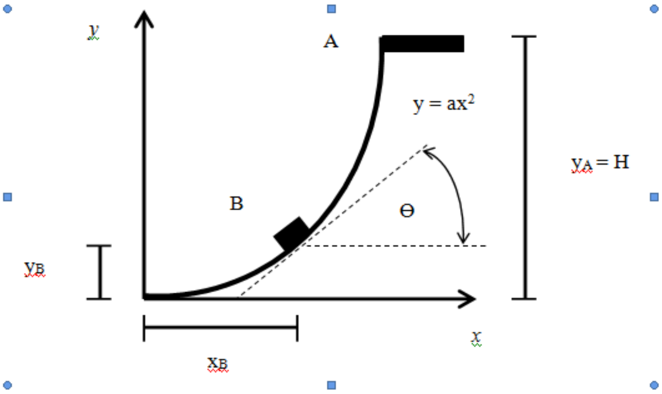


Fig. 2. Esquema de situación real del caso de estudio.

Los conceptos básicos que se presentan en la estructura cognitiva del estudiante en esta instancia son numerosos y corresponden a las asignaturas mencionadas; entre los más relevantes se destacan los siguientes: fuerza, masa, aceleración, relaciones trigonométricas, descomposición de fuerzas y leyes de la dinámica [11]. El estudiante identifica estos conceptos y pasa al desarrollo de la siguiente etapa del proceso.

Etapa II: *Construcción de un modelo conceptual del problema en la estructura cognitiva del estudiante.*

En esta etapa el estudiante asocia los conceptos reconocidos en la etapa anterior y añade otros que le pueden ser de utilidad. Los procesos cognitivos vinculados a esta etapa consisten en la aplicación de leyes y teoremas. Las estrategias que mejor se ajustan son:

1) Articulación de los contenidos.
2) Procesamiento de la información teórica.
3) Articulación las diferentes ideas que surgen del proceso de análisis del problema.

Para hacer operativas estas estrategias, se realizan experiencias en laboratorio y se usan transparencias para un desarrollo más ágil del proceso de instrucción. Asimismo, el estudiante incorpora al análisis del problema conceptos como el de aceleración centrípeta, balance de energía y el concepto de radio de curvatura que le permitirá acometer la dificultad de tratarse de una curva representativa de una parábola. Estos conceptos se asocian con los identificados en la etapa I por medio del planteo del *"diagrama de cuerpo en libertad"* realizado para un punto B genérico de la trayectoria del carrito, tal como se puede observar en Fig. 3.

Otro detalle conceptual que comienza a aflorar en la mente del estudiante como paso preliminar a la próxima etapa de confección del modelo matemático, es la dependencia del radio de curvatura con las derivadas primera y segunda de la curva representativa de la función de segundo grado propuesta en las consideraciones de diseño ($y'(x)$ e $y''(x)$).

Por tal razón, cobra especial relevancia el hecho de que el ángulo Θ entre P y N mostrado en el diagrama de Fig. 3, es el mismo que el ángulo que forma la recta tangente a la curva en el mismo punto B. Este factor resultará preponderante en la próxima etapa cuando el estudiante deba sintetizar la ecuación dinámica planteada en el eje normal al plano, en la cual el radio de curvatura se erige en uno de los protagonistas centrales del modelo.

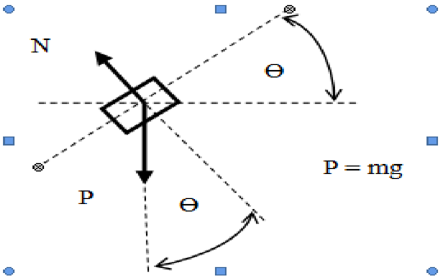


Fig. 3. Diagrama de *Cuerpo en Libertad* en un punto B genérico de la curva donde P es el peso del cuerpo, N es la fuerza normal que el plano ejerce sobre el cuerpo y Θ es el ángulo entre P y N.

Etapa III: *Construcción del modelo matemático representativo del problema.*

En esta etapa el estudiante diseña un modelo matemático ajustado a la situación real del problema que se plantea. Los procesos cognitivos que se implementan en esta etapa consisten en sintetizar e integrar los conceptos que se identificaron en las etapas anteriores. Las estrategias que se aplican son:
1) Estimular en el estudiante la tarea de reflexión.
2) Estimular en el estudiante el proceso de inferencia.
3) Estimular en el estudiante la tarea de asociación de conceptos.

Para realizar estas estrategias, se diseñan actividades tales como experiencias más avanzadas en laboratorio y la simulación de mecanismos en gabinetes de informática con la utilización del software apropiado. El estudiante exige su capacidad de abstracción por medio de un proceso mental para sintetizar e integrar todos los conceptos identificados en las etapas I y II aplicando dos leyes claves para la obtención modelo matemático de la situación real:

- Leyes Newton de la Dinámica.
- Ley de Conservación de la Energía.

Con la batería de conceptos de las ciencias básicas a disposición de uso y las dos leyes mencionadas, se está en condiciones de pasar a la confección de las ecuaciones que conforman el modelo matemático en cuestión. Se plantea la conservación de la energía mecánica (ausencia de fuerzas no conservativas como la de fricción) entre los puntos A y B, teniendo en cuenta que $y_A = H$ y que para una abcisa x_B del punto B, le corresponde una ordenada $y_B = ax_B^2$ (recordar que la función general propuesta es $y=ax^2$ con el sistema de referencia de Fig. 2).

Si se asume que el carro parte del reposo desde el punto A y llega al punto B con una cierta velocidad v_B, el planteo matemático de la conservación de la energía es el que muestra la ecuación (1):

$$E_{MA}=E_{MB}\Rightarrow mgH=mgy_B+{}^1\!/_2\, mv_B^2\Rightarrow mgH=mgax_B^2+{}^1\!/_2\, mv_B^2\Rightarrow v_B^2=2g(H-ax_B^2) \qquad \textbf{(1)}$$

Se plantea las leyes de la dinámica en base al diagrama de cuerpo libre de figura en la dirección de la fuerza normal, tomando positiva el sentido de dicha fuerza. A la fuerza normal en el punto B se la expresa como N_B, al ángulo como Θ_B y al radio de curvatura ρ_B.

El estudiante llega a la siguiente ecuación del modelo, dada por la ecuación (2):

$$N_B-mg\cos\theta_B=m\frac{v_B^2}{\rho_B}\Rightarrow N_B=mg\cos\theta_B+m\frac{v_B^2}{\rho_B} \qquad \textbf{(2)}$$

Tal como se explicitó en el comentario final de la etapa anterior, el estudiante asocia el concepto de radio de curvatura con las expresiones de las derivadas primera y segunda de la curva propuesta, cuya expresión general está dada por la ecuación (3):

$$\rho=\frac{\left(\sqrt{1+y'^2}\right)^3}{y''} \qquad \textbf{(3)}$$

En el punto B se tiene que: $y_B = ax_B{}^2$, $y_B'(x_B) = 2ax_B$ e $y_B''(x_B) = 2a$. Reemplazando estas expresiones en la ecuación 3, se obtiene la expresión (4):

$$\rho_B=\frac{\left(\sqrt{1+4a^2x_B^2}\right)^3}{2a} \qquad \textbf{(4)}$$

Habida cuenta de que la condición de diseño especificada en el proyecto está estrictamente vinculada con la admisibilidad de la fuerza normal ejercida sobre el carro, el estudiante se percata de que la ecuación 2 es clave en el análisis del problema y que es importante intentar homogeneizar la expresión.

De esta forma, considerando que $tg\ (\Theta_B) = y_B'(x_B) = 2ax_B$; y por consiguiente $tg^2\ (\Theta_B) = y_B'^2(x_B) = 4a^2\ x_B{}^2$; que reemplazadas en la siguiente relación trigonométrica entre coseno y tangente especializada en el punto x_B, se tiene la expresión (5):

$$\cos\theta=\frac{1}{\sqrt{1+tg^2(\theta)}}\Rightarrow para\,el\ punto\,x_B\ \cos\theta_B=\frac{1}{\sqrt{1+tg^2(\theta_B)}}\Rightarrow\cos\theta_B=\frac{1}{\sqrt{1+4a^2x_B^2}} \qquad \textbf{(5)}$$

En esta instancia del proceso de instrucción, el estudiante identifica las ecuaciones que conforman el modelo matemático del caso de estudio:

$$v_B^2=2g(H-ax_B^2) \qquad \textbf{(1)}$$

$$N_B=mg\cos\theta_B+m\frac{v_B^2}{\rho_B} \qquad \textbf{(2)}$$

$$\rho_B=\frac{\left(\sqrt{1+4a^2x_B^2}\right)^3}{2a} \qquad \textbf{(4)}$$

$$\cos\theta_B=\frac{1}{\sqrt{1+4a^2x_B^2}} \qquad \textbf{(5)}$$

Las ecuaciones (1), (2), (4) y (5) conforman el modelo matemático de la realidad presentada para el caso planteado, a la vez que constituyen el núcleo central del proceso de instrucción.

También es importante señalar que el estudiante debe concebir dentro de su estructura cognitiva la naturaleza de cada una de las expresiones; en tal sentido, siendo que las ecuaciones (1) y (2) tienen su raíz en el campo de la mecánica (dinámica y conservación de la energía) y surgen de manera natural del análisis del caso, las ecuaciones (3) y (4) constituyen herramientas matemáticas sustanciales para resolver el modelo (cálculo diferencial y trigonometría). Por tal razón, las ecuaciones (1) y (2) el estudiante las identifica con el núcleo conceptual del modelo, mientras que las (3) y (4) actúan a modo de soporte de este núcleo.

Etapa IV: *Resolución del modelo matemático y análisis crítico y discusión de los resultados obtenidos*
En esta etapa el estudiante resuelve el modelo matemático planteado en la etapa III. Los procesos cognitivos asociados a esta fase consisten en:

- Resolución del modelo matemático en función de los parámetros que establece el problema y con las herramientas matemáticas disponibles.
- Análisis crítico y discusión de los resultados obtenidos a partir del desarrollo del proceso 1.

En esta etapa del proceso de instrucción el estudiante desarrolla modelos mentales de la situación que analiza con una mayor flexibilidad cognitiva respecto a las etapas anteriores. Las estrategias que se adoptan consisten en técnicas de comunicación que activen formas de pensamiento cooperativo y el trabajo grupal; y se implementan actividades tales como el uso de software de matemática para agilizar los cálculos y el manejo de las funciones que se ajusten al caso, para que el estudiante se focalice en el análisis de los resultados. Continuando con el caso de estudio, el estudiante comienza sintetizando el primer proceso cognitivo asociado a esta etapa: *Resolución del modelo matemático*.

Tal como se mencionó en el desarrollo de la etapa anterior la condición de diseño especificada en el proyecto está estrictamente vinculada con la admisibilidad de la fuerza normal ejercida sobre el carro; por tal razón, a partir del manejo de las ecuaciones del modelo es importante intentar obtener una expresión de N_B en función de alguna de las variables que le resulte más familiar y que sea fácilmente medible en el entorno real, como por ejemplo x_B.

Es importante que el estudiante comprenda la necesidad de establecer esta relación funcional (N_B (x_B)) más que en resolver numéricamente el modelo matemático. En otros términos, y en el intento de progresar hacia estadios cognitivos más avanzados y de mayor poder de abstracción para los estudiantes, la misión didáctica consiste en que estos avancen hacia la conformación de una estructura funcional que vincule estas dos variables. También es importante destacar, que la robustez del modelo obtenido le permite al estudiante seleccionar otra variable u otra forma de expresar a N_B, o manejar distintas alternativas en función de otros criterios de diseño. Para abordar la resolución del modelo de ecuaciones en términos de hallar esta relación funcional, se sustituyen las expresiones (1), (4) y (5) en (2) y se obtiene la siguiente expresión analítica (6) para N_B:

$$N_B(x_B) = \frac{mg}{\sqrt{\left(1+4a^2x_B^2\right)}} + \frac{4amg\left(H-ax_B^2\right)}{\sqrt{\left(1+4a^2x_B^2\right)^3}} \qquad \textbf{(6)}$$

Cabe señalar, que la ecuación (6) no conforma el modelo matemático obtenido en la etapa III, sino que es una consecuencia del trabajo del estudiante con las ecuaciones del mismo. Con la idea de adentrarse en la fase de diseño el estudiante explora la expresión 6 e intenta obtener el valor de x_B para el cual N_B alcanza su máximo valor; de esta manera, podrá contrastar este valor con el valor admisible establecido en las especificaciones del proyecto (N_{ADM}).

Si bien el estudiante puede hacer uso del cálculo diferencial para obtener el valor máximo de la fuerza normal, de la inspección de la expresión, como así también de aplicar una lógica estructural, se observa que N alcanza su valor máximo cuando $x_B = 0$. Y se arriba a la siguiente expresión (7):

$$N_{MAX} = N(x_B = 0) = (mg + 4amgH) \qquad \textbf{(7)}$$

Una vez alcanzada la expresión (6) para N_{MAX}, el estudiante sintetiza el segundo proceso cognitivo asociado a esta etapa: *Análisis crítico y discusión de los resultados obtenidos*.

En este estadio del proceso de instrucción, el estudiante está en condiciones de llevar a cabo el siguiente análisis a los efectos de satisfacer los requerimientos de diseño:

- De acuerdo a las especificaciones de diseño se debe cumplir que $N_{MAX} \leq N_{ADM}$; condición esta que será de gran utilidad para la obtención de la función representativa de la curva de la montaña rusa ($y = ax^2$), lo cual se circunscribe a la determinación del parámetro *"a"* a partir de la condición de diseño.

- En línea con lo expuesto en el punto anterior el planteo de la condición de diseño en base a la expresión (7), lo lleva a cabo el estudiante de la siguiente manera obteniendo la expresión (8):

$$N_{MAX} \leq N_{ADM} \Rightarrow = (mg + 4amgH) \leq N_{ADM} \qquad \textbf{(8)}$$

- De esta expresión se obtiene el parámetro *"a"* haciendo llegar al esfuerzo normal máximo hasta el valor admisible ($N_{MAX} = N_{ADM}$); es decir, planteando la igualdad en 7 el estudiante procede a despejar el valor de *"a"*. Es de hacer notar al estudiante en este punto del desarrollo, que a nivel de proyecto de detalle el valor de N_{ADM} ya está afectado por un coeficiente de seguridad que está en función del material a utilizar y del criterio del proyectista; en otros términos, se tiene que $N_{ADM} = N_{ROT}/\gamma$ (donde N_{ROT} es el valor al cual rompe el material y γ es el coeficiente seguridad adoptado. Para el presente caso se propone al estudiante que trabaje con N_{ADM}, no sin dejar de mencionar su relación con el valor de rotura y el coeficiente de seguridad. Se obtiene la siguiente expresión para *"a"* la expresión (9):

$$a = \frac{N_{ADM} - mg}{4mgH} \qquad \textbf{(9)}$$

- Esta expresión es el colofón de este análisis; por lo que resulta de sumo interés analizarla en función de los parámetros de los cuales depende, y que a priori se asumen que se pueden establecer. En este sentido, el estudiante realiza las siguientes inferencias:

i. Una primera deducción de interés es que dado que la parábola abre hacia arriba, es decir que el parámetro *"a"* debe ser positivo ($a > 0$). Esto se traduce en que debe cumplirse $N_{ADM} > mg$ (curva S genérica en las Fig. 4 y Fig. 5).

ii. Para una masa m dada y una altura H establecida, se ve que a mayor N_{ADM} (lo que se puede interpretar como un material de mejor calidad o más resistente a la rotura), crece el parámetro *"a"*. Esto se interpreta como que la curva puede ser más cerrada (curva S' en la Fig. 4), con lo que se ahorraría espacio en horizontal en la construcción de la montaña, para el mismo H. Consecuentemente, a menor N_{ADM} disminuye *"a"* y la curva sería más abierta (curva S'' en la Fig. 4) para un H dado.

iii. Para una masa m dada y una N_{ADM} establecida, se ve que a mayor H (mayor altura de la montaña), disminuye el parámetro *"a"*. Esto se interpreta como que la curva puede ser más abierta (curva S_1 en la Fig. 5), para el mismo N_{ADM}. En otras palabras, este hecho puede ser interpretado como que se necesita una curva más suave para atenuar el efecto de una mayor H. Consecuentemente, a menor H crece *"a"* y la curva sería más cerrada (curva S_2 en la Fig. 5) para un N_{ADM} dado.

iv. A modo de cierre parcial del presente análisis, una consideración de importancia a tener en cuenta por el estudiante es la siguiente: una vez obtenido el valor de *"a"* en función de una determinada H, una masa dada y una cierta N_{ADM}, es posible sustituir este valor en la ecuación 5 y así monitorear los diferentes valores que, aunque sean menores que N_{MAX}, puede tomar la fuerza normal N para distintos puntos x_B. Este factor puede ser importante para el usuario, ya que pueden existir determinados puntos en los cuales sea de interés conocer N (lugares susceptibles de falla o por detalles de construcción).

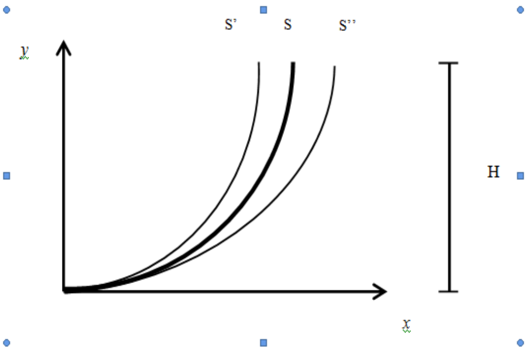


Fig. 4. Diagrama de curvas para distintos valores de N_{ADM} con una masa m y altura H establecidas.

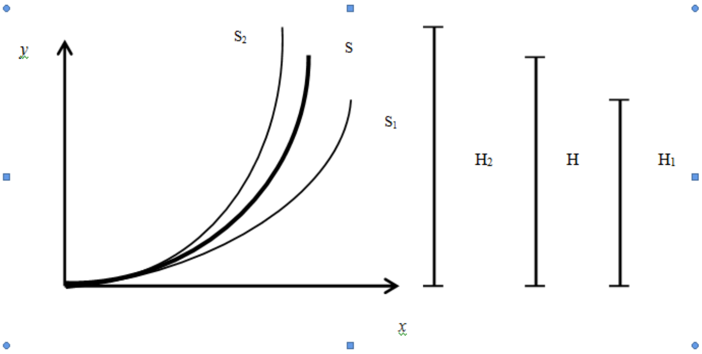


Fig. 5. Diagrama de curvas para distintos valores de H con una masa m y N_{ADM} establecidas.

4 Conclusiones y trabajos futuros

Teniendo en cuenta que el presente proyecto se encuentra en pleno desarrollo, tanto las conclusiones como los futuros lineamientos a considerar son de carácter parcial.

Respecto a las conclusiones:

- El desarrollo del proceso de instrucción en etapas, se adapta al estadio del desarrollo cognitivo que posee el estudiante.
- Se observa un ligero incremento de la maduración cognitiva de los estudiantes cuando logran comprender el significado de las expresiones analíticas obtenidas.
- Se observa un incremento en el nivel de motivación de los estudiantes cuando analizan situaciones que se corresponden con actividades vinculadas al diseño.
- Se observa que ciertos estudiantes intentan superarse para ubicarse en niveles cognitivos similares a otros que se encuentran en un nivel mayor.

Respecto a las actividades futuras:

- Potenciar el grado de interacción con asignaturas del ciclo básico, para lograr un proceso de instrucción más integral.
- Actualmente, está en desarrollo una V etapa cuyo objetivo consiste en la elaboración de una base de casos de análisis, los cuales no se almacenan como entidades aisladas, sino que se relacionan y se integran dando lugar a la conformación de ciertos *"patrones"* de análisis [12].
- Promover una mayor articulación con los ciclos superiores para realizar un seguimiento adecuado del proceso en dichos ciclos.
- Incorporar casos con espíritu crítico y analítico de manera gradual en el curso de ingreso/nivelación a la facultad de ingeniería.

Referencias

1. Hossian Alejandro. *Sistema de Asistencia para la Selección de Estrategias Instruccionales*. Tesis de Maestría no publicada. Tesis de Magíster en Ingeniería del Software. Instituto Tecnológico de Buenos Aires. Universidad Politécnica de Madrid. España. (2003).
2. Gagné R. M., Briggs L. J. & Wager W. W., *Principles of Instructional Design*, Ed. Wadsworth/Thomson Learning. Belmont, CA. USA., 1992.
3. Adler, M. The Paedeia proposal: *An Educationmanifiesto*., Ed. *Nueva York: Mc Millan*., 1982.
4. Merrill, M. D., *Instructional Transaction Theory: Instructional Design Based on Knowledge Objects*, Ed. Educational Technology, 36, 30-37., 1996.
5. Hossian Alejandro A., Cejas Lilian., *Una propuesta de diseño instruccional para su aplicación en carreras de ingeniería. Un caso de estudio en asignaturas del ciclo básico.* Jornada de enseñanza de la ingeniería. Facultad Regional Buenos Aires. Universidad Tecnológica Nacional. Buenos Aires. 2011.

6. Reigeluth, Charles. M. *Instructional design theories and models: a new paradigm of instructional theory*., Ed. Lawrence Erlbaum Associates., 1999.
7. Jonassen, D. H. Certainty., *Determinism and Predictability in Theories of Instructional Design: Lessons from Science*., Ed. Educational Technology., 1997.
8. Perkins, D. N. Smart schools: *Better thinking and learning for every child*., Ed. Nueva York: The Free Press., 1992.
9. Ausubel, D. P. Psicología Educativa., *Un punto de vista cognoscitivo*., 2° Edición., Ed. Trillas., México., 1983.
10. Schuel, T. J., *Cognitive Conceptions of Learning*., Ed. Review of Educational Research., Vol 56 (4) pp. 411-436., 1996
11. Bútikov, M., Bíkov, A. & Kondrátiev, A., *Física en ejemplos y problemas*., Ed. Mir., Moscú., 1991.
12. Alexander C., *A Timeless Way of Building*., Ed. Oxford University Press., 1999.

Volver al Índice

Aplicación de Métodos Numéricos Simplécticos a Sistemas Mecánicos Conservativos

José Alberto Sánchez[1], Ernesto Farías de la Torre[1], Osvaldo Natali[2]
Facultad de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales – Universidad Nacional de Córdoba
[1]Departamento de Física
[2]Departamento de Matemática
Avenida Vélez Sarsfield 1611 (CP 5000) Córdoba. Argentina.
joseasanchez53@yahoo.com.ar, fariasdelatorre@gmail.com, nataliosvaldo@hotmail.com

Resumen. En el presente trabajo mostramos la propiedad de simplecticidad –preservación de las áreas- de los sistemas Hamiltonianos y su gran importancia para resolver problemas de sistemas mecánicos conservativos, a través de métodos numéricos simplécticos que aseguran la conservación de la función Hamiltoniana –energía mecánica total- y de las áreas en el espacio de fases, permitiendo buenos resultados después de largos períodos de tiempo. Se toma como ejemplo de aplicación de éstas técnicas numéricas al péndulo simple no lineal –grandes oscilaciones-.

Palabras Clave. Ecuaciones de Hamilton, Sistemas Hamiltonianos, Métodos numéricos Simplécticos, Métodos numéricos geométricos, Péndulo simple

1 Introducción

Los algoritmos simplécticos, como parte de la integración numérica geométrica, constituyen un método importante en creciente desarrollo para resolver sistemas Hamiltonianos que cubren casi todos los procesos físicos reales con disipación de energía despreciable, tales como el movimiento de cuerpos celestes y satélites artificiales o la dinámica molecular.

Una propiedad fundamental de los sistemas Hamiltonianos es que su flujo en el espacio de fases preserva la estructura geométrica simpléctica. Sin embargo los métodos numéricos convencionales descuidan esta especial característica y conllevan un aumento ó disipación artificial de la energía mecánica total.

Una ventaja importante de los algoritmos simplécticos es que son adecuados para el seguimiento durante largos períodos de tiempo y para simulaciones cualitativas.

Tomamos como ejemplo el péndulo simple por su importancia como un modelo clásico en ciencia y en educación ya que muchos fenómenos no lineales pueden ser descriptos mediante ecuaciones diferenciales similares y además, porque conocemos su solución exacta expresada mediante funciones elípticas [1], lo que nos permite determinar el error de los experimentos numéricos ensayados.

1.1 Ecuaciones de Lagrange

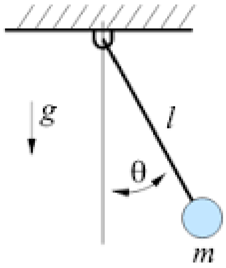
Un sistema mecánico de d grados de libertad se describe en cada instante de tiempo t mediante el vector $q = (q_1,\ldots,q_d)$ de coordenadas generalizadas (coordenadas cartesianas, ángulos, longitud de arco de una curva, etc.). El vector $\dot{q} = (\dot{q}1,\ldots,\dot{q}n)$ representa las velocidades generalizadas.

Para el caso de sistemas conservativos se define la función Lagrangiana $L = T - U$, donde $T = T(q, \dot{q})$ es la energía cinética del sistema mecánico y $U = U(q)$ es la energía potencial del mismo.
El movimiento del sistema se determina resolviendo las ecuaciones de Lagrange:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0 \qquad k = 1, \ldots, d \tag{1}$$

a partir de las correspondientes condiciones iniciales.

Ejemplo: Péndulo Simple
Tiene un grado de libertad. Tomamos a θ como coordenada generalizada y a $\dot{\theta}$ como velocidad generalizada.



$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 \quad \textbf{(2)}$$

$$U = -mglcos\theta \quad \textbf{(3)}$$

$$L = T - U = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 + mglcos\theta \quad \textbf{(4)}$$

La ecuación de Lagrange es $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$, que se expresa: $ml^2\ddot{\theta} + mglsen\theta = 0$, o equivalentemente

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}sen\theta = 0 \quad \textbf{(5)}$$

1.2 Ecuaciones de Hamilton

Hamilton, mediante la introducción de los momentos generalizados ó momentos canónicos conjugados $p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}(q, \dot{q})$ simplificó las ecuaciones de Lagrange y las transformó en ecuaciones con una notable simetría.

Definimos el hamiltoniano como función de p y q:

$$H(p, q) := p^T\dot{q} - L(q, \dot{q}) \quad \textbf{(6)}$$

teniendo en cuenta que $\dot{q} \leftrightarrow p$ es una biyección continuamente diferenciable para todo q dada por la transformada de Legendre.

Teorema 1. Las ecuaciones de Lagrange (1) son equivalentes a las ecuaciones de Hamilton:

$$\dot{p}_k = -\frac{\partial H}{\partial q_k}(p, q), \qquad \dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k}(p, q), \qquad k = 1, \dots, d \quad \textbf{(7)}$$

Prueba

$$\frac{\partial H}{\partial p} = \dot{q}^T + p^T\frac{\partial \dot{q}}{\partial p} - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\frac{\partial \dot{q}}{\partial p} = \dot{q}^T \quad \textbf{(8)}$$

$$\frac{\partial H}{\partial q} = p^T\frac{\partial \dot{q}}{\partial q} - \frac{\partial L}{\partial q} - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\frac{\partial \dot{q}}{\partial q} = -\frac{\partial L}{\partial q} \quad \textbf{(9)}$$

Luego, las ecuaciones de Lagrange (1) son equivalentes a las ecuaciones de Hamilton (7).

1.3 Caso de energía cinética cuadrática.

Si $T(q,\dot{q}) = \frac{1}{2}\dot{q}^T M(q)\dot{q}$, entonces $M(q)$ –matriz de masa- es una matriz simétrica definida positiva y $p = M(q)\dot{q}$. Reemplazando $\dot{q}$ por $M(q)^{-1}p$ en la definición (6) de $H(p,q)$ se obtiene:

$$H(p,q) = p^T M(q)^{-1}p - L(q, M(q)^{-1}p) \quad \textbf{(10)}$$

$$= p^T M(q)^{-1}p - \frac{1}{2}p^T M(q)^{-1}p + U(q) = \frac{1}{2}p^T M(q)^{-1}p + U(q) = T + U \quad \textbf{(11)}$$

De donde se obtiene que el hamiltoniano es la suma de la energía cinética y de la energía potencial del sistema mecánico; es decir que H es la energía mecánica total del sistema.

1.4 Integrales primeras

Definición 1. Una función no constante $I(y)$ es una integral primera del sistema de ecuaciones diferenciales $\dot{y} = f(y)$ si toda solución $y(t)$ del sistema satisface $I\big(y(t)\big) = \text{constante}$, lo que es equivalente a:

$$I'(y)f(y) = 0 \text{ para todo y} \quad \textbf{(12)}$$

En un sistema hamiltoniano, la función hamiltoniana $H(p,q)$ es una integral primera del sistema (3).

En efecto, tomando en cuenta que $H'(p,q) = (\partial H/\partial p\,, \partial H/\partial q)$ y las ecuaciones (3) $\dot{p} = -H_q$, $\dot{q} = H_p$ se obtiene:

$$\frac{\partial H}{\partial p}\left(-\frac{\partial H}{\partial q}\right)^T + \frac{\partial H}{\partial q}\left(\frac{\partial H}{\partial p}\right)^T = 0 \quad \textbf{(13)}$$

El hecho de que la función hamiltoniana H(p,q) sea una integral primera de las ecuaciones de Hamilton implica, por supuesto, la conservación de la energía mecánica total del sistema.

1.5 Ejemplo

En el caso del péndulo simple tenemos que $q_1 = \theta$ y $p_1 = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = ml^2\dot{\theta}$, por simplicidad designaremos a q_1 y p_1 como q y p respectivamente.

También supondremos que $m = l = g = 1$.

En consecuencia $H(p,q) = p^2 - \frac{1}{2}p^2 - \cos q = \frac{1}{2}p^2 - \cos q$

y las ecuaciones de Hamilton para este caso se escriben:

$$\dot{p} = -sen q, \qquad \dot{q} = p \quad \textbf{(14)}$$

$H = T + V = \frac{1}{2}p^2 - \cos q = \text{constante}$, es una integral primera del sistema (14).

2 Transformaciones Simplécticas

Consideremos paralelogramos bidimensionales en $\mathbb{R}^{2d}$. Supongamos que el paralelogramo está generado por dos vectores

$$\xi = \begin{pmatrix} \xi^p \\ \xi^q \end{pmatrix}, \quad \eta = \begin{pmatrix} \eta^p \\ \eta^q \end{pmatrix}$$

en el espacio (p, q) con $\left(\xi^p, \xi^q, \eta^p, \eta^q \in \mathbb{R}^d\right)$ como $P = \{t\xi + s\eta \mid 0 \leq t \leq 1,\ 0 \leq s \leq 1\}$.
En el caso d=1 consideremos el área orientada

$$\text{área orientada}(P) = det \begin{pmatrix} \xi^p & \eta^p \\ \xi^q & \eta^q \end{pmatrix} \tag{15}$$

Para el caso d > 1 se reemplaza esta área por la suma de las áreas orientadas de las proyecciones de P sobre los *planos coordenados* de P sobre los planos coordenados (p_i, q_i); es decir, por

$$\omega(\xi, \eta) := \sum_{i=1}^{d} det \begin{pmatrix} \xi_i^p & \eta_i^p \\ \xi_i^q & \eta_i^q \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{d} \left(\xi_i^p \eta_i^q - \xi_i^q \eta_i^p\right) \tag{16}$$

La ecuación (16) define una forma bilineal que actúa sobre vectores de $\mathbb{R}^{2d}$ de gran importancia en los sistemas hamiltonianos. En notación matricial, esta transformación tiene la forma:

$$\omega(\xi, \eta) = \xi^T \mathrm{J}\, \eta \qquad \text{con} \quad \mathrm{J} = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix} \tag{17}$$

Donde I es la matriz identidad de dimensión d.

Definición 2. Una transformación lineal $A: \mathbb{R}^{2d} \to \mathbb{R}^{2d}$ se denomina simpléctica si

$$A^T \mathrm{J} A = \mathrm{J} \tag{18}$$

o, equivalentemente, si $\omega(A\xi, A\eta) = \omega(\xi, \eta)$ para todo $\xi, \eta \in \mathbb{R}^{2d}$.

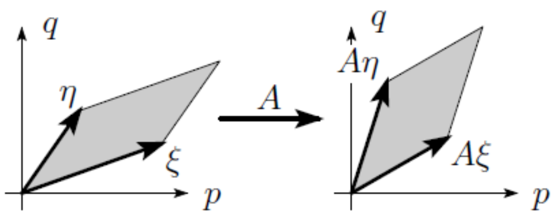


Fig. 1. Una gráfica que representa la Simplecticidad (preservación del área) de una transformación lineal.

En el caso $d = 1$, donde la expresión $\omega(\xi, \eta)$ representa el área del paralelogramo P, la simplecticidad de una transformación lineal A es por lo tanto la preservación del área (ver Fig. 1). En el caso general $(d > 1)$, la simplecticidad significa que la suma de las proyecciones de las áreas orientadas de P sobre (p_i, q_i) es la misma que para los paralelogramos transformados A(P).

Definición 2. (para transformaciones no lineales) Una transformación diferenciable $g: U \to \mathbb{R}^{2d}$ (donde U es un conjunto abierto) se llama simpléctica si la matriz jacobiana $g(p, q)$ es simpléctica para todo $(p, q) \in U$. Es decir, si

$$g'(p, q)^T\, \mathrm{J}\, g'(p, q) = \mathrm{J} \qquad \text{ó} \qquad \omega(g'(p, q)\xi, g'(p, q)\eta) = \omega(\xi, \eta) \qquad \forall\, (p, q) \in U \tag{19}$$

lo que significa que toda transformación simpléctica (incluidas las no lineales) preservan el área.

Utilizaremos la notación $y = (p, q)$ y escribiremos el sistema hamiltoniano en la forma

$$\dot{y} = J^{-1}\nabla H(y) \tag{20}$$

donde J es la matriz que vimos antes y $\nabla H(y) = H'(y)^T$

El flujo $\varphi: U \subset \mathbb{R}^{2d} \rightarrow \mathbb{R}^{2d}$ de un sistema hamiltoniano es una transformación que traslada cada solución en el tiempo t, es decir, $\varphi(p_0, q_0, t) = (p(t, p_0, q_0), q(t, p_0, q_0)$, donde $(p(t, p_0, q_0), q(t, p_0, q_0)$ es la solución del sistema con los valores iniciales $p(0) = p_0$, $q(0) = q_0$.

Utilizando la notación $y = (p, q)$, $y_0 = (p_0, q_0)$ podemos escribir $\varphi(y_0, t) = (p(t, p_0, q_0), q(t, p_0, q_0)$,

Teorema 2. (Poincaré 1899 – [5])
Para cada tiempo t fijo, el flujo $\varphi(y_0, t)$ de un sistema hamiltoniano con una función dos veces continuamente diferenciable $H(y)$ define una transformación simpléctica, es decir

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y_0}(y_0, t)\right)^T J\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y_0}(y_0, t)\right) = J \tag{21}$$

Prueba: Ver (Hairer y otros 2006, págs. 184-185 [2]) o (Arnold 1989, cap. 8 [3])

Lo que significa que los sistemas hamiltonianos generan flujos simplécticos sobre el espacio de fases.

La ecuación (21) provee una definición intrínseca para sistemas hamiltonianos en el sentido de que cualquier función continuamente diferenciable $f: U \subset \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ puede ser localmente escrita como

$$f = J^{-1}\frac{\partial H}{\partial y}(y) \tag{22}$$

para una adecuada función hamiltoniana $H(y)$ si el flujo generado por $\dot{y} = f(y)$ es simpléctico para todo $y \in U$ y t suficientemente pequeño.
Formalizaremos lo expresado anteriormente mediante el siguiente teorema (Hairer y otros 2006, págs. 185-186 [2]):
Teorema 3. (Propiedad cárácterística de los sistemas hamiltonianos) Sea $f: U \subset \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ continuamente diferenciable. Entonces, $\dot{y} = f(y)$ es localmente Hamiltoniana si y sólo si su flujo $\varphi(y_0, t)$ es simpléctico para todo $y \in U$ y para todo tiempo t suficientemente pequeño.

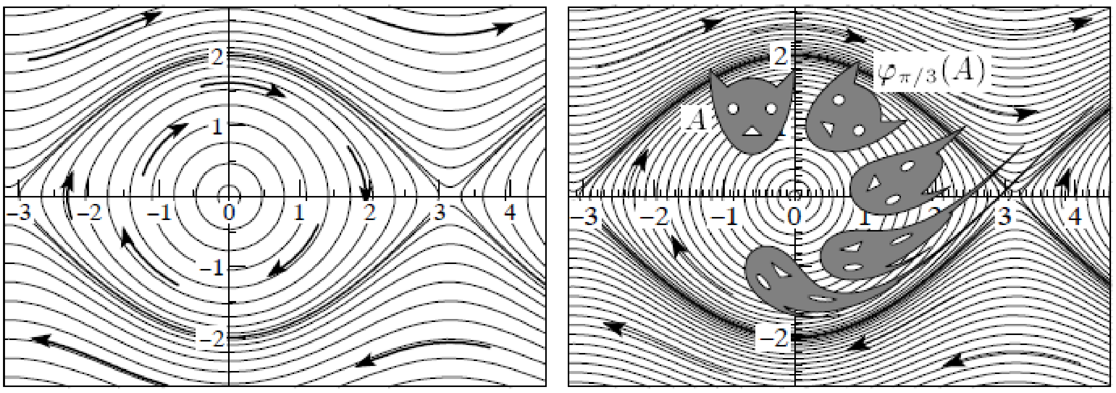


Fig. 2. Una gráfica que representa las Curvas de nivel $H(p, q) = \text{constante}$ para el problema del péndulo (figura izquierda) y preservación del área de su flujo exacto (figura derecha).

Aclaración: Esta figura corresponde a De Hairer y otros (2006)

3 Integradores numéricos simplécticos

Los métodos numéricos más simples para sistemas de ecuaciones diferenciales $\dot{y} = f(y)$ son el método de Euler *explícito*:

$$y_{n+1} = y_n + hf(y_n) \tag{23}$$

y el *método de de Euler implícito*:

$$y_{n+1} = y_n + hf(y_{n+1}) \tag{24}$$

Mostraremos la simplecticidad de algunos métodos numéricos cuando son aplicados a sistemas Hamiltonianos en las variables $y = (p, q)$.

$$\begin{aligned} \dot{p} &= -H_q(p,q) \\ \dot{q} &= H_p(p,q) \end{aligned} \tag{25}$$

ó equivalentemente

$$\dot{y} = J^{-1}\nabla H(y) \tag{26}$$

donde H_p y H_q denotan los vectores columna de derivadas parciales de la función hamiltoniana $H(p,q)$ con respecto a p y q respectivamente.
Definición 3. Un método numérico de un paso se llama simpléctico si la transformación de un paso

$$y_1 = \emptyset_h(y_0) \tag{27}$$

es simpléctica cuando el método se aplica a un sistema Hamiltoniano suave.

Teorema 4. (de Vogelaere 1956). Los denominados *métodos simplécticos de Euler*

$$\begin{aligned} p_{n+1} &= p_n - hH_q(p_{n+1}, q_n) \\ q_{n+1} &= q_n + hH_p(p_{n+1}, q_n) \end{aligned} \tag{28}$$

ó

$$\begin{aligned} p_{n+1} &= p_n - hH_q(p_n, q_{n+1}) \\ q_{n+1} &= q_n + hH_p(p_n, q_{n+1}) \end{aligned} \tag{29}$$

son *métodos simplécticos de orden* 1.
Prueba
Consideraremos sólo el método de la izquierda. Escribimos esas ecuaciones en la forma:

$$\begin{aligned} p_{n+1} - p_n + hH_q(p_{n+1}, q_n) &= 0 \\ q_{n+1} - q_n - hH_p(p_{n+1}, q_n) &= 0 \end{aligned} \tag{30}$$

Diferenciando con respecto a (p_n, q_n) obtenemos:

$$\begin{pmatrix} -I & hH_{qq} \\ 0 & -I - hH_{pq} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} I + hH_{qp}^T & 0 \\ -hH_{pp} & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial p_{n+1}}{\partial p_n} & \frac{\partial p_{n+1}}{\partial q_n} \\ \frac{\partial q_{n+1}}{\partial p_n} & \frac{\partial q_{n+1}}{\partial q_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{31}$$

donde todas las derivadas parciales de H son evaluadas en (p_{n+1}, q_n).
Esta ecuación permite calcular

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial p_{n+1}}{\partial p_n} & \frac{\partial p_{n+1}}{\partial q_n} \\ \frac{\partial q_{n+1}}{\partial p_n} & \frac{\partial q_{n+1}}{\partial q_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I + hH_{qp}^T & 0 \\ -hH_{pp} & I \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} I & -hH_{qq} \\ 0 & I + hH_{pq} \end{pmatrix} \tag{32}$$

y verificar la condición de simplecticidad:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial p_{n+1}}{\partial p_n} & \frac{\partial p_{n+1}}{\partial q_n} \\ \frac{\partial q_{n+1}}{\partial p_n} & \frac{\partial q_{n+1}}{\partial q_n} \end{pmatrix}^T \mathrm{J} \begin{pmatrix} \frac{\partial p_{n+1}}{\partial p_n} & \frac{\partial p_{n+1}}{\partial q_n} \\ \frac{\partial q_{n+1}}{\partial p_n} & \frac{\partial q_{n+1}}{\partial q_n} \end{pmatrix} = \mathrm{J} \qquad \textbf{(33)}$$

Teorema 5. El método de Euler modificado ó método del punto medio

$$y_{n+1} = y_n + h\,\mathrm{J}^{-1}\nabla H((y_{n+1} + y_n)/2))$$

es un método simpléctico de orden 2.
Prueba
Diferenciando, obtenemos:

$$\left(I - \frac{h}{2}\mathrm{J}^{-1}\nabla^2 H\right)\left(\frac{\partial y_{n+1}}{\partial y_n}\right) = \left(I + \frac{h}{2}\mathrm{J}^{-1}\nabla^2 H\right) \qquad \textbf{(34)}$$

Luego, también podemos verificar que se cumple la condición de simplecticidad:

$$\left(\frac{\partial y_{n+1}}{\partial y_n}\right)^T \mathrm{J} \left(\frac{\partial y_{n+1}}{\partial y_n}\right) = \mathrm{J} \qquad \textbf{(35)}$$

Debido a su simetría el método del punto medio es de orden 2.
Existen otros métodos simplécticos, que no desarrollaremos aquí por razones de brevedad, tales como: el método de Störmer-Verlet (ó de salto de rana – leap frog) y los métodos de Runge-Kutta simplécticos.

3.1 Aplicaciones al ejemplo del péndulo

Como ya vimos en la ecuación (14), en el caso del péndulo, el Hamiltoniano es $\mathrm{H} = \mathrm{T} + \mathrm{V} = \frac{1}{2}\mathrm{p}^2 - \cos\mathrm{q}$ es constante a lo largo de cada una de las trayectorias en el espacio de fases. Para condiciones iniciales $(\mathrm{q}_0, \mathrm{p}_0)$, la energía total está dada por $\mathrm{H}_0 = \frac{1}{2}{\mathrm{p}_0}^2 - \cos\mathrm{q}_0 = \text{constante}$. Por lo tanto, $\mathrm{p}^2 = 2\mathrm{H}_0 + 2\cos\mathrm{q}$, lo que nos permite dibujar las trayectorias en el espacio de fases. Si se resuelve el problema utilizando el método de Euler explícito $(\mathrm{q}_0 = 0 \text{ y } \mathrm{p}_0 = 0.05)$ y el método de Euler implícito $(\mathrm{q}_0 = 0 \text{ y } \mathrm{p}_0 = 2.2)$ con paso de tiempo $\mathrm{h} = \frac{1}{5}$ (ver [4]), en ambos casos el péndulo comienza a moverse desde su posición más baja; cuando el péndulo tiene suficiente cantidad de movimiento $|\mathrm{p}_0| > 2$ se generan rotaciones. Por otro lado, el péndulo se balancea si $|\mathrm{q(t)}| < \pi$.

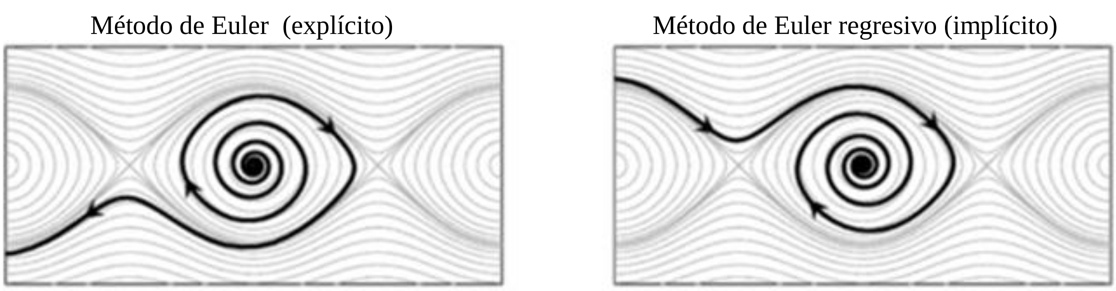


Fig. 3. Una gráfica que representa las Curvas de nivel del Hamiltoniano, en el caso del péndulo simple y trayectoria en el espacio de fases determinada numéricamente mediante los métodos de Euler explícito e implícito.

Como se ve en la Fig. 3 la solución numérica obtenida mediante el método de Euler explícito es inestable y la energía total crece exponencialmente en el tiempo. El péndulo comienza con movimientos oscilatorios muy pequeños. Con el tiempo aumenta más y más su velocidad hasta que el movimiento se convierte en rotatorio. El método de Euler implícito ó regresivo genera soluciones estables pero la energía total decae con el avance del tiempo. Ahora, el péndulo arranca con suficiente energía para rotar, pero con el tiempo la energía se disipa hasta

que el péndulo casi se detiene. En ambos métodos la energía no se conserva dando soluciones inaceptables para la física. En muchos problemas dinámicos de la física y de la ingeniería tales como el movimiento de satélites ó la dinámica molecular es importante utilizar un algoritmo numérico adecuado que conserve la energía durante un largo período de tiempo para llegar a una solución correcta. La utilización de pasos de tiempo pequeños ó métodos de alto orden puede mejorar las soluciones, pero la energía puede no conservarse en el tiempo, por eso es recomendable utilizar los métodos simplécticos que conservan el Hamiltoniano y, además, preservan las áreas en el espacio de fases como ya hemos visto anteriormente.
Cambiando la notación escribimos H_q como $\nabla_q H$ y H_p como $\nabla_p H$, escribimos las ecuaciones de Lagrange en la forma:

$$\frac{dp}{dt} = -\nabla_q H \qquad y \qquad \frac{dq}{dt} = \nabla_p H \tag{36}$$

Si bien los métodos de Euler simplécticos (28) y (29) son implícitos; para Hamiltonianos separables $H(p,q) = T(p) + U(q)$, como en el presente caso del péndulo simple, ambas variantes se convierten en métodos explícitos. En efecto, en este caso $H = T + U$ con $T = \frac{1}{2}p^2$ y $U = -\cos q$. En consecuencia $\nabla_p H(p,q) = \nabla_p T(p)$ y $\nabla_q H(p,q) = \nabla_q U(q)$ y las ecuaciones de Hamilton se escriben en la forma:

$$\frac{dp}{dt} = -\nabla_q U(q) \qquad y \qquad \frac{dq}{dt} = \nabla_p T(p) \tag{37}$$

Los métodos numéricos de Euler explícito (23) y Euler simpléctico (28), para el caso del péndulo, se expresan mediante los sistemas de ecuaciones (38) y (39) respectivamente:

$$\begin{aligned} p_{n+1} &= p_n - h\,sen q_n \\ q_{n+1} &= q_n + h p_n \end{aligned} \quad \textbf{(38)} \qquad ó \qquad \begin{aligned} p_{n+1} &= p_n - h\,sin q_n \\ q_{n+1} &= q_n + h p_{n+1} \end{aligned} \quad \textbf{(39)}$$

A continuación se transcribe un programa en lenguaje FORTRAN, cuya ejecución permite efectuar los cálculos numéricos a partir de los métodos anteriores (38) y (39) con datos $h = 0.2, p_0 = 0.5, q_0 = 0, n = 50$), obteniendo los resultados exhibidos en la tabla que se inserta posteriormente. Es notable observar el permanente aumento del Hamiltoniano cuando se utiliza el Método de Euler, en tanto que el mismo se mantiene casi constante cuando se aplica el método de Euler simpléctico.

Algoritmo 1.

```
PROGRAM EULER
Integer n
CHARACTER(LEN=90) :: String
String = "(I4,F5.1,6F12.6)"
OPEN ( UNIT=8 ,FILE='ResEu.dat',STATUS='UNKNOWN')
Write(*,*) 'ingrese h,p0,q0,n'
Read(*,*) h,pn,qn,n
Write(8,*) '   n     t      p          q            H           ps          qs          HS'
psn=pn
qsn=qn
DO i=1,n
p=pn-h*sin(qn)
q=qn+h*pn
ps=psn-h*sin(qsn)
qs=qsn+h*ps
hh=0.5*p*p-cos(q)
hhs=0.5*ps*ps-cos(qs)
t=i*h
write(8,string) i,t,p,q,hh,ps,qs,hhs
pn=p
qn=q
psn=ps
qsn=qs
END DO
CLOSE(UNIT=8)
END PROGRAM
```

n	t	p	q	H	ps	qs	HS
1	0.2	0.500000	0.100000	-0.870004	0.500000	0.100000	-0.870004
2	0.4	0.480033	0.200000	-0.864851	0.480033	0.196007	-0.865636
3	0.6	0.440299	0.296007	-0.859577	0.441083	0.284223	-0.862603
4	0.8	0.381959	0.384067	-0.854202	0.385000	0.361223	-0.861353
5	1.0	0.307020	0.460458	-0.848718	0.314316	0.424086	-0.862018
6	1.2	0.218148	0.521862	-0.843098	0.232019	0.470490	-0.864430
7	1.4	0.118449	0.565492	-0.837310	0.141354	0.498761	-0.868185
8	1.6	0.011283	0.589182	-0.831332	0.045686	0.507898	-0.872725
9	1.8	-0.099853	0.591438	-0.825154	-0.051582	0.497582	-0.877409
10	2.0	-0.211364	0.571468	-0.818771	-0.147042	0.468174	-0.881583
11	2.2	-0.319538	0.529195	-0.812162	-0.237294	0.420715	-0.884643
12	2.4	-0.420506	0.465287	-0.805280	-0.318976	0.356919	-0.886105
13	2.6	-0.510242	0.381186	-0.798051	-0.388854	0.279149	-0.885687
14	2.8	-0.584646	0.279138	-0.790388	-0.443962	0.190356	-0.883386
15	3.0	-0.639751	0.162209	-0.782232	-0.481803	0.093996	-0.879518
16	3.2	-0.672051	0.034259	-0.773587	-0.500575	-0.006119	-0.874694
17	3.4	-0.678901	-0.100152	-0.764535	-0.499351	-0.105990	-0.869713
18	3.6	-0.658904	-0.235932	-0.755219	-0.478193	-0.201628	-0.865408
19	3.8	-0.612155	-0.367713	-0.745785	-0.438140	-0.289256	-0.862473
20	4.0	-0.540258	-0.490144	-0.736326	-0.381092	-0.365475	-0.861339
21	4.2	-0.446108	-0.598195	-0.726847	-0.309613	-0.427397	-0.862117
22	4.4	-0.333477	-0.687417	-0.717284	-0.226713	-0.472740	-0.864625
23	4.6	-0.206569	-0.754112	-0.707544	-0.135647	-0.499869	-0.868445
24	4.8	-0.069640	-0.795426	-0.697556	-0.039785	-0.507826	-0.873012
25	5.0	0.073192	-0.809354	-0.687288	0.057471	-0.496332	-0.877684
26	5.2	0.217960	-0.794716	-0.676734	0.152711	-0.465790	-0.881807
27	5.4	0.360693	-0.751124	-0.665873	0.242537	- 0.417282	-0.884781
28	5.6	0.497185	-0.678985	-0.654614	0.323593	-0.352564	-0.886134
29	5.8	0.622786	-0.579548	-0.642779	0.392654	-0.274033	-0.885599
30	6.0	0.732315	-0.454991	-0.630122	0.446777	-0.184678	-0.883191
31	6.2	0.820206	-0.308528	-0.616413	0.483503	-0.087977	-0.879245
32	6.4	0.880937	-0.144486	-0.601555	0.501076	0.012238	-0.874387
33	6.6	0.909734	0.031701	-0.585689	0.498628	0.111964	-0.869424
34	6.8	0.903395	0.213648	-0.569203	0.476282	0.207220	-0.865184
35	7.0	0.860990	0.394327	-0.552604	0.435134	0.294247	-0.862350
36	7.2	0.784152	0.566525	-0.536324	0.377130	0.369673	-0.861332
37	7.4	0.676812	0.723355	-0.520552	0.304868	0.430647	-0.862224
38	7.6	0.544431	0.858718	-0.505206	0.221377	0.474922	-0.864825
39	7.8	0.393030	0.967604	-0.490038	0.129923	0.500906	-0.868708
40	8.0	0.228324	1.046210	-0.474789	0.033879	0.507682	-0.873300
41	8.2	0.055218	1.091875	-0.459298	-0.063352	0.495012	-0.877956
42	8.4	-0.122281	1.102919	-0.443517	-0.158360	0.463340	-0.882026
43	8.6	-0.300786	1.078462	-0.427448	-0.247748	0.413790	-0.884914
44	8.8	-0.477032	1.018305	-0.411029	-0.328164	0.348157	-0.886157
45	9.0	-0.647276	0.922899	-0.394028	-0.396398	0.268878	-0.885504
46	9.2	-0.806747	0.793443	-0.375975	-0.449528	0.178972	-0.882990
47	9.4	-0.949302	0.632094	-0.356205	-0.485131	0.081946	-0.878968
48	9.6	-1.067469	0.442234	-0.334053	-0.501502	-0.018355	-0.874079
49	9.8	-1.153061	0.228740	-0.309178	-0.497831	-0.117921	-0.869137
50	10.0	1.198411	0.001872	0.281904	0.474302	0.212781	0.864966

Comparando varios métodos [2] también puede verse que los métodos simplécticos preservan el área en el diagrama de fases a diferencia de los no-simplécticos. Las soluciones numéricas difieren significativamente de la solución exacta –sombras blancas en la figura-, debido a la elección de un paso de cálculo muy grande.

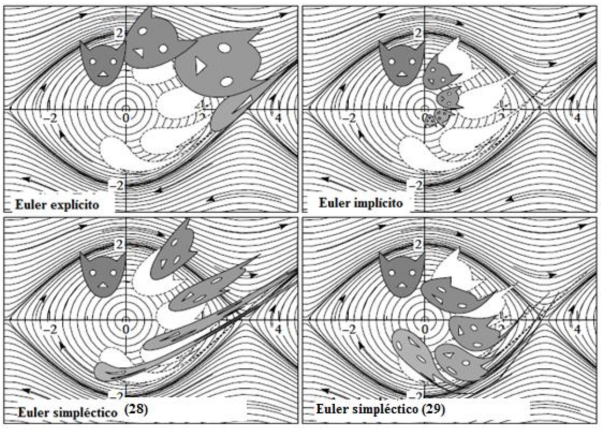


Fig. 4. Una gráfica que representa el Flujo numérico con tamaño de paso $h = \pi/3$ para los cuatro “métodos de Euler”. El flujo exacto está dibujado mediante sombras blancas.

Para fines cualitativos insertamos gráficos que comparan soluciones numéricas con soluciones exactas de los cuatro “métodos de Euler”, dos no-simplécticos y dos simplécticos (ver [2]).

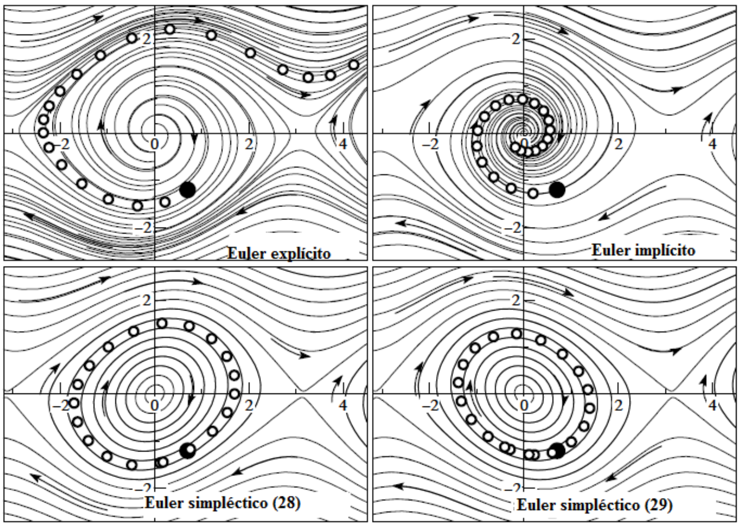


Fig. 5. Una gráfica que representa las Soluciones numéricas con paso $h = 0.4$ para los cuatro “métodos de Euler” del numeral 3., comparados con la solución exacta.

4 Conclusiones y trabajos futuros

En el presente trabajo hemos intentado señalar la importancia creciente de la mecánica geométrica [6, 7] y, en particular, de los métodos numéricos geométricos que preservan la estructura simpléctica tanto en la Física como en la Ingeniería. Hemos centrado nuestra atención en los sistemas Hamiltonianos que corresponden a sistemas mecánicos conservativos.

De nuestro trabajo surge también que la teoría matemática y física debe siempre prevalecer por sobre los experimentos numéricos. Mediante un ejemplo muy simple hemos mostrado que, si no se utilizan los métodos adecuados, ello conducirá, luego de largos períodos de tiempo, a soluciones incorrectas, pese al esfuerzo por disminuir el paso de cálculo ó el aumento de la precisión.

Referencias

1. Ochs, K.; A comprehensive analytical solution of the nonlinear pendulum, págs. 479-490, European Journal of Physics, IOP Publishing, (2011)
2. Hairer, E. y otros; Geometric Numerical Integration Structure-Preserving Algotihms for Ordinary Differential Equations, Springer Verlag, (2006)
3. Arnold, V.I.; Mathematical Methods of Classical Mechanics, Springer-Verlag, (1989)
4. Novak, K; Numerical methods for scientific computing, USA, (2017)
5. Poincaré, H.J.; Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste, Vol. 3, Gauthiers-Villars, Paris, (1899)
6. Marsden, J., Ratiu,T.; Introduction to Mechanics and symmetry, Springer, (1999)
7. Holm, D.; Geometrics Mechanics, Part II, Imperial College Press, London, (2011)

Volver al Índice

Método del Prisma para la Determinación de la Dimensión Fractal de una Imagen. Algoritmo y Procedimiento Computacional

Jesús Rubén Azor Montoya
Facultad de Ingeniería Universidad de Mendoza,
Peatonal Emilio Descotte 750 (5500) Mendoza, Argentina
jesus.azor@um.edu.ar

Resumen. El presente trabajo pretende lograr una perspectiva de la importancia que tiene la Geometría general en los desarrollos científicos actuales, tal el caso de la Geometría Fractal. En el caso de tratamiento de imágenes de diverso origen como en Medicina, Geología, Biología, etc., la Dimensión Fractal representa una medida que permite determinar cualidades y comportamientos que no se logran identificar con otras técnicas. A través del desarrollo propuesto, se promueve fundamentalmente que docentes y alumnos del nivel universitario encuentren una herramienta de fácil uso, perfectamente replicable en su instrumentación y que promueva aprendizajes significativos a través de la vinculación de conceptos básicos de la Geometría con aplicaciones cada vez más difundidas en el campo científico.

Palabras Clave: Dimensión fractal, Auto-similitud, Método box-counting, Método del Prisma

1 Introducción

"Es la gloria de la geometría que a partir de tan pocos principios, sin que lo buscara, fuera capaz de lograr tanto."

Sir Isaac Newton

Históricamente, el interés en la geometría ha sido estimulado por sus aplicaciones a la naturaleza. La elipse tiene importancia por la forma de las órbitas planetarias, así como la esfera por la forma de la tierra. La geometría de la elipse y de la esfera puede ser aplicada a estas situaciones físicas.

Por supuesto, las órbitas no son perfectamente elípticas y la tierra no es exactamente esférica, pero para muchos propósitos, tales como en la predicción del movimiento planetario o el estudio del campo gravitatorio de la tierra, estas aproximaciones pueden ser perfectamente adecuadas.

Es interesante observar cómo la Geometría ha avanzado en sus concepciones hacia nuevos estadios que presentan gran utilidad a la ciencia moderna. Por caso, la aparición de los fractales ha abierto un amplio camino a la investigación científica en la concreción de nuevas herramientas para caracterizar los fenómenos de la Naturaleza.

Una situación similar ocurre con los fractales. Un vistazo a la reciente literatura en Física muestra la variedad de objetos naturales que son descritos como fractales – límites de nubes, superficies topográficas, líneas costeras, turbulencia en fluidos, etc. Ninguno de estos son realmente fractales – tales características desaparecen cuando son vistos a escalas suficientemente pequeñas. Sin embargo, sobre ciertos rangos de escala, aparecen muy parecidos a fractales y a esas escalas son usualmente considerados como tales.

En las aplicaciones de estos conceptos, la *dimensión fractal* toma notable protagonismo en la caracterización de objetos, formas y superficies en algunas áreas del conocimiento. Los ejemplos típicos abarcan una amplia gama en campos tan diferentes como la medicina, el análisis de textura, la geología, biología, ingeniería de materiales, electrónica, física, histología, análisis del suelo, análisis de polímeros, etc.

2 Síntesis histórica

La revolución de los fractales se inició silenciosamente en 1872, cuando definió la existencia de curvas continuas sin derivada [1]. En aquel entonces parecían casos patológicos sólo aptos para iniciados.

Lo siguió Peano que propuso una curva (o línea, ya que es difícil encontrar el término justo) que sin dejar de ser eso, es decir una línea, podía cubrir totalmente la superficie [2]. Sierpinski en 1912, hace lo inverso: halla superficies de área nula por subdivisión fractal [3].

El Triángulo de Sierpinski se forma quitándole a un triángulo otro interior, lo que reduce la superficie a 3/4 de su valor original. Al repetir la operación un número infinito de veces, la superficie se anula.

Algunos grandes matemáticos quedaron desconcertados y como demostración se citan las cartas que escribieron Hermite y Poincare, hablando del "horror" que provocan estas funciones o la "poca utilidad" que pueden tener.

El tema es retomado con gran vigor por Benoit Mandelbrot, un matemático polaco, educado en Francia, quien comienza a dar forma a las ideas dispersas subyacentes de esos "raros objetos matemáticos".

Benoit Mandelbrot, de la empresa IBM y luego en la Universidad de Harvard desde 1962, se destaca estudiando problemas lingüísticos y de estadísticas de errores en sistemas de comunicación. Estos temas que, aparentemente, no tenían relación con la geometría los logra vincular al tema de los fractales, palabra que creara a partir de la expresión latina "*fractus*", quebrado [4].

Mandelbrot, seguido por Richard Vos, también de IBM, mostró que los fractales aleatorios generados por computadora ofrecían imágenes increíblemente realistas de los objetos de la naturaleza.

Michael Barnsley, profesor de matemática del Georgia Institute of Technology de Atlanta, a principios de la década del ochenta, comienza un trabajo de análisis de imágenes para conseguir un conjunto de fractales que iterados aleatoriamente produjeran una imagen original (target) [5].

3 Concepto de Dimensión Fractal

La medición de objetos (es decir, de sus formas o patrones) es una parte fundamental de cualquier geometría tales como la de Euclides (325-265 aC), hiperbólica de Lobachevsky (1792-1856) y esférica de Riemanian (1826-1866) [6].

Los objetos simples, como triángulos, polígonos y círculos permiten mediciones sin ambigüedades, independientemente de su escala.

Esto se puede apreciar mediante la conocida aproximación de Arquímedes de la longitud de un círculo de radio R mediante polígonos regulares inscritos de longitud $L_N = 2.N.R.sen(\pi/N)$, donde N es el número de lados de longitud $r_N = 2.R.sen(\pi/N)$ en el polígono, como se muestra en la Fig. 1a. En la Fig. 1b, se puede apreciar que con pocas iteraciones se tiende a la longitud verdadera del círculo, esto es $2.\pi.R$.

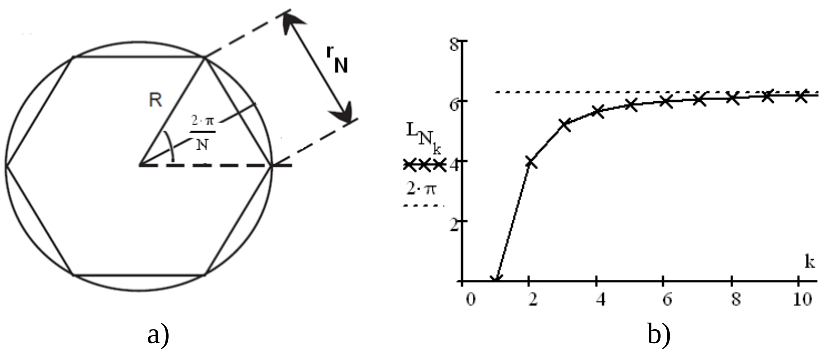


Fig. 1. a) Aproximación de Arquímedes de la longitud de un círculo de radio R. b) Aproximación a la medida correcta con el incremento de las iteraciones (para R=1).

Los métodos de la geometría clásica y el cálculo no son adecuados para estudiar fractales y se necesitan técnicas alternativas. La principal herramienta de la geometría fractal es la dimensión en sus muchas formas. Se está suficientemente familiarizado con la idea de una curva (suave) como objeto 1-dimensional y una superficie 2-dimensional.

Es menos claro que, para muchos propósitos, un fractal como la curva de von Koch tenga una dimensión *1.262*. Esto la hace de una dimensión "más grande que 1" y "más pequeña que 2".

Para construir este fractal, se toma un segmento de longitud L, se lo divide en tres partes iguales ($L/3$), se remplaza la parte central por dos partes de igual longitud formando un ángulo de 60º. Luego, con los cuatro segmentos, se procede de la misma manera, lo que da lugar a 16 segmentos más pequeños en la segunda iteración. Y así sucesivamente, como se indica en la Fig. 2.

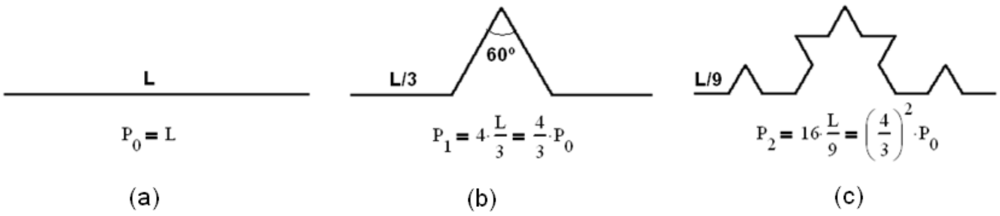


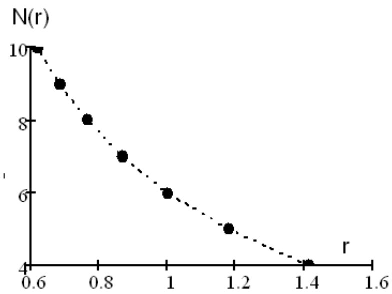
Fig. 2. Tres iteraciones en la conformación de la Curva de Koch y sus respectivos perímetros.

Como se puede apreciar, la longitud de esta curva tiende a infinito, algo sin sentido para la lógica Euclidiana. Además, en la Fig. 2 (a) la recta es derivable en todos sus puntos. Sin embargo, la curva en (b), llamada *diente de sierra*, no lo es en todos ellos, en los puntos de quiebre no hay una tangente única y el valor de la derivada por derecha y por izquierda no coinciden.

Esto hace que la especificación de la curva se complique: es continua pero no derivable en cada uno de los citados puntos. Para ello se necesita una descripción analítica por partes. En el límite, la curva de Kock es continua en todos sus puntos, pero no derivable en ninguno.

En general, la longitud de cualquier curva simple (es decir, una curva que es continua y derivable en todas partes) se puede aproximar mediante la adopción de una *regla* (*ruler*) de longitud *r* y contando el número *N(r)* de reglas necesarias para atravesar la curva de un extremo al otro (es decir, para cubrirla).

Aplicado este concepto a la longitud del círculo de la Fig. 1, se puede ver qué ocurre con unas pocas iteraciones para estos valores, Fig. 3.



r	N(r)
4	1.414
5	1.176
6	1
7	0.868
8	0.765
9	0.684
10	0.618

Fig. 3. Relación N(r) vs. r para la longitud del círculo.

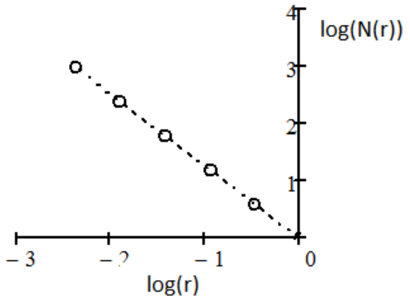
Se puede mostrar fácilmente que la curva responde a una función potencial de expresión $L(r) = N(r).r^{-D}$, donde *L(r)* es una aproximación de la longitud de la curva (su límite para r tendiendo a cero es el valor exacto de la misma).

Si se representa gráficamente *log(L(r))* vs. *log(r)* se aprecia una línea recta, lo que confirma lo anterior. La pendiente de esta recta es el valor *D*, al cual se denominará *dimensión fractal*. Para el caso de la circunferencia es *D=1*.

4 Cálculo de Dimensiones de Fractales auto-similares

El cálculo de la dimensión fractal de formas exactamente auto-similares es bastante sencillo. Este enfoque, que se limita a los fractales cuya estructura puede ser predeterminada matemáticamente, produce valores precisos.

Volviendo al caso de la curva de Koch, repitiendo el proceso llevado a cabo con la circunferencia, se puede construir una tabla de valores de la longitud de la regla (*r*) vs. el número de éstas *N(r)* y representar en un gráfico log-log (*log(N(r)* vs. *log(r)*), como se aprecia en la Fig. 4. Siendo la pendiente de la recta -1.26 y el valor de la dimensión fractal *D=1.26*.



r	N(r)	Log(r)	Log(N(r))
1	1	0	0
1/3	4	-0.477	0.602
1/9	16	-0.954	1.204
1/27	64	-1.431	1.806
1/81	256	-1.908	2.408
1/243	1024	-2.386	3.01

Fig. 4. Gráfico log-log para la curva de Koch.

5 Métodos para el cálculo de la dimensión fractal

Existe una gran variedad de métodos para la determinación de la *dimensión fractal* de formas que no sean necesariamente fractales puras, como la vista de la curva de Koch.

Uno de los más utilizados, por su simpleza y resultados aceptables, es el llamado *box-counting* (o de conteo de cajas). El mismo se puede aplicar a curvas, superficies o volúmenes.

Para calcular *D*, se cubre el objeto con una grilla de cuadrados (o, en el caso de superficies tridimensionales, de cubos) inicialmente de lado η_1, luego se cuenta el número $N(\eta_1)$ de cuadrados que incluyen la parte del objeto (esto es, tienen al menos un pixel de la imagen en ellos).

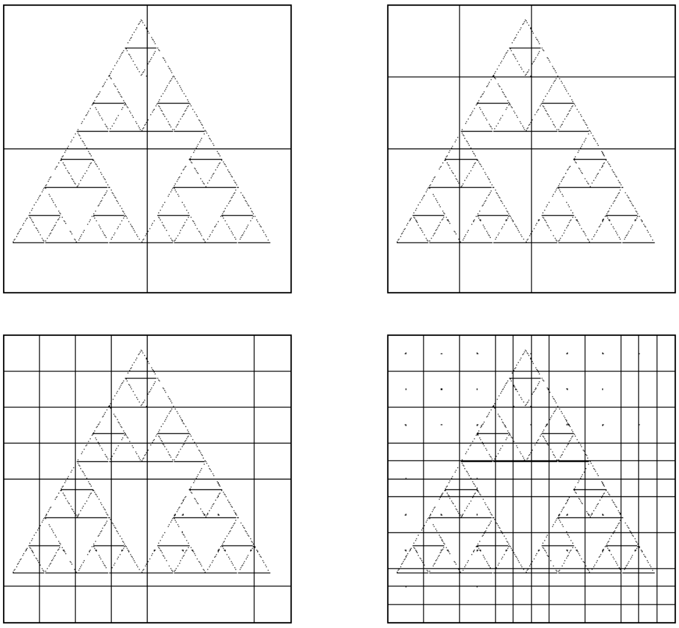


Fig. 5. Box-counting aplicado al triángulo de Sierpinsky. r=1/2, N(r)=4 (arriba, izquierda), r=1/4, N(r)=13 (arriba, derecha), r=1/8, N(r)=35 (abajo, izquierda), r=1/16, N(r)=115 (abajo, derecha).

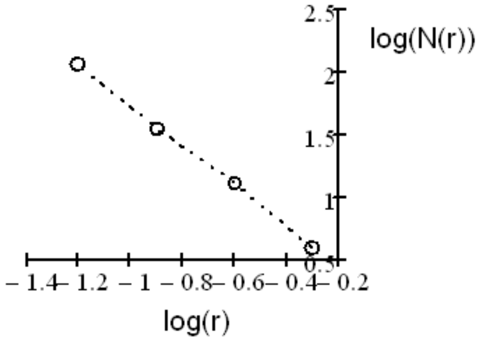
Luego se lleva a cabo la medición utilizando el lado η_2, obteniendo $N(\eta_2)$ cuadrados. Este paso se repite *S* veces, usando los cuadrados de lado cada vez más pequeño.

Finalmente, se calcula la recta de regresión entre el el logaritmo de la variable independiente $log(\eta_i)$ vs. el logaritmo de la variable dependiente $log(N(\eta_i))$, donde i = 1,. . . , S.
D viene dado por el valor absoluto de la pendiente de la línea.

En la Fig. 5 se ha desarrollado el procedimiento para la imagen de un triángulo de Sierpinsky en una de sus fases de formación. La imagen se puede representar como una matriz de 1s (negro, frente) y 0s (blanco, fondo).

Los calibres y conteos se pueden apreciar en la Fig. 6. Finalmente, se calcula la recta de regresión entre el logaritmo de la variable independiente (*log(r)*) y el logaritmo de la variable dependiente (*log(N(r))*). D viene dado por el valor absoluto de la pendiente de la línea.

El resultado es *D=1.597*, contra el valor exacto de la dimensión fractal del triángulo de Sierpinsky: *D=log(3)/log(2)=1.585*. La exactitud mejora a medida que se toman cuadrículas de calibre menor.



r	N(r)	log(r)	Log(N(r))
1/2	4	-0.301	0.602
1/4	13	-0.602	1.114
1/8	35	-0.903	1.544
1/16	115	-1.204	2.061

Fig. 6. Gráfico log-log para el triángulo de Sierpinsky por el método box-counting.

6 Método del Prisma (Triangular Prism Surface Area, TPSA)

El método anterior, considerado el caso de imágenes, necesita que la matriz que la representa sea binaria (es decir con elementos 0s y 1s).

Para ello es necesario “binarizar” una imagen con niveles de grises (elementos de la matriz compuestos de números entre 0 y 255) con algún método de umbralamiento. Esto es generalmente aplicable para la determinación de un contorno, al cual a posteriori se le determina la dimensión fractal.

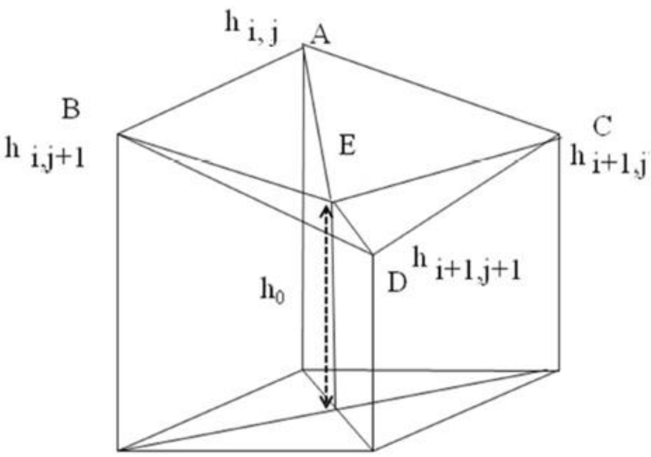


Fig. 7. Esquema básico para encontrar la dimensión fractal mediante el Método TPSA.

Un ejemplo es el de una Región de Interés (ROI) de una imagen mamográfica en la que se sospecha una situación patológica. A partir del proceso de binarización, se determina el contorno del mismo y calculando la dimensión fractal se puede inferir si es maligno o no. Contornos redondeados indican benignidad, en cambio si son irregulares (“espiculados”) apuntan a algún grado de malignidad.

En 1986, Clarke [7] propuso un método para hallar la dimensión fractal considerando la imagen en niveles de grises, que recibe el nombre de *Método del Prisma Triangular, TPSA*.

La representación esquemática para la medición del área de superficie prisma triangular se muestra en la Fig. 7.

En este trabajo se va a seguir una variante del algoritmo de Clarke, debida a Tang y Wang, de 2005, [8].

La imagen original se supone que está representada por una matriz de tamaño $M \times M$ como en el método box-counting., con la diferencia que ahora los elementos de la misma no son exclusivamente 0s y 1s sino que oscilan entre 0 y 255.

Paso 1: La imagen es dividida en diferentes grillas cuadradas de tamaño *r*. Considerada una de ellas, se especifican cuatro puntos del cuadrado *A, B, C, D* sobre la superficie fractal. Estos puntos están representados por el valor de nivel de gris de la imagen en ese punto.

Para el caso de la Fig. 7, las alturas correspondientes en valores de nivel de gris son $\boldsymbol{h}_{i,j}$, $\boldsymbol{h}_{i,j+1}$, $\boldsymbol{h}_{i+1,j}$ y $\boldsymbol{h}_{i+1,j+1}$ respectivamente.

Paso 2: La distancia desde el plano de planta hasta el centro de cada celda de la cuadrícula (identificada por E) de las cuatro alturas de los puntos adyacentes puede calcularse como:

$$h_0 = \frac{1}{4}.(h_{i,j} + h_{i,j+1} + h_{i+1,j} + h_{i+1,j+1}) \qquad \textbf{(1)}$$

Paso 3: La parte superior se divide en cuatro triángulos ABE, ACE, CDE y BCE.

El área cada triángulo (por ejemplo el ABE) se determina aplicando la fórmula de Heron. Para ello se determinan los valores de cada lado del siguiente modo:

$$a_1 = \sqrt{(h_{i,j} - h_{i,j+1})^2 + r^2} \qquad \textbf{(2)}$$

$$a_2 = \sqrt{(h_{i,j} - h_0)^2 + 0.5.r^2} \qquad \textbf{(3)}$$

$$a_3 = \sqrt{(h_{i,j+1} - h_0)^2 + 0.5.r^2} \qquad \textbf{(4)}$$

Luego se calcula el semiperímetro:

$$I_1 = \frac{1}{2}.(a_1 + b_1 + c) \qquad \textbf{(5)}$$

Finalmente

$$S_{ABR} = \sqrt{I_1.(I_1 - a_1).(I_1 - b_1).(I_1 - c_1)} \qquad \textbf{(6)}$$

Paso 4: El área de los triángulos restantes ACE, CDE y BDE se encuentra del mismo modo. Por lo tanto, el área real aproximada de una superficie fractal en una celda de grilla dada con una escala de *r* × *r* viene dada por:

$$S_{i,j} = S_{ABR} + S_{ACE} + S_{CDE} + S_{BDE} \qquad \textbf{(7)}$$

Paso 5: Teniendo en cuenta toda la imagen, el área total de la superficie fractal es:

$$S_r = \sum_{i=1}^{N_r}\sum_{j=1}^{N_r} S_{i,j} \qquad \textbf{(8)}$$

donde *N(r)* es el número total de los cuadrados regulares de tamaño *r* × *r*.

Paso 6: En la geometría fractal, el área total de la superficie fractal $\boldsymbol{S}_{i,j}$, la escala *r* y la dimensión fractal *D* están relacionadas por

$$S_r \sim r^{2-D} \qquad \textbf{(9)}$$

Se repiten los pasos 1-5 con diferentes valores de *r*.

Entonces *log(S(r))* y *log(r)* se representan gráficamente en el sistema de coordenadas log-log. Si la pendiente de la línea recta mejor ajustada a los puntos es *b*, la dimensión fractal *D* de la imagen es:

$$D = 2 - b \qquad \textbf{(10)}$$

7 Implementación del algoritmo

Para la realización de un programa informático que calcule la dimensión fractal de una imagen por el Método del Prisma, se procede, conforme a lo visto más arriba, siguiendo el procedimiento desarrollado a continuación.

Para ilustrar los pasos seguidos y permitir la replicación del algoritmo, se habrá de considerar una imagen en niveles de grises generada en forma aleatoria, representada por una matriz de tamaño 17x17 pixeles, como se ve en la Fig. 8. Es de hacer notar que el algoritmo a implementar exige un tamaño de la matriz cuadrada, cuyas filas y columnas sean una potencia de 2, más uno.

117	226	225	209	132	221	196	19	88	231	157	102	214	34	87	250	23
197	86	252	40	43	145	69	2	143	165	222	103	205	210	124	93	83
150	177	220	13	16	95	40	138	60	75	21	102	46	164	157	234	146
131	110	205	202	18	110	58	244	162	149	168	131	88	243	163	243	130
231	80	231	16	78	204	85	44	43	190	94	142	252	66	98	167	0
211	133	218	250	196	251	85	60	53	123	181	19	86	61	160	128	222
240	252	39	65	175	74	83	37	190	23	54	241	203	162	135	11	209
236	136	49	225	4	117	241	99	137	70	146	48	187	130	248	31	43
205	228	53	227	218	85	76	230	86	151	158	60	117	55	219	244	235
16	52	111	172	32	23	11	64	99	32	22	85	207	159	64	23	198
195	64	237	71	44	238	5	181	42	94	225	232	87	253	168	64	50
91	66	36	85	136	214	12	193	220	68	113	246	93	165	20	182	161
196	1	131	69	72	200	98	178	234	145	112	119	12	19	209	237	58
38	133	75	82	109	201	184	154	24	149	195	239	27	14	239	113	126
135	67	80	58	5	18	97	88	2	19	70	32	67	133	143	103	15
226	177	83	27	115	243	117	96	220	225	65	175	105	18	229	8	61
221	236	25	156	7	7	7	163	14	22	99	180	71	195	188	38	203

Fig. 8. Matriz representando a una imagen aleatoria en niveles de grises.

Para el desarrollo computacional se utilizará el software Matlab, creando la función *prisma2.m*, que se detalla en el Apéndice. Las instancias a cumplir son las siguientes:

1) Se determinará el valor de la constante *ex* conforme a la dimensión de la matriz que representa a la imagen. La misma indicará el número de iteraciones que realizará el procedimiento. Para el caso ejemplificado será de 5.
2) A partir de aquí, se comienza seleccionando cuadrados adyacentes de tamaño 2 como base. recorriendo toda la grilla y calculando las áreas correspondientes, acumulándolas en la variable *S*. En total se utilizan 256.
3) A continuación, se aumenta el tamaño de los cuadrados adyacentes a 3. Calculando las áreas como en el paso anterior, se utilizan en este caso 64. Luego, con tamaño 5, resultan 16, con tamaño 9, resultan 4 y finalmente, con tamaño 17, resulta 1.
4) Las áreas calculadas en cada paso, van siendo almacenadas (junto a su resolución) en una matriz indicada como T.
5) Una vez terminadas las iteraciones, los resultados se muestran en la Fig. 9, a la izquierda. Tomando los logaritmos de cada una de las columnas de la matriz T y volcándolos en un gráfico, el diagrama de dispersión muestra cinco puntos prácticamente alineados.
6) Mediante un ajuste por mínimos cuadrados, se halla la recta indicada por puntos que mejor se ajusta a los cinco puntos, como se muestra a la derecha de la Fig. 9.
7) Como resultado del ajuste, la pendiente de la recta tiene el valor -0.445, con lo que la dimensión fractal de la imagen resulta ser $D = 2 - (-0.445) = 2.447$.

r	Área	log(r)	log(Área)
1	30568	0	4.4853
4	14682	0.6021	4.1668
16	9451	1.2041	3.9755
64	4637	1.8062	3.6662
256	2494	2.4082	3.3969

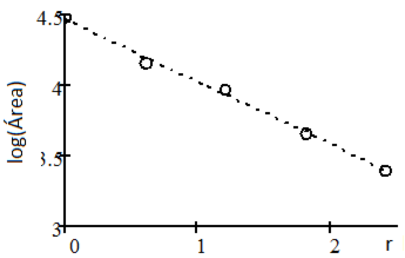


Fig. 9. Derecha, tabla resultante del cómputo de áreas en función de la resolución (r). Izquierda, gráfico log-log con la recta de mejor ajuste por mínimos cuadrados.

8 Conclusiones

Conforme a lo expuesto, se puede apreciar la importancia de desarrollos geométricos simples en un campo tan impactante como es el de la Geometría Fractal.

A partir de la solución computacional propuesta, que puede ser ampliada y mejorada, se cuenta con una herramienta para acceder a tareas de investigación en diferentes campos de la Ciencia donde la dimensión fractal de imágenes sirva como indicador de variadas situaciones.

Estos conceptos están siendo ahora utilizados en el proyecto de investigación "Clasificación de tejidos mediante la característica fractal de la imagen mamográfica", que se lleva a cabo en la Facultad de Ciencias Médicas de la Universidad de Mendoza.

Apéndice

```
function [T df]=prisma2(file)
% Entrada: file, nombre del archivo que contiene la imagen
% Salida: Matriz T, primera columna resolucion; segunda, áreas
%     df: dimension fractal

% Si se ha de trabajar con una imagen, utilizar estas sentencias.
% A=imread(file); N=double(A); %N=double(rgb2gray(A));

% Para el caso tratado en el texto, el archivo ASCII está en
% "alea.txt"

N=load('alea.txt');
SS=size(N);fi=SS(1);co=SS(2);
ex=log2(fi-1)+1;
% Comienzo del algoritmo
for m=1:ex,
 s=2^(m-1);S=0;
 for i=1:(co-1)/s,
  for j=1:(co-1)/s,
   a=N((i-1)*s+1,(j-1)*s+1); b=N((i-1)*s+1,(j-1)*s+1+s);
   c=N((i-1)*s+1+s,(j-1)*s+1+s); d=N((i-1)*s+1+s,(j-1)*s+1);
   e=(a+b+c+d)/4; w=sqrt((b-a)^2+s^2); x=sqrt((c-b)^2+s^2);
   y=sqrt((d-c)^2+s^2); z=sqrt((a-d)^2+s^2);
   o=sqrt((a-e)^2+(sqrt(2)/2*s)^2);p=sqrt((b-e)^2+(sqrt(2)/2*s)^2);
   q=sqrt((c-e)^2+(sqrt(2)/2*s)^2);r=sqrt((d-e)^2+(sqrt(2)/2*s)^2);
   sa=1/2*(w+p+o); sb=1/2*(x+p+q); sc=1/2*(y+q+r); sd=1/2*(z+o+r);
   A=sqrt(sa*(sa-w)*(sa-p)*(sa-o));B=sqrt(sb*(sb-x)*(sb-p)*(sb-q));
   C=sqrt(sc*(sc-y)*(sc-q)*(sc-r));D=sqrt(sd*(sd-z)*(sd-o)*(sd-r));
   S=S+A+B+C+D;
  end
 end
 T(m,1)=4^(m-1);T(m,2)=S;
end
x=log(T(:,1));y=log(T(:,2));
% Ajuste polynomial grado 1 (lineal)
p=polyfit(x,y,1); pend=p(1);ord=p(2);
df=2-pend;
i=1:ex; plot(x,y,'o'); hold on
plot(x(i),p(1)*x(i)+p(2),'-')
hold off
```

Referencias

1. Jarnicki, M., Pflug, P. "*Continuous Nowhere Differentiable Functions: The Monsters of Analysis*". Springer Monogrphs in Mathematicas. 2015.
2. Sagan, H. "*Space-filling curves*". Springer. 1994.

3. Warren, J. , Weimer H. "*Subdivision Methods for Geometric Design: A Constructive Approach*". Morgan Kaufmann, 2001.
4. Mandelbrot B. “*The fractal geometry of nature*”. Freeman, New York. 1983.
5. Barnsley, M. F. “*Fractals Everywhere*”. Elsevier. Morgan Kaufmann, 1993.
6. Stepanov, A., Rose, D. "From Mathematics to Generic Programming". Addison-Wesley Professional. 2015.
7. Clarke, K. C. "*Computation of the Fractal Dimension of topographic surfaces using the triangular prism surface area method*". Computers and Geosciences, 12(5): 713-722. 1986.
8. Tang, M., Wang, N. "*Feature analysis of brain MRI images based on fractal dimension*". Engineering in Medicine and Biolog Society, 2005

Volver al Índice

Álgebra Lineal en el Contexto de la Mecánica Cuántica

M. Graciela Benzal[1], M. Lourdes Fernández[2], Lourdes A. Urueña[1]
[1] Instituto de Matemática, Facultad de Bioquímica, Química y Farmacia, Universidad Nacional de Tucumán
Ayacucho 472. Tucumán, Argentina
gbenzal@fbqf.unt.edu.ar - lourdes.analia87@gmail.com
[2] Departamento de Matemática, Facultad de Ciencias Exactas y Tecnología, Universidad Nacional de Tucumán
Avenida Independencia 1800. Tucumán, Argentina
lfernandez@herrera.unt.edu.ar

Resumen. Las aplicaciones de la matemática están presentes en diversas disciplinas, desde la ingeniería, la física, la química, la biología, en medicina y hasta en las actualmente reconocidas ciencias sociales. Desde finales del siglo XX, la matemática como instrumento se ha caracterizado en dar respuesta a diversos problemas contribuyendo al desarrollo de la sociedad y la tecnología. Su enfoque interdisciplinario en el ámbito educativo y su contextualización en cada disciplina debe ser reforzada en pro del desarrollo en el campo de la investigación. En este sentido el propósito de este trabajo es presentar de un modo no lineal la relación que existe entre los conceptos del Álgebra Lineal y aquellos presentes en un sistema mecanocuántico. Además formalizarlos en el lenguaje matemático para su interpretación en el contexto del fenómeno en estudio.

Palabras Clave: Álgebra lineal, Sistemas mecanocuánticos, Integración matemática-química.

1 Introducción

La permanente búsqueda de soluciones a problemas que hoy aquejan a la humanidad constituye sin duda un desafío para la matemática aplicada, propósito que no siempre es fácil de concretar. Los cambios a los que se enfrenta la ciencia en nuestros tiempos invitan a la reflexión acerca del rol de la matemática en la sociedad contemporánea como así también, acerca de la *interdisciplinariedad* que reclaman las investigaciones actuales.

La matemática está presente en la vida del hombre y en sus múltiples actividades. Su aplicación a problemas concretos contribuye en la práctica científica y al desarrollo tecnológico. La matemática aplicada se caracteriza por su interés en dar respuesta a problemas del mundo observable, los que requieren de un razonamiento formal e intuitivo para su análisis. En cualquier caso la matemática aplicada implica que se debe comprender el fenómeno o proceso que se estudia.

Así, en cursos de matemática para otras ciencias es aconsejable, por una parte, identificar en primera instancia los conceptos matemáticos involucrados en la problemática a abordar a fin de facilitar la formulación matemática correspondiente y por otra, introducir en forma paralela la notación propia de la literatura con el propósito de contextualizar la teoría matemática con la propia de cada disciplina.

Desde este enfoque es posible el análisis de la matemática de la Mecánica Cuántica. Según Vázquez [1] las dos grandes revoluciones científicas de la Física del siglo XX, es decir, la Relatividad y la Mecánica Cuántica, han impreso en esta ciencia una aún mayor conexión con la matemática pura.

La teoría de la Mecánica Cuántica inicia su desarrollo a principios del siglo XX en un esfuerzo por explicar las propiedades de la radiación electromagnética, de los átomos y las moléculas [2] que hasta ese momento la Mecánica Clásica no tenía respuesta. Asimismo, la aplicación de la Mecánica Cuántica a los problemas de la química constituye la química cuántica, que se manifiesta en todas las ramas de la química.

La provechosa relación de la matemática con la química se evidencia en cada uno de los postulados [3] de la Mecánica Cuántica. Por ejemplo, uno de ellos establece que:

El estado de un sistema mecanocuántico está descripto por una función de las coordenadas y del tiempo. Esta función, llamada función de estado o función de onda, contiene toda la información que es posible conocer del sistema. Se postula además, que la función es mono valuada, continua y cuadráticamente integrable. Para los estados del continuo, se omite el requerimiento de la integrabilidad cuadrática.

Las funciones de estado correspondientes a estados de energía constante E se representan mediante la expresión:

$$\psi(r,t)=\varphi(r)\exp(-i\varpi t)=\varphi(r)\exp\left(\frac{-iEt}{\hbar}\right) \quad \textbf{(1)}$$

donde $r \in R^3, t \geq 0$ y $\hbar = \dfrac{h}{2\pi}$ se denomina h-barra con h constante de Planck. Dichas funciones de estado pertenecen a un *Espacio de Hilbert* complejo.

Los Espacios de Hilbert [4] son una generalización de los Espacios Euclídeos. Llevan su nombre en honor al matemático alemán David Hilbert (1862-1943) reconocido como uno de los más influyentes del siglo XIX y quien proporcionó la matemática necesaria para la Mecánica Cuántica. En 1912 Hilbert tuvo la visión de captar la necesidad de postular un espacio vectorial de dimensión no finita para poder proyectar todo el aparato matemático de la Mecánica Cuántica sobre una base rigurosamente formal. Propuso además, que las componentes de los vectores pudiesen ser números complejos, redefiniendo el concepto de producto interno entre dos vectores para que dicho producto pudiese seguir siendo un número real con significado físico.

Quince años después, en 1927, basándose en el trabajo de su precursor Banach, el matemático John von Neumann (1903-1957), proporcionó una definición axiomática al espacio vectorial de Hilbert.

Los espacios de Hilbert son espacios normados, completos, con norma inducida por el producto interno, donde los conceptos del Álgebra Lineal tales como ortogonalidad, transformaciones lineales, valores y vectores propios que son aplicables a espacios de dimensión finita se extienden a los de dimensión no finita.

El Álgebra Lineal es una rama de la matemática que tiene conexiones con múltiples áreas, como la teoría de grupo finito aplicada a la química, las ecuaciones diferenciales, los métodos numéricos, entre otros. Todas estas conexiones hacen necesario contextualizarla en el ámbito que se desee estudiar, establecer notaciones e interpretaciones propias de la disciplina con el propósito de la integración matemática-ciencia, dado que una de las mayores dificultades que se presenta es poder aplicarla a problemas concretos sin caer en la abstracción propia aparente que conlleva esta teoría.

El Álgebra Lineal se remonta a 1843 cuando William Rowan Hamilton (1805- 1865) creó los cuaterniones. Además realizó importantes contribuciones en el campo de la cuántica en particular referidas a la teoría de operadores, definiendo al operador Hamiltoniano. Posteriormente en 1926, Erwin R.J.A. Schrödinger (1887-1961) físico austríaco formuló una ecuación diferencial que lleva su nombre, por la cual recibió en 1933 el Premio Nobel de Física. Su relación con el Hamiltoniano, operador que se presentará más adelante, puede verse a través de otro de los postulados que establece:

La función de onda del sistema varía en el tiempo siguiendo la ecuación de onda de Schrödinger:

$$\hat{H}\psi(r,t)=i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(r,t) \quad ó \quad \hat{H}|\psi\rangle=i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\psi\rangle \quad \textbf{(2)}$$

donde $\hat{H}$ es el operador Hamiltoniano del sistema.

La ecuación de la derecha está expresada en la *notación bra-ket* o notación de Dirac, es la notación estándar en la teoría de la Mecánica Cuántica. Se utilizan también para denotar vectores abstractos y funcionales lineales en la matemática pura.

La ecuación de Schrödinger es una ecuación diferencial en derivadas parciales que mediante el método de separación de variables devuelve soluciones de la forma:

$$\psi(r,t)=\varphi(r)\exp\left(\frac{-iEt}{\hbar}\right) \quad \textbf{(3)}$$

donde la función de onda $\varphi(r)$ no tiene existencia física, no se puede medir y además satisface la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo [3]:

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2+V(r)\right)\varphi=E\varphi \quad \textbf{(4)}$$

Que en términos del operador Hamiltoniano se expresa de la siguiente manera:

$$\hat{H}\varphi=E\varphi \quad \textbf{(5)}$$

de donde se desprende que la función espacial de un estado estacionario φ es una función propia de $\hat{H}$, y la constante E es su valor propio, que recibe el nombre de *energía del estado*.

El estudio de las ondas constituye uno de los temas más importantes en la Física Matemática, dada la relevancia del fenómeno ondulatorio. Por ejemplo el movimiento generado cuando cae una piedra sobre el agua revela la propagación de ondas aproximadamente circulares en la superficie, el movimiento de una cuerda genera ondas sonoras, las conocidas ondas sísmicas, etc. Dentro del electromagnetismo, dada la naturaleza ondulatoria del campo electromagnético las ondas tienen un papel fundamental y para la Mecánica Cuántica el estado de un sistema está descrito por una función denominada función de onda, solución de una ecuación de onda muy conocida: la ecuación de Schrödinger, ya que el concepto fundamental de la mecánica cuántica es que la materia tiene propiedades ondulatorias.

La ecuación de onda es una ecuación diferencial en derivadas parciales, lineal de segundo orden que describe la propagación para una gran variedad de ondas, como las sonoras, las de luz y las ondas en el agua. Es importante en varios campos como la acústica, el electromagnetismo, la mecánica cuántica y la dinámica de fluidos. En una variable se expresa como:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{6}$$

donde las variables independientes $x \in R\,; t \geq 0$ representan espacio y tiempo respectivamente. El parámetro no adimensional a caracteriza al fenómeno en estudio junto a la función incógnita $u(x,t)$ que representa a la función de onda correspondiente. La misma se obtiene resolviendo dicha ecuación sujeta a condiciones iniciales y de frontera que garantizan la existencia de una solución única y el éxito de la modelización del fenómeno en estudio.

Schrödinger, para explicar el comportamiento dual entre partícula y onda utilizó la ecuación de onda (6) considerando un parámetro cuántico para caracterizarla. De modo que en la ecuación de onda:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{V^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \tag{7}$$

la función de onda incógnita $u(x,t)$ representa el desplazamiento de la partícula ubicada en la posición *x* al tiempo *t*. La consideración de constantes cuánticas y sus relaciones en el parámetro cuántico $\frac{1}{V}$ de la ecuación (7) condujo a Schrödinger a la ecuación (2).

El propósito de este trabajo es evidenciar algunos de los contenidos del Álgebra Lineal que subyacen en la teoría de la Mecánica Cuántica. Con un enfoque no tradicional se integra la matemática y la química utilizando un sistema mecanocuántico simple representado por una ecuación de onda como modelo matemático. A partir de del mismo se pone énfasis en los contenidos del Álgebra Lineal presentes y no así en la interpretación física de la Ecuación de Onda, ya que las Ecuaciones Diferenciales serán una motivación para trabajos futuros.

Todos los conceptos mencionados en este trabajo en relación al Álgebra Lineal, como son Espacios Vectoriales, Transformaciones Lineales, Valores y Vectores Propios e inclusive las mismas Ecuaciones Diferenciales son contenidos de las currículas del ciclo básico a todas las carreras de Ingeniería y de las Licenciaturas de la Facultad de Ciencias Exactas de la Universidad Nacional de Tucumán.

2 Un breve recorrido por el álgebra lineal de la mecánica cuántica

2.1 Operadores cuánticos

Los químicos están muy familiarizados con operadores diferenciales lineales, que son transformaciones lineales definidas en el espacio vectorial de funciones y que involucran el operador derivada. Por ejemplo, el *Operador Momento Lineal Unidimensional,* definido para cada coordenada espacial como:

$$\hat{p}_x = -i\hbar\frac{d}{dx}\,;\ \hat{p}_y = -i\hbar\frac{d}{dy}\,;\ \hat{p}_z = -i\hbar\frac{d}{dz} \tag{8}$$

donde i es la unidad imaginaria.

Por otra parte*, El Operador Momento angular* [3] *de* una partícula con respecto al origen de coordenadas se define en mecánica clásica de la forma:

$$\hat{L} = \vec{r} \times p \rightarrow \hat{L} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x & y & z \\ p_x & p_y & p_z \end{vmatrix} \tag{9}$$

donde cada coordenada de dicho operador se define en términos del momento lineal [3] como:

$$\hat{L}_x = -i\hbar\left(y\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial y}\right); \hat{L}_y = -i\hbar\left(z\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial z}\right); \hat{L}_z = -i\hbar\left(x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}\right) \tag{10}$$

Otro operador destacable en diversas aplicaciones de la Mecánica Cuántica es el *Operador Hamiltoniano:*

$$\hat{H} = \hat{E}_c + \hat{E}_P \tag{11}$$

definido como la suma de la energía cinética $\hat{E}_c = -\frac{1}{2}\frac{\hat{p}\cdot\hat{p}}{m}$ y la energía potencial $\hat{E}_p$.

Se observa que el operador energía cinética siempre es lineal, mientras que el operador energía potencial puede o no serlo, por lo que la linealidad del Hamiltoniano dependerá de la forma de la función que representa la energía potencial, la cuál podría ser nula como sucede por ejemplo en el modelo de una partícula en una caja que se presentará en la siguiente sección.

Generalizando, si la partícula de masa *m* se mueve en el espacio tridimensional, el Hamiltoniano se expresa en términos del operador Laplaciano (∇^2), de modo que:

$$\hat{H} = -\frac{\hbar}{2m}\nabla^2 + V(\vec{r}) \tag{12}$$

donde el término $V(\vec{r})$ es el operador energía potencial que siempre depende sólo de la variable espacial *r*.

Un *operador cuántico* es el operador matemático que representa a un observable en el formalismo de la Mecánica Cuántica. Matemáticamente los operadores de la Mecánica Cuántica son transformaciones lineales definidas sobre un conjunto o dominio en un espacio de Hilbert, y que deben satisfacer la propiedad de ser autoadjuntos. Si el operador está definido sobre todo el espacio de Hilbert se llama continuo o acotado pero existen operadores definidos solo sobre un dominio denso en el espacio de Hilbert llamados no acotados.

Por ejemplo el operador Hamiltoniano, suele ser un operador no-acotado, lo cual se corresponde con el hecho físico de que muchos sistemas no imponen un límite superior para sus valores de energía, comportamiento que se analizará más adelante al presentar las funciones propias y el espectro de valores propios correspondientes a dicho operador.

En todos los operadores antes presentados se observa que interviene de un modo lineal el conocido operador derivada y aparecen además diferentes constantes cuánticas $\hbar, h, m$, las que caracterizan y dan nombre a estos operadores diferenciales lineales, por lo que dejan de ser abstractos ya que representan a observables de estos sistemas cuánticos. Se destaca además que la presencia de la unidad imaginaria los clasifica en operadores diferenciales lineales complejos, que actúan sobre funciones del espacio de Hilbert, en particular funciones de onda que representan el sistema mecanocuántico. Estas funciones tienen la propiedad de que cuando se le aplica el operador sólo son afectadas en un múltiplo escalar de sí mismas, es decir la función de onda no se modifica, lo que indica que preserva sus propiedades y el múltiplo escalar tendrá un significado.

La identificación de conceptos del Álgebra Lineal, tales como Espacio Vectorial Complejo, Transformaciones Lineales, Operadores Diferenciales Lineales, Valores y Funciones propias, facilita introducir formalmente las definiciones matemáticas correspondientes, que se presentan algunas a modo de ejemplo.

Un *operador* es un ente matemático, símbolo ó notación abreviada de un conjunto bien definido de operaciones matemáticas que actúan sobre un elemento, vector o función. Por otra parte, es frecuente usar el término operador como la aplicación entre dos espacios vectoriales de dimensión infinita, donde sus elementos son funciones. Si dicha aplicación es lineal se le llama *operador lineal***.**

2.2 Transformaciones lineales: aplicación a observables cuánticos

Una transformación T definida en el espacio vectorial *V* con valores en el espacio vectorial *W*, ambos definidos sobre un cuerpo *K*, se denota como $T: V \to W$. Esta transformación es lineal si preserva la combinación lineal, es decir:

$$T(\alpha u+\beta v)=\alpha T(u)+\beta T(v) \quad \forall u,v\in V;\alpha,\beta\in K \tag{13}$$

Cuando *W* = *V* se denomina endomorfismo. En un sistema mecanocuántico los endomorfismos son los operadores diferenciales *L* y los vectores son las funciones de onda φ que definen dicho sistema, de modo que:

$$L\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\varphi_i\right)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i L(\varphi_i) \quad \forall\varphi_i\in V;\alpha_i\in K \tag{14}$$

Los operadores lineales tienen aplicación directa en los *observables* que son cantidades físicas medibles de los sistemas mecanocuánticos, tal como lo establece el postulado: A cada observable físico *B,* le corresponde un operador lineal y hermítico $\hat{B}$.

Los observables son transformaciones lineales definidos en un espacio vectorial de funciones al que pertenece la función de onda o función de estado del sistema cuántico, que además proporcionan una medida de estos observables, ya que: los únicos valores posibles que pueden obtenerse en las medidas del observable físico *B* son los valores f_i de la ecuación

$$\hat{B}f_i=\lambda_i f_i \quad i=1,2,... \tag{15}$$

donde $\hat{B}$ es el operador correspondiente al observable *B* [3].

Esta afirmación, desde el punto de vista matemático, establece que cuando un operador (referido al *observable*) se aplica a una función (la *función de onda*) se obtiene un múltiplo escalar de la misma. Es decir la función de onda es *función propia* y λ_i es el *valor propio* asociado.

2.3 Valores y funciones propias: aplicación a niveles de energía y funciones de onda

En un espacio vectorial de funciones reales o complejas sobre un cuerpo real o complejo *K* se define el endomorfismo $\hat{L}: V \to V$ tal que $\varphi \mapsto \hat{L}(\varphi)$. De las infinitas funciones φ interesan aquellas que son invariantes bajo el operador $\hat{L}$, en particular aquellas que se transforman en múltiplo escalar de sí mismas. Es decir, $\hat{L}\varphi=\lambda\varphi$. En este caso φ es la función propia del operador $\hat{L}$ y λ su valor propio asociado[6-8].

En particular cuando $\hat{L}=\hat{H}$ los conceptos de valor y función propia en el contexto de un sistema mecanocuántico representan los niveles de energía y las funciones de onda respectivamente, las que mantienen las propiedades inherentes a las funciones propias que se ven reflejadas en los postulados de la Mecánica Cuántica.

El espectro $\{\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_i,...\}$ de valores propios puede ser *degenerado* o *no degenerado*. Si a cada valor propio λ_i le corresponde sólo una función propia φ_i el espectro se dice no degenerado, mientras que cuando a un valor propio repetido *r* veces le corresponde *r* funciones propias diferentes el espectro se dice degenerado, que en el contexto de un sistema mecanocuántico significa que el grado de degeneración de un nivel de energía es el número de estados que tienen la misma energía.

Cuando la función de onda es conocida se puede obtener el valor de la medida del observable representado por un cierto operador $\hat{B}$ simplemente aplicando el operador a la función de onda. Pero ¿qué sucede si no se conocen las funciones de onda?. En este caso es necesario resolver una ecuación diferencial en valores y funciones propias que aparecen con frecuencia en formulaciones matemáticas, llamadas *modelos matemáticos*, que se utilizan para representar fenómenos de diferentes áreas de la ciencia.

En particular cuando el operador $\hat{B}$ es el Hamiltoniano con energía potencial nula, la ecuación en valores y funciones propias (5) es la conocida *ecuación de Schrödinger independiente del tiempo*. La misma se utiliza como modelo matemático para explicar el comportamiento de una partícula en una caja unidimensional, bidimensional o tridimensional, aumentando la complejidad en la medida de la dimensión en que se estudia.

3 Un modelo matemático: la ecuación de Schrödinger

Los procesos en donde se combina la experimentación, la modelización matemática y la simulación con la correspondiente visualización de los resultados tienen una profunda conexión con el Álgebra Lineal.
Un ejemplo concreto es el siguiente modelo matemático para una partícula de masa m en una caja unidimensional de longitud L:

$$\begin{aligned} &\frac{d^2\varphi}{dx^2}+\frac{2mE}{\hbar}\varphi=0,\ \ 0<x<L \\ &\varphi(x)=0;\quad x\le 0 \\ &\varphi(x)=0;\quad x\ge L \end{aligned} \tag{16}$$

La ecuación diferencial (16) es la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo. Es una ecuación en valores y funciones propias [9] y las condiciones de contorno establecen la probabilidad cierta de que la partícula deber estar confinada en los límites de la caja, sin conocer exactamente su posición [6-8].

Las condiciones de contorno establecen que para cualquier energía E la función de onda debe ser nula en las regiones fuera de los límites de la caja.

Por tratarse de una ecuación diferencial ordinaria lineal de segundo orden, homogénea a coeficientes constantes es de fácil resolución. De la solución general y aplicando las condiciones de contorno se obtiene que para cada valor de n existe una función solución de la ecuación de Schrödinger, las que se pueden expresar como:

$$\varphi_n(x)=C sen\left(n\pi\frac{x}{L}\right)\qquad n=1,2,... \tag{17}$$

la solución completa se determina encontrando la constante C utilizando la condición de normalización de la función de onda (17), mediante el producto interno standard de funciones:

$$1=\int_0^L|\varphi_n(x)|^2dx=\int_0^L C^2 sen^2\left(\frac{n\pi\, x}{L}\right)dx=C^2\left(\frac{1}{2L}\right)\Rightarrow C=\sqrt{\frac{2}{L}} \tag{18}$$

Entonces las funciones de onda:

$$\varphi_n(x)=\sqrt{\frac{2}{L}}sen\left(n\pi\frac{x}{L}\right)\qquad n=1,2,... \tag{19}$$

forman un conjunto completo y son las funciones propias del operador Hamiltoniano ya que satisfacen la ecuación (5). Remplazando (19) en (5):

$$\hat{H}\varphi_n(x)=-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d}{dx}\sqrt{\frac{2}{L}}sen\left(\frac{n\pi}{L}x\right)=\underbrace{\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2\frac{\hbar^2}{2m}}_{E_n}\sqrt{\frac{2}{L}}sen\left(\frac{n\pi}{L}\right)x \tag{20}$$

Para cada función propia φ_n se obtienen los correspondientes valores propios

$$E_n=\frac{n^2\pi^2\hbar^2}{2mL^2}\qquad n=1,2,... \tag{21}$$

que representan infinitos valores de energía del sistema mecanocuántico.

Este resultado se debe a que el operador Hamiltoniano suele ser un operador no-acotado, lo cual se corresponde con el hecho físico de que muchos sistemas no imponen un límite superior para sus valores de energía.

Cada valor diferente del número cuántico n proporciona una función de onda y un estado diferente. Los puntos donde la función de onda se anula se llaman nodos. Por cada aumento de una unidad en el valor del número cuántico n, la función de onda tiene un nodo más.

El comportamiento de las funciones de onda φ_n para algunos niveles n de energía E_n en una caja unidimensional de longitud $L=1$ se visualiza en las siguientes figuras, obtenidas con el software matemático MATLAB.

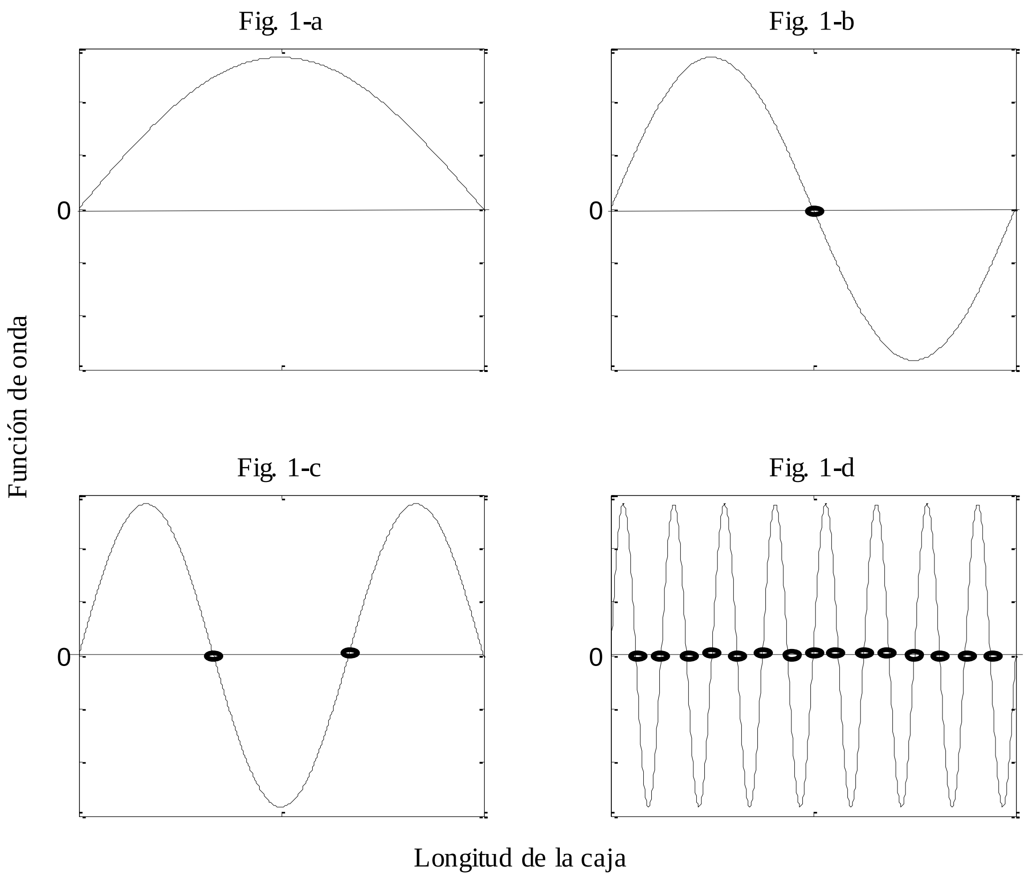


Fig. 2 Gráficas de la función de onda para diferentes estados de energía de la partícula en la caja de longitud $L=1$.

En la Fig.1-a se observa que la función de onda para $n=1$ con el mínimo estado de energía, llamado estado fundamental, no presenta nodo interpretándose que la probabilidad máxima de encontrar la partícula es en $x=L/2$. Sin embargo en la Fig.1-b, la función de onda para $n=2$ con un estado de energía excitado, presenta sólo un nodo en el centro de la caja donde la función propia se anula, por lo que la probabilidad de encontrar la partícula en $x=L/2$ vale cero, pero será máxima en $x=L/4$ y en $x=3L/4$. Similar comportamiento se observa en la Fig.1-c, donde la función de onda corresponde a un estado de energía excitado para $n=3$. Generalizando en la Fig.1-d, la función de onda para $n=16$ se anula en $x=kL/n$ con $k=1,2,\dots 16$, es decir la probabilidad en cada nodo es nula y será máxima para $x=(2k-1)L/2n$, donde se encuentran los extremos de la función de onda.

Por último, se destaca que de ninguna manera este es un trabajo acabado. El espíritu del mismo es compartir un abordaje de la matemática desde una perspectiva no tradicional, el que implica un desafío para los matemáticos si se tiene el propósito de alcanzar la capacidad de abstracción que le permita identificar la matemática que subyace en fenómenos propios de otras disciplinas. Asimismo, invita a los profesionales de las otras ciencias a mirar a la matemática como un instrumento útil ya que es la base sobre la que se ha edificado la ciencia moderna.

4 Conclusiones

El presente trabajo conlleva la práctica de la integración y de la contextualización de la matemática aplicada a la ciencia química y la viabilidad de su enfoque ha exigido un real reconocimiento de la interdisciplinariedad.

Los temas de álgebra lineal y de ecuaciones diferenciales que se tratan constituyen un instrumento necesario para el abordaje de diversos problemas inherentes al campo de la ingeniería.

Como parte de la contextualización se adecua la notación matemática a la propia de los contenidos de la ciencia química, despertando el interés y facilitando la incorporación de los conceptos del Álgebra Lineal, aparentemente abstractos, todo ello sin renunciar a la rigurosidad del lenguaje matemático.

Referencias

1. Vázquez, J.L.: Matemáticas, Ciencia y Tecnología: una relación profunda y duradera. *Web. http://www.mat.ucm.es/~rrdelrio/documentos/jlvazquez.pdf.* Accedido en Febrero 2015
2. Campos, D.: Matemática aplicada: Un puente entre el universo cuántico y el mundo clásico. Civilizar. *http://190.85.246.40/civilizar/matematicas/index.htm*. Accedido en Junio de 2016
3. Levine, I.N: *Química Cuántica.* Prentice Hall, pp. 9-186 (2001)
4. Martínez, A: El espacio de Hilbert I. Web. *http://la-mecanica-cuantica.blogspot.com.ar/2009/08/el-espacio-de-hilbert.html* (2009). Accedido en Junio de 2016.
5. López de Méndez, A; Pacheco Sepúlveda, C: Proyecto interdisciplinario para mejorar el aprendizaje de las matemáticas y las ciencias. *Web. http://es.slideshare.net/cieupr/integrar-matematicas-y-ciencia* (2012). Accedido 13 de Noviembre de 2016
6. Benzal, G.; Torrente, C.: *Matemática IV. Notas de teoría. Álgebra Lineal para estudiantes de Licenciatura en Química* 1º Edición (2011). Material inédito sistematizado para dictado de clases en carrera de Química
7. Margenau, H; Moseley Murphy, G.: *Las Matemáticas de la Física y la Química*. Epesa, 1952
8. Benzal, G.: *Ecuaciones Diferenciales Lineales aplicada a la Química.* Edición (2016). Material inédito sistematizado para dictado de clases en carrera de Química
9. Edwards-Penney.: *Ecuaciones diferenciales y problemas con valores en la frontera*. Pearson Educación de México (2009)

Volver al Índice

Ajuste de Datos Mediante Polinomios que Pasan por un Punto Anguloso

Carlos Adolfo Calvo[1], Armando Luis Imhof [2] ,Beatriz Morales[1] ,Rodolfo Rodrigo[3]
[1] Departamento de Matemática, Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de San Juan , San Juan, Argentina
{Ccalvo, bmorales }@unsj.edu.ar
[2] Instituto Geofísico Sismológico Volponi, Facultad de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, Universidad Nacional de San Juan, Argentina
aimhof@unsj.edu.ar
[3] Departamento de Electromecanica, Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de San Juan , San Juan, Argentina
rodrigo_rh@unsj.edu.ar

Resumen. Para un conjunto de datos discretos, se determina un polinomio de aproximación que debe pasar por un punto anguloso y aproximar a los datos en los puntos restantes. Para adaptar los datos a la forma de polinomio se realiza una operación de simetría (semi-reflexión). La aproximación se realiza usando una modificación del método de mínimos cuadrados de Gauss, que permite cumplir la condición de pasar por un punto determinado. Para ello se debe minimizar un residuo para obtener los coeficientes de dicho polinomio, llegando a un sistema de ecuaciones lineales (ecuaciones normales modificadas). Se incluye, además de un criterio para la elección del grado del polinomio, la implementación computacional realizada con el paquete informático MatLab. Las salidas gráficas son la mejor medida de la calidad del proceso expuesto.

Palabras Clave: Ajuste, Polinomios, Punto anguloso, Ecuaciones normales, Simetría

1 Introducción. Planteo del problema

Dado un conjunto de datos discretos, formado por n puntos (x_i , y_i) $i = 1{:}n$ distribuidos como indica la fig. 1, se pretende determinar una función que debe pasar por el punto anguloso (x_0 , y_0) y aproximarse a los datos en los puntos restantes. La función incógnita debe ser continua en todos sus puntos y su derivada también excepto en el punto anguloso donde el cambio de dirección es brusco. Los polinomios permiten realizar el ajuste con un planteo analítico mediante las ecuaciones normales [1], pero para este caso presentan dos inconvenientes: a) no modelan los cambios de direcciones b) no pasan necesariamente por un punto.

En este trabajo se salvaran ambos inconvenientes:

- Mediante una transformación de los datos por una semi reflexión y una traslación del origen al punto anguloso se resuelve el primer inconveniente
- Mediante una pequeña modificación en las ecuaciones correspondientes al Método de Mínimos Cuadrados de Gauss se consigue resolver el segundo inconveniente.

1.1 Transformación de los datos. Semi-Reflexión

Lo primero que se hace es un cambio de variables llevando el origen al punto anguloso (x_0 , y_0) .Esto es $(x, y) \rightarrow (X, Y)$ siendo $X = x - x_0$, $Y = y - y_0$.

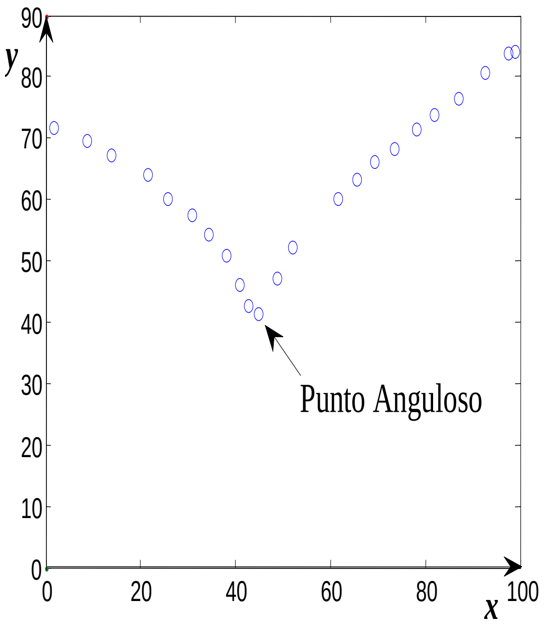
En segundo lugar se realiza una operación de simetría (semi- reflexión según el eje $Y(-)$): $(x' = X \quad y' = -Y \quad para\, X < 0 \quad y' = Y \quad para\, X > 0)$ (Fig. 1), con esto se modifica la rama izquierda de los datos dándole la continuidad de dirección adecuada para el uso de polinomios.

2 Modificación de las Ecuaciones Normales

En los nuevos ejes se debe aproximar con

$$p(x') = a_m\, x'^{\,m} + a_{m-1}\, x'^{\,m-1} \;....+ a_1\, x' + a_0 \;. \qquad \textbf{(1)}$$

La condición de pasar por el punto anguloso (x_0, y_0) se traduce en pasar por el nuevo origen, o sea $p(0) = a_0 = 0$, esto lleva a modificar las ecuaciones normales.



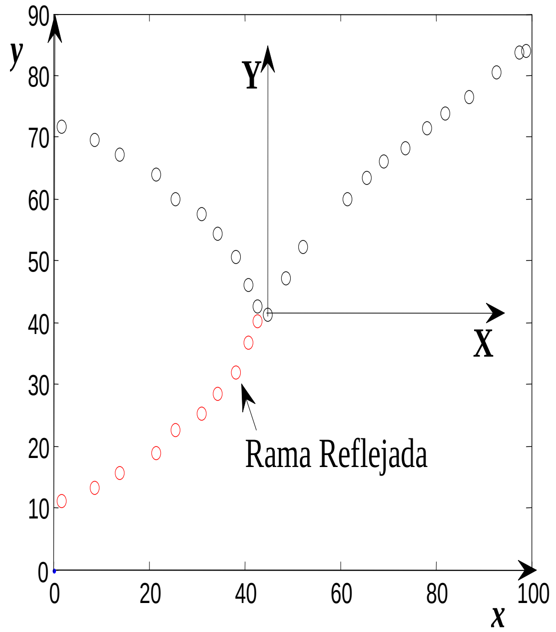


Fig. 1: A la izquierda se observan los puntos datos. A la derecha se incluyen los nuevos ejes (X ,Y) y los puntos obtenidos por reflexión de la rama izquierda

Se define como error de la aproximación (Residuo):

$$\begin{aligned} E &= \sum_{i=1}^{n} (y'_i - p(x'_i))^2 \\ E &= \sum_{i=1}^{n} (y'_i - a_m x'^{\,m}_i - a_{m-1} x'^{\,m-1}_i \;\; \ldots - a_1 x'_i)^2 \\ E &= f(a_1, a_2 \ldots\ldots\ldots, a_m) \end{aligned} \quad \textbf{(2)}$$

Este error, función de los coeficientes $a_j\,;\; j = 1:m$, debe ser mínimo por lo que se buscan los coeficientes que cumplan:

$$\frac{\partial E}{\partial a_j} = 2\sum_{i=1}^{n} (y'_i - a_m x'^{\,m}_i - a_{m-1} x'^{\,m-1}_i - \ldots - a_1 x'_i)\, x'^{\,j}_i = 0 \qquad j = 1:m \quad \textbf{(3)}$$

reordenando estas ecuaciones se llega a un sistema lineal de m ecuaciones con m incógnitas a_j

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n} x'^{\,2m}_i \ldots\ldots\ldots \sum_{i=1}^{n} x'^{\,m+1}_i \\ \ldots\ldots\ldots\;\ldots\ldots\ldots\;\ldots\ldots \\ \sum_{i=1}^{n} x'^{\,m+1}_i \ldots\ldots\ldots \sum_{i=1}^{n} x'^{\,2}_i \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} a_m \\ \ldots\ldots \\ a_1 \end{bmatrix}}_{c} = \underbrace{\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n} x'^{\,m}_i\, y_i \\ \ldots\ldots\ldots\,. \\ \sum_{i=1}^{n} x'_i\, y_i \end{bmatrix}}_{b} \quad \textbf{(4)}$$

$$A.c = b \tag{5}$$

Estas ecuaciones difieren de las ecuaciones normales, en la supresión de la última fila y columna como consecuencia de la anulación de a_0 . Este sistema se caracteriza por tener una mala condición, es decir gran capacidad para transmitir los errores de los datos, sin embargo al ser el grado del polinomio bajo (los valores de m difícilmente superen a 3 ó 4) se llega a sistemas lineales de bajo orden, por lo que la debilidad del método no se manifiesta en la mayoría de los casos .

Una alternativa no expuesta en este trabajo consiste en resolver (5) mediante el algoritmo QR. Donde $A = Q * R$, siendo Q una matriz ortogonal, quedando el sistema $R.c = Q^t b$ de muy fácil resolución al ser R una matriz triangular superior.

Este método salva el problema del mal condicionamiento. En los casos que se estudiaron, no fue necesaria su aplicación.

La matriz A y el vector b de (5) pueden ser expresado como:

$$A = a^T a \quad b = a^T y' \tag{6}$$

Siendo:

$$a = \begin{bmatrix} x'^{m}_1 & x'^{m-1}_1 \dots\dots\dots\dots x_1 \\ x'^{m}_2 & x'^{m-1}_2 \dots\dots\dots\dots x_2 \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x'^{m}_n & x'^{m-1}_n \dots\dots\dots\dots x_n \end{bmatrix} \tag{7}$$

La formas (6) y (7) facilitan la construcción de la matriz A y el vector b. Esta matriz a expresa en sus columnas el ajuste por polinomio, notando la ausencia del término independiente que representa el paso por el origen considerado.

Resuelto (5) se construye el polinomio:

$$p(x') = a_m x'^{m} + a_{m-1} x'^{m-1} \quad \dots + a_1 x' \ . \tag{8}$$

Luego se rescatan las variables originales :

$$\begin{aligned} x &= X + x_0 \\ y &= -Y + y_0 \ \ si\ X < 0 \\ y &= \ \ Y + y_0 \ \ si\ X > 0 \end{aligned} \tag{9}$$

resultando el polinomio de aproximación :

$$\begin{cases} p(x) = \ \ a_m(x - x_0)^m + a_{m-1}(x - x_0)^{m-1} + \cdots + (x - x_0)x' + y_0 \ \ para \ \ x > x_0 \\ p(x) = -a_m(x - x_0)^m - a_{m-1}(x - x_0)^{m-1} - \cdots - (x - x_0)x' + y_0 \ \ para \ \ x < x_0 \end{cases} \tag{10}$$

3 Elección del grado m del polinomio

Una regla práctica para elegir m para polinomios completos, consiste en interceptar la gráfica de los datos con una recta adecuada, el máximo número de cortes logrado, indica el grado m del polinomio. Para el caso nuestro, en que el polinomio es incompleto ($a_0 = 0$), tenemos una ecuación menos por lo que de principio es conveniente sumarle 1 al valor de m obtenido por la regla anterior.

Otra forma [2] consiste en calcular la dispersión:

$$\sigma^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{(y_i - p(x_i))^2}{n - m} \tag{11}$$

y el valor mínimo de ésta determina el grado m. En caso de no obtener este mínimo se elige como valor de m aquel que luego de una disminución significativa de la σ^2 (11) con el aumento de m, no ocurre un decrecimiento importante [2].

4 Implementación del método y programa en forma de archivo M

- Dado un conjunto de n puntos (x_i, y_i) $i=1:n$, se los gráfica y se elige el grado m del polinomio
- Se reubica el origen de coordenadas en el punto anguloso y se realiza la semi-reflexión de la rama ubicada a la izquierda del punto anguloso.
- Se construye la matriz a, A y el vector b. Se resuelve el sistema lineal (5) obteniéndose los coeficientes a_j. Se determina el polinomio (10)
- Se gráfica.

Algoritmo. Para la implementación computacional se usa el paquete informático MatLab.

El siguiente *archivo M* se guarda con el nombre *anguloso.* Para una nube de puntos dados como vectores x e *y,* el algoritmo ajusta con un polinomio de grado *m.* Si no se da las coordenadas del punto anguloso, el programa toma como tal a las que corresponden al punto de ordenada minima. Como argumentos de salidas se obtienen las coordenadas del ajuste, y el polinomio de aproximacion (dado como un vector de coeficientes) . La salida grafica se consigue cuando se llama a *anguloso* sin introducir argumentos en la salida. El archivo contiene comentarios para facilitar su comprension.

```
function [p,xxx,yyy]=anguloso(x,y,m,xc,yc)
% [p,xxx,yyy]= anguloso (x,y,m,xc,yc) Ajusta con un polinomio de grado m, % que
pasa por el punto(xc,yc)
% En caso de no ingresar (xc,yc) (número de argumentos de
% entrada igual a 3) (nargin=3), se asume como punto anguloso, el de menor %
ordenada
if nargin==3
[yc,jj]=min(y);
 xc=x(jj);
end
x=x(:);y=y(:);
% Traslación del origen
X=x-xc;Y=y-yc;
ii=find(X<0)
%reflexión según eje Y(-)
Y(ii)=-Y(ii);
% Formación del sistema lineal
for jj=1:m,
a(:,jj)=[X.^(m+1-jj)];
 end
% Resolución del sistema lineal
p=a\Y;
%Se completa el polinomio con cero en la columna de término independiente
% para que se interprete como de grado m
p=[p;0];
```

```
% Variables de salida
h=min(diff(x))/10;% paso pequeño
XX=X(1):h:X(end);
% representa a valores continuos de X
XX=XX(:);
%Evalua al polinomio p en los puntos XX
z=polyval(p,XX);
iii=find(XX<0);
%reflexión según eje Y(-)
z(iii)=-z(iii);%
%Traslación a los ejes originales
xxx=XX+xc;
yyy=z+yc;
% Gráfico
if nargout==0,
plot(xxx yyy,x,y,'o')
end
```

5 Extensión del método a otras funciones y otras definiciones de error

El método se puede extender fácilmente a funciones no polinómicas, reemplazando las ecuaciones normales por un algoritmo de minimización para obtener los coeficientes, .para ello se puede emplear el algoritmo Simplex de Nelder-Mead [3] implementado en MatLab. Este es un método iterativo que requiere de un valor inicial (dado por las Ecuaciones Normales).

Otras definiciones que remplazan a la definición (1) de error son:

$$E_1 = \sum_{i=1}^{n} \left| y_i - p(x'_i) \right| \quad \textbf{(12)}$$

$$E_\infty = \max_i \left| y_i - p(x'_i) \right| \quad \textbf{(13)}$$

La última expresión (13) (Norma infinito) se usa cuando se requiere de una cota de error en todo el intervalo de trabajo y su uso es cuando se disponen de datos casi perfectos (por ejemplo tablas numéricas de funciones matemáticas), pues es muy sensible a los valores discordantes (fuera de línea). Para datos con dispersión como los experimentales la fórmula (12) es más conveniente. En ambos casos sólo métodos numéricos iterativos se pueden usar para lograr el mínimo.

6 Resultados

La obtención de los coeficientes garantiza la calidad del método, ya que la solución es única y óptima.

La Fig. 2 muestra un ejemplo de aproximación con un polinomio de cuarto grado. Para datos con el punto anguloso en la parte superior, se cambia el signo de la ordenada, se aplica el método desarrollado normalmente y al ajuste obtenido se le cambia el signo de la función obtenida.

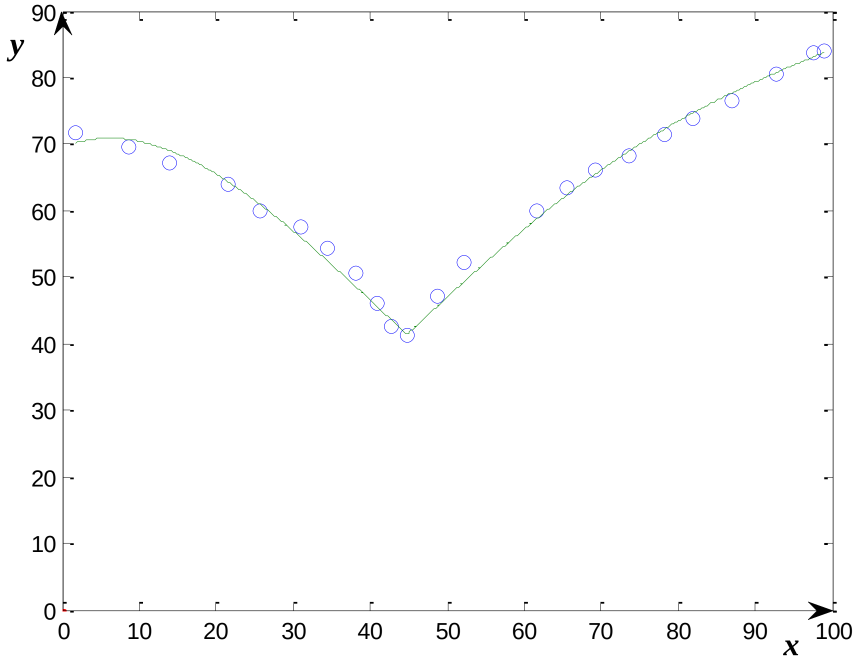


Fig. 2: Ajuste de datos ' o ' (en azul) con polinomio de cuarto grado (en verde) que pasa por el punto anguloso.

7 Conclusiones

Para datos dados por una nube de puntos que presentan un punto anguloso, se ha desarrollado un algoritmo para aproximar con un polinomio de grado m . El polinomio al pasar por el punto anguloso cambia el signo de sus coeficientes pero no su valor absoluto, lo que permite que con una expresión se adapte a datos que normalmente necesitarían de dos expresiones de polinomio según la parte del dominio que se considere.

Referencias

1. Press, W. H. et al . : *Numerical Recipes.* Cambridge University Press (1986)
2. Ralston, A. : *Introducción al Análisis Numérico*. Limusa (1978)
3. Shampine, L. F.; Reichelt : *The MatLab Ode Suite*, L. F. W. SIAM Journal on Scientific Computing (1997)

Volver al Índice

Aplicación de Conceptos Teórico-Prácticos de Algebra Lineal para el Cálculo de Balances de Masa Utilizados en Ingeniería en Alimentos

Lucrecia L. Chaillou[1], Valeria Corvalán[1]
[1] Departamento Físico-Matemático, Facultad de Agronomía y Agroindustrias, Universidad Nacional de Sgo. del Estero
Av. Belgrano (S) 1912
chaillou@unse.edu.ar, valeriacorvalan32@hotmail.com

Resumen. En este trabajo se presenta una situación problemática relativa a la elaboración industrial de alimentos cuya resolución involucra conceptos teórico-prácticos propios de la asignatura de primer año Algebra y Geometría Analítica que se dicta para la carrera Ingeniería en Alimentos en la Facultad de Agronomía y Agroindustrias de la UNSE. Se incluye una introducción en la que se destaca la importancia de los balances de masa, específicamente, durante la operación unitaria de evaporación de un jugo de frutas para obtener un producto concentrado. A continuación, se explicitan los pasos a seguir para su resolución y se destacan las competencias matemáticas que se tratarán de incentivar en los alumnos, durante el desarrollo del problema. Este trabajo se implementará en el dictado de la asignatura mencionada, así como también en la asignatura de tercer año Cálculo Numérico.

Palabras Clave: Álgebra lineal, Aprendizaje, balances de masa, Competencias.

1 Introducción

La asignatura Álgebra y Geometría Analítica forma parte de las asignaturas de la disciplina Matemática que transita el alumno de la carrera Ingeniería en Alimentos que se dicta en la Facultad de Agronomía y Agroindustrias (FAyA) de la Universidad Nacional de Santiago del Estero (UNSE).

Como parte de la matemática básica, tiene un valor altamente formativo y en consecuencia tiende al desarrollo de las capacidades intelectuales y a la adquisición de valores, actitudes y normas que contribuyen a la formación general del estudiante y al desarrollo de competencias matemáticas ligadas al conocer, al hacer y al ser.

La asignatura aporta, además, al desarrollo de competencias profesionales del fututo ingeniero como el desarrollo de la capacidad de organizar y planificar su tiempo; de trabajar en forma individual y en equipo; de estudiar en forma autónoma y aprender y superarse en forma permanente; de tomar decisiones; de abstraer, analizar y sintetizar; de hacer conjeturas, de razonar lógicamente, de identificar, formular y resolver problemas; de comunicarse matemáticamente, adquirir y aplicar procesos típicos del pensamiento matemático; de modelar matemáticamente situaciones reales, entre otras. Además, las matemáticas deben permitir desarrollar en el alumno la capacidad de analizar las diferentes componentes de una situación; reconocer situaciones análogas; elegir la estrategia adecuada a cada situación; tener una actitud crítica; construir deducciones y cadenas de deducciones; y construir modelos [1]. Para lograr estas capacidades, se hace necesario incluir situaciones problemáticas relativas al ejercicio profesional de las carreras para las cuales se dicta la asignatura.

Los problemas que se plantean en Ingeniería son muy diversos, específicamente, los que se plantean en el estudio de los Fenómenos de Transporte y las Operaciones Unitarias, cumplen con las leyes de conservación de la masa, de la energía, y de la cantidad de movimiento. Aplicar las leyes de conservación a una situación problemática implica efectuar un balance de la propiedad a estudiar en dicho problema [2].

Un balance puede definirse como la expresión matemática del cambio de la propiedad experimentada por un sistema [3].

En general, la expresión de un balance referido a la unidad de tiempo puede expresarse como:

$$\begin{pmatrix}\text{Propiedad que}\\ \text{entra al sistema}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\text{Propiedad que}\\ \text{sale del sistema}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\text{Propiedad que}\\ \text{se acumula}\end{pmatrix}$$

En forma simbólica:

$$E=S+A \tag{1}$$

Dónde:
E: propiedad que entra al sistema
S: propiedad que sale del sistema
A: propiedad que se acumula

En el caso que exista una reacción química, se utiliza un término adicional que corresponde a la generación (G), es decir:

$$E+G=S+A \tag{2}$$

Considerando los balances de masa, estos se fundamentan en el Principio de Conservación de la masa, enunciado por Lavoissier: la masa no se crea ni se destruye, sólo se transforma. Es decir, en cada proceso existe la misma cantidad de sustancia presente antes y después de que el proceso haya sucedido. Si se consideran sistemas cerrados y abiertos, definiéndose un sistema como la porción del universo en el cual se centra el estudio, puede comprender una cantidad fija de masa, o un espacio o volumen determinado, o incluso una determinada extensión de territorio), la distribución de los materiales puede cambiar entre un instante inicial y uno final, debido a cambios físicos o químicos, pero la cantidad total, medida en unidades de masa, se mantiene antes y después de un proceso. La resolución de un balance de materia permite calcular los caudales y composiciones de las corrientes que entran y salen del sistema así como la cantidad total. Para realizarlo se necesitan conocer la masa que ingresa al sistema, la que sale y la que se acumula, se plantean las ecuaciones y para encontrar la solución se aplican métodos de resolución de sistemas de ecuaciones algebraicas lineales.

2 Objetivos

El objetivo de este trabajo es aplicar la teoría de matrices, de determinantes y de sistemas de ecuaciones algebraicas lineales a situaciones problemáticas relativas al ejercicio profesional de la Ingeniería en Alimentos para interesar, motivar, ilustrar e informar a los estudiantes, y desarrollar competencias para que logren utilizar estrategias eficientes y efectivas en la resolución de problemas; plantear adecuadamente un balance de masa en un proceso tecnológico relativo a la Ingeniería en Alimentos y aplicar el contexto conceptual para el análisis y la resolución de sistemas de ecuaciones algebraicas lineales. En definitiva, se pretende orientar técnicamente al alumno de manera que reciba no solo los fundamentos teóricos sino que también pueda familiarizarse con una gran cantidad de aplicaciones incorporadas directamente a los desarrollos teóricos.

3 Materiales y Metodología

Este ejercicio de aplicación está destinado a los alumnos de primer año de la carrera Ingeniería en Alimentos de la FAyA-UNSE.

Para alcanzar los objetivos planteados se utiliza una situación problemática que se presenta en la elaboración industrial de alimentos. Las competencias que se intenta que el alumno logre son las siguientes:

a) utilizar estrategias eficientes y efectivas para la resolución de problemas para que los resultados del aprendizaje sean: analizar los diferentes componentes de una situación problemática, construir deducciones y cadenas de deducciones, construir modelos de resolución, y comparar y contrastar los diversos métodos de resolución;

b) plantear adecuadamente un balance de masa en un proceso tecnológico relativo a la Ingeniería en Alimentos para que como resultados del aprendizaje el alumno logre aplicar los principios generales de los balances de materia, realizar y utilizar diagramas de flujo de procesos de elaboración de alimentos, realice cálculos de cantidad de materias primas y productos terminados; y

c) aplicar el contexto conceptual para el análisis y la resolución de sistemas de ecuaciones algebraicas lineales de manera que como resultado el alumno pueda resolver estos sistemas, identifique diferentes métodos de resolución y compare las diferencias conceptuales de estos métodos.

   La evaporación es una operación unitaria empleada para eliminar agua de los alimentos líquidos diluidos y obtener un producto líquido concentrado. Específicamente, para jugos de fruta, esta operación es beneficiosa puesto que la reducción del peso y del volumen del jugo, disminuyen las necesidades de espacio para almacenamiento, además se pasteuriza el jugo; se desactivan las pectinasas, enzimas que afectan la materia opaca; y se protege al alimento contra el deterioro microbiano, prolongando la vida útil del producto. La desventaja de la evaporación es que el tratamiento térmico aumenta la susceptibilidad a la oxidación del producto y destruye componentes aromáticos delicados [4].

Un ejemplo de una situación problemática propia de la fabricación de jugos concentrados de naranjas [5] es el que sigue.

En un proceso para concentrar 800 kg de jugo de naranja (J_1) recién extraído, que contienen 12,5% en peso de sólidos (x_1), la separación produce 600 kg de jugo (J_2) y 200 kg de pulpa (P). El jugo exprimido se concentra en un evaporador al vacío para obtener una concentración de 59% de sólidos (x_3). Los 200 kg de pulpa se derivan extrayéndolos antes de entrar al evaporador y se mezclan con el jugo evaporado en un mezclador, para mejorar el sabor. El jugo final tiene 44% de sólidos en peso (x_4). Calcular:

a. La concentración de sólidos en el jugo exprimido (separado) (x_2)

b. Los kg de jugo concentrado final (J_4)

c. La concentración de sólidos de la pulpa que se deriva (x_p).

Para resolverlo, consideremos el diagrama de flujo de las operaciones involucradas (Fig. 1):

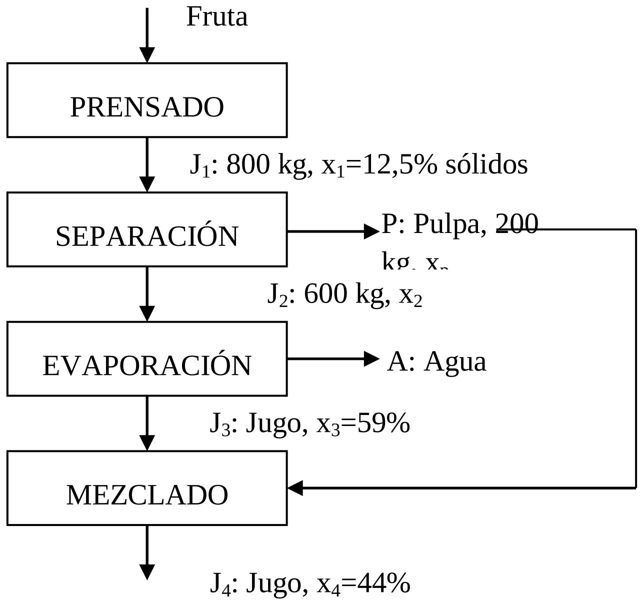


Fig. 1. Diagrama de flujo de las operaciones unitarias involucradas en la fabricación de un jugo de frutas concentrado.

Se realiza un balance de materia para cada una de operaciones involucradas luego del prensado, aplicando la ecuación (1).

Balance para la etapa de separación:

$$J_1 = J_2 + P \qquad \textbf{(3)}$$

Balance para la etapa de evaporación:

$$J_2 = J_3 + A \qquad \textbf{(4)}$$

Balance para la etapa de mezclado:

$$J_4 = J_3 + P \qquad \textbf{(5)}$$

Balance total, sin considerar las etapas intermedias:

$$J_1 = J_4 + A \qquad \textbf{(6)}$$

Se tiene un sistema de cuatro ecuaciones con tres incógnitas,

$$\begin{cases} J_1 = J_2 + P \\ J_2 = J_3 + A \\ J_4 = J_3 + P \\ J_1 = J_4 + A \end{cases} \qquad \textbf{(7)}$$

Sin embargo, antes de resolverlo se debe considerar que en las ecuaciones (3) y (6) los primeros miembros son iguales, por lo tanto:

$$J_2 + P = J_4 + A$$

Despejando J_2,

$$J_2 = J_4 + A - P \qquad \textbf{(8)}$$

El primer miembro de (8) es igual al del la ecuación (4), y despejando P se obtiene la ecuación (9)

$$J_4 + A - P = J_3 + A$$

$$P = J_4 - J_3 \qquad \textbf{(9)}$$

Esta ecuación es igual a la ecuación (5), por lo tanto se tiene una sola ecuación con dos incógnitas, el sistema es incompatible.

Para solucionarlo es necesario plantear otras ecuaciones, además de la (9) aplicando balances de sólidos:

Balance de sólidos para la etapa de separación:

$$J_1x_1= J_2x_2+ P\ x_p \tag{10}$$

Balance de sólidos para la etapa de mezclado:

$$J_4x_4= J_3x_3+ Px_p \tag{11}$$

Balance total de sólidos, sin considerar las etapas intermedias:

$$J_1x_1= J_4x_4 \tag{12}$$

Son tres ecuaciones con cuatro incógnitas: x_2, x_p, J_3 y J_4, se necesita una ecuación adicional (9) que es la única que queda del balance de sólidos.

En síntesis, el sistema queda reducido a:

$$\begin{cases} P = J_4 - J_3 \\ J_1x_1= J_2x_2+ P\ x_p \\ J_4x_4= J_3x_3+ Px_p \\ J_1x_1=J_4x_4 \end{cases} \tag{13}$$

Reordenando, puede escribirse el sistema como:

$$\begin{cases} J_4 - J_3 =P \\ J_2x_2+ P\ x_p= J_1x_1 \\ J_4x_4 - J_3x_3 - Px_p = 0 \\ J_4=J_1x_1/x_4 \end{cases} \tag{14}$$

Reemplazando los datos del problema propuesto se tiene:

$$\begin{cases} J_4 - J_3 =200 \\ 600x_2+ 200\ x_p= 800.\ 0{,}125= 100 \\ 0{,}44\, J_4 - 0{,}59\, J_3 - 200x_p =0 \\ J_4=800 \text{ x } 0{,}125/0{,}44=227{,}27 \end{cases} \tag{15}$$

En síntesis, el sistema, luego de resolver las operaciones algebraicas y reordenándolo es:

$$\begin{cases} - J_3 + J_4 =200 \\ 600x_2+ 200\ x_p= 100 \\ - 0{,}59\, J_3 + 0{,}44\, J_4 - 200x_p =0 \\ J_4= 227{,}27 \end{cases} \tag{16}$$

Para resolver este sistema, pueden utilizarse varios métodos que se desarrollan en la asignatura Algebra y Geometría Analítica, tales como: eliminación gaussiana, Gauss Jordan, o bien aplicando la Regla de Cramer.

a) Método de Eliminación Gaussiana

En este método se debe transformar la matriz ampliada del sistema en una del tipo triangular superior (eliminación hacia delante), y a continuación se calculan las incógnitas desde la última fila a la primera aplicando sustitución (sustitución hacia atrás).

La matriz ampliada del sistema es:

$$\begin{array}{cccc|c} J_3 & J_4 & x_2 & x_p & \\ \hline -1 & 1 & 0 & 0 & 200 \\ 0 & 0 & 600 & 200 & 100 \\ -0{,}59 & 0{,}44 & 0 & -200 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 227{,}27 \end{array} \tag{17}$$

Eliminación hacia adelante

Se aplican operaciones elementales por filas para reducir la matriz ampliada a una triangular superior.

$$\begin{array}{c}\begin{matrix} J_3 & J_4 & x_2 & x_p & \end{matrix}\\ \left[\begin{array}{cccc:c} -1 & 1 & 0 & 0 & 200 \\ 0 & 0 & 600 & 200 & 100 \\ -0{,}59 & 0{,}44 & 0 & -200 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 227{,}27 \end{array}\right]\end{array} \qquad \textbf{(18)}$$

$$\begin{array}{c}\begin{matrix} J_3 & J_4 & x_2 & x_p & \end{matrix}\\ \left[\begin{array}{cccc:c} -1 & 1 & 0 & 0 & 200 \\ 0 & 0 & 600 & 200 & 100 \\ -0{,}59 & 0{,}44 & 0 & -200 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 227{,}27 \end{array}\right]\end{array} \xrightarrow{F_2 \longleftrightarrow F_4} \begin{array}{c}\begin{matrix} J_3 & J_4 & x_2 & x_p & \end{matrix}\\ \left[\begin{array}{cccc:c} -1 & 1 & 0 & 0 & 200 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 227{,}27 \\ -0{,}59 & 0{,}44 & 0 & -200 & 0 \\ 0 & 0 & 600 & 200 & 100 \end{array}\right]\end{array}$$

$$\xrightarrow{(-1)F_1} \begin{array}{c}\begin{matrix} J_3 & J_4 & x_2 & x_p & \end{matrix}\\ \left[\begin{array}{cccc:c} 1 & -1 & 0 & 0 & -200 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 227{,}27 \\ -0{,}59 & 0{,}44 & 0 & -200 & 0 \\ 0 & 0 & 600 & 200 & 100 \end{array}\right]\end{array} \xrightarrow{(0{,}59)F_1+F_3} \begin{array}{c}\begin{matrix} J_3 & J_4 & x_2 & x_p & \end{matrix}\\ \left[\begin{array}{cccc:c} 1 & -1 & 0 & 0 & -200 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 227{,}27 \\ 0 & -0{,}15 & 0 & -200 & -118 \\ 0 & 0 & 600 & 200 & 100 \end{array}\right]\end{array} \qquad \textbf{(19)}$$

$$\xrightarrow{(0{,}15)F_2+F_3} \begin{array}{c}\begin{matrix} J_3 & J_4 & x_2 & x_p & \end{matrix}\\ \left[\begin{array}{cccc:c} 1 & -1 & 0 & 0 & -200 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 227{,}27 \\ 0 & 0 & 0 & -200 & -83{,}91 \\ 0 & 0 & 600 & 200 & 100 \end{array}\right]\end{array} \xrightarrow{F_4 \longleftrightarrow F_3} \begin{array}{c}\begin{matrix} J_3 & J_4 & x_2 & x_p & \end{matrix}\\ \left[\begin{array}{cccc:c} 1 & -1 & 0 & 0 & -200 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 227{,}27 \\ 0 & 0 & 600 & 200 & 100 \\ 0 & 0 & 0 & -200 & -83{,}91 \end{array}\right]\end{array}$$

Sustitución hacia atrás
Se realizan ahora las sustituciones hacia atrás:
De la Fila 4 se tiene:

$$-200\ x_p=-83{,}91;\ x_p=0{,}42 \qquad \textbf{(20)}$$

De la Fila 2:

$$600\ x_2 + 200\ x_p=100;\ \ x_2=\frac{100-(200\,.\,0{,}42)}{600}=0{,}03 \qquad \textbf{(21)}$$

De la Fila 3

$$J_4 = 227{,}27 \qquad \textbf{(22)}$$

Por último, de la Fila 4

$$J_3 - J_4= -\ 200;\ J_3 = -200+227{,}27=27{,}27 \qquad \textbf{(23)}$$

b) Método de Gauss Jordan

La matriz ampliada se reduce mediante operaciones elementales por filas de manera que la matriz de coeficientes, incluida en la matriz ampliada, se convierte en una matriz identidad. Considerando el desarrollo anterior, en el que se aplicaron las operaciones elementales de intercambio de filas (Fila 2 por Fila 4) y el producto del escalar por una fila (-1Fila 1), se tiene:

$$\begin{array}{c}\begin{matrix} J_3 & J_4 & x_2 & x_p & \end{matrix}\\ \left[\begin{array}{cccc:c} 1 & -1 & 0 & 0 & -200 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 227{,}27 \\ 0 & -0{,}15 & 0 & -200 & -118 \\ 0 & 0 & 600 & 200 & 100 \end{array}\right]\end{array} \xrightarrow{(F_2+F_1)=F_1'} \begin{array}{c}\begin{matrix} J_3 & J_4 & x_2 & x_p & \end{matrix}\\ \left[\begin{array}{cccc:c} 1 & 0 & 0 & 0 & 27{,}27 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 227{,}27 \\ 0 & 0 & 0 & -200 & -83{,}91 \\ 0 & 0 & 600 & 200 & 100 \end{array}\right]\end{array}$$

$$\xrightarrow{F_4\longleftrightarrow F_3}\left[\begin{array}{cccc:c} J_3 & J_4 & x_2 & x_p & \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 27{,}27 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 227{,}27 \\ 0 & 0 & 600 & 200 & 100 \\ 0 & 0 & 0 & -200 & -83{,}91 \end{array}\right]\xrightarrow{\frac{1}{600}F_3}\left[\begin{array}{cccc:c} J_3 & J_4 & x_2 & x_p & \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 27{,}27 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 227{,}27 \\ 0 & 0 & 1 & 0{,}33 & 0{,}17 \\ 0 & 0 & 0 & -200 & -83{,}91 \end{array}\right] \qquad \textbf{(24)}$$

$$\xrightarrow{-\frac{1}{200}F_4=F_4'}\left[\begin{array}{cccc:c} J_3 & J_4 & x_2 & x_p & \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 27{,}27 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 227{,}27 \\ 0 & 0 & 1 & 0{,}33 & 0{,}17 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0{,}42 \end{array}\right]\xrightarrow{-0{,}33F_4'+F_3=F_3''}\left[\begin{array}{cccc:c} J_3 & J_4 & x_2 & x_p & \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 27{,}27 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 227{,}27 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0{,}03 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0{,}42 \end{array}\right]$$

Como se puede observar, se llega al mismo resultado, la solución es:
$x_p=0{,}42$; $x_2=0{,}03$; $J_4=227{,}27$; $J_3=27{,}27$

La resolución mediante la Regla de Cramer, involucra lo siguiente:

a) Cálculo del determinante de la matriz de coeficientes del sistema.

Se utiliza el desarrollo por cofactores de la Fila 2.

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 600 & 200 \\ -0{,}59 & 0{,}44 & 0 & -200 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 600(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -0{,}59 & 0{,}44 & -200 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} + 200(-1)^{2+4}\begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -0{,}59 & 0{,}44 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= -600\left[1(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -0{,}59 & -200 \end{vmatrix}\right] + 200\left[1(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -0{,}59 & 0 \end{vmatrix}\right] = \qquad \textbf{(25)}$$

$$= -600(-200) + 200(-1)0 = 120000$$

Para calcular las incógnitas, se procede realizando el cociente del determinante que resulta de reemplazar en el determinante del sistema la columna correspondiente a los coeficientes de la incógnita que se desea calcular por la columna de términos independientes y el determinante del sistema. Es decir:

$$J_3 = \frac{\begin{vmatrix} 200 & 1 & 0 & 0 \\ 100 & 0 & 600 & 200 \\ 0 & 0{,}44 & 0 & -200 \\ 227{,}27 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}}{120000} = \frac{200(-1)^2\begin{vmatrix} 0 & 600 & 200 \\ 0{,}44 & 0 & -200 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} + 1(-1)^3\begin{vmatrix} 100 & 600 & 200 \\ 0 & 0 & -200 \\ 227{,}27 & 0 & 0 \end{vmatrix}}{120000} = \qquad \textbf{(26)}$$

$$= \frac{200\left[1(-1)^2\begin{vmatrix} 600 & 200 \\ 0 & -200 \end{vmatrix}\right] - 1\left[227{,}27(-1)^4\begin{vmatrix} 600 & 200 \\ 0 & -200 \end{vmatrix}\right]}{120000} =$$

$$\frac{200(-120000) - 227{,}27(-120000)}{120000} = 27{,}27$$

De la misma manera, y para evitar la reiteración de la aplicación de la regla, se calcula el resto de las incógnitas. A continuación, se indican los determinantes correspondientes y su solución.

$$J_3 = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 200 & 0 & 0 \\ 0 & 100 & 600 & 200 \\ -0{,}59 & 0{,}44 & 0 & 0 \\ 0 & 227{,}27 & 0 & 0 \end{vmatrix}}{120000} = 27{,}27;\ x_2 = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 1 & 200 & 0 \\ 0 & 0 & 100 & 200 \\ -0{,}59 & 0{,}44 & 0 & -200 \\ 0 & 1 & 227{,}27 & 0 \end{vmatrix}}{120000} = 0{,}03;\ x_p = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 & 200 \\ 0 & 0 & 600 & 100 \\ -0{,}59 & 0{,}44 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 227{,}27 \end{vmatrix}}{120000} = 0{,}42 \qquad \textbf{(27)}$$

4 Conclusiones

En este trabajo se presentó una situación problemática propia de la industria de alimentos que se resolvió aplicando los conceptos de matrices, determinantes y sistemas de ecuaciones algebraicas lineales, que se desarrollan en la asignatura Algebra Lineal y Geometría Analítica de la carrera Ingeniería en alimentos. Esto permite que los alumnos comprendan la importancia de la asignatura y que desarrollen competencias para que logren utilizar estrategias eficientes y efectivas en la resolución de problemas; plantear adecuadamente un balance de masa en un proceso tecnológico relativo a la Ingeniería en Alimentos y aplicar el contexto conceptual para el análisis y la resolución de sistemas de ecuaciones algebraicas lineales.

Esta aplicación se utilizará durante el dictado de las asignaturas Algebra y Geometría Analítica, correspondiente al Primer Módulo del Primer Año y Cálculo Numérico del Tercer Año de la carrera de Ingeniería en Alimentos de la Facultad de Agronomía y Agroindustrias de la Universidad Nacional de Santiago del Estero. De esta manera se resaltará la importancia del Algebra Lineal para la resolución de problemas de ingeniería y se tenderá a que los alumnos que estudian la carrera mencionada tengan contacto con terminología específica de la carrera, con un problema real y apliquen los conceptos desarrollados en las asignaturas mencionadas. Además, los alumnos de Cálculo Numérico utilizarán los conceptos del Algebra para desarrollar algoritmos de solución de sistemas de ecuaciones algebraicas lineales que se implementarán mediante un software adecuado. La implantación de este trabajo permitirá que los alumnos organicen su tiempo; trabajen en forma individual y en equipos; tomen decisiones, analicen sinteticen y razonen lógicamente formulando y resolviendo un problema.

Referencias

1. Santaló, L.: *La matemática en la educación*. Editorial Docencia. Buenos Aires, pp. 13-16 (1996)
2. Ibarz, A.; Barbosa-Cánovas, G.V.: Capítulo 18: evaporación. Ediciones Mundi-Prensa Libros. *Operaciones unitarias en la Ingeniería de alimentos*, pp. 627–657 (2005)
3. Hermida Bun, S.A.: *Fundamentos de Ingeniería de Procesos Agroalimentarios*. Ediciones Mundi-Prensa Libros, pp. 10–11 (2000)
4. Sorour, M.A.; Mostafa, S.R.; Bo Samri, S.M.: A Case Study of Orange Juice Concentration by Recompression Evaporation Techniques. *Journal of Food Process Engineering*, Vol. 36, No. 3, pp. 337-342 (2013)
5. Rodríguez Nuñez, J.L; Macavilca, E.: Ejercicios de balance de materia y energía aplicados a procesos industriales. http://alimentaria.pe.tripod.com/masaenergia.pdf. Accedido el 10 de Diciembre de 2016

Volver al Índice

Determinación del Punto de Equilibrio del Mercado Usando Matlab

Sonia Jacamo, María R. Castro
Departamento de Matemática, Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de San Juan
Libertador 1109 (0) CP 5400, San Juan, Argentina.
sjacamo@unsj.edu.ar, mrcastro@unsj.edu.ar

Resumen. La adquisición de conceptos relacionados con la economía es importante dentro de la formación complementaria requerida para el desempeño profesional de los ingenieros. Para que el aprendizaje de ciertos conceptos o procedimientos puedan ser comprensibles y significativos para el alumno, se propone en este trabajo una aplicación que integra conceptos de economía, métodos numéricos y programación en Matlab permitiéndole al estudiante, visualizar y realizar el anclaje de nuevos conceptos con algunos ya aprendidos y realizar la conexión con la realidad. Este artículo consta de tres secciones, en la primera se exponen los conceptos de oferta, demanda y punto de equilibrio, en la segunda se recuerdan los conceptos de interpolación y el método de Newton-Raphson para calcular los ceros de una ecuación y finalmente en la última sección se muestran programas en Matlab cuyas salidas son las gráficas de las curvas de oferta y demanda y el punto de equilibrio.

Palabras Clave: Modelo de oferta y demanda, Punto de equilibrio, Método de Newton-Raphson, Polinomio interpolador de Lagrange.

1 Introducción

La enseñanza de la economía es parte importante dentro de la formación complementaria para el desempeño profesional de los ingenieros.

Pero además de su pertinencia técnica, se trata de un tipo de conocimiento que podríamos caratular como indispensable desde el punto de vista cultural, sobre todo tratándose de un nivel universitario.

En este trabajo se presenta una propuesta didáctica para la enseñanza de un tema muy importante de la economía, que es *La Ley de la Oferta y la Demanda* y la determinación del *punto de equilibrio del mercado*.

Esta propuesta se diseñó teniendo en cuenta aspectos didácticos, que le permitan a los alumnos, la incorporación y relación de conceptos de manera significativa.

Los enfoques educativos sobre los que se sustentan las nuevas estrategias de intervención pedagógica requieren un mayor compromiso por parte de los docentes universitarios, debiendo revisar los contenidos disciplinares y buscar las conexiones y articulaciones de los mismos con otras áreas del conocimiento, permitiendo así un aprendizaje significativo por parte de los alumnos. También es fundamental redefinir el rol de los docentes y alumnos que interactúan, de una manera dinámica y flexible, relacionando los contenidos con un enfoque interdisciplinar y contextualizándolos en una realidad mundial, regional y local que amplíe la visión del futuro profesional. La inclusión de las tecnologías en Educación implica nuevos espacios, tiempos y formas de trabajo. La utilización general de las TIC contribuye a mejorar las condiciones de aprendizaje, favorece la internalización de los contenidos de las asignaturas, el rendimiento académico, y contribuye también, a un incremento en la permanencia y a la reducción del desgranamiento y la deserción.

Para que un aprendizaje deje de ser memorístico para convertirse en una representación de la realidad; ciertos conceptos o procedimientos pueden ser comprensibles para el alumno cuando se visualizan. La tecnología computacional es una herramienta de importancia para la actividad ingenieril; se enseña y aplica diferente software y el profesor es el promotor del uso de estas herramientas para facilitar al estudiante el desarrollo de programas de aplicación en sus diferentes asignaturas. Este trabajo presenta la aplicación de Matlab en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la determinación del punto de equilibrio del mercado, interrelacionando conceptos de economía, matemática y programación, en donde se observa que el estudiante se involucra de manera más activa en el proceso de enseñanza aprendizaje, logrando el desarrollo de las habilidades de pensamiento lógico en el manejo de Matlab, lo que impacta en una reducción de tiempo de cálculo e iteraciones para la obtención de las soluciones en su aplicación, versus la práctica docente tradicional que no aplica esta herramienta sino la calculadora lo cual hace más tediosos y prolongados estos tiempos. Por otra parte, *el uso de las tecnologías de información y comunicación (TIC's) en la educación favorecen el aprendizaje del estudiante,* *ya que mediante el uso de éstas herramientas el estudiante se vuelve más participativo en el proceso de su propio aprendizaje* [1].

En lo referente al profesor, éste se debe convertir en un facilitador de la actividad mental constructivista del estudiante al proveerlo de actividades educativas acordes a sus necesidades de aprendizaje [2].

Con esto, se logra que el alumno se involucre de una manera más significativa en su proceso de enseñanza-aprendizaje, lo cual redunda en un aprendizaje de mayor consistencia al verse más motivado y comprometido con la asignatura. Cualquier método de instrucción que comprometa al estudiante en el proceso enseñanza-aprendizaje es conocido como aprendizaje activo [3].

Sabemos que la economía se preocupa por analizar la manera en que la sociedad utiliza los recursos escasos para la producción de bienes y servicios al igual que su distribución equitativa.

La ingeniería estudia diferentes aspectos que intervienen en la productividad y ayuda a mejorarla disminuyendo costos.

De la unión de la ingeniería y la economía surge la ingeniería económica y se la define como la disciplina que formula, estima y evalúa los resultados económicos cuando existen alternativas disponibles para llevar a cabo un propósito definido. Otra forma de definir la ingeniería económica consiste en describirla como un conjunto de técnicas matemáticas que simplifican las comparaciones económicas [4].

En particular, existe una íntima conexión entre economía e ingeniería industrial, un economista debe ser eficiente y competitivo gracias a su conocimiento y su capacidad de proponer soluciones a los problemas de su entorno, debe encargarse de manejar de la mejor forma los recursos, para obtener un aprovechamiento óptimo con bajo costo y mayor beneficio a la sociedad.

Mientras que un ingeniero debe ser capaz de dirigir, crear e implementar procesos de ingeniería y sistemas que mejoren la calidad y productividad, trabajar para eliminar sobreproducciones, basarse en conceptos de economía para lograr un análisis profundo relacionado con los costos y la productividad de procesos con el objetivo de maximizar producción a un menor costo, debe ser capaz de manejar las finanzas a corto, mediano y largo plazo.

En microeconomía las curvas de oferta y demanda, el punto de equilibrio o precio, son herramientas que le permiten al ingeniero sacar un producto al mercado permitiéndole determinar a qué precio tiene que colocar su producto sabiendo cuál es la oferta y cuál es la demanda, que tan flexible es y qué puntos de escasez o abundancia existen.

La implementación de ésta aplicación se puede realizar tanto en el aula de Métodos Numéricos cómo en la de Economía, cumpliendo una función integradora de conceptos y disciplinas.

2 Modelo de oferta y demanda. Punto de equilibrio

El sistema de libre mercado está formado por los agentes económicos fundamentales: los consumidores o demandantes y los productores u oferentes [5].

Los productores ofrecen sus bienes y servicios a cambio de un precio y los consumidores compran esos productos pagando dicho precio.

Se puede decir que este sistema está en constante movimiento y las dos caras de cualquier transacción o intercambio se denominan *oferta* y *demanda*. Éstos son los dos conceptos que vamos a estudiar en esta sección. Comenzaremos por analizar los elementos básicos de la demanda, y para ello nos fijaremos exclusivamente en el comportamiento de los consumidores, luego trataremos la oferta, en la que nos centraremos en los productores.

Una vez que hayamos entendido los dos lados de este mecanismo por separado, analizaremos lo que se entiende por *equilibrio de mercado*.

2.1 Demanda

Demandar significa estar *dispuesto y tener los recursos necesarios para poder adquirir un bien*. Comúnmente se observa que a mayor precio menor demanda y a menor precio del mercado mayor demanda, es decir, existe una relación inversa entre el precio del mercado de un bien y la cantidad de consumidores que están dispuestos a demandar. Esta relación se denomina *tabla de demanda* y su representación gráfica es la *curva de demanda*.

La curva de demanda nos dice la cantidad de consumidores que están dispuestos a demandar en los distintos niveles de precios. Por lo tanto la variable dependiente es la cantidad demandada y la independiente es el precio del mercado.

Analíticamente, la curva de demanda se expresa de la forma:

$$X^d = f(P_x) \qquad \textbf{(1)}$$

Siendo X^d la cantidad demandada del producto x y P_x el precio del mercado del producto x.

La curva de demanda es decreciente y de esta característica surge la *ley de la demanda decreciente* cuyos fundamentos son básicamente dos: el efecto sustitución y el efecto renta (poder adquisitivo).

Cuando se produce un movimiento a lo largo de una curva de demanda, diremos que ha *variado* la cantidad demandada, sin embargo, cuando se desplace toda la curva, estaremos ante una *variación* de la demanda.

Hablaremos de *cantidad demandada* cuando varía el precio y pasamos de un punto a otro de una misma curva, y se dirá *demanda* cuando varía cualquiera de los factores exógenos y pasamos de una curva a otra.

Finalmente, la *demanda del mercado* se define como la suma de las demandas individuales.

2.2 Oferta

Igual que en el caso de la demanda, ofrecer significa *estar dispuesto a vender y tener el producto en condiciones para la venta*. Cuanto mayor es el precio del bien, mayor es la cantidad que los productores están dispuestos a ofrecer, y cuanto menor es el precio, menor es la cantidad que están dispuestos a producir. Por lo tanto existe una relación directa entre el precio del mercado del bien y la cantidad que los productores están dispuestos a ofrecer.

Esta relación se expresa numérica y gráficamente a través de la *tabla de oferta* y la *curva de oferta* respectivamente.

La curva de oferta muestra la cantidad de producto que una empresa está dispuesta a ofrecer para cada nivel de precios, siendo la relación entre estas dos variables positiva.

Analíticamente, la curva de oferta se expresa de la siguiente manera:

$$X^o = f(P_x) \qquad \textbf{(2)}$$

Siendo X^o la cantidad ofrecida del producto x y P_x el precio del mercado del producto x.

Un *movimiento a lo largo de una curva de oferta* tiene lugar cuando pasamos de un punto a otro de una misma curva de oferta. Este hecho ocurre exclusivamente cuando varía el precio del mercado P_x.

Un desplazamiento de la curva de oferta se da cuando la curva entera se mueve, esto ocurre cuando varía algún factor que influye en la oferta, como por ejemplo, costo de producción.

La oferta de mercado se define como la suma de las ofertas individuales, nos muestra la cantidad global que todos los productores están dispuestos a ofrecer a los distintos niveles de precios. Para calcularla, igual que en el caso de la demanda, se suman para cada nivel de precios las cantidades ofrecidas por todos los productores.

2.3 Punto de equilibrio

El análisis del punto de equilibrio tiene el propósito de determinar el valor de una variable o un parámetro que iguala dos elementos, como por ejemplo, el volumen de ventas que igualará ingresos y costos.

En nuestro modelo de oferta y demanda ya hemos estudiado las curvas que las representan, la primera nos muestra la cantidad del bien que los productores están dispuestos a ofrecer y la segunda nos indica la cantidad del bien que los consumidores están dispuestos a adquirir.

Cuando unimos ambas curvas en un solo gráfico *solamente existirá un precio y una cantidad* compatibles con las intenciones tanto de compradores como de productores, este punto resulta de la intersección de las dos curvas y se denomina *punto de equilibrio*.

En la gráfica de la Fig. 1 el punto E representa el punto de equilibrio. En general, un precio arbitrario no logra que los planes de demanda y de oferta coincidan. Solo en el punto de corte de las curvas de oferta y demanda se dará esta coincidencia y solo un precio podrá propiciar un pleno acuerdo entre productores y consumidores. A este precio lo denominamos precio de equilibrio y a la cantidad ofrecida y demandada, comprada y vendida a ese precio, cantidad de equilibrio

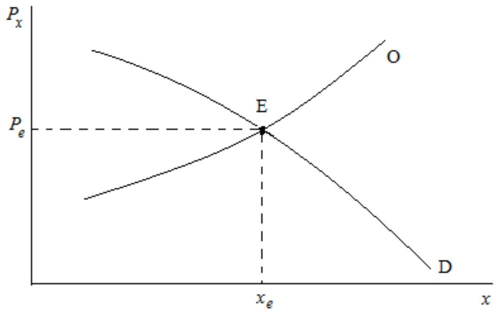


Fig. 1 Gráfica que representa las curvas de oferta (O) y demanda (D) con su correspondiente punto de equilibrio (E).

Analizando la gráfica observamos que podemos tener alguna de las dos situaciones siguientes:

- el precio del mercado P es mayor que P_e: en este caso la cantidad que los productores están dispuestos a ofrecer será superior a la cantidad que los consumidores estén dispuestos a comprar. Se genera entonces una situación de *excedente* o de *exceso de oferta*.
- el precio del mercado P es menor que P_e: en este caso ocurrirá todo lo contrario, es decir, la cantidad que los productores están dispuestos a ofrecer será menor a la que los consumidores estén dispuestos a comprar, se generará entonces una situación de *escasez* o de *exceso de demanda*.

3 Conceptos matemáticos

En esta sección recordaremos el procedimiento para encontrar una curva que pase por $n+1$ puntos datos, esto nos será de utilidad para encontrar las curvas de la oferta O y la demanda D, cuando tengamos datos tabulados de la oferta y la demanda de un producto determinado.

Una vez encontradas las expresiones matemáticas que representan a las curvas O y D, usando polinomios interpoladores de Lagrange, calcularemos el punto de equilibrio y para ello será preciso usar un método que nos permita hallar la raíz de la ecuación que corresponderá a la abscisa del punto de equilibrio.

Ese punto de equilibrio es la intersección de ambas curvas, según se puede ver en la Fig. 1. Para obtener la intersección de dichas curvas haremos que la diferencia entre las mismas se anule.

$$O - D = 0 \tag{3}$$

En algunos casos es imposible calcular la raíz de una ecuación en forma natural, entonces surge la pregunta ¿cómo podemos localizar los ceros de funciones complicadas?

Para responder a esta pregunta necesitamos un método numérico general que no dependa de las propiedades de la función.

Existen muchos métodos para localizar los ceros de una función, nosotros trabajaremos con el método de Newton-Raphson, que veremos en esta sección [6].

3.1 Interpolación. Polinomio interpolador de Lagrange.

Dados $n+1$ puntos en el plano (sin que haya dos con la misma ordenada) el *polinomio interpolador* es el único polinomio de grado menor o igual que n que pasa por dichos puntos.

Existen varios métodos para construir el polinomio de interpolación dados $n+1$ puntos, en este trabajo optamos por encontrarlo usando *el polinomio interpolador de Lagrange* [7].

Dados los puntos $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \cdots, (x_n, y_n)$ el polinomio interpolador de Lagrange que pasa por estos $n+1$ puntos está dado por la ecuación (4).

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} y_k L_{n,k}(x) \tag{4}$$

Donde $L_{n,k}$ es el polinomio coeficiente de Lagrange para los nodos $x_0, x_1, \cdots, x_n$ y está definido por la expresión (5).

$$L_{n,k}(x) = \frac{\prod_{\substack{j=0\\ j\neq k}}^{n}(x - x_j)}{\prod_{\substack{j=0\\ j\neq k}}^{n}(x_k - x_j)} \qquad \textbf{(5)}$$

3.2 Cálculo de las raíces de una ecuación. Método de Newton-Raphson

En el método de Newton, se supone desde el principio que la función f es derivable. Esto implica que la gráfica de f tiene una pendiente definida en cada punto, y por lo tanto una recta tangente única.

En un punto dado $\left(x_0, f(x_0)\right)$ en la gráfica de f existe una tangente, que es una buena aproximación a la curva en un entorno del punto.

Analíticamente esto significa que la función lineal representada con la Ec. **(6)**, está cerca de la función dada f en un entorno de x_0.

$$l(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) \qquad \textbf{(6)}$$

En x_0 las dos funciones f y l coinciden. Tomamos el cero de f como una combinación lineal del cero de l, obteniendo la Ec. **(7)**.

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \qquad \textbf{(7)}$$

Empezando con el punto x_0 (al que podemos interpretar como una aproximación a la raíz buscada), pasamos a un nuevo punto x_1 obtenido de la fórmula anterior.

Este proceso se puede repetir para producir una sucesión de puntos aproximados representados por Ec. (8)

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}, x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)}, \cdots \qquad \textbf{(8)}$$

En condiciones favorables, la sucesión de puntos tenderá a un cero de la función f y obtendremos la fórmula iterativa

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \qquad \textbf{(9)}$$

No siempre es posible aplicar el método, en el intervalo $[a, b]$ será posible aplicarlo si se verifican las siguientes condiciones:

$$\begin{gathered} f \text{ es continua en } [a, b] \\ f(a)f(b) < 0 \\ f' \neq 0 \\ signo(f'') \text{ es constante en el intervalo} \\ f(x_i)f''(x_i) > 0 \end{gathered} \qquad \textbf{(10)}$$

y convergerá si se verifica:

$$g'(x_i) = \left|\frac{f(x_i)f''(x_i)}{(f'(x_i))^2}\right| < 1 \qquad \textbf{(11)}$$

Siendo $\boldsymbol{x_i}$ el valor inicial con el cual comenzaremos a iterar.

4 Ejemplo con datos tabulados: La oferta y la demanda: determinación del punto de equilibrio del mercado

Cuando están en contacto los consumidores y productores con sus respectivos planes de consumo y producción, esto es, con sus respectivas curvas de demanda y oferta en un mercado particular, podemos analizar cómo se lleva a cabo la coordinación de ambos tipos de agentes. En general, un precio arbitrario no logra que los planes de demanda y de oferta coincidan. Solo en el punto de corte de las curvas de oferta y demanda se dará esta coincidencia y solo un precio podrá propiciar un pleno acuerdo entre productores y consumidores. A este precio lo denominamos precio de equilibrio y a la cantidad ofrecida y demandada, comprada y vendida a ese precio, cantidad de equilibrio**.**

A continuación presentaremos una tabla en la que se encuentran tabuladas las cantidades demandadas y ofrecidas para un determinado bien.

Tabla 1. Tabla con los precios, la demanda y la oferta de un bien B.

Precio	Cantidad demanda x	Cantidad ofrecida x
5	9	18
4	10	16
3	12	12
2	15	7
1	20	0

Estamos interesados en conocer el punto de equilibrio en esta situación, para determinar a partir de qué punto el mercado presenta un excedente o una escasez, con ello seremos capaces de predecir en qué momento los precios estarán en baja, neutrales o en alza.

Este ejemplo muestra la importancia de conocer el punto de equilibrio para un empresario o ingeniero, esto les ayudará a tomar decisiones, como por ejemplo, las unidades que tienen que producir.

Para hallar el punto de equilibrio, debemos obtener primero, las ecuaciones explícitas de las curvas de la demanda D y de la oferta O. Para encontrar dichas curvas construimos dos polinomios interpoladores de Lagrange, $D(x)$ y $O(x)$, cuyas expresiones se muestran en las ecuaciones (12) y (13).

$$D(x) = 0.0019x^4 - 0.1082x^3 + 2.3187x^2 - 22.1652x + 83.2727 \qquad \textbf{(12)}$$

$$O(x) = 0.0002x^4 - 0.0062x^3 + 0.0735x^2 - 0.1277x + 1 \qquad \textbf{(13)}$$

4.1 Programas en Matlab y salidas

Una vez que se encontraron las curvas de la oferta y la demanda, el objetivo es representarlas gráficamente y determinar el punto de equilibrio. Para ello implementaremos Matlab que es un programa interactivo para cómputo científico en general, está diseñado para resolver una amplia variedad de problemas que requieren cálculos con matrices, polinomios, aproximaciones de funciones, etcétera.

También nos permite hacer simulaciones, y es por este motivo que es tan importante en la labor profesional de un ingeniero. Es *fundamental* que todo ingeniero tenga un manejo del mismo y que sea capaz de hacer sus propios programas que le permitan resolver distintas situaciones.

En Matlab podemos programar archivos de función y archivos de guión, ambos tienen extensión .m, pero sus diferencias son notorias. Cuando es necesario escribir muchas líneas es conveniente crear un *archivo de guión*, que es el equivalente a un programa principal mientras que *un archivo de función* corresponde a un subprograma, subrutina o función en los lenguajes tradicionales.

A continuación se muestra en el Algoritmo 1 el programa principal que devuelve la representación gráfica de las curvas D, O y $f = D - O$, en las Fig. 2 y Fig. 3.

Algoritmo 1. Programa principal realizado en Matlab.
Permite representar gráficamente las curvas: $\boldsymbol{D}, \boldsymbol{O}, \boldsymbol{f} = \boldsymbol{D} - \boldsymbol{O}$.

```
syms x
D=0.0019*x^4-0.1082*x^3+2.3187*x^2-22.1652*x+83.2727;
O=0.0002*x^4-0.0062*x^3+0.0735*x^2-0.1277*x+1;
figure(1);
clf;
set(figure(1), 'color', 'green');
q=linspace(0,20);
o=subs(O,q);
d=subs(D,q);
anchoDeLinea=3;
plot(q,o,'b','LineWidth', anchoDeLinea), hold on, plot(q,d,'--')
xlabel('x (cant de unid)','fontsize', 10, 'color','b');
ylabel('$P (Precio)','fontsize', 10, 'color','b');
legend('Curva de Demanda','Curva de Oferta','Location','west');
title('Gráficas de las curvas de Oferta (O) y Demanda (D)')
figure(2);
clf;
set(figure(2), 'color', 'cyan');
f=D-O;
Ancho=2;
q=linspace(0,20);
l=subs(f,q);
plot(q,l,'LineWidth', Ancho; title('Gráfica de la curva f=D-O')
x0=11;cota=0.0001;
newraphf(f,x0,cota)
figure(3);
clf;
set(figure(3), 'color', 'yellow');
syms a
newraphgr(f,x0,cota)
```

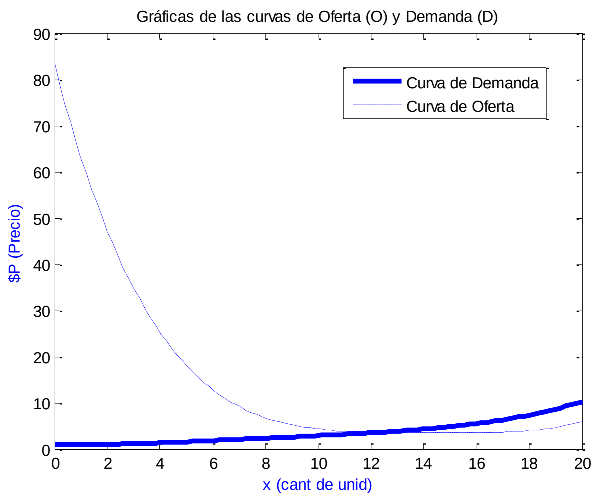


Fig. 2. Gráfica que representa las curvas de oferta O y demanda D. Obtenida con el Algoritmo 1.

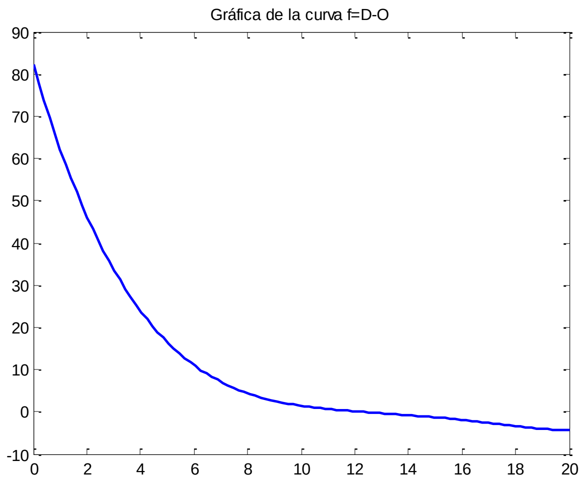


Fig. 3. Salida grafica que representa la curva $f = D - O$. Obtenida con el Algoritmo 1.

En el Algoritmo 2 se muestra la subrutina newraphf(f,x0,cota) que permite calcular el punto de equilibrio usando el método de Newton, en este caso se fija una tolerancia de error de 0.0001.

Finalmente en el Algoritmo 3 se representan gráficamente la función f con dos rectas tangentes que permite visualizar el proceso iterativo del método empleado.

Algoritmo 2. Subrutina que determina el cero de la función $\boldsymbol{f = D - O}$, es decir calcula la abscisa del punto de equilibrio.

```
function [x]=newraphf(f,x0,cota)
df=diff(f);df2=diff(df);g=(subs(f,x0)*subs(df2,x0))/(subs(df,x0))^2;
if abs(g)<1
for i=1:5
  xnuevo=(-1)*subs(f,x0)/subs(diff(f),x0)+x0; e=abs(x0-xnuevo);
  if e>cota
    x0=xnuevo;
  else input('La iteración terminó, se llego a un error menor que la tolerancia la
solución es xnuevo')
    x=xnuevo
  end
end
 x=xnuevo;
else input('El valor inicial es incorrecto')
end
end
```

Algoritmo 3. Subrutina que nos permite representar gráficamente dos rectas tangentes a la cuva $\boldsymbol{f}$.

```
function [rt]=newraphgr(f,x0,cota)
for i=1:2
  xnuevo=(-1)*subs(f,x0)/subs(diff(f),x0)+x0;
  e=abs(x0-xnuevo);
  if e>cota
    x0=xnuevo; ynuevo=subs(f,x0); df=diff(f); m=subs(df,x0);
    syms a
    rt=m*(a-x0)+ynuevo; a=linspace(11,13);b=subs(rt,a);c=subs(f,a);
    anchoDeLinea=2;plot(a,c,'--','LineWidth', anchoDeLinea), hold on, plot(a,b)
  title('Método gráfico de Newton para encontrar los ceros de una función (dos
rectas tangentes)')
  end
end
end
```

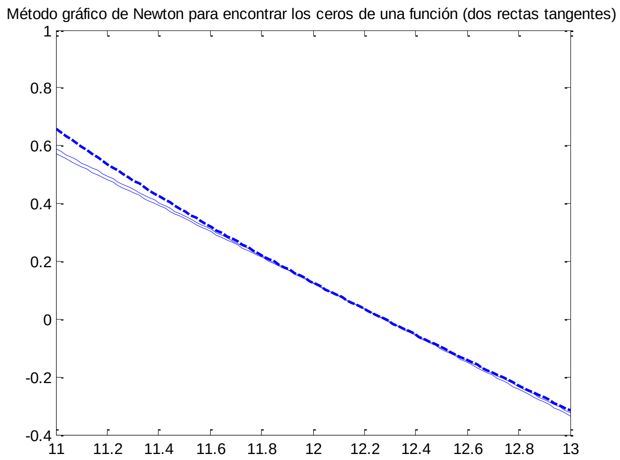


Fig. 4. Gráfica de la curva $f = D - O$ y dos rectas tangentes. Obtenida con el Algoritmo 3.

4.2 Análisis de los resultados

Al terminar el proceso iterativo, la salida del Algoritmo 2 es la abscisa del punto de equilibrio, habiendo fijado con anterioridad la tolerancia. En este ejemplo la solución encontrada es x =12.2777. Finalmente las coordenadas del punto de equilibrio son el par ordenado (12, 3).

Estas coordenadas nos permiten determinar que por encima del precio de equilibrio $P_e = 3$ tendremos un excedente y los precios estarán a la baja y por debajo de $P_e = 3$ tendremos escasez y los precios estarán al alza.

5 Conclusiones

Esta propuesta se diseñó teniendo en cuenta aspectos didácticos, que le permitan a los alumnos, la incorporación y relación de conceptos de manera significativa. Al aplicar Matlab en el proceso de enseñanza- aprendizaje, y considerando el aprendizaje activo, los estudiantes logran un mayor aprovechamiento académico. La motivación y actitud de los mismos, también se ven incrementadas al poder visualizar e integrar conceptos y disciplinas trabajando con ejemplos prácticos reales que le permitan dar respuestas en el futuro, a distintas necesidades que se le puedan presentar en su ámbito laboral.

Referencias

1. Badia, A.: Ayuda al aprendizaje con tecnología en la educación superior. *Revista de Universidad y Sociedad del* Conocimiento. http:// www. monserrat.proed.unc.edu.ar/pluginfile.php/4131/ mod_resource/content/1 / 282- 1200- 2-PB%20colaborativo.pdf 5-6. (2006). Accedido el 26 de Enero de 2017.
2. Bell, D; Kahrhoff, J: *Active Learning Handbook*. Webster University (2006).
3. Martinez, G. F.; Garza, J. A.; Mendoza, J. A.; Monsivais, A: La pizarra digital interactiva en la enseñanza de la ingeniería. *Revista DIM: Didáctica, Innovación y Multimedia*, ISSN-e: 1699-3748, N°13, (2009). Accedido el 26 de Enero de 2017
4. Blank, L; Tarquin, A: *Ingeniería económica*. McGrawHill Interamericana (2006).
5. Cepeda, I; Lacalle, M; Simón, J, Romero, D: *Economía para ingenieros*. Paraninfo SA (2011).
6. Mathews, J; Fink, K: *Métodos numéricos con MATLAB*. Pearson Prentice Hall (2000).
7. Chapra, S; Canale, R: *Métodos numéricos para ingenieros*. McGrawHill (1998).

Volver al Índice

Aplicación de la Descomposición en Valores Singulares en la Compresión de Imágenes Digitales

Luciano Savoie, María Mercedes Gaitán, Ernesto Klimovsky
Grupo de Investigación en Enseñanza de la Matemática en Carreras de Ingeniería (GIEMCI). Proyecto de investigación: La trascendencia del álgebra lineal y sus aplicaciones en el ciclo superior de ingeniería
Facultad Regional Paraná, Universidad Tecnológica Nacional
Almafuerte 1033, 3100, Paraná, Entre Ríos, Argentina
{Savoieluciano, erklimo}@gmail.com, mgaitan@frp.utn.edu.ar

Resumen. En este trabajo abordamos el estudio de un tema de Álgebra Lineal como es la Descomposición en Valores Singulares y su aplicación directa a una tecnología que nos rodea diariamente como son las imágenes digitales. Además de introducir los conceptos matemáticos necesarios, exponemos aquellos relacionados al tratamiento de imágenes digitales. Realizamos simulaciones mediante software y mostramos un ejemplo práctico con el objetivo de facilitar la asimilación de los conceptos.
La modelización matemática de las imágenes digitales como matrices las convierte también en una excelente herramienta docente para motivar al estudiante en la profundización del estudio de Álgebra Lineal.

Palabras Clave: Descomposición en valores singulares, Compresión, Procesamiento de imágenes.

1 Introducción

La descomposición de una matriz en factores, es decir, la posibilidad de expresarla como producto de dos o más matrices, tal es el caso de la descomposición LU y la QR, tiene una gran utilidad en variadas aplicaciones.

En este trabajo utilizamos una de las descomposiciones más importantes que puede aplicarse a cualquier matriz A de tamaño mxn, la Descomposición en Valores Singulares (DVS).

La DVS se utiliza en una amplia variedad de áreas del procesamiento de imágenes. Aquí trabajaremos una de las aplicaciones más conocidas de esta descomposición matricial, que es la compresión de imágenes digitales.

Es importante resaltar que el método de compresión JPEG, basado en la Transformada Discreta del Coseno (DCT) no proporciona un nivel de compresión tan elevado como la DVS; en efecto, el método presentado para la DVS aproxima cada imagen por su aproximación "óptima". En cambio, la DCT transforma todas las imágenes de la misma manera, no es una transformación optimizada a cada imagen particular, como la DVS. Sin embargo, la ventaja de la DCT es su facilidad de aplicación mediante algoritmos rápidos, junto con una eficiencia más que aceptable; por ello, el método de compresión JPEG se ha extendido mundialmente, aunque no sea "óptimo" [1].

2 Marco teórico

2.1 Imágenes digitales

Una imagen puede ser definida como una función bidimensional $f(x,y)$, donde x e y son las coordenadas en el plano y f es la amplitud de cualquier par de coordenadas (x,y), llamada intensidad de la imagen en el punto.

El término nivel de gris se usa para referirse a la intensidad monocromática de las imágenes. Por su parte las imágenes a color están formadas por una combinación individual de imágenes 2-D. En el sistema de color RGB, un color consiste en tres componentes individuales de una imagen que son Red, Green y Blue (rojo, verde y azul respectivamente). Por esta razón, muchas técnicas de desarrollo para imágenes monocromáticas pueden ser extendidas para el procesamiento de imágenes a color.

Cuando (x, y) y los valores de la amplitud de la función f son cantidades discretas finitas, a dicha imagen se le llama imagen digital. Una imagen digital está compuesta de un número finito de elementos llamados píxeles, donde cada uno tiene una localidad y un valor establecido [2].

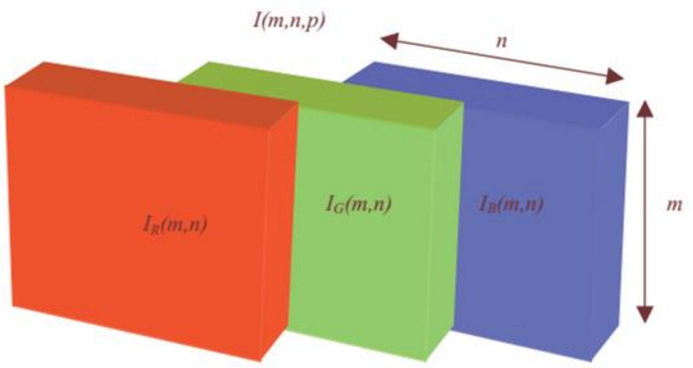


Fig. 1. Esquema de una imagen RGB *I(m,n,p)* con sus tres componentes individuales. Aquí *m* y *n* tienen el mismo significado que para el caso de las imágenes monocromáticas, mientras que *p* representa el plano, que para RGB puede ser 1 para el rojo, 2 para el verde y 3 para el azul [3].

2.2 Manejo de imágenes digitales mediante software

Ya sea que utilicemos MatLab o una alternativa en software libre como SciLab, la estructura básica de datos es el arreglo, el cual se puede definir como un conjunto ordenado de números reales o complejos. En el caso de las imágenes, éstas pueden ser representadas por matrices formadas por conjuntos ordenados de valores reales que, a su vez, representan la intensidad de color o de niveles de grises.

Estos programas almacenan las imágenes como arreglos bidimensionales (matrices) en los cuales cada elemento de la matriz corresponde a la intensidad de un píxel de la imagen. Por ejemplo, una imagen de 200 filas por 300 columnas se almacena como una matriz de *200x300*. Algunas imágenes, como las imágenes RGB nombradas anteriormente, requieren de un arreglo tridimensional, donde el primer plano representa la intensidad de rojo en los píxeles, el segundo plano, la intensidad de verde de los píxeles, y el tercer plano, la intensidad de azul de los mismos.

Esta convención sustituye el trabajo con imágenes por una representación matricial. Por ejemplo, se puede seleccionar un solo píxel de una imagen-matriz (estos términos serán análogos a partir de ahora para las definiciones que siguen) de la forma *I(2,15)*, con lo cual el software regresará el valor del píxel localizado en el renglón 2, columna 15 de *I* [2].

2.3 ¿Qué es la Descomposición en Valores Singulares?

En esta parte del trabajo, damos las definiciones y teoremas matemáticos necesarios para comprender los temas a desarrollar. Para más detalles y demostraciones recomendamos ver las referencias [4] y [5].

Dada una matriz A real de dimensiones mxn, existe una matriz U ortogonal de orden m, una matriz diagonal S de dimensiones mxn y una matriz V ortogonal de orden n de forma que:

$$A = USV^t \qquad \textbf{(1)}$$

siendo V^t la matriz transpuesta de V.

Los elementos no nulos de la diagonal de S se denominan valores singulares de A y son números no negativos, pues son la raíz cuadrada de los autovalores no nulos de la matriz A^tA o de AA^t, ya que ambos coinciden (salvo el autovalor nulo, si es que lo tienen). Las columnas de U y V se denominan vectores singulares por la izquierda y por la derecha respectivamente. Esta factorización de A es lo que llamamos *Descomposición en Valores Singulares de A*.

Una propiedad muy interesante de la DVS de una matriz A es que el número de valores singulares no nulos de ésta coincide con el rango de dicha matriz.

Supongamos que una matriz A es de rango r y que los valores singulares no nulos están ordenados en orden decreciente:

$$s_1 \geq s_2 \geq \cdots \geq s_r \geq 0 \qquad \textbf{(2)}$$

Se puede comprobar que:

$$A = \sum_{j=1}^{r} s_j u_j v_j^t = s_1 u_1 v_1^t + s_2 u_2 v_2^t + \cdots + s_r u_r v_r^t \qquad \textbf{(3)}$$

donde s_j es un escalar (el valor singular correspondiente), mientras que u_j es la columna j-ésima de la matriz U y v_j es la columna j-ésima de la matriz V.

La identidad (3) expresa A como suma de r matrices de rango 1. A cada matriz $s_j u_j v_j^t$ se le llama j-ésimo modo de A, así $s_1 u_1 v_1^t$ es el primer modo de A, $s_2 u_2 v_2^t$es el segundo modo, etc.

Ejemplo: Sea A una matriz 3x2 con los siguientes valores:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \textbf{(4)}$$

A partir de (1) expresamos su DVS como:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \textbf{(5)}$$

Los valores singulares son $s_1 = 3$ y $s_2=2$. Y de (3) podemos expresar:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 3\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}[0 \quad 1] + 2\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}[1 \quad 0] \; = s_1 u_1 v_1^T + s_2 u_2 v_2^T \quad \textbf{(6)}$$

$$A = A_1 + A_2 \quad \textbf{(7)}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \textbf{(8)}$$

De donde se observa que Rango (A) = 2, Rango (A_1) = 1 y Rango (A_2) = 1.

2.4 La DVS y el teorema de aproximación

Un resultado fundamental para las aplicaciones de la DVS es el siguiente *Teorema de Aproximación* cuya demostración puede verse en [5]; supongamos que a partir del cálculo de la DVS tenemos A (de rango r) expresada según **(3)**, entonces la mejor aproximación de A en la norma espectral (o norma 2) mediante matrices de su mismo tamaño y rango $k < r$ es la matriz:

$$A_k = \sum_{j=1}^{k} s_j u_j v_j^t = s_1 u_1 v_1^t + s_2 u_2 v_2^t + \cdots + s_k u_k v_k^t \quad \textbf{(9)}$$

que se obtiene tomando solamente los k valores singulares más grandes. La norma espectral de una matriz A viene dada por:

$$\|\mathrm{A}\|_2 = \mathrm{s}_1 \quad \textbf{(10)}$$

Es decir, es igual al mayor de sus valores singulares. En relación con la mejor aproximación mediante matrices de rango $k < r$ se tiene entonces:

$$\|\mathrm{A} - \mathrm{A_k}\|_2 = \mathrm{s_{k+1}} \quad \textbf{(11)}$$

Este resultado nos dice que la mejor aproximación a la matriz A mediante matrices de rango k es la matriz dada por A_k, y que el error cometido con dicha aproximación vale s_{k+1}, el valor singular k-ésimo+1.

Si consideramos el ejemplo realizado en la sección anterior, la norma 2 de A es:

$$\|\mathrm{A}\|_2 = \mathrm{s}_1 = 3 \quad \textbf{(12)}$$

Con lo cual verificamos (10). Si ahora tomamos la aproximación A_k con rango k = 1 (recordar que k < r), tenemos:

$$\mathrm{A}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \textbf{(13)}$$

El error cometido con esta aproximación es:

$$\|\mathrm{A} - \mathrm{A}_1\|_2 = 2 = \mathrm{s}_2 \quad \textbf{(14)}$$

Resultado que comprueba lo obtenido en (11).

Algoritmo 1. Para la implementación computacional se puede utilizar el paquete informático MatLab. Una vez definida la matriz A, la norma 2 puede ser calculada mediante la función *norm*. Para el caso de la DVS, la función *svd* calcula los valores singulares de A y las matrices U y V que cumplen la condición **(1)**.

```
norm(A,2)
[U,S,V] = svd(A)
```

3 Aplicación a la compresión de imágenes digitales

Hasta aquí, hemos expuesto de una manera resumida la descripción matemática de la descomposición en valores singulares. De las aplicaciones que existen, una es en la compresión de imágenes digitales. Esto permite que ocupen menos espacio en nuestro disco duro, se transmitan de manera más eficiente y viajen más rápido por internet [6].

Por una cuestión práctica y para facilitar la comprensión de los temas, a continuación mostramos ejemplos desarrollados sobre imágenes monocromáticas de 8 bits. En ellas, el valor de cada píxel se corresponde a un determinado valor en una escala de grises de 2^8, es decir, 256 tonalidades distintas. La misma está comprendida en un rango de números enteros de 0 a 255 en el cual cada valor está asociado a distintas graduaciones de gris, desde el negro cuyo valor es el 0, hasta el blanco cuyo valor es 255. Todos los conceptos desarrollados pueden hacerse extensivos a imágenes color, recordando que éstas son tratadas como arreglos tridimensionales, como se mencionó anteriormente [2].

Un ejemplo de imagen monocromática y su correspondiente representación matricial se presenta en la Fig. 2.

$$\begin{bmatrix} 100 & 100 & 100 & 100 & 100 & 100 & 100 & 100 & 100 & 100 \\ 100 & 100 & 100 & 100 & 100 & 100 & 100 & 100 & 100 & 100 \\ 100 & 100 & 255 & 255 & 255 & 255 & 255 & 255 & 100 & 100 \\ 100 & 100 & 255 & 0 & 0 & 0 & 0 & 255 & 100 & 100 \\ 100 & 100 & 255 & 255 & 0 & 0 & 255 & 255 & 100 & 100 \\ 100 & 100 & 255 & 255 & 0 & 0 & 255 & 255 & 100 & 100 \\ 100 & 100 & 255 & 0 & 0 & 0 & 0 & 255 & 100 & 100 \\ 100 & 100 & 255 & 255 & 255 & 255 & 255 & 255 & 100 & 100 \\ 100 & 100 & 100 & 100 & 100 & 100 & 100 & 100 & 100 & 100 \\ 100 & 100 & 100 & 100 & 100 & 100 & 100 & 100 & 100 & 100 \end{bmatrix}$$

Fig. 2. Representación de una imagen en escala de grises mediante una matriz

3.1 Implementación

El objetivo ahora es poder desarrollar un algoritmo que permita comprimir la imagen sin perder una cantidad considerable de resolución. Es decir, tratar de conseguir la misma imagen, quizá con unos tonos de grises menores, pero con muchos menos datos.

Dada una matriz A de tamaño mxn, la transferencia completa de dicha matriz requiere la transmisión de $m \cdot n$ valores. El teorema de aproximación obtenido en (9) permite escribir la matriz de rango k que mejor aproxima a A de la siguiente manera:

$$A_k = \sum_{j=1}^{k} s_j u_j v_j^t \qquad \textbf{(15)}$$

Incrementar en una unidad el rango de la matriz con la que aproximamos a la matriz original supone la transmisión de $(m+n+1)$ valores adicionales: los m elementos de u_j, los n elementos de v_j^t y 1 de s_j. Así, si en vez de transmitir A, transmitimos la información necesaria para generar la aproximación A_k, es suficiente transmitir $k \cdot (m+n+1)$ datos en lugar de los $m \cdot n$ que forman la matriz original, lo que demuestra la reducción conseguida en el número de datos (obsérvese que A_k sigue siendo una matriz de dimensiones mxn).

El procedimiento tendrá interés solo si se puede tomar:

$$k \ll \frac{mn}{m+n+1} \qquad \textbf{(16)}$$

En caso contrario, además de tener que transmitir más datos que los necesarios para formar la imagen original, habríamos tenido que calcular la DVS de la matriz, lo que implica un aumento en el número de operaciones necesarias para la transferencia de datos.

Resultará ilustrativo realizar un ejemplo práctico, en este caso, con una imagen de tamaño 480x640 (Marcie.bmp) que es la fotografía de una mujer. Comenzamos cargando una matriz de tamaño 480x640 correspondiente a la imagen y luego determinando su rango.

Fig. 3. Fotografía (Marcie.bmp) utilizada como ejemplo

Algoritmo 2. Las funciones *imread* e *imshow* permiten la lectura y la visualización de la imagen respectivamente. Para el caso del rango, prestar atención a que no aparece el “;” luego de la instrucción *rank* para que aparezca el resultado en pantalla.

```
A = imread('Marcie.bmp');
imshow(A);
A = im2double(A);
rank(A)
```

Comprobamos que el rango de A es el máximo posible, es decir $r = 480$. Luego, realizamos la aproximación A_k de (9) para un valor determinado de k, y vemos la correspondiente imagen aproximada, ejecutando el *Algoritmo3*.

Algoritmo 3. Para un valor determinado de k (en este caso k=5), obtenemos y visualizamos la aproximación correspondiente.

```
[U,S,V] = svd(A);
k = 5; % definir k
Ak = U(:,1:k)*S(1:k,1:k)*V(:,1:k)';
imshow(Ak);
```

3.2 Ensayos

Para comprobar la aplicabilidad de la DVS en la compresión de imágenes ejecutamos el *Algoritmo 3* para distintos valores de k. Además, para cada uno de los casos calculamos el error relativo (usando la norma 2) [7]:

$$\text{Error relativo} = \frac{s_{k+1}}{s_1} \tag{17}$$

Y también el factor de compresión, que representa el cociente entre el espacio requerido para almacenar la imagen aproximada y el necesario para almacenar la imagen original [7]:

$$\text{Factor de compresión} = \frac{k\cdot(480+640+1)}{480\cdot 640} \tag{18}$$

Algoritmo 4. Se realizan unos pequeños cambios al *Algoritmo 3*, agregándole la posibilidad de determinar el error relativo y el factor de compresión para un valor de k determinado. Nuevamente se omite el signo “;” en dos instrucciones para que aparezca el resultado en pantalla.

```
[U,S,V] = svd(A);
k = 5; % definir k
Ak = U(:,1:k)*S(1:k,1:k)*V(:,1:k)';
imshow(Ak);

%Error Relativo
E = A - Ak;
e = norm (E,2) / norm (A,2)

%Factor de compresión
fc = (k*(480+640+1))/(480*640)
```

Los resultados correspondientes a tres casos distintos son los siguientes:

- Aproximación de rango k = 10 (A_{10}): Para este primer caso el factor de compresión resulta ser de 0.0365, es decir que la imagen aproximada A_{10} ocupa menos del 4% de la imagen original A. El error relativo e_{11}/e_1 es 0.0507, y vemos como tomando solamente los primeros 10 valores singulares de los 480 no es posible dilucidar con claridad de que se trata de la fotografía, como puede observarse en la Fig. 4.

Fig. 4. Aproximación de rango k = 10

- Aproximación de rango k = 50 (A_{50}): En este caso el factor de compresión resulta de 0.1825, es decir que la imagen aproximada ocupa poco más del 18% de la imagen original. Como observamos en la Fig. 5, es posible distinguir perfectamente que se trata de la fotografía de una mujer. Esta mejora se ve reflejada también en la disminución del error relativo e51/e1, que ahora vale 0.0114. Sin embargo, el nivel de detalle de la fotografía es bajo, algo que se ve, por ejemplo, en los rasgos faciales y el pelo.

Fig. 5. Aproximación de rango k = 50

- Aproximación de rango k = 100 (A_{100}): En este último caso el factor de compresión es de 0.3649 (aproximadamente 36,5%) y obtenemos una calidad casi idéntica a la conseguida en la imagen original (Fig. 6). El error relativo es ahora bastante más pequeño que en los dos casos anteriores e_{101}/e_1 (0.050).

Fig. 6. Aproximación de rango k = 100

Si hay valores singulares muchos mayores que otros, es evidente que éstos son más determinantes en la formación de *A* que los valores singulares pequeños. Si además de calcularlos, los graficamos usando una escala logarítmica (debido a la posibilidad de que haya valores singulares muy grandes), podremos apreciar de forma aproximada la preponderancia de los valores singulares más grandes frente al resto de ellos. [8]

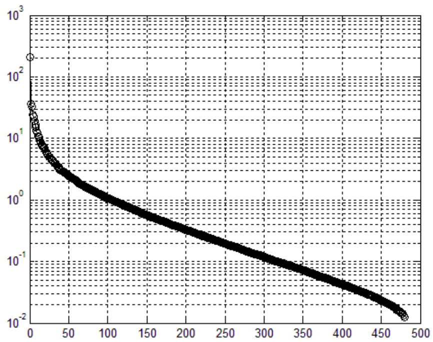


Fig. 7. Representación gráfica de los valores singulares

Observando la gráfica de la Fig. 7, correspondiente a la Fig. 3, se aprecia que aproximadamente los 100 primeros valores singulares dominan frente al resto de ellos, es decir, que son más determinantes en la formación de la matriz *A*. Por lo que aproximando *A* por la suma de sus primeros modos, las imágenes de estas matrices deberán asemejarse a las de *A*, a medida que aumenta el número de modos que tomamos en consideración. El ejemplo desarrollado nos demuestra claramente que con pocos modos conseguimos resultados muy buenos.

4 Conclusiones y trabajos a futuro

A lo largo del trabajo hemos visto la utilización de la Descomposición en Valores Singulares en una aplicación concreta, como es la compresión de imágenes digitales. Pudimos observar los cambios en las imágenes a medida que aumentamos el rango *k* de la aproximación, y llegamos a la conclusión de que lo primordial para recuperar la información de nuestra imagen original son sólo unos pocos valores singulares (con sus respectivos vectores u_i y v_i): los mayores de todos los que posea la matriz.

Además, esta aplicación de la teoría no solo ayuda al estudiante a entender mejor el concepto de la Descomposición en Valores Singulares, sino que adicionalmente motiva su aprendizaje al observar su utilidad en un ejemplo de la vida real.

Como trabajo a futuro se plantea la posibilidad de realizar una aplicación de la Descomposición en Valores Singulares en un campo de la estadística, que es el análisis de componentes principales (PCA). Esto es muy utilizado en el reconocimiento de rostros, en una técnica conocida como *Eigenfaces*.

Referencias

1. Domínguez Jiménez, M.E: Matrices: un modelo para las fotografías digitales. *Modelling in Science Education and Learning*, Volumen 4, No. 13, pp.169–179 (2011)
2. Savoie, L.: Algebra matricial y su aplicación en el procesamiento digital de imágenes. *Actas de las Jornadas de Jóvenes Investigadores Tecnológicos 2016*. (En proceso de edición)
3. Cuevas Jimenez E.; Zaldivar Navarro D.; Rojas R.: *Computer Vision using MatLAB and the Toolbox of Image Processing.* Freie Universitat Berlin, pp. 27 (2005)
4. Strang, G.: *Algebra lineal y sus aplicaciones*. Thomson, pp.331-338 (2007)
5. Golub, G.H.; Van Loan C.F: *Matrix computations*. The Johns Hopkins University Press, pp.70-73 (1996)
6. Rojas Matas, A.; Cano Rojas, A.: Trabajando con imágenes digitales en clases de Matemáticas. *La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española*, Volumen 13, No. 2, pp. 317-336 (2010)
7. Fernández de las Heras, J.J.M.: La descomposición en valores singulars (SVD) y algunas de sus aplicaciones. *La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española*, Volumen 8.3, pp. 795-810 (2005)
8. Zaballa, I.: *Valores singulares. ¿Qué son? ¿Para qué sirven?*. Departamento de Matemática Aplicada y EIO, Universidad del País Vasco.

Volver al Índice

Aplicaciones función variable compleja a flujo potencial usando software Mathematica

Favieri Adriana, Diego Igareta
Departamento de Aeronáutica, Universidad Tecnológica Nacional, Facultad Regional Haedo
Paris 532, Haedo, Provinciade Buenos Aires, Argentina
{adriana.favieri .diego.igareta}@gmail.com

Resumen. En la asignatura Matemáticas Aplicadas a la Aeronáutica, del Departamento de Aeronáutica de la Universidad Tecnológica Nacional, Facultad Regional Haedo, está incluido el tema de funciones de variable compleja y sus aplicaciones a flujo de fluidos, en particular el potencial complejo. Tema relacionado con la asignatura Mecánica de los Fluidos de 3er año, en donde el alumno podrá aplicar el conocimiento básico a modelos cada vez más complejos que requieren el uso de software específicos, evidenciando la conexión de conceptos en ciencias básicas, con las herramientas necesarias para el modelado y la simulación en problemas de ingeniería. De allí que presentemos una secuencia didáctica para la enseñanza y aprendizaje del tema Aplicaciones función variable compleja a flujo potencial usando software Mathematica. Finalizamos el trabajo con conclusiones sobre la misma y los trabajos a futuro.

Palabras Clave: flujo potencial, software Mathematica, aplicaciones ingeniería aeronáutica

1 Introducción

En el programa analítico de la asignatura Matemáticas Aplicadas a la Aeronáutica de la Universidad Tecnológica Nacional (UTN), Facultad Regional Haedo (FRH), está incluido el tema de funciones de variable compleja y sus aplicaciones a flujo de fluidos, en particular el potencial complejo. La razón de la inclusión del mismo es que en la asignatura Mecánica de los Fluidos, de 3er año, continúan el trabajo con estas funciones para estudiar flujos más complicados. De allí que los alumnos necesiten tener una introducción al tema que los habilite a abordar dicho estudio de manera más accesible. Para adquirir este conocimiento es preciso que el alumno pueda aplicar las funciones analíticas a problemas de flujo de fluidos, diferenciar trayectorias y líneas equipotenciales y representar gráficamente los diferentes modelos de flujos potenciales. Luego podrá aplicar este conocimiento básico a la resolución de modelos cada vez más complejos que requieren el uso de software específicos, evidenciando la conexión de conceptos en ciencias básicas, con las herramientas necesarias para el modelado y la simulación en problemas de ingeniería [1]. Con el fin de contribuir a esta línea de acción es que, como docentes de la asignatura, decidimos diseñar una secuencia didáctica enfocada en la aplicación de funciones analíticas de variable compleja a flujo potencial usando software Mathematica. Mostramos a continuación algunos aspectos teóricos en los cuales basamos el diseño de la misma, la secuencia didáctica en sí misma, la cual incluye actividades introductorias al tema y al software, aplicaciones a flujo de fluidos, de representación de flujo potencial, de comprensión y representación, de investigación, de exploración de diferentes formas de resolución y de comunicación. Y finalizamos con algunas conclusiones sobre esta presentación y la idea de trabajo a futuro.

2 Secuencia didáctica

2.1 Aspectos teóricos

2.1.1 Relacionados con la educación

Las actuales tendencias educativas referidas al diseño de actividades sugieren que el docente construya situaciones de enseñanza y aprendizaje que favorezcan el desarrollo de capacidades de los alumnos para que descubran relaciones entre los conceptos conocidos y los nuevos, y lleguen a ser competentes en los ámbitos en los cuales se desenvuelven [2]. Por otro lado, la incorporación de la tecnología requiere la participación de docentes que cuenten con sólida formación pedagógica para poder crear entornos educativos que fomenten un aprendizaje significativo y el desarrollo de prácticas educativas estimulantes [3].

Entendemos por secuencias didácticas al conjunto articulado de tareas docentes que impulsan las actividades de los alumnos y su evaluación. En la actualidad la labor docente se dirige al diseño de tareas que provoquen la actividad de los alumnos, entre ellas las llamadas tareas integradoras que contribuyen a la formación teniendo como base la resolución de un problema específico contextualizado en un entorno [3, 4].

En esta propuesta de secuencia didáctica vamos a utilizar tareas integradoras específicas ya que se enfatiza el desarrollo de un aprendizaje específico de la asignatura Matemáticas Aplicadas a la Aeronáutica. Las mismas tienen enfoque a la investigación pues se pretende que los alumnos aprendan sobre Flujo Potencial con uso de software y organicen la información, la sistematicen y la analicen para establecer conclusiones [5]. La presentación de las actividades se puede estructurar alrededor de episodios para la explicación y ejemplificación que incluyan fases de comprensión, representación, exploración de diversas maneras de resolver la tarea, comunicación de los resultados, visión retrospectiva del proceso de solución y extensión de la tarea [6, 7].

2.1.2 Relacionados con flujo potencial

2.1.2.1 Supuestos iniciales

Muchos problemas de flujo de fluidos, hidrodinámica o aerodinámica, pueden resolverse usando funciones de variable compleja analíticas, con las siguientes suposiciones [8, 9]:

- El flujo de fluido es bidimensional: Esto supone que el modelo del flujo básico y las características de su movimiento en un plano son esencialmente las mismas en todo plano paralelo. De esta manera podemos centrar la atención a un plano simple, el cual tomamos igual al plano z = 0. Las figuras sobre este plano se interpretan como secciones transversales de un cilindro infinito perpendicular al plano. Este cilindro infinito es un modelo matemático de un cilindro físico el cual es tan largo, que los efectos lejanos se pueden despreciar razonablemente.
- El flujo es estacionario o uniforme: Esto quiere decir que la velocidad del fluido en un punto depende solamente de la posición y no del tiempo.
- Las componentes de la velocidad se derivan de un potencial: Si $V_x \; y \; V_y$ denotan las componentes de la velocidad del fluido en las direcciones x e y positivas respectivamente, existe una función ϕ que se llama velocidad potencial tal que $V_x = \frac{\partial\phi}{\partial x} \; V_y \; = \frac{\partial\phi}{\partial y}$. Si V_t es la componente tangencial de la velocidad sobre una curva simple cerrada C $\Rightarrow \int_C V_t \, ds = \int_C V_x \, dx + \int_C V_y \, dy$ se llama circulación del fluido a lo largo de C. Si la circulación es 0 el flujo se llama irrotacional o circulación libre.
- El flujo es incompresible: Que sea incompresible quiere decir que la densidad del fluido es constante. Si V_n es la componente normal de velocidad sobre C $\Rightarrow \int_C V_n \, ds = \int_C V_x \, dy - \int_C V_y \, dx$, $\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} = 0$, lo cual expresa la condición de que la cantidad de fluido contenido dentro de C es una constante; o sea, la cantidad que entra a C es igual a la cantidad que sale de C. Estas ecuaciones, cualquiera de las dos formas, se llaman ecuaciones de continuidad.
- El fluido es no viscoso: lo que implica que no tiene viscosidad o fricción interna.

Un fluido que es no viscoso e incompresible se llama fluido ideal. Esto es un modelo matemático.

2.1.2.2 Potencial complejo

Por lo que vimos antes la velocidad potencial ϕ es armónica, es decir, satisface la ecuación de Laplace. Y debe existir una función armónica conjugada que llamaremos ψ / $\Omega(z) = \theta(x,y) + i\,\psi(x,y)$ que sea analítica. Dicha función se llama potencial complejo y es de fundamental importancia en la caracterización de un flujo. La función $\theta(x,y)$ se llama velocidad potencial y $\psi(x,y)$, función de corriente.

2.1.2.3 Líneas y trayectorias equipotenciales, fuente y sumidero

La familia de curvas $\theta(x,y) = \alpha$ son las líneas equipotenciales y $\psi(x,y) = \beta$ son las trayectorias, es decir los caminos reales de las partículas de fluido en el modelo de flujo. Una fuente es un punto del plano en el cual el fluido aparece y un sumidero un punto del plano en el cual el fluido desaparece.

2.1.2.4 Algunos flujos potenciales especiales

El potencial complejo $\Omega(z)$ puede ser interpretado como un flujo de fluido bidimensional. Algunos casos simples son [8, 9]:

- Flujo uniforme: Su potencial complejo es $\Omega(z) = V_0\, e^{-i\,\delta} z$ tiene velocidad constante en una dirección que tienen un ángulo δ con la dirección positiva de x. Su modelo gráfico se muestra en la Fig.1.

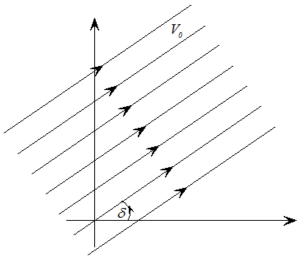


Fig.1. Modelo gráfico flujo uniforme

- Flujo con fuente en $z = a$**:** El fluido está brotando con velocidad constante en $z = a$ y el potencial complejo es $\Omega(z) = k\ln(z - a)$. Su modelo gráfico se muestra en la Fig.2.

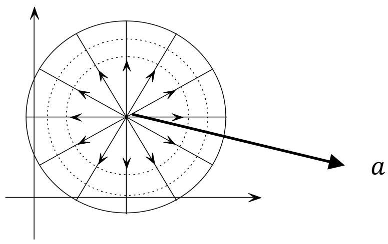


Fig.2. Modelo gráfico flujo con fuente en $z = a$

- Flujo con sumidero en $z = a$: El fluido está desapareciendo en $z = a$ y el potencial complejo es $\Omega(z) = -k\ln(z - a)$. Su modelo gráfico se muestra en la Fig.3.

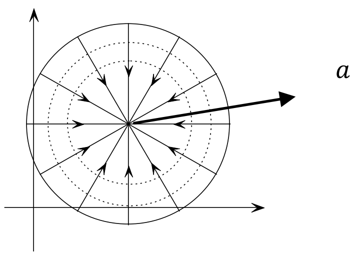


Fig.3. Modelo gráfico flujo con sumidero en $z = a$

2.2 Secuencia didáctica

Mostramos a continuación la secuencia didáctica diseñada para la enseñanza y aprendizaje del tema Aplicaciones función variable compleja a flujo potencial usando software Mathematica, que tiene las etapas: Actividades introductorias, al tema y al software, Actividades de aplicaciones a flujo potencial de fluidos, Actividades de representación de flujo potencial de fluidos, Actividades de comprensión y representación, Actividades de investigación, de exploración de diferentes formas de resolución y de comunicación. La forma de trabajo con los alumnos será en el laboratorio de computación de la Facultad y podrán trabajar en equipo de dos o tres personas.

2.2.1 Actividades introductorias (al tema y al software)

A través de estas actividades se pone al alumno en contacto con los comandos del software relacionados a los números y variables complejas y a funciones de variable compleja. En las siguientes figuras pueden verse estas actividades.

Funciones de variable compleja

Definición:
Sea $A \subseteq \mathbb{C} \wedge B \subseteq \mathbb{C}$ $f: A \to B / \forall z \in A, \exists w \in B / w = f(z)$

Ejemplo de función
$w = 3z - i$

Ingreso de una función de variable compleja con el software

```
f[z_] := 3 z + i
```

A través de la expresión "z_" indicamos que z es la variable independiente, y por medio de ":=" ingresamos la función en la memoria sin necesidad de tener la celda de salida. De ahora en más podemos trabajar con la función definida.

Cálculo de imágenes

```
f[2 + 3 i]
6 + 10 i
```

Parte real y parte imaginaria de una función de variable compleja

La variable z la vamos a escribir $z=x+i\,y$, entonces la función $w=f(z)$ queda $w=f(x+i\,y)$
Así podemos hallar la parte real e imaginaria de la función, y resultan funciones que dependen de las variables x e y.

$$\begin{cases} \mathrm{Re}(w) = u(x, y) \\ \mathrm{Im}(w) = v(x, y) \end{cases}$$

y de llaman
parte real
parte imaginaria

Ejemplo

```
ComplexExpand[f[z]]
3 x + i (1 + 3 y)
```

$$\begin{cases} \mathrm{Re}(w) = u = 3x \\ \mathrm{Im}(w) = v = 3y - 1 \end{cases}$$

Fig.4. Actividad introductoria 01

Definición de función analítica
Si existe la derivada de la función en todos los puntos de su dominio se dice analítica en dicho dominio.
Si $\exists\ f'[z]\ \forall\ z \in D_f \Rightarrow f[z]$ es analítica

Condición necesaria y suficiente para la existencia de la derivada.
(Ecuaciones de Cauchy Riemann)
Para que exista la derivada de una función es necesario que se cumpla.

Condición necesaria ⇒
Si $\exists\ f'(z_0) \Rightarrow$ se verifica $\begin{cases} u'_x = v'_y \\ u'_y = -v'_x \end{cases}$ Ecuaciones de Cauchy Riemann.

Condición suficiente ⇐
Si $\begin{cases} u'_x = v'_y \\ u'_y = -v'_x \end{cases} \wedge\ u'_x, u'_y, v'_x, v'_y$ son continuas $\Rightarrow \exists\ f'(z_0)$

Y la derivada puede expresarse: $\boxed{f'(z) = u'_x + i\, v'_x}$

```
ComplexExpand[f[z]]
3 x + i (1 + 3 y)
```

A partir de esto definimos las funciones u y v.

```
u[x_, y_] := 3 x
v[x_, y_] := 1 + 3 y
```

Y para comprobar si cumple C-R podemos utilizar el comando siguiente, que sirve para indicar si una expresión es verdadera o falsa.

```
TrueQ[D[u[x, y], x] == D[v[x, y], y]]
True
TrueQ[D[u[x, y], y] == -D[v[x, y], x]]
True
```

La continuidad se las derivadas se cumple por ser funciones polinómicas.
Por lo tanto la función en analítica.

Fig.5. Actividad introductoria 02

2.2.2 Actividades de aplicaciones a flujo de fluidos

En esta sección explicamos la aplicación a flujo potencial de fluidos y su uso con el software.

Actividades de aplicaciones a flujo de fluidos

Muchos problemas de flujo de fuidos pueden resolverse usando funciones de variable compleja analiticas. Las fns analiticas usadas en F de F se llaman **potencial complejo** y esta función es de fundamental importancia en la caracterización del flujo.

La parte real de dicha funcion se llama potencial de velocidades y la parte imaginaria función de corriente. La denotaremos : $f(z) = Pv + i\,Fc$

Trayectorias y lineas equipotenciales
Las trayectorias representan el camino que realmente sigue una particula del fluido. Se calculan calculando $Pv = \alpha$.
Las lineas equipotenciales son aquellas lineas a lo largo de las cuales la velocidad es constante.
Se hallan haciendo $Fc = \beta$, son perpendiculares a las trayectorias.

Velocidad compleja
En un flujo bidimensional la velocidad compleja se define como un vector $\vec{v} = v_x + i\,v_y$

Relación entre la derivada del potencial complejo y la velocidad compleja
La derivada del potencial complejo es la velocidad conjugada.
$f'(z) = \bar{v}$

Fuentes y sumideros
Fuente : es un punto del plano en el cual el fluido aparece.
Sumidero : es un punto del plano en el cual el fluido desaparece.

Potenciales complejos

fluido uniforme con v cte $\boxed{f(z) = v_0\, e^{-i\delta} z}$
/ δ ang que forma la velocidad con el semieje positivo de las x

fluido con fuente en z = a $\boxed{f(z) = k \ln(z - a)}$

fluido con sumidero en z = a $\boxed{f(z) = -k \ln(z - a)}$

fluido de un vórtice en z = a $\boxed{f(z) = -i\,k \ln(z - a)}$

Fig.6. Actividad de aplicaciones a flujo de fluidos 01

2.2.3 Actividades de representación de flujo potencial

Estas actividades están dedicadas a la representación gráfica del flujo potencial utilizando el software.

Actividades de representación de flujo potencial

Gráfico del potencial complejo

Comenzamos graficando la función $f(z) = z^2$.
Para graficar el potencial complejo usaremos el comando ContourPlot, una vez para cada función, una para el Pv y otra para la Fc. Lo juntamos usando el comando Show

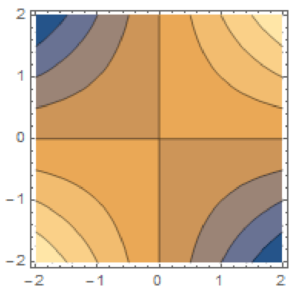
```
ComplexExpand[z^2]
```

$x^2 + 2\,i\,x\,y - y^2$

Fig.7. Actividad de representación de flujo potencial 01

El comando CountourPlot

```
Show[ContourPlot[x^2 - y^2, {x, -2, 2}, {y, -2, 2}],
  ContourPlot[2 x y, {x, -2, 2}, {y, -2, 2}]]
```



Para que se vean sólo las lineas

```
Show[ContourPlot[x^2 - y^2, {x, -2, 2},
    {y, -2, 2}, ContourShading → None],
  ContourPlot[2 x y, {x, -2, 2}, {y, -2, 2},
    ContourShading → None]]
```

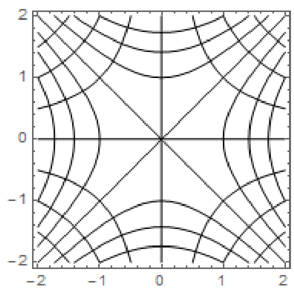


Fig.8. Actividad de representación de flujo potencial 02

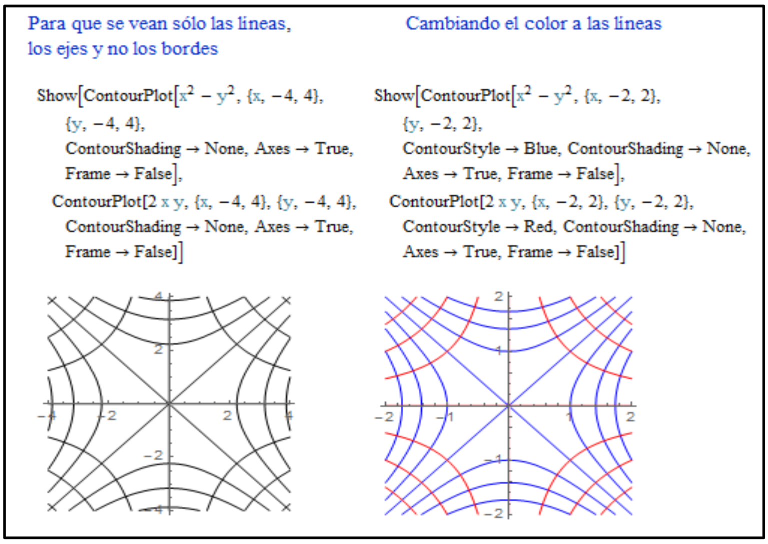


Fig.9. Actividad de representación de flujo potencial 03

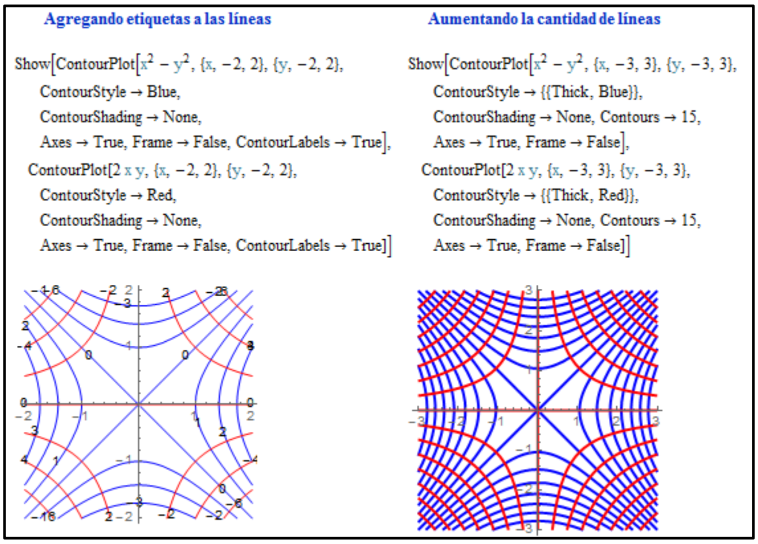


Fig.10. Actividad de representación de flujo potencial 04

2.2.4 Actividades de comprensión y representación

Esta sección está pensada para evaluar cómo el alumno aplica los conceptos previamente vistos y representa otros flujos potenciales.

Actividades de comprensión y representación

1) Sea el potencial complejo de un fluido con velocidad constante $f(z) = e^{-i\frac{\pi}{4}} z$

Hallar:
a) el potencial de velocidades y la función de corriente
b) las trayectorias y las líneas equipotenciales
c) representación gráfica
d) la velocidad compleja

2)
a) Considerar un flujo con fuente en $z=1+i$ y $k=1$, hallar el potencial de velocidades, la función de corriente, la velocidad compleja, las trayectorias, las líneas equipotenciales y realizar su representación gráfica. Elegir una configuración adecuada para que se vean las líneas equipotenciales y las trayectorias con diferentes colores e indicando el valor correspondiente a cada una de ellas.

b) Luego encontrar la velocidad en el origen, dando las compenentes del vector velocidad, su módulo y el gráfico correspondiente.

Fig.11. Actividad de comprensión y representación

2.2.5 Actividades de investigación, de exploración de diferentes formas de resolución y de comunicación.

A través de estas actividades pretendemos que el alumno utilice habilidades de orden superior y pueda expresar correctamente lo analizado y sus conclusiones.

Actividades de investigación, de exploración de diferentes formas de resolución y de comunicación.

Explorar el uso de los comandos que se observan a continuación e investigar si los mismos pueden utilizarse para la representación gráfica de los flujos potenciales antes trabajados. En caso afirmativo indicar cómo lo usaría y muestre los resultados.

Luego compare las dos opciones de representación gráfica para los flujos potenciales y elabore conclusiones referidas a las fortalezas y debilidades de dichas formas. Escriba un informe sobre lo analizado y las conclusiones

```
ContourPlot[Evaluate[y − x == k /. k → Range[−3, 3]], {x, −3, 3}, {y, −3, 3}, Axes → True,
  Frame → False]

ContourPlot[Evaluate[x^2 + y^2 == k^2 /. k → Range[1, 3]], {x, −3, 3}, {y, −3, 3},
  Axes → True, Frame → False]

ContourPlot[Evaluate[x^2 − y^2 == k /. k → Range[−3, 3]], {x, −3, 3}, {y, −3, 3},
  Axes → True, Frame → False]
```

Fig.12. Actividades investigación, de exploración de diferentes formas de resolución y de comunicación

3 Conclusiones y trabajo futuro

El diseño de esta secuencia didáctica para enseñar aplicación de funciones de variable compleja a flujo potencial con uso de software Mathematica nos ayuda a reflexionar sobre algunas conclusiones:

- La necesidad de dedicarle tiempo suficiente al diseño de la misma, considerando las opciones del software y las posibles complicaciones que podrían presentarse al utilizar ciertos comandos.
- El considerar estos modelos sencillos de flujo potencial favorece a la comprensión del concepto ya que son funciones simples, cercanas a los conocimientos previos de los alumnos.
- La incorporación del uso de software ofrece facilidades de comprensión de los modelos gráficos dada sus poderosas herramientas de visualización.
- La forma de trabajo propuesta favorece el desarrollo de habilidades de trabajo en equipo y promueve la discusión entre pares.
- A través de las actividades de exploración de diferentes formas de resolución contribuye al desarrollo de habilidades de pensamiento de orden superior, de pensamiento crítico.
- El diseño de las actividades de comunicación está pensado para generar en los alumnos precisión en su lenguaje escrito, tanto en lo referido a la matemática como a la lengua castellana.

Consideramos que esta forma de trabajo podría ser beneficiosa para la formación de los futuros ingenieros aeronáuticos, ya que intenta crear un ambiente de trabajo en equipo, discusión de posturas e investigación de distintas posibilidades de resolución. Asimismo ayudaría a los alumnos a trabajar con un software que ofrece facilidad y rapidez en la verificación de resultados, y en la visualización de conceptos centrales para el ingeniero.

Nuestra idea es continuar esta forma de trabajo, poner a prueba esta secuencia didáctica, mejorarla e ir incorporando otras actividades que involucren la combinación de flujos potenciales para crear otros flujos más complejos.

Referencias

1. Tinnirello, A.; Gago, E.; Dádamo, M.: *Integración multidisciplinar: Matemática computacional -Mecánica de fluidos.* Trabajos III CAIM -2012. Tercer Congreso Argentino de Ingeniería Mecánica. pp. 430-441. (2012)
2. Alsina, A. (2011). Educación matemática en contexto de 3 a 6 años. Barcelona: ICE-Horsori
3. Romero-Cruz-Abeyro, N. Manual de Diseño Instruccional: una propuesta con Tareas Integradas (TI). Editorial Digital UNID (2016)
4. López R., García F., J. El Proyecto Integrador. Gafra Editores, México.A (2012)
5. López Rodríguez, N. M y García Fraile, J. Aº. El proyecto Integrador (Estrategia didáctica para la formación de competencias desde el enfoque socioformativo. México: Gafra Editores.(2012).
6. Santos Trigo, L. y Camacho Machín, M. Towards the construction of a framework to deal with routine problemas to Foster mahematical inquiry. PRIMUS No. 19(3) pp 260-279. (2009)
7. Santos Trigo, L. y Camacho Machín, M. Framing the use of technology in problema solving approaches. The Mathematics Enthusiast No. 10 (1-2) pp 279-302. (2013)
8. Churchill, R. B., Variables complejas y sus aplicaciones. Mcgraw Hill, México (1978)
9. Spiegel, M. *Variable Compleja Serie Schaum* Mcgraw Hill, México (2011)

Volver al Índice

Métodos Geométricos de Grupos de Lie Aplicados a Recientes Desarrollos Computacionales en Tecnología

Daniel Juan Alberto Abud[1], Salvador Daniel Ramón Gigena[2]
Facultad de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales – Universidad Nacional de Córdoba
[1]Departamento de Física
[2]Departamento de Matemática
Avenida Vélez Sarsfield 1611 (CP 5000) Córdoba. Argentina.
{daniel.abud, sgigena}@yahoo.com

Resumen. La aplicación de una geometría diferente de la Geometría Euclidiana implica un cambio en las estructuras de pensamiento de los investigadores. Tarea que no es sencilla. Se pretende en este trabajo comparar una geometría con la otra. En este caso, dada la utilización de esta geometría (la Unimodular Afín), hace que todas las aproximaciones numéricas conocidas en el mundo no sean aplicables. Esto ocurre por el cambio sustancial de paradigma. Por ejemplo, en el Método de Elementos Finitos se usan triángulos planos para discretizar, aquí ya no se puede. No solo existe la aplicación a la Teoría de Cáscaras, como lo hemos venido haciendo en estos últimos trabajos sino como lo han hecho otros autores, por ejemplo, en procesamiento digital de imágenes.

Palabras Clave: Grupos de Lie, Geometría Unimodular Afín, Geometría Euclidiana, Invariantes numéricos, Cambio de paradigma

1 Introducción

Se muestra en este trabajo cómo, así como en el procesamiento digital de imágenes, se han usado métodos numéricos aproximados con la geometría afín, también se puede aplicar en la teoría de cáscaras. Este es el inicio de esa transposición [1].

La literatura existente muestra que la Teoría de Cáscaras hace uso de la clásica Geometría Euclidiana de Superficies, i.e., invariante bajo la acción del Grupo Euclidiano ASO($3,\mathbb{R}$). Por nuestra parte, hemos elaborado, y publicado, a lo largo de los últimos años, diversos artículos, en los que se aborda la Teoría de Cáscaras desde el punto de vista de una Geometría diferente: la Geometría Unimodular Afín, cuyo grupo de invariancia básico es el Grupo Unimodular Afín ASL($3,\mathbb{R}$) [1, 2, 3, 4].

Lo que se ha hecho en esta tarea fue extrapolar al sólido tridimensional las ventajas ya desarrolladas y conocidas para las superficies, de manera tal que hemos comprobado que también lo son para las cáscaras (como un volumen) en el espacio ambiente.

Una Cáscara es un cuerpo que está acotado por dos superficies curvas relativamente cercanas (por eso es laminar). De tal manera que, la mayor parte de su estudio y análisis se reduce, y refiere, a la superficie media del cuerpo como ya se ha visto en trabajos anteriores. Bajo la acción de solicitaciones o fuerzas, la Cáscara pasa del estado original no deformado a otro estado, deformado, hasta que asume una posición de equilibrio [12, 17, 18, 22, 26].

Correspondientemente, la superficie media en el estado no deformado, M_0, pasa a la posición de equilibrio denotada $M_0{}^*$. Consecuentemente, los objetos geométricos correspondientes pasan de un estado al otro. El análisis de cambio, en la diferencia de objetos geométricos y físicos, es una parte central en el desarrollo de esta teoría [2, 3, 4, 11, 19, 20, 21, 25, 27].

Se comenzó este desarrollo alternativo que usa, en vez de la clásica Geometría Euclidiana de Superficies, su contraparte semejante Unimodular Afín, i.e., aquellos objetos geométricos invariantes bajo la acción del Grupo Unimodular Afín ASL($3,\mathbb{R}$). Primero, se introdujo el concepto de Cáscara Afín, se realizó una comparación con la teoría clásica y se procedió a establecer las condiciones de compatibilidad que deben ser cumplidas por (las componentes de) los diversos tensores diferencia que representan la primera, segunda y tercera formas fundamentales en ambas superficies medias. En un artículo subsiguiente, con los mismos autores, se establecieron las Ecuaciones de Equilibrio, y, posteriormente, las desigualdades básicas que deben satisfacer los diversos objetos geométricos. Siguiendo este hilo de pensamiento es que se pretende incorporar los métodos de aproximación numéricos especiales para esta geometría. Este trabajo muestra, inicialmente, el inicio para el desarrollo de estas aproximaciones [2, 3, 5, 6, 7, 8, 9, 10].

2 Descripción del Modelo

Con este trabajo queremos mostrar algunos elementos básicos de la Geometría Diferencial Unimodular Afín, como las Formas Fundamentales, la Normal Afín y la Curvatura Afín para comenzar a estudiar los métodos numéricos de aproximación. Vamos a mostrar la teoría tanto desde un punto de vista local como global y, a la vez, proporcionar nuevas aproximaciones de esta geometría en el estudio de las cáscaras. Queremos, también, mostrar una serie de aspectos y análisis que hagan del mismo un trabajo accesible a un mayor número de Matemáticos e Ingenieros no necesariamente especialistas en este tema. Como veremos en esta exposición, a modo de objetivo principal de la misma, los métodos tradicionales de aproximación numérica no se pueden aplicar con esta geometría.

A lo largo de estos años hemos venido trabajando en la reformulación de la teoría. Se han revisado los cálculos hechos por otros autores, principalmente Koiter y John, aumentando la precisión en los diferentes órdenes de derivación y, en los términos a despreciar, por ejemplo, en la función Densidad de Energía de Deformación. Lo que se ha dado a llamar como las *Desigualdades Básicas* constituye el inicio de una serie de aproximaciones teóricas para desarrollar la teoría. Con el cambio de Geometría nos hemos visto ante un modelo diferente al habitual en la clásica Teoría de Cáscaras (euclidiana), aumentando y enriqueciendo el número de invariantes, por tratarse de una Geometría mucho más rica, justamente en invariantes y, especialmente, por haberse aumentado el orden de diferenciación de los tensores de Tensión y Deformación.

Al presente, estamos tratando de encontrar métodos de aproximación compatibles con la Geometría Unimodular Afín, ya que todos los métodos numéricos de aproximación existentes no se pueden aplicar a esta nueva Teoría de Cáscaras. Esto tiene, *a priori,* una explicación muy clara: La "*distancia*" euclidiana es invariante bajo el grupo ASO$(3,\mathbb{R})$, pero no es un invariante Unimodular Afín, es decir bajo el grupo ASL $(3,\mathbb{R})$, por lo tanto, no se pueden computar los desplazamientos en el ambiente $\mathbb{R}^3$. Si n embargo, sí se puede calcular la "*distancia afín*" o "*función soporte afín*" desde cualquier punto de una superficie dada a cualquier punto del espacio, usando la Normal Unimodular Afín para esos fines.

Desde un punto de vista local veremos cómo se usan los invariantes afines, en superficies suaves con todas las características descriptas en trabajos anteriores, que van a permitir caracterizar las cónicas como las únicas curvas localmente convexas con curvatura afín constante. Asimismo, mostramos una interpretación geométrica de la Normal Afín, que sugiere plantear otras caracterizaciones de las cónicas a partir de sus curvas centrales [13, 14, 5, 16].

Por otro lado, globalmente, nos centramos en dar una nueva aproximación, que usamos para ver que, así como la elipse da solución a determinados problemas variacionales, es fácil probar que, de entre todos los óvalos con área constante, la elipse es el de mayor perímetro afín. Se extiende este concepto a volúmenes tales como el elipsoide y la esfera.

Una interpretación geométrica de la Normal Afín para explicar su rol en esta geometría. Se puede deducir que las cónicas juegan, en esta geometría, el mismo papel que las rectas y circunferencias en la Geometría Euclidiana. También, conservan algunas de sus propiedades. Por ejemplo, teniendo en cuenta que las rectas y circunferencias son simétricas respecto a sus rectas normales, parece natural que las cónicas se puedan caracterizar como curvas "*afínmente simétricas*" respecto a sus rectas normales afines. En este sentido es interesante tener presente la siguiente interpretación geométrica debida a Blaschke: Dada una curva plana convexa, si se define su curva central en un punto como el conjunto de los puntos medios de los segmentos con extremos en la curva y paralelos a la recta tangente en el punto, entonces la dirección de los normales afines de la curva viene dada por los vectores tangentes a sus curvas centrales [1, 23, 24, 25, 27].

En la Geometría Euclidiana, se ha venido usando para las aproximaciones, en prácticamente todos los Métodos Numéricos ya conocidos, al triángulo como figura más simple, y que mejor se adapta para cualquier discretización posible. La metodología ahora será considerar una acción de grupo G en un espacio E. Estamos particularmente interesados en cómo la geometría, en el sentido de Klein, inducida por el grupo G de la transformación se aplica a curvas (suaves), para luego aplicar a superficies diferenciables. En especial, la superficie media de la Teoría de Cáscaras Afines. Entonces, un invariante diferencial es una función de valor real, dependiendo de la curva y sus derivados, que se ve afectada por la acción del grupo. El ejemplo más simple es la *curvatura euclidiana* de una curva del plano, que es invariante bajo el grupo euclidiano consistente en traslaciones y rotaciones. La teoría de invariantes diferenciales remonta a la obra original de Sophus Lie [1, 23, 24].

2.1 Modelo

Si consideramos dos puntos cualesquiera x_1 y x_2, además, dos rectas de diferentes direcciones (no paralelas) que pasan por ellos, que se cortan en un punto x_0, generando así un tercer vértice. Solo puede pasar una y solo una parábola por esos puntos y que sea tangente a las dos rectas. Esa única parábola será:

$$x(t) = x_0 + x_0' \, t + \tfrac{1}{2} x_0'' \, t^2 \tag{1}$$

con $x_0 ; x_0' ; x_0'' \in \mathbb{R}^2$

A través de un sencillo cálculo se puede definir la longitud de un arco afín de dicha parábola por,

$$2A^{1/3} \tag{2}$$

donde $\boldsymbol{A}$ es el área del triángulo que determinan los extremos del arco y sus rectas tangentes. [1, 23, 24]

Si cambiamos t por otro parámetro s tal que,

$$\left[\frac{dx}{ds}, \frac{d^2x}{ds^2} \right] = 1 \tag{3}$$

esto ya brinda una condición para que sea longitud de arco afín, entonces, se cumple que,

$$s(t) = \int \left[\frac{dx}{dt}, \frac{d^2x}{dt^2} \right]^{1/3} dt \tag{4}$$

que es una función monótona, única salvo constantes e invariante por transformaciones afines.

Ahora, ajustándonos a la teoría local de curvas planas parametrizadas por la longitud de arco afín, donde

$$\left[x_0'(s), x_0''(s) \right] = 1 \tag{5}$$

el vector tangente: $x_0'(s)$ y la normal afín: $x_0''(s)$ forman una base de $\mathbb{R}^2$ asociada a la curva. Si derivamos vemos que $x_0'(s)$ y $x_0'''(s)$ son linealmente dependientes, entonces se los puede expresar así:

$$x_0'''(s) + k(s) \, x_0'(s) = 0 \tag{6}$$

siendo

$$k(s) = \left[x_0''(s), x_0'''(s) \right] \tag{7}$$

la función llamada *curvatura afín* de la curva. [1, 23, 24]

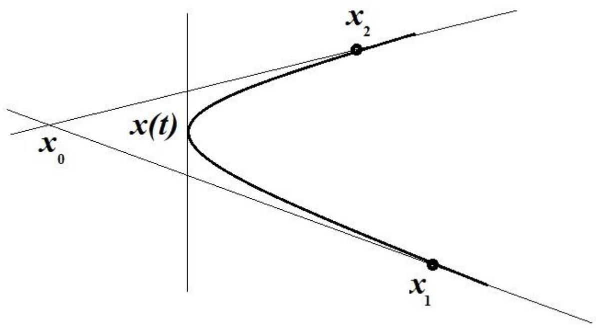


Fig. 1. Una gráfica que representa una parábola de aproximación a la curva en Geometría Afín.

De esta forma se puede aproximar, de una manera diferente a la usual cuando la Geometría empleada no es la Euclidiana sino la Geometría Afín. Ya que, si todas las curvas centrales de una curva plana y convexa son rectas, entonces la curva está en una cónica [1, 23, 24].

Consideramos la curva parametrizada por su longitud de arco afín ***s***. Si su curva central en un punto arbitrario $x(s_0)$ es una recta con vector director ***v***, entonces la curva se puede simetrizar mediante la transformación equiafín que aplica $\{x_0(s_0), v\}$ en la base usual $\{e_1, e_2\}$. [1, 23, 24].

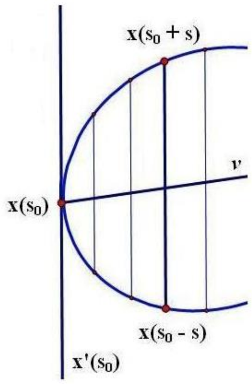


Fig. 2. Una gráfica que representa la recta central con la dirección de la Normal Afín.

Esta gráfica corresponde a [1]. Por tanto, el punto $x(s_0)$ y los extremos de cada segmento paralelo a $x_0(s_0)$ determinan dos arcos con la misma longitud afín (ya que son simétricos salvo una transformación equiafín), y se deduce que dichos extremos son $x(s_0+s)$ y $x(s_0-s)$. Esto indica que la curva está en una cónica [1, 23, 24].

La aproximación será invariante bajo grupo subyacente ***G***, y por lo tanto, sus valores numéricos no dependerá de las transformaciones del grupo, siempre depende de los conjuntos invariantes de los puntos de malla. Globalmente, se puede extender pensando que, dado un óvalo, es conocido que en cualquier dirección existe una recta tangente, que tomaremos como eje de ordenadas. Entonces, la simetrización de Steiner en esta dirección consiste en trasladar todos los segmentos verticales del óvalo hasta que sus puntos medios estén en el eje de abscisas. De esta forma, se conserva el área del óvalo y se simetriza al mismo en una dirección. Repitiendo el proceso en distintas direcciones, las simetrizaciones del óvalo se aproximan cada vez más a una circunferencia ***C***. La demostración se reduce a probar que, durante el proceso de simetrización, el perímetro afín aumenta o se mantiene [1, 23, 24].

Esto nos va dando una idea que se puede extender de la geometría plana a la espacial. Por lo tanto, el perímetro afín aumenta al simetrizar. En consecuencia, se da la igualdad si y sólo si todas las curvas centrales del óvalo son rectas, es decir, sólo para la elipse. Con lo cual se ha mostrado que las mismas técnicas de aproximación empleadas en otras aplicaciones de la Geometría Afín, pueden ser utilizadas aquí [1, 23, 24]

Por nuestra parte, en el desarrollo de la Teoría de Cáscaras Afines, hemos verificado que los métodos clásicos de aproximación, usados extensivamente en la Teoría de Cáscaras Euclidianas, no se pueden aplicar para realizar estimativas confiables [1, 23, 24].

Y a efectos de demostrar esta situación de incompatibilidad veamos el siguiente ejemplo:

Se hace difícil cambiar, radicalmente, un esquema de pensamiento ya consolidado, un cambio total de paradigma, especialmente con los años que lleva la Geometría Euclidiana funcionando.

Se incluye aquí el ejemplo del casquete esférico superior y su equivalente, para la Geometría Unimodular Afín, el casquete elipsoidal superior, obtenido aplicando al anterior una Transformación Unimodular Afín del espacio, a través de una matriz 3×3 con determinante igual a UNO. Por ejemplo, la matriz diagonal de elementos $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{8}{3}$. Se toma para facilidad de comprensión y a los fines de comparar mejor una esfera y un elipsoide. Que, en Geometría Euclidiana son muy diferentes, mientras que, en Geometría Unimodular Afín son exactamente iguales. Esta última Geometría no las distingue en absoluto.

La palabra *Esfera* proviene del término griego *σφαῖρα, sphaîra*, que significa pelota (elemento que se usa para jugar). Coloquialmente hablando, se emplea la palabra bola, para describir al cuerpo delimitado por una esfera. Además, se usa en Matemática (topológicamente) la palabra bola cuando se refiere a un entorno del Dominio de funciones de varias variables. En cambio, un *Elipsoide* es una superficie curva cerrada cuyas tres secciones ortogonales principales son elípticas, es decir, son originadas por planos que contienen dos ejes cartesianos. [13, 14, 15, 16]

En Matemática, es una cuádrica análoga a la *elipse*, pero en tres dimensiones. Si ambos sólidos tienen un volumen V igual a UNO, entonces se puede comparar:

La *esfera* se puede definir:

$$X(u_1,u_2)=\left(u_1,u_2,+\sqrt{1-(u_1)^2-(u_2)^2}\right)=(x_1,x_2,x_3) \qquad \textbf{(8)}$$

tal que,

$$(u_1)^2+(u_2)^2\le 1 \qquad \textbf{(9)}$$

si se hace una *Transformación Unimodular Afín*, se pasa de las coordenadas (x_1,x_2,x_3) a las coordenadas (y_1,y_2,y_3):

$$\begin{pmatrix} \frac{3}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{8}{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{3}{4}x_1 \\ \frac{1}{2}x_2 \\ \frac{8}{3}x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}=Y \qquad \textbf{(10)}$$

si se define:

$$v_1=\tfrac{3}{4}\,u_1 \qquad \textbf{(11)}$$

y

$$v_2=\tfrac{1}{2}\,u_2 \qquad \textbf{(12)}$$

entonces,

$$Y(v_1, v_2) = \left(v_1, v_2, +\tfrac{8}{3}\sqrt{1 - \tfrac{16}{9}(v_1)^2 - 4(v_2)^2}\right) \tag{13}$$

si se cumple que,

$$(u_1)^2 + (u_2)^2 = \tfrac{16}{9}(v_1)^2 + 4(v_2)^2 \leq 1 \tag{14}$$

o, lo que es lo mismo:

$$\frac{(v_1)^2}{\left(\tfrac{3}{4}\right)^2} + \frac{(v_2)^2}{\left(\tfrac{1}{2}\right)^2} \leq 1 \tag{15}$$

Considerando que el Volumen de una esfera de radio *r* es:

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 \tag{16}$$

y el de un elipsoide, cuyos semiejes son *a*, *b* y *c*, es

$$V = \frac{4}{3}\pi abc \tag{17}$$

El *elipsoide* se puede definir:

$$\frac{(y_1)^2}{\left(\tfrac{3}{4}\right)^2} + \frac{(y_2)^2}{\left(\tfrac{1}{2}\right)^2} + \frac{(y_3)^2}{\left(\tfrac{8}{3}\right)^2} = \frac{(v_1)^2}{\left(\tfrac{3}{4}\right)^2} + \frac{(v_2)^2}{\left(\tfrac{1}{2}\right)^2} + \left(1 - \frac{(v_1)^2}{\left(\tfrac{3}{4}\right)^2} - \frac{(v_2)^2}{\left(\tfrac{1}{2}\right)^2}\right) = 1 \tag{18}$$

Estamos habituados a ver en Geometría Euclidiana estos dos objetos geométricos: una *ESFERA* y un *ELIPSOIDE*, que, a simple vista, como se puede observar son TOTALMENTE DIFERENTES, a pesar que ambos tienen el mismo volumen ***V***. [5, 6, 9, 10, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 22]

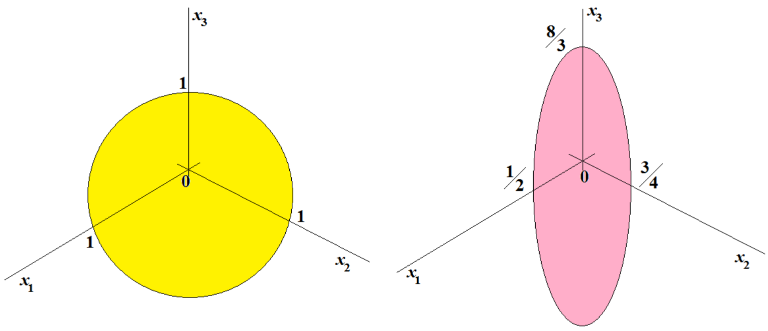


Fig. 3. Gráfica que representa a la esfera y al elipsoide.

Finalmente, estos dos objetos geométricos para la Geometría Unimodular Afín son exactamente iguales.

3 Conclusiones y trabajos futuros

Así, como hemos utilizado los resultados de trabajos donde se usa Geometría Afín Plana para procesar áreas, en el procesamiento digital de imágenes, nosotros extenderemos esos resultados a volúmenes en trabajos futuros. Este trabajo da el inicio para este tipo de aproximaciones que han sido empleadas en otras aplicaciones. Estas podrán ser utilizadas aquí en la Teoría de Cáscaras, solo que llevando lo plano a lo espacial. Se debe dejar bien en claro, y es eso lo que pretendemos con este trabajo, que no se pueden aplicar los clásicos y tradicionales métodos numéricos de aproximación (que son ampliamente conocidos por todos los investigadores, especialmente los Ingenieros) [12, 13, 14, 15, 16, 17].

Al salirnos de la Geometría Euclidiana, en este caso hacia la Geometría Unimodular Afín, pero así fuere a cualquier otra Geometría NO Euclidiana, los investigadores en procura de buscar soluciones a problemas estructurales, desconocen que dichos métodos tradicionales, i.e. Método de Elementos Finitos, son de imposible aplicación. Eso nos lleva a sugerir que deberían incorporarse en los planes de estudio de las carreras de Doctorado en Ingeniería, cursos de postgrado de Geometría Diferencial, Teoría de Curvas y Superficies, Variedades Diferenciales, Grupos de Lie, Geometrías No Euclidianas (Riemannianas, simplécticas, etc.), y otros relacionados con Métodos Numéricos Avanzados para Geometrías No Euclidianas.

Es importante (y es lo que hemos querido exponer y destacar aquí) abrir la mente de nuestros colegas Ingenieros Investigadores a filosofías de trabajo más abarcativas que las usuales. Recordemos la famosa frase del gran Matemático Gauss escrita en una carta a Taurino en 1824, "*Algunas veces he expresado el deseo que la geometría euclidiana no fuese la verdadera, pues así tendríamos una medida absoluta a priori*".

Referencias

1. Martinez, A. Milan, F. Val I. Teoría Afín de Curvas Planas, La Gaceta RSME, Nº2, 271 – 281, (2013).
2. John, Refined Interior Equations for Thin Elastic Shells, Comm. Pure Appl. Math 5, 583 – 615, (1971).
3. John, Estimates for the Derivatives of the Stresses in a Thin Shell Interior Shell Equations, C. Pure Appl. Math Nº 18, 235-267, (1965).
4. Gigena, S., Abud, D. De lo euclídeo a lo Afín, (EMCI 2011) XVI Encuentro Nacional y VIII Internacional de Educación Matemática en Carreras de Ingeniería. ISBN 978-950-658-252-4, (2011).
5. Gigena, S. M. Binia, D. Abud, Ecuaciones de Equilibrio en Cáscaras Afines, Revista Mecánica Computacional, Vol. XXII, 1953-1963, (2003).
6. Gigena, S. M. Binia, D. Abud, Condiciones de Compatibilidad para Cáscaras Afines, Mecánica Comp, Vol. XXI, 1862-1881, (2002).
7. Gigena, S. General Affine Geometry of Hypersurfaces I, Mathematicae Notae,V. 36, (1992).
8. Gigena, S. El Invariante de Pick para Hipersuperficies Descomponibles, Math Notae V37 (1994).
9. Gigena, S. D. Abud, M. Binia, Teoría de Cáscaras Afines: Estimativas de la Tensión y la Deformación, Revista Mecánica Computacional, Vol. XXIV, 2745-2758, (2005).
10. Gigena, S. D. Abud, M. Binia, Teoría de Cáscaras Afines: Desigualdades Básicas, Revista Mecánica Comp, Vol. XXIII, 639-652, (2004).
11. Gigena, S. Constant Affine Mean Curvature Hypersurfaces of Decomposable Type, Proc Symp in Pure Math, Am Math Soc, V 54, (1993).
12. Gigena, S. Abud, D., Binia, M. Geometrical and PDE Methods in the Treatment of the Theory of Shells: Comparing Euclidean and Affine Approaches; Publicado en Revista GEOMETRY de la Editorial Hindawi Publishing Corporation 15 pages, (2013).
13. Gigena, S. Abud, D. Theory of Affine Shells: Second Order Estimates of the Strain and Stress Tensors treated by P.D.E. Methods. Actas X Congreso "Dr. Antonio Monteiro", ISSN 0327-9170, 1-17, (2009).
14. Gigena, S. Abud, D. Binia, Theory of Affine Shells: Higher Order Estimates. Mecánica Computacional, ISSN 1666-6070, Vol. XXIX, (2010).
15. Gigena, S. Abud, D. Binia, M., Theory of Affine Shells: Towards Advanced Numerical Approximations, Revista Mecánica Computacional. Vol. XXIX, ISSN N° 1666-6070, pp. 1031-1044, (2012).
16. Gigena, S. Abud, D. Binia, M., Evolution of Affine Shells, III MACI 2011 – III Congreso de Matemática Aplicada, Computacional e Industrial, Universidad Nacional del Sur, Dep. Matemática e Instituto de Matemática, Bahía Blanca, Argentina, (2011).
17. Gigena, S. Abud, D. Binia, M., "Comparaciones entre Geometrías"; Publicado en EMCI con ISBN Nº 978-987-27897-9-4, (2012).
18. Gigena, S. Abud, D. Superficies Medias de la Geometría Unimodular Afín de Cáscaras en Contextos de Ingeniería; Publicado en EMCI con ISBN Nº 978-987-544-564-2, (2014).
19. Gigena, S. Ordinary Diferential Equations in Affine Geometry, Le Matematiche, Vol. LI, Fasc. I, (1996).
20. Gigena, S. Hypersurface Geometry and Related Invariants in a Real Vector Space, Libro 4 cap, (1996).

21. Gigena, S. Decomposable Surfaces with Vanishing Equiaffine Scalar Curvature, Actas IV "Dr. Antonio R. Monteiro", (1997).
22. Gigena, Abud, D., Binia, M. Geometrical and PDE Methods in the Treatment of the Theory of Shells: Comparing Euclidean and Affine Approaches; Publicado en la Revista GEOMETRY Edit Hindawi Publishing Corp, (2013).
23. Craizer, M. Lewiner, T. Morvan, J. Parabolic polygons and discrete affine geometry, Proc Sibgrapi, IEEE, (2006).
24. Calabi, P. Olver y A. Tannenbaum, Affine geometry, curve flows, and invariant numerical approximations, Advances in Mathematics 124, Article Nº 0081 (1996).
25. Arciniega, Reddy, J.N. Tensor-based Finite Element Formulation for Geometrically Nonlinear Analysis of Shell Structures, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 196, 1048-1073, (2007).
26. Koiter, On the mathematical foundation of shell theory, Proc. Int. Congress of Mathematics, Nice, 1970, Vol. 3, Paris, 123-130, (1971).
27. Godoy, C.A. Prato, F.G. Flores, Introducción a la Teoría de Elasticidad, Edit. Científica Universitaria, Córdoba, (2000).

Volver al Índice

Lote Económico. Análisis desde la Ingeniería

Daniel Juan Alberto Abud
Facultad de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales – Universidad Nacional de Córdoba
Departamento de Física
Avenida Vélez Sarsfield 1611 (CP 5000) Córdoba. Argentina.
daniel.abud@yahoo.com

Resumen. La Matemática es la base de la Ingeniería. Se manifiesta de muchas maneras en la inmensa cantidad de disciplinas que conforman a la Ingeniería. Así como en la Agricultura existe una Unidad Económica mínima para que la Unidad de Negocio sea rentable, en el Sector Industrial e Ingenieril es conveniente estudiar el Inventario de manera tal que no quede material en exceso ni que falte. Para lo cual, se busca el Lote Económico que minimiza la función de Costos de mantener el Inventario y de realizar las Órdenes para la restitución del Inventario.

Palabras Clave: Inventario, Lote económico, Máximos y mínimos de funciones, Interpretación ingenieril

1 Introducción

Hemos estudiado primero las funciones reales de variable real en la asignatura Análisis Matemático I. Veremos en este trabajo cómo se aplica el cálculo de extremos a estas funciones que describen modelos de Economía aplicada a Ingeniería [1, 2, 3].

Normalmente, una orden de pedido es seguida de una orden de producción del artículo pedido, esto es, aquello que es pedido será producido y vendido a medida que llegue a la Empresa. Como vimos en los supuestos del modelo de lote económico de producción, a diferencia de lo que ocurre en el modelo de cantidad económica de pedido, el pedido irá llegando al inventario durante un período de tiempo (el inventario no se reabastece instantáneamente). La tasa de producción, tiene que ser mayor que la tasa de Demanda, ya que si no fuese así no existiría INVENTARIO y estaríamos fuera de Stock (con los correspondientes elevados costos de habernos quedado sin mercadería: *stockout*) [1, 4, 5].

No sólo vamos a observar en este modelo que el Inventario se reabastece progresivamente a lo largo de un período de tiempo, sino que, al igual que en cualquiera de los otros modelos de gestión de inventarios, va a existir un *leadtime* [8].

El *leadtime* se define como el *tiempo* (es decir, lo más común en número de días) que transcurre entre la petición de un lote y la recepción de dicho lote. O sea, el tiempo de entrega. Las nuevos pedidos de inventario se realizarán cuando el mismo llegue al nivel “0”, o bien, cuando se llegue al punto de pedido. El punto de pedido o cantidad en stock mínima se utiliza para disminuir el riesgo de *stockout*. Cuando el nivel de inventario llega al punto de pedido se procede a ejecutar la petición de un nuevo lote [8].

Se calcula tal que:

$$\text{Punto de pedido} = \textit{leadtime} \times D \qquad \textbf{(1)}$$

(ambos, *leadtime* y *Demanda*, deben estar en las mismas unidades, normalmente en días)

Se define la *tasa de producción*, *P*, como el número de unidades producidas en un periodo de tiempo. Esta tasa de producción podrá ser anual, pero también nos la podremos encontrar en términos diarios, como suele ocurrir en este modelo. De la misma forma, la demanda ***D*** que nos viene en la mayoría de los casos de forma anual, podrá ser encontrada en este modelo con carácter diario. Por ejemplo, a la hora de analizar el nivel de inventario durante el lead time es interesante analizar la tasa diaria de producción con respecto a la demanda diaria [1, 3].

Es aquel pedido que optimiza los costos de pedido, almacenaje y ruptura. El Lote Económico es aquella cantidad de unidades que deben solicitarse al proveedor en cada pedido, de manera que se logre minimizar el costo asociado a la compra y al mantenimiento de las unidades en inventario. El objetivo básico que se persigue al determinar el Lote Económico es la reducción de costos, a la vez que se responden dos preguntas claves: ¿Cuánto pedir? ¿Cuándo pedir?... [1, 4, 8].

2 Descripción del Modelo

Lote Económico de Producción (conocido en inglés como *Economic Production Quantity* o por sus siglas *EPQ*) es un modelo matemático para Control de Inventarios que extiende el modelo de Cantidad Económica de Pedido a una tasa finita de producción. Así, en este modelo la recepción de pedidos de Inventario y la producción y venta de productos finales ocurrirán de forma simultánea, lo que lo diferencia del modelo de cantidad económica de pedido. Su finalidad es encontrar el lote de producción de un único producto para el cual los Costos por emitir la orden de producción y los costos por mantenerlo en Inventario se igualan [1].

2.1 Supuestos

El *leadtime* (tiempo de carga o tiempo de reabastecimiento) del Proveedor es constante y determinista. El Nivel de Inventario se reabastece progresivamente a lo largo de un período de tiempo. El tiempo de entrega es conocido y también constante. La Cantidad a pedir es constante. La Demanda es conocida, constante e independiente. En general, se trabaja con unidades de tiempo anuales, pero el modelo puede aplicarse a otras unidades de tiempo. La Tasa de la Demanda es conocida, constante y recurrente. Los Productos son fabricados, producidos y vendidos simultáneamente. No existen Descuentos por volumen de pedido. No hay faltantes. Se produce por Lote, y a todo éste, se lo coloca en el Inventario. Se trata de un Producto o Artículo individual [1, 2, 3, 8].

2.2 Modelo

Los Costos Totales son la suma de los *Costos de mantener* el Inventario y los *Costos de pedido* (orden), y no son constantes a lo largo del tiempo.

Así, queda expresado matemáticamente:

$$C_{\text{tot}} = C_{\text{mant}} + C_{\text{ord}} \qquad \textbf{(2)}$$

veamos cada Costo, ya que ambos son una función de (Q), sus funciones son las siguientes:

$$C_{\text{mant}} = t_D C_u \frac{Q}{2} \qquad \textbf{(3)}$$

(*recta*, $y = ax + b$, con la ordenada al origen nula)

$$C_{\text{ord}} = aD\frac{1}{Q} \qquad \textbf{(4)}$$

(*hipérbola*, $y = k\, {}^{1}\!/_{x}$)

donde:

t_D : Tasa anual de almacenamiento

C_u : Costo Unitario del artículo

Q : Tamaño del Lote

a : Costo de cada Orden

D : Demanda anual

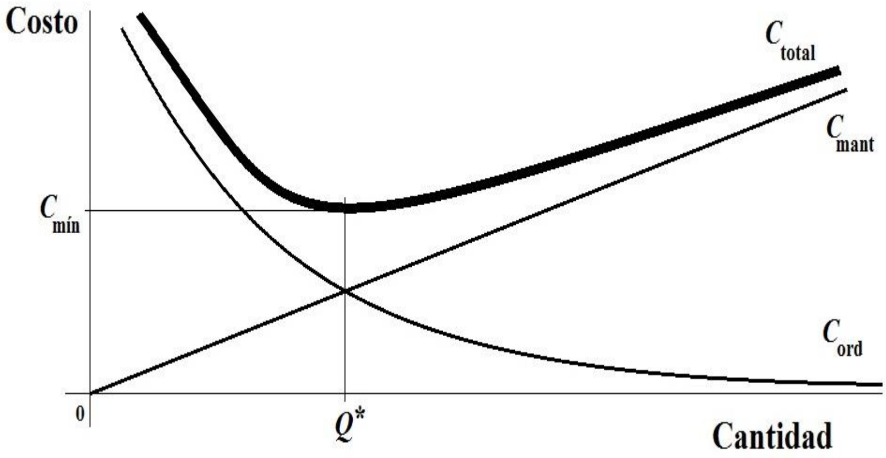


Fig. 1. Una gráfica que representa una la cantidad justa a la que le corresponde el costo mínimo.

El Costo Total es la suma del Costo de Mantener el Inventario y el Costo de Ordenar. Uno es una recta y el otro es una hipérbola, respectivamente. En el punto mínimo del Costo Total, tendremos la cantidad justa del Inventario, es decir, el *LOTE ECONÓMICO*. Para lo cual, hallaremos ese mínimo, como para cualquier función, se debe derivar, igualar a cero y despejar el valor de la **(2)**, es decir, reemplazando,

$$C_{\text{tot}} = t_D C_u \frac{Q}{2} + aD\frac{1}{Q} \tag{5}$$

derivamos, respecto a la variable (Q), e igualamos a cero:

$$\frac{t_D C_u}{2} - aD\frac{1}{Q^2} = 0 \tag{6}$$

despejando Q,

$$\frac{t_D C_u}{2} = aD\frac{1}{Q^2} \tag{7}$$

se tiene la cantidad que hace el *mínimo Costo* buscado:

$$Q^* = \sqrt{\frac{2aD}{t_D C_u}} \tag{8}$$

Normalmente, una *orden de pedido* es seguida de una Orden de Producción del artículo pedido, esto es, aquello que es pedido será producido y vendido a medida que llegue a la Empresa. A los efectos que los alumnos tengan plena visión del tema a transmitir es bueno brindar un ejemplo. Para lo cual, uno puede introducirse en varios campos dentro de la Ingeniería.

Es conveniente aclarar que los Costos de ruptura o de discontinuidad de *stocks* incluyen el conjunto de Costos por la falta de existencias, estos costos no serán absorbidos por la producción en proceso, sino que irán a parar directamente al estado de resultados.

Los criterios para valorar estos costos de ruptura son:

Disminución del Ingreso por Ventas: La no integridad contable por falta de referencias en un pedido realizado, supone una reducción de los ingresos por ventas, tanto por el desplazamiento en el tipo de la fecha de facturación, como por la pérdida absoluta de la pérdida.
Incremento de los gastos del Servicio: Aquí se incluyen las penalizaciones contractuales por retrasos de abastecimiento, *stops* o *parates* en el proceso de producción, los falsos fletes, etc.
La valoración de estos costos de ruptura es difícil y poco frecuente, solo es posible si la Empresa está provista de un eficiente sistema de gestión de la calidad, en general el Ingeniero a cargo de la gestión de inventarios deberá conformarse con estimaciones subjetivas o costos estándar. En literatura especializada estos son considerados entre el 1% y el 4% de los Ingresos por ventas, pero esto es también tentativo.

2.3 Ejemplo

Es común, en Ingeniería Civil, que la actividad profesional se oriente hacia la construcción propiamente dicha de obras civiles tipo Edificios, Puentes, Diques, etc. Supongamos que una Empresa Constructora procura minimizar sus costos al ejecutar obras previendo lo que necesitará a cada momento de la producción, como ocurre siempre, lo difícil radica en establecer claramente la información con la que uno cuenta. Es decir, armar el problema, para luego solucionarlo. En este caso, eso ya está resuelto exponiendo directamente los Datos y la Incógnitas.

Datos:

Demanda de Artículos:	$D = 2400$ unidades
Costo de ordenar:	$a = 20\ \$/\text{orden}$
Costo Unitario del Artículo:	$C_u = \$\ 20$
Tasa de Mantenimiento:	$t_D = 12\ \%$

Aclaración: Se considera que los días Laborales al Año, serán tomando 20 días por mes y multiplicando por 12 meses.

Se pide:

1. ¿Cuál es el número óptimo de unidades o artículos por orden?
2. ¿Cuántas órdenes esperadas al año se pueden colocar?
3. ¿Cuál es el tiempo de espera entre órdenes?
4. ¿Cuál es el Costo Total de Inventarios?

Respuesta

Las respuestas son de muy fácil obtención ya que con la sola aplicación de las fórmulas encontradas se llega a los resultados.

1. *Lote económico:* aplicando la fórmula obtenida en la parte teórica se tiene el número óptimo de unidades o artículos por orden:

$$Q^* = 200 \quad \text{unidades}$$

2. Las *órdenes esperadas* al año que se pueden colocar resultarán de dividir la Demanda de Artículos por la cantidad de Lote Económico hallado en el punto anterior:

$$\text{Ord}_{\text{esp}} = 12 \quad \text{órdenes}$$

3. El *tiempo de espera entre órdenes* será el que sale de dividir los Días Laborales al año con las Ordenes esperadas al año:

$$T_{esp} = 20 \ ^{\text{días}}\!/_{\text{órden}}$$

4. El *Costo Total de Inventarios* surge de aplicar la ecuación (5), que en este caso da:

$$\mathrm{CT}_{\mathrm{inv}} = \$\ 480$$

Con este sencillo ejemplo (donde no hace falta usar calculadora) vemos que, ni siquiera en la actividad profesional más pragmática (de mucha aplicación práctica), nos podemos desprender de uno de los conceptos más importantes de Aplicación del Cálculo Infinitesimal, como es la búsqueda de Máximos y mínimos.

2.4 Ventajas e inconvenientes

A diferencia del modelo de *Cantidad Económica de Pedido*, este modelo es menos estático que el anterior, adaptándose más a la realidad. Al considerar que el reabastecimiento de Inventario no se produce instantáneamente y que el Inventario se construye progresivamente a medida que se produce y se vende, el modelo logra recoger situaciones del mundo real. Así mismo, la consideración de tasas de producción y demandas diarias permite ajustar más eficazmente el modelo a la realidad, obteniendo cantidades por pedido óptimas que lograrán minimizar costos totales teniendo en cuenta costos de mantenimiento de Inventario más realistas.

Por otro lado, el modelo, aunque más dinámico que el de cantidad económica de pedido, sigue presentando diversas limitaciones derivadas de sus supuestos. Así, la demanda será nuevamente constante, fenómeno que no ocurrirá en el mundo real donde encontraremos demandas variables que podrán presentar estacionalidad o irregularidad derivada de pocos y periódicos compradores de grandes volúmenes, etc. Suponiendo que la demanda permanecerá constante a lo largo del año y tomando decisiones sobre la cantidad por pedido basándonos en ello estamos expuestos al riesgo de cambios en la demanda que anulen la validez de nuestras predicciones. No sólo a nivel anual, la demanda también podrá estar expuesta a variaciones durante el *leadtime* que podrán conducir a *stockouts*, lo que supondrá el fracaso de nuestra política de gestión de Inventarios. En este último caso, tendremos que recurrir al uso de modelos probabilísticos para la estimación de niveles de demanda, costos de *stockout*, etc. [1, 4, 6, 8]

Por último, poniendo en comparación el modelo de Lote Económico de producción con el modelo de cantidad económica de pedido, observamos que el primero presenta una reducción en Costos Totales de mantener Inventario respecto al segundo. Así, el hecho de que en el modelo que hemos analizado aquí el nivel medio anual de Inventario sea menor que en el modelo de cantidad económica de pedido debido a la Producción y simultánea venta, hace que los Costos Totales de mantener Inventario sean menores. [1, 3]

3 Conclusiones y trabajos futuros

Esta sencilla (pero, muy didáctica) aplicación de la búsqueda de Máximos y mínimos de una función real de variable real sirve para responder a la clásica pregunta de los Alumnos cuando se refieren a la "*utilidad*" de la Matemática. La Matemática en Ingeniería es equivalente a las "*abdominales*" de cualquier deportista. Uno las debe hacer si o si, pero, luego en el partido "*no se pone a hacer abdominales*", directamente "*juega*". [1]

Referencias

1. Abud, D; "Economía Básica", Editorial Solsona, ISBN Nº 978-987-33-6920-9, Córdoba, (2015).
2. Bulat, Tomas, Economía Descubierta. Ediciones B Argentina. (2013).

3. Cafferata, A.; Recalde de Bernardi; M.; García, R. y Swoboda, C. Actividad y Teoría Económica. Asoc. Coop. Facultad de Ciencias Económicas. UNC. (2001).
4. Gigena, S. et al Análisis Matemático II – Teoría, Práctica y Aplicaciones, Ed. GALEON, ISBN Nº 987-9363-04-3, Córdoba. (1998).
5. Masciarelli, Edgardo; Economía. FCEF y N. UNC. Córdoba (2000).
6. Mochon, F. y Becker, V. A. Economía: Principios y Aplicaciones. McGraw Hill. (1997).
7. Rossetti, J. P. Introducción a la Economía. Enfoque latinoamericano. Ed. Harla. (1991).
8. Samuelson, P. A. Economía. Ed. McGraw Hill. (1951).

Volver al Índice

Una Experiencia Positiva: Formación Docente Continua

Pedro M. Santucho[1], Claudia A. Roitman[2], Daniel E. Pagot[1]
[1] Grupo: Ecuaciones diferenciales en geometría afín, teoría de cascaras, y la enseñanza de la matemática, la física y la economía en carreras de ingeniería y ciencias naturales. Cátedra de Introducción a la Matemática, Universidad Nacional de Córdoba
{psantucho, pagedu }@hotmail.com.
[2] Cátedra de Introducción a la Matemática, Universidad Nacional de Córdoba
roitmanclaudia@gmail.com

Resumen. Entre las problemáticas más frecuentes con las cuales nos encontramos en la formación de los docentes de matemáticas en las carreras de ingeniería en la UNC son los siguientes: 1) La falta de homogeneidad en la formación pedagógica y disciplinaria de los docentes. 2) La necesidad de conocer para qué usan los ingenieros de cada especialidad la matemática. 3) La necesidad de formación continua y la actualización docente. Frente a esta situación y ante la inexistencia de cursos específicos, es que desde la cátedra de Introducción a la Matemática planteamos la necesidad de realizar cursos de formación docente, que en forma continua desde 2010 y 2016 se dictaron en el ámbito de la Facultad de Ciencias Exactas Físicas y Naturales de la Universidad Nacional de Córdoba. Lo que no nos brinda el medio lo procuramos desde la cátedra y lo brindamos a la comunidad universitaria.

Palabras Clave: Formación docente, Formación continua, Actualización matemática, Actualización didáctica.

1 Introducción: Caracterización de la problemática.

El presente trabajo fue realizado dentro de la cátedra de Introducción a la Matemática de la Facultad de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales de la Universidad Nacional de Córdoba. Introducción a la Matemática es una materia del primer cuatrimestre de las carreras de Ingeniería. Es una materia con un currículo muy importante en cuanto a contenidos y profundidad: Álgebra Lineal con sistemas de ecuaciones lineales y matrices, Geometría Analítica y Análisis Matemático con el cálculo de límites hasta llegar al cálculo de derivadas sin sus aplicaciones a la matemática. Todo el contenido es dictado con rigor matemático, teoría con demostraciones de teoremas.

Nos planteamos dentro del conjunto de variables a estudiar los resultados obtenidos en la totalidad del universo de alumnos que cursaron la materia durante los años 2008 y 2009 en lo referente a las diferentes maneras de presentar los temas por parte de cada docente, aun teniendo en cuenta que existe bibliografía unificada tanto en el aspecto teórico como el práctico. Con libros específicos de cátedra.

2 Análisis realizado

Durante años realizamos con los datos estadísticos recabados por la Secretaría Académica de la Facultad y los que contábamos en la Cátedra un análisis de calidad y características de la formación de los alumnos, observados también desde la óptica de las materias correlativas posteriores.

Dentro de los elementos de análisis contamos con las encuestas a los alumnos acerca de su evaluación de los docentes en diversos aspectos realizadas por los sistemas de la facultad.

Los estudios realizados develaron gran dispersión en diversos aspectos: a) Aprobación de la materia por promoción. b) Alumnos que aprobaron uno y dos parciales. c) Sobre muestras convenientemente escogidas se evaluaron las adquisiciones cognitivas, con criterios de aprendizajes significativos en los aspectos lógicos y de contenidos específicos. d) Nociones de aplicaciones a la ingeniería. Así cotejamos la producción lograda con metodologías estadísticas. Nos planteamos el porqué de la disparidad.

3 Diagnóstico

La dispersión encontrada en el punto anterior indicó que las dificultades radicaban en fallas e inseguridades en: 1) Objetivos para la educación matemática. 2) Proceso de enseñanza aprendizaje. 3) La evaluación. 4) Evolución lograda en el alumno. Una de las causas era la disparidad en la formación docente. Muchas otras causas eran concurrentes tales como los conocimientos previos de los estudiantes, la falta de hábitos tales como el de estudio. Nos preocupamos fundamentalmente por el trabajo docente, en todos los momentos del proceso de enseñanza aprendizaje, ya que la situación áulica no es la única en dicho proceso. Esa fue nuestra decisión ya que era aquella, la que con mayor facilidad podíamos modificar desde nuestro limitado espacio: la unidad docente. Se encuentra efectivamente una gran disparidad en la formación de los docentes y ningún elemento que nivele de alguna manera las actuaciones. Una de las razones es que hay dentro del cuerpo docente: matemáticos formados en investigación, físicos, ingenieros dedicados a la enseñanza e ingenieros que trabajan profesionalmente. Sólo el programa unifica, todo lo demás es disperso, porque hasta la bibliografía propuesta es usada con gran esparcimiento de elecciones por parte de los educadores. Todos tienen importantes y creativas inquietudes didácticas, según detectamos, pero la formación en común es nula. Otro aspecto es que las habituales reuniones de cátedra contemplaban el cruce de experiencias áulicas y la expresión en extensión de metodologías, dificultades y logros.

3.1 Formación docente. Una falencia detectada.

Como explicamos, en el punto anterior una falencia de importancia detectada en nuestra investigación era nuestra propia educación y posterior experiencia docente por lo diversa en su origen y en los resultados.

Para comenzar trabajamos con los objetivos para el aprendizaje y nos sorprendimos ante las respuestas a esta pregunta: ¿Nos planteamos cómo y para qué enseñar matemáticas? Frente a cierta perplejidad e ingenua obviedad en las respuestas establecimos mínimamente que debemos estar convencidos con fundamentos de que el ingeniero requiere de los contenidos que enseñamos.

Nos propusimos:

- Actualizar los contenidos en su presentación y promover la actualización en los aspectos didácticos, asimilando nuevas tecnologías.
- Uniformizar contenidos y notaciones sin coartar la libertad en la acción áulica de los docentes.
- Que el docente impulse la transformación lógica paradigmática del alumno. Del pensamiento disperso al analítico La dispersión del pensamiento consiste en aceptar estructuras repetitivas que los estudiantes siguen sin el análisis necesario, propugnamos entonces la transformación necesaria para iniciarlos en el conocimiento de la lógica intrínseca de las deducciones matemáticas.

4 Acciones

Con un diagnóstico adecuado pudimos establecer acciones adecuadas para un mejoramiento de la acción docente. Planificamos: 1) Acciones. 2) Evaluación y autoevaluación docente 3) Retroalimentación.

Se establecieron mínimamente dos actividades no obligatorias dirigidas a los docentes.

Entre las acciones una de muy importante fue la formación pedagógico didáctica y disciplinar de los docentes para ello propusimos y realizamos:

1. Taller docente. Propuesto por la cátedra en acuerdo con el Departamento de Enseñanza.
2. Cursos sistemáticos de educación continua con aplicaciones. Una concepción pedagógica (contenidos y estructura lógica) y una acción didáctica: Generar hábitos en el alumno. Esta propuesta es una acción amplia basada en los contenidos matemáticos y en sus aplicaciones a la Ingeniería.

A continuación desarrollaremos las acciones realizadas de manera extensa, siendo esta experiencia la que rescatamos de nuestras inquietudes y acciones.

4.1 Taller participativo de Reflexión de la Práctica en Introducción a la Matemática.

Se realizó durante el año 2012 con una importante participación de la mayor parte de los docentes de la cátedra. El departamento de Enseñanza que a través de las doctoras Mónica Gallino y Getrudis Fontaner dirigió las reuniones dieron una total libertad a las expresiones de todos los docentes, lo cual permitió “sincerar” la situación. Fue evidente lo generalizado del compromiso docente en las actividades. Curiosamente también mostró que los docentes que no concurrieron eran los que tenían menor aprobación de alumnos. Esto llevó a suponer que dichos docentes no mostraban la generalidad del universo y debieron analizarse separadamente, conversando con ellos.

4.2 Descripción del taller

Fue realizado entre el 12 de marzo de 2012 y el 25 de Junio de 2012. Con una reunión semanal.
Los docentes provenían de diversas formaciones de grado y posgrado, con orientaciones investigativas, pedagógico-didácticas, o profesionales. Esta diversidad, establecimos, era altamente enriquecedora en esta instancia, ya que se enfocaba la problemática desde distintos puntos de vista. Lo que en la experiencia áulica áulica se constituía en una limitación aquí se convertía en una fuente de conocimientos que aportaban riqueza y creatividad a la previa individualidad.
Las reuniones comenzaron con 16 participantes, y dos horas de trabajo por reunión.

4.3 A continuación realizaremos una breve síntesis

A través de la reflexión y producción del grupo de participantes surgieron conclusiones:
Pr un lado las debilidades

1. De los estudiantes: Se encuentran básicamente serias dificultades en
- La Formación previa
- En el lenguaje y en el pensamiento formal.
2. De los docentes: Se analizaron los aspectos metodológicos, la didáctica de las matemáticas. Se establecieron las potencialidades.
1. Desde la asignatura:
- Se estableció la necesidad del desarrollo del pensamiento para la resolución de problemas de ingeniería
- Es desde la cátedra por su ubicación en el desarrollo de la carrera el inicio y desarrollo de procesos y hábitos de la vida universitaria, que carecen.
2. Desde la cátedra como grupo docente:
- Es un equipo de trabajo sólido, coordinado. Con importantes posibilidades de crecimiento continuo.

4.4 Observación

Durante el desarrollo se encontró que existían diferencias entre el modelo mental del alumno y el modelo mental del docente y nos planteamos ¿Cómo lograr construir conocimientos de manera conjunta?

Desde aquella pregunta se desarrolló el trabajo pedagógico-didáctico intercambiando las experiencias áulicas, con un trabajo crítico controlado por los pedagogos, llegando a la construcción de mapas conceptuales.

4.5 Conclusión

La acción de retroalimentación del taller sobre los docentes y sobre el estudio que estábamos realizando fue muy importante y permitió de cierta manera "madurar" a los docentes en sus actividades, al interactuar en su diversidad.

Fue importante establecer el bien deseable, es decir fijar objetivos, permitiendo la máxima libertad áulica pero optimizando en favor del proceso de enseñanza-aprendizaje dichas actividades.

5 Cursos sistemáticos de aplicaciones a la ingeniería educación continua con

Los cursos fueron, como venimos desarrollando consecuencia de un estudio extenso sobre las falencias y las amplias posibilidades de mejoramiento del proceso de enseñanza-aprendizaje y sus consecuencias. Los cursos que nos propusimos pasaron a llenar una brecha no cubierta por la oferta de cursos para graduados en nuestro medio. En Córdoba los cursos de Matemática los dicta la Facultad de Matemática (FAMAF) con niveles de especialización muy altos y dirigidos a Investigadores y por otro lado cursos de Ingeniería con el uso de matemática aplicada, los cuales en la evaluación de la gestión docente que a veces por parte de algunos evaluadores, no son considerados. En el medio de estas dos alternativas de formación está nuestra propuesta.

5.1 Antecedentes.

Los cursos que se brindaron a los docentes fueron debatidos en cuanto a los aspectos curriculares de los mismos y a los pedagógicos y didácticos. A continuación se muestra el programa sintético de la materia Introducción a la Matemática:

1. Números reales.
2. Sistemas de ecuaciones lineales y matrices.
3. Coordenadas. Vectores geométricos.
4. Funciones y gráficos.
5. Límite y continuidad.
6. Derivada.

No fue nuestro objetivo, "enseñar a dar la materia", en lo absoluto, sino actuar sobre los elementos formativos de un docente de matemática en la facultad de Ingeniería. Esto lo hicimos en tres aspectos básicos: 1) En contenidos lógicos, matemáticos 2) En formación en los aspectos didácticos y en tecnologías educativas.3) El conocimiento de las aplicaciones a la ingeniería en general y en particular.

5.2 Los cursos que propusimos a lo largo de 8 años fueron los siguientes:

- Elementos de Álgebra y geometría Analítica para ingenieros (año 2010) (duración 60hs)
- Análisis Matemático Real en una variable (año 2011) (duración 60hs)
- MATLAB y sus aplicaciones al Álgebra y al Cálculo (año 2012) (duración 60hs)
- Álgebra en Espacios de Funciones (año 2013) (duración 60hs)
- "Administración y uso de Aulas Virtuales en la enseñanza universitaria". (año 2014) (duración 30hs).
- Didáctica de la Lógica de la Demostración (año 2015) (duración 60hs)
- Tensores y sus aplicaciones a la Ingeniería (año 2016) Primera parte (duración 40hs)
- Tensores y sus aplicaciones a la Ingeniería (año 2017) Segunda parte (duración 40hs). A dictarse.

5.3 Características de los cursos

5.3.1 Generales

a) Cada curso estuvo destinado a docentes de Matemática de la Facultad, integrantes de grupos de Investigación, ayudantes alumnos y practicantes en docencia de pregrado del área matemática y a todo graduado universitario con requerimiento de usos de los contenidos de cada curso.
b) Docentes de los cursos: *Planta permanente:* Ingeniero Pedro Santucho, Ingeniera Claudia Alejandra Roitman, Magister Ingeniera Estela Reyna. *Otros participantes:* Dra. Ing. Payer, Ing. Gentilini, Ing. Galoppo, Dra. Egea, Dra Rulloni, Lic. Dimitroff, Ing. Peiretti.
c) Se realizan habitualmente en el segundo cuatrimestre en el que no se dicta la materia.
d) Los cursos consisten en una cantidad de horas presenciales y una cantidad similar de horas de resolución de ejercicios y evaluación final. Se establecieron siempre programas analíticos y cronogramas de actividades. Las clases eran semanales y de 3 horas ininterrumpidas de duración.
e) Metodología que se emplea en el dictado: Se exponen los temas axiomáticamente, se demuestran teoremas. Se presentan ejemplos matemáticos y aplicaciones a la ingeniería. Se proponen ejercicios para que resuelvan los participantes.
f) Se dio un listado de bibliografía y fotocopias de ejercicios propuestos. Se dio por escrito la evaluación final.
g) La evaluación final consiste en la presentación al tribunal de ejercicios propuestos a los participantes, en un plazo a establecer para su entrega. Se propuso en cada caso un Tribunal.
h) No hubo aranceles en ningún caso.
i) No se consignó presupuesto ya que no se solicitan recursos por estar las actividades incluidas en la actividad docente.

j) Se otorgan certificaciones avaladas por la Facultad de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales de la Universidad Nacional de Córdoba.

5.3.2 Contenidos específicos de los cursos

- *Elementos de Álgebra y Geometría Analítica para Ingenieros*

Estructuras Algebraicas. Grupo. Anillo.
Campo. Números reales.
Demostración de Teoremas. Método axiomático. Técnicas de demostración. Matrices. Determinantes.
Combinatoria. 2 clases.
Sistemas de Ecuaciones Lineales.
Espacios vectoriales. Espacios Afines. Variedades Lineales.
Ejemplos en R^2 y R^3. Geometría analítica.
Espacios Euclideos.

- *Análisis Matemático Real en una Variable*

Números Reales. Campo, ordenado, arquimedeano, completo.
Nociones de Topología.
Funciones.
Límites funcionales. Continuidad.
Derivada. Diferencial.
Aplicaciones matemáticas de la derivada. Formas indeterminadas del límite.

- *MATLAB y sus aplicaciones al Álgebra y al Cálculo*

Introducción
Fundamentos de MATLAB
Más allá de lo básico en MATLAB
Funciones y Expresiones
Aritmética Compleja
Más sobre Matrices
Hacer Cálculo con MATLAB

- *Álgebra en Espacios de Funciones*

Espacios vectoriales. Funciones. Definiciones.
Dependencia e independencia lineal de funciones.
Espacios con producto interno. Aproximación de funciones.
Ortogonalidad de funciones.
Operadores lineales.
Valores y vectores propios.

- *Administración y uso de Aulas Virtuales en la enseñanza universitaria.*

Justificación del uso de dichas aulas virtuales como complemento de la enseñanza universitaria presencial
Creación, administración y manejo de aulas virtuales como complemento de la enseñanza presencial de grado
Elaboración de material adaptado para el aprendizaje virtual de asignaturas de Matemática
Creación y administración de actividades dentro del aula virtual
Propuestas de evaluación y seguimiento de los alumnos en la utilización del aula virtual
Interpretación y uso de las estadísticas del trabajo de los alumnos con las aulas virtuales

- *Didáctica de la Lógica de la Demostración*

Elementos de lógica.
Sistemas axiomáticos. Teoremas.
Axiomas de Peano. Inducción Matemática.
Técnicas de Demostración de Teoremas.
Aplicaciones a la Matemática.
Aplicaciones a la Ingeniería.

- *Tensores y sus aplicaciones a la Ingeniería*

Espacio vectorial de las aplicaciones lineales.
Espacio dual y doble dual.
Tensores covariantes.

- *Tensores y sus aplicaciones a la Ingeniería*

Tensores covariantes.(Continuación)
Tensores contravariantes.

Bases.
Campos vectoriales.
Campos Tensoriales.

5.3.3 Aspectos pedagógicos

- Se consideraron de fundamental importancia alcanzar los aprendizajes significativos, haciendo consciente al docente de la importancia de actuar de dicha manera en el accionar frente a los alumnos a través de su propia experiencia basadas en las experiencias de las clases de didáctica de la pedagoga Edith Litwin.[2] Se enseña a enseñar a través del mismo proceso de enseñanza aprendizaje.
- Es decir los contenidos fueron de gran importancia, pero igualmente relevantes fueron las metodologías de generación del conocimiento basadas en los conocimientos previos, anclados en ellos.[3]

5.3.4 Participación docente

Fue muy importante y en algunos de los cursos hubo una numerosa concurrencia de ayudantes alumnos y de practicantes en docencia de pregrado. Esta última categoría está legislada en la Facultad de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales de la Universidad Nacional de Córdoba y resultan de selecciones abiertas convocadas por las cátedras con la concurrencia de un tribunal docente ad hoc. El promedio de docentes por curso fue, considerando todos los dictados, de 8 (ocho), el de ayudantes alumnos 2 (dos) y el de practicantes de pregrado de 3 (tres). La deserción fue muy baja, fundamentalmente de personas de fuera del ámbito de las matemáticas. Se dieron certificaciones de asistencia y de aprobación. A pesar de lo complicada y laboriosa de la elaboración de las evaluaciones por parte de los asistentes fue desde el 80 %, hasta decaer en la actualidad a un 35 %, lo cual estamos analizando.

5.3.5 La importancia de la aplicación.

Participación de ingenieros que aplican los conocimientos en su actividad profesional, siempre docentes universitarios invitados de las materias de aplicación. Las exposiciones fueron enriquecedoras y absolutamente decisivas a la hora de "convencer" acerca de la utilidad del dictado en ingeniería de los temas expuestos.

5.3.6 La experiencia áulica de los cursos

En los cursos debimos prolongar las horas y los días previstos ya que la demanda de los asistentes fue muy significativa. En los cursos el porcentaje de aprobación fue superior al 50 %.

6 Conclusiones y trabajos futuros

Se lograron una serie de objetivos que no sólo eran cuantitativos sino cualitativos. En todos los casos las respuestas de los concurrentes fueron muy satisfactorias. En todos los casos el nivel del curso lo dio el responsable académico y los docentes y no la concurrencia, que en la mayoría de los casos fue muy dispar.

Se logró mayor homogeneidad en el dictado, en los cursos en que los docentes concurrieron a las clases.

Se consiguió una concurrencia permanente, participativa.

Se cubrió la brecha inexistente en el departamento que impedía la formación docente en matemática.

Se incrementó la potencialidad docente en los aspectos lógicos, matemáticos y didáctico-metodológicos.

Se está permanentemente en procesos dinámicos de evaluación, auto-evaluación y retroalimentación.

Se logró contribuir en la formación de los integrantes de grupos de investigación que cuentan entre sus objetivos modelar problemas de ingeniería.

Nos proponemos en el futuro inmediato, extender estos cursos incluyendo nuevos docentes, más talleres didácticos y nuevas tecnologías.

7 Bibliografía básica de los cursos

A continuación enumeramos la bibliografía básica empleada y aconsejada en los cursos de educación continua que hemos dictado.

- Hoffman, K.;Kunze R.: Álgebra Lineal. Ed. Prentice Hall. (1973)
- Mostow, G.;Sampson, J.; Meyer J.: Fundamental Structures of Algebra. McGraw-Hill. (1963).
- Burgos Román, J. de: Curso de Álgebra y Geometría Cartesiana. Ed. McGraw Hill.(2004)
- Spivak, Michael: Cálculus. Ed. Reverté. (1998)
- Rudin, W.: Principles of Mathematical Analysis. Ed. McGraw-Hill.(1998)
- Hunt, B.; Lipsman, R.; Rosenberg, J.: A Guide to MATLAB for Beginners and Experienced Users. Cambridge University Press (2014)
- Nakamura, S.: Análisis Numérico y Visualización Gráfica con MATLAB. Prentice Hall (2005)
- Yang, W.; Cao, W; Chung, T.; Morris, J.: Applied Numerical Methods Using MATLAB. John Wiley & Sons. (2005)
- Davis, T.; Sigmon, K.: MATLAB® Primer. Chapman & Hall/CRC. (2006)
- Stein, E.; Shakarchi, R.: Functional Analysis: An Introduction to Further Topics in Analysis. Princeton University Press. (2011)
- Copi, I.: Simbolic Logic. Macmillan Publishing Co, Inc. New York. (1973)
- Solow, D.: Cómo entender y hacer demostraciones en matemáticas. Editorial Limusa: México. (1987)
- Hunter, G.: Metalógica. Introducción a la metateoría de la lógica clásica de primer orden. Paraninfo S.A.: Madrid. (1981)
- Chow, T.: Mathematical Methods for Physicists. A concise introduction. Cambridge University Press. (2003)
- Taylor, J.: Classical Mechanics. University Science Books. 2005.
- Checchi de Pacharoni, A.: “Apuntes del curso de Tensores para el Doctorado en Ingeniería.” FCEFyN. UNC.(1995)
- Santaló, L.: Vectores y Tensores con sus aplicaciones. EUDEBA. (1993)
- Link: Moodle - Open-source learning platform | Moodle.org

Referencias

1. Novak, J.: Los mapas conceptuales: Teoría, metodología, tecnología, Actas de la Primera Conferencia Internacional sobre Mapas Conceptuales, Pamplona, España. Editorial Universidad Pública de Navarra. (2004)
2. Litwin, E. Las configuraciones didácticas: una nueva agenda para la enseñanza superior. Editorial Paidós. (1997)
3. Ausubel, D.: Adquisición y retención del conocimiento: una perspectiva cognitiva. Ed. Paidós Ibérica.(2002)

Volver al Índice

Solución Numérica del Pandeo de una Columna con Extremos Articulados

Marcuzzi Pablo, Ozán Susana, Garcés Alejandra
Departamento de Matemática, Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de San Juan
Av. Lib. San Martín 1109 (Oeste) Capital, San Juan
{pmarcuzzi,sozan}@unsj.edu.ar, lic.agarces@gmail.com

Resumen. En este trabajo se presenta un fenómeno de inestabilidad conocido en ingeniería estructural como pandeo de barras. Con el objetivo de plantear la ecuación diferencial de segundo orden que rige el fenómeno, se menciona las causas generadoras y las hipótesis utilizadas. La solución analítica aproximada permite determinar la menor carga que inicia el fenómeno, pero es insuficiente para la determinación de la ecuación del eje deformado. Por esta razón, se emplea el método de integración de Euler (Runge Kutta de 1° Orden) para encontrar una solución numérica del problema. Se analiza la deflexión máxima generada como una función de las condiciones de borde en la base de la columna y también como una función de la carga axial. Por último se presenta un breve ejemplo numérico y sus conclusiones.

Palabras Clave: Pandeo, Ecuaciones diferenciales, Métodos numéricos.

1 Introducción

Las estructuras sometidas a cargas, pueden fallar de diversas maneras en función del tipo de carga, tipo de estructura, condiciones de apoyo, etc.

Un tipo de falla es el pandeo. Este fenómeno ocurre en elementos generalmente esbeltos, sometidos a esfuerzos axiales de compresión. Los elementos estructurales que lo experimentan con mayor frecuencia (aunque no los únicos) son las columnas [1].

El pandeo se manifiesta como una flexión lateral del eje longitudinal de la barra por efecto de la carga actuando en su extremo. Esta curvatura añade tensiones de tracción y compresión al estado tensional primitivo de compresión simple al que se encontraba sometida la columna. De esta manera, al sumarse las tensiones de compresión es posible que se alcance la tensión de rotura del material y la barra falle por pandeo.

1.1 Hipótesis a considerar

Para poder plantear un modelo matemático que describa el fenómeno de pandeo, es necesario considerar una serie de hipótesis [2]:

- La barra se encuentra formada por un material homogéneo, lineal y elástico. A los efectos numéricos se considerará una barra de acero, de sección cuadrada constante de 2 cm de lado y 300 cm de altura (Fig. 1a).
- Las articulaciones en los extremos de la columna no producen rozamiento alguno (i.e. no introducen ningún momento flector al sistema)
- La carga axial es colineal con el eje de la columna (se desprecia cualquier tipo de excentricidad que genere algún momento flector adicional)
- Los sentidos positivos de los ejes de referencia son los mostrados en la Fig. 1a.
- El giro θ (Fig. 1b), i.e. el ángulo formado por la tangente en el origen del eje deformado y la posición sin deformar es pequeño (inferior a 0.2 radianes, en una barra con las características mecánicas y geométricas mencionadas anteriormente)
- La carga de compresión P es invariante en el tiempo.

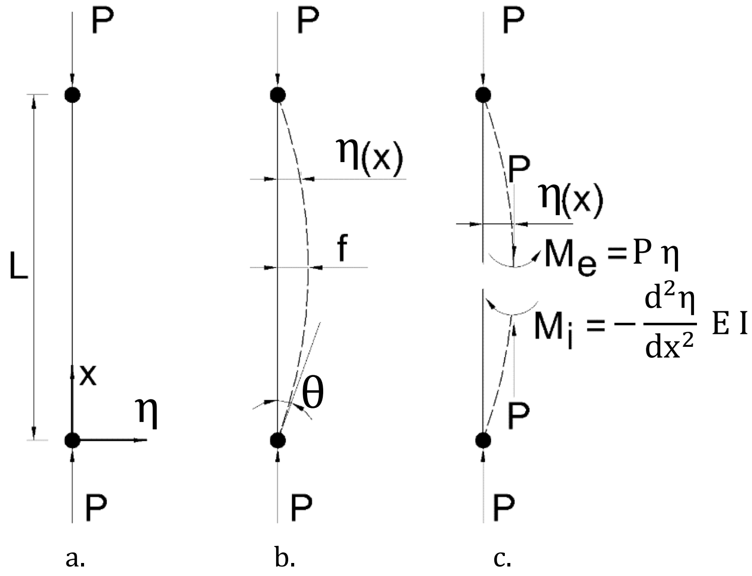


Fig. 1 a. Situación inicial de la columna, b. En línea de puntos se dibuja el eje deformado cuando ha comenzado la flexión lateral, c. Equilibrio de las solicitaciones en una sección cualquiera de la columna.

2 Planteo y Solución analítica de la Ecuación Diferencial

Si la barra se desplaza una cantidad f en su punto medio, la carga P en una sección cualquiera de la columna generará un momento externo igual a:

$$M_e = P\,\eta(x) \tag{1}$$

Éste tenderá a aumentar la curvatura de la barra.

Por otra parte, se producirá un esfuerzo interno (M_i), que tenderá a enderezar la columna y cuya magnitud dependerá del tipo de material, curvatura del eje de la columna y de las características geométricas de la sección.

Del estudio de la flexión simple de un sólido elástico [2], se sabe que la curvatura del eje geométrico está dado por:

$$\frac{1}{r} = \frac{M_i}{E\,I} \tag{2}$$

Donde:

r: Radio del círculo osculador (inverso de la curvatura).
M_i: Momento flector interno.
E: Módulo de elasticidad longitudinal (depende del material. En el caso del acero vale $2.1\ x10^6\ \mathrm{kg/cm^2}$)
I: Momento de inercia de la sección con respecto a un eje baricéntrico (Para un cuadrado de lado igual a 2 cm, vale $\frac{2^4}{12} = 1.33\ \mathrm{cm}^4$)

Además, por geometría diferencial, se conoce que la inversa del radio del círculo osculador (i.e. la curvatura) de una función $\eta = f(x)$ en un punto genérico de ésta, se encuentra dada por la siguiente expresión:

$$\frac{1}{r} = \pm \frac{\frac{d^2\eta}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{d\eta}{dx}\right)^2\right]^{3/2}} \qquad \textbf{(3)}$$

Siendo:

η: Valor de la deformada de la barra. Es una función de la abscisa x
El signo va a estar determinado por la elección de los ejes $x - \eta$
En el caso de columnas, la inclinación de la tangente con respecto al eje longitudinal, i.e. la derivada de primer orden (que además se encuentra elevada al cuadrado) es insignificante con respecto a la unidad (el error que se comete se analizará más adelante), por lo tanto la expresión anterior puede simplificarse a:

$$\frac{1}{r} = \pm \frac{d^2\eta}{dx^2} \qquad \textbf{(4)}$$

Reemplazando (2) en (4) se obtiene la expresión del momento interno:

$$M_i = E\,I \frac{d^2\eta}{dx^2} \qquad \textbf{(5)}$$

Comparando las magnitudes de M_e y M_i, es posible encontrar tres posibilidades:

- Si $M_e < M_i$: en este caso se está hablando de un equilibrio estable. Se da cuando la carga P es pequeña (la columna se encuentra en un estado cercano a la compresión simple). Si se la aparta de la posición de equilibrio, ésta volverá a dicha posición.
- Si $M_e > M_i$: se está en presencia de un equilibrio inestable. Contrariamente al caso anterior, la carga P es muy grande e induce grandes deflexiones en la columna. Al estado tensional de compresión simple original, se agrega un estado tensional debido a la flexión, llegando en un caso límite a la rotura del elemento.
- Si $M_e = M_i$: se encuentra en presencia de un equilibrio indiferente, esto es: la pieza se encuentra en equilibrio no solamente en la posición rectilínea, sino también con su eje longitudinal deformado. Esto se produce cuando la carga P tiene un determinado valor, que se determinará a continuación.

Si los ejes $x - \eta$ se eligen como los mostrados en la Fig. 1a, las expresiones de los momentos externo e interno valen:

$$M_e = P\,\eta(x) \qquad \textbf{(6)}$$

$$M_i = -\frac{d^2\eta}{dx^2}\,E\,I \qquad \textbf{(7)}$$

Para que exista equilibrio indiferente debe forzarse la siguiente condición:

$$M_e = M_i \qquad \textbf{(8)}$$

Por lo tanto se obtiene la siguiente ecuación diferencial lineal homogénea de segundo orden:

$$-E\,I \frac{d^2\eta}{dx^2} = P\,\eta(x) \;\rightarrow \frac{d^2\eta}{dx^2} + \frac{P}{E\,I}\,\eta(x) = 0 \qquad \textbf{(9)}$$

Utilizando la sustitución de Euler [3], el polinomio característico resulta:

$$\lambda^2 + \frac{P}{E\,I} = 0 \tag{10}$$

Cuyas raíces son imaginarias puras:

$$\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{P}{E\,I}}\,i \tag{11}$$

La solución general de la ecuación (9) es:

$$\eta(x) = C_1 \cos\left(\sqrt{\frac{P}{E\,I}}\;x\right) + C_2\,\mathrm{sen}\left(\sqrt{\frac{P}{E\,I}}\;x\right) \tag{12}$$

Las constantes C_1 y C_2 se determinan a través de las condiciones de borde:

$$\begin{aligned} &\eta(x = 0) = 0 \quad \rightarrow \quad C_1 = 0 \\ &\eta(x = L) = 0 \quad \rightarrow \quad C_2\,\mathrm{sen}\left(\sqrt{\frac{P}{E\,I}}\;L\right) = 0 \end{aligned} \tag{13}$$

El caso más sencillo se da cuando el valor de C_2 es igual a cero, dando como resultado la posición no deformada de la columna (i.e. equilibrio estable). Ese caso no es de interés en este trabajo, debido a que se busca la condición de equilibrio indiferente. Por esta razón se analizarán las situaciones en las cuales se anula el término que involucra a la función seno.

Ésta se anula cuando el valor del argumento es un múltiplo entero de la constante π, por lo tanto es posible escribir:

$$\sqrt{\frac{P}{E\,I}}\;L = n\pi\,, \quad \text{con } n = 1,2,\ldots \tag{14}$$

De la ecuación anterior, se puede obtener la expresión generadora de cargas P tales que mantienen el estado de equilibrio en cualquier posición deformada (i.e. equilibrio indiferente):

$$P = n^2\pi^2\frac{E\,I}{L^2}\,, \quad \text{con } n = 1,2,\ldots \tag{15}$$

Para el caso particular en el que $n = 1$, se obtiene la menor carga axial que genera la primera condición de equilibrio deformado:

$$P = P_{cr} = \pi^2\frac{E\,I}{L^2} \tag{16}$$

Esta carga se denomina carga crítica de Euler [2]

De la expresión (13) es claro que la constante C_2 funciona como amplitud de una onda sinusoidal, por lo que puede reemplazarse por el parámetro f (perturbación inicial para quitar del equilibrio a la columna, también denominada flecha). Esto puede escribirse como:

$$\eta(x) = f\,\text{sen}\left(\sqrt{\frac{P}{E\,I}}\;x\right) = f\,\text{sen}\left(\frac{n\pi}{L}\;x\right) \quad \text{con } n = 1,2,\dots \tag{17}$$

De esta ecuación se desprende que la flecha originada por la carga crítica es indefinida, es decir cuando la carga es igual a la crítica, la flecha puede tomar cualquier valor y el equilibrio se seguirá manteniendo. Esta inconsistencia se debe al uso de la expresión aproximada de la curvatura. Para sortear esto, se integrará de forma numérica la ecuación diferencial con todos los términos.

3 Método de Integración de Euler hacia adelante (Runge Kutta de 1er orden)

Es un método explícito, de un solo paso, cuyo error es proporcional al tamaño del paso Δx con el que se ha discretizado el dominio. Si bien existen métodos de integración más precisos, éste es intuitivo y fácil de implementar en cualquier lenguaje de programación [4].

Como se habla de dominio discreto, es necesaria la introducción de subíndices que indicarán en que paso se encuentra el cálculo. El parámetro que se discretizará es la altura de la columna:

$$L = i\,\Delta x \quad \text{con } i = 0, 1, 2, \dots \tag{18}$$

Los demás parámetros se discretizarán en base a la ecuación anterior.

La derivada primera de una función es una estimación directa de la pendiente en la abscisa en la cual se evalúa. Si se hace el desarrollo de Taylor alrededor de un punto η_i, se evalúa en η_{i+1} y se trunca en el segundo orden:

$$\eta_{i+1} = \eta_i + \eta'_i\,\Delta x \tag{19}$$

Por otro lado, se asume que:

$$\eta'_i = f(x_i, \eta_i) \tag{20}$$

Reemplazando (20) en (19) se obtiene la expresión del método de Euler hacia adelante:

$$\eta_{i+1} = \eta_i + f(x_i, \eta_i)\,\Delta x \tag{21}$$

3.1 Reducción de una ecuación diferencial de orden “n” a un sistema de “n” ecuaciones diferenciales de primer orden

Como se mencionó anteriormente, esta técnica sirve para integrar ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden, en tanto que el problema del pandeo requiere una integración de segundo orden.

Por este motivo, se utilizará el artificio de reducción de ecuaciones diferenciales de orden “n” a un sistema de “n” ecuaciones diferenciales de primer orden.

La ecuación diferencial que rige el pandeo de una barra articulada en los extremos y que cumple con las hipótesis mencionadas en 1.1 es:

$$\frac{d^2\eta}{dx^2} + \frac{P}{E\,I}\,\eta(x)\left[1 + \left(\frac{d\eta}{dx}\right)^2\right]^{3/2} = 0 \tag{22}$$

Si se introducen las variables:

$$\eta(x) = y_1 \; ; \; \frac{d\eta}{dx} = y_2 \tag{23}$$

Entonces:

$$\frac{d\eta}{dx} = y_1{}' = y_2$$
$$\frac{d^2\eta}{dx^2} = -\frac{P}{E\,I}\, y_1\, [1 + (y_2)^2]^{3/2} \tag{24}$$

Por lo tanto el sistema de dos ecuaciones diferenciales de primer orden resulta:

$$\begin{cases} \dfrac{d\eta}{dx} = y_2 \\[2ex] \dfrac{d^2\eta}{dx^2} = -\dfrac{P}{E\,I}\, y_1\, [1 + y_2{}^2]^{3/2} \end{cases} \tag{25}$$

Reescribiendo la ecuación (21) en forma vectorial, se tiene:

$$y_{i+1} = y_i + f(x_i, y_i)\, \Delta x \tag{26}$$

Dónde:

$$y_{i+1} = [\eta_{i+1} \quad \eta'_{i+1}]^T = [y_1 \quad y_2]_{i+1}{}^T$$
$$y_i = [\eta_i \quad \eta'_i]^T = [y_1 \quad y_2]_i{}^T \tag{27}$$
$$f(x_i, y_i) = y_i' = \left[\eta'_i \quad -\frac{P}{E\,I}\,\eta_i\,\left(1 + \eta'_i{}^2\right)^{3/2}\right]^T = \left[y_2 \quad -\frac{P}{E\,I}\, y_1\, (1 + y_2{}^2)^{3/2}\right]_i^T$$

Para comenzar el proceso iterativo de integración, es necesario brindar dos condiciones de borde, es decir un vector $\mathbf{y}_0$. La primera componente de este vector (y los subsiguientes obtenidos con el método de integración) será un desplazamiento; la segunda será un giro.

Por lo tanto, las condiciones de borde serán:

$$y_0 = [0 \quad 0.1]^T \tag{28}$$

Es decir: un desplazamiento nulo en el origen de la columna y un giro arbitrario de 0.1 radianes en el mismo punto. Cabe destacar que si ambos valores son nulos, se estará en presencia de un equilibrio estable, es decir con la columna recta.

3.2 Análisis de Resultados

El método de Euler se implementó en Octave [5] con las expresiones simplificada y completa. Si bien, ambas son soluciones numéricas (no son exactas) a partir de este momento se referirá a la solución numérica de la ecuación diferencial simplificada con el término "solución aproximada". Análogamente, la solución de la ecuación que contiene todos los términos se indicará como "solución exacta".

Las características geométricas y mecánicas de la barra son las mencionadas en la sección 1.1.

El primer análisis que se hizo, fue determinar la influencia en la magnitud de la flecha (deflexión máxima del eje) en función de la condición de borde en la base de la columna (giro). El resultado se observa en la Fig. 2. Allí se distinguen claramente ambas soluciones.

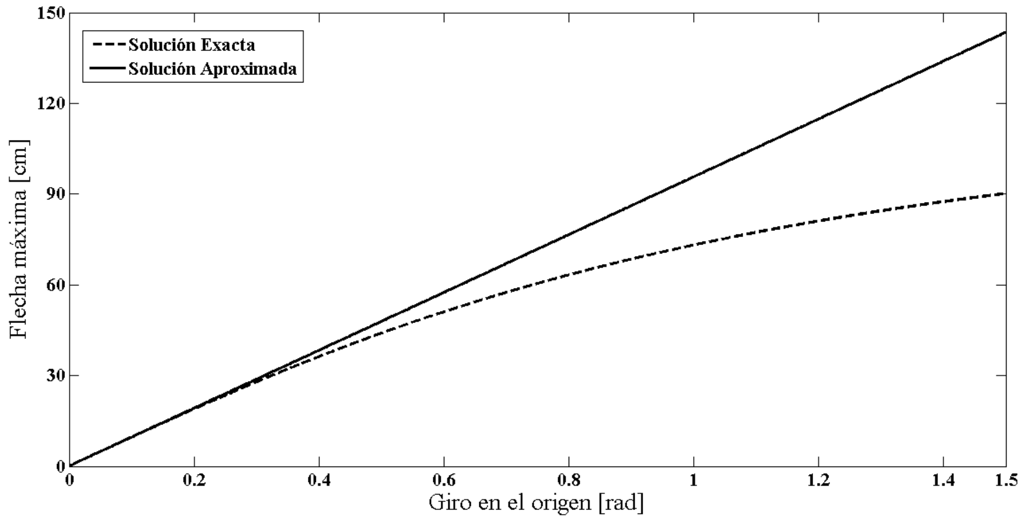


Fig. 2. Comparación de solución exacta con la aproximada como función del giro en la base. La carga axial corresponde a la crítica de Euler.

Se confirma además que la hipótesis de giros pequeños es válida para giros inferiores a 0.2 radianes. En el caso de columnas de estructuras civiles, la rigidez flexional es grande, por lo tanto los giros que pueden producirse entran en el rango donde ambas soluciones coinciden. Cuando se trata de barras más flexibles, la diferencia entre ambas se torna significativa.

Se realizó un segundo análisis en el cual se hizo variar la carga axial para observar el comportamiento de la flecha. Esto se muestra en la Fig. 3.

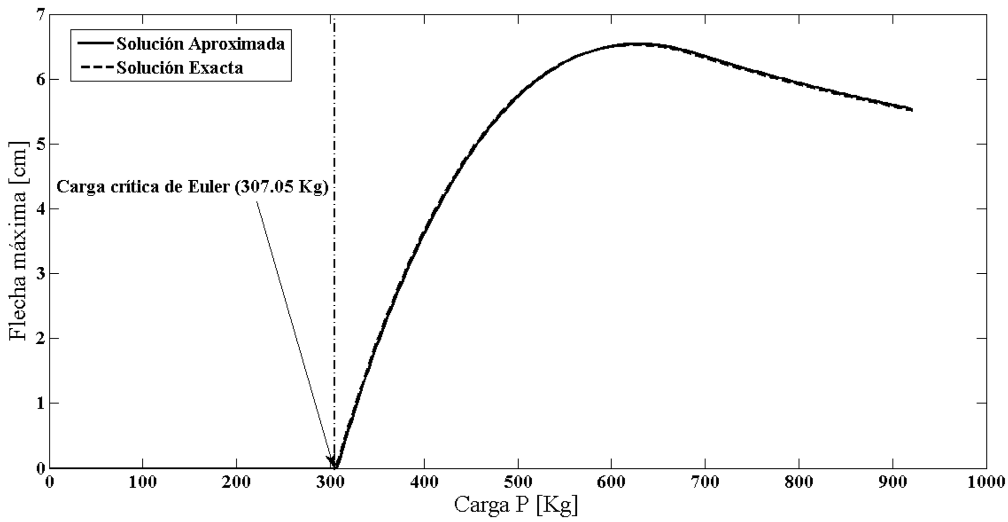


Fig. 3. Comparación de solución exacta con la aproximada.

Se observa que mientras la carga axial es inferior a la carga crítica de Euler (que para los datos de ejemplo, vale 307.05 Kg) no existe flecha alguna. Cuando la carga iguala e incluso supera al valor de la carga crítica, la flecha crece rápidamente con una tasa muy alta. Esto significa que una vez superada la carga crítica de Euler, basta un pequeño incremento en la carga axial para lograr un fuerte incremento en la flecha, volviendo a la barra altamente inestable.

Como se vio anteriormente, la carga crítica de Euler corresponde a la primera forma modal de pandeo. Para lograr la segunda forma de pandeo (dos semiondas sinusoidales) la carga crítica debe incrementarse 4 veces. Esto se conseguirá únicamente restringiendo las deflexiones generadas por el primer modo de pandeo (en la mitad de la luz de la barra). Caso contrario, la barra colapsaría en el primer modo.

4 Ejemplo numérico

Se planteará el problema de compresión en una barra de acero con las características geométricas y mecánicas descriptas anteriormente. Se considerará primero (haciendo una abstracción) el caso de compresión simple y luego el caso con pandeo.

Para el caso de compresión simple (suponiendo que la barra no pandearía bajo ningún aspecto) se tiene que la barra soportaría una carga igual a:

$$\sigma = \frac{P}{A} \rightarrow P = \sigma\, A = 2400\ \mathrm{Kg/cm^2}\ \ 4\ \mathrm{cm^2} = 9600\ \mathrm{Kg} \qquad \textbf{(29)}$$

Sin embargo, cuando se considera el pandeo, la expresión de la carga crítica vale:

$$P_{cr} = \pi^2 \frac{E\, I}{L^2} = \pi^2 \frac{2.1 \times 10^6\ \mathrm{Kg/cm^2}\ \ 21.33\ \mathrm{cm^4}}{(300\ \mathrm{cm})^2} = 307.05\ \mathrm{Kg} \qquad \textbf{(30)}$$

Se pone de manifiesto que el pandeo es un fenómeno que debe evitarse a toda costa en el diseño estructural debido a que se desaprovecha la sección resistente del material (Para una misma sección cuadrada la carga crítica es aproximadamente el 3% de la que podría resistir). Existen maneras de aumentar la carga crítica como por ejemplo disminuir la longitud de la barra con algún tipo de arriostramiento lateral, utilizar secciones cuyas áreas se encuentren mejor distribuidas alrededor de algún eje baricéntrico, utilizar materiales más resistentes (poco práctico debido a costos elevados), etc.

5 Conclusiones y trabajos futuros

Se ha presentado el fenómeno de inestabilidad conocido como pandeo, conjuntamente a sus ecuaciones y soluciones (tanto numérica como analítica simplificada).

La solución analítica simplificada permitió encontrar el valor de la carga crítica para la cual se produce el equilibrio indefinido pero no fue suficiente para determinar el valor máximo de la deflexión. Por esta razón se recurrió a los métodos numéricos para efectuar la integración de la ecuación diferencial con todos sus términos. Con los resultados obtenidos de la integración, se encontró la relación entre el valor máximo de la flecha en función de la condición de borde en la base de la columna, como así también la rápida variación de la flecha una vez superada el valor de la carga crítica.

Por último, se dio un ejemplo numérico de la carga que soportaría la misma barra en el caso hipotético de ausencia de pandeo y luego considerando al mismo.

Trabajos futuros pueden proponerse modificando las condiciones de borde (extremos de barra no articulados), considerando efectos de excentricidades de la carga axial sobre la sección, haciendo variar la carga axial en el tiempo, utilizar métodos numéricos más exactos.

Agradecimientos. Los autores agradecen al Departamento de Matemática de la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional de San Juan por el apoyo brindado.

Referencias

1. Gere, J.: *Resistencia de Materiales 5ta edición; Capítulo 11: Columnas*. Thomson (2002)
2. Belluzzi, O.: *Scienza delle Costruzioni I*; *Capítolo 13: Sforzo Normale e Flessione.* Nicola Zanichelli. Bolonia (1957)
3. Stewart, J.: *Calculus Early Transcendentals (Sixth Edition)*. THOMSON BROOKS/COLE (2008)
4. Chapra, S.; Canale, R.: *Métodos Numéricos para Ingenierios 3ra edición; Capítulo 25: Métodos de Runge Kutta*. McGraw Hill (1999)
5. Eaton, J.; Bateman, D.; Hauberg, S; Wehbring, R.: *GNU Octave - Free your numbers 4th edition*. https://www.gnu.org/software/octave/octave.pdf (2017). Accedido el 01 de Febrero de 2017

Volver al Índice

Solución Numérica a las Ecuaciones Newtonianas del Equilibrio Hidrostático Aplicado a Enanas Frías

Matías G. Flores, Sonia E. Capdevila
Departamento de Geofísica y Astronomía, Facultad de Ciencias Exactas Físicas y Naturales, Universidad Nacional de San Juan
Av. Ignacio de la Roza 590 (O), J 5402 DCS, San Juan, Arg.
mattiasgft@gmail.com , secapdevila@yahoo.com.ar

Resumen. El objetivo de este trabajo es resolver las ecuaciones Newtonianas del equilibrio hidrostático para estrellas tipo enanas blancas, utilizando los métodos numéricos de Euler y Runge-Kutta de cuarto orden. Estas ecuaciones permiten calcular la presión como función del radio de un objeto isotrópico con simetría esférica, que está en equilibrio gravitacional, y la variación de la masa de estos objetos a medida que nos vamos alejando del centro de los mismos. Como resultado de la aplicación de ambos métodos numéricos, se obtendrán los valores límites para la masa y el radio de las enanas blancas en función de los distintos valores de la presión central.

Palabras Clave: Ecuaciones newtonianas, Enanas blancas, Euler, Runge-Kutta.

1 Introducción

Las estrellas pueden ser modeladas por esferas de plasma en equilibrio hidrostático, es decir, un equilibrio dado entre la fuerza de gravedad y la presión debida a las reacciones termonucleares originadas en los interiores estelares. Este equilibrio se irá alterando a lo largo de la vida de la estrella permitiéndole a la misma su evolución, hasta que al final de sus vidas, puedan convertirse en enanas blancas, estrellas de neutrones o agujeros negros.

La evolución de una estrella vendrá definida por su masa inicial. La estrellas que poseen una masa $1M_{\odot}<M<4M_{\odot}$ se convertirán en enanas blancas. Este objeto es muy peculiar, porque es una estrella en la cual no hay reacciones termonucleares y, por lo tanto, no hay presión térmica que sostenga el colapso. Con el paso del tiempo se determinó que la presión que equilibra el colapso gravitacional proviene del gas degenerado de electrones. Así, podemos definir brevemente a una enana blanca, como un remanente estelar frío, denso y estable, sostenido por la presión del gas degenerado de electrones.

Las enanas blancas, estrellas de neutrones y los agujeros negros, junto a otros objetos, se conocen como objetos compactos. La importancia en el estudio de las estrellas compactas, se debe a que estas estrellas presentan características extremas, tales como densidades altas, temperaturas bajas y fuertes campos magnéticos. Como consecuencia de lo anterior, podemos estudiar el comportamiento de la materia en regímenes extremos. También podemos analizar el comportamiento de los componentes microscópicos de estas estrellas, considerándolos como un gas de fermiones (un sistema ideal de fermiones libres, es decir, que no interactúan entre sí). El estudio desde el punto de vista microscópico nos permite entender el carácter cuántico que presentan las estrellas compactas, es decir, aunque sean objetos macroscópicos, tienen un carácter cuántico que se ve reflejado en que su presión se debe principalmente a la presión de degeneración de los fermiones [1].

El objetivo aquí es resolver las ecuaciones Newtonianas del equilibrio hidrostático para estrellas tipo enanas blancas, utilizando los métodos numéricos de Euler y Runge-Kutta de cuarto orden [2]. Estas ecuaciones permiten calcular la presión como función del radio de un objeto isotrópico con simetría esférica, que está en equilibrio gravitacional, y la variación de la masa de estos objetos a medida que nos vamos alejando del centro de los mismos.

Como resultado de la aplicación de ambos métodos numéricos, se obtendrán los valores límites para la masa y el radio de las enanas blancas en función de los distintos valores de la presión central.

2 Soluciones Numéricas para Estrellas Enanas Blancas

En esta sección, se utilizará la teoría Newtoniana del equilibrio hidrostático para realizar una integración numérica y encontrar las masas y los radios de enanas blancas para el caso relativista [3, 4].

2.1 Estructura de las Ecuaciones Adimensionales

La ecuación del equilibrio en el régimen Newtoniano:

$$\frac{dp}{dr}=-\frac{Gm(r)\rho(r)}{r^2} \tag{1}$$

La densidad de energía *ε(r)* es

$$\rho(r)=\frac{\epsilon(r)}{c^2} \tag{2}$$

Esta ecuación introduce la RE en la teoría, ya que es equivalente a la famosa ecuación de Einstein, $E=mc^2$. Reemplazando la ecuación (2) en la ecuación (1) obtenemos

$$\frac{dp}{dr}=-\frac{G\overline{M}(r)\epsilon(r)M_{\odot}}{r^2c^2} \tag{3}$$

Donde

$$m(r)=\overline{M}(r)M_{\odot} \tag{4}$$

Aquí M_O es la masa solar, y $\overline{M}$(r) es un número adimensional. La ecuación (3) puede ser escrita de la forma:

$$\frac{dp}{dr}=-R_0\frac{\overline{M}(r)\epsilon(r)}{r^2} \tag{5}$$

donde se define $R_0=\frac{GM_{\odot}}{c^2}=1.47\,Km$. En la ecuación (5) p y ε tienen dimensiones de energía/(longitud)^3.
Entonces, definimos la densidad de energía $\bar{\varepsilon}$, y la presión $\bar{p}$ adimensionales como:

$$\mathrm{p}=\epsilon_0\overline{p}, \qquad \epsilon=\epsilon_0\overline{\epsilon} \tag{6}$$

tal que ε_0 tiene dimensiones de densidad de energía y puede ser escogida arbitrariamente. Basamos esta decisión en los números adimensionales que definen el problema. Para una estrella politrópica, podemos escribir

$$\overline{p}=\overline{K}\,\overline{\epsilon}^{\gamma} \tag{7}$$

donde

$$\overline{K}=\mathrm{K}\epsilon_0^{\gamma-1} \tag{8}$$

$\overline{K}$ y K tienen diferentes valores dependiendo si es el caso relativista o no relativista. Es decir para cada caso tenemos:

$$K_{rel}=\frac{\hbar c}{12\pi^2}\left(\frac{3\pi^2 Z}{Am_Nc^2}\right)^{\frac{4}{3}}, \qquad K_{norel}=\frac{\hbar^2}{15\pi^2 m_e}\left(\frac{3\pi^2 Z}{Am_Nc^2}\right)^{\frac{5}{3}} \tag{9}$$

donde Z es el número de protones y m_N la masa de los nucleones. La constante γ=4/3 en el caso relativista, y γ=5/3 en el caso no relativista.
Reemplazando la ecuación (8) en la (5) obtenemos

$$\frac{\overline{dp}}{dr}=-\frac{\alpha\overline{p}(r)^{\frac{1}{\gamma}}\overline{M}(r)}{r^2} \tag{10}$$

tal que definimos la constante α como

$$\alpha=\frac{R_0}{\overline{K}^{\frac{1}{\gamma}}}=\frac{R_0}{\left(K\epsilon_0^{\gamma-1}\right)^{\frac{1}{\gamma}}} \tag{11}$$

Aquí R_0 tiene dimensiones de longitud (km), entonces α está en km, y la ecuación (11) tiene dimensiones de Km^{-1}. Como ε_0 es aún libre, podemos elegir cualquier valor conveniente de α. Para un valor dado de α, ε_0 está dado por la ecuación (11) de la forma

$$\epsilon_0 = \left[\frac{1}{K}\left(\frac{R_0}{\alpha}\right)^{\gamma}\right]^{\frac{1}{\gamma-1}} \quad \textbf{(12)}$$

También deseamos tener la ecuación para la variación de la masa, para eso usamos la ecuación

$$\frac{dm(r)}{dr} = 4\pi r^2 \rho(r) \quad \textbf{(13)}$$

Para convertirla a una forma adimensional combinamos las ecuaciones (2), (4) y (6)

$$\frac{d\overline{M}(r)}{dr} = \beta r^2 [\overline{p}(r)]^{\frac{1}{\gamma}} \quad \textbf{(14)}$$

en donde

$$\beta = \frac{4\pi\epsilon_0}{M_\odot c^2 \left(K\epsilon_0^{\gamma-1}\right)^{\frac{1}{\gamma}}} \quad \textbf{(15)}$$

La ecuación (14) tiene dimensiones de Km^{-1}.

Las ecuaciones anteriores son las que se utilizarán para resolver numéricamente las ecuaciones de Newton.

2.2 Integración Numérica

Para resolver numéricamente las ecuaciones diferenciales acopladas del equilibrio hidrostático se desarrollaron dos programas con el lenguaje IDL (Interactive Data Language-con licencia). El programa [A] aplica el método de Euler a las ecuaciones de equilibrio hidrostático con las condiciones iniciales detalladas más adelante.

Mientras, que el programa [B] aplica el método de Runge-Kutta de cuarto orden [5].

2.2.1 Métodos Numéricos

Para resolver el problema planteado se consideraron dos métodos numéricos.

Uno de los métodos utilizados es el método de Euler hacia adelante para la ecuación $y' = f(y,t)$, la cual se obtiene reescribiendo la aproximación por diferencias hacia adelante,

$$\frac{y_{n+1} - y_n}{h} \simeq y_n' \quad \textbf{(16)}$$

como

$$y_{n+1} = y_n + hf(y_n, t_n) \quad \textbf{(17)}$$

donde se utiliza $y_n' = f(y_n, t_n)$. Mediante la ecuación (17), se calcula y_n en forma recursiva como

$$\begin{aligned} y_1 &= y_0 + hy_0' = y_0 + hf(y_0, t_0) \\ y_2 &= y_1 + hf(y_1, t_1) \end{aligned} \quad \textbf{(18)}$$

hasta llegar al termino y_n

Otro método aplicado, es el método de Runge-Kutta de cuarto orden, en el cual el orden de precisión aumenta al utilizar puntos intermedios en cada intervalo.

2.3 Resultados de la integración numérica

Integramos numéricamente las ecuaciones adimensionales (10) y (14) desde valores iniciales en el centro de la estrella. Para hacer esto necesitamos los valores de la presión central y de la masa. El valor de $\bar{M}(0)$ tiene que ser cero en el centro, y $\bar{p}(0)$ debe ser positivo. La presión tenderá a cero y la masa se incrementará hacia la masa total de la estrella. El radio de la estrella R y la masa $M = \bar{M}(R)$ cambiarán dependiendo de la elección de $\bar{p}(0)$.

2.3.1 Condiciones Iniciales-Caso Relativista

Para este caso, tenemos en cuenta las enanas blancas de mayor masa, ya que para una mayor masa se necesita una presión central mayor para soportarlas, lo que implica electrones relativistas.

Se toma el valor de $\alpha = R_0$= 1.473 Km, donde ε_0=4.17 $M_\odot$ c^2/km^3 y β = 52.46km^{-3}.

Para la presión central seleccionamos valores similares a $\bar{p}(0) \sim 10^{-16}$, ya que estos están en el régimen relativista.

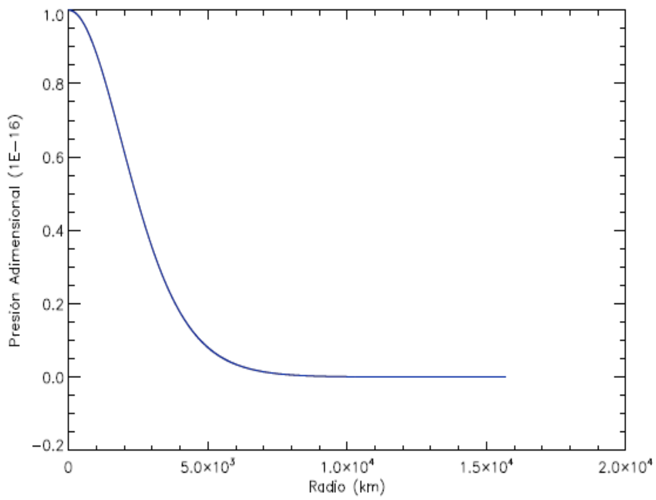


Fig. 1. Presión adimensional como función del radio de una enana blanca polítropa para un gas de electrones relativistas de Fermi con una presión central $\bar{p}(0) = 10^{-16}$.

En las figuras (Fig. 1 y Fig. 2) se observa la presión adimensional y la masa como función del radio de una enana blanca obtenidas luego de aplicar el método de Euler (Programa A).

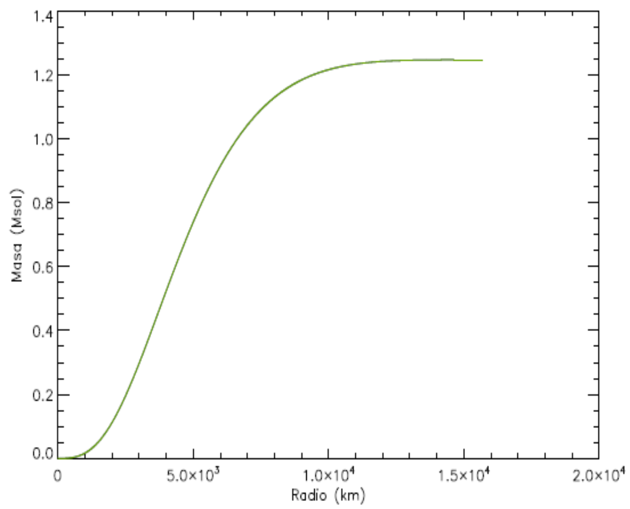


Fig. 2. Masa (M_{Sol}) de una enana blanca como función del radio para un gas de electrones relativistas de Fermi con una presión central $\bar{p}(0) = 10^{-16}$.

En la Tabla 1 se muestran los valores de los radios en Km y las masas en M_O obtenidos con el método de Euler (Programa A). Se utilizaron 3 valores de $\overline{\boldsymbol{p}}(0)$ para los cálculos.

Tabla 1. Radio en Km y masa en M_{Sol} para una enana blanca con un gas de Fermi de electrones relativistas.

Presión Central $\overline{p}(0)$	Radio R (Km)	Masa $\overline{M}$ $(M_\odot)$
10^{-14}	4943	1.2465
10^{-15}	8805	1.2467
10^{-16}	15670	1.2468

En las figuras (Fig. 3 y Fig. 4) se observa la presión adimensional y la masa como función del radio de una enana blanca obtenidas luego de aplicar el método de Runge-Kutta de cuarto orden [Programa B].

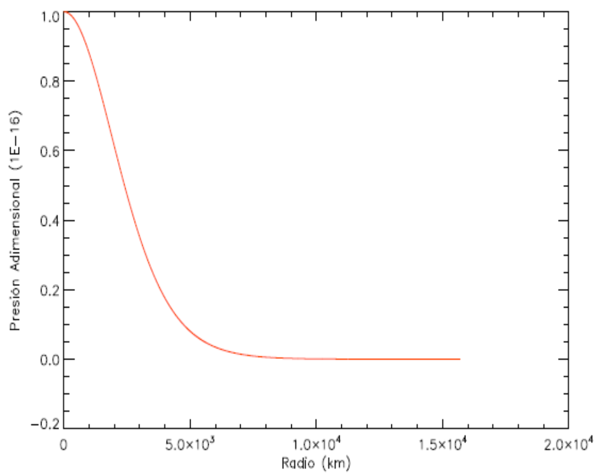


Fig. 3. Presión adimensional como función del radio de una enana blanca polítropa para un gas de electrones relativistas de Fermi con una presión central $\bar{p}(0) = 10^{-16}$.

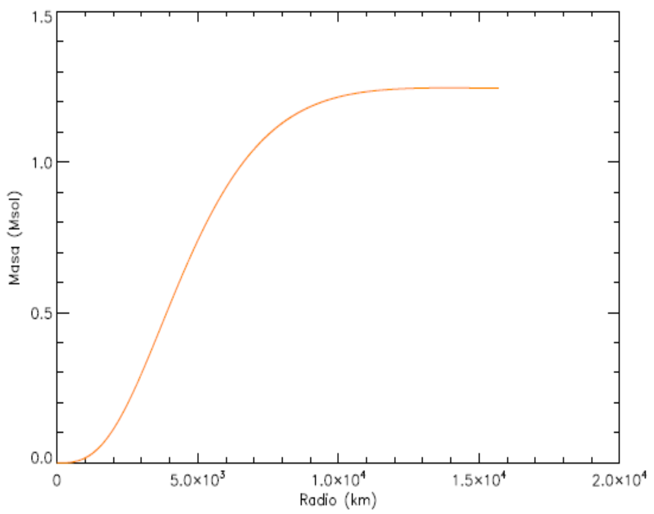


Fig. 4. Masa (M_{Sol}) de una enana blanca como función del radio para un gas de electrones relativistas de Fermi con una presión central $\bar{p}(0) = 10^{-16}$.

En la Tabla 2 se muestran los valores de los radios en Km y las masas en M_O obtenidos con el método Runge-Kutta de cuarto orden [Programa B]. Se utilizaron tres valores de $\bar{p}(0)$ para los cálculos.

Tabla 2. Radio en Km y masa en M_O para una enana blanca con un gas de Fermi de electrones relativistas.

Presión Central $\overline{p}(0)$	Radio R (Km)	Masa $\overline{M}$ ($M_\odot$)
10^{-14}	4960	1.2469
10^{-15}	8820	1.2469
10^{-16}	15689	1.2469

3 Conclusiones

a. La aplicación de los métodos utilizados permite establecer como varían la presión y la masa de las estrellas enanas blancas. Se observa que la utilización de los métodos nos permite determinar la convergencia de la solución a la ecuación de equilibrio hidrostático. Ambos métodos tienden al mismo valor pero la diferencia radica en la rapidez de convergencia, la cual se le atribuye al método de Runge-Kutta.

b. Si bien este trabajo se ha considerado como una aplicación de la Matemática a la Astronomía también entra en la temática de experiencia de cátedra, pues esta situación problemática propuesta en la introducción ha sido planteada como desafío a los alumnos de tercer año de la cátedra Análisis Matemático III de la carrera Licenciatura en Astronomía.

Referencias

1 Apuntes Astronomía General I,II (Evolución Estelar)
2 Nakamura, S.: Métodos Numéricos Aplicados con Software (1992)
3 Egeland, E: Compact Stars, N-7491, (2007)
4 Mielke, C.: Strange Stars in the MIT Bag Model (2011)
5 Bowman, P. K.: An Introduction to Programming with IDL (2005)

Volver al Índice

Utilización de Técnicas Estadísticas para la Toma de Decisiones Estratégicas en la Industria Aceitera

Alicia M. Gasich[1], Cecilia L. Martinefsky[2], Miriam Cocconi[1], Isabel C. Riccobene[1]
[1]Núcleo de Investigación y Desarrollo TECSE, Facultad de Ingenieria, Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires. Av. del Valle 5737 – B7400JWI Olavarría, Provincia de Buenos Aires, Argentina.
agaisch@fio.unicen.edu.ar
[2]Proyectista final de la carrera Ingeniería Química, Facultad de Ingenieria, Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires. Av. del Valle 5737 – B7400JWI Olavarría, Provincia de Buenos Aires, Argentina.
cecimartinefsky@gmail.com

Resumen. El sector agroindustrial es relevante para la economía nacional. Particularmente, en el mercado mundial de aceites, el de girasol es el cuarto en orden de importancia y Argentina es el primer exportador mundial. En el procesamiento de granos para la extracción del aceite se genera un gran volumen de cáscara residual la cual posee interesante valor energético. Mediante la densificación en pellets, es posible obtener un material que posee mayor densidad, facilitando el transporte y almacenamiento. La producción de pellets requiere tomar decisiones en condiciones de variabilidad, para lo cual técnicas estadísticas como los diseños de experimento son útiles, permitiendo individualizar y seleccionar aquellos factores de mayor incidencia. Este trabajo presenta la utilización del diseño factorial para caracterizar las variables que influyen en el proceso de fabricación, a escala piloto, de pellets de cáscara de girasol. Se aplican además, regresiones lineales múltiples con el objetivo de obtener un modelo predictivo.

Palabras Clave: Diseño factorial, Regresión lineal múltiple, Pellets, Cáscara de girasol

1 Introducción

Los desafíos de la Ingeniería Química para este siglo están asociados al agua, la energía, el medio ambiente y el cambio climático y a los alimentos. En este sentido en la formación de los futuros profesionales es relevante la toma de decisiones siendo la estadística una herramienta básica en negocios y producción. Su aplicación a situaciones reales, concretas, experimentales y de incidencia regional es altamente positiva.

Es sumamente enriquecedor proponer a nuestros estudiantes el desarrollo de actividades de proyectos y diseño, muchas veces dando respuestas a requerimientos del sector productivo. Las herramientas básicas de la formación matemática les permiten, con el acompañamiento de expertos en estadística, avanzar sobre nuevas técnicas, interpretar datos o características de un conjunto de elementos y decidir sobre una operación o proceso industrial.

En este trabajo se presenta una experiencia interesante con el sector agroindustrial regional, en cuyo contexto se trata de aprovechar un residuo de la industria aceitera, susceptible de ser transformado en combustible útil.

1.1 Contexto agroindustrial que dio origen al trabajo

En la industria aceitera se realiza un descascarado parcial de los granos de girasol antes del proceso de extracción de aceite con el fin de obtener un producto con menores requerimientos para la etapa de refinado del aceite; pero se origina una cantidad importante de cáscara residual. La cáscara está compuesta de lignina, celulosa, ceras, aceite, proteína y un pequeño porcentaje de otras sustancias [1].

Las cáscaras separadas en el proceso previo a la extracción del aceite, conforman grandes volúmenes de las mismas, con muy bajo peso específico, difíciles de transportar y almacenar. En general son utilizadas como combustible, quemándola en la caldera del lugar, pero esto trae inconvenientes, fundamentalmente, en la vida útil de la caldera debido a la presencia de material celulósico.

En función de las dificultades que genera el manejo de los grandes volúmenes de cáscara se han evaluado diferentes alternativas de acondicionamiento de la misma para su transporte y almacenamiento en función de su posterior uso. Por otro lado, acumular el sobrante en depósitos es una solución anti económica debido al importante espacio físico que se necesita. La opción de acumularla al aire libre genera también un gran inconveniente debido a la tendencia de la cáscara a entrar en combustión cuando se humedece. Si bien la industria, mayoritariamente, recurre a quemarla, el balance energético no siempre es satisfactorio como para pensar que es una solución [2].

Una alternativa sencilla de acondicionamiento de la cáscara es la densificación, que consiste en compactar pequeños trozos de biomasa en piezas de forma y tamaño similar. Los pellets obtenidos son pequeños cilindros de diámetro entre 6 y 12 mm y longitudes de 10 a 30 mm, el propósito es incrementar la densidad aparente del residuo como mínimo a 250 kg/m^3 [3].

Para la comercialización de biomasa densificada se han estandarizado tanto las propiedades de la biomasa sin tratar como también los rangos aceptables de propiedades seleccionadas del producto final. Algunas de esas normas son la Pellet Fuel Institute (PFI) de USA, European Common Standard for Solid Fuel (CEN) (CEN/TC 335) de Europa y la DIN 51731 (testing of solid fuels compressed untreated wood) de Alemania. La mayoría de las normas no estandariza dimensiones para los pellets, las PFI indican solo referencia para el diámetro (6,35-7,25) [4]. Actualmente, una de las normas más extendidas en el mundo es la DIN Plus, la cual combina los requisitos de la norma DIN 51731 y la norma Austríaca ÖNORM M 7135.

Los pellets se utilizan como combustible, teniendo la ventaja de que pueden ser alimentados y dosificados mediante sistemas automáticos, lo cual amplía sus posibilidades de utilización en instalaciones de envergadura y en el sector industrial. Estas piezas así obtenidas resultan también más convenientes para su almacenamiento, manipuleo y transporte, e incluso en la automatización en los equipos de generación de calor. Al poseer una densidad y un contenido de humedad constante, el poder calorífico tiende a la homogeneidad y mejora la eficiencia de combustión en el equipo. Estudiar alternativas donde se utilice cantidades importantes de cáscara, en industrias no demasiado onerosas y donde no se necesiten grandes inversiones ni elevados costos operativos, requiere de la toma de decisiones y un camino para ello es el uso de algunas las técnicas estadísticas [3, 5].

1.2 Aplicación de las Técnicas Estadísticas

Los procesos industriales requieren del manejo de numerosas variables. A efectos de disminuir los costos y los tiempos requeridos para optimizar un sistema operativo, es posible aplicar modelos computacionales de simulación, programas estadísticos y/o herramientas matemáticas. Así, el diseño de experimentos es una metodología de trabajo que emplea técnicas estadísticas a situaciones prácticas, aplicando diferentes principios y cálculos sobre un conjunto de datos experimentales de un proceso. Entre las ventajas que presenta la utilización de la técnica de diseño de experimentos se pueden mencionar: la determinación en forma efectiva de la importancia relativa de las variables seleccionadas y de la interacción de los factores involucrados; como así también la predicción de la influencia de las variables de control en la respuesta del proceso.

Existen distintos métodos de diseño de experimentos: comparativos, de efectos principales, modelos de regresión, superficies de respuesta, diseños de mezclas. En esta presentación se utiliza el método de los efectos principales, pudiendo de esta manera seleccionar aquellos factores involucrados en el proceso que producen los efectos más importantes. Puntualmente, se aplica un diseño factorial completo de dos niveles y dos factores (2^2) con el propósito de seleccionar aquellos factores involucrados en el proceso que producen los efectos más significativos [6].

Otra herramienta matemática a aplicar para la toma de decisiones son las regresiones lineales múltiples, las cuales permiten analizar de manera conjunta la influencia de varias variables independientes o explicativas sobre otra variable dependiente o respuesta [6].

En esta presentación se va a analizar la variación de volumen con el tiempo en pellets fabricados con cáscara de girasol (humedad constante), a los que se les adicionó una cantidad variable de aditivo aglutinante (glicerina). También interesa estudiar el efecto de realizar un acondicionamiento a la cáscara, consistente en una molienda previa a su utilización.

El análisis estadístico se realizó aplicando el programa InfoStat Profesional [7].

2 Fundamentos

2.1 Diseño Factorial

En este trabajo se ha utilizado un diseño factorial que consta de dos factores, cada uno de los cuales con dos niveles, cuyas unidades experimentales cubren todas las posibles combinaciones de esos niveles en todos los factores. Al realizar el experimento, el hecho de variar los niveles de todos los factores al mismo tiempo en lugar de uno a la vez permite estudiar las interacciones entre los factores.

$$\text{Tratamiento} = \text{factor A} + \text{factor B} + \text{interacción AB} \quad \textbf{(1)}$$

El modelo para un experimento bifactorial es:

$$Y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \delta_{ij} + \varepsilon_{ijk} \quad \textbf{(2)}$$

En la Tabla 1 se presenta cada uno de los factores de la ecuación 2.

Tabla 1. Referencias correspondientes a la ecuación 2.

Nomenclatura	
Y_{ijk}	Respuesta de la k-ésima repetición en el i-ésimo nivel del factor A y j-ésimo nivel del factor B
μ	Media general
α_i	Efecto que produce el i-ésimo nivel del factor A
β_j	Corresponde al efecto al j-ésimo nivel del factor B
δ_{ij}	Efecto de la interacción para la combinación de los niveles i del factor A y j del factor B
ε_{ijk}	Error aleatorio asociado a la observación ijk-ésima

2.2 Regresión lineal múltiple

El análisis de Regresión lineal múltiple [8], permite estudiar la relación entre una variable respuesta Y (variable dependiente) y dos o más variables regresoras X (variables independientes o predictoras).

Mediante la regresión se estudia cómo los cambios en las variables predictoras afectan a la variable respuesta, mediante el ajuste de un modelo para la relación funcional entre ambas [7]. La relación entre las variables se modela de acuerdo a la ecuación 3, donde Y es el vector de observaciones, X es la matriz que contiene a las variables regresoras, ß es un vector de parámetros que serán estimados a partir de los datos y ε es el vector de términos de error aleatorios.

$$Y = X\,ß + \varepsilon \quad \textbf{(3)}$$

3 Desarrollo y resultados

Se evaluó la cohesión de los pellets a partir de la variación de volumen que presentaron a las 24 horas, dado que esta es una manera sencilla de cuantificar la pérdida de densidad con el tiempo. Es deseable que no se observe variación de volumen, lo que indicaría buena cohesión de todo el material en el pellet [5].

Para la confección de los pellets a escala piloto se utilizaron cáscaras y granos de girasol comercial suministrado por la empresa Oleaginosas Moreno S.A. (Planta Daireaux, Prov. de Buenos Aires, Argentina). Se trabajó con una prensa hidráulica manual La-Ser (Argentina), con un molde cilíndrico de 15 mm de diámetro. Se aplicó una presión de 4 tn, empleando aproximadamente 1,5 g de muestra para cada pellet y un tiempo de residencia en el molde bajo presión de 3 minutos. Se realizaron ensayos con cáscara de girasol sin ningún tratamiento y mezclando la cáscara con un aditivo aglutinante. Como tal se utilizó la glicerina, por ser un subproducto de la producción de biodiesel; ésta se adicionó a la cáscara en concentraciones de 5, 7,5 y 10% en peso, se homogeneizó cada mezcla y se compactaron para obtener los pellets. Igual procedimiento se realizó para la formación de los pellet con cáscara molida. La molienda de la cáscara se realizó en seco, en un molino de cuchillas con un tiempo de residencia de 30 segundos de la muestra en el equipo. Se obtuvieron pellets de cáscara molida y con aglutinante en las mismas concentraciones que la cáscara sin moler. Para cada condición de trabajo se realizaron 5 repeticiones.

A partir de los datos recolectados se planteó una regresión lineal múltiple, con la finalidad de analizar la influencia simultánea de las variables independientes, condición de la cáscara y porcentaje de glicerina, sobre la variable dependiente, variación de volumen. Dado que la variable “condición de la cáscara” es categórica para poder emplearla en el modelado se debió considerar a la misma como una variable indicadora. Al ser una variable dicotómica, se la codificó como 0 si la cáscara estaba entera y 1 si la cáscara fue molida.

En la Tabla 2 se muestran los resultados de ajustar un modelo de regresión lineal múltiple. La ecuación del modelo ajustado es:

$$\text{Variación volumen} = 0{,}271843 + 0{,}075566 * \%\ \text{aditivo} - 0{,}048 * \text{condición de la cáscara} \qquad \textbf{(4)}$$

Tabla 2. Resultados obtenidos al ajustar un modelo de regresión lineal múltiple.

Parámetro	Estimación	Error Estándar	Estadístico T	Valor-P
CONSTANTE	0,271843	0,0695261	3,90994	0,0004
% aditivo	0,0755657	0,0090527	8,34728	0,0000
Condición de la cascara	-0,048	0,0669459	-0,716997	0,4779

El estadístico R^2 ajustado presenta un valor del 64%.

El p-valor que se obtiene de ANOVA (Tabla 3) es menor que 0,05, siendo posible inferir que existe una relación estadísticamente significativa entre las variables con un nivel de confianza del 95%. Otra consideración a tener en cuenta, es que, el p-valor más alto de las variables independientes es 0,47 que corresponde a la condición de la cáscara. Puesto que este valor es mayor a 0,05 este término no es estadísticamente significativo con un nivel de confianza del 95%. Sería posible eliminar esta variable del modelo.

Tabla 3. Resultados de la tabla de ANOVA del modelo de regresión lineal múitiple.

Fuente	Suma de Cuadrados	Gl	Cuadrado Medio	Razón-F	Valor-P
Modelo	3,14579	2	1,5729	35,10	0,0000
Residuo	1,65825	37	0,0448175		
Total (Corr.)	4,80404	39			

Se podría concluir que el tratamiento previo que se le realiza a la cáscara no afectaría de manera relevante a la variación de volumen de los pellets. No obstante, analizando este término en la ecuación propuesta se pone de manifiesto que para conseguir una variación de volumen mínima la cáscara debería considerarse molida. En lo que se refiere al coeficiente del término que involucra al % de aditivo éste presenta un signo positivo, por lo que la situación óptima sería no adicionar con glicerina las cáscaras utilizadas para confeccionar los pellets.

En la Tabla 4 se muestran los valores de los estadísticos obtenidos con el Diseño Factorial.

Tabla 4. Estadísticos obtenidos aplicando Diseño Factorial.

Variable	R^2	R^2 Aj	CV
Dif de volumen 0-24	0,87	0,85	26,16

El valor del estadístico R^2 (0,87) indica que los efectos incluidos en el modelo explican el 87% de la varianza de la variable dependiente.

También se realizaron tablas de análisis de varianza (ANOVA) para estudiar la influencia o no entre la condición de la cáscara y el porcentaje de aditivo adicionado. En la Tabla 5 se muestran los resultados obtenidos, comparando entre la condición de sin aditivo y 5% de adición.

Tabla 5. Cuadro de Análisis de la Varianza

F.V.	SC	Gl	CM	F	p-valor
Modelo.	1,93	3	0,64	44,35	<0,0001
Molida/Sin moler	0,01	1	0,01	0,83	0,3729
Sin aditivo y con 5% de aditivo.	1,91	1	1,91	131,51	<0,0001
Interacción	0,01	1	0,01	0,70	0,4127
Error	0,29	20	0,01		
Total	2,22	23			

A partir del análisis de la misma es posible inferir que es significativo el porcentaje de aditivo sobre el cambio de volumen de los pellets, dado que el p-valor es de 0,0001.

El estudio se completó realizando el test de Tukey mostrado en la Tabla 6.

Tabla 6. Test Tukey para la condición de la cáscara (α = 0,05).

Cáscara Molida/sin moler	Medias	n	E.E.	
sin moler	0,44	12	0,03	A
molida	0,48	12	0,03	A

Medias con una letra común no son significativamente diferentes (p > 0,05)

A partir de este análisis es posible corroborar lo que se observa en la tabla de ANOVA, que no hay diferencias significativas sobre la diferencia de volumen de los pellets si se trabaja con cáscara entera o molida (p-valor = 0,3729).

En lo que respecta al agregado o no de aditivo, se concluye que al no agregar aditivo la variación de volumen es menor. Resultados similares se obtuvieron cuando se compararon los otros porcentajes de aditivos estudiados.

En la Tabla 7 se observa que el agregado o no de aditivo produce modificación en el volumen de los pellets. Se verifica que al no agregar aditivo la diferencia de volumen es menor.

Tabla 7. Test Tukey para el agregado de aditivo (α = 0,05).

Sin aditivo y con 5% de aditivo	Medias	n	E.E.		
Sin aditivo	0,18	12	0,03	A	
Con aditivo	0,74	12	0,03		B

Medias con una letra común no son significativamente diferentes (p > 0,05)

4 Conclusiones

La densificación es una alternativa para tratar cantidades importantes de cáscara, proporcionando una solución al transporte y almacenamiento, optimizando el proceso productivo en general. El pellet, no sólo posee mayor densidad, sino que es más fácil de almacenar, es limpio y seguro. Los resultados obtenidos a partir de los estudios estadísticos efectuados, en las condiciones de operación establecidas indican que generar pellets de cáscara entera sin aditivo resultó la mejor opción. Las alternativas estudiadas en este trabajo de utilizar diferentes porcentajes de aglutinantes no contribuyeron a mejorar la cohesión del pellet.

A escala industrial, utilizar cáscara entera, sin un proceso de molienda previa, es altamente positivo dado que se evita el consumo energético necesario para efectuar la reducción de tamaño de partícula. Por otro lado, la utilización de aditivos implica una etapa del mezclado de los componentes previo al prensado, lo que implica también un consumo extra de energía y su empleo debe considerarse sólo si genera un beneficio sobre el producto final. Como puede observarse la utilización de herramientas estadísticas ha permitido eliminar del proceso de producción dos variables que incidirían negativamente en el costo de producción sin beneficio significativo en el producto final.

Agradecimientos. Este trabajo fue financiado por Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires (UNCPBA) y la Comisión de Investigaciones Científicas de la Provincia de Buenos Aires (CIC).

Referencias

1. Capurro A.: Cáscara de girasol. Buscando opciones para su utilización - Parte 1. *Revista A&G*, Vol. 3, No.52, pp. 396-402 (2003)
2. Capurro A.: Cáscara de girasol. Buscando opciones para su utilización - Parte 2. *Revista A&G*, Vol. 4, No. 53, pp. 554-558 (2003)
3. Ortíz, L.; Tejada, A.; Vázquez, A.; Veiras, G. P.: Aprovechamiento de la biomasa forestal producida por la cadena monte-industria. *Revista CIS-Madera. Parte III Producción de elementos densificados*, pp.17-32 (2004)
4. Zapata Saad, A. J.: Investigación del efecto de los parámetros de elaboración de pellets de cuesco de palma en el proceso de pirolisis. *Tesis de Maestría en Ingeniería Mecánica, Inv. Uso de biomasa como combustible sólido; Investigación Biomasa y optimización térmica de procesos (BIOT)*. Universidad Nacional de Colombia (2016)
5. Martinefesky C.L., Nolasco S.M., Riccobene I.C.: Avances hacia una alternativa tecnológica que optimice el uso de un residuo de la agroindustria aceitera. Presentación modalidad conferencia breve en el *VIII Congreso Argentino de Ingeniería Química y las 3ras. Jornadas Argentinas de Seguridad en Procesos* (2015)
6. Montgomery Douglas C.: *Diseño y Análisis de Experimentos.* Limusa (2004)
7. Julio A. Di Rienzo, J.A.; Balzarini, M.G.; Casanoves, F.; González, L.A.; Tablada, E.M.; Robledo, C.W.: *InfoStat Software Estadístico. Manual del Usuario.* Universidad Nacional de Córdoba (2008)
8. Draper, N.R.; Smith, H.: *Applied Regression Analysis.* John Wiley & Sons (1998)

Volver al Índice

Análisis del Proceso Productivo de una Pequeña Empresa de Manufactura: un Enfoque Estadístico

Mario José Mantulak[1], Gilberto Hernández Pérez[2], René Abreu Ledón[2]
[1]Departamento de Matemática, Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de Misiones
Juan Manuel de Rosas 325, Oberá, Misiones, Argentina
mantulak@fio.unam.edu.ar
[2]Departamento de Ingeniería Industrial, Facultad de Ingeniería Mecánica e Industrial, Universidad Central "Marta Abreu" de Las Villas
Carretera a Camajuaní Km. 5 y 1/2. Santa Clara. Villa Clara. Cuba.
ghdez@uclv.edu.cu, rabreu@uclv.edu.cu

Resumen. El presente trabajo aborda un análisis estadístico del proceso productivo de transformación mecánica de la madera en el ámbito de un pequeño aserradero en la provincia de Misiones, Argentina. El objetivo del trabajo se centró en la aplicación de herramientas estadísticas para determinar el rendimiento productivo del emprendimiento con base en un proceso de estadístico de muestreo. En el desarrollo del trabajo se analizaron los volúmenes maderables de las diferentes clases diamétricas y sus respectivos rendimientos productivos, y como principales resultados se obtuvo que la clase diamétrica que aporta porcentualmente más volumen productivo es la que contiene a los troncos con diámetros de 31 cm o más, y que la clase que contiene a los troncos de 16 a 20 cm es la que presenta un rendimiento productivo con una distribución más simétrica.

Palabras Clave: Proceso productivo, Pequeñas empresas, Estadística aplicada, Manufactura.

1 Introducción

En el segmento de las pequeñas empresas, en particular del sector de aserrío de la provincia de Misiones, es poco frecuente encontrarse con el análisis de procesos a través de datos estadísticos; la mayoría de los establecimientos funciona en base a la experiencia e intuición del responsable del proceso de producción y/o del dueño del aserradero. La experimentación estadística resulta valiosa para poder establecer el rendimiento productivo de un establecimiento, en este caso particular el de los aserraderos (Mantulak et al., 2015) [1].

Dicha experiencia es fundamental al momento de realizar un diseño de experimento, puesto que resulta la base de partida no solo para la identificación de indicadores apropiados y sus posibles tendencias en función de las modificaciones de algunas de las variables puestas en juego. Por ello el diseño del experimento no debe ser muy complejo, para que no resulte en una actitud de escepticismo por parte del empresario-dueño de la pequeña empresa, quien en la mayoría de los casos se muestra poco convencido con la aplicación de herramientas de análisis de elevado contenido teórico.

En este sentido se ha optado por establecer, en la medida de lo posible, un equilibrio entre los condicionamientos teóricos necesarios para el desarrollo de un diseño experimental con requerimientos de practicidad y simplicidad aceptados por la empresa. En función de ello se utilizan herramientas de construcción de la información sencillas y de fácil comprensión y evaluación por parte del responsable del proceso de producción y el dueño del aserradero. Asimismo, debido a que el contexto de la investigación está basado en obtener datos obtenidos de condiciones normales de funcionamiento del proceso productivo, la experimentación no aplica técnicas de ensayo controlado en el establecimiento.

En el presente trabajo, es necesario además, utilizar técnicas que permitan trascender, a partir de los datos muestreados en el experimento, hacia un posible estado de situación generalizado en mayor escala del proceso productivo bajo análisis. En función de ello, el objetivo del trabajo se centró en la aplicación de herramientas estadísticas que posibilitan la determinación del rendimiento productivo de un pequeño aserradero de la provincia de Misiones, Argentina.

2 Materiales y métodos

Para el diseño del muestreo se trabajó en función de la clasificación de troncos preestablecida por la empresa, según clases diamétricas (diámetros de troncos). Así, se tienen identificados cuatro grupos de clases, según los rangos de diámetros de 16 a 20 cm, de 21 a 25 cm, de 26 a 30 cm y de 31 cm o más. Puesto que, se estableció la necesidad de obtener los volúmenes productivos generados por cada una de las clases diamétricas, se llegó a la definición de realizar un método de muestreo estratificado con reposición. Para ello, se estableció un total de cuatro estratos a estudiar, uno por cada clase diamétrica, se decidió fijar igual cantidad de troncos a muestrear por estrato, con lo cual se definió que la afijación a emplear debía ser del tipo uniforme. Se estableció que la población objetivo estaría constituida por un total de diez estibas acantonadas en playa, cada una de ellas con un total de unos cien troncos en promedio.

A fin de determinar una muestra representativa de la población, se realizó un pre-muestreo en cada una de las clases diamétricas, seleccionándose diez unidades elementales por cada estrato, cuarenta en total, en las cuales se midieron dimensiones relacionadas con diámetros y longitudes. En base a la información obtenida se trabajó con un análisis de estimación para la media de una muestra estratificada, a fin de determinar el tamaño de muestra a estudiar n. El volumen total de troncos de determina según la expresión dada por García (2004) [2], donde N_1, N_2, N_3 y N_4, representan el tamaño de cada estrato; y $\overline{X}_1, \overline{X}_2, \overline{X}_3$ y $\overline{X}_4$, que constituyen los volúmenes promedio por estrato. Con ello, se determinó el volumen total de troncos, según la expresión (1):

$$V_T = N_1\overline{X}_1 + N_2\overline{X}_2 + N_3\overline{X}_3 + N_4\overline{X}_4 \qquad \textbf{(1)}$$

Para determinar el tamaño muestral global n, se fijan dos condiciones, por una parte, se desea que el volumen de error de muestreo D, con respecto al volumen total V_T, sea de un 5%; y por otra, se establece que el intervalo de confianza para la media de dicho volumen sea del 95%. Así, se obtuvo que el total de la población objetivo es $N = N_1 + N_2 + N_3 + N_4 = 1.320$ troncos; también se calculó que el volumen de error estipulado para el muestreo es $D = 9.767.620$ cm^3; y de tabla se obtuvo que para el 95% de confianza corresponde un $Z_{1\text{-}\alpha/2} = 1{,}96$. Con ello, se calculó la desviación estándar de $\overline{X}$, de acuerdo a la expresión (2) utilizada por García (2004) [2]:

$$D(\overline{X}) = \frac{D}{N\,Z_{1-\alpha/2}} \qquad \textbf{(2)}$$

A continuación se determinó el tamaño de muestral global n, mediante la expresión (3) dada por García (2004) [2]. Para ello, se trabajó con las proporciones P_i aportadas por cada estrato, según el tipo de afijación, con lo cual $P_1 = P_2 = P_3 = P_4 = 0{,}25$; las desviaciones estándar S_i obtenidas en cada estrato premuestreado; la varianza $D^2(\overline{X})$ y el total de la población objetivo N.

$$n = \frac{\left(\sum_{i=1}^{k} P_i S_i\right)^2}{D^2(\overline{X}) + \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{k} P_i S_i^2} \approx 34 \text{ rollos} \qquad \textbf{(3)}$$

De acuerdo a lo calculado el tamaño de muestra global resultó ser n = 34 troncos. Sin embargo, se asumió que las posibles pérdidas de información k durante la ejecución del estudio podrían ser de un 15%, con lo cual se obtuvo un tamaño muestral global corregido troncos denominado n' y dado por la expresión (4). Puesto que se trató de un muestreo con afijación constante, a cada estrato se le asignó la cantidad de 10 troncos a muestrear.

$$n' = n/(1-k) = 34/(1-0{,}15) = 40 \text{ troncos} \qquad \textbf{(4)}$$

Para obtener los valores de medición correspondientes a los troncos se trabajó en dos etapas. Primeramente se tomaron medidas de los troncos con corteza, previas al pasaje de los mismos por la descortezadora. Para ello, se elaboraron planillas ordenándolas según su clase diamétrica (Tabla 1). En cada una de las planillas se consignaron valores de dos longitudes en generatrices opuestas (L_1 y L_2); dos diámetros, tomados en cruz, en la punta gruesa del tronco (Dcc_1 y Dcc_2), y dos diámetros tomados en cruz, en la punta fina del tronco (dcc_1 y dcc_2). Posteriormente se obtuvieron promedios de cada dimensión, consignándose como: L_p, Dcc_p y dcc_p.

Tabla 1. Planilla tipo para toma de datos de diámetros de troncos con corteza.

Diámetros con corteza							
Planilla nº 1		Clase diamétrica:					
Id tronco	color	Dcc_1	Dcc_2	Dcc_p	dcc_1	dcc_2	dcc_p

Luego, se tomaron medidas de los troncos sin corteza. Las mediciones se asentaron en planillas (Tabla 2), ordenándolas según su clase diamétrica. Se consignaron valores de las dimensiones de dos diámetros, tomados en cruz en la punta gruesa del tronco (Dsc_1 y Dsc_2), y dos diámetros, tomados en cruz en la punta fina del tronco (dsc_1 y dsc_2). Posteriormente se obtuvieron promedios de cada dimensión, consignándose como: Dsc_p y dsc_p.

Tabla 2. Planilla tipo para toma de datos de diámetros de troncos sin corteza.

Diámetros sin corteza							
Planilla nº 2		Clase diamétrica:					
Id tronco	color	Dsc_1	Dsc_2	Dsc_p	dsc_1	dsc_2	dsc_p

Luego de que el tronco ha pasado por la sierra sin fin doble tándem, se tienen un pan principal y dos panes de recuperación. El pan principal sigue por la línea principal (sierra circular múltiple), obteniéndose las tablas de primera; los panes de recuperación van a línea secundaria (sierra sin fin simple y sierra circular doble), reingresando las tablas obtenidas a la línea principal, en algunos casos como tablas de primera en otros como de segunda. La cantidad de tablas obtenidas de cada tronco se consignan en una planilla, según correspondan al pan principal o a los panes de recuperación (Tabla 3).

Tabla 3. Planilla tipo para toma de datos de panes principales y de recuperación.

Panes principales				
Planilla nº 3		Clase diamétrica:		
Id tronco	Nº panes principales	Cantidad tablas	Nº panes recuperación	Cantidad tablas

Para el proceso de toma de medidas en las tablas se tiene en cuenta lo sugerido por el Instituto Forestal de Chile (1989) [3], donde se trabaja con una planilla para el pan principal (Tabla 4), asentándose para cada una de las tablas obtenidas las medidas de longitud (l_1 y l_2), de espesor (e_1, e_2, e_3, e_4), y de ancho (a_1, a_2, a_3). Luego, ocupando los datos de la planilla se obtienen valores promedio de las dimensiones de cada una de las tablas (L_p, E_p, A_p). Con idéntica planilla se trabaja para la medición de las tablas de los panes de recuperación.

Tabla 4. Planilla tipo para el registro de dimensiones de tablas obtenidas del pan principal (y panes de recuperación).

Aserrado - Pan principal (o panes de recuperación)												
Planilla nº 4	Clase diamétrica:											
Id tronco:	longitud (cm)			espesor (cm)					ancho (cm)			
Color:												
Nº tabla	l_1	l_2	L_p	e_1	e_2	e_3	e_4	E_p	a_1	a_2	a_3	A_p

Para la determinación del volumen de productivo de cada tronco, y consecuentemente para cada clase diamétrica se utilizaron los datos correspondientes a la longitud promedio de cada tronco. Para la obtención del diámetro promedio punta fina (sin corteza) se utilizó el tipo de planilla nº 2 (Tabla 2). Para hallar el número de tablas del pan principal, y el número de tablas de los panes de recuperación, se trabajó con el tipo de planilla nº 3 (Tabla 3). Para encontrar la longitud promedio de tablas de panes de recuperado, el ancho promedio de tablas del pan principal y el ancho promedio de tablas de recuperado se utilizó el tipo de planilla nº 4 (Tabla 4).

2.1 Determinación de volúmenes de troncos

En la determinación del volumen de los troncos se utilizó la expresión (5) definida por Smalian, según Tuset y Duran (1979) [4]:

$$V = \left(\frac{A + a}{2}\right) \times L \qquad \textbf{(5)}$$

Donde:

V = Volumen del tronco (cm^3)
A = Área de la sección del diámetro mayor (cm^2)
a = Área de la sección del diámetro menor (cm^2)
L = Longitud del tronco (cm)

2.2 Determinación de rendimientos productivos

Con referencia a la determinación de los rendimientos productivos, se utilizaron tres tipos diferentes. Uno relativo al rendimiento de pan principal (Rpp), dado por el volumen sin corteza y el volumen del pan principal de cada tronco, para las diversas clases diamétricas, según la expresión (6). Otro concerniente al rendimiento de panes de recuperación (Rrr), dado por el volumen sin corteza y el volumen de panes de recuperación, según la expresión (7). Y finalmente, otro concerniente al rendimiento productivo (Rpro), dado por el volumen sin corteza y la suma de los volúmenes del pan principal y de los volúmenes de recuperado, según la expresión (8). Con ello se obtuvieron los rendimientos de cada tronco, y rendimientos promedio para cada clase diamétrica.

$$\mathrm{Rpp} = \mathrm{Vpp} / \mathrm{Vsc} \qquad \textbf{(6)}$$

Donde:

Rpp = Rendimiento del pan principal
Vpp = Volumen del pan principal (cm^3)
Vsc = Volumen sin corteza del tronco (cm^3)

$$\mathrm{Rrr} = \mathrm{Vrr} / \mathrm{Vsc} \qquad \textbf{(7)}$$

Donde:

Rrr = Rendimiento de panes de recuperación
Vrr = Volumen de panes de recuperación (cm^3)
Vsc = Volumen sin corteza del tronco (cm^3)

$$\mathrm{Rpro} = (\mathrm{Vpp} + \mathrm{Vrr}) / \mathrm{Vsc} \qquad \textbf{(8)}$$

Donde:

Rpro = Rendimiento productivo
Vpp = Volumen del pan principal (cm^3)
Vrr = Volumen de panes de recuperación (cm^3)
Vsc = Volumen sin corteza del tronco (cm^3)

3 Resultados

3.1 Volúmenes productivos

El cálculo de los volúmenes productivos se realiza para cada uno de los troncos de cada clase diamétrica. Para ello, se determina el volumen sin corteza (Vsc) por tronco, para lo cual se toman las medidas de los diámetros de punta fina y de punta gruesa, con ellas se hallan las áreas de cada punta, obteniéndose posteriormente un promedio de ambas, y luego multiplicándose este valor por la longitud del tronco.

Para obtener el volumen aserrado correspondiente al pan principal (Vpp), se trabaja en base a los registros promedios de los espesores, anchos y longitudes de cada tabla, se obtiene así un volumen por cada tabla, posteriormente se suman todos los volúmenes de las tablas obtenidas del mismo tronco, determinándose el volumen productivo del pan principal. Para determinar el volumen aprovechable correspondiente a los panes de reaserrado (Vrr), se trabaja de igual manera que para el caso del Vpp.

En base a los cálculos realizados se trabaja con estadística descriptiva para cada una de las clases diamétricas, realizándose diagramas para observar la variabilidad del aprovechamiento de los troncos. Para esto, se utiliza la relación existente entre el volumen sin corteza que ingresa por unidad experimental y los volúmenes aserrados, por un lado, del pan principal (Vpp), y por otro, de los panes de recuperación (Vrr).

En la Fig. 1, a modo de referencia, se muestra una gráfica donde se aprecian los aportes de los diferentes volúmenes para la clase diamétrica de 16 a 20 (cm), y en la que se aprecia que el mayor aporte al volumen productivo (Vpro) lo realiza el volumen de pan principal (Vpp).

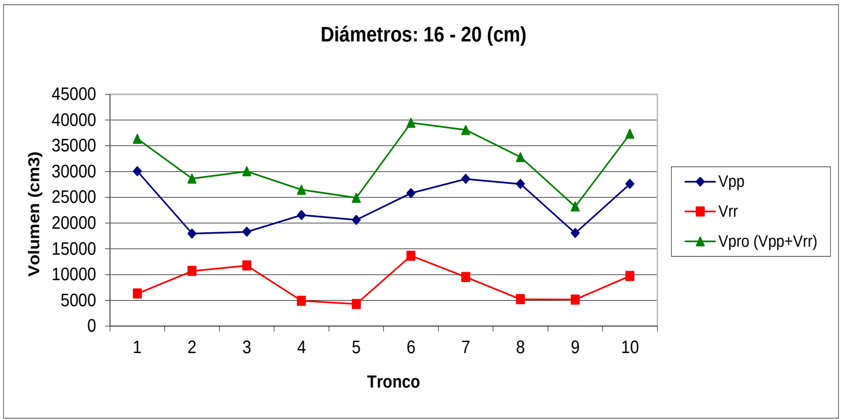


Fig.1. Gráfica que representa la composición del volumen productivo (Vpro) para la clase diamétrica de 16 a 20 (cm).

3.2 Rendimientos productivos

En la Fig. 2 se aprecian los diferentes rendimientos de panes principales (Rpp) de cada tronco, donde en las clases de 16-20, 26-30 y 31 o más, la variabilidad de rendimientos existente por clase no permite establecer que existe una preponderancia en el aprovechamiento de la madera entre clases. Sin embargo, existe evidencia que tendería a demostrar que la clase de 21-25 es la que presenta menor aprovechamiento del pan principal.

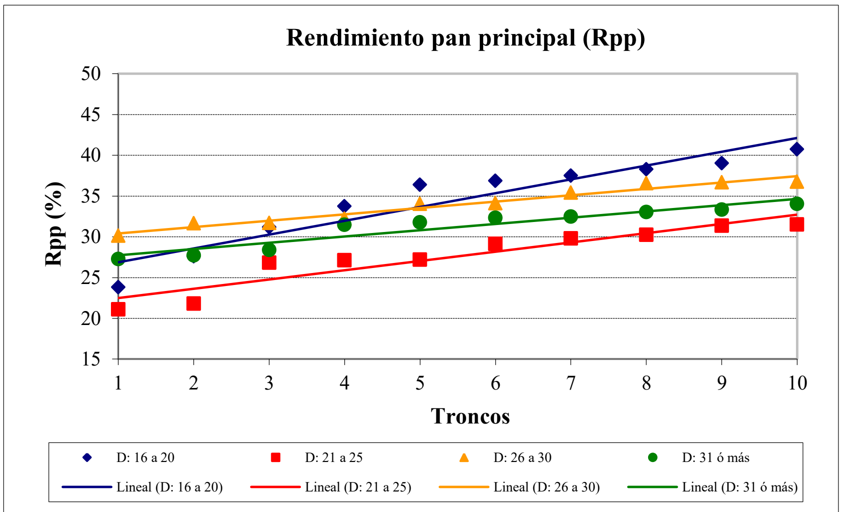


Fig. 2. Rendimientos de panes principales (Rpp) de cada tronco para las diferentes clases diamétricas.

En la Fig. 3 se aprecian los diferentes rendimientos de panes de reaserrado (Rrr) de cada tronco, según la correspondiente clase diamétrica. En la misma se observa que para la clase de 31 o más se obtuvieron los mayores aprovechamientos en todos los casos (troncos). También se evidencia que los menores aprovechamientos de los panes de reaserrado se darían en la clase de 16-20.

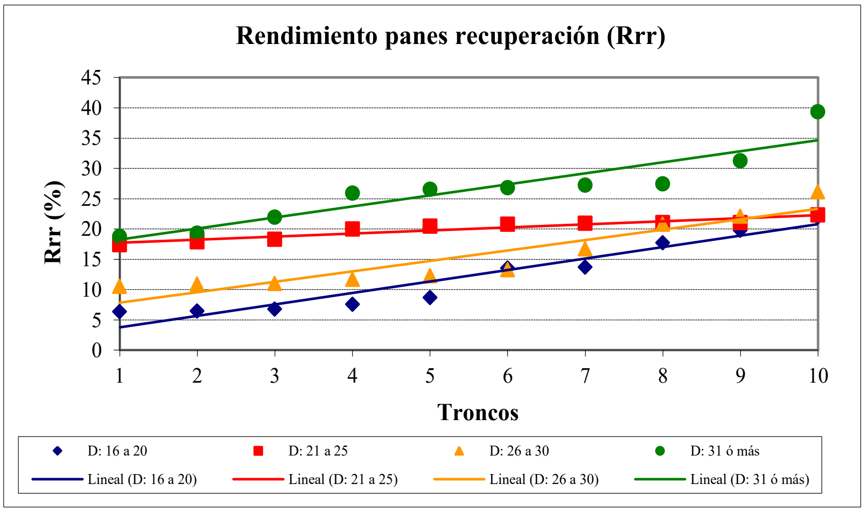


Fig. 3. Rendimientos de panes de recuperación (Rrr) de cada tronco para las diferentes clases diamétricas.

En la Fig. 4 se observan los rendimientos productivos aportados por cada una de las clases diamétricas, donde se observa claramente en mayor aporte porcentual de volumen de la clase diamétrica de 31 cm o más; en tanto que entre las otras tres clase no existe una preeminencia clara con respecto a el aporte de volumen productivo.

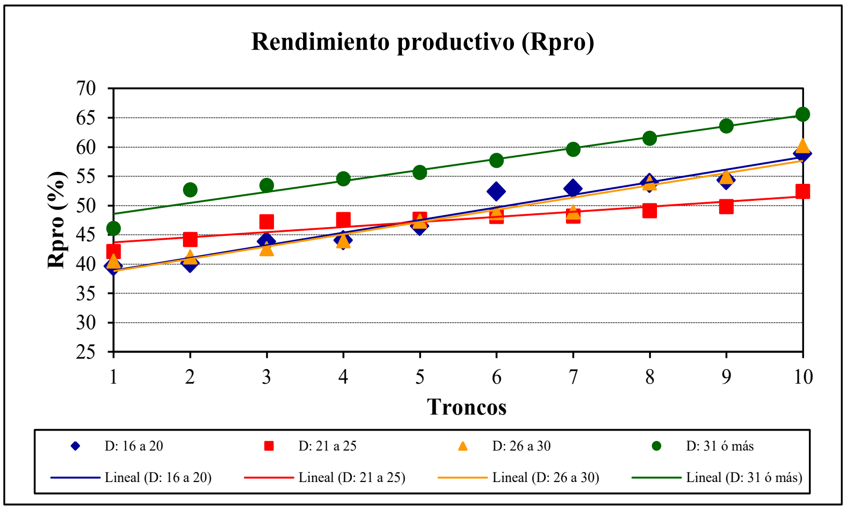


Fig. 4. Rendimientos productivos (Rpro) de cada tronco para las diferentes clases diamétricas.

En la Tabla 5 se aprecia un resumen de los estadísticos referidos al rendimiento productivo R(pro) para las diferentes clases diamétricas. En donde se observa la mayor media productiva, al igual que el modo, corresponde a la clase diamétrica de 31 o más; además el menor desvío típico de rendimiento corresponde a la clase de 21 a 25 (cm). En tanto que el mayor valor para la mediana corresponde a la clase diamétrica de de 31 o más, aunque la clase diamétrica de 16 a 20 ocupa el segundo lugar, con lo cual queda expuesto que la mayor y la menor de las clases diamétricas son las que proporcionan los mayores rendimiento productivos.

Tabla 5. Resumen de estadísticos del rendimiento productivo R(pro) para las diferentes clases diamétricas.

Estadístico	Rpro (según clase diamétrica)			
	D:16a20	D:21a25	D:26a30	D:31ómás
Mínimo	39,55	42,14	40,50	46,06
Máximo	58,83	52,38	60,21	65,55
Media	48,5980	47,6160	48,2180	57,0140
Mediana	49,3850	47,8550	48,0300	56,6450
Moda	39,55	42,14	40,50	46,06
Rango	19,28	10,24	19,71	19,49
Desvío típico	6,65014	2,83480	6,50102	5,79988

En la Fig. 5 se aprecia que el mayor porcentual de volumen productivo (Vpro) lo aporta la clase diamétrica de 31 o más (cm), en tanto que la clase diamétrica de 16 a 20 es la que posee mayor simetría, y la clase diamétrica de 21 a 25 (cm) es la única que presenta datos atípicos, debido a la estructura geométrica de los troncos analizados, en los que se observó en algunos casos una tronco-conicidad muy acentuada y en otro caso una leve forma de abananamiento.

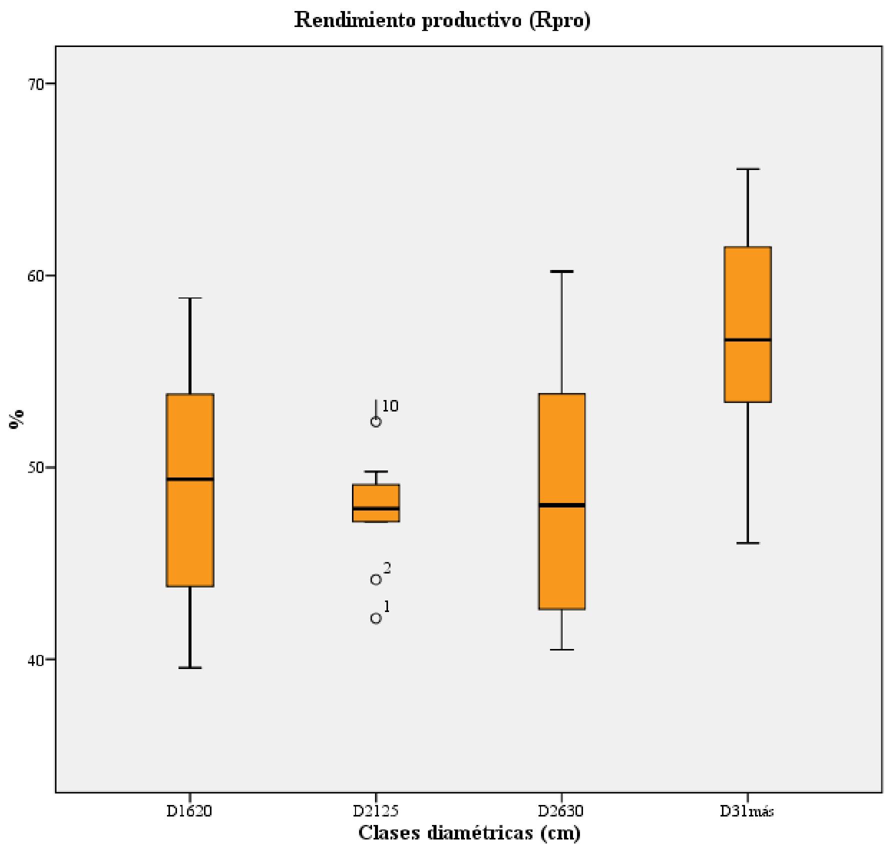


Fig. 5. Graficas comparables de rendimientos productivos (Rpro) para las diferentes clases diamétricas.

4 Propuestas didácticas asociadas con la investigación

En función de las actividades llevadas a cabo en la presente investigación y en consideración con los contenidos curriculares que se desarrollan en la asignatura de probabilidad y estadística de la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional de Misiones, la cátedra lleva adelante dos (2) propuestas didácticas, las cuales se explicitan a continuación.

4.1 Articulación de conceptos teóricos con resultados de investigación

Esta propuesta didáctica se realiza a partir de aquellas clases teóricas que abordan determinados contenidos curriculares que también son aplicados en actividades de investigación llevadas a cabo por la cátedra. La propuesta se basa en el desarrollo de clases de teoría en las que se articulan contenidos curriculares con sus respectivas aplicaciones a resultados provenientes de proyectos de investigación. En particular, en lo que respecta al presente trabajo se han articulado conceptos y aplicaciones correspondientes a estadística descriptiva.

4.2 Aplicación de resultados de investigación al laboratorio de estadística descriptiva

Esta actividad se enfoca en la utilización por parte de los alumnos, de datos obtenidos como producto de actividades de investigación de la cátedra. La práctica de laboratorio consiste en facilitar un conjunto de datos a grupos de alumnos, por lo general vinculados a la carrera de ingeniería industrial (debido al enfoque de las investigaciones), y explicarles el origen de los datos.

A partir de ello, los alumnos desarrollan el laboratorio de estadística descriptiva, según las consignas establecidas previamente. El citado laboratorio consiste en calcular diferentes medidas descriptivas numéricas de forma manual, y luego comparar esos resultados con los hallados a través de un software estadístico. Finalmente, y mediante exposición pública frente a otros alumnos y docentes de la asignatura, cada grupo presenta un informe con los resultados obtenidos en el laboratorio.

5 Conclusiones y trabajos futuros

- El método propuesto para el cálculo de los volúmenes y rendimientos productivos resulta sencillo y confiable para su utilización sistemática, puesto que puede ser aplicado de forma integral a través de todo el proceso de aserrío. Por ello, el experimento realizado permite el estudio exhaustivo del aprovechamiento de cada uno de los rollos sujetos a muestreo, con lo cual es posible calcular de forma diferenciada los volúmenes productivos derivados tanto de panes principales como de panes de recuperación.
- Al considerar sólo volúmenes de pan principal (Vpp), el mayor aprovechamiento se da para las clases diamétricas de 16 a 20 (cm) y de 30 o más (cm). Sin embargo, si se tiene en cuenta el volumen maderable total (Vpp + Vrr), las clases diamétricas que más aportan son de 26 a 30 (cm) y de 31 o más (cm), puesto que los panes de recuperación aportan proporcionalmente mayor volumen maderable en dichas clases.
- No existe una relación cabal de aumento de los rendimientos productivos (Rpro) con relación al incremento de las diferentes clases diamétricas. Sin embargo, se ha detectado que lo antes expuesto depende en buena medida, entre otros aspectos, del diagrama de corte seleccionado por el operador de la sierra principal, de la forma del tronco, de las fallas presentes en el tronco, y del producto final solicitado por el cliente.
- Como trabajos a futuro se plantea la realización de diversos análisis que permitan determinar las distribuciones de probabilidad que mejor se ajustan a los datos muestreados, y a partir de ello estimar los aprovechamientos productivos para las diferentes clases diamétricas.

Referencias

1. Mario José Mantulak, M. J.; Ansin, J. M.; Kerkhoff, A. J.; Ibarra, M. C.; Bojcho, D. Estadística aplicada al análisis del rendimiento productivo de un aserradero PyME. *Educación Matemática en Carreras de Ingeniería 2015, XIX Encuentro Nacional, XI Internacional*. San Nicolás, Buenos Aires, Argentina. Vol.1, pp. 41–50 (2015).
2. García, R.: *Inferencia Estadística y Diseño de Experimentos*. Editorial Universitaria de Buenos Aires, Argentina (2004).
3. Instituto Forestal de Chile: *Manual Nº 16 - Principios de organización y Operación del Aserradero*. División Regional Concepción (1989).
4. Tuset, R. y Duran F.: *Manual de Maderas Comerciales, Equipos y Procesos de Utilización*. Editorial Hemisferio Sur, Uruguay (1995).

Otras fuentes consultadas

- Cardona Brain, G. Análisis del sector forestal argentino. *Montes, Revista del ámbito forestal*. Colegios y Asociaciones de Ingenieros de Montes e Ingenieros Técnicos Forestales. Madrid, España. Nº 89 (2º trimestre), pp. 32-36 (2007). Disponible URL: www.revistamontes.net/ descargalibre.aspx?id=6891 (acceso en diciembre de 2015).
- Navidi W.: *Estadística para Ingenieros y Científicos*. Mc Graw Hill Interamericana, D.F. México (2006).
- Pérez López, C.: *Muestreo estadístico - conceptos y problemas resueltos*. Pearson-Prentice Hall, España (2005).
- Tinto, J. C.: *Tecnología de las Maderas Argentinas y del Mundo*. Editorial Agro Vet S.A., Argentina (1997).

Volver al Índice

Ajuste Intrínseco con Polinomios

Carlos Adolfo Calvo[1], Armando Luis Imhof[2] , Analía Moyano[1] , Beatriz Morales[1]
[1] Departamento de Matemática, Facultad de Ingeniería, UNSJ , San Juan, Argentina
Av.Libertador San Martín Oeste 1109 - J5400ARL - San Juan - Argentina
{Ccalvo , bmorales}@unsj.edu.ar, anamyo75@yahoo.com.ar
[2]Instituto Geofísico Sismológico Volponi, Facultad de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, UNSJ, Argentina
Av. José Ignacio de la Roza Oeste 590 - J5402DCS - San Juan - Argentina
aimhof@unsj.edu.ar

Resumen. Cuando se ajustan datos con polinomios se debe minimizar un residuo para obtener los coeficientes de dicho polinomio, para esto se resuelve un sistema de ecuaciones lineales (ecuaciones normales) obtenidas al minimizar una función error llamada residuo, que se mide según la ordenada, por ello dependiente del sistema de coordenadas. Para evitarlo, se modifica la construcción del residuo midiéndose sobre segmentos perpendiculares a la curva de ajuste, mediante un método intrínseco, independiente del sistema de representación. El mínimo de este residuo se logra mediante un proceso iterativo de minimización. Dado la gran cantidad de mínimos locales es necesario generar un gran número de valores iniciales para obtener el resultado óptimo. Para esto se complementa el método propuesto (intrínseco) con cambios de coordenadas mediante rotación de ejes, y para cada uno de ellos, mediante las ecuaciones normales, obtener distintos valores iniciales. El algoritmo desarrollado demuestra en forma gráfica su gran potencialidad

Palabras Clave: Aproximación por polinomios. Ajuste intrínseco. Residuo según la normal. Rotación. Óptimo Ajuste.

1 Introducción. Proceso de Aproximación

Dado un conjunto de datos discretos formado por n puntos (x_i, y_i) con $i=1:n$, se aproxima o ajusta con un polinomio $p(x) = a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + ... + a_m$. Determinar los coeficientes a_j es el objeto de la aproximación. El vector residuo $\bar{r} = (r_1, r_2, ..., r_n)$ tiene por componentes los segmentos de ordenada que unen el punto dato (x_i, y_i) con el punto de la curva de ajuste $(x_i, p(x_i))$ (Fig. 1) o sea $r_i = y_i - p(x_i)$.

La norma de este vector mide la calidad de la aproximación quedando su expresión:

$$\left\| \vec{r} \right\| = \sqrt{\left(\sum_{i=1}^{n} r_i^2 \right)} = \sqrt{\left(\sum_{i=1}^{n} (y_i - p(x_i))^2 \right)} = f(a_0, a_1, a_2 .... , a_m) \qquad \textbf{(1)}$$

La mejor aproximación entre $p(x)$ e y (datos) se logra minimizando esta norma, $\left\| \vec{r} \right\|$ (Método de mínimos cuadrados de Gauss), lo que conduce a un sistema lineal de $m+1$ ecuaciones con $m+1$ incógnitas a_j denominado ecuaciones normales [1], cuya resolución permite determinar los coeficientes y con ellos construir el polinomio de ajuste.

Este método tiene el inconveniente de depender del sistema de coordenadas, como se comprueba al rotar los ejes de coordenadas y determinar distintos coeficientes a_j [2]. Para resolver este inconveniente y obtener un ‘‘Ajuste intrínseco ’’ independiente del sistema de representación, se propone elegir las componentes del vector residuo (rn_i) como segmentos que van desde el punto dato $P_i(x_i, y_i)$ hasta la curva en forma perpendicular (N_i)(Fig. 1). De esta forma el nuevo residuo $\overline{rn} = (rn_1, rn_2 .....rn_n)$ se independiza del sistema de representación y por lo tanto también los coeficientes intrínsecos an_j que de él dependen, esto es $\left\| \overline{rn} \right\| = f(an_0, an_1, an_2 ...., an_m)$

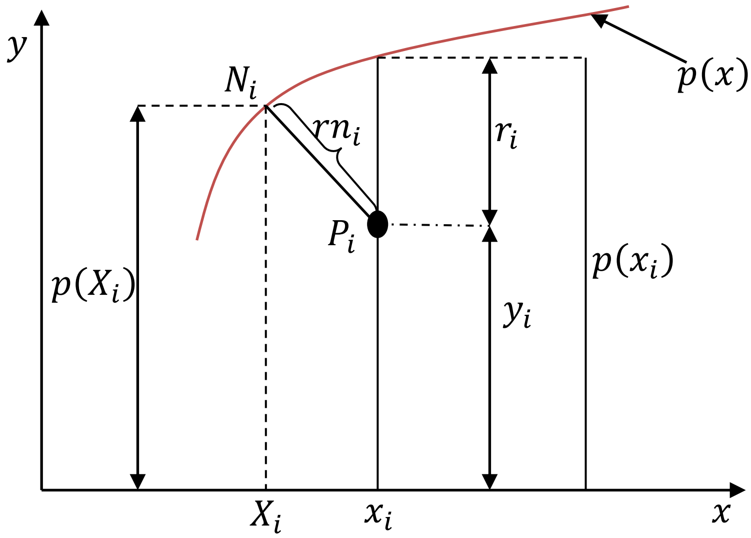


Fig. 1: La figura muestra al polinomio aproximándose a los datos $P_i(x_i, y_i)$. El desvío se mide según la ordenada (r_i) o según la normal a la curva rn_i

2 Obtención de los segmentos normales r_i'

Llamando $p(x)$ al polinomio de ajuste para cada punto dato $P_i = P(x_i, y_i)$ se debe determinar $N_i(X_i, p(X_i))$. Dado que la recta por donde pasa P_i y N_i es normal al polinomio se debe cumplir que:

$$p'(X_i) = -\left(\frac{x_i - X_i}{y_i - p(X_i)}\right) \quad \textbf{(2)}$$

de donde:

$$F(X_i) = p'(X_i)(y_i - p(X_i)) + (x_i - X_i) = 0 \quad \textbf{(3)}$$

La raíz X_i de (3) se obtiene para cada $p(x)$ aplicando el método iterativo de Newton-Raphson, usando como valor inicial x_i :

$$X_i^{(n+1)} = X_i^{(n)} - \frac{F(X_i^{(n)})}{F'(X_i^{(n)})} \qquad n = 0,1,2........ \; X_i^{(0)} = x_i \quad \textbf{(4)}$$

donde el supra índice indica la etapa de iteración, siendo:

$$\begin{aligned} F(X_i^{(n)}) &= p'(X_i^{(n)})(y_i - p(X_i^{(n)})) + (x_i - X_i^{(n)}) \\ F'(X_i^{(n)}) &= p''(X_i^{(n)})(y_i - p(X_i^{(n)})) - (p'(X_i^{(n)})^2 - 1 \end{aligned} \quad \textbf{(5)}$$

La obtención de X_i y de $p(X_i)$ permiten construir $rn_i = \sqrt{(x_i - X_i)^2 + (y_i - p(X_i))^2}$ y con ello

$\left\| \overline{rn} \right\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (rn_i)^2}$

3 Obtención de los coeficientes del polinomio intrínseco de ajuste an

Los coeficientes an_j se hallan buscando el mínimo de $\| \overline{rn} \| = f\,(an_0\,, an_1\,, an_2\,..........\,, an_m\,)$. Para ello se emplea el algoritmo Simplex de Nelder-Mead implementado en MatLab [3], éste es un método iterativo que requiere de un valor inicial (dado con las ecuaciones normales) y luego a través de un proceso de evaluación de la función a minimizar se alcanza el valor óptimo de $\| \overline{rn} \|$.

4 Implementación primaria del método

Dado un conjunto de n puntos $(x_i\,, y_i)$ con $i = 1:n$, se los grafica y se elige el grado m del polinomio [2]. Usando las ecuaciones normales de Gauss se obtiene un primer polinomio de ajuste. Se aplica el algoritmo Simplex para minimizar $\| \overline{rn} \|$ determinando los coeficientes intrínsecos an, con ellos se construye el polinomio de ajuste y se grafica.

5 Primeros resultados y mejora del método por rotación

Al usar un procedimiento iterativo de minimización para funciones no lineales, se corre el riesgo de obtener mínimos locales y no el óptimo buscado. Esto ocurre, en este caso, por el fuerte carácter oscilatorio de $\| \overline{rn} \|$. Para subsanar este inconveniente se crean distintos valores iniciales. Para ello se rotan de los ejes un ángulo θ, lo que produce un cambio de coordenadas y luego se aplican las ecuaciones normales de Gauss. Esto permite repetir el proceso presentado en el ítem 4 para distintos ángulos (barrido), para distintos valores iniciales y obtener distintos ajustes. Si el barrido es suficientemente completo se podrá obtener el ajuste óptimo. Aunque no se logre siempre es una mejora.

6 Esquema de rotación y cambio de coordenadas

Un punto $P(x_i\,, y_i)$ tiene en el sistema rotado, las nuevas coordenadas $(x'_i\,, y'_i)$ (Fig. 2) relacionadas entre ellas por:

$$\begin{cases} x'_i = x_i \cos(\theta) + y_i\, sen(\theta) \\ y'_i = -x_i\, sen(\theta) + y_i \cos(\theta) \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{bmatrix} x'_i \\ y'_i \end{bmatrix} = Q' \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \end{bmatrix} = Q \begin{bmatrix} x'_i \\ y'_i \end{bmatrix}$$

Siendo $Q = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -sen(\theta) \\ sen(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}$ matriz ortogonal que cumple $Q' = Q^{-1}$.

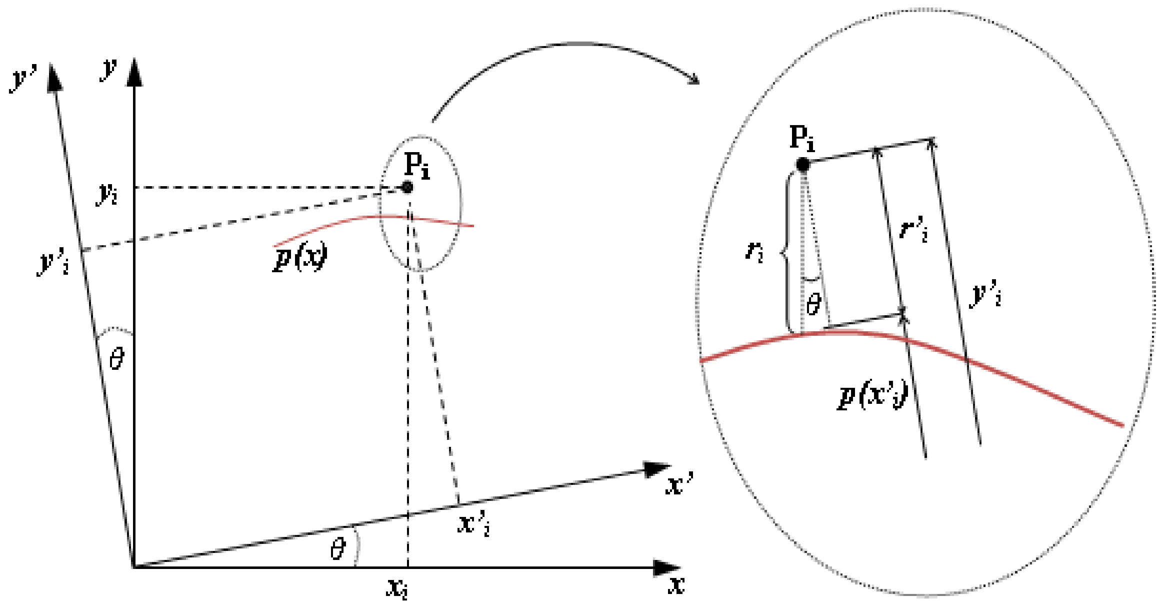


Fig. 2: Muestra la aproximación $p(x)$ a los datos (x_i, y_i) $i=1:n$. En detalle la componente r_i (según la ordenada $y\,(+)$) del residuo correspondiente a la abscisa x_i y la componente $r_i{}'$ (según la ordenada $y'(\theta)$) del residuo correspondiente a la abscisa x'_i.

7 Implementación del método y programa en forma de archivo M

- Dado un conjunto de n puntos (x_i, y_i) $i=1:n$, se los grafica y se elige el grado m del polinomio
- Se elige el valor de θ.
- Se construye la matriz de rotación Q, se pasa a las nuevas coordenadas: $\begin{bmatrix} x'_i \\ y'_i \end{bmatrix} = Q'\begin{bmatrix} x_i \\ y_i \end{bmatrix}$ y luego, usando las ecuaciones normales de Gauss, se obtiene los coeficientes de un primer polinomio de ajuste.
- Se aplica el algoritmo Simplex de Nelder-Mead para minimizar $\|\overline{rn}\|$ determinando los coeficientes intrínsecos an
- Con an se construye el polinomio de ajuste y se grafica.
- Con el valor óptimo de θ se vuelve al sistema original de coordenadas y se grafica
- Se repite el procedimiento para otro valor de θ.

Algoritmo 1. Para la implementación computacional se usa el paquete informático MatLab.
Los *archivos M* creados son *polyrot*, *funminp* y *funminp1*. El primero para una nube de puntos dados (como vectores x e y) realiza el ajuste intrínseco con un polinomio de grado *m*, con rotación θ de los ejes, como argumentos de salidas se obtienen las coordenadas del ajuste (intrínsecas an y rotadas a). La subfuncion *funminp*, mediante elcomando *fminsearch*, realiza el proceso de minimizacionde la función objetivo contenida en el archivo *funmin1*.

```
function [cn,dn,cr,dr]=polyrot(x,y,m,t)
% Programa de ajuste de los datos (x , y) por polinomios de grado m
% Con sistema de referencia habitual(verde) y rotado t (grados)en rojo
% cr coeficientes del polinomio rotado ;drfuncion objetivo
% cn y dnidem para rotado y desvio normal
x=x(:);y=y(:);t=t*pi/180;
```

```
Q=[cos(t) sin(t);-sin(t) cos(t)];% matriz de rotacion (-t)
XY=Q*[x';y'];X=XY(1,:)';Y=XY(2,:)';% X , Y vector rotado
%Sistema rotado (xr,yr)
cr=polyfit(X,Y,m);dr=norm(Y-polyval(cr,X),2);
XX=min(X):.1:max(X);Z=polyval(cr,XX);% ajuste (t=t) (XX, Z)
xy=Q'*[XX;Z];xr=xy(1,:)';yr=xy(2,:)';% vuelta al sistema original
%Sistema rotado y normal (xrn,yrn)
[cn,dn]=funminp(X,Y,m);Zn=polyval(cn,XX);% ajuste (t=t) (XX, Zn)
xyz=Q'*[XX;Zn];xrn=xyz(1,:)';yrn=xyz(2,:)';% vuelta al sistema original
%GRAFICO
%ejes no rotados
xh=[0 ;max(x)];yh=[0;0];%eje x
xv=[0;0];yv=[0;max(x)];%eje y
%ejes rotados
Xh=[0;max(x)*cos(t)];Yh=[0;max(x)*sin(t)];%eje x
Xv=[0;-max(x)*sin(t)];Yv=[0;max(x)*cos(t)];%eje y
% GRAFICA datos:azul  ajuste clasico: negro ajuste rotado:rojo  ajuste rotado
normal: verde ejes: negro sin rotar  rojo rotado
plot(x,y,'ob',xx,z,'k',xr,yr,'r',xrn,yrn,'g',xh,yh,'k',xv,yv,'k',Xh,Yh,'r',Xv,Yv,
'r');
title('azul:datosrojo:rotadonegro:sin rotar   verde: rotado normal');
function [cn,dn,c1,d1]=funminp(x,y,m)
% [cn,c1]=funminp(xx,yy,m) ajusta a los puntos (xx,yy) con polinomio % de grado
m.
% cn son los coeficientes del polinomio con desvio ortogonal (dn)
% c1 son los coef. del pol.con desvio(d1) sobre la ordenada(lo da
% polyfit)
%
globalxxxxyyyy
xxxx=x(:);yyyy=y(:);
[c1]=polyfit(xxxx,yyyy,m);d1=norm(yyyy-polyval(c1,xxxx),2);
[cn,dn,p]=fminsearch('funminp1',c1);%p mide la convergencia 1=si 0=no
% GRAFICO(opcional) si no hay argumentos de salida
ifnargout==0,
xx=min(xxxx):.1:max(xxxx);z1=polyval(c1,xx);zn=polyval(cn,xx);
plot(x,y,'o',xx,z1,'g',xx,zn,'r');title('rojo normal verde clasico')
end
function d=funminp1(c)
% Programa usado por funminp para obtener el desvio ortogonal para
% polinomios de coeficientes c
%
globalxxxxyyyy
ll=length(c);% ll-1 es el grado del polinomio
x=xxxx(:);y=yyyy(:);c=c(:);% datos
zx=c(1:ll-1).*(ll-1:-1:1)';% derivada del polinomio
if ll==2,zxx=0;else zxx=zx(1:ll-2).*(ll-2:-1:1)';end
X=x;%valor inicial   (X,z)) punto sobre la curva de ajuste
for ii=1:20,
Z=polyval(c,X);Zx=polyval(zx,X);Zxx=polyval(zxx,X);
F=Zx.*(y-Z)+(x-X);DF=Zxx.*(y-Z)-Zx.^2-1;X=X-F./DF;% Metodo de Newton
end
d=sqrt((y-Z).^2+(x-X).^2);d=norm(d);
```

8 Extensión del método a otras funciones y otras definiciones de error

El método se puede extender fácilmente a otras funciones no polinómicas, reemplazando las ecuaciones normales por un algoritmo de minimización. (Puede usarse el mismo [3] empleado en este trabajo).

Otras definiciones que remplazan a la definición (1) de error son:

$$E_1 = \sum_{i=1}^{n} \left| y_i - p(x_i) \right| \tag{6}$$

$$E_\infty = \max_i |y_i - p(x_i)| \qquad \textbf{(7)}$$

La última (7) se usa cuando se requiere de una cota de error en todo el intervalo de trabajo (por ejemplo tablas numéricas de funciones matemáticas). Para datos con dispersión como los experimentales la fórmula (6) es más conveniente. En ambos casos sólo métodos numéricos se emplean para lograr el mínimo.

9 Ejemplo y Resultados

Para una nube de puntos (x_i, y_i) $i=1:31$ se realiza un ajuste para un barrido de θ. La calidad de la aproximación es medida por $E(\theta)$ para ajustes con cambio de coordenadas (usando las ecuaciones normales), y es medida por $En(\theta)$ para ajustes intrínsecos usando valores iniciales fijados por θ. Las definiciones de Error son:

$$E(\theta) = \left\| \vec{r} \right\| = \sqrt{\left(\sum_{i=1}^{n} (y_i - p(x_i))^2 \right)} \qquad En(\theta) = \left\| \overline{rn} \right\| = \sqrt{(x_i - X_i)^2 + (y_i - p(X_i))^2}$$

Los valores de $E(\theta)$ y de $En(\theta)$ no son comparables entre sí, ya que siempre $En(\theta) < E(\theta)$ debido a que las distancias de un punto a una curva son menores cuando se elige una dirección perpendicular que una dirección cualquiera. El barrido muestra que $E(\theta)$ es mínima cuando $\theta = 11.5^o$ y los coeficientes del polinomio son: c=[0.0011 -0.1860 8.1057 -41.7849] .

Para $En(\theta)$ el mínimo se produce para $\theta = 6^o$ y los coeficientes del polinomio correspondientes son: cn=[0.0013 -0.1992 7.9000 -21.3723].

El ajuste realizado para $En(6^o) = 19.7407$ no puede ser mejorado y como los coeficientes para $E(11.5^o) = 59.8105$ son próximos se concluye que la rotación es un excelente aliado en los problemas de ajuste. Este resultado indirecto ha validado y potenciado este método y ha sido corroborado en numerosos ejemplos. La Tabla 1 muestra los valores de la experimentación numérica.

Tabla 1. Comparación de residuos para distintos θ.

θ	$En(\theta)$	$E(\theta)$
0	20.3586	98.8947
5.0000	21.9800	74.4426
6.0000	19.7407	70.4250
7.0000	20.1336	66.9458
8.0000	22.6612	64.0953
9.0000	22.1225	61.9434
10.0000	24.5654	60.5320
11.0000	25.9387	59.8687
11.5000	25.3708	59.8105
12.0000	26.3490	59.9266
13.0000	26.9639	60.6484
14.0000	28.7905	61.9557
15.0000	30.1552	63.7592

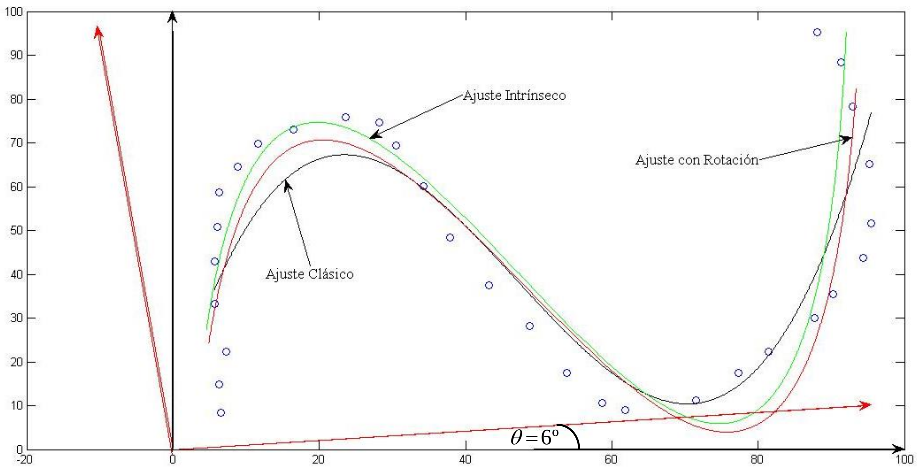


Fig. 3: Ajuste de datos ' o ' (en azul) con polinomio de tercer grado. En verde el ajuste intrínseco y en rojo con rotación (ambas para $\theta = 6^{\circ}$). En negro el ajuste clásico ($\theta = 0$).

10 Conclusiones

Se ha desarrollado un algoritmo para aproximar datos con polinomios de grado m, de forma independiente del sistema de representación. El error entre el ajuste y los datos se hace en forma normal a la curva de aproximación, lo que lo independiza del sistema de ejes. El proceso precisa de valores iniciales obtenidos fácilmente con las ecuaciones normales. A lo que se suma cambios de coordenadas por rotación, que amplía la obtención de estos valores iniciales aumentando las posibilidades de éxito. Una conclusión indirecta es la validación de la aplicación de cambio de coordenadas por rotación.

Este trabajo en su totalidad excede a la aplicación didáctica a nivel de grado, pero es entendido fácilmente dado su interpretación geométrica. Parcialmente muestra aspectos importantes como: 1) mirar otras definiciones de error 2) entender el aspecto intrínseco de algunas operaciones matemáticos 3) entender la importancia y sencillez de las rotaciones 4) combinar distintas disciplinas en un mismo problema matemático (Análisis, Álgebra, Métodos Numéricos, Computación, etc.)

Referencias

1. Press, W. H. et al .:*NumericalRecipes.* Cambridge University Press(1986)
2. Moyano, A., CalvoC., Imhof A., Morales B. : *Aproximación Polinomial de Mínimos Cuadrados con Rotación de los ejes Coordenados*.Emci (2017)
3. Shampine, L. F.; Reichelt :*TheMatLabOde Suite*, L. F. W. SIAM JournalonScientific Computing (1997)

Volver al Índice

Competencias para el Modelado Matemático en Ingeniería Industrial: Una Necesidad Ineludible

Víctor Kowalski[1], Darío Enriquez[2], Mercedes Erck[3], Iván Santelices[4]
[1,2,3] Departamento de Ingeniería Industrial, Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de Misiones
Rosas 325, CP 3360, Oberá, Misiones Argentina
{kowal, enriquez, erck}@fio.unam.edu.ar,
[4] Departamento de Ingeniería Industrial, Facultad de Ingeniería, Universidad del Bío-Bío
Avenida Collao 1202, Casilla 5-C, CP 4051381, Concepción, Chile
isanteli@ubiobio.cl

Resumen. El Modelado Matemático es una competencia central en la formación de ingenieros industriales, particularmente en el contexto actual de la profesión. No obstante, a partir de los resultados de una investigación exploratoria realizada con estudiantes de las carreras de ingeniería industrial de la Universidad Nacional de Misiones de Argentina y la Universidad del Bío-Bío de Chile, se encuentran algunas deficiencias en los alumnos que llegan a la disciplina Investigación Operativa de ambas instituciones. Este trabajo tiene por objetivo aportar elementos para la discusión y el análisis sobre cómo debe ser abordado el Modelado Matemático en un plan de estudios de una carrera de Ingeniería Industrial a los efectos de mitigar los inconvenientes señalados, y proponer posibles alternativas de solución. A partir de la revisión bibliográfica, la investigación documental, así como de los resultados de la percepción de los estudiantes, se aportan conceptos que justifican el título del trabajo.

Palabras Clave: Ingeniería industrial, Modelado matemático, Formación por competencias.

1 Introducción

El fin último de la actividad de todo profesional en general, y de los ingenieros en particular, es resolver problemas que demanda la sociedad. Si bien el término "solución de problema" puede llegar a ser muy polisémico, dentro del campo de la ingeniería "se puede definir como el proceso de identificar una diferencia entre el estado actual de las cosas y el estado deseado y luego emprender acciones para reducir o eliminar la diferencia" [1]. Por otra parte el Consejo Federal de Decanos de Ingeniería (CONFEDI) ya en el año 2006 había acordado que un ingeniero será competente si cumple con la finalidad de "resolver situaciones profesionales" [2] a partir de la articulación y movilización de estructuras mentales, saberes y valores. Los problemas o situaciones profesionales comprenden un amplio espectro que abarca desde el simple cálculo de las dimensiones de un dispositivo hasta la creación de sistemas o procesos donde se involucran recursos físicos, financieros, humanos, energéticos y de información. Estos problemas rara vez tienen una solución única, y por ello una de las etapas principales del proceso de solución es la toma de decisiones. Más aún, Robbins y Judge relacionan directamente la toma de decisiones con la resolución de problemas al sostener que "La toma de decisiones ocurre como reacción a un problema. Es decir, cuando hay una discrepancia entre el estado actual de las cosas y algún estado deseable, por lo que se requiere considerar cursos de acción alternativos" [3]. Tanto la toma de decisiones como la resolución de problemas puede ser intuitiva, estar apoyada sobre una base racional, o ser una combinación de las mismas, dependiendo de la magnitud y complejidad del problema. Es justamente en la actuación racional donde deben evaluarse las alternativas. Para la toma de decisiones de tipo racional los ingenieros industriales se valen de modelos que representen la situación problemática. Gran parte de las situaciones problemáticas se resuelven utilizando modelos matemáticos y es aquí donde cobra singular importancia el auxilio de la matemática, así como el de otras disciplinas.

En la carrera ingeniería industrial la disciplina Investigación Operativa, también denominada investigación de operaciones o investigación operacional, es la que se ocupa principalmente de la formación para la toma de decisiones basadas en elementos cuantitativos. Para ello es necesario construir Modelos Matemáticos o utilizar adecuadamente aquellos que ya fueron diseñados para ciertas situaciones típicas. El Modelado Matemático es una de las etapas principales en la resolución de problemas implicando procesos mentales complejos que requieren trabajar entre el mundo real y el mundo matemático o simbólico. Estos procesos están estrechamente vinculados con la creatividad y la capacidad de abstracción, y no siguen un proceso lineal estructurado. Por ello alcanzar un cierto nivel de competencia para Modelar Matemáticamente no se resuelve con el mero aprendizaje de contenidos y es una actividad que requiere entrenamiento desde el inicio de una carrera de ingeniería.

Sin embargo, los alumnos que arriban a la asignatura Investigación Operativa de la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional de Misiones (FIUNaM) y a Optimización Lineal (equivalente a Investigación Operativa) de la Facultad de Ingeniería de la Universidad del Bío-Bío (FIUBB) de Chile, presentan dificultades con el Modelado Matemático, en cuanto a su condición de saber previo. Ello conduce a que deba invertirse un tiempo considerable en la formación de competencias y capacidades relacionadas con el Modelado Matemático, para luego pasar a la aplicación específica en la disciplina Investigación Operativa.

Este trabajo tiene por objetivo aportar elementos para la discusión y el análisis sobre cómo debe ser abordado el Modelado Matemático en un plan de estudios de una carrera de Ingeniería Industrial a los efectos de mitigar los inconvenientes señalados, y proponer posibles alternativas de solución. Para ello necesariamente el tema debe ser contextualizado desde diferentes referenciales teóricos y normativos, llegando hasta los aspectos pragmáticos que se desarrollan en los espacios de trabajo docente-alumno en las aulas.

2 Breves aspectos metodológicos y formales

Aquí se presenta un segmento de un proyecto de investigación en Formación por Competencias que se está desarrollando en la FIUNaM, abordando ocho asignaturas de la carrera Ingeniería Industrial, y que ha surgido luego de la conclusión de otro proyecto de Formación por Competencias en la asignatura Investigación Operativa. El trabajo surge a partir del análisis de un problema que se presenta en las asignaturas Investigación Operativa de la FIUNaM y Optimización Lineal. En la FIUNaM Investigación Operativa se encuentra en el marco de un proyecto de investigación orientado a la Formación por Competencias desde hace más de seis años. En tanto en la FIUBB la carrera se encuentra dentro de un Modelo de Formación por Competencias de la universidad, y Optimización Lineal lleva tres años dentro del nuevo enfoque.

Se utiliza un enfoque mixto, que combina los enfoques cualitativos y cuantitativos. Si bien la investigación general del proyecto se realiza bajo el paradigma pragmático [4], la estrategia que se ha utilizado aquí es el estudio de caso y el análisis de la práctica interpretativa. Las técnicas e instrumentos utilizados son, entre otras, revisión documental y bibliográfica, técnicas de observación, y encuestas semi-estructuradas, grupos de discusión, y la triangulación. La revisión bibliográfica se centra en publicaciones referenciales del Modelado Matemático, tanto en la formación de ingenieros como en la formación matemática (particularmente de la Comisión Internacional de Instrucción Matemática), y por otra parte, sobre conceptos centrales de la Formación por Competencias. Se continúa con la revisión de normativas y documentos sobre acreditación de carreras de ingeniería y Formación por Competencias, para finalmente contrastar con las opiniones de los estudiantes de las asignaturas de ambas instituciones. Finalmente resta comentar que avances previos de este análisis ya fueron presentados en dos eventos en el año 2016.

3 Cinco miradas sobre el modelado y un problema a resolver

3.1 El modelado matemático y la resolución de problemas vistos desde la Ingeniería Industrial

De las diferentes definiciones y conceptualizaciones que existen sobre la ingeniería se adopta aquí la del marco normativo de acreditación de carreras del MERCOSUR: *"conjunto de conocimientos científicos, humanísticos y tecnológicos de base físico-matemática, que con la técnica y el arte analiza, crea y desarrolla sistemas y productos, procesos y obras físicas, mediante el empleo de la energía y materiales para proporcionar a la humanidad con eficiencia y sobre bases económicas, bienes y servicios que le den bienestar con seguridad y creciente calidad de vida, preservando el medio ambiente"* [5]. Como el presente trabajo está centrado en la titulación Ingeniería Industrial es necesario adoptar también una definición al respecto, tomándose la que propone actualmente el *Institute of Industrial and Systems Engineers*: "*La Ingeniería Industrial se ocupa del diseño, mejora e instalación de sistemas integrados de personas, materiales, información, equipamiento y energía. Se basa en conocimientos especializados y habilidades de ciencias matemáticas, físicas y sociales, junto con los principios y métodos de análisis y de diseño de la ingeniería, para especificar, predecir y evaluar los resultados a ser obtenidos de aquellos sistemas"* [6].

En las definiciones anteriores están presentes qué, cómo y para qué, "hace" la Ingeniería Industrial, que en definitiva son transversales a todas las ingenierías. El ingeniero resuelve problemas siguiendo en general un método constituido por una serie de pasos: 1) Identificar y definir el problema; 2) Determinar el conjunto de soluciones alternas; 3) Determinar el criterio o criterios que se utilizarán para evaluar las alternativas; 4) Evaluar las alternativas; 5) Elegir una alternativa; 6) Implementar la alternativa seleccionada; 7) Evaluar los resultados para determinar si se ha obtenido una solución satisfactoria [1]. Los pasos 4 y 5 constituyen el "Análisis del Problema" donde se puede utilizar un enfoque cualitativo, cuantitativo o una combinación de ambos dependiendo de las características del problema (complejo, especialmente importante, nuevo o repetitivo) y de algunos aspectos del decisor (dificultad para hacer un análisis cuantitativo, volumen de recursos financieros, falta de experiencia previa, entre otros) [1]. En consecuencia, pasados los tres primeros pasos, y de recurrirse al análisis cuantitativo, el modelado matemático y su posterior resolución tiene un papel central, ya que "es la esencia del proceso del análisis cuantitativo" [1].

Respecto al concepto de Modelo, Ackoff y Sasieni propusieron una de las definiciones más simples: "Un modelo es una representación de la realidad" [7]. Pidd propone una definición más integral: "Un modelo es una representación explícita y externa de parte de la realidad como la ven las personas que desean usar el modelo para entender, cambiar, gestionar y controlar dicha parte de la realidad" [8]. En tanto Box y otros enuncian que "Lo más que se puede esperar de cualquier modelo es que puede suministrar una aproximación útil a la realidad" de lo cual ha surgido un aforismo que reza: "todos los modelos están equivocados, algunos modelos son útiles" [9]. Finalmente García Sabater y Maheut [10] sentencian sobre los modelos que "no son la realidad, son el atajo que nos permite aprehenderla" y además son externos: "Mientras no tienen una representación externa respecto del modelador son simplemente una teoría mental del mismo. En esa presentación externa radica una de las grandes ventajas de los modelos: ponen negro sobre blanco los pensamientos, los datos, las hipótesis y las intuiciones".

Si bien los modelos se utilizan en varias disciplinas de la Ingeniería Industrial, es en Investigación Operativa donde su utilización es completa a lo largo de un espacio curricular o curso de grado, conocido como Asignatura en un plan de estudio. Como su uso se orienta a aportar elementos cuantitativos para tomar decisiones, también se suele hacer referencia a ella como teoría de las decisiones, dentro del paradigma de la racionalidad económica. En el campo de esta disciplina Eppen y otros [11] sintetizan el papel del modelado en la toma de decisiones de la siguiente manera: una vez definido el problema a resolver, a través de un proceso de abstracción se pasa del mundo real al mundo simbólico construyendo un modelo, que luego es analizado y resuelto (en el mundo simbólico), para finalmente a través de un proceso de interpretación de los resultados volver al mundo real para tomar la decisión [11].

Sintetizar este sub-apartado pareciera ser relativamente sencillo. La función de la ingeniería, resolver problemas en el contexto de cada titulación o rama, precisa del dominio de varias disciplinas entre las cuales se encuentra la matemática. Más allá del poder de cálculo de la matemática, cuestión que hoy se resuelve a través de la tecnología con mayor facilidad, es el modelado matemático una actividad esencial que precisa ser dominada por el profesional. Este dominio se logra mediante el entrenamiento adecuado y no se restringe a una sola asignatura, sino que es una actividad trasversal que debe atravesar toda una carrera.

3.2 El modelado matemático y la resolución de problemas vistos desde la matemática

Antes de pasar al Modelado Matemático es necesario reconocer dos aspectos que se relacionan con lo que plantea en el presente trabajo.

En primer lugar la existencia de un accionar "tribal" dentro del ámbito de las ingenierías, con la palabra tribu en el sentido propuesto por Becher [12]. En esta dirección Araujo y Trotta reconocen "la existencia de una cultura de la profesión, esto es, una serie de rasgos que permiten a sus miembros reconocerse como integrantes de un mismo quehacer y colectivo profesional" [13]. Es así que se puede percibir en general en las instituciones divisiones entre "los del ciclo básico" y "los del ciclo superior"; dentro del ciclo básico "los matemáticos" y los "físicos"; y entre "los matemáticos" divisiones entre los que tienen formación matemática de grado y los ingenieros que "dan matemática", y así sucesivamente. Este "accionar tribal" no es ni bueno ni malo, pero en general existe, y debe ser asumido, especialmente cuando se proponen cambios, particularmente en todo lo referente a "lo educativo".

El segundo aspecto a considerar se relaciona con las dificultades que presentan los alumnos con el aprendizaje de la matemática. Mucho se ha investigado y escrito sobre este tema, y se continua haciendo. Ya en la década de los 80 el matemático Alan Schoenfeld [14] cuando investigó la relación entre la matemática y la resolución de problemas como estrategia didáctica, concluyó que el éxito o fracaso de los estudiantes en la resolución de problemas podía ser explicado a partir de cinco aspectos de la cognición: la base de conocimientos, las estrategias de resolución de problemas (estrategias cognitivas), el monitoreo y control (estrategias metacognitivas), las creencias y los afectos, y la práctica. Respecto de la base de conocimientos una cuestión trascendental es la referencia a lo que él consideraba como "recursos", los cuales incluyen definiciones, hechos, formulas, procedimientos rutinarios, procedimientos algorítmicos y conceptos fundamentales relacionados con un dominio matemático particular. Inevitablemente surge entonces el interrogante acerca de si todos los aspectos enumerados por Schoenfeld son considerados en la enseñanza de la matemática o solamente todo está enfocado a la cuestión de los recursos, que es “lo que figura en los libros de texto”, o la enseñanza y el entrenamiento objetivan un panorama más amplio y complejo que se orienta a que los estudiantes se conviertan en competentes solucionadores de problemas, en el sentido que propone Schoenfeld [14]. Para Niss, dominar matemática significa poseer Competencia Matemática, definiendo a ésta como “La capacidad de entender, juzgar, hacer y utilizar la matemática en una variedad de situaciones y contextos intra-extra-matemáticos en los que la matemática juega o podría desempeñar un rol. Necesarios, pero ciertamente no suficientes, los pre-requisitos para la competencia matemática son muchos conocimientos fácticos y habilidades técnicas, de igual manera que el vocabulario, la ortografía y la gramática son pre-requisitos necesarios pero no suficientes para la literatura” [15]. Así, propone las siguientes competencias: pensar matemáticamente, resolver problemas matemáticos, modelar matemáticamente, razonar matemáticamente, representar entidades matemáticas, manipular los símbolos y el formalismo matemático, comunicarse con y respecto a la matemática, hacer uso de ayudas y herramientas.

Luego, Niss, Blum y Galbraith [16] entienden al Modelado Matemático como el proceso (ciclo de modelado) que ocurre entre la matemática y el mundo extra-matemático, que pertenece al “mundo real”. Diferencian los conceptos de Modelado Matemático de la Resolución de Problemas Aplicados, proponiendo dos categorías que producen una dualidad: “aplicaciones y modelado para aprender matemáticas” y “aprender matemáticas para desarrollar la competencia de aplicar matemáticas y construir modelos matemáticos”. A niveles de educación superior, como el caso de las ingenierías, “la dualidad a veces se mantiene deliberadamente implícita a fin de difuminar lo que es el objetivo y lo que es el medio de la enseñanza de las matemáticas” [16]. Esto conduce al concepto erróneo de que una sólida formación matemática hará que el alumno o el profesional, *per se*, podrá hacer las correspondientes aplicaciones en cualquier área. En este sentido estos autores sostienen que “existe una amplia evidencia desde la práctica y la investigación que no existe una transferencia automática”. En primer lugar diferencian entre modelado y aplicaciones, proponiendo dos preguntas: para el modelado ¿dónde puedo encontrar algo de matemática que me ayude con este problema? en tanto, para las aplicaciones ¿dónde puedo usar esta pieza particular del conocimiento matemático? Finalmente, cuando Niss, Blum y Galbraith diferencian el Modelado de los Problemas de Aplicación categorizan tres situaciones: Problemas de Palabras, a los que caracterizan como “vestir” matemáticamente una situación; Aplicaciones Estandarizadas, donde el modelo se “encuentra a mano”; y Problemas de Modelado, donde se da el proceso completo, ya que el modelo matemático debe ser formulado (creado), resuelto e interpretado. Si bien estos autores sostienen que no existe una jerarquización entre estas categorías, ya que cada una tiene un propósito diferente, las competencias requeridas al alumno o al profesional en cada caso son distintas. Esta mirada proviene del mundo matemático con el objetivo de dar sentido a la disciplina en carreras no matemáticas. Aunque estos conceptos sean válidos, lo importante a tener en cuenta en una carrera de ingeniería es quién y cómo tiene que ocuparse de la cuestión. Si el profesorado de matemática se concentra en lo que Schoenfeld denomina recursos, bajo el lema de que “cuanto más matemática y más compleja sea” equivale a un mejor nivel de formación, luego los alumnos en los cursos superiores no saben qué hacer con ella, produciéndose una desconexión entre “las matemáticas que aprenden en el ciclo básico y las que requieren usar en los cursos de ingeniería en el superior” como señalan Vázquez et al. [17]. Seguidamente estos autores consideran que “el uso de actividades de modelación matemática en los primeros años de carrera puede resultar un puente para conectar mejor los dos ámbitos” [17].

Siguiendo dentro del campo de la matemática, Blum y Borromeo-Ferri [18] proponen un ciclo de modelado compuesto por siete etapas: 1.construcción, 2.simplificación/estructuración, 3.matematización, 4.trabajo matemático, 5.interpretación, 6.validación, y 7.exposición. El paso 4 se da en el “mundo matemático”, en tanto los pasos 1, 2, 6 y 7 en el “resto del mundo”. El paso 3 es el pasaje de este último mundo al primero y el paso 5 es el camino inverso. Estos autores demuestran en sus investigaciones que este proceso no es lineal sino cíclico, que cada estudiante sigue trayectos diferentes, y además afirman que estos pasos, o tareas, son difíciles para los alumnos porque el modelado está asociado a otras competencias o habilidades, como ser “lectura y comunicación, diseño y aplicación de estrategias de resolución de problemas, o trabajar matemáticamente (razonar, calcular, ...)”. Además afirman que el modelado “es difícil también para los profesores, por las necesidades del conocimiento del mundo real, y además la enseñanza se hace más abierta y menos predecible” [18]. Finalmente, respecto de los profesores sentencian que “tienen que saber un amplio espectro de modos de intervención, y sobre todo intervenciones estratégicas” [18], lo que conduce a una cuestión central de la Formación por Competencias en los docentes, que deben ser tutores y mediadores pedagógicos, más que simples transmisores de conocimientos.

Resumiendo el sub-apartado, queda claro que la enseñanza de recursos matemáticos (conceptos, fórmulas, algoritmos, procedimientos, etc.) es importante, pero pierde validez si el alumno no logra comprender qué debe hacer con ellos. El objetivo es lograr que los alumnos sean competentes matemáticamente, donde el modelado matemático es una competencia central. El cuerpo docente del ciclo básico debe lograr esto, cuestión que solamente será viable en la medida que exista una verdadera y genuina articulación con los docentes del ciclo superior.

3.3 El modelado matemático y la resolución de problemas vistos desde los marcos normativos

Por cuestiones de espacio solamente se presenta la revisión de documentos que impacta sobre la formación de ingenieros en Argentina. Son considerados los documentos que regulan los procesos de acreditación mediante los cuales la carrera Ingeniería Industrial de la FIUNaM obtuvo la acreditación por seis años a nivel nacional, Res ME 1054/02 [19], e igual resultado a nivel de Mercosur. En el primer caso el proceso es llevado adelante por la Comisión Nacional de Evaluación y Acreditación Universitaria (CONEAU). En el segundo caso se consideraron los Criterios de Calidad para la Titulación Ingeniería [5] del Sistema de Acreditación Regional de Carreras Universitarias del Mercosur, denominado ARCU-SUR, y quien se ocupa de ello es la Red de Agencias Nacionales de Acreditación. Con respecto a la Formación por Competencias se ha considerado la “Declaración de Valparaíso” de la Asamblea General de la Asociación Iberoamericana de Entidades de Enseñanza de la Ingeniería (ASIBEI), y el documento que surge del avance de CONFEDI sobre las Competencias requeridas para el Ingreso a los Estudios Universitarios. Este último documento, suscripto por Asociaciones, Consejos, Entes, Redes y Foros de Decanos (AUDEAS, CONADEV, CUCEN, etc.), vinculadas a carreras que deben ser sometidas a procesos de acreditación establecen “un punto de partida mínimo a partir del cual se pueden desarrollar los currículos para lograr las competencias de egreso”. Estos dos documentos están compilados en una sola publicación [2] que incluye las Competencias Genéricas que habían sido establecidas por el CONFEDI de Argentina en el año 2006, y luego adoptadas por ASIBEI en 2013. El último documento considerado es la normativa que aprueba el Plan de Estudios, aún vigente, de Ingeniería Industrial.

El primer documento [19] se divide en cinco anexos: Anexo I: Contenidos Curriculares Básicos; Anexo II: Carga Horaria Mínima; Anexo III: Criterios de Intensidad de la Formación Práctica; Anexo IV: Estándares para la Acreditación; y Anexo V: Actividades Reservadas al Título. En el Anexo I, cuando se refiere a las Ciencias Básicas, se hace la única mención al modelado: “El objetivo de los estudios en matemáticas es contribuir a la formación lógico-deductiva del estudiante, proporcionar una herramienta heurística y un lenguaje que permita modelar los fenómenos de la naturaleza”. En tanto, para las Tecnologías Aplicadas, establece la obligatoriedad de contenidos de Investigación Operativa, así como de Optimización y Control.

El documento “Criterios de Calidad para la Acreditación ARCU SUR” [5] en la Dimensión 2 – Proyecto Académico, Componente 2.1 – Objetivo, Perfil y Plan de Estudios, Criterio 2.1.6 – Contenido Curricular, respecto de Matemática, afirma que su objetivo es “contribuir al pensamiento lógico deductivo y proporcionar un lenguaje que permita modelar los fenómenos de la naturaleza”. Seguidamente, respecto de las Ciencias de la Ingeniería, el criterio enuncia que “Son ciencias a través de las cuales los fenómenos naturales relevantes a la Ingeniería son modelados matemáticamente en formas aptas para su control y utilización en sistemas o procesos físicos”. Luego incluye en estas ciencias “algunas aplicaciones matemáticas a procesos o sistemas informáticos y otras formas de modelado matemático, necesarias para el diseño, control y optimización”. Finalmente, dentro de la misma Dimensión, en el Componente 2.2 – Procesos de enseñanza y aprendizaje, Criterio 2.2.6 – Uso de la informática como apoyo al proceso de enseñanza-aprendizaje, afirma que “La carrera debe contar con apoyo informático suficiente y necesario en las actividades docentes y las aplicaciones en: diseño, simulación, manejo de modelos y procesamiento de datos”.

El tercer documento, la “Declaración de Valparaíso”, divide las Competencias Genéricas en cinco Competencias Tecnológicas e igual cantidad de Competencias Sociales Políticas y Actitudinales. El esquema adoptado es que cada Competencia Genérica está compuesta por “Capacidades Asociadas Integradas”. Las Capacidades Asociadas Integradas a su vez están compuestas por “Capacidades Componentes”. Si bien la palabra “modelado” no figura a nivel de Competencia Genérica ni como Capacidad Asociada Integrada, aparece en dos Capacidades Componentes. La primera Capacidad Componente es “1.c.1. Ser capaz de realizar el diseño de la solución tecnológica, incluyendo el modelado”, que integra la Capacidad Asociada Integrada “1.c. Capacidad para implementar tecnológicamente una alternativa de solución”, correspondiente a la primera Competencia Tecnológica “Competencia para identificar, formular y resolver problemas de ingeniería”. En tanto, la segunda Capacidad Componente es “2.b.4. Ser capaz de modelar el objeto del proyecto, para su análisis (simulación, modelos físicos, prototipos, ensayos, etc.)”, que forma parte de la Capacidad Asociada Integrada “2.b. Capacidad para diseñar y desarrollar proyectos de ingeniería”, de la segunda Competencia Tecnológica “Competencia para concebir, diseñar y desarrollar proyectos de ingeniería (sistemas, componentes, productos o procesos)”.

El cuarto documento, "Competencias requeridas para el "Ingreso a los Estudios Universitarios" en la Argentina, divide a las Competencias de Acceso en Básicas, Transversales y Específicas. Dentro de la Competencias Transversales, la segunda referida a "Destrezas Cognitivas Generales", la cuarta competencia (de ocho en total), expresa como segundo Indicador de Logro "Utiliza la teoría para modelizar con vistas a generalizar a partir de fenómenos o situaciones independientes". En tanto, entre las Competencias Específicas que son cuatro, la segunda sostiene que el ingresante debe ser competente para "Resolver problemas sencillos en Matemática, Física o Química aplicando modelos matemáticos".

El último documento considerado es la Resolución CS 068/98 [20] que aprueba el Plan de Estudio 1999 de Ingeniería Industrial de la FIUNaM, donde Investigación Operativa se encuentra ubicada en el primer semestre del 4to año. Tienen como asignatura previa Modelación en Ingeniería, donde se desarrollan contenidos específicos relacionados con la modelación en general y a la modelación matemática en particular. En el caso de la FIUBB existe una circunstancia semejante con la asignatura Introducción a la Ingeniería Industrial ubicada en el 1er semestre de 1er año. El inconveniente es que en el caso de la FIUNaM no se exige como requisito previo ni el cursado ni la aprobación de esta asignatura para cursar Investigación Operativa. Esto, en principio, no debería ser un inconveniente, si los contenidos del resto de las asignaturas previas fueran enfocados a la modelación matemática de diversos fenómenos de la naturaleza relacionados a la ingeniería. Se trata de las clásicas asignaturas del área matemática con contenidos de álgebra, análisis matemático, ecuaciones diferenciales, estadística, entre otros, así como del área física, con contenidos de física mecánica, electromagnetismo, calor, termodinámica, entre otros.

Examinado los contenidos mínimos de estas asignaturas en el Plan de Estudios de la FIUNaM, así como lo expuesto por los docentes en las fichas de actividades curriculares que fueron completadas para el último proceso de acreditación, de 16 asignaturas que se desarrollan en forma previa o en paralelo con Modelación en Ingeniería, solamente figura como referencia al Modelado en 3 de ellas. Por otra parte, en las fichas curriculares de dichas asignaturas solamente se hace referencia al Modelado en 2 ellas. Para una de las asignaturas hay coincidencia entre la normativa y las fichas. En cambio, una asignatura que no tiene referencia al Modelado en la normativa y sí lo tiene en su ficha curricular. Dos asignaturas que tienen al Modelado en la normativa, no lo tienen en las fichas curriculares, cuestión que implica el no cumplimiento de lo normado.

Finalmente, y tan solo a modo de ejemplo, tomando el caso de Cálculo 1, en la ficha curricular de dicha asignatura en la bibliografía se presentan 17 libros de texto diferentes con ediciones comprendidas entre el año 1970 y 2004. Uno de ellos es de autoría de James Stewart, denominado Cálculo de una Variable, edición del año 2002, aunque en la Biblioteca de la FIUNaM figuran ediciones posteriores. En la sexta edición en español de dicho texto, el primer capítulo se denomina Funciones y Modelos, y en el segundo apartado se define qué es el Modelado Matemático, se indica gráficamente su proceso, se presentan diferentes modelos matemáticos, y la ejercitación propuesta recorre diversas aplicaciones del mundo real [21].

Resumiendo, el Modelado en general y el Modelado Matemático en particular, están presentes, en las normativas mencionadas, con diferentes concepciones, y consecuentemente "debe" existir formación en el Modelado Matemático de acuerdo a los objetivos que se propone una carrera de ingeniería industrial, desde el inicio de la misma. Sin embargo se manifiesta una fuerte inconsistencia con los documentos presentados por los docentes del Ciclo Básico (fichas de actividades curriculares), con lo establecido en el plan de estudio, así como con los resultados de los procesos de acreditación, que convalidan lo que realmente se hace.

3.4 El modelado matemático y la resolución de problemas vistos desde la formación por competencias

El Modelo de Formación por Competencias adoptado se apoya sobre tres bases, articuladas entre sí: la formulación de competencias, la mediación pedagógica y el sistema de evaluación de las competencias [22].

La articulación se logra a través de un apropiado Diseño Instruccional, entendido éste desde un enfoque constructivista [23], lejos del conductismo. La definición de competencia que se adoptó de referencia es la establecida por el CONFEDI de Argentina, y adoptada por ASIBEI: "Competencia es la capacidad de articular eficazmente un conjunto de esquemas (estructuras mentales) y valores, permitiendo movilizar (poner a disposición) distintos saberes, en un determinado contexto con el fin de resolver situaciones profesionales" [2]. El aspecto central es la "movilización" de recursos para "resolver una familia de situaciones-problemas" [24], dejando en claro que "disponer de un equipamiento de recursos es una condición necesaria pero no suficiente para ser reconocido como competente" [25]. Es para señalar aquí las coincidencias entre los planteos de Roegiers [24] y los de Schoenfeld [13] donde queda claro la diferencia entre los recursos y lo que se hace con ellos, que es el punto central del concepto de Competencia, que a su vez es totalmente consistente con la definición de CONFEDI.

La metodología utilizada por varios países para diseñar los programas de formación de ingenieros enfocados a la Formación por Competencias se menciona a continuación [26]. A partir del Modelo Educativo propuesto por una Universidad, cada carrera formula el Perfil del Egresado. Luego, las Competencias Específicas se formulan de acuerdo a cómo se han desagregado los Dominios Disciplinares en Dominios de Competencias. Estos últimos pueden ser conceptualizados como “una categoría pedagógica que evidencia realizaciones o desempeños propios del profesional y es reconocido socialmente. Un dominio engloba las funciones que el graduado desempeñará en un campo profesional determinado, el mismo se define considerando criterios curriculares y pedagógicos” [27]. Una vez definidos los Dominios de Competencias, se formulan las Competencias Específicas y las Genéricas. Esto último por lo menos en la Argentina ya se encuentra pautado a través del documento de CONFEDI. Seguidamente se redactan los Resultados de Aprendizaje que aseguren la formación de las competencias específicas. Luego las asignaturas “surgen” del agrupamiento de los Resultados de Aprendizaje.

El Marco Europeo de Cualificaciones para el Aprendizaje Permanente, o EQF, define los Resultados de Aprendizaje como la “expresión de lo que una persona sabe, comprende y es capaz de hacer al culminar un proceso de aprendizaje” [28]. Sobre los aportes de Kennedy [29] se han elaborado numerosas guías para redactar los Resultados de Aprendizaje, las cuales señalan que éstos se componen de un verbo de desempeño (verbo de acción), seguido de un objeto conceptual (o de conocimiento) y un contexto. La guía elaborada por la Universidad de Bío Bío, Chile, propone dividir el contexto en una condición (de referencia o de calidad) y una finalidad (contextual) [30]. Estos dos últimos elementos son semejantes a los que propone Tobón [23] para formular una competencia. El común denominador de la mayoría de estas guías es que todas utilizan como base la Taxonomía de Bloom [29] para la elección de los verbos. La Taxonomía de Bloom para los objetivos educacionales está basada en tres dominios: Cognitivo, Afectivo y Psicomotor. Según Kennedy el plano cognitivo “describe como construimos sobre lo anteriormente aprendido para desarrollar niveles más complejos de comprensión” y establece seis niveles, los cuales son, desde el más bajo hasta el superior: conocimiento, comprensión, aplicación, análisis, síntesis y evaluación. Los tres primeros niveles son denominados categorías de orden inferior, en tanto los otros tres son de categoría superior, porque implican operaciones de pensamientos más complejas [29]. Una de las revisiones de la taxonomía de Bloom fue la de Anderson y Krathwohl que pasó de los sustantivos a los verbos [31].

Existen numerosas tablas con verbos para la Taxonomía de Bloom en diversos documentos y publicaciones, cuya enumeración escapa a los objetivos del presente trabajo. A modo de síntesis se puede comentar que el verbo “modelar”, o bien no figura, o bien aparece en diferentes niveles: 3 (de Aplicación), 4 (de Análisis) o 5 (de Síntesis). Un atajo podría ser utilizar los verbos que figuran en la mayoría de las guías, y utilizar el modelo como objeto de conocimiento. Por ejemplo, “aplicar modelos matemáticos para …”, o “crear modelos matemáticos para …” También podría recurrirse a ubicar el Modelado Matemático en el contexto, sea como condición de referencia o como finalidad. Entonces la frase podría quedar como “resolver ciertos problemas utilizando el Modelado Matemático y …”.

Otro camino es trabajar con la Taxonomía de Niveles de Profundidad del Conocimiento (Depth of Knowledge - DOK) de Webb [32] la cual se enfoca en lo que puede hacer el alumno con lo que aprende, es decir está orientada al saber-hacer. Esta taxonomía, que integra a la de Bloom establece cuatro niveles de profundidad de conocimiento: NI: Pensamiento Memorístico (*Recall & Reproduction*), NII: Pensamiento de Procesamiento (*Skills & Concepts*), NIII: Pensamiento Estratégico (*Strategic Thinking/ Reasoning*) y NIV: Pensamiento Extendido. Webb (op. cit.) estableció estos niveles para cuatro áreas disciplinares: lengua, matemática, ciencias y sociales.

Utilizando estas dos taxonomías, Hess [33] elaboró una matriz denominada Matriz de Rigor Cognitivo, fundamentalmente con el objeto de mejorar tanto la enseñanza como la evaluación. Esta matriz tiene entre sus filas las seis categorías de Bloom y en las columnas los cuatro niveles de Webb. En la matriz que corresponde a ejemplos sobre matemática y ciencia, los modelos aparecen únicamente en el quinto nivel de Bloom (Síntesis) y en los tres niveles superiores de Webb. En el NII de Webb figura “usar modelos para representar conceptos matemáticos”, en el NIII “desarrollar un modelo científico/matemático para una situación compleja” y en el NIV “diseñar un modelo matemático para informar y resolver una situación práctica o abstracta” [33].

De aquí se desprende la complejidad del Modelado Matemático y la razón por la cual no puede ser tratado simplemente como un contenido cognitivo. El hecho que se encuentre en el quinto nivel de Bloom (síntesis) implica que el estudiante debe haber pasado previamente por los cuatro niveles del dominio cognitivo: conocimiento, comprensión, aplicación y análisis para tratar genuinamente con modelos matemáticos, y recién a partir de allí se puede demandar al alumno que sea capaz de usar o diseñarlos. Por otra parte, como el Modelado Matemático no se lleva en ingeniería en abstracto, sino con una meta particular, no se puede modelar si no es posible integrar ni movilizar recursos. De hecho entonces, el Modelado Matemático adecuadamente conceptualizado representa en la formación de ingenieros verdaderas situaciones de integración significativas, en el sentido de Roegiers [24].

3.5 El modelado en la concepción de los alumnos de la FIUNaM y la FIUBB

Pasando a las aulas, que es donde se forman los ingenieros industriales (además de otros ámbitos), los alumnos llegan a Investigación Operativa en ambas instituciones con dificultades con el Modelado Matemático como saber previo. Para ver cómo se percibe el Modelado en general y el Modelado Matemático en particular en los alumnos se recurrió a aplicar un estudio exploratorio.

Al inicio de las actividades en cada curso de Investigación Operativa, correspondiente a 2016, se presentó un cuestionario semi-estructurado idéntico a los estudiantes de la FIUNaM y de la FIUBB. El cuestionario consistió en una serie de preguntas orientadas a responder el siguiente interrogante general: ¿Cuál es la apreciación de los alumnos de ambas instituciones respecto a los conceptos de Modelación y Modelado Matemático? Respecto al concepto de modelación el 94% de los alumnos de la FIUNaM opinaron tener poco o regular conocimiento. En el caso de la FIUBB todos expresaron tener poco, regular o ningún conocimiento. Respecto al Modelado Matemático, todos los alumnos encuestados, tanto en la FIUNaM como en la FIUBB, opinaron tener regular o menor conocimiento.

Se realizó un análisis cluster (o de conglomerados) [34] con el objetivo de caracterizar a los alumnos de los cursos de Investigación Operativa de ambas carreras, para indagar con mayor detalle en sus nociones sobre la modelación y Modelado Matemático. Si bien el análisis cluster, junto con otros análisis multivariantes, se utilizan frecuentemente para analizar lotes de datos de grandes dimensiones, en lo que se conoce como data mining [34], es un método de tipo exploratorio, que permite obtener un modelo para representar un conjunto de datos multidimensionales [35]. Se consideró apropiado su uso en esta instancia, cuyo propósito es exploratorio, es decir no se busca confirmar ni efectuar generalizaciones. Se categorizó a los alumnos en cuatro clusters, de acuerdo a sus opiniones respecto a los siguientes interrogantes: a) si distinguen los conceptos de Modelación y Modelado Matemático; b) si perciben el uso de Modelado Matemático en asignaturas de los tres primeros años de la carrera; c) si dan ejemplos acertados o no del uso de Modelado Matemático en esas asignaturas. Los procedimientos que se siguieron fueron los que presenta Winston [36], para modelar y optimizar en hojas de cálculo.

Los resultados obtenidos muestran que la mayoría de los estudiantes identificaron el uso de Modelado Matemático en asignaturas de los años anteriores de su carrera, aunque en gran parte la vinculación se relaciona con la asignatura Modelación en Ingeniería o Introducción a la Ingeniería Industrial, para la FIUNaM y la FIUBB, respectivamente. Una gran parte reconoció la relación entre los conceptos de modelación y Modelado Matemático, aunque hubo dificultades para dar ejemplos correctos de uso de la Modelado Matemático. De los alumnos de la FIUNaM que reconocieron la utilización de Modelación Matemática en cursos anteriores, 60% mostró inconvenientes para dar ejemplos apropiados de su uso. En la FIUBB este mismo indicador tuvo mejor resultado, de 17%. Además, se observó también que algunos alumnos no expresaron respuestas satisfactorias a todas las preguntas. Estos resultados, a nivel exploratorio, podrían indicar falencias en ambas instituciones, teniendo en cuenta el número y características de las asignaturas que los alumnos ya cursaron, y que ya deberían haber pasado por varios de los niveles del dominio cognitivo respecto al modelado.

Eventualmente se pueden cuestionar algunos aspectos del estudio exploratorio, pero no la percepción de los alumnos de ambas instituciones. Esto se enmarca en el sistema de “creencias” con que llegan a Investigación Operativa y que constituyen uno de los factores que intervienen en el éxito o fracaso en la resolución de problemas, en el sentido propuesto por Schoenfeld. No es un tema de preocupación, sino que es algo que el cuerpo docente de una carrera debe ocuparse, tomando las medidas adecuadas.

3.6 Un problema a resolver

Repasando los sub-apartados precedentes se pueden sintetizar de la siguiente manera. El Modelado Matemático es central para que un profesional de la ingeniería en general y de la ingeniería industrial en particular, sea competente en la resolución de problemas de su campo de acción. Las competencias profesionales de egreso completan su formación en general en el ciclo superior de una carrera, y por lo tanto el ingeniero es un “usuario” de la matemática, en el sentido que propone Gómez i Urgellés [37]. Sin embargo se presentan inconsistencias considerables en este aspecto entre lo normado y lo que acontece en la enseñanza, cuestión que inclusive se desprende de las percepciones de los alumnos de Investigación Operativa, a mediados del desarrollo de la carrera. La profundización del análisis del Modelado Matemático indica que su enseñanza y entrenamiento implican dificultades para los docentes tanto del ciclo básico como los del superior, porque es un área de intersección entre las disciplinas de ambos ciclos y por lo tanto no puede ser abordada por separado.

Un camino sólido para resolver este problema lo aporta el marco de la Formación por Competencias. Dentro de este marco el Modelado Matemático implica dominios cognitivos de orden superior, y por esta razón debe ser adoptado como Dominio de Competencia o como Competencia Transversal genérica tecnológica [26] y como tal debe ser desarrollada a lo largo de toda la carrera: prácticamente desde el primer día de clases de un alumno, ya que lo más importante es el propio hecho de "modelar", que solamente se aprende haciendo, es decir con "las prácticas" como propone Schoenfeld.

4 Conclusiones

Una adecuada formación para lograr ingenieros industriales competentes para el Modelado Matemático es una necesidad ineludible. La enseñanza de diversos recursos es necesaria, pero por sí sola no garantiza la formación de competencias.

En el marco del diseño de los planes de estudio y puesta en acción, la orientación a la Formación por Competencias resuelve esta cuestión, ya que invierte el sentido de trabajo. Primero se establecen las competencias de egreso, y recién a partir de ellas se determinan los contenidos (o recursos) necesarios para alcanzar la meta. Esto no significa bajo ningún punto de vista desechar contenidos o reemplazarlos por otros, sino simplemente ponerlos en su justo lugar. Sin embargo esto no se logrará sin esfuerzos adicionales, ya que obliga a la continua reflexión sobre las prácticas docentes, así como el rediseño de las modalidades organizativas, métodos de enseñanza, la construcción de instrumentos de evaluación para asegurar un aprendizaje significativo e integrador. Es decir, debe existir un cambio profundo en el rol del docente.

Sin embargo el mayor desafío es para los diferentes niveles de autoridad institucionales. Decanos y Secretarios de facultad, junto a Directores de Carreras y de Departamentos deben crear espacios formales de trabajo, inclusive adecuadamente financiados en el caso que corresponda, para el trabajo interdisciplinario, así como entre los ciclos de la carrera, para dar respuesta al problema. Esto además representa una oportunidad de encuentro para la discusión y el debate tan necesarios entre el ciclo básico y el ciclo superior.

Implica también una adecuada formación de posgrado, particularmente cursos de especialización, para capacitar al cuerpo docente para un genuino avance en este nuevo sentido. Desde el Sistema de Ciencia y Tecnología implica priorizar proyectos de investigación enfocados a la temática, particularmente aquellos que se enfoquen al trabajo articulado de docentes de los ciclos básico y superior, y fundamentalmente a proyectos interinstitucionales, ya que como se ha visto con el caso particular de Investigación Operativa, la problemática traspasa las fronteras internacionales.

Finalmente resta decir que este trabajo no se propone como una crítica, habida cuenta de la existencia de las "tribus académicas", porque los propios autores también tienen responsabilidad en esta cuestión. En cambio se propone como la formulación clara y fundamentada de la existencia de un problema que debe ser abordado si se pretende mejorar la calidad de la formación de los ingenieros industriales, y sobre todo que se encuentre en sintonía con las realidades y demandas de la sociedad actual.

Referencias

1. Anderson, D.; Sweeney, D.; Williams, T.; Camm, J.; Martin, K.: *Métodos cuantitativos para los negocios. 11 ed*. Cengage Learning (2011).
2. Anónimo. Documentos de CONFEDI: *Competencias en Ingeniería. 1a ed*. Universidad Fasta (2014).
3. Robbins, S.; Judge, T.: *Comportamiento Organizacional. 15 ed*. Pearson (2013).
4. Mertens, D.: *Research and Evaluation in Education and Psychology: Integrating Diversity with Quantitative, Qualitative, and Mixed Methods. 3rd. ed.* SAGE Publications (2010).
5. ARCU-SUR: Criterios de Calidad para la Acreditación ARCU-SUR. http://edu.mercosur.int/arcusur/index.php/es/descripcion. (2015). Accedido el 19 de Abril de 2016.
6. Badiru, A.: General introduction. Badiru, A. (Ed.): *Handbook of Industrial and systems engineering. 2. ed.* CRC Press, pp. 3-14 (2014).
7. Ackoff, R.; Sasieni, M.: *Fundamentals of Operations Research.* Wiley (1968).
8. Pidd, M.: *Tools for Thinking Modelling in Management Science. 2. ed*. Wiley (2003).
9. Box, G.; Hunter, W.; Hunter, J.: *Statistics for Experimenters. 2da. ed.* Wiley (2005).
10. García Sabater, J. P.; Maheut, J.: Modelado y Resolución de Problemas de Organización Industrial mediante Programación Matemática Lineal. http://personales.upv.es/jpgarcia/LinkedDocuments/modeladomatematico.pdf. 2015, Accedido el 15 de Octubre de 2015.
11. Eppen, G.; Gould, F.; Schmidt, C.; Moore, J.; Weatherford, L.: *Investigación de operaciones en la ciencia administrativa: Construcción de Modelos para la toma de Decisiones con Hojas de Cálculo Electrónicas. 5. ed*. Prentice-Hall (2000).

12. Becher, T.; Trowler, P.: *Academic Tribes and Territories: intellectual enquiry and the cultures of disciplines. 2. ed*. Open University Press/SRHE (2001).
13. Araujo, S.; Trotta L.: La acreditación de las Ingenierías: configuración compleja en la institucionalización de la política. *Revista Archivos de Ciencias de la Educación*, Vol. 5, No 5, pp.1-15 (2011).
14. Schoenfeld, A. H.: Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense-making in Mathematics. D. Grouws (Ed.): *Handbook for Research on Mathematics Teaching and Learning*. MacMillan, pp. 334-370 (1992).
15. Niss, M.: Mathematical competencies and the learning of mathematics: The Danish KOM project. Gagatsis, A.; S. Papastravidis, S. (Ed): *3rd Mediterranean Conference on Mathematics Education*. Hellenic Mathematical Society and Cyprus Mathematical Society, pp. 115-124 (2003).
16. Niss, M., Blum, W., Galbraith, P.: Introduction. *Modelling and Applications in Mathematics Education – the 14th ICMI study*, Vol. 10, pp 3-32 (2007).
17. Vázquez, R.; Romo, A.; Trigueros, M.: Un contexto de modelación para la enseñanza de matemáticas en las ingenierías. *Educación Matemática en las Américas 2015*, Vol. 16: Modelación, pp. 171-181 (2015).
18. Blum, W.; Borromeo Ferri, R.: Mathematical modelling: Can it be thaught and learnt? *Journal of Mathematical Modelling and Applications*, Vol. 1, No. 1, pp, 45-48 (2009).
19. Argentina. Ministerio de Educación: *Resolución 1054/02. Estándares para la acreditación de Ingeniería Industrial*. Boletín Oficial N°30.014. (2002).
20. Universidad Nacional de Misiones: *Resolución N° 068/98 del Consejo Superior de la UNaM. Plan de Estudios 1999 de las carreras de ingeniería de la Facultad de Ingeniería de la UNaM*. UNaM (1998).
21. Stewart, J.: *Cálculo de una Variable: Trascendentes Tempranas. 6 ed*. Cengage Learning (2008).
22. Kowalski, V.; Erck, M.; Enriquez, H.: Formación por competencias en Ingeniería Industrial: Moda o Mejora Académica? *Anais do III Congresso Internacional de Educação Científica e Tecnológica*, URI, pp. 1-10 (2015).
23. Tobón, S.: *Formación integral y competencias: pensamiento complejo, currículo, didáctica y evaluación. 4 ed*. Ecoe Ediciones (2013).
24. Roegiers, X.: Pedagogía de la integración: *Competencias e integración de los conocimientos en la enseñanza*. Coordinación Educativa y Cultural Centroamericana y AECI. Colección IDER (Investigación y desarrollo educativo regional) (2007).
25. Le Boterf, G.: *Professionnaliser. Construire des parcours personnalisés de professionnalisation. 6. ed*. Éditions d'Organisation Groupe Eyrolles (2010).
26. Kowalski, V.; Santelices, I.; Enriquez, H.; Erck, M.: Modelado Matemático en Ingeniería Industrial: ¿contenido, resultado de aprendizaje, competencia o dominio de competencia? *IX Simposio Internacional de Ingeniería Industrial – Actualidad y Nuevas Tendencias*, pp. 1-10 (2016).
27. UNI-Universidad Nacional de Ingeniería: *Metodología para el Diseño Curricular de las Carreras de la UNI*. Universidad Nacional de Ingeniería (2009).
28. Comisión Europea: *El Marco Europeo de Cualificaciones para el aprendizaje permanente (EQF-MEC)*. Oficina de Publicaciones Oficiales de las Comunidades Europeas (2009).
29. Kennedy, D.: *Redactar y utilizar resultados de aprendizaje*. University College Cork (2007).
30. Universidad del Bío-Bío. Vicerrectoría Académica: *Manual de Elaboración de Programas de Asignaturas: Material de apoyo para la implementación del Modelo Educativo en el marco del proceso de Renovación Curricular en la Universidad del Bío-Bío*. Universidad del Bío-Bío (2013).
31. Krathwohl, D.: A revision of bloom's taxonomy: an overview. *Theory Into Practice*. Vol. 4, No 2, pp 212-218, (2002).
32. Webb, N.: *Depth-of-Knowledge Levels for Four Content Areas*. unpublished paper. (2002).
33. Hess, K.Exploring Cognitive Demand in Instruction and Assessment. http://www.nciea.org/publications/DOK_ApplyingWebb_ KH08.pdf. (2006). Accedido el 5 de Mayo de 2016.
34. Everitt,B. S.; Landau, S.; Leese, M. & Stahl, D.: *Cluster analysis. 5. ed*. Wiley (2011).
35. García, R. M.: *Inferencia estadistica y diseño de experimentos. 1. ed*. Eudeba (2008).
36. Winston, W.: *Marketing analytics: data-driven techniques with Microsoft Excel*. Wiley (2014).
37. Gómez i Urgellés J.: La ingeniería como escenario y los modelos matemáticos como actores. *Modelling in Science Education and Learning*. Vol. 1, No 1, pp.3-9, (2008).

Volver al Índice

Diseño de Máquinas Usando el Paquete "Geogebra". Despuntadora de Madera Trapezoidal

Pedro Oscar Semeniuk
Departamento Matemática, Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de Misiones (UnaM).
Juan Manuel de Rosas 325, Oberá (3360), Misiones.
semeniuk@fio.unam.edu.ar

Resúmen. Con el objetivo de lograr cortes de madera de mayor calidad, en los aserraderos de nuestra zona se han utilizado diversas máquinas desarrolladas en diferentes talleres metalúrgicos perfeccionando ideas surgidas según la necesidad. Entre las máquinas utilizadas para dar un valor agregado, se usa la despuntadora, generalmente de péndulo. Un sistema que, aunque simple, de funcionamiento muy riesgoso. Este trabajo surge como consecuencia de la necesidad de rediseñar una despuntadora de madera, de bajo costo, cuyo funcionamiento es de mucho mayor seguridad que las clásicas despuntadoras de péndulo y a la que llamo, por su configuración, "despuntadora trapezoidal".Para modelizar y estudiar los movimientos de la sierra circular se utiliza el programa Geogebra, que siendo un programa de matemática, se aplica perfectamente al objetivo del trabajo. Lo que se pretende, es lograr que el lugar geométrico de la hoja de sierra circular de la máquina, sea lo más aproximado a una recta horizontal, logrando optimizar el corte de la madera.

Palabras Clave: Despuntadora de madera, Lugar geométrico, Geogebra.

1 Introducción

Para el diseño de la despuntadora como así también de otros mecanismos, es posible el uso de maquetas o programas como el Autocad, pero en este caso fue más simple y a su vez más interesante el uso del programa Geogebra, una herramienta matemática muy útil, sobre todo para ésta situación, ya que el problema principal a solucionar, era la determinación del lugar geométrico del desplazamiento de la hoja de sierra circular.

Este trabajo se desarrolla sobre una idea que surge aparentemente en el vecino país Brasil y cuyo diseño se asemeja al de las lámparas usadas en tableros de dibujo técnico.

El objetivo principal, es optimizar el movimiento de la sierra, logrando en lo posible que sea una línea recta.

El nombre trapezoidal, se debe a que la estructura principal, para que sea compacta, adopta esa forma geométrica.

2 Metodología

En las clásicas despuntadoras de péndulo (Fig. 1), usadas en pequeños aserraderos de la zona mesopotámica, el lugar geométrico del movimiento de la sierra circular, es el arco de la circunferencia de radio igual a la longitud del péndulo.

Esta construcción se da, ya que es muy simple y económica, pudiéndose construir en el propio taller de mantenimiento de la empresa.

Básicamente es un péndulo simple, con una hoja de sierra en su extremo, sistema desfavorable desde todo punto de vista, sobre todo para el operario, ya que no garantiza la seguridad del mismo. Con el correr de los años, las leyes comenzaron a regir con mayor rigor en las empresas madereras, con lo que se produjo una necesidad de replantear lo concerniente a higiene y seguridad industrial.

Surgen entonces diversas ideas entre las cuales se selecciona la despuntadora en cuestión, debido a que es más segura, compacta y más económica.

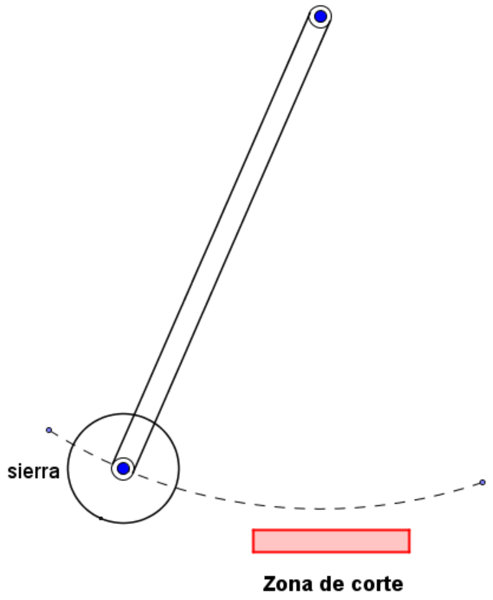


Fig. 1. Representación esquemática de una sierra de tipo péndulo.

En la Fig. 2, se puede observar la fotografía de la máquina a desarrollar.

Fig. 2. Foto de la máquina que se modeliza.

El objetivo, es modelizar con Geogebra y lograr que la hoja circular se mueva sobre una línea, lo más horizontal y recta posible.

En la Fig. 3, se muestra la máquina modelizada, donde se pueden ver los diversos lugares geométricos obtenidos por el movimiento de la hoja.

El programa Geogebra dispone de deslizadores que son una especie de potenciómetros, los cuales permiten controlar parámetros en forma individual; parámetros que se pueden relacionar con longitudes u otras magnitudes. De esa manera, al realizar el modelo a escala, es muy simple variarlos, haciendo ensayos a prueba y error.

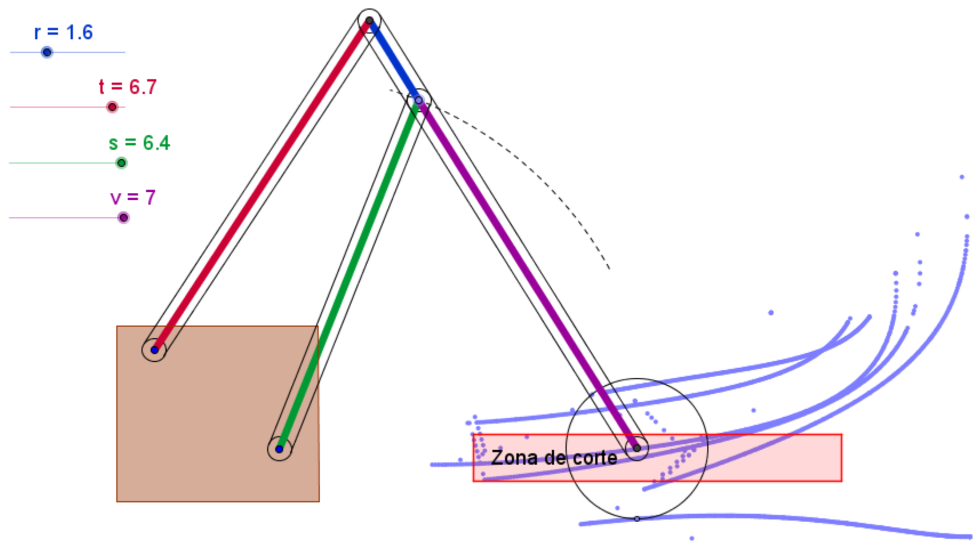


Fig. 3. Modelización con el programa "Geogebra"

El mecanismo consiste de una base fija sobre la que se articulan dos barras no paralelas y en cuyos extremos a su vez, se articula una tercera barra. En el extremo de esta última, se monta la sierra circular.

Variando adecuadamente las longitudes de las barras, identificadas con el color correspondiente a su deslizador, se observan los diferentes lugares geométricos.

Luego de varios intentos, variando las longitudes de las barras, se logra que el movimiento de la hoja de sierra sea prácticamente una línea recta, con lo que el funcionamiento es el óptimo.

En la Fig. 4 se puede observar el movimiento circular de cada barra y la relación con su deslizador como así también los valores con los que se logra optimizar el lugar geométrico del movimiento de la sierra.

Para llevar la máquina a escala real, simplemente se respeta la relación conseguida en el modelo.

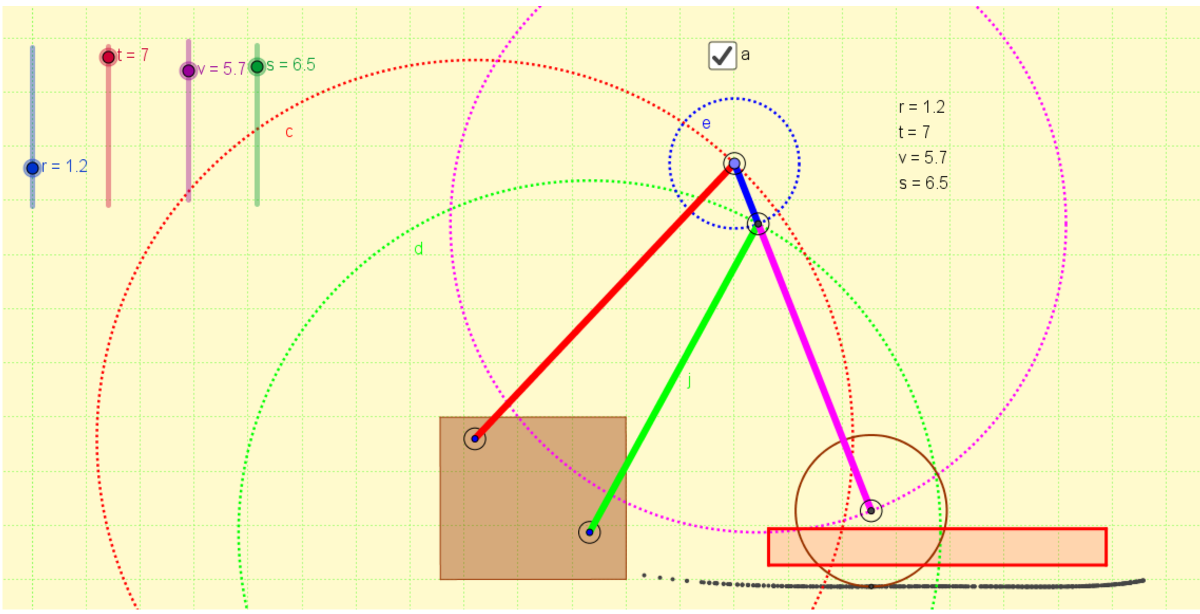


Fig. 4. Esquema de la despuntadora con los movimientos y el lugar geométrico óptimo, mostrando los movimientos de cada brazo.

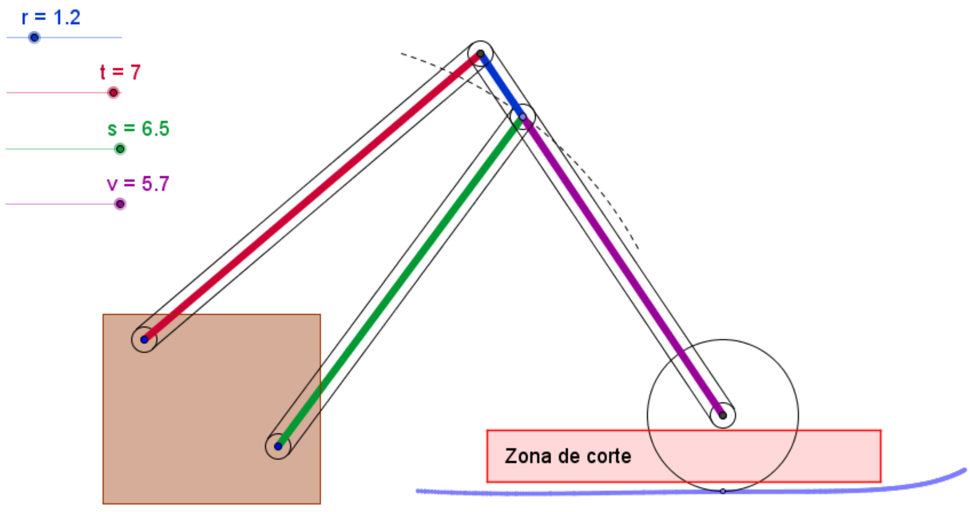


Fig. 5. Esquema del lugar geométrico del movimiento de la sierra luego de corregir los deslizadores hasta lograr una trayectoria óptima.

En las siguientes figuras se observan diferentes posiciones de la máquina.

Fig. 6. Fotografía de la máquina con el brazo contraído.

Fig. 7. Fotografía de la máquina con el brazo extendido.

3 Resultados y discusión

Para diseños como éste, se pudo probar lo sencillo que es modelizar para luego construir la máquina a escala real. Una vez llevada a la realidad se pueden hacer mejoras hasta lograr optimizar el funcionamiento. En este caso el resultado fue mejor de lo esperado.

Fig. 8. La máquina en proceso de construcción con algunas mejoras.

En la Fig. 8 se puede observar justamente la máquina en el proceso de construcción con las mejoras correspondientes.

Con respecto a otros tipos de despuntadoras, sobre todo la de péndulo, no existen desventajas, pero las ventajas son muchas. Entre otras, la seguridad, el bajo precio de construcción y la facilidad de operación que podría ser automatizada.

La máquina, después de ser probada y analizando las críticas por parte de los usuarios, tuvo mejoras; entre otras, el uso de rodamientos en las articulaciones y resortes de recuperación. Todo para optimizar el funcionamiento.

4 Conclusiones

La mejor forma de probar el funcionamiento de un modelo mecánico es llevarlo a la realidad, cosa que no siempre es factible. En este caso se pudo probar y comprobar la eficiencia y seguridad del mecanismo. La despuntadora funcionó a la perfección tal como se probó en el modelo simulado.

Sobre todas las cosas se demuestra que programas como el "Geogebra", pueden ser usados para aplicaciones más allá de las matemáticas.

En éste caso se resolvió un problema geométrico.

Aunque en esta oportunidad la aplicación fue para una despuntadora, el mecanismo puede ser usado para otros fines, tal como está, o modificado, según el caso.

El mecanismo puede ser automatizado y además aplicado a otros diseños donde sea necesario aprovechar su funcionamiento.

En el ámbito de la enseñanza - aprendizaje, se puede tomar como ejemplo motivacional en cursos de enseñanza del "Geogebra" o también en diseño de máquinas.

Referencias

1. Carrillo de Albornoz, A.; Llamas, I.: México. Alfaomega. *Geogebra. Mucho más que Geometría Dinámica.* (2009).
2. Uspenski, V. A.: Moscú: Editorial Mir. *Algunas Aplicaciones de la Mecánica a las Matemáticas*. (1985)
3. Alarcón Morales, L.: España: Bubok Publishing. *Manual Práctico de Construcciones Geométricas en Geogebra para Profesores de Matemática*. (2013).
4. Erdman, A.; Sandor, G.: México. Prentice Hall. *Diseño de Mecanismos. Análisis y Síntesis.* (1998).

Volver al Índice

Capítulo 2

Investigación Educativa

Los Protocolos de Corrección: Ventajas e Inconvenientes de un Sistema Estandarizado de Puntuación de Exámenes

Alberto J. Miyara[1,2], Gustavo Pita[1], Carolina Carrere[1], Emiliano Ravera[1]
[1] Departamento de Matemática, Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de Entre Ríos
Ruta provincial 11, km. 10, Oro Verde, Entre Ríos
gdpita@ingenieria.uner.edu.ar
[2] Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura, Universidad Nacional de Rosario
Av. Pellegrini 250, Rosario, Santa Fe
ajmiyara@fceia.unr.edu.ar

Resumen. Se describe un trabajo realizado en la Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura de la Universidad Nacional de Rosario (FCEIA-UNR) en el marco de un proyecto de investigación de la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional de Entre Ríos (FI-UNER). En cuatrimestres sucesivos se experimentó con tres sistemas distintos de puntuación de exámenes: sin instrucciones a los correctores; con una rúbrica por conceptos, inspirada en una anteriormente implementada en la FI-UNER; y con un protocolo explícito de corrección, específico para cada ejercicio. Los resultados de la experiencia demuestran que cuando se usa un protocolo detallado los puntajes atribuidos por los correctores no sólo son más homogéneos, lo cual era esperable, sino que además son, en promedio, más altos, lo cual no se había anticipado. El análisis se complementa con testimonios de los docentes y alumnos involucrados y unas reflexiones finales sobre las implicancias de estos resultados.

Palabras Clave: Corrección de exámenes, Rúbricas, Protocolos de corrección.

1 Introducción

La evaluación del aprendizaje constituye una de las variables clave en los procesos educativos [1, 2, 3]. Es también una de las que ofrecen más maleabilidad, especialmente desde que en épocas relativamente recientes se ha identificado y explotado su potencial como herramienta no sólo de acreditación de conocimientos, sino de inducción y estímulo de las buenas prácticas del aprendizaje. Así, mientras tradicionalmente las asignaturas matemáticas de las facultades de ingeniería de la Argentina han implementado sistemas de evaluación sumativos (parciales y finales, y eventualmente trabajos prácticos), las concepciones más modernas de la evaluación incorporan la dimensión formativa, que proporciona no sólo una métrica de las destrezas adquiridas sino también una información muy valiosa sobre el proceso de aprendizaje, al tiempo que plantea al alumno la posibilidad de asumir un rol protagónico en el mismo, en una dinámica en que educadores y educandos trabajan en colaboración hacia el objetivo de la transmisión y asimilación de conocimientos. Ejemplos de evaluación formativa son las exposiciones orales periódicas por parte de los estudiantes bajo supervisión docente [4] o las clases teórico-prácticas en que se requiere al alumno la gestión de su propio aprendizaje aplicando sobre la marcha, por ejemplo con ayuda de software, las nociones teóricas incorporadas durante una sesión educativa [5].

Dicho esto, no puede soslayarse que las evaluaciones escritas, tanto parciales como de final de asignatura, siguen jugando un rol preponderante en la acreditación del aprendizaje. Distintos condicionantes internos y externos al sistema educativo requieren que dicha acreditación se refleje en una calificación numérica o numérico-conceptual. En muchas universidades de los Estados Unidos, donde se suele aprobar a virtualmente todos los alumnos que se presentan a examen (para estimularlos en su estudio y, de paso, asegurar su retención en un sistema basado en el pago de matrículas), es el promedio de notas lo que proporciona el corte entre los que adquirieron un mínimo de competencias y los que no llegaron a ese nivel. En la Argentina, donde graduarse en una universidad garantiza (teóricamente al menos) haber alcanzado un umbral competencial, los promedios son sin embargo una herramienta ampliamente utilizada para definir accesos a becas, ingresos en sistemas científicos o contrataciones en empresas privadas, entre otros. Independientemente del punto de vista que se adopte sobre esta práctica, es una realidad de la que el docente no se puede abstraer.

En ese contexto, resulta importante asegurar un mínimo estándar de calidad para las correcciones. Éstas deben proporcionar información útil (tanto para el docente como para el alumno), pero además deben ser justas y confiables. Cuando diversos profesores se reparten un gran número de exámenes para corregir (como ocurre en las asignaturas de los primeros años de las facultades de alumnado numeroso), deberían existir mecanismos que garanticen que su tratamiento será homogéneo y no dependerá de los criterios dispares de los distintos docentes.

En este trabajo se describe una investigación desarrollada en la Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura de la Universidad Nacional de Rosario (FCEIA-UNR), en donde se implementaron distintas estrategias de corrección destinadas a asegurar dichos estándares de calidad: una que había funcionado con éxito en la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional de Entre Ríos (FI-UNER), una facultad mucho más pequeña, y otra desarrollada específicamente para el masivo alumnado de la FCEIA-UNR.

En lo que sigue de esta Introducción se revisan algunas consideraciones de la literatura en el tema, se examina el sistema de corrección implementado en la FI-UNER y se describe la situación en la FCEIA-UNR y las modificaciones que se propusieron en el sistema de corrección.

1.1 Algunos aspectos relevantes de la calidad de las correcciones

Di Benedetto y Carlino [6] mostraron, a través de entrevistas, que, en contra de lo que se suele suponer, el interés de los estudiantes por el proceso de corrección de sus exámenes va mucho más allá de la nota numérica obtenida. Los alumnos comparan las correcciones de los distintos docentes, son muy críticos respecto a los diferentes criterios adoptados y valoran mucho que el corrector se manifieste explícitamente, en la hoja del examen, sobre la naturaleza de los errores cometidos (pero también de los aciertos), así como que ofrezca sugerencias para una mejor comprensión de la materia.

Ahondando un poco más específicamente sobre el tema, Tejedor y García-Valcárcel [7], trabajando con extensas encuestas a un amplio número de profesores y alumnos, hallaron que los docentes consideraban que su propia subjetividad a la hora de corregir exámenes no tenía una incidencia significativa en el bajo rendimiento de los estudiantes universitarios (de hecho la calificaban como el factor menos importante de todos los propuestos por los encuestadores); mientras que para los educandos dicha subjetividad sí jugaba un rol sustancial (y la situaban en el décimo puesto entre los 27 factores estudiados). Más allá de la conclusión general del estudio de que profesores y estudiantes tienden a echarse la culpa entre sí por el escaso rendimiento de estos últimos, se advierte que la subjetividad del docente en la evaluación es un concepto que una mayoría de estudiantes parece tener presente, en contraste con otras variables propuestas por los investigadores, como el clima competitivo en las aulas, que los alumnos no identificaban como un escollo.

Para cuantificar la incidencia de los distintos criterios aplicados por los profesores en las correcciones, Grau et al. [8] realizaron una investigación sobre 100 pruebas de acceso a la universidad en cuatro asignaturas. De cada prueba se sacaron dos fotocopias (“réplicas”), obteniéndose un total de 300 juegos que fueron suministrados a un grupo de correctores que voluntariamente participaron en la experiencia. Cada examen recibía así tres calificaciones, cada una de un corrector distinto. Los investigadores hallaron que las discrepancias entre la nota mínima y la máxima atribuida por los correctores eran notoriamente más altas en Literatura y en Filosofía que en Matemática y Biología, como cabía esperar dada la naturaleza misma de las disciplinas evaluadas. Pero aun así en Matemática se observaba una discrepancia media de un punto (sobre diez) entre la mínima y la máxima nota de las tres que se obtenían para cada examen, un hecho notable dado el carácter fuertemente estandarizado de los exámenes de ingreso. Los autores proponen para explicar este fenómeno un modelo basado en dos variables identificadas por Longford [9]: la *severidad* del corrector y su *inconsistencia*. Un corrector puede ser más riguroso y otro más benévolo (severidad); pero a su vez puede hoy corregir de una manera un examen que quizá mañana corregirá de manera distinta (inconsistencia). Idealmente, un sistema de corrección debería minimizar la incidencia de estos dos parámetros.

1.2 Experiencia en la FI-UNER

Algunos de los problemas anteriormente descritos se evidenciaban en las asignaturas de Cálculo Vectorial (CV) y Ecuaciones Diferenciales (ED), que los autores de este trabajo dictan en la FI-UNER, con anterioridad a los cambios en la modalidad de dictado introducidos en 2008 [4]. Periódicamente se recibían quejas de los alumnos, y entre ellas las de inconsistencias en las correcciones. Así, eran frecuentes manifestaciones de este tenor:

- Reclamos intraalumno: “en el primer ejercicio me pusieron puntos por el planteo y en el tercero no”.
- Reclamos interalumnos: “a Fulano, por hacer lo mismo que hice yo, le pusieron más nota”.

A partir de 2008 se comienzan a introducir cambios en el sistema de evaluación, que desembocan en la presentación y aprobación de un proyecto de investigación titulado “Investigación Acción Participativa en

Evaluación para el Aprendizaje de la Matemática en Bioingeniería". Como resultado de ello se fue implementando y afinando en CV y ED un sistema que ha permitido erradicar sustancialmente las incongruencias antedichas, el cual aprovecha, cierto es, un número de condiciones favorables que posee el equipo docente de esta asignatura:

- Excelente relación numérica docentes-alumnos.
- Gran estabilidad del equipo docente a lo largo de los años.
- Alto nivel de compromiso de todos los profesores involucrados.
- Participación del equipo docente en sucesivos proyectos de investigación educativa.

El sistema de corrección que se implementó —perfeccionado a lo largo de los años— esquiva las posibles inhomogeneidades en la puntuación. Sus características salientes son:

- Los exámenes se dividen en cuatro bloques temáticos. Cada ejercicio evalúa uno de estos bloques.
- Todas las hojas correspondientes a cada bloque temático son corregidas por un mismo docente, el cual a lo largo de los cuatrimestres se vuelve un especialista en dicho bloque, experto en detectar e identificar errores (y aciertos) relativos a ese grupo de temas.
- Se usan rúbricas para la atribución de calificaciones. Los alumnos conocen la rúbrica que se utilizará.

Con respecto a estas últimas, pertenecen a la categoría que Gatica-Lara y Uribarren-Berrueta [10] denominan *analíticas*: es decir, aquellas rúbricas que se utilizan "para evaluar las partes del desempeño del estudiante, desglosando sus componentes para obtener una calificación total". La Fig. 1 presenta un ejemplo (adaptado) del tipo de rúbrica que se usa en CV y ED de la FI-UNER.

Aspectos a evaluar	IDENTIFICACION DE DATOS Y META		SELECCIÓN DE LA ESTRATEGIA O MÉTODO DE SOLUCIÓN		PROCEDIMIENTO (Implementación del Método - Secuencia lógica - Comunicación del Procedimiento - Lenguaje matemático)		RESULTADO (Selección de método de cálculo - Manejo algebraico - Comunicación y presentación - Representación gráfica)		Nota Ítem (a)
Apellido y Nombres	Eval. Cuali - tativa	Puntaje Máx. (%) : 15	Eval. Cuali - tativa	Puntaje Máx. (%) : 30	Eval. Cuali - tativa	Puntaje Máx. (%) : 30	Eval. Cuali - tativa	Puntaje Máx. (%) : 25	
Alumno (PRUEBA)	MB	15	B	20	R	15	I	0	12,5

Fig. 1. Ejemplo (adaptado) de rúbrica usada para la corrección de evaluaciones parciales en la asignatura Ecuaciones Diferenciales de la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional de Entre Ríos.

Como se ve, al aplicar este tipo de rúbrica se cuenta con que el corrector será capaz de identificar qué aspecto de la resolución corresponde a cuál de los ítems de la rúbrica, lo cual el experimentado equipo docente de las cátedras involucradas ciertamente era capaz de llevar a cabo.

Con esta metodología de corrección se logró un estándar de calidad alto en la puntuación de exámenes, en el sentido de que las calificaciones asignadas a parciales y finales raramente suscitan quejas de los alumnos, y más raramente aún deben ser modificadas.

1.3 Panorama de la corrección de exámenes en el ciclo básico de la FCEIA-UNR y propuesta de un protocolo

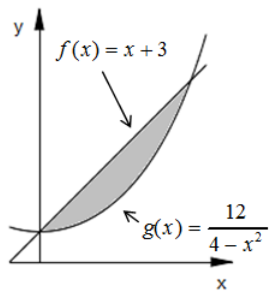
Uno de los autores de este trabajo (AJM) se desempeña, paralelamente a sus actividades en la FI-UNER, como profesor de Cálculo I y Cálculo II en la FCEIA-UNR. En el primer año de esta Facultad (que es donde se ubican ambas asignaturas) ingresan anualmente más de 700 alumnos, cuyos exámenes son corregidos por varias docenas de docentes distintos. Una apreciación cualitativa de la corrección de exámenes tanto parciales como finales ha revelado la ausencia de criterios comunes, lo que provoca en los alumnos el efecto de incertidumbre de que habla Longford en su trabajo seminal [9]. A menudo, los correctores son ayudantes o jefes de trabajos prácticos con poca experiencia; el carácter masivo de la Facultad hace inevitable que se deba apelar a estos docentes bisoños, que trabajan con una comprensible inseguridad a la hora de puntuar una evaluación. Resultado de ello son los llamados *aprobado asterisco* (A*), que se asignan cuando el corrector no se siente capaz de atribuir un resultado inequívoco a un examen; los frecuentes cambios de nota; y las insistentes quejas estudiantiles sobre los distintos raseros que aplicarían los diversos docentes.

Cuando en 2015 se decidió implantar en la FCEIA-UNR algunas de las técnicas y buenas prácticas docentes desarrolladas en la FI-UNER [11], uno de los aspectos abordados fue el problema de cómo garantizar la homogeneidad en las correcciones. Un candidato natural para resolverlo parecía ser el uso de rúbricas, pero como vimos estas requieren alguna experiencia por parte del corrector; por otro lado, en la FI-UNER las rúbricas no habían sido un instrumento solamente para la corrección, sino también para guiar al estudiante sobre los pasos que se esperaba que cumplieran en el proceso de resolución, un uso concertado de la herramienta que, por distintos motivos, no estábamos en condiciones de replicar en la FCEIA-UNR.

Surgió entonces la idea de establecer lo que hemos dado en llamar un *protocolo de corrección*: un conjunto de instrucciones muy precisas para el corrector, que se refiriera paso por paso al desarrollo previsto de cada problema de un examen e indicara sin ambigüedad qué nota numérica se debía asignar a cada una de esas etapas. Nos parecía una herramienta adecuada para abordar la corrección de parciales y exámenes de una materia como Cálculo II, en que los problemas suelen contener diversos ítems que obligan al corrector a tomar constantes decisiones respecto a la puntuación. La Fig. 2 muestra un típico problema de parcial con su protocolo.

Ejercicio 3: En la figura se observan (no a escala) dos funciones cuyas leyes se proveen.

a) Hallar los puntos en que se cruzan.
b) Escribir una integral para determinar el área de la región grisada.
c) Resolver dicha integral.
d) Escribir una integral para determinar el volumen del cuerpo de revolución que se obtiene al hacer girar la región alrededor del eje y. No resolver esta integral.



a) 5 puntos por escribir una ecuación o argumentar válidamente; 5 puntos por llegar a las intersecciones correctas.
b) 7 puntos por el integrando; 3 puntos por los extremos.
c) 3 puntos por plantear bien fracciones simples; 4 puntos por obtener bien A y B; 3 puntos por el correcto resultado.
d) 4 puntos por despejar bien x(y); 4 puntos por expresar bien el integrando; 2 puntos por expresar bien los extremos.

Fig. 2. Un problema de parcial en la materia Cálculo II de la FCEIA-UNR. En bastardilla, el protocolo facilitado a los docentes auxiliares encargados de corregirlo.

El protocolo está diseñado no sólo para facilitarle la labor al corrector, sino también para prevenir posibles disparidades de criterio entre evaluadores. Así:

- Cada ítem se evalúa de 0 a 10 y se lo vuelca en una planilla de cálculo que automáticamente le asigna el factor de ponderación correspondiente; en el caso del ejemplo concreto brindado, la fórmula utilizada era Nota(a)*0,03+Nota(b)*0,095+Nota(c)*0,125+Nota(d)*0,125.
- Se resuelven de antemano dilemas como “El ítem (a) es necesario para poder seguir resolviendo el ejercicio, pero no pertenece a la materia. ¿Le pongo o no le pongo algún punto si hizo sólo eso?”. El protocolo indica que algo hay que ponerle, aunque no mucho (0,3 puntos de 3,75 que vale en total el ejercicio), pero la instrucción podría ser otra (ejemplo: no poner ningún punto si hace este ítem bien, pero poner –10 si lo hace mal); en cualquier caso, lo que se asegura es que el tratamiento del ítem será homogéneo entre correctores.
- Tampoco se obliga al corrector a tomar decisiones relativas a un aspecto determinado de la resolución (ejemplo: ¿esto es un error de procedimiento o de método de solución?) que puede presentarse cuando se corrige utilizando una rúbrica, especialmente por parte de docentes inexpertos.

Para determinar qué sistema proporcionaba resultados más confiables, se desarrolló la investigación que se describe en el siguiente punto.

2 Comparación de distintos sistemas de corrección

Se decidió experimentar en dos cuatrimestres sucesivos con los distintos sistemas de corrección disponibles. En un cuatrimestre se compararon los resultados de las correcciones de parciales entre un grupo de dos docentes que no recibieron ninguna instrucción de corrección —sólo el puntaje que valía cada ejercicio— con otro grupo de dos docentes que corrigieron usando un protocolo. En el cuatrimestre siguiente también se encargó la corrección a dos grupos de dos docentes, pero en este caso uno usó una rúbrica y otro un protocolo.

2.1 Diseño de la experiencia

Lo que se deseaba era poder cotejar los resultados del primer parcial de Cálculo II de contingentes comparables de alumnos cuando se los corregía con cada sistema. Para ello se apeló a lo que se conocía de los alumnos, esto es, su rendimiento en parciales y coloquio en la correlativa Cálculo I, y se dividió los parciales de cada cohorte de dos cuatrimestres sucesivos en cuatro grupos, todos con, aproximadamente, la misma distribución de rendimientos en Cálculo I. Esto es, se intentó que los cuatro grupos no estuvieran desbalanceados por contener alguno de ellos una mayor proporción de alumnos brillantes (por ejemplo).

En el primero de esos cuatrimestres se repartieron los cuatro grupos entre cuatro correctores distintos: a dos de ellos se les indicó simplemente cuánto valía cada ejercicio, sin ninguna instrucción adicional; a los otros dos se les brindó un protocolo detallado de corrección para cada ejercicio, similar al de la Fig. 2. Al cuatrimestre siguiente, se volvieron a dividir los parciales en cuatro grupos, pero esta vez dos de los correctores utilizaron una rúbrica, similar a la de la Fig. 1, y los otros dos un protocolo. El equipo de correctores estuvo integrado por auxiliares de primera y jefes de trabajos prácticos con entre dos y doce años de servicio.

2.2 Resultados y análisis

La Tabla 1 muestra los resultados de las correcciones sin instrucciones, con rúbricas y con protocolos de corrección.

Tabla 1. Resultados de las correcciones del primer parcial de Cálculo II en la FCEIA-UNR, en dos cuatrimestres sucesivos y comparando distintas técnicas de corrección.

COMPARACIÓN ENTRE CORRECCIÓN SIN INSTRUCCIONES Y CON PROTOCOLO			
CORRECTOR	TIPO DE CORRECCIÓN	PUNTAJE PROMEDIO	% APROBADOS
A	Sin instrucciones	4,61	29%
B	Sin instrucciones	5,34	38%
C	Protocolo	5,85	52%
D	Protocolo	5,75	57%
COMPARACIÓN ENTRE CORRECCIÓN CON RÚBRICA Y CON PROTOCOLO			
CORRECTOR	TIPO DE CORRECCIÓN	PUNTAJE PROMEDIO	% APROBADOS
E	Rúbrica	5,10	40%
F	Rúbrica	5,97	48%
G	Protocolo	5,91	62%
H	Protocolo	6,03	67%

Hay varios aspectos interesantes a destacar. Para empezar, se observa que cuando se corrige con un protocolo detallado grupos comparables de alumnos obtienen notas promedio muy parecidas, lo que no se observa en la misma medida cuando se corrige sin ningún tipo de instrucción o con una rúbrica. Esto es esperable porque el protocolo limita el poder de decisión del corrector, lo que repercute en una menor incidencia de la subjetividad de este último.

Por otro lado, también se observa que los promedios de notas atribuidas por los correctores que usan un protocolo son más altos; y, sobre todo, es más elevado el porcentaje de estudiantes que aprueban el parcial con este método de corrección. La lectura que hacemos es que aun cuando usa rúbricas el corrector tiende a adaptarlas de modo que reflejen un criterio holístico, en el cual incide más la percepción global del docente sobre la resolución de un ejercicio que los detalles pormenorizados del procedimiento aplicado. Esto se ve reflejado en los testimonios de los correctores intervinientes (ver más abajo). El protocolo fuerza al corrector a asignar puntajes aun por resoluciones incompletas o por aquellas que arrastren algún error, inclusive serio, de manera que todo el trabajo del alumno es reconocido, aunque, cierto es, al precio de que en algún caso la nota final sea demasiado generosa. Esto parece ser decisivo para que alumnos que están en el límite obtengan un aprobado. De hecho gran parte de la diferencia entre los porcentajes de aprobación en correcciones con y sin protocolo viene dada por parciales cuya nota superaba por muy poco el umbral de 6 puntos.

Un aspecto final a apuntar es que, si bien la tabla anterior presenta los resultados tales como los informaron los docentes, en las sesiones de muestra de parciales a muchos de los alumnos que habían sido corregidos sin instrucciones o con una rúbrica hubo que cambiarles las notas o ajustárselas a un “aprobado asterisco” (como es frecuente que ocurra), mientras que las correcciones con protocolo, si bien no dejaron de suscitar algunos reclamos, no derivaron en ningún cambio de nota.

2.3 Testimonios de los docentes y de los alumnos

Una vez completadas las experiencias, se mantuvieron entrevistas con los docentes que llevaron a cabo correcciones con protocolos, y también con algunos de los alumnos corregidos con esta modalidad. Esto manifestaron los primeros:

1. *“Te ayuda a tomar decisiones. A veces cuesta reconocerle un cierto puntaje a alguien que no llegó a obtener un resultado, pero si eso viene ‘ordenado desde arriba’ es más fácil.”*
2. *“Los ingenieros y los licenciados [en matemática] tendemos a corregir diferente. Los ingenieros enfatizan el resultado, y los licenciados el rigor. De esta manera se igualan los criterios.”*
3. *“A veces un alumno cometió un error que le simplifica el resto y el ejercicio pierde gracia, y el protocolo no te dice cómo tratar ese caso.”*
4. *“Se pierde de vista el concepto general. Hay errores que son descalificantes; yo no estoy de acuerdo con que se les pongan puntos si los cometieron.”*
5. *“Es un sistema que no reconoce el valor de completar totalmente bien un ejercicio. Habría que encontrar la manera de otorgar un premio adicional por la resolución perfecta de cada ítem.”*
6. *“Pasa que juntando un puntito de aquí y otro de allá aprueban, y el examen no estaba para aprobar”.*
7. *“Me sentí más obligado a justificar las correcciones que hacía.”*
8. *“Hay que estar todo el tiempo consultando el protocolo... No lo veo para un final de libres donde tenés que corregir muchos exámenes en poco tiempo.”*

Los docentes parecen, así, valorar algunos aspectos de la corrección con protocolos (testimonios 1 y 2), pero en general se nota que el sistema choca con sus nociones preconcebidas de cómo se tiene que puntuar un examen (testimonios 4, 5, 6). En algunos casos denuncian la dificultad de aplicación (testimonios 3 y 8), pero también reconocen una incidencia positiva en sus prácticas de corrección, como en el caso del testimonio 7, el cual, asimismo, parecería revelar que el docente entiende que su corrección tiene más posibilidades de ser auditada cuando se le suministraron criterios inequívocos para llevarla a cabo.

A algunos alumnos que se prestaron voluntariamente para una entrevista se les explicó el método utilizado (mostrándoseles inclusive un ejemplo de protocolo y un ejemplo de planilla de volcado de notas). Las siguientes son algunas de sus reflexiones:

1. *“Es más justo, porque si uno tenía encaminado el ejercicio, por más que después se equivoque mal, no es lo mismo que no haber hecho nada.”*
2. *“Tendrían que poner cuánto va a valer cada cosa en la hoja del enunciado”.*
3. *“Está bien porque si no pasa que el mismo examen lo agarran dos profes distintos y le ponen notas diferentes.”*
4. *“Te da menos chance de pelear la nota.”*
5. *“Está bien que no te pongan ‘MAL’ a cara de perro, y que si hiciste algo bien te lo digan.”*
6. *“Están mejor explicados los errores, y eso está bueno. Pero tardaron una banda en devolverlos, y eso no está tan bueno.”*

Aun sin demostrar un entusiasmo desmesurado por el sistema, los alumnos valoraron la homogeneidad de criterios con que se corrige cuando se usa un protocolo, y también valoraron, como era de esperar, que con este sistema se les reconozcan partes de su trabajo que quizá no se les tendrían en cuenta en una corrección librada al criterio personal de cada docente. No se pueden desestimar completamente reclamos como el del testimonio 2, porque aunque parecen apuntar a un comportamiento especulativo del estudiante, también reflejan una inquietud legítima de los alumnos: la de disponer de reglas de juego claras. Sin embargo, en una mayoría de casos es imposible revelarle al alumno los detalles del protocolo, so pena de ponerlo sobre aviso sobre cuál es el proceso de resolución que se espera que lleve a cabo.

3 Conclusiones y trabajos futuros

En este trabajo intentamos comparar distintos sistemas de corrección, sin que nuestro objetivo sea necesariamente prescribir alguno de ellos.

El sistema que hemos propuesto de un protocolo detallado para la puntuación de exámenes parece garantizar una mayor uniformidad en los resultados cuando la tarea de corrección será repartida entre varios docentes. Este proceso estandarizado minimiza los reclamos por inhomogeneidades en las correcciones, lo cual es valorado tanto por docentes como por alumnos. Pero también arroja unos promedios de notas y de aprobación más elevados que otros sistemas, y algunos docentes visualizan esto como una distorsión, reivindicando el derecho del corrector a aplicar un criterio más holístico a la hora de atribuir una nota. Detrás de esto último puede estar el hecho de que una corrección "por concepto general" es menos engorrosa que una por protocolo en que el docente tiene que consultar permanentemente la escala de puntajes asignados a cada paso de cada ítem de cada ejercicio.

Queda por investigar si un perfeccionamiento de los protocolos no podría ayudar a corregir ese carácter demasiado generoso que, en la percepción de algunos docentes participantes, tiene el sistema. En ese sentido, algunas de sus propuestas, tales como la de castigar especialmente los llamados errores descalificantes, o premiar las resoluciones impecables, podrían ser incorporadas en subsiguientes investigaciones. Como sea, la herramienta parece ser un buen punto de partida para conseguir disminuir las discrepancias entre docentes a la hora de la corrección; aunque nuestra petición de principio de que esto último es un objetivo a perseguir es, en sí, tema de otra posible investigación.

Agradecimientos. Agradecemos a Lucas Tendela, Natalia Landaluce, Nahuel Caruso, Luciana Talarn, Ezequiel Ibars, Mónica Napolitano, Marcelo Severino y Eugenia Alvarado su colaboración como correctores.

Referencias

1. Biggs, J.; Tang, C.: *Teaching for quality learning at university: What the student does.* McGraw-Hill Education (UK) (2011)
2. Brown, G.A.; Bull, J.; Pendlebury, M.: *Assessing student learning in higher education*. Routledge (2013)
3. Hassan, O.A.: Learning theories and assessment methodologies: an engineering educational perspective. *European Journal of Engineering Education*, 36(4), 327-339 (2011)
4. Carrere, C.; Miyara, A.; Perassi, M.; Waigandt, D.; Añino, M.: Participatory Action Research to Incorporate Formative Assessment into a Mathematics Course: An experience in Bioiengineering. Presentado en: Research in Engineering Education Symposium, Dublin (2015)
5. Bucari, N.; Abate, S.M.; Melgarejo, A.: Estructura Didáctica e Innovación en Educación Matemática. *Revista Argentina de Enseñanza de la Ingeniería*, 8(14), 17-28 (2007)
6. Di Benedetto, S.; Carlino, P.: Correcciones a exámenes escritos en la universidad: cómo son y para qué sirven a los alumnos. *XIV Jornadas de Investigación y Tercer Encuentro de Investigadores en Psicología del Mercosur*. Facultad de Psicología - Universidad de Buenos Aires, Buenos Aires (2007)
7. Tejedor, F.; García-Valcárcel, A.: Causas del bajo rendimiento del estudiante universitario (en opinión de los profesores y alumnos). Propuestas de mejora en el marco del EEES. *Revista de Educación*, 342, 443-473 (2007)
8. Grau, R.; Cuxart, A.; Martí-Recober, M.: La calidad en el proceso de corrección de las pruebas de acceso a la universidad: variabilidad y factores. *Revista de investigación educativa,* 20(1), 209-223 (2002)
9. Longford, N.T.: *Models for uncertainty in Educational Testing.* Springer Series in Statistics. New York (1995)
10. Gatica-Lara, F.; Uribarren-Berrueta, T.: ¿Cómo elaborar una rúbrica? *Investigación en Educación Médica*, 2(1), 61-65 (2013)
11 Miyara, A.; Pita, G.; Añino, M.M.; Carrere, C.; Escher, L.; Ravera, E.: La experiencia de adaptar un sistema de evaluación formativa entre realidades académicas distintas. *Publicación de la Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura: 95° Aniversario*, Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura, pp. 81-88 (2016)

Volver al Índice

Estrategias de Enseñanza de Funciones Recursivas en Ciencias de la Computación

Mario Enrique Quintana[1], Jorge Enrique Sagula[1], Florencio Isidro Monzón[2]
[1]F. de Ingeniería y Tecnología, Universidad de la Cuenca del Plata, Sede Formosa. Argentina
quintanamario_for@ucp.edu.ar, JorgeSagula@gmail.com
[2]F. de Ingeniería y Tecnología, Universidad de la Cuenca del Plata, Sede Formosa. Argentina
cpisi22@hotmail.com

Resumen. Este trabajo comprende el análisis y posterior tratamiento de las estrategias de enseñanza abordadas en el tema central de Recursividad y conceptos afines, como consecuencia de la modificación de los enfoques tradicionales en el currículo de la Licenciatura en Sistemas de Información de la Universidad de la Cuenca del Plata, a fin de propender a mejorar la comprensión del tema citado y sus conexidades, mostrando un punto de convergencia entre la Matemática y las Ciencias de la Computación. Las estrategias aplicadas fueron consecuencia del desarrollo de dos seminarios-talleres, cuyo objetivo fue instar al alumno a visualizar la concepción abstracta y práctica de la recursividad; al efecto se propuso la desde la manipulación de materiales didácticos concretos hasta el uso de la lógica inductiva. Los resultados obtenidos en el curso de la aplicación de las distintas estrategias fueron más que significativos, hecho que permitió justificar la necesidad de abordar estas estrategias, entre otras a explorar, en las distintas asignaturas de la carrera.

Palabras clave: Recursividad. Estrategias de enseñanza. Ciencias de la computación.

1 Introducción

En este trabajo se advierte la importancia de cómo se enseña y qué metodologías resultan ser las más adecuadas para enseñar Recursividad y conceptos afines en Ciencias de la Computación, en la carrera de Licenciatura en Sistemas de Información de la Universidad de la Cuenca del Plata.

Es importante considerar que la enseñanza de las ciencias de la computación ha tenido un gran avance debido a cambios acelerados en estos últimos tiempos. Los requerimientos actuales han promovido innumerables conocimientos matemáticos, y didáctico-matemáticos, de forma que se reflejan adecuadamente en los distintos métodos de enseñanza aplicados desde la disciplina misma de la matemática y disciplinas afines, pero que de alguna manera no ha resultado suficiente para dejar asentada la importancia de la Recursividad para un sinnúmero de asignaturas del Plan de Estudios de la Licenciatura en Sistemas de Información. Es importante considerar que esta demanda proviene, entre otras, de la Teoría de la Computación, habiendo despertado el interés en los profesores del área Matemática, y consecuentemente desplegar los métodos de enseñanza para abordar este contenido.

Particularmente, en la actualidad, en la asignatura Álgebra y Lógica Computacional, muy importante en la formación básica del profesional, la Recursividad no se desarrolla como un concepto central; en la asignatura Matemática Discreta el tratamiento de la Recursividad es mínimo por la temática propia de la disciplina, en tanto que en Análisis Matemático I, la competencia y propiedad es prácticamente poco relevante. En conclusión, surge que un contenido relevante del currículo de la Licenciatura en Sistemas de Información, específicamente no se aborda en las disciplinas centrales del plan de estudios desde el enfoque matemático y didáctico-matemático.

Las actividades que se llevan a cabo en esta investigación se dirigen explícitamente a metodologías y estrategias de enseñanza aplicadas en aras que el alumno de la Carrera de Licenciatura en Sistemas de Información desarrolle las habilidades recursivas a fin de aplicarlas en las asignaturas: Álgebra y Lógica Computacional, Matemática Discreta, Teoría de la Computación, Base de Datos I y Programación I; y análogamente sea posible aplicar los conceptos fundamentales de recursividad y procedimientos recursivos, en la enseñanza de ciencias de la computación, con el propósito de enriquecer su formación, mejorando su perspectiva e integración.

2 Marco Teórico

Existen antecedentes y experiencias sobre diferentes metodologías de enseñanza de la Recursividad en las Ciencias de la Computación, en esta permanente búsqueda de la metodología adecuada con el propósito de enriquecer la enseñanza y mejorar la comprensión de la recursividad, vemos que estas técnicas permitieron argumentar la imbricada fusión de esta temática como eje para mejorar la interdisciplinariedad entre las Ciencias Matemáticas y las Ciencias de la Computación.

La autora Guevara Mora [1] utiliza la técnica didáctica ABP, en la cual plantea conclusiones sobre los resultados obtenidos al aplicar la técnica en la enseñanza de la recursividad, detallando además una guía de desarrollo del tema aplicando la técnica y una guía de evaluación. En este sentido, también Rueda y Castro [2] presentan cómo se introduce el concepto de Recursividad en la cátedra de Informática del Departamento de Ciencias de la Computación de la Universidad Nacional del Sur, expresando que en las asignaturas iniciales de programación, la recursividad resulta ser uno de los temas de mayor complejidad; esta complejidad no reside en el uso de la computadora, ni tampoco en el hecho de las facilidades provistas por los lenguajes de programación para soportar procedimientos recursivos que resulten difíciles de entender sino que la dificultad consiste en "plantear" soluciones recursivas. Indican, además, que la recursividad resulta una forma diferente de pensar y razonar en ciertos problemas. Desde este punto de vista, justamente, se plantea la presentación del tema en esta propuesta.

Chesñevar, Maguitman y González [3] en su trabajo “Tecnología informática en un curso de lenguajes formales y teoría de autómatas: un enfoque constructivista”, al aplicarla teoría de lenguajes recursivos, que inicialmente no parecía despertar un adecuado interés en el alumnado, llegan a despertar un significativo interés como así también obtener generadores de discusiones e intercambios de ideas, en la Universidad Nacional del Sur. En la misma universidad, Chesñevar [4] propone algunas consideraciones y ejercicios motivadores para la enseñanza de la recursión, concluyendo en su trabajo que “La recursión es uno de los temas que mayor fascinación ejerce sobre los estudiantes que adquieren sus primeras vivencias en programación a nivel universitario” y, a la vez, evidencia a la recursión como herramienta de la programación”…Son afirmaciones concluyentes para nuestra propuesta.

Di Mare [5], investigador costarricense en la Escuela de Ciencias de la Computación e Informática de la Universidad de Costa Rica, presenta tres ejemplos sencillos de programas que ayudan, al alumno programador, a entender rápidamente cuál es el significado de la recursividad y cómo funciona, tal que cada enfoque reviste mayor complejidad que el anterior. El primero consiste en una aplicación muy simple de recursividad para crear un comando para el sistema operativo DOS/pc; el segundo corresponde al cálculo del factorial escrito en Pascal, y el último es el clásico recorrido PID (Proceso-Izquierda-Derecha) para árboles. Cada ejemplo ilustra un componente diferente del concepto de recursión.

En la búsqueda de estrategias de enseñanza que aporten a la mejor comprensión de la temática Rubio Sánchez [6], docente del Departamento de Lenguajes y Sistemas informáticos de la Universidad del Rey Juan Carlos, propuso la Enseñanza de la Recursividad mediante Problemas Combinatorios Equivalentes. En esta experiencia, presentó a la recursividad como concepto básico de programación, que juega un papel importante en la adquisición de competencias asociativas a la abstracción funcional y descomposición de problemas a través del concepto de inducción. Se aportan varias clases de problemas combinatorios, que comparten la misma solución analítica, con el propósito de enseñar.

Otra experiencia en esta dirección es el uso de los Mínimos Cuadrados Recursivos, correspondiente al trabajo realizado por Arrufat [7] en la Facultad de Ciencias Económicas de la Universidad Nacional de la Plata, en el cual presenta un análisis comparativo de los mínimos cuadrados ordinarios (MCO) y los mínimos cuadrados recursivos (MCR), prestando particular atención a las propiedades de los residuos obtenido por ambos métodos, concluyendo que el método MCR constituye una técnica valiosa para realizar docimasia de hipótesis en el contexto del modelo lineal general con represores fijos en muestras repetidas. Se destaca la gran simplificación conceptual que puede lograrse siguiendo este enfoque.

Lacave, Molina y Giralt [8], docentes-investigadores de la Universidad de Castilla en la experiencia “Identificando algunas causas del fracaso en el aprendizaje de la recursividad: Análisis experimental en las asignaturas de programación” demuestran que la recursividad es una herramienta muy poderosa para resolver problemas complejos, sin embargo se trata de uno de los conceptos más difíciles de entender para los alumnos cuando están aprendiendo a programar. Los autores describen una experiencia desarrollada en las asignaturas de Fundamentos de Programación I y Metodología de la Programación en la Escuela Superior de Informática en Ciudad Real, cuyo objetivo era identificar las necesidades del alumnado al enfrentarse a la asimilación del concepto de recursividad.

3 Hipótesis

Se supone que la aplicación innovadora y motivadora de estrategias de enseñanza de recursividad y procesos recursivos en las asignaturas troncales en carreras de ciencias de la computación permite obtener resultados significativos durante todo el proceso de aplicación de las distintas estrategias, mejorando la formación del futuro egresado, proveyéndole perspectiva e integración conceptual.

4 Metodología

4.1 Un diagnóstico previo

Previo al inicio del trabajo de campo, se procedió a elaborar un diagnóstico escrito sobre la realidad, realizando una encuesta a los docentes responsables de las asignaturas: Álgebra y Lógica Computacional, Matemática Discreta, Teoría de la Computación, Base de Datos I y Programación I, entregándoseles un cuestionario sobre la enseñanza y las estrategias aplicadas para desarrollar la temática.

Esta encuesta fue dirigida a los docentes dictantes de asignaturas afines a la temática que de alguna forma abordan el concepto de recursividad en su contenido curricular, en términos de la importancia de su enseñanza.

La organización y la presentación de los resultados provenientes de la instancia anterior se efectuarán mediante Estadística Descriptiva, de modo de facilitar la elaboración de conclusiones sobre la temática y su enseñanza.

Como parte del Diseño de la Investigación se planteó la exploración de estrategias de enseñanza basadas en el aprendizaje de la recursividad. La investigación y exploración de algunas estrategias ya aplicadas permitirá no sólo conocer las ventajas y desventajas de la recursividad sino también su importancia en las ciencias de la computación, en general.

4.2 Resultados obtenidos

En el diagnóstico se observó que la mayoría de los docentes involucrados superan los cuarenta años de edad, dos de ellos no superan los diez años de antigüedad en la docencia y le dedican seis horas semanales al dictado de la asignatura en la cual de alguna forma afirman que se aborda la Recursividad. Todos los docentes comprendidos tienen algún posgrado o están cursando alguno. Dos de ellos son profesores en Matemática.

Los docentes manifiestan estar algo de acuerdo que la naturaleza particular de la recursividad como algoritmo es diferente a cualquier otro algoritmo tradicional que se enseña, por tanto la metodología usual para otras partes o temáticas de la asignatura no es útil para la recursividad. Consideran que la riqueza eminentemente práctica de la recursividad en el "mundo de la computación" hace que este tema tenga mayor relevancia en el currículo de la Licenciatura en Sistemas de Información.

Los docentes restantes están de acuerdo o muy de acuerdo en la importancia de la enseñanza de la recursividad.

Muy pocos docentes manifiestan sentirse inseguros explicando o abordando recursividad (en forma tradicional) que cualquier otro contenido de su asignatura. Todos están de acuerdo que las características propias de la recursividad en otras áreas de conocimiento ajenas a las Ciencias Matemáticas hablan por sí solas de la relevancia de estos contenidos en el currículo de la carrera.

Es menester considerar que no todos los docentes han abordado la recursividad en el desarrollo de su asignatura, sobre todo en las asignaturas en las cuales el contenido es propio. En cambio el docente que tiene a cargo la asignatura Programación I (u otros afines) afirma que abordó esta temática; además quien abordó el tema lo hizo en más de tres clases, asegurando que todos los años enseña este tema.

En cuanto a las estrategias de enseñanza de la temática, se sustentan en algoritmos para la resolución de situaciones y/o ejercicios. Los recursos bibliográficos que utilizan sobre la temática no son específicos, sino referidos a la programación, por caso: "Algoritmo y Programación en Pascal" de Flores, Ojeda y otros.

Con respecto a recursos didácticos sólo se utiliza la pizarra, es decir, una recursividad abstracta y, no concreta u objetiva. En programación, utilizan como recursos los lenguajes: Pascal, C, C++, entre otros.

Al abordar Recursividad desde diferentes estrategias, los docentes afirman que las dificultades más frecuentes que se presentan se orientan a la comprensión del concepto en sí mismo.

Destacamos que la mayoría de los docentes opinan que la recursividad es válida en cualquier disciplina debido a que los procesos recursivos se observan en la naturaleza y en la ciencia misma y además, aseguran la importancia de la temática debido al impacto en el estudio de los paradigmas de la programación; y lo imprescindible de este tema como base y conocimiento previo para las asignaturas más importantes de la carrera.

En conclusión, podemos decir que consideran de gran utilidad e importancia a la recursividad en la estructuración del plan de estudios y en la articulación de las asignaturas de la carrera, y destacan lo imprescindible del tema como base y conocimiento previo para las asignaturas de mayor peso en la carrera como también expresan la gran utilidad y relevancia de la recursividad en la estructuración del plan de estudios y en la articulación de las asignaturas de la carrera.

5 Diseño y aplicación de estrategias de enseñanza

Una vez efectuado el análisis y obtenidos los resultados fue necesario diseñar y aplicar las propuestas de enseñanza basadas en la recursividad incorporando situaciones en las cuales se utiliza regularmente recursividad. Al efecto, fueron propuestos dos seminarios-talleres con el objeto de abordar y aplicar nuevas estrategias de enseñanza. Finalmente, se efectuó un Test Evaluativo, con el propósito de evaluar dicho abordaje.

5.1 Primer Seminario-Taller

En esta primera actividad, desarrollada el día 25/09/15, el objetivo fue promover en los alumnos la visualización, la concepción abstracta y la práctica de la recursividad, en tanto y en cuanto impliquen procedimientos para resolución de situaciones contextuales relacionadas al perfil de la carrera. Durante el desarrollo del seminario-taller se reforzaron los conceptos recursivos detectados como insuficientes en la recopilación de encuestas, y se hizo hincapié en el abordaje de algoritmos y procedimientos recursivos para fortalecer el trabajo de los alumnos y poder aplicar la temática con solvencia en las distintas asignaturas de la carrera.

Las actividades se iniciaron con problemas y ejercicios relacionados con inducción completa, de modo que cada alumno lograra comprender que cierta proposición es verdadera para algunos casos particulares, y luego comprobara argumentalmente que la proposición sigue siendo verdadera para el pertinente caso general. Como actividad principal, a fin de introducir al algoritmo propio de la recursión, se trabajó en base a las Torres de Hanoi.

Algunos de los problemas propuestos lograron ser resueltos mediante la búsqueda de otros problemas isomórficos para los cuales era conocida su resolución. Tanto el seguimiento de los procedimientos como las soluciones recursivas no revistieron un grado de dificultad marcado. Además, en esta etapa se consideraron los problemas más sencillos y más prácticos, demostrando a los alumnos paso a paso su desarrollo, y enfatizando en los aspectos en los que se detectaban dificultades para su comprensión. La complejidad de las situaciones presentadas fue en forma creciente.

Es importante aclarar tanto la importancia como la motivación lograda con el juego de las Torres de Hanoi (Fig. 1), pues a los alumnos les resultó accesible la manipulación del material didáctico y el desarrollo de las consignas, posibilitándoles esbozar cada uno de los planteos y procedimientos recursivos; por tanto, mediante la manipulación del material didáctico los alumnos construyeron procedimientos recurrentes para resolver la situación propuesta.

Fig.1. Utilización de Torres de Hanoi

5.2 Segundo Seminario-Taller

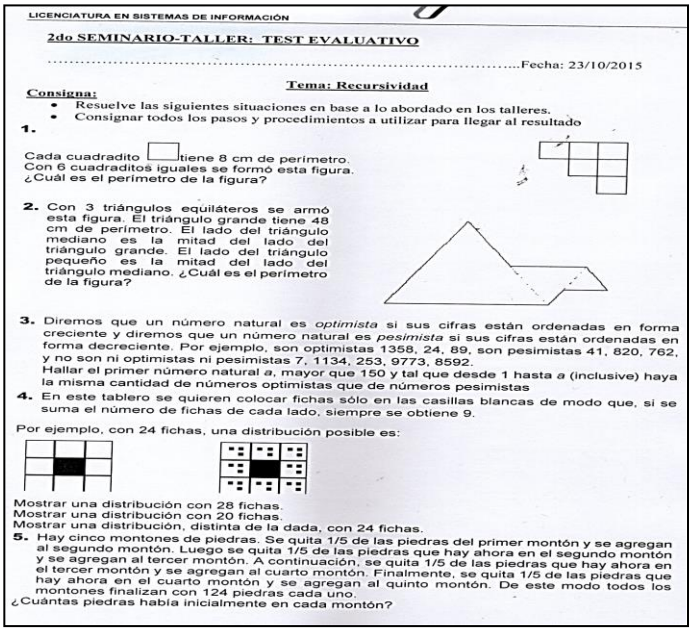
Esta actividad fue concretada el día 23/10/15, en la misma se continuó desde los logros conseguidos en el *Primer Seminario-Taller,* llevando a la práctica los conceptos brindados en este último, afianzando, así, los conceptos recursivos. A fin de ampliar las técnicas aplicadas para abordar la enseñanza de la recursividad se procedió a invitar a los docentes que actualmente dictan las asignaturas Álgebra y Lógica Computacional, y Matemática Discreta para desarrollar un contenido específico desde su propuesta (Fig. 2).

Seguidamente, se trabajó en resolución de situaciones contextuales, utilizando como eje la recursividad en problemas relacionados con el perfil de la carrera y su importancia en otras asignaturas. La metodología aplicada se basó en el uso de la lógica inductiva profundizando los conceptos, la definición de situaciones reales para resolver problemas utilizando recursividad y el trabajo cooperativo en el aprendizaje.

Fig. 2. Segundo Seminario-Taller

5.3 Test Evaluativo

Al finalizar el segundo seminario-taller se efectuó un *Test Evaluativo* **(**Fig. 3**).**



LICENCIATURA EN SISTEMAS DE INFORMACIÓN

2do SEMINARIO-TALLER: TEST EVALUATIVO

....Fecha: 23/10/2015

Tema: Recursividad

Consigna:

- Resuelve las siguientes situaciones en base a lo abordado en los talleres.
- Consignar todos los pasos y procedimientos a utilizar para llegar al resultado

1.

Cada cuadradito ☐ tiene 8 cm de perímetro.
Con 6 cuadraditos iguales se formó esta figura.
¿Cuál es el perímetro de la figura?

2. Con 3 triángulos equiláteros se armó esta figura. El triángulo grande tiene 48 cm de perímetro. El lado del triángulo mediano es la mitad del lado del triángulo grande. El lado del triángulo pequeño es la mitad del lado del triángulo mediano. ¿Cuál es el perímetro de la figura?

3. Diremos que un número natural es *optimista* si sus cifras están ordenadas en forma creciente y diremos que un número natural es *pesimista* si sus cifras están ordenadas en forma decreciente. Por ejemplo, son optimistas 1358, 24, 89, son pesimistas 41, 820, 762, y no son ni optimistas ni pesimistas 7, 1134, 253, 9773, 8592.
Hallar el primer número natural *a*, mayor que 150 y tal que desde 1 hasta *a* (inclusive) haya la misma cantidad de números optimistas que de números pesimistas

4. En este tablero se quieren colocar fichas sólo en las casillas blancas de modo que, si se suma el número de fichas de cada lado, siempre se obtiene 9.

Por ejemplo, con 24 fichas, una distribución posible es:

Mostrar una distribución con 28 fichas.
Mostrar una distribución con 20 fichas.
Mostrar una distribución, distinta de la dada, con 24 fichas.

5. Hay cinco montones de piedras. Se quita 1/5 de las piedras del primer montón y se agregan al segundo montón. Luego se quita 1/5 de las piedras que hay ahora en el segundo montón y se agregan al tercer montón. A continuación, se quita 1/5 de las piedras que hay ahora en el tercer montón y se agregan al cuarto montón. Finalmente, se quita 1/5 de las piedras que hay ahora en el cuarto montón y se agregan al quinto montón. De este modo todos los montones finalizan con 124 piedras cada uno.
¿Cuántas piedras había inicialmente en cada montón?

Fig. 3. Test Evaluativo

El test incluyó cinco ejercicios-tipo, de forma que los alumnos desarrollaran o aplicaran estrategias de resolución, y hallaran los resultados emergentes. Las situaciones que se presentaron fueron de menor a mayor complejidad.

El objetivo primordial de este instrumento evaluativo fue evaluar la utilidad de las estrategias de enseñanza basadas en el uso de elementos didácticos concretos como medio para el razonamiento lógico-inductivo de modo de profundizar el concepto, la propuesta de situaciones reales para resolver problemas utilizando recursividad y el trabajo cooperativo en el aprendizaje.

Y además, poder medir y comparar de alguna forma –cuantitativa o cualitativamente- el estado inicial de los conocimientos referidos a la temática como así también los avances alcanzados al aplicar las actividades realizadas (Fig. 4).

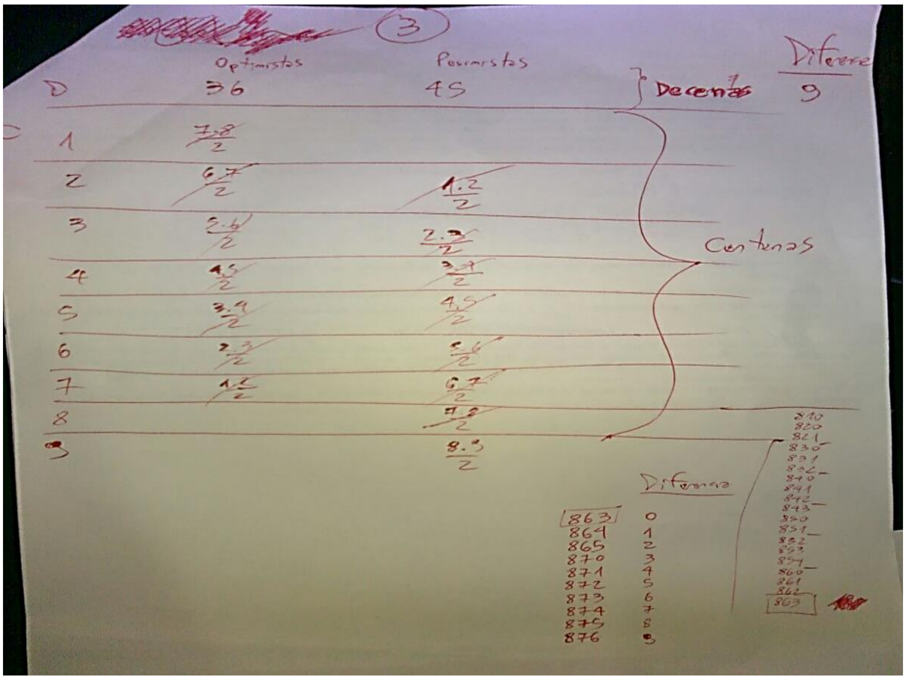


Fig. 4. Resolución Recursiva

5.4 Resultados

En la siguiente tabla se presenta el número de alumnos que aplicaron distintos procedimientos (28 alumnos) para resolver los problemas propuestos y los resultados (distribuidos en correctos e incorrectos).

Tabla 1. Resultados del Test Evaluativo

Ejercicios	Aplicación de Procedimientos		Resultados		Sin resolver
	Recursivos	No Recursivos	Correctos	Incorrectos	
N°1	17	11	28	0	0
N° 2	21	7	25	3	0
N° 3	15	13	15	13	0
N° 4	10	5	8	7	13
N° 5	8	2	7	3	18

Se observa que en la mayoría de los ejercicios los alumnos aplicaron estrategias recursivas caracterizándose por la creatividad y la espontaneidad en su desarrollo. Y en todos los casos al aplicar procedimientos recursivos, en gran porcentaje, los resultados fueron correctos.

Con este medio de evaluación se pueden medir los efectos y las consecuencias en la aplicación de las estrategias abordadas en los seminarios-talleres.

Así, se valoraron cuantitativa y cualitativamente los procesos y procedimientos utilizados para resolver problemas en situaciones referidas a la temática central, desde donde también se evaluaron los resultados de las estrategias de enseñanza aplicadas.

6 Análisis y Conclusiones

A lo largo de la aplicación de las metodologías planteadas en el curso de los seminarios-talleres destinados a alumnos de la Licenciatura en Sistemas de Información, propuestas para la enseñanza de recursividad y procesos recursivos, se destacan la concentración, la predisposición y la capacidad en resolución de problemas de los alumnos, actitudes dignas de consideración para trabajar en esta temática.

Los conceptos advertidos de mayor significatividad fueron:

Motivación: durante todo el proceso de implementación de las estrategias los alumnos estuvieron estimulados desde las actividades propias propuestas en cada encuentro.

Creatividad: se registraron resoluciones y aplicaciones de procedimientos recursivos en forma creativa para lograr los resultados, sobre todo en ejercicios de mayor complejidad.

Originalidad: en muchos casos sorprendió la originalidad en la aplicación de los procedimientos, indicios que permitieron demostrar una mayor comprensión de la temática, eje de la propuesta.

Comprensión: se observó un avance considerable en la maduración y en la incorporación de los conceptos abordados en las actividades presentadas en los seminarios-talleres.

Estos conceptos han permitido reflejar que enfatizar en estrategias innovadoras y motivadoras de enseñanza de recursividad y procesos recursivos en asignaturas troncales en carreras de ciencias de la computación posibilitó la obtención de resultados significativos durante el proceso de aplicación de las distintas estrategias en aras de mejorar la formación del futuro egresado, proveyéndole perspectiva e integración conceptual.

7 Perspectivas Futuras

Es factible enfatizar en este tipo de propuestas, pues pueden analizarse las producciones de los alumnos debido a que sus respuestas nos brindan una idea clara de sus concepciones, razón por la cual resulta primordial en nuestra tarea de acercarnos a comprender sus procesos de pensamiento.

El análisis y la valoración de los resultados de la experiencia serán considerados para la toma de decisiones en acciones futuras.

Se concibe que este desarrollo no se logra en forma instantánea, es necesaria una preparación adecuada y un seguimiento permanente. Es posible afirmar que queda pendiente la necesidad de promover actividades similares en las distintas asignaturas que conforman el plan de estudios de la carrera, hecho que permitirá que los alumnos logren una mejor comprensión de conceptos fundamentales en las ciencias de la computación.

A nuestro juicio, la temática centrada en el concepto de la recursividad no queda agotada en estas experiencias, pues abordar dicho concepto como estrategia de enseñanza en las ciencias de la computación comprende dimensiones más complejas.

Referencias Bibliográficas

1. Guevara Mora, G. Aprendizaje basado en problemas como técnica didáctica para la enseñanza del tema de la recursividad. Revista Intersede-Universidad de Costa Rica, vol. XI, núm. 20, 2010, pp. 142-167 (2010)
2. Rueda, S. y Castro S. Recursividad Esencial en la Resolución de Problemas. II Congreso Argentino de Ciencias de la Computación. Univerisidad Nacional del Sur. Bahía Blanca. Vol. II, No 2, pp. 561-589 (1996).
3. Chesñevar, A. G., Maguitman, M. P., & González, M. L. Tecnología Informática en un curso de lenguajes formales y teorías de autómatas: un enfoque constructivista. Tecnología Informática en un curso de lenguajes formales y teorías de autómatas: un enfoque constructivista. Universidad Nacional del Sur, Bahía Blanca. Vol. 2, pp. 245-255 (2003).
4. Chesñevar, C. I. Algunas consideraciones y ejercicios motivadores para la enseñanza de la recursión. II Ateneo de profesores universitarios de computación. Universidad Nacional del Sur-DepartamentoMatemática. Bahía Blanca.Vol 1, pp. 43-54, (1994).
5. Di Mare, A. Tres formas diferentes de explicar la recursividad. Revista Ingeniería, Universidad de Costa Rica, Volumen 6, Número 2, pp 31-44, (1996).

6. Rubio Sanchez, M. Enseñanza de la recursividad mediante problemas combinatorios. III Seminario de Investigación en tecnologías de la Información aplicadas a la Educación (Pp. 41-54). Vol 3, pp. 41-54. (2011). Biblioteca de Educación del Ministerio de Educación, Cultura y Deporte. Madrid
7. Arrufat, J. L. (1990). Mínimos Cuadrados Recursivos. Facultad de Ciencias Económicas, Universidad Nacional de la Plata. La Plata. Vol. 36, Nros. 1-2, pp. 3-. 20 (1990)
8. Lacave, C., Milina, I. A. & Giralt, J. Identificando algunas causas del fracaso en el aprendizaje de la recursividad. Jornadas de Enseñanza Universitaria de la Informática. Vol. XIX, pp.225-232; (2013).

Volver al Índice

La Comparación del Desempeño de Dos Grupos de Estudiantes en la Resolución de un Problema para Evaluar una Actividad de Alfabetización Académica

Vicente Messina, Teresa Gil, Carlos Pano
Departamento de Ciencias Básicas, Facultad Regional Buenos Aires, Universidad Tecnológica Nacional
Medrano 951, Buenos Aires.
{Vmessina, cpano}@frba.utn.edu.ar , tgil@gmail.com

Resumen. Este trabajo trata sobre la comparación en el desempeño en una prueba, de resolución de problemas, de dos grupos de estudiantes. Un grupo participó en una actividad de escritura académica, el otro operó como control. Se considera a la actividad como una experiencia de innovación pedagógica. El diseño para la comparación es de dos grupos con postest al grupo experimental y al grupo control. Una definición sirve de marco al problema y se lo clasifica según dos criterios. Estadísticamente no se pudo argumentar a favor de la hipótesis propuesta.

Palabras Clave: Innovación pedagógica, Escritura académica, Diseño cuasi experimental, Resolución de Problemas.

1 Introducción

En Messina, Cittadini, Pano [1] narramos una actividad de escritura académica. Fue ésta una práctica experiencial de innovación pedagógica. Sus características principales fueron: el control del aprendizaje fue desplazado a los estudiantes, la actividad estuvo mediada por un aula virtual.

Nos interesa en este lugar subrayar el carácter innovador de la experiencia. Para precisar el concepto de innovación que nos guió seguimos el pensamiento de Elisa Lucarelli [2]:

> "La innovación es aquella práctica protagónica de enseñanza o de programación de la enseñanza, en la que, a partir de la búsqueda de la solución de un problema relativo a las formas de operar con uno o varios componentes didácticos, se produce una ruptura en las prácticas habituales que se dan en el aula de clase, afectando el conjunto de relaciones de la situación didáctica." (Lucarelli, p. 19)

Hicimos de esta definición una lectura que nos permitió incorporar elementos y explicaciones que ayudan a dar significado al concepto de innovación, tal como se muestra a continuación:

- El concepto de "práctica de enseñanza" lo entendemos en un sentido amplio, que incluye el aprendizaje y los entornos en que se da, la evaluación y las actividades que realizan docentes y alumnos para la formación profesional de estos últimos.
- En consonancia con a) el "protagonismo" de la práctica es del docente que impulsa la acción innovadora, de los estudiantes que participan y de cualquier otro actor que intervenga en el hecho educativo.
- La frase "búsqueda de la solución de un problema relativo a las formas de operar con uno o varios componentes didácticos" hace pensar que, con las prácticas actuales, hay un problema que entorpece la buena formación de los estudiantes y así aparece la necesidad de mejorarlas. La solución innovadora afectará a varios componentes didácticos como las participaciones de los docentes y alumnos, los contenidos a desarrollar, las estrategias a emplear, los recursos tecnológicos de apoyo, los ámbitos de encuentro y las interrelaciones entre ellos.
- La idea de "una ruptura en las prácticas habituales que se dan en el aula de clase" indica un cambio con lo que tradicionalmente se hace, con lo institucionalmente establecido o con modelos reproductores de enseñanza y aprendizaje. El cambio no es sólo por algo nuevo sino por la construcción de nuevas estrategias pedagógicas y uso de recursos de la época, con la intención de mejoramiento.

El objetivo de la citada experiencia consistió en poner en función una actividad de alfabetización académica para propender al mejoramiento del aprendizaje del tema Secciones Cónicas. Corresponde entonces hacer una evaluación de la experiencia innovadora. Para eso ensayamos, mediante un diseño de comparación de grupos, la hipótesis de que la actividad desarrollada mejora el aprendizaje del tema.

Comparamos, entre dos grupos de alumnos, el desempeño en una prueba, que consistió en la resolución de un problema. Los alumnos cursaban la asignatura Álgebra y Geometría Analítica en dos cursos distintos de la

Facultad Regional Buenos Aires de la Universidad Tecnológica Nacional. Álgebra y Geometría Analítica es una asignatura del primer nivel de los planes de estudio de todas las especialidades de la ingeniería que se enseñan en la Facultad. El problema correspondía a una aplicación del tema Secciones Cónicas.

2 Metodología

Para la comparación trabajamos en dos cursos, denominamos curso experimental a uno de ellos y curso control al otro.

En el curso experimental se desarrolló la actividad de alfabetización académica regulada por el aula virtual, allí los alumnos encontraron consignas para la lectura del material y pautas para abordar la escritura académica y allí dejaron sus producciones. Las consultas se resolvieron a través del foro del aula virtual. En las clases presenciales de este curso no se trató el tema Secciones Cónicas. La resolución del problema formó parte de la actividad de escritura académica. Uno de los autores de este trabajo orientó la actividad.

En el curso control se trató el tema de forma tradicional, la profesora explicó Secciones Cónicas en el tiempo indicado en el cronograma de la materia. Hizo una introducción al tema con un ejemplo motivador, desarrolló los contenidos teóricos de los mismos, resolvió ejercicios de la guía de trabajos prácticos y respondió las preguntas que fueron surgiendo. Al finalizar la explicación, la profesora propuso a los alumnos que resuelvan el problema. La profesora fue otro de los autores de este trabajo.

Los alumnos de ambos cursos compartieron el mismo horario de cursada (turno mañana), se conectaron por primera vez con una materia de nivel universitario, contaron con los mismos materiales y recibieron iguales recomendaciones para resolver el problema e indicaciones para la presentación por escrito de la solución hallada.

Los alumnos del curso experimental subieron el escrito al aula virtual y los del curso control lo entregaron en papel. Todos dispusieron, para la realización del trabajo, de un tiempo de dos semanas.

Por abandono de la cursada de la materia, hubo alumnos que no entregaron el escrito con la resolución del problema. De los alumnos del curso experimental que si entregaron se seleccionaron ocho al azar para formar el grupo experimental y de los alumnos del curso control que también entregaron se seleccionaron ocho al azar para formar el grupo control.

La Fig. 1 muestra la conformación de los grupos a comparar.

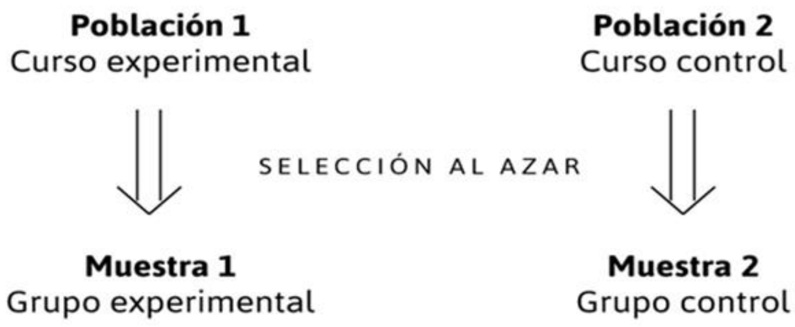


Fig. 1. Selección de los grupos a comparar

Evaluamos y corregimos los trabajos siguiendo el procedimiento descrito en Messina, Cittadini, Pano [3]. Es un procedimiento de evaluación pluripersonal, que compara las producciones de los alumnos con un modelo construido por los docentes y que atiende a aspectos que hacen a la escritura académica. La aplicación de este procedimiento permite calificar los trabajos con notas numéricas con valores entre 0 y 4. Ordenamos al azar los 16 trabajos y los corregimos en el orden obtenido.

3 Diseño

El diseño empleado, en la terminología de Buendía Eisman, Colás Bravo y Hernández Pina [3], se designa como Diseño de dos grupos con postest al grupo experimental y al grupo control.

Consideramos como tratamiento recibido por los alumnos del grupo experimental su participación en la actividad de alfabetización académica regulada por el aula virtual. Los alumnos del grupo control no participaron de ninguna actividad de alfabetización académica. El postest consistió en la resolución del problema. La variable independiente, participación en una actividad de alfabetización académica, tuvo dos modalidades, la participación y la no participación. La variable dependiente fue la nota obtenida en la resolución del problema. Los estudiantes, por provenir de dos poblaciones, no fueron asignados al azar a los grupos que conformaron las muestras pero si fueron seleccionados al azar de las respectivas poblaciones (ver Fig. 1). Esta última particularidad nos lleva a considerar que el diseño es cuasi experimental. Es un diseño que ofrece algunas ventajas pero también presenta ciertas desventajas.

Entre las ventajas podemos señalar:

- No hubo mortalidad experimental porque los grupos se formaron a partir de los alumnos que concluyeron la experiencia y entregaron el trabajo.
- Para poner en juego el entusiasmo o interés de los alumnos para realizar la tarea, se le dio valor acreditativo a la nota que obtuvieron.
- No se aplicó con anterioridad una prueba similar a ninguno de los dos grupos, no hubo pretest. Esta circunstancia evitó que los dos grupos hayan sido medidos dos veces y por lo tanto una influencia de este tipo sobre la variable dependiente.
- Los alumnos de ambos grupos pertenecían a cursos que compartían el mismo horario de clase, cursaban por primera vez la materia y con idéntico programa. Para responder al postest recibieron las mismas instrucciones. Estas características aportaron a la similitud de los grupos.
- Los cambios psicológicos o en las aptitudes intelectuales, que pueden deberse al cursado de la asignatura Álgebra y Geometría Analítica, pudieron darse en ambos grupos, por lo que jugaron a favor de la comparabilidad.

Las desventajas que hemos notado son:

- Al haber seleccionado las muestras, una de cada población establecida de antemano, la variable independiente no pudo ser manipulada. No hubo asignación al azar de los participantes a los grupos, por lo que no quedó garantizada la equivalencia de los grupos, esto ocurrió por la imposibilidad de tratar un tema, con alumnos de un mismo curso, de dos formas distintas.
- La condición de que los grupos fueron seleccionados de cursos distintos, con docentes diferentes, posibilitó que sus integrantes tuvieran experiencias externas que pudieron afectar a la variable dependiente.

4 Prueba estadística

El análisis estadístico que hemos utilizado para el diseño empleado es la aplicación de la prueba de hipótesis t de Student. Designamos con μi la media de la i-ésima población, $i = 1, 2$. Contrastamos la hipótesis nula $\mu 1 - \mu 2 = 0$ contra la alternativa $\mu 1 - \mu 2 \neq 0$ en prevención de que el tratamiento tuviera un efecto de sentido contrario al esperado. Los datos fueron procesados con Statistix 9 y los resultados se muestran en la Fig. 2.

Concluimos en que no hay suficiente evidencia que permita rechazar la hipótesis nula.

```
Two-Sample T Tests for Nota by Grupo

Grupo           N      Mean        SD          SE
Experimental    8     2.1250     1.1260     0.3981
Control         8     2.0000     1.1952     0.4226
Difference            0.1250     1.1611     0.5806

T-Tests for Mean Difference
  Null Hypothesis: difference =  0
  Alternative Hyp: difference <> 0
                                                    95% CI for Difference
Method          Variances     DF       T        P         Lower       Upper
Pooled          Equal         14     0,22    0,8326     -1.1202      1.3702
Satterthwaite   Unequal     14,0     0,22    0,8326     -1.1206      1.3706

Homogeneity of Variances      DF       F        P
Folded F Test                 7,7     1.13    0,4395

Cases Included 16    Missing Cases 0
```

Fig.2. Resultados obtenidos con el programa Statistix

5 El problema

En la educación universitaria, la resolución de problemas se presenta como una actividad cada vez más extendida. Esta actividad debe ser vista como una estrategia explícita que permite construir nuevos conocimientos, es también una actividad que permite interrelacionar el pensamiento crítico y reflexivo con la creatividad y capacidad de inventiva necesarias para encarar la búsqueda de las soluciones. Nos preguntamos, ¿qué es un problema? Para precisar la noción de problema recurrimos a la definición de Pano, Fridman, Rodil Martínez, Torres y Zion [4]:

> Un problema es una situación propuesta intencionalmente por el docente o por el alumno, con el objetivo de promover un aprendizaje significativo y el desarrollo del pensamiento crítico y autónomo, que requiere el despliegue de modalidades de trabajo algunas veces individuales y otras grupales. La situación ofrece una dificultad inicial para su comprensión y su resolución, por cuanto los sujetos que la enfrentan poseen inicialmente ante ella un estado de incertidumbre y no completo cognoscitivamente. El problema se presenta como un desafío teórico o práctico que, para ser abordado, exige a los alumnos la comprensión de la situación desde sus conocimientos previos y con ayudas apropiadas. Precisa, para su resolución, la generación de estrategias y la construcción de conocimientos para encontrar soluciones factibles y detectar la óptima. Es un proceso que apunta al desarrollo de competencias profesionales. (Pano et. al., p. 43)

El problema constitutivo del postest fue tomado del libro Nociones de Geometría Analítica y Álgebra Lineal de Kozak, A., Pastorelli, S., Vardanega, P. [5] y propuesto a los alumnos por los docentes, con el objetivo de evaluar un tema incluyendo aspectos que hacen a la escritura académica. Para resolverlo no es suficiente aplicar una fórmula o un procedimiento conocido. Hay que construir la solución a partir de lo que se conoce y hacerse de otros recursos para completar la obra. Es un problema que queda abarcado por la definición anterior.

En la bibliografía se encuentran disponibles variadas y abundantes clasificaciones de problemas. Una clasificación tiene un valor práctico. Pensando en pedagogía universitaria, al alumno solucionador lo orienta sobre los recursos que necesita para resolver el problema, al docente lo guía en la elección del que propone en función de las aptitudes intelectuales o habilidades prácticas que desea ejercitar.

Rovere [6] presenta, entre otras, una clasificación que distingue entre problemas estructurados, semiestructurados e inestructurados. Los problemas estructurados reconocen una estructura explicativa determinativa que está construida con relaciones de causalidad. Las condiciones de inicio determinan los resultados. Son problemas de certidumbre. Estos problemas pueden expresarse en términos de razonamientos deductivos: Si A entonces B. En un problema semiestructurado las explicaciones se conectan mediante relaciones que conllevan un cierto grado de probabilidad. Son problemas de incertidumbre bien definida. Tienen una expresión en términos de razonamiento plausible: Si A entonces B es posible. Los problemas inestructurados tienen una estructura con ligaduras laxas que deja al solucionador grados de libertad para encontrar soluciones o explicaciones novedosas pero no le garantiza que el problema será resuelto. Son problemas de incertidumbre mal definida que abren el espacio a la creatividad.

El problema del postest cuenta con una única solución definida y lógica. Es una solución que permanece a lo largo del tiempo. Para alcanzar dicha solución se necesita ser hábil para extraer deducciones que sean válidas y tener un pensamiento riguroso. La solución está determinada por el enunciado, o sea, por las condiciones de partida. Se trata, por lo tanto, de un problema estructurado como muchos de los matemáticos. Revelli, Messina, Gil y Pano [7], en el análisis de un texto, clasifican los problemas según el relato de su enunciado. Dicen que los enunciados de los ejercicios o problemas pueden ser: (a) de relato de una realidad, (b) de relato de tono realista, (c) de relato meramente matemático y (d) de relato de investigación matemática. Agregan que esta clasificación no es exhaustiva pero contempla a los ejercicios o problemas que generalmente aparecen en los libros de texto de matemática. Un problema con enunciado de tono realista se resuelve por aplicación de los contenidos del texto a una situación concreta, descrita en lenguaje cotidiano. La resolución del problema implica una traducción del enunciado al lenguaje formal de la matemática. Se trata de simular una cuestión con visos de realidad. En el enunciado se encuentran todos los datos necesarios para resolver el ejercicio. El problema del postest trata sobre la cúpula de un edificio diseñado para exposiciones. El enunciado contiene una figura que muestra las dimensiones principales de la cúpula y en otra figura representa las estructuras que la soportan, acompañadas por datos sobre sus elementos. Estas estructuras son arcos parabólicos que se unen a la cúpula por medio de barras, así se muestra en la figura. Se trata de calcular las longitudes de las barras que unen los arcos parabólicos con la cúpula, cuya sección transversal es semielíptica. Es un enunciado formulado en lenguaje cotidiano. Por la simpleza de las figuras, que invitan a agregar un sistema de coordenadas para pasar a expresar las curvas en el lenguaje de las ecuaciones, pareciera que es un enunciado preparado por el autor para ejercitar a los alumnos lectores. Se trata, por lo tanto, de un problema con enunciado de relato de tono realista.

6 Conclusiones

El análisis estadístico no aportó argumentos a favor de la hipótesis de que la actividad de alfabetización académica desarrollada mejora el aprendizaje del tema Secciones Cónicas. Si bien se trabajó experimental y estadísticamente bajo el principio de parsimonia habrá que revisar el diseño y, consecuentemente, el método estadístico.

Sin embargo sabemos que la práctica de la escritura obliga a los alumnos a desplegar una actividad intelectual interesante que los hace principales protagonistas de la labor y estimula la autocrítica sobre el propio saber. También "tiene la *potencialidad* de ser una forma de estructuración del pensamiento que lo devuelve modificado" Carlino [8], es lo que denomina función epistémica de escritura. Es, sin duda, una estrategia que favorece el aprendizaje. Por lo tanto habrá que tomar el presente como un estudio exploratorio y llevar a cabo una investigación más completa.

Referencias

1. Messina, V.; Cittadini, G.; Pano, C.: La escritura académica y su evaluación. Una experiencia con estudiantes de ingeniería a partir de un tema de geometría analítica. *Perspectivas Metodológicas.* Aceptada su publicación en el N° 19, Vol. 1, Universidad Nacional de Lanús, disponible a partir del mes de mayo de 2017.
2. Lucarelli, E.; El eje teoría práctica en cátedras universitarias innovadoras su incidencia dinamizadora en la estructura didáctica curricular. Tesis doctoral. Facultad de Filosofía y Letras. Universidad de Buenos Aires (2003).
3. Buendía Eisman, L.; Colás Bravo, P.; Hernández Pina, F.: Métodos de Investigación en Psicopedagogía. McGraw-Hill/Interamericana de España (1998).
4. Pano, C.; Fridman, C; Rodil Martínez, A.; Torre, V. y Zion, V.: Apuntes sobre Innovación en Educación Universitaria. Ediciones Rosel (2011).
5. Kozak, A. M., Pastorelli, S. y Vardanega, P.: Nociones de geometría analítica y álgebra lineal. McGraw-Hill Interamericana (2007).
6. Rovere, M.: Planificación estratégica de recursos humanos en salud. O. P. S. Washington D. C. (1993)

7. Revelli, M.; Messina, V.; Gil, T.; Pano, C.: Descripción y análisis de un capítulo sobre secciones cónicas. Educación Matemática en Carreras de Ingeniería. XIX. Encuentro Nacional. XI Internacional, pp. 487-495. http://www.frsn.utn.edu.ar/EMCI/files/Acta_XIXEMCI.pdf. Accedido 15 de febrero 2017. Universidad Tecnológica Nacional, Facultad Regional San Nicolás (2015)
8. Carlino, P.; Escribir, leer y aprender en la universidad-Una introducción a la alfabetización académica. Fondo de Cultura Económica de Argentina (2005).

Volver al Índice

Un Estudio de Competencias Iniciales de los Ingresantes en la Facultad de Ciencias Forestales

Elsa Ibarra, Sylvia Nabarro, Claudia Cejas, Carolina Ger
Departamento de Ciencias Básicas. Facultad de Ciencias Forestales. UNSE. Avda. Belgrano Sud 1912- CP 4200
egomez@unse.edu.ar, sylvianabarro@yahoo.com.ar, {claudiacejas_1, carolinager}@hotmail.com

Resumen. En este trabajo se pretende identificar las competencias básicas con que los estudiantes ingresan a las carreras de la Facultad de Ciencias Forestales de la UNSE", estos es; indagar acerca de las competencias desarrolladas en el nivel medio de enseñanza por los alumnos. Las mismas serán contrastadas posteriormente con las competencias requeridas para el ingreso en los estudios universitarios fijadas por el CONFEDI publicadas en Documentos del CONFEDI: Competencias en Ingeniería en el año 2014. Este primer estudio, de carácter diagnóstico nos fijará un punto de partida para el estudio de las competencias que pretendemos desarrollen nuestros estudiantes en los cursos de matemática y nos permitirá en el futuro establecer relaciones con las competencias de egreso fijadas en dicho documento y en nuestros planes de estudio para establecer el aporte de nuestras asignaturas al desarrollo de ellas.

Palabras Clave: Competencias básicas, Ingreso, Ingeniería, Matemática

1 Introducción

El Proyecto de Investigación "Potenciar el pensamiento matemático para contribuir al desarrollo de competencias pertinentes en los ingresantes a las carreras de la Facultad de Ciencias Forestales de la UNSE" surge como una inquietud de la Cátedra de Matemática de dicha Facultad de indagar acerca del aporte de la misma al progreso de las competencias que debe desarrollar, en el transcurso de su formación universitaria, el futuro egresado en Ciencias Forestales.

Se basa en la convicción de que los nuevos paradigmas existentes vinculados a la educación conforman un escenario particular que requiere de un enfoque diferente en cuanto a la formación de los futuros profesionales, basados no sólo en el "saber" sino en el "saber hacer".

La sociedad requiere de la universidad la formación de profesionales "competentes" para hacer frente a los problemas que la misma requiere de su profesión, atentos a la realidad que los rodea y es con este espíritu que se pone el acento en las competencias que el estudiante trae a la universidad y las que desarrolla en la misma en el transcurso de su proceso formativo como futuro profesional, con una mirada orientada a determinar, cuánto aporta el trayecto matemático que transita en el mismo.

Es evidente que lo expresado obliga a encarar el proceso de enseñanza y de aprendizaje de un modo diferente.

Existen distintas formar de organizar el proceso de enseñanza y aprendizaje, dependiendo cada una de ellas de los propósitos que se persigan y de los recursos con que cuente la institución. Si tenemos en cuenta la finalidad, no es lo mismo que el docente proponga como objetivo de su acción didáctica suministrar conocimientos a los alumnos que guiarlos en el desarrollo de capacidades que los preparen para aplicar dichos conocimientos a problemas que demanden de los mismos en el ejercicio de su práctica profesional.

Es evidente la ventaja que representa esta última modalidad en la formación de profesionales "competentes" que puedan responder a las necesidades de la sociedad con solvencia. En este punto radica la importancia de centrar la enseñanza en el desarrollo de competencias.

Desde este punto de vista, es bueno tener en claro el aporte que cada área puede hacer al desarrollo de dichas competencias profesionales y en este marco se instaura el presente proyecto con relación a la incidencia y al aporte del desarrollo de las competencias matemáticas en el desarrollo de las competencias profesionales.

Existe una variedad de estudios interesantes y concretos en cuanto al desarrollo del proceso de enseñanza y aprendizaje en función de competencias, en este encuadre nos concentraremos en analizar lo que sucede con el proceso de enseñanza y de aprendizaje cuando nos centramos en el desarrollo de competencias, en este caso matemáticas y no en el conocimiento.

2 Objetivo general o marco de referencia

El Proyecto mencionado fijó como objetivos generales y específicos a los siguientes:

2.1 Objetivo general:

Favorecer los procesos de enseñanza y de aprendizaje a partir de dispositivos pedagógicos / didácticos que potencien el pensamiento matemático para el desarrollo de las competencias requeridas en las carreras de la Facultad de Ciencias Forestales de la UNSE.

2.2 Objetivos específicos:

a) Identificar las competencias básicas de los estudiantes que ingresan a las carreras de la Facultad de Ciencias Forestales de la UNSE.
b) Explorar dispositivos didácticos que se implementan en el desarrollo de las distintas asignaturas de primer año de las carreras.
c) Inferir la relación o correlación entre el desempeño de los estudiantes en términos de competencias previas, la propuesta del CONFEDI sobre las competencias que debe manifestar un alumno universitario y las modalidades de enseñanza en las asignaturas de las carreras de la Facultad de Ciencias Forestales de la UNSE.
d) Construir una propuesta pedagógica didáctica para el mejoramiento del desempeño de los estudiantes de las carreras de la Facultad de Ciencias Forestales de la UNSE
e) Contribuir a la Formación de recursos humanos del área de la Matemática en el diseño y desarrollo de dispositivos didácticos que promuevan la interdisciplinariedad y el trabajo colaborativo en las carreras de la Facultad de Ciencias Forestales de la UNSE.
f) Conocer los resultados de la implementación de la propuesta didáctica para la formación en competencias.
g) Evaluar los resultados de la aplicación de los dispositivos didácticos diseñados considerándolos como un sistema.

3 Desarrollo

En este trabajo se pretende, en función del primer objetivo planteado: “Identificar las competencias básicas con que los estudiantes ingresan a las carreras de la Facultad de Ciencias Forestales de la UNSE”, indagar acerca de las competencias desarrolladas en el nivel medio de enseñanza por los alumnos. Las mismas serán contrastadas posteriormente con las competencias requeridas para el ingreso en los estudios universitarios fijadas por el CONFEDI publicadas en Documentos del CONFEDI: Competencias en Ingeniería en el año 2014 [1].

Este primer estudio, de carácter diagnóstico nos fijará un punto de partida para el estudio de las competencias que pretendemos desarrollen nuestros estudiantes en los cursos de matemática y nos permitirá en el futuro establecer relaciones con las competencias de egreso fijadas en dicho documento y en nuestros planes de estudio para establecer el aporte de nuestras asignaturas al desarrollo de ellas.

Para iniciar nuestro trabajo, nos propusimos indagar sobre las distintas definiciones de competencias con el propósito de seleccionar aquella o aquellas que se ajusten a nuestros objetivos y en función de esto advertimos que el concepto de competencia es complejo, dinámico y polisémico [2].

En función de esa polisemia, es que nos encontramos con una gran cantidad de definiciones del término las cuales se deben a que quienes las elaboran se paran desde ángulos completamente distintos que los lleva a enfocar el concepto poniendo énfasis en aspectos diversos del proceso de enseñanza y aprendizaje del alumno.

De hecho, la concepción que se tiene sobre ambos procesos influirá en la perspectiva que se tenga sobre el concepto de competencia.

Según el punto de vista filosófico y epistemológico en que se asuman, se requerirá precisar sus implicancias en los procesos didácticos y curriculares, la concepción de competencia que se adopte va a soportarse teóricamente sobre ellos.

Es decir, se trata de situar al concepto de competencia en un complejo proceso de formación y desarrollo de un ser humano en permanente actividad y con capacidades para acceder nueva información y apropiarse de nuevos conocimientos, para enfrentar con su pensamiento la incertidumbre y la complejidad de los problemas generados por la nueva sociedad del conocimiento, y para , desde el trabajo, el lenguaje y el pensamiento, contribuir a la transformación de la sociedad en la que históricamente se sitúa.

El concepto de competencia pone su acento en el ser humano por cuantos se centra en el desarrollo de capacidades potenciales para hacer de él una persona competente.

El concepto de competencia es bastante amplio; integra conocimientos, potencialidades, habilidades, destrezas, prácticas y acciones de diversas índoles (personales, afectivas, sociales, culturales) en los diferentes escenarios de aprendizaje y desempeño [3].

Una revisión de la literatura consultada nos permite concluir que la mayoría de las definiciones , ponen el acento en la competencia como capacidades integradas que debe desarrollar progresivamente el estudiante a lo largo de sus carreras de tal modo que la enseñanza enfocada al logro de este tipo de aprendizajes no puede ser valorada en un sentido dicotómico, (se tiene o no se tiene), sino que debe entenderse como un proceso en progresivo crecimiento y adecuado a los contextos instituciones en donde se desarrolla; se concibe así a la competencia como un saber actuar complejo que se apoya sobre la movilización y utilización eficaz de una variedad de recursos, siendo ésta una movilización selectiva de los mismo ya que se moviliza sólo aquellos recursos que son apropiados para determinada circunstancia . Uno de las acepciones del término más aceptada es la de "saber hacer en un contexto".

Desde esta perspectiva, el conocimiento es un recurso como también lo son aquellos del tipo de actitudes y conductas y su movilización y utilización constituye un elemento inherente a la competencia misma, de tal manera que pensar que un estudiante es competente para… significa que no sólo tiene los recursos necesarios sino que también sea capaz de movilizarlos en forma selectiva para hacer frente a la situación particular con que se encuentra.

Compartimos con la concepción de competencia sostenida por Philippe Perrenoud cuando sostiene que la competencia es una capacidad de acción eficaz frente a una familia de situaciones y que quién llega a dominarla es porque dispone a la vez de los conocimientos necesarios y la capacidad de movilizarlos con buen juicio, a su debido tiempo, para definir y solucionar verdaderos problemas. La competencia nunca se reduce a conocimientos procesales codificados y aprendidos como normas, aunque se sirve de ellos cuando es pertinente. Juzgar la pertinencia de la norma forma parte de la competencia [4].

Un aspecto que no debe dejarse de lado es el hecho de que una competencia moviliza varios recursos, en particular, conocimientos, actitudes y conductas, y, según su naturaleza, su desarrollo no concluye nunca. Los problemas que se encuentres y las situaciones inéditas a enfrentar que requieran una nueva configuración e recursos a movilizar, tal vez contribuyan a la evolución constante de las competencias. Si una competencia corresponde a un saber actuar complejo, su desarrollo se proseguirá a los largo de toda la vida, de modo que a la universidad le toca determinar el grado de desarrollo esperado con respecto a cada una de las competencias y ello implica, además la fijación de criterios para evaluarlas y el establecimiento de indicadores de desarrollo esperado que den cuenta, por una parte, de la evolución del saber actuar complejo, como de los recursos que estos deben movilizar.

Un sesgo fundamental le otorga a este estudio la ciencia a partir de cuya enseñanza se lleva a cabo el mismo: la matemática.

Por otra parte, dada la ciencia desde cuya enseñanza se propone indagar el desarrollo de ciertas competencias vale también indagar sobre el proceso de formación y desarrollo de competencias matemáticas y su contribución al desarrollo de competencias profesionales.

El desarrollo de las competencias matemáticas que requieren de ambientes de aprendizaje enriquecidos por situaciones problemas significativos y comprensivos, que posibiliten avanzar a niveles de competencias más y más complejas.

Desde una perspectiva curricular La competencia es concebida como un espiral de complejidad creciente que comprende los mismos procesos, pero cuyo nivel de apropiación varía según la etapa evolutiva en que se encuentran los sujetos y por ello, el grado de complejidad de los conocimientos que se deben internalizar. La competencia terminal es abarcativa y comprende los distintos grados que corresponden a los ciclos y cursos. Cuando se explicitan las competencias parciales se debe indicar a qué nivel de conocimientos se refiere [5].

Teniendo en cuenta este contexto iniciamos el estudio a partir del conocimiento de las competencias iniciales de los estudiantes.

3.1 Determinación de las etapas a seguir en el siguiente trabajo:

Para llevar a cabo la tarea de evaluar las competencias con que ingresa un estudiante a nuestras carreras se determinaron los pasos, que a modo de etapas permitirán al equipo de trabajo organizar el mismo. Estos pasos se identifican con los aspectos que se consideran en los mismos:

- De las competencias a evaluar.
- Del grado de desarrollo esperado por cada una de las competencias.
- De los recursos internos- conocimientos, actitudes, conductas- a movilizar por las competencias.
- De las modalidades de evaluación de dichas competencias.
- De la forma de implementación de los instrumentos de evaluación.
- De la modalidad de evaluación de los resultados.

3.2 Objetivos del presente trabajo

- Determinar las competencias con las que acceden nuestros estudiantes a nuestras carreras universitarias de grado.
- Disponer de un punto de partida para el desarrollo de las actividades curriculares en las asignaturas: Álgebra y Geometría Analítica y Cálculo Diferencial e Integral.

3.3 De las competencias a evaluar y del grado de desarrollo esperados para cada una de las competencias:

3.3.1 Competencias básicas

Son aquellas competencias estrictamente necesarias para poder realizar, con éxito, futuros aprendizajes, nuevos para él. Son aquellas que implican el desarrollo de saberes complejos y generales que hacen falta para cualquier tipo de actividad intelectual.

El siguiente cuadro muestra las competencias básicas seleccionadas y sus respectivos indicadores de logro:

Tabla 1. Indicadores de Logro de las Competencias Básicas.

Competencias Básicas	Indicadores de Logro
a) Manejo de las formas del lenguaje matemático	a1) Utiliza los datos enunciados en el problema. a2) Establece las ideas principales y detecta palabras claves. a3) Elabora una representación gráfica – verbal adecuada a la organización discursiva presente en el texto y a la jerarquización de la información realizada.
b) Resolución de problemas	b1) Identifica los elementos explícitos del problema: datos e incógnitas. b2) Explica las situación planteada. b3) Busca, selecciona y procesa la información necesaria para resolver la situación. b4) Selecciona el método de resolución adecuado. b5) Obtiene la solución del problema. b6) Comunica los resultados con lenguaje claro y usando la notación correspondiente

3.3.2 Competencias transversales

Entendemos las mismas como el conjunto de actitudes, procesos mentales y procedimientos metodológicos comunes a diferentes disciplinas que se adquieren y aplican en el proceso de elaboración de diferentes saberes y del saber- hacer. Apuntan al desarrollo de dos aspectos claves para los estudios superiores: Autonomía en el aprendizaje y Destrezas cognitivas generales. Se las considera transversales porque atraviesan y se aplican tanto a las competencias básicas como a las específicas.

Se seleccionó para estas competencias: La Planificación e Implementación de estrategias de Resolución de Situaciones Problemas.

Tabla 2. Indicadores de Logro de las Competencias Transversales.

Indicadores de Logro
a) Organiza adecuadamente el tiempo y el espacio de estudio para responder a la situación. b) Relaciona situaciones de aprendizaje nuevas con experiencias anteriores y saberes previos. c) Demuestra capacidad para comprender relaciones lógicas entre conceptos.

3.3.3 Competencias específicas

Son aquellas estrechamente vinculadas con los contenidos y capacidades vinculadas a la ciencia, en este caso particular, Matemática. Remiten a un conjunto de conocimientos, actitudes, valores y habilidades específicos relacionados entre sí, que permiten desempeños satisfactorios a toda persona que aspira a estudiar una determinada carrera universitaria.

Fueron seleccionadas las siguientes competencias específicas y sus respectivos indicadores de logro.

Tabla 3. Indicadores de Logro de las Competencias Específicas.

Competencias Específicas	Indicadores de Logro
a) Resolver problemas aplicado a conceptos matemáticos desarrollados en el ciclo medio	a1) Resuelve problemas aplicando conceptos matemáticos desarrollados en el ciclo medio a2) identifica los conceptos matemáticos que utilizará en la resolución del problema. a3) Usa la notación adecuada. a4) Plantea y usa operaciones adecuadas para llegar a la solución. a5) Comunica los resultados en forma adecuada.
b) Reconocer y aplicar propiedades numéricas	b1) Justifica matemáticamente los resultados obtenidos. b2) Reconoce y aplica propiedades numéricas. b3) Resuelve adecuadamente las operaciones involucradas.

3.4 De las modalidades de evaluación de dichas competencias y de la forma de implementación de los instrumentos de evaluación

Se diseñó un trabajo de evaluación con el formato de lo desarrollado en la nivelación, con preguntas y actividades que realizaron en forma grupal y escrito, con el propósito de determinar el desarrollo de las competencias básicas, transversales y específicas de los ingresantes a las carreras de grado.

El trabajo se implementó en el curso de ingreso dado, que se quería tener en cuenta, específicamente, las competencias desarrolladas en la escuela secundaria.

Para la resolución de la evaluación disponían de dos horas. El siguiente es un modelo del diagnóstico:

Evaluativo Ingreso 2016

1) Resolver la siguiente ecuación: 5.(2x+3x) = x+8
2) a) Ordenar del 1 al 5 los pasos a seguir para resolver una operación combinada:
   Resolver la suma algebraica.
   Separar en términos la operación.
   Resolver las potencias y raíces.
   Resolver las operaciones entre paréntesis.
   Resolver las multiplicaciones y divisiones.

   b) Resolver la siguiente operación combinada, aplicar propiedades cuando sea necesario:

$$\left(\frac{3}{5}+\frac{1}{5}\right)^5 : \left(\frac{5}{4}\right)^3 + \sqrt{\frac{4}{9}:\frac{2}{3}} - \left(\frac{4}{5}\right)^{-2} =$$

3) Decir si las siguientes expresiones son verdaderas o falsas y justificar cada respuesta. Suponer b distinto de cero.

   a) $1+\frac{a}{b}=\frac{b+a}{b}$ b) $a^n a^m = a^{m+n}$

4) Hallar dos números tales que, si uno de ellos se suma con el doble del otro se obtiene 21, y que si al segundo número se le suma el doble del primero se obtiene 18.
   a) ¿Cuáles son los datos?
   b) ¿Cuáles son las incógnitas?
   c) ¿Qué información aporta el problema?
   d) ¿Que expresión utilizaras para resolverlo?
   e) Realiza los cálculos correspondientes y resuelve.
   f) Verifica los resultados encontrados.
   g) ¿Pudiste realizar los cálculos sin dificultad? Justifica
5) Dadas las siguientes rectas:
   $y = 5x + 2$ $r = -4x - 2$
   a) Determinar la pendiente y ordenada al origen de cada recta.
   b) Representar gráficamente.
   c) Determinar el valor de y para $x = 2$ y marcar este punto en el gráfico de la recta.

3.5 De la modalidad de evaluación de los resultados

Los estudiantes disponían de dos horas para responder. Se diseñó esta evaluación con ejercicios y preguntas, tratando de reflejar el modelo que se aplica en el nivel secundario, de esta forma a pesar de haber transcurrido por la nivelación, las competencias básicas, transversales y específicas quedarían en evidencia.

Una vez evaluada la respuesta de 50 estudiantes que conformaban el grupo de aspirantes a cursar carreras de grado, se obtuvieron las siguientes respuestas:

3.5.1 Competencias básicas

Tabla 4. Registro de datos de Competencias Básicas

Competencias Básicas								
a1	a2	a3	b1	b2	b3	b4	b5	b6
100%	77,08%	27,08%	87,5%	64,58%	50%	41,67%	31,25%	33,33%

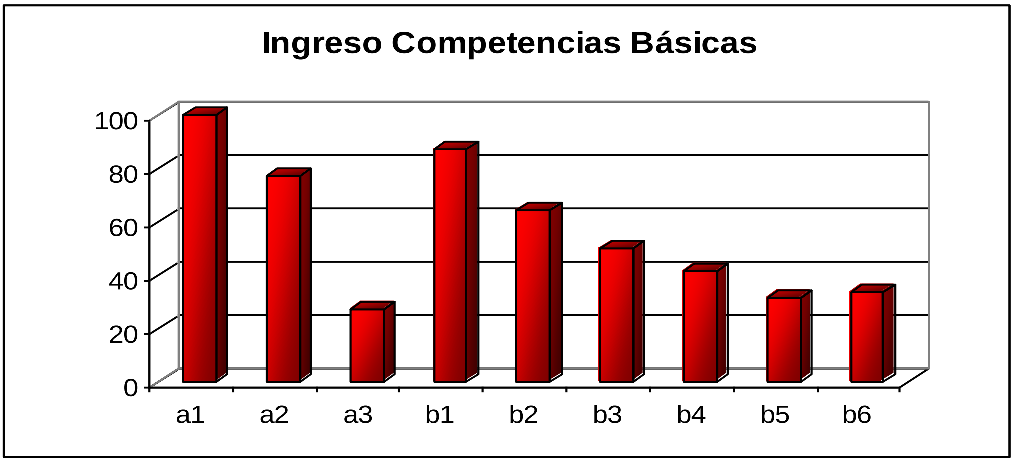


Fig. 1. Competencias Básicas. Fuente: Trabajo realizado por alumnos ingresantes FCF – UNSE

Indicadores de Logro de las Competencias Básicas:
a1) Utiliza los datos enunciados en el problema.

a2) Establece las ideas principales y detecta palabras claves.
a3) Elabora una representación gráfica – verbal adecuada a la organización discursiva presente en el texto y a la jerarquización de la información realizada.
b1) Identifica los elementos explícitos del problema: datos e incógnitas.
b2) Explica las situación planteada.
b3) Busca, selecciona y procesa la información necesaria para resolver la situación.
b4) Selecciona el método de resolución adecuado.
b5) Obtiene la solución del problema.
b6) Comunica los resultados con lenguaje claro y usando la notación correspondiente

3.5.2 Manejo de las formas del lenguaje matemático

Se observa cierto grado de desarrollo de esta competencia ya que según los indicadores de logro existe un buen dominio en la utilización de los datos, el que decrece al 77% en la interpretación del problema y a un 27% en la elaboración de una representación adecuada de la información provista en la situación.

3.5.3 Resolución de problemas

Los indicadores señalan un logro de un 87.5 % del desarrollo de esta competencia, destacándose entre los mismos, el b1 y b2, referidos a la identificación de elementos explícitos del problema y la explicación de la situación planteada, correspondiendo el menor porcentaje a la selección del métodos de resolución adecuada, comunicación de los resultados obtenidos

3.5.4 Competencias transversales

Tabla 5. Registro de datos de Competencias Transversales.

Competencias Transversales		
a	b	c
77.08 %	72.9 %	41.6 %

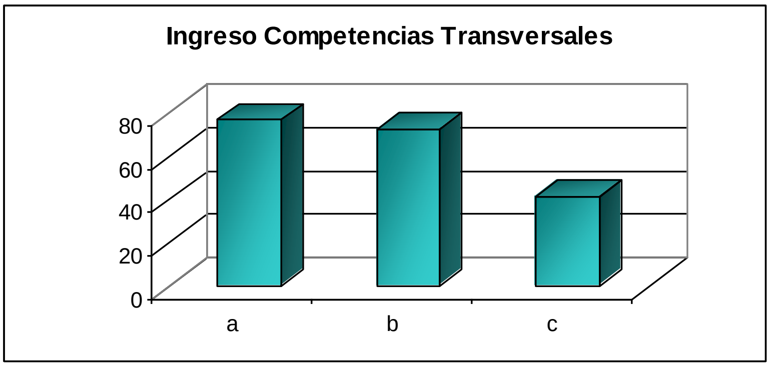


Fig. 2. Competencias transversales. Fuente: Trabajo realizado por alumnos ingresantes FCF - UNSE

Indicadores de logro de las competencias transversales:

a) Organiza adecuadamente el tiempo y el espacio de estudio para responder a la situación.
b) Relaciona situaciones de aprendizaje nuevas con experiencias anteriores y saberes previos.
c) Demuestra capacidad para comprender relaciones lógicas entre conceptos.

3.5.5 Planificación e implementación de estrategias de resolución de situaciones problemáticas

Según los indicadores de logro, los estudiantes manifiestan desarrollo al organizar los tiempos y relacionar con conceptos previos pero no demuestran comprender las relaciones lógicas entre conceptos.

La dificultad en el manejo del tiempo y del espacio de estudio para hacer frente a todas las tareas, en la dificultad que se observa en cuanto al establecimiento de relaciones de los nuevos aprendizajes con los aprendizajes previos y establecimiento de relaciones lógicas entre conceptos.

3.5.6 Competencias específicas

Tabla 6. Registro de datos de Competencias Específicas.

Competencias Específicas							
a1	a2	a3	a4	a5	b1	b2	b3
64,67%	52,5%	50%	35,42%	27,08%	31,25%	54,17%	33,33%

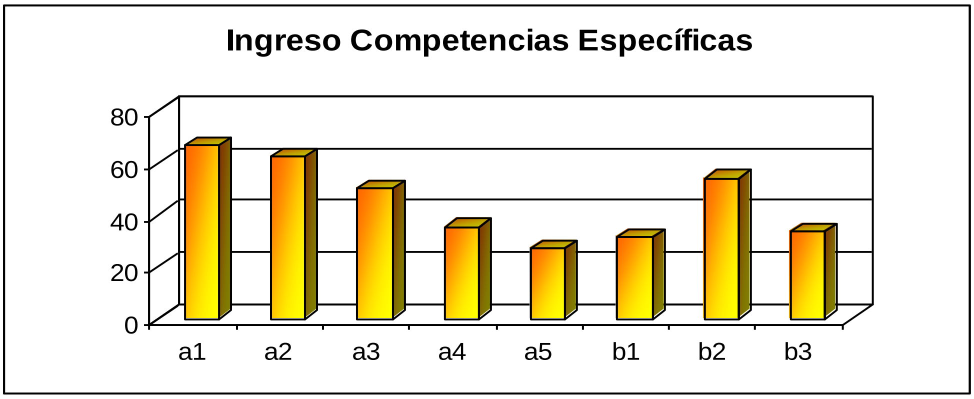


Fig. 3. Competencias específicas. Fuente: Trabajo realizado por alumnos ingresantes FCF - UNSE

Indicadores de Logro de las Competencias Específicas:
a1) Resuelve problemas aplicando conceptos matemáticos desarrollados en el ciclo medio
a2) identifica los conceptos matemáticos que utilizará en la resolución del problema.
a3) Usa la notación adecuada.
a4) Plantea y usa operaciones adecuadas para llegar a la solución.
a5) Comunica los resultados en forma adecuada.
b1) Justifica matemáticamente los resultados obtenidos.
b2) Reconoce y aplica propiedades numéricas.
b3) Resuelve adecuadamente las operaciones involucradas.

3.5.7 Resolver problemas aplicado a conceptos matemáticos desarrollados en el ciclo medio

El estudio de los 5 indicadores de logro nos permite observar que aproximadamente sólo el 45 % de los alumnos evidencia el desarrollo de esta competencia lo cual está en consonancia con lo que habitualmente se observa en los alumnos que ingresan: la falta de conocimiento de algunos conceptos claves, el incipiente desarrollo de algunas habilidades específicas, etc. necesarias para llevar a cabo estudios universitarios.

3.5.8 Reconocer y aplicar propiedades numéricas

Según los indicadores, el 39% manifiesta el logro de esta competencia, directamente vinculada con el conocimiento de los conjuntos numéricos. Este resultado es acorde a lo que habitualmente se observa en los grupos de alumnos que ingresan a nuestras carreras estos últimos años.

4 Conclusiones

En este estudio se tuvo en cuenta sólo algunas de las competencias básicas, transversales y específicas.

Estas fueron seleccionadas en virtud de lo que el grupo de estudio consideró como las más importantes a tener en cuenta.

Los resultados obtenidos permitieron determinar que el desarrollo de las competencias básicas es relativamente bueno al considerarlo globalmente, que se debe tener en cuenta las falencias en la comunicación de resultados, sin embargo existe una gran diferencia en los logros alcanzados en las competencias transversales y específicas, siendo las competencias específicas las que manifiestan un menor grado de desarrollo.

En función de la concepción de competencia adoptada, el logro de estas competencias debe entenderse como un proceso en progresivo crecimiento y adaptado al contexto institucional por lo que el resultado obtenido sólo muestra el estado de desarrollo de las competencias, quedando para el equipo catedra la responsabilidad de estructurar situaciones que permitan la evolución de las mismas.

Por otra parte, debe tenerse en cuenta que el estudio realizado abarcó sólo las competencias consideradas por el equipo como las más representativas, quedando para el futuro no sólo la evolución de éstas sino el estudio de otras, lo que nos permitirá efectuar la comparación con las competencias fijadas por el CONFEDI.

Referencias

1. CONFEDI. *Declaración de Valparaiso sobre competencias genéricas de egreso del ingeniero iberoamericano. Competencias genéricas de egreso del ingeniero argentino. Competencias requeridas para el ingreso a los estudios universitarios en Argentina.* FASTA Ediciones. (Abril 20l4)
2. D'Amore, B.; Godino, J.; Fandiño, M. Competencias y matemática. Bogotá. Magisterio. (2008)
3. Posada Alvarez, R. Formación superior basada en competencias, interdisciplinariedad y trabajo autónomo del estudiante. *Revista Iberoamericana de Educación*. http://www.rieoei.org/deloslectores/648Posada.PDF (2004). Accedido el 07 de Febrero de 2017.
4. Gentile, P.; Bencini, R. Construir competencias. *Entrevista con Philippe Perrenoud.* Universidad de Ginebra. Texto original de una entrevista "El Arte de Construir Competencias " original en portugués en Nova Escola (Brasil), pp.19-31. Traducción: Luis González Martinez. http://www.uv.mx/dgdaie/files/2013/09/Perrenoud_Construir-competencias.Entrevista-con-Philippe-Perrenoud.pdf (2000). Accedido el 07 de Febrero de 2017.
5. Gomez de Erice, M.V. Desarrollo cognitivo y competencias. *Documento de trabajo.* Mendoza. FEEyE. (2000).

Volver al Índice

Las Prácticas Educativas y el Desarrollo de Competencias Básicas en las Carreras de la Facultad de Ciencias Forestales

Sylvia Nabarro, Elsa Ibarra, Claudia Cejas, Carolina Ger
Departamento de Ciencias Básicas. Facultad de Ciencias Forestales. UNSE. Avda. Belgrano Sud 1912. CP 4200
sylvianabarro@yahoo.com.ar, egomez@unse.edu.ar, {claudiacejas_1, carolinager}@hotmail.com.

Resumen. Los docentes que nos encontramos en los primeros años de las carreras nos enfrentamos con una realidad que nos supera, por un lado recibimos alumnos del nivel secundario con escasos saberes disciplinares, hábitos de estudio memorísticos, actitud pasiva en las clases, desmotivados, etc.; por otro lado están las exigencias curriculares. Para superar esta problemática la universidad ha implementado, durante la última década, cursos de nivelación, para los cuales cada facultad ofrece su modalidad. No obstante hoy continuamos con la misma problemática, la repitencia y el abandono continúan en los mismos niveles. Este trabajo se propone indagar acerca de las competencias desarrolladas después de transcurrir el primer semestre en las aulas universitarias de las carreras de grado de la FCF, y determinar la formación del estudiante en habilidades, actitudes, comprensiones, disposiciones cognitivas y socio afectivas; apropiadas para facilitar el desempeño eficaz en nuevos contextos que desafían a sus conocimientos.

Palabras Clave: Competencias básicas, Ingeniería, Matemática

1 Introducción

Entre los objetivos y actividades planteadas en El Proyecto de Investigación "Potenciar el pensamiento matemático para contribuir al desarrollo de competencias pertinentes en los ingresantes a las carreras de la Facultad de Ciencias Forestales de la UNSE" se presenta el seguimiento de los alumnos, la aplicación de estrategias que pongan en movimiento las capacidades necesarias para el desarrollo óptimo en su carrera universitaria.

Del primer diagnóstico realizado se detecta una brecha entre las competencias que deben manifestar los alumnos ingresantes y la propuesta del CONFEDI además las modalidades de enseñanza en las asignaturas de primer año no son las apropiadas para el desarrollo de estas competencias.

En cuanto a las exigencias curriculares, los actuales planes de estudio que se corresponden a un curriculum centrado en disciplinas, en el cual los beneficios de estudiar lo que se enseña en cada asignatura quedan relegados al futuro, la interdisciplinariedad muchas veces está ausente. Un modelo caracterizado por lo teórico y formal, favoreciendo la homogenización de los contenidos curriculares e ignorando las particularidades de las carreras, privilegiando un estilo de aprendizaje teórico y abstracto en concordancia con el antiguo paradigma de formación de profesionales basado en la enseñanza como un simple esquema de transferencia de conocimiento.

La problemática está instalada en el ámbito universitario como consecuencia del proceso de adaptación de las universidades al Espacio Europeo de Educación Superior. En nuestro país en el año 2006 el Consejo Federal de Decanos de Ingeniería [1] en plenario de decanos acuerda un documento que sintetiza las Competencias Genéricas de Egreso del Ingeniero Argentino con el fin de orientar a las facultades de ingeniería en los procesos de enseñanza y de aprendizaje tendientes al desarrollo de competencias en sus alumnos. Siguiendo con la misma iniciativa y metodología en el año 2009 se llega a un acuerdo que es puesto a consideración de asociaciones y redes de perfil científico tecnológico, generándose otro documento sobre las Competencias requeridas para el ingreso a los Estudios Universitarios [2].

2 Desarrollo

Sergio Tobon en "Aspectos básicos de la formación basada en competencias" manifiesta, las competencias son un enfoque para la educación y no un modelo pedagógico, pues no pretenden ser una representación ideal de todo el proceso educativo, determinando cómo debe ser el proceso instructivo, el proceso desarrollador, la concepción curricular, la concepción didáctica y el tipo de estrategias didácticas a implementar. Al contrario, las competencias son un enfoque porque sólo se focalizan en unos aspectos específicos de la docencia, del aprendizaje y de la evaluación, como son:

1) La integración de los conocimientos, los procesos cognoscitivos, las destrezas, las habilidades, los valores y las actitudes en el desempeño ante actividades y problemas;
2) La construcción de los programas de formación acorde con los requerimientos disciplinares, investigativos, profesionales, sociales, ambientales y laborales del contexto; y
3) La orientación de la educación por medio de estándares e indicadores de calidad en todos sus procesos. En este sentido el enfoque de competencias puede llevarse a cabo desde cualquiera de los modelos pedagógicos existentes, o también desde una integración de ellos.

El enfoque de competencias implica cambios y transformaciones profundas en los diferentes niveles educativos, y seguir este enfoque es comprometerse con una docencia de calidad, buscando asegurar el aprendizaje de los estudiantes [3].

Para enfrentar los cambios que la sociedad actual demanda nos impone la necesidad de modificaciones profundas, tanto en la estructura organizativa tradicional de las universidades como en sus estrategias educativas y en los métodos pedagógicos. Conseguir esta mejora conlleva la necesidad de una reflexión sobre las propias prácticas educativas.

Pensar el tema de las prácticas docentes y su relación con las competencias de los ingresantes pone en evidencia la necesidad de buscar aportes que permitan, desde la reflexión, la mejora de la labor docente.

2.1 Objetivo

Conocer los resultados de la implementación de la propuesta didáctica para la formación en competencias.

2.2 Actividades:

Entre las actividades propuestas en el proyecto de investigación para cumplir con este objetivo se desarrollaron las siguientes:

- Identificación y análisis del conjunto dispositivos didácticos para implementarlos en el desarrollo de la asignatura
- Comparación de los datos obtenidos para determinar la relación entre el desempeño de los estudiantes en términos de competencias previas, la propuesta del CONFEDI y las modalidades de enseñanza.
- Planificación de actividades de docencia y capacitación intragrupal. Realización de seminarios internos de formación.
- Diseño de plan de monitoreo para la evaluación formativa y sumativa del proyecto. Diseño y análisis de actividades para la asignatura que favorezcan el desarrollo de competencias.

Como resultado de ellas se incorporaron clases teórico prácticas, en las cuales se introducen conceptos básicos acompañados de ejemplos y situaciones problemáticas que permiten al estudiante identificarse con la carrera elegida. Se implementó el Aula Virtual con videos, consulta a los docentes, tareas para fijar y significar los conceptos, autoevaluaciones y los textos de la asignatura.

Para poder realizar una investigación longitudinal se consideraron las competencias y los indicadores aplicados en la evaluación diagnóstico:

Considerando Competencia como la capacidad de articular eficazmente un conjunto de esquemas (estructuras mentales) y valores, permitiendo movilizar (poner a disposición) distintos saberes, en un determinado contexto con el fin de resolver situaciones profesionales [2].

Tabla 1. Indicadores de Logro de las Competencias Básicas.

Competencias Básicas (implican el desarrollo de saberes complejos y generales que hacen falta para cualquier tipo de actividad intelectual)	Indicadores de Logro
Manejo de las formas del lenguaje matemático	a1) Utiliza los datos enunciados en el problema. a2) Establece las ideas principales y detecta palabras claves. a3) Elabora una representación gráfica – verbal adecuada a la organización discursiva presente en el texto y a la jerarquización de la información realizada.
Resolución de problemas	b1) Identifica los elementos explícitos del problema: datos e incógnitas.

	b2) Explica las situación planteada. b3) Busca, selecciona y procesa la información necesaria para resolver la situación. b4) Selecciona el método de resolución adecuado. b5) Obtiene la solución del problema. b6) Comunica los resultados con lenguaje claro y usando la notación correspondiente

Tabla 2. Indicadores de Logro de las Competencias Transversales.

Competencias transversales (conjunto de actitudes, procesos mentales y procedimientos metodológicos comunes a diferentes disciplinas que se adquieren y aplican en el proceso de elaboración de diferentes saberes y del saber- hacer.)
Indicadores de Logro
Organiza adecuadamente el tiempo y el espacio de estudio para responder a la situación. Relaciona situaciones de aprendizaje nuevas con experiencias anteriores y saberes previos. Demuestra capacidad para comprender relaciones lógicas entre conceptos.

Tabla 3. Indicadores de Logro de las Competencias Específicas.

Competencias Específicas (vinculadas con los contenidos y capacidades particulares de cada ciencia)	Indicadores de Logro
a) Resolver problemas aplicado a conceptos matemáticos desarrollados en el ciclo medio	a1) Resuelve problemas aplicando conceptos matemáticos desarrollados en el ciclo medio a2) identifica los conceptos matemáticos que utilizará en la resolución del problema. a3) Usa la notación adecuada. a4) Plantea y usa operaciones adecuadas para llegar a la solución. a5) Comunica los resultados en forma adecuada.
b) Reconocer y aplicar propiedades numéricas	b1) Justifica matemáticamente los resultados obtenidos. b2) Reconoce y aplica propiedades numéricas. b3) Resuelve adecuadamente las operaciones involucradas.

2.3 De las modalidades de evaluación de dichas competencias y de la forma de implementación de los instrumentos de evaluación.

Se diseñó un trabajo que realizaron en forma grupal y escrito, con el propósito de determinar el desarrollo de las competencias básicas, transversales y específicas de los alumnos.

El trabajo se implementó al finalizar las actividades del cuatrimestre, dado que se quería tener en cuenta, específicamente, las competencias desarrolladas en este periodo y comparar con el primer diagnóstico.

El equipo de trabajo considero que en la evaluación de las competencias es importante salir de los contenidos disciplinares y evaluar el razonamiento lógico y los procesos de algoritmación

Para la resolución de la evaluación disponían de una hora.

- El trabajo consistió de cuatro problemas que se corresponden con dos tipos distintos que fueron identificados como Tipo I y Tipo II correspondiendo el primero a problemas de razonamiento lógico y el segundo a problemas de tipo algorítmico, los que fueron acompañados con la siguiente consigna:

Les pedimos que resuelvan entre dos de los siguientes desafíos matemáticos. Vuelque por escrito los pasos que siguió en los planteos y la resolución de las situaciones dadas. Deberá elegir un problema de cada Tipo.

Tipo I (pensamiento lógico)

1. Al abuelo no le es nada fácil distinguir las dos hermanas gemelas, Rosa y María. Aunque físicamente son idénticas, las dos se diferencian porque Rosa nunca dice la verdad y María es incapaz de decir una mentida. Un día, mientras los tres estaban en el salón de la casa, el abuelo preguntó a una de ellas si había pollo para cenar. La chica respondió susurrando unas palabras que el abuelo no llegó a entender. Entonces le preguntó a la otra hermana qué había dicho la primera, a lo que le respondió: “Ha dicho que no hay pollo.” ¿Puedes decir tú si había o no había pollo para cenar?

2. Tenemos a Marta, Lisa y a Berta. Una es futbolista, otra es gimnasta y otra nadadora. La gimnasta, la más baja de las tres, es soltera. Marta, que es la suegra de Lisa, es más alta que la futbolista. ¿A qué deporte se dedica cada una?

Tipo II (algoritmos)

1. Juan tenía ahorrados $30.000, compró una computadora y un televisor por $22.000 y los vendió por $24.560. ¿Cuánto le costó cada objeto, sabiendo que en la venta de la computadora ganó el 10% y en la venta del televisor ganó el 15%?
2. Antonio dice a Pedro: "el dinero que tengas es el doble del que tienes tu". Pedro le contesta: " si tú me das seis pesos tendremos los dos igual cantidad" ¿Cuánto dinero tenía cada uno?

Los problemas se acompañaron con las siguientes preguntas:

Preguntas orientativas para la resolución:

1- ¿Cuáles son los datos que se plantean?
2- ¿Cuáles son los datos que se deben averiguar? (incógnitas)
3- ¿Qué relación hay entre los datos planteados y las incógnitas?
4- ¿Existen datos innecesarios? ¿Cuáles?
5- ¿Qué dificultades tuvo para la resolución? Comente.

2.4 De la modalidad de evaluación de los resultados

Los estudiantes disponían de una hora para responderlos a dos problemas libremente seleccionados, uno de cada tipo, de los cuatro disponibles.

En el primero de ellos se tendía a evaluar las competencias transversales y básicas y en el segundo, además de estas, las competencias específicas.

Una vez evaluada la respuesta de 35 estudiantes que conformaban el grupo de alumnos de carreras de grado, se obtuvieron las siguientes respuestas:

2.4.1 Competencias básicas

Tabla 4. Registro de datos de Competencias Básicas

Competencias Básicas								
a1	a2	a3	b1	b2	b3	b4	b5	b6
100%	94.29%	94.29%	94.29%	82.86%	85.71%	77.14%	88.57%	91.43%

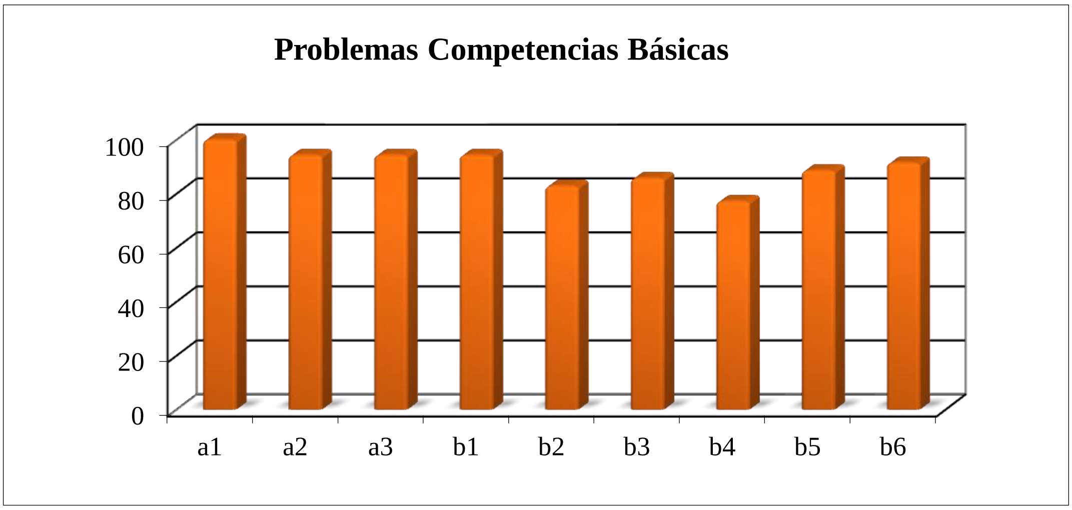


Fig. 1. Competencias Básicas. Fuente: Trabajo realizado por alumnos de 1° año FCF - UNSE

Indicadores de Logro de las Competencias Básicas:

a1) Utiliza los datos enunciados en el problema.
a2) Establece las ideas principales y detecta palabras claves.
a3) Elabora una representación gráfica – verbal adecuada a la organización discursiva presente en el texto y a la jerarquización de la información realizada.
b1) Identifica los elementos explícitos del problema: datos e incógnitas.
b2) Explica las situación planteada.
b3) Busca, selecciona y procesa la información necesaria para resolver la situación.
b4) Selecciona el método de resolución adecuado.
b5) Obtiene la solución del problema.
b6) Comunica los resultados con lenguaje claro y usando la notación correspondiente

2.4.2 Manejo de las formas del lenguaje matemático

Se observa un importante grado de desarrollo de esta competencia ya que según los indicadores de logro un 96.19% de los estudiantes manifiesta dominio en la utilización de los datos, en la interpretación del problema y en la elaboración de una representación adecuada de la información provista en la situación.

2.4.3 Resolución de problemas

Los indicadores señalan un logro de un 86.66 % del desarrollo de esta competencia, destacándose entre los mismos, el b1 y b6, referidos a la identificación de elementos explícitos del problema y la comunicación de los resultados obtenidos, correspondiendo el menor porcentaje de77% a la selección del métodos de resolución adecuada.

2.4.4 Competencias transversales

Tabla 5. Registro de datos de Competencias Transversales

Competencias Transversales		
a	b	c
65.71%	51.42%	48.57%

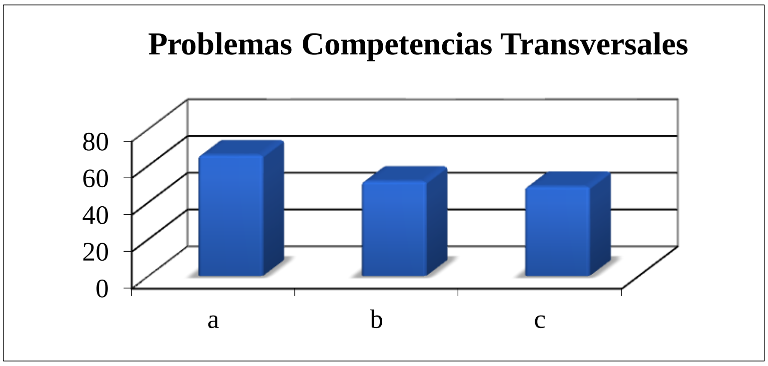


Fig. 2. Competencias transversales. Fuente: Trabajo realizado por alumnos de 1° año FCF - UNSE

Indicadores de logro de las competencias transversales:
d) Organiza adecuadamente el tiempo y el espacio de estudio para responder a la situación.
e) Relaciona situaciones de aprendizaje nuevas con experiencias anteriores y saberes previos.
f) Demuestra capacidad para comprender relaciones lógicas entre conceptos.

Planificación e implementación de estrategias de resolución de situaciones problemáticas.

Según los indicadores de logro, el 55.23% de los estudiantes manifiestan desarrollo en esta competencia seleccionada lo que se corresponde con las deficiencias observadas ya en los alumnos ingresantes: dificultad en el manejo del tiempo y del espacio de estudio para hacer frente a todas las tareas, en la dificultad que se observa en cuanto al establecimiento de relaciones de los nuevos aprendizajes con los aprendizajes previos y establecimiento de relaciones lógicas entre conceptos.

2.4.3 Competencias específicas

Tabla 6. Registro de datos de Competencias Específicas

Competencias Específicas							
a1	a2	a3	a4	a5	b1	b2	b3
45.71%	37.14%	37.14%	25.71%	31.43%	25.71%	40%	25.71%

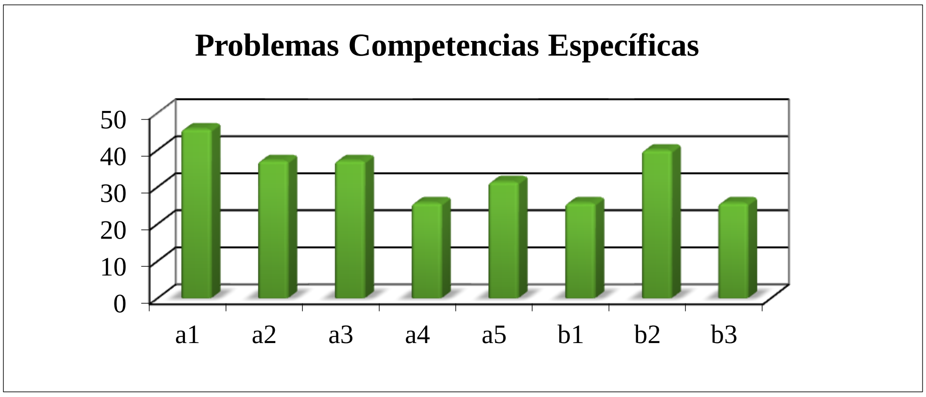


Fig. 3. Competencias específicas. Fuente: Trabajo realizado por alumnos de 1° año FCF – UNSE

Indicadores de Logro de las Competencias Específicas:
a1) Resuelve problemas aplicando conceptos matemáticos desarrollados en el ciclo medio
a2) Identifica los conceptos matemáticos que utilizará en la resolución del problema.
a3) Usa la notación adecuada.
a4) Plantea y usa operaciones adecuadas para llegar a la solución.
a5) Comunica los resultados en forma adecuada.
b1) Justifica matemáticamente los resultados obtenidos.
b2) Reconoce y aplica propiedades numéricas.
b3) Resuelve adecuadamente las operaciones involucradas.

2.4.4 Resolver problemas aplicado a conceptos matemáticos desarrollados en el ciclo medio

El estudio de los 5 indicadores de logro nos permite observar que el desarrollo de esta competencia se mantiene en niveles bajos en consonancia con lo que habitualmente se observa en los alumnos que ingresan: la falta de conocimiento de algunos conceptos claves, el incipiente desarrollo de algunas habilidades específicas, etc. necesarias para llevar a cabo estudios universitarios.

2.4.5 Reconocer y aplicar propiedades numéricas

Según los indicadores, el 30.47 % manifiesta el logro de esta competencia, directamente vinculada con el conocimiento de los conjuntos numéricos.

3 Conclusiones

En este proyecto de investigación longitudinal se consideraron las competencias y los indicadores aplicados seleccionados por el equipo de trabajo.

Los resultados obtenidos permitieron determinar que los estudiantes al finalizar el primer cuatrimestre, mejoraron en un alto grado el desarrollo de las competencias básicas comparativamente con las observadas en el ingreso.

Los logros alcanzados en las competencias transversales y específicas manifiestan un menor grado de desarrollo.

Queda la tarea para el equipo catedra del diseño y aplicación de situaciones que promuevan el desarrollo las competencias transversales y las específicas.

Además se debe considerar que la formación por competencias es un proceso progresivo en crecimiento y adaptado al contexto institucional, que debe realizarse en conjunto con el resto de las asignaturas tanto horizontal como verticalmente.

Referencias

1. CONFEDI. *Desarrollo de Competencias en la enseñanza de la Ingeniería Argentina*, Villa Carlos Paz. (2006)
2. CONFEDI. *Declaración de Valparaiso sobre competencias genéricas de egreso del ingeniero iberoamericano. Competencias genéricas de egreso del ingeniero argentino. Competencias requeridas para el ingreso a los estudios universitarios en Argentina.* FASTA Ediciones. (Abril 20l4)
3. Tobon S. *Aspectos básicos de la formación basada en competencias.* Talca: Proyecto Mesesup. http:/www.tecnologicocomfacauca.edu.co/FBC.pdf Accedido el 2 de Diciembre de 2016. (2006)

Volver al Índice

Rendimiento Académico de Alumnos de las Carreras de la Facultad de Ciencias Exactas y Tecnología de la UNT ante la Segunda Fase de Acreditación

Ana María Sfer, Estela del V. Ruiz, P. Lorena Naidicz
Facultad de Ciencias Exactas y Tecnologia FACET. UNT
Av. Independecia 1800
{asfer, eruiz}@herrera.unt.edu.ar , lorenafridrij@hotmail.com

Resumen. Dados los procesos nacionales de acreditación vigentes, es necesario monitorear el funcionamiento de una carrera y mejorar la calidad educativa. Hacen falta indicadores, que permitan cuantificar el rendimiento, que sean confiables, repetibles y verificables. Se utilizan datos provistos por el Sistema de Gestión Alumnos. Se armó una base para definir las variables Permanencia, Eficiencia en Examen y Eficiencia de Regularidad. Se tomaron datos de alumnos de las diferentes carreras, cohortes y todos los años de cursado. El objetivo es entender el comportamiento del alumno por curso y carrera. Los resultados se presentan en el Ciclo Básico de Ingeniería por materias y en los cursos posteriores por curso y carrera. En el Ciclo Básico, casi todos los indicadores dependen de las materias, mientras que en todos los cursos restantes hay diferencias entre las carreras, excepto para eficiencia de regularidad en 2do año.

Palabras Clave: Permanencia hasta Aprobar, Eficiencia de Regularidad, Eficiencia en Examen

1 Introducción

A nivel nacional el proyecto de unificación curricular de la Ingeniería Argentina acordó declarar de interés público a 21 terminales de la disciplina, la oferta de carreras en el año 2011 de estas terminales asciende a 396, 303 de las cuales se dictan en instituciones públicas. Estas terminales pasaron por procesos de acreditación, las que se sumaron otras carreras como las Licenciaturas en Informáticas. Este proceso ha ejercido, en general, un efecto positivo en las unidades académicas, ya que se produce una permanente acción hacia el mejoramiento y evolución con el objeto de responder a las recomendaciones y requerimientos.

Cuando las instituciones y sus docentes se proponen monitorear el funcionamiento de una carrera, mejorar la calidad educativa o asegurar las competencias de egreso con la concreción del perfil de egresado, no es tarea fácil, más aún sabiendo que el rendimiento de los estudios de un alumno depende de numerosos factores, desde los personales y sociales, hasta los dependientes de las instituciones. En las instituciones educativas es usual medir el rendimiento académico sólo con el resultado de las notas obtenidas [1] o el número de materias aprobadas. En algunos trabajos se han definido diferentes índices que dan información del rendimiento, por ejemplo los índices de Proceso (que considera la cantidad de alumnos promocionados en un curso), de Producto (que toma en cuenta la cantidad de alumnos que aprueban el examen final) y de Aprobación (que toma la cantidad de alumnos aprobados en un año) [1].

De cualquier forma si se van a considerar únicamente los datos numéricos para cuantificar el rendimiento académico (RA) de alumnos (en una asignatura, en una carrera en total o en etapas de la misma, de una o varias cohortes), es necesario que dichos datos sean confiables, repetibles y fácilmente verificables.

En trabajos anteriores, utilizando datos numéricos de alumnos de la Facultad de Ciencias Exactas y Tecnología de la UNT, se realizó la descripción y análisis del RA de los alumnos con el objeto de detectar los aspectos que funcionan bien y los que necesitan mejorar; qué situación es más problemática entre los alumnos, cursar y regularizar las materias, aprobar sus exámenes o mantener un ritmo sostenido; y si hay diferencias entre los alumnos de diferentes carreras o en que se parecen o diferencian las carreras. Se propuso incluso índices que permitieran comparar datos [2, 3, 4, 5, 6, 7].

En Ruiz y col (2007) se trabajó en el rendimiento de alumnos de diferentes cohortes y de una sola carrera de la FACET, se analizó el ritmo y velocidad de avance en la carrera, eficiencia en el cursado y en la aprobación de exámenes y las notas obtenidas. En Ruiz y col (2010 y 2012) se introduce el Índice de cursado, el concepto de calidad en el desempeño y la velocidad de avance. En Fernández y otros (2012) se analizó el comportamiento de los alumnos de todas las ingenierías de la FACET durante cinco años en las materias del CBI. En Sfer y otros (2014) se propone un índice que permite comparar las diferentes carreras que abarca eficiencia en examen, porcentaje de avance anual en la carrera y nota promedio de alumnos de nueve ingenierías.

En el presente trabajo, se utiliza nuevamente la variable Eficiencia en Examen y se incorporan Permanencia hasta aprobar la asignatura y Eficiencia de Regularidad, con el objeto de analizar lo que pasa durante el cursado de todas las materias en los distintos años de las carreras. Se tomaron los datos de todos los alumnos de las diferentes carreras, las cohortes seleccionadas y todos los años de cursado. El objetivo principal es entender el comportamiento del alumno en cada año de la carrera y si hay diferencia entre las carreras y años de cursado a fin de mejorar la calidad educativa. Los resultados son parte de un trabajo exhaustivo que se hizo para todas materias de todos los cursos de todas las carreras de la FACET.

Es necesario destacar que el presente trabajo no solo sirve para los datos utilizados, sino que se sistematizo el análisis para poder aplicarlo en futuras bases disponibles en la FACET, de modo que año a año se pueda tener información actualizada y generar informes similares a los que dieron lugar a este trabajo.

2 Material y Método

La muestra comprende los datos de cursada de los alumnos de la FACET de las cohortes 2008, 2009 y 2010 a marzo de 2016. La razón de la elección fue considerar cortes de las que hayas datos suficientes y completos sobre ingresantes, alumnos activos en todos los años de la carrera, que permiten hacer análisis estadísticos. Las carreras consideradas en este estudio son nueve ingenierías (Agrimensura, Ing. Biomédica, Ing. Civil, Ing. Computación, Ing. Eléctrica, Ing. Electrónica, Ing. Industrial, Ing. Mecánica, Ing. Química) y la Licenciatura en Informática, que son carreras que ya pasaron al menos por un ciclo de acreditación de la Comisión Nacional de Evaluación y Acreditación Universitaria (CONEAU).

Se obtuvieron datos para el estudio de 751 alumnos que se encuentran cursando alguna materia de la carrera. Los datos sobre los cuales se construyó la base para el estudio fueron proporcionados por el Sistema de Gestión Alumnos. Los datos originales no informaban ni carrera, ni curso al que pertenecía el alumno, sólo se disponía de la actuación académica de cada alumno en cada materia.

Se consideraron las siguientes variables: carrera, curso, asignaturas, permanencia hasta aprobar, eficiencia de regularidad y eficiencia en examen. La permanencia hasta aprobar comprende la cantidad de meses que transcurren desde que el alumno se inscribe por primera vez en la materia hasta que aprueba la misma. En este indicador sólo participan alumnos que tiene la materia aprobada al momento del estudio. Eficiencia de regularidad es la razón entre la cantidad de veces que regulariza y la cantidad de inscripciones en la materia. La Eficiencia en examen es uno sobre la cantidad de veces que se presenta a rendir la materia. Estas variables pueden compararse entre asignaturas, cursos y carreras. En el caso de las ingenierías, las materias que componen el Ciclo Básico de Ingeniería (CBI) se analizan por separado, ya que todos los alumnos comparten los espacios curriculares de las materias del CBI.

Las carreras tienen un número alto de materias, que va desde 39 hasta 50. Se descartan ciertas materias cuyo régimen de cursado y/o de evaluación son diferentes: Práctica Profesional Supervisada, Proyecto de Graduación e Idioma. Se muestran los datos por materia, por año de cursado y por cohorte. Todo el análisis estadístico se realiza con el soft STATA 11 [8].

3 Resultados y Análisis

3.1 Permanencia hasta aprobar la asignatura:

Se estudia la mediana de permanencia de materias del Ciclo Básico de Ingeniería (CBI). Tanto en 1er. año (χ^2=19.548, p=0.012) como en 2do. año (χ^2=9.975, p=0.019) de CBI hay diferencia estadísticamente significativa entre las materias. Las medianas de permanencia por materia y por cohorte se muestran en las Tablas 1 y 2, respectivamente. La columna de la derecha muestra un promedio global para las tres cohortes analizadas. La materia con menor mediana global de 1er. año es QQA con 7.8 meses y de 2do. año es TT7 con 12.7 meses.

Tabla 1. Medianas de Permanencia, en meses, y cantidad de alumnos para el 1er año del CBI, por materia y cohorte.

Materia	Cohorte						Mediana global
	2008	#alumnos	2009	#alumnos	2010	#alumnos	
CV1	16	291	10	343	16	304	12
FI1	11	267	11	330	16	295	11.4
FI2	16	236	16	280	16	244	15.2
QQA	9	288	8	351	8	320	7.8
QQB	9	242	9	288	9	258	8.4
TT1	11	287	10	333	11	307	10.4
TT2	11	273	12	317	16	302	12.2
TT3	12	243	12	293	13.5	258	12.3
TT4	19	236	16	282	12	245	13

Tabla 2. Medianas de Permanencia, en meses, y cantidad de alumnos para el 2do. año del CBI, por materia y cohorte

Materia	Cohorte						Mediana global
	2008	#alumnos	2009	#alumnos	2010	#alumnos	
FI3	22.5	170	22	213	19	156	21.2
TT5	16	199	16	233	18	186	16.7
TT6	19	160	18	185	18	119	18.3
TT7	12	173	12	194	14	141	12.7

Las medianas de permanencia hasta aprobar la materia por curso, de 2do. a 5to año, no son diferentes estadísticamente. La permanencia promedio por curso de 2do. a 5to año es 10.7 ± 4.4 meses.

Si analizamos curso por curso, distinguiendo carrera, las medianas de permanencia por carrera son diferentes estadísticamente para 2do. (χ^2=21.955, p=0.015), 3ro. (χ^2=40.676, p=0.0001), 4to. (χ^2=77.069, p=0 .0001) y 5to. año (χ^2=46.664, p=0.0001) se muestran en las Tablas 3 a la 6 respectivamente. El promedio global, por carrera, para las tres cohortes consideradas se muestra en cada tabla, en la última columna de la derecha. Entre las carreras numerosas, las que menor permanencia presentan son: Ing. Civil en 2do. año; Ing. Computación en 3ro. y 4to. año e Ing. Electrónica en 5to. año.

Tabla 3. Mediana de Permanencia, en meses, en 2do. año, por carrera y cohorte.

Carrera	Cohorte			Mediana global
	2008	2009	2010	
Agrimensura	12	13	12	12.5
Ing. Azucarera	--	6	9	7.5
Ing. Biomédica	14	14	13	13
Ing. Civil	11	9	9	9
Ing. Computación	10	9	9	10
Ing. Eléctrica	10	13	11	12
Ing. Electrónica	11	13	10	12
Ing. Industrial	13	12	12	11.5
Lic. Informática	11	7	8	7.5
Ing. Mecánica	20	10	12	12.3
Ing. Química	16	16	16	16

Tabla 4. Mediana de Permanencia, en meses, en 3er año, por carrera y por cohorte.

Carrera	Cohorte			Mediana global
	2008	2009	2010	
Agrimensura	17	16	12	14.5
Ing. Azucarera	--	--	9	9
Ing. Biomédica	12	11	16	12
Ing. Civil	12	11	9	11
Ing. Computación	9	9	6	7.25

Ing. Eléctrica	13	11	11	12
Ing. Electrónica	13	11	12	12
Ing. Industrial	10	11	9	10.3
Lic. Informática	8	13	11	10
Ing. Mecánica	9	9	9	9
Ing. Química	21	18	18	19

Tabla 5. Mediana de Permanencia, en meses, en 4to año, por carrera y cohorte.

Carrera	Cohorte			Mediana global
	2008	2009	2010	
Agrimensura	13	9	9	11
Ing. Azucarera			4	4
Ing. Biomédica	12	15	11	12.5
Ing. Civil	14	11	11	12
Ing. Computación	4	4.5	4	4
Ing. Eléctrica	22	9	8	10
Ing. Electrónica	8	7	5	6
Ing. Industrial	11.5	11	8	11
Lic. Informática	13	7	8	8
Ing. Mecánica	14	14	12	12.75
Ing. Química	20	19	11	19

Tabla 6. Mediana de Permanencia, en meses, en 5to año, por carrera y cohorte **.**

Carrera	Cohorte			Mediana global
	2008	2009	2010	
Agrimensura	9	24	19	15
Ing. Biomédica	25	19	22	22
Ing. Civil	11	15	9	12
Ing. Computación	4	6	6	5.5
Ing. Eléctrica	13	16	6	12.3
Ing. Electrónica	4	5	5	4
Ing. Industrial	14	12	9	12
Lic. Informática	7	6	7	7
Ing. Mecánica	12	14	4	12.5
Ing. Química	13	15	6.5	13

En síntesis la permanencia promedio en 1er. año oscila entre 10 y 19 meses (todas materias CBI) en 2do. año entre 12 y 23 meses en las materias del CBI y entre 7.5 y 16 meses en las materias específicas de cada carrera. En 3er., 4to. y 5to. año la permanencia promedio depende de cada carrera, oscila entre 9 y 19 meses en 3er año; entre 4 y 19 meses en 4to año y entre 4 y 22 meses en 5to año.

3.2 Eficiencia de Regularidad

Se estudia la eficiencia de regularidad promedio de materias del CBI. En 1er. año hay diferencia estadísticamente significativa entre las materias (χ^2=24.169, p=0.002). Las Eficiencia de regularidad promedio por materia y por cohorte se muestran en la Tabla 7. Se observa que las materias que mayor Eficiencia de regularidad promedio presentan son FI2 y TT4.

Tabla 7. Eficiencia de regularidad promedio en 1er. año del CBI, por materia y cohorte.

Materia	Cohorte			Media global
	2008	2009	2010	
CV1	0.31	0.39	0.32	0.34
FI1	0.52	0.56	0.47	0.52
FI2	0.76	0.78	0.78	0.77
QQA	0.70	0.72	0.68	0.70

QQB	0.45	0.46	0.66	0.52
TT1	0.62	0.61	0.58	0.60
TT2	0.56	0.53	0.48	0.52
TT3	0.72	0.75	0.73	0.73
TT4	0.75	0.78	0.81	0.78

En 2do. año, también hay diferencia estadísticamente significativa de la Eficiencia de regularidad promedio entre las materias ($\chi 2=74.341$, $p<0.001$). En la Tabla 8 se muestra la Eficiencia de regularidad promedio, por materia y por cohorte. Se observa que la materia con mayor Eficiencia de regularidad promedio es TT6 en los años 2008 y 2009, mientras que TT7 es la que presenta mayor Eficiencia promedio en el año 2010.

Tabla 8. Eficiencia de regularidad promedio en 2do. año del CBI, por materia y cohorte.

Materia	Cohorte			Media global
	2008	2009	2010	
FI3	0.72	0.71	0.69	0.71
TT5	0.76	0.75	0.73	0.75
TT6	0.81	0.76	0.73	0.76
TT7	0.62	0.71	0.75	0.69

En lo que sigue del análisis de Eficiencia de regularidad promedio se analiza las materias específicas de cada carrera, curso por curso, distinguiendo carrera.

En 2do. año, no hay diferencia estadísticamente significativa de la regularidad promedio entre las carreras ($\chi^2=18.285$, $p=0.050$). La Eficiencia Promedio es 0.72±0.25.

En 3er. año, hay diferencia estadísticamente significativa entre las carreras ($\chi^2=59.417$, $p<0.001$). Ing. Civil e Ing. Mecánica son, entre las carreras numerosas, las que mayor Eficiencia promedio global presentan, 0.82 y 0.83 respectivamente. Ing. Azucarera sólo presenta datos en el año 2010 y su Eficiencia promedio es igual a 1, ver Tabla 9.

Tabla 9. Eficiencia de Regularidad promedio, por carrera y cohorte.

Carrera	Cohorte			Media global
	2008	2009	2010	
Agrimensura	0.54	0.34	0.60	0.49
Ing. Azucarera	.	.	1	1
Ing. Biomédica	0.78	0.76	0.61	0.72
Ing. Civil	0.78	0.84	0.85	0.82
Ing. Computación	0.8	0.68	0.67	0.72
Ing. Eléctrica	0.77	0.82	0.59	0.73
Ing. Electrónica	0.8	0.79	0.65	0.74
Ing. Industrial	0.68	0.73	0.74	0.71
Lic. en Informática	0.79	0.68	0.62	0.72
Ing. Mecánica	0.78	0.87	0.85	0.83
Ing. Química	0.70	0.76	0.77	0.74

En 4to. año, hay diferencia estadísticamente significativa entre las carreras ($\chi^2=36.750$, $p=0.0001$). La carrera Agrimensura es la que presenta mayor Eficiencia promedio global, 0.84 sin embargo se trata de una carrera de pocos alumnos. Ing. Azucarera no tiene datos para las cohortes 2008 y 2009. Entre las carreras numerosas, Ing. Electrónica es la que mayor Eficiencia de regularidad promedio global presenta, alcanzando un 0.83, ver Tabla 10.

Tabla 10. Eficiencia de Regularidad promedio en 4to año, por carrera y cohorte.

Carrera	Cohorte			Media global
	2008	2009	2010	
Agrimensura	0.95	0.80	0.76	0.84
Ing. Azucarera	--	--	0.67	0.67
Ing. Biomédica	0.64	0.5	0.57	0.57

Ing. Civil	0.86	0.81	0.7	0.79
Ing. Computación	0.8	0.61	0.59	0.67
Ing. Eléctrica	0.72	0.76	0.7	0.73
Ing. Electrónica	0.87	0.77	0.86	0.83
Ing. Industrial	0.76	0.71	0.76	0.74
Lic. en Informática	0.73	0.83	0.7	0.76
Ing. Mecánica	0.69	0.72	0.63	0.68
Ing. Química	0.69	0.66	0.56	0.63

En 5to. año, hay diferencia estadísticamente significativa entre las carreras (χ^2=20.626, p=0.014). La carrera Agrimensura es la que presenta mayor Eficiencia promedio global, 0.82, sin embargo se trata de una carrera de pocos alumnos. Ing. Azucarera no tiene datos. Entre las carreras numerosas, Ing. Química es la que mayor Eficiencia de regularidad promedio global presenta, alcanzando un 0.78, ver Tabla 11.

Tabla 11. Eficiencia de Regularidad promedio en 5to año, por carrera y por cohorte.

Carrera	Cohorte			Media global
	2008	2009	2010	
Agrimensura	0.91	0.73	0.79	0.82
Ing. Biomédica	0.66	0.75	0.5	0.64
Ing. Civil	0.83	0.76	0.79	0.79
Ing. Computación	0.73	0.47	0.54	0.58
Ing. Eléctrica	0.8	0.48	0.5	0.59
Ing. Electrónica	0.69	0.47	0.57	0.58
Ing. Industrial	0.82	0.75	0.59	0.72
Lic. en Informática	0.83	0.83	0.38	0.73
Ing. Mecánica	0.69	0.74	0.46	0.63
Ing. Química	0.84	0.79	0.71	0.78

3.3 Eficiencia en Examen

Se estudia la eficiencia en examen promedio de materias CBI. En el 1er. año hay diferencia estadísticamente significativa entre las materias (χ^2=22.8889, p= 0.0035). Las Eficiencia en examen promedio por materia y por cohorte se muestran en la Tabla 12. Se observa que las materias que mayor Eficiencia de examen promedio presentan son QQA y QQB.

Tabla 12. Eficiencia de examen promedio en 1er. año, por materia y cohorte.

Materia	Cohorte			Media global
	2008	2009	2010	
CV1	0.85	0.80	0.78	0.87
FI1	0.70	0.70	0.64	0.75
FI2	0.73	0.74	0.78	0.79
QQA	0.85	0.884	0.88	0.92
QQB	0.95	0.974	0.96	0.97
TT1	0.70	0.68	0.62	0.74
TT2	0.71	0.75	0.77	0.79
TT3	0.76	0.74	0.78	0.80
TT4	0.67	0.72	0.79	0.76

En el 2do. año del CBI, no hay diferencia estadísticamente significativa entre la permanencia de las materias, (χ^2=40.4815, p=0.2139). La eficiencia de examen promedio es igual 0.73±0.083 para todas las materias.

En lo que sigue del análisis de Eficiencia de examen promedio se analiza curso por curso, distinguiendo carrera. Además en 2do. año no se tienen en cuenta las asignaturas del CBI, sino sólo las materias específicas de cada carrera.

En 2do. año, hay diferencia estadísticamente significativa entre las carreras (χ^2=36.668, p=0.0001). La mayor Eficiencia de examen promedio lo presenta la Lic. en Informática. La carrera Ing. Azucarera no tiene datos para la cohorte 2008. Entre las más numerosas, la carrera Ing. Industrial, presenta la mayor Eficiencia de examen promedio global, ver Tabla 13.

Tabla 13. Eficiencia de Examen promedio en 2do. año, por carrera y cohorte.

Carrera	Cohorte			Media global
	2008	2009	2010	
Agrimensura	0.74	0.82	0.92	0.88
Ing. Azucarera	.	1	1	1
Ing. Biomédica	0.83	0.8	0.83	0.87
Ing. Civil	0.86	0.9	0.83	0.89
Ing. Computación	0.83	0.8	0.78	0.83
Ing. Eléctrica	0.89	0.85	0.87	0.89
Ing. Electrónica	0.89	0.83	0.74	0.87
Ing. Industrial	0.89	0.91	0.9	0.93
Lic. en Informática	0.96	0.92	0.94	0.97
Ing. Mecánica	0.79	0.78	0.78	0.84
Ing. Química	0.9	0.9	0.89	0.92

En 3er. año, hay diferencia estadísticamente significativa entre las carreras (χ^2=26.820 p=0.003). La eficiencia promedio, por cohorte y por carrera se muestra en la Tabla 14. La carrera con mayor Eficiencia promedio es Ing. Mecánica y le sigue Ing. en Computación.

Tabla 14. Eficiencia de Examen promedio en el 3er. año, por carrera y cohorte.

Carrera	Cohorte			Media global
	2008	2009	2010	
Agrimensura	0.89	0.84	0.99	0.91
Ing. Azucarera	--	--	1	1
Ing. Biomédica	0.92	0.83	0.85	0.86
Ing. Civil	0.90	0.89	0.92	0.90
Ing. Computación	0.92	0.94	0.96	0.94
Ing. Eléctrica	0.88	0.86	0.84	0.86
Ing. Electrónica	0.90	0.87	0.91	0.89
Ing. Industrial	0.89	0.93	0.93	0.92
Lic. en Informática	0.88	0.92	0.81	0.87
Ing. Mecánica	0.96	0.96	0.97	0.96
Ing. Química	0.89	0.91	0.92	0.91

En 4to. año hay diferencia estadísticamente significativa entre las carreras (χ^2=31.583, p=0.0005). La eficiencia promedio, por cohorte y por carrera se muestra en la Tabla 15. La carrera con mayor Eficiencia global promedio es Ing. en Computación y le sigue Ing. Mecánica.

Tabla 15. Eficiencia de Examen promedio y cantidad de alumnos de 4to año, por carrera y cohorte.

Carrera	Cohorte			Media global
	2008	2009	2010	
Agrimensura	0.93	1	0.93	0.93
Ing. Azucarera	--	--	1	1
Ing. Biomédica	0.88	0.67	0.5	0.78
Ing. Civil	0.92	0.92	1	0.95
Ing. Computación	0.98	0.98	1	0.99
Ing. Eléctrica	0.92	1	1	0.96
Ing. Electrónica	0.95	0.97	1	0.97
Ing. Industrial	0.91	0.95	0.97	0.94
Lic. en Informática	0.89	0.93	0.88	0.90
Ing. Mecánica	0.98	0.99	0.98	0.98
Ing. Química	0.88	0.97	0.88	0.91

En 5to. año hay diferencia estadísticamente significativa entre las carreras (χ^2=23.620, p= 0.0049). La eficiencia promedio, por cohorte y por carrera se muestra en la Tabla 16. La carrera con mayor Eficiencia promedio es Ing. en Computación y le sigue Ing. Electrónica, Mecánica y Química.

Tabla 16. Eficiencia de Examen promedio y cantidad de alumnos de 5to año, por carrera y cohorte.

Carrera	Cohorte			Media global
	2008	2009	2010	
Agrimensura	0.94	0.78	0.74	0.84
Ing. Biomédica	0.86	0.9	0.5	0.75
Ing. Civil	0.95	0.96	1	0.96
Ing. Computación	1	1	0.98	0.99
Ing. Eléctrica	1	1	1	1
Ing. Electrónica	1	1	0.95	0.98
Ing. Industrial	0.95	0.96	1	0.97
Lic. en Informática	0.95	1	0.88	0.95
Ing. Mecánica	0.95	1	1	0.98
Ing. Química	0.98	0.98	1	0.98

4 Discusión y conclusiones

La Permanencia promedio, en cada materia hasta aprobarla, en el CBI, varía según la materia. En 1er. año la materia con menor mediana global es QQA con 7.8 meses, y en el 2do. año es TT7 con 12.7 meses.Si analizamos, en cada año de 2do. a 5to, por carrera, se observa que la permanencia cambia con la carrera. A modo de síntesis se puede decir que en 2do. año la permanencia oscila entre 7.5 y 16 meses, en 3er año entre 9 y 19 meses; en 4to año entre 4 y 19 meses y en 5to año entre 4 y 22 meses.

Con respecto a la Eficiencia de regularidad promedio del CBI, hay diferencia estadísticamente significativa entre las materias. En 1er. año las materias que mayor Eficiencia de regularidad promedio presentan son FI2 y TT4 y en 2do. año TT6.

Al analizar la Eficiencia de regularidad promedio curso por curso, distinguiendo carrera se observa que sólo en 2do año no hay diferencia estadísticamente significativa con promedio igual a 0.72±0.25. En el resto de los cursos, entre las carreras más numerosas, las de mayor Eficiencia de regularidad promedio son: en 3er. año, Ing. Civil e Ing. Mecánica; en 4to año, Ing. Electrónica y en 5to año, Ing. Química.

Con respecto a la Eficiencia en examen de materias del CBI, en el 1er. año hay diferencia estadísticamente significativa entre las materias. Las materias que mayor Eficiencia de examen promedio presentan son QQA y QQB. En el 2do. año, no hay diferencia estadísticamente significativa y la eficiencia de examen promedio es igual 0.73±0.083 para todas las materias.

Cuando se tiene en cuenta la carrera en la Eficiencia en examen, se observa que en todos los años hay diferencia estadísticamente significativa entre las carreras.

Entre las carreras numerosas, la que mayor eficiencia en examen presentan son: 2do. año Ing. Industrial; en 3er. año, Ing. Mecánica y le sigue Ing. en Computación; en 4to. año Ing. en Computación y le sigue Ing. Mecánica y en 5to. año Ing. en Computación y le sigue Ing. Electrónica, Mecánica y Química.

Referencias

1. Cascon, D.I.: Análisis de las calificaciones escolares como criterio de rendimiento académico. *Colegio Público Juan García Pérez, España*. http://www30.usal0.es0./inico/investigacion/jornadas/jornada2/comunc/cl7. (2000).
2. Ruiz E.; Ruiz G. y Odstrcil M. "Metodología para realizar el seguimiento académico de alumnos universitarios. El caso de las primeras cohortes de Ingeniería Biomédica*". Revista Iberoamericana de Educación. (RIE)* ISSN: 1681-5653. http://www.rieoei.org/deloslectores2.htm#11. (2007).
3. Ruiz, G., Ruiz, J., Ruiz, E.: Indicador global de rendimiento. *Revista Iberoamericana de Educación (RIE).* ISSN: 1681-5653, Número 52/4. http://www.rieoei.org/3258.htm. (2010).
4. Ruiz, G., Ruiz, E., Odstrcil, M., Ruiz, J.: Avance en la carrera y calidad en el desempeño, como factores del rendimiento académico en carreras de ingeniería en la UNT. *Resumen y Trabajo largo en las VIII Jornadas de Ciencia y Tecnología de Facultades de Ingeniería del NOA, Tucumán,* (2012).

5. Fernández, A. E.; Sfer, A.M. y Ruiz, E. “El ciclo básico de ingeniería de la Facultad de Ciencias Exactas y Tecnología de la Universidad Nacional de Tucumán”. *Resumen y Trabajo largo en las VIII Jornadas de Ciencia y Tecnología de Facultades de Ingeniería del NOA*, Tucumán, setiembre de 2012.
6. Sfer, Ana M. y Ruiz, Estela del V. Rendimiento Académico de Alumnos de las Carreras de Ingeniería de la Fac. de Ciencias Exactas y Tecnología de la UNT a 10 años de la primera acreditación. *Segundo Congreso Argentino de Ingeniería*. Tucumán. Argentina. (2014).
7. Odstrcil, M., Ruiz, E., Ruiz, G.: Software para el análisis estadístico de datos académicos de la FACET. *CET Revista de Ciencias Exactas e Ingeniería, UNT*, ISSN: 1668-8910, Vol0. 33:17-22 (2012).
8. Statistics/Data Analysis. Stata 11.1 Copyright 2009. StataCorp LP.

Volver al Índice

Introducción al Estudio de la Función Signo Matricial

Leonor E. de la Torre, Graciela B. Ganyitano, Claudia R. Fernández, Sonia V. Jacamo
Departamento de Matemática, Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de San Juan
Avenida Libertador G. S. Martín 1109(O)
{etorre, gganyita, cfernandez, sjacamo}@unsj.edu.ar

Resumen. La función signo de una matriz y la función exponencial de una matriz son de las funciones matriciales más estudiadas tanto por interés teórico como por sus útiles aplicaciones. La función signo matricial desempeña un papel fundamental en campos de investigación tales como: aproximación y condicionamiento de las funciones de matrices, aplicaciones en teoría de control, como la solución de las ecuaciones algebraicas matriciales de Lyapunov y de Riccati. En cálculo de subespacios invariantes, valores propios de una matriz, cálculo de la raíz cuadrada, entre otros.
La función signo de una matriz puede ser calculada por varios métodos. Este trabajo está centrado en la resolución completa de un ejemplo del cálculo de la función signo de una matriz *A* de orden tres por el Método de Schur, que tiene mucho costo computacional, pero una excelente estabilidad numérica. Dicho método recibe este nombre porque utiliza la descomposición de Schur de *A*.

Palabras Clave: Función matricial, Método de Schur**,** Función signo. Matrices triangulares.

1 Introducción

Dentro del marco del Proyecto de investigación "Funciones Matriciales y sus aplicaciones", el equipo de trabajo estudia entre otros temas la función signo matricial.

Una de las primeras referencias de esta función, se encuentra en el trabajo realizado por Zolotarjov en el año 1877, sin embargo el verdadero auge de esta función se da a partir del trabajo desarrollado por Roberts en 1971, que no fue muy conocido por la comunidad científica hasta que en 1980 aparece un artículo en la revista International Journal of Control. Fruto del trabajo, realizado por Roberts, se han desarrollado numerosos campos de investigación basados en el cálculo de la función signo matricial [1, 2]. En 2008 Higham [3], le dedica todo un capítulo en su libro a la función signo de una matriz donde describe distintas técnicas y algoritmos de cálculo y hace referencia a numerosos trabajos realizados.

El presente trabajo consta de dos partes. En la primera parte se expone la definición de la función signo escalar y su extensión a la función signo matricial. Luego con respecto a la función signo de una matriz, se exponen algunas propiedades válidas y se describe el Método de Schur para el cálculo de dicha función. En la segunda parte se resuelve en forma completa un ejemplo del cálculo de la función signo de una matriz A de orden *3x3* que tiene valores propios reales y distintos, partiendo de la descomposición de Schur de A.

1.1 Función signo Matricial.

La Función signo escalar está definida para $z \in \mathbb{C}$ despreciando la parte imaginaria por:

$$\text{sign}(z) = \begin{cases} 1 & \text{si } Re(z) > 0 \\ -1 & \text{si } Re(z) < 0 \end{cases}$$

Sea $f: R \to R$ una función escalar definida sobre el espectro de $A \in C^{nxn}$, entonces $f(A)$ se puede calcular de distintas formas cuya equivalencia está demostrada [1, 3].

A lo largo del trabajo se supone que $A \in C^{nxn}$ no tiene valores propios sobre el eje imaginario, así sign(A) está definida, y la suposición implica que A es una matriz no singular, esto es, A es invertible. [3]

Si $A = Z.J.Z^{-1}$ es la forma canónica de Jordan organizada de tal forma que $J = \text{diag}(J_1, J_2)$, donde $J_1 \in C^{pxp}$ tiene valores propios en el semiplano izquierdo y $J_2 \in C^{qxq}$ tiene valores propios en el semiplano derecho entonces

$$\text{sign}(A) = Z.\text{sign}(J).Z^{-1}$$

$$\text{sign}(A) = Z.\begin{bmatrix} -\mathrm{I_p} & \theta \\ \theta & \mathrm{I_q} \end{bmatrix} \mathrm{Z}^{-1} \qquad \textbf{(1)}$$

Por otro lado para la función escalar vale:

$$\text{sign}(z) = \frac{z}{(z^2)^{\frac{1}{2}}}$$

así una generalización matricial sería

$$\text{sign}(A) = A.(A^2)^{-1/2}. \qquad \textbf{(2)}$$

Recordemos que $B^{1/2}$ denota la raíz principal de B. Así, si A no tiene valores propios imaginarios puros, entonces A no tiene valores propios en R^-

A partir de (2) se puede derivar la expresión integral $\text{sign}(A)$ como sigue:

$$\text{sign}(A) = \frac{2}{\pi} A \int_0^\infty (t^2 I + A^2)^{-1} dt \qquad \textbf{(3)}$$

Algunas propiedades de la función signo se dan en el siguiente teorema.

Teorema 1. (Propiedades de la función signo) [3] Sea A ϵ C^{nxn} que no tiene valores propios imaginarios puros y sea S=sign(A) entonces.

a) $S^2 = I$ (S es involutiva $S^{-1} = S$)
b) S es diagonalizable con valores propios $t = \pm 1$
c) $S.A = A.S$
d) Si A es real entonces S es real.
e) $\left(\frac{I+S}{2}\right)$ e $\left(\frac{I-S}{2}\right)$ son proyectores sobre subespacios invariantes asociados con los valores propios en el semiplano derecho y en el semiplano izquierdo respectivamente.

Aunque el sign(A) es una raíz cuadrada de la matriz Identidad, no es igual a I ó –I, a menos que el espectro de A esté enteramente en el semiplano abierto derecho o abierto izquierdo respectivamente.

Por lo tanto, en general, sign(A) es una raíz no primitiva de *I*; además, aunque sign(A) tiene valores propios ± 1, su norma puede ser arbitrariamente grande.

Lema 1: [4, 5] Si *T* es una matriz triangular y f una función analítica tal que $\boldsymbol{f(T)}$ está bien definida, entonces $\boldsymbol{F = f(T)}$ verifica $\boldsymbol{F.T = T.F}$.

Teorema 2 (Función matricial de una función triangular) [3] Si $T \in C^{nxn}$ una matriz triangular superior y sea *f* una función escalar definida sobre el espectro de *T*, entonces $F = f(T)$ es una matriz triangular superior con

$f_{ii} = f(t_{ii})$ y

1) por recurrencia de Parlett [4], empleando $TF = FT$

$$f_{ij} = t_{ij}\frac{f_{ii} - f_{jj}}{t_{ii} - t_{jj}} + \sum_{k=i+1}^{j-1} \frac{f_{ik}t_{kj} - t_{ik}f_{kj}}{t_{ii} - t_{jj}}, \qquad \text{para } i < j \text{o}$$

2)

$$f_{ij} = \sum_{(s_0 \dots s_k)} t_{s0,s1}\ t_{s1,s2}\ \dots t_{sk-1,sk}\ f[\lambda_{s0}, \dots \lambda_{sk}]$$

2 Donde $\lambda_i = t_{ii}$, y S_{ij} el conjunto de todas las sucesiones estrictamente crecientes que comienzan en i y j y $f[\lambda_{s0}, \dots \lambda_{sk}]$ es la k-ésima diferencia dividida.

1.2 Método de Schur

El método elegido en nuestro ejemplo para el cálculo de sign(A) es el Método de Schur, que a pesar de ser costoso tiene una excelente estabilidad numérica. No es adecuado para aquellas situaciones en que la solución del problema se halla directamente de la descomposición de Schur de A sin emplear explícitamente la función signo.

Teorema 3: (Forma y descomposición de Schur) [6] Sea $\boldsymbol{A} \in \boldsymbol{C}^{nxn}$,

a) A es unitariamente semejante a una matriz triangular superior $\boldsymbol{T} = \boldsymbol{Q}^{\boldsymbol{T}}.\boldsymbol{A}.\boldsymbol{Q}$ con Q unitaria y con los valores propios de A (repetidos de acuerdo a sus multiplicidades algebraicas) en la diagonal principal de T. Se llama a T una forma de Schur de A y a la descomposición $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{Q}.\boldsymbol{T}.\boldsymbol{Q}^{\boldsymbol{T}}$ una descomposición de Schur de A.

b) Si A y sus valores propios son reales entonces se puede considerar a Q como real y por lo tanto ortogonal**.**

3

Si f es una función escalar definida sobre el espectro de A entonces $f(A) = Q.f(T).Q^T$, luego el problema del cálculo de $f(A)$ se reduce al cálculo de $f(T)$. Por lo que la atención se pondrá en el cálculo de función de matrices triangulares.

2 **Ejemplo:** Hallar la función signo de la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 6 & -5 \\ 1 & 4 & -1 \\ 1 & 6 & -3 \end{bmatrix} \quad \textbf{(4)}$$

2.1 Cálculo de la descomposición de Schur de A

Para hallar la descomposición de Schur de A, primero encontramos polinomio característico, valores propios y subespacios propios de A. Luego encontramos una sucesión de matrices Q_i cuyo producto dará como resultado Q. A continuación se muestra la forma de trabajo.

Polinomio característico:

$$p_A(t) = -t^3 + 4t^2 + 4t - 16 \quad \textbf{(5)}$$

Valores propios:

$$t_1 = 2, t_2 = 4, t_3 = -2 \quad \textbf{(6)}$$

Subespacios propios y bases:

$$t_1 = 2,\ \ St_1 = SG\left\{\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right\},\ \alpha_{1=}\left\{\begin{bmatrix} -1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{bmatrix}\right\}\text{base ortonormal de } St_1 \quad \textbf{(7)}$$

$$t_2 = 4,\ \ St_2 = SG\left\{\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}\right\},\ \alpha_{2=}\left\{\begin{bmatrix}1/\sqrt{3}\\1/\sqrt{3}\\1/\sqrt{3}\end{bmatrix}\right\}\text{base ortonormal de } St_2 \tag{8}$$

$$t_3 = -2,\ \ St_3 = SG\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}\right\},\ \alpha_{3=}\left\{\begin{bmatrix}1/\sqrt{2}\\0\\1/\sqrt{2}\end{bmatrix}\right\}\text{ base ortonormal de } St_3 \tag{9}$$

Para $t_1 = 2$, hallamos W_1 el complemento ortogonal de St_1.

$$W_1 = \left\{\overline{w} = \begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix} / < \overline{w}, \overline{u}_1 >= 0\right\} \tag{10}$$

$$W_1 = \left\{\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix} / -x + y + z = 0\ \right\} \tag{11}$$

$$W_1 = \left\{\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix} / \begin{bmatrix}y+z\\y\\z\end{bmatrix} = y\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix} + z\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}; y, z \in R\right\} \tag{12}$$

Aplicando el Procedimiento de Gram-Schimit obtenemos:

$$\beta = \left\{\begin{bmatrix}1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2}\\0\end{bmatrix}; \begin{bmatrix}1/\sqrt{6}\\-1/\sqrt{6}\\2/\sqrt{6}\end{bmatrix}\right\}\text{ base ortonormal de } W_1 \tag{13}$$

$$\alpha = \alpha_{\mathbf{1}} \cup \beta_{=}\left\{\begin{bmatrix}-1/\sqrt{3}\\1/\sqrt{3}\\1/\sqrt{3}\end{bmatrix}; \begin{bmatrix}1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2}\\0\end{bmatrix}; \begin{bmatrix}1/\sqrt{6}\\-1/\sqrt{6}\\2/\sqrt{6}\end{bmatrix}\right\}\text{ base ortonormal de } M_{3x1} \tag{14}$$

Construimos Q_1:

$$Q_1 = \begin{bmatrix}-1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6}\\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6}\\ 1/\sqrt{3} & 0 & 2/\sqrt{6}\end{bmatrix}\text{matriz unitaria u ortogonal} \tag{15}$$

$$T_1 = Q_1^T.A.Q_1 = \begin{bmatrix}2 & \sqrt{6}/2 & -\sqrt{2}/2\\ 0 & 7 & -3\sqrt{3}\\ 0 & 3\sqrt{3} & -5\end{bmatrix}\text{ no es triangular superior} \tag{16}$$

A y T_1 son unitariamente semejantes, por lo tanto tienen los mismos valores propios incluyendo sus multiplicidades.

Consideramos la submatriz A_2 de T_1 y calculemos su forma de Schur.

$$A_2 = \begin{bmatrix} 7 & -3\sqrt{3} \\ 3\sqrt{3} & -5 \end{bmatrix} \tag{17}$$

Repitiendo el proceso hecho hasta ahora con A_2 resulta:

Polinomio característico:

$$p_{A_2}(t) = t^2 - 2t - 8 \tag{18}$$

Valores propios, subespacios propios y bases de A_2:

$$t_{21} = 4,\;\; St_{21} = SG\begin{bmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{bmatrix},\; \gamma_1 = \begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 \\ 1/2 \end{bmatrix} \text{base ortonormal de } St_{21} \tag{19}$$

$$t_{22} = -2,\;\; St_{22} = SG\begin{bmatrix} \sqrt{3}/3 \\ 1 \end{bmatrix}, \gamma_2 = \begin{bmatrix} \sqrt{3}/3 \\ 1 \end{bmatrix} \text{base ortonormal de } St_{22} \tag{20}$$

Hallamos W_2, el complemento ortogonal de St_{21}

$$W_2 = \left\{ \overline{w} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} / < \overline{w}, \overline{u}_1 >= 0 \right\} \tag{21}$$

$$W_2 = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} / \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y = 0 \right\} \tag{22}$$

$$\delta_{2=} \left\{ \begin{bmatrix} 1/2 \\ -\sqrt{3}/2 \end{bmatrix} \right\} \text{base ortonormal de } W_2 \tag{23}$$

$$\gamma_1 \cup \delta_2 = \left\{ \begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 1/2 \\ -\sqrt{3}/2 \end{bmatrix} \right\} \text{base ortonormal de } M_{2x1} \tag{24}$$

$$R_2 = \begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 & 1/2 \\ 1/2 & -\sqrt{3}/2 \end{bmatrix};\; \text{ortogonal} \tag{25}$$

$$T_2 = R_2^T.A.R_2 = \begin{bmatrix} 4 & 6\sqrt{3} \\ 0 & -2 \end{bmatrix};\; \text{es triangular superior} \tag{26}$$

Y la forma de Schur de A_2 es:

$$A_2 = R_2.T_2.R_2^T \tag{27}$$

Construimos Q_2 a partir R_2 como sigue:

$$Q_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{3}/2 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & -\sqrt{3}/2 \end{bmatrix} \text{ortogonal de orden 3} \tag{28}$$

Construimos $Q = Q_1.Q_2$

$$Q = \begin{bmatrix} -\sqrt{3}/3 & \sqrt{6}/3 & 0 \\ \sqrt{3}/3 & \sqrt{6}/6 & \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{3}/3 & \sqrt{6}/6 & -\sqrt{2}/2 \end{bmatrix} \tag{29}$$

Hallamos T:

$$T = Q^T.A.Q = \begin{bmatrix} 2 & \sqrt{2}/2 & \sqrt{6}/2 \\ 0 & 4 & 6\sqrt{3} \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \tag{30}$$

Finalmente la forma de Schur de A es:

$$A = Q.T.Q^T \tag{31}$$

2.2 Cálculo de la función signo de A.

El trabajo realizado hasta acá nos permitió encontrar una forma de Schur de A, con T matriz triangular superior, ahora pondremos atención en calcular la función signo de A para matrices triangulares ya que

$$\text{sign}(A) = Q.\text{sign}(T).Q^T \tag{32}$$

Entonces el cálculo de sign(A), depende del cálculo de U= sign(T), para ello es necesario tener en cuenta propiedades de la función matricial de una matriz triangular enunciados anteriormente.

Para hallar la matriz U se procede como sigue:

1) Llamamos U=sign(T) y por ser T triangular superior vale que: U es triangular superior y los elementos

$$u_{ii} = \text{sign}(u_{ii}) = \pm 1 \text{ (por ser los valores propios de } T\text{) para i= 1, 2, 3} \tag{33}$$

2) Utilizando la primera propiedad de la función signo $U^2 = I$, dada por el Teorema 1, se determinan los elementos u_{ij} cuando $u_{ii} + u_{jj} \neq 0$,
3) En caso que $u_{ii} + u_{jj} = 0$, se emplea el algoritmo de Parlett.

Una vez calculados los elementos de la diagonal de U, los restantes elementos se calculan de abajo hacia arriba y de izquierda a derecha.

Para $t_{11}=2$ y como $u_{11}=\text{sign}(2)=1$, para $t_{22}=4$ es $u_{22}=\text{sign}(4)=1$ y para $t_{33}=-2$ es $u_{33}=\text{sign}(-2)=-1$.

Es necesario efectuar $H = T.U - U.T$ y $U^2 = I$.

$$H = \begin{bmatrix} 0 & -2u_{12}+\frac{\sqrt{2}}{2}u_{22}-\frac{\sqrt{2}}{2}u_{22} & 4u_{13}+\frac{\sqrt{2}}{2}u_{23}+\frac{\sqrt{6}}{2}u_{33}-\frac{\sqrt{6}}{2}u_{11}-6\sqrt{3}u_{12} \\ 0 & 0 & 6u_{23}+6\sqrt{3}u_{33}-6\sqrt{3}u_{22} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \textbf{(34)}$$

Cálculo de $U^2 = I$

$$U^2 = \begin{bmatrix} u_{11}^2 & u_{11}u_{12}+u_{12}u_{22} & u_{11}u_{13}+u_{12}u_{23}+u_{13}u_{33} \\ 0 & u_{22}^2 & u_{22}u_{23}+u_{23}u_{33} \\ 0 & 0 & u_{33}^2 \end{bmatrix} = I \quad \textbf{(35)}$$

Con los cálculos de $H = T.U - U.T$ y $U^2 = I$ se procede a calcular los elementos restantes de U. Para calcular u_{23} se considera la expresión del elemento en U^2

$$u_{22}u_{23} + u_{23}u_{33} = 0 \quad \textbf{(36)}$$

Como $u_{22}+u_{33} = 0$ se aplica Parlett; es decir:

$$6u_{23} + 6\sqrt{3}u_{33} - 6\sqrt{3}u_{22} = 0 \quad \textbf{(37)}$$

Se obtiene:

$$u_{23} = 2\sqrt{3} \quad \textbf{(38)}$$

4) Para calcular u_{12} se considera la expresión del elemento en U^2

$$u_{11}u_{12} + u_{12}u_{22} = 0 \quad \textbf{(39)}$$

Como $u_{11} + u_{22} \neq 0$ se aplica $U^2 = I$; es decir:

$$u_{12} = 0 \quad \textbf{(40)}$$

De la misma manera se calcula u_{13} resultando:

$$u_{13} = 0 \quad \textbf{(41)}$$

Se construye $U = \text{sign}(T)$

$$\text{sign}(T) = U = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2\sqrt{3} \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \textbf{(42)}$$

U verifica: a) $U^2 = I$

b) $U.T - T.U = \Theta$ es decir $U.T = T.U$

4 Por lo tanto la función $\text{sign}(A)$ es:

$$\text{sign}(A) = Q.U.Q^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix} \quad \textbf{(43)}$$

Y verifica

$$[\text{sign}(A)]^2 = I \qquad \textbf{(44)}$$

2.3 Ejemplo resuelto utilizando la función "signm" del Toolbox de MATLAB

```
>> A=[3 6 -5; 1 4 -1; 1 6 -3]
A =
3   6  -5
1   4  -1
1   6  -3
>> [S] = signm(A)
A =
3   6  -5
1   4  -1
1   6  -3
Q =
 -0.5774  -0.8165  -0.0000
 -0.5774  0.4082  -0.7071
 -0.5774  0.4082  0.7071
T =
4.0000  0.7071  10.2062
0    2.0000   2.3094
0      0    -2.0000
S =
1.0000  2.0000  -2.0000
0.0000  1.0000  -0.0000
0.0000  2.0000  -1.0000
```

Q y T son las matrices que intervienen en la descomposición de Schur de A. S es la función signo de A.

3 Algoritmo 1. Método de Schur [3]

Sea $A \in C^{nxn}$ que tiene una descomposición de Schur $A = Q.T.Q^T$ y que no tiene valores propios imaginarios puros, este algoritmo calcula S = sign (A) a través del método de Schur.

Algoritmo 1. Método de Schur de A

u_{ii}=sign(t_{ii}), i=1:n

for j=2:n

for i=j-1:-1:1

if $u_{ii}+u_{jj} \neq 0$ then

$$u_{ij} = -\frac{\sum_{k=i+1}^{j-1} u_{ik}u_{kj}}{u_{ii}+u_{jj}}$$

else….

$$u_{ij} = t_{ij}\frac{u_{ii}-u_{jj}}{t_{ii}-t_{jj}} + \frac{\sum_{k=i+1}^{j-1} u_{ik}t_{kj}-t_{ik}u_{kj}}{t_{ii}-t_{jj}}$$

end

end

end

S=Q.U.Q*

4 Conclusiones y trabajos futuros

Dado que la función signo de una matriz es una de las funciones con más aplicaciones interesantes en el campo de la ingeniería se consideró apropiado su estudio por parte del equipo de trabajo del Proyecto de Investigación "Estudio de las funciones matriciales y sus aplicaciones". El ejemplo desarrollado muestra en forma completa los pasos que se deben seguir para hallar la función signo de una matriz A, con valores propios reales y distintos, por medio del Método de Schur. Si bien se cuenta con una función de MATLAB que aplica el método expuesto para conseguir el resultado en forma rápida, a las autoras del trabajo nos pareció adecuado mostrar un ejemplo completamente desplegado para esclarecer la tarea interna de la computadora. En caso de que la matriz A tenga valores propios repetidos se deberá emplear la recurrencia de Parlett por bloques. Generar un ejemplo que muestre la última situación, como también el estudio de las aplicaciones a la Teoría de Control, serán objetivos de próximos trabajos.

Referencias

1. Hernández G.V; Ibañez G; J.J. Funciones de Matrices *Departamento de Sistemas Informáticos y Computación.* Ref. No: DSIC-II/05/06. pp 1-4(2006).
2. Stotland,V; Schwartz, O y Toledo, S. *High-Performance Algorithms for Computing the Sign Function of Triangular Matrices.* https//arXiv: 1607.06303 [cs.NA] (2016) Accedido en septiembre de 2016.
3. Higham, N.J. *Functions of Matrices. Theory and Computation* SIAM. Año 2008
4. Parlett, B.N. Linear Algebra and its Applications. Volume 14, Issue 2. *A recurrence among the elements of functions of triangular matrices* pp 117-121 (1976)
5. Davies, P.I; Higham, N.J. Numerical Analysis Report 404, Manchester Centre for computational Mathematics. *A Schur Parlett algorithm for computing matrix functions.* pp 1-22. (2002).
6. Noble B; Daniel J.W *Álgebra Lineal Aplicada* Prince-Hall Hispanoamericana, S.A. Año 2001

Volver al Índice

Revisando los Conceptos de Máximo y Mínimo de una Función. Análisis Histórico-Epistemológico

Betina Williner[1], Adriana Engler[2]
[1]Departamento de Ingeniería e Investigaciones Tecnológicas, Universidad Nacional de La Matanza
Florencio Varela 1903, San Justo, Provincia de Buenos Aires, Argentina
bwilliner@unlam.edu.ar
[2]Facultad de Ciencias Agrarias, Universidad Nacional del Litoral
Kreder 2805, Esperanza, Provincia de Santa Fe, Argentina
aengler@fca.unl.edu.ar

Resumen. El presente artículo tiene como propósito mostrar un análisis histórico-epistemológico de los conceptos de máximos y mínimos involucrados en la resolución de los problemas de optimización. Este estudio forma parte de una tesis de doctorado cuyo objetivo es explorar la comprensión de dichos conceptos cuando alumnos de primer año de ingeniería trabajan con actividades que involucran ideas variacionales y diversos sistemas de representación. La tesis se enmarca en el enfoque del Pensamiento y Lenguaje variacional que considera que el estudio de la construcción del conocimiento matemático debe abordarse en forma holística involucrando las dimensiones histórico-epistemológica, didáctica, cognitiva y socio-cultural. La dimensión presentada es fuente para el diseño de situaciones, problemas y actividades para los alumnos y ayuda a entender las dificultades que tienen los mismos en su aprendizaje.

Palabras Clave: Extremos de una función, Análisis histórico-epistemológico

1 Introducción

El presente estudio forma parte de una tesis de doctorado cuyo objetivo general es explorar la comprensión de los conceptos involucrados en los problemas de optimización cuando los alumnos de primer año de ingeniería de la Universidad Nacional de La Matanza (UNLaM) interactúan con actividades basadas en ideas de variación y en el uso de diversos sistemas de representación.

La resolución de problemas, en particular los de optimización, es de vital importancia en la formación de ingenieros. En efecto, estos profesionales pueden enfrentarse a tareas como maximizar el nivel de producción de una fábrica con una cantidad de recursos disponibles o, minimizar los costos ante un nivel de producción dado o ante una construcción determinada, entre otros.

Diversas investigaciones [1,4] y la propia experiencia en la cátedra de Análisis Matemático I del Departamento de Ingeniería e Investigaciones Tecnológicas de la UNLaM, dan cuenta de las dificultades que tienen los alumnos cuando afrontan este tipo de problemas. En los exámenes parciales la mayoría de los estudiantes no los resuelve. Si son parte de actividades en clase, muchos alumnos tienen inconvenientes para plantear la función a optimizar de acuerdo a las condiciones dadas. O, si logran hacerlo, luego no verifican si la solución hallada es óptima.

Pensamos que una base sólida en los conceptos que involucran los problemas de optimización (intervalos de crecimiento, decrecimiento, extremos relativos) puede favorecer la resolución de los mismos. De allí que comenzamos esta investigación en el marco del Pensamiento y Lenguaje variacional. Uno de los propósitos de este enfoque es el estudio de la construcción de conocimiento matemático sobre ideas variacionales cuando los alumnos hacen matemática en el aula. Dicho estudio se cimienta sobre una aproximación holística que integra las cuatro componentes fundamentales de la construcción del conocimiento: su naturaleza epistemológica, el plano didáctico y cognitivo y su dimensión sociocultural [5].

En esta oportunidad abordamos una de esas componentes: la histórico-epistemológica.

Un análisis de este tipo nos permite percibir la vida del matemático en una determinada época, con las concepciones y formas de pensamiento vigente en ese momento. A su vez nos señala en qué tipo de problemas se trabajaba y con qué instrumentos se contaba para llegar a un modo de solución. De esta manera podemos recuperar ciertas visiones de los conceptos matemáticos y contar con elementos que nos ayuden a diseñar actividades para el aula con una visión global. La información sobre el desarrollo del conocimiento matemático en una cultura, el saber cómo fue el camino que el mismo transitó de cambios y surgimiento nos proporciona elementos para su enseñanza. Un acercamiento a las producciones originales sobre los conceptos de extremos de una función nos posibilita entender su evolución, así como también la problemática que dio lugar a la emergencia de dicho conocimiento.

Sierpinska (citado en [6]) señala que el uso del análisis epistemológico de un determinado objeto matemático ayuda a estudiar la comprensión lograda por parte del estudiante. En efecto, conociendo las dificultades en la evolución de dicho concepto históricamente se puede hacer un paralelo con las dificultades a las que se puede enfrentar un alumno en el aprendizaje del mismo.

En base a lo expuesto decidimos organizar este artículo presentando algunos problemas de optimización destacados en la historia de la matemática, los primeros métodos para calcular máximos y mínimos y su evolución. Luego reflexionamos sobre el aporte de este estudio al proceso de enseñanza y aprendizaje de los mismos.

Debido a la dificultad de acceder a las fuentes originales nos respaldamos en otras fuentes (libros, documentos, tesis, artículos en revistas) cuyos autores han realizado estudios profundos de este tipo.

2 Algunos ejemplos de los primeros problemas de optimización

Los matemáticos están y han estado siempre ocupados con cuestiones de máximos y mínimos. Los problemas de optimización fueron y son parte fundamental de la matemática y ya estaban presentes en los tratados de los griegos de la antigüedad.

Cantor (citado en [7]) establece como primer ejemplo del cálculo de un máximo en la historia de la matemática al brindado por Euclides en el libro VI, propiedad 27 y lo enuncia como: “$x(x - a)$ tiene su máximo en $x = a/2$” (p. 15).

[4] y [7] mencionan como otro ejemplo dentro en esta línea el quinto libro de cónicas de Apolonio de Perga (262 aC-180 aC) en el cual se dedica a estudiar segmentos de longitud máxima y longitud mínima trazados respecto a una cónica. En él Apolonio, 18 siglos antes de la invención del cálculo, introduce nociones tales como normal a una curva, evoluta, centro de curvatura y logra obtener estos elementos para las cónicas de la manera más rigurosa.

Según Boyer [8] los teoremas de Apolonio sobre máximos y mínimos son en realidad teoremas sobre tangentes y normales a las secciones cónicas. Para este autor fue la matemática pura de Apolonio la que hizo posible el surgimiento de los *Principia* de Newton.

Dorrie [9] señala como primer problema de optimización propiamente dicho encontrado en la historia de la matemática al denominado problema de Regiomontanus, planteado en 1471 por el matemático Müller. Se trata de hallar la posición en una recta desde la que se divisa un segmento perpendicular con el mayor ángulo posible.

Pastore [10] enuncia el problema de la siguiente manera:

> Suponga una estatua de altura h sobre un pedestal de altura p. Un hombre de altura m ($m < p$) ve el pie hasta la parte superior de la imagen en un ángulo que varía según la distancia d entre el hombre y la base del pedestal. Determinar la distancia d para que el ángulo de visión sea el mayor posible (p. 153)

Y presenta la siguiente imagen:

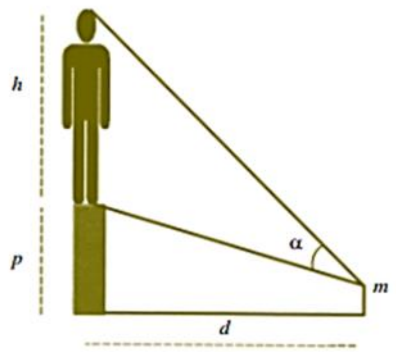


Fig.1. Problema de Regiomontanus, extraída de [10] p. 153.

Por cuestiones de extensión del artículo no presentamos las soluciones a estos problemas, pero sí indicamos que todas se basan en construcciones geométricas.

Como reflexión para la enseñanza, podemos decir que, si bien los ejemplos corresponden a distintas épocas (los primeros a la matemática griega y el segundo a la edad media), la visualización y el registro gráfico fueron herramientas muy importantes en la resolución. Los procedimientos usados eran una combinación entre construcciones geométricas y argumentaciones y lenguajes propios de la geometría sintética [11]. A su vez, como indica Vrancken [12], uno de los principales obstáculos al que se enfrentaban los matemáticos era el escaso desarrollo del simbolismo y también el hecho que las expresiones algebraicas no existían, a excepción de los interesantes intentos de Diofanto. Esta falta de simbología impedía encontrar métodos de solución más generales, por lo que se dedicaban a resolver múltiples casos particulares.

Los ejemplos brindados evidencian que los problemas y teoría de máximos y mínimos fueron conocidos mucho antes del descubrimiento del cálculo diferencial y que el intento por desarrollar esta teoría ejerció una influencia notable sobre el descubrimiento del mismo.

3 El método de máximos y mínimos de Fermat

Pierre De Fermat (1601-1665) no fue un matemático de profesión, pero sus contribuciones al cálculo (cálculo de máximos y mínimos, el trazado de tangentes y algunos procesos de integración) ocupan un lugar significativo en el desarrollo conceptual de esta rama [13].

En 1629 Fermat había desarrollado su geometría analítica y poco tiempo después hizo uno de sus descubrimientos más importantes: el primer método general para la determinación de máximos y mínimos de funciones algebraicas que es descripto sin demostración en la memoria *Methodus ad disquirendam maximan et miniman et de tangentibus linearum curvarum*, que data del año 1637 [14].

Boyer [8] desarrolla el método de obtención de máximos y mínimos de Fermat para curvas polinómicas, adaptándolo a la notación actual. Primero compara el valor de f(x) en un cierto punto con el valor de f (x + E) en un punto próximo. Luego el autor aclara que, si bien en general estos valores son distintos, en una “cumbre” o en el fondo de un “valle” de una curva “lisa” la diferencia será casi imperceptible. Por lo tanto, para hallar los valores que serán máximos o mínimos, Fermat iguala f(x) con f(x + E). A esto lo llama “adigualdad”. Boyer entiende la "adigualdad" como una pseudo-igualdad que llega a ser igualdad cuando E se hace cero, e introduce el vocablo inglés pseudo-equality para traducir el término latino adaequalitas, que es el usado por Fermat en su texto.

Cuanto más pequeño sea el intervalo E entre los dos puntos, más cerca estará esa pseudo-igualdad de ser una verdadera ecuación, así pues, Fermat luego de dividir todo por E hace E = 0. El resultado le permite calcular las abscisas de los puntos máximos y mínimos de la función polinómica.

Cantoral y Farfán [13] analizan con una perspectiva de notación y conceptos actuales el procedimiento de Fermat: si x es un punto máximo (o mínimo) entonces cuando ε se hace infinitamente pequeño los valores de la función en x y x + ε serán muy próximos:

$$\varepsilon \approx 0 \Rightarrow f(x+\varepsilon) \approx f(x) \Rightarrow f(x+\varepsilon) - f(x) \approx 0 \Rightarrow \frac{f(x+\varepsilon)-f(x)}{\varepsilon} \approx 0 \qquad \textbf{(1)}$$

Siguiendo la notación moderna y teniendo en cuenta la noción de límite, tendríamos que f’(x)=0.

Fermat escogió, para ilustrar su método, el problema de dividir un segmento dado en dos partes de tal manera que el producto de las longitudes de éstas sea un máximo (equivalente al planteado por Euclides en el libro VI, proposición 27 que mencionamos en el apartado 1). Observemos que estamos frente a un problema de optimización que se encuentra usualmente en los libros de textos actuales. La resolución se desarrolla en [13-14-15]. Seguiremos este último haciendo hincapié en las etapas expuestas por Fermat.

Gráficamente el segmento de longitud B se divide por un punto P:

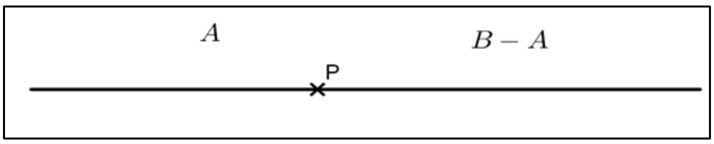


Fig. 2. Gráfico del problema anterior

Dando lugar a dos segmentos: uno de longitud A y el otro (B − A). El problema equivale a considerar máxima el área del rectángulo:

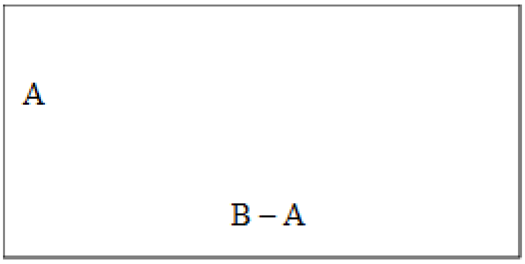


Fig. 3. Figura equivalente al problema anterior.

Resolviéndolo de acuerdo al método de Fermat, tenemos que, siendo A la incógnita y la función a optimizar A (B − A) = AB − A^2, la adigualdad quedaría

$$(A+E)B-(A+E)^2 \approx AB-A^2 \quad \textbf{(2)}$$

$$AB+EB-A^2-2AB-E^2 \approx AB-A^2 \quad \textbf{(3)}$$

Se eliminan los términos comunes y se obtiene:

$$EB-2AE-E^2 \approx 0 \quad \textbf{(4)}$$

Se dividen los términos por E:

$$B-2A-E \approx 0 \quad \textbf{(5)}$$

Se ignoran los términos que contienen E y las cantidades restantes se hacen iguales para llegar a la expresión

$$B-2A=0 \quad \textbf{(6)}$$

La resolución de esta última ecuación dará la cantidad de A para la cual A (B − A) es máximo. En este caso, se obtiene: A = B/2.

Es decir, la figura es un cuadrado de lado B/2.

El método introducido por Fermat es más sencillo de aplicar a diversas situaciones que las soluciones geométricas a problemas de máximos y mínimos específicos gracias al desarrollo del método de coordenadas propuesto por él y Descarte. Este último permitió expresar propiedades y formas de los objetos geométricos a través de relaciones numéricas y fue de gran importancia a la hora de traducir cualquier problema geométrico a uno algebraico equivalente, abriendo un amplio espectro de posibilidades en soluciones más genéricas.

Fermat no realizó demostración de su método. A su vez si consideramos, como diversos autores, que es equivalente a encontrar puntos de derivada cero, nos estaría brindando una condición necesaria pero no suficiente para hallar extremos. Tampoco nos indica si el valor hallado es un máximo o un mínimo.

4 Los aportes del cálculo diferencial de Newton y Leibniz

Los métodos de análisis promovidos por los precursores de Newton y Leibniz fueron desarrollados con el objetivo de resolver una serie de problemas bien definidos, tales como la construcción de la tangente a una curva, la obtención de máximos y mínimos y el cálculo de cuadraturas. Gracias a la geometría analítica de Descartes y Fermat, mediante la cual cualquier problema de geometría plana podía traducirse a un problema algebraico equivalente, resultaba posible tratar las cuestiones no como problemas específicos de cada curva, sino mediante un método aplicable a una cierta clase de curvas [14].

Se considera tanto a Newton (1643-1727) como a Leibniz (1646-1716) los fundadores del Análisis infinitesimal moderno, como cuerpo de conceptos y resultados aplicables con cierta generalidad a resolver determinados problemas, a finales del siglo XVII [16]. La notación y técnicas que utilizaron les permitieron no sólo emplear una herramienta más eficaz que la geométrica sino también dar respuesta a problemas de la geometría y la física mediante el mismo método general.

Leibniz no publicó trabajos sobre la nueva materia. Muchos de sus descubrimientos los conocemos a través de cartas que enviaba a otros matemáticos y gracias a pequeños artículos, por ejemplo, el *Nova methodus pro maximis & minimis* la primera publicación oficial sobre cálculo, donde definía las diferencias y las reglas de diferenciación de las operaciones elementales y las aplicaba a problemas de tangentes y puntos críticos. Es un texto corto y difícil de comprender. En particular se encuentra allí la condición para máximos y mínimos y para puntos de inflexión [14].

Hanckok [7] indica que Leibniz es el primero en establecer una distinción entre máximo y mínimo.

Para Newton las fluentes son las cantidades generadas por movimientos continuos y las fluxiones serán las velocidades de dichos movimientos, que serían respectivamente las funciones y sus derivadas. Apoyándose en estas ideas determina máximos y mínimos de variables que crecen o decrecen continuamente, diciendo que un valor extremo lo alcanzará cuando su velocidad de variación (fluxión) sea nula. Así para determinar el valor extremo de una fluente, se calcula su fluxión y se iguala a cero [13].

5 El tratamiento de los extremos en el *Analyse* de L'Hopital

En 1696 L'Hopital publica de forma anónima el libro *Analyse des infiniment petits puor l'intelligence des lignes courbes* (Análisis de los infinitamente pequeños para el estudio de las líneas curvas) [17]. Este libro es considerado por muchos como el primer libro de cálculo diferencial escrito con fines didácticos.

González [16] manifiesta que la estructura de la obra es la heredada de los matemáticos griegos: a partir de definiciones en las que se establece el significado de los conceptos "primarios" que luego van a aparecer a lo largo del texto, se suceden las diferentes proposiciones que caracterizan las propiedades, estructura, reglas de cálculo en los que están involucrados dichos conceptos.

Hacemos hincapié en el capítulo III de la obra que trata sobre el cálculo de máximos y mínimos, basándonos en el desarrollo que hacen [16] y [17]. El capítulo mencionado se denomina *Uso del cálculo de las diferencias para encontrar las ordenadas mayores y las menores, a lo que se reducen los problemas de máximos y mínimos* y en él se pueden distinguir tres aproximaciones distintas como acercamiento al significado de extremos de una curva.

La primera es una definición que se ofrece de puntos máximos y mínimos como descripción del comportamiento de la curva en un entorno de esos puntos. La notación es geométrica y hace referencia a la concepción de curva como traza. L'Hopital indica:

> Sea MDM una línea curva cuyas ordenadas PM, ED y PM sean paralelas entre sí, tal que al incrementarse continuamente la abscisa AP; la ordenada PM crece también hasta un cierto punto E después del cual disminuye…Supuesto eso: la línea ED será denominada la mayor o la menor ordenada. (L'Hospital, 1696, citado en [17], p. 131).

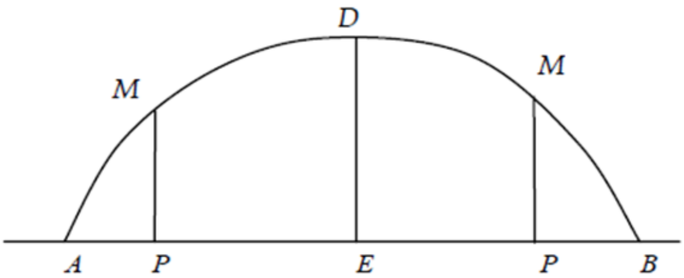


Fig. 4. Figura dada por L´Hopital sobre mayor ordenada. Extraída de [17], p.131.

Esta definición está fundamentada en la noción de tamaño, basándose en determinar dentro de un conjunto de ordenadas, cuál es la ordenada más grande o más pequeña. Implica un acto visual para el individuo y tiene un carácter geométrico dinámico fundamentado en la descripción del comportamiento de la curva en un entorno del punto.

La segunda y tercera aproximación están ligadas al cálculo de máximos y mínimos: una a partir de las diferencias y la otra sobre el concepto de recta tangente.

La segunda argumentación se justifica a través del signo de las diferencias infinitamente pequeñas:

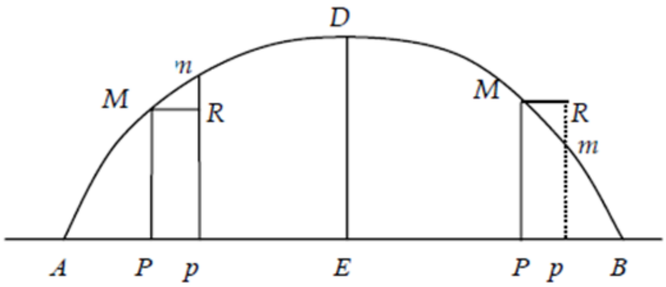


Fig. 5. Figura dada por L´Hopital para ilustrar las diferencias. Extraída de [17], p. 131

En palabras de L'Hopital (1696, citado [17], p. 131): "Si al crecer AP, PM también crece es evidente que su diferencia Rm será positiva con relación a la de AP, y que, por lo contario, cuando PM disminuya al crecer la abscisa AP; su diferencia será negativa".

Luego finaliza indicando que una diferencia no puede convertirse en positiva a negativa sin pasar antes por cero o por infinito. De esta manera el punto máximo será aquel en el cual las diferencias cambian de signo.

La tercera caracterización se fundamenta en observar la posición relativa que toman la subtangente y la tangente a medida que se consideran distintos puntos sobre la curva. El máximo se alcanza en el momento que la tangente se vuelve horizontal y paralela a la subtangente. En forma análoga sucede con el mínimo.

La explicación que da L'Hopital es la siguiente: supóngase una tangente en el punto M y su respectiva subtangente PT.

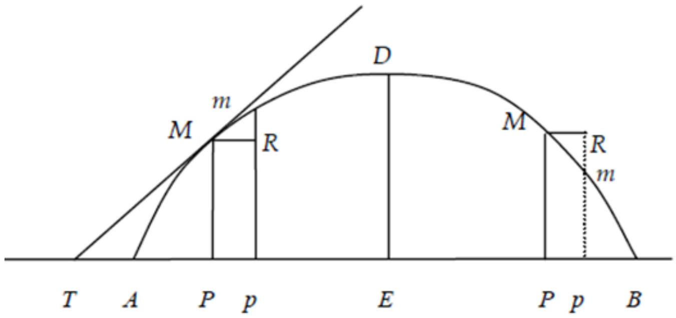


Fig. 6. Figura dada por L'Hopital para ilustrar la recta tangente. Extraída de [17], p. 132.

La subtangente PT crece (hacia la izquierda) a medida que M y P se acercan a los puntos D y E. Es evidente que cuando se construya la tangente en el punto D, la subtangente se vuelve infinita, de esta forma, cuando AP rebasa a AE, la subtangente PT se vuelve negativa de positiva que era, o el contrario. Cabe aclarar que L´Hopital también considera puntos de tangente vertical en sus ilustraciones.

Castañeda [17] indica que estos tres acercamientos que realiza L'Hopital intentan clarificar lo concerniente a la obtención de máximos y mínimos. El primero y el tercero se basan en argumentos geométricos, el segundo en las propiedades de los infinitesimales. Según Blanco [18] en los ejemplos que brinda L'Hopital ya se presupone si se busca un máximo o un mínimo, sin dar ninguna indicación sobre si es de un tipo o de otro. En ningún momento se establece un método para saber si el punto hallado es máximo o mínimo como lo hacemos actualmente por ejemplo, con el método de la derivada segunda.

6 Los aportes de MacLaurin

Según [7] es MacLaurin el primero en establecer un método correcto para distinguir entre máximo y mínimo. En el Tratado de fluxiones (1742) MacLaurin desarrolla criterios para encontrar máximos y mínimos a través de la serie de Taylor. Seguiremos el método tomando como base lo establecido en [13] usando la notación que conocemos actualmente (la cual es diferente de la utilizada por Maclaurin):

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \frac{f''(a)}{2!}h^2 + \dots \qquad \textbf{(7)}$$

$$f(a+h)-f(a)=f'(a)h+\frac{f''(a)}{2!}h^2+.. \qquad \textbf{(8)}$$

Si $f'(a)=0$ tenemos

$$f(a+h)-f(a)=\frac{f''(a)}{2!}h^2+\ldots \qquad \textbf{(9)}$$

Si $f''(a)>0$ estamos en presencia de un mínimo. Si $f''(a)<0$ la curva presenta un máximo en ese punto.

Con estos acercamientos se trabajó todo el siglo XVIII, en el que al final del mismo se intensificó el trabajo con series de potencias.

7 Síntesis y reflexión final

Considerando lo expuesto podemos dar cuenta que los problemas de máximos y mínimos conviven con los matemáticos desde hace siglos.

Los primeros ejemplos mostrados se abordan desde una perspectiva geométrica que era justamente la que prevalecía en la época. Los procedimientos usados son una combinación entre construcciones geométricas y argumentaciones y lenguajes propios de la geometría. Uno de los principales obstáculos al que se enfrentaban los matemáticos fue el escaso desarrollo del simbolismo y también el hecho que las expresiones algebraicas no existían. Esta falta de simbología impedía encontrar métodos de solución más generales, por lo que se dedicaban a resolver múltiples casos particulares.

La introducción de la representación analítica que realizaron Descartes y Fermat facilitó, por parte de este último, la creación de un método más general para determinar máximos y mínimos, pero el que tenía sus falencias. Por ejemplo, Fermat no pensaba en funciones sino en cantidades y no tenía clara la noción de variable independiente como la concebimos hoy en día. [15] expresan que el método es puramente algebraico y no supone inicialmente ningún concepto de límite ya que para Fermat la variable E no tiende a cero. De todas formas, los trabajos de Newton y Leibniz tienen en Fermat un valioso antecedente.

Newton calcula un extremo igualando a cero la fluxión y Leibniz hace lo mismo con el diferencial. En los dos casos son condiciones necesarias, pero no suficientes.

Luego analizamos el tratamiento de los extremos en el primer texto didáctico referido al cálculo, donde se brindan definiciones de los mismos y métodos para calcularlos. El libro posee una concepción geométrica-dinámica del cálculo diferencial ya que la proposiciones y demostraciones se llevan a cabo en un lenguaje puramente geométrico. Debido a que en esa época no existía un lenguaje funcional, ni siquiera la noción de función, todo el estudio se basa en el análisis de curvas cuyas representaciones más utilizadas son las gráficas. Las curvas estudiadas son las clásicas como el Folium de Descartes o la parábola semicúbica de Neile. Respecto a los puntos críticos, estos se clasifican atendiendo a este carácter geométrico, siendo el criterio la posición de la tangente: horizontal o vertical. La condición suficiente de estudiar el cambio de signo de las diferencias no está explícita como en el estudio del signo de la derivada segunda que realiza MacLaurin para determinar si el punto crítico hallado es máximo o mínimo.

El análisis mostrado nos brinda elementos para reflexionar acerca de la enseñanza y el aprendizaje de este tema.

Los problemas de optimización no son fáciles de resolver y, si bien gracias a la invención del cálculo podemos contar con un método genérico, no debemos olvidar que pueden existir diversas formas de resolución. La visualización y el registro gráfico logran ser un primer acercamiento a la comprensión de lo que estamos buscando y a una solución más intuitiva. El registro analítico nos permite formalizar lo anterior. Desde el diseño de actividades para el aula podemos elaborar consignas que inviten al alumno a trabajar en forma gráfica, luego a tratar con casos particulares y, cuando se haya comprendido lo que intenta el problema resolver, pasar a un registro analítico y usar herramientas para resolverlo.

El primer texto didáctico sobre temas del cálculo aborda los extremos desde un punto de vista gráfico como la mayor o menor ordenada, desde el cálculo de las diferencias y desde la recta tangente. Si queremos que los estudiantes construyan por sí solos la manera de calcular máximos y mínimos, las actividades elaboradas pueden partir considerando sólo los signos de los cambios de la variable dependiente al pasar por un extremo y luego adentrarnos en el concepto de derivada.

La condición necesaria de extremo que usamos hoy en día se usó como única condición para hallarlos durante mucho tiempo, e inclusive no se hacía distinción entre máximo y mínimo porque era el mismo problema el que lo determinaba. Esto nos ayuda a entender las dificultades en el aprendizaje. Ante un problema de optimización o el cálculo de extremos son varios los alumnos que sólo calculan puntos de derivada cero (inclusive olvidan la no existencia de derivada) y luego no usan ningún método para establecer si estos puntos son realmente extremos de la función y de qué tipo.

Por último, enfatizamos la importancia de realizar un análisis histórico-epistemológico sobre un determinado concepto matemático. Este nos sirve como inspiración en el diseño de situaciones, problemas o actividades para plantear a los alumnos y como ayuda para poder comprender las dificultades de su aprendizaje.

Referencias

1. Baccelli, S.; Anchorena, S.; Moler, E.; Aznar, M. Análisis exploratorio de las dificultades de alumnado de Ingeniería en la resolución de problemas de optimización. *Números,* Vol. 84, pp. 99-113. (2013).
2. Cuesta, A. *El concepto de aprendizaje de los conceptos de función y extremo en estudiantes de economía: análisis de una innovación didáctica*. Tesis de doctorado no publicada, Universidad Autónoma de Barcelona. (2007).
3. Guzmán, I.; Ortega, L.; Tapia, X.; Rodríguez, N.; Pérez, L. La apropiación de los criterios de optimización en Cálculo Diferencial de estudiantes de Carreras no matemáticas. *Quaderni di Ricerca in Didattica (Mathematics),* Vol. 20, No. 1, pp. 209-223. (2010).
4. Malaspina, U. *Intuición y rigor en la resolución de problemas de optimización. Un análisis desde el enfoque ontosemiótico de la cognición e instrucción matemática.* Tesis de doctorado no publicada, Pontificia Universidad Católica de Perú. (2008).
5. Cantoral, R.; Farfán, M. R. Pensamiento y lenguaje variacional en la introducción al análisis. *Epsilon*, Vol. 42, pp. 353-372. (1998).
6. Meel, D. Modelos y teoría de comprensión matemática: comparación de los modelos de Pirie y Kieren sobre el crecimiento de la comprensión matemática y la teoría APOE. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa,* Vol. 6, No. 3, pp. 221-278. (2003).
7. Hancock, H. *Theory of maxima and minima*. Dover Publications, Inc. (1960).
8. Boyer, C. *Historia de la matemática* (4ta. Edición). Versión española de Mariano Martínez Pérez. Alianza Editorial. (1996).
9. Dorrie, H. *100 Great Problems of Elementary Mathematics. Their history and solution.* Dover Publication Inc. (1965).
10. Pastore, J. Trigonometria e um antigo problema de otimização. http://www.ufrgs.br/espmat/disciplinas/geotri/modulo3/mod3_pdf/trigonometria-e-otimizacao.pdf. Accedido el 24 de mayo de 2016.
11. Pino, L., Godino, J., Font, V. Faceta epistémica del conocimiento didáctico-matemático sobre la derivada. *Educación Matemática. Pesquisa,* Vol. 13, No. 1, pp. 141-178. (2011).
12. Vrancken, S. *La construcción de la derivada desde la variación y el cambio articulando distintos sistemas*. Tesis de maestría no publicada, Universidad Nacional del Litoral. (2011).
13. Cantoral, R.; Farfán, M. *Historia de la matemática.* ITESM. (1999).
14. Collete, J. *Historia de las matemáticas II* (7ma. Edición). Siglo XXI Editores. (2013).
15. de la Torre, A., Suescún, C. y Alarcón, S. El método de máximos y mínimos de Fermat. *Revista Lasallista de investigación,* Vol. 2, No. 2, pp. 31-37. (2005).
16. González, M. Historia de la enseñanza del cálculo a través de los libros. *Educação Matemática Pesquisa,* Vol. 13, No. 3, pp. 415-437. (2011).
17. Castañeda, A. *Un acercamiento a la construcción social del conocimiento: Estudio de la evolución didáctica del punto de inflexión.* Tesis de doctorado no publicada, Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del IPN. (2004).
18. Blanco, M. Análisis de la discusión L'Hopital-Bernoulli. *Cronos,* Vol. 4, No. 1-2, pp. 81-113. (2001).

Volver al Índice

Repensar la Evaluación, Transformar la Enseñanza: Diálogos Posibles

Ana María Espinoza[1], Ana Clara Torelli[2], Roxana Pagano[2], Silvina Muzzanti[1]
[1] Departamento de Educación. División Pedagogía Universitaria UNlu
anamariaespinoza@telecentro.com.ar, silvina_muzzanti@yahoo.com.ar
[2] Departamento de Ciencias Básicas. División Matemática. UNlu
{anaclaratorelli, roxana.pagano}@gmail.com

Resumen. Se presentan en este trabajo algunas reflexiones elaboradas en el marco de un proyecto de investigación colaborativa entre docentes de Matemática e integrantes de Pedagogía Universitaria de la Universidad Nacional de Luján. El propósito inicial del equipo estuvo centrado en indagar las condiciones en las que es posible una propuesta de enseñanza en la universidad que propicie aprendizajes ricos y fértiles, colaborando a su vez con la disminución del fracaso y abandono de los ingresantes. Luego, durante el recorrido de producción se abrieron nuevos interrogantes que llevaron a centrar la mirada en el proceso de evaluación y a establecer relaciones entre dicho proceso y las condiciones de enseñanza, como así también las posibilidades y limitaciones que ofrece el contexto institucional. En esta ponencia comunicaremos algunas conclusiones elaboradas en este proceso.

Palabras Clave: Enseñanza, Aprendizaje, Evaluación, Concepto de derivada, Secuencia didáctica, Universidad.

1 Introducción

La preocupación generalizada que manifiestan los docentes de las primeras asignaturas universitarias a causa de los resultados que obtienen sus alumnos, no se debe únicamente a los bajos porcentajes de aprobación que se registran en la mayoría de los casos, sino también -y fundamentalmente- a la deficitaria formación conceptual que alcanzan en el desarrollo de sus clases. Esta situación suele atribuirse en gran medida a la historia escolar de los alumnos, al desconcierto provocado por el salto cualitativo y cuantitativo que representa el cambio de nivel educativo, a la baja compenetración con el estudio de los jóvenes actuales… Sin desconocer la posible incidencia de estas variables, interpretamos la necesidad de considerar – como cuestión central- las propuestas de enseñanza instaladas en la institución.

Con esta caracterización inicial del problema decidimos desarrollar un trabajo de investigación que permitiera identificar qué modificaciones en la enseñanza podrían favorecer los aprendizajes esperados en los alumnos, así como analizar la viabilidad - posibilidades y dificultades- de su implementación. Configuramos entonces una línea de investigación colaborativa entre docentes de matemáticas e integrantes de Pedagogía Universitaria en la UNLu, convocados por la intención de elaborar, desarrollar en el aula, registrar y analizar el funcionamiento de una secuencia didáctica para enseñar el concepto de *derivada*.

La producción colectiva resultó una herramienta eficaz para repensar las condiciones en las que proponer la enseñanza en la universidad y nos condujo al planteo de nuevos interrogantes que reorientaron el trabajo hacia la relación entre esas condiciones y la evaluación de los aprendizajes. Interpretamos que estas modificaciones no significan "enseñar lo mismo de otra manera" sino promover otros aprendizajes: desde esa perspectiva se hizo patente que no es posible mantener los mismos dispositivos de evaluación elaborados en función de otra situación de enseñanza. Durante el desarrollo de este proyecto de investigación diseñamos una evaluación que entendimos acorde a nuestra concepción, pero en breve tiempo encontramos que analizar los enunciados de los problemas incluidos, decidir si se propondría una resolución grupal o individual, tomar decisiones acerca de las eventuales aclaraciones que podría –o no- efectuar el docente, etc.; resultaba de tal complejidad que requería constituirla en objeto de investigación. La situación mostró la urgencia de elaborar una propuesta alternativa al parcial -única manera de acreditar conocimientos- que permitiera transitar otras modalidades para estudiar en qué condiciones la evaluación formativa aportaría un mejor conocimiento de los aprendizajes realizados por los estudiantes. Concebimos entonces un nuevo proyecto de investigación: "Repensar la evaluación y las condiciones en las que se propone, una deuda vigente en la universidad".

Desde el inicio formulamos algunos interrogantes para caracterizar mejor el problema de investigación: ¿qué propuesta evaluativa resultaría coherente con la propuesta de enseñanza que poníamos en marcha?, ¿qué relaciones es factible establecer entre la evaluación y los procesos de enseñanza y los de aprendizaje?, ¿qué características del contexto evaluativo (individual, grupal, con o sin intercambios o aclaraciones por parte del docente) favorecerían un mejor “rendimiento” de los estudiantes?, ¿qué resistencias –en los alumnos, en los docentes y en la institución- emergen como resultado de los cambios considerados deseables? Queremos referirnos en esta presentación a las respuestas que empezamos a elaborar en relación con algunos de estos interrogantes y a la dinámica del proceso reflexivo que sostuvimos en el equipo a lo largo del desarrollo del proyecto.

2 Fundamentación

La evaluación en la Universidad asume una importancia central porque a través de ella se garantiza la habilitación de los alumnos para el ejercicio de su profesión. Tal vez sea éste uno de los motivos por los que la preocupación por la evaluación se ha concentrado en su sentido certificativo y no se ha producido en la misma medida conocimiento relacionado con la evaluación formativa de los aprendizajes en el Nivel Superior. Desde esa concepción la evaluación supone que es posible un control de los aprendizajes a través de la aplicación de técnicas pretendidamente neutras y asépticas, y la preocupación se centra en la construcción del instrumento –usualmente el *examen*, sus consignas, y los criterios para la corrección- con el afán de dotarlo de validez y confiabilidad. Entendemos que esta perspectiva presume la existencia de relaciones lineales entre la enseñanza y el aprendizaje, y permite sostener la ilusión de que se cuenta con una herramienta objetiva para “atrapar” lo que los alumnos pudieron aprender. Al mismo tiempo, cuanto más privado, individual y personal es el contexto generado para la resolución de los exámenes –aun cuando muchos tramos de la enseñanza se hayan resuelto en forma grupal- mayor seguridad ofrece al docente para considerar que el instrumento se aproxima a una medición justa y rigurosa de los conocimientos adquiridos. Así, al comprobar el bajo rendimiento de los alumnos en los exámenes, las explicaciones suelen ubicarse entre las dificultades de los estudiantes para aprender y las “fallas” en el instrumento utilizado.

Desde otra perspectiva, la que nosotros asumimos, las prácticas evaluativas deben ser críticamente repensadas para poner en relación las propuestas de enseñanza con las posibilidades de aprender y los logros efectivos alcanzados por los alumnos. “*La evaluación formativa es una estrategia fundamental que permite recoger informaciones relativas a los progresos y dificultades de aprendizaje de los estudiantes, interpretar estas informaciones y adaptar las actividades de enseñanza y de aprendizaje.”*[1]. Así concebimos necesario un camino de construcción a partir de las interacciones y relaciones -entre el conocimiento, las actividades, el contexto en el que se presentan, las interacciones entre los alumnos y los docentes, los instrumentos de evaluación, entre otras- que se ponen en juego en la situación de clase y permiten establecer los referentes de evaluación adecuados al proceso.

En vinculación con lo anterior consideramos que las maneras que encuentran los alumnos de resolver las situaciones planteadas en una evaluación pueden ser estudiadas, y sus errores pueden ser considerados como información que requiere ser interpretada. “(…) *Si el aprendizaje es un proceso continuo de reorganizaciones sucesivas de las estructuras de conocimiento a partir de la interacción del sujeto con el medio, sus producciones constituyen evidencias parciales de un fenómeno dinámico que sólo puede apreciarse en acción. Por ello, la evaluación debe incorporar variables referidas al proceso mismo de construcción, que permitan interpretar las respuestas de cada alumno en el marco de su propio progreso*” [2].

Coincidimos en otorgarle valor a la evaluación como una herramienta interpretativa del proceso de aprendizaje, y no como la “demostración” taxativa de los saberes adquiridos. La construcción de indicadores a partir de la "información" que aporta la evaluación permite establecer relaciones entre distintos aspectos, condiciones o fenómenos no siempre explícitos o evidentes, e implica la construcción de categorías interpretativas. La evaluación vuelve inteligible la realidad del aula, adentrándose en los sentidos que la atraviesan. “*Evaluar el funcionamiento de una clase implica construir -en el proceso mismo de investigación- el referente apropiado, es decir aquel que permita aprehender la singularidad del aula que se evalúa. Se apunta a comprender el objeto, no a juzgarlo*" [3].

3 La metodología de la investigación

La producción de conocimiento didáctico necesita sustentarse en una metodología que ofrezca modos de validación reconocidos por la comunidad científica. Desde nuestra perspectiva la *Ingeniería Didáctica,* de tradición francesa desarrollada sobre la base de la teoría constructivista del conocimiento, se muestra especialmente fértil para el estudio que nos proponemos. “*La ingeniería didáctica se caracteriza, en primer* *lugar por un esquema experimental basado en las realizaciones didácticas en clase, es decir, sobre la concepción, realización y análisis de secuencias de enseñanza. (…) (Constituye) un instrumento privilegiado para tener en cuenta la complejidad de la clase*” [4]. Supone un ida y vuelta recursivo entre la revisión profunda de los contenidos, la planificación de las situaciones que se ofrecerán a los alumnos –cómo se proponen, los trabajos involucrados, las posibles intervenciones del docente-, la implementación efectiva en las clases y los aprendizajes promovidos. De modo particular se realiza el seguimiento de un caso a través de la elaboración de una propuesta de enseñanza -incluida la evaluación-, la observación y el registro de lo acontecido y la elaboración de interpretaciones a partir de los análisis entrecruzados de las distintas situaciones. Como parte de la modalidad de trabajo el equipo sostiene encuentros sistemáticos que se registran en Actas en las que figuran los intercambios y las conclusiones alcanzadas en cada reunión. La lectura de estas Actas permite apreciar la naturaleza heterogénea del equipo de investigación en tanto en ellas se incluyen las diferentes miradas de los integrantes, las negociaciones, las modificaciones en las posturas, los consensos alcanzados. “(…) *entendemos que en la revisión (de una práctica) cobra sentido el trabajo de colaboración cuyo eje es la búsqueda de cuestiones comunes sobre las cuales indagar, explorar, proponer producir*” [5].

La indagación es cualitativa, de tipo descriptivo interpretativo y la validación de las conclusiones se sustenta en el entrecruzamiento de las reflexiones que aportan las Actas de las reuniones, los registros de clase (video y grabación magnetofónica del trabajo en pequeños grupos), los resultados de las evaluaciones y de los trabajos realizados en clase, la permanencia de los estudiantes en la cursada, la mirada de los docentes y las opiniones de los alumnos –en el marco de las entrevistas realizadas-.

4 Hacia una nueva modalidad de evaluación, nuestros argumentos, las voces de los alumnos

Resultó costoso concebir y consensuar una propuesta de evaluación alternativa. Era necesario elaborar un proyecto que contemplara las convicciones que fuimos construyendo en el grupo de trabajo colaborativo y que simultáneamente se mostrara viable –no disruptiva- dadas las concepciones instaladas en la comunidad universitaria. Desplegar la complejidad de la evaluación en el marco de este proceso de enseñanza nos puso frente a la necesidad de volver sobre las ideas que se venían trabajando en la construcción del concepto de derivada, considerar las estrategias efectivamente desarrolladas en clase, y precisar los sentidos que adquiere ese conocimiento en la carrera de Ingeniería Agronómica. Intentaremos comunicar algunas ideas que sustentaron la propuesta y algunas miradas que ésta despertó entre los estudiantes.

4.1 La propuesta de enseñanza y el aprendizaje

A muchos alumnos les cuesta reconocer los conceptos que están interviniendo en la resolución de los ejercicios que se les proponen, establecer relación conceptual entre los distintos problemas y elaborar conclusiones a partir de los resultados. Sabemos que para la mayoría de los estudiantes saber matemática consiste en aprender una operatoria y encontrar un número. Entendemos que esta situación se relaciona con el predominio de la resolución numérica, en lenguaje matemático, en desmedro de un abordaje más conceptual. Al analizar las resoluciones que los alumnos incluyen en sus evaluaciones encontramos –por ejemplo- que muchos calculan un *máximo* o un *mínimo* de una función igualando a cero la expresión de la primera derivada; procedimiento adecuado pero que no pueden justificar. Parece que no llegaran a otorgarle significado a esa operación ni al valor encontrado; y cuando se pide desarrollar el concepto de *punto crítico* manifiestan dificultades para responder. La situación alimenta la idea de que los estudiantes realizan los cálculos sin saber de qué se trata y permite interrogar el conocimiento alcanzado y reflexionar sobre las maneras de ayudar a elaborar una construcción conceptual. Tomamos esas limitaciones que “muestran” los exámenes para profundizar cómo trabajar estas ideas en clase. Con la intención de afectar la modalidad naturalizada de resolver ejercicios a través de aplicar procedimientos estandarizados sin establecer relación con los conceptos involucrados, propusimos problemas para resolver grupalmente en los que incluimos pedidos de explicitación escrita, justificaciones acerca de la resolución realizada, *¿cómo explican lo que hicieron*?, *¿por qué lo hicieron*? o se solicita: *¿qué tiene que ver esta resolución con la que encontraste en los ítems anteriores*?, *¿cómo se vincula este problema con el/ los anteriores*?

No siempre los estudiantes llegan a interpretar los cambios introducidos en la propuesta de enseñanza en un sentido favorable. Tampoco esperábamos que así ocurriera, dada la natural asimetría que existe entre los docentes y los alumnos. Pero, como se observa en el siguiente fragmento de entrevista, algunos muestran un reconocimiento que nos reafirma:

Entrevistador- ¿Ustedes se dan cuenta de que en la materia hay un abordaje más conceptual o no?

Alumno- No, sí, sí... Siempre la Matemática fue que te den los números y ahora hay que pensar la teoría, hay que saber de dónde sale todo, hay que saber qué es lo que estás haciendo porque si no después te lo preguntan. Hiciste bien la parte *práctica* pero no tenés lo *teórico* y ya te vale la mitad.

Este alumno, como muchos otros, establece una separación entre parte práctica y teórica que –entendemos- obedece a lo históricamente instalado en la enseñanza y el aprendizaje de la matemática, pero parece pensar que la propuesta intenta llevar por un camino en el que no sólo importa aprobar sino también aprender.

Como mostraremos luego, estos cambios en la enseñanza están en relación con los que concebimos al rediseñar la evaluación.

4.2 La evaluación grupal y su relación con la individual

Es frecuente que una parte importante del tiempo de la clase esté destinado a que los alumnos resuelvan los problemas en grupos de trabajo. Aunque con interpretaciones distintas –a veces muy distanciadas- acerca del sentido con el que se propone, esta modalidad suele ser reconocida y aceptada por los docentes en la universidad. No se tiene la misma mirada sobre la evaluación. Está instalado que los exámenes se deben resolver de forma individual para asegurar que se está evaluando aquello que cada uno aprendió, sin *interferencias, contaminaciones* o *ayudas externas*.

Cuestionamos esta interpretación por dos razones, una de carácter más general y otra más específica. En primer lugar, como ya lo mencionamos, no acordamos con esa supuesta objetividad que permitiría "atrapar" –medir- lo que un alumno sabe mediante una prueba; y en segundo lugar porque sostenemos la necesidad de mantener coherencia entre la propuesta de evaluación y la de enseñanza. Si entendemos que la interacción cooperativa con los pares y con el docente forma parte constitutiva de /o es inherente a/ la construcción de conocimiento según los aportes de la teoría social genética, ¿por qué razones debería el alumno mostrar en soledad el conocimiento alcanzado? El "pensar con otros" constituye un tipo de actividad intelectual que consideramos imprescindible en la formación de los profesionales, y que nuestra propuesta de enseñanza intenta favorecer de modo sustantivo ¿por qué entonces distanciar la evaluación de otras situaciones de enseñanza y de aprendizaje limitándola únicamente a su función acreditativa? Una instancia grupal de evaluación permitiría ajustar la comprensión del problema propuesto a través de la interacción (tal como se fue instalando en el trabajo de la clase), y potenciaría la posibilidad de que efectivamente se produjeran nuevos aprendizajes durante la situación misma de la evaluación.

Elaboramos para cada tramo de la asignatura una evaluación grupal complementaria de otra individual en tanto el problema propuesto en la primera vuelve a incluirse, con modificaciones, en la segunda y la nota alcanzada por el grupito de alumnos se acredita en la individual. ¿Qué buscamos con esta propuesta? Estimamos que no sólo ofrecería a los estudiantes una nueva oportunidad para el aprendizaje, sino que resultaría una manera de comunicar lo que el docente espera de ellos tanto en lo conceptual como en la disposición para el aprendizaje. Una cuestión que interviene en la aptitud de los estudiantes de las primeras materias para resolver las situaciones de evaluación está ligada a la incertidumbre, al desconocimiento que suelen tener acerca del significado que adopta estudiar en la universidad y la manera en que van a ser consideradas por el docente las soluciones que incluyan: ¿hasta dónde explicitar, precisar, explicar…? Al mismo tiempo, el análisis de las resoluciones desarrolladas en la evaluación grupal ofrecería a los docentes una oportunidad de obtener información sobre el estado de conocimiento de la clase para ajustar su propuesta en la enseñanza antes de, y en, la evaluación individual.

En una de las evaluaciones se presentaron las siguientes situaciones problemáticas

Evaluación grupal:

Cinética química (Extraído del texto de Química "La Ciencia central" de Brown)

La química se ocupa de cambios. Las reacciones químicas convierten sustancias bien definidas en otros materiales con propiedades diferentes, pero también es importante comprender la rapidez con que ocurren estas reacciones. Uno de los factores que influyen en las velocidades de reacción es la concentración.

En la gráfica se muestra la concentración del cloruro de butilo en agua, en función del tiempo. Los puntos representan los datos experimentales y se han unidos por una curva suave.

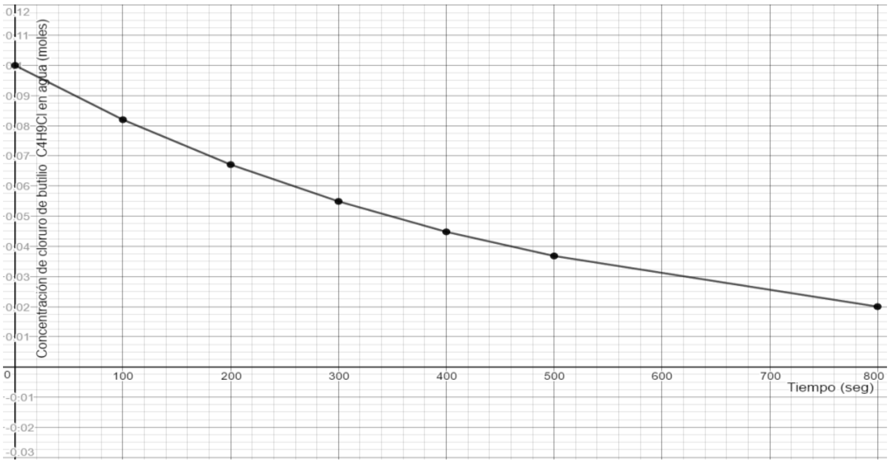


Fig. 1. La gráfica muestra la concentración del cloruro de butilo en agua, en función del tiempo.

a) Describan con sus palabras como varía la concentración al transcurrir el tiempo.
b) Calculen la velocidad media o promedio de la concentración en función del tiempo en el intervalo desde
a. x = 0 a x = 800. ¿Qué interpretación le dan al valor encontrado?
c) Indiquen la velocidad instantánea de la concentración en función del tiempo en dos puntos cualesquiera, (conocida como velocidad de reacción). ¿Qué interpretación les dan a los valores encontrados? ¿Por qué tienen ese signo? Escriban la ecuación de la recta tangente en esos puntos.
d) Realicen el gráfico aproximado de la función derivada, indicando el procedimiento seguido. (puedes ayudarte con los datos encontrados en el ítem c).

Evaluación individual

Dada la función f(x) cuya representación gráfica se muestra a continuación

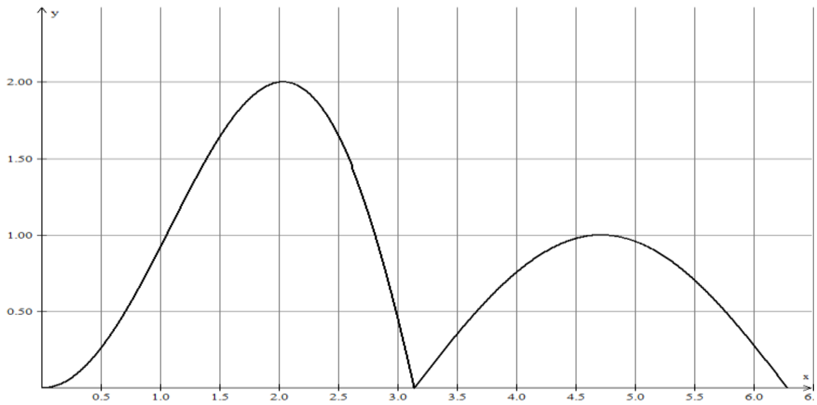


Fig. 2. La figura muestra la representación de una función.

a) Indicar los puntos donde no es derivable justificando tu respuesta
b) Indicar sobre la gráfica un punto donde la velocidad de crecimiento instantánea de la función sea 2 y otro donde sea cero
c) Describir la velocidad de crecimiento instantánea de la función graficada en todo su dominio
d) Realizar el esbozo de la gráfica de la función derivada.

Fuimos y volvimos en consideraciones acerca de la conveniencia de la implementación del nuevo sistema: ¿todos los alumnos de un grupito responderán de igual manera en la individual que en la grupal?; si alguien resolvió bien la grupal y mal la individual, ¿qué deberíamos entender acerca del conocimiento del que dispone?; si resolvió mal la grupal y mal la individual, ¿deberíamos considerar que la primera no le sirvió?

Hasta ahí algunas de nuestras consideraciones. Veamos ahora un fragmento en el que se aprecian voces de los alumnos entrevistados en pequeños grupos:
Entrevistadora- ¿Cómo les resultó la evaluación grupal?
Alumno 1: Y, la hicimos perfecta. Trabajamos mejor en el grupo, en sí, en la evaluación, trabajamos mejor. Porque todos opinamos, probamos de todo y sacamos conclusiones.
Alumno 2- Teníamos que contar más o menos el procedimiento, cómo hicimos todo.
Entrevistadora: ¿Eso les sirvió? ¿Les sirvió para aprender?
Alumno 1- Sí. Algo que vos no tenés tan claro… viene un compañero y te dice una palabra y te hace clic en la cabeza.
Alumno 2- Y sirve para pensar… A mí se me complicaba un poco porque es Matemática y te tienen que dar números primero…

La entrevista aporta una mirada positiva. No siempre es así. El primer año que trabajamos según este esquema encontramos que algunos alumnos no reparaban en que un aspecto importante de la propuesta consistía en incluir el mismo tipo de ejercicio en las dos instancias de evaluación y pensaban que ese tema ya había sido evaluado y por lo tanto "no entraba" en la segunda; a otros parecía no servirles para aprender. Por otra parte, dado que en la evaluación individual tenían que explicar con palabras los procedimientos utilizados en la evaluación grupal, aunque la modalidad ya había sido implementada durante el trabajo en clase, encontraban dificultades para aceptar o entender el uso escrito del lenguaje natural en una disciplina que utiliza fuertemente el lenguaje matemático. Adoptar un ir y venir entre lenguajes, que entendemos aporta a la conceptualización, requiere sus tiempos y nos obligó al ejercicio de repensar la manera de comunicar la propuesta para favorecer que se entendiera.
Entrevistadora- Y la relación entre la evaluación grupal y la individual, ¿cómo la ven?
Alumno 2- Es más fácil la grupal, más llevadera
Alumno 3- Es que te sentís apoyado por el grupo, porque capaz que si vos no tenés claro algo puede que otro te saque la duda. En cambio, si es individual… si tenés una duda, listo.
Entrevistadora- ¿Ustedes se dieron cuenta de que en la evaluación individual había un ejercicio que era muy parecido al grupal?
Alumno 1- Sí
Entrevistadora- ¿Y pudieron resolver bien ese ejercicio?, ¿les sirvió la grupal para resolver ese ejercicio?
Alumno 2-Si
Alumno 3-Si lo hubiera vuelto a estudiar me hubiera servido. Pensé que como se tomaba en el grupal pensé que no se iba a volver a tomar y no lo volví a repasar. Una equivocación mía.
Entrevistadora-Nosotros evaluamos que ese era un riesgo, que ustedes pensaran que…
Alumno 3- A mí me pasó eso
Alumno 1-Muchos preguntaron y les dijeron que sí, que puede volver a entrar
Alumno 3 -Pero "puede volver a entrar" es como que… o sea… si te decían estudialo de vuelta, obviamente que lo estudiaba.
…
Entrevistadora- ¿Y les ayuda la evaluación grupal, colabora con la resolución de la segunda parte que es individual o no tiene nada que ver, o entorpece o qué?
Alumno 2- Está bueno porque…
Entrevistadora- ¿Les ayudó?
Alumno1. Sí. Aparte le suma un punto al otro. Ja, ja. Está bueno porque aparte, si es un punto que podés hacer con otro, y que… suma
Alumno 2- Además si en el grupal por ejemplo a lo mejor vos no sabías un cierto puntito y a lo mejor ella o ella sabían, y uno ya queda más o menos claro cómo se hacía. Y antes no.
Entrevistadora- Ahí hay algo importante. Vos estás diciendo dos cosas. Una: siendo grupal, si hay alguien que sabe un poquito más y me ayuda me coloco mejor y apruebo yo también, aunque sea un puntito. Pero la otra cosa es que, si los demás saben algo que vos no sabés, en ese momento lo podés aprender.
Alumno 1-Claro.
Entrevistadora- ¿Están de acuerdo?
Todos- Si.

4.3 Acerca de la subdivisión de los parciales y criterios de aprobación de la materia

Matemática General es una materia que cuenta con una extensa cantidad de contenidos, pero además y fundamentalmente, corresponde al primer año de la carrera. La situación resulta exigente para los alumnos.

Atendiendo a estas cuestiones se propuso el desdoblamiento de los parciales. La intención era claramente aliviar la densidad conceptual de los exámenes, evitar la superposición con parciales de otras asignaturas y favorecer la permanencia de los estudiantes en el cursado de la materia ya que simultáneamente aumentaba las posibilidades de recuperación de parciales. Entendemos que evitar la deserción ofrece mayor posibilidad de entrar en la dinámica ya que no todos los estudiantes consiguen acomodarse en el mismo tiempo a las exigencias que plantea la universidad. Sobre este aspecto no tuvimos muchas dudas, quizás la única preocupación haya sido que la medida no se interpretara como una propuesta facilista. "Escuchemos" la voz de los alumnos:
Alumno 1- Te ayuda porque yo por ejemplo la primera parte la aprobé, la segunda me fue mal y en el segundo parcial me parece que también me fue mal. Pero al haber aprobado la primera tengo la chance de recuperar y dejar regular la materia. De hacer primero lo más fácil ya te asegurás de tener algo aprobado.
Alumno 2- Te permite entusiasmarte
Alumno 3- Te da más oportunidades de regularizar

Las opiniones de estos alumnos abonan nuestra hipótesis de que desdoblar los parciales permite darles tiempo de afianzarse en su nueva pertenencia universitaria, salvando o al menos postergando una situación límite que lleve a la decisión del abandono.

4.4 Acerca de las aclaraciones sobre las consignas en las evaluaciones individuales

En varias oportunidades, durante el desarrollo de las clases, pudimos registrar las interacciones que se producen entre alumnos dentro de un mismo grupito. Las informaciones así recogidas y los aportes de las docentes permiten reconocer que algunos alumnos no logran resolver un problema y no necesariamente esto significa que no saben nada. Muchas veces necesitan activar una idea, ubicarse frente al ejercicio de otra manera, entender qué es lo que se le está pidiendo… Cuando los docentes elaboramos un enunciado, que muchas veces repensamos buscando comunicar claramente, solemos pensar que su interpretación es única, que sólo es posible comprenderlo tal como nosotros lo concebimos. Discutimos esta posición. La interpretación de cualquier texto no es unívoca, depende del enunciado y del lector, de lo que éste sabe del tema. Es claro que lo que saben alumnos y docentes es distinto no sólo en relación con los conceptos sino también en relación con el proyecto de enseñanza. El docente lo conoce, sabe qué se busca, para dónde se va. El alumno, no.

Consensuamos la necesidad de elaborar breves aclaraciones de los docentes a la clase en su conjunto y en las diferentes situaciones de evaluación, con el ánimo de colaborar con la interpretación de los enunciados de los problemas planteados. Resolvimos hacer observaciones, dar indicaciones sobre el contexto, que ayuden a entender qué se espera que realicen, sin con ello resolver matemáticamente los ejercicios. Concebimos también que esta modalidad marcaría el valor que adopta detenerse a leer, cuestión que ya por sí misma ayuda, además de contribuir a la formación de estudiante. Debimos discutir mucho cómo serían las intervenciones que ayudaran a la ubicación frente al problema y que dejaran el trabajo intelectual a cargo del alumno. En estas cuestiones parece jugarse un aspecto clave de la "asepsia evaluativa", expresada en la práctica instalada de advertir a los alumnos que *la interpretación de los enunciados forma parte de la evaluación.* La discusión nos permitió reconocer que esa advertencia resumía el poder otorgado a la resolución estrictamente individual de las consignas como clave reveladora del conocimiento de los alumnos. Consideramos que la inclusión de ese momento de intercambio entre el docente y los alumnos, antes de comenzar el parcial, constituye uno de los cambios más notables en el camino hacia una evaluación coherente con el modelo de enseñanza que sostenemos. La voz de este alumno agrega claridad al tema:

Alumno- Eso nos sirve porque a veces uno no se aviva. ¿Qué me están pidiendo? Y si te dan una manito… eso ayuda.

4.5 Acerca de las devoluciones grupales e individuales de las evaluaciones

La propuesta incluye que luego de la evaluación grupal se realice una devolución con el objetivo de que los estudiantes identifiquen los errores cometidos, y fortalezcan sus conocimientos para luego resolver la evaluación individual. Estos errores se toman como insumo para presentar situaciones problemáticas en las clases anteriores de la evaluación individual y reforzar los conceptos donde se produjeron los mismos.

También se propone una devolución colectiva al grupo clase -con participación activa de los alumnos- de las resoluciones individuales, para poner en discusión las diferentes estrategias, las razones que subyacen a los errores y las cuestiones no interpretadas por los alumnos, así como los criterios para su corrección. En algunos casos fue necesario efectuar una devolución individual de la evaluación, para entender mejor el razonamiento realizado. Esto favoreció la reflexión del docente acerca de si los supuestos conceptuales que le atribuye a los

estudiantes se corresponden efectivamente con lo que ellos saben. La cuestión intenta aportar elementos para responder una pregunta central: ¿cómo decidir lo que aprendió un alumno a partir de lo que incluye en el examen? ¿cuánto revela lo que el estudiante escribe?
Veamos algunas consideraciones que hacen los alumnos en relación con el problema 1 (b) del tema 1.

1. a) Hallar el o los valores de k para que la función dada sea continua en todo punto de su dominio

$$\begin{cases} x^2 + k & si\ x \leq 2 \\ 2kx - 2 & si\ x > 2 \end{cases} \qquad \textbf{(1)}$$

b) Indicar si para el o los valores hallados de k, la función es derivable en x = 2

Varios estudiantes operan, hallan el valor de k=2, condición para que la función sea continua, y no agregan nada a modo de justificación y consideran que es derivable sin más aclaraciones. Parecen entender que de esa manera el ejercicio está resuelto. ¿Será que dan por sobreentendido que la resolución escrita es suficiente, que el docente interpretará que estudiaron el tema?, ¿será que no pueden dar cuenta conceptualmente de dicha resolución? Un alumno desarrolla en su examen una resolución del ejercicio que no responde al procedimiento habitual realizado en clase. El escrito resulta difícil de seguir por el docente, no es claro interpretar qué hizo el alumno y cuánto sabe. Durante la devolución, las aclaraciones del estudiante permiten reconocer que el razonamiento respondía de manera conceptualmente válida.

Dos sobre cuatro alumnos responden a la interrogación docente favorablemente dando cuenta de haber entendido la respuesta. La cuestión es central si consideramos el efecto que alcanza en la calificación de los chicos y con esto en la posibilidad de aprobación. ¿Podríamos pensar que el chico queda habitualmente sin entender por qué se califica como mal algo que el considera bien resuelto?, ¿si esto es así podríamos pensar también que en lugar de servirle para aprender le sirve para confundir, para no saber qué está bien y qué mal?

5 Conclusiones

Nuestra preocupación principal al momento de concebir esta comunicación fue la de seleccionar las cuestiones centrales que intervinieron en el proceso de cambio en las condiciones de la evaluación que –reiteramos- implicó un análisis minucioso de la propuesta de trabajo en clase en la búsqueda de consistencia entre las distintas situaciones por las que atraviesan los estudiantes. Buscamos que las situaciones diseñadas colaboraran con un aprendizaje conceptual y que no se transformaran en un facilismo engañoso movido por la intención de obtener mejores resultados de aprobación y permanencia de los alumnos. Mostramos algunos aspectos del proceso que todavía está en marcha y que requiere profundizar los análisis, realizar nuevas consideraciones y ajustes.

Incluimos finalmente algunas consideraciones que, entendemos, revisten interés para interpretar los efectos de los cambios promovidos en Matemática General:

- Con satisfacción encontramos que han disminuido en las evaluaciones inconsistencias o errores conceptuales importantes -tales como indicar puntos donde la función no es derivable y a la vez señalar que en dicho punto hay una velocidad instantánea de crecimiento determinada o encontrar la ecuación de una tangente a una curva y graficar una recta que no cumple esta condición.
- Algunos alumnos cometen fallas en los procedimientos, pero reconocen incoherencias en los resultados aún cuando no encuentran el error cometido.
- Las aclaraciones previas al parcial mostraron sus frutos en tanto muchos estudiantes produjeron mejores respuestas que en años anteriores, como el simple hecho de no conformarse con responder verdadero o falso sin incluir una justificación o viceversa; o poder discriminar qué aspectos del análisis de una función se solicitan en una consigna (por ejemplo, continuar el cálculo de la derivada segunda para buscar puntos de inflexión cuando sólo se les pide encontrar máximos y mínimos).
- Los estudiantes que cursaron todo el cuatrimestre quedaron regulares, algunos necesitaron realizar un examen recuperatorio. En ningún caso, la condición de estudiante Libre, se alcanzó por haber desaprobado los parciales, sino por el abandono de la cursada debido a otras razones.
- Aumentó el porcentaje de alumnos regulares y promovidos.

Aunque no le otorgamos un valor concluyente incluimos, con carácter complementario, algunos resultados cuantitativos. El siguiente cuadro muestra los datos obtenidos en los cuatro últimos años en los que se dictó la asignatura:

Tabla 1. Resultados cuantitativos

	2012	Porcentajes sobre el total de estudiantes	2013	Porcentajes sobre el total de estudiantes	2014	Porcentajes sobre el total de estudiantes	2015	Porcentajes sobre el total de estudiantes	2016	Porcentajes sobre el total de estudiantes
Cantidad de estudiantes	63		48		48		50		36	
Regulares y promovidos	23	36,51	26	54,17	20	41,67	25	50	25	69,44
Libres	40	63,49	22	45,83	28	58,33	25	50	11	30,56

Nuestro proyecto, de por sí ambicioso, tiene también la pretensión de producir conceptualizaciones que puedan comunicarse a otros docentes para repensar el trabajo de enseñanza y promover avances en el campo de la didáctica del nivel superior. Es en este sentido que concebimos la modalidad colaborativa -donde la formación heterogénea de las personas que componen el grupo resulta sustantiva- como condición central para elaborar un conocimiento pedagógico que pueda llegar a producir cierto impacto en las prácticas habituales de la universidad. Esta concepción conlleva un modo de pensar el rol de la pedagogía en la universidad, alejado de la idea tecnicista de un asesor experto, portador exclusivo de un conocimiento especializado, a quien se recurre para saber "qué hacer y cómo". Por el contrario, supone un sujeto comprometido con la situación que analiza -y de la que también forma parte- capaz de generar condiciones para un proceso de interacción entre pares pertenecientes a distintos campos o disciplinas para el análisis reflexivo, sistemático y crítico sobre la práctica. De manera semejante, el trabajo colaborativo requiere de un docente capaz de analizar críticamente su propia práctica, ponerla en duda, escuchar las interpretaciones de personas externas al aula y de aportar la indispensable mirada de quien está dentro de la clase para favorecer el aprendizaje de los alumnos.

Referencias

1. Camilloni, A.; Basabé, L.; Feeney, S.: Los formatos de evaluación de los aprendizajes y sus relaciones con las modalidades de estudio de los alumnos universitarios. Perspectivas de investigación y marcos de análisis. Contribución Proyecto F069, Programación Científica Ubacyt 2008-2010. p. 4. Disponible en: www.ungs.edu.ar/cienciaydiscurso/wp-content/uploads/2011/11/Camilloni-Basabe-Feeney-20091.pdf
2. Basabe, L.; Cols, E.; Feeney, S.: La evaluación escolar: de los lemas a los problemas. Revista 12(ntes) Nro. 8 p. 8. (2006)
3. Bertoni, A; Poggi, M; Teobaldo, M.: Los significados de la evaluación educativa: alternativas teóricas. Evaluación: Nuevos significados para una práctica compleja. Ed. Kapelusz. p. 6. (1996)
4. Artigue, M.: Ingeniería Didáctica. Ingeniería Didáctica en Educación Matemática. Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Grupo Editor Iberoamérica. Bogotá pp. 36 y 37. (1995)
5. Sadovsky, P.; Itzcovich, H.; Quaranta, M.E.; Becerril, M.y García, P.: Tensiones y desafíos en la construcción de un trabajo colaborativo entre docentes e investigadores en didáctica de la matemática. Educación Matemática México. Vol. 28. Nro. 3 p. 13. (2016)

Volver al Índice

Incluir Teoría de Grafos en la Currícula de Ingeniería: Una Propuesta a Considerar

Raquel Cognigni, María Lorena Alfonso, Teresa Braicovich
Departamento de Matemática, Facultad de Economía y Administración,
Universidad Nacional del Comahue. (UNCo).
Buenos Aires 1400. Neuquén. Neuquén. C.P. 8300
{Rcognigni, lorena22alfonso, teresabraicovich}@gmail.com.

Resumen. Este trabajo surge en el marco del proyecto de investigación: Teoría de Grafos, del cual somos integrantes; además compartimos la cátedra Algebra y Geometría I para las carreras Ingeniería Civil, Química, Eléctrica, Electrónica, Mecánica y en Petróleo. Comenzó como inquietud, luego fue propuesta, la de ofrecer al alumno de Ingeniería contenidos sobre este tema, con la total convicción de que en algún momento de su carrera o de su labor profesional pueden constituir una herramienta poderosa o la llave que abre la puerta hacia la resolución de algún problema particular, herramienta que no estaría disponible si no se la conoce. Como no se están realizando cambios de planes, ni queremos abrir juicio acerca de qué tema quitar y/o agregar de los programas actuales, proponemos como opción alternativa ofrecer seminarios y/o cursos optativos sobre grafos con el objetivo de involucrar a los alumnos en contenidos de gran actualidad y aplicabilidad.

Palabras Clave: Grafos, Currícula de ingeniería, Modelos matemáticos.

1 Introducción

Como lo dice el título, este trabajo es por ahora una propuesta que creemos pertinente. Una de las motivaciones históricas de la Teoría de Grafos se encuentra en el estudio de las estructuras moleculares, y eso lo aproxima a la Ingeniería Química. Otra de las motivaciones históricas está relacionada a los circuitos eléctricos, los que puede ser modelizados por un grafo, y así podrá ser de utilidad en la Ingeniería Eléctrica o Electrónica. Existen estudios de distribución de los espacios en la construcción edilicia que recurre a Teoría de Grafos, y eso lo conecta con la Ingeniería Civil. Los problemas más conocidos como aplicación de Teoría de Grafos que se resuelven utilizando recorridos eulerianos y hamiltonianos, son aplicables a las Ingenierías a las que les preocupa la distribución de recursos, entre otros. Por ejemplo lo que tiene que ver con comunicaciones y telecomunicaciones, redes de transporte, agua, gas, etc.

Nos apoyamos en lo que plantean Daniel Xiodo y Gery Bioul (2001). (Pág. 21): [1]

"… *El campo de acción de la ingeniería se amplía en virtud de las indispensables herramientas lógico matemáticas que los ingenieros manejan; pero los factores a considerar en las soluciones han aumentado en similar proporción. A la vez, nuevos desarrollos en teoría del conocimiento, inteligencia artificial, teoría de juegos, lógica difusa, algoritmos genéticos, redes neuronales y otros campos de optimización de complejidad combinatoria o no polinomial le brindan herramientas de resolución más allá de la matemática clásica, el cálculo de probabilidades o la estadística. Estas teorías nuevas brindan herramientas que permiten atacar problemas de complejidad no alcanzable en el pasado, ofreciendo soluciones, no rigurosas, pero con un nivel de aproximación aceptable para muchas de las aplicaciones de ingeniería moderna …*".

En general, siempre se consideró que lo que necesita de la Matemática un Ingeniero es un fuerte dominio de los contenidos clásicos, pero a esto actualmente se agrega la necesidad de que tengan formación en la resolución de problemas de lo más variados, y a eso apuntamos con esta propuesta: simplemente a brindar una herramienta más en este sentido, resaltando la gran aplicabilidad de la Teoría de Grafos a situaciones concretas y cotidianas. Ante la fuerte tendencia actual que nos alienta a buscar que el alumno logre "aprender a aprender" y "aprender a hacer", brindar nuevas estrategias es tan útil como brindar nuevos conocimientos. En coincidencia con ideas de César Augusto Palma Alvarado: [2].

Además, considerando que es un tema que tampoco se incluye, en general, en programas de la primaria ni de la escuela media, son contenidos que no están a disposición de los alumnos ni siquiera desde sus conceptos más básicos. Nunca recurrirán a ellos para resolver un problema, sencillamente por desconocer su existencia. No es posible usar una herramienta que no se posee.

Después de varios años de estudio de la Teoría de Grafos relacionado a la enseñanza, estamos convencidas que se trata de contenidos tales que permiten:

- trabajar con ellos aún sin una base matemática importante.
- ser explorados y descubiertos por el alumno con una participación del docente como guía.
- hacer uso de la creatividad no sólo ante la resolución, sino generando problemas nuevos.
- ser desarrollados en un clima “lúdico" y ameno, lo que facilita el aprendizaje.
- simplificar un problema complejo a modelos más sencillas.
- utilizar recursos visuales y materiales concretos para ejemplificar los contenidos.
- utilizar herramientas matemáticas de las que no disponía en la matemática clásica.

En palabras de Gabriela Hernández Villanueva: [3]

“La solución de problemas en la actualidad, requiere de la implementación de acciones al menor costo y pérdida de tiempo posible. En este sentido, la Teoría de Grafos ha sido una de las herramientas que ha contribuido a dar respuesta a las necesidades de la sociedad contemporánea”.

Por lo antes expuesto, estamos absolutamente convencidas que el alumno de Ingeniería debe conocer Teoría de Grafos, con mayor o menor profundidad, en alguna etapa de su carrera.

2 Objetivos

- Introducir en el ámbito de nuestra Universidad la idea de que Teoría de Grafos es un tema relevante en la formación de Ingenieros.
- Difundir la Teoría de Grafos por su aplicabilidad en la resolución de problemas y por estimular el razonamiento lógico.
- Dictar cursos y/o seminarios optativos para los estudiantes de ingeniería.

3 Pertinencia de la propuesta

Este trabajo surge en el marco del proyecto de investigación “Teoría de Grafos”, subsidiado por la Secretaría de Investigación de la UNCo, del cual somos integrantes. No orientamos a dos líneas de investigación, una desde lo algebraico y aplicaciones y otra desde la didáctica y la enseñanza.

En oportunidad de haber presentado en el Festival ANIMATE, que organiza anualmente nuestro Departamento, un “stand” con juegos asociados a Teoría de Grafos, nos llamó la atención el interés que despertaba el tema en un grupo de estudiantes de Ingeniería. Sobre todo, nos gustó que desde la mirada de ellos como futuros ingenieros empezaron a asociar a situaciones de la vida cotidiana, mientras jugaban y consultaban sobre contenidos teóricos involucrados.

Luego de este evento, algunos estudiantes de ingeniería nos manifestaron querer cursar la materia “Teoría de Grafos” que se dicta como optativa para la carrera Licenciatura de matemática, sin ningún otro rédito más que el aprendizaje del tema. Nos movilizó la iniciativa de los jóvenes para presentar esta propuesta, que fue el puntapié inicial para poner la mirada en la aplicabilidad de grafos en temas de Ingeniería. Estos estudiantes realizaran dicha asignatura en el segundo cuatrimestre del corriente año, ya que será dictada por integrantes del proyecto.

Esto nos hizo pensar en la posibilidad de incluir una unidad sobre teoría de Grafos en estas carreras, así surgieron dos preguntas relevantes: a qué altura de la carrera sería el momento apropiado y con qué profundidad.

En los planes de todas las orientaciones de ingeniería hay dos álgebras, Álgebra y Geometría I y Álgebra y Geometría II, ambas de 8 hs semanales, que se dictan en el primero y el segundo cuatrimestre de primer año respectivamente. Pertenecemos al Departamento de Matemática de la facultad de Economía y Administración, pero “prestamos servicios a otras facultades” y desde hace varios años dictamos la cátedra Álgebra y Geometría I para las carreras de Ingeniería Civil, Ingeniería Química, Ingeniería Eléctrica, Ingeniería Electrónica, Ingeniería Mecánica e Ingeniería en Petróleo.

Cabe aclarar que algunos conceptos de la teoría de grafos están presentes en asignaturas dictadas por nuestro departamento para las carreras Licenciatura en Ciencias de la Computación, Licenciatura en Sistemas de Información y Profesorado en Informática dependiente de la Facultad de Informática de la UNCo.

Si dirigimos la mirada a los programas vigentes de las Ingenierías, como las Álgebras son materias de primer año, en cualquiera de las unidades nos encontramos con la dificultad de utilizar algún modelo interesante para referirnos al tema, y generalmente se le ofrece al alumno los contenidos básicos con la sensación de que están descontextualizados, que los ejemplos que podemos proponer son de escasa relevancia, que los jóvenes no visualizan la necesidad de aprender determinados temas.

Los docentes que transitamos las aulas de primer año de Ingeniería llevando las Álgebras en nuestro equipaje, nos hacemos permanentemente preguntas del tipo:

¿Demuestro la fórmula o le enseño a usarla?, ¿pongo énfasis en la justificación algebraica o le muestro donde se aplica?, ¿fundamento como a mí me gustaría desde mi formación o les ofrezco la receta que necesitan hoy?...... Y muchas preguntas más. En el hacer cotidiano vamos dando respuestas que se modifican permanentemente tratando de aproximarnos más y más a lo que requiere la formación del Ingeniero de esta época, tarea que no nos resulta fácil.

A partir de nuestra experiencia áulica, sabemos de las enormes dificultades que se presentan para modelizar determinados contenidos matemáticos en primer año de la carrera. A veces la dificultad reside en la esencia del contenido, otras en la aplicabilidad, es decir, es aplicable a problemas interdisciplinares, que aún no están en el programa de primer año. Eso produce lo que en pedagogía se suele llamar “vaciamiento del contenido", o podríamos decir, contenidos que nos dejan sin respuesta ante la pregunta del alumno: “¿Esto para qué sirve?", “esto lo utilizaremos alguna vez?”.

No hay duda, por ejemplo, de la inmensa aplicabilidad de los sistemas de ecuaciones en la física, sin embargo es un tema que planteado a un alumno de primer año parece simplemente una idea tortuosa de los que enseñamos matemática. Tampoco hay duda de la inmensa aplicabilidad de la teoría de cónicas a la óptica o a la astrofísica, sin embargo nuestros alumnos de primer año a veces expresan desazón y desconcierto cuando se enfrentan con esa unidad.

Quizás pase lo mismo con la Teoría de Grafos si se incluyera en los programas. Nos preguntamos si decirles que problemas como “por ejemplo” el recorrido de los camiones de residuos, o de viajantes de comercio , o de logística y transporte en general o diseño de redes de telecomunicaciones son resueltos utilizando grafos, alcanzará para que nos crean que en algún momento les será de utilidad en la resolución de algún problema complejo y relevante en su formación como Ingeniero. Sin embargo, insistimos y estamos convencidas de que conocer el tema es necesario, ya que permite abrir una puerta hacia un camino que después podrá ser explorado por los estudiantes.

Retomando a Daniel Xiodo y Gery Bioul (2001) (Pág. 23), nos hacemos eco de estos conceptos que transcribimos textualmente: [1]

“La ingeniería ha tenido (y tiene) un gran énfasis en el método científico, pero los objetivos de la misma no son coincidentes. En tanto que la ciencia busca la verdad por sí misma la ingeniería busca soluciones. Sin perjuicio de lograr una sólida formación inicial en ciencias básicas, apropiada a la formación de grado, debe buscarse el holismo, la creatividad, la precisión necesaria en los modelos y la toma de decisiones en condiciones de riesgo e incertidumbre, que son constantes en la resolución de problemas cotidianos”.

La realidad con que nos encontramos a diario los docentes de Matemática en las aulas de primer año de Ingeniería, nos pone frente a algunas paradojas: Aplicabilidad versus aprendizaje de un nuevo concepto matemático, teorización matemática versus resolución de problemas prácticos.

En Barquero, B., Bosch, M. y Gascón, J. (2014) (Pág. 84) encontramos respuesta a esta disyuntiva: [4]

“En la actualidad, parece no haber ninguna duda sobre la posibilidad y la necesidad de introducir a los estudiantes en una actividad matemática orientada hacia el estudio de problemas aplicados y de modelización. Este acuerdo es compartido por muchos investigadores y está apoyado por las nuevas orientaciones curriculares introducidas en nuestros sistemas educativos. Propone centrar la enseñanza de las matemáticas en el estudio de lo que denominamos (situaciones de la vida real) más que en los sistemas de contenidos matemáticos. Diversas investigaciones, con origen en distintos marcos teóricos, han mostrado cómo las actividades de modelización matemática pueden llegarse a desarrollar bajo condiciones adecuadas, en todos los niveles educativos y con casi todos los contenidos curriculares”.

Estas teorías didácticas proponen enfrentar al alumno a un problema concreto que los induzca a indagar en las ciencias auxiliares para obtener respuestas, así se acercaría a los contenidos matemáticos en el momento que los necesite. Esto podrá transferirse a nuevas situaciones, y sobre todo, el alumno habrá descubierto lo importante de indagar, ser autónomo en el aprendizaje, elegir las respuestas adecuadas.

4 Aplicaciones de grafos en distintas ramas de la ingeniería

La representación de los modelos matemáticos de ingeniería puede generar grafos de gran complejidad, que luego se reducen a modelos más sencillos para su análisis y estudio de la información. Consultamos bibliografía específica y actualizada de cada especialidad, para conocer qué aplicación tienen en las distintas ramas de la Ingeniería. Presentamos algunas de dichas aplicaciones a continuación, a modo de ejemplo.

4.1 Ingeniería Química

Según el artículo de J. M. Amigó y otros [5]:

La Topología molecular es un capítulo que interesa a la Química y que aplica Teoría de Grafos a la descripción de las estructuras de moléculas orgánicas. En este caso los átomos son los vértices y los enlaces químicos, normalmente covalentes, son los arcos o aristas del grafo.

La clave del método radica en el conocimiento de qué átomo está enlazado con uno concreto y en el conocimiento del camino que debe seguirse de un átomo a otro en la misma molécula. El uso topológico de los índices o descriptores topológicos es caracterizar estructuralmente un compuesto.

Esto se utiliza cuando se trata de seleccionar un nuevo fármaco, y es necesario investigar si realmente la nueva molécula va a presentar o no la actividad farmacológica esperada.

4.2 Ingeniería Civil

Encontramos en un artículo de Noguera Cuenca [6]:

En diseño arquitectónico determinados problemas que tienen que ver con la conectividad de locales y/o ambientes en alguna construcción, por ejemplo, se utilizan grafos puesto que permiten visualizar las conexiones espaciales, que pueden ser tanto de comunicación física como visual, acústica o de adyacencias.

Se estudian representaciones de grafos que constituyen particiones ortogonales del plano, lo que simplifica en gran medida el tratamiento de la información que se posee. El dibujo de grafos es una joven área de investigación para los estudiosos de la arquitectura y la ingeniería civil.

Los problemas que se plantean consisten en determinar qué grafos admiten una representación en la que sus vértices están asociados a objetos geométricos (segmentos o rectángulos) y sus aristas son relaciones entre esos objetos (de visibilidad o de adyacencia). Una vez hallado el grafo que representará determinada situación real, siempre grafos en el plano, se podrán enumerar y clasificar posibles disposiciones de modelos de planta.

4.3 Ingeniería en Petróleo

Después de haber consultado sobre aplicaciones de grafos relacionadas al petróleo, nos pareció interesante el trabajo de Benavidez Vázquez Ríos Solís [7]:

Las redes de proceso de las refinerías son complejas ya que involucran una serie de procesos químicos para hacer cerca de 20 diferentes productos finales. Actualmente se tienen medidores volumétricos o másicos a lo largo del proceso de refinación para detectar fugas. Es de notar que los medidores por naturaleza tienen cierto grado de incertidumbre y error que se pudiera propagar a lo largo de la red generando falsas alarmas.

El problema de detección de fugas tiene como objetivo conocer el lugar en que se encuentra una fuga en la red de tuberías descrita en un proceso.

El algoritmo basado en modelos matemáticos pretende determinar si existe alguna pérdida a lo largo de la refinería, lo que haría más eficaz la reducción y eliminación de pérdidas que lleguen a contaminar el medio ambiente. El esquema de una refinería es tratado con teoría de grafos para entendimiento y mejor manejo de los datos, en el cual se hace una similitud con los procesos como nodos y las conexiones entre cada proceso como los arcos de la red. El algoritmo involucra propiedades físicas y químicas del petróleo y las ecuaciones que utilizan los medidores de placa y orificio, con los valores característicos de estos medidores. El algoritmo ha sido comprobado con un simulador de medidas en los arcos, los cuales mantienen fugas, al escalarlo al uso real, conforme se agreguen mediciones en los arcos el algoritmo crecerá.

4.4 Ingeniería Mecánica

A partir del artículo de Rafael Rodriguez Puente y otros [8]:

Se utiliza la descomposición de grafos representativos en modelos matemáticos de tal manera que se conservan las relaciones entre los vértices del grafo original. Para ello se definen las relaciones de equivalencia y las particiones necesarias para la aplicación de un algoritmo de reducción de grafos a un grafo obtenido a partir de la aplicación del Método de los Grafos Dicromáticos (MGD) que ha sido utilizado en función del diseño racional y de la solución de problemas computacionales en ingeniería mecánica. Entre los algoritmos que se proponen para determinados problemas, a veces se trata sencillamente de analizar sub-grafos escogidos convenientemente.

En estudios publicados se pueden encontrar varios algoritmos de reducción de grafos, muchos de los cuales se basan en eliminar aristas y/o vértices que no son necesarios para dar solución a determinados problemas y se puede encontrar aplicaciones en las siguientes temáticas:

- Redes de workflow.
- Redes de computadoras.
- Problemas de cómputo distribuido, cómputo paralelo, búsqueda de caminos mínimos, reducción de orden parcial, etc.

4.5 Ingeniería Eléctrica y Electrónica

Para estas orientaciones rescatamos ideas centrales de Piedra Hernández y Paternostro [9], y también de Puchades Cortez y otros: [10]

En cuanto a la Ingeniería Electrónica, existen aplicaciones de la Teoría de dígrafos (o grafos dirigidos) para el diseño de complejos circuitos, mientras que en referencia a Ingeniería Eléctrica hay aplicaciones en el diseño de circuitos, pero en este caso sería más preciso hablar de grafos no dirigidos.

En el ámbito de las redes de comunicaciones móviles, desde las vías telefónicas hasta registros de e-mails se utiliza Teoría de Grafos.

En el estudio de los patrones de comunicación de millones de usuarios de teléfonos, los grafos permiten estudiar simultáneamente la estructura local y la global de una sociedad en toda la red de comunicación.

La obtención de redes eléctricas o de comunicaciones eficientes y creación de laberintos aleatorios involucra el trabajo con los árboles abarcadores mínimos, por ejemplo.

También podemos mencionar a Gustav Kirchhoff quien publicó sus leyes de los circuitos para calcular el voltaje y la corriente en los circuitos eléctricos usando grafos conexos de medida mínima.

5 Reflexiones finales y proyección a futuro

Desde nuestro rol docente sabemos que cada año, e inclusive cada cuatrimestre se comienza con la inquietud y la reflexión acerca de “que debemos modificar para este año”, y la contraparte, “qué es lo que ya trabajamos y sabemos que dio buenos resultados”. Consideramos sumamente importante que los programas no queden estancos ni desactualizados y coincidimos con Prensky: [11]

Los conocimientos matemáticos y sus aplicaciones crecen y mucho, no se producen los cambios en el currículum de la misma manera. No es la idea realizar cambios constantemente, o cambiar sólo por “cambiar”, pero sí ir incorporando aquellos nuevos contenidos que el estudiante necesita para estar preparado para afrontar el mundo actual. En coincidencia total con esta idea y particularizando en el tema que nos ocupa es que citamos textualmente a Claudi Alsina (2011): [12]

"*A lo largo del Siglo XX el gran desarrollo de la teoría de grafos y la cantidad de sus aplicaciones a los problemas más diversos ha asegurado un interés educativo por esta teoría en el nivel superior de la formación reglada, son magníficos ejemplos de modelización matemática, permiten trabajar la resolución de problemas y promueven el aprendizaje de formas de razonamiento que son genuinamente matemáticas y tienen un alto valor formativo…. El camino de la educación debe permitir una formación de calidad para todos y asegurar también la actualidad de todo lo que se explica y aplica. No es posible que los currículos oficiales queden anclados en temas milenarios o de hace siglos y que no sean permeables a temáticas que siendo formativas tratan problemas de máxima actualidad”.*

Nuestra intención a corto plazo es presentar a la Facultad de Ingeniería una propuesta de dictado de cursos y/o seminarios con contenidos básicos de Teoría Grafos y otros con contenidos más avanzados y aplicaciones, conservando siempre como eje el uso del grafo como modelizador.

Nos entusiasma este proyecto ya que es una manera de compartir nuestros conocimientos y nuestro material de estudio con la comunidad a la cual pertenecemos, lo que le da un sentido a nuestra investigación que se desarrolla permanentemente desde dos paradigmas que no se contraponen, sino que se complementan: la algebrización pura y la transmisión de los contenidos a los futuros profesionales de la UNCo.

Referencias

1. Xiodo, D.; Bioul, G.: Requerimientos actuales en la formación de Ingenieros. Revista Argentina de Enseñanza de la Ingeniería - Año 2 No 3 - Julio de 2001. (2001)
2. Palma Alvarado, C.: Nuevos retos para el ingeniero en el siglo XXI. Reporte de investigación. Revista ING-NOVACION Nº 4. Año 2. Editorial Universidad Don Bosco. Pp.61-65. (2012)
3. Hernández Villanueva, G.: FIME. http://www.fime.uanl.mx/noticia_planti.php?newId=541. (2010)
4. Barquero, B.; Bosch, M.; Gascón, J.: Incidencia del aplicacionismo en la integración de la modelización matemática en la enseñanza universitaria de las ciencias experimentales. Revista Enseñanza de las Ciencias Núm. 32.1. Pág. 83-100. (2014)
5. Amigó, J.; Falcó Montesinos, A.; Galvez, J.; Villar, V.: La Topología Molecular. Dpto. de Físico Qca. Universidad Politécnica de Valencia. Dpto de Matemática aplicada. Bol. Soc. Esp. Mat. Apl. nº 39. Pag.135-149. (2007)
6. Noguera Cuenca, I.: Aplicaciones Arquitectónicas de la Teoría de Grafos (Proyecto de máster). Valencia. (2009)
7. Benavidez Vázquez, L.; Águeda Ríos Solís, Y.: Detección de pérdidas en la industria petrolera. Memorias arbitradas del VIII Congreso de Ingeniería Industrial y de Sistemas. Facultad de Ingeniería Mecánica y Eléctrica. San Nicolás de los Garza. Nueva León. México. (2013)
8. Rodríguez Puente, R.; Marrero Osorio, S.; Lazo Cortés, M.: Aplicación de un algoritmo de reducción de grafos al Método de los Grafos Dicromáticos. Revista electrónica: Ingeniería Mecánica. Vol.15. N° 2. Pág. 158-168. (2012)
9. Piedra Hernández, V.; Paternostro Movilla, C.: Aplicaciones de la Teoría de Grafos en la Informática. Trabajo de grado. Pontificia Universidad Javeriana. Facultad de Ciencias. Bogotá. (2009)
10. Puchades Cortés, V.; Mula Bru, J.; Rodriguez Villalobos, A.: Aplicación de la Teoría de Grafos para mejorar la planificación de rutas de trabajo de una empresa del sector de la distribución automática. Revista de métodos cuantitativos para la economía y la empresa. Diciembre 2008. Pp: 7-22. (2008)
11. Prensky, M.: Digital Natives, Digital Immigrants. University Press, On the Horizon. MCB University Press. Octubre 2001. Vol. 9 Nº 5. (2001)
12. Alsina, C.: Mapas del metro y redes neuronales. Ed. Rodesa. Villatuerta, Navarra. (2001)

Volver al Índice

Revisión de las Prácticas Docentes: Metodologías Activas para la Enseñanza de Análisis Matemático I

Martha S. Rosso[1,3], Mercedes Soria[1], Jaquelina Aimar[1], Stella Vaira[2,3]
[1] Departamento de Materias Basícas, Facultad Regional Villa María, Universidad Tecnológica Nacional
Av. Universidad 450. Villa María. Córdoba. Argentina
marthasrosso@gmail.com, {msoriaf, jacquim4}@yahoo.com.ar
[2] Departamento de Matemática, Facultad de Bioquímica y Ciencias Biológicas, Universidad Nacional del Litoral
Ciudad Universitaria, 3000, Santa Fé, Argentina.
stella.vaira@gmail.com
[3] Grupo de Investigación en Educación Matemática en Carreras de Ingeniería (GIEMCI), Facultad Regional Paraná, Almafuerte 1033. Paraná. Entre Ríos.

Resumen. Este trabajo aborda la relación entre el desgranamiento universitario en los primeros años de las carreras de ingeniería con las prácticas docentes, desarrollado en el marco del PID: "Desgranamiento Temprano en Carreras de Ingeniería y su relación con las Prácticas Docentes". Tiene por objetivo proponer un cambio en la metodología de enseñanza del Análisis Matemático I con el fin de mejorar la situación del desgranamiento que se produce durante la cursada de esa asignatura en las carreras de ingeniería que se dictan en la Facultad Regional Villa María de la UTN. Se basa en la utilización de estrategias metodológicas combinadas como el Flipped clasrroom, Entornos Virtuales de Aprendizaje (EVA) y la clase presencial. Como grado de avance se presentan aspectos metodológicos de la propuesta y el espacio de trabajo, así como los resultados de la aplicación parcial del uso de los entornos virtuales en el año 2016.

Palabras Clave: Práctica docente, Estrategias de enseñanza, Desgranamiento, Espacio virtual, Carreras de ingeniería.

1 Introducción

La Universidad Tecnológica Nacional no fue ajena a los procesos de transformación que se dieron a partir de la década del 80 con el retorno de la democracia en nuestro país, la normalización de sus universidades y el ingreso irrestricto a las mismas. Problemas como el bajo índice de egreso, el elevado número de reinscriptos en las materias de los primeros años de las carreras, elevado fracaso en exámenes, bajo rendimiento académico de los alumnos, son temas preocupantes para esta institución desde comienzos de los años 90. Durante esos años la UTN participó de una etapa que se puede denominar "de construcción del conocimiento evaluativo" basándose en el concepto de evaluación de calidad como instrumento de transformación para revertir las problemáticas señaladas. Además, desde la implementación de los procesos de acreditación de las carreras de ingeniería promovida por la Comisión Nacional de Evaluación y Acreditación Universitaria (CONEAU), las universidades en general y la Facultad Regional Villa María de la Universidad Tecnológica Nacional (FRVM - UTN) en particular, implementan planes de mejoras permanentes y participan de los planes de mejoramiento de la enseñanza de la ingeniería impulsados por la Secretaría de Políticas Universitarias (SPU) [1], por lo que se esperaba observar variaciones de los desempeños académicos en términos de regularidad y desgranamiento en los últimos 10 años.

Por otra parte, Argentina, es el país de América Latina que más invierte en educación en término del porcentaje del PBI y el que más recursos destina por alumnos, pero es el que tiene peor resultado educativo en relación con su inversión [2]. Un país donde la educación es gratuita, con diversidad de políticas en vigencia que apoyan y fomentan tanto el ingreso como el egreso de las carreras de ingeniería, y la UTN, universidad federal y pública, eminentemente de carreras de Ingeniería, tan solo ha aumentado levemente su tasa de egreso, con valores muy por debajo de la media. ¿Qué es lo que aún no puede resolverse? ¿Por qué el impacto de las políticas y planes de mejoras implementados es tan pequeño? ¿Será una de las formas que tiene un país o una institución de manifestar un estado de crisis? como sugiere Cabrera Pérez [3].

Resultados finales del PID “Desgranamiento y Deserción Temprana en Carreras de Ingeniería de la FRVM - UTN. Período 2002 - 2012” [4] y reportes derivados del mismo [5, 6] permitieron identificar tanto las carreras como las materias donde el problema del desgranamiento es más significativo. Así, se pudo establecer que asignaturas del área de Materias Básicas, como Física I (FCAI), y Análisis Matemático I (AMI), son las que tienen el menor número de alumnos regulares al finalizar la cursada independientemente del período analizado. Generalmente es FCAI la que tiene mayor porcentaje de alumnos desgranados (62,09 %, valor promedio), seguida de AMI, cuya media se ubica en el 57,25 % para el período 2002 - 2012. Ambos valores se incrementaron en los últimos cuatro años alcanzando un promedio del 67,25 %, en el caso de AMI.

Dando continuidad a investigaciones que se vienen desarrollando en la Facultad Regional Villa María (FRVM) en el marco del Programa "Tecnología Educativa y Enseñanza de la Ingeniería" de la Universidad Tecnológica Nacional, este trabajo articula dos proyectos de investigación que estudian el problema del desgranamiento temprano en carreras de ingeniería. Uno de los cuales describe estadísticamente la situación del desgranamiento que ocurre durante el cursado de las materias del primer año de las carreras de ingeniería, mencionado en el párrafo anterior, el otro, formaliza algunas preocupaciones que fueron surgiendo en el marco de lo investigado y que tienen relación con las prácticas docentes, denominado "Desgranamiento Temprano en Carreras de Ingeniería y su relación con las Prácticas Docentes" [7], proyecto actualmente en desarrollo. Ambas investigaciones tienen su anclaje empírico en las carreras de ingeniería que se dictan en la FRVM - UTN.

Este reporte es un primer grado de avance en la investigación de las prácticas docentes y expone acerca de estrategias pedagógicas que ayuden a disminuir el desgranamiento temprano. Se trata de un Proyecto de Innovación Curricular (PIC) que gestiona el desarrollo del currículo orientado a lograr "buenas prácticas docentes" como recurso de mejora.

2 Revisión Teórica

2.1 Acerca de las "Buenas Prácticas"

Zabalza Beraza [8] menciona algunos rasgos, de carácter epistemológico, importantes a tener en cuenta cuando se habla de "buenas prácticas" en el estudio de la acción educativa. A saber;

- La práctica como *acción condicionada*. El autor señala que toda práctica surge en un contexto que la condiciona. En el caso de las prácticas educativas, éstas están condicionadas tanto por el nivel educativo como por la institución y su dinámica, el currículo, los estudiantes, etc.
- La *bidimensionalidad* del concepto de práctica. Esta característica la explica desde las *teorías de la acción* que remarcaron la idea de que toda acción es una realidad bidimensional, objetiva y subjetiva a la vez. Es conducta y pensamiento, es un acto personal y una realidad cultural. No es solo ver y analizar lo que se hace, sino de comprender su sentido.
- Las buenas prácticas aluden más al *paradigma proceso - producto* que al paradigma *input - output.* Con esta característica el autor pretende destacar que lo interesante del concepto de "buenas prácticas" no es el hecho en sí mismo, de que lo que se haga sea bueno o no, sino que sea bueno o no en relación a los sujetos a los que se aplica. En palabras del autor, "se trata, por tanto, de un conjunto de acciones y estrategias que permiten optimizar los procesos a través de los cuales los sujetos, sean cuales sean sus condiciones de partida, mejoran su aprendizaje". El énfasis está puesto en el proceso.
- La idea de *"buena práctica"* se relaciona también con la idea de una práctica que orienta a componentes éticos y a una mejora de las situaciones en las que se analiza. En este sentido, la práctica se transforma en "praxis". Según Freire [9], praxis es "reflexión y acción de los hombres sobre el mundo para transformarlo". De aquí que una buena práctica no es la mejor en términos técnicos ni por sus resultados, sino porque mejora el statu quo de las cosas y las personas.

Existen numerosas investigaciones que aportan conocimiento sobre las prácticas docentes y las dimensiones que la caracterizan [10, 11, 12]. La revisión de esos trabajos muestra que existe una amplia concordancia con las características expuestas, es decir, se identifica el contexto socio-cultural-económico como condicionante, el componente objetivo (estructura organizativa y administrativa de la institución) y el subjetivo (hace referencia al carácter ético de las decisiones, a la coherencia), la reflexión (como una acción reflexiva permanente sobre la práctica), como lo muestra la Fig.1.

Fig.1. Práctica docente, aspectos que la determinan.

De hecho, en el campo de la enseñanza, la idea de buenas prácticas docentes estuvo siempre relacionada con el concepto central con el que, en cada momento histórico, se definió a la enseñanza. Desde este punto de vista, lo que entendamos como buenas prácticas va a variar mucho de un enfoque a otro de la enseñanza, por lo que, sin entrar en posicionamientos teóricos y aceptando que en cada uno de ellos caben buenas y malas prácticas, lo importante de destacar es que lo que corresponde es ser coherente con el modelo de base desde el que se está actuando [8].

Teniendo en cuenta lo expuesto y la coincidencia sobre las características que definen una buena práctica docente, encontradas en los diversos trabajos de investigación revisados, una primera aproximación a la definición se consideró la idea de Miguel Zabalza Beraza [8]: "... son aquellas que necesariamente incluyen, el objetivo de buenos aprendizajes (en cantidad y calidad) pero que trascienden esa zona restrictiva de los instructivo para proponerse mejoras tanto en los ambientes de aprendizaje como el valor y sentido de las cosas que se aprenden y la forma en que se aprende". (Véase Fig. 2).

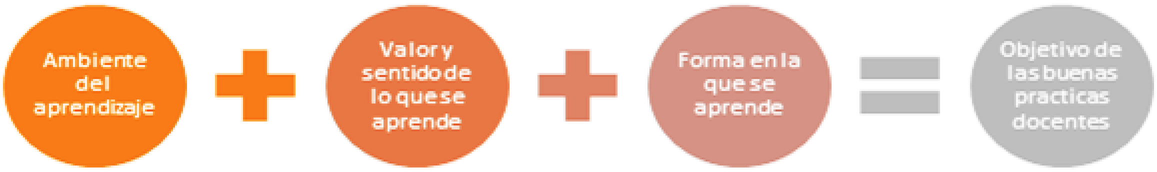


Fig. 2. Componentes de la buena práctica docente.

2.2 Metodologías activas y aprendizajes

El concepto de *Metodología Activa* no es nuevo. Si se repasa la historia se puede constatar que tanto autores, (Pestalozzi, Herbart, Fröebel, Dewey, etc.), como instituciones (La Institución Libre de Enseñanza, La escuela nueva, etc.), ya utilizaban esta denominación [13].

Fue a finales del siglo XIX y comienzos del XX cuando se inició un importante movimiento de renovación educativa y pedagógica conocido como "Educación Nueva", una corriente que buscaba cambiar el rumbo de la educación tradicional para darle sentido activo al introducir nuevos estilos de enseñanza. El alumno se convierte en el centro del proceso educativo, se rechaza el aprendizaje memorístico y se fomenta el pensamiento crítico a través del método científico. Los nuevos métodos del siglo XX se caracterizaron por ser menos expositivos y dogmáticos, el estudio por la observación personal en lugar del conocimiento del maestro, etc. Hacia fines de ese período, tanto en América como en Europa, se dejan sentadas las bases para la educación del siglo XXI, [14, 15]. El mundo está cambiando: la educación debe cambiar también. Las sociedades de todo el planeta experimentan profundas transformaciones y ello exige nuevas formas de educación que fomenten las competencias que las sociedades y las economías necesitan hoy y mañana. Esto significa ir más allá de la alfabetización y la adquisición de competencias aritméticas básicas y centrarse en nuevos enfoques del aprendizaje que propicien el aprendizaje a lo largo de toda la vida.

Sin dudas, la transición desde un modelo educativo centrado en la enseñanza hacia un modelo centrado en el aprendizaje, supone un gran desafío y un gran cambio en la cultura universitaria en general y en particular para la FRVM-UTN, donde las prácticas tradicionales están fuertemente arraigadas.

Adherimos a la definición dada por Palés Argullós y otros [15] sobre metodologías activas, entendiendo por tales, aquellos métodos, técnicas y estrategias que utiliza el docente para convertir el proceso de enseñanza en actividades que fomenten la participación activa del estudiante y lleven a un buen aprendizaje.

En este sentido, Fernández March [16], afirma que los métodos de enseñanza que involucren la participación del alumno, donde la responsabilidad del aprendizaje depende directamente de su actividad, implicación y compromiso son más formativos que los meramente informativos, generan aprendizajes más profundos, significativos y duraderos y facilitan la transferencia a otros contextos.

Como sabemos el método es un procedimiento reglado y fundamentado teóricamente, es un plan de acción paso a paso, en función de las metas del profesor y de los objetivos de los alumnos, que tiene que tomar en consideración variables como número y características de los alumnos, materia, profesor, contexto y variables sociales y culturales. Cada método es bueno para determinadas situaciones de enseñanza-aprendizaje, pero es claro que ningún método es bueno para todas. La elección depende de la concepción de aprendizaje que tenga el profesor, de los objetivos que pretenda que sus alumnos alcancen y de la función que se asigne a sí mismo en el proceso de enseñanza-aprendizaje. Las metodologías así elegidas, se convertirán en el vehículo a través del cual los estudiantes aprendan conocimientos, habilidades y actitudes. Esto significa que no existe un único mejor método, sino que el mejor método será una combinación adecuada de diferentes situaciones diseñadas de manera intencional y sistemática en función de los objetivos de aprendizaje que se fijen.

Haciendo un rápido repaso de la abundante bibliografía y trabajos de investigación referidos a los distintos métodos de enseñanza, podemos decir que se sitúan en un continuo. En un extremo se ubicarían las clases magistrales, en las cuales la participación y el control del alumno son mínimos (se limita a tomar apuntes, o hace alguna pregunta, o bien molesta). En el otro extremo, estaría el estudio autónomo, donde la participación y control del profesor son mínimos. Entre ambos extremos se ubican, por ejemplo, la resolución de problemas, el estudio de casos, proyectos, método cooperativo, método colaborativo, simulación.

De igual modo, podrían describirse los tipos de aprendizaje entendiendo el binomio enseñanza-aprendizaje como una unidad indivisible. En este sentido, en un extremo se ubica el aprendizaje mecánico [17], en el otro, el aprendizaje significativo. El primero es aquel en el que la nueva información se interioriza de manera literal, sin interacción cognitiva con conocimientos previos y sin incorporación a la estructura cognitiva, es decir, es el aprendizaje memorístico, de corta duración, se reproduce literalmente y se aplica en actividades rutinarias. En contraposición se define el aprendizaje significativo como el aprendizaje en el que hay una interacción cognitiva entre los nuevos conocimientos y los previos específicamente relevantes, existentes en la estructura cognitiva del que aprende. No debemos pensar que estos dos tipos de aprendizaje son dicotómicos, un aprendizaje no es necesariamente significativo o memorístico, los dos están situados en los extremos de un continuo, y en la práctica, los aprendizajes se ubican en algún lugar entre ambos extremos.

2.3 Flipped Classroom. Entornos Virtuales de Aprendizaje. TIC's

La universidad vive, en estos últimos años, los cambios más significativos que le haya tocado vivir a lo largo de toda su existencia. Por cierto, la incorporación de las TIC, el desarrollo de un Espacio Europeo de Educación Superior (EEES) y las declaraciones de la UNESCO para la educación del siglo XXI hacen que la institución Universidad se mueva en una doble dirección [18]. Por un lado, el eje de la formación en las nuevas propuestas universitarias coloca al estudiante en el centro y como protagonista del proceso de enseñanza. Por otro, otorga gran importancia al contexto de aprendizaje. Ya no es prioritario pensar en una única modalidad de enseñar y aprender, sino que es fundamental pensar en una amalgama de posibilidades para poder encontrar la manera más eficiente de aprender, diseñando y posibilitando diferentes escenarios, diferentes contextos, diferentes estrategias, según lo que se quiera aprender en cada momento.

En este sentido, uno de los principales aportes efectuados por las Tecnologías de la Información y la Comunicación (TIC) al campo de la educación, junto con la aparición de aplicaciones y herramientas como la Web 2.0, ha sido el gran abanico de posibilidades que abrió en el ámbito del aprendizaje formal e informal en entornos abiertos y flexibles [19].

En la actualidad, donde la enseñanza está evolucionando de modelos cerrados a modalidades abiertas y flexibles, la integración de la tecnología es un hecho prioritario, posibilitando a los alumnos tener a disposición materias en las que la metodología y el empleo de las TIC permitan acomodar sus necesidades y tiempos de estudio. Salinas [20] aborda la flexibilización de los procesos de enseñanza tanto en aspectos metodológicos como organizativos. Otro de los conceptos que son referentes en todo lo relacionado con el aprendizaje flexible, son los entornos virtuales de aprendizaje (EVA) que se apoyan en sistemas y aplicaciones de la denominada Web 2.0 y que hacen referencia, principalmente, a procesos de aprendizaje centrados en el alumno. De hecho, la formación que incluye los Entornos Virtuales de Enseñanza-Aprendizaje (EVEA) no tiene que ver sólo con la tecnología, sino y más profundamente con el replanteamiento y la innovación metodológica, de aprovechar la oportunidad y actualizar el rol docente. En definitiva, es la adaptación de la Universidad a la Sociedad del Conocimiento, de la Información, no sólo utilizando las TIC sino también y sobre todo, renovando pedagógicamente e innovando conceptualmente.

¿En qué consiste un EVA? Un entorno virtual de aprendizaje (EVA), ambiente virtual de aprendizaje (AVA) oVirtual Learning Environment (VLE) es un espacio educativo alojado en la web, conformado por un conjunto de herramientas informáticas o sistema de software que posibilitan la interacción didáctica. Los entornos virtuales de aprendizaje resultan un escenario óptimo para promover tanto el aprendizaje colaborativo y el autoaprendizaje como el desarrollo de competencias basado en el uso de nuevas metodologías de enseñanza que combinen Flipped Classroom y la dinámica de estos espacios.

Existen numerosas experiencias educativas en distintos países de América y Europa que dan cuenta de los aspectos positivos de la metodología "Flipped Classroom" o "Clase invertida", destacando principalmente la participación activa del alumno y el mejor aprovechamiento del tiempo de la clase presencial.

¿Qué es el Flipped Classroom? Es un modelo pedagógico que transfiere el trabajo de determinados procesos de aprendizaje fuera del aula y utiliza el tiempo de clase, junto con la experiencia del docente, para facilitar y potenciar otros procesos de adquisición y práctica de conocimientos dentro del aula.

Es una metodología que implica dar "vuelta la clase". Es decir, habitualmente el docente imparte los contenidos de la asignatura y explica cómo aplicarlos en las clases prácticas. Es probable que se resuelva algún ejemplo de aplicación sencillo. Para que luego, el alumno en su casa, resuelva ejercicios y problemas. Al invertir la clase, el proceso se invierte. En clase los alumnos realizan tareas de producción, debates, consultas, etc. De modo que utilizan ese tiempo para profundizar y trabajar los contenidos mediante actividades dinámicas que fomenten el trabajo colaborativo. En la Fig. 3 mostramos gráficamente los dos modelos.

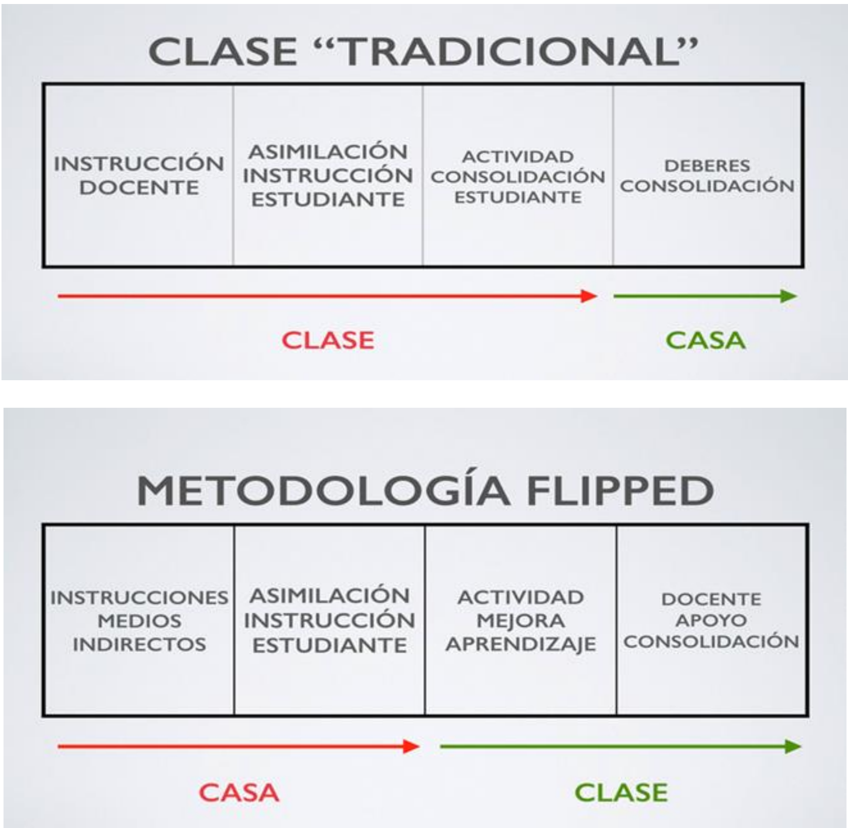


Fig. 3. Comparativo entre el Modelo tradicional y el Modelo Flipped.

3 Propuesta: Proyecto de Innovación Curricular

Este proyecto tiene como propósito plantear un cambio en la metodología de enseñanza del Análisis Matemático I que se dicta en las carreras de ingeniería de la FRVM-UTN, atendiendo a una realidad empírica y a resultados de investigaciones efectuadas en nuestra unidad académica, que muestran el elevado índice de desgranamiento que se produce durante el cursado de la asignatura en el primer año de dichas carreras.

Consiste en una propuesta de enseñanza-aprendizaje que combina varias estrategias metodológicas con la dinámica de los Entornos Virtuales de Aprendizaje (EVA) y la clase presencial, con la intención de disminuir el desgranamiento y aumentar la calidad de los aprendizajes obtenidos. Poniendo a disposición de los estudiantes múltiples formas de acceso al conocimiento, orientadas al aprendizaje significativo, y al desarrollo de competencias en la formación de ingenieros, prescriptas en los Diseños Curriculares y vitales para el mundo globalizado de hoy.

Entre las estrategias metodológicas, cabe destacar el Flipped Classroom, la resolución de problemas, estudio de casos y los métodos cooperativos y colaborativos, utilizando las potencialidades que brinda la plataforma Moodle en cuanto a la posibilidad para flexibilizar la enseñanza y el aprendizaje, fomentar el aprendizaje cooperativo y colaborativo (aun cuando el grupo de clase sea numeroso) a través de actividades en la wiki, foros de debate, foros de consulta y espacios abiertos para facilitar la comunicación. La incorporación de estrategias como la resolución de problemas y el estudio de casos, planteadas en formato analógico (material escrito) y/o digital (plataforma moodle) tienen como propósito favorecer el desarrollo de habilidades para el análisis y síntesis de la información, aplicación de conceptos en contextos diversos (transferencia) y la integración conceptual. En esta propuesta, como es claro, se incorpora el uso activo de las Tecnologías de la Información y la Comunicación (TIC), los Recursos Educativos Abiertos (REA) y el desarrollo de materiales didácticos digitales.

3.1 Objetivos

- Desarrollar estilos de enseñanza que conduzcan a procesos autónomos de aprendizaje, en los que los estudiantes tomen plena responsabilidad y conciencia de su propio trabajo y progreso en el aprendizaje.
- Introducir modos alternativos de accesos al conocimiento.
- Posibilitar al alumno independencia en el diseño de su política de estudio, a fin de que logre un ritmo de trabajo sostenido durante todo el cuatrimestre.
- Disminuir los niveles de desgranamiento de la asignatura.
- Generar un ciclo de desarrollo de mejoras en materiales didácticos analógicos y digitales y una bitácora de casos, ejemplos, problemas y trabajos prácticos alternativos.
- Incorporar la evaluación continua.
- Capacitar a los docentes de la asignatura en la incorporación de las nuevas metodologías y diseños de materiales didácticos acordes a la propuesta a través del Seminario de la Cátedra.

3.2 Recursos

En lo que respecta a los RRHH, se respeta la ordenanza referida al Régimen de Organización de la Cátedra vigente y sus complementarias, de acuerdo al número de cursos

- 1 (Uno) Profesor Titular
- 2 (Dos) Profesores Adjuntos
- 1 (Uno) Coordinador Virtual (se debe incorporar)
- 4 (Cuatro) JTP
- 1 (Uno) Ayudante de 1°
- 1 (Uno) Ayudante de 1° (se debe incorporar)
- 2 (Dos) Becarios (se deben incorporar)

3.3 Destinatarios

Todos los alumnos de las carreras de Ingeniería Electrónica, Ingeniería Mecánica, Ingeniería Química e Ingeniería en Sistemas de Información.

3.4 Estructura del curso

El curso comenzará con una “clase 0”, presencial, que tendrá por objetivo explicar en qué consiste la Clase Invertida o Clase al Revés que usaremos para el desarrollo general de la asignatura, el método de trabajo, el rol del docente, el rol del alumno y la organización de la asignatura. El manejo de la plataforma Moodle para el desarrollo de las clases virtuales donde se presentarán los aspectos teóricos y actividades. También se explicará los modos de evaluación y la función de la guía didáctica.

La asignatura está organizada en módulos, que se condicen con las unidades didácticas planificadas, los que se irán habilitando secuencialmente, con una semana de anterioridad a la clase presencial para que el alumno pueda realizar un acercamiento previo al tema, confeccionar su apunte teórico y realizar la actividad introductoria, para luego, en la clase presencial consultar las dudas, debatir, ahondar en los aspectos teórico, resolver las actividades prácticas.

Cada módulo contará con los materiales didácticos correspondientes separados en “clases”. Entonces cada clase contará con:

- Videos para cada contenido (de generación propia o seleccionado por el profesor)
- La guía para confeccionar la teoría escrita.
- Actividades prácticas.
- Foros (de debate, de consulta)
- Cuestionarios.

Para la evaluación continua se hará a través del seguimiento del alumno por medio de diversas estrategias de acuerdo a los objetivos planificados para la asignatura y para cada unidad didáctica, a modo de ejemplo, cumplimiento de las asignaciones, acceso a la plataforma Moodle, participación en foros de debate, la colaboración horizontal. Además, de acuerdo a la normativa vigente el alumno deberá resolver tres evaluaciones parciales con una instancia de recuperación. La aprobación de la asignatura, podrá ser por Aprobación Directa, si cumple con los requisitos estipulados para tal fin según el Reglamento de Estudio para las Carreras de Grado de la UTN, o por Aprobación no Directa que es por examen final.

3.5 Impacto y resultados esperados

En primer lugar, lo que esperamos con la implementación de este proyecto educativo es realizar un aporte efectivo para disminuir el desgranamiento que se produce, durante y al finalizar la cursada de la asignatura. Como así también disminuir el número de alumnos que reprueba en exámenes finales.

Afianzar estilos de enseñanza que conduzcan a procesos autónomos de aprendizaje y al desarrollo de competencias, lo que supone, como hemos analizado, no sólo conocer sino también comprender y usar pertinentemente [21]. Al afianzar los estilos de enseñanza presentados, permitirá someterlos a consideración, ser tomados como ejemplo y ser analizados como posibles estrategias pedagógicas para otras asignaturas dentro de la misma área (Matemática) o bien, en otras áreas donde la problemática del desgranamiento también es relevante, como es el caso de Física, con la intención de contribuir a la mejora de la enseñanza de las ciencias básicas partiendo de experiencias propias. Es decir, probadas en la misma unidad académica, con el mismo alumnado, el mismo contexto socio-político-económico, respetando, claro está, la particularidad de cada asignatura.

Sabemos que problemas de rendimiento académico es uno de los elementos que interfieren en la adaptación del alumno a la vida universitaria. Con esta propuesta esperamos mejorar la experiencia del alumno en la institución.

Por último, hacia el interior de la asignatura, generar un ciclo de desarrollo de materiales digitales y una bitácora de casos, ejemplos, problemas y trabajos prácticos alternativos. Motivar, incentivar y capacitar a los docentes tanto de la asignatura como a aquellos interesados en la incorporación de las nuevas metodologías y diseños de materiales didácticos acordes a la propuesta a través del Seminario de la Cátedra.

En particular, como antecedentes de la propuesta cabe mencionar la experiencia desarrollada durante el año 2016 en la carrera de Ingeniería Química. En este casos se implementó la utilización de la plataforma Moodle como espacio donde el alumno podía encontrar videos (seleccionados por el docente, bajados de You Tube) con la explicación de los diversos contenidos de la asignatura, las actividades prácticas, foros habilitados para consulta en cada unidad temática, el cronograma de actividades, las condiciones requeridas para la regularización y/o promoción de la asignatura y la bibliografía en formato digital. La metodología de trabajo fue combinada entre la clase presencial y el espacio virtual, con mayor peso sobre la primera. El número de alumno fue de 68 en total, de los cuales 28 corresponden a la cohorte 2016 (ingresantes) y 40 son recursantes (o reinscriptos). Los resultados obtenidos no marcaron una diferencia significativa respecto de la cursada tradicional en cuanto al número de alumnos regulares al finalizar la cursada (26,28 %). Es de destacar la actitud pasiva del alumnado, la dependencia con el docente a la hora de resolver las actividades y la resistencia a utilizar el espacio virtual como flexibilizador de la enseñanza y el aprendizaje. Otro factor, que pensamos actuó negativamente, fue el alto número de recursantes, en el sentido de que estos alumnos ya tienen una cultura institucional incorporada que es la de la clase tradicional.

Un aspecto alentador, el Seminario Universitario Semipresencial, que se dicta a partir del mes de Agosto de cada ciclo lectivo, en 2016, por primera vez, hizo un uso de la plataforma Moodle de manera más activa, con actividades para resolver on line y no sólo como repositorio de archivos. Pensamos que este antecedente va actuar como facilitador para el cambio metodológico que aquí se propone.

4 Conclusiones

La experiencia cotidiana, resultados de investigaciones realizadas en nuestra unidad académica que dan cuenta de manera objetiva del desgranamiento en primer año de las carreras de ingeniería, la aprobación del nuevo Reglamento de Estudio para todas las carreras de grado y su aplicación a partir del corriente año lectivo, ponen en evidencia la necesidad de evolucionar en los modos de enseñar. Tema que hoy es común no sólo a esta unidad académica sino que está presente en todas las universidades nacionales

En el contexto mencionado, el cambio en la metodología de enseñanza surge como necesidad para evitar ese alto desgranamiento en el primer año de cursado de las ingenierías y por otra parte, dar respuesta a requerimientos contextuales que se manifiestan de modo subyacente. De diversas maneras se nos sugiere que lo importante no es que enseñemos bien, sino que *sepamos hacer aprender bien*. Ya no se trata de incorporar las TIC a la clase tradicional como un apéndice de ésta, sino de reflexionar sobre cambios en nuestra labor docente.

En este marco, la propuesta de innovación curricular se centra en la materia que ocupa el segundo lugar en el ranking de materias no regularizadas, AMI, y se basa en metodologías con foco en el aprendizaje, centradas en el alumno, con sustento teórico en el constructivismo, lo cual contribuye a:

- Abrir nuevas posibilidades de avanzar en las perspectivas actuales.
- Adquirir nuevas competencias docentes.
- Distinguir el Flipped classroom o clase al revés como metodología de enseñanza, bajo un paradigma centrado en el alumno.
- Apreciar las ventajas del flipped classroom: hacer del alumno un sujeto activo y promotor de su propio aprendizaje (autonomía), mejora el aprovechamiento del tiempo en la clase presencial, le permite al docente estar más cerca de sus alumnos, admite diferentes ritmos de aprendizaje.
- Resignificar el rol docente y el rol del alumno en entornos virtuales de aprendizaje como alternativa para flexibilizar los procesos de enseñanza-aprendizaje.
- La evaluación continua.

Esta propuesta ha sido un gran avance para el equipo de docentes-investigadores, ya que nos permitió reflexionar sobre la labor docente y orientarla *hacia las buenas prácticas docentes,* porque éstas van más allá de las nuevas tecnologías, más allá de lo bueno y de lo malo, es un proceso que mejora la experiencia del aprendizaje. Propone mejoras tanto en los ambientes de aprendizajes como el valor y sentido de las cosas que se aprenden y la forma en que se aprende.

Finalmente las buenas prácticas docentes significan un cambio profundo en el rol del docente porque impacta de manera decisiva en todo el proceso tanto de enseñanza como de aprendizaje, poniendo énfasis en el “valor de uso” y no en el “valor de cambio” del conocimiento académico [22], proponiendo un aprendizaje duradero que trascienda las fronteras de la asignatura y un cambio en la cultura institucional.

Referencias

1. SPU. PROMEI I y II. *Secretaría de Políticas Universitarias. Ministerio de Educación. Presidencia de la Nación Argentina*. http://portales.educacion.gov.ar/spu/calidad-universitaria/proyectos-de-mejoramiento/promei-i-y-ii/ (n.d.). Accedido el 15 de Abril de 2015.
2. Mizrahi, D.: Argenina tiene el peor resultado educativo en relación con su inversión. *Infobae.* http://www.infobae.com/2012/11/10/680599-argentina-tiene-el-peor-resultado-educativo-relacion-su-inversion/. Accedido el 10 de Diciembre de 2016.
3. Cabrera Pérez, L.: Efectos del proceso de Bolonia en la reducción del abandono de estudios universitarios: datos para la reflexión y propuestas de mejora. *Revista Fuentes,* pp39-62, (2015).

4. Vaira, S.; Rosso, M.; Peralta, J.; Soria, M.; Aimar, J.; Tarántola, M.; Oddino, S.: Desgranamiento y Deserción Temprana en Carreras de Ingeniería de la FRVM - UTN. Período 2002 - 2012. Informe Final Proyecto de Investigación y Desarrollo - Universidad Tecnológica Nacional. PID UTI 2295 - SPU 25/R024. (2015).
5. Rosso, M.; Peralta, J.; Oddino, S.; Aimar, J., Vaira, S.: Desgranamiento Temprano en las Carreras de Ingeniería de la Facultad Regional Villa María de la UTN. Educación Matemática en Carreras de Ingeniería 2014 - XVII Encuentro Nacional X Internacional - Libro de Actas. (2014).
6. Rosso, M.; Soria, M.; Peralta, J.; Aimar, J.; Lunatti, D.; Tarántola, M; Vaira, S.: Desgranamiento Temprano y su relación con Materias Básicas. Educación Matemática en Carreras de Ingeniería 2015 - XIX Encuentro Nacional XI Internacional - Libro de Actas. pp. 597-606 (2015).
7. Vaira, S.; Rosso, M.; Peralta, J.; Soria, M.; Aimar, J.; Tarántola, M.: Desgranamiento Temprano en Carreras de Ingeniería y su relación con las Prácticas Docentes. Proyecto de Investigación - Universidad Tecnológica Nacional. PID UTI 4006. Homologado en el Programa de Inceentivos según Disp. SCTyP - UTN N° 351/15. Proyecto en desarrollo. (2016).
8. Zabalza Beraza, M.: El estudio de las "buenas prácticas" docentes en la enseñanza universitaria. Revista de Docencia Universitaria (REDU). Vol. 10 (1), pp 17-42, (2012).
9. Freire, P.: Pedagogía del oprimido. Siglo XXI, (2002).
10. De Rivas,T.; Martín, C.; Venegas, M.A.: Conocimientos que intervienen en la Práctica Docente. Praxis Educativa, Vol 7, http://ojs.fchst.unlpam.edu.ar/ojs/index.php/praxis/article/view/237. (2003). Accedido el 23 de Octubre de 2016.
11. Contreras, J.: La práctica docente y sus dimensiones. http://www.ies9018malargue.edu.ar/documentos/biblioteca/practica-profesional-docente/practica_docente-La-practica-docente-y-sus-dimensiones.pdf (n.d), (2003).
12. Barrón Tirado, C.: Concepciones epistemológicas y práctica docente. Una revisión. Revista de Docencia Uniniversitaria (REDU), Vol. 13 (1), pp 35-56, (2015).
13. Labrador Piquer, J.; Andreu Andrés, M.: Metodologías Activas. Grupo de Innovación en Metodologías Activas (GIMA). Universidad Politécnica de Valencia. http://es.slideshare.net/Blanca1954/metodologas-activas-49479691 (2008)
14. UNESCO: Replantear la educación. ¿Hacia un bien común mundial? http://unesdoc.unesco.org/images/0023/002326/232697s.pdf (2015).
15. Palés Argullós, J.; Nolla Domenjó, M.; Oriol-Bosch, A.: Gual, A.:Proceso de Bolonia (I): educación orientada a competencias. EDU MED. Vol 13 (3), pp 127-135, (2010)
16. Fernández March, A.: Metodologías activas para la formación de competencias. Educatio siglo XXI. Vol 24, pp 35-56, (2006)
17. Moreira, M.: Abandono de la narrativa, enseñanza centrada en el alumno y aprender a aprender críticamente. https://www.if.ufrgs.br/~moreira/Abandonoesp.pdf. (2010). Accedido el 2 de Noviembre de 2016.
18. Bautista, G.; Borges, F.; Forés, A.: Didáctica Universitaria en Entornos Virtuales de Enseñanza-Aprendizaje. NARCEA, (2011)
19. Ruiz Palmero, J.; Sánchez Rodríguez, J.; Sánchez Riva, E.: Flipped Classroom, an experience of open and flexible learning. EDUTEC Revista electrónica de Tecnología Educativa. https://riuma.uma.es/xmlui/bitstream/handle/10630/8431/RuizPalmero_SanchezRodr%C3%ADguez_SanchezRivas.pdf?sequence=1 (n.d.)
20. Salinas, J.: Cambios metodológicos con las TIC. Estrategias didácticas y entornos virtuales de enseñanza-aprendizaje. Bordón Vol. 56, pp. 469-481, (2004)
21. De la Cruz, Ma A.: Taller sobre el proceso de aprendizaje-enseñanza de competencia. Instituto de Ciencias de la Educación (ICE). Universidad de Zaragoza, (2005)
22. Santos Guerra, M. A.: La Difícil Navegación. El Arca de Noé. La escuela que salva del diluvio. ITESO. Guadalajara, México. (2014)

Volver al Índice

Una Estrategia de Enseñanza Innovadora en la Asignatura Cálculo II

Mirta M. Arias, Silvia E. Busab, Analía E. Nahas
Departamento de Matemática, Facultad de C. Exactas y Tecnología, Universidad Nacional de Tucumán
Av. Independencia 1800
{marias, sbusab, anahas}@herrera.unt.edu.ar

Resumen. Este trabajo es un avance del Proyecto E 507 titulado "Una propuesta didáctica para favorecer el desarrollo del grado de reflexión en el aprendizaje del Cálculo en Facultades de Ingeniería", del Consejo de Investigaciones de la Universidad Nacional de Tucumán. El trabajo describe aspectos y resultados de una propuesta innovadora realizada en las prácticas de enseñanza de Cálculo II, asignatura de primer año de las carreras de Ingeniería de la Facultad de Ciencias Exactas y Tecnología de la Universidad Nacional de Tucumán. Se realizó una experiencia en una unidad temática de la asignatura, con clases teórico- prácticas en las que se utilizó como recurso instruccional y didáctico un texto de enfoque constructivista escrito por las autoras. Se utilizó para las clases diapositivas referenciadas al libro, presentadas utilizando como soporte multimedia el proyector. Se empleó el Aula Extendida con Actividades que faciliten el seguimiento y la comprensión de las clases presenciales.

Palabras Clave: Estrategia de enseñanza-aprendizaje, Texto, Aula extendida.

1 Introducción

El trabajo describe aspectos y muestra algunos resultados de una experiencia innovadora realizada en el proceso de enseñanza-aprendizaje de Cálculo II, asignatura del segundo cuatrimestre de primer año de las carreras de Ingeniería de la Facultad de Ciencias Exactas y Tecnología de la Universidad Nacional de Tucumán (Facet-UNT).

Se planificaron clases teórico- prácticas sobre un tema de la asignatura en las que se utilizó un texto de lineamiento constructivista escrito por las autoras, como material instruccional motivador. Se usó el Aula Extendida con Actividades que favorezcan el seguimiento y la comprensión de las clases presenciales.

Este trabajo es un avance del Proyecto E 507 titulado "Una propuesta didáctica para favorecer el desarrollo del grado de reflexión en el aprendizaje del Cálculo en Facultades de Ingeniería", del Consejo de Investigaciones de la Universidad Nacional de Tucumán.

2 Fundamentación teórica de la propuesta: Enfoque constructivista

El constructivismo propone un paradigma en donde el proceso de aprendizaje se percibe como un proceso dinámico, participativo e interactivo del sujeto, de modo que el conocimiento sea una auténtica construcción operada por la persona que aprende.

Indistintamente, sea cual fuere la práctica pedagógica que asuma cada docente, lo relevante del modelo constructivista radica en que el verdadero artífice en la construcción del conocimiento no es el profesor ni la computadora, sino el alumno. No puede concebirse el aprendizaje como una actividad sólo reproductiva o acumulativa [1].

La concepción constructivista señala como un aspecto básico los conocimientos previos que poseen los alumnos respecto al contenido concreto que se propone aprender, que abarcan tantos conocimientos e informaciones sobre el propio contenido, como conocimientos sobre contenidos similares o cercanos, como reconocimiento de situaciones a las que ya se habían enfrentado antes [1].

Cuando un estudiante se enfrenta a un nuevo contenido a aprender, lo hace siempre desde un andamiaje armado con una serie de conceptos, concepciones, representaciones y conocimientos adquiridos en el transcurso de experiencias previas que utiliza como instrumento de interpretación y que determina en buena parte qué informaciones seleccionará, cómo las organizará y qué tipo de relaciones establecerá entre ellas [2].

Otra idea generalmente adscrita al constructivismo es la del conflicto cognitivo que se da entre concepciones alternativas y constituirá la base del cambio conceptual, es decir, el salto desde una concepción previa a otra. O sea cuando se definen los esquemas que los alumnos van a tener que actualizar y movilizar ante la nueva situación de enseñanza-aprendizaje.

2.1 Criterios extraídos para guiar la producción del texto

El tema "Integración Numérica" [3, 4], corresponde al programa de la asignatura Cálculo II. Nuestra larga experiencia en la cátedra nos convenció que los alumnos necesitaban disponer de un material instruccional que favoreciera el aprendizaje del mencionado contenido curricular dada su gran aplicación en cursos no básicos de Ingeniería que requieren obtener el valor aproximado de una integral definida.

Definido el marco teórico, se mencionan a continuación algunos de los principios rectores del constructivismo que guiaron la escritura del texto titulado "La Integración Numérica en el Contexto de Problemas" [5].

Es importante a la hora de generar el fichero PDF que las imágenes se muestren lo más nítidas posible y que los datos de los autores estén visibles en todo momento.

Hay otros factores importantes a tener en cuenta, que son los que se detallan a continuación:

1. El conocimiento no es pasivamente recibido e incorporado a la mente del alumno, sino activamente construido.
2. Sólo el sujeto que conoce construye su aprender.
3. Aprender es un proceso individual de construcción / reconstrucción de esquemas mentales previos como resultado de procesos de movilización, reflexión e interpretación.
4. El aprendizaje debe ser contextualizado para darle sentido a la persona que aprende, articulado con aspectos de la realidad.

3 Descripción del Texto

La mayoría de los estudiantes presentan dificultades en la resolución de problemas. Se observa en ellos una tendencia a imitar modelos realizados anteriormente, articulando preguntas que muestran falta de seguridad o cometiendo errores que dejan al descubierto su falta de comprensión de conceptos básicos. Los diseños curriculares subrayan la necesidad de pensar, como principio activo en la resolución de problemas; pero, esto es tan escaso en la práctica como reconocido en la teoría.

El alumno que aprende matemática desde un punto de vista constructivista debe elaborar los conceptos a través de la interacción que tiene con los objetos y con otros sujetos. Para que el estudiante pueda construir su conocimiento y llevar a cabo la interacción activa con los objetos matemáticos es preciso que dichos objetos se presenten inmersos en un problema, no en un ejercicio [2], [6].

El libro elaborado es un material instruccional en el que, a partir de diversas situaciones problemáticas presentadas al principio mismo del texto, que actúan como disparadoras, desarrolla el tema Integración Numérica de manera clara y sencilla utilizando gráficos y tablas que favorezcan la comprensión a los lectores [5].

Las situaciones problemáticas planteadas en el texto se seleccionaron cuidadosamente, son aplicaciones de la vida real en diversos campos y/o situaciones ingenieriles, cuya solución en cada caso requiere de los métodos numéricos para aproximar integrales definidas.

Las actividades de Ejercitación como asimismo las de Autoevaluación son exclusivamente de resolución de problemas, ofreciéndose además al lector la posibilidad de controlar las resoluciones y no sólo los resultados.

También se muestra la realización de una experiencia de articulación con Scilab (un programa algebraico computarizado de uso libre), lo que representa un importante desafío como motor de entusiasmo y participación del alumno [7].

Para mostrar una somera idea de la complejidad y pertinencia de las situaciones problemáticas referidas, se presenta a continuación uno de los ejemplos usados en el texto para la construcción del conocimiento sobre el tema Integración Numérica:

Ejemplo 6:

En el diagrama siguiente se puede observar un derrame de petróleo crudo en el mar de acuerdo a una fotografía aérea del mismo. Suponiendo que el espesor de la mancha es uniforme y es de 0,01 metro, ¿cuántos metros cúbicos de petróleo, aproximadamente, se derramaron?

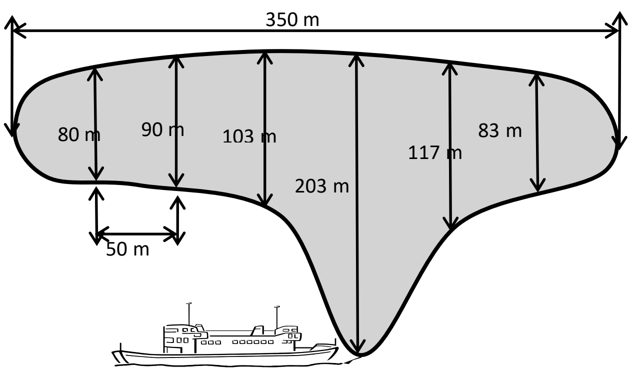


Fig. 1. Diagrama que forma parte del ejemplo 6.

3.1 Validación del Libro con los principios rectores

Cumplimiento del principio 1: La estructura del libro no es la tradicional: primero teoría, a continuación ejercicios y finalmente problemas de aplicación. Por el contrario, el conocimiento (métodos de integración numérica, análisis y estimación de errores) se va construyendo gradualmente, para dar respuesta a cada grupo de situaciones problemáticas planteadas inicialmente, quedando así incorporado a la mente del alumno por haber vivenciado la necesidad de los mismos. El texto no es un paso de información entre los autores y los lectores.

Cumplimiento del principio 2: En el texto, tanto los problemas disparadores como la ejercitación propuesta y como la tarea de autoevaluación son exclusivamente situaciones problemáticas. La mayoría de las mismas vinculadas con la experiencia, lo que facilita un aprendizaje completo y auténtico. El conocimiento se construye en la búsqueda de una herramienta, no como un hecho arbitrario y solitario.

La elaboración de la herramienta (texto) por las autoras-profesoras es una fuente de recursos diferentes ya que para el constructivismo la función del docente no es transmitir la información que posee, sino provocar actitudes movilizadoras para aprender. El libro es autocontenido permitiendo al alumno recurrir a él tantas veces como precise desde una acción totalmente independiente.

Cumplimiento del principio 3:

En el texto los nuevos conocimientos se logran a partir de:

- La reestructuración y revisión de los conocimientos previos y aprendizajes logrados: Regla de Barrow, Métodos de integración; asimismo sobre contenidos cercanos a variadas disciplinas: física, química, geodesia, eléctrica y otras.
- Procesos de movilización: reiterados intentos fallidos de búsqueda de resolución de la integral definida a la que se arriba mediante el planteo del problema, ya que la misma es irresoluble con los conocimientos previos.
- Procesos de reflexión: los datos del problema son presentados mediante tablas y no responden a un modelo matemático definido por una ecuación concreta, por lo tanto no se dispone de herramientas conocidas para dar solución al problema.
- Procesos de interpretación: los datos deben ser descubiertos a partir de un bosquejo gráfico.

Cumplimiento del principio 4:

En el libro elaborado se propone el nuevo conocimiento en contextos auténticos mediante actividades de resolución de problemas, como parte de la presentación de contenidos.

Las situaciones problemáticas presentadas son variadas representaciones del mundo real y requieren de tareas auténticamente significativas en el contexto de las ingenierías, en lugar de instrucciones abstractas fuera de contexto.

4 Aula Extendida

El aula extendida o ampliada es un entorno virtual complementario del espacio presencial que se articula con la propuesta de enseñanza-aprendizaje y tiene como objetivo acompañar y potenciar estos dos procesos. La incorporación de este tipo de espacios y procedimientos permite dinamizar y potenciar las propuestas iniciadas en el espacio del aula presencial pudiendo convertirse en terreno fértil para continuar las discusiones que se allí se inician, o bien puede constituirse en un espacio para proponer lecturas y armar grupos de discusión, o puede servir para compartir distintos materiales multimedia, o bien para proponer itinerarios diversos de lecturas, etc. [8].

El uso que haga el docente del aula extendida dependerá, entre otras variables, de los objetivos que éste se plantee con respecto a cómo y para qué usar estas aulas virtuales y en virtud de dichos propósitos planificará y articulará las actividades que allí se propongan.

Según Barberá “el contexto virtual se compone de una constelación dinámica de variables que se interrelacionan de tal manera que en un momento concreto el énfasis de la relación puede estar por ejemplo, en la comunicación alumno-profesor, mientras que en la secuencia educativa siguiente el énfasis puede estar en la relación que establece el alumno con los materiales de estudio, y en la posterior, la relación que tiene el profesor con la tecnología que incorpora para facilitar el aprendizaje” [9].

4.1 Descripción del Aula Extendida

En la propuesta se utilizó como recurso tecnológico con el objetivo de acompañar y potenciar el proceso de enseñanza y aprendizaje un entorno virtual complementario del espacio presencial. Así, con anterioridad a las clases presenciales se subió al Aula Extendida el enunciado de las ocho (8) situaciones problemáticas presentadas en el texto que actúan como disparadoras. Se solicitó a los alumnos que para cada problema realicen cuatro (4) actividades detalladas explícitamente, explicando además por qué debían realizarla con anterioridad a la clase presencial. Además cada situación problemática se presentó acompañada de un ícono alusivo a la misma que la representa y del número de la página del libro donde está planteada para facilitar así una asociación flexible y dinámica con el libro.

5 Experiencia

El marco teórico expuesto, la formación de las autoras del presente trabajo en el Instituto Coordinador de Programas de Capacitación (ICPC) y en la carrera de postgrado Magister de la Enseñanza de la Matemática Superior de la UNT brindó los lineamientos metodológicos para diseñar una intervención pedagógica y aplicarla en el dictado de la asignatura Cálculo II.

Con la intención de incidir en el logro de conocimientos, en la transferencia de nociones del campo de la Integración Numérica y en el desarrollo de la autorregulación de los aprendizajes se proyectó una experiencia con una secuencia de tareas académicas que permitieron analizar las respuestas que los alumnos elaboraban a problemas cercanos a los que podrán encontrar en el futuro ciclo profesional.

La valoración conjunta de los resultados permiten considerar la importancia de solicitar a los estudiantes universitarios tareas que posean las siguientes características: procesos de interpretación y transferencia de situaciones problemáticas, elaboraciones grupales, instancias de feedback que permitan la revisión y la mejora de respuestas.

5.1 Objetivos

El objetivo de esta experiencia fue obtener resultados relativos a la transferencia de conocimientos y a los procesos de autorregulación del aprendizaje que estudiantes universitarios ejercieron en el contexto de las clases, en las que se solicitaron tareas académicas y se proporcionaron instancias de feedback.

5.2 Participantes

Dos grupos de alumnos de la asignatura Cálculo II. Uno del turno mañana constituido por 153 alumnos de los grupos G3 (Ingeniería Industrial, Ingeniería Geodésica, Ingeniería Azucarera y Agrimensura) y G4 (Ingeniería Química e Ingeniería Mecánica) y otro grupo del turno tarde de 142 estudiantes de G1 (Ingeniería Eléctrica, Ingeniería en Computación e Ingeniería Electrónica) y G2 (Ingeniería Civil, ingeniería e Ingeniería Biomédica).

O sea un total de 295 estudiantes.

5.3 Procedimientos

Se diseñaron y ejecutaron dos estudios que se describen a continuación.

5.3.1 Estudio 1

La secuencia completa del Estudio 1, correspondiente al año 2016, consistió en tres tareas de distinto tipo: dos tareas se realizaron con el libro “La Integración Numérica en contextos de problemas” que desarrolla el tema curricular a partir de situaciones problemáticas elaborado por las autoras de este trabajo. Las tareas, con las correspondientes consignas, fueron las siguientes:

Tarea 1: El objetivo de la primera tarea fue generar una situación propicia para la transferencia de conocimientos de Integración Numérica.

Se planificaron clases del tema Integración Numérica de manera tal que ayude a vencer dificultades por parte de los estudiantes en el uso de conceptos complejos y específicos de la materia para dar respuesta a inconvenientes que se les presentaban en tareas académicas.

Se desarrolló el tema “Integración Numérica” utilizando el texto “La Integración Numérica en el Contexto de Problemas” como material educativo, instruccional y didáctico.

Con anterioridad a las clases presenciales se utilizó el Aula Extendida para presentar las ocho (8) situaciones problemáticas planteadas en el texto cuya solución requiere de los métodos numéricos para aproximar integrales definidas. Se solicitó a los alumnos que realicen las Actividades detalladas, antes de concurrir a la clase presencial.

Se dieron dos (2) clases presenciales de dos (2) horas cada una, con diapositivas referenciadas al libro, que fueron presentadas en el anfiteatro utilizando como soporte multimedia el proyector. Cada diapositiva fue acompañada de explicaciones del docente y preguntas formuladas tanto por los alumnos como por el docente.

El docente hizo uso del pizarrón para el desarrollo de las demostraciones y con la intención de generar mayor compromiso y participación, preguntaba a los estudiantes las justificaciones de los distintos pasos.

Después de cada clase presencial se utilizó el Aula Extendida o ampliada para poner al alcance de los estudiantes las diapositivas empleadas en la clase presencial.

Tarea 2: El objetivo de la segunda tarea fue favorecer la interpretación de situaciones problemáticas vinculadas a la vida diaria y/o a situaciones ingenieriles y estimular en los estudiantes el uso de los conocimientos para intentar resolver un problema.

Luego de la clase desarrollada por dos (2) docentes, autoras del libro, se entregó a cada estudiante una fotocopia de la Ejercitación propuesta en el texto. Los alumnos que realizaron esta tarea conformaron varios grupos de trabajo y finalmente representantes de los diferentes equipos pasaron al pizarrón a mostrar la resolución de las situaciones problemáticas planteadas.

También hubo una instancia para el trabajo independiente y de autoevaluación ya que se entregó a cada estudiante el enunciado de un problema que requería estimar una integral definida de una función continua con valores que debían ser extraídos de un gráfico para que lo resolviera en clase de forma autónoma y posteriormente hiciera un autocontrol del procedimiento y su solución.

Tarea 3: El objetivo de la tercera tarea fue conocer la valoración que hacen los estudiantes del libro y de la intervención didáctica implementada utilizando el texto mencionado y el entorno virtual descripto para la enseñanza del tema Integración Numérica.

Se diseñó e implementó una encuesta con 14 ítems. Para favorecer la confiabilidad, el cuestionario fue respondido en forma anónima disponiendo cada alumno del tiempo necesario para hacerlo.

Los aspectos a evaluar en la encuesta fueron: Clase (entusiasmo, atención, reflexión, valoración del Cálculo, motivación, desempeño docente); Aula Extendida (realización de tareas, complemento eficiente, uso para consulta, interés, implementación en otros temas); Libro (uso en clase, uso en el trabajo grupal, claridad, tablas/gráficos/esquemas, autoevaluación). Los resultados se analizarán por separado.

5.3.2 Estudio 2

La secuencia completa del Estudio 2, correspondiente al año 2016, consistió en dos tareas de distinto tipo: una tarea se realizó a partir de las encuestas. Las tareas, con las correspondientes consignas, fueron las siguientes:

Tarea 1: El objetivo de la primera tarea del segundo estudio fue procesar las encuestas.

En este trabajo se analizaron el total de preguntas (16) de la encuesta para el grupo de alumnos del turno mañana, del turno tarde y para el total de alumnos (grupos del turno mañana y del turno tarde en conjunto).

Se estudió la confiabilidad de las respuestas con el coeficiente de Pearson [10].
El estudio se apoya en estadísticas sobre las respuestas al cuestionario.
Tarea 2: El objetivo de la segunda tarea del estudio 2 fue procesar y analizar los resultados de los parciales en el tema Integración Numérica de los alumnos que participaron de la experiencia.

5.4 Resultados y Análisis

Mostraremos los resultados y el correspondiente análisis de los mismos en las Tareas 1, 2 y 3 correspondientes al Estudio 1.

5.4.1 Estudio 1

Tarea 1. La mayoría de los estudiantes seguía la clase con su propio libro, algunos con el texto del compañero sentado a la par y otros sólo con las diapositivas pues no habían adquirido el libro, participando ya sea con preguntas al docente o a sus compañeros y sin preocuparse por tomar apuntes.
Creemos que las situaciones de feedback que se propiciaron generalmente por el docente ayudaron a los estudiantes en la construcción de aprendizajes significativos y en la activación de diferentes procesos autorregulatorios, ya que las prácticas de reflexión y revisión, permiten a los alumnos interiorizar procesos de monitoreo y control [11]. No obstante, debemos señalar que si bien se desplegaron las instancias descriptas, no podemos decir que los estudiantes estuvieron familiarizados o aprovecharon todos los momentos de feedback para regular sus desempeños, ya que en las situaciones de feedback generadas en las clases la mayoría de los alumnos escucharon atentamente pero no todos formularon preguntas puntuales y realizaron comentarios.
Tarea 2. La presentación de la resolución de problemas de la Ejercitación propuesta en el libro superó las expectativas ya que aún habiendo poco tiempo disponible, la mayoría de los equipos de trabajos resolvieron la casi totalidad de las situaciones problemáticas.
La exposición en el pizarrón de grupos que obtuvieron diferentes resultados proporcionaron instancias de feedback consistente en "las respuestas que se dan a los productos elaborados por los estudiantes e indirectamente acerca de sus planes cognitivos" que se refiere a la forma en que los estudiantes se representan mentalmente las demandas de las tareas y las operaciones intelectuales necesarias para completarlas.
Se evidenció que el feedback proporciona oportunidades para que el alumno obtenga información acerca de sus resultados académicos siendo el más beneficioso el que se brinda inmediatamente después del desempeño de los estudiantes. El feedback inmediato colaboró significativamente con el aprendizaje, motivando a los estudiantes y generando resultados más eficientes. Además, permitió corregir los errores y creencias falsas de modo rápido; y fue aún más beneficioso cuando ofreció acceso a los fundamentos y a las explicaciones sobre las correcciones.
Comprobamos que uno de los aspectos más destacados en el monitoreo del desempeño es el feedback o la retroalimentación, que puede provenir tanto del mismo sujeto (interno) como de los pares o profesores (externo) y promueve procesos de reflexión, revisión y optimización de los aprendizajes construidos.
En relación con la transferencia de conocimientos, a partir de los análisis de las respuestas expuestas, podemos indicar que se alcanzaron buenos resultados, ya que en términos generales favorecieron un posicionamiento activo de los estudiantes en su rol: los alumnos adquirieron conocimientos específicos de la asignatura, pudieron comprender más acerca de los problemas planteados, lograron integrar tanto conocimientos previos aprendidos como el nuevo conocimiento y transferirlo para dar respuestas acordes a problemas propios de la ejercitación elegida.
Tarea 3. Se dio una situación poco común ya que prácticamente el total de alumnos que participó de la propuesta respondió las preguntas de la encuesta, pues de los 297 que realizaron la experiencia 295 estudiantes se comprometió contestando el cuestionario.
Esta situación nos reafirmó que hay que implementar propuestas de enseñanza que motiven a los estudiantes a involucrarse reflexiva y estratégicamente en actividades de aprendizaje que lo enriquezcan y lo comprometan.

5.4.2 Estudio 2

Se mostrará los resultados y la correspondiente interpretación de los mismos en la Tarea 1 correspondiente al Estudio 2.

La Tarea 2 del Estudio 2 se encuentra aún en etapa de realización y no fue finalizada por lo que sus resultados serán publicados en otro trabajo.

*Tarea 1:*Las respuestas de los estudiantes de los dos grupos turno mañana y tarde en forma conjunta (295) a las preguntas de la encuesta sobre los tres aspectos a evaluar: Clase ((preguntas 1 a 6), Aula Extendida (preguntas 7 a 11) y Libro (preguntas 12 a 16) en las cinco categorías**:** Mucho, Bastante, Algo, Muy poco y Nada se interpretan en Tablas.

Los resultados de las respuestas a las 6 preguntas sobre la *Clase*, se muestran a continuación.

Tabla 1. Análisis del Aspecto Clase valorado en la encuesta.

Clase					
1)¿Esta clase te despertó entusiasmo por aprender?	2)¿Te mantuvo atento?	3)¿Te estimuló a reflexionar?	4) ¿Te permitió ver el Cálculo Integral como una herramienta útil para resolver problemas de la vida real y de distintas disciplinas?	5)En la clase, la presentación mediante diapositivas caracterizadas por una combinación de colores y formas con imágenes relacionadas al texto fueron motivadoras y orientadoras?	6)Consideras que el desempeño del docente contribuyó a la enseñanza del tema?
El 62% de los alumnos opina que esta forma de enseñanza despertó mucho o bastante el entusiasmo por aprender, el 33 % algo y sólo un 5% percibió muy poco cambio o nada en la actitud en cuestión.	Prácticamente el 57 % de los estudiantes opina que mantuvo mucha o bastante atención en la experiencia, casi el 35% perdió la atención en algún o algunos momentos y un 8% estuvo de algún modo desatento.	Prácticamente el 49% de los alumnos respondió que esta forma de enseñanza estimuló mucho o bastante la reflexión, casi el 41% reflexionó algo, sólo un 8% razonó muy poco y un 2% no razonó o no contesta.	A un 74% de los alumnos la clase le permitió ver mucho o bastante el Cálculo Integral como una herramienta útil para resolver problemas de la vida real y de distintas disciplinas. Es decir consideró el tema desarrollado como muy o bastante importante para su formación de ingenieros porque su profesión fundamentalmente consiste en dar solución a problemas de distinta índole, pero reales y concretos. El 17% opinó que le permitió algo y el 9% bastante o nada.	Prácticamente para el 53% de los estudiantes las diapositivas que facilitaban un rápido acceso a la página correspondiente del libro fueron mucho o bastante motivadoras, el 33% estuvo algo motivado con la presentación, el 10% muy poco y el 4% nada.	A un 90% de estudiantes les pareció que el docente se desempeñó muy o bastante bien con el objetivo de facilitar el aprendizaje, utilizando diapositivas referenciales y también el pizarrón en las demostraciones. El 7% opinó que sólo algo contribuyó el docente y el 3% muy poco o nada.

En resumen, en esta clase se lograron resultados muy y bastante favorables referidos a la motivación, concentración, reflexión, valoración del Cálculo, uso de diapositivas como recurso didáctico y desempeño docente en conjunto, en no menos de un 49% de alumnos y a lo sumo en un 90%. Es decir que la valoración que hacen los estudiantes de la propuesta de utilizar el libro en la clase desarrollando la misma con diapositivas referenciales para la enseñanza del tema Integración Numérica en los ítems analizados es positiva.

Los resultados de las respuestas a las 5 preguntas sobre el *Aula Extendida*, se muestran a continuación.

Tabla 2. Análisis del Aspecto Aula Extendida valorado en la encuesta.

Aula Extendida				
7) ¿Has realizado las Actividades del tema Integración Numérica propuestas en el Aula Extendida ?	8)¿Consideras que el Aula Extendida para este tema fue un complemento eficiente que facilitó el seguimiento y la comprensión de la clase presencial?	9)¿Piensas que usarás el Aula Extendida para consultar sobre tus dudas del tema para el parcial y/o examen final?	10) ¿Crees que el Aula Extendida mantiene el interés en el seguimiento del curso?	11) ¿Te gustaría se implementara diferentes Actividades en el Aula Extendida para otros temas de Cálculo II?
Sólo el 14% de los alumnos realizó mucho o bastante de las tareas detalladas en el Aula Extendida, antes de concurrir a la clase presencial. El 30% algo, el 24% muy poco y 32% no las realizó o no contesta. Estos porcentajes tal vez se explican en el hecho que por primera vez en la cátedra se usó el Aula Extendida para acompañar el proceso de enseñanza-aprendizaje.	Prácticamente el 43 % de los estudiantes opina que el Aula Extendida fue un recurso tecnológico que favoreció mucho o bastante la atención y seguimiento de la clase, para el 30% facilitó algo, para el 15% muy poco y el 12% opina que no lo favoreció o no contesta.	El 62% de los alumnos respondió que piensa usar mucho o bastante este espacio de encuentro de manera interactiva, el 34% algo o muy poco para consultar sus dudas y el 4% nada.	Para el 54% de los estudiantes este complemento del espacio presencial de clase lo motiva mucho o bastante para el seguimiento del curso, para el 31% algo, mientras que para el 13 % lo mantiene muy poco interesado y para el 2% nada o no contesta.	Casi el 76% de los alumnos respondió que optaría mucho o bastante por aprender otros temas de la materia con este recurso, o sea usando el Aula Extendida, el 20 % algo o muy poco y el 4% seguiría de la manera tradicional.

En resumen, en esta propuesta de utilizar el Aula Extendida, se logró resultados bastante, y muy favorables, referidos a la misma como complemento eficiente, su uso para consultas, para mantener el interés de los alumnos y su implementación en otros temas de la asignatura en conjunto, en no menos de un 43% de alumnos y no más de un 76%. Entonces podemos decir que la valoración que hacen los alumnos de la propuesta de utilizar el Aula Extendida para acompañar el proceso de enseñanza-aprendizaje en los aspectos analizados es positiva.

Los resultados de las respuestas a las 6 preguntas sobre el *Libro*, se muestran a continuación.

Tabla 3. Análisis del Material de trabajo Libro valorado en la encuesta

Material de Trabajo: Libro				
12) ¿Para seguir la clase usaste el libro?	13) ¿El libro te resultó útil en el trabajo grupal?	14) ¿En el libro los contenidos se presentaron de forma clara?	15) ¿En el libro, los gráficos, tablas y esquemas presentados en las soluciones problemáticas te facilitaron la resolución de las mismas?	16) ¿La autoevaluación con la cual trabajaste presentada en el libro te despertó actitudes positivas hacia el estudio?
El 53% siguió la	El 60% de los	El 73% de los	Prácticamente el	Casi el 78% de

clase usando mucho o bastante el libro, el 23% lo utilizó algo o muy poco, el 24% no lo utilizó o no contesta. Esto puede deberse a que no todos los alumnos pudieron comprarlo en el momento de la realización de la experiencia, aunque siempre estuvo presente en el cuerpo docente la idea de priorizar el uso del libro a la venta del mismo.	estudiantes usó mucho o bastante el libro para resolver el trabajo práctico, el 29% opina que algo o muy poco y el 11% nada o no contesta. Cabe aclarar que como en el trabajo grupal los estudiantes compartían unidades del texto, prácticamente todos tuvieron acceso al material instruccional en cuestión.	alumnos respondió que el libro le resultó muy o bastante claro. Solamente el 14% contestó que algo o muy poco claro y el 9% que nada claro o no respondió.	79% valoró mucho o bastante la presentación en el libro de tablas y gráficos que ayudaron a la comprensión del problema, el 13% algo, el 8% muy poco o no contesta.	los alumnos opinó que las actividades de autoevaluación propuestas en el texto favoreció mucho o bastante el estudio del tema Integración Numérica, el 16% algo, el 4% muy poco y el 2% nada o no contesta.

En resumen se logró un cambio importante en por lo menos un 53% de estudiantes en el aspecto de desterrar la costumbre muy arraigada en el ciclo básico de sólo moverse con apuntes propios o de dudoso origen.

Además entre el 73% y 78% de los alumnos opinó en forma muy o bastante positiva sobre la claridad del libro, la presentación de los contenidos y la inclusión de actividades de autoevaluación en el mismo.

Analizadas e interpretadas las tres Tablas 1, 2 y 3 y en respuesta al desempeño del cuerpo docente que viene trabajando hace años en esta línea de elaborar una propuesta para que los estudiantes eleven el grado de reflexión mediante la resolución de problemas, y al grupo de alumnos que está dispuesto a participar de un cambio para un aprendizaje más participativo, que estimule el razonamiento, el uso de libros y de nuevos recursos tecnológicos, nos vemos en el compromiso de seguir trabajando en esta línea abordando otro tema curricular de manera similar.

Se interpreta como una variable: “Clase” y como sus dimensiones: “entusiasmo por aprender”, “atención”, “reflexión”, “valoración del Cálculo”, “presentación motivadora”, “desempeño docente”. En consecuencia, se concluye que los indicadores mostraron valores muy importantes en la cuarta dimensión (74%) y en la última dimensión (90%).

Se define el “Aula Extendida” como una segunda variable y “realización de tareas”, “complemento eficiente”, “uso para consultas”, “interés”, “implementación en otros temas” como sus dimensiones. Se concluye que los indicadores evidenciaron valores muy importantes en la quinta dimensión (76%) e importante en la tercera (62%).

Se considera el “Libro elaborado” como otra variable y, “uso en clase”, “utilidad en el trabajo grupal”, “claridad”, “tablas/gráficos/esquemas”, “autoevaluación” como sus dimensiones. Se sostiene que los indicadores mostraron valores muy importantes en la tercera (73%), cuarta (79%) y quinta dimensión (78%).

Tarea 2: Se encuentra en etapa de realización y no fue aún finalizada.

6 Conclusiones

- La valoración que hacen los estudiantes de la propuesta innovadora de utilizar el libro en la clase y el aula extendida como recurso tecnológico para la enseñanza del tema Integración Numérica a través de las tres variables medidas es muy positiva. Se propone como objetivo dedicar tiempo y esfuerzo para plantear ideas y tareas nuevas con el afán de motivar aún más el deseo de aprender de nuestros estudiantes y, sobre todo, de resolver problemas.
- Los distintos elementos involucrados en las Tareas del Estudio 1 y Estudio 2 generaron un entrelazamiento enriquecedor, tanto para los procesos de construcción del conocimiento académico, como para el desarrollo de la reflexión y de la autorregulación de los aprendizajes en los alumnos.

- Queda aún finalizar la Tarea 2 del Estudio 2 que consiste en analizar y procesar los resultados de los parciales en el tema Integración Numérica de los alumnos que participaron de la experiencia.
- Como trabajo futuro se proyecta emplear la misma metodología en la enseñanza de otros temas de la asignatura, que favorezca el desarrollo del grado de reflexión matemática, como nuevo aporte para el mejoramiento de la calidad de la educación superior.

Referencias

1. Pozo, J.I. y Gómez Crespo, M.A.: *Aprender y Enseñar Ciencias*. Madrid: Morata. (2000).
2. Herrera Capita, A. M.: El constructivismo en el aula. Revista Innovación y Experiencias Educativas, Vol 14. Catalunta: Universitat Oberta de Catalunya. (2009).
3. Burden, R.; Faires, J.: Análisis numérico. International Thomson Editores. (1998).
4. Chapra, S.; Canale, R.: Métodos numéricos para ingenieros. México: Mc.Graw Hill. (2007).
5. Busab, S.E.; Arias, M.M.; Viggiani Rocha,M. I.; Nahas, A. E.: La integración numérica en el contexto de problemas. ECO UNT. (2013).
6. Pozo, J.I. y Postigo, Y.: La solución de problemas como contenido procedimental en la Educación Obligatoria. Madrid: Santillana. (1994).
7. Hernández Requena, S.: El modelo constructivista con las nuevas tecnologías aplicadas en el proceso de aprendizaje. Revista de Universidad y Sociedad del Conocimiento. Vol. 5, Nº 2, (pp. 26-35). Catalunya: Universitat Oberta. (2008).
8. Ingrassia, C.; Giménez, A.: Aulas extendidas y ampliadas: ¿Cómo y para qué usarlas? http://campus.unla.edu.ar Accedido el 3 de Febrero de 2017.
9. Barberá E. y Badía A.: Educar con aulas virtuales. Orientaciones para la innovación en el proceso enseñanza y aprendizaje. Machado Libros, Madrid, pp.90 (2004).
10. Marroquín Peña, R.: Confiabilidad y validez de instrumentos de investigación. (2013). Accedido el 4 de junio de 2015.
11. Garello, M.V.; Rinaudo, M.C.: Autorregulación del aprendizaje, feedback y transferencia de conocimiento. Investigación de diseño con estudiantes universitarios. Revista Electrónica de Investigación Educativa (REDIE). Vol 15, Nº2, Ensenada: Universidad Autónoma de Baja California. (2013).

Volver al Índice

Una Experiencia del Uso del Geogebra en los Temas: Circunferencia, Elipse e Hipérbola, en el Ciclo Básico de las Carreras de Ingeniería

Ruiz Collivadino Ignacio; Hurtado Julia M.; Alurralde Florencia M.; Giliberti José
Consejo de Investigaciones de la Universidad Nacional de Salta (CIUNSa),
Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de Salta (U.N.Sa.).
Av. Bolivia 5150. Salta. 4400
ignaciogd_89@hotmail.com; julia_mhurtado@yahoo.com.ar; {florencialurralde, gilijv}@gmail.com

Resumen. Esta investigación forma parte de un Proyecto del Consejo de Investigación de la Universidad Nacional de Salta (CIUNSa) sobre la integración de las TIC en el primer año del Ciclo Básico de las Carreras de Ingeniería de la U.N.Sa. Nace con la idea de emplear la característica dinámica del software de geometría Geogebra, como herramienta mediadora en el aprendizaje de los temas Circunferencia, Elipse e Hipérbola como lugar geométrico. Su objetivo es obtener datos que permitan reflexionar sobre posibles cambios en las estrategias de enseñanza de la asignatura Álgebra Lineal y Geometría Analítica (ALGA), que contribuyan significativamente en el aprendizaje de los estudiantes.

Palabras Clave: Enseñanza y aprendizaje, Cónicas, Lugar geométrico, Geogebra.

1 Introducción

Existen diversas opiniones y teorías acerca del beneficio de la incorporación de las Tecnologías de la Información y la Comunicación (TIC) en los diferentes niveles educativos, pero la realidad observable es que los avances tecnológicos han provocado cambios, en algunos casos profundos, en el comportamiento social e individual de las personas. Por otra parte, y de manera casi inconsciente, se ha generado la necesidad de economizar tiempo en el logro de objetivos y la tecnología ocupa un papel importante en ese sentido. Estos dos fenómenos, entre otros, son significativos para la integración de las TIC en las estrategias de enseñanza como elemento motivante en el aprendizaje de los estudiantes, permitiéndoles desarrollar la creatividad, la capacidad de exploración y el hábito de verificación de resultados en diferentes etapas.

Para lograr una integración efectiva de la tecnología, la mejor manera de planificar la enseñanza, es considerando las necesidades y los intereses de los alumnos en relación con el aprendizaje de los contenidos curriculares, y además que la elección de la tecnología debe estar puesta al servicio de este aprendizaje [1].

En muchas ocasiones los errores que cometen los alumnos en su aprendizaje son causados por la incorrecta interpretación de los conceptos desarrollados. “Conocer las concepciones e ideas que los estudiantes tengan acerca de los conceptos matemáticos, le permite al profesor explicar los procedimientos, definiciones, ejemplos y errores que realizan, luego, a partir de un diseño de situaciones de enseñanza, se busca que los estudiantes superen aquellas concepciones o ideas que les provocan errores” [2].

Una temática, generalmente, tiene diferentes modos de aproximarse a ella. Transitar por ellos resulta en una actividad enriquecedora del conocimiento y ayuda al fortalecimiento del pensamiento crítico.

No es posible construir el significado de las cónicas a través de un único enfoque, como por ejemplo, el más difundido, el algebraico [3].

Teniendo en consideración lo expuesto anteriormente, una idea interesante a desarrollar es que el uso del Geogebra en el estudio de cónicas como lugar geométrico podría ser beneficioso para el estudiante.

2 Objetivo

Analizar la producción de un grupo de estudiantes de primer año de ingeniería que cursan la asignatura ALGA, en los temas circunferencia, elipse e hipérbola, a partir de una experiencia del uso del soft Geogebra, con el fin de obtener datos que sirvan para reflexionar sobre posibles cambios en las estrategias de enseñanza y aprendizaje.

3 Marco teórico

La fundamentación teórica del trabajo se encuentra en algunos de los presupuestos del Constructivismo. Como punto de partida se puede considerar al aprendizaje como una experiencia trascendental y dinámica, que involucra al alumno y su entorno en un proceso de continua realimentación en la búsqueda de significados que sean considerados como valiosos socialmente. La persona que aprende realiza un aporte de elementos que se relacionan y trascienden a la situación misma de aprendizaje. Así, el proceso pedagógico debe iniciarse en las capacidades cognitivas del aprendiz, de sus conocimientos y experiencias previas; como también promover el trabajo cooperativo, la enseñanza recíproca entre iguales y la experiencia con problemas reales, facilitando la construcción de significados [4].

El aprendizaje significativo basado en la recepción supone principalmente la adquisición de nuevos significados a partir del material de aprendizaje presentado. Necesita tanto de una actitud de aprendizaje significativa por parte del estudiante, como de un material potencialmente significativo para él. A su vez, esta última condición supone: 1) que el propio material de aprendizaje se pueda relacionar de una manera no arbitraria y no literal con cualquier estructura cognitiva apropiada y pertinente; y 2) que la estructura cognitiva de la persona concreta que aprende contenga ideas que cumplan la función de anclaje para que el nuevo material se pueda relacionar [5].

Este pensamiento implica que el estudiante debe tomar un papel activo y consciente en su aprendizaje, convirtiéndose en responsable del mismo, y a la vez da pie a la incorporación de las TIC como herramienta complementaria válida y propiciadora de una expansión de la conciencia, tanto en la significación y/o re-significación del contenido a aprender, como en la estructura cognitiva previa.

“Los objetos de la geometría (puntos, figuras, cuerpos, etc.) no pertenecen a un espacio físico real, sino a un espacio teórico, conceptualizado. Esto trae ya un primer problema didáctico: ¿cómo ayudar a los alumnos a comprender que los objetos con los que trabaja en geometría son teóricos y no reales?”. Resalta que los dibujos trazados son solo representaciones de los objetos geométricos y que inicialmente muchos problemas geométricos pueden ser explorados empíricamente, lo que puede dar lugar a la obtención de resultados, formulación de propiedades pero en carácter de conjeturas [6]. No debe perderse de vista que la validación de las respuestas a los problemas, no se establece empíricamente, sino que se apoya en las propiedades de los objetos geométricos. Las argumentaciones a partir de las propiedades conocidas de las figuras y cuerpos producen nuevos conocimientos sobre los mismos. Es importante priorizar el vínculo entre las construcciones geométricas y los recursos algebraicos que aparecen y son necesarios para explicar y validar las construcciones realizadas. Considerando lo anterior, la importancia del uso del Geogebra, reside en la posibilidad de establecer conjeturas, visualizar los problemas geométricos y verificar los resultados obtenidos analíticamente.

Es posible escuchar en ciertos grupos de docentes, que la existencia de computadoras en el aula representa un riesgo y una oportunidad. Como uno de los riesgos aparece la limitación de restringir la enseñanza a mostrar lo que se ve en pantalla, los dibujos geométricos, las representaciones gráficas de funciones, etc. Como oportunidad, se pueden proponer situaciones como las construcciones imposibles que ayudan a generar argumentos para la prueba. Se corre el riesgo de vaciar de contenido la enseñanza ya que el software resuelve las técnicas cuya aplicación es una actividad muy frecuente en las aulas. Entonces se hace una apuesta a la oportunidad de producir avances en la enseñanza y el estudio de la matemática [7].

4 Descripción de la experiencia

Un grupo de alumnos de la Facultad de Ingeniería de la U.N.Sa. que cursaron la asignatura ALGA durante el segundo cuatrimestre de 2016, trabajó en el refuerzo de los temas circunferencia, elipse e hipérbola como lugar geométrico con apoyo del Geogebra. Cabe aclarar que dicha asignatura pertenece al primer cuatrimestre de primer año y se dicta en forma conjunta para las carreras de Ingenierías Química, Civil, Industrial y Electromecánica, por lo que los alumnos que participaron de la experiencia lo hicieron como recursantes.

De un total de 150 alumnos, se invitó a participar voluntariamente, a dos comisiones de práctica conformándose un grupo de 31 alumnos. Las etapas de la experiencia fueron las siguientes:

- En primer lugar se realizó una encuesta al grupo de voluntarios para conocer sus expectativas.
- Luego, en un encuentro extra programático, se hizo la presentación y ejemplificación de los comandos básicos de Geogebra para continuar con una guía de problemas especiales, distintos a los de la guía de trabajos prácticos de la asignatura.
- Finalmente se realizó una entrevista personal a algunos de los estudiantes que participaron de la experiencia.

5 Metodología de trabajo

Cada alumno de ALGA resolvió el trabajo práctico del tema Cónicas de la manera acostumbrada (con papel y lápiz) dentro del horario programado de clases destinadas al tema. La presentación del práctico completo para su aprobación es un requisito obligatorio para la promoción de la asignatura.

El encuentro adicional generó una gran expectativa y se realizó con una fuerte predisposición a participar del mismo. Primero se trabajó sobre el uso de comandos básicos del Geogebra y luego en el desarrollo de las siguientes actividades con el apoyo del Geogebra:

Actividad 1: Hallar el lugar geométrico de los puntos del plano euclídeo cuya suma de cuadrados de distancias a las rectas perpendiculares $r_1: 2x+3y-6=0$ y $r_2: 3x-2y+8=0$ sea igual a 10. Identificar la cónica, indicar sus elementos, graficarla y verificar con Geogebra la definición de esa cónica.

Actividad 2: Hallar el lugar geométrico de los puntos que dividen a las ordenadas de los puntos de la circunferencia $x^2+y^2=16$ en la relación ½. Identifique la cónica, sus elementos, grafique y verifique con Geogebra la definición de esa cónica.

Actividad 3: Demostrar que el lugar geométrico de los puntos cuyo producto de las pendientes de las rectas que los unen con los puntos fijos $(-2,1)$ y $(3,2)$ es igual a 4 representa una hipérbola. Indicar sus elementos, graficar y verificar con Geogebra la definición de esa cónica.

Se comenzó con la Actividad 1 que corresponde a una circunferencia. Una vez leída la consigna se solicitó a los alumnos que lo resolvieran con ayuda del Geogebra. Transcurrido el tiempo acordado para la tarea, y teniendo en cuenta la actividad de los participantes, los docentes hicieron la correspondiente devolución e indicaron una posible forma de resolución analítica y con el software, haciendo hincapié en la definición de circunferencia como lugar geométrico. Seguidamente se trabajó de manera análoga con la Actividad 3 que corresponde a una hipérbola, pero en este caso el trabajo de los alumnos se llevó a cabo con mayor destreza en el uso de comandos. Por ser la más compleja en su formulación algebraica, por último se trabajó con la Actividad 2, siendo necesario en esta oportunidad el apoyo de los docentes.

Durante el desarrollo de cada una de las actividades se puso énfasis en los siguientes aspectos: interpretación de las definiciones de circunferencia, elipse e hipérbola como lugares geométricos, verificación de algunos de los resultados de los problemas de la guía de trabajos prácticos de la cátedra, la visualización de las gráficas de las cónicas y el estudio de la variación de parámetros. Se presentó distintos casos y tipos de soluciones.

La semana siguiente al encuentro, todos los alumnos de la asignatura rindieron una evaluación del tema que consistió en los siguientes ejercicios:

Ejercicio 1: Defina circunferencia y deduzca su ecuación normal con centro en $C(h,k)$.

Ejercicio 2: Identifique la cónica, halle todos sus elementos y grafique: $16x^2+9y^2-64x+18y-71=0$.

Al final del cuatrimestre, en el tercer parcial, el tema cónicas se evaluó mediante los siguientes ejercicios:

Ejercicio 1:

a) Definir elipse como lugar geométrico (incluida la forma simbólica).

b) Hallar el lugar geométrico de los puntos $P(x,y)$ del plano euclídeo tales que el producto de los inversos de las pendientes de las rectas trazadas desde P a los puntos fijos $M(4,2)$ y $N(2,-2)$ sea igual a 2. ¿De qué cónica se trata? Escribir la ecuación normal de la misma.

Ejercicio 2: Identificar y graficar la siguiente cónica $3x^2-2xy+3y^2+2\sqrt{2}x-6\sqrt{2}y=-2$. Escribir la ecuación normal con centro en $(0,0)$.

Por último, los ejercicios relativos a cónicas del recuperatorio, fueron:

Ejercicio 1:

a) Halla las ecuaciones de las tangentes trazadas desde el punto $(4,1)$ a la cónica $2x^2-xy+y^2+x-3y+2=0$.

b) Deduce una fórmula para hallar el lado recto de una hipérbola horizontal.

Ejercicio 2:

Identifica la cónica, halla su ecuación normal con centro en $(0,0)$ y grafica indicando los cambios realizados: $17x^2 - 12xy + 8y^2 - 68x + 24y - 12 = 0$.

Por último, se entrevistó sólo a algunos estudiantes del grupo de voluntarios ya que algunos regresaron a sus hogares inmediatamente después del recuperatorio.

6 Resultados y análisis

De la encuesta inicial se obtuvo los siguientes datos:

- El 97% de los estudiantes posee PC.
- El 78% utilizó algún software de geometría, de los cuales un 70% conocía únicamente el Geogebra. El 30% restante conocía además otro soft.
- El 83% de los que conocía el Geogebra, lo utilizaba en análisis de funciones y en verificación de resultados.
- El 97% respondió que le interesaba una clase de uso de comandos del Geogebra.
- Los materiales y recursos de estudio que utilizan son: teoría de la cátedra (100%), libros (70 %), apuntes de cátedra (73%), internet (80%).
- Cuando no entienden conceptos teóricos recurren a internet el 33% y en temas de práctica el 70%.
- Solo el 13% de los estudiantes verifica ejercicios del trabajo práctico, el 32% lo hace en algunas ocasiones y el 55% no verifica.

El análisis de los resultados indica que la mayoría de los estudiantes posee PC, lo que implica que usar Geogebra como apoyo no representa un obstáculo importante. Un dato interesante es que, actualmente, el soft es utilizado con mayor influencia en la asignatura Análisis Matemático I, donde se lo integra a través de la plataforma Moodle, por ejemplo en el estudio de funciones.

En caso de dudas referidas a cuestiones prácticas, la búsqueda en internet ocupa un porcentaje alto frente a la alternativa de consulta a docentes de la cátedra. El uso de Geogebra como herramienta para verificar resultados de la guía de trabajos prácticos es bastante bajo.

Los resultados obtenidos en la evaluación por temas fueron los siguientes:

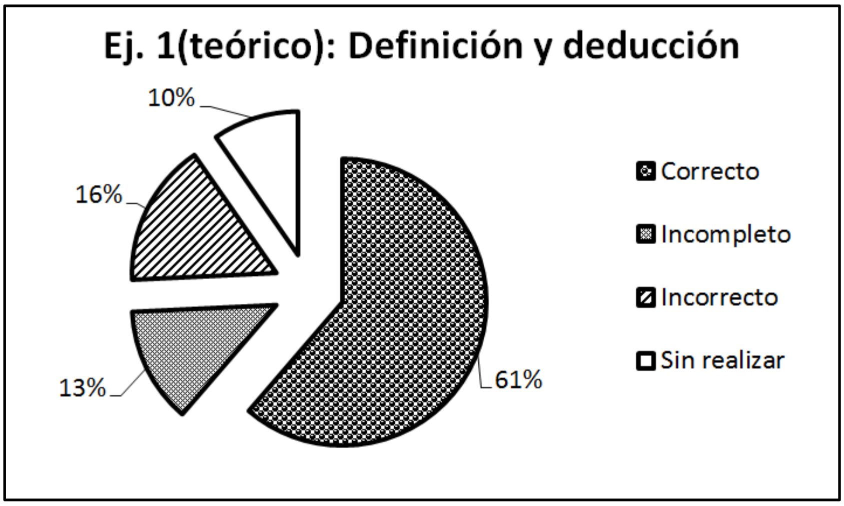


Fig.1. Porcentajes obtenidos en la resolución del ejercicio 1 (teórico) de la evaluación por temas.

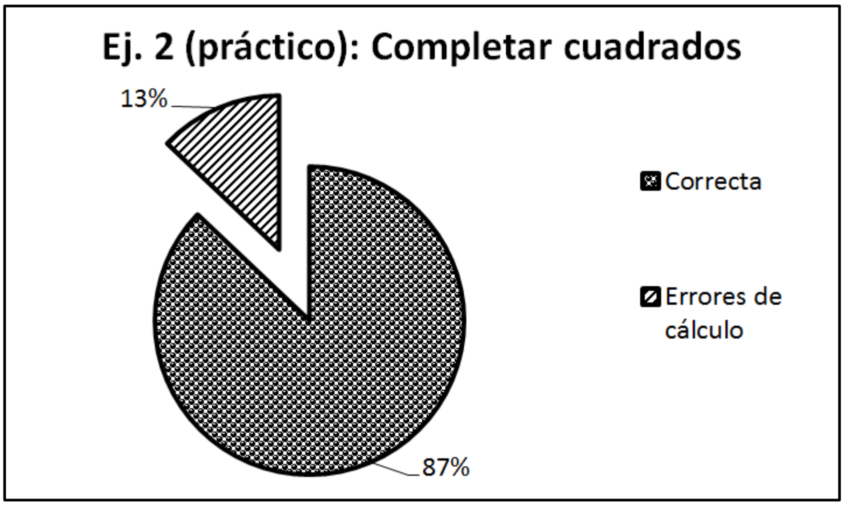


Fig. 2. Gráfica que presenta los resultados obtenidos en el ejercicio 2 (práctico) de la evaluación por temas relativos al procedimiento de completar cuadrados.

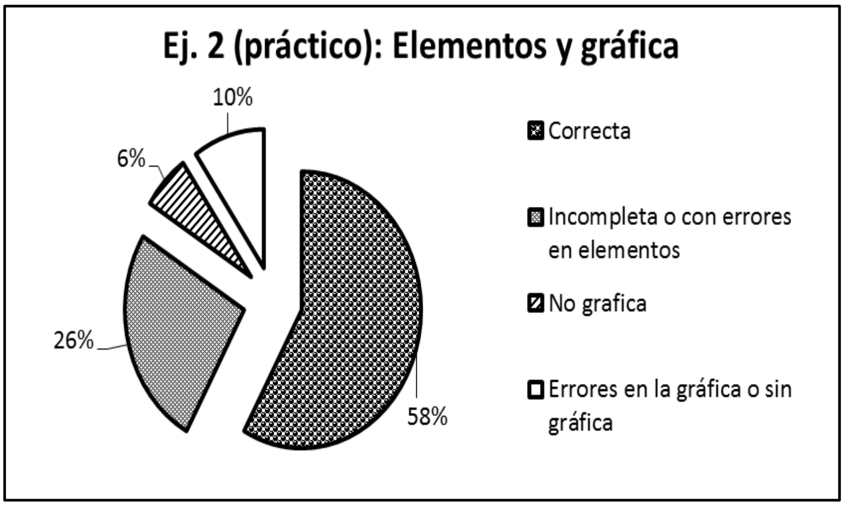


Fig. 3. Gráfica que presenta los resultados obtenidos en el ejercicio 2 (práctico) de la evaluación por temas relativos a la determinación de elementos y construcción de la gráfica.

De las gráficas anteriores se puede decir que en este tipo de evaluaciones, los estudiantes tienen mayores dificultades en los ejercicios teóricos, ya que un 26% lo hizo mal o no respondió. Esto puede obedecer a la idea de los alumnos que la parte teórica tiene un peso muy inferior comparado con la parte práctica, aún cuando en la evaluación el 50% sea de carácter práctico y el otro 50% de carácter teórico.

Por el contrario, los mejores resultados (87%) se obtuvieron en el procedimiento de completar cuadrados, obtener la ecuación normal e identificar la cónica.

Un aspecto importante en esta temática es la vinculada a la gráfica de las cónicas ya que ella impacta directamente en el tema siguiente: cuádricas. En este sentido un 84% realizó correctamente la gráfica y de ellos un 26% tuvo algún error en la identificación de algún elemento de la cónica.

Se debe aclarar que las evaluaciones por tema se realizan durante el cursado como parte de la política de evaluación continua de la Facultad y tiene incidencia en la nota de promoción, sin embargo su efecto no es considerado como significativo por los alumnos.

Dos semanas después de la evaluación por temas se tomó el tercer parcial. Los gráficos de resultados obtenidos en el mismo son los siguientes:

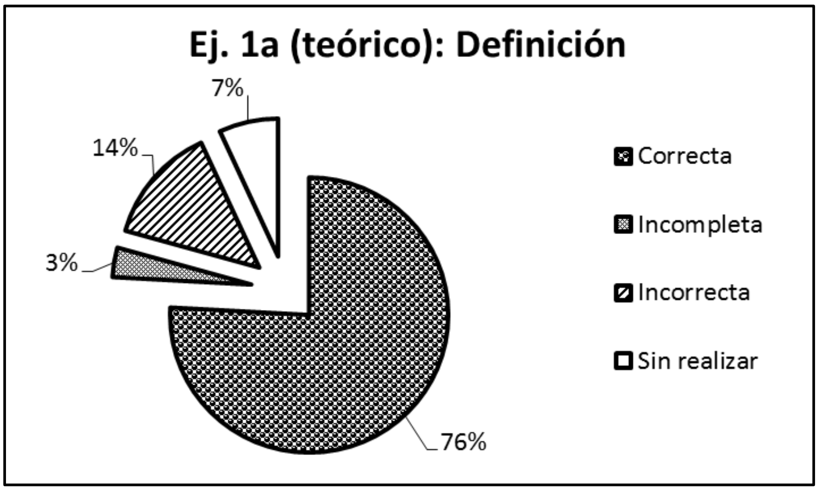


Fig. 4. Gráfica que presenta los resultados obtenidos en el ejercicio 2 (teórico) del tercer parcial relativos a la definición de elipse como lugar geométrico.

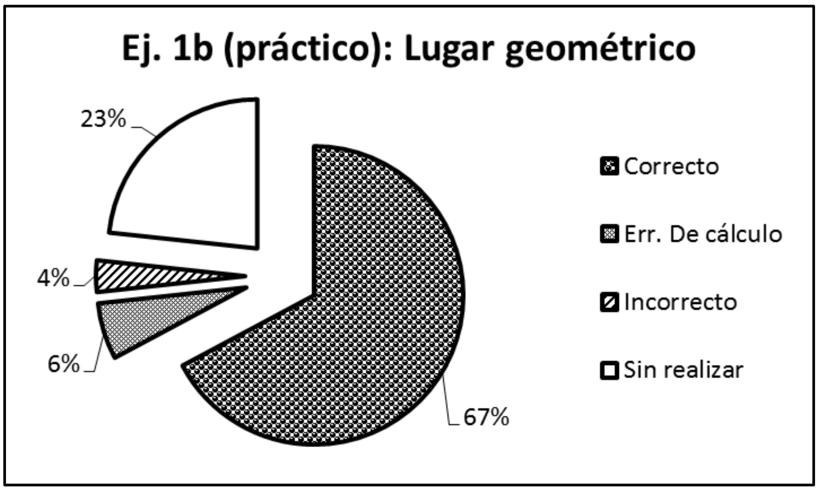


Fig. 5. Gráfica que presenta los resultados obtenidos en el ejercicio 1b (práctico) del tercer parcial relativos a la determinación de la expresión del lugar geométrico.

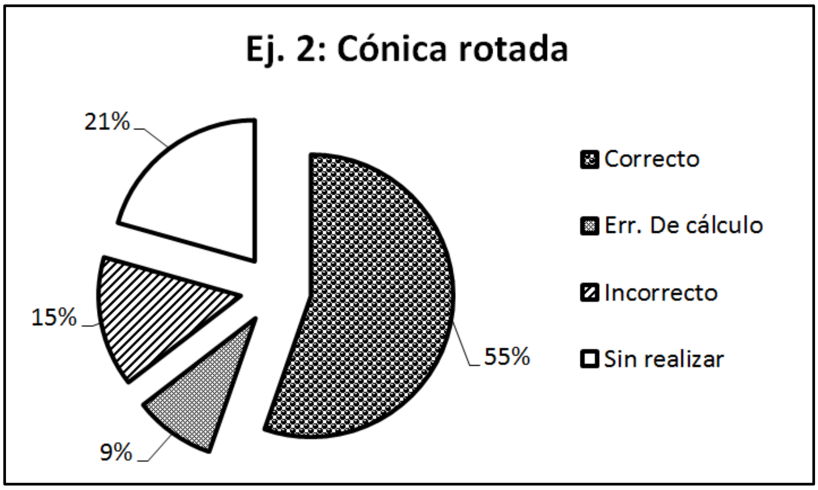


Fig. 6. Gráfica que presenta los resultados obtenidos en el ejercicio 2 (práctico) del tercer parcial relativos a la rotación de una cónica.

En esta instancia se puede apreciar un mayor rendimiento en el ejercicio teórico (1a) con respecto al ejercicio práctico (1b).

Es necesario considerar aquí, que debido al ritmo vertiginoso de cursado de la asignatura, son los días previos a la evaluación aquellos en los que los estudiantes dedican mayor cantidad de tiempo al estudio de cuestiones teóricas.

La mayor dificultad estuvo relacionada a la interpretación del enunciado del problema de lugar geométrico y su correspondiente formulación algebraica. Un 23% no pudo realizar el planteo, para luego obtener la ecuación de la cónica.

La traslación y rotación de cónicas es uno de los temas que presenta dificultades relacionadas al cambio de base y la ubicación de los nuevos ejes. Se observa que un 36% no hizo este ejercicio o tuvo errores de cálculo, lo que indica que se debe seguir trabajando en la parte conceptual y los procedimientos algebraicos relacionados a este apartado.

Finalmente el detalle de los porcentajes obtenidos en el recuperatorio es el siguiente:

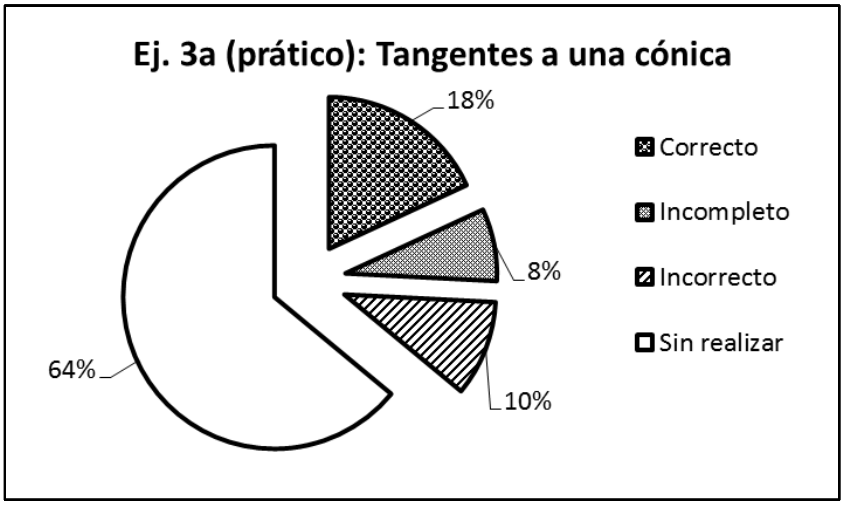


Fig. 7. Gráfica que presenta los resultados obtenidos en el ejercicio 3a (práctico) del recuperatorio del tercer parcial relativos a la determinación de las tangentes a una cónica.

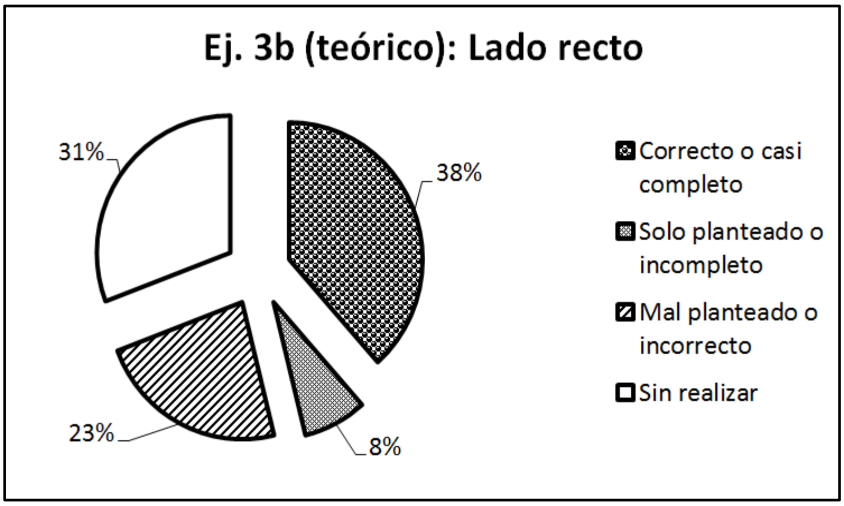


Fig. 8. Gráfica que presenta los resultados obtenidos en el ejercicio 3b (teórico) del recuperatorio del tercer parcial relativos a la deducción de una fórmula para calcular el lado recto.

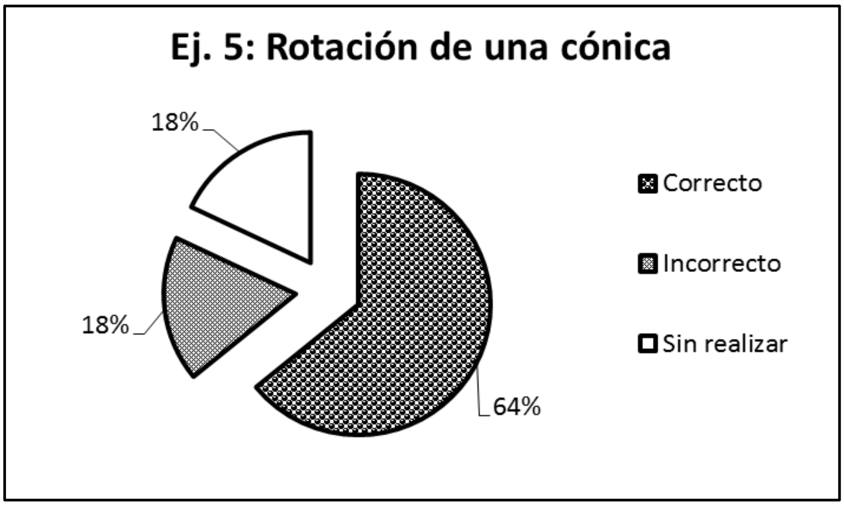


Fig. 9. Gráfica que presenta los resultados obtenidos en el ejercicio 5 (práctico) del recuperatorio del tercer parcial relativos a la rotación de una cónica.

En el recuperatorio del parcial si bien mejoró el porcentaje de alumnos que trabajaron correctamente la traslación y rotación de una cónica, es notable la gran cantidad de alumnos que no pudo plantear el problema de tangentes, sólo un 18% lo hizo en forma correcta. En el ejercicio teórico se observa nuevamente que la mayor dificultad está vinculada a los procedimientos deductivos, un 54% no lo hizo o lo hizo mal.

La entrevista final se realizó a un grupo de ocho alumnos quienes manifestaron que el empleo de Geogebra los motivó y les ayudó a entender aspectos de la temática que en el primer cuatrimestre les resultaron difíciles de comprender, como por ejemplo definiciones basadas en el concepto de lugar geométrico.

El encuentro satisfizo sus expectativas, pero indicaron que el tiempo dedicado al mismo les resultó insuficiente para lograr un mejor uso del soft.

Marcaron también la dificultad que tuvieron para interpretar el ejercicio 2 de la guía propuesta en el encuentro adicional, por lo cual les resultó difícil plantearlo sin ayuda.

Otro dato interesante que se obtuvo en la entrevista es que la comprensión correcta de cónicas contribuye a un mejor desempeño en el tema cuádricas.

Casi todos coincidieron que Geogebra les permitió comprender mejor un tema tan largo y con bastantes fórmulas en mucho menos tiempo.

Todos reconocieron que incrementaron el uso del software después del encuentro extra en la verificación de las gráficas y en la detección de errores. Asimismo señalaron que sería de gran ayuda para ellos si se extendiera el empleo de Geogebra en otros temas de la asignatura como por ejemplo: rectas y planos en el espacio, resolución de sistemas de ecuaciones lineales con parámetros y transformaciones lineales.

8 Conclusiones y trabajos futuros

La encuesta inicial sirvió para revelar que la familiarización con el soft y su uso todavía es insuficiente.

A pesar que el rendimiento académico en las evaluaciones consideradas del grupo de la experiencia fue significativamente mejor que el resto de los estudiantes, todavía es preocupante el porcentaje de alumnos que cometen errores y/o no interpretan consignas, por lo que se debe trabajar en este tema de manera sistemática.

Se observó en los alumnos falencias en algunos conceptos teóricos de cónicas, lo que generó un obstáculo a la hora de resolver los ejercicios con Geogebra.

Se debe continuar trabajando para que la mayoría de los alumnos integre el soft de en su proceso de aprendizaje, de manera que los ayude a conseguir una mayor autonomía. Es importante a futuro tratar que todos los estudiantes cuenten con la última versión del soft, lo que evitará pérdida de tiempo en las horas de clase.

Las actividades a realizar en el futuro próximo son:

- Trabajar con los estudiantes en la comprensión de consignas y textos.
- Reformular las estrategias de enseñanza de manera que sean un aporte beneficioso en los procesos deductivos.

- Ampliar la bibliografía de consulta, elaborar cartillas sobre el uso básico del soft y dictado de talleres sobre Geogebra.
- Extender paulatinamente el empleo de Geogebra a otros temas de la asignatura.
- Profundizar el tratamiento de la traslación y rotación de cónicas, desde los marcos conceptuales, procedimentales y con la integración del soft.
- Se continuará trabajando con la integración del Geogebra tanto en las clases teóricas como prácticas de la asignatura ALGA utilizando en mayor medida los recursos que ofrece la plataforma Moodle, pero poniendo énfasis en la importancia de la adquisición y/o reacomodación de los conocimientos previos necesarios para trabajar con el soft.

Referencias

1. Manso, M.; Pérez, P.; Libedinsky M.; Light, D.; Garzón, M.: *Las TIC en las aulas. Experiencias latinoamericanas*. Paidós, pp. 64 (2011)
2. Fernández Mosquera, E.: Situaciones para la enseñanza de las Cónicas como lugar geométrico desde lo puntual y lo global integrando Cabri Géomètre II plus. Instituto de educación y pedagogía. Universidad del Valle. *Bibliotecadigital.univalle.edu.co/bitstream/10893/3901/4/CB-0450269.pdf* . Accedido el 08 de Febrero de 2017.
3. Kilpatrick, J.; Hoyles, C. & Skovsmose, O. (Eds.), *Meaning in Mathematics Education* (Vol. 37).: Springer, pp. 39 (2005).
4. Díaz Barriga Arceo, F.; Hernández Rojas, G.: Estrategias docentes para un aprendizaje significativo, en Guglietta Alicante, L.: Educación superior por competencias, constructivismo y tecnologías de la información y las comunicaciones (TIC). Una visión integrada. *Boletin IESALC informa de educación superior*. http://www.iesalc.unesco.org.ve/index.php?option=com_content&view=article&id=2769:educacion-superior-por-competencias-constructivismo-y-tecnologias-de-la-informacion-y-las-comunicaciones&catid=126:noticias-pagina-nueva&Itemid=712&lang=es. (2011). Accedido el 23 de Febrero de 2017.
5. Ausubel, D. P.: *Adquisición y retención del conocimiento. Una perspectiva cognitiva*. Ed. Paidós. pp. 25. (2002).
6. Itzcovich, H.: *Iniciación al estudio didáctico de la Geometría. De las construcciones a las demostraciones*. Libros del Zorzal, pp. 10 (2005)
7. Fioriti, G.(2012), en Ferragina, R.; Ammann, S.; Bifano, F.; Cicala, R.; González, C.; Lupinacci, L.: *Geogebra entra al aula de Matemática*. Ed. Miño y Dávila, pp. 15 (2012)

Volver al Índice

Aplicaciones de la Matemática en Carreras de Ingeniería: una Debilidad en la Formación de Profesores de Matemática

Cintia C. Vernazza[1], Daniela B. Emmanuele[2]
[1] Departamento de Matemática de la Escuela de Formación Básica, Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura, Universidad Nacional de Rosario -2000
vernazza@fceia.unr.edu.ar, cinvernazza@gmail.com
[2] Departamento de Matemática de la Escuela de Ciencias Exactas y Naturales, Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniría y Agrimensura, Universidad Nacional de Rosario - 2000
emman@fceia.unr.edu.ar, emmanueledaniela@gmail.com

Resumen. En este trabajo (realizado dentro del Proyecto ING 548) relatamos tres situaciones que nos alertaron acerca de la preocupación de los docentes por la falta de formación contextualizada en el transcurso de la carrera de Profesorado en Matemática. Las debilidades en la formación docente, delatadas por dichas situaciones, nos condujo a una revisión en cuanto a si la formación de los profesores universitarios de matemática brinda todas las herramientas necesarias para que estos docentes puedan contextualizar los contenidos matemáticos con problemas que surgen del ámbito de la ingeniería, y de esta forma lograr que las clases de matemática no sean una mera reproducción de conceptos cuyas aplicaciones se limiten a hechos intramatemáticos. Diseñamos un sondeo exploratorio y a partir de los resultados aquí comunicados, pretendemos contribuir con mejoras sustanciales en la formación de Profesores de Matemática en tanto son ellos quienes transmiten la matemática y sus aplicaciones en las carreras de Ingeniería.

Palabras Clave: Aplicaciones de la matemática, Formación docente, Contextualización, Modelación

1 Introducción

Este trabajo se sitúa en el marco del Proyecto de Investigación ING 548 radicado en el Dpto de Matemática de la Escuela de Ciencias Exactas y Naturales (ECEN) de la Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura (FCEIA) de la Universidad Nacional de Rosario (UNR).

Dentro de la formación de Profesores de Matemática, la educación matemática que se recibe debería permitir –entre otras cosas- que un docente universitario de Matemática vincule las diferentes ramas de la Matemática con el mundo social y natural; esto se hace especialmente necesario cuando se trata de profesores universitarios que ejercen en las carreras de Ingeniería [1]. Pero, los Profesores en Matemática, que son los que, en general, están a cargo de la enseñanza de las materias del área básica de la Matemática (Álgebra y Geometría, Cálculo, Álgebra Lineal) en las carreras de Ingeniería, manifiestan no estar suficientemente formados en las aplicaciones que estas ramas de la matemática tienen en dichas carreras. Esta situación se presenta como un obstáculo a la hora de programar las clases y diseñar situaciones didácticas que resulten provechosas para los destinatarios de estas clases, es decir, de los estudiantes de ingeniería; especialmente cuando se trata de profesores noveles, sin experiencia docente en estas carreras o en carreras afines (Cs Bioquímicas, Cs Agrarias, Arquitectura, Cs Económicas u otras).

Es una apreciación común, generalizada entre la mayoría de nuestros colegas, que la formación matemática de aquellos que trabajamos en el nivel superior, está marcada por la importancia que le adjudicamos a la matemática afirmando que "está en todas partes" (o sea, que es de vital importancia para casi todas las carreras universitarias), pero sólo pocos pueden identificar con claridad a qué partes se refieren o cuáles son los usos concretos que de ella se hacen; excepto, claro está, aquellos usos relativos a una matemática mercantilizada (compra/venta de productos, porcentajes, etc.) o aquellos usos relativos a conceptos geométricos básicos (perímetros, áreas y volúmenes). Ante la pregunta: "¿y esto para qué me sirve?", se suele contestar diciendo que será de mucha utilidad para la materia que verán en el cuatrimestre siguiente, o que, luego, en las materias específicas de la carrera elegida, verán las aplicaciones correspondientes. Particularmente, esto es lo que pasa en el Profesorado en Matemática donde los conceptos se abordan sólo a los efectos de otros muchos conceptos enlazados al primero (aplicaciones intramatemáticas que finalmente no son las aplicaciones requeridas cuando se enseña en Ingeniería), pero que no se llega a puntualizar una aplicación concreta en una situación contextualizada por un área de empleo (ingeniería, arquitectura, economía, biología u otra similar). Así, el efecto de estas prácticas de formación descontextualizadas dentro del profesorado, impacta negativamente cuando el docente de Matemática se encarga de la enseñanza en carreras como Ingeniería. Entonces, muchos estudiantes de

Ingeniería enseñados según una presentación abstracta de la Matemática, por ejemplo, formados abstractamente en los conceptos del Cálculo, no pueden relacionar estos conceptos matemáticos esenciales con los conceptos fundamentales de las Ciencias (Física, Química, Biología, Psicología, Economía, Ciencias de la Tierra, etc.). Ergo, no saben cómo sacar provecho, cómo plasmar en concreto las teorías abstractas aprendidas y hacer uso de ellas en sus futuras prácticas, especialmente, cuando son requeridas en el campo profesional [2].

Tres situaciones nos alertaron acerca de la preocupación de los docentes por esta falta de formación contextualizada en el transcurso de la carrera de profesorado:

1. Durante el segundo cuatrimestre del año 2016 se dictó un curso de capacitación (en formato taller) en el Instituto de Enseñanza Superior N° 28 “Olga Cossettini” de Rosario, dirigido a profesores de Matemática llamado “El contexto histórico y el campo de aplicación de los conceptos matemáticos: dos ejes estratégicos para fortalecer la enseñanza de la Matemática”. Nos sorprendió, en primer lugar, la gran cantidad de docentes interesados en la propuesta; y en segundo lugar, el hecho de que no sólo se interesaron docentes noveles sino también muchos docentes con experiencia tanto de nivel secundario como de nivel universitario. Allí los docentes manifestaron abiertamente no sentirse capacitados en relación a las aplicaciones matemáticas que ellos deberían conocer para mejorar sus clases, tanto de nivel secundario como universitario.
2. El pasado año, en la Escuela de Formación Básica de las carreras de Ingeniería de la FCEIA, se realizó un concurso docente interno para proveer cargos de Auxiliar de Primera Categoría y JTP, donde se pedía lo siguiente: “Todos los inscriptos deberán presentar una guía de seis ejercicios o problemas relacionados al tema sorteado, de una temática que usted considere importante en la formación de un estudiante de ingeniería”. (El tema sorteado resultó ser autovalores y autovectores). Algunos docentes, en particular, los más novatos (los recientes egresados del Profesorado en Matemática), carentes de una experiencia abultada en la materia en cuestión (en este caso se trataba de Álgebra Lineal) tuvieron dificultades a la hora de plantear o seleccionar problemas de aplicación REAL a las ingenierías.
3. En el 2014 se abrió en la FCEIA la carrera de posgrado Especialización en Matemática y sus aplicaciones con el objetivo de “contribuir al desarrollo de las Matemáticas en relación con sus aplicaciones, respondiendo así a una realidad de la sociedad contemporánea, a saber, el uso cada vez más extendido y esencial de las Matemáticas para resolver problemas del mundo real en las más diversas áreas de la ciencia y las industrias”. Esta propuesta convocó particularmente a profesores interesados en las aplicaciones de la matemática. Los profesores inscriptos comenzaron a tomar los cursos iniciales correspondientes, pero al estar planteados de la misma manera que el Profesorado en Matemática, de una manera muy marcada dentro del paradigma del ejercicio [3], caracterizados por una ausencia de conexión entre los contenidos matemáticos desarrollados y los contextos reales, resultó ser poco atractivo y poco útil para las expectativas de los docentes quienes se percataron de que aquí tampoco encontrarían las herramientas que estaban buscando. Consecuentemente, la mayoría de ellos (sino todos) abandonaron el cursado.

Nuestro grupo viene investigando en la formación de profesores de Matemática en cuanto a la deconstrucción del conocimiento, a las concepciones ontológicas/epistemológicas y a la formación respecto al origen socio-histórico-económico-cultural de los conceptos matemáticos que deben enseñarse tanto en las escuelas secundarias como en las carreras universitarias afines a la matemática, así como el campo de aplicación de dichos conocimientos. Es decir, venimos investigando respecto a los componentes básicos fundamentales que deberían estar presentes en la formación docente para que se propicie la contextualización de la matemática que ha de enseñarse. Pretendemos aportar ideas o propuestas superadoras en la formación docente para ser más eficaz a la hora de la transmisión de la matemática en el aula.

En concordancia con nuestros propósitos (que a grandes rasgos, apuntan a contribuir con propuestas tendientes a una sólida formación docente), las tres situaciones anteriormente descriptas, nos motivaron a revisar la formación docente respecto a las preocupaciones manifestadas. Esto es, las carencias delatadas por dichas situaciones nos condujo a una revisión en cuanto a si la formación docente de los profesores universitarios de matemática brinda todas las herramientas necesarias para que estos docentes puedan contextualizar los contenidos matemáticos con problemas que surgen del ámbito de la ingeniería, y de esta forma lograr que las clases de matemática no sean una mera reproducción de conceptos cuyas aplicaciones se limiten a hechos intramatemáticos.

2 El papel de las aplicaciones de la matemática en la formación docente

La formación que recibe la mayoría de los docentes de Matemática que se forman en nuestra Facultad de Cs Exactas, Ingeniería y Agrimensura de la UNR o en Institutos de Formación Docente (dependientes del

Ministerio de Educación de la Provincia de Santa Fe) tiene un gran despliegue tanto de contenido disciplinar como de contenido pedagógico. Sin embargo, pese a esta sólida preparación de características tanto técnica como pedagógico-didáctica, a los profesores, en general, se les hace difícil apreciar las variadas relaciones existentes entre matemática y realidad.

En el caso particular del Profesorado en Matemática[1] dependiente de la UNR, que nutre al cuerpo docente de las carreras de Ingeniería de la FCEIA, particularmente a las cátedras de Álgebra y Geometría Analítica I, Cálculo I, II, III, y, Álgebra Lineal, el plan vigente (que actualmente está en revisión y posiblemente haya un nuevo plan de estudios de la carrera en 2018[2]) está estructurado en tres campos como sigue:

1 Área de formación general pedagógica
2 Área de formación especializada
3 Área de formación orientada

y un Eje Integrador.

En el campo de formación especializada, se establece entre los objetivos, "reconocer y formular problemas y aplicaciones de los procesos de modelización, donde se promuevan el uso y reconocimiento de distintas estrategias en la resolución de problemas y se relacionen las distintas áreas de la matemática"[3].

En el caso del Profesorado en Educación Secundaria en Matemática dependiente del Ministerio de la Provincia de Santa Fe, el plan vigente (que comenzó a implementarse recién en el año 2016 y por ello, no hay egresados de dicho plan en la actualidad) está estructurado año por año según tres campos:

1. Campo de la formación general
2. Campo de la formación específica
3. Campo de la formación en la práctica profesional

En el campo de la formación específica se proponen las materias de Modelización I, II, III y IV que se basan en que "Modelar crea puentes que permiten al estudiante relacionar lo concreto y lo abstracto, facilitando la comprensión de los fenómenos asociados a los procesos de transferencia de los conocimientos matemáticos, el análisis de situaciones cotidianas, su representación y la actuación sobre ellas". Además, en estas materias "se transversalizan los objetos matemáticos estudiados en las unidades curriculares de la formación específica que se abordan en forma paralela, mediante el planteo de problemas intra y extra-matemáticos, que puedan modelizarse con dichos conocimientos"[4].

En el plan anterior[5] de Profesorado de Tercer Ciclo de la Educación General Básica y de la Educación Polimodal en Matemática, dependiente del Ministerio de Educación de la Provincia de Santa Fe (que rigió desde 2001 y hasta 2015), dentro del campo de la formación orientada, como figura en el Anexo IV del Decreto N° 696/01, se plantean las siguientes asignaturas:

- *Ecuaciones diferenciales y aplicaciones de la matemática* con el objetivo de que el alumno capte la relación existente entre la matemática pura y aplicada. "Atendiendo a esto se abarcan elementos del cálculo numérico, investigación operativa, optimización y distintos tópicos referidos a las ecuaciones diferenciales, de modo de conjugar la modelización de cuestiones referidas a las ciencias naturales, ciencias sociales, ingeniería y distintos problemas de la vida real".
- *Taller integrador de resolución de problemas* con el objetivo del "reconocimiento y formulación de problemas desde situaciones de dentro y fuera de la matemática y aplicación de los procesos de modelización a esos problemas del mundo real".

Es llamativo que el tema de preparar y formar a los futuros docentes en las aplicaciones matemáticas sea sólo declarativo y no de hecho, pues todos los docentes (no importa de qué institución egresen) sienten que les falta preparación en este sentido[6].

Formulamos entonces los siguientes interrogantes: ¿Qué vinculación propone la carrera de Profesorado en Matemática con las Ingenierías (y otras carreras universitarias que requieran de la Matemática) como posible lugar de trabajo de los futuros docentes? En particular, ¿qué lugar se reserva en las Prácticas de la Enseñanza (o los Trayectos de Práctica) para la formación en las aplicaciones de la matemática? Y, ¿qué ocurre en los espacios

[1] En el plan anterior el título de los egresados era Profesor de Enseñanza Media y Superior en Matemática
[2] Desconocemos los cambios concretos que pudieran estar llevándose a cabo en el sentido de este estudio.
[3] Plan de Estudios del Profesorado en Matemática. Resolución 147/02 CD. Resolución 217/02 CS. FCEIA. UNR. Pag 4.
[4] Diseño Curricular 2015 - Profesorado de Educación Secundaria en Matemática. Ministerio de Educación de la Provincia de Santa Fe.
[5] Aún hay alumnos que, al estar cursando con este plan, egresarán de la carrera de Profesorado con el título y la formación correspondiente al mismo.
[6] Si bien la mayoría de los profesores que ejercen como docentes en las carreras de Ingeniería son egresados de la misma facultad, también hay profesores de Matemática egresados de los Institutos Superiores de Profesorado.

de residencia, particularmente en el nivel universitario? ¿Cuál es la preparación que se da a los futuros docentes en relación a las aplicaciones de la matemática?

Coincidimos con que “para que el profesor trabaje una matemática contextualizada debe involucrarse en la carrera de ingeniería donde imparte clases, dado que será necesario el que cuente no sólo con los conocimientos matemáticos sino también con los conocimientos que el evento o problema a contextualizar requiera” [4]. Pero, desde la formación docente, ¿se tiene en cuenta que los profesores de Matemática serán los encargados de instruir y formar a los alumnos de carreras universitarias y terciarias, donde lo que cuenta es la aplicación de la matemática, es decir, donde se necesita una matemática fuertemente contextualizada? Para aproximarnos a una respuesta adecuada, trazamos un plan de abordaje a partir de preguntas orientadoras.

2.1 Estudio exploratorio acerca del grado de formación en las aplicaciones de la matemática de los docentes: una aproximación a las vicisitudes de la formación de Profesores en Matemática

A modo exploratorio, comenzamos a indagar en cuanto al papel que se les asigna a las aplicaciones matemáticas en la Residencia de Grado (universitaria, en la facultad, no en la escuela secundaria) y en cuanto a las materias Práctica de la Enseñanza I, II y III que constituyen el Eje Integrador (nos referimos al Profesorado en Matemática de la FCEIA) y que es donde se supone deberían reforzarse estos tópicos. Textualmente en el Plan vigente dice: “Práctica de la Enseñanza I (PE I) trabaja con el eje “Números y Operaciones”, “Medidas” y “Geometría” del alumno de nivel secundario (EGB3), PE II con el eje “Funciones” de EGB3, “Álgebra y Geometría”, “Números y Operaciones”, “Funciones y Precálculo” de Educación Polimodal; y PE III con el eje “Estadística y probabilidad” de alumnos de EGB3 y Polimodal”. Jamás se menciona un alumno de nivel universitario.

De acuerdo con el planteamiento del problema, y guiándonos por el interrogante inicial, formulamos las siguientes preguntas:

- ¿Qué aspectos relativos al nivel se contemplan? ¿Se tiene en cuenta que el docente dará matemática no sólo en escuelas secundarias sino también, eventualmente, en carreras universitarias, e incluso en el mismo Profesorado de Matemática que los forma? ¿Se prepara al futuro docente para esto?
- En las materias como Cálculo I, II y III, Álgebra, Geometría I, II y III, Álgebra Lineal, correspondientes a la carrera del Profesorado en Matemática, ¿se dan aplicaciones matemáticas orientadas a estas otras carreras profesionales?
- En las materias de formación (general pedagógica, especializada, y los ejes integradores), ¿se realizan actividades de modelización y/o de contextualización?
- ¿Se analiza la bibliografía que se utiliza en las cátedras de carreras universitarias como por ejemplo, en Ingeniería?

Para atender a estas inquietudes, seleccionamos diversas técnicas de recolección de datos. En principio, realizamos un sondeo exploratorio mediante una encuesta (anónima, de preguntas abiertas) entre 8 profesoras egresadas del Profesorado en Matemática de la FCEIA. La encuesta se diseñó a los efectos de mensurar cuánto del tiempo destinado a la formación docente se utiliza para la formación concreta respecto a las aplicaciones matemáticas. La encuesta es la que sigue:

1) ¿Trabaja en nivel universitario? Sí - No. En caso afirmativo, indicar en cuál/es carrera/s:
   E indicar las materias en las que trabaja:
2) Todas las siguientes preguntas están referidas a su cursado en el Profesorado en Matemática:
3) ¿En alguna materia tuvo que realizar un trabajo en grupo? (no se refiere a realizar la práctica grupalmente o resolver un ejercicio entre varios, sino alguna actividad de investigación o de realización/confección de algún material, por ejemplo). En caso afirmativo, ¿podría detallar en que consistió?
4) En las materias del área pedagógico-didáctica o afines a la formación docente, ¿se planteó en qué consiste un trabajo grupal? ¿Para qué sirve? ¿Cuáles son sus ventajas y/o desventajas?
5) ¿Qué piensa acerca del trabajo en grupo? ¿Podría mencionar un ejemplo referido a en qué momento de la clase o para qué haría que sus alumnos trabajen en grupo?
6) En alguna de las tres “Práctica de la Enseñanza” o en Residencia (universitaria), ¿debió realizar alguna actividad de tinte interdisciplinario, para la confección de una propuesta didáctica en alguna asignatura de carreras universitarias? (por ejemplo: propuesta didáctica para Cálculo I de Ingeniería, o propuesta didáctica para Matemática II de Ciencias Económicas, etc.)
7) En las materias Práctica de la Enseñanza I, II, III o en otra materia de formación docente (por ejemplo, en Currículum y Didáctica o Práctica de Residencia en el Nivel Superior), ¿se analizan los libros de texto que

son utilizados en las materias de matemática de las carreras universitarias? (Por ejemplo los textos que se utilizan en Ingeniería, en Bioquímica, en Económicas, etc.).
8) ¿Alguna materia promovió que se realice algún encuentro con un ingeniero, físico, bioquímico, estadístico, arquitecto, o profesional que no sea matemático, para que relaten situaciones donde aplican la matemática?
9) Marcar la opción que considere más adecuada:
a. En su formación, considera que la matemática que aprendió se le presentaba:
-Contextualizada
-Abstracta
-Ambas
b. Si respondió contextualizada, ¿podría detallar en qué consistieron las actividades de contextualización?
10) ¿En que materia realizó la residencia de nivel superior? ¿Cuál fue su docente coformador?[7]

En segundo lugar, realizamos un análisis de la bibliografía con la que trabajan los profesores de matemática en las carreras de Ingeniería de la FCEIA: En Cálculo I y II, *Cálculo de una variable* de Stewart, J., sexta edición, Cengage Learning; en Álgebra Lineal, *Fundamentos del Álgebra Lineal* de Larson, R. y Falvo, D., sexta edición, Cengage Learning. En Álgebra y Geometría Analítica, no hay libro de texto, se manejan con los apuntes elaborados por la cátedra correspondiente y la fotocopia del capítulo *Rectas, circunferencias, cónicas* del libro *Cálculo con Geometría Analítica* de Protter, M., Morrey, C., tercera edición.

Por último realizamos análisis de programas:

1 de la materia Residencia del Profesorado en Matemática, para ver si en el mismo se detalla cómo se trabajará la contextualización matemática y cómo se desenvolverá un residente que realice su práctica docente de nivel superior en alguna materia de las carreras de Ingeniería;
2 de las materias Cálculo I, II y III y Álgebra Lineal de las carreras de Ingeniería para ver si entre los objetivos de dichas materias, figura la aplicación matemática concreta de los contenidos.

3 Análisis e interpretación de los datos

A continuación se detallan los resultados obtenidos a partir de cada uno de los instrumentos seleccionados:

3.1 Resultados de la encuesta

De las encuestas obtuvimos que siete de las docentes trabajan en el nivel universitario desarrollando su labor en las siguientes carreras:

- Licenciatura y Profesorado en Matemática
- Licenciatura en Ciencias de la Computación
- Licenciatura en Física
- Ingeniería Industrial, Mecánica, Civil, Eléctrica y Electrónica
- Bioquímica, Farmacia, Lic en Biotecnología, Lic en Química, Prof en Química
- Ciencias Económicas
- Carreras de Cs Empresariales
- Contador Público

Se puede observar que en muchas de las carreras en las que trabajan, la matemática tiene un rol instrumental (en tanto se la valora como instrumento de modelización), por lo que es esencial conocer las aplicaciones matemáticas en dichas áreas.

La mayoría (7 de 8) dice haber realizado algún trabajo en grupo, en alguna materia durante su cursado en el Profesorado. Entre las actividades que se mencionan en relación a la constitución de un grupo figuran:

- "La producción de clases y unidades didácticas"

[7] Aclaramos que esta última pregunta se incluyó en vistas de un trabajo posterior de investigación acerca del rol de los coformadores donde abordaremos temas concernientes a si hay algún contrato o estipulación cuando se acepta a un residente, en qué consiste la labor del coformador, etc.

- “Demostración de un teorema”
- “El desarrollo y el dictado de la teoría de funciones en campos complejos”
- “Fue un proyecto acerca de la enseñanza de la Estadística en el Nivel Secundario”
- “Tuvimos que armar varias clases y, en Teoría del Sujeto, tuvimos que hacer un trabajo de investigación sobre la noción de familia.”

Suponemos que se trata de actividades donde los integrantes del equipo han repartido las cargas de efectuar un trabajo (para que los alivie individualmente); pareciera tratarse de actividades que reúnen personas o pretenden integrarlas pero no parecen ser actividades que favorezcan o requieran la conformación de un *grupo operativo* donde cada integrante tenga un rol diferencial, que no pueda solaparse o sustituirse por otro (ya que cada integrante posee un conocimiento que el otro no) y de manera tal que si algún miembro faltase, no pudiera ser llevada a cabo la tarea asignada [5].

Durante su formación, la mayoría (6 de 8) dice no haber estudiado o trabajado acerca de cómo funciona un grupo, para qué sirve realizar dichas actividades de forma grupal, cómo estructurarlas, sus ventajas y desventajas, etc.

El motivo por el cual realizarían una actividad grupal con sus alumnos sería para favorecer la integración entre ellos, para fomentar la discusión, el intercambio de ideas, el debate. En ningún momento manifiestan la importancia de que es necesario un grupo para realizar una actividad que no podría ser resuelta de otra forma. Por ejemplo, encontramos entre las respuestas a la pregunta 4:

- Para fomentar la cooperación y las discusiones.
- En general, los trabajos que propongo para realizar en grupos, son para realizar algunos ejercicios teórico-prácticos, para entregar en una fecha determinada.
- Lo usaría para abordar la resolución de un problema, para realizar un trabajo de investigación.
- El trabajo en grupo favorece el intercambio de ideas, ayuda a que los alumnos justifiquen sus afirmaciones, porque entre ellos no tienen vergüenza de decir cosas erróneas.
- Creo que el trabajo en grupo sirve y es enriquecedor cuando se quiere generar un debate, una reflexión.

Todas las encuestadas manifiestan que en ningún momento de su formación se les solicitó realizar alguna actividad de tinte interdisciplinario, para la confección de una propuesta didáctica en alguna asignatura de carreras universitarias.

Todas las encuestadas manifiestan que en su formación en ninguna materia se promovió que se realice algún encuentro con un ingeniero, físico, bioquímico, estadístico, o arquitecto, etc., para que cuenten en qué situaciones y cómo aplican la matemática estos profesionales.

Estas respuestas denotan un ensimismamiento bastante marcado dentro de la formación de profesores, donde las interacciones se dan sólo con los miembros de la propia carrera; los futuros docentes no se relacionan con profesionales de otro ámbito que no sea el matemático, propiciando así un modo endogámico de funcionamiento.

Todas las encuestadas afirman que en su formación, la matemática que aprendieron fue presentada en forma abstracta.

No se reconoce más que el aprendizaje de una matemática abstracta, descontextualizada, sin articulación con conocimientos provenientes de otras ciencias.

Todas las encuestadas manifiestan no haber analizado los libros de texto que son utilizados en las materias de matemática de las carreras universitarias y sí realizar esto para textos escolares (de nivel secundario).

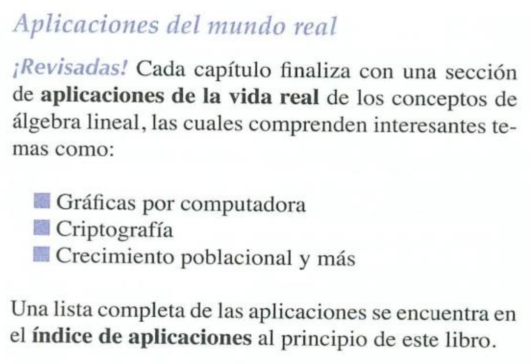
Las propuestas de trabajo del Eje Integrador no parecen contemplar el análisis de textos del nivel superior, tarea fundamental en cuanto a la selección de las herramientas de trabajo de un docente que, a posteriori, estará habilitado para el desempeño laboral en carreras universitarias.

3.2 Resultados del análisis de la bibliografía con la que trabajan los profesores de matemática en las carreras de ingeniería de la FCEIA

En la materia Álgebra Lineal, uno de los libros utilizados es *Fundamentos del Álgebra Lineal* de Larson, R. y Falvo, D., sexta edición, Cengage Learning. Cada capítulo de dicho libro finaliza con una sección que se titula “Aplicaciones de…”. Si bien al comienzo del libro se presentan como que serán aplicaciones a la vida real, hemos visto en varios capítulos que dichas aplicaciones son cuestiones meramente intramatemáticas. Por ejemplo en el capítulo 3, en donde se desarrolla el concepto de determinante de una matriz, en la sección de aplicaciones explica acerca de la regla de Cramer, el cálculo de la adjunta de una matriz, el cálculo del área de un triángulo utilizando matrices, etc. Como podemos ver todos son tópicos relacionados con técnicas matemáticas, pero ninguno de ellos refiere a una aplicación específica proveniente de la ingeniería. También observamos que en el desarrollo de los capítulos la cantidad de ejemplos provenientes del área de la ingeniería es más bien escaso y de nuevo constituyen, en su mayoría, ejemplos intramatemáticos.

Observamos que al concluir la tanda de ejercicios propuestos al final del capítulo, se agrega una sección llamada "Proyecto" lo cual invita a pensar que se trata de una sección donde aparecerá una aplicación real acercándose entonces a la presentación de una matemática contextualizada. Pero al revisarla, se trata otra vez, de cuestiones intramatemáticas.

Se copia a continuación lo que se encuentra al comienzo del libro, en la página xi, correspondiente a la descripción de las características de la sexta edición:


Aplicaciones del mundo real

¡Revisadas! Cada capítulo finaliza con una sección de **aplicaciones de la vida real** de los conceptos de álgebra lineal, las cuales comprenden interesantes temas como:

- Gráficas por computadora
- Criptografía
- Crecimiento poblacional y más

Una lista completa de las aplicaciones se encuentra en el **índice de aplicaciones** al principio de este libro.

Fig.1. Descripción de las características de la sexta edición.

En las materias Cálculo I y II se utiliza el libro *Cálculo de una variable* de Stewart, J., sexta edición, Cengage Learning. Éste posee problemas variados de algunas aplicaciones y, a la hora de explicar, también utiliza algunos ejemplos aplicados. Al final presenta un Proyecto, el cual intenta aplicar el contenido a una situación extramatemática. Nos preguntamos por qué se encuentran estos proyectos siempre al final del capítulo. ¿Le sirven al docente para explicar el contenido y diseñar su clase utilizándolo? O, ¿es necesario buscar otras propuestas y diseñar otras estrategias? Son todas situaciones que creemos se deben plantear en la formación del docente.

3.3 Resultados del análisis de programas

Al analizar la planificación de Cálculo I, se propone inicialmente "el estudio y la representación gráfica de las funciones matemáticas elementales", puesto que "Las mismas juegan un rol importante en la elaboración de modelos matemáticos para la representación de fenómenos cotidianos de interés en la ingeniería". Y en una segunda etapa, se propone el estudio del "Cálculo Diferencial, con profundas raíces en problemas físicos, de ahí su importancia en una amplia variedad de problemas de la Ingeniería". Entre los objetivos, se plantea que el alumno "comprenda los temas desarrollados de modo de aplicarlos con acierto y en la resolución de problemas. Que sea capaz de modelizar situaciones problemáticas, de predecir resultados y verificar los mismos". Entre las instancias que se estipulan en el apartado correspondiente a "Modalidades de Enseñanza", se resalta el hecho de abordar "problemas debidamente contextualizados".

Respecto del programa Cálculo II, encontramos que se plantea que "Los temas abordados permitirán al estudiante modelar y resolver problemas básicos de la ingeniería tales como problemas de optimización que involucran funciones de una variable independiente y sus derivadas; cálculo de áreas de regiones planas y volumen de sólidos de revolución, con el aporte del cálculo integral de una variable. El estudio de curvas y funciones de varias variables independientes permitirá modelizar, interpretar, resolver diversas situaciones problemáticas y brindar las bases requeridas para las asignaturas correlativas". Entre las Modalidades reenseñanza, se propone que "Los docentes decidirán sobre los recursos a utilizar para el abordaje de los contenidos: problemas motivadores, problemas contextualizados, guía de trabajos prácticos, guías de estudio, videos educativos, wikis, sitios web".

Respecto al programa de Cálculo III, hallamos que entre los objetivos que "Se espera que el estudiante pueda construir nociones generales sólidas, aplicar técnicas adecuadas y utilizar con criterio las herramientas básicas y fundamentales del Cálculo, para poder abordar problemas matemáticos, físicos e ingenieriles". Entre las Modalidades de Enseñanza, se propone que trabajar con la modalidad pedagógica de taller y "Se aconseja la utilización de problemas ingenieriles para abordar los distintos contenidos, atendiendo a las características particulares de cada grupo de estudiantes".

Respecto al programa de Álgebra lineal, hallamos dentro de las características generales, que se resalta la importancia del tema “sistema de ecuaciones lineales” debido a que muchos problemas matemáticos tienen aplicaciones industriales. También se enfatiza que “la mayoría de los problemas que resultan de la modelización matemática de diversas cuestiones planteadas en disciplinas científicas y tecnológicas acaban formulándose, en última instancia, como un problema de álgebra lineal numérica”.

Se puede ver entonces, que en todas estas materias, se considera relevante el hecho de que se trabaje con problemas matemáticos relacionados a la ingeniería y no que se dé una matemática descontextualizada.

En el programa de Residencia, hallamos entre los objetivos: “3) Observar y analizar prácticas docentes reales situadas en los niveles educativos secundario y superior de incumbencia profesional en el área de matemática.

4) Diseñar, implementar y evaluar una propuesta propia de trabajo áulico en el nivel secundario en el área matemática”.

Surge entonces que el diseño de propuestas de enseñanza se realizará sólo en el nivel secundario. En el nivel superior, solamente se propone lo siguiente: “Observar y analizar una práctica docente real situada en el nivel superior, así como realizar intervenciones docentes que se aproximen a las de un ayudante de segunda”. También, los residentes de nivel superior “participan en otras actividades acordadas con el docente a cargo de la asignatura respectiva (las mismas pueden ser consultas a alumnos en momentos de práctica en la clase, explicación de resoluciones de actividades en el pizarrón, reunión de trabajo con los docentes para diseñar exámenes parciales, corrección de trabajos prácticos de los alumnos, entre otros)”.

Asimismo observamos que en el programa de esta materia no se menciona[8], entre las actividades correspondientes, el análisis de textos (que detectamos a partir de las encuestas como una actividad que sólo se realizaba para textos del nivel secundario pero no del nivel superior). Quizás esta actividad esté planteada en las materias correspondientes a Práctica de la Enseñanza I o II, a cuyos programas no pudimos acceder.

4 Reflexiones finales

Como hasta ahora tenemos un sondeo preliminar, sólo haremos aquí reflexiones a modo de conclusiones también preliminares. Sostenemos nuestras críticas y nuestras propuestas en el hecho de que una sólida formación en las aplicaciones concretas permitiría al docente en formación ampliar su concepción acerca de la relación entre la matemática y otras áreas del quehacer humano, identificar situaciones sociales y naturales susceptibles de ser interpretadas y transformadas a partir de la matemática, e incorporar a su práctica educativa las experiencias de aprendizaje matemático adquiridas durante su formación inicial como docente.

Al analizar los programas de las materias de matemática correspondientes a la carrera de ingeniería, en todos ellos se resalta la importancia de desarrollar los contenidos de manera que permitan al estudiante modelar y resolver problemas básicos de la ingeniería. Creemos que este requerimiento, debe ser contemplado por parte de la formación docente dentro de la carrera de Profesorado en Matemática. Hasta acá, lo que encontramos en los planes de formación del profesorado de matemática, es que se sostiene una enseñanza a través de la resolución de problemas que no alcanza a cubrir este aspecto, quizás por la naturaleza misma de los problemas o por las dificultades a la hora de hacer efectivas dichas propuestas metodológicas/pedagógicas. Somos concientes que la contextualización y la modelización en matemática requieren de mucho tiempo (del que a veces no se dispone) y de un nivel de maduración importante en los alumnos (que a veces suele no darse).

Respecto al trabajo con los alumnos, consideramos que es muy importante saber y conocer cómo se debe trabajar en grupo para poder presentar una matemática aplicada y contextualizada que estimule las actividades de modelización. Para conformar equipos interdisciplinarios se requiere saber trabajar en grupo. Encontramos, de acuerdo a lo analizado anteriormente que ésta es una de las debilidades en la formación de profesores.

Observamos también que la preparación para la selección de material bibliográfico y el análisis de propuestas editoriales, ambas referidas al nivel superior, resulta ser un punto más de debilidad de la carrera docente pues en tanto tal, nunca (o muy infrecuentemente, quizás) se aborda en el profesorado. Creemos que el estudio del material bibliográfico correspondiente al nivel superior, debería hacerse en los espacios curriculares “Práctica de la Enseñanza” del profesorado en Matemática, pero desde el plan de estudios de la carrera, ninguna de las PE (I, II, III) están destinadas a alumnos universitarios lo cual resulta una contradicción, pues en el mismo plan se establece que se prepara a los docentes para todos los niveles educativos.

Además vimos que los libros usuales que utilizan actualmente los profesores de matemática en las cátedras de Ingeniería, no son tan eficientes como se proponen en cuanto a brindar, tanto al docente como al alumno, situaciones concretas de aplicaciones reales de la matemática. La mayoría de las aplicaciones que figuran en los

[8] Como tampoco se menciona en el programa de Práctica de la Enseñanza III.

libros no son concretas, no posibilitan apreciar o reconocer las relaciones entre matemáticas y ciencias. A lo sumo se presentan problemas intramatemáticos, que no propician verdaderas interacciones dialécticas entre matemática e ingeniería. Esos ejemplos de 'aplicaciones' que aparecen en los libros y que a veces son utilizados por los docentes pensando que de verdad funcionan como ejemplos reales, tienen efectos negativos en la formación de los ingenieros. Muchos de los estudiantes de ingeniería no reconocen la importancia de las materias de matemática en la solución de algunas situaciones-problema en el área de actuación profesional. Por ello creemos que dichas aplicaciones suelen darse como excusa para aplicar lo aprendido, pero no para modelar o para desarrollar un concepto específico.

Bregamos por una formación del profesorado donde la preparación en las aplicaciones matemática se desarrolle en forma transversal dentro de la carrera, es decir, que las aplicaciones estén presentes en cada una de las materias de formación orientada y no sólo en alguna materia o sólo en el Eje Integrador propuesto como articulador. La articulación debe darse a lo largo de toda la cursada y entre todas las asignaturas.

Creemos conveniente para una formación integral del docente que en la cátedra de residencia se trabajen los siguientes aspectos: enseñanza de la matemática en forma contextualizada, esto es, mediatizada por problemas de modelización con un grado de dificultad acorde al nivel; planteo y resolución de problemas contextualizados en el área de ingeniería y otros campos de aplicación científica; realización de trabajos interdisciplinarios; análisis de bibliografía de nivel superior; realización de "prácticas docentes mixtas" con profesores de otras áreas científicas (que no sean profesores de matemática).

Todo lo que aquí hemos señalado como debilidades en la formación de profesores de matemática será tenido en cuenta no sólo para introducir modificaciones en nuestra práctica concreta en el aula de nivel superior sino también para acercar propuestas tendientes a fortalecer estos aspectos más relegados de la carrera. Planteamos a partir de este sondeo exploratorio, continuar investigando respecto a las dificultades que se les presentan a los profesores a la hora de abordar una enseñanza que permita transmitir la matemática de forma contextualizada.

En particular, tenemos previsto indagar en cuanto al rol de los coformadores y el estatuto de estos docentes en cuanto a la formación de profesores de Matemática se refiere.

Referencias

1. Camarena Gallardo, P. Aportaciones de investigación al aprendizaje y enseñanza de la matemática en ingeniería. Doctorado en Ciencias de la Educación. México D. F. (2010)
2. Biembengut, M.S. Modelaje matemático en la enseñanza de matemática en la ingeniería: posibilidades y dificultades. *Ingenium. Revista de la Facultad de Ingeniería • Año 16 • n.° 31, Enero - Junio de 2015* (2015)
3. Skovmose, O. *Hacia una filosofía de la educación matemática crítica*. Bogotá: Una empresa docente. Universidad de Los Andes. (1999)
4. Trejo Trejo, E.; Camarena Gallardo, P.; Trejo Trejo, N.: Las matemáticas en la formación de un ingeniero: la matemática en contexto como propuesta metodológica. *Revista de Docencia Universitaria. Vol 11 (Número especial, 2013),* pp 407 ISSN: 1887-4592 (2013)
5. Souto, M.: *Hacia una didáctica de lo grupal*. Miño-Dávila Editores. (1993)

Volver al Índice

Una Propuesta Didáctica Mediada en las NTIC para el Aprendizaje del Tema Integral Indefinida

Holgado, Lisa[1]; Marcilla, Marta[1]; Mercau, Susana[2]
[1] Instituto de Matemática, Facultad de Bioquímica, Química y Farmacia. Universidad Nacional de Tucumán
Ayacucho 471- Tucumán
lvholgado@yahoo.com, mmarcill@yahoo.com.ar
[2] Facultad de Ingeniería. Universidad del Norte Santo Tomás de Aquino
9 de julio 165- Tucumán
s_mercau@yahoo.com.ar

Resumen. El presente trabajo describe la experiencia de un aula virtual realizada por una cátedra de Matemática de primer año como complemento al sistema presencial establecido por la currícula. Se trata de un avance del Proyecto “Propuesta curricular, con soporte en las NTIC, para favorecer el estudio independiente del Cálculo” de la Universidad Nacional de Tucumán. Para comenzar se exponen las ideas principales que fundamentaron una propuesta didáctica para el aprendizaje del tema: "Integral Indefinida", como recurso para mejorar la calidad del proceso de aprendizaje, utilizando Tecnologías de la Información y Comunicación, a través de la plataforma educativa Moodle 3.0 del Campus Virtual de U.N.T. Luego, se describen en detalle las actividades propuestas que desarrollaron los alumnos durante la experiencia que se implementó por primera vez en el año 2016.

Palabras Clave: Aula Virtual, Integral Indefinida, Propuesta didáctica.

1 Introducción

Este artículo es un avance del Proyecto “Propuesta curricular, con soporte en las NTIC, para favorecer el estudio independiente del Cálculo” de la Secretaría de Ciencias, Arte e Innovación Tecnológica de la Universidad Nacional de Tucumán (SCAIT). Se trata de un Proyecto que pretende incorporar la plataforma Moodle al aprendizaje de los contenidos de Matemática I, asignatura del primer cuatrimestre de primer año, de la Facultad de Bioquímica, Química y Farmacia de la Universidad Nacional de Tucumán.

Las nuevas tecnologías forman parte de nuestra vida cotidiana y su inclusión en el ámbito de la educación universitaria puede ser un elemento novedoso y motivador para los alumnos. Sin embargo, el uso de las NTIC en la enseñanza de la Matemática debe ir acompañado del planteo de los objetivos, para que esta nueva metodología de aprendizaje resulte eficaz. La finalidad es que el alumno transite, casi sin darse cuenta, por procesos que involucren aprendizajes significativos, y sean el resultado de un proceso activo de construcción y no simplemente de transmisión-recepción.

Como antecedente de esta experiencia puede considerarse primeramente la implementación de un software en 2007, elaborado ad hoc, como apoyo al sistema de trabajos prácticos presencial de la asignatura [1]. En aquel momento se pretendía investigar si, a partir del uso de un software multimedia interactivo de Polinomios de Taylor como material complementario y elaborado sobre una nueva estructuración de contenidos, era posible contribuir a mejorar el grado de generalización y el grado de corrección de la acción de los estudiantes.

Los alumnos demostraron buena disposición para el trabajo con el software. El diseño y la interactividad resultaron ser características didácticas del material destacadas por el estudiante, como así también, la posibilidad de ayuda que ofrecían los botones del software cuando no podían avanzar en la solución de un ejercicio o cuando querían conocer la respuesta de la tarea. Se pudo concluir que la estrategia diseñada habría posibilitado la interacción efectiva entre alumno-contenido. El análisis cualitativo de la comunicación docente-alumnos realizada a través del correo electrónico durante la experiencia, demostró tener un valioso impacto en el aprendizaje: casi en el 70 % de los mensajes enviados se registró algún tipo de consulta acerca del software y de ejercicios y problemas.

Los alumnos también dieron sugerencias sobre el material y enviaron la autoevaluación realizada. Se expresaron acerca de cómo se sintieron contenidos desde lo afectivo, lo cual puede considerarse muy relevante. También pudo apreciarse cómo la comunicación, a través del correo electrónico, enriqueció el proceso de enseñanza aprendizaje y cómo el docente se había transformado en un sostén y referente para el alumno. Los estudiantes estuvieron de acuerdo con la incorporación de las nuevas tecnologías (NTIC) como soporte en el dictado de otros temas la materia.

Otro antecedente de esta experiencia es la creación, por parte de la cátedra de MATEMÁTICA I, de una página Facebook llamada "MATEMÁTICA BIOQUÍMICA". La misma comenzó a implementarse en el año 2014 y se utiliza hasta la actualidad, para informar horarios de clases y de exámenes, como así también distintas novedades de interés para los alumnos. Los mismos la utilizan para informarse y plantear distintas inquietudes. Esto hace que la comunicación docente-alumno sea más fluida y permanente, por lo que los alumnos se manifiestan altamente conformes con este tipo de comunicación

2 Marco teórico

Se elaboró un marco teórico para la evaluación del aprendizaje fundado en principios innovadores de enseñanza de la Matemática. Los mismos se basaron en enfoques cognitivos sustentados por Piaget, Ausubel, Moreira, Vigotsky y seguidores, y en los lineamientos para la regulación y autorregulación del aprendizaje sostenidos por Jorba y Casellas.

A partir del marco teórico elaborado fue posible identificar diferentes criterios que debieran guiar la práctica de un docente de Matemática. Para lograr una enseñanza de calidad que se ajuste a esos criterios, el estudiante debe adquirir lo que en los estándares del Consejo Nacional de Profesores de Matemáticas de Estados Unidos (N.C.T.M.) denominan potencia matemática.

"La potencia matemática incluye la habilidad para explorar, efectuar conjeturas, y razonar lógicamente; para resolver problemas no rutinarios; para comunicar ideas matemáticas, y comunicarse usando la matemática como herramienta; y conectar ideas dentro de la matemática misma y, entre la matemática y otra actividad intelectual. La potencia matemática también involucra el desarrollo personal de la auto-confianza y la disposición de buscar, evaluar y emplear información cuantitativa en la resolución de problemas y en la toma de decisiones. La flexibilidad del estudiante, perseverancia, intereses, curiosidad e inventiva también contribuyen a alcanzar la potencia matemática" [2].

Para desarrollar la potencia matemática del individuo, el docente en sus clases debe propiciar la realización de distintos procesos cognitivos tales como:

1) Activar los conocimientos previos, diseñando actividades para compartir los objetivos y revisar los conocimientos previos [3].
2) Generar expectativas apropiadas para el aprendizaje, mediante tareas que activen los prerrequisitos de aprendizaje y desentrañen las ideas previas de los contenidos a abordar [3, 4].
3) Mantener la atención, a través de preguntas intercaladas en la situación de enseñanza o en un texto, utilizando representaciones visuales y pistas tipográficas o discursivas [5].
4) Potenciar la conexión entre conocimientos previos y la nueva información a aprender empleando estrategias para organizar la información que se ha de aprender, realizando relaciones adecuadas entre contenidos (mejorar las conexiones internas): efectuando resúmenes, esquemas, mapas conceptuales etc. [6].
5) Potenciar la relación entre los conocimientos previos y la información que se ha de aprender (mejorar conexiones externas): empleando analogías y organizadores previos. Los organizadores previos brindan información de tipo introductorio y contextual, tienden un puente cognitivo entre la información nueva y la previa [7].

A partir de la evolución y el desarrollo de las TIC y de la necesidad de disponer de más y mejores herramientas de comunicación y colaboración en línea, surgen las plataformas tecnológicas que conforman una gran variedad de recursos de comunicación y colaboración y que son aplicadas tanto para el trabajo como para la educación [8]. Cuando estas plataformas son utilizadas para aplicaciones educativas, suelen denominarse EVEA (entornos virtuales de enseñanza y aprendizaje) [9]. Una plataforma educativa contribuye a la evolución de los procesos de aprendizaje y enseñanza, y complementa o presenta alternativas en los procesos de la educación tradicional [10].

Moodle es una aplicación web de distribución libre para la creación, gestión y seguimiento de cursos, que ayuda a los educadores a crear comunidades de aprendizaje en línea (Moodle, s.f.). Esta plataforma se caracteriza porque crea un entorno de aula virtual que facilita, por un lado, la comunicación de los alumnos entre sí, que al no depender tanto del profesor se ayudan y comparten información. Asimismo facilita la comunicación entre los alumnos y el docente, el cual asume el rol de tutor-facilitador de aprendizajes.

Una de las ventajas que se evidencian al diseñar un curso en Moodle es que fomenta el estudio personalizado, respetando el ritmo de cada alumno y proporcionando actividades que favorecen la autoevaluación y regulación del aprendizaje, el desarrollo del pensamiento crítico y la creatividad. En definitiva, potencia el autoaprendizaje. Mediante el chat de esta plataforma, el estudiante accede a una rápida comunicación con sus compañeros y con el profesor-tutor, quien podrá dar un trato más personalizado a cada estudiante. Es una herramienta que promueve una enseñanza constructivista y favorece el desarrollo de la potencia matemática del estudiante [11].

Las nuevas tecnologías de la información y de las telecomunicaciones posibilitan la creación de un nuevo espacio social para las interrelaciones humanas que Javier Echeverría [12] denomina tercer entorno (E3), para distinguirlo de los entornos naturales (E1) y urbanos (E2). Sostiene que esta transformación es lo suficientemente importante para las sociedades contemporáneas, como para que pueda ser comparada con las grandes revoluciones técnicas habidas a lo largo de la historia, como la escritura y la imprenta, entre otras, que también transformaron profundamente la educación. La incorporación de las nuevas tecnologías de la información y de la comunicación (NTIC) en diferentes ámbitos de nuestra sociedad es una realidad consolidada en nuestros días. La educación no ha sido marginada de esta nueva realidad y, en la actualidad, son múltiples las modalidades y el grado de incorporación de estas herramientas [13].

Esto lleva a una transformación del proceso y a la forma de acceder al conocimiento. De esta manera, el rol docente cambia al de facilitador y se genera una expansión de las comunidades de aprendizaje más allá de los límites del salón de clase. Se establece una relación de comunicación entre los agentes educativos que resulta de incuestionable importancia, la que adquiere su mayor valor en situaciones en las que no hay coincidencia de tiempo y/o espacio [1].

Las redes telemáticas son la expresión más desarrollada de este nuevo entorno, debido a su carácter multimedia (muy importante a efectos educativos), y al grado de interactividad que están alcanzando progresivamente. De este modo, el tercer entorno no es sólo un nuevo medio de información y comunicación, sino también de interacción, memorización y entretenimiento [14].

Por otra parte, Mercau de Sancho [8] señala algunas virtudes que surgen de la aplicación de NTIC en nuevos sistemas de enseñanza: “Estimulan la comunicación interpersonal, facilitan el trabajo cooperativo, permiten el seguimiento del proceso de aprendizaje de los alumnos, posibilitan el acceso a información variada y a los contenidos de aprendizaje, facilitan la gestión y administración de los alumnos y permiten la evaluación continua y la autoevaluación” [8].

El aprovechamiento de las modalidades de comunicación sincrónica y asincrónica que presenta internet tales como el correo electrónico, chat, foros y otros, posibilitan el flujo de información entre los estudiantes al momento de abordar una tarea. Además, mantienen la actividad, comunicación e interacción de los sujetos implicados, así como la relación del alumno con el contenido que aprende [14].

Todos estos recursos forman parte de un aula virtual. El aula virtual es un término que se adjudica a Roxanne Hiltz en la década de 1980 quien la define como “empleo de comunicaciones mediadas por computadores para crear un ambiente electrónico semejante a las formas de comunicación que normalmente se producen en el aula convencional” [15]. En este entorno el estudiante puede, sin que medie la interacción física entre docentes y alumnos, realizar una serie de actividades propias de un proceso de enseñanza presencial como ser leer documentos, realizar ejercicios, formular preguntas al docente, conversar, trabajar en equipo, etc.

Carbonell y Saà Seoane [16] sostienen que el dictado de una asignatura con contenidos de Cálculo, mediante un aula virtual diseñada para tal fin permitiría además:

- Explorar y experimentar con conceptos y procedimientos matemáticos pudiendo observar patrones de regularidad y variabilidad.
- Adquirir flexibilidad para expresar los conceptos en distintos lenguajes matemáticos: verbal, analítico y gráfico.
- Desarrollar habilidades para hacer cálculos, gráficos, analizar datos, hacer estimaciones y formular hipótesis.
- Dar relevancia en la resolución de problemas al análisis y a conjeturar la situación, en vez de centrar el esfuerzo en los cálculos asociados al problema.
- Verificar los resultados.
- Mejorar su motivación para estudiar la asignatura.

3 Etapas del diseño del aula virtual

Las etapas a seguir para la elaboración del aula virtual de una asignatura, pueden compararse a las de la elaboración de un software educativo, en el sentido de que tratan de incorporar las virtudes que ofrecen las NTIC para el aprendizaje del alumno. Estas son: el Diseño, la Instrumentación, la Prueba y la Entrega. En la etapa Diseño, se distinguen los ítems Definición de contenidos, Confección de un mapa mental, Definición del usuario y Definición del contexto.

El desarrollo de estos ítems, que en general se dan en paralelo y en un orden no siempre lineal [14], fue presentado en trabajos anteriores.

4 El aula virtual de Matemática I

A continuación se muestran los pasos seguidos en la implementación del aula virtual del tema Integral Indefinida.

Siguiendo las etapas del Diseño, primeramente se precisaron los contenidos, su extensión, estructura y profundidad, el vocabulario, los ejercicios, etc.

Para definir el contexto de uso, se recurrió a un cuestionario que permitió concluir que un porcentaje considerable de alumnos no poseía PC con acceso a internet. En consecuencia, se evaluó la posibilidad de usar el Laboratorio de Computación de la Facultad, estudiándose las características de sus ordenadores y el acceso a internet. Se organizó entonces el uso del laboratorio, para que estuviera disponible en distintos días y horarios, para que los alumnos de las diferentes comisiones tuvieran la posibilidad de hacer uso del mismo.

La portada del aula virtual de Matemática I se inicia con un mensaje de bienvenida a los alumnos y una fotografía de una clase teórica donde son ellos mismos los protagonistas. Se detalla que el trabajo en la plataforma forma parte de un proyecto de investigación, para contribuir con el aprendizaje a partir de la incorporación de las Nuevas Tecnologías. Se les explica además que el uso del aula virtual reforzará los procesos de enseñanza-aprendizaje ya que les facilitará el acceso a los contenidos, estimulará la comunicación y favorecerá la autoevaluación.

Fig. 1. Portada del aula virtual de Matemática I

Seguidamente en un archivo enlazado, caracterizado por el ícono de su formato, se le ofrece al alumno la posibilidad de acceder a información de interés, como ser el programa de la asignatura, condiciones de regularidad y de promoción

Se presentan, a continuación, dos archivos llamados TP1 y TP2, en formato pdf, sobre el tema Integral Indefinida elaborados desde una óptica cognitiva.

Los alumnos debían imprimir, completar y entregar este material al docente (Fig. 2).

Este conjunto de actividades, diseñadas para contribuir a la consolidación del conocimiento, se trabajaron con lápiz y papel y consistían en completar espacios en blanco con palabras, con símbolos característicos del lenguaje matemáticos o bien con ecuaciones.

Se trabajó de esta manera ya que un porcentaje considerable de alumnos declaró no conocer el uso de un editor de ecuaciones. El manejo de un editor de este tipo es una habilidad difícil de adquirir en un corto plazo y no contribuye al aprendizaje específico del tema de la asignatura ni constituye una herramienta indispensable para su carrera.

El estudiante podía desarrollar estas actividades trabajando en forma individual o interactuando con sus compañeros y con el docente, siendo la entrega final individual.

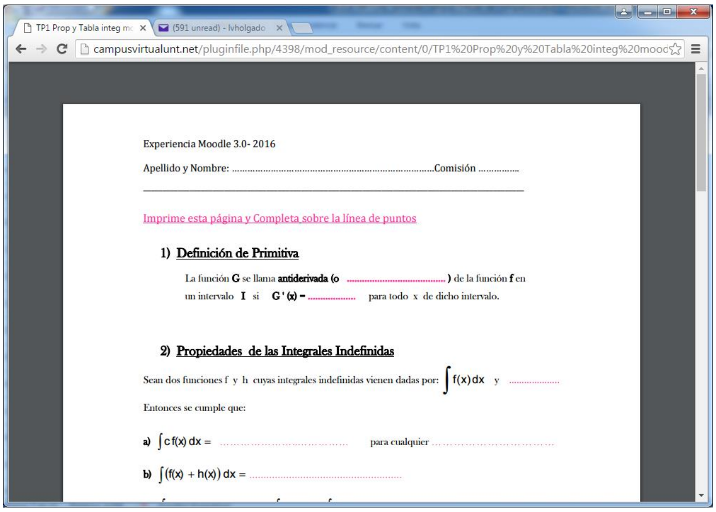


Fig. 2. Trabajo para completar y entregar.

El diseño del aula virtual se completa con diferentes ejercicios bajo el formato de cuestionarios para que el alumno trabaje en la plataforma.

Los cuestionarios en la plataforma Moodle están conformados por un listado de preguntas o ejercicios propuestos por el docente. Pueden diseñarse de tal forma que se le permita al alumno responderlo una o varias veces y además, si se mostrarán o no las respuestas correctas y los comentarios para la retroalimentación. Las preguntas y las respuestas de los cuestionarios de Moodle pueden presentarse mezcladas en forma aleatoria de tal manera que, en cada nuevo intento, se evite la copia entre los estudiantes o bien que el estudiante señale las respuestas correctas por la memorización de los resultados obtenidos en los intentos anteriores.

En el aula virtual se crearon 5 cuestionarios. Las respuestas a los mismos se diseñaron como opción Verdadero o Falso o bien como Opciones múltiples.

El primero de los ejercicios presentaba diferentes proposiciones con integrales indefinidas, en la que el estudiante debía calificar con verdadero o falso.

Los siguientes ejercicios presentaban diferentes proposiciones con integrales indefinidas, en la que el estudiante debía seleccionar la opción correcta o verdadera

La siguiente figura (Fig. 3) muestra una pantalla del aula virtual con el cuestionario de verdadero o falso y los cuatro cuestionarios de opción múltiple; éstos últimos con el epígrafe "En los siguientes ejercicios de INTEGRALES, seleccione la opción correcta (a, b, c, ó d si hubiera)"

Fig. 3. Organización de actividades

Estos problemas, en los que predominan el cálculo y aspectos procedimentales, constituyeron tareas con alta demanda cognitiva ya que requerían, al emplear un instrumento matemático como la Integral, el conocimiento de distintos conceptos y procedimientos implícitos en Teoremas y Métodos.

Para desarrollar los ejercicios propuestos en los cuestionarios “Integrales (Primer Ejercicio), Integrales (Segundo Ejercicio), Integrales (Tercer Ejercicio)”, el alumno debía desarrollar las integrales en papel y contestar en la plataforma sólo con una letra. Los ejercicios tenían diferentes grados de complejidad y los métodos de resolución de Integrales que debían utilizar los alumnos en cada caso eran diferentes. (Fig. 4)

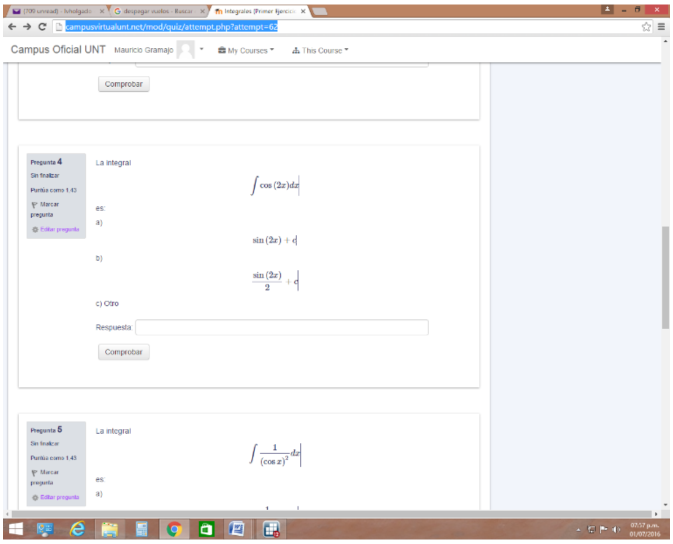


Fig. 4. Ejercicio de opción múltiple

La utilización del método de Integración por partes para resolver integrales que no son inmediatas, requiere dos aprendizajes: el aprendizaje de la fórmula que permite resolver una integral con este método y el aprendizaje acerca de “cómo determinar u y dv de forma correcta”. Por este motivo el último ejercicio propuesto en el aula virtual se llamó “Cómo elegir u y dv” y también fue diseñado con la respuesta en opciones múltiples, como se muestra en la Fig. 5.

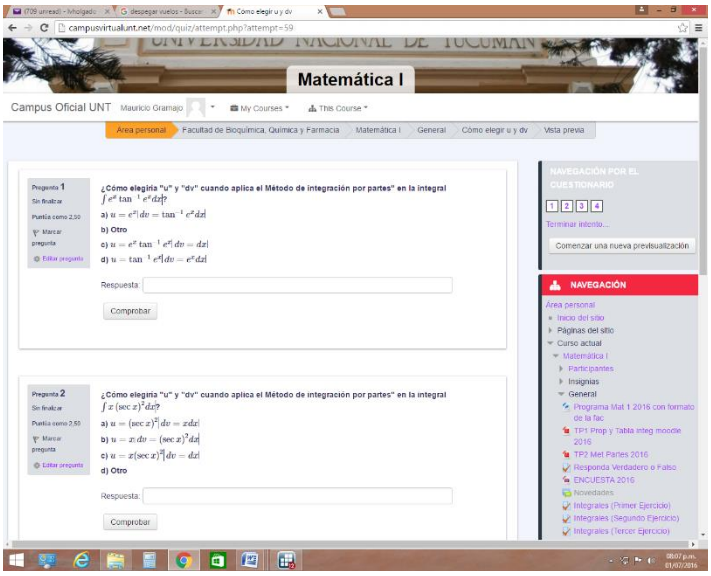


Fig. 5. “Cómo elegir u y dv”

Este tipo de adiestramiento es utilizado para agudizar el ingenio y el conocimiento, al momento de elegir las partes en este método tan importante de resolución de Integrales.

Es importante aclarar que todas las actividades evaluables tenían establecida una fecha de presentación.

5 Consideraciones finales

La estrategia presentada se implementó por primera vez, recientemente en el primer cuatrimestre del año 2016. Los alumnos que participaron fueron alrededor de 300 y corresponden a la totalidad de los alumnos que cursaron Matemática I, en el primer año del ciclo básico común de nuestra Facultad.

En trabajos posteriores se presentará el análisis de la comparabilidad de poblaciones entre los grupos de alumnos de Matemática I correspondientes a los años 2015 (grupo control) y 2016 (grupo experimental), habiéndose estudiado la homogeneidad de los mismos en las variables Sexo, Condición de Recursante y Rendimiento académico en el primer parcial de la asignatura de los citados años.

También se expondrán los resultados que se obtengan de distintas fuentes:

1) Datos obtenidos de un cuestionario y de una entrevista implementados a los alumnos, instrumentos destinados a evaluar la práctica didáctica acontecida y
2) Resultados obtenidos en el Segundo parcial de la asignatura, instrumento que se diseñó para evaluar el aprendizaje de los estudiantes. Ambos instrumentos fueron aplicados en forma inmediata a la finalización de la implementación del aula virtual.

Es nuestro compromiso docente reestructurar el actual modelo de educación superior, y entender las competencias y características que deberán ser estimuladas para que nuestros alumnos estén mejor capacitados para enfrentar el desafío de un mundo globalizado.

Referencias

1. Holgado. L y Villalonga, P.: Las nuevas tecnologías en un curso de matemática universitario y una nueva forma de comunicación docente- alumno. IV Encuentro Nacional y I Latinoamericano de Prácticas de Asesorías Pedagógicas Universitarias (APU) “Hacia la búsqueda de su identidad y legitimación institucional”. Facultad de Filosofía y Letras. UNT. (2015).
2. N.C.T.M. (1995). (National Council of teachers of mathematics). Assessment Standards for School Mathematics. http://standards.nctm.org/Previous/AssStds/index.htm. Accedido el 11de abril de 2003.
3. Jorba, J. y Casellas, E.: Estrategias y técnicas para la gestión social del aula. Volumen 1: La regulación y autorregulación de los aprendizajes. España: Síntesis. (1997).
4. Coll, C., Pozo, J., Sarabia, B. y Valls, E Los contenidos de la reforma. Enseñanza y aprendizaje de conceptos, procedimientos y actitudes. Buenos Aires: Editorial Santillana. (1992).
5. Díaz Barriga, F. y Hernández Rijas, G. Estrategias docentes para un aprendizaje significativo. Una interpretación constructivista. Editorial. Mc Graw Hill. México. (1997).
6. Moreira, M. A. y Caballero C. La Teoría del Aprendizaje Significativo. 1ra. Edición. Porto Alegre- Brasil, Burgos- España: UFRGS, Brasil y UBU, España. (2008).
7. Moreira, M. A. Organizadores previos y aprendizaje significativo. https://if.ufrgs.br/~moreira/Organizadoresesp.pdf . (2008). Accedido el 18 de junio de 2015.
8. Mercau de Sancho, S. Una propuesta de guía didáctica para favorecer el trabajo independiente a través de actividades prácticas del Cálculo Diferencial en carreras a distancia del área de Ciencias Económicas. Tesis no publicada. Biblioteca de la Facultad de Arquitectura y Urbanismo de la U.N.T (2012). .
9. Cukierman, U. Rozenhauz, J. Santángelo, H. Tecnología Educativa. Recursos, modelos y metodologías. Ed Prentice Hall. Argentina(2009)
10. Rodríguez Diéguez, J.L., Sáenz Barrio, O.: Tecnología Educativa. Nuevas Tecnologías Aplicadas a la Educación. (pp. 69-91), Alcoy, Marfil. (1995)
11. Sánchez Rosal, A. A.: Incorporación de las TICs en el aprendizaje de la matemática en el sector universitario. Revista de Educación Matemática. UMA. Volumen 27- Nº 3 (23-38). Córdoba- Argentina: Universidad Nacional de Córdoba. (2012).
12. Echeverría, J.: Los señores del aire. Telépolis y el tercer entorno. Ed. Destino. (1999)
13. Meneses Benítez, G. :Universidad: NTIC, interacción y aprendizaje. Edutec. Revista Electrónica de Tecnología Educativa, Núm. 20. (2006) www.edutec.es/revista/index.php/edutec-e/article/download/518/251 Accedido el 10 de mayo de 2014
14. Holgado de Mejail, L.: Desarrollo del grado de generalización mediante el uso de tecnología multimedia en la enseñanza del cálculo diferencial de una variable. Tesis no publicada. Biblioteca de la Facultad de Arquitectura y Urbanismo de la U.N.T. (2012)
15. Cabañas Valdiviezo, J. E. y Ojeda Fernández, Y. M. : Aulas virtuales como herramienta de apoyo en la educación de la Universidad Nacional Mayor de San Marcos. (2003).
16. http:// cybertesis.unmsm.edu.pe/bitstream/cybertesis/2534/1/cabanas_vj.pdf. Accedido el 30 de julio de 2015
17. Carbonell, M.R. y Saà Seoane, J.: Cálculo con soporte interactivo en Moodle. Barcelona: Pearson Educación, S. A. (2008).

Volver al Índice

La Enseñanza de la Matemática: el Desafío de Enseñar a Partir de los Errores

Roxana G. Ramírez, Irma M. Benítez, María I. Gandulfo, Diana C. Musto
Grupo GIEMCI, Facultad Regional Paraná, Universidad Tecnológica Nacional
roxanaguadaluperamirez@yahoo.com.ar, academico@frp.utn.edu.ar, {mariagandulfo,dcmusto}@gmail.com

Resumen. Este artículo académico, destinado a docentes y profesionales de la educación, pretende abordar una problemática de interés general que se advierte en los retos de la enseñanza de los contenidos específicos de matemática. Se presentan los avances de una investigación llevada a cabo en la Universidad Tecnológica Nacional Facultad Regional Paraná, de carácter descriptiva, que analiza cuáles son los errores más frecuentes que cometen los aspirantes a las diferentes carreras de ingeniería, en la resolución de ejercicios algebraicos. Con este trabajo se pretende indagar, analizar e integrar nuevas estrategias y metodologías de enseñanza que favorezcan la construcción del aprendizaje de la matemática a partir de los errores.

Palabras Clave: Enseñanza de la matemática, Errores.

1 Introducción

Según los lineamientos establecidos por la Res. CS N° 865/2012 del Consejo Superior de la Universidad Tecnológica Nacional, el Seminario Universitario (SU) tiene por objetivo brindar las competencias básicas que permitan a los aspirantes a las carreras de ingeniería, apropiarse de conceptos y estrategias metodológicas necesarias para una buena inserción en la vida universitaria.

Al desarrollar las materias que se dictan en este Seminario, entre ellas matemática, se busca que el estudiante adquiera las herramientas que faciliten la autonomía en el pensamiento crítico frente a la resolución de problemas y toma de decisiones, trabajando en equipo y desarrollando un pensamiento lógico y formal.

En los últimos años, la enseñanza de la matemática se ha transformado en un desafío frente al déficit de conocimientos matemáticos que tienen los aspirantes. Esto queda claramente evidenciado en los resultados de las evaluaciones diagnósticas.

La coordinación del Seminario Universitario y los grupos de investigación pertenecientes al GIEMCI (Grupo de Investigación de Enseñanza de la Matemática en Carreras de Ingeniería), se proponen estudiar y evaluar distintas estrategias tratando de revertir esta situación en el escaso tiempo que se dispone. Una de los tópicos estudiados es la reiteración de determinados errores que dan indicio de un problema serio que se repite en los distintos años. Esta situación puede ser aprovechada para construir conocimientos a partir de ellos y apuntalar los conceptos previos fortaleciendo el razonamiento lógico deductivo en la resolución de problemas, especialmente en problemas de la vida cotidiana. Sustentados en la teoría del conocimiento constructivista se pretende identificar y analizar el origen de estos errores para elaborar una práctica profesional por parte del docente que permita guiar y estimular a los alumnos frente a la necesidad de descubrir y construir el nuevo conocimiento.

2 El error como técnica constructiva del aprendizaje

En el marco de una investigación llevada a cabo por un grupo de docentes pertenecientes al departamento de materias básicas de la UTN Facultad Regional Paraná, se planteó la necesidad de enseñar matemáticas a partir de los errores habituales que cometen los estudiantes frente a los principios básicos de esta ciencia.

La mayoría de los docentes, al momento de evaluar al alumno en una prueba escrita, ponen mayor atención en las respuestas correctas, omitiendo en cierta medida aquello que el estudiante plantea o considera como verdad pero que en esa instancia se encuentra desacertado. Valiéndose de reglas que se establecen como parámetros para calificar en términos cuantitativos, se considera que los errores cometidos se deben a una comprensión inadecuada de lo enseñado o que no se ha comprendido o reelaborado el conocimiento de acuerdo a lo trabajado en la clase.

El análisis de los errores reside en un concepto simple, pero puede transformarse en complejo una vez que se intenta indagar sobre el proceso de razonamiento que emplea el alumno frente a la resolución de una determinada práctica matemática. Es posible considerar que los errores constituyen una nueva forma de enseñanza y que componen una parte esencial de este proceso. Durante mucho tiempo se consideró al error como una carencia, es decir como un fracaso. Esta perspectiva prevaleció a lo largo de la educación tradicional, en donde se consideraba al conocimiento como una acumulación de información de manera tal que el nivel de inteligencia era medido en función de la cantidad de datos almacenados en la memoria. Luego surge una nueva corriente denominada constructivismo, la cual cuestiona a la educación tradicional y enciclopedista desde una perspectiva de la censura y se mantiene abierta a nuevos debates, críticas y autocríticas [1].

Actualmente esta nueva forma de enseñar constituye la base de los lineamientos curriculares en nuestro país, en donde prevalece la relación entre las capacidades de aprendizaje espontáneas del alumno y los objetivos que deben alcanzarse de acuerdo a lo establecido por el sistema educativo [2].

Desde la perspectiva de la corriente conductista, la resolución algorítmica de un ejercicio o de un problema, indica que existe una solución única que responda a dicha inquietud. Es muy frecuente pensar en esto cuando hablamos de las ciencias exactas, por lo que concluimos que existe una solución única y verdadera; por lo tanto, si el resultado alcanzado o la forma de resolverlo no se corresponde a lo explicado o desarrollado por el docente esto indica que el ejercicio está mal resuelto o que el problema está mal planteado [2].

En cambio, desde la corriente constructivista, se promueve enseñar al alumno a apropiarse de herramientas que le permitan construir sus propios recursos para resolver una situación problemática. Ello implica el uso de las ideas que tiene asimiladas, su adecuación a lo nuevo, generando una “acomodación” de lo que ya conoce, en vistas a alcanzar un equilibrio de su propio conocimiento; lo cual insta a que siga aprendiendo.

3 Aportes de las principales teorías del aprendizaje

Las principales características que aportan las diferentes teorías del aprendizaje de la corriente constructivista, manifiestan que “la enseñanza debe basarse en la producción de estrategias que permitan comprender conceptos y que el conocimiento no puede transferirse de manera aislada, de una persona a otra, sino que el conocimiento conceptual debe ser construido activamente desde la propia experiencia y relacionado con el conocimiento preexistente (…). El aprendizaje es un proceso personal del que aprende, aunque necesita de un marco social para desarrollarse.” [3].

Es relevante para esta investigación analizar los errores que cometen los alumnos frente a la resolución de un ejercicio, desde un simple pasaje de términos, hasta el planteo de un problema matemático, para poder identificar el origen de los mismos y de esta manera poder intervenir favorablemente como guía en el proceso de enseñanza de las matemáticas. Esta intervención radica en reformular y reforzar el trabajo con propiedades, fomentando el análisis lógico-deductivo.

Algunos de los errores cometidos por los alumnos son meras distracciones que provienen de copiar mal un número o pasar por alto alguno de los datos del enunciado. En cambio, se han identificado otro tipo de errores producto de un aprendizaje desigual y deficiente. Frente a este tipo de problemática, es preciso indagar sobre el origen de los errores en la resolución de ejercicios algebraicos, investigando más sobre las causas, permitiendo identificar y analizar por qué se produjeron. Constituye una actitud perspicaz de enfrentar el problema, ya que permitiría retomar los conceptos involucrados y cuestionar la producción de los alumnos orientándolos a la construcción del nuevo conocimiento.

Observamos desde nuestra práctica docente que cuando se corrige un error sin identificar el problema que lo ocasiona, el proceso de aprendizaje por parte del alumno no siempre se activa, por el simple hecho de que el alumno no logra conocer e identificar el origen de su equivocación. Es por ello que se necesita conocer y tipificar los errores, estimulando a trabajar con ellos en el proceso de enseñanza de la matemática, para generar en el aula un clima de trabajo y confianza. El docente actúa como guía acompañando a sus alumnos en un debate abierto en el que se puede analizar e interactuar con los errores razonando los procedimientos de resolución correctos e incluso los incorrectos. No se trata de una tarea sencilla para el docente ya que esto implica una gran demanda del tiempo áulico, siendo ésta una de las características con la que se enfrenta a diario el educador “cumplir con el programa establecido en tiempo y forma” [4].

4 Categorización y clasificación de los errores

La caracterización de las diferentes categorías de los errores, ha sido investigada en las últimas décadas y continúan siendo analizadas a partir de estándares de errores, los cuales pueden ser considerados a nivel individual y/o colectivo.

Según Rico [5] la consistencia a nivel individual se genera cuando el sujeto realiza tareas y resuelve problemas matemáticos rutinarios e invariables. Por otro lado, considera que existen patrones de consistencias de carácter colectivo que se manifiestan en estereotipos de errores que cometen los estudiantes durante el transcurso de las etapas evolutivas de su desarrollo educativo.

Identificar y clasificar estos errores nos permite indagar sobre los diversos aspectos que los atañe y nos conduce a evaluar, analizar e investigar sobre aquellos aspectos que conduce a los alumnos a cometerlos con el objeto de asistir a los estudiantes frente a sus dificultades y carencias de sentido de los objetos matemáticos y en el desarrollo de una actitud racional hacia la matemática.

A continuación, se presentan algunas categorizaciones y clasificaciones que fueron realizadas por investigadores desde diferentes perspectivas educativas.

Davis (1984) elaboró una teoría de esquemas o constructos personales que le permitió estandarizar e interpretar algunos de los errores más usuales de los estudiantes en el aprendizaje de la matemática. Los errores clásicos explicados son: reversiones binarias, errores inducidos por el lenguaje o la notación, errores por recuperación de un esquema previo, errores producidos por una representación inadecuada y reglas que producen reglas. [6].

Radatz (1979) realiza una clasificación de errores a partir del procesamiento de la información, estableciendo cinco categorías generales para este análisis.

1. Errores debidos a dificultades de lenguaje: el aprendizaje de conceptos, símbolos y vocabulario matemáticos es para muchos alumnos un problema similar al aprendizaje de una lengua extranjera. Errores de traducción desde un esquema semántico en el lenguaje natural a un esquema más formal en el lenguaje matemático.
2. Errores debidos a dificultades para obtener información espacial: las diferencias individuales en la capacidad para pensar mediante imágenes espaciales o visuales es una fuente de dificultades en la realización de tareas matemáticas.
3. Errores debidos a un aprendizaje deficiente de hechos, destrezas y conceptos previos: se incluyen todas las deficiencias de conocimiento sobre contenidos y procedimientos específicos para la realización de una tarea matemática. Errores originados por deficiencias en el manejo de conceptos, contenidos, procedimientos para las tareas matemáticas.
4. Errores debidos a asociaciones incorrectas o a rigidez del pensamiento: la experiencia sobre problemas similares puede producir una rigidez en el modo habitual de pensamiento y una falta de flexibilidad para codificar y decodificar nueva información. Los alumnos continúan empleando operaciones cognitivas aún cuando las condiciones originales se han modificado. Están inhibidos para el procesamiento de nueva información. En general son causados por la incapacidad del pensamiento para adaptarse a situaciones nuevas. Interesan cinco subtipos:
   - Errores por perseveración, en los que predominan elementos singulares de una tarea o problema.
   - Errores de asociación, que incluyen razonamientos o asociaciones incorrectas entre elementos singulares.
   - Errores de interferencia, en los que operaciones o conceptos diferentes interfieren con otros.
   - Errores de asimilación, en los que una audición incorrecta produce faltas en la lectura o escritura. Cuando la información es mal procesada debido a fallas de percepción.
   - Errores de transferencia negativa a partir de tareas previas.
5. Errores debidos a la aplicación de reglas o estrategias irrelevantes: surgen con frecuencia por aplicar con éxito reglas o estrategias similares en áreas de contenidos diferentes. [6].

Mosvshovitz-Hadar, Zaslavsky e Inbar (1987), formalizan una clasificación empírica de los errores, sobre la base de un análisis constructivo, realizado por expertos, de las soluciones de los alumnos. De acuerdo a esta metodología determinan las seis categorías descriptivas siguientes:

1. Datos mal utilizados: son aquellos errores que se producen por alguna discrepancia entre los datos y el tratamiento que le da el alumno. Los mismos se pueden producir porque: se añaden datos extraños; se olvida algún dato necesario para la solución; se contesta a algo que no es necesario; se asigna a una parte de la información un significado inconsistente con el enunciado; se utilizan los valores numéricos de una variable para otra distinta; o bien, se hace una lectura incorrecta del enunciado.
2. Interpretación incorrecta del lenguaje: son errores debidos a una traducción incorrecta de hechos matemáticos descritos en un lenguaje simbólico a otro lenguaje simbólico distinto.
3. Inferencias no válidas lógicamente: son errores que tienen que ver con fallas en el razonamiento y no se deben al contenido específico.
4. Teoremas o definiciones deformados: son errores que se producen por deformación de un principio, regla, teorema o definición identificable.
5. Falta de verificación en la solución: son los errores que se presentan cuando cada paso en la realización de la tarea es correcto, pero el resultado final no es la solución de la pregunta planteada.

6. Errores técnicos: se incluyen en esta categoría los errores de cálculo, al tomar datos de una tabla, en la manipulación de símbolos algebraicos y otros derivados de la ejecución de algoritmos. [6].

En Socas (1997), se consideran tres ejes, que permiten analizar el origen del error. De esta forma, podemos situar los errores en relación con tres orígenes distintos:

- Obstáculos: conocimientos adquiridos que demuestran su afectividad en ciertos contextos, pero no válidos en otros.
- Ausencia de sentido: relacionado en las distintas etapas de aprendizaje de un sistema de representación, semiótica, estructural y autónoma.
- Actitudes afectivas y emocionales: Los errores que tienen su origen en actitudes afectivas y emocionales tienen distinta naturaleza: faltas de concentración (excesiva confianza), bloqueos, olvidos, etc. [6].

Esteley y Villarreal (1990,1996) realizaron una categorización de errores en matemática y discutieron las siguientes categorías:

1. Errores al operar con números reales en cálculos, planteo y resolución de ecuaciones.
2. No empleo o uso parcial de la información.
3. No verificación de resultados parciales o totales que se manifiesta en: desconexión entre lo analítico y lo gráfico, respuestas consecutivas incoherentes entre sí y no comprobación de que los resultados obtenidos satisfacen la o las ecuaciones originales.
4. Empleo incorrecto de propiedades y definiciones (de números o funciones).
5. No verificación de condiciones de aplicabilidad de teoremas, definiciones, etc. en un caso particular.
6. Deducción incorrecta de información o inventar datos a partir de la dada.
7. Errores de lógica: justificaciones inadecuadas de proposiciones y uso inadecuado del lenguaje.
8. Errores al transcribir un ejercicio a la hoja de trabajo. [6].

En Azcárate et al. (1996) se cita una investigación realizada por Orton basada en un trabajo acerca del concepto de derivada con alumnos de entre 16 y 22 años y de la que surge la siguiente clasificación:

1. Errores estructurales: relacionados con los conceptos esenciales implicados.
2. Errores arbitrarios: el alumno se comporta arbitrariamente sin tener en cuenta los datos del problema.
3. Errores ejecutivos: errores en la manipulación, si bien los conceptos implicados pueden ser comprendidos. [6].

Mientras Astolfi (1999) describe la siguiente tipología de los errores:

1. Errores debidos a la redacción y comprensión de las instrucciones.
2. Errores resultados de los hábitos escolares o de una mala interpretación de las expectativas.
3. Errores como resultado de las concepciones alternativas de los alumnos.
4. Errores ligados a las operaciones intelectuales implicadas.
5. Errores en los procesos adoptados.
6. Errores debidos a la sobrecarga cognitiva en la actividad.
7. Errores que tienen su origen en otra disciplina.
8. Errores causados por la complejidad propia del contenido [6].

5 Análisis de la investigación

Esta investigación se realiza sobre una base descriptiva que analiza el registro de los errores que cometen con mayor frecuencia los alumnos aspirantes a las diferentes carreras de ingeniería. La muestra seleccionada para este estudio contempla a los alumnos aspirantes correspondientes a ingresantes 2016-2017, siendo el instrumento de análisis las evaluaciones diagnósticas de ingreso en donde se relevaron y clasificaron los errores observados. Estas pruebas evalúan contenidos conceptuales que han sido desarrollados en las escuelas medias de la ciudad de Paraná.

De acuerdo a las categorizaciones anteriormente mencionadas y al análisis de los errores realizado por el grupo de docentes investigadores acerca de la frecuencia de determinados tipos, se pudieron adaptar nuevas categorizaciones de errores en ejercicios y problemas sobre la temática referida a: Conjuntos numéricos: Operaciones y propiedades; Expresiones Algebraicas; Ecuaciones y Sistemas de Ecuaciones; Trigonometría.

Este estudio dio lugar a la siguiente clasificación:

E1: Error por falta de atención: radica en la falta de atención o distracción frente a la resolución de un ejercicio o problema.

E2: Empleo incorrecto de propiedades y definiciones: consiste en la interpretación de manera incorrecta de una regla, definición o propiedad determinada.

E3: Deducciones no válidas lógicamente: reside en un razonamiento incorrecto o ilógico y no al contenido específico.
E4: Falta de verificación de la solución: radica en la falta o incorrecta interpretación de un resultado o de un problema.
E5: Errores al transcribir un ejercicio a la hoja de trabajo: este error se debe a la falta de atención y/o a la falta de un manejo ordenado de los procedimientos matemáticos
E6: Errores relacionados a los hábitos de manejo incorrecto del álgebra y/o a la equivocada interpretación del concepto.

6 Análisis de los errores

A continuación, se describen algunos de los errores que fueron analizados de acuerdo a la categorización antes establecida.

Enunciado 1: Calcular y simplificar el resultado a la mínima expresión:

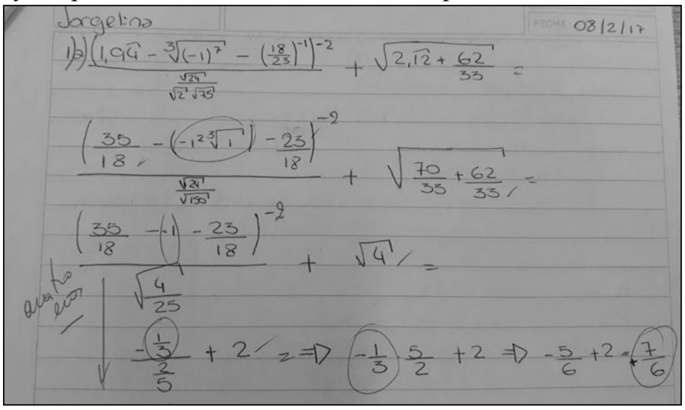


Fig. 1. El error cometido en este ejercicio corresponde a la categorización E1. El alumno copia el enunciado correctamente, pero cuando lo comienza a resolver, por falta de atención, olvida copiar el exponente y arrastra el error.

Enunciado 2: Dados los números complejos Z1, Z2 y Z3, calcular:

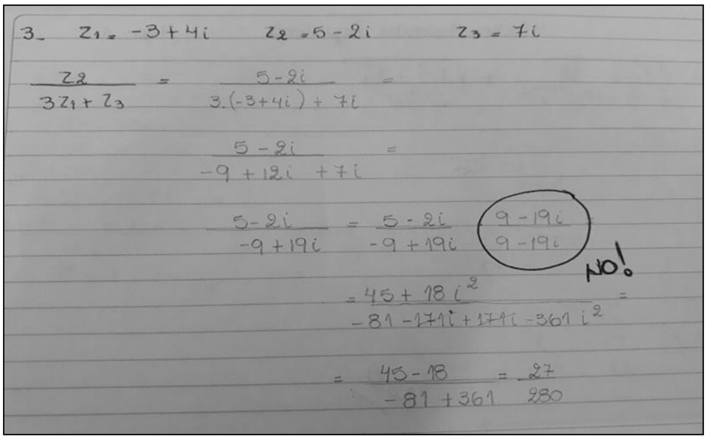


Fig. 2. Error tipo E2. Se emplea incorrectamente la definición del conjugado de un número complejo.

Enunciado 3: Resolver la siguiente desigualdad, expresar la solución como intervalo y graficar en la recta real

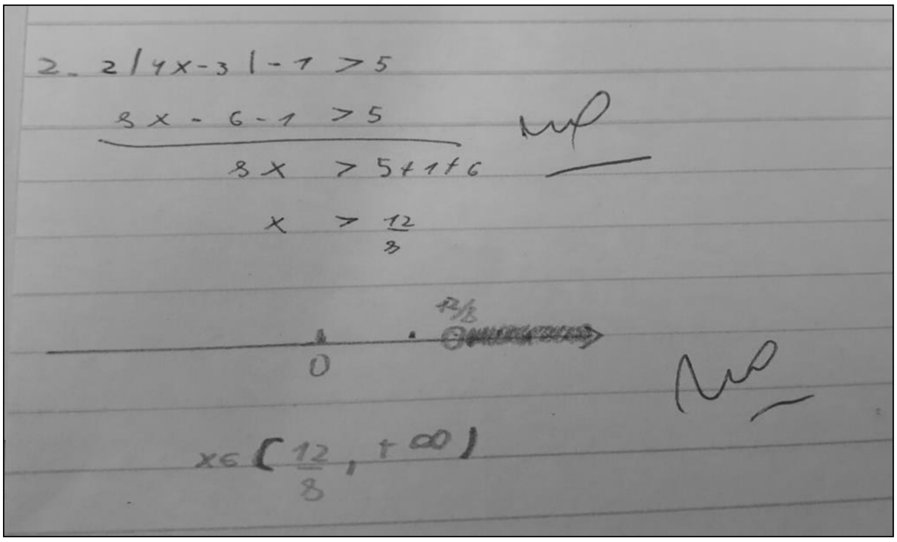


Fig. 3. En este caso se presenta error tipo E3. El alumno razona incorrectamente el concepto de valor absoluto.

Enunciado 4: Una antena de radio está sujeta al suelo por un cable a cada lado, que forman con la antena ángulos de 45° y 60°. Los puntos de sujeción están alineados con el pie de la antena. La distancia entre los puntos de sujeción de los cables es de 120 m. Calcula la altura de la antena y la distancia de la misma a cada punto de sujeción.

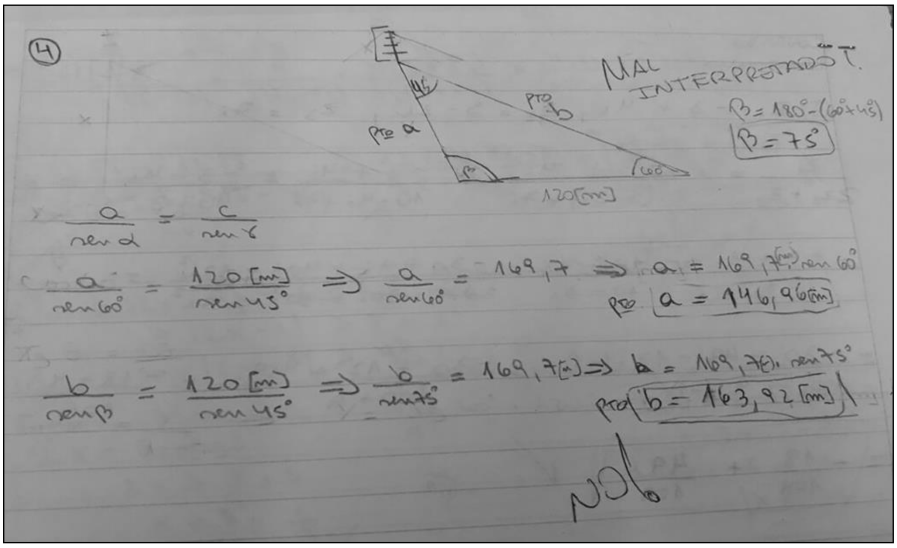


Fig. 4. En este ejemplo se comete error tipo E4. El alumno interpreta de manera incorrecta el enunciado del problema, resuelve correctamente según su interpretación. El resultado obtenido no es verificado con el bosquejo realizado por el alumno.

Enunciado 5: Calcular y simplificar el resultado a la mínima expresión

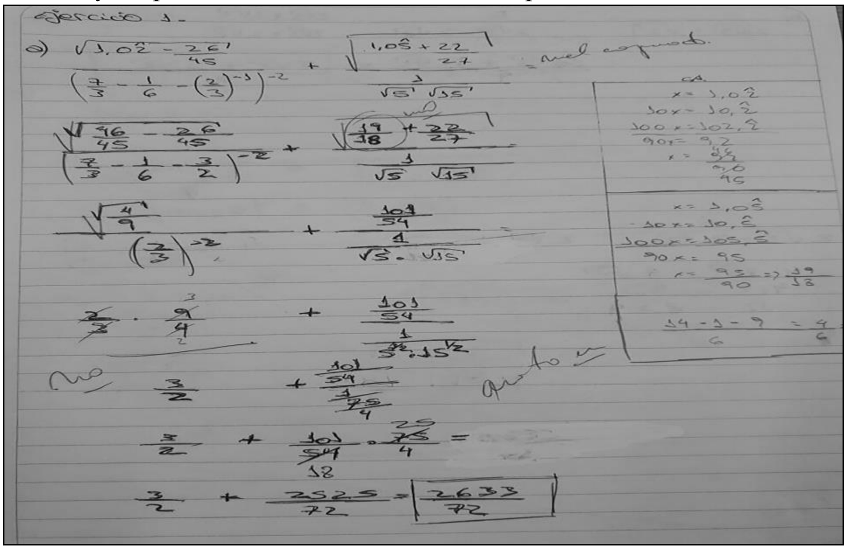


Fig. 5. El error tipo E5, se presenta cuando el alumno transcribe erróneamente el enunciado dado por el docente.

Enunciado 6: Resolver la siguiente desigualdad, expresar la solución como intervalo y graficar en la recta real

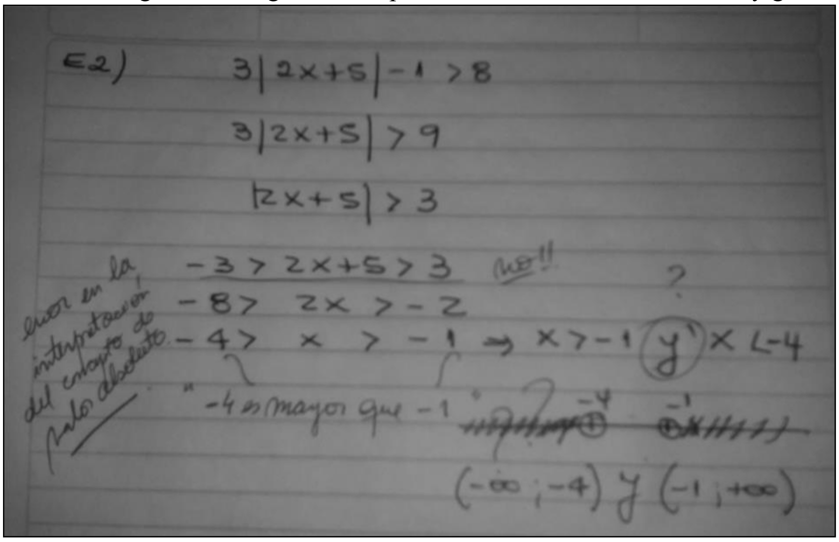


Fig. 6. El error tipo E6, se debe a un hábito erróneo del alumno.

Al examinar de manera meticulosa los errores cometidos por los alumnos en las evaluaciones diagnósticas, se logra obtener información acerca del aprendizaje que han adquirido en la secundaria, siendo la tarea del docente la de analizar estos problemas y trabajar desde ellos para la construcción del nuevo conocimiento. David Ausubel nos aporta que "el aprendizaje debe ser una actividad significativa para la persona que aprende; dicha significatividad está directamente relacionada con la existencia de relaciones entre el conocimiento nuevo y el que ya posee (…). El aprendizaje resulta muy poco eficaz si consiste simplemente en la repetición mecánica de elementos que el alumno no puede estructurar formando un todo relacionado. Esto sólo es posible si el estudiante utiliza los conocimientos que ya tiene, aunque éstos no sean totalmente correctos (…)" [1].

El concepto del error puede ser considerado como un "puente cognitivo", el cual permite al alumno pasar de un conocimiento menos elaborado y hasta incierto, a un conocimiento significativo y organizado. No obstante, la autonomía en el aprendizaje pueda contribuir a indagar sobre nuevos conocimientos motivados por la curiosidad; es de destacar que el trabajo realizado entre pares permite alcanzar una mayor motivación en el aprendizaje, haciendo que la ayuda colaborativa facilite la comprensión de los conceptos más complejos para el alumno. "El trabajo cooperativo no sólo facilita el desarrollo del patrón de motivación para el aprendizaje frente a otros modos de motivación, como el lucimiento, sino que tiene efectos que podrían considerarse terapéuticos sobre los alumnos que han desarrollado un patrón motivacional de miedo al fracaso. El formar parte de un grupo que realiza una tarea con cierto éxito aumenta las probabilidades de aprendizaje de esos sujetos y permite mejorar sus expectativas de cara al futuro.” [7, 8].

Desde una perspectiva del aprendizaje informal como un marco desafiante en las prácticas educativas habituales, se los introduce a entornos personales de aprendizaje (PLE), brindándoles “un conjunto de herramientas, fuentes de información, conexiones y actividades que cada persona utiliza de forma continua para aprender". El uso de las TIC como un recurso educativo, el cual permite al docente generar otro ambiente escolar fuera del aula, acompañando al alumno en la propia construcción de su conocimiento. Esta condición facilita el empleo de una amplia variedad de herramientas que nos ofrece la web. Como así también la posibilidad de trabajar fuera del horario de la clase, lo cual involucra un contraste entre “el aprendizaje en escenarios educativos formales (escolares) y los escenarios no escolares.” [9, 10].

Esto constituye una nueva forma de “aprender a aprender” a partir de una “competencia digital”, lo cual lleva a innovar la forma de enseñar. Jaume Carbonell, quien entiende la innovación educativa como: “(un) conjunto de ideas, procesos y estrategias, más o menos sistematizados, mediante los cuales se trata de introducir y provocar cambios en las prácticas educativas vigentes. La innovación no es una actividad puntual sino un proceso, un largo viaje o trayecto que se detiene a contemplar la vida en las aulas, la organización de los centros, la dinámica de la comunidad educativa y la cultura profesional del profesorado. Su propósito es alterar la realidad vigente, modificando concepciones y actitudes, alterando métodos e intervenciones y mejorando o transformando, según los casos, los procesos de enseñanza y aprendizaje. La innovación, por tanto, va asociada al cambio y tiene un componente –explícito u oculto- ideológico, cognitivo, ético y afectivo. Porque la innovación apela a la subjetividad del sujeto y al desarrollo de su individualidad, así como a las relaciones teoría práctica inherentes al acto educativo.” [11, 12].

7 Conclusiones y trabajos futuros

El estudio sobre las evaluaciones aplicadas durante en el Seminario Universitario 2017, permiten establecer resultados diagnósticos. Sobre una muestra de 400 exámenes realizados por aproximadamente 200 alumnos, el 20% de estos exámenes registran error tipo E1. El error tipo E2, se encuentra en el 92% de la muestra de exámenes. Con respecto al error tipo E3, el 86% de los exámenes presentaron este tipo de categorización. El error E4, es cometido en el 63% de los exámenes. Cabe aclarar que el error cometido principalmente en este tipo de evaluación es el planteo de la situación problemática a partir de una interpretación gráfica, no así relacionada con la resolución analítica del ejercicio. El error tipo E5, se presenta en el 5% de la muestra, ya que el docente de manera reiterada insiste en que el alumno debe verificar el copiado del enunciado y que además sea ordenado y prolijo en la resolución del ejercicio. Con respecto al error tipo E6, el estudiante plantea una resolución incorrecta arribando a un resultado correcto, pero a una equivocada interpretación del concepto, el error tipo E6, se presenta en el 9% de los casos.

Se puede concluir que el análisis de los errores amplía favorablemente la visión del docente respecto al aprendizaje de los alumnos. En un aspecto grupal le permite ser crítico y reflexivo y potenciar o ampliar las estrategias de enseñanza y evaluativas. Asimismo, desde la perspectiva de la atención personalizada, orienta la labor hacia la superación de las dificultades desarrollando actitudes de confianza y tratando de sustentar criterios que más adelante marcarán la vida profesional.

Queda por delante continuar los estudios y aplicaciones sobre el tema, para complementar los resultados y ampliar los conocimientos, incorporando nuevas tipificaciones y los avances de otros investigadores. Además, se plantea realizar otros ensayos con alumnos de asignaturas de matemática de primer año de ingeniería, en lo posible dando lugar al desarrollo de nuevas estrategias superadoras.

Referencias

1. Carretero, M. Clase 1: Introducción al Constructivismo: El *Constructivismo y los Sistemas Educativos*. Introducción al concepto de organizadores previos. Posgrado en Constructivismo y Educación. Buenos Aires. FLACSO-Argentina y UAM. (2013)
2. Valle De Vita, Graciela. *El error constructivo en la clase de matemática*. [en línea]. Revista de Investigación: Educar. Ministerio de Educación. Presidencia de la Nación. URL: <http://www.educ.ar/sitios/educar/recursos/ver?id=120092>. [Consulta: enero 2014]

3. Fairstein, G. Seminario 2: *Aprendizaje y Cambio Cognitivo*. Posgrado en Constructivismo y Educación. Buenos Aires. FLACSO-Argentina y UAM. (2014).
4. Vergnaud, Gérard (1990). *La Teoría de los Campos Conceptuales*. Dirección URL: < http://fundesuperior.org/Articulos/Pedagogia/Teoria_campos_conceptuales.pdf>. Accedido el 15 de enero de 2015
5. Rico, Luis. *"Errores y dificultades en el aprendizaje de las matemáticas"*. (1995): 69-108.
6. García Suárez, J. Trabajo de Fín de Master. *Análisis de errores y dificultades en la resolución de tareas algebraicas por alumnos de primer ingreso en nivel licenciatura*. Granada. pp. 27-76 (2010). Dirección URL: <http://fqm193.ugr.es/media/grupos/FQM193/cms/Jose_Garcia.pdf.>. Accedido el 20 de enero de 2017.
7. Huertas, Juan Antonio. Clase 9: *Motivación y Aprendizaje: La activación de los mecanismos de autorregulación*. Posgrado en Constructivismo y Educación. Buenos Aires. FLACSO-Argentina y UAM. (2013)
8. Chemello, Graciela. Clase 16: *Didáctica de la Matemática*. Posgrado en Constructivismo y Educación. Buenos Aires. FLACSO-Argentina y UAM. (2013)
9. Weber, Verónica. Seminario 3: *Aprendizaje Informal. Entornos personales de aprendizaje y museos en la enseñanza*. Posgrado en Constructivismo y Educación. Buenos Aires. FLACSO-Argentina y UAM. (2014)
10. Libedinsky, Marta. Clase 17 a 19*: La integración de las TIC en la enseñanza*. Posgrado en Constructivismo y Educación. Buenos Aires. FLACSO-Argentina y UAM. (2013)
11. Cañal de León, Pedro, y otros (2002). *La Innovación Educativa*, Madrid.
12. Flood, Cecilia, Seminario 5: *Las innovaciones en educación*. Posgrado en Constructivismo y Educación, Buenos Aires, FLACSO-Argentina y UAM. (2014)

Volver al Índice

El Proceso de Enseñanza y de Aprendizaje en el Departamento de Matemática de la FCEIA de la UNR: Realidades y Concepciones de los Profesores

Raúl D. Katz[1], Mabel A. Medina[1,2]
[1] Departamento de Matemática, Escuela de Formación Básica, Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura,
[2] Consejo de Investigaciones Universidad Nacional de Rosario
Pellegrini 250, 2000 Rosario, Argentina
{rdkatz, mmedina}@fceia.unr.edu.ar

Resumen. A partir del año 2014 se viene implementando en la Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura, de la Universidad Nacional de Rosario, un nuevo plan de estudios. Su diseño procura superar la atomización del conocimiento, promoviendo la integración de los distintos espacios curriculares. Sin embargo, por el momento solo se observan incipientes esfuerzos de algunos docentes del área matemática para alcanzar ese objetivo. Para lograr una mejor comprensión de lo que sucede y arrojar claridad sobre el presente, implementamos entre los docentes del área Matemática una encuesta a fin de recoger información sobre cuestiones relacionadas con los procesos de enseñanza y aprendizaje, el cumplimiento de las planificaciones, asistencia de los estudiantes a clase, sus conocimientos previos para abordar cada espacio curricular, como asimismo apreciaciones sobre los materiales de estudio. En este trabajo se muestran las consideraciones de los docentes y las reflexiones que las mismas nos merecen.

Palabras Clave: Encuesta docente, Organización áulica, Evaluación, Deserción, Conocimientos previos.

1 Introducción

A partir del año 2014 se viene implementando en la Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura (FCEIA) de la Universidad Nacional de Rosario (UNR) un nuevo plan de estudios. El mismo sostiene, entre otras cosas y siguiendo una tradición institucional, una sólida formación en ciencias básicas. El diseño contempla una organización básica en actividades curriculares, entendiéndose por tales, la selección llevada a cabo para facilitar la organización de contenidos afines, teniendo en cuenta los espacios, tiempos, agrupamientos, las construcciones metodológicas más adecuadas y las formas de evaluación y acreditación que se consideran beneficiosas para la apropiación de los saberes y capacidades previstos.

En función de su papel formativo y su afinidad disciplinar, las actividades curriculares se organizan en bloques y en áreas. Cada actividad curricular es una unidad que conforma en sí misma un proyecto pedagógico dentro del diseño, con relativa autonomía, aunque sólo adquiere significación dentro de la totalidad, a través de su adecuada articulación en los bloques y áreas que conforman la estructura curricular.

Si bien la propuesta de este diseño procura superar la atomización del conocimiento, promoviendo la integración de los distintos espacios curriculares que la conforman, existen por el momento sólo incipientes esfuerzos de algunos docentes del área matemática para alcanzar ese objetivo. Los docentes suelen atribuir como determinantes de esa situación a factores de contexto relacionados con los conocimientos previos y actitudes de los estudiantes que ingresan a la Universidad, como asimismo a la brecha entre los tiempos administrativos y académicos.

2 Objetivos de la investigación

Para lograr una mejor comprensión de lo que sucede y arrojar claridad sobre el presente, implementamos entre los docentes del área Matemática una encuesta a fin de recoger información sobre cuestiones relacionadas con los procesos de enseñanza y aprendizaje, el cumplimiento de las planificaciones, asistencia de los estudiantes a clase, sus conocimientos previos para abordar cada espacio curricular, como asimismo consideraciones sobre los diferentes materiales de estudio para cada espacio. Nuestro objetivo primordial es implementar un mecanismo de evaluación que nos permita encontrar los aspectos que son susceptibles de mejora y propender paulatinamente a que se cumplan los principios declarados en el nuevo plan de estudio.

3 Metodología

Si bien la encuesta fue implementada, con algunas variantes, tanto entre los Profesores como Ayudantes y Jefes de Trabajos Prácticos, hemos procesado momentáneamente la información de las respuestas dadas por los Profesores.

La metodología adoptada responde a un modelo cualitativo y predominantemente descriptivo. En particular nuestro estudio se ubica en el enfoque hermenéutico tomando como principal referente al filósofo Gadamer [1] para quien el modo de comprender es típicamente interpretativo, involucrando un proceso constructivo que traduce una realidad captada a una realidad comprendida. De allí que todo conocimiento es, a su vez, interpretación que implica el reconocimiento de la realidad que se comprende.

4 La encuesta y el procesamiento de la información

En lo que sigue mostramos los ítems comprendidos en la encuesta como asimismo una síntesis de las respuestas dadas por los Profesores.

> *1 y 2) Relate si logra o no desarrollar todos los contenidos previstos en la planificación. En el caso de no desarrollar todos los contenidos, refiera a qué recursos didácticos recurre para que los alumnos se apropien de los mismos.*

Los docentes manifiestan, por lo general, abarcar todos los contenidos previstos en la planificación. Se hace referencia a situaciones emergentes imprevistas (paros, cortes de la energía eléctrica, asuetos, etc.) que obligan en ocasiones a utilizar clases de consulta como clases recuperatorias. En cualquier caso los alumnos disponen de materiales complementarios elaborados por los docentes. Aquellos temas que se consideran que fueron abordados superficialmente, ocasionalmente, son evaluados a través de trabajos prácticos. Los docentes suelen utilizar la red social Facebook como medio de comunicación para acordar nuevas instancias para la atención de consultas. También es un medio para suministrar o sugerir materiales didácticos, requeridos por los alumnos.

> *3) ¿Cuál considera usted la mejor distribución horaria semanal para la asignatura? Fundamente su respuesta.*

Los docentes, tanto de Cálculo II como de Cálculo III, adhieren a la actual distribución de las siete horas en tres días de dos, dos y tres horas. En Álgebra Lineal los profesores consideran muy propicia la distribución en tres días de dos horas. Consideran que en los bloques continuados de tres horas, el alumno no puede conservar la atención aún en la modalidad teórica práctica. Asimismo señalan que un descanso en el medio da lugar a una interrupción prolongada. En cuanto a las asignaturas del primer semestre de primer año hay opiniones dispares. Quienes adhieren a dos bloques de tres horas consideran la posibilidad de implementar actividades en la modalidad taller. Quienes adhieren a tres bloques de dos horas entienden que de esta manera se optimiza el uso del tiempo.

> *4) ¿Cuál es la(s) metodología(s) de enseñanza que considera más apropiada para el trabajo en el aula?*

Los docentes declaran, mayoritariamente, alternar instancias expositivas con actividades centradas en el alumno. En algunas respuestas se pone mayor énfasis en el trabajo de modalidad taller.

En un caso responde que, frecuentemente parte de una situación problemática que muestra la necesidad de nuevos requerimientos teóricos. En otro caso, se señala la importancia del aprendizaje autónomo, sin embargo considera dificultosa su implementación atendiendo a los tiempos académicos.

> *5) Explique brevemente cómo organiza el trabajo en el aula.*

En cuanto a la organización del trabajo de aula encontramos matices y argumentaciones diferentes que sintetizamos de la siguiente manera:

- Énfasis en diferentes recursos tecnológicos: plataforma educativa, videos de Internet, redes sociales como medio de comunicación y suministro de materiales que luego son utilizados en el desarrollo de actividades en el aula.

- Clases expositivas con interacción con los alumnos tendiendo a integrar teoría y práctica. La mayoría de los docentes hacen referencia a actividades grupales.
- La organización del trabajo en el aula, en un caso, se condiciona a la relación docente-alumno.
- En el caso de Métodos Numéricos se observa una tendencia a la propuesta de actividades vinculadas a la especialidad, hecho que no se pone de manifiesto explícitamente en otros espacios.

6) *Describa qué metodología de evaluación aplicaría o aplica para la asignatura.*

En un caso se refiere a evaluaciones continuas. Se incorpora la información de las actividades grupales en el aula a la información de las evaluaciones parciales que son de carácter teórico práctico, no contemplando una instancia globalizadora.

En otro caso se hace referencia a parciales con muchos apartados y aplicaciones a la ingeniería. Se trabaja sobre los errores observados en las evaluaciones parciales. El examen final contempla la preparación de un tema por parte del alumno complementado con la restante teoría.

La mayoría de los docentes hacen referencia a evaluaciones parciales de tipo práctico-conceptual y un coloquio final integrador.

En el caso de Métodos Numéricos se observan dos evaluaciones escritas que incluyen preguntas relacionadas con trabajos prácticos realizados por los alumnos. Una tercera instancia se realiza en el laboratorio de informática en forma individual y luego hay un coloquio globalizador. Hay una instancia escrita recuperatoria y otra en relación al trabajo de laboratorio.

No se hace referencia (salvo en Métodos Numéricos) a evaluaciones recuperatorias. En algunos casos (Álgebra Lineal) las evaluaciones finales de cada alumno se relacionan con su desempeño en los parciales.

7) *Describa la asistencia de los alumnos a clase y la evolución de la misma en el transcurso del cuatrimestre*

En lo que sigue sintetizamos distintas respuestas dadas por los docentes.

- En el caso de estudiantes ingresantes se señala que el 20% de los inscriptos no aparece al cursado y un 25% no asiste a la primera evaluación parcial.
- La asistencia al recursado es menor que al cursado.
- Se observa una mayor asistencia cuando el alumno sabe que se desarrollan temas teóricos.
- Disminuye la asistencia cuando tienen resultados desfavorables en las evaluaciones. La asistencia continua está asociada a mejores desempeños. La perseverancia viene acompañada, por lo general, por un mejor rendimiento.
- La asistencia disminuye en coincidencia con evaluaciones parciales.
- Se observa una mayor asistencia a las evaluaciones parciales que a las propias clases.
- En el caso de Métodos Numéricos, la asistencia se estabiliza a partir de la quinta clase.

8) *Enuncie posibles causas de dicha evolución.*

En relación a los ingresantes, la deserción temprana se atribuye, en algunos casos, a una cuestión de vocación (por considerar que su elección de la carrera fue errada). La deserción después del primer parcial puede estar asociada a una autoevaluación crítica de su compromiso con el estudio, a una toma de conciencia por considerar que sus conocimientos previos no son suficientes para afrontar el resto del cuatrimestre, ocasionando el abandono definitivo o el reintento en el cuatrimestre siguiente.

Otros sostienen que los alumnos dejan de asistir a clase para manejar con autonomía sus tiempos, creyendo que pueden aprobar como libres.

Algunos docentes consideran que la deserción obedece a una decisión de los estudiantes quienes en función de los resultados de los primeros parciales deciden qué asignaturas continuar cursando.

Si bien los estudiantes no pueden inscribirse en más de cinco espacios curriculares, en su afán de recuperar el avance regular cursan entre seis y siete asignaturas. Es así que al comenzar las evaluaciones parciales y no poder afrontar los compromisos, empiezan a abandonar aquellas asignaturas en las que se ven con menores chances de aprobar o que menos les traba el avance regular.

En relación a los recursantes, los docentes consideran que su inasistencia a clase obedece a una decisión errada. Estos estudiantes creen que al disponer de los materiales didácticos y apuntes de clase ya no tienen necesidad de asistir regularmente.

9) Describa la asistencia de los alumnos a los horarios de consultas.

En líneas generales los docentes coinciden en que hay de parte de los estudiantes un escaso aprovechamiento de los horarios de consulta. Asimismo observan una concurrencia más masiva cuando se aproximan las evaluaciones parciales o finales.

Los docentes interpretan que la asistencia a las instancias de consultas se corresponde con la manera en que los estudiantes suelen organizar sus estudios, intensificando el mismo en las proximidades de las evaluaciones, lo que da lugar a la inasistencia a clase y no así a los horarios de consulta.

Un docente en particular señala que las consultas que se fijan a continuación de la finalización de las clases de los estudiantes, suelen ser las más concurridas.

10) Señale debilidades de los alumnos en relación a sus conocimientos previos.

Los docentes en sus respuestas ponen igual énfasis en los contenidos conceptuales como en la carencia de ciertas habilidades que observan en los estudiantes.

Los docentes señalan:

- Dificultades para relacionar y/o integrar conocimientos.
- Dificultades en la comprensión de textos, en el manejo algebraico, en la ubicación espacial, en losrazonamientos lógicos (no distinguen una condición necesaria de una condición suficiente), en la demostración de proposiciones, en la expresión de resultados en unidades coherentes.
- Dificultades en el aprovechamiento de la actividad aúlica, en la gestión del tiempo de estudio, en la toma de apuntes, en el lenguaje cotidiano y disciplinar, en la comunicación ya sea oral o escrita.

Un docente relaciona algunas de las dificultades con la manera en que los estudiantes organizan sus estudios y se pregunta: ¿estudian para aprender o para aprobar?

Los docentes tanto de Cálculo I como de Álgebra y Geometría Analítica señalan dificultades para trabajar con la circunferencia trigonométrica, para encontrar identidades pitagóricas, reconocer el signo de funciones trigonométricas y relacionar ángulos en diferentes sistemas de medición.

Otro sostiene que, en algunos casos, los alumnos llegan a Cálculo II sin poder hacer una interpretación cabal del concepto de derivada o carecen de un manejo fluido en las representaciones gráficas de funciones elementales. En relación a los alumnos de Cálculo III, asignatura correspondiente al tercer cuatrimestre de la carrera, señala: escaso manejo para demostrar propiedades, desconocimiento de la fórmula de Taylor, desarraigo del recurso de la aproximación lineal para la estimación de valores, como asimismo de la verificación dimensional de resultados.

Los docentes de Métodos Numéricos, asignatura correspondiente al tercer año, cuando los alumnos transitan del ciclo básico al ciclo profesional, señalan debilidades en el desarrollo de Taylor de una función. Por otra parte observan que, los estudiantes no tienen internalizado el cálculo rápido, tanto de un determinante como de los autovalores de una matriz triangular de orden dos. A su vez afirman que, en una misma proporción los alumnos pueden o no definir la derivada de una función en un punto. En cambio prevalece en ellos el manejo de la operatoria. También dicen que los estudiantes quedan desconcertados cuando se les pide que escriban una ecuación diferencial de primer orden con valor inicial.

11) Describa los materiales didácticos a disposición del alumno. ¿Considera que los mismos son suficientes y adecuados? ¿Considera necesario la renovación de los materiales didácticos o la elaboración de materiales complementarios a los existentes? Fundamente brevemente su respuesta

En Álgebra y Geometría Analítica se utiliza un material elaborado por docentes y ex docentes de la cátedra. Existen materiales que comprenden teoría y práctica para cada unidad a excepción de cónicas y estudio de la ecuación de segundo grado. Esta unidad se aborda siguiendo los lineamientos de un texto. Los alumnos cuentan con prácticas alternativas, ejemplos resueltos y respuestas a todos los ejercicios. Se considera pertinente una renovación parcial y continua. Un docente en particular considera que dichos materiales no responden a las tendencias actuales y apunta a la elaboración de materiales que fomenten la autogestión del aprendizaje.

La rama de Cálculo utiliza como referencia el libro de Stewart. Algunos docentes lo consideran un material adecuado que en ocasiones es mal utilizado por cuanto los alumnos apelan al solucionario antes que abordar por su cuenta los ejercicios propuestos.

Hay un docente que declara utilizar prácticas propias y remitir a distintos autores. Asimismo considera que el libro de Stewart se ha constituido en un manual de procedimientos incuestionable, si bien piensa que es un muy buen libro entiende que está siendo mal utilizado por cuanto considera que la teoría es poco profunda y no da lugar a que el alumno comprenda sino que disponga de métodos para resolver cuestiones prácticas. Sin embargo destaca los problemas de aplicación que propone y que son propicios para el desarrollo de criterio en los estudiantes.

En cuanto a Álgebra Lineal se siguen los lineamientos del libro "Fundamentos del Álgebra Lineal" de Larson-Falvo. Los alumnos disponen de guías de estudio, de carácter teórico – práctico, basadas fundamentalmente en propuestas del libro. Estas guías buscan, además, salvar los errores tipográficos y de traducción que presenta el libro.

Los docentes consideran que la renovación periódica de los materiales redunda en beneficio de los procesos de enseñanza y aprendizaje.

Los docentes de Métodos Numéricos cuentan con un material de estudio variado disponible en una plataforma virtual que también es objeto de permanente cambio. Asimismo recomiendan generar las condiciones para que los estudiantes puedan realizar sus prácticas frente al dispositivo informático propio (notebook, netbook, tablet, etc.) como alternativa del uso del laboratorio de informática cuyo mantenimiento y disponibilidad ofrece dificultades.

5 Nuestras reflexiones

Según diferentes autores, Anijovich y Mora [2] entre otros, existen fundamentalmente dos modos de abordar la docencia universitaria: el modelo centrado en la enseñanza y el modelo centrado en el aprendizaje. En el primero de los modelos el énfasis está puesto en la transmisión de los conocimientos, el docente explica, lo que no significa que el conocimiento pueda interpretarse como construcción de significados con ayuda del docente. Se utiliza el examen como método de evaluación, que suele ser complementado con otros procedimientos. En el segundo modelo se entiende el conocimiento como una construcción social que debe elaborar el propio estudiante con ayuda del profesor y de los mismos compañeros. Se concibe a la enseñanza como un proceso interactivo que debe facilitar la construcción personal del conocimiento, y donde se aplican procedimientos de evaluación tanto diagnóstica como continua y formativa.

De acuerdo a lo manifestado por los docentes consideramos que, salvo excepciones, los mismos se ubican en un modelo intermedio o mixto. Si bien hacen referencia a clases expositivas, también ponen el acento en procesos interactivos con los estudiantes, quienes no se limitan a escuchar y a copiar. Se promueven el diálogo y las preguntas como principal recurso para conocer sus concepciones y prevenir interpretaciones erróneas. También se implementan trabajos grupales a fin de favorecer los aprendizajes a partir de procesos interactivos.

En cuanto a la evaluación, predomina la idea de la constatación final de los aprendizajes por sobre su función pedagógica. Si bien se aplican elementos de evaluación formativa, a través de trabajos prácticos que suelen ser grupales y pueden incluir la resolución de algún problema, el énfasis aún está puesto en la reproducción de conocimientos teóricos-prácticos. Aunque los profesores consideran necesario que los estudiantes construyan nuevos significados durante el proceso de enseñanza, al final lo que más les importa es que hayan incorporado el conocimiento "objetivo" específico de una disciplina. En la evaluación de los aprendizajes subyace aún, como lo señala Sacristán [3], la concepción de instrumento de control, como asimismo la idea de comprobación de los aprendizajes conceptuales.

En relación a la pregunta referida a cuál es la mejor distribución horaria para la asignatura, si bien todas las respuestas están bien fundamentadas, no podemos dejar de suponer que se emiten opiniones atendiendo a intereses propios.

En cuanto al uso de las nuevas tecnologías las mismas constituyen fundamentalmente un medio de comunicación con los estudiantes o sitio para acceso a los materiales didácticos. En un caso se hace referencia al uso de las mismas para potenciar la interacción y el trabajo cooperativo.

El recurso más utilizado en los procesos de aprendizaje sigue estando en soporte de papel. El libro de texto y los apuntes constituyen aún el material didáctico predominante. En unos pocos casos apuestan al uso de otros medios, fundamentalmente aquellos relacionados con el tratamiento de la información y que son presentados en soportes técnicos o tecnológicos.

Si bien la pregunta *10)* de la encuesta apunta a conocer las debilidades de los estudiantes en relación a sus conocimientos previos, observamos que los docentes ponen el énfasis no solo en contenidos conceptuales sino también en la carencia de competencias que deberían ser desarrolladas en las escuelas secundarias y consolidadas en la instancia universitaria. Las mismas se refieren a habilidades comunicacionales, interpretación y producción de un texto, razonamiento lógico, integración de los conocimientos, etc. También se hace referencia a la falta de hábitos para el estudio y compromiso para el aprendizaje.

En cuanto a la falta de conocimientos previos encontramos aquellos que pueden relacionarse con la escuela media que no brinda los conocimientos necesarios para afrontar con éxito una carrera universitaria. Si bien en la FCEIA de la UNR se ofrecen cursos de ingreso a todas las carreras, los mismos no son de carácter restrictivo, solo buscan reforzar los conocimientos en áreas que resultan primordiales para la prosecución de las carreras que se dictan en la misma.

Existen dos etapas, la primera para estudiantes de la zona, que realizan el curso entre los meses de septiembre y diciembre, en simultáneo con la finalización de la escuela media, y una segunda etapa en el mes de febrero para quienes no aprobaron durante la primera etapa o provienen de poblados más alejados. Si bien los estudiantes valoran los cursos, por considerar que les permite repasar aquellos temas que tienen olvidados o abordar aquellos temas que debieron emprender en la escuela media y no lo han hecho, consideramos que esa instancia no alcanza, en muchos casos, para iniciar con éxito el cursado de las primeras asignaturas. Eso genera, como lo señalan en la encuesta los docentes, deserción al poco tiempo de iniciar el cursado o ante el fracaso en una primera evaluación.

Pero también se encuentran debilidades en temas fundamentales y propios de las asignaturas del plan de estudio. Sería deseable que todos los estudiantes al finalizar el Ciclo Básico pudiesen significar la derivada de una función en un punto, teniendo en cuenta la multiplicidad de problemas a los cuales responde, o aplicar la serie de Taylor para realizar cálculos aproximados. Sin embargo los docentes de los cursos más avanzados encuentran que no están debidamente arraigados temas tan relevantes en carreras de Ingeniería.

Consideramos que, cuando un conocimiento aparece independientemente de las situaciones que lo crearon y se presenta como una realidad dada, suele ser asumido por los estudiantes como un conocimiento que se limita a la competencia pragmática, pero no hay de su parte una aprehensión o interpretación inmediata que los haga subjetivamente significativo. Pensamos que es el caso de los estudiantes que cursan Métodos Numéricos cuando no tienen presente el cálculo tanto de los determinantes como de los autovalores de matrices triangulares. Pero también entendemos que la brecha entre los tiempos académicos y los tiempos administrativos conspira contra la consolidación de algunos conceptos y procedimientos fundamentales en carreras de Ingeniería.

6 A modo de cierre

Debemos plasmar acciones concretas y oportunas que conduzcan al mejoramiento continuo de un sistema en el cual encontramos aspectos para innovar.

¿Por qué no pensar en un curso preparatorio con una duración acorde a las necesidades de la mayoría de los estudiantes, donde se privilegie el razonamiento lógico, la apropiación de un lenguaje, el afianzamiento de conceptos a partir de la resolución de problemas?

¿Por qué no pensar en otros recursos didácticos como la grabación de clases magistrales a cargo de especialistas de reconocido prestigio, para que los estudiantes puedan adecuar el ritmo de visualización de los mismos en función de la comprensión que van logrando y de los tiempos con que cuentan?

¿Por qué no pensar una clase con no más de cincuenta estudiantes en un marco de aprendizaje dialógico, donde el conocimiento emerge de la realización de una actividad planificada, de la interacción de los estudiantes entre sí y con los docentes, y donde el error sea considerado fuente de aprendizaje y no motivo de penalización?

¿Por qué no concebir también a la evaluación integrada al proceso didáctico, que abarque al estudiante como sujeto que está aprendiendo?

¿Por qué no pensar en tutorías docentes que orienten a los estudiantes, en su inicio, para planificar sus estudios y luego en el desarrollo y finalización de su carrera?

¿Por qué no pensar en prácticas pedagógicas interdisciplinarias que consoliden un desempeño integral del docente, propiciando la renovación metodológica y didáctica de los saberes?

Pero también debemos lograr, en cuanto a la enseñanza de la matemática en carreras de ingeniería, romper con el divorcio que aún existe entre los contenidos matemáticos y el de las disciplinas en que estos contenidos se aplican.

Se observa en el Departamento de Matemática, de la Escuela de Formación Básica de la FCEIA incipientes esfuerzos por vincular a la matemática con otras áreas del conocimiento de la ingeniería, a través de la resolución de problemas que obligan a: traducir al lenguaje algebraico los datos del mismo, expresar en dicho lenguaje propiedades o relaciones, aplicar diferentes técnicas para obtener soluciones e interpretar las mismas a la luz del contexto en el que el problema fue planteado.

Consideramos que para avanzar en esta dirección es necesaria la elaboración de guías de aprendizaje que incorporen situaciones problemáticas significativas y contextualizadas. Para ello es importante contar en la planta docente del departamento, con una mayor cantidad de egresados de carreras de ingeniería que se comprometan con la tarea docente. Entendemos que un trabajo compartido entre docentes de formaciones distintas (profesores, licenciados, doctores, ingenieros, etc.) posibilitaría alcanzar las metas proclamadas en el nuevo plan de estudio.

Creemos que podemos generar mejores acciones, y cuando lo logremos encontraremos más satisfacción en nuestro quehacer docente.

Agradecimientos. Los autores pertenecen al proyecto Secyt-UNR *1ING500 Unidades didácticas basadas en la enseñanza para la comprensión y la ingeniería didáctica.*

Referencias

1. Gadamer, H.G. (1984). Verdad y método. Salamanca España: Sigueme
2. Anijovich, R. y Mora, S. (2009). Estrategias de enseñanza. Otra mirada al quehacer en el aula. Buenos Aires: Aique Educación
3. Sacristán, Gimeno J. (1998). Comprender y transformar la enseñanza. España. Editorial Morata.

Volver al Índice

¿Qué Competencias Aporta Análisis Matemático 2 al Graduado de Ingeniería?

Sara A. Alaniz, Gladys C. May, Marcela N. Baracco, Roberto J. Simunovich
Facultad de Ingeniería y Ciencias Agropecuarias. Universidad Nacional de San Luís
Av. 25 de Mayo 384 - Villa Mercedes (San Luis)-CP5730
{saalaniz, gcmay, mnbaracco, simunovichirj}@unsl.edu.ar

Resumen. Este trabajo pretende mostrar una introspección de nuestras propias prácticas docentes a modo de clarificar en qué medida aportamos al desarrollo de competencias que les sean útiles a nuestros alumnos de Ingeniería tanto para la carrera como para su formación profesional. En su publicación "Competencias y Perfil del Ingeniero Iberoamericano, Formación de Profesores y Desarrollo Tecnológico e Innovación", de abril del 2016 la Asociación Iberoamericana de Instituciones de Enseñanza de la Ingeniería (ASIBEI) dentro de su plan estratégico(2013 – 2020) establece pautas para el perfil de ingeniero y las competencias del egresado, en base a estos lineamientos se toma el QUE QUEREMOS con la intensión de avanzar en COMO LO LOGRAMOS, este trabajo pretende establecer QUE APORTAMOS hoy desde Análisis Matemático 2.

Palabras Clave: Matemática, Competencias**,** Estrategias de enseñanza

1 Introducción

Como docentes de las Carreras de Ingeniería, sabemos que Matemática es una herramienta importante, es por eso que nuestra preocupación por mejorar nuestra enseñanza de modo que nos permita obtener una mejor comprensión por parte de los alumnos de los temas desarrollados en la asignatura para una posterior aplicación; por lo tanto hacemos cada año un análisis de nuestras propias prácticas docentes.

Somos integrantes de un proyecto de investigación sobre la práctica docente y además trabajamos en la asignatura Análisis Matemático 2 correspondiente a segundo año de las carreras de Ingeniería de la Facultad de Ingeniería y Ciencias Agropecuarias. Los alumnos que la cursan, tienen aprobada Análisis Matemático 1 y cursadas Algebra y Geometría Analítica y Física 1.

La asignatura Análisis Matemático 2 tiene un crédito horario de ocho horas semanales, repartidas en dos días con clases teórico-práctico de cuatro horas, el equipo de cátedra está integrado por tres docentes, para un totalidad de aproximadamente 120 alumnos.

Se utiliza la plataforma Claroline para subir el programa de la materia, prácticos, teorías, resultados de revisiones conceptuales y resultados de parciales.

Debido a que es muy extenso el programa de la asignatura, se nos dificulta desarrollar y evaluar todos los contenidos durante la cursada. Es por eso que, hemos optado por brindarles una guía de estudio teórico práctica sobre contenidos de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, la cual no es requisito para regularizar, pero deben estudiar previo al examen final. Las evaluaciones de dichos contenidos se realizan en dos instancias una teórica y otra práctica.

Este trabajo consiste de un análisis sobre que competencias desarrollamos en nuestros alumnos, a través de los contenidos de Análisis Matemático 2. Nos preguntamos qué requisitos les solicitamos a los alumnos para que aprueben la materia.

2 Marco teórico

Según el Consejo Federal de Decanos de Ingeniería (CONFEDI), en la actualidad es una tendencia internacional en el diseño de los planes de estudio de ingeniería el uso de las competencias como horizonte formativo. Se considera que trabajar por competencias podría dar un marco que facilite una selección y un tratamiento más ajustado y eficaces de los contenidos impartidos.

Hay consenso en cuanto que el ingeniero no solo debe "saber", sino también "saber hacer". El saber hacer no surge de adquisición del conocimiento, sino que es el resultado de la puesta en funciones de una compleja estructura de conocimientos, habilidades, destrezas, etc., que requiere ser reconocida expresamente en el proceso de aprendizaje para que la propuesta pedagógica incluya las actividades que permitan su desarrollo.

El concepto de competencia es amplio, según diferentes autores. Pero en forma generalizada se entiende por competencia el conjunto de conocimientos, habilidades, destrezas y actitudes que se integran a las características personales como capacidades, rasgos, motivos, valores y experiencias personales.

Dichas características se expresan o enuncian como acciones que se pueden evidenciar y por lo tanto están sujetas a un proceso de validación para verificar su cumplimiento. Las competencias hacen referencia al individuo como un ser integral contemplando de este modo cuatro grandes esferas del desarrollo humano: el ser, el convivir, el saber y el hacer."

Las competencias en la educación pueden definirse como *"…competencias, genéricas y específicas, entendidas como el conjunto de conocimientos, capacidades, destrezas, aptitudes y actitudes más adecuados para alcanzar unos objetivos sociales de largo recorrido."*(Suárez Arroyo, B 2005, pp. 6).

Otra forma de entender las Competencias es movilizando el conjunto de saberes: *el saber (disponer de un conjunto de conocimientos para realizar una tarea), el saber hacer (poseer habilidades para aplicar y utilizar los conocimientos), y el saber estar o saber ser (referido a las actitudes y valores) (Delors, 1996).*

Tobón (2004) define a las competencias, como procesos complejos de desempeño con idoneidad en determinados contextos, integrando diferentes saberes (saber ser, saber hacer, saber conocer y saber convivir).

Jure, I. y Solari, A. (comp.). Cap 2. pp 25. (2006), señalan que *"Las competencias se definen como las complejas capacidades integradas en diversos grados que la escuela debe formar en los individuos para que puedan desempeñarse como sujetos responsables en diferentes situaciones y contextos de la vida humana, social y personal, sabiendo ver, hacer, actuar y disfrutar convenientemente, evaluando alternativas, eligiendo las estrategias adecuadas, y haciéndose cargo de las decisiones tomadas" (Cullen, 1996). Fourez G., 1998 distingue los saberes (conocimientos) de los saber-ser y saber-hacer (competencias), aun cuando toda competencia descansa sobre saberes y todo saber desemboca en posibilidades de acción.*

Las competencias son un saber hacer en contexto, es decir el conjunto de acciones que un estudiante realiza en un contexto particular y que cumple con las exigencias específicas del mismo. (Solari y Juri, *2006).*

Según Suarez y Arroyo (2005) *"Todo parece indicar que en una visión moderna de las profesiones y de la educación, la formación en competencias en su versión más trascendentes a lo largo de la vida, la experiencia en el trabajo y la madurez personal y profesional deberían ser los factores que faciliten a los titulados de hoy crecer y progresar en unas competencias profesionales cambiantes día a día y cada vez más complejas; esta es una cuestión fundamental para construir una sociedad de ciudadanos más justa dónde el bienestar sea un elemento clave en el desarrollo de la vida cotidiana"* (pp.4).

En la formación de profesionales es necesario realizar cambios metodológicos, didácticos y de actividades que promuevan la cooperación y estimulen el pensar del alumno, en la medida que se construyen los conocimientos junto al docente, apostando por un estudiante que aprenda a aprender y emprender, con una actitud crítica y capacidad de responder y actuar ante el cambio.

Lo importante es estimular en el alumno un sentido crítico sobre la base de un conocimiento sólido, que le motive y le capacite para implicarse activamente en su vida profesional

Todo esto para realizar actividades y/o resolver problemas con sentido de reto, motivación flexibilidad, creatividad, comprensión y emprendimiento, dentro de una perspectiva de procesamiento metacognitivo, mejoramiento continuo y compromiso ético. (Documento Curricular CGCB)

"Nuevos paradigmas, como la sociedad del conocimiento, la globalización, las redes, y la actual economía conforman un escenario particular que requiere de nuevas formas de intercambio y de comunicación. El mundo cambió y sigue cambiando, y la sociedad actual exige más a la Universidad; no sólo exige la formación profesional (el "saber"), sino también, la dotación de competencias profesionales a sus egresados (el "saber hacer"). Esto se ve claramente y es asumido así por las universidades a partir de la Declaración de Bolonia de 1999 y la declaración de "la educación como un servicio público" de la Convención de Salamanca de 2001

El antiguo paradigma de formación de profesionales basado en la enseñanza como simple esquema de transferencia de conocimientos que el alumno oportunamente sabrá abstraer, articular y aplicar eficazmente, ha ido perdiendo espacio en la realidad actual. La visión actual de la sociedad propone ver al egresado universitario como un ser competente (con un conjunto de competencias), capaz de ejercer su profesión en la realidad que lo rodea".

Las 10 Competencias Genéricas de Egreso del Ingeniero Iberoamericano adoptadas por ASIBEI como "faro" para las instituciones de los países integrantes son las siguientes:

Competencias tecnológicas

1. Identificar, formular y resolver problemas de ingeniería.
2. Concebir, diseñar y desarrollar proyectos de ingeniería.
3. Gestionar, planificar, ejecutar y controlar proyectos de ingeniería.

4. Utilizar de manera efectiva las técnicas y herramientas de aplicación en la ingeniería.
5. Contribuir a la generación de desarrollos tecnológicos y/o innovaciones tecnológicas.

Competencias sociales, políticas y actitudinales

6. Desempeñarse de manera efectiva en equipos de trabajo.
7. Comunicarse con efectividad
8. Actuar con ética, responsabilidad profesional y compromiso social, considerando el impacto económico, social y ambiental de su actividad en el contexto local y global
9. Aprender en forma continua y autónoma
10. Actuar con espíritu emprendedor

Tabla 1. Las competencias y los descriptores sobre los que reflexionaremos.

Competencias	Descriptor/es
Pensamiento analítico	- Enumera ordenadamente los elementos contenidos en un texto
	- Integra distintos elementos de la asignatura en su análisis.
	- Toma conciencia de la complejidad y afronta su análisis.
Pensamiento sistémico	- Demuestra capacida para transferir los conocimientos teóricos o del aula en situaciones prácticas.
	- Integra elementos de distintas asignaturas o áreas en su análisis de la realidad.
	- Recurre a diversas perspectivas, fuentes, dimensiones, etc.
Pensamiento critico	- Fundamenta y argumenta los juicios que emite.
Pensamiento creativo	- Usa la información pero siempre dentro de la perspectiva dada
	- Relaciona conceptos e ideas de manera original
Pensamiento analógico	- Relaciona ejemplos e ideas presentes en un modelo.
	- Recurre a la analogía para crear explicaciones y hallar soluciones.
	- Identifica lo que es y no es un problema y toma la decisión de abordarlo.
Resolución de problemas	- Lee y/o escucha activamente. Hace preguntas para definir el problema planteado.
	- Presenta diferentes opciones alternativas de solución ante un mismo problema y evalúa sus posibles riesgos y ventajas.
Pensamiento reflexivo	- Utiliza las habilidades básicas de pensamiento para la reflexión metacognitiva
	- Pone en práctica de forma disciplinada los enfoques, métodos y experiencias que propone el profesor.
Orientación del aprendizaje	- Pregunta para aprender y se interesa por aclarar dudas.
	- Aplica los contenidos aprendidos en nuevas situaciones.
	- Muestra iniciativa en la búsqueda de información.
	- Formula sus objetivos de aprendizaje repitiendo los propuestos por el profesor.
Gestión del tiempo	- Administra el tiempo
	- Interviene con amplitud cuando es interpelado.
Comunicación verbal	- Expone ideas fundamentadas.
	- Las presentaciones están estructuradas, cumpliendo con los requisitos exigidos.
	- Sabe responder a las preguntas que se le formulan con acierto.
Comunicación escrita	- Comunica correcta y claramente por escrito.

3 Metodología

Nuestro trabajo es de tipo exploratorio donde se analizan las posibles competencias que puede aportar la asignatura Análisis Matemático 2 a los futuros ingenieros.

Se analizan las siguientes competencias: del pensamiento analítico, pensamiento sistémico, pensamiento crítico, pensamiento creativo, pensamiento analógico, resolución de problemas, gestión del tiempo, orientación del aprendizaje, comunicación oral y escrita.

4 Desarrollo

4.1 Estrategias

Se dictan clases teóricas al inicio de cada tema, donde el docente destaca el orden de importancia de cada contenido. Los recursos didácticos que se utilizan son pizarrón y PowerPoint.

Las clases prácticas se desarrollan con la activa participación de los alumnos. Los recursos utilizados son guías de teoría y de práctico (contiene actividades rutinarias, de comprensión y situaciones problemáticas) y libros, software MatLab, etc.

Las evaluaciones parciales son en general teóricas prácticas que involucre situaciones problemáticas y actividades de comprensión. El examen final es oral y en el mismo se desarrollarán los conceptos teóricos y sus relaciones.

El programa de la asignatura define una estrategia de enseñanza y aprendizaje con la intención de que los estudiantes logren las competencias genéricas y específicas definidas para la materia. Y además, se explicitan los métodos y técnicas de enseñanza para cada contenido (exposición, estudio de documentos, estudio de casos, resolución de problemas, dinámicas de grupos, debates, presentaciones formales, etc.).

También se incluye la asignación de tiempos previstos para las actividades del estudiante, tanto dentro como fuera del aula.

4.2 Análisis de las competencias que se desarrollan

4.2.1 Competencia pensamiento analítico:

Los alumnos que cursan la asignatura Análisis Matemático 2, corresponden a segundo año de las carreras de Ingeniería, es decir, que ya tienen el hábito de estudiar. En la clase, los docentes destacan los temas importantes y se les entregan guías teórica y prácticas. Por lo tanto, *los alumnos enumeran ordenadamente los elementos contenidos en un texto. Identifican y enumeran todos los elementos con los criterios preestablecidos por los docentes*. En los exámenes parciales y finales se visualiza el alcance de estas competencias.

Uno de los contenidos de Análisis Matemático 2 son funciones escalares y vectoriales de dos o más variables, por lo tanto un alumno *que aprueba la materia relaciona dos o más variables cuantitativas. Interpreta el significado.*

4.2.2 Competencia pensamiento sistémico

En clase práctica se seleccionan actividades para desarrollar en el aula, en algunos casos se analiza una actividad en particular para que los alumnos tengan no sólo un "modelo" sino que mientras se da la explicación, se indaga al grupo a modo de constatar cuáles son los conocimientos previos (en caso de ser necesario, se refuerzan) y lograr que entre todos quede planteada la actividad o situación problemática.

En clases de consulta, generalmente, los alumnos preguntan sobre aquellas actividades que no fueron desarrolladas en clase. Puede observarse que algunos alumnos logran resolverlas en forma individual. Durante estas consultas es donde tenemos una idea acabada de cuán capaces son de resolver una situación problemática y en qué medida pueden relacionar conceptos

Teniendo en cuenta la disciplina a la que pertenece la asignatura, para comprender los contenidos que se enseñan, el alumno debe tener claro los conceptos previos. Esto se evalúa tanto en revisiones conceptuales, parciales y en el examen final de la asignatura. Para aprobar el alumno debe:

- Establece relaciones entre contenidos desarrollados en la materia Ejemplo: Integral de Línea y de Superficie y los de geometría de una curva alabeada. También los contenidos de la asignatura y los aprobados en Análisis Matemático 1 y Algebra y Geometría Analítica. Ejemplo: el concepto de deriva de una variable y derivada parcial, integral simple y las integrales dobles y triples. Para comprender los dominios de integración en el cálculo de integrales dobles y triples es necesario tener en claro las gráficas y ecuaciones de las cónicas y superficies cuádricas.
- Integrar distintos conceptos de la asignatura en su análisis. *Ejemplo: Para* analizar e interpretar los conceptos desarrollados en Integral de línea y de superficie debe relacionar las características de los campos vectoriales, integrales dobles y triples. .
- *Realiza aplicaciones prácticas de los contenidos, lo que demuestra capacidad para transferir los conocimientos teóricos.*
- *Descubre la complejidad sin bloquearse, aunque manifieste inquietud o incomodidad. Toma conciencia de la complejidad y afronta su análisis.*
- *Recurre a diversas perspectivas, fuentes, para analizar situaciones problemáticas que involucra conceptos físicos.*

Estos indicadores pueden observarse en la corrección de parciales y en clases (teniendo en cuenta las preguntas previas al resolver actividades en el aula, la manera en que relacionan o no conceptos previos.

4.2.3 Competencia pensamiento critico

En las evaluaciones, frecuentemente, los alumnos deben justificar si dadas afirmaciones éstas son verdaderas o falsas y para justificarlas debe utilizar los conceptos desarrollados en la asignatura. Es decir, *fundamenta y argumenta los juicios que emite.*

4.2.4 Competencia pensamiento creativo

Los alumnos de la asignatura *usan la información pero siempre dentro de la perspectiva* que le imponemos los docentes en cada contenido, para generar nuevas ideas.

4.2.5 Competencia pensamiento analógico

Los alumnos asocian ideas diferentes para captar el sentido de un caso o problema. *Utilizan analogías de manera intuitiva para asociar ideas y explicarlas*, con problemas trabajados en física. En las evaluaciones se le solicitan ejemplos para saber si el alumno comprende los conceptos.

También sucede que los alumnos solicitan ejemplos sobre contenidos matemáticos (ya vistos) o ejemplos de física, para comprender los contenidos.

4.2.6 Competencia resolución de problemas

Cada guía práctica de la asignatura contiene actividades rutinarias, de comprensión y situaciones problemáticas.

Las evaluaciones parciales consisten de actividades de comprensión de los contenidos y situaciones problemáticas sencillas, donde deben aplicar los conceptos desarrollados en las clases.

- *Identifica lo que es y no es un problema y toma la decisión de abordarlo, que tiene ciertas condiciones, datos y comprende situaciones, y los resuelve.*
- *En las clases hace preguntas adecuadas para definir un problema planteado***.**
- *Se lo orienta respecto a los datos que le brinda el problema,* Ejemplo: en Ecuaciones Diferenciales Ordinarias. Recoge la información que necesita para resolver los problemas en base a datos y no sólo a opiniones subjetivas y sigue un método lógico de análisis de la información.
- *Las situaciones problemáticas, cada alumno las abordan desde distintos puntos de vista. Relacionándolo con conceptos previos*.

4.2.7 Competencia pensamiento reflexivo

Cuando los alumnos estudian ecuaciones diferenciales ordinarias, deben reconocer algunos conceptos tales como definición de derivadas, utilizar simplificación de expresiones algebraicas y trabajar con propiedades de logaritmos, no siempre logran identificar cuáles son los pasos que deben realizar para completar la guía teórica-practica de ese contenido. Los docentes visualizamos que ha realizado un análisis y reflexión, en la evaluación práctica y en el examen final, cuando se indaga al respecto.

4.2.8 Competencia orientación al aprendizaje

Se toman semanalmente revisiones conceptuales a fin de motivar un estudio diario y constante, pretendiendo guiar y acompañar al alumno en su aprendizaje, permitiendo la toma de conciencia de los procesos realizados, de los errores y de su forma de aprender, que le será de utilidad y experiencia al momento de rendir las evaluaciones parciales. Coincidiendo con Litwin(1998), que la evaluación es una instancia de aprendizaje.

- En las evaluaciones teóricas- prácticas y en los exámenes finales se evalúa a los alumnos en los contenidos importantes de la materia. *Si el alumno ha incorporado los aprendizajes propuestos por los docentes y muestran una actitud activa*, e*l alumno está poniendo en práctica los enfoques, métodos y experiencias que se proponen en la asignatura.*
- Previo al examen o los parciales, en las clases teóricas, prácticas y consultas. El alumno pregunta para aprender y se interesa por aclarar dudas y comprender los contenidos. *Muestra iniciativa en la búsqueda de información,* para ampliar o aclarar dudas, miran videos explicativos o bajan libros digitales, es decir algunos alumnos *amplían la información más allá de las referencias mínimas obligadas.*
- En algunas actividades problemáticas sencillas o cuando estudia temas no desarrollado en las clases pero si evaluados. *Comprende los elementos que componen la disciplina*. *Está aplicando los contenidos aprendidos en nuevas situaciones.*
- Cuando aprueba el examen final de la asignatura, relaciona los conocimientos de la asignatura y es capaz de ver el conjunto.

4.2.9 Competencia gestión del tiempo

Las fechas de las evaluaciones las establecemos los docentes con acuerdo de los alumnos en el cuatrimestre.
El cronograma de dictado de la materia, si bien lo elaboran los docentes, se modifica o no de acuerdo al ritmo de trabajo de los alumnos. El tiempo asignado a las evaluaciones parciales es un tiempo acotado.

4.2.10 Competencia comunicación verbal

En clases de consulta se les hace preguntas con el fin de visar lo aprehendido, los fundamentos utilizados por el alumno ante una situación problemática, modificando a veces el enunciado, a fin de poder indagar sobre la construcción del conocimiento. En los exámenes finales, cada alumno para aprobar debe responder preguntas y desarrollar los contenidos en forma oral, logrando lo siguiente:

- Se expresa de manera consistente conceptualmente y con fluidez.
- Interviene con amplitud cuando es interpelado por los docentes
- Expone ideas acertadas, fundamentadas en temas importantes de la asignatura
- Se expresa con cierta tranquilidad, se controla suficientemente sus nervios para expresarse en el examen final.

4.2.11 Competencia comunicación escrita

Las revisiones conceptuales y los parciales, se evalúan en forma escrita, para aprobar cada alumno debe desarrollar actividades de comprensión y resolver situaciones problemáticas. Usa correctamente el lenguaje técnico propios de la materia.

5 Conclusiones

De nuestro análisis podemos advertir que, si bien no enseñamos por competencias se logra que el alumno desarrolle o profundice algunas de ellas.

a) El alumno al aprobar la materia ha desarrollado o profundizado las competencias:

- *Pensamiento Analítico*, debido a que sabe cuál es la jerarquía de contenidos de cada unidad del programa de la asignatura, en cuanto a importancia.
- *Pensamiento Sistémico* relaciona contenidos de las asignaturas previas con los de Análisis Matemático 2, como así también los contenidos propios de la asignatura. Transfiere en un porcentaje de satisfactorio de los conceptos para resolver situaciones sencillas planteadas. Recurre a otras fuentes bibliográficas distintas de las brindadas en la cátedra.
- *Pensamiento Crítico,* fundamenta y argumenta para responder sobre un determinado contenido de la materia.
- *Pensamiento Analógico,* utilizan analogías de manera intuitiva para asociar ideas y explicarlas, con problemas trabajados en las materias previas a Análisis Matemático 2.
- *Resolución de Problema,* los aborda desde distintos puntos de vista. Relacionándolo con conceptos previos.
- *Pensamiento Reflexivo,* para entender los conceptos debió analizar y reflexionar *para* interpretar un concepto importante de la asignatura.
- *Orientación al Aprendizaje*, ha incorporado los aprendizajes propuestos por los docentes y muestran una actitud activa. El alumno está poniendo en práctica los enfoques, métodos y experiencias que se proponen en la asignatura.
- *Comunicación verbal,* se expresa de manera consistente conceptualmente y con fluidez, manejando el lenguaje técnico.
- *Comunicación escrita,* desarrolla actividades de comprensión y resuelve situaciones problemáticas, utilizando satisfactoriamente el lenguaje técnico propios de la materia.

b) Si bien, en los trabajos prácticos los alumnos trabajan en grupos (a lo sumo cuatro alumnos por grupo), no hemos realizado un seguimiento en cuanto a la modalidad de trabajo.

c) Los docentes no solo, debemos contar con una sólida formación disciplinar, sino que debemos ser capaces de diseñar e implementar propuestas pedagógicas en el que se desarrollen los contenidos y se aporte a las competencias necesarias para que los alumnos comprendan las asignaturas del ciclo superior y que logre desarrollar las competencias requeridas para el egresado.

6 Propuestas de mejoras

Teniendo en cuenta las condiciones actuales de relación docente alumno, formación docente, infraestructura y equipamiento, en el próximo dictado de la asignatura se propone trabajar en los siguientes aspectos para profundizar o alcanzar nuevas competencias:

- Incorporar videos seleccionados por los docentes que le contribuyan al alumno para aclarar determinados contenidos.
- Seleccionarles página web de contenidos que se desarrollen en la materia.
- Establecer tiempos más acotados para las revisiones de conceptos y en las evaluaciones, de modo que se habitué a administrar su tiempo.
- Incorporar en los trabajos prácticos más cantidad de actividades que le ayuden a tomar decisiones.
- Incluir autoevaluaciones en guías de trabajos prácticos que se resuelvan previas al parcial, de modo que les permita ser menos dependientes de las consultas.
- Incluir actividades de trabajo en equipo y realizar un seguimiento.

Referencias

1. Delors, J. (Coord.) (1996). *La educación encierra un tesoro*. Informe a la UNESCO de la Comisión Internacional sobre la educación para el siglo XXI. Madrid, España: Santillana. Ediciones UNESCO.
2. *Documento Curricular Ciclo General de Conocimientos Básicos en Carreras de Ingeniería CGCB*. Red de Facultades de Ingeniería UNSL, UNSJ, UNC;UNLP, UNP, Año 2009.
3. Documento plan estratégico ASIBEI. (2016). *Competencia y Perfil del Ingeniero Iberoamericano, Formación de Profesores Desarrollo Tecnológico e Innovación.*
4. Litwin, E. (2008). *El oficio de Enseñar. Condiciones y Contextos* (1ª ed.) Buenos Aires: Editorial Paidos.
5. Jure, I. y Solari, A. (comp.)(2006). *El espacio de las competencias en la articulación curricular por disciplinas entre el nivel medio y universitario.* Universidad Nacional de Rio Cuarto. Rio Cuarto. Córdoba. Argentina
6. Suarez y Arroyo, B (2005). *La formación en competencias: un desafío para la educación superior del futuro*, Universidad Politécnica de Cataluña Barcelona.
7. Tobón, S (2004). *Formación basada en competencias. Pensamiento complejo, diseño curricular y didáctica*. Colombia. Esfera Editores.

Volver al Índice

Visualización Interactiva y Secuencia Didáctica de Fenómeno Runge y Polinomios de Tchebyshev en Cálculo Numérico

Oscar Enrique Ares
Facultad de Ingeniería y Ciencias Agropecuarias – Universidad Nacional de San Luis.
Campus Universitario, Ruta 148 –Villa Mercedes (San Luis)
oscareares@gmail.com, oeares@unsl.edu.ar

Resumen. En este trabajo se presenta una secuencia didáctica articulada conjuntamente con una herramienta didáctica computacional diseñada específicamente para la enseñanza del tema *fenómeno Runge y aproximación polinomial de Tchebyshev* para alumnos de tercer año de las carreras de Ingeniería Electrónica y Mecatrónica en la asignatura Calculo Numérico. La realización de la secuencia facilita la visualización y comprensión conceptual de inestabilidad del polinomio interpolante de Lagrange con una distribución equiespaciada, el fenómeno Runge y especialmente los fundamentos matemáticos y justificación de utilizar la distribución nodal de Tchebyshev para minimizar el error de aproximación polinomial y reducir el grado del polinomio interpolante. La utilización de la herramienta didáctica permite además, visualizar y comprobar experimentalmente en forma numérica el resultado principal de Tchebyshev, esto es, la norma infinito de cualquier polinomio mónico es menor o igual a la norma infinito de Tchebshev mónico en [-1,1], del mismo grado.

Palabras Clave: Fenómeno Runge, Polinomios Tchebyshev, Oscilación Polinomial, Visualización Tchebyshev.

1 Introducción

A partir de la detección de dificultades en la comprensión de unos de los resultados principales de los polinomios de Tchebyshev expresados en la siguiente formula:

$$\|P_n(x)\|_\infty \geq \|\overline{T_n}(x)\|_\infty = \frac{1}{2^{n-1}}, n \geq 1 \; para \; todo \; P_n(x) \; con \; x\epsilon \; [-1,1] \qquad \textbf{(1)}$$

y en la distribución nodal cuando se desplaza de [-1,1] a un intervalo [a,b], entre otras, se ha elaborado el diseño de una secuencia didáctica utilizando como estrategia la *visualización con computadora*, que permita la construcción de una *imagen conceptual* del fenómeno Runge y Polinomios de Tchebyshev. Uno de los componentes de la visualización es la utilización de una herramienta didáctica diseñada para llevar a cabo la secuencia didáctica.

2 Teorías didácticas y fundamentación matemática

Los basamentos teóricos de la ingeniería didáctica de este trabajo provienen principalmente de las investigaciones de Duval R., Hitt F., Vinner S., Zimmerman W, referidos a visualización matemática, conjuntamente con los de G. Brousseau acerca de la comprensión de los conceptos matemáticos.
Sobre la importancia de la visualización, Cunningham expresa que *es una hipótesis generalmente admitida que mejorando la educación visual en matemáticas aumenta la intuición y se proporciona al sujeto una mayor capacidad de entendimiento* [1].

La imagen conceptual es la *primera asociación mental no verbal que aparece en nuestra mente* cuando el nombre del concepto es evocado [2].

Puede tratarse de una impresión visual o una colección de impresiones o experiencias. si bien estas imágenes visuales, experiencias pueden luego traducirse en forma verbales, no es así como aparecen en primera instancia.

Para adquirir un concepto *no es suficiente con memorizar su definición*, debe poseerse una imagen conceptual del mismo.Es decir, que el aprendizaje, la comprensión, la aplicación y desarrollo de los conceptos matemáticos involucra la construcción de un cierto tipo de estructura mental: la imagen conceptual.

La teoría de situaciones didácticas introducidas por G. Brousseau, se basa en una hipótesis acerca de la construcción del significado de una noción .. . *una nocion aprendida no es utilizable sino en la medida en la que ella es relacionada con otras, ese relaciones constituyen su significación, su etiqueta, su método de activación. Empero, no es aprendida si no es utilizable y utilizada efectivamente, es decir, solo si es una solución de un* *problema. Tales problemas constituyen, junto con las restricciones a las que la noción responde, constituyen la significación de la noción* [3].

3 Interpolación polinomial

Un problema de interpolación polinomial se define de la siguiente manera: dados (n+1) puntos en el plano $P_0(x_0,y_0)$, $P_1(x_1,y_1)$,…, $P_n(x_n,y_n)$ con abscisas distintas entre si, hallar el polinomio de grado menor o igual que n, que satisfaga:

$$P_n(x_i) = y_i \; con \;\; i = 0,1,2,\dots n \qquad \textbf{(2)}$$

El polinomio interpolante es único. Hay distintas formas de hallar el interpolante: polinomio interpolante de Lagrange, diferencias dividas de Newton, serie de potencias, spline cúbico, entre otras.

Un problema típico en teoría de aproximación polinomial surge cuando se tiene explícitamente una función, pero se busca hallar una función más simple como un polinomio, que se pueda usar para determinar valores aproximados a la función dada. En este caso las condiciones a satisfacer toman la forma:

$$P_n(x_i) = f(x_i) \; con \;\; i = 0,1,2,\dots n \qquad \textbf{(3)}$$

Sin duda que se persigue la finalidad de ajustar el polinomio interpolante a la función de manera de minimizar el error es decir, la diferencia f(x) – P_n(x). Puede pensarse y frecuentemente ocurre así que al aumentar el número de nodos de interpolación, disminuye el error. La fórmula para estimar el error:

$$f(x) - P_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!}(x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_n) \qquad \textbf{(4)}$$

Donde $a < (\xi(x)) < b \;\; con \;\; x \in [a, b]$. $(\xi(x))$ no es una constante fija sino que depende del valor de x. Luego, la estrategia no es calcular exactamente el error, que es difícil sino imposible, sino realizar una estimación del error que significa *acotar el error*. Si M_n es el máximo valor absoluto para $f^{(n+1)}$ con x en [a,b], la expresión para estimar el error resulta, Burden,R (1985) [4]

$$|f(x) - P_n(x)| \le \frac{M_n}{(n+1)!}|(x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_n)| \qquad \textbf{(5)}$$

A partir de esta expresión se puede deducir, que no necesariamente aumentar el número de puntos y por lo tanto el grado del polinomio interpolante, disminuye el error, puesto que intervienen dos factores: $|(x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_n)|$ que se puede esperar que disminuya pero el factor $\frac{M_n}{(n+1)!}$ puede crecer rápidamente desmejorando la acotación.

Para mostrar la *inestabilidad* del polinomio interpolante de Lagrange cuando aumenta su grado, supóngase una distribución de nodos *uniformente espaciada* y observe en la gráfica, Fig. 1, como la aproximación empeora en los extremos del intervalo.

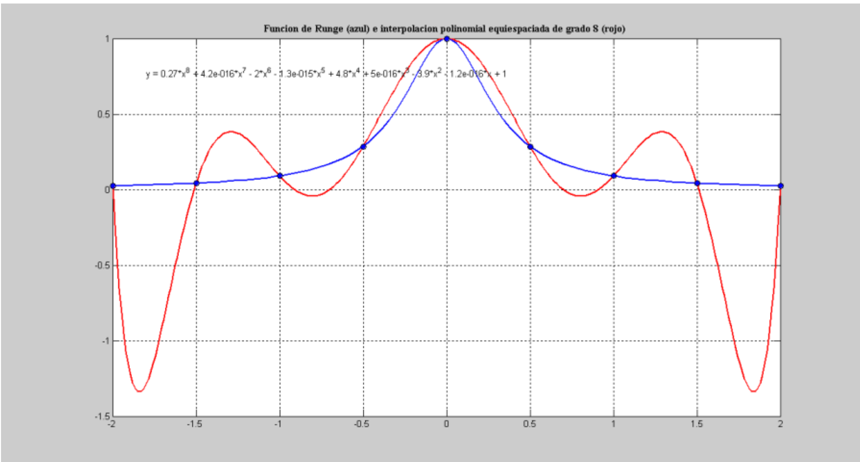


Fig.1. Oscilacion polinomial resultado de la interpolación sobre nodos equiespaciados

3.1 Polinomios de Tchebyshev, convergencia y reducción del orden del polinomio aproximante.

La definición del polinomio de Tchebyshev de orden n es:

$$T_n(x) = \cos[n \, arccos(x)] \quad x \in [-1,1] \;\; y \;\; n = 0,1,\dots \qquad \textbf{(6)}$$

Si se reemplaza

$$\theta = \arccos(x) \quad \textbf{(7)}$$

Entonces la expresión de T_n, resulta:

$$T_n(x) = \cos(n\theta) \;\; con\; \theta \in [0, \pi] \quad \textbf{(8)}$$

Por otra parte, cos (nθ) es una sumatoria de la forma:

$$\cos(n\theta) = \sum_{k=0}^{n} a_k (cos\theta)^k \quad \textbf{(9)}$$

Luego, la suma (T_{n-1} + T_{n+1}) da como resultado la *fórmula de recurrencia* que permite definir los polinomios de Tchebyshev de manera recursiva:

$$\begin{aligned} T_0(x) &= 1 \\ T_1(x) &= x \\ T_{n+1} &= 2xT_n(x) - T_{n-1}(x) \qquad n \geq 1 \end{aligned} \quad \textbf{(10)}$$

A modo de aplicación de la fórmula, se tiene:

$$T_2 = 2x^2 - 1 = 2\left(x^2 - \frac{1}{2}\right) = 2\overline{T_2}(x) = 2^1\overline{T_2}(x)$$

$$T_3 = 4x^3 - 3x = 4\left(x^3 - \frac{3}{4}x\right) = 2^2\left(x^3 - \frac{3}{4}x\right) = 2^2\overline{T_3}(x)$$

Inductivamente

$$T_n = 2^{n-1}\overline{T_n}(x) \quad \textbf{(11)}$$

Siendo $\overline{T_n}(x)$ un polinomio mónico de grado n, llamado precisamente *polinomio monico de Tchebyshev* de grado n.

3.2 La distribución nodal de Tchebyshev

La expresión $x_i = \cos\left(\frac{2i+1}{2n+2}\pi\right), i = 0,1, \ldots, n$ nos precisa la *distribución nodal de Tchebysh*ev, es decir, indica los nodos sobre los cuales se debe interpolar, para tener el mínimo error al realizar la aproximación polinomial de Lagrange. Obviamente son los ceros o raíces de los polinomios de Tchebyshev.

3.3 Optimización del factor $(x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_n)$

En la fórmula de error:

$$f(x) - P_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!}(x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_n) \quad \textbf{(12)}$$

El factor $(x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_n)$ puede ser *optimizado eligiendo de manera adecuada los nodos* $x_0, x_1, \ldots, x_n$. Este es el problema esencial y su solución conduce el proceso de optimización que lleva de manera natural, a un sistema de polinomios llamados polinomios de Tchebyshev.

El estudio de los polinomios de Tchebyshev conduce a los siguientes resultados:

a) Una distribución nodal óptima para *minimizar el error* del polinomio interpolante de Lagrange.
b) Una *reducción del grado* del polinomio aproximante sin perder prácticamente precisión.

3.4 El resultado principal

En cálculo numérico se definen normas vectoriales y matriciales. La norma más frecuentemente utilizada –puesto que sirve para computar el error absoluto aproximado de una sucesión aproximante- es la norma infinito definida:

$$\| f\|_\infty = max|f(x)| \;\; con \;\; x \in [-1,1] \quad \textbf{(13)}$$

Uno de los resultados notables se deriva de la norma infinito de los polinomios mónicos de Tchebyshev de grado n en comparación con cualquier polinomio mónico del mismo grado, en el intervalo [-1,1]. La norma infinito de los polinomios de Tchebyshev es *menor o igual* que la de cualquier polinomio mónico del mismo grado.

El resultado *principal* es: para *cualquier polinomio mónico de grado n*:

$$\|P_n(x)\|_\infty \geq \|\overline{T_n}(x)\|_\infty = \frac{1}{2^{n-1}}, n \geq 1 \quad \textbf{(14)}$$

Donde $\overline{T_n}(x)$ es el polinomio mónico de Tchebyshev de grado n.

$$\overline{T_n}(x) = (x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_n) \; con \; x_i = \cos\left(\frac{2i+1}{2n+2}\pi\right), i = 0,1, \ldots, n \quad \textbf{(15)}$$

En consecuencia, y utilizando el resultado principal, sustituimos el factor $(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n)$, que es el polinomio mónico de Tchebyshev en la fórmula del error, para realizar la acotación en norma infinito:

Luego, si P_n interpola f, usando nodos de Tchebyshev, tenemos

$$\|f(x)-P_n(x)\|_\infty \leq \frac{\|f^{n+1}\|_\infty}{(n+1)!}\frac{1}{2^n} \tag{16}$$

Por lo tanto se puede *asegurar la convergencia* si la familia de derivadas en *uniformemente acotada* (existe un M tal que $\forall n \in N \|f^{(n+1)}(x)\|_\infty \leq M$). Aunque se puede demostrar que se necesita menos para asegurar la convergencia.

4 Los problemas de comprensión sobre polinomios de Tchebyshev

Como resultado de evaluaciones escritas de los exámenes finales de Calculo Numérico en las carreras de ingeniería de FICA(UNSL), se concluye que no hay una imagen conceptual que estructure claramente las ideas sobre aproximación polinomial de Tchebyshev. Específicamente sobre el resultado principal:

$$\|P_n(x)\|_\infty \geq \|\overline{T_n}(x)\|_\infty = \frac{1}{2^{n-1}}, n \geq 1 \tag{17}$$

Falla la comprensión en los siguientes aspectos:

a) No se explicita que la desigualdad en términos matemáticos es válida *para todo polinomio mónico $P_n(x)$*.

b) Frecuentemente no hay respuesta sobre la representación gráfica o visualización de la fórmula, es decir, en términos didácticos, no existe registro gráfico, solo el algebraico.

c) Frecuentemente se responde acertadamente que la respuesta a la inestabilidad de la interpolación de Lagrange, es utilizar la distribución nodal de Tchebyshev, pero se desconoce completamente la *justificación teórica* o los fundamentos matemáticos que ayudarían a estructurar los conceptos.

d) Varias veces aparece escrita la formula sin norma infinito, conjuntamente con el desconocimiento de la expresión para$\|\overline{T_n}(x)\|_\infty$.

e) Se desconoce o falla la memoria comprensiva para describir con precisión el fenómeno de oscilación polinomial de Runge, pero también la función de Runge.

f) Cuando la interpolación de Tchebyshev se realiza en un intervalo [a,b] aparecen dificultades para trasladar los ceros de Tn+1(x) dados en el intervalo [-1,1] a cualquier intervalo [a,b]

5 Sobre el uso de la herramienta didáctica computacional

Previamente a encontrar las ecuaciones algebraicas de cada actividad, el alumno debe explorar mediante herramientas computacionales. En general, en esta secuencia didáctica la primera etapa de cada actividad está destinada a visualizar, para explorar, conjeturar y verificar mientras que la segunda es la resolución en registro algebraico. Pero también el alumno, realizara pequeños guiones de programación para completar la visualización.

Ubicado el alumno en el área de trabajo de Matlab y llamando al archivo.m 'fenomenorungeEMCI2017' se genera la Fig. 2, donde se hallan los botones que activaran las gráficas interactivas correspondientes a la secuencia didáctica. Adicionalmente, se activa una marquesina con la explicación del callback del botón, cada vez que se ubica el puntero del mouse sobre él, como se puede observar en la Fig. 2.

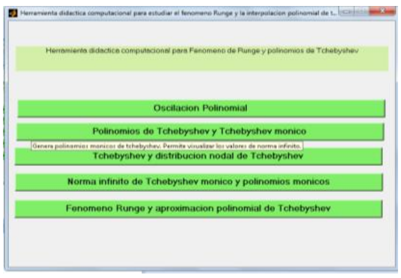


Fig. 2. Botonera de la herramienta didáctica computacional

Al pulsar el botón *oscilación polinomial* se abre una gráfica interactiva, que es el soporte donde se ingresa la función a estudiar, en este caso, $f(x) = 1/(1+10x^2)$ y el número de nodos a interpolar n=8, con una distribución equiespaciada. Picando sobre el botón solución se genera la gráfica de f(x) y el polinomio interpolante de Lagrange, Fig.3, donde se aprecia la *oscilación en los extremos* que aumenta el error de la aproximación. Pero si se aumenta el número de nodos, contrariamente a lo que puede pensarse, el fenómeno de inestabilidad del polinomio interpolante se pone más claramente de manifiesto, en este caso con n = 14, tal como puede observarse en la Fig. 4.

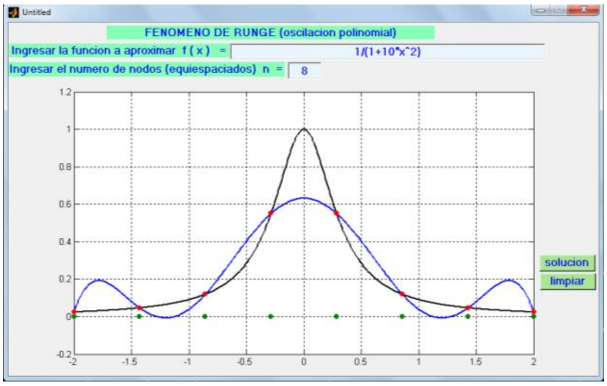


Fig. 3. Función de Runge. Aproximación polinomial con distribución uniforme con 8 nodos.

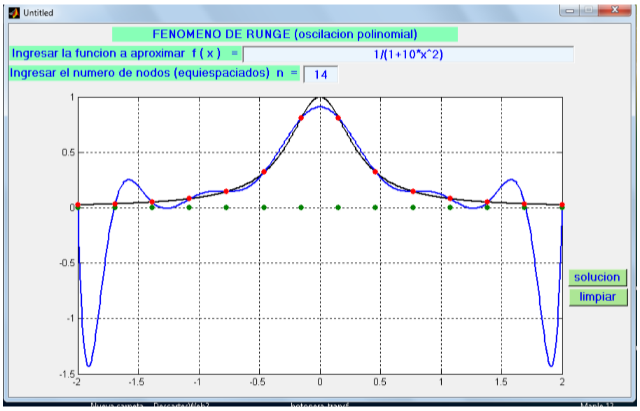


Fig. 4. Función de Runge. Aproximación polinomial con distribución uniforme con 14 nodos.

Pulsando sobre el botón *polinomios de Tchebyshev y Tchebyshev mónico* y cargando previamente el orden, n = 3, en este caso, se generan sucesivamente, como se aprecia en la Fig. 5. Por otra parte se ilustra la expresión algebraica de ambos polinomios y se marcan con pequeñas esferas los ceros. Esta figura se constituye en el registro gráfico de la fórmula:

$$T_n = 2^{n-1}\overline{T_n}(x) \quad \textbf{(18)}$$

siendo $\overline{T_n}(x)$ un polinomio mónico de grado n, llamado precisamente *polinomio mónico de Tchebyshev* de grado n. Al mismo tiempo sirve para verificar, donde ocurren los máximos, pero también la expresión algebraica de la norma infinito de $\overline{T_n}(x)$ $\|\overline{T_n}(x)\|_\infty = \frac{1}{2^{n-1}}$.

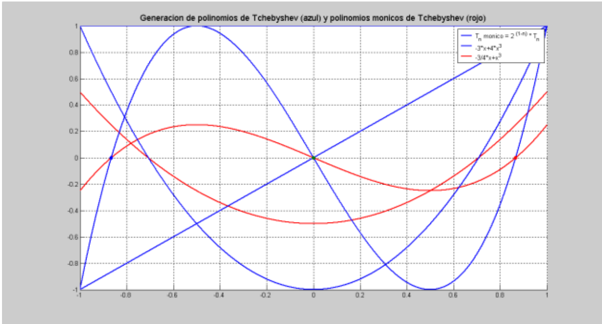


Fig. 5. Generacion de de Tchebyshev mónico y polinomios monicos con tres nodos

Pulsando sobre el botón *Chebyshev y distribución nodal de Tchebysev*, se generan las Fig. 6 y 7, que permiten apreciar finalmente el polinomio de orden, la expresión algebraica pero especialmente la distribución nodal de Tchebyshev.

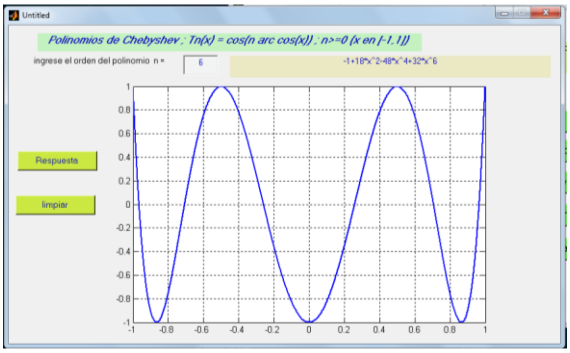


Fig. 6. Generación de polinomios de Tchebyshev y formula algebraica para seis nodos.

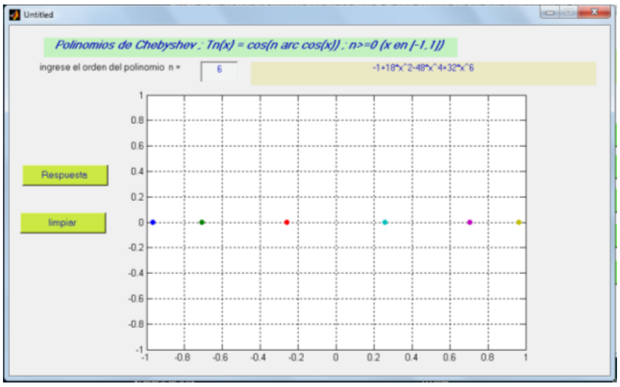


Fig. 7. Distribucion nodal de Tchebyshev para seis nodos.

La tarea exploratoria y verificatoria que se realiza con la herramienta didáctica computacional junto con las actividades correspondientes de la secuencia, constituyen los conocimientos previos, para ir hacia la comprensión conceptual de la propiedad principal dada por la fórmula:

$$\|P_n(x)\|_\infty \geq \|\overline{T_n}(x)\|_\infty = \frac{1}{2^{n-1}}, n \geq 1 \qquad \textbf{(19)}$$

Para hacer el estudio verificatorio en registro gráfico se debe pulsar sobre el botón *norma infinito de polinomios mónicos y tchebyshev mónico*. Se genera la siguiente Fig. 8, sobre la cual se deben ingresar los datos correspondientes al número de nodos -n-, y los n ceros, elegidos *arbitrariamente* en el intervalo [-1,1] correspondiente al polinomio mónico que se generará.

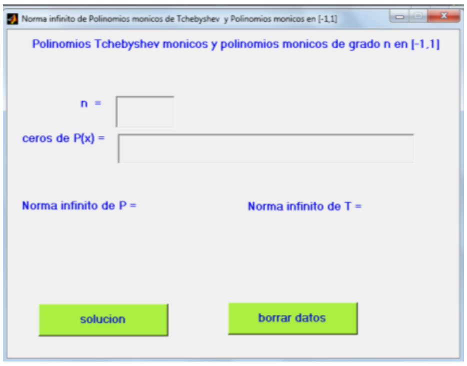


Fig. 8. Botonera de la herramienta didáctica computacional para el estudio norma infinito y visualización de Tchebyshev mónicos y polinomios mónicos en general

Al pulsar el botón *solución* se genera la Fig. 9 cuya grafica permitirá obtener una visualización y verificación del teorema antes enunciado, particularmente que la desigualdad de Tchebyshev en norma infinito vale para *todo* polinomio mónico de orden n. Con el objetivo de hacer más precisa la verificación en la Fig. 10 existe un *registro numérico* de las normas infinito del polinomio mónico de Tchebyshev de grado n, como del polinomio mónico arbitrario de grado n.

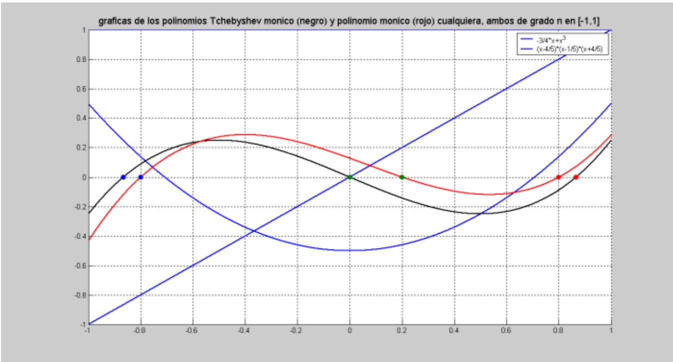


Fig. 9. Generación de Tchebyshev mónico y polinomios mónicos arbitrario con tres nodos con su expresión algebraica, donde se determina la norma infinito de ambos.Figura destinada a la comprensión del resultado principal de Tchebyshev.

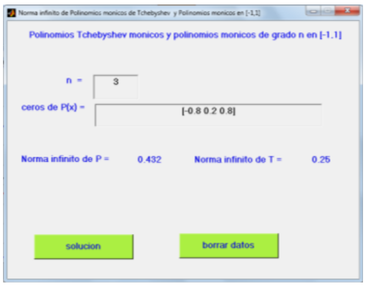


Fig. 10. Carga de datos y resultados en norma infinito para comprobar el resultado principal.

La pantalla desplegada por el accionamiento del botón *Fenómeno Runge y aproximación polinomial de Tchebyshev* conjuntamente con el ingreso de los datos, función de Runge y número de nodos elegidos, permite visualizar la oscilación polinomial que aumenta con el número de nodos, al mismo tiempo, que la interpolación con la distribución nodal de Chebyshev se aproximas cada vez más a f(x). La visualización, en la Fig. 11 y Fig. 12.

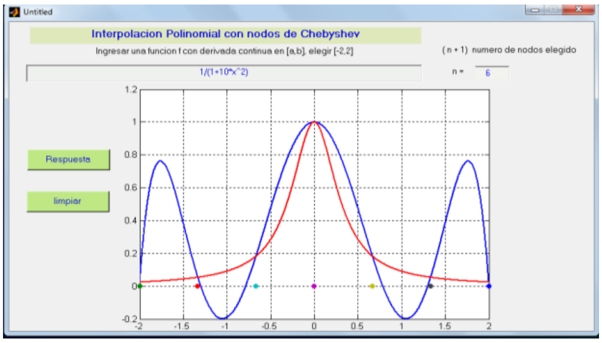


Fig. 11. Funcion de Runge y oscilación polinomial con seis nodos equiespaciados.

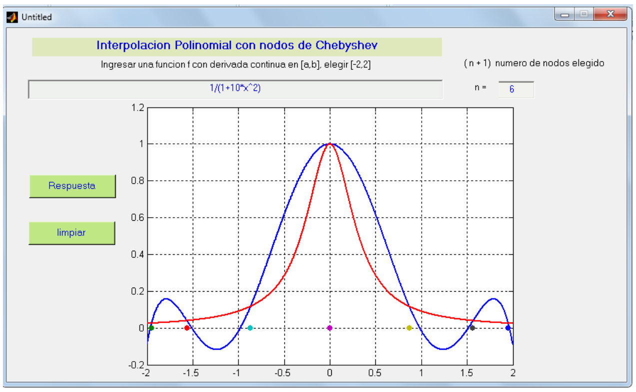


Fig. 12. Funcion de Runge y aproximación polinomial con distribución nodal de Tchebyshev .

Para explorar y experimentar la interpolación polinomial en función de la distribución nodal, pero además con la finalidad de ofrecer un material computacional atractivo para el alumno, marcadamente interactivo, véase las siguientes dos figuras 13, resultantes de llamar el archivo interpgui. La curva azul es la función de Runge interpolada sobre nueve nodos por el polinomio de Lagrange, con inestabilidad en los extremos. La *novedad interactiva*, es que los *nodos son móviles* –esferitas ubicadas en interseccion curva azul y roja- *desplazables con el puntero del mouse* y si se ubican sobre una distribución nodal de Tchebyshev, el polinomio interpolante mejora la aproximación de manera notoria y se elimina la oscilación.

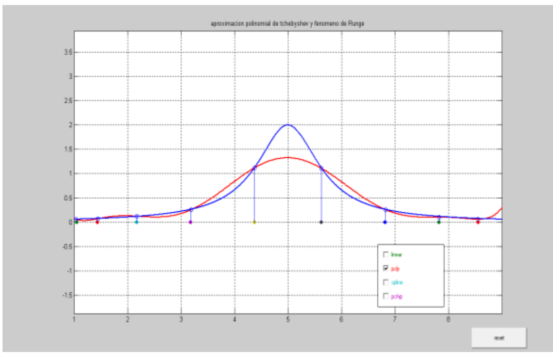


Fig. 13. Funcion de Runge y aproximación polinomial, con los nodos son móviles desplazados según Tchebyshev.

6 Secuencia didáctica

Actividad N°1 ´inestabilidad del polinomio de Lagrange:oscilación polinomial´.

- *Objetivos.* Estudiar ciertas funciones para las cuales la interpolación de Lagrange sobre nodos equiespaciados genera inestabilidad en los extremos.
- *Enunciado de la actividad.* Dada la función: $f(x) = 1/(1+10x^2)$ sobre el intervalo [-1,1], hallar el polinomio interpolante de Lagrange con n=4, n=6 nodos equiespaciados y encontrar computacionalmente el error.
- *Primera etapa: 'visualización'.* a) Pulsar sobre el botón *oscilación polinomial* de la herramienta computacional, y evaluar de la gráfica los errores para n=4, n=6. Describir el fenómeno de oscilación.
- *Uso de las herramientas de ajuste interactivo*: Primero crear una figura con la curva y los puntos de interpolación. Para activar las herramientas de ajuste de curas, seleccione *Tool*→*Basic Fitting* de la barra de menú figura. La ventana de ajuste básico se abre en la parte superior y puede seleccionar *linear*, *cubic*, etc y *show equations*. Alternativamente, puede usar la serie de comando polifit(polival(….)).

Algoritmo. Se muestra la secuencia de sentencias a utilizar por el alumno.

Archivo.m

```
function y=runge1(x)
y=1./(1+10*x.^2);
>> xx=linspace(-2,2,100);
>> yy=runge1(x);
% para marcar los nodos de interpolación sobre runge1 ´función de Runge´.
 >> x=-2:0.5:2;
>> plot(xx,yy)
>> y=runge1(x);
>> hold on
>> plot(x,y,'.','markersize',12)
```

Alternativamente n=length(x)-1;f(:,n)=polyval(polifit(x,y,n),xx); plot(xx,f(:,n),x,y,´o´).

Segunda etapa: cálculo algebraico. Hallar algebraicamente el polinomio de interpolación de Lagrange.

Actividad N°2 'Polinomios de Tchebyshev y distribución nodal de Tchebyshev'

- *Objetivos.* Determinar la distribución nodal de Tchebyshev para T_{n+1} en [a,b] y generar utilizando la fórmula de recurrencia los polinomios de Tchebyshev.
- *Enunciado de la actividad.* a) Determinar la distribución nodal de Tchebysev y la sucesión de polinomios –dando se expresión algebraica- en [-1,1] para n=4, n=8, n=10. b) Trasladar la distribución nodal al intervalo [2,4].
- *Primera etapa: visualización.* Pulsar el botón *Tchebyshev y distribución nodal de Tchebyshev*, y cargar n. Se generaran sucesivamente la familia de polinomios de Tchebyshev, la expresión algebraica polinomica y la gráfica de los nodos. Modificar el guión: function C=Cheby_nodos(n);for k=1:n+1; C(k)=cos(((2*(k-1)+1)/(n+1))*pi/2);end y los comandos polyval(polyfit…..), obtener las gráficas, en el intervalo [2,4].
- *Segunda etapa: calculo algebraico.* Desplazar los nodos $x_i = \cos\left(\frac{2i+1}{2n+2}\pi\right), i = 0,1,\dots,n$ a [2,4]. Generar los polinomios de Tchebyshev en [2,4] mediante $T_{n+1} = x\, T_n - T_{n-1}$ y utilizar (a+b)/2+((b-a)/2)x.

Actividad N°3 'Aproximación polinomial mediante polinomios de Tchebyshev'

- *Objetivos. Comprobar mediante el uso de la herramienta didáctica computacional el resultado principal de Tchebyshev.*
- *Enunciado de la actividad. a) Comprobar mediante el uso de la herramienta didáctica computacional la fórmula de polinomios monicos: para todo Pn(x)* $\|P_n(x)\|_\infty \geq \|\overline{T_n}(x)\|_\infty = \frac{1}{2^{n-1}}, n \geq 1\ x\epsilon[-1,1]$. *b)Demostrar que la norma infinito de Tchebyshev mónico esta dada por:* $\|\overline{T_n}(x)\|_\infty = \frac{1}{2^{n-1}}$.
- *Primera etapa: visualización. a) Pulsar sobre el botón ´Norma infinito de Tchebyshev monico y polinomios monicos´ y verificar mediante el uso de la herramienta didáctica computacional la fórmula de polinomios monicos* $\|P_n(x)\|_\infty \geq \|\overline{T_n}(x)\|_\infty = \frac{1}{2^{n-1}}, n \geq 1\ x\epsilon[-1,1]$ *y los valores de norma infinito fijando nodos arbitrarios de P(x) y luego de la grafica, contrastar los valores de norma infinito: [-0.8 0.2 0.8]; [-0.9 0 0.5]; [-0.5 -0.2 0.3 0.8]; [-0.4 0 0.2 0.8].*
- *Segunda etapa: cálculo algebraico.*

Actividad N°4 'Visualización del fenómeno de Runge'

- *Objetivos. Estudiar y experimentar computacionalmente con la función de Runge que pone de manifiesto nítidamente la inestabilidad del polinomio de Lagrange sobre una distribución equiespaciada y la diferencia cuando se utiliza una distribución nodal de Tchebyshev.*

- *Enunciado de la actividad. Aproximar la función 1/(1+10x2) con un polinomio interpolante lagrange sobre una distribución equiespaciada y una distribución nodal de Tchebyshev con n=6,8 en [-2,2].*
- *Primera etapa: visualización. Pulsar sobre el botón ´Fenomeno Runge y aproximación polinomial de Tchebyshev´, cargar la funcion 1/(1+10x2) y n=6, 8, 10, 13. Describir el fenómeno y sacar conclusiones.*
- *Segunda etapa: cálculo algebraico.*

7 Conclusiones

Se ha concretado el diseño (nudo central de este trabajo) de una secuencia didáctica basada en la utilización de una herramienta didáctica computacional programada especialmente, sobre el fenómeno de oscilación polinomial, función de Runge y polinomios de Tchebyshev, con el objetivo de proporcionar la formación de una *imagen conceptual* sobre un teorema frecuentemente formulado en abstracto. Por otra parte, la secuencia didáctica surge del diagnóstico de dificultades proporcionados por exámenes parciales y finales escritos en el cálculo numérico.

La utilización de la herramienta didáctica permite, *visualizar y comprobar experimentalmente* en forma numérica el *resultado principal de Tchebyshev*, expresado en términos de polinomios mónicos y norma infinito. También el uso de la herramienta didáctica, proporciona una imagen clara que ayuda a eliminar un error del sentido común: si aumenta el número de nodos equiespaciados mejora la aproximación polinomial, pero también ayuda para explorar y experimental el fenómeno de la oscilación polinomial variando el número de nodos en la interpolación. Además, la visualización permite afianzar definitivamente la diferencia entre distribución nodal equiespaciada y distribución nodal de Tchebyshev con un vínculo muy importante en el capítulo de integración: *métodos de Newton-Cotes* (con distribución nodal equiespaciada) y *cuadratura gaussiana* (con distribución nodal de Tchebyshev o Legendre).

El análisis de la puesta en escena y evaluación de resultado será motivo de otro trabajo.

Referencias

1. Zimmermann, W. y Cunningham, S. (eds.): Visualization in teaching and learninig mathematics. Mathematical.Association of America, Notes, 19. (1991).
2. Hitt Fernando: Contrucción de conceptos matemáticos y estructuras cognitivas. Cinvestav, IPN. México.(2000).
3. Brousseau, G.: Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. (1986).
4. Burden,R.: Análisis Numérico.Grupo Editorial Iberoamerica.1985

Volver al Índice

Relaciones Funcionales entre las Actitudes hacia la Matemática y los Resultados Académicos

Antonio Humberto Closas, Edgardo Alberto Arriola, Mariela Rosana Amarilla, Ethel Carina Jovanovich
Grupo de Investigación Educativa sobre Ingeniería, Facultad Regional Resistencia, Universidad Tecnológica Nacional
French 414, Resistencia (H3500CHJ), Chaco, Argentina
hclosas@hotmail.com, {earriola2006, carijovanovich}@yahoo.com.ar, prof.mariela@live.com.ar

Resumen. En este estudio nos hemos propuesto obtener un modelo de regresión lineal que permita explicar las relaciones existentes entre las *actitudes hacia la Matemática* y el *rendimiento académico*. La investigación responde inicialmente a un diseño no experimental, explicativo y descriptivo mediante encuesta. También es una investigación de campo, de línea cuantitativa y de corte transversal. La aplicación de técnicas estadísticas multivariantes ha permitido determinar la ecuación de regresión que mejor describe la asociación entre la variable criterio (rendimiento académico) y las variables predictoras (dimensiones de la prueba sobre actitudes hacia la Matemática), con el fin de explicar o predecir la variabilidad de los resultados educativos; un fenómeno multicausal de especial relevancia a la hora de implementar decisiones en el ámbito de la política, planificación y gestión educativa.

Palabras Clave: Modelización estadística, Regresión lineal, Actitudes, Rendimiento matemático, Estudiantes universitarios.

1 Introducción

1.1 Problemática y planteamiento

En los distintos niveles de enseñanza formal, los bajos resultados educativos constituyen un complejo problema que genera serias preocupaciones en las autoridades y en diferentes sectores sociales de América Latina, como también de otras regiones occidentales de nuestro planeta. En particular, la diferencia entre la formación académica en el área de Matemática que los alumnos poseen al llegar a la Universidad y los conocimientos que son requeridos en este ámbito educativo, es un hecho que ha sido observado y comprobado en reiteradas ocasiones y de diversas maneras. Por cierto, los estudiantes de los primeros años de las asignaturas de este campo disciplinar en las carreras de Ingeniería que se imparten en la Facultad Regional Resistencia (FRRe) de la Universidad Tecnológica Nacional (UTN), no son la excepción y la afirmación realizada es justa y apropiada para este conjunto de jóvenes universitarios.

Es claro y evidente que la distancia a la que se hace referencia se debe a múltiples razones –téngase en cuenta que el individuo es el resultado de factores tanto genéticos como ambientales, los cuales se encuentran con frecuencia estrechamente relacionados y en complejas interacciones–; no obstante, existe entre ellas un aspecto específico respecto del cual girará el desarrollo de nuestra investigación. En efecto, la variable o el factor al que nos referimos es la *actitud que los estudiantes tienen frente al estudio de la Matemática*, la cual a priori se reconoce como poco favorable, y que se presume puede ser debido, en parte, a una valoración incorrecta que de esta área de conocimiento se realiza y que deriva en una ausencia significativa de conciencia respecto de su relevancia cognitiva y formadora.

Con el fin de explicar con cierta precisión y rigurosidad –tanto conceptual como técnica– de qué manera el constructo objeto de interés influye en los resultados académicos, nos hemos planteado como *objetivo* en este trabajo desarrollar un modelo de regresión lineal en el que la variable criterio sea, ciertamente, el *rendimiento matemático* (medido a través de las calificaciones obtenidas en el Seminario Universitario de Ingreso), mientras que las variables predictoras sean las distintas dimensiones que integran la prueba sobre *actitudes hacia la Matemática*. En la fase empírica de esta investigación, el instrumento de medición que aplicamos a los sujetos de la muestra (alumnos de Ingeniería de 1° año de la FRRe–UTN) para medir las variables explicativas de la ecuación de regresión, fue el cuestionario estructurado de respuesta cerrada denominado Escala de Actitudes Hacia la Matemática (EAHM), desarrollado por Bazán [1].

Recoger, observar y analizar los datos que deriven de la aplicación del instrumento señalado en el ámbito antes referido, genera ciertamente la posibilidad de contar con información directa del espacio académico de la muestra. Este hecho es, sin duda, relevante puesto que permitirá adoptar decisiones más ajustadas o brindar explicaciones de mayor eficiencia y eficacia con el objeto de mejorar los resultados educativos.

1.2 Conceptos sobre actitud y rendimiento académico

Como suele ocurrir con muchos otros términos, existen diferentes significados, conceptualizaciones y descripciones relacionadas con el constructo bajo estudio. Así, en el diccionario de la Real Academia Española [2], pueden hallarse tres definiciones del concepto *actitud* (del latín *actitūdo*), una de las cuales indica que es la disposición de ánimo manifestada de algún modo (e.g., actitud benévola, pacífica, amenazadora, de una persona, de un partido, de un gobierno).

A su vez, de acuerdo con el diccionario Akal de Psicología [3], la noción de actitud califica una disposición interna del individuo frente a un elemento del mundo social (grupo social, problema de sociedad, etc.) que orienta la conducta que adopta en presencia, real o simbólica, de este elemento. La mayoría de los autores concibe una actitud como una estructura tridimensional integrada que tiene un carácter a la vez cognitivo (juicios, creencias y saberes), afectivo (sentimientos favorables o desfavorables), y conativo (tendencia de acción), siendo esta última componente la que predecería mejor el comportamiento del individuo.

En líneas generales, las actitudes son aquellas manifestaciones que expresan algún grado de aprobación o desaprobación, gusto o disgusto, acercamiento o alejamiento. Las actitudes son, por tanto, predisposiciones para actuar que el individuo tiene hacia determinado tema, materia, suceso o idea llamado usualmente *objeto de actitud* [4, 5].

Las actitudes son adquiridas [4]; nadie nace con predisposición positiva o negativa hacia algo. La forma en que se logran las actitudes es variada, proviniendo de experiencias positivas o negativas con el objeto de la actitud (por ejemplo, un profesor que explicaba muy bien o muy mal) y/o modelos (que pueden provenir de compañeros de aula, docentes, padres de familia, materiales impresos o de otra clase de estereotipos que difunden los medios de comunicación). Así, las actitudes se vuelven inevitables, todos las tenemos hacia aquellos objetos o situaciones a las que hemos sido expuestos.

El objeto de actitud es definido como cualquier entidad abstracta o concreta hacia la cual se siente una predisposición favorable o desfavorable. Por ejemplo, un estudiante frente a la Matemática (objeto de actitud) puede mostrar una actitud favorable cuando dice que le gustan las clases de esta materia, hace sus tareas antes de jugar, cree que la Matemática es importante o muestra interés por leer libros de esta asignatura. Desde la perspectiva de Alemany y Lara [6], la actitud puede determinar los aprendizajes y, a su vez, estos aprendizajes pueden mediar para la estabilidad o no de esta actitud.

Diversas investigaciones se han ocupado de la problemática objeto de este trabajo. Así por ejemplo, Bazán y Sotero [7] reportan los resultados de un estudio psicométrico realizado mediante un cuestionario de actitudes hacia la Matemática, aplicado a ingresantes en la Universidad Nacional Agraria La Molina, Lima, Perú. En el trabajo desarrollado, los autores pudieron constatar que no existe distinción por sexo en la actitud hacia la Matemática, sólo hallaron diferencias en la dimensión aplicabilidad por especialidad y en los constructos afectividad y habilidad por edad.

Mato [8], en su tesis doctoral, elabora cuestionarios y analiza actitudes y ansiedad hacia la Matemática de alumnos de escuelas secundarias y cómo el rendimiento escolar puede verse influenciado por éstas. En el trabajo mencionado realiza un estudio en función de las variables: colegio, curso, sexo, nivel de formación y profesiones de los padres y de las madres. Sugiere que los docentes deberían, también, tener en cuenta los aspectos afectivos y motivacionales tanto como los elementos cognitivos y procedimentales de la instrucción.

Este fenómeno también fue investigado por Valdez [9], quien señala que en la escuela media, inicialmente las actitudes hacia la Matemática son positivas pero con el transcurso del tiempo, el escaso éxito en las actividades relacionadas van debilitando la vitalidad y el interés de los alumnos.

A su vez, en el trabajo de Henríquez, Quiroz y Reumay [10], se abordan algunos de los agentes externos (dados por el medio o por el contexto), e internos (reflexión personal), que influyen en las actitudes del alumno al enfrentar el proceso de aprendizaje de la Matemática. Sostienen que una dificultad importante en el estudio de esta asignatura, es la falta de motivación para hacerlo, lo que se debe fundamentalmente a las actitudes negativas con las que el estudiante afronta el tratamiento de la Matemática.

En relación con la ultima apreciación, se encuentra la opinión de Fontana [11], quien luego de hacer un estudio de las diferencias de conducta (componente activo de la actitud) y de sus problemas, señala que entre las causas que los originan, se encuentran: el aburrimiento, el propósito deliberado de querer perturbar la clase o de molestar al profesor, la aptitud, el autoconcepto y la ausencia de éxitos.

Por su parte Mato y De la Torre [12], a partir de un estudio realizado utilizando una muestra de 1220 alumnos de ambos géneros (586 hombres y 634 mujeres) de Educación Secundaria Obligatoria, concluyen que la actitud hacia la Matemática varía en función del tipo de centro educativo al que asisten los jóvenes (público periferia, público centro, concertado y privado). También sostienen que los resultados en Matemática pueden verse afectados de manera positiva o negativa de acuerdo cómo el alumno forme sus actitudes frente a la asignatura.

Finalizamos este apartado indicando que conocer y estudiar las causas que originan deficiencias en el dominio de las competencias matemáticas es una labor estratégica para proponer acciones que permitan mejorar la enseñanza de esta materia en los distintos niveles educativos. En particular, resulta interesante el estudio de la actitud que asumen los estudiantes, pues representa un factor influyente en el proceso de construcción y adquisición de las capacidades básicas que contribuyen al desarrollo del pensamiento matemático [13].

2 Materiales y Métodos

2.1 Participantes

Debido a que nuestro interés radica en trabajar con una muestra en la cual su unidad se encuentre formada por la totalidad de los estudiantes que componen una entidad con definida personalidad como es el grupo-clase, hemos considerado adecuado –luego de estratificar la población en estudio (los estratos estuvieron representados por los turnos de clase, mañana, tarde y noche)– apelar al método de muestreo por conglomerados (las comisiones de estudio integraban los conglomerados). Por otra parte, en virtud de que nuestra intención reside en trabajar con grupos aleatorios de alumnos, la elección final de los mismos se realizó al azar. Resumiendo, podemos decir que en el procedimiento utilizado para extraer la muestra hemos combinado los métodos estratificado, por conglomerados y aleatorio simple, para identificar y seleccionar las unidades respectivamente.

En concreto la muestra elegida estuvo conformada por 382 jóvenes (257 hombres y 125 mujeres), pertenecientes a las tres carreras de Ingeniería (Sistemas de Información, Electromecánica y Química) que se imparten en la FRRe de la UTN. La edad media de los estudiantes que respondieron los ítems de la prueba fue de 19.42 años (DE = 2.22). Algunas de las características de la muestra utilizada en esta investigación, se ilustran en la Tabla 1.

Tabla 1. Detalles relativos a la muestra empleada en la etapa empírica del estudio

Turno	Carrera	Alumnos	Edad
Mañana y Tarde	Ingeniería en Sistemas de Información	n = 151 (111 h, 40 m)	*Mín.* = 17 *Máx.* = 30 M = 19.73 DE = 2.57
Tarde y Noche	Ingeniería Electromecánica	n = 110 (100 h, 10 m)	*Mín.* = 17 *Máx.* = 30 M = 19.54 DE = 2.12
Mañana	Ingeniería Química	n = 121 (46 h, 75 m)	*Mín.* = 17 *Máx.* = 27 M = 18.97 DE = 1.71
Muestra: n = 382 (257 h, 125 m) Edad: *Mín.* = 17, *Máx.* = 30, M = 19.42, DE = 2.22			

2.2 Diseño

Esta investigación, inicialmente de naturaleza *no experimental*, puede considerarse en una segunda etapa también *explicativa*, en razón del objetivo que se pretende lograr. Si consideramos como criterio el tipo de información que se proporcionará y el modo de recogerla, el diseño es de estilo *descriptivo mediante encuesta*.

Por otra parte, en atención a la forma de administrar el instrumento de medición, en este estudio empleamos la *técnica del cuestionario*. A su vez, si tenemos en cuenta el marco donde se lleva a cabo, estaríamos hablando de una *investigación de campo*. Además, en razón de cómo se miden y analizan los datos, es una investigación de línea *cuantitativa*. Teniendo en cuenta la instancia de recolección de la información, este trabajo revela una estrategia de corte *transversal*. En virtud del interés por analizar las asociaciones entre las distintas variables que participan, este trabajo es de perfil *correlacional*.

En líneas generales, desde el ámbito de la confrontación teórica-empírica, podríamos señalar que la investigación responde a un proceso de carácter hipotético-deductivo, puesto que pretendemos comprobar si la conceptualización teórica de la cual partimos se ajusta a la realidad objeto de estudio, a través de la recolección de datos y su posterior análisis estadístico.

2.3 Procedimiento

Una vez seleccionada la muestra, la recolección de los datos se llevó a cabo, en cada uno de los grupos-clase, en una única instancia. En primer lugar se les informó a los alumnos participantes que la aplicación del instrumento en cuestión respondía a un trabajo de investigación mediante el cual se pretende explicar de qué manera se relacionan las actitudes hacia la Matemática con los resultados educativos. También se les indicó sobre la importancia de responder con sinceridad a las distintas preguntas que se plantean, que sus respuestas tendrán un carácter estrictamente confidencial y científico, y que la participación en el estudio era una decisión totalmente voluntaria.

El momento temporal de este proceso fue el mes de abril de una asignatura cuyo régimen de cursado es anual. La aplicación del cuestionario EAHM la efectuaron los propios profesores, al comienzo de clase y con el margen de tiempo adecuado en virtud de las consultas formuladas en la prueba (20 minutos en promedio).

2.4 Instrumentos

En el contexto descripto, el cuestionario evaluado está compuesto por 31 ítems agrupados en cuatro dimensiones: afectividad (refleja el agrado o desagrado que se tiene por la Matemática), aplicabilidad (expresa la valoración de la utilidad que posee la Matemática), habilidad (indica la confianza en la propia destreza para la operatoria y el cálculo matemático) y ansiedad (evidencia las reacciones comportamentales de angustia, incertidumbre, intranquilidad, etc., frente a la Matemática). Se considera que las dimensiones citadas son aditivas y, por cierto, forman la actitud general hacia la Matemática. Las tres primeras subescalas poseen 8 ítems cada una y la última contiene 7 ítems; su aplicación puede hacerse en forma individual o colectiva, en nuestro caso evidentemente se realizó en forma colectiva. Del total de ítems, 18 están formulados en sentido positivo (e.g., *las matemáticas son amenas y estimulantes para mí*) y 13 en sentido negativo (e.g., *las matemáticas usualmente me hacen sentir incómodo y nervioso*). Para la medición de las respuestas a los ítems se ha utilizado una escala de tipo Likert, en la que las opciones fueron valoradas de 1 (totalmente en desacuerdo) a 5 (totalmente de acuerdo) puntos.

Los indicadores de fiabilidad y de validez de la prueba original, obtenidos por Bazán [1], fueron correctos y se calcularon a partir de los datos empíricos recogidos en una muestra de 256 sujetos. Los detalles acerca del análisis de las características psicométricas del instrumento y la discusión sobre si existen diferencias en la actitud bajo estudio considerando la edad, sexo y especialidad de ingreso, se encuentran disponibles en el trabajo publicado por Bazán y Sotero [7].

Con la finalidad de analizar, mediante regresión lineal múltiple, las asociaciones entre las dimensiones de la EAHM y el rendimiento académico hemos utilizado como variable respuesta las notas alcanzadas por los alumnos encuestados que aprobaron el Módulo de Matemática del Seminario Universitario de Ingreso, las que fueron obtenidas a partir de las actas académicas de examen (fuente de información secundaria). Se han seleccionado las calificaciones puesto que son el criterio social y legal del rendimiento en el ámbito de los centros educativos. Por otra parte, es el indicador más utilizado en las investigaciones sobre el tema a pesar de la dispersión o falta de consenso de las diferentes instituciones e incluso entre los profesores de una misma institución.

La variable dependiente del modelo es de tipo continua, sus valores van de cuatro (4) a diez (10); en cambio, las variables independientes (dimensiones de la EAHM, fuente de información primaria), si bien son continuas, sus puntuaciones directas oscilan entre ocho (8) y cuarenta (40), para las subescalas *afectividad*, *aplicabilidad* y *habilidad*; en tanto que para la dimensión *ansiedad*, los valores van de siete (7) a 35 (treinta y cinco).

2.5 Análisis de datos

En esta etapa de la investigación, el primer paso fue poner el instrumento EAHM a consideración de un grupo de 5 (cinco) profesores del Área de Matemática del Departamento de Materias Básicas (FRRe–UTN), a efectos evaluar cualitativamente dos aspectos: a) la pertinencia del contenido de los ítems propuestos (*indicadores subjetivos de validez*), y b) el cuestionario en su conjunto (*indicadores de la validez factorial o estructural*). Las apreciaciones formuladas por el conjunto de docentes indicado acerca del test objeto de evaluación tuvieron un porcentaje de coincidencia respecto del primer punto del 93% y de la clasificación de los ítems en las cuatro dimensiones de la EAHM del 96%.

Sin duda, los análisis realizados en la línea de validez cualitativa (juicio de expertos y grado de acuerdo) fueron sumamente valiosos, a fin de minimizar los márgenes de error del instrumento de medición al momento de su utilización en nuestro espacio académico. Sabido es que la validez de una prueba es un indicador del grado en que ésta es capaz de medir lo que realmente pretende medir, por lo que resulta relevante su evaluación tanto cualitativa como cuantitativa.

En segundo término, luego de construida la base de datos en formato electrónico a partir de la información obtenida por la aplicación del test, se llevaron a cabo diferentes análisis cuantitativos pertenecientes al dominio de la estadística descriptiva (algunos estadísticos centrales y de dispersión), de la psicometría (correlación dimensión-total y consistencia interna), y de la estadística inferencial (análisis correlacionales y de regresión lineal; para las pruebas de hipótesis, como es habitual, utilizamos la medida *p-valor*).

Los diversos tratamientos estadísticos indicados en el párrafo anterior permitieron, por un lado, conocer el comportamiento de cada una de las subescalas de la prueba y el grado de confiabilidad del instrumento utilizado. Por otra parte, dieron lugar a determinar la ecuación de predicción que mejor describía la relación entre la variable explicada (*Rendimiento académico*) y las variables explicativas (dimensiones de la EAHM). En todos los casos, el procesamiento de los datos fue realizado con ayuda del programa informático IBM SPSS Statistics 22.

3 Resultados y Discusión

Estudios de las dimensiones del cuestionario aplicado

En atención al propósito de esta investigación y a los análisis estadísticos que fueron anunciados en el apartado anterior, se presentan de forma sintética los resultados de aquellos indicadores que nos han parecido más convenientes calcular para caracterizar la muestra en el total de la escala y en las cuatro dimensiones que conforman la prueba aplicada.

En efecto, en la Tabla 2, pueden apreciarse las *puntuaciones directas*, la *media*, la *desviación estándar*, la *correlación dimensión-total* y el *coeficiente alfa de Cronbach*. Los dos primeros estadísticos son de mucha utilidad, puesto que cuando se analiza un conjunto de datos numéricos, el conocimiento de ambas medidas ayuda a comprender, entre otras cosas, la distribución de los datos de la muestra. El tercero de los cuatro estadísticos mencionados (*correlación dimensión-total*), recoge el grado de relación que cada una de las categorías posee con el total de la prueba, lo que puede considerarse un indicador de su grado de discriminación. La fiabilidad es una de las características fundamentales de un test, una de las formas de evaluarla es a través del cuarto estadístico (*coeficiente alfa de Cronbach*) el cual indica la precisión o estabilidad de los resultados; señala la cuantía en que las medidas de la prueba están libres de errores casuales o aleatorios.

Tabla 2. Estadísticos descriptivos, de correlación y de fiabilidad de las dimensiones de la EAHM

Dimensión	Número de ítems	Puntuaciones directas	Media	*DE*	Correlación dimensión-total	*α de Cronbach* sin la dimensión
Afectividad	8	*Mín.* = 14 *Máx.* = 31	22.45	2.50	.52	.61
Aplicabilidad	8	*Mín.* = 21 *Máx.* = 39	30.56	3.03	.45	.66
Habilidad	8	*Mín.* = 14 Máx. = 34	25.92	2.84	.52	.61
Ansiedad	7	*Mín.* = 9 *Máx.* = 30	18.69	2.93	.44	.66
EAHM (4 Dimensiones): *P.D.Mín.* = 24 *P.D.Máx.* = 125 Media = 97.11 *DE* = 9.35 *α* = .70						

Se destacan a continuación algunos aspectos que surgen de la lectura de los valores que se encuentran en la Tabla 2, obtenidos a partir de los análisis efectuados sobre los datos muestrales.

Comenzamos por señalar que los valores hallados para cada una de las dimensiones, así como para el conjunto de las mismas, en cuanto a *puntuaciones directas*, *media* y *desviación típica*, resultaron absolutamente razonables y se encuentran dentro del rango de medidas que se esperaban obtener, en virtud de los antecedentes bibliográficos que fueron consultados sobre el tema (consideramos conveniente mencionar que no se realizaron modificaciones de ningún tipo en el texto de las preguntas, ni en la estructura de la escala original).

En general, las puntuaciones totales en cada una de las subescalas muestran correlaciones corregidas aceptables con las puntuaciones totales en la prueba (sumatoria de los ítems que componen las dimensiones, excluidos aquellos que integran la dimensión cuya asociación se evalúa), puesto que en todos los casos superan el valor de referencia .20 [14], observándose las más altas (.52) en las categorías denominadas *Afectividad* y *Habilidad*.

Respecto de los indicadores *α de Cronbach cuando se excluye la dimensión*, podemos señalar que los valores que sobresalen (.61) corresponden a las mismas subescalas, *Afectividad* y *Habilidad*, citadas anteriormente (en este caso, coeficientes bajos ponen en evidencia el aporte relevante que la dimensión que no participa realiza respecto de la fiabilidad de la prueba). Los indicadores de las dos últimas columnas de la Tabla 2 pertenecen a conceptos estrechamente vinculados, en términos generales, con la confiabilidad del instrumento, que en nuestro estudio resultaron muy coherentes y sencillos de interpretar.

Para finalizar con este apartado, debemos señalar que la fiabilidad calculada para el conjunto de las cuatro dimensiones es aceptable puesto que el *coeficiente alfa* encontrado iguala el criterio de .70 recomendado [15]. Se recuerda que calcular el coeficiente de fiabilidad en cada nueva muestra, y no apoyarse en la obtenida en otros estudios como aval de la fiabilidad del instrumento, es una de las recomendaciones de la *American Psychological Association* [16].

Análisis correlacionales

En este apartado llevaremos a cabo análisis correlacionales entre las cuatro dimensiones que integran la prueba EAHM y la variable rendimiento matemático (Tabla 3).

La primera razón por la que se realizan estos estudios radica en el hecho de que los coeficientes que se obtengan permitirán reconocer la presencia o no de asociaciones estadísticamente significativas entre las categorías del instrumento y los resultados académicos, lo que proporcionará un indicio acerca de la validez predictiva del cuestionario objeto de interés.

El segundo motivo de los análisis correlacionales reside en que, en atención al objetivo principal de esta investigación, está previsto obtener un modelo de regresión explicativo de las relaciones entre el rendimiento académico y las dimensiones de la EAHM, y es siempre de utilidad examinar previamente las asociaciones lineales que las variables independientes y dependientes presentan.

Tabla 3. Correlaciones entre las dimensiones de la EAHM y el rendimiento matemático

	Afectividad	Aplicabilidad	Habilidad	Ansiedad
Rendimiento matemático	.11	.13	.16*	–.21**

* $p < .05$ ** $p < .01$ $n = 164$

Nota: Para cuantificar el grado de relación lineal entre las distintas variables (continuas) se utilizó el coeficiente de correlación de Pearson.

Respecto de los coeficientes de correlación lineal entre las categorías de la EAHM y el rendimiento matemático, según puede verse en la Tabla 3, de los cuatro posibles, sólo dos fueron estadísticamente significativos. Uno de ellos al nivel de significación $\alpha = .01$, como es el caso del correspondiente a la subescala *Ansiedad*, el que resultó negativo ($r = –.21$), y otro al nivel de significación $\alpha = .05$, como sucede con el índice de la dimensión *Habilidad*, el cual tuvo signo positivo ($r = .16$). Cabe indicar que la muestra empleada en los actuales análisis correlacionales estuvo conformada por 164 sujetos, debido a que por razones operativas sólo fue posible contar con las calificaciones obtenidas por los estudiantes que aprobaron el Seminario Universitario de Ingreso correspondiente al año académico en el que se aplicó la escala.

Estimamos oportuno comentar que estábamos esperanzados en que los coeficientes de correlación entre las distintas categorías de la prueba y los resultados educativos fuesen mejores, en atención a que estudios importantes –como los realizados en EEUU entre 1994 y 1996 por la *National Assesment of Education Progress* (NAEP)– daban cuenta de la existencia de una relación significativa y directa entre las actitudes de los alumnos y el rendimiento en Matemática.

Sin embargo, lo destacable de los indicadores obtenidos en esta parte del estudio es que la presunción que teníamos al respecto; esto es, la presencia de asociación entre ambos constructos (actitud y rendimiento), pudo ser empíricamente comprobada, aunque debe observarse que en esta ocasión sólo dos valores de los cuatro posibles resultaron estadísticamente significativos. Esta apreciación nos lleva a sostener que, a priori, las distintas categorías de la EAHM, principalmente *Habilidad* y *Ansiedad* por evidentes razones, serían de utilidad para configurar un modelo que permita clasificar en el futuro los resultados académicos.

Análisis de regresión lineal múltiple

En vista de los índices hallados en el análisis correlacional, hemos considerado adecuado emplear en la estimación de la ecuación de regresión el método "Introducir", ingresando como variable criterio el *Rendimiento matemático* (medido a través de las calificaciones obtenidas por los sujetos de la muestra) y como variables explicativas o covariables las dimensiones *Afectividad*, *Aplicabilidad*, *Habilidad* y *Ansiedad* (evaluadas mediante la suma de las puntuaciones directas de los ítems que integran cada una de las subescalas), por cierto, todas de tipo continuas.

En virtud de las opciones elegidas y de los datos de la muestra, el *modelo explicativo* obtenido presenta la siguiente ecuación:

$$\textit{Rendimiento matemático} = 6.94 + 0.09 \cdot \textit{Habilidad} - 0.12 \cdot \textit{Ansiedad} \qquad \textbf{(1)}$$

Si bien la ecuación presentada es la única que técnicamente se ajusta a los datos de la muestra, no podemos dejar de mencionar que hubiésemos deseado contar con un mayor número de dimensiones estadísticamente significativas, puesto que este hecho probablemente facilitaría la tarea de explicar la variabilidad del rendimiento académico.

En efecto, el valor del coeficiente de correlación del modelo (R = .32) es aceptable; sin embargo, el coeficiente de determinación corregido ($\hat{R}^2$ = .09) es decididamente bajo, por lo que la proporción de varianza total explicada por la regresión es poco relevante (claro que debemos ser prudente en interpretar esta apreciación, puesto que como se dijo en el modelo sólo intervienen dos de las cuatro dimensiones que conforman la prueba). Este resultado puede deberse, entre otras cosas, a que la propia técnica es excesivamente restrictiva para un problema de esta índole y a que el modelo ha sido estimado a partir de datos de corte transversal. Por otra parte, el valor del estadístico de Durbin-Watson (d = 2.07), muy próximo a 2, nos indica que los términos de error adyacentes no están correlacionados, por lo que se cumple la condición de independencia de los datos.

Con el objeto de traducir en forma práctica la utilización del modelo propuesto, se presentan de inmediato las siguientes situaciones particulares:

a) Si se aplicara la ecuación de regresión (1) a los datos de un estudiante que posea, por ejemplo, una puntuación directa superior a la media en la dimensión *Habilidad* e inferior al promedio en la variable *Ansiedad* de la EAHM (esto es, mayor a 25.92 y menor a 18.69, respectivamente), digamos 30 y 15, se obtendrá:

$$\textit{Rendimiento matemático} = 6.94 + 0.09 \cdot 30 - 0.12 \cdot 15 = 7.84$$

Es decir, el rendimiento en Matemática de un alumno, que posea los valores que hemos utilizado para llevar adelante los cálculos, sería *muy bueno*, según el modelo empírico (el punto de corte se encuentra establecido en 6 puntos). El resultado obtenido es absolutamente razonable en virtud de los datos elegidos en las variables predictoras.

b) Por el contrario, si ahora consideramos el caso de un sujeto que posea una puntuación directa inferior a la media en la dimensión *Habilidad* y superior al promedio en la variable *Ansiedad*, digamos 20 y 25, respectivamente, se obtendrá:

$$\textit{Rendimiento matemático} = 6.94 + 0.09 \cdot 20 - 0.12 \cdot 25 = 5.74$$

Como se puede apreciar, el modelo planteado clasificaría al sujeto cuyos datos hemos empleado realizar la simulación, en el grupo de *desaprobados*, puesto que la cuantificación de su rendimiento se encuentra por debajo del punto de corte (6 puntos).

Finalizamos este apartado indicando tres aspectos importantes: a) los análisis correlacionales, llevados a cabo en la sección precedente (3.2), proporcionaron información conceptual y técnica coherente con el modelo de regresión logrado; b) a partir de la ecuación que se propone puede inferirse un aumento en el rendimiento de los estudiantes cuando denotan puntajes altos en la variable *Habilidad* y bajos en la dimensión *Ansiedad*, y viceversa, puntajes bajos en la variable *Habilidad* y altos en la dimensión *Ansiedad*, generarían una disminución en el rendimiento de los sujetos de la muestra; y c) fue posible apreciar la validez explicativa y predictiva del cuestionario bajo estudio respecto de los resultados académicos. En definitiva, y a modo de síntesis, podría expresarse que, tal como se presumía, la investigación desarrollada ha permitido contrastar empíricamente que *una actitud positiva hacia la Matemática contribuiría con el logro de mejores resultados educativos*.

4 Conclusiones

En el presente estudio nos habíamos propuesto principalmente concretar, en un dominio estadístico de tipo descriptivo, inferencial y psicométrico, el desarrollo de un modelo de predicción lineal que permita explicar las relaciones existentes entre las *actitudes hacia la Matemática* y el *rendimiento académico*, empleando una muestra conformada por estudiantes de Ingeniería de 1° año de la FRRe–UTN. Pues bien, en vista de los resultados obtenidos en el marco de esta investigación, podemos afirmar que el objetivo planteado ha sido logrado.

En efecto, a partir de los estudios iniciales (correlación dimensión-total y alfa de Cronbach) realizados sobre las dimensiones del test utilizado, así como de los análisis implementados posteriormente (correlacionales y de regresión múltiple), fue posible comprobar que la prueba aplicada constituye un instrumento fiable y válido para medir sentimientos, creencias y tendencias de los alumnos hacia la Matemática o las clases de esta asignatura.

Así pues, en relación con la fiabilidad de la escala, los resultados indican que puede considerarse un instrumento aceptable, dado que el coeficiente de consistencia interna encontrado para el conjunto de las cuatro dimensiones coincide con el valor mínimo requerido (α = .70). A su vez, como complemento de la información dada, podemos decir que las correlaciones entre cada categoría y la EAHM (índice de homogeneidad corregido) fueron siempre muy razonables, en todos los casos superan el valor de referencia .20 (varían entre $r_{\text{d-t}}$ = .44 y $r_{\text{d-t}}$ = .52).

En razón de los resultados conseguidos en el estudio de validez predictiva, nuestra apreciación respecto de los niveles de discriminación –mediante las categorías de la escala– de los resultados educativos es lógicamente favorable; esto es, pensamos que la EAHM es una prueba que clasifica adecuadamente a los estudiantes con diferentes grados de logro académico. Así por ejemplo, utilizando el modelo obtenido en el apartado de regresión lineal, se podría predecir que los alumnos que poseen mayor actitud favorable hacia la Matemática (puntajes altos en la dimensión *Habilidad* y bajos en la variable *Ansiedad*), tendrían mejores resultados cognitivos en esta asignatura. Por el contrario, en aquellos estudiantes con mayor actitud negativa (puntajes bajos en *Habilidad* y altos en *Ansiedad*), se observaría un menor rendimiento académico en la mencionada área de conocimiento.

Aunque en su generalidad, los resultados muestran evidencia que el cuestionario bajo estudio presenta suficientes bondades para ser utilizado en la evaluación de las actitudes hacia la Matemática, así como en la explicación del rendimiento académico en esta asignatura, creemos necesario considerar algunas limitaciones.

En efecto, en primer lugar, los participantes de la presente investigación fueron alumnos de primer año de una unidad académica específica, lo que quizás no permite hacer inferencias demasiado generales sobre otros estudiantes universitarios o extender los resultados obtenidos sobre otras poblaciones no representadas en la muestra. En segundo orden, no se puso a prueba la EAHM en función de variables demográficas como la edad o el género de los participantes, por lo que sería interesante en próximos trabajos, analizar en el ámbito de aplicación del cuestionario cómo se manifiestan las actitudes hacia la Matemática al considerar estos aspectos. En tercer término, debe recordarse que la muestra empleada en los análisis correlacionales (sección 3.2) y en el análisis de regresión lineal múltiple (sección 3.3), por los motivos indicados oportunamente, estuvo conformada por el 43% del total (n = 164) de los sujetos que participaron en la primera parte de este estudio (sección 3.1), lo cual es probable que haya alterado la obtención del modelo obtenido, que como se sabe cuenta con sólo dos de las cuatro posibles variables predictoras.

Sin embargo, a pesar de las limitaciones expuestas, por lo que los resultados logrados deberían aceptarse con cierta cautela, pensamos que el trabajo realizado debe ser reconocido como un paso adelante en el abordaje del complejo tema objeto de interés y, consecuentemente, un aporte a la comunidad académica y científica del área de conocimiento, con posibles proyecciones en política, planificación y gestión educativa, de allí que el presente estudio conlleva implícitamente verdaderas perspectivas de transferencia.

El trabajo llevado a cabo nos hizo ver con interés el desarrollo de futuras investigaciones en torno a los siguientes temas (considerando, siempre que se utilicen modelos estadísticos de dependencia, al rendimiento académico como variable endógena): a) análisis de validez externa de la EAHM; b) estudios de diferencias cuantitativas con respecto a distintas variables exógenas, tales como el tipo de carrera que siguen los estudiantes o el grado de estudio alcanzado por los padres, entre otras; c) utilización, además de las actitudes, de otros determinantes personales y contextuales, como los mencionados en el punto anterior, con el objeto de elaborar un modelo causal y probar su validez de medida y global, empleando la técnica multivariante denominada estructuras de covarianza; d) replicación de la actual elaboración usando un diseño longitudinal, con evaluaciones periódicas durante los años de permanencia de los estudiantes en la universidad o en un intervalo de tiempo determinado. En este último caso, el tipo de diseño que se utiliza proporcionaría información sobre los posibles efectos o cambios que ocurren en las actitudes por causa de la edad y la adquisición de nuevas competencias, entre otros factores.

Como última reflexión se indica que el hecho de haber validado empíricamente la EAHM (a efectos de explicar y predecir los resultados educativos) en un determinado contexto académico y socio-cultural, da origen a contar con un nuevo marco de referencia, lo cual permite ampliar la aplicación de la prueba objeto de análisis; en esta oportunidad, utilizando una muestra conformada por estudiantes universitarios con residencia en la zona noreste de Argentina. Por lo que antecede, se considera que tanto la temática desarrollada como el tratamiento realizado constituyen un aporte científico genuino en razón de la producción de saberes que fue posible generar a partir de datos correspondientes a nuestro lugar de pertenencia, que no habían sido relevados en trabajos anteriores.

Desde nuestro punto de vista, la *actitud hacia la Matemática* representa un concepto relevante por su implicancia en el rendimiento académico, por lo que deberían incrementarse sus líneas de investigación, entre ellas, las relacionadas con medidas de intervención que permitan considerar al constructo de una manera más favorable por parte de los estudiantes, a efectos de lograr un mayor desarrollo sobre su conocimiento y utilidad. Este hecho, evidentemente, sería una importante contribución al proceso de enseñanza-aprendizaje de la asignatura en cuestión, que como es sabido constituye una de las principales preocupaciones de los sistemas educativos estatales en la mayoría de los países y regiones de nuestro planeta.

Referencias

1. Bazán, J.: Metodología estadística de construcción de pruebas. Una aplicación al estudio de actitudes hacia la matemática en la UALM. Tesis para optar al título de Ingeniero Estadístico, Universidad Nacional Agraria La Molina, Lima, Perú (1997).
2. Real Academia Española: *Diccionario de la lengua española* (22a. ed.). Madrid: Espasa-Calpe (2001).
3. Doron, R. y Parot, F.: *Diccionario Akal de Psicología.* Madrid: Akal (1998).
4. Berliner, D. C. y Calfee, R. C. (Eds.): *Handbook of educational psychology.* New York: Simon y Shuster (1996).
5. Zabalza, M.: *Evaluación de actitudes y valores. Evaluación del aprendizaje de los estudiantes.* Barcelona: Grao (1994).
6. Alemany, I y Lara, A. I.: Las actitudes hacia las matemáticas en el alumnado de ESO: un instrumento para su medición. *Publicaciones*, 40, 49-71 (2010).
7. Bazán, J. y Sotero, H.: Una aplicación al estudio de actitudes hacia la matemática en la UNALM. *Anales Científicos UNALM*, *36*, 60-72 (1998).
8. Mato, M. D.: *Diseño y validación de dos cuestionarios para evaluar las actitudes y la ansiedad hacia las matemáticas en alumnos de educación secundaria obligatoria.* Tesis doctoral, Universidade Da Coruña, España (2006).
9. Valdez, E.: *Rendimiento y actitudes. La problemática de las matemáticas en la escuela secundaria.* México: Grupo Editorial Iberoamérica (2000).
10. Henríquez, L., Quiroz, R. y Reumay, P.: Acercándose a la Matemática. *Estudio pedagógico, 23*, 41-49 (1997).
11. Fontana D.: *La disciplina en el aula: Gestión y control.* Madrid: Santillana (1989).
12. Mato, M. D. y De la Torre, E.: Evaluación de las actitudes hacia las matemáticas y el rendimiento académico. En M. J. González, M. T. González y J. Murillo (Eds.), *Actas del XIII simposio de la SEIEM. Investigación en Educación Matemática* (pp. 285-300). Santander, España: Universidad de Cantabria (2009).
13. Castro, M.: Un curso de matemáticas para ciencias sociales. Bogotá, Colombia: "una empresa docente". http://ued.uniandes. edu.co/ued/servidor/ued/libros/libroaportes/5matebasica.pdf (2002). Accedido el 16 de marzo de 2012.
14. Kline, P.: *The handbook of psychological testing* (2a. ed.). London: Routledge (2000).
15. Nunnaly, J. C. y Bernstein, I. H.: *Psychometric theory* (3a. ed.). New York: McGraw-Hill (1994).
16. American Psychological Association: *Publication Manual of the American Psychological Association.* Washington DC: Author (2001).

Volver al Índice

Un Estudio sobre los Saberes y Competencias de los Alumnos Ingresantes a la Universidad

Graciela del Valle Echevarría, Daniel Felizzia, María Agostina Cagnina
Facultad de Ingeniería y Ciencias Agropecuarias. Universidad Nacional de San Luís
Av. 25 de Mayo 384 – Villa Mercedes (San Luis)- CP 5730
{gecheva61, dfelizzia, agostinacagnina}@gmail.com

Resumen. El presente trabajo pretende describir la problemática que presenta el alumno ingresante a las carreras de ingenierías de la Facultad de Ingeniería y Ciencias Agropecuarias de la Universidad Nacional de San Luis (FICA - UNSL). La resolución de problemas o la presentación de un ejercicios no rutinario es una tarea complicada para el alumno. Se analizaran los resultados obtenidos de los alumnos aspirantes que es lo que les permite ser alumno de la facultad y estar en condiciones de cursar Análisis Matemático I su primera materia de la carrera.

Palabras Clave: Matemática, Ingreso, Evaluación, Competencia.

1 Introducción

El presente trabajo se inscribe en la línea de investigación de didáctica de la matemática que estudia las concepciones y competencias que tienen los alumnos acerca de la matemática y su relación con la vida diaria.
Particularmente nos vemos afectados por la problemática del alumno ingresante en cuanto a que más allá de las aptitudes que el alumno revela para la tarea intelectual, no posee un bagaje mínimo de conocimientos lo que dificulta la enseñanza y el aprendizaje de las asignaturas de primer año.

Lo que caracteriza a la matemática es su hacer, sus procesos creativos y generativos.

La idea de la enseñanza de la matemática que surge de ésta concepción es que los alumnos deben comprometerse a actividades con sentido, originados a partir de situaciones problemáticas.

Estas situaciones requieren de un pensamiento creativo que permita conjeturar, descubrir, inventar y comunicar ideas, así como probar esas ideas a partir de la reflexión crítica y la argumentación. A partir de todo esto hay una concepción o un acuerdo de aceptar la idea de que los alumnos aprendan matemática a través de la resolución de problemas.

Según [1] Kilpatric la utilización de los términos problema y resolución de problemas ha tenido múltiples y a veces contradictorios significados a través de los años.

Como por ejemplo, los problemas son utilizados como vehículos al servicio de otros objetivos curriculares como una justificación para enseñar matemática, como motivación para introducir ciertos temas, como actividad recreativa, como medio para desarrollar nuevas habilidades, como práctica (la mayoría de las actividades en la escuela caen dentro de ésta categoría).

Otro significado es como habilidad, esto es, resolver problemas no rutinarios es caracterizado como una habilidad de nivel superior, a ser adquirida después de resolver problemas rutinarios. Y un último significado de resolver problemas es "hacer matemática." Hay un punto de vista matemático acerca del rol de los problemas, que es creer, que el trabajo de los matemáticos es resolver problemas y que la matemática consiste en problemas y soluciones.

Para [2] Polya la pedagogía y la epistemología de la matemática están estrechamente relacionadas. Este autor considera que los alumnos tienen que adquirir el sentido de la matemática como una actividad, es decir, su experiencia con la matemática debe ser consistente con la forma que la matemática es hecha.

Según Polya: "Encontrar el camino correcto y la solución a un problema no es algo que a lo mejor lo podamos hacer en un solo momento. El éxito se basa, sobre todo, en la experiencia, en resolver muchos ejercicios o en haber trabajado durante muchas horas buscando una solución y bien vale la pena hacerlo. Es decir, para resolver problemas hay que resolver problemas".

Las competencias matemáticas no se alcanzan por generación espontánea, sino que requieren de ambientes de aprendizaje enriquecidos por situaciones problemas significativos y comprensivos, que posibiliten avanzar a niveles de competencia más complejos.

En este trabajo consideraremos que la competencia matemática no es un atributo que una persona tiene o no tiene, sino que se trata de una cualidad que se encuentra en un continuo, donde algunos individuos son más competentes que otros desde el punto de vista matemático y donde el potencial de crecimiento está siempre presente.

PISA [3] define competencia matemática como la *capacidad de los individuos para formular, emplear e interpretar las matemáticas en diferentes contextos*. O, en otras palabras, pretende describir las capacidades de los individuos para razonar matemáticamente y utilizar conceptos, procedimientos, datos y herramientas matemáticas para explicar y predecir fenómenos. Otro aspecto que caracteriza la competencia matemática es su potencialidad de ser aplicada en la vida cotidiana.

2 Objetivos

- Analizar los conocimientos previos de los alumnos ingresantes a las carreras de Ingenierías: Química, Industrial Alimentos, Electromecánica, Mecatrónica y Electrónica.
- Determinar los conocimientos adquiridos después del curso de nivelación.
- Determinar si se logró mejorar el aprendizaje conceptual de la matemática en el curso de nivelación universitario.
- Determinar si el alumno logró desarrollar habilidades para la resolución de problemas e interpretar consignas.

3 Aspectos Metodológicos

El alumno aspirante a ingresar a la carrera de ingeniería dentro de las materias que debe aprobar está matemática. La Facultad dicta un curso denominado Preingreso en el periodo Septiembre- Noviembre con una carga horaria de 6 hs semanales, destinada a todos aquellos alumnos que estén cursando su último año de la escuela secundaria interesados en seguir estudiando una carrera universitaria. En la primer clase de inicio de este curso se les informa las condiciones del dictado de la materia, disponen de un material teórico- práctico y los requisitos necesarios para aprobar, como también se les dice que tendrán que realizar una evaluación on-line al inicio del curso que denominamos Pretest, esta evaluación es para saber que recuerdan de lo visto en la escuela secundaria y a la finalización del curso se toma otra evaluación, denominada Postest para ver si lograron recordar lo visto en la escuela media y/o aprender los temas no vistos. Estas dos evaluaciones son solo indicadores, ya que para poder ingresar a la Facultad se les toma una evaluación escrita al final del curso, esta es de opción múltiple que deben aprobar con el 60 %. Esta evaluación es la que les permitirá cursar Análisis Matemático I en el primer cuatrimestre de su carrera.

Lo que vamos analizar son los resultados obtenidos en cada una de estas instancias on-line. Los temas que se evaluaron fueron; Unidad 1: Conjuntos Numéricos, Unidad 2: Ecuaciones y sistema de ecuaciones, Unidad 3: Polinomios, Unidad 4: Trigonometría. La evaluación consistió en resolver 10 ejercicios, fue de modalidad múltiple, además debieron responder una encuesta acerca de la dificultad de resolver los problemas, si uso papel, si usaron calculadora, si la respuesta fue al azar.

A continuación mostramos los resultados obtenidos en las dos evaluaciones Pretest y Postest.

En la primera evaluación (Pretest) participaron 154 alumnos, en la segunda evaluación (Postest) 87 alumnos.

Tabla 1. Resultados de Evaluación de Postest y Pretest.

PRETEST			POSTEST		
Unidad	Cantidad	%	Unidad	Cantidad	%
1	29	19%	1	19	22%
2	38	25%	2	24	28%
3	37	24%	3	25	29%
4	32	21%	4	17	20%

Se pidió al momento de hacer la evaluación mucha seriedad, ya que estas evaluaciones no dependían de su ingreso a la universidad. Una de las razones que explica estos resultados es la modalidad del examen, ya que al ser múltiples opciones, el alumno puede contestar al azar.

Se puede ver que hubo una leve mejoría en los resultados obtenidos Tabla 2 excepto en la unidad de trigonometría. Al momento de ser evaluados, en la primera instancia respondieron rápidamente a pesar que tenían dos horas para resolver, en cambio en la segunda instancia se los vio más comprometidos en la resolución.

Con respecto a los resultados de las encuestas realizadas también se puede ver el alto de porcentaje de alumnos que respondió al azar en las dos instancias.

Tabla 2. Respuesta de Encuesta.

PRETEST			POSTEST		
Respuestas dadas por los alumnos Enunciados			Respuestas dadas por los alumnos Enunciados		
Opción	Respuestas	%	Opción	Respuestas	%
Sencillos de comprender	8	5%	Sencillos de comprender	6	7%
Medianamente sencillos de comprender	57	37%	Medianamente sencillos de comprender	56	64%
Difíciles de comprender	89	58%	Difíciles de comprender	25	29%
TOTAL	154		TOTAL	87	
Usó papel			Usó papel		
Opción	Respuestas	%	Opción	Respuestas	%
Si	112	73%	Si	78	90%
No	42	27%	No	9	10%
TOTAL	154		TOTAL	87	
Usó calculadora			Usó calculadora		
Opción	Respuestas	%	Opción	Respuestas	%
Si	107	69%	Si	68	78%
No	47	31%	No	19	22%
TOTAL	154		TOTAL	87	
Respondió al azar			Respondió al azar		
Opción	Respuestas	%	Opción	Respuestas	%
Si	132	86%	Si	67	77%
No	22	14%	No	20	23%
TOTAL	154		TOTAL	87	
Respondí al azar porque			Respondí al azar porque		
Opción	Respuestas	%	Opción	Respuestas	%
Desconocía el tema	106	63%	Desconocía el tema	28	37%
Me pareció difícil	43	26%	Me pareció difícil	36	48%
Requería demasiado tiempo	9	5%	Requería demasiado tiempo	6	8%
Deseaba finalizar rápido	6	4%	Deseaba finalizar rápido	5	7%

Falta de interés	3	2%	Falta de interés	0	0%
TOTAL	167		TOTAL	75	
Aclaración: se podía elegir más de una opción			Aclaración: se podía elegir más de una opción		

En estas evaluaciones online los alumnos podían realizar comentarios acerca de esta evaluación, a continuación se detallan algunos de los comentarios.

En la siguiente figura se muestran las observaciones que realizaron los alumnos en el Pretest.

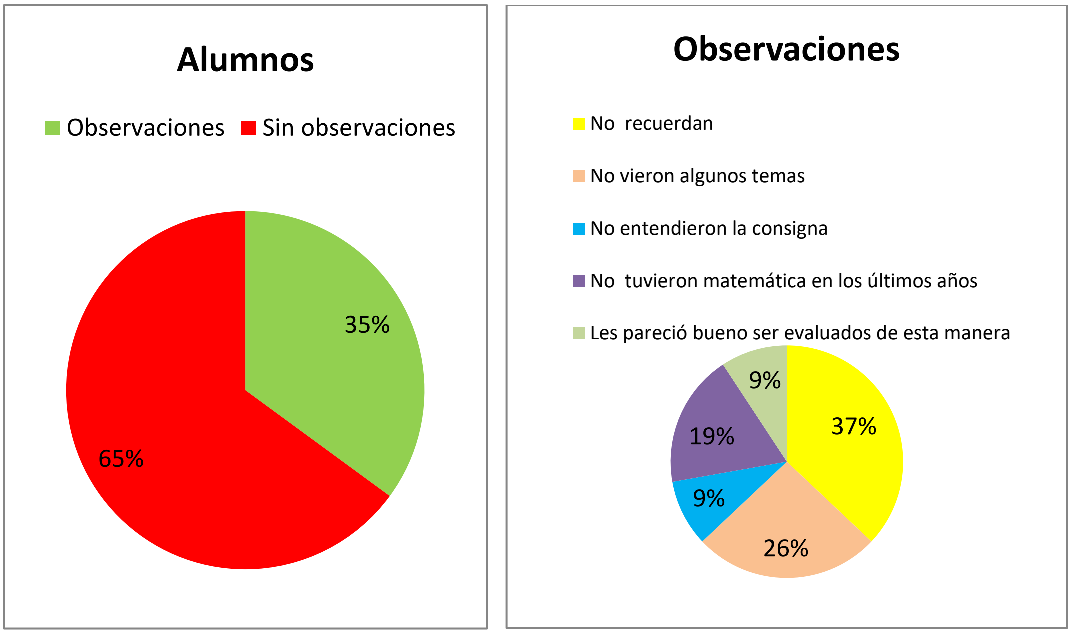


Fig.1. Comentario Pretest.

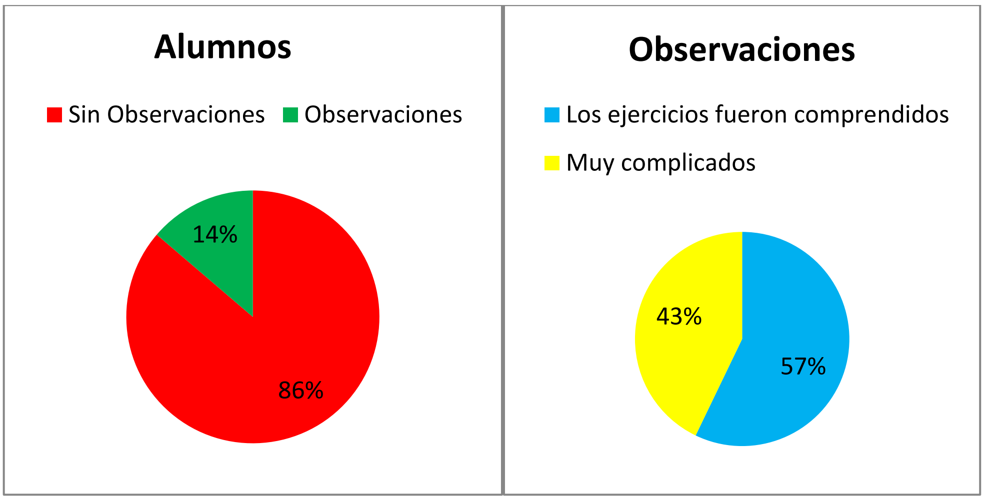


Fig.2. En este caso de 84 alumnos que rindieron solo 7 alumnos hicieron observaciones. Manifestaron que los ejercicios fueron comprendidos y para otros resultaron muy complicados.

En la Fig.2. Se muestran las observaciones realizadas en la segunda evaluación. En algunos casos hubo temas que no fueron desarrollados en su escuela secundaria y otros temas que sí pudieron recordar. La ausencia del espacio curricular matemática en los últimos años de la escuela secundaria genera dificultades que luego en general lo van superando a medida que van avanzando en la carrera.

A continuación se analiza los resultados de algunos ejercicios tomados en la evaluación final, esta ya si considerada para poder cursar Análisis Matemático I. Dicha evaluación fue de opción múltiple, pero ellos debían resolver cada ejercicio en papel y entregar su desarrollo. Se presentaron a rendir este examen 126 alumnos, y aprobaron 27 alumnos. Se analizaron solo 60 exámenes, la evaluación tenía 20 ejercicios a desarrollar en un tiempo máximo de 3 hs.

Se analizan los ejercicios que presentaron mayor dificultad comenzando por el ejercicio 2b y el ejercicio 6ª.

Se muestra el ejercicio y alguno de los errores que cometieron.

Ejercicio Nº 2b) Si $a = 3\sqrt{3}$ y $b = -\sqrt{27}$, decir cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera.

a)	$a + b$ es un número irracional [ ]	b)	$a \,.\, b$ es un número irracional [ ]
c)	$a - b$ es un número racional [ ]	d)	$\frac{a}{b}$ es un número racional [ ]

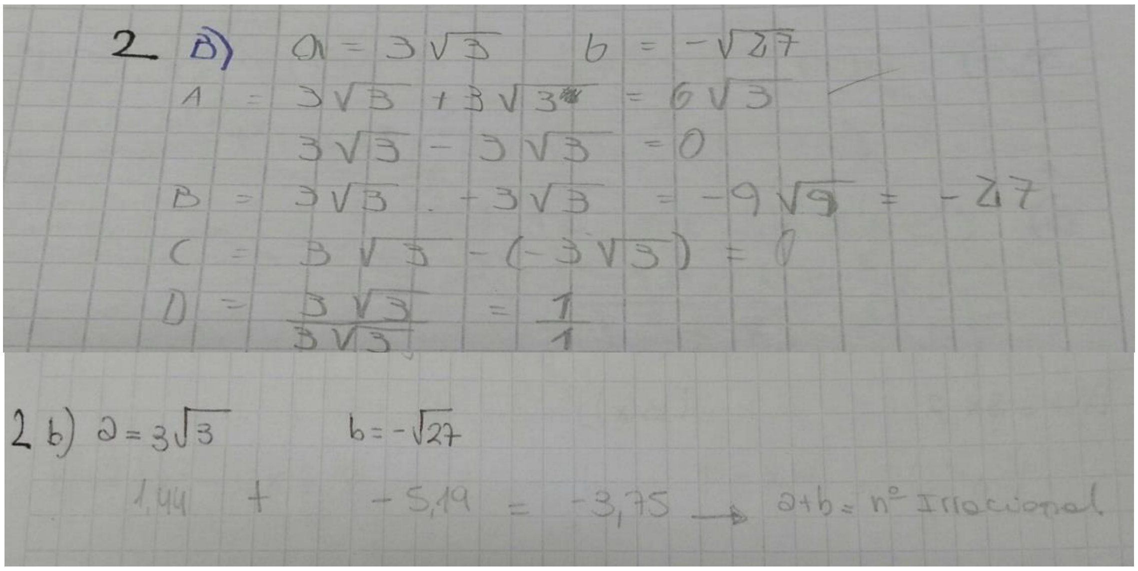


Fig.3. La dificultad principal de este ejercicio fue no saber interpretar a que conjunto numérico pertenece el resultado obtenido. A pesar de ser un tema que se trabaja en toda la escuela media.

Ejercicio Nº 6: A) La expresión algebraica $\dfrac{x^3 - b^3}{x^2 - b^2}$ simplificada es:

a)	$\dfrac{x^2 + xb + b^2}{x + b}$ [ ]	b)	$\dfrac{x^2 - xb + b^2}{x + b}$ [ ]
c)	$(x + b)$ [ ]	d)	$(x - b)$ [ ]

Se muestran algunos ejemplos de ejercicios realizados por los alumnos.

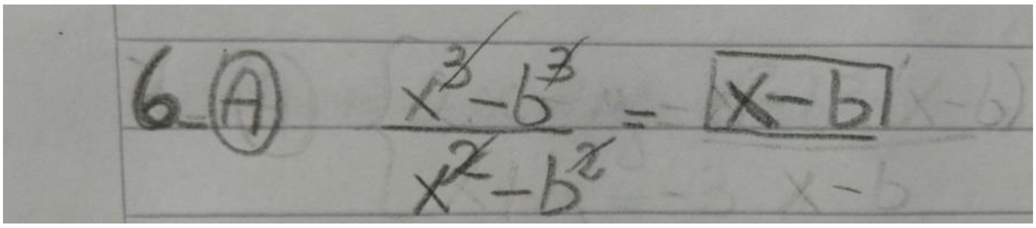


Fig. 4. No saben factorización y tienen dificultad en simplificar.

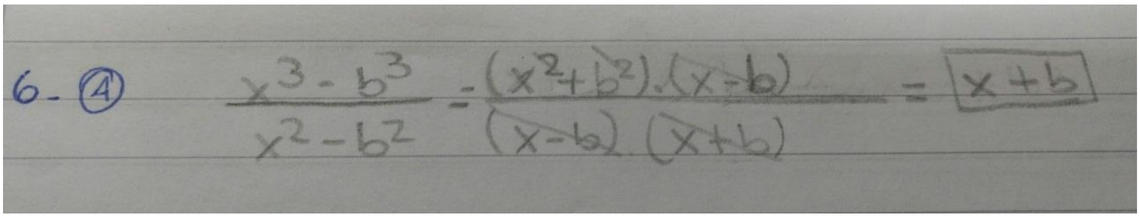


Fig. 5. Otro tipo de error es, teniendo las herramientas matemáticas hace un mal uso de ellas. Factoriza mal el numerador.

Por otro lado se tomaron problemas como el que se muestra a continuación.

Ejercicio Nº 9: A) Si a la tercera parte de un número le restamos la mitad de dicho número, obtenemos el número aumentado en cuatro unidades. ¿Cuál es el número?.

$a) x=-\frac{24}{7}$ [ ]	$b) x=-\frac{14}{3}$ [ ]	$c) x=\frac{8}{3}$ [ ]	$d) x=\frac{24}{7}$ [ ]

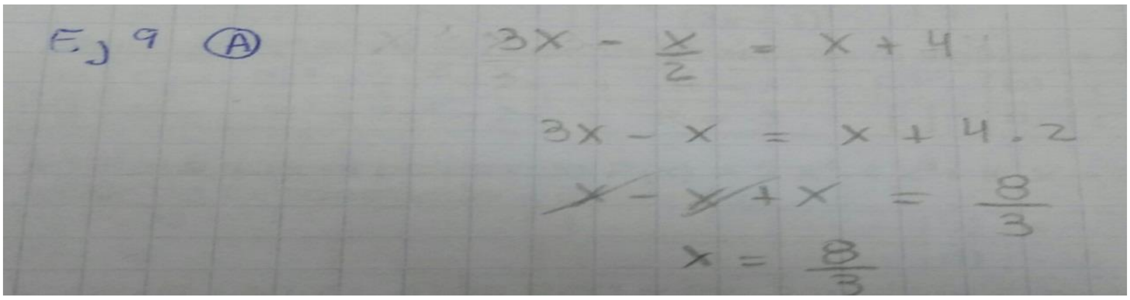


Fig. 6. La primera dificultad de este ejercicio era interpretar el lenguaje matemático y poder expresarlo en lenguaje simbólico para así poder resolver la ecuación planteada.

Por último se tomaron situaciones problemas, como los ejercicios 7-b . 8-b y 9-b

Ejercicio Nº 7: B) Cuál es el valor de "k" para que la ecuación $2kx^2-12x=8$ tenga raíz única (raíces reales y coincidentes)

$a) k=\frac{4}{9}$ [ ]	$b) k=\frac{9}{4}$ [ ]	$c) k=-\frac{3}{2}$ [ ]	$d) k=-\frac{9}{4}$ [ ]

La dificultad aquí fue no darles un ejercicio para resolver, sino pedirles que valor debe tomar "K" para que el ejercicio tenga la solución deseada.

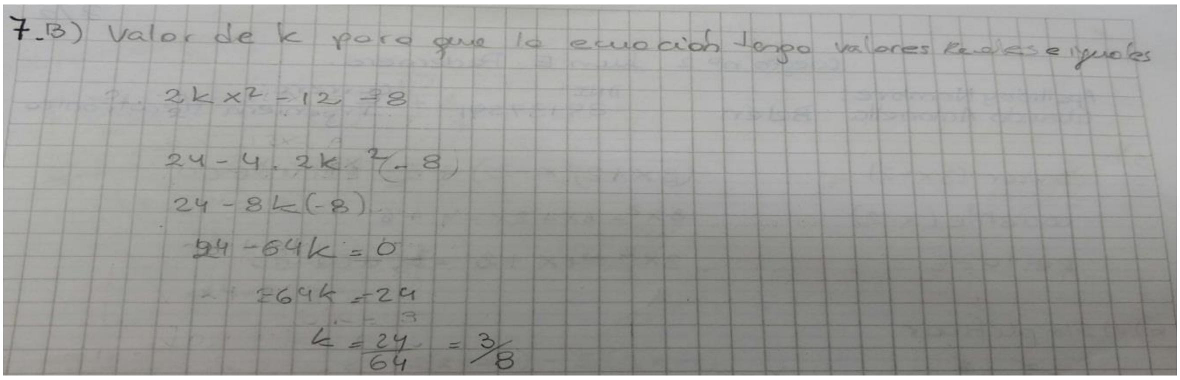


Fig.7. La interpretación del ejercicio está bien, pero el cálculo del discriminante es incorrecto.

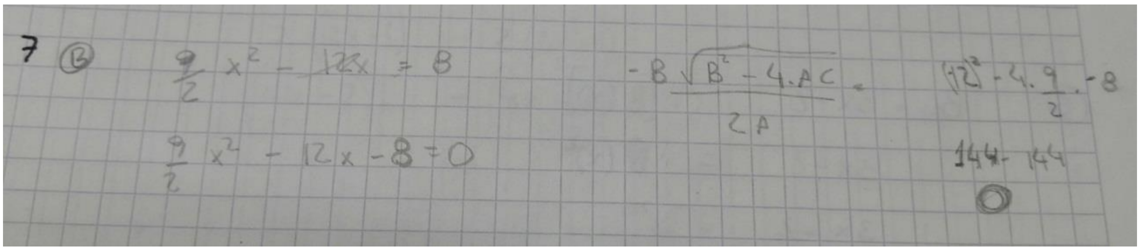


Fig. 3. La forma de resolver este ejercicio fue poner los valores de “k” que estaba en las opciones, ya que era un examen de múltiple opción, y reemplazarlo en la ecuación. Pero de todos modos el ejercicio esta incorrecto, hay un error de signo, que es muy frecuente en todos los ejercicios.

Ejercicio Nº 8: B) En un triángulo rectángulo la hipotenusa mide 25 cm y uno de los catetos 24 cm. Si α es el ángulo opuesto al menor de los catetos, entonces el sen (α) es:

$a)\frac{7}{25}$ [ ]	$b)\frac{25}{7}$ [ ]	$c)\frac{24}{25}$ [ ]	$d)\frac{7}{24}$ [ ]

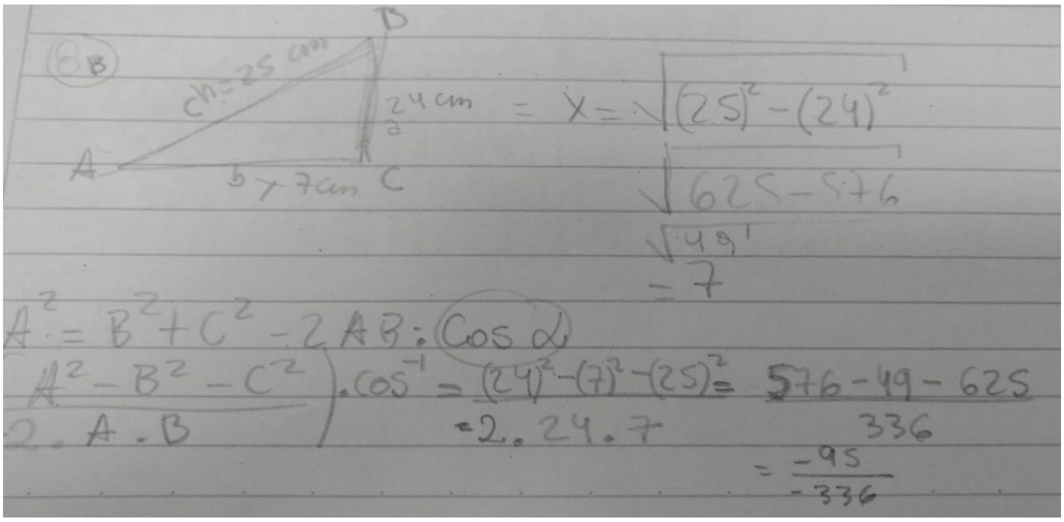


Fig. 9. En esta queda demostrado que el alumno no interpreta la consigna

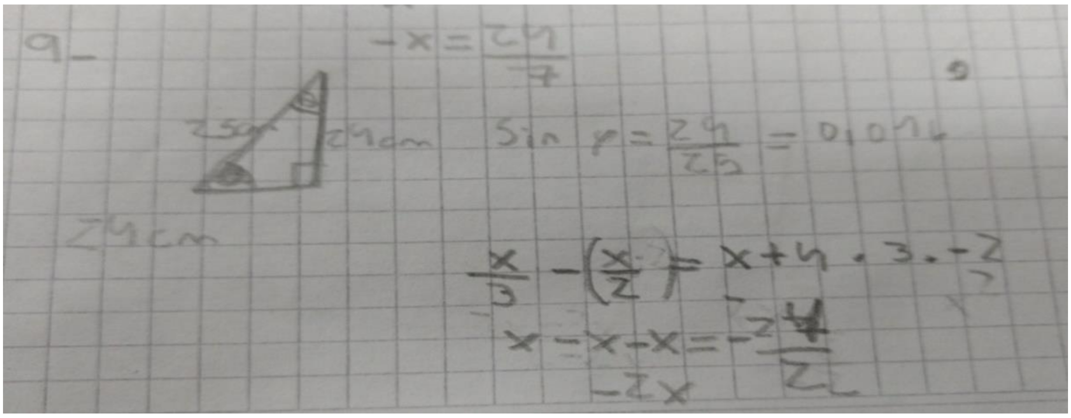


Fig. 4. En esta queda demostrado que el alumno no interpreta la consigna

Ejercicio Nº 9: B) La suma de los ángulos $\alpha = \frac{1}{3}\pi$ y $\beta = 2$ es igual a:

$a)\frac{7}{3}\pi$ [ ]	$b)$62º [ ]	$c)$*un ángulo* del segundo cuadrante [ ]	$d)$*un* ángulo del tercer cuadrante [ ]

A simple vista parece que fuera un ejercicio, una suma de ángulos. Pero luego podemos ver que es una situación problema, ya que para hacer la suma de esos dos ángulos deberíamos trabajar en radianes y luego pasarlo a grados, o pasarlos a grados a ambos ángulos y luego sumar.

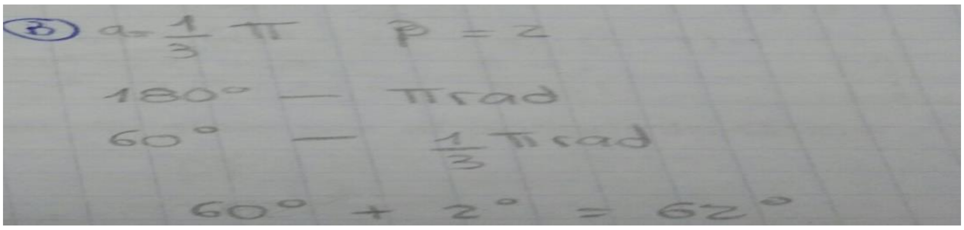


Fig. 5. Uno de los errores más comunes fue pasar uno de los ángulos a grados y al otro dejarlo expresado en radianes, y así efectuar la operación de suma.

Cuando uno realiza un análisis de los ejercicios que causaron mayor dificultad para resolverlo, nos encontramos que dentro de ellos tenemos ejercicio, problemas y situación problema, antes de continuar se hará una aclaración de la diferencia que hay en cada uno de estos vocablos que analiza [4] Hitt, F.

Plantea la diferencia entre un problema, un ejercicio y una situación problema estableciendo que:

- Ejercicio: Si en la lectura de un enunciado matemático recordamos de inmediato un proceso o algoritmo a seguir para resolverlo, se dice que un enunciado es un ejercicio.
- Problema**:** Si en la lectura del enunciado no recordamos de inmediato un proceso o algoritmo directo a utilizar, y la situación nos obliga a producir representaciones que os permitan ligar los aspectos matemáticos no en forma directa sino a través de articulaciones entre representaciones y procesos de tratamiento al interior de los registros involucrados, diremos que ese enunciado es un problema.
- Situación problema: La situación debe ser simple, fácil de entender (ello no implica que sea fácil de resolver), ella debe provocar la reflexión y por tanto no puede ser un ejercicio.

4 Conclusiones

- La enseñanza basada en la resolución de problemas está relacionada con la motivación de los alumnos, en tanto propicia una contextualización de las situaciones, próxima a lo que podría encontrarse en el mundo real.
- Considerar la competencia de resolución de problemas como el eje alrededor del cual giran las clases, debería ser un objetivo deseable para contribuir a desarrollar un pensamiento reflexivo y critico dando la posibilidad de modificar visiones negativas acerca de la matemática.

- Dificultad en la interpretación de los enunciados, el alumno hace una interpretación incorrecta de los enunciados.
- La continuidad de esta metodología de trabajo se continúa en Análisis Matemático I, primera materia que ellos tienen que cursar cuando ingresan a la universidad.

Referencias

1. Kilpatrick, J.: A retrospective account of the past twenty-five years of research on teaching mathematical problems solving. In E.A. Silver (Ed): Teaching and Learning mathematical problem solving: multiple research perspective. (1985).
2. Polya, G.: Como Plantear y Resolver Problemas. Trillas (Ed). (1989).
3. Ministerio de Educaciòn, Cultura y Deporte, Gobierno de España: 5 claves para entender la competencia matemática en #PISA. Educalab. http://blog.educalab.es/inee/2013/12/02/5-claves-para-entender-la-competencia-matematica-en-pisa/. (2013). Accedido el 14 de Marzo de 2017.
4. Hitt, F.: Actes de la CIEAEM-54. Gimenez, J.; Fitz Simons, G.; Han, C. (Eds): Une comparaison entre deux aproches, *enseigement des mathrmátiques sanso u avec logiciels et calculatrices simboliques*. (2004).

Volver al Índice

Introducción al Cálculo de la Raíz p_ésima Principal de una Matriz Cuadrada Real con Valores Propios Reales

Claudia R. Fernández, Leonor E. de la Torre, Sonia V. Jácamo, Graciela B. Ganyitano
Departamento de Matemática, Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de San Juan
Avenida Libertador G. S. Martín 1109 (O)
{cfernandez, etorre, sjacamo, gganyita}@unsj.edu.ar

Resumen. El cálculo de la raíz p-ésima de una matriz cuadrada A es muy utilizado en problemas de ingeniería. En general se encuentra teoría al respecto, no mostrándose ejemplos numéricos de cálculo. El objetivo del presente trabajo es mostrar el cálculo de la raíz p-ésima principal de una matriz cuadrada real $A,$ a través de ejemplos y luego así deducir el algoritmo general de cálculo. Se desarrollará un par de ejercicios para encontrar la raíz cúbica de una matriz cuadrada real. Uno con valores propios reales, positivos distintos y otro con valores propios repetidos por el método de Schur. Se empleará el método de Schur partiendo desde el cálculo de la descomposición de Schur para la matriz A.

Palabras Clave: Matriz cuadrada, Raíz p-ésima de una matriz, Método de Schur.

1 Introducción

Se han desarrollado varios métodos para encontrar las raíces p-ésimas de matrices Hoskins y Walton [1], Denman [2], Björck y Hammarling [3], Higham [4]. Björck y Hammarling [3], describen un método rápido y estable para calcular la raíz cuadrada y la raíz cúbica de una matriz, basado en la factorización de Schur $A = QSQ^T$ y una recursividad rápida. Una extensión de este algoritmo para calcular la raíz cuadrada real de una matriz real está dada por Higham [5].

Hoskins y Walton [1] introducen un método iterativo acelerado para calcular la raíz p-ésima de una matriz positiva. Este método se extiende más adelante para matrices reales generales, Denman [2].

Además, también se han desarrollado métodos para calcular las principales raíces p-ésima de matrices complejas Tsay, Shieh y Yates [6].

El cálculo de la raíz p-ésima de matrices tiene varias aplicaciones en el diseño y análisis de sistemas de control. Por ejemplo, las funciones raíz de una matriz, signo matricial asociado y las funciones sector se usan para resolver las ecuaciones de Lyapunov y Riccati en estabilidad y en problemas de control óptimos, Shieh, Tsai y Yates [7]. Se requieren también raíces de matrices de transición en algunas aplicaciones financieras, para el cálculo de la función matriz sector $\mathrm{sect}_p\,(A) = \,(A^p)^{-\frac{1}{p}}$, y para la función logaritmo matricial a través de la relación $\log(A) = p\log(A^{\frac{1}{p}})$, Higham[8].

Algunos métodos para calcular la raíz p-ésima presentan problemas de convergencia y estabilidad. Vamos a tratar de superar estas desventajas mediante la aplicación de una generalización de los métodos directos para calcular raíces cuadradas de la matriz propuestos por Björck y Hammarling [3] y Higham [4]. Björck y Hammarling [3] ofrecen un método basado en la descomposición de Schur y una recursión rápida. Sin embargo, si A es real, este método puede requerir aritmética compleja incluso si la raíz deseada que buscamos es real. Este método de Schur es numéricamente estable. Vamos a utilizar esta técnica para derivar un algoritmo para el cálculo de la raíz p-ésima de una matriz que utiliza sólo la aritmética real si la matriz dada es en sí real. El cálculo de la raíz p-ésima principal lo haremos a través de dos ejemplos, uno teniendo en cuenta valores propios reales positivos distintos y otro teniendo en cuenta valores propios reales positivos repetidos. Agilizaremos los cálculos con la ayuda del software MAPLE.

1.1 Teoría

Definición 1.1 Dada una matriz $A \in \mathbb{C}^{n\,x\,n}$, una matriz X es una raíz p-ésima de A si:

$$X^p = A \qquad \textbf{(1)}$$

Una matriz X raíz p-ésima puede no existir o puede haber infinitas soluciones de (1).
Para encontrar la matriz X que buscamos veamos los siguientes resultados:

Teorema1.1 Si $A \in \mathbb{C}^{n\,x\,n}$, entonces existe una matriz no singular $X \in \mathbb{C}^{n\,x\,n}$ tal que

$$X^{-1}AX = diag(J_{\lambda_1}, J_{\lambda_2}, \ldots, J_{\lambda_r}) \qquad \textbf{(2)}$$

donde J_{λ_i} denota el i-ésimo bloque de Jordan de A,

$$J_k = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_i & & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_i & 1 \\ 0 & 0 & & 0 & \lambda_i \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{n_i x\, n_i}, i = 1,2, \ldots, r, \sum_{i=1}^{r} n_i = n \qquad \textbf{(3)}$$

siendo $diag(J_{\lambda_1}, J_{\lambda_2}, \ldots, J_{\lambda_r})$ la forma canónica de Jordan de la matriz A.

Definición 1.2 Dada una función analítica $f(z)$, definida en un entorno abierto $U \subset \mathbb{C}$, que contiene al espectro de $A \in \mathbb{C}^{n\,x\,n}$, se define la matriz $f(A)$ como

$$f(A) = p(A) \qquad \textbf{(4)}$$

siendo $p(z)$ el polinomio de grado mínimo que interpola la función $f(z)$ en el espectro de A, es decir:

$$f^{(j)}(\lambda_i) = p^{(j)}(\lambda_i), j = 0.1, \ldots, n_i - 1, i = 1,2, \ldots, s \qquad \textbf{(5)}$$

con s el número de valores propios distintos de A, y n_i la mayor de las dimensiones de los bloques de Jordan que contiene al valor propio λ_i.

Teorema 1.2 Sea $A \in \mathbb{C}^{n\,x\,n}$ y $f(z)$ una función analítica definida en un entorno abierto $U \subset \mathbb{C}$, que contiene al espectro de $A \in \mathbb{C}^{n\,x\,n}$,

a. Si $A = X\,B\,X^{-1}$ entonces $f(A) = X\,f(B)\,X^{-1}$.
b. Si $A = diag(A_1, A_2, \ldots, A_r)$ con $A_i \in \mathbb{C}^{n_i\,x\,n_i}$, $i = 1,2, \ldots, r$, $\sum_{i=1}^{r} n_i = n$, entonces $f(A) = diag(f(A_1), f(A_2), \ldots, f(A_r))$

Corolario 1.1 Sea $A \in \mathbb{C}^{n\,x\,n}$ y $f(z)$ una función analítica definida en un entorno abierto $U \subset \mathbb{C}$, que contiene al espectro de $A \in \mathbb{C}^{n\,x\,n}$. Si $A = Q\,T\,Q^*$ es la descomposición de Schur de A, es decir $T \in \mathbb{C}^{n\,x\,n}$ triangular superior y $Q \in \mathbb{C}^{n\,x\,n}$ unitaria ($Q^* = Q^{-1}$, siendo Q^* la traspuesta conjugada de Q), entonces

$$f(A) = Q\,f(T)\,Q^* \qquad \textbf{(6)}$$

Corolario 1.2 Sea $A \in \mathbb{C}^{n\,x\,n}$ y $f(z)$ una función analítica definida en un entorno abierto $U \subset \mathbb{C}$, que contiene al espectro de $A \in \mathbb{C}^{n\,x\,n}$. Si

$$A = X\,diag\left(J_{\lambda_1}, J_{\lambda_2}, \ldots, J_{\lambda_r}\right) X^{-1} \qquad \textbf{(7)}$$

es la descomposición canónica de Jordan de la matriz A, entonces

$$f(A) = X\,diag\left(f(J_{\lambda_1}), f(J_{\lambda_2}), \ldots, f(J_{\lambda_r})\right) X^{-1} \qquad \textbf{(8)}$$

siendo

$$f(J_{\lambda_i}) = \begin{bmatrix} f(\lambda_i) & \frac{f^{(1)}(\lambda_i)}{1!} & \cdots & \frac{f^{(n_i-2)}(\lambda_i)}{(n_i-2)!} & \frac{f^{(n_i-1)}(\lambda_i)}{(n_i-1)!} \\ 0 & f(\lambda_i) & & \frac{f^{(n_i-3)}(\lambda_i)}{(n_i-3)!} & \frac{f^{(n_i-2)}(\lambda_i)}{(n_i-2)!} \\ & \vdots & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & f(\lambda_i) & \frac{f^{(1)}(\lambda_i)}{1!} \\ 0 & 0 & & 0 & f(\lambda_i) \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{n_i\,x\,n_i}, i = 1, \ldots, r \qquad \textbf{(9)}$$

Definición 1.3 Sea $A \in \mathbb{C}^{n\,x\,n}$ y $f(z)$ una función analítica definida en un entorno abierto $U \subset \mathbb{C}$, que contiene al espectro de $A \in \mathbb{C}^{n\,x\,n}$. Si (7) es la descomposición canónica de Jordan de la matriz A, se define la función matricial primaria de la matriz A, a la matriz $f(A)$, obtenida a partir de las expresiones (8) y (9).

La raíz p-ésima X, de una matriz puede no existir, o tener una o más soluciones. Si A es no singular, entonces admite al menos una raíz p-ésima; en caso contrario, la matriz A admite raíces p-ésimas dependiendo de la estructura de los divisores elementales de A, correspondiente a los valores propios nulos [9].

Entre las diferentes raíces p-ésimas de una matriz, se encuentra la raíz p-ésima principal. Esta se define como:

Definición 1.4 [10] Sea $A \in \mathbb{C}^{n\,x\,n}$ una matriz no singular con valores propios $\lambda_i, i = 1, \dots, n$ de manera que $\arg(\lambda_i) \neq \pi, i = 1, \dots, n$. La raíz p-ésima principal de A, denotada por $A^{1/p} \in \mathbb{C}^{n\,x\,n}$, se define como la matriz que satisface las dos condiciones siguientes:

a. $\left(A^{1/p}\right)^p = A$.

b. Los argumentos de los valores propios de la matriz $A^{1/p}$, se encuentran en el intervalo $(-\pi/p, \pi/p)$.

El teorema que se presenta a continuación permite caracterizar las raíces p-ésimas de una matriz $A \in \mathbb{C}^{n\,x\,n}$ a partir de su descomposición canónica de Jordan y determina cuales de ellas corresponden a funciones de matrices según la definición 1.2.

Teorema 1.3 Sea $A \in \mathbb{C}^{n\,x\,n}$ una matriz no singular con la descomposición canónica de Jordan $A = X\,J\,X^{-1} = X\,diag\left(J_{\lambda_1}, J_{\lambda_2}, \dots, J_{\lambda_r}\right) X^{-1}$ donde $J_{\lambda_r} \in \mathbb{C}^{n_i\,x\,n_i}$, $\sum_{i=1}^{r} n_i = n$ y s $(s \leq r)$ el número de valores propios distintos de A, entonces se verifican las siguientes propiedades:

a. A tiene precisamente p^s raíces de índice *p*, dadas por

$$F_j = X\,diag\left(f_{j_1}(J_{\lambda_1}), f_{j_2}(J_{\lambda_2}), \dots, f_{j_r}(J_{\lambda_r})\right) X^{-1}, j = 1, 2, \dots, p^s \qquad \textbf{(10)}$$

Correspondiente a todas las elecciones posibles de $j_1, j_2, \dots, j_r$, $j_r \in \{1, 2, \dots, p\}, i = 1, 2, \dots, r$ sujeta a las restricciones de que $j_k = j_l$ si $\lambda_k = \lambda_l$.

b. Si $s < r$, entonces A tiene raíces p-ésima que no son funciones de A. Estas raíces forman familias parametrizadas

$$F_j(U) = X\,U\,diag\left(f_{j_1}(J_{\lambda_1}), f_{j_2}(J_{\lambda_2}), \dots, f_{j_r}(J_{\lambda_r})\right) U^{-1} X^{-1}, p^s + 1 \leq j_i \leq p^r \qquad \textbf{(11)}$$

$j_i \in \{1, 2, \dots, p\}, i = 1, 2, \dots, r$, siendo U una matriz no singular arbitraria que conmuta con $diag\left(f_{j_1}(J_{\lambda_1}), f_{j_2}(J_{\lambda_2}), \dots, f_{j_r}(J_{\lambda_r})\right)$, y para cada j existen k y l dependientes de j de manera que $j_k = j_l$ si $\lambda_k \neq \lambda_l$.

Lema 1.1 [10] Si $\lambda \in \mathbb{C}$ es distinto de cero, entonces el bloque de Jordan

$$J_{\lambda_i} = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_i & & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_i & 1 \\ 0 & 0 & & 0 & \lambda_i \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{n_i x\, n_i}$$

tiene precisamente *p* raíces p-ésimas que son funciones de J_{λ_i}, definidas por

$$f_j(J_{\lambda_r}) = \begin{bmatrix} f_j(\lambda_i) & \frac{f_j^{(1)}(\lambda_i)}{1!} & \cdots & \frac{f_j^{(n_i-2)}(\lambda_i)}{(n_i-2)!} & \frac{f_j^{(n_i-1)}(\lambda_i)}{(n_i-1)!} \\ 0 & f_j(\lambda_i) & & \frac{f_j^{(n_i-3)}(\lambda_i)}{(n_i-3)!} & \frac{f_j^{(n_i-2)}(\lambda_i)}{(n_i-2)!} \\ & \vdots & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & f_j(\lambda_i) & \frac{f_j^{(1)}(\lambda_i)}{1!} \\ 0 & 0 & & 0 & f_j(\lambda_i) \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{n_i x\, n_i}, j = 1, 2, \dots, p$$

donde $f_j(\lambda_i) = \lambda^{\frac{1}{p}}$ y *j* denota una de las *p* ramas de la función raíz p-ésima en el entorno de λ_i.

2 Método de Schur

Mostraremos una generalización del método de Schur dado por Björck y Hammarling [3] y Higham [4] para calcular raíces cuadradas de una matriz A, para calcular una raíz p-ésima para $p \geq 2$ arbitrario, utilizando sólo aritmética real si la matriz A es real, con valores propios reales positivos distintos y valores reales positivos iguales.

2.1 Ejemplo

Sea $A \in \mathbb{R}^{n\,x\,n}$, entonces tiene una descomposición de Schur $A = QTQ^T$, con $T \in \mathbb{R}^{n\,x\,n}$ una matriz cuasi-triangular superior con bloques diagonales t_{ii} $(i = 1, \dots, n)$ de tamaño $1x1$ o $2x2$ correspondiente a valores propios reales o complejos conjugados respectivamente y $Q \in \mathbb{R}^{n\,x\,n}$ ortogonal.
Entonces por el Corolario 1.1 encontrar la raíz p-ésima de A es encontrar la raíz p-ésima de T. Esto es, encontrar la raíz p-ésima, $U \in \mathbb{R}^{n\,x\,n}$ de la matriz T, tal que $\sqrt[p]{T} = U$. Luego la raíz p-ésima de A será $X = QUQ^T$.

2.1.1 Ejemplo 1

Vamos a hallar la raíz cúbica de $A = \begin{bmatrix} 8 & 2 & 1 \\ 1 & 7 & 3 \\ 1 & 1 & 6 \end{bmatrix}$.

1. Encontremos la descomposición de Schur para A
   a. Ecuación característica

$$p_\lambda(A) = \det(A - \lambda I) = \lambda^3 - 2\lambda^2 + 140\lambda - 300 = 0 \qquad \textbf{(12)}$$

   b. Valores propios y vectores propios

$$\lambda_1 = 10, \text{ vector propio correspondiente } X_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_2 = 6, \text{ vector propio correspondiente } X_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \textbf{(13)}$$

$$\lambda_3 = 5, \text{ vector propio correspondiente } X_3 = \begin{bmatrix} 9/7 \\ 1 \\ 1/7 \end{bmatrix}$$

Como vemos tenemos tres valores propios reales y distintos, ahora encontramos la descomposición de Schur.

c. Tomamos el vector propio por ejemplo X_1, lo normalizamos y obtenemos una base ortonormal para el espacio nulo de él.

$$\widehat{X_1} = \frac{1}{\|X_1\|} X_1 = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{6} \\ -2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \end{bmatrix} \qquad \textbf{(14)}$$

$$S_\lambda = \{X \mid \widehat{X_1}X = 0\} = \left\{X \mid \frac{1}{\sqrt{6}}x - \frac{2}{\sqrt{6}}y + \frac{1}{\sqrt{6}}z = 0\right\} \qquad \textbf{(15)}$$

$$\alpha = \left\{ \begin{bmatrix} 1/\sqrt{6} \\ -2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1/\sqrt{30} \\ 2/\sqrt{30} \\ 5/\sqrt{30} \end{bmatrix} \right\} \qquad \textbf{(16)}$$

Con los vectores de la base α formamos una matriz ortogonal P tal que $P^T AP = A_1$, con A_1 una matriz que tiene en la primer columna uno de los valores propios de A y los demás elementos cero, con las demás columnas tomamos una submatriz C que repetimos el proceso.

$$P = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{6} & 2/\sqrt{5} & -1/\sqrt{30} \\ -2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{30} \\ 1/\sqrt{6} & 0 & 5/\sqrt{30} \end{bmatrix} \qquad \textbf{(17)}$$

$$A_1 = P^T AP = \begin{bmatrix} 5 & \sqrt{30}/10 & 2\sqrt{180}/15 \\ 0 & 9 & \sqrt{150}/5 \\ 0 & \sqrt{150}/10 & 7 \end{bmatrix} \qquad \textbf{(18)}$$

Consideramos la sub-matriz

$$C = \begin{bmatrix} 9 & \sqrt{150}/5 \\ \sqrt{150}/10 & 7 \end{bmatrix} \qquad \textbf{(19)}$$

La ecuación característica de C

$$p_\lambda(C) = \det(C - \lambda I) = \lambda^2 - 16\lambda + 60 = 0 \qquad \textbf{(20)}$$

Valores propios y vectores propios de C

$$\begin{aligned} &\lambda_1 = 6, \text{ vector propio correspondiente } X_1 = \begin{bmatrix} -\sqrt{6}/3 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &\lambda_2 = 10, \text{ vector propio correspondiente } X_2 = \begin{bmatrix} \sqrt{6} \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \qquad \textbf{(21)}$$

Tomamos el vector propio por ejemplo X_1, lo normalizamos y obtenemos una base ortonormal para el espacio nulo de él.

$$\widehat{X_{11}} = \frac{1}{\|X_1\|} X_1 = \begin{bmatrix} -\sqrt{6}/\sqrt{15} \\ 3/\sqrt{15} \end{bmatrix} \qquad \textbf{(22)}$$

$$S_\lambda = \{X \mid \widehat{X_{11}} X = 0\} = \left\{ X \mid \frac{-\sqrt{6}}{\sqrt{15}} x + \frac{3}{\sqrt{15}} = 0 \right\} \qquad \textbf{(23)}$$

$$\alpha_1 = \left\{ \begin{bmatrix} -\sqrt{6}/\sqrt{15} \\ 3/\sqrt{15} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3/\sqrt{15} \\ \sqrt{6}/\sqrt{15} \end{bmatrix} \right\} \qquad \textbf{(24)}$$

Con los vectores de α_1 formamos la matriz unitaria V

$$V = \begin{bmatrix} -\sqrt{6}/\sqrt{15} & 3/\sqrt{15} \\ 3/\sqrt{15} & \sqrt{6}/\sqrt{15} \end{bmatrix} \quad \textbf{(25)}$$

Obtenemos la matriz Q a través de

$$Q = P\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & V \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} \\ -2/\sqrt{6} & 0 & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} \end{bmatrix} \quad \textbf{(26)}$$

Así obtendremos la matriz T buscada haciendo

$$Q^T A Q = T = \begin{bmatrix} 5 & -\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} \\ 0 & 6 & -\sqrt{6}/2 \\ 0 & 0 & 10 \end{bmatrix} \quad \textbf{(27)}$$

Obtenida la descomposición de Schur de la matriz A procedemos a encontrar U, la raíz cúbica de T. Para ello seguimos los siguientes pasos:

i. Llamamos $V = U^2$ entonces $VU = T$. Como conocemos T, debemos calcular los elementos u_{ij} y v_{ij}, para obtener estos elementos lo hacemos por columnas. Como debemos encontrar una matriz triangular superior, de la primera columna solo debemos encontrar el elemento u_{11}, para esto tomamos t_{11}, luego pasamos a la columna dos comenzando desde el elemento de la diagonal hacia arriba, esto es obtenemos el elemento u_{22} conociendo t_{22} y luego los elementos v_{12} y u_{12}. Continuando así, llegamos a la última columna, para nuestro caso la columna 3, obteniendo el elemento u_{33} y luego hacia arriba encontramos los elementos u_{32} y v_{32} y por último hallamos los elementos u_{31} y v_{31}. Esto es:

Columna 1

$$v_{11}u_{11} = {u_{11}}^2\, u_{11} = {u_{11}}^3 = t_{11} \text{ entonces } u_{11} = \sqrt[3]{t_{11}} = \sqrt[3]{5} \quad \textbf{(28)}$$

Columna 2

$$v_{22}u_{22} = {u_{22}}^2\, u_{22} = {u_{22}}^3 = t_{22} \text{ entonces } u_{22} = \sqrt[3]{t_{22}} = \sqrt[3]{6} \quad \textbf{(29)}$$

$$v_{11}u_{12} + v_{12}u_{22} = t_{12}$$

$$u_{12} = \frac{t_{12}}{{u_{11}}^2 + u_{11}u_{22} + {u_{22}}^2} = -0.1855799709 \quad \textbf{(30)}$$

Columna 3

$$v_{33}u_{33} = {u_{33}}^2\, u_{33} = {u_{33}}^3 = t_{33} \text{ entonces } u_{33} = \sqrt[3]{t_{33}} = \sqrt[3]{10} \quad \textbf{(31)}$$

$$v_{22}u_{23} + v_{23}u_{33} = t_{23}$$

$$u_{23} = \frac{t_{23}}{{u_{22}}^2 + u_{22}u_{33} + {u_{33}}^2} = -0.1032809277 \quad \textbf{(32)}$$

$$v_{11}u_{13} + v_{12}u_{23} + v_{13}u_{33} = t_{13}$$

$$u_{13} = \frac{t_{13} - (u_{11}u_{12}u_{23} + u_{12}u_{22}u_{23} + u_{12}u_{23}u_{33})}{{u_{11}}^2 + u_{11}u_{33} + {u_{33}}^2} = -0.07253601896 \quad \textbf{(33)}$$

ii. Escribimos la matriz U

$$U=\begin{bmatrix}\sqrt[3]{5} & -0.1855799709 & -0.07253601896\\ 0 & \sqrt[3]{6} & -0.1032809277\\ 0 & 0 & \sqrt[3]{10}\end{bmatrix} \quad \textbf{(34)}$$

iii. Encontramos ahora raíz cúbica de A

$$X=Q\,U\,Q^T=\begin{bmatrix}1.990340866 & 0.1732202732 & 0.0660756271\\ 0.0752020757 & 1.892322669 & 0.02894913681\\ 0.0888917489 & 0.0888917488 & 1.798867696\end{bmatrix} \quad \textbf{(35)}$$

2.1.2 Ejemplo 2

Vamos a hallar la raíz cúbica de $B=\begin{bmatrix}4 & 0 & -1\\ 4 & 2 & -2\\ 7 & 1 & -2\end{bmatrix}$.

1. Encontremos la descomposición de Schur para B

a. Ecuación característica

$$p_\lambda(B)=\det(B-\lambda I)=-\lambda^3+4\lambda^2-5\lambda+2=0 \quad \textbf{(36)}$$

b. Valores propios y vectores propios

$$\lambda_1=2,\text{ vector propio correspondiente } X_1=\begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix}$$

$$\lambda_2=1,\text{ vector propio correspondiente } X_2=\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix} \quad \textbf{(37)}$$

Como vemos tenemos dos valores propios reales y λ_2 se repite, ahora encontramos la descomposición de Schur.

c. Tomamos el vector propio por ejemplo X_1, lo normalizamos y obtenemos una base ortonormal para el espacio nulo de él.

$$\widehat{X_1}=\frac{1}{\|X_1\|}X_1=\begin{bmatrix}1/\sqrt{6}\\ 1/\sqrt{6}\\ 2/\sqrt{6}\end{bmatrix} \quad \textbf{(38)}$$

$$S_\lambda=\{X \mid \widehat{X_1}X=0\}=\left\{X \mid \frac{1}{\sqrt{6}}x+\frac{1}{\sqrt{6}}y+\frac{2}{\sqrt{6}}z=0\right\} \quad \textbf{(39)}$$

$$\alpha=\left\{\begin{bmatrix}1/\sqrt{6}\\ 1/\sqrt{6}\\ 2/\sqrt{6}\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-1/\sqrt{2}\\ 1/\sqrt{2}\\ 0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-1/\sqrt{3}\\ -1/\sqrt{3}\\ 1/\sqrt{3}\end{bmatrix}\right\} \quad \textbf{(40)}$$

Con los vectores de la base α formamos una matriz ortogonal P tal que $P^TAP=A_1$, con A_1 una matriz triangular superior que tiene en la diagonal ya los valores propios de A.

$$P=\begin{bmatrix}1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{3}\\ 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{3}\\ 2/\sqrt{6} & 0 & 1/\sqrt{3}\end{bmatrix} \quad \textbf{(41)}$$

$$A_1 = P^T A P = \begin{bmatrix} 2 & -3\sqrt{3} & -{}^{11\sqrt{2}}/_{2} \\ 0 & 1 & -{}^{\sqrt{6}}/_{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \textbf{(42)}$$

Como vemos ya tenemos la matriz triangular que necesitamos entonces esta es la matriz T buscada

$$T = \begin{bmatrix} 2 & -3\sqrt{3} & -{}^{11\sqrt{2}}/_{2} \\ 0 & 1 & -{}^{\sqrt{6}}/_{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \textbf{(43)}$$

Obtenida la descomposición de Schur de la matriz A procedemos a encontrar la raíz cúbica U, de T. Para ello seguimos los pasos como en el ejemplo 1.1.1

i. Llamamos $V = U^2$ entonces $VU = T$. Encontramos los elementos u_{ij} y v_{ij},

Columna 1

$$v_{11}u_{11} = {u_{11}}^2\, u_{11} = {u_{11}}^3 = t_{11} \text{ entonces } u_{11} = \sqrt[3]{t_{11}} = \sqrt[3]{2} \quad \textbf{(44)}$$

Columna 2

$$v_{22}u_{22} = {u_{22}}^2\, u_{22} = {u_{22}}^3 = t_{22} \text{ entonces } u_{22} = \sqrt[3]{t_{22}} = \sqrt[3]{1} = 1 \quad \textbf{(45)}$$

$$v_{11}u_{12} + v_{12}u_{22} = t_{12}$$

$$u_{12} = \frac{t_{12}}{{u_{11}}^2 + u_{11}u_{22} + {u_{22}}^2} = -1.350589394 \quad \textbf{(46)}$$

Columna 3

$$v_{33}u_{33} = {u_{33}}^2\, u_{33} = {u_{33}}^3 = t_{33} \text{ entonces } u_{33} = \sqrt[3]{t_{33}} = \sqrt[3]{1} = 1 \quad \textbf{(47)}$$

$$v_{22}u_{23} + v_{23}u_{33} = t_{23}$$

$$u_{23} = \frac{t_{23}}{{u_{22}}^2 + u_{22}u_{33} + {u_{33}}^2} = -0.4082182906 \quad \textbf{(48)}$$

$$v_{11}u_{13} + v_{12}u_{23} + v_{13}u_{33} = t_{13}$$

$$u_{13} = \frac{t_{13} - (u_{11}u_{12}u_{23} + u_{12}u_{22}u_{23} + u_{12}u_{23}u_{33})}{{u_{11}}^2 + u_{11}u_{33} + {u_{33}}^2} = -2.488904216 \quad \textbf{(49)}$$

ii. Escribimos la matriz U

$$U = \begin{bmatrix} \sqrt[3]{2} & -1.350589394 & -2.488904216 \\ 0 & 1 & -0.4082182906 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \textbf{(50)}$$

iii. Encontramos ahora raíz cúbica de B

$$X = Q\,U\,Q^T = \begin{bmatrix} 1.853175432 & 0.0734122823 & -0.3333333326 \\ 1.186508767 & 1.406745616 & -0.6666666660 \\ 2.039684200 & 0.4801578984 & 0.10\ 10^{-8} \end{bmatrix} \quad \textbf{(51)}$$

Ahora, después del desarrollo del cálculo de la raíz cúbica de estas matrices, estamos en condiciones de presentar el algoritmo general para el cálculo de la raíz p-ésima de una matriz cuadrada con valores propios reales positivos.

2.2 Algoritmo para encontrar la raíz p-ésima de una matriz real con valores propios reales positivos

Para hallar la raíz p-ésima de una matriz $A \in \mathbb{R}^{n\,x\,n}$ con valores propios positivos procedemos de la siguiente forma:

1. Encontramos su descomposición de Schur $A = Q\,T\,Q^T$, con $T \in \mathbb{R}^{n\,x\,n}$ una matriz triangular superior con bloques diagonales t_{ii} $(i = 1, \dots, n)$ de tamaño $1x1$ correspondiente a valores propios reales y $Q \in \mathbb{R}^{n\,x\,n}$ ortogonal.
2. A partir de T, encontramos la raíz p-ésima U cuyos elementos son de la forma:
   Definimos V^q, con $q = 1, \dots, p-1$, matrices de la misma estructura triangular superior de T tal que

$$V^{p-2} = U^{p-1} \text{ entonces } V^{p-2}U = U^{p-1}U = U^p = T \quad \textbf{(52)}$$

$$V^{p-3} = U^{p-2} \text{ entonces } V^{p-3}U = U^{p-2}U = U^{p-1} = V^{p-2} \quad \textbf{(53)}$$

$$\vdots$$

$$V^2 = U^3 \text{ entonces } V^2U = U^3U = U^4 = V^3 \quad \textbf{(54)}$$

$$V^1 = U^2 \text{ entonces } V^1U = U^2U = U^3 = V^2 \quad \textbf{(55)}$$

$$V^0 = U \text{ entonces } V^0U = UU = U^2 = V^1 \quad \textbf{(56)}$$

   Luego

$$T = V^{p-2}U \quad \textbf{(57)}$$

3. Vemos que para $i < j$, tenemos los elementos t_{ij} de la forma

$$t_{ij} = \sum_{k=0}^{p-1} u_{ii}^{p-1-k}\, u_{ij}u_{jj}^k + \sum_{k=0}^{p-2} u_{ii}^{p-2-k}\, b_{ij}^k \quad \text{con } b_{ij}^k = \sum_{l=i+1}^{j-1} u_{il}v_{lj}^k \quad \textbf{(58)}$$

$$v_{ij}^k = \sum_{l=0}^{k} u_{ii}^{k-l}\, u_{ij}v_{jj}^l + \sum_{l=0}^{p-1} u_{ii}^{p-1-l}\, b_{ij}^l \quad \text{con } b_{ij}^l = \sum_{k=i+1}^{j-1} u_{ik}v_{kj}^l \quad k = 1{:}\,p-2 \quad \textbf{(59)}$$

4. Encontramos los elementos de la matriz U por columnas, primero el elemento de la diagonal y luego los elementos que se encuentran en la misma columna hacia arriba, despejando de las ecuaciones (58) y (59), tenemos:
   Los elementos de la diagonal principal como:

$$u_{ii} = t_{ii}^{1/p},\ v_{ii}^1 = u_{ii}^2, \dots, v_{ii}^{p-2} = u_{ii}^{p-1} \quad \textbf{(60)}$$

   y los restantes elementos de la columna a través de:

$$u_{ij} = \frac{t_{ij} - \sum_{k=0}^{p-2} u_{ii}^{p-2-k}\, b_{ij}^k}{\sum_{k=0}^{p-1} u_{ii}^{p-1-k}\, u_{jj}^k} \quad \textbf{(61)}$$

La raíz p-ésima de una matriz A es una herramienta para lograr el cálculo de la función $\log(A)$ y también, junto a las funciones $\cos(A)$ y $\operatorname{sen}(A)$ permite hallar la solución de algunos sistemas de ecuaciones diferenciales lineales de orden 2 o superior, cuyas aplicaciones a la ingeniería están siendo objeto de estudio por las autoras del presente trabajo, integrantes del equipo de trabajo del proyecto de investigación Estudio de las Funciones Matriciales y sus Aplicaciones.

3 Conclusiones y trabajos futuros

Este trabajo ha descrito uno de los algoritmos para el cálculo de la raíz p-ésima de una matriz, como es el método de Schur a través de dos ejemplos desde la descomposición de Schur de una matriz cuadrada real. Uno con valores propios reales positivos distintos y otro con valores propios reales repetidos hasta el cálculo de la raíz cúbica de las mismas, con ayuda del software MAPLE para los cálculos. Los autores hemos considerado que mediante ejemplos es una forma adecuada para entender mejor el método y así luego llegar al algoritmo para el cálculo de la raíz p-ésima de una matriz. Como se puede observar la complejidad del cálculo depende de la matriz considerada. Una continuación del presente trabajo consistirá en diseñar el algoritmo basado en este método para matrices reales con valores propios complejos trabajando de la misma forma a través de ejemplos numéricos para luego poder aplicarlos a problemas de la ingeniería.

Referencias

1. Hoskins W. D.; Walton D. J.: A faster, more stable method for computing the pth roots of positive definite matrices. Linear Algebra and its applications, Vol. 26, pp. 139–163, (1979).
2. Denman E. D.: Roots of real matrices. Linear Algebra and its applications Vol. 36, pp.133–139 (1981)
3. Björck A.; Hammarling S.: A Schur method for the square root of a matrix. Linear Algebra and its applications, Vols. 52-53, pp. 127–140 (1983)
4. Higham N. J.: Newton's method for the matrix square root. Mathematics of Computation, Vol.46, N°174, pp. 537–549 (1986)
5. Higham N. J.: Computing real square roots of a real matrix. Linear Algebra and its applications, Vols. 88-89, pp. 405–430 (1987)
6. Tsay Y. T.; Shieh L. S.; Tsai J. S. H.: A fast method for computing the principal nth root of complex matrices. Linear Algebra and its applications, Vol. 76, pp. 205–221 (1986)
7. Shieh L. S.; Tsai J. S. H.; Yates R. E.: Fast and stable algorithms for computing the principal nth root of a complex matrix and the matrix sector function. Computers & Mathematics with Applications, Vol. 15, N° 11, pp. 903–913 (1988)
8. Higham N. J.: Matrix pth Root. Functions of Matrices Theory and Computation. SIAM, pp.173 –191 (2008)
9. Gantmacher F. R.: Matrix Equations: The Theory of Matrices. Chelsea. New York, pp. 231–239 (1990)
10. Smith M.I.: A Schur algorithm for computing matrix pth roots. Society for Industrial and Applied Mathematics SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications, Vol. 24 N°4, pp. 971–989 (2003)

Volver al Índice

Determinación de Variables que Influyen en el Rendimiento Académico

Myriam Herrera[1], Susana Ruiz[2], María Romagnano[1], María Ines Lund[1]
[1] Instituto de Informática, FCEFN, UNSJ
Av. Ignacio de la Roza 590 (O), Rivadavia, San Juan, CPA: J5402DCS
{mherrera, maritaroma, mlund}@iinfo.unsj.edu.ar,
[2] Departamento de Informática, FCEFN, UNSJ
Av. Ignacio de la Roza 590 (O), Rivadavia, San Juan, CPA: J5402DCS
sbruizr@yahoo.com.ar

Resumen. Habitualmente, cualquiera sea la disciplina de la que se trate, es necesario identificar aspectos que diferencien ciertos grupos respecto de otros, y así poder realizar predicciones futuras. El análisis de conglomerados y el análisis discriminante permiten clasificar a partir de características similares, teniendo en cuenta variables asociadas. Este trabajo se encuentra enmarcado dentro del proyecto "Técnicas de clasificación aplicadas al rendimiento académico", del Instituto de Informática de la FCEFyN de la UNSJ. El objetivo del proyecto es aplicar ambas técnicas o una nueva, para analizar el rendimiento académico universitario en alumnos de la FCEFyN y de Matemática de la FFHyA de la UNSJ, ya que éste constituye un factor imprescindible en el abordaje del tema de la calidad de la educación superior. Se presentan avances logrados en el proyecto en torno a la problemática de la determinación de las variables que influyen en el rendimiento académico de los alumnos.

Palabras Clave: Calidad educativa universitaria, Clasificación, Conglomerado, Rendimiento académico.

1 Introducción

En muchos problemas de gran interés, de distinta naturaleza, se analizan variables a partir de conjuntos de datos con el propósito de determinar variables influyentes que permitan definir patrones y realizar pronósticos que ayuden a la toma de decisiones en torno a la problemática planteada. Tal es el caso del análisis del rendimiento académico, en torno a la problemática de valorar la calidad educativa. Los datos se han convertido en un recurso crítico en muchas organizaciones, en particular de las instituciones y centros educativos, y por lo tanto el acceso eficiente a estos, el compartirlos, extraer información de los mismos y hacer uso de la información se transforma en una inminente necesidad. La necesidad de comprender conjuntos de datos grandes y complejos, ricos en información es común a todos los campos de los negocios, de la ciencia, de la ingeniería entre otros [1, 2].

La habilidad para extraer conocimiento útil escondido en los datos y actuar sobre el conocimiento está transformándose en algo cada vez más importante en el mundo competitivo de estos días. Existen varios trabajos de investigación relacionados con la integración de fuentes de datos dispersas a través de sitios diferentes, y la extracción de la información extraída de esas bases de datos en la forma de patrones y tendencias.

En muchas ocasiones el campo de actuación del Aprendizaje Automático se solapa con el de la Estadística, ya que estas disciplinas se basan en el análisis de datos. Sin embargo, el aprendizaje automático se centra más en el estudio de la complejidad computacional de los problemas. Este solapamiento se produce por medio de la Minería de Datos o Data Mining. La Minería de Datos o Exploración de Datos (etapa de análisis de "Knowledge Discovery in Databases" o KDD) es un campo de la Estadística y de las Ciencias de la Computación referido al proceso que intenta descubrir patrones en grandes volúmenes de conjuntos de datos. Utiliza los métodos de la Inteligencia Artificial, Aprendizaje Automático, Estadística y Sistemas de Bases de Datos.

Los modelos supervisados o predictivos requieren de un conjunto de pruebas y de interacciones de entrenamiento. Las técnicas usadas son la clasificación (Análisis Discriminante) y la predicción de valores. Los modelos no supervisados o descriptivos descubren patrones y tendencias en los datos actuales (no utilizan datos históricos). Las técnicas usadas son: Asociación, Segmentación o Clustering (Análisis de Conglomerados).

El Análisis Discriminante cuenta con grupos de datos conocidos o pre-especificados, así como observaciones de unidades cuya pertenencia a los grupos, en términos de los grupos conocidos, es desconocida inicialmente y tiene que ser determinada a través del análisis de los datos. Este tipo de problemas de clasificación es referido como reconocimiento de patrones asistido o aprendizaje con una guía; en terminología estadística cae bajo el título de Análisis Discriminante.

En particular en problemas de clasificación donde los grupos son ellos mismos desconocidos a priori y el principal propósito del análisis es determinar los grupos a partir de los propios datos, de modo que las unidades dentro del mismo grupo sean en algún sentido más similares u homogéneas que aquellas que pertenecen a grupos diferentes, son referidos al reconocimiento de patrón no supervisado o conocimiento sin guía, y, en terminología estadística cae bajo el título de Análisis de Conglomerados.

Aunque Análisis Discriminante y Análisis de Conglomerados constituyen una dicotomía útil de los problemas de clasificación, hay, por supuesto, muchos problemas de la vida real que combinan las características de ambas situaciones [3, 4, 5]. Por lo tanto, podría usarse alguna de estas técnicas o una combinación de ellas para analizar el rendimiento académico universitario de los alumnos ya que éste constituye uno de los temas más candentes en la educación, en la evaluación de la calidad educativa [6].

El rendimiento académico es considerado un concepto multidimensional, relativo y contextual, difícil de considerar como un concepto unificado y aceptado por todos. La tendencia es considerar el rendimiento académico como resultados, ya sean inmediatos y diferidos. Los inmediatos están determinados por los resultados o calificaciones que el alumno obtiene a lo largo de sus estudios hasta obtener el título. Diferidos se refiere a la aplicación que la formación que el alumno recibió al titularse tiene en la sociedad; es decir la aplicación de su formación en el campo laboral [7]. Tejedor define estas dos dimensiones del rendimiento académico como: “Rendimiento académico medido a través de las calificaciones (exámenes o evaluaciones exitosas)” y “Rendimiento medido a través del éxito en la culminación a tiempo, el retraso o abandono” [8].

Álvaro, por su parte, expone un concepto más evolucionado al mencionar que el rendimiento académico se basa en la voluntad del propio alumno, sin considerar el nivel intelectual, las aptitudes, actitudes y factores ambientales. También hace mención al rendimiento desde el punto de vista de la capacidad y como el resultado del trabajo escolar, en el sentido de cómo el alumno aplica lo aprendido en la vida real [9].

Además, la calidad en educación es un concepto complejo, que no tiene una definición clara, por lo que existen una serie de interpretaciones diversas sobre lo que es calidad [10, 11, 12].

En una sociedad de la información, como la actual, uno de los desafíos de la educación es transformar la gran cantidad de información disponible en conocimiento personal para desenvolverse con eficacia en la vida. Generalmente cuando alguien busca un puesto de trabajo, la pregunta que se suele plantear al aspirante es: ¿Qué sabe hacer?. La respuesta está relacionada con lo que ha aprendido. Por ello tener éxito o fracaso en los estudios es de vital importancia de cara al futuro profesional de cualquier persona [13]. Los estudios del rendimiento académico en la educación superior parecen ser en la coyuntura mundial actual aún más valiosos, debido al dinamismo que experimenta el sector universitario en el marco de una sociedad caracterizada por el rápido avance del conocimiento, la fluidez en la transmisión de la información y los cambios acelerados en las estructuras sociales. En ese contexto adquiere valor la calificación del capital humano y ello va en estrecha vinculación con los resultados e investigaciones sobre el rendimiento académico de los estudiantes universitarios. Se puede afirmar que en general un indicador directo de la calidad de la enseñanza es el rendimiento académico medido a través del nivel alcanzado por los estudiantes. Vista la importancia del tema, en el proyecto se pretende determinar cuáles son las principales variables que influyen en el rendimiento como así también se detectarán tipologías básicas de grupos obtenidos de los alumnos universitarios tanto de la Facultad de Ciencias Exactas como de los alumnos de Matemática de la Facultad de Filosofía de la UNSJ. Se plantea obtener una regla de clasificación que podrá ser utilizada en el pronóstico de adscripción al grupo de rendimiento establecido para nuevos estudiantes.

2 Contexto

Este trabajo se encuentra enmarcado dentro del proyecto de investigación: “Técnicas de clasificación aplicadas al rendimiento académico”. El proyecto es de carácter bi-anual (iniciándose en el año 2016) y financiado por la UNSJ. Se encuentra inserto en el marco de las líneas de investigación de los Gabinetes de Estadística y de Ingeniería de Software del Instituto de Informática de la Facultad de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales (FCEFN), de la Universidad Nacional de San Juan (UNSJ). Además se vincula a cátedras de Matemática de las carreras de Licenciatura en Ciencias de la Computación y Licenciatura en Sistemas de Información, que se dictan en la Institución.

3 Marco teórico

La *Minería de Datos*. Consiste en el proceso de descubrimiento de patrones o de conocimiento útil desde fuentes de datos tales como bases de datos, textos, imágenes, la Web, etc. Entre las tareas más comunes se tiene el aprendizaje supervisado o clasificación, aprendizaje no supervisado o clustering, reglas de asociación, patrones secuenciales. Generalmente una aplicación de minería de datos comienza con un entendimiento del dominio de aplicación realizando un análisis de datos, identificando las fuentes de donde provienen estos datos y los datos objetivos. Con los datos, la minería de datos puede realizar los siguientes pasos:

- Pre-procesamiento: la mayoría de las veces los datos deben ser limpiados para remover ruidos o eliminar atributos que sean innecesarios.
- Data mining: los datos procesados previamente sirven de datos de entrada a un algoritmo de minería de datos, el cual produce patrones o conocimiento.
- Post-procesamiento: en algunas aplicaciones puede resultar que no todos los patrones descubiertos sean útiles. Este paso consiste en detectar cuáles de esos patrones son útiles [14].

El *Análisis de Datos Multivariantes* tiene por objeto el estudio estadístico de varias variables aleatorias medidas en elementos de una población. Pretende los siguientes objetivos:

1. Resumir el conjunto de variables en unas pocas nuevas variables, construidas como transformaciones de las originales, con la mínima pérdida de información.
2. Encontrar grupos, en los datos, si existen.
3. Clasificar nuevas observaciones en grupos definidos.
4. Relacionar dos conjuntos de variables.

Este tipo de análisis proporciona métodos objetivos para conocer cuántas variables indicadoras (factores) son necesarias para describir una realidad compleja y determinar su estructura. Las técnicas de análisis multivariante tienen aplicaciones en todos los campos científicos y comenzaron desarrollándose para resolver problemas de clasificación en Biología, se extendieron para encontrar variables indicadoras y factores en Psicometría, Marketing y las Ciencias Sociales y han alcanzado una gran aplicación en Ingeniería y Ciencias de la computación como herramientas para resumir la información y diseñar sistemas de clasificación automática y de reconocimiento de patrones.

El Análisis de Conglomerados y el Análisis Discriminante son técnicas que nos permiten clasificar sujetos u objetos a partir de características similares. Estas dos técnicas se pueden diferenciar en la manera en la que extraen conocimiento útil; escondido en los datos. El problema de Discriminación aparece en muchas situaciones en que necesitamos clasificar elementos con información incompleta. Por ejemplo, la aceptación o rechazo de créditos que utilizan variables medibles (ingresos, antigüedad en el trabajo, patrimonio, etc) para prever el comportamiento futuro. En ingeniería este problema se ha estudiado con el nombre de Reconocimiento de Patrones (pattern recognition), para diseñar máquinas capaces de clasificar de manera automática. Por ejemplo, reconocer voces y sonidos, clasificar billetes o monedas, reconocer caracteres, etc. Cuando se habla de discriminación se está refiriendo a las técnicas reciben el nombre de clasificación supervisada, para indicar que conocemos una muestra de elementos bien clasificados que sirve de pauta o modelo para la clasificación de las siguientes observaciones.

Existen varios enfoques posibles para este problema. El análisis clásico de discriminación lineal y el debido a Fisher, basado en el supuesto de la normalidad multivariada de las variables consideradas y que es óptimo bajo dicho supuesto y la igualdad de varianzas poblacionales. La teoría es válida para variables continuas transformadas, cuya transformación sea convenientemente elegida para garantizar la normalidad. Si las variables son continuas y cumplen el supuesto de normalidad multivariada, pero no así el supuesto de igualdad de varianzas, puede resultar útil la discriminación cuadrática. Este último análisis puede resultar ser útil también cuando las variables son continuas y no normales. Cuando las variables son discretas, o discretas y continuas, para clasificar, la hipótesis de normalidad multivariante es poco realista. En estos casos se utilizan otros enfoques del problema que pueden funcionar mejor. Estos son: discriminación logística, arboles de clasificación, redes neuronales y métodos no paramétricos tales como: vecinos más próximos y máquinas del vector soporte El *Análisis de Conglomerado* (clusters) tiene por objeto agrupar elementos en grupos homogéneos en función de las similitudes o similaridades entre ellos. Normalmente se agrupan las observaciones, pero el análisis de conglomerados puede también aplicarse para agrupar variables. Estos métodos se conocen también con el nombre de métodos de clasificación automática o no supervisada, o de reconocimiento de patrones sin supervisión. El análisis de conglomerados estudia tres tipos de problemas:

Partición de los datos. Disponemos de datos que se sospecha son heterogéneos y se desea dividirlos en un número de grupos prefijado, de manera que cada elemento pertenezca a uno y solo uno de los grupos, todo elemento quede clasificado, y cada grupo sea internamente homogéneo.

Construcción de jerarquías. Deseamos estructurar los elementos de un conjunto de forma jerárquica por su similitud.

Clasificación de variables. En problemas con muchas variables se pueden dividir las variables en grupos y así poder reducir la dimensionalidad [15].

4 Trabajos relacionados

En el trabajo de Herrera, Mallea, Ruiz y Millán se plantea que es necesario caracterizar el perfil social y cultural, no sólo de los estudiantes ingresantes sino de los que permanecen y egresan de las carreras; lo cual implica el estudio del comportamiento de indicadores diferenciales. Proponen identificar las tipologías a través del análisis multidimensional de datos [16]. Luego en [17] Herrera, Mallea y Ruiz continúan con la investigación proponiendo un cuestionario de calidad de vida y salud estudiantil para conocer la situación personal y colectiva del estudiante universitario. La información recabada les permitió identificar aspectos relevantes que tienen que ver con la calidad de vida y la salud del estudiante: cómo vive, los años de vida universitaria, cómo cuida su salud, qué hábitos y costumbres de vida son los más representados, cómo valora su vida y su salud. En [18] el autor aplicó el enfoque de función de producción para estimar los determinantes del rendimiento académico de una cohorte universitaria de la Facultad de Ciencias Económicas de la UNLP, utilizó un modelo de datos censurado en valores mínimos y máximos (modelo tobit). En este trabajo se expusieron resultados que muestran que el desempeño es superior para las mujeres, para los estudiantes que ingresan más jóvenes a la universidad, para quienes provienen de hogares con padres más educados, y para los estudiantes que no trabajan. Además revela que el desempeño en el ciclo inicial muestra una importante relación con el desempeño posterior. Por otra parte se observa un alto grado de deserción en etapas tempranas de la carrera. También se menciona el significativo el impacto positivo de provenir de una escuela secundaria privada. Adicionalmente se identificaron como momentos claves de la carrera a los meses de julio y agosto de primer y segundo año, lo cual es relevante para planificar actividades de apoyo académico.

En [19] la autora realiza una revisión de los hallazgos de investigación que se señalan como posibles factores asociados al rendimiento académico en estudiantes universitarios, y su vinculación con la calidad de la educación superior pública en general. Considera que el análisis del rendimiento académico de los estudiantes universitarios mediante la investigación constituye un factor imprescindible en los debates en torno a la búsqueda de la calidad de la educación superior, es un indicador fundamental que permite desde esta óptica una aproximación a la realidad educativa; ofrece, además, sólida información para la toma de decisiones. No obstante, plantea que el rendimiento académico es el resultado de la suma de diferentes y complejos factores que actúan en la persona que aprende.

García menciona que la equidad en el desempeño y graduación de los estudiantes universitarios en América latina es un tema altamente relevante, en particular desde la masificación de la educación superior. Analiza las investigaciones desde el 2002 y el 2012 que analizaron los factores que inciden sobre el rendimiento académico y el abandono de los estudiantes de las universidades nacionales de la Argentina. El trabajo concluye señalando cuáles son las principales causas detectadas en las investigaciones examinadas, los modelos teóricos y la metodología empleadas en éstos [20].

En [21] se realiza un estudio con estudiantes universitarios de la carrera de psicología para examinar sus contextos universitario y familiar, sus percepciones acerca del apoyo que les brinda su familia, los problemas que enfrentan en su proceso académico, las expectativas propias y las familiares hacia su carrera y otros. En este trabajo se demostró que existe relación entre el apoyo que los estudiantes perciben y su ejecución académica, así como la importancia que tiene el incluir a la familia para promover y elevar el rendimiento académico, y abatir la deserción y el abandono de sus estudios.

Los estudios desarrollados en [22, 23, 24] han encontrado que los elementos con mayor influencia en el desempeño académico son las características propias de los estudiantes y su entorno familiar. Asimismo, existe evidencia de que el desempeño en la escuela secundaria podría condicionar los resultados en la universidad.

En Argentina, Di Gresia, Fazio, Porto, Ripani y Sosa Escudero realizaron un estudio muy completo. El objetivo central del trabajo es estudiar la transición de 10 estudiantes universitarios entre su ingreso a la universidad y la salida por graduación o abandono. En particular, se analizan los determinantes del desempeño utilizando información de un censo realizado en 1994. La medida de rendimiento que eligieron para realizar el análisis fue la cantidad de materias aprobadas por año. Como factores explicativos se emplearon cinco grupos de variables: la universidad y la carrera, las características del estudiante y su familia, el tipo de escuela secundaria a la que asistió, el sendero de la carrera y las horas de estudio. Realizaron estimaciones considerando todos los alumnos y cada universidad por separado. Asimismo, calcularon los efectos sobre el valor esperado de la variable dependiente y sobre toda su distribución condicional. En este último caso se aplica el método de cuantiles introducido por Koenker y Basset (1978). A su vez, ser argentino, no soltero, haber concurrido a un escuela de enseñanza media privada, haberse mudado para asistir a la universidad, tener padres con mayor instrucción, o destinar más horas al estudios son elementos también asociados a resultados superiores. Igualmente, detectaron que trabajar tiene un efecto positivo y que el origen del financiamiento de la educación es importante. Sin embargo tener que viajar entre jurisdicciones para asistir a la universidad podría no ser favorable. Respecto de las heterogeneidades no observables y su posible interacción con los factores observables, las estimaciones por cuantiles sugirieron que las mismas son bien relevantes y que el efecto de varios determinantes del desempeño difiere según donde se lo mida. Por ejemplo, haber asistido a una escuela secundaria privada influye de manera positiva pero el impacto sólo resulta significativo en la cola inferior de la distribución [25].

En [26] se menciona que existen variables que afectan directamente a la deserción, pero algunas otras la afectan de manera indirecta. Además, plantea que los factores económicos influyen en la deserción. Se parte del análisis de los diferentes teóricos para generar un cuestionario confiable y válido (instrumento), que tenga posibilidad de predicción y que además permita conocer las variables que afectan a la deserción.

5 Antecedentes de este trabajo

Este trabajo se sustenta en el proyecto mencionado precedentemente, pero además obtiene sus antecedentes de los siguientes proyectos:

- "Algoritmos de Clasificación de Procesos Multivariados Utilizando Medidas de Asociación Espacial". Proyecto acreditado por el CICITCA con vigencia desde el 1 de enero de 2014 al 31 de diciembre de 2015. Código: 21 E / 948.
- "Determinación y Comparación de Perfiles Sociales y Culturales de Estudiantes Universitarios a través de Técnicas Estadísticas Multivariadas". Proyecto acreditado por el CICITCA con vigencia desde el 1 de enero de 2014 al 31 de diciembre de 2015. Código 21 F/ 982.
- "Clasificación Espacial Multivariada". Proyecto acreditado por el CICITCA con vigencia desde el 1 de enero de 2011 al 31 de diciembre de 2013. Código: 21/E 878
- "Reducción y Selección de Variables en la Clasificación Digital". Proyecto acreditado por el CICITCA con vigencia desde el 1 de enero de 2008 al 31 de diciembre de 2010. Código: 21 E/ 820.
- "Aplicación de una Metodología en la Medición de la Calidad del Proceso Enseñanza Aprendizaje en la Universidad". Proyecto acreditado por el CICITCA con vigencia desde el 1 de mayo de 2003 al 31 de diciembre de 2005.

6 Avances y resultados obtenidos

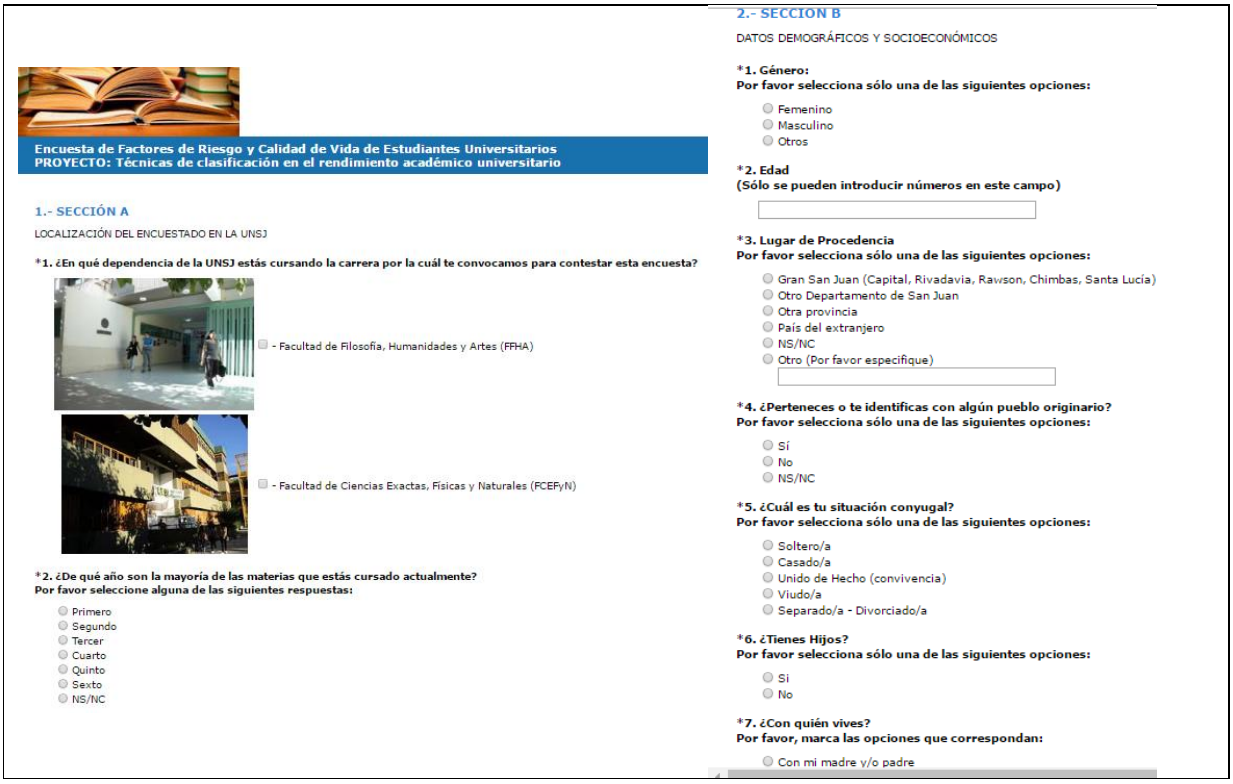
Para llevar a cabo el desarrollo del proyecto, el equipo de trabajo partió de la *premisa*: *"Determinar las principales variables que influyen en el rendimiento, detectando tipologías básicas de grupos obtenidos de los alumnos universitarios tanto de la Facultad de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales y de la Facultad de Filosofía, Humanidades y Artes de la Universidad Nacional de San Juan, aplicando técnicas de clasificación (supervisada y no supervisada)"*.

En su primera etapa, el *marco de trabajo* propuesto fue estudiar y analizar técnica de agrupamiento o clasificación de objetos o sujetos que permitan identificar las variables influyentes en el rendimiento académico de los alumnos para poder definir un indicador que conlleve a la calidad educativa, teniendo en cuenta el marco teórico considerado como así también los trabajos previos relacionados.

Por lo tanto, para cumplir con la premisa planteada y el marco de trabajo propuesto, se planifica llevar a cabo las siguientes *actividades*:

Actividad N° 1: Confeccionar una encuesta a partir de la cual se generará la base de datos.

Se confeccionó una encuesta para relevar las variables influyentes. Esta encuesta se puede consultar en: https://www.encuestafacil.com/RespWeb/Qn.aspx?EID=2197195. La misma fue elaborada con la herramienta web de encuestas online *EncuestaFácil.com*, y cuenta con varias secciones (Fig. 1).



Encuesta de Factores de Riesgo y Calidad de Vida de Estudiantes Universitarios
PROYECTO: Técnicas de clasificación en el rendimiento académico universitario

1.- SECCIÓN A

LOCALIZACIÓN DEL ENCUESTADO EN LA UNSJ

*1. ¿En qué dependencia de la UNSJ estás cursando la carrera por la cuál te convocamos para contestar esta encuesta?

- Facultad de Filosofía, Humanidades y Artes (FFHA)
- Facultad de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales (FCEFyN)

*2. ¿De qué año son la mayoría de las materias que estás cursado actualmente?
Por favor seleccione alguna de las siguientes respuestas:

- Primero
- Segundo
- Tercer
- Cuarto
- Quinto
- Sexto
- NS/NC

2.- SECCION B

DATOS DEMOGRÁFICOS Y SOCIOECONÓMICOS

*1. Género:
Por favor selecciona sólo una de las siguientes opciones:

- Femenino
- Masculino
- Otros

*2. Edad
(Sólo se pueden introducir números en este campo)

*3. Lugar de Procedencia
Por favor selecciona sólo una de las siguientes opciones:

- Gran San Juan (Capital, Rivadavia, Rawson, Chimbas, Santa Lucía)
- Otro Departamento de San Juan
- Otra provincia
- País del extranjero
- NS/NC
- Otro (Por favor especifique)

*4. ¿Perteneces o te identificas con algún pueblo originario?
Por favor selecciona sólo una de las siguientes opciones:

- Sí
- No
- NS/NC

*5. ¿Cuál es tu situación conyugal?
Por favor selecciona sólo una de las siguientes opciones:

- Soltero/a
- Casado/a
- Unido de Hecho (convivencia)
- Viudo/a
- Separado/a - Divorciado/a

*6. ¿Tienes Hijos?
Por favor selecciona sólo una de las siguientes opciones:

- Si
- No

*7. ¿Con quién vives?
Por favor, marca las opciones que correspondan:

- Con mi madre y/o padre

Fig 1. Encuesta de factores de riesgo y calidad de vida de estudiantes universitarios.

Las variables consideradas en la encuesta se pueden agrupar:

1. Variables que caracterizan la Facultad, Universidad y la carrera/s que cursa el estudiante (*Sección A*).
2. Variables que representan características personales del estudiante y de su familia (salud, procedencia, tipo de vivienda, dinero) (*Secciones B* y *E*).
3. Variables asociadas al rendimiento (promedio, año que cursa…) (*Sección C*).
4. Variables que representan el esfuerzo y motivación del estudiante (Ej. hs. de estudio, si la carrera mejora su futuro, etc.) (*Sección C*).

Actividad N° 2: Poner en práctica la encuesta con alumnos de la FCEFyN y FFHyA de la UNSJ.
Esta etapa se encuentra en ejecución. En especial se tiene interés inicial de trabajar con alumnos correspondientes a los primeros años de las carreras con asignaturas correspondientes al área Matemática. La información se debe volcar a una base de datos para ser procesada. Resulta útil observar la dimensionalidad considerable de datos. Es decir, grandes tablas de datos (Fig. 2) con muchos individuos y muchas características o variables (categóricas).

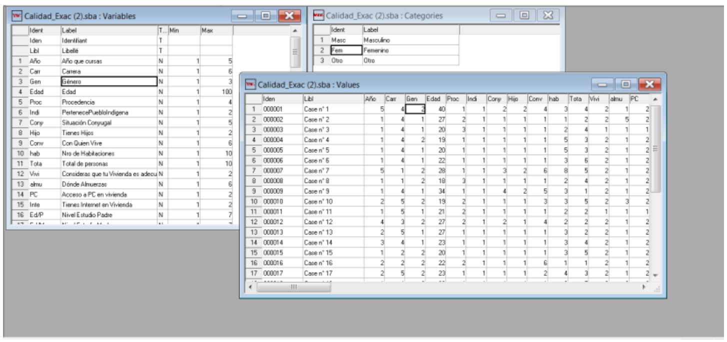
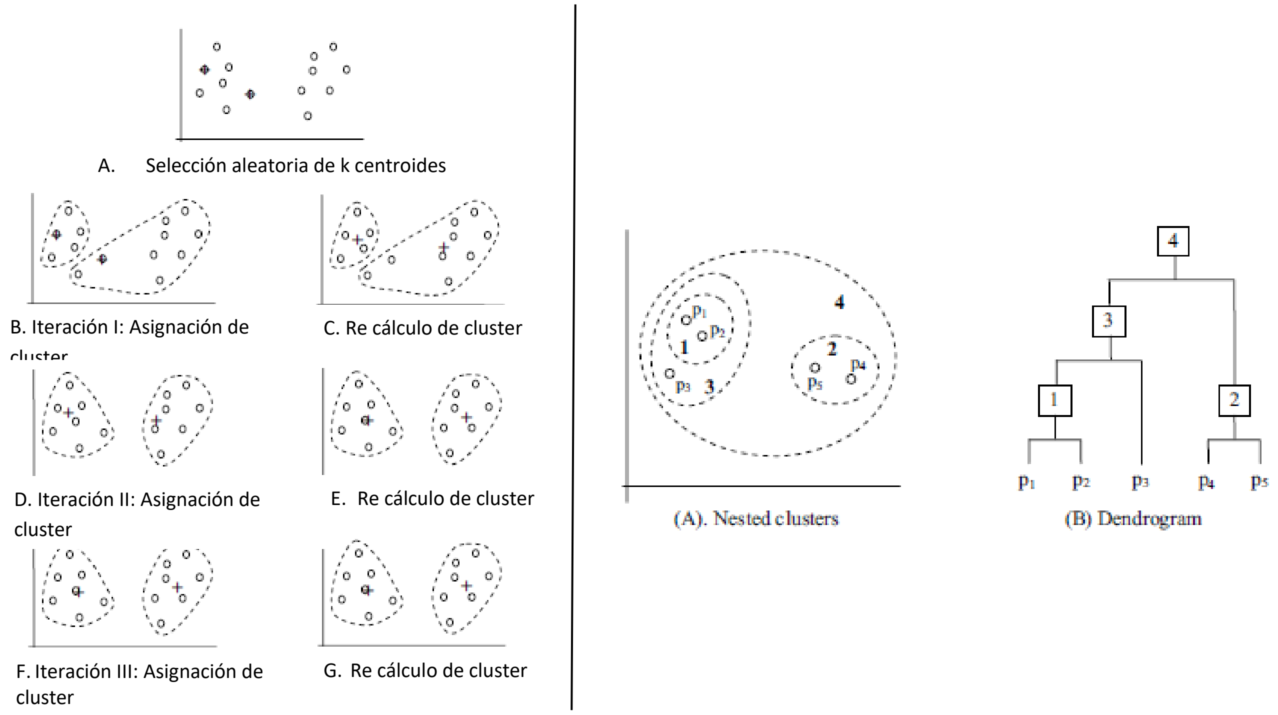


Fig. 2. Base de datos de individuos con sus respectivos valores de variables o características.

Actividad N° 3: Estudiar y analizar técnicas que permitan clasificar sujetos y objetos a partir de características similares.

Para el Análisis de Conglomerado se estudiaron las técnicas:

- Particional (Fig. 3.(a)):
  - K-Means
  - K-modes
  - C-means o Fuzzy C-menas
  - Soft-means
- Jerárquico (Fig. 3.(b)):
  - Aglomerativo (bottom up)
  - Divisivo (top down)



(a) (b)

Fig. 3. (a) Algoritmo K-means (adaptado de Han & Kamber, 2006); (b) Algoritmo de clustering jerárquico aglomerativo (adaptado de Han & Kamber, 2006).

Se propone realizar pruebas con la técnica de análisis de conglomerado aglomerativo usando, en esta instancia, como paquete de software estadístico SPAD (Fig. 4). SPAD (Système Portable pour l´Analyse de Données) es un software estadístico adecuado al tratamiento exploratorio multivariante de grandes tablas de datos. Este programa fue diseñado específicamente para realizar análisis de correspondencias (simple y múltiple), clasificación automática, análisis de componentes principales, análisis discriminante, entre otros. Se tendrá en cuenta que cuando se dispone de numerosas variables para realizar el agrupamiento, es común utilizar (antes del agrupamiento) técnicas de reducción de dimensionalidad, lo cual se conoce como Análisis de Componentes principales (cuando se tienen variables continuas) o Análisis Factorial de Correspondencias (cuando se cuenta con variables categóricas)). El Análisis Factorial de Correspondencias Múltiples permite explorar la posibilidad de relaciones entre un gran número de variables, intentando explicar estas correlaciones, utilizando un menor número de variables. Generalmente, aquel conjunto de variables que estén más correlacionadas entre sí será representado por un único factor o dimensión subyacente.

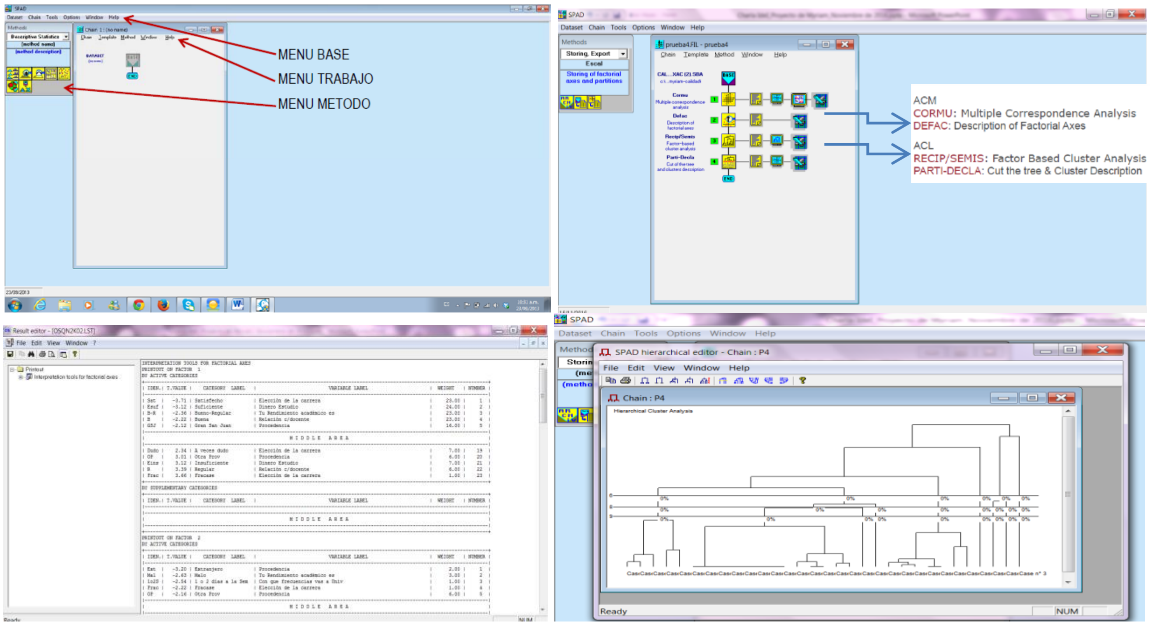


Fig. 4. Entorno de trabajo en SPAD

Además para aplicar el Análisis Discriminante se estudiaron las técnicas (Fig. 5):

- Árboles de decisión.
- Clasificador Bayesiano
- SVM
- Reglas de asociación

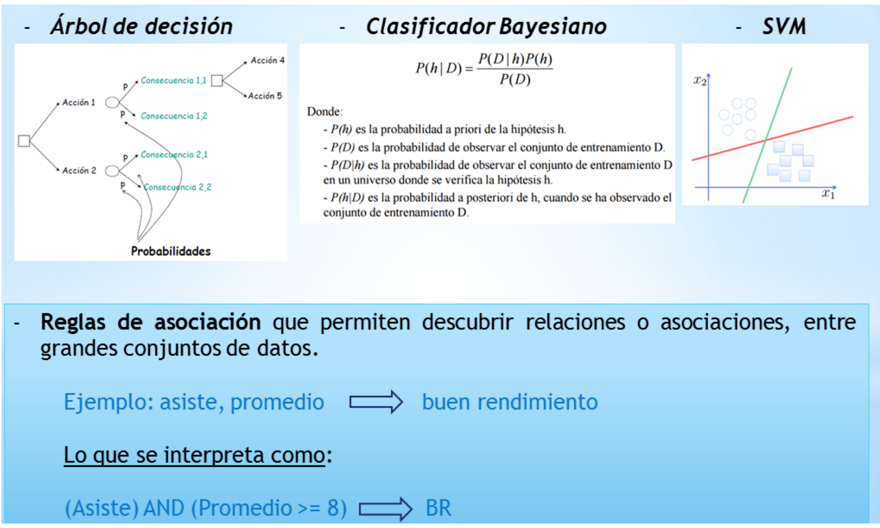
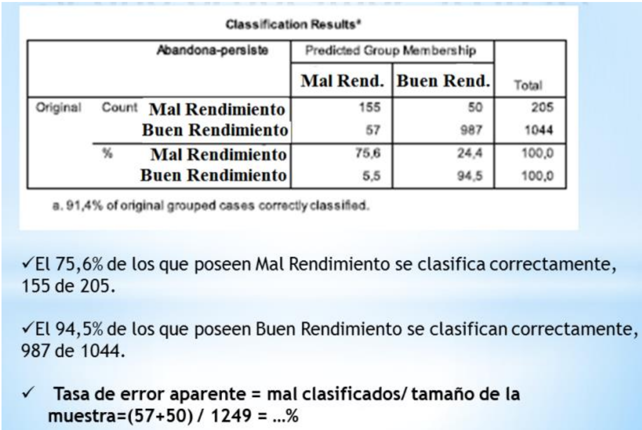


Fig. 5. Técnicas para realizar análisis discriminante

Por último, se prevé realizar pruebas con la técnica de análisis discriminante usando como paquete de software estadístico SPSS (Fig. 6). SPSS se ajusta a las necesidades de nuestro proyecto ya que tiene capacidad para trabajar con grandes volúmenes de datos, presenta una interfaz sencilla y permite realizar clasificación y clustering.

Fig. 6. Entorno de trabajo en SPSS.

Las actividades posteriores conducirán a contar con una función discriminante que explique cómo se comportan las variables en el rendimiento académico, como en el ejemplo que puede observarse en la Fig. 7.



Classification Results[a]

		Abandona-persiste	Predicted Group Membership		Total
			Mal Rend.	Buen Rend.	
Original	Count	Mal Rendimiento	155	50	205
		Buen Rendimiento	57	987	1044
	%	Mal Rendimiento	75,6	24,4	100,0
		Buen Rendimiento	5,5	94,5	100,0

a. 91,4% of original grouped cases correctly classified.

✓El 75,6% de los que poseen Mal Rendimiento se clasifica correctamente, 155 de 205.

✓El 94,5% de los que poseen Buen Rendimiento se clasifican correctamente, 987 de 1044.

✓ **Tasa de error aparente = mal clasificados/ tamaño de la muestra=(57+50) / 1249 = ...%**

Fig. 7. Ejemplo de los resultados del clasificador que se esperan obtener

7 Conclusiones y trabajos futuros

El estudio de los determinantes del rendimiento universitario no sólo es relevante desde el punto de vista académico, sino que además resulta indispensable en cualquier sociedad para el diseño de políticas que promuevan una educación de calidad y equidad. Desde la aprobación y puesta en marcha del proyecto denominado "Técnicas de Clasificación Aplicadas al Rendimiento Académico" del Instituto de Informática de la FCEFyN de la UNSJ, dicha institución educativa expresa su interés y preocupación en trabajar sobre la temática, desde la perspectiva de analizar el rendimiento académico aplicando técnicas de clasificación.

A través de la ejecución del mencionado proyecto se presta atención especial en reunir datos pertinentes de alumnos que cursan asignaturas correspondientes a los primeros años del área Matemática, debido a que son justamente estas asignaturas las correspondientes al ciclo inicial de las carreras de estudio; que según investigaciones previas, están asociadas al rendimiento de años posteriores. Se confecciona un cuestionario para relevar las variables influyentes y se estudian distintas técnicas para la clasificación del rendimiento académico. Las variables consideradas en la encuesta caracterizan a la facultad, a la universidad y a la/s carrera/s que cursa el estudiante. Representan características personales del estudiante y de su familia; asociadas al rendimiento. Además, representan el esfuerzo y motivación del estudiante.

Como trabajo a futuro, durante el año 2017, queda aún identificar qué variables influyentes tienen mayor poder de discriminación y de predicción en la clasificación de sujetos u objetos; y establecer un procedimiento, función discriminante, para clasificar a un individuo a partir de los valores de un conjunto de variables. Y por último, evaluar la exactitud de la clasificación mediante la regla de decisión que asigne un objeto nuevo a uno de los grupos prefijados con un cierto grado de riesgo.

Referencias

1. Ato, M.y López, J.A. (1996). Análisis estadístico para datos categóricos. Madrid. Editorial Síntesis. (1996).
2. WEB. Data mining made faster: New method eases analysis of “multidimensional” information, ScienceDaily. https://www.sciencedaily.com/release s/2010/07/100722075013.htm. Accedido el 15 de enero de 2017.
3. Torrado Fonseca, M.y Berlonga-Silvente, V. Análisis Discriminante mediante SPSS. *REIRE -Revista d’Innovació i Recerca en Educació* (2013).
4. Benzécri, J. P. L´Analyse des données, T.I La taxonomie T.II L´Analyse des correspondances. Dunod. París. (1976).
5. González López, I. Realización de un Análisis Discriminante Explicativo del Rendimiento Académico en la Universidad. *Revista Investigación Operativa*, Vol 22, N º 1, pp. 43-59. Universidad de Córdoba. (2004).
6. Diaz, M.; Peio, A.; Arias, J.; Escudero, T.y Rodriguez, S.; Vidal, G. J. Evaluación del Rendimiento Académico en la Enseñanza Superior. Comparación de resultados entre alumnos procedentes de la LOGSE y del COU. *Revista de Investigación Educativa* Vol 2, N° 20, pp. 357-383 (2002).
7. De Miguel Díaz, M. y Arias Blanco, J. La Evolución del Rendimiento Inmediato en la Enseñanza Universitaria. *Revista de Educación.* 320, pp. 353-377 (1999).
8. Tejedor, F. Poder Explicativo de algunos Determinantes del Rendimiento en los Estudios Universitarios. *Revista Española de Pedagogía*. Año LXI. N° 224. P. 5-32 (2003).
9. Álvaro P., M. Hacia un Modelo Causal del Rendimiento Académico. Madrid: C.I.D.E. Pp. 18-21 (1990).
10. Ball, C. What the hell is quality? En C.J. Ball (Ed.), Fitness for purpose: Essays in Higher Education. Guildford, UK: SRHE and NFER-Nelson, pp.96-102 (1985).
11. Geva-May, I. Higher Education and attainment of policy goals: Interpretations for efficiency indicators in Israel. Higher Education, 42, 265-305 (2001).
12. Van Vught, F. The new context for academic quality. *Simposio University and Society: International Perspectives on Public Policies and Institutional Reform*. Vienna, Austria (1994).
13. Rodríguez, L. Variables cognitivo-motivacionales, comportamentales y contextuales y su relación con los procesos de autorregulación del aprendizaje en área de las matemáticas. Universidad de Oviedo. (2008).
14. Han, J. y Kamber, M. Data Mining. Concepts and Techniques, *2.ª Ed. Morgan Kaufmann*. Pp.5-10, (2006).
15. Peña, D. *Análisis de Datos Multivariantes*. Editorial: S.A. McGraw-Hill / Interamericana de España. ISBN: 9788448136109. Pp. 397-405 (2002).
16. Herrera, M.; Mallea, A.; Ruiz, A. M. y Millán; F. Determinación y Comparación de Perfiles Sociales y Culturales de Estudiantes Universitarios. *WICC 2014. XVI Worshop de Investigadores en Ciencias de la Computación*. Ushuaia, Tierra del Fuego. ISBN: 978-950-34-1084-4. Pp. 148-152 (2014).
17. Herrera, M.; Mallea, A. y Millán; F. Instrumento Fiable para la Determinación de Perfiles Sociales y Culturales de Estudiantes Universitarios. *WICC 2015. XVII Workshop de Investigadores en Ciencias de la Computación*. ISBN: 978-987-633-134-0. Salta (2015).
18. Di Gresia, L. Rendimiento Académico Universitario. http://aaep.org.ar/anales/works/works2007/digresia.pdf. Accedido en febrero de 2016.
19. Garbanzo V., M. G. Factores Asociados al Rendimiento Académico en Estudiantes Universitarios, una Reflexión desde la Calidad de la Educación Superior Pública. *Revista Educación*. Vol. 31 N°1, pp. 43-63, ISSN: 0379-7082 (2007).
20. Garcia, A. Rendimiento Académico y Abandono Universitario. Modelos, Resultados y Alcances de la Producción Académica en la Argentina. *Revista Argentina de Educación Superior*. Nº. 8, págs. 9-38, ISSN-e 1852-8171 (2014).
21. Torres Velázquez, L.; Rodríguez Soriano, N. Rendimiento Académico y Contexto Familiar en Estudiantes Universitarios. *Red de Revistas Científicas de América Latina y el Caribe, España y Portugal*. *Enseñanza e Investigación en Psicología*. Vol. 11, N°. 2, pp. 255-270 (2006).
22. Betts, J. R. y Morell, D. The Determinants of Undergraduate Grade Point Average. The Relative Importance of Family Background, High School Resources, and Peer Group Effects. *The Journal of Human Resources,* 34 (2) (1999).
23. Porto, A. y Di Gresia, L. Rendimiento de Estudiantes Universitarios y sus Determinantes. Asociación Argentina de Economía Política (2001).
24. Naylor, R. A y Smith, J. Determinants of Educational Success in Higher Education. En G. Johnes y J. Johnes (editores) International Handbook in the Economics of Education, Elgart (2004).
25. Di Gresia, L.; Fazio, A.; Porto, L.; Ripani A. y Sosa Escudero, W. Rendimiento y Productividad de los Estudiantes. El Caso de las Universidades Públicas Argentinas. En Porto, A. (editor) Economía de la Educación Universitaria: Argentina-Brasil-Perú, Editorial de la Universidad Nacional de La Plata, La Plata.
26. Balmori Méndez, E.; De la Garza Carranza, M. T. y Guzmán Soria, E. Diseño y Validación de un Instrumento para Determinar las Variables de Deserción en los Institutos Tecnológicos. *Pistas Educativas, N° 101*,. México, Instituto Tecnológico de Celaya (2013).

Volver al Índice

Prácticas de M-learning en Álgebra Lineal

María Inés Morales[1], Susana Herrera[1], Cristina Fennema[2], Rosa A. Palavecino[1]
[1] Instituto de Investigación en Informática y Sistemas de Información (IIISI), Facultad de Ciencias Exactas y Tecnologías, Universidad Nacional de Santiago del Estero
{imorales, sherrera, rosypgg}@unse.edu.ar,
[2]Departamento de Informática, Universidad Nacional de Catamarca
crisfen@yahoo.com

Resumen. En la Sociedad de la Información, las universidades se enfrentan al reto de formar profesionales que sean capaces de: transformar grandes bagajes de información en conocimiento, resolver situaciones futuras que aún no se han planteado, gestionar su propio conocimiento y aprender durante toda la vida. Para lograr esto, es indispensable replantear las metodologías empleadas e incorporar al aula recursos didácticos basados en las Tecnologías de la Información y la Comunicación (TIC). No obstante, en los primeros años de las carreras de ingeniería de las universidades nacionales, que cuentan con cursos numerosos y pocos docentes para conducir el proceso educativo, realizar prácticas empleando estos recursos constituye un verdadero desafío. Ante esta situación, los dispositivos móviles se nos presentan con grandes ventajas debido a que son tecnologías de la vida cotidiana del estudiante y permiten un aprendizaje en todo momento y en todo lugar, inclusive en el aula. El presente trabajo expone un conjunto de estrategias de m-learning para la asignatura Álgebra Lineal de las carreras de Ingeniería, basadas en experiencias llevadas a cabo en el marco del proyecto de investigación de Computación Móvil de la UNSE y propone nuevas en su continuación.

Palabras Clave: M-learning, Computación móvil, Álgebra Lineal.

1 Introducción

Los continuos avances tecnológicos, repercuten en forma significativa en la vida de las personas ocasionado cambios en el modo de entender el mundo, modificando las formas de trabajo, de comercio, de relaciones sociales, de diversión, etc. Estas tecnologías, también están influyendo en los procesos tradicionales de enseñar y aprender. La gran cantidad de información, a la que se puede acceder con facilidad y en forma instantánea provoca mayor interés en las personas, pero a la vez requiere de ellas un ejercicio de asimilación y discernimiento.

Los importantes desarrollos en miniaturización, telecomunicaciones y tecnologías inalámbricas, acercan infinidad de recursos disponibles mediante dispositivos personales y móviles lo que ha motivado un gran interés en el terreno educativo. M-learning (aprendizaje mediado por dispositivos móviles) es un campo emergente, que incluye tecnologías inalámbricas que permiten que el aprendizaje acontezca en cualquier momento y en cualquier lugar, posibilitando una mayor autonomía de los estudiantes.

Por otro lado, en el aprendizaje de la Matemática los procesadores simbólicos, los geométricos y los lenguajes de programación permiten adquirir habilidades matemáticas de orden superior como la modelización de fenómenos y situaciones. Además las tecnologías de simulación son grandes aliadas para la manipulación y exploración de objetos geométricos y algebraicos facilitando la construcción de modelos sencillos de las situaciones planteadas. En la medida en que algunas habilidades y procedimientos se vean favorecidos con el empleo de las tecnologías, el estudiante puede desarrollar niveles más altos de abstracción y generalización. En este contexto, el uso de dispositivos móviles plantea beneficios tales como: el alumno puede realizar prácticas y consultas en cualquier momento y en cualquier lugar, al tratarse de artefactos de uso cotidiano permite el desarrollo de prácticas mediadas por TIC en el aula común sin necesidad de traslado a un laboratorio de Informática.

Se tiene en cuenta también la Declaración de Valparaíso sobre las competencias genéricas de egreso del Ingeniero Latinoamericano [1]. Esta declaración sostiene que la formación de grado debe desarrollar las competencias que debería poseer el recién graduado en el inicio de su trayecto profesional. Dado el avance permanente de los conocimientos y las tecnologías, se espera que todos los profesionales continúen su formación profesional a lo largo de toda su vida. Por lo tanto, las tecnologías de la información y de las comunicaciones (TIC) constituyen una herramienta necesaria para la formación a lo largo de la vida. Es por ello, que se considera indispensable que el ingeniero adquiera competencias en el uso de estas tecnologías durante su formación de grado.

De acuerdo a lo planteado y advirtiendo la necesidad de inclusión de las tecnologías móviles en nuevas prácticas de enseñanza, desde el proyecto de investigación de Computación Móvil de la UNSE, se estudiaron y se pusieron en práctica estrategias de m-learning para diversos escenarios educativos y se proponen otras en el marco del nuevo proyecto que se inicia en el año 2017. En este artículo se presentan estrategias de m-learning para el área de Matemática de las carreras de Ingeniería, más específicamente en Álgebra Lineal.

2 Marco Referencial

2.1 M-learning

El mobile-learning o m-learning surge en el siglo XXI, con la llegada de las tecnologías móviles. Se lo considera como una nueva modalidad de aprendizaje que resulta de la mediación de dichas tecnologías en el proceso de aprendizaje. Está relacionado con otras modalidades surgidas en el continuum "educación presencial–educación a distancia", por ejemplo, con el e-learning y el u-learning [2].

Existen diferentes conceptualizaciones del m-learning, formuladas por diversos autores de la literatura especializada [3, 4, 5]. Pero este grupo de investigación considera una definición propia: El m-learning es el proceso de adquirir conocimiento mediante una relación dialógica entre el entorno y las personas y/o las personas entre sí, a través de una mediación con tecnología móvil, tanto en contextos de aprendizaje formales como no formales e informales; involucra en el aprendiz competencias tecnológicas para manipular los dispositivos móviles, competencias relacionadas con el aprendizaje autónomo y con la capacidad de interacción y comunicación.

Teniendo en cuenta esta conceptualización, en el proyecto de Computación Móvil se desarrolló un marco sistémico y ecológico, denominado MADE-mlearn, para el análisis, diseño y evaluación de experiencias de m-learning [6]. Éste presenta una serie de características y subcaracterísticas que involucran no sólo aspectos tecnológicos sino también socio-culturales, de interacción y pedagógicos a tenerse en cuenta cuando se diseñan experiencias de m-learning. La Fig. 1. muestra el modelo general del marco.

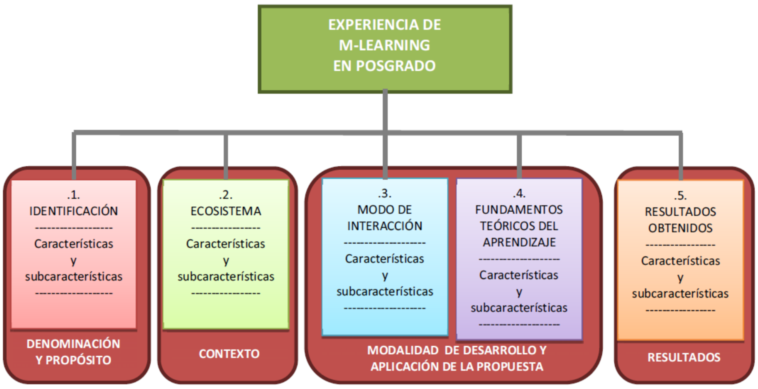


Fig. 1. Marco para el Análisis, Diseño y Evaluación de experiencias de m-learning.

MADE-mlearn propone 4 ejes de análisis que deben considerarse:

a. Denominación y propósito. Incluye un conjunto de características que permiten identificar la experiencia, su alcance, objetivos y resultados esperados.

b. Contexto. Abarca un conjunto de características que posibilitan definir el ecosistema de la experiencia siendo los principales componentes: dispositivos, infraestructura, conceptos, contenidos, plataforma y herramientas.

c. Modalidad de desarrollo y aplicación de la propuesta. Comprende un conjunto de características que facilita identificar el modo de interacción de la experiencia y también cuáles son las teorías de aprendizaje que la sustentan. Los enfoques de interacción son, según [7]: *Modo 1*: recuperación de información, *Modo 2*: recopilación y análisis de información, *Modo 3*: comunicación, interacción y colaboración en redes (o m-learning colaborativo).

d. Resultados obtenidos. Abarca un conjunto mínimo de características que permiten conocer los resultados de la experiencia.

2.2 Antecedentes

Existen diversas experiencias desarrolladas, tanto en el plano internacional [8, 9] como nacional [10, 11], y se aplican en los diferentes niveles educativos desde el primario en adelante, acentuándose en el nivel superior.

En el marco del proyecto de investigación denominado "Optimización de la calidad de los Sistemas Móviles mediante la implementación de nuevas arquitecturas, realidad aumentada, técnicas de visualización y redes móviles Ad-Hoc. Aplicaciones en m-learning y en gestión del conocimiento" de la Facultad de Ciencias Exactas y Tecnologías de la Universidad Nacional de Santiago del Estero (2012 – 2016), se desarrollaron dos aplicaciones móviles educativas y se diseñaron e implementaron diversas prácticas de m-learning en escuelas primarias rurales, en escuelas secundarias, en carreras de grado, en carreras de posgrado, abarcando el aprendizaje en Tecnologías, Programación y Matemática. Se destacan:

- Ecosistema móvil del NOA.
- Diseño e implementación de estrategias de m-learning en carreras de posgrado [12].
- Diseño e implementación de estrategias de m-learning, modos 1 y 2 en el área Matemática [13, 14].
- Marco para el Análisis, Diseño y Evaluación de experiencias de m-learning, MADE-mlearn [6].
- Diseño e implementación de estrategias de m-learning de modo 3 (colaborativas), usando el MADE-mlearn.
- Desarrollo de la aplicación Educ-Mobile, juego educativo y colaborativo para m-learning [15, 16].
- Desarrollo de la aplicación móvil colaborativa Ima-Colab, que puede ser usada en diferentes áreas disciplinares [17].
- Diseño e implementación de estrategias de m-learning de modo 1, 2 y 3 para carreras de Ingeniería en las diferentes áreas curriculares, usando MADE-mlearn.

En la Tabla1 se muestran áreas curriculares, carreras y asignaturas para las que se llevaron a cabo las prácticas en las carreras de ingeniería.

Tabla 1. Prácticas de m-learning para Ingeniería.

Área Curricular Ingeniería	Carrera de Grado / Universidad	Asignatura
Ciencias Básicas	Ingenierías: Eléctrica, Electromecánica, Electrónica, Civil, en Agrimensura, Hidráulica, Industrial, Vial. *Universidad Nacional de Santiago del Estero*	Álgebra Lineal
Tecnologías Aplicadas	Ingeniería en Agrimensura *Universidad Nacional de Santiago del Estero*	Mediciones Especiales
Complementarias	Ingeniería en Informática *Universidad Católica de Santiago del Estero*	Metodología de la Investigación
	Ingeniería Civil *Universidad Nacional de Santiago del Estero*	Inglés

3 Prácticas de m-learning en Álgebra Lineal

3.1 Descripción

Es evidente que las TIC han irrumpido en el sistema educativo modificando las prácticas docentes, sobre todo en el nivel superior; es así que en las últimas décadas la aparición de una gran variedad de software como Matlab, Maple, Mathemática, Geogebra, etc. y el uso de computadoras como herramientas para el cálculo, la graficación y simulación influenciaron las prácticas de enseñanza de la matemática en las carreras de Ingeniería.

De igual modo, aunque de manera insipiente, los celulares están siendo incorporados, por los mismos alumnos, al proceso de aprendizaje: buscan información en la Web, ingresan al aula virtual de la asignatura, interactúan en los grupos de redes sociales vinculados a la materia (puede ser de la misma cátedra), comparten archivos a través de aplicaciones de mensajería instantánea, utilizan en menor medida aplicaciones de la tienda que funcionan como calculadoras científicas o graficadoras.

Por lo expuesto, es necesario el replanteo permanente de las prácticas educativas de manera de mediar los recursos disponibles y a los que acceden los alumnos en beneficio del proceso de aprendizaje.

Las siguientes consideraciones surgieron de la experiencia de emplear recursos de las TIC en la asignatura y sirvieron de base para pensar en la necesidad de un replanteo de las prácticas educativas y la incorporación de estrategias de m-learning:

- Álgebra Lineal corresponde al primer año de las carreras de Ingenierías, lo que significa un importante caudal de alumnos que en general superan los 300. Si bien se dispone de laboratorios informatizados, la cantidad de alumnos dificulta la tarea de poner en práctica alguna actividad áulica con el empleo de computadoras.
- Los contenidos de Álgebra Lineal, en su aspecto teórico, suelen ser desarrollados con clases puramente expositivas-dialogadas, en las cuales los alumnos cumplen el rol pasivo de simples receptores de la información que llega a ellos ya elaborada y poco flexible. Este tipo de prácticas no desarrollan en el alumno capacidades que se desprendan del enfoque constructivista, sino que tienden a transformarlo en un mero repetidor de contenidos.
- Los sentidos son los canales por los que accedemos a la información, por lo tanto es importante la "visualización" que aclara y facilita la comprensión de los conceptos, sobre todo aquellos vinculados a la geometría. Es Necesario, por lo tanto, el empleo de alguna herramienta informática que permita incorporar la "visualización" y la "exploración" posibilitando así un aprendizaje significativo y duradero.
- La presencia masiva de los dispositivos móviles nos permite pensar que es posible incorporar en el aula diferentes recursos que antes sólo eran posibles acceder por medio de una computadora.

Las prácticas de m-learning para la asignatura Álgebra Lineal de las carreras de Ingeniería que aquí se presentan, fueron diseñadas teniendo en cuenta el MADE-mlearn mencionado en 2.1 es decir, considerando: cuál es la práctica educativa, cuáles son los objetivos de aprendizaje, qué recurso educativo necesita ser utilizado y qué tipo de interacción proponen dicha práctica y dicho recurso.

- *Práctica 1*

Tema: Cónicas.

Modo de interacción: Modo 1.

Objetivos de aprendizaje: Definir cada una de las cónicas y reconocerlas como variantes de un mismo modelo geométrico.

Actividad: visualización y comprensión de los contenidos. Los alumnos acceden a través de sus dispositivos móviles a objetos GIF animados; de la observación, el análisis y con la guía del docente surgen las definiciones de circunferencia, elipse, hipérbola y parábola.

Recurso involucrado: GIF animados confeccionados con Geogebra.

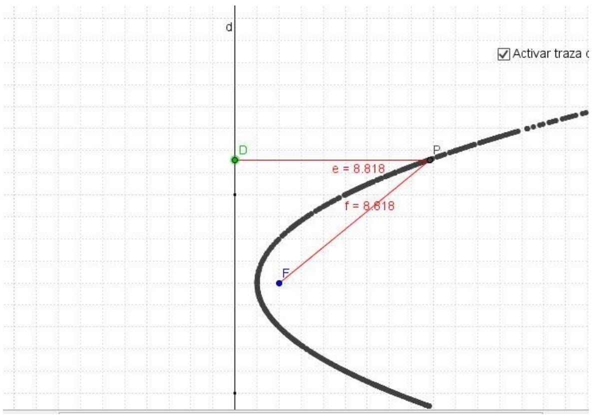


Fig. 2. GIF animado de parábola confeccionado con Geogebra.

- *Práctica 2*

Tema: Matrices, operaciones.

Modo de Interacción: Modo 1.

Objetivos de aprendizaje: Ordenar la información en forma matricial y a partir de ella producir nueva información.

Actividad: Manipulación y ordenamiento de datos mediante matrices. Obligatoria, grupal, presencial. Los alumnos ingresan a un listado de páginas web, seleccionadas por el docente, con datos de temperaturas, precipitaciones, cultivos, etc. que pueden ser ordenados en una matriz. En forma grupal los alumnos seleccionan la información y responden a una serie de preguntas que llevan, de manera intuitiva, a inferir las operaciones con matrices. Finalmente se plantean problemas que deben resolver.

Recursos involucrados: dispositivo móvil con acceso a internet, listado de páginas web provistas por el docente, guía de actividades.

- *Práctica 3*

Tema: Matrices, Determinantes y Sistemas de Ecuaciones.

Modo de Interacción: Modo 1.

Objetivos de aprendizaje: Autoevaluar aprendizajes, identificando fortalezas y debilidades.

Actividad: Autoevaluación. Optativa, no presencial. Los alumnos ingresan a una página web, desde un Smartphone, donde se presentan consignas que pueden ser respondidas en cualquier momento y en cualquier lugar. Al finalizar, son calificados. El sistema no registra resultados y el acceso no está restringido ni controlado.

Recursos involucrados: Página web disponible desde el Aula Virtual de la asignatura. Se puede acceder al recurso desde cualquier Smartphone que tenga conexión a Internet. El recurso permite realimentación dado que al finalizar la actividad otorga una calificación y una devolución respecto a las respuestas erróneas, sin embargo no se almacenan los resultados.

- *Práctica 4*

Tema: Espacios Vectoriales. Producto Interior.

Modo de Interacción: Modo 2.

Objetivos de aprendizaje: Autoevaluar aprendizajes identificando fortalezas y debilidades.

Actividad: Autoevaluación. Obligatoria, grupal, presencial. Los alumnos reunidos en grupo ingresan a una página web, desde un Smartphone, que presenta consignas que deben ser respondidas. Al finalizar, son calificados por el sistema que les asigna un puntaje. El docente registra la calificación obtenida. Sirve de referencia de evaluación global del curso, no de cada alumno.

Recursos involucrados: Es análogo al recurso de la práctica anterior.

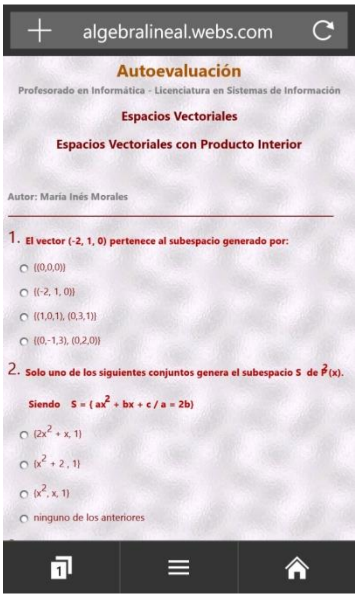


Fig. 3. Pantalla de autoevaluación.

- *Práctica 5*

Tema: Cónicas.

Modo de Interacción: Modo 2.

Objetivos de aprendizaje: Reconocer cónicas en lugares cotidianos e identificarlas.

Actividad: Concurso fotográfico. Optativa, individual, no presencial. Los alumnos registran, con la cámara de los dispositivos móviles, lugares de la ciudad en los que se puede observar una cónica y suben las fotografías al grupo en Facebook de la asignatura con una breve descripción. Las fotografías son evaluadas por los docentes quienes realizan una devolución en los comentarios habilitados para cada publicación. Se escogen las mejores fotografías y se concede un primer, segundo y tercer puestos. El concurso otorga créditos para la evaluación del tema tratado a aquellos alumnos que han participado y puntajes diferenciados para los ganadores.

Recursos involucrados: dispositivo móvil con cámara fotográfica, acceso a internet desde el celular o una computadora, grupo en red social.

Fig. 4. Fotografía de parábolas subida al grupo de la asignatura.

3.2 Observaciones y resultados obtenidos

Las prácticas de m-learning descriptas fueron llevadas a cabo, a modo de ensayo, en el último año de desarrollo del proyecto de investigación en el cual se enmarcan. Los resultados surgen de las observaciones realizadas por los docentes de la asignatura, luego de poner en práctica dichas experiencias.

Las *Prácticas 1 y 2* fueron llevadas a cabo durante el desarrollo de clases teóricas. En el primer caso la visualización de las construcciones geométricas mediante los GIF animados en los celulares, no sólo motivó a los alumnos sino que les permitió comprender conceptos que resultan incomprensibles sin una representación gráfica. En el segundo caso, el hecho de tomar datos de la realidad, organizarlos y manipularlos fomentó un aprendizaje significativo. En ambas experiencias, con la guía del docente y la ayuda del recurso empleado, los alumnos fueron construyendo las definiciones de las cónicas en la primera y de las operaciones matriciales en la segunda.

Debido a que la *Práctica 3* era optativa y no presencial, los docentes no dispusieron de un registro de la actividad de los alumnos ya que el sistema no posee esta característica. Dicha práctica se propuso con el fin de que los estudiantes pudieran autoevaluar sus aprendizajes antes de un examen parcial. Debido a la falta de registro, sólo se recogieron algunas opiniones de alumnos, los que manifestaron que el recurso les resultó de gran utilidad en su preparación para el parcial.

De acuerdo a los resultados observados en la *Práctica 3*, se llevó a cabo la *Práctica 4* con el objetivo que los alumnos autoevaluaran sus aprendizajes pero que a la vez que los docentes dispusieran de información sobre las actividades realizadas y los resultados de ellas. En este sentido se pudieron detectar falencias comunes en los grupos y en el conjunto de alumnos en general. Estas dificultades estaban relacionadas principalmente con la falta de claridad en los conceptos teóricos, mientras que a los procesos los manejaban correctamente pero de forma mecánica. Esto permitió una revisión de los contenidos y un mayor afianzamiento en los procedimientos que no se comprendían. Es importante destacar que si bien una autoevaluación resulta siempre una actividad que trae resultados positivos, en el contexto del m-learning y diseñada como una práctica grupal la motivación del alumno es muy grande ya que lo toma como un juego competitivo.

En la *Práctica 5*, a pesar que el concurso otorgaba créditos para el parcial, sólo un 60% de los alumnos participó, cabe destacar que muchos de ellos no estaban suscriptos al grupo en la red social. La mitad de los participantes no identificaron correctamente las secciones cónicas en los objetos fotografiados, confundiendo por ejemplo parábolas con semicircunferencias. Esto permitió que los docentes hicieran una revisión de los conceptos remarcando las diferencias. La búsqueda de estas figuras en la ciudad y la divulgación del descubrimiento a sus pares permitieron a todos los alumnos, participantes o no, lograr un conocimiento significativo y duradero. Además los estudiantes manifestaron que caminar por la ciudad, sacar fotos con el celular y compartirlas con sus pares forma parte de su quehacer cotidiano y se mostraron asombrados y a la vez entusiasmados de realizar estas mismas prácticas en sus estudios.

4 Conclusiones y trabajos futuros

En base a las experiencias realizadas y los resultados obtenidos que se describieron en 3.2 se puede asegurar que implementar estrategias de m-learning no es una tarea sencilla para el docente; constituye un verdadero desafío que requiere planificación basada en el análisis de contexto tecnológico-cultural y en los objetivos de aprendizaje que se desean obtener. En este sentido, el MADE-mlearn tuvo un buen desempeño como guía en el diseño de las experiencias.

Por otro lado los alumnos muestran una actitud positiva y de entusiasmo ante estas experiencias, más aún cuando se trata de prácticas interactivas y colaborativas, lo que constituye una perspectiva alentadora para el docente que se anima a realizar estas experiencias empleando dispositivos móviles en el aula.

Se ha observado también que, en algunos casos, debido a las prácticas realizadas los alumnos aprenden a manejar mejor sus dispositivos, usando servicios y funcionalidades desconocidas para ellos, con lo que se desarrollan competencias digitales no esperadas por el docente.

Las prácticas de m-learning permiten lograr resultados de aprendizaje concretos. En el caso de las *Prácticas 1* y *2*, permitieron la búsqueda y el acceso a la información, construyendo conocimiento de forma individual. En el caso de las *Prácticas 4* y *5*, posibilitaron reforzar el conocimiento ya adquirido (revisión) y la construcción de conocimiento colectivo.

Las prácticas Modo 3: comunicación, interacción y colaboración en redes (o m-learning colaborativo), que son las más deseables por ser muy enriquecedoras, son casi imposibles de implementar en asignaturas que poseen gran cantidad de alumnos como es el caso del primer año de las carreras de Ingeniería.

Si bien la realización de experiencias de m-learning recién se inicia, es una tendencia que va creciendo y es importante que el docente explote la gran motivación que implica el uso de estos dispositivos por parte de los alumnos.

Como ya se dijo, estas experiencias se realizaron en la cátedra de Álgebra Lineal en el último año del desarrollo de la investigación “Optimización de la calidad de los Sistemas Móviles mediante la implementación de nuevas arquitecturas, realidad aumentada, técnicas de visualización y redes móviles Ad-Hoc. Aplicaciones en m-learning y en gestión del conocimiento”. A partir de este año y en el marco de un nuevo proyecto de investigación denominado “Computación Móvil: desarrollo de aplicaciones y análisis forense”, la cátedra se propone rediseñar estas prácticas teniendo en cuenta lo siguiente:

- Como ya se encuentra disponible la versión para móviles del software Geogebra, que es una aplicación libre y gratuita de geometría dinámica que combina las diversas representaciones de un objeto, por ejemplo la vista gráfica con la algebraica; el docente puede crear materiales interactivos y dinámicos que sirven de apoyo a sus clases, generando actividades para que los alumnos puedan interactuar con las construcciones. De acuerdo a esto, los recursos (GIF animados) empleados en la Práctica 1 pueden sustituirse por applets de Geogebra de modo que los alumnos puedan manipular estos objetos en sus celulares. En este sentido las actividades a realizar pueden ser más complejas y enriquecedoras que la simple observación de la animación de una construcción.
- Al disponer los alumnos de la app de Geogebra es posible generar nuevas experiencias de m-learning colaborativo a desarrollar en las clases prácticas para la resolución de problemas.
- Las prácticas de autoevaluación de los aprendizajes del tipo de la Práctica 5 resultaron enriquecedoras, por lo tanto es deseable implementarlas antes de cada parcial y contrastar los resultados.

En el futuro inmediato, con el propósito de continuar con la investigación iniciada, se implementarán las prácticas propuestas y sus resultados se estudiarán en profundidad. En base a ello se evaluarán empíricamente las mismas y se difundirán los resultados.

Referencias

1. CONFEDI.: Competencias y perfil del ingeniero iberoamericano, formación de profesores y desarrollo tecnológico e innovación (Documentos Plan Estratégico ASIBEI). http://www.acofi.edu.co/wp-content/uploads/2016/06/Libro-Competencias-perfil-del-ingeniero.pdf (2016). Accedido el 6 de Febrero de 2017.
2. Zangara, A.: Apostillas sobre los conceptos básicos de educación a distancia o…una brújula en el mundo de la virtualidad. Maestría en Educación a Distancia. Facultad de Informática de la Universidad Nacional de La Plata. La Plata.(2014)
3. Sánchez Prieto, J.C.; Olmos Migueláñez, S.; García Peñalvo, F.J.: Mobile Learning: Tendencies and Lines of Research. *TEEM '13 Proceedings of the First International Conference on Technological Ecosystem for Enhancing Multiculturality*. Salamanca, Spain. http://dx.doi.org/10.1145/2536536.2536609 (2013). Accedido el 19 de diciembre de 2016.
4. Traxler, J. Mobile Learning: Starting in the Right Place, Going in the Right Direction? *International Journal of Mobile and Blended Learning*, 3(2), pp. 57-67, April-June 2011. (2011).
5. Sharples, M.; Taylor, J.; Vavoula, G.: Theory of learning for the mobile age. *In Andrews, R., & Haythornthwaite, C. (Eds.) The SAGE Handbook of E-learning Research,* pp.*221-247,* London (2006).
6. Herrera, S. I.; Sanz, C. V.; Fennema, M. C.: MADE-mlearn: un marco para el análisis, diseño y evaluación de experiencias de m-learning en el nivel de postgrado. *Revista Iberoamericana de Tecnología en Educación y Educación en Tecnología*. N° 10. ISSN 1850-9959. La Plata, (2013).
7. Woodill, G.: *The mobile learning edge*. Ed. Mc Graw Hill. ISBN: 978-0-07-173984-9. (2011).
8. DeWitt, D.; Siraj, S.; Alias, N.: Collaborative mLearning: A Module for Learning Secondary School Science. *Educational Technology & Society*, 17 (1), pp. 89–101 (2014).
9. Nouri, J.: A theoretical grounding of learning mathematics in authentic real-world contexts supported by mobile technology. *IADIS Mobile Learning*, pp. 35-42. (2012).
10. Arce, R. A.: Mobile learning: aprendizaje móvil como complemento de una estrategia de trabajo colaborativo con herramientas Web 2 y entorno virtual de aprendizaje WebUNLP en modalidad de blended learning. *Primeras Jornadas Nacionales de TIC e Innovación en el Aula.* http://hdl.handle.net/10915/26538 (2013). Accedido el 19 de diciembre de 2016.
11. Sanz, C.; Cukierman, U.; Zangara, A.; Gonzalez, A.; Santángelo, H.; Rozenhauz, J.; Iglesias, L.; Ibañez, E: Integración de la tecnología móvil a los entornos virtuales de enseñanza y de aprendizaje. *II Congreso de Tecnología en Educación y Educación en Tecnología*. Argentina (2007).
12. Herrera, S. I.; Fennema, M. C.; Sanz, C. V.: Estrategias de m-learning para la formación de posgrado. *VII Congreso de Tecnología en Educación y Educación en Tecnología*. Pergamino, Bs. As. (2012).
13. Rocabado, S. H.; Herrera, S. I.; Morales, M. I.; Estelles, C.: M-Learning en Zonas de Recursos Limitados. *VIII Congreso Tecnología en Educación y Educación en Tecnología*. ISSN 978-987-28186-0-9. Santiago del Estero (2013).
14. Herrera, S.; Fennema, C.; Morales, M.; Palavecino, R.; Goldar, E.; Zuain, S.: Mobile technologies in engineering education. Conferencia. International Conference on Interactive Collaborative Learning (ICL). IEEE xplore. Italia. Florence. (2015).
15. Herrera, S. I.; Sanz, C. V.: Collaborative m-learning practice using Educ-Mobile. *International Conference on Collaboration Technologies and Systems (CTS)*. Minneapolis (2014).
16. Herrera, S.; Morales, M.; Sanz, C.; Fennema, C.: *Aprendizaje basado en dispositivos móviles*. EDUNSE - editorial de la UNSE. ISBN 978-987-1676-18-7. Santiago del Estero (2014).
17. Palavecino, R.; Herrera, S.; Sanz, C.; Irurzun, I.; Carranza, A.: M-learning: aprendizaje de estructuras de datos con Ima-Colab. *XI Congreso de Tecnología en Educación y Educación en Tecnología. RED UNCI.* Argentina (2016).

Volver al Índice

Evaluación de Competencias sobre Aplicaciones de las Derivadas de Alumnos en la Facultad de Ciencias Forestales

Carolina Ger, Elsa Ibarra, Sylvia Nabarro, Claudia Cejas
Departamento de Ciencias Básicas. Facultad de Ciencias Forestales. UNSE. Avda. Belgrano Sud 1912. CP 4200
{carolinager, claudiacejas_1}@hotmail.com, egomez@unse.edu.ar, sylvianabarro@yahoo.com.ar

Resumen. El siguiente trabajo es la continuación de una serie de análisis de competencias realizadas a alumnos de un mismo año, mediante la aplicación de estrategias didácticas utilizando la Educación Basada en Competencias y las Tecnologías de la Información y la Comunicación (TIC's). Se presentan los resultados de una evaluación realizada a los estudiantes cursantes de la Asignatura Cálculo Diferencial e Integral de la Facultad de Ciencias Forestales de la UNSE con el objetivo de identificar las competencias básicas, transversales y específicas desarrolladas por los alumnos, respecto de un tema en particular, Aplicaciones de la Derivada, haciendo uso de la Metodología Blended Learning para identificar las competencias informáticas alcanzadas. Se pretende contrastar los estudios anteriores, evaluar las competencias que van desarrollando los estudiantes y evaluar técnicas y métodos de enseñanza con el fin de optimizar los procesos de aprendizaje de los alumnos permitiendo un mejor desarrollo de las competencias establecidas.

Palabras Clave: Competencias básicas, transversales y específicas, Educación basada en competencias, Aplicaciones de la derivada, Tecnologías de la información y la comunicación, Metodología blended learning

1 Introducción

En el siguiente trabajo se realizó una evaluación a los estudiantes de ingeniería cursantes de la Asignatura Cálculo Diferencial e Integral de la Facultad de Ciencias Forestales de la UNSE con el objetivo de identificar las competencias básicas, transversales y específicas adquiridas por los mismos, respecto de un tema en particular, Aplicaciones de la Derivada, haciendo uso de la Metodología Blended Learning para identificar las competencias informáticas adquiridas.

La aplicación de la Metodología Blended Learning (B-Learning) propone nuevos enfoques a la enseñanza de la Matemática, al rol del docente y a la comunicación con los alumnos. La elaboración de este trabajo constituye, además de un análisis respecto a las competencias logradas, también la optimización de la enseñanza en el aula teniendo en cuenta su contrastación con la propuesta del Consejo Federal de Decanos de Ingeniería [1] sobre las competencias que debe manifestar un alumno universitario.

Teniendo en cuenta los avances tecnológicos, específicamente de las TIC´s, se considera que la formación de profesionales debe ser nueva y actualizada, capacitándolos con los recursos y herramientas necesarias para su mejor desempeño en el campo profesional y tecnológico. Es necesaria la focalización de conceptos que no cambiarán y en las habilidades necesarias para que el nuevo estudiante continúe aprendiendo en forma autónoma.

Los estudiantes actuales tienen un elevado acceso a la información, pero no son necesariamente bien informados, por lo que se necesita un nuevo tipo de educación, afianzando la Educación Basada en Competencias y la implementación de las TIC's en las aulas.

La Educación Basada en Competencias propone focalizarse en el alumno y sus actividades, más que en los contenidos y su transmisión, se debe poner énfasis en las actividades que ayudarán a los alumnos a adquirir las competencias necesarias. Este modelo se centra en el estudiante, se encuentra orientado al dominio de competencias que debe desarrollar el alumno y se basa en los resultados de aprendizajes necesarios para la adquisición de las competencias establecidas.

La enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas son procesos sociales de creciente complejidad teórica y metodológica. Por un lado, la didáctica de las matemáticas ha evolucionado hasta convertirse hoy en una disciplina científica [2] y como tal, aborda su objeto de estudio en el marco de su propósito esencial: estudiar científicamente los problemas de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en contextos educativos institucionalizados.

Por otro, las rupturas epistemológicas y ontológicas en matemáticas y en didáctica de las matemáticas, implican replanteamientos sobre el rol del maestro y del estudiante, sobre la enseñabilidad de la matemática y sobre su desarrollo didáctico y curricular [3].

Es necesario privilegiar el razonamiento lógico, la argumentación, la experimentación, el uso y la organización de la información y la apropiación del lenguaje común, del lenguaje de la ciencia y la tecnología [1].

2 Desarrollo

El presente trabajo se integra en una serie de análisis fijados dentro del Proyecto de Investigación "Potenciar el pensamiento matemático para contribuir al desarrollo de competencias pertinentes en los ingresantes a las carreras de la Facultad de Ciencias Forestales de la UNSE". Se realizó un análisis de las competencias básicas, transversales y específicas teniendo en cuenta el tema Aplicaciones de la Derivada en los alumnos cursantes de la Asignatura Cálculo Diferencial e Integral de los estudiantes de las carreras de la Facultad de Ciencias Forestales de la UNSE, teniendo como base fundamental las competencias requeridas para el ingreso en los estudios universitarios fijadas por el CONFEDI publicadas en Documentos del CONFEDI: Competencias en Ingeniería en el año 2014 [1].

El trabajo se realizo diseñando un Aula Virtual en la Asignatura Cálculo Diferencial e Integral, con el objetivo de analizar las competencias informáticas que adquirieron los alumnos en el transcurso del año.

Este estudio nos permite contrastar con estudios anteriores y posteriores de similar índole, con el propósito de observar las competencias que van adquiriendo los alumnos durante el ciclo lectivo, evaluar las competencias que requieren más atención y fijar metas pedagógicas para mejorar su afianzamiento.

A partir de distintos análisis del significado de competencias según varios autores, se puede observar que sus conceptos permiten indagar en las mismas con un cierto grado de certidumbre y confianza para mejorar el proceso de aprendizaje de los estudiantes.

El concepto de competencia es diverso, según el ángulo del cual se mire o el énfasis que se le otorgue a uno u otro elemento, pero el más generalizado y aceptado es el de "saber hacer en un contexto". El "saber hacer", lejos de entenderse como "hacer" a secas, requiere de conocimiento (teórico, práctico o teórico-práctico), afectividad, compromiso, cooperación y cumplimiento, todo lo cual se expresa en el desempeño, también de tipo teórico, práctico o teórico-práctico [4].

Según Sladogna, las competencias son capacidades complejas que poseen distintos grados de integración y se manifiestan en una gran variedad de situaciones en los diversos ámbitos de la vida humana personal y social. Son expresiones de los diferentes grados de desarrollo personal y de participación activa en los procesos sociales. Agrega la autora que toda competencia es una síntesis de las experiencias que el sujeto ha logrado construir en el marco de su entorno vital amplio, pasado y presente [5].

La Educación Basada en Competencias se complementa mediante la implementación de diversos métodos de aprendizajes centrados en el estudiante, entre los cuales se consideraron en el proyecto los siguientes [6]:

- El aprendizaje activo, donde los estudiantes resuelven problemas, formulan preguntas propias, discuten, explican, debaten y hacen lluvia de ideas.
- El aprendizaje cooperativo, donde los estudiantes trabajan en grupos sobre problemas y proyectos, garantizando la independencia y la cooperación.
- El aprendizaje inductivo, donde a los estudiantes se les presentan desafíos y problemas, y luego acceden al material del curso en el contexto de la resolución de dichos desafíos.

En este trabajo, se implementó el método de aprendizaje inductivo atendiendo al desarrollo de competencias matemáticas enriquecidas por situaciones problemáticas aplicadas al futuro profesional que posibilitan avanzar a niveles de competencias cada vez más complejas. Este método se complementó utilizando el Aula Virtual de la Asignatura y un software específico de aplicación.

La incorporación de entornos virtuales a la educación superior, requiere para su integración, un modelo pedagógico que, a través de la mediación tecnológica, permita crear nuevos escenarios y posibilidades en un medio electrónico, que supone una ampliación o expansión de la realidad, creando condiciones para la apropiación de nuevos saberes.

2.1 Objetivo del Trabajo:

- Favorecer los procesos de enseñanza y aprendizaje a partir de dispositivos pedagógicos / didácticos mediante la utilización de Entornos Virtuales que potencien el pensamiento matemático para el desarrollo de las competencias requeridas en las carreras de la Facultad de Ciencias Forestales de la UNSE.

2.2 Etapas establecidas en el siguiente trabajo:

Para evaluar las competencias adquiridas por los estudiantes a lo largo del proceso del primer año de la carrera, se determinaron las siguientes etapas:

- Determinar las competencias a evaluar.
- Determinar el grado de desarrollo esperado por cada una de las competencias.
- Determinar los recursos internos- conocimientos, actitudes, conductas- a movilizar por las competencias.
- Determinar las actividades que se requieren para alcanzar las competencias establecidas.
- Determinar las modalidades de evaluación de dichas competencias.
- Determinar la modalidad de evaluación de los resultados.

2.3 Determinación de las competencias a evaluar:

2.3.1 Competencias básicas

Se refieren a los conocimientos, procedimientos, destrezas y actitudes fundamentales para el desarrollo de otros aprendizajes.

El siguiente cuadro muestra las competencias básicas seleccionadas para este trabajo y sus respectivos indicadores de logro:

Tabla 1. Indicadores de Logro de las Competencias Básicas.

Competencias Básicas	Indicadores de Logro
a) Manejo de las formas del lenguaje matemático	a1) Utiliza los datos enunciados en el problema. a3) Elabora una representación gráfica – verbal adecuada a la organización discursiva presente en el texto y a la jerarquización de la información realizada.
b) Resolución de problemas	b1) Identifica los elementos explícitos del problema: datos e incógnitas. b2) Explica las situación planteada. b3) Busca, selecciona y procesa la información necesaria para resolver la situación. b4) Selecciona el método de resolución adecuado. b5) Obtiene la solución del problema. b6) Comunica los resultados con lenguaje claro y usando la notación correspondiente

2.3.2 Competencias transversales

Se refieren a las competencias actitudinales necesarias para regular el aprendizaje autónomo y resolver las dificultades que se presentan en el proceso del aprendizaje.

Se seleccionó para el análisis de estas competencias: La Planificación e Implementación de estrategias de Resolución de Situaciones Problemas.

Tabla 2. Indicadores de Logro de las Competencias Transversales.

Indicadores de Logro
a) Organiza adecuadamente el tiempo y el espacio de estudio para responder a la situación.
b) Relaciona situaciones de aprendizaje nuevas con experiencias anteriores y saberes previos.
c) Demuestra capacidad para comprender relaciones lógicas entre conceptos.

2.3.3 Competencias específicas

Son aquellas estrechamente vinculadas con los contenidos y capacidades vinculadas a la ciencia, en este caso particular, Matemática y conocimiento de recursos informáticos. Remiten a un conjunto de conocimientos, actitudes, valores y habilidades específicos relacionados entre sí, que permiten desempeños satisfactorios a toda persona que aspira a estudiar una determinada carrera universitaria.

Fueron seleccionadas las siguientes competencias específicas y sus respectivos indicadores de logro:

Tabla 3. Indicadores de Logro de las Competencias Específicas.

Competencias Específicas	Indicadores de Logro
a) Resolver problemas aplicado a conceptos matemáticos desarrollados.	a2) Identifica los conceptos matemáticos que utilizará en la resolución del problema. a3) Usa la notación adecuada. a4) Plantea y usa operaciones adecuadas para llegar a la solución. a5) Comunica los resultados en forma adecuada.
b) Reconocer y aplicar propiedades numéricas	b1) Justifica matemáticamente los resultados obtenidos. b2) Reconoce y aplica propiedades numéricas. b3) Resuelve adecuadamente las operaciones involucradas.
c) Analizar una función a partir de su representación gráfica y/o a partir de sus ecuaciones matemáticas.	c1) Reconoce tipos de funciones: lineales, cuadráticas, trigonométricas, exponenciales, logarítmicas, mediante su gráfica y/o por sus ecuaciones matemáticas. c2) Interpreta representaciones gráficas. c3) Analiza las soluciones aritméticas, vinculadas con el problema planteado y/o con la realidad.
d) Utilizar la computadora, aplicando lógica procedimental en la utilización de Sistema Operativo y diversas aplicaciones.	d1) Usa íconos, barra de menús, herramientas del S.O. y de aplicaciones. d2) Accede a archivos y carpetas de diversas maneras. d3) Maneja archivos y carpetas: crea, organiza, nombra, elimina, guarda y manipula información. d4) Elabora y aplica funciones específicas a textos y distintas representaciones gráficas (copia, pega, inserta, da formato). d5) Usa algún medio de comunicación electrónico para interactuar con otros. d6) Crea, adjunta, envía y recibe mensajes e información.

2.4 Modalidades de evaluación de las competencias

Durante el cursado de la asignatura se desarrollaron varias actividades a través de la plataforma virtual con el objetivo de impulsar al desarrollo de competencias informáticas básicas, de igual forma se trabajó con el software de aplicación Geogebra permitiendo adquirir conocimientos básicos sobre la aplicación de ejercicios y problemas matemáticos.

La actividad de este trabajo consistía en analizar un gráfico interactivo, sobre Aplicaciones de la Derivada, utilizando el software Geogebra, a través de la plataforma virtual de la asignatura Cálculo Diferencial e Integral, para lo cual se realizaron una serie de preguntas de razonamiento con el objetivo de determinar las competencias básicas, transversales y específicas adquiridas por los estudiantes hasta el momento.

Cabe destacar que esta actividad se realizó antes de ingresar los conceptos necesarios sobre Aplicaciones de la Derivada. Para la resolución de esta actividad, disponían de una semana.

2.4.1 Actividad Propuesta

Con el click derecho mueve el deslizador y observa la recta tangente en a=-1, en a=0, en a =1, en a=2 y en a=2,5. Determina el signo de la derivada en cada uno de estos puntos.

1- ¿Que conclusiones puedes sacar acerca de la monotonía de la función, en que intervalos es creciente y en que intervalos es decreciente?
2- ¿Que extremos relativos tiene?
3- ¿Qué ocurre con el comportamiento de la recta tangente en dichos extremos?
4- ¿En que intervalos la función es cóncava hacia arriba y hacia abajo? ¿Cambia la concavidad?
5- ¿Cuál es el valor de la derivada en esos puntos?

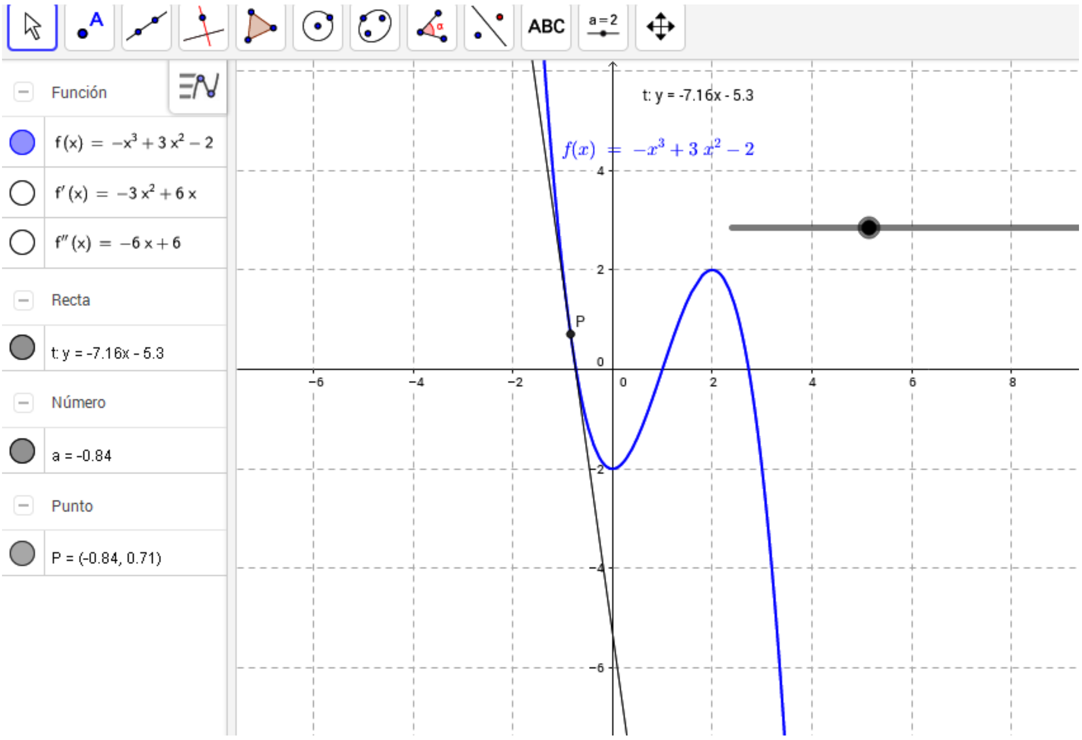


Fig. 1. Gráfica de la actividad propuesta a los alumnos de la asignatura Cálculo Diferencial e Integral de la FCF

2.5 Evaluación de los resultados

Los estudiantes disponían una semana para responder las preguntas a través de la plataforma, brindándoles toda la información necesaria para poder realizarlos. Se obtuvieron respuesta de 28 estudiantes que conformaban el grupo de alumnos cursantes de la asignatura, a saber:

2.5.1 Competencias básicas

Tabla 4. Registro de datos de Competencias Básicas según las actividades realizadas en el aula virtual.

	Competencias Básicas							
	a1	a3	b1	b2	b3	b4	b5	b6
No cumple	0%	0%	0%	0%	0%	35.48%	35.48%	9.68%
Regular	0%	16.13%	19.35%	22.58%	35.48%	22.58%	32.26%	29.03%
Bien	100.00%	83.87%	80.65%	77.42%	64.52%	41.94%	32.26%	61.29%

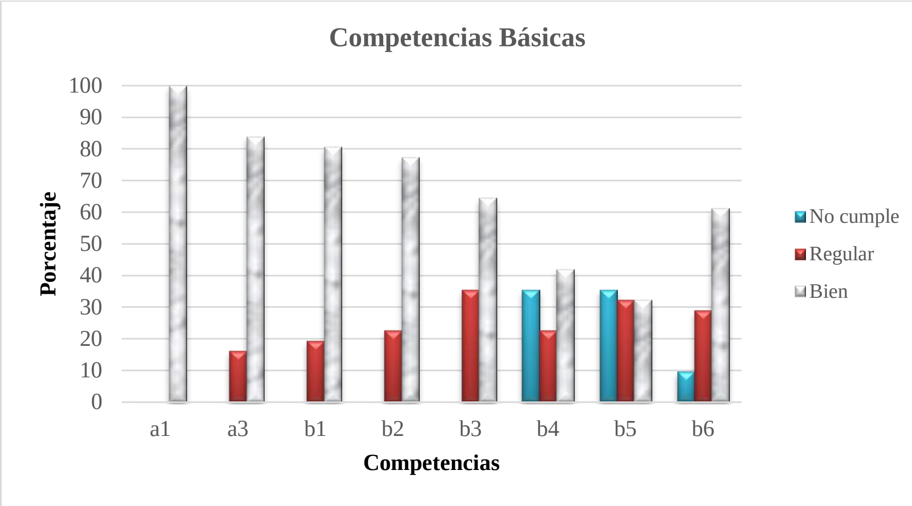


Fig. 2. Competencias Básicas. Fuente: Trabajo realizado por alumnos de 1° año de la Asignatura Cálculo Diferencial e Integral FCF - UNSE

2.5.2 Indicadores de Logro de las Competencias Básicas Analizadas

a1) Utiliza los datos enunciados en el problema.
a3) Elabora una representación gráfica – verbal adecuada a la organización discursiva presente en el texto y a la jerarquización de la información realizada.
b1) Identifica los elementos explícitos del problema: datos e incógnitas.
b2) Explica las situación planteada.
b3) Busca, selecciona y procesa la información necesaria para resolver la situación.
b4) Selecciona el método de resolución adecuado.
b5) Obtiene la solución del problema.
b6) Comunica los resultados con lenguaje claro y usando la notación correspondiente

2.5.3 Manejo de las formas del lenguaje matemático

Considerando la clasificación regular y bien, se puede observar un aumento en el desarrollo de esta competencia, teniendo en cuenta que el 100% de los estudiantes domina la utilización de los datos enunciados en el problema y elabora una representación gráfica adecuada al problema desarrollado. El aumento se contrasta con el resultado del 96,19% arrojado por los mismos estudiantes, de las mismas competencias analizadas en el primer cuatrimestre de la carrera.

2.5.4 Resolución de problemas

Los indicadores analizados muestran un aumento en el desarrollo de estas competencias, destacándose los indicadores de logro b1, b2 y b3 en los cuales el grupo de alumnos lograron adquirir un 100% teniendo en cuenta la clasificación regular y bien. Se mantienen constantes las competencias con los indicadores b4 y b5 con respecto a las analizadas en los mismos estudiantes en el primer cuatrimestre de la carrera. Correspondiendo en menor porcentaje de clasificación bien a la obtención de la solución del problema. También se pudo observar un mejor desarrollo en la comunicación con lenguaje claro, utilizando la notación correspondiente.

2.5.5 Competencias transversales.

Tabla 5. Registro de datos de Competencias Transversales según las actividades realizadas en el aula virtual.

	Competencias Transversales		
	a	b	C
No cumple	19.35%	9.68%	12.90%
Regular	38.71%	32.26%	38.71%
Bien	41.94%	58.06%	48.39%

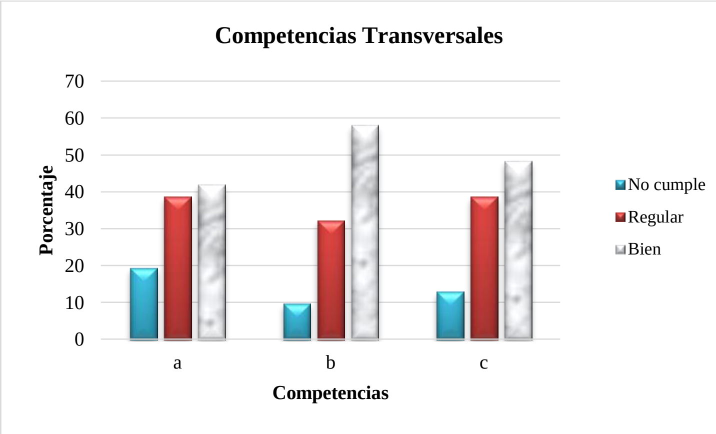


Fig. 3. Competencias transversales. Fuente: Trabajo realizado por alumnos de 1° año de la Asignatura Cálculo Diferencial e Integral FCF - UNSE

2.5.6 Indicadores de logro de las competencias transversales:

a) Organiza adecuadamente el tiempo y el espacio de estudio para responder a la situación.
b) Relaciona situaciones de aprendizaje nuevas con experiencias anteriores y saberes previos.
c) Demuestra capacidad para comprender relaciones lógicas entre conceptos.

2.5.7 Planificación e implementación de estrategias de resolución de situaciones problemáticas

Según estos indicadores y teniendo en cuenta los análisis realizados a los mismos alumnos en el primer cuatrimestre de la carrera, el desarrollo de estas competencias aumentaron considerablemente. Se puede observar que en el segundo cuatrimestre todavía hay deficiencias con respecto al manejo del tiempo y el espacio de estudio, sin embargo aprendieron a relacionar las situaciones nuevas con experiencias anteriores y saberes previos, así como demostraron mejor capacidad para comprender las relaciones lógicas entre los conceptos.

2.5.8 Competencias específicas

Tabla 6. Registro de datos de Competencias Específicas según las actividades realizadas en el aula virtual.

	Competencias Específicas						
	a2	a3	a4	a5	b1	b2	b3
No cumple	9.68%	9.68%	45.16%	9.68%	45.16%	38.71%	48.39%
Regular	29.03%	0%	19.35%	25.81%	9.68%	12.90%	3.23%
Bien	61.29%	90.32%	35.48%	64.52%	45.16%	48.39%	48.39%

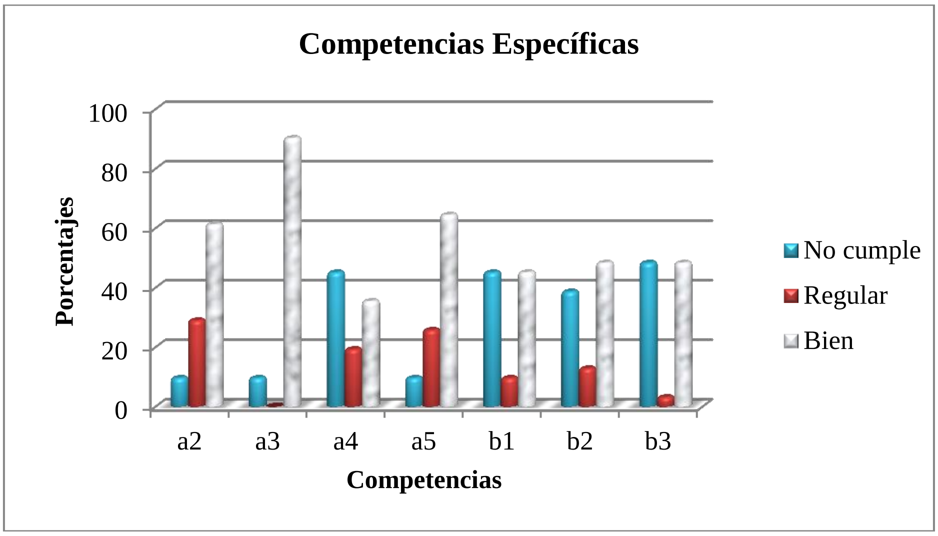


Fig. 4. Competencias específicas. Fuente: Trabajo realizado por alumnos de 1° año de la Asignatura Cálculo Diferencial e Integral FCF - UNSE

Tabla 7. Registro de datos de Competencias Específicas según las actividades realizadas en el aula virtual.

	Competencias Específicas								
	c1	c2	c3	d1	d2	d3	d4	d5	d6
No cumple	16.13%	25.81%	38.71%	9.68%	0%	12.90%	9.68%	12.90%	12.90%
Regular	29.03%	29.03%	16.13%	0%	12.90%	0%	25.81%	0%	0%
Bien	54.84%	45.16%	45.16%	90.32%	87.10%	87.10%	64.52%	87.10%	87.10%

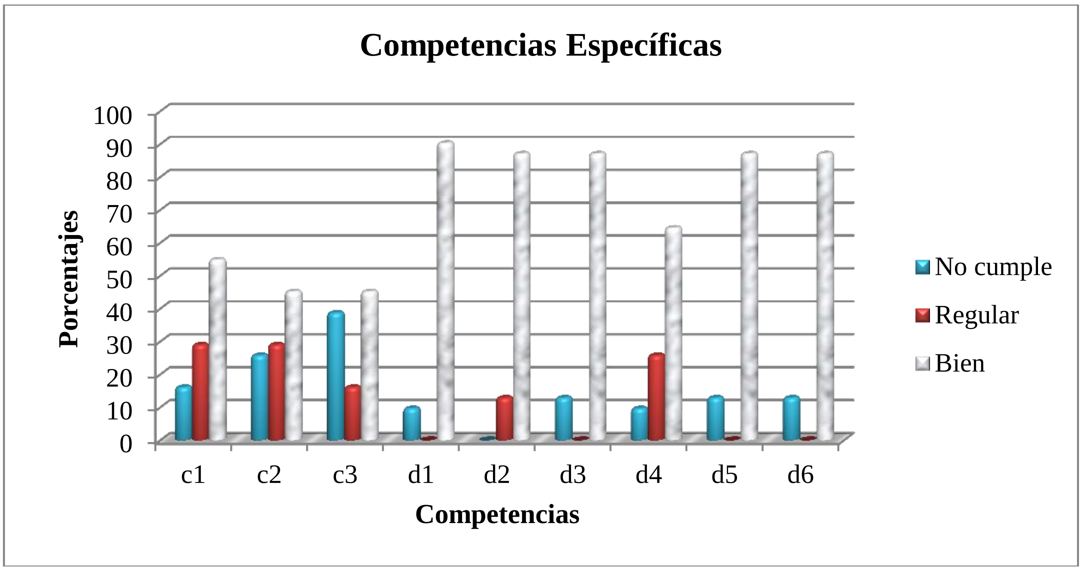


Fig. 5. Competencias específicas. Fuente: Trabajo realizado por alumnos de 1° año de la Asignatura Cálculo Diferencial e Integral FCF - UNSE

2.5.9 Indicadores de Logro de las Competencias Específicas:

a2) Identifica los conceptos matemáticos que utilizará en la resolución del problema.
a3) Usa la notación adecuada.
a4) Plantea y usa operaciones adecuadas para llegar a la solución.

a5) Comunica los resultados en forma adecuada.
b1) Justifica matemáticamente los resultados obtenidos.
b2) Reconoce y aplica propiedades numéricas.
b3) Resuelve adecuadamente las operaciones involucradas.
c1) Reconoce tipos de funciones: lineales, cuadráticas, trigonométricas, exponenciales, logarítmicas, mediante su gráfica y/o por sus ecuaciones matemáticas.
c2) Interpreta representaciones gráficas.
c3) Analiza las soluciones aritméticas, vinculadas con el problema planteado y/o con la realidad.
d1) Usa íconos, barra de menús, herramientas del S.O. y de aplicaciones.
d2) Accede a archivos y carpetas de diversas maneras.
d3) Maneja archivos y carpetas: crea, organiza, nombra, elimina, guarda y manipula información.
d4) Elabora y aplica funciones específicas a textos y distintas representaciones gráficas (copia, pega, inserta, da formato).
d5) Usa algún medio de comunicación electrónico para interactuar con otros.
d6) Crea, adjunta, envía y recibe mensajes e información.

2.5.10 Resolver problemas aplicado a conceptos matemáticos desarrollados y reconocer y aplicar propiedades numéricas

El estudio realizado permite observar que estas competencias específicas incrementaron notablemente, llegando a superar el 40% los estudiantes que se clasificaron con bien y complementándose con los estudiantes que fueron clasificados con regular superan el 50%. Se puede observar también que una alta porcentualidad de estudiantes utiliza la notación adecuada.

2.5.11 Analizar una función a partir de su representación gráfica y/o a partir de sus ecuaciones matemáticas

Con respecto a las competencias que refieren al análisis de una función a partir de su representación gráfica no pueden ser contrastadas, debido a que recién en esta instancia fueron evaluadas.

Los indicadores de estas competencias muestran que hay un buen porcentaje de estudiantes que identifican adecuadamente las funciones mediante su representación gráfica y analizan correctamente las soluciones aritméticas vinculadas con el problema planteado. Más del 40% con clasificación bien y entre un 15% y 20% con clasificación regular, lo que supera a los estudiantes que no supieron reconocer y analizar correctamente.

2.5.12 Utilizar la computadora, aplicando lógica procedimental en la utilización de Sistema Operativo y diversas aplicaciones

Tampoco pueden ser contrastadas las competencias que refieren al buen uso de la computadora, debido a que recién en esta instancia fueron evaluadas.

El análisis a través de los indicadores d1 – d6, que se refieren a la utilización adecuada de recursos informáticos permiten observar un alto porcentaje, siendo competencias que los estudiantes alcanzaron eficazmente durante el transcurso del ciclo lectivo.

3 Conclusiones

Las competencias analizadas fueron seleccionadas por el grupo de estudio, considerando las mas importantes a tener en cuenta.

El análisis de los resultados, después de haber realizado mejoras en la didáctica de la enseñanza de la matemática y la implementación de entornos virtuales, con el objetivo de desarrollar y/o mejorar las competencias básicas, transversales y específicas de los estudiantes del primer año de las carreras de la Facultad de Ciencias Forestales, arrojaron los siguientes resultados:

- El desarrollo de las competencias básicas se incrementó notablemente.
- El desarrollo de las competencias transversales, además de incrementarse se optimizaron, dado que los alumnos son de primer año.

- El desarrollo de competencias específicas, si bien se incrementaron contrastando con estudios anteriores, deben ser tenidas en cuenta para reestructurar situaciones que permitan mejorar su evolución.

Realizando un análisis global de la situación, contrastando con los análisis realizados en trabajos anteriores, las competencias específicas son las que mas requieren atención del equipo y se deben idear estrategias de enseñanza orientadas a optimizar los resultados de aprendizaje de los estudiantes. Este trabajo también reconoce que la metodología blended learning utilizada para el desarrollo de actividades permite situar al estudiante en el futuro contribuyendo a su mejora profesional, al poder optar por recursos que minimicen el tiempo de resolución de situaciones problemas.

Referencias

1. CONFEDI. *Declaración de Valparaiso sobre competencias genéricas de egreso del ingeniero iberoamericano. Competencias genéricas de egreso del ingeniero argentino. Competencias requeridas para el ingreso a los estudios universitarios en Argentina.* FASTA Ediciones. (Abril 20l4)
2. Gascón, J. Evolución de la didáctica de las matemáticas como disciplina científica. Revista Recherches en Didactique des Mathématiques. Vol. 18/1, núm. 52, pp. 7-33. (1998)
3. Garcia Quiroga, B.; Coronado, A.; Montealegre Quintana, L. Formación y desarrollo de competencias matemáticas: una perspectiva teórica en la didáctica de la matemática. Revista Educación y Pedagogía. Vol. 23, núm. 59. (enero-abril, 2011)
4. Posada Alvarez, R. Formación superior basada en competencias, interdisciplinariedad y trabajo autónomo del estudiante. Revista Iberoamericana de Educación. http://www.rieoei.org/deloslectores/648Posada.PDF. (2004). Accedido el 07 de Febrero de 2017.
5. Sladogna, M. Una mirada a la construcción de las competencias desde el sistema educativo. La experiencia Argentina. CINTERFOR-OIT. Competencias laborales en la formación profesional. Boletín Técnico Interamericano de Formación Profesional. N° 149, p. 115. (mayo-agosto, 2000)
6. Cukierman, U. Educación Basada en Competencias (EBC) en carreras de Ingeniería. Dossier del curso organizado por las Facultades de Ciencias Exactas y Tecnologías, Ciencias Forestales y Agronomía y Agroindustrias de la UNSE. Resolución HCD FCEyT N° 642/2016. (Agosto, 2016)

Volver al Índice

La Alfabetización Matemática de Recursos Tecnológicos

Claudia Cejas, Elsa Ibarra, Sylvia Nabarro, Carolina Ger
Departamento de Ciencias Básicas. Facultad de Ciencias Forestales. UNSE. Avda. Belgrano Sud 1912. CP 4200
{claudiacejas_1, carolinager}@hotmail.com, egomez@unse.edu.ar sylvianabarro@yahoo.com.ar.

Resumen. Diferentes experiencias de cátedra con ingresantes a las carreras de grado de la facultad de Ciencias Forestales, vienen poniendo al descubierto el escaso manejo y empleo de las tecnologías de la información y comunicación en experiencias educativas. La integración de dicha herramienta moviliza un conjunto de competencias que tienden a fomentar el pensamiento crítico, analítico y el pensamiento analógico, a la vez que promueve la interacción colaborativa entre estudiantes y la comunicación en sus diferentes lenguajes. Los docentes tenemos el gran desafio de desarrollar propuestas integradoras e innovadoras que favorezcan la comprensión de procesos complejos y faciliten la adquisición de nuevos saberes. En el presente artículo se describen experiencias desarrolladas por el equipo cátedra de Matemática que involucran el uso de las TICs, la articulación horizontal-vertical hacia otras cátedras, percepciones de los estudiantes y percepciones docentes frente a tales experiencias.

Palabras Clave: Competencias, TICs, Articulación, Comunicación.

1 Introducción

A lo largo de estos años la posesión y el uso de tecnología se ha incrementado de manera significativa en las sociedades en general. Sin embargo las prácticas educativas con su uso siguen apareciendo en un bajo porcentaje respecto de los usos sociales cotidianos.

Diversos planes a nivel nacional han impulsado la implementación de tecnología en las aulas. Distribución de notebook a estudiantes y docentes de nivel secundario y superior en las escuelas públicas, equipamiento de gabinetes tecnológicos, capacitaciones docentes en el uso e implementación de las tics como herramienta educativa, son una breve reseña de las acciones que se vienen desarrollando a fin de promover innovaciones en las propuestas pedagógicas.

El escaso uso de esta herramienta es notorio en los alumnos ingresantes a las carreras de grado de la Facultad de Ciencias Forestales (F.C.F), donde además se percibe dificultades en sus distintas formas de comunicación, particularmente cuando se enfrentan a las formas del lenguaje matemático.

Uno de los principales desafíos del equipo docente de matemática de la F.C.F es facilitar la adquisición de saberes en los estudiantes a través de experiencias motivadoras que promuevan en ellos el desarrollo de diferentes competencias, para actuar frente a problemas que demanden de su perfil profesional.

Para llevar adelante la propuesta, se trabaja primero sobre una idea común del concepto de competencia para luego elaborar un conjunto de acciones concretas orientadas a tal fin.

"Entendemos aquí por competencia a un saber actuar complejo que se apoya sobre la movilización y la utilización eficaz de una variedad de recursos. La idea de saber actuar hace surgir la noción que cada competencia está esencialmente ligada a la acción y le otorga un carácter más global. Además, la integración en la definición de la movilización y la utilización eficaz de un conjunto de recursos es capital. Una competencia no constituye una forma de algoritmo memorizado y practicado repetidamente en vista a asegurar la perennidad y la reproducción, sino un saber actuar muy flexible y adaptable a diversos contextos y problemáticas. Una competencia se sitúa más en un orden heurístico que algorítmico"[1].

Muchas veces los docentes exigimos competencias a los estudiantes, pero pocas veces nos detenemos a analizar si las experiencias que brindamos se corresponden con lo que esperamos de ellos:

-Queremos que sean capaces de comunicar ideas o conceptos en forma clara y precisa, tanto en forma oral como escrita, pero ¿Cuántas oportunidades les damos para expresar lo que piensan y cómo piensan? ¿Cuántas veces enseñamos a producir un documento escrito? ¿Cómo acompañamos esa producción? ¿Qué esperamos de ellos en escrito?

Según Carlino [2] es habitual que los docentes no nos ocupemos de enseñar a leer ni escribir los contenidos de las propias asignaturas, pero si solemos exigirlo en nuestros alumnos cuando son evaluados. Lo que no se suele enseñar es a usar la escritura como herramienta para pensar los problemas particulares de cada disciplina. No se enseña a planificar ni a revisar los borradores, a anticipar el punto de vista del destinatario, a reescribir el propio texto con ojos de lector crítico. Para lograr escribir un buen texto, los estudiantes han de dominar no sólo los contenidos de los temas relevantes sino el modo en que cada campo profesional analiza los hechos que observa, argumenta sus aserciones y presenta datos nuevos en el contexto de lo ya sabido.

Sostiene además Carlino, que investigaciones sobre proceso de comprensión lectora, acuerdan que leer es reconstruir el sentido de un texto. Al respecto sostiene que, los estudiantes universitarios de los primeros años leen sin un objetivo propio –ya que se le da para leer- y pueden contribuir con escasos conocimientos sobre el contenido de los textos, justo porque están tratando de elaborarlos. Las dificultades para entender (y sostener la lectura) se vuelven inevitables si no se acompaña, desde cada cátedra, su actividad lectora.

Bajo esta idea se elaboraron experiencias de cátedras que tiendan a favorecer el desarrollo de competencias y el desafío de elaborar programas basados en el desarrollo de competencias.

2 Desarrollo

Analizadas las Competencias Genéricas acordadas por el CONFEDI [3], consideramos que desde el área de matemática es posible contribuir en de desarrollo de las siguientes competencias:

- Competencias tecnológicas para identificar y resolver problemas de ingeniería.
  Esta competencia requiere la articulación, por parte del alumno, de las siguientes capacidades:
  a) Capacidad de identificar y organizar los datos pertinentes al problema.
  b) Capacidad de evaluar el contexto particular del problema.
  d) Ser capaz de elaborar informes, especificaciones y comunicar resultados.
- Competencia para desempeñarse de manera efectiva en equipos de trabajo
  Esta competencia requiere la articulación, por parte del alumno, de las siguientes capacidades:
  a) Ser capaz de asumir como propios los objetivos del grupo y actuar para alcanzarlos.
  b) ser capaz de promover una actitud participativa y colaborativa entre los integrantes del grupo.
  c) Capacidad para reconocer y respetar los puntos de vista y opiniones de los otros miembros del equipo y llegar a acuerdos.
- Competencias para comunicarse con efectividad.
  Esta competencia requiere la articulación, por parte del alumno, de las siguientes capacidades:
  a) Capacidad para seleccionar las estrategias de comunicación en función de los objetivos y de los interlocutores.
  b) Ser capaz de expresarse en forma clara, concisa y precisa tanto en forma oral como escrita.
  c) Ser capaz de producir textos, utilizando de manera eficaz distintos lenguajes (natural, gráfico y simbólico)
  d) Ser capaz de manejar herramientas informáticas para la elaboración de informes y presentaciones.
- Competencia para aprender en forma continua y autónoma
  Esta competencia refiere a que el alumno sea capaz de evaluar su propio aprendizaje y desempeño, y encontrar los recursos necesarios para mejorarlos.

3 Propuestas metodológica-didácticas para el logro de las competencias del área.

Con el propósito de desarrollar en los estudiantes las competencias esperadas en el área, se han implementado diferentes propuestas didácticas desde las asignaturas de Cálculo Diferencial e Integral y Matemática II que corresponden a las carreras de Ingeniería Forestal y Licenciatura en Ecología y Conservación del Ambiente respectivamente y que se dictan en el segundo semestre del primer año.

La propuesta se articula con temáticas abordadas en espacios curriculares con dictado simultáneo y con problemas a ser retomadas y profundizadas en espacios avanzados de la carrera, a fin de fomentar el enfoque interdisciplinario de matemática con fenómenos de la naturaleza.

Entre las propuestas ejecutadas, podemos mencionar:

a) Uso de software libre (geogebra, mathlab) para computadoras y celulares, que acompañen el desarrollo de las guía de trabajos prácticos domiciliarios y en el aula.
b) Uso de plataforma virtual para facilitar videos, tutoriales, páginas web y presentar trabajos grupales e individuales, que favorezcan la comunicación y el aprendizaje de los estudiantes.
c) Taller integrador grupal al final de la asignatura, que permita sintetizar los saberes incorporados por los estudiantes en el proceso de aprendizaje.

Precisamente, esta última instancia, es un trabajo grupal obligatorio y requisito junto con los parciales para regularizar la asignatura. En este taller se distribuye a cada grupo un problema diferente y vinculado a su campo profesional para ser interpretado, analizado y representado para una posterior comunicación.

Presentamos a continuación un breve resumen con sus objetivos, contenidos, metodología de trabajo y evaluación.

3.1 Taller Integrador

A continuación se transcribe el contenido del material que se entrega a los estudiantes:

Objetivos

a) Utilizar los conocimientos adquiridos en el estudio de las funciones para interpretar y analizar diferentes problemas.
b) Integrar los saberes matemáticos con el uso de software específico para inferir conceptos y analizar comportamientos.
c) Fortalecer hábitos de trabajo en equipo a través de la discusión grupal y la elaboración de conclusiones.
d) Desarrollar competencias comunicativas mediante la exposición oral y la presentación escrita de trabajos.

Introducción

Los modelos matemáticos son de un gran valor para el estudio de diferentes ciencias tales como la Biología, Física, Química, Economía, entre otras. Representan un soporte fundamental para la predicción o toma de decisiones respecto de fenómenos sociales o naturales ya que una buena construcción e interpretación de un modelo ayudaría a tener buenos resultados futuros.

Entendemos por modelo matemático una representación que describe en forma simplificada el comportamiento de un fenómeno, experimento u objeto real.

Dicho modelo puede estar expresado en lenguaje gráfico, simbólico, o bien mediante una ecuación algebraica que relacione dos o más variables.

En el desarrollo de este taller trabajemos con modelos matemáticos vinculados a la economía y al crecimiento poblacional.

Aplicaciones de la derivada a Modelos de Población

Todos los organismos, incluyendo a los humanos, son afectados por diversos factores que inciden el crecimiento de la población. Los cambios poblacionales dependen de las tasas "naturales" de nacimientos y muertes, pero estas tasas a su vez pueden variar según los recursos disponibles y los enemigos de la especie. También las poblaciones pueden variar por eventos externos, como huracanes, enfermedades o invasiones de otras especies en el territorio.

En los sistemas ecológicos complejos, la población de algunas especies depende de otras de las cuales se alimentan. A su vez, las poblaciones de las presas están limitadas por la de sus depredadores. También hay especies que compiten entre sí por los mismos recursos. En estos sistemas las poblaciones varían interactivamente.

Una población puede crecer en forma exponencial hasta que sobrepasa la capacidad del ambiente para sostenerla. Justo en ese momento la población entra en un abrupto declive debido a la inanición (falta de alimento), enfermedad o emigración. Esto quiere decir que las condiciones ambientales limitan el crecimiento poblacional.

Como resultado el crecimiento de la población alcanza en algunos casos un nivel estable. Este nivel se conoce como la capacidad de carga o K.

Teóricamente en K la población se encuentra en equilibrio sin crecer ni disminuir.

Con el propósito de elaborar modelos matemáticos más simplificados, conviene dejar de lado la mayor parte de esos detalles y considerar situaciones idealizadas. Los modelos más simples se postulan para una sola población, sin interacción con otras. También se suele evitar la consideración de las migraciones. En este caso se habla de un sistema cerrado. Bajo estos supuestos se destaca el modelo de crecimiento que estudiaremos, llamado modelo logístico.

Uno de los patrones de crecimiento más simples observados en las poblaciones con crecimiento logístico es la presencia de una curva sigmoidea (Fig. 1). La función logística ó curva logística es una función matemática que aparece en diversos modelos de crecimiento de poblaciones, propagación de enfermedades epidémicas, población de animales en una isla, tiempo de respuesta a medicamentos en pacientes, crecimiento de bacterias en condiciones controladas, etc.

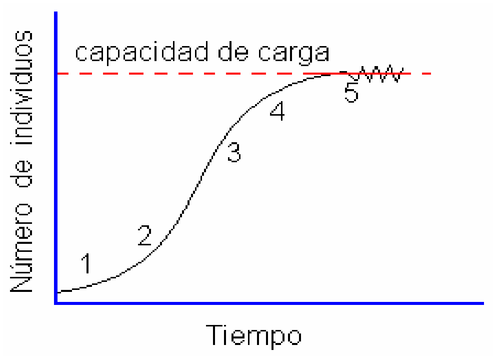


Fig.1. La gráfica que representa una función logística o curva de crecimiento logístico.

Tiene la forma:

$$P(t) = \frac{A}{1 + ke^{-bt}} \qquad \textbf{(1)}$$

Aplicaciones de la derivada al comercio y a la economía.

En la economía, la variación de una cantidad con respecto a otra puede ser descrita por un concepto promedio o por un concepto marginal. El concepto de promedio expresa la variación de una cantidad sobre un rango específico de valores de una segunda cantidad. Mientras que el concepto marginal es el cambio instantáneo en la primera cantidad que resulta de un cambio muy pequeño en la segunda cantidad.

Algunos de los conceptos básicos en economía son los que a continuación se presentan:

Tabla 1. Tabla de conceptos básicos de aplicaciones de la derivada a la economía.

Términos básicos	Fórmulas básicas
x: es el número de unidades producidas (o vendidas)	
p: es el precio por unidad	
R(x): es el ingreso producido al vender x unidades	R(x)= x.p
C(x): es el costo de producción de x unidades	
$\overline{C}(x)$: es el costo medio por unidad	$\overline{C}$ = C / x
P(x): es la utilidad/beneficio por la venta de x unidades	P(x) = R(x) – C(x)

El punto de beneficio nulo es el número de unidades para el cual R = C

Marginales:

$\frac{dR}{dx}$: ingreso marginal ≈ ingreso extra al vender una unidad adicional

$\frac{dC}{dx}$:costo marginal ≈ costo extra al producir una unidad adicional

$\frac{dP}{dx}$:utilidad/beneficio marginal ≈ beneficio extra al vender una unidad adicional

Actividades Grupales

- Deberán reunirse en grupos de no más de cuatro alumnos, y con apoyo del software geogebra analizar el problema que le será entregado.

- Realizar un registro de los resultados obtenidos en el desarrollo y resolución del problema.
- Recurrir a consulta con los docentes cuando estime necesario.
- Organizar la información para una posterior exposición oral.
- Elaborar un informe escrito con los resultados obtenidos.
- Los grupos disponen de dos semanas para abordar la actividad propuesta.

Evaluación del taller

- Cada grupo deberá exponer frente a sus compañeros el análisis y solución del problema en un tiempo máximo de 15 minutos, con apoyo de los materiales que crean convenientes y deberán responder a las preguntas que pudieran surgir de esta exposición.
- El informe escrito con el análisis del problema será elevado al aula virtual de la cátedra.

3.2 Trabajo grupal

El siguiente es uno de los informes escritos elaborados por los grupos a cerca del problema asignado y subidos al aula virtual de la cátedra:

Integrantes: Castillo, A; Juárez, P; Lescano, F; Lescano, S.

Problema 2: Algunos analistas opinan que la población mundial se ajusta, desde 1960, a la siguiente función

$$P(t)=\frac{36000}{1+11e^{-0.0212.t}}$$

siendo t=0 en 1960 y teniendo en cuenta que P(t) está dado en millones de personas.

Responde (aproximando las unidades):

a) ¿Cuántas personas había en 1.960, en 1.990 y en 2.010?

b) ¿Cuántas personas habrá en 2.020?

c) ¿En qué año se alcanzarán los 12.000 millones de personas?

d) ¿En qué instante de tiempo se llegará al límite de población? ¿Cuál es el límite de población que puede haber según la función dada?

A partir del gráfico, elabore algunas conclusiones respecto de:

i)Tipo de función que intervienen en el modelo

ii)Fase de rápido crecimiento y fase de lento crecimiento (en términos de intervalos)

iii)Dominio, imagen, asíntotas, monotonía (intervalos de crecimiento y decrecimiento), puntos de inflexión, concavidad.

Desarrollo de actividades:

A) En el año 1960 hubo un total 3000 millones de personas, lo cual en el programa GeóGebra está representado con el punto A.

En el año 1990 existieron aproximadamente 5279 millones de personas, representado como punto B

En el año 2010 la población llego aproximadamente a 6309 millones de personas (punto C)

B) En el 2020 habrá aproximadamente 8829 millones de personas (punto D)

C) Se alcanzará 12000 millones de personas en el año 2040 (punto E)

D) La población llegará al límite aproximadamente dentro de 400 años (gráficamente se observa que p(400)= 35.868, acercándose a 36.000).

El valor límite de la población que se da en la función es de 36000 millones de personas.

I) La función con la que trabajamos en este problema es de tipo logística, la cual es una función matemática que aparece en modelos de crecimiento de población como en este caso observamos.

ii) Fase de rápido crecimiento: (50, 250)

Fase de lento crecimiento: (0, 50) (250, ∞)

En la zona donde se encuentra el punto de inflexión se observa un crecimiento rápido. El crecimiento se vuelve lento cuando la gráfica se acerca a las asíntotas.

A) El dominio de la función [0, 700)

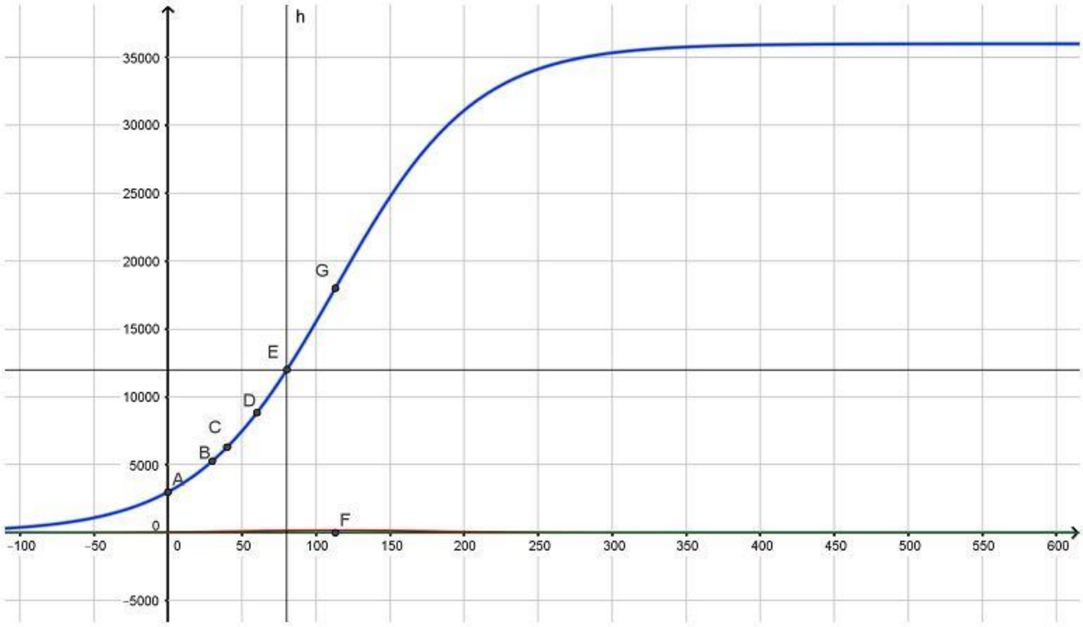
B) La imagen de la función es [3000, 36000)

C) Asíntotas horizontales en y= 0 y= 36000

D) Monotonía: creciente

E) Puntos de inflexión I= (120; 18000)

F) La función es cóncava hacia arriba (-∞, 120] y cóncava hacia abajo en [120, ∞)



3.3 Opinión de estudiantes respecto del Taller Integrador

La siguiente encuesta fue implementada de manera individual a los estudiantes luego de la instancia de exposición grupal a fin de obtener información sobre los distintos aspectos de este dispositivo didáctico y ponerlos en correspondencia con los objetivos iniciales del mismo y las capacidades a desarrollar previstas por el equipo docente.

Tabla 2. Los datos consignados en tabla sobre aspectos positivos y negativos, están ordenados en orden decreciente según la frecuencia de aparición de las respuestas.

	Aspectos positivos	Aspectos negativos
Manejo el software Geogebra	-Necesario para los conocimientos adquiridos en clases, para la comprensión. -Ayuda a desarrollar de los problemas rápida y eficazmente -Simplifica la gráfica de las funciones. -Mayor rapidez en la resolución de los problemas. -Adquisición de Nuevos conocimientos -Fácil y Didáctico -Desarrollo de cálculos más rápidamente	-Dificultad en realizar tablas, derivadas y puntos de inflexión, funciones -Poco conocimiento previo y uso del software. -Recordar todas las funciones del software. -Falta de Práctica -No saber manejar el software -no interpretar consignas -Cuesta entenderlo/ complejo

Acerca del problema abordado y su resolución	-Aprender análisis y planteo de problemas Económicos. -Trabajar en grupos. -Entender para qué se aplican derivadas. -Conocer problemas de nuestra carrera. -Modelo de función para uso futuro. -Interpretar gráficos de crecimiento poblacional / económicos -Temas vistos en clases -Aprendimos como resolver un problema utilizando un software -Entretenido y práctico -Nos ayuda a pensar e interpretar -Una buena forma de demostrar como la matemática se aplica a nuestra profesión -Verificación de lo aprendido, análisis de distintos aspectos utilizando el software	-Falta de conocimientos sobre algunos temas. Difícil comprensión en las formulas usadas, conceptos -Difícil plantear el problema. -Dificultad para generar la tabla -Saber utilizar herramientas matemáticas -Dificultades con las fases de crecimiento -Querer resolver manualmente sin el software -Dificultad en la interpretación de las consignas
Acerca del trabajo grupal	-Se hizo más fácil entender las consignas. -Más aportes de opiniones para la resolución y entendimiento. -Aprender a debatir, razonar y sacar conclusiones. -Compañerismo, unión -Intercambio de opiniones, dudas y que el trabajo sea más leve. -Interpretamos de manera diferente (enriquecedor) y dividimos actividades -Tendríamos que hacer más actividades grupales -Me ayudo a socializarme con mis compañeros/as.	-Dificultad a la hora de reunirnos, por tiempo y distancias. -Falta de organización grupal. -Algunos compañeros no comprendían aspectos del problema -Ponerse de acuerdo -Dudas y cambios en el trabajo -No todos se comprometieron con la tarea -Cuando ninguno tenía respuesta -No realizó en grupo
Acerca de las nuevas tecnologías (aula virtual, software) en las clases de matemáticas.	-Es algo más interactivo. -Facilita la entrega de trabajos. -Herramienta más rápida y precisa de trabajar. -Nos prepara a futuro. -Hay tutoriales que ayudan la comprensión. -Muy buena herramienta / interesante -Se aprenden nuevos conocimientos -Gran apoyo para los parciales -Buena manera de comunicación por Aula Virtual -Forma novedosa de complementar el aprendizaje -Hacen llevadero el cálculo de los problemas y análisis de los gráficos -Deberían implementarse mas	-Cuesta adaptarse a las Nuevas Tecnologías. -Hay que tener: PC, internet, pendrive, etc. -Falta de Práctica -Problemas de conexión a Internet -Olvido de usuario y clave -Difícil la escritura de caracteres matemáticos -Lleva tiempo -Sugiero tutoriales y videos de la teoría -Poco conocimiento sobre el manejo de las herramientas

Acerca de la exposición oral del trabajo	-Ayuda a perder el miedo hablar frente a los demás. -Ayuda a desenvolvernos. -Darnos cuentas de los errores. -Aprender a utilizar términos técnicos. Ejercitación de la oratoria -Defender el trabajo propio -Perder la vergüenza / timidez -Poder comunicar oralmente los saberes -Ayuda a la comprensión de los problemas -Agradable. Nos resultó fácil porque como grupo supimos organizarnos -Buena experiencia para futuro	-Falta de experiencia en la exposición. -Hacia donde orientar la explicación. -Falta de vocabulario técnico. -Inseguridad, nervios, miedo -Tener que desarrollar perfectamente el trabajo

4 Conclusiones

Los resultados de estas encuestas constituyen un aporte para reflexionar y marcar un rumbo en el trabajo curricular del área de Matemáticas basado en un enfoque para el desarrollo de competencias. La opinión de los alumnos manifiesta que la utilización de un software es ventajosa para la comprensión de los conocimientos y que ayuda a analizar e interpretar los problemas rápida y eficazmente. Además las nuevas tecnologías (aula virtual, software) en las clases de matemáticas promueven la interactividad, facilita la consulta, entrega de trabajos y los prepara para el futuro.

Acerca de los problemas y su resolución, expresaron que les permitió vincular los conceptos matemáticos con problemas propios de su campo profesional. Que el trabajo colaborativo de análisis del problema, con el debate y las diferentes opiniones les permitió y facilito razonar en colectivo y comprender mejor la problemática.

En relación a la exposición oral del trabajo, expresaron que les resultó muy ventajoso comunicarse en un estilo poco habitual en ellos y con uso del lenguaje propio de la matemática.

En cuanto a los aspectos a superar, manifestaron dificultades en el manejo el software Geogebra por lo poco habitual del uso y por tratarse en algunos casos de no disponer de notebook propias y falta de conectividad. Esto dificultaba la práctica y por tanto el olvido de las funciones del software. Por otro lado, en algunos casos, los problemas de tiempos y distancia obstaculizaban la organización del trabajo grupal.

El planteamiento y resolución de problemas es un proceso, que al ser poco habitual, generaba la dificultad de vincular las problemáticas propias de las carreras con los modelos matemáticos aplicados.

En relación a la exposición oral, la falta de experiencia, organización previa, seguridad en el vocabulario técnico, originaban nervios y temores.

Los logros obtenidos deben representar un estímulo en la dirección correcta, y las dificultades encontradas, una instancia de reflexión en la toma de decisiones para orientar el cambio. Entendemos que un enfoque basado en competencias exige que los docentes involucrados puedan asumir la complejidad del mismo, ya que ninguna competencia de desarrolla de una vez y para siempre.

Esto es, a repensar la programación desde sus diferentes aristas, desde los contenidos, la metodología, la evaluación, los roles de los agentes involucrados, la necesidad de una coherencia lógica al interior de la programación, así como la relación interdisciplinar con otras asignaturas, debido a los lazos de complementariedad de unas competencias con otras, que complete la coherencia global del proyecto.

Referencias

1. Tardif, Jacques: “Desarrollo de un programa por competencias: De la intención a su implementación” Profesorado. Revista de currículum y formación del profesorado, 12, 3 (2008) http://www.ugr.es/local/recfpro/rev123ART2.pdf
2. Carlino, P (2005): “Escribir, leer y aprender en la Universidad”. Buenos Aires. Fondo de Cultura Económica
3. CONFEDI. Declaración de Valparaiso sobre competencias genéricas de egreso del ingeniero iberoamericano. Competencias genéricas de egreso del ingeniero argentino. Competencias requeridas para el ingreso a los estudios universitarios en Argentina. FASTA Ediciones. (Abril 2014)

Volver al Índice

Formulación de un Proyecto de Investigación sobre los Registros Semióticos de Representación en Geometría del Espacio

Ana E. Gruszycki, Mónica P. Maras, Pedro D. Leguiza, María Cristina Cardozo
Instituto GeoGebra Chaco, Universidad Nacional del Chaco Austral
ana@uncaus.edu.ar

Resumen. La enseñanza, el aprendizaje, la comprensión y divulgación del tema Geometría Analítica en el Espacio, se ve obstaculizada por la incapacidad de abstracción que se necesita para visualizar correctamente los gráficos realizados en el espacio. La utilización de GeoGebra para el desarrollo de este tema, puede resultar favorable para suplir esta deficiencia ya que permite observar los gráficos construidos en 3D coordinando los diferentes registros de representación, y de este modo favorecer el aprendizaje.
Esta investigación tiene como objetivo contribuir a la aprehensión conceptual de Geometría del Espacio, mediante la coordinación entre los diferentes registros de representación de un mismo objeto matemático, en alumnos de primer año de las carreras de la Universidad Nacional del Chaco Austral a través del diseño, aplicación y evaluación de secuencias didácticas utilizando el software dinámico GeoGebra.
Los resultados buscan el mejoramiento de la calidad educativa y la comprensión desde un enfoque más amplio del conjunto de factores que intervienen en la adquisición de conocimientos científicos.

Palabras Clave: Geometría Dinámica, Registro de Representación, Semiótica, Visualización.

1 Introducción

Los sistemas de representación han sido objeto de numerosas investigaciones en el campo de la Didáctica de la Matemática.

Verstappen en [1] estudió los diferentes modos de representación de las funciones; Janvier en [2] indicó las habilidades que necesitaban los alumnos para traducir entre varias representaciones. Las representaciones mentales han sido usadas por Cifarelli (1998):

> Para describir el proceso de resolución de problemas en matemáticas, ya que la investigación sugiere que si un alumno es capaz de resolver problemas, tal vez se debe en gran parte a su habilidad de construir representaciones que le ayudan a entender la información y la relación de la situación problemática. [3]

La mediación instrumental fue idea tematizada originalmente, desde un punto de vista psicológico, por Vigotsky. Un aspecto importante del trabajo con las herramientas computacionales y su transformación en instrumentos matemáticos fue abordado por Rabardel como se indica en [4].

La hipótesis de que las diferentes representaciones de los objetos matemáticos son elementos fundamentales para su comprensión y por tanto para su enseñanza y aprendizaje, ha llevado a que el interés de especialistas se focalice en su estudio durante los últimos tiempos. Muchos investigadores han dedicado numerosos estudios a precisar el concepto de representación y analizar el papel que desempeñan en el razonamiento de los estudiantes.

En [5] investigaron sobre la transformación lineal y la coordinación de registros semióticos con el objetivo de explicar la relación que guarda la coordinación de registros con el éxito al resolver situaciones matemáticas, y de dar ejemplos concretos de casos de coordinación y no coordinación, tomando como marco de referencia a la teoría de registros de representación semiótica de Duval.

Bello Durand en [6] realizó una investigación basada en el uso de GeoGebra como mediador de la enseñanza de la programación lineal eligiendo como marco teórico la Teoría de Registros de Representación Semiótica de Duval y concluyó que con este software los alumnos pueden manipular, conjeturar, esbozar y plantear posibles soluciones mientras construyen el conocimiento y transitan por los registros de representación verbal, algebraico y gráfico de manera natural y espontánea.

García Fajardo en [7] se centró en el análisis detallado de secuencias didácticas integrando GeoGebra para la enseñanza de ecuaciones lineales, en relación con formas de razonamiento de los estudiantes frente a la construcción del concepto de ecuación mediado por diferentes registros de representación semiótica.

En [8], Figueroa Vera arribó a la conclusión de que las situaciones didácticas diseñadas consolidaron los aprendizajes relacionados con la resolución de problemas que involucran a sistemas de ecuaciones lineales con dos variables haciendo uso del GeoGebra. En el diseño de estas secuencias enfatizó en las conversiones – en ambos sentidos – entre los registros gráfico y algebraico.

Con el propósito de intervenir alrededor de los problemas de la educación matemática desde la UNCAUS se planteó abordarlos con la investigación: "Diseño de Secuencias Didácticas con GeoGebra para Mejorar la Aprehensión Conceptual de los Alumnos de Ingeniería en Geometría Analítica", aprobado por la Secretaría General de Ciencia y Técnica en el Período 2012-2015, esta investigación tuvo como propósito, mejorar la aprehensión conceptual de un objeto matemático, utilizando los distintos registros de representación semiótica propuestos por Raymond Duval e integrando con las tecnologías de la información y la comunicación (TIC). Se eligió GeoGebra ya que permite trabajar con diferentes registros de representación un mismo objeto matemático a través de sus distintas vistas. Se pudo comprobar diferencias significativas a favor de la metodología empleada en los ejercicios donde los alumnos debieron realizar conversiones que involucraron registros multifuncionales.

Si bien existen grupos de investigadores que abordan problemáticas de la Didáctica de la Matemática, en nuestra Universidad es el único que tiene antecedentes en ésta línea, con resultados que evidencian la necesidad de continuar con el estudio en torno de las representaciones semióticas de diversos conceptos matemáticos para facilitar la aprehensión conceptual apoyados en software dinámicos y determinar cuáles son las estrategias que favorecen los procesos de pensamiento, en la búsqueda de aportes que permitan mejorar el proceso de enseñanza y aprendizaje de la Matemática, contribuyendo a la resolución de la problemática referente a deserción, rezago y rendimiento académico.

1.1 Justificación de la Investigación

Con esta investigación se pretende abordar las actividades de enseñanza y de aprendizaje de los alumnos que cursan el primer año de las carreras de Ingeniería en la Universidad Nacional del Chaco Austral, considerando como eje temático "Geometría del Espacio".

Una de las preocupaciones de la Universidad Nacional del Chaco Austral (UNCAUS) es aumentar la retención de los alumnos evitando la deserción, rezago y bajo rendimiento académico, para ello, entre otras medidas, proponen incorporar diversas metodologías de enseñanza.

En esta búsqueda de nuevas metodologías, la inclusión de tecnologías y el aporte que éstas realizan al desarrollar actividades desde más de un sistema de representación parece ser el camino indicado.

La Ley de Educación Nacional Nº 26.206 establece como uno de los fines y objetivos de la Política Educativa Nacional: "desarrollar las competencias necesarias para el manejo de los nuevos lenguajes producidos por las tecnologías de la información y la comunicación".

Por otra parte en el Documento aprobado por Resolución del Consejo Federal de Educación (CFE) N° 180/12 para los Núcleos de Aprendizajes Prioritarios en Matemática propone, con referencia al tema, que durante el Ciclo Orientado de la Educación Secundaria, la escuela debe ofrecer situaciones de enseñanza que promuevan en las y los estudiantes, entre otros, los siguientes propósitos:

- La comprensión de que la mayoría de las nociones matemáticas pueden abordarse desde diferentes marcos (algebraico, geométrico, numérico, probabilístico), y de la potencia que ofrece cambiar de un marco a otro tanto en la resolución de un problema, como en el control de procedimientos y resultados.
- La valoración y uso de los recursos tecnológicos para la exploración y formulación de conjeturas, para la resolución de problemas y para el control de los resultados, considerando sus alcances y limitaciones al validar los procedimientos utilizados y los resultados obtenidos.

También en el Mensaje de la 47º Reunión de la Conferencia Internacional de Educación de la UNESCO el documento Prioridades de acción propuestas con miras a mejorar la calidad de la educación de todos los jóvenes expresa la necesidad de "aumentar el acceso y la equidad para todos los jóvenes", especificando que:

- Hay que establecer nuevas maneras de concebir la educación, que incluyan métodos organizativos y pedagógicos creativos y el empleo de las TIC, con el fin de mejorar el acceso de los jóvenes a la enseñanza y su mantenimiento en ella.
- Es importante propiciar en los estudiantes, comportamientos matemáticos cognitivos que favorezcan la construcción y aprendizaje de conocimientos matemáticos, destacando la relevancia que tiene el tratamiento y conversión entre registros de representación semiótica.

Estos aspectos forman parte de la motivación inicial para la realización de la propuesta didáctica que se presenta, a través de Ambientes de Geometría Dinámica utilizando el software de GeoGebra que además de ser libre y gratuito, está en continua evolución y desarrollo, lo que hace que cada versión incorpore nuevas opciones con las que aumenta su potencia y por tanto, incrementa también las actividades que pueden afrontarse con su ayuda permitiendo coordinar diferentes registros de representación, algo que es muy difícil de lograr sin la mediación de este tipo de software.

Una de las novedades más significativas de la versión 5.0 de GeoGebra es la incorporación de la ventana 3D. Siguiendo la filosofía de GeoGebra, la ventana 3D no es independiente, sino que está conectada con el resto de ventanas, lo que aumenta las posibilidades que ahora ofrece GeoGebra.

Se pretende que este trabajo pueda ser replicado en otras carreras de nuestra Universidad o en otras Instituciones Educativas, desde las mismas matemáticas o desde otras áreas, buscando redefinir el rol que juegan tanto estudiantes como docentes en los procesos de enseñanza aprendizaje.

Los integrantes de este proyecto se apropiarán de esta innovación dejando abierto el debate frente a éstos temas, ya que nuestra profesión requiere de responsabilidad y constante cambio.

2 Formulación del Proyecto

2.1 Marco Teórico del Proyecto

El marco teórico del presente proyecto se basa en la teoría de registros de representación semiótica desarrollada por Raymond Duval, que permite explicar el nivel de conceptualización en base a los cambios entre los distintos registros de representación exigiendo el conocimiento, el tratamiento y la conversión de éstos, para ser utilizados en las distintas actividades planteadas.

Duval en [9,10] afirma que no es posible acceder a los objetos matemáticos, que son abstractos y por lo tanto no accesibles por la percepción ni manipulables como un objeto físico, fuera de un sistema semiótico. En este punto radica la diferencia fundamental entre la Matemática y otras ciencias.

Para Duval es fundamental el rol que juegan los signos o, más precisamente, los registros semióticos de representación, en la actividad matemática. Dentro de los mismos tienen lugar las representaciones semióticas, que en el ámbito de las matemáticas, están dadas por notaciones simbólicas o gráficas, o bien manifestaciones verbales, mediante las que se expresan los conceptos y procedimientos en esta disciplina así como sus características y propiedades más relevantes. Estas representaciones se agrupan en diferentes registros de representación, según sean las características que posean; así, considerando por ejemplo la noción de función, existe un registro gráfico, uno algebraico o analítico y uno tabular, y aunque hay otros, estos han sido lo más usados en enseñanza hasta hoy. “El aprendizaje de la matemática es un campo de estudio propicio para el análisis de actividades cognitivas importantes como la conceptualización, el razonamiento, la resolución de problemas y la comprensión de textos”, declara Raymond Duval en [10].

El proceso de enseñanza y aprendizaje de Matemática indica que estas acciones cognitivas requieren además del lenguaje natural o el de las imágenes, la utilización de distintos registros de representación y de expresión. En la Matemática encontramos distintos sistemas de escritura para los números, notaciones simbólicas para los objetos, escrituras algebraicas, lógicas, funcionales que se tornan en lenguajes paralelos al lenguaje natural para expresar relaciones y operaciones, figuras geométricas, gráficos cartesianos, redes, diagramas de barra, diagramas de torta, etc. Cada una de las actividades anteriores constituye una forma semiótica diferente, entendiéndose por tal a la actividad de formación de representaciones realizadas por medio de signos.

El dominio de las operaciones necesarias para cambiar la forma mediante la cual se representa un conocimiento es primordial, ya que se constituye en una operación cognitiva básica que está muy relacionada con los tratamientos de comprensión y con las dificultades del aprendizaje conceptual. Esto puede ser la causa de obstáculos que sólo la coordinación de varios registros semióticos ayuda a superarlos, y por lo tanto el dominio de la habilidad para cambiar de registro de cualquier representación semiótica en el aprendizaje de la Matemática se torna fundamental.

En síntesis los conceptos matemáticos no son objetos reales y por consiguiente se debe recurrir a distintas representaciones para su estudio y para llevarlo a cabo resulta importante tener en cuenta que las mismas no son el objeto matemático en sí, sino que ayudan a su comprensión.

En matemática las representaciones semióticas son importantes tanto para los fines de comunicación como para el desarrollo de la actividad matemática. El tratamiento de los objetos matemáticos depende directamente del sistema de representación semiótico utilizado. Cuando realizamos cálculos numéricos vemos que existe una dependencia del sistema de escritura elegida: escritura decimal, escritura fraccionaria, escritura binaria, etc. Los tratamientos matemáticos no pueden llevarse a cabo prescindiendo de un sistema semiótico de representación. “La función de tratamiento sólo la pueden llevar a cabo las representaciones semióticas y no las representaciones mentales. La utilización de representaciones semióticas es primordial para la actividad matemática y parece serle intrínseca” [10].

El progreso de los conocimientos va acompañado por la creación y desarrollo de sistemas semióticos nuevos y específicos que coexisten con la lengua natural.

Siguiendo las ideas de este autor, dentro de estos registros se pueden llevar a cabo procesamientos, es decir, transformaciones de las representaciones en el mismo registro donde fueron creadas. El procesamiento es una acción sobre las representaciones interna a un registro. Asimismo, entre diferentes registros de representación se pueden realizar conversiones, que son transformaciones de una representación en otra que pertenece a otro registro diferente al de la primera. En el ejemplo de las funciones antes citado, una operación de conversión puede ser la de traducir información tabular sobre una función en una gráfica.

Tradicionalmente, una clasificación inicial de representaciones consiste en dividirlas en externas e internas. Las primeras abarcan todas aquellas representaciones que son susceptibles de ser percibidas por los sentidos, mientras que las internas, son imágenes mentales que el sujeto tiene de los objetos y relaciones que forman parte de su conocimiento. Pero ambos dominios, desde un punto de vista genético, no pueden verse como aislados entre sí, pues las representaciones mentales pueden desarrollarse, únicamente, según un proceso de interiorización de las representaciones externas como lo indica Duval en [11]. También es importante señalar que esta distinción no habla acerca de la naturaleza de las representaciones, que a menudo es la misma en ambos casos, sino de la manera de producirlas, del modo en el que son creadas.

Las representaciones externas, como lo son los enunciados en el lenguaje natural, las fórmulas algebraicas, las gráficas, las figuras geométricas, entre otras muchas, son el medio por el que los individuos exteriorizan sus imágenes y representaciones mentales haciéndolas accesibles a los demás.

Las representaciones externas juegan, desde este punto de vista, una doble función:

1. Actúan como estímulo para los sentidos en los procesos de construcción de nuevas estructuras mentales.
2. Permiten la expresión de conceptos e ideas a los sujetos que las utilizan.

Dependiendo del tipo de símbolos, gráficos o notaciones con los que un estudiante interactúe en el proceso de aprendizaje de un concepto matemático, dará lugar a unos tipos determinados de representaciones internas del mismo. De igual manera, las vías que un sujeto utilice para representar externamente un concepto sirven para mostrar, generalmente, cómo es la información que posee sobre tal concepto.

Las representaciones semióticas no sólo son indispensables para la designación de los objetos matemáticos o la comunicación, sino para el trabajo con dichos objetos, es decir que son esenciales para la actividad cognitiva del pensamiento. Ningún tipo de proceso matemático puede ser ejecutado sin usar un sistema semiótico de representación.

La importancia de las representaciones semióticas y sus transformaciones en el aprendizaje de las Matemática radica en que los procesos matemáticos siempre implican sustituir una representación semiótica por otra. Duval realiza la siguiente afirmación "Si se llama semiosis a la aprehensión o a la producción de una representación semiótica, y noesis a la aprehensión conceptual de un objeto, es necesario afirmar que la noesis es inseparable de la semiosis".

Es decir que no puede haber aprehensión conceptual de un objeto sin algún representante de éste; pero por otro lado la concreción de la aprehensión conceptual se expresa a través de una representación semiótica. La semiosis es por tanto considerada como característica necesaria para garantizar un primer paso hacia la noesis.

A la aprehensión o a la producción de una representación semiótica, Duval la denomina "semiosis" y postula que para que un sistema semiótico pueda ser un registro de representación debe permitir las tres actividades cognoscitivas fundamentales ligadas a la semiosis, a saber:

- Formación de una representación, identificable como una representación en un registro dado.
- Tratamiento de la representación esto es, la transformación de la representación realizada en el mismo registro en que ha sido formulada. El tratamiento es una transformación interna a un registro.
- Conversión de la representación, es la transformación de la representación en una representación de otro registro, conservando la totalidad o una parte solamente del contenido de la representación inicial.

Dominar un concepto matemático requiere conocer y reconocer sus principales representaciones, para así convertirlas o traducirlas de un modo a otro.

Este autor subraya la importancia que tiene la conversión de las representaciones, en la formación de conceptos matemáticos, destacando:

> Para la actividad matemática es esencial poder movilizar varios registros de representación semiótica (figuras, gráficas, simbólica, lengua natural, etc.) en el transcurso de una misma tarea, ya sea escogiendo un registro más bien que otro. E independientemente de toda comodidad de tratamiento, este recurso a varios registros parecen una condición necesaria para que los objetos matemáticos no sean confundidos con sus representaciones y para que sean reconocidos en cada una de ellas. (Duval, 1998).

Como se ha mencionado el aprendizaje de la Matemática constituye un campo de estudio apropiado para el análisis de actividades cognitivas relacionadas a la conceptualización. Estas actividades requieren diferenciar un objeto de su representación.

Toda confusión entre el objeto y su representación provoca, en un plazo más o menos amplio, una pérdida de la comprensión: los conocimientos adquiridos se hacen rápidamente inutilizables por fuera de su contexto de aprendizaje, sea por no recordarlos, o porque permanecen como representaciones "inertes" que no sugieren ningún tratamiento productor (Duval, 2004).

El manejo de diferentes sistemas de representación y la conversión entre unos y otros no es suficiente para obtener una comprensión integral. Es necesario crear condiciones donde sea posible establecer una coordinación entre los diferentes registros de representación.

La coordinación entre las representaciones que provienen de sistemas semióticos diferentes no es espontánea. Su puesta en juego no resulta automáticamente de los aprendizajes clásicos demasiado directamente centrados en los contenidos de la enseñanza. Lo necesario para favorecer tal coordinación parece ser un trabajo de aprendizaje específico centrado en la diversidad de los sistemas de representación, en la utilización de sus posibilidades propias, en su comparación por la puesta en correspondencia y en sus "traducciones" mutuas (Duval, 2004).

La realidad marca que actualmente los diferentes niveles de enseñanza no ponen mucho énfasis en la utilización de diferentes sistemas de representación, ni en la coordinación entre ellos, por el contrario, es más usual ver el predominio de algún sistema en particular, reduciendo el aprendizaje del alumno incluso a un mono-registro. Desde esta mirada y considerando que los objetos matemáticos son, por naturaleza, abstractos, accesibles sólo por medio de representaciones y que su conceptualización pasa por la capacidad de identificar un mismo concepto en diferentes perspectivas, surge la necesidad de reconsiderar la forma en que se enseñan estos conceptos.

En este sentido, la utilización de herramientas informáticas como apoyo a la enseñanza y el aprendizaje de la matemática, da una amplia gama de aportes, no sólo por la forma de trabajo sino porque permite además, acercarse a los conceptos a través de diferentes representaciones de los mismos tal como lo señala Duval (2004), "no es posible estudiar los fenómenos relativos al conocimiento sin recurrir a la noción de representación", y según Santos-Trigo, tal lo declara en [12], "el uso de la tecnología, permite establecer representaciones exactas de configuraciones geométricas y que éstas pueden ayudar a los estudiantes en la visualización de relaciones matemáticas". Duval en [13] presenta un análisis cuidadoso de cómo la acción de graficar por parámetros es un recurso que permite la articulación de los registros gráficos y algebraicos mediante el establecimiento de relaciones entre variables algebraicas y lo que él denomina "variables visuales".

Investigadores en el campo de la Didáctica de la Matemática, han estudiado los sistemas de representación semiótica, entre ellos en nuestro país, en San Luis, Gatica y Ares en [14] centraron su estudio en la importancia de la visualización y la necesidad de conversiones entre registros; en Mar del Plata, Aznar, Distéfano; Prieto y Moler en [15] analizaron los errores en la conversión de representaciones de números complejos del registro gráfico al algebraico; y en Latinoamérica en Colombia, en [16] han indagado sobre los procesos cognitivos de representación en conexión con los tipos de procesos y pensamiento matemático empleando diez softwares libres, entre ellos GeoGebra; por otra parte en México, en [17] investigaron sobre la coordinación de los diferentes registros de representación en Geometría Analítica utilizando GeoGebra.

Se realizó además, una revisión bibliográfica de investigaciones relacionadas con el uso de softwares dinámicos, citando los trabajos de Hollebrands, Smith, Iwancio y Kogan quienes en [18] indagaron sobre los distintos usos que hacen los estudiantes de los programas de geometría dinámica; Lavicza, en [19] estudió las ventajas de trabajar con un software de geometría dinámica, destacando la mejora de la visualización de los estudiantes; Hohenwarter y Jones en [20] exploraron las características y ventajas de GeoGebra; Hohenwarter, Hohenwarter, Kreis y Lavicza analizaron, en [21], sobre el uso y grado de satisfacción de los estudiantes al trabajar con GeoGebra.

Todos coinciden que, para un proceso efectivo de aprendizaje, los entornos de enseñanza- aprendizaje sustentados por la computadora deberían crear situaciones y ofrecer herramientas que permitan estimular a los alumnos y alcanzar así el máximo potencial cognitivo. Esta nueva tendencia en el uso de la computadora en educación se caracteriza por una clara inclinación hacia sistemas que involucran herramientas puestas a disposición de los alumnos, con el rol de facilitadoras para la indagación y la adquisición de conocimiento, en ambientes de aprendizaje colaborativos e interactivos.

Dado que la actividad matemática se fundamenta en las transformaciones sobre los registros semióticos, se comprobó que las mayores dificultades se presentan cuando la actividad matemática se realiza sobre registros multifuncionales siendo la conversión aquella transformación semiótica que permite el paso de un registro de mayor dificultad cognitiva a otro de menor dificultad cognitiva, con la finalidad de realizar tratamientos con mayor facilidad siendo éstos los más abundantes en la actividad matemática.

Estos aspectos se tuvieron en cuenta para la realización de la propuesta didáctica que se presenta, priorizando el uso de tecnología informática a través de aplicaciones realizadas con el software dinámico GeoGebra versión 5.0. Su uso en Geometría del Espacio podría ayudar a los estudiantes a ver determinados conceptos desde una nueva perspectiva. La manipulación de un entorno dinámico como éste, posiblemente ayude al estudiante a ampliar su experiencia permitiendo coordinar diferentes registros de representación. Es muy probable también, que a través de él, se puedan discriminar unidades significantes de una representación, posibilitando la aprehensión de un campo de variaciones posibles relacionadas a uno o varios registros, algo que es muy difícil de lograr sin la mediación de este tipo de software.

Es por esto que desde la Universidad Nacional del Chaco Austral, con el propósito de intervenir alrededor de los problemas de la educación matemática plantea abordarlos con ésta nueva línea de investigación.

2.2 Metodología

En este proyecto se plantea la siguiente hipótesis de trabajo: La implementación de secuencias didácticas y el uso del software dinámico GeoGebra en la enseñanza de Geometría del Espacio, contribuirá a que los alumnos de primer año de las carreras de Ingeniería que se dictan en la UNCAUS logren una mejor aprehensión conceptual a través de la coordinación entre los diferentes registros de representación de un mismo objeto matemático.

Se determina como variable independiente: el uso de Software GeoGebra y de Secuencias Didácticas y como variable dependiente: Aprehensión Conceptual. Definiendo conceptualmente al Software GeoGebra, como Programa Dinámico para el Aprendizaje y Enseñanza de las Matemáticas que combina elementos de Geometría, Álgebra, Análisis y Estadística; Secuencias Didácticas, como un conjunto de actividades didácticas ordenadas, estructuradas y articuladas para la consecución de determinados objetivos educativos, es decir, son la manera de encadenar y articular las diferentes actividades a lo largo de una unidad didáctica y a la Aprehensión Conceptual, se la define como la actividad cognitiva relacionada a la coordinación entre los diferentes registros de representación.

En la siguiente tabla se detallan las operaciones cognitivas básicas ligadas a la semiosis y sus indicadores:

Tabla 1. Definición Operacional. Dimensiones e Indicadores.

Dimensiones	Indicadores
Operaciones cognitivas básicas ligadas a la semiosis Coordinación entre registros de representación Semiótica.	
1-Representación (Formación de una representación identificable como una representación de un registro dado).	1- Identifica unidades significantes. Reconoce planos, rectas en el espacio y superficies cuádricas a partir de enunciados simbólicos. Reconoce planos, rectas en el espacio y superficies cuádricas a partir de gráficos. Reconoce planos, rectas en el espacio y superficies cuádricas a partir de enunciados verbales.
2- Tratamiento (Esta representación tiene asociada una transformación interna, esto es un tratamiento al interior del mismo registro donde ha sido formulada).	2- Realiza tratamiento en el registro simbólico. Realiza tratamiento en el registro gráfico. Realiza tratamiento en el registro verbal.
3-Conversión (Transformación de la representación en una representación de otro registro, conservando la totalidad o una parte solamente del contenido de la representación inicial).	3- Realiza conversión del registro verbal al registro simbólico. Realiza conversión del registro gráfico al registro simbólico. Realiza conversión del registro simbólico al registro verbal. Realiza conversión del registro gráfico al registro verbal. Realiza conversión del registro simbólico al registro gráfico. Realiza conversión del registro verbal al registro gráfico.

Este estudio se realizará a partir de los objetivos enunciados anteriormente, empleando una metodología cuantitativa, con un diseño cuasi experimental con posprueba únicamente y grupo de control, es decir, la manipulación de la variable independiente alcanzará sólo dos niveles: presencia y ausencia del estímulo.

La población seleccionada estará formada por alumnos de primer año del segundo cuatrimestre que cursan Álgebra Lineal y Geometría Analítica de las carreras de Ingeniería que se dictan en la UNCAUS.

Para la selección de la muestra se utilizará el muestreo por conveniencia, de acuerdo a [22] una muestra por conveniencia es un grupo de sujetos seleccionados sobre la base de ser accesibles o adecuados.

El tamaño de la misma, es decir el número de alumnos, queda pendiente de concretar hasta saber el número exacto que aprueben el segundo examen parcial de la asignatura Álgebra Lineal y Geometría Analítica y que se encuentren en condiciones de continuar el cursado.

Después de concluir el período experimental, a ambos grupos se les administrará una medición sobre la variable dependiente en estudio. En este diseño, la única diferencia entre los grupos deberá ser la presencia-ausencia de la variable independiente. El grupo control estará caracterizado por seguir la dinámica habitual en el aula sin la utilización de las nuevas tecnologías, y el grupo experimental, se apoyará en la utilización de esta herramienta para la enseñanza de Geometría del Espacio, ambos coordinados por el mismo equipo docente.

La experiencia puede diagramarse de la siguiente manera:

GC	-	OC
GE	X	OE

Referencias:

G: Grupo de sujetos. GC: Grupo Control y GE: Grupo Experimental
-: Ausencia del estímulo, indica que se trata del grupo control
X: Tratamiento, estímulo o condición experimental, presencia de algún nivel de la variable independiente.
O: Medición de los sujetos. OC: Grupo Control, OE: Grupo Experimental, como está después del estímulo se trata de una posprueba.

Siguiendo a Wiersma en [23], quien sugiere que la posprueba debe ser administrada inmediatamente después que concluya el experimento, en especial si la variable independiente tiende a cambiar con el paso del tiempo; ésta se aplicará en ambos grupos, luego de haber finalizado el desarrollo de los contenidos de Geometría del Espacio.

Una vez que se hayan recogido todos los datos necesarios para la investigación, se llevará a cabo un análisis de resultados por grupos seleccionando la prueba estadística adecuada, para después realizar una conclusión entre los alumnos que han utilizado la nueva metodología para la enseñanza-aprendizaje de las Matemáticas y los que no.

Se utilizará como métodos teóricos el de análisis y síntesis ya que se harán comparaciones y se obtendrán resultados, determinando rasgos comunes y generales de los enfoques metodológicos tenidos en cuenta para poder llegar a conclusiones confiables.

3 Posibles Resultados

Los docentes periódicamente deben reflexionar y analizar su labor, potenciar aquello que se hace correctamente y buscar nuevas metodologías o herramientas que ayuden a perfeccionar aquellas facetas en las que se detecte potencial de mejora.

Los resultados de esta investigación contribuirán al desarrollo del conocimiento en el campo de las matemáticas y las problemáticas planteadas que motivaron su estudio. La producción esperada tendrá un impacto directo en la construcción de propuestas didácticas para la enseñanza y el aprendizaje de la Matemáticas, las cuales podrán integrar el conocimiento de las ideas previas de forma abstracta y visualizarlos al utilizar el software, lo que significa que ambas formaran parte al planificar las estrategias docentes adecuadas para abordarlas, optimizando de esta manera las prácticas docentes y el aprendizaje de conceptos científicos por parte de los estudiantes.

En el ámbito científico los sectores que se beneficiarán con los resultados del Proyecto serán los docentes del área de Matemática, los alumnos de las carreras que en su plan de estudio incluya este tema, los investigadores y las autoridades educativas, agentes todos interesados en maximizar las acciones tendientes al mejoramiento de la calidad educativa y en comprender desde un enfoque más amplio el conjunto de factores que intervienen en la adquisición de conocimientos científicos.

Referencias

1. Verstappen, P. (1982). Some reflections on the introduction of relations and functions. Conference on Functions. Enschede, The Netherlands: National Institute for Curriculum Development.

2. Janvier, C. (1987) Probleme of representations in the teaching and learning of mathematics . Hillsdale, Nueva Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.
3. Cifarelli L. (1998). Universality features in multihadron production and the leading effects. Edited by L. Cifarelli, A. Kaidalov, V.A. Khoze. INFN Eloisatron Project: 33rd Workshop .Singapore: The science and culture series.
4. Rabardel P. (1995). Les Hommes et les technologies.Francia, Paris: Armand Colin
5. Ramírez Sandoval O., Romero Félix C.F, Oktaç A. (2013). Coordinación de registros semióticos y las transformaciones lineales en el plano. I Congreso de Educación Matemática de América Central y El Caribe (I CEMACYC).Santo Domingo, República Dominicana.
6. Bello Durand, J. B. (2013). Mediación del Software GeoGebra en el Aprendizaje de Programación Lineal En Alumnos del Quinto Grado de Educación Secundaria. Tesis de Maestría, Universidad PUCP, Lima, Perú.
7. García Fajardo V. A. (2014). Una secuencia didáctica que integra GeoGebra para la enseñanza de ecuaciones lineales en grado octavo. Tesis de Maestría. Universidad Nacional de Colombia. Facultad de Ingeniería y Administración Palmira, Colombia.
8. Figueroa Vera R.E. (2013). Resolución de Problemas con Sistemas de Ecuaciones Lineales con Dos Variables. Una Propuesta Para El Cuarto Año De Secundaria Desde La Teoría De Situaciones Didácticas. Tesis de Maestría. Pontificia Universidad Católica Del Perú (PUCP), Lima, Perú.
9. Duval, R. (1999/1995). Semiosis y Pensamiento Humano. Cali, Colombia: Universidad del Valle, (Trad. del original francés: Sémiosis et pensée humaine, Peter Lang, 1995).
10. Duval, R. (2004). Semiosis y Pensamiento Humano. (Traducción de título original: Sémiosis et Pensée Humaine. Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels) (2ª ed) Universidad del Valle. Instituto de Educación y Pedagogía. Santiago de Cali, Colombia: PeterLang. S.A.
11. Duval R. (1998/1993) Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento. En F. Hitt (Ed.) Investigaciones en Matemática Educativa II. (Traducción del original francés: Registres de représentation sémiotique et functionnement cognitif de la pensée. Annales de Didactique et de Sciences Cognitives), (Vol. 5) México: Grupo Editorial Iberoamérica.
12. Santos-Trigo, M. (2000). Students´ approaches to the use of technology in mathematical problem solving. Representation and Mathematics Visualization. PME-NA XXII, Tucson, Arizona.
13. Duval, R., (1992), Gráficas y Ecuaciones: la articulación de dos registros. En E. Sánchez (Ed.), Antología en Educación Matemática, (pp. 125-139). México: Sección de Matemáticas Educativa del CINVESTAV-IPN.
14. Gatica, S.N. y Ares, O.E (2012). La importancia de la visualización en el aprendizaje de conceptos matemáticos. Revista de Educación Matemática y TIC. Recuperado el 12 de junio de 2015, de http://dialnet.unirioja.es/descarga/articulo/4043193.pdf.
15. Aznar, M.A.; Distéfano M.L.; Prieto G. y Moler, E. (2012). Errores asociados a la representación geométrica-vectorial de números complejos: un análisis ontosemiótico. Revista Iberoamericana de Educación Matemática. No. 30, pp. 61-80.Recuperado el 10 de junio de 2015, http://www.fisem.org/www/union/revistas/2012/30/Archivo_9_de_volumen_30.pdf.
16. Villarraga R.; Fredy Saavedra D. y otros. (2012) Acercando al profesorado de matemáticas a las TIC para la enseñanza y aprendizaje. Revista de Educación Mediática y TIC, 1, No. 2; (pp.65-87) Recuperado el 1 de junio de 2015, de https://www.uco.es/revistas/index.php/edmetic/article/download/219/212.
17. Urrea Bernal, M.; Rodríguez Ibarra, M.; Enríquez Chapa L. (2014). Coordinación de los diferentes registros de representación en el estudio de la circunferencia que pasa por tres puntos: actividades didácticas. Acta Latinoamericana de Matemática Educativa Vol 27. (pp.1225-1234) Recuperado el 12 de junio de 2015 de http://www.clame.org.mx/documentos/alme27.pdf.
18. Hollebrands, K.; Smith, R.; Iwancio, K.; Kogan, I. A. (2007) The affects of a dynamic program for geometry on college students understandings of properties of quadrilaterals in the Poincare Disk model. Proceedings of the 9th International Conference on Mathematics Education in a Global Community pp. 613–618. Recuperado el 27 de mayo de 2015 de http://portal.educacion.gov.ar/consejo/files/2009/12/ley_de_educ_nac1.pdf.
19. Lavicza, Z. (2006). Factors influencing the integration of computer Álgebra systems into university-level mathematics education. International Journal for Technology in Mathematics Education, Vol. 14, No 3, pp. 121-129
20. Hohenwarter, M. (2015). GeoGebra (versión 5.0) [Programa de Computador]. Österreich, Linz, Austria. Disponible gratuitamente en https://www.geogebra.org/
21. Hohenwarter, M.; Hohenwarter, J.; Kreis, I. y Lavicza, Z. (2008). Teaching and learning calculus with free dynamic mathematics software GeoGebra. Documento presentado en el ICME 11. 11th International Congress Mathematical Education, México. Recuperado el 15 de junio de 2015 de http://archive.geogebra.org/en/wiki/index.php/Publication.
22. McMillan, J.; Schumacher, S. (2005). Introducción al diseño de investigación cuantitativa. Investigación educativa (5ª ed, pp. 141). Madrid, España: Pearson Educación, S.A.
23. Wiersma W. (2000). Research Methods in Educations-An Introduction, (2nd Edition). London: Allyn and Bacon.

Volver al Índice

Resultados de la Evaluación de un Proyecto de Investigación en Entornos Virtuales

Analía E. Almirón, Pedro D. Leguiza, Mariela B. Sánchez
Departamento de Matemática, Universidad Nacional del Chaco Austral
Comandane Fernández N° 755, Presidencia Roque Sáenz Peña, Chaco
{dleguiza, analia}@uncaus.edu.ar

Resumen. En este trabajo se presentan los resultados de la Evaluación de un Proyecto de Investigación (PI) "Implementación de entornos virtuales en los procesos de enseñanza y aprendizaje en asignaturas del área Matemática en carreras universitarias" que se desarrolló desde el 01 de agosto del año 2012 al 31 de julio del 2016 en la Universidad Nacional del Chaco Austral (UNCAUS). El Proyecto fue aprobado por el Consejo Superior de la Universidad, previa evaluación de la Secretaría de Investigación de la UNCAUS. Además el proyecto fue acreditado y cuatro de sus integrantes participaron del Programa de Incentivo de Docenes Investigadores del Ministerio de Educación. Las evaluaciones de los PI acreditados tienen en cuenta los resultados alcanzados por el proyecto, tales como publicaciones, trabajos enviados a publicar o en prensa, becarios dirigidos, grado de financiamiento alcanzado con respecto al presupuesto original, desempeño de su director, etc. El Proyecto de Investigación fue evaluado anualmente y en todos los casos como "Satisfactorio". Por ello en este trabajo se presentan los resultados de dichas evaluaciones destacándose el volumen de producción alcanzado y la formación de recursos humanos.

Palabras Clave: Educación superior, Proyectos de investigación, Evaluación de Ppoyectos, Producción científica.

1 Introducción

El Proyecto de Investigación denominado "Implementación de entornos virtuales en los procesos de enseñanza y aprendizaje en asignaturas del área Matemática en carreras universitarias" (PI 31) se desarrolló, desde el 01 de agosto del 2012 al 31 de julio del año 2016, en la Universidad Nacional del Chaco Austral (UNCAUS) con el objetivo de investigar, analizar e implementar Entornos Virtuales de Aprendizaje (EVA) que enriquezcan los conocimientos de los estudiantes en el área Matemática con el uso de las Tecnologías de la Información y Comunicación (TIC), permitiendo: incentivar al estudiante, promover un aprendizaje activo y significativo, considerar las individualidades y diversidades, reforzar y ampliar los contenidos tratados en clase, fortalecer la relación entre estudiantes y profesores y promover la cooperación entre alumnos.

El Grupo de Investigación estaba integrado por un Director Externo, un Codirector y seis integrantes, todos ellos Docentes de la UNCAUS. De los ocho integrantes, sólo cuatro estaban categorizados.

Los docentes categorizados participan del Programa de Incentivos a los docentes-investigadores y para ello el Proyecto de Investigación debió ser acreditado lo que implicaba cumplir con una serie de requisitos y exigencias enmarcadas en la Resolución 1543/2014 del Ministerio de Educación de la Nación.

En este contexto, el Artículo 28 de la citada Resolución establece: "*Se considerarán proyectos o programas acreditados aquellos que hayan sido evaluados y aprobados por una entidad habilitada y que cuenten con financiamiento, así como los que integran el Banco Nacional de Proyectos de Desarrollo Tecnológico y Social (PDTS) del MINISTERIO DE CIENCIA, TECNOLOGIA E INNOVACION PRODUCTIVA (MinCyT) y que cumplan con los requisitos establecidos en los Documentos I y II de la Comisión Asesora sobre Evaluación del Personal Científico y Tecnológico del MINISTERIO DE CIENCIA, TECNOLOGIA E INNOVACION PRODUCTIVA, para todos los casos, en un todo de acuerdo con lo que determina el Artículo 30 del presente Manual*."

A los fines de la acreditación de proyectos, la Universidad debe tener en cuenta que cumplan con las siguientes condiciones en el momento de su acreditación:

a) Que el Director del Proyecto tenga categoría I, II o III.
b) Que el número de proyectos de la respectiva institución universitaria de gestión estatal, dirigidos por directores externos a ella, no supere el cinco por ciento (5%) del total.
c) Que los Directores Externos posean antecedentes equivalentes a los requeridos para las Categorías I o II, reconocida mediante un acto administrativo de la institución universitaria de gestión estatal, que fundamente los antecedentes que acreditan dicho reconocimiento.

d) Que cada integrante incluido el director, participe en o dirija como máximo dos (2) proyectos.

Por otra parte el Artículo 30 de la citada Resolución reconoce a las instituciones universitarias de gestión estatal como entidades habilitadas para acreditar siempre que cuenten con un sistema de evaluación de proyectos basado en el juicio de pares disciplinarios externos a ellas. La citada Norma establece que como mínimo deberán participar dos (2) pares con una categoría de investigación no inferior a la II, de los cuales, por lo menos el cincuenta por ciento (50%) debe ser externo a la región, debiendo los evaluadores regionales abstenerse de intervenir en la evaluación de proyectos correspondientes a su propia institución universitaria de gestión estatal. Los pares son seleccionados del Banco de Evaluadores del Ministerio de Educación.

Para la acreditación de los proyectos se aplican las siguientes pautas:

a) Evaluación del Director, contemplando su dedicación en horas semanales al proyecto, la calidad de su labor de investigación —publicaciones científicas y/o desarrollos tecnológicos en los que haya participado— sus antecedentes específicos en dirección y/o ejecución en la materia técnica del proyecto, así como la formación de recursos humanos.
b) Evaluación del equipo de investigación, considerando si la experiencia, capacidad, estructura y dedicación en horas semanales de los integrantes del equipo es la adecuada para el desarrollo del proyecto.
c) Evaluación del proyecto, considerando los antecedentes del grupo de investigación en la temática, la originalidad, la calidad y la pertinencia del tema elegido, la coherencia de los objetivos, la metodología a emplear para alcanzar dichos objetivos, la factibilidad del cumplimiento del plan propuesto, la formación de recursos humanos, la posibilidad de contribuir al avance del conocimiento científico y/o tecnológico y a la resolución de los problemas que el proyecto prevé abordar.
d) Evaluación del financiamiento del proyecto, de modo que se asegure su plena concreción, en los términos previstos en el artículo 28.
e) Evaluación de la infraestructura disponible para el desarrollo del proyecto, incluyendo: edificios, bibliografía, equipamiento e instrumental.

Estos proyectos son evaluados anualmente por el Comité Evaluador y el grupo de asesores técnicos, en sendos dictámenes, comparando el desarrollo del proyecto con los objetivos y metas del mismo sobre la base de:

a) El grado de cumplimiento del plan de trabajo.
b) La dedicación del Director al proyecto, en horas semanales.
c) El desempeño del equipo de investigación, considerando la experiencia, capacidad, estructura y dedicación en horas semanales de los integrantes del equipo.
d) El adecuado aprovechamiento de las facilidades disponibles: edilicias, bibliográficas, equipamiento e instrumental, entre otras.
e) La idoneidad puesta de manifiesto en la aplicación de los recursos materiales y financieros para asegurar la plena concreción del proyecto.

El Rector sobre la base del análisis de los informes de los dictámenes del Comité de Evaluación y del grupo de asesores técnicos, resuelve lo que estime pertinente sobre el programa de investigación, pudiendo disponer su continuidad o suspensión, así como la apertura de nuevas líneas de investigación o la supresión de proyectos.

Los Directores de cada proyecto presentan anualmente, en la institución universitaria, un Informe de Investigación que contiene:

a) Un informe descriptivo, de carácter cualitativo, de los aspectos sobresalientes del desempeño de cada uno de los miembros del equipo de dicho proyecto.
b) Un informe individual realizado para cada uno de los integrantes del proyecto, detallando su producción científico-académica en el período, su aporte al proyecto acreditado y su actividad docente. Cada informe debe estar avalado por el Director del Proyecto. En el caso del Director, el aval lo realiza el responsable del área de Ciencia y Técnica de la Institución.

Además los informes deberán estar acompañados por la documentación que avale lo declarado.

Como se indicó anteriormente, la evaluación tiene en cuenta los resultados alcanzados por el proyecto, tales como publicaciones, trabajos enviados a publicar o en prensa, becarios dirigidos, grado de financiamiento alcanzado con respecto al presupuesto original, desempeño de su director, etc. En el informe de Evaluación debe constar la fundamentación del dictamen emitido, sea este “Satisfactorio” o “No Satisfactorio”, así como la firma de los evaluadores actuantes, con la aclaración y categoría de docente-investigador.

Todos los informes correspondientes a los proyectos evaluados y la nómina de los evaluadores actuantes luego son enviados a la Coordinación del Programa de Incentivos del Ministerio de Educación.

Teniendo en cuenta lo anterior, en el presente trabajo se mostrarán los resultados de la evaluación que surgieron de la ejecución del Proyecto de Investigación “Implementación de entornos virtuales en los procesos de enseñanza y aprendizaje en asignaturas del área Matemática en carreras universitarias” (PI 31), la Producción Científica y la Formación de Recursos Humanos. Pero antes se realiza una breve descripción de la investigación.

2 El proyecto de Investigación

2.1 Justificación

El incesante avance de las Tecnologías de la Información y de la Comunicación (TIC) ha posibilitado la generación de entornos virtuales de aprendizaje, en los que se articulan recursos tecnológicos para el desarrollo de actividades educativas que difieren de las tradicionales. Muchos docentes han tratado de armonizar la enseñanza presencial con las TIC creando escenarios mixtos de aprendizajes de donde surge el modelo b-learning (Blended Learning) que combina el aprendizaje a distancia con el aprendizaje presencial.

En general, los entornos virtuales de aprendizaje son cualquier combinación a distancia y presencial de interacciones de aprendizaje que contengan algún nivel de virtualidad en el tiempo y el espacio, que permiten la interacción sincrónica y asincrónica entre el profesor y el alumnado, además contienen recursos de aprendizaje que pueden utilizarse por los estudiantes en cualquier momento. Los ambientes de aprendizajes no se circunscriben a la educación formal ni tampoco a una modalidad educativa particular, se trata de aquellos espacios donde se crean condiciones para que el individuo se apropie de nuevos conocimientos, de nuevas experiencias, de nuevos elementos que le generen procesos de análisis y reflexión.

En Ciencias Exactas el proceso de aprendizaje implica gran cantidad de tiempo fuera del aula y las TIC pueden resultar una valiosa ayuda para la consulta, fomentando la autonomía de trabajo, tan esencial en este tipo de ciencias, especialmente cuando se buscan diversos enfoques a la hora de abordar la resolución de problemas, el trabajo colaborativo entre pares, etc.

Es indudable que existe una interrelación entre la Tecnología Informática y la Matemática. Las TIC son utilizadas como herramientas de construcción de conocimientos, al requerir que los estudiantes movilicen el pensamiento crítico y analítico mientras interactúa con ellas.

Con las TIC y el uso de Internet, tanto el docente como el estudiante, pueden acceder a una multiplicidad de recursos y crear entornos virtuales en los que se puede representar, experimentar y razonar conceptos matemáticos brindando la oportunidad para que los estudiantes comparen situaciones reales con situaciones ideales descriptas por los modelos matemáticos, lo que favorece la construcción conceptual y el desarrollo de niveles más altos de abstracción y generalización.

En este contexto, la comunicación y la interacción virtual, en procesos de enseñanza y aprendizaje, posibilita:

- diferentes niveles de interacción: estudiante-estudiante, estudiante-docente, estudiante-contenido para la construcción del conocimiento ya sea vía e-mail, foros o chats,
- la participación activa en proyectos colaborativos mediante plataformas web tales como Moodle,
- la adquisición de habilidades y competencias digitales.

Competencia Digital, consiste en disponer de habilidades para buscar, obtener, procesar y comunicar información para transformarla en conocimiento. Incorpora diferentes habilidades, que van desde el acceso a la información hasta su transmisión en distintos soportes una vez tratada, incluyendo el uso de las TIC como elemento esencial para informarse, aprender y comunicarse. El tratamiento de la información y la competencia digital implican ser una persona autónoma, eficaz, responsable, crítica y reflexiva al seleccionar, tratar y utilizar la información disponible, contrastándola cuando es necesario, y respetar las normas de conducta acordadas socialmente para regular el uso de la información y sus fuentes en los distintos soportes.

2.2 Objetivos del Proyecto

Los objetivos propuestos en el Proyecto son:

- Investigar, analizar e implementar entornos virtuales de aprendizaje que enriquezca los conocimientos de los estudiantes en el área Matemática con el uso de las TIC.
- Implementar la modalidad b-learning desde un enfoque constructivista en las prácticas pedagógicas.
- Evaluar el impacto, de la modalidad b-learning, en los procesos de enseñanza y aprendizaje en asignaturas del área Matemática.
- Extrapolar los conocimientos y experiencias producidos en la investigación a otras áreas de formación docente y profesional.
- Promover el trabajo y la investigación en redes de asignatura con intereses académicos similares.

2.3 Contexto del Proyecto

El Proyecto de investigación se desarrolló en el ámbito de la Universidad Nacional del Chaco Austral. La mayoría de los alumnos ingresantes a la Institución presentan dificultades en el desarrollo de las competencias del aprendizaje de la Matemática, principalmente aquellos con superposición de actividades (alumnos que trabajan).

Para ello, con la implementación de un aula virtual se buscaba incentivar al estudiante, promover un aprendizaje activo y significativo, considerar las individualidades y diversidades, reforzar y ampliar los contenidos tratados en clase, fortalecer la relación entre estudiantes y profesores y promover la cooperación entre alumnos.

Por ello, se propuso la implementación de un entorno virtual de aprendizaje basado en software libre, Moodle, en asignaturas del área Matemática en carreras universitarias.

La *hipótesis de investigación* sostenía que la implementación de entornos virtuales de aprendizaje favorece la adquisición de habilidades y competencias digitales en los procesos de enseñanza y aprendizaje en asignaturas del área Matemática en carreras universitarias.

2.4 Marco Teórico

2.4.1 Blended learning (b-learning)

El avance de las TIC ha posibilitado la generación de EVA, en los que se articulan recursos tecnológicos para el desarrollo de actividades educativas que difieren de las tradicionales. Muchos docentes han tratado de combinar la enseñanza presencial con las TIC creando escenarios mixtos de aprendizajes. En este sentido surge una modalidad integrada de aprendizaje denominada “Blended learning (b-learning)” que combina actividades presenciales y de e-learning (aprendizaje electrónico) y su incorporación en las acciones curriculares resulta una interesante estrategia que integra las prácticas pedagógicas con los EVA.

Numerosas investigaciones aseguran que la incorporación de b-learning usando TIC, aprovecha al máximo el potencial del estudiante para pensar, interactuar y comunicarse, ayudando a los mismos a adquirir y ejercitar un cúmulo importante de información o contenidos curriculares estáticos de manera más eficiente.

La modalidad b-learning tiene bases en el aprendizaje colaborativo y dentro de los elementos subyancentes, se encuentran los siguientes:

- Responsabilidad individual: todos los miembros son responsables de su desempeño individual dentro del grupo.
- Interdependencia positiva: los miembros del grupo deben depender los unos de los otros para lograr la meta común.
- Habilidades de colaboración: las habilidades necesarias para que el grupo funcione en forma efectiva, como el trabajo en equipo, liderazgo y solución de conflictos.
- Interacción promotora: los miembros del grupo interactúan para desarrollar relaciones interpersonales y establecer estrategias efectivas de aprendizaje [1].

2.4.2 Moodle

Moodle fue creado con el propósito de proporcionar un Entorno Virtual de enseñanza y aprendizaje para la creación y gestión de cursos online, de distribución gratuita, bajo licencia de open source. La plataforma Moodle permite distribuir materiales de estudio, crear y gestionar debates temáticos y tablas de anuncios, aplicar cuestionarios a los estudiantes, evaluar las tareas, incorporar recursos de internet, ofrecer herramientas de comunicación, como la mensajería instantánea, calcular estadísticas, gestionar las calificaciones, etc.

Desde su creación se basa en el paradigma de aprendizaje constructivista social, es decir que la base del aprendizaje es la construcción del conocimiento de forma colaborativa, donde todos los miembros de una comunidad se benefician al ser creadores y receptores del conocimiento, aumentando significativamente los beneficios del enfoque constructivista tradicional.

Una de las características más interesantes de Moodle es que “*brinda herramientas que posibilita al docente medir el nivel de asimilación de conocimientos y habilidades del estudiante mediante actividades como los cuestionarios, las tareas, los talleres, los foros, etc.*” [2].

Numerosos estudios han demostrado que la implementación de Moodle en los espacios curriculares mejora significativamente el rendimiento y además, "*desarrolla en el estudiante el sentido de conectividad y de comunidad, aumenta la capacidad de aprendizaje dando por lo tanto resultados de mayor éxito educativo en las materias en las que se ha implantado la herramienta*" [3].

Las actividades y recursos disponibles en Moodle son:

- Actividades: Base de datos, Chat, Consulta, Cuestionario, Encuestas predefinidas, Foro, Glosario, Herramienta Externa, Lección, Paquete SCORM, Taller, Tarea, Wiki.
- Recursos: Archivo, Carpeta, Etiqueta, Libro, Página, Paquete de contenido IMS, URL

2.5 Metodología

Se trató de una investigación educativa de carácter exploratorio-descriptiva con la intencionalidad de recoger información vigente acerca de habilidades y competencias digitales y su incidencia en los procesos de enseñanza y aprendizaje en el área Matemática. Asimismo, incluyó acciones tendientes al análisis crítico y positivo vinculado con el mejoramiento de la calidad del perfil de formación básica en carreras que se ofrecen en la UNCAUS.

Para ello, se realizaron encuestas de opinión/evaluación a estudiantes y profesores del área Matemática, como también entrevista a docentes-investigadores, estudiantes avanzados y estudiantes de los últimos años del Nivel Secundario para poder visualizar el objeto de estudio desde las múltiples y diversas dimensiones de análisis para profundizar la comprensión del problema.

En el proceso interactivo y holístico de la investigación podemos distinguir etapas que se fueron desarrollando de manera espiralada de modo tal de dar continuidad a las tareas hasta llegar a los niveles de complejidad y concreción requeridos para cumplir con los objetivos del Proyecto.

Las etapas del Proyecto fueron las siguientes:

- Exploratoria y descriptiva. Construcción colaborativa del proyecto de investigación, resignificación del problema, de sus objetivos y alcances.
- Trabajo de campo y aplicación de la experiencia.
- Evaluación de las experiencias y del impacto.
- Socialización de avances de la producción de conocimiento que legitimen nuevas prácticas en el marco de las significaciones del aprendizaje en los entornos virtuales en la Educación Superior.

3 Evaluación del Proyecto de Investigación

En la Universidad Nacional del Chaco Austral, los proyectos de investigación son evaluados anualmente por un Comité Evaluador y el grupo de asesores técnicos, en sendos dictámenes, donde comparan el desarrollo del proyecto con los objetivos y metas del mismo.

En este contexto, a continuación se realiza un detalle cronológico de los resultados obtenidos de la aplicación del Proyecto de Investigación.

3.1 Primer Informe Avance: Año 2012 y 2013

En el Informe de Avance correspondiente a los años 2012 y 2013, se destacó la asistencia, dictado y realización de cursos de capacitación y perfeccionamiento referidos a Entornos Virtuales (por ejemplo: Conectar Igualdad-Congreso Regional 2012 NEA, Curso de Nivelación: Área Matemática – Modalidad Semipresencial, Curso: "Iniciación en las Nuevas Tecnologías para la Formación Docente del Siglo XXI", Curso de Elementos Básicos de Estadísticas con Aplicación a la Investigación – realizado a través de la plataforma virtual del Centro de Redes, Cuso de Posgrado "Entorno Virtual Moodle para la Enseñanza Universitaria", Curso de Posgrado "MOODLE"); la participación de integrantes del proyecto como organizadores/evaluadores en distintos Congresos y Jornadas Nacionales e Internacionales, en ejes temáticos tales como: Investigación educativa, Uso de las TIC en Educación Matemática y Aplicaciones de la Matemática (IX Jornadas de Ciencia y Tecnología de Facultades de Ingeniería del NOA, Congreso Latinoamericano GeoGebra Argentina 2013, XVIII EMCI Nacional y X Internacional, entre otros); la implementación de la modalidad b-learning con Aulas Virtuales para los espacios curriculares del Área Matemática utilizando la Plataforma Moodle; la participación en calidad de Coordinadores/Integrantes en Programas de Voluntario Universitario (abordando temáticas relacionadas al

Proyecto de Investigación). En este sentido se desprende claramente el cumplimiento de los tres primeros objetivos del Proyecto.

Para lograr la producción y actividades detalladas, los docentes debieron adaptar los métodos de enseñanza a las necesidades y nuevos ritmos de los estudiantes, creando contenidos y orientando a los mismos en sus búsquedas e investigaciones, facilitando la comunicación entre los distintos actores a través de las redes electrónicas.

Con la investigación realizada y del análisis e implementación de Entornos Virtuales de Aprendizaje, usando las TIC, se enriquecieron los conocimientos de los estudiantes en el Área Matemática, promoviendo un aprendizaje activo y significativo teniendo en cuenta las individualidades y diversidades. Se logró además, reforzar y ampliar los contenidos tratados en clase, fortalecer la relación entre estudiantes y profesores y promover la cooperación entre alumnos.

3.2 Segundo Informe de Avance: Año 2014

Del Informe de Avance correspondiente al año 2014 se destaca la asistencia, dictado y realización de cursos de capacitación y perfeccionamiento referidos a Entornos Virtuales tales como Curso de Posgrado "Planificar, Enseñar y Evaluar en Educación a Distancia"; Curso de Nivelación: Área Matemática-Modalidad Semipresencial, correspondiente al Proyecto "La Universidad en los Barrios, los Barrios en la Universidad"; la participación de integrantes del proyecto como miembros de comisión permanente/ organizadores/ evaluadores/ expositores en distintos Congresos y Jornadas Nacionales e Internacionales, en ejes temáticos tales como: Aplicaciones de la Matemática, Investigación Educativa, Uso de las TIC en Educación Matemática (XVIII EMCI Nacional y X Internacional, Reunión de Difusión de la Labor Docente, Científica, Tecnológica y de Extensión, VI Congreso Nacional de Extensión Universitaria. II Jornadas de la Asociación de Universidades del Grupo Montevideo. I Jornadas de Extensión de Latinoamérica y Caribe, entre otros); la implementación de la modalidad b-learning con Aulas Virtuales en los distintos espacios curriculares del Área Matemática, la participación en calidad de Coordinadores/Integrantes en Programas de Voluntariado Universitario, Proyecto de "La Universidad en los Barrios, los Barrios en la Universidad" (abordando temáticas relacionadas al Proyecto de Investigación).

La investigación realizada en ese período y el análisis e implementación del uso de entornos virtuales como instrumento cognitivo, para la interacción y colaboración grupal, permitió promover un aprendizaje activo y significativo, reforzando y ampliando los contenidos abordados en las prácticas docentes.

3.3 Tercer Informe de Avance: Año 2015

El Tercer Informe de Avance, correspondiente al año 2015, mostró la activa participación de los integrantes del proyecto como Miembros de Comisión Permanente/ Organizadores/ Evaluadores/ Expositores en distintos Congresos y Jornadas Nacionales e Internacionales, en ejes temáticos tales como: Aplicaciones de la Matemática, Investigación Educativa, Uso de las TIC en Educación Matemática.

La asistencia al Encuentro Nacional e Internacional en Educación Matemática en Carreras de Ingeniería (EMCI) que se desarrolló en la ciudad de San Nicolás de los Arroyos resultó un ámbito propicio para el intercambio de ideas, conocimientos y experiencias entre docentes e investigadores de distintas Universidades del país, y de otros países, relacionadas a la problemática educativa en carreras de Ingeniería. En esa oportunidad se presentaron dos trabajos con resultados del PI. Por otra parte se destaca también la participación en las Jornadas de la Labor Docente, Científica, Tecnológica y de Extensión en la que se presentaron cuatro (4) trabajos que dan cuenta de los resultados del Proyecto de Investigación.

Además, los integrantes del Proyecto intervinieron en diferentes acciones vinculadas directamente con el PI, como ser:

- Dictado de cursos de capacitación y perfeccionamiento destinados a docentes del Área Matemática (AM).
- Dictado del Curso de Nivelación: Área Matemática-Modalidad Semipresencial.
- Elaboración y diseño de materiales educativos para el dictado de asignaturas bajo la modalidad a distancia.
- Continuidad en la implementación de la modalidad b-learning con Aulas Virtuales en los distintos espacios curriculares del AM.
- Revisión Técnica de contenidos conceptuales y metodológicos de tres (3) libros del AM.
- Miembro de la Comisión permanente de EMCI.
- Evaluación de trabajos para su presentación en Congresos y Jornadas Nacionales e Internaciones, con posterior publicación de los mismos.

También, en base a la experiencia en el dictado de Cursos de Capacitación a Docentes y de los resultados obtenidos en la Investigación, se elaboró el Plan de Estudios de la Diplomatura Superior en Matemática y TIC que responde a la demanda de capacitación de la Región.

En cuanto a recursos humanos se formó a tres (3) becarias de Pregrado y dos (2) de los integrantes del Proyecto finalizaron la carrera de Licenciatura en Matemática con la presentación de sus Trabajos Finales. Además, se contó con una tesista de la Maestría en la Enseñanza de la Matemática. También se destaca la adjudicación de una Beca Doctoral del COCNICET bajo la co-dirección de un integrante del PI.

De lo declarado precedentemente se desprende que se cumplieron satisfactoriamente los siguientes objetivos específicos:

- Implementar la modalidad b-learning desde un enfoque constructivista en las prácticas pedagógicas.
- Evaluar el impacto, de la modalidad b-learning, en los procesos de enseñanza y aprendizaje en asignaturas del Área Matemática.
- Extrapolar los conocimientos y experiencias producidos en la investigación a otras áreas de formación docente y profesional.

3.4 Informe Final: Año 2016

El Proyecto de Investigación concluyó el 31 de Julio del año 2016 cumpliéndose satisfactoriamente con totalidad de las actividades y objetivos planteados.

En ese período informado, los integrantes del Proyecto participaron de distintos Congresos y Jornadas Nacionales e Internacionales como ser las "V Jornadas Nacionales y I Latinoamericanas de Ingreso y Permanencia en Carreras Científico-Tecnológicas: IPECYT 2016" que se desarrolló del 18 al 20 de mayo de 2016 en la ciudad de Bahía Blanca. Por otra parte se destaca también la participación en las Jornadas de la Labor Docente, Científica, Tecnológica y de Extensión en la que se presentaron cuatro (4) trabajos que dan cuenta de las actividades de investigación que desarrollan los integrantes del Proyecto.

Además, los Docentes – Investigadores intervinieron en diferentes acciones vinculadas directamente con el PI, como ser:

- Dictado de cursos de capacitación y perfeccionamiento en el marco de la Diplomatura Superior en Matemática y TIC, destinados a docentes del Área Matemática.
- Dictado de Cursos de Posgrado en el marco de una carrera de Especialización.
- Elaboración y diseño de materiales educativos para el dictado de asignaturas bajo la modalidad a distancia.
- Continuidad en la implementación de la modalidad b-learning con Aulas Virtuales en los distintos espacios curriculares del Área Matemática.

En cuanto a recursos humanos se cuenta con una tesista del COCNICET que se encuentra realizando una Beca Doctoral y una tesista de la Maestría en Enseñanza de la Matemática.

3.5 Resumen de la Producción Científica

En la Tabla 1 se muestran cuantitativamente la producción científica del Grupo de Investigación discriminada por año.

Tabla 1. Producción Científica del Grupo de Investigación del Proyecto "Implementación de entornos virtuales en los procesos de enseñanza y aprendizaje en asignaturas del área Matemática en carreras universitarias" Universidad Nacional del Chaco Austral 2012 a 2016.

PRODUCCIÓN CIENTÍFICA	AÑO					TOTAL
	2012	2013	2014	2015	2016	
Libros	2	-	-	-	-	2
Revisión técnica de libros	-	-	-	3	-	3
Revistas	1	-	-	-	-	1
Capítulos de libros	5	6	7	10	2	30
Publicaciones con referato	-	3	-	-	4	7
Presentaciones a eventos científicos	5	8	10	6	6	35
Cursos Dictados	-	-	-	-	3	3
Charlas Conferencias	3	4	5	8	-	20
Trabajos transferidos al Sector público o privado	-	-	1	3	-	4

Dirección de Tesis Maestría	-	1	1	1	1	4
Dirección de Becarios	-	1	3	4	1	9
Trabajo final de Licenciatura en Matemática	-	-	-	2	-	2

Otro aspecto a destacar es el importe crecimiento de los integrantes del Grupo de Investigación en sus categorías de Investigadores como se puede observar en la siguiente Tabla

Tabla 2. Variación en el Grupo de Investigción respecto a la Categoría de Investigación.

Categoría	Año 2012	Año 2017
II	0	2
III	1(*)	1
IV	2	0
V	1(*)	5

(*) *Observación*: Las Docentes Investigadoras Categoría III y V se encuentran en espera de los resultados de la Convocatoria a Categorización del año 2014.

Es importante remarcar que actualmente todos los integrantes del Proyecto están categorizados, lo que muestra el alto impacto que tuvo el Proyecto de Investigación en la Comunidad Científica y que beneficia significativamente a la UNCAUS y al Sistema de Investigación de la Nación.

4 Conclusiones

Se destaca significativamente la importante producción en los cuatro años de duración del Proyecto. En este sentido se puede dar cuenta de publicaciones de libros, capítulos de libros, publicaciones en revistas, participación en numerosos congresos y eventos nacionales e internacionales, formación de recursos humanos, elaboración de materiales didácticos sistematizados, etc.

Los resultados que se fueron presentando en los distintos informes de avance nos permiten concluir que la implementación de entornos virtuales de aprendizaje favoreció la adquisición de habilidades y competencias digitales en los procesos de enseñanza y aprendizaje en asignaturas del área Matemática en carreras universitarias permitiendo: incentivar al estudiante, promover un aprendizaje activo y significativo, considerar las individualidades y diversidades, reforzar y ampliar los contenidos tratados en clase, fortalecer la relación entre estudiantes y profesores y promover la cooperación entre alumnos.

Se observa que se cumplió satisfactoriamente con los todos los objetivos del Proyecto, destacándose las numerosas contribuciones a la comunidad científica.

Los resultados demuestran un gran trabajo en equipo que se sustentó en las bases del profesionalismo, el respeto y dedicación.

Agradecimientos. Queremos agradecer muy especialmente a la Directora del Proyecto Lic. Nori Cheeín de Auat y al resto de los integrantes del Grupo de Investigación, que no forman parte de la autoría de este trabajo, que son: Esp. Lic. Marina Beatriz BLOECK, Esp. Prof. Rosa Viviana RUIZ, Mg. Prof. Liliana Graciela ZAJAC y Mg. Prof. Stella Maris ZALAZAR.

Referencias

1. Zañartu, L. M. (2003). Aprendizaje colaborativo: Una nueva forma de diálogo interpersonal y en red. Revista Digital de Educación y Nuevas Tecnologías. http://contextoeducativo.com.ar/2003/4/nota-02.htm.
2. Pérez Casales, R.; Rojas Castro, J.; Paulí Hechavarría, G. (2008). Algunas experiencias didácticas en el entorno de la plataforma Moodle. Revista de Informática Educativa y Medios Audiovisuales. Vol. 5(10), págs. 1-10.
3. Martínez Garrido, C.; Fernández Prieto, M. (2011). El uso de Moodle como entorno virtual de apoyo a la enseñanza presencial. Roig Vila, R.: La práctica Educativa en la Sociedad de la Información. Innovación a través de la investigación. Editorial Marfil pp. 291 – 300.

Volver al Índice

Educación Matemática en Carreras de Ingeniería Gráfica de Funciones y Continuidad

Agustín Menuet, María Laura Aliaga
Departamento de Ciencias Básicas, Facultad de Ingeniería y Ciencias Agropecuarias, Universidad Nacional de San Luis
Ruta 55 Extremo Norte – Villa Mercedes (San Luis) – C.P 5730
{Agustinmenuet, aliagalaura}@gmail.com

Resumen. El presente trabajo corresponde al análisis de actividades de estudiantes de primer año de la carrera de Ingeniería Química de la FICA-UNSL con respecto al estudio de funciones y continuidad. Mediante la resolución de ejercicios en los parciales de la asignatura Análisis Matemático I, se pudo observar cómo los alumnos utilizan diferentes registros de representación (algebraico y gráfico) para la determinación de la continuidad de funciones y se relevaron las principales falencias y dificultades al momento de la resolución de los mismos. El trabajo en los errores fortalece la práctica áulica y permite diagramar actividades que lleven a nuestros alumnos a la comprensión integral de los contenidos. Este estudio es de carácter exploratorio y forma parte de una investigación más amplia cuyo fin principal es el mejoramiento de la práctica docente en el nivel superior.

Palabras Clave: Continuidad, Registros, Comprensión, Errores, Práctica docente.

1 Introducción

Como docentes de la asignatura Análisis Matemático I de las carreras de Ingeniería, de la Facultad de Ingeniería y Ciencias Agropecuarias de la Universidad Nacional de San Luis, sabemos que los contenidos de Matemática representan una herramienta importante para nuestros estudiantes y futuros egresados. Por esto mismo, año a año nos preocupamos por mejorar nuestra enseñanza, de modo que permita a nuestros alumnos obtener una mejor comprensión de los contenidos de nuestra asignatura.

Numerosas investigaciones muestran que los estudiantes presentan dificultades cuando hacen frente a temas de Cálculo como continuidad, diferenciación e integración y las relacionan con las dificultades en el aprendizaje de los límites [1, 2, 3, 4]

A través de nuestra experiencia como docentes hemos comprobado diversas falencias que presentan los alumnos cuando deben trabajar con la noción de Continuidad de una función; los errores que hemos observado son de las actividades extraídas del recuperatorio del primer parcial de la asignatura Análisis Matemático I de 36 alumnos de la carrera Ingeniería Química en las que los estudiantes presentaron mayores dificultades.

En lo que se refiere al tema continuidad se observaron algunos problemas ligados a la identificación de funciones continuas en un punto y también a la conversión de los distintos registros de representación semiótica [5]. Esto se evidencia en algunos ejemplos en los que el alumno indica a través del análisis algebraico que la función es continua en un punto dado, pero sin embargo la gráfica que realiza presenta una discontinuidad en dicho punto.

Si bien la representación gráfica, a criterio de los docentes y libros de textos, es la forma más intuitiva, y facilitadora para la comprensión del concepto, parecería ser que a los alumnos no les resulta tan evidente su interpretación y cálculo en este registro. Aunque también se observa una gran dificultad en un alto porcentaje de los alumnos para realizar las gráficas de funciones.

1.1 Funciones y Continuidad.

En la última década hemos visto en nuestras aulas mayores dificultades en el estudio del concepto de función. Por un lado, creemos que por la deficiencia de conceptos previos con los que llegan los estudiantes de primer año, (deficiencia que lamentablemente no siempre se logra sortear con el curso de nivelación que actualmente ofrece la facultad); y por otro lado, si bien el concepto de función ha tenido históricamente una construcción que ha llevado siglos, se sigue presentando en nuestras aulas como correspondencia entre dos conjuntos, lo que hace que pierda muchos atributos que tenían las definiciones clásicas, como la idea de variación, continuidad, dependencia de la variable como parámetro temporal y se desconozca el largo camino que fue necesario recorrer y su auténtico significado.

Por todo esto, es necesario conocer cómo interpretan las funciones continuas y discontinuas, ya que tradicionalmente, a la enseñanza de este concepto, no se le da la misma importancia que a otros temas. A lo largo de la historia [6], la definición de función continua significó importantes esfuerzos a los matemáticos. La sutileza de esta noción requirió de una definición extremadamente cuidadosa.

A principios del siglo XIX se inició la formulación rigurosa de este concepto, dada por Bolzano (1817). Posteriormente, con Cauchy se llegó entonces a la formulación definitiva y rigurosa del concepto de continuidad, tal como ahora la conocemos, por medio de la siguiente definición:

"*f(x) es continua dentro de un intervalo, si el límite de la variable f(x) cuando x se aproxima a x0 es f(x0), para todo x del intervalo*".

A pesar de la larga historia de este concepto, los alumnos la consideran como una noción intuitiva y por lo tanto evidente [7].

En general, en la docencia, se utilizan y enseñan criterios para decidir la continuidad de una función, estudiando el valor del límite de la función para x tendiendo a x0 con el valor de la función en el punto. De esta manera, se estudia la continuidad puntual para luego seguir con la continuidad global, surgiendo ésta como el resultado de generalizar la continuidad puntual a todos los puntos del intervalo. Sin embargo, dada la simplicidad de esta noción en la vida cotidiana provoca problemas de aprendizaje de esta noción desde el punto de vista matemático (para los estudiantes una función es continua si "puedo dibujarla sin levantar el lápiz del papel) [7].

1.2 La importancia de las representaciones en matemáticas.

Es importante entender que los objetos matemáticos no son directamente accesibles a la percepción [5]; por lo mismo, este autor destaca la importancia de la representación en Matemáticas, entendiendo que no es posible estudiar los fenómenos relativos al conocimiento sin recurrir a ella. Así mismo, es muy importante entender que no se deben confundir los objetos matemáticos con su representación (el 2 es un símbolo que representa al número dos, pero no es el número en sí mismo. Esto no siempre resulta evidente para los estudiantes).

Raymond Duval define los registros de representación como un medio de expresión que se caracterizan por sus signos propios y la forma en que éstos se organizan. De esta manera, es posible representar un concepto matemático en diversos registros de representación. Por ejemplo, una ecuación, un gráfico, o un símbolo representan a un objeto matemático. Asimismo, un registro está constituido por signos tales como símbolos, íconos o trazos, es decir, son medios de representación semiótica [8].

Para que un estudiante llegue a la comprensión de un concepto es necesaria la coordinación de los diferentes registros de representación, ya que con la representación en un solo registro (mono-registro) no se obtiene la comprensión integral del concepto. Sin embargo, la conversión entre registros no se realiza en forma espontánea.

En esta teoría se considera que la comprensión integral de un concepto está basada en la coordinación de al menos dos registros de representación y esta coordinación se pone de manifiesto por medio del uso rápido y la espontaneidad de la conversión cognitiva, logrando articulaciones entre diferentes registros de representación semiótica. Algunos ejemplos de estos registros pueden ser el lenguaje natural, las escrituras algebraicas o los gráficos cartesianos.

2 Desarrollo

Para determinar las dificultades en la comprensión de este concepto, es necesario analizar las respuestas que los alumnos dan a preguntas relacionadas con la continuidad. Para ello, les solicitamos en una primera instancia realizar la representación gráfica de una función a trozos y determinar si se trata de una función continua. Los objetivos de la actividad son constatar si los alumnos han aprendido la definición y el concepto de Continuidad, interpretar el análisis de los alumnos en la determinación de la continuidad de funciones y la correlación entre diferentes registros como son en este caso el algebraico y el gráfico.

La presente investigación se llevó a cabo con alumnos de primer año de la carrera de Ingeniería Química. Se analizaron las respuestas dadas por 36 estudiantes en un ejercicio de un examen recuperatorio que constaba de tres ítems. En este trabajo analizamos cómo los alumnos definen el concepto, si recurren a la conceptualización mediante gráficas, o si realizan el análisis mediante la definición. Por otro lado, estudiamos los errores que cometen en ambas conceptualizaciones.

En concreto, se les propuso una actividad, con el mismo análisis pero dividido en dos temas:

TEMA I:

Sea la función:

$$f(x)=\begin{cases}-x+1 & \text{si } -2<x\leq 0\\ x^2 & \text{si } \quad x>0\end{cases}$$

Analizar si es continua en x=0
De ser discontinua, decir qué tipo de discontinuidad presenta, justificando la respuesta.
De ser posible, redefinir la función.

TEMA II:

Sea la función: $$f(x)=\begin{cases}-x^2+2 & si \;\; x>-1\\ x-1 & si \;\; x\leq -1\end{cases}$$

Analizar si es continua en x=-1
De ser discontinua, decir qué tipo de discontinuidad presenta, justificando la respuesta.
De ser posible, redefinir la función.

2.1 Análisis de las respuestas

Los datos fueron obtenidos de los alumnos de primer año de la carrera de Ing. Química en el recuperatorio del primer parcial del año 2015. El total de alumnos es de 36, de los cuales 12 aprobaron con una nota superior al 60% y el resto no logró la aprobación del examen. Para salvar la identidad de los estudiantes, fueron numerados del 1 al 36 y haremos alusión a cada uno de ellos por el orden que les fue asignado en forma aleatoria.

De acuerdo al análisis de las respuestas, las clasificamos en tres tipos: Correcta, Regular y Mal, utilizando el siguiente criterio:

- Correcta: El alumno contesta correctamente lo solicitado haciendo uso de la definición de continuidad.
- Regular: El alumno comete errores en el procedimiento pero hace un correcto planteo para obtener el resultado.
- Mal: El alumno no obtiene el resultado correcto y/o comete errores en el planteo de la actividad.
- No contesta: El alumno no realiza la actividad.

Del total de alumnos, tenemos que 19 contestaron Mal (53%), 10 lo hicieron en forma Correcta (28%), 2 en forma regular (5%) y hubieron 5 estudiantes que no realizaron la actividad (14%). Los datos se presentan en la Fig. 1.

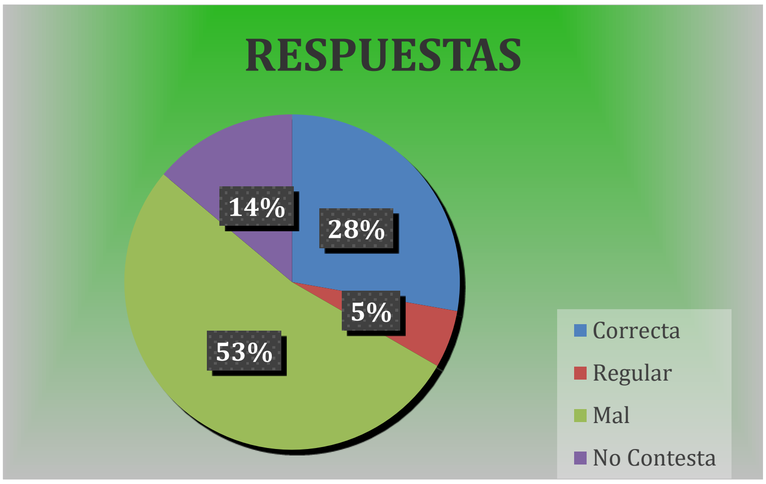


Fig. 1. Porcentajes de las respuestas dadas por los estudiantes.

Dado que más del 50 % de los alumnos contestaron mal, nos parece importante mostrar a continuación algunos ejemplos de los errores que se repiten en varios estudiantes.

Por ejemplo, el alumno 12 realiza mal la gráfica y calcula mal las condiciones de continuidad. Realiza un cálculo incorrecto del valor de la función en el punto y de los límites laterales (Fig. 2)

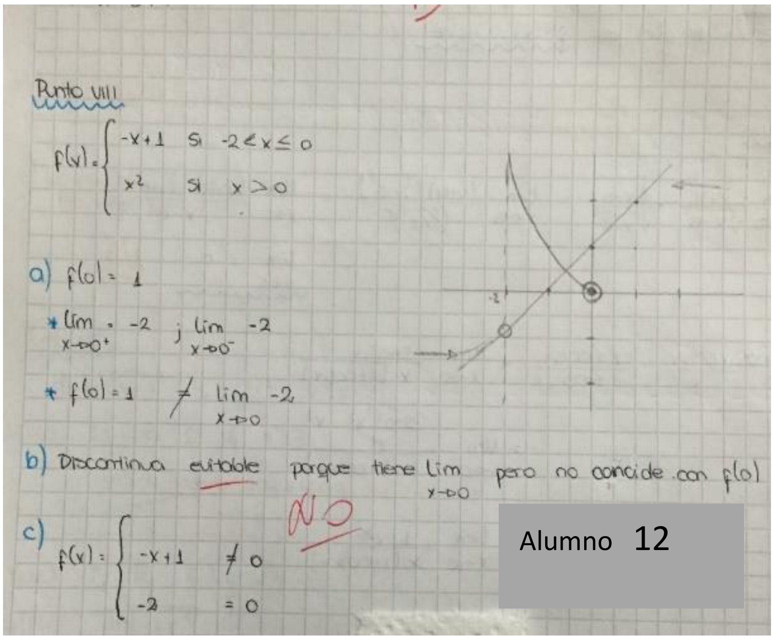


Fig. 2. Alumno 12

El estudiante 14 intenta resolver el ejercicio en forma analítica. De las tres condiciones que debe cumplir la función para ser continua en un punto, sólo resuelve una y de manera incorrecta. Concluye erróneamente que la función es continua en el punto en cuestión. (Fig. 3).

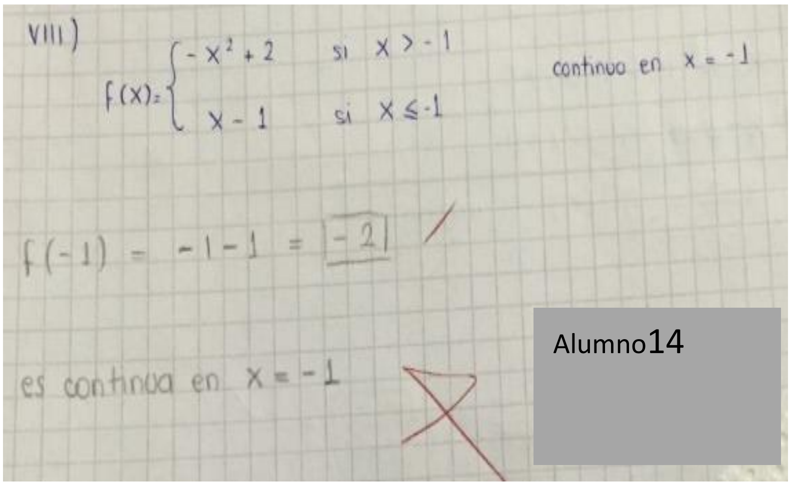


Fig. 3. Alumno 14

El alumno 27 resuelve en forma gráfica y analítica. Realiza mal los cálculos de los límites laterales. Grafica incorrectamente. Redefine una función que dice que es continua, lo que evidencia la falta de interpretación del concepto de continuidad. (Fig. 4)

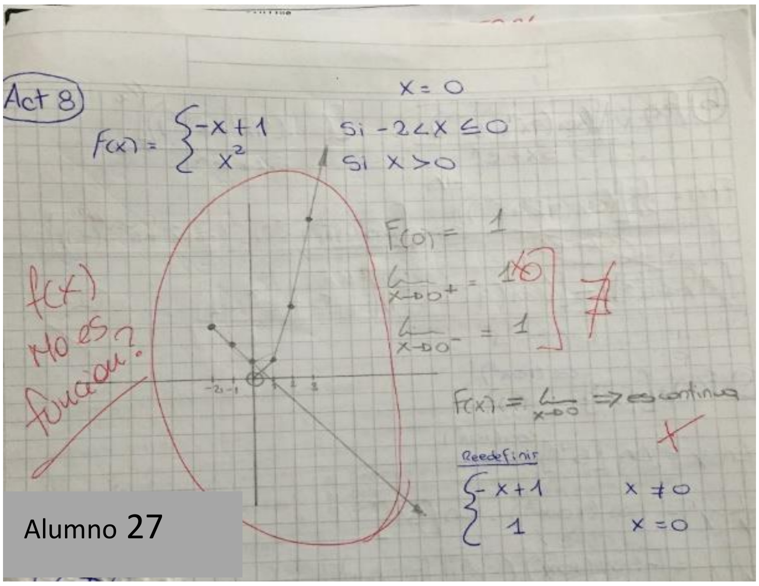


Fig. 4. Alumno 27

El alumno 28 realiza mal la gráfica (dificultad que se ve en varios estudiantes) y calcula de manera errónea los límites laterales. (Fig. 5)

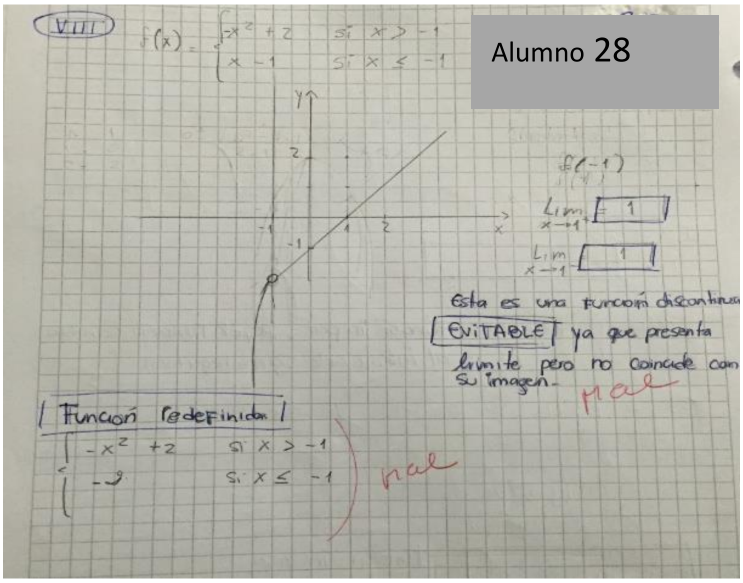


Fig. 5. Alumno 28

2.2 Principales Errores

A través del análisis de las diversas respuestas se observa que los principales errores que cometieron los estudiantes fueron:

- Calculo de límites laterales.
- Gráficas de las funciones.
- Falta de coordinación entre los registros algebraico y gráfico.

En general se observa que los alumnos comprenden que para determinar la condición de continuidad en un punto pueden determinarlo tanto en forma analítica o gráfica, pero se evidencia una falta de coordinación entre ambos registros. Por otro lado, un gran número de estudiantes muestran dificultades tanto en la realización como en la interpretación de las gráficas (véase por ejemplo que el alumno 27, como otros, realiza una gráfica que ni siquiera corresponde a una función).

Dado que en la cátedra utilizamos la definición de continuidad dada por Engler [9] (Fig. 6), analizamos cómo evalúan los estudiantes las tres condiciones analíticas que la función debe cumplir.

- Análisis de la función en el punto: Se observa que el análisis de la función en el punto lo realizan correctamente.
- Cálculo del límite de la función en el punto dado: En el cálculo de los límites laterales es donde se observa la principal falencia de los alumnos.
- Condición de igualdad del valor de la función y el límite de la función en el punto: Los alumnos en general comprenden que para que se cumpla la condición de continuidad el valor de la función debe ser igual al valor del límite, esta condición en general no presenta problemas en los alumnos.

Definición 1. Una función $y = f(x)$ es continua en $x = a$ si $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Si la función $y = f(x)$ no es continua en $x = a$, se dice que es discontinua en a o que tiene una discontinuidad en a.

Definición 2. Se dice que la función $y = f(x)$ es una función continua en $x = a$ si se cumplen las siguientes condiciones:

a) existe $f(a)$. Es decir, a pertenece al dominio de f.

b) existe $\lim_{x \to a} f(x)$

c) $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

Si alguna de estas condiciones no se cumple se dice que f es discontinua en $x = a$.

Fig. 6. Definición de continuidad [9].

Otro recurso que han utilizado los alumnos para determinar la condición de continuidad es mediante la gráfica. Más allá de que es un camino correcto aquí se presentó una de las mayores dificultades de los alumnos al realizar la gráfica de funciones a trozos. Se observa también que además de realizar las gráficas a los alumnos en general les cuesta interpretar el significado de la gráfica.

A continuación se presenta un análisis de cada uno de los casos:

	BIEN	REGULAR	MAL	NC
1	Determina que es discontinua realizando la gráfica y analizando la misma de manera correcta.			
2	Determina que es discontinua realizando la gráfica y analizando la misma de manera correcta.			
3	Para determinar la continuidad de la función en el punto utiliza la definición y lo calcula analíticamente de manera correcta.			
4	Para determinar la continuidad de la función en el punto utiliza la definición y lo calcula analíticamente de manera correcta. También realiza la gráfica de manera correcta.			
5	Para determinar la continuidad de la función en el punto utiliza la definición y lo calcula analíticamente de manera correcta.También realiza la gráfica de			

	manera correcta.			
6	Realiza la gráfica de manera correcta y evalúa los límites laterales para determinar la continuidad de la función.			
7		Realiza mal la gráfica. Determina correctamente que es disc. Esencial.		
8			Evalúa correctamente de forma analítica el valor de la función en el punto y los limites laterales, obtiene valores diferentes, pero no analiza correctamente los datos obtenidos. Grafica mal.	
9			Realiza mal la gráfica y calcula analíticamente mediante la definición de continuidad de forma errónea.	
10			Evalúa las tres condiciones de continuidad de manera errónea, calcula mal los límites laterales.	
11	Para determinar la continuidad de la función en el punto utiliza la definición y lo calcula analíticamente de manera correcta. También realiza la gráfica de manera correcta.			
12			Evalúa las tres condiciones de continuidad de manera errónea, calcula mal los límites laterales. Grafica mal.	
13			Evalúa las tres condiciones de continuidad de manera errónea, calcula mal los límites laterales. Grafica mal.	
14			No realiza gráfica. No analiza las condiciones de continuidad.	
15			No analiza las condiciones de continuidad. Realiza mal la gráfica.	
16		No gráfica. Solo calcula los límites de manera errónea.		
17			Evalúa las tres condiciones de continuidad de manera errónea, calcula mal los límites laterales. Grafica mal.	
18			No gráfica. No analiza las condiciones de continuidad.	
19			Grafica correctamente. No comprende la gráfica.	
20	Determina correctamente la continuidad analizando las condiciones de continuidad.			
21				No contesta
22			No realiza ningún análisis	
23			Responde correctamente la condición de continuidad en el punto, aunque grafica mal y no realiza ningún análisis de la función.	
24				No contesta
25			Evalúa las tres condiciones de	

			continuidad de manera errónea, calcula mal los límites laterales.	
26				No contesta
27			Calcula mal las condiciones de continuidad.	
28			Calcula mal las condiciones de continuidad. Grafica mal.	
29			Solo responde que la función es continua, sin realizar análisis ni gráfica.	
30				No contesta
31			Evalúa las tres condiciones de continuidad de manera errónea, calcula mal los límites laterales. Grafica mal.	
32			Evalúa las tres condiciones de continuidad de manera errónea, calcula mal los límites laterales. Grafica mal.	
33				No contesta
34			Grafica mal. No interpreta la gráfica.	
35	Determina correctamente la continuidad analizando las condiciones de continuidad. Grafica correctamente			
36	Determina correctamente la continuidad analizando las condiciones de continuidad.			

Fig. 7. Respuestas dadas por cada estudiante

3 Conclusiones y trabajos futuros

Aunque la función dada en la actividad presenta una discontinuidad esencial, el 56% de los alumnos contestan que la función es continua o la redefinen como si tuviera una discontinuidad evitable en el punto analizado. Estas respuestas evidencian que los estudiantes no han comprendido el concepto o presentan errores en la interpretación de la gráfica como así también en las condiciones de continuidad.

Los errores deben ser considerados en la práctica docente como un punto de partida para reforzar o revisar el modo en que aprenden nuestros estudiantes. Se deberá tener en cuenta entonces la diversidad de los mismos para decidir cuál es el modo de intervención más adecuada.

En el caso de la continuidad de funciones observamos que la gráfica de una función debería ayudar en el aprendizaje haciendo evidente dicho concepto. Sin embargo, a través del análisis realizado se evidencia que los conceptos previos, particularmente las funciones y sus gráficas, representan una dificultad para poder aprender el concepto de continuidad. Así mismo, los conflictos en el aprendizaje de los límites también contribuyen en estas dificultades.

Es importante realizar este tipo de diagnósticos para mejorar la práctica docente teniendo en cuenta actividades donde los estudiantes realicen tratamientos y sobre todo conversiones entre distintos registros de representación que permitan una comprensión integral de los conceptos. Sin duda, debemos seguir trabajando en esto.

Referencias

1. Artigue, M. *Analysis*. En D. Tall (Ed.), Advanced mathematical thinking. Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic, pp. 167-198 (1992).
2. Sierra Vazquez, M., et al. "*Concepciones de los alumnos de Bachillerato y curso de orientación universitaria sobre límite funcional y continuidad*". Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa Vol. 3 Núm. 1, pp. 71-85. (2000).

3. Sierpinska, A., Humanities Students and epistemological obstacles related to limits. *Educational Studies in Mathematics*, 18(4), 371-397. (1987)
4. Tall, D. y Vinner, S. *Concept image and concept definition in mathematics, with special reference to limits and continuity*. Educational Studies in Mathematics. Vol. 12, pp. 151-169 (1981).
5. Duval, R. *Registros de Representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento.* En F. Hitt (ed.), Investigaciones en Matemática Educativa. México: Departamento de Matemática Educativa. Cinvestav. Vol. II, pp. 173-201 (1998).
6. Boyer, C. B. *Historia de la matemática*. Madrid: Alianza. (1986).
7. Gatica, N. Maz A., May G., Cosci C. y Renaudo J. *Un acercamiento a la idea de continuidad de funciones en estudiantes de Ciencias Económicas.* Unión: Revista iberoamericana de Educación Matemática. Vol. 22, pp. 121-131 (2010).Duval, R. *Semiosis y Pensamiento Humano. Registros semióticos y aprendizajes intelectuales.* Universidad del Valle, Colombia. (2004).
8. Engler, A. M. D. *El calculo diferencial.* Santa Fe, Argentina: Ediciones UNL. (2007).

Volver al Índice

Capítulo 3

Experiencias de Cátedra

Una Aplicación de las Integrales Definidas, Experiencia de Aula

Sandra Barrile, Gabriela Righetti
Departamento de Matemática, Facultad Regional Avellaneda, Universidad Tecnológica Nacional
Av. Mitre 750, Avellaneda, Pcia. de Buenos Aires
sandrabarrile@hotmail.com; righettigab@gmail.com

Resumen. La búsqueda de estrategias que faciliten el aprendizaje significativo en general, y en el cálculo diferencial e integral fomenta la realización de distintas actividades. Una de ellas es el trabajo a partir de situaciones problemáticas que se relacionen con el entorno social de nuestros alumnos. En carreras de ingeniería, esto es buscar situaciones de asignaturas como física, química, etc., en las cuales el alumno deba aplicar conceptos matemáticos para modelizarlas y resolverlas. En este trabajo se plantean actividades cuyo objetivo es que los alumnos puedan relacionar conceptos de diferentes asignaturas desde los primeros cursos de su carrera, así como introducirlos a parte de lo que en un futuro será su vida profesional: analizar, comprender y desarrollar habilidades para resolver problemas.

Palabras Clave: Fluido, Fuerza, Sumas de Riemman, Integral.

1 Introducción

Uno de los problemas presentes en los cursos de cálculo diferencial e integral, es la falta de "sentido" que nuestros alumnos le encuentran a los distintos objetos matemáticos. Según las distintas teorías que se refieren a la enseñanza, el alumno debe ser un sujeto activo en el proceso de enseñanza-aprendizaje.

Es por ello que resulta fundamental proponer actividades que favorezcan un aprendizaje significativo y que permitan a los estudiantes ser sujetos activos. Para ello, entre otros aspectos, hay que tener en cuenta sus conocimientos previos, el contexto, sus necesidades a partir del entorno social y, en la educación universitaria, la relación con temas que hacen a su interés vocacional. Según plantean Dubinsky y Mc Donald [1], el conocimiento matemático de un sujeto es su tendencia a responder a situaciones matemáticas problemáticas mediante la reflexión sobre problemas y sus soluciones dentro de un contexto social.

Es importante propiciar en el alumno *"(la) integración de las matemáticas con otras áreas del conocimiento; interés por las matemáticas frente a su aplicabilidad; mejoría de la aprehensión de los conceptos matemáticos; capacidad para leer, interpretar, formular y resolver situaciones-problema; estimular la creatividad en la formulación y resolución de problemas; habilidad en el uso de la tecnología; capacidad para actuar en grupo..."* [2]

Por otro lado, la modelización en la enseñanza es una práctica fundamental que permite a los estudiantes establecer relaciones entre la matemática y el mundo real tal como se muestra en la fig.1 [3].

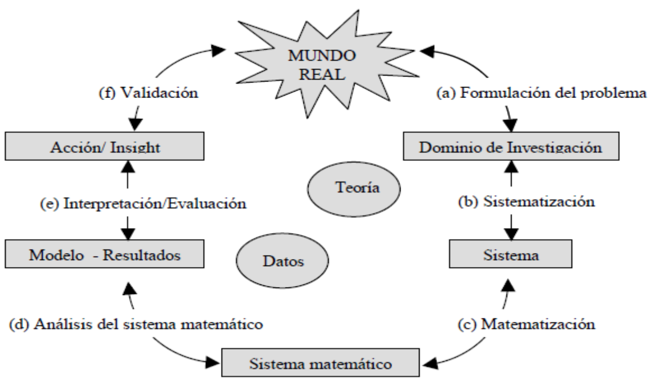


Fig. 1. Un modelo gráfico de un proceso de modelización.

"*Un modelo matemático es una relación entre ciertos objetos matemáticos y sus conexiones por un lado, y por el otro, una situación o fenómeno de naturaleza no matemática*" [3]. En este sentido, el trabajo con modelización implica que los alumnos logren establecer, en primera instancia, una relación entre una situación no matemática y un concepto matemático; para luego poder experimentar la aplicabilidad de dicho modelo.

Teniendo en cuenta estas observaciones, en la enseñanza de la matemática en general y en particular en carreras de ingeniería, hay que evitar el trabajo fragmentado de los distintos contenidos, fomentando un tratamiento integral que considere la relación con otras asignaturas. Es por eso que proponemos incluir actividades que integren conceptos propios de la asignatura con algunos de otras disciplinas. Estas actividades no deberían ser aisladas, sino formar parte del trabajo en el aula así como del material didáctico de los cursos.

2 Características del material propuesto

En el cálculo integral, las aplicaciones usuales con las que se trabaja en los cursos de cálculo diferencial e integral de una variable tienen que ver con el cálculo de área o de volumen. Sin embargo, nuestros alumnos de carreras de ingeniería no ven esto como conceptos aplicables al resto de las asignaturas. Tal como sostiene Douady "*... Las nociones, al igual que los teoremas, se pueden trabajar y modificar según las situaciones donde se necesitan. De allí se puede desembocar en nuevas nociones, que a su vez se convierten en materia de trabajo, interpretación, modificación, generalización,... El hecho de relacionarlas es a su vez una fuente de significado para quienes las realizan...*" [4].

Las actividades que a continuación sugerimos muestran como el modelo matemático permite resolver problemas de la física, química, etc. Sin embargo, la mayoría de las veces ocurre que nuestros estudiantes aún no han trabajado con ciertos contenidos en otras asignaturas. Esto dificulta la articulación horizontal. De ahí que el diseño de las actividades que planteamos incluye explicaciones teóricas simples de los conceptos a trabajar accesibles a nuestros alumnos.

Proponemos a continuación un trabajo práctico a realizar en pequeños grupos por los alumnos que relaciona el cálculo integral de una variable con la mecánica de fluidos. Para el mismo, los alumnos deben conocer previamente el concepto de integral definida y algunos métodos de integración indefinida.

3 Ejemplos de actividades: desarrollo de la propuesta

El principio de Arquímedes afirma que todo cuerpo sumergido en un fluido experimenta un empuje vertical y hacia arriba igual al peso de fluido desalojado. Este empuje es producto de la presión del fluido, que depende de la profundidad. A su vez, esta presión ejerce una fuerza sobre un cuerpo sumergido. O sea, si en un recipiente con un fluido determinado se sumerge un cuerpo en equilibrio, éste experimenta una fuerza que resulta perpendicular a cualquiera de sus caras. Esta fuerza es ejercida por el fluido y se calcula multiplicando el valor de la presión del fluido por el área de la cara.

Actividad 1

Consideramos una placa rectangular de 3m de ancho por 5m de largo sumergida en agua, cuya densidad es $1000 kg/m^3$, tal como se muestra en la Fig. 2. La cara superior de la placa se encuentra a 3m del borde.

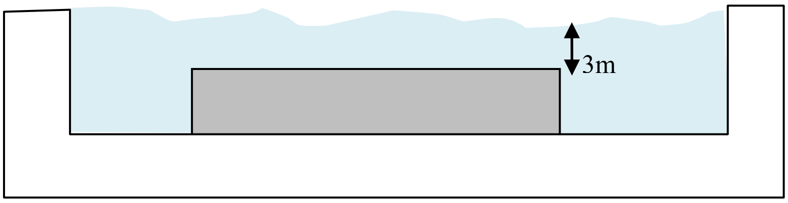


Fig. 2. Dibujo de la placa sumergida de la actividad 1.

a) Investiguen una fórmula que permita calcular la masa del fluido que está sobre la placa.

b) Teniendo en cuenta la segunda ley de Newton, calculen la fuerza que ejerce un fluido sobre la cara superior de la placa.

Actividad 2

Encuentren una fórmula general que permita calcular la fuerza que ejerce un fluido de densidad δ constante en una cara de una placa de área A, sabiendo que dicha cara se encuentra a una profundidad h constante.

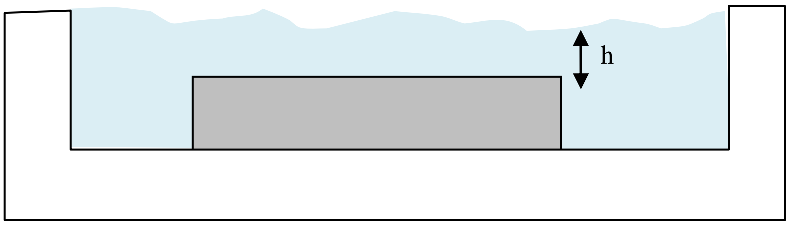


Fig. 3. Esquema de una placa sumergida a profundidad constante h.

Actividad 3

Pero, ¿qué pasa si en la placa de la actividad 1 queremos calcular la fuerza que ejerce el fluido sobre una de las caras verticales sabiendo que la altura de la placa es de 4m? Como podemos observar, en este caso la altura hacia el nivel del fluido no es constante.

Vamos a empezar por considerar un sistema de referencia como se indica en la Fig. 4.

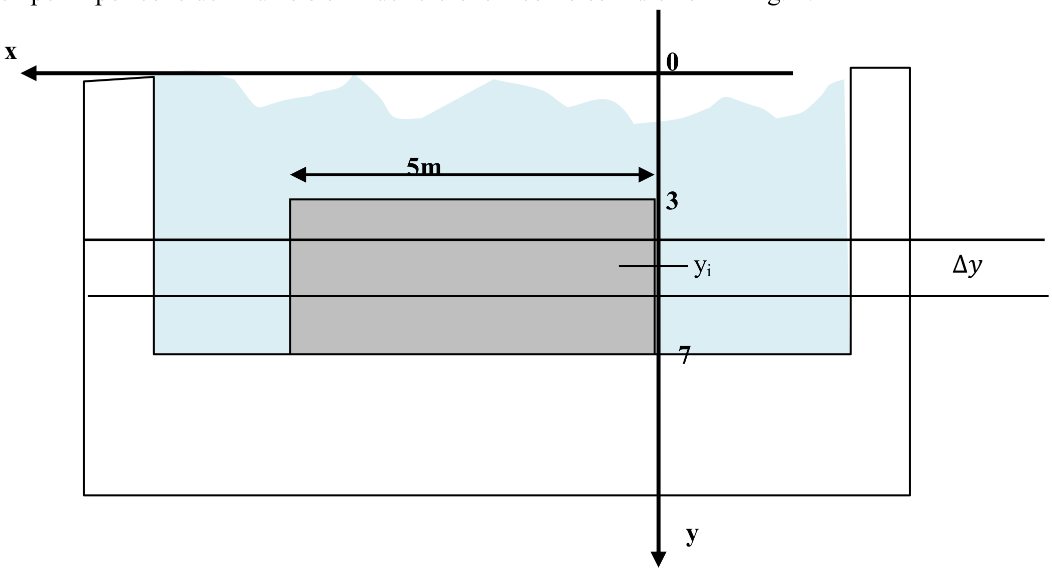


Fig. 4. Dibujo de placa sumergida con un sistema de referencia.

Y luego dividimos la cara vertical de la placa en n pedazos de altura constante Δy. Como la franja es "pequeña" podemos suponer que la profundidad y_i es la misma para todos los puntos de la franja.

Entonces la fuerza en cada franja se puede aproximar por:

$$F_i \cong \delta.g.y_i.5m\Delta y \qquad \textbf{(1)}$$

a) Determinen una fórmula para aproximar la fuerza total

b) Para obtener la fuerza total, entonces calculamos

$$F=\lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} \delta.g.5my_i\Delta y \qquad \textbf{(2)}$$

Escriban el cálculo de la fuerza en términos de integrales y resuelvan.

Actividad 4

Un contenedor cargado de nafta (densidad $680\frac{kg}{m^3}$) tiene forma parabólica tal como se muestra en la Fig. 5. Si la nafta ocupa 0,7m de la altura del contenedor, ¿cuál es la fuerza que ejerce el fluido sobre una de las caras verticales del contenedor?

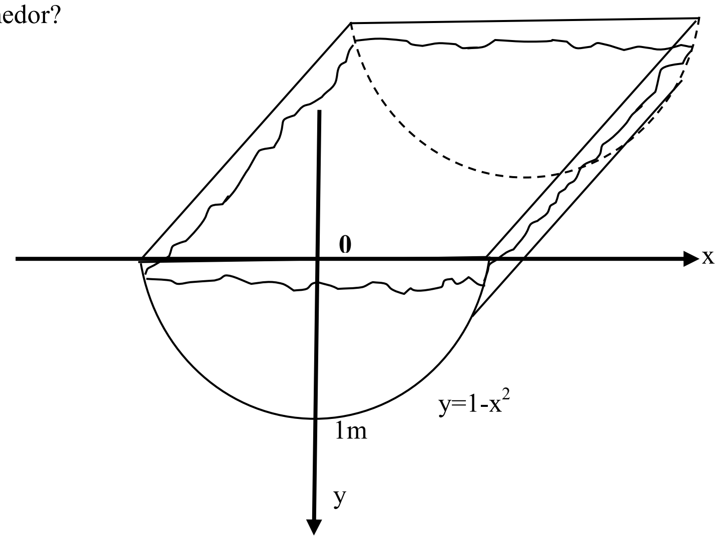


Fig. 5. Esquema del contenedor con un sistema de referencia.

a) Realicen para esta situación un análisis similar al de la Actividad 3, dividiendo en “pequeñas franjas” de altura constante Δy. ¿Cuál será el área de cada franja?
b) Calculen F_i y encuentren una fórmula para F.
c) Determinen la expresión de la fuerza en términos de integrales y resuelvan.

Actividad 5

Una placa delgada triangular está sumergida en agua según la Fig. 6.

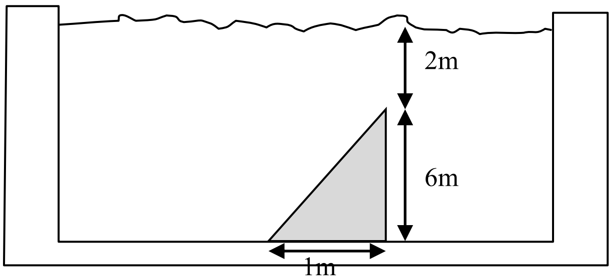


Fig. 6. Esquema de placa delgada triangular

a) Establezcan un sistema de referencia de ejes cartesianos que les permita determinar funciones para calcular el ancho de la placa en función de la altura.
b) Expresen la fuerza del fluido sobre la placa utilizando integrales y calcúlenla.

4 Etapas de discusión

En este tipo de actividades es muy importante la realización de puestas en común y las intervenciones docentes que permitan formalizar e institucionalizar los conceptos trabajados. Estas instancias pueden realizarse en los siguientes momentos:

Actividad 2: concepto de masa, densidad, aceleración de la gravedad, peso y fuerza en general, unidades, fórmulas obtenidas en las actividades 1 y 2 más allá de los valores numéricos dados;

Actividad 3: partición, aproximación, sumas de Riemman, relación con la definición de integral definida, discusión sobre las fórmulas y procedimientos planteados en la actividad;

Actividad 4: elección del sistema de referencia según el problema a resolver, métodos de integración indefinida, análisis de las fórmulas planteadas en el problema;

Actividad 5: comparación de los distintos sistemas de referencia elegidos, planteo integral del cálculo de la fuerza de un fluido sin pasar por la partición. Trabajo sobre el uso de unidades a lo largo de todas las actividades.

5 Trabajos de los alumnos

Grupo 1

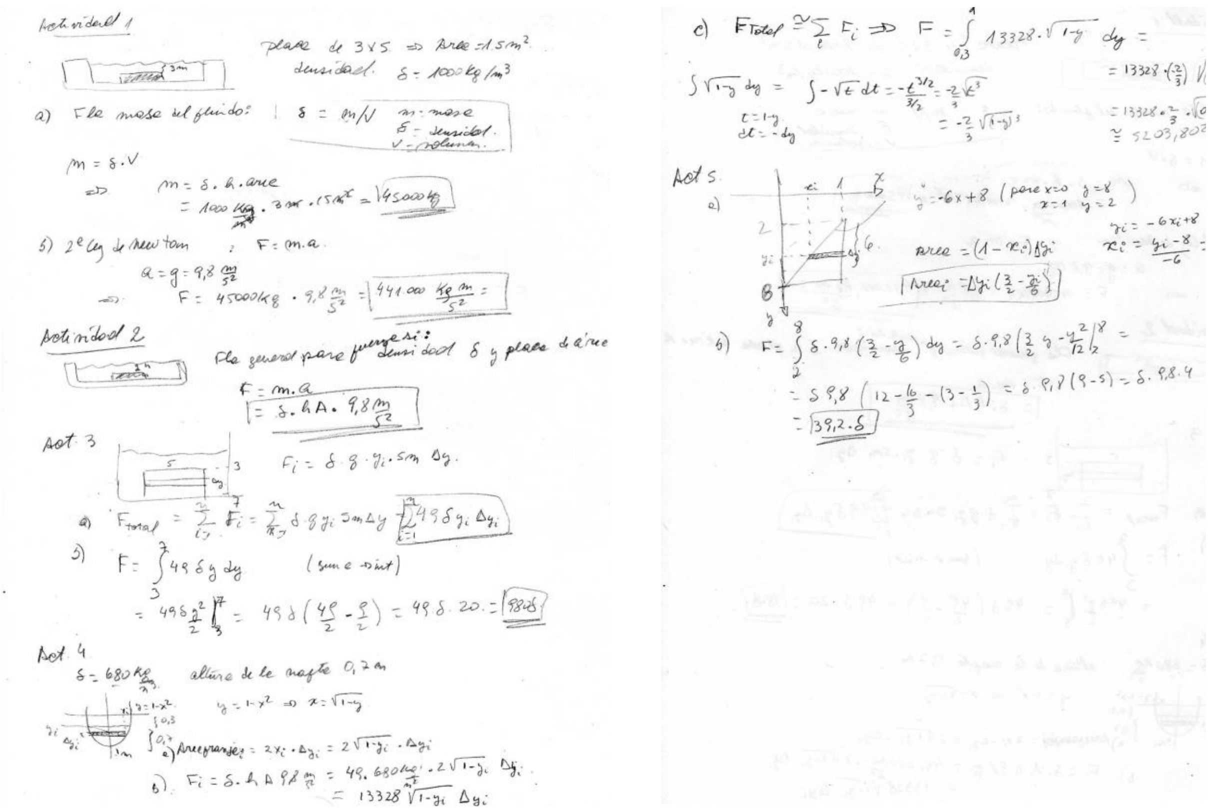


Fig. 7. Resolución del grupo 1

Grupo 2

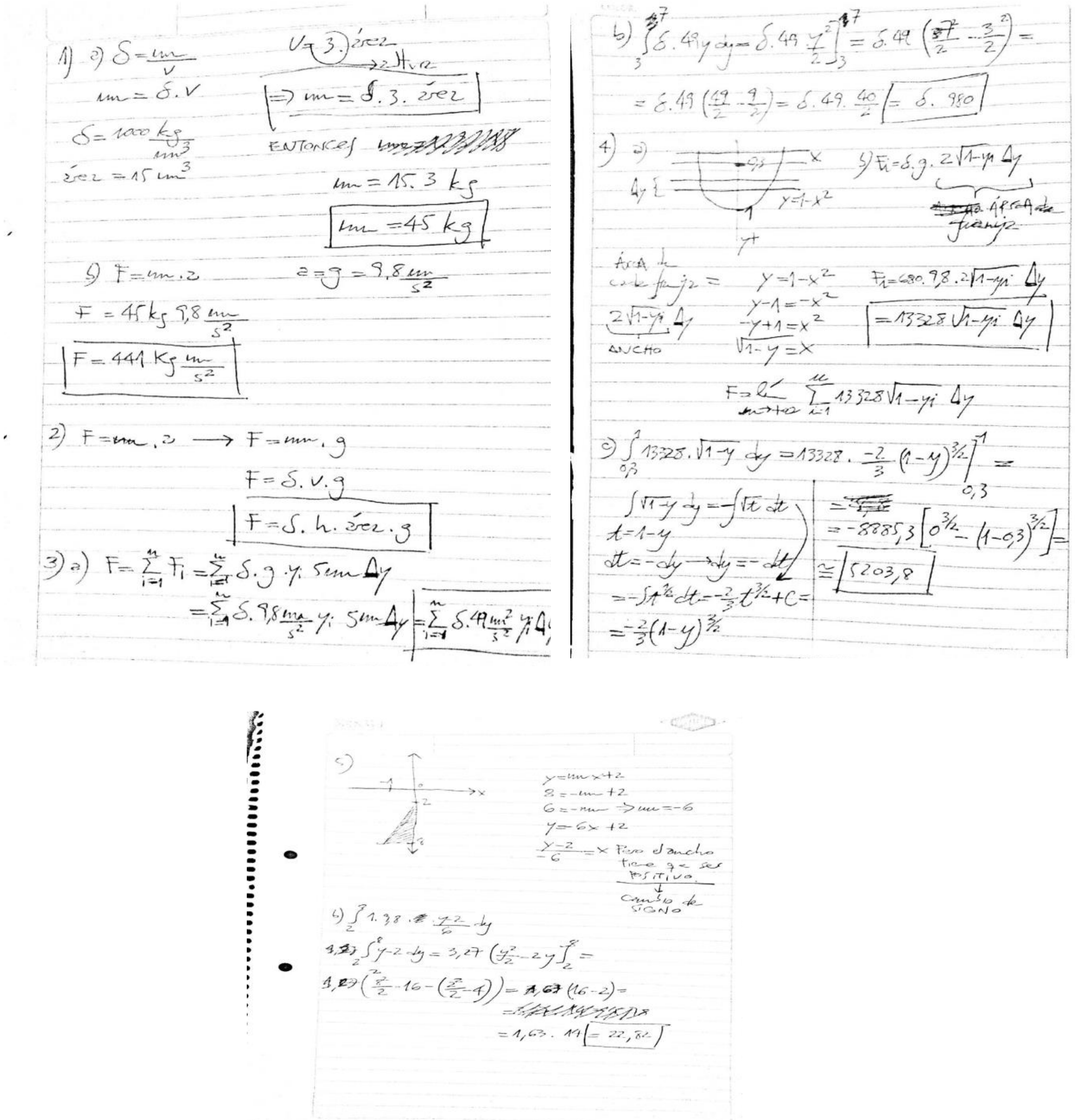


Fig. 8. Resolución del grupo 2

6 Reflexiones finales

Con el objetivo de favorecer la articulación horizontal y vertical entre las distintas asignaturas, se propusieron una serie de problemas mediante los cuales se puede trabajar con algunos conceptos de mecánica de fluidos a través del trabajo con sumas de Riemman y la definición de integral definida. Estos tipos de actividades permiten también abordar la modelización en matemática, fundamental para la formación de nuestros alumnos como ingenieros, ya que se puede observar la construcción del mismo concepto mediante distintos acercamientos (área, fuerza).

Sería importante completar con otras aplicaciones (trabajo, desplazamiento, etc.) y retomar al estudiar el concepto de integral de superficie en la asignatura de cálculo en varias variables.

Por otro lado, el trabajo de nuestros alumnos con aplicaciones de distintos conceptos del cálculo permite que se acerquen desde los primeros años de la carrera a problemas que se encontrarán posteriormente e incrementa su interés en la carrera.

Referencias

1. Dubinsky, E.; McDonald, M. A.: apos: A constructivist theory of learning in undergraduate mathematics education research. D. Holton (Ed.): *The Teaching and Learning of Mathematics at University Level: An icmiStudy,* Serie: New icmiStudy Series, vol. 7, pp. 273-280. (2001)
2. Biembengut, M. S.; Hein, N.: Modelación matemática y los desafíos para enseñar matemática. *Educación Matemática,* vol. 16, núm. 2, pp. 105-125. (2004)
3. Blomhøj, M.: Modelización matemática- Una teoría para la práctica. *Revista de Educación Matemática*, vol. 23, núm.2, pp. 20-35. (2008) http://www.famaf.unc.edu.ar/~revm/Volumen23/digital23-2/Modelizacion1.pdf. Accedido 22 de enero de 2017.
4. Douady, R.: La ingeniería didáctica y la evolución de su relación con el conocimiento. Gómez, P. (Ed): *Ingeniería didáctica en educación matemática*, Grupo Editorial Iberoamérica, pp. 61-96. (1995)
5. Blomhøj, M.: Mathematical modelling at upper secondary level. Niss, M.; Blum, W. y Huntley, I. (Eds): *Teaching mathematical modelling and applications*. Ellis Horwood. pp. 187-194. (1991)

Volver al Índice

Para Salir de la Rutina: Problemas sobre Continuidad y Derivabilidad donde Intervienen Parámetros

Poggio M. Inés, Aloisio M. Alejandra, Jiménez M. Agustina
Departamento de Ciencias Básicas, Universidad Nacional de Luján
Rutas Nac. 5 y 7, Luján (6700), Buenos Aires
minpoggio@gmail.com, {aaloisio, mjimenez}@unlu.edu.ar

Resumen. En los primeros cursos de Análisis Matemático los estudiantes suelen aferrarse a rutinas algebraicas que les dan seguridad para enfrentar situaciones problemáticas nuevas, a pesar de los errores que frecuentemente cometen. Normalmente utilizan el registro gráfico sólo cuando se pide, pero no lo hacen para analizar las representaciones visuales junto con el resto de la resolución y pocas veces se apoyan en gráficos para orientar sus razonamientos. Frente a esta problemática, presentamos un conjunto de actividades consistentes en problemas menos rutinarios sobre el tema continuidad y derivabilidad, en los que intervienen parámetros, y en los que el uso de diferentes registros de representación permite aplicar distintos procedimientos de resolución. Las actividades propuestas fueron implementadas en un curso de Análisis Matemático I de Ingeniería y se analizaron las resoluciones de los estudiantes en problemas seleccionados para evaluación.

Palabras Clave: Continuidad, Derivabilidad, Problemas no rutinarios, Parámetros.

1 Introducción

Las experiencias educativas previas de estudiantes universitarios que participan de sus primeros cursos de Análisis Matemático los han enfrentado a situaciones para las cuales han adquirido técnicas o algoritmos de resolución. Las ecuaciones algebraicas o trascendentes tienen sus mecanismos y procedimientos propios. En algunos casos se recurre a fórmulas fácilmente memorizables, o mediante sustituciones se transforma el problema nuevo en otro conocido, y si viene presentado con un texto, por lo general su enunciado responde a un cierto formato que se repite y se ubica en un contexto que de algún modo sugiere el camino y el algoritmo que conduce a la solución.

Ya en la Universidad el trabajo algebraico se intensifica y en ese trabajo el estudiante se siente bastante seguro, reconoce sus reglas, se atiene a ellas y sabe que si las respeta obtiene éxito.

El aprendizaje del Cálculo tropieza con otras dificultades. Requiere de un sólido dominio del manejo algebraico, pero eso no le basta. "*Conceptualmente el papel del pensamiento visual es tan fundamental en el aprendizaje del cálculo que es difícil imaginar un curso exitoso del cálculo que no enfatice los elementos visuales del tema… La manipulación algebraica ha sido enfatizada en demasía y… en el proceso el espíritu del cálculo se ha perdido"* (Zimmermann, 1990, p.136) citado en [1].

En pocas palabras, en un primer curso de Cálculo nos toca desarrollar en los estudiantes una nueva forma de pensamiento, y para ello hemos elegido compartir la experiencia de haber seleccionado problemas "menos" rutinarios relativos a temas relevantes del programa de la asignatura, con los cuales aspiramos a promover en ellos la habilidad de articular un procesamiento visual con los procesos algorítmicos [1].

El mismo autor define estos problemas "no rutinarios" como aquellos que al leer su enunciado no traen automáticamente a la mente un proceso algebraico a seguir sino que requieren ser re-interpretados y evocar distintas representaciones para que el estudiante no camine a ciegas en el sistema algebraico y pierda de vista el objetivo.

En este trabajo se presentan actividades sobre "Continuidad y derivabilidad en funciones de una variable" para trabajar en clase con lápiz y papel o formar parte de ejercicios de evaluación. La elección de este tema resulta adecuada por su carácter integrador de numerosos conceptos del cálculo diferencial, como se pondrá en evidencia en el desarrollo del trabajo.

Se optó por trabajar con problemas en los cuales los estudiantes deben determinar el valor de ciertos parámetros para que se cumplan condiciones impuestas de continuidad y derivabilidad.

Sin duda, el concepto de parámetro, ligado estrechamente al concepto de variable, está en la base de muchas de las dificultades que encuentran los estudiantes en los cursos de Álgebra y Análisis; una de las primeras dificultades a mencionar está en el uso que hacemos del vocabulario, a veces con ambigüedad y sin clara distinción ni definición precisa de palabras como variable, incógnita, parámetro, indeterminada, argumento, constante, y algunas otras [2]. Las usamos, los estudiantes se acostumbran a ello y procuran interpretar el misterio de esas letras que según el contexto, a veces parecen intercambiarse los roles. Pensando precisamente en estas cuestiones es que elegimos algunos problemas en los cuales se presentan funciones definidas por distinción de casos (o a trozos), con las que también tienen dificultades, y en cada intervalo parcial están definidas con la intervención de algún parámetro. Entonces al variar los parámetros se obtienen particulares funciones que pertenecen a una dada “familia” de funciones.

Aquí las dificultades van en aumento, porque el objetivo será encontrar, entre todas ellas, aquellas en que los trozos o arcos de sus gráficas “se tocan” (son continuas) mediante la oportuna aplicación de la definición y luego examinar si entre ellas hay algunas en que esos arcos o tramos de curva tengan un contacto suave, sin picos ni cúspides, compartiendo una única tangente. Entendemos que de este modo se ponen en juego muchos conceptos, se hacen sucesivas transformaciones algebraicas para encontrar esos parámetros pero si se acompaña con alguna figura preliminar de exploración o final de validación para terminar de convencerse, la comprensión lograda será más completa.

Las actividades propuestas fueron implementadas en un curso de Análisis Matemático I para estudiantes de Ingeniería y dos de ellas fueron aplicadas en exámenes finales para poder analizar el trabajo autónomo de los estudiantes y conocer el impacto de esta propuesta en sus aprendizajes.

A continuación describimos brevemente las características de nuestro alumnado, las modalidades de trabajo en el aula y enunciamos formalmente algunos de los propósitos que nos planteamos con esta actividad.

Buscamos apoyo en algunos autores que nos señalaron caminos y nos prestaron algunas de sus ideas y teorías, para luego presentar las actividades elegidas y comentar algunos criterios tenidos en cuenta para su selección o sus particularidades de resolución.

Luego analizamos las resoluciones de los estudiantes que trabajaron en actividades de este tipo en dos fechas de exámenes finales, para terminar compartiendo algunas reflexiones en nuestras Conclusiones y expectativas de trabajo para el futuro.

1.1 Descripción del contexto

El contexto de aplicación de las actividades es un curso de la asignatura Análisis Matemático I, que se dicta en el segundo cuatrimestre de los planes de estudio de carreras de Ingeniería, correlativa de un curso de Matemática básica (o Precálculo).

Esta asignatura tiene una matrícula de alrededor de 300 estudiantes distribuidos en cuatro o eventualmente cinco comisiones en todas las bandas horarias, con predominio de comisiones bastante numerosas en la banda de la mañana. Son atendidas por no más de dos docentes: un Adjunto o Jefe de Trabajos Prácticos (JTP) con tareas de responsabilidad en la comisión y la colaboración de algún auxiliar (JTP, Ayudante de Primera o Ayudante alumno).

La modalidad de trabajo adoptada es de carácter teórico-práctico y se dispone de una carga horaria semanal de 8 horas en 15 semanas de clase para desarrollar un programa clásico de un curso de Cálculo Diferencial e Integral con sus aplicaciones y Nociones de series, también con aplicaciones al Cálculo aproximado de Integrales.

1.2 Propósito

Con el fin de mejorar la tarea del aula nos proponemos diseñar y poner en práctica actividades no rutinarias en las que intervienen parámetros, relativas a diferentes tópicos del programa de la asignatura, de los cuales seleccionamos en esta oportunidad la continuidad y derivabilidad. La planificación de las actividades se realiza a partir de los objetivos de aprendizaje a alcanzar con ellas y consecuentemente se diseñan los mecanismos de evaluación que permitan medir el logro de esos objetivos.

2 Marco teórico

Antes de ocuparnos de la elección de las actividades para el aula, resulta conveniente hacer un recorrido por algunos autores cuyos trabajos marcan rumbos y orientarán nuestra toma de decisiones.

Si vamos a realizar una propuesta didáctica, esa tarea requiere buscar teorías y modelos, formular preguntas, proyectar qué tipo de respuestas deseamos encontrar, emitir afirmaciones sobre nuestras perspectivas educativas, proporcionar evidencias que les den fundamento, seleccionar métodos para producir esas evidencias y evaluar todo el proceso [3].

Entonces, comenzamos por apropiarnos de dos propósitos básicos que, según el mismo autor, posee todo trabajo en educación matemática:

1. Comprender la naturaleza del pensamiento matemático, la enseñanza y el aprendizaje.
2. Usar esa comprensión para mejorar la instrucción matemática.

En efecto, esto es lo que nos proponemos cuando organizamos una asignatura, una unidad, un tema o una clase, aun cuando lo hagamos de manera más o menos sistemática, y a veces casi artesanal.

Por lo tanto, con esta mirada enfocaremos la elección de la propuesta, el orden y gradualidad de las actividades y contenidos involucrados así como las habilidades que esas actividades puedan promover.

Y para poder acceder al conocimiento matemático, a diferencia de lo que se hace en cualquier otra rama del saber… "*La teoría de los registros de representación semiótica es esencialmente una herramienta elaborada para analizar la manera de pensar y trabajar en Matemática*" [4].

El acceso a un objeto matemático pasa necesariamente por la producción de representaciones semióticas. La mejor comprensión se logra mediante la conversión a otros registros de representación y ahí está el desafío que debe emprender la enseñanza: ofrecer las oportunidades de producir esas conversiones para acceder a las nociones matemáticas con la mayor profundidad [5].

Sin embargo, la representación gráfica que podría ser de gran ayuda a la interpretación, la resolución y la formulación de la respuesta, habitualmente está ausente en los trabajos de los estudiantes. Este comportamiento de rechazo a la visualización ya ha sido relevado en sus investigaciones didácticas en trabajos de Dreyfus & Eisenberg, 1990; Vinner, 1989 y 1990 citados por [2].

Las experiencias descritas por estos autores ponen en evidencia que los estudiantes evitan el dar significado a la escritura algebraica mediante la visualización, ya que permanecer en el trabajo de transformación en el registro algebraico les ofrece una actividad de mayor automatismo y menor exigencia de razonamiento. En el mismo texto citado [2] se reflexiona acerca de que la visualización de los conceptos es una conquista cognitiva que requiere adiestramiento y éste es un desafío que nos toca enfrentar.

De la extensa producción de Michèle Artigue elegimos un texto relativamente breve tomado de las Actas de un coloquio sobre la enseñanza de las funciones en la transición de la escuela secundaria a la Universidad.

Si bien parte de una realidad educativa distinta de la nuestra, nos ofrece una buena síntesis de investigaciones y teorías actuales sobre la evolución del concepto, que puede ayudarnos a comprender el desarrollo del pensamiento matemático en relación con el tema que nos ocupa, junto con una nutrida referencia bibliográfica para seguir profundizando [6].

Como en nuestros cursos también recibimos estudiantes con dificultades en el dominio de nociones básicas, y a los que debemos acompañar en su transición a un pensamiento matemático más avanzado, nos resultó de mucha utilidad el recorrido que hace la autora acerca de: los distintos niveles de conceptualización de la noción de función; los diferentes registros de representación de esta noción y las interacciones entre esos registros; los diferentes puntos de vista acerca de la noción de función (puntual, local, global).

Esas diferencias están ilustradas con ejemplos de actividades que muestran la evolución en el pensamiento matemático y algunos de ellos se asemejan y aportan justificación a la elección de algunos de los nuestros.

Entre los ejemplos de tareas que se realizan en el aula universitaria, que avanzan en la dimensión local de la noción de función, ausente de las prácticas de la enseñanza secundaria, Artigue menciona: el estudio de la continuidad y la derivabilidad en el entorno de un punto y problemas de determinación de parámetros para que ciertas funciones dependientes de ellos, tengan un contacto continuo o derivable en correspondencia a un cierto punto de su dominio, que precisamente coincide con el tema de nuestro interés.

Junto con el texto precedente, consideramos también una experiencia realizada con estudiantes de la Universidad Tecnológica de Tennessee, como consecuencia de una preocupación por el mejoramiento de la enseñanza del Cálculo debida a la incapacidad de los estudiantes para aplicarlo de manera efectiva en otras disciplinas. Es claro que no toda habilidad puede convertirse en rutina y el estudio busca mostrar que es posible que la habilidad para aplicar el Cálculo esté ligada a la habilidad para resolver problemas cognitivamente no triviales [7].

En dicha experiencia se propuso a un grupo de estudiantes de rendimiento medio, convocados de manera voluntaria, con la asignatura Cálculo aprobada, una serie de problemas no rutinarios, que podían resolverse con las nociones básicas adquiridas, pero que nunca habían sido presentados durante el curso, ni en evaluaciones.

Es interesante analizar las actividades propuestas, algunas muy semejantes a las nuestras, y los pobres resultados obtenidos por estudiantes, que a pesar de estar aprobados no fueron capaces de resolver los nuevos problemas. También resultan interesantes las conclusiones que promueven reflexiones acerca de nuestra propia realidad, y aportan ideas para enriquecer nuestro trabajo.

Las dificultades de transición entre niveles educativos descritas por Artigue, las dificultades de aplicación de las nociones básicas de un curso de Cálculo en la resolución de problemas cognitivamente no triviales descritas por Selden et al., son facetas de la misma problemática: el pasaje de un pensamiento matemático elemental a un pensamiento matemático avanzado, o dicho con otras palabras, la evolución entre la práctica de habilidades matemáticas elementales hacia habilidades matemáticas de orden superior [8].

Una de las características de este pasaje de la que nos vamos a ocupar con nuestro trabajo es promover en nuestros estudiantes la transición entre el concepto adquirido a través de una imagen mental incorporada a partir de imágenes visuales, y la correcta aplicación de la definición formal del concepto [9].

Tanto la noción de continuidad como la derivabilidad de funciones, tienen larga tradición de presentación aun en libros de texto, mediante sus respectivas imágenes mentales desde el punto de vista global: "Gráficas que se trazan sin levantar el lápiz del papel", "curvas suaves con tangente en todo punto". Pero el conflicto cognitivo se presenta en la dimensión local, cuando se define una función continua o derivable en un intervalo acotado, cerrado o no, o en la unión de dos intervalos abiertos, como $1/x$, o dada por distinción de casos y hay que estudiar qué sucede en el extremo de separación.

Y si lo que se presenta es una "familia" de funciones dependiente de ciertos parámetros, a todo lo dicho se agrega la oportunidad de interpretar el significado de esos parámetros a la luz de las definiciones de continuidad y derivabilidad de una función en un punto.

3 Propuesta didáctica

La propuesta consiste en una serie de actividades de aprendizaje y evaluación sobre el tema continuidad y derivabilidad, que a su vez incluye y sintetiza una importante cantidad de conceptos del Cálculo Diferencial. Una enumeración, sin pretensiones de exhaustividad, de los conceptos intervinientes en el trabajo que se propondrá a los estudiantes es la siguiente:

- Funciones. Funciones definidas por distinción de casos o a trozos
- Límite de una función de variable real en un punto
- Límite derecho e izquierdo
- Continuidad de una función (concepto local y global)
- Clasificación de los puntos singulares
- Algunas propiedades de las funciones continuas
- Derivada de una función en un punto interior de un intervalo
- Derivada derecha e izquierda
- Concepto de derivabilidad de una función en un punto de su dominio
- Clasificación de los puntos de no derivabilidad
- Teoremas de las funciones derivables.
- Consecuencias del Teorema de Lagrange
- Su aplicación al estudio de los puntos de no derivabilidad

Nos proponemos los siguientes *Objetivos*:

Al finalizar la realización de las actividades pretendemos que los estudiantes sean capaces de:

- Aplicar la definición de función continua y derivable en un punto a la resolución de problemas donde intervienen parámetros.
- Reconocer la continuidad como condición necesaria para la derivabilidad.
- Combinar el uso de diferentes registros de representación para interpretar, resolver y validar.

A continuación se presentan las actividades diseñadas junto con el análisis didáctico de las mismas. Se distinguen las actividades que se utilizaron para el trabajo en el aula, de las que se destinaron a revisión y evaluación.

Las primeras fueron incluidas en los trabajos prácticos obligatorios de la asignatura. Esos trabajos son resueltos por los estudiantes y corregidos en clase en una instancia de reflexión y debate donde se comparan diferentes procedimientos de resolución.

Las actividades de revisión se proponen a los estudiantes previamente a la evaluación y se destina una clase de consultas para que quienes necesiten formulen sus dudas respecto de la resolución.

Las actividades presentadas como evaluación fueron incluidas en diferentes exámenes finales de la asignatura.

Actividades para trabajar en el aula

1. Dada la función $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida mediante:

$$f(x) = \begin{cases} 2, & x \leq -1 \\ ax + b, & -1 < x < 3 \\ -2, & x \geq 3 \end{cases}$$

, determinar los valores de las constantes a y b para los cuales la función dada resulta continua en todo el eje real.

Para resolver esta actividad, hay que determinar los parámetros a y b para que la función sea continua en $x = -1$ y en $x = 3$, ya que la función resulta continua en los demás puntos.

- Si se aplica la definición de continuidad en $x = -1$ y en $x = 3$, se obtiene un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas. En este caso, basta resolver el sistema para obtener los valores de a y b.
- Si se recurre al registro gráfico, bastará determinar la ecuación de una recta que pasa por los puntos $(-1, 2)$ y $(3, -2)$ cuya pendiente es a y su ordenada al origen es b.
- Observando el gráfico, se podría obtener la pendiente de la recta que contiene el segmento y luego hallar la ordenada al origen.

La respuesta a este problema es $a = -1$ y $b = 1$

Este problema resulta interesante para discutir distintos modos de resolución. El recurso gráfico permite interpretar el problema y reflexionar sobre las diferentes alternativas para obtener el valor de los parámetros.

2. Dada la función $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida mediante:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2ax, & si\ x \neq 1 \\ a^2 + 1, & si\ x = 1 \end{cases}$$

, con $a \in \mathbb{R}$.

Determinar, si es posible, los valores de a para que f resulte continua en todo punto.

Escribir y graficar la función que se obtiene para cada uno de los valores hallados.

Para resolver este problema basta aplicar la definición de continuidad en $x = 1$ (ya que en los demás puntos la función resulta continua). Se obtiene una ecuación de segundo grado cuyas soluciones son $a = 0\ y\ a = -2$.

Para $a = 0$, $f(x) = x^2$. Para $a = -2, f(x) = x^2 + 4x$

La construcción de cada gráfico permitirá validar la respuesta.

Sería interesante que los estudiantes reflexionen sobre qué pasaría si a toma valores distintos de los hallados. Se podría pedir que elijan uno y con él, definan, grafiquen la función y determinen el tipo de discontinuidad que se presenta en $x = 1$.

3. Dada la función $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida mediante:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + b, \text{ si } x < 1 \\ ax + 1, \text{ si } x \geq 1 \end{cases}$$

Indicar para qué valores de a y b es derivable y con los valores obtenidos graficar.

Para resolver esta actividad hay que tener en cuenta que para que una función sea derivable en un punto debe ser continua.

Si se aplica la definición de continuidad en $x = 1$, se obtiene una ecuación con dos incógnitas. Al resolverla, se concluye que para que f sea continua en $x = 1$, basta que los parámetros a y b tomen el mismo valor. Es decir, hay infinitas funciones que cumplen la condición de continuidad. Sin embargo, una sola de ellas es derivable. Al resolver la ecuación que se obtiene al igualar las derivadas por derecha y por izquierda en $x = 1$, se determina que $a = 2$. Por lo que, $a = b = 2$.

Para que quede claro que basta que $a = b$ para que f sea continua en $x = 1$, se podría pedir que elijan un valor cualquiera de a y otro valor de $b \neq a$, definan y grafiquen f. En el gráfico podrán observar la discontinuidad de salto en $x = 1$. Mientras que si eligen un valor de a (distinto de 2) y el mismo valor para b, la función que así se obtiene, es continua en correspondencia a $x = 1$ pero su gráfica presenta un punto anguloso.

Sería deseable también que si algún estudiante decide explorar inicialmente la igualdad de las derivadas derecha e izquierda, sea capaz de advertir que no le basta para garantizar la derivabilidad por lo que deberá imponer que además se cumpla la continuidad.

4. Dada la función $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida mediante

$$f(x) = \begin{cases} a\,x^2 + b, \text{ si } x < 0 \\ cos\,x, \text{ si } x \geq 0 \end{cases}$$

Indicar para qué valores de a y b es derivable.

Al igual que en la actividad anterior, para resolver este problema hay que tener en cuenta que para que una función sea derivable en un punto debe ser continua.

Si se aplica la definición de continuidad en $x = 0$, se obtiene que $b = 1$, y a real cualquiera. Para estos mismos valores de a y b, f resulta derivable en dicho punto, pues $(ax^2 + 1)' = (cosx)' = 0$ en $x = 0$, cualquiera sea el valor de a.

Si se recurre al registro gráfico, los parámetros a y b podrían determinarse teniendo en cuenta que para que f sea continua en $x = 0$, debe ser $b = cos\,0 = 1$. Cuando $b = 1$, a puede tomar cualquier valor sin que la función f deje de ser derivable en correspondencia a $x = 0$, ya que las funciones que definen cada tramo tienen tangente horizontal en $(0, 1)$ independientemente del valor que tome a.

Es un problema interesante para hacer ver que las condiciones halladas que garantizan la continuidad subsisten al estudiar la derivabilidad, aun cuando aparezcan o no restricciones nuevas.

Actividades de revisión

- Dada la función $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida mediante:

$$f(x) = \begin{cases} -3x^2 + a\,x, \text{si } x \leq 1 \\ b/x^2, \qquad \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Determinar las constantes reales a y b, de modo que la función resulte continua y derivable en todo el eje real.

En este problema, se presenta otra situación nueva. Hay infinitas funciones continuas en el punto de abscisa $x = 1$ que satisfacen una condición de vínculo entre los parámetros dada por $a - b = 3$.

Cuando se impone la igualdad de las derivadas derecha e izquierda, también aparecen infinitas posibilidades que cumplen la condición $a + 2b = 6$. Pero de todas ellas, solamente será derivable aquella que también satisfaga la continuidad y para encontrarla habrá que resolver un sistema lineal de dos ecuaciones con dos incógnitas que, a simple vista, se puede determinar que tiene solución única. La respuesta es $a = 4$ y $b = 1$.

Este problema de revisión, apto para la aplicación de nociones teóricas, da oportunidad de ver cómo las sucesivas transformaciones en el registro algebraico conducen a la solución del problema.

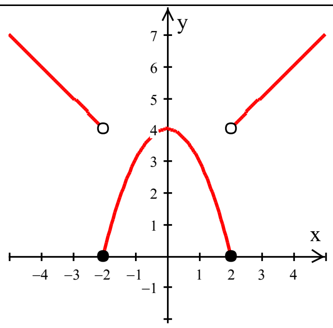
Y si se grafica… todo podrá verse mejor.

- Dada la familia de funciones $f\colon [-5, 5] \to \mathbb{R}$ definidas mediante:

$$f(x) = \begin{cases} ax + b, & si -5 \leq x < -2 \\ -x^2 + 4, & si -2 \leq x \leq 2 \\ cx + d, & si\ 2 < x \leq 5 \end{cases}$$

Se pide:

a. Determinar los valores de los parámetros que corresponden a la función dada por el siguiente gráfico



b. ¿Qué valores pueden tomar los parámetros para que la función resulte continua en su dominio de definición? ¿Los valores obtenidos son únicos?
c. Definir y graficar una función de la familia de funciones dada, que sea continua en todo el eje real.
d. ¿Qué valores pueden tomar los parámetros para que la función resulte derivable en su dominio de definición? ¿Los valores obtenidos son únicos?
e. Definir y graficar una función de la familia de funciones dada, que sea derivable en todo el eje real.

Con esta actividad, nos hemos propuesto invertir el circuito en el cambio de registros, en la convicción de que la comprensión del conocimiento matemático se logra mejor si se desarrolla la habilidad de reconocer el mismo objeto por medio de al menos dos representaciones diferentes.

Asimismo, consideramos la oportunidad de estimular la realización de transformaciones dentro de un mismo registro, ya que cada uno ofrece posibilidades de transformación que le son propias y que no comparte con otros registros [4].

Resolver esta actividad invita a reflexionar acerca de qué parámetros cambiar para que se verifiquen cada una de las condiciones pedidas.

El trabajo en el registro algebraico formal adquiere mayor creatividad cuando hay que producir transformaciones que aseguren la continuidad y más aún cuando se pide la derivabilidad, o cuando se pide estudiar la unicidad de las respuestas. En relación a esto último, la existencia de infinitas rectas que pasan por un punto permite justificar las infinitas soluciones que cumplen con la continuidad. En cambio al exigir la derivabilidad, solo una de las infinitas rectas de cada tramo comparte además la pendiente en ese punto con el arco de parábola.

Actividades de evaluación

1. Dada la función $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida mediante:

$$f(x) = \begin{cases} 3 - kx^2, & x < 1 \\ \dfrac{2}{kx}, & x \geq 1 \end{cases}$$

¿Existe algún valor de k para que la función resulte continua y derivable en todo $\mathbb{R}$? Justificar aplicando las definiciones. Con el valor encontrado, esbozar la figura.

En este caso f resulta continua en todo el eje real para $k = 1$ y para $k = 2$. Sin embargo solo una de ellas es además derivable (cuando $k = 1$).

Si se comienza por plantear la igualdad entre las derivadas por izquierda y por derecha en $x = 1$, se obtiene una ecuación con dos soluciones $k = -1$, $k = 1$ de las que, teniendo en cuenta la continuidad, solo sirve $k = 1$.

2. Completar la definición de la función $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de modo que resulte derivable en todo el eje real. Justificar la determinación de los parámetros

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{2} - 2x, & \text{si } x \leq 3 \\ a\,x + b, & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

Para que la función dada sea continua en x = 3, se debe verificar la igualdad $3a + b = -3/2$. Para que f sea además derivable en ese punto, $a = 1$ y $b = -3/2$.

Otra manera de pensar este problema es observar que para los x mayores que 3, f coincide con una función de primer grado y teniendo en cuenta que f debe ser continua y derivable en x = 3, la función de primer grado debe ser tal (no hay otra) que su gráfica coincida con la recta tangente correspondiente al arco de parábola en el punto de abscisa x = 3 (para $x \leq 3$). Por lo tanto, se podría resolver hallando la pendiente a y la ordenada al origen b en la ecuación de la recta tangente obteniendo así los valores buscados.

4 Análisis de las resoluciones de los estudiantes en los problemas de evaluación

El problema de evaluación 1 se aplicó como uno de los problemas asignados en un examen final a una muestra de 34 estudiantes y de la observación de sus trabajos se pueden hacer las siguientes consideraciones:

- Cuando estudian la continuidad en el extremo de separación de los intervalos, alrededor de un 25 % de los estudiantes impone la igualdad de los límites laterales omitiendo igualar al valor de la función en el punto. Esto parece revelar una incompleta comprensión del concepto local de continuidad y su definición.
- Con análoga frecuencia se presentan errores en los procedimientos algebraicos, en particular en la resolución de las ecuaciones que resultan de igualar los límites laterales o las derivadas derecha e izquierda, detectándose algunos pocos errores de mayor gravedad como pérdida de soluciones o igualar un cuadrado a un número negativo y continuar resolviendo, y en menor medida algún error en el planteo de las ecuaciones.
- Con semejante frecuencia se cuentan errores en la derivación, a pesar de la sencillez de la definición de la función considerada, en particular en el intervalo donde debe separarse la constante o aplicarse la regla de la cadena.
- Aproximadamente un 10% lo resolvió correctamente, igual cantidad omitió el estudio de la derivabilidad e igual número omitió completamente la resolución del problema.
- Se vieron además casos aislados de hacer mal uso del lenguaje simbólico, de llegar hasta el final sin emitir respuesta a lo que se pregunta, de confundir la variable con el parámetro, o de concluir derivabilidad habiendo probado solamente la continuidad.
- Un comentario aparte merece el análisis del uso (escaso) del registro gráfico: A pesar de que en las puestas en común en clase es habitual usar las representaciones gráficas para explorar comportamientos o para interpretar o intentar predecir resultados, en esta oportunidad se pidió expresamente graficar solamente el caso para el valor del parámetro que hace que la función obtenida sea continua y derivable. Se observaron muy pocos gráficos correctos y muchos de ellos incoherentes con los resultados obtenidos con el procedimiento algebraico, alguno incompleto (en correspondencia a un dominio parcial).

Se presentó un caso muy curioso en el que el estudiante representó la función derivada, obviamente con un punto anguloso, y no le causó ninguna sorpresa la contradicción con su propia respuesta al problema. Luego de haber probado la continuidad de f para k = 1 se propone graficar la función y analizar su derivabilidad. Si bien el análisis algebraico es correcto, su respuesta no se condice con el gráfico, como se ilustra en la Fig. 1.

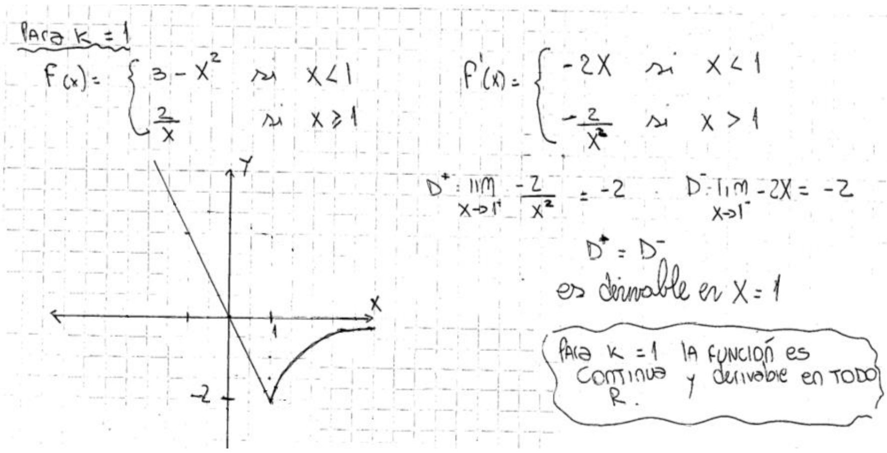


Fig. 1. Fragmento de la resolución de un estudiante al problema de evaluación número 1.

El segundo problema de evaluación se aplica como uno de los problemas asignados en otra fecha de examen final a una muestra de 19 estudiantes y de la observación de sus trabajos se pueden hacer las siguientes consideraciones:

En este problema cabe expresar las expectativas que se tenían al presentarlo que en realidad no se cumplieron: pensamos que algunos alumnos podrían advertir que se trataba de prolongar el arco de parábola con su tangente en uno de sus extremos, o sea que lo tomarían como un problema encubierto de recta tangente a una curva en un punto. Sin embargo esto no sucedió.

Los errores cometidos casi reproducen en calidad y cantidad los mismos del problema asignado en la primera fecha: igual cantidad comete errores en la definición de continuidad omitiendo el valor de la función en el punto; hay errores en la derivación pero muchos menos porque se trataba de derivar un polinomio de segundo grado; uno solo todo bien y dos no lo resuelven; se repiten (poco) situaciones como usar mal el lenguaje simbólico, o trabajar sin dar respuesta, o estudiar la derivabilidad sin considerar la continuidad o de la continuidad deducir la derivabilidad. Aunque ciertos errores se presenten escasamente nos interesa registrarlos; las muestras no son muy grandes y toda esta información nos está diciendo que tenemos mucho para seguir trabajando, y que hasta el concepto de función (en particular las definidas por distinción de casos) todavía les genera confusiones y malos entendidos.

5 Conclusiones y trabajos futuros

Frente a la necesidad de mejorar la tarea del aula, intentamos presentar algunos problemas que, aunque sencillos, estén dotados de cierta originalidad, que salgan de la rutina, que involucren los mismos conceptos pero de manera diferente y promuevan un pensamiento un poco más elaborado y creativo, menos rutinario.

La habilidad manipulativa que los estudiantes ya han adquirido en el uso de parámetros en cursos de Álgebra puede ser aprovechada en nuevos contextos, aplicándola para resolver problemas nuevos. Sin embargo los estudiantes tropiezan con la dificultad de dar el salto cognitivo de pasar de los cálculos de rutina a interpretar el significado que adoptan esos parámetros según el rol que cumplen en cada problema, en relación con los conceptos involucrados.

A veces, parámetros y variables intercambian sus roles a los efectos del cálculo, ya que por ejemplo, en los problemas propuestos se asignan los valores a las coordenadas de un cierto punto y se busca determinar los valores de los parámetros de modo que se cumplan las condiciones impuestas por una definición (continuidad o derivabilidad, según corresponda). Entonces esos parámetros asumen el rol de “incógnitas” en una ecuación o sistema de ecuaciones.

Pero una vez hallados, interesa hacer ver que permiten identificar una particular función que cumple condiciones prefijadas dentro de una familia de funciones. Este proceso suele ocasionar dificultades de comprensión que pueden ser la causa de que los estudiantes opten por el trabajo rutinario y eviten un trabajo más reflexivo.

Vemos que son los propios estudiantes los que se ocupan de buscar en los problemas que ponemos, la rutina y el estereotipo, y tratar de hacer lo mismo que han hecho en otros problemas, a pesar de que existan caminos más sencillos y conceptuales para abordarlos, que promueven la comprensión de los conceptos involucrados y la oportuna aplicación de las definiciones u otras propiedades (como las consecuencias del Teorema de Lagrange para probar la derivabilidad en el extremo de separación de los intervalos).

Luego de resolver de manera mecánica algunos problemas de esta naturaleza, procuraron generar rutinas de procedimiento, evitaron tanto la interpretación de los resultados obtenidos en situaciones muy obvias y sencillas, como recurrir a la ayuda de las visualizaciones mediante recursos gráficos en distintos momentos de la resolución que hubieran facilitado enormemente la comprensión de lo que estaban haciendo. Incluso en algunas oportunidades, hasta omitieron dar una respuesta precisa a las preguntas del problema.

Estimamos que incluir el uso de una herramienta de software para resolver actividades como las que proponemos, podría facilitar la exploración en el registro gráfico, que resulta dificultosa de realizar con lápiz y papel. Esto a su vez podría favorecer la interpretación de los problemas, la formulación de conjeturas y la validación de las conclusiones. Esta modalidad de trabajo permitirá desarrollar habilidades nuevas que será necesario estudiar y entendemos que podrían complementar las que el estudiante haya logrado con la forma de trabajo tradicional. Consideramos que deberá hacerse gradualmente, o eventualmente ponerse en práctica de manera experimental en algún grupo pequeño, porque supone cambios estructurales, en la selección de los contenidos, en la forma de evaluar, en la infraestructura y el espacio áulico y fundamentalmente en los respectivos roles que cumplen docentes y estudiantes.

El próximo desafío es llevar a la práctica la continuidad de esta propuesta apelando a los nuevos recursos que puedan mejorar sus resultados.

Referencias

1. Hitt, F.: Dificultades en el aprendizaje del cálculo. *XI Meeting of Middle-Higher Level Mathematics Teachers, Michoacan University San Nicolás de Hidalgo* (2003)
2. Chiarugi, I.; Fracassina, G.; Furinghetti, F.; Paola, D.: Parametri, variabili e altro: un ripensamento su come questi concetti sono presentati in classe. *L'insegnamento della Matematica e delle Scienze integrate*, Vol. 18B, No. 1, pp. 34-50 (1995)
3. Schoenfeld, A.: Propósitos y Métodos de Investigación en Educación Matemática. (Purposes and Methods of Research in Mathematics Education). *Notices of the AMS*, Vol. 47, No. 6, (Trad. Juan D. Godino) (2000)
4. Duval, R.: Comment analyser le problème crucial de la compréhension des mathématiques. *Revista Unión.* No. 37, pp 9-29 (2014)
5. Duval, R.: Un tema crucial en la educación matemática: La habilidad para cambiar el registro de representación. *La gaceta de la rsme*, Vol. 9, No. 1, pp. 143–168 (2006)
6. Artigue, M.: L'enseignement des fonctions à la transition lycée –université. *Actes du 15ième colloque de la CORFEM (Commission Inter IREM de Recherche sur la Formation des Enseignants de Mathématiques),* pp. 22- 40 (2008)
7. Selden, J.; Mason, A.; Selden, A.: Peuvent les étudiants moyens en calcul résoudre des problèmes non routiniers? *Journal of Mathematical Behavior.* Vol. 8, No. 1, pp. 45-50 (1989)
8. Delgado Rubí, J.: Los procedimientos generales matemáticos. Fernández H. et al. (Ed): *Cuestiones de Didáctica de la Matemática*. Serie Educación. Homo Sapiens Ediciones (1997)
9. Tall, D.; Vinner, S.: Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*, Vol. 12, No. 2, pp. 151-169 (1981)

Volver al Índice

Propuesta de Diseño para una Clase sobre el Tema Curvas de Nivel

Patricia Cuadros, Sebastián A. Godoy
Departamento de Matemática, Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de San Juan
Av. Lib. San Martín (Oeste) 1109
pcuadros@unsj.edu.ar, sgodoy@unsj.edu.ar

Resumen. Las TICs, están presentes y deben estarlo en todos los aspectos del proceso enseñanza aprendizaje. Actualmente la simple incorporación de TIC no es suficiente, el reto de los profesores es organizar clases y material didáctico para incentivar y mantener el interés de los alumnos. Este trabajo parte de la necesidad de motivar a los alumnos en el estudio de temas de cálculo, ya que sus preferencias se alejan de las clases magistrales pero se acercan al uso de la tecnología. Se presenta el diseño de una propuesta didáctica para la enseñanza del tema curricular curvas de nivel, detallando estrategias, recursos utilizados e implementación. El objetivo principal es lograr que los estudiantes superen con mayor facilidad los obstáculos de aprendizaje detectados y además mostrar como el uso de la tecnología ayuda en el proceso. Los profesores dentro de este marco cumplen el rol de guiar y facilitar el proceso.

Palabras Clave: TIC´s, Curvas de nivel, TPAC

1 Introducción

Las TIC en el ámbito de la educación brindan importantes oportunidades de ampliar el abanico de posibilidades del proceso enseñanza aprendizaje y de los recursos utilizados en él. También plantean retos, que deben asumir todos los integrantes de la comunidad educativa, algunos de ellos son: la correcta apropiación e integración de los recursos en la rutina de la clase, la adaptación de los conceptos a este nuevo contexto y el uso conveniente de los recursos disponibles [1,2].

La clase magistral donde el docente es un mero trasmisor de información ya no es una práctica relevante. Es necesario que el docente tome el rol de ayudar a desarrollar y potenciar las distintas capacidades o habilidades de los alumnos para su inserción en el mundo profesional y en la sociedad, fomentando estructuras de pensamiento que fortalezcan la reflexión, el análisis, la aplicación y la creación. En este contexto el docente debe actuar como guía o facilitador del proceso de enseñanza aprendizaje.

El conocimiento tecnológico debe integrarse con una metodología pedagógica adecuada, para ser un recurso útil en este nuevo rol docente. Elegimos basarnos en el modelo TPACK, modelo Tecnológico, Pedagógico y Curricular [3], para desarrollar la propuesta didáctica, ya que el uso adecuado de la tecnología en la enseñanza requiere de la interrelación entre distintos tipos de conocimientos. El modelo TPACK considera las tres fuentes de conocimiento, la disciplinar, la pedagógica y la tecnológica, y enfatiza las nuevas formas de conocimiento que se generan en las intersecciones de las fuentes principales, siendo el que nos brinda el mejor marco a nuestra propuesta. La Fig.1 detalla un esquema gráfico del modelo TPACK utilizado.

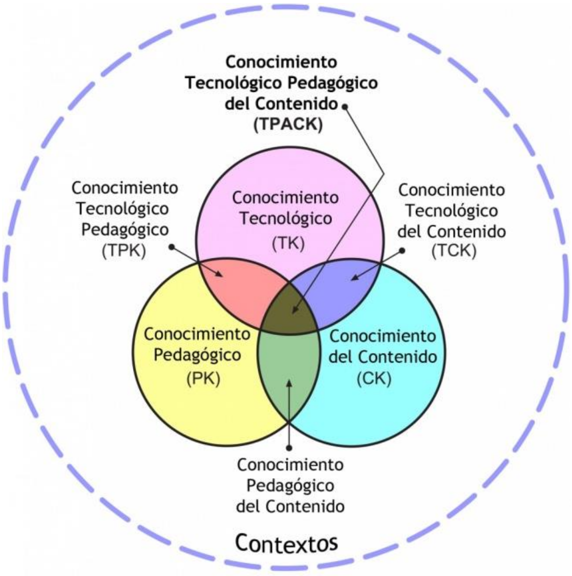


Fig. 1. Diagrama del Modelo TPACK.

En la asignatura Cálculo II para las especialidades de Ingeniería, es importante desarrollar la capacidad de visualizar las funciones y campos vectoriales en el espacio tridimensional (3D), para poder realizar la posterior aplicación de diversos conceptos fisico-matemáticos [4].

El tema elegido para desarrollar con recursos tecnológicos es curvas de nivel de funciones de dos variables, para el cual la visualización de graficas de funciones es muy importante.

El primer paso en el diseño de la propuesta didáctica es detectar los obstáculos en el aprendizaje del tema para luego poder plantear los objetivos a lograr y la estrategia de abordaje a utilizar [5].

2 Obstáculos del aprendizaje

El análisis de los obstáculos de aprendizaje contribuye en la preparación de las estrategias de enseñanza para focalizar mejor en donde se encuentran las dificultades que los alumnos presentan en el desarrollo del tema e insistir en la solución de ellas.

Consideramos como obstáculos de aprendizaje a los factores que interfieren en el desarrollo del proceso enseñanza aprendizaje, basándonos en la definición dada por Brousseau (1983), *"aquel conocimiento que ha sido en general satisfactorio durante un tiempo para la resolución de ciertos problemas, y que por esta razón se fija en la mente de los estudiantes, pero que posteriormente este conocimiento resulta inadecuado y difícil de adaptarse cuando el alumno se enfrenta con nuevos problemas", además "un obstáculo se manifiesta por errores, pero errores que no son debidos al azar, no son fugaces, intermitentes, sino reproducibles, persistentes. Un conocimiento, como un obstáculo, es el fruto de una interacción del alumno con su medio y, más precisamente, con una situación que vuelve este conocimiento interesante."*[6].

En el tema Curvas de nivel detectamos los siguientes obstáculos:

Obstáculos ontogénicos:

- Dificultad en la visualización de figuras en 3D.
- Falta de motivación (resistencia al aprendizaje, no interesa que visualice las figuras).
- Sólo conocimiento pragmático (hacer esto es un requisito para aprobar).

Obstáculos epistemológicos

- Escaso conocimiento y destrezas de geometría para identificar cuádricas.
- Dificultades para la representación gráfica de las figuras cónicas y cuádricas.
- Interpretar los conceptos de intersección y proyección de figuras en el sistema coordenado.

Obstáculos didácticos:
- Deficiente diseño del tema, solo basado en la experiencia y la rutina de las clases magistrales.
- Material didáctico inadecuado (guías de ejercitación con una selección inadecuada de ejercicios que no permiten alcanzar los objetivos planteados para el tema).
- Dificultad para la graficación de las funciones de varias variables en un pizarrón y para el posterior desarrollo del tema.
- Insuficiente conocimiento y/o destreza en el uso de TIC por parte del docente.
- Imposibilidad de una evaluación correcta del tema por el tiempo que insume la resolución algebraica y la graficación del resultado.

Como se puede ver el problema de visualización de figuras en el espacio tridimensional atraviesa los tres tipos de obstáculos analizados. Por lo que desarrollar una metodología de enseñanza con un recurso didáctico que ayude a salvar este obstáculo es fundamental.

3 Objetivos

Los objetivos planteados para este tema tienden a que el alumno enfrente los obstáculos y desarrolle las habilidades del pensamiento necesarias para superarlos.

En la práctica de aprendizaje se detallan los objetivos a alcanzar para que el alumno este en conocimiento de ellos y sea consciente de lo que debe lograr para poder controlar su desarrollo, sabiendo el sentido y la utilidad del tema en la asignatura.

Los objetivos a lograr por los alumnos son:
- Entender el concepto de curva de nivel.
- Identificar los sistemas coordenados en el plano y el espacio.
- Distinguir diversas gráficas de funciones de varias variables.
- Obtener mapas de contorno de funciones de dos variables.
- Analizar los mapas de contorno.
- Informar valores de la función en el mapa de contorno.
- Conocer aplicaciones de los mapas de contorno en su especialidad.
- Trabajar en grupo.

El objetivo básico en el desarrollo de ésta propuesta de enseñanza para el tema curvas de nivel, es que el aspecto de diseño visual sea lo más atractivo posible para que motive al estudiante a trabajar con ella. Además es importante que la propuesta no sólo cumpla con el conocimiento curricular sino que sea entendible, usable y accesible a todos los alumnos.

4 Práctica de aprendizaje

Para la elaboración y desarrollo de la práctica de aprendizaje del tema se elige como recurso el *eXeLearning*, con el objetivo de despertar y sostener el interés de los alumnos en el tema. Esta herramienta permite crear actividades estructuradas y guiadas por el docente, que promueven el desarrollo de las habilidades planteadas en los alumnos y el trabajo colaborativo y la investigación.

De acuerdo a la definición dada en Wikipedia, *"eXeLearning es un programa libre y abierto bajo licencia GPL-2 para ayudar a los docentes en la creación y publicación de contenidos docentes, y que permite a profesores y académicos la publicación de contenidos didácticos en soportes informáticos (CD, memorias USB, en la web), sin necesidad de ser ni convertirse en expertos en HTML, XML o HTML5. Los recursos creados en eXelearning son accesibles en formato XHTML o HTML5, pudiendo generarse sitios web completos (páginas web navegables), insertar contenidos interactivos (preguntas y actividades de diferentes tipos) en cada página, exportar los contenidos creados en otros formatos como ePub3 (un estándar abierto para libros electrónicos),IMS o SCORM (estándares educativos que permiten incorporar los contenidos en herramientas como Moodle), XLIFF (un estándar para la traducción) y catalogar los contenidos con diferentes modelos de metadatos: Dublin Core, LOM, LOM-ES." "En el año 2013 eXeLearning se convirtió en una aplicación web (desarrollada en Python + Ext JS) que puede utilizarse con el navegador preferido por el usuario"*.

EXelerning permite la creación de árboles de contenidos, siendo lo primero que desarrollamos para el tema a abordar. La elección de las pestañas y su orden está en función del modelo pedagógico adoptado y los que se consideran como aspectos fundamentales para lograr el aprendizaje. Se encuentran organizadas para promover la reflexión y aprendizaje del tema. Las pestañas diseñadas se presentan en la Fig. 2, las cuales son:

- Introducción.
- Objetivos.
- Definición.
- Aplicaciones.
- Ejemplo.
- Actividades
- Evaluación
- Bibliografía

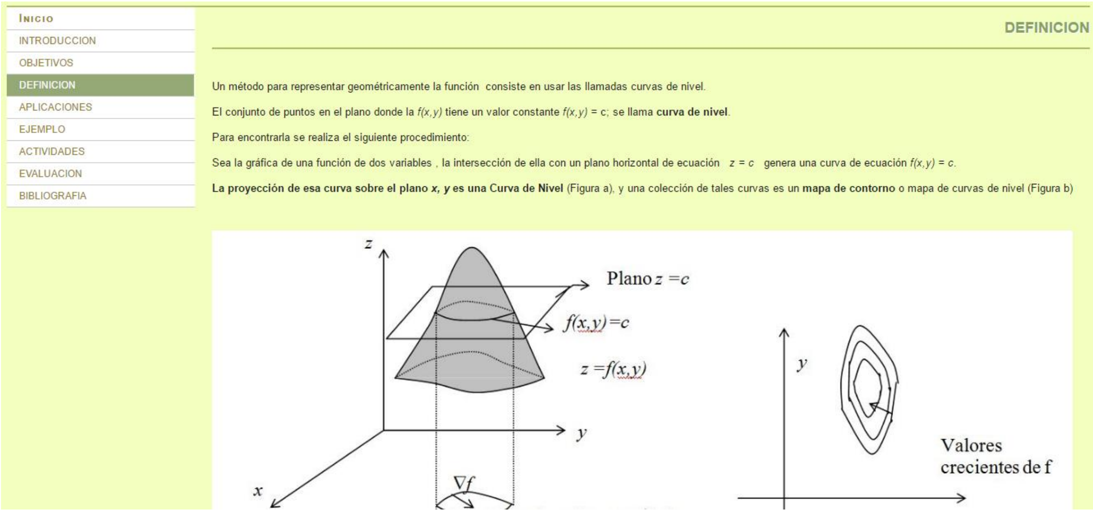


Fig. 2. Captura de pantalla del árbol de contenido creado.

Dentro del apartado Objetivos se encuentra una pestaña: ¿Como los alcanza?, que es la guía didáctica para el alumno. En ella están el orden y las indicaciones de las tareas que debe realizar el alumno para alcanzar los objetivos propuestos.

Las actividades están diseñadas para promover la autogestión del aprendizaje y el aprendizaje colaborativo, basadas en el análisis crítico y el intercambio de ideas. La actividad I, consta de elaborar respuestas a preguntas conceptuales para afirmar el concepto teórico del tema, la actividad II y la III son ejercicios para obtener las ecuaciones de curvas de nivel y las actividades IV y V son orientadas al análisis gráfico de mapas de contorno.

Las actividades planteadas están de acuerdo con la clasificación de la taxonomía del área Matemática de Judi Harris, basada en el modelo TPACK:

- Considerar:

1. Leer textos: se indica que lean el documento de la cátedra sobre el tema que se encuentra en el aula virtual en formato .pdf y los apartados del exelearning.
2. Presenciar una demostración: en los apartados introducción, definición y ejemplo se encuentra desarrollado el tema. A los estudiantes se les solicita que vean un video elaborado por docentes de la cátedra sobre el tema, que se encuentra en el apartado definición.
3. Discutir: luego de que realice las actividades anteriores en forma individual se propone en la clase la discusión de las conclusiones obtenidas en las respuestas de las preguntas de la actividad I, mediada por el docente.
4. De la discusión surgen las conclusiones de los conceptos matemáticos que involucra el tema.
5. Con la elaboración de las respuestas de la actividad I en grupo y su publicación en el foro del aula se está haciendo una actividad de reaprendizaje de estos conceptos.

Con lo planteado en los ítems anteriores se está trabajando en pos de cumplir los objetivos: Entender el concepto de curva de nivel, identificar los sistemas coordenados en el plano y el espacio y trabajar en grupo.

- Practicar:

1. Hacer las actividades II y III. Al trabajar estos ejercicios se está entendiendo y automatizando el proceso de cálculo. El docente actúa como guía en el proceso, pudiendo el alumno consultarlo en la clase o en el foro de la unidad correspondiente en el aula virtual de la asignatura.

Se está cumpliendo con los objetivos: Identificar los sistemas coordenados en el plano y el espacio, Distinguir diversas gráficas de funciones de varias variables y Obtener mapas de contorno de funciones de dos variables.

- Interpretar:

1. El alumno usando software dinámico como “Geogebra” grafica las curvas de nivel de la función. Puede utilizar otro software como Maple para la graficación de la función en 3D y de las curvas de nivel como se muestra en el video.
2. Responde a lo solicitado en las actividades II y III.
3. Con estas actividades se está trabajando en pos de cumplir los objetivos: Distinguir diversas gráficas de funciones de varias variables, obtener mapas de contorno de funciones de dos variables y analizar los mapas de contorno.

- Aplicar:

1. Al realizar las actividades IV y V están aplicando los conceptos vistos.

Se están trabajando los objetivos: Analizar los mapas de contorno, informar valores de la función en el mapa de contorno, conocer aplicaciones de los mapas de contorno en su especialidad y trabajar en grupo.

- Evaluar:

1. El alumno al comparar y contrastar distintas gráficas y decidir cuál es la respuesta apropiada está evaluando los resultados (las curvas de nivel obtenidas).

Es importante que las actividades planteadas a los alumnos sean claras y concisas, concentradas en el tema de estudio. Otro aspecto que el docente debe contemplar es que el tiempo que lleva realizar todo el proceso sea acorde al tema y su importancia dentro del programa de la asignatura. En este caso se ha diseñado la práctica para el tiempo de una clase.

Con ésta metodología el alumno es responsable de su propio aprendizaje y el docente cumple la función de guiarlo en el proceso.

La forma de desarrollar la práctica es usando el enfoque pedagógico de clase invertida, que presenta una estructura ideal para aplicar el modelo TPACK. En la clase invertida el alumno realiza determinados procesos de aprendizaje fuera del aula con las herramientas tecnológicas y se utiliza el tiempo de clase para potenciar los procesos de adquisición y práctica del conocimiento y de reaprendizaje.

En este caso, en una clase previa al tema, se les indica a los alumnos que vean el material desarrollado con los recursos tecnológicos, que se encuentra en el aula virtual de la asignatura en el Campus Virtual de la UNSJ, y que realicen las actividades que se indican, que están totalmente guiadas para su ejecución.

A los alumnos se les plantean actividades para realizar utilizando el foro del aula virtual para realizar sus consultas y compartir con toda la clase sus resultados, fomentando de este modo el enfoque de trabajo colaborativo.

En la siguiente clase se procede a la discusión del tema, realización de las actividades grupales y obtención de conclusiones, proceso guiado por el docente.

5 Recursos tecnológicos utilizados para el desarrollo del tema

El recurso que se utilizó para diseñar la práctica de aprendizaje fue la plataforma *eXeLearning*, ya explicado. También se utilizaron otros recursos web, como son el buscador de textos e imágenes, *Google* y *Youtube*, estos recursos sirvieron para la creación del video introductorio y para seleccionar la música con licencia creative common empleada en el mismo.

Para la elaboración del video se emplearon varios recursos:

- *Maple*: software matemático para realizar el archivo con gráficas de funciones y de curvas de nivel.
- *Camtasia Studio*: se empleó para la captura del archivo de Maple y la realización de los efectos de zoom y resaltado de cursor.
- *Movie Maker*: se empleó para la edición del video y su vinculación con el audio. Es un software libre.
- *Audacity*: para la grabación del audio y su edición. La música de fondo empleada es de licencia libre.

6 Forma de evaluación del tema

Las instancias de evaluación que se indican son: una instancia individual, donde se le solicita al alumno la presentación de las respuestas a la actividad I, y una instancia grupal, donde deben compartir los resultados de sus trabajos en el Foro del tema en el aula virtual de la asignatura. Para lo cual el docente inicia cada tema, correspondientes con las actividades planteadas, y en ellos, los grupos de alumnos van colocando sus respuestas. Al finalizar el docente realiza el cierre del tema. Ésta es una evaluación formativa o de proceso.

En la práctica diseñada se deja claramente expresadas las instancias de evaluación que dispone el alumno, individual y grupal. Además se cuenta con la opción de una evaluación sumativa, parcial de la asignatura, al finalizar el módulo correspondiente, al ser un tema de la materia Cálculo II se realiza de acuerdo al cronograma establecido por la planificación de cátedra, respondiendo al Reglamento Académico de la Institución.

El alumno se encuentra en conocimiento desde el primer día de clase de las fechas de evaluaciones, temas que forman parte de cada una de ellas y su metodología.

Se evalúa la actividad de los alumnos usando una rúbrica elaborada para este tema detallada en la Tabla 1, con pocas categorías para hacer más sencilla su aplicación. Motiva esto el gran número de alumnos en el aula, en promedio 150, y el contar con 3 docentes solamente en el equipo de cátedra, y el reducido tiempo con el que se cuenta para el desarrollo de la asignatura, lo que hace imposible realizar una evaluación personalizada y detallada como seria la aplicación aconsejada y correcta para una rúbrica.

Tabla 1. Rúbrica elaborada para la evaluación de las actividades de los alumnos en el tema Curvas de Nivel.

	SUFICIENTE	INSUFICIENTE
Tarea individual	Presenta las respuestas al apartado I. Evidencia haber visto el video y leído el documento escrito	No presenta las respuestas al apartado I. No observo el video. No leyó el documento escrito.
Concepto matemático	Las respuestas a los apartados son correctas	Respuesta a los apartados son incorrectas
Participación en grupo de alumnos en la clase	Participa activamente en el desarrollo de las actividades grupales. Discusión de los conceptos y resolución de ejercicios.	No participa o no colabora en el trabajo grupal.
Actividad en el foro del aula virtual de la asignatura	Comparte los resultados de las actividades en el sitio correcto y en el tiempo estipulado.	No cumple con lo estipulado para compartir las actividades en el aula virtual
Resultado de la evaluación	Cumpliendo con lo detallado en esta columna el tema se aprueba	El tema debe rendirse en la evaluación parcial correspondiente

7 Conclusiones

Con esta metodología apreciamos que los estudiantes superan con mayor facilidad y más rápidamente los obstáculos de aprendizaje y sirve a los profesores para conducir mejor el proceso de enseñanza aprendizaje haciendo hincapié en los aspectos relevantes del tema.

Los alumnos participan activamente en el aprendizaje del tema, no siendo simples receptores de conocimiento. Una ventaja de esta metodología es el trabajo colaborativo que realizan los alumnos entre sí y con el profesor, generándose discusiones de ideas en la clase, que son excelentes para mostrar los conceptos del tema.

Los alumnos que realizan el proceso, realizando las actividades propuestas, buscan otras fuentes de información y comprobación de resultados en internet, lo que favorece al desarrollo de sus capacidades digitales y es un beneficio a sumar a esta metodología.

Referencias

1. Gamboa Araya, R: Uso de la tecnología en la enseñanza de las matemáticas, Cuadernos de investigación y formación en educación matemática. www.cimm.ucr.ac.cr/rgamboaaraya, año 2, número 3, pp 11 -44. (2007).
2. Mishra, P.; Koehler, M. J.: Technological Pedagogical Content Knowledge: A new framework for teacher knowledge. Teachers College Record, Vol.108, No. 6, 1017-1054. (2006).
3. Touron J: TPACK: un modelo para los profesores de hoy. Blog: www,javiertouron.es. (2006)
4. Stewart James: Cálculo de varias variables. Trascendentes tempranas. Séptima edición. Cengage Learning Editores, S.A. (2012)
5. Barrantes, H: Los obstáculos epistemológicos. Cuadernos de Investigación y formación en educación Matemática. www.cimm.ucr.ac.cr/hbarrantes año I, número 2. (2006)
6. Brousseau G.: Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques. Recherches en didactique des mathématiques. Vol. 4. Num. 2. p. 164-197. (1983)

Volver al Índice

Diseño de Actividades de Transformación Conforme en Función de Habilidades Matemáticas de Acuerdo a la Taxonomía de Bloom

Favieri Adriana
Departamento de Aeronáutica, Universidad Tecnológica Nacional Facultad Regional Haedo
París 532, Haedo, Provincia de Buenos Aires, Argentina
adriana.favieri@gmail.com

Resumen. En este trabajo se muestra el diseño de una actividad de Transformación Conforme realizada en la asignatura Matemáticas Aplicadas a la Aeronáutica de la Universidad Tecnológica Nacional, Facultad Regional Haedo en función de habilidades matemáticas de acuerdo a la taxonomía de Bloom. Luego de una breve reseña a aspectos teóricos se explica la metodología utilizada, que está vinculada a la selección del tema matemático a desarrollar, los niveles de pensamiento de la Taxonomía de Bloom que se pretende fomentar, la distinción de las habilidades matemáticas por niveles, el delineado de las actividades de acuerdo a las habilidades matemáticas previamente distinguidas y la relación entre las actividades y las habilidades matemáticas. Se finaliza el trabajo con una serie de conclusiones que están relacionadas con las ventajas del diseño de acuerdo a las habilidades matemáticas según la taxonomía presentada, la presencia de habilidades de diferentes niveles de manera conjunta, la contribución en la creación de un ambiente en el cual los alumnos pueden adquirir modos de actuar propios de la asignatura y resolver ejercicios y/o problemas matemáticos, la vinculación de las habilidades con el contenido y la atención, cuidado y esmero que requiere el diseño de actividades con esta postura teórica.

Palabras Clave: Habilidades matemáticas, Taxonomía de Bloom, Transformación conforme, Diseño actividades.

1 Introducción

Los docentes de matemática universitaria no sólo transmiten conocimientos, sino también hábitos de estudio propios de la matemática, formas de pensar que ayuden a desarrollar un profesional con pensamiento crítico, capaz de adaptarse a diferentes situaciones laborales y a enfrentarse con nuevos problemas contando con conocimientos teórico-prácticos sólidos y una variedad de recursos. Una de las maneras de contribuir al desarrollo de estos hábitos de estudio propios de la matemática es tener presente las habilidades matemáticas, las habilidades de pensamiento que se ponen en juego al desarrollar, resolver ejercicios y/o problemas matemáticos. Las habilidades matemáticas son reconocidas como aquellas que se forman durante la ejecución de las acciones y operaciones que tienen un carácter esencialmente matemático [1, 2].

Se considera "la habilidad matemática como la construcción y dominio, por el alumno, del modo de actuar inherente a una determinada actividad matemática, que le permite buscar o utilizar conceptos, propiedades, relaciones, procedimientos matemáticos, emplear estrategias de trabajo, realizar razonamientos, emitir juicios y resolver problemas matemáticos" [3].

Una postura teórica que facilita la tarea de clasificación de las habilidades matemáticas es la taxonomía de Bloom, que involucra niveles de pensamiento de orden creciente y sostiene que el aprendizaje a niveles superiores depende de la adquisición del conocimiento y habilidades de ciertos niveles inferiores. Otro aspecto interesante de esta postura es que ofrece una visión global del proceso educativo.

Atendiendo a esto se presenta el diseño de una actividad sobre Transformación Conforme, de la asignatura Matemáticas Aplicadas a la Aeronáutica de la Universidad Tecnológica Nacional, Facultad Regional Haedo, teniendo en cuenta las habilidades matemáticas y la taxonomía de Bloom.

2 Marco teórico

2.1 La taxonomía de Bloom

La taxonomía de Bloom es una clasificación de objetivos de aprendizaje y habilidades mentales con niveles de complejidad creciente que tuvo su origen en el año 1948, con el fin de facilitar la comunicación entre examinadores. Esta clasificación supone que el aprendizaje a niveles superiores depende de la adquisición de conocimiento y habilidades en los niveles inferiores [4, 5].

Contempla tres dominios que se solapan, el cognitivo, el afectivo y el psicomotor, siendo el primero de ellos el más desarrollado. La versión original se publicó en el año 1956 y estaba formada por seis niveles de aprendizaje: conocimiento, comprensión, aplicación, análisis, síntesis y evaluación. Más adelante, en la década de los 90, dos exestudiantes de Bloom, Anderson y Krathwohl, revisaron y actualizaron la taxonomía original, publicando una nueva versión en el año 2000 con algunas diferencias. Los sustantivos fueron reemplazados por verbos para indicar habilidades de pensamiento de orden inferior hasta superior, respetando la división en seis categorías, que ahora se llaman: recordar, comprender, aplicar, analizar, evaluar y crear [6, 7].

Esta clasificación jerárquica de habilidades de pensamiento es de gran ayuda al momento de establecer objetivos educativos y las acciones que podrían en evidencia que los alumnos han logrado dichas habilidades. Por otro lado, según puede verse en las discusiones llevadas a cabo en Encuentros de Educación Superior y Pedagogía 2005 en Cali Colombia, es aconsejable que las habilidades de las etapas del nivel superior de la taxonomía estén presentes en la formación de los ingenieros [8].

El usar la taxonomía como marco de referencia para una asignatura centrada en el alumno supone:

- Identificar objetivos educativos más importantes. Suele pasar que en las asignaturas introductorias de una carrera sea necesario centrarse más en el desarrollo del conocimiento y en las superiores en la síntesis y evaluación; aunque es apreciable que se tengan presentes desde el principio.
- Crear actividades de aprendizaje centradas en el nivel.
- Establecer estrategias de evaluación adecuadas [4].

2.2 La taxonomía original

La categoría conocimiento se refiere a la habilidad relacionada con la observación y recuerdo de información; conocimiento de fechas, eventos, lugares, de las ideas principales; dominio de la materia. Se evidencia a través del recuerdo y reconocimiento de información por parte del estudiante, aproximadamente en la misma forma en que los aprendió.

La categoría comprensión representa la habilidad de entender la información, captar el significado, trasladar el conocimiento a nuevos contextos, interpretar hechos, comparar, contrastar, ordenar, agrupar, inferir las causas, predecir las consecuencias. El estudiante esclarece, comprende o interpreta la información en base a su conocimiento previo.

La categoría aplicación incorpora el uso de la información, la utilización de métodos, conceptos, teorías, en situaciones nuevas, y la solución de problemas usando habilidades o conocimientos. En esta categoría el alumno selecciona, transfiere, y utiliza datos y principios para completar una tarea o solucionar un problema.

La categoría análisis se refiere a encontrar patrones, organizar las partes, reconocer significados ocultos, e identificar componentes. Se evidencia cuando el alumno diferencia, clasifica y relaciona las conjeturas, hipótesis, evidencias o estructuras de una pregunta o aseveración.

La categoría sintetizar alude a utilizar ideas viejas para crear otras nuevas; generalizar a partir de datos suministrados; relacionar conocimiento de áreas dispersas, predecir conclusiones. Al analizar el estudiante genera, integra y combina ideas en un producto, plan o propuesta nuevos para él.

Y por último, evaluar es comparar y discriminar entre ideas, dar valor a la presentación de teorías, escoger basándose en argumentos razonados, verificar el valor de la evidencia; reconocer la subjetividad. El estudiante valora, evalúa o critica en base a estándares y criterios específicos [6, 7].

2.3 La taxonomía actualizada

Las categorías de las habilidades del pensamiento en la actualización son:

Recordar, que es reconocer y traer a la memoria información relevante de la memoria de largo plazo. Comprender, que es la habilidad de construir significado a partir de material educativo, como la lectura o las explicaciones del docente. Aplicar, se refiere a la aplicación de un proceso aprendido, ya sea en una situación familiar o en una nueva. Analizar, es descomponer el conocimiento en sus partes y pensar en cómo estas se relacionan con su estructura global. Evaluar, es comprobar ideas, procedimientos, resultados, y criticar teorías o posturas con argumentos razonados. Crear, que involucra reunir cosas y hacer algo nuevo [6].

2.4 Verbos para cada categoría

En base a la lectura de autores del marco teórico se resume la siguiente tabla de verbos para cada categoría de pensamiento [4-8].

Tabla 2. Tabla de verbos para cada categoría de habilidades de pensamiento.

Recordar	Comprender	Aplicar	Analizar	Evaluar	Crear
Reconocer	Entender	Ejecutar	Diferenciar	Comprobar	Generar
Recordar	Interpretar	Implementar	Organizar	Criticar	Planear
Listar	Ejemplificar	Desempeñar	Atribuir	Revisar	Diseñar
Describir	Clasificar	Aplicar	Seleccionar	Formular	Construir
Recuperar	Resumir	Clasificar	Integrar	Hipotetizar	Idear
Localizar	Ordenar	Experimentar		Experimentar	Trazar
Denominar	Agrupar	Usar		Juzgar	Elaborar
Definir	Deconstruir	Resolver		Probar	
Explicar	Delinear	Computar		Detectar	
Parafrasear	Estructurar	Descubrir		Monitorear	

2.5 Las habilidades matemáticas

Retomando la definición previamente presentada, se considera “la habilidad matemática como la construcción y dominio, por el alumno, del modo de actuar inherente a una determinada actividad matemática, que le permite buscar o utilizar conceptos, propiedades, relaciones, procedimientos matemáticos, emplear estrategias de trabajo, realizar razonamientos, emitir juicios y resolver problemas matemáticos”[3].

Hernández Fernández, Delgado Rubí, Fernández de Alaíza, Valverde Ramírez y Rodríguez Hung, (1998) se dedicaron al estudio de habilidades matemáticas y las han clasificado según su función. Esta clasificación resume las habilidades matemáticas en habilidades conceptuales, traductoras, operativas, heurísticas y meta-cognitivas [9], que se describen a continuación:

Habilidades conceptuales: aquellas que operan directamente con los conceptos (Identificar, Fundamentar, Comparar, Demostrar)

Habilidades traductoras: aquellas que permiten pasar de un dominio a otro del conocimiento (Interpretar, Modelar, Recodificar)

Habilidades operativas: funcionan generalmente como auxiliares de otras más complejas y están relacionadas con la ejecución en el plano material o verbal (Graficar, Algoritmizar, Aproximar, Optimizar, Calcular)

Habilidades heurísticas: aquellas que emplean recursos heurísticos y que están presentes en un pensamiento reflexivo, estructurado y creativo (Resolver, Analizar, Explorar)

Habilidades meta-cognitivas: las que son necesarias para la adquisición, empleo y control del conocimiento y demás habilidades cognitivas (Planificar, Predecir, Verificar, Comprobar, Controlar)[9].

Por otro lado resulta necesario destacar la importancia del estudio de las habilidades en relación con el contenido de la asignatura, como lo proponen Falsetti, Favieri, Scorzo y Williner, (2009); lo que provee una mejor información sobre el desarrollo de la misma y los aprendizajes de los conceptos [10].

3 Metodología de trabajo

La metodología utilizada para este trabajo consistió en el cumplimiento de los siguientes aspectos:

- Selección del tema matemático a desarrollar
- Elección de los niveles de pensamiento de la Taxonomía de Bloom a fomentar
- Distinción de las habilidades matemáticas por niveles
- Delineado de las actividades de acuerdo a las habilidades matemáticas previamente distinguidas
- Relación entre las actividades y las habilidades matemáticas.

Explicamos a continuación cada uno de ellos.

- *Selección del tema matemático a desarrollar*

El tema de Transformación Conforme desarrollado en la asignatura abarca los movimientos de traslación, homotecia, rotación respecto al origen de coordenadas y transformación por inversión. Por cuestiones de espacio mostramos aquí la correspondiente a la rotación respecto al origen. Los conceptos relacionados con el tema son:

- Definición y representación geométrica de los números complejos
- Diferentes formas de representar analíticamente los números complejos.
- Representación de regiones en el plano utilizando notación de números complejos.
- Funciones de variable compleja y sus aplicaciones a transformaciones del plano, en este caso particular, a giros con centro en el origen.
- Propiedades algebraicas y procedimientos de resolución.

– *Elección de los niveles de pensamiento de la Taxonomía de Bloom a fomentar*

En este caso particular se decidió incluir todos los niveles de la taxonomía ya que consideramos que es conveniente que las actividades de enseñanza aprendizaje cubran niveles de pensamiento de orden superior.

– *Distinción de las habilidades matemáticas por niveles*

Hemos decidido incorporar las siguientes habilidades matemáticas:

Nivel recordar

- Recordar la representación de regiones del plano usando números complejos
- Recordar igualdad de números complejos tanto en forma binómica como polar
- Reconocer a las funciones de variable compleja como representativas de giros en el plano
- Reconocer las ecuaciones de transformación de las rotaciones expresadas como funciones de variable compleja

Nivel comprender

- Entender e interpretar la información dada en forma gráfica
- Recodificar las regiones geométricas en forma analítica usando números complejos
- Ordenar y agrupar convenientemente la parte real e imaginaria de la función para determinar las ecuaciones de transformación

Nivel aplicar

- Aplicar la interpretación geométrica de los números complejos
- Aplicar las funciones de variable compleja a giro de regiones en el plano
- Aplicar igualdad de números complejos tanto en forma binómica como polar
- Resolver el giro de las regiones usando funciones de variable compleja
- Graficar las regiones originales y las rotadas en un mismo par de ejes cartesianos

Nivel analizar

- Organizar la información para diferenciar la parte real e imaginaria de un número complejo
- Organizar la información para diferenciar el módulo y el argumento de un número complejo
- Deconstruir la función de variable compleja para determinar el ángulo de giro
- Estructurar la solución de manera compacta, sencilla y clara
- Integrar lo resuelto para generar la región obtenida luego del giro

Nivel evaluar

- Comprobar que cada región obtenida es la correcta

Nivel crear

- Elaborar un ejercicio bajo ciertas condiciones

– *Delineado de las actividades de acuerdo a las habilidades matemáticas previamente distinguidas*

Como resultado de las habilidades matemáticas seleccionadas se diseñó la siguiente actividad:

Tarea 1

Dadas los siguientes gráficos:

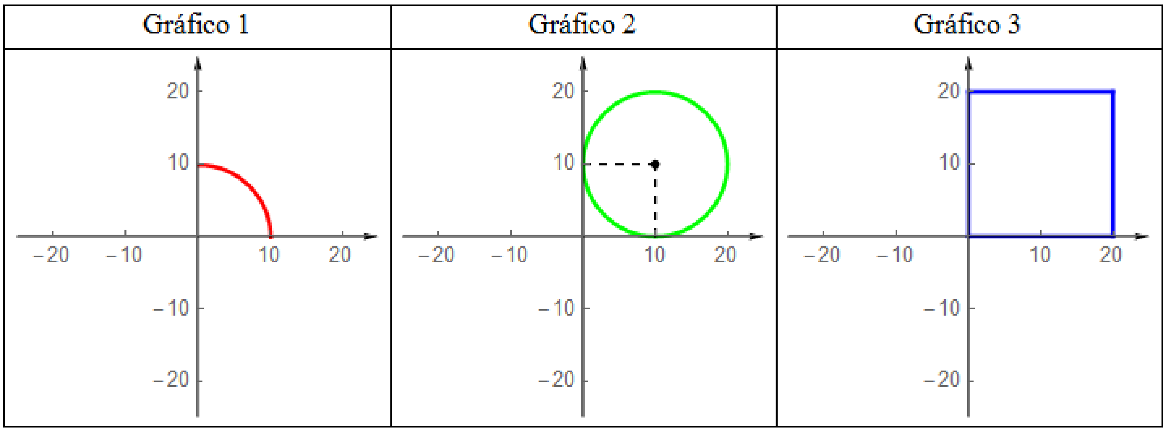


Fig.1. Gráficos de la Tarea 1

Se pide:

- Escribir en variable compleja la expresión que representa cada gráfico
- Realizar los siguientes mapeos conformes a las tres regiones:
    - un giro de 90º en sentido anti-horario
    - un giro de 180º en sentido anti-horario
    - un giro de 90º en sentido horario
- Graficar en el plano (x,y) la región original y la rotada con distintos colores.

Tarea 2

- Elaborar un ejercicio en el cual haya que realizar un giro alrededor del origen de un triángulo ubicado en el primer cuadrante de tal manera que la región resultante esté en el tercer cuadrante.

- *Relación entre las actividades y las habilidades matemáticas.*

Con el fin de verificar que el diseño de las actividades está vinculado con las habilidades matemáticas que se pretenden fomentar, es conveniente analizar cada ítem y relacionarlo con la habilidad. Se presenta esta vinculación en la siguiente tabla:

Tabla 2. Relación entre las actividades y las habilidades matemáticas.

Ítem	Habilidad
Tarea 1	
Escribir en variable compleja la expresión que representa cada gráfico	Nivel recordar • Recordar la representación de regiones del plano usando números complejos Nivel comprender • Entender e interpretar la información dada en forma gráfica • Recodificar las regiones geométricas en forma analítica usando números complejos Nivel aplicar • Aplicar la interpretación geométrica de los números complejos Nivel analizar • Organizar la información para diferenciar la parte real e imaginaria de un número complejo • Organizar la información para diferenciar el módulo y el argumento de un número complejo
Realizar los siguientes mapeos conformes a las tres regiones: • un giro de 90º en sentido anti-horario • un giro de 180º en sentido anti-horario • un giro de 90º en sentido horario	Nivel recordar • Reconocer a las funciones de variable compleja como representativas de giros en el plano • Reconocer las ecuaciones de transformación de las rotaciones expresadas como funciones de variable

	compleja. Nivel comprender • Ordenar y agrupar convenientemente la parte real e imaginaria de la función representativa del giro para determinar las ecuaciones de transformación Nivel aplicar • Aplicar las funciones de variable compleja a giro de regiones en el plano. • Aplicar igualdad de números complejos tanto en forma binómica como polar • Resolver el giro de las regiones usando funciones de variable compleja Nivel analizar • Deconstruir la función de variable compleja para determinar el ángulo de giro • Estructurar la solución de manera compacta, sencilla y clara • Integrar lo resuelto para generar la región obtenida luego del giro Nivel evaluar • Comprobar que cada región obtenida es la correcta
Graficar en el plano (x,y) la región original y la rotada con distintos colores.	Nivel aplicar • Graficar las regiones originales y las rotadas en un mismo par de ejes cartesianos
Tarea 2 Elaborar un ejercicio en el cual haya que realizar un giro alrededor del origen de un triángulo ubicado en el primer cuadrante de tal manera que la región resultante esté en el tercer cuadrante.	Nivel crear – Elaborar un ejercicio bajo ciertas condiciones

4 Discusión de los resultados

La taxonomía de Bloom ofrece una guía muy útil para el diseño de actividades en función de habilidades matemáticas, pero esto no quiere decir que sea una categorización abrupta ya que, es muy probable que varias de ellas se solapen, se presentan juntas. Por ejemplo, al comenzar la actividad el alumno tiene que poner en juego varias habilidades, como ser, recordar la representación de regiones del plano usando números complejos, entender e interpretar la información dada en forma gráfica, recodificar las regiones geométricas en forma analítica usando números complejos, aplicar la interpretación geométrica de los números complejos y organizar la información para diferenciar la parte real e imaginaria, el módulo y el argumento de un número complejo, que como vimos anteriormente éstas pertenecen a distintos niveles de pensamiento. Éstos son aspectos a tener en cuenta al momento de diseñar la actividad como así también cuando evaluamos la presencia de dichas habilidades en las producciones de los alumnos.

Otra consideración que se ha tenido en cuenta es la relación entre la habilidad y el contenido ya que la misma habilidad puede presentar diferentes niveles de dificultad de acuerdo al concepto. En nuestro caso, la habilidad aplicar la interpretación geométrica de los números complejos tiene una dificultad menor que aplicar las funciones de variable compleja a giro de regiones en el plano. Esto coincide con lo visto previamente en el marco teórico(10).

Por otro lado, al subir en los niveles de pensamiento, la habilidad matemática correspondiente lleva involucrada otras habilidades de niveles inferiores. En nuestro caso la habilidad del nivel crear, elaborar un ejercicio bajo ciertas condiciones lleva implícita otro tipo de habilidades pues el alumno debería ser capaz de utilizar varias habilidades como ser recordar información sobre los números complejos, tanto en su interpretación geométrica, como en las diferentes formas de escritura de los mismos. Asimismo debería organizar la información, ordenar las partes constitutivas de los números complejos, aplicarlas en la situación particular, recordar y aplicar las funciones de variable compleja a la rotación de puntos y/o figuras en el plano. Y por otro lado debería integrar toda la información para cumplir con la consigna de la tarea y prever las posibles complicaciones que podría presentar la propuesta que haga.

5 Conclusionesy trabajos futuros

El diseño de esta actividad de Transformación Conforme de acuerdo a las habilidades matemáticas vinculadas con la taxonomía de Bloom y el análisis realizado permiten establecer una serie de conclusiones:

- El análisis de las habilidades proporciona una guía para el diseño de actividades de enseñanza aprendizaje que colabora con la tarea docente, organiza el trabajo en el aula y también provee una ayuda para la elaboración de evaluaciones y su corrección, a pesar de que no es el tema central de este trabajo.
- Al diseñar actividades en función de habilidades matemáticas de acuerdo a la taxonomía de Bloom es conveniente recordar que muchas de ellas pueden darse de manera conjunta, por lo que se aconsejará ser flexible y tener una mirada holística sobre lo que se está diseñando.
- La individualización y sistematización de las habilidades matemáticas junto con la ayuda docente contribuyen positivamente en la creación de un ambiente en el cual los alumnos pueden adquirir modos de actuar propios de la asignatura y resolver ejercicios y/o problemas matemáticos.
- Tener presente la vinculación de las habilidades con los contenidos ya que una misma habilidad puede presentar diferentes niveles de dificultad de acuerdo al concepto involucrado.
- El diseño de actividades de clases con propósitos como el establecido en este trabajo es una tarea que requiere cuidado, tiempo, indagación bibliográfica, conocimiento de los alumnos con los que se trabaja y flexibilidad para ponerlas a prueba en el aula y mejorarlas y/o modificarlas de acuerdo a los resultados obtenidos luego de la experiencia.
- Recordar que el aprendizaje es una actividad holística en la cual inciden muchas variables y que las categorías de niveles de pensamiento establecidos en la Taxonomía de Bloom es orientativa y no compartimentos estancos y rígidos, sino que favorece la visión de considerar al aprendizaje como un todo en el cual inciden varias variables además de las habilidades matemáticas.

Estas conclusiones alientan a seguir trabajando en esta línea, en profundizar en el estudio de habilidades matemáticas, vinculadas con la taxonomía de Bloom, usadas para el diseño de actividades. Es por ello que la línea de trabajo futuro estará orientada a la profundización del tema, incursionando en la creación de otras actividades con otros temas de la asignatura Matemáticas Aplicadas a la Aeronáutica de la Universidad Tecnológica Nacional, Facultad Regional Haedo.

Referencias

1. Hernández Fernández, H.: El perfeccionamiento de la enseñanza de la Matemática en la Educación Superior Cubana, experiencias en el Álgebra Lineal.*Tesis de grado.*(1989)
2. González, H.: Un criterio para clasificar habilidades matemáticas.*Educación Matemática.*Vol. 5 Nro. 1. México: Grupo Editorial Iberoamérica (1993)
3. Ferrer-Vicente.: La resolución de problemas en la estructuración de un sistema de habilidades matemáticas en la escuela media cubana. *Tesis doctorales en Ciencias Sociales.*http://cor.to/1jOZ (2000). Accedido el 02 de febrero de 2017
4. Barkley, E., Cross, P., HowellMajor, C.: *Técnicas de aprendizaje colaborativo: manual para el profesorado universitario*. Morata (2007)
5. Woolfolk, A.: *Psicología educativa.* Pearson Educación, (2006)
6. Eduteka: Taxonomía de Bloom de habilidades de pensamiento. *Eduteka* .http://cor.to/1jID (2010). Accedido el 02 de febrero de 2017
7. Fowler, B.: La Taxonomía de Bloom y el Pensamiento Crítico. *Eduteka.* http://goo.gl/S76dFe (2002). Accedido el 02 de febrero de 2017
8. Tovar de Acosta, Comp.: Encuentros de educación superior y pedagogía *2005. Artes gráficas del Valle Ltda,* (2007). Universidad del Valle.
9. Hernández-Fernández, H.; Delgado-Rubí, J.; Fernández de Alaiza, B.; Valverde Ramírez, L.; Rodríguez-Hung, T.: Cuestiones de didáctica de la matemática. *Conceptos y procedimientos en la Educación Polimodal y Superior.* Homosapiens. Ediciones, (1998)
10. Falsetti, M. F., Favieri, A., Scorzo, R. y Williner, B. Estudio sobre habilidades matemáticas para el Cálculo Diferencial en estudiantes de Ingeniería. *10mo Simposio de Educación Matemática.* Chivilcoy: Edumat, (2009)

Volver al Índice

Taller de Análisis Matemático II
Propuesta Educativa Innovadora en la Facultad Regional San Nicolás

Riccomi Humberto, Sacco Lucía
Grupo de Investigación Departamento de Materias Básicas, Facultad Regional San Nicolás, Universidad Tecnológica Nacional
Colón N° 332
hriccomi@peeirr.com.ar, lcsacco@gmail.com

Resumen. Este trabajo presenta el diseño, la metodología de trabajo y los resultados obtenidos en la primera implementación del Taller de Análisis Matemático II (AMII), de la Facultad Regional San Nicolás, Universidad Tecnológica Nacional (FRSN-UTN), durante el período 2013-2014. Constituye una propuesta educativa innovadora destinada a estudiantes de años avanzados de la Carrera de Ingeniería que adeudaban AMII. El taller brinda la posibilidad de cursar y aprobar la asignatura bajo un régimen especialmente adaptado a la situación de cada estudiante. Los resultados obtenidos durante este primer período de ejecución mostraron la excelente aceptación de los alumnos a la propuesta educativa. Esto se evidencia en el compromiso asumido por cada uno de los involucrados, en la adaptación a cada instancia evaluativa propuesta y en la transferencia de aprendizajes en la resolución de problemas.

Palabras Clave: Análisis Matemático II, Práctica educativa, Innovación, Ingeniería.

1 Introducción: la problemática detectada

Antes de la contextualización de la propuesta que se presenta en este trabajo, se realiza una breve referencia histórica al ámbito en donde se llevó a cabo dicha propuesta.

Durante muchos años, en la Universidad Tecnológica Nacional estuvo en vigencia el Plan de Estudios de 1979 [1]. Según dicho plan, en la carrera de Ingeniería Mecánica, la asignatura Análisis Matemático II de 2ndo año del Ciclo Básico no era correlativa con otras asignaturas de años siguientes. Los estudiantes que la regularizaban en 2ndo año podían avanzar en la carrera, teniendo pendiente rendir AMII. En 1993, y atendiendo a un cambio de paradigma en la educación, se implementaron los nuevos Diseños Curriculares a través de la Ordenanza 741/1993. A partir de ellos, AMII pasó a ser correlativa con otras asignaturas de años superiores en todas las carreras de Ingeniería.

A mediados del 2012, en relevamientos realizados en numerosas cohortes de estudiantes de AMII, se evidenció que existía un importante número de estudiantes de la carrera de Ingeniería Mecánica que, aun en un avanzando estado en su carrera, seguían adeudando AMII. Analizando la situación de estos estudiantes, se observó que pertenecían al viejo Plan de Estudios. Por ello, como parte del Plan de Mejoras iniciado en 2008 por los docentes de la cátedra, se propuso como acción estratégica implementar en 2013 un Taller de AMII para aquellos estudiantes que se hallaban en dicha situación. De ese modo, se pretendía brindar una solución a la problemática generada por la propia Universidad.

A continuación, se presenta la propuesta educativa innovadora diseñada e implementada por la cátedra, junto con los resultados obtenidos en la primera cohorte de estudiantes que cursaron el Taller de AMII durante 2013 y finalizaron en 2014.

2 Propuesta educativa innovadora

Un proceso constante de innovación sobre los criterios de organización curricular de la enseñanza universitaria, acorde a los cambios en el conocimiento, el trabajo y la cultura, garantiza mejoras en el proceso de enseñanza y en la definición del perfil profesional deseado [2]. El Curriculum fija parámetros para la acción y resulta importante analizar cuáles son los alcances de la prescripción curricular, el modo en que se definen las relaciones *centro – periferia* [3] y reconocer aquellos aspectos que son regulados por el Diseño y aquellos que pueden ser definidos en situación local por las instituciones y por los docentes. Una nueva gestión curricular necesita estructurar nuevos planes y programas, procesos de creación pedagógica, innovaciones educativas, definición de nuevos perfiles personales, profesionales y ocupacionales, formación integral, compromiso con la comunidad y nuevas definiciones, concepciones y prácticas curriculares.

Las transformaciones curriculares deben surgir de la propia iniciativa de los actores en el interior de las instituciones, producto de la voluntad de cambio y del interés por mejorar los procesos y las condiciones en las cuales se da la labor educativa, generadas por las expectativas de innovación e investigación. Es así que las transformaciones curriculares impactan en las representaciones de los sujetos involucrados y en las prácticas de enseñanza y de aprendizaje [2].

3 Fundamentación

La cátedra de AMII fundamenta el diseño y la implementación del Taller en función de conceptos y criterios que tiendan a favorecer los procesos de enseñanza y de aprendizaje posibles de desarrollar en él. Dichos conceptos principales son los siguientes:

- *Trabajo de los contenidos a través de un modelo pedagógico centrado en la problematización*

Cuando se piensa en la formación profesional, es importante orientar los aprendizajes de modo de acercar a los estudiantes, en la medida de lo posible, a lo que será el trabajo en la práctica profesional. La propuesta de este modelo pedagógico implica un acercamiento a los desarrollos teóricos a través de las necesidades surgidas en función de la solución de un problema. El objetivo es que los conocimientos se incorporen en la estructura de semántica experiencial (como instrumentos valiosos para el análisis y la solución de problemas) y no en la estructura de semántica académica (para resolver con éxito sólo las demandas del aula, asociadas a la vida escolar) [4].

- *Presentación de los contenidos en forma de conocimiento situacional*

Este tipo de conocimiento plantea estructurar los saberes a través de situaciones que resulten significativas para el estudiante, por ejemplo, la resolución de problemas que realiza el sujeto [5] o el estudio de casos [6]. Los conocimientos adquiridos mediante resolución de problemas adquieren una significación profunda para el estudiante y dan indicios de una posición de menor subordinación del sujeto ante la supuesta verdad anónima de la ciencia [7].

- *Relación de interdisciplinariedad entre asignaturas de la carrera*

La interdisciplinariedad plantea una relación entre las asignaturas en la cual dos o más disciplinas establecen una interacción que las modifica mutuamente, de forma que se genera un enriquecimiento recíproco entre ellas. En este tipo de relación queda claramente especificada la dependencia entre las disciplinas: las estructuras metodológicas y conceptuales resultan compartidas por varias disciplinas y se evidencian las relaciones que permiten realizar las transferencias de aprendizajes entre las asignaturas involucradas.

- *Aprendizaje significativo y conocimiento generador*

El aprendizaje significativo [8] implica que los conocimientos nuevos se incorporan, mediante una relación sustantiva y no arbitraria, a los saberes que el estudiante dispone en su estructura cognoscitiva y a los nuevos saberes por aprender. El conocimiento generador [9] tiene en cuenta tres metas fundamentales para la educación: retención (no memorística), comprensión y uso activo del conocimiento. Estos procesos sólo pueden darse en el marco pedagógico en el cual los alumnos participan de un proceso de aprendizaje, reflexionando sobre lo que aprenden, encontrando significado propio a los nuevos conceptos aprendidos y relacionándolos con los saberes previos.

- *Estrategias pedagógicas de trabajo en equipo y de resolución de problemas*

El trabajo en equipo permite el intercambio de ideas y opiniones entre los integrantes del grupo de trabajo, de manera que se enriquecen las opiniones y puntos de vista y se favorece la colaboración entre los participantes. La resolución de problemas plantea una situación en la cual los estudiantes requieren de un proceso reflexivo y analítico para arribar a una solución, lo cual favorece la formación en competencias [10]. Lo ideal es plantear situaciones problemáticas en concordancia con la futura incumbencia profesional.

- *Incorporación de las tecnologías de la información y comunicación*

Las TIC han influido en el ejercicio del campo profesional. Por ello, la enseñanza deberán incluirlas [11]. La Universidad no puede quedar fuera de esta realidad.

4 Taller de AMII

La enseñanza es una actividad intencional y esa intencionalidad consiste en el ejercicio deliberado de influencia sobre aquellos a los que se enseña; una influencia que se traduce en proponer significados sobre la realidad, a través del conocimiento y las formas en que éste se hace accesible a los estudiantes y a través de las relaciones pedagógicas que para su adquisición se establecen. Por ello, la enseñanza se realiza de acuerdo a propósitos que deben explicitarse y comunicarse [12].

Desde este posicionamiento, en 2013 la cátedra de AMII incorporó entre las acciones estratégicas tendientes al logro de la calidad académica pretendida un Taller para estudiantes que adeudaban AMII. Dichas acciones estratégicas fueron las siguientes [13]:

- La formulación de las intenciones educativas (desempeños esperados en tanto componentes de una o más competencias).
- El análisis del contenido (selección y estructuración de conocimientos, habilidades y actitudes).
- La selección de estrategias didácticas (planteamientos metodológicos, secuencia de enseñanza, actividades de enseñanza, medios de aprendizaje).
- La selección de estrategias de evaluación (puesta en juego de las competencias).

A continuación se presentan cada una de ellas.

4.1 Intenciones educativas

La cátedra de AMII propuso la apertura del Taller de AMII en relación a las siguientes intenciones educativas [13]:

- Para el estudiante que adeuda AMII entre sus últimas materias, como un espacio que brinde la posibilidad de avanzar en la carrera de Ingeniería, espacio en el que se propongan instancias de enseñanza que, por un lado, optimicen la calidad de los procesos de aprendizaje a través del estudio y la investigación de problemas vinculados con la especialidad de cada estudiante participante y que, por otro lado, involucren conceptos desarrollados en AMII a través de interacciones multidireccionales sincrónicas y asincrónicas y trabajo colaborativo.
- Para la Facultad Regional San Nicolás, como una estrategia de recuperación de estudiantes de carreras de Ingeniería, considerando lo señalado en la Resolución 1232/01 en cuanto a la implementación de mecanismos de seguimiento de los estudiantes, medidas efectivas de retención y análisis de la información sobre rendimiento y egreso.

4.2 Contenidos de AMII

La definición, secuenciación y organización de contenidos a trabajar en el Taller de AMII se realizó teniendo en cuenta criterios de agrupamiento [14]. Se consideró, por un lado, la complejidad de los contenidos de la asignatura y, por otro lado, el conocimiento de los desempeños de los estudiantes en los exámenes parciales. Es así que los agrupamientos de los contenidos propuestos para el Taller resultaron innovadores para la cátedra y fueron considerados en la planificación de AMII del 2015.

Durante esta primera implementación del Taller de AMII, se consideró agrupar los contenidos en cuatro bloques.

Bloque 1:

Unidad Nº 1: Estructura vectorial y métrica de R^n. Nociones de Topología de R^n

Unidad Nº 2: Funciones con dominio en R^n e imagen en R^m

Bloque 2:

Unidad Nº 3: Límite, continuidad y derivada direccional de funciones de R^n en R^m.

Unidad Nº 4: Diferenciabilidad y sus aplicaciones para funciones de R^n a R

Bloque 3:

Unidad Nº 5: Ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden.

Unidad Nº 6: Ecuaciones diferenciales lineales de orden n a coeficientes constantes.

Bloque 4:

Unidad Nº 7: Integrales de funciones de R^n en R^m.

4.3 Estrategias de enseñanza

El Taller de AMII llevado a cabo en 2013 brindó a los estudiantes la posibilidad de plantear o vivenciar diferentes escenarios adecuados a los intereses y a las necesidades particulares de cada uno. La primera cohorte estuvo conformada por tres estudiantes de la carrera de Ingeniería Mecánica, quienes adeudaban en total 6 asignaturas para finalizar la carrera, tal como se muestra en la Tabla 1:

Tabla 1. Relevamiento de la situación de los estudiantes.

Alumno 1	AMII (2do año), Estabilidad II (3er año), Elementos de Máquinas (4to año), Instalaciones Industriales (5to año), Mantenimiento Industrial (5to año) y Proyecto de Máquinas (5to año). Proyecto Final (iniciado).
Alumno 2	AMII (2do año), Estabilidad II (3er año), Elementos de Máquinas (4to año), Mantenimiento Industrial (5to año) y Máquinas de elevación y transporte (5to año). Proyecto Final (iniciado).
Alumno 3	AMII (2do año), Estabilidad II (3er año), Mecánica de los sólidos (4to año), Elementos de Máquinas (4to año), Mantenimiento Industrial (5to año) y Proyecto de Máquinas (5to año). Proyecto Final (iniciado).

El Taller comenzó a dictarse el 7 de agosto de 2013 y finalizó el 17 de marzo de 2014, día en que se realizó el Coloquio Final. Se realizaron siete encuentros presenciales en 2013 (dos en agosto, dos en setiembre y tres en octubre) y cinco encuentros presenciales en 2014 (dos en febrero y tres en marzo).

El horario propuesto fue consensuado con los estudiantes de modo que no ocasionara superposición con las clases. Los encuentros se realizaron cada quince días, a la tarde, con una duración de entre dos y tres horas. La asistencia a los encuentros presenciales fue obligatoria. Se consideraron horarios alternativos para aquellos estudiantes que eventualmente tuvieran problemas de horarios para asistir a los encuentros. Periódicamente se desarrollaron coloquios, como jornadas de socialización de avances en los Trabajos Prácticos y de resultados en los Trabajos Conceptuales desarrollados. El dictado del Taller estuvo a cargo de un profesor de la cátedra y de un ayudante de primera de AMII.

Los estudiantes trabajaron durante el desarrollo del Taller con el cuadernillo de la cátedra, la bibliografía recomendada y apuntes preparados de acuerdo a las necesidades observadas. Se propusieron diversas actividades de comprensión de aquellos tópicos con mayores dificultades, al igual que instancias para formular y responder preguntas, aprender el uso de software específico en la resolución de problemas, encontrar respuestas a aquellos problemas y ejercicios propuestos en los cuadernillos, consultar bibliografía, etc. También se incluyeron espacios de reflexión sobre propuestas y procesos, no solo individuales sino grupales, enriqueciendo experiencias y potenciando las oportunidades de acercamiento a mejores posibilidades de solución.

Los encuentros presenciales se alternaron con encuentros virtuales realizados a través del Aula Virtual del Taller de AMII (Fig. 1), realizada en Word Press y alojada durante el período 2013-2014 en un servidor facilitado para ser utilizado por la primera cohorte. En dicha Aula Virtual, los estudiantes encontraban el material de estudio, unidades, consignas de Trabajos Prácticos y problemas trabajados en el Taller. Contaba con un chat y se consensuaba día y horario en que estaba abierto. Los estudiantes recibían periódicamente avisos de novedades o recordatorios en sus correos electrónicos.

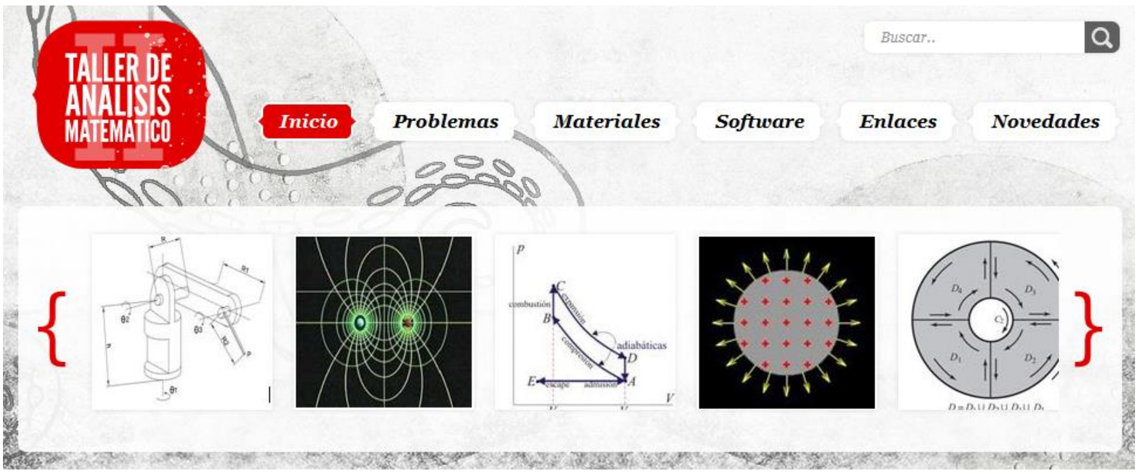


Fig. 1. Página principal del Aula Virtual del Taller de AMII.

Se propusieron cuatro Trabajos Conceptuales (TC) y cuatro Trabajos Prácticos (TP). Cada uno de los trabajos realizados fue personalizado e individual y respondía a la secuenciación y organización de los contenidos definidos para trabajar en el Taller, tal como se presenta en la Tabla 2.

Tabla 2. Distribución de Trabajos Conceptuales y Trabajos Prácticos.

Año 2013		Año 2014	
Agosto	TC1 y TP1 Unidades 1, 2 y 3 Topología, Funciones, Límite y Continuidad	Febrero	TC4 y TP4 Unidad 7 Integrales múltiples, de línea y de superficie. Teoremas Integrales.
Setiembre	TC2 y TP2 Unidad 4 Derivada direccional y Diferenciabilidad	Marzo	
Octubre	TC3 y TP3 Unidades 5 y 6 Ecuaciones diferenciales		

Las Fig. 2 y 3 presentan dos modelos de TC y TP.

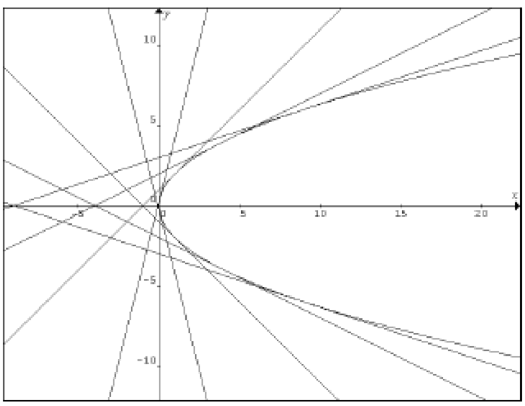
Universidad Tecnológica Nacional
Facultad Regional San Nicolás
Análisis Matemático II

Alumno:..

Año 2013

TRABAJO CONCEPTUAL 3: ECUACIONES DIFERENCIALES

1. Suponga que tiene que determinar si el siguiente enunciado es verdadero o falso: *"La función escalar de ley* $y=\frac{2}{35}x^7+\frac{3}{x^3}$ *es solución de la ecuación diferencial* $y'+\frac{3}{x}y=\frac{2}{5}x^3$*"*. Hay dos formas de hacerlo. Descríbalas, y diga cuál es más conveniente.
2. Demuestre que la ecuación diferencial $y'=\frac{\log(100)^{x^2+y^2}}{3xy}$ es homogénea.
3. Escriba una ecuación de primer orden que sea simultáneamente a variables separables y homogénea. Justifique.
4. ¿Qué tipo de soluciones tiene siempre una ecuación diferencial de la forma $y''+a.y'+a^2.y=0$? Justifique la respuesta.
5. Plantee una ecuación diferencial de Bernoulli cuya sustitución sea $z=y^{-3}$. ¿Cómo se resuelve?
6. Sea la ecuación de segundo orden $y''-ay'=P_n(x)$ $a\neq 0$, determine de qué orden es el polinomio que se debe proponer como solución particular no homogénea. Justifique.
7. En el siguiente gráfico marque cuál es la solución general, cuál la singular, y cual la particular o particulares que cumplen la condición inicial $y(0)=0$:



8. Explique cómo identifica y resuelve una ecuación del tipo Clairaut.
9. Proponga una ecuación diferencial homogénea de orden 2 cuya solución sea $y=C_1e^{2x}+C_2e^{-2x}$.

Fig. 2. Trabajo Conceptual 3: Ecuaciones Diferenciales Ordinarias de Primer Orden.

Universidad Tecnológica Nacional
Facultad Regional San Nicolás
Análisis Matemático 2

Alumno:

Año 2013

TRABAJO PRÁCTICO 3: ECUACIONES DIFERENCIALES

1. **Demostrar** que $y = e^{-x}(x+k)$ con k constante, es una solución de $y' + y = e^{-x}$
   Representar, utilizando un software, el campo de direcciones correspondiente.
   Hallar, si es posible, la solución particular que satisface $y(0) = 5$. **Representar.**

2. **Resolver según corresponda:**
   a) $y' = (1-x)^3 (y^2 - 9y)$
   b) $(x+y)\,dx + (x-y)\,dy = 0$
   c) $y'' - y = x e^{3x}$ $\quad y(0) = 0,\ y'(0) = 1$

3. **Plantear el modelo matemático** correspondiente y **resolver** cada una de las siguientes situaciones problemáticas:

CRECIMIENTO BACTERIANO

Un cultivo tiene una cantidad inicial N_0 de bacterias. Cuando $t = 1h$, la cantidad medida de bacterias es $\frac{3}{2}N_0$. Si la razón de reproducción es proporcional a la cantidad de bacterias presentes, calcule el tiempo necesario para triplicar la cantidad inicial de los microorganismos.

CIRCUITO ELÉCTRICO

Una F.e.m. de $200e^{-5t}$ voltios se conecta en serie con una resistencia de 20 Ohmios y una capacitancia de 0.01 Faradios. Asumiendo que la carga inicial del capacitor es cero. Encuentre la carga y la corriente en cualquier instante de tiempo.

Fig. 3. Trabajo Práctico 3: Ecuaciones Diferenciales Ordinarias de Primer Orden.

4.4 Estrategias de evaluación

La propuesta educativa del Taller de AMII ha sido pensada con la intención de que los futuros ingenieros desarrollen competencias específicas (precisión y claridad en el lenguaje, creatividad, análisis e interpretación de problemas reales, modelización) y transversales (autonomía en el aprendizaje y habilidades cognitivas) para el futuro desempeño profesional. Dicha propuesta está orientada a competencias profesionales y requiere de una reflexión crítica, lo que lleva a pensar en el diagnóstico de las necesidades del contexto y las operaciones del proceso educativo, sin perder de vista el sistema de evaluación. Esta forma de pensar se retroalimenta en todo momento, en contraposición a la educación tradicional cuyo enfoque es pasivo-receptivo [15].

En el Taller de AMII se consideró realizar una evaluación continua de los procesos de enseñanza y de aprendizaje, que brinde elementos para el mejoramiento de la calidad de ambos procesos y que constituya un componente de retroalimentación permanente para la toma de decisiones. Para la acreditación del Taller de AMII, esta propuesta educativa consideró lo siguiente:

- Asistencia a, por lo menos, uno de los dos encuentros mensuales destinados al desarrollo de las unidades, explicaciones e indicaciones.
- Aprobación de los Trabajos Conceptuales, que incluyen diferentes tipos de actividades del marco teórico desarrollado durante ese mes. Los estudiantes contaron con instancias de recuperatorio de sólo uno de ellos.

- Aprobación de los Trabajos Prácticos, que incluyen actividades con los software y dos o tres problemas a resolver por el estudiante. Se fijaron fechas y criterios que se debían cumplir.
- Aprobación del Coloquio Final: presentación individual y oral de tres problemas que vinculen contenidos de AMII. Interrogatorio por parte de los docentes evaluadores. La nota final del examen debe ser superior a 7 (siete) puntos.

5 Resultados

Con el propósito de analizar y entender el proceso educativo y evaluar el aprendizaje de los estudiantes, los docentes a cargo del dictado del Taller utilizaron una memoria didáctica como instrumento de comunicación permanente. Este concepto ha sido extraído de la teoría desarrollada por Brousseau [16], quien propone su construcción como instrumento para recoger información para el análisis de los comportamientos cognitivos de los estudiantes, los tipos de situaciones que se ponen en marcha para enseñar los contenidos, y los fenómenos a los cuales la comunicación del saber da lugar. Esto le ofrecería a la enseñanza apoyo teórico, explicaciones, medios de previsión y análisis, sugerencias, incluso dispositivos y métodos.

La memoria didáctica realizada durante el desarrollo del Taller de AMII incluyó información y datos personalizados, contextualizados y temporalizados. Además, resultó útil para la toma de decisiones entre encuentros. En la Tabla 3 se presenta la memoria didáctica de un encuentro del Taller de AMII.

Tabla 3. Memoria didáctica.

20/08	Funciones de Rn en Rm: se analizó su definición, casos particulares, consignas 5.1. Ejercicio 5.2 1 y 2 completos. Se trabajó con 5. II consigna teoría 5.6 Se resolvió el ejercicio 5.7 2 completo y se llegó a definir curvas de nivel y superficies de nivel con un ejemplo cada uno.	Les indique que ellos planteen y resuelvan los problemas de esta unidad para el próximo encuentro. Muchos de ellos incluyen situaciones que se trabajan en Física. Repartí, por una cuestión de tiempo, copias del libro de Stewart (pp. 872 a la 875) para trabajar desde bibliografía campos vectoriales. Esta bueno este material para que les quede claro que se hace un tipo de representación para ver el comportamiento del campo pero que no es la representación gráfica como función. El próximo encuentro habría que hacer ejercicios 5.8 y seguir con el punto 5.III hasta terminar. Luego, comenzar con límite de funciones de R^n en R^m.

Durante la cursada del Taller, los estudiantes aprobaron todos los TC y TP, sin necesidad de recuperar ninguno de ellos. Esto permitió reconocer el compromiso de los estudiantes a la hora de asistir a los encuentros, presentar las actividades o los materiales solicitados, estudiar para cada uno de los Trabajos Conceptuales y presentar en fecha y forma los Trabajos Prácticos.

En las correcciones, tanto de los TC como de los TP, se detectaron dificultades en el uso de vocabulario específico en la justificación de procedimientos llevados a cabo o en las afirmaciones presentadas. Los estudiantes tuvieron muy buen desempeño en las resoluciones de las actividades prácticas. Todos evidenciaron tener conocimientos en el uso de diferentes software, tanto para la interpretación de soluciones de problemas como para la representación de superficies.

En cuanto a la utilización del Aula Virtual del Taller, ésta les presentó dificultades a los estudiantes. Se observó que la utilizaron sólo para la descarga de material, no como medio de comunicación e intercambio entre ellos o con los docentes.

Los tres estudiantes aprobaron la instancia del Coloquio Final. Para reforzar la exposición oral de los problemas preparados por ellos, se realizaron varios encuentros previos en los que los estudiantes ensayaron la oralidad, los tiempos de exposición, como así también lo que escribirían en la pizarra y lo que explicarían oralmente. Se reconoció que este trabajo previo resultó de gran ayuda para profundizar en conceptos propios de la asignatura. Los estudiantes se sintieron más seguros en la exposición oral de los problemas y en el interrogatorio. Los problemas preparados por los estudiantes fueron seleccionados entre aquellos incluidos en el cuadernillo de la cátedra. Los alumnos se desenvolvieron bastante bien en el interrogatorio, con algunas imprecisiones en las escrituras en el pizarrón.

Luego de finalizado el Taller y realizado el Coloquio Final, se les pidió a los estudiantes la realización de una encuesta para conocer su opinión. A continuación, se muestran las respuestas obtenidas en cada una de las dos partes en que se dividía la encuesta:

- La Parte 1 incluyó 10 afirmaciones sobre las que los estudiantes debían elegir una ponderación (5 categorías). Los tres estudiantes respondieron “Muy de acuerdo” en todos los ítems, excepto un solo estudiante que en el ítem 1 respondió “De acuerdo” (Tabla 4).
- La Parte 2, a su vez, se dividió en tres secciones. Las dos primeras secciones incluyeron preguntas abiertas: la primera, sobre aspectos generales de desarrollo del Taller de AMII; y la segunda, sobre el Coloquio Final. Por último, se propuso a los estudiantes una reflexión final. En la Tabla 5 se muestran las respuestas de uno de los estudiantes.

Tabla 4. Parte 1. Encuesta a los estudiantes.

PARTE 1: Completar con una “x” el casillero que consideres apropiado en dicha escala.

		Muy en desacuerdo	En desacuerdo	Indeciso	De acuerdo	Muy de acuerdo
1	La organización del Taller ha sido correcta.					
2	El trabajo realizado en los encuentros presenciales personalizados ha permitido obtener un mayor nivel de entendimiento de los contenidos teóricos.					
3	Mis conocimientos previos han sido suficientes como para enfrentar los contenidos abordados.					
4	Las explicaciones en clase por parte de los profesores han sido correctas y claras.					
6	Los trabajos prácticos han sido un instrumento que favoreció la comprensión de los conceptos trabajados.					
7	Los exámenes conceptuales fueron acordes al nivel de lo desarrollado en clases.					
8	El tiempo de duración del curso fue suficiente.					
9	El grupo de compañeros ha permitido una buena forma de trabajo.					
10	La comunicación de fechas, formas de trabajo y evaluación ha sido correcta.					

Tabla 5. Parte 2. Encuesta a los estudiantes.

PARTE 2: Responder de la manera más completa posible. Escribir entre preguntas todo lo que consideres necesario.

EN GENERAL

1. *¿Fue necesario dedicar muchas horas semanales a las actividades propuestas por el taller?*

En lo personal fue necesario dedicarle tiempo, no sé si una gran cantidad de horas semanales, pero si dedicarle tiempo, ya que en cada tema que se finalizaba se correspondía un conceptual teórico, yo lo defino como un parcial/final por tema dado, sumado los trabajos prácticos correspondientes.

2. *¿Cuál es el contenido desarrollado con mayor claridad? ¿Cuál es el de menos?*

Los temas desarrollados fueron en su totalidad con claridad y las dudas que en clase surgían eran aclaradas con buen dominio de los temas.

3. *El material de trabajo resultó CLARO – COMPLETO – INCOMPLETO – POCO CLARO?*

Se lo podría definir como claro y práctico a la vez, con el contenido preciso para luego poder volcarlo en los conceptuales y resolver los problemas prácticos que se proponían en el taller.

4. *¿Qué consideras que faltó implementar o considerar?*

Desde mi punto de vista estaría bueno que el cursado y finalización sea en un periodo igual al del cursado de la materia, cosa de que se pueda aprovechar las mesas de examen final, entiendo que este es el primer dictado del taller y quiero hacer la salvedad y entiendo por qué se extendió en nuestro caso.

EXAMEN FINAL ORAL

5. *¿Ayudaron las clases previas de elección de problemas y simulacro para la preparación del examen final?*

Si ayudaron, ya que fueron de gran aporte a la elección de problemas y poder darle el enfoque que requería como examen final.

6. *¿Qué opinión tienes en cuanto a realizar el examen final en forma oral? ¿Crees que el mismo te ayudó en tu preparación profesional?*

Mi opinión es positiva, ya que nos nutre y ayuda a pararnos frente a un grupo de personas.

7. *¿El examen final oral permitió integrar conceptos trabajados? SI/NO*

Si porque en los problemas elegidos para el examen final contaban con los conceptos trabajados en el dictado del taller, si bien se trabajó sobre la última parte del temario se debió contar con los contenidos ya dados para la comprensión del mismo.

REFLEXION FINAL

8. *Expresa con una frase lo que comentarías a un compañero o compañera que vaya a realizar este curso una próxima vez.*

Le diría que lo realice, que cuenta con una muy buena metodología, y lo bueno que se rinde por tema dado y las clases por ser un grupo reducido son como clases personalizadas.

6 Conclusiones

Los resultados obtenidos en el Taller de AMII implementado con estudiantes de Ingeniería Mecánica durante el período 2013-2014 permitieron llegar a conclusiones en cuanto al alcance de las intenciones educativas formuladas y la continuidad de la propuesta.

En cuanto a las intenciones educativas referidas a los estudiantes, se considera que fue posible llevar a cabo una propuesta que motivó a los estudiantes a permanecer en el cursado, estudiando y cumpliendo con las exigencias del Taller. Como estrategia de recuperación de estudiantes de carreras de Ingeniería en la FRSN-UTN, la cátedra considera que se continuará realizando relevamientos periódicos de estudiantes en la misma situación, con el fin de extender la propuesta a estudiantes con problemas de horarios de trabajo, que se encuentren en años avanzados de su carrera y no sólo de Ingeniería Mecánica. Se considera realizar el Taller año por medio.

En lo referido al diseño y desarrollo del Taller, su implementación permitió generar ideas relativas a los modos de desarrollo de cada uno de los encuentros, la modalidad de los Trabajos Prácticos y la preparación de los estudiantes para el Coloquio Final. En cuanto a los encuentros, éstos deberían hacer más hincapié en la participación de los estudiantes en los desarrollos de los contenidos de cada unidad. Y en cuanto al Coloquio Final, para futuras cohortes se piensa en la búsqueda por parte de los estudiantes de nuevos problemas durante el año de cursado, como etapas de realización de Trabajos Prácticos, con su defensa en dicha instancia de examen final. También se prevé profundizar el trabajo con los estudiantes en cuanto a la oralidad y la escritura específica de la asignatura.

Referencias

1. Resolución 299/1978 CSU. Secretaría del Consejo Superior. Universidad Tecnológica Nacional.
2. Sacco, L. La innovación curricular en la Universidad y su impacto en las prácticas de los docentes. El caso de las materias integradoras de la carrera de Ingeniería Metalúrgica de la Facultad Regional San Nicolás. Trabajo de Tesis. Maestría en Docencia Universitaria. Facultad Regional San Nicolás, pp. 177-179 (2010)
3. Cols, E. Programación de la enseñanza. Ficha de cátedra: Didáctica I. Facultad de Filosofías y Letras. Universidad de Buenos Aires (2001)
4. Pérez Gómez, A.I. Enseñanza para la comprensión. En Gimeno, J. y Pérez, A.I. *Comprender y transformar la enseñanza*. Madrid: Morata, pp. 78-114 (1992)
5. Branda, L. Aprendizaje Basado en Problemas, centrado en el estudiante, orientado a la comunidad. En Aportes para un cambio curricular en Argentina, Jornadas de Cambio Curricular de la Facultad de Medicina de la Universidad de Buenos Aires, Organización Panamericana de la Salud, pp.79-101 (2001)
6. Sánchez Moreno, M. Cómo enseñar en las aulas universitarias a través del estudio de casos. Documento 07. Instituto de Ciencias de la Educación. Universidad de Saragoza (2008)
7. Edwards, V. La relación de los sujetos con el conocimiento. Tesis de Maestría. Programa Interdisciplinario de Investigación en Educación, PIIE. Cuadernillo No. 31 de Dimensión Educativa. Chile (1982)
8. Ausubel, D. P.; Novak, J. D.; Hanesian, H. Psicología educativa. Un punto de vista cognoscitivo. Trías Ed., México (1983)
9. Bur, A. Educación universitaria y conocimiento. XXI Jornadas de Reflexión Académica en Diseño y Comunicación Facultad de Diseño y Comunicación. Universidad de Palermo. Año XIV, Vol. 21, Buenos Aires, Argentina (2013)
10. Suarez Arroyo, B. la formación en competencias: un desafío para la educación superior del futuro. Barcelona (2005) Litwin, E. El oficio de enseñar: condiciones y contextos, Buenos Aires, Paidós (2008)
11. Blanco, N. Las intenciones educativas en Ángulo Rasco, J. y Blanco, N. (coords.). Teoría y desarrollo del curriculum. Málaga: Aljibe, pp.205-231 (1994) http://www.uv.mx/dgdaie/files/2012/11/CPP-DC-Blanco-Las-intenciones-educativas.pdf Accedido el 07 de Junio de 2015
12. Riccomi, H. y otros tres autores: Desarrollo de competencias y formulación de intenciones educativas en Análisis Matemático II. XIX EMCI. Facultad Regional San Nicolás. Universidad Tecnológica Nacional (2015)

13. Feldman, D. Didáctica general, Ministerio de Educación de la Nación, Buenos Aires, Argentina (2010)
14. Riccomi, H.; Sacco, L.; Schivo, M. E.; Pacini, C. Evaluación de aprendizajes en la Universidad. La comprensión del concepto de derivada direccional. XI CAREM. San Juan (2014)
15. Brousseau, G. Théorisation des phénomènes d'enseignement des mathématiques. Tesis de Doctorado de Estado. Univeridad de Bordeaux I Francia, pp. 282 (1986a).
16. Brousseau, G.; Centeno, J. Role de la mémoire didactique de l'enseignant". Recherches en Didactique des mathématiques. Vol. 11. Núms. 2-3. La Pensée Sauvage. Grénoble, pp. 203 (1991)
17. Riccomi, H.; Schivo, M. E.; Sacco L.; Pacini, C. Prácticas educativas, experiencias innovadoras y producción cultural. Unidades didácticas para el desarrollo de competencias. III Congreso Internacional de Educación. Construcciones y perspectivas desde y hacia América Latina. Santa Fé (2009)

Volver al Índice

Aprendizajes Significativos de Matemática en Ingeniería Mediante el Uso de Nuevas Tecnologías

José Luis Galoppo[1], Adolfo Vignoli[1], Daniel Lucio Sandín[1], Laura Cecilia Díaz[2]
[1] Departamento de Matemática, F.C.E.F. y N. – U.N.C.
Avenida Velez Sárfield 1610 – Córdoba
jose.galoppo@unc.edu.ar, adovig15@hotmail.com, daniel.sandin@unc.edu.ar
[2] Departamento de Computación, F.C.E.F. y N. – U.N.C.
Av. Velez Sárfield 1610 – Córdoba
lcd_ic@yahoo.com.ar

Resumen. En el presente artículo se presenta una experiencia que se viene realizando en la Facultad de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales de la Universidad Nacional de Córdoba, tendiente a lograr aprendizajes significativos en Matemática en los alumnos de 1er Año de las carreras de Ingeniería. Con ese objetivo se diseñaron cursos en aulas virtuales sobre la plataforma Moodle, en los que se trabajaron materiales de estudio de auto aprendizaje, que incluyeron tanto texto como video y se desarrollaron actividades interactivas como complemento de la enseñanza presencial. Todas estas prácticas fueron monitoreadas por evaluaciones periódicas de carácter formativo. Durante el 2016 se realizó la producción de los registros audiovisuales que constituyen la plataforma de lanzamiento para esta innovación tecnológica. Para el 2017 se planea la incorporación de herramientas audiovisuales, como una acción primera hacia la construcción de aulas interactivas que el estudiante tenga accesible con modalidad no presencial.

Palabras Clave: Aprendizajes significativos, TIC, Innovaciones.

1 Introducción

Durante el año 2012 las autoridades de la Facultad de Ciencias Exactas Físicas y Naturales (FCEFyN) de la Universidad Nacional de Córdoba (UNC) pusieron en marcha un plan de mejora de la calidad educativa en las materias del primer año de las carreras de Ingeniería.

Se plantearon acciones tendientes a detectar problemas y/o deficiencias en el aprendizaje en las asignaturas de los Departamentos de materias de Ciencias Básicas como Matemática y Física, y a proponer líneas de acción en consecuencia, para tratar de solucionarlos.

Durante este período se realizaron talleres con docentes de las materias de los departamentos antes mencionados, los que comprenden materias tales como Introducción a la Matemática, Análisis Matemático 1 y Álgebra Lineal, coordinados por profesionales en Ciencias de la Educación, integrantes del Departamento de Enseñanza de la Ciencia y la Tecnología de la facultad, en los que participaron los autores del presente trabajo en su carácter de docentes de dichas asignaturas.

En estas reuniones se explicitaron algunos de los inconvenientes que los docentes ya percibían en el trabajo diario con los alumnos:

- Falta de precisión en el uso del lenguaje matemático para definir conceptos, tanto oral como escrito. Por ejemplo se escucha decir: “Un vector es una fuerza”, “Una función es una fórmula”, etc.
- Insuficientes conocimientos previos, que debieran haberse adquirido en la enseñanza secundaria.
- Falta de hábito de lectura de textos de matemáticas.
- Falta de desarrollo de capacidad para un aprendizaje autónomo.
- Confusión entre el concepto matemático y la aplicación a otras disciplinas (Ej. “Vector – Fuerza”).
- Escasa transferencia de los conceptos teóricos a la resolución de situaciones problemáticas (ejercicios, problemas de aplicación, etc.)
- Insuficiencia en la interpretación de consignas.
- Desconocimiento y/o falta de destreza en el uso de herramientas informáticas para escribir fórmulas y presentar resultados matemáticos.

Al término de las deliberaciones surgió la propuesta de confeccionar materiales de estudio y actividades tendientes a incrementar los aprendizajes significativos en matemática. Algunas de esas propuestas fueron implementadas en los horarios de clase y otras se plantearon como actividades extra áulicas debido al escaso tiempo con el que se cuenta durante el dictado de las materias.

Un grupo de docentes desarrolló una guía de estudio y otra guía de ejercicios para proponerles a los alumnos su resolución fuera de los horarios de clase y la oportunidad de aclarar dudas en los horarios de consulta. Este es el grupo de docentes que no está familiarizado con el uso de las TIC en aula.

En cambio, nuestro grupo de investigación propuso la construcción y administración de aulas virtuales en el campus que posee la facultad sobre la plataforma Moodle: http://lev2.efn.uncor.edu/.

Este trabajo se desarrolló a lo largo de tres años (2013, 2014 y 2015) con grupos de alumnos de la cátedra de Introducción a la Matemática, en las cuales desarrollamos nuestra actividad los integrantes de este equipo de investigación [1]. Estas aulas virtuales funcionaron (y funcionan en la actualidad) como un ambiente de aprendizaje mixto ("*blended learning*") ya que los participantes eran alumnos de comisiones presenciales a cargos de sus respectivos docentes y en paralelo participaban de las actividades (no obligatorias) propuestas en el aula virtual.

De los datos recogidos a través de evaluaciones diagnósticas, cuestionarios y pruebas espejos, y su procesamiento posterior, quedaron en evidencia un conjunto de temas en donde los alumnos no habían alcanzado las competencias mínimas requeridas para el estudio de una carrera universitaria (escasa comprensión de textos y consignas, muy pobre manejo de herramientas informáticas para editar fórmulas y realizar gráficos de funciones, además de la falta de una referencia bibliográfica a donde los alumnos pudieran recurrir en caso de necesitarlo para reforzar (o directamente aprender) un tema específico.

Así fue como, surgió la idea de ofrecerle a los alumnos nuevas herramientas en un ambiente de aprendizaje más orientado a *e-learning*, es decir no presenciales y de acceso voluntario, que les facilitara alcanzar las competencias básicas que deben tener los alumnos de primer año de todas las carreras de Ingeniería para encarar su trabajo en asignaturas propias del currículum de cada carreras de las que se cursan en la FCEFyN.

Para ello se constituyó un grupo de investigación con docentes que veníamos trabajando en dichas aulas virtuales, y de la asociación con otros grupos de investigación de la universidad, se presentó un Programa de Investigación: "APROPIACION DEL CONOCIMIENTO Y DE LA TECNOLOGÍA" ante la Secretaría de Ciencia y Técnica (SECyT) de la UNC, el cual fue aprobado para su desarrollo en el bienio 2016-2017 [2].

Este trabajo se lleva a cabo junto a sendos proyectos de investigación asociados a dicho programa: "Inteligencia Artificial y desarrollo de simuladores hacia el diseño de cursos abiertos *on line*" [3] y "Hacia una metodología de enseñanza con la incorporación de TIC para facilitar el aprendizaje significativo de Matemática en Ingeniería" [4], en los cuales desarrollamos nuestra actividad los autores de este trabajo.

2 Propuesta de creación de los cursos

De acuerdo con la teoría del aprendizaje significativo [5], para que los nuevos conocimientos que se le presentan a un estudiante en materias de primer año de su carrera universitaria adquieran significado, éste debe seleccionarlos, procesarlos, aplicarlos y transformarlos para poder utilizarlos en dichas materias y en posteriores incluidas en su currículum.

Para ello debe relacionarlos con aprendizajes adquiridos anteriormente, ya sea en su etapa de estudios secundarios o durante el ciclo de nivelación que le ofrece la Facultad en su Ingreso a la misma. De lo contrario, no les serán significativos (útiles).

Además de este componente "*significativo*" que debe poseer el aprendizaje, podemos mencionar que de nuestro trabajo y el de otros docentes en distintas comisiones con aulas virtuales, se destaca la presencia de un componente "*afectivo*" notándose que aquellos cursos en donde el docente se involucra más en la administración de las actividades propuestas en el aula virtual (su publicación, corrección y devolución personalizada), y de un mayor acompañamiento de los alumnos, se obtienen mejores resultados. Esto está dado por el seguimiento personal que pueda hacer el docente y del descubrimiento de las necesidades particulares en determinados temas y la sugerencia de bibliografía complementaria y ejercitación adicional para que el alumno supere dichas limitaciones en el tiempo que le sea útil para superar las evaluaciones de acreditación formal de la materia.

Como se mencionó en el apartado anterior, en base a las fallas detectadas en el aprendizaje presencial con los estudiantes en el trabajo del docente en cada comisión de alumnos de la asignatura Introducción a la Matemática, y del seguimiento personalizado de los aprendizajes que el docente realiza mediante las autoevaluaciones formativas incluidas en las aulas virtuales, se comenzó con acciones orientadas a la creación, administración y confección de cursos abiertos a todos los estudiantes de 1er año de la Facultad, adaptados al aprendizaje autónomo con materiales y actividades que tengan en cuenta el proceso individual que cada estudiante debe realizar para lograr un aprendizaje significativo.

Dichas aulas virtuales en una primera etapa estarán disponibles para los alumnos de la asignatura Introducción a la Matemática de la FCEFyN teniendo como referencias permanentes las diversas implementaciones de MOOC [6] en el mundo entero (edX, Coursera, Miriada X, etc.). Además, el docente puede sugerirle la participación en uno u otro curso de los que están a disposición ya sea para que complete su formación en temas en los cuales presenta un escaso logro de las competencias básicas o en cursos propios de la asignatura que está cursando.

2.1 Gestión de los contenidos en la preparación del curso

En la preparación de los cursos de Matemática propuestos para ser implementados, se prevé la inclusión de materiales y actividades que incluyan medios audiovisuales y herramientas informáticas, tales como:

MATERIALES

- Guías de estudio adaptadas al aprendizaje autónomo con preguntas más frecuentes y sus respuestas y con diagramas conceptuales (realizados en alguna herramienta informática como Prezzi o Cmap).
- Guía de problemas de aplicación con ejercicios pertinentes a la orientación de cada especialidad de la carrera del estudiante).
- Lecciones con temas de complejidad progresiva.
- Clases filmadas (descriptas con mayor detalle a continuación en el punto 2).
- Otras herramientas audiovisuales.

ACTIVIDADES

- Glosario colaborativo de términos.
- Foros de preguntas y respuestas mediados por el docente tutor.
- Foros de problemas propuestos y sus resoluciones llevadas a cabo por los alumnos con la correspondiente devolución por parte del docente.
- Cuestionarios de Autoevaluación que le permitan a los estudiantes tener una realimentación del avance de su proceso de aprendizaje y realizar las correcciones necesarias para lograr alcanzar los objetivos propuestos.

2.2 Proceso de evaluación de los resultados

En función del procesamientos de los datos obtenidos con los participantes del primer cuatrimestre de este año y de las encuestas que se les realizarán a los estudiantes en este periodo lectivo, se desarrollará una propuesta de mejora de los cursos existentes contemplando la posibilidad de ponerlos a disposición de la comunidad educativa de la UNC a través de alguna plataforma educativa de las mencionadas anteriormente (edX, MiriadaX ó Coursera) que permita la administración de esta modalidad de cursos, para lo cual deberá ponerse especial énfasis en el análisis de factibilidad desde la dimensión institucional, es decir, de las autoridades de la Universidad Nacional de Córdoba.

Por otra parte, desde las cátedras involucradas, los Profesores Titulares han propiciado desde sus comienzos las acciones que nuestro equipo de investigación ha desarrollado, razón por lo cual no es inadecuado esperar un escenario favorable a la puesta en marcha de esta nueva estrategia.

Las acciones desarrolladas hasta el momento, por otros subequipos pertenecientes al Programa de investigación, consisten en:

- La difusión en espacios de intercambio para generar vinculaciones.
- El acercamiento a las Autoridades actuales de la Universidad para favorecer la institucionalización.
- El desarrollo de producciones audiovisuales de clases durante el primer cuatrimestre de 2016 [7].
- Los procesos de edición y ajuste de esas producciones, actualmente en desarrollo.
- La planificación para la implementación y puesto a punto del Curso como experiencia Piloto.
- El desarrollo de las herramientas de evaluación para evaluar la calidad de las innovaciones tecnológicas.
- La elección del universo de estudiantes donde se aplicará el prototipo con la propuesta de medición y análisis para la revisión y la mejora.

2.3 Descripción de las producciones audiovisuales realizadas durante el año 2016

Durante el primer semestre de 2016, otros integrantes del Programa de investigación se focalizaron en el desarrollo de las producciones audiovisuales en las Ciencias Básicas de las carreras de Ingeniería de la Universidad Nacional de Córdoba.

Las acciones se desarrollaron en el área de Matemática para Ingeniería, destacando las dificultades encontradas, los aciertos y desaciertos durante la evolución de los procesos. Conjuntamente con el docente a cargo de la asignatura y con otros miembros del equipo se tomaron las decisiones acerca de la cantidad de clases a grabar, el contexto áulico, la disposición del equipamiento en el aula y otros aspectos en relación al sonido y la iluminación.

- Se partió de una base de guión técnico, conformado por el programa de la asignatura Introducción a la Matemática y el temario de clases**.**
- Algunos de los temas desarrollados fueron: Números reales, valor absoluto y desigualdades, Matrices y sistemas de ecuaciones, vectores y su aplicación al estudio de rectas y planos; problemas métricos de distancia y ángulo entre los mismos.
- Para la obtención del material audiovisual crudo se utilizaron una cámara profesional Canon T3i, micrófono inalámbrico, y grabadora de audio h4n zoom., un trípode de filmación de video.
- Se notificó a los alumnos la importancia de no interferir con la grabación.
- Se trabajó con la iluminación natural del aula.

Los equipos utilizados fueron prestados por el Laboratorio Multimedia e Informática Educativa del Departamento Universitario de Informática y del Canal Escuela TV5 de la Facultad de Artes de la UNC.

Esta experiencia fue realizada con un curso del primer cuatrimestre del primer año de estudiantes de Ingeniería Mecánica. Con posterioridad a la etapa de filmación cruda de las clases presenciales, se agregaron ajustes gráficos para reforzar las expresiones matemáticas y los conceptos claves [7].

Personas que intervinieron:

- Filmación: Gisela Hirschfeld.
- Edición: Roberto Chavez Acha.

Se observó como dificultad, la excesiva extensión de los videos, que los tornan susceptibles de ser percibidos como tediosos por el espectador y que, por lo tanto, le resulte difícil sostener su atención con la concentración que el proceso de aprendizaje requiere. En ese sentido, se decidió la partición del contenido en bloques temáticos de no más de cinco minutos, basándose también en indagaciones realizadas sobre otras experiencias de Universidades con visibilidad internacional. Con herramientas informáticas se agregó texto a las filmaciones y se editó parte del material filmado incluyendo títulos en las secciones, fórmulas importantes en el desarrollo de los temas, ejercicios desarrollados con resultados, etc.

Herramientas (informáticas) con las que se hizo la edición de las filmaciones: PC Pentium 2 core i5 y Software Adobe Premiere Pro Cs.

Como primera aproximación a las posibles repercusiones del proyecto, surgieron numerosas solicitudes por parte de los estudiantes para tener acceso al material a la brevedad posible.

Esto refuerza uno de los fundamentos de las acciones que el Programa sostiene, la necesidad de poner a disposición y accesible a los estudiantes, los registros audiovisuales de las clases fuera del ámbito áulico, para posibilitar su estudio previo, su revisión o su participación en el caso de ausencias. En cualquier caso, con los tiempos propios del individuo en proceso de aprendizaje.

Actualmente se cuenta con todas las grabaciones en proceso de edición del material teniendo en cuenta los cuestionarios y encuestas respondidas por los estudiantes para poner mayor énfasis en los temas que les resultan más necesarios y/o relevantes.

En el primer cuatrimestre de este año 2017, se pondrá a disposición de los estudiantes de la asignatura Introducción a la Matemática de Ingeniería, las producciones realizadas durante el 2016 con el fin de evaluar la receptividad de los mismos al tener accesibles en el aula virtual, los audiovisuales de las clases presenciales convenientemente editadas. Ello, con el previo acuerdo del profesor responsable de la asignatura, desde la plataforma Moodle, administrada en el ámbito de la FCEFyN.

La forma de evaluar la receptividad de los mismos será a través de las estadísticas que arroje la plataforma, teniendo en cuenta la cantidad de personas que vieron cada video y la cantidad de veces que es accedido, siendo esto un indicador de la utilidad que tuvo para los alumnos dicho video.

2.4 Propuesta de implementación de cursos abiertos

Para los cursos abiertos *on line*, en proceso y por producir, la decisión está supeditada a las del equipo del Programa de investigación y a las autoridades de esta Universidad que, como ya se mencionó, tiene una visión muy alineada con las bases que dan fundamento a este Proyecto.

En base a ello y a la evaluación de la implementación en la plataforma Moodle para los estudiantes de Ingeniería, motivo de este trabajo se tomarán las decisiones para llevar adelante cursos abiertos en alguna plataforma educativa, del tipo edX: https://www.edx.org ó alguna similar.

3 Conclusiones y trabajos futuros

Nuestra tarea docente exige que permanentemente estemos revisando nuestras prácticas para corregirlas y/o para incorporar innovaciones que produzcan el fruto que nuestro esfuerzo busca lograr en los alumnos. Citando a César Coll [8] podemos decir, que tan importante como medir el impacto de las TIC en el aprendizaje de nuestros alumnos, lo es en descubrir cómo la incorporación de las TIC a los procesos formales de enseñanza y aprendizaje pueden modificar, y modifican de hecho en ocasiones, las prácticas educativas.

El razonamiento que subyace a este cambio de perspectiva es que no tiene mucho sentido intentar establecer una relación directa entre la incorporación de las TIC y los procesos y resultados del aprendizaje, ya que esta relación estará siempre modulada por el amplio y complejo abanico de factores que conforman las prácticas educativas. Lo que hay que hacer, se propone, es más bien indagar cómo, hasta qué punto y bajo qué circunstancias y condiciones las TIC pueden llegar a modificar las prácticas educativas a las que se incorporan.

Dentro de estas innovaciones se encuentra, como lo comentamos en el artículo, la de incorporar videos y otros materiales audiovisuales dentro de las aulas virtuales que utilizamos para completar la enseñanza de la matemática en nuestras carreras de Ingeniería (*blended learning*).

Creemos que los alumnos están más familiarizados con la utilización de videos para el aprendizaje de los temas y que éstos pueden complementar el aprendizaje de los temas vistos en clase y vueltos a ver en su casa a través de la plataforma virtual. Estos nuevos usuarios enfocan su trabajo, el aprendizaje y los juegos de nuevas formas: absorben rápidamente la información multimedia de imágenes y videos, igual o mejor que si fuera texto; consumen datos simultáneamente de múltiples fuentes; esperan respuestas instantáneas; permanecen comunicados permanentemente y crean también sus propios contenidos. Forman parte de una generación que ha crecido inmersa en las Nuevas Tecnologías, desarrollándose entre equipos informáticos, videoconsolas y todo tipo de artilugios digitales, convirtiéndose los teléfonos móviles, los videojuegos, Internet, el email y mensajería instantánea en parte integral de sus vidas y en su realidad tecnológica.

Estos son los nativos digitales [9].

Como conclusión de nuestro trabajo con nuevas tecnologías, para este año 2017 nos proponemos:

- Implementar aulas virtuales con alumnos de cursos presenciales (*blended learning*) donde estén disponibles las producciones audiovisuales realizadas durante el pasado año (2016)
- Mejorar las características de las producciones audiovisuales, repitiendo las grabaciones de las clases a los fines de mejorar algunos aspectos que detectamos como de ser posible.
- Editar el material que obtuvimos a los fines de agregar títulos, fórmulas, gráficos y todo otro recurso que permita mejorar la percepción del alumno sobre los temas expuestos
- Medir el impacto que éstas tienen en nuestros alumnos a través de evaluaciones formativas y comparándolas con las obtenidas durante el año 2016 con las aulas virtuales que no contenían estos nuevos recursos (o sea, sin videos de las clases).
- Intercambiar experiencias con cátedras de otras Facultades de la UNC a los fines de recabar nuevas ideas que mejoren la experiencia de la introducción de videos de clases en las aulas virtuales

Agradecimientos. De manera muy especial al titular de la Cátedra de Introducción a la Matemática, el Ing. Pedro Santucho por permitirnos desarrollar nuestras actividades de investigación con grupos de alumnos presenciales de las comisiones de la materia. Cabe destacar que actualmente son 3 las comisiones en las que se desarrolla este proyecto de investigación.

Además agradecer a las autoridades de la FCEFyN y a la SECyT de la UNC, que nos proporcionan los recursos para el desarrollo de nuestra investigación.

Referencias

1. Galoppo, J.L.; Vignoli, A. Sandín, D.; Diaz, L.C. (2016): UTILIZACIÓN DE TIC PARA LOGRAR APRENDIZAJES SIGNIFICATIVOS EN MATEMÁTICA EN LAS CARRERAS DE INGENIERÍA. *III CADI – IX CAEDI*, Resistencia, Chaco. (2016)
2. Programa de investigación aprobado por la SECyT – UNC: APROPIACION DEL CONOCIMIENTO Y DE LA TECNOLOGÍA, para ser desarrollado durante el bienio 2016-2017. Director: Laura Cecilia Díaz
3. Diaz, L.C., Chautemps, A: "Proyecto: Inteligencia Artificial y desarrollo de Simuladores hacia el diseño de Cursos Abiertos On Line". WICC 2016. XVIII Workshop de Investigadores en Ciencias de la Computación. UNER, Entre Ríos. Pag 219-224. ISBN 978-950-698-377-2. (2016)
4. Proyecto de investigación aprobado por la SECyT – UNC: "Hacia una metodología de enseñanza con la incorporación de TIC para facilitar el aprendizaje significativo de Matemática en Ingeniería", para ser desarrollado durante el bienio 2016-2017. Director: José Luis Galoppo
5. Ausubel, D.: Adquisición y retención del conocimiento. Una perspectiva cognitiva. Ed. Paidós. Barcelona. (2002).
6. Méndez García, C. (2013). Diseño e implementación de cursos abiertos masivos en línea (MOOC): expectativas y consideraciones prácticas. *RED. Revista de Educación a Distancia*. 39. Septiembre-Diciembre, 58-77. http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=54729539004. Accedido el 19 de febrero de 2017.
7. Britos, D., Díaz, L., Morales, S., Vargas, L., Vignoli, A., Hirschfeld, G., Presman, T. (2016): "Los MOOC como propuesta para la estandarización de la calidad educativa". *TE&ET 2016*. Universidad Nacional de Morón. CABA. Argentina.
8. Coll, César: "Aprender y enseñar con las TIC". Boletín de la Institución Libre de Enseñanza Nº 72, Madrid, Diciembre 2008. https://www.educ.ar/recursos/70819/aprender-y-ensenar-con-las-tic-expectativas-realidad-y-potencialidades. Accedido el 20 de marzo de 2017
9. Felipe García, Javier Portillo, Jesús Romo, Manuel Benito: "Nativos digitales y modelos de aprendizaje" Universidad de País Vasco / Euskal Herriko Unibertsitatea (UPV/EHU). IV Simposio Pluridisciplinar sobre Diseño, Evaluación y Desarrollo de Contenidos Educativos Reutilizables. SPDECE07. Bilbao, Spain, September 19-21, 2007. http://ceur-ws.org/Vol-318/Garcia.pdf. Accedido el 20/03/2017

Volver al Índice

Experiencia de Aprendizaje de Asíntotas de Funciones con Mathematica

Scorzo Roxana
Departamento de Ingeniería, Universidad Nacional de La Matanza
Florencio Varela 1903, San Justo, Provincia de Buenos Aires, Argentina
rscorzo@unlam.edu.ar

Resumen. En este artículo describimos la organización de una experiencia de aprendizaje sobre asíntotas de funciones usando software Mathematica en un curso de Análisis Matemático I del Departamento de Ingeniería e Investigaciones Tecnológicas de la Universidad Nacional de La Matanza. La misma fue llevada a cabo en los laboratorios de informática de la universidad. Pondremos el acento en la gestión de la clase cuya organización responde a una característica frecuente en los cursos de primer año que es el gran número de alumnos y el poco tiempo para desarrollar los temas. Mostramos la organización del blog armado para llevar adelante la experiencia, la gestión de la clase, como recolectamos la información a través de la web, la justificación teórica de la organización de las actividades, explicitamos alguna de ellas y una breve reflexión final acerca de la experiencia.

Palabras Clave: Asíntotas, Software Mathematica, Herramientas web

1 Introducción

La introducción de herramientas tecnológicas en el proceso de aprendizaje ya no está en discusión y menos aun cuando estamos formando futuros ingenieros. Sin embargo los cursos numerosos de las asignaturas básicas, aulas que no están equipadas convenientemente, una materia con mucho contenido y de un alto nivel de abstracción como lo es el Análisis Matemático y un conocimiento previo endeble de contenidos matemáticos básicos por parte de los estudiantes, dificulta la incorporación de las mismas en forma activa por parte de todos los protagonistas del proceso de enseñanza-aprendizaje.

Nos pareció interesante describir una experiencia de aprendizaje que trató de saltar estos escollos y quizá darla a conocer alienta a otros colegas a replicarla. Dentro del marco de una tesis que intenta indagar sobre las imágenes mentales y conceptuales de los estudiantes sobre asíntotas de funciones cuando se trabaja con software, se diseñaron una serie de actividades para desarrollar el tema utilizando el software Mathematica, el cual está disponible en los laboratorios de la Universidad. Como la duración de la clase fue de cuatro horas, nos vimos en la necesidad de organizar los materiales a utilizar y la gestión de la clase previamente. Es por estas razones que en este trabajo nos centraremos precisamente en esta organización lo que incluyó diseño y organización de un blog para tal fin, la gestión de la clase, una breve justificación teórica de las actividades, las formas de recolectar la información a través de la web para futuros análisis y concluiremos con reflexiones sobre la experiencia.

2 Marco teórico

2.1 El uso del software en la enseñanza de la matemática

Tall [1] destaca que el nuevo paradigma tecnológico obliga a los docentes a realizar una reflexión profunda acerca de cuáles son los contenidos matemáticos necesarios a enseñar, como así también a realizar un replanteo profundo en cuanto a la forma de organizar las clases. La utilización de las nuevas tecnologías [2] generan cambios metodológicos en la enseñanza de la matemática, y el uso de software por parte de los estudiantes le permite a éstos involucrarse más con actividades de exploración, conjetura, explicación, etc. Por otra parte la incorporación de una herramienta potente como lo es el software Mathematica [3] presenta en el proceso de aprendizaje algunas dificultades que son importantes señalar para tener en cuenta en la planificación de una clase:

- El proceso de enseñanza se torna más lento dado que los alumnos deben enfrentarse con un software que no conocen.
- El tiempo necesario para desarrollar actividades con software es mayor que el empleado en la enseñanza convencional y frente al cumplimiento de un programa de contenidos esto es una desventaja.

- La asistencia del docente es individual y en cursos numerosos esto modifica los tiempos de la clase e incluso requiera que no esté solo sino con alguien que pueda ayudar en la tarea.
- Los espacios físicos con computadoras a veces no son lo suficientemente grandes para albergar a muchos estudiantes y si los cursos son muy numerosos esto se transforma en un elemento clave para elaborar la planificación de una clase.

Pero también la incorporación del software tiene una serie de ventajas que explicitamos [3]:

- El potencial gráfico del software facilita la exploración por parte del alumno.
- Provoca una retroalimentación inmediata por su característica interactiva.
- El entorno algebraico poderoso del software evita pérdidas de tiempo por parte del alumno, concentrándolo más en la comprensión de conceptos.

2.2 Aplicaciones de la Web

Son muchas las aplicaciones que se conocen como Web 2.0, incluso muchos cursos de capacitación docente hacen referencia a ellas. Una de ellas, que se los conocen como generadores de contenidos, son los blogs: estos permiten la administración de contenidos propios y de páginas de la web [4]. Estas tecnologías de la información y comunicación son consideradas un medio didáctico, un instrumento, que permiten diseñar clases y organizar el proceso de enseñanza –aprendizaje modificando el rol de los actores que intervienen en dicho proceso [4]. Por otra parte Fumero [5] considera que el blog es un servicio que permite publicar y compartir contenidos, de fácil creación, administración eficaz y generalmente gratuitos. La naturaleza de los mismos se define a partir de las aplicaciones que el administrador realiza de ellos, siendo la característica principal de esta tecnología la hipertextualidad, es decir el enlace [5].

3 Contexto de aplicación

La experiencia se llevó a cabo con alumnos que cursan Análisis Matemático I en carreras de Ingeniería de la Universidad Nacional de La Matanza. El dictado de la asignatura se realiza en aulas que no están equipadas con herramientas tecnológicas, los bancos son muy pequeños esto dificulta el uso de computadoras personales y tampoco hay disponibilidad de toma corriente. Como contrapunto de esto los laboratorios de la Universidad son amplios y planificando una clase se puede disponer de su uso. Los cursos son muy numerosos y en muchas ocasiones es la primera vez que enfrentan una asignatura como alumnos universitarios. Cada comisión cuenta con dos docentes trabajando en forma simultánea, uno a cargo del mismo y otro como ayudante. Para llevar a cabo esta experiencia fue necesario contar con la presencia de tres profesores. Como parte de la acreditación de la materia los alumnos deben realizar un trabajo práctico con el software, motivo por el cual desde las primeras clases los estudiantes tienen acceso a documentos realizados con el software en la plataforma Miel de la Universidad en el espacio de Materias Interactivas. Estos documentos son de ayuda y motivación para que la incorporación de la herramienta informática colabore en el proceso de aprendizaje de los alumnos.

4 Metodología de trabajo

La metodología que utilizamos para desarrollar esta experiencia de clase consistió en los siguientes ítems:

- Planificación previa a la experiencia.
- Diseño y organización de un blog.
- Organización de la gestión de clase.
- Formas de recolectar información vía Web para futuros análisis.
- Diseño de los materiales a utilizar.

Describimos a continuación cada uno de ellos.

4.1 Planificación previa a la experiencia

Como dijimos previamente estas actividades forman parte de un trabajo de tesis sobre imágenes mentales y conceptuales se organizó la clase y los materiales en tres etapas. La primera referida a actividades destinadas a conocer las ideas que tenían los alumnos acerca del concepto de asíntotas de funciones y como las explicitaban con la herramienta informática. La segunda relacionada con el uso del software y la tercera sobre asíntotas a determinadas funciones.

Para la primer y segunda parte decidimos que los alumnos trabajaran en grupos de dos, tres o cuatro personas a voluntad y para la tercera se dividió en cuatro grupos que llamamos con las letras A, B, C y D.

Con el fin de agilizar la clase el día de la experiencia los materiales se organizaron previamente y estaban disponibles en un blog, tratando de incorporar en él todos los recursos necesarios para llevar a cabo a clase.

4.2 Diseño y organización de un blog

A fines operativos decidimos trabajar con un blog pues éste es considerado una herramienta de innovación en la enseñanza universitaria presencial por su fácil creación y porque permite desarrollar propuestas de aprendizaje tanto grupales como individuales de fácil acceso, favoreciendo la colaboración y participación de todos los implicados en la actividad a resolver [6].

El sistema de entradas, los enlaces al correo electrónico de cada participante, la posibilidad de descargar material, el acceso a encuestas entre otras cosas permiten enriquecer el abordaje de la temática a estudiar [4].

En el blog diseñado se encontraba todo el material que era necesario para el trabajo en el laboratorio. Estaba dividido en dos partes. La primera entrada del blog estaba referida a la Actividad 1 (Fig. 1), la cual constaba de un archivo con los comandos básicos del software: definir funciones, resolver ecuaciones e inecuaciones, calcular límites y graficar. El mismo se encontraba disponible en dos formatos: pdf y nb. La razón por la cual incorporamos estos documentos es que el estudiante tenga el acceso operativo, es decir el conocimiento básico del software a utilizar [7].

Otro archivo en el cual figuraba el texto completo de la Actividad 1 y por último un enlace a un formulario online en el cual los alumnos podían ingresar sus datos personales, nombre y apellido y subir el archivo generado con el software, por cada uno de los grupos, al finalizar la actividad.

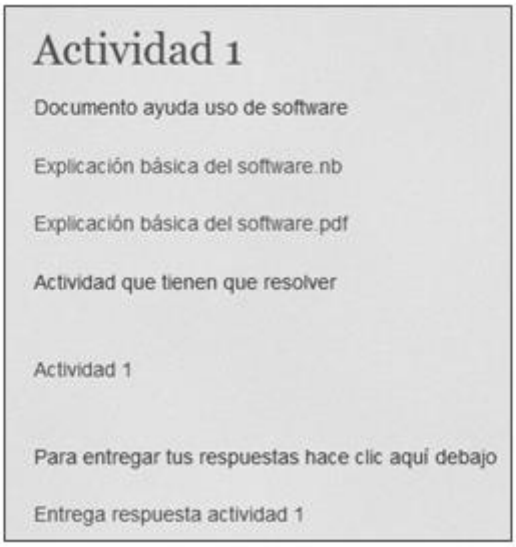


Fig.1. Primera entrada al Blog

La segunda entrada del blog tenía todo lo relacionado con la Actividad 2 (Fig. 2). En primer lugar había un archivo con las definiciones de asíntotas y los ejemplos de funciones que se usarían para tal fin. A continuación, estaban los enunciados de la Actividad 2. Estos archivos estaban divididos en 4 grupos debido a la cantidad de alumnos que asistían al laboratorio el día de la experiencia, sumado a la imposibilidad de analizar las 16 propuestas de trabajo por todos los estudiantes. Los grupos los designamos con las letras A, B, C y D respectivamente. En cada grupo había 4 ejercicios para resolver cada uno de ellos en distintos registros de representación: uno en registro gráfico, otro en algebraico, otro en verbal y finalmente uno donde se combinaban los registros gráfico con algebraico. También en esta entrada los alumnos contaban con un enlace para poder enviar sus producciones.

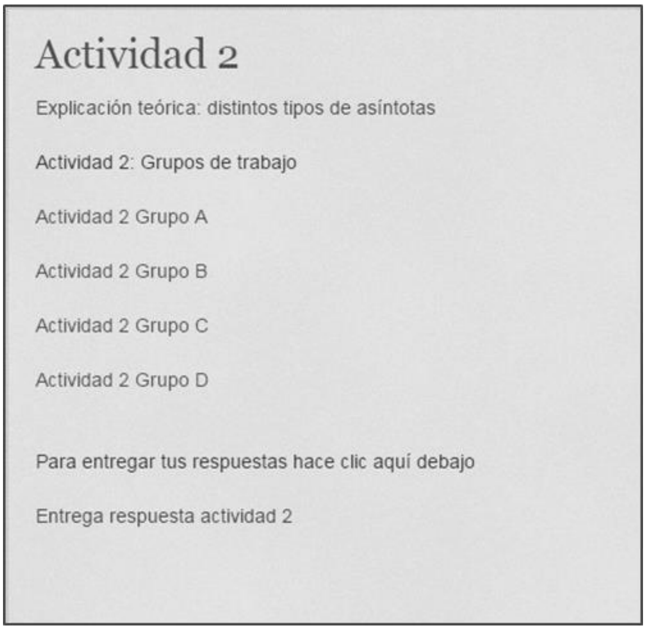


Fig.2. Segunda entrada al Blog

4.3 Organización de la gestión de clase

La clase duró cuatro horas y se planificó en tres etapas:

Primera etapa

En primer lugar se organizaron en equipos de acuerdo a la cantidad de computadoras disponibles en el laboratorio. Se formaron 20 grupos de trabajo y participaron de la experiencia 57 alumnos. Los equipos de trabajo fueron armados en forma voluntaria por los estudiantes, hubo grupos de dos, tres o cuatro integrantes. Una vez organizados, se les dio la dirección del Blog de trabajo. En esta etapa trabajaron con los contenidos explicitados anteriormente en la Primera entrada al Blog.

Comenzamos con una breve explicación sobre el uso del software mientras los alumnos experimentaban en las computadoras los comandos explicitados. Luego se les pidió que resuelvan la Actividad 1, la misma era introductoria al tema, previa a la enseñanza formal del concepto, queríamos saber que ideas tenían los alumnos acerca de las asíntotas de funciones, como las explicitaban con la herramienta informática y que registros de representación utilizaban en sus respuestas.

El tiempo asignado para desarrollar esta actividad fue de 45 minutos. Al finalizar los alumnos entregaban sus producciones a través de un link correspondiente a una cuenta Dropbox completando el formulario cuya imagen se ve en la Fig. 3 junto con un ejemplo de producción de uno de los grupos de trabajo.

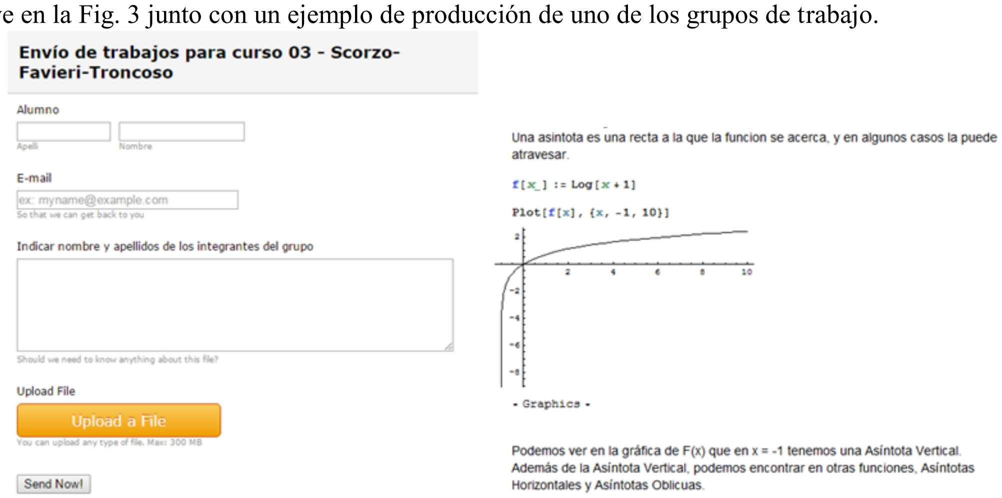


Fig.3. Vista del formulario que completaban para entregar las producciones y un ejemplo de una de ellas

Segunda etapa

En esta etapa se explicaron los tres tipos de asíntotas: verticales, horizontales y oblicuas. En el blog estaba disponible un documento en el cual figuraban las tres definiciones y ejemplos para cada una. Al concluir las explicaciones los alumnos debían encontrar las ecuaciones de las rectas asíntotas de la siguiente función:

$$f(x) = \frac{x}{\ln x}$$

Este ejercicio fue realizado de manera conjunta, los alumnos en las computadoras podían consultar con las docentes que iban pasando por los grupos que requerían ayuda. Luego se hizo una puesta en común en el pizarrón.

Tercera etapa

En esta etapa los alumnos resolvieron la Actividad 2, que como hemos explicitados en la descripción del Blog se dividió en cuatro grupos: A, B, C, D. Se le asignó a cada equipo con cual debería trabajar de modo tal que cinco grupos trabajaron con cada uno de ellos.

Esta actividad se desarrolló a lo largo de dos horas y se presentó usando diapositivas de Power Point, con un encabezado común a todas (Fig. 4).

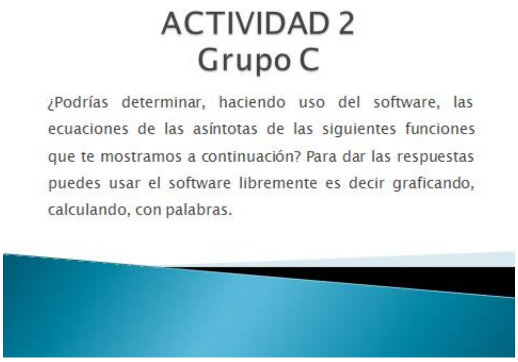


Fig.4. Diapositiva con el enunciado de la Actividad 2

En cada uno de estos grupos había cuatro ejercicios para resolver, los estudiantes debían dar sus respuestas usando el software, como dice la consigna previa (Fig.4). En el apartado 4.5 mostramos un ejemplo y una breve justificación del porqué de su diseño.

4.4 Recolección de la información

En la descripción del blog indicamos que en cada una de las entradas se ofrecía un enlace a un formulario para la entrega de las resoluciones de las actividades propuesta. A través de dichos formularios recolectamos la información en carpetas de Dropbox que es un servicio de alojamiento de archivos multiplataforma en la nube, que permite a los usuarios almacenar y sincronizar archivos en línea y entre ordenadores, compartir archivos y carpetas con otros usuarios, con tabletas y móviles [10]. Así logramos facilitar la gestión de la clase y la entrega de las producciones. Elegimos este servicio en línea pues ofrece facilidades para compartir archivos y está protegido por varias capas de seguridad, desde una infraestructura distribuida, hasta las potentes herramientas administrativas. En la Nube encontramos servicios que favorecen el trabajo colaborativo, en estos se permite almacenar documentación que puede ser modificada por otros usuarios que no necesariamente se encuentran conectados al mismo tiempo [11]. Esta experiencia fue parte de un trabajo de tesis de Maestría, por eso los alumnos fueron grabados mientras trabajaron y contamos con su aceptación ya que explicitamos anteriormente a la clase cual sería la modalidad de trabajo y en qué se usarían sus producciones.

4.5 Justificación teórica del diseño y organización de las actividades

La clase se organizó de la forma antes explicada porque queríamos indagar acerca de las imágenes mentales y conceptuales de los estudiantes cuando se trabaja un tema con una herramienta informática. Si bien esto no es el eje central de este artículo para que se entienda la organización de la clase explicitamos que Vinner [12] define imagen mental relacionada con un concepto matemático como el conjunto de todas las imágenes que están asociadas al mismo; y que puede incluir cualquier representación visual del concepto, incluso símbolos, gráficos o palabras. Para intentar identificar las imágenes mentales de los alumnos sobre rectas asíntotas a una función, diseñamos la primera actividad teniendo en cuenta un trabajo sobre funciones de dicho autor. Estas imágenes mentales son previas a la enseñanza del tema. A su vez el autor define a las imágenes conceptuales como el conjunto de propiedades asociadas con el concepto junto con la imagen mental previa a su enseñanza, la cual en algunos casos generan conflictos de tipo cognitivos. Por otra parte Duval [8] señala que un buen aprendizaje y el dominio de un determinado concepto se basa en el reconocimiento de diferentes registros de representación y la capacidad de poder pasar de uno a otro y que esto último es lo que enriquece la imagen conceptual que el sujeto tiene de dicho concepto. Por estas dos razones es que la segunda actividad los estudiantes la resuelven luego de la explicación teórica del concepto y los cuatro ejercicios que la forman están en diferentes registros de representación.

Como queríamos presentar ejercicios con características que planteen diferentes conflictos cognitivos respecto al concepto de asíntotas, como estudiamos en experiencias anteriores [9], fue necesario elaborar los distintos grupos para tener diferentes situaciones como por ejemplo que una función presente al mismo tiempo asíntotas horizontales y oblicuas, o que la función tenga puntos de intersección con las asíntotas, entre otros. A modo de ejemplo mostramos las diapositivas de uno de los grupos el "C" (Fig. 5).

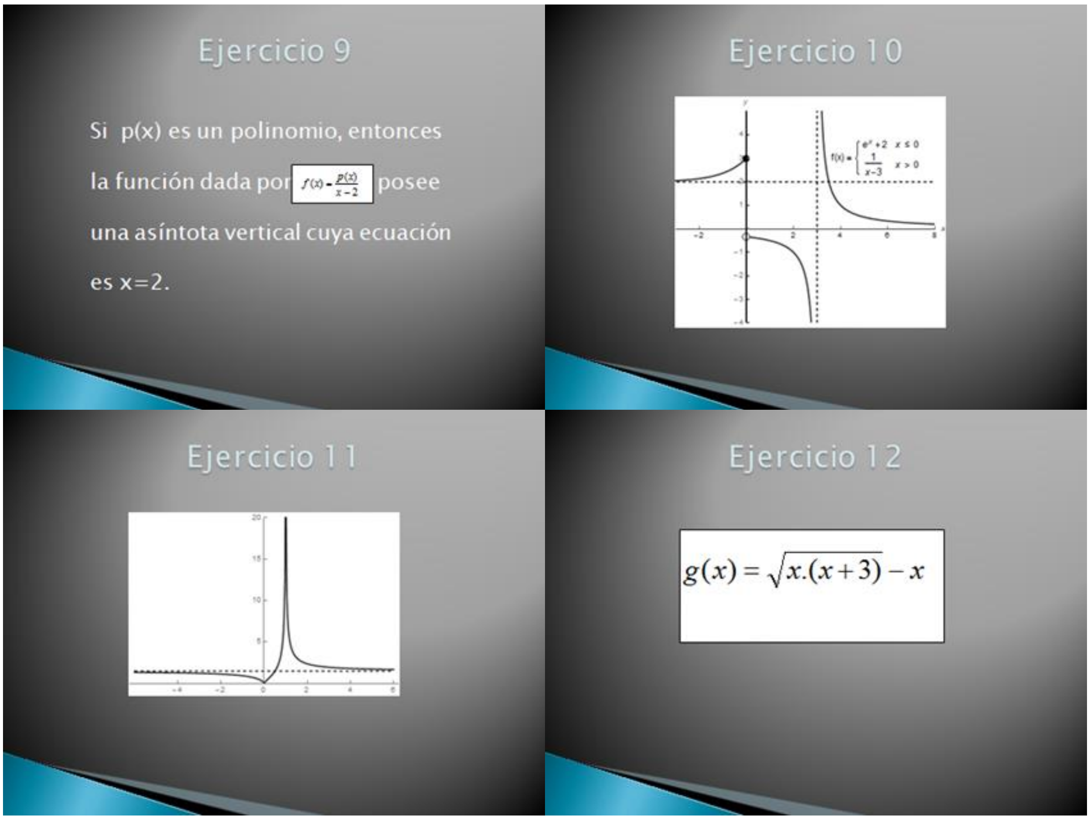


Fig.5. Diapositivas del grupo C

Hemos hecho referencia a los registros de representación dado que es una característica muy presente en la guía de trabajos prácticos de la asignatura y se pone mucho énfasis en la variación de los mismos ya que el pasaje de uno a otro favorece la comprensión de un concepto matemático [6] y sin que prevalezca uno por encima del otro. No es el tema central del presente artículo pero consideramos importante aclarar esta posición teórica que determinó el diseño de la Actividad 2. Se observa que el ejercicio 9 está dado en registro verbal, el 10 en forma gráfica y algebraica, el 11 sólo gráfico y el 12 sólo analítico. Esta característica se repitió en los otros grupos.

Para aquellos que lo deseen pueden a través del siguiente link http://portfoliorscorzoconectar.blogspot.com.ar/ acceder al blog y mirar los otros grupos de actividades que fueron pensadas con la misma lógica que la explicitada en este artículo.

5 Reflexiones finales acerca de la experiencia

Las actividades a posteriori fueron evaluadas y cada equipo de trabajo tuvo su devolución en forma escrita enviada vía mail y luego en la clase siguiente una reflexión general de la experiencia a la luz de las opiniones tanto de los estudiantes como de los docentes que la realizaron en forma de charla conjunta. Se concluyó por parte de ambos entonces en los siguientes aspectos:

5.1 Acerca de la planificación de la clase, del Blog y la recolección de la información.

- La planificación de este tipo de clases requiere mucho tiempo de trabajo por parte del docente previo al desarrollo de la actividad.
- Los tiempos de desarrollo de los temas en la asignatura son escasos por eso este tipo de experiencia requiere una planificación exhaustiva de la clase y termina beneficiando a todos los protagonistas del proceso de enseñanza-aprendizaje.
- El Blog resultó una herramienta dinámica y de fácil acceso para poder cumplir con el desarrollo de la experiencia.
- Los tiempos asignados a cada una de las etapas descriptas resultaron suficientes, ya que todos los grupos pudieron terminar las actividades propuestas.
- La recolección de la información resultó operativa: permitió dar una devolución a los estudiantes de sus producciones y al mismo tiempo se las pudo usar en el trabajo de tesis al que hemos hecho referencia.

5.2 Percepciones de los docentes sobre los alumnos que participaron de la experiencia.

- Hubo valoración positiva por parte de los estudiantes acerca de la incorporación de herramientas tecnológicas en el proceso de aprendizaje, destacando como un aspecto muy favorable el potencial gráfico y algebraico del software.
- También los alumnos se mostraron muy conformes con el diseño del Blog, no tuvieron dificultades para acceder al mismo y respetaron los tiempos y consignas de trabajo.
- Trabajaron cómodos y pudieron armar los equipos sin dificultad.
- El poco espacio entre las máquinas no les impidió que todos integrantes de los grupos participen del desarrollo de las actividades.
- Realizaron preguntas especialmente vinculadas con el software, como por ejemplo como graficar rectas verticales.

5.3 Reflexión final

La Web nos brinda herramientas gratuitas sencillas de operar, que nos permiten implementar experiencias como la descripta, es cierto que requiere de una planificación previa que demanda tiempo al docente pero los beneficios son altamente positivos para todos los actores del proceso de enseñanza-aprendizaje. Nosotros la implementamos en uno de los laboratorios de la Universidad pero la misma se puede replicar en otros contextos.

Referencias

1. Tall, D.: Cognitive Development in Advanced Mathematics Using Technology. *Mathematics Education Research Journal,* Vol. 12 , No. 3, pp. 210-230 (2000)
2. Tall, D.: New Cognitive Obstacles in a Technological Paradigm. http://www.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/dot1989b-cog-obst-nctm.pdf. (1989). Accedido el 9 de Dicimbre de 2016.
3. D., Rawson. Enseñanza de Cálculo II con Mathematica. Experiencias y metodologías utilizadas. http://ing.unne.edu.ar/pub/at4/411com.pdf (1999).Accedido el 20 de Marzo de 2016

4. Favieri, A.: Web 2.0 y hábitos de estudio en matemática universitaria.. *V Jornadas de Educación Matemática y II Jornadas sobre Investicación en Educación Matemática.* Santa Fe: UNL.(2014). http://www.fhuc.unl.edu.ar/materiales_congresos/CD_matematica%202014/paginas/eje_3.html
5. Fumero A.;Saéz Vaca F.: Blogs en la vanguardia de la nueva generación web. http://dit.upm.es/~fsaez/OtrosArticulos/blogs_en_la_vanguardia.pdf (2006).Accedido el 10 de febrero de 2017.
6. Salinas, M.; Viticcioli, S.:Innovar con Blogs en la Enseñanza Universitaria Presencial. *EDUTEC. Revista Electrónica de Tecnología Educativa*, Vol. 27.(2008).
7. Martinez, F.: El profesorado ante las nuevas tecnologías. J. Cabero, F. Martinez y J. Salinas (Eds): *Medios y herramientas de comunicación para la enseñanza universitaria*. Panamá: Sucesos Publicidad, pp. 207-222 (2003)
8. Duval, R.: Registres de preséntations sémiotiques et fonction nement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de Science Cognitives*, Vol. 5, pp.37-65 (1993)
9. Scorzo, R.; Favieri, A.; Williner, B.: Análisis de una actividad sobre funciones racionales con uso de software matemático. *V Jornadas de Educación Matemática y II Jornadas sobre Investicación en Educación Matemática.* Santa Fe: UNL.(2014). http://www.fhuc.unl.edu.ar/materiales_congresos/CD_matematica%202014/paginas/eje_3.html
10. Houston, D. *Dropbox*. http://www.maestrosdelweb.com/drew-houston-dropbox/ (2010) Accedido el 10 de mayo de 2015.
11. Barrios, R.; Casadei, C.: Promoviendo el uso de Google Drive como herramienta de trabajo colaborativo en la nube para estudiantes de ingeniería. *Revista de Tecnología de Información y Comunicación en Educación*. Vol. 8, No. 1, pp.43-56 (2014)
12. Vinner, S.: Concept definition, concept image and the notion of funcion. *Math. Educ. SCI. Technol*, pp. 293-305 (1983)

Volver al Índice

Ecuaciones Diferenciales Ordinarias: una propuesta didáctica que integra tres enfoques

Silvia Seminara[1], Gabriela Righetti[2]
[1] Facultad de Ingeniería, Universidad de Buenos Aires
Av. Paseo Colón 850 - C1063ACV - CABA
seminarasilvia@gmail.com
[2] Facultad Regional Buenos Aires, Universidad Tecnológica Nacional
Mozart 2300, C1407IVT - CABA
righettigab@gmail.com

Resumen. En este trabajo se expone una propuesta didáctica no tradicional para la enseñanza de ecuaciones diferenciales ordinarias, en el ámbito de los primeros años de las carreras de ingeniería. La propuesta intenta integrar los enfoques algebraico, numérico y gráfico luego de constatar, a través de nuestro trabajo diario en el aula, que el enfoque usual – exclusivamente algebraico – da como resultado un aprendizaje de corto plazo y baja significatividad para la mayor parte de los estudiantes. Se pasa revista a varios trabajos de investigación que avalan esta integración de enfoques como una alternativa plausible para lograr un aprendizaje más eficaz de estos contenidos, que resultan imprescindibles en la formación de los ingenieros.

Palabras Clave: Ecuaciones diferenciales ordinarias, Diferentes registros de representación, Aprendizaje significativo.

1 Introducción

Tanto en la Facultad de Ingeniería de la Universidad de Buenos Aires (FIUBA) como en la Facultad Regional Buenos Aires de la Universidad Tecnológica Nacional (FRBA UTN), el tópico Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (EDO) forma parte de los contenidos de Análisis Matemático II, asignatura que comprende, además, el estudio de todos los temas tradicionales del cálculo diferencial e integral multivariado.

Es así que el estudio de las EDO, de fundamental importancia para los futuros ingenieros, queda reducido a unas pocas clases (tres clases teóricas y otras tantas de carácter práctico en FIUBA, y cuatro o cinco clases teórico - prácticas en el caso de FRBA UTN), desvinculadas del resto de la materia y que, en la mayoría de los casos, se limitan a la clásica enumeración de métodos de resolución, con ilustración mediante ejemplos, poco trabajo de modelización, escaso o nulo uso de la tecnología, y la posterior inclusión de ejercicios de aplicación en exámenes parciales y finales. Los estudiantes realizan, así, un "aprendizaje" meramente algorítmico, de corta duración, y con limitadas posibilidades de aplicación. Así lo constatamos los docentes si, por ejemplo, pretendemos incluir en alguna de las evaluaciones un problema escrito en lenguaje coloquial que requiera traducir al lenguaje algebraico una ecuación diferencial para su posterior resolución: la traducción del enunciado suele resultar una barrera infranqueable, ya que los estudiantes no logran interpretar la relación entre la variable dependiente y su variación si se la ha expresado en lenguaje verbal. En el mismo sentido se expresan los docentes de física, al pretender rescatar esos contenidos para aplicarlos a problemas de su área de incumbencia: los alumnos no logran establecer espontáneamente la conexión, ni aplicar los métodos supuestamente ya aprendidos.

Ante estas evidencias de aprendizaje de corto plazo y poco significativo, decidimos realizar una propuesta didáctica superadora, que procure - en el escaso tiempo que nos permite el calendario académico - ofrecer a los estudiantes una experiencia de aprendizaje más eficaz. En este trabajo se exponen los fundamentos sobre los que basamos la orientación elegida, así como algunos ejemplos de material seleccionado para llevarla a cabo. En una segunda etapa pondremos a prueba su efectividad con nuestros grupos de estudiantes.

2 La persistencia del enfoque tradicional

El tratamiento de las ecuaciones diferenciales admite tres puntos de vista diferentes: algebraico, numérico y geométrico (o gráfico). El primero se refiere a la búsqueda de soluciones exactas (expresables en forma explícita, implícita, mediante desarrollos en serie o formas integrales). El segundo enfoque se refiere a la búsqueda de soluciones numéricas aproximadas y el tercero, al estudio cualitativo mediante el análisis del retrato de fases o de campos de pendientes.

Históricamente el enfoque algebraico ha sido el dominante en el ámbito científico durante muchos siglos, pero en los últimos cincuenta años, tanto el enfoque geométrico (iniciado a fines del siglo XIX por Poincaré) como el numérico han tenido un rápido desarrollo, debido a la evolución tecnológica y a los avances en el estudio de los sistemas dinámicos y sus múltiples aplicaciones, adquiriendo un estatus de relevancia en el ámbito científico. Sin embargo, en el ámbito educativo de los primeros años de la universidad se ha mantenido, en general, la predominancia del enfoque algebraico, produciéndose así una brecha entre lo que se enseña en las aulas y lo que utilizan los profesionales de la matemática aplicada.

El matemático ítalo-americano Gian-Carlo Rota, profesor de matemática aplicada del Massachusetts Institute of Technology durante 40 años, expone en [1] algunas ideas acerca de porqué, a su entender, fracasan los cursos tradicionales de ecuaciones diferenciales. Ya en los años '90 el autor calificaba de "obsoletos" muchos de los contenidos que se enseñaban, y manifestaba su sorpresa al descubrir qué poco había cambiado el material que se utilizaba en la mayoría de los cursos introductorios con respecto al elaborado por Cauchy en el siglo XIX: el mismo orden en los temas, los mismos "trucos" poco naturales de resolución, el mismo tipo de ecuaciones diferenciales que poco tienen que ver con las que aparecen en los verdaderos problemas de ingeniería...

La situación persiste hoy en día: los estudiantes aprenden "artificios" que olvidan fácilmente, en lugar de aprender conceptos que perduren en el tiempo o adquirir habilidades tales como realizar un análisis cualitativo de los problemas, antes de hallar una solución explícita.

Artigue y Rogalski [2] también hablan de "obsolescencia" de los métodos tradicionales de enseñanza, y opinan que es tanto más dramática si se tienen en cuenta

> "- la fascinación que ejercen, cada vez más, los sistemas complejos, que escapan por completo a la enseñanza usual, pero cuyo comportamiento puede visualizarse fácilmente,
> - la presión social que existe hacia la utilización de las herramientas informáticas en la enseñanza, frente a la cual el dominio de las ecuaciones diferenciales, en que se combinan la facilidad de escritura de los programas con las producciones particularmente estéticas, aparece como un dominio privilegiado, y son justamente los aspectos numéricos y gráficos los que son más fácilmente accesibles [por medio de estas herramientas]." (Artigue y Rogalski, 1990, p. 114)

Moreno y Azcárate [3], por su parte, examinan las creencias de los profesores acerca de la enseñanza de las EDO y concluyen que esas creencias explican en parte la persistencia del uso de los métodos tradicionales. Si bien trabajan con docentes universitarios de carreras como biología, química y veterinaria de universidades españolas, nos atrevemos a afirmar que no encontraríamos un panorama muy diferente entre los docentes de las carreras de ingeniería de las facultades de Buenos Aires en las que nos desempeñamos: subsiste entre los docentes universitarios la creencia de que "los estudiantes aprenden por imitación y memorización de esquemas de resolución" y de que "es más sencillo enseñar a resolver ecuaciones diferenciales que a interpretar y comprender modelos", a la vez que predomina una concepción formalista de la matemática y una subvaloración de las herramientas numéricas y gráficas.

A estas creencias frecuentes entre los docentes debemos añadir los tiempos ajustados de los cronogramas y los cursos superpoblados, que llevan a que las clases expositivas continúen siendo las más usuales, en las que el tratamiento de las EDO se reduce a proporcionar una lista de "recetas" de resolución algebraica, con escasa o nula utilización de otros registros de representación, ausencia de análisis cualitativos y de trabajo sobre modelización.

3 Posibles alternativas

Tall y West [4] subrayan la importancia de la *visualización* en la comprensión de muchos conceptos matemáticos. En el caso particular de las ecuaciones diferenciales remarcan la utilidad de los campos de direcciones: desde el punto de vista gráfico, resolver una ecuación diferencial ordinaria es, simplemente, hallar la curva del plano que en cada punto tiene la apropiada dirección tangente; limitarse a una resolución algebraica puede inducir a los alumnos a pensar que ciertas ecuaciones diferenciales no tienen solución, por no poder resolverse con ninguna de las "recetas" suministradas por el docente o por los libros de texto; sin embargo, si son capaces de obtener el campo de direcciones, interpretarlo y obtener (numéricamente) curvas trazadas siguiendo ese campo de tangentes, no caerán en ese error, ya que "estarán viendo" la solución. Este enfoque gráfico permite, además, un rico trabajo de análisis cualitativo de las soluciones, sin necesidad de encontrarlas explícitamente (comportamientos asintóticos, límites, concentración de soluciones en forma de “embudos”, etc.) y contribuye a una comprensión de los fenómenos que no es accesible con el enfoque exclusivamente algebraico.

En los años ’80, Artigue y su equipo llevaron a cabo un trabajo en la Universidad de Lille durante más de tres años, intentando abordar el estudio de las ecuaciones diferenciales de modo de dar mayor relevancia al enfoque gráfico y a los estudios cualitativos. En [2] exponen su forma de trabajo, varias de sus conclusiones y algunos consejos para mejorar la enseñanza - aprendizaje de las EDO. Las siguientes son las sugerencias más relevantes, que son explicadas con detalle en el mencionado artículo:

- recurrir a herramientas tecnológicas;
- desarrollar capacidades de tratamiento cualitativo y geométrico de las funciones, antes de comenzar con el estudio de las EDO;
- limitar a un mínimo la complejidad de cálculo en el enfoque algebraico;
- propiciar el trabajo autónomo de los alumnos suministrando un documento con los principales métodos de resolución algebraica;
- enseñar explícitamente los métodos para el análisis cualitativo.

Rasmussen, por su parte, en el marco de un amplio proyecto que comenzó en 1997 y que involucró investigadores y estudiantes norteamericanos y coreanos hasta 2008, exploró la implementación de la Educación Matemática Realista (EMR) para la enseñanza - aprendizaje de las EDO. La EMR [5], fue utilizada extensamente en niveles primario y secundario, a partir de los primeros trabajos de su iniciador, Hans Freudenthal, pero es innovador extender su uso al ámbito universitario. El estudio de las EDO es un terreno fértil para su implementación por su directa vinculación con la modelización matemática, y así lo entendieron Rasmussen y su equipo. En [6], por ejemplo, Kwon, Rasmussen y Allen relatan una experiencia en que comparan la retención, por parte de los estudiantes universitarios, de conceptos y habilidades procedimentales relacionados con ecuaciones diferenciales ordinarias. Lo hacen con dos grupos de estudiantes: uno al que se les impartió un curso tradicional de EDOs y otro grupo que participó de un curso *orientado a la indagación* (IO-DE) en el que predominaban el trabajo activo en grupos, con problemas realistas y utilizando las diversas formas de representación, así como recursos tecnológicos. En pruebas tomadas luego de un año de administrado el curso los alumnos que utilizaron la nueva modalidad demostraron mayor retención de los conceptos matemáticos que los alumnos que recibieron la formación tradicional, y tuvieron también mejor desempeño al traducir enunciados coloquiales al lenguaje matemático específico de las ecuaciones diferenciales. Es interesante la descripción que estos autores hacen de la modalidad de trabajo utilizada en el curso experimental:

> “En la clase IO-DE, había pocas instrucciones por parte del docente. La clase comenzaba con el trabajo de investigación, por parte de los estudiantes, sobre problemas elegidos para reflejar fenómenos realistas, tanto experimental como matemáticamente. Los estudiantes formaban pequeños grupos de tres o cuatro alumnos, para trabajar sobre los problemas, mientras el instructor interactuaba con ellos. Luego de la discusión en los grupos, los alumnos realizaban una discusión general, y algunos estudiantes pasaban al frente para compartir sus resultados, mientras que otros hacían preguntas y comentaban las presentaciones de sus compañeros. La discusión de los estudiantes no se limitaba sólo a buscar soluciones específicas para las tareas dadas, sino a negociar la comprensión de los conceptos matemáticos y los principios detrás de esas tareas, para finalmente llegar gradualmente a un significado compartido” (Kwon, Rasmussen y Allen, 2005, p. 230)

Existen muchos otros ejemplos de trabajos de investigación orientados a la búsqueda de una enseñanza más eficaz de las EDO (ver, por ejemplo, [7, 8, 9, 10] por citar algunos). Son elementos comunes a todos ellos el empleo de herramientas tecnológicas, el trabajo de a pares o en grupos de alumnos, la resolución de problemas realistas, la modelización y la utilización paralela de los enfoques gráfico, numérico y analítico.

Así mismo, han aparecido libros de texto inspirados en esta metodología (por ejemplo, [11], que responde a un proyecto de la Universidad de Boston, con sitio en http://math.bu.edu/odes/, o [12], que corresponde a un proyecto de la Universidad de Wayne).

4 Nuestra propuesta

Atendiendo a los trabajos de investigación analizados, y al material didáctico a que accedimos y al que hicimos referencia más arriba, decidimos diseñar una propuesta didáctica que nos permitiera superar el enfoque tradicional, meramente algebraico, integrando los enfoques gráfico y numérico, pero respetando las limitaciones de tiempo que nos impone el ajustado cronograma de cursada. Por otro lado, consideramos que en toda propuesta no debería faltar el trabajo sobre la modelización, que favorecerá la articulación con otras asignaturas y la futura práctica profesional, aportando significatividad a las actividades planteadas para nuestros alumnos. En palabras de Alsina [13], "a partir del contexto deben crearse esquemas, formular y visualizar los problemas, descubrir relaciones y regularidades, hallar semejanzas con otros problemas..., y trabajando entonces matemáticamente hallar soluciones y propuestas que necesariamente deben volverse a proyectar en la realidad para analizar su validez y significado."

Por todo esto, diseñamos actividades a ser llevadas a cabo en clase, por los alumnos, preferentemente de a pares, para posibilitar la discusión y el intercambio de ideas. Algunas de ellas se muestran en la siguiente sección.

Se suministrará a los estudiantes, además, un par de textos de elaboración propia. En el primero de ellos, se sintetizarán las principales definiciones relacionadas con las EDO (definición de EDO de primer orden; definiciones de solución general, particular y singular; definición de problema de valores iniciales, etc.), así como las principales cuestiones de notación, y se enunciará el *Teorema de existencia y unicidad de soluciones*; en el segundo, llamado "Ayuda Memoria de Métodos de Resolución", se exponen y ejemplifican los principales métodos (de variables separables, de EDO lineales, de EDO de tipo homogéneo, etc.). La intención es que los alumnos trabajen en forma autónoma, y que los docentes observen la tarea de los grupos y actúen como guía cuando se presenten dificultades.

5 Algunas de las actividades diseñadas

A continuación, presentamos algunas de las actividades iniciales, diseñadas para llevar a cabo la propuesta:

Ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO): Introducción.

Consideren la ecuación

$$y'(x) = 2(x-2)(y+1)$$

Aquí $y = y(x)$ es una función incógnita que se desea determinar y x es una variable independiente real.

Se trata de una *ecuación diferencial ordinaria de primer orden* porque en la ecuación la función incógnita, $y(x)$, depende de una sola variable (*ordinaria*) y aparece derivada (*ecuación diferencial*) una vez *(primer orden*).

Veremos que, bajo ciertas condiciones de continuidad y derivabilidad de la función $f(x,y)$ que aparece en el segundo miembro (en este caso, $f(x,y) = 2(x-2)(y+1)$), se puede asegurar que efectivamente existe una función derivable $y = y(x)$ que la resuelve; más aún: por cada punto del plano pasa una (única) curva solución (*Teorema de existencia y unicidad*).

Recuerden que si la función $y = y(x)$ es derivable, la derivada $y'(x_0)$ en cada punto $(x_0, y(x_0))$ representa la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función en ese punto.

Teniendo en cuenta esto,

1) Analicen en qué puntos del plano la curva que representa la función incógnita tiene: i) pendiente nula; ii) pendiente positiva; iii) pendiente negativa. ¿Qué significa cada una de estas circunstancias en términos del comportamiento de la función $y(x)$? (crecimiento, decrecimiento, etc.) Representen en el plano las distintas regiones e indiquen en cada una de ellas el comportamiento que registra una curva solución que pase por allí.
2) Sabiendo que la derivada $y'(x_0)$ representa en cada punto $(x_0, y(x_0))$ la pendiente de la recta tangente a la gráfica, representen en el plano *xy*, con pequeños segmentos trazados en cada uno de los siguientes puntos, una porción de la recta tangente a la gráfica que pasa por ese punto: (0,1), (1,0), (2,3), (2,-1), (1,1), (-1,1).
3) Empleando el programa GeoGebra y la instrucción "CampoDirecciones[<f(x, y)>]", donde $f(x,y)$ se reemplaza por $2(x-2)(y+1)$, repitan el trazado del punto b) pero esta vez para una gran número de puntos del plano (por defecto GeoGebra lo hace para 1600 puntos equidistribuidos; esta cantidad se puede variar a voluntad: ver https://wiki.geogebra.org/es/Comando_CampoDirecciones)
4) Impriman ese trazado de pendientes e intenten esbozar cómo sería la curva solución que pasa por el punto (2,2). Tengan en cuenta que por cada punto por donde pase la curva ésta debe ser tangente al pequeño segmento que está trazado en ese punto.

5) Comparen el trazado de d) con el que provee GeoGebra con la instrucción “ResuelveEDO[<f(x, y)>, <Punto en f>]” donde en $f(x,y)$ se escribe $2(x-2)(y+1)$ y en Punto en f se escribe (2,2). Para más detalles pueden ver https://wiki.geogebra.org/es/Comando_ResuelveEDO)
6) La instrucción “ResuelveEDO[<f(x, y)>, <Punto en f>]” intenta buscar analíticamente la solución exacta de la ecuación. En este caso es posible hallarla usando el *método de variables separables*. Consulten el “Ayuda Memoria de Métodos de Resolución” para encontrarla en este caso y comparen con la función que les parece en la Vista Algebraica del GeoGebra.
7) ¿Cuál es la curva-solución que pasa por (1,-1)? ¿Y la que pasa por un punto cualquiera de la forma (x_0,-1)? Si la variable x representara el tiempo, ¿qué ocurriría con la variable dependiente y ? ¿cómo evolucionaría en el tiempo? Este tipo de soluciones se denomina *solución de equilibrio*. ¿Cómo definirían una solución de equilibrio?
8) La instrucción “ResuelveEDO[<f(x, y)>, <x inicial>, <y inicial>, <x final>, <Paso>]” realiza una resolución numérica aproximada, estimando puntos de la curva-solución del siguiente modo: la ecuación

$$y'(x) = 2(x-2)(y+1) .$$

la reemplaza por su expresión aproximada

$$\frac{y(x_{k+1}) - y(x_k)}{x_{k+1} - x_k} \cong 2(x_k - 2)[y(x_k) + 1]$$

la que utiliza para estimar una sucesión de puntos $(x_{k+1}, y(x_{k+1}))$ a partir de $(x_{inicial}, y_{inicial}) = (x_0, y_0) = (2,2)$, el x_{final} que deseen y el paso $\Delta = x_{k+1} - x_k$ que elijan.

Experimenten con esta instrucción eligiendo un x_{final} y variando el paso (por ejemplo con 1, 0.5, 0.2, 0.1). Para el Paso=1 realicen también el cálculo “a mano”, para asegurarse de que comprenden cómo funciona.

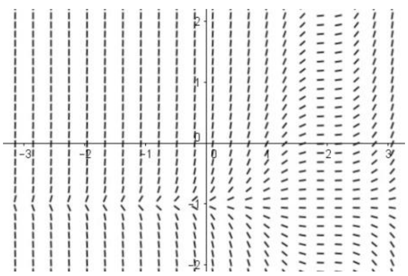
9) Los siguientes son campos de direcciones para las ecuaciones

a) $y'(x) = \dfrac{2(x-2)}{y+1}$ b) $y'(x) = \dfrac{2(y+1)}{x-2}$

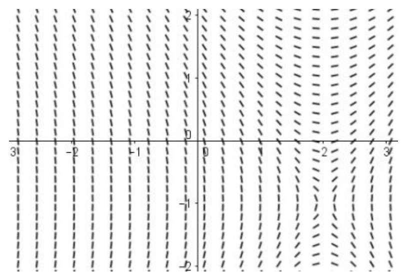
c) $y'(x) = 2(x-2)^2(y+1)$ d) $y'(x) = 2(x-2)(y+1)^2$

Sin utilizar GeoGebra, ¿pueden indicar cuál corresponde a cada ecuación, fundamentando en cada caso? En cada uno de ellos esbocen la curva-solución que pasa por (1,0) y comparen con la solución analítica correspondiente (observen que son todas ecuaciones de variables separables; resuelvan “a mano” y con GeoGebra).

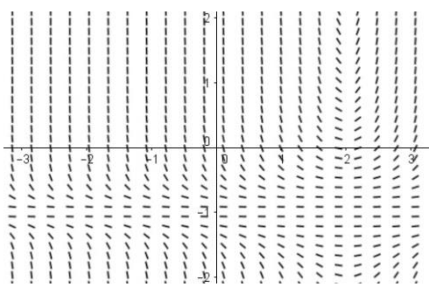
I)



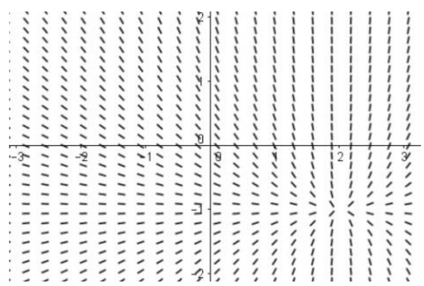
II)



III)



IV)



10) Para cada una de las siguientes ecuaciones,

a) $y'(x) = x^2 + y$ b) $y'(x) = x + y^2$

- Encuentren el campo de direcciones utilizando GeoGebra.
- Sobre cada uno de ellos, esbocen los distintos tipos de curvas-solución que pueden obtenerse (pueden usar "ResuelveEDO", con diferentes "Punto en f", para los que les parezca que obtendrán distintos tipos de curva-solución, según las regiones del plano que correspondan a los diferentes comportamientos).
- Observen que una de ellas admite solución analítica exacta, empleando uno de los métodos propuestos en el "Ayuda Memoria de Métodos de Resolución" (¿cuál?) mientras que para la otra no es aplicable ninguno de los métodos allí propuestos, aunque es posible encontrar aproximaciones numéricas de las soluciones usando "ResuelveEDO[<f(x, y)>, <x inicial>, <y inicial>, <x final>, <Paso>]".
- Por último, para ambas ecuaciones exploren la herramienta on-line "Calculadora de Ecuaciones Diferenciales", que está disponible en el sitio de libre acceso de Wolfram http://www.wolframalpha.com/widgets/view.jsp?id=bcca0b7ced6fc6c474fc7ea367543dc3 (tengan en cuenta que se trata de un "widget" que se encuentra aún en versión *beta*, vale decir, sometida a la prueba de los usuarios). Para la ecuación a) hallarán la misma solución analítica que les provee GeoGebra, o que pueden encontrar ustedes mismos aplicando el método de resolución conveniente, mientras que para la ecuación b) la respuesta les resultará algo "extraña": en ella aparecen las llamadas *funciones de Bessel de primera especie*; esa ecuación diferencial no admite una solución analítica expresable en términos de funciones elementales.

11) Una de las aplicaciones más importantes de las ecuaciones diferenciales ordinarias es la de permitir expresar relaciones entre las distintas variables involucradas en un fenómeno de la realidad, con el fin de *modelizarlo*. La EDO aparece cuando, por ejemplo, en dicha relación debemos tener en cuenta la velocidad de variación de la cantidad representada por la variable dependiente.

En el siguiente problema, ustedes mismos diseñarán un modelo que describa un fenómeno químico…

En las reacciones químicas interesa conocer la evolución, en función del tiempo, de la concentración de los compuestos que intervienen.

En las reacciones unimoleculares, una molécula de un elemento A se disocia dando origen a un nuevo producto, P. Esto se suele representar así:

$$A \rightarrow P$$

Por ejemplo, el anestésico llamado *ciclopropano* se transforma espontáneamente en *gas propeno*, sin necesidad de reactivos.

a) La *ley de acción de las masas* dice que "a temperatura constante, la velocidad de la reacción - es decir, la velocidad con que varía la concentración de un producto (que indicaremos [P]) - es *directamente proporcional* a la concentración del elemento A que le da origen" (que indicaremos [A]). Escriban esta ley en lenguaje simbólico (observen que al hablar de "velocidad" estamos considerando que nuestra variable independiente es el tiempo).
b) Investiguen qué afirma la *ley de conservación de las reacciones químicas* y escríbanla en lenguaje simbólico para relacionar [A] y [P].
c) Planteen una EDO que relacione la *velocidad de la reacción* en función de la concentración del producto.
d) Encuentren una expresión que permita calcular la concentración del producto en función del tiempo.

6 Conclusiones y trabajos futuros

Es indudable que es necesario introducir cambios en la enseñanza – aprendizaje de las EDO, de modo que el aprendizaje resulte más eficaz y significativo para los futuros ingenieros. Además, no es posible continuar soslayando el empleo de herramientas tecnológicas, de acceso cada vez más fácil para los alumnos, y que permiten un trabajo más parecido al que realizan los profesionales de la matemática aplicada. En la actividad que mostramos nos limitamos al uso de herramientas sencillas de GeoGebra, y a herramientas de acceso libre de Wolfram, pero es nuestra intención continuar explorando otras alternativas.

Nos resta ahora poner a prueba el material y evaluar su efectividad, así como la significatividad que el mismo puede tener para los alumnos

Referencias

1. Rota, G. C.: Ten lessons I wish I had learned before I started teaching differential equations. Meeting de MAA, Simmons College (1997). https://web.williams.edu/Mathematics/lg5/Rota.pdf. Accedido el 30 de Diciembre de 2016.
2. Artigue, M. y Rogalski M.: Enseigner autrement les équations différentielles. En: DEUG Commission interIREM Université (ed.): *Enseigner autrement les mathématiques en DEUG a première année*. Lyon: LIRDIS, pp. 113–128 (1990). http://numerisation.irem.univ-mrs.fr/WN/IWN90004/IWN90004.pdf. Accedido el 5 de Enero de 2017.
3. Moreno, M. y Azcárate, C.: Concepciones y creencias de los profesores universitarios de matemática acerca de la enseñanza de las ecuaciones diferenciales. *Enseñanza de las Ciencias*, Vol. 21, No. 2, pp. 265-280 (2003). www.raco.cat/index.php/Ensenanza/article/download/21935/21769. Accedido el 5 de Enero de 2017.
4. Tall, D. y West, B.: Graphic Insight into Mathematical Concepts. Howson, G. y Kahane, J-P (ed.): *The Influence of Computers and Informatics on Mathematics and its Teaching*, Cambridge: CUP (1986). http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.377.4926&rep=rep1&type=pdf. Accedido el 5 de Enero de 2017.
5. Bressan, A.; Gallego, M.; Pérez, S. y Zolkower, B.: Educación Matemática Realista: Bases teóricas. Grupo Patagónico de Didáctica de la Matemática (2016). http://gpdmatematica.org.ar/wp-content/uploads/2016/03/Modulo_teoria_EMR-Final.pdf. Accedido el 15 de Enero de 2017.
6. Kwon, O.; Rasmussen, C. y Allen, K.: Students' Retention of Mathematical Knowledge and Skills in Differential Equations. *School Science and Mathematics*, Vol. 105, No. 5, pp. 227-239 (2005)
7. Camacho, M., Perdomo, J. y Santos, M.: Procesos conceptuales y cognitivos en la introducción de las ecuaciones diferenciales ordinarias vía la resolución de problemas. *Enseñanza de las Ciencias*, 30 (2), pp. 9-32 (2012). www.raco.cat/index.php/Ensenanza/article/download/254501/391048. Accedido el 15 de Enero de 2017.
8. Borssoi, A. y Werle, L.: Modelagem matemática e aprendizagem significativa: uma proposta para o estudo de equações diferencias ordinárias. *Educação Matemática Pesquisa*, Vol. 6, No. 2, pp. 91-121 (2004). http://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/viewFile/4689/3258. Accedido el 15 de Enero de 2017.
9. Morales López, Y.: Enfoques y Dificultades en la Enseñanza de las Ecuaciones Diferenciales. Revista Premisa, Vol. 12, No. 45, pp. 25 – 36 (2010). http://www.soarem.org.ar/Documentos/45%20Morales.pdf. Accedido el 15 de Enero de 2017.
10. Arslan, S.: L'Approche Qualitatives des Equations Differentielles en Classe de Terminale S: Est-elle viable? Quels sont les enjeux et les conséquences? domain_stic.educ. Université Joseph-Fourier, Grenoble I (2005). https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00009594/document. Accedido el 15 de Enero de 2017.
11. Blanchard, P., Devaney, R. y Hall, G.: *Differential Equations*. Brooks Cole. Boston University. 4th edition, Ed. Cengage Learning (2011).
12. West, B.; Strogatz, S.; McDill, J-M.; Cantwell, J.; Hohn, H.: *Interactive Differential Equations Workbook*. Addison Wesley Interactive (1997). http://www.math.wayne.edu/xde/Media/PDF/Documents/. Accedido el 15 de Enero de 2017.
13. Alsina, C.: Si Enrique VIII tuvo 6 esposas, ¿cuántas tuvo Enrique IV? El realismo en educación matemática y sus implicaciones docentes. *Revista Iberoamericana de Educación,* Vol. 43, pp.85-101 (2007) http://rieoei.org/rie43a04.htm. Accedido el 27 de enero de 2017.

Volver al Índice

Búsqueda de Funciones Inversas de una Variable Real, Estrategias para Hallarlas, otra Mirada de Enseñanza

Folino Patricia, Boutet Stella
Departamento de Matemática, Facultad Regional Avellaneda, Universidad Tecnológica Nacional
(1874) Ramón Franco 5050, Villa Domínico, Pcia de Buenos Aires, Argentina.
patriciafolino@yahoo.com.ar, stellaboutet@gmail.com

Resumen. Esta propuesta pretende mostrar como a partir de un tema dentro del programa de Análisis Matemático I, aparentemente menor, se pueden trabajar distintas competencias y conceptos. Retomamos el estudio de la función inversa en funciones polinómicas, ahora con expresiones que se corresponden con polinomios que no solo tienen el término de mayor grado y/o el independiente, sino también el lineal y/o el cuadrático. Esta pequeña variación lleva a poner en juego los conocimientos aprendidos para encontrar la solución. Presentamos, entonces, una función polinómica, buscamos su inversa, bajo qué condiciones esta existe y cómo podemos obtener su fórmula. Relatamos las reflexiones y cuestionamientos que surgen con lo que enseñamos, y las cuestiones que aparecen desde lo conceptual matemático, lo didáctico - pedagógico y con aplicación a la profesión.

Palabras Clave: Estrategias de enseñanza, Función inversa, Función polinómica

1 Consideraciones generales

Todos los que enseñamos pretendemos que nuestros alumnos aprendan y aprueben la materia, es nuestra razón de ser. No solo queremos que aprueben, queremos que sepan, que los conocimientos sean permanentes, que puedan relacionarlos con otras materias y en su actividad profesional, que critiquen con fundamento. Esto dicho en general y a grandes rasgos es lo que quiere cualquier docente cuando se le pregunta qué espera de sus alumnos.

Cuando los alumnos no aprueban nos preguntamos por qué, por qué hacen las cosas mal, por qué no pueden relacionar los conceptos.

Frente a estas cuestiones los distintos profesores establecen distintas causas: no estudian, no prestan atención, no saben estudiar, no saben los temas anteriores.

Para poder dar respuesta a estos interrogantes hemos buscado las distintas teorías de conocimiento, de aprendizaje, de didáctica de la matemática: Piaget, Vygoski, Ausubel, Chevellard, Godino, Brousseau, Sessa, Sadovsky, Barallobres.

Nos propusimos reflexionar sobre lo que enseñamos, cómo lo enseñamos, para qué y por qué, surgiendo incluso preguntas más profundas, y traducir en hechos concretos lo que esas teorías nos proponen.

Por eso fuimos tomando temas particulares de Análisis Matemático I y de Álgebra y Geometría Analítica para tratar de aplicar estas cuestiones. Este trabajo es apenas una muestra de ello.

2 Propuesta

El tema sobre el que vamos a trabajar es función inversa. Este tema pertenece a la primera unidad de Análisis Matemático I y suele ser dificultoso, aunque parece sencillo, porque cuesta que los estudiantes tomen la esencia de lo que es una función y no se queden solamente con los cálculos que alguna vez hicieron para obtener dominio y conjunto imagen, o bien solo con el gráfico.

Primero analizamos el concepto de función que es sumamente importante en matemática y buscamos qué ideas traen nuestros alumnos. Las primeras respuestas son: “tienen x”, “tienen y”, que son un gráfico, o bien “$2x+1$”. Trabajamos entonces para llegar a la esencia de la idea de función: esa relación entre variables y no simplemente la definición “es una relación entre dos conjuntos….” Que pueden repetir de memoria y no traducirse en la práctica

Luego pasamos a la clasificación de funciones: inyectiva, sobreyectiva, biyectiva. Buscando la importancia de esto: la función inversa.

Tratamos las definiciones de cada una, hacemos demostraciones de funciones concretas para ver si son inyectivas, sobreyectivas, biyectivas y hallamos funciones inversas.

Hasta aquí lo clásico y con nuestras actividades, los alumnos pueden concluir que siempre es posible “despejar y” para hallar la inversa, que siempre podemos analizar si es inyectiva solo con la definición:

$$f: \mathrm{A} \subseteq \mathrm{R} \ \rightarrow \mathrm{R} \, es\ inyectiva \ \Leftrightarrow (\forall x_1 \in \mathrm{A}, \forall x_2 \in \mathrm{A}: x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2))$$

O bien

$$f: \mathrm{A} \subseteq \mathrm{R} \ \rightarrow \mathrm{R} \, es\ inyectiva \ \Leftrightarrow (\forall x_1 \in \mathrm{A}, \forall x_2 \in \mathrm{A}: f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2)$$

Hasta este momento usamos lineales, cuadráticas, homográficas, exponencial, logarítmica, módulo, trigonométricas y de las polinómicas, aquellas que se pueden “despejar” como $f(x) = x^3$. Hasta aquí estamos en la unidad 1.

Seguimos adelante con los temas límite, continuidad y derivada, en los cuales, por supuesto, seguimos trabajando dominio y conjunto imagen.

Decidimos, entonces, proponer esto, queremos calcular, si existe, la función inversa de

$$f: \mathrm{R} \ \rightarrow \mathrm{R} \ / \, f(x) = x^3 + 3x + 4$$

Por eso lo primero que surge es que necesitamos saber si es inyectiva y sobreyectiva.

Al querer ver si es inyectiva nos encontramos con que, algebraicamente, no llegamos a conclusión alguna, planteamos

$$f(x_1) = f(x_2)$$
$$\Rightarrow \quad x_1^3 + x_1 + 4 = x_2^3 + x_2 + 4$$

Más allá de poder cancelar el cuatro, caemos en una ecuación de la cual no podemos salir. Es decir que lo aprendido hasta acá como aplicación directa de la definición no nos alcanza para poder dar respuesta a esta situación. Se necesita, entonces, buscar otras propiedades u otros conceptos teóricos que nos brinden información sobre esta función.

A esta altura, la mayoría de los estudiantes, tienen a mano un software en su teléfono celular con el cual han graficado la función y están respondiendo que tiene inversa. Es más, con el Geogebra, si hallamos la simetría respecto de la recta de ecuación $y = x$, aparece el gráfico de la inversa y su expresión.

Por eso les proponemos que busquen, dentro de lo aprendido, qué teoremas nos sirven para justificar lo que ha aparecido en el gráfico. En este momento deben hacer una revisión de los temas tratados: qué saben de funciones, de inversa y darse cuenta que los temas que siguieron aportan más información sobre una función.

Han aprendido que la derivada nos sirve para analizar cómo varía una función, su crecimiento y decrecimiento, entre otras cuestiones. También tratamos sobre la derivada de la función inversa.

Encontramos, entonces, estos teoremas, que fueron dados:

Si f es estrictamente creciente (o decreciente) en $[a; b]$ y es continua en dicho intervalo, entonces:

i. $f: [a, b] \rightarrow [f(a), f(b)]$ es biyectiva, por lo tanto, existe f^{-1}
ii. f^{-1} es estrictamente creciente (o decreciente) en $[f(a); f(b)]$
iii. f^{-1} es continua en $[f(a); f(b)]$

Entonces, para la función que estamos tratando,

$$f(x) = x^3 + 3x + 4$$

Proponen hacer la derivada,

$$f'(x) = 3x^2 + 3$$

Podemos observar que la derivada es positiva para cualquier valor real, por lo tanto, es estrictamente creciente para todo R y como además es continua en R, entonces, aplicando el teorema anterior, tiene inversa, en R.

Ahora el problema se traslada a buscar la expresión de esa inversa, y de acuerdo con lo que han hecho antes, en despejar “x”

Ensayan distintas opciones, como querer completar “cubos”, en similitud con completar cuadrados. Entonces concentramos la atención en lo que debe cumplir la inversa: si el par $(-1,0)$ pertenece a la gráfica de f, el $(0, -1)$ debe pertenecer a la gráfica de f^{-1}.

Por otro lado, revisamos cómo se encuentran las raíces de un polinomio, para lo cual, la teoría más usada es el teorema de Gauss, pero esto aquí no alcanza.

Juntamos aquí contenidos de Álgebra. La fórmula para calcular las raíces de un polinomio de tercer grado, conocida como fórmula de Cardano, es

$$z^3 + pz + q = 0$$
$$u = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} \quad v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$
$$\Rightarrow z = u + v$$

Entonces, pensamos que cuando buscamos la expresión de la función inversa, estamos buscando los valores de "x" dados los de "y". Es decir, debemos despejar "x" en $f(x) = x^3 + 3x + 4$.

Aplicamos el procedimiento que hacemos para hallar una inversa:

$$y = x^3 + 3x + 4$$

Cambiamos y por x:

$$x = y^3 + 3y + 4$$

$$\Longrightarrow\ y^3 + 3y + (4 - x) = 0$$

Lo que estamos buscando son los valores de y que satisfacen esta ecuación.

Usando la fórmula de Cardano

$$u = \sqrt[3]{-\frac{4-x}{2} + \sqrt{\frac{(4-x)^2}{4} + \frac{3^3}{27}}}\quad v = \sqrt[3]{-\frac{4-x}{2} - \sqrt{\frac{(4-x)^2}{4} - \frac{3^3}{27}}}$$

Haciendo las cuentas $y = u + v$

$$y = \sqrt[3]{\frac{x-4+\sqrt{x^2-8x+20}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{x-4-\sqrt{x^2-8x+20}}{2}}$$

Que es la expresión de la función inversa

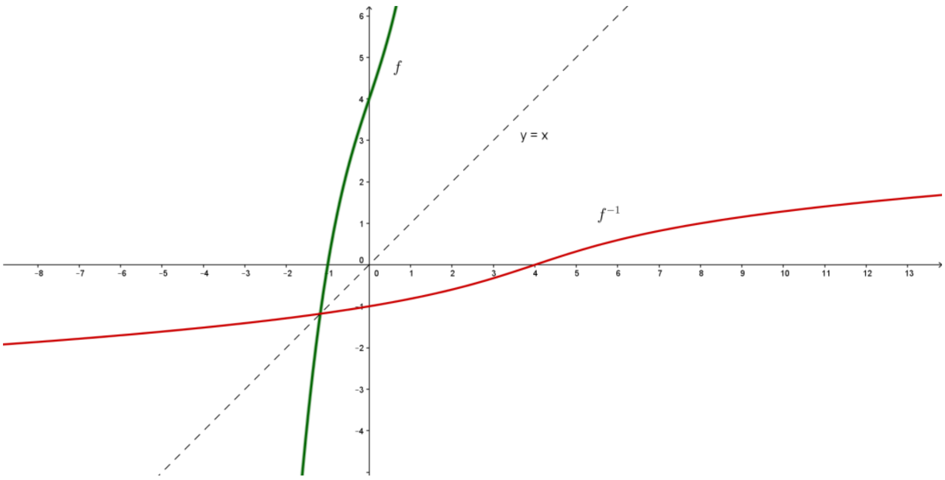


Fig.1. El gráfico, realizado con el software Geogebra, muestra a la función f y su inversa, y la simetría que cumplen dichos gráficos respecto de la recta de ecuación $y = x$, por ser inversas.

Aquí, con una simple tarea tuvimos que volver sobre el concepto de función (como tantas otras veces), sobre la necesidad de saber cómo se comporta esa función (si es biyectiva, si es creciente, etc.), qué implica ser la función inversa, qué propiedades tiene, la importancia de la derivada, reforzando la idea de qué es la derivada y para qué sirve, la importancia de la continuidad, por qué no alcanza con saber que la función está definida en un conjunto y que esto no es lo mismo que ser continua. Además también se vio la necesidad de vinculación con otra materia como Álgebra, mostrando, una vez más, la relación dentro de la Matemática.

Proseguimos con la actividad y, como lo hemos hecho con otras funciones, se tiene que verificar

$$(f_0 f^{-1})(x) = (f^{-1}{}_0 f)(x) = x$$

Resulta,

$$(f_0 f^{-1})(x) = f(f^{-1}(x)) = f\left(\sqrt[3]{\frac{x-4+\sqrt{x^2-8x+20}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{x-4-\sqrt{x^2-8x+20}}{2}}\right)$$

$$= \left(\sqrt[3]{\frac{x-4+\sqrt{x^2-8x+20}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{x-4-\sqrt{x^2-8x+20}}{2}}\right)^3 + 3\left(\sqrt[3]{\frac{x-4+\sqrt{x^2-8x+20}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{x-4-\sqrt{x^2-8x+20}}{2}}\right) + 4$$

Que es realmente tediosa la cuenta, pero podemos usar alguno de los software que solemos utilizar.

Lo mismo para la otra igualdad

$$\left(f^{-1}{}_0 f\right)(x) =$$

$$f^{-1}(f(x))_= f^{-1}\left(\sqrt[3]{\frac{x^3+3x+4-4+\sqrt{(x^3+3x+4)^2-8(x^3+3x+4)+20}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{x^3+3x+4-4-\sqrt{(x^3+3x+4)^2-8(x^3+3x+4)+20}}{2}}\right)$$

Otra cuenta muy tediosa para hacer pero que un software nos ayuda, aunque con esa ayuda también es cansadora.

Aquí ocurre que algunos estudiantes saben usar softwares más potentes y otros no. Nosotros usamos, generalmente el Geogebra que es sencillo, pero estamos recién en primer año, más adelante aprenderán Matlab. Pero aún con el Geogebra se las han ingeniado para hacer estas cuentas, con el CAS del Geogebra. En él se escribe la expresión de la composición y en la vista gráfica se puede observar lo que se obtiene.

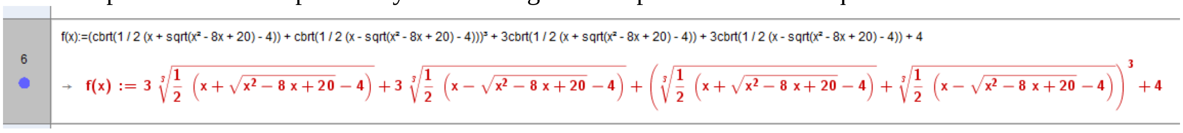


Fig.2. Esta imagen se corresponde con la expresión de la composición de la función y su inversa, en el Geogebra usando CAS.

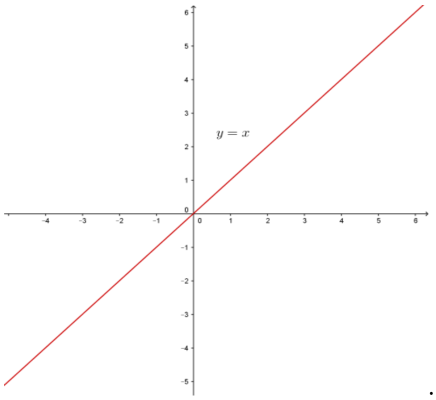


Fig.3. Este es el gráfico que aparece a la derecha del cálculo con el CAS, en la vista gráfica del Geogebra. Como se puede ver se obtiene la identidad, lo que certifica que una función es la inversa de la otra.

Hemos visto que algunas funciones cúbicas sí tienen inversa y otras no. La que nosotros usamos tiene término lineal e independiente, pero, ¿podrá tener término cuadrático?

Entonces, una pregunta que surge naturalmente es: ¿qué características, en cuanto a su expresión, tiene una función polinómica de grado tres para poder tener inversa?

Ya a esta altura, los alumnos, empiezan a querer deducir en forma generalizada, esto es, pensar la función polinómica, así

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

Y volviendo a usar la propiedad que si una función continua es estrictamente creciente (o decreciente), entonces, es inyectiva, bastará con hacer la derivada y ver bajo qué condiciones eso ocurre

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$$

De aquí surgen deducciones con conocimientos que traen desde el secundario.

Debemos pedir que

$$3ax^2 + 2bx + c > 0$$

o bien

$$3ax^2 + 2bx + c < 0$$

Según sea estrictamente creciente o decreciente.

Todo esto se reduce a conocimientos sobre cuadráticas. Pretender que estas expresiones sean siempre positivas o negativas equivale a decir que, por un lado, no hay valores reales para los cuales dé cero.

$$3ax^2 + 2bx + c \neq 0$$

Sabemos que esto ocurre cuando el discriminante es negativo, resulta entonces

$$4b^2 - 4 \cdot 3a \cdot c < 0$$
$$\Rightarrow \ b^2 < 3ac$$

Esa es entonces la relación que deben cumplir los coeficientes para que tenga inversa.

Combinada con una conclusión más que si $a > 0$, entonces es estrictamente creciente, porque la derivada resulta siempre positiva, y, si $a < 0$, será estrictamente decreciente, porque la derivada resulta siempre negativa.

Por otro lado, esto derribó algunas suposiciones hechas en un momento que si la función polinómica tenía el término cuadrático no podía ser inyectiva.

Propusimos que inventaran algunas funciones polinómicas de tercer grado completas que tengan inversa.

Esa búsqueda no se hizo al azar, se hizo usando las conclusiones anteriores y además proponiendo con condiciones, que sean crecientes o decrecientes y sabiéndolo anticipadamente. Esto lo corroboraron usando un software para graficarlas.

Otra discusión que surge en correlación con Álgebra, es el tema de las raíces. Cuántas raíces puede tener un polinomio de tercer grado, cuántas pueden ser reales, y la vinculación con lo anterior.

Luego de esto, se les ocurrió pedir funciones polinómicas de tercer grado, completas, con una raíz entera.

Una de ellas es:

$$f: \mathrm{R} \to \mathrm{R} \,/\, f(x) = 2x^3 + 3x^2 + 2x + 1$$

Ahora surge otra cuestión, cómo hallar la inversa de esa función polinómica, porque como hemos visto, la fórmula de Cardano presenta un polinomio de tercer grado sin término cuadrático.

Aquí hay que recurrir a Álgebra una vez más, y ver cómo podemos eliminar ese término para llegar a la forma que nos presenta Cardano, suponiendo que nos puede resolver el problema como antes.

Partimos de una ecuación polinómica de tercer grado completa

$$Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = 0$$

Dividimos por $A \neq 0$

$$x^3 + \frac{B}{A}x^2 + \frac{C}{A}x + \frac{D}{A} = 0$$

Y lo renombramos

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0$$

Ahora hacemos una sustitución conveniente

$$x = z - \frac{a}{3}$$

Y reemplazamos

$$\left(z - \frac{a}{3}\right)^3 + a\left(z - \frac{a}{3}\right)^2 + b\left(z - \frac{a}{3}\right) + c = 0$$

Haciendo las cuentas y reagrupando, resulta

$$z^3 + \left(b - \frac{1}{3}a^2\right)z + \left(\frac{2}{27}a^3 - \frac{ab}{3} + c\right) = 0$$

Que es una ecuación cuya variable es z. Si en ella sustituimos

$$p = b - \frac{1}{3}a^2 \ \text{ y } \ q = \frac{2}{27}a^3 - \frac{ab}{3} + c$$

Resulta

$$z^3 + pz + q = 0$$

Que es la ecuación que usamos antes.

Esto es lo que nos ofrece Álgebra para la resolución de estas ecuaciones. Procedemos a aplicarlo en la función

$$f(x) = 2x^3 + 3x^2 + 2x + 1$$

Por supuesto, primero verificamos que tiene inversa haciendo la derivada y verificando que es estrictamente creciente, además de ser continua.

Entonces

$$y = 2x^3 + 3x^2 + 2x + 1$$

Cambiamos y por x

$$x = 2y^3 + 3y^2 + 2y + 1$$

Igualamos a cero, para poder aplicar la fórmula

$$2y^3 + 3y^2 + 2y + (1 - x) = 0$$

Dividimos todo por 2, que es el coeficiente principal para que el polinomio sea mónico

$$y^3 + \frac{3}{2}y^2 + y + \frac{(1-x)}{2} = 0$$

Correspondiéndose con:

$$a = \frac{3}{2}, \ b = 1, c = \frac{1-x}{2}$$

Hacemos la sustitución $y = z - \frac{a}{3}$

Y usamos

$$z^3 + pz + q = 0$$

Calculamos p y q con la fórmulas obtenidas

$$p = b - \frac{1}{3}a^2 \ \Rightarrow \ p = 1 - \frac{1}{3} \cdot \frac{9}{4} = \frac{1}{4}$$

$$q = \frac{2}{27}a^3 - \frac{ab}{3} + c \ \Rightarrow \ q = \frac{2}{27} \cdot \frac{27}{8} - \frac{\frac{3}{2} \cdot 1}{3} + \frac{1-x}{2} = \frac{1-2x}{4}$$

Calculamos u y v, para luego obtener z

$$u=\sqrt[3]{\frac{2x-1}{8}+\sqrt{\frac{(1-2x)^2}{64}+\frac{1^3}{64\cdot 27}}}\qquad v=\sqrt[3]{\frac{2x-1}{8}-\sqrt{\frac{(1-2x)^2}{64}+\frac{1^3}{64\cdot 27}}}$$

$$z=\sqrt[3]{\frac{2x-1}{8}+\sqrt{\frac{(1-2x)^2}{64}+\frac{1^3}{64\cdot 27}}}+\sqrt[3]{\frac{2x-1}{8}-\sqrt{\frac{(1-2x)^2}{64}+\frac{1^3}{64\cdot 27}}}$$

Finalmente,

$$y=z-\frac{a}{3}$$

$$y=\sqrt[3]{\frac{2x-1}{8}+\sqrt{\frac{(1-2x)^2}{64}+\frac{1^3}{64\cdot 27}}}+\sqrt[3]{\frac{2x-1}{8}-\sqrt{\frac{(1-2x)^2}{64}+\frac{1^3}{64\cdot 27}}}-\frac{\frac{3}{2}}{3}$$

$$y=\sqrt[3]{\frac{2x-1}{8}+\sqrt{\frac{27(1-2x)^2+1}{1728}}}+\sqrt[3]{\frac{2x-1}{8}-\sqrt{\frac{27(1-2x)^2+1}{1728}}}-\frac{1}{2}$$

Que es la expresión de la función inversa

La graficamos usando un software sencillo como el Geogebra

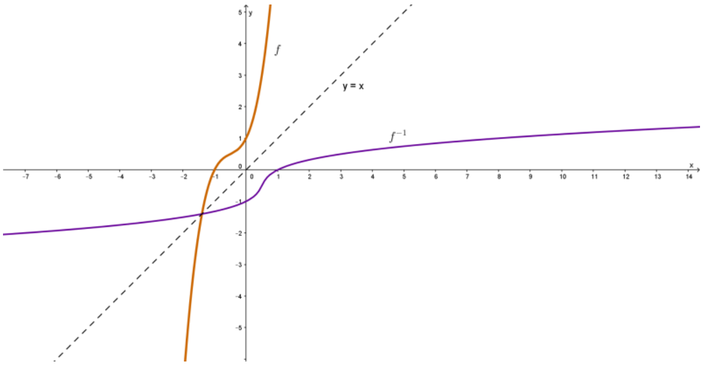


Fig.4. El gráfico, realizado con el software Geogebra, muestra a la función f y su inversa, y la simetría que cumplen dichos gráficos respecto de la recta de ecuación $y=x$, por ser inversas.

A partir de aquí surgieron otras preguntas:

¿Qué ocurre con las funciones polinómicas de grado mayor que tres, si su expresión se corresponde con un polinomio completo, o que, por lo menos, tenga junto con el término de mayor grado, no solo el término independiente, sino algún otro?

La respuesta más rápida fue que había que buscar en las funciones que se correspondían con polinomios de grado impar porque las de grado par no podían ser inyectivas. Esto lo relacionaron con que al hacer la derivada debe quedar una expresión que sea siempre positiva o siempre negativa. Ésta, si es de potencia par, al derivarla va a ser de potencia impar y un polinomio de grado impar siempre va a tener una raíz real que será de multiplicidad impar y por lo tanto esa expresión no puede tener siempre el mismo signo.

Durante este interrogante surgieron distintas formas de aproximación a una demostración. Por ejemplo, para la función

$$f(x)=x^5+x^2+x-3$$
$$f'(x)=5x^4+2x+1$$

Al querer probar que la derivada es siempre positiva, o sea,

$$5x^4+2x+1>0$$

Surge la idea de despejar

$$5x^4>-2x-1$$

Y esto pensarlo como dos funciones

$$g(x)=5x^4 \text{ y } h(x)=-2x-1$$

Las graficaron y observaron que no se cruzan, es más, se cumple que $g(x)>h(x)$ para todo número real.

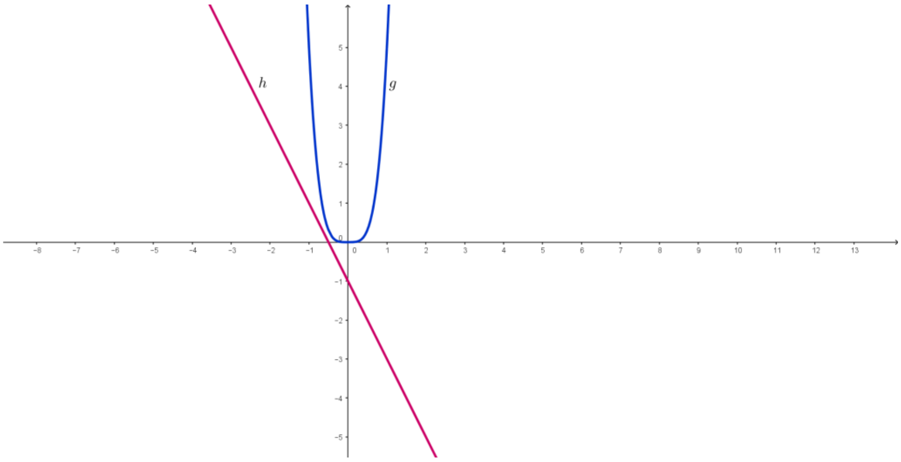


Fig.5. El gráfico, realizado con el software Geogebra, muestra a las funciones nombradas g y h

La otra pregunta que surgió es si podemos encontrar la expresión de la función inversa para funciones polinómicas de grado cinco, por ejemplo, si no tenemos fórmula de Cardano para ecuaciones polinómicas de grado cinco completas, para utilizarla como en los casos anteriores. Esta es una pregunta que ha quedado abierta.

3 Aplicaciones

Ecuaciones de este tipo se usan en materias como Termodinámica (en las especialidades de Eléctrica, Mecánica, Química e Industrial) y, en particular, en Ingeniería Química, en la asignatura Físico-química, trabajan con la ecuación de van der Waals, para el comportamiento de los gases reales, y deben resolver ecuaciones de tercer grado para representar isotermas.

4 Conclusiones

La búsqueda de la función inversa tradicionalmente se ha realizado despejando una variable. Con una función sencilla como una polinómica hemos mostrado que no siempre es así de simple y que para poder hallarla hay que tomar otros rumbos matemáticos.

Si la expresión de la función polinómica se corresponde con un polinomio de grado 3 que tenga el término cuadrático y/o lineal, además del independiente, habrá que hacer la derivada para saber si tiene inversa o no. De resultar, dicha derivada, positiva o negativa para todo valor real, será entonces la función siempre estrictamente creciente o decreciente y en consecuencia, tendrá inversa. Se podrá entonces hallar la función inversa aplicando la fórmula de Cardano.

De acuerdo con lo manifestado por los estudiantes, este simple trabajo contribuyó a tuvieran que enunciar con claridad qué buscaban, refinar las consignas, discutir y emitir juicios, investigar y trabajar en conjunto, a sentirse protagonistas.

Los interrogantes surgidos al final muestran la necesidad de buscar cómo hallar la inversa en otros casos, lo que llevará a investigar nuevas cuestiones matemáticas.

Referencias

1. García Venturini, A; Scardigli, M. *Análisis Matemático I, para estudiantes de ingeniería*. Editorial Ediciones Cooperativas. pp 27 – 66. (8° edición, marzo 2016)
2. Leithold, L. *El cálculo con geometría analítica*. Editorial Harla. pp 554 – 573. (1992)
3. Rey Pastor, J; Pi Calleja, P; Trejo, C. *Análisis matemático*. Editorial Kapeluz. pp 253 – 256. (1970)
4. Stewart, J; Redlin, L; Watson, S. *Precálculo.* Editorial Thomson. pp 221 – 261 (2002)
5. Spivak, M. *Calculus.* Editorial Reverté. pp 141 – 165 (2010)

Volver al Índice

Una Experiencia Didáctica en Torno a Problemas de Distancia de la Geometría Analítica

Patricia Có, Mónica del Sastre
Departamento de Matemática, Escuela de Formación Básica,
Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura, Universidad Nacional de Rosario
Av. Pellegrini 250, 2000 Rosario, Santa Fe, Argentina
{co, delsas}@fceia.unr.edu.ar

Resumen. Las autoras de este trabajo, docentes de la asignatura Álgebra y Geometría Analítica, del primer año de las carreras de Ingeniería e integrantes de un grupo de investigación en Educación Matemática de la Universidad Nacional de Rosario, notamos cómo año a año se agudizan las dificultades que los estudiantes tienen para abordar situaciones problemáticas relativas al cálculo de distancias. Esta situación se acentúa en los cursos de re-dictado, donde se advierte además apatía en las clases y frustración ante la no aprobación de los exámenes. En este trabajo se muestran las devoluciones de los estudiantes al planteo de un problema sobre rectas alabeadas, como parte de una propuesta didáctica que, concebida como un proyecto de aprendizaje dinámico para un grupo determinado de alumnos, fue evolucionando y modificándose en el aula en función de las reacciones de los estudiantes y de las intervenciones de las docentes.

Palabras Clave: Problema de distancia, Visualización, Socioepistemología.

1 Introducción

Las autoras de este trabajo, docentes de la asignatura Álgebra y Geometría Analítica del primer año de las carreras de Ingeniería e integrantes de un grupo de investigación en Educación Matemática (GIEM Rosario) de la Universidad Nacional de Rosario (UNR), notamos cómo año a año se agudizan las dificultades que los estudiantes tienen para abordar situaciones problemáticas relativas al cálculo de distancias. Particularmente, en los cursos de re-dictado observamos además apatía en las clases y frustración ante la no aprobación de los exámenes. Para estos estudiantes el volver a cursar una asignatura generalmente significa repetir las mismas clases, rehacer la misma ejercitación, tratar de aprobar un tipo de evaluación en donde ya han fracasado antes; en fin más de lo mismo y casi siempre con los mismos resultados.

Intentando explicar y superar esta situación revisamos las condiciones de trabajo actuales a la luz de varias alternativas propuestas desde la perspectiva de la Educación Matemática. Finalmente, decidimos enmarcarnos en la Teoría Socioepistemológica (TSE, [1, 2, 3]) que al incorporar el contexto sociocultural a los análisis sobre los sujetos que aprenden, las formas de plantear la enseñanza y el estudio del saber involucrado, modifica la mirada sobre las relaciones entre estas dimensiones.

Con una postura socioepistemológica podemos pensar que esta realidad es consecuencia de un fenómeno de exclusión generado por un discurso que norma el accionar docente, así como también el comportamiento de los estudiantes y las pautas que la institución establece para el desarrollo de nuestras tareas, y proponer acciones concretas que intenten el rediseño del discurso Matemático Escolar [4] en pos de superar la situación advertida.

Tal rediseño radicaría principalmente en el cambio de centración de los objetos a las prácticas, focalizando en él los principios de la Teoría Socioepistemológica, es decir su carácter contextualizado, relativista y funcional.

En este trabajo mostramos las devoluciones de los estudiantes al planteo de un problema sobre rectas alabeadas, como parte de una propuesta didáctica desarrollada en un curso de re-dictado de Álgebra y Geometría Analítica. La intención fue el tratamiento de todos los problemas de distancia que habitualmente se presentan (de punto a recta, de punto a plano, entre rectas, entre planos y entre recta y plano) en forma conjunta y prescindiendo de las fórmulas que tradicionalmente suelen ponerse a disposición de los estudiantes. Tal propuesta fue concebida como un proyecto de aprendizaje dinámico para ese grupo determinado de alumnos y fue evolucionando y modificándose en el aula en función de las reacciones de los estudiantes y de las intervenciones de las docentes.

2 Marco Referencial

La Matemática Educativa es una disciplina que surge en México en los años 70 y aborda la problemática de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Dentro de ella es posible advertir diferentes corrientes que, con distintos posicionamientos epistemológicos, se distinguen en su manera de entender y atender al conocimiento matemático.

Una de dichas corrientes, iniciada por el Dr. Ricardo Cantoral, se concreta como Teoría Socioepistemológica (o Socioepistemología) a fines de los ’80. La misma reconoce las cuatro dimensiones ligadas a los procesos de construcción del conocimiento (cognitiva, didáctica, epistemológica y social) de manera sistémica y desde una forma particular, cuestionando la concepción de la Matemática que subyace históricamente a su enseñanza.

Los referentes de esta corriente encuentran que la dimensión cognitiva ha sido reducida a la acción de apropiarse de elementos que existen objetivamente en “el afuera”, previos a toda experiencia humana. Asimismo, sostienen que los objetos son creados en el ejercicio de prácticas normadas, a través de las cuales emergen los significados a partir de resignificaciones progresivas entre el sujeto y su medio ambiente próximo. Dado que el conocimiento es funcional a partir de una situación en un contexto específico, las resignificaciones se van dando cuando ese conocimiento se ve enfrentado a otras situaciones, en otros contextos.

La Socioepistemología estudia la naturaleza del saber, considerando al ser humano como actor de la construcción de sus sistemas conceptuales, y se ocupa de las prácticas sociales como generadoras del conocimiento y a su vez normativas de la actividad humana.

A partir del análisis de estas prácticas se busca explicar los procesos de construcción, adquisición y difusión de los conocimientos matemáticos.

Además de explorar y entender cómo los seres humanos construyen conocimiento matemático, este enfoque se propone explícitamente intervenir para transformar los procesos educativos, a partir del reconocimiento del discurso Matemático Escolar [5] y la intención de su rediseño con base en el estudio de la construcción social del conocimiento matemático, entendida ésta como el conjunto de las interacciones entre individuos, los procesos de debates y negociaciones que vive la comunidad para institucionalizar un conocimiento y la funcionalidad de éste en un contexto y una situación específica.

En este sentido, en nuestra propuesta es clave fomentar la participación y el trabajo en equipo, y que la enseñanza y el aprendizaje sean parte y resultado de un proceso dinámico, flexible, comprometido, interactivo y en permanente retroalimentación.

Los problemas, en este contexto, son concebidos como generadores de procesos a través de los cuales los estudiantes ponen en juego sus conocimientos previos para dar solución a una situación nueva. La resolución de problemas se constituye entonces en una práctica social, en tanto su ejercicio permite la emergencia de significados a partir de resignificaciones progresivas entre el sujeto y su medio ambiente próximo [6].

Por otro lado, como ya hemos señalado en trabajos anteriores [7, 8, 9], el uso de la tecnología va de la mano con el desarrollo social y cultural del ser humano. Es una práctica social ya que norma la actividad humana y acompaña su evolución. Las Tecnologías de la Información y la Comunicación (TIC) están presentes en todos los ámbitos sociales y de la vida cotidiana. En nuestra propuesta pensamos en usos de las TIC como fomentadores de conductas participativas, de autogestión y de compromiso con actividades colectivas [10].

3 Propuesta de trabajo en el aula

El re-dictado de la asignatura Álgebra y Geometría Analítica se desarrolla en forma presencial con una carga horaria de seis horas semanales. Nuestros alumnos cuentan además con un Aula Virtual en el espacio Comunidades de la UNR, a través del cual tienen acceso a todos los apuntes de la Cátedra, mensajería interna, direcciones de los sitios de Internet que les pueden ser útiles y otros materiales didácticos que se van modificando en cada cursada, y con un grupo en una red social para las comunicaciones rápidas entre estudiantes y docentes.

Propusimos, como lo hacemos ya desde hace unos cuantos años una metodología de tipo taller para la labor en el aula [11], y desde el primer día de clase alentamos a la formación de grupos de trabajo y a la utilización de cualquier recurso tecnológico disponible como notebooks, netbooks, tablets, celulares o proyector. Propiciamos permanentemente un clima de trabajo dinámico, interactivo y de mutua colaboración, en donde los roles jerárquicos tradicionales en las clases pudieran alternarse conforme a la circulación de los distintos saberes.

En este contexto, las situaciones didácticas son concebidas como espacios de articulación del saber, donde el estudiante puede mostrar un rol activo, participativo y comprometido con su aprendizaje ayudado por el docente, quien con sus intervenciones, lo estimula a utilizar de manera óptima los recursos de que dispone.

El problema que exhibimos a continuación fue el medio elegido para la construcción del conocimiento, en una tarea de resolución no rutinaria.

El problema

Dada la recta *r* de ecuaciones $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = -1 - t \qquad t \in \Re \\ z = 4 + t \end{cases}$, se pide:

a) encontrar una recta *s* que contenga al punto *P(1, -2, 0)*, de manera que *s* y *r* sean alabeadas.
b) explicitar el procedimiento que permite calcular la distancia entre ambas rectas.

Las devoluciones de los estudiantes

La no unicidad de respuesta que presenta el ítem a) desconcertó inicialmente a los estudiantes, quienes agrupándose espontáneamente comenzaron a tratar de visualizar la situación manipulando el material didáctico concreto del que disponían; cuadernos, papeles, lápices, gomas de borrar asumieron el rol de planos, rectas y puntos en un determinado sistema de referencia espacial fijado por ellos.

El jugar con las distintas posiciones que pueden asumir las representaciones tangibles de los diferentes objetos geométricos involucrados, con el fin de visualizar el problema, da cuentas de una búsqueda de soluciones por prueba y error, y se constituye en un proceso dinámico de resignificación.

Fig. 1. Situación en el aula generada a partir del planteo del problema.

Nuestras intervenciones docentes consistieron en algunas preguntas formuladas a cada grupo en particular con la intención de hacer verbalizar sus ideas en la construcción de argumentaciones válidas.

Todos los grupos “encontraron” una recta que cumplía con las condiciones pedidas. Para poder dar sus ecuaciones, y siendo coherentes con su línea de razonamiento, los estudiantes propusieron dos procedimientos diferentes que reflejan los distintos esquemas cognitivos desde los que se aproximaron al problema.

- A partir de proponer un vector $\bar{v}$ no paralelo a *r*, escribieron ecuaciones paramétricas de una recta *s* con punto de paso *P* y vector dirección $\bar{v}$, y luego “verificaron” que no existieran puntos en común entre *s* y *r*.

Evidentemente para estos estudiantes dos rectas alabeadas son aquellas que no son paralelas ni secantes.

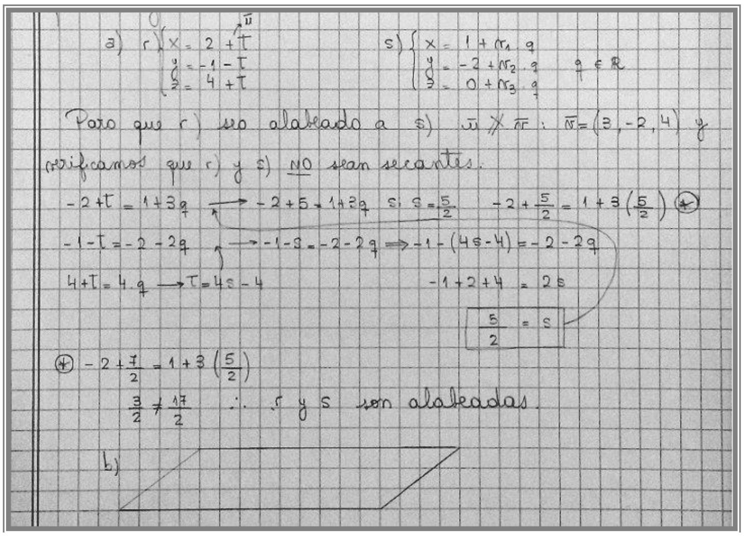


Fig. 2. Una propuesta para la resolución del ítem a).

- Propuesto el vector $\bar{v}$ no paralelo a la recta *r*, construyeron otro vector $\overline{PP_0}$ (con *Po* un punto de *r*) y utilizaron el producto mixto entre $\bar{v}$, $\overline{PP_0}$ y el vector dirección de *r* para verificar la no coplanaridad. Las ecuaciones de la recta *s* surgieron de considerar a *P* como su punto de paso y a $\bar{v}$ como su vector dirección.

En este caso, la definición de rectas alabeadas que se pone en juego es la de rectas no coplanares.

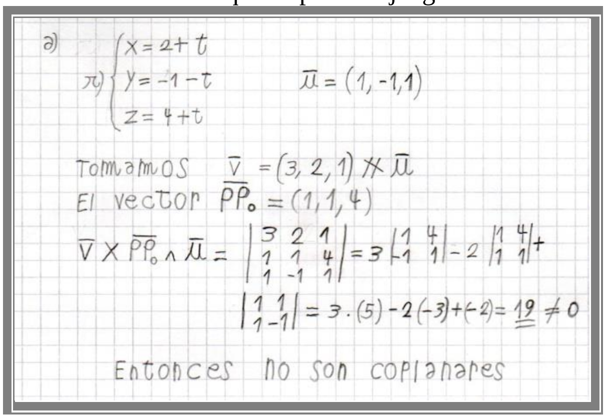


Fig. 3. Otra propuesta para la resolución del ítem a).

A la hora de abordar el ítem b), algunos grupos recurrieron a gráficas en papel o a representaciones con software, mientras que otros, considerando el salón de clases como sistema referencial espacial, continuaron discutiendo auxiliados por el material tangible que ya habían utilizado.

También en esta oportunidad pudimos apreciar distintas formas de aproximación al problema con la consecuente variedad en las estrategias propuestas para su resolución. Mostramos a continuación algunas de ellas.

- Con el fin de aplicar sus conocimientos previos referidos a las interpretaciones geométricas de los productos entre vectores, algunos grupos utilizaron la construcción auxiliar de un paralelepípedo recto inserto implícitamente en el sistema de coordenadas cartesianas ortogonales usual.

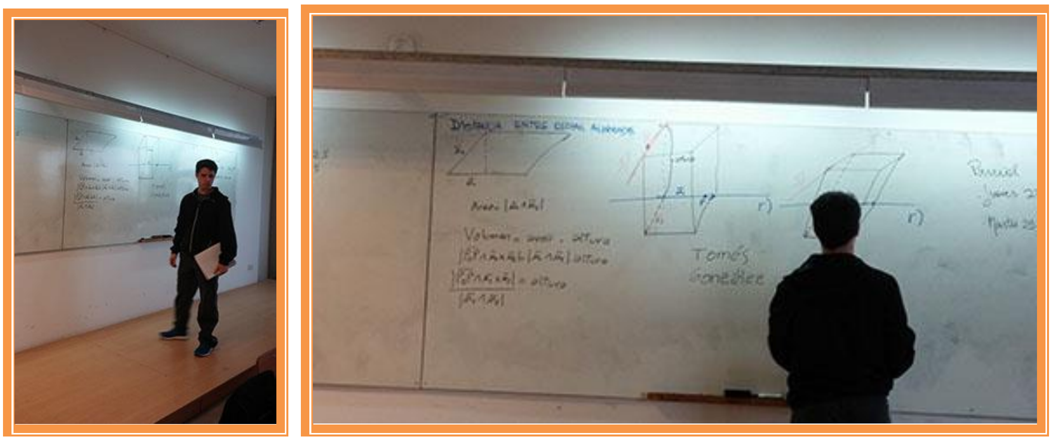


Fig. 4. Obtención de una fórmula a partir del cálculo de un volumen.

- Hubo estudiantes que mostraron haber realizado una significativa asociación entre los conceptos de distancia y proyección (tal vez porque ésta sea la argumentación que más frecuentemente aparece en los apuntes de cátedra).

Algunos trabajaron con representaciones gráficas bidimensionales de la situación espacial visualizada y otros representaron mentalmente la situación en el espacio tridimensional para luego graficar en el plano de la hoja una proyección en dos dimensiones de la misma, evidenciando una manipulación extra de sus representaciones mentales.

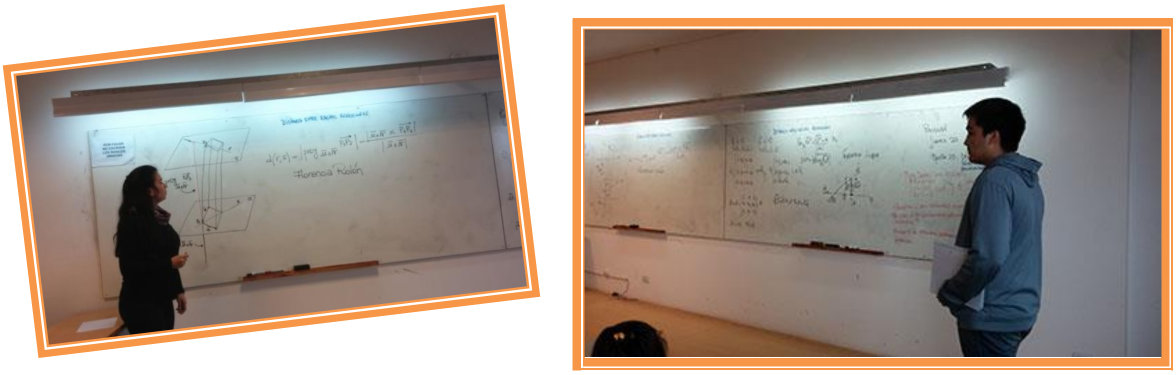


Fig. 5. Obtención de una fórmula a partir del cálculo de proyecciones.

En los casos anteriormente descriptos se logró deducir una única fórmula para el cálculo de la distancia entre dos rectas alabeadas.

Seguidamente describimos procedimientos sencillos válidos construidos por algunos equipos de trabajo para solucionar el problema sin necesidad de escribir una única fórmula.

- *Aplicación de la noción de distancia entre recta y plano.*

Los estudiantes visualizaron un plano que contuviera a una de las rectas (cuya ecuación obtuvieron fácilmente) y calcularon la distancia entre éste y la otra recta, resolviendo así el problema.

Fig. 6. Aplicación de la distancia entre un plano y una recta.

- *Aplicación de la noción de distancia entre dos planos paralelos.*

Los alumnos escribieron las ecuaciones de dos planos paralelos, cada uno conteniendo una de las rectas, y calcularon la distancia entre ellos llegando a la solución del problema.

4 Reflexiones finales

Como señaláramos anteriormente la esencia de esta metodología de trabajo radica en la discusión que se genera a partir del planteo de un problema.

Las situaciones de enseñanza que se proponen resultan una fuente propicia para la construcción social de significados que hace emerger nuevos conocimientos.

Al apropiarse de los problemas, los alumnos son protagonistas activos de su aprendizaje por cuanto hacen y rehacen Matemática, descartando la idea de que la misma sea una ciencia acabada, independiente de la práctica, preexistente, única y universal.

La realización de este tipo de actividades favorece el seguimiento del trabajo de los estudiantes, la detección de sus dificultades, los progresos realizados, constituyéndose así en una eficaz herramienta de evaluación formativa que permite regular los procesos de enseñanza y de aprendizaje que se enmarcan en un contexto de trabajo colaborativo.

Referencias

1. Cantoral, R.; Farfán, R.: Matemática Educativa: Una visión de su evolución. Revista Latinoamericana de Matemática Educativa. Vol. 16, pp. 27-40. (2003)
2. Cantoral, R.: Fundamentos y Métodos de la Socioepistemología. Simposio en Matemática Educativa. México: CICATA-IPN. (2011)
3. Cantoral, R.: Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa. Estudios sobre construcción social del conocimiento. D.F., México: Gedisa. (2013)
4. Soto, D. El Discurso Matemático Escolar y la Exclusión. Una visión Socioepistemológica. Tesis de maestría en Ciencias. CINVESTAV, Distrito Federal, México. (2010)
5. Cantoral, R., Farfán, R. M., Lezama, J. & Martínez-Sierra, G. Socioepistemología y representación: algunos ejemplos. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa. Número especial. pp. 83-92. (2006)
6. Ramírez Rincón, E.: El modelo de resolución de problemas en una perspectiva de investigación como práctica social normada. Revista Tecné, Episteme y Didaxis – TED. http://www.scielo.org.co/pdf/ted/n34/n34a06.pdf. (2013). Accedido el 13 de febrero de 2017.
7. Có, P.; Braccialarghe, D.; Matassa, A.; Piraino, M.: Relevamiento de recursos para el diseño de actividades con TIC en las carreras de ingeniería. XI Carem. Congreso Argentino de Educación Matemática. pp. 528 – 538. (2014)
8. Del Sastre, M., Panella, E.: Hacia la incorporación del contexto en la construcción de los saberes matemáticos en carreras de Ingeniería. Una propuesta de trabajo multidisciplinar. Actas VIII CIDU- Congreso Iberoamericano de Docencia Universitaria y de Nivel Superior. pp. 134. (2014)
9. Braccialarghe, D.; Có, P.; del Sastre, M.; Introcaso, B.; Matassa, A.; Panella, E.; Piraino, M.: Actividades con TIC para el aprendizaje colaborativo en la curricula actual. IV Jornada de Experiencias Innovadoras en educación en la FCEIA. IV. EIEF. (2015)

10. Artigue, M. Enseñar y aprender matemáticas con tecnología: ¿Qué cambios? Tecnologías y práctica Educativa. Conferencia llevada a cabo en la Escuela en Didáctica de la Matemática, VI Edición (EDIMAT 2013). Buenos Aires, Argentina. (2013)
11. Braccialarghe, D., Có, P., del Sastre, M., Introcaso, B.: Un cambio metodológico en el ciclo básico de ingeniería para resignificar conceptos matemáticos. IX Jornadas de Ciencia y Tecnología de la Universidad Nacional de *Rosario*. (2015)

Volver al Índice

Uso del Aula Virtual en el Estudio de Casos en la Formación Matemática en Carreras de Ingeniería

Mónica Scardigli, Alicia Alvarez, Carolina Cordon, Aída Miguel
Facultad Regional Buenos Aires, Universidad Tecnológica Nacional, Argentina
mgscard@hotmail.com, {ingaliciaalvarez, aidmiguel13}@yahoo.com.ar, carocordon@gmail.com

Resumen. En este artículo se presenta una experiencia realizada mediante el empleo del aula virtual, para abordar un caso que se les presentó a alumnos cursantes de la asignatura Álgebra y Geometría Analítica, correspondiente al primer nivel de las carreras de ingeniería de la Universidad Tecnológica Nacional Facultad Regional Buenos Aires. Para llevar adelante el caso presentado, los estudiantes trabajaron en grupos. El objeto de trabajar con esta metodología es que, permite transferir los conocimientos ya adquiridos a situaciones nuevas, favoreciendo la comprensión de procesos matemáticos y no la simple repetición de rutinas, resulta motivadora para los estudiantes al aplicar diversos conceptos de la asignatura para resolver una situación real y promueve el trabajo en equipo, propiciando en el estudiante del primer nivel de la carrera, la adquisición de diversas estrategias cognitivas que empleará en su futuro desempeño profesional.

Palabras Clave: Aula virtual, Estudio de casos, Trabajo en grupos.

1 Introducción

Los avances tecnológicos han influido en la educación universitaria, y como consecuencia la modalidad de cursado presencial ha ido transformando sus prácticas educativas adaptándose a las nuevas tecnologías. Por su parte, los docentes han ido paulatinamente combinando los procesos de enseñanza y aprendizaje desarrollados en espacios presenciales, con otros que tienen lugar en la virtualidad, mediante el uso de computadoras y aulas virtuales. De este modo, se han ido generando múltiples situaciones de aprendizaje, ya sea en el aula o fuera de ella, tanto en el momento de la clase presencial como en cualquier otro.

Los profesores y estudiantes universitarios cuentan de esta forma con una extensión de las aulas presenciales en las aulas virtuales, que dan lugar a nuevas formas de aprender y de propiciar el trabajo colaborativo. La incorporación de las aulas virtuales al proceso de enseñanza y de aprendizaje permite contar con un nuevo espacio para ofrecer diferentes herramientas a los estudiantes, tales como información, foros para la comunicación e interacción, así como presentarles tareas y actividades fácilmente evaluables. Sin embargo, como advierte Mariana Maggio [1]: “Usar las posibilidades que ofrecen los foros, los blogs, otros sistemas de comunicación en línea para conversaciones simultaneas y servicios de redes sociales en general, no garantiza, automáticamente, la promoción del diálogo en la enseñanza.”

Por tanto, este nuevo paradigma pedagógico exige a los docentes una cuidadosa selección de las actividades que resulten propicias para que los estudiantes se involucren en su aprendizaje en este nuevo escenario.

En el caso de la UTN-FRBA, los docentes contamos con la posibilidad de abrir para nuestros cursos aulas virtuales en el entorno Moodle.

En este contexto y en el marco del PID: Estudio de casos aplicado a la enseñanza y al aprendizaje de matemática en carreras de ingeniería, se han diseñado e implementado diversas actividades con el empleo del método de estudio de casos en distintas asignaturas del área de matemática correspondientes al primer nivel de la carrera. Aquí se desarrolla una actividad presentada a alumnos cursantes de la asignatura Álgebra y Geometría Analítica correspondiente al primer año de las carreras de ingeniería, de la UTN-FRBA. La actividad consistió en presentar a los estudiantes, un caso a resolver en forma grupal y cuya defensa era individual. En esta actividad en particular, se utilizó el ámbito del aula virtual para llevar a cabo el abordaje del caso planteado.

2 Fundamentación

En la actualidad, el uso de la tecnología en el aula se hace presente de diversas maneras. Por un lado, la mayoría de los estudiantes, de todos los niveles, tienen acceso a una computadora y la posibilidad de una conexión a Internet. Por otro lado, como sostiene Guillermo Reina [2] : “es muy importante no esperar “hasta la próxima clase”, para poder aclararles las distintas dudas que puedan plantearse, ya sea cuando los estudiantes en sus casas repasan los distintos temas vistos durante el desarrollo de la clase, o cuando tratan de resolver algún tipo de ejercicio o problema que hayamos planteado, porque puede suceder que para algunos estudiantes el hecho de no recibir una aclaración en el momento indicado ,haga que el tiempo entre una clase y la siguiente termine siendo un tiempo muy extenso”. Por lo tanto, consideramos importante que el docente integre a sus clases el uso de chat, redes de conexión para que el proceso de enseñanza y de aprendizaje sea más beneficioso para todos los participantes.

En tal sentido, hace algunos años hemos implementado el uso del aula virtual como herramienta de acompañamiento de las clases presenciales. Los materiales disponibles en línea, como así también el uso de foros de intercambio han redundado en experiencias de aprendizaje absolutamente enriquecedoras que van abriendo nuevas potencialidades de uso de las herramientas disponible en aulas Moodle.

Cada vez se hace más necesario ir mucho más allá de la simple exposición de archivos, de la presentación visual de algún contenido o de la comunicación asincrónica para aclarar dudas, se tienen que generar actividades que resulten un verdadero desafío para el estudiante, que lo inviten a trabajar en equipo y a investigar, que requieran una intervención docente diferente a la habitual en la clase presencial. Por otra parte, surge el desafío de mantener coherencia entre el trabajo áulico y el virtual, espacios de reflexión diferenciados en los que el alumno tenga momentos de trabajo individual y luego grupal donde el docente actúa como guía del proceso, procurando generar mayor autonomía en los alumnos. El foco no sólo está puesto en el aprendizaje de un concepto matemático en sí, sino también en la formación de un espíritu crítico, que indague, se cuestione lo preestablecido, busque distintas soluciones y aplique ese conocimiento disponible a cuestiones extra Matemáticas.

En su libro Creciendo digitalmente: El entorno de la generación internet, Don Tapscott [3] señala que estamos ingresando a una nueva era de aprendizaje digital, en la que atravesamos una etapa de transición del aprendizaje por transmisión a un aprendizaje interactivo.

Por otro lado, la actividad presentada a los estudiantes corresponde a un estudio de casos. Los casos son narraciones que describen una situación real o hipotética y que nos presentan un dilema. Como señala Edith Litwin [4]: "un buen caso provoca la discusión, incita a tomar partido, a reconocer controversias y a la búsqueda de mejores razones para continuar analizándolo. Despierta el interés de los estudiantes y los desafía a pensar".

Para trabajar con un caso, tanto en forma presencial como virtual, el docente debe tener en cuenta que su intervención es diferente a la que desarrolla en una clase expositiva o de resolución de problemas, debido a que en la enseñanza a través de estudio de casos no hay certezas y el docente debe mantener en todo momento una actitud de guía, sin interferir ni resolverles a los estudiantes la situación problemática planteada.

3 Desarrollo

Los integrantes del antes mencionado PID, relativo al diseño e implementación de diversos estudios de casos, conforme hemos desarrollado la experiencia en nuestros cursos de las asignaturas Probabilidad y Estadística, Análisis Matemático I y Álgebra y Geometría Analítica, hemos notado la dificultad que presentan nuestros estudiantes para abordar los distintos casos planteados, ya que como señalamos anteriormente, en el abordaje de cada caso, el docente no va a decir explícitamente con qué conceptos de la asignatura de la que se trate, se puede abordar el caso planteado. Por esta razón, se decidió brindar a los grupos en el aula virtual del curso, una serie de preguntas de apoyo para guiarlos.

Se trabajó con un total de 26 estudiantes, se formaron cinco grupos de cuatro integrantes cada uno y dos grupos de tres.

Respecto de la experiencia en sí, se ha utilizado el estudio de casos para aplicar temas de la asignatura Álgebra y Geometría Analítica. La propuesta consistía en un problema de modelización inversa, en el que se pedía la ubicación de una locación, una vez que habían variado las condiciones iniciales del entorno, y que los alumnos podían abordar con distintos conceptos de la asignatura, tales como álgebra vectorial, números complejos o matrices.

Los tiempos áulicos muchas veces hacen muy complicado realizar un seguimiento detallado de cada grupo desde lo presencial, en este sentido el uso del aula virtual colabora como espacio de intercambio entre los alumnos, con intervención del docente, mediante la comunicación asincrónica a través de publicaciones en los foros, comunicación sincrónica en los chats y del uso de los cuestionarios de Moodle como herramienta.

Para presentar las preguntas de apoyo, en este caso se eligieron los cuestionarios de Moodle, luego de analizar las potencialidades que ofrecen las herramientas de la plataforma como así también el grupo de alumnos con el que se cuenta, sus inquietudes y sus características en cuanto a la familiaridad con el uso de dichas herramientas.

Inicialmente se presentó el proyecto a los estudiantes, se les explicó los motivos de la utilización del aula virtual para abordar el caso y se conformaron los grupos de trabajo. Luego se subió el caso de estudio al aula virtual a través de un archivo Word, donde además figuraba la consigna y las pautas de trabajo. Se habilitaron foros de intercambio por grupos para que sus integrantes pudiesen comunicarse de manera interna, sin intervención del resto del curso, sólo del docente de ser necesario. Posteriormente, luego de unos días de trabajo grupal, se habilitó el Cuestionario Moodle en el que el grupo debía acceder por única vez y elegir sólo una pregunta de las disponibles a modo de ayuda para la resolución del caso. Finalmente, se realizó una puesta en común presencial y luego una devolución del docente de manera personal a cada grupo de trabajo.

En cuanto al uso del aula virtual, los alumnos valoraron las herramientas que se les presentaron, bajaron el archivo para poder trabajar y analizar el caso, tuvieron intercambios grupales a través de los foros aunque no todos los grupos los usaron. Por último, algunos equipos utilizaron el cuestionario para resolver el caso, seleccionando una de las preguntas planteadas.

En general el trabajo en el aula virtual fue bueno, los alumnos utilizaron las herramientas presentadas, se fueron familiarizando con ellas y las aprovecharon. Las intervenciones docentes virtuales fueron solamente para guiar el proceso de resolución del caso, no hubo intervenciones en los chats de los alumnos, sólo pequeñas aclaraciones relacionadas con la forma en que podían organizarse. Durante toda la experiencia los docentes procuraron no inducir la elección de la pregunta de apoyo más conveniente para su resolución, por ello administraron la menor cantidad de intervenciones posibles en el entorno virtual.

El trabajo presencial tuvo tres instancias, una inicial de presentación del caso y de la forma de trabajo, otra de defensa individual del resultado obtenido por cada equipo sobre el caso planteado, y una final de evaluación de la experiencia a través de la encuesta individual de los alumnos y un momento de reflexión general y puesta en común de las vivencias de cada uno de ellos.

Las preguntas presentadas en el entorno virtual fueron tres, la primera referida al concepto matemático con el que se podía modelizar el problema, si el grupo elegía esta opción, se desplegaban dos alternativas, de las cuales solo podían elegir una, la primera era matriz de rotación y la segunda números complejos. En cada caso, se explicaba el modo de aplicación de los conceptos, sin detallar su empleo a la resolución del caso planteado. Las otras dos preguntas de apoyo, eran referidas a las condiciones de contorno del problema y sus respuestas le daban al grupo una idea de si el problema se podía resolver con las condiciones existentes o no.

4 Conclusiones

Luego de finalizada la defensa del trabajo presentado por cada grupo, se realizó una encuesta individual a los alumnos con el objeto de completar la evaluación de la experiencia y de los resultados obtenidos, como muestra la Fig. 1.

- Respecto de su participación en el grupo
  1. Percibe la gran idea SI___ NO ___
  2. Distingue entre opinión, suposición y hecho: SI___ NO ___
  3. Tolera la idea de los demás: SI___ NO ___
  4. Tolera los datos contrarios: SI___ NO ___
  5. Puede dar ejemplo en apoyo de ideas: SI___ NO ___
  6. Interpreta los datos: SI___ NO ___
  7. Extrae y registra la información con exactitud: SI___ NO ___
  8. Facilita la discusión en el grupo: SI___ NO ___
  9. Es hábil para autoevaluarse: SI___ NO ___
- Respecto de la elección de la pregunta a realizar para resolver el caso
  1. Realizó una pregunta de apoyo SI ___ NO ___
  2. Le resultó útil la respuesta para la resolución del caso SI ___ NO ___
  3. Cree que hizo la mejor elección de la pregunta SI ___ NO ___
- Explique brevemente la razón que motivó al grupo para la elección de la pregunta de apoyo.

Fig. 1. Encuesta realizada a los cursantes respecto de la tarea realizada

Se detalla a continuación, en el gráfico de la Fig. 2, los resultados obtenidos en la encuesta individual, con respecto a la participación de cada estudiante dentro de su equipo de trabajo.

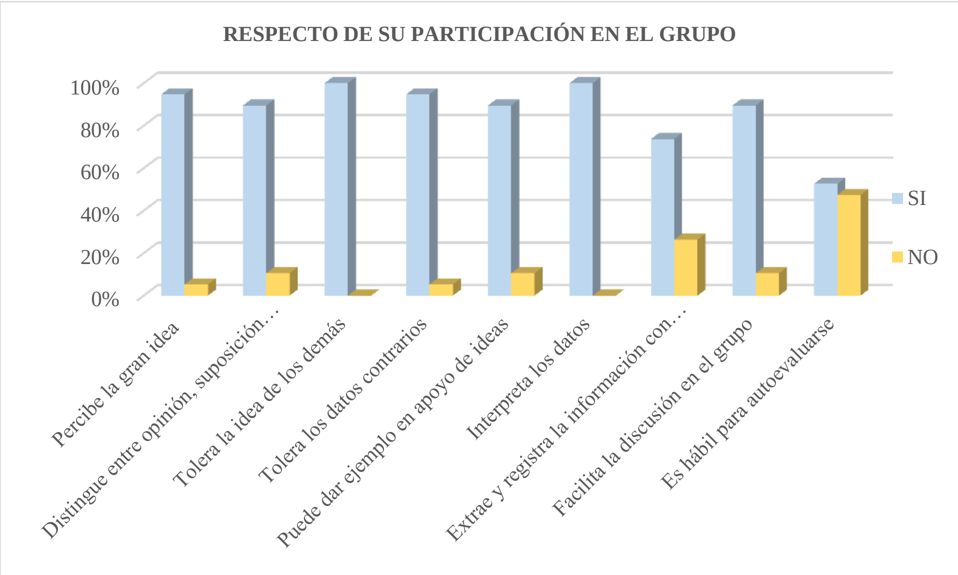


Fig. 2. Resultados referidos a la participación del estudiante en su grupo.

La encuesta pretendió también propiciar un momento de reflexión personal del alumno, que permitiese aportar datos respecto de su propio proceder en el estudio y detectar elementos que permitan mejorar su vida de estudiante y su rol dentro de un equipo de trabajo.

Se observó un alto grado de positivismo de los alumnos, superior al 74%, al evaluar los siguientes aspectos: percepción del problema planteado, distinción de datos importantes y accesorios, toma en cuenta la idea de los demás, tolerancia de datos contrarios, brindar ejemplos de apoyo a sus ideas, interpretación de datos, manejo claro de la información, facilitador de la discusión en el grupo.

Aún así, al consultarles respecto a si son o no hábiles para autoevaluarse, el 53% contestó que si y el 47% contestó que no, por lo que las apreciaciones sobre los puntos anteriores quizá no reflejen exactamente las habilidades de todos los alumnos encuestados y tendrían que complementarse con la propia apreciación del docente respecto de las habilidades de cada uno de sus alumnos.

En las Fig. 3 y Fig. 4, se observan los resultados de la encuesta referidos a la elección de la pregunta de apoyo de cada grupo. Cabe destacar que si bien, tanto la decisión de realizar o no la pregunta de apoyo, como su elección, fueron instancias consensuadas en cada equipo, resulta interesante recoger las opiniones individuales de cada estudiante respecto de las decisiones que se adoptaron en forma grupal, a la luz de los resultados obtenidos al abordar el caso planteado.

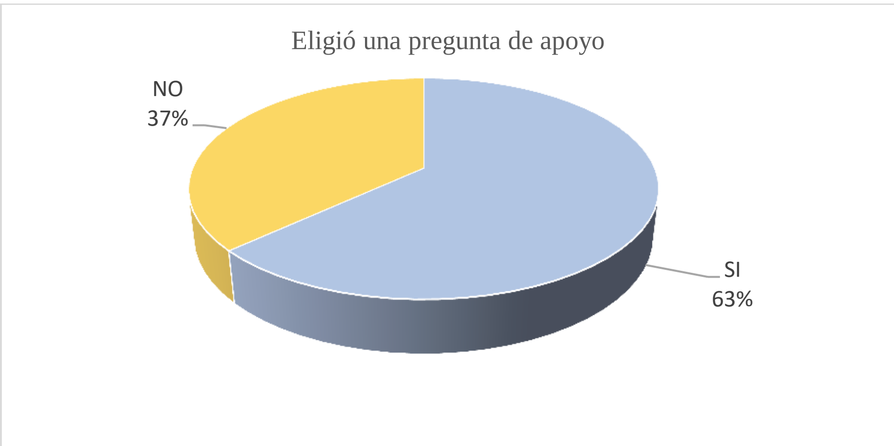


Fig. 3. Resultados referidos a la elección de la pregunta de apoyo

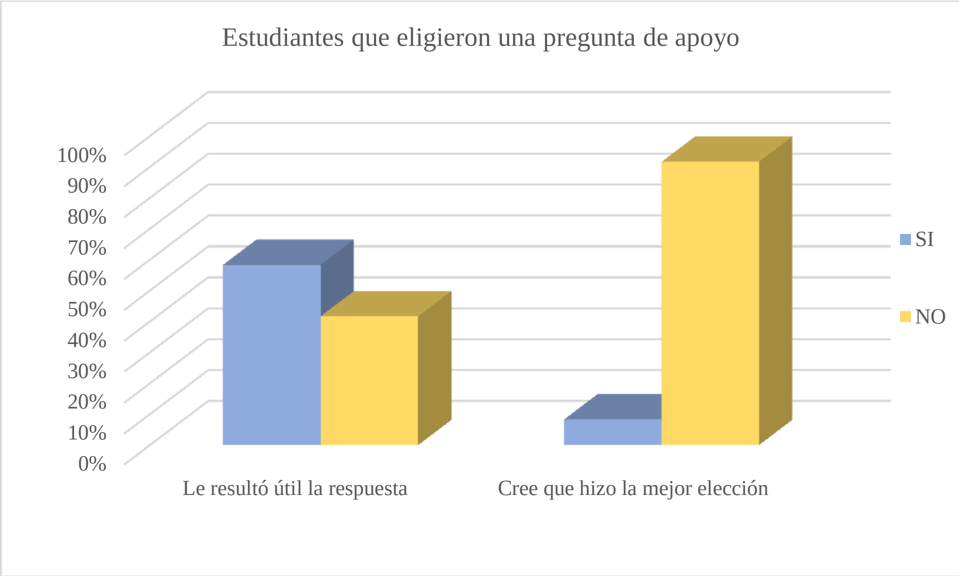


Fig. 4. Resultados referidos a los estudiantes que eligieron una pregunta de apoyo

Finalmente, se indagó sobre la utilización de la pregunta de ayuda para la resolución del caso. Al respecto, el 63% de los alumnos recurrió a la pregunta de apoyo para la resolución mientras que sólo al 37% de los mismos le resultó útil la respuesta aportada.

Este último hecho se debe a que el 92% de los alumnos consideró que no hizo una buena elección de la pregunta, hecho que se apoya además en los comentarios aclaratorios aportados por los alumnos.

En efecto, en lo que respecta a la razón que motivó a cada equipo a elegir una pregunta de apoyo que les resultó poco útil para abordar el caso, la mayoría de los estudiantes alegó que la elección se debió a que habían comenzado a plantear el desarrollo en forma equivocada.

Cabe señalar el caso de un equipo en particular que, si bien llegó a la resolución correcta, lo hizo de modo gráfico, lo que realmente les resultó complejo fue formalizar la resolución del problema desde lo algebraico para convertir esa conjetura que tenían en una certeza.

Lo interesante de estas reflexiones de los estudiantes respecto de las dificultades que tuvieron en el abordaje de la situación problemática, es que a pesar de reconocer que no habían elegido la pregunta más conveniente, tuvieron un momento de reflexión al responder la encuesta y pudieron reconocer las causas que los llevó a efectuar esa elección.

Consideramos que el planteo de este tipo de actividades propicia en los estudiantes una actitud proactiva y la comprensión de procesos matemáticos y no la simple ejercitación de rutinas. Además, favorece el trabajo en equipo, la distribución de responsabilidades, roles y tareas entre sus miembros y la discusión temática.

En ese sentido, Paula Carlino [5], señala que en la mayoría de las clases los docentes planifican sus exposiciones , sin embargo, destaca la autora, resultaría más conveniente que el docente también elabore e implemente actividades para que los estudiantes las aborden con los diferentes temas de la asignatura , Carlino considera que: "lo que está en juego en este reparto de roles es quién, con qué fines y de qué modo hablará, escuchará o leerá y, por tanto, quién extenderá su comprensión y conocimiento de los temas de la asignatura".

Por otra parte, en el trabajo con estudio de casos, se ha observado que la mayor dificultad que se le presenta a cada grupo en el abordaje de la situación problemática, es la de descubrir con qué temas de la asignatura pueden abordarlo, por esta razón el empleo del aula virtual es de suma importancia para guiarlos y para descubrir cuáles son las razones de estas dificultades a la hora de elegir las preguntas a realizar y permite favorecer la capacitación para el autoaprendizaje.

En lo que respecta al empleo del aula virtual, permitió que los estudiantes tuviesen un monitoreo permanente de la tarea desarrollada, ya que para entrar al espacio virtual del curso solo es necesario acceder a algún dispositivo y esto se puede hacer en cualquier momento, de modo que el aula siempre está "abierta". De esta manera, además de tener acceso a la actividad propuesta y de poder comunicarse con los docentes, el estudiante tiene a su disposición los contenidos de los temas y actividades anteriores del curso.

Por otro lado, el empleo del aula virtual facilitó el trabajo con las preguntas de apoyo, ya que permitió que el estudiante pudiese desplegar las alternativas correspondientes a la pregunta de su elección y acceder a los desarrollos correspondientes.

Como señalan Cobo y Moravec [6] “El desafío de las competencias digitales es que requieren ser estimuladas mediante experiencias prácticas. Además de conocer la funcionalidad instrumental de un software o dispositivo, se requiere ser capaz de aplicar el pensamiento complejo para resolver problemas de diversas maneras”.

Finalmente, cabe destacar que el desarrollo de este tipo de actividades, propicia en los estudiantes del primer nivel de la carrera la adquisición de habilidades cognitivas que empleará tanto en las asignaturas que cursará, como en su futuro desempeño profesional

Referencias

1. Maggio, M.: *Enriquecer la Enseñanza. Los ambientes con alta disposición tecnológica como oportunidad*. Paidós. Buenos Aires, pp85 (2012).
2. Reina, G.: *Nuevas tecnologías aplicadas a la educación. La clase no finaliza en el aula*. Buenos Aires: Ugerman Editor pp 17. (2012).
3. Taspott, D: *Creciendo en un entorno digital. La generación Net* . Bogotá: Mc Graw Hill /Interamericana de Colombia. (1998).
4. Litwin, E.: *El oficio de enseñar*: Paidós. Buenos Aires, pp. 96 (2009).
5. Carlino, P: *Escribir, leer y aprender en la universidad*. Buenos Aires: Fondo de Cultura Económico.pp11 (2005).
6. Cobo, C. y Moravec, J.: *Aprendizaje invisible: Hacia una nueva ecología de la educación* .España. Colección Trasmedia XXI-versión digital pp37 (2011).

Volver al Índice

Justificación Teórica del Diseño de Actividades Relacionadas con el Concepto de Derivada

Favieri Adriana, Betina Williner, Scorzo Roxana, Falsetti Marcela
Departamento de Ingeniería, Universidad Nacional de La Matanza
Florencio Varela 1903, San Justo, Provincia de Buenos Aires, Argentina
{afavieri .bwilliner, rscorzo.mfalsetti}@unlam.edu.ar

Resumen. En la asignatura Análisis Matemático I del Departamento de Ingeniería e Investigaciones tecnológicas de la Universidad Nacional de La Matanza diseñamos una serie de actividades relacionadas con el concepto de derivada para poner en juego diversos registros de representación y fomentar el desarrollo de ciertas habilidades matemáticas. En este trabajo mostramos la justificación teórica de dicho diseño que orientó tanto la presentación de los registros de representación adecuados como la determinación de las habilidades matemáticas a desarrollar. Mostramos también la relación entre los ítems de las tareas y las habilidades. Concluimos el artículo con consideraciones sobre lo realizado y reflexiones sobre las ventajas de diseñar de acuerdo a aportes teóricos.

Palabras Clave: Registros de representación, Habilidades matemáticas, Diseño de actividades, Derivadas.

1 Introducción

En la asignatura Análisis Matemático I del Departamento de Ingeniería e Investigaciones tecnológicas (DIIT) de la Universidad Nacional de La Matanza (UNLaM) nos interesa analizar el desarrollo de habilidades matemáticas vinculadas al concepto de derivada cuando los alumnos trabajan con actividades dadas en diversos registros de representación. Entre las acciones que llevamos a cabo se encuentra el diseño de actividades con el fin de lograr en el estudiante un buen desempeño. Luego de una búsqueda bibliográfica sobre las habilidades matemáticas y las diferentes representaciones semióticas de los objetos matemáticos decidimos qué clase de actividades podrían ser adecuadas para tal fin. Decidimos realizar la experiencia a través de tres actividades, una de funciones, otra de límite y la tercera sobre derivada exclusivamente; las dos primeras actividades fueron preparatorias e introductorias al concepto de derivada. Resolvimos también utilizar variedad de registros de representación, y concentrarnos en dos modelos de funciones: la función cuadrática y la proporción inversa entre dos variables. Los modelos cuadráticos elegidos representan el origen del concepto de derivada: uno geométrico sobre recta tangente y el otro sobre velocidad de un cuerpo en movimiento. El otro modelo representa una situación simple de Física en la cual se quiere estudiar un fenómeno de variación. El diseño de estas actividades lo realizamos de acuerdo a los aportes teóricos sobre registros de representación y sobre habilidades matemáticas. En este artículo, presentamos los fundamentos teóricos que orientaron el diseño en relación con los registros de representación y con las habilidades matemáticas y realizamos la explicación detallada de la actividad correspondiente a funciones, exhibiendo las justificaciones para las actividades que, por un lado, ponen en juego los registros de representación elegidos y, por otro, pretenden que se desarrollen las habilidades matemáticas elegidas. Mostramos también la estrecha relación entre los temas de los ítems de cada tarea con los registros y con las habilidades Concluimos el trabajo con consideraciones sobre las ventajas de diseñar actividades de acuerdo a la teoría.

2 Marco teórico

2.1 Registros de representación

En Matemática el sujeto no entra en contacto directo con el objeto de estudio sino con una representación particular de ese objeto matemático [1]. Existen tres polos que no deben confundirse:

- El objeto representado.
- El contenido de una representación, es decir lo que una representación particular presenta del objeto.
- La forma de representación, llamada registro o sistema de representación [2].

La comprensión emerge en los sujetos mediante la coordinación de al menos dos registros de representación [2]. Es imprescindible comprender los sistemas de representación por varias razones: los objetos matemáticos están expresados en una variedad de registros, sólo podemos acceder a los objetos matemáticos a través de vías de representación y por último, porque la representación de un objeto nos muestra ciertas características del mismo y no otras [1]. De esta forma cuanto más sistemas se puedan coordinar mejor se conocerá el objeto en cuestión.

Los que involucramos en este trabajo son:

- Registro verbal: El lenguaje coloquial es el utilizado para representar situaciones que pueden ser modeladas en cualquiera de los otros registros.
- Registro analítico: Se expresa analíticamente un concepto recurriendo a notaciones matemáticas adecuadas utilizando símbolos acordados.
- Registro gráfico: Es la representación en el plano cartesiano o eje real o espacio de acuerdo a qué objeto se está tratando.
- Registro numérico: cuando los datos están dados por cantidades y números que se pueden organizar a través de tablas [3] y brindar información de aproximaciones a valores y evaluaciones, de tendencias, etc.

Con los registros de representación se pueden realizar las siguientes operaciones cognitivas:

- Formulación: Es la formación de una representación identificable y comunicable.
- Tratamiento: es la transformación de la representación dentro del mismo registro usado para la representación formada. donde ha sido formulada.
- Conversión: es la transformación de la representación en otra representación en otro registro en la que se conserva la totalidad o parte del significado de la representación inicial.

2.2 Habilidades matemáticas

Respecto a la definición de habilidad, varios autores [4, 5, 6, 7], hablan de procedimientos o habilidades como los modos de actuación, de un saber hacer o de contenidos procedimentales. Nosotros definimos procedimiento a la acción o tarea que debemos realizar para lograr un objetivo o fin en el cual la matemática está involucrada. En tanto que una habilidad matemática es la facultad personal de efectuar el procedimiento eficientemente, es decir, la capacidad de realizar acciones correctamente que conducen al logro del objetivo planteado.

En el año de 1956, Benjamín Bloom, desarrolló su taxonomía de Objetivos Educativos, que sostiene que el proceso de aprendizaje está relacionado con tres dominios psicológicos, el dominio cognitivo para procesar información, conocimiento y habilidades mentales, el dominio afectivo relacionado con las actitudes y sentimientos y el dominio psicomotor, vinculado a las habilidades manipulativas, manuales o físicas. Lorin Anderson revisó dicha taxonomía y publicó, en el año 2001, la Taxonomía Revisada de Bloom, que como novedad incorpora el uso de verbos en lugar de sustantivos para cada categoría. Las categorías incluyen las habilidades recordar, comprender, aplicar, analizar, evaluar y crear [8].

En cuanto a las habilidades matemáticas, Delgado Rubí [6] aporta una clasificación la cual resume las habilidades matemáticas en habilidades conceptuales, traductoras, operativas, heurísticas y meta-cognitivas. Profundizando cada una de ellas:

- Habilidades conceptuales: aquellas que operan directamente con los conceptos (identificar, fundamentar, comparar, demostrar)
- Habilidades traductoras: aquellas que permiten pasar de un dominio a otro del conocimiento (interpretar, modelar, recodificar)
- Habilidades operativas: funcionan generalmente como auxiliares de otras más complejas y están relacionadas con la ejecución en el plano material o verbal (graficar, algoritmizar, aproximar, optimizar, calcular).
- Habilidades heurísticas: aquellas que emplean recursos heurísticos y que están presentes en un pensamiento reflexivo, estructurado y creativo (resolver, analizar, explorar)
- Habilidades metacognitivas: las que son necesarias para la adquisición, empleo y control del conocimiento y demás habilidades cognitivas (planificar, predecir, verificar, comprobar, controlar).

2.3 Enseñanza de la derivada

Con respecto a investigaciones vinculadas con el concepto de derivada, varios autores que han trabajado con el concepto de derivada mediante actividades diseñadas para tal fin sostienen que es necesario incorporar la noción de variación, razón promedio e instantánea de la variación [9, 10, 11, 12]. Este enfoque, que los autores llaman variacional, permite acercarse a los significados de la aproximación, local y global, propios del análisis matemático, y trascender los enfoques algebraico y formalista que hacen hincapié en la transformación algebraica de expresiones y fórmulas para salvar indeterminaciones, en la resolución algebraica de desigualdades con módulo y en la definición formal de límite. El enfoque variacional, trata de construir el significado de la derivada incorporando también un abordaje numérico y geométrico al analítico.

3 Breve referencia al contexto de clase para la implementación de actividades

Las actividades las utilizamos en la cátedra de Análisis Matemático I del DIIT de la UNLaM, asignatura de régimen cuatrimestral con carga horaria de 8 horas reloj por semana con temas de cálculo diferencial e integral en una variable. Los cursos cuentan con un promedio de 70 alumnos y dos docentes por cada uno de ellos. Dentro de la metodología de trabajo de la misma, hay un espacio de clases bajo modalidad taller en las cuales los alumnos resuelven actividades en equipos de dos personas para resolver problemas y diferentes actividades. Éstas se refieren a funciones, límite, derivada, problemas de optimización, ecuaciones diferenciales sencillas e integrales definidas. Consideramos este espacio de trabajo como una buena oportunidad para poner en práctica las actividades mostradas en este artículo.

4 Recorrido metodológico para el diseño de las actividades

El trabajo se realizó mediante los siguientes pasos:

- Justificación teórica de los registros de representación elegidos
- Justificación teórica de las habilidades matemáticas seleccionadas
- Selección de los temas de los ítems de acuerdo a las habilidades matemáticas y los registros
- Diseño de la actividad de acuerdo a las selecciones previamente hechas

Explicamos a continuación cada uno de ellos.

4.1 Justificación teórica del uso combinado de más de un registros de representación

Con el fin de facilitar un acceso rápido, visual y de cálculo, y acorde al enfoque variacional de la enseñanza de la derivada ya mencionado, decidimos utilizar en la presentación de la tarea dos registros, gráfico y numérico. Para el primer registro hicimos dos variantes, registro gráfico considerando una función de trazo continuo, y otra, dada por un conjunto finito de puntos. Para el registro numérico elegimos utilizar una tabla a doble entrada. Con el fin de incrementar la variedad de registros usados y que el alumno se habitúe a hacer conversiones entre los mismos tomamos la decisión de pedir estos cambios expresamente en cada tarea.

La propuesta de consignas para poner en juego más de un registro, se fundamenta en los trabajos de Duval y Rojas, pues de acuerdo a estos autores, la comprensión emerge mediante la coordinación de al menos dos registros de representación [2], a su vez que los mismos ofrecen mayores posibilidades de apreciar ciertas características de dichos objetos matemáticos [1]. El registro gráfico con función continua lo elegimos pues los alumnos están habituados a ver funciones de este estilo y mucho más una parábola que suele estar presente en los estudios secundarios previos y en el curso de admisión a la UNLaM. Tanto el registro gráfico dado por un conjunto de puntos como el registro numérico lo seleccionamos con el fin de ir introduciendo al alumno a otras maneras de trabajar más propias de la ingeniería, en la cual, al resolver problemas concretos es muy probable que se encuentre con este tipo de registros. Para fines didácticos se han reducido el conjunto de puntos a seis para el registro gráfico y a cuatro pares ordenados para el registro numérico.

4.2 Justificación teórica de las habilidades matemáticas seleccionadas

Las habilidades matemáticas elegidas para esta actividad de funciones son:

- Identificar variable independiente y dependiente, dominio e imagen en funciones y en diferentes contextos
- Identificar y diferenciar razón de cambio promedio

- Calcular razones de cambio promedio por medios numéricos y analíticos
- Explicar el significado de razón de cambio promedio en funciones y en diferentes contextos

Esta selección de habilidades tiene su justificación teórica en los aportes de Bloom con su Taxonomía que categoriza y ordena tanto las habilidades de pensamiento como el proceso del aprendizaje, sus actualizaciones y en los trabajos de investigación de Dolores y García [9, 10]. Como esta es la primera actividad relacionada con el concepto de derivada sólo estamos apuntando a habilidades de los niveles recordar y aplicar, de acuerdo a la Taxonomía de Bloom y sus actualizaciones. La consideramos como una actividad preparatoria como sostiene Dolores, ya que esperamos que el alumno se familiarice con aspectos variacionales y a formas de trabajo apropiadas.

Nos centramos en los conceptos de variable independiente y dependiente y en razón de cambio en un intervalo pues, como sostienen Dolores y García, la comprensión del concepto de derivada puede lograrse a través de la formación de ideas variacionales, basadas en tres nociones físicas: la variación, la rapidez media de la variación y la rapidez instantánea de la variación. Estos autores también recomiendan trabajar con situaciones de movimiento de un cuerpo y con la interpretación geométrica de la derivada. Nosotros incorporamos un modelo más a fin que el alumno aprecie que existen situaciones de variación en las cuales la variable independiente no es el tiempo.

4.3 Selección de los temas de los ítems de acuerdo a las habilidades matemáticas y los registros

Para la habilidad “Identificar variable independiente y dependiente en funciones y en diferentes contextos”, consideramos apropiado que los ítems de la tarea estuvieran relacionados con el hallazgo de dominio e imagen tanto en funciones matemáticas generales como en problemas con contexto particular y la diferenciación entre variable independiente y dependiente.

Con el fin de contribuir al desarrollo de la habilidad “Identificar y diferenciar razón de cambio promedio”, pretendimos lograrlo a través del cálculo de cambios o variaciones de la variable dependiente, en funciones y en diferentes contextos, por lo que los ítems relacionados son el cálculo de variaciones de variables independientes y dependientes; como así también por medio del cálculo de razones de cambio promedio por medios numéricos y analíticos.

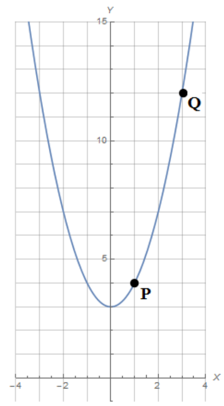
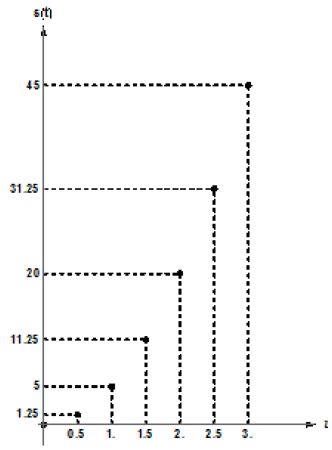
Para fomentar la habilidad “Explicar el significado de razón de cambio promedio en funciones y en diferentes contextos de la razón de cambio promedio”, decidimos incorporar trazado de recta secante con la ecuación correspondiente y la relación entre la pendiente de la recta secante y el cociente incremental. Y cálculo de cociente incremental y su explicación de acuerdo al contexto de los problemas.

Los ítems se repiten casi en todos los modelos elegidos (correspondientes a las tres tareas). El objetivo de esto es que el alumno identifique que el cálculo de cada cambio o de cada razón de cambio promedio es el mismo en los tres casos, pero con diferente notación y con distinta interpretación de acuerdo al contexto elegido.

4.4 Diseño de la actividad de acuerdo a las selecciones previamente hechas

En este apartado mostramos el diseño de las tareas de la actividad de acuerdo a las decisiones teóricas previamente hechas. En una primera tabla se verán las tareas de la actividad con el registro de representación utilizado y la conversión solicitada, y a continuación, una tabla por cada una de las habilidades matemáticas en la que podemos apreciar la relación con los ítems de las tareas.

Tabla 1. Enunciados tareas, registros de representación y conversiones.

<table>
<tr><th>Actividad</th><th>Registro de la tarea</th><th>Conversión solicitada</th></tr>
<tr><td colspan="3">Tarea 1</td></tr>
<tr><td>La siguiente gráfica corresponde a una función f(x)

a) Hallar dominio e imagen
b) Indicar las coordenadas de los puntos P y Q.
c) Expresar la función en registro analítico.
d) Calcular la variación de ambas variables cuando la función cambia de P hacia Q.
e) Calcular la razón de cambio promedio.
f) Trazar la recta que pasa por dichos puntos y determinar su ecuación.
g) ¿Qué relación existe entre la pendiente de la recta secante y el cociente calculado en el ítem e?</td><td>Registro gráfico (función continua).</td><td>Registro analítico, tanto en la función como en las coordenadas de los puntos</td></tr>
<tr><td colspan="3">Tarea 2</td></tr>
<tr><td>El siguiente gráfico de puntos representa la posición de un móvil a lo largo del intervalo de tiempo [0,3], en donde t se mide en segundos y s(t) en metros.

a) Indicar dominio e imagen en el contexto del problema.
b) ¿Cuál es la variable independiente y cuál la dependiente?
c) Unir los puntos en el gráfico y realizar una tabla de acuerdo a los datos dados en el gráfico.
d) Calcular la variación Δs para intervalos de 1 segundo
e) Calcular el cociente $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ a intervalos de 1 segundo
f) Explicar con tus palabras qué significado tiene ese cociente en el contexto del problema</td><td>Registro gráfico: conjunto de puntos</td><td>Registro analítico para indicar dominio e Imagen

Registro numérico, para construir la tabla

Registro verbal al explicar significado</td></tr>
<tr><td colspan="3">Tarea 3</td></tr>
<tr><td>Con el objetivo de analizar la variación del volumen de cierto gas al variar su presión se realiza con dicho gas y, a temperatura constante, una experiencia en la que se obtiene la siguiente tabla de valores.
<table><tr><td>P(atm)</td><td>1</td><td>4</td><td>7</td><td>10</td></tr><tr><td>V(lts)</td><td>30.00</td><td>7.45</td><td>4.3</td><td>3.00</td></tr></table>
a) Indicar dominio e imagen en el contexto del problema.
b) ¿Cuál es la variable independiente? ¿Cuál la dependiente?
c) Graficar los puntos de la tabla y unirlos.
d) Calcular los cambios ΔV del volumen para intervalos de tres atmósferas.
e) Calcular el cociente $\frac{\Delta V}{\Delta P}$ a intervalos de tres atmósferas.
f) Explicar con tus palabras qué significado tiene ese cociente bajo el contexto del problema.</td><td>Registro numérico</td><td>Registro analítico para indicar dominio e Imagen

Registro gráfico: función de trazo continuo

Registro verbal al explicar significado</td></tr>
</table>

Tabla 2. Habilidad: Identificar variable independiente y dependiente, dominio e imagen en funciones y en diferentes contextos

Temas de los ítems	Ítems correspondientes en las tareas
Hallazgo de dominio e imagen tanto en funciones matemáticas generales como en problemas con contexto particular Diferenciación entre variable independiente y dependiente.	Tarea 1 – Hallar dominio e imagen – Indicar las coordenadas de los puntos P y Q. – Expresar la función en registro analítico. Tarea 2 – Hallar dominio e imagen en el contexto del problema. – ¿Cuál es la variable independiente y cuál la dependiente? – Unir los puntos en el gráfico y realizar una tabla de acuerdo a los datos dados en el gráfico. Tarea 3 – Hallar dominio e imagen en el contexto del problema. – ¿Cuál es la variable independiente y cuál la dependiente? – Graficar los puntos de la tabla y unirlos con un trazo continuo.

Tabla 3. Habilidad: Identificar y diferenciar razón de cambio promedio

Temas de los ítems	Ítems correspondientes en las tareas
Cálculo de variaciones de variables independientes y dependientes Cálculo de variaciones de variables independientes y dependientes	Tarea 1 – Calcular la variación de ambas variables cuando la función cambia de P hacia Q. – Calcular la razón de cambio promedio. Tarea 2 – Calcular la variación Δs para intervalos de 1 segundo – Calcular el cociente $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ a intervalos de 1 segundo Tarea 3 – Calcular los cambios ΔV del volumen para intervalos de tres atmósferas. – Calcular el cociente $\frac{\Delta V}{\Delta P}$ a intervalos de tres atmósferas.

Tabla 4. Habilidad: Explicar el significado de razón de cambio promedio en funciones y en diferentes contextos

Temas de los ítems	Ítems correspondientes en las tareas
Trazado de recta secante con la ecuación correspondiente y la relación entre la pendiente de la recta secante y el cociente incremental. Explicación del significado del cociente incremental de acuerdo al contexto de los problemas.	Tarea 1 – Trazar la recta que pasa por dichos puntos y determinar su ecuación. – ¿Qué relación existe entre la pendiente de la recta secante y el cociente calculado en el ítem e? Tarea 2 – Explicar con tus palabras qué significado tiene ese cociente en el contexto del problema Tarea 3 – Explicar con tus palabras qué significado tiene ese cociente en el contexto del problema.

5 Consideraciones finales

El diseño de actividades de acuerdo a marcos teóricos es una tarea que precisa de un análisis minucioso de los ítems a incluir y los aspectos que resultarían más adecuados para lograr los objetivos que el docente se plantea.

Es necesario redactar los ítems o enunciados de las mismas con cuidado, tratando de evitar ambigüedades que den lugar a interpretaciones erróneas.

Consideramos que la inclusión de varios registros de representación y las diferentes conversiones es un aspecto facilitador para abordar conceptos complejos como el de derivada. Otro aspecto a analizar es el nivel de dificultad de las tareas, intentando que sea en orden creciente y comenzado por niveles más sencillos para que todos los alumnos puedan comenzar la resolución de las tareas de manera más sencilla.

Como el diseño se centró en la vinculación de los temas y las habilidades matemáticas e incluimos tres diferentes registros de representación para la actividad, nos ha resultado beneficioso trabajar de manera paralela con ellos para intentar que cada ítem de cada tarea esté relacionado con el mismo tema. De esta manera no aseguramos que el alumno trabaje con el mismo concepto desde varios puntos de vista.

La propuesta de enseñanza comenzó con actividades preparatorias para el concepto de derivada, esto quiere decir que, aunque no estemos nombrando el concepto, sí hacemos hincapié en los aspectos destacados, esto es distinguir variables independientes de dependientes, la variación de dichas variables y el cociente incremental, aunque el mismo no fue nombrado de esa manera. Otro aspecto considerado es la introducción de la notación matemática de manera coherente, ya que incorporamos el símbolo delta (Δ) para indicar variación y se usó varias veces: en la función cuadrática para hallar la recta secante, para el conjunto de puntos y para la tabla con valores del volumen de un gas en función de la presión.

Dado que esta es la primera actividad con la que se enfrentan los alumnos, la diseñamos de tal manera que las habilidades matemáticas a desarrollar fueran sencillas, pertenecientes a niveles de pensamiento iniciales de acuerdo a la Taxonomía de Bloom, y dejamos para las otras actividades, la correspondiente a límite y a derivadas, habilidades matemáticas de niveles superiores.

6 Conclusiones y trabajo futuro

El diseño de esta actividad de acuerdo a los aportes teóricos de los registros de representación de Duval y la taxonomía de Bloom y el análisis realizado, nos ayuda a reflexionar sobre algunas conclusiones:

- La necesidad de dedicarle tiempo suficiente al diseño de las actividades, ya que es necesario balancear la cantidad de ítems de las tareas, la variedad de registros, las conversiones y las habilidades.
- El considerar modelos sencillos de funciones, que no estén tan alejados de los conocimientos previos de los alumnos así podemos ir introduciendo conceptos complejos como el de derivada a partir de funciones conocidas.
- La incorporación de varios registros de representación para el mismo tema o ítem para abordarlo de diversas maneras y favorecer la comprensión del mismo.
- Al utilizar registro gráfico con conjuntos de puntos o registro numérico con tabla a doble entrada, es conveniente minimizar la cantidad de pares ordenados para no generar distracción en cuentas o saturación de información, lo que podría generar bloqueo en los alumnos.
- En estas tareas hemos utilizado varios ítems tratando de ser precisos con los enunciados para conducir los aprendizajes de los alumnos. Este modo de ejecución de tareas secuenciadas ha resultado muy orientador para nuestro estudiantado, habituado más a la ejecución que a la captación global del problema o a la libertad de abordaje de consignas más abiertas.
- Tener establecida la relación entre las habilidades matemáticas y los ítems de los enunciados de las tareas facilita la evaluación de las mismas al momento de la corrección de las producciones de los alumnos.

Este último punto nos ha resultado una importante ventaja que esperamos aprovechar en nuestro trabajo futuro el cual se centrará en la elaboración de rúbricas para evaluar la presencia de las habilidades matemáticas de los alumnos. Consideramos este trabajo como punto de partida y marco de referencia para la justificación de dicha rúbrica.

Por último cabe señalar que el aporte que pretendemos realizar con el presente artículo es mostrar cómo el diseño y la presentación de tareas a los estudiantes desde bases teóricas didácticas y cognitivas, provenientes de la investigación, podría resultar más enriquecedor y eficiente para el aprendizaje universitario de temas introductorios que solamente adaptar los textos matemáticos al perfil del alumnado.

Referencias

1. Rojas, P. Sistemas de representación y aprendizaje de las matemáticas. *Revista digital Matemática, Educación e Internet*. http://www.cidse.itcr.ac.cr/revistamate/ (2012). Accedido el 10 de marzo de 2013.
2. Duval, R.: Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento. Hitt, F. (Ed.), *Investigaciones en Matemática Educativa II,* pp. 173-201. Grupo Editorial Iberoamérica. (1998). Traducción de Registres de presséntations sémiotiques et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de Science Cognitives*, Vol 5, pp. 37-65 (1993).
3. Prieto, F. y Vicente, S. Análisis de registros semióticos en actividades de ingresantes a la facultad de ingeniería. Ponencia presentada en I REPEM (2006).
4. Hernández Fernández, H.: Vigotsky y la estructuración del conocimiento matemático. Experiencia cubana. Hernández Fernández, H.; Delgado Rubí, J.R.; Fernández de Alaíza, B.; Valverde Ramírez, L. & Rodríguez Hung, T. (Eds). *Cuestiones de didáctica de la Matemática.* Serie Educación. Homo Sapiens Ediciones. pp. 33-53. (1998).
5. Delgado Rubí, J.R. Los procedimientos generales matemáticos. Hernández Fernández, H.; Delgado Rubí, J.R.; Fernández de Alaíza, B.; Valverde Ramírez, L. & Rodríguez Hung, T. (Eds). *Cuestiones de didáctica de la Matemática.* Serie Educación. Homo Sapiens Ediciones, pp. 69-87. (1998).
6. Zabala, A. Los enfoques didácticos. Coll, C.; Martín, E.; Mauri, T.; Miras, M.; Onrubia, J.; Solé, I. & Zabala, A. (Eds). *El constructivismo en el aula*. Editorial GRAÓ, pp.125-161. (2007).
7. Sánchez, M. La investigación sobre el desarrollo y la enseñanza de las habilidades del pensamiento. *Revista Electrónica de Investigación Educativa,* Vol. *4,* No 1. http://redie.ens.uabc.mx/vol14no1/contenido-amestoy.html (2002). Accedido el 4 de diciembre de 2009.
8. Churches, A. Taxonomía de Bloom para la era digital. http://www.eduteka.org/TaxonomiaBloomDigital.php (2009). Accedido el 1 de febrero de 2017.
9. Dolores, C. (2000). Una propuesta didáctica para la enseñanza de la derivada. Cantoral, R. (Ed). *El futuro del Cálculo Infinitesimal, ICME 8*. Grupo Editorial Iberoamérica, pp. 155-181. (2000).
10. García, M. *Una situación de aprendizaje para contribuir a la mejora de la comprensión del concepto de derivada*. Tesis de maestría no publicada, Universidad autónoma de Guerrero, Unidad Académica de Matemáticas, Centro de Investigación en Matemática Educativa. (2011).
11. Vrancken, S., Engler, A., Müller, D. Una propuesta para la introducción del concepto de derivada desde la variación. Análisis de los resultados. *Premisa,* Vol. 10, No. 38, pp. 36-46. (2008).
12. Vidal, O. *Interpretación de la noción de derivada como razón de cambio instantánea en contextos matemáticos.* Tesis de Maestría no publicada, Universidad Nacional de Colombia. (2012).

Volver al Índice

¿Cómo Evaluar el Rendimiento Académico de la Cátedra de Análisis Matemático II?

Correa Zeballos, Marta Adriana[1, 2], Moya, Mirtha Adriana[1, 2], Gallo, Ricardo Raúl[2]
[1]Universidad Nacional de Tucumán. Facultad de Bioquímica, Química y Farmacia. República Argentina.
Ayacucho 471, San Miguel de Tucumán, Tucumán, 4000
adricorrea@arnet.com.ar amoya@fbqf.unt.edu.ar
[2]Universidad Tecnológica Nacional, Facultad Regional Tucumán. República Argentina
Rivadavia 1050, San Miguel de Tucumán, Tucumán, 4000
rgallo@arnet.com.ar

Resumen. Como miembros activos de una Institución de educación superior, nuestra preocupación es contribuir con la evaluación interna del desempeño de dicha institución, a fin de mejorar la calidad académica. Bajo esta perspectiva nos enfocamos en la dimensión docencia y dentro de ella, en el Rendimiento Académico de los estudiantes de una cátedra, o abreviadamente Rendimiento Académico de la Cátedra, particularmente la de Análisis Matemático II de la FRT-UTN. Convenimos en que Rendimiento Académico de una cátedra es el indicador que está constituido por tres dimensiones: rendimiento, eficiencia y desgranamiento.

Este trabajo tiene por objetivos: i) Proponer una metodología de evaluación del Rendimientos Académico de los estudiantes de Análisis Matemático II; ii) Evaluar dicho rendimiento a fin de tener un diagnóstico del mismo; iii) Proponer el análisis de los factores endógenos y exógenos que inciden en dicho rendimiento; iv) Generalizar la metodología propuesta a otras cátedras de carreras de ciencias.

Palabras Clave: Evaluación**,** Rendimiento académico, Rendimiento, Eficiencia, Desgranamiento.

1 Introducción

El formato del artículo debe ajustarse lo máximo posible al ejemplo que se propone en esta plantilla. Los autores Según Barnetson (1999), en las universidades nacionales y, porque no decirlo, en la sociedad, se ha abierto el debate acerca de la eficiencia con que cumplen sus misiones. Para realizar un análisis y evaluación del cumplimiento de estas misiones, creemos que se debe distinguir claramente dos miradas distintas.

a) Desde una mirada externa la universidad tiene tres funciones, Docencia, Investigación y Extensión y es la sociedad quien pregunta acerca del para qué de la universidad y cómo hacer para asegurar el eficaz cumplimiento de estas funciones sociales y es la colectividad la que debe medir con qué eficiencia lo hace.
b) Desde una mirada interna la universidad tiene cinco dimensiones: Gestión y Gobierno, Extensión, Docencia, Investigación y Bienestar Estudiantil y aquí se impone una autoevaluación para determinar con qué calidad las desarrollamos.

Como miembros activos de la universidad nuestra preocupación es realizar una evaluación interna y en esta oportunidad nos vamos a enfocar en la dimensión docencia y dentro de ella, en el Rendimiento Académico de los estudiantes de una cátedra, que en este trabajo se lo llamará Rendimiento Académico de una cátedra. Actualmente nuestras universidades enfrentan una seria crisis en la dimensión docencia. Estas dificultades se reflejan, entre otras cosas, en las bajas tasas de graduación, en los excesivos tiempos de duración media real de las carreras, en los planes de estudio, orientación y seguimiento académico de los alumnos, organización y utilización de dispositivos administrativos y de apoyo académico vinculados a los alumnos y a su desempeño en la institución. Desde este punto de vista, el desgranamiento, la deserción y la cronicidad son indicadores de crisis en la dimensión docencia en las universidades nacionales. Estos indicadores adquieren importancia a la hora de evaluar el desempeño y calidad de las carreras ya que niveles altos de los mismos lleva a cuestionar la eficiencia docente interna de las instituciones.

Jewsbury, Haefeli citando a Elbaum, afirman que el Desgranamiento en particular, constituye un problema para las instituciones de Educación Superior, dice que "… en general ningún abandono se produce por un quiebre instantáneo, la deserción supone una conflictividad externa procesada a lo largo de un tránsito de auto justificación. El que abandona primero suele sentirse abandonado por la institución. Se inicia con una ruptura previa espacio - temporal dentro del aula y la relación con el resto de los compañeros se hace más distante y ajena". Por esto podemos afirmar que un alumno que se desgrana de su cohorte es un desertor potencial, por lo tanto, se puede considerar al desgranamiento, como un indicador de rendimiento docente interno, que permite medir la eficiencia de las instituciones en esta área. Un alumno desgranado retrasa sus estudios alargando la duración real de la carrera con el riesgo latente de que al momento de obtener finalmente el título sus conocimientos ya sean obsoletos siendo esto aún más crítico en las carreras tecnológicas como lo son las ingenierías. Por todo esto, a pesar de contar con expresiones positivas de eficiencia o rendimiento, lo que en realidad se trata de medir es un fenómeno negativo: el de la reducción del número de estudiantes de cada cohorte año a año por el retraso en la carrera. Se sabe que entre el acceso al sistema y la finalización se produce una disminución de estudiantes que puede ser interpretada como ineficiencia del Sistema Educativo ya que no se logra retener a algunos alumnos y obliga a otros a permanecer un período largo en la institución.

Creemos que la comprensión de la eficiencia docente interna de una institución tiene que buscarse en el conjunto de fenómenos del proceso educativo mismo, particularmente en; *el rendimiento académico, los índices de deserción o abandono y la duración real de las carreras.*

En este trabajo nos centraremos exclusivamente en proponer una metodología de evaluación y diagnóstico del Rendimiento Académico de la cátedra de Análisis Matemático II, porque estamos convencidos que el rendimiento académico institucional es, a todas luces, una consecuencia del rendimiento académico de cada cátedra. De esta manera si se consiguen rendimientos académicos óptimos por cátedra se obtendrá igual resultado institucionalmente, o si se prefiere, importantes desgranamientos en las cátedras implica que muchos estudiantes se conviertan en crónicos y otros en desertores, lo que dará como resultado un bajo rendimiento de la cohorte. A partir de esta observación se desprende que, actuar sobre el rendimiento académico institucional con el fin de modificarlo, esto implica que necesariamente se debe actuar sobre el rendimiento de cada cátedra.

Aquí se hace necesario identificar un concepto clave respecto del rendimiento académico institucional y es el de su dependencia con el rendimiento académico de cada cátedra y es sobre este donde se debe actuar.

Para ello se necesita una metodología de medición, a los fines de tener un diagnostico que dispare medidas correctivas, y éste es el motivo de este trabajo.

2 Objetivos

Este trabajo tiene por objetivos: i) Proponer una metodología de evaluación del Rendimientos Académico de los estudiantes de la Cátedra Análisis Matemático II; ii) Evaluar dicho rendimiento a fin de tener un diagnóstico del mismo; iii) Proponer el análisis de los factores endógenos y exógenos que inciden en dicho rendimiento; iv) Generalizar la metodología propuesta a otras cátedras de carreras de ciencias.

3 Marco Teórico

La evaluación ha sido siempre un tema de gran importancia en la educación universitaria, que se ha visto potenciada por los procesos de evaluación y acreditación universitaria implementados por el Ministerio de Educación Nacional, a partir de la vigencia de la “Ley de Educación Superior”, aprobada en el año 1995. Tanto la institución, los educadores y alumnos son conscientes de las repercusiones del hecho de evaluar y ser evaluado. Esto está íntimamente relacionado con la necesidad de alcanzar determinado nivel de calidad educativa en el nivel superior, de gerenciar adecuadamente los recursos, el tiempo y los esfuerzos para alcanzar un mayor nivel de competencias tanto en el individual como en lo institucional.

En particular, en esta instancia interesa, qué observar en una cátedra y cómo medir su desempeño. A nuestro entender esto se logra analizando su Rendimiento Académico, a través de sus tres dimensiones, rendimiento, eficiencia y desgranamiento, que para esta instancia tienen sus particularidades.

Entonces convenimos en que Rendimiento Académico de una cátedra es el indicador que está constituido por tres dimensiones, rendimiento, eficiencia y desgranamiento, las cuales tienen las siguientes características:

a) Dimensión Rendimiento, en donde consideramos las calificaciones o notas obtenidas en los exámenes;
b) Dimensión Eficiencia, en donde contemplamos la forma en que los estudiantes aprueban la materia;
c) Dimensión temporal, en donde analizamos la continuidad o discontinuidad de los estudiantes en el ritmo temporal relativo al año académico. Entendemos por continuidad el ritmo normal en los estudios y como discontinuidad el retraso, con respecto al año académico, en el cursado de la materia.

El rendimiento académico institucional es, a todas luces, una consecuencia del rendimiento académico de cada cátedra. Es por ello que se hace imprescindible un análisis, a este nivel, similar al realizado en el ámbito institucional, de los factores que inciden en él. De esta manera si se consiguen rendimientos académicos óptimos por cátedra se obtendrá igual resultado institucionalmente, o si se prefiere, importantes desgranamientos en las cátedras implica que muchos estudiantes se conviertan en crónicos y otros en desertores, lo que dará como resultado un bajo rendimiento de la cohorte. A partir de esta observación se desprende que, para actuar sobre el rendimiento académico institucional con el fin de modificarlo, esto implica, necesariamente, actuar sobre el rendimiento académico de cada cátedra y, en consecuencia, para poder operar se debe tener un diagnóstico.

El Rendimiento Académico a nivel de cátedra también tendrá factores exógenos y endógenos que impactan en él. Éstos Factores externos e internos a la cátedra pueden ser los mismos más otros agregados de los que se investiguen e identifiquen para el nivel institucional o, simplemente, pueden ser distintos.

Una vez hecho el diagnóstico del Rendimiento Académico de una asignatura se hará necesario determinar los factores exógenos y endógenos que impactan sobre ese rendimiento académico de la cátedra y definirlo con la mayor precisión posible para poder actuar, es así que, entendemos por:

i. Factores endógenos de una cátedra, son aquellas variables que originan el desgranamiento, la ineficiencia y un bajo rendimiento de los alumnos de una cátedra universitaria, que pueden ser controladas o modificadas por la misma, porque son el resultado de sus actividades. Algunas de estas variables pueden ser:

- Tipos de clases
- Material didáctico
- Diagnóstico precoz del desgranamiento
- Didáctica docente

ii. Factores exógenos de una cátedra: son aquellas variables que originan el desgranamiento, la ineficiencia y un bajo rendimiento de los alumnos de una cátedra universitaria, que no pueden ser controlados o modificadas por la misma ya que no son el producto de sus actividades.

Si bien estas variables no pueden ser modificadas por la cátedra, ésta puede realizar las acciones necesarias tendientes a minimizar los efectos negativos o bien para maximizar los efectos positivos de las mismas. Algunas de estas variables pueden ser:

- Edad
- Sexo
- Procedencia
- Conocimientos previos secundarios
- Conocimientos previos universitarios
- Crisis vocacional
- Desgranamiento en otras cátedras horizontales
- Situación laboral
- Situación familiar

4 Hipótesis

La hipótesis de este trabajo es que, la Metodología de Diagnóstico del Rendimiento Académico de los estudiantes de la cátedra de Análisis Matemático II, que se propone, será de gran utilidad para uniformizar y estandarizar los dictámenes sobre el mismo y se podrá generalizar dicha metodología a otras cátedras universitarias.

5 Metodología

De acuerdo a nuestro marco teórico hemos considerado que el Rendimiento Académico de una cátedra esta compuesto por tres dimensiones: Rendimiento, Eficiencia y Temporal (Desgranamiento) y también afirmábamos que en la dimensión rendimiento consideramos las calificaciones o notas obtenidas en los exámenes finales, en la dimensión eficiencia contemplamos la forma en que los estudiantes aprueban la materia y en la dimensión temporal analizamos la continuidad o discontinuidad de los estudiantes en el ritmo temporal relativo al año académico. Entendemos por continuidad el ritmo normal en los estudios y como discontinuidad el retraso, con respecto al año académico, en el cursado de la materia.

Se hace necesario, para cada una de las dimensiones componentes del rendimiento académico establecer un indicador que permita dar un valor cuantitativo y cualitativo de esa dimensión en una cátedra y de esta manera saber su desempeño. Es así que proponemos para cada dimensión lo siguiente.

5.1 Dimensión rendimiento

Para esta dimensión consideraremos como su indicador a los promedios de notas de exámenes finales de los alumnos de un mismo año de cursado, incluyendo aprobados y desaprobados, hasta la última mesa de examen correspondiente al año académico en curso. Si no hay alumnos que se presenten a rendir y que hayan cursado en un año dado, la nota será 0 (cero)

Para tener un parámetro de evaluación cualitativo de la dimensión rendimiento de una cátedra, vamos a considerar la siguiente escala:

- Promedio de 0 a 3: Muy mal rendimiento
- Promedio más de 3 a 4: Mal rendimiento.
- Promedio más de 4 a 6: Regular rendimiento
- Promedio más de 6 a 7 : Buen rendimiento
- Promedio más de 7 a 9: Muy buen rendimiento
- Promedio más de 9. Excelente rendimiento

5.2 Dimensión eficiencia

Consideramos como indicador de la dimensión eficiencia al porcentaje de alumnos que aprueban la materia en el año de cursado, o sea hasta la última mesa del correspondiente año académico, referidos al número de estudiantes que comenzaron el cursado en ese año, en consecuencia:

$$e = \frac{x}{y}.100\ [\%] \quad \text{donde}$$

e = Eficiencia,
x = Número de alumnos que aprobaron el examen final en el año de cursado
y = Número de alumnos que cursaron en el mismo año que x

También para tener un parámetro de evaluación cualitativa de esta dimensión vamos a considerar la siguiente escala:

- De 0 al 15 %. Muy Mala
- De más del 15 % al 25 % : Mala
- De más del 25 % al 45 % : Regular
- De más del 45 % al 60 %: Buena
- De más del 60 % al 90 % Muy buena
- De más del 90 %: Excelente

5.3 Dimensión temporal: desgranamiento

Consideramos como indicador de la dimensión temporal al porcentaje de alumnos que quedaron libres, por la causa que fuere, en la materia en un año, referidos al número de estudiantes que comenzaron el cursado en ese año. Es lo que definimos como el desgranamiento anual en la materia. De esta manera será:

$$d = \frac{x}{y}.100\ [\%] \qquad \text{donde}$$

d = Desgranamiento,
x = Número de alumnos que quedaron libres en el año
y = Número de alumnos que comenzaron el cursado en el mismo año que x

Desde este punto de vista, podemos considerar al Desgranamiento como un indicador de la dimensión temporal del Rendimiento Académico de un estudiante. Como una primera aproximación podemos definir al Desgranamiento en una cátedra como una apreciación de la pérdida de matrícula, en la cátedra, que ocurre en el transcurso de un año.

También para el desgranamiento, vamos a poner a consideración la siguiente tabla cualitativa de valorización para tener un marco de referencia de calificación del desgranamiento. A diferencia de las anteriores, para el rendimiento y la eficiencia, ésta indica que para bajos valores de “d”, es de mejor calificación que las de mayor, por tanto:

- De 100% a 70 %: Muy mala
- De menos del 70 % al 50 % : Mala
- De menos de 50 % al 25 % : Regular
- De menos de 25 % al 15 %: Buena

- De menos de 15 % al 5 %: Muy buena
- De menos de 5 %: Excelente

5.4 Rendimiento académico

A fin de tener la evaluación global de la cátedra, en cuanto a su rendimiento académico, planteamos la siguiente técnica. Para cada dimensión del rendimiento académico hemos propuesto, cualitativamente, 6 (seis) categorías posibles para clasificarlas: muy mala, mala, regular, buena, muy buena y excelente. A cada una de estas categorías las cuantificamos de la de la siguiente manera:

- Si la calificación es Muy Mala, le corresponde la nota 2
- Si la calificación es Mala, le corresponde la nota 3
- Si la calificación es Regular le corresponde la nota 5
- Si la calificación es Buena, le corresponde la nota 7
- Si la calificación es Muy Buena le corresponde la nota 9
- Si la calificación es Excelente, le corresponde la nota 10

Si designamos con,

- ra: al rendimiento académico de una cátedra
- r: la nota obtenida por el rendimiento
- e: la nota obtenida por eficiencia
- d: la nota obtenida por desgranamiento

Entonces, planteamos el promedio simple de las tres notas como calificación del rendimiento académico de la cátedra, esto es:

$$ra = (r + e + d) / 3$$

De esta manera obtendremos que;

- Si ra resulta entre 2 y menos de 3, al rendimiento académico lo cualificamos como Muy Malo
- Si ra resulta entre 3 y menos de 5, al rendimiento académico lo cualificamos como Malo
- Si ra resulta entre 5 y menos de 7, al rendimiento académico lo cualificamos como Regular
- Si ra resulta entre 7 y menos de 9, al rendimiento académico lo cualificamos como Bueno
- Si ra resulta entre 9 y menos de 10, al rendimiento académico lo cualificamos como Muy Bueno
- Si ra resulta 10, al rendimiento académico lo cualificamos como Excelente

6 Rendimiento académico de la cátedra de Análisis Matemático II

En la Facultad Regional Tucumán de la UTN se dictan las carreras de Ingeniería Eléctrica, Electrónica, Civil, Mecánica y Sistemas de Información. En esta oportunidad aplicaremos la metodología propuesta para las carreras de Eléctrica y Electrónica. La asignatura Análisis Matemático II se imparte en el segundo año de todas las carreras, es de cursado obligatorio y anual. Desde el año 2005 y con el claro objetivo de mejorar el proceso de enseñanza aprendizaje, se cambió el sistema de evaluación, introduciendo además de los dos parciales y de sus recuperaciones, seis evaluativos, tres en el primer semestre y tres en el segundo. El alumno que aprueba los tres primeros tiene aprobado el primer parcial, y posteriormente si aprueban los tres últimos, se les da por aprobado el segundo parcial. En caso de desaprobar algunos de ellos tienen la posibilidad de rendir los correspondientes parciales. Los evaluativos no tienen recuperaciones y se aprueban con una nota mínima de cuatro puntos. Este cambio fue beneficioso para los estudiantes, ya que a lo largo de los sucesivos años de aplicación de los mismos se mejoró el porcentaje de alumnos regulares. Con el objeto de optimizar la eficiencia en los exámenes finales, se implementó en la cátedra el uso de materiales bibliográficos destinados a los alumnos, con temas de cálculo diferencial, integral y de ecuaciones diferenciales. Estos textos están desarrollados siguiendo novedosas técnicas didácticas y pedagógicas, que facilitan su lectura, comprensión y estudio por parte de los estudiantes, con la ayuda y guía permanente de los docentes en las distintas comisiones. Están publicados con registro de ISBN y de propiedad intelectual.

Para cada una de las carreras mencionadas se va a medir su rendimiento académico y luego se evaluará el rendimiento global de la cátedra en ambas carreras y para el período 2000-2015.

Con la base de datos existentes en la Facultad, se construyeron las Tablas 1 y 2, que contienen; el número de alumnos que efectivamente comenzaron el año (cursantes), los que regularizaron, que rindieron el examen final, los que lo aprobaron, los que no lo aprobaron, promedio de notas en dichos exámenes y los alumnos libres. A estos datos se lo agrupó en dos subperíodos, el 2005-2006 y 2007-2015. La razón de esta división está en que a partir del año 2005 se implementó el nuevo sistema de evaluación, y desde el año 2007 el uso de bibliografias de la cátedra. A los fines de este estudio no se tendrá en cuenta esta división y sólo se considerára el perído total, es decir de 2005-2015.

A partir de los datos básicos de las Tablas 1 y 2, se calcularon diversos porcentajes todos con respecto al número de alumnos cursantes, como por ejemplo porcentajes de alumnos que rindieron el examen final, los que aprobaron, los que quedaron libres, según se muestra en las Tablas 3 y 4. Los datos de estas tablas nos van a permitir medir el rendimiento académico de la cátedra y en cada carrera. Para evaluar el rendimiento global de la asignatura, en ambas carreras, en el período 2005-2015 y siguiendo los pasos metodológicos propuestos se elaboraron las Tablas 5 y 6. En consecuencia tendremos:

Tabla 1. Datos básicos de alumnos de Análisis Matemático II. Ing. Eléctrica. Período 2005-2015

Período	Cursantes (C)	Regulares (R)	Rendidos Examen Final (R EF)	Aprobados Examen Final (Ap EF)	Desaprobó Examen Final	Promedio Notas	Alumnos Libres
2005-2006	31	18	21	10	11	4.75	13
2007-2015	294	148	121	78	43	5.82	146
2005-2015	325	166	142	88	54	5.28	159

Fuente: Secretaría académica de la FRT-UTN

Tabla 2. Datos básicos de alumnos de Análisis Matemático II. Ing. Electrónica. Período 2005-2015

Período	Cursantes (C)	Regulares (Reg)	Rendidos Examen Final (R EF)	Aprobados Examen Final (Ap EF)	Desaprobó Examen Final	Promedio Notas	Alumnos Libres
2005-2006	56	28	37	19	18	5.70	15
2007-2015	303	222	199	109	90	5.89	81
2005-2015	359	250	236	128	108	5.79	96

Fuente: Secretaría académica de la FRT-UTN

Tabla 3. Porcentajes en los períodos 2005-2006; 2007-2015 y 2005-2015. Ing. Eléctrica

Período	Reg vs C	REF vs C	ApEF vs C	Libres vs C
2005-2006	58%	68%	32%	41%
2007-2015	50%	41%	27%	50%
2005-2015	51%	44%	27%	49%

Fuente: Secretaría académica de la FRT-UTN

Tabla 4. Porcentajes en los períodos 2005-2006; 2007-2015 y 2005-2015. Ing. Eléctrónica

Período	Cursantes (C)	Regulares (Reg)	Rendidos Examen Final (R EF)	Aprobados Examen Final (Ap EF)	Desaprobó Examen Final	Promedio Notas	Alumnos Libres
2005-2006	87	46	58	29	29	5.23	28
2007-2015	597	370	320	187	133	5.86	227
2005-2015	684	416	378	216	162	5.54	255

Fuente: Secretaría académica de la FRT-UTN

Tabla 5. Datos básicos de alumnos de Análisis Matemático II. Ing. Eléctrica y Electrónica.

Período	Reg vs C	REF vs C	ApEF vs C	Libres vs C
2005-2006	50%	66%	34%	27%
2007-2015	73%	67%	36%	28%
2005-2015	70%	66%	36%	27%

Fuente**:** Secretaría académica de la FRT-UTN

Tabla 6. Porcentajes en el período 2005-2015. Ing. Eléctrica y Eléctrónica

Período	Reg vs C	REF vs C	ApEF vs C	Libres vs C
2005-2006	53%	66%	33%	32%
2007-2015	62%	54%	31%	38%
2005-2015	61%	55%	32%	37%

Fuente: Secretaría académica de la FRT-UTN

6.1 Rendimiento

Tal como ya dijimos, en las Tablas 1 y 2, se dan los promedios de los exámenes finales de los estudiantes de las carreras de Eléctrica y Electrónica, respectivamente, en los dos períodos estudiados. Se observa que en ambas carreras mejoró la eficiencia en dichos exámenes, siendo más notorio en la carrera de ingeniería Eléctrica donde dicho promedio cambió de 4.75 a 5.82. En cuanto a la eficiencia en todo el período 2005-2015, se observa un mejor rendimiento en la carrera de ingeniería Electrónica donde su promedio fue de 5.79. Considerando la Tabla 5, se observa que el promedio de notas para ambas carreras y en el período 2005-2015 es de 5.54. Por todo lo expuesto y en virtud de lo establecido en la escala de valorización propuesta en el apartado 5.1, nos permite concluir que; la dimensión rendimiento ha tenido, en los últimos años para las carreras de ingeniería Eléctrica y

Electrónica un resultado que alcanza la consideración de Regular y por lo tanto le corresponde la calificación de 5 (cinco), según lo estipulado en el apartado 5.4. Esta misma calificación se obtiene al considerar el rendimiento global de la catedra para ambas carreras.

6.2 Eficiencia

En la cuarta columna de las Tablas 3 y 4, se muestran los valores porcentuales de la eficiencia, para las carreras estudiadas. Para la de Eléctrica en el período 2005-2006 resultó del 32 % y en el período 2007-2015 del 27%, observándose una disminución, lo que no se registró en la de Electrónica donde este indicador permanece prácticamente sin cambios. Considerando el período total, 2005-2015 se observa un mejor rendimiento en Electrónica, donde su eficiencia es de 36%, mientras que en Eléctrica es de 27%. Con estos resultados y de acuerdo con las escalas de valorizaciones propuestas en los apartados 5.2 y 5.4 a este indicador le correspondería una valorización de regular y una calificación de 5 (cinco) para cada carrera. Considerando el grupo total y en el período 2005-2015 (Tabla 6) la calificación en esta dimensión para la cátedra resultó ser la misma o sea de 5 (cinco).

6.3 Desgranamiento

En la quinta columna de las Tablas 3 y 4, se muestran los valores porcentuales del desgranamiento para las dos carreras estudiadas. En la de Eléctrica pasó de un 41% en el período 2005-2006 a un 50% en el otro, siendo muy pronunciado en esta última etapa, mientras que en la de electrónica permanece practicamente sin cambios. En el período total 2005-2015 resultó ser del 49% para Eléctrica y del 27% para Electrónica. Considerando simultáneamente ambas carreras (Tabla 6, quinta columna) resultó ser mayor en el período 2007-2015 pasando de un 32% a un 38% y en el total 2005-2015 resultó ser de un 37%.

De acuerdo con la escala de valorización propuesta en el apartado 5.4 podemos concluir que la dimensión Temporal dado por el desgranamiento ha tenido en los últimos años en: i) Eléctrica, un resultado que alcanza la consideración de regular y de acuerdo a lo estipulado en el apartado 5.4 le corresponde una nota de 5 (cinco); ii) Electrónica una calificación de bueno correspondiéndole una nota de 7(siete); iii) en el global para ambas carreras la valoración fue de regular con una nota de 5(cinco).

6.4 Rendimiento Académico

De acuerdo a expresado en el apartado 5.4, el rendimiento académico de la cátedra de Análisis Matemático II será: i) en Eléctrica ra = (5 + 5 + 5) / 3, ra = 5; ii) en Electrónica ra = (5 + 5 + 7) / 3, ra = 6; y en iii) en ambas carreras ra = (5 + 5 + 5) / 3, ra = 5

El análisis de los valores que resultaron para los indicadores del Rendimiento Académico, dados por el rendimiento, la eficiencia y el desgranamiento, nos indican que el desempeño de la cátedra de Análisis Matemático II, tanto para Eléctrica, Eléctrónica y en ambas carreras se puede ubicar, según lo propuesto en 5.4, en la calificación general de regular.

7 Factores endógenos y exógenos que inciden en el rendimiento académico

De acuerdo a nuestro marco teórico hemos considerado que al resultado del Rendimiento Académico de una cátedra, que está compuesto por tres dimensiones: Rendimiento, Eficiencia y Desgranamiento que permiten tener un diagnóstico de la misma, se hace necesario identificar las variables que lo expliquen, para lo cual proponemos dividirlas en factores endógenos (internos) y factores exógenos(externos).

7.1 Factores Endógenos

Tal como se explicó en el marco teórico, los factores endógenos de una cátedra que impactan en su rendimiento, son aquellas variables que originan el desgranamiento, la ineficiencia y un bajo rendimiento de los alumnos de una cátedra universitaria, que pueden ser controladas o modificadas por la misma porque son el resultado de sus actividades. Entonces para la cátedra de Análisis Matemático II, nos propusimos indagar sobre a) Tipos de clases teóricas, b) Tipos de clases prácticas, c) Material didáctico, d) Didáctica docente, e) Clases de consulta, f) Horarios de las clases de consultas. Para identificar estos factores se diseñó una primera encuesta y se la aplicó a los cursantes de Análisis Matemático II, de las carreras de Eléctrica y Electrónica de la FRT-UTN, año 2015. La misma se encuentra en su etapa de análisis y procesamiento.

7.2 Factores Exógenos

Ya convenimos que los factores exógenos de una cátedra: son aquellas variables que impactan en el desgranamiento, la ineficiencia y un bajo rendimiento de los alumnos de una asignatura universitaria, que no pueden ser controlados o modificadas por la misma ya que no son el producto de sus actividades. Si bien estas variables no pueden ser modificadas por la cátedra, ésta puede realizar las acciones necesarias tendientes a minimizar los efectos negativos o bien para maximizar los efectos positivos de las mismas. Es así que para la asignatura bajo estudio y carreras consideradas, nos propusimos indagar las siguientes variables a) Edad y sexo, b) Procedencia, c) Conocimientos previos secundarios, d) Conocimientos previos universitarios, e) Elección vocacional, f) Desgranamiento en otras cátedras horizontales, g) Situación laboral, y h) Situación familiar. Para obtener los resultados sobre estos factores se diseñó una segunda encuesta y también se la aplicó a los cursantes de Análisis Matemático II de las mencionadas carreras del año 2015, la que se encuentra en su etapa de análisis y procesamiento.

8 Conclusiones

Dado que la dimensión rendimiento de la cátedra de Análisis Matemático II, para cada una de las carreras consideradas y para el global de las mismas, es regular, se tendrán que realizar los esfuerzos para lograr que en el corto plazo adquiera el concepto de bueno y en el mediano y largo plazo obtener la calificación de muy bueno y excelente. La misma consideración hay que hacer para las otras dos dimensiones, eficiencia y desgranamiento, que parten de un piso de regular, y donde el desgranamiento es más pronunciado en la carrera de Eléctrica. También se deberán implementar medidas correctivas desde la cátedra y de la institución para revertir estas deficiencias y tender a lograr la calificación de excelente. Para alcanzar estos objetivos, desde la cátedra, se implementaron las encuestas las que actualmente se encuentran en su etapa de análisis y procesamiento. Las mismas nos permitirán identificar los factores endógenos (propios del desarrollo de la actividad docente de la cátedra) y exógenos (independientes del desarrollo docente de la cátedra), que impactan en los resultados obtenidos del rendimiento académico de la mencionada cátedra. De esta manera se podrá actuar sobre los endógenos, teniendo en consideración los exógenos, potenciando los que son de impacto positivo y tratando de hacer desaparecer los que tienen impacto negativo.

La metodología de evaluación del rendimiento académico propuesta para la cátedra de Análisis Matemático II de la FRT-UTN perfectamente puede ser extendida a otras cátedras de carreras universitarias. De hecho dicha técnica y las correspondientes encuestas, se aplicaron con éxito en la cátedra de Matemática II de la Facultad de Bioquímica, Química y Farmacia de la Universidad Nacional de Tucumán.

De esta manera podemos concluir que esta metodología será de gran utilidad para uniformizar y estandarizar los dictámenes sobre el rendimiento académico de la cátedra de Análisis Matemático II y de cualquier cátedra universitaria.

Referencias

1. Barnetson, Robert J.: Key performance indicators in Higher Education. Alberta, Canadá. Alberta Colleges and Institutes Faculties Association (1999).
2. Jewsbury, A.; Haefeli, I.: Análisis de la deserción en universidades públicas argentinas. Recuperado de https://aaeap.org.ar/wp-content/uploads/2013/03/jewsbury_haefeli.pdf. Accedido en 2017.
3. Celman, S.: ¿Es Posible Mejorar la Evaluación y Transformarla en Herramienta de Conocimiento? Buenos Aires. Editorial Paidós (1998).
4. Giménez Rodríguez, J.: Evaluación en Matemáticas. Madrid. Editorial Síntesis (1997).
5. Lipsman, M.: La Innovación en las Propuestas de Evaluación de los Aprendizajes en la Cátedra Universitaria. Santa Fe. Ediciones UNL (2004).

6. Giménez Uribe, M.; Samoluk, M.: *Reflexiones Sobre Evaluación Universitaria. Posibilidades de Revisión y Mejora.* Santa Fe. Mat. Didáctico UTN (2007).
7. Santos Guerra, M. A.: Evaluación Educativa. Un Proceso de Dialogo, Comprensión y Mejora. Buenos Aires. Editorial Magisterio del Plata (1998).
8. Samaja, J.: Epistemología y Metodología. Elementos para una Teoría de la Investigación Científica. Buenos Aires. EUDEBA (1993).
9. Graham, D. Brian E.: Clinical Biostatistics. New York. John Wiley &, Sons Inc (1995).

Volver al Índice

Uso de Indicadores para el Trabajo con Casos en el Primer Curso de Estadística para Ingeniería Industrial

Graciela H. Carnevali, Noemí M. Ferreri, Lucía de las Heras
Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura, Universidad Nacional de Rosario.
Avda. Pellegrini 250, 2000 Rosario
{Carneval, nferreri}@fceia.unr.edu.ar; lu.delasheras@hotmail.com

Resumen. La resolución de problemas de naturaleza estadística es una de las competencias importantes a desarrollar en la formación de un ingeniero industrial. Esta tarea implica un conjunto de procesos de pensamiento que se articulan formando un ciclo y que van desde una formulación apropiada del problema hasta la elaboración de conclusiones en contexto, pasando por la obtención de datos de calidad y su análisis. En este trabajo se presentan dos problemas para que los alumnos resuelvan grupalmente hacia el final del primer curso de Estadística, los cuales pueden considerarse "casos" por cuanto los docentes no brindan consignas que guíen su resolución y los alumnos deben trabajar de manera autónoma para resolverlos. En la elaboración de dichos casos, se utilizaron indicadores asociados a las diferentes etapas del ciclo, los que también resultaron de utilidad en la discusión general de las resoluciones y en la evaluación del trabajo de los alumnos.

Palabras Clave: Ciclo PPDAC, Indicadores, Trabajo con casos, Evaluación

1 Introducción

La resolución de problemas de naturaleza estadística, es una competencia importante a desarrollar en los futuros ingenieros industriales. Esta tarea implica un conjunto de procesos que se articulan formando un ciclo, al que, por ejemplo, Wild y Pfannkuch, denominan "Ciclo PPDAC" [1]. La sigla corresponde a las etapas "planteo del problema" (P), "planificación del estudio estadístico" (P), "recolección de los datos" (D), "análisis de los mismos" (A) y "obtención de conclusiones", en contexto (C)[1]

Con el objetivo de que los futuros ingenieros industriales adquieran esta competencia, es deseable que en los cursos de Estadística los alumnos resuelvan frecuentemente problemas diseñados de tal manera que, en el proceso de resolución deban transitar la mayor cantidad de etapas y se enfrenten a diferentes situaciones.

Para ayudar a los docentes en la elaboración de esos problemas, se considera un conjunto de indicadores, asociados a las diferentes etapas del ciclo PPDAC, propuestos y aplicados por las autoras del presente trabajo [2, 3, 4]. Estos indicadores son de utilidad, además, para el trabajo en las clases, la elaboración de materiales y la evaluación del desempeño de los alumnos en ocasión de la resolución de los problemas propuestos, lo cual también permite a los docentes hacer un diagnóstico de los aspectos en los que hay que profundizar.

En el presente trabajo se utilizan algunos de estos indicadores en la elaboración de casos para trabajar con los alumnos del primer curso de Estadística de la carrera de Ingeniería Industrial. El término "casos" se refiere a problemas que deben ser resueltos por los alumnos según su propio criterio, por cuanto sólo reciben una descripción de la situación y un conjunto de datos; pero ninguna consigna que los guíe en la resolución.

El trabajo se organiza en cinco secciones de las cuales esta Introducción es la primera. En la segunda sección se presentan los indicadores, para cada etapa del ciclo PPDAC y en la tercera, se utilizan algunos de ellos para la elaboración de casos para el trabajo de los alumnos. A modo de ejemplo, en dicha sección se presentan dos casos, relativos al área de Gestión de la Calidad, diseñados a partir de los indicadores propuestos y utilizados en el primer curso de Estadística para Ingenieros Industriales del año 2016. También se narra cómo se utilizan los indicadores en la discusión general de los casos. En la cuarta sección se utilizan los indicadores para la evaluación de los alumnos y se presentan algunos resultados relativos al curso de ese año. En la quinta sección se sustancian las conclusiones.

Los objetivos del trabajo son:

– Proponer un conjunto de indicadores para orientar el desarrollo del pensamiento estadístico en los alumnos de Ingeniería Industrial

[1] En adelante se van a utilizar las siglas PPDAC, propuestas por Wild y Pfannkuch, para denominar al ciclo de resolución de problemas de naturaleza estadística.

- Aplicar algunos de los indicadores propuestos en el diseño de casos del área Gestión de la Calidad, así como en la discusión general de los mismos y en la evaluación del trabajo de los alumnos
- Describir algunos de los casos diseñados y utilizados durante el año 2016

2 Indicadores asociados a las etapas del Ciclo PPDAC

Los indicadores propuestos en este trabajo se presentan asociados a las distintas etapas del ciclo PPDAC. Estos se clasifican además en Tipo A y Tipo B, según se refieran al proceso de elaboración de los problemas o a la evaluación de los alumnos, respectivamente. Ambos grupos de indicadores están relacionados: en la construcción de cada problema se aplica generalmente un subconjunto de los indicadores propuestos (A), el cual, naturalmente, determina el subconjunto de indicadores que se utilizará para la evaluación (B).

Los indicadores están redactados como proposiciones. En el tipo A, las proposiciones se refieren al problema en sí y describen las tareas que debe realizar el alumno para su resolución. Estas se clasifican en "reconocer" y "hacer": las primeras se presentan cuando en el problema están definidos algunos elementos o realizadas algunas etapas y el alumno sólo tiene que reconocerlas; mientras que las segundas se presentan cuando en el problema no hay nada definido y es el alumno quien finalmente debe llevar adelante las distintas tareas, según su criterio. Naturalmente, los indicadores del "hacer" implican mayor grado de dificultad. Para todas las proposiciones tipo (A) se indica su presencia o ausencia en el problema. En el Tipo B, las proposiciones se refieren al trabajo de los alumnos en su resolución. Para cada una de ellas se indica si el alumno lo llevó a cabo completa o parcialmente o si no la realizó.

En la Tabla 1 se presentan los indicadores para cada una de las etapas, tanto del tipo A como del tipo B.

Tabla 1. Indicadores propuestos para las etapas del Ciclo PPDAC.

Etapa	Nombre del indicador	Indicadores para guiar la construcción de problemas (A)	Indicadores para evaluar el desempeño de los alumnos (B)
Planteo del Problema	P-1	Presenta un problema de decisión a partir del cual el alumno debe reconocer o plantear el objetivo general.	Reconoce o plantea el objetivo general
	P-2	Presenta la población o deja que el alumno la defina.	Reconoce o define la población bajo estudio.
	P-3	Presenta las variables de interés o deja que el alumno las defina.	Reconoce o define las variables.
	P-4	Presenta los parámetros o deja que el alumno los defina.	Reconoce o define los parámetros de interés.
	P-5(*)	Presenta los cursos de acción o deja que el alumno los defina.	Reconoce o define los cursos de acción posibles.
	P-6(*)	Presenta un criterio de decisión en función de algún parámetro o deja que el alumno los defina.	Reconoce o define un criterio de decisión en función de algún parámetro.
	P-7	En función del enunciado, el alumno debe traducir estadísticamente el problema y los objetivos	Traduce estadísticamente el problema y los objetivos
Planificación del Estudio Estadístico	PP-1	Presenta el tipo de estudio (poblacional, muestral, experimental) o deja que el alumno lo defina.	Reconoce o define el tipo de estudio.
	PP-2	En el caso de muestras o experimentos, presenta un tamaño de muestra o deja que el alumno lo defina.	En el caso de muestras o experimentos, reconoce o define tamaño de muestra
	PP-3	En el caso de muestras presenta una precisión y/o nivel de confianza pretendidos o deja que el alumno los defina.	En el caso de muestras reconoce o define la precisión y/o el nivel de confianza pretendidos.
	PP-4 (**)	En el caso de estudios por muestro o experimentos, define el tipo de muestra o de diseño o deja que el alumno lo defina	En el caso de estudios por muestro o experimentos, reconoce el tipo de muestra o de diseño o deja que el alumno lo defina
	PP-5	Da información sobre cómo se van a medir las variables o deja que el alumno lo decida.	Reconoce cómo se van a medir las variables o define cómo hacerlo.
	PP-6	Da información sobre cómo se va a garantizar la trazabilidad de los datos o deja que el alumno lo defina.	Reconoce cómo se va a garantizar la trazabilidad de los datos o define cómo hacerlo.
	PP-7	Da información sobre el plan de análisis de los datos o deja que el alumno lo defina	Reconoce o define el plan de análisis de los datos
	D-1	Brinda los datos e información sobre cómo	Indica cómo se llevó a cabo el trabajo de

Recolección de los Datos		se llevó a cabo el trabajo de campo o deja que el alumno lo realice.	campo, o bien lo hace e indica cómo.
	D-2	Presenta los datos depurados e información sobre cómo se hizo la depuración, o bien deja que el alumno realice esa tarea.	Indica cómo se llevó a cabo la depuración de los datos o bien lo hace e indica cómo.
Análisis de los Datos	A-1	Brinda gráficos de los datos o deja que el alumno los realice.	Utiliza e interpreta los gráficos provistos o los construye e interpreta.
	A-2	Brinda información sobre diversas medidas de resumen o deja que el alumno las obtenga.	Utiliza e interpreta las medidas de resumen provistas o las obtiene e interpreta.
	A-3	Brinda salidas de software o deja que el alumno las obtenga.	Utiliza salidas de software o las obtiene y utiliza.
	A-4	Brinda información sobre el cumplimiento de los requerimientos de las técnicas de inferencia o deja que el alumno lo verifique.	Identifica la información sobre el cumplimiento de los requerimientos de las técnicas de inferencia o lo realiza.
	A-5	Aplica herramientas inferenciales o deja que el alumno las aplique.	Utiliza las herramientas inferenciales brindadas o las aplica.
Conclusiones	C-1	Brinda interpretaciones de los resultados o deja que el alumno lo haga.	Reconoce o interpreta adecuadamente los resultados.
	C-2	Presenta conclusiones en relación al contexto o brinda información de contexto para que el alumno la utilice al elaborar sus conclusiones.	Reconoce las conclusiones en contexto o utiliza la información de contexto para elaborar sus conclusiones.
	C-3	Presenta conclusiones en relación a los objetivos en lenguaje no estadístico o deja que el alumno lo haga.	Reconoce las conclusiones en función de los objetivos o las obtiene y comunica en lenguaje no estadístico.

(*) Estos indicadores corresponden al caso de que se trate de problemas de decisión.

(**) En el curso sólo se consideran muestras aleatorias simples, por lo tanto, no se considera la elección del tipo de muestra entre los indicadores. En cuanto a los diseños experimentales, en el primer curso no se definen distintos tipos de diseño, de modo que el alumno sólo puede identificar que se trata de un estudio experimental.

3 El uso de los indicadores para el diseño de los casos

En el primer curso de Estadística de Ingeniería Industrial, se proponen casos en los cuales el ciclo PPDAC se encuentra reducido a sus etapas PAC (1ª, 4ª y 5ª etapas respectivamente), según la sugerencia de Moore [5] para trabajar con alumnos que recién se inician en los temas de Estadística. Es decir, que las tareas relativas a la Planificación del Estudio Estadístico y a la Recolección de los Datos (2ª y 3ª etapa respectivamente) ya están resueltas, por cuanto los alumnos reciben un conjunto de datos ya tomados; sin embargo, ellos pueden reconocer elementos de esas etapas. Respecto de las etapas PAC, los alumnos deben llevarlas a cabo según su propio criterio, aplicando las herramientas estadísticas presentadas en el curso y con la ayuda de Minitab, Excel u otra herramienta informática.

A continuación se describen brevemente dos de los casos elaborados para el curso correspondiente al año 2016 y se presentan los indicadores asociados en cada uno (Tablas 2 y 3). Dado que se trata de la elaboración de los casos, en estas tablas sólo se mencionan indicadores de tipo A.

Muchos de los indicadores no considerados inicialmente, fueron tenidos en cuenta luego en la presentación general y la discusión. Por ejemplo, se formularon preguntas como las siguientes:

- ¿se podrían haber considerado otras variables?, ¿se podrían haber definido otros parámetros de interés? (indicadores P-3, P-4)
- ¿con qué criterio se habrá definido el tamaño de muestra empleado? (indicador PP2)
- ¿cómo se habrá organizado la recolección de los datos? (indicador D1)
- ¿cómo se habrá garantizado su trazabilidad? (indicador PP6)
- ¿se podrían haber analizado los datos utilizando otras herramientas? (indicadores A1 al A5)

Es decir, que los indicadores no sólo fueron de utilidad en el diseño de los casos propuestos a los alumnos sino también en la discusión de los mismos, que se llevó a cabo en ocasión de la puesta en común de las resoluciones.

3.1 El caso de la profundidad de los cortes (Caso 1)

En este caso se considera un proceso de corte de cierto tipo de piezas plásticas, el cual debe asegurar que la profundidad del mismo sea inferior a 7 unidades. Se brinda una muestra aleatoria de 150 piezas, en cada una de las cuales se evalúa la profundidad del corte y se comenta que un analista considera que el proceso funciona adecuadamente porque el intervalo de confianza para la profundidad promedio de los cortes indica que este parámetro se puede considerar menor que 7 unidades.

El objetivo general es evaluar si ese proceso cumple con el requerimiento en cuanto a la profundidad de corte. El objetivo general está implícito y el alumno sólo debe reconocerlo, lo mismo que a la población y a la variable de interés. Sin embargo el parámetro de interés no está definido y se menciona la posibilidad de que este sea la profundidad promedio (μ). Los alumnos deben darse cuenta de que este no es el parámetro apropiado y que en realidad el parámetro apropiado es la proporción de cortes con profundidad mayor (o menor, según se defina) que 7 unidades (π). No están definidos los criterios en cuanto a qué valores de π indican que el proceso funciona adecuadamente.

En la etapa de planificación, los alumnos deben reconocer de que se trata de un estudio por muestreo y que el tamaño de la muestra es de n = 150 unidades, por cuanto eso se informa en el enunciado del Caso. Pero pueden definir el nivel de confianza y el plan de análisis de los datos.

En la etapa de recolección, no hay mención a cómo estos fueron recolectados, ni sobre la trazabilidad ni sobre la depuración de los mismos.

En el análisis de los datos los alumnos tienen la total libertad para llevar a cabo lo que crean conveniente y en cuanto a las conclusiones, el caso no brinda ninguna información de contexto, de modo que son ellos los que pueden hacer todas las consideraciones que crean necesarias.

Tabla 2. Indicadores tipo (A) utilizados en el Caso 1

Indicador	P1	P2	P3	P4	P5	P6	P7	PP1	PP2	PP3	PP4	PP5	PP6	PP7	D1	D2	A1	A2	A3	A4	A5	C1	C2	C3
Reconocer	X	X	X	-	-	-	-	X	X	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
Hacer	-	-	-	X	-	-	X		-	X	-	-	-	X	-	-	X	X	X	X	X	X	-	X

En la resolución del Caso 1, la importancia de la variabilidad aparece en dos puntos diferentes. En un primer momento, cuando los alumnos deben descartar a la media como parámetro de interés y definir otro parámetro como la proporción. (Indicador P4). Luego, cuando los alumnos deben estimar por intervalo de confianza a dicho parámetro (o a otro que hayan definido como parámetro de interés), reconociendo que la estimación puntual no contempla la variabilidad del estimador muestra a muestra (Indicador A-5).

3.2 El caso de los métodos de medición de las circunferencias (Caso 2)

En este caso se consideran dos métodos alternativos de medición de las circunferencias de piezas cilíndricas. Se dan, indirectamente, los criterios por los cuales un método de medición puede considerarse exacto y preciso. Para cada método, se brinda una muestra de 20 mediciones llevadas a cabo sobre una pieza patrón de longitud de circunferencia conocida.

El objetivo general es decidir qué método de medición se utilizará en adelante en la empresa. Este objetivo está implícito y el alumno sólo debe reconocerlo, lo mismo que a las dos poblaciones (que en este caso son conceptuales) y a la variable que se mide en cada una. Los parámetros de interés no están definidos pero hay ciertos requerimientos sobre la precisión y exactitud de estos métodos de medición, por lo cual, los alumnos deben definir al promedio de las mediciones (μ) y a la desviación estándar (σ). A diferencia del Caso 1, sí están definidos los criterios en cuanto a qué valores de los parámetros indican que el método de medición es exacto y preciso.

En la etapa de planificación, los alumnos deben reconocer que se cuenta con n = 20 observaciones para cada método, por cuanto eso se informa en el enunciado del Caso. Pero pueden definir el nivel de confianza y el plan de análisis de los datos.

Al igual que para el Caso 1, en la etapa de recolección, no hay mención a cómo estos fueron recolectados, ni sobre la trazabilidad ni sobre la depuración de los mismos y en el análisis de los datos, los alumnos tienen la total libertad para llevar a cabo lo que crean conveniente y en cuanto a las conclusiones, el caso no brinda ninguna información de contexto, de modo que son ellos los que pueden hacer todas las consideraciones que crean necesarias.

Tabla 3. Indicadores tipo (A) utilizados en el Caso 2

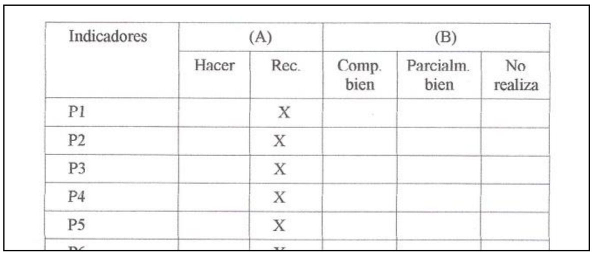
Indicador	P 1	P 2	P 3	P 4	P 5	P 6	P 7	P P 1	P P 2	P P 3	P P 4	P P 5	P P 6	P P 7	D 1	D 2	A 1	A 2	A 3	A 4	A 5	C 1	C 2	C 3
Reconocer	X	X	X	-	X	X	-	X	X	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
Hacer	-	-	-	X	-	-	X	-	-	X	-	-	-	X	-	-	X	X	X	X	X	X	-	X

En la resolución del Caso 2, la importancia de variabilidad aparece cuando los alumnos deben estimar por intervalo de confianza a los parámetros de interés, reconociendo que la estimación puntual no contempla la variabilidad del estimador muestra a muestra (Indicador A-5); pero también se pone de manifiesto cuando surge se busca un método de medición que, entre otras cosas, tenga menor variabilidad entre las mediciones repetidas.

4 Uso de los indicadores para la evaluación del trabajo con los casos

Para cada caso, a partir de los indicadores utilizados en su diseño, se confecciona una tabla con las columnas correspondientes a los indicadores tipo (B) y se utiliza como una planilla para la evaluación de cada trabajo (Fig. 1).

Los indicadores tipo (B) se definen según los de tipo (A) correspondan al "hacer" o al "reconocer". Por ejemplo, si en el problema se presenta la población bajo estudio (P2-reconocer), se observa si el alumno la reconoció completamente bien, o parcialmente bien o si no lo hizo. Si, en cambio, se brindan los datos para que el alumno aplique las herramientas inferenciales que correspondan (A5-hacer), se observa si el alumno realizó los análisis inferenciales correspondientes completamente bien, o parcialmente bien o si no los realizó.



Indicadores	(A)		(B)		
	Hacer	Rec.	Comp. bien	Parcialm. bien	No realiza
P1		X			
P2		X			
P3		X			
P4		X			
P5		X			

Fig. 1. Porción de la planilla para la evaluación de la resolución de los casos propuestos.

De la observación de la planilla para cada grupo surge una calificación del trabajo y al considerar las planillas para la totalidad de los grupos evaluados surge la información sobre aquellas tareas o etapas que representan mayor dificultad en su resolución. Esa información es la que se utiliza para la elaboración de nuevos problemas y para orientar el trabajo de los docentes con el curso.

En el curso correspondiente al año 2016, tanto el Caso 1 como el Caso 2 fueron resueltos respectivamente por 6 grupos (aproximadamente 25 alumnos involucrados con cada uno). El análisis de los informes presentados se resume en la Tabla 4.

En dicha tabla, se observa que una buena parte de los problemas se encuentra en la etapa del planteo (P), donde los alumnos fallaron en la formulación de los objetivos y en la traducción estadística del problema a resolver. En el Caso 2, relativo a mediciones, también se presentaron dificultades en relación a las definiciones de población y variables, que tienen en este tema alguna particularidad. En la etapa de planificación (P), ninguno de los grupos detalló el plan de análisis y prácticamente no tuvieron en cuenta elementos importantes como cotas de error, nivel de confianza, etc. En la etapa de análisis (A) se observaron dificultades a la hora de justificar la aplicación de las herramientas utilizadas, en chequear los requerimientos y en relacionar el análisis descriptivo con el inferencial. En la etapa de conclusiones (C) la mayoría sólo obtuvo las estadísticas, sin poder generalizar las mismas en relación al problema planteado y a posibles contextos.

Una dificultad general, presente en todos los grupos y a lo largo de todas las etapas, se dio en la elaboración de los informes escritos o en sus presentaciones orales. Cuando, en la instancia oral se les preguntaba por los elementos que faltaban (justificar el porqué de la aplicación de una u otra herramienta, de la construcción de tal gráfico, etc.) algunos de ellos podían responder a dichas preguntas; pero no mencionaban dichas justificaciones en sus informes.

Surge como interrogante si las dificultades observadas en el proceso de resolución de los casos se refieren al desarrollo del ciclo PPDAC, al desconocimiento de las pautas generales para elaborar un informe o a ambas.

Tabla 4. Etapas de Resolución de los Casos 1 y 2. Algunos resultados

Etapa	Caso 1	Caso 2
Planteo del Problema	Todos los grupos pudieron reconocer a la población bajo estudio y a la variable de interés (P2/3). Sólo 4 grupos definieron claramente el objetivo (P1) y hubo confusiones en 2 de los grupos en relación al parámetro “media poblacional” (P4). Ninguno de los grupos escribió en el informe una traducción estadística del problema (P7)	Todos los grupos pudieron reconocer el objetivo del estudio (P1); pero sólo 4 reconocieron población y variables (P2/3). Sólo dos de los grupos reconocieron el criterio por el cual los métodos resultaban exactos y precisos (P6) Ninguno de los grupos escribió en el informe una traducción estadística del problema (P7).
Planificación del Estudio Estadístico	Todos los grupos pudieron reconocer el tipo de estudio (PP1) y el tamaño de la muestra (PP2). Pero a la hora de elegir el nivel de confianza para llevar a cabo las estimaciones, sólo 3 de los grupos lo explicitaron sin justificar claramente por qué lo elegían (PP3). Ninguno de los grupos escribió en el informe el plan de análisis de los datos, que luego llevaron a cabo (PP7).	4 grupos identificaron el tamaño de la muestra (PP2). Pero a la hora de elegir el nivel de confianza para llevar a cabo las estimaciones, sólo 2 de los grupos lo explicitaron sin justificar claramente por qué lo elegían (PP3). Ninguno de los grupos escribió en el informe el plan de análisis de los datos, que luego llevaron a cabo (PP7).
Análisis de los datos	Sólo 3 de los grupos llevaron adelante el análisis descriptivo de manera correcta, justificando claramente lo que concluían de cada herramienta aplicada; los restantes lo hicieron sin justificar (A1/3). Los mismos 3 grupos chequearon correctamente los requerimientos para luego aplicar las herramientas inferenciales (A4). 4 de los grupos aplicaron adecuadamente estas herramientas (A-5)	Sólo 1 de los grupos llevó adelante el análisis descriptivo de manera correcta, justificando claramente lo que concluían de cada herramienta aplicada; los restantes lo hicieron sin justificar (A-1/3). 3 grupos chequearon correctamente los requerimientos (A4) para luego aplicar las herramientas inferenciales y las aplicaron adecuadamente (A-5)
Conclusiones	4 de los grupos obtuvieron conclusiones correctas (C-1) (*) pero sólo 1 las elaboró teniendo en cuenta el contexto (C-2) (**)	4 de los grupos obtuvieron conclusiones correctas y las elaboraron teniendo en cuenta el contexto (C-1/2)

(*) En la etapa de planteo del problema, se había mencionado que 2 de los grupos habían definido mal a los parámetros de interés, por lo tanto, el análisis inferencial de dichos grupos no fue el apropiado.
(**) En el enunciado de los casos presentados en este trabajo, no había información de contexto, de modo que los grupos que lo tuvieron en cuenta, lo hicieron suponiendo posibles escenarios.

5 Conclusiones

En la resolución de los casos propuestos por parte de los alumnos, se llevan adelante dos procesos. Por un lado, el de resolución del problema propiamente dicho, que puede resumirse en el ciclo PPDAC; por el otro, la confección del informe correspondiente. El análisis de los resultados refleja que ambos procesos presentan dificultades en los alumnos, por lo que se hace necesario insistir en la resolución de este tipo de problemas y en la elaboración de los informes correspondientes, prácticamente desde el inicio de los cursos de Estadística, proponiendo tareas acordes a las herramientas que se vayan presentando a lo largo del cursado.

Pero además, esto plantea a los docentes nuevos interrogantes en relación a cómo evaluar el proceso de resolución de problemas por parte de los alumnos sin confundir las dificultades correspondientes al desarrollo del ciclo PPDAC con las de la elaboración del informe. De las respuestas a estas preguntas deberán surgir nuevos indicadores.

En el trabajo se puso de manifiesto que el uso de los indicadores facilita al docente la elaboración de problemas, así como la evaluación de los trabajos de los alumnos, la elaboración de materiales, el desarrollo de las clases, etc. Queda abierta la posibilidad de proponer nuevos indicadores que se asocien a la resolución de problemas que involucren otras herramientas estadísticas, así como también para evaluar la comprensión de los conceptos estadísticos asociados.

Referencias

1. Wild, C.y Pfannkuch, M.: Statistical Thinking in Empirical Enquiry (with discussion). *International Statistical Review*, Vol 67, Nº 3, pp. 223-265 (1999)
2. Carnevali, G. y Ferreri, N.; Resolución de problemas de naturaleza estadística; indicadores para su evaluación en alumnos de ingeniería industrial), XIX EMCI Nacional y XI EMCI Internacional, San Nicolás (2015)
3. Carnevali, G. y otros; Resolución de problemas de decisión estadística; diseño y aplicación de indicadores para su desarrollo y evaluación, XVIII EMCI Nacional y X EMCI Internacional, Mar del Plata (2014)
4. Carnevali, G. y Ferreri, N. Pensamiento estadístico: identificación de nudos de dificultad en alumnos de Ingeniería Industrial para el diseño de módulos didácticos (en coautoría), XV EMCI, Tucumán, (2009)
5. Moore, D.; What shall we teach beginners? (Invited discussion of a paper from Wild and Pfannkuch). *International Statistical Review*, Vol 67, Nº 3, pp.250-252 (1999)

Volver al Índice

Problematizando las Funciones Trigonométricas a través de la Simulación

Dirce Braccialarghe, Beatriz Introcaso, Alicia Matassa, Marisa Piraino
Departamento de Matemática, Escuela de Formación Básica, Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura, Universidad Nacional de Rosario
Av. Pellegrini 250 – 2000 Rosario, Santa Fe (Argentina)
{dirce, beatriz, matassa, piraino}@fceia.unr.edu.ar

Resumen. A partir de la necesidad de superar ciertos aspectos que impiden a los estudiantes de Ingeniería dar sentido a lo trigonométrico, realizamos una propuesta de modelado y simulación de un movimiento oscilatorio. La misma incluye la construcción de un péndulo y la utilización de programas informáticos que favorecen el análisis y la simulación del movimiento. En el marco de la Teoría Socioepistemológica, pretendemos con esta propuesta propiciar el rediseño del discurso matemático escolar superando los fenómenos de exclusión y opacidad que genera.

Palabras Clave: Funciones trigonométricas, Discurso matemático escolar, Simulación.

1 Introducción

Las autoras de este trabajo nos desempeñamos como docentes en asignaturas de Matemática del ciclo básico de carreras de Ingeniería de la Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura de la Universidad Nacional de Rosario (Argentina). Teniendo como referencia la Teoría Socioepistemológica, consideramos que el conocimiento se genera a partir de prácticas sociales en contexto. En este sentido entendemos que la Matemática en las carreras de Ingeniería debe significarse a partir de la modelización y la resolución de problemas ingenieriles. Esto nos lleva a buscar cotidianamente la forma de favorecer la resignificación de los conceptos.

La problemática particular abordada en este trabajo se basa en haber detectado que los estudiantes sistemáticamente confunden la razón trigonométrica con la función trigonométrica, desconocen la necesidad de trabajar en radianes y consecuentemente llegan a resultados absurdos en cálculos de longitudes o áreas. Estos errores subsisten más allá de la asignatura en que estas funciones son presentadas (Cálculo I). Encontramos, por ejemplo, que al trabajar polinomios de Taylor en 2 variables (Cálculo III) los resultados que se obtienen con las aproximaciones difieren en más del error esperable de los obtenidos a partir de un cálculo directo. Y esto se debe a que los estudiantes consideran que el cálculo de $\cos(x)$ se realiza necesariamente con x medida en grados.

Sostenemos que esta situación es fruto de un discurso imperante en que se les ha presentado a los estudiantes una especie de equivalencia entre las funciones trigonométricas y las razones trigonométricas, a través del uso de la circunferencia trigonométrica, así como entre el grado sexagesimal y el radián a través de la conversión de una a otra “unidad de medida”.

Nuestra propuesta se basa en la necesidad de proveer contextos para resignificar los conceptos, teniendo en cuenta que el conocimiento se genera a partir de prácticas sociales situadas, y por lo tanto es relativo a la comunidad que le dio origen y a los usos que en ella se hagan del mismo.

En particular en lo que hace a la formación del ingeniero, la simulación es una práctica cada vez más frecuente en la labor profesional, ya que muchas veces problemas de tiempo, recursos o seguridad impiden realizar pruebas en el medio natural con los componentes concretos. Asimismo, trabajando con una representación en el aula, los estudiantes detectan los parámetros que deben considerar para lograr el propósito que persiguen, poniendo en juego el análisis y la sistematización, así como la necesidad de interactuar con otros actores que comparten la práctica que permite dar sentido al conocimiento puesto en juego.

Proponemos entonces una práctica de simulación enfocada en la descripción del movimiento de un péndulo, que ponga en juego la necesidad de matematizar el movimiento oscilatorio y dar sentido a las funciones trigonométricas.

El presente trabajo se centra en la propuesta, la cual pretendemos llevar adelante en un curso de estudiantes que ingresan a la carrera de Ingeniería Mecánica de la UNR en el año 2017.

2 Marco teórico

A lo largo de la historia las teorías educativas han hecho foco en distintos aspectos como la cuestión cognitiva (análisis sobre los sujetos que aprenden), la cuestión didáctica (las formas de plantear la enseñanza) o la cuestión epistemológica (el estudio del saber involucrado). La Teoría Socioepistemológica (TSE) [1] incorpora a estos tres aspectos el contexto social, a la luz del cual se modifica el análisis de las relaciones entre los anteriores. Esta teoría tiene en cuenta que cada comunidad tiene sus propias necesidades, costumbres, tradiciones, ideologías, prácticas, problemáticas, que determinan o norman sus acciones y la manera de construir conocimiento. Las ideas que han predominado históricamente y están presentes aún hoy en el sistema educativo tienen que ver con considerar que la Matemática trata con objetos abstractos, anteriores a las prácticas sociales y por lo tanto externos al ser humano. Desde la TSE se entiende que el conocimiento matemático tiene un origen y una función social, y que se genera a partir de lo que se denomina prácticas sociales, aquellas que norman las actividades de un determinado grupo.

Se analizan también los mecanismos de difusión del conocimiento desde y hacia el sistema educativo, en los cuales se instituye un discurso (discurso matemático escolar: dME) que alcanza consenso entre los actores sociales involucrados, y que sienta las bases de comunicación para la construcción de significados compartidos [2]: cuáles son los conocimientos que se consideran importantes para la formación, cuáles son los argumentos que se juzgan válidos, cuáles son los ejemplos que esclarecen estos argumentos. Con la imposición de argumentaciones, el dME genera violencia simbólica [3]: todos los elementos que lo caracterizan excluyen a los actores de la construcción del conocimiento, inhibiendo la consideración de aspectos contextuales o culturales que pudieran intervenir en la misma, poniendo el énfasis en la mecanización de procesos, anteponiendo la utilidad del conocimiento a cualquiera de sus restantes cualidades, soslayando el hecho de que la Matemática puede responder a otras prácticas de referencia diferentes de las que se exhiben en los libros de texto.

Respecto del tema de este trabajo, en el dME está instalada la idea de que el círculo trigonométrico es el recurso más adecuado para introducir las funciones trigonométricas a partir de las razones trigonométricas [4]. Este elemento está planteado como un recurso didáctico pero evidentemente no tiene en cuenta los contextos sociales y culturales que dan origen y significado al concepto, produciendo una idea de que el concepto es abstracto y aislado (atomización del concepto: [3]).

Como mencionamos en la Introducción, notamos (y lo constatan otros estudios citados en [4]) que para los estudiantes es indistinto trabajar con la razón trigonométrica que con la función trigonométrica. Aún cuando se esté trabajando con la función trigonométrica en relación con el movimiento de una partícula, para el estudiante el cálculo del seno resulta de hacer “cateto opuesto sobre hipotenusa”, reduciendo el concepto a la mecanización del proceso, dando cuenta de otro de los aspectos que caracterizan el dME [3]: la matemática es vista como un conocimiento acabado y continuo.

El dME imperante en el nivel superior (también planteado en [4]) asume que la función trigonométrica es un concepto que el estudiante ya ha aprendido en el nivel medio, y por lo tanto existe una indiferencia por parte del docente para problematizar el concepto o dar explicaciones analíticas que lo relacionen, por ejemplo, con la longitud de arco.

En tanto el dME es un sistema de razón que excluye y produce violencia simbólica [3], el planteo es rediseñar este discurso. La propuesta de la TSE se basa en el tránsito de una perspectiva platónica, centrada en objetos abstractos ajenos a la realidad, hacia una perspectiva que asume a las prácticas sociales como base en la construcción del conocimiento matemático de las culturas. Desde esta perspectiva, se piensa el rediseño del dME a partir de la problematización del saber matemático.

El sistema didáctico de la educación superior en carreras de Ingeniería se caracteriza por el hecho de que la Matemática está al servicio de otros dominios científicos y de otras prácticas de referencia, de donde a su vez adquiere sentido y significación [5]. De este modo creemos acertado pensar que alguna idea de la práctica social debe ingresar al aula. Ésta se convierte así en un espacio que permite la entrada de otros saberes no habitualmente presentes en los contenidos curriculares: el aula extendida; el aula de la vida cotidiana [6]. La Matemática en las carreras de Ingeniería adquiere sentido en tanto tenga que ver con la problemática específica de los estudiantes de estas carreras, reconociéndola como un medio o herramienta que permite entender la realidad de otras áreas del conocimiento.

En el caso particular de las funciones trigonométricas, nos proponemos propiciar actividades de simulación, que consideramos un camino para el proceso de resignificación progresiva tendiente a dotar al conocimiento de un carácter funcional, es decir la posibilidad de integrarlo a la vida para transformarla. Para ello debemos enfocar la problemática hacia el uso del conocimiento matemático en las situaciones en contexto, para entender cómo se relacionan la función y la forma del conocimiento puesto en juego, en una secuencia en la que se crean y modifican marcos de referencia [7].

Como viene considerándose en los trabajos enmarcados en la TSE, la didáctica de las funciones no puede abordarse desde la generalidad del objeto matemático, sino desde la particularidad de cada tipo de función. A partir del corrimiento planteado desde el objeto de conocimiento (la trigonometría) a las prácticas que le dieron origen o lo vuelven funcional, nos centraremos en tratar de dar sentido a las particularidades que caracterizan este conocimiento: su carácter periódico o el comportamiento oscilatorio (lo trigonométrico).

Las prácticas sociales, y en especial la simulación [8], contribuyen al desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional (noción introducida por Cantoral en [9]). Además se afirma en [10] que la noción de lo periódico, basada en la práctica de predicción, puede desarrollarse justamente con ayuda de la simulación.

3 Actividad propuesta

La idea de la resignificación progresiva de los conceptos nos hace pensar en una propuesta en que dialécticamente se tengan en cuenta las distintas prácticas sociales que dan origen y significado a lo trigonométrico. En [4] se delinean tres momentos históricos en la construcción social del concepto:

- Un primer momento relacionado con las razones trigonométricas en un contexto estático-proporcional. Esta etapa está asociada a la matematización de la astronomía, ligada a la problemática de anticipación de fenómenos.
- Un segundo momento relacionado con las funciones trigonométricas en un contexto dinámico-periódico. Esta etapa se asocia a la matematización de la física, ligada a la problemática de la predicción.
- Un tercer momento relacionado con las series trigonométricas en un contexto estable-analítico. Esta etapa se asocia a la matematización de la transferencia de calor, ligada a la necesidad de formalización.

Esta propuesta se desarrolla a partir del estudio de la construcción social del conocimiento trigonométrico en escenarios históricos [11]. Sin embargo, al transitar a un escenario institucional, podemos pensar – como se plantea en [12] – que el cambio de centración de los objetos a las prácticas implica considerar a la matemática como una herramienta para modelar y estudiar las construcciones de los estudiantes cuando estos simulan el movimiento. En esta simulación se desarrollan actividades como graficación o manejo de datos, que en sí mismas generan conocimiento matemático [8] y se matematiza, es decir se comprende e interactúa con la situación-problema. Partiendo del lenguaje de los estudiantes se hacen emerger significados en base al desarrollo del uso del conocimiento.

Como se explica en [13] no planteamos la reproducción de la génesis histórica, sino la reconstrucción de la actividad matemática en las circunstancias de origen del conocimiento (matematización del movimiento oscilatorio), dando prioridad al contexto de significación de la construcción del conocimiento por sobre el contexto situacional de su origen.

3.1 Analizando el problema

Nuestra idea no es construir la función trigonométrica en el sentido de guiar al estudiante en un camino que llegue hasta un conocimiento legitimado por una justificación razonada [14] sólo relacionado con la misma estructura matemática, y que presenta a la misma como un conocimiento acabado. La propuesta pretende apuntar a una justificación funcional, que permita una reciprocidad entre la matemática y el cotidiano. Tengamos en cuenta que el dME genera además el fenómeno de opacidad, constituyéndose en una barrera que resalta el conocimiento escolar y oculta el conocimiento cotidiano [15]. Buscamos con el rediseño superar a su vez este fenómeno, haciendo foco en los usos del conocimiento matemático, que expresan la construcción del conocimiento desde una comunidad y en un proceso histórico.

Consideramos que el conocimiento se construye en función de cómo y para qué se usa; cómo funciona en un contexto determinado. En este sentido consideramos adecuado transitar desde una visión estática (estudio de la posición de un planeta en un instante particular) a una dinámica (movimiento de ese planeta en función del tiempo, movimiento armónico, etc.).

Oscilaciones de cuerdas y péndulos de distinto tipo han sido estudiadas asiduamente a lo largo de la historia, en función – por ejemplo – de desarrollar técnicas de navegación para exploraciones marítimas. Asimismo la periodicidad es una noción presente en el desarrollo científico de la humanidad. Esta propiedad se gesta desde lo cotidiano (estaciones del año, día y noche…) y transita entre diferentes disciplinas [16]. Por lo tanto forma parte de un conocimiento funcional y es nuestra intención tender hacia el mismo.

En particular en la labor del ingeniero se suele aprovechar el movimiento periódico para, por ejemplo, describir un sistema que realiza movimientos repetitivos en intervalos iguales de tiempo. Esto permite evitar que se produzcan situaciones en las que el movimiento armónico pueda ser problemático (por ejemplo en puentes colgantes).

En nuestra práctica docente hacemos del trabajo colaborativo una estrategia para promover la discusión, la reflexión y la toma de decisiones. Proponemos a los estudiantes la siguiente actividad para trabajar grupalmente:

La propuesta es construir un péndulo de tal manera que se pueda registrar el movimiento en un video a analizar con un software adecuado. Para la construcción sugerimos utilizar hilo de algodón o de coser, tuerca, tornillo o clavo, soporte o perchita autoadhesiva. Para el análisis sugerimos el programa Tracker, software libre que permite el análisis de movimientos (y otras situaciones reales) en una y dos dimensiones, y con el que es posible extraer en tablas y gráficos los valores de diferentes magnitudes: posición-tiempo de una o varias partículas a la vez, velocidad-tiempo, aceleración-tiempo, etc. para describir el movimiento. Permite además ajustar los datos y comparar el modelo con los datos observados. Reproducimos a continuación el enunciado de la actividad:

a) *Materiales a utilizar*

Hilo de algodón o de coser; tuerca, tornillo o clavo; percha autoadhesiva; tijera; cinta adhesiva; objeto o elemento de dimensiones conocidas que deberá aparecer en la filmación; dispositivo para filmar (teléfono celular, cámara fotográfica,...); dispositivo con el programa Tracker instalado (computadora de escritorio, notebook, netbook, tablet,…); cable para transferir datos de un dispositivo a otro.

b) *Construcción y filmación*

- Construyan el péndulo, teniendo cuidado de ubicar el objeto o elemento de dimensiones conocidas cerca del mismo para que aparezca en la filmación
- Pongan el péndulo en movimiento y filmen
- Transfieran el video al dispositivo con el programa Tracker

c) *Análisis de los datos*

- Sigan las instrucciones del tutorial del programa para abrir el video, identifiquen los cuadros a analizar, calibren la escala, ubiquen los ejes coordenados y hagan el seguimiento del objeto a analizar (la masa del péndulo)
- Representen en una hoja distintas posiciones del objeto que oscila. Considerando el mismo sistema de referencia adoptado en el Tracker, dibujen en él las posiciones $x(t)$ del objeto en función del tiempo. Y repitan para $y(t)$.

Luego de llevada a cabo la actividad proponemos que - en base a la representación realizada de la posición del objeto en función del tiempo - discutan y respondan:

1) ¿Es posible aproximar los datos encontrados con una función lineal? En caso de serlo ¿cuán buena sería esta aproximación?
2) ¿Es posible aproximar los datos encontrados con una función cuadrática? En caso de serlo ¿cuán buena sería esta aproximación?
3) Cuando transcurren iguales períodos de tiempo ¿la distancia recorrida es la misma?
4) ¿Qué características tiene esta gráfica que condiciona las respuestas anteriores? Busquen qué tipo de funciones podrían ser más adecuadas para aproximar estos puntos.
5) ¿Qué entienden por oscilación? ¿Qué parte de la gráfica corresponde a una oscilación?
6) ¿Qué entienden por período? ¿Cuál es el período en este caso?
7) Comparen con las gráficas de otros grupos y analicen el comportamiento para distintas longitudes del hilo.
8) ¿Por qué creen que se detiene el péndulo?

3.2 Simulando la situación:

Los programas de simulación están adquiriendo en los últimos tiempos un importante grado de desarrollo y aplicación en la educación científica, debido al avance progresivo de la informática y al perfeccionamiento cada vez mayor de las capacidades de cálculo y expresión gráfica de los ordenadores [17]. Las simulaciones proporcionan una representación dinámica del funcionamiento de un sistema determinado y por lo tanto son adecuadas en los procesos de enseñanza-aprendizaje de la ciencia. Las simulaciones utilizan modelos de sistemas donde se modifican algunos parámetros o variables y se obtienen resultados observables que permiten realizar inferencias sobre la influencia de tales variables en el comportamiento del sistema representado, por tanto proporcionan a los estudiantes la oportunidad de interactuar, reflexionar y aprender participando de forma activa en el proceso educativo.

Con las consideraciones realizadas anteriormente, habiendo modelizado la posición del objeto en función del tiempo, la propuesta es simular el movimiento del péndulo. Para ello sugerimos utilizar Scratch, un lenguaje de programación visual libre que ayuda a los estudiantes a desarrollar la simulación deseada. Reproducimos a continuación el enunciado de la actividad:

Para esta actividad utilizaremos un programa que permite realizar animaciones basado en el lenguaje de programación visual llamado Scratch.

1) En el link http://lsi.vc.ehu.es/pablogn/docencia/FdI/Scratch/Aprenda%20a%20programar%20con%20Scratch%20en%20un%20par%20de%20tardes.pdf se encuentra un manual de uso del programa Scratch2. En la sección 1.1 del mismo encontrarán el link para descargar el programa.
2) Programen el movimiento del péndulo de manera que pueda verse como una simulación del movimiento filmado.
3) Comparen los dos videos. La simulación ¿reproduce el movimiento real del péndulo filmado?

A modo de ejemplo les presentamos las sentencias y el resultado del movimiento de un gato (Figs. 1 y 2).

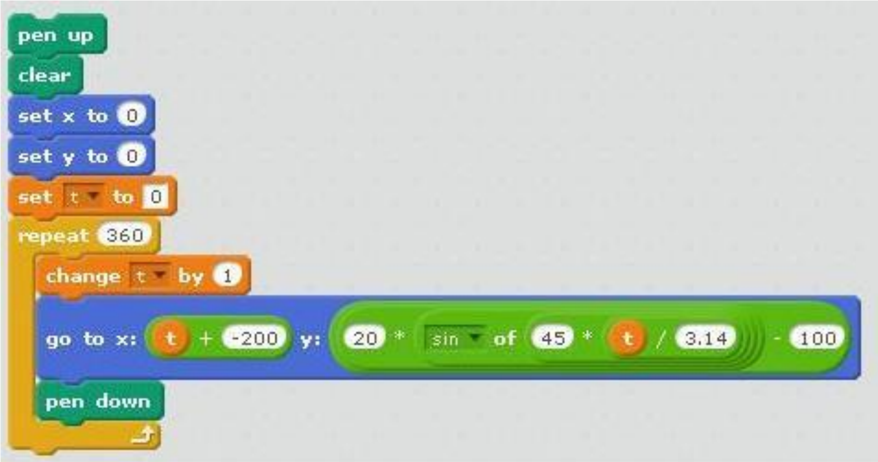


Fig. 1. Sentencias en Scratch2 para simular el movimiento del gato de Fig. 2

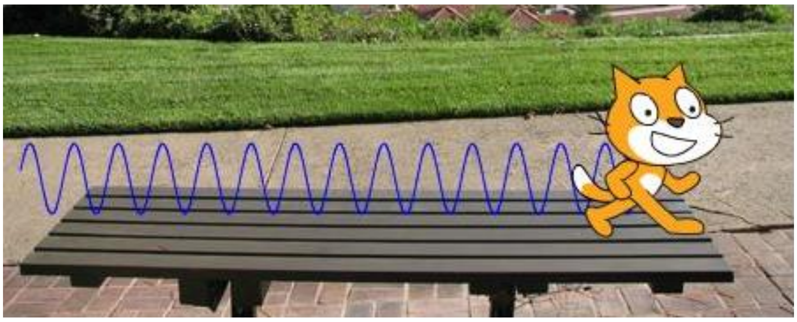


Fig. 2. Imagen que produce el programa al finalizar el movimiento simulado

4 A modo de conclusión

La intención de esta propuesta es poner a disposición otro contexto para dar sentido a lo trigonométrico. Consideramos que las prácticas de simulación que planteamos se orientan a rediseñar el discurso matemático escolar en términos de superación de la exclusión y la opacidad que genera. Aprovechando las posibilidades de los programas de análisis y simulación que permiten detectar cambios en el movimiento a partir de cambios en diferentes parámetros puestos en juego, pretendemos contraponer argumentos intuitivos y visuales a los habituales argumentos de tipo analítico que suelen privilegiarse.

Haciendo funcionar el conocimiento en situaciones concretas, procuramos soslayar su carácter utilitario apuntando a integrar el saber a la vida cotidiana y a la futura vida profesional para transformarla. Y al mismo tiempo - apoyados por el uso social de la tecnología - pretendemos ir más allá de la mecanización de procesos, para confrontar la concepción de que la Matemática es un conocimiento acabado y continuo.

Referencias

1. Cantoral, R.: La aproximación socioepistemológica a la investigación en matemática educativa: una mirada emergente. *XI Conferencia Interamericana de Educação Matemática (Blumenau, Brazil*), CD-ROM pp. 1-15 (2003)
2. Cantoral, R.; Farfán, R. M.; Lezama, J.; Martinez Sierra, G.: Socioepistemología y representación: algunos ejemplos. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa,* Número especial pp. 83-92 (2006)
3. Soto, D. *El Discurso Matemático Escolar y la Exclusión. Una Visión Socioepistemológica*. Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del Instituto Politécnico Nacional, México. Tesis de Maestría no publicada (2010)
4. Montiel, G. *Estudio Socioepistemológico de la función trigonométrica*. Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del Instituto Politécnico Nacional, México. Tesis de Doctorado no publicada (2005)
5. Cantoral, R.; Farfán, R.: Mathematics education: A vision of its evolution. *Educational Studies in Mathematics*, Vol. 53, Nro. 3, pp. 255–270 (2003)
6. Cantoral, R.; Reyes Gasperini, D.: Socioepistemologia y Matemáticas: del Aula Extendida a la Sociedad del Conocimiento. “Todo lo que siempre quisiste saber y nunca te animaste a preguntar”. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, Vol. 27, pp. 1573-1583 (2014)
7. Cordero Osorio, F. La modelación y la enseñanza de las matemáticas. *Seminario repensar las matemáticas* https://repensarlasmatematicas.files.wordpress.com/2012/09/44art-videoconf-08-2004.pdf (2004) Accedido el 12 de Febrero de 2017
8. Espinosa Romero, C. I.; Jimenez Espinosa, A.: Construcción del Concepto de Razón y Razón Constante desde la óptica Socioepistemológica. Praxis y Saber. *Revista de Investigación y Pedagogía. Maestría en Educación, Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia,* Vol. 5, Nro. 99, pp. 53-80 (2014)
9. Cantoral, R. Desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional, una mirada socioepistemológica. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* Vol. 17, pp. 1-9 (2004)
10. Ordoñez, A.; Buendía, G.: Lo periódico en la relación de una función y sus derivadas. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* Vol. 20, pp. 427-431 (2007)
11. Beltrán Soria, M. P.; Montiel Espinosa, G.: La modelación en el desarrollo del pensamiento funcional-trigonométrico en estudiantes mexicanas de nivel medio superior. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* Vol. 19, Nro. 3, pp. 255-286 (2016)
12. Suárez, L.; Cordero Osorio, F.: Elementos teóricos para estudiar el uso de las gráficas en la modelación del cambio y de la variación en un ambiente tecnológico. *Revista Electrónica de Investigación en Educación de las Ciencias* Vol. 3, Nro. 1, pp. 51-58 (2008)
13. Cantoral, R.; Montiel, G.; Reyes Gasperini, D.: Análisis del Discurso Matemático Escolar en los libros de texto, una mirada desde la Teoría Socioepistemológica. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, Vol. 8, pp. 9-28 (2015)
14. Maldonado, E.: *Un análisis didáctico de la función trigonométrica*. Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del Instituto Politécnico Nacional, México. Tesis de Maestría no publicada (2005)
15. Cordero Osorio, F.; Silva Croci, H.: Matemática Educativa, Identidad y Latinoamérica: el quehacer y la usanza del conocimiento disciplinar. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* Vol. 15, Nro. 3, pp. 295-318 (2012)
16. Buendía, G.: *La construcción social del conocimiento matemático escolar. Un estudio socioepistemológico sobre la periodicidad de las funciones*. Diaz de Santos (2011).
17. López Ruiz, M.Y.: La simulación como método de enseñanza. *Universidad Wiener. Escuela de Posgrado.* http://es.slideshare.net/margaysabel/la-simulacin-como-mtodo-de-enseanza (2011) Accedido el 16 de Febrero de 2017

Volver al Índice

El Problema de la Generalización de Propiedades en la Enseñanza de Series Numéricas. Experiencia de Aula

Barrile Sandra Leonor, Boutet Stella Maris
Departamento de Matemática, Facultad Regional Avellaneda, Universidad Tecnológica Nacional
(1874) Ramón Franco 5050, Villa Domínico, Pcia. de Buenos Aires, Argentina.
sandrabarrile@hotmail.com, stellaboutet@gmail.com

Resumen. La generalización es un elemento esencial del proceso científico en general, más de una vez el alumno, con pocos ejercicios en los que obtuvo la misma conclusión, trata de generalizar las propiedades conocidas, de tal forma que estos ejemplos sean un caso particular de ellas. En el aprendizaje del concepto de serie, donde ciertas características que son inherentes a dicho concepto, se "contradicen" con el sentido común que desarrollamos durante los años de educación inicial y media, basado en las propiedades de la suma y el producto. El objetivo de este trabajo es mostrar ejemplos que ilustran esta situación.

Palabras Clave: **S**erie, Suma finita, Propiedades.

1 Introducción

La aplicación del principio de permanencia de Leibniz, mediante el cual, al generalizar un concepto, se trata de mantener el mayor número de propiedades, de tal forma que el concepto anterior se convierta en un caso particular del nuevo, lleva a los estudiantes a generalizar las propiedades de sumas finitas a la suma de series, es decir sumas infinitas. Ellos formaron su pensamiento matemático sobre la base de las propiedades de la suma (como conmutatividad, asociatividad, etc.) en la cual estaban involucrados siempre una cantidad finita de términos, asumiendo que el orden de los términos de una suma puede alterarse sin que la suma lo haga. En 1833 Cauchy descubrió que esta propiedad no siempre era cierta para las series. Parte de este trabajo es mostrar una variedad de ejemplos que ilustren esta situación.

2 Generalización de las propiedades de la aritmética en la enseñanza de series

Se plantean tres ejemplos en los cuales la aplicación de las propiedades de la aritmética finita a sumas infinitas es incorrecto.

Ejemplo 1:
Se propone a los alumnos que realicen la siguiente operación de dos formas posibles:
L= 1- ½ + 1/3 -1/4 +1/5- 1/6 +1/7-1/8+1/9-1/10
Entre las propuestas aparecen:
L= (1- ½)+ (1/3 -1/4) +(1/5- 1/6) +(1/7-1/8)+(1/9-1/10)   obteniendo:
L=0,645634921
y L= (1+ 1/3 +1/5 +1/7+1/9)- (1/2+1/4+1/6+1/8+1/10) obteniendo:
0,645634921

Se pregunta, si agregamos más términos y realizamos cualquier ordenamiento obtendremos el mismo resultado.

La respuesta por supuesto es sí, entonces, a continuación se pide que consideren la suma de los infinitos términos.

L= 1- ½ + 1/3 -1/4 +1/5- 1/6 +1/7-1/8+1/9-1/10+1/11-1/12+1/13-1/14+1/15-1/16+……

Posteriormente se propone que realicen los siguientes pasos:

- Multiplicar miembro a miembro por 2:
  2L = 2- 2/2 + 2/3 -2/4 +2/5- 2/6 +2/7-2/8+2/9-2/10+2/11-2/12+2/13-2/14+2/15-2/16+……
- Reducir cada término a su mínima expresión:
  2L= 2- 1 + 2/3 -1/2 +2/5- 1/3 +2/7-1/4+2/9-1/5+2/11-1/6+2/13-1/7+2/15-1/8+……

- Agrupar los términos de igual denominador:
  2L= (2-1) – ½ + (2/3 – 1/3) - ¼ + (2/5 -1/5) – 1/6 + (2/7 – 1/7) – 1/8 +……
- Resolver las operaciones que están entre paréntesis:
  2L= 1 – ½ + 1/3 – ¼ + 1/5 – 1/6 + 1/7 -1/8 +….

Se obtiene una serie cuyo segundo miembro es igual al de la inicial, por lo tanto conocen que su límite es L y no 2L!

Se pregunta si pasará lo mismo si multiplican miembro a miembro de la serie original por otro escalar. Proponemos como segunda actividad repetir el procedimiento anterior multiplicando miembro a miembro por 4 la serie original:

4L= 4- 2 + 4/3 -1 +4/5- 2/3+4/7-1/2+4/9-2/5+4/11-1/3+4/13-2/7+4/15-1/4+……

Agrupando los términos de igual denominador, tenemos:

4L= (4- 2-1) -1/2+ (4/3 - 2/3-1/3) -1/4+….

Y observan que llegamos a la misma contradicción que cuando habíamos multiplicado por 2, e intuyen que si se repite el procedimiento de multiplicar por $\alpha \in \mathcal{N}$ y agrupar los términos de igual denominador, se puede hacer que la suma de esta serie no sólo valga L, 2L y 4L, sino también 8L, 16L o sea αL. Esto solo sería válido si L=0 pero como

L= (1- ½)+ (1/3 -1/4) +(1/5- 1/6) +(1/7-1/8)+(1/9-1/10) +….

es suma de todos términos positivos, L no puede ser 0.

Surge la pregunta si es siempre posible alterar el orden y agrupar los términos de una serie infinita convergente, con la seguridad de no cambiar el límite. Se “cuenta” que se puede realizar solo si la serie es “absolutamente convergente”, es decir, la serie de los módulos es convergente.

En efecto, en el ejemplo analizado, al considerar los módulos de la serie dada, se obtiene la serie armónica. Por consiguiente, al no ser absolutamente convergente, se puede esperar que mediante adecuados agrupamientos se pueden obtener otras series que convergen a otros valores.

Las contradicciones provienen de querer aplicar a las series infinitas, los procedimientos de la aritmética finita.

En la aritmética finita, se verifica la propiedad asociativa A+B+ C= (A+B)+C = A+ (B+C). Los resultados contradictorios que obtuvimos antes, muestra que la propiedad citada no se verifica, en términos generales, en las series infinitas.

La cuestión de la ordenación de los términos de una serie condicionalmente convergente, fue estudiada por el matemático alemán Riemann. En 1854 demostró el siguiente teorema:

Se pueden ordenar los términos de una serie condicionalmente convergente, de modo que su límite sea cualquier número finito dado, o más infinito, o menos infinito.

Aunque Riemann lo demostró en 1854, no se publicó hasta 1867.

Ejemplo 2:

Se considera la serie:

$$\frac{1}{1.3}+\frac{1}{3.5}+\frac{1}{5.7}+\frac{1}{7.9}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2-1}$$

Se propone que se compare~~n~~ con $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2}$ pues $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ es p-armónica convergente y al multiplicar por $\alpha \in \mathcal{R}$ con $\alpha \neq 0$ el carácter de la serie no cambia.

$$4n^2 < 4n^2+1$$

$$\frac{1}{4n^2} > \frac{1}{4n^2+1}$$

Por lo tanto, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2-1}$ es convergente pues está mayorada por una serie p-armónica convergente.

Se proponen distintos procedimientos para calcular su suma, haciendo observar que al aplicar las propiedades de la aritmética finita a sumas infinitas, se puede obtener distintos valores de su suma (L).

Primera propuesta:

- Agrupar de la siguiente forma:

$$\left(\frac{1}{1}-\frac{2}{3}\right)+\left(\frac{2}{3}-\frac{3}{5}\right)+\left(\frac{3}{5}-\frac{4}{7}\right)+\left(\frac{4}{7}-\frac{5}{9}\right)+\cdots.$$

resultando

$$\left(\frac{1}{1}-\frac{2}{3}\right)=\frac{3-2}{1.3}=\frac{1}{1.3}$$

$$\left(\frac{2}{3}-\frac{3}{5}\right)=\frac{10-9}{3.5}=\frac{1}{3.5}$$

y así sucesivamente.

- Quitar los paréntesis, simplificar y calcular L:

$$\frac{1}{1}-\frac{2}{3}+\frac{2}{3}-\frac{3}{5}+\frac{3}{5}-\frac{4}{7}+\frac{4}{7}-\frac{5}{9}\ \ldots.$$

Por lo tanto, L=1.

Segunda propuesta

- Escribir la serie en la forma:

$$L=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{9}\right)+\cdots$$

(operando en cada sumando se obtienen los términos de la serie original).

- Aplicar propiedad distributiva y realizar la suma:

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{6}+\frac{1}{6}-\frac{1}{10}+\frac{1}{10}-\frac{1}{14}+\frac{1}{14}-\frac{1}{18}+\cdots$$

Resulta L=1/2.

Nuevamente en este ejemplo obtuvimos distintos resultados.
Se presenta a continuación otro ejemplo:
Ejemplo 3:
Sea la serie convergente:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

Se puede escribir: $a_1 = N + (a_1 - N)$

$$a_2 = -(a_1 - N) + (a_1 + a_2 - N)$$

$$a_3 = -(a_1 + a_2 - N) + (a_1 + a_2 + a_3 - N)$$

$$a_4 = -(a_1 + a_2 + a_3 - N) + (a_1 + a_2 + a_3 + a_4 - N)$$

$$a_5 = -(a_1 + a_2 + a_3 + a_4 - N) + (a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 - N)$$

Y así sucesivamente.
Sumando estas igualdades se obtiene:

$$\begin{aligned} &a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 \ldots \\ &= N + (a_1 - N) - (a_1 - N) + (a_1 + a_2 - N) - (a_1 + a_2 - N) + (a_1 + a_2 + a_3 - N) \\ &- (a_1 + a_2 + a_3 - N) + (a_1 + a_2 + a_3 + a_4 - N) - (a_1 + a_2 + a_3 + a_4 - N) \\ &+ (a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 - N) + \cdots \end{aligned}$$

Al quitar los paréntesis en el segundo miembro, se cancelan todos los términos menos el primero, por lo tanto, la suma de la serie del primer miembro es N, con N cualquier número real.

Referencias

1. Noriega, R.; Cálculo diferencial e integral; Editorial Docencia, Buenos Aires; (1979).
2. Northop, E.; Paradojas Matemáticas; Unión tipográfica editorial hispano américa, México, (1968).
3. Rudin, W.; Principles of Mathematical Analysis; Editorial McGraw-Hill, New York, (1976).
4. Spivak, M.; Calculus, Cálculo infinitesimal; Editorial Reverté SA, Barcelona; (1992).
5. Thomas, G; Cálculo, *varias variables.* Editorial Pearson Educación, México, (2006).

Volver al Índice

Trabajo Práctico Integrador de Probabilidad y Estadística Utilización de Datos Reales

Diana R. Kohan, Marisa Battisti, Jorge S. Farabello
Departamento Matemático, Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de Entre Ríos
Ruta Prov. 11 Km 10, Oro Verde (Dpto. Paraná), Entre Ríos, Argentina
{dikohan, mbattisti, jfarabello}@ingenieria.uner.edu.ar

Resumen. Probabilidad y Estadística es una asignatura común a las carreras Bioingeniería y Licenciatura en Bioinformática de la Facultad de Ingeniería en la Universidad Nacional de Entre Ríos observándose que al finalizar el cursado los estudiantes presentan dificultades al intentar aplicar contenidos propios de la Estadística a problemáticas reales. Se propone incorporar un trabajo práctico integrador extra-áulico durante el cuatrimestre, en el cual el alumno deba recurrir a temas ya desarrollados en clase para efectuar un análisis cuyas etapas sean partes de un *todo* en un problema de aplicación.
Como es necesaria la inserción de la cultura universitaria en la era digital, la tarea está planificada para proporcionar a los estudiantes un primer contacto con los diversos software disponibles para efectuar análisis de datos.
Se pretende que de esta manera se enriquezca el proceso formativo y cognitivo del estudiantado, permitiéndole adquirir habilidades inherentes al razonamiento estadístico y promoviendo el espíritu crítico.

Palabras Clave: Trabajo integrador, Software estadístico, Evaluación formativa.

1 Introducción

La asignatura cuatrimestral Probabilidad y Estadística es común a las carreras de Bioingeniería y Licenciatura en Bioinformática de la Facultad de Ingeniería en la Universidad Nacional de Entre Ríos. Como equipo de cátedra y a razón de una amplia experiencia en el dictado de la misma se observa que los estudiantes al finalizar el cursado presentan dificultades en intentar aplicar los contenidos propios de la Estadística a problemáticas reales de los ámbitos que les conciernen.

En virtud de la situación mencionada, el objetivo primario de esta propuesta es describir la metodología que planea incorporarse durante el dictado de la cátedra, esta es: proponer un trabajo práctico, integrador, en el que el alumno deba recurrir a temas ya desarrollados, en clase, para efectuar un análisis cuyas etapas sean partes de un *todo* en un problema de aplicación.

La perspectiva actual de la sociedad precisa de la inserción sólida de la cultura universitaria en la era digital[1], por tanto se cree que recurrir a diferentes formas de enseñanza explotando los nuevos recursos tecnológicos puede ser sumamente beneficioso para los estudiantes. En este sentido, la propuesta consiste no sólo en la aplicación de los contenidos en el marco de un problema real propio de su disciplina, sino también en una forma de brindar a los estudiantes un primer contacto con algunos de los diversos software estadísticos con los que cuentan a la hora de emprender un análisis de datos [2] enseñándoles a dar conclusiones confiables y de validez estadística.

2 Fundamentos

La idea de este tipo de propuesta motivada a partir de un problema de aplicación propio de su campo de investigación, reside en propiciar a los estudiantes un contexto y un entorno [1] para que en ellos logren la comprensión y el aprendizaje de los conceptos fundamentales de la Estadística.

Esta disciplina es entendida como una manera de pensar y no una manera de hacer, pues ayuda a resolver problemas reales [3]. En efecto, su enseñanza debe partir de situaciones problemáticas en las que el alumnado deba desarrollar y planificar vías de solución, analizar datos, comprobar hipótesis iniciales y emprender el proceso de toma de decisiones en consecuencia.

Haciéndose eco de las palabras de Godino: “el punto de comienzo de la estadística debería ser el encuentro de los alumnos con datos reales (…)” [2], se cree que la selección adecuada de problemas puede introducir al alumno en situaciones de incertidumbre sobre las cuales deban efectuar inferencias y decidir a partir de una base de datos. Adhiriendo a la Teoría de Situaciones Didácticas de Brousseau [3]: “Estos problemas, elegidos para que el alumno pueda aceptarlos, deben hacerle actuar, hablar, reflexionar, evolucionar por sí mismo (…)”. Se piensa que en este escenario de ambigüedad, los estudiantes se verán conducidos a ejercer un aprendizaje autónomo.

Conjuntamente, son conocidas tanto la posibilidad como la necesidad de recurrir a la computadora en los procesos de enseñanza universitaria de la Estadística, siendo incorporada en términos de recurso didáctico, para que el estudiante la entienda como instrumento de cálculo y representación gráfica en la exploración de un conjunto de datos [2].

En palabras de Carmen Batanero:

> “La gran ventaja de los ordenadores es su naturaleza dinámica, su velocidad, y el creciente rango de software que permite a los estudiantes experimentar y explorar todos los aspectos de los procesos estadísticos, desde la planificación de la muestra o del diseño experimental hasta la recolección y el manejo de datos, la simulación y el análisis, para interpretar y comunicar los resultados” [4].

Puesto que el empleo de las herramientas computacionales aporta facilidades al análisis en términos de prescindir de horas al cálculo manual para grandes volúmenes de datos, se asume que la implementación de software estadísticos permitirá en gran medida que los estudiantes destinen más tiempo a cuestiones tanto interpretativas como conceptuales de los resultados obtenidos.

Nuevamente se cita a Batanero en lo que respecta a la diferenciación de los tipos de software que pueden ser de utilidad en la enseñanza de la disciplina, haciendo mención de los paquetes estadísticos profesionales como SPSS, RCommander, Infostat, etcétera, y a software de uso genérico, como ser la planilla de cálculo [4].

Desde este punto de vista, será clara la necesidad de que el personal docente esté formado en el uso de las TICs (Tecnologías de Información y Comunicación) en Estadística para que pueda con ellas brindar ambientes de aprendizaje significativo a sus alumnos [5].

A razón de lo antes expuesto, se considera relevante concebir y gestionar un proceso de formación que fomente el desarrollo de diversas competencias transversales, las cuales permitan a los estudiantes, como futuros profesionales, resolver aquellos problemas que afrontarán en su entorno laboral. En esta concepción, los docentes universitarios están llamados a pensar en metodologías para educar crítica y reflexivamente a los jóvenes, siendo un desafío diseñar situaciones de aprendizaje distintas [6].

Debido a que todo cambio en las prácticas de enseñanza conlleva re-pensar la práctica evaluativa, se recurre a la denominada *evaluación formativa.* La misma tiene como objetivo mejorar los procesos de enseñanza-aprendizaje, avocada a que los estudiantes aprendan más y que el cuerpo docente pueda mejorar su práctica pedagógica [7]. A través de ella se pueden dar juicios de valor que describan e interpreten la evolución del conocimiento y aprendizaje, contando con indicadores que califiquen en formas cuantitativa y cualitativa [8]. Adhiriendo a lo expresado por López Pastor: “un aspecto fundamental es la utilización de la evaluación como estrategia para mejorar y favorecer los aprendizajes, en vez de como simple certificación del éxito o fracaso en los mismos” [7]. Es compartida su idea de que este carácter formativo en el proceso de evaluación yace en otros conceptos como los de evaluación alternativa, evaluación auténtica y evaluación orientada al aprendizaje, términos que en conjunto abarcan una manera distinta de llevar la práctica de evaluación a la experiencia educativa.

Lo que se pretende aquí, incorporando la evaluación formativa, es aprovechar su incidencia en el desarrollo de competencias interpersonales como la capacidad crítica y autocrítica, y competencias sistémicas las cuales impliquen la aplicación de conocimientos adquiridos, la autonomía y la autorregulación del aprendizaje [6].

3 Metodología

La asignatura Probabilidad y Estadística pertenece al segundo cuatrimestre de segundo año de los planes de estudio de las carreras Bioingeniería y Licenciatura en Bioinformática, siendo bianual la oferta para el cursado. La cantidad de alumnos que habitualmente cursan en el primer cuatrimestre es cercana a veinte y en el segundo cuatrimestre se aproxima a cincuenta.

La propuesta presentada pretende encuadrarse dentro de un ensayo piloto durante el primer cuatrimestre del año 2017, etapa en la que el número de estudiantes inscriptos es menor.

El trabajo se desarrollará durante el cursado de la asignatura, estando disponibles las consignas al inicio del cuatrimestre dentro del campus que la cátedra tiene disponible en la plataforma virtual Moodle. Las mismas versarán sobre una base de datos preestablecida por el cuerpo docente sobre resultados de análisis clínicos de un gran número de pacientes.

Será de carácter extra-áulico para los estudiantes, quienes tendrán la posibilidad de realizarlo en grupos de no más de tres integrantes, contando todos con una primera clase de introducción a los programas estadísticos y espacios de consulta presenciales, de los que semanalmente dispondrán, y no presenciales a través de la plataforma virtual. La clase inicial estará centrada en el ingreso de los datos a los diversos software y el manejo de los principales comandos para su tratamiento y la elaboración de gráficas.

Cada grupo deberá analizar las variables que les sean asignadas de la base de datos en función de otras variables como podrán ser, por ejemplo, la edad y el género.

3.1 Etapas

En líneas generales, la tarea será organizada en tres apartados consecutivos llamados etapas.

En todas las etapas de este trabajo está previsto que los alumnos utilicen software tales como una planilla de cálculo, RCommander, SPSS, Epidat o Infostat, o similares. Así mismo, no debe perderse de vista que en todo momento el foco estará puesto no meramente en el aspecto técnico de los diferentes programas estadísticos, sino en el reporte correcto de los resultados de la investigación.

3.1.1 Primera etapa

Para iniciar, se introducirán los conceptos de población y muestra, hablando del muestreo en poblaciones finitas, de lo que significa extraer una muestra aleatoria, y deseando que el alumno practique los diferentes métodos de selección de una muestra sobre la base de datos de gran volumen que asumirán como población. Dichas técnicas le permitirán en un futuro estudiar el comportamiento de una variable para poder desarrollar conclusiones sobre la población de interés.

En simultáneo, se dirigirá al estudiante en el estudio de la estadística descriptiva para que pueda, entre otras cosas: extraer información de características medibles o no, introduciendo el concepto de variable; aprender cómo presentar los resultados, mostrando los diferentes gráficos estadísticos; y calcular diferentes medidas de tendencia central y de dispersión sobre aquellas variables cuantitativas, haciendo hincapié en la interpretación de las mismas.

3.1.2 Segunda etapa

En segunda instancia, serán abordadas las distribuciones probabilísticas. Bajo esta temática, y asumiendo que la distribución de probabilidades de algunas de las variables en estudio siguen una distribución empírica conocida, como la Binomial, Poisson, Gaussiana, entre otras, se inducirá a los estudiantes al cálculo de probabilidades que cuantifiquen de alguna manera las posibilidades de encontrar determinado comportamiento de la variable en estudio.

Siguiendo esta línea, se desarrollarán preguntas cuyo objetivo será ubicar a los alumnos en situaciones experimentales tales como las del proceso de Bernoulli, aplicando los contenidos propios de distribuciones como la Binomial, la Binomial Negativa, o la distribución Geométrica.

3.1.3 Tercera etapa

Contando con los conceptos ya presentados de población y muestra, esta será propicia para abordar las nociones de parámetro y estadístico, y aún más, las distribuciones muestrales de estadígrafos como la media muestral, ubicando al alumno en situaciones que lo lleven a determinar la probabilidad de que la media de cierta variable pertenezca a cierto intervalo de su recorrido, entre otras.

A continuación, será prudente aprovechar los interrogantes para orientar al alumno en la estimación de parámetros, mencionando estimaciones puntuales e intervalos de confianza para los mismos, pudiendo en la práctica con software verificar qué ocurre con el error de estimación cuando el coeficiente de confianza aumenta o disminuye, o de qué tamaño deberá ser la muestra para obtener una cierta magnitud de error.

Para concluir, se dejará el contraste de hipótesis estadísticas como última temática a abordar. A través de la misma, y habiéndose trabajado con muestras aleatorias, los estudiantes podrán responder a preguntas del tipo: ¿*tal* parámetro es igual a un determinado valor numérico conocido?, ¿las medias son iguales en las poblaciones diferentes géneros?, ¿los datos disponibles provienen de una población gaussiana?, ¿existe asociación lineal entre dos de las variables estudiadas?, entre otros tantos interrogantes.

Retomando las suposiciones realizadas para el cálculo de probabilidades, el estudiante deberá verificar si los datos reunidos provienen de la distribución teórica específica hipotetizada, valiéndose de los contrastes estadísticos correspondientes, particularmente del test de bondad de ajuste.

3.2 Evaluación de la propuesta

Para concretar la evaluación de lo planificado es importante delimitar los objetivos y requisitos que significan la elaboración del trabajo integrador.

Bajo este aspecto, el trabajo práctico integrador se evaluará a lo largo del cuatrimestre de la siguiente forma:

- Las resoluciones correspondientes a las *etapas de Análisis Descriptivo de Datos* y *Distribuciones Probabilísticas* deberán presentarse como informe escrito para su corrección, debiendo ser una por cada grupo de trabajo, en fechas pautadas oportunamente. La metodología de evaluación en cada una será una lista de cotejo. Dicho listado estará integrado por una serie de criterios que mostrarán al docente si el grupo de autores del trabajo han alcanzado la comprensión de los contenidos.
  De los criterios a examinar se citan la capacidad de los integrantes en analizar cada interrogante formulado y las posibles soluciones que propongan, el grado de la vinculación que establezcan entre las consignas y los conceptos y propiedades expuestas en las clases teóricas, el orden y la claridad en la formulación de los resultados que presenten, y la justificación de los procedimientos que llevarán a cabo acompañada de la interpretación completa de sus hallazgos en computadora.
  Las entregas periódicas se circunscriben en una metodología de evaluación continua que intentará examinar los procesos de enseñanza y aprendizaje del alumno universitario cualitativamente, posibilitando espacios de mejora y fortalecimiento tanto de los estudiantes como de los docentes, durante el transcurso del cursado.
- La *etapa de Inferencia* y *las conclusiones finales* de la experiencia serán expuestas en un coloquio del cual participarán todos los equipos de trabajo. Esta instancia se desarrollará en la última semana del cuatrimestre y previo al segundo parcial. Se desea evaluar el dominio de la terminología estadística y la capacidad de comunicar en un ámbito de socialización las conclusiones redactadas.

La realización del trabajo integrador con las dos instancias de entrega y el coloquio final serán una de las condiciones que el estudiante deberá cumplimentar para lograr la regularidad, junto con un porcentaje no menor al 60% de asistencia a clases teóricas y prácticas, la aprobación de dos parciales teórico-prácticos con puntaje no inferior al 50% del total asignado a cada prueba, teniendo la posibilidad de recuperar uno de los dos parciales, y la aprobación de al menos tres de cinco pruebas breves que se han denominado parcialitos.

Si bien inicialmente, la propuesta fue pensada como una de las condiciones para lograr la promoción de la asignatura, la intencionalidad de la misma, al ser concebida como requisito para la regularización, es enriquecer el proceso de aprendizaje del estudiante, contribuyendo a su formación estadística.

4 Resultados esperados

Se pretende que la incorporación de software en la resolución de la actividad planificada, mediante una modalidad transversal, fomentará en el estudiante la capacidad de dominar hábilmente la tecnología adquiriendo una visión integral de los contenidos desarrollados durante el dictado de la asignatura, pudiendo alcanzar una mejor comprensión de cómo se utilizan las disciplinas Probabilidad y Estadística en la realidad que lo rodea.

Otra de las consecuencias esperadas es que el alumno pueda reconocer los componentes claves de las salidas impresas por computadora que muestran los software al operarlos, y se supone que haber basado la propuesta para que pueda elegir y utilizar una diversidad de programas informáticos, le otorgarán mayor experiencia para desempeñarse en investigaciones de su ámbito profesional [9].

La primera etapa se proyectó con el objetivo de que el estudiantado pueda comprender no exclusivamente el concepto de muestreo como tal, sino el proceso de muestreo y el por qué se efectúa el mismo al llevar adelante un análisis estadístico. Al enseñar a los alumnos cómo efectuar determinadas técnicas de muestreo, se espera que ellos puedan emplear la correspondiente para abordar interrogantes acerca de una o más poblaciones, atendiendo de la complejidad de los mismos.

Se busca reproducir la necesidad que puede tener un científico de obtener algún tipo de resumen de un conjunto de datos representados en una muestra. En este sentido, es deseable que el alumno obtenga e interprete ciertas medidas que describan el centro y la variabilidad del comportamiento de los datos recogidos para determinada variable de la base empleada. Puesto que los software modernos posibilitan la realización de múltiples gráficos estadísticos, se espera que el estudiante pueda crear e interpretar los mismos, decidiendo además el adecuado.

Las actividades del segundo apartado tienen por finalidad situar al estudiante en contextos de aplicación de las distribuciones empíricas conocidas, las que le posibilitarán describir el comportamiento probabilístico de variables aleatorias, independientemente de si se representa de forma gráfica, tabular o a partir de una fórmula matemática. Así mismo, se cree que la utilización de ciertos programas estadísticos brindarán al alumno la posibilidad de prescindir de tiempo en de cálculo de probabilidades y efectuar comparaciones con los cálculos realizados manualmente. Será de vital relevancia la adquisición de conceptos probabilísticos que permitan entender la inferencia estadística.

La última fase ha sido construida aspirando a que el estudiante vislumbre que el propósito al seleccionar muestras aleatorias de la población analizada es obtener información acerca de los parámetros desconocidos de la misma. En este sentido, se espera que a partir de las muestras extraídas anteriormente sea capaz de proporcionar diferentes estimaciones puntuales e intervalos de confianza para un mismo parámetro, interpretando qué significa cada una en el escenario que se le plantea. Así también, las preguntas en esta parte aspirarán a forjar en él las consecuencias que trae aparejadas aumentar la confianza o contar con muestras con pocas unidades muestrales.

En la resolución de las consignas referentes a contrastes de hipótesis estadísticas y empleando distintos software, el estudiantado encontrará *algo* que le terminará resultando habitual y es la noción de valor-P (p-value). Su aplicación es muchas veces pasada por alto por los alumnos tanto en las clases teóricas como prácticas, sin embargo, el hecho de tomar decisiones de la índole: rechazar o no la hipótesis nula de un test estadístico, a partir de una probabilidad arrojada por un software y concluir en forma correcta, es de vital importancia para quien desarrolla una investigación y debe comunicar sus resultados. Se cree que la implementación de la tecnología contribuirá a superar este obstáculo.

Con una mirada global, puede decirse que el cambio en la experiencia del dictado de clases intenta enriquecer el proceso formativo y cognitivo del alumno, permitiéndole adquirir habilidades inherentes al razonamiento estadístico y promoviendo el espíritu crítico, la cual es una competencia deseable en cualquier futuro profesional.

Referencias

1. Castañeda, M. B.; Cabrera, A.; Navarro, Y.; De Vries, W.: *Procesamiento de datos y análisis estadísticos utilizando SPSS*. Edipucrs (2010)
2. Godino, J.: ¿Qué aportan los ordenadores a la enseñanza y aprendizaje de la Estadística? *UNO*, No. 5, pp. 45-56 (1995)
3. Brousseau, G.: Fondements et méthodes de la didactiques des mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol. 7, No. 2, pp. 33-115 (1986)
4. Batanero, C.: *Didáctica de la Estadística*. Grupo de Investigación en Educación Estadística (2001)
5. Marelli, C.; Fernández, J. M.: Importancia del software estadístico en la enseñanza y aprendizaje en la Universidad de Carabobo (Venezuela). *Aula de encuentro*, Vol. 1, No. 16, pp. 89-102 (2016)
6. Buscá, F.; Pintor, P.; Martínez, L.; Peire, T.: Sistemas y procedimientos de Evaluación Formativa en docencia universitaria: resultados de 34 casos aplicados durante el curso académico 2007-2008. *Estudios sobre educación*, Vol. 18, pp. 255-276 (2010)
7. López Pastor, V. M.: Evaluación formativa y compartida en la universidad: clarificación de conceptos y propuestas de intervención desde la Red Interuniversitaria de Evaluación Formativa. *Psychology, Society, & Education*, Vol. 4, No. 1, pp. 117-130 (2012)
8. Peñaloza Figueroa, J. L.; Vargas Pérez, C. G.: ¿Qué debe cambiar en el aprendizaje de la estadística en las ciencias del comportamiento? *Actas de las XIV Jornadas de ASEPUMA y II Encuentro Internacional* (2006)
9. Wallpole, R.; Myers, R.; Myers, S.; Ye, K.: *Probabilidad y Estadística para Ingeniería y Ciencias.* Pearson Educación (2012)

Volver al Índice

En Búsqueda de Mejores Aprendizajes de las Distribuciones de Probabilidad: Algunos Logros Alcanzados y Nuevas Dificultades Emergentes

María E. Alvarez[1], Noemí M. Ferreri[1,2], Raúl D. Katz[1,2]
[1] Facultad Regional Rosario, Universidad Tecnológica Nacional
Zeballos 1341, 2000 Rosario
[2] Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura, Universidad Nacional de Rosario
Pellegrini 250, Rosario
alvarezevange@gmail.com; {nferreri, rdkatz}@fceia.unr.edu.ar

Resumen. En la asignatura Probabilidad y Estadística, uno de los conceptos fundamentales es el de distribución. En el caso particular de las distribuciones de probabilidad, observamos dificultades cuando los estudiantes son enfrentados a situaciones que trascienden la mera realización de un cálculo que, a veces, se encuentra formulado en el mismo problema y que requiere únicamente la aplicación rutinaria de una distribución. Esto motivó cambios en nuestra práctica docente, donde fueron incorporadas nuevas propuestas, con una mayor participación de los estudiantes. A fin de evaluar los logros alcanzados implementamos una actividad que consistió en la resolución de dos problemas relacionados con dicha temática. En este trabajo mostramos, a partir de la evaluación de los escritos de los estudiantes y de los registros de los emergentes a la hora de socializar la actividad planteada, tanto los errores como los aciertos observados, como asimismo las reflexiones que los mismos nos merecen.

Palabras Clave: Distribuciones de probabilidad, Resolución de problemas, Evaluación de los procesos de enseñanza y aprendizaje

1 Introducción

En la asignatura Probabilidad y Estadística, tanto de la Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura (FCEIA), de la Universidad Nacional de Rosario (UNR), como de la Facultad Regional Rosario (FRRO), de la Universidad Tecnológica Nacional (UTN), venimos trabajando en el marco de la investigación-acción, para mejorar los procesos de enseñanza y aprendizaje, ideando innovaciones en nuestra práctica docente. Nuestro propósito es lograr que los estudiantes comprendan plenamente los conceptos básicos, tanto de la Probabilidad como de la Estadística, y superen las dificultades que muestran falencias en la organización de sus pensamientos, en la aplicación de razonamientos lógicos, en el análisis y evaluación de resultados, etc. lo que devela una brecha entre lo que acontece y lo que se pretende desde las teorías constructivistas del aprendizaje. Pero además nos interesa ofrecer a los estudiantes mecanismos que favorezcan el desarrollo del pensamiento estadístico.

Uno de los conceptos fundamentales es el de distribución. En él subyace la forma en que los estadísticos razonan sobre la variabilidad: Wild [1] expresa que la distribución es la lente a través de la cual se observa la variabilidad de una variable de interés.

En el caso particular de las distribuciones de probabilidad, observamos dificultades cuando los estudiantes son enfrentados a problemas cuya resolución trasciende la mera realización de un cálculo que, por lo general, se encuentra formulado en el enunciado del mismo y que requiere únicamente la aplicación rutinaria de una distribución. Esto motivó la inclusión de nuevas propuestas didácticas en las cuales el énfasis estaba puesto en la resolución de problemas cuyos planteos demandan un cálculo que no se encuentra explícitamente sugerido, y otros que requieren la anticipación de un resultado aproximado en función de los datos disponibles o del reconocimiento de ciertas propiedades de las distribuciones.

A fin de evaluar los logros alcanzados después de haber introducido los cambios, tanto en las actividades propuestas como en el trabajo de aula, implementamos al finalizar el tratamiento de las distribuciones de probabilidad, tanto discretas como continuas, una actividad en todas las divisiones a nuestro cargo que consistió en la resolución, en forma individual, de dos problemas relacionados con dicha temática. Los mismos no requerían la realización de ningún cálculo. El énfasis estaba puesto en la aplicación de ciertas propiedades o en el reconocimiento de una distribución a partir de sus hipótesis características y la anticipación aproximada del valor de una probabilidad, en función de los datos del problema. Además, habíamos pautado que al finalizar la resolución de los problemas, el docente debía implementar inmediatamente una instancia que permitiese a los estudiantes exponer sus resoluciones, y generar a partir de la exposición, un debate de ideas contrapuestas donde afloren los aciertos y los errores.

En este trabajo mostramos, a partir de la evaluación de los escritos de los estudiantes y de los registros de los emergentes a la hora de socializar la actividad planteada, tanto los errores como los aciertos que se observaron, como asimismo las reflexiones que los mismos nos merecen.

2 Los procesos de enseñanza y aprendizaje de las distribuciones de probabilidad

En los cursos de Probabilidad y Estadística destinados a futuros ingenieros el concepto de distribución de probabilidad se presenta luego de trabajar, por un lado, los principios y fundamentos básicos de la Teoría de la Probabilidad y, por el otro, las principales nociones de la Estadística Descriptiva, que incluyen a las distribuciones de frecuencia, las representaciones gráficas, las medidas de resumen, etc.

El concepto de probabilidad como límite de la frecuencia relativa, o frecuencia relativa poblacional, permite transitar de la distribución de frecuencia a la distribución de probabilidad, entendida como la distribución de frecuencia en una población.

Las distribuciones de probabilidad se presentan en primer término y de manera general, tanto para las variables aleatorias discretas como para las variables aleatorias continuas. Luego se estudian algunos modelos de uso frecuente como las distribuciones: Binomial, Poisson e Hipergeométrica, asociadas a variables aleatorias discretas, o las distribuciones: Uniforme, Exponencial y Normal, entre otras, asociadas a variables aleatorias continuas. Cada modelo surge a partir de hipótesis características o en vinculación con otro modelo. Se destacan las propiedades que se consideran más relevantes y se muestran aplicaciones a la Ingeniería como por ejemplo: el muestreo de aceptación por lotes, la confiabilidad de sistemas, etc. Se proponen problemas para el trabajo en clase que requieren la aplicación de las diferentes distribuciones y el reconocimiento e interpretación de sus parámetros matemáticos. Se busca en primera instancia el manejo de las distribuciones para luego transitar a situaciones ligeramente más complejas que demanden un planteo, el cálculo correspondiente y la interpretación de los resultados obtenidos.

A partir de nuestra experiencia docente, observamos en el accionar de nuestros estudiantes una tendencia generalizada a priorizar todo lo inherente al cálculo, a recordar fórmulas sin reparar en los procedimientos que les dieron origen; más aún en ocasiones aplican cálculos innecesarios en situaciones que simplemente requieren un análisis a priori de los datos.

A modo de ejemplo, citamos las siguientes situaciones propuestas en evaluaciones pasadas:

Situación 1. Un sistema se compone de veinte componentes conectadas en paralelo. La probabilidad de que una componente falle en [0,t) es igual a 0.05. Analice si la siguiente afirmación es verdadera o falsa. La probabilidad de que en el intervalo [0,t) fallen menos de diez componentes es igual a la probabilidad de que en dicho intervalo fallen más de diez componentes.

Situación 2. (adaptada de Meyer [2]) Las duraciones, en horas, de dos instrumentos electrónicos I1 e I2 varían aleatoriamente con distribuciones N(40, 5) y N(45,3) respectivamente. ¿Cuál debe preferirse para usarlo durante un período de 45 horas? ¿Y para usarlo durante un período de 48 horas?

En la resolución de la primera situación, algunos estudiantes realizaron un planteo correcto, acompañado de tediosos cálculos, otros hicieron un planteo correcto y condicionaron la respuesta al resultado de un cálculo que no efectuaron. En un caso se sostiene erróneamente que las dos probabilidades son iguales, por considerar que el valor 10 es la mitad de 20. En ningún caso se sostiene, por simple inspección de los datos, que es mayor la probabilidad de que en el intervalo [0,t) fallen menos de 10 componentes, a pesar de que dicha probabilidad es cercana al valor uno.

En la resolución de la segunda situación, algunos alumnos plantearon, calcularon y decidieron correctamente. Otros calcularon para cada instrumento la probabilidad de que dure menos de 45 y 48 horas respectivamente, decidiendo erróneamente, a favor del instrumento con la mayor probabilidad calculada. Merece destacarse que los estudiantes podían resolver rápidamente el problema sin la necesidad de realizar cálculos, utilizando propiedades de la distribución normal relacionadas con su simetría y "la regla empírica".

Atentos a lo observado en los procedimientos utilizados por los estudiantes al resolver la Situación 1, les preguntamos porqué priorizaban el cálculo y no un análisis de la situación que les hubiese permitido dar una respuesta casi inmediata. La siguiente respuesta dada por una de las estudiantes fue significativa: "supuse que si no escribía la fórmula y hacía el cálculo, considerarían incompleta la justificación".

En relación a la Situación 2, entre los estudiantes que lo resolvieron correctamente se escucharon los siguientes comentarios: "hice el planteo y calculé, no me pareció difícil", "a mí no se me ocurrió que podía aplicar la regla empírica, pero la sé". "Dimos la regla empírica pero nunca la aplicamos así" acotó otro estudiante. Uno de los estudiantes que hizo el planteo incorrecto anteriormente descripto, dijo: “me pareció que me pedían calcular esas probabilidades, no lo pensé demasiado, creía que lo tenía bien, pero entiendo cuál fue mi error”.

Los dichos de los estudiantes merecen nuestras consideraciones. Ellos conciben mayoritariamente a la evaluación como reproducción de información, es decir, esperan un examen que demande respuestas repetitivas. Cuando la propuesta plantea situaciones diferentes se torna en una dificultad.

Es cierto que en las evaluaciones, frecuentemente solemos inclinar la balanza hacia el procedimiento adecuado, a aplicar el método correcto, en desmedro de la habilidad de pensar y actuar con flexibilidad a partir de lo que se sabe. Somos los docentes los que, de algún modo, favorecemos ese reduccionismo. En tal sentido Perkins [3] hace referencia a "patrones domesticados" o rutinas pedagógicas tradicionales que no buscan desafiar y cuestionar a los estudiantes, sino más bien, domesticar la repetición de los conceptos adquiridos. En un mismo sentido Santos Guerra [4] señala que si bien la enseñanza universitaria pretende que los alumnos aprendan, la dinámica de las instituciones universitarias hace que la evaluación se convierta en una estrategia para que los alumnos aprueben.

En concordancia con estos autores reconocemos que, a través de nuestro accionar docente solemos fomentar en nuestros estudiantes ciertas prácticas de las que nos constituimos luego en fervientes críticos. Asentimos la necesidad de proyectar alternativas tendientes a superar estas prácticas y lograr mejores aprendizajes.

3 La emergencia de nuevos interrogantes y algunas decisiones

Ante situaciones como las señaladas en la sección anterior y otras que se presentan a diario en nuestras prácticas, y con el afán de mejorarlas, nos planteamos los siguientes interrogantes:

- ¿Cómo propiciar entornos de aprendizaje para que los estudiantes establezcan relaciones que aseguren la funcionalidad y aplicación comprensiva de los contenidos, y no se limiten solo a la reproducción de un conocimiento?
- ¿Cómo guiar los procesos de enseñanza y aprendizaje para que nuestros estudiantes desarrollen un pensamiento coherentemente organizado y no limitado a la aplicación de una rutina?
- ¿Cómo favorecer en los estudiantes el desarrollo del pensamiento estadístico?
- ¿Cuáles son las acciones que debemos implementar en el aula para que los estudiantes conciban a la evaluación como un elemento más integrado al proceso de enseñanza y aprendizaje, tendiente a favorecer la comprensión?

A partir de estos interrogantes decidimos impulsar en el aula una mayor participación de los estudiantes a través de la realización de actividades en el marco de un trabajo colaborativo, propiciando el planteo de preguntas, la contrastación de diferentes suposiciones y predicciones, la reestructuración de nociones erróneas.

Consideramos que esta forma de trabajo, privada de la tensión propia de una evaluación, podía ofrecer al docente interesantes elementos para actuar didácticamente y contribuir a la superación de las dificultades que se identifican, redundando en beneficio del aprendizaje de los estudiantes.

Implementamos actividades en el aula donde la relación dialógica se constituyó en un importante instrumento para concretar procesos participativos, de compromiso para la construcción de nuevos conocimientos, de cuestionamientos, de explicitación de creencias erróneas. Buscamos que el estudiante explicara o resolviera un problema dando argumentos, poniendo en juego su comprensión, sin quitarle importancia al manejo de habilidades básicas o el manejo de rutinas. Pero también implementamos innovaciones en el desarrollo de las actividades didácticas.

En particular, al abordar problemas relacionados con las distribuciones de probabilidad, y con el objeto de constatar si los estudiantes habían comprendido la situación, les proponíamos que identificaran las variables aleatorias implicadas, que reconocieran el tipo de variable, como asimismo, el significado de la distribución asociada y de sus propiedades características. Prioritariamente en las distribuciones continuas, le solicitábamos a los estudiantes que esbozaran una gráfica de la curva de densidad y luego formulábamos interrogantes a fin de impulsar la reflexión acerca del eje sobre el cual se representan los valores de la variable, cuáles son los intervalos de mayor densidad, en qué intervalo se encuentran los valores de la variable con “pequeña probabilidad” de ocurrir, cómo se ordenan los valores de la media y de la mediana en el caso de distribuciones asimétricas como la exponencial, etc.

Cuando el problema remitía a una situación que requería un planteo ligeramente más complejo, sugeríamos que la solución surgiera como respuesta a interrogantes que ellos mismos debían formularse. También promovíamos la evaluación de la coherencia de los resultados numéricos que obtenían.

4 Una primera evaluación de los procesos de enseñanza y aprendizaje de las distribuciones de probabilidad

4.1 Introducción

Una vez finalizado el tratamiento de las distribuciones discretas y continuas, y con el objeto de evaluar el alcance de los aprendizajes logrados por nuestros estudiantes, implementamos en nuestras respectivas divisiones, una actividad que consistió en resolver, en un período de cuarenta minutos y en forma individual, dos problemas relacionadas con esta temática.

Si bien las propuestas eran simples buscamos que en las mismas estuviese ausente el cálculo o la aplicación de una rutina.

Bajo el supuesto de que se aprende con la implicación activa de los estudiantes, y a fin de favorecer la comunicación verbal, el diálogo, la defensa de las propias concepciones frente a las de los demás, habíamos acordado que, una vez finalizada la resolución de los dos problemas se debían confrontar las distintas resoluciones. A su vez cada docente debía reportar, en una reunión posterior, no solo las resoluciones entregadas por los estudiantes, sino también los emergentes de la actividad.

4.2 Problemas propuestos para la evaluación y sus soluciones

En lo que sigue mostramos los dos problemas planteados y presentamos sus soluciones.

Problema 1. Sin realizar cálculos ni búsqueda en tablas o calculadoras decida cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas y cuáles son falsas. Fundamente brevemente.

Si $X \sim N\ (\mu=100;\ \sigma=10)$ entonces:

a) $P(90 < X < 110) = P(100 < X < 120)$

b) $P(90 < X < 110) = P(X < 110) - P(X < 90)$

c) $P(90 < X < 100) > P(140 < X < 200)$

Solución del Problema 1: En el ítem a) si bien los intervalos de variación de la variable X son de igual amplitud el que tiene mayor probabilidad de ocurrir, en el caso de la distribución normal, es el que se encuentra con centro en la media. También a partir de una representación gráfica y en la consideración de que dichas probabilidades son áreas bajo la curva de densidad correspondiente, se puede concluir que $P(90 < X < 110) > P(100 < X < 120)$.

En cuanto al ítem b) la proposición es verdadera. La justificación resulta de visualizar un área como diferencia de dos áreas.

En cuanto al ítem c) por aplicación de la regla empírica y en consideración de la simetría de la distribución respecto de su media, la primera probabilidad es cercana a 0.34. Basta darse cuenta que los extremos de los intervalos coinciden con $(\mu - \sigma)$ y μ respectivamente. En cuanto a la segunda probabilidad los extremos del intervalo coinciden con $(\mu + 3\sigma)$ y $(\mu + 4\sigma)$ respectivamente, siendo consecuentemente dicha probabilidad inferior a $0.0015 = (1 - 0.997)\colon 2$.

Problema 2. Sea X: cantidad de piezas defectuosas en una muestra de tamaño 10, extraída de un gran lote de piezas, que tiene un 1% de piezas defectuosas. Solo una de las siguientes afirmaciones es verdadera. Decida cuál y fundamente brevemente sin realizar cálculo alguno.

$P(0 \leq X \leq 1) \geq 0.90$ $\qquad$ $P(0 \leq X \leq 1) \leq 0.10$

Solución del Problema 2: Bajo las condiciones del problema, la variable aleatoria X tiene una distribución Binomial con parámetros $n = 10$ y $p = 0.01$. Si bien dicha variable puede asumir cualquier valor entre 0 y 10 inclusive, dado que la probabilidad de que una pieza sea defectuosa es baja ($p = 0.01$) los valores más probables son el 0 y el 1, en ese orden, y los restantes valores tienen probabilidades cercanas a cero, siendo la distribución de probabilidad asimétrica a la derecha. Por este motivo, la primera de las opciones es la correcta.

4.3 Evaluación de las respuestas de los estudiantes y de los emergentes a la hora de socializar las resoluciones

En esta sección describimos, para cada uno de los problemas propuestos, los casos que consideramos más relevantes para destacar y mostramos algunas resoluciones escaneadas.

En relación al Problema 1 encontramos que, salvo excepciones, los estudiantes deciden correctamente si las proposiciones son verdaderas o falsas. Asimismo, la proporción de estudiantes que justifican las proposiciones a través de la representación gráfica de la curva de densidad de la distribución normal y del área que la misma encierra sobre cada intervalo, es similar a la proporción de estudiantes que justifican aplicando la regla empírica. Unos pocos combinan ambos procedimientos.

En las justificaciones dadas por los estudiantes emergen no solo algunas concepciones erróneas sino también errores de razonamiento e imprecisiones en el lenguaje. Mostramos algunos casos.

1- En relación al Problema 1-a, si bien un estudiante sostiene correctamente que la proposición "si $X \sim N(\mu=100; \sigma=10)$ entonces $P(90 < X < 110) = P(100 < X < 120)$" es falsa, su justificación muestra un error de razonamiento cuando dice: "para una distribución uniforme, intervalos de igual amplitud tienen igual probabilidad de ocurrir".

   Si bien esta afirmación es correcta, también es cierto que para una distribución normal existen intervalos de igual amplitud con igual probabilidad de ocurrir, pero en este caso no son todos, en particular no lo son los intervalos del problema. Como vemos el estudiante cambia las condiciones del enunciado para que el mismo sea verdadero, pensando que de este modo la proposición dada queda justificada.

2- Llama la atención que un estudiante hace referencia "al rango $90 \leq x \leq 110$" y no a un intervalo. En el contexto de la asignatura el concepto de rango remite a un valor característico de la variación de los datos, que se calcula como la diferencia entre el valor máximo y el valor mínimo.

   Ante esta situación nos preguntamos: ¿Ha conceptualizado este estudiante correctamente el concepto de rango de una variable? En el pasado hemos observado que algunos estudiantes expresan el rango intercuartílico de una variable aleatoria a través de un intervalo cuyo extremo inferior es el primer cuartil y cuyo extremo superior es el tercer cuartil, y no como la amplitud de dicho intervalo, como corresponde. Nuestra conjetura a priori nos llevó a pensar que existe un conocimiento previo que obstaculiza la significación del concepto de rango de una variable en el contexto de la Probabilidad y de la Estadística. En la asignatura Cálculo, el rango de una función hace referencia al conjunto de todos los valores que asume la función, que por lo general es un intervalo.

   A través de la conversación con el estudiante pudimos constatar que la noción de rango lo remite a un intervalo.

3- En la representación gráfica de la curva de densidad correspondiente a la variable aleatoria X, con $X \sim N(\mu=100; \sigma=10)$, observamos que en algunos casos el área encerrada por dicha curva sobre el intervalo $(\mu-\sigma ; \mu+\sigma)$ supera el valor 0.9. La Fig. 1 que sigue muestra esta situación.

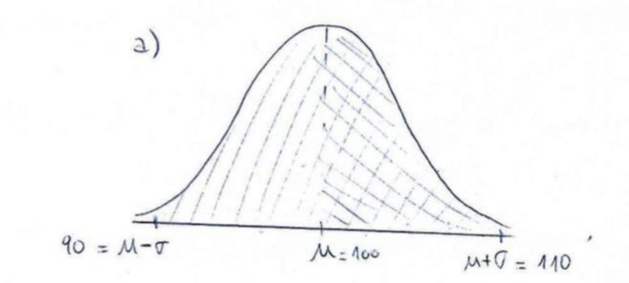


Fig. 1. Representación gráfica incorrecta relacionada con el Problema 1-a.

A través de la conversación con los estudiantes, cuyas gráficas respondían a la situación descripta, emergió una concepción errónea. Pudo constatarse que la misma deriva del tratamiento, en otros espacios curriculares, de la Teoría sobre los Errores de Medición, donde los estudiantes estiman una magnitud física a través del cálculo de la media aritmética de repetidas mediciones de dicha magnitud.

La revisión de los materiales que se utilizan a tal fin nos permitió confirmar que los estudiantes construyen un intervalo según la expresión (1). Para ellos, en ese intervalo se encuentra el valor de la magnitud, siendo la expresión (2), que denominan la incertidumbre o error estándar, un indicador de la exactitud de la estimación.

$$\bar{x} - \frac{s}{\sqrt{n}} ; \bar{x} + \frac{s}{\sqrt{n}} \qquad \textbf{(1)}$$

$$\frac{s}{\sqrt{n}} \qquad \textbf{(2)}$$

En realidad dicho intervalo "cubre" el verdadero valor con cierta confiabilidad, aspecto que no es tratado con los estudiantes por cuanto aún no realizaron ningún curso de Probabilidad y Estadística al momento de realizar esta experiencia. Algunos estudiantes, según sus dichos, sintetizan esta experiencia a través de: "la media más menos un desvío contiene el valor de la magnitud". Los estudiantes realizan cálculos y sacan conclusiones sin reflexionar sobre los objetos implicados y sus significados.

Estas ideas previas los llevan a sostener que en el caso de la distribución normal el intervalo (μ-σ; μ+σ) contiene casi todos los valores de la variable.

4- En relación al Problema 1-c encontramos un caso en el que la representación gráfica que acompaña el estudiante presenta un error, que supusimos era de distracción. Aparece en forma invertida la ubicación de μ-σ y de μ+σ. Por otra parte, nos llamó la atención el texto que escribe debajo de la gráfica. Cuando conversamos con él, advertimos que interpretaba erróneamente una ordenada en la gráfica de la función de densidad asociada a la variable aleatoria X, como el valor de una probabilidad. Lo mostramos en la Fig. 2, que sigue.

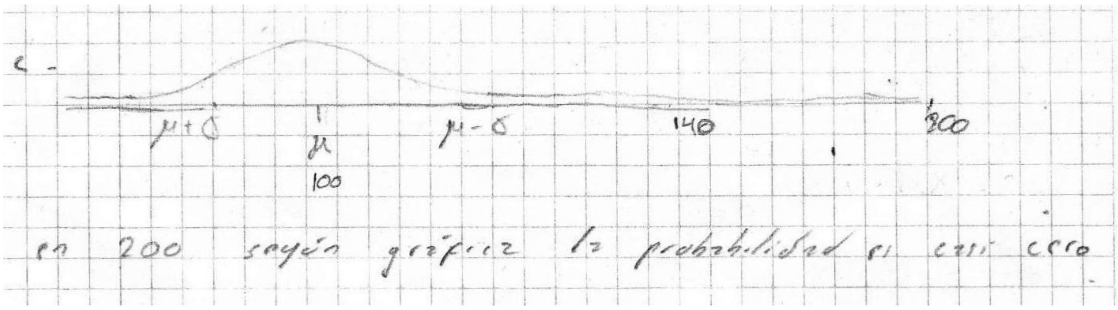


Fig. 2. Justificación incorrecta del Problema 1-c.

En lo que sigue mostramos además una resolución correcta de 1-c donde, como lo señaláramos anteriormente, se combina la justificación a través de la representación gráfica y la aplicación de la regla empírica.

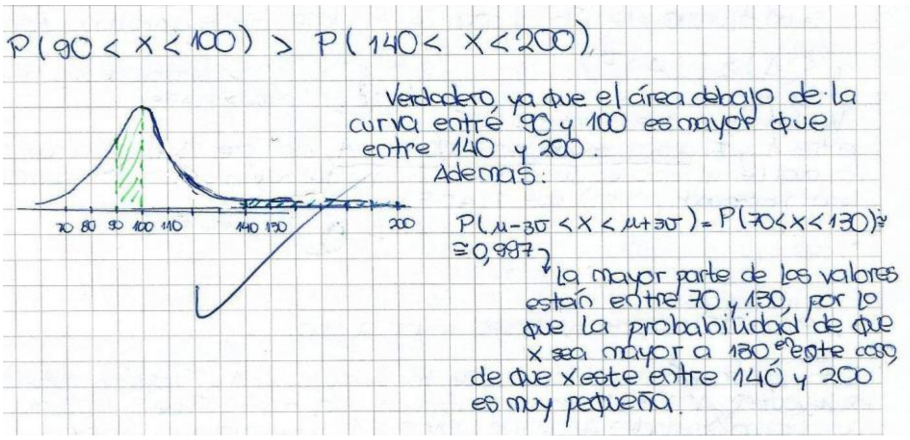


Fig. 3. Resolución correcta del Problema 1-c

En relación al Problema 2 nos sorprendió gratamente el porcentaje de estudiantes que respondió correctamente. Nuestras conjeturas a priori, que resultaron equivocadas, presuponían que los estudiantes se inclinarían por decidir a favor de la probabilidad 0.10, por cuanto implica la suma de las probabilidades de dos valores de una variable que asume once valores distintos. Sin embargo, alrededor de un 80% de los estudiantes responde y justifica correctamente, aunque en ocasiones observamos algunas imprecisiones de notación y/o lenguaje. En el restante 20%, la no respuesta y la respuesta errónea se dan en proporciones similares.

En la Fig. 4 mostramos una resolución considerada correcta.

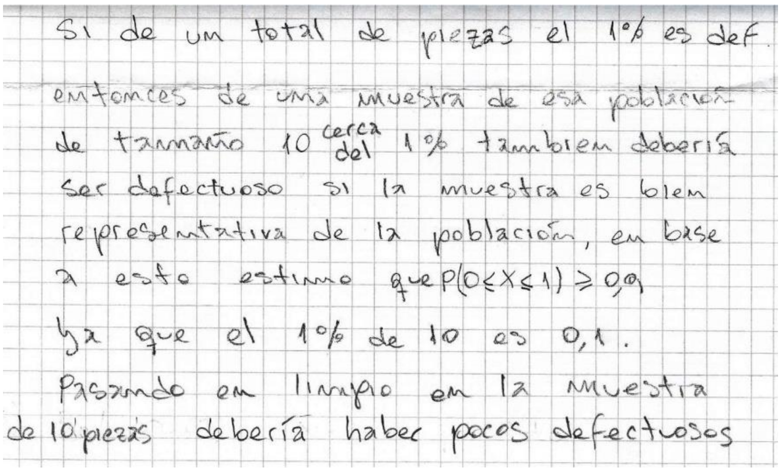

Si de un total de piezas el 1% es def.
entonces de una muestra de esa población
de tamaño 10 cerca del 1% también debería
ser defectuoso si la muestra es bien
representativa de la población, en base
a esto estimo que $P(0 \leq X \leq 1) \geq 0{,}9$
ya que el 1% de 10 es 0,1.
Pasando en limpio en la muestra
de 10 piezas debería haber pocos defectuosos

Fig. 4. Resolución correcta del Problema 2.

A continuación describimos algunas imprecisiones registradas, en aquellas resoluciones que fueron consideradas correctas.

Algunos estudiantes escriben p(X) = 0.01 para indicar que el 1% de las piezas de un gran lote es defectuoso, cuando X denota la variable aleatoria “cantidad de piezas defectuosas en una muestra de tamaño 10”. También observamos que a veces el 1% se traduce en un una probabilidad igual a 0.01, acompañada del símbolo de porcentaje. Atribuimos, fundamentalmente, dichas imprecisiones a distracciones de los estudiantes, por cuanto reconocen inmediatamente el error cuando son advertidos al respecto.

Entre las resoluciones incorrectas predomina la que sigue: Si el 1% de las piezas es defectuoso, entonces en una muestra de tamaño 10, lo más probable es que X sea 0.10 y no mayor a 0.90. En la resolución no advierten que 0.10 no constituye ningún valor posible para la variable X, y que por lo tanto no puede ser el valor más probable. La consideración del valor 0.10 los remite sin mediar ninguna otra reflexión a decidir a favor de $P(0 \leq X \leq 1) \leq 0.10$. En la Fig. 5 mostramos una resolución que responde a lo descripto.

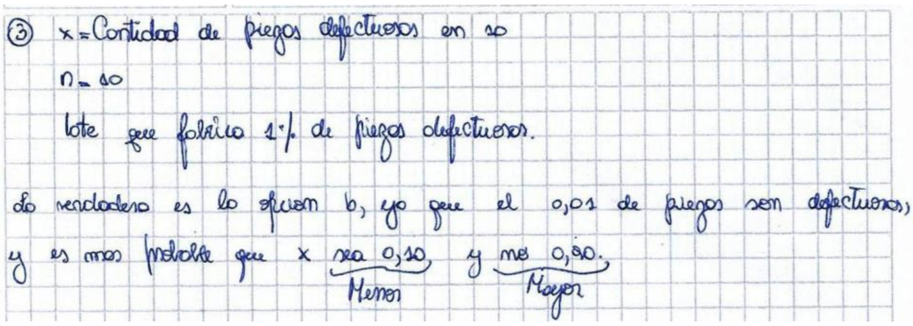

③ x = Cantidad de piezas defectuosas en 10
n = 10
lote que fabrica 1% de piezas defectuosas.
Lo verdadero es la opción b, ya que el 0,01 de piezas son defectuosas,
y es mas probable que x $\underbrace{\text{sea } 0{,}10}_{\text{Menor}}$, y $\underbrace{\text{no } 0{,}90}_{\text{Mayor}}$.

Fig.5. Resolución incorrecta del Problema 2

En el contexto de la situación 0.10 es el promedio de piezas defectuosas en todas las posibles muestras de tamaño 10, pero esto no lo dicen los estudiantes.

5 Nuestras reflexiones

Nuestra interpretación sobre el desempeño de los estudiantes indica que ha habido algunos avances en la comprensión y aplicación de las distribuciones. El elevado porcentaje de estudiantes que respondió correctamente al problema dos, con fundamentaciones bien logradas, puede considerarse como un primer indicio de que se ha fortalecido el razonamiento probabilístico, lo que constituye un importante recurso a la hora de tomar decisiones bajo condiciones de incertidumbre. Sin embargo afloraron nuevas debilidades relacionadas con las argumentaciones que utilizan para probar o negar la validez de ciertos enunciados, como asimismo creencias erróneas que derivan de procedimientos aplicados en otros espacios curriculares, vinculados con los errores en las mediciones físicas.

La mayor participación de los estudiantes en el aula, permitió constatar no solo una mejora en su atención y motivación, sino que además la interacción entre ellos posibilitó la superación de algunos comportamientos inhibitorios, dando lugar a que se explicitaran sus concepciones, permitiéndole al docente conocer el alcance de sus conceptualizaciones.

Es importante que en la dinámica del aula se expliciten e identifiquen las concepciones previas de los estudiantes, por cuanto constituyen un punto de referencia que los docentes no podemos dejar de considerar en nuestras propuestas didácticas.

A la luz de estas consideraciones, y con el objeto de mejorar los procesos de enseñanza y aprendizaje, surge la necesidad de implementar nuevas actividades, abriéndose de este modo un nuevo ciclo en el que habrá que definir nuevos objetivos para abordar.

Referencias

1. Wild, C.: The concept of distribution. *Statistics Education Research Journal*, Vol 5, N° 2, pp 10-26. (2006)
2. Meyer, P. L.: *Probabilidad y Aplicaciones Estadísticas* (*Edición revisada).* Addison-Wesley Iberoamericana (1992)
3. Perkins, D.: ¿Qué es la comprensión? Stone Wiske, M.*: La Enseñanza para la Comprensión. Vinculación entre la investigación y la práctica.* Paidós (2003)
4. Santos Guerra, M.: Veinte paradojas de la evaluación del alumnado en la universidad española. *Revista Electrónica Interuniversitaria de Formación del Profesorado.* Vol.2, N° 1. http://www.aufop.com/aufop/uploaded_files/articulos/1224341617.pdf (1999)

Volver al Índice

La Plataforma Moodle: Posibilidades para una Evaluación Continua de Aprendizajes en Cálculo de una Variable en la Universidad

Mario Garelik, María Angélica Zurbriggen.
Facultad de Ingeniería y Ciencias Hídricas. Universidad Nacional del Litoral.
Ciudad Universitaria s/n. Paraje El Pozo. Santa Fe (Capital).
{mgarelik, mazurbriggen}@gmail.com

Resumen. En este trabajo se presenta una experiencia de cátedra relacionada con el diseño e implementación de cuestionarios online en un espacio virtual para los alumnos de la asignatura Cálculo I correspondiente al primer año de carreras de ingeniería de la Facultad de Ingeniería y Ciencias Hídricas. La actividad propuesta, complementaria a la enseñanza y evaluación presenciales, se apoya en la tecnología proporcionada por la plataforma Moodle y resulta una importante herramienta de autoevaluación para los estudiantes. Se presentan los lineamientos generales que guiaron la propuesta, diseño y desarrollo de la experiencia, los aspectos metodológicos y los principales resultados.

Palabras Clave: Cuestionario, Online, Evaluación continua, Aprendizaje.

1 Introducción y aspectos contextuales

En este trabajo se presentan los detalles del diseño, implementación y principales resultados de la puesta en práctica de una experiencia de cátedra, que es parte de una propuesta más amplia, tendiente a buscar alternativas de solución a cuestiones no menores, como los bajos rendimientos académicos, rezago, recursados y abandono de los estudios, detectadas en los alumnos del primer año de carreras de ingeniería de la Facultad de Ingeniería y Ciencias Hídricas de la Universidad Nacional del Litoral (Argentina).

Es un hecho conocido que, en la actualidad, los problemas descriptos remiten a los años iniciales y tienen relación con la dificultad que encuentran los alumnos para adaptarse a la vida en la universidad.

Sin dudas que el origen de tal situación radica en aspectos sociales, educativos, políticos y económicos de los más diversos, como puede verse, por ejemplo, en Pierella [1], donde se analiza cómo la brecha entre dos culturas institucionales diferentes, escuela media y universidad, redunda en la falta de disposición o incapacidad de los estudiantes para adaptarse a las nuevas condiciones.

Atendiendo a esta realidad, y teniendo en cuenta que los informes institucionales de la facultad muestran los magros resultados de los alumnos del primer año tanto en las distintas instancias de evaluación como en el desarrollo de la experiencia áulica cotidiana, no debe soslayarse la idea de que el origen del problema radica en las dificultades que el alumno encuentra en el cursado de las asignaturas iniciales.

Esta situación se hace evidente en Cálculo I, asignatura que cursan los alumnos del primer año de las carreras de Ingeniería Ambiental, Ingeniería en Recursos Hídricos e Ingeniería en Informática, y en la que resultan comunes las dificultades de los estudiantes para alcanzar aprendizajes satisfactorios que les permitan concretar sus logros.

El currículum de la asignatura comprende los tradicionales ejes temáticos del Cálculo Diferencial, Cálculo Integral y Sucesiones y Series Numéricas y de Potencias.

En cuanto al presupuesto horario, la materia dispone de 75 horas cuatrimestrales, distribuidas en 15 semanas, con clases de dos horas semanales en las que se presentan los conceptos teóricos y clases de tres horas en las que se resuelven ejercicios y problemas de aplicación.

La asignatura Cálculo I cuenta, desde el año 2011, con un espacio virtual de aprendizaje en la plataforma educativa Moodle, en el cual los estudiantes se matriculan al inicio del cursado, y que resulta un importante aporte como vía de comunicación entre docentes y alumnos, repositorio de material de estudio para ciertos temas en particular y ámbito para diseñar e implementar actividades y tareas online para la enseñanza y aprendizaje.

En lo que se refiere al material de estudio, está conformado por los libros recomendados, todos disponibles en la biblioteca de la facultad, y el material didáctico confeccionado por el equipo docente de la asignatura, al cual los alumnos pueden acceder desde el espacio virtual con la posibilidad de descargarlos a sus computadoras personales.

El cronograma establecido carece de la holgura necesaria para implementar más de dos instancias de evaluación, por lo que las mismas tienen lugar en horarios extra clases y permiten categorizar la condición de los alumnos al finalizar el cursado en libres, regulares o promocionados.

Respecto del sistema de regularidad y promoción, el estudiante promociona la asignatura (y no rinde examen final) obteniendo en ambos parciales una nota no inferior a 60% y un promedio de 70%, en tanto alcanza la regularidad obteniendo en ambos parciales una nota de, al menos, 40%. De no lograr un 40% como mínimo en ninguna de las dos instancias, su condición final será libre. Cabe señalar que, con obtener un 40% en alguno de los dos parciales, puede acceder a una instancia recuperatoria.

La obtención de la regularidad en la materia resulta fundamental, ya que permite a los estudiantes continuar con el cursado de las asignaturas posteriores de los planes de estudio de las ingenierías, en virtud de ser Cálculo I antecorrelativa de casi la totalidad de las que conforman el currículum de las distintas carreras, razón por la cual, un mal desempeño académico en ella ocasiona demoras importantes, cuando no abandonos, en la vida universitaria del alumno, que concibe a tal tipo de materias como *puente de avance* para su carrera.

Las condiciones finales de cursado alcanzadas por los alumnos en Cálculo I no pueden ser consideradas como favorables. En la Tabla 1 se observan los resultados obtenidos tras el cursado de la asignatura en el período comprendido entre los años 2012 y 2014. En la misma se consideran los alumnos regulares, libres y ausentes (se categoriza como ausentes a aquéllos que no asistieron a ninguno de los dos parciales).

Tabla 1. Condiciones finales de cursado en Cálculo I en cohortes 2012 al 2014.

Año	2012	2013	2014
Regulares	54.3%	47.0%	43.9%
Libres	33.5%	40.4%	41.7%
Ausentes	12.2%	12.6%	14.4%

Se puede advertir que desde el año 2013 la cantidad de regulares no supera el 50% de los inscriptos a la materia, observándose además que ese número disminuye de manera continua, evidenciando, desde el año 2012, una tendencia poco favorable.

Más allá de estos aspectos cuantificables mostrados en la tabla anterior, se observa en la práctica docente cotidiana que, durante el cursado, los alumnos no toman contacto (o si lo hacen, resulta claramente insuficiente) extra clase con los contenidos de la asignatura sino hasta en tiempos muy cercanos, previos a la toma de los parciales.

Este problema se explicita en situaciones como la poca participación en clases, la escasa asistencia a las consultas brindadas por los docentes de la cátedra, y en las respuestas que ellos mismos dan a preguntas informales de los docentes sobre tal situación.

Si bien las causas que generan este escenario desfavorable son de la más variada naturaleza, resultan de interés particular para este trabajo las que se relacionan con la ausencia o escasez de hábitos de estudio, situación que, a su vez, provoca la falta de significación en la construcción de aprendizajes y un rendimiento académico que está lejos de ser el esperado por los propios estudiantes.

Como reflejo de lo expuesto, se muestra la tabla siguiente, en la que se exponen los resultados del primer parcial de la materia en el período 2012 – 2015, agrupados según rangos de notas obtenidas.

Tabla 2. Resultados del primer parcial de Cálculo I en cohortes 2012 al 2015.

Año	2012	2013	2014	2015
Nota 40% o superior	70.6%	63.6%	62.57%	60.7%
Nota inferior a 40%	16.7%	21.7%	21.39%	20.3%
Ausentes	12.7%	14.7%	16.04%	19.0%

Si bien un porcentaje de 60.7% de alumnos que obtuvieron una nota no inferior al 40% en 2015 podría no ser considerado como bajo, se observa que en los últimos 4 años esta cantidad fue decreciendo paulatinamente.

Este indicador resulta preocupante si se tiene en cuenta que, además, los temas correspondientes al segundo parcial (cálculo integral, sucesiones y series numéricas y de potencias) de la asignatura ofrecen por lo general, dada su naturaleza, una mayor dificultad para la comprensión por parte de los alumnos, tal como se observa en la tabla siguiente, que ilustra los resultados, entre los años 2012 y 2014, de la segunda evaluación parcial de la materia.

Tabla 3. Resultados del segundo parcial de Cálculo I cohortes 2012 al 2014

Año	2012	2013	2014
Nota 40% o superior	43.6%	32.8%	31.02%
Nota inferior a 40%	19.3%	32.8%	39.04%
Ausentes	37.1%	34.4%	29.95%

Se puede observar un indicador dual respecto de esta segunda instancia evaluativa: por un lado, la sensible disminución de la cantidad de alumnos que obtuvieron una nota igual o superior al 40% (respecto de aquéllos en la misma categoría en el primer parcial) y, por otro, la consolidación de una tendencia *en baja*, año tras año, de la categoría "*nota 40% o superior*".

El análisis de la problemática planteada llevó a que, en el transcurso del cursado del año 2015, inmediatamente posterior a la entrega de los resultados correspondientes al primer parcial, y ante la evidencia de que la situación no parecía revertirse, el equipo docente de la asignatura, implementara medidas que contribuyeran para solucionar este problema.

Así, y con el objeto de propiciar el logro de aprendizajes satisfactorios que signifiquen una mejora del rendimiento en el segundo examen parcial en el año 2015, con el consecuente progreso del cuadro de condiciones alcanzadas al final del cursado, se decidió agregar instancias de evaluación previas a dicho examen a través de una de las actividades disponibles en la plataforma educativa Moodle: los *cuestionarios online*, de cuyos detalles se da cuenta en el punto 4.

Se incorporaron entonces tres cuestionarios previos al segundo parcial.

Con el fin de hacerlo extensivo también al primer parcial, desde el ciclo lectivo siguiente (2016), la asignatura contó con seis (6) instancias evaluativas adicionales: tres previas a cada uno de los dos parciales escritos.

2 Objetivos y justificación del estudio

Con el diseño e implementación de esta actividad, el objetivo general planteado es el de apoyar y complementar la enseñanza de la asignatura Cálculo I, visto como instrumento para:

- Impulsar un refuerzo en la adquisición de hábitos de estudio, promoviendo un acercamiento frecuente del alumno a los contenidos de la asignatura con la antelación suficiente a las instancias de evaluación a fin de mejorar su rendimiento académico.
- Incorporar significativamente los nuevos conocimientos y adquirir y desarrollar las competencias necesarias con vistas a los exámenes presenciales.
- Detectar a tiempo posibles problemas de aprendizaje en determinados temas del currículum de la asignatura.
- Fortalecer el ejercicio de detección y autocorrección de errores.
- Promover una mayor asistencia a las clases de consulta.
- Percibir el impacto que este tipo de actividades tiene en el alumno, referido a las eventuales ventajas o desventajas que le significó para su cursado, el aporte al interés en la materia, el aumento de su motivación por haber alcanzado logros esperados, etc.

Todo lo expuesto, junto con la ubicación primaria de la asignatura en el esquema de correlatividades de los planes de estudio de las distintas carreras y el consecuente acarreo de dificultades para el futuro, dio lugar a la merecida (pre)ocupación en la problemática y contribuyó a la justificación del presente trabajo.

3 Lineamientos teóricos

Las tecnologías de información y comunicación (TIC) se encuentran presentes en la actualidad en la mayoría de los contextos sociales y personales, por lo que, de manera natural, el ámbito educativo no queda al margen de ellas.

En particular, investigaciones como por ejemplo las de Codes Valcarce y Sierra Vázquez [2] y Godino, Recio, Roa, Ruiz y Pareja [3] abordan la incorporación de tecnologías computacionales a la enseñanza de matemática, su integración y sincronización con las prácticas convencionales, la prevención de eventuales conflictos semióticos y destacan que la sola presencia de la tecnología en la educación no supone la solución de problemas sino una herramienta para optimizar los procesos de enseñanza y aprendizaje.

Como un modelo de aprendizaje mediado por tecnologías se cuenta el b-learning (blended learning o aprendizaje mixto), una modalidad que combina actividades, estrategias y diseños de enseñanza presencial con la última tecnología disponible para la incorporación de espacios virtuales de aprendizaje.

En este marco, el presente trabajo remite a la plataforma Moodle, un sitio web gratuito que propone una pluralidad de escenarios educativos virtuales de enseñanza y aprendizaje, pensados para la creación y gestión de cursos online.

Como se puede ver en Molist [4], en la actualidad, la mayoría de las universidades usan alguna variedad de plataforma de aprendizaje de este tipo con sus alumnos.

En el espacio virtual que Moodle ofrece es posible distribuir materiales de aprendizaje, crear y gestionar debates temáticos, realizar anuncios, implementar toma de cuestionarios a los estudiantes, evaluar tareas, integrar recursos de internet, crear glosarios y diccionarios, gestionar el tiempo a través de un calendario global de distintas asignaturas, ofrecer herramientas de comunicación entre los estudiantes (como la mensajería instantánea), permitir la tutoría electrónica en privado o en grupo, calcular estadísticas, gestionar las calificaciones, etc.

Moodle propicia un esquema de aprendizaje construccionista colaborativo, que se inscribe en términos de Jonassen [5], como un modelo continuo de adquisición de conocimientos, que favorece el aprendizaje autónomo y la autoevaluación, estimulando la motivación, el compromiso y responsabilidad, como puede verse en Cruz Núñez y Quiñones Urquijo [6] y Pérez Loredo [7].

También desde la enseñanza la mencionada plataforma propone aportes significativos. Articulada en torno a tres ejes fundamentales: de comunicación, de materiales y de actividades, con sus respectivos recursos, ofrece al docente interesantes alternativas complementarias a la enseñanza presencial.

En particular, esta experiencia se enfoca en los *cuestionarios online* y el correspondiente análisis de las consecuencias devenidas de la implementación de los mismos en el espacio virtual de la asignatura Cálculo I. En este sentido, se analiza la importancia de facilitar al docente la evaluación y calificación de los alumnos con el fin de comprobar el grado de adquisición de conocimientos sobre los distintos temas de la materia que pudiera contribuir al mejoramiento de sus producciones en las instancias de evaluación presencial y, por ende, al de sus rendimientos académicos.

La posibilidad de evaluar *de manera continua* la incorporación de aprendizajes y habilidades operativas por parte de los alumnos se contrapone de cierta manera con el sistema tradicional de evaluación que, centrado en la etapa final del aprendizaje, se enfoca en el resultado obtenido, *aprobar o no*, más que en el proceso de aprender en sí.

Cuando se habla de *evaluación continua* no se quiere significar exámenes todos los días, pero sí con la suficiente frecuencia como para que sean eficaces en el aprendizaje, al menos por lo que se refiere a las modalidades más sencillas de evaluación formativa.

Delgado y Oliver [8] afirman que el docente debe, *durante* el curso, proponer al estudiante actividades breves *con cierta periodicidad*, evaluables, que faciliten la asimilación y el desarrollo de los contenidos de la materia y de las competencias que deben alcanzarse, transformando así la evaluación en *continua o progresiva*, que le permitirá realizar un mayor y mejor seguimiento de la evolución de los aprendizajes con la consecuente valoración integral, para así apostar por un aprendizaje significativo, en términos de Ausubel [9].

Las ventajas relacionadas con la toma de cuestionarios se evidencian, también, desde tres planos de análisis:

- Uno temporal, dado que la frecuencia de las actividades es regulada por el propio docente a su gusto, de acuerdo a las necesidades que observe, tanto propias como en los estudiantes, ratificando el valor de un monitoreo continuo de aprendizajes.
- El insumo de recursos, en virtud de no requerir tiempos docentes de corrección, ni de confección de listas de notas, etc., ya que es el mismo entorno el que brinda, en el tiempo que el docente desee, los resultados obtenidos en la actividad propuesta y, a la vez, permite disponer de registros de valía como listas de

calificaciones, tiempos insumidos por los estudiantes para realizar la actividad, entre otros, todo en planillas de cálculo exportables al ordenador.

- La importancia del feedback: la plataforma permite disponer de esta valiosa herramienta, consistente en una devolución, con distintas alternativas de configuración por parte del docente, que se realiza al estudiante luego del proceso de evaluación para mejorar los resultados en términos del alcance de aprendizajes significativos satisfactorios.

Los detalles de implementación de los cuestionarios en el espacio virtual de Cálculo I se brindan en la sección siguiente.

4 Metodología y desarrollo de la experiencia

4.1 Perfil de los destinatarios

Previo al desarrollo del instrumento, se llevó a cabo un estudio de campo, utilizando como insumo las estadísticas de la materia, referidas a las condiciones alcanzadas por los alumnos de la asignatura en el período 2012 – 2014 y a los resultados obtenidos en el primer parcial del año 2015 (cfr. Tablas 1 y 2).

El panorama observado precipitó la decisión de incorporar, previo al segundo parcial de la asignatura en el año 2015, los denominados *cuestionarios online* disponibles en Moodle.

Para el ciclo lectivo 2016, como se mencionó antes, se incorporaron tres cuestionarios previos a cada uno de los dos parciales escritos, extendiendo así la experiencia a la totalidad de la materia.

Dado que los aspectos de implementación (diseño, configuración y ejecución) para el mencionado período fueron similares a los correspondientes al 2015, se brindarán mayormente los detalles metodológicos sólo para la primera puesta en ejecución de la experiencia.

4.2 Etapas de diseño y elaboración

Los cuestionarios previos a cada parcial fueron diseñados, en contenido y características, por los miembros del equipo docente de la materia y contemplaron los temas que constituían el contenido de la instancia de evaluación correspondiente.

4.2.1 Selección de los temas

La selección de los temas en cada cuestionario estuvo en consonancia con los tiempos dispuestos para el dictado de la asignatura durante el cursado.

De esta manera, en el año 2015, los temas incluidos en cada cuestionario previo al segundo parcial se dispusieron según el siguiente esquema: cuestionario 1, los temas del cálculo integral, cuestionario 2, sucesiones y series numéricas y cuestionario 3, series de potencias y consignas integradoras.

Para el año 2016, la distribución de los temas de las evaluaciones online previas al primer parcial, fue: el cuestionario 1 abarcó los temas correspondientes al cálculo diferencial, el cuestionario 2, aplicaciones con problemas de optimización y el cuestionario 3, ejercicios integradores.

La distribución de temas en las evaluaciones online previas al segundo parcial fue análoga a la del 2015.

4.2.2 Diseño y configuración de los cuestionarios

El cuestionario de Moodle dispone, en cuanto a su estructura, de dos componentes principales: el *cuerpo del cuestionario*, con todas sus opciones de configuración, y el *banco de preguntas*, donde se almacenan las consignas que los estudiantes deben responder.

La elección de los temas a incluir, la asignación de puntajes a las consignas, las cuestiones de temporalidad, y otras características, se realizaron de acuerdo a, por un lado, las necesidades detectadas para evaluar desde la docencia y, por otro, las posibilidades que Moodle ofrece.

Las preguntas se confeccionaron y plantearon de forma tal que las respuestas no se redujeran a meros cómputos mecánicos o cálculos simples (y, por ende, ejecutables con calculadoras o algún sistema algebraico por computadora), sino que implicaran la puesta en juego de aprendizajes, destrezas y estrategias de pensamiento tratadas en el cursado.

4.3 Implementación

4.3.1 Año 2015. Cuestionarios previos al segundo parcial escrito

Los días en que se habilitaron los cuestionarios para que los alumnos los resuelvan fueron: viernes 9 de octubre (cuestionario 1), viernes 30 de octubre (cuestionario 2) y martes 3 de noviembre (cuestionario 3), todos de 2015.

Se dispuso que estuvieran disponibles a partir de las 10 horas de la mañana hasta las 24 horas del mismo día (luego de esa hora, el sistema no permitía más envíos), otorgando de este modo un holgado lapso de tiempo para resolverlo y enviarlo.

Cabe señalar que, en los días mencionados, los alumnos no tenían clases presenciales de cursado.

Inmediatamente concluido el envío, el sistema brinda al estudiante, en caso de así haberlo configurado, la nota obtenida (por cada consigna y la total), las respuestas correctas y las eventuales devoluciones que el docente desee.

Sobre un total de 170 alumnos matriculados en el curso, cada cuestionario fue respondido, respectivamente, por 152, 149 y 108 alumnos.

Los cuestionarios combinaron, desde el punto de vista de la evaluación, un carácter sumativo (los estudiantes debían obtener un mínimo de 120 puntos entre los tres –sobre un total de 300- como requisito para poder rendir el parcial) con otro de carácter más formativo-cualitativo, desde el cual la mirada se puso en el tipo de estrategia elegida por los alumnos para responder las consignas, lo cual, a su vez, permitió detectar tempranamente los posibles focos de problema.

Aquel alumno que en los dos primeros cuestionarios ya contara con el mínimo de 120 puntos exigidos, podía elegir no realizar el tercer cuestionario. Pese a ello, cabe consignar que los estudiantes mostraron muy buena disposición y, aun en los casos en los que ya habían alcanzado ese puntaje mínimo con los dos primeros test, eligieron hacer, igualmente, el tercero como medio para ejercitarse y autoevaluarse.

Para cada una de las consignas, se optó por la modalidad de *preguntas de opción múltiple*. Así, cada cuestionario contó con un total de cinco preguntas, cada una de las cuales contemplaba la posibilidad de más de una alternativa de respuesta correcta al problema planteado.

En la figura siguiente se visualiza una pregunta, a manera de muestra, con sus opciones de respuestas posibles, donde al menos una de las respuestas es correcta.

Tildar la(s) alternativa(s) correcta(s)

Seleccione una o más de una:

☐ a. Si $\int_a^b f(x)\ dx < \int_a^b g(x)\ dx$ entonces $f(x)<g(x)$ para todo x en [a, b]

☐ b. El valor $c=e^{\frac{1}{e-1}}$ es el punto al que alude el teorema del valor medio del cálculo integral para $f(x)=ln(x^2)$ en el intervalo $[1,\ e]$

☐ c. Puede darse el caso de que una función sea integrable en un intervalo [a, b] aunque sea discontinua en él

☐ d. No es posible calcular la longitud del arco de $f(x)=x^{2/3}$ en el [-1, 3] por no ser f continuamente derivable en el intervalo

☐ e. Aplicando el 1º Teorema Fundamenta del Cálculo se tiene que:

$$\int_0^{\pi} tanx\ dx\ =\ ln\ |cosx|\ |_0^{\pi}\ =\ ln\ |cos\pi|\ -\ ln\ |cos0|\ =\ 1-1\ =\ 0$$

Fig. 1. Ejemplo de pregunta de un cuestionario.

Para evitar que el alumno tildara todas las opciones como correctas, la calificación final de cada consigna se computó asignando puntaje negativo a las respuestas incorrectas elegidas, y positivo en caso de que la respuesta haya sido correcta.

Una vez cerrado el cuestionario, la plataforma ofrece un *calificador* que permite un tratamiento dinámico de la planilla de resultados obtenidos por los estudiantes, con la posibilidad de exportarlo a una planilla de cálculo.

4.3.2 Año 2016. Cuestionarios previos a cada parcial escrito en la asignatura completa

Los cuestionarios previos a cada instancia parcial se distribuyeron según el siguiente cronograma: previos al primer parcial: sábados 3, 17 y 23 de septiembre. Los previos al parcial 2, sábados 15 de octubre, 5 y 12 de noviembre. En cada uno de los días mencionados, los cuestionarios estuvieron, como el año anterior, disponibles el mismo rango horario, bajo las mismas características de tipo de preguntas, envío de respuestas, enfoque pedagógico, devoluciones y requerimientos de puntaje a alcanzar para poder acceder a rendir el parcial correspondiente. De un total de 182 matriculados en el curso, los cuestionarios fueron respondidos, en promedio, por entre un 90% a 95% de los estudiantes.

La novedad para el año 2016 radicó en que, en virtud de haber incrementado el número de ejercicios disponibles en el *banco de preguntas* de la plataforma, se pudo optar por la modalidad de *elección de preguntas al azar* en cada cuestionario, de modo que los alumnos pudieron disponer de cuestionarios distintos unos de otros.

4.4 Funcionamiento y validación

La aplicación superó las instancias de evaluación funcional y de validación por expertos en educación y docentes de matemática. Se menciona además que evidencia un funcionamiento correcto en computadoras de diferentes características. En cuanto a los tiempos de apertura y cierre de cuestionarios, procesamiento y post procesamiento del sistema, la plataforma Moodle respondió satisfactoriamente a las expectativas del equipo docente en cuanto a resultados y formas de funcionamiento.

Además de ello, la opinión de especialistas y docentes fue muy positiva en cuanto a las posibilidades, en general, de la plataforma Moodle como repositorio de material didáctico y entorno comunicacional y, en especial, a la implementación de los cuestionarios online como medio favorable para una evaluación continua en la asignatura. Cabe señalar que la experiencia fue expuesta en la *Jornada: "Plataformas educativas: Usos y potencialidades para la educación presencial"*, evento organizado por la FICH (U.N.L.) en octubre de 2015, mostrando los asistentes (docentes y alumnos de la facultad) un gran interés por incorporar este tipo de actividades en sus respectivas asignaturas.

5 Análisis de los datos

5.1 Experiencia 2015. Incorporación de los cuestionarios previos al segundo parcial

Posteriormente a la implementación de los tres cuestionarios tuvo lugar la toma del segundo parcial. El gráfico siguiente (Fig. 2) muestra el procesamiento de los datos, estableciendo la pertinente comparación con respecto a los resultados de segundos parciales de años anteriores (2012 a 2014), explicitados en la Tabla 3, en los cuales no se disponía de cuestionarios previos a dicha instancia.

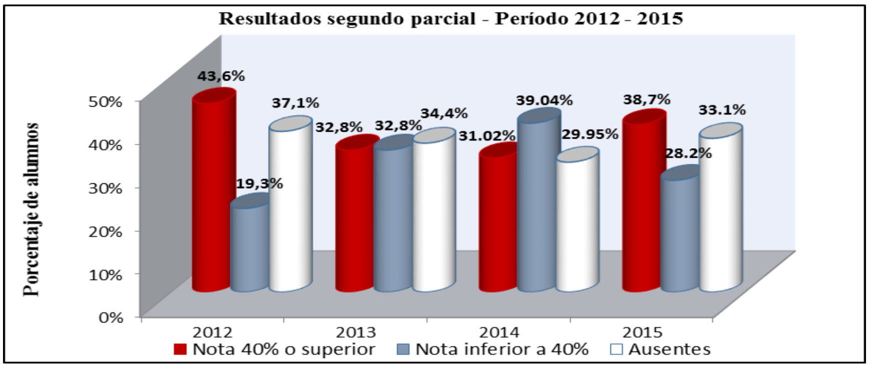


Fig. 2. Resultados del segundo parcial. Años 2012 – 2015

El tratamiento de los datos permitió conformar una primera noción general del estado de situación. Surge a partir del mismo que la implementación de cuestionarios online como *controles pre parciales* podría resultar un indicador de la incidencia positiva en el rendimiento académico de los estudiantes en la asignatura, permitiéndoles alcanzar el pretendido mínimo del 40% (con el cual acceden a la regularidad y evitan eventuales retrasos de cursado) en un número mayor de casos y revirtiendo, al menos, la tendencia *en baja* de los tres últimos años: 2012, 2013 y 2014.

En particular, tomando en cuenta los años 2014 y 2015, el siguiente gráfico (Fig. 3) muestra los polígonos de frecuencias correspondientes a los resultados de los segundos parciales de ese período.

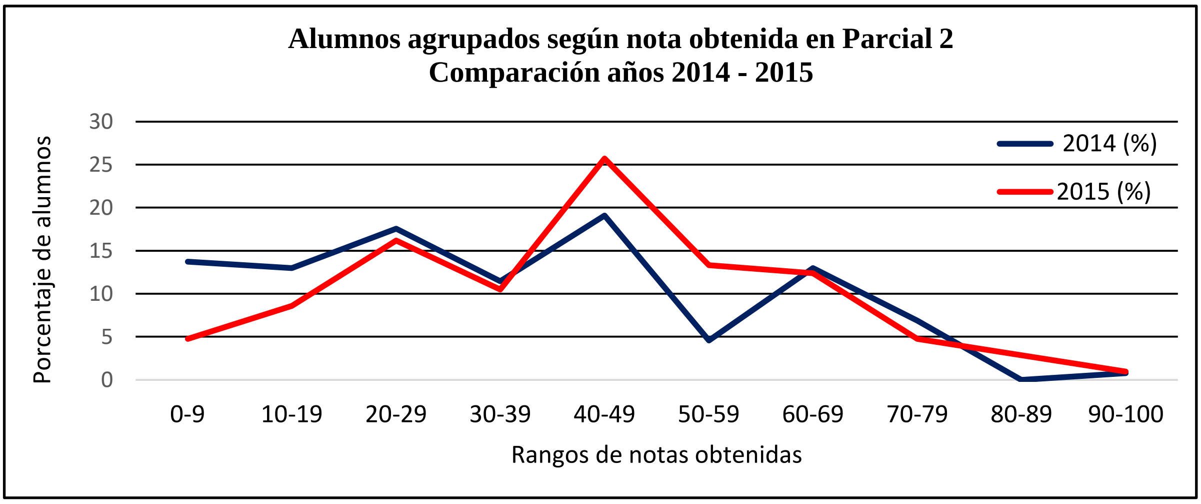


Fig. 3. Porcentaje de alumnos agrupados por nota obtenida en el segundo parcial.

A partir del gráfico, se pueden observar dos indicadores de importancia:

- El decrecimiento en el porcentaje de alumnos que se encuentran en el rango de notas de 0 a 30, esto es, una disminución de la masa de estudiantes con puntajes alejados del mínimo del 40% requerido para regularizar la asignatura.
- Un aumento del porcentaje de alumnos que obtuvo entre 40 a 70 puntos, que permite la regularización de la materia, destrabando las correlatividades a futuro y evitando retrasos en el cursado.

Por otra parte, se observa que el rango de notas entre 70 a 100, que determinan la promoción, no presenta cambios significativos.

5.2 Experiencia 2016. Incorporación de los cuestionarios previos a ambos parciales

Finalizado el cursado se procesaron los datos correspondientes a las condiciones finales alcanzadas por los alumnos. La Tabla 4 muestra la comparación de las mismas con cohortes de años anteriores.

Tabla 4. Condiciones finales de cursado de Cálculo I cohortes 2012 al 2016.

Año	Sin cuestionarios			Sólo cuestionarios previos al Parcial2	Con cuestionarios en materia completa
	2012	2013	2014	2015	2016
Regulares	54.3%	47.0%	43.9%	48.47%	48.9%
Libres	33.5%	40.4%	41.7%	36.81%	36.26%
Ausentes	12.2%	12.6%	14.4%	14.72%	14.84%

Los índices expuestos en la tabla, podrían resultar un indicador de cómo, a partir del año 2015, se comenzó a revertir la *tendencia en baja* del porcentaje de alumnos regulares, situación que parece consolidarse en el año 2016 con casi un 49% de estudiantes en esta categoría, que *destraban* así su cursado y logran avanzar en la carrera: Esta situación asoma como un indicio del buen impacto de la incorporación de los test de control a lo largo del cursado completo de la asignatura.

Se expone a continuación (Fig. 4), y con el fin de desagregar brevemente los datos expuestos en la Tabla 4, una síntesis de los conteos de las notas obtenidas en los dos parciales correspondientes al ciclo 2016 (cuestionarios en materia completa), contrastado con similar característica de la cohorte del año 2014 (sin cuestionarios).

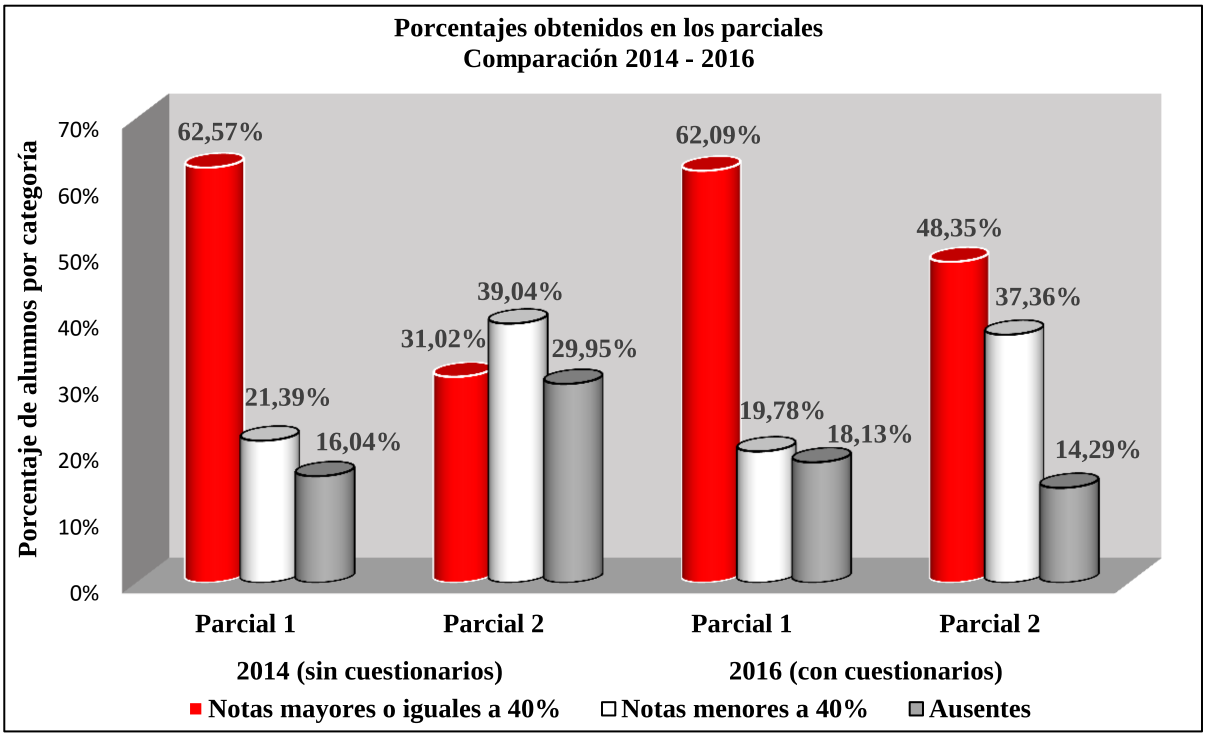


Fig. 4. Porcentajes de alumnos agrupados por nota obtenida en los parciales. Comparación cohortes 2014 y 2016.

Los datos exhibidos en el gráfico parecen confirmar la favorable incidencia de la incorporación de los controles online previos a las instancias parciales de evaluación. En tal sentido, valen notar algunas observaciones:

- Si bien en los conteos referidos al primer parcial no surgen mayores diferencias entre los alumnos de las cohortes 2014 y 2016 con nota mayor o igual al 40%, de la observación en paralelo con la Tabla 2, se puede, sin embargo, apreciar la reversión de la *baja progresiva* de esta categoría de puntajes en el período 2012 – 2015.
- En el parcial 2, en cambio, los datos correspondientes al año 2016 permiten avizorar indicadores de una positiva influencia de los test pre parciales, con un aumento aproximado del 18% de la categoría *notas mayores o iguales a 40%* respecto del 2014

6 Conclusiones y reflexiones

Los resultados obtenidos proporcionaron, en términos de los objetivos planteados, indicadores acerca de la conveniencia de la implementación de los cuestionarios online, ya que:

- Se pudo implementar un sistema de evaluación más continuo que favoreció un mayor seguimiento de la materia por parte de los estudiantes en los temas incluidos en los cuestionarios, reflejándose en indicadores de mejora del rendimiento en el segundo parcial, año 2015, y en la asignatura completa, año 2016, y, por consecuencia, en la condición alcanzada al finalizar el cursado de la misma.

- Contribuyó a lograr aprendizajes significativos satisfactorios, y a generar y consolidar en los estudiantes competencias cognitivas matemáticas en ambientes virtuales, logrando incorporar, afianzar y poner en juego conceptos de la disciplina, adaptándolos a una modalidad nueva de aprendizaje que propicia el estudio autónomo.
- Estimuló la autocorrección de errores: cada alumno pudo, en virtud del diseño elegido para los cuestionarios, comprobar por sí mismo los errores cometidos y cuál era la respuesta correcta.
- Alentó la asistencia a las clases de consultas, y enriqueció las mismas con debates referidos a las consignas de cada cuestionario, haciendo posible detectar tempranamente problemas de comprensión subyacentes y tender líneas didáctico-pedagógicas para solucionarlos.
- A partir de la obtención de la regularidad en la asignatura, posibilitó a muchos alumnos el avance en el cursado de las materias correlativas de los distintos currículos de las carreras lo cual, a su vez, contribuyó a disminuir los niveles de rezago y abandono de estudios.

Cabe señalar que la implementación de la propuesta fue muy bien recibida por los alumnos de la asignatura: en las encuestas realizadas por Secretaría Académica de la FICH al finalizar el período de cursado, fue común encontrarse con expresiones del tipo “pese a significar, en ocasiones, una carga horaria adicional para el estudio, nos ayudó a llevar al día los contenidos de la asignatura y mejorar el rendimiento en el segundo parcial”, o también “los cuestionarios me significaron un desafío a seguir la materia al día, y ayudaron a que la pueda regularizar”.

La experiencia desarrollada alienta a sostener en el tiempo esta metodología alternativa y complementaria a las prácticas tradicionales de enseñanza y evaluación del Cálculo de una variable, como estímulo para la adquisición de hábitos de estudio, buenos aprendizajes y motivación en los alumnos.

Referencias

1. Pierella, M.: El ingreso a la Universidad como experiencia subjetiva y cultural en estudiantes de la Universidad Nacional de Rosario. *Revista Argentina de Educación Superior,* Año 3, No. 3, pp. 26-48 (2011).

2 Codes Valcarce, M.; Raboso Mateos, M. y Sierra Vázquez, M.: Innovación en la recogida de datos para una investigación de carácter cualitativo. Un ejemplo con alumnos universitarios en un entorno computacional. *Actas del XI Simposio de la sociedad Española de Investigación en Educación Matemática*, pp. 261-271 (2007).

3. Godino, J. D.; Recio, A.; Roa, R.; Ruiz, F. y Pareja L.: Criterios de diseño y evaluación de situaciones didácticas basadas en el uso de medios informáticos para el estudio de las matemáticas. *Revista Números*, No. 64 (2006).

6. Cruz Núñez, F. y Urquijo Quiñones, A.: Importancia de la evaluación y autoevaluación en el rendimiento académico. *Zona Próxima. Revista del Instituto de Estudios en Educación Universidad del Norte,* No. 16, pp. 96-104 (2012).

8. Delgado, A. y Oliver, R.: La evaluación continua en un nuevo escenario docente. *Revista de Universidad y Sociedad del Conocimiento*, Vol. 3, No. 1 (2006).

5. Jonassen, D. H.: Using cognitive tools to represent problems. *Journal of Research on Technology in Education*, Vol. 35, No. 3, pp. 362-381 (2003).

4. Molist, M.: Institutos y universidades apuestan por la plataforma libre de e-learning Moodle. *Diario El País*, 13 de abril de 2006.

7. Pérez Loredo, L.: La evaluación dentro del proceso de enseñanza - aprendizaje. *http://online.aliat.edu.mx/adistancia/eval_prog/s4/lecturas/t3s4_fases%20_eval_aprendizaje.pdf.* Accedido el 23 de febrero de 2016.

9. Ausubel, D.: *Adquisición y retención del conocimiento. Una perspectiva cognitiva.* Editorial Paidós (2002).

Volver al Índice

Propuesta de Método Alternativo Matricial para la Resolución de Sistemas de 2x3 Aplicable a otras Dimensiones

Pedro Oscar Semeniuk
Departamento Matemática, Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de Misiones (UnaM).
Juan Manuel de Rosas 325, Oberá (3360), Misiones.
semeniuk@fio.unam.edu.ar

Resumen. Existen diversos métodos para resolver sistemas de ecuaciones lineales que, básicamente, reducen el sistema a otro equivalente, del cual la solución se deduce con facilidad. El presente método, por su simplicidad, es aplicable principalmente a sistemas de 2x3, pero también a otras dimensiones. Surge en el contexto de Subespacios Vectoriales, donde se presentan estos sistemas en numerosas ocasiones y es necesario resolverlos rápidamente. Al llegar a este tema de la asignatura, el alumno maneja temas de Álgebra y Geometría Analítica como ser, ecuaciones de rectas y planos, matrices, y sistemas de ecuaciones, por lo que enseñar y aplicar este nuevo método, resulta muy sencillo.

Palabras Clave: Sistemas de ecuaciones lineales, Matriz elemental, Matriz inversa.

1 Introducción

En muchas ocasiones se presentan sistemas de dos ecuaciones con tres incógnitas donde, geométricamente, representan dos planos. A su vez, estos pueden estar en diversas posiciones relativas, produciendo intersecciones o no.

Al resolver estos sistemas, se busca reducirlos a un sistema equivalente de tal manera que sea fácil de encontrar la o las intersecciones a partir de un trabajo algebraico sencillo.

Este método es sencillo debido a que es muy fácil determinar la inversa de una matriz cuadrada de 2 filas por 2 columnas, aplicando el método de la adjunta.

En el desarrollo se pretende demostrar que se pueden aplicar los mismos conceptos a sistemas de diferentes dimensiones.

En este trabajo solo se desarrollan algunos ejemplos, con los cuales se pretende mostrar la bondad y la simplicidad del mismo.

2 Metodología

Para comenzar se considera primeramente el caso de un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas:

$$\begin{cases} ax + by = c \\ dx + ey = f \end{cases} \tag{1}$$

Que puede ser expresado en forma matricial:

$$\left[\begin{array}{cc|c} a & b & c \\ d & e & f \end{array}\right] \tag{2}$$

Ahora consideramos solamente la matriz principal:

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ d & e \end{bmatrix} \tag{3}$$

Teniendo en cuenta que si A es una matriz de $2x2$ y A^{-1} su matriz inversa, el producto es la matriz identidad de la misma dimensión:

$$A^{-1}.A = I_2 \tag{4}$$

Donde

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \textbf{(5)}$$

es la matriz identidad de $2x2$.

Si se pre multiplica la matriz ampliada del sistema (2) por la inversa de la matriz A, que es muy fácil de obtener (método de la adjunta):

$$A^{-1}\left[\begin{array}{cc|c} a & b & c \\ d & e & f \end{array}\right] = \frac{1}{|A|}\begin{bmatrix} e & -b \\ -d & a \end{bmatrix}\left[\begin{array}{cc|c} a & b & c \\ d & e & f \end{array}\right] \quad \textbf{(6)}$$

Resulta la matriz ampliada reducida:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & c' \\ 0 & 1 & f' \end{array}\right] \quad \textbf{(7)}$$

Reescribiendo el sistema reducido:

$$\begin{cases} x = c' \\ y = f' \end{cases} \quad \textbf{(8)}$$

O como conjunto solución:

$$S = \{(c', f')\} \quad \textbf{(9)}$$

Utilizando los mismos conceptos ahora para un sistema de 2 filas por 3 columnas, que puede ser expresado en forma matricial como se muestra a continuación:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2 \end{cases} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \end{array}\right) \quad \textbf{(10)}$$

El objetivo es reducir el sistema anterior a un sistema equivalente tal, que resulte sencillo analizar y obtener la solución:

$$\begin{cases} a'_{11}x + y + 0z = b'_1 \\ a'_{21}x + 0y + z = b'_2 \end{cases} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} a'_{11} & 1 & 0 & b'_1 \\ a'_{21} & 0 & 1 & b'_2 \end{array}\right) \quad \textbf{(11)}$$

Considerando, por ejemplo la segunda y tercera columna de la matriz ampliada del sistema, la matriz que se selecciona será:

$$A = \begin{bmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} \quad \textbf{(12)}$$

Ésta es invertible, solo si se cumple que $a_{12} \cdot a_{23} - a_{22} \cdot a_{13} \neq 0$. Y si se la pre multiplica por su inversa (A^{-1}), se obtiene la matriz identidad (5).

Una forma fácil de obtener la inversa es (método de la adjunta):

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{bmatrix} a_{23} & -a_{13} \\ -a_{22} & a_{12} \end{bmatrix} \quad \textbf{(13)}$$

Realizando la operación:

$$\frac{1}{|A|}\begin{bmatrix} a_{23} & -a_{13} \\ -a_{22} & a_{12} \end{bmatrix} \cdot \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} a'_{11} & 1 & 0 & b'_1 \\ a'_{21} & 0 & 1 & b'_2 \end{array}\right) \quad \textbf{(14)}$$

Podemos observar que en un solo paso se obtiene la reducción de la matriz ampliada y se reescribe el sistema:

$$\begin{cases} a'_{11}x + y = b'_1 \\ a'_{21}x + z = b'_2 \end{cases} \quad \textbf{(15)}$$

En este caso, tomando a x como variable libre se obtiene muy fácilmente la solución:

$$\begin{cases} x = \mu \\ y = b'_1 - a'_{11}\mu \\ z = b'_2 - a'_{21}\mu \end{cases} \quad \textbf{(16)}$$

En el caso de trabajar, por ejemplo con un sistema de 3 ecuaciones con 3 incógnitas:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3 \end{cases} \tag{17}$$

El procedimiento es el mismo, pasando primero a la forma matricial y eligiendo primero una matriz interna de 2x2 a ser reducida a la matriz identidad.

$$\left[\begin{matrix} a_{11} & \boldsymbol{a_{12}} & \boldsymbol{a_{13}} \\ a_{21} & \boldsymbol{a_{22}} & \boldsymbol{a_{23}} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix}\middle|\begin{matrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{matrix}\right] \tag{18}$$

Pre multiplicando esta matriz por la inversa de la matriz interna de 2x2 elegida:

$$\frac{1}{a_{12}\cdot a_{23} - a_{22}\cdot a_{13}} \cdot \begin{bmatrix} a_{23} & -a_{13} \\ -a_{22} & a_{12} \end{bmatrix} \cdot \left[\begin{matrix} a_{11} & \boldsymbol{a_{12}} & \boldsymbol{a_{13}} \\ a_{21} & \boldsymbol{a_{22}} & \boldsymbol{a_{23}} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix}\middle|\begin{matrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{matrix}\right] \tag{19}$$

Aunque en este caso no se cumple con el producto de matrices, el mismo solo se realiza sobre las dos primeras filas. La tercera no se modifica, quedando la matriz reducida.

$$\left[\begin{matrix} a'_{11} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ a'_{21} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix}\middle|\begin{matrix} b'_1 \\ b'_2 \\ b_3 \end{matrix}\right] \tag{20}$$

Reescribiendo el sistema ya es muy fácil trabajarlo algebraicamente hasta llegar al conjunto solución:

$$\begin{cases} a'_{11}x + y = b'_1 \\ a'_{21} + z = b'_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3 \end{cases} \tag{21}$$

En la primera y segunda ecuación se despejan las variables y y z, respectivamente, reemplazándolas en la tercera ecuación, que ahora queda solamente con la variable x.

Es posible aplicar los mismos conceptos en sistemas de otras dimensiones, en los cuales se busca una reducción rápida, usando estrategias adecuadas.

3 Ejemplos

Para clarificar los casos mencionados, se dan a continuación, ejemplos de sistemas lineales con su resolución:

3.1 Ejemplo 1:

Sea el sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, donde cada ecuación representa una recta:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ -x + y = 5 \end{cases}$$

Que expresado en forma matriz ampliada será:

$$\left[\begin{matrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{matrix}\middle|\begin{matrix} 1 \\ 5 \end{matrix}\right]$$

La matriz elegida en este caso, es la matriz de coeficientes:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Cuya inversa será:

$$A^{-1} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Realizando el producto matricial, se obtiene el sistema reducido equivalente en un solo paso:

$$\frac{1}{5}\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} . \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 5 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -\frac{14}{5} \\ 0 & 1 & \frac{11}{5} \end{array}\right]$$

Reescribiendo el sistema:

$$\begin{cases} x = -\frac{14}{5} \\ y = \frac{11}{5} \end{cases}$$

Que en este caso, es un punto, que a su vez, puede ser escrito como conjunto solución:

$$S = \left\{\left(-\frac{14}{5}, \frac{11}{5}\right)\right\}$$

3.2 Ejemplo 2:

Sea el sistema de dos ecuaciones con tres incógnitas, donde cada ecuación representa un plano:

$$\begin{cases} 2x + 3y + z = 1 \\ x - 2y + 2z = 5 \end{cases}$$

En la siguiente figura se pude visualizar la representación del sistema como dos planos que se intersecan en una recta.

Lo que se espera en el conjunto solución son los infinitos puntos que componen la recta.

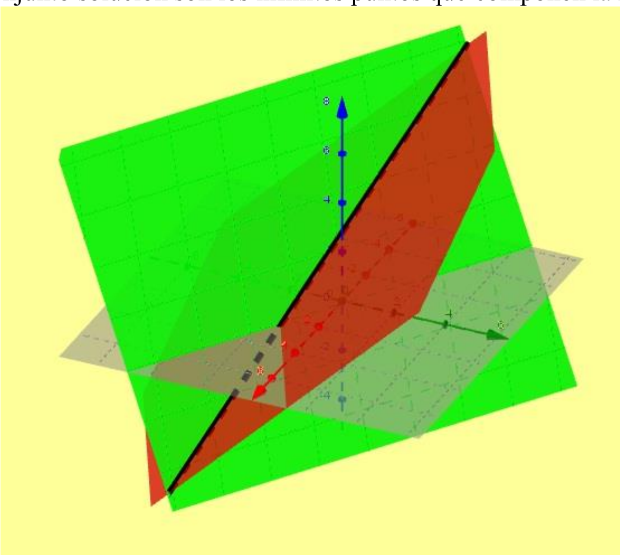


Fig. 1. Gráfica del sistema representado en el espacio.

Que expresado en forma matricial será:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & \mathbf{3} & \mathbf{1} & 1 \\ 1 & \mathbf{-2} & \mathbf{2} & 5 \end{array}\right)$$

La matriz elegida en este caso (de las tres posibles) es la que corresponde a la segunda y tercera columna:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$$

Cuya inversa será:

$$A^{-1} = \frac{1}{8}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Realizando el producto matricial, se obtiene el sistema reducido equivalente en un solo paso:

$$\frac{1}{8}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 & 5 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} \frac{3}{8} & 1 & 0 & -\frac{3}{8} \\ \frac{7}{8} & 0 & 1 & \frac{17}{8} \end{array}\right)$$

Reescribiendo el sistema:

$$\begin{cases} \dfrac{3}{8}x + y = -\dfrac{3}{8} \\ \dfrac{7}{8}x + z = \dfrac{17}{8} \end{cases}$$

En la próxima figura se representa el sistema reducido equivalente en el cual los planos ahora son paralelos a ejes coordenados, pero obviamente formando con la intersección, la recta.

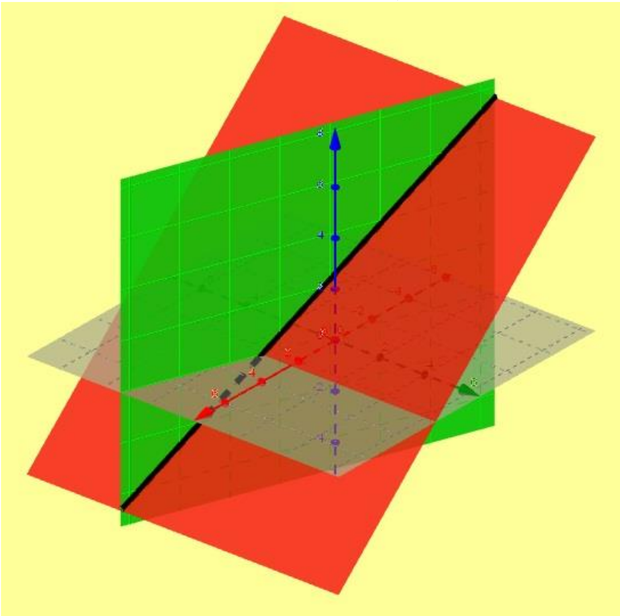


Fig. 2. Gráfica del sistema reducido.

$$\begin{cases} x = \mu \\ y = -\frac{3}{8} - \frac{3}{8}\mu \\ z = \frac{17}{8} - \frac{7}{8}\mu \end{cases}$$

Que en este caso, es la ecuación de una recta, que a su vez, puede ser escrito como conjunto solución:

$$S = \left\{\left(x, -\frac{3}{8} - \frac{3}{8}x, \frac{17}{8} - \frac{7}{8}x\right)\right\}$$

3.3 Ejemplo 3:

Aplicando el método, pero en un sistema cuadrado de tres ecuaciones con tres incógnitas.

Sea ahora el sistema:

$$\begin{cases} 2x + 3y + z = 1 \\ x - 2y + 2z = 5 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$$

Que expresado en forma matricial será:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & | & 1 \\ 1 & -2 & 2 & | & 5 \\ 1 & 1 & 1 & | & 0 \end{pmatrix}$$

Donde podemos elegir la matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$$

Cuya inversa es:

$$A^{-1} = \frac{1}{8}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Y ésta, pre multiplicada a la matriz ampliada:

$$\frac{1}{8}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & | & 1 \\ 1 & -2 & 2 & | & 5 \\ 1 & 1 & 1 & | & 0 \end{pmatrix}$$

Como en esta ocasión no es posible el producto matricial, solo modificamos las dos primeras filas, quedando la matriz reducida:

$$\begin{pmatrix} \frac{3}{8} & 1 & 0 & | & -\frac{3}{8} \\ \frac{7}{8} & 0 & 1 & | & \frac{17}{8} \\ 1 & 1 & 1 & | & 0 \end{pmatrix}$$

De la cual, a su vez, se reescribe el sistema reducido:

$$\begin{cases} \frac{3}{8}x + y = -\frac{3}{8} \\ \frac{7}{8}x + z = \frac{17}{8} \\ x + y + z = 0 \end{cases} \to \begin{cases} y = -\frac{3}{8} - \frac{3}{8}x \\ z = \frac{17}{8} - \frac{7}{8}x \\ x + \left(-\frac{3}{8} - \frac{3}{8}x\right) + \left(\frac{17}{8} - \frac{7}{8}x\right) = 0 \to x - \frac{3}{8}x - \frac{7}{8}x = \frac{3}{8} - \frac{17}{8} \end{cases} \to$$

$$\begin{cases} y = -\frac{3}{8} - \frac{3}{8} \cdot 7 \\ z = \frac{17}{8} - \frac{7}{8} \cdot 7 \\ x = 7 \end{cases}$$

Resultando como conjunto solución, en este caso, un punto en R^3. $S = \{(7, -3, -4)\}$

4 Conclusiones y trabajos futuros

4.1 Resultados y discusión

Este método ya ha sido probado en el aula, logrando por su simplicidad, excelentes resultados en el proceso de enseñanza-aprendizaje.

Permite resolver rápidamente sistemas comunes, obteniendo el conjunto solución con un simple trabajo algebraico.

4.2 Conclusiones

La mejor forma de probar la funcionalidad de un método, es en el aula, y en este caso se puede verificar una muy buena aceptación del mismo por parte de los alumnos, que al poder optar por otros, la mayoría lo hacía por éste, debido a su simplicidad.

Referencias

1. Grossman, S. I.: México: Mc Graw Hill. *Álgebra Lineal.* (1997)
2. Zill, D.: México: Grupo Editorial Iberoamérica. Cálculo con Geometría Analítica. (1985)
3. Poole, D.: México: Cengage Learning. Álgebra Lineal. Una Introducción Moderna. (2011)

Volver al Índice

Enseñanza de la Probabilidad Condicional Mediada por Estrategias de Simulación para Revertir Posibles Sesgos en la Comprensión del Concepto

Andrea S. Arce[1], Andrea V. Alvarez[1], Maria C. Kanobel[1], Debora M. Chan[1, 2]
[1] Departamento de Matemática, Facultad Regional Avellaneda, Universidad Tecnológica Nacional
Av. Ramón Franco 5050, Villa Domínico, Avellaneda, Buenos Aires, Argentina
andreasarce@yahoo.com.ar, aalvarez@fra.utn.edu.ar, mckanobel@gmail.com
[2] Departamento de Matemática, Facultad Regional Buenos Aires, Universidad Tecnológica Nacional
Av. Medrano 927-977, CABA, Argentina
debiechan@gmail.com

Resumen. La Estadística constituye un saber necesario para cualquier ciudadano que necesite adquirir capacidad de lectura e interpretación de tablas y gráficos de los medios de comunicación en general. Particularmente la estadística está incluida en todas las currículas de carreras de ingeniería. La demanda del mundo profesional por este conocimiento ha crecido exponencialmente en las últimas décadas. Esto ha generado numerosas investigaciones en torno a su enseñanza. Muchos autores han señalado dificultades de los alumnos para apropiarse de conceptos como probabilidad condicional y nivel de significación. Se propone una combinación de estrategias metodológicas, incluyendo simulaciones en diferentes entornos informáticos, para contribuir a la superación de estos problemas y favorecer la apropiación de estos conceptos posibilitando su transferencia a nociones más complejas como independencia estocástica, teoremas de Bayes y de Probabilidad Total y el ensayo de hipótesis. La propuesta se plantea dentro del modelo teórico TPACK (Conocimiento Tecnológico y Pedagógico del Contenido).

Palabras Clave: Probabilidad condicional, Simulación, Recursos informáticos, TPACK.

1 Introducción

Palau y Cerdán (2010) [1] han estado interesados en el aprendizaje de la probabilidad condicional, enfocando su interés sobre la resolución de problemas específicamente los relativos a problemas ternarios focalizando en las dificultades y errores de los alumnos. Sostienen en este trabajo, que los alumnos ubican los problemas dependiendo de la dificultad que presenten en el mundo de la aritmética, cuando la complejidad aumenta, o bien en el universo de la probabilidad.

Los estudios de Kahneman y cols. (1982) [2] referidos al razonamiento correlacional, la inferencia, la regla de Bayes y la probabilidad condicional han contribuido a caracterizar los sesgos y motivado el cambio de paradigma en los estudios psicológicos. Entre los sesgos descriptos podemos mencionar la comprensión intuitiva, condicionamiento y causación, intercambio de sucesos, diacronismo y sincronismo.

Surge como concepto fundamental de estas investigaciones el de heurística o estrategia inconsciente para reducir la complejidad de un problema, suprimiendo parte de la información, es decir proyectando el escenario de resolución sobre un espacio de dimensión menor. Es importante destacar que, si bien estas estrategias facilitan en muchos casos la resolución de problemas, en otros generan sesgos en su interpretación y solución.

Falk (1986) [3] detalla cuatro razones por las que la probabilidad condicional presenta dificultades para los estudiantes:

- Dificultades en la determinación del evento condicionante.
- Confusión entre condicionante y condicionado (falacia de la condición transpuesta).
- Dificultades en la temporalidad de los eventos condicionantes y condicionados.
- Confusiones relativas al enunciado.

Diferentes estrategias han sido utilizadas para abordar la resolución de este tipo de problemas, como los diagramas de árbol, de tablas de Carrol y diagramas de Venn entre otras.

Dupuis (1996) [4] utiliza los términos de registros semióticos de representación y sugiere que la combinación de registros (lenguaje simbólico, natural, árboles y tablas) conjuntamente con sus reglas y marco teórico puede contribuir a facilitar la resolución. Resalta la necesidad de no subestimar la etapa de enseñanza de las herramientas y su funcionamiento. El término ‘registro semiótico’ fue acuñado por Duval (2006) [5] quien hace hincapié en la importancia de estas representaciones, dada su capacidad intrínseca para ser transformadas en otras.

Cantero (2013) [6] realiza una investigación acerca de la forma de presentación del concepto de probabilidad condicional en diferentes fuentes bibliográficas de consulta habitual de los estudiantes. El autor sostiene que el uso de la notación de probabilidad condicional podría resultar equívoco y conducir a la aparición de ciertos sesgos. A pesar de la diversidad de propuestas metodológicas para su representación resulta difícil definir el marco ideal para representar este contenido.

El concepto de probabilidad condicional se aplica en el cálculo de probabilidades inversas, por eso constituye un saber previo al concepto central de independencia y al desarrollo de los Teoremas de Probabilidad Total y de Bayes.

En un nivel superior de complejidad se aplica en el cálculo de errores en el contexto del ensayo de hipótesis; procedimientos que resultan de vital importancia en el control de calidad, en la teoría de la decisión, y en la inferencia estadística en general y, en particular, en la bayesiana.

Moreno (2014) [7] sostiene que la noción de independencia debe entenderse como un pilar en la construcción de la comprensión de un conjunto de ideas fundamentales en el marco de la probabilidad vinculadas con las ideas de riesgo y confianza.

Díaz, C. y de la Fuente, I. (2006) [8] analizan la resolución de problemas bayesianos por parte de los estudiantes antes y después del aprendizaje de la probabilidad condicional, los errores que cometen y concluyen que la presentación frecuencial no facilita este aprendizaje.

Batanero (2000) [9] sostiene que la simulación nos permite condensar al experimento en tiempo y espacio y operar con él para obtener conclusiones o inferir a partir del mismo. De esta manera se construye un modelo pseudo concreto de la situación problemática que permite prescindir de la estructura matemática para replicar y analizar situaciones estocásticas.

El método de Montecarlo consiste en la generación de números aleatorios de cualquier distribución de probabilidad o proceso estocástico para evaluar en forma artificial o indirecta la estructura de un modelo matemático. Este método ha sido ampliamente difundido como estrategia didáctica bajo el supuesto de que posibilita acelerar el proceso de aprendizaje promoviendo un mayor alcance y calidad.

Sin embargo, Batanero (2009) [10] nos advierte que hay que ser cuidadoso en la construcción de modelos didácticos que pretenden simplificar un fenómeno real porque se puede confundir con facilidad dicho modelo con la realidad.

El presente trabajo propone diversas estrategias y herramientas de simulación con el objetivo de recrear escenarios vinculados con el concepto de probabilidad condicional, con la intención de colaborar en la superación de los errores o sesgos en los alumnos que ocurren con frecuencia durante el aprendizaje de este concepto fundamental.

2 Marco teórico: el modelo TPACK

Este modelo teórico cuya sigla significa Conocimiento Técnico Pedagógico del Contenido, fue desarrollado por Punya Mishra y Matthew J. Koehler (2009) [11] basados en la idea de Lee Shulman sobre la integración de conocimientos pedagógicos y curriculares que deberían poseer los docentes, teniendo en cuenta que la didáctica debe contextualizarse en la asignatura que se enseña y, en consecuencia, debe estar impregnada y condicionada por ella. Mishra y Koehler amplían la idea original de Shulman e integran las TIC a la dupla planteada. Definen así el modelo TPACK como un marco conceptual para integrar las llamadas Nuevas Tecnologías en el proceso de enseñanza. La Fig. 1 describe esta integración:

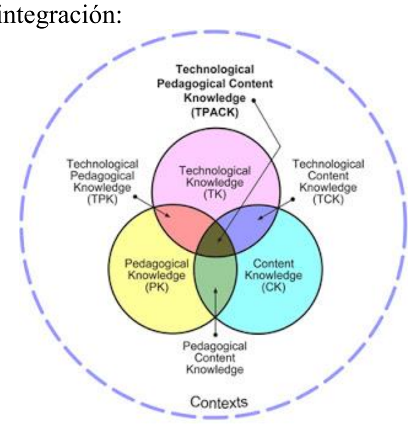


Fig. 1. Esquema del modelo TPACK

Según los autores del modelo TPACK, los conocimientos pedagógicos, disciplinares y tecnológicos del docente interaccionan entre sí cuando se construye un diseño instruccional que tenga en cuenta el conocimiento tecnológico relativo a los recursos que se emplearán, el conocimiento disciplinar se refiere a los contenidos que se deben enseñar para que los estudiantes aprendan, mientras que el conocimiento pedagógico implica de qué forma abordar dichos contenidos a través de diferentes medios. El profesor debe articular dichos conocimientos de manera que esta interacción suponga una mejora en la calidad de la enseñanza.

3 Propuesta didáctica

Motivados por las importantes implicancias del concepto de Probabilidad Condicional en la asignatura Probabilidad y Estadística correspondiente a segundo año de las Carreras de Ingeniería de la UTN (FRA y FRBA), presentamos una secuencia de cuatro actividades áulicas que incluyen simulaciones mediadas por TIC, con la intención de contribuir a la comprensión del concepto de probabilidad condicional y revertir posibles sesgos en su aprendizaje.

3.1 Visualización en R para favorecer la comprensión del concepto de probabilidad condicional

R es un entorno especialmente diseñado para el tratamiento de datos, cálculo y desarrollo gráfico. Facilita el trabajo áulico dado que provee poderosas herramientas para la visualización y exploración de datos, así como para su uso en modelización y programación estadística. El lenguaje de programación se presenta como software libre, es decir que confiere a los usuarios la libertad para ejecutar, copiar, distribuir, estudiar y mejorar el software. Se encuentra disponible en la página: http://cran.r-project.org.

Esta primera actividad combina una estrategia de simulación de Montecarlo con una herramienta de visualización recreando un escenario que permite introducir la noción de independencia.

Se simula el disparo a un blanco con estructuras de blancos variables. Para simular el disparo se realiza la generación de un par ordenado de variables aleatorias independientes uniformemente distribuidas en el intervalo [0; 1].

Los alumnos se benefician de la visualización con colores para estimar las probabilidades de las diferentes regiones, según se puede observar en la Fig. 2:

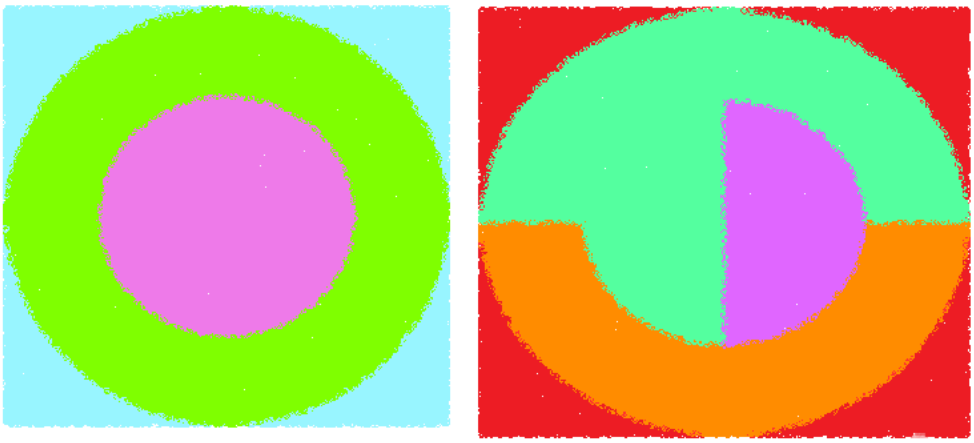


Fig. 2. Algunas alternativas de construcción geométrica de un blanco para disparar

Los estudiantes se reúnen en grupos de a dos frente a la computadora, simulan los disparos a partir de los cuales calculan las probabilidades marginales, conjuntas y condicionales necesarias para dar respuesta a las preguntas orientadoras. Algunas de ellas se listan a continuación:

- ¿la probabilidad de zona verde es independiente del cuadrante?
- ¿la probabilidad de zona lila depende del hemisferio?
- ¿la probabilidad de zona naranja depende del cuadrante? ¿y del hemisferio?

Este ejercicio, que se resuelve aplicando un código en lenguaje R, pretende colaborar con la comprensión del concepto de independencia vinculado a la probabilidad condicional. En el Algoritmo 1 se presenta el código para la simulación del blanco de la izquierda y el cálculo de probabilidades asociadas a los disparos del mismo.

Algoritmo 1: código para la simulación y el cálculo de probabilidades

```
library (ggplot2)
n=100000
x1=runif(n,-1,1)
x2=runif(n,-1,1)
color=0
for (i in 1:n){
 if (x1[i]^2+x2[i]^2<1/3) {color[i]="orchid2" }
 else if (x1[i]^2+x2[i]^2<1) {color[i]="chartreuse"}
 else {color[i]="cadetblue1"}}
windows(width=6.5, height=6.5, rescale="fit")
plot(x1,x2,col=color,xlab="",ylab="",main=paste("Tiro al blanco, n=",n), axes=F)
prob.lila=sum(color=="orchid2")/n
prob.verde=sum(color=="chartreuse")/n
prob.celeste=sum(color=="cadetblue1")/n
```

3.2 Extracción de bolillas con y sin reposición de una urna: un ejemplo en Excel

Las planillas de cálculo han sido muy utilizadas como plataformas de software estadístico, y los resultados que ellas proporcionan se constituyen en información estratégica. A pesar de las debilidades numéricas detectadas por distintos autores, como Almirón (2010) [12] y Panko (1998) [13], constituyen interfaces amigables para el trabajo en el aula y familiares para los estudiantes.

La segunda actividad aprovecha este entorno para explorar la probabilidad condicional en un experimento secuencial. Con Excel se simula la extracción de bolillas de una urna sin reposición con el propósito de explorar la influencia del primer evento sobre el segundo y viceversa. Se puede observar en la captura de pantalla de la Fig. 3:

En una urna hay 3 bolitas Rojas y 3 bolitas Verdes. Se extraen 2 bolitas, una tras otra, sin reponer. ¿Cuál es la probabilidad de que la 2° sea roja si la 1° fue Roja?	Bolitas rojas:1,2,3	1	2	3
	Bolitas verdes: 4,5,6	4	5	6

n	1°Bolita Roja	2°Bolita	2°R/1°R
1	2	5	0
2	1	4	0
3	2	3	1
4	3	6	0
5	1	3	1
6	2	3	1

Fig. 3. Extracción sin reposición de dos bolillas de una urna en Excel

Las consignas orientadoras para esta actividad son.

- Estimar la probabilidad de que el segundo color sea rojo si el primero fue rojo
- Estimar la probabilidad de que sean de igual color.
- Estimar la probabilidad de que sean rojas sabiendo que son del mismo color.
- Comparar con las probabilidades teóricas en cada caso. (implicando su cálculo)

En una segunda instancia se propone la simulación de estas mismas extracciones, pero con reposición con el propósito de introducir el concepto de independencia.

3.3 Errores en teoría de la decisión: una simulación con Excel

Se presenta a los estudiantes el siguiente problema cuya simulación se puede instrumentar en la planilla de cálculo Excel:

Se sabe que en una planta de producción se compran ciertos insumos a dos proveedores A y B. A provee k veces la cantidad de insumos que provee B. Los artículos de A tienen una longitud distribuida normalmente con media m_a y dispersión s_a, mientras que los artículos de B tienen distribución normal con media μ_b y dispersión σ_b. (La simulación permite experimentar con los parámetros k, μ_a, μ_b, σ_a y σ_b).

Se sabe que todos los artículos de una muestra de tamaño n que se extrajo de la producción, corresponden al mismo proveedor pero se omitió el etiquetado, por lo cual debemos decidir si son de A o de B, suponiendo $\mu_a < \mu_b$, se decide que si el promedio de las longitudes de las piezas es menor que $(\mu_a + \mu_b)/2$ se dirá que son de A y en caso contrario se dirá que son de B.

Se desea calcular la probabilidad de equivocarse en ambos sentidos y estudiar la influencia de los parámetros considerados sobre la decisión.

El objetivo de este problema es introducir las probabilidades de error en la toma de decisiones, que es otra aplicación importante de la probabilidad condicional.

3.4 Teorema de Bayes con Geogebra

Geogebra, es un software de geometría dinámica que, alineándose con los nuevos enfoques de la enseñanza de la probabilidad, posibilita el trabajo con diferentes representaciones simultáneas y provee un diseño con potencial amplificador y reorganizador de las operaciones cognitivas que los alumnos desarrollan durante el aprendizaje de la probabilidad (Inzunza, 2014) [14].

Cabe destacar que esta herramienta posee la posibilidad de conversión a applets, así como la ventaja de compartir en una página web el material didáctico elaborado con la misma. Asimismo, facilita el trabajo con parámetros y la visualización del efecto de su variación.

La idea de la probabilidad de una causa está muy asociada a la especificidad y sensibilidad de las pruebas diagnósticas por lo que resulta de interés en el campo del control de calidad en ingeniería. La idea es que los estudiantes aprovechen esta herramienta de simulación para apreciar el impacto que tiene sobre la probabilidad de la causa, tanto la sensibilidad de la prueba como su especificidad y la incidencia de las fallas.

El siguiente problema constituye una adaptación al campo de la ingeniería de un material publicado en la página oficial de GeoGebra (www.geogebra.org).

La actividad facilita el análisis de la probabilidad de error del test diagnóstico en ambos sentidos y permite evaluar la influencia de la incidencia de fallas sobre ésta.

Deslizando los puntos sobre el diagrama de la Fig. 4, se puede hacer variar la incidencia de fallas, así como la sensibilidad del diagnóstico.

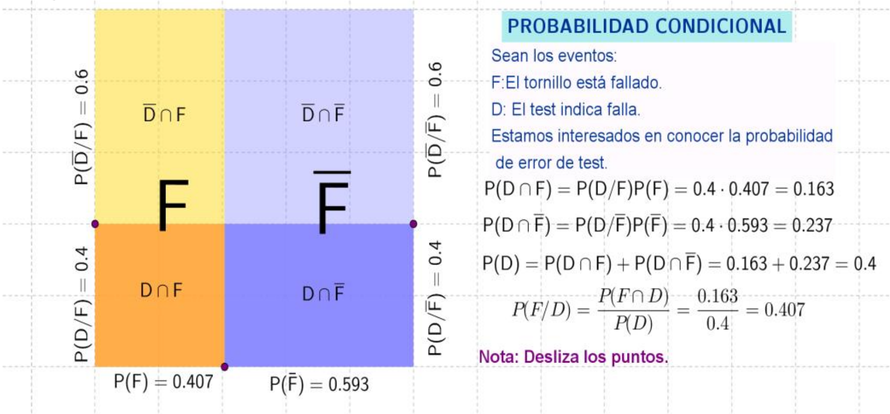


Fig. 4. Esquema en Geogebra para la investigación del impacto de la sensibilidad de una prueba diagnóstica y de la incidencia de las fallas sobre la probabilidad de detección.

Los estudiantes pueden aprovechar esta simulación para responder a las siguientes preguntas:

- ¿Qué impacto tiene el aumento de la proporción de piezas falladas sobre la probabilidad de detectar la falla? ¿Y de no detectarla?

- ¿Qué impacto el aumento de la sensibilidad (capacidad del test de detectar la falla) sobre la especificidad (capacidad de detectar la no falla) del mismo manteniendo constante la proporción de fallas?
- ¿Qué impacto tienen sobre la sensibilidad, la especificidad de la prueba, considerando constante a distintos niveles la proporción de fallas?

Esta simulación pretende revertir los posibles sesgos de temporalidad. El trabajo con deslizadores permite variar las probabilidades conjuntas y posibilita el análisis de las probabilidades condicionales.

4 Conclusiones y trabajos futuros

La inclusión de tecnologías para la enseñanza posibilita un salto cualitativo que va más allá de la algoritmia y permite el análisis de datos y resultados. Particularmente, cada una de las actividades propuestas intenta proveer una experiencia en un nuevo contexto que recree el concepto de probabilidad condicional, así como sus aplicaciones en el marco de la asignatura Probabilidad y Estadística en carreras de Ingeniería de la UTN.

Del mismo modo consideramos que el modelo TPACK puede aportar un enfoque integral para la enseñanza de la probabilidad condicional ya que constituye una propuesta didáctica novedosa que conlleva a un concepto dinámico y contextualizado que promueve la integración eficaz de las TIC a la enseñanza.

Esta propuesta forma parte de un trabajo de campo sobre didáctica de la probabilidad que se proyecta desarrollar en la Universidad Tecnológica Nacional en las Facultades Regionales Avellaneda y Buenos Aires.

Posteriormente a la implementación de esta metodología de enseñanza, se prevé la construcción de instrumentos que permitan evaluar el impacto sobre el aprendizaje respecto a los sesgos mencionados como así también la influencia del diseño instruccional propuesto sobre la motivación y desempeño académico de los estudiantes .Consideramos que el futuro ingeniero puede beneficiarse con el desarrollo de la actividad colaborativa y autorregulada, por eso resulta de interés evaluar el impacto sobre la formación de este tipo de actitudes en los estudiantes a partir de las experiencias didácticas propuestas.

Referencias

1. Palau, M. P. H.; Cerdán, F.: El cálculo de probabilidades en la formación del profesorado de matemáticas de secundaria. *Investigación en educación matemática XIV*. Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática, SEIEM. pp. 353-364 (2010).
2. Kahneman, D; Slovic. P.; Tversky, A Judgement under uncertainty: Heuristics and biases. Amsterdam: North-Holland. (1982).
3. Falk, R.: Conditional probabilities: insights and difficulties. Second International Conference on Teaching Statistics pp. 292-297 (1986).
4. Dupuis, C.: Arbres et tableaux de probabilité: Analisé en terms de registres de représentation. Repéres IREM 22. pp.51-72 (1996).
5. Duval, R.: Un tema crucial en la educación matemática: La habilidad para cambiar el registro de representación. La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española, Vol. 9, No.1, pp. 143-168 (2006).
6. Cantero, T. C.: Análisis de la presentación de la probabilidad condicionada en libros de texto de 2º de bachillerato. Probabilidad Condicionada: Revista de didáctica de la Estadística, Vol. 1, pp.105-112 (2013).
7. Moreno, A.; Cardeñoso, J. M.: Alfabetización Probabilística: Un reto para los profesores de secundaria. Actas del Congreso Iberoamericano de Ciencia, Tecnología, Innovación y Educación (2014).
8. Díaz, C.; de la Fuente, I.: Dificultades en la resolución de problemas que involucran el teorema de Bayes Un estudio exploratorio en estudiantes españoles de Psicología. Educación Matemática, Vol.18, No. 2 (2006).
9. Batanero, C.: ¿Hacia dónde va la educación estadística?, Blaix, Vol.15, No.2, p.13 (2000).
10. Batanero, C.: La simulación como instrumento de modelización en probabilidad. Revista Educación y Pedagogía, Vol. 15, Nro.35, pp. 37-54 (2009).
11. Koehler, M. J.; Mishra, P.: What is technological pedagogical content knowledge. Contemporary issues in technology and teacher education, Vol. 9, No.1, pp. 60-70 (2009).
12. Almiron, M. G. Lopes, B.; Oliveira, A. L., Medeiros, A. C., & Frery, A. C.: On the numerical accuracy of spreadsheets. Journal of Statistical Software, Vol.34, No. 4, pp. 1-29 (2010).
13. Panko, R. R.: What we know about spreadsheet errors. Journal of Organizational and End User Computing (JOEUC), Vol. 10, No. 2, pp. 15-21 (1998).
14. Inzunza, S.: Geogebra. una herramienta cognitiva para la enseñanza de la probabilidad. Actas del Congreso Iberoamericano *de Ciencia, Tecnología, Innovación y Educación*. (2014)

Volver al Índice

Sistema de Promoción de Elementos de Álgebra Lineal en carreras de Ingeniería

Juana Ester Vizchi, Estela Fátima Fernández
Departamento de Matemática, Facultad de Ciencias Exactas, Universidad Nacional de Tucumán
C.P.4000
{jvizchi, efernandez}@herrera.unt.edu.ar

Resumen. Preocupados por el fracaso y la deserción de los alumnos de las carreras de Ingeniería, de la Facultad de Ciencias Exactas de Tucumán (FaCET), debido al bajo rendimiento en las asignaturas de matemática, la dificultad de recuperar los conceptos y la falta de integración de los mismos, la cátedra de Elementos de Algebra Lineal diseñó y puso en funcionamiento durante los años 2011, 12,15 y 16 una reforma con el objetivo de minimizar el problema. La propuesta de cambio abarco dimensiones estructurales y metodológicas. Se separó los alumnos por carrera, cada carrera con un profesor responsable y tres auxiliares docentes, las clases se organizaron teóricas practicas presenciales obligatorias con horas de trabajo independiente obligatorio, horas de consulta y aula extendida. La evaluación de estas experiencias tuvo saldo positivo.

Palabras Clave: Elementos de Álgebra Lineal, Ingeniería, Promoción.

1 Introducción

Con el convencimiento de que el aprendizaje es un hecho social "Se aprende con otro y de otros" se llevo a cabo una reforma estructural y metodológica de la asignatura Elementos de Álgebra Lineal del ciclo básico unificado de la FaCET que abarca todas las carreras de ingenierías.

Esta reforma se pensó con el fin de: mejorar el bajo rendimiento de los alumnos, disminuir la deserción, facilitar la integración de conceptos falencia que tiene muchos de los alumnos que cursan la asignatura Elementos de Álgebra Lineal.

Elementos de Álgebra Lineal es una de las cinco asignaturas cuatrimestrales dentro del segundo módulo de la curricula de las ingenierías, lo cual supone una gran cantidad y variedad de contenidos que el alumno debe asimilar y relacionar, razón por la cual el sistema promocional, en carreras masivas, con pruebas teóricas y prácticas intermedias, si bien exige a los actores un proceso de enseñanza continuo e integral regula el proceso de Enseñanza-Aprendizaje logrando al finalizar el cursado la aprobación de la materia.

2 Dimensiones Abordadas

2.1 Dimensión Estructural

Desde el punto de vista estructural se separó los alumnos según la carrera de Ingeniería en la que se inscribieron a fin de lograr una interacción más efectiva.

Cada grupo, de aproximadamente cien alumnos, estaba a cargo de un profesor y tres auxiliares docentes.

Las horas establecidas en la currícula de las carreras se separaron en clases teóricas- prácticas, con un profesor a cargo, y horas de trabajo independiente con el profesor y tres auxiliares.

Si bien las autoras de este trabajo cuentan esta experiencia, en ella participaron todos los docentes del área.

2.2 Dimensión Metodológica

Desde el punto de vista metodológico:

- Las clases teóricas presenciales no obligatorias pasaron a ser clases teóricas-practicas presenciales obligatorias. Este enfoque permitió presentar y desarrollar el contenido de la asignatura relacionando lo formal con ejemplos y aplicaciones, logrando así una comprobación continua durante el desarrollo de los mismos y relacionando las diferentes unidades didácticas.

- Las clases prácticas presenciales obligatorias se reemplazaron por trabajo independiente presencial. Estas horas fueron importantes por la carga horaria del cuatrimestre. Les permitió interactuar entre ellos y entre ellos y sus docentes. Esta modalidad de trabajo posibilitó al docente intervenir en una exposición general determinada por las preguntas, indagaciones, reflexiones o críticas de los estudiante logrando conocer así su rendimiento, aprendizaje, nivel de conocimiento , capacidades y habilidades y al alumno desarrollar el pensamiento y el trabajo autónomo, alcanzando un control reflexivo haciéndose responsable de su propio aprendizaje.
- Las actividades sobre las cuales trabajaron en las horas presenciales de trabajo independiente estuvieron especialmente confeccionadas para lograr un enfoque constructivo del aprendizaje.
- Se creó el aula extendida con el propósito de que el alumno, mediante el uso de tecnología, tenga la posibilidad de actuar virtualmente con los docentes evacuando dudas e inquietudes, cuente con ejercicios resueltos, teorías, novedades de la asignatura y trabajar en equipo con sus pares, logrando un trabajo colaborativo. Todo esto refuerza la idea de generar en los alumnos la responsabilidad de su propio aprendizaje tomando decisiones según su ritmo e interés.
- Las horas de consulta presenciales no obligatorias que se fijan todos los días en horarios adecuados para aquellos alumnos que no puedan satisfacer sus inquietudes en forma virtual.
- Para promocionar el alumno debía aprobar cuatro exámenes parciales, dos prácticos y dos teóricos, promediar 6 y tener un 80% de asistencia a la carga horaria de la asignatura.
- Para regularizar el alumno debía tener el 80% de asistencia a las horas de trabajo independiente y aprobar los dos exámenes prácticos con una instancia de recuperación.

2.3 Dimensión de Infraestructura

Las clases teóricas- prácticas y las horas de trabajo independiente se dictaron en anfiteatros ubicados en distintos espacios de la FaCET. Si bien la infraestructura no depende de los docentes involucrados, se recibió el apoyo institucional, ya que, facilitó los lugares en las horas necesarias para cada grupo.

3 Datos arrojados de la experiencia

Para hacer un trabajo comparativo entre el rendimiento académico de los alumnos bajo el régimen no promocional 2010 (2014) y régimen promocional 2011 (2015) se registraron en tablas, entre otros, los siguientes datos para ser administrados y analizados.

- Respecto de la regularidad

Tabla 1. Rendimiento académico de los alumnos por año.

	2010	2011	2014	2015
Inscriptos	668	676	625	471
Regulares1ª inst.	313	398	228	233
Total Regulares	413	472	376	295
Porcentaje de reg.	62%	70%	60%	63%
Deserción	139	126	109	89

Estos mismos datos ordenados en una gráfica de “columnas agrupadas” facilitan la lectura de los resultados.

Fig. 1. Rendimiento académico de los alumnos por año.

En la tabla se observa:

En ambas comparaciones el aumento del porcentaje de alumnos que lograron regularizar la materia. Cabe destacar que la diferencia notable en los porcentajes 2010-2011 del 8% y del 2014-2015 del 3% se debió a la gran cantidad de alumnos que aun siendo regulares en el 2011 se reinscribieron para gozar de los beneficios del sistema de promoción.

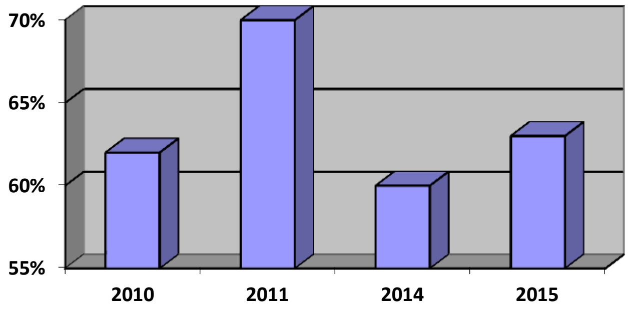


Fig. 2. Porcentaje del total de regulares por año.

En el año 2011 regularizaron en primera instancia 85 alumnos más que en el 2010 esto marca un logro en la metodología aplicada. Este hecho se repitió en la segunda comparación.

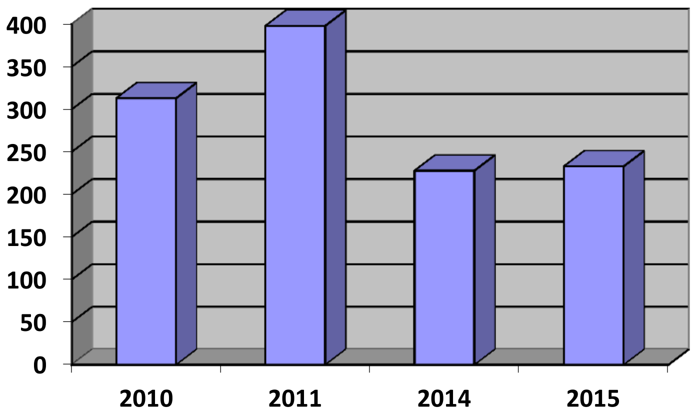


Fig. 3. Porcentaje de regulares en primera instancia por año.

Respecto de la promoción

Tabla 2. Rendimiento académico de los alumnos por año.

	2011	2015
Inscriptos	676	471
Solo regularizaron	312	213
Promocionaron	160	82
No regularizaron	204	176

Usando una gráfica circular donde se muestra la contribucion de cada valor al total observamos:

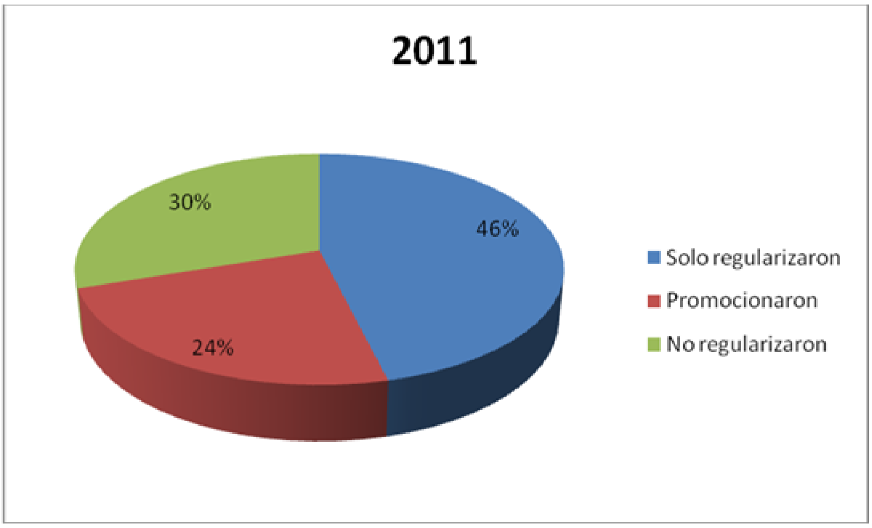


Fig. 4. Porcentaje del rendimiento académico en 2011.

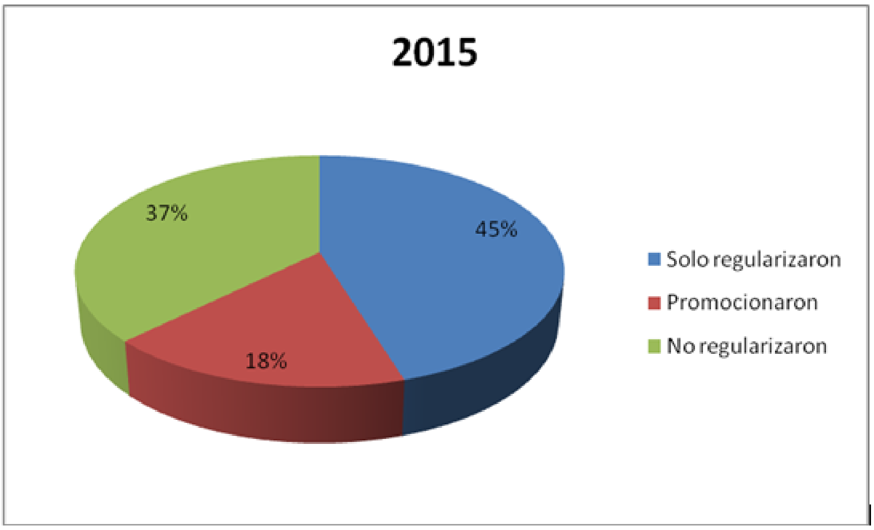


Fig. 5. Porcentaje del rendimiento académico en 2015.

En ambos años la cantidad de alumnos que acreditaron la materia automáticamente después de finalizar el cursado fue del casi 50%

Respecto de la deserción durante el cursado:

Entendiendo por deserción durante el cursado a la cantidad de alumnos que no rindieron algunos de los parciales en alguna de las instancias que correspondía elaboramos el siguiente cuadro.

Tabla 3. Deserción de los alumnos por año.

	2010	2011	2014	2015
Inscriptos	668	676	625	471
Deserción	139	126	109	89
% de deserción	21	19	17	19

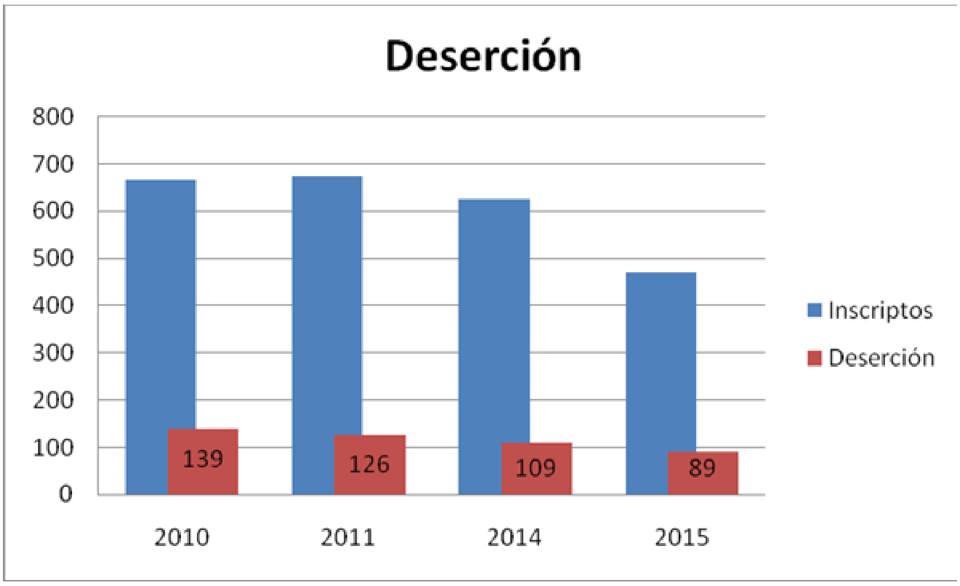


Fig. 6. Porcentaje de deserción por año.

Observamos que el porcentaje de deserción disminuyó en los años que se dicto con la metodología descripta reflejando, a nuestro parecer, un acierto en la misma.

También se elaboraron tablas para observar los cambios por carrera

Tabla 4. Rendimiento académico de los alumnos por carrera durante el año 2010.

ELEMENTOS DE ÁLGEBRA LINEAL 2010									
Carreras	Inscr.	Asist.1P	Aprob.1P	Asist.2P	Aprob.2P	Reg.1-inst	Reg.2-inst	reg	%
Agrimensura	8	6	5	5	3	3	1	4	50
Biomédica	64	56	43	42	24	21	13	34	53
BUF	1	1	1	1	1	1	0	1	100
Civil	89	79	60	67	45	42	13	55	62
Computación	89	81	65	73	47	41	14	55	62
Electricista	60	14	10	13	9	8	4	12	75
Electrónica	16	51	43	46	28	27	5	32	53
GeodyGeof	5	5	5	5	3	3	1	4	80
Industrial	151	138	116	126	83	74	23	97	64
Lic. Fisica	11	8	7	7	6	6	0	6	55
Mecánica	88	82	61	75	51	40	15	55	63
Química	86	81	63	74	58	47	11	58	67
Total	668	602	479	534	358	313	100	413	62

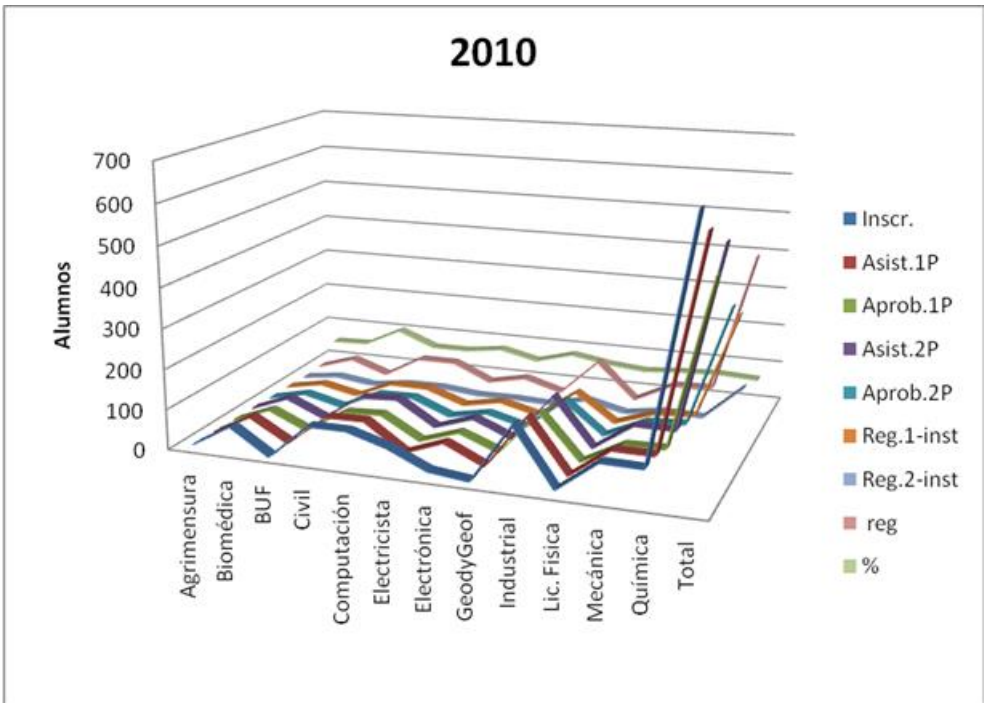


Fig. 7. Datos y resultados de los alumnos por carrera durante el año 2010.

Tabla 5. Rendimiento académico de los alumnos por carrera durante el año 2011.

	ELEMENTOS DE ÁLGEBRA LINEAL 2011								
Carreras	Inscr.	Asist.1P	Aprob.1P	Asist.2P	Aprob.2P	Reg.1-inst	Reg.2-inst	reg	%
Agrimensura	11	9	7	7	5	5	1	6	55
Azucarera	4	4	4	4	4	4	0	4	100
Biomédica	60	56	49	44	35	35	4	40	67
Civil	107	100	93	92	65	63	19	82	77
Computación	82	77	72	68	44	43	9	52	63
Electrica	18	18	17	16	11	11	2	13	72
Electrónica	43	41	35	32	22	22	0	22	51
GeodyGeof	9	8	8	8	7	7	0	7	78
Industrial	138	135	124	118	81	79	22	101	73
Lic. Fisica	7	6	6	6	4	4	1	5	71
Lic, en Inf.	5	5	5	5	2	2	1	3	60
Mecánica	82	79	76	71	56	56	6	62	76
Programador	27	24	23	21	8	8	2	10	37
Química	83	81	73	72	58	58	7	65	78
Total	676	643	592	564	402	398	74	472	70

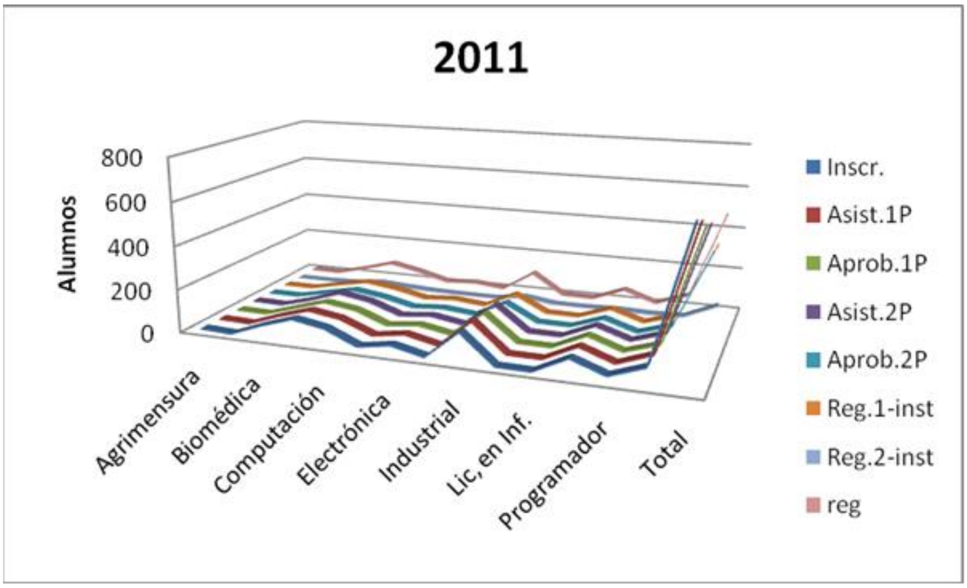


Fig. 8. Datos y resultados de los alumnos por carrera durante el año 2011.

Comparando solo la última columna de ambas tablas y reordenando las filas obtenemos.

Tabla 6. Porcentaje de la diferencia del rendimiento académico de los alumnos por carrera durante el año 2010-2011.

Carreras	% de reg.sobre insc.2010	% de reg.sobre insc.2011	Diferencia %
Electricista	75	72	-3
Electrónica	53	51	-2
Geod. Y Geof.	80	78	-2
Computación	62	63	1
Agrimensura	50	55	5
Total	62	70	8
Industrial	64	73	9
Química	67	78	11
Mecánica	63	76	13
Biomédica	53	67	14
Civil	62	77	15
Lic. Física	55	71	16

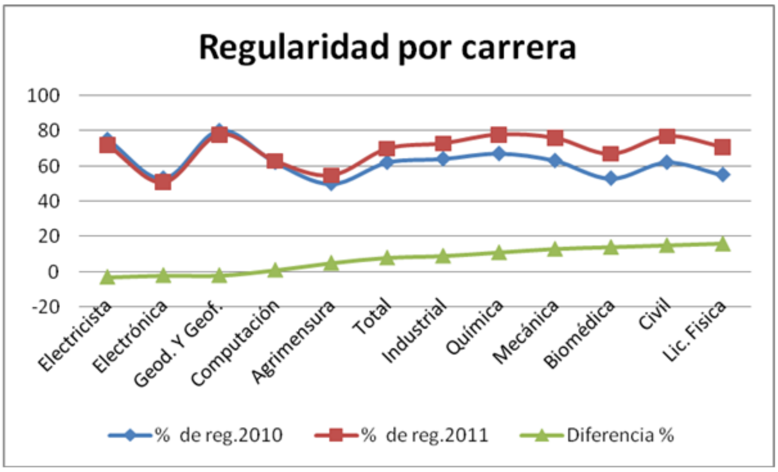


Fig. 9. Porcentaje de alumnos regulares por carrera durante los años 2010 y 2011.

Observamos que durante el sistema de promoción:
En más de la mitad de las carreras el aumento de porcentaje supera la media. Siendo Ing. Civil la ingeniería de mayor aumento de porcentaje
En dos carreras el aumento que se produjo, si bien es positivo, no supera la media.
Solo en tres carreras la diferencia de porcentaje es negativo.

4 Conclusión de la experiencia de Cátedra

1.- El sistema utilizado arrojo los siguientes resultados:

- Mayor cantidad de alumnos regulares.
- Los alumnos que promocionaron obtienen al finalizar el cursado la aprobación de la asignatura.
- Los alumnos que regularizaron y no alcanzaron la promoción, la metodología les permitió rendir el examen final a corto plazo. Se observo que estos exámenes cualitativamente y cuantitativamente aumentaron.

2.- A nuestro criterio los resultados positivos se deben a muchos factores:

- La exigencia de asistencia obligatoria le otorga los conceptos previos necesarios y permite que las horas de trabajo independiente les sirvan para fijar conocimientos. Es así ya que sin esta exigencia, en general, los alumnos no asisten a las clases.
- El trabajo independiente les permite un relación con los docentes más amena.
- El aula virtual que salva sus dudas en horarios extra-curriculares.

3.- Estamos convencidas que estos resultados mejorarían sustancialmente si se pudiera:

- Hacer grupos de no más de 60 alumnos
- Otra estructura edilicias (aulas)
- Aumento sustancial en la planta docente.

Referencias

1. Aprendizaje Invisibl.Cristobal Cobo y John W. Moravec. Edicions de la universitat de Barcelona. Barcelona.
2. Hacer talleres. Una guía práctica para capacitadores. Carmen Candelo Reina, Gracia Ana Ortiz Ruiz y Barbara Unger.
3. Los jóvenes en la era de la hiperconectividad: tendencias, claves, miradas. Dolors Reig, Luis F. Vílchez. © Fundación Telefónica, 2013 Gran Vía, 28 28013 Madrid © Fundación Encuentro, 2013 Oquendo, 23 28006 Madrid © de los textos: Fundación Telefónica y Fundación Encuentro © de la ilustración de cubierta: JMiks/Shutterstock.com ISBN: 978-84-89019-40-9 Depósito legal: M-13898-2013 Impresión y encuadernación: Artes Gráficas Albadalejo.
4. Van Leeuwen, J.: Plability in Actions Videogames. Gamasutra Game Developer. http://gamasutra.net/playability.html. Accedido el 13 de Febrero de 2008

Volver al Índice

Autovalores y Autovectores: Una Experiencia Interfacultades en Ingeniería a través de Flipped Learning

Arce Andrea[1], Beherens Nadia[1], Moreno Alejandro[1], García Zatti Mónica[2]
[1] Departamento de Matemática, Facultad Regional Avellaneda, Universidad Técnológica Nacional
Av. Ramón Franco 5050, Villa Domínico, Avellaneda, Buenos Aires, Argentina.
andreasarce@yahoo.com.ar, nadiabeherens@hotmail.com, alemo@gmail.com
[2]Departamento de Ciencias Básicas, Facultad Regional Bahía Blanca, Universidad tecnológica Nacional
11 de abril 461, Bahía Blanca, Buenos Aires, Argentina.
garciazatti@hotmail.com

Resumen. Comprometidos en promover mejoras en los procesos de aprendizaje que favorezcan el desarrollo del trabajo colaborativo y cooperativo, presentamos una experiencia innovadora realizada con los alumnos de las Cátedras de Álgebra y Geometría Analítica de la Facultad Regional Avellaneda y la Facultad Regional Bahía Blanca, utilizando el modelo Flipped Learning para el abordaje del concepto de Autovalores y autovectores Para ello se propone el diseño de tareas académicas desarrolladas en clases virtuales y presenciales que refieren al aprendizaje autorregulado. Posibilita esta experiencia el hecho de estar enmarcada en el PID FIIT "Formación inicial en Ingenierías y Carreras Tecnológicas". Se realizó una evaluación de las tareas académicas, orientada a relevar aspectos importantes del aprendizaje, en ella se observa alumnos con autonomía creciente sobre su tarea, estableciendo relaciones de colaboración, con una mayor asimilación e interrelación de los conceptos. En el marco del PID FIIT se promoverá la continuidad de dicho trabajo.

Palabras Clave: Autovalores y Autovectores, Flipped Learning, Aprendizaje autorregulado.

1 Introducción

En una sociedad en un cambio continuo, los docentes debemos acompañar y guiar a los alumnos, interpretando y entendiendo nuestro rol. "Integrar las tecnologías digitales en las aulas y los centros educativos y redefinir los contenidos culturales del currículum parecen medidas urgentes" [1]. Por ello, dentro de la Cátedra de Álgebra y Geometría Analítica de la Facultad Regional Avellaneda y de la Facultad Regional Bahía Blanca, enmarcado en el PID FIIT "Formación inicial en Ingenierías y Carreras Tecnológicas" se propone desarrollar la Unidad de Autovalores y Autovectores a través de una combinación de clases presenciales y virtuales, conocido también con el nombre de flipped learning o aprendizaje invertido. Las nuevas tecnologías permiten poner en práctica principios pedagógicos en virtud de los cuales el estudiante es el principal actor en la construcción de sus conocimientos, y que puede aprender de manera más satisfactoria en el marco de una acción concreta y significante y, al mismo tiempo, colectiva.[2]. Nos centramos entonces en el modelo de aula invertida a través del tema Autovalores y Autovectores ya que consideramos que por un lado, el Álgebra Lineal aborda muchos métodos de cálculo que son relativamente sencillos, tales como la eliminación de Gauss y la multiplicación de matrices y por otra parte, estudia conceptos interrelacionados que a menudo resultan difíciles de comprender e internalizar a gran parte del alumnado.

Bajo el modelo tradicional, el tiempo de clase en el Álgebra Lineal a menudo se utiliza en clases expositivas presenciales para mostrar procedimientos de cálculo y demostraciones de teoremas, fuera de la clase se asignan tareas de resolución de actividades de nivel conceptual profundo involucrando a gran parte del conocimiento teórico impartido. Sin embargo, es precisamente en las tareas de nivel superior que los estudiantes necesitan ayuda inmediata y confiable. Por lo tanto, proponemos el modelo aula invertida para organizar más adecuadamente las actividades académicas diseñadas con el fin de lograr el aprendizaje de los conceptos impartidos.

1.1 Marco teórico

1.1.a Flipped Learning

El aprendizaje invertido combina clases virtuales y presenciales, como el *blended-learning*, pero a diferencia de este último, los estudiantes son instruidos fuera del aula con tecnologías interactivas, y hacen "tareas" o actividades de enriquecimiento dentro del salón de clases, una vez que han explorado el material. Específicamente, un aula invertida es un modelo pedagógico en el que se cambian los elementos típicos de lectura y de tarea de un curso. Los materiales de instrucción son vistos por los estudiantes en casa antes de la clase, mientras que el tiempo en el aula se dedica a ejercicios, proyectos o discusiones. Los estudiantes toman notas y preparan preguntas sobre los temas con los conocimientos teóricos. Además, comparten electrónicamente sus preguntas con el docente y compañeros, recibiendo retroalimentación instantánea en los ajustes [3]. Tal diseño tiene la intención de tener instrucciones de lectura fuera del tiempo de clase, por lo tanto, ofrece más tiempo en el aula para comprometer a los estudiantes en el aprendizaje activo [4-5] para provocar un cambio de paradigma en el que el profesor se convierte en una "guía al lado" en vez de un "sabio en el escenario"[6], y los estudiantes están facultados para explorar y resolver problemas independientemente o en grupo. Para lograr un aprendizaje exitoso, los docentes deben entender y aplicar los cuatro pilares del *flipped learning* detallados por Flipped Learning Network [7]:

- Entornos flexibles: esta modalidad permite una variedad de modos de aprendizaje. Los educadores a menudo reorganizan físicamente sus espacios de aprendizaje para acomodar una lección o unidad, para apoyar el trabajo en grupo o el estudio independiente. Crean espacios flexibles en los que los estudiantes eligen cuándo y dónde aprenden. Además, los educadores que invierten sus clases son flexibles en sus expectativas de los plazos del estudiante para aprender y en sus evaluaciones del aprendizaje del estudiante.
- Cultura del aprendizaje: En el modelo tradicional centrado en el docente, el profesor es la principal fuente de información. Por el contrario, el modelo *flipped learning* cambia deliberadamente la enseñanza a un enfoque centrado en el alumno, donde el tiempo en clase se dedica a explorar temas con mayor profundidad y crear oportunidades de aprendizaje. Como resultado, los estudiantes participan activamente en la construcción del conocimiento al participar y evaluar su aprendizaje de una manera personalmente significativa.
- Contenido intencional: Los educadores reflexionan continuamente acerca de cómo pueden usar el modelo para ayudar a los estudiantes a desarrollar la comprensión conceptual, así como la fluidez procesal. Ellos determinan lo que necesitan para enseñar y qué materiales los estudiantes deben explorar por su cuenta. Los docentes utilizan el contenido intencional para maximizar el tiempo en el aula para adoptar métodos de estrategias de aprendizaje activas centradas en el estudiante, dependiendo del grado y el tema.
- Educador profesional: el papel del docente es aún más importante, y a veces más exigente, en un aula invertida que en una tradicional. Durante el tiempo de clase, observan continuamente a sus estudiantes, proporcionándoles información relevante en el momento y evaluando su trabajo. Son reflexivos en su práctica, se conectan entre sí para mejorar su instrucción, aceptar la crítica constructiva y tolerar el caos controlado en sus aulas. Mientras que los educadores profesionales asumen papeles menos prominentes en un aula invertida, siguen siendo el ingrediente esencial que permite que el aprendizaje invertido ocurra.

1.1.b Plataforma Moodle

Técnicamente, Moodle es una aplicación que pertenece al grupo de los Gestores de Contenidos Educativos (LMS, Learning Management Systems), también conocidos como Entornos de Aprendizaje Virtuales (VLE, Virtual Learning Managements), un subgrupo de los Gestores de Contenidos (CMS, Content Management Systems).[8] Se puede definir como una aplicación que permite gestionar distintas plataformas educativas, organizada por un docente (o varios) a la cual los alumnos pueden acceder y comunicarse con todos los participantes. El diseño y desarrollo de Moodle se basan en la teoría del aprendizaje denominada "pedagogía construccionista social". Para el construccionismo el aprendizaje es particularmente efectivo cuando se construye algo que debe llegar a otros.[8]En este contexto el docente actúa como encargado de suministrar y organizar los recursos a los alumnos para que alcancen un aprendizaje exitoso. Para comprender las ventajas del uso de esta plataforma, compartimos un resumen de sus principales características realizado por Sancho Jesús en su libro [8]:

- Entorno de aprendizaje modular y dinámico orientado a objetos, sencillo de mantener y actualizar.
- Excepto el proceso de instalación, no necesita prácticamente de "mantenimiento" por parte del administrador.

- Dispone de una interfaz que permite crear y gestionar cursos fácilmente.
- Los recursos creados en los cursos se pueden reutilizar.
- La inscripción y autenticación de los estudiantes es sencilla y segura.
- Resulta muy fácil trabajar con él, tanto para el profesorado como el alumnado.
- Detrás de él hay una gran comunidad que lo mejora, documenta y apoya en la resolución de problemas.
- Está basado en los principios pedagógicos constructivistas: el aprendizaje es especialmente efectivo cuando se realiza compartiéndolo con otros.

2 Desarrollo

Dentro del Álgebra Lineal, la unidad que se eligió para trabajar es *Autovalores y Autovectores*, principalmente por la inmensa cantidad de aplicaciones que tienen en el campo de la ingeniería, que a veces se deja de lado por falta de tiempo. Para esto, se establecieron clases virtuales y presenciales, basadas en la modalidad *flipped learning*. En las primeras, a través de la plataforma Moodle, los alumnos de ambas regionales, mediante un link al Blog común interfacultades podían acceder al material teórico, que contenía videos, simulaciones, así como también al material práctico. Dicho Blog fue confeccionado y organizado de manera tal que sea de fácil acceso y común a todos los alumnos que participaron de la experiencia en ambas facultades. Mientras tanto, en el aula tradicional se establecieron los lineamientos generales, y solo se resolvieron ejercicios de forma grupal basados en todo lo visto en el espacio virtual. Finalmente, se evalúo la Unidad Autovalores y Autovectores en exámenes parciales, según lo establecido en cada Cátedra de cada Regional, previa autoevaluación por medio de cuestionarios abiertos con retroalimentación en el Campus virtual.

En el caso de la Facultad Regional Bahía Blanca, por cuestiones de tiempo, no fue posible cumplir con todas las etapas propuestas en esta primera experiencia. A través del aula virtual se presentó el Blog a los alumnos, planteando que, como consigna de trabajo para la próxima clase presencial, debían explorar dicho espacio virtual, descargar y leer el material teórico práctico, y descargar y comenzar a resolver el trabajo práctico propuesto. La experiencia en la clase dedicada a Autovalores y Autovectores fue muy positiva, ya que los alumnos cumplieron con la consigna de realizar un trabajo previo con el material disponible, lo que permitió avanzar más rápido en el tema, dedicando la clase no a exponer y desarrollar el tema, sino a resolver dudas, contestar preguntas, complementar con más ejemplos y profundizar aquellos aspectos importantes para trabajar los temas siguientes. Para los próximos cuatrimestres, se propone un ajuste del cronograma de clases para poder cumplir con todas las etapas propuestas en el diseño.

En los tres cursos de la Facultad Regional Avellaneda en los que se ha desarrollado esta modalidad, al finalizar la unidad, se decidió hacer una encuesta, arrojando los resultados detallados en los siguientes gráficos:

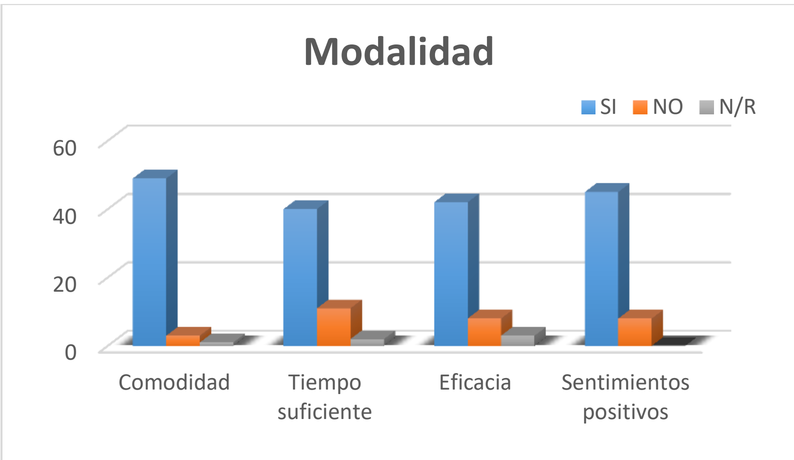


Fig. 1. Preguntas sobre la modalidad en general, tales como organización, efectividad y sentimientos enfrentados.

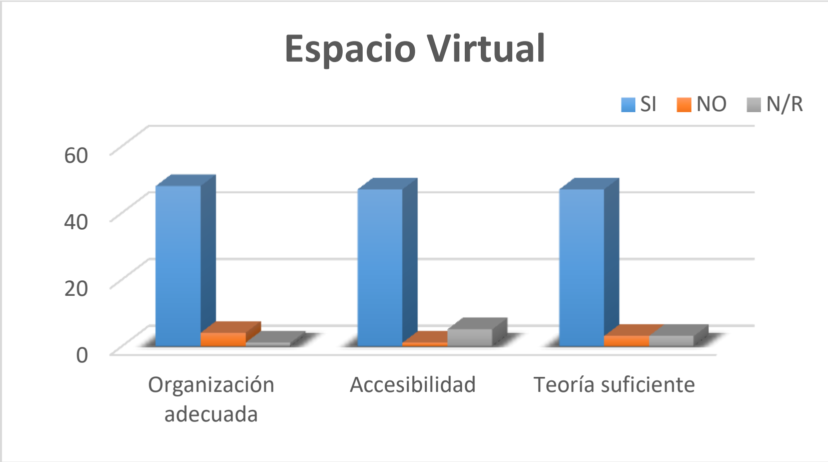


Fig. 2. Preguntas particulares sobre el espacio virtual.

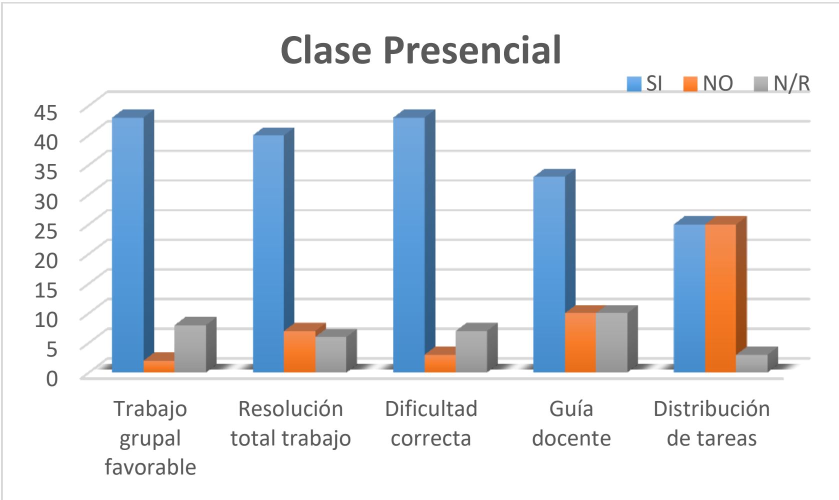


Fig. 3. Preguntas sobre la clase presencial.

En base a los resultados de las encuestas, podemos decir que la modalidad ha tenido un nivel de aceptación considerablemente alto, específicamente en cuestiones tales como la comodidad, el tiempo programado para cada tema con su posterior actividad, la eficacia y la presencia de sentimientos positivo durante su realización. Si nos focalizamos en el espacio virtual, podemos decir que los alumnos no han tenido dificultad con la accesibilidad, y han notado una buena organización de las herramientas y contenidos propuestos. Se le pregunto puntualmente sobre la teoría presentada y han mostrado un alto nivel de satisfacción. También observamos un mayor interés en recorrer el Blog interfacultades compartiendo con estudiantes de otra Regional, dejando sus comentarios de satisfacción con respecto a la elección y organización de los contenidos. Ahora bien, si nos focalizamos en la clase presencial, consideran que el trabajo propuesto se condice con lo visto en la teoría, el 81% de los alumnos pudo concluirlo. Sin embargo, reconocen una falta de distribución de tareas entre los integrantes del grupo, dada en algunos casos por falta de comunicación entre ellos y una mayor demanda de tiempo para el desarrollo de las actividades de la práctica durante la clase. En cuanto a la relación con el docente, consideran fundamental su presencia y guía durante todo el proceso. La tecnología por sí sola no garantiza un mayor éxito en el aprendizaje, fueron considerados por lo tanto los siguientes lineamientos en la organización de la clase:

1. Distribución de la información: Se proporcionó los materiales a los alumnos; generalmente con un grado de complejidad creciente. De esta manera se buscamos la asimilación de forma gradual, que el alumno comprenda, incorpore y no pierda el interés.
2. Intercambio de ideas y experiencias: Durante el desarrollo de las clases se propició un diálogo entre el profesor y el alumno, y entre los mismos alumnos, generando así una retroalimentación. Se observó que las dudas eran consultadas en una primer instancia con los compañeros de grupo y luego si no era satisfecha, con los docentes presentes en el aula.
3. Aplicación y experimentación de lo aprendido: Se propusieron actividades para aplicar lo aprendido en diversas situaciones en contextos intra y extra matemáticos, que permitiera explicitar la interrelación con otros temas antes aprendidos a saber: Sistemas de ecuaciones lineales, espacios vectoriales, bases, bases ortogonales, bases ortonormales, transformaciones lineales. Se produce un uso significativo del conocimiento, extendiendo el pensamiento a una examinación de conceptos en profundidad, de formas más analíticas.
4. Evaluación de los conocimientos: Diseñados para conocer no solo los objetivos alcanzados por los estudiantes y la capacidad de utilización del nuevo conocimiento en la resolución de problemas, sino también para realizar correcciones en la programación de ser necesario. En este punto consideramos fundamental una devolución a cada estudiante sobre su desempeño para que puedan reflexionar sobre lo aprendido.

Sin lugar a dudas, este método requiere que los docentes ideen actividades más creativas e innovadoras, pero estamos convencidos que el proceso de aprendizaje es más efectivo y placentero.

3 Conclusiones y trabajos futuros

El álgebra lineal es una de las primeras asignaturas de matemática de las carreras de Ingeniería. La disciplina se muestra como una red fuertemente conectada de conceptos y no simplemente como un conjunto de algoritmos. Esta nueva percepción de la matemática puede ser desconcertante para los estudiantes que ingresan a la carrera. Particularmente, el enfoque del aula invertida para la enseñanza del álgebra lineal ofrece un modelo en el que esas dificultades se producen precisamente cuando el instructor se encuentra más disponible para ayudar, y proporciona la práctica de alguna de las conductas de autorregulación que los estudiantes necesitan para tener éxito en el desarrollo de sus estudios. [9]

Los alumnos han detectado ventajas en la nueva modalidad, así como también desventajas. Entre las primeras, destacaron la comodidad de acceder al material desde cualquier punto, la disponibilidad de más herramientas que lo habitual, un mayor vínculo con el docente a la hora de consultar, lo que genera una mejor asimilación de los contenidos, y por último, la innovación. Lograron un aprendizaje colaborativo y cooperativo, así como también autorregulado. Es decir, “un proceso en el cual los estudiantes activan y sostienen pensamientos, efectos y comportamiento que son planteados y cíclicamente adaptados a la consecución de sus metas”. [10] (Zimmerman, 2000). A la hora de hablar de desventajas, creen que este tipo de modalidad requiere más dedicación y constancia que la tradicional, y es necesaria una organización personal para lograr un manejo de tiempo exitoso. La transición desde el aula tradicional a la virtual puede ser dificultosa para muchos estudiantes, las estrategias y técnicas de la clase presencial no son suficientes. Por ello, es importante en este tipo de cursos, ofrecer a los estudiantes las oportunidades y recursos necesarios para construir estrategias, habilidades y técnicas útiles para la adaptación al espacio virtual. El método se utilizó para diseñar experiencias de clase de un solo tema, produciendo un cambio significativo en la metodología, ya que a pesar de utilizar el Campus Virtual y distintas herramientas que brinda el mismo, link, software matemático, videos educativos, las tareas académicas diseñadas bajo este modelo organizaron todas las herramientas pautando un orden y organización específico en función de los objetivos propuestos.

En cuanto a la experiencia docente, advertimos que es necesario una administración adecuada del tiempo en la clase presencial, qué permita la creación de un espacio de descubrimiento y la posibilidad de que el profesor trabaje con los estudiantes que más lo necesitan. El resultado de la evaluación realizada del tema en la Facultad Regional Avellaneda resultó satisfactorio ya que el 72 % de los alumnos resolvieron apropiadamente las actividades pautadas, elevando así el porcentaje de Aprobados en comparación con otras evaluaciones similares sobre el tema. Los grupos de trabajo formados por los alumnos resultaron exitosos pero demandaron un mayor tiempo lo que no permitió culminar con la tarea final de aplicación a un problema ingenieril. Por tal motivo en continuidad con el PID, se proyecta en el presente año utilizar el modelo clase invertida, completando la secuencia planeada con una presentación final grupal interrelacionando el tema estudiado con una aplicación ingenieril a elección o las explicitadas en el Blog Interfacultades. Tenemos la intensión de medir en ambas

Facultades el impacto de las tareas académicas diseñadas en el alumnado y el cumplimiento de los objetivos de mejoras en la metodología de nuestro proyecto de investigación interfacultades, diseñando instrumentos de medición que aporten datos sobre la comprensión de los conceptos específicos de la asignatura y las habilidades y actitudes que signifiquen un aprendizaje autorregulado.

Si bien este el estudio se centró en un caso particular de la clase invertida, con 54 Estudiantes de diferentes cursos. Un siguiente paso importante, en el uso del aula invertida en las clases de Álgebra Lineal, comprendería la utilización del método en varias unidades del programa.

3.1 Agradecimientos

Los autores desean agradecer a las siguientes personas:

- A los alumnos de ambas regionales por su participación en este Proyecto.
- Al Director del PID Profesor Omar Cura de la Facultad Regional Bahía Blanca por todos sus aportes y su incondicional apoyo en la realización de este trabajo de investigación en la aplicación de la modalidad *flipped learning.*
- Al Director de la Cátedra en la Facultad Regional Avellaneda Ing. Marcelo Peyregne por sus aportes sobre Álgebra Lineal.
- A los colegas de las diferentes Cátedras en la Facultad Regional Bahía Blanca por sus aportes sobre Álgebra Lineal.

Referencias

1. Area Moreira, M.: La sociedad de la información, las tecnologías y la educación. Introducción a la Tecnología Educativa. Universidad de La Laguna (España) (2009). URL: https://campusvirtual.ull.es/ocw/file.php/4/ebookte.pdf Accedido el 10 de enero de 2017.
2. Waldegg Casanova, G.: El uso de las nuevas tecnologías para la enseñanza y el aprendizaje de las ciencias. Revista Electrónica de Investigación Educativa. Vol. 4, No 1, pp 95-116 (2002). URL: http://redie.ens.uabc.mx/vol4no1/contenido-waldegg.html. Accedido el 20 de mayo de 2016
3. Bergmann, J.; Sams, A.: Flip your classroom: Reach every student in every class every day. Eugene, OR: International Society for Technology in Education. (2012).
4. Jungić, V.; Kaur, H., Mulholland, J.; Xin, C.: On flipping the classroom in large first year calculus courses. International Journal of Mathematical Education in Science and Technology. Vol 46 No 4, pp 508–520. (2015).
5. Sohrabi, B.; Iraj, H. (2016): Implementing flipped classroom using digital media: A Comparison of two demographically different groups perceptions. Computers in Human Behavior. Vol. 60, pp 514–524. (2016)
6. King, A.: From sage on the stage to guide on the side. College Teaching. Vol. 41 No., pp 30–35.(1993)
7. Flipped Learning Network (FLN): The Four Pillars of F-L-I-P™ URL: www.flippedlearning.org/definition. (2014) Accedido el 08 de febrero de 2017.
8. Sanchos, J: La Plataforma Educativa Moodle. Manual de Consulta para el Profesorado. URL: http://www.fvet.uba.ar/postgrado/Moodle18_Manual_Prof_1.pdf (2007) Accedido el 05/02/2017.
9. Talbert, R.: Inverting the Linear Algebra Classroom. PRIMUS: Problems, Resources, and Issues in Mathematics Undergraduate Studies. Vol. 24 No5, pp 361-374. URL: http://www.tandfonline.com/doi/abs/10.1080/10511970.2014.883457 (2014) Accedido el 14 de enero de 2017.
10. Zimmerman, B.: Attaining self regulation: A social cognitive perspective. Boekaerts, M.; Pietrich, P.; Zeidner, M. Handbook of self-regulation. San Diego. Academic Press. (2000)

Volver al Índice

Cartesianas Vs Paramétricas, Duelo en un Mundo de Trayectorias

Graciela Paolini[1,2], Fernanda Lusente[1,2], Rafael Cornejo Endara[2]
[1] Departamento de Ciencias Básicas, Facultad Regional Bahía Blanca, Universidad Tecnológica Nacional,
11 de Abril 461 - C.P. B8000LMI - Bahía Blanca - Buenos Aires - Argentina
gpaolini@uns.edu.ar, {gpaolini, flusente}@frbb.utn.edu.ar
[2] Departamento de Matemática, Universidad Nacional del Sur
Avenida Alem 1253. 2º Piso - C.P. B8000CPB- Bahía Blanca - Buenos Aires - Argentina
rcornejo@uns.edu.ar

Resumen. En el siguiente artículo se socializa una experiencia de cátedra universitaria y su respectivo análisis. La misma fue pensada para ser implementada durante el año 2016 tanto en la Universidad Tecnológica Nacional Facultad Regional Bahía Blanca como en la Universidad Nacional del Sur, de la misma ciudad.
Uno de los principales objetivos de esta intervención es propiciar condiciones que permitan a los alumnos la conceptualización de los campos vectoriales tangentes a una curva. Para ello se promovió la articulación entre las representaciones analíticas y geométricas de curvas contenidas en el plano XY expresadas en forma paramétrica, facilitando de este modo la apropiación del objeto matemático en cuestión.
Para alcanzar este propósito se requirió la utilización de un software que permitiera de forma sencilla dicha articulación. En este caso particular se optó por el uso de GeoGebra, debido a lo amigable de su interface.

Palabras Clave: Curvas planas en forma paramétrica, Campo vectorial tangente a una curva, Teoría de Representaciones, GeoGebra.

1 Introducción

Debido al escaso trabajo con curvas paramétricas que se realiza en las asignaturas previas a Análisis Matemático II, se observa en los alumnos exiguas conceptualizaciones de las mismas. Por esta razón, las ventajas que presenta el uso de curvas en forma paramétrica se ven empañadas por las dificultades que encuentran los estudiantes para abordar estas representaciones.

Se trataron de recuperar las habilidades adquiridas por los estudiantes en otras asignaturas respecto al uso de curvas planas en forma paramétrica (Análisis Matemático I), vectores (Álgebra y Geometría) y resignificarlos en el contexto de esta materia, con un enfoque abierto a la extensión a curvas en el espacio.

Esta experiencia se aplicó durante el cursado de dos comisiones distintas de la asignatura Análisis Matemático II: una correspondiente al plan de estudios de las carreras de Ingeniería Eléctrica en la Universidad Tecnológica Nacional y otra de Ingeniería Civil, en la Universidad Nacional del Sur, ambas durante el año 2016.

2 Objetivos

- Lograr que los alumnos, a partir de la utilización de los contenidos previos sobre curvas planas y vectores, se transformen en protagonistas de su aprendizaje.
- Reconocer las ventajas que presentan las curvas expresadas en forma paramétrica a la hora de resolver ciertas situaciones problemáticas.
- Promover la articulación, especialmente, entre el registro gráfico y algebraico para facilitar la aprehensión de los objetos matemáticos en juego.
- Utilizar las TIC'S como herramientas de mediación para el aprendizaje.

3 Intencionalidad de esta propuesta

La intencionalidad de esta propuesta es acompañar visualmente algunos aspectos importantes relacionados con las curvas en el plano XY. Por ejemplo, cuando éstas representan la trayectoria de un objeto es importante reconocer el sentido del movimiento. También pensando en aplicaciones de la asignatura, aprovechamos la oportunidad para incluir el campo vectorial tangente a esas curvas, en el sentido de la parametrización elegida en cada caso.

Esta idea surgió de tener en cuenta lo expuesto por [1] y [2] en relación a que el carácter no ostensible de los objetos matemáticos requiere que su apropiación se dé a partir de representaciones del mismo. También de observar que la falta de trabajo por parte de los alumnos en la articulación de registros los lleva a buscar herramientas mecánicas que sean útiles para resolver problemas, sin indagar en los requerimientos específicos de los mismos.

4 Cómo se implementó y qué sucedió en el aula

Se comenzó por proponer a los alumnos el siguiente problema, que exige para su resolución el manejo de las curvas en forma paramétrica. Este problema fue diseñado por Mg. Graciela Paolini, a partir de la experiencia y la observación de las dificultades que históricamente presentan los alumnos, con sustento en [3] y [4].

PROBLEMA PROPUESTO: Se conocen las ecuaciones de movimiento de un objeto: en cada instante t, la posición en un sistema de coordenadas ubicado adecuadamente, está dada por el punto $P = (x, y)$ de coordenadas:

$$P\big(x(t), y(t)\big) = \big(-\mathrm{sen}(t), 2\mathrm{sen}^2(t)\big) \qquad \textbf{(1)}$$

desde el punto inicial A (cuando $t = 0$) hasta el final B (cuando $t = 3\frac{\pi}{2}$) , x , y medidos en kilómetros. Notamos C a la curva descripta por el punto P. Se plantean las siguientes preguntas:

a) ¿Cuál es la trayectoria del objeto?

b) ¿Cuántos kilómetros recorrió al ir desde A hasta B?

c) ¿Detiene alguna vez el móvil su movimiento? ¿Cuándo?

d) ¿Cuál es el trabajo realizado por una fuerza $F(x, y)$ sobre el objeto que recorre el camino C?

Sin ninguna otra mediación por parte del docente, los alumnos abordaron el problema de distintas maneras. Teniendo en cuenta las formas en que procedieron, podemos clasificarlos en tres grupos:

1. Un primer grupo recurrió a encontrar la ecuación cartesiana de la trayectoria, obteniendo como respuesta que la representación gráfica de la misma coincide con la gráfica de la parábola $y = 2x^2$ (Fig. 1).

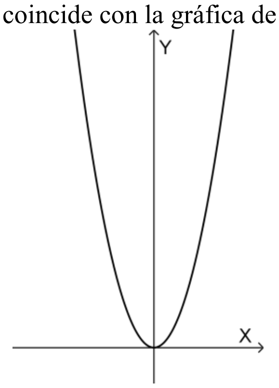


Fig. 1. La parábola $y = 2x^2$

2. Un segundo grupo, reconociendo el punto inicial $A = (0,0)$ y el punto final $B = (1,2)$ y teniendo en cuenta su expresión cartesiana, obtuvo que la trayectoria es el arco de la parábola de la Fig. 2.

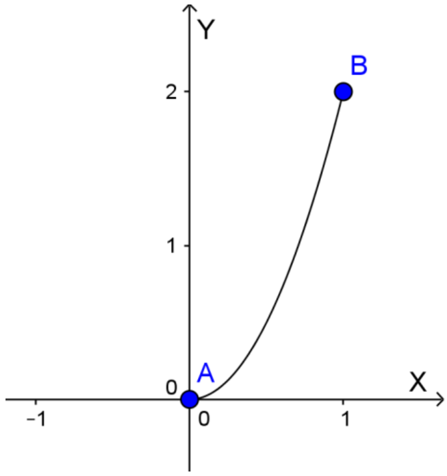


Fig. 2. El arco de A a B (x entre 0 y 1)

3. El tercer grupo, teniendo en cuenta la ecuación cartesiana, optan por reemplazar la variable x por un parámetro, obteniendo así la parametrización:

$$Q\big(x(t), y(t)\big) = (t, 2t^2), t \in [0,1] \qquad \textbf{(2)}$$

Analizando estas respuestas se concluyó que los alumnos no utilizaron esquemas adecuados para su resolución. Se decidió entonces trabajar las ecuaciones de movimiento del objeto desarrollando el ejemplo en el pizarrón y simultáneamente se propuso realizar entre todos la siguiente tarea guiada, usando GeoGebra:

1. Ingresar en la Entrada la curva en forma paramétrica:

$$\text{Curva}\left[-\text{sen}(t), 2 * \text{sen}^2(t), t, 0, 3\frac{\pi}{2}\right] \qquad \textbf{(3)}$$

2. Ingresar el punto inicial A=(0,0) y el punto final B=(1,2)
3. Ingresar un punto genérico en la curva, que llamamos P:

$$P = (-\text{sen}(u), 2\text{sen}^2(u)) \qquad \textbf{(4)}$$

4. Ingresar un deslizador para el parámetro $u \in [0,3\frac{\pi}{2}]$.
5. Ingresar un punto Q tal que el vector $\overrightarrow{PQ}$ sea tangente en P a la curva. Por ejemplo:

$$Q = (-\text{sen}(u) - \cos(u)\,, 2\text{sen}^2(u) + 4\text{sen}(u)\cos(u)) \qquad \textbf{(5)}$$

6. Ingresar el vector $\overrightarrow{PQ}$.
7. En las propiedades del vector $\overrightarrow{PQ}$, completar en la pestaña titulada Avanzado, en los colores dinámicos, rojo cuando el parámetro crece y verde cuando decrece.

$$\text{Rojo: } 0 \leq u \leq \frac{\pi}{2} \qquad \textbf{(6)}$$

$$\text{Verde: } \frac{\pi}{2} \leq u \leq 3\frac{\pi}{2} \qquad \textbf{(7)}$$

Para analizar el sentido del movimiento se propuso a los alumnos mover el deslizador u en sentido creciente. El punto P y el vector tangente se desplazan sobre la curva en el sentido de recorrido dado por la parametrización. En este ejemplo el móvil recorre la trayectoria de la Fig. 3: desde el punto inicial A hasta el punto $C = (-1,2)$ en el sentido de la abscisa decreciente, y luego desde el punto C hasta el punto final B en el sentido de la abscisa creciente

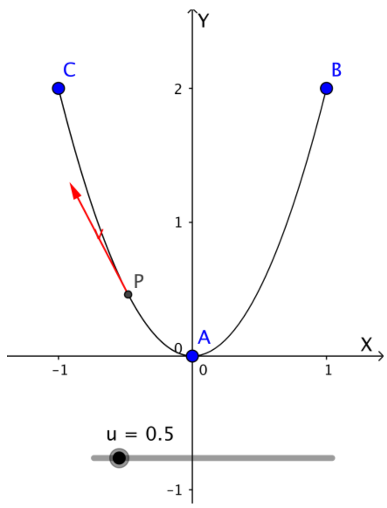


Fig. 3. Sentido del movimiento

Para reconocer el campo vectorial tangente, se propuso a los alumnos activar el rastro del vector tangente para visualizarlo. Usando colores dinámicos, se pudo seleccionar color rojo si $cos(u) < 0$ y verde si $cos(u) > 0$ (Fig. 4). Así, se distinguió visualmente el sentido de recorrido: en rojo cuando la abscisa decrece y en verde cuando la abscisa crece.

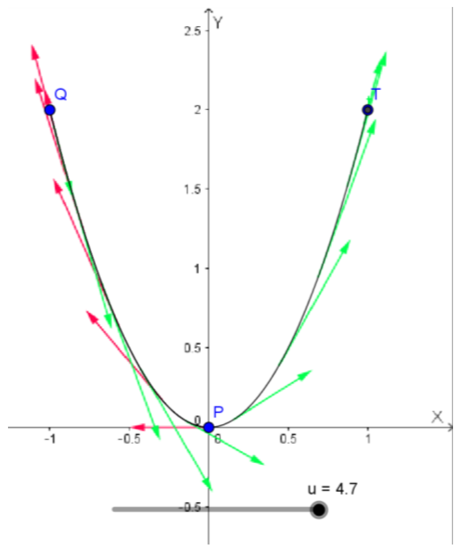


Fig. 4. Campo vectorial tangente

5 Análisis de la propuesta

Vamos a analizar brevemente algunos aspectos que nos parecen relevantes respecto de la propuesta y su implementación.

Los contenidos que se movilizan y se resignifican [5] a partir de la situación planteada son:

- Intra-matemáticos: Curvas planas en forma paramétrica, derivadas de funciones escalares y vectoriales, vector tangente y campo vectorial tangente a una curva plana, estudio de funciones de una variable, entre otros.

- Extra-matemáticos: Trayectoria de un móvil, velocidad, análisis de los mismos, circulación a lo largo de una curva plana, cálculo de flujo, entre otros.

Con miras a extender estas ideas al trabajo en el espacio se tuvo especial cuidado en el uso del lenguaje coloquial. Por ejemplo: se empleó la expresión “curvas planas” para referirse a las que están contenidas en el plano XY como paso previo al estudio de curvas planas y no planas en el espacio. Además, al analizar el sentido de recorrido de una curva plana, no se utilizaron las expresiones “hacia la derecha” o “hacia la izquierda” ni “horario” o “anti-horario”, debido que al considerar las mismas curvas planas en el espacio estas denominaciones o nociones dejan de tener validez. Es por esto que en su lugar, la orientación positiva o negativa fue referenciada a lo largo de la experiencia de acuerdo al crecimiento y decrecimiento del parámetro.

Respecto a lo realizado durante la implementación por parte de los alumnos advertimos que estos se encuentran más cómodos con la utilización de curvas representadas en forma cartesiana, lo que los lleva a obtener resultados no adecuados como se puede ver en los dos primeros grupos. En el accionar del tercer grupo se observa una conceptualización no adecuada de funciones paramétricas, debido que no se respetó el recorrido de la curva.

La mediación del software GeoGebra, permitió un trabajo más fluido con las representaciones gráficas. Además la utilización del deslizador fue de gran ayuda ya que permitió visualizar la relación que se establece entre el parámetro y el recorrido de la curva, resaltando así el carácter dinámico de la situación planteada.

6 Conclusiones

La propuesta logró el objetivo de favorecer la articulación entre las representaciones gráficas y el proceso algebraico de temas importantes de la asignatura.

Sin embargo, los alumnos no se involucraron en la propuesta en forma autónoma. A pesar que muchos de ellos tenían celulares o computadoras, no fueron ingresando los datos al GeoGebra a medida que se avanzaba en la tarea. Además se les sugirió que formaran grupos y lo fueran haciendo a modo de taller, pero prefirieron participar mirando la proyección.

Tampoco tuvo eco el consejo de que utilizaran este procedimiento para otras ecuaciones de movimiento propuestas en la práctica.

Consideramos que estas decisiones les coartó la posibilidad de exploración que permite el dinamismo del GeoGebra.

Creemos que estas elecciones que tomaron los alumnos están sostenidas en gran medida en el contrato didáctico que sustenta las intervenciones pedagógicas tradicionales de nuestra universidad. Nos parece relevante mencionar algunos aspectos:

- las clases teóricas son desarrolladas, en general, por un profesor que expone la teoría y ejemplos. La participación por parte de los alumnos es escasa o nula.
- las clases prácticas están a cargo de un grupo heterogéneo de auxiliares docentes (ingenieros, profesores y licenciados de matemática, licenciados y alumnos de carreras afines), los cuales ayudan a los alumnos con las dudas que ellos encuentran a la hora de resolver los trabajos prácticos propuestos.
- en los últimos años observamos una tendencia por parte de los alumnos a preferir las resoluciones de los ejercicios en lugar de la mediación de los docentes como guía.

Aun así, los dos grupos con los que se trabajó la propuesta manifestaron que, de esta forma, lograron visualizar algunos de los aspectos de los conceptos matemáticos de “trayectoria”, “sentido”, “vector tangente”, “campo vectorial tangente”. Además, la representación geométrica les ayudó a entender “lo que estaban haciendo analíticamente”.

Al volver a utilizar los contenidos de esta propuesta, notamos con mucho agrado que estos grupos de alumnos presentaban mayor habilidad al orientar curvas e identificar el sentido de los campos vectoriales, respecto a lo que sucede tradicionalmente. Esta habilidad se puso de manifiesto también al trabajar con los teoremas de Stokes y Green, al calcular circulación de campos vectoriales o el trabajo realizado por una fuerza a lo largo de curvas planas.

7 Trabajos futuros

Estamos trabajando ahora en reformular los trabajos prácticos, incluyendo consignas que motiven a los alumnos a recrear en forma individual o grupal esta propuesta.

Estas modificaciones tendrán los siguientes propósitos:

- Permitirles a los alumnos reconocer el uso de habilidades que adquirieron en las asignaturas previas de Álgebra y Análisis Matemático.
- Modificar el contrato didáctico existente, para enriquecer las situaciones de aprendizaje de nuestros alumnos.
- Utilizar GeoGebra como una herramienta mediadora del aprendizaje.
- Generar la necesidad de articulación entre los distintos registros de representación, lo que permitirá una mejor conceptualización de los objetos matemáticos en cuestión.
- Incentivar a los alumnos para que adquieran cierta habilidad en la utilización del Software GeoGeobra, para ser utilizado en el estudio de curvas planas o no planas en el espacio.
- Favorecer la autonomía para facilitar que los alumnos se transformen en protagonistas de su aprendizaje.

Referencias

1. Rojas, P.: Sistemas de representación y aprendizaje de las matemáticas. *Revista Digital Matemática, Educación e Internet*, Vol. 12, No. 1, pp. 1-5(2012).
2. Oviedo, L; Kanashiro, A; Bnzaquen, M; Gorrochategui, M: Los registros semióticos de representación en matemática. *Revista Aula Universitaria*, Vol.13, pp. 29-36. (2012).
3. Courant, R; John, F.: *Introducción al cálculo y al análisis matemático*, Grupo Noriega Editores, (2007).
4. Rey Pastor; Pi Calleja; Trejo: *Análisis Matemático*, Ed. Kapelusz, 7ma edición, (1968).
5. Vergnaud, G.: Pourquoi la théorie des champs conceptuels? *Infancia y Aprendizaje,* Vol. 36, No. 2, pp. 131-161. (2013).

Volver al Índice

Coordinación de Registros de Representación Semiótica en el Tema Sistemas de Ecuaciones Lineales Utilizando Software GeoGebra

Gallo, Humberto G. ; Herrera, Carlos G.
[1] Departamento de Formación Básica, Facultad de Tecnología y Ciencias Aplicadas, Universidad Nacional de Catamarca
Maximio Victoria 55, CP 4700, San Fernando del Valle de Catamarca, Argentina
hgg252002@yahoo.com.ar ,cgherrera@tecno.unca.edu.ar

Resumen. Dado que los objetos matemáticos son entes abstractos y solo es posible trabajar con ellos a través de sus diferentes representaciones, las actividades cognitivas de tratamiento y conversión de registros semióticos de representación se tornan fundamental en el proceso de aprendizaje de un concepto. En Algebra Lineal se han definido distintos registros semióticos de representación de vectores y en particular para el concepto Sistemas de Ecuaciones Lineales se pueden expresar a través de registro algebraico, matricial o gráfico. En función de ello se realizó un trabajo de cátedra con el objetivo de estudiar el nivel de coordinación entre registros utilizando el software dinámico GeoGebra. Los resultados preliminares indican que en general no se presentan dificultades en la coordinación de entre los registros algebraico y gráfico, aunque si se observan en la coordinación entre los registros matricial y gráfico, especialmente en la interpretación geométrica del conjunto solución a partir de la matriz reducida de un sistema de ecuaciones.

Palabras Clave: Álgebra lineal, Sistemas de ecuaciones lineales, Registros semióticos de representación.

1 Introducción

Según [1] el aprendizaje de la matemática es un campo de estudio propicio para el análisis de actividades cognitivas importantes como la conceptualización, el razonamiento, la resolución de problemas y la comprensión de textos. Enseñar y aprender matemática conlleva que estas actividades cognitivas requieran además del lenguaje natural o el de las imágenes, la utilización de distintos registros de representación y de expresión.

Los conceptos matemáticos no son objetos reales, por consiguiente se debe recurrir a distintas representaciones para su estudio y para llevar esto a cabo resulta importante tener en cuenta que estas representaciones no son el objeto matemático en sí, sino que ayudan a su comprensión. Si no se distingue el objeto matemático de sus representaciones, no puede haber comprensión en matemática.

En el caso de conceptos de Algebra Lineal, [2], aplica y prueba la teoría fundamentada por [1] en ese contexto. Distingue entre tres registros de representación semiótica de vectores: el registro gráfico, el registro tabular, y l registro simbólico (la teoría axiomática de los espacios vectoriales). A través de varios estudios, se ha demostrado que la cuestión de los registros, en especial en lo relativo a la conversión, normalmente no se toma en cuenta ni en la enseñanza o en los libros de texto. También identificó una serie de errores de los estudiantes que podrían ser interpretadas como una confusión entre un objeto y su representación (especialmente un vector y su representación geométrica) o como una dificultad en la conversión de un registro a otro [3].

Otras investigaciones han confirmado las dificultades en los estudiantes en la actividad cognitiva de conversión de un objeto matemático del algebra lineal de un registro de representación a otro como por ejemplo los trabajos de [4] que versan sobre conceptos básicos de la teoría de espacios vectoriales, [5] sobre la coordinación de diferentes registros de representación de Transformaciones Lineales en el plano, [6] investigaron sobre dificultades en conversión de registros de representación en el tema sistemas de ecuaciones lineales, especialmente cuando se parte desde el registro gráfico de un sistema de ecuaciones lineales.

En el caso de Algebra Lineal, el trabajo con softwares educativos puede ayudar a resolver el problema de coordinación de diferentes representaciones de un objeto matemático, como ser algebraica, matricial, o gráfica. En las últimas décadas, paralelamente al desarrollo de nuevas tecnologías de información y comunicación, han aparecido numerosos aplicativos o software de carácter educativo o científico que se pueden utilizar como herramienta didáctica en el proceso de enseñanza y aprendizaje de contenidos matemáticos.

Se pueden citar como antecedentes los trabajos de [7], quién propone un diseño pedagógico de temas de Algebra Lineal utilizando los softwares Cabri y Maple o [8] quienes trabajan con Cabri en la interpretación geométrica de Transformaciones Lineales. [9] utilizan Cabri para objetos geométricos en el espacio en la enseñanza de Geometría Analítica. Por su parte en los últimos años ha tenido un importante desarrollo en el dictado de contenidos matemáticos el software libre Geogebra. Así por ejemplo en los trabajos de [10,11] se utiliza dicha aplicación como herramienta en el dictado de distintos temas matemáticos. Por otra parte, MATLAB es un software científico muy utilizado como herramienta informática en la enseñanza de contenidos de Algebra Lineal. En este sentido existe numerosa bibliografía al respecto entre los que se pueden citar los textos de [12, 13].

En función de ello se realizó un trabajo de cátedra con el objetivo de estudiar el nivel de coordinación entre registros utilizando el software dinámico GeoGebra.

2 Fundamentación Teórica

Dado que los objetos matemáticos son entes abstractos, sólo es posible trabajar con ellos a través de sus representaciones, considerándose que una representación es un signo o una configuración de signos, caracteres u objetos que pueden ponerse en lugar de algo distinto de él mismo (simbolizar, codificar, dar una imagen o representar). Por tal motivo, es posible que el objeto representado varíe según el contexto o el uso de la representación del mismo, así por ejemplo en el caso de un gráfico cartesiano puede representar una función o quizás el conjunto solución de una ecuación algebraica.

En matemática, las representaciones no se pueden entender de manera aislada, así una gráfica particular en un sistema cartesiano adquiere sentido sólo como parte de un sistema más amplio con significados y convenciones formando un sistema de representaciones de un mismo objeto matemático según sostienen [14].

"Se consideran representaciones internas los constructos de simbolización personal de los estudiantes, las asignaciones de significado a las notaciones matemáticas. En [14] se incluyen también como representaciones internas el lenguaje natural del estudiante, su imaginación visual y representación espacial, sus estrategias y heurísticas de resolución de problemas, y también sus afectos en relación a las matemáticas. Las representaciones cognitivas internas (o mentales) se introducen como una herramienta teórica para caracterizar las cogniciones complejas que pueden construir los estudiantes sobre las representaciones externas. No se pueden observar directamente, sino que son inferidas a partir de conductas observables" [15].

"Los sistemas de representaciones externas comprenden los sistemas simbólicos convencionales de las matemáticas tales como la numeración en base diez, notación formal algebraica, la recta numérica real, la representación en coordenadas cartesianas. También se incluyen entornos de aprendizaje, como los que utilizan materiales manipulativos concretos, o micro mundos basados en el uso de ordenadores. Algunos sistemas de representación externos son principalmente notacionales y formales, como los sistemas de numeración, escritura de expresiones algebraicas, convenios de expresión de funciones, derivadas, integrales, etc. Otros sistemas externos muestran relaciones de manera visual o gráfica, como las rectas numéricas, gráficos basados en sistemas cartesianos o polares, diagramas geométricos; las palabras y expresiones del lenguaje ordinario son también representaciones externas. Pueden denotar y describir objetos materiales, propiedades físicas, acciones y relaciones, u objetos que son mucho más abstractos [15].

La relación entre estas dos modalidades de representación fue expresada por [16], para que las representaciones mentales y las representaciones externas no puedan ser vistas como dominios diferentes, pues el desenvolvimiento de las representaciones mentales se da como una interiorización de las representaciones externas y la diversificación de las representaciones de un objeto aumenta la capacidad cognitiva del sujeto y, por consiguiente, sus representaciones mentales.

De igual modo y coincidiendo con [16] es posible afirmar que se ha generado la comprensión de un concepto por parte de un estudiante, o de un docente, o de una persona en general, cuando el mismo ponga de manifiesto que ha enriquecido sus redes internas de conocimiento, lo cual sólo es posible observar a través de los sistemas de representación y a través de las actividades que pueda realizar asociadas a los mismos, con respecto al concepto en cuestión.

"Las representaciones semióticas son producciones constituidas por el empleo de signos que pertenecen a un sistema de representación. Una figura geométrica, un enunciado en lengua natural, una fórmula algebraica, una gráfica, son representaciones semióticas que pertenecen a sistemas semióticos diferentes" [17]. [17] define las representaciones semióticas como producciones humanas constituidas por el empleo de signos y que pertenecen a un sistema de representación, el cual tiene sus propias limitaciones de significación y de funcionamiento. Un enunciado en lenguaje natural, una figura geométrica, una gráfica, una expresión algebraica, son representaciones semióticas que pertenecen a sistemas semióticos diferentes.

Según [17, 18] para que un sistema semiótico pueda ser un registro de representación, debe permitir tres actividades cognitivas fundamentales:

- La formación de una representación identificable dentro de un registro dado. Por ejemplo, el enunciado de una frase, la elaboración de un dibujo o esquema, de una gráfica, la escritura de una expresión algebraica, etcétera. Esta formación debe respetar las reglas propias del registro semiótico en el cual se produce la representación, la función de estas reglas es asegurar las condiciones de identificación y de reconocimiento de la representación, así como también la posibilidad de su utilización para los tratamientos.
- El tratamiento de una representación, que es la transformación de esta representación en el registro mismo dónde ha sido formada. El tratamiento es una transformación interna equivalente en un registro. Por ejemplo, la transformación equivalente de una expresión algebraica.
- La conversión de una representación, que es la transformación de esta representación en una representación dentro de otro registro, conservando la totalidad o solamente una parte del contenido de la representación inicial. Por ejemplo, la transformación de una expresión algebraica en una gráfica, o viceversa.

En el caso particular de registros de representación semiótica para conceptos del algebra lineal [19] mencionan el registro algebraico donde se forman expresiones del tipo Z=a*V+c*W; el registro matricial, donde se representan arreglos rectangulares de otros objetos; el registro gráfico-sintético donde los vectores son representados con flechas definidas por su magnitud, dirección y sentido; y el registro gráfico cartesiano que se caracteriza por utilizar ejes para definir a los vectores con las coordenadas relativas a éstos.

“Una persona con una buena coordinación de registros podría resolver situaciones matemáticas trabajando en un solo registro, no porque no pueda emplear otros, sino porque decidió que la manera más eficiente de llegar a la solución es trabajar en ese único registro, considerando los datos que tiene, los tratamientos que podría realizar en los diferentes registros y la solución a la que desea llegar. De esta manera no se requiere la utilización hacia el exterior de representaciones de los registros coordinados en la situación que se esté tratando”. [19]. También afirman que la “aprehensión conceptual implica ineludiblemente la conversión entre registros; pero esta última suele ser la menos espontánea y la más difícil de realizar de las tres actividades cognitivas propias de los registros de representación. La coordinación consiste en la movilización y la articulación cuasi-inmediatas de los registros de representación semiótica. Esta coordinación supone como condición principal la discriminación de las unidades significantes a poner en correspondencia en cada registro”.

3 Experiencia Realizada

A los fines de analizar la realidad de los alumnos de la facultad de Tecnología y Ciencias Aplicadas de la Universidad Nacional de Catamarca respecto del marco teórico planteado, se realizó un estudio exploratorio durante el primer mes de dictado de la Asignatura Algebra.

La población en estudio fueron alumnos de primer año de carreras de Ingeniería en Agrimensura, Electrónica, Informática y de Minas de la mencionada Universidad, cohorte 2016, tomándose como criterios de selección de la muestra aquellos alumnos que completen un mínimo de asistencia a los trabajos prácticos, que no sean reinscriptos y que no hayan cursado carreras afines o con contenidos de matemáticas. Se trata de una investigación de tipo descriptivo, transversal considerándose una muestra de tipo aleatoria de 33 alumnos.

Los alumnos desarrollaron una serie de actividades utilizando el software dinámico GeoGebra, a través de sus vistas algebraica y geométrica para el tema Sistemas de Ecuaciones Lineales, trabajando en el plano o el espacio. En Fig. 1 y Fig. 2, que corresponden a capturas de pantalla de GeoGebra se puede observar un sistema de ecuaciones lineales en R^2 y R^3 respectivamente. En las mismas se visualiza en la ventana de vista algebraica la matriz ampliada correspondiente al sistema de ecuaciones mientras que en la vista geométrica se observa la representación gráfica de cada una de las ecuaciones lineales, la forma algebraica del sistema y el conjunto solución del mismo. Los deslizadores de GeoGebra permiten modificar los valores de la matriz de coeficientes y de términos independientes observándose al instante las modificaciones en la representación de la ecuación como en el conjunto solución del sistema. También se puede visualizar la matriz reducida por filas correspondiente al sistema.

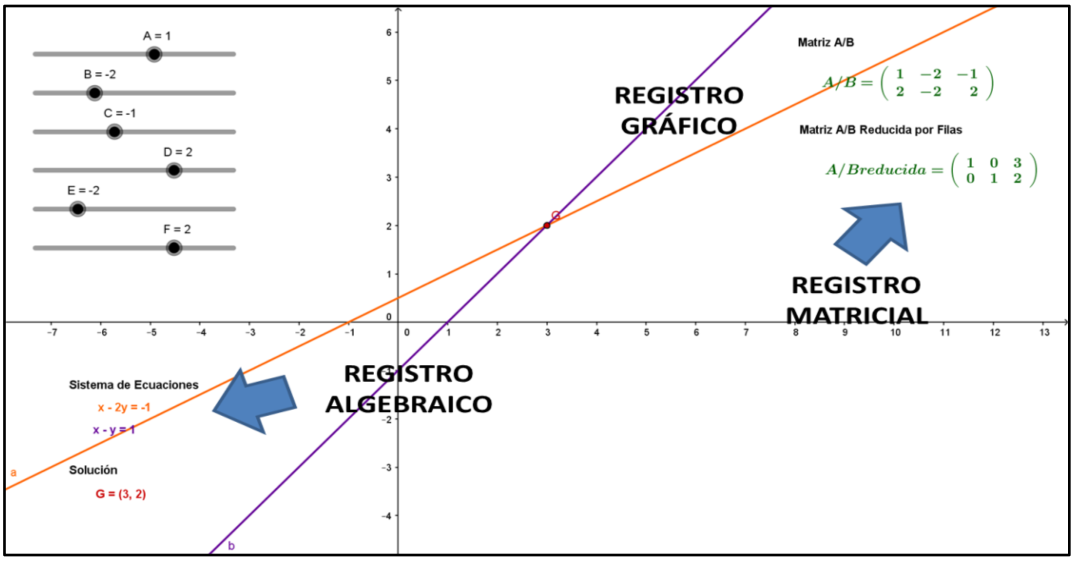


Fig. 1. Vista gráfica en GeoGebra de un sistema de ecuaciones lineales en R^2.

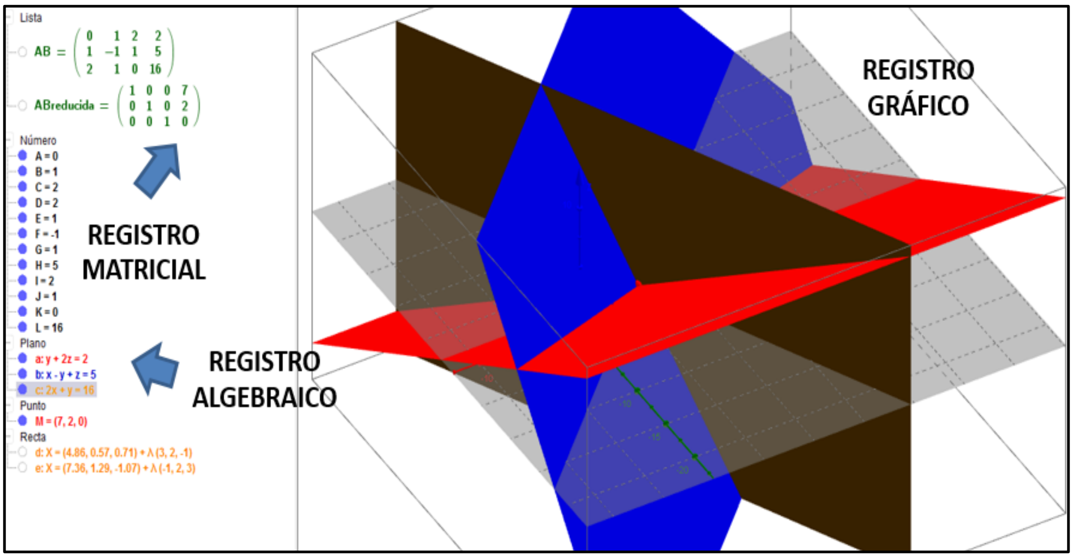


Fig. 2. Vista Gráfica 3D en GeoGebra de un sistema de ecuaciones lineales en R^3.

Las actividades que se plantearon a los alumnos fueron las siguientes:

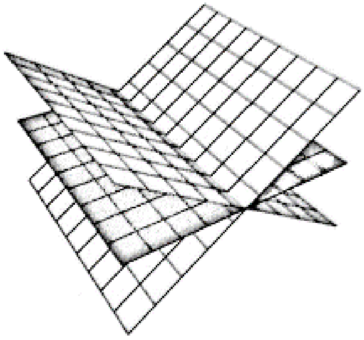
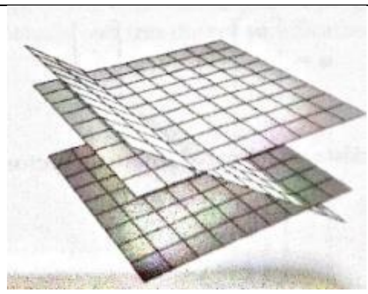
Actividad 1: determinar, en un sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas, los valores de los coeficientes E y F para que el sistema sea compatible determinado, indeterminado o incompatible.

$$\begin{cases} -x+2y=-4 \\ 3x-E.y=F \end{cases} \qquad \textbf{(1)}$$

Objetivo: Identificar el nivel de coordinación entre los registros de representación algebraico y gráfico de un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas a través de sus distintos tipos de soluciones.

Actividad 2: desarrollar un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas de manera que sea compatible indeterminado e interpretar geométricamente el mismo.
Objetivo: Identificar el nivel de coordinación entre los registros de representación algebraico y gráfico de un sistema de dos ecuaciones lineales con dos variables.

Actividad 3: Indicar el tipo de solución de los sistemas de tres ecuaciones con tres incógnitas cuyas representaciones gráficas se observan en A y B, justificando su respuesta.

A	B
	

Objetivo: Identificar el nivel de coordinación entre los registros de representación geométrico o gráfico y algebraico.

Actividad 4: Sea la matriz A/B en su forma escalonada correspondiente a un sistema de ecuaciones lineales en R^3.

$$A/B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & K & L \end{bmatrix} \qquad \textbf{(2)}$$

a) Si la representación gráfica del sistema de ecuaciones A.X = B fuese la “A” de la Actividad 3, que valores deberían tener los coeficientes “K” y “L”?
b) Si la representación gráfica del sistema de ecuaciones A.X = B fuese la “B” de la Actividad 3, que valores deberían tener los coeficientes “K” y “L”?

Objetivo: Identificar el nivel de coordinación entre los registros de representación matricial y gráfico a partir del conjunto solución de un sistema de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas.

ACTIVIDAD 5: Diseñar un sistema de dos ecuaciones con tres incógnitas de manera que sea compatible indeterminado e interpretar geométricamente el conjunto solución, justificando sus respuestas.
Objetivo: Identificar el nivel de coordinación entre los registros de representación gráfico y algebraico de un sistema de dos ecuaciones lineales con tres variables.

4 Resultados obtenidos de la experiencia realizada

En la Tabla 1 se presentan las respuestas de los alumnos correspondientes a cada una de las actividades descriptas.

Con respecto a la Actividad N°1 no se observan mayores dificultades en interpretar geométricamente el conjunto solución del sistema de ecuaciones, aunque en el desarrollo de la actividad se observa una fuerte tendencia a modificar en la pantalla de GeoGebra los coeficientes E y F de manera que las rectas se intercepten, sean coincidentes o paralelas de acuerdo a que el sistema sea compatible determinado, indeterminado o incompatible. Un porcentaje menor de los alumnos reducen la matriz y obtienen los valores de los parámetros E y F que satisfagan el tipo de solución solicitado.

Tabla 1. Frecuencias de respuestas de los alumnos a las actividades planteadas. Fuente: elaboración propia

ACTIVIDAD	NO RESPONDE	INCORRECTAS	PARCIALMENTE CORRECTAS	CORRECTAS
Actividad 1A	2	8	9	**14**
Actividad 1B	2	6	6	19
Actividad 1C	2	8	5	18
Actividad 2	3	2	2	26
Actividad 3A	2	2	4	25
Actividad 3B	3	1	6	23
Actividad 4A	10	7	2	**14**
Actividad 4B	10	6	3	**14**
Actividad 5	6	7	1	19

Las respuestas de los alumnos a las Actividad N° 2 indican que, en general, no presentan dificultades en diseñar un sistema de ecuaciones en R^2 que cumplan un determinado tipo de solución utilizando un entorno gráfico como GeoGebra. Similares resultados se observan respecto a la Actividad 5, donde se solicita diseñar un sistema de ecuaciones en R^3 que cumpla un determinado tipo de solución.

Las respuestas correspondientes a la Actividad 4 que consistía en vincular una matriz escalonada con un determinado tipo de solución de un sistema de ecuaciones en R^3, muestran el menor número de respuestas correctas y el mayor número de alumnos que no responden.

Los resultados obtenidos para la actividad 5, que se desarrolla en R^3 indica resultados intermedios, evidenciando un mayor nivel de dificultad por parte de los alumnos en su realización que los correspondientes a la actividad 2, de características similares, pero desarrollada en R^2,

5 Conclusiones

Del análisis de los resultados para cada una de las actividades desarrolladas por los alumnos se pueden extraer las siguientes conclusiones preliminares:

No se observan mayores dificultades en la coordinación entre los registros gráficos y algebraicos, ya que un elevado porcentaje de alumnos pudo diseñar un sistema de ecuaciones en R^2 o R^3 para un tipo de solución específico.

Con respecto al registro matricial de un sistema de ecuaciones se observan algunas dificultades en la coordinación de los registros de representación matricial y gráfico, es decir dificultades en la interpretación geométrica del conjunto solución a partir de la matriz reducida de un sistema de ecuaciones, ya que es la actividad en la que se observa menor frecuencia de respuestas correctas. Un elevado porcentaje de respuestas correctas llega a ellas a través de la visualización de la vista geométrica del sistema de ecuaciones y como las gráficas de cada una de ellas se modifica mientras se modifican los valores de los coeficientes de la matriz respectiva.

Se evidencia mayor dificultad de los alumnos en la coordinación de registros cuando se trabaja en el dominio del espacio (R^3) que cuando se lo hace en el dominio del plano (R^2).

Estos resultados indican la necesidad de profundizar y complementar este tipo de estudios primarios, dando origen a nuevas líneas de trabajo, en especial en la coordinación de los registros matricial y gráfico, en la relación entre el dominio de trabajo y la dificultad evidenciada por los alumnos, y en el impacto en el aprendizaje, en particular la coordinación entre diferentes registros, a partir del uso de herramientas informáticas al estilo GeoGebra.

Referencias

1. Duval, R. *Semiosis y pensamiento humano: registros semióticos y aprendizajes intelectuales*. Universidad del Valle. 2004.
2. Pavlopoulou, K. Un probleme décisif pour l'apprentissage de l'algebre linéaire: la coordination des registres de représentation'. *In Annales de didactique et de Sciences cognitives* (Vol. 5, pp. 67-93). 1993.
3. Dorier, J. L. (Ed.). *On the teaching of linear algebra* (Vol. 23). Springer Science & Business Media. 2000.
4. Soto, J. L. Algunas dificultades en la conversión gráfico-algebraica de situaciones de vectores. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*. 2005.
5. Ramírez, O., Romero, C. F., & Oktaç, A. Coordinación de registros semióticos y las transformaciones lineales en el plano. 2013.
6. Arellano, F., & Oktaç, A. Algunas dificultades que presentan los estudiantes al asociar ecuaciones lineales con su representación gráfica. 2009.
7. Klasa A few pedagogical designs in Linear Algebra with Cabri and Maple. *Linear Algebra and its Applications* 432. Pags. 2100-2111. 2010
8. Dreyfuss, Hillel, Sierpinska. Cabri based linear algebra. Tranformations. Ponencia realizada en II Congreso Europeo sobre Educación en Matemática. Marianske. República Checa. 2001.
9. Kösa, T.; Karakus, F. Using dynamic geometric software CABRI 3D for teaching Analytic Geometry. *Social and Behavioral Sciences 2* (2010) 1385-1389. 2010.
10. Reis, S. A. Computer supported mathematics with Geogebra. *Social and Behavioral Sciences 9* (2010). 1449-1455. 2010.
11. Zengin Y.; Furkan, H.; Kutluca, T. The effect of dynamics mathematics software Geogebra on estudent achievement in teaching of trigonometry. *Social and Behavioral Sciences 31* (2012). 183-187. 2011.
12. Kolman, Bernard. *Algebra Lineal con Aplicaciones y Matlab*. Ed. Prentice Hall. México DF. 1999.
13. Grossman, Stanley. *Álgebra Lineal*. Editorial Mc Graw Hill. México DF. 1996.
14. Goldin, G. Stheingold, *System of representations and the development of mathematical concepts. The roles of representation in school mathematics*, 1-23. 2001.
15. Godino, J. D. *Teoría de las funciones semióticas*. Trabajo de investigación presentado para optar a la Cátedra de Universidad de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada. http*://www. ugr. es/local/jgodino*. 2003.
16. Romero, I. Representación y comprensión en pensamiento numérico. Cuarto Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (pp. 35-46). 2000.
17. Duval, R. Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento. *Investigaciones en Matemática Educativa* II, 173-201. 1998.
18. Duval, R. Semiosis y noesis. *Lecturas en didáctica de la matemática: Escuela Francesa*, 118-144. 1993.
19. Vera, M., & Miranda, E. (2014). *El aprendizaje de espacios vectoriales en ambientes computacionales*. 2014.

Volver al Índice

Variables Marginales en la Economía desde la Ingeniería

Daniel Juan Alberto Abud[1] – Ernesto Guillermo Nieri[2]
Facultad de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales – Universidad Nacional de Córdoba
[1]Departamento de Física
[2]Departamento de Ingeniería Económica y Legal
Avenida Vélez Sarsfield 1611 (CP 5000) Córdoba. Argentina.
daniel.abud@yahoo.com , ernestognieri@hotmail.com

Resumen. Existen variables de uso en Economía que suele resultar interesante estudiar su variabilidad. Estas son el Ingreso Marginal, el Costo Marginal, etc. Tiene una matemática implícita que es importante destacar ya que involucra el concepto de derivada. La relevancia en Ingeniería radica en la maximización y minimización de ciertas funciones. Interesa vincular el concepto de Costo de Oportunidad con las variaciones. La derivación es una herramienta muy potente del cálculo. Si las funciones continuas son aquellas cuyas graficas no presentan saltos, las funciones derivables tienen la propiedad de que su gráfica, además de continua, sin picos, ni cambios bruscos de dirección, o rectas tangentes verticales. Existen varias formas de aproximarse al concepto de derivada de una función en un punto. Nosotros elegiremos dos: a través de la tasa de variación instantánea de una función y a partir del problema de la recta tangente a una gráfica en un punto.

Palabras Clave: Derivada, Variación, Costo de oportunidad, Interpretación ingenieril.

1 Introducción

La derivada y, en consecuencia la integral, tienen aplicaciones en Administración y Economía en la construcción de las tasas marginales. Es importante, para los que nos dedicamos a la Economía, este trabajo con el análisis marginal porque permite calcular, por ejemplo, entre otras cosas, el punto de maximización de Utilidades. En el análisis marginal se examinan los efectos incrementales en la rentabilidad y en otras cuestiones de variabilidad. Si una Empresa está produciendo determinado número de unidades al año, el análisis marginal se ocupa del efecto que se refleja en la Utilidad si se produce y se vende una unidad más. Para que este método pueda aplicarse a la maximización de Utilidades se deben cumplir las siguientes condiciones: 1) Deberá ser posible identificar por separado las funciones de Ingreso Total y de Costo Total. 2) Las funciones de Ingreso y Costo deben formularse en términos del nivel de producción o del número de unidades producidas y vendidas [1, 2, 4, 11].

2 Descripción del Modelo

La Producción es el proceso de creación de los Bienes y Servicios que la población puede adquirir para consumirlos y satisfacer sus necesidades. La Teoría de la Producción, a través de la *Función de Producción*, nos permite analizar las diversas formas en que los empresarios pueden combinar sus recursos o insumos para producir Bienes o Servicios, de tal forma que le resulte económicamente conveniente. La Empresa utiliza recursos productivos para realizar el proceso de producción, estos recursos son considerados insumos que se transforman, con el objeto de producir Bienes y Servicios [1, 2, 4, 5, 9].

Se define, matemáticamente, a la *función Producción* (función escalar de variable vectorial, es decir de varias variables) [6] como:

$$Q = f(RN,K,L) \tag{1}$$

donde:

Q: Cantidad física de un Bien o Servicio producido (producto)
RN: Cantidad física de Recursos Naturales empleados (insumo)
K: Cantidad física de Capital empleado (insumo)

L: Cantidad física de Trabajo empleado (insumo)

f: Función que determina la forma en que se combinan matemáticamente los distintos insumos (función Tecnología) para obtener *Q*.

Recordemos también que los insumos o factores (*RN, K, L*) toman un valor limitado, es decir, que cada uno de ellos no puede disponerse de manera "*infinita*", sino que cada uno de ellos puede tomarse como máximo con un valor limitado y "*finito*". [3, 4]

Los factores (o insumos) de la Producción pueden variar a corto o largo plazo. A partir de ahora consideraremos el factor Trabajo o Mano de Obra (L) como el factor variable a Corto Plazo (se pueden contratar más o menos horas de trabajo por semana) mientras que consideraremos como factores constantes o no variables en el Corto Plazo al Capital (K), los Recursos Naturales (RN) y a la Tecnología (f).

Consideremos una Economía donde sólo se producen dos Bienes:

Bien 1 $\rightarrow$ Q_1 (Cantidad producida del Bien 1)

Bien 2 $\rightarrow$ Q_2 (Cantidad producida del Bien 2)

En estas ecuaciones se suponen implícitos: *f* (Tecnología), *RN* (Recursos Naturales); y se suponen explícitos: *L* (Trabajo). Suponemos también que en esta Economía hay una cantidad total de trabajo disponible *T*; también decimos que si la producción del Bien 2, es decir, Q_2, emplea *L* unidades de Trabajo, implica que el resto de Trabajo disponible para la producción del Bien 1, es decir, Q_1, es $T - L$, es decir, que el factor *L* se emplea a pleno, puesto que el Total del Trabajo disponible:

$$\underbrace{(T-L)}_{\boldsymbol{Q_1}} + \underbrace{L}_{\boldsymbol{Q_2}} = T \qquad \textbf{(2)}$$

Si consideramos un par de ejes cartesianos:

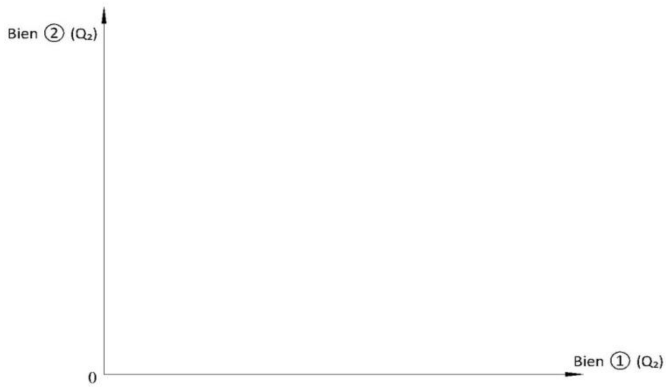


Fig.1. Una gráfica que representa una Economía (idealizada) de Producción de sólo dos Bienes.

Comentario: Normalmente, los egresados de las Ciencias Sociales no interpretan bien el hecho de graficar una variable en función de otra. Son solo funciones reales de variable real. Pero, la síntesis que expresa un gráfico es menester recalcarla con estas disciplinas sociales. [1]

3 Ejemplo ilustrativo del Modelo

Supongamos las siguientes *funciones producción*:

$$\left.\begin{aligned} Q_1 &= 12(T - L) \\ Q_2 &= 25L \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

para cada valor de $L \rightarrow 0 \leq L \leq T$ considerando $T = 100$.

Tendremos un punto en el plano (par ordenado) definido por los valores que Q_1 y Q_2 toman para ese particular valor de "L". Dando valores:

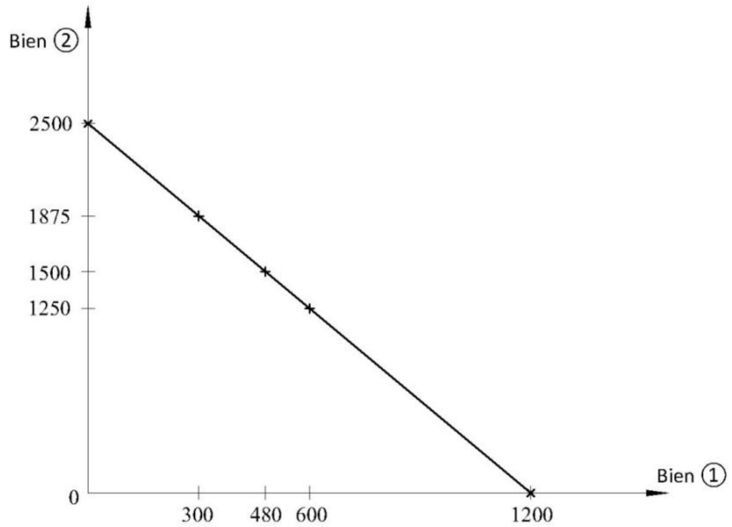


Fig. 2. Una gráfica que representa la produccion del Bien 1 y del Bien 2 con datos dados.

Si se considera:

$$Q = f(T, L) \qquad (4)$$

si operamos el rendimiento del Factor L se tiene,

$$\frac{dQ_1}{dL} = -12 \qquad (5)$$

$$\frac{dQ_2}{dL} = 25 \qquad (6)$$

y el rendimiento del Factor Constante:

$$\frac{d^2Q_1}{dL^2} = 0 \qquad (7)$$

$$\frac{d^2Q_2}{dL^2} = 0 \qquad (8)$$

Ahora, calculando el Costo de Oportunidad, para lo cual vamos a expresar una en función de la otra, es decir:

$$Q_1 = \varphi(Q_2) \tag{9}$$

y

$$Q_2 = \psi(Q_1) \tag{10}$$

partiendo de las ecuaciones paramétricas de Q_1 y Q_2 y operando:

$$\left.\begin{aligned} Q_1 &= 12T - 12L \\ Q_2 &= 25L \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

eliminando L entre las dos ecuaciones, queda:

$$\left.\begin{aligned} Q_1 &= \varphi(Q_2) = 12{,}02T - 0{,}48Q_2 \\ Q_2 &= \psi(Q_1) = 25T - 2{,}08Q_1 \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

Definimos como Costo de Oportunidad del Bien 1 en relación al Bien 2, a la expresión:

$$CO_{1/2} = \left|\frac{dQ_2}{dQ_1}\right| \tag{13}$$

Léase, lo que hay que sacrificar de la producción del Bien 2 para producir una unidad adicional del Bien 1.
Nota: Se toma el valor absoluto de la derivada.
Recíprocamente, el Costo de Oportunidad del Bien 2 en relación al Bien 1:

$$CO_{2/1} = \left|\frac{dQ_1}{dQ_2}\right| \tag{14}$$

Entonces, el Costo de Oportunidad constante:

$$\left|\frac{dQ_2}{dQ_1}\right| = CO_{1/2} = 2{,}08 \tag{15}$$

y

$$\left|\frac{dQ_1}{dQ_2}\right| = CO_{2/1} = 0{,}48 \tag{16}$$

porque

$$\frac{d^2Q_2}{dQ_1^{\,2}} = 0 \tag{17}$$

$$\frac{d^2Q_1}{dQ_2^{\,2}} = 0 \tag{18}$$

La derivada segunda igual a cero indica que el Costo de Oportunidad es constante en ambos casos. Un productor alcanza el equilibrio cuando maximiza la producción para una determinada erogación. Es decir, a partir de lo que el Productor dispone para gastar y los precios de los factores productivos, tratará de maximizar su producción. Este será motivo de otros trabajos a desarrollar [5, 6].

3.1 Otro ejemplo

Para mostrar situaciones diferentes en Economía, es común recurrir a diversos ejemplos, ya que uno solo nunca alcanza. Supongamos las siguientes funciones de producción del Bien 1 y del Bien 2:

$$\left.\begin{aligned} Q_1 &= 12(T - L)^2 \\ Q_2 &= 25L \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

con $0 \le L \le 100 = T$

De nuevo para la producción de los Bienes 1 y 2 se emplea *todo* el factor T disponible:

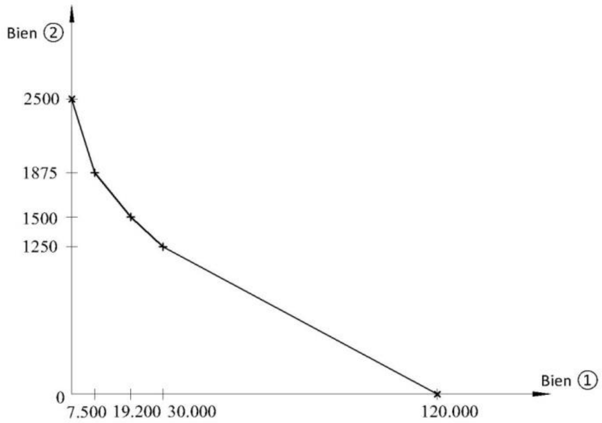


Fig. 3. Gráfico de una variable en función de la otra, en una Economía de solo dos Bienes.

Ahora, vemos que el *rendimiento* ya no es el mismo como en el ejemplo anterior, tomando la primera de las (19) y derivando:

$$\frac{dQ_1}{dL} = -24(T - L) \tag{20}$$

derivando otra vez, se observa que el Rendimiento del factor es CRECIENTE:

$$\frac{d^2Q_1}{dL^2} = 24 > 0 \tag{21}$$

En cambio, tomando la segunda expresion de las (19) y derivando:

$$\frac{dQ_2}{dL} = 25 \tag{22}$$

derivando otra vez, se observa que, ahora, el Rendimiento del factor es CONSTANTE, entonces:

$$\frac{d^2Q_2}{dL^2} = 0 \tag{23}$$

Después de eliminar la variable paramétrica "L" entre las dos funciones Q_1 y Q_2, obtenemos:

$$Q_2 = 25T - 25\sqrt{\frac{Q_1}{12}} \tag{24}$$

quedando una en función de la otra. El costo de oportunidad:

$$CO_{1/2} = \left|\frac{dQ_2}{dQ_1}\right| = 3,61 \times Q_1^{-1/2} \tag{25}$$

es decir,

$$\frac{d^2Q_2}{dQ_1^2} = -1,80 \times Q_1^{-3/2} < 0 \tag{26}$$

el Costo de oportunidad: $CO_{1/2}$ es DECRECIENTE.

Ahora bien, la otra relación es:

$$Q_1 = 12\left(T - \frac{Q_2}{25}\right)^2 \tag{27}$$

operando, otra vez, nos da el Costo de oportunidad recíproco:

$$CO_{2/1} = \left|\frac{dQ_1}{dQ_2}\right| = 0,96\left(T - \frac{Q_2}{25}\right) \tag{28}$$

es decir,

$$\frac{d^2Q_1}{dQ_2^2} = -0,0384 < 0 \tag{29}$$

el Costo de oportunidad: $CO_{2/1}$ es DECRECIENTE, también.

Todo esto significa que, matemáticamente, se muestra que lo que hay que sacrificar de la producción de Bien *2* para obtener una unidad adicional de Bien *1* es cada vez menor a medida que se incrementa la producción de Bien *1*. También se puede interpretar en el gráfico cartesiano como variación de la inclinación de la tangente geométrica en dicho gráfico. Recíprocamente, cambiando el rol del Bien *1* y del Bien *2* podemos interpretar lo anterior [7, 8].

4 Conclusiones y trabajos futuros

A través de este trabajo, se ha podido poner en evidencia la importancia de la Matemática en esta parte de la Ingeniería Económica. En qué sentido? Cuando se habla de *variación*, se refiere siempre en Ingeniería a la utilización de la *derivada*. En general, siguiendo la idea que se ha visto en los ejemplos, la derivada representa la tasa instantánea de cambio de una determinada magnitud. Concepto que nos resulta muy cercano y asequible en la Física, pero no en la Economía. Dado que la Economía es una Ciencia Social no es menor este hecho. Los alumnos, en general, “*sufren*” con esta materia. Ellos no esperan una materia de esta disciplina en las carreras de Ingeniería. [7, 8, 10, 11]

La idea a completar, en futuros trabajos, es interpretar los cambios dinámicos matemáticamente, más allá de los puntos de equilibrio estáticos. Eso conduce a la noción *financiera* versus la noción *económica*. Esto se explica en un determinado Mercado si las condiciones del punto de equilibrio varían en el tiempo. El Costo de oportunidad de un Bien o Servicio visto como la cantidad de Bienes o Servicios que se debe renunciar para obtener una unidad más de ese Bien o Servicio, nos lleva a estudiar las variaciones. Y es ahi, donde tenemos la posibilidad de aplicar conceptos fundamentales como es el de derivada de una función.

Referencias

1. Abud, D "Economía Básica", Editorial Solsona, ISBN Nº 978-987-33-6920-9, Córdoba, (2015).
2. Bulat, Tomas, Economía Descubierta. Ediciones B Argentina. (2013).
3. Cafferata, A.; Recalde de Bernardi; M.; García, R. y Swoboda, C. Actividad y Teoría Económica. Asoc. Coop. Facultad de Ciencias Económicas. UNC. (2001).
4. Dornbusch, R. y Fischer, S. Macroeconomía. Ed. McGraw Hill. (2009).
5. Gigena, S. et al Análisis Matemático II - Teoría, Práctica y Aplicaciones, Ed. GALEON, ISBN Nº 987-9363-04-3, Córdoba. (1998).
6. Masciarelli, Edgardo. Economía. FCEF y N. UNC. Córdoba (2000).
7. Mochon, F. y Becker, V. A. Economía: Principios y Aplicaciones. McGraw Hill. (1997).
8. Rossetti, J. P. Introducción a la Economía. Enfoque latinoamericano. Ed. Harla. (1991).
9. Salvatore D. Microeconomía. Ed. McGraw Hill. (1999).
10. Samuelson, P. A. Economía. Ed. McGraw Hill. (1951).

Volver al Índice

Actividades para Promover el Desarrollo de Habilidades Matemáticas en Torno al Concepto de Derivada: Diseño y Prueba Piloto

Betina Williner, Scorzo Roxana, Favieri Adriana
Departamento de Ingeniería, Universidad Nacional de La Matanza
Florencio Varela 1903, San Justo, Provincia de Buenos Aires, Argentina
{bwilliner, rscorzo. afavieri}@unlam.edu.ar

Resumen. El presente artículo reporta un conjunto de actividades diseñadas para promover el desarrollo de habilidades matemáticas en estudiantes de ingeniería de la Universidad Nacional de La Matanza. El propósito de las mismas es que los alumnos construyan el concepto de derivada y utilicen diferentes registros de representación. Esto forma parte de un proyecto de investigación cuyo objetivo general es explorar el desarrollo de habilidades matemáticas ligadas al concepto de derivada cuando los alumnos resuelven actividades con las características anteriormente mencionadas. El estudio surge debido a las serias dificultades que tienen los alumnos para comprender dicho concepto, cuya importancia es trascendental en la formación de un ingeniero. Presentamos las actividades, hacemos una discusión general de las mismas y por último mostramos los resultados de una prueba piloto que nos permiten realizar ajustes en el diseño.

Palabras Clave: Derivada, Habilidades matemáticas, Diseño de actividades.

1 Introducción

Este artículo surge como parte de una investigación que realizamos en el Departamento de Ingeniería e Investigaciones Tecnológicas (DIIT) de la Universidad Nacional de La Matanza (UNLaM) sobre el desarrollo de habilidades matemáticas y el aprendizaje del concepto de derivada. El objetivo general del estudio es explorar el desarrollo de habilidades matemáticas ligadas al concepto de derivada cuando los alumnos resuelven actividades especialmente diseñadas que involucran diversos sistemas de representación.

Desde hace varios años que parte de la comunidad de educadores matemáticos pone su atención en la falta de comprensión por parte de los alumnos de uno de los conceptos más importantes del Cálculo: la derivada. Dentro de los autores que reflejan esta problemática elegimos a Cantoral y Mirón [1] que expresan:

> (…) la enseñanza habitual del análisis matemático logra que los estudiantes deriven, integren, calculen límites elementales sin que sean capaces de asignar un sentido más amplio a las nociones involucradas en su comprensión. De modo que aun siendo capaces de derivar una función no puedan reconocer en un cierto problema la necesidad de una derivación (pp. 269-270).

En el caso de alumnos de ingeniería la construcción adecuada de este concepto se hace indispensable. A través del mismo se resuelven problemas de optimización, se estudian funciones y sus características, se pueden realizar aproximaciones, entre otros.

A su vez estos alumnos, futuros ingenieros, usan la matemática como herramienta; es decir deben aplicar conocimiento a la resolución de problemas, deben saber "hacer". Este saber hacer se involucra con las habilidades matemáticas, ya que son las acciones o tareas orientadas al logro de un objetivo donde la matemática está involucrada. El desarrollo de habilidades matemáticas ayuda al alumno a no proceder en forma mecánica, memorizando conceptos, definiciones, teoremas y técnicas. Éstas lo auxilian a planificar, a evaluar, a deducir, a inducir, a razonar en matemática, teniendo la capacidad de adaptarse a distintas situaciones y problemas, tal como lo hará una vez inserto en su vida laboral con otros temas. Pensamos que, si ofrecemos al estudiante la posibilidad de enfrentarse a situaciones que lo inviten a desplegar sus facultades creativas para resolverlas por sí mismo, que pueda "hacer" en vez de "copiar", estaremos dándole la oportunidad de "despertarles el gusto por un razonamiento independiente y proporcionarles ciertos recursos para ello" [2].

Otro punto que tuvimos en cuenta en la producción de conocimiento matemático es el empleo de diversos sistemas o registros de representación: numérico, gráfico, algebraico y verbal. Duval [3] indica que la comprensión de un objeto matemático está basada en la coordinación de al menos dos sistemas de representación. En los últimos años se ha fortalecido la postura de que el aprendizaje de la matemática se favorece cuando se incorporan en su enseñanza actividades didácticas en las cuales se usan y articular diferentes sistemas de representación [4].

La combinación de estos aspectos: aprendizaje de la derivada, habilidades matemáticas y registros de representación nos conducen a formular las siguientes preguntas: ¿qué habilidades matemáticas son convenientes desarrollar en los alumnos para que logren una construcción adecuada del concepto de derivada? ¿qué tipo de actividades diseñar para desarrollar habilidades en torno al concepto de derivada y que promuevan el uso flexible de diferentes registros de representación?

Presentamos a continuación cómo seleccionamos las habilidades matemáticas que pensamos favorecen a la comprensión del concepto tratado, cómo diseñamos las actividades que las involucran y los resultados de una prueba piloto que tuvo como objetivo poner a punto la situación didáctica planteada.

2 Marco teórico

2.1 Habilidaes matemáticas

Respecto a la definición de habilidad, varios autores [5, 6, 7, 8], hablan de procedimientos o habilidades como los modos de actuación, de un saber hacer o de contenidos procedimentales. Nosotros definimos procedimiento a la acción o tarea que debemos realizar para lograr un objetivo o fin en el cual la matemática está involucrada. En tanto que una habilidad matemática es la facultad personal de efectuar el procedimiento eficientemente, es decir, la capacidad de realizar acciones correctamente en relación al logro del objetivo planteado.

En el año de 1956, Benjamín Bloom, desarrolló su taxonomía de Objetivos Educativos, que sostiene que el proceso de aprendizaje está relacionado con tres dominios psicológicos, el dominio cognitivo para procesar información, conocimiento y habilidades mentales, el dominio afectivo relacionado con las actitudes y sentimientos y el dominio psicomotor, vinculado a las habilidades manipulativas, manuales o físicas. Lorin Anderson revisó dicha taxonomía y publicó, en el año 2001, la Taxonomía Revisada de Bloom, que como novedad incorpora el uso de verbos en lugar de sustantivos para cada categoría. Las categorías incluyen las habilidades recordar, comprender, aplicar, analizar, evaluar y crear [9].

Otro autor que clasifica las habilidades, y en este caso las habilidades matemáticas, es Delgado Rubí [6]. Esta clasificación resume las habilidades matemáticas en habilidades conceptuales, traductoras, operativas, heurísticas y meta-cognitivas. Profundizando cada una de ellas:

- Habilidades conceptuales: aquellas que operan directamente con los conceptos (identificar, fundamentar, comparar, demostrar).
- Habilidades traductoras: aquellas que permiten pasar de un dominio a otro del conocimiento (interpretar, modelar, recodificar).
- Habilidades operativas: funcionan generalmente como auxiliares de otras más complejas y están relacionadas con la ejecución en el plano material o verbal (graficar, algoritmizar, aproximar, optimizar, calcular).
- Habilidades heurísticas: aquellas que emplean recursos heurísticos y que están presentes en un pensamiento reflexivo, estructurado y creativo (resolver, analizar, explorar).
- Habilidades metacognitivas: las que son necesarias para la adquisición, empleo y control del conocimiento y demás habilidades cognitivas (Planificar, Predecir, Verificar, Comprobar, Controlar).

2.2 Registros de representacniòn

En matemática el sujeto no entra en contacto directo con el objeto en estudio sino con una representación particular de ese objeto matemático [10]. Existen tres polos que no deben confundirse:

- El objeto representado.
- El contenido de una representación, es decir lo que una representación particular presenta del objeto.
- La forma de representación, llamada registro o sistema de representación [3].

Así la comprensión emerge en los sujetos mediante la coordinación de al menos dos registros de representación [3]. Es imprescindible comprender los sistemas de representación porque los objetos matemáticos están dispuestos en una variedad de registros, porque sólo podemos acceder a los objetos matemáticos a través de las vías de representación y porque la representación de un objeto nos muestra ciertas características del mismo y no otras [10]. De esta forma cuantos más sistemas podamos coordinar mejor conoceremos el objeto en cuestión.

Los que involucramos en este trabajo son:

- Registro verbal: El lenguaje coloquial es el utilizado para representar situaciones que pueden ser modeladas en cualquiera de los otros registros.
- Registro analítico: Se expresa analíticamente un concepto recurriendo a notaciones matemáticas adecuadas utilizando símbolos acordados.
- Registro gráfico: Es la representación en el plano cartesiano o eje real o espacio de acuerdo a qué objeto se está tratando.
- Registro numérico: cuando los datos están dados, por ejemplo, a través de tablas [11].

Considerando que se pueden realizar las siguientes operaciones:

- Tratamiento: es la transformación de la representación dentro del mismo registro donde ha sido formulada.
- Conversión: es la transformación de la representación en otra representación en otro registro en la que se conserva la totalidad o parte del significado de la representación inicial.

3 Nuestro contexto

Nuestro contexto es la cátedra de Análisis Matemático I del DIIT de la UNLaM. Esta materia posee un programa tradicional de cálculo diferencial e integral en una variable y es de cursada cuatrimestral con carga horaria de 8 horas reloj por semana. Desde el año 2013 estamos trabajando con una modalidad de enseñanza que combina clases tradicionales expositivas-dialogadas con clases bajo modalidad taller donde los alumnos trabajan con actividades en equipos de dos personas. Estas actividades se basan en los temas fundamentales de la materia: funciones, límite, derivada, problemas de optimización, ecuaciones diferenciales sencillas e integrales definidas. Trabajamos con modelos matemáticos simples (movimiento de una partícula, crecimiento de una población, enfriamiento de un cuerpo, etc.) y las presentamos en distintos registros de representación. Para este espacio contamos con un cuadernillo de actividades común a todas las comisiones de la cátedra. Este espacio es el campo propicio para que el alumno desarrolle habilidades matemáticas vinculadas a los conceptos matemáticos propios del cálculo.

4 Proceso de desarrollo del trabajo

El proceso de desarrollo del trabajo consta de las siguientes etapas:

- Indagación en bibliografía sobre investigaciones y experiencias que tienen como objetivo favorecer en el alumno la comprensión del concepto de derivada.
- Elección de las habilidades matemáticas que consideramos favorecen la comprensión de dicho concepto.
- Indagación sobre diseño de actividades usando diversos registros de representación y basadas en el concepto de derivada.
- Búsqueda en el cuadernillo de la cátedra sobre actividades que se adecúen a nuestro propósito.
- Diseño de actividades.
- Experiencia piloto para ajustar cuestiones como: claridad en las consignas, tiempos de resolución por parte de los alumnos, objetivos de aprendizaje, exigencias en las producciones de los alumnos.

Indagamos en diversas investigaciones que tienen como objetivo favorecer la comprensión del concepto de derivada mediante actividades diseñadas para tal fin [12, 13, 14, 15]. Estos autores señalan que involucrar en las actividades ideas de variación produce resultados alentadores en el aprendizaje de los alumnos sobre el concepto de derivada.

El trabajo que más aporta al nuestro es la propuesta de enseñanza que brinda Dolores [12]; la cual se basa en tres nociones: la *variación*, la *rapidez promedio* de la variación y la *rapidez instantánea* de la variación. En la primera fase se parte de la modelación de problemas sencillos de la física de donde se abstraen las nociones de *variable* y *función,* de éstas se estudian sus propiedades básicas y se resuelven problemas. En la segunda fase la formación del concepto se inicia a través la *rapidez de la variación,* particularmente de la velocidad y aceleración promedio. Después se arriba a la rapidez instantánea mediante un acercamiento intuitivo al límite y mediante la utilización de los infinitesimales. En la tercera fase se amplía la extensión del concepto a funciones que no necesariamente dependen del tiempo introduciendo la definición de *derivada*, se introduce la noción de función derivada, se deducen (por medio de los diferenciales) y utilizan las fórmulas y reglas básicas de derivación, pero sobre todo esta etapa se resuelven problemas para fijar el concepto.

Entonces, inspirados en la propuesta descripta anteriormente, las habilidades que definimos como indicadores del aprendizaje del concepto de derivada tienen su fundamento en las tres nociones fundamentales:

- Variación.
- Rapidez promedio de variación.
- Rapidez instantánea de variación.

Y son:

- Identificar variable independiente y dependiente, dominio e imagen en funciones y en diferentes contextos.
- Identificar y diferenciar las tres nociones fundamentales definidas anteriormente.
- Calcular razones de cambio promedio e instantáneas por medios numéricos y analíticos.
- Explicar el significado en diferentes contextos (incluyendo el geométrico) de las tres nociones fundamentales.
- Aplicar el concepto en la solución de problemas.

Luego nos apoyamos en las actividades seleccionadas sobre el concepto de derivadas presentadas en el cuadernillo de la cátedra, en las investigaciones estudiadas y en las habilidades que queremos fomentar para diseñar una situación de aprendizaje que las promueva.

Pensamos que las actividades tienen que involucrar las nociones fundamentales mencionadas y tienen que brindarse en diversos registros. A su vez quisimos trabajar con tres modelos matemáticos, dos de los cuales están inspirados en el surgimiento del concepto de derivada a través de la historia: por un lado, el problema de la recta tangente y por el otro la necesidad de definir la velocidad instantánea de un cuerpo en movimiento.

Entonces diseñamos tres actividades: una sobre funciones, una sobre límite y la última sobre derivada. Cada una de estas actividades está formada por tres tareas:

- Tarea 1: basada en el modelo geométrico sobre la recta tangente.
- Tarea 2: basada en el modelo de movimiento rectilíneo.
- Tarea 3: basada en el modelo de la presión de un gas a temperatura constante.

En la primera actividad introducimos el concepto de cambio de una variable o variación y el de razón de cambio, dándole a éste último una interpretación dentro de cada contexto. En el primero como pendiente de la recta secante, en el segundo como velocidad media y en el tercero como razón de cambio promedio del volumen del gas respecto a la presión del mismo. La segunda actividad induce a la construcción de la razón de cambio instantánea a través del proceso de límite en los tres modelos. Por último, en la tercera se aplica el concepto de derivada a diversas situaciones.

5 La propuesta didáctica

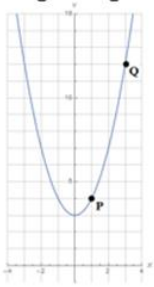
La situación de aprendizaje está formada por las tres actividades anteriormente mencionadas y las llevamos al aula en tres sesiones de trabajo en las que los alumnos las resuelven en grupos de dos personas. El tiempo destinado es aproximadamente dos horas.

Presentamos cada actividad, los enunciados de las tres tareas que la forman y una descripción breve de la misma.

5.1 Actividad de Funmciones

Tarea 1

La siguiente gráfica corresponde a una función f(x):

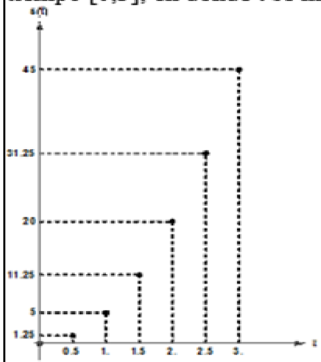


a) Hallar dominio e imagen
b) Indicar las coordenadas de los puntos P y Q.
c) Expresar la función en registro analítico.
d) Calcular la variación de ambas variables cuando la función cambia de P hacia Q.
e) Calcular la razón de cambio promedio.
f) Trazar la recta que pasa por dichos puntos y determinar su ecuación.
g) ¿Qué relación existe entre la pendiente de la recta secante y el cociente calculado en el ítem e?

Fig. 1. Tarea 1 correspondiente a la actividad de Funciones

Tarea 2

El siguiente gráfico de puntos representa la posición de un móvil a lo largo del intervalo de tiempo [0,3], en donde t se mide en segundos y s(t) en metros.



a) Indicar dominio e imagen en el contexto del problema.
b) ¿Cuál es la variable independiente y cuál la dependiente?
c) Unir los puntos en el gráfico y realizar una tabla de acuerdo a los datos dados en el gráfico.
d) Calcular la variación Δs para intervalos de 1 segundo.
e) Calcular el cociente $\Delta s / \Delta t$ a intervalos de 1 segundo.
f) Explicar con tus palabras qué significado tiene ese cociente en el contexto del problema.

Fig. 2. Tarea 2 correspondiente a la actividad de Funciones

Tarea 3

Con el objetivo de analizar la variación del volumen de cierto gas al variar su presión se realiza con dicho gas y, a temperatura constante, una experiencia en la que se obtiene la siguiente tabla de valores.

P(atm)	1	4	7	10
V(lts)	30.00	7.45	4.3	3.00

a) Indicar dominio e imagen en el contexto del problema.
b) ¿Cuál es la variable independiente? ¿Cuál la dependiente?
c) Graficar los puntos de la tabla y unirlos.
d) Calcular los cambios ΔV del volumen para intervalos de tres atmósferas.
e) Calcular el cociente $\frac{\Delta V}{\Delta P}$ a intervalos de tres atmósferas.
f) Explicar con tus palabras qué significado tiene ese cociente bajo el contexto del problema.

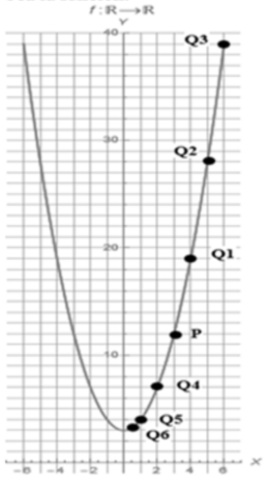
Fig. 3. Tarea 3 correspondiente a la actividad de Funciones

El objetivo de aprendizaje que pretendemos en cada tarea es que el alumno identifique la variable independiente y dependiente (dominio e imagen), calcule los cambios o variaciones de la variable dependiente, calcule la razón de cambio o cociente incremental y que pueda explicar qué significado tiene este cociente en cada una de las situaciones brindadas. Respecto a los registros las tres tareas demandan conversión entre los mismos y están dadas en diferentes registros de representación.

5.2 Actividad de Límite funcional

Tarea 1

Sea la función:



a) Trazar las rectas secantes que pasan por Q1P, Q2P, Q3P, Q4P

b) Se define recta tangente a una función en un punto como la posición límite de las rectas secantes trazadas desde un punto móvil Q a un punto fijo P de la curva. Teniendo en cuenta esta definición trazar en forma aproximada la recta tangente a la función en el punto P.

c) Calcular la pendiente de las rectas secantes del ítem a)

d) Explicar el significado de los cálculos recién realizados

e) Debido a que la recta tangente es la posición límite de la recta secante, su pendiente será el límite de las pendientes de las rectas secantes, es decir: $m_t = \lim_{x \to 1} m_s = \lim_{x \to 1} \frac{\Delta y}{\Delta x}$

donde m_s es la pendiente de la recta secante genérica calculada en el punto c). Calcular m_t.

f) Explicar el significado del límite recién calculado

Fig. 4. Tarea 1 correspondiente a la actividad de Límite funcional

Tarea 2

La ecuación de la posición de un móvil está dada por la ecuación $s(t) = 5\,t^2$, en donde t se mide en segundos y s(t) en metros.

a) La velocidad media se define como $v_m = \frac{\Delta s}{\Delta t}$. De acuerdo a esta definición ¿cuál es la velocidad media del móvil en cada intervalo de la siguiente tabla?

	Intervalo [1, t]				tendencia		Intervalo [t,1]		
	[1,1.5]	[1,1.01]	[1,1.001]	→		←	[0.999,1]	[0.99,1]	[0.5,1]
v_m									

b) Explicar el significado de los cálculos recién realizados

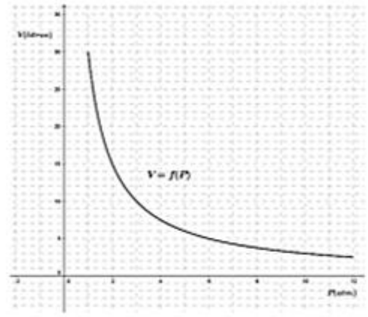
c) Si la velocidad instantánea es $v_i = \lim_{t \to 1} \frac{\Delta s}{\Delta t}$ ¿Cuál es la velocidad instantánea en t=1?

d) Explicar el significado del límite recién calculado

Fig. 5. Tarea 2 correspondiente a la actividad de Límite funcional

Tarea 3

A temperatura constante el volumen (V, en litros) de un gas es inversamente proporcional a la presión de ese gas (P, en atmósferas). En una experiencia se obtuvieron los datos que se graficaron de la siguiente manera:



a) Calcular los cambios promedios de volumen respecto a la presión para los siguientes intervalos.

Recordar $rcp = \dfrac{\Delta V}{\Delta P}$.

Intervalo [6, P]					tendencia	Intervalo [P,6]			
	[5.7,6]	[5.8,6]	[5.9,6]	→		←	[6,6.1]	[6,6.2]	[6,6.3]
rcp									

b) ¿Qué indica el signo de cada cambio promedio?

c) Explicar el significado de los cálculos recién realizados

d) Se define como razón de cambio instantánea en un valor P = a, como el límite de las razones de cambio promedio cuando el intervalo tiene longitud tendiendo a cero; es decir, $rci = \lim\limits_{P \to 6} \dfrac{\Delta V}{\Delta P}$. Calcularla.

e) Explicar el significado del límite recién calculado.

Fig. 6. Tarea 3 correspondiente a la actividad de Límite funcional

Como observamos continuamos con los tres modelos dados en la actividad anterior. En el primer caso brindamos la tarea en registro gráfico y exige su conversión a registro analítico. En el segundo la damos en registro analítico y demanda del alumno tratamiento en dicho registro y conversión a registro numérico. La última tarea dada en registro gráfico requiere conversión en registro numérico y analítico. El objetivo principal de aprendizaje de esta actividad es que el alumno pueda construir por sí mismo el concepto de cambio instantáneo (derivada) y lo pueda interpretar en los distintos modelos: la interpretación gráfica como pendiente de la recta tangente, la interpretación física como velocidad instantánea y la interpretación general como razón de cambio instantánea de una función. Tomando como sustento esta actividad, en la parte teórica de la materia, el docente define la derivada de una función en un punto y fortalece lo que los alumnos trabajaron por sí solos.

5.3 Actividad de Derivada

Presentamos las tres tareas en forma conjunta las cuales están dadas en registro analítico y todas demandan una conversión a registro gráfico. El objetivo de aprendizaje es que el alumno aplique el concepto de derivada en situaciones diferentes, una de las cuales anticipa el teorema del valor medio de Lagrange.

Tarea 1:

Dada la función $g: R \to R / g(x) = 3x^3 - x$.

a) Determinar si existe una única recta tangente a dicha función que sea paralela a la recta y=8x y hallar las ecuaciones.

b) Graficar la situación resuelta en el ítem a).

Tarea 2

La siguiente fórmula relaciona el espacio recorrido s(t) (en metros) recorrido por un móvil y el tiempo t (en segundos): $s:[0,3] \to [0,45] / s(t) = 5t^2$

Responder:

a) ¿Cuál es la velocidad del móvil a los 2 segundos?

b) ¿Cuándo la velocidad es de 7,2 m/s?

c) Escribir la fórmula de la velocidad del móvil para todo instante t, indicando dominio e imagen.

d) Graficar s(t) y v(t)

Tarea 3: la siguiente fórmula relaciona el volumen V (en litros) de un cierto gas, a temperatura constante, en función de la presión P (en atmósferas): $f:[1,12] \to (0,30] / V = f(P) = \frac{30}{P}$

a) Calcular el cambio instantáneo o tasa de variación instantánea del volumen respecto a la presión para cualquier valor de P mediante la definición y luego utilizando reglas de derivación, comparar los resultados.

b) Hallar el valor de P para el cual la razón de cambio instantánea es igual a la razón de cambio promedio en el intervalo [2,6].

c) Interpretar gráficamente la situación anterior.

Fig. 7. Actividad de derivada

6 Prueba piloto

Realizamos una prueba piloto de las tres actividades en una de las comisiones de la asignatura que está a cargo de una de las investigadoras, a fin de ajustar consignas, tiempos de resolución por parte de los alumnos y estudiar, en forma general, si los alumnos son capaces de construir el concepto de derivada a través de las mismas o necesitan un rediseño.

La primera actividad (Funciones) se llevó a cabo el tercer día de clase. Previo al mismo se había repasado el tema y presentado algunos modelos de funciones. Cabe aclarar que este tema forma parte del curso de admisión a la universidad, en el cual los alumnos trabajan en profundidad funciones lineales y cuadráticas. En el pizarrón se escribieron algunas orientaciones y los estudiantes podían recurrir a sus apuntes, computadoras, celular y libros para resolverla. Participaron 95 alumnos divididos en equipos de dos personas, un alumno trabajó solo. El tiempo designado de dos horas resultó insuficiente ya que demandó gran parte para que se organizaran y se acomodaran en los bancos en un aula que no está preparada para la modalidad taller. Recordemos que es la primera actividad que realizaron los alumnos.

Varios equipos presentaron producciones desprolijas, sin cuidar la notación matemática o los gráficos. A pesar que la mayoría de los alumnos realizó el curso de admisión, en general observamos serias dificultades para reconocer modelos funcionales básicos como el cuadrático y lineal. En la devolución la docente retomó los conceptos trabajados y aclaró errores comunes.

La segunda actividad (sobre el concepto de límite) se llevó a cabo en la clase número ocho, participaron 88 alumnos, algunos equipos se disolvieron y se formaron otros. En esta oportunidad el tiempo fue más aprovechado, pero tampoco suficiente para que todos los equipos terminaran las tres tareas.

El ítem que presentó mayores dificultades fue el de la tarea 1 que hace referencia por primera vez a la recta tangente. A pesar que en el enunciado se explicita su definición, los alumnos realizaron muchas preguntas y la mayoría no pudo resolverlo. Sin embargo, hemos notado que, cuando la docente a cargo explicó el concepto de derivada, que fue posterior a esta actividad, inmediatamente varios estudiantes asociaron lo que se estaba explicando con lo hecho en la actividad.

Finalmente, la tercera de las actividades se implementó en la clase número trece una vez finalizado el desarrollo de la unidad de derivada. Los grupos en general se fueron manteniendo y en esta oportunidad participaron 76 alumnos. Las producciones mejoraron notablemente a diferencia de las primeras, ya sea en la presentación general, en la notación utilizada, como en la cantidad de ítems resueltos. El tiempo fue administrado en forma más adecuada por los estudiantes, algunos equipos se dividían las tareas entre sus integrantes y luego hacían una puesta en común. Esto favoreció que la mayoría de los equipos complete las tres tareas.

El ítem que mayor dificultad presentó fue el de la tarea 3 donde pedíamos la interpretación geométrica de la situación resuelta. Los alumnos no entendían qué hacer, preguntaron mucho acerca de este enunciado. Pocos pudieron realizar una gráfica interpretando la relación entre la variación promedio e instantánea del volumen con respecto a la presión. No pudieron asociar el concepto desde el punto de vista geométrico y desde el punto de vista variacional, a pesar que las tres tareas se realizaron en forma conjunta y la docente remarcó en todas las devoluciones las distintas interpretaciones de la razón de cambio promedio e instantánea.

Sin embargo, cuando a posteriori se explicó el Teorema de Lagrange, para estímulo nuestro percibimos que, muchos alumnos recordaron acerca de lo solicitado en esta actividad y pudieron establecer la relación entre la razón de cambio promedio e instantánea.

7 Discusión

El trabajo realizado de indagación bibliográfica y la prueba piloto nos permitieron seguir reforzando con evidencia lo difícil que es para el alumno una construcción adecuada del concepto de derivada. A pesar que los tres conceptos: cambio, razón de cambio promedio y razón de cambio instantánea se trabajaron desde un inicio en las tres tareas en forma simultánea, recién es en la última actividad donde podemos vislumbrar alguna mejora en el aprendizaje.

La experiencia previa a la propiamente dicha de la investigación nos permitió realizar algunos ajustes.

En cuanto a los tiempos designados para la resolución, fueron insuficientes en las dos primeras actividades en las cuales los alumnos todavía no estaban acostumbrados a la metodología. Entonces consideramos la posibilidad de que éstas puedan estar formadas por las dos primeras tareas en forma presencial y dejar la tercera para que sea resuelta en forma domiciliaria como refuerzo de lo realizado en la clase.

Respecto a las consignas, la tarea 3 de la actividad de derivada requiere un ajuste a fin de que los alumnos puedan entender el punto de interpretación geométrica. Consideramos que las demás tareas no demandan reelaboración en lo solicitado.

Previo a cada sesión de trabajo juzgamos importante dar diversas orientaciones, por ejemplo, recordar las características básicas del modelo cuadrático.

Pensamos también importante agregar una instancia de debate grupal, que permita intercambiar ideas entre los alumnos y el profesor sobre cómo resolvieron la actividad y posibilite a este último formalizar los conceptos que intervienen en la misma.

Dentro de los registros de representación usados notamos que el registro numérico produce, a veces, confusión en los alumnos en cuanto al dominio de la variable independiente. Es común que los estudiantes piensen que son sólo los valores de la tabla dada los que toma dicha variable. Esto se puede subsanar con orientaciones anteriores a la resolución de las actividades.

Con respecto a las formas de presentación o de comunicar lo realizado por los alumnos observamos una mejora desde la primera actividad a la tercera, lo que nos alienta a seguir en esta línea de trabajo en grupo con presentación de lo actuado.

Pensamos que sería apropiado contar con algún instrumento que permita corroborar si las percepciones realizadas durante la experiencia piloto, relacionadas con la explicación del concepto de derivada y del Teorema de Lagrange, con lo realizado en la actividad, se sostienen en el tiempo.

La línea de trabajo a futuro es rescatar estos resultados de la prueba piloto, optimizar, en la medida de lo posible, el diseño de las actividades aquí presentadas, y evaluar el grado de desarrollo de las habilidades matemáticas vinculadas al concepto de derivada con las actividades y con algún otro instrumento de valoración luego de ser realizadas.

Referencias

1. Cantoral, R.; Mirón, H. Sobre el estatus de la noción de derivada: de la epistemología de Joseph Louis Lagrange al diseño de una situación didáctica. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, Vol. 3, No. 3, pp. 265-292 (2000).
2. Polya, G.: ¿Cómo plantear y resolver problemas? (22da. ed.). Editorial Trillas. (1998).

3. Duval, R.: Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento. Hitt, F. (Ed.), Investigaciones en Matemática Educativa II, pp. 173-201. Grupo Editorial Iberoamérica. (1998). Traducción de Registres de preséntations sémiotiques et fonctionnement cognitif de la pensée. Annales de Didactique et de Science Cognitives, Vol 5, pp. 37-65 (1993).
4. Ibarra, S. E.; Bravo, J.M.; Grijalva, A. El papel de los registros de representación semiótica en la enseñanza del cálculo diferencial. http://semana.mat.uson.mx/MemoriasXVII/XII/Ibarra%20Olmos.pdf (2001). Accedido el 5 de julio de 2011.
5. Hernández Fernández, H.: Vigotsky y la estructuración del conocimiento matemático. Experiencia cubana. Hernández Fernández, H.; Delgado Rubí, J.R.; Fernández de Alaíza, B.; Valverde Ramírez, L. & Rodríguez Hung, T. (Eds). Cuestiones de didáctica de la Matemática. Serie Educación. Homo Sapiens Ediciones. pp. 33-53. (1998).
6. Delgado Rubí, J.R. Los procedimientos generales matemáticos. Hernández Fernández, H.; Delgado Rubí, J.R.; Fernández de Alaíza, B.; Valverde Ramírez, L. & Rodríguez Hung, T. (Eds). Cuestiones de didáctica de la Matemática. Serie Educación. Homo Sapiens Ediciones, pp. 69-87. (1998).
7. Zabala, A. Los enfoques didácticos. Coll, C.; Martín, E.; Mauri, T.; Miras, M.; Onrubia, J.; Solé, I. & Zabala, A. (Eds). El constructivismo en el aula. Editorial GRAÓ, pp.125-161. (2007).
8. Sánchez, M. La investigación sobre el desarrollo y la enseñanza de las habilidades del pensamiento. Revista Electrónica de Investigación Educativa, Vol. 4, No 1. http://redie.ens.uabc.mx/vol14no1/contenido-amestoy.html (2002). Accedido el 4 de diciembre de 2009.
9. Churches, A. Taxonomía de Bloom para la era digital.. http://www.eduteka.org/TaxonomiaBloomDigital.php (2009). Accedido el 1 de febrero de 2012.
10. Rojas, P. Sistemas de representación y aprendizaje de las matemáticas. Revista digital Matemática, Educación e Internet. http://www.cidse.itcr.ac.cr/revistamate/ (2012). Accedido el 10 de marzo de 2013.
11. Prieto, F. y Vicente, S. Análisis de registros semióticos en actividades de ingresantes a la facultad de ingeniería. Ponencia presentada en I REPEM (2006).
12. Dolores, C. (2000). Una propuesta didáctica para la enseñanza de la derivada. Cantoral, R. (Ed). El futuro del Cálculo Infinitesimal, ICME 8. Grupo Editorial Iberoamérica, pp. 155-181. (2000).
13. García, M. Una situación de aprendizaje para contribuir a la mejora de la comprensión del concepto de derivada. Tesis de maestría no publicada, Universidad autónoma de Guerrero, Unidad Académica de Matemáticas, Centro de Investigación en Matemática Educativa. (2011).
14. Vrancken, S., Engler, A., Müller, D. Una propuesta para la introducción del concepto de derivada desde la variación. Análisis de los resultados. Premisa, Vol. 10, No. 38, pp. 36-46. (2008).
15. Vidal, O. Interpretación de la noción de derivada como razón de cambio instantánea en contextos matemáticos. Tesis de Maestría no publicada, Universidad Nacional de Colombia. (2012).

Volver al Índice

Dificultades en "Serie"

Poggio M. Inés, Bontti Griselda, Piedrabuena Andrea
Departamento de Ciencias Básicas, Universidad Nacional de Luján
Rutas Nac. 5 y 7, Luján (6700), Buenos Aires
minpoggio@gmail.com, gbontti@hotmail.com, piedrabuena_andrea@yahoo.com.ar

Resumen. Un programa clásico de un primer curso de Análisis Matemático suele culminar con un capítulo dedicado al estudio de las series numéricas y alguna breve aplicación al estudio de series de potencias para el cálculo aproximado de algunas integrales que no admiten primitiva elemental. Luego de varios años de trabajar con esos contenidos en diversos grupos de estudiantes hemos reunido algunas observaciones de los obstáculos más frecuentes y su incidencia en la construcción del aprendizaje, enunciamos una secuencia didáctica que sucesivamente vamos adaptando para mejorar sus resultados y presentamos algunos ejemplos de problemas elegidos de acuerdo con esos objetivos, junto con algunas propuestas visuales, de modo de enfrentar esos obstáculos y seguir en la búsqueda de mejorar los aprendizajes de nuestros estudiantes.

Palabras Clave: Dificultades, Series numéricas, Definiciones, Criterios de convergencia.

1 Introducción

Para guardar coherencia con el anuncio del título elegido para nuestro trabajo, y comenzar a describir las principales dificultades encontradas en el desarrollo del tema de las Series, se hace necesaria una breve contextualización de este tema dentro del conjunto de contenidos que recorre la asignatura Análisis Matemático I, su ubicación temporal en el cronograma y el tiempo asignado para desarrollarlo.

En nuestro caso la asignatura se dicta en el segundo cuatrimestre de los planes de estudio de carreras de Ingeniería en Alimentos e Industrial, correlativa de un curso introductorio de Matemática básica; por lo general cuenta con un alumnado del orden de alrededor de 300 estudiantes distribuidos en cuatro o eventualmente cinco comisiones en todas las bandas horarias, con predominio de comisiones bastante numerosas en el turno de la mañana y todas ellas atendidas por no más de dos docentes por comisión.

Con una carga horaria semanal de 8 horas distribuidas en tres clases semanales durante quince semanas, se desarrolla un programa clásico de un curso de Cálculo Diferencial e Integral con sus aplicaciones, que culmina en poco menos de las últimas tres semanas del curso con las Nociones de Series, junto con sus aplicaciones al Cálculo aproximado de Integrales. La modalidad de trabajo adoptada es de carácter teórico-práctico.

Es común observar que los estudiantes que ingresan a una Carrera de Ingeniería logran una mejor adaptación en los cursos de Álgebra, por sus experiencias educativas previas, pero tropiezan con numerosos problemas al enfrentar los contenidos propios del Análisis Matemático, que frecuentemente son causa de fracasos y repetición de los cursos.

Un interesante trabajo de González acerca de la introducción del concepto de suma infinita, refiere la gran distancia que existe entre las prácticas y los contenidos de la educación secundaria y universitaria, lo que puede dar lugar a una baja del número de estudiantes que continúan estudios universitarios con fuerte componente matemático. Es pues, urgente desarrollar proyectos tendientes a mejorar tanto el aprendizaje conceptual de los estudiantes universitarios como las prácticas de sus docentes, enriqueciendo así la enseñanza de los conceptos matemáticos y evitando reducirlos únicamente a sus aspectos algorítmicos. [1]

Para introducir a los estudiantes en estos conceptos, creemos que es conveniente acompañar su estudio con imágenes visuales, que provoquen en ellos la aprehensión de estos conocimientos, ya que varias investigaciones han probado que las actividades que promueven la enseñanza mediante la construcción de imágenes pueden mejorar el aprendizaje de diferentes contenidos de la Matemática.

Al respecto Duval destaca la necesidad de avanzar más allá del registro algebraico y considerar otros registros de representación para acceder con mayor riqueza a la comprensión del objeto matemático y Arcavi pone el énfasis en el rol de las representaciones visuales para facilitar la comprensión de las ideas y conceptos desconocidos. [2, 3]

En cuanto a las dificultades que tienen los estudiantes para ingresar al campo conceptual del Análisis, Artigue ha agrupado éstas en diversas categorías: las que están asociadas con la complejidad de los objetos básicos del cálculo, tales como los números reales, las funciones o las sucesiones, conceptos ya conocidos pero que están en permanente construcción y requieren afinar y fortalecer sus significados. [4]

Otras categorías de dificultades mencionadas por la misma autora son las que se relacionan con la noción de límite de una función o una sucesión, y por último las que están asociadas a la necesaria ruptura que debe producirse con las formas de pensamiento algebraico para poder introducirse en los modos de pensamiento propios del Cálculo.

En el caso que nos ocupa, el concepto de suma infinita es complejo y contradice la intuición, ya que la idea intuitiva lleva a pensar que si se suman infinitos términos, el resultado esperado será infinito. Este primer obstáculo se presenta por la idea de “suma”, y por el mismo concepto de "infinito". En nuestra búsqueda acerca de los errores cometidos por nuestros estudiantes hemos encontrado también con mucha frecuencia en nuestros cursos dificultades en la aplicación de los distintos criterios para establecer el carácter de una serie numérica; esto puede deberse tanto a errores algebraicos como a falencias conceptuales. Es por este motivo que planificamos diversas actividades donde el trabajo del estudiante consiste en visualizar el comportamiento de los términos de una serie a partir de la manipulación de diversos parámetros utilizando algún conveniente software, junto con el trabajo con lápiz y papel, con el fin de lograr un aprendizaje más significativo y duradero del tema.

2 Análisis previo

Según Brousseau una dificultad es una condición o característica de una situación que aumenta de modo significativo la probabilidad de no respuesta o de respuesta errónea de los actores implicados en esa situación. Estos actores pueden ser tanto un alumno, como también un profesor que puede encontrar una dificultad en obtener los aprendizajes que proyectó. [5]

A continuación trataremos de enumerar, procurando respetar un cierto orden de aparición, algunas de las dificultades que los estudiantes enfrentan en su recorrido de aprendizaje y que surgen de nuestras observaciones. Para sustentar la evidencia, examinamos también algunos problemas tomados en evaluaciones o exámenes finales y clasificamos la diversidad de respuestas acertadas o erróneas que se encontraron.

En primer lugar, hemos encontrado dificultades en la construcción de la definición de serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots \qquad \textbf{(1)}$$

Éstas se refieren al conflicto que se presenta en la coexistencia de dos sucesiones diferentes:

- La sucesión de los términos de la serie $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ y
- La sucesión de las sumas parciales de los términos de la serie $S_1, S_2, S_3, \dots, S_n, \dots$

En segundo término, es aquí donde la noción de límite interpone su obstáculo, porque desde enunciar que “…el límite de la sucesión de las sumas parciales, si existe finito, se llama por definición suma de la serie que indicamos con (1)” y que no quede en una mera repetición vacía de contenido, hasta poder aceptar que ese enunciado tiene un significado preciso y lograr internalizarlo, el estudiante debe pasar por sucesivas etapas de incertidumbre y desconcierto. Y los docentes, de preocupación para promover que todas las imágenes puedan confluir en una buena definición del concepto, como se plantea en un clásico artículo de Tall & Vinner. [6]

A continuación, observamos que, a pesar de contar con numerosos ejemplos, los estudiantes tropiezan con una nueva dificultad que requiere un tratamiento cuidadoso para evitar conclusiones equivocadas: se trata de la condición necesaria para la convergencia de una serie:

$$\sum a_n \ converge \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 0 \qquad \textbf{(2)}$$

Y aquí hay que luchar con la tentación que sufren los estudiantes de transformar en teorema también al recíproco de éste y pretender probar la convergencia de una serie con sólo probar que su término general es un infinitésimo. Pero también hay que luchar con el olvido de que el contrarrecíproco es verdadero y constituye un recurso idóneo y sencillo para probar la divergencia de una serie, sin necesidad de pasar por la aplicación de criterios, que a veces no logran dar respuesta o conducen a cálculos complicados.

Además, vemos con frecuencia diferentes formas de usar mal las proposiciones que se deducen de la condición necesaria. Para ejemplificar uno de esos casos elegimos el siguiente problema, tomado en un examen final, en el que se aprovecha para que un mismo problema integre otros conceptos adquiridos a lo largo de varios momentos del curso:

- Demostrar si la siguiente proposición es Verdadera o Falsa: La serie $\sum_{n=1}^{\infty} cos\,\frac{1}{n}$ diverge.

De una muestra de 19 examinados, solamente 4 (21%) respondieron correctamente, y 8 (42%) lo dejaron sin resolver. Los que están equivocados pueden diferenciarse según presenten errores relativos al cálculo del límite del término general, que en total fueron 4 (21%) lo que en algunos casos condujo a conclusiones incorrectas, partiendo de decir que:

$$\text{No existe } \lim_{n\to\infty} cos\,\frac{1}{n}, \quad \lim_{n\to\infty} cos\,\frac{1}{n} = \infty \quad \text{o} \quad \lim_{n\to\infty} cos\,\frac{1}{n} = 0$$

Mientras que el 16% restante incurrió en errores específicamente relacionados con el tema de las series como reconocerla como una serie geométrica y decir que converge, o identificarla con una serie armónica tomando en cuenta solamente el argumento del coseno.

La muestra es pequeña pero para nosotros es un buen ejercicio sistematizar la observación de esos errores que desde hace tiempo venimos registrando en la corrección de exámenes y estimula la búsqueda de nuevas acciones correctivas.

Siguiendo con nuestra enumeración, hemos notado que un tipo de serie que debe ser objeto de un trabajo bastante minucioso es la serie geométrica. Junto con la armónica y la serie “p”, o serie armónica generalizada, proveen los primeros modelos de series de convergencia o divergencia conocida para permitir poner en práctica el criterio de comparación. Conocida la convergencia de una serie geométrica, resulta fácil el cálculo de la suma, y ofrece la oportunidad de presentar algunos ejemplos que para los estudiantes son particularmente curiosos como mostrar que 0, 9999… = 1, hecho que suele causarles alguna sorpresa.

En una evaluación parcial presentamos el siguiente problema que permite evaluar si se conoce la condición necesaria y suficiente de convergencia de la serie geométrica, que debe imponerse a una serie cuya razón depende de un cierto parámetro, pero se espera también que aparezcan las dificultades de transformaciones en el registro algebraico, cuando los estudiantes deban resolver un sencillo sistema de inecuaciones con valor absoluto.

- Hallar los valores de *a* para los cuales converge la serie $\sum_{k=0}^{\infty} (1+4a)^k$ y calcular la suma.

En esta oportunidad se aplicó este problema a una muestra de 66 estudiantes y se recogieron los siguientes datos con respecto a los resultados: un 42% trabajó correctamente mientras que un 15% omitió la resolución del problema. Poco más de un 10% comete errores algebraicos en la resolución del sistema $|1+4a|<1$, mientras que igual número comete el error de plantear mal la condición imponiendo que: $1+4a<1$. Alrededor de un 21% comete errores en el cálculo de la suma. De ellos, la mitad opta por no calcular y tal vez se deba a que no recuerda la fórmula que debe aplicar. El resto se distribuye en partes iguales entre los que realizan mal el cálculo por errores de tratamiento en el registro algebraico y los que asignan un valor particular al parámetro sin advertir que la suma también debe venir expresada en forma genérica, para cada uno de los valores admisibles del parámetro que aseguran la convergencia de la serie dada, y dan sentido a la consigna del problema.

Otra de las dificultades encontradas es la de desarrollar la habilidad de conjeturar o “sospechar” el carácter presuntivo que puede tener una serie en estudio y elegir algún criterio que resulte apto para probar la conjetura, si es posible de la manera más simple, breve y sobre todo convincente. Es decir que aquí se plantean varias oportunidades de error: hay que aprender a conjeturar bien; una conjetura bien formulada condiciona la elección de uno o más criterios y la práctica o la experiencia sugieren cuál es más conveniente. Por último, si se tiene buen dominio del registro algebraico para operar con las condiciones que impone el criterio elegido, buen manejo de las operaciones con desigualdades y conocimiento de propiedades, se podrá tener éxito en la solución de un problema.

Para ilustrar cómo se manifiestan en la práctica este conjunto de dificultades que acabamos de señalar, el dominio de algunos criterios y propiedades de la suma de dos series de igual o distinto carácter, elegimos incluir en una evaluación parcial un problema que permita ponerlas en evidencia, como el siguiente:

- Probar la convergencia o la divergencia de la siguiente serie: $\sum \left[\frac{\sqrt{k^3}}{\sqrt[3]{k}+k^3} + \frac{1}{2k+\cos^2 k} \right]$

En esta oportunidad también se aplicó este problema a una muestra de 66 estudiantes y se recogieron los siguientes datos con respecto a los resultados: 34 estudiantes (52%) resolvieron correctamente mientras que solamente 5 estudiantes (7%) omitieron la resolución del problema. En general se observó que la primera serie (la convergente), no presentó dificultades. Fueron capaces de estimar el orden del infinitésimo y aplicar un criterio conveniente para probar la conjetura de convergencia. En cambio, de todos los que trabajaron en forma incorrecta pudo observarse que los errores se presentaron en la segunda serie (la divergente), y registramos errores que podemos describir así: bien hecha la conjetura de divergencia pero mal hecha la comparación, es decir se procedió como se hace para probar convergencia, o sea mediante una mayoración, en un 12%; en cambio un 14% conjeturó convergencia y de ahí continuó intentando probarla, y los casos restantes se distribuyeron entre los que, ignorando la función trigonométrica, la trataron como si el denominador fuera suma de potencias y los que dejaron sin responder el carácter de la segunda serie.

3 Objetivos

- Incorporar a la plataforma digital de Análisis Matemático I una propuesta didáctica compuesta de un conjunto de actividades de tipo interactivo utilizando Exelearning, con el fin de que los estudiantes trabajen con animaciones realizadas en Geogebra.
- Facilitar, por medio de tales actividades, la construcción del conocimiento, la puesta en práctica de los nuevos conceptos y la superación de las dificultades.
- Determinar si el uso de instrumentos computacionales promueve un mejor desarrollo de las habilidades cognitivas de nuestros estudiantes.

4 Propuesta didáctica

La tarea que venimos realizando en nuestras aulas hasta la actualidad consiste en un conjunto de actividades para desarrollar en clase con lápiz y papel, luego se ponen en común para que de la discusión puedan surgir observaciones, correcciones de errores y ponerse el énfasis en los aspectos teóricos que se deseen destacar.

Ante la persistencia en ciertos errores, las omisiones en aspectos importantes que permitan distinguir una serie convergente de una divergente, reconocer en qué casos una serie geométrica converge o una serie armónica generalizada diverge, sin confundirse unos con otros, y como esto muchos otros conceptos clave que el estudiante no logra relacionar, hemos enfrentado el desafío de generar alguna herramienta capaz de facilitar esas operaciones intelectuales, que con nuestras clases tradicionales no logramos estimular. En este contexto se desea agregar visualización a la actividad tradicional y complementarla con el diseño de una propuesta interactiva de práctica y autoevaluación para ser publicada en la plataforma digital, de modo de ampliar y consolidar la comprensión del tema que nos ocupa. Dada la amplitud y extensión del tema hemos seleccionado el siguiente recorte: Series numéricas y de éste hemos elegido solamente Series de términos no negativos. Primeras definiciones y propiedades. Serie geométrica. Serie armónica, Serie “p”. Criterio de Comparación. Criterio de la integral.

Una breve enumeración de los conceptos que se ponen en juego para lograr la comprensión de este tema es la siguiente:

- Funciones. Sucesiones. Reconocimiento de la sucesión como una particular función.
- Concepto de infinito.
- Límite de una sucesión (finito o infinito).

Una de las actividades propuestas consiste en observar la gráfica de una sucesión y la de la sucesión de sumas parciales asociada a ella para dos casos particulares: la serie geométrica y la serie armónica.

En primer lugar se considera la serie geométrica de razón 1/2, y con la ayuda de Geogebra es posible construir una tabla con varios términos de la sucesión $a_k = \left(\frac{1}{2}\right)^k$, representarlos y observar su comportamiento a medida que aumenta el exponente.

Del mismo modo se construye la sucesión de las sumas parciales de los términos de la sucesión precedente, con la correspondiente tabla de valores y su representación, en la cual se podrá apreciar que esta sucesión está acotada. Es decir que tiene límite finito.

En segundo lugar, se propone un trabajo similar para la serie armónica y se representan varios términos de la sucesión $a_k = \frac{1}{k}$, de la cual también puede observarse que al crecer k, su comportamiento es infinitésimo.

Sin embargo cuando se realiza la representación de la sucesión de las sumas parciales, contrariamente a alguna posible conjetura, los estudiantes podrán advertir que esta sucesión no está acotada.

Es ésta una buena ocasión para enunciar la condición necesaria de convergencia de una serie porque ya se cuenta con un contraejemplo que muestra que esa condición no es suficiente.

En cuanto a la serie geométrica $\sum r^k$, proponemos una animación en Geogebra que permite al estudiante inferir los valores que debe tomar la razón para que la serie converja. Los valores necesarios para realizar la conjetura se muestran en el mismo gráfico, como se puede observar en la Fig. 1:

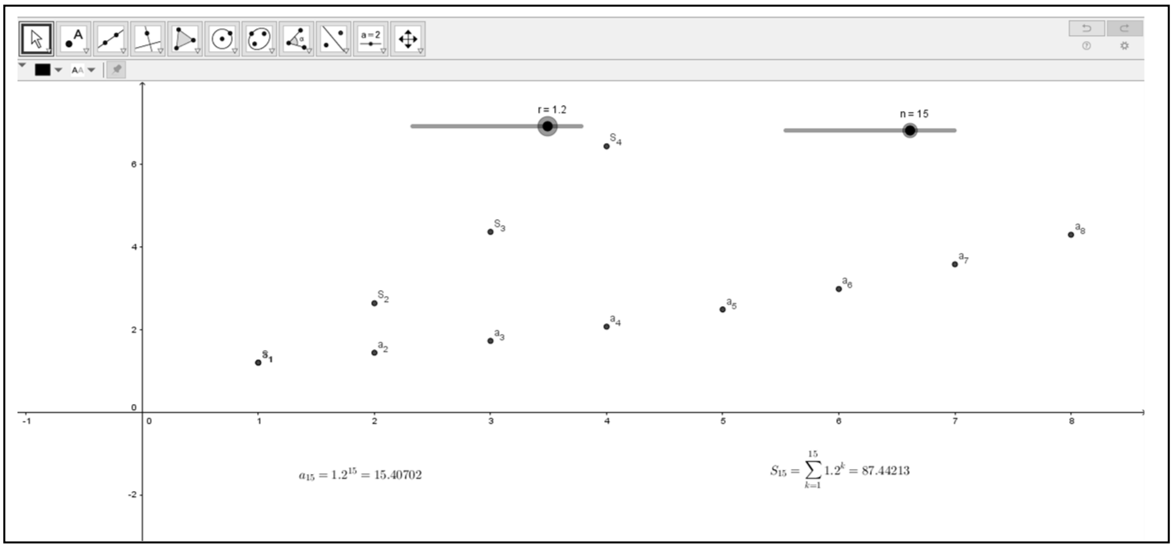


Fig. 1. Representación del comportamiento simultáneo de los términos de la serie geométrica y de sus sumas parciales.

Una actividad similar se plantea para la serie armónica y la serie armónica generalizada, también llamada serie "p". En este caso se busca asociar la convergencia de la serie con la convergencia de la integral impropia, donde $a = \int_1^n \frac{1}{x^p} dx$, como se muestra en la Fig. 2:

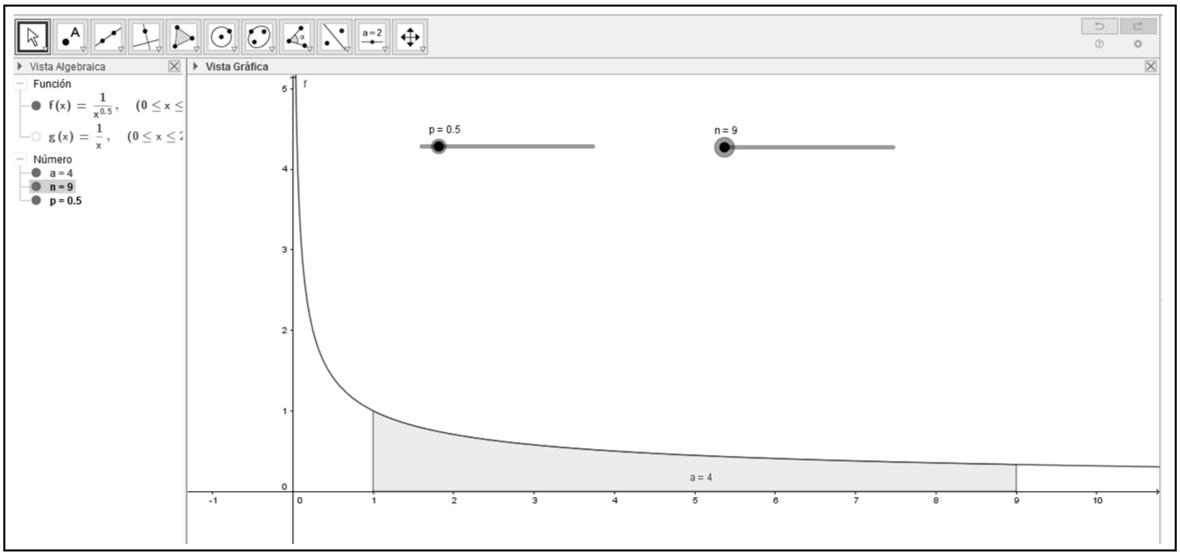


Fig. 2. Actividad para deducir la convergencia o no de la integral impropia y su analogía con la serie "p".

Para visualizar el criterio de comparación, uno de los criterios que presenta mayores dificultades en cuanto a su implementación, proponemos una actividad en Exelearning que contiene un gráfico realizado con Geogebra, como se muestra en la Fig. 3:

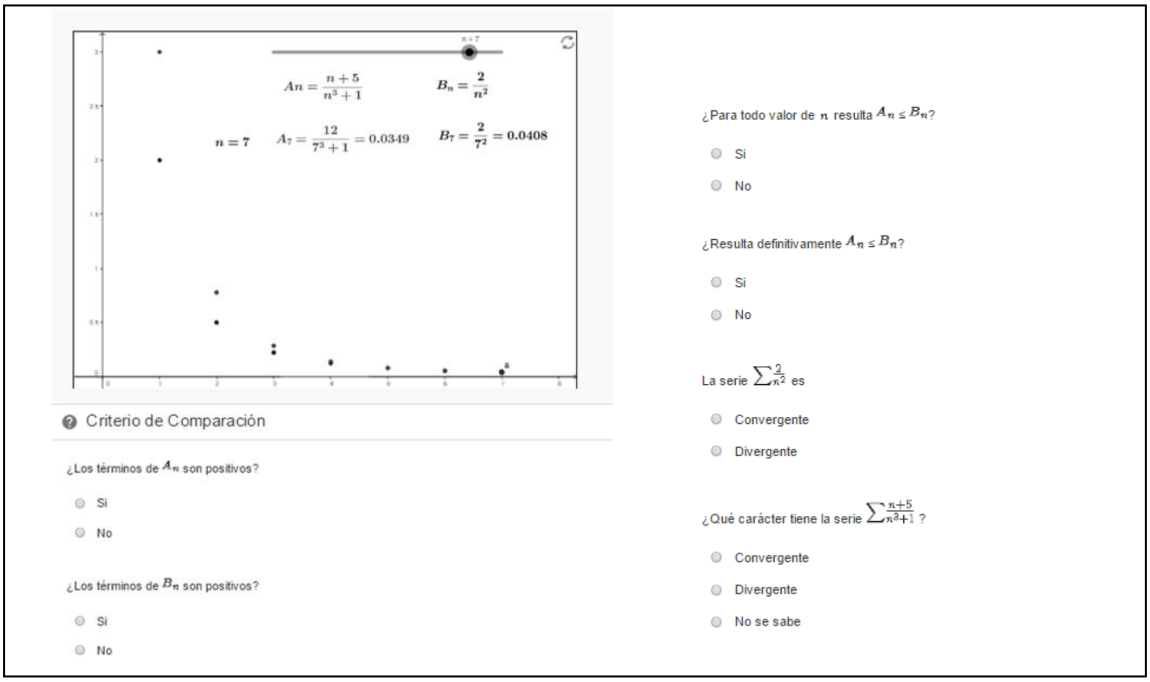


Fig. 3. Actividad donde se comparan los términos de dos series convergentes.

Para aumentar la práctica se presentan, a través de la plataforma digital, numerosos ejercicios de revisión donde se combina el trabajo con lápiz y papel junto con el acompañamiento que otorga la interactividad. Ejemplo de algunos de ellos se presentan en la Fig. 4:

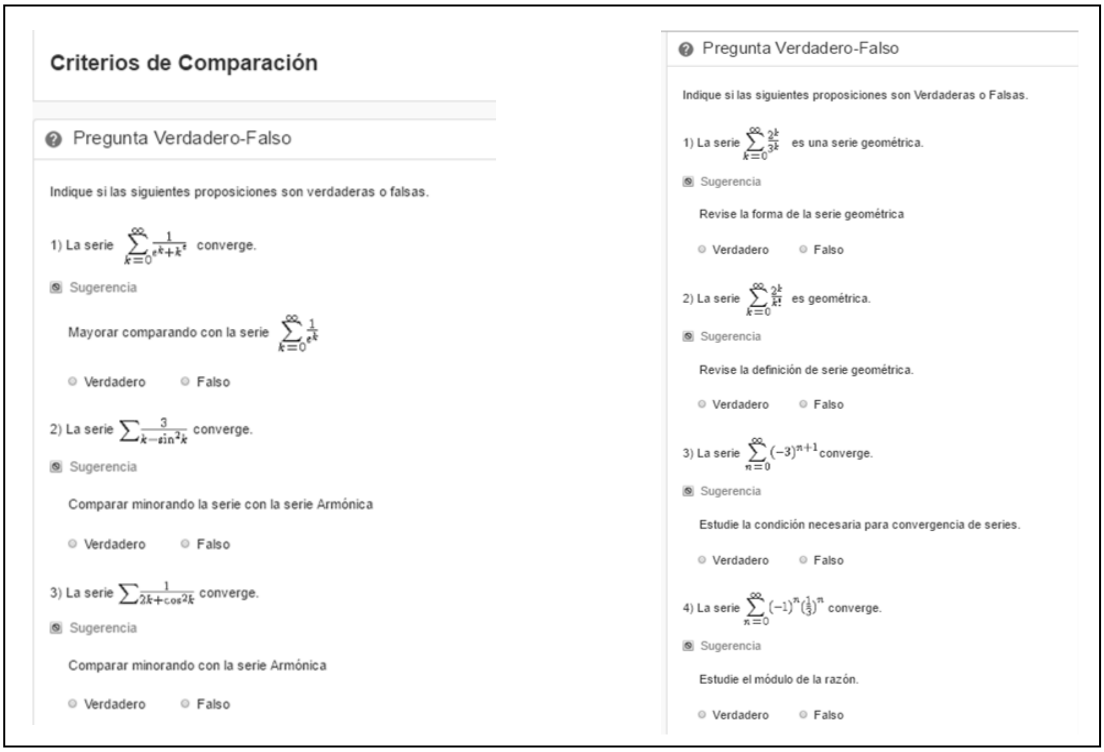


Fig. 4. Práctica de diversos criterios con lápiz y papel guiada por software.

5 Conclusiones

El concepto de serie es habitualmente reducido a sus aspectos algorítmicos. La enseñanza tradicional se centra en el estudio de diferentes técnicas o criterios para determinar el carácter de las series, así como sobre el estudio de fórmulas para calcular la suma de una serie convergente. Generalmente se pone poco el acento sobre la construcción del sentido.

Teniendo en cuenta esto, y considerando que el uso de herramientas computacionales ejerce una gran influencia en la generación de nuevas formas de llevar a cabo la enseñanza, realizamos esta propuesta con el fin de facilitar a los estudiantes la apropiación del concepto de serie y algunos de los distintos criterios para determinar su carácter.

Las actividades planteadas utilizando ejercicios interactivos desarrolladas en Geogebra y Exealearning se pensaron como una alternativa en el diseño de estrategias didácticas que colaboren con los estudiantes que cursan la asignatura Análisis Matemático I, en el abordaje de los conceptos involucrados en el tema series numéricas, superando errores y dificultades, más allá del manejo exclusivo de las técnicas de cálculo.

Esta propuesta está compuesta por ejercicios con representaciones gráficas intencionalmente seleccionadas por los docentes, para que los estudiantes respondan en forma inmediata e interactiva diferentes interrogantes orientados a la construcción del concepto y a la correcta interpretación del papel que juegan los parámetros en la convergencia o divergencia de distintas series numéricas.

En esta alternativa de enseñanza-aprendizaje no se deja de lado el rol del docente, ya que éste orientará al estudiante en la escritura simbólica correcta en papel así como en las justificaciones que deba realizar de sus conjeturas y cálculos algebraicos.

Cabe destacar que en esta oportunidad realizamos sólo la propuesta didáctica buscando una transformación en el modo de aprender el tema; el próximo desafío será poner en marcha el diseño realizado y analizar los resultados obtenidos para determinar si el uso de instrumentos computacionales promueve un mejor desarrollo en las habilidades cognitivas de nuestros estudiantes.

Referencias

1. González, M.: L'introduction du concept de somme infinie: une première approche à travers l'analyse demanuels. *Actes du Colloque Espace mathématique francophone.* Dakar. Vol. 1, pp. 1048-1061 (2009)
2. Duval, R.: Un tema crucial en la educación matemática: La habilidad para cambiar el registro de representación. *La gaceta de la rsme*, Vol. 9.1, pp. 143-168. (2006)
3. Arcavi, A.: The role of visual representations in the learning of mathematics. In F. Hitt & M. Santos (Eds.), *Proceedings of the 21st North American PME Conference*, Vol. 1, pp. 55-80 (1999)
4. Artigue M.: Enseñanza y aprendizaje del análisis elemental: ¿qué se puede aprender de las investigaciones didácticas y los cambios curriculares? *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática educativa.* Vol. 1, Núm. 1, marzo1998 pp.40-55 (1998)
5. Brousseau, G.: Erreurs, difficultes, obstacles. http://guy-brousseau.com/1659/erreurs-difficultes-obstacles-2003/. Accedido el 9 de marzo de 2015
6. Tall, D.; Vinner, S.: Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics.* Vol. 12, pp. 151-169 (1981)

Volver al Índice

Una Experiencia de Integración Articular Utilizando TIC

Diego Conte, Silvina Agnoli, Stella Farías, Susana Pintos
Universidad Autónoma de Entre Ríos - Facultad de Ciencia y Tecnología
25 de mayo 353 – C. del Uruguay – Entre Ríos
contediego13@gmail.com, silagnoli@yahoo.com.ar, stellafarías@arnet.com.ar, susanapintos@hotmail.com

Resumen. Proponemos una actividad integradora entre las Cátedras Análisis Matemático I y Física General II de la carrera de Ingeniería en Telecomunicaciones. Se busca enfrentar a los estudiantes a un problema de aplicación de conceptos de física referidos a la ley de Lenz y Faraday relacionados a fenómenos electromagnéticos y a la transferencia de contenidos matemáticos para su interpretación y resolución. Utilizando un software específico, se representan gráficamente las funciones intervinientes y analiza que al hacer rotar la espira uniformemente, ese movimiento de rotación periódico da lugar a una variación también periódica del flujo magnético. La f. e. m. inducida en la espira varía entonces periódicamente con la orientación y con el tiempo, pasando de ser positiva a ser negativa, y viceversa, de una forma alternativa. Se genera una f. e. m. alterna cuya representación gráfica, en función del tiempo, tiene la forma sinusoidal.

Palabras Clave: Generador, Funciones, Derivadas, Extremos de funciones, Geogebra.

1 Introducción

El formato de una clase tradicional tiende a fomentar un aprendizaje pasivo. Es necesario pensar menos en la clase magistral y mejorar los vínculos entre los laboratorios y el aula. Hay que aumentar la participación activa de los estudiantes en las clases, las experiencias de trabajo en equipo y el aprendizaje cooperativo. También se recomienda que la tecnología se integre en la asignatura, siendo esta un punto en común. Por otro lado, en los proyectos constructivos y en los problemas de diseño de propósito práctico se consigue elevar el interés de los estudiantes, lo que demuestra que “las respuestas a muchos de los problemas reales no se pueden encontrar en un libro de texto.” [1]. Se intenta inducir en los estudiantes habilidades que de manera inteligente entren en contacto con el lenguaje de la disciplina, organizando, dirigiendo y controlando experiencias de actividad reflexiva.

En carreras como arquitectura e ingeniería, en las cuales la matemática es una herramienta y no una finalidad en sí misma, dar contexto al aprendizaje y a la enseñanza de la matemática permite explorar los conceptos matemáticos en situaciones reales en procura de una ayuda en el proceso de comprensión de conceptos matemáticos [2].

En la resolución de un problema es necesario que los estudiantes se sientan comprometidos con el tema y motivados, para que comience la búsqueda y el abordaje de la temática una vez obtenido el bagaje de conocimientos. Adaptarse a nuevas situaciones, utilizar contenidos y procedimientos conocidos para generar nuevos conocimientos o corregir conocimientos anteriores incorrectos o incompletos, tomar decisiones estratégicas y actuar en forma racional y lógica, que es lo que compone el estudio de la física y de la matemática para aquellos jóvenes que cursan carreras con base matemática pero no consideran a la disciplina como un fin en sí misma, sino como una herramienta para su ejercicio profesional.

El desafío a la resolución de un problema deja una impronta en las estructuras cognitivas y genera un gran desarrollo del pensamiento formal y crítico perdurable en el tiempo.

La necesidad de abordar contenidos a partir de la integración responde a inquietudes surgidas en otras carreras con respecto a la dificultad que tienen los alumnos al momento de comprender los contenidos. Es de destacar que, con anterioridad al presente trabajo, sólo se proponía la investigación bibliográfica del tema, su interpretación y posterior resolución de problemas; por este motivo es que la metodología de trabajo actual incluye actividades relacionadas con el objetivo planteado por la cátedra, y un trabajo de integración que incluye una situación problemática. El avance de la Ciencia y Tecnología está requiriendo de un nuevo paradigma para la formación de los ingenieros, caracterizado por un aprendizaje activo basado en los proyectos; por una integración vertical y horizontal de los contenidos de los cursos; por la introducción de conceptos científicos y extraídos de las matemáticas en el marco de los contextos de aplicación (Echazarreta, Haudeman, Integración y articulación de contenidos de física en las carreras de ingeniería). Destacamos que el uso de las tecnologías y el laboratorio en la enseñanza en el nivel superior, da un abordaje integral al tema en cuestión.

En este caso, se trabaja con un simulador http://www.sc.ehu.es/sbweb/fisica/elecmagnet/induccion/generador/generador.htm y el software GeoGebra, un procesador dinámico matemático interactivo de Álgebra, Aritmética, Geometría, Cálculo y Análisis que incluye recursos estadísticos, poniendo a nuestro alcance una tecnología que promueve la asociación de nuestra inteligencia con una herramienta externa. Es importante destacar que el uso de un software libre no es simplemente un contenido técnico, sino también es un tema ético y social que asume un rol importante en el ámbito educativo. Las ventajas del uso de un software libre es que permite el acceso al conocimiento y la divulgación del mismo permitiendo a toda una comunidad que lo comparta. No es solamente aprender a utilizar un producto sino también a utilizar una tecnología, y, como consecuencia, a asimilar ideas subyacentes a cualquier tipo de software, lo cual permite estar preparado para adaptarse a cualquier entorno, algo que está considerado como una habilidad básica hoy en día.

Es importante a la hora de generar el fichero PDF que las imágenes se muestren lo más nítidas posible y que los datos de los autores estén visibles en todo momento.

2 Fundamentación

Pensar las prácticas pedagógicas en la universidad implica diseñar estrategias didácticas orientadas a que los estudiantes no sólo reciban información, sino que fundamentalmente sean capaces de modificarla y aplicarla, de compartir las inquietudes actuales en torno al conocimiento, de problematizar, descomponerlo y recomponerlo en su comprensión personal [3]. El Ingeniero de Telecomunicaciones, es un profesional que diseña, implementa e innova sistemas de comunicaciones, administra tecnologías, servicios y soluciones empresariales, por lo tanto, debe contar con una sólida formación en comunicaciones, sustentada en ciencias básicas, electrónica e informática, en procura del avance de la ciencia y la tecnología, el desarrollo y la competitividad de las organizaciones.

Además, el uso de programas específicos para graficar (geogebra, excel) y páginas interactivas, aportan en el desarrollo del proceso de enseñanza aprendizaje, la posibilidad de interactuar con sus propios compañeros.

Es indiscutible que las nuevas tecnologías de la información y la comunicación (TIC) han hecho surgir nuevas formas de trabajo, de aprendizaje y de comunicación. Las telecomunicaciones, la informática e Internet han creado un nuevo paradigma y una nueva sociedad, la sociedad de la información y el conocimiento. Nada escapa a esta revolución, y el mundo de la Ingeniería no es la excepción.

La llamada revolución digital ha transformado nuestros hábitos y costumbres, modificando la forma de comunicarse, de estudiar, de aprender y de enseñar, y por ende también afecta al mundo universitario, y lo seguirá haciendo en el futuro. Gracias a las nuevas tecnologías se ha pasado del tradicional dibujo a mano de planos en dos dimensiones, por ejemplo, a la existencia de software que posibilita el desarrollo de todo el proceso arquitectónico en tres dimensiones.

Dado que la posibilidad de "ver" o analizar conceptos teóricos mediante una gráfica como así también la posibilidad de modificar las diferentes variables que intervienen en la modelización de los problemas, favorece el aprendizaje de nuestros estudiantes, se debe tener en cuenta que el simple uso de las tecnologías no exime al docente de trabajar por una adecuada integración curricular, es decir, el docente debe seguir construyendo el entorno educativo para lograr los objetivos que se ha propuesto. Esta construcción consiste en:

Guiar a los estudiantes en el uso de las bases de información y conocimiento, y proporcionarles el acceso a los mismos para usarlos como recursos.

Motivar a los estudiantes en el proceso de aprendizaje autodirigido, en el marco de acciones de aprendizaje abierto, explotando las posibilidades comunicativas de las redes como sistemas de acceso a recursos de aprendizaje.

Orientar y formalizar el ambiente de aprendizaje en el que los estudiantes están utilizando estos recursos.

Guiar a los estudiantes en el desarrollo de experiencias colaborativas y grupales, monitoreando el progreso de los estudiantes.

3 Desarrollo

En este apartado describiremos las actividades que se propusieron a los estudiantes en las diferentes etapas de los procesos de enseñanza y aprendizaje del tema en estudio, así como los resultados obtenidos por los mismos. Para el tratamiento de las ideas previas y las actividades de introducción, se proponen realizar una investigación bibliográfica del tema de estudio como una primera aproximación de los estudiantes al contenido a tratar, esta pequeña investigación incluye un estudio y análisis de las ecuaciones que gobiernan y describen matemáticamente el proceso. El trabajo aquí planteado intenta dar respuesta al interrogante que se plantean los estudiantes acerca de la necesidad del estudio del mismo, mostrando la utilidad del tema de estudio en la ingeniería, como así también comprender la importancia de la matemática y la física proyectando esto a todos los contenidos de la ingeniería que requiera su explicación basada en las materias básicas.

La experiencia que mostramos aquí corresponde a un Trabajo Práctico Integrador en el que los estudiantes deberán visualizar con el uso de simuladores la generación de corriente alterna: comparar las relaciones entre el flujo magnético y la fem inducida con respecto al tiempo.

Analizar el sentido de la corriente eléctrica inducida por medio de la Ley de Lenz.

Los objetivos planteados por las cátedras son:

Que el alumno logre:

Identificar problemas básicos que originan la actividad profesional.

Aprender la práctica de la Ingeniería encarando problemas desde el principio.

Construir conceptos básicos (que serán retomados y profundizados en materias de los niveles superiores)

Marcar a partir de lo concreto la necesidad de desarrollo de ciencias básicas para interpretar los problemas en profundidad creciente.

Articular e integrar los conocimientos de materias, (en este caso Física II y Análisis Matemático).

Dar significación a los conceptos y relaciones que se van aprendiendo en las materias paralelas y marcar los límites y las consecuentes necesidades de profundización.

3.1 Planteo del Trabajo Práctico

Las fórmulas deben estar centradas y en una línea distinta, además deben estar numeradas secuencialmente entre paréntesis, en negrita y a la derecha de la misma, justo pegando al margen derecho, tal y como se muestra a continuación:

PROBLEMA INTEGRADOR: GENERADOR DE CORRIENTE ALTERNA

Fundamento Teórico

El generador de corriente alterna es un dispositivo que convierte la energía mecánica en energía eléctrica. El generador más simple consta de una espira rectangular que gira en un campo magnético uniforme.

El movimiento de rotación de las espiras es producido por el movimiento de una turbina accionada por una corriente de agua en una central hidroeléctrica, o por un chorro de vapor en una central térmica. En el primer caso, una parte de la energía potencial agua embalsada se transforma en energía eléctrica; en el segundo caso, una parte de la energía química se transforma en energía eléctrica al quemar carbón u otro combustible fósil.

PROCEDIMIENTO

Ingresar a la página http://www.sc.ehu.es/sbweb/fisica/elecmagnet/induccion/generador/generador.htm

Resolver las actividades propuestas a continuación.

Existen tres formas que hay de variar con el tiempo el flujo de un campo magnético a través de una espira,

$$\Phi = B.S \qquad \textbf{(1)}$$

que es el producto escalar de dos vectores, el vector campo B y el vector superficie S:

Cuando el campo cambia con el tiempo.

Cuando el área de la espira cambia con el tiempo.

Cuando el ángulo entre el vector campo B y el vector superficie S cambia con el tiempo.

El último caso será el desarrollado en este trabajo para entender la generación de corriente alterna.

Supongamos que la espira gira con velocidad angular constante ω. Al cabo de un cierto tiempo t el ángulo θ que forma el campo magnético y la perpendicular al plano de la espira es $\theta = \omega.t$. El flujo del campo magnético B a través de una espira de área A es:

$$\varphi = B.A.cos(\omega t) \qquad \textbf{(2)}$$

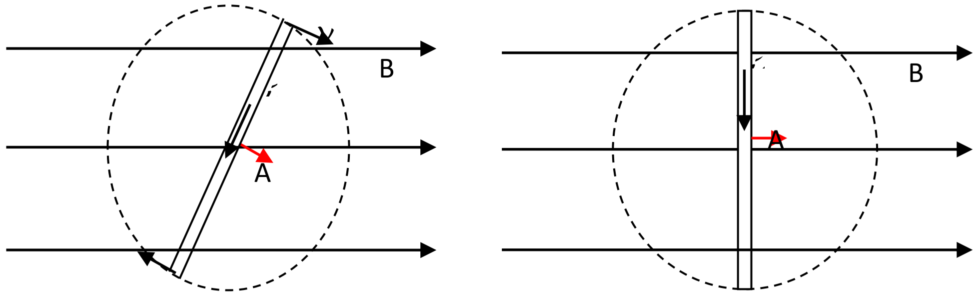


Fig. 1. Al hacer girar la espira el flujo disminuye, es decir, un Norte se aleja. Por Ley de Lenz, la dirección de la corriente debe hacer que se induzca un Sur impidiendo que se aleje ese Norte.

La fuerza magnética, dada por el producto vectorial $B \times v$, también nos asegura que la corriente circula en ese sentido dado que hace mover los portadores de carga en esa dirección supuesta por Ley de Lenz.

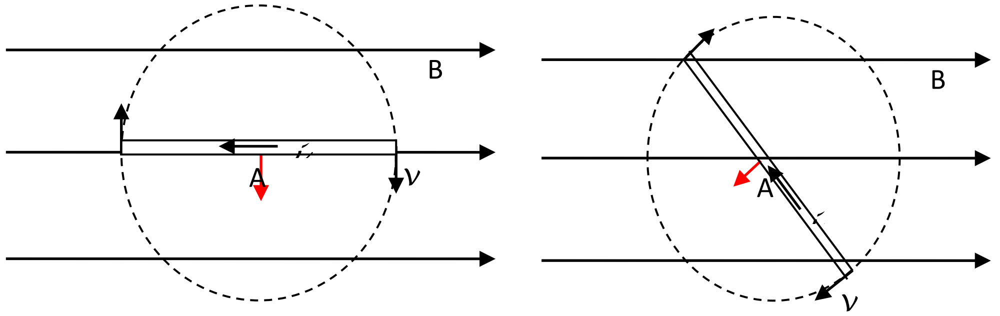


Fig. 2. La espira continuó girando, pero la corriente se mantuvo constante, debido a que como el flujo comienza a aumentar, es decir, se acerca un Norte, por ley de Lenz tiene que inducirse otro Norte que se le oponga.

El análisis de la fuerza magnética indica el mismo sentido de desplazamiento para los portadores de carga.

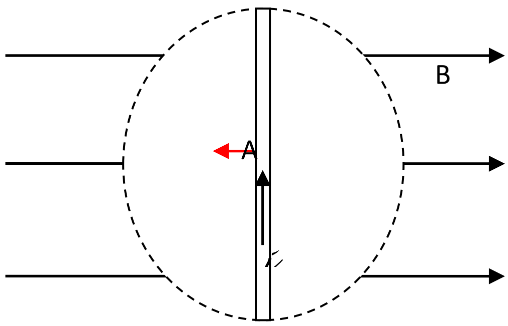


Fig. 3. Cuando la espira ha girado 180°, es decir medio ciclo, la corriente sigue siendo la misma, pero apenas supera los 180° se invierte la corriente y vuelve al principio.

Por ley de Lenz tenemos entonces que la fem inducida:

$$\varepsilon = \frac{-d\varphi}{dt} = \frac{-d\left(B.A.cos\left(\omega t\right)\right)}{dt} \quad \textbf{(3)}$$

$$\varepsilon = -\left(-B.A.sen\left(\omega t\right)\right)\omega \qquad \textbf{(4)}$$

$$\boxed{\varepsilon = \omega B.A.sen\left(\omega t\right)} \qquad \textbf{(5)}$$

Cuando $sen\left(\omega t\right)=1$, la fem ε es máxima. Similar análisis podemos hacer con el flujo magnético, que cuando $cos\left(\omega t\right)=1$ es máximo. Nótese que cuando la fem sea máxima el flujo es mínimo y viceversa.

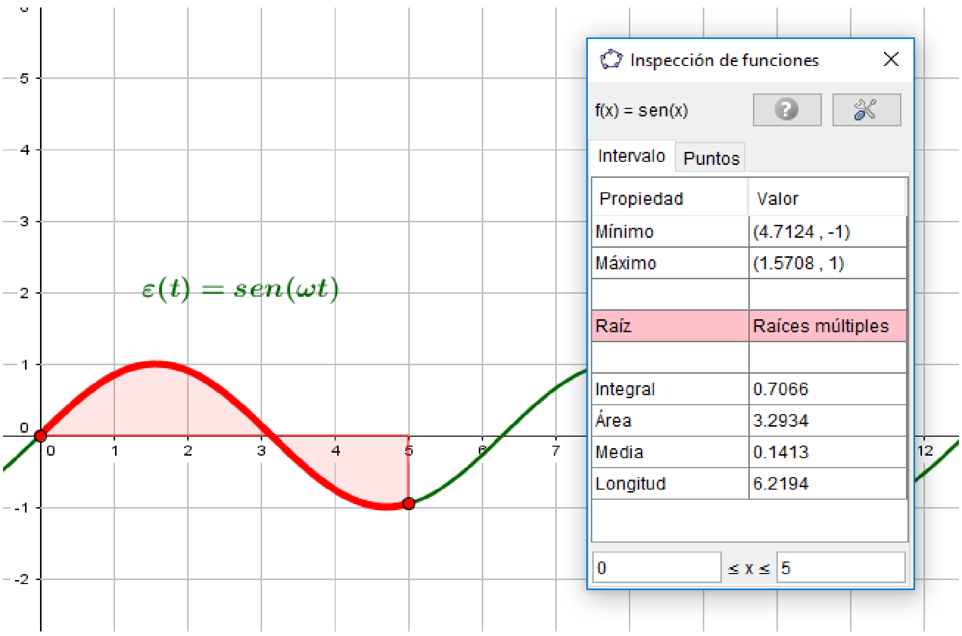


Fig. 4. Variación de la función seno de la fem en función del tiempo.

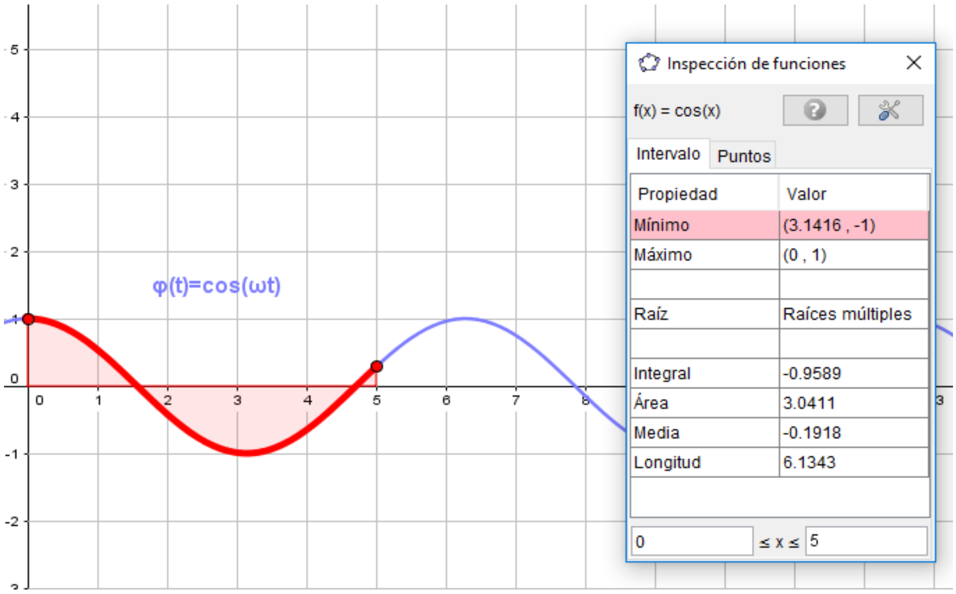


Fig. 5. Variación de la función coseno que corresponde al flujo magnético

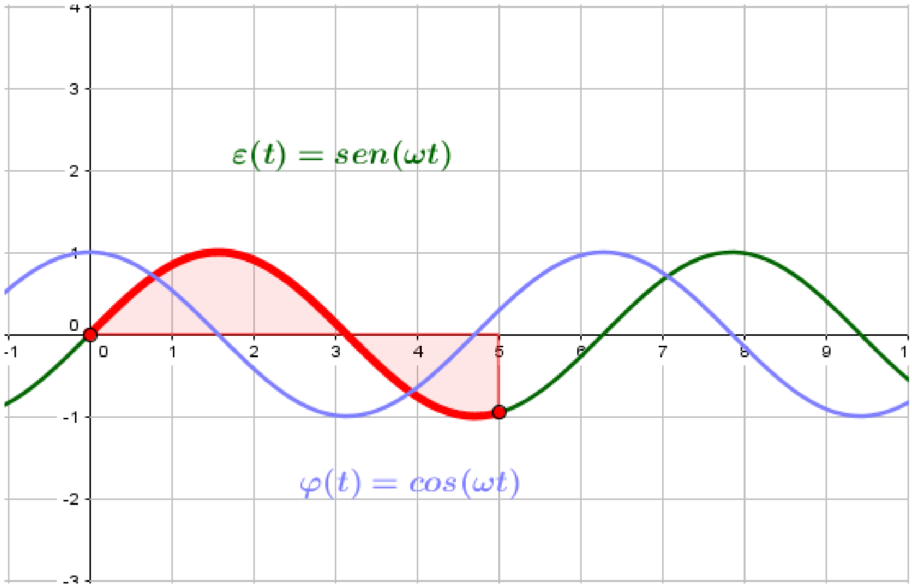


Fig. 6. Comparación de ambas funciones

3.2 Actividades:

1. Empleando un campo magnético de 49 Gauss y una velocidad angular 2rad/s, determinar para qué tiempo el valor de la Fem es máximo y el valor del Flujo es mínimo. ¿Cuál es el valor de la Fem en ese momento? Las dimensiones de la spire son a = 30, b =20 cm
2. Empleando los mismos valores de B y ω, determinar para qué tiempo la Fem es mínima y el Flujo es máximo.

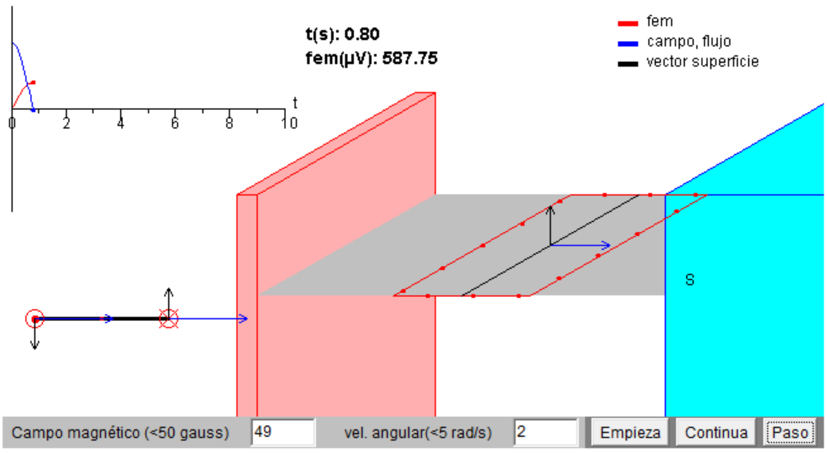


Fig. 7. Comparación de ambas funciones

$$\varepsilon_{máx} = \omega B.A \qquad (6)$$

$$\varepsilon_{máx} = 2rad / s * 4.9\times10^{-3}T * 0.06m^2 = 5.88\times10^{-4}V \qquad (7)$$

Detenemos el simulador cuando se aproxima a ese valor de la fem, y observamos que el tiempo es de 0,8s. Lo calculamos para corroborar:

Si $sen(\omega t)=1$ para que la fem sea máxima el producto de la velocidad angular por el tiempo tiene que ser igual a 90°:

$$\omega.t=\frac{\pi}{2} \qquad \frac{2rad}{s}t=\frac{\pi}{2}\Rightarrow t=\frac{\frac{\pi}{2}}{2rad/s}=\boxed{0.79s} \tag{8}$$

Para que el flujo sea mínimo $cos(\omega t)=0$

$$\omega.t=\frac{\pi}{2} \qquad \frac{2rad}{s}t=\frac{\pi}{2}\Rightarrow t=\frac{\frac{\pi}{2}}{2rad/s}=\boxed{0.79s} \tag{9}$$

Como era de esperarse el flujo es mínimo cuando la fem es máxima, por eso el tiempo es el mismo.

2. $\varepsilon_{mín}=0$, para ello $sen(\omega t)=0$. En un tiempo 0s la fem es minima y el flujo, $cos(\omega t)=1$, máximo.

Cada medio ciclo sucede lo mismo

$$\omega.t=\pi \qquad \frac{2rad}{s}t=\pi\Rightarrow t=\frac{\pi}{2rad/s}=\boxed{1.57s} \tag{10}$$

Con este tipo de actividades, utilizando los programas didácticos que simulan hechos y/o procesos en un entorno interactivo, permiten modificar parámetros y ver cómo reacciona el sistema ante el cambio producido, es posible evidenciar la utilidad de las cátedras enseñadas en el ciclo básico, las que, generalmente, inducen a la clásica pregunta: “este contenido, para qué sirve?”. Asimismo, es importante introducir a los estudiantes en el perfil de la carrera desde los primeros años y lograr que comiencen a manejar con fluidez el vocabulario específico y técnico; así como la formalidad del lenguaje científico.

El simulador contribuye a una mejor comprensión del fenómeno. Además, es posible corroborar que los cálculos realizados coinciden con los valores acusados en el simulador, considerando errores de aproximación.

El estudiante descubre y desarrolla sus habilidades permitiendo aumentar su capacidad de respuesta a las demandas tecnológicas del medio. Mediante los simuladores es posible diferenciar y crear su propio aprendizaje a través de una experiencia directa. Resultando, además, útil el apoyo didáctico, sobre todo en áreas de especialización.

3.3 Citas y referencias

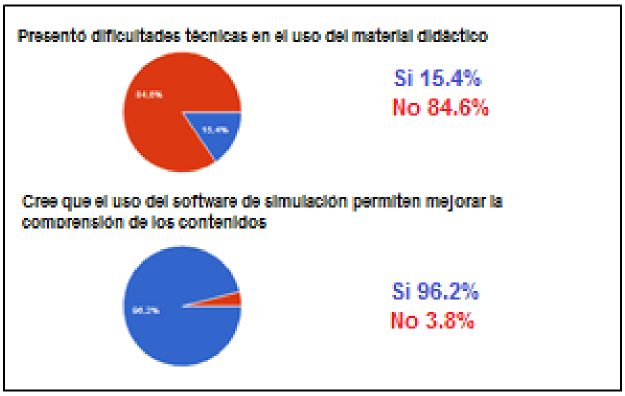
[1] Arroyo; Ortiz y Delgado.: Estilos de Aprendizaje: Investigaciones y Experiencias. *Universidad de Cantabria.* (2012)

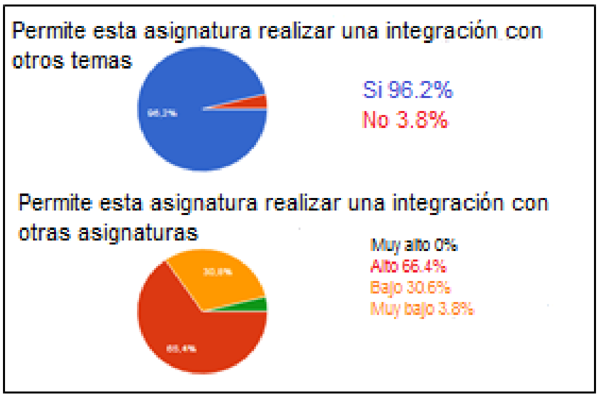
[2] Torres, A.: Desarrollo de Competencias Científicas a través de la Aplicación de Estrategias Didácticas Alternativas. *Revista de la Facultad de Ciencias Económicas y Administrativas. Universidad de Nariño*, Vol. XIV. No. 1, pp. 187-215 (2013).

[3] Echazarreta; Haudemand. : Resolución de Problemas Integradores en la Enseñanza de la Física para Estudiantes de Ingeniería. Integración y articulación de contenidos de física en las carreras de ingeniería. *Univ. Tecnológica Nacional, Fac. Regional Concepción del Uruguay, Depto. de Materias Básicas. Formación Universitaria.,* Vol. 2. (2009)

DISCUSIÓN:

Con la finalidad de conocer la opinión de los estudiantes participantes sobre los diferentes aspectos de la estrategia propuesta y desarrollada, se elaboró y aplicó un cuestionario.





4 Conclusiones y trabajos futuros

Con esto se pretende abordar otras formas de aprendizaje universitario que desarrolle habilidades de pensamiento y actitudes sin abandonar la adquisición de conocimientos, a través de distintas estrategias didácticas. A través de estas actividades se intenta reconocer y difundir experiencias significativas que hayan logrado mejoras en las comunidades educativas de nuestra facultad.

Esto demanda al docente de primer año la concreción de la integración horizontal entre los contenidos de las distintas asignaturas que se desarrollan en ese nivel académico. Promoviendo un aprendizaje por reforzamiento positivo con la interactividad que muestra, mediante imágenes animadas, sonidos y textos, donde se logra captar la atención del estudiante obteniendo un aprendizaje significativo.

Se disminuye la brecha entre la teoría académica y la práctica laboral ya que acerca al estudiante a su futura realidad como trabajador, preparando para competencias laborales.

Los graduados estarán mejor preparados al adquirir experiencia con la utilización de simuladores, reduciendo riesgos y costos ya que el joven mediante la práctica en un simulador puede realizar actividades que de ejecutarse en la realidad ese error puede ser ineludible o costoso.

El estudiante es un agente que además de participar en la situación, debe continuar procesando la información que se le proporciona en una situación problemática logrando una participación activa, en una alternativa práctica que permite analizar problemas complejos.

Permitiendo que el usuario experimente, tome decisiones con argumentos diferentes, sin cambiar el sistema real. Poniendo en práctica la utilización del método científico, al efectuar actividades de investigación tratando de comprobar la hipótesis sobre algún tema en específico.

Pero es importante llevar un programa o control en su aplicación ya que entre la teoría sobre el tema y llevarlo a la práctica con efectividad, requiere tiempo el cual puede provocar no cumplirse o retrasarse en el programa de estudio.

Teniendo en cuenta que para obtener estimaciones más exactas y para minimizar la probabilidad de tomar una mala decisión se tienen que:

a) Repetir los ensayos en cada simulación, todas las veces que se considere conveniente.
b) Para problemas más complejos, un gran número de repeticiones para así evitar caer en un error.

Referencias

1. Larson R.; Hostetler, R.: Cálculo y Geometría Analítica. Octava Edición. Ed. McGraw Hill. (2006)
2. Thomas, G. Jr.;Finney,R.: Cálculo con Geometría Analítica. Sexta Edición. Ed. Addison-Weley Iberoamericana. (2000)
3. Zill, D.; Wright, W.: Cálculo: Trascendentes Tempranas – Cuarta Edición. Ed. McGraw Hill. (2014).
4. Tipler; Mosca. Física para la Ciencia y la Tecnología – Volumen 2A – Mecánica. 5°. Ed Reverte 2005
5. Espinoza, I.: Inducción Electromagnética y Flujo Magnético. http://es.slideshare.net/olmang03/fem-inducida. Accedido el 22 de febrero 2017

Volver al Índice

Competencias en Matemáticas de Alumnos Ingresantes a la Facultad de Agronomía y Agroindustrias de la Universidad Nacional de Santiago del Estero

Valeria Corvalán, Lucrecia L. Chaillou
Departamento Físico-Matemático, Facultad de Agronomía y Agroindustrias, Universidad Nacional de Sgo. del Estero
Av. Belgrano (S) 1912
valeriacorvalan32@hotmail.com, chaillou@unse.edu.ar

Resumen. En el siguiente trabajo se presenta un estudio de las competencias matemáticas desarrolladas por alumnos que cursan el primer año de las carreras de Ingeniería en Alimentos y Licenciatura en Química de la Facultad de Agronomía y Agroindustrias de la Universidad Nacional de Santiago del Estero, Argentina, para identificar las áreas de conocimiento en las que los alumnos tienen mayores deficiencias y en consecuencia desarrollar acciones que las fortalezcan y eviten deserciones tempranas. Se aplicó una prueba de diagnóstico a alumnos de primer año (2012-2014), que consistió en ejercicios de resolución directa y situaciones problemáticas simples de la vida cotidiana, determinando el desarrollo de habilidades para la resolución de problemas e interpretación de consignas y el nivel de aprendizaje conceptual de la matemática se aplicó una metodología exploratoria - evaluativa, basada en el análisis cuanti-cualitativo de los datos surgidos a partir del monitoreo de las competencias en matemática.

Palabras Clave: Matemática, Competencias, Aprendizaje.

1 Introducción

La deserción en el nivel de educación superior es una problemática común en países de América Latina [1].
Si bien, durante el siglo XX y comienzos del XXI, la matrícula de la educación superior de la Argentina, se ha incrementado con una tasa de crecimiento promedio del 7% anual [2] y, paralelamente, se ha expandido la escolarización en el nivel secundario, se observan tasas de deserción muy elevadas. Se considera que más del 70 % de quienes ingresan a la Universidad abandonan su carrera antes de graduarse, observándose la mayor deserción durante el primer año [3].

El Ministerio de Educación de la Nación en su último informe publicado como Anuario de Estadísticas Universitarias, indica que el total de alumnos universitarios fue 1.808.415, siendo 412.916 los alumnos ingresantes y 109.360 los graduados, además, la relación entre los primeros y los últimos valores fue solamente un 16,5. Esta relación es un 15% más baja que la registrada en el año 2010 [4]. Por otra parte, naciones con alta graduación universitaria en las carreras científicas y tecnológicas ocuparán un lugar de relevancia en el escenario mundial en el siglo XXI, en nuestro país, la proporción entre graduados de estas carreras con respecto al total de graduados universitarios es, solamente, un 15%, frente al 26% de México y Colombia, 24% de Chile, 22 % de El Salvador y 20% de Panamá [5].

El problema de deserción a nivel universitario obedece a varias causas, entre ellas: población estudiantil más numerosa en los últimos años, heterogénea en cuanto a sus conocimientos, habilidades y destrezas, programas universitarios diseñados bajo el supuesto de una cierta homogeneidad, dificultades de aprendizaje, etc. En síntesis, los alumnos ingresantes inician sus estudios superiores sin contar con las competencias mínimas, esto da como resultado que, algunos se adapten al nuevo nivel de exigencia logrando graduarse en el tiempo estipulado, otros persistan en sus metas prolongando la permanencia mucho más allá de la duración prevista y la mayoría, con menos tolerancia o menos recursos económicos, terminen por desertar prematuramente [3].
Como una alternativa para mitigar este problema, y mejorar el desempeño de los estudiantes en el ingreso, se han desarrollado diferentes métodos de diagnóstico y actividades asociadas, tales como cursos de nivelación, que involucran la evaluación de conocimientos disciplinarios específicos de la carrera que han elegido, de comprensión lectora, de expresión escrita, y de actitudes y estrategias necesarias para afrontar los estudios universitarios [6].

Los estudiantes de ingeniería, por lo general, tienen muy poco dominio de la matemática, esto complica la tarea de los docentes del área puesto que, no solamente deben dar clase con el programa analítico preestablecido, sino que debe generar estrategias para que los estudiantes corrijan su errores y subsanen sus carencias. Esta falencia se observa no solamente en las universidades de Argentina [7, 8], sino también en Chile [9] y Colombia [10], entre otros.

Abordar el estudio de la matemática a través de la resolución de problemas como un medio, no como un fin, contribuye al desarrollo de diversas capacidades, entre ellas la de comunicarse, y brinda un espacio de privilegio para contribuir al logro de las competencias genéricas, tecnológicas y sociales requeridas por el perfil profesional de los egresados de las Carreras de Ingeniería. Puesto que, la finalidad que se persigue es que el graduado universitario esté sólidamente formado en competencias, tales como aprender a aprender, a plantear y resolver problemas reales, a seleccionar información y pensar críticamente, entre otras [11].

Para tratar de nivelar los conocimientos de Matemática y Físico-Química, en la Facultad de Agronomía y Agroindustrias de la Universidad Nacional de Santiago del Estero se dicta un curso de ingreso en dos modalidades, uno de dictado adelantado en el semestre anterior al inicio de clases y otro durante febrero–marzo antes del inicio del dictado regular de las asignaturas. Sin embargo, los docentes de asignaturas de primer año, tales como Algebra y Geometría Analítica, Matemática I, Análisis Matemático I y Física I se ven afectados por la problemática del alumno ingresante puesto que su bajo nivel de competencias, particularmente en matemáticas, dificulta la enseñanza y el aprendizaje de dichas asignaturas. Además, el curso de nivelación no garantiza el cursado en las mejores condiciones ni la preparación para el entendimiento de las materias y como el aprendizaje implica, necesariamente, adaptaciones, rupturas cognitivas y cambio de modelos implícitos, de lenguajes, de sistemas cognitivos, y debido a que algunas ideas persisten y obstaculizan este proceso, es necesario analizar el nivel de conocimientos matemáticos de los ingresantes para tratar de proponer soluciones.

2 Objetivos

El objetivo de esta experiencia fue evaluar las competencias básicas en matemática de alumnos ingresantes a la Facultad de Agronomía y Agroindustrias de la Universidad Nacional de Santiago del Estero, luego de aprobar el curso de ingreso, para identificar las áreas de conocimiento en las que los alumnos tienen mayores deficiencias y en consecuencia desarrollar acciones que las fortalezcan y eviten deserciones tempranas.

3 Materiales y métodos

Para determinar, en los ingresantes, el nivel de conocimientos en Matemáticas después del curso de nivelación, el desarrollo de habilidades para la resolución de problemas e interpretación de consignas y el nivel de aprendizaje conceptual de la Matemática, se utilizó una metodología exploratoria - evaluativa, basada en el análisis cuanti-cualitativo de los datos surgidos a partir del monitoreo de las competencias en matemática.

Se utilizó como población de estudio los alumnos que aprobaron el curso de ingreso y que cursan el primer año de las carreras de Ingeniería en Alimentos y Licenciatura en Química de la Facultad de Agronomía y Agroindustrias de la Universidad Nacional de Santiago del Estero, Argentina. El primer día de clases, luego de la presentación de las asignaturas mencionadas, se procedió a evaluar a los alumnos mediante una prueba de diagnóstico escrita que consistió en ejercicios de resolución directa y situaciones problemáticas simples que se presentan en la vida cotidiana. Se evaluaron 27 alumnos en el año 2012, 55 alumnos en el 2013 y 88 alumnos en el 2014.

Las dimensiones del test engloban las siguientes áreas temáticas: Geometría Plana: Ángulos, Polígonos; Algebra: sistemas de ecuaciones; Trigonometría; Operaciones combinadas de números reales; Proporcionalidad; Polinomios.

Para el análisis de las competencias matemáticas se tuvo en cuenta el Documento sobre Competencias requeridas para el Ingreso a los Estudios Universitarios [12], el cual dentro del ítem de Competencias específicas: *"Resolver problemas sencillos en Matemática, Física o Química aplicando modelos matemáticos"* enumera una serie de indicadores de logro de los cuales se seleccionaron algunos y se incluyeron otros que se consideraron pertinentes para Algebra y Geometría Analítica y Matemática I. Se consideraron las competencias (C1; C2; C3, C4, C5, C6) para:

C1: Resolver situaciones problemáticas.
Resultados de Aprendizaje:

- Identificar datos e incógnitas.
- Analizar e interpretar las soluciones aritméticas encontradas.

- Comunicar adecuadamente los resultados

C2: Resolver operaciones combinadas.
Resultados de aprendizaje:
- Aplicar propiedades de los conjuntos numéricos para resolución de operaciones combinadas.
- Aplicar regla de signos.
- Utilizar propiedades de potenciación y radicación.

C3: Determinar las raíces de ecuaciones polinómicas de segundo grado.
Resultados de aprendizaje:
- Calcular las raíces de una ecuación polinómica de segundo grado.
- Aplicar formula resolvente.
- Interpretar el resultado obtenido.
- Analizar la naturaleza de las raíces.

C4: Encontrar el elemento desconocido en una proporción
Resultados de aprendizaje:
- Identificar medios y extremos en una proporción.
- Aplicar la propiedad fundamental de las proporciones.

C5: Comprender analítica y gráficamente problemas que puedan traducirse a sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas.
Resultados de aprendizaje:
- Plantear problemas que puedan traducirse a sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas.
- Aplicar diferentes métodos para la resolución analítica de un sistema de ecuaciones lineales.
- Interpretar gráficamente los resultados obtenidos.

C6: Conocer relaciones trigonométricas sencillas.
Resultados de aprendizaje:
- Calcular distancias y ángulos en situaciones reales.

La evaluación de diagnóstico, consistió en seis ejercicios prácticos (Tabla 1):

Tabla1. Detalle de los contenidos evaluados en la prueba de diagnóstico.

Actividad	Contenido
1	Operaciones combinadas con números reales.
2	Razones y Proporciones.
3	Sistemas de ecuaciones lineales.
4	Función y ecuación polinómica de segundo grado.
5	Trigonometría
6	Situaciones problemáticas de ingenio matemático

Para la evaluación de las competencias matemáticas y las repuestas de cada ejercicio se utilizó la confección de una tabla de valoración o rúbricas (Tabla 2), que es un instrumento que permite determinar el nivel del logro alcanzado por los estudiantes con respecto a las competencias propuestas para cada actividad, con referencia a los resultados de aprendizaje.

Tabla 2. Matriz de valoración de los resultados del aprendizaje.

Categorías	Excelente (4)	Bueno (3)	Suficiente (2)	Insuficiente (1)	Total
Conceptos matemáticos	El desarrollo demuestra completo entendimiento del concepto matemático usado para resolver la actividad	El desarrollo demuestra entendimiento sustancial del concepto matemático usado para resolver la actividad	El desarrollo demuestra algún entendimiento del concepto matemático usado para resolver la actividad	El desarrollo demuestra entendimiento muy limitado del concepto matemático usado para resolver la actividad o no está desarrollado.	
Diagramas y dibujos	Los diagramas y/o dibujos son claros y ayudan a comprensión de los procedimientos	Los diagramas y/o dibujos son claros y fáciles de entender.	Los diagramas y/o dibujos son algo difíciles de entender.	Los diagramas y/o dibujos son difíciles de entender o no los realiza	
Estrategias	Usa una estrategia eficiente y efectiva para resolver la actividad	Por lo general, usa una estrategia efectiva para resolver la actividad	Algunas veces usa una estrategia efectiva para resolver la actividad, pero no lo hace consistentemente	Raramente usa una estrategia efectiva para resolver la actividad	
Orden y organización	La actividad es presentada de manera ordenada, clara y organizada que es fácil de leer.	La actividad es presentada de manera ordenada, y organizada que es, por lo general, fácil de leer.	La actividad es presentada de manera organizada pero puede ser difícil de leer.	La actividad se ve descuidada y desorganizada. Es difícil saber con qué información está relacionada.	

Los alumnos ingresantes, a pesar de haber asistido y aprobado el curso de ingreso evidenciaron en su mayoría un gran desconocimiento de los núcleos temáticos abordados. Específicamente:

- Fue notable el desconocimiento de simples operaciones algebraicas, operaciones con números racionales, potenciación y radicación de números reales.
- Mostraron dificultades en la interpretación y resolución de ecuaciones de segundo grado y de sistemas elementales de ecuaciones lineales.
- Presentaron problemas en la interpretación y aprendizaje de trigonometría, manifestando, en su mayoría, que el tema no se desarrolló durante el ciclo medio.

Además, demostraron muy poca aptitud para:

- Interpretar ejercicios y situaciones problemáticas propuestas, identificar los datos y las incógnitas de los mismos;
- Interpretar la realidad en términos matemáticos, formular sus propios problemas y utilizar el razonamiento para analizar situaciones cotidianas;
- Utilizar los distintos tipos de números y operaciones, junto con sus propiedades para tomar, transformar e intercambiar información y resolver problemas relacionados con la vida diaria y otras asignaturas vinculadas a las carreras universitarias;
- Calcular en forma mental, escrita y estimar la coherencia y precisión de los resultados obtenidos;
- Representar y analizar situaciones y estructuras matemáticas utilizando símbolos y métodos algebraicos para resolver problemas;
- Desarrollar estrategias para calcular magnitudes desconocidas a partir de otras conocidas, utilizar los instrumentos de medida disponibles, aplicar las fórmulas apropiadas y desarrollar las técnicas y destrezas adecuadas para solucionar un ejercicio o situación problemática;
- Elaborar e interpretar tablas y gráficos.

En la Fig. 1 se muestran los resultados globales de los niveles de capacidad que presentaron los alumnos ingresantes.

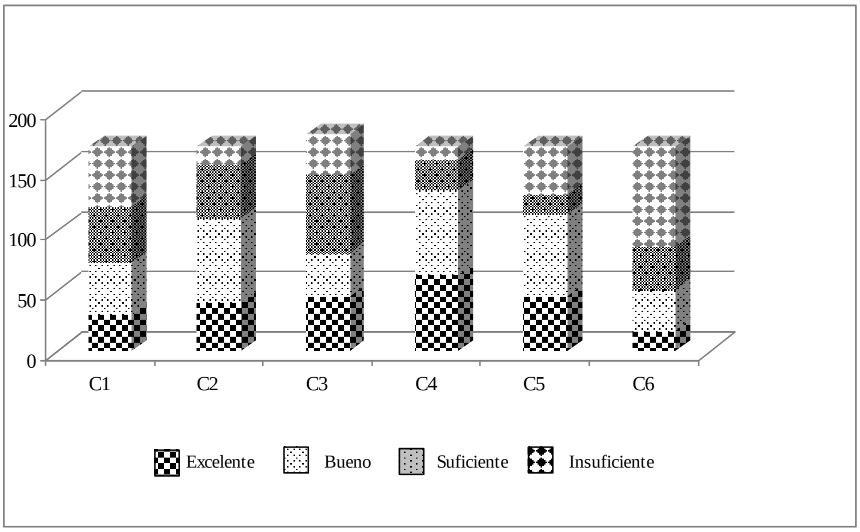


Fig. 1. Capacidades presentadas por los alumnos ingresantes 2012-2014

En general, los alumnos que ingresan a las carreras universitarias poseen dificultades con relación a la interpretación de textos y al pasaje del lenguaje natural al lenguaje simbólico. Para responder a los requerimientos del aprendizaje de la educación superior poseen habilidades matemáticas poco desarrolladas lo que impacta en el rendimiento en los exámenes de ingreso y posteriormente, en la retención de la matrícula de los primeros años [8].

Se puede observar en la Fig. 1, que existió un elevado número de alumnos que presentaron problemas en la interpretación y resolución de problemas de trigonometría, coincidiendo este resultado con los obtenidos en la Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires, Facultad de Ingeniería, en donde, sólo el 13% aprobó la prueba, y las mayores dificultades estuvieron en representar la situación a través de un esquema [7].

Además, los alumnos evaluados mostraron dificultades en la interpretación y resolución de sistemas elementales de ecuaciones lineales, como se observa en la Fig. 1. Resultados semejantes se obtuvieron en un estudio del perfil de los ingresantes a la Facultad de Ciencias Económicas y Estadística de la Universidad Nacional de Rosario, de manera que mostraron la capacidad un 52% de los alumnos de Licenciatura en Economía y 44% en las carreras de Contador Público y Licenciatura en Administración de Empresas [13].

4 Conclusiones

Del análisis de los resultados obtenidos, puede concluirse que el perfil de los alumnos ingresantes, referido a las competencias en matemáticas, revela que no son capaces de resolver con facilidad situaciones problemáticas simples, presentan dificultades para resolver ecuaciones polinómicas de segundo grado ni de plantear y resolver sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas, son incapaces de utilizar relaciones trigonométricas en problemas reales.

Por lo expuesto, se hace necesario reforzar, durante el curso de ingreso, los conceptos referidos a polinomios, sistemas de ecuaciones y trigonometría y sugerir que en dicho curso participen docentes universitarios que dictan las asignaturas durante el ciclo básico para que estructuren el dictado de clases convenientemente, se aumente el tiempo de dictado, se implemente clases de apoyo y se dicte un taller de lecto-escritura y comprensión de textos. Además, debido a que existe un porcentaje considerable de alumnos que no poseen las capacidades estudiadas o las presentan de manera regular, se tendría que intensificar el apoyo a los estudiantes, de manera de lograr un grupo menos heterogéneo que permita aumentar el rendimiento.

Este trabajo constituye un primer análisis de las competencias básicas de matemática, se necesita profundizar los estudios para profundizar los ejes temáticos en los que los alumnos ingresantes poseen pocos conocimientos para sugerir acciones que permitan mejorar la articulación entre el nivel medio y el universitario tratando de evitar deserción temprana.

Referencias

1. Abarca Rodríguez, A.; Sánchez Vindas, M.A.: La Deserción Estudiantil en la Educación Superior: el Caso de la Universidad de Costa rica. *Actualidades Investigativas en Educación*, Vol. 5, (número especial), pp.1-22 (2005)
2. García de Fanelli, A.M.: *Universidad, Organización e Incentivos: Desafío de la Política de Financiamiento Frente a la Complejidad Institucional*. 1a ed. Buenos Aires: Miño y Dávila -Fundación OSDE, pp. 245-250 (2005)
3. Narváez, G. A. La Baja Tasa de Graduación en la Educación Superior Pública Argentina. Gestión Universitaria, Vol. 5, N°3, URL: http://www.gestuniv.com.ar (2013). Accedido: 09 de Febrero de 2017
4. Ministerio de Educación. (2011).Anuario 2011 Estadísticas Universitarias. Argentina. URL: http://informacionpresupuestaria.siu.edu.ar/DocumentosSPU/Anuario de Estadísticas Universitarias-Argentina 2011.pdf. Accedido: 10 de Febrero de 2017
5. Centro de Estudios de la Educación Argentina Universidad: ¿hacen falta exámenes de ingreso? *Boletín N°18*, pp. 3-11. URL: http://www.ub.edu.ar/centros_de_estudio/cea/cea_numero_18.pdf. (2014). Acceso: 20 de Febrero de 2016
6. Míguez, M; Crisci, C.; Curione, K.; Loureiro, S.; Otegui, X.: Herramienta Diagnóstica al Ingreso a Facultad de Ingeniería: Motivación, Estrategias de Aprendizaje y Conocimientos Disciplinares. *Revista Argentina de Enseñanza de la Ingeniería*, Vol. 14, pp. 29-37 (2007)
7. Bouciguez, M. B.; Irassar, L.; Modarelli, M. C.; Rosa, M.; Nolasco, M. D. L. M. S.; Berrino, M. I.: Análisis de Competencias Matemáticas en Ingresantes a Ingeniería. *Actas del II Congreso Argentino de Ingeniería*. (CADI) URL: http://www.cadi.org.ar/cadi2012/images/trabajos/CAEDI/a46 Análisis de Competencias Matemáticas en Ingresantes a Ingeniera.pdf. (2012). Acceso: 26 de Noviembre de 2014
8. Berrino, I., Bouciguez, B., Irassar, L., Modarelli, C., Nolasco, R. & Suárez, M.: Investigación de Competencias Matemáticas en un Diagnóstico de Ingreso a Estudios Superiores en el Marco de la Articulación Nivel Medio Universidad. *Actas del Actas del VII CIBEM*, pp. 7363- 7373 (2013)
9. Cadenas, R.: Carencias, Dificultades y Errores en los Conocimientos Matemáticos en Alumnos de Primer Semestre de la Escuela de Educación de la Universidad de los Andes. *Revista Orbis*, Vol.2, No 6, pp. 68-84 (2007)
10. Cervantes Campo, G. y Martínez Solano, R.: Sobre Algunos Errores Comunes en Desarrollos Algebraicos. *Revista del Instituto de Estudios Superiores en Educación Universidad del Norte*, Vol. 8, pp. 34-41 (2007)
11. Lorenzo, S.B; Lecich, M.I.: Educación Matemática Basada en Competencias en Carreras de Ingeniería: Un Camino Factible. *Actas del XV EMCI Nacional y VII EMCI Internacional.* Tucumán, Argentina, pp. 27-36 (2009).
12. CONFEDI. 2014. Competencias en Ingeniería. URL: http://www.confedi.org.ar/sites/default/files/documentos_upload/Cuadernillo de Competencias del CONFEDI.pdf. Accedido el 24 de Noviembre de 2016
13. Furno, G.; Koegel, L.; Sagristá, R.: Estudio del Perfil de los Ingresantes a la Facultad de Ciencias Económicas y Estadística de la Universidad Nacional de Rosario en los años 1997 y 1998. *Cuartas Jornadas "Investigaciones en la Facultad" de Ciencias Económicas y Estadística* Vol.12, pp. 12-17 (1999)

Volver al Índice

Ecuaciones en Diferencias. Distintos Enfoques

Laura Oliva, Ivonne Esteybar
Departamento de Matemática, Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de San Juan
{loliva, iesteybar}@unsj.edu.ar

Resumen. El Cálculo, el Álgebra y la Transformada Z son herramientas que permiten resolver ecuaciones en diferencias que suelen utilizarse en el modelado de sistemas digitales. Las ecuaciones en diferencias aparecen en diversas aplicaciones y son un recurso para integrar conocimientos de distintas disciplinas. En este trabajo se muestra una propuesta de presentación para un curso de matemática aplicada para estudiantes de ingeniería electrónica, en ella se muestran distintos abordajes de solución.

Palabras Clave: Ecuaciones en diferencias, Álgebra matricial, Transformadas.

1 Introducción

La electrónica digital se encarga del diseño de sistemas electrónicos en los que la información está codificada en estados discretos. Las señales digitales se almacenan, son fácilmente transportables y pueden procesarse en tiempo no real. En el control digital de un proceso las señales de entrada y de salida deben ser medidas a intervalos regulares, o sea es necesario la discretización o muestreo de las señales involucradas. Normalmente las señales de entrada de sistemas digitales se obtienen por discretización de señales analógicas a intervalos de tiempo constante [1]. Estas son algunas de las rezones por las que cada vez se hace más necesario introducir el estudio de herramientas matemáticas para el estudio y tratamiento de funciones muestreadas y la introducción de las mismas en los cursos de matemática básica de la carrera de ingeniería en electrónica.

Es frecuente el abordaje del estudio de ecuaciones diferenciales en la mayoría de los cursos de cálculo de funciones de varias variables, pero si una función de tiempo discreto depende de otra función de tiempo discreto puede dar origen a la aparición de una ecuación en diferencias la cual puede ser escrita en forma recursiva.

Es importante entonces la introducción al estudio de este tipo de ecuaciones que serán necesarias para el abordaje de sistemas digitales en el desarrollo de la carrera de un estudiante de ingeniería electrónica y en tal sentido se muestra en este trabajo que el cálculo, el álgebra y el estudio de transformadas aportan valiosas herramientas para su abordaje.

La posibilidad de integrar distintas asignaturas permite que el alumno se afiance en los conocimientos de las mismas porque hace sus saberes reutilizables. De lo contrario en ocasiones cada disciplina recibe un rol desintegrado dentro de los saberes del estudiante. Es por ello que desde el proyecto “Las Tic y las acciones tutoriales como estrategias de mejora para la formación de ingenieros” se han elaborado actividades que lleven al alumno a abordar este tema con múltiples herramientas. La elaboración de material didáctico desde este proyecto tiene por objetivo que la matemática de las carreras del ciclo básico de la facultad de ingeniería deben proporcionar un background para el abordaje de los alumnos de problemas aplicados en su especialidad, además se debe tender al desarrollo de capacidades de integración de conceptos de distintas disciplinas y la habilidad de resolver problemas con diferentes enfoques.

2 Preparación de la contribución

Las señales pueden ser muestreadas en tiempo discreto dando origen a una señal discreta o digital, que no es otra cosa que una sucesión o secuencia de valores. La Fig. 1 muestra un ejemplo de función muestreada.

El conjunto de todas las señales discretas es un espacio vectorial de sucesiones.

Las señales digitales surgen en ingeniería eléctrica y en ingeniería de sistemas de control. Ellas son la solución de ecuaciones en diferencias.

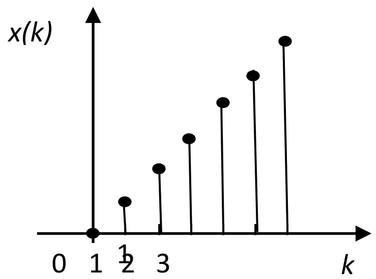


Fig. 1. Función Rampa muestreada.

Una ecuación lineal en diferencias es de la forma [1], [2]

$$a_0 y(k+n) + a_1 y(k+n-1) + \ldots + a_{n-1} y(k+1) + a_n y(k) = z(k) \qquad \textbf{(1)}$$

Donde a_i con $i = 0..n$ son constantes reales.

Las ecuaciones en diferencias pueden ser obtenidas discretizando ecuaciones diferenciales. En ellas una derivada de primer orden es aproximada por una diferencia de primer orden, una derivada de segundo orden por una diferencia de segundo orden, etc. Las ecuaciones en diferencias surgen como aproximación de modelos matemáticos de tiempo continuo o como modelado de sistemas de tiempo discreto.

La solución se puede obtener por distintos métodos, es el objetivo de este trabajo mostrar cómo el álgebra, el cálculo y la transformada Z aportan herramientas para su solución.

La primera de las posibilidades de solución será el aporte del cálculo [3]. La solución general está dada por

$$y(k) = y_h(k) + y_p(k) \qquad \textbf{(2)}$$

Siendo $y_h(k)$ la solución general de la ecuación homogénea e $y_p(k)$ una solución particular de la ecuación completa. Para la determinación de la solución de la ecuación homogénea se ensaya la función

$$y(k) = r^k \qquad \textbf{(3)}$$

$$a_0 r^{k+n} + a_1 r^{k+n-1} + \ldots + a_{n-1} r^{k+1} + a_n r^k = 0 \qquad \textbf{(4)}$$

$$\left(a_0 r^n + a_1 r^{n-1} + \ldots + a_{n-1} r + a_n\right) r^k = 0 \qquad \textbf{(5)}$$

$$a_0 r^n + a_1 r^{n-1} + \ldots + a_{n-1} r + a_n = 0 \qquad \textbf{(6)}$$

La (6) es la ecuación característica asociada a la parte homogénea de (1), luego las soluciones no nulas son las funciones (3) donde r es raíz de la ecuación (6).

Para el caso de una ecuación en diferencias de segundo orden se tiene que la solución tiene los siguientes formatos:

Si las raíces son reales y distintas

$$y(k) = C_1 r_1^{\,k} + C_2 r_2^{\,k} \qquad \textbf{(7)}$$

Si hay una raíz doble

$$y(k) = C_1 r^k + C_2 k r^k \qquad \textbf{(8)}$$

Si hay un par de raíces complejas conjugadas de magnitud r y fase $\pm\theta$

$$y(k) = C_1 r^k \cos(\theta k) + C_2 k r^k sen(\theta k) \qquad \textbf{(9)}$$

Otro enfoque para estudiar una ecuación en diferencias lineal homogénea es mediante un sistema de ecuaciones en diferencias [4]

$$y_{k+1} = A y_k \qquad \textbf{(10)}$$

Donde A es una matriz cuadrada que identifica el sistema, si adicionamos y_0 **(11)**
como condiciones iniciales, la solución estará dada por

$$y_k = A^k y_0$$

Si la matriz A es diagonalizable o admite una forma diagonal de Jordan es posible escribir la expresión anterior como una combinación lineal de sus vectores propios o generalizados por las potencias de los valores propios ponderados por constantes que dependen de las condiciones iniciales del problema. Es decir si la matriz se puede factorizar como

$$A = S\Lambda S^{-1} \qquad \textbf{(12)}$$

Entonces la solución se obtiene

$$y_k = C_1\lambda_1^k y_1 + C_2\lambda_2^k y_2 + \ldots + C_n\lambda_n^k y_n \qquad \textbf{(13)}$$

En (13) los vectores $y_1, \ldots, y_n$ son los vectores columnas de la matriz S de (12) que son los autovectores de la matriz A. El crecimiento de esta solución estará gobernada por los valores propios de la matriz A. Si los mismos tienen módulo menor o igual a 1, la solución estará acotada si $k \to \infty$.

Por ejemplo para una ecuación en diferencias de segundo orden se puede expresar matricialmente

$$y(k+2) + a_1 y(\acute{} k+1) + a_2 y(k) = 0 \qquad \textbf{(14)}$$
$$y(k+1) = y(k+1)$$

Definiendo el vector de estados

$$u_k = \begin{bmatrix} y(k) \\ y(k+1) \end{bmatrix} \qquad \textbf{(15)}$$

Luego el sistema resulta matricialmente

$$u_{k+1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_2 & -a_1 \end{bmatrix} u_k \qquad \textbf{(16)}$$

Los autovalores de la matriz que identifica al sistema define el tipo de soluciones.

El tercer y último enfoque que aquí se presenta es la resolución de ecuaciones en diferencias mediante el uso de la Transformada Z, esta transformada es un potente recurso para el tratamiento de señales digitales utilizadas en sistemas de tiempo discreto, la Transformada Z es a los sistemas de tiempo discreto lo que la Transformada de Laplace es a los sistemas analógicos.

Es importante destacar la definición de esta transformada, algunas propiedades útiles y la fórmula de cálculo de la transformada Z inversa.

La Transformada Z de la secuencia $\{y(kT)\}$ con período de discretización o muestreo T es la función [1,2]

$$Y(z) = \sum_{k=0}^{\infty} y(kT) z^{-k} \tag{17}$$

La Transformada Z de una señal adelantada en el tiempo se calcula mediante la expresión

$$Z[y(k+n)] = z^n \left(Y(z) - \sum_{k=0}^{n-1} y(k)\, z^{-k} \right) \tag{18}$$

Con estas expresiones y la fórmula para el cálculo de la Transformada Z inversa es posible resolver ecuaciones en diferencias

$$y(k) = \sum_{\text{polos de } Y(z)} \operatorname{Re} s \left[Y(z) z^{k-1} \right] \tag{19}$$

2.1 Desarrollo del trabajo

Se resuelven en clase algunos ejemplos de ecuaciones en diferencias utilizando distintos recursos y analizando el comportamiento de la solución hallada. Se muestra aquí un ejemplo presentado en la clase.

Resolver la ecuación en diferencias

$$y_{k+3} - 1.2 y_{k+2} + 0.15 y_{k+1} + 0.05 y_k = 0 \tag{20}$$

La ecuación característica es

$$r^3 - 1.2 r^2 + 0.15 r + 0.05 = 0 \tag{21}$$

Las raíces de esta ecuación característica son -0.3, 0.5 y 1

La solución será entonces

$$y_k = C_1 (-0.3)^k + C_2 0.5^k + C_3 1^k \tag{22}$$

Al fijar condiciones iniciales se determinan los valores de las constantes de la solución.

Para los valores de $C_1 = C_2 = C_3 = 1$ se puede obtener algunos valores de la función solución.

Algoritmo 1. Cáculo de valores de la secuencia (22) utilizando un programa científico.

```
> X := [seq( i, i=0..10 )];
                              X := [0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10]
> Y:={seq( (-0.3)^i+0.5^i+1^i, i=X )};
     Y := {1.2, 1.34, 1.098, 1.0706, 1.02882, 1.016354, 1.00397186, 1.001933442, 1.000982467, 1.0075938, 3.}
```

La Fig. 2 muestra una representación de la solución $y(k)$

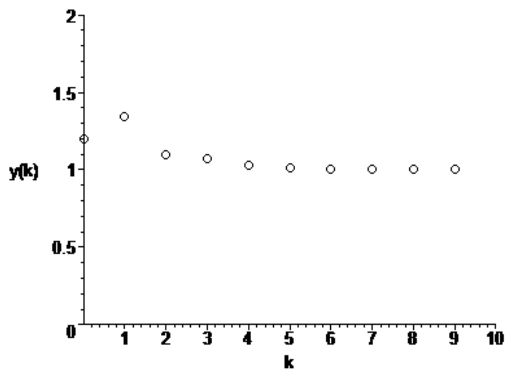


Fig. 2. Solución hallada.

Se observa que la solución es estable ya que cuando $k \to \infty$ la solución permanece acotada. Matricialmente se tiene

$$\begin{aligned} y_{k+3} &= 1.2y_{k+2} - 0.05y_{k+1} - 0.15y_k \\ y_{k+2} &= y_{k+2} \\ y_{k+1} &= y_{k+1} \end{aligned} \tag{23}$$

Se define el vector de estados

$$u_k = \begin{bmatrix} y_k \\ y_{k+1} \\ y_{k+2} \end{bmatrix} \tag{24}$$

Luego (23) se expresa matricialmente

$$u_{k+1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -0.15 & -0.05 & 1.2 \end{bmatrix} u_k \tag{25}$$

Introduciendo la matriz que define el sistema en un programa científico que permita calcular los autovectores y autovalores.

Algoritmo 2. Cáculo de los autovalores de la matriz A asociada al sistema (25) utilizando un programa científico.

```
> A:=matrix(3,3,[0,1,0,0,0,1,-.15,-0.05,1.2]);
```

$$A := \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -0.15 & -0.05 & 1.2 \end{bmatrix}$$

```
>eigenvalues(A);
```

$$-.3000,\ .5000,\ 1.0000$$

Luego la solución será

$$y_k = S^{-1}\Lambda S\, y_0 = C_1(-0.3)^k x_1 + C_2 0.5^k x_2 + C_3 1^k x_3 \tag{26}$$

x_1, x_2 y x_3 son los vectores propios de la matriz A

Algoritmo 3. Cáculo de los autovectores de la matriz A asociada al sistema (25) utilizando un progrma científico.

```
>eigenvectors(A);
[-.2999999998,1,{[-.954287103,.2862861307,-.0858858387]}],
[.9999999990,1,{[1.585809863,1.585809860,1.585809859]}],
[.5000000004,1,{[1.270768642,.635384204,.317692160 8]}]
```

Se observa claramente que la solución tiende en estado estacionario (cuando $k \to \infty$) a

$$y_k \to C_3 1^k x_3 \tag{27}$$

Finalmente utilizando Transformada Z, con ayuda de un software se aplica la transformada Z de la ecuación en diferencias, imponiendo las condiciones iniciales, en este caso consideraremos que a la ecuación en diferencias le adicionamos $y(0) = y(1) = 0$, $y(2) = 1$

Algoritmo 4. Uso de la transformada Z y de la transformada Z inversa para el cálculo de soluciones de (20) usando un progrma científico.

```
>eq:=ztrans(y(k+3)-1.2*y(k+2)+0.05*y(k+1)+0.15*y(k)=0,k,z);
```

$$eq := z^3 ztrans(y(k),k,z) - y(0)z^3 - y(1)z^2 - y(2)z - 1.2z^2 ztrans(y(k),k,z) + 1.2y(0)z^2 + 1.2y(1)z + 0.5z ztrans(y(k),k,z) - 0.5y(0)z + .15 ztrans(y(k),k,z) = 0$$

```
>eq1:=subs(y(0)=0,y(1)=0,y(2)=1,%);
```

$$eq1 := z^3 ztrans(y(k),k,z) - z - 1.2z^2 ztrans(y(k),k,z) + 0.5z ztrans(y(k),k,z) - .15 ztrans(y(k),k,z) = 0$$

```
> f(z):=solve(eq1,ztrans(y(k),k,z));
```

$$f(z) := 20\frac{z}{20z^3 - 24z^2 + z + 3}$$

```
> invztrans(f(z),z,k);
```

$$.9615384616\,(-.3000)^k + 1.538461539\,1.0000^k - 2.500000000\,.5000^k$$

3 Conclusiones y trabajos futuros

El desarrollo vertiginoso de las aplicaciones tecnológicas hace necesario el constante replanteo de los conceptos matemáticos que se incluyen en la currícula de las carreras de ingeniería. La inclusión del estudio de ecuaciones en diferencias como herramienta para el tratamiento de sistemas digitales lleva a hacer más énfasis en el tratamiento de este tema en la asignatura matemática aplicada de la carrera de ingeniería electrónica. La interrelación de los conceptos de distintas asignaturas para resolver problemas aplicados revaloriza para el estudiante del ciclo básico la matemática como una herramienta útil y valiosa. El uso de programas científicos colabora en la tarea pedagógica para evitar hacer énfasis en los cálculos y no en los resultados, contribuye en la visualización de soluciones.

Referencias

1. Alvarado, P. Señales y Sistemas. Fundamentos matemáticos. Centro de desarrollo material bibliográfico. Instituto de Costa Rica. (2005)
2. James, G. Matemáticas Avanzadas Para Ingeniería. México. Prentice Hall. (2002)
3. Kreyszig, E. Matemáticas Avanzadas Para Ingeniería. México. Limusa. (1990)
4. Lay, D. Álgebra Lineal y sus Aplicaciones. México. Pearson. (2007)

Volver al Índice

Una Propuesta Didáctica desde la Enseñanza para la Comprensión

Marisa Reid, Rosana Botta Gioda, Fabio Prieto
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Avda Uruguay 151,
6300 Santa Rosa, La Pampa, Argentina
{mareid, rosanabotta}@exactas.unlpam.edu.ar

Resumen. En este trabajo se presentan los fundamentos del diseño y la descripción de una propuesta didáctica basada en la Enseñanza para la Comprensión (EpC) del concepto de Extremos relativos y absolutos de funciones correspondiente a una unidad de la asignatura Matemática que se dicta en el primer año para la carrera Ingeniería en Recursos Naturales y Medio Ambiente, de la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales de la UNLPam.
El Marco de la EpC nos brinda una visión de la educación que pone la comprensión ante todo y nos invita a reflexionar sobre nuestro trabajo en el aula y en la institución de una manera diferente, a utilizar un lenguaje común y nos insta a trabajar en equipo, utilizando una serie de conceptos organizados alrededor de la práctica.

Palabras Clave: Enseñanza para la comprensión, Extremos relativos y absolutos, Cálculo diferencial.

1 Introducción

La asignatura Matemática es una materia de régimen anual que se dicta en el primer año de la carrera Ingeniería en Recursos Naturales y Medio Ambiente en la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales de la Universidad Nacional de La Pampa (UNLPam). Se abordan temas relacionados con el Álgebra durante el primer cuatrimestre y contenidos relacionados con el Cálculo Diferencial e Integral se desarrollan durante el segundo cuatrimestre. Los temas estudiados durante el primer cuatrimestre son herramientas indispensables para el desarrollo de otros conceptos que requieren un mayor nivel de abstracción y que son estudiados durante el segundo cuatrimestre.

Es una asignatura con una matrícula promedio de 120 alumnos ingresantes y actualmente puede cursarse bajo la modalidad de Cursado regular con examen final. De acuerdo a los requisitos mínimos indispensables para la aprobación de una actividad curricular bajo esta modalidad, dispuesto en la Resolución 447/14 del Consejo Directivo de la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales de la UNLPam se requiere la aprobación de 4 evaluaciones parciales; para luego poder rendir el examen final.

En la propuesta abordamos temas o conceptos correspondientes a la Unidad VII del programa de la asignatura, la que transcribimos a continuación:

UNIDAD VII: CÁLCULO DIFERENCIAL

Cuatro problemas con un tema común: Pendiente, velocidad, aceleración y densidad. La derivada. Fórmulas de diferenciación. Derivadas de distintas funciones. Uso de la tabla de derivadas. Regla de la cadena. Derivación implícita. Derivadas de orden superior. Diferenciales.

Valores Máximos y mínimos. Teorema del Valor Medio. Funciones monótonas y la prueba de la primera derivada. Concavidad y puntos de inflexión. Prueba de la segunda derivada para extremos relativos. Trazado de curvas. Problemas de máximo y mínimo aplicados.

Los temas correspondientes a esta unidad se desarrollan durante nueve clases prácticas y nueve teóricas durante el segundo cuatrimestre y se evalúan en forma continua durante todo el proceso.

1.1 Fundamentación de la propuesta

Charnay [1] considera que la cuestión esencial en la enseñanza de la matemática es cómo hacer para que los conocimientos enseñados tengan sentido para el alumno. Para el autor es imprescindible que el alumno sea capaz no solo de repetir o rehacer, sino también de resignificar en situaciones nuevas, de adaptar, de transferir sus conocimientos para resolver nuevos problemas. Y es, con las nociones matemáticas utilizadas como herramientas para resolver problemas, que se permitirá a los alumnos construir sentido. Sólo después, estas herramientas podrán ser estudiadas por sí mismas.

Basada en la teoría constructivista del aprendizaje y en los avances de la ciencia cognitiva del último medio siglo, la EpC es un marco pedagógico didáctico, que coloca la comprensión en un lugar central y en el foco de la clase [2].

El Marco de la EpC es una visión de la educación que pone la comprensión ante todo. Esta forma de concebir la educación nos invita a reflexionar sobre nuestro trabajo en el aula y en la institución de una manera diferente, a utilizar un lenguaje común y nos insta a trabajar en equipo, utilizando una serie de conceptos organizados alrededor de la práctica.

Esto nos lleva a un proceso de metacognición que se puede guiar con tres preguntas esenciales:

- ¿Qué queremos que nuestros estudiantes realmente comprendan? Y, ¿por qué queremos que comprendan este tema o concepto?
- ¿Cómo podemos involucrar a nuestros estudiantes en la construcción de estas comprensiones?
- ¿Cómo sabremos, nosotros y ellos, que sus comprensiones se desarrollan?

Pero ¿Qué entendemos por comprensión? La comprensión es la capacidad de pensar y actuar flexiblemente con lo que sabemos, para resolver problemas, crear productos e interactuar con el mundo que nos rodea [2].

Como podemos apreciar en esta definición, la comprensión va más allá del conocimiento. El conocimiento es solo una de las cualidades que forman parte de la comprensión.

Pero empeñarse en que los alumnos comprendan en lugar de que meramente recuerden no resulta gratuito para los profesores. Requiere aprender la forma de implicar a los alumnos para que construyan el conocimiento de una forma más activa, participando y colaborando con compañeros, requiere un conocimiento más profundo de la materia que se enseña, así como de la forma de representarla para hacerla comprensible a los estudiantes [3].

Blythe [4] sostiene que la comprensión incumbe a la capacidad de hacer con un tópico una variedad de cosas que estimulan el pensamiento, tales como explicar, demostrar y dar ejemplos, generalizar, establecer analogías y volver a presentar el tópico de una nueva manera. De esta forma el aprendizaje puede estar al nivel de la comprensión y no al nivel de la memorización.

El modelo EpC consta de cuatro componentes fundamentales: a) temas generadores; b) metas de comprensión; c) desempeños de comprensión y d) evaluación continua.

El propósito de estos componentes es definir claramente qué es lo que los estudiantes deberían comprender y establecer, en consecuencia, la forma en que ellos van a demostrar comprensión por medio de las actividades de aprendizaje.

1.2 Fortalezas y Debilidades de esta Unidad

La comprensión del concepto de derivada no está vinculada únicamente a conocer los elementos constitutivos del concepto sino también a ser capaces de relacionarlos durante la resolución de problemas.

En relación con el concepto de derivada, Artigue [5] afirma que, aunque se puede enseñar a los estudiantes a realizar de forma más o menos mecánica algunos cálculos de derivadas y a resolver algunos problemas estándar, existen grandes dificultades para hacer que desarrollen una comprensión de los conceptos y métodos de pensamiento que son el centro del Cálculo.

Dentro de las fortalezas detectamos el dominio y habilidad que presentan los estudiantes en la aplicación de las reglas de derivación y manejo de los recursos informáticos.

En cuanto a las debilidades podemos citar la interpretación de las consignas de los problemas, la comprensión del significado de la derivada en los distintos contextos y la formulación de modelos que representen la situación que se intenta modelizar. Algunos alumnos usan los elementos constitutivos del concepto de Derivada de manera aislada, o sólo relacionan un número limitado de ellos para obtener información relevante para el problema que tienen que resolver. Por lo general, ellos tienen dificultades en realizar una fundamentación teórica de la elección de las metodologías usadas en la resolución de las situaciones propuestas.

Las investigaciones realizadas se han centrado en describir las características de los significados del concepto de derivada construidos por el estudiante, mostrando la existencia de conflictos e inconsistencias entre las construcciones realizadas y los significados formales presentados por los libros de texto [6]. Además, han subrayado la influencia de los contextos, ya que los estudiantes no relacionan automáticamente una concepción, proceso de las ideas, de razón, límite y función vinculadas a las ideas de derivada dados en contextos diferentes.

Los modos de representación gráfico y analítico también influyen en la construcción de los significados por parte de los estudiantes.

2 Desarrollo

Como dijimos anteriormente el modelo EpC consta de cuatro componentes que describiremos en la propuesta:

- Temas generadores son centrales de la disciplina, de interés del docente y de los estudiantes, que sirven de motor a la búsqueda de la comprensión;
- Las metas de comprensión, enunciados que clarifican qué es lo que los estudiantes deberían comprender;
- Los desempeños de comprensión implican un reto y suponen el abordaje de problemas novedosos de la disciplina, evidencian el logro de la comprensión;
- La evaluación continua, formas formal e informal, a partir de distintas fuentes (docente, el mismo estudiante, pares, expertos), estrechamente relacionadas con las metas de comprensión; brindan retroalimentación constante para el mejoramiento.

2.1 Propuesta de mejoras para esta Unidad

En las clases teóricas y prácticas se presentarán actividades y situaciones problemáticas que ayuden al alumno a: relacionar los distintos conceptos que integran la unidad, como así también relacionarlos con conceptos ya estudiados; a interpretar las consignas de los problemas en los diferentes contextos, a resolverlos comprendiendo el significado de sus resultados, aplicando metodologías de resolución tales como las sugeridas por Polya [7], las nuevas tecnologías que aportan maneras de visualizar y estudiar conceptos en forma activa y mucho más clara que una serie de ecuaciones.

La Enseñanza para la Comprensión utilizando las nuevas tecnologías comprende múltiples desplazamientos del foco que habitualmente se privilegia en las prácticas tradicionales del aula.

Se diseñan algunas estrategias de clase con características del "buen aprendizaje" que tienden a promover la construcción de aprendizajes profundos.

El foco de atención se desplaza en varios sentidos: pasa de cubrir el currículo a construir la capacidad del estudiante, de lo que el docente enseña a lo que el alumno comprende y de lo que hace el docente a lo que hace el estudiante. Para promover estos desplazamientos, los docentes deben ayudar a sus alumnos a asumir nuevas responsabilidades y éstos deben comprometerse activamente en el proceso de pensar y trabajar para aplicar su conocimiento de maneras creativas.

Nos fijamos los siguientes objetivos:

- Aplicar definiciones, propiedades y métodos convenientes en el cálculo de derivadas.
- Relacionar los conceptos de continuidad y derivabilidad de funciones reales.
- Interpretar la dependencia funcional de ciertas variables respecto de otras y manejar las herramientas teóricas para el tratamiento e interpretación de las mismas.
- Resolver problemas de optimización en situaciones reales aplicando derivadas.
- Argumentar utilizando los fundamentos teóricos la elección de las técnicas/metodologías usadas en la resolución de las situaciones propuestas.
- Verificar que los resultados obtenidos sean coherentes en el contexto dado.

Para desarrollar nuestra propuesta seleccionamos los siguientes contenidos de la Unidad: *Valores Máximos y mínimos. Funciones monótonas y la prueba de la primera derivada. Concavidad y puntos de inflexión. Prueba de la segunda derivada para extremos relativos. Trazo de curvas. Problemas de máximos y mínimos aplicados.*

Proponemos innovar las cuatro clases correspondientes a estos contenidos (véase Fig. 1) mediante la ruptura con el estilo didáctico habitual modificando las prácticas de enseñar y aprender, mediante la introducción de problemas relacionados con la futura práctica profesional de los estudiantes y estableciendo relaciones entre lo teórico y lo práctico [8].

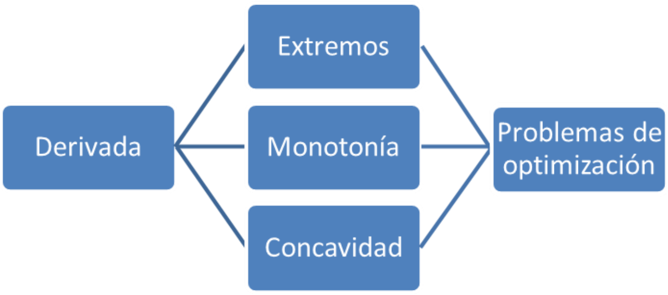


Fig. 1. Selección de contenidos de la Unidad.

2.2 Estrategias de enseñanza y actividades a emplear en las clases

Las clases permitirán a los estudiantes relacionar la Matemática y la Ingeniería en Recursos Naturales de modo que encuentren una aplicación en situaciones reales. Se propone promover el trabajo en grupos en forma organizada y responsable.

Organizar el aprendizaje de los estudiantes alrededor de temas que les generen interés, satisfagan sus metas de comprensión ofreciendo muchas oportunidades de aplicar lo que están aprendiendo, de modo que justifique el esfuerzo energético, cognitivo y social tanto de los estudiantes como los docentes. Para promover un aprendizaje satisfactorio, se debe buscar un equilibrio entre lo que tienen que aprender, la forma en que se aprende y las actividades prácticas diseñadas y realizar una evaluación continua que constituya una retroalimentación constructiva [9].

En el aula de la asignatura en la plataforma moodle se presentan actividades para realizar en forma grupal.

La conformación de los grupos es voluntaria. Los trabajos se deberán realizar en grupos pequeños de hasta 4 alumnos y tienen un cronograma fijo con tiempo límite para la presentación. En este trabajo los estudiantes tienen oportunidad de consultar libros, internet, organizar consultas con los auxiliares de la cátedra y se desarrollan en horario extraclase.

La evaluación se centrará en aspectos esenciales del trabajo del grupo, esto es, en el proceso y el producto.

La cantidad de grupos dependerá de la cantidad de alumnos. Se diseñarán distintas situaciones problemáticas y eventualmente puede darse el caso de que dos grupos distintos resuelvan el mismo problema.

Cada grupo deberá presentar (subir a la plataforma) un archivo con formato Word con la solución a la situación propuesta con las explicaciones y justificaciones teóricas correspondientes.

Para ejemplificar presentamos, a continuación, algunas situaciones.

Actividad 1

Problema del rectángulo de área máxima.

Hallar las dimensiones del rectángulo de área máxima que puede inscribirse en un triángulo isósceles cuya base (lado desigual) mide 8 cm y la altura correspondiente 3 cm (suponiendo que un lado del rectángulo está sobre la base del triángulo).

El problema dado permite que el alumno recupere sus conocimientos previos sobre funciones. En grupos pequeños se espera que los alumnos logren establecer relaciones a partir de la información dada para lograr formular la función que permita modelar el área del rectángulo inscripto en el triángulo, siguiendo los pasos propuestos Polya [7]. En esta primer etapa, los problemas que se presentan pueden resolverse aplicando los conocimientos previos que posee el alumno sobre funciones, función cuadrática, cálculo del máximo o mínimo de dicha función mediante le identificación del vértice.

Luego utilizando el recurso interactivo de GeoGebra, véase la Fig. 2, los alumnos tienen la oportunidad de interactuar, visualizar, observar y analizar lo que sucede cuando se varían las dimensiones de la altura o el ancho del rectángulo, y a su vez relacionen el comportamiento del modelo presentado con las diferentes preguntas que se plantean. Con esto se pretende lograr una mejor comprensión de las variaciones que se dan entre las dimensiones del rectángulo y cómo estas variaciones pueden representarse mediante un modelo matemático, que en este caso es una función cuadrática. Esta experimentación constituye un primer acercamiento a los conceptos de máximos y mínimos.

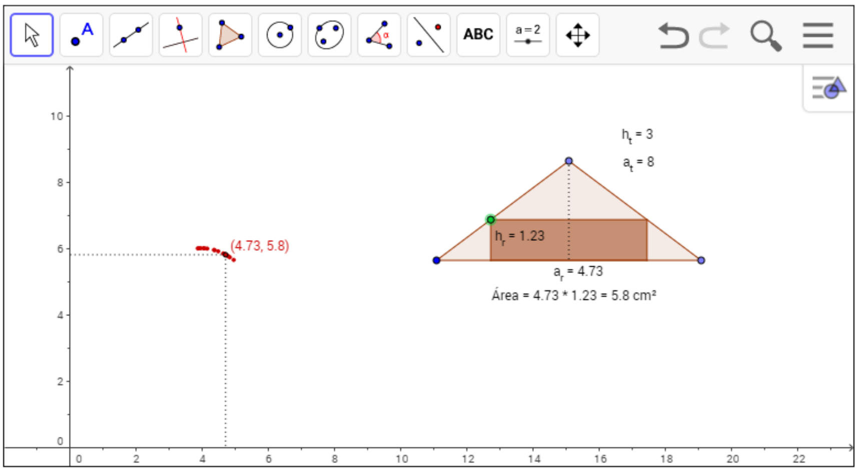


Fig. 2. Ilustración de la actividad 1.

Seguidamente el docente en forma conjunta con los estudiantes construirán las definiciones correspondientes.

En la siguiente clase se presentan situaciones problemáticas de mayor complejidad, las que requieren de los nuevos conocimientos estudiados para poder ser resueltas.

Actividad 2

Problema del corral.

Un granjero tiene 20 m de alambre con el que planea cercar un corral rectangular al lado de un galpón de 25 m de largo como muestra la figura (el lado que está junto al galpón no necesita cerca). Hallar las dimensiones del corral de área máxima que se puede diseñar con esas características.

Preguntas:

1) ¿Qué representa la gráfica que se forma al mover *d*?
2) Utiliza la teoría estudiada sobre aplicaciones de la derivada a la resolución de problemas de optimización y trata de:

- Formular la función objetivo (función a maximizar)
- Utilizando la información del problema trata de expresar la función objetivo en función de d.
- Obtener los extremos de la función obtenida en el punto anterior.
- Responder el problema y comparar con la solución que obtuviste al utilizar el aplicativo.

Para ilustrar la situación del problema se usa una actividad interactiva de GeoGebra en la que el estudiante puede mover d utilizando el deslizador (lado derecho de la imagen) y así observar las posibles soluciones del problema. La Fig. 3 muestra una imagen de esta actividad.

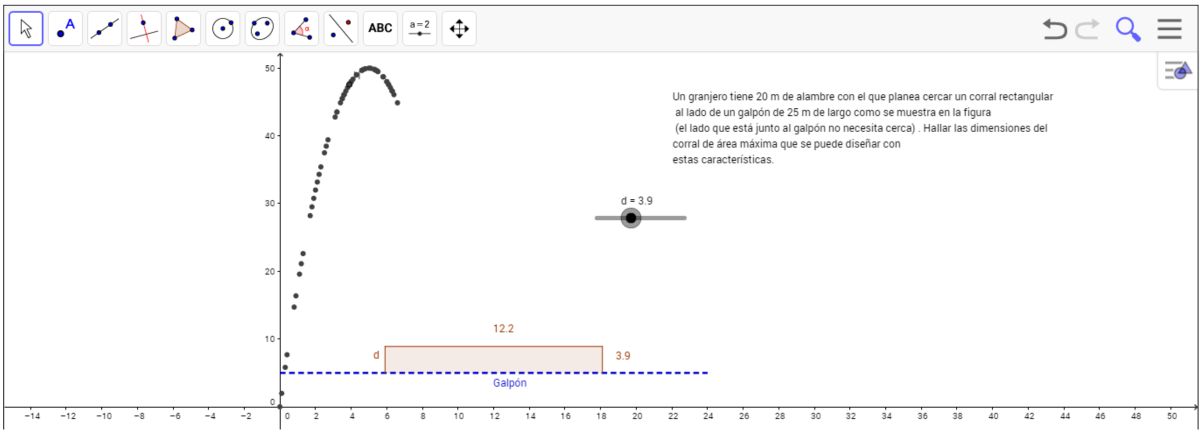


Fig. 3. Ilustración de la actividad 2.

Actividad 3

Leer el informe presentado por la asociación ecologista Greenpeace en el que se expone que la contaminación plástica de los océanos es uno de los problemas medioambientales más graves, ya que supone un serio peligro para la fauna marina y las aves. La producción global de plásticos se ha disparado en los últimos 50 años, y en especial en las últimas décadas. Entre 2002-2013 aumentó un 50%: de 204 millones de toneladas en 2002, a 299 millones de toneladas en 2013. Se estima que en 2020 se superarán los 500 millones de toneladas anuales, lo que supondría un 900% más que los niveles de 1980.

El objetivo del artículo es introducir la problemática. La mayoría del líquido viene en botellas de plástico y es aquí donde nos centraremos en el diseño de los envases. Por ello proponemos analizar si lo que declaran las distintas marcas de agua en sus etiquetas o publicidades de que además de ser el agua más pura del planeta, la botella se construyó con menor cantidad de material cómo fue posible, se condice con los datos reales obtenidos de analizar los envases al experimentar con los envases.

Los grupos analizarán diferentes diseños de botellas de agua que existen en el mercado (véase Fig. 4). Y buscarán cuál/es utilizan la menor cantidad de material posible en la elaboración, considerando el diseño de la botella que las compañías han adoptado, por ejemplo los mostrados en las Fig. 5 y Fig. 6, aunque también podrían analizarse otros diseños.

Fig. 4. Diferentes diseños de botellas de plástico.

Las botellas de agua seleccionadas para analizar podrían contener un volumen fijo, por ejemplo 600 ml. A lo largo de los años, la industria ha ido asumiendo las preocupaciones y exigencias medioambientales y ha disminuido significativamente la cantidad de material requerido para la fabricación de botellas. Como ejemplo, una botella de plástico para agua ha disminuido su peso un 35% en las dos últimas décadas. Hoy día, un recipiente de 1,5 litros es manufacturado con sólo 35 gramos de material. Para el tratamiento del problema, Consideramos que todos los diseños son fabricados con el mismo tipo de material.

El objetivo en la resolución de este problema será encontrar las dimensiones más amigables, con el medio ambiente, para el diseño de una botella de agua de plástico.

Diseño 1 de la botella

En la Fig. 5 se considera un modelo de botella cilíndrico que está coronado por un cono. Para los propósitos ergonómicos, la altura del cilindro debe ser de al menos 3 veces la altura de la parte cónica. Se simplifica y estructura la situación hasta formular un problema, abordable desde su conocimiento matemático. Se desea determinar las dimensiones para este diseño de botella de agua que minimiza la cantidad de material utilizado.

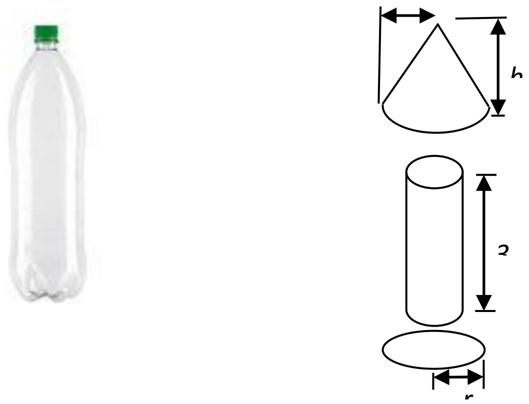


Fig. 5. Modelo de botella cilíndrica coronada por un cono.

Diseño 2 de la botella

Se vinculan la forma de las botellas con figuras geométricas. En la Fig. 6 se puede considerar un modelo cilíndrico que finaliza con una semiesfera.

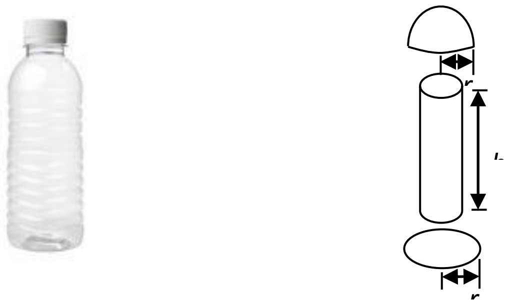


Fig. 6. Modelo de botella cilíndrica coronada por una semiesfera.

2.3 Estrategia de evaluación

Para hacer explícita la concepción de evaluación sobre la que trabajamos, adoptamos lo expresado por Santos Guerra [11], la evaluación puede concebirse y utilizarse como un fenómeno destinado al aprendizaje y no sólo a la comprobación de la adquisición del mismo. Como un instrumento de mejora y no sólo como un ejercicio de medición del logro. Como un camino que conduce a la transformación de la práctica y no sólo como un movimiento que se cierra sobre sí mismo. La evaluación no es el momento final de un proceso y, aun cuando así fuera, debería convertirse en el comienzo de un nuevo proceso más rico y fundamentado.

En esta propuesta, la evaluación consta de tres etapas, las dos primeras se desarrollan en forma grupal y la tercera es individual. Hay una primer etapa en la que se evalúa el trabajo escrito presentado por cada grupo; para ello se dispondrá un sitio en la plataforma virtual de la asignatura en el cual los alumnos deberán subir un archivo con la resolución del problema que le tocó a su grupo. En la plataforma se especifican las pautas y condiciones para la entrega. En una segunda instancia se realizará la exposición oral por parte de cada grupo, en la que deberán socializar con el resto de la clase la estrategia que emplearon para resolverlo, argumentando y justificando la elección de la misma apoyados por representaciones, esquemas y marco teórico. En algunos casos deberán establecer comparaciones entre los resultados y las estrategias implementadas por otros grupos, identificando que existen diferentes formas de obtener una solución, y distinguiendo cuáles fueron más eficaces.

Para completar el proceso de evaluación, hay otra instancia que es escrita, individual y formará parte del cuarto parcial de la asignatura.

Para evaluar el trabajo individual en relación con el proceso del trabajo del grupo se tienen en cuenta los aspectos que propone Camilloni [12] *"En la evaluación del proceso del grupo en su conjunto, los aspectos a evaluar son los que se refieren a la comprensión y cumplimiento de la consigna, al planeamiento y programación del trabajo, su implementación y la introducción de cambios si fueran necesarios, la apertura a la participación de todos los integrantes, el control sobre los que no responden de modo adecuado al esfuerzo conjunto y la capacidad de atender operativamente a los señalamientos del feedback recibido y de autoevaluarse"*.

Para desarrollar el plan de evaluación construiremos una rúbrica conjuntamente con los alumnos para guiar y apoyar los procesos de metacognición, sumamente importantes, ya que nos permiten saber a cada uno de nosotros cómo pensamos, lo que pensamos, y cómo aprendemos lo que aprendemos.

Si bien es cierto que en un principio lleva tiempo elaborarlas, apoyan el aprendizaje al explicitar expectativas y niveles de logro esperados y ayudan a los estudiantes a elaborar juicios fundados sobre la calidad de sus propios trabajos y los de sus compañeros.

Dan información tanto a los docentes como a los estudiantes acerca de aquellos aspectos en los que cada uno es fuerte y aquellos en los que necesitan más trabajo.

"*El diseño del programa* (de evaluación) *exige la combinación de instrumentos diversos para obtener una cobertura adecuada. La eficacia de la evaluación depende entonces, de la pertinencia de la combinación de diferentes instrumentos, de la oportunidad en que se administran y de la inteligencia y propiedad del análisis e interpretación de sus resultados".* [13].

Tratamos de construir un camino hacia, como dice Litwin [14], las buenas prácticas de evaluación "…prácticas sin sorpresas; enmarcadas en la enseñanza; que no se alejan del ritmo y tipo de actividad de la clase; en la que los desafíos cognitivos no son temas excluyentes de las evaluaciones sino de la vida cotidiana del aula, atractivas para los estudiantes y con consecuencias positivas respecto de los aprendizajes".

3 Comentarios Finales

Nuestra experiencia como docentes de la asignatura Matemática nos muestra que la construcción de los conceptos asociados al Cálculo Diferencial no es sencilla para los alumnos; pero creemos que las dificultades que usualmente encuentran pueden ser superadas mediante el diseño de una propuesta didáctica basada en consideraciones teóricas, en particular, en el marco pedagógico didáctico de EpC.

En la propuesta, las estrategias de enseñanza se diseñan con características del "buen aprendizaje" que tienden a promover la construcción de aprendizajes profundos:

- trabajo grupal con problemáticas diferenciadas, partiendo de una base común les permitirá revisar y fortalecer conocimientos previos así como el uso de GeoGebra para "palpar" aquello planteado "en papel".
- situaciones problemáticas teniendo en cuenta la problematización por parte de estudiante de la situación presentada y el progresivo proceso de abstracción.

- diseño de un plan de evaluación con el objetivo de mejorar, algunos de los problemas que tiene la evaluación educativa, a los que refiere Santos Guerra [11] como cargar de dificultad la tarea, no devolver la información, no explicar el proceso y tener en cuenta sólo el resultado.

La EpC, desde su estructura metodológica, permite orientar el proceso evaluativo caracterizado por un enfoque formativo, continuo y flexible desde el cual se posibilita la consolidación y mejoramiento de diferentes niveles de comprensión en los estudiantes.

Los autores de este trabajo, integrantes del equipo de catedra de la asignatura Matemática que se dicta para varias carreras, comenzamos durante el ciclo lectivo 2016 a diseñar planes de prueba inmersos en un programa de evaluación de la Cátedra tratando que las evaluaciones se constituyan en una nueva instancia de aprendizaje.

Es importante que la evaluación abarque más allá de los procesos de experimentación y observación realizados con el software, y se complemente con la resolución de problemas de la realidad relacionados con las temáticas trabajadas.

Siendo la matemática un pilar importante en la formación integral de los ingenieros, y persistiendo aún un alejamiento entre los contenidos matemáticos con el de las diferentes asignaturas específicas de la carrera; buscamos modificar su enseñanza a partir de estrategias que fomenten el desarrollo de habilidades de valoración, reflexión individual y colectiva y sobre todo el compromiso de los estudiantes en su formación académica y profesional.

Referencias

1. Charnay, R.: Aprender (por medio de) la resolución de problemas. Parra, C.; Sáiz, I. (Eds.): *Didáctica de Matemáticas. Aportes y reflexiones.* Paidós, pp. 51-63 (1994)
2. Stone Wiske, M.: *La enseñanza para la comprensión. Vinculación entre la investigación y la práctica*. Paidós (1999)
3. Marcelo, C.: Aprender a enseñar para la sociedad del conocimiento. *Revista complutense de educación,* Vol. 12, No. 2, pp. 531-593 (2001)
4. Blyte, T.: *La enseñanza para la comprensión*. Paidós (1999)
5. Artigue, M.: La enseñanza de los principios del cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos. Gómez, P. (Ed.): *Ingeniería didáctica en educación matemática (un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.* Grupo Editorial Iberoamérica, pp. 97–140 (1995)
6. Ferrini-Mundy, J.; Graham, K.: Research in calculus learning. Understanding limits, derivates and integrals. Dubinsky E.; Kaput, J. (Eds.): *Research issues in undergraduate Mathematics Learning. MMA Notes 33*, pp. 31-45 (1994)
7. Polya, G.: *Cómo plantear y resolver problemas.* 21ª reimpresión. Trillas (1997)
8. Feldman, D.; Palamidessi, M.: *Programación de la enseñanza en la universidad.* Serie Formación docente Nº 1, Secretaría Académica UNGS. (2001)
9. Pozo J.I.: *Aprendices y Maestros. La psicología cognitiva del aprendizaje.* Alianza Editorial (2008)
10. Greenpeace España. *Plásticos en los océanos. Datos, comparativas e impactos*. http://www.greenpeace.org/espana/Global/espana/2016/report/plasticos/plasticos_en_los_oceanos_LR.pdf (2016). Accedido el 23de Octubre de 2016
11. Santos Guerra, M.A.: *Una flecha en la diana. La evaluación como aprendizaje*. Narcea (2003)
12. Camilloni, A.: La evaluación de trabajos elaborados en grupo. Camilloni, A (Comp.) (2012): *La Evaluación Significativa*. Paidós (2010)
13. Camilloni, A.: La calidad de los sistemas de evaluación y de los instrumentos que los integran. Camilloni, A.; Celman, S.; Litwin, E.; Paulou de Maté, M. (Eds): *La evaluación de los aprendizajes en el debate didáctico contemporáneo*. Paidós, pp. 67-92 (1998)
14. Litwin, E.: *El oficio de enseñar. Condiciones y Contextos.* Paidós (2008)

Volver al Índice

Uso de Objetos de Aprendizaje para el Desarrollo de Habilidades Matemáticas

Marta Caligaris[1], Georgina Rodriguez[1], Adriana Favieri[2], Lorena Laugero[1]
[1]Grupo Ingeniería & Educación, Facultad Regional San Nicolás, Universidad Tecnológica Nacional,
Colón332, 2900 San Nicolás, Buenos Aires, Argentina
{mcaligaris, grodriguez, llaugero}@frsn.utn.edu.ar
[2]Departamento de Aeronáutica, Facultad Regional Haedo, Universidad Tecnológica Nacional,
París 532 Haedo (1706) Buenos Aires – Argentina
adriana.favieri@gmail.com

Resumen. Los estudiantes de carreras de ingeniería deben adquirir habilidades y destrezas para resolver, en forma exacta o aproximada, problemas que involucran ecuaciones diferenciales y analizar las soluciones obtenidas, dado que éstas frecuentemente modelizan problemas ingenieriles. En los cursos de Análisis Numérico de la Facultad Regional San Nicolás se han detectado inconvenientes en el aprendizaje de métodos numéricos para problemas de valor inicial. Para superar esta dificultad, el Grupo Ingeniería & Educación viene desarrollando aplicaciones que implementan métodos numéricos para ser utilizadas en las clases. En este trabajo se presenta una aplicación propia desarrollada en Mathematica, en formato CDF, junto con una de las actividades que se les planteará a los alumnos para el desarrollo de la habilidad matemática “evaluar”. Para medir el grado de desarrollo de esta habilidad, se analizarán las respuestas elaboradas por cada uno de los alumnos mediante una rúbrica especialmente diseñada para evaluar la actividad.

Palabras Clave: Taxonomía de Bloom, Mathematica, Objetos de aprendizaje, Problemas de valor inicial.

1 Introducción

La necesidad de obtener la solución de una ecuación diferencial, en forma numérica o analítica, se presenta con frecuencia al resolver problemas de ingeniería. De allí la importancia de que los estudiantes de dichas carreras adquieran habilidades y destrezas para resolver ecuaciones de este tipo y analizar las soluciones obtenidas [1].

La enseñanza tradicional de los métodos numéricos para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias con condiciones iniciales, es decir, problemas de valor inicial (PVI) suele caracterizarse por conceder demasiada importancia a los desarrollos algorítmicos y al manejo procedimental y mecánico de los aspectos simbólicos de los objetos matemáticos. Esto hace que, en general, los estudiantes tengan inconvenientes para comprender la esencia del Análisis Numérico, causando distintas dificultades en su proceso de aprendizaje. Por ejemplo, en el tema métodos numéricos para resolver PVI existe una serie de conceptos (estabilidad, convergencia, consistencia, entre otros) que son catalogados por los alumnos como difíciles de comprender o abstractos.

El uso de programas computacionales simbólicos durante el proceso de aprendizaje puede ser un poderoso recurso debido a que permiten desarrollar en los alumnos habilidades que contribuyen a la comprensión del objeto matemático en estudio.

Así, el Grupo Ingeniería & Educación de la Facultad Regional San Nicolás (FRSN) se ha dedicado a diseñar distintas aplicaciones que implementan los métodos estudiados en las cátedras de Análisis Numérico que se dictan en la FRSN, utilizando diferentes programas: Maple®, SciLab, Mathematica® [2-7].

A partir de la versión 8, Mathematica® ofrece la posibilidad de generar archivos CDF (Computable Document Format) que pueden ser ejecutados sin necesidad de tener el programa instalado. Estos archivos son aplicaciones donde se deben introducir valores o seleccionar parámetros de listas desplegables, reglas o botones, para obtener resultados en forma gráfica o de texto en la misma interfaz.

Entre otros, se diseñó un archivo CDF para ser utilizado en la enseñanza de los métodos que permiten resolver un PVI en forma aproximada, teniendo en cuenta las dificultades detectadas en el aprendizaje de los mismos, y los resultados de aprendizaje que se desean lograr en dichos cursos.

El objetivo de este trabajo es mostrar el CDF diseñado junto con una de las actividades que se les planteará a los alumnos para el desarrollo de la habilidad matemática “evaluar”. Para medir el grado de desarrollo de esta habilidad, se analizarán las respuestas elaboradas por cada uno de los alumnos mediante una rúbrica que fue especialmente diseñada para evaluar la actividad.

2 Enseñanza para la comprensión

La Enseñanza para la Comprensión (EpC) constituye un enfoque de enseñanza y aprendizaje basado en competencias y desempeños, asociado con las teorías constructivistas, y desarrollado desde la década de los noventa en el Proyecto Zero, de la Universidad de Harvard. Si bien existen actualmente múltiples experiencias en la educación básica y secundaria, su aplicación en educación superior es relativamente nueva.

Para Perkins [8], "comprender es la habilidad de pensar y actuar con flexibilidad a partir de lo que uno sabe". A partir de esta definición, se infiere que comprender significa algo más que adquirir información y desarrollar habilidades básicas. Según Blythe [9], "incumbe a la capacidad de hacer con un tópico una variedad de cosas que estimulan el pensamiento, tales como explicar, demostrar, dar ejemplos, generalizar, establecer analogías, volver a presentar el tópico de una nueva forma". Es decir, comprender trasciende lo que se entiende generalmente por rendimiento, interesándose más en la promoción de desempeños cada vez más complejos que involucren situaciones de la vida real y que permitan al alumno poner a prueba lo aprendido.

El modelo EpC consta de cuatro componentes fundamentales [10]:

- *Temas generadores:* describen las comprensiones más importantes que deberían desarrollar los estudiantes durante el curso.
- *Metas de comprensión:* enuncian explícitamente lo que se espera que los alumnos lleguen a comprender.
- *Actividades de comprensión:* son las actividades con distintos niveles de complejidad que permiten a los alumnos aplicar lo aprendido en situaciones que le resulten significativas.
- *Evaluación continua:* para comprender, los estudiantes necesitan criterios, retroalimentación y oportunidades para reflexionar desde el principio, y a lo largo de cualquier secuencia de instrucción.

El propósito de estos componentes es definir claramente qué es lo que los estudiantes deberían comprender y establecer, es decir, la forma en que ellos van a demostrar comprensión por medio de las actividades de aprendizaje (como explicar, justificar, ejemplificar, comparar, generalizar, entre otras).

3 Taxonomía de Bloom

La taxonomía de objetivos de aprendizaje, conocida como taxonomía de objetivos de Bloom, es una clasificación de los objetivos y habilidades a lograr por los estudiantes en el proceso de enseñanza y aprendizaje.

Originalmente, esta taxonomía se apoya en tres dimensiones o dominios [11]:

- *Dominio cognitivo: consiste en la habilidad de procesar y utilizar información.*
- *Dominio afectivo: el papel que juegan los sentimientos, emociones y actitudes en el proceso de enseñanza y aprendizaje.*
- *Dominio psicomotor:* la capacidad para usar habilidades físicas.

La taxonomía de Bloom ha sido ampliamente revisada y mejorada a lo largo de las décadas siendo Churches [12] su revisor más reciente. Esta última revisión dio origen a la taxonomía de Bloom para la Era Digital, que distingue seis niveles que el alumno debe ir superando para que se produzca un verdadero proceso de aprendizaje. Estos son:

- *Recordar:* en este nivel, el alumno trata de recordar el conocimiento que ya se posee. Es decir, debe recordar hechos, terminología, esquemas, procesos, teorías… El docente puede proporcionar ayuda al estudiante guiándolo para que sea él mismo el que realice la búsqueda del conocimiento que ya posee y recordarlo.
  Verbos clave: reconocer, escuchar, describir, identificar, nombrar…

- *Comprender:* en este nivel, el alumno debe hacer uso de los materiales que se le presentan o que obtuvo durante el primer nivel. El estudiante debe aprehender el contenido, generalizarlo y relacionarlo entre sí. Además, debe ser capaz de explicar la relación entre los datos o el contenido.
  Verbos clave: interpretar, resumir, parafrasear, clasificar, comparar, explicar, ejemplificar…

- *Aplicar:* en este nivel, el alumno asume un papel más activo y debe utilizar el conocimiento adquirido en una actividad, teoría, idea o práctica.
  Verbos clave: implementar, usar, desempeñar, ejecutar…

- *Analizar:* en este nivel, el alumno debe pasar de lo global a lo específico, descomponiendo el problema dado en diferentes partes y analizando las relaciones entre ellas. El estudiante debe ser capaz de ver la jerarquía subyacente a las ideas y expresar la relación entre las mismas.

Verbos clave: comparar, organizar, deconstruir, atribuir…

- *Evaluar:* en este nivel, el alumno debe realizar juicios de valor basados en criterios a través de la comprobación y crítica. Requiere realizar juicios y críticas del proceso realizado, de los materiales, métodos, contenido,… Es importante tener en cuenta la calidad de la evaluación que emite el alumno.
  Verbos clave: comprobar, realizar hipótesis, criticar, experimentar, juzgar, testear, detectar…
- *Crear:* en este nivel, el alumno debe unir los elementos para crear un todo coherente y funcional, reorganizar elementos en una nueva estructura mediante la planificación o la producción. Para ello, el estudiante, debe tener las suficientes competencias y habilidades para manejar el conocimiento aprendido y crear uno nuevo a través de diferentes herramientas y mediante su propio saber hacer.
  Verbos clave: diseñar, construir, planificar, producir, inventar, hacer…

4 Objetos de aprendizaje

Si bien existen muchas definiciones acerca del concepto de objeto de aprendizaje (OA), la más difundida es la dada por Wiley [13], quien considera que un OA es cualquier recurso digital que puede ser utilizado como soporte para el aprendizaje. Con el fin de asegurar la calidad en la creación de los OA, se han establecido una serie de características que éstos deben cumplir [14]:

- *Formato digital:* tienen la capacidad de actualización y/o modificación constante. Son utilizables desde Internet y accesibles a muchas personas simultáneamente y desde distintos lugares.
- *Propósito educativo:* el objetivo de los OA es asegurar un proceso de aprendizaje satisfactorio.
- *Contenido interactivo:* implican la participación interactiva de cada individuo, docente o alumno en el intercambio de información.
- *Indivisible e independiente:* deben tener sentido en sí mismos y ser autocontenidos. Además, no pueden descomponerse en partes más pequeñas.
- *Reutilizable:* deben poder ser utilizados en contextos educativos distintos a aquel para el que fueron creados.

4.1 Los archivos CDF como objetos de aprendizaje

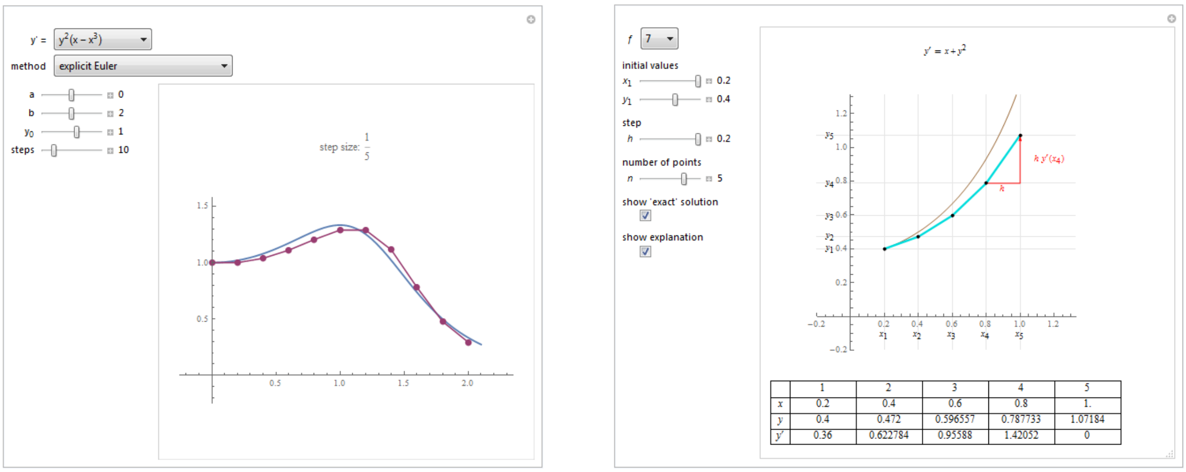
Los archivos CDF generados desde Mathematica®, pueden ser considerados como objetos de aprendizaje. Estos archivos, que requieren de una licencia del software de Wolfram para crearse, luego no necesitan este programa para ser ejecutados. Para poder trabajar con ellos, se debe instalar el reproductor de este tipo de archivos, CDF Player, disponible en forma libre [15].

La principal característica de los archivos CDF es que permiten a los usuarios interactuar en forma dinámica mediante la manipulación de parámetros de sistemas o modelos permitiendo analizar el efecto que esto provoca en el fenómeno observado.

4.2 Los CDF de PVI disponibles en la Web

En el sitio del proyecto Wolfram Demostration [16], es posible encontrar archivos CDF sobre diversos temas para ser utilizados en forma gratuita.

En la Fig. 1, se pueden ver algunas de las aplicaciones disponibles sobre el tema PVI. El archivo CDF cuya interfaz se muestra en (a), permite obtener una solución aproximada de las ecuaciones diferenciales ordinarias propuestas utilizando alguno de los métodos numéricos ofrecidos: Euler implícito, Euler explícito, Heun, Runge Kutta de orden 4, Leapfrog, entre otros. En cambio, en la interfaz del CDF mostrado en (b) se puede resolver cualquiera de las ecuaciones diferenciales que se encuentran en la lista desplegable empleando únicamente el método de Euler. Cabe destacar que en este último CDF, es posible analizar la solución numérica obtenida desde dos diferentes registros semióticos (tabular y gráfico).



(a) (b)

Fig. 1. Archivos CDF disponibles en el sitio del proyecto Wolfram Demostration.

5 El CDF de diseño propio

La incorporación de programas computacionales simbólicos puede ser un recurso didáctico facilitador de los procesos de aprendizaje debido a que su mayor contribución se centra en la creación de medios personalizados que mejor se adapten a los requerimientos pedagógicos [17]. Teniendo en cuenta las necesidades y requerimientos del curso de Análisis Numérico de la FRSN, se diseñó un archivo CDF para ser utilizado en la enseñanza de los distintos métodos numéricos que permiten resolver un PVI. La Fig. 2 muestra en la interfaz de dicho recurso.

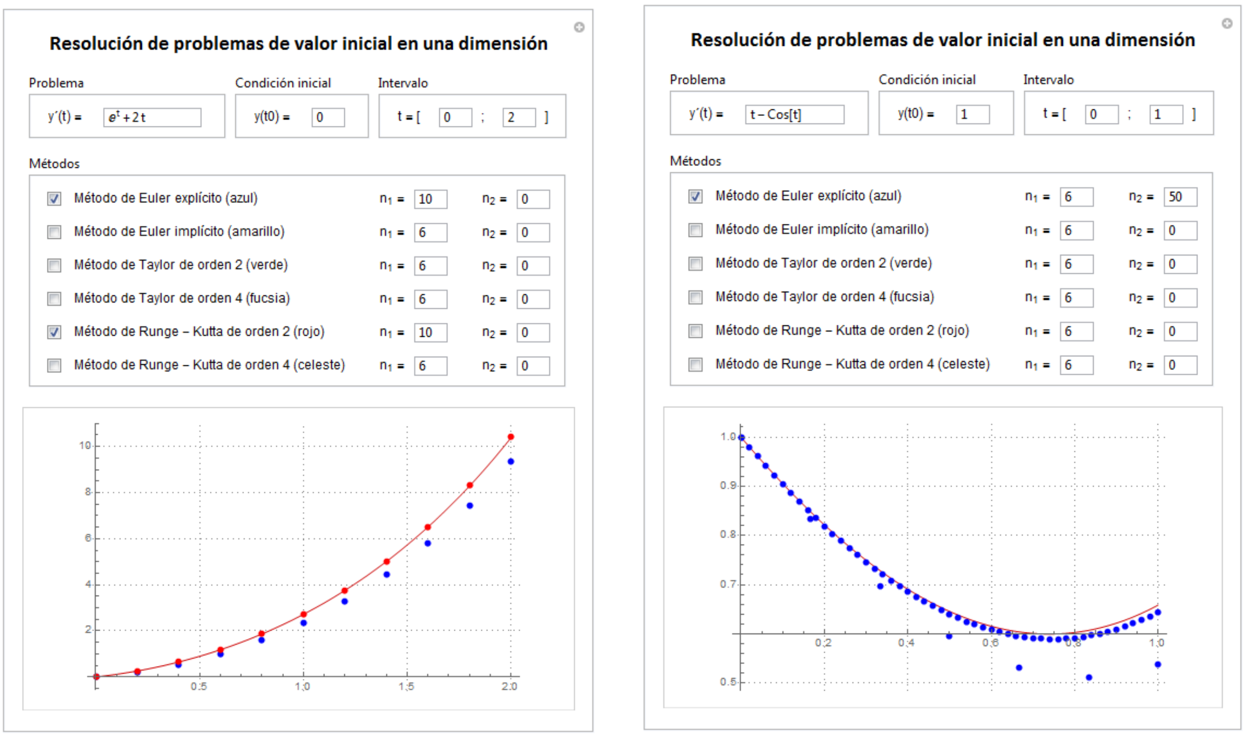


Fig. 2. Archivo CDF de diseño propio para le enseñanza de PVI.

Esta aplicación permite resolver problemas de valor inicial de primer orden utilizando los siguientes métodos: Euler explícito, Euler implícito, Taylor de orden dos, Taylor de orden cuatro, Runge-Kutta de orden dos (RK2) y Runge-Kutta de orden cuatro (RK4).

A diferencia de las herramientas mostradas en las figuras 1(a) y 1(b), en este CDF no hay ecuaciones diferenciales preestablecidas. El usuario debe ingresar la ecuación que desea resolver, junto con la condición inicial que establece el PVI y el intervalo donde obtener la solución. Una vez hecho esto, se deben tildar las casillas de verificación para seleccionar el o los métodos que se desean emplear e indicar, para cada método seleccionado, la cantidad de puntos en donde se va a calcular la solución. En la parte inferior de la ventana se graficarán las soluciones correspondientes con la selección establecida.

Con este recurso, es posible aplicar el mismo método con distintos pasos, o diferentes métodos con pasos iguales o con pasos distintos. Además, brinda la posibilidad de hacer comparaciones y analizar la solución numérica obtenida apelando al registro gráfico, ya que se obtiene la representación gráfica de la solución discreta en un sistema de ejes coordenados en el que se visualizan, en distintos colores, los puntos asociados a cada aproximación junto con la gráfica de la función que es solución exacta del PVI.

6 Uso del CDF en el aula

A continuación, se presenta la actividad que se seleccionó para el desarrollo de la habilidad matemática "evaluar", su resolución y la rúbrica elaborada para determinar el grado de concreción de esta habilidad matemática.

6.1 La actividad propuesta

Resolver, utilizando el CDF disponible, el problema de valor inicial que se muestra a continuación utilizando el método de Runge Kutta de orden 2 y tomando 40, 20, 10 y 5 puntos respectivamente.

$$y'(t) + 2y(t) = 0 \qquad y(0) = 1 \qquad 0 \le t \le 10 \tag{1}$$

A partir de los resultados obtenidos, responder:

a. Las soluciones numéricas obtenidas en cada caso, ¿son adecuadas? ¿Por qué?
b. ¿Cómo fundamentarías lo que sucede con la solución numérica cuando se utiliza una determinada cantidad de puntos?

6.2 Resolución de la actividad propuesta

Para desarrollar la parte a. de la actividad planteada, el alumno deberá hacer uso del CDF de diseño propio. Para ello, ingresará la información correspondiente en cada uno de los campos en función de los datos proporcionados en (1). La Fig. 3 muestra las soluciones numéricas obtenidas empleando las discretizaciones propuestas.

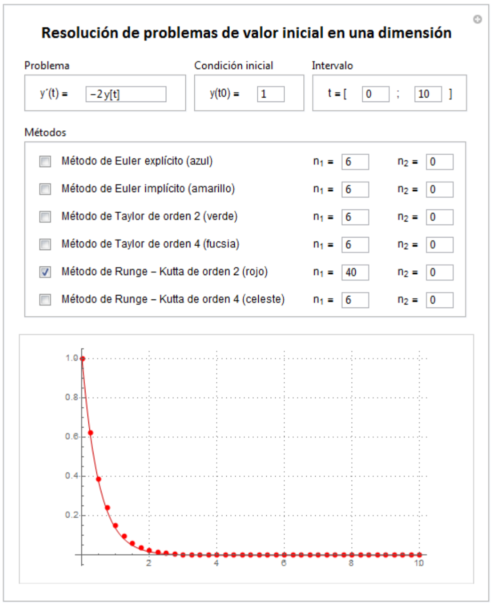
De la simple observación de los gráficos, el estudiante se dará cuenta que las soluciones numéricas mostradas en las salidas gráficas (a) y (b) son adecuadas para dar solución al PVI planteado, mientras que eso no sucede en (c) y (d). Esto se debe a que las soluciones numéricas mostradas en (a) y (b) obtenidas con el método propuesto tomando 40 y 20 puntos respectivamente, constituyen una buena aproximación a la solución exacta ya que el error que se comete no es significativo y, además, son acotadas, cuando la solución exacta de ese problema es una función acotada. Es decir, en ambos casos, el método numérico utilizado es estable.

En cambio, la solución numérica mostrada en (c), si bien es acotada, no se aproxima a la solución exacta cuando el valor de la variable independiente aumenta. Por esta razón, esta solución no es adecuada.

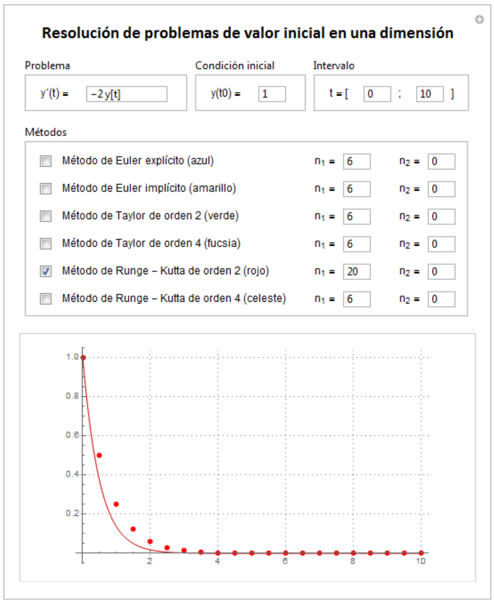
Por último, el alumno podrá indicar que al emplear 5 puntos en la discretización el método es inestable debido a que cuando la variable independiente aumenta, la solución obtenida crece exponencialmente.

En consecuencia, del análisis efectuado para las diferentes discretizaciones, el estudiante concluirá que el método RK2 es condicionalmente estable para este problema de valor inicial.

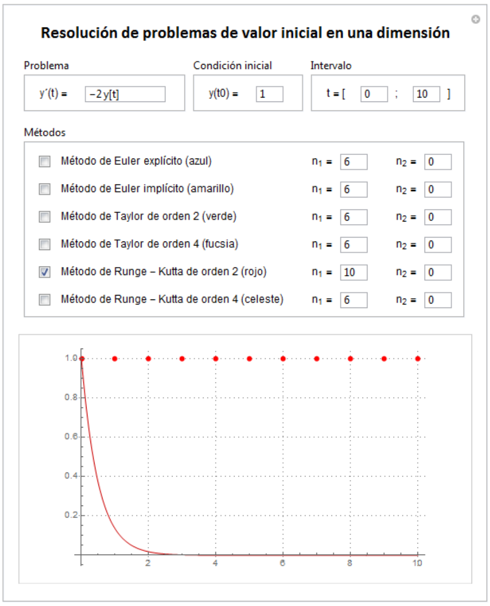
Para poder fundamentar lo que sucede con la solución numérica cuando se utiliza una determinada cantidad de puntos, el alumno deberá estudiar para qué tamaños de paso el método RK2 es estable.



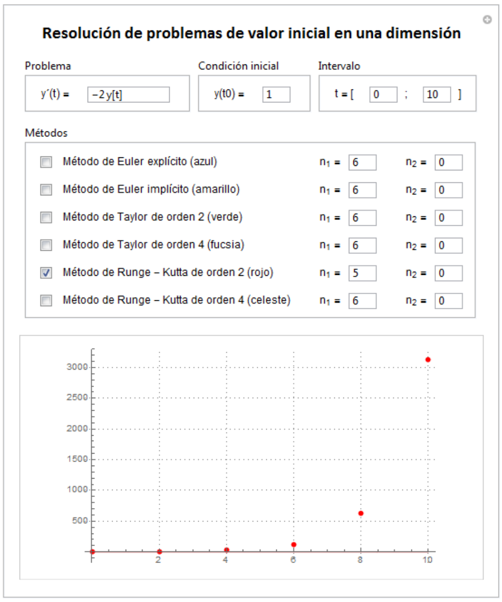
(a)



(b)



(c)



(d)

Fig. 3. Resolución de la actividad propuesta utilizando el CDF de diseño propio.

A continuación, se muestra el desarrollo que se espera realice el alumno para la fundamentación solicitada en la parte b. de la actividad planteada.

Para emplear el método RK2, en primer lugar, el alumno deberá definir una red de puntos que tiene una distribución uniforme en todo el intervalo [0, 10]. Para ello, deberá seleccionar un entero positivo N de manera que:

$$t_i = a + i \cdot h \quad \text{para } i = 0,1,2,\ldots,N \quad \text{siendo } h = \frac{10}{N} \qquad \textbf{(2)}$$

Teniendo en cuenta que $w_i \approx y(t_i)$ y $w_0 = 1$, planteará la ecuación de diferencias asociada al método RK2:

$$w_0 = 1 \qquad \textbf{(3)}$$

$$k_1 = h \cdot f(t_i; w_i) = -2 \cdot h \cdot w_i \quad \textbf{(4)}$$

$$k_2 = h \cdot f(t_i + h; w_i + k_1) = -2 \cdot h \cdot w_i + 4 \cdot h^2 \cdot w_i \quad \textbf{(5)}$$

$$w_{i+1} = w_i + \frac{1}{2}(k_1 + k_2) = (1 - 2 \cdot h + 2 \cdot h^2) \cdot w_i \qquad i = 0, 1, 2, \ldots, N-1 \quad \textbf{(6)}$$

Si denomina G al factor $1 - 2 \cdot h + 2 \cdot h^2$, la solución para un solo paso la podrá expresar como:

$$w_{i+1} = G \cdot w_i \quad \textbf{(7)}$$

Mientras que la solución de la ecuación de diferencias en $t_N = N \cdot h$ la podrá calcular de la forma:

$$w_N = G^N \cdot w_0 \quad \textbf{(8)}$$

Para que w_N permanezca acotado, deberá recordar que:

$$|G| \leq 1 \quad \textbf{(9)}$$

Para que el factor de amplificación $G = 1 - 2 \cdot h + 2 \cdot h^2$ cumpla con la condición (9), se deberá resolver:

$$-1 \leq 1 - 2 \cdot h + 2 \cdot h^2 \leq 1 \quad \textbf{(10)}$$

Tras resolver (10), se determinará que:

$$0 \leq h \leq 1 \quad \textbf{(11)}$$

A partir del resultado obtenido en (11), podrá confirmar y generalizar lo analizado en la primera parte de actividad propuesta. Teniendo en cuenta la cantidad de puntos indicados en el enunciado es 40, 20, 10 y 5 para el intervalo [0, 10], los pasos aplicados en cada solución obtenida son respectivamente, 0,25, 0,5, 1 y 2. Por lo tanto, el método RK2 es estable sólo en los tres primeros casos. No obstante, cuando el tamaño de paso es igual a 1, la solución numérica obtenida no sirve para dar solución al PVI planteado.

6.3 Evaluación de las habilidades matemáticas durante la resolución de la actividad mediante rúbricas

Teniendo en cuenta el marco teórico, se realizó el análisis de las habilidades matemáticas que el alumno deberá desarrollar durante la resolución de la actividad propuesta para cada nivel de la taxonomía de Bloom [18].

Si bien el principal objetivo es determinar el grado de concreción de la habilidad matemática "evaluar", para la adquisición de esta habilidad matemática, el alumno:

a. antes de *entender* un concepto, deberá *recordarlo*.
b. antes de *aplicar* un concepto, deberá *entenderlo*.
c. antes de *analizar* un concepto, deberá *aplicarlo*.
d. antes de *evaluar* un concepto, deberá *analizarlo*.

Las siguientes tablas muestran las rúbricas elaboradas de las habilidades matemáticas para cada nivel de la taxonomía de Bloom.

Tabla 1. Habilidades matemáticas del nivel Recordar

Habilidad	Poco desarrollada	Moderadamente desarrollada	Desarrollada
Recuerda el concepto de estabilidad de un método numérico.	No reconoce cuando una solución numérica es acotada.	Reconoce en algunos casos las soluciones numéricas acotadas.	Reconoce en todos los casos las soluciones numéricas acotadas.
Recuerda la condición que el factor de amplificación debe cumplir para obtener una solución acotada.	No describe la condición.	No describe claramente la condición.	Describe adecuadamente la condición.

Tabla 2. Habilidades matemáticas del nivel Comprender

Habilidad	Poco desarrollada	Moderadamente desarrollada	Desarrollada
Comprende la información proporcionada por el PVI planteado para ejecutar el CDF.	No identifica los datos que debe escribir en cada campo.	Identifica algunos datos que debe escribir en cada campo.	Identifica todos los datos que debe escribir en cada campo.
Interpreta la información dada por cada una de las salidas gráficas proporcionadas por el CDF.	No asocia el concepto de estabilidad con el de solución acotada.	Asocia vagamente el concepto de estabilidad con el de solución acotada.	Asocia el concepto de estabilidad con el de solución acotada.
Expresa convenientemente la ecuación de diferencias asociada al método.	No formula la ecuación.	Formula la ecuación con algunos errores.	Formula la ecuación sin errores.
Reconoce el factor de amplificación en la ecuación de diferencias asociada al método.	No distingue el factor de amplificación.	No distingue con claridad el factor de amplificación.	Distingue el factor de amplificación.

Tabla 3. Habilidades matemáticas del nivel Aplicar

Habilidad	Poco desarrollada	Moderadamente desarrollada	Desarrollada
Aplica el método RK 2 al PVI planteado.	No calcula correctamente la solución numérica.	Calcula la solución numérica con algunos errores.	Calcula correctamente la solución numérica.
Resuelve las inecuaciones que surgen en el estudio de la estabilidad del método.	No opera algebraicamente en forma correcta.	Opera algebraicamente con algunos errores.	Opera algebraicamente en forma correcta.

Tabla 4. Habilidades matemáticas del nivel Analizar

Habilidad	Poco desarrollada	Moderadamente desarrollada	Desarrollada
Analiza para qué tamaños de paso la solución numérica obtenida es una buena aproximación.	No deduce cuando la solución es acotada y adecuada.	Deduce con errores cuando la solución es acotada y adecuada.	Deduce cuando la solución es acotada y adecuada.

Tabla 5. Habilidades matemáticas del nivel Evaluar

Habilidad	Poco desarrollada	Moderadamente desarrollada	Desarrollada
Comprueba que la condición impuesta al tamaño de paso es correcta.	No verifica la coherencia entre los resultados gráficos y algebraicos.	Verifica parcialmente la coherencia entre los resultados gráficos y algebraicos.	Verifica la coherencia entre los resultados gráficos y algebraicos.

7 Conclusiones

Saber cuáles son las habilidades que los alumnos desarrollan durante el aprendizaje de los distintos objetos matemáticos es fundamental para todo docente, debido a que permite determinar si los objetivos de aprendizaje han sido o no alcanzados por los estudiantes.

Plantear actividades a los alumnos, teniendo en cuenta la estructura jerárquica que presenta la taxonomía de Bloom, contribuye a determinar cuáles son las habilidades matemática que el docente quiere que sus alumnos desplieguen y, en consecuencia, el nivel de comprensión que podrán alcanzar.

Generalmente, las secuencias de actividades que se les proponen a los estudiantes durante su proceso de aprendizaje apuntan al desarrollo de habilidades matemáticas de nivel inferior. Por esta razón, las autoras de este trabajo consideran que si se quiere lograr una verdadera comprensión del objeto matemático en estudio es necesario plantear actividades en donde el alumno analice, evalúe y cree, es decir, apunten al nivel superior de la Taxonomía de Bloom.

La actividad mostrada en este trabajo, junto con su correspondiente rúbrica, es un ejemplo de lo que se les presentará a los alumnos de la cátedra de Análisis Numérico de la FRSN en el ciclo lectivo 2017, en el tema métodos numéricos para resolver PVI. Se espera que proponer este tipo de actividades ayude a superar las dificultades que tienen los alumnos en el aprendizaje de esta unidad.

Referencias

1. Caligaris, M.; Rodríguez, G.: Una ventana a las ecuaciones diferenciales ordinarias. Educación Matemática en Carreras de Ingeniería: XIV Encuentro Nacional, VI Internacional. Facultad Regional Mendoza, Mendoza, Argentina. (2008)
2. Caligaris, M.; Rodríguez, G; Laugero, L.: Laboratorio de Análisis Numérico. En U. Cukierman & J.M. Virgili (Eds.) La tecnología educativa al servicio de la educación tecnológica. Experiencias e investigaciones en la UTN. Pp. 583 – 606. Buenos Aires: edUTecNe. (2010)
3. Caligaris, M.; Rodríguez, G.; Laugero, L.: MEF y Mathematica: ejemplos interactivos. Mecánica Computacional, 33, Teaching Numerical Methods. Pp. 2061 – 2071. (2014)
4. Caligaris, M.; Rodríguez, G.; Laugero, L.: Designing tools for numerical integration. Procedia - Social and Behavioral Sciences, 176, Teaching Numerical Methods. Pp 270 – 2075. (2015)
5. Caligaris, M.; Rodríguez, G. Laugero, L.: Objetos de aprendizaje para la enseñanza de los métodos de interpolación. Educación Matemática en Carreras de Ingeniería: XIX Encuentro Nacional, XI Internacional. Facultad Regional San Nicolás, San Nicolás, Argentina. (2015)
6. Caligaris, M.; Rodríguez, G.; Laugero, L.: Aplicaciones visuales para Análisis Numérico. V Congreso Argentino de Ingeniería Mecánica. Facultad de Ciencias Exactas y Tecnológicas, Santiago del Estero, Argentina. (2016)
7. Caligaris, M.; Rodríguez, G.; Laugero, L.; Valentini, J.: ¿Para qué estudiamos Análisis Numérico? IX Congreso de Ingeniería Industrial. Universidad Nacional de Salta, Salta, Argentina. (2016)
8. Perkins, D.: ¿Qué es la comprensión? En Stone Wiske, M. (Comp), La enseñanza para la comprensión. Vinculación entre la investigación y la práctica. Argentina, Buenos Aires: Paidós. (1999)
9. Blythe, T.: La enseñanza para la comprensión. Guía para el docente. Argentina, Buenos Aires: Paidós. (1999)
10. Perkins, D.; Blythe, T.: Putting Understanding up-front. Educational Leadership 51 (5), Pp. 4-7. (1994)
11. Bloom, B.; Engelhart, M.; Furst, E.; Hill, W.; Krathwohl, D.: Taxonomy of Educational Objectives. The Classification of Educational Goals. Handbook 1. Cognitive Domain. United States of America, New York: Longmans. (1956)
12. Churches, A.: Taxonomía de Bloom para la era digital. Página Web Eduteka http://eduteka.icesi.edu.co/articulos/TaxonomiaBloomDigital. (2008) Accedido el 16 de Febrero de 2017.
13. Wiley, D. A.: Connecting learning objects to instructional design theory: A definition, a metaphor, and a taxonomy. In D. A. Wiley (Ed.) The Instructional Use of Learning Objects. (2000)
14. Naharro, S.; Bonet, P.; Cáceres, P.; Fargueta, F.;García, E.: Los objetos de aprendizaje como recurso de calidad para la docencia: criterios de validación de objetos en la Universidad Politécnica de Valencia. Actas del IV Simposio Pluridisciplinar sobo Diseño, Evaluación y Desarrollo de Contenidos Educativos Reutilizables. Bilbao: Universidad del país Vasco. (2007)
15. http://www.wolfram.com/cdf/
16. http://demonstrations.wolfram.com/
17. Milevicich, L.; Lois, A.: La resolución de problemas de cálculo integral en un entorno informático. 11th International Congress on Mathematical Education. Monterrey, México. (2008)
18. Favieri, A.: La taxonomía de Bloom y las habilidades matemáticas en transformación conforme. Educación Matemática en Carreras de Ingeniería: XVIII Encuentro Nacional, X Internacional. Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional de Mar del Plata, Mar del Plata, Argentina. (2014)

Volver al Índice

La Enseñanza y el Aprendizaje de la Matemática en los Nuevos Contextos

Pérez María Angélica[1], De Rosa Elisa[1], Veliz Margarita[2]
[1]Cátedra Matemática II, Facultad de Ciencias Económicas, Universidad Nacional de Tucumán
Av. Independencia 1900 – San Miguel de Tucumán – CP 4000 Cátedra Matemática II, Facultad de Ciencias Económicas, Universidad Nacional de Tucumán. Av. Independencia 1900 – San Miguel de Tucumán – CP 4000
{mperez200, derosaelisa}@hotmail.com
[2]Cátedra Matemática II, Facultad de Ciencias Económicas, Universidad Nacional de Tucumán
Av. Independencia 1900 – San Miguel de Tucumán – CP 4000
margaveliz@yahoo.com.ar

Resumen. Las tecnologías de la información y comunicación (TIC) ofrecen interesantes oportunidades para replantear el proceso de adquisición del conocimiento, posibilitando la creación de escenarios y condiciones para que el individuo se apropie de nuevos conceptos y experiencias. En este trabajo se elaboraron las bases para el diseño de un sistema instruccional mediante módulos de un Sistema Experto basado en reglas previamente establecidas, utilizando los recursos virtuales que posibilitan las TIC en el proceso de enseñanza y aprendizaje. Se ofreció a los alumnos una metodología de enseñanza con modalidad blended learning que combina clases presenciales con actividades on-line. Las actividades cuentan con herramientas de contenido, de comunicación y de evaluación que permitieron un seguimiento del proceso. Se muestran los resultados logrados al utilizar el Aula Virtual para el desarrollo de un sistema experto durante el 1º cuatrimestre de los años 2014 a 2016.

Palabras Clave: Aula virtual, Enseñanza, Sistema experto, Cálculo.

1 Introducción

Si bien podemos dar por sentado que los alumnos poseen unas mínimas competencias tecnológicas, no resulta tan obvio presuponer las habilidades necesarias para un aprendizaje autónomo. La adquisición de esas habilidades es el primer escalón que deben alcanzar y ello debe ir acompañado del apoyo de un docente y una institución académica que facilite los recursos y establezca las condiciones y los contextos propicios para esa capacitación previa.

Se parte de la base que es el estudiante quien construye su aprendizaje, por lo que debe implicarse y esforzarse para conseguir su óptimo resultado. La responsabilidad del propio estudiante en relación con sus acciones permite un mayor o menor aprendizaje en función del proceso de autorregulación. [1]

Con el fin de mejorar el aprendizaje mediante la interacción social en el aula y el aprendizaje centrado en el propio alumno, se implementaron también prácticas de autoexámenes y autoevaluativos, tanto en forma presencial como en el Aula Virtual, los cuales permitieron a los estudiantes una retroalimentación permanente durante el dictado de la materia.

Se trató de fortalecer en los alumnos aspectos que aportan al aprendizaje autorregulado, como los recursos personales necesarios para un aprendizaje significativo y autónomo, la autocorrección, la aplicación de estrategias metacognitivas y el autocontrol.

Finalmente se aplicó un cuestionario para establecer qué estrategias lograron incorporar los alumnos, sus percepciones sobre las propias capacidades para organizar y emprender las tareas propuestas. Además, si utilizaron las herramientas ofrecidas en el Aula Virtual para ejercer un autocontrol de su aprendizaje y la autocorrección necesarios para aplicar correctivos en el proceso de aprendizaje.

Se complementan los métodos tradicionales de enseñanza y aprendizaje, aprovechando los recursos multimedia que brinda la plataforma educativa Moodle con que cuenta la Facultad. En este contexto y teniendo en cuenta que la Matemática es una disciplina herramental, se procuró estimular el aprendizaje de cada tema específico, a través de los instrumentos brindados por dicha plataforma. La variedad y características de tales materiales se consideran motivadoras del aprendizaje.

2 Marco teórico

2.1 Los entornos virtuales

La implementación de la modalidad de educación virtual genera cambios significativos en el modo como se articulan y se desarrollan las distintas actividades de enseñanza y aprendizaje. La mediación pedagógica implica una organización del espacio y el tiempo educativos, contenidos de aprendizaje apoyados con mayor base tecnológica, una forma diferente a la tradicional de llevar a cabo la interacción docente–alumno y alumno-alumno, y un desarrollo de las actividades de aprendizaje más centrado en el alumnado.

La tecnología no es una actividad educativa: es un instrumento, un medio para alcanzar un fin [2]. Por esto es que se enfatiza que el propósito de toda propuesta educativa es "servir como puente en un entorno virtual diverso, donde se enlazan currículum, propósitos, objetivos, materiales didácticos, actividades, herramientas de comunicación sincrónica y asincrónica mediados en una atmósfera artificial situada en la red" [3]. En otras palabras, se propicia el intercambio de información entre docentes y alumnos a través de la Red, originándose así nuevos ambientes de aprendizaje donde el conocimiento se difunde a través de Internet.

"La progresiva implantación de las nuevas tecnologías de la comunicación, en el campo de la enseñanza, está modificando muchos de los planteamientos educativos tradicionales, hasta el punto de obligar al profesorado, como motor esencial del proceso pedagógico, a tener presente cómo afectan a la estrategia del aprendizaje las nuevas formas de comunicación y de elaboración de los materiales y recursos docentes". [4]

Las Tecnologías, y especialmente las Tecnologías de la Información y la Comunicación, han sido a menudo aclamadas como un catalizador para el cambio, pero este cambio necesita no ser radical. Se pueden incorporar algunas útiles TIC mediante formas fáciles bien planeadas. "Sugiero utilizar tecnologías ampliamente disponibles combinadas con planteamientos más familiares de enseñanza y aprendizaje". [5]

La educación virtual centra su atención en el aprendizaje de los alumnos y en su participación activa en la construcción de conocimientos. El docente define contenidos y actividades en base a la estrategia didáctica que adopta, y el estudiante realiza su aprendizaje a partir de esos contenidos y actividades, pero sobre todo a través de su interés y motivación por aprender, de la interacción con otros alumnos y la guía del profesor. En este contexto, la interacción del docente-tutor-facilitador con los alumnos a fin de realizar el seguimiento personalizado de las actividades de aprendizaje planteadas en el programa académico, es una actividad fundamental, ya que influye directamente en el proceso de formación.

La clave del cambio metodológico no es para aprender más, sino aprender diferente.

Tanto el e-learning como el b-learning son modelos de aprendizaje en los que el estudiante tiene que desarrollar habilidades tan importantes para su vida futura en esta sociedad como, entre otras, las que señala Bartolomé (2004) [6]:

- Buscar y encontrar información relevante en la red.
- Desarrollar criterios para valorar esa información, poseer indicadores de calidad
- Aplicar información a la elaboración de nueva información y a situaciones reales.
- Trabajar en equipo compartiendo y elaborando información.
- Tomar decisiones en base a informaciones contrastadas.
- Tomar decisiones en grupo.

2.2 Sistema experto

Un SE modela el proceso de razonamiento de un experto humano en un campo o dominio específico de conocimiento. Se puede definir al Sistema Experto como un sistema informático (hardware y software) que simula a los expertos humanos en un área de especialización dada. Es generalmente el resultado de la colaboración de uno o varios expertos humanos especialistas en el tema de estudio y los ingenieros del conocimiento, con los usuarios en mente. Los expertos humanos suministran el conocimiento básico en el tema de interés, y los ingenieros del conocimiento trasladan este conocimiento a un lenguaje, que el SE pueda entender.

3 Metodología utilizada

3.1 Objetivos

Los objetivos que se persiguieron durante la experiencia fueron:

- Fortalecer el estudio independiente y autoevaluación de los contenidos enseñados.
- Favorecer la calidad de la enseñanza utilizando un programa académico con un entorno virtual de aprendizaje.
- Utilizar el Aula Virtual de la Cátedra Cálculo que, sin sustituir la enseñanza presencial, sirviera como soporte para la modalidad no presencial en sus diferentes manifestaciones.
- Valorar la opinión de los alumnos a efectos de realizar un monitoreo del proceso de enseñanza aprendizaje que aporte al diseño del SE.
- Valorar la participación de los alumnos en los foros teóricos como base para la elaboración de un sistema experto

Para el análisis del impacto que tuvieron los foros y autoevaluativos, se consideró la información recabada de la participación de los alumnos que completaron el cursado de la asignatura en el primer cuatrimestre de 2014, 2015 y 2016 en las actividades propuestas en el aula virtual y su rendimiento final en la asignatura.
Se recabó información mediante la aplicación de un autoinforme elaborado en escala tipo Likert de cinco puntos (5. Totalmente de Acuerdo; 4. De Acuerdo; 3. Ni de acuerdo ni en desacuerdo; 2. En desacuerdo; 1. Totalmente en desacuerdo), validado según el método de expertos.

En este autoinforme se lograron resultados referidos a la implementación de las TIC con relación al docente y al estudiante, a la calidad de la enseñanza e inversión del tiempo de aprendizaje, a la comunicación e interacción entre los actores (alumnos y profesores) y a los contenidos impartidos.

3.2 Resultados

Interesados por conocer el rendimiento académico final de los estudiantes participantes de las actividades propuestas para el estudio de la asignatura, se consideró las categorías de promocionado, regular y libre, según el reglamento académico de la FACE-UNT. Además en ambos períodos, se evaluó la participación del alumno en los autoevaluativos y en los foros. Para los autoevaluativos se utilizó una escala de 0 a 10, y en los foros una escala de 0 a 0,5, del resultado de la participación de ambas herramientas virtuales se obtenía una asignación que beneficiaba a la calificación obtenida de los exámenes parciales. En las tablas siguientes se mostraran los la participación de los alumnos en los autoevaluativos y en los foros por grupo de rendimiento académico final, para cada uno de los períodos 2014 y 2015. Para investigar si la participación en los autoevaluativos y en los foros tienen diferencias estadísticamente significativas en los grupos de: promocionados, regulares y libres, se utilizó la alternativa no paramétrica para análisis de la varianza, la prueba de Kruskal – Wallis [7] con su complemento el test de comparaciones múltiples de Rangos.

Tabla 1. Medidas descriptivas de la participación en los Autoevaluativos según el rendimiento académico final. Matemática II. Resultados obtenidos en 2014.

Medidas Descrip (Autoevaluativos)	Rendimiento Académico Final			Prueba de Kruskal Wallis (valor de p)
	Promocionados	Regulares	Libres	
Cantidad	11	115	20	15,704 (p=0,0004)
Media	7	6	3	Test de Comparación de Rangos
Mediana	8	6,3	1,9	Libre - Promocionado*-3.9183
Desvío estándar	2,3	2,9	2,5	Libre - Regular *-2.68524
Máximo	9,6	10	8,3	Promocionado - Regular *1.22
Mínimo	2	0	0,4	

Tabla 2. Rendimiento Académico Final según participación en los Foros. Matemática II. Resultados obtenidos en 2014.

Medidas Descrip (Foros)	Rendimiento Académico Final			Prueba de Kruskal Wallis (valor de p)
	Promocionados	Regulares	Libres	
Cantidad	11	115	20	16,8883 (p=0,0002)
Media	0,36	0,28	0,13	Test de Comparación de Rangos
Mediana	0.5	0.25	0.13	Libre - Promocionado*-0.119318
Desvío estándar	0,1	0,08	0,06	Libre - Regular *-0.0755435
Máximo	0.5	0.5	0.25	Promocionado - Regular *0.515
Mínimo	0	0	0	

En las Tablas 1 y 2 se observa que la participación de los alumnos en el año 2014, en ambas herramientas virtuales, presenta diferencias según el grupo de rendimiento final, siendo los promocionado y regulares los de mejor participación respecto de los alumnos libres.

Tabla 3. Medidas descriptivas de la participación en los Autoevaluativos según el rendimiento académico final. Matemática II. Resultados obtenidos en 2015

Medidas Descrip (autoevaluativos)	Rendimiento Académico F			Prueba de Kruskal Wallis (valor de p)
	Promocionados	Regulares	Libres	
Cantidad	18	133	61	40,2708 ($p=1,8.\ 10^{-9}$)
Media	7,8	6,3	3,8	Test de Comparación de Rangos
Mediana	7,8	7	3,7	Libre - Promocionado*-4.0082
Desvío estándar	2,9	2.4	1	Libre - Regular * -2.46058
Máximo	9,7	9,7	9,3	Promocionado - Regular *1.54762
Mínimo	6	0	0	

Tabla 4. Rendimiento Académico Final según participación en los Foros. Matemática II. Resultados obtenidos en 2015.

Medidas Descrip (Foros)	Rendimiento Académico Final			Prueba de Kruskal Wallis (valor de p)
	Promocionados	Regulares	Libres	
Cantidad	18	133	61	30,218 ($p=2,7.\ 10^{-7}$)
Media	0,47	0,37	0,22	Test de Comparación de Rangos
Mediana	0,5	0,5	0,25	Libre - Promocionado *-0.243966
Desvío estándar	0,1	0,18	0,22	Libre - Regular *-0.14429
Máximo	0,5	0,5	0,5	Promocionado - Regular *0.099
Mínimo	0,125	0	0	

Las Tablas 3 y 4 muestran que en el año 2015, la calidad de participación de los alumnos en las herramientas virtuales, estuvo relacionada positivamente con el rendimiento académico final, pues las diferencias se manifestaron en todos los grupos, a mejor participación del Aula Virtual es superior el grupo de rendimiento a que pertenece el estudiante.

Tabla 5. Medidas descriptivas de la participación en los Autoevaluativos según el rendimiento académico final. Matemática II. Resultados obtenidos en 2016.

Medidas Descrip (Autoevaluativos)	Rendimiento Académico Final			Prueba de Kruskal Wallis (valor de p)
	Promocionados	Regulares	Libres	
Cantidad	11	62	39	31,5959 (p=0,0000007)
Media	0.36	0.22	0.09	Test de Comparación de Rangos
Mediana	0.38	0.25	0	Libre – Promocionado *-0.270688
Desvío estándar	0.14	0.11	0.12	Libre - Regular *-0.134874
Máximo	0.5	0.5	0.38	Promocionado - Regular *0.135814
Mínimo	0.13	0	0	

Tabla 6. Rendimiento Académico Final según participación en los Foros. Matemática II. Resultados obtenidos en 2016.

Medidas Descrip (Foros)	Rendimiento académico final			Prueba de Kruskal Wallis (valor de p)
	Promocionados	Regulares	Libres	
Cantidad	11	62	39	23,7069 (p=0,000007)
Media	0.3	0.17	0.05	Test de Comparación de Rangos
Mediana	0.38	0.13	0	Libre - Promocionado*-0.244172
Desvío estándar	0.16	0.16	0.16	Libre - Regular *-0.114041
Máximo	0.4	0.5	0.4	Promocionado - Regular *0.130132
Mínimo	0	0	0	

En las Tablas 5 y 6 se observa que la participación de los alumnos en los foros en el año 2016, presenta diferencias según el grupo de rendimiento final, siendo los promocionado y regulares los de mejor participación respecto de los alumnos libres, y los promocionados respecto de los regulares.

Respecto de la encuesta administrada a los alumnos que finalizaron en cursado del primer cuatrimestre 2016 se presentan los siguientes resultados:

Tabla 7. Opiniones de los estudiantes en relación a la calidad de la enseñanza e inversión de tiempo en aprendizaje. Matemática II. Resultados obtenidos en 2016.

La Implementación de las TIC en el Proceso de Enseñanza – Aprendizaje	1	2	3	4	5	total
No aporta nada nuevo, la calidad de la enseñanza es la misma.	10	60	24	3	3	$100_{(72)}$
Mejora de manera sustancial la calidad de enseñanza.	--	8	29	50	13	$100_{(72)}$
Supone una pérdida de tiempo.	21	50	19	5	5	$100_{(72)}$
Tiene más un uso social y de esparcimiento que académico.	16	34	21	23	5	$100_{(72)}$
Permite acceder a la información superando las barreras de espacio y tiempo.	--	2	19	60	19	$100_{(72)}$
Disminuye el número de estudiantes que asiste a las clases presenciales.	13	42	29	11	5	$100_{(72)}$
Evita la asistencia presencial a clase.	16	42	29	8	5	$100_{(72)}$
Permite disponer de tiempo para otras tareas u obligaciones.	6	8	39	34	13	$100_{(72)}$

En la Tabla 7 se muestra que la mayoría de los alumnos sostienen que la implementación de las TIC en el proceso aporta en forma satisfactoria a la calidad de la enseñanza de la asignatura.

Las respuestas de los alumnos en relación con la calidad de la enseñanza (ítems 1 y 2), motivan a los docentes a seguir trabajando en este nuevo modelo denominado blended learning o b-learning. El 50% opina que tiene un uso académico, mientras que el 28% le da un uso social y de esparcimiento, el resto no da una respuesta. Es de esperar los porcentajes de respuestas de acuerdo a los ítems 6 y 7, vinculados con la asistencia a clase de los alumnos, por cuanto éstos deben cumplir con la exigencia del 80% de asistencia a clases presenciales.

Tabla 8. Opiniones de los estudiantes en relación a la implementación y uso de las TIC. Matemática II. Resultados obtenidos en 2016.

La Implementación y Uso de las TIC	1	2	3	4	5	total
Genera más trabajo y esfuerzo para los estudiantes	--	16	29	37	18	$100_{(72)}$
Divide al grupo-clase entre los que utilizan las TIC con frecuencia y los que no suelen acceder a ellas.	15	8	40	21	16	$100_{(72)}$
Hace que los estudiantes estén atentos a más fuentes de información.	--	5	13	42	40	$100_{(72)}$
Genera un esfuerzo de los estudiantes (comprar computadora, ir a un cyber, etc.) para acceder a Internet.	8	26	29	13	24	$100_{(72)}$
Hace que los estudiantes estén atentos a más fuentes de información.	--	5	11	37	47	$100_{(72)}$

En la Tabla 8 se observa que los ítems 1, 3 y 5 presentan respuestas favorables en más del 50% de los estudiantes.

En el ítem 2, "la implementación de las TIC divide al grupo-clase entre los que utilizan las TIC con frecuencia y los que no suelen acceder a ellas", las respuestas sorprenden, el 23 % en desacuerdo, el 40% no deciden por una respuesta, se puede pensar que estos alumnos participan individualmente sin contactase con el resto de sus compañeros. Las respuestas al ítem 4, muestran como un hecho incorporado en la sociedad, el acceso a Internet por cualquiera de los medios posibles, por cuanto el 63% responde en desacuerdo o da una respuesta neutra.

Tabla 9. Opiniones de los estudiantes en relación con la comunicación e interacción. Matemática II. Resultados obtenidos en 2016.

El Uso de las TIC	1	2	3	4	5	total
Fomenta el trabajo colaborativo entre los estudiantes.	2	8	32	45	13	$100_{(72)}$
Hace que el proceso de enseñanza-aprendizaje sea más personalizado.	--	5	37	42	16	$100_{(72)}$
Hace más fácil expresar opiniones y dudas.	--	13	16	45	26	$100_{(72)}$
Aumenta el número de interacciones de los estudiantes entre sí.	6	18	26	42	8	$100_{(72)}$
Aumenta el número de interacciones entre el profesor y los estudiantes.	--	8	16	61	16	$100_{(72)}$

En la Tabla 9 se observa que con la modalidad utilizada en el entorno virtual se contribuye a la comunicación e interacción entre los diferentes actores del proceso de enseñanza aprendizaje

La implementación de las TIC en relación con la comunicación e interacción, muestra en un alto porcentaje, el 50% o más, de respuestas favorables en ítems 2, 3, 4 y 5. Las respuestas al ítem 1 conducen a revisar las actividades propuestas desde la interacción entre los alumnos, pues presentan un 50% de alumnos que no sostienen el aumento de interacciones entre ellos. El 79% dice que le permite acceder a la información superando las barreras de espacio y tiempo.

4 Conclusiones y trabajos futuros

- Las actividades propuestas, con sus estrategias para solucionar ejercicios y problemas, posibilitan la función reguladora (de seguimiento y control) de la actividad del alumno por parte del profesor y a la vez la autorregulación por el propio alumno, dando lugar también a que éste reflexione sobre sus métodos de estudio y su forma de construir el conocimiento.

- La Web de ninguna manera descarta el papel importante del docente en el proceso de enseñanza y aprendizaje, colocándolo frente a nuevos desafíos
- La implementación de sistemas instruccionales diseñados en función de los errores y dificultades que presentan los alumnos, conlleva a incorporar habilidades que contribuyen al aprendizaje de la Matemática.
- El análisis de la secuencia y formas de participar y responder de los alumnos en los foros, como así también las observaciones recabadas en las consultas presenciales, constituyen un caudal de información para la construcción de los Sistemas Expertos.
- Lo ideal en términos de desarrollo de la autonomía en los estudiantes, sería que los procesos, los momentos y las formas de evaluación planteadas por los docentes y por la institución condujeran a desarrollar en el estudiante el hábito de la autoevaluación.
- La autoevaluación es importante y beneficiosa dentro del proceso de enseñanza y aprendizaje. Es evidente que el estudiante que logra autoevaluarse es más efectivo porque cobra conciencia de sus propios logros, y por ello advierte que la causa o raíz de los mismos está en su capacidad, en su reflexión, acompañada de la acción y el esfuerzo desempeñado por él mismo.
- Según los resultados logrados, se observa que es necesario motivar aún más a los alumnos para trabajar en el Aula Virtual. Es por ello que se considera importante tener en cuenta la incidencia de esta participación en la calificación final del cursado de la asignatura.
- Se piensa seguir trabajando en este sentido, por cuanto la participación de los alumnos en el Aula Virtual se ve reflejada en los resultados finales de la asignatura. Además, se propiciaran actividades que enriquezcan el proceso de enseñanza aprendizaje de la asignatura, con estrategias innovadoras tendientes a motivar y mejorar la participación de los alumnos.

Referencias

1. Martínez, M.; Tey, A.: Aprendizaje ético en contextos virtuales en el EEES. Revista Electrónica Teoría de la Educación, educación y cultura en la Sociedad de la Información. http://www.usal.es/teoriaeducacion. Accedido el 20/02/2014.
2. Haddad, 1998 , citado por Navarro del Ángel, D.: Modelos Educativos y Entornos Virtuales de Enseñanza. Revista Interdisciplinar – Entelequia - Especial Educación Superior. http:// www.eumed.net/entelequia/pdf/2009/e10a11.pdf. Accedido el 18/04/2010.
3. Navarro del Ángel, D.: Modelos Educativos y Entornos Virtuales de Enseñanza. Revista Interdisciplinar – Entelequia - Especial Educación Superior. http://www.eumed.net/entelequia/pdf/2009/e10a11.pdf. Accedido el 18/04/2010.
4. Santos Preciado, J. M.: Las tecnologías de la información y de la comunicación y el modelo virtual formativo: nuevas posibilidades y retos en la enseñanza de los SIG. GeoFocus (Artículos), Nº 6, p.113-137 (2006).
5. Pincas, A.: Gradual and Simple Changes to incorporate ICT into the Classroom. Elearningeuropea.info http://www.elearningeuropa.info/doc.php. Accedido el 20/08/2007.
6. Bartolomé, A.: Blended Learning. Conceptos básicos. Píxel- Bit Revista de Medios y Educación, 23, pp. 7-20 (2004).
7. Walpole, R; Myers, R.: Probabilidad y Estadística. Editorial McGrawHill. Interamericana de México. (1992)

Volver al Índice

Representación Geométrica de los Parámetros de una Función Utilizando un Recurso del GeoGebra

Haye, Egle Elisabet
Facultad de Ingeniería y Ciencias Hídricas, Universidad Nacional del Litoral
Ciudad Universitaria, Santa Fe, Argentina
ehaye@fich.unl.edu.ar

Resumen. Para entender las propiedades de una función, en los cursos de matemática universitaria existen diferentes métodos algebraicos y gráficos que sirven al estudiante como técnicas para obtener su gráfica, particularmente las de aquellas funciones que incluyen en su expresión *parámetros* que poseen un significado propio (como ser algún tipo de simetría, desplazamiento o dilatación). En este trabajo, se describe una experiencia realizada con los alumnos de primer año de la Facultad de Ingeniería y Ciencias Hídricas en donde se propone una secuencia de actividades que tienen el propósito de ayudar a la mejor comprensión y visualización del significado geométrico de los parámetros de las expresiones algebraicas de las funciones incluidas en un recurso dinámico llamado "micromundo" de funciones del GeoGebra.

Palabras Clave: Parámetros de una función, Gráfica de una función, GeoGebra.

1 Introducción

En la Facultad de Ingeniería y Ciencias Hídricas de la Universidad del Litoral, las dificultades de aprendizaje de los alumnos que ingresan a las distintas carreras de ingeniería se manifiestan en casi todos los temas de la primera asignatura de matemática que cursan. En dicho curso, los problemas en la comprensión de los conceptos, propiedades y aplicaciones, se expresan en particular en el tratamiento de funciones, tópico que constituye la puerta de entrada de los restantes temas de Cálculo que integran la asignatura.

Como es sabido, el concepto de función es uno de los temas centrales en los cursos de matemática y es indispensable en todos los campos de las ciencias.

Cuando se estudian las características y propiedades esenciales de una función (dominio, rango, intersecciones con los ejes coordenados, crecimiento o decrecimiento, paridad, asíntotas, simetrías, positividad, periodicidad) desde sus diferentes registros de representación, advertimos en los estudiantes ciertas limitaciones en la comprensión, que se deben a dificultades tanto en los procedimientos algebraicos y cálculos que deben realizar, como en el empleo de los recursos para la graficación. Particularmente, las dificultades se presentan en el uso e interpretación de los parámetros en la expresión de una función y en la comprensión de los efectos geométricos que produce cuando estos parámetros varían. "En la actualidad, llegar a comprender los efectos geométricos provocados por la variación de los parámetros de una función cualquiera sobre su gráfica se considera un propósito de aprendizaje matemático fundamental hacia el final de la Educación Media" [1].

Este hecho conduce a la necesidad no sólo de diferenciar los parámetros de otro tipo de literales como variables o incógnitas, sino también dar un sentido de uso a los mismos con la finalidad de agrupar los objetos matemáticos en entidades más generales como ser, familias de funciones y así estudiar en la generalización, propiedades comunes geométricas asociadas a cada parámetro.

En el cursado de matemática de primer año en nuestra facultad, la habilidad para el trazado a mano de una amplia variedad de funciones se adquiere con la ayuda de las gráficas de "funciones básicas". Las gráficas de las funciones básicas, que pueden verse por ejemplo en [2], son las representaciones de las funciones más empleadas comúnmente en álgebra. La familiaridad con las características principales de estas gráficas básicas (simples), ayudan al estudiante a analizar formas de gráficas más complejas, en particular, gráficas obtenidas a partir de éstas mediante transformaciones rígidas o no rígidas. Por ello, es importante que el alumno sepa reconocer en una función qué parámetros son los indicadores de cómo desplazar, reflejar y dilatar la gráfica básica asociada a dicha función, desde donde se parte.

Las gráficas en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática suelen emplearse en forma estática o dinámica y ambas representaciones constituyen formas de visualización. En nuestro caso, en cursados anteriores empleamos la primera forma, en donde el alumno interpreta el significado de un cierto parámetro en la gráfica de una función, construyendo tablas de valores por cada valor fijo asignado a ese parámetro. Esta tarea, que implica muchos cálculos y numerosas gráficas para hacer en lápiz y papel, tiene un alto costo en errores y tiempo, y la mayoría de las veces no se alcanza a explorar todas los características y propiedades que se deberían abarcar.

"Haciendo una breve reflexión de la forma en que con frecuencia abordamos nuestras lecciones, podemos recordar que algunas veces los profesores de matemática pretendemos que los estudiantes, por medio de una gran argumentación teórica y la visualización de unas pocas gráficas dibujadas en la pizarra, las que muchas veces no son una buena representación de lo deseado, comprendan una serie de conceptos que, incluso, a los docentes nos ha tomado años de estudio entenderlos a plenitud. Pareciera que este ambiente de aprendizaje ha contribuido a generar en los jóvenes un sentimiento de temor y recelo hacia la matemática" [3]. Por lo anterior, concluye [3], se hace conveniente considerar el uso de tecnología para obtener, como en el caso de funciones, una buena representación de las gráficas de cualquier tipo de función en un corto tiempo.

Con el fin de superar las dificultades descriptas, se comenzó a pensar en una forma alternativa de enseñanza mediante la incorporación de un recurso tecnológico dinámico en las clases de matemática.

Consideramos que la posibilidad de su utilización ofrecería una forma de innovación para enriquecer la práctica docente y un medio para atraer de nuevo la atención de los estudiantes y motivarlos a aprender. En concordancia con [3], el uso de las tecnologías en el aula ayuda en un sinnúmero de situaciones, desde la simple exposición de un tema, hasta el uso de las mismas por parte de los estudiantes, pero en un ambiente adecuadamente programado por el profesor.

Por todo ello, en este trabajo se presenta la descripción de una experiencia realizada con un grupo de alumnos de primer año que cursan Matemática Básica en el tema Funciones, donde como ya se dijo, se advierte en ellos limitaciones para captar y relacionar las características y propiedades esenciales, desde diferentes registros de representación, cuando una función incluye en su expresión literal algún parámetro.

Esta experiencia consta de una secuencia de actividades que tiene el propósito de ayudar a la mejor comprensión y visualización del significado geométrico de los parámetros específicamente de las expresiones algebraicas de las funciones incluidas en un recurso dinámico llamado *micromundo de funciones* del GeoGebra.

En el siguiente punto, se explicitan los fundamentos sobre los que se basó la propuesta didáctica. Seguidamente, se describe la experiencia realizada, detallando, sus objetivos generales y particulares, la metodología y el material didáctico utilizado. En el punto 4 se exponen los resultados observados y la valoración de los alumnos participantes de la experiencia. Finalmente, se expresan las conclusiones y consideraciones finales.

2 Lineamientos teóricos

El análisis del papel de los parámetros presentes en una ecuación, así como su interpretación y la comprensión de los alumnos, ha sido objeto de estudio desde distintos puntos de vista.

En [4] se hace referencia a la investigación que [5] realizó sobre el aprendizaje del concepto de parámetro, que incluyó el uso de ambientes tecnológicos y a partir de la cual ha podido generar aseveraciones como las siguientes: "El parámetro es una variable extra en una expresión algebraica o función que generaliza toda una clase de expresiones, toda una familia de funciones o un grupo de gráficas. El parámetro es considerado una meta – variable: la a en $y=ax+b$ puede jugar los roles de una variable ordinaria, un fijador de posición, una cantidad desconocida o que cambia, pero ésta actúa en un nivel más alto que el caso de una variable. Por ejemplo, un cambio del valor del parámetro no afecta sólo un punto en particular, sino completamente a la gráfica.

Los diferentes roles de las variables son nuevamente considerados, pero ahora en un nivel más complejo, y la función genérica se convierte en el objeto de estudio. El concepto de parámetro resalta la abstracción de situaciones concretas. Las representaciones algebraicas más formales y generales se vuelven parte natural del mundo matemático de los estudiantes".

La Tabla 1, tomada de [4] y proveniente del trabajo de [6], muestra las categorías de análisis del parámetro en el escenario didáctico y permite identificar los tres pasos esenciales en el aprendizaje del mismo: el parámetro como un fijador de posición, como una cantidad que cambia y como un generalizador.

Por ejemplo [7], deja en claro estas categorías en su estudio dirigido a profesores de matemática, para analizar las relaciones entre la variación de parámetros y los efectos geométricos en la función $f(x)=ax+b$. Aquí, los efectos que se analizan referidos a los valores posibles de a y b son de dos tipos: cambio de pendiente y traslación, los cuales se caracterizan por las diferencias percibidas en cuanto al ángulo de inclinación y/o la posición relativa que tiene una recta con respeto a aquella correspondiente a la función identidad, cuya expresión es $f(x)=x$ y que actúa como referente.

Tabla 1. Roles del Parámetro.

Rol del parámetro	Ejemplo: "a" en y=ax+b	Modelo gráfico	Actividad del estudiante
Fijador de posición	"a" contiene valores específicos, uno por uno	Una gráfica que es reemplazada por otra	
Cantidad que cambia: Parámetro que se desliza	"a" transita a través de un conjunto de manera dinámica	Gráfica dinámica	Variación sistemática de los valores de un parámetro
Generalizador: Parámetro que determina una familia	"a" representa un conjunto, generaliza toda la solución	Un grupo de gráficas juntas	Generalización de situaciones y soluciones

Otro estudio similar realiza [8]. En su trabajo, presenta una secuencia de análisis de las trasformaciones geométricas de la función exponencial natural, definida por $f(x)= e^{ax}$, Tal secuencia permite caracterizar familias de curvas asociadas a la expresión anterior, a partir del análisis de las transformaciones geométricas "deformación" y "reflexión" experimentadas por estas curvas tras la variación del parámetro a.

En todas estas investigaciones mencionadas, que presentan diferentes actividades didácticas con el fin de analizar las interpretaciones geométricas de un parámetro, se espera que el alumno pueda apropiarse de un conocimiento matemático relativo al concepto de función que le facilite el estudio de sus características y propiedades esenciales desde sus diferentes registros, no sólo algebraico, sino también complementado con las representaciones visuales de los conceptos. [9] considera que los objetos matemáticos son accesibles sólo por medio de sus representaciones y que su conceptualización pasa por la capacidad de identificar un concepto en diferentes registros. Por lo tanto, se necesita un trabajo específico en los estudiantes cuyo objetivo sea la articulación de diferentes registros alrededor de un objeto matemático en particular.

En el proceso de enseñanza-aprendizaje como de la geometría, la trigonometría y el cálculo, y en particular del tema funciones, [10] señala que se requiere de la visualización, ya con ella se activan, estimulan y desarrollan los procesos lógicos del pensamiento para obtener el nuevo conocimiento. Además, permite al alumno reflexionar, profundizar, definir, valorar, argumentar y conjeturar.

La visualización, y más aún cuando se apoya con el uso de tecnología, facilita el aprendizaje de conceptos básicos de funciones y sus aplicaciones a situaciones de aprendizaje y a la resolución de problemas. Por otra parte, permite exigir del alumno la búsqueda y exploración de relaciones, propiedades y formas de representación de las funciones en términos de sus parámetros.

La computadora es una de las principales herramientas para la didáctica de la matemática desde una perspectiva tecnológica. La investigación de [6] en su postura hacia la tecnología, señala que el uso adecuado de un CAS requiere hacer explícitos los diferentes roles de las literales a diferencia del trabajo con lápiz y papel. El uso de la computadora libera a los estudiantes de la preocupación sobre los cálculos y enfatiza una concepción global de los procedimientos de solución [4].

Acerca de la incorporación de tecnología en el aula, en particular la digital, [5] lleva a la conclusión en su investigación de que los factores cruciales para el éxito de la tecnología digital en la educación matemática incluyen el diseño de la herramienta y de las tareas apropiadas que exploren el potencial pedagógico de la herramienta, el papel del profesor y el contexto educativo.

En efecto, en este trabajo se tomó como referencia a [8,1,7], al mostrar en el diseño de sus propuestas didácticas, lo provechoso de utilizar como herramienta al Software interactivo GeoGebra por sus potencialidades dinámicas de manipulación de objetos, permitiendo así, a través de la visualización dinámica, realizar las exploraciones de los efectos de los parámetros en las gráficas correspondientes a las expresiones de diferentes funciones.

Para [10], con la representación dinámica de la relación gráfico-propiedades en el ámbito de las funciones, el alumno puede visualizar una variedad de relaciones antes de interactuar con el contenido. Tales relaciones favorecen la puesta en práctica de una serie de razonamientos que permitan resolver situaciones de aprendizaje. A partir de la visualización de las variaciones en el objeto matemático en el espacio y el tiempo, el docente puede incidir en el desarrollo de procesos lógicos del pensamiento, al resolver tareas en el ámbito del estudio de estas funciones.

En base a todo lo expresado, se describirá a continuación la implementación de actividades tipo taller apoyadas con el GeoGebra, como herramienta que facilita la exploración, la visualización y el análisis sobre el efecto gráfico y geométrico que ocasiona la presencia de un parámetro en diferentes familias de curvas, cuando éste cambia su valor.

3 Descripción de la experiencia

La experiencia se realizó con los alumnos de primer año de las carreras de Ingeniería de la Facultad de Ingeniería y Ciencias Hídricas, que cursan la primera asignatura de matemática en el primer cuatrimestre.

En dicho cursado las clases fueron de modalidad teórico-práctica, y como prueba piloto, esta experiencia se implementó en dos comisiones de aproximadamente 20 alumnos cada una, en un laboratorio informático con una duración de un encuentro de 3 horas, paralelamente a sus clases normales y a la altura que se da el tema Funciones.

Cada alumno pudo disponer de una computadora (o compartirla con otro) en la que previamente estaban instalados el GeoGebra y un programa interactivo de funciones incluido en él, recurso necesario para realizar la actividad, que se detallará en el punto siguiente. La gran ventaja del GeoGebra es que es totalmente libre y gratuito y de muy fácil manejo a pesar de su potencial. El aprendizaje es muy intuitivo y se realiza al hilo de su utilización en contextos de aprendizaje, lo que no requiere ni sesiones especiales de manejo del programa ni elaboración de apuntes sofisticados.

Previo a cada encuentro, el alumno contaba con los siguientes conocimientos asociados a Funciones: dominio, imagen, fórmula de funciones básicas como lineal, cuadrática, hiperbólica, trigonométrica, valor absoluto, exponencial y logarítmica, construcción de gráficas con tablas de valores.

3.1 El Recurso y su utilización

En el encuentro se presentó una secuencia de actividades en orden jerárquico con el propósito general de profundizar y mejorar la observación y análisis de conceptos, propiedades y relaciones matemáticas. Pero principalmente, aprovechando la visualización dinámica e interactiva que ofrece el programa como instrumento de aprendizaje autónomo, el objetivo fue poder ayudar a la mejor comprensión y visualización del significado geométrico de los parámetros contenidos en las expresiones algebraicas de las funciones conocidas por el alumno, en particular, de las incluidas en un recurso dinámico llamado *micromundo* de funciones del GeoGebra. El término *micromundo* refiere a un ambiente de aprendizaje, basado en un lenguaje de programación específico, en el cual se pueden construir proyectos para cualquier materia del currículo, incorporando gráficos, figuras animadas, texto, sonido y multimedia.

Existen numerosas propuestas educativas para implementar en el aula y recopilaciones de aportaciones hechas con GeoGebra en idioma español. Particularmente, en GeoGebra Wiki Spanish, el Dr. J. Armando Landa [11], investigador especialista en Matemática Educativa de la Universidad Autónoma de Chapingo (UACh.México) ha subido un archivo (entre otros) que pone de manifiesto el poder que permite GeoGebra al abordar distintos tipos de funciones. Se trata de un micromundo interactivo diseñado con la finalidad de ayudar a estudiantes de diferentes niveles a reconocer gráficas de funciones y relacionarlas con su respectiva expresión algebraica.
Este archivo se puede consultar y descargar fácilmente desde el link [11].

Específicamente, el autor diseñó el *micromundos de funciones*, con el propósito de ayudar a los estudiantes a reconocer los efectos que tienen sobre las gráficas los parámetros (a, b, c, d y n) que intervienen en las expresiones de las siguientes funciones:

f(x)=a. (d.x -b)^n + c;
f(x)=a. |d.x -b|^n + c;
f(x)=a. (d.x -b)^(m/n) + c; **(1)**
f(x)=a. exp(d.x -b)^n + c;
f(x)=a. ln(d.x -b)^n + c.

Se tratará entonces de que, a través de este recurso, se pueda ayudar a reconocer en las gráficas de las funciones básicas de referencia de las expuestas en (1): $y=x^n$, $y=|x|$, $y= x^{m/n}$, $y= e^x$ $y=\ln x$ los efectos geométricos o transformaciones cuando varían los parámetros y a establecer relaciones con la expresión algebraica. En la

Fig.1 puede verse el inicio del programa interactivo, donde en este caso, en color rojo aparece como título la primera expresión indicada en (1).

Fig. 16. Pantalla inicial del micromundo de funciones del GeoGebra.

Los efectos de cambio que experimente cada familia de funciones de la lista de expresiones en (1), son visualizados y explorados mediante la herramienta “Deslizador” del GeoGebra. Cada parámetro en la expresión de una función tendrá asignado un deslizador cuyos valores en el programa podrán modificarse. Por ejemplo, en la pantalla inicial (Fig.1) se observa para f(x)=a.(d.x-b)^n+c los valores asignados aleatoriamente por el programa: a= -1, b=1, c=1 y n= 2 mostrados en distintos colores y que definen una función cuya fórmula está en color azul. Sin embargo, d=1 (en rojo) es la constante que el programa inicialmente mantiene con valor fijo, pero que luego permitirá modificar.

Haciendo clic en “Iniciar”, aparecen los deslizadores de cada parámetro asociado a la fórmula de la familia de funciones. De esta manera, el alumno moviendo cada deslizador puede observar automáticamente las modificaciones que experimenta la gráfica de la función f(x), al variar el parámetro asociado a dicho deslizador, como se puede ver en la Fig. 2.

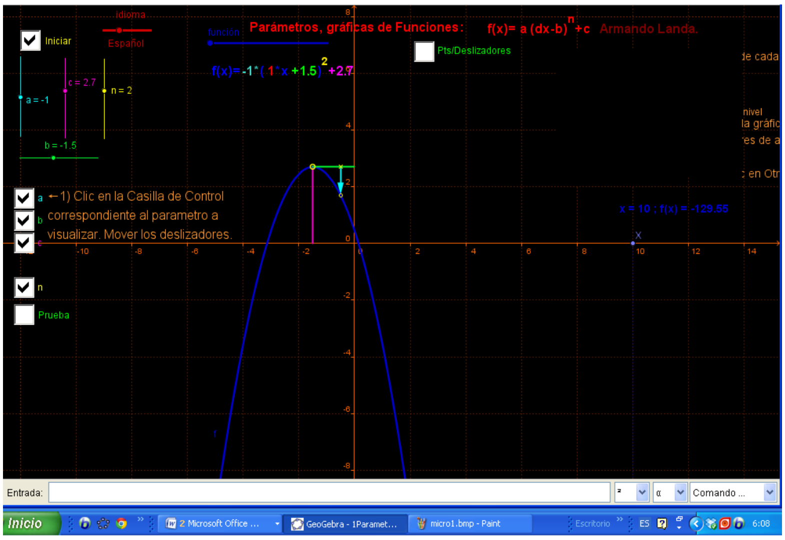


Fig. 2. Uso de los deslizadores para representar la variación de un parámetro en la expresión de una función.

3.2 Las actividades

La variación de cada parámetro interviniente en cualquiera de las funciones del micromundo que fueron listadas en (1), produce un efecto geométrico único sobre la gráfica de su función básica. Por ello, para cada parámetro se planteó al alumno una actividad, por separado y secuencial, conformada por un conjunto de acciones basadas en la exploración y reflexión, procurando una mejor comprensión en la interpretación del efecto que produce ese parámetro.

Las primeras actividades se refirieron a las Transformaciones rígidas, que son más directas de visualizar porque la forma básica de la gráfica no cambia, sólo cambia la posición en el plano. Estas son las traslaciones paralelas a los ejes coordenados (vinculados a los parámetros b y c) y la reflexión con respecto al eje x (asociada con a= -1).

Las actividades restantes se refirieron al análisis de los parámetros a y d, cuyo efecto cuando varían no son tan sencillos de visualizar ya que causan una distorsión o cambio en la forma de la gráfica de la función básica (Transformaciones no rígidas). Estos son los alargamientos y compresiones verticales (vinculados con el parámetro a), reflexiones respecto al eje y (asociado a d=-1) y alargamientos y compresiones horizontales (vinculados con el parámetro d).

3.3 Un Ejemplo

A continuación, mostraremos como ejemplo las Actividades 1 y 2, que refieren a una secuencia de acciones que se proponen al alumno para: inducirlo al descubrimiento y comprensión de qué representa geométricamente el parámetro c en una función clásica como $y=x^2$ (Actividad 1) y para explorar que el mismo efecto es producido sobre otra función cualquiera de (1) (Actividad 2).
Por último, se muestra un cuadro (en este caso vinculado a la Actividad 2) para que el alumno complete como forma de conclusión sobre el efecto geométrico del parámetro c analizado.

- Actividad 1: *Representación del parámetro c en f(x)=x^2.*

Otra alternativa para modificar los valores de los parámetros a, b, c, n, que no sean los deslizadores, es a través de la ventana "Entrada".

Grafica la función f(x)=x^2, escribiendo en la ventana Entrada: a=1 <enter> ,b=0 <enter>, c=0 <enter> ,n=2 <enter>.

Usa el deslizador correspondiente al parámetro c para darle los valores c=-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3 y observa en cada valor qué ocurre con la gráfica con respecto a la gráfica de f(x). Asígnale el nombre g(x) a cada gráfica representada y responde:

– ¿Cambió la forma de f(x) o cambió la posición?
– El movimiento observado en g(x) ¿es paralelo a algún eje coordenado?.¿A cuál?
– En notación de función, ¿g(x) y f(x) cómo están relacionadas?
– ¿Cómo describirías el tipo de movimiento de cada g(x) respecto al de f(x)=x^2 cuando varía el parámetro c?

- Actividad 2: *Representación del parámetro c en cualquier f(x).*

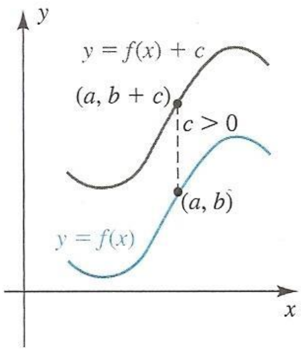
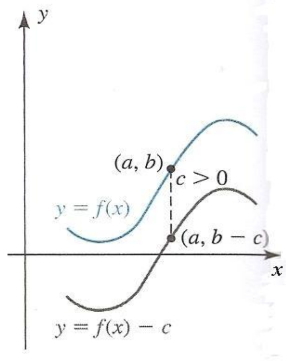
Inicializa los parámetros a, b y c con los valores: a=1; b=0 y c=0 y no los modifiques por ahora.

– Identifica a través de la gráfica y de su fórmula cuál es la función básica f(x) que se representa cuando el parámetro n toma los valores 0, 0.5, 1, 2, 3 y los valores n= -1, -2.
– Para cada n (o para cada f(x) definida) modifica los valores del parámetro c y compara las gráficas respectivas con la de f(x) original (es decir, cuando a=1; b=0 y c=0).
– ¿Observas en los movimientos el mismo patrón de comportamiento con respecto a f(x) que en la Actividad 1?
– Si un punto de coordenadas (x, y) pertenece a la gráfica de y=f(x) original, ¿qué coordenadas tiene este punto en la gráfica resultante del desplazamiento al modificar sólo el parámetro c?

- Conclusión:

Completa los lugares vacíos de la Tabla 2, que te ayudarán a resumir el análisis realizado hasta ahora, acerca de una de las traslaciones paralelas a los ejes coordenadas representadas con el parámetro c:

Tabla 2. Cuadro que permite al alumno concluir de sus actividades, sobre el efecto geométrico del parámetro c en y=f(x)+c.

Ecuación	y=f(x) +c con c >0	y= …………………con c >0
Efecto en la gráfica	La gráfica de f se desplaza hacia ……………..una distancia c.	La gráfica de f se desplaza hacia……………una distancia……
Interpretación gráfica	 	

4 Resultados

Una vez terminadas las actividades, se realizó una encuesta de opinión en la que se indagó sobre las apreciaciones personales de cada estudiante. La finalidad fue obtener los primeros resultados de esta experiencia didáctica, queriendo de esta manera evaluar la metodología utilizada en función del logro de los objetivos planteados y conocer su impacto en el aprendizaje.

La encuesta consistió en los siguientes items:

- ¿Qué aporte te brindó el haber realizado las actividades propuestas con esta herramienta informática interactiva llamada *micromundo de funciones*?
- ¿Consideras que fue positivo o negativo esta experiencia de clase? ¿Por qué?
- Escribe algún cometario o sugerencia que desees.

Del análisis de las respuestas a la encuesta, el 100% de los alumnos consideró de gran utilidad esta herramienta y las actividades propuestas con ella.

Los comentarios que más se destacaron acerca de los aportes brindados por esta herramienta fueron:

– Les ayudó a comprender mejor y fácilmente las propiedades al cambiar los distintos parámetros y ver cómo afecta a la gráfica de la función (37%).
– Fue muy interesante la herramienta, dinámica, entretenida en la que es fácil aprender “jugando” (10%).
– Se ahorra mucho tiempo por la facilidad de cambiar rápido los valores en las funciones, visualizar las gráficas e interpretar los comportamientos (26 %).
– Le permitió aprender más del tema (8%).

Con respecto a la segunda pregunta, el 76% de los alumnos consideró positiva la experiencia, diciendo en algunas de sus justificaciones:

– Resultó una forma diferente y buena de aprender desde otro ámbito.
– Es imposible lograr estas interpretaciones en el pizarrón o en la hoja
– De gran utilidad la rápida visualización de las gráficas de las funciones utilizando el GeoGebra para comprender mejor las transformaciones que sufren las mismas al modificar alguno de sus parámetros.
– Ayuda a relacionar los conceptos
– Es bueno el método de la experimentación para comprender mejor las variaciones que uno no se imagina.
– La clase fue atractiva y llevadera.

El 24% clasificó negativa la experiencia debido algunos, al poco tiempo que consideraron tener para desarrollar las actividades y otros, por tener dificultades con las computadoras que se tildan, no andan o alentaron el programa.

La mayoría de los comentarios finales fueron muy alentadores, sugiriendo en adelante se programen más clases del estilo, con mayor tiempo destinado y se incorporen nuevos temas de la asignatura con la misma metodología, incorporando herramientas interactivas.

5 Conclusiones y trabajo futuro

Las dificultades de aprendizaje de los alumnos que ingresan a nuestra facultad, se manifiestan en casi todos los temas de la primera asignatura de matemática que cursan, Matemática Básica. En dicho curso, los problemas en la comprensión de los conceptos, propiedades y aplicaciones, se expresan en particular en el tratamiento de funciones. Cuando se estudian las características y propiedades esenciales de una función desde sus diferentes registros de representación, advertimos en los estudiantes ciertas limitaciones en la comprensión, que se deben a dificultades tanto en los procedimientos algebraicos y cálculos que deben realizar, como en el empleo de los recursos para la graficación. Particularmente, las dificultades se presentan en el uso e interpretación de los parámetros en la expresión de una función y en la comprensión de los efectos geométricos que produce cuando estos parámetros varían (como ser algún tipo de simetría, desplazamiento o dilatación).

En su investigación sobre el aprendizaje del concepto de parámetro, [5] incluyó el uso de ambientes tecnológicos, a partir de la cual ha podido identificar tres pasos esenciales en el aprendizaje del mismo: el parámetro como un fijador de posición, como una cantidad que cambia y como un generalizador.

La visualización, y más aún cuando se apoya con el uso de tecnología, facilita el aprendizaje de conceptos básicos de funciones y sus aplicaciones a situaciones de aprendizaje y a la resolución de problemas. Por otra parte, permite exigir del alumno la búsqueda y exploración de relaciones, propiedades y formas de representación de las funciones en términos de sus parámetros.

En este sentido, para fortalecer el proceso de visualización y contribuir a la superación de las dificultades en los aprendizajes, se implementó una secuencia de actividades, utilizando como herramienta al Software interactivo GeoGebra por sus potencialidades dinámicas de manipulación de objetos, y permitiendo así, en particular a través del recurso llamado *micromundo de funciones*, la visualización dinámica y realizar las exploraciones de los efectos de los parámetros en las gráficas correspondientes a las expresiones de diferentes funciones. Las ventajas dinámicas de la herramienta son sorprendentes, a diferencia de la enseñanza regida por la cultura de papel y lápiz, en la que comúnmente se utilizan sólo medios estáticos de representación de los objetos matemáticos.

Para evaluar los resultados de esta implementación, se realizó finalmente una encuesta de opinión en la que se indagó sobre las apreciaciones personales de cada estudiante, obteniéndose comentarios muy positivos y alentadores que permitió concluir de que, el uso del recursos tecnológicos y dinámicos, en particular el trabajado en esta propuesta, favoreció la comprensión de la noción de parámetro en una función y su efecto geométrico a través de la rápida visualización de las representaciones gráficas de las funciones al variar los parámetros que intervienen en las mismas.

A futuro, se espera continuar la investigación relacionada a la búsqueda de herramientas tecnológicas dinámicas y a la elaboración de propuestas educativas apropiadas para implementar en el aula en los diferentes temas del cursado de Matemática Básica y otras asignaturas de matemática.

Referencias

1. Gutiérrez, R.; Araujo, Y.; Prieto, J.: Una secuencia para analizar los efectos geométricos relacionados con la función cuadrática utilizando GeoGebra. Acta de la *Conferencia Latinoamericana de GeoGebra, (*2012)
2. Larson, R.; Hostetler, R.: *PreCálculo*. Reverté (2008)
3. Poveda, R.; Murillo, M. Las nuevas tecnologías en la enseñanza y aprendizaje de la matemática. Documento de Internet: http://www.centroedumatematica.com/aruiz/libros/Uniciencia/Articulos/Volumen1/Parte6/articulo10.html. (2014) Accedido el 20 de enero de 2017.
4. Hidalgo, E.: Uso de la tecnología digital en la comprensión de parámetros en funciones polinomiales. *Acta I Primer Congreso de Educación Matemática de América central y El Caribe* (2013)
5. Drijvers, P. Learning algebra in a computer algebra environment: design research on the understanding of the concept of parameter. (Dissertation). *Utrecht University Repository* En https://dspace.library.uu.nl/handle/1874/886 (2003)
6. Drijvers, P. The concept of parameter in a computer algebra enviroment. En H. Chick et al. (eds.), Proceedings of the 12th ICMI Study Conference. The Future of the Teaching and Learning of Algebra. Vol. 1 (pp. 221-227). The University of Melbourne, Australia. (2001)

7. Cervantes, A.; López, N.; Luque, R.; Prieto, J.: Relaciones entre la variación de parámetros y los efectos geométricos en la función afín: una propuesta de análisis con Geogebra. Acta de la *Conferencia Latinoamericana de GeoGebra, (*2012)
8. Castillo Bracho, L.; Gutierrez Araujo, R.; Prietto González, J.: Una perspectiva de análisis de las transformaciones geométricas en curvas de la función $f(x)=e^{ax}$ utilizando el GeoGebra. *Revista do Instituto GeoGebra de Sao Paulo.* Vol. 2, No. 2, pp. 81-92 (2013)
9. Duval, R.: Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento. En Hitt, F. (Ed.), Investigaciones en Matemática Educativa II. Grupo Editorial Iberoamérica, México. 173-201(1998)
10. Mendoza A.; Azze B.: Las representaciones dinámicas como formas de visualización de funciones matemáticas. Documento de Internet:http://www.efdeportes.com/efd186/representaciones-dinamicas-de-funciones-matematicas.htm Accedido el 1 de febrero de 2017
11. Landa A.: Micromundo interactivo de funciones. http://www.geogebra.org/en/wiki/index.php/Funciones. Accedido el 2 de marzo de 2015

Volver al Índice

La Clase Invertida como Modelo para la Enseñanza de Integrales Indefinidas en un Curso de Ingeniería

Georgina Rodriguez, María Celeste González, Carina Daniela Pacini
Facultad Regional San Nicolás, Universidad Tecnológica Nacional,
Colón332, 2900 San Nicolás, Buenos Aires, Argentina
{grodriguez, mcgonzalez, cpacini}@frsn.utn.edu.ar

Resumen. Este trabajo presenta una experiencia de cátedra realizada en un curso de Análisis Matemático I de primer año de carreras de Ingeniería de la Facultad Regional San Nicolás, Universidad Tecnológica Nacional, donde se ha llevado a la práctica el modelo de clase invertida al abordar el tema Integrales Indefinidas. Este modelo de enseñanza está centrado en promover tanto el aprendizaje significativo como autónomo en el estudiante, requiriendo un cambio en el rol del docente y su desempeño en el aula. En esta experiencia se seleccionaron cuidadosamente tres videos, aprovechando la variedad de recursos disponibles en la Web sobre el tema. Se asignó a los estudiantes la visualización de los videos en una instancia previa a la clase, para luego desarrollar actividades presenciales. Los resultados satisfactorios de esta experiencia conducen a continuar utilizando esta metodología en el próximo año en el abordaje de otros contenidos de la asignatura.

Palabras Clave: Estrategias de enseñanza, aprendizaje autónomo, clase invertida.

1 Introducción

Para lograr el aprendizaje, es necesario captar la atención de los alumnos y aprovechar las habilidades que poseen. Esto implica un cambio en la forma de enseñar, utilizando las tecnologías disponibles y alejándose de la clase tradicional, teniendo en cuenta que no todas las personas aprenden de la misma manera.

En este contexto, el Grupo Ingeniería & Educación está desarrollando el proyecto de investigación “Ensayo y análisis del impacto del modelo de la clase invertida en cursos de carreras de Ingeniería”, con el uso de videos, en cursos de matemática de carreras de Ingeniería de la Facultad Regional San Nicolás (FRSN), de la Universidad Tecnológica Nacional. El objetivo general del proyecto es desarrollar y aplicar la metodología de clase invertida en distintas asignaturas de matemática en carreras de Ingeniería que se dictan en la FRSN e indagar sobre el impacto que ocasiona tanto en los estudiantes como en los docentes, y analizar los resultados del aprendizaje de los estudiantes bajo esta nueva metodología de enseñanza.

En el marco de este proyecto se realizaron tres experiencias de cátedra en el año 2016 aplicando esta metodología en un curso de Análisis Matemático I (AMI) de primer año de carreras de Ingeniería. Los temas involucrados fueron “Funciones trigonométricas” en la primera [1], “Derivada de funciones” en la segunda [2], y por último en la tercera, “Integrales indefinidas”.

Se presenta en este trabajo la tercera experiencia. La opinión de los alumnos sobre los videos y la metodología utilizada fue obtenida mediante encuestas y charlas informales. En base a los datos obtenidos, en esta experiencia y las anteriores, se continuará aplicando esta metodología en el año 2017 al abordar otros temas de la asignatura.

Este modelo de enseñanza demanda transformar el rol del docente y su desempeño en el aula, acciones que se están llevando a cabo desde el grupo de docentes que participan del proyecto de investigación.

2 Fundamentación

El valor didáctico de un recurso está vinculado directamente al contexto formativo en el que se utiliza, como también la forma en que se usa con sus estudiantes. Para darle ese valor a un recurso, los docentes deben conocer sus características, así como también sus fortalezas y debilidades, y utilizarlo en forma adecuada y en un momento oportuno.

En particular, las Tecnologías de la Información y Comunicación (TIC) brindan una gran variedad y cantidad de recursos, y requieren especial atención en este sentido, demandando a los docentes un análisis reflexivo, que bien puede realizarse en equipo. La utilización de recursos provenientes de las TIC debe venir acompañado de estrategias de enseñanza adecuadas, aprovechando la potencialidad de los mismos.

La clase funciona cuando todos los componentes de su programación son coherentes entre sí; válidos para el contenido que se ha de enseñar, relevantes para el docente y significativos para el grupo de alumnos destinatario [3]. A partir de dicha afirmación la propuesta que se presenta a continuación encuentra su justificación en los contenidos de la asignatura en cuestión, pero además resulta atractiva y significativa para los alumnos por los recursos que utiliza.

Desde esta perspectiva podríamos definir estrategias de enseñanza como los procedimientos, medios o recursos utilizados por el docente para promover aprendizajes significativos en los estudiantes. Para ello el docente debe establecer condiciones para que el estudiante aprenda a aprender, debe generar entornos apropiados para que el aprendizaje sea significativo en los estudiantes [4].

A partir de esta consideración, podemos afirmar que las estrategias de enseñanza que un docente elige y utiliza inciden en:

- Los contenidos que transmite a los alumnos;
- El trabajo intelectual que estos realizan;
- Los hábitos de trabajo, los valores que se ponen en juego en la situación de clase;
- El modo de comprensión de los contenidos sociales, históricos, científicos, artísticos, culturales, entre otros.

Es relevante que el estudiante tome conciencia de sus procesos cognitivos, como también sus procesos socio-afectivos, y para ello el docente debe llevar a cabo un esfuerzo pedagógico encaminado a formar sujetos centrados en solucionar situaciones concretas de su propio aprendizaje, es decir, se debe orientar al estudiante para que realice actividades de comprensión como cuestionar, analizar, proyectar, examinar y valorar su propio accionar en el aprendizaje [5].

El aprendizaje significativo es un tipo de aprendizaje donde el estudiante relaciona la información nueva con la que ya posee, reacomodando y reconstruyéndola, constituyendo un enriquecimiento de la estructura de conocimiento. Es un proceso de articulación e integración de significados [6]. Para que el estudiante logre ese tipo de aprendizaje, es necesario que muestre disposición, motivación y actitud por aprender, y para ello el docente debe diseñar actividades en las cuales sea posible la interacción de lo aprendido y que la naturaleza de los materiales, o contenidos de aprendizaje, sean adecuados.

Si las actividades además promueven la autonomía del estudiante, favorecerán el aprendizaje autónomo del estudiante el cual se define como "… proceso donde el estudiante se autorregula siendo consciente de sus propias formas de organización del trabajo. Uno de los retos más importantes es la determinación de los objetivos del estudio" [7].

Una forma de lograr este tipo de aprendizaje, en el que el estudiante vincule con autonomía lo trabajado previamente con lo nuevo, lo propone el modelo experimental de la clase al revés, clase invertida o flipped classroom [8]. Este modelo asigna a los estudiantes trabajos para realizar en casa, y se deja para la clase presencial aquellas actividades que requieran mayor participación e interacción. Es un nuevo modelo educativo que requiere una perspectiva integral de lo que se quiere enseñar, pensando la manera de aumentar el compromiso en el alumno en cuanto a su propio aprendizaje, haciendo que tome protagonismo en su rol como estudiante. La clase invertida se centra en la concepción de que el estudiante puede investigar, obtener datos, referencias, material de contenidos específicos a una asignatura, por ejemplo, en un tiempo y lugar que no requiere la presencia del docente, y aprovecha el tiempo de presencialidad para realizar actividades que apuntan a niveles más profundos de razonamiento y entendimiento, donde la presencia del docente sí es necesaria. Este modelo es una propuesta que reserva el tiempo de la clase para llevar a cabo una retroalimentación entre estudiantes y docentes, potenciando la creatividad, el análisis, la evaluación.

Los medios de enseñanza son elaborados con propósitos instructivos, pretenden educar o facilitar el desarrollo de algún proceso de aprendizaje dentro de una situación educativa determinada. En particular los videos son recursos que agrupan mensajes mediante representaciones icónicas. Imagen y sonido resultan ser la principal modalidad simbólica a través de la cual presentan el conocimiento [9].

El avance tecnológico y la posibilidad de acceso al uso de las TIC han permitido ampliar el abanico de posibilidades de trabajo dentro y fuera del aula. En YouTube, Khan Academy y otros repositorios disponibles en la Web, existen gran cantidad de producciones audiovisuales –videos– muy interesantes, que pueden ser convenientes para proponer actividades fuera de la clase presencial, potenciando así el aprendizaje autónomo en los estudiantes.

En esta metodología, el docente debe involucrar a los estudiantes, hacerlos protagonistas, buscando generar en ellos un mayor compromiso en lo que respecta a su propio aprendizaje y, para lograrlo, el docente debe reveer su práctica docente, la forma de enseñar. Su participación en el aula no debe reducirse sólo a trasmitir conocimiento, debe proponer actividades que involucren activamente a los alumnos haciendo un buen uso de los recursos tecnológicos.

3 Desarrollo

El docente, al enseñar una asignatura en carreras de grado, recurre a estrategias que están vinculadas con el pensamiento que posee del proceso de enseñanza y aprendizaje. Las nuevas tecnologías han generado un impacto en las comunidades educativas, provocando en los docentes la necesidad de reflexionar cómo realizar apropiada y oportunamente su uso con el estudiante.

En esta oportunidad se realizó la tercera experiencia de *Clase Invertida* en un curso conformado por 25 estudiantes, un profesor y un ayudante, con una relación óptima docente/alumno, permitiendo llevar a cabo un seguimiento grupal e individual necesario y exhaustivo para el abordaje del tema integral indefinida.

Los instrumentos de recolección de información, para el desarrollo de la investigación sobre la experiencia, fueron por un lado la observación participante, lo que permitió realizar notas de campo por parte de las docentes, y por otro una encuesta de opinión diseñada teniendo en cuenta los videos propuestos en el abordaje del contenido. La encuesta fue realizada después de la experiencia de la clase invertida y sirvió para analizar la opinión de los alumnos en cuanto a la nueva metodología de trabajo.

En esta experiencia se enunciaron los objetivos a partir de dos ejes: en el primer eje se tuvieron en cuenta los videos propuestos por el equipo de investigación y en el segundo se consideró el uso de las nuevas tecnologías en general. En primer lugar se les propuso a los estudiantes visualizar tres videos, y se les plantearon actividades individuales para presentar en la clase presencial. Luego se realizó la parte presencial de la clase invertida, donde las docentes hicieron una revisión del tema estudiado con una activa participación de los alumnos, donde se pudo comprobar que realmente los alumnos habían cumplido con la consigna. A continuación, se propusieron actividades prácticas para ser trabajadas en forma individual y grupal, donde los docentes hicieron de tutores, guiando y atendiendo consultas de los alumnos.

En la evaluación de la experiencia se planteó analizar el nivel de comprensión de lo escrito en el pizarrón y del lenguaje utilizado por el docente en los videos, si los mismos facilitaron la comprensión del significado del contenido en cuestión y si los ejemplos presentados fueron suficientes para internalizar el concepto. Además, interesaba saber si los alumnos necesitaron ver el video más de una vez, y si ellos consideraban que esta metodología de trabajo los motivó a estudiar más, aprovechando el tiempo disponible en casa con videos y otros materiales sugeridos por los docentes y asistiendo a clase sólo para realizar consultas y ejercitación.

Los datos se construyeron a partir de una encuesta de opinión dirigida a los alumnos, luego de la aplicación de la clase invertida. En esta encuesta se utilizó una escala tipo Lickert de cinco valores, en la cual se les indicó puntuar cada ítem propuesto según la tabla 1.

Tabla 1. Escala de Lickert utilizada en las encuestas.

1	2	3	4	5
Totalmente en desacuerdo	Ni de acuerdo ni en desacuerdo	En desacuerdo	De acuerdo	Totalmente de acuerdo

A continuación se exponen los resultados en relación a los videos propuestos y el uso de las nuevas tecnologías.

3.1 Videos

Para la realización de esta tercera experiencia de clase invertida se seleccionaron tres videos secuenciales publicados en YouTube sobre el tema Integral Indefinida, alojados en el momento de la experiencia en las URL:

- https://www.youtube.com/watch?v=RH26P2Yn1fQ,
- https://www.youtube.com/watch?v=sqNGUKOShgg
- https://www.youtube.com/watch?v=C85eXg1S_BU

Al momento de escribir este trabajo, se encontró que estos videos ya no estaban más disponibles en estas direcciones. Realizando la búsqueda nuevamente, se encontró que los mismos están publicados ahora dentro del sitio https://aula.tareasplus.com/Roberto-Cuartas/Curso-Calculo-Integral, formando parte de un curso que no está disponible en forma libre. Se puede ver un adelanto de los cursos en las URL:

- https://www.youtube.com/watch?v=CMlZE22QFj0
- https://www.youtube.com/watch?v=UMF_uew2ziU
- https://www.youtube.com/watch?v=uh3D7tiToFI

Se solicitó a los alumnos visualizar los videos propuestos por los docentes para una fecha determinada, a fin de poder trabajar adecuadamente en la clase seleccionada, de acuerdo a las pautas de la clase invertida.

Luego se realizó la parte presencial de la clase invertida. En la clase siguiente se realizó entonces la encuesta para conocer la opinión de los alumnos en cuanto al material brindado y la metodología utilizada.

En la primera parte de la encuesta se pidió dar su opinión respecto del contenido de los videos, en cuanto al lenguaje utilizado y la utilización del pizarrón, y la claridad en los conceptos y los ejemplos, acordando o no con las siguientes afirmaciones:

- El lenguaje utilizado por el profesor es preciso
- Es comprensible el significado de integral indefinida
- Los ejemplos propuestos son suficientes para entender el concepto
- Basta ver los video una sola vez para comprender el tema
- Pude trabajar muy bien con los ejercicios propuestos en la clase presencial a partir de lo visto en los videos

Los alumnos en general estuvieron de acuerdo, y gran parte de ellos muy de acuerdo, con el lenguaje utilizado por el profesor. A su vez, coinciden en que lo escrito en el pizarrón les resulta claro.

Frente al ítem que indagaba sobre la comprensión del concepto de integral indefinida, un alto porcentaje de los alumnos respondieron afirmativamente, como se puede ver en la Fig. 1.

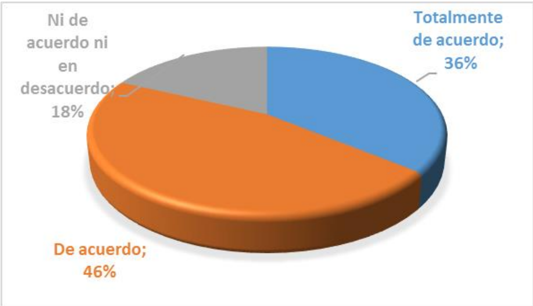


Fig. 1. Comprensión del tema a través de los videos consignados.

Un gran porcentaje de los alumnos coincidió en que los ejemplos propuestos en los videos resultaron suficientes para entender el concepto de integral indefinida, como se puede ver en la Fig. 2.

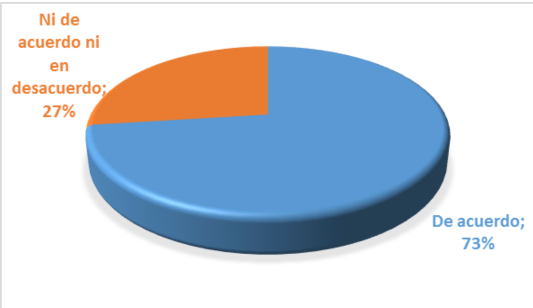


Fig. 2. Sobre los ejemplos trabajados en los videos vistos en esta unidad.

En relación la cantidad de veces que vieron los videos, más de la mitad de los alumnos encuestados afirmó que les bastó verlos una sola vez para comprender el tema. No obstante, alrededor del 30% de los alumnos respondió haberlos visto más de una vez, como se puede ver en la Fig. 3.

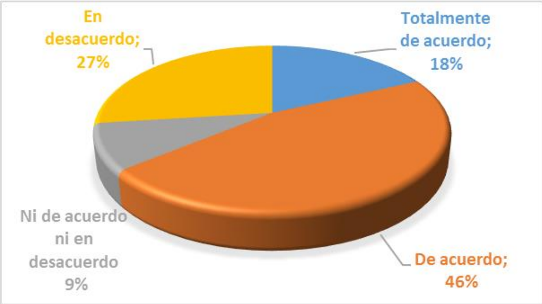


Fig. 3. Respuesta al ítem sobre los videos vistos en esta unidad.

Gran parte de los alumnos opinó que les resultó útil ver los videos propuestos antes de ir a clase, permitiéndoles trabajar en la misma, como indica la Fig. 4.

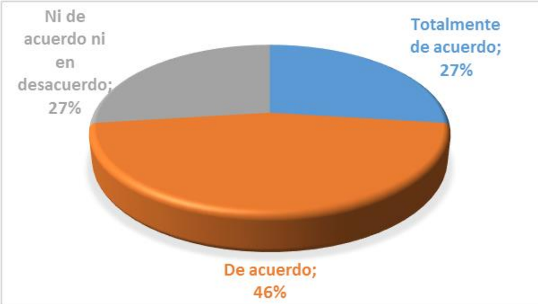


Fig. 4. Respuesta al ítem sobre el trabajo en clase luego de ver los videos.

3.2 El uso de las nuevas tecnologías y la metodología de clase invertida

En la segunda parte de la encuesta realizada, se indagó sobre la opinión de los alumnos respecto al uso de nuevas tecnologías y especialmente, sobre la metodología de la clase invertida. En particular, se les pidió que indiquen si estaban de acuerdo con las siguientes afirmaciones:

- A través de esta metodología, me motivo para estudiar más.
- Me resulta más beneficioso estudiar en casa con videos y otros materiales sugeridos por los docentes que ir a las clases presenciales.
- Es conveniente dedicar en las clases más tiempo a consultas y ejercicios.

Un alto porcentaje de los alumnos considera que la utilización de las nuevas tecnologías y la metodología de la clase invertida los motivó para estudiar, como se muestra en la Fig. 5.

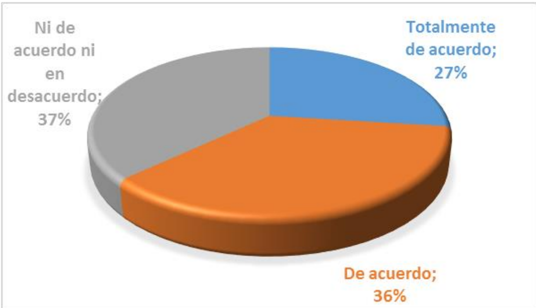


Fig. 5. La metodología de clase invertida motivó a los alumnos a estudiar.

No obstante, mostraron resistencia frente al cambio, dado que sólo el 9% del grupo consideró que estudiar mediante videos y material sugerido les resulta más provechoso que asistir a las clases tradicionales, como se muestra en la Fig. 6.

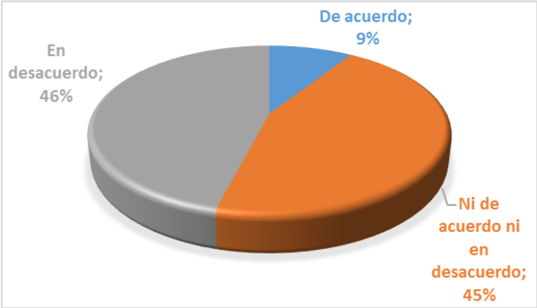


Fig. 6. Opinión de los alumnos sobre la metodología de clase invertida frente a la tradicional.

En cuanto al ítem sobre el aprovechamiento de la clase presencial para realizar consultas y ejercitación, hubo más variedad de respuestas, como se puede ver en la Fig. 7.

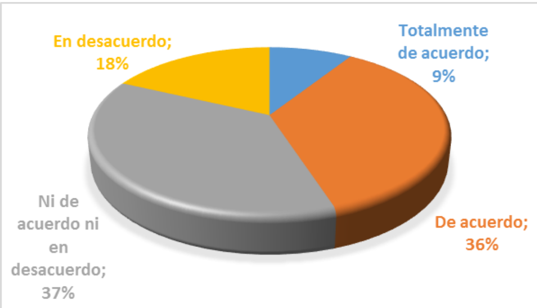


Fig. 7. Respuesta al ítem sobre el trabajo en clase.

En relación a la última parte de la encuesta, en la que se indaga sobre las dificultades que presentaron al trabajar con los videos, sólo un alumno expresó haber tenido problemas con la conexión a Internet, lo que le dificultó la visualización del material. El resto de los alumnos no manifestó tener dificultades, por el contrario, en general manifestaron haber encontrado en los videos una explicación básica y clara del tema.

4 Resultados

A partir de los datos recabados en las encuestas, fue posible ver que los videos propuestos fueron elegidos apropiadamente: el lenguaje empleado en ellos fue comprensible para los estudiantes y las representaciones que ofrecían fueron claras.

Una vez realizada la clase invertida, un 82% de los estudiantes manifestó haber comprendido el significado de integral indefinida; el 73% de los estudiantes afirmó que los ejemplos propuesto les resultaron suficientes para entender el concepto. Más de la mitad de los alumnos encuestados afirmó que les bastó ver los videos una sola vez para comprender el tema; sin embargo alrededor del 30% de los alumnos afirmó haberlos visto más de una vez. El 73% de los alumnos consideró útil haber visto los videos propuestos antes de ir a clase, permitiéndoles trabajar en la misma.

En cuanto al uso de las nuevas tecnologías, el 63% estuvo conforme con la utilización de las mismas en la nueva metodología de trabajo en el proceso de enseñanza y aprendizaje, mientras que un 37% no está ni de acuerdo ni en desacuerdo con su uso en dicho proceso. No obstante sólo un 10% de la totalidad de los alumnos encuestados expresó que les resulta más beneficioso estudiar a través de videos que ir a las clases.

En cuanto a la utilización de la clase presencial para realizar consultas y ejercitación sólo el 45% estuvo de acuerdo, esto implica que más de la mitad del grupo se mostró reticente al cambio.

En relación a la parte de la encuesta en la que se indaga sobre las dificultades que presentaron al trabajar con los videos, sólo un alumno dijo haber tenido problemas con la conexión a Internet. El resto de los alumnos manifestó haber encontrado en los videos una explicación básica y clara del tema abordado.

Es de destacar que en esta tercera experiencia de clase invertida, en relación con las otras dos, se ha observado que los estudiantes han cambiado favorablemente la actitud frente al desafío de gestionar sus tiempos de estudio y dedicación a los mismos.

5 Conclusiones y trabajos futuros

Esta tercera experiencia, como las dos anteriores, requirió organizar espacios de reflexión individual y colectivo sobre la práctica de los docentes participantes, para mejorar su accionar en el aula, y favorecer el trabajo colaborativo entre pares, así como también proponer espacios de intervención a los estudiantes y promover aportes en cuanto a las formas más adecuadas para llevar a cabo su aprendizaje. Esta línea de trabajo permitió determinar de qué manera se puede cambiar favorablemente la posición docente para promover el aprendizaje autónomo y de esa manera lograr un mayor compromiso en el accionar del estudiante.

Esta experiencia, desde el posicionamiento docente, llevó a tomar una postura crítica y analítica de las estrategias de enseñanza que se implementaron, a partir de la cual se planea rediseñar las secuencias de clases y de esa manera dar lugar a un mayor protagonismo de los estudiantes en su propio aprendizaje con un uso apropiado de las TIC.

Ahora bien, el estudiante, al analizar el material audiovisual propuesto por los docentes y dar su opinión sobre la forma de enseñar del docente, se ubica en un rol principal en el proceso de aprendizaje; se posiciona como evaluador de la metodología implementada de trabajo en el aula y fuera de ella; logra la habilidad de tomar decisiones con una actitud de reflexión ante cambios posibles de la realidad que lo rodea; y construye una postura que integra los aspectos cognoscitivos, habilidades y pensamiento crítico necesario para aprender nuevos conceptos de AMI.

A partir de los resultados de esta experiencia y las dos anteriores, se puede concluir que la metodología de clase invertida incide favorablemente en el desarrollo de la autonomía en el alumno, adquiriendo mayor compromiso con su propio aprendizaje y la posibilidad de mejorar la calidad de la formación de futuros ingenieros. Motivos que llevan al equipo docente a hacer conocer, a la comunidad educativa de la FRSN, los logros alcanzados y a profundizar el trabajo con esta nueva metodología, así como también realizar y poner en práctica propuestas de mejora en el proceso de enseñanza y aprendizaje.

A pesar de la gran variedad de videos existentes en distintos repositorios, se dificulta muchas veces encontrar uno en castellano, que se ajuste al vocabulario deseado, y con el desarrollo del tema en la forma en que el docente lo desea. Está también el problema de la no perpetuidad de los recursos, como se comprobó en esta última experiencia. Por estas razones, se está pensando en diseñar una biblioteca de videos propios para ser utilizados en el próximo año lectivo.

Referencias

1. Rodríguez, G.; Pacini, C.; González, M.: La clase invertida como estrategia de enseñanza en carreras de Ingeniería. Estudio de caso en Análisis Matemático I. Libro de trabajos 1er. CIECIBA. Web http://www.edutecne.utn.edu.ar/cieciba_2016/Articulos_Eje04.pdf (2016) Accedido el 20 de Febrero de 2017.
2. Rodríguez, G.; Pacini, C.; González, M.: Ensayando la clase invertida en un curso de Análisis Matemático I 7º Seminario Internacional de Educación a Distancia de RUEDA (2016)
3. Anijovich, R.; Mora, M.: Estrategias de enseñanza. Otra mirada al quehacer en el aula. Primera edición. Ed. Aique. Buenos Aires. Argentina. (2010).
4. Díaz Barriga, F.; Hernández Rojas, G.: Estrategias docentes para un aprendizaje significativo. McGraw Hill, México. (1999).
5. Martí, E.: *Metacognición y estrategias de aprendizaje*, en Pozo, J.I. y Monereo, C. *El aprendizaje estratégico*. Madrid: Aula siglo XXI, Ed. Santillana (2000)
6. Díaz Barriga, F.: *Estrategias Docentes para un Aprendizaje Significativo.* Ed. Mc Graw Hill Education. (2010)
7. Salini, G.; Crispín Bernardo, M. L.: *Aprendizaje autónomo. Orientaciones para la docencia*. 1ª. Ed. electrónica. Universidad Iberoamericana Web http://209.177.156.169/libreria_cm/archivos/pdf_671.pdf. (2011) Accedido el 20 de febrero de 2017
8. Bergmann, J. y Sams, A.: Flip Your Classroom: Talk to Every Student in Every Class Every Day. ISTE. (2012).
9. Area Moreira, M.: Introducción a la Tecnología Educativa. Manual Didáctico on-line. Web https://campusvirtual.ull.es/ocw/file.php/4/ebookte.pdf (2009) Accedido el 20 de febrero de 2017

Volver al Índice

Laboratorio de Estadística Descriptiva: Aprendizaje e Incentivo para la Investigación

Silvana Sofia Nelli, Alfredo Roberto Pauluk, Mario José Mantulak
Departamento de Matemática, Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de Misiones
Juan Manuel de Rosas 325, Oberá, Misiones, Argentina
nelli_sofia@yahoo.com.ar, robertopauluk@hotmail.com, mantulak@fio.unam.edu.ar

Resumen. El presente trabajo presenta una experiencia vinculada al desarrollo de un laboratorio de estadística descriptiva en el ámbito de la cátedra de Probabilidad y Estadística de la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional de Misiones. El objetivo del trabajo se centró en el análisis de las diversas acciones llevadas a cabo para la implementación del laboratorio y promocionar las actividades de investigación en la Facultad de Ingeniería. En el trabajo se exponen los resultados de una encuesta realizada a los alumnos que regularizaron las asignatura en el año lectivo 2016, en la cual se consulta respecto al proceso experiencial del contacto con investigadores y del interés en la utilización del programa estadístico.

Palabras Clave: Laboratorio, Estadística descriptiva, Investigación.

1 Introducción

El presente trabajo se lleva a cabo en base a la experiencia obtenida en una asignatura perteneciente a carreras de grado de la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional de Misiones. Su ámbito de aplicación específico es la asignatura Probabilidad y Estadística, la cual está inserta en el primer cuatrimestre correspondiente al segundo año del Plan de Estudios de las carreras de Ingeniería de Electromecánica, Electrónica, Civil e Industrial.

El dictado de la materia se desarrolla a través de dos tipos de actividades, unas de corte netamente teórico, y otras referidas a la resolución de problemas, planteados estructuralmente a través de los denominados trabajos prácticos. Dentro del dictado de la materia se realiza un laboratorio donde los alumnos aplican en forma práctica y real los conocimientos adquiridos, valiéndose de una herramienta como el software estadístico. Esta actividad posibilita a los alumnos experimentar con datos reales, y mediante la utilización del software, mejorar la comprensión de los conceptos aprendidos (Batanero, 2001) [1].

Asimismo, en el ámbito de la materia se desarrolla el Proyecto de promoción de la investigación encuadrado dentro del Programa de Investigación del departamento de matemática, y el cual tiene como propósito impulsar la investigación como actividad sustancial en los docentes del departamento, y su transferencia a los alumnos, a través de la implementación de proyectos de investigación centrados en disciplinas específicas y/o en la aplicación de técnicas de enseñanza y aprendizaje. Según Behar Gutiérrez (2001), el plantear problemas relacionados con su profesión, que pueden ser resueltos mediante el uso de la estadística, les sirve de motivación para el estudio de la asignatura [2].

En el ámbito del proyecto de promoción de la investigación del departamento de matemática, se desarrolla el laboratorio de estadística descriptiva, llevado a cabo mediante actividades de carácter grupal y según la carrera que cursen los alumnos [3]. En este sentido se concuerda con Nieto Lovo (2004), en que el trabajo grupal fomenta la responsabilidad, solidaridad y compromiso, que son una parte importante de la formación universitaria y profesional [4].

Por otra parte, esta experiencia permite a los alumnos observar que la estadística es inseparable de sus aplicaciones y que su justificación está en su aplicación a problemas externos a la misma (Batanero y Díaz, 2005) [5].

El citado laboratorio implica básicamente las instancias siguientes:

- Constitución de los grupos de trabajo según la carrera que cursan.
- Adiestramiento de los grupos, sobre cómo realizar el laboratorio y como organizarse para realizar la entrevista a su investigador de referencia.
- Entrevista de cada grupo con un investigador de su carrera, para obtener datos provenientes de una investigación.
- Utilización manual de técnicas estadísticas descriptivas para obtener la información solicitada.

- Realización de una práctica guiada de laboratorio, mediante la utilización de un software para comprobar la información obtenida manualmente.
- Realización de una jornada de presentación de resultados del laboratorio, por parte de los diferentes grupos de trabajo, a partir de una exposición oral de unos 15 minutos frente a los docentes y alumnos del curso.

En función de lo expuesto, se traza como objetivo del presente trabajo el dar a conocer los resultados obtenidos en las diferentes etapas de desarrollo del laboratorio de estadística descriptiva llevado a cabo en la cátedra de Probabilidad y Estadística de la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional de Misiones.

2 Objetivos del laboratorio

Los objetivos del laboratorio de estadística descriptiva son los siguientes:

- Ampliar los conocimientos y aplicaciones de Estadística Descriptiva.
- Posibilitar la utilización de un software estadístico.
- Aplicar herramientas de estadística descriptiva a datos suministrados por investigadores de la FI-UNaM.
- Articular contenidos de la materia con proyectos de investigación afines a cada carrera de ingeniería.
- Promover la inserción de alumnos en equipos de investigación de la FI-UNaM.

2.1 Contenidos a utilizar en la experiencia

Para el desarrollo del laboratorio se utilizan los contenidos temáticos siguientes: análisis de datos de variables cuantitativas y cualitativas, medidas descriptivas, tabla de frecuencia absoluta, relativa y acumulada, histograma, polígonos de frecuencias, medidas de tendencia central, medidas de orden, medidas de dispersión, diagrama de caja y bigotes, diagrama de tallo y hojas.

2.2 Consignas para el desarrollo del laboratorio

En base a los datos suministrados por el investigador consultado, realizar los ítems siguientes:

1. Establecer una variable de interés, definir su tipo y escala de medición.
2. Definir la población y la muestra.
3. Agrupar los datos en intervalos de clase, confeccionar la tabla de frecuencias absolutas, frecuencias relativas, y frecuencias acumuladas (absolutas y relativas).
4. Realizar la gráfica del histograma y del polígono de frecuencias acumuladas.
5. Calcular la media, la mediana, el modo, los cuartiles y la desviación estándar para datos sin agrupar, y para datos agrupados en intervalos de clases. Si existen diferencias entre los resultados obtenidos para datos sin agrupar y datos agrupados de cada medida, fundamentar la diferencia en cada caso.
6. Representar los datos suministrados en un diagrama de tallo y hoja (incluir profundidades).
7. Realizar un diagrama de caja y bigotes a partir de la información obtenida (Representar datos atípicos si los hubiere).
8. Una vez realizada la práctica de laboratorio con el software estadístico, realizar una comparación entre los valores hallados manualmente y los valores detallados por el programa.

3 Realización y aprobación del laboratorio

Se conforman grupos de 6 ó 7 alumnos cada uno, según la carrera de ingeniería que estén cursando. Luego se realiza un adiestramiento de los alumnos en función de las diversas actividades propuestas para el laboratorio. Posteriormente, se le asigna a cada grupo un investigador de referencia perteneciente a la carrera en la cual están inscriptos los integrantes del grupo.

La cátedra realiza un relevamiento de los investigadores que están dispuestos a colaborar, así como un análisis de los datos que pueden ser entregados a los alumnos. Luego de realizado el paso anterior, el docente-investigador ha de suministrarle datos provenientes de sus investigaciones actuales, realizadas en el ámbito de la correspondiente carrera. A partir de los datos obtenidos, los alumnos realizarán los cálculos de forma manual en base a las consignas establecidas en el laboratorio.

La utilización del programa estadístico se lleva a cabo en el aula taller de informática, donde cada grupo se instala en 2 computadoras, se realiza una introducción teórico/práctica del software por parte del docente. Con los datos relevados por cada grupo se procede a la carga de los mismos en el programa informático. Y se da inicio a la elaboración del laboratorio, que consiste en responder las consignas requeridas por la cátedra utilizando como herramienta el software estadístico. Las respuestas brindadas por el programa se compararan con las obtenidas en forma manual por los alumnos, lo cual les permite a comprobar las bondades de la utilización de un programa estadístico, además de analizar las diferencias existentes entre los resultados hallados manualmente y los entregados por el software.

3.1 Elaboración del informe

El informe del laboratorio debe contener:

- Introducción sobre las herramientas estadísticas utilizadas.
- Objetivo del trabajo realizado.
- Desarrollo:
  - Aplicación de herramientas estadísticas
  - Análisis de la información obtenida
  - Comparación en cada ítem desarrollado, de valores obtenidos en forma manual y mediante la utilización del software estadístico
- Conclusiones.
- Referencias Bibliográficas.

El informe de laboratorio se debe elaborar en hoja A4, letra Times New Roman 12, alineación justificada e interlineado sencillo.

3.2 Aprobación del laboratorio

Los integrantes de cada grupo, deberán presentar el informe escrito y exponer en forma oral los resultados del laboratorio frente a sus compañeros de cursado, instancia final en la cual deben responden a preguntas formuladas por los docentes de la cátedra y/o por sus compañeros de curso.

4 Resultados obtenidos a partir de una encuesta sobre la experiencia del laboratorio

En la Facultad de Ingeniería de Oberá, perteneciente a la Universidad Nacional de Misiones se dictan cuatro carreras de ingeniería: Civil, Electromecánica, Electrónica e Industrial. La asignatura Probabilidad y Estadística es común a todas estas carreras, y se dicta durante el primer cuatrimestre del segundo año del plan de estudio.

Para analizar el impacto del laboratorio se realizó una encuesta entre los alumnos que regularizaron la asignatura durante el ciclo lectivo 2016, sumando un total de 114 alumnos. En la Fig. 1 se indican los porcentajes de alumnos por carrera consultados en la encuesta.

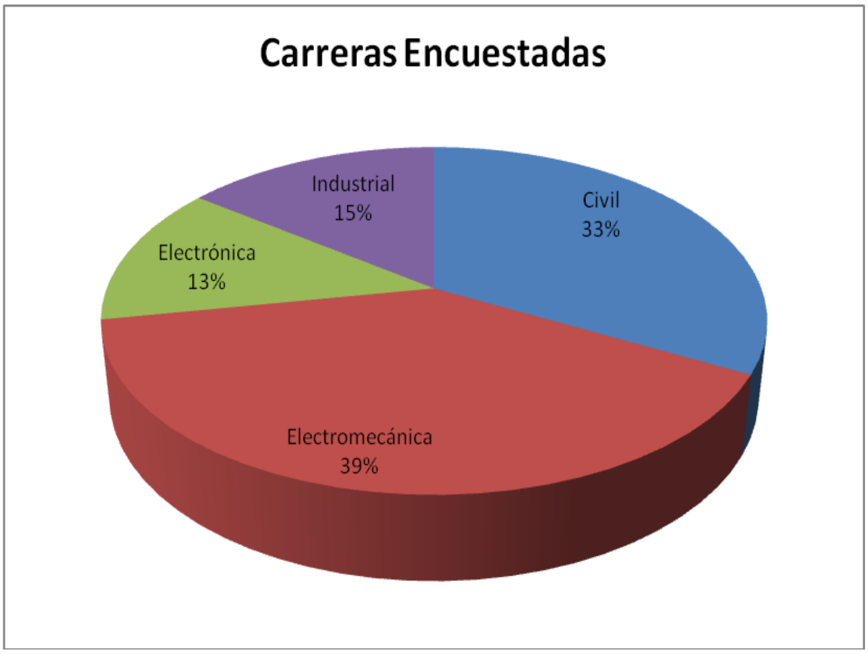


Fig. 7. Gráfico que representa en porcentuales la distribución de alumnos por carrera consultados en la encuesta realizada sobre el laboratorio de estadística descriptiva.

Dentro de los alumnos encuestados, encontramos alumnos recursantes y los que llevan su carrera al día, el cuadro de situación se presenta en la Fig.2, donde se aprecia que un 44 por ciento regularizó la materia durante el primer cursado, y los restantes han sido recursantes de años anteriores.

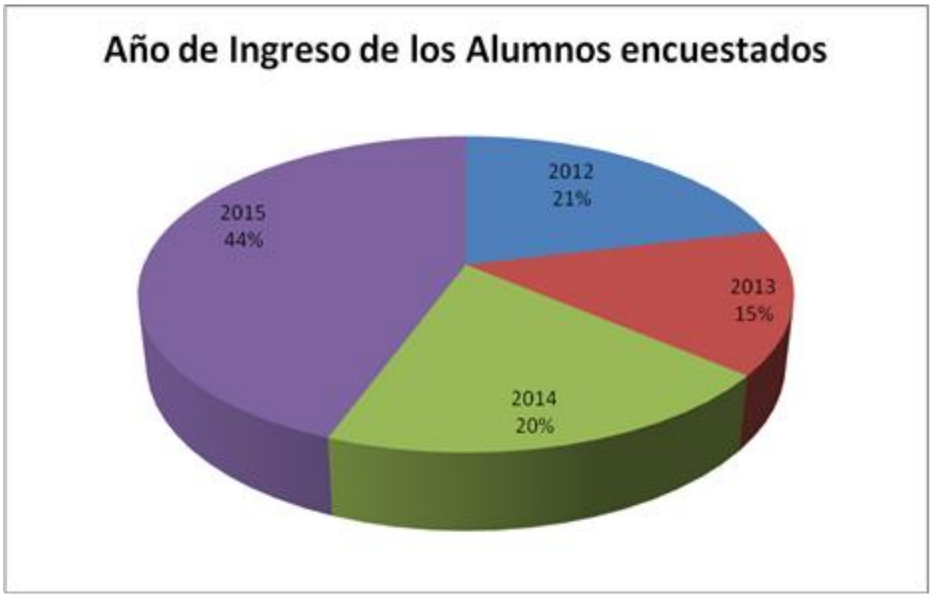


Fig. 2. Gráfico que representa en porcentuales la distribución de alumnos que regularizaron las asignatura probabilidad y estadística en el ciclo lectivo 2016, según año de ingreso a la Facultad de Ingeniería.

Respecto a la consulta realizada sobre su experiencia durante el encuentro con un investigador, que se encuentra desarrollando un proyecto afín a su carrera, el 71 por ciento de los alumnos encuestados les pareció una experiencia entre interesante y muy interesante; tal como se indica en la Fig. 3. Por un lado tuvieron la posibilidad de conocer e interactuar con el investigador y su proyecto, y por otro, la utilización de la estadística como herramienta para lograr el desarrollo del laboratorio.

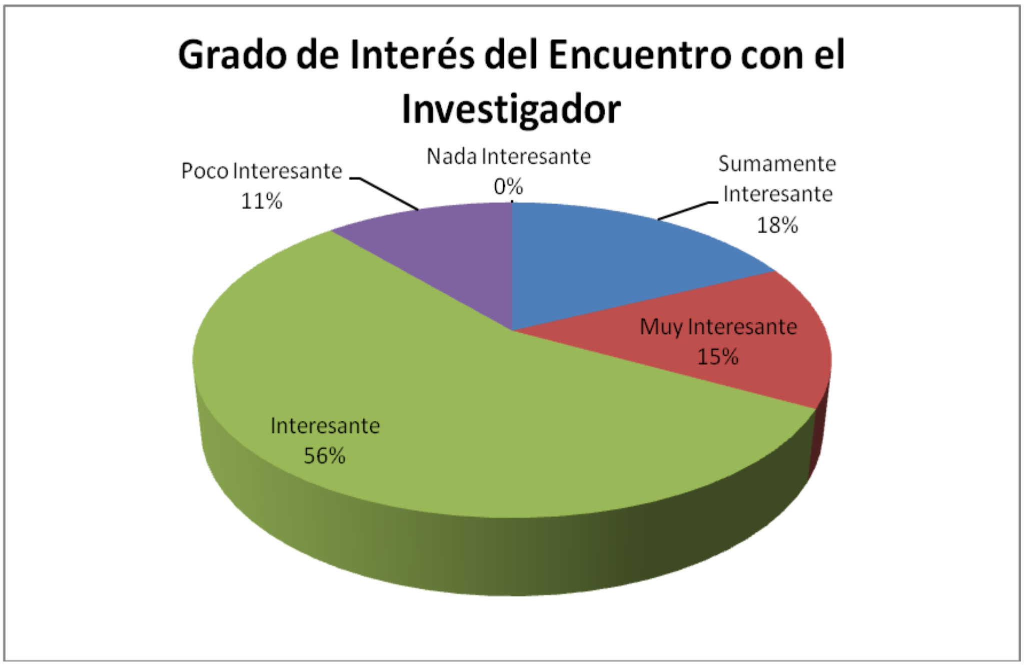


Fig. 3. Gráfico que representa en porcentuales el grado de interés que despertó en los alumnos la entrevista con el investigador de referencia.

El software estadístico es el elemento tecnológico, donde los alumnos demostraron que se trata de una herramienta que le simplifica los cálculos, la realización de los gráficos, les permitió comparar variables, y ahorrar tiempo. Esto así, más aun teniendo en cuenta la experiencia realizada previamente al laboratorio, en la cual los alumnos resolvieron las consignas en forma manual.

En la Fig. 4 se presenta un detalle del grado de interés que despertó en los alumnos la utilización del software estadístico, donde un 95 por ciento lo consideró entre sumamente interesante, muy interesante e interesante.

Fig. 4. Gráfico que representa en porcentuales el grado de interés que despertó en los alumnos la utilización del software estadístico.

En la Fig. 5, se denota el grado de interés de los alumnos en la etapa de exposición de resultados del laboratorio de estadística descriptiva, donde el 74 por ciento lo consideró entre sumamente interesante, muy interesante e interesante.

Fig. 5. Gráfico que representa en porcentuales el grado de interés que despertó en los alumnos la realización de exposición pública de resultados del laboratorio.

La experiencia ha resultado muy interesante por cuanto los alumnos han trabajado con contenidos de la asignatura, se familiarizaron con actividades de investigación realizadas en el ámbito de su carrera, y además los resultados del laboratorio resultaron un aporte a los proyectos de investigación.

5 Conclusiones y trabajos futuros

- La elaboración y puesta en práctica del laboratorio ha posibilitado comprobar el interés que despertó en los alumnos de Probabilidad y Estadística la utilización del software estadístico, como una herramienta para simplificar los cálculos manuales y visualizar diferentes tipos de gráficos.
- Con el desarrollo del laboratorio ha quedado plasmado el interés y la motivación de los alumnos por este tipo de experiencias, lo cual se ha traducido en la presentación de muy buenos informes de laboratorio, demostrando gran comprensión de los temas abordados.
- La experiencia ha permitido que los alumnos de diferentes carreras de ingeniería, entren en contacto con docentes pertenecientes a proyectos de investigación afines a la carrera que cursan y de esta manera visualizar las aplicaciones de la estadística en dichos proyectos, al tiempo que les posibilita acercarse a contenidos curriculares que serán desarrollados en otras asignaturas más específicas de la carrera que cursan.
- A futuro es necesario incorporar otras prácticas de laboratorio, que posibiliten aplicar herramientas estadísticas que aborden más contenidos de la asignatura, a partir de los cuales puedan realizarse otros análisis estadísticos en los proyectos de investigación que son utilizados como referencia en este tipo de experiencia.

Referencias

1. Batanero, C. Didáctica de la Estadística. *Grupo de Investigación en Educación Estadística.* Universidad de Granada. Granada, España. http://www.pucrs.br/famat/viali/graduacao/matematica/material/referencias/didacticaestadistica.pdf. (2001). Accedido el 15 de noviembre de 2016.
2. Behar Gutiérrez, R. Mil y una dimensiones del aprendizaje de la estadística. Estadística española, Vol. 43, No 148, 2001, pp 189–207 (2001).

3. Departamento de Matemática. Plan departamental 2016-2019. Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de Misiones.
4. Nieto Lovo, M. R. El papel de las ciencias básicas en la enseñanza de la Ingeniería. I Congreso de Enseñanza de la Ingeniería, Quetzaltenango, Guatemala (2004).
5. Batanero, C. y Díaz, C. El papel de los proyectos en la enseñanza y aprendizaje de la estadística. I Congresso de Estatística e Investigação Operacional da Galiza e Norte de Portugal, Guimarães, Portugal. http://www.ugr.es/~batanero/pages/ARTICULOS/CEIO.pdf. (2005). Accedido el 10 de diciembre de 2016.

Volver al Índice

Análisis de funciones asintóticas utilizando "Geogebra"

Pedro Oscar Semeniuk
Departamento Matemática, Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de Misiones (UnaM).
Juan Manuel de Rosas 325, Oberá (3360), Misiones.
semeniuk@fio.unam.edu.ar

Resumen. Geogebra es un potente programa de matemática dinámica, muy versátil, con la capacidad de manejar geometría interactiva, álgebra, cálculo y estadística con registros gráficos, organización en tablas y formulación simbólica.
Es un programa de fuente abierta, libre y accesible en el internet para su descarga. Está en continuo crecimiento y perfeccionamiento.
En estos últimos años se fue incrementando el uso de este programa en todos los ámbitos, pero especialmente en ingeniería, ya que, aunque es un programa de matemática, sus aplicaciones se dan en otras materias como física, química, electrónica, etc.
El objetivo de este trabajo es acompañar el análisis de diferentes funciones y curvas asintóticas con vistas dinámicas en lugar de gráficas estáticas que muchas veces no logran explicar determinados conceptos.
En este caso, lo que se pretende, además de visualizar las gráficas, es aprovechando la función "zoom", hacer un cambio de escala dinámico logrando una visión micro y macro de las mismas.
Aunque es un trabajo muy sencillo de realizar, son grandes las ventajas en el proceso de enseñanza-aprendizaje.

Palabras Clave: Funciones asintóticas, Zoom, Geogebra.

1 Introducción

Las curvas y funciones asintóticas, merecen un estudio especial, para lo cual, se utilizan algunos casos que servirán de ejemplo. El análisis se realiza utilizando el paquete "GeoGebra", el cual permite obtener vistas micro y macro en forma dinámica, como si se tratara de un microscopio o lupa.

Es muy sencillo analizar el concepto de límite como así también el de asíntota. La idea es acompañar el análisis de la curva o función con la vista gráfica que aporta el programa.

Ejemplos

Para el análisis, se utilizan ejemplos sencillos muy comunes en cálculo y álgebra y geometría analítica, con los cuales se pretende mostrar las bondades de la herramienta gráfica.

Quizá en este trabajo no se logre plasmar con éxito lo demostrado en la práctica ya que solamente se muestran imágenes no dinámicas.

Ejemplo 1

Para el primer ejemplo se analiza la gráfica de una hipérbola (Fig. 1) centrada en el origen:

La ecuación de la curva es:

$$y^2 - \frac{x^2}{4} = 1 \qquad \textbf{(1)}$$

Solamente para el análisis se puede expresar como:

$$y^2 = \frac{x^2}{4} + 1 \qquad \textbf{(2)}$$

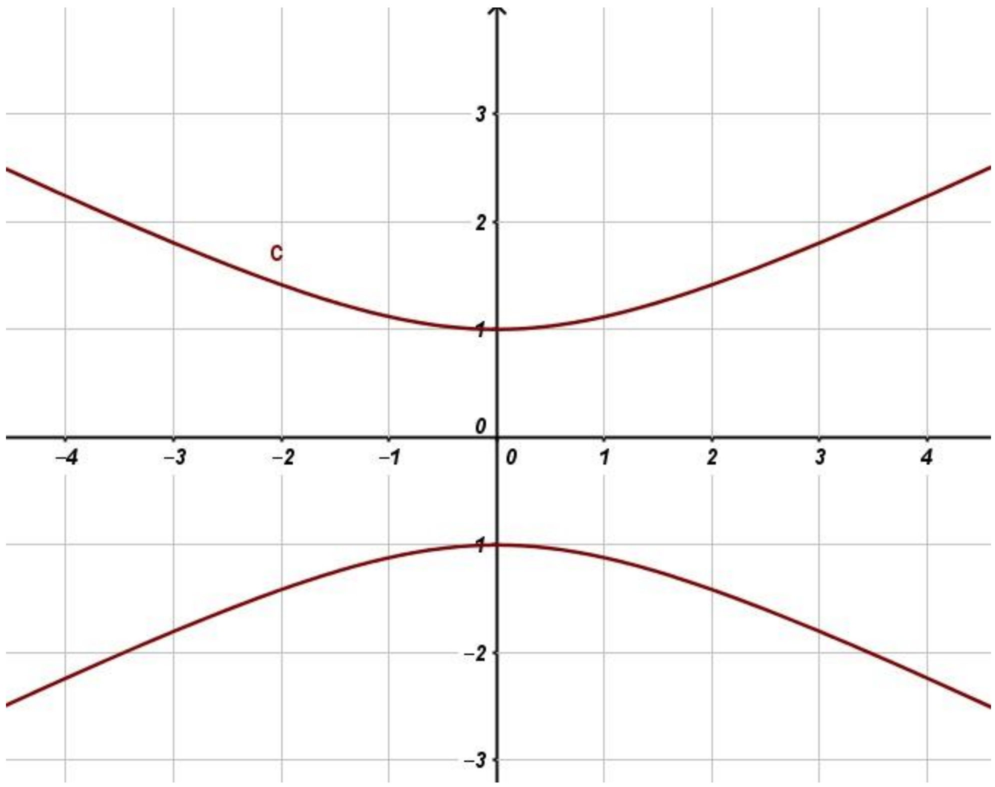


Fig. 1. Gráfica de la hipérbola original.

Cuando $x \to \infty$, también $y \to \infty$ y en la ecuación (2), el 1 se puede despreciar, quedando la expresión:

$$y^2 = \left(\frac{x}{2}\right)^2 \qquad \textbf{(3)}$$

Que a su vez, permite dos soluciones posibles:
Por un lado la recta $y = \frac{1}{2}x$ y por otro, la recta $y = -\frac{1}{2}x$ que a su vez, son las asíntotas de la hipérbola.
Otra forma [2] es despejando y en términos de x, de la ecuación (1):

$$y = \pm\sqrt{\frac{x^2}{4} + 1} \qquad (\mathbf{4})$$

O también:

$$y = \pm\frac{1}{2}x\sqrt{1 + \frac{4}{x^2}} \qquad (\mathbf{5})$$

A su vez, cuando $x \to \infty$, presenta las rectas mencionadas a partir de la ecuación (3).

Para analizar lo que ocurre en el infinito, se recurre a la herramienta “zoom” que dispone el programa simplemente moviendo la ruedita del ratón de la computadora

En la Fig. 1 y Fig. 2, se puede observar la curva realizando alejamientos del centro de coordenadas, pudiéndose observar al final, solamente el par de rectas que corresponden a las asíntotas.

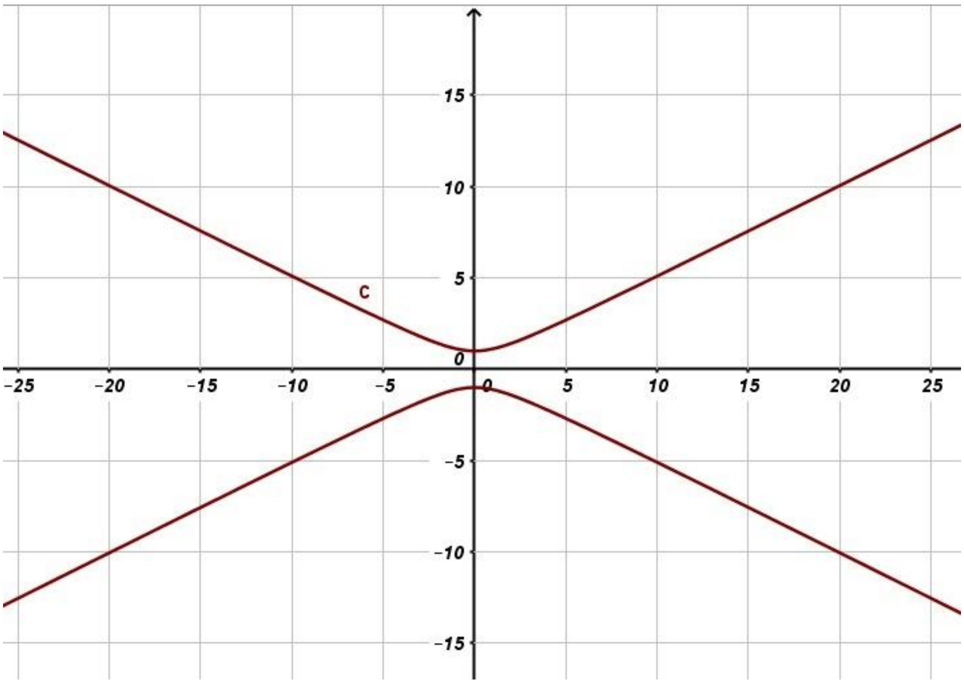


Fig. 2. Gráfica de la hipérbola original, pero con un primer alejamiento.

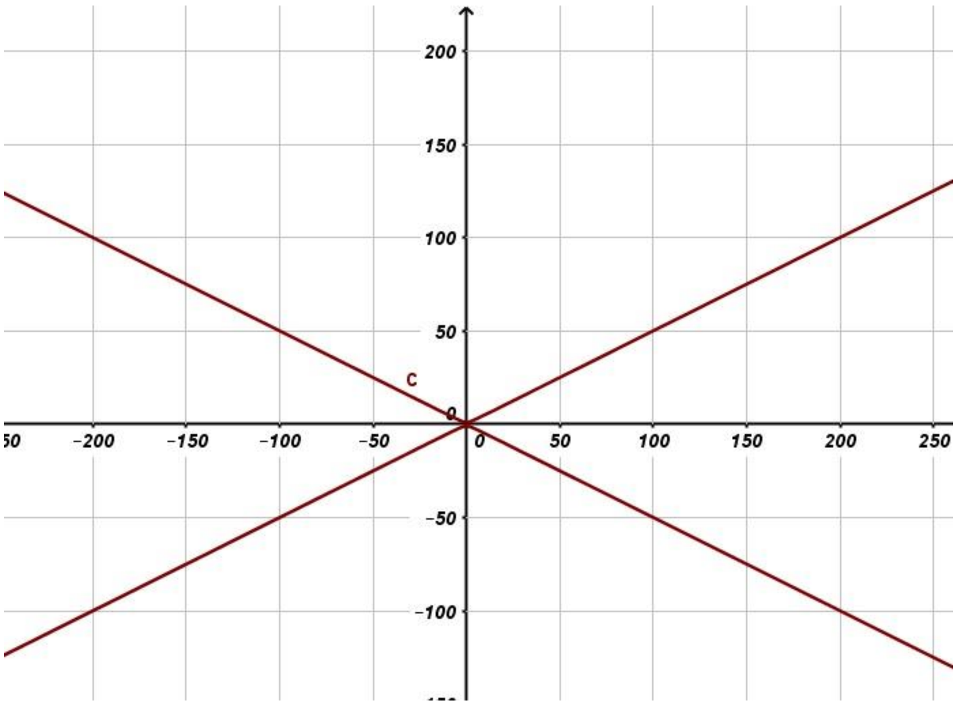


Fig. 3. Gráfica de la hipérbola original, pero con un gran alejamiento, donde no se logra visualizar como una hipérbola.

Lo que vemos en la gráfica son las asíntotas o sea la recta $y = \frac{1}{2}x$ como así también la recta $y = -\frac{1}{2}x$

Ejemplo 2

Otro ejemplo es el de una función racional fraccionaria del tipo:

$$y = \frac{P(x)}{Q(x)} \qquad \textbf{(6)}$$

Para mostrar este ejemplo se elige una función en forma factorizada:

$$y = \frac{(x+1)(x-2)x^2}{(x-1)(x+3)} \qquad \textbf{(7)}$$

Que en forma desarrollada será la siguiente:

$$y = \frac{x^4-x^3-2x^2}{x^2+2x-3} \qquad \textbf{(8)}$$

Recordando que en todo cociente, el dividendo es igual al producto del cociente por el divisor más el resto:

$$D(x) = C(x) \cdot d(x) + R(x) \qquad \textbf{(9)}$$

Y que a su vez se puede expresar como:

$$\frac{D(x)}{d(x)} = C(x) + \frac{R(x)}{d(x)} \qquad \textbf{(10)}$$

Es posible obtener la expresión (5), como se muestra a continuación:

$$y = x^2 - 3x + 7 + \frac{-23x+21}{x^2+2x-3} \qquad \textbf{(11)}$$

En la Fig. 4, se puede observar la gráfica de la función:

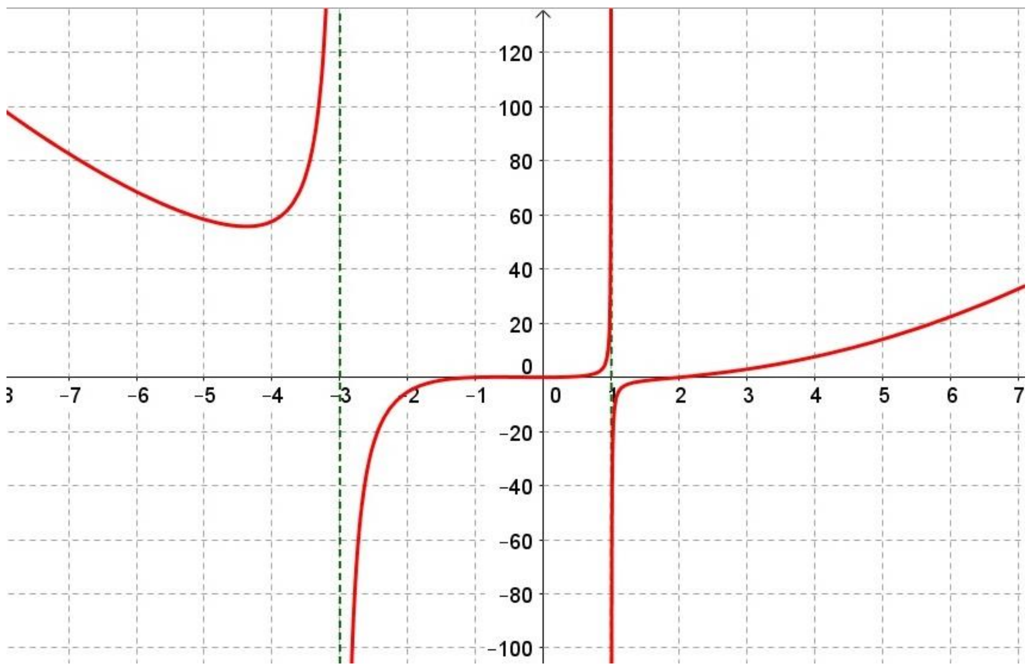


Fig. 4. Gráfica de la función original.

Cuando $x \to \infty$, $\frac{R(x)}{d(x)} \to 0$ y lo que se observa al alejarnos del origen, es el cociente $C(x)$.
Utilizando otra vez la función "zoom" del Geogebra, lo que visualizamos, Fig.5, es solamente el cociente.

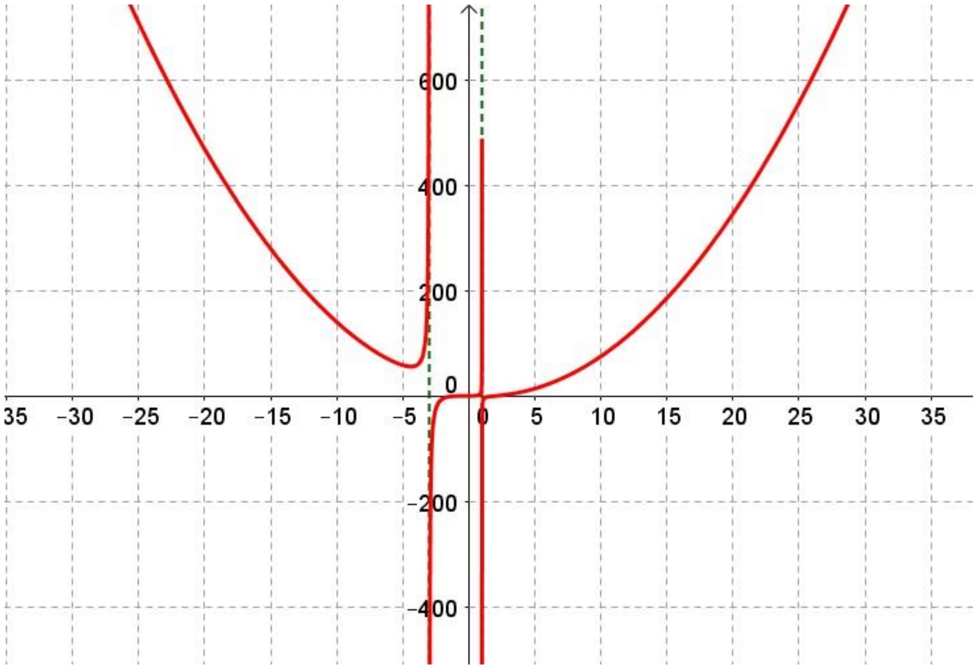


Fig. 5. Gráfica original con un primer alejamiento.

Con un nuevo alejamiento, lo único que predomina y se visualiza es una función cuadrática, Fig. 6 que en este caso es:

$$C(x) = x^2 - 3x + 7$$

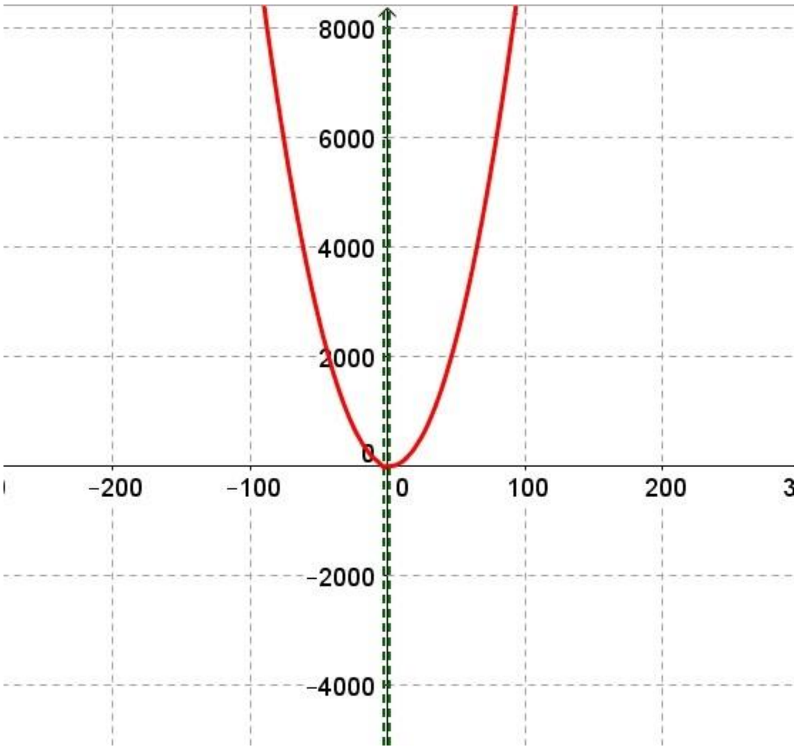


Fig. 6. Figura en donde con suficiente alejamiento, sólo se visualiza la parábola.

2 Resultados y discusión

Esta herramienta ya la he podido probar en el aula, logrando excelentes resultados en el proceso de enseñanza – aprendizaje.

El trabajo, como estrategia didáctica fue utilizado tanto en la carrera de ingeniería, como en un profesorado de matemática, y en ambos casos los resultaron fueron muy positivos.

3 Conclusiones

La mejor forma de probar esta herramienta es en el aula, y en este caso se puede comprobar las bondades del paquete "Geogebra" en el análisis de las funciones asintóticas. Además de visualizar polos y ceros, se logró la comprensión del concepto de límite.

Por parte de los alumnos, se tuvo mucha aceptación.

En este trabajo, probablemente, no se logre plasmar las ventajas del "Geogebra", hasta verlo trabajar en forma dinámica con las imágenes.

Referencias

1. Grossman, S. I.: México: Mc Graw Hill. *Álgebra Lineal.* (1997)
2. Zill, D.: México: Grupo Editorial Iberoamérica. *Cálculo con Geometría Analítica.* (1985)
3. Sadosky, M.; Guber, R.: Buenos Aires: Librería y Editorial Alsina. *Elementos de Cálculo Diferencial e Integral.* (2004).

Volver al Índice

Misceláneas

José I. Gómez[1], Elsa del V. Ibarra [2]
[1]Facultad de Agronomía y Agroindustrias, Universidad Nacional de Santiago del Estero, Argentina.
jgomez@unse.edu.ar
[2]Facultad de Ciencias Forestales. Universidad Nacional de Santiago del Estero, Argentina.
egomez@unse.edu.ar

Resumen. En este trabajo presentamos dos cuestiones que se pueden abordar en las clases de Cálculo en función de su utilidad práctica. La primera de ellas está vinculada con la noción de distancia en la métrica de Minkowsky, que no forma parte de los contenidos mínimos de esta asignatura y que tiene aplicaciones en urbanismo, en particular, en el cálculo de distancia entre dos puntos de una ciudad. La segunda, vinculada al lenguaje de la lógica proposicional es elaboración nuestra, original, y propone una nueva manera de escribir y realizar cálculos proposicionales, sin emplear tablas de verdad, sobre las mismas bases semánticas y sintácticas del Cálculo Proposicional. Esta segunda cuestión se viene enseñando desde hace dos años, mientras que la primera, en forma parcial, el año anterior.

Palabras Clave: Geometría euclídea, Distancia de Minkowsky, Notación proposicional, Estrategias de enseñanza.

1 Introducción

A los alumnos les puede parecer que las nociones o notaciones matemáticas que se emplean en clase son únicas, absolutas y que no existen otras maneras de definirlas. En las clases de Cálculo se suele pedir a los alumnos que busquen en sus celulares- como para brindarle un uso educativo a estos dispositivos- alguna reseña histórica de científicos que aparecen en la enseñanza de matemática.

Esta instancia permite entre otras cosas que el alumno tenga cierta conciencia de que las nociones matemáticas que se enseñan en clase, tienen en muchos casos, cientos de años de elaboración, con las marchas y contramarchas que supuso su formalización actual. Tomamos por caso, la mención de Euclides, fundador de la geometría que se enseña hasta en la universidad. Dado este empleo durante la escolaridad primaria, media y universitaria, puede estar instalada en la mente de los alumnos que no existe otra geometría que no sea la euclidiana, cuando la creatividad humana ha permitido otras formulaciones matemáticas o geométricas.

Tomemos por caso el quinto postulado de este geómetra griego, cuya negación dio lugar a la creación de las llamadas geometrías no euclidianas. En ese sentido, el propósito de este trabajado es presentar dos temas o cuestiones, la primera de ellas tiene que ver con la noción de distancia, en su forma euclidea y con la de distancia de Minkowsky, llamada también rectilínea o distancia L_1o distancia taxi que no se enseña en clase. Esta distancia está estrechamente vinculada con la distancia recorrida por un taxista o peatón en una ciudad ordenada y bien planificada.

La segunda cuestión consiste en presentar una forma original de escribir las proposiciones en Lógica. Esta escritura se viene enseñando en nuestras aulas, con aceptación de parte de los alumnos, según indican encuestas que realizamos y que por razones de extensión no se presentan aquí.

2 Nuestro trabajo

2.1 Primera cuestión: Sobre la noción de distancia

Consideremos la noción de distancia euclídea entre dos puntos del plano que se enseña en Análisis Matemático de Ingeniería Agronómica de la Universidad Nacional de Santiago del Estero:

Sean $P = (x_1, y_1)$ *y* $Q = (x_2, y_2)$ *dos puntos del plano. La distancia entre estos dos puntos, se denota por* $d(P, Q)$ *y se define como:*

$$d(P,Q) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \quad [1],[2], \qquad \textbf{(1)}$$

Esta fórmula proviene de aplicar el teorema de Pitágoras, de modo que la distancia entre estos dos puntos es la longitud de la hipotenusa del triángulo rectángulo que se forma considerando otro punto como vértice del ángulo recto.

Dado que la enseñanza de la noción de distancia es la consignada más arriba, el alumno puede pensar que es la única manera de calcularla y que permite dar respuesta a todo tipo de problemas. Sin embargo, en la práctica, incluso en la vida cotidiana, se encuentra con situaciones a los que no puede dar una respuesta usando la misma. Puede ser conveniente enseñar que además de forma de determinar la distancia, existen otras, y en particular, la distancia llamada de Minkowsky, o distancia rectilínea, o distancia L_1o distancia taxi o distancia Manhattan [1] por referencia a esta ciudad que está dividida en cuadrículas, que es una generalización de aquella.

La llamada distancia del taxi o del taxista permite dar solución al sencillo problema de calcular la distancia entre dos puntos distintos de la ciudad, dado que respeta el desplazamiento que hipotéticamente realiza el automóvil para cubrir la misma.

La distancia euclídea, sólo permite calcular la distancia entre el punto de partida y de llegada en forma directa, en línea recta, línea que la práctica atravesaría manzanas y edificios, por lo que no refleja el real desplazamiento del móvil.

En esta nueva métrica, la distancia entre dos puntos se calcula como la suma de los valores absolutos de las diferencias de sus coordenadas.

La distancia de Minkowsky [1] de orden 1 entre dos puntos $X = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ y $Y = (y_1, y_2, y_3, \dots, y_n)$ se denota como $d_1(X, Y)$ y se define así:

$$d_1(X, Y) = \sum_{1=1}^{n} |x_i - y_i|_i \quad \textbf{(2)}$$

Por ejemplo, en el plano, la distancia-taxi entre $X = (x_1, x_2)$ y $Y = (y_1, y_2)$ es

$$d_1(X, Y) = \sum_{1=1}^{2} |x_i - y_i|_i = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| \quad \textbf{(3)}$$

En matemática se llama distancia a cualquier relación entre dos puntos P y Q que verifique las condiciones de positividad, simetría y desigualdad triangular, [1, 3] esto es:

1) $d(P, Q) \geq 0$ **(4)**
2) $d(P, Q) = d(Q, P)$
3) $d(P, Q) \leq d(P, C) + d(C, Q)$

Tanto la distancia euclídea como la de Minkowsky satisfacen estas condiciones, por ende, son dos ejemplos de distancia, y en general, la euclídea es menor o igual que la segunda.

El siguiente diagrama ilustra con claridad la diferencia entre ambas distancias. La de línea de puntos ejemplifica la distancia euclídea, mientras que la de línea llena la distancia de Minkowsky.

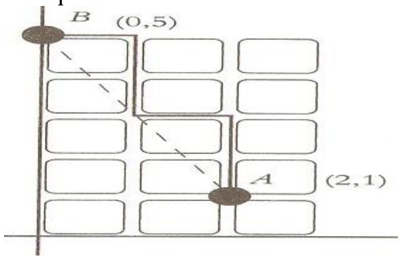


Fig. 1. Gráfica que ilustra la distancia euclídea entre dos puntos.

En función de esta métrica, las figuras que conocemos adquieren otra forma, verificando las fórmulas de la geometría usual o euclídea.

Veamos las nociones de circunferencia, elipse y mediatriz según la geometría euclídea y su representación en la taxi geometría [1], como casos ilustrativos:

2.1.1 La circunferencia.

Se denomina circunferencia al lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de un punto fijo llamado centro[1,2].

Si se elige un punto cualquiera P de una circunferencia de centro A y radio $r > 0$, se cumplirá que

$$d(P, A) = r \quad \textbf{(5)}$$

Consideremos por ejemplo, $A = (2, -1)$ y $r = 3$, la circunferencia es el conjunto de puntos P que satisfacen la condición anterior y cuya gráfica es la siguiente:

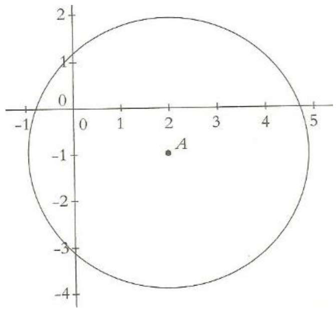


Fig. 2. Gráfica que representa una circunferencia en la geometría euclídea.

Este dibujo surge de emplear la distancia euclídea, pero si se emplea la distancia-taxi, se obtiene una gráfica distinta, como se puede ver a continuación.

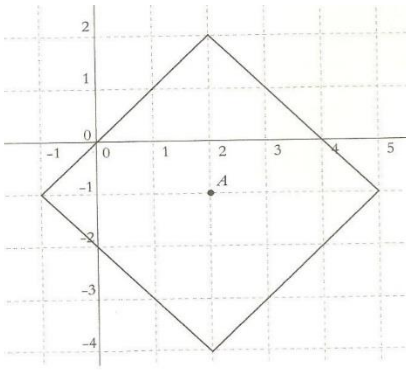


Fig. 3. Gráfica que representa una circunferencia en la taxi geometría.

Se puede observar en el dibujo que efectivamente los puntos P de esta circunferencia en la distancia-taxi d_T, verifican que: $d_T(A, P) = 3$

Si en el ejemplo dado se determina la longitud de la circunferencia en la forma tradicional o euclidea, empleando la fórmula $l = 2\pi r$, se obtiene $l = 2\pi.3$=18,849, en cambio, la longitud de la circunferencia en la distancia-taxi es de: $6 + 6 + 6 + 6 += 24$ unidades, y además deja afuera la cuestión de π.

2.1.2 La elipse

Una elipse es el conjunto de todos los puntos del plano cuya suma de distancias a dos puntos fijos es constante.

Los puntos fijos se llaman *focos.* [4]

Supongamos que los focos son $A = (-3,0)$ y $B = (3,0)$ y la constante es 10 unidades. Entonces, los puntos P que verifican:

$$d(P, A) + d(P, B) = 10 \qquad \textbf{(6)}$$

son los que aparecen en la Fig.4.

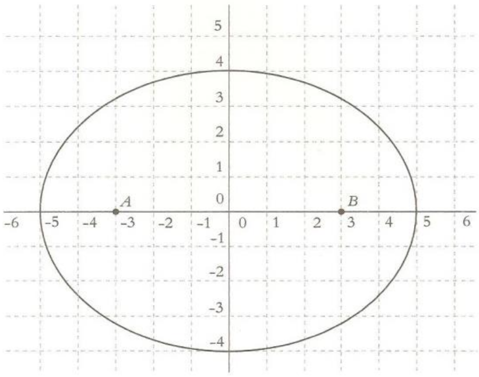


Fig. 4. Gráfica que representa una elipse en la geometría euclídea.

Mientras que si se considera la distancia-taxi, en lugar de la euclidea, la elipse presenta ahora una forma totalmente diferente, como se muestra en la figura siguiente.

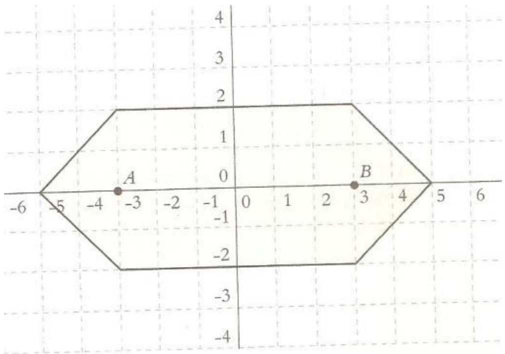


Fig. 5. Gráfica que representa una elipse en la taxi geometría.

2.1.3 La mediatriz

La mediatriz de un segmento es la línea recta perpendicular a dicho segmento trazada por su punto medio. Equivalentemente se puede definir como el lugar geométrico- la recta- cuyos puntos son equidistantes a los extremos del segmento [1].

Consideremos dos puntos $A = (0,0)$ y $B = (4,2)$ en el sistema de ejes XY, como se muestra en la Fig.6. Supongamos que estos puntos representan dos edificios históricos importantes en una ciudad y se quiere unirlos por medio de una vía pública, con la condición extremadamente equitativa que cualquier vehículo que transite por esta vía esté ubicado a la misma distancia de ambos puntos o edificios históricos. Desde el punto de vista de la matemática se trata de encontrar los puntos del plano que equidistan de A y de B. La cuestión pasa por construir la mediatriz entre estos dos puntos. Se trata de calcular los puntos P que verifican

$$d(P, A) = d(P, B) \quad \textbf{(7)}$$

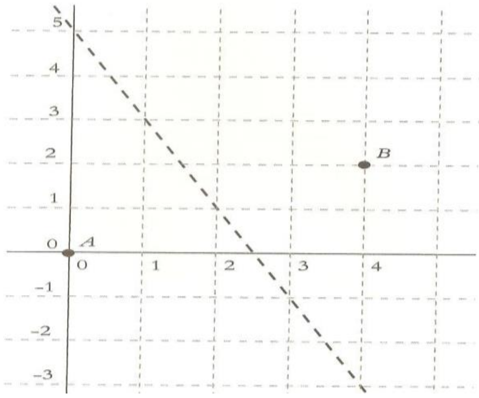


Fig. 6. Gráfica que representa la mediatriz entre los puntos A y B, en la geometría euclídea.

Sin embargo, esta fórmula -de la geometría euclídea- no es válida en el contexto del problema urbano, porque obligaría a derribar gran cantidad de edificios a su paso idealmente rectilíneo.

La solución más apropiada la brinda la distancia-taxi d_T [1]. Se trata de determinar los puntos P que verifican que

$$d_T(P,A) = d_T(P,B) \qquad \textbf{(8)}$$

En la taxi-geometría, la mediatriz tiene la forma que se puede observar en el dibujo siguiente, y la parte edilicia que habría que sacrificar en este caso es mínima.

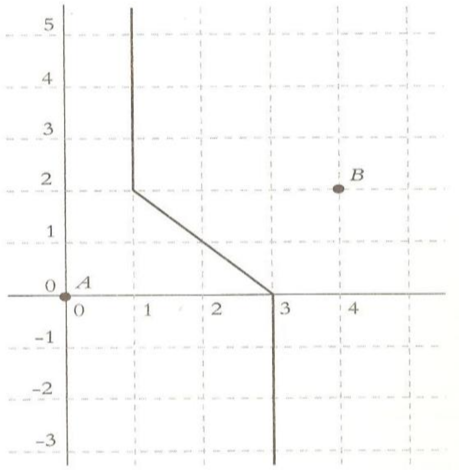


Fig. 7. Gráfica que representa la mediatriz entre los puntos A y B, en la taxi geometría.

Estos ejemplos permitirán mostrar a los alumnos de primer año de Análisis Matemático o Cálculo que:

- la distancia es una relación entre puntos que cumplen ciertas condiciones,
- que la distancia que empleamos en clase en forma tradicional y que es la euclídea, es una de las maneras de definir distancia entre puntos,
- que la noción de distancia que mejor se adecua para ir de un punto a otro de una ciudad es la de distancia-taxi, y
- que la forma de las figuras geométricas no es única, sino que está dada por la definición de distancia que se considere.

Como se puede apreciar, la noción de distancia-taxi tiene aplicaciones en urbanismo: permite distribuir en el espacio urbano instalaciones de interés público con criterios de cercanía o aproximación, como hospitales, escuelas, puntos turísticos, etc. y también en la planificación de rutas.

2.2 Segunda cuestión: Nueva notación en el Cálculo Proposicional

Se propone una nueva manera de escribir y realizar cálculos proposicionales, sin emplear tablas de verdad, sobre las mismas bases semánticas y sintácticas del Cálculo Proposicional [5].

Presentamos también una nueva manera de realizar los cálculos proposicionales, que dimos en llamar vertical-posicional, porque recuerda la forma de operar con números de varias cifras, al escribir una proposición con sus valores de verdad, debajo de otra proposición y efectuar el cálculo según la operación proposicional indicada.

Cuando se tienen dos proposiciones simples, p y q, éstas se pueden escribir de la siguiente manera:

$$p : VVFF = V_2F_2$$

con V y F, con "valoricidad" o cantidad de veces de cada valor de verdad dos cada uno, en ese orden, de tal modo que la suma de estas cantidades es el número de veces de valores de verdad que tiene la proposición, distribuidos en ese orden, de izquierda a derecha.

$$q : VFVF = 2(VF)$$

con dos veces VF con valoricidad uno cada uno de estos valores de verdad.

En el caso de tres proposiciones, p, q y r, sus escrituras en la nueva versión son:

$$p : VVVVFFFF = V_4F_4$$

la suma de las valoricidades de V y F da 8 que es el número de "filas" que tendría la asignación de valores de verdad de esta proposición, en ese orden, si se escribiera en una tabla de verdad.

$$q : VVFFVVFF = 2(V_2F_2)$$

la suma de las valoricidades de V y F da cuatro y multiplicado por el "coeficiente" 2 se obtienen las ocho posibilidades de q.

$$r : VFVFVFVF = 4(VF)$$

la suma de las "valoricidades" de V y F da dos y multiplicado por el "coeficiente" 4 se obtienen las ocho posibilidades de r.

2.2.1 Cálculo Proposicional

Se consignan ahora las operaciones proposicionales básicas, sobre las mismas bases semánticas de la Lógica Proposicional tradicional [5]:

La negación de la proposición $p : VF$ es la proposición $\neg p : FV$

La conjunción de las proposiciones p *y* q es una proposición compuesta que se indica en la forma $p \wedge q$ que es verdadera sólo cuando las dos proposiciones son verdaderas; en otro caso es falsa.

$$\begin{array}{l} p : VVFF \\ q : VFVF \\ \hline \wedge : VFFF = VF_3 \end{array}$$

La conjunción es verdadera, valoricidad uno y falsa, valoricidad tres.

Este resultado podemos escribir también en la forma:

$p \wedge q : VF_3$, como también así: $\wedge (p, q) = VF_3$

Se puede leer como: la conjunción de p y q es VF tres.

La disyunción de las proposiciones p *y* q es una proposición compuesta que es falsa únicamente cuando ambas proposiciones son falsas; en otro caso es verdadera.

$$\begin{array}{r} p : VVFF \\ q : VFVF \\ \hline p \vee q : VVVF = V_3F \end{array}$$

La disyunción es verdadera, valoricidad tres, y es falsa, valoricidad uno, en ese orden, de izquierda a derecha. Otras formas de consignar son:

$$p \vee q : V_3F \quad \text{y} \quad \vee (p, q) : V_3F$$

Expresión que se puede leer en la forma siguiente: la disyunción de p y q es V tres F.

La implicación de las proposiciones p *y* q es una proposición compuesta que es falsa sólo cuando la primera proposición, p, es verdadera y la segunda q es falsa; es decir cuando se da: VF; en otro caso es verdadera.

$$\begin{array}{l} p:VVFF \\ \underline{q:VFVF\qquad} \\ \Rightarrow: VFVV = VFV_2 \end{array}$$

Resultado que se puede escribir también en las siguientes formas:

$$\Rightarrow(p,q):VFV_2 \text{ y } p\Rightarrow q:VFV_2$$

Su lectura es: la implicación de p y q es VFV dos.

El bicondicional o doble implicación de las proposiciones p *y* q es una proposición compuesta que es verdadera cuando ambas proposiciones tienen el mismo valor de verdad; en otro caso es falsa.

$$\begin{array}{l} p:VVFF \\ \underline{q:VFVF\qquad\qquad} \\ \Leftrightarrow: VFFV = VFFV = VF_2V \end{array}$$

El bicondicional es verdadero, valoricidad uno; falso, valoricidad dos y verdadero valoricidad uno, en ese orden de izquierda a derecha.

Este resultado se puede escribir como:

$$\Leftrightarrow(p,q):VFFV = VF_2V \text{ y } p\Leftrightarrow q:VFFV = VF_2V$$

Se puede leer como: el bicondicional de p y q es $V\ F$ dos V .

La disyunción excluyente de las proposiciones p *y* q es una proposición compuesta que es falsa cuando las proposiciones tienen el mismo valor de verdad, y verdadera en otro caso.

$$\begin{array}{l} p:VVFF \\ \underline{q:VFVF\qquad} \\ \underline{\vee}: FVVF = FVVF \end{array}$$

Resultado que se puede escribir en las siguientes formas:

$$\underline{\vee}(p,q):FVVF \text{ y } p\underline{\vee}q:FVVF$$

La disyunción excluyente es falsa valoricidad uno; verdadera valoricidad dos y falsa valoricidad uno, en ese orden de izquierda a derecha. Su lectura es: la disyunción excluyente de p y q es FV dos F .

2.2.2 Un ejemplo de aplicación de la escritura y cálculo propuestos

Se considera ahora una situación vinculada a la actividad de evaluar *fórmulas bien formadas* (fbf), desde el punto de vista de las nociones de tautología, contingencia y contradicción.

En la nueva modalidad de escritura y de cálculo, se puede trabajar en la forma siguiente, con fórmulas que se presentan a modo de ejemplo:

Evaluar: $(\neg q\Rightarrow\neg p)\wedge(p\wedge\neg q)$

Respuesta

Enumeramos los pasos a seguir:

$1^o)\ \neg q\Rightarrow\neg p$

$2^o)\ p\wedge\neg q$

$3^o)\ (1^o)\wedge(2^o)$

Evaluamos:

$1^o)\ \neg q\Rightarrow\neg p : VFVV$ por ser la forma contrarecíproca de $p\Rightarrow q$

2º)

$$\begin{array}{l} p:VVFF \\ \underline{\neg q:FVFV} \\ \wedge: FVFF \end{array}$$

3º)

$(1^{o}): VFVV$

$(2^{o}): FVFF$

$\wedge: FFFF$

La fórmula es una **contradicción,** es decir, F valoricidad 4.

Se presenta a continuación la respuesta de dos alumnos a un ejercicio de probar la regla de distribución de la conjunción con respecto a la conjunción, formulado en una evaluación parcial:

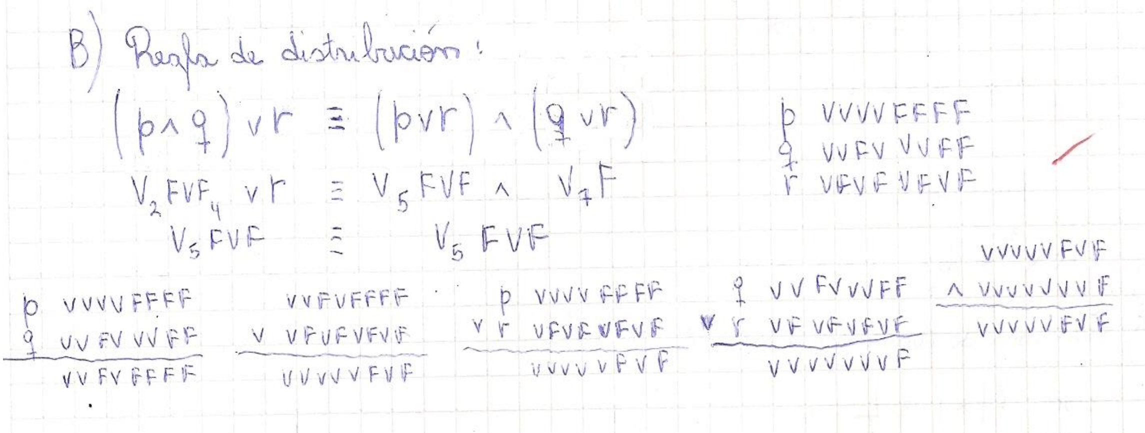


Fig. 8. Copia de una respuesta de un alumno en una evaluación parcial

3 Conclusiones

Consideramos conveniente y fructífero aunque sea mostrarle al alumno otras nociones de matemática que no se enseñan en clase y que pueden tener aplicaciones prácticas, para que no se queden con una visión parcial o reducida de esta disciplina. La inserción de temas que no forman parte de contenidos mínimos puede contribuir a enriquecer el proceso de enseñanza y aprendizaje de matemática, más allá de los límites que fijan los planes de estudio.

En relación a la noción de distancia, como experiencia de clase, se pudo constatar cómo el uso de teléfonos móviles por parte de los alumnos, permite que se introduzca en alguna medida, un poco de historia de la matemática y puede servir de disparador también para dar a conocer otras cuestiones. Siguiendo con el caso de Euclides, cuyas referencias históricas surgen de la lectura de sus trabajos y en particular, la del quinto postulado, su mención permite indicar -aunque sea a título de información- que su negación dio lugar a la existencia de la llamada geometría no euclidea.

Por otro lado, con relación a la nueva manera de indicar y trabajar con las proposiciones, en lugar del empleo de tablas de verdad, como se viene haciendo desde su creación, se trata de una opción más o alternativa a tener en cuenta en el proceso de enseñanza y aprendizaje del Cálculo Proposicional.

Las cuestiones que se abordan en este trabajo pueden invitar a reformular nuestra práctica docente de matemática.

Referencias

1. Gómez, J.: *Cuando las rectas se vuelven curvas: Las geometrías no euclideas.* Editorial RBA Coleccionables S.A. (2011)
2. Bradley, G.L. y Smith, K.J: *Cálculo de una variable*, Volumen 1. Prentice Hall. (1998)
3. Apóstol, T.: *Análisis Matemático: Introducción Moderna al Cálculo Superior.* Editorial Reverté. (1976)
4. Bradley, G.L. y Smith, K.J: *Cálculo de varias variables*, Volumen 2. Prentice Hall. (1998)
5. Rojo, A.: *Algebra I*. Editorial El Ateneo (2011)

Volver al Índice

Una Mirada Crítica a los Cursos de Estadística de Ingeniería Industrial

Graciela H. Carnevali; Pablo Parodi; Juan Manuel Rinaldi; Cecilia Rustichelli
Proyecto de Investigación ING525, Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura,
Universidad Nacional de Rosario
Pellegrini 250, 2000 Rosario
carneval@fceia.unr.edu.ar; {pablo_parodi_4, juanmanuelrinaldi}@hotmail.com; cecirustichelli92@gmail.com

Resumen. El desarrollo del pensamiento estadístico en los futuros ingenieros industriales debe ser el principio director de los cursos de Estadística. Con ese objetivo, en la Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura se vienen llevando a cabo desde hace años una serie de modificaciones en los cursos de Estadística: en los contenidos y materiales, en la forma de trabajo, en las evaluaciones, etc. Surge entonces la necesidad de hacer un diagnóstico de estos cursos con el objetivo de conocer los aciertos y las dificultades que persisten para continuar mejorando lo actual, o bien, plantear nuevos cambios aplicando los conceptos de investigación- acción y de aprendizaje por objetivos. En este trabajo se presenta una primera mirada obtenida a partir de las opiniones de docentes, alumnos y ex alumnos.

Palabras Clave: Cursos de estadística, Ingeniería industrial, Pensamiento estadístico, Mirada crítica

1 Introducción

El Pensamiento Estadístico (PE) es una filosofía de aprendizaje y acción, que se apoya, a nuestro entender, en tres pilares fundamentales: un ciclo de resolución de problemas de naturaleza aleatoria, una correcta comprensión de la teoría de la Probabilidad y la Estadística y una actitud siempre crítica ante cada etapa de la resolución y de los resultados de cualquier problema. Respecto al ciclo de resolución de problemas, algunos autores como Wild y Pfannkuch [1] proponen las etapas “Planteo del Problema”, “Planificación del Estudio Estadístico”, “Recolección de los Datos”, “Análisis de los Datos” y “Conclusiones” y lo denominan Ciclo PPDAC, el cual se muestra en la Fig. 1. Este ciclo precede al uso de métodos y herramientas estadísticas pero se nutre íntimamente de ellas.

De otra manera, pero coincidiendo, Watson [2] propone jerarquías de niveles de cultura estadística: el conocimiento de los conceptos estadísticos y probabilísticos, la comprensión de los razonamientos y argumentos estadísticos presentados en un contexto más amplio y una actitud crítica que se asume al cuestionar argumentos que estén basados en evidencia estadística

Para los ingenieros industriales, los procesos de gestión y mejora de la calidad constituyen una de las principales áreas en su desempeño profesional y en consecuencia, la resolución de problemas de naturaleza estadística en el área, es una competencia que los futuros profesionales deben adquirir durante su formación. Un ingeniero debe conocer profundamente el proceso en el que va a trabajar y tener la capacidad de pensar el problema estadísticamente, para arribar a una solución satisfactoria. Dicha capacidad, desde nuestro punto de vista, comienza con una muy buena comprensión de la Teoría Estadística.

El desarrollo del Pensamiento Estadístico, entonces, debe ser el principio director de los cursos de Estadística en la carrera de Ingeniería Industrial. La adquisición de este tipo de pensamiento, si bien, es una competencia deseable para el futuro ingeniero, plantea grandes interrogantes para los docentes. Pensando en los propios alumnos: “¿cómo lograr que ellos alcancen esta competencia?”, “¿cómo evaluar si la han adquirido?” y pensando en la comunidad de docentes de Estadística: ¿estamos de acuerdo todos los profesores en lo que significa enseñar y aprender Estadística? y muchas otras preguntas presentadas en Behar Gutierrez y Grima Cintas [3]. Para dar respuesta a estos interrogantes se requiere definir claramente qué se entiende por “pensamiento estadístico” y comprender todos los procesos de pensamiento involucrados en dicho concepto.

Con ese objetivo en mente, desde hace varios años, se vienen implementando una serie de cambios en los dos cursos de Estadística de Ingeniería Industrial de la Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura (FCEIA) de la Universidad Nacional de Rosario (UNR). Se pueden mencionar entre ellos la modificación en el orden de los contenidos, de manera de encuadrarlos siempre en términos de un objetivo a alcanzar; la resolución frecuente de problemas integradores desde el planteo hasta la obtención de conclusiones, con un análisis estadístico adecuado y un informe escrito sobre las conclusiones alcanzadas; y la disposición de clases para la discusión y puesta en común de las mismas. No se descuida en ningún momento la actitud crítica con respecto a las etapas que se recorren en la solución del problema, las herramientas utilizadas ni la teoría estadística involucrada. También se confeccionaron materiales de teoría y práctica con numerosos ejercicios y problemas resueltos y propuestos. Algunas de estas propuestas fueron presentadas en trabajos de Carnevali, Ferreri y otros [4, 5].

Con los cursos así diseñados y en marcha, surge en forma continua la necesidad de conocer los aciertos y las dificultades que persisten para continuar mejorando lo actual, o bien, plantear nuevos cambios aplicando los conceptos de investigación- acción y de aprendizaje por objetivos. Este diagnóstico será de utilidad en el marco del Proyecto de Investigación ING 525 “El Pensamiento Estadístico en el Control y la Mejora de los Procesos: Diseño, Aplicación y Evaluación de Propuestas Didácticas para su Desarrollo en Alumnos de Ingeniería Industrial”, codirigido por las profesoras Graciela Carnevali (autora del presente trabajo) y Noemí Ferreri, para diseñar nuevas unidades didácticas.

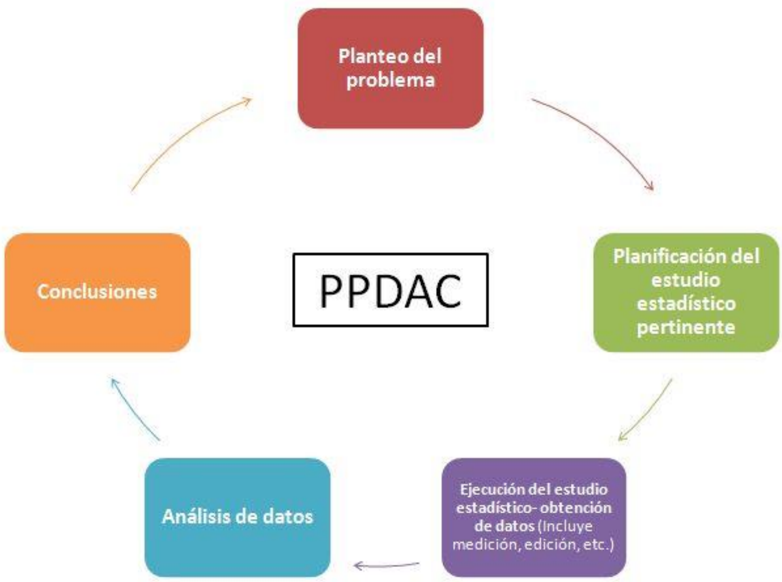


Fig. 8. El ciclo investigativo PPDAC, uno de los pilares del pensamiento estadístico

Para comenzar a abordar esta problemática, la cátedra a cargo de ambos cursos decidió aplicar el ciclo PPDAC, el mismo que se intenta que los alumnos apliquen en la resolución de cualquier problema de naturaleza aleatoria. En este trabajo se propone, para una primera etapa del diagnóstico, hacer una mirada crítica a los cursos, desde el punto de vista de alumnos, exalumnos y docentes, tratando de encontrar aciertos y dificultades que aún se presentan en relación a:

1. Contenidos desarrollados
2. Clases
3. Material utilizado
4. Trabajo con casos
5. Evaluaciones

El trabajo se organiza en 4 secciones de las cuales la presente Introducción es la primera. En la segunda sección se describen los cursos de Estadística para la carrera de Ingeniería Industrial (FCEIA, UNR) en relación a los ítems mencionados. En la tercera sección se presenta el desarrollo del Ciclo PPDAC y en la cuarta se hace una breve síntesis del trabajo realizado.

2 Los cursos de Estadística para Ingeniería Industrial (FCEIA, UNR)

Para los futuros ingenieros industriales se dicta un curso denominado “Probabilidad y Estadística”, correspondiente al sexto cuatrimestre de la carrera y un curso denominado “Decisiones Estadísticas y Control de Calidad”, correspondiente al séptimo cuatrimestre.

Dichos cursos se desarrollan aproximadamente para 140 alumnos y ambos tienen una carga horaria semanal de 6 horas. En la Tabla 1 se resumen los contenidos correspondientes al curso de Probabilidad y Estadística y la forma en que estos se desarrollan. En la Tabla 2 se resume lo correspondiente al curso de Decisiones Estadísticas y Control de la Calidad. En la Tabla 3 se brinda una breve descripción de las clases, materiales, trabajo con casos y evaluaciones en ambos cursos.

Tabla 1.. Contenidos del curso de Probabilidad y Estadística para Ingeniería Industrial. Su desarrollo

Probabilidad y Estadística	Tratamiento con poblaciones y muestras la variabilidad Análisis de datos muestrales – Poblaciones estadísticas univariadas sus parámetros- Frecuencia relativa poblacional – Probabilidad, reglas básicas – probabilidad condicional – Modelos frecuentes de variables aleatorias unidimensionales. Variables aleatorias bivariadas – independencia – relaciones entre variables. Extracción de muestras aleatorias simples – Estadísticos y sus distribuciones muestrales – Necesidad de la Inferencia – Errores y riesgos- Intervalos de confianza
	Se comienza por plantear problemas de naturaleza aleatoria, restringiendo estos a problemas de una única población y planteos en los cuales se busca conocer su comportamiento (distribución y/o parámetros). Distintos métodos de resolución: poblacional o inferencial con riesgos asociados. Su importancia y frecuencia. El ciclo de resolución de problemas (PPDAC) sus etapas. Resolución de problemas de tipo poblacional – Necesidad de conocer o llegar a conocer las distribuciones de probabilidad. Interpretaciones y cálculo de probabilidades. Resolución de problemas de tipo inferencial: suponiendo que se extrajo una muestra aleatoria simple, análisis descriptivo, su importancia, conclusiones preliminares, variabilidad entre las muestras, necesidad de la inferencia. Inferencia estadística: diseño del muestreo, muestra aleatoria simple, tamaño de la muestra, necesidad de estimadores, sus distribuciones. La importancia de conocer estos modelos para la toma de decisiones. Estimación de parámetros por intervalos de confianza.

Tabla 2. Contenidos del curso de Decisiones Estadísticas y Control de Calidad para Ingeniería Industrial. Su desarrollo

Decisiones Estadísticas y Control de Calidad	Test de hipótesis paramétricos y no paramétricos – Test bajo distribución normal y a distribución libre. Relación entre Intervalos de confianza y test de hipótesis. Muestreo de aceptación – gráficos de control- Procesos estables y/o capaces Comparación de dos poblaciones – Diseño de experimentos: completamente aleatorizado y en bloques Comparación de más de dos poblaciones -Interacción – Anova – Intervalos de confianza Regresión lineal simple- Intervalos de confianza y predicción
	Se continúa con los casos de PYE, uso de test de hipótesis: 5 pasos – valor p - relación con intervalos de confianza. Test no paramétricos y a distribución libre. Aplicación de los test de hipótesis a muestreo de aceptación y gráficos de control. Importancia de procesos estables – uso de los gráficos correspondientes en etapa 1 y 2. Importancia de procesos capaces – índices de capacidad. Comparación de 2 poblaciones: ¿cómo diseñar un experimento? Diseño completamente aleatorizado y su método de análisis – diseño en bloques aleatorios, su método de análisis, diferencias, frecuencias, importancia. Diseño de experimento para comparación de más de dos poblaciones: concepto de interacción, métodos de análisis. Regresión lineal simple, aplicación y ejemplos

Tabla 3. Clases, materiales de trabajo, casos y evaluaciones en los cursos de Estadística para Ingeniería Industrial

Clases	Algunas en el salón de clases y otras en laboratorio de informática. Todas las semanas hay tiempo destinado consultas. En general, se encarga material para leer, que luego se desarrolla en clase. Esto fomenta el aprendizaje autónomo y ahorra tiempo de explicaciones.

	Se resuelven ejercicios y problemas de dificultad variable, según el contenido que se esté desarrollando, pero encuadrándolo siempre hacia el alcance de algún objetivo en el planteo del mismo. En la 2° mitad del 1° curso se trabaja en la resolución de "casos" (problemas integradores y aplicados al área de calidad), recortados según los contenidos. Algunos de éstos se resuelven en clase y otros en grupos de 3 o 4 alumnos para lo que se disponen clases de consultas especiales y otras de discusión y puesta en común.
Materiales	Se utilizan generalmente materiales confeccionados por la cátedra y se complementa con algunos libros de texto. Se encargan a los alumnos con anterioridad, están digitalizados. Cada contenido se trabaja en base a un problema a resolver, recortados según los contenidos de los cursos. Todos tienen ejercicios y problemas resueltos y propuestos. Los métodos y herramientas estadísticas desarrolladas generan problemas a resolver o son motivados por problemas de los que se espera alguna solución. Cada uno de los conceptos estadísticos asociados está definido con su correspondiente simbología a la que se le brinda mucha importancia. Los problemas resueltos, según el material de que se trate, está resuelto siguiendo el ciclo PPDAC o corresponde a alguna de sus etapas. Se incluyen "prácticas integradoras", a medida que se van desarrollando los contenidos para completar el ciclo. También se les exige un informe escrito con la solución al problema, tanto estadística como en contexto.
Trabajo con casos	Se consideran "casos" a aquellos problemas integradores, con un planteo de una situación de aplicación al área de calidad o afín, donde se contemplen distintas etapas del ciclo y quede para el alumno hacer el/los análisis que crea apropiados para arribar a la solución del problema. Éste puede ser un problema netamente de estimación o de toma de decisiones. Algunos de estos casos se resuelven en las clases, desde la 2° mitad del primer curso, en grupos de tres o cuatro alumnos con la coordinación de los docentes. Llevan varias clases ya que deben hacer los análisis con soporte informático, algunos y luego se discuten resultados. Se debe confeccionar un informe escrito de los resultados para los que se charlan las pautas generales. Otros casos se dividen en distintos grupos y deben ser presentados en clases especialmente diseñadas para ello, dando lugar a la discusión y puesta en común de resultados.
Evaluaciones	Se toman 2 parciales teórico-prácticos, individuales, que no abarcan todos los temas. Los alumnos que aprueban éstos rinden en el examen final el resto de los temas y un integrador. Aquel alumno que no aprobó alguno de los parciales, en el examen final debe recuperar antes del integrador el parcial no aprobado. Tanto en los parciales como en el examen final se pone a prueba el ciclo de resolución de problemas, en su totalidad o alguna etapa. Se brinda mucha importancia a correcto uso de los conceptos estadísticos utilizados. Para el examen final los alumnos deben traer todos los casos más las prácticas integradoras resueltas, porque de ellas surgen aplicaciones a otros problemas para el examen integrador.

3 El desarrollo del Ciclo PPDAC

3.1 Planteo del problema (**P**-P-D-A-C)

El problema que se plantea en este trabajo es lograr una mirada crítica de los cursos de Estadística que se desarrollan actualmente en la carrera de Ingeniería Industrial (FCEIA, UNR), desde el punto de vista de alumnos, exalumnos y docentes, teniendo en cuenta los siguientes aspectos:

1. Contenidos desarrollados
2. Clases
3. Material utilizado
4. Trabajo con casos
5. Evaluaciones

3.2 Planificación y recolección de datos (P-**P**-**D**-A-C)

La recolección de la información se realizó a través de distintas fuentes para obtener una mirada más completa:

1. Encuestas a alumnos, que caracterizaron, según su criterio, los diferentes aspectos en cuestión.

2. Entrevistas a alumnos, realizadas por los auxiliares del trabajo de investigación, ex alumnos de los cursos, quienes observaron la puesta en común de la resolución de los casos e indagaron en los aspectos más sobresalientes, recogiendo la mirada de un par a otro.
3. Encuestas vía mail a distintos grupos de alumnos de años anteriores, los que aportaron su visión de los cursos de Estadística.
4. Reflexiones realizadas en reuniones docentes sobre el cursado, las dificultades encontradas en el desarrollo de las clases, en parciales y finales. Estas se registraron formalmente durante el año 2016 y muchas de las observaciones realizadas dieron origen a algunos de los cambios realizados.

Las actividades a y b se llevaron a cabo sobre el fin del segundo cuatrimestre (entre los meses de octubre y noviembre). La actividad c se llevó a cabo durante todo el año 2016.

3.3 Análisis de la información (P-P-D-**A**-C)

El análisis de la información recolectada se organiza en dos etapas. En primer lugar se presenta una descripción de la mirada de los alumnos sobre los cursos de Estadística (ítems a, b y c), la cual se resume en la Tabla 4. En segundo lugar se presentan las reflexiones realizadas por los docentes (ítem d).

Tabla 4. Opiniones recabadas de los alumnos de Estadística. Ingeniería Industrial, FCEIA, UNR

En relación a:	Opiniones recabadas
Contenidos	Los alumnos que cursaron PyE en 2016 señalaron que los contenidos presentaban un grado de dificultad media, pero con poco tiempo para una comprensión adecuada y ponderaron el enfoque de resolución de problemas. Todos los alumnos que han cursado materias más avanzadas que necesitan de Estadística para las aplicaciones, consideraron muy útiles y completos los contenidos desarrollados. Manifestaron que el enfoque de resolución de problemas les había resultado muy esclarecedor para las aplicaciones posteriores. Aquellos que trabajan en relación a la Ingeniería Industrial comentaron que habían utilizado muchos de los contenidos desarrollados, aplicándolos con éxito.
Clases	Los alumnos, en general, manifestaron que las clases fueron muy útiles para comprender los conceptos de los métodos y herramientas estadísticas utilizadas. Manifestaron también la importancia de asistir regularmente a las clases, y que complementadas con los materiales hacen llevaderos los conceptos más complicados. La resolución de ejercicios y problemas en clase les ayudó a comprender mejor el ciclo de resolución de problema. Les resultó sumamente útil la actitud crítica de los docentes sobre el trabajo de resolución de un problema, tanto los que se resolvían en pizarrón como los que resolvían los alumnos en la clase. Todos los alumnos destacaron la disposición de los docentes a explicar los temas y la claridad con que lo realizaron. Mencionaron como desacierto las clases de laboratorio, que resultaron insuficientes, poco satisfactorias por aprender el software en poco tiempo.
Materiales	En general las calificaciones al material utilizado en los cursos tanto el de cátedra como los textos adicionales fueron altas, comentando en todos los casos que presentaban baja dificultad para su comprensión, eran llevaderos y alcanzaban bastamente los temas desarrollados en los cursos. Calificaban muy bien el hecho de contar con ejercicios y problemas resueltos y que poseían una práctica propuesta muy variada. Se mencionó en varios casos la necesidad de contar con los mismos con más anticipación y poder disponer de una plataforma más simple para el intercambio del material con los profesores.

Tabla 4. Opiniones recabadas de los alumnos de Estadística. Ingeniería Industrial, FCEIA, UNR (cont)

En relación a:	Opiniones recabadas
Trabajo con casos	Todos los alumnos estuvieron de acuerdo y muy satisfechos con el trabajo de resolución de problemas integradores y casos ya que pudieron experimentar el uso de muchas herramientas estadísticas y su importancia. Mencionaron como dificultad el escaso tiempo que dispusieron para realizar el trabajo, lo que dificulto la discusión general y puesta en común de los mismos.
Evaluaciones	Los alumnos, en general, consideraron que las evaluaciones estaban acorde con lo desarrollado en clase. Algunos expresaron que los parciales resultaron largos y más difíciles que los ejercicios y problemas de clase.

En relación al ítem d, las reflexiones de los docentes son las siguientes:

1. Algunos de los materiales fueron terminados este año y por lo tanto no fueron entregados con tanta anticipación, pero siempre se tuvo este tiempo en cuenta para el desarrollo de las clases.
2. Con respecto a la lectura previa de los materiales como así también las tareas sobre resolución de problemas, en general no fue completada por una gran parte de los alumnos, lo que genera que se vayan acumulando dudas para otros conceptos, dificultando la resolución de problemas integradores.
3. El elevado número de alumnos dificulta muchas veces el trabajo de las clases de laboratorio.
4. El trabajo en equipo ha dado muy buen resultado, ya que los alumnos se encuentran muy motivados, facilitando el aprendizaje tanto en la clase como en la resolución de casos.
5. Sobre algunos exámenes analizados se encontraron dificultades comunes en conceptos como la suma de variables aleatorias e inferencia estadística.

3.4 Conclusiones (P-P-D-A-C)

En la Tabla 5 se resumen algunas conclusiones respecto a los diferentes aspectos evaluados, desde el punto de vista de docentes y alumnos.

Tabla 5. Algunas conclusiones sobre los aspectos evaluados

En relación a:	Puntos de vista de docentes y alumnos
Contenidos	Desde el punto de vista de los alumnos el tiempo resultó escaso para la comprensión de todos los conceptos, mientras que los docentes resaltan la necesidad del trabajo fuera de clase para alcanzar los objetivos.
Clases	Para un mejor desarrollo, resulta muy útil el trabajo en equipo, ya que los alumnos participan más en la solución de los problemas, el escuchar a sus compañeros con iguales dudas y otras respuestas, mejora notablemente el aprendizaje. Es sumamente importante la intervención del docente, ya que eligiendo acertadamente las preguntas, se logra incorporar la actitud crítica que se pretende. Se deben mejorar las clases de laboratorio, la mecánica o hallar otro software apropiados.
Materiales	Se deberá rever lo desarrollado en relación a los temas donde se presentaron las dificultades, pero en general resultaron de muy buena aceptación y entendimiento. Es importante, este año confeccionar la totalidad de los mismos, lo que facilitaría el trabajo en la clase.
Trabajo con casos	Es importante rediseñar la puesta en común de los problemas, que en este año 2016, y por falta de tiempo no logró el objetivo propuesto de la discusión final. Sin embargo resultó muy beneficioso para el aprendizaje Hay que diseñar nuevos casos con más combinaciones de las herramientas estadísticas y toma de decisiones.
Evaluaciones	Los comentarios más destacados resaltan el poco tiempo disponible y la dificultad de los problemas.

4 En síntesis

Esta primera mirada fue muy útil en el rediseño de algunos aspectos del curso así como también para observar los aciertos de los cambios previamente realizados. Conocer la opinión de los alumnos y ex alumnos y hacerles saber que la misma es tenida en cuenta, fue muy importante, ya que un problema no se soluciona sin tener en cuenta el contexto en el que se encuentra inmerso.

Las conclusiones obtenidas en este trabajo serán el punto de partida para recomenzar el Ciclo PPDAC buscando dar solución a las nuevas problemáticas halladas. También serán de gran utilidad para el desarrollo de nuevas unidades didácticas ya que brindan información sobre los diferentes aspectos que hacen a la enseñanza del PE.

Queda para este año la tarea de proponer y llevar a cabo algunos cambios y evaluar el impacto en el desarrollo del PE, que es un objetivo fundamental de los cursos de Estadística.

Referencias

1. Wild, C.; Pfannkuch, M.: Statistical Thinking in Empirical Enquiry (with discussion). *International Statistical Review*, Vol 67, Nº 3, pp. 223-265 (1999)
2. Watson, J.M.: Statistical literacy at school: growth and goals. Lawrence Eribaum Associates (2006)
3. Behar Gutierrez, R.; Grima Cintas, P: La Estadística en la educación superior. ¿Formamos Pensamiento Estadístico? *Ingeniería y Competitividad*, Vol 5 N°2 pp. 84-90 (2004)
4. Carnevali, G.; Ferreri, N.; Fernández de Luco, M.: Desarrollo del pensamiento estadístico: una experiencia con alumnos de Ingeniería Industrial. *XIV EMCI Nacional y VI EMCI Internacional*, *Mendoza* (2008)
5. Carnevali, G.; Ferreri, N.: Pensamiento estadístico: identificación de nudos de dificultad en alumnos de Ingeniería Industrial para el diseño de módulos didácticos, *XV EMCI Nacional y VII EMCI Internacional*, Tucumán (2009)

Volver al Índice

Diseño de una Propuesta Didáctica para Análisis Matemático Utilizando un Modelo de Entorno de Aprendizaje Ubicuo en Ingeniería

Ricardo D. Cordero[1], María M. Simonetti de Velázquez[1], Saritha G. Figueroa[2]
[1] Departamento de Matemática, Facultad de Ciencias Exactas y Tecnologías, Universidad Nacional de Santiagodel Estero, Av. Belgrano 1912, Santiago del Estero
{rcordero, msimone}@unse.edu.ar
[2] Departamento de Informática, Facultad de Ciencias Exactas y Tecnologías, Universidad Nacional de Santiagodel Estero, Av. Belgrano 1912, Santiago del Ester
sarithaf@unse.edu.ar

Resumen. En este trabajo se presenta la aplicación de un modelo de entorno de aprendizaje ubicuo ajustado al contexto universitario como guía para el diseño de una propuesta didáctica para Análisis Matemático. Esta asignatura corresponde al primer año de las carreras de Ingeniería de la Facultad de Ciencias Exactas y Tecnologías de la UNSE. En este modelo se consideran las características del aprendizaje ubicuo desde un enfoque sistémico. En la propuesta didáctica se combinan los recursos de la informática ubicua para generar oportunidades de aprendizaje que promuevan la adquisición de contenidos de análisis matemático y que estimulen el desarrollo de competencias que respondan a las demandas del mundo actual. En primer lugar, se describe el Modelo de Entorno de Aprendizaje Ubicuo, luego se estudian las vinculaciones del rol docente con los componentes del modelo para diseñar la propuesta didáctica, finalmente se presentan las conclusiones y las líneas futuras de trabajo.

Palabras Clave: Aprendizaje ubicuo, TIC, Modelo, Análisis matemático, Formación del ingeniero.

1 Introducción

La Sociedad del Conocimiento, caracterizada por la movilidad, interactividad y ubicuidad, ofrece posibilidades constantes de aprendizaje en el espacio y en el tiempo, dentro y fuera del aula. Las tecnologías diluyen los espacios y tiempos educativos [1].

De acuerdo con Sakamura y Koshizuka [2], la computación ubicua puede ser considerada como "una nueva tendencia de las tecnologías de la información y la comunicación”. Mark Weiser [3] propuso el término “ubiquitous computing” (“computación ubicua” o “informática ubicua”) para referirse al proceso por el cual los ordenadores se están integrando perfectamente en el mundo físico. Para Weiser la presencia de los ordenadores es menos visible, la nueva tecnología se entremezcla discretamente en la vida diaria a través de dispositivos integrados en los objetos más cotidianos. Esta tecnología penetrante está totalmente centrada en la persona, lo que implica una nueva forma de interactuar con los ordenadores.

La interacción entre el individuo y el medio ambiente permite que el conocimiento se adquiera, se produzca en todas partes y todo el tiempo. Como sostiene Burbules [4], el aprendizaje en una variedad de lugares y circunstancias siempre ha sido parte de la vida humana. Por otra parte, la tecnología ha permitido la aparición de ciudadanos científicos [5].

En este contexto surge un nuevo escenario educativo, el u-learning o aprendizaje ubicuo, caracterizado por un conjunto de actividades formativas accesibles en cualquier lugar y desde cualquier dispositivo. Este aprendizaje ubicuo, por naturaleza, debe incorporar cualquier medio de transmisión, no se limita a la computadora o a los dispositivos móviles, sino que incorpora las posibilidades de otros medios tecnológicos [6]. Además, el avance y la implementación de tecnologías de computación ubicua, permiten que el proceso de intercambio de información y la comunicación ocurran de forma natural, constante y continúa durante todo el día [7].

El aprendizaje ubicuo representa un nuevo paradigma educativo que en buena parte es posible gracias a los nuevos medios digitales [8].

En el Proyecto de Investigación “Informática ubicua: su aplicación en el contexto universitario” (Facultad de Ciencias Exactas y Tecnologías - FCEyT) acreditado por el Consejo de Investigaciones Científicas y Tecnológicas de la Universidad Nacional de Santiago del Estero (UNSE) se desarrolló un Modelo de Entorno de Aprendizaje Ubicuo ajustado al contexto universitario desde un enfoque sistémico [8].

2 Modelo de entorno de aprendizaje ubicuo

2.1 Aprendizaje ubicuo

El Aprendizaje Ubicuo (u-learning) es un nuevo paradigma, que tiene lugar en un entorno de computación ubicua y permite aprender lo correcto en el lugar y el tiempo correcto de la manera correcta [5]. El aprendizaje ubicuo presenta las siguientes características:

- *Permanencia:* La información permanece a menos que los alumnos a propósito la eliminen.
- *Accesibilidad*: La información está siempre disponible cada vez que los alumnos la necesitan utilizar.
- *Inmediatez*: La información puede ser recuperada inmediatamente por los alumnos.
- *Interactividad*: Los estudiantes pueden interactuar con sus compañeros, profesores y expertos de manera eficiente a través de diferentes medios.
- *Sensibilidad al contexto*: El entorno puede adaptarse a la situación real los alumnos para suministrar información adecuada para ellos.

2.2 Descripción del modelo de entorno de aprendizaje ubicuo

La Fig. 1 muestra el modelo de entorno de aprendizaje ubicuo [7] considerado en el diseño de la propuesta didáctica para Análisis Matemático I. Se observa que el estudiante ocupa un lugar central dentro del ambiente de aprendizaje ubicuo y en torno a él se organizan dinámicamente los demás elementos, este ambiente cuenta con el soporte de la informática ubicua.

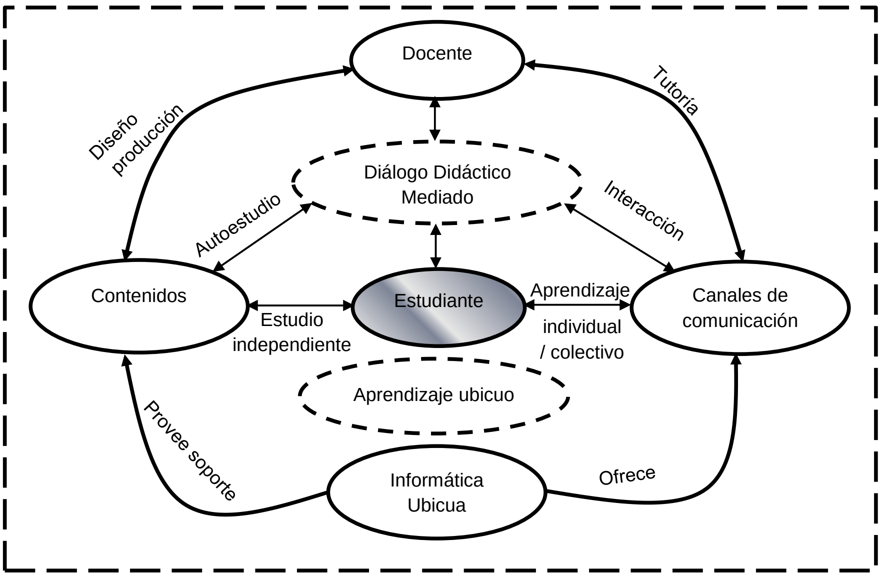


Fig. 1. Modelo de entorno de aprendizaje ubicuo ajustado al contexto universitario

Los principales componentes de un ambiente universitario de aprendizaje ubicuo, desde una visión estructural considerados en el modelo son:

- *Límite del sistema*

A partir del concepto de aprendizaje ubicuo se puede considerar que el aprendizaje ya no se limita a las instituciones educativas formales como la universidad, sino que se da en diversos lugares: en el hogar, en el lugar de trabajo, en las confiterías, etc. [4]. La portabilidad y conectividad son muy importantes, permitiendo que el aprendizaje pase a ser una actividad que se da en cualquier lugar y en cualquier momento. Por lo tanto, no se pueden establecer claramente los “límites del sistema”. La informática ubicua diluye los espacios y tiempos educativos, la brecha entre el aprendizaje formal e informal, genera nuevos recursos y oportunidades de aprendizaje.

- *Elementos*
- *Estudiante*, tiene un rol activo, posee mayor grado de control sobre cuándo, dónde, cómo y por qué está aprendiendo, su motivación se reorienta hacia las necesidades y propósitos que tiene en el momento [3].
- *Docente*, en un ambiente de aprendizaje ubicuo, no es sólo un pedagogo, sino un planificador, un diseñador y un director. El docente requiere teorías del aprendizaje que integren el aprendizaje formal, informal, experiencial y situado, y habilidades para diseñar estrategias de aprendizaje en contextos diversos [3].
- *Contenidos*. Con soporte en los materiales, los contenidos, son diseñados por los equipos multidisciplinarios con la finalidad de generar saber en el estudiante. Esos diseños se plasman en los clásicos soportes de texto, audio, vídeo, radio y televisión [6].
- *Canales de comunicación*, son las vías (presencial, telefónicas, internet, postal, videoconferencia, etc.) que, al estar permanentemente abiertas y disponibles, permiten un diálogo real.
- *Relaciones*

En un ambiente de aprendizaje ubicuo la mediación se da a través del diálogo entre los participantes del proceso. Se presentan diferentes tipos de relaciones vinculadas al diálogo didáctico mediado, éstas pueden ser reales o simuladas como lo muestra la Tabla 1.

El diálogo mediado real puede producirse de forma síncrona o asíncrona. Este diálogo didáctico mediado pretende producir un aprendizaje, pero no en solitario sino guiado por el docente y, según los casos, compartido con los pares, gracias a las tecnologías interactivas. Esta forma de aprender con los otros, está enfatizando las ventajas del grupo como elemento potenciador de aprendizajes de calidad

El diálogo es simulado cuando los medios utilizados son los materiales elaborados o seleccionados por la institución; y se establece entre el material y el estudiante a través del autoestudio. Este diálogo es asíncrono [9].

Tabla 1. Tipos de diálogo didáctico mediado

Tipo de diálogo didáctico	Características				
	Medio utilizado	Elementos	Relación	Comunicación	Direccionalidad
Real	Vías de comunicación	Docente – Estudiante	Tutoría – Interacción	Síncrona Asíncrona	Multidireccional
Simulado	Materiales	Material – Estudiante	Autoestudio	Asíncrona	Unidireccional

3 Diseño de la propuesta didáctica según el modelo

3.1 Contexto de aplicación en la asignatura Análisis Matemático I

Los estudiantes de las carreras de ingeniería utilizan dispositivos móviles para buscar información relacionada a los temas desarrollados por el docente y para comunicarse entre pares. Asisten a las clases presenciales con notebook, tablet, celulares y en otros casos con netbook, ya que la mayoría proviene de escuelas secundarias incluidas en un programa gubernamental que entrega estos dispositivos.

En cuanto a los docentes, utilizan notebook, proyectores, presentaciones multimediales como recursos didácticos en las aulas. Además, diseñan e implementan aulas virtuales bajo la plataforma Moodle en el Centro Universitario Virtual (CUV-FCEyT) de la FCEyT como apoyo a los cursos de carreras de grado bajo la modalidad b-learning.

Análisis Matemático I es un instrumento poderoso para abordar múltiples problemas que surgen en Ciencias e Ingeniería, está ubicado en el primer módulo del primer año de las carreras de Ingeniería. Constituye un tramo de la disciplina Análisis, en la cual se estudian problemas geométricos, como el de determinar la recta tangente a una curva por un punto de la misma. Para su comprensión se requieren los conocimientos básicos de Álgebra que se imparten en la escuela secundaria y que son revisados en el curso de nivelación.

La asignatura tiene una carga horaria de 75 horas y está organizada en cuatro unidades como se muestra en la Tabla 2.

Tabla 2. Programaión sintética de la asignatura Análisis Matemático I

Unidad I Nociones Básicas	Números reales y puntos de la recta. Pares ordenados de números reales y puntos del plano. Funciones
Unidad II: Límite y Continuidad	Límite Funcional Funciones Continuas
Unidad III: La Derivada.	Función derivable. Recta Tangente
Unidad IV: Aplicaciones de la Derivada	Variación de Función Límites Indeterminados

Los *objetivos generales* de la asignatura persiguen que el estudiante:

- Adquiera los conocimientos básicos del cálculo diferencial de funciones escalares.
- Relacione y aplique los conocimientos adquiridos con rigor científico.

Los *objetivos específicos* buscan lograr que el estudiante:

- Maneje las propiedades del sistema de los Números Reales.
- Identifique puntos de una recta con números reales y puntos de un plano con pares ordenados de números reales.
- Adquiera el concepto de función escalar.
- Adquiera la noción de límite funcional y destreza en el cálculo de Límite.
- Adquiera los conceptos de función continua en un punto y en un conjunto y además maneje sus propiedades más importantes.
- Comprenda uno de los problemas del cálculo: el de recta tangente a una curva
- Adquiera habilidad en el cálculo de derivadas.
- Conozca las propiedades y aplicaciones más importantes de la derivada.

3.2 Plan de implementación del modelo

Se diseñó un plan de implementación gradual que considera los requerimientos de los docentes en relación a:

- Una comprensión más amplia de las redes sociales de base tecnológica y de la variedad de recursos de aprendizaje disponibles en línea.
- Una comprensión sociológica y cultural de los diversos ambientes de aprendizaje y sus características.
- Nuevas teorías del aprendizaje que integren el aprendizaje formal, informal y el aprendizaje experiencial y situado.
- Habilidades en el diseño de estrategias de aprendizaje que aprovechen e interrelacionen el aprendizaje que tiene lugar en contextos diversos.
- Capacidad para trabajar con una gama de socios en distintos contextos.

3.2.1 Primera etapa

En la etapa inicial se trabajó en la capacitación del equipo docente en función de los siguientes objetivos:

- Comprender enfoques y modelos pedagógicos donde se apoye el aprendizaje ubicuo.
- Proponer estrategias que posibiliten el empleo creativo de aplicaciones digitales en contextos de enseñanza y de aprendizaje ubicuo.
- Diseñar propuestas pedagógicas que generen espacios para el aprendizaje ubicuo.

En la Fig. 2 se muestra el aula virtual diseñada en la plataforma Moodle para la capacitación del equipo cátedra donde se trabajaron los principales conceptos referidos a informática ubicua, aprendizaje ubicuo, características e implicancias en la educación.

Fig. 2. Aula virtual diseñada sobre aprendizaje ubicuo (parte)

3.2.2 Segunda etapa

En una segunda etapa se realizaron reuniones de trabajo con el equipo cátedra y asesores de distintas áreas, se rediseñaron las estrategias didácticas y las actividades en función de los elementos del modelo y de los objetivos planteados para la asignatura.

Esta tarea incluyó mejorar y agregar canales de comunicación con los estudiantes como por ejemplo redes sociales, blogs educativos, rediseño del aula virtual de la asignatura, diseño de soportes para los contenidos, etc. En esta etapa el docente asumió el rol de pedagogo, planificador, diseñador y director.

Se seleccionó como una de las estrategias de enseñanza el Aprendizaje basado en Proyectos [10] ya que tiene sus raíces en el enfoque constructivista del aprendizaje. Constituye un modelo de instrucción auténtico en el que los estudiantes planean, implementan y evalúan proyectos que tienen aplicación en el mundo real, más allá del aula de clase. En el Aprendizaje basado en Proyectos siempre será importante, tener la habilidad funcional para hacer las cosas visibles y discutibles o para estimular la colaboración, sin importar las herramientas que se utilicen para lograrlo. Este concepto se relaciona con "aprender dentro y fuera del aula de clase, todo el tiempo", es decir con el aprendizaje ubicuo. Se trabaja con situaciones problemáticas de la vida diaria, con problemas cotidianos y con problemas aplicados a la ingeniería [11, 12].

3.2.3 Tercera etapa

Para la implementación de la propuesta de enseñanza en un ambiente de aprendizaje ubicuo se realizó revisión integral de todos los elementos del modelo a fin de garantizar la coherencia de la misma, por lo tanto, se expresaron de manera explícita:

- Contenidos.
- Objetivos: logros que deben alcanzar los estudiantes al final del proyecto.
- Actividades: tareas que permiten alcanzar los objetivos propuestos en el proyecto.
- Recursos: materiales para realizar las actividades propuestas. Este elemento debe incluir la selección de recursos provistos por la informática ubicua para generar ambientes de aprendizaje ubicuo.
- Evaluación: definir el instrumento con el cual se valorará tanto el proceso llevado a cabo por los estudiantes al realizar el proyecto, como el resultado del mismo, además de los criterios de evaluación

En todo el proceso de implementación se prevén realizar los ajustes necesarios para mejorar la calidad de los procesos de enseñanza y de aprendizaje.

3.2.4 Cuarta etapa

Se realizará una prueba piloto integral de todos los elementos del modelo a fin de garantizar la coherencia de los mismos en la propuesta de enseñanza. Para ello se trabajará con una comisión en el presente año académico y se realizará el registro de todo el trabajo para su correspondiente evaluación y ajuste. Esto permitirá también estudiar la factibilidad de aplicación a la totalidad de los estudiantes del próximo año.

4 Resultados parciales

Durante la etapa inicial todo el equipo de trabajo participó en diversas jornadas de capacitación sobre informática y aprendizaje ubicuo.

En la segunda etapa se realizó un trabajo con el equipo cátedra completo, incluyendo la participación activa de los ayudantes estudiantiles, el equipo del CUV-FCEyT, el asesoramiento de docentes de informática e integrantes del proyecto de investigación donde se desarrolló el modelo en cuestión. Se obtuvieron los siguientes resultados:

- El 90 % de los docentes manifestó haber ampliado sus conocimientos sobre las posibilidades de las plataformas virtuales y otros aportes de las TIC (realidad virtual, realidad aumentada, etc.) como soporte para la enseñanza.
- El 80 % percibió la necesidad de seguir aprendiendo y reconoció el nuevo rol docente en ambientes ubicuos.
- El aula virtual se rediseñó incorporando otras dimensiones además de la informativa, como la práctica, la comunicacional y la tutorial como muestra la Fig. 3. Estos cambios estarán disponibles para el presente año académico.
- Se vinculará el aula virtual con redes sociales y otros espacios para compartir información en la nube.
- Se propondrán actividades iniciales con los estudiantes a fin de detectar con que herramientas tecnológicas están más familiarizados y en función de ello orientarlos a que las utilicen para aprender.
- Se organizaron grupos de trabajo coordinados por el jefe de cátedra a fin de trabajar en el diseño de nuevos espacios, materiales de soporte de contenidos, videos, tutoriales, selección de software específico, etc.

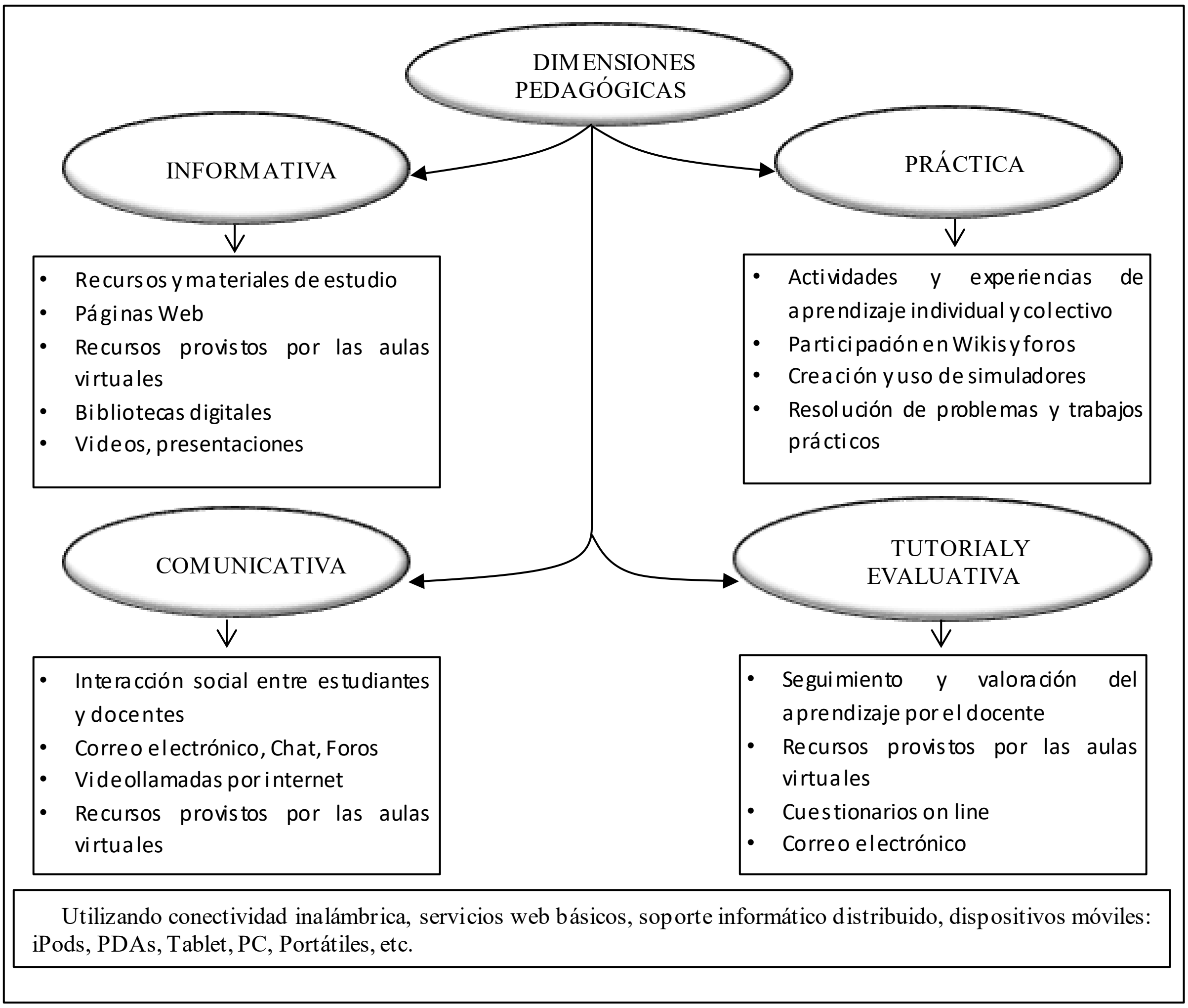


Fig. 3. Dimensiones pedagógicas de un aula virtual.

En la tercera etapa se trabajó en la selección de problemas del campo de la ingeniería que permitan abordar los contenidos de las distintas unidades de la asignatura aplicando la estrategia de Aprendizaje por Proyectos y otras que se consideren convenientes.

5 Conclusiones y trabajos futuros

La informática ubicua genera nuevos recursos y oportunidades de enseñanza para potenciar los procesos de aprendizaje, al estar centrada en la persona, implica una nueva forma de interactuar con los ordenadores.

En el contexto universitario se observan aún modelos educativos tradicionales que, en gran parte, hacen difícil la implementación de ambientes donde el uso de las TIC sea cada vez más ubicuo y diverso. En este sentido resulta importante, como etapa inicial, diagnosticar la realidad en la que estudiantes y docentes están inmersos y analizar sus potencialidades, para luego proyectar el diseño de nuevos ambientes de aprendizaje soportados por la informática ubicua.

La aplicación de un modelo de ambiente de aprendizaje ubicuo en el diseño de una propuesta didáctica para Análisis Matemático I en las carreras de Ingeniería, abre nuevas posibilidades para continuar mejorando el proceso de enseñanza mediante nuevos modelos de organización didáctica que faciliten el aprendizaje significativo del estudiante en los escenarios educativos actuales.

Las líneas de trabajo futuro están orientadas a replicar y mejorar continuamente la propuesta, ante un nuevo modelo de aprendizaje, mucho más complejo y enriquecido. El u-learning no se reduce a m-learning, abre el contexto de aprendizaje a cualquier situación de nuestra vida cotidiana; la educación ya no está limitada a un aula, una carrera, la universidad o un espacio físico determinado; pues incluye ya las características de la informática ubicua.

Referencias

1. García Gutierrez, J. Aprendizaje ubicuo y liderazgo educativo. *XXXII Seminario Interuniversitario de Teoría de la Educación. Liderazgo y Educación*. Universidad de Cantabria. (2013).
2. Sakamura, K., & Koshizuka, N. Ubiquitous computing technologies for ubiquitous learning. In Wireless and Mobile Technologies in Education. *WMTE 2005. IEEE International Workshop on* (pp. 11-20). IEEE. (2005)
3. Weiser, M. The computer of the 21st century. *Scientific American*, vol.265, no.3, pp.66-75. (1991).
4. Burbules, N. Ubiquitous Learning and the Future of Teaching. *Encounters on Education*, vol. 13, pp. 3–14. (2012).
5. Figueroa, S. Cordero, R. Informática ubicua: su aplicación en el contexto universitario. *WICC 2012. XIV Workshop de Investigadores en Ciencias de la Computación.* Posadas, Misiones, Argentina. 26 - 27 de abril de 2012. (2012).
6. Saadiah Y., Erny A. & Kamarularifin A. The definition and characteristics of ubiquitous learning: A discussion. *International Journal of Education and Development using Information and Communication Technology (IJEDICT),* Vol. 6, Issue 1, Universiti Teknologi Mara, Malaysia. (2010)
7. García Aretio, L. Criterios teóricos para alimentar la práctica en la educación a distancia. *Veinte visiones de la educación a distancia*. Guadalajara (Mx): Universidad de Guadalajara. (2012)
8. Figueroa, S. Cordero, Pérez Crespo, M. Cordero, R. Pérez Crespo, C. A ubiquitous learning environment model for a university context. *INTED2014 (8th International Technology, Education and Development Conference*. Valencia, España. (2014).
9. García Aretio, L. Perspectivas teóricas de la educación a distancia y virtual. *Revista española de pedagogía*, nº 249, pp. 255-271. (2011).
10. López, M. S. Aprendizaje Colaborativo basado en proyectos desarrollados en Ingeniería. Congreso Virtual sobre Tecnología, Educación y Sociedad (Vol. 1, No. 5) (2015).
11. Rama, A. M., Martín, M. B., Cruz, A. T., & Torrecilla, J. S. Estrategias metodológicas para el aprendizaje basado en proyectos de investigación en Ingeniería de Bioprocesos. *IJERI: International Journal of Educational Research and Innovation*, (4), 90-100. (2015).
12. Larson, R., & Edwards, B. H. Cálculo 1 de una variable. McGraw-Hill. (2010)

Volver al Índice

Resolución de Problemas Empleando Matlab: un Análisis de las Prácticas Educativas

Cristina Elizabeth Basualdo, Pablo E. Zurita Biachini, María Inés Morales, Cristian Eduardo Benitez
Departamento Académico de Matemática, Facultad de Ciencias Exactas y Tecnologías,
Universidad Nacional de Santiago del Estero
Av. Belgrano Sud 1912, 4200 Santiago del Estero
{cbasualdo, pzurita, imorales}@unse.edu.ar, cristian_ceb@yahoo.com.ar

Resumen. Las prácticas educativas deben estar en consonancia con los tiempos y los avances tecnológicos, pero principalmente deben estar centradas en el alumno para que se transforme en un sujeto activo de su propio aprendizaje y éste sea efectivo y duradero. En la asignatura Álgebra Lineal de las Carreras de Ingeniería de la Facultad de Ciencias Exactas y Tecnologías de la Universidad Nacional de Santiago del Estero se planteó como estrategia metodológica y se utiliza, desde hace un tiempo ya, la resolución de situaciones problemáticas aplicadas a otras áreas del conocimiento con el empleo del Software Matlab. Se busca que esta metodología posibilite la significación de los conceptos trabajados. Se analiza aquí, a partir de la observación de las prácticas, las dificultades y/o fortalezas que presentan los alumnos en la aplicación de esta metodología. Particularmente se expone sobre la Unidad II de la asignatura: “Sistemas de Ecuaciones Lineales”.

Palabras Clave: Álgebra lineal, Problemas de aplicación, Matlab, Aprendizaje significativo.

1 Introducción

En la actualidad, las universidades presentan el reto de preparar a sus estudiantes para enfrentarse a una sociedad más competitiva y en constante evolución. Se exigen profesionales que, más allá de los conocimientos disciplinares que posean, sean capaces de enfrentarse a situaciones diarias y resolverlas de la manera más eficiente posible. Por tal motivo, se hace necesario formar a los futuros profesionales en función de las competencias que necesitarán para desempeñarse en el mundo laboral.

Esto nos lleva a la pensar que lo más valioso que podemos aportar a nuestros alumnos son los procesos que no se vuelven obsoletos, es decir, formar en ellos una actitud que los prepare en la capacidad de abordar y resolver por sí mismos los nuevos desafíos; proveerlos de procedimientos generales y de métodos para la búsqueda, el descubrimiento y la creación.

Las nuevas tendencias priorizan el desarrollo de los procesos de pensamiento propios de la Matemática sobre la mera transferencia de contenidos, es por ello que se le confiere gran importancia a la metodología de resolución de problemas. De esta manera se tiende a una enseñanza más comprensiva, amplia, cognitiva y procedimental, poniéndose énfasis en su conexión con el mundo real y con otras disciplinas. Por otro lado el empleo de un software en la resolución de problemas matemáticos sirve como herramienta de construcción de conocimiento, al requerir que los estudiantes movilicen el pensamiento crítico y analítico mientras interactúan con él, desarrollando también su capacidad creativa mediante la elaboración de pequeños programas (archivos .m de comando y de función) que enriquecen la tarea.

Por todo lo expuesto, en la asignatura Álgebra lineal, que se imparte en las carreras de ingeniería de la Facultad de Ciencias Exactas y Tecnologías de la Universidad Nacional de Santiago el Estero, se realizó un análisis crítico de la metodología empleada y se consideró apropiado adoptar el Modelo de Resolución de Problemas para el desarrollo de la misma.

2 Metodología empleada

La Metodología de Resolución de Problemas constituye una estrategia valiosa a través de la cual se pueden lograr aprendizajes significativos. G. Brousseau expresa que el proceso de resolución de problemas es comparable a un proceso de toma de decisiones en el que el alumno construye el conocimiento, para lo cual es necesario que se interese personalmente por la resolución del problema planteado en la situación didáctica.

Para ello es necesario orientar a los estudiantes a construir sus propias estrategias de pensamiento teniendo en cuenta las cuatro fases formuladas por Polya: Comprensión del problema, Concepción de un plan, Ejecución del plan y Examen retrospectivo de la solución obtenida.

Cabe transcribir aquí la opinión de Miguel de Guzmán: La enseñanza por resolución de problemas pone el énfasis en los procesos de pensamiento, en los procesos de aprendizaje y toma los contenidos matemáticos, cuyo valor no se debe en absoluto dejar a un lado, como campo de operaciones privilegiado para la tarea de hacerse con formas de pensamiento eficaces.

Para llevar a cabo el proceso de enseñanza y de aprendizaje de la asignatura, la estrategia metodológica adoptada es la de combinar técnicas de trabajo individual y grupal con apoyo informático con el software MatLab, y clases expositivas-dialogadas en temas que por su complejidad necesitan de la explicación del docente.

La cátedra tiene organizado el Taller de MatLab de 15 horas en el que los alumnos pueden adiestrarse en el manejo de este software y además se destina 10 horas semanales para la atención de consultas de alumnos.

En cada Unidad Temática se realiza la propuesta de situaciones problemáticas, con datos de la realidad, que tengan relación con la situación curricular de los estudiantes y con la carrera y que además despierten interés en la búsqueda de soluciones. Esta actividad se lleva a cabo en pequeños grupos de discusión a los que se les asigna un Trabajo que consiste en problemas de aplicación para su modelación matemática y cálculo numérico, apelando a la resolución manual y al empleo del software MatLab como herramienta computacional. Esta tarea se realiza una vez que han concluido el desarrollo de las clases teóricas y prácticas correspondientes a la unidad, de esta manera se garantiza la apropiación de los saberes necesarios para la efectiva transferencia e interrelación con las otras áreas.

Este proceso permite a los alumnos la elaboración de modelos matemáticos en los que el lenguaje lógico-formal y el método científico-deductivo entran en juego. La claridad de conceptos, el análisis, la capacidad de abstracción y generalización, y el poder de síntesis son importantes en esta etapa. El grupo realiza una tarea de resignificación generando una estrategia que permite una enorme riqueza de vivencias y conceptualizaciones. Mientras que el docente tiende a que el clima áulico sea propicio para que el proceso de incorporación del conocimiento sea significativo y el estudiante manifieste una buena disposición para aprender.

Los trabajos son monitoreados, en horarios de consulta, por los docentes de la cátedra hasta su efectiva culminación. Éstos son quienes orientan y reorientan, asesoran, sugieren, corrigen, propician la aplicación de diversas técnicas de estudio e investigación, los inducen a expresarse con rigor científico, con empleo correcto del lenguaje formal, con métodos numéricos adecuados y espíritu crítico y cooperativo, creando un clima propicio para que el proceso de incorporación, de aplicación y de transferencia de conocimientos sea significativo.

Una vez aceptados los trabajos, los integrantes de cada grupo fundamentan su trabajo en el aula, lo que permite abrir el debate cuando se presenten respuestas antagónicas. En esta instancia, los docentes son observadores, mediadores y evaluadores, son quienes marcan las coincidencias, las contradicciones y la interrelación de las exposiciones grupales y registra la participación de cada estudiante teniendo presente los criterios de evaluación y le asigna un concepto de acuerdo a la escala de valoración correspondiente.

Criterios de Evaluación

Los contenidos que se tienen presentes para evaluar el proceso de apropiación de saberes son:

Contenidos conceptuales

- Comprensión y aplicación de conceptos con rigor científico.
- Conocimiento y manejo fluido del lenguaje lógico-formal de la Matemática.

Contenidos procedimentales

- Análisis, interpretación y modelación matemática de problemas.
- Estrategias y procesos de razonamiento.
- Aplicación de métodos numéricos adecuados.
- Representación gráfica en 2D y 3D a través de diagramas y tablas.
- Uso correcto de los comandos básicos de Matlab.
- Elaboración de archivos .m de comando y de función.

Contenidos actitudinales

- Aportes personales.
- Dedicación puesta de manifiesto en clase.
- Participación en el grupo.
- Respeto por los integrantes del grupo y por el medio ambiente.

Escala de Valoración
La escala de valoración de los Trabajos Grupales es: (E) Excelente, MB (Muy Bueno), B (Bueno), R (Rehacer).

3 Análisis de la experiencia

Los docentes de la asignatura realizaron un análisis de las prácticas descriptas para poder detectar tanto las ventajas que obtienen los alumnos en la implementación de las mismas, como así también las dificultades y/o aspectos que deben ser mejorados. Tal cuestión se llevó a cabo a través del estudio de los trabajos prácticos presentados por los alumnos y de las experiencias recogidas, tanto por docentes como por los ayudantes estudiantiles, durante el dictado de las consultas en el laboratorio de informática. En particular, se presenta aquí el caso de la Unidad Temática N°2 correspondiente a "Sistemas de Ecuaciones Lineales".

Los problemas planteados para trabajar los contenidos correspondientes a esta unidad abarcan situaciones orientadas hacia distintas ramas: economía, física, química. Sin embargo se hace especial hincapié en aquellas que están más relacionadas con la carrera en cuestión, es decir, problemas aplicados a la física y la química. Se busca que a partir de un planteo expresado en lenguaje coloquial, los alumnos sean capaces de llegar al modelo matemático, obteniendo el sistema de ecuaciones, en forma general y en forma matricial; que hagan uso del software para resolver el mismo, y reutilicen conceptos como el teorema de Rouché- Frobenius y su corolario, o teorema de Cramer para hacer la correspondiente interpretación de los resultados que Matlab les devuelve.

Además, una de las aplicaciones más útiles del Matlab es la posibilidad de confeccionar archivos .m de comando o de función para la implementación de las soluciones de un problema. Se guía y orienta a los alumnos en la elaboración de dichos archivos trabajándolos como una etapa posterior a la de modelización matemática, en donde ya tienen identificados todos los elementos de un sistema de ecuaciones y se puede ensayar una secuencia de pasos lógicos que sirvan para resolver el problema planteado. De esa secuencia de pasos se obtiene el algoritmo que luego se puede traducir de manera rápida al código de programación que se utiliza en archivos .m.

En el abordaje de estas cuestiones, se detectaron, desde un primer momento, algunas dificultades y facilidades que presentaban los alumnos a la hora de pasar de la interpretación conceptual a la modelización matemática de un problema propuesto y posteriormente, a la elaboración de un archivo-M.
Facilidades:

- Rápida identificación de la forma matricial en la que se puede representar un Sistema de Ecuaciones Lineales, lo cual es muy ventajoso pues Matlab trabaja con matrices.
- Facilidad para el trabajo con operaciones con matrices en papel.
- Agilidad para la resolución de operaciones matriciales utilizando los comandos del Matlab.

Dificultades:

- Mala interpretación de los enunciados.
- Planteo erróneo del Sistema de Ecuaciones Lineales a causa de la dificultad para identificar los elementos del mismo (incógnitas, cantidad de ecuaciones, términos independientes).
- Descuido del resultado y su significado debido a que, en el trabajo en papel, se focalizan exclusivamente en la aplicación del método de Gauss – Jordan o el método de Eliminación Gaussiana.
- Errores conceptuales en la aplicación de los teoremas y/o corolario.
- No obtención del conjunto solución del sistema de ecuaciones.
- Interpretación deficiente o nula de los resultados que devuelve el software.
- Falta de interés en el uso del software ya que no visualizan las potencialidades que el mismo del brinda.

3.1 Análisis de un caso particular

Situación Problemática
El principio de equilibrio de dos pesos suspendidos como se ve en la Fig. 1 establece que dichos pesos estarán equilibrados si $w_1 x = w_2 y$ (ecuación de equilibrio). Considere el sistema de pesos suspendidos de la Fig. 2.

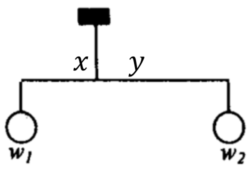


Fig. 1. Gráfica referencial para situaciones problemáticas del mismo tipo

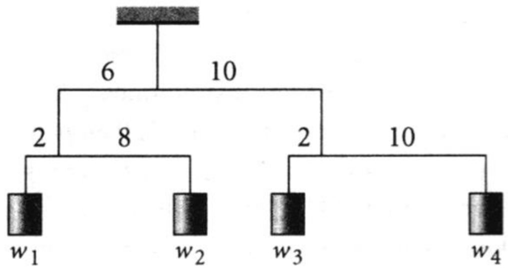


Fig. 2. Representación gráfica de la situación problemática planteada.

a) Escriba las ecuaciones de equilibrio
b) Resuelva el sistema de ecuaciones lineales obtenido.
c) ¿Qué puede decir sobre la elección de los pesos w_1, w_2, w_3 y w_4 para hacer que el sistema físico se equilibre?
d) Confeccione un archivo .m de función que permita resolver el problema para una situación como la de la Fig. 1, cualesquiera sean los pesos de los bloques y sus distancias al punto de equilibrio.

A continuación se ejemplifica el razonamiento que se desea que el alumno elabore para resolver el problema y la posterior interpretación del resultado. Conjuntamente se enuncian las dificultades detectadas en dicho proceso.

Interpretación del Problema

Identificación de las variables que intervienen en el problema:

w_1: Peso del bloque 1
w_2: Peso del bloque 2
w_3: Peso del bloque 3
w_4: Peso del bloque 4
x, y: Hacen referencia a la distancia desde el punto de equilibrio hasta la posición donde se encuentra cada bloque

a) Planteo de las ecuaciones de equilibrio

$$2w_1 = 8w_2 \quad \textbf{(1)}$$
$$2w_3 = 10w_4 \quad \textbf{(2)}$$
$$6(w_1 + w_2) = 10(w_3 + w_4) \quad \textbf{(3)}$$

Dificultades detectadas:

- Problemas en la interpretación de enunciados.
- Falencias en la identificación de incógnitas y datos principales del problema.
- Inconvenientes para identificar la relación existente entre las variables.

Todo lo dicho los lleva a plantear en forma incorrecta las ecuaciones de equilibrio.

b) Planteo del sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} 2w_1 - 8w_2 = 0 \\ 2w_3 - 10w_4 = 0 \\ 6w_1 + 6w_2 - 10w_3 - 10w_4 = 0 \end{cases} \quad \textbf{(4)}$$

Dificultades detectadas:

- Inconsistencias derivadas de planteos incorrectos en la etapa previa.
- Reconocimiento y formulación del sistema de ecuaciones lineales.

Resolución del problema utilizando el software
La resolución del sistema de ecuaciones lineales aplicando Matlab implica:
Cargar la matriz de coeficientes (A).
Cargar la matriz de términos independientes (B).
Cargar la matriz ampliada (Amp).
Calcular el rango de a la matriz de coeficientes y de la matriz ampliada.
Calcular la matriz escalón reducida de la matriz ampliada a fin de obtener el sistema de ecuaciones lineales equivalente.
Este proceso se puede observar en la Fig. 3

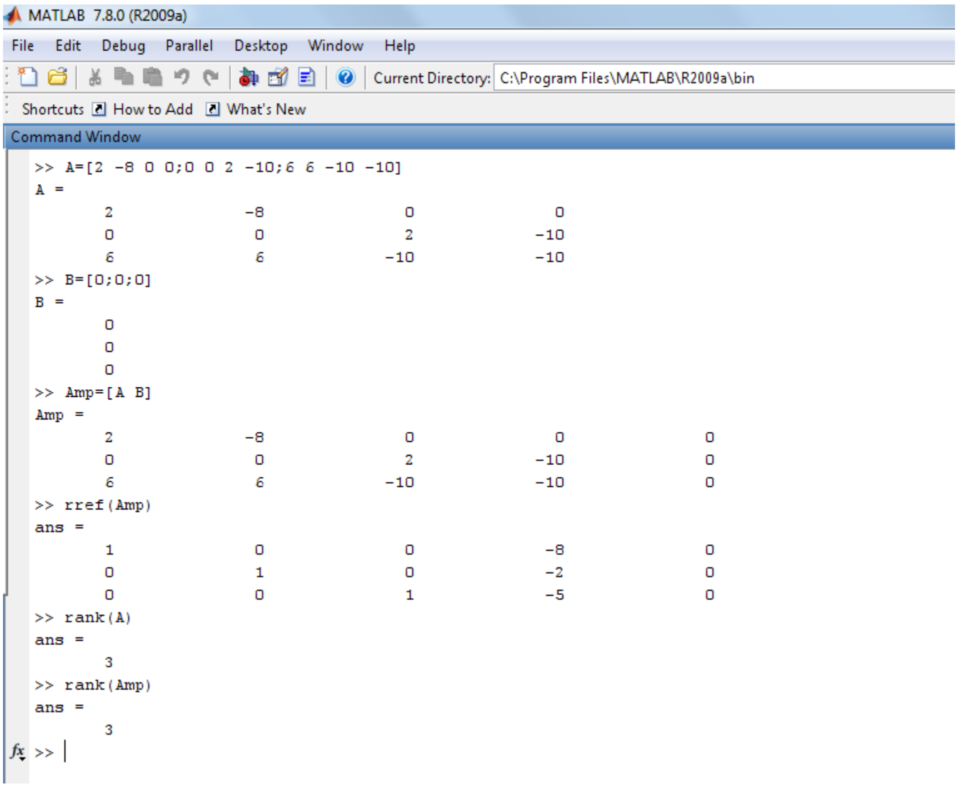


Fig. 3. Imagen de los cálculos matriciales realizados con Matlab correspondientes a la resolución de la situación problemática planteada.

Dificultades detectadas:

- Pasaje mecánico de la forma general a la forma matricial del sistema, que ocasiona por ejemplo, errores en la identificación de las matrices del sistema, que conlleva a un mal uso de las mismas y la obtención de resultados incorrectos.
- Interpretación deficiente o nula de los resultados que devuelve el software a pesar una realización correcta de los pasos anteriores.

Análisis de la compatibilidad o incompatibilidad del sistema de ecuaciones lineales

- Aplicar el Teorema de Rouché-Frobenius
  Compatibilidad
  rg(A) = 3 = rg(Amp) $\Rightarrow$ El sistema de ecuaciones lineales admite solución.
  $\therefore$ El sistema de ecuaciones lineales es compatible.

- Aplicar Corolario del teorema de Rouché-Frobenius

  3 = rg(A) < n = 4 ⇒ El sistema de ecuaciones lineales admite más de una solución.

  ∴ El sistema de ecuaciones lineales es compatible indeterminado.

  Observaciones:

  rg(A): rango de la matriz de coeficientes

  rg(Amp): rango de la matriz ampliada

  n: número de incógnitas

  Al ser un sistema de ecuaciones lineales homogéneo, dicho sistema es siempre compatible.

Dificultades detectadas:

- Errores conceptuales en la aplicación de los teoremas y/o corolario, debido a que no saben diferenciar unos de otros ni reconocer los elementos para su aplicación.

Identificar el sistema de ecuaciones lineales equivalente obtenido

$$\begin{cases} w_1 \qquad\quad - 8w_4 = 0 \\ \quad w_2 \qquad - 2w_4 = 0 \\ \qquad\quad w_3 - 5w_4 = 0 \end{cases} \tag{5}$$

Conjunto Solución:

$$s_0 = \left\{ \begin{bmatrix} 8w_4 \\ 2w_4 \\ 5w_4 \\ w_4 \end{bmatrix} / \; w_4 \in \mathbb{R}^+ \right\} \tag{6}$$

Dificultades detectadas:

- No obtención del conjunto solución del Sistema de Ecuaciones Lineales debido a la automatización del proceso. En esta etapa, los alumnos suponen que la resolución del problema ha concluido ya que el software les arrojó un resultado, es decir, no son capaces de interpretar el mismo.

c) Interpretación del conjunto solución

Los pesos $w_1; w_2; w_3$ dependen del peso w_4 para que el sistema se equilibre en la siguiente relación: w_1 debe ser ocho veces w_4, w_2 debe ser el doble de w_4 y w_3 debe ser 5 veces w_4.

En el conjunto solución, la exigencia es que w_4 sea positivo, ya que si toma valor cero no se tendrían un sistema de masas en equilibrio, y además la masa de un cuerpo no puede tomar valores negativos.

Dificultades Detectadas:

- Falta de verificación de resultados y observación de la posible coherencia de los mismos, es así como por ejemplo trabajan con medidas de longitud y peso negativas.
- Interpretación deficiente o nula de los resultados que devuelve el software a pesar de una realización correcta de los pasos anteriores.
- Inconvenientes para transferir los resultados del modelo matemático a la situación planteada.

d) Confección del archivo .m

A partir de la situación representada en la Fig.1 se confecciona un archivo .m de función que permite resolver el problema, cualesquiera sean los pesos de los bloques y sus distancias al punto de equilibrio.

Algoritmo 1. El siguiente algoritmo informa por pantalla si el sistema de pesos se encuentra en equilibrio a partir de los datos ingresados por el usuario.

```
function equilibrio()
%El programa informa si un sistema de pesos se encuentra en equilibrio, para esto
%recibe la informacion de los pesos suspendidos y sus distancias al punto
%de equilibrio del sistema
peso1=input('Ingrese el peso del primer bloque: ');
peso2=input('Ingrese el peso del segundo bloque: ');
dist1=input('Ingrese la distancia del primer bloque al punto de equilibrio: ');
dist2=input('Ingrese la distancia del segundo bloque al punto de equilibrio: ');
valorA= peso1*dist1;
```

```
valorB= peso2*dist2;
if valorA==valorB
  disp('El sistema propuesto se encuentra en equilibrio')
else
  disp('El sistema propuesto no se encuentra en equilibrio')
end
end
```

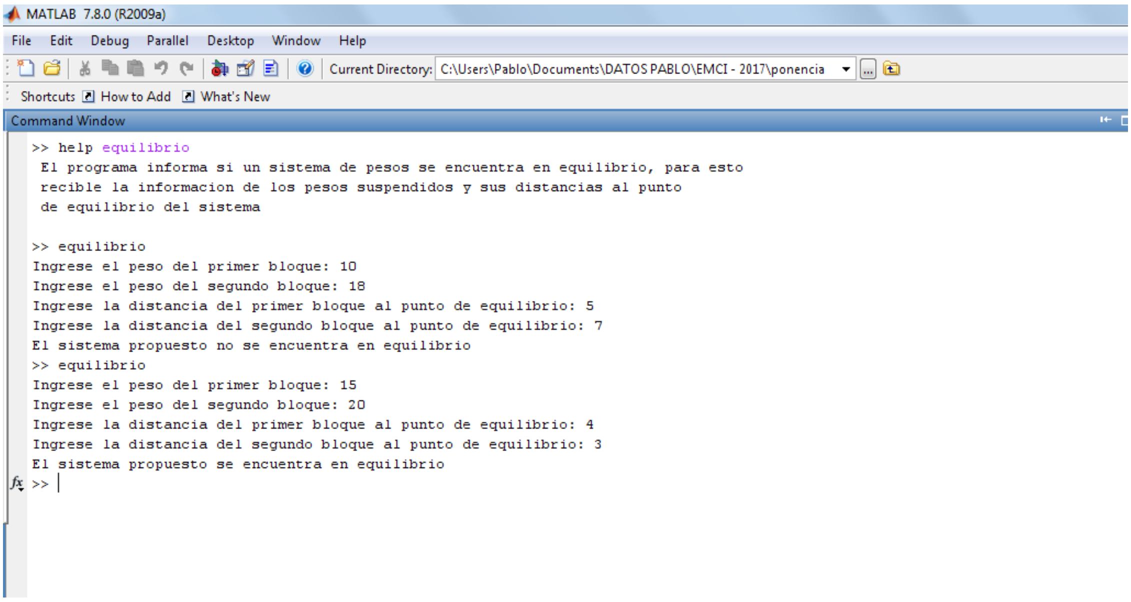


Fig. 4. La imagen muestra la captura de pantalla correspondiente a dos ejecuciones del archivo .m confeccionado anteriormente.

4 Conclusiones y trabajos futuros

En cuanto a las dificultades observadas, es deseable atacar la interpretación deficiente de resultados. El software Matlab se utiliza como una herramienta potente que permite desviar la atención de los pormenores del cálculo. Los alumnos se familiarizan rápidamente con los comandos y sentencias útiles y esto los deja en condiciones de concentrarse en la interpretación de resultados. Debido a esto la obtención de resultados numéricos para problemas propuestos se torna ágil. Aun así el inconveniente detectado no desaparece y se observa un traslado hacia el software de la mecanización antes presente en el cálculo con lápiz y papel. En este sentido, se observa que los alumnos suponen que la resolución del problema ha concluido ya que el software les arrojó un resultado y no comprenden que no han resuelto el sistema si aún no han: obtenido el conjunto solución, interpretado el resultado y establecido las relaciones pertinentes que justifiquen el mismo.

Por esta razón, se hace sumamente importante el acompañamiento del docente pues es en las clases de consultas donde se va guiando a los alumnos de tal manera que reconsideren la solución obtenida y reexaminen los resultados, como así también el proceso para obtenerlos. Esto les permite consolidar sus conocimientos y adquirir las habilidades, y destrezas para resolver problemas. Luego podrán afrontar solos y de manera competente las situaciones problemáticas que se les vayan presentando.

Por otro lado se trata de hacer comprender a los alumnos que ningún problema puede considerarse completamente terminado: se puede mejorar cualquier solución. En esta instancia el profesor alienta a sus alumnos a imaginar casos en que podrían utilizar de nuevo el mismo proceso de razonamiento o aplicar el resultado obtenido. Es en esta instancia que juega un papel preponderante la generalización, que se ve plasmada en la confección de archivos .m de función que le permitirán al alumno resolver, mediante el Matlab, una gran variedad de problemas similares.

Para dar solución a las falencias detectas, desde la cátedra se pretende trabajar de la siguiente manera:

- Resolver problemas “tipo”, previo al trabajo con las guías prácticas, para adiestrar a los alumnos en el método de resolución de problemas pues se evidencia que no vienen preparados para trabajar este tipo de situaciones.
- Instruir a los alumnos, previo al abordaje de situaciones problemáticas, en el trabajo con algoritmos utilizando el software Matlab, como así también en el manejo del lenguaje de programación que les permita crear y utilizar archivos .m.
- Fomentar el interés por la utilización del software haciendo uso de una nueva herramienta: las redes sociales. Se propone aquí trabajar con grupos cerrados en Facebook formulando problemas que necesiten ser resueltos con Matlab y que los alumnos publiquen los resultados, premiando a aquellos que sean capaces de presentar la mejor y más completa solución. Todo esto, siempre con la orientación y supervisión de los docentes a cargo.

Referencias

1. Brousseau, G.: Educación y didáctica de las matemáticas. Educación Matemática Vol. 12 Nº 1- Grupo Editorial Iberoamérica. México (2000)
2. Polya, G.: Cómo plantear y resolver problemas. Ed. Trillas. México (1999)
3. Palacios, F Javier: Resolución de Problemas. Ed. Síntesis S.A. Madrid (2000)
4. de Guzman, Miguel: Tendencias innovadoras en Educación Matemática. Olimpíada Matemática Argentina. (1992)
5. CONFEDI, Proyecto estratégico de reforma curricular de las ingenierías 2005-2007. (2005)
6. Nakamura, S.: Análisis Numérico y Visualización Gráfica con MATLAB. Ed. Prentice-Hall Hispanoamericana, S.A. (1997)
7. The Math Works, Inc.: MATLAB, Edición de Estudiante, Versión 4, Guía del Usuario. Ed. Prentice Hall (1996)
8. 8. The Math Works, Inc MATLAB, Versión 5, Guía del Usuario, Edición (1997)
9. Lay, David: Álgebra Lineal y sus Aplicaciones. Ed. Pearson 4º Edición. México (2012)
10. Nakos, G.; Joyner, D.: Álgebra Lineal con Aplicaciones. International Thomson Editores, S.A. de C. V. México (1998)

Volver al Índice

Innovadora Estrategia para Enseñar Calidad en Carreras de Ingeniería

Alejandro Daniel Ponce, Sonia Elisabeth Capdevila
Departamento de Ingeniería Electromecánica, Instituto de Mecánica Aplicada, Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de San Juan y Departamento de Geofísica, Facultad de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, Universidad Nacional de San Juan
Av. Lib. San Martín (Oeste) 1109 - CPA: J5400ARL - San Juan - Argentina
adponcefelez@gmail.com , secapdevila@yahoo.com.ar

Resumen. En este trabajo se muestra una innovadora manera de enseñar la calidad que es una herramienta básica para una propiedad inherente de cualquier cosa que permite que la misma sea comparada con cualquier otra de su misma especie. La palabra calidad tiene múltiples significados. De forma básica, se refiere al conjunto de propiedades inherentes a un objeto que le confieren capacidad para satisfacer necesidades implícitas o explícitas. El concepto de calidad se ha dado desde que el primer hombre comienza a vivir. En ese entonces no se le daba una definición con palabras precisas, sino más bien era subjetiva la manera en que se percibía la calidad. Ya que en ese entonces el hombre carecía de estudios que le ayudaran a darle una definición como la que ahora se maneja. Pero aun así el hombre buscaba la calidad en cada actividad que realizaba.

Palabras Clave: Calidad, Mecánica, Innovadora, Estrategia de enseñanza.

1 Introducción

La calidad es una herramienta básica para una propiedad inherente de cualquier cosa que permite que la misma sea comparada con cualquier otra de su misma especie. La palabra calidad tiene múltiples significados. De forma básica, se refiere al conjunto de propiedades inherentes a un objeto que le confieren capacidad para satisfacer necesidades implícitas o explícitas. Por otro lado, la calidad de un producto o servicio es la percepción que el cliente tiene del mismo, es una fijación mental del consumidor que asume conformidad con dicho producto o servicio y la capacidad del mismo para satisfacer sus necesidades. Por tanto, debe definirse en el contexto que se esté considerando, por ejemplo, la calidad del servicio postal, del servicio dental, del producto, de vida, etc.

El concepto de calidad se ha dado desde que el primer hombre comienza a vivir. En ese entonces no se le daba una definición con palabras precisas, sino más bien era subjetiva la manera en que se percibía la calidad. Ya que en ese entonces el hombre carecía de estudios que le ayudaran a darle una definición como la que ahora se maneja. Pero aun así el hombre buscaba la calidad en cada actividad que realizaba.

La materia es dictada para alumnos del quinto semestre (Tercer Año) de la carrera de Ingeniería Mecánica de la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional de San Juan.

2 Desarrollo del trabajo

La finalidad de este trabajo es buscar los elementos que guían los procesos de enseñanza - aprendizaje al alumno y además sirvan de ayuda en la organización de nuestra tarea docente.

Desde la asignatura de gestión y control de calidad debe incidirse en el correcto uso del lenguaje, tanto escrito como hablado. El análisis profundo de los enunciados y la correcta explicación de los procesos estadísticos que conducen a la resolución de los problemas y ayudar a alcanzar los objetivos específicos en la asignatura mencionada.

También se busca el máximo rendimiento de nuestro alumnado, esto nos motivan a fomentar el esfuerzo personal y a aumentar el nivel de auto-exigencia.

La introducción de nuevos contenidos se inicia de forma intuitiva y poco a poco se va incorporando el rigor matemático necesario para etapas futuras.

El trabajo en grupo facilita la estimulación de la curiosidad, la reflexión, el saber escuchar y respetar al otro y la toma de decisiones.

El uso de los recursos tecnológicos se ha de hacer de forma racional, introduciéndolos de forma gradual y distinguiendo en todo momento la necesidad de su uso en los casos necesarios; de esta forma se afianzará el cálculo sencillo, para que el alumno consolide las destrezas de cálculo, en nuestro caso, se utiliza el o los programas “Excel” (porque es muy común en todas las computadoras) o un software más específico de estadística como “Statgraphics”.

2.1 Objetivos específicos de este trabajo

Los logros esperados son:

- Conceptuales: Interpretar las consignas de la situación problemática. Dibujar las líneas de tiempo adecuadamente.
- Procedimentales: Aplicar las operaciones adecuadas, usando el software adecuado. Proporcionar conclusiones concordantes a la situación presentada.
- Actitudinales: Valorar el concepto de Calidad como parte de nuestra vida cotidiana. Apreciar el interés por el trabajo colaborativo.

2.2 Logros esperados

- Comprender que el concepto de calidad no es nuevo, sino que se remonta desde la antigüedad.

Este objetivo se lograra de la siguiente manera. Se les pide a los alumnos que formen grupos de no más de tres personas. Que realicen una línea de tiempo con lo que ellos saben desde que tiempo ellos consideran que se introdujo el concepto de calidad. Para poder realizarlo se puede utilizar el software Visio (dentro del paquete de Office) u otro software que a ellos les resulte más apropiado.

Una vez terminada la práctica se muestra un video sobre la historia de la calidad y luego se vuelven a reordenan la línea de tiempo realizada en forma conjunta con el aporte de todos los grupos.

Los Obstáculos que se observan en este objetivo son Didácticos:

No se da la información necesaria para realizar la actividad y se observa los conceptos prestablecido por los alumnos.

No comprender que se refiere a confeccionar una línea de tiempo (Acceso a la Web)

En este objetivo se está estableciendo dentro de las habilidades el pensamiento crítico e inferencial.

En este objetivo se manifiesta: Las Inteligencia Colectiva (porque la actividad es grupal y hay intercambio de ideas).

La inteligencia colectiva es una forma de inteligencia que surge de la colaboración y concurso de muchos individuos o seres vivos, generalmente de una misma especie. Hoy es un término generalizado de la cibercultura o la sociedad del conocimiento. Aparece en una amplia variedad de formas de toma de decisiones consensuada en bacterias, animales, seres humanos y computadoras. El apoyo mutuo, al referirse a la inteligencia colectiva de pequeños animales e insectos como abejas u hormigas.

Inteligencia Exitosa (involucra el análisis de los datos, la creación y la práctica). La inteligencia consiste en pensar bien de tres formas diferentes, de manera creativa, analítica y práctica. Las tres se encuentran muy relacionadas. La primera es necesaria para formular buenas cuestiones y buenas ideas. La segunda se utiliza para resolver los problemas y juzgar la calidad de las ideas. La tercera se aplica para usar las ideas de manera eficaz en la vida cotidiana. Es importante aprender a saber cuándo y cómo usar cada una de estas inteligencias de manera efectiva.

En una empresa, por ejemplo, la inteligencia analítica es importante para conocer el mercado del producto o el servicio; pero la creativa es, ante todo, la que permite generar nuevos productos para ponerlos a la venta. Cuando esto ocurre, ya se está generando el sucesor. La mayoría de las ocupaciones en el mundo empresarial son muy pragmáticas y se necesita generar ideas innovadoras constantemente.

La inteligencia exitosa tiene una serie de características tales como:

- Es modificable, se puede aumentar o disminuir, es susceptible de cambios.
- No es un problema de cantidad sino de equilibrio de cada uno de sus componentes.
- Se debe aprender a saber cuándo usar cada tipo: analítica, creativa o práctica.
- A menudo, quienes usan en exceso la analítica son menos efectivos en la vida que quienes la usan sólo en las situaciones que lo requieren.

- Las escuelas tienden a premiar habilidades que no son importantes después en la vida laboral. Alguien puede ser lento en las instituciones docentes y ser brillante fuera de ellas.
- La inteligencia es, en parte, heredada y, en parte de influencia ambiental.
- Las diferencias entre la inteligencia de las personas son, en su mayoría de origen social o ambiental.
- Un elemento importante de la inteligencia es la flexibilidad, hay que enfocar los problemas desde una variedad de puntos de vista, ver cómo otras personas y otras culturas abordan los problemas.

Inteligencia Emocional (pues el trabajo es grupal). La inteligencia emocional es un concepto definido por Mayer, citado de un estudio de Martínez, como "una habilidad para percibir, asimilar, comprender y regular las propias emociones y las de los demás, promoviendo un crecimiento emocional e intelectual. De esta se usa información para guiar nuestra forma de pensar y nuestro comportamiento". Según el libro de Goleman titulado Inteligencia Emocional, que clasifica la inteligencia emocional desde distintos puntos, la capacidad de motivarse a uno mismo sería un muy buen ejemplo para lograr una estabilidad emocional plena.

La inteligencia emocional puede dividirse en dos áreas:

Inteligencia intrapersonal: Capacidad de formar un modelo realista y preciso de uno mismo, teniendo acceso a los propios sentimientos y a usarlos como guías en la conducta.

Inteligencia interpersonal: Capacidad de comprender a los demás; qué los motiva, cómo operan, cómo relacionarse adecuadamente. Capacidad de reconocer y reaccionar ante el humor, el temperamento y las emociones de los otros.

- Reconocer la diferencia entre dos países sobre la gestión de la calidad.

Este objetivo se logrará de la siguiente manera. A los alumnos se les brindará material impreso sobre ambos países.

Mediante una de las técnicas muy utilizada en el desarrollo de la materia como es el método de tormenta de ideas (brainstorm), también usada como un método de control de calidad dado por el Dr. Ishikawa, se les pedirá a los alumnos que muestren las diferencias entre Japón y Argentina en términos de calidad.

Los Obstáculos que se observan en este objetivo son: Didácticos: No entender el material dado por el profesor. No comprender que se refiere a utilizar el método de tormenta de ideas (Acceso a la Web)

En este objetivo se está estableciendo dentro de las habilidades el pensamiento crítico e inferencial.

En este objetivo se manifiesta las Inteligencia Colectiva (porque la actividad es grupal y hay intercambio de ideas), Exitosa (involucra el análisis de los datos, la creación y la práctica) y Emocional (pues el trabajo es grupal).

- Identificar la diferencia entre el concepto de calidad y precio.

Este objetivo se logrará realizando un juego de ordenamiento en el cual se muestran diez autos y diez empresas automotrices, este ejemplo se eligió de tal manera para que esté de acuerdo con la carrera elegida por los alumnos; en el primer caso se ordenaran por el precio del auto y en el segundo caso es por su ranking según el organismo de calidad de Europa. Para este ejercicio como todos los años este ranking varía, se trata a comienzo del ciclo lectivo actualizarlo.

Después de realizar el ejercicio se trata de reafirmar que el concepto de calidad de un producto no es igual al precio del mismo.

Los Obstáculos que se observan en este objetivo son: Epistemológico: Evidencia falta de afianzamiento en la definición. No conocer los modelos de autos y empresas automotrices.

En este objetivo se está estableciendo dentro de las habilidades el pensamiento crítico e inferencial.

En este objetivo se manifiesta las Inteligencia Colectiva (porque la actividad es grupal y hay intercambio de ideas), Exitosa (involucra el análisis de los datos, la creación y la práctica) y Emocional (pues el trabajo es grupal).

- Explicar un gráfico de control (grafico de Pareto).

Este objetivo se logrará dando la clase en forma magistral, además utilizando el recurso tecnológico de power point. Además en el muro digital habrá refuerzos teóricos prácticos del uso de los softwares.

Después se dará un práctico, el cual consta de ejercicios explicativos los cuales están resuelto de varias maneras como por ejemplo, usando papel, lápiz, calculadora, etc. y también se muestra como se resuelven con diferentes softwares como Excel, Statgraphics, etc. y ejercicios de refuerzos para reforzar los conceptos.

Los Obstáculos que se observan en este objetivo son: Epistemológico: Evidencia falta de afianzamiento en la definición. No saber utilizar el o los software propuestos.

En este objetivo se está estableciendo dentro de las habilidades el pensamiento crítico, inferencial y matemático y se manifiesta las Inteligencia múltiples, la lógico-matemática, la espacial, la intrapersonal y la interpersonal.

3 Conclusión

Se ha logrado, que en el alumno se despierte el interés de reconocer la gran diferencia entre calidad y precio; de que el concepto de calidad no es algo moderno sino que los antiguos pueblos de la tierra manifestaban conocimientos de dicho concepto. Lo importante en esta práctica didáctica es que se ha destruido el mito de que a mayor precio implica mejor calidad.

Esto se ha esclarecido a través de los videos y ejemplos (juegos) que se han proporcionado.

Ha resultado de mucha utilidad el uso de herramientas tecnológicas, lo que ha permitido un efectivo proceso de aprendizaje.

El modelo TPACK ha resultado de gran utilidad puesto que se ha podido combinar tecnología, estrategias pedagógicas y contenidos adecuados para una mayor apropiación de los conceptos que se han abordados.

Esta experiencia didáctica ha resultado un importante inicio para el proceso de enseñanza, es fundamental proporcionar al alumno los contenidos mediante los enfoques conductistas y crítico dialógico, pues estos crean un ambiente de motivación y desafío, lo que provoca en el alumno entusiasmo, participación y creatividad.

Es importante tener en cuenta que la educación debe proporcionarse de una manera amena y atractiva y no de forma tradicional, esto conlleva a que el alumno adquiera los conocimientos en un porcentaje significativo, provocando así un claro residuo cognitivo.

Referencias

1. Kauro Ishikawa. Introducción al Control de Calidad 1994 ISBN: 9788479781729
2. Dale Besterfield. Control de Calidad. 2009. ISBN: 9786074421217
3. William Edwards Deming. Calidad, productividad y competitividad: la salida de la crisis. 1989. ISBN 8487189229

Volver al Índice

Aplicación Motivadora de Matrices a las Ciencias Biológicas

María Gimena Perez Mercado[1], Sonia Elisabeth Capdevila[1], Ana Dominguez[2]
[1] Departamento de Biología, Facultad de Ciencias Exactas ,Físicas y Naturales, Universidad Nacional de San Juan
Av. Ignacio de la Roza 590 (Oeste), J5402DCS, Rivadavia. San Juan, Argentina
Lalibriana_gime@hotmail.com , secapdevila@yahoo.com.ar
[2] Departamento de Biología, Facultad de Ciencias Exactas ,Físicas y Naturales, Universidad Nacional de San Juan
Av. Ignacio de la Roza 590 (Oeste), J5402DCS, Rivadavia. San Juan, Argentina
anapato.domin@gmail.com

Resumen. Este trabajo se enfoca en una experiencia de cátedra. Es común en los alumnos cuestionar los contenidos matemáticos preguntando sobre la utilidad y aplicación de los mismos. Es por ello que el equipo de cátedra conformado por profesoras de Matemática y por una Lic. en Biología estudiaron la forma de que, la Matemática fuese atractiva al alumno, justificando todos los contenidos en el área de las Ciencias Biológicas. El trabajo presentado está referido al tema "Matrices". En él se plantea un problema de la ingesta de los lagartos en determinados meses del año. Con esa información y sin necesidad de tener un nutrido conocimiento en el tema, los alumnos pueden resolver las consignas que se plantean sin problemas, haciendo uso de los residuos cognitivos adquiridos. Además en esta experiencia se explican todas las etapas atinentes al proceso de enseñanza y aprendizaje por las que transita el alumno para resolver dicho desafío.

Palabras Clave: Matrices**,** Proceso de enseñanza, Aprendizaje**.**

1 Introducción

La educación ha ido sufriendo cambios importantes a través de los tiempos, pues de acuerdo a las necesidades y culturas se ha modificado para lograr mejoras en su calidad.

Los educadores tienen el poder de transformar sus propias creencias limitativas en convicciones propicias para el crecimiento (Maurin Susana).

Es por ello, la necesidad de introducir cambios para mejorar la calidad educativa incorporando desafíos que activen el interés del alumnado.

En el trabajo que se presenta, se plantea una situación real. La cual debe ser resuelta haciendo uso de los residuos cognitivos del alumno. Esta experiencia ha sido implementada en alumnos de primer año de la carrera Licenciatura en Biología y ha sido gratamente comprobada y muy aceptada por el alumnado puesto que los ha motivado favorablemente.

2 Desarrollo del trabajo

Se presenta la siguiente situación motivadora: "*Liolaemus ruibali* y *Liolaemus parvus,* son dos especies de lagartos presentes en distintos ambientes de la provincia de San Juan. Un grupo de Biólogos analizaron cómo estaba compuesta la dieta de estas especies, y encontraron que los órdenes de insectos que predominaron en los estómagos fueron: Hymenoptera (hormigas), Diptera (moscas), Hemiptera (chinches), Homoptera (chicharritas) y Coleoptera (escarabajos). Posteriormente diferenciaron la dieta entre Machos, Hembras y Juveniles para obtener diferencias sexuales, y luego compararon la dieta entre dos meses específicos de dos estaciones del año (Abril y Diciembre), para determinar si existían diferencias tróficas en términos temporales. Los valores que presenta la tabla detallada a continuación, corresponden al valor del IRI (índice de importancia relativa) el cual tiene en cuenta la numerosidad, frecuencia y volumen de las presas consumidas.

Tabla 1. Datos observados.

Especie	Orden	Machos	Hembras	Juveniles	Abril	Diciembre
1	Hymenoptera	321,73	258,59	457,73	386,19	231,45
1	Diptera	17,27	5,94	117,72	34,37	24,61

1	Hemiptera	161,89	112,86	316,98	95,79	332,72
1	Homoptera	154,40	742,11	515,78	723,54	265,53
1	Coleoptera	325,07	165,85	188,73	156,56	337,25
2	Hymenoptera	1242,29	1631,13	1600,55	1339,60	1561,54
2	Diptera	153,82	49,35	61,72	48,11	173,49
2	Hemiptera	230,25	200,99	598,10	104,44	471,87
2	Homoptera	458,18	1125,45	480,99	1034,45	169,67
2	Coleoptera	233,58	168,47	55,57	365,03	118,75

Se pide:

1) Representar mediante un producto de matrices, el consumo total de cada tipo de ítems tróficos (ej. Hymenoptera) para ambas especies por parte de Hembras, Machos y Juveniles.
2) Construir una matríz que contenga los datos del total de ítems tróficos consumidos por machos, una matríz para hembras y otra para juveniles para cada especie. Mediante un producto de matrices representar el valor total de ítems consumidos por cada grupo etario en ambas especies.
3) Representar la operación correspondiente para averiguar cuál sería el consumo del total de ítems tróficos durante la estación de otoño y verano. Se recuerda que los datos presentados corresponden solo a los meses de Abril y Diciembre.

En este problema se tuvieron en cuenta todos los procesos de Enseñanza y Aprendizaje. Se consideraron las habilidades cognitivas y ejecutivas, las inteligencias, la creatividad, potencialidad de los recursos tecnológicos para el aprendizaje.

El trabajo se ha enfocado en la estructura de la Webquest considerando los distintos aspectos.

2.1 Tarea

En este aspecto se estableció la modalidad de trabajo y las consignas que se debían respetar para lograr un resultado exitoso de la situación problemática planteada.

2.2 Proceso

En esta instancia se siguió lo propuesto en la Taxonomía de Bloom, donde considera las siguientes etapas:

- Conocimiento: Recolección de la información, en donde se tiene que tener en cuenta: definiciones, identificaciones, selección de datos e información. Para ello hay que recurrir al uso de diccionarios, revistas, periódicos, programas de televisión, textos, videos, etc.
- Comprensión: Se establecen analogías de la información que se tiene, se confeccionan resúmenes, se hace uso de diagramas, afiches, además se defiende la información recibida, se resume, se explica, se infiere, etc.
- Aplicación: Se interpreta la situación problemática recurriendo a construcción, modificación, clasificación, ilustración para su posterior resolución.
- Análisis: En esta instancia se incorpora la categorización, identificación, comparación, simplificación con la ayuda de representaciones graficas, encuestas o cuestionarios, etc.
- Síntesis: Es la etapa de la creación, la originalidad, la producción, la invención, organización, etc.
- Evaluación: Se pone de manifiesto, el juzgar, informar, criticar, comparar, relacionar, ponderar los resultados obtenidos.

Dentro de cada una de las etapas se consideraron los posibles obstáculos que probablemente se podrían presentar, a saber:

- Ontogenéticos: Tienen que ver con todo lo relacionado a las limitaciones del sujeto en algún momento de su desarrollo.

- Didácticos: Son los que se adquieren o aparecen por el modo de enseñar o por la escogencia de un tema o una axiomática en particular.
- Epistemológico: Son los obstáculos que ciertos conceptos tienen para ser aprendidos, es propio del concepto.

Además se tuvieron en cuenta las fases del Proceso Creativo considerando las distintas etapas, a saber:

- Etapa 1: Cuestionamiento: Todo empieza por el interés profundo en un tema dado. Es un “encuentro” a fondo con una determinada realidad. El sujeto descubre un problema o un aspecto que despierta su curiosidad, la que se instala en la conciencia. Se crea una especie de compromiso entre el individuo y el tema. Se abre un período de perplejidad, de dudas, de cierta ansiedad pero también de expectativa y de deseo de aventura.
- Etapa 2: Incubación: La incubación es concentración, es meditación, es asimilación intensa. Se muestra inquietud en la mente y en los propósitos, el individuo se lanza al campo de los hechos para procurarse toda la información pertinente. Es la hora de las observaciones sistemáticas. La mente es la máquina con el poder de transformar y procesar.
- Etapa 3: Iluminación: Es el momento donde aparece la inspiración de la idea, cuando el problema es reestructurado y aparece la solución. Se identifica como un proceso de salida de la información.
- Etapa 4: Verificación: Es la realización de la obra, aquí entramos al dominio de la lógica, de la técnica, de la organización de la disciplina; es cuando cobran relieve los detalles, la habilidad en el uso de los materiales y en el campo de las personas, la labor de pulido. Es la comunicación que se completa con la retroalimentación.

Los diversos tipos de pensamientos fueron contemplados considerando la puesta en práctica de diferentes habilidades, como:

- El pensamiento crítico: Considera habilidades, como ser:
- – El juicio, la crítica y la opinión: Permiten realizar el análisis de los datos.
- – La metacognición: Nos hace conscientes de nuestro propio accionar y de nuestros procesos mentales.
- – La evaluación: Nos conduce a decidir qué camino tomar a cada paso.

- Pensamiento inferencial: Reconoce:

- – La descripción: Consiste en advertir las características de un fenómeno y exponerlas a través de palabras o imágenes. Está relacionada con la explicación, la habilidad de transmitir el funcionamiento o el aspecto de algo por medio del lenguaje.
- – La comparación: Sirve para estudiar objetos y reconocer sus similitudes y sus diferencias.
- – La inferencia: Permite la utilización de información con la cual contamos para la elaboración de nueva información, por medio de procesos analíticos.

- Pensamiento matemático: Consiste en la sistematización y contextualización del conocimiento de las Matemáticas. Este tipo de pensamientos se desarrolla a partir de conocer el origen y la evolución de los conceptos y las herramientas que pertenecen al ámbito matemático. Entre los beneficios que otorga este pensamiento se encuentran:

- – Promueve la capacidad de resolver problemas en diversos ámbitos de la vida a través de la formulación de hipótesis y de la elaboración de predicciones.
- – Incentiva el razonamiento acerca de los objetivos y los métodos a seguir para alcanzarlos.
- – Permite relacionar conceptos que se encuentran distantes entre sí, lo cual abre las puertas a un entendimiento más profundo.
- – Despierta la necesidad de ordenar y analizar los actos y las decisiones que se realizan a diario, mejorando el rendimiento general.

Como en todos los casos, cuanto más temprano en la vida se comience a estimular el pensamiento matemático en una persona, mayor será su desarrollo intelectual y más natural, no se debe olvidar que se aprende mejor cuando la educación supone un divertimento que cuando se impone.

Además se consideraron las distintas inteligencias involucradas de acuerdo a cada una de las instancias de Aprendizajes fundamentales, es decir que, para la etapa de:

- Aprender a Conocer: Las inteligencias que se actúan son:
- – La lingüística, nos permite saber comunicarnos e interpretar las consignas de lo requerido en una capacidad transversal pues, puede ser aplicada en cualquier área de la educación y de la vida.
- – La lógica – matemática, en el trabajo presentado es fundamental, pues se contempla la capacidad para el razonamiento lógico.
- – La espacial, determina la capacidad para detectar detalles, es importante destacar esta capacidad porque permite potenciar el proceso de razonamiento.
- – La naturalista, proporciona la capacidad de detectar diferencias y categorizar los aspectos vinculados a la naturaleza.
- – La intrapersonal, nos capacita para comprendernos y controlarnos.
- – La interpersonal, es la que determina la capacidad para reconocer las habilidades del docente frente al alumnado, la de los alumnos frente al docente y la interacción entre los alumnos, proporcionando sus experiencias y conocimientos del área determinada.

- Aprender a vivir juntos: Las inteligencias que se consideran en esta instancia, son:
- – La múltiple interpersonal e intrapersonal.
- – La inteligencia emocional, es la que nos capacita para controlar y seleccionar nuestras emociones y las de los demás.
- – La inteligencia colectiva, se pone de manifiesto la suma de multitudes de inteligencias individuales.
- – La inteligencia espiritual, muestra la capacidad de ser flexible, poseer un alto nivel de conciencia en sí mismo, marcada tendencia a preguntar, ¿por qué? ¿y si? A pretender respuestas fundamentales.

- Aprender a hacer: Aquí se pone de manifiesto:
- – Las inteligencias múltiples: lingüística, lógica-matemática, espacial, naturalista, interpersonal, intrapersonal.
- – La inteligencia emocional.
- – La inteligencia colectiva.
- – La inteligencia exitosa, según Stemberg, considera tres tipos de inteligencias dentro de ésta, que son: Analítica, permite evaluar, comparar y asociar hechos y conocimientos; Creativa, capacita para descubrir, imaginar y proyectar ideas; Práctica, resulta fundamental a la hora de ejecutar e implementar las decisiones.

- Aprender a ser: Se deben priorizar:
- – Las inteligencias múltiples: lingüística, lógica-matemática, espacial, naturalista, interpersonal, intrapersonal.
- – La inteligencia emocional.
- – La inteligencia colectiva.
- – La inteligencia exitosa.
- – La inteligencia espiritual.

2.3 Tiempo y Forma de Desarrollo

En esta etapa el docente les presentó a los alumnos la modalidad de trabajo, indicando las siguientes consignas:
1. Trabajo Grupal (el grupo no debe superar los cuatro integrantes).
2. La presentación presencial y defensa del trabajo no debe superar los 10 minutos.
3. La participación en la clase de cada grupo se considerará como parte del proceso de evaluación.

2.4 Recursos

Los recursos que se consideraron en este trabajo fueron:
- Presentación de diapositivas.
- Aula Virtual.
- Recursos disponibles en la Web.
- Software GeoGebra (las explicaciones del software estarán disponibles en el aula virtual, mural digital)

2.5 Evaluación

Las actividades que se propusieron formaron parte de la evaluación final de la Unidad dada. Las rúbricas, que se establecieron, fueron indicadores para que los alumnos tomaran consciencia de qué aspectos serían evaluados, las mismas fueron completadas por el docente, confeccionando así, una grilla auxiliar en donde se indicó cada actividad por separado, estableciendo cómo había sido resuelta, se le asignó un porcentaje y de acuerdo a éste, se fue marcando en esas rúbricas lo que correspondía, es decir, si había sido lograda, parcialmente lograda o no lograda la consigna.

Para aprobar esta actividad debían tener un 70% de las rúbricas logradas, de no cumplir con tal condición, se les proporcionó una actividad similar a la dada, la cual tendría que ser presentada en un tiempo predeterminado y con todas las justificaciones pertinentes.

2.6 Conclusión

Lo que se pretende con el trabajo presentado, es utilizar nuevas herramientas y aplicarlas a los estudiantes adaptándolas a la situación didáctica. Lo que se debe hacer es, mirar las necesidades de los alumnos, ver la situación-contexto en la que nos encontramos, y saber lo que se quiere conseguir para encontrar la herramienta adecuada que permita llevar a cabo esa situación didáctica y planificar (Sein Echaluce, 2012).

La aplicación del modelo TPACK ha sido una herramienta fundamental para llevar a cabo la planificación didáctica de forma correcta. Es importante que nuestros estudiantes generen conocimiento, nosotros debemos construir y apoyar este proceso constructivista. El conocimiento que les suministramos constituye la base de su ciclo de aprendizaje.

3 Conclusiones

Debemos enseñar contenidos contextualizados con las tareas y actividades que llevan a cabo los estudiantes. Nuestros estudiantes responden positivamente a problemas del mundo real o acorde a la carrera elegida. Nuestro suministro de conocimiento debería constituir un andamiaje que apoye el proceso de aprendizaje y ofrezca fundamento a las Actividades. Además es importante elegir herramientas tecnológicas acorde a los contenidos que se proporcionen como así también a la accesibilidad y practicidad de las mismas.

De los tres enfoques que presenta Kaplún en su libro “Aprender y enseñar en tiempos de internet”, considero que, se debe ir desprendiendo del enfoque tradicional para volcar nuestra atención en los enfoques : conductistas, es decir, basado en la capacidad del alumno a resolver distintas situaciones de acuerdo a sus habilidades frente a los estímulos y motivaciones que se manifiesten, sin dejar de lado los contenidos; crítico – dialógico, en este, se considera que el proceso de aprendizaje debe ser activo, aquí se potencia lo crítico, que consiste en el desarrollo de la capacidad crítica frente a la realidad y al conocimiento; dialógica es la que, determina el diálogo entre los estudiantes del grupo y con la realidad circundante. Estos enfoques establecen que el docente ya no es un mero transmisor de conocimientos y los alumnos revierten la postura de meros receptores.

Esta pirámide describe muy acertadamente que si el alumno es un sujeto pasivo su proceso de aprendizaje presenta un porcentaje muy bajo de apropiación de conceptos. Entonces sería muy adecuado tener en cuenta que mientras más activa es la participación del alumno, mayor porcentaje de retención de contenidos adquiere.

Referencias

1. Maurin S.: Educación emocional y social en la escuela. Editorial Bonum (2013).
2. Stemberg, L.: Contranálisis (1999).
3. Fidalgo, A.; Sein-Echaluce, M.L. (Coord.): Aprendizaje, innovación y competitividad (2012).
4. Stevenson, M.: Educación 3.0.
5. Kaplun, A.: Aprender y enseñar en tiempos de internet (1998).
6. Capdevila, S.: Apuntes de cátedra
7. Larson; Hostetlery E.: Cálculo Vol. I. Editorial Mc Graw Hill.
8. Apóstol.: Cálculo Vol. I. Editorial Reverte.
9. Courant.: Introducción al Cálculo y Análisis Vol. I. Editorial Limusa.
10. Rey Pastor; Pi Calleja; Trejo.: Análisis Matemático Vol. I . Editorial Kapeluz.
11. Bruner, J.: La educación, puerta de la cultura. Madrid, Visor (1999).

12. García Carrasco, J. ; García del Dujo, Á.: Teoría de la Educación II. Procesos primarios de formación del pensamiento y la acción. Salamanca, Ediciones Universidad de Salamanca (2001).
13. Eduteka.[http://www.eduteka.org/tema_mes.php3?TemaID=0012]
14. Pea, R.: Prácticas de inteligencia distribuida y diseños para la educación, en Salomón (comp.) Cogniciones distribuidas. Consideraciones psicológicas y educativas. Buenos Aires, Amorrortu (2001).
15. Salomón, G.; Perkins, D.; Globerson, T.: Coparticipación en el conocimiento: al ampliación de la inteligencia humana con las tecnologías inteligentes, *Comunicación, lenguaje y educación*, 13, 6-22 (1992).

Volver al Índice

¿Qué Enseñar de la Herramienta Esencial del Ingeniero?

Pedro M. A. Santucho[1], Estela E. Reyna[2]
[1]Grupo: Ecuaciones diferenciales en geometría afín, teoría de cáscaras, y la enseñanza de la matemática, la física y la economía en carreras de ingeniería y ciencias naturales. Cátedra de Introducción a la Matemática, Cátedra de Álgebra Lineal. Universidad Nacional de Córdoba
psantucho@hotmail.com,
[2]Cátedra de Álgebra Lineal (C), Cátedra de Fenómenos de Transporte (IQ) y Cátedra de Química y Física de Los Procesos Ambientales (IA). Universidad Nacional de Córdoba
estelaeugenia.reyna@gmail.com

Resumen. Es imprescindible que los conocimientos de Matemática enseñados vayan orientados hacia las necesidades de los estudiantes de Ingeniería y que en el futuro abran puertas a nuevos conocimientos de matemática o de otras disciplinas que sean útiles para aplicar a la ingeniería. Con estas palabras asumimos la esencialidad de la matemática en la ingeniería moderna. El objetivo del trabajo es determinar criterios para establecer qué enseñar y cómo hacerlo, considerando que para el ingeniero la matemática es una herramienta ineludible, aunque para el estudiante de ingeniería es más que eso. Para el alumno posee un fundamental poder formativo de las estructuras lógicas necesarias para el aprendizaje y para el razonamiento del futuro ingeniero. Estas estructuras son incorporadas de manera natural y simultáneamente al aprendizaje de los contenidos específicos de la matemática. Lo importante de la experiencia fue establecer la necesidad de la enseñanza teórica y rigurosa de la matemática.

Palabras Clave: Matemáticas e ingeniería, Matemática para ingenieros, Enseñanza en ingeniería, Matemática aplicada.

1 Objetivos de la enseñanza de la matemática

Existen dos objetivos genéricos básicos en la enseñanza de la matemática en las carreras de ingeniería: Los específicos de la Matemática y los que denominaremos como lógico formativos, que ahora desarrollaremos.

1.1 Los Específicos de la matemática

Por un lado es necesario el conocimiento matemático, puesto que gran parte de los problemas de la ingeniería son problemas de la física, de la química o de las ciencias sociales y son también en la mayoría de los casos cuantificables. Por esta razón es factible de ser modelado matemáticamente es decir transformado en un problema de la matemática. Es decir primero se representa el problema matemáticamente mediante sólidos argumentos lógicos. Luego se realizan los cálculos matemáticos necesarios.

1.2 Los lógico-formativos

Es fundamental que el ingeniero resuelva problemas, para ello es necesario formar estructuras del pensamiento[1], siendo fundamental para ello un estudio riguroso de las estructuras y metodologías lógico deductivas de la matemática. Jean Piaget asimila la psicología de la inteligencia a estructuras matemáticas.[2] Por ello están fuertemente asimilado a los paradigmas contemporáneos la necesidad de formación lógico-deductivo.

Un sistema que funciona:

Francia posee un ciclo común preparatorio para los estudios superiores, y tiene desde el Ministerio de Educación, bibliografía reguladora con un fuerte contenido pedagógico y una fuerte fundamentación de la currícula, con claros objetivos. Por ello citaremos algunos de los discursos que fundamentan la rigurosidad de sus propuestas formativas.

Lo más interesante de esta referencia que hacemos es la congruencia con nuestra fundamentación teórica de nuestra experiencia que es descripta a través de las conclusiones que sacamos de su implementación.

Ahora transcribimos los objetivos del estado francés para el ciclo introductorio a los estudios superiores:

"El programa del primer semestre está confeccionado con miras a tres objetivos principales:

Asegurar el paulatino pasaje a los estudios superiores, teniendo en cuenta los nuevos programas de los ciclos superiores, en los cuales se consolidarán los conocimientos adquiridos.

Consolidar la formación de los estudiantes dentro de los dominios de la lógica, del razonamiento y del cálculo que son las herramientas indispensables tanto en las matemáticas como en las otras disciplinas científicas.

Presentar las nuevas nociones con tal riqueza que suscite el interés de los estudiantes".

Es de hacer notar que Francia posee un alto nivel de ingeniería y es modelo para gran cantidad de universidades del mundo. Los niveles de Matemática son muy importantes y poseen teóricos de la pedagogía de las matemáticas de gran trascendencia como Yves Chevallard.

Qué enseñar y porqué

En un primer momento encontramos que existe una vasta experiencia en todos los países del mundo, en nuestro país, lo cual es de vital importancia ya que tiene características similares, en cuanto al perfil requerido y a nuestras características tecnológicas, geográficas, económicas y sociológicas y en nuestra propia experiencia histórica. Esto enmarcará nuestra investigación. Aunque cuando nos planteamos qué enseñar la respuesta debe ser investigada profundamente con una metodología analítica a través del diálogo horizontal y vertical en la carrera. Hay conceptos cognitivos que no pueden ser obviados, tales como que nuestra enseñanza debe basarse en conocimientos previos, debemos investigar cuáles fueron los procesos de enseñanza aprendizaje efectivamente realizados.

Por otra parte a lo que se debe investigar es qué matemática le es necesaria a cada una de las once carreras de ingeniería que se dictan en nuestra facultad. Para ello es necesario un diálogo sistematizado científicamente con los docentes de las materias de los años superiores. Un trabajo de esta naturaleza fue llevado a cabo por la entonces profesora titular del Departamento de Matemática Alicia Checchi de Pacharoni. Con muy interesantes resultados que fueron utilizados en nuestra actividad experimental que aquí desarrollamos.

Cómo y cuánto enseñar

Hay un planteo importante que nos hicimos: ¿es necesario con las nuevas tecnologías seguir las metodologías antiguas de enseñanza? Observamos que es necesario plantearse que el ingeniero tiene que ser el que maneje números y magnitudes y conozca órdenes de magnitud, no sólo el problema físico y la modelación del mismo.

También encontramos la importancia de conocer que existen programas para realizar cálculos y es necesario minimizar el tiempo que el alumno emplea resolviendo sumas y multiplicaciones para resolver miles de sistemas de ecuaciones lineales durante el curso de Álgebra Lineal. Por ello la cátedra incorporó el uso del programa Matlab hace 10 años. Si bien está en los libros de cátedra el cómo usarlo, sólo algunos docentes lo aplican sistemáticamente. En el curso de la autora se solicitan clase a clase los ejercicios resueltos con Matlab y Mathcad, éste último desde el año 2016. Respecto al programa de Mathcad, ha sido agregado en el último año para los alumnos de Ingeniería Química y de Ingeniería Ambiental. Esto, porque dentro del trayecto curricular es el programa utilizado en otras asignaturas., de esta manera se da inicio a los conocimientos de este programa también en Álgebra Lineal.

Éstos son algunos de los programas de matemática dentro de un amplio espectro que son utilizados en las diferentes universidades del mundo. Este aprovechamiento inmenso de tiempo debe ser valorado.

Ese aprovechamiento es empleado para profundizar en los aspectos lógico-deductivos, formativos de la psicología del ingeniero como tal.

Esto significa: a) Posibilidad de desarrollos teóricos complejos, entre los que se cuentan la demostración de teoremas, usando la lógica deductiva e impidiendo toda posible memorización por la manera de impartir la materia, enseñando metodologías de demostración, enseñando a razonar con discursos lógicos y dando libertad de realización de las deducciones, ejercitándolo en esto. Estos desarrollos afianzan los conocimientos y desarrollan la formación lógica del ingeniero. b) El aumento de los contenidos aunque sea parcialmente. Existen contenidos matemáticos imprescindibles como son los del álgebra tensorial para los ingenieros que manejan la mecánica: el tensor de tensiones y de deformaciones, que no pueden darse en los cursos corrientes en nuestro medio. Otros contenidos posibles a dar son la lógica difusa, redes neuronales, topología, teoría del caos, modelos fractales, que podrán aportar a los ingenieros de herramientas matemáticas y aportarán a su formación lógica.

A continuación citando la bibliografía ya propuesta3 diremos que la formación matemática en los cursos preparatorios para ingeniería tiene que conseguir un sólido bagaje de conocimientos y métodos que permitan pasar de la percepción intuitiva de ciertas nociones a su apropiación a fin de poderlos utilizar en un nivel superior en matemáticas y dentro de otras disciplinas, este grado de apropiación supone un conjunto de cursos en los cuales son necesarios: definiciones, enunciados y demostración de los teoremas que figuran en los programas. Además se requiere el desarrollo de competencias útiles para los ingenieros sean estos investigadores o profesores para identificar aquellas situaciones que confronten y así establecer las mejores estrategias para su resolución, con suficientes recursos para la toma de decisiones dentro de un contexto complejo. Esto refrenda nuestra propuesta educativa.

Un aspecto importante en el cómo enseñar está en las motivaciones, en la necesidad de crear una confianza en el alumno en que lo que estudia es necesario. Por ello es necesario que se muestren las aplicaciones a la carrera de ingeniería que el alumno cursa. Es aquí además donde la libertad del docente hará que el interés del alumno sea mayor. Este aspecto de la enseñanza es un objetivo fundamental porque es donde el alumno hará confluir su objetivo de ser ingeniero y lo que significa realmente ser ingeniero y el camino que deberá recorrer para serlo. A continuación desarrollaremos aspectos de este punto.

Aplicaciones y tecnologías.

Cuando hablamos de las aplicaciones a la ingeniería, decimos que las matemáticas son una herramienta. En este sentido parece que no fuera lo central del problema, cuando sí lo es. El modelo utilizado: ecuación diferencial, aproximación, predicción y estadística, validación, serán centrales en la respuesta.

En la actualidad con la gran producción de software para resolución de los modelos de los distintos problemas de la ingeniería, con herramientas poderosas como los son las computadoras personales cuya capacidad en su hardware y su memoria de procesamiento, y por otro lado en el avance de los métodos numéricos de resolución nos preguntamos qué queremos que sepan nuestros alumnos de ingeniería, y sin duda deberán manejar muy bien los modelos matemáticos que les ofrecen estos programas y si éstos son los adecuados. Es allí donde el ingeniero analiza qué modelo se adecua a la realidad y no como está sucediendo que los alumnos parece que pensaran que no importa cuál sea la realidad, adecuemos la misma a nuestro modelo.

El conocimiento de las matemáticas es hoy más importante que en décadas pasadas cuando el ingeniero trabajaba con resoluciones de aproximación y donde lo empírico jugaba una papel preponderante. Las herramientas de hoy son descriptivas y analíticas y son lo suficientemente poderosas para poder describir la solución en forma discretizada en todo el dominio, pero también son un peligro ya que si el modelo no es el adecuado, su solución inclusive en un entorno gráfico atractivo será errónea. Esto se ha podido apreciar también en los últimos años. Nadie le daría un bisturí a un médico que no sabe cómo utilizarlo. Manejar un programa no es manejar el problema, comprender el modelo matemático es manejar el problema.

Nuestra experiencia áulica

Nos propusimos profundizar la experiencia de impartir con gran rigor matemático la materia, que tenía un aceptable nivel de aprobación con adecuados conocimientos según lo encuestado en las materias de aplicación.

El experimento se diseñó para destacar dos variables; el incremento de la calidad y la cantidad de la teoría y el rigor matemático y por otro lado disminuir el tiempo de los ejercicios prácticos con la ayuda de la tecnología, con el programa Matlab y Mathcad. Hubo un apoyo permanente de aula virtual (Sistema LEV, plataforma Moodle).

1.3 Experiencia 1

Se realizan como actividades extracurriculares de asistencia no obligatoria, con la presencia del 90% de los alumnos de la comisión. El interés que provocan estas clases de aplicación llama realmente la atención. La actividad se desarrolla con una guía orientadora. Los alumnos llevan sus notebooks conformando grupos, y trabajan con los programas de Matlab o Mathcad, conjuntamente con la planilla de Excel. Esto último para que los estudiantes puedan observar que los programas, en especial Matlab, no son "cajas negras", que hay algo que no vemos en ellos: es el desarrollo de los códigos fuente. Es por esto que deben comprender por sí mismos la importancia de la elección del modelo matemático por encima del programa o software a utilizar.

Así es como a la hora de elegir un software deberán estudiar detenidamente qué ecuaciones resuelve y en qué entorno son válidas esas ecuaciones como también el método numérico usado.

Una experiencia realizada

Un típico ejercicio en una situación problemática según las características solicitadas desde la estrategia del Aprendizaje Basado en Problemas (ABP), es el de la ley de Hooke que establece que la longitud x de un resorte uniforme es una función lineal de la fuerza que se aplica al resorte.4

Preparación de la tarea

Se les comunica a los alumnos que trabajaremos con computadoras portátiles (1 cada 5 alumnos aproximadamente), anticipando esto en la clase anterior y realizando la comunicación en el aula virtual.

El docente verificará que el equipamiento es el suficiente, en caso contrario se realizará la actividad programada en el Laboratorio de Computación.

También se le pedirá que busque Bibliografía sobre la Técnica de mínimos cuadrados y que la tenga para realizar la actividad programada, completando con algunos links que subirá el docente al aula virtual para despertar el interés.

Objetivos:

Los siguientes son los objetivos que espera el docente al finalizar la actividad

1- La idea es cambiar el concepto de “entrega” del conocimiento, en este caso, ejercicio resuelto, a la construcción de la solución del mismo.
2- Utilizar los conceptos aprendidos en el capítulo de “Espacios con Producto Interno, a un ejemplo de la ingeniería
3- Reafianzar la teoría de álgebra aprendida en el capítulo, al aplicarla en un Problema conocido por los alumnos en otra área del conocimiento como es el de la Física integrando ambos conocimientos, la ley de Hooke y la aproximación a la misma con mínimos cuadrados.
4- Incentivar al alumno con ejemplo sencillos, al “acercarlos” a la idea que ellos tienen de lo que son las prácticas de su profesión.
5- Hacer uso de las herramientas del programa de Matlab o Mathcad, previamente usado, ahora aplicado a un caso concreto.

Guía para el alumno:

EJERCICIO:

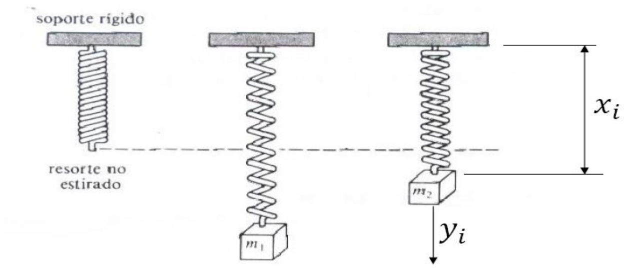


Fig. 1. Resorte descargado y con dos cargas

ENUNCIADO: Se realizaron 4 mediciones sobre el sistema, el resorte sin fuerza aplicada tiene una longitud de 6,1cm, las que se presentan en la siguiente tabla:

Tabla 1. Mediciones realizadas.

Mediciones	
Xi (cm)	Yi (Kg)
6,1	0
7,6	2
8,7	4
10,4	6

1- Analice el experimento y encuentre qué Ley que usted conoce relaciona los valores de la Tabla 1. Puede ayudarse graficando los valores de la Tabla en un sistema de coordenadas cartesianas rectangulares con una planilla de Excel.

En este punto los alumnos discuten y reconocerán la Ley y verán que la Ley de Hooke está representada en los puntos del ensayo y todavía no han modelado la misma.

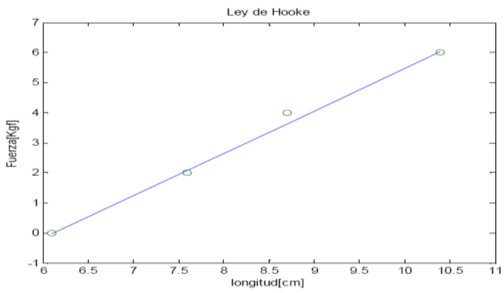


Fig. 2. Gráfico de las mediciones

2- Qué valor desconoce para poder completar todos los valores del experimento para distintas fuerzas?.
3- Plantee el sistema que necesita resolver. Relacione con el tema estudiado en este capítulo "Distancia de un punto a una Variedad Lineal.

Se arman la matriz A y el vector b

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 6{,}1 \\ 1 & 7{,}6 \\ 1 & 8{,}7 \\ 1 & 10{,}4 \end{vmatrix} \quad X = \begin{vmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \end{vmatrix} \quad b = \begin{vmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \\ 6 \end{vmatrix} \qquad \textbf{(1)}$$

Este tema es el más importante porque significa que el alumno identificó cuáles son sus incógnitas para realizar la aproximación lineal.

$$W = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6{,}1 \\ 7{,}6 \\ 8{,}7 \\ 10{,}4 \end{bmatrix} \right\rangle \text{ ;W es subespacio de } \mathbb{R}^{4x1} \qquad \textbf{(2)}$$

Luego el alumno aplica los conocimientos aprendidos en el capítulo de Espacios con Producto Interno, en la Unidad "Distancia entre un punto a un subespacio".

$$W^{\perp}\colon \begin{cases} w_1 + w_2 + w_3 + w_4 = 0 \\ 6{,}1\, w_1 + 7{,}6\, w_2 + 8{,}7\, w_3 + 10{,}4\, w_4 = 0 \end{cases} \qquad \textbf{(3)}$$

$$\text{con} \quad w = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \end{bmatrix} \varepsilon\, W^{\perp}$$

Aplica el procedimiento aprendido. Construye una variedad lineal ortogonal que pasa por b.

$$B = b + W^{\perp}\colon \begin{cases} w_1 + w_2 + w_3 + w_4 = 12 \\ 6{,}1\, w_1 + 7{,}6\, w_2 + 8{,}7\, w_3 + 10{,}4\, w_4 = 112{,}4 \end{cases} \qquad \textbf{(4)}$$

Como se muestra en la figura

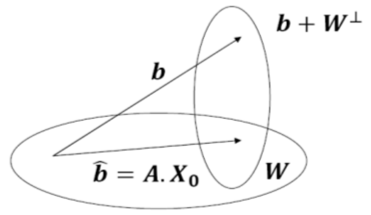


Fig. 3. Variedad ortogonal al subespacio W que pasa por el punto b

$$W = \left\{ W \varepsilon R^{4x1} \ / \ w = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \end{bmatrix} \ donde \begin{cases} w_1 = \beta_0 + 6{,}1\,\beta_1 \\ w_2 = \beta_0 + 7{,}6\,\beta_1 \\ w_3 = \beta_0 + 8{,}7\,\beta_1 \\ w_4 = \beta_0 + 10{,}4\,\beta_1 \end{cases} \right. \quad \textbf{(5)}$$

$$B \cap W: \begin{cases} 4\,\beta_0 + 6{,}1\,\beta_1 + 7{,}6\,\beta_1 + 8{,}7\,\beta_1 + 10{,}4\,\beta_1 = 12 \\ 6{,}1\,(\beta_0 + 6{,}1\,\beta_1) + 7{,}6\,(\beta_0 + 7{,}6\,\beta_1) + 8{,}7(\beta_0 + 8{,}7\,\beta_1) + 10{,}4\,(\beta_0 + 10{,}4\,\beta_1) = 112{,}4 \end{cases} \quad \textbf{(6)}$$

$$B \cap W: \begin{cases} 4\,\beta_0 + 32{,}8\,\beta_1 = 12 \\ 32{,}8\,\beta_0 + 278{,}82\,\beta_1 = 112{,}4 \end{cases} \quad \textbf{(7)}$$

Cuya solución es, resolviendo el sistema por Matlab:

$$\beta_0 = 8{,}64 \ \ \beta_1 = 1{,}41 \quad \textbf{(8)}$$

4- Cuál es la matriz error de mínimos cuadrados y cuál es el error de la recta obtenida (aproximación lineal del ensayo)?. Para ello recuerde los principios de mínimos cuadrados de la Bibliografía estudiada.

En resumen, lo que se obtiene es, aplicando mínimos cuadrados resolviendo con el programa de Matlab y verificando el valor del error con la planilla de Excel y teniendo en cuenta la Fig. 3.

$$X_0 = \begin{bmatrix} -8{,}64 \\ 1{,}41 \end{bmatrix} \quad \textbf{(9)}$$

$$\hat{b} = AX_0 = \begin{bmatrix} 1 & 6{,}1 \\ 1 & 7{,}6 \\ 1 & 8{,}7 \\ 1 & 10{,}4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -8{,}64 \\ 1{,}41 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.039 \\ 2{,}076 \\ 3{,}62 \\ 6{,}024 \end{bmatrix} \quad \textbf{(10)}$$

$$e = AX_0 - b = \begin{bmatrix} -0.039 \\ 2{,}076 \\ 3{,}62 \\ 6{,}024 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.039 \\ -0{,}076 \\ 0{,}380 \\ -0{,}024 \end{bmatrix} \quad \textbf{(11)}$$

$$||e||^2 = 0{,}15 \quad \textbf{(12)}$$

Este ejemplo y otros que se desarrollan como actividades extracurriculares resultan un acercamiento del alumno a los problemas de la ingeniería más complejos que verán en su profesión, como por ejemplo los problemas de infiltración.

1.4 Experiencia 2

Se impartieron *cursos sistemáticos* de: "Lógica de demostración de teoremas", que fueron obligatorios, en ellos se contó con una concurrencia masiva. Se trabaja luego en la materia con libertad para el alumno en la demostración de los teoremas, logrando una importante variedad de discursos lógicos aceptables. Esto redunda en una aprobación generalizada de la teoría matemática por parte de la mayor parte del alumnado.

Se impartieron cursillos optativos con diversos contenidos extracurriculares, variables según los años: álgebra tensorial básica, diagonalización en espacios de dimensión "n", aproximación de funciones, álgebra en espacios de funciones, ecuaciones diferenciales, aplicación de los valores y vectores propios a la ingeniería.

La concurrencia para un curso de 100 alumnos varía entre 10 y 15 alumnos, pero con notable permanencia y asimilación.

1.5 Resultados obtenidos

Las dos experiencias que realizamos los autores del presente trabajo se llevaron a cabo a lo largo de 9 años sistemáticamente con una gran participación de alumnos. Obteniendo alumnos con un alto grado de aprobación de la materia por promoción. Al transcurrir la puesta a punto de la experiencia los 2 cursos habituales de 80 alumnos que tuvieron un incremento de alrededor del 10 % o sobre el valor histórico. Pero lo más significativo fue que de estos dos cursos surgieron casi el 100% de los practicantes en docencia de pregrado en la materia Álgebra Lineal, que son 5 para los 900 alumnos que tenemos por año. El porcentaje de aprobación de los alumnos de estos cursos se incrementó en un 10% en los 2 turnos posteriores al dictado de los mismos.

2 Conclusión

Es necesario enseñar matemática a nuestros estudiantes con niveles adecuados a los ingenieros de los demás países del mundo si queremos tener ingenieros competitivos y adecuados a la realidad actual más allá de las políticas transitorias que sufre nuestro país.

Los programas deben ser adecuados para formar ingenieros de buen nivel, con fuertes materias básicas con claras orientaciones a la ingeniería con todo rigor científico que desarrollen las competencias básicas del ingeniero para acceder a las cambiantes tecnologías. Es nuestra conclusión la necesidad de aumentar o como mínimo conservar los contenidos teóricos adaptándolos a las reales necesidades de los ingenieros, utilizar las nuevas tecnologías de manera sistemática, especialmente para disminuir el tiempo ocioso de los cálculos rutinarios y detectamos la necesidad de dar elementos teóricos de lógica de demostración.

Los métodos Numéricos y Computacionales son los métodos de cálculo en la actualidad, pero es importante comprender que si bien son herramientas muy poderosas, requieren de usuarios bien preparados con un conocimiento preciso de los modelos numéricos utilizados, el campo de aplicación y sus limitaciones. También es importante tener criterio a la hora de analizar los resultados, ya que por su facilidad en el uso (ingreso de datos y cálculo), pueden tentar al profesional a pensar que todo lo que sale de esa "caja negra" es verdadero y no susceptible de error. Los modelos analíticos se utilizaron en el siglo veinte como herramientas de solución de los problemas de infiltración en presas, canales, y terraplenes, por ejemplo. Sin embargo en la década del 80 con el advenimiento de las computadoras personales y el avance en el la tecnología del hardware, en cuanto a la capacidad de procesamiento entre otras mejoras tecnológicas, es que surge la utilización de los métodos numéricos de resolución de las ecuaciones diferenciales. Estos métodos numéricos que en sus inicios resultaban muy difíciles de implementar por la gran cantidad de ecuaciones y variables a resolver, encuentran su momento de aplicación. Es así que a partir de la década del 90, se dejan en forma casi definitiva la utilización de los métodos analíticos, siendo reemplazados por los métodos numéricos de diferencias finitas y de elementos finitos [5].

Acceso a posgrados y a la docencia. Un ingeniero formado con base matemática adecuada puede acceder a las nuevas tecnologías y realizar cursos de especialización sin dificultades, sin contar con barreras de ignorancia que imposibilitan el acceder sin realizar extensos cursos que en general no están disponibles sino en las facultades de matemática con orientaciones a la investigación pura.

La continuidad de la experiencia y la investigación didáctica es nuestro plan de trabajo y en la actualidad estamos trabajando en ello.

Referencias

1. Piaget, J.:Génesis de la estructura en la psicología de la Inteligencia, capítulo 6 del libro “Seis estudios de psicología.” .Ed. Labor.(1990)
2. Piaget, J.:Psicología de la Inteligencia. Editorial Psiqué. (1973)
3. Programmes des clases préparatoires aux Grandes Ecoles (Discipline:Mathématiques Première année). Ministère de l’enseignement supérieur et de la recherche, de la Republique Francaise. (2013)
4. Vera de Payer, E.: Álgebra Lineal, Teoría Práctica y Aplicaciones. Ed. Universitas. (2012)
5. Reyna, E.: “Modelos Analíticos y Numéricos para la Determinación de Infiltración en Presas de Material Suelto. Análisis de su Uso y Sensibilidad” (2011).

Volver al Índice

Utilización de Casos en el Curso de Probabilidad y Estadística: una Experiencia con Alumnos de Ingeniería Industrial

Noemí M. Ferreri, Facundo Martínez, Jesica Romero, Amancay Scaglia
Proyecto de Investigación ING525, Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura,
Universidad Nacional de Rosario
Pellegrini 250, 2000 Rosario
nferreri@fceia.unr.edu.ar, {martinezfacundopm, jesicaromero1992}@gmail.com; amancay.scaglia@hotmail.com

Resumen. La resolución de problemas de naturaleza estadística es una de las competencias a desarrollar en los futuros profesionales de la Ingeniería Industrial. Esto requiere que en los cursos de Estadística, los alumnos se enfrenten frecuentemente a este tipo de problemas y cuenten con espacio para la reflexión y la discusión. En este trabajo se describe cómo se utilizaron casos, que constituyen los problemas de mayor complejidad, en el curso del año 2016 en la Universidad Nacional de Rosario. El trabajo con los casos fue observado por exalumnos y docentes de Matemática, quienes luego entrevistaron a los alumnos para conocer sus opiniones. Todos consideraron positivo el trabajo con los casos y la interacción entre pares; pero cuestionaron algunos aspectos de la organización y de la puesta en común. A partir de las conclusiones obtenidas, se proponen cambios que se implementarán en el próximo curso.

Palabras Clave: Resolución de problemas, Uso de casos, Pensamiento estadístico, Ingeniería Industrial.

1 Introducción

La resolución de problemas de naturaleza estadística es una de las competencias que se deben desarrollar en la formación de los futuros ingenieros industriales. Esta tarea constituye en sí misma un proceso con diferentes etapas que algunos autores resumen en un ciclo, como por ejemplo el “ciclo investigativo PPDAC”, propuesto por Wild y Pfannkuch [1]. Las etapas de este ciclo son: Planteo del Problema (P), Planificación del Estudio Estadístico (P), Recolección de los Datos (D), Análisis de los Datos (A) y Obtención de Conclusiones (C).

Para que los alumnos desarrollen esta competencia, es importante que en los cursos de Estadística puedan resolver más o menos frecuentemente problemas con diferente grado de dificultad, en los cuales tengan la posibilidad de integrar la mayor cantidad de etapas del ciclo y que cuenten con un espacio para la reflexión y la discusión. Entre estos problemas, los casos son los que resultan de mayor dificultad puesto que los alumnos sólo cuentan con una situación problemática y con los datos correspondientes y deben llevar adelante todas las etapas usando su propio criterio.

La resolución de los casos favorece además la integración de todos los contenidos de la materia, así como el trabajo en grupos y la interacción entre pares y pone a los alumnos frente a la necesidad de diseñar y elaborar un informe escrito u oral para comunicar los pasos seguidos y las conclusiones obtenidas, todas competencias también deseables de desarrollar en los futuros profesionales.

En el primer curso de Estadística para alumnos de Ingeniería Industrial de la Universidad Nacional de Rosario (UNR) se trabaja desde hace algunos años con la resolución grupal de casos. En el presente trabajo se describe la experiencia llevada a cabo con el curso correspondiente al año 2016 y se caracteriza el trabajo con los casos en relación a diferentes aspectos (dificultades presentadas en las etapas del ciclo de resolución, trabajo en grupo, exposición, etc).

El trabajo se organiza en cuatro secciones de las cuales la presente Introducción es la primera. En la segunda sección se presentan brevemente a los cursos de Estadística para Ingeniería Industrial (UNR) y se caracterizan los diferentes tipos de problemas que se resuelven en ellos. Entre estos, los casos constituyen los de mayor complejidad. En la tercera sección se describe el trabajo con los casos durante el año 2016 y se lo caracteriza según diferentes aspectos. En la cuarta sección se sustancian las principales conclusiones y recomendaciones.

2 La resolución de problemas en los cursos de Estadística para Ingeniería Industrial, UNR

El curso de Probabilidad y Estadística constituye el primer curso de Estadística para los alumnos de Ingeniería Industrial y se desarrolla en el segundo cuatrimestre del tercer año de la carrera con una carga horaria de 6 horas semanales, entre las que se encuentran algunas clases en el Laboratorio de Informática. En el primer curso se trabaja sobre la importancia de la variabilidad, tanto en las muestras como en las poblaciones y se estudian fenómenos aleatorios. En el segundo curso, a cargo de los mismos docentes y con la misma carga horaria semanal, se da Estadística aplicada a Control de Procesos y Gestión de la Calidad. En dicho curso, denominado Decisiones Estadísticas y Control de la Calidad, los contenidos abarcan pruebas de hipótesis para una y más poblaciones, análisis de regresión y herramientas de control de procesos como los gráficos de control e índices de capacidad.

En ambos cursos se utiliza un texto de referencia [2] y materiales elaborados por la cátedra. Tanto el texto como los materiales tienen abundantes ejemplos resueltos y problemas propuestos, todos orientados a aplicaciones en el ámbito empresarial. De ellos, se seleccionan habitualmente algunos para desarrollar en clase y otros para que los alumnos trabajen fuera de dicho horario. Las aplicaciones se complementan con prácticas adicionales integradoras de diferentes temas y guías para el trabajo en el Laboratorio de Informática, donde los alumnos utilizan Excel y Minitab. Si bien muchos de los problemas se resuelven en pizarrón, siempre se favorece la resolución y discusión grupal.

Todos los ejemplos y problemas son elaborados por la cátedra aplicando los indicadores para el desarrollo del pensamiento estadístico propuestos por Carnevali [3, 4, 5]. Con los problemas del libro de texto, estos indicadores se utilizan a la hora de hacer preguntas complementarias en la discusión con los alumnos. La mayoría de los problemas son concebidos como proyectos de análisis de datos “recortados” en el sentido de que generalmente las variables de interés ya están elegidas y respecto de ellas se proporcionan datos de una muestra aleatoria. La parte del ciclo PPDAC que los alumnos deben trabajar especialmente es Problema-Análisis-Conclusiones, lo que implica traducir el problema en el lenguaje específico de la asignatura (P) y a partir del conjunto de datos ya seleccionados de los que no se pone en duda su calidad, realizar los análisis correspondientes (A), obtener conclusiones e interpretarlas en contexto (C). Sobre las etapas de Planificación (P) y Recolección de los Datos (D), en algunos casos los alumnos pueden tomar algunas decisiones o bien reflexionar sobre algunas cuestiones.

Los problemas con los que los alumnos trabajan en los cursos de Estadística pueden clasificarse en tres niveles, de acuerdo al objetivo que se persigue con su resolución y a la posibilidad de integración de las diferentes etapas del ciclo PPDAC (guiada o autónoma):

- Nivel 1: El objetivo de los problemas en este nivel es que los alumnos aprendan a familiarizarse con algún modelo, a aplicar algún concepto determinado o a utilizar una determinada herramienta de análisis. Es posible que en su resolución deban transitar alguna/s de las etapas del ciclo PPDAC; pero el énfasis estará puesto en lo que se pretende lograr.
- Nivel 2: El objetivo de los problemas en este nivel es que los alumnos aprendan a integrar el ciclo PPDAC en ocasión de resolverlos. Los alumnos cuentan con una descripción de la situación problemática, un conjunto de datos y consignas propuestas por los docentes. Al responder a dichas consignas, van integrando el ciclo y resolviendo el problema.
- Nivel 3: El objetivo de los problemas en este nivel es que los alumnos integren el ciclo PPDAC de manera autónoma. Los alumnos sólo cuentan con una descripción de la situación problemática y un conjunto de datos y deben resolverlo utilizando su propio criterio.

En los problemas del primer nivel, la integración del ciclo PPDAC es secundaria pero siempre está presente. Por ejemplo, si se pretende que los alumnos se familiaricen con la distribución normal, algunos de los problemas propuestos buscarán que puedan obtener probabilidades bajo este modelo. La etapa de planteo (P) estará presente al trabajar con una determinada población y con cierta variable de interés y en el problema pueden aparecer preguntas de tal manera que con las probabilidades obtenidas los alumnos puedan elaborar conclusiones (C).

En los problemas de los restantes niveles, en cambio, el objetivo principal es la integración del ciclo PPDAC y por lo tanto, en ellos aparecerán más etapas y/o más elementos de cada una de ellas. La diferencia es que en los problemas de Nivel 2 el alumno va integrando las etapas del ciclo guiado por las consignas de los docentes; mientras que en los de Nivel 3, es él quien debe decidir todas las acciones que va a realizar. Los problemas de este último nivel se pueden considerar “casos” y si bien siempre el trabajo en grupos es más favorable para el aprendizaje, en la resolución de los casos resultan fundamentales la interacción y la discusión entre pares.

3 El trabajo con los casos en el curso del año 2016

Para el curso correspondiente al año 2016, se diseñaron cinco casos, utilizando los indicadores para el desarrollo del pensamiento estadístico mencionados en la Sección 2. En todos ellos había una situación problemática a abordar, de complejidad acorde con lo trabajado en el curso y se proveía a los alumnos de los datos correspondientes a una muestra aleatoria de la población de interés. Un resumen de estos casos se presenta en la Tabla 1.

En la Sección 3.1 se describe la forma en que se organizó el trabajo con los casos presentados en la Tabla 1. En la Sección 3.2, se caracteriza dicho trabajo.

Tabla 1. Casos propuestos para el trabajo durante el año 2016, en el curso de Probabilidad y Estadística. Ingeniería Industrial, UNR

Caso N°	Conceptos principales	Breve resumen
1	El intervalo de confianza para la media poblacional no brinda información sobre los valores de la variable Estimación de la desviación estándar y de la proporción de éxitos	En una empresa se realiza un proceso de corte. Se pretende evaluar si dicho proceso cumple con las especificaciones en relación a la profundidad, que debe ser menor que cierto valor. Los alumnos reciben una muestra aleatoria de 150 cortes, a partir de la cual pueden analizar si el proceso cumple con lo pretendido. No deben confundir las especificaciones para un valor de la variable con los valores que pueda tomar el promedio de la población. Si se considera a este parámetro, debe tenerse en cuenta también a la desviación estándar; o bien definir a la proporción de cortes defectuosos como parámetro de interés.
2	Muestras aleatorias simples Estimación de la media y de la desviación estándar.	En una empresa que produce elásticos para camiones se observa que la desviación estándar es demasiado grande en relación a las especificaciones que deben cumplirse. Los alumnos reciben dos muestras de 60 piezas, obtenidas luego de modificar el proceso, de las cuales una no resulta aleatoria a causa del método de medición. Usando la información de la muestra apropiada, deben analizar si las modificaciones redujeron la desviación estándar y mantuvieron al promedio en su nivel.
3	Muestras aleatorias sesgadas y no sesgadas. ¿Cuáles son los inconvenientes de las primeras? Estimación de la proporción de éxitos Estimación del promedio y de la mediana para distribuciones asimétricas	En una maderera los clientes se quejan por un descenso en la calidad de las placas, evaluada a través del número de imperfecciones que estas presentan. Los alumnos reciben dos muestras aleatorias de 400 placas, de las cuales una está sesgada. Los alumnos deben informar a la maderera sobre la situación actual de las placas que se comercializan, usando la información de la muestra apropiada. Los parámetros de interés son la proporción actual de placas defectuosas o bien el número promedio o la mediana de imperfecciones por placa.
4	Exactitud y precisión de las mediciones. Transformación lineal de una variable aleatoria	En una metalúrgica se cuenta con dos métodos diferentes para medir el diámetro de las piezas cilíndricas. A partir de información de una muestra de mediciones de cada uno, se debe elegir el método más apropiado.
5	Modelos Binomial y Normal Diferencia de variables Estimación de parámetros	En una fábrica de muebles deben decidir si comprar las patas a un cierto proveedor. En principio este brinda información sobre el comportamiento en probabilidad del diámetro de las patas que produce, lo cual permite a los alumnos concluir que si la información es correcta, ese proveedor es apropiado. Pero los alumnos deben comprobar si la información es apropiada, a partir de información muestral

3.1 La organización del trabajo con los casos

Los casos se asignaron aleatoriamente a los diferentes grupos de alumnos en el último mes del cursado y se definió una fecha para la exposición oral y la discusión. Los grupos debían presentar un informe escrito y preparar una presentación, con ayuda de alguna herramienta como Power Point, por ejemplo.

El día fijado para la exposición, para cada caso se seleccionó aleatoriamente a uno de los grupos que lo tenía asignado, para que realice la presentación oral. Los restantes grupos que tenían el mismo caso debían estar atentos, para hacer comentarios adicionales, observaciones, etc. A los alumnos del grupo elegido, ya en el frente y listos para iniciar su exposición oral, en primer lugar se les pidió que leyeran con detenimiento el texto del caso y plantearan objetivos, variables, población, parámetros de interés. (Etapa P) para luego seguir con el resto de las etapas. Se les pidió también que justificaran el porqué de todos los análisis realizados y las conclusiones obtenidas.

Una vez cumplida la presentación por parte del grupo seleccionado, se realizó una puesta en común en la cual los restantes grupos hicieron sus observaciones y los docentes intentaron generar un análisis crítico respecto a la forma de encarar la solución al problema planteado. Se propusieron para ello preguntas como ¿se podrían haber medido otras variables?, ¿algún otro parámetro sería de interés?, ¿cómo se habrán medido las variables elegidas?, etc. (en dichas preguntas se utilizaron algunos indicadores para el desarrollo del pensamiento estadístico, mencionado en la Sección 2). Todos los grupos entregaron un informe escrito

3.2 Caracterización del trabajo con los casos

Alumnos avanzados de Ingeniería Industrial y profesores de Matemática con experiencia en Estadística, observaron las exposiciones de los casos y la puesta en común de los resultados y luego entregaron a los alumnos una encuesta para que todos la respondieran por escrito. Finalmente llevaron a cabo una entrevista no estructurada con los diferentes grupos para obtener la opinión de los alumnos sobre el trabajo con los casos. Se decidió que los entrevistadores no fueran los docentes para que los alumnos se expresaran con toda libertad.
Los docentes a cargo del curso, también compartieron sus observaciones de todo el trabajo con los casos.

En la Tabla 2 se resumen los resultados de las encuestas entregadas a cada grupo de alumnos una vez finalizada la exposición de los casos. La finalidad de dicha encuesta era que los alumnos califiquen las dificultades encontradas en las diferentes etapas del ciclo PPDAC durante la resolución de los casos respectivos. Cada grupo utilizó valores entre 1 y 3 (donde 1 corresponde a dificultad baja, 2 a dificultad media y 3 a dificultad alta).

La parte final de la encuesta dejaba un espacio libre para que los alumnos hicieran comentarios sobre cuestiones que ellos consideraban que ameritaban ser agregadas. Los comentarios destacados fueron los siguientes:

- El trabajo en grupo resultó positivo debido a que se tornó llevadero y fructífero el compartir opiniones y debatir ideas para una mejor resolución del caso. Se destacó su importancia.
- En relación a las exposiciones: faltó dinamismo durante la puesta en común y se expresó preferencia sobre la realización de éstas durante el cursado y no en la última semana de clases. Las críticas por parte de las profesoras resultaron poco constructivas para los alumnos.
- Se hubiera necesitado una pre-entrega para discutir los resultados y/u horarios extras de consultas/guía para los grupos.
- Debido a la falta de calificación y del poco tiempo de anticipación respecto a la entrega de los enunciados, los trabajos fueron resueltos con poco interés.

De la entrevista no estructurada con los estudiantes avanzados de Ingeniería Industrial y los profesores de Matemática, se destaca que los alumnos prefieren el trabajo progresivo con los casos, es decir, a lo largo del cuatrimestre. Respecto al informe, surgió que no comprendieron que debía estar escrito de manera clara y con un sentido de cierre del caso. En dicha situación sugirieron se brinden más pautas para su elaboración.

Tabla 2. Nivel de dificultad más frecuentemente oservado en el proceso de resolución de los casos propuestos

Tareas asociadas a las etapas del Ciclo PPDAC	Nivel más frecuente
Comprensión del enunciando del problema (objetivo, población, variable, parámetros de interés) (Etapa P)	Dificultad baja

Pasaje al lenguaje y a la simbología estadística, tanto el objetivo como de toda la información del enunciado (Etapa P)	Dificultad baja
Identificación de las etapas de la resolución del problema (Ciclo PPDAC)	Dificultad baja
Aplicación de herramientas de análisis tanto descriptivas como inferenciales (Etapa A)	Según los casos, el nivel de dificultad observado fue diferente
Uso del software (Etapa A)	Dificultad baja
Obtención de conclusiones estadísticas (Etapa C)	Dificultad media
Obtención de conclusiones en contexto (Etapa C)	Dificultad baja
Escritura del informe (Ciclo PPDAC)	Dificultad baja

A continuación se detallan las observaciones de los colaboradores durante la exposición de los casos:

- Los alumnos demostraron especial interés en el trabajo con los casos. Estos no sólo les resultaron motivadores sino que además les fueron útiles para vincular todos los conceptos aprendidos, según manifestaron en distintas oportunidades.
- La identificación de los problemas propuestos en términos de los conceptos y el lenguaje propio de la Estadística les resultó más difícil en las primeras situaciones; pero fue surgiendo más naturalmente en las restantes.
- En la etapa de análisis exploratorio, en un primer momento hubo que insistir en que no todo lo que el software produce debe presentarse, sino que resulta necesario realizar una selección pertinente al objetivo del trabajo.
- Surgió naturalmente el uso de los datos para verificar requerimientos de las técnicas de inferencia.
- En la presentación de las conclusiones, la mayor parte de los grupos pudo expresarlas en relación al contexto, aunque con más dificultad para hacerlo sin utilizar el lenguaje técnico.
- Algunos grupos estaban más afianzados con el tema que otros.
- Es importante trabajar los casos distribuidos en el tiempo. Por ejemplo, dedicarle dos clases a las exposiciones de los casos, en vez de una.
- Existieron buenas intervenciones y un buen manejo de la palabra por parte de los profesores.
- En una de las clases hubo poco respeto entre compañeros, aquellos alumnos que deberían estar escuchando hablaban por sobre los compañeros que estaban exponiendo. Mientras que en la otra hubo respeto entre pares tanto en los momentos en los que hubo intercambio de opiniones como en los momentos en los que los expositores respondían y evacuaban las dudas de aquellos compañeros que poseían distinto caso. Conviene implementar algún soporte informático para que los estudiantes muestren lo que hicieron.

4 Conclusiones y recomendaciones

Más allá de las dificultades y aspectos a mejorar, el trabajo con los casos resultó positivo. Surgió la necesidad de implementar cambios, ya que si bien los alumnos vieron favorable el trabajo en grupo, la organización propuesta por la cátedra no tuvo el efecto deseado. Entre los cambios necesarios se pueden mencionar, por ejemplo, ir presentando los casos desde el inicio del curso para poder discutir paulatinamente las distintas etapas de modo que sólo queden para el final el análisis inferencial y las conclusiones. También se hicieron sugerencias en relación a agilizar la puesta en común para que esta resulte provechosa para los alumnos.

Es intención de la cátedra implementar estos y otros cambios durante el año 2017.

Los docentes observamos además que no sólo había dificultades en la resolución del ciclo PPDAC, a pesar de que los alumnos opinaban mayoritariamente que el nivel de dificultad era bajo, sino también en la elaboración y en la presentación del informe. Esto plantea la necesidad de fortalecer el trabajo en relación a ambos procesos.

Los alumnos avanzados y los docentes de Matemática cumplieron un papel muy importante, aportando sus observaciones y dialogando con sus pares para conocer sus opiniones y sugerencias.

Referencias

1. Wild, C.; Pfannkuch, M.: Statistical Thinking in Empirical Enquiry (with discussion). *International Statistical Review*, Vol 67, Nº 3, pp. 223-265 (1999)
2. Hildebrand, D.K. ; Ott, R.L.: Estadística Aplicada a la Administración y a la Economía, 3era. Edición: Addison Wesley Longman (1998)
3. Carnevali, G.; Ferreri, N.: Resolución de problemas de naturaleza estadística; indicadores para su evaluación en alumnos de ingeniería industrial. *XIX EMCI Nacional y XI EMCI Internacional*, San Nicolás (2015)
4. Carnevali, G.; Ferreri, N.; Medina, M.: Resolución de problemas de decisión estadística; diseño y aplicación de indicadores para su desarrollo y evaluación, *XVIII EMCI Nacional y X EMCI Internacional*, Mar del Plata (2014)
5. Carnevali, G.; Ferreri, N.: Pensamiento estadístico: identificación de nudos de dificultad en alumnos de Ingeniería Industrial para el diseño de módulos didácticos, *XV EMCI*, Tucumán (2009)

Volver al Índice

La Gestión del Conocimiento y Resolución de Problemas Matemáticos en Entornos Virtuales

Miriam E. Ríos[1], Gustavo J. López[1], Sebastián I. Scaglione[1], Eve L. Coronel[2]
[1]Departamento de Matemática, Facultad de Ciencias Exactas y Tecnología, Universidad Nacional de Santiago del Estero, Av. Belgrano 1912, CP4200-Santiago del Estero-Argentina
{merios15, scaglionesebastian}@yahoo.com.ar, gustavojlopez@gmail.com,
[2]Escuela para la Innovación Educativa, Universidad Nacional de Santiago del Estero
Av. Belgrano 1912 CP4200-Santiago del Estero-Argentina
ecoronel@unse.edu.ar

Resumen. Se presenta una experiencia en aplicación de un modelo de autogestión del aprendizaje con integración de aula virtual y métodos de gestión del conocimiento y resolución de problemas. La misma se llevó a cabo en la asignatura Modelización Matemática de la Licenciatura en Matemática de la Facultad de Ciencias Exactas de la Universidad Nacional de Santiago del Estero. Esta implementación, facilita el trabajo de los estudiantes a la vez que incrementa su motivación y la implicación de los mismos con la asignatura. Se advierte que la misma puede trasponerse directamente a Investigación Operativa de la carrera de ingeniería industrial, en un doble sentido. En primer lugar, los modelos de distribución son casos particulares de la programación lineal tema que se estudia en ambas asignaturas. Y segundo, en las actividades propuestas en esta experiencia se procura aportar al desarrollo de competencias de los estudiantes, coherentes con las de un ingeniero industrial, a saber: comunicarse de manera efectiva, resolver problemas de manera óptima para satisfacer necesidades establecidas y trabajar colaborativamente.

Palabras Clave: Resolución de problemas, Aula virtual, Gestión del conocimiento.

1 Introducción

En las universidades actuales, los cambios tecnológico-sociales y los avances en la ciencia exigen a su cuerpo de educadores buscar alternativas para mejorar el proceso de enseñanza y aprendizaje. Un reto para el profesor es encontrar formas apropiadas con el medio y la época en que vivimos, que permitan ser efectivos en su labor diaria.

La creación de conocimiento y su transmisión forman parte de la razón de ser de la universidad. Por tanto, vale la pena reflexionar sobre como la Gestión del Conocimiento (GC) se incorpora a las instituciones universitarias.

Carmona, Gallego y Muñoz [1] sostienen que la GC hace aportes a la gestión de las instituciones universitarias, al igual que en todo tipo de organizaciones. Esos aportes son especialmente interesantes cuando el grado de virtualidad y de estructura en red de la universidad aumenta. En la actividad docente, por ejemplo, la creación de grandes repositorios de "contenidos" (representaciones del conocimiento) en múltiples formatos y estructurados de tal manera que su recuperación y uso sean fáciles a través de la red, la cual puede ser una herramienta potente que complemente tanto la docencia tradicional presencial como la virtual. De igual manera, el uso de espacios virtuales para la comunicación y el trabajo en equipo entre los estudiantes, puede contribuir a la mejora del aprendizaje.

La combinación de la gestión del conocimiento con la resolución de problemas en matemática constituye una alternativa para la enseña de las matemáticas que está siendo utilizada en varias escuelas de diferentes países. El enfoque principal incluye la integración de Entornos Virtuales de Enseñanza y Aprendizaje (EVEyA) donde el conocimiento es considerado como un recurso, como un activo que merece ser gestionado.

En este trabajo se describe la aplicación de un modelo de autogestión del aprendizaje con integración de aula virtual y métodos de gestión del conocimiento en la educación universitaria. Esta implementación, facilita el trabajo de los estudiantes a la vez que incrementa su motivación y la implicación de los mismos con la asignatura.

Si bien la experiencia se llevó a cabo en la asignatura Modelización Matemática de la Licenciatura en Matemática (LM) de la Facultad de Ciencias Exactas (FCEyT) de la Universidad Nacional de Santiago del Estero (UNSE), se advierte que la misma puede trasponerse directamente a Investigación Operativa de la carrera de ingeniería industrial, ya que por un lado, los modelos de distribución son casos particulares de la programación lineal tema que se estudia en ambas asignaturas. Y por otro, en las actividades propuestas en esta experiencia se procura aportar al desarrollo de competencias de los estudiantes, coherentes con las de un ingeniero industrial, a saber: comunicarse de manera efectiva, resolver problemas de manera óptima para satisfacer necesidades establecidas y trabajar colaborativamente.

1.1 Dato, información y Conocimiento

Si se quiere gestionar un recurso, primero habrá que delimitarlo.

El concepto de conocimiento resulta más sencillo de entender cuando se explica a partir de otros conceptos como: dato, información y aprendizaje, los cuales muchas veces se tratan como sinónimos, pero existe una diferencia que es necesario aclarar.

Generalmente, se acepta que la información sirve para describir y poner de manifiesto ciertos aspectos de la realidad -hechos, objetos, sucesos, situaciones, intenciones, etc. [2] dichos aspectos se organizan de una manera específica para estar al corriente de ellos.

La información a su vez proviene de los datos, los que constituyen pequeñas unidades de información de cualquier tipo, que pueden ser tratados a través de la recolección, clasificación, agrupación, análisis e interpretación para convertirse luego en información

La información no puede ser procesada sin conocimiento, y el conocimiento para que pueda ser generado requiere de información.

Se define el conocimiento como “un proceso dinámico que puede ser considerado como un modelo mental que cada persona tiene sobre la realidad, que puede ser adquirido por descubrimiento derivado de sucesivas experimentaciones y la relación causa-efecto, ya sea de forma guiada o autónoma”[3].

El conocimiento implica la interpretación y representación de la información. Pues, el primero está afectado por la llegada de nueva información pero, fundamentalmente, implica que el entendimiento de las interrelaciones y el comportamiento, son dependientes del contexto [4]. Tanto el conocimiento como la información se caracterizan por pertenecer a un contexto específico y ser relacionales, en el sentido de que dependen del entorno y se crean dinámicamente como fruto de la interacción social [5]. En este sentido, estos autores consideran la información como un flujo de mensajes. Para ellos el conocimiento es un flujo de información.

Por otra parte, “La transformación de una información en conocimiento exige un trabajo de reflexión (…) No obstante, el carácter reflexivo del juicio necesario para transformar una información en conocimiento supone dominar algunas competencias cognitivas, críticas y teóricas, cuyo fomento es precisamente el objeto de las sociedades del conocimiento. La avalancha de informaciones puede aplastarnos, pero el conocimiento es precisamente lo que permite orientarse en el pensamiento” [1].

El conocimiento adquirido puede ser transferido a un dispositivo físico, lo que significa que éste se vuelva a transformar en información disponible para que otros la procesen. Tanto el conocimiento adquirido como transferido constituyen formas de representar el conocimiento que se explica a continuación.

1.2 Tipos de conocimiento

Según el grado de decoficabilidad del conocimiento, existe una distinción entre conocimiento tácito y conocimiento explicito [5]:

Así, el conocimiento Tácito: es el que poseen las personas fruto de una experiencia personal, de un contexto, pero difícil de transmitir, reproducir y de materializar, es complicado para estructurarlo y almacenar. Incluyen dos elementos diferenciados: los cognitivos -modelos que los individuos crean del mundo, haciendo y manipulando analogías en sus mentes- y los técnicos -se refieren a destrezas y habilidades concretas-. Este tipo de conocimiento se puede difundir frente a frente, en modelos sincrónicos de comunicación. Mientras que el conocimiento explícito: es el que es posible transmitir en lenguaje formal y sistemático, ya que puede ser expresado o codificado en diversas maneras (en palabras, números, datos, fórmulas matemáticas, etc.) y distintos tipos de soportes.

1.3 Gestión del conocimiento en entornos virtuales

El conocimiento es un componente fundamental para el éxito de los individuos y las organizaciones. Pero si el conocimiento por sí solo es importante, la gestión del conocimiento lo es aún más. La gestión del conocimiento (GC) es definida como la gerencia del conocimiento y dice que es “el proceso de administrar continuamente conocimiento de todo tipo para satisfacer necesidades presentes y futuras para identificar y explotar recursos de conocimiento tanto disponible como requerido y para desarrollar nuevas oportunidades". Por otra parte, la GC "es el proceso sistemático de buscar, organizar, filtrar y presentar la información con el objetivo de mejorar la comprensión de las personas en una específica área de interés" [6].

Resumiendo ambas posturas se podría decir que la Gestión del Conocimiento: es un proceso sistemático que se basa en la capacidad de seleccionar, organizar, presentar y usar la información por parte de los miembros de la organización, con el objeto de utilizar en forma cooperativa los recursos de conocimiento basados en el capital intelectual propio, con la finalidad de desarrollar las aptitudes organizacionales y la generación de valor.

La GC y el aprendizaje a través de la red son dos conceptos que están estrechamente relacionados [3] puesto que este último requiere de una adecuada gestión de los recursos educativos para promover aprendizajes de calidad, que permitan a los estudiantes desenvolverse de forma activa y eficiente en esta era de la información.

Un entorno virtual de aprendizaje es definido como "una aplicación informática diseñada para facilitar la comunicación pedagógica entre los participantes de un proceso educativo, sea éste completamente a distancia, presencial o de naturaleza mixta que combine ambas modalidades en diversas proporciones" [7].

En particular, la plataforma Moodle, desde la perspectiva del docente, es una herramienta que ofrece los medios necesarios para dotar a sus cursos basados en internet (o aulas virtuales) de los contenidos y actividades que mejor se adapten a sus necesidades pedagógicas. Es decir que les permite poner a disposición de los alumnos la programación de sus asignaturas, sus materiales docentes, sus actividades on-line y diferentes herramientas de comunicación virtual (Chat, páginas Web, foros, aplicaciones, etc.)

Las características más relevantes que han puesto en evidencia los estudios con relación al proceso de aprendizaje en las "aulas virtuales" son [8]:

- Una organización menos definida del espacio y el tiempo educativos,
- Uso más amplio e intensivo de las TIC,
- Planificación y organización del aprendizaje más guiados en sus aspectos globales,
- Contenidos de aprendizaje apoyados con mayor base tecnológica,
- Forma telemática de llevar a cabo la interacción social y
- Desarrollo de las actividades de aprendizaje más centrado en el alumnado.

La relevancia de esta última característica, en el proceso de aprendizaje en las aulas virtuales, desplaza el foco de atención desde diseñar ambientes de aprendizaje basados en recursos de acuerdo a la figura de un profesor, hacia el de aprender a diseñarlos con el objetivo de aprovechar todas las posibilidades que estos ambientes informatizados ofrecen pensando en la construcción del conocimiento de cada uno de los alumnos.

Al trabajar con ambientes virtuales se considera que es una de las formas más eficaces de enseñar y de aprender, pues permite tener ciertos privilegios como en el trabajo colaborativo y cooperativo, es así como competencias para acceder, localizar, analizar y evaluar la información, entendidas como centrales en el conocimiento, son cada vez más importantes, deben ser capaces de transformar el conocimiento en nuevo conocimiento, basados en sus experiencias y en el aprendizaje reflexivo [9].

Las posibilidades de las TIC en el proceso de formación de los profesionales favorecen la motivación de los contenidos y propicia la disposición e interés de los estudiantes para aprender, contribuyendo, a la vez, a una mejor comprensión de los contenidos.

1.4 Modelos de distribución

Son estructuras especiales de la Programación Lineal (PL) que se generan con bastante frecuencia en los problemas reales. Estas estructuras reciben el nombre de estructuras de transporte. Y como toda estructura lineal de su tipo puede resolverse por el método simplex. Sin embargo, existen métodos propios asociados a cada estructura que hacen que el método simplex resulte muy ineficiente [10]

La estructura de transportes: se supone que m orígenes tienen que surtir a n centros de consumo con un cierto producto. La capacidad de oferta del origen i es a_i (i=1,…, m) y la demanda en el centro de consumo j es b_j (j=1,…, n) se supone que c_{ij} es el costo de enviar una unidad del producto del origen i al centro de consumo j (i=1,..., m; j=1,..., n). El problema se reduce a determinar cuántas unidades del producto deben enviarse del origen i al centro de consumo j, tal que se minimicen los costos totales de distribución, se satisfaga la demanda del centro de consumo j y no se exceda la capacidad de oferta del origen i. Sea Xij esta variable de decisión. Entonces la formulación del problema lineal es:

$$Min\ Z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} X_{ij} \qquad \textbf{(1)}$$

Sujeto a

$$\sum_{j=1}^{n} X_{ij} \le a_i \quad \text{i=1, …, m} \qquad \textbf{(2)}$$

$$\sum_{i=1}^{m} X_{ij} \geq b_j \qquad j=1, \ldots, n \qquad \textbf{(3)}$$

$$X_{ij} \geq 0 \qquad i=1, \ldots, m \qquad \textbf{(4)}$$

$$j=1, \ldots, n$$

La formulación lineal constituida por (1), (2), (3) y (4) se denomina estructura de transporte [10]

La restricción (2) indica que todo el fluyo del producto que emana del origen i y que se envía a todos los posibles m destinos no puede exceder a la oferta del origen i que es ai. Existe una restricción de este tipo para cada origen. La restricción (3) indica que todo el flujo del producto que llega al centro de consumo j de todos los posibles n orígenes debe satisfacer la demanda del centro de consumo bj. Existe una restricción de este tipo para cada centro de demanda. Por último las restricciones de no-negatividad (4) indican que el sentido del flujo del producto es de los orígenes a los destinos, únicamente.

En la FCEyT de la UNSE tanto la asignatura Modelización Matemática (MM) de la Licenciatura en Matemática (LM) como Investigación Operativa de la Ingeniería industrial tratan este tema. Teniendo en cuenta que, por un lado, el propósito de la Investigación operativa (IO), como método científico de resolución de problemas, consiste en preparar al profesional para decidir entre diferentes medios o métodos disponibles para realizar todo objetivo que se proponga, de modo que se alcance un resultado en relación a un cierto criterio de optimización. Es decir, proporciona las herramientas suficientes para que con base en abstracciones de la realidad se puedan generar y resolver modelos matemáticos, para así poder sustentar cuantitativamente las decisiones que se tomen respecto a la situación problema. Y es precisamente desde esta perspectiva, de la modelización matemática, que es muy pertinente su tratamiento en MM de la LM.

Un ejemplo de este tipo de problema propuesto en la guía a desarrollar por los alumnos en esta experiencia que se describe más adelante, se muestra en la Fig. 1.

Problema 5 – Debido a las fuertes lluvias de los últimos días en el sur, la empresa stop-lluvia, dedicada al rubro de los paraguas, ha visto un aumento en la demanda de sus productos. Los paraguas se arman en dos plantas, según la siguiente tabla:

Planta	Capacidad de producción [paragua]	Costo de producción [$/paragua]
A	2600	230
B	1800	250

Cuatro cadenas de multitiendas están interesadas en adquirir los paraguas, con las siguientes características:

Cadena	Máxima demanda [paragua]	Precio dispuesto a pagar [$/paragua]
1	1800	390
2	2100	370
3	550	400
4	1750	360

El costo de traslado a cada tienda (fljo) se muestra en la siguiente tabla:

Costo fijo [$]	1	2	3	4
A	60	80	110	90
B	120	40	80	50

Determinar la mejor decisión de entrega, para la empresa productora de paraguas.

Fig. 1. Ejemplo de problema propuesto a los estudiantes en la guía de problemas.

2 Materiales

Se empleó el modelo de gestión del conocimiento de Vizcaya, perfeccionado [11] y a la vez contextualizado [12], el cual se analizó sobre una guía de problemas diseñada con fines didácticos, la cual se alojó en el aula virtual del Centro Universitario Virtual (CUV) de la Facultad de Ciencias Exactas y Tecnologías (FCEyT) de la Universidad Nacional de Santiago del Estero (UNSE). Esta última, se utilizó como apoyo a las clases presenciales.

Entre las herramientas de comunicación y colaboración se pueden mencionar los recursos de la plataforma Moodle: mensajes, correo electrónico, encuesta, foro y wiki como canal de interacción y comunicación entre los integrantes de los diversos grupos entre sí y con los docentes, con la intención que el vínculo entre los estudiantes se vea facilitado y que trabajen virtualmente. Otros materiales usados fueron notebook, cañón, presentaciones en power point y encuestas finales a los estudiantes.

3 Metodología

Este trabajo utiliza como modelo base, el modelo de gestión del conocimiento de Vizcaya, perfeccionado [11] y a la vez contextualizado [12], para lograr no sólo el acceso al conocimiento, sino una comprensión y apropiación progresiva hasta socializarlo. El cual se aplica sobre una actividad de resolución de problemas desarrollada por los alumnos de la asignatura Modelización matemática (MM) de la Licenciatura en Matemática (LM) de la FCEyT de la UNSE.

La experiencia de trabajo con la guía de problemas se realizó mediante la estrategia de resolución de problemas y aprendizaje cooperativo. Durante el lapso de dos semanas los estudiantes, organizados en pequeños grupos, trabajaron en una actividad enfocada a la resolución de problemas de distribución, como caso particular de la programación lineal, en la que la información usada por ellos fue, en su mayor parte, descargada del aula virtual. El trabajo se desarrolló utilizando el aula virtual del CUV en dos etapas, en la primera, los alumnos desarrollaron lo solicitado en la guía y fue entregado a los docentes en el aula virtual según forma y calendario fijado en la misma. En una segunda etapa, cada grupo comunicó, al grupo clase, mediante presentaciones en power point sus correspondientes producciones y conclusiones. Durante este proceso los docentes fueron proporcionando los andamios de recepción, transformación y producción de información que les ayudarían a asimilar y acomodar la nueva información y a elaborar el producto final.

3.1 Análisis del modelo

En la Fig. 2, se muestra el modelo base de autoaprendizaje del conocimiento, donde se utilizaron elipses para identificar las acciones que se realizan para la obtención del conocimiento; rectángulos para identificar los procesos, medios y formas de obtener la información y el conocimiento; y las flechas identifican el ciclo e intercambio entre los procesos para lograr el aprendizaje.

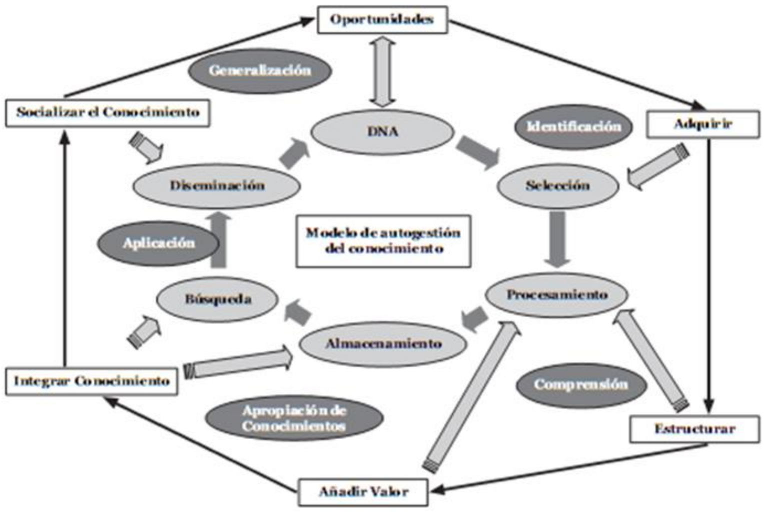


Fig. 2. Modelo de autoaprendizaje del conocimiento [12]

I. Articulación de la determinación de necesidades de aprendizaje y las oportunidades que se manifiestan en el entorno. Analizando en el modelo se hace factible la autogestión del conocimiento, a partir de determinar las necesidades de aprendizaje (DNA) de los estudiantes, vigilando la disponibilidad del entorno, posicionando saberes sobre la materia, a partir de un diagnóstico estratégico sobre la preparación individual para enfrentar los desafíos de la carrera profesional, vida social universitaria y del barrio.
El desarrollo del modelo fue validado con estudiantes de la carrera LM y en particular sobre la aplicación de una guía de problemas de distribución, como caso particular de programación lineal, alojada en el aula virtual de la asignatura MM en el (CUV) de la FCEyT de la UNSE.
Hoy el plan de estudio de la LM requiere a los futuros licenciados desarrollar la capacidad para: "formular problemas de optimización y toma de decisiones e interpretar las soluciones en los contextos originales de los problemas"; "comprender problemas y abstraer lo esencial de ellos"; "utilizar las herramientas computacionales para plantear y resolver problemas". Por ello, se utilizó la estrategia didáctica de resolución de problemas de Distribución que sin duda contribuye a lograr un aprendizaje más independiente y a la vez facilitar la socialización o comunicación de la información recibida por diferentes vías. Dicha administración implica el uso de herramientas software en la resolución de problemas de programación lineal y los conocimientos necesarios para garantizar la correcta realización de proyectos teniendo que planificar y coordinar el uso de los recursos con el objetivo de completar con éxito el proyecto de acuerdo a las limitaciones. Esta actividad consta de distintas fases o etapas y demanda a los estudiantes la realización de un conjunto de tareas en el aula virtual como: glosario y una presentación de power point del problema que resolvió cada grupo trabajando colaborativamente.

II. Vías de acceso para adquirir y seleccionar la información demandada. Una vez logrado el acceso a las diferentes fuentes de información, seleccionados por los docentes, que se concretan en un listado de enlaces a sitios Webs, archivos de diversos tipos (Word, pdf, pps, etc.), videos tutoriales, etc., de manera tal que los estudiantes enfoquen su atención en el tema en lugar de navegar a la deriva. En este caso se incluyeron materiales sobre algoritmos de transporte y asignación y videos tutoriales y mapas conceptuales. Estos últimos constituyen excelentes ayudas visuales que muestran a los estudiantes como se interrelacionan los diferentes conceptos dentro de la temática tratada. Esta información se selecciona en función de las necesidades de aprendizajes antes definidas para la resolución de la guía de problemas.

III. Estructuración, procesamiento y valor agregado de la información. La estructuración y procesamiento de la información contribuye a la organización de la información disponible para garantizar, entre otras cosas, un fácil y ágil acceso, para ello utilizaron los diferentes recursos del aula virtual:

- Glosario-para definir los términos básicos de la temática,
- Tarea- para subida de power point- ,
- Foro de trabajo colaborativo- para acordar y desarrollar un la resolución de la guía de problemas.
- Software PHSimplex e Invop- para resolver problemas de la guía.

A partir de entonces realmente se ha iniciado la comprensión de los contenidos que responden a las necesidades de aprendizaje.
El valor añadido se alcanza elaborando resúmenes, reseñas, base de datos, etc., en este caso los alumnos elaboraron glosario, cuadro comparativo, presentación en power point. A partir de entonces se puede decir que se está produciendo una apropiación de conocimientos.

IV. Almacenamiento y búsqueda de la información y el conocimiento. El almacenamiento se hace en este caso integrando el conocimiento por documentos, algunos de ellos en soporte digital y otros en copia dura, creando sistemas de contenidos para facilitar con precisión las búsquedas.

V. La diseminación y socialización del conocimiento se realizó a través de procesos dialógicos en el aula física y en la virtual. Particularmente, la comunicación oral de cada grupo mediante una presentación en power point de lo trabajado, donde se integraron los conocimientos construidos en las demás tareas. Todo ello ha traído consigo la aplicación y generalización del trabajo del estudiante, completando así el ciclo de gestión del autoaprendizaje (Fig. 2) sobre la actividad de resolución de problemas.

4 RESULTADOS

Se planificó la evaluación para esta experiencia de innovación del uso de la plataforma Moodle como apoyo a la docencia universitaria presencial, realizando un análisis de la opinión que los alumnos tenían sobre la implementación de la resolución de problemas en este entorno, utilizando como instrumento de recolección de dicha información una encuesta en el mismo Moodle con ítems de elección múltiple con 5 categorías de respuestas en la que participaron 11 alumnos. El objetivo de la misma era ayudar a entender hasta qué punto la presentación online de la asignatura les facilitó el aprendizaje y que niveles de satisfacción presentaban en relación a los siguientes aspectos: relevancia y facilitación de la tarea.

En la Fig. 3 se muestra, en forma conjunta, las estadísticas resultantes de respuestas de los estudiantes a las categorías numeradas del 1 al 4 referenciadas en la Tabla 1. Se puede observar que con respecto a la relevancia del trabajo con la resolución de problemas en el aula virtual, las estadísticas revelan que el 87,5 % de los encuestados expresan que casi siempre su aprendizaje se centra en asuntos que le interesan. Esta metodología ayuda a entender la relación que hay entre los contenidos teóricos y su aplicación en la vida real o profesional. El 62,5 % considera que casi siempre lo que aprende es importante para su práctica profesional e igual cantidad sostiene que aprende como mejorar su práctica profesional. Mientras que el 50% opina que, casi siempre, lo que aprende tiene relación con su práctica profesional y el 25% manifiesta que esto solo ocurre a menudo.

Tabla 1. Categorías de relevancia.

	Relevancia
1.	Mi aprendizaje se centra en asuntos que me interesan
2.	Lo que aprendo es importante para mi práctica profesional.
3.	Aprendo cómo mejorar mi práctica profesional.
4.	Lo que aprendo tiene relación con mi práctica profesional

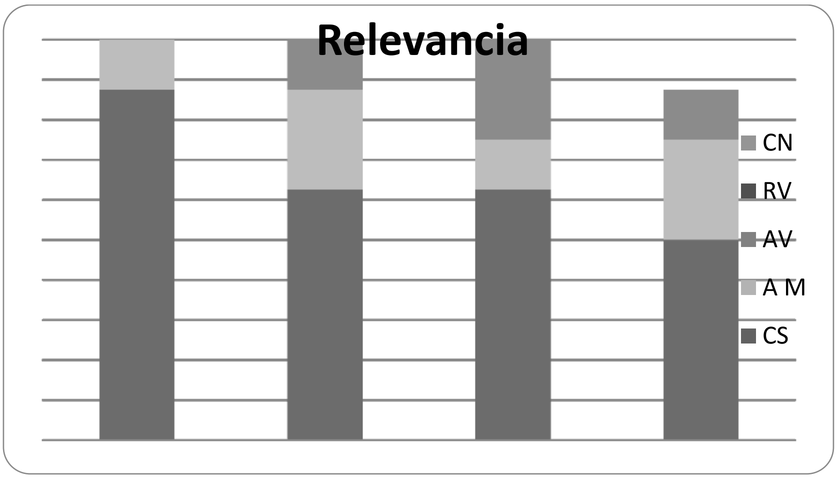


Fig. 3. Porcentajes de las categorías de relevancia 1 a 4 de la encuesta realizada a los alumnos.

El 100% de los encuestados considera que el trabajo en la plataforma facilita su tarea de aprendizaje.

Por parte de los profesores participantes se ha corroborado que el uso adecuado de la plataforma Moodle como complemento a las clases presenciales, las tutorías y el trabajo personal de los alumnos, facilita el trabajo y la implicación del alumno con la materia. Además, el uso de Moodle ha facilitado la impartición de la asignatura en otros aspectos como la comunicación fluida con los alumnos (a través de las listas de correo) o el feedback sobre su aprendizaje, al permitirles el acceso a las calificaciones de trabajos realizados en la misma.

5 Conclusiones

El conocimiento implica la interpretación y representación de la información, entonces el conocimiento por sí sólo no puede ser gestionado, siempre debe haber alguien que lo gestione. En este caso docentes y estudiantes de Modelización Matemática de la Licenciatura en Matemática como motores fundamentales en los procesos de generación de conocimiento a partir de algo que ya se ha adquirido, en un contexto específico y como fruto de la interacción social. Sin embargo, esta experiencia puede trasladarse a otras asignaturas como Investigación Operativa de Ingeniería Industrial, por ejemplo, ya que en las actividades propuestas se basan en una temática común a ambas asignaturas y se pretende aportar al desarrollo de competencias de los estudiantes, coherentes con dicho perfil, a saber: comunicarse de manera efectiva, resolver problemas de manera óptima para satisfacer necesidades establecidas y trabajar colaborativamente.

El conocimiento adquirido puede ser transferido a un dispositivo físico, lo que significa que éste se vuelva a transformar en información disponible para que otros la procesen. En este sentido, los entornos virtuales educativos como herramientas tecnológicas han permitido generar otras estrategias para poder dar a conocer conocimiento y de igual manera poderlo gestionar de una mejor forma. Es decir que el conocimiento pueda congregarse con el fin de poder generar otro conocimiento y seguirlo distribuyendo por medio de los entornos virtuales educativos. Es así como el estudiante estimula su desarrollo cognitivo permitiendo trabajar con nuevas espacios de construcción del conocimiento dominando algunas competencias cognitivas, críticas y teóricas, cuyo fomento es precisamente el objeto de las sociedades del conocimiento

La gestión del conocimiento permite, a su vez, que se trabaje en un ambiente colaborativo y cooperativo, los docentes necesitan ser guías en el proceso de aprendizaje, en esos ambientes más que funcionar como los únicos expertos.

Se concluye también que las TIC hacen posible que la gestión del conocimiento nunca termine porque uno de los objetivos es que cada vez se genere nuevas necesidades de conocimiento y además permiten generar valor a la sociedad. Pues el papel de las TIC permite la realización de diversas actividades de aprendizaje en forma interactiva, creativas potenciando las habilidades de los estudiantes para la solución de problemas y en matemáticas más aún.

Además podemos concluir en cuanto al modelo:

- El modelo de GC empleado en el autoaprendizaje es efectivo para desarrollar la educación.
- El modelo empleado permite además transitar desde la determinación de las necesidades de aprendizaje hasta la aplicación y socialización de los conocimientos adquiridos.
- El modelo de GC usado permite continuar la educación en la medida que surjan otras necesidades de aprendizaje.

Referencias

1. Carmona, E.; Gallego, L. y Muñoz, A.: El dashboard digital del docente. Elizcom (2008)
2. Rivero, S.: Claves y pautas para comprender e implantar la gestión del conocimiento: un modelo de referencia. Las Arenas, SOCINTEC (2002).
3. Morales, E.: Gestión del conocimiento en sistemas e-learning, basado en objetos de aprendizaje, cualitativa y pedagógicamente definidos. Universidad de Salamanca (2010)
4. Nonaka, I. y Teece, D.: La Gestión del conocimiento industrial: la creación, transferencia y utilización. Ed. SAGE, New York (2001).
5. Nonaka, I y Takeuchi,H.: The knowledge creating Company. Oxford, Oxford University Press (1995).
6. Davenport, T. y Prusak, O.: Knowledge Management Glossary Information Ecology: Mastering the Information and Knowledge Environment. Publisher: Oxford University Press (1997)
7. Adell, J., Castellet,J. y Pascual, J.: Selección de un entorno virtual de enseñanza/aprendizaje de código fuente abierto para la Universitat Jaume I. Centro de Educación y Nuevas Tecnologías de la Universitat Jaume I (2004)
8. Barberà, G. y Badia, G.: El uso educativo de las aulas virtuales emergentes en la educación superior. Revista de Uniersidad y Sociedad del Conocimiento. http://www.uoc.edu/rusc/2/2/dt/esp/barbera.pdf (2005). Accedido 10 de Diciembre de 2016
9. Rangel, P.: Aprendizaje de la investigación y gestión del conocimiento en entornos virtuales. Paradigma (2005).
10. Prawda, J.: Problemas de transporte y asignación. Métodos y Modelos de Investigación de Operaciones I. Modelos Determinísticos. Limusa, pp. 242-328 (2004)
11. Soto, M.: Propuesta de aplicación de un modelo de Gestión del conocimiento para las entidades del CITMA. Habana: Dirección de Tecnologías de Información y Gestión del Conocimiento (2004)
12. Fernández, R., Carballos, E. y Delavaut, M.: Un modelo de autoaprendizaje con integración de las TIC y los métodos de gestión del conocimiento, *RIED,* v. 11: 2, pp. 137-149 (2008)

Volver al Índice

Propuesta Metodológica para la Enseñanza de Matemática con Modalidad B-Learning en el Nivel Universitario

Analía Mena[1], Marta Golbach[1], Elsa Rodríguez Areal[2], Graciela Abraham[1]
[1]Cátedra de Matemática I, Instituto de Matemática, Facultad de Ciencias Económicas, Universidad Nacional de Tucumán.
Av. Independencia 1900
menaanalia@gmail.com , mgolbach@tucbbs.com.ar , gabrahamdejuarez@yahoo.com.ar
[2]Cátedra de Matemática II, Instituto de Matemática, Facultad de Ciencias Económicas, Universidad Nacional de Tucumán.
Av. Independencia 1900
erareal@hotmail.com

Resumen. El objetivo del trabajo es presentar una propuesta metodológica para la enseñanza y aprendizaje de Matemática I, en la FACE - UNT, con modalidad *b-learning*. Está basada en la teoría constructivista y emplea los recursos de la plataforma *Moodle*, impulsando prácticas educativas mediadas por TIC, para desarrollar nuevas competencias. Las actividades están diseñadas acorde a los temas de la asignatura, ofreciendo condiciones que propicien la capacidad creativa y crítica de los estudiantes. La comunicación se realiza mediante mensajería interna y foros, con tutores que guían a los alumnos durante este proceso, cartelería virtual y un área para publicar materiales con orientaciones para el estudio y la forma de evaluación. Cuenta también con un sistema de autoevaluaciones que permite a los alumnos determinar el grado de aprendizaje alcanzado. Consideramos que esta metodología contribuirá al fortalecimiento de los logros cognoscitivos del estudiante y a la optimización de la calidad del proceso educativo

Palabras Clave: Aprendizaje, Enseñanza, Matemática, TIC, Metodología *b-learning*

1 Introducción

Incorporar e integrar las TIC (Tecnologías de la Información y Comunicación) al proceso de enseñanza y aprendizaje se ha convertido en una necesidad en todos los niveles de la educación. Esta situación se vuelve más imperiosa debido a la multiplicidad de herramientas que se encuentran disponibles en la *web*. Éstas permiten no sólo acceder a la información en varios formatos, sino también compartir opiniones y hasta crear conocimientos de alto nivel. En la actualidad esto se convierte en realidad, en virtud de la libre disponibilidad de herramientas de índole social y colaborativo que han impactado considerablemente en la educación. Y es por ello que el salón de clase deja de ser el único epicentro del proceso de aprendizaje, ampliándose a la variedad de escenarios que facilitan las TIC, las herramientas colaborativas y las redes sociales existentes.

Las posibilidades de las TIC como instrumento de formación (*e-learning*, enseñanza *on-line*, entornos virtuales de formación, entre otros) vienen promovidas por los avances de las tecnologías de la información y por las transformaciones que se producen en los distintos contextos formativos. Sin embargo Carnoy [1] afirma, que aunque en el ámbito universitario las TIC están bastante presentes, tanto en la enseñanza como en la investigación; hay pocas realidades con modelos pedagógicos que se basen en ellas y aún se constata una fuerte preferencia social por la enseñanza tradicional.

Sin embargo, y como sostiene Ruiz Aguirre [2]:

"Muchos de los aprendizajes de los estudiantes se logran gracias a los procesos de intercambio e interacción social, donde se permite construir y reconstruir conocimientos a través de estrategias colaborativas donde en escenarios virtuales surten un mayor sentido, ya que los procesos de comunicación y discusión requieren de un modelo que favorezca la interactividad colectiva".

En este contexto socio-cultural contemporáneo, caracterizado por la presencia generalizada y el uso intensivo de las TIC, el sistema educativo se enfrenta con una creciente demanda, la de desarrollar en sus alumnos la alfabetización digital necesaria para la utilización competente de las herramientas tecnológicas. Según sostiene Salinas [3], los entornos virtuales de aprendizaje resultan un escenario más que propicio para suscitar dicha alfabetización, ya que permiten abordar la formación de las tres dimensiones básicas que la conforman: el conocimiento y uso instrumental de aplicaciones informáticas; la adquisición de habilidades cognitivas para el manejo de información hipertextual y multimedia; y el desarrollo de una actitud crítica y reflexiva para valorar tanto la información, como las herramientas tecnológicas disponibles.

Es por ello que resulta necesario que los docentes conozcan las funcionalidades técnicas y las potencialidades didácticas de los entornos virtuales, como paso previo para su integración significativa en las propuestas curriculares.

El objetivo de este trabajo es presentar entonces una propuesta metodológica diseñada para desarrollar, en la modalidad semipresencial o *blended learning,* la enseñanza y el aprendizaje de la asignatura Matemática I de la Facultad de Ciencias Económicas de la UNT.

Esta propuesta está basada en la teoría constructivista y emplea la plataforma *Moodle* para la enseñanza, promoviendo prácticas educativas mediadas por TIC, para desarrollar nuevas competencias y brindar igualdad de oportunidades.

El presente trabajo se enmarca en el Proyecto de Investigación titulado “Propuesta innovadora en el empleo de un entorno virtual para la enseñanza del Álgebra en carreras de Ciencias Económicas”, aprobado y financiado por el CIUNT.

Las actividades individuales y grupales planteadas, están ordenadas de acuerdo a la evolución de los temas de la asignatura, ofreciendo condiciones que permiten desarrollar capacidades creativas, innovadoras y críticas que mejoran la calidad de la enseñanza y el aprendizaje. La comunicación se establece a través de mensajería interna y foros, asignando tutores para atender consultas y guiar a los alumnos durante este proceso. Incluye además cartelería virtual y un área para publicar materiales acompañados de una guía, así como las orientaciones para el estudio y la forma de evaluación. El diseño cuenta con un sistema de autoevaluaciones que permiten a los alumnos determinar el grado de aprendizaje alcanzado y regular la adquisición de sus conocimientos y habilidades.

Esta metodología contribuye a la adquisición de competencias indispensables para el ejercicio de la futura labor profesional del estudiante y se piensa que los resultados contribuirán al fortalecimiento de sus logros cognoscitivos, promoviendo así la optimización de la calidad del proceso educativo.

2 Marco Teórico

De acuerdo con Argüelles y Nagles [4], el impacto de los desarrollos tecnológicos en todos los ámbitos de la vida y en particular en la educación, están transformando no sólo la práctica pedagógica, sino también la forma en la que aprenden las personas y los caminos que utilizan para hacerlo.

Melaré [5] considera que el empleo de las TIC enfrenta al estudiante a nuevos lenguajes de comunicación e interacción, así como a distintos caminos y estrategias para aprender, las que debe ejercitar y dominar a fin de insertarse en el entorno social, laboral, económico y educativo actual. Este hecho va más allá del simple uso de la tecnología, implica dotar a los estudiantes de habilidades que los capaciten para estar preparados para su inclusión en un mundo globalizado.

Según las investigaciones realizadas por González, et al. [6], la integración de las TIC en los procesos formativos ha generado los llamados Entornos Virtuales de Enseñanza y Aprendizaje, que funcionan como Aulas Virtuales. Dichos entornos son espacios que permiten el intercambio de información, que integran un extenso grupo de materiales y recursos diseñados y desarrollados para facilitar y optimizar el proceso de enseñanza y, por ende, también el aprendizaje de los alumnos, mediados ambos por TIC. Integra diversos soportes (textual, audiovisual, digital…), plantea nuevas interacciones entre los sujetos de la relación pedagógica (tutores-alumnos), favorece la comunicación inter e intra-áreas, crea nuevos formatos de interacción y nuevas relaciones entre el contenido y la tarea correspondiente. Es un facilitador en tareas de evaluación y seguimiento.

De acuerdo a estos autores la elección de un Aula Virtual debe fundamentarse no sólo en una teoría del aprendizaje sino también corresponderse con las intenciones educativas, las finalidades curriculares y los objetivos docentes. Así mismo, estará condicionada por la intención del curso, sus contenidos, participantes y actividades planificadas, y todo ello en base a las herramientas existentes (foros de debate, chat, agendas…) en los entornos o a su posibilidad real de incorporar nuevas herramientas que faciliten la comunicación educativa.

En lo que respecta al sustento pedagógico, Barberá [7] considera que un contexto virtual de enseñanza-aprendizaje constructivista se caracteriza, entre otros aspectos, por:

- Proporcionar espacios de interacción que integre la acción del profesor y del alumno a través del contenido específico y del medio tecnológico, donde al alumno no aprenda solo sino a través de interacciones con “otros” en momentos claves del proceso, y el profesor tome la responsabilidad de no seguir al alumno de lejos.
- Promover y facilitar los contactos entre alumnos y profesores tanto de forma sincrónica como asincrónica como así también la reciprocidad y la colaboración entre estudiantes entre sí.

- Potenciar el desarrollo de habilidades de alto nivel que faciliten la construcción del conocimiento, lo más sólida y compleja posible, estableciendo relaciones significativas entre el conocimiento que ya se posee sobre el tema de aprendizaje y el de nueva aportación.
- Favorecer el desarrollo de actividades de enseñanza y aprendizaje en una interacción virtual enmarcada en zonas de desarrollo próximo formando comunidades virtuales de enseñanza y aprendizaje.
- Incluir tareas auténticas de aprendizaje que respeten la realidad desde el continuo simple-complejo, ofertando diferentes niveles de dificultad para atender a momentos o necesidades diversas.

Ante la necesidad de seguir un modelo de enseñanza- aprendizaje para llevar a cabo la acción pedagógica mediada por tecnología, se consideró el modelo de enseñanza *blended learning* (semipresencial). Según Blumschein y Fischer [8], este modelo, se centra en la combinación de estrategias pedagógicas, propias de los modelos presenciales y estrategias de los modelos formativos propios del *e-learning.*

Estas estrategias permiten alcanzar resultados relevantes gracias a algunos aspectos destacables:

- Desarrolla habilidades de disciplina y autocontrol.
- Promueve el aprendizaje autónomo, autorregulado y colaborativo.
- Propicia la adquisición de competencias en el uso de aulas virtuales.
- Permite un adecuado feedback entre docente-alumno y entre alumnos.
- Utiliza nuevos modos de interacción tales como chats, foros, wikis, etc.
- Optimiza los tiempos y desplazamientos, dejando lo presencial solo para temas y actividades que así lo requieran.
- Facilita que el aprendizaje se realice al ritmo personal de cada uno, contando con el seguimiento del profesor como tutor.
- Proporciona materiales didácticos, diseñados previamente, de forma dinámica con antelación a las fases presenciales, de acuerdo a lo que sostienen Lafuente, y otros investigadores [9].

García Cabrero y otros autores [10], consideran que la ventaja de utilizar modalidades mixtas de enseñanza, es que permiten generar ambientes de aprendizaje que conservan las características de la educación presencial, con la ventaja de la integración de recursos que permiten y facilitan el aprendizaje de diversos contenidos (los que se enseñan en los cursos presenciales).

No obstante, es importante destacar que, por sí sola, esta nueva modalidad no es capaz de promover cambios sustanciales que optimicen el proceso educativo. Para que efectivamente se produzcan mejoras en el aprendizaje, es necesario diseñar cuidadosamente cada uno de los elementos que intervienen en el acto educativo; tales como: los recursos instruccionales que se incluyen como apoyo a la enseñanza, las estrategias y roles que el profesor debe asumir y aplicar en el aula, la organización de los contenidos de aprendizaje y las posibilidades que se les brindan a los alumnos para trabajar en la construcción del conocimiento.

Al respecto, en el modelo *b-learning* el diseño instruccional tiene gran importancia, ya que facilita la creación de modelos eficaces, eficientes y atractivos. En este modelo, la planificación debe realizarse de manera meticulosa para organizar y estructurar de forma pedagógica y coherente las actividades virtuales y presenciales según lo mencionado por Rodríguez y otros autores [11].

De acuerdo con Díaz Barriga [12] en la actualidad, los modelos de diseño instruccional se han reenfocado para pasar a modelos centrados en el estudiante, tanto para promover y fortalecer la capacidad de un aprendizaje duradero, transferible y autorregulable, como para brindar un ambiente adecuado donde el aprendiz pueda desplegar su autonomía.

En la planificación de los procesos de enseñanza y aprendizaje en esta modalidad, hay elementos esenciales que se deben tener en cuenta. Autores como González, Esnaola, Martín y Barletta [6] consideran los siguientes:

Fundamentación (por qué y para qué): justifica la selección de contenidos y objetivos que se realiza. En ella se definen claramente los alcances del curso, aclarando el recorte de contenidos que se hará, el nivel de profundidad que se le dará a los mismos, etc.

Objetivos educativos (qué): en instancias virtuales son fundamentales tanto para los docentes como para los alumnos, ya que actúan como punto de referencia, como eje articulador de la propuesta tecnológica- pedagógica. Los objetivos indican intencionalidad, actúan como guías que orientan a esas intenciones y expresan logros a alcanzar una vez finalizada la acción formativa.

Selección de contenidos, organización y secuencia: los contenidos deben seleccionarse sobre la base global de la propuesta formativa a la que hace referencia y deben estar asociados a situaciones nodales de aprendizaje y relacionadas con estrategias de enseñanza.

Organización de contenidos en entornos virtuales de enseñanza: la organización debe realizarse de una manera lógica y teniendo en cuenta la significación de los mismos para los estudiantes. Es conveniente que los contenidos se presenten y organicen en pequeñas unidades, con grado creciente de complejidad, para que el alumno asimile en forma gradual la información proporcionada, adquiera confianza y no pierda el interés.

Algunas veces este trabajo implicará reagrupar, titular, dividir texto en nuevas secciones, etc. Además se puede realizar la transformación de textos en recursos multimedia (gráficos, esquemas, videos, *Power Point*, etc.) cuando el programa formativo lo requiera.

Selección de materiales didácticos o de enseñanza: tienen como función el motivar e interpelar a los alumnos para una participación activa dentro del curso, así como también actuar como puentes entre nuevos aprendizajes y conocimientos previos. Por ende, los materiales de enseñanza son un elemento fundamental ya que sobre ellos se desarrollará la acción docente y la evaluación. Los mismos deben promover un aprendizaje significativo de los contenidos de la asignatura. Por ello, el diseño de estos materiales para el aula virtual debería tener en cuenta: la motivación; la activación de conocimientos previos; la propuesta de ejercicios y actividades variadas y la utilización de una diversidad de estrategias, etc.

Evaluación: en los entornos virtuales de enseñanza y aprendizaje la evaluación continua del aprendizaje es esencial y por ende resulta conveniente que se base en diferentes instrumentos que permitan apreciar el avance de cada alumno en los distintos niveles y tópicos por los que transita al adquirir el conocimiento. Por ello, el aula virtual debe proveer un espacio donde el alumno sea evaluado en relación a su progreso y a sus logros. Ya sea a través de autoevaluativos virtuales, o del uso de algún método que permita medir el avance de los estudiantes. Es importante comprobar si se alcanzaron los objetivos de la clase, y con qué nivel de éxito en cada caso.

Las herramientas de comunicación: la plataforma *Moodle* integra varias herramientas de comunicación que pueden ser aprovechadas para lograr los objetivos educativos que se planteen. Se pueden mencionar entre ellas:

El correo electrónico: es una herramienta de comunicación asincrónica que permite enviar y recibir información de interés específico para un grupo de usuarios. Es un diálogo virtual en tiempos y lugares distintos. El mensaje puede contener texto, imágenes, audio y/o video, etc. El correo permite aprendizajes cooperativos, colaborativos y significativos, lo cual lo convierte en un mediador pedagógico porque este diálogo virtual enriquece las temáticas tratadas.

El chat: es una herramienta que permite mantener conversaciones en tiempo real entre usuarios que se encuentran en distintos puntos. Por su carácter sincrónico, se precisa de un acuerdo previo entre los usuarios en cuanto al tema, hora y fecha de la interacción. Según Hernández [13], la planeación y el desarrollo de una sesión de chat posibilitan el trabajo cooperativo, la evaluación formativa, la interacción grupal y la creación de comunidades virtuales de aprendizaje. Para la sesión es necesario establecer compromisos e intereses y estimular la participación y la interacción, con el fin de que se construya y enriquezca el conocimiento. En el chat de dudas el alumno desarrolla competencias generales como la comunicación escrita, la comprensión escrita, la iniciativa y la responsabilidad, así como competencias específicas derivadas de la resolución de las dudas propuestas.

Foros de debate o grupos de discusión: son espacios donde un grupo de personas debate sobre un tema de interés común, realizado de forma asincrónica. El docente responsable prepara la temática que se tratará, diseña una estrategia creativa para convocar la participación de los estudiantes, establece las reglas de juego y el alcance, en cuanto a objetivos de aprendizajes, del foro propuesto. Se pueden canalizar dudas relacionadas a contenidos, actividades, etc.

Blogs: esta herramienta de comunicación ofrece un espacio donde un individuo o un grupo publica contenidos (texto, fotografías, videos entre otros), permitiendo además que los navegantes del *blog* comenten los contenidos publicados en el mismo. El docente puede crear un *blog* del curso que imparte, lo cual permitirá que los estudiantes y su profesor tengan la posibilidad de comentar los contenidos tratados en clase.

Wikis: son espacios *web* cuyos contenidos son producidos por varias personas de manera asincrónica. A diferencia de los *blogs* no permiten que los navegantes o lectores dejen comentarios de los contenidos. Apoyan también el aprendizaje colaborativo, ya que permiten la construcción del conocimiento de todos los participantes.

Glosario: esta actividad permite a los participantes crear y mantener una lista de definiciones, como un diccionario, aportando a su conformación de manera colaborativa.

3 La Propuesta

En la Facultad de Ciencias Económicas de la Universidad Nacional de Tucumán se dictan las carreras de Contador Público Nacional, Licenciatura en Administración y Licenciatura en Economía. La asignatura Matemática I es una materia de primer año, común a las carreras mencionadas. En los últimos años el número de alumnos inscriptos se mantuvo muy elevado, llegando al año 2016 con una matrícula de 1291 alumnos. Por tal motivo, y ante la necesidad de potenciar la participación activa de los estudiantes en su propio aprendizaje, la cátedra viene implementando desde el año 2013 diferentes actividades a ser desarrolladas en el Aula Virtual, como complemento de las clases presenciales. Cabe aclarar que para el diseño de la misma se tuvieron en cuenta los componentes didácticos y se estructuró de acuerdo a los recursos y posibilidades técnicas que permite la plataforma *Moodle*.

El objetivo de este trabajo es presentar una propuesta metodológica de enseñanza semipresencial para la asignatura mencionada. La virtualización se realizará en el entorno de la plataforma interactiva de enseñanza y aprendizaje *Moodle*, la cual ofrece un conjunto de recursos que facilitan la realización de actividades didácticas y que sirven de soporte al desarrollo del proceso docente educativo.

3.1 Características del entorno *Moodle*

La plataforma *Moodle* brinda la posibilidad de configurar el curso desde la fecha de inicio, periodo de matriculación, semanas de duración del curso, etc. El profesor puede seguir las actividades del alumno, los archivos y la información que va cargando y calificarla. El programa permite una copia de seguridad de toda la información del curso. Asimismo se pueden generar múltiples actividades, como por ejemplo: foros, sala de chat, consulta, cuestionarios, entre otros. Facilita a los alumnos los contenidos a través de los recursos: archivos preparados y cargados en el servidor, videoteca, recursos multimedia y audiovisuales, documentos hipermedia, etc.

Muchos de los módulos de *Moodle* son evaluables por el profesor, lo que supone que el estudiante obtendrá una calificación de acuerdo a unos parámetros que fija el docente y que se establece durante el proceso de configuración de la actividad.

Otro aspecto a destacar es el informe de actividades. En él se refleja la interacción entre las actividades y los usuarios de la plataforma. Se puede obtener información como: los recursos que un usuario ha leído, cuantas veces lo ha visitado y cuándo, las actividades que ha completado, las calificaciones obtenidas en cada una de ellas, etc.

En la Fig.1, se muestra la configuración actual del aula virtual en *Moodle*, la cual se encuentra delineada en base a una estructura por temas. El tema 0 contiene un mensaje de bienvenida, siendo el punto de partida para la comunicación docente – estudiante en el Aula Virtual.

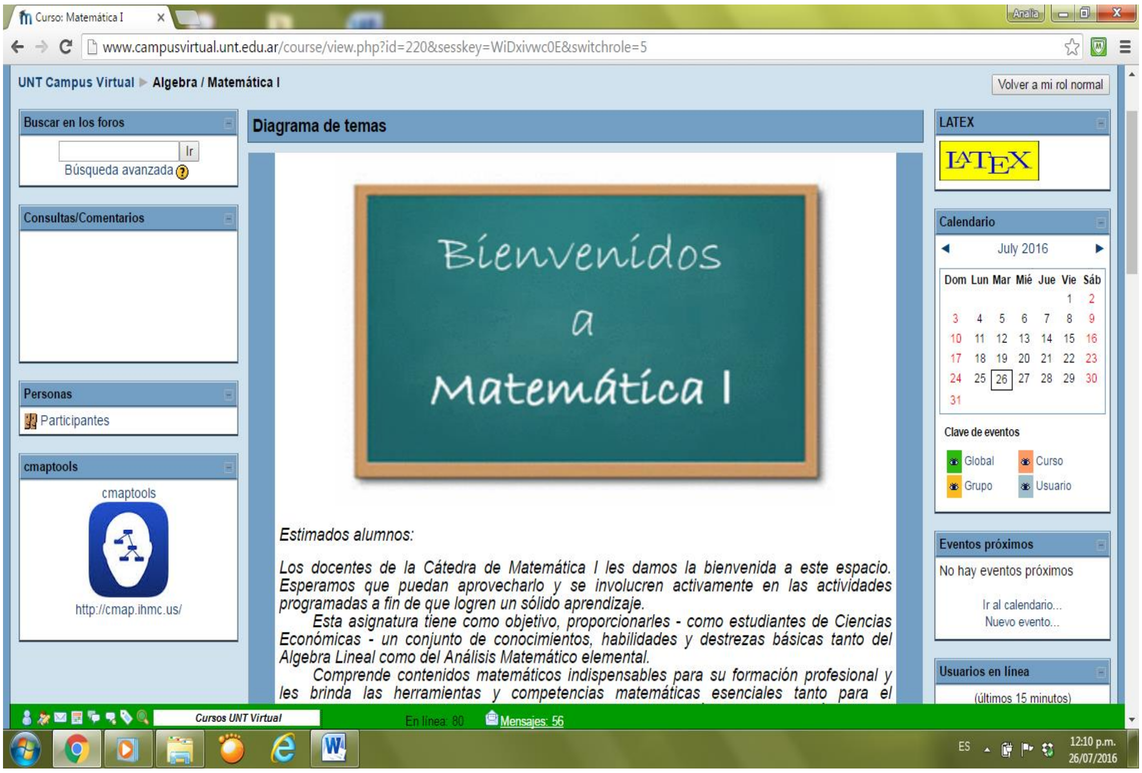


Fig. 1. Vista del Aula Virtual de Matemática I. Año 2016.

Los temas 1, 2 y 3 contienen información referida al programa de la asignatura, la composición de la cátedra, fechas importantes y la metodología de enseñanza y evaluación que se viene implementando. Se diseñó además, un foro de novedades (Fig. 2), para ser utilizado durante todo el semestre con el objetivo de dar a conocer al estudiante, cualquier novedad o aviso de importancia relacionado con la modificación de la planificación, actividades a realizar, cambios o suspensión de actividades, fechas de entrega de tareas y evaluaciones, novedades sobre las actividades del curso, presentación de calificaciones y cualquier otra actividad de interés para la mejor finalización del curso. En este foro, al iniciar cada semana se coloca un aviso para recordar al estudiante las actividades virtuales y las presenciales propuestas.

Fig. 2. Vista del Aula Virtual de Matemática I. Año 2016.

Con el objetivo de ajustar la planificación del proceso de enseñanza aprendizaje a partir de las actitudes, habilidades y conocimientos que trae el alumno, en el Aula Virtual se incluye, al finalizar la asignatura, un espacio denominado "Encuestas de Opinión".

3.2 Metodología e implementación de la enseñanza semipresencial

El desarrollo de la materia se planifica en siete unidades de contenidos denominados unidades temáticas, como se observa en la Tabla 1, y que responden a núcleos conceptuales que forman parte de la currícula de la asignatura.

Tabla 1: Unidades Temáticas. Matemática I. Año 2016.

Unidad 1	Unidad 2	Unidad 3	Unidad 4	Unidad 5	Unidad 6	Unidad 7
Números Reales	Binomio de Newton	Matrices y Determinantes	Rango e Inversa de una Matriz	Sistemas de Ecuaciones Lineales	Relaciones y Funciones	Funciones Algebraicas y No Algebraicas

Estas unidades temáticas se encuentran en los temas 4 al 10 del Aula Virtual de la asignatura. Para cada una de ellas se redactó una Guía Didáctica, que es un instrumento para orientar y facilitar el aprendizaje, ayudar a comprender y aplicar los diferentes conocimientos, así como para integrar todos los medios y recursos que se presentan al estudiante como apoyo para su aprendizaje.

Contiene objetivos, contenidos, bibliografía recomendada, así como las orientaciones para el estudio y la forma de evaluación. Desde el punto de vista metodológico es el primer documento que los alumnos deben consultar al inicio de cada tema.

Además, en cada unidad temática se incluyeron recursos tales como Contenidos Teóricos, Foro de consulta, Guía de Trabajos Prácticos, Glosario, Wiki, Videos y diferentes tareas especialmente diseñadas para que el estudiante emplee las herramientas informáticas mencionadas.

Cabe mencionar que los contenidos conceptuales de las unidades didácticas se estructuraron de forma relacionada y con complejidad creciente a fin de facilitar su aprendizaje significativo.

Así mismo, cada semana, a través del foro de novedades se envía a los alumnos un aviso sobre los temas a revisar y se los motiva a participar en los foros de consulta, específicos de cada unidad temática, para que manifiesten dudas e identifiquen insuficiencias en la comprensión de conceptos y en la metodología de trabajo, y se los invita a asistir a las clases de consulta presenciales.

La estrategia implementada se basa en la complementación de actividades presenciales y virtuales, promoviendo al estudiante a realizar las tareas planteadas de forma autónoma, bajo la guía de un tutor.

Todo esto, con la finalidad de desarrollar en el estudiante una serie de estrategias cognitivas, metacognitivas, de apoyo y de autocontrol, para construir sus conocimientos de forma significativa y autorregulada.

A continuación se detallan cada una de las etapas de la metodología a emplear en el sistema de enseñanza semipresencial a desarrollarse en el segundo cuatrimestre del corriente año lectivo.

Primera etapa: al iniciar cada unidad temática se realizará un encuentro presencial obligatorio, con el objetivo de orientar al estudiante en esta nueva modalidad educativa y favorecer el intercambio cognitivo, el diálogo, la reflexión y la construcción compartida del conocimiento.

Se desarrollará una clase teórica – práctica en la que se presentará el tema, de manera expositiva, generando un espacio donde a través del diálogo didáctico se guiará al alumno en la comprensión de los temas utilizando la pregunta y la repregunta.

Todo el material en esta clase presencial se encontrará disponible en el Aula Virtual, dando la posibilidad al estudiante de utilizar el mismo antes o después de la clase.

Segunda etapa: las actividades virtuales a desarrollar consistirán en el cumplimiento de tareas tales como lectura de materiales con contenidos teóricos y prácticos, participación en foros de discusión o consulta, visualización de videos, elaboración y envío de actividades escritas (individuales y grupales), elaboración de mapas conceptuales, glosario y wiki.

Cabe destacar que el desarrollo de estas actividades virtuales contará con un monitoreo e interacción permanente, siendo su objetivo la atención individualizada o grupal para resolver dudas o cualquier otra problemática.

Como ya se dijo, el alumno contará además con clases de consultas presenciales en horarios predeterminados, tanto para dudas sobre contenidos de la asignatura, como para consultas específicas sobre el uso de los distintos recursos tecnológicos propuestos.

Otra de las actividades a presentar en el espacio virtual será la realización de actividades grupales. La propuesta contemplará la realización de 7(siete) trabajos prácticos, uno por cada unidad temática de la asignatura. Los objetivos de estos trabajos colaborativos son: revisar y afianzar los conceptos aprendidos en la unidad correspondiente y desarrollar habilidades de trabajo colaborativo. Los grupos se conformarán de no menos de tres integrantes y de cinco participantes como máximo, siendo libre la elección de los compañeros de equipo.

Con respecto a los foros de discusión o consulta, a través de ellos, el docente orientará al estudiante en la revisión de la bibliografía, en la comprensión de la terminología, conceptos, algoritmos, ejercicios, problemas y en las actividades a realizar.

Los participantes deberán revisar al menos tres veces a la semana el foro de novedades y el correo electrónico, para cualquier cambio o información relacionada con el curso. Para cada foro, se diseñó una introducción indicando, de manera concreta, la utilidad del foro y el tema a tratar.

Todo lo mencionado puede observarse en la Fig. 3, para el caso de la unidad temática Sistemas de Ecuaciones Lineales.

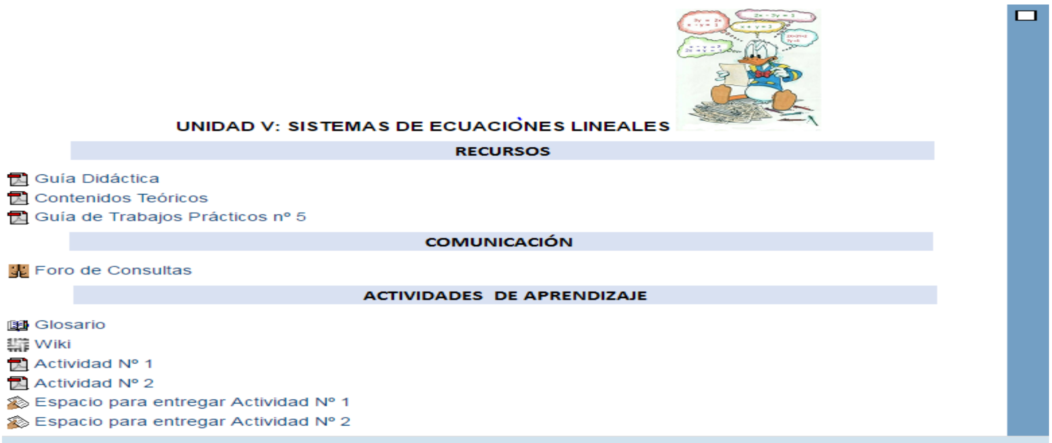


Fig. 3. Aula Virtual de Matemática I, vista de los materiales correspondientes a la unidad temática Sistemas de Ecuaciones Lineales. Año 2016.

Tercera etapa: se trata de un encuentro presencial obligatorio, con el objetivo de hacer un cierre de la unidad temática en cuestión, revisando contenidos tanto teóricos, como prácticos. En esta etapa el docente presentará una síntesis de los conocimientos adquiridos a lo largo de la unidad temática, identificando los más relevantes y mostrando de nuevo de forma explícita, las relaciones entre ellos. Con este modo de proceder, se consigue que dichos saberes puedan ser identificados por los profesores y alumnos, como el conocimiento que se ha construido y que se comparte, y que los alumnos tengan una nueva oportunidad para identificar y resolver dudas al respecto.Se realizará a demás, la devolución de las actividades propuestas y, oportunamente, resueltas por los estudiantes en el Aula Virtual y se ofrecerán instrucciones precisas sobre lo concerniente a las próximas Autoevaluaciones virtuales y Evaluaciones presenciales.

Cuarta etapa: consiste en la realización de las correspondientes Autoevaluaciones Virtuales obligatorias, las que fueron diseñadas con el objetivo de que los estudiantes puedan evaluar su aprendizaje y contribuya a las tareas de repaso. Estas Autoevaluaciones contemplan ejercicios de tipo selección de respuestas múltiples, verdadero/falso, de respuestas cortas, numéricas, de lectura de gráficas y para relacionar o emparejar. La realización de esas evaluaciones será individual y dentro del plazo previsto. Cada estudiante tendrá la posibilidad de realizar dos intentos en la ejecución de cada autoevaluación. Una vez que el alumno cierre y envíe el cuestionario, se le brindará la posibilidad de ver la calificación obtenida y las respuestas correctas de los ejercicios presentados. Por lo tanto, en esta experiencia se proporcionará una retroalimentación inmediata, además de la puntuación final resultante del promedio de notas obtenidas en cada intento realizado. En la Fig. 4 se observan ejercicios para emparejar y de verdadero o falso.

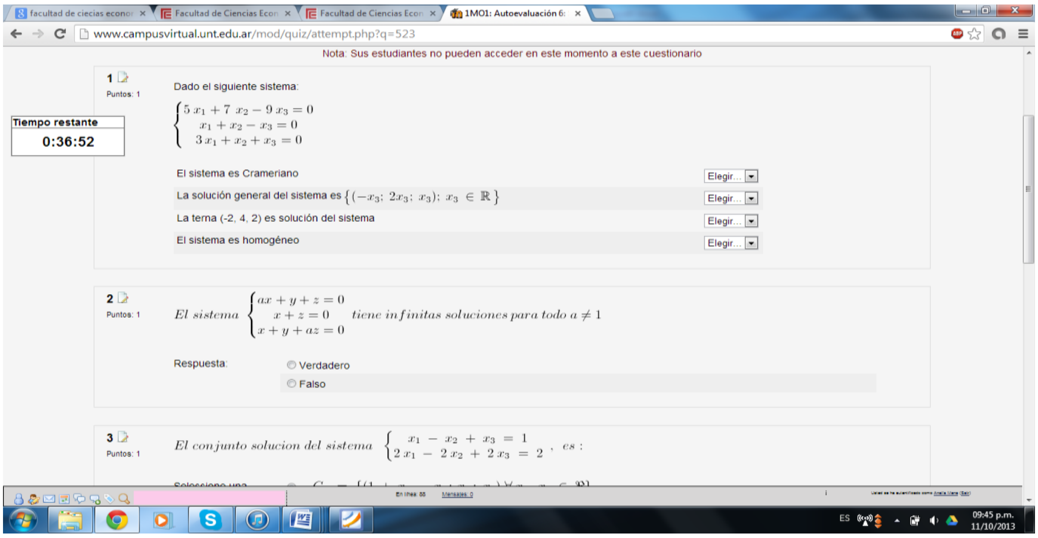


Fig. 4. Autoevaluación Virtual del tema Sistemas de Ecuaciones Lineales. Ejercicios del tipo para emparejar y de verdadero o falso. Aula Virtual de Matemática I. Año 2016.

Etapa final: se realizarán las evaluaciones sumativas y formativas. Esta última se llevará a cabo a través de las clases de consulta y de las Autoevaluaciones Virtuales. Dichas evaluaciones proporcionarán información y valoración acerca del aprendizaje logrado, constituyendo un instrumento de autocorrección, detección de debilidades y necesidades de los estudiantes. La evaluación formativa va de la mano con las mejoras en el aprendizaje de los diferentes temas, pues permite intervenir a tiempo para asegurar que las estrategias y medios respondan a los objetivos planteados. En cuanto a la evaluación sumativa, la misma se llevará a cabo a partir de la aplicación de dos Pruebas Parciales presenciales, que contendrán ejercicios prácticos y preguntas teóricas.

Al finalizar la experiencia se realizará una encuesta para conocer la opinión de los estudiantes participantes, relacionada con la nueva metodología de enseñanza aplicada.

4 Conclusiones

El trabajo de investigación desarrollado a través del Proyecto permitió desarrollar esta propuesta pedagógica de enseñanza y aprendizaje en la modalidad *b-learning.* Consideramos que esta modalidad puede hacer posible el desarrollo, en el estudiante, de habilidades para aprender a aprender, para abordar autónomamente situaciones de aprendizaje complejas tales como: planificar su actuación; decidir qué conocimientos se han de utilizar y cómo se han de utilizar; reflexionar sobre el curso de la acción a seguir y reorientar el proceso de aprendizaje, como así también la adquisición de competencias en el uso de aulas virtuales. Y la posibilidad de intervención del docente, desde la didáctica, mediante las Nuevas Tecnologías de la Comunicación y la Información como un recurso.

Consideramos además que, posicionados en este contexto, el proceso de enseñanza y aprendizaje requiere un abordaje diferente. Un abordaje que contemple una metodología que favorezca el desarrollo de competencias tales como aprender a conocer, aprender a hacer, aprender a vivir juntos, aprender a ser y aprender a aprender.

Esta forma de encarar el proceso permitirá el diseño de estrategias para enseñar a aprender autónomamente. Es decir, estrategias que motiven al estudiante a convertirse en el autor de su propio aprendizaje, para que por sí mismo sea capaz de llegar al conocimiento y para que pueda desarrollar metodologías que le permitan llevar a la práctica de manera independiente lo aprendido.

Todos sabemos que la actividad del estudiante es un aspecto fundamental, su protagonismo, sus destrezas, su motivación, sus modos, sus formas de aprender, entre otros. Sin embargo, no debemos olvidar que somos los docentes los responsables de gestionar el aula de clase, somos los que debemos diseñar situaciones de enseñanza que permitan al estudiante realizar estas actividades para poder entonces alcanzar, tanto los saberes específicos de las disciplinas, como desarrollar estrategias que les permitan la construcción y reconstrucción de los saberes de forma autónoma.

Los resultados que se obtengan de la implementación de éste diseño metodológico nos permitirá hacer los ajustes necesarios para fortalecer los logros cognoscitivos del estudiante y para optimizar la calidad del proceso educativo.

Referencias

1. Carnoy, M.: Las TIC en la enseñanza: posibilidades y retos. Lección inaugural del curso académico 2004-2005. Universitat Oberta de Catalunya (UOC). http://www.uoc.edu/inaugural04/esp/carnoy1004.pdf. (2004). Accedido el 3 de mayo de 2016
2. Ruiz Aguirre, E.: El aprendizaje colaborativo escenario para la construcción social de aprendizajes significativos. Cognición. http://www.cognicion.net/images/articulos/Cog38-2-el-aprendizajecolaborativo-escenario-para-la-construccion-social-de-aprendizajes-significativos.pdf. (2012). Accedido el 3 de mayo de 2016
3. Salinas, M. I.: Entornos virtuales de aprendizaje en la escuela: tipos, modelo didáctico y rol del docente. Adaptación de la exposición desarrollada en la Semana de la Educación 2011: Pensando la escuela. Tema central: "La escuela necesaria en tiempos de cambio". http://www.uca.edu.ar/uca/common/grupo82/files/educacion-EVA-en-la-escuela_web-Depto.pdf. (2011). Accedido el 18 de junio de 2016
4. Argüelles, D.; Nanglés, N.: Estrategias para promover procesos de aprendizaje autónomo. Escuela de Administración de Negocios. http://www.redalyc.org/pdf/206/20619966015.pdf. (2010). Accedido el 25 de junio de 2016
5. Melaré, D.: Tecnologías de la Inteligencias. Gestión de la competencia pedagógica virtual. RIED. http://revistas.uned.es/index.php/ried/article/download/964/883. (2007). Accedido el 5 de agosto de 2016
6. González, A.; Esnaola, F.; Martín M.; Barletta, C.: Algunas pautas de trabajo. Propuestas educativas mediadas por tecnologías digitales. (2012). http://www.unlp.edu.ar/uploads/docs/propuestas_educativas_tic.pdf. Accedido el 5 de Agosto de 2016

7. Barberá, E.: La incógnita de la educación a distancia. Revista de Docencia Universitaria. http://revistas.um.es/redu/article/view/11511/11091. (2001). Accedido el 15 de septiembre de 2016
8. Blumschein, P.; Fischer, M: E-learning en la formación profesional: diseño didáctico de acciones de e-learning. Boletín Técnico Interamericano de Formación Profesional. http://staging.ilo.org/public/libdoc/ilo/2007/107B09_235_span.pdf. (2007). Accedido el 15 de septiembre de 2016
9. Lafuente, J. et al.: Entorno virtual de aprendizaje EVALPA. Un proyecto de B-learning con vocación de futuro. Revista Iberoamericana de Educación. N° 60. file:///C:/Users/Analia%20Mena/Downloads/rie60a08%20(1).pdf. (2012). Accedido el 14 de julio de 2016
10. García Cabrero, B. et al.: Un entorno virtual para la adquisición de competencias profesionales en evaluación psicoeducativa. Libro digital Experiencias e Ideas para el fortalecimiento de la Educación a Distancia. http://www.csl.uady.mx/ead/2ei/arch/Libro2ei.pdf. (2013). Accedido el 8 agosto de 2016
11. Rodríguez, O., Ávila, M.; Chourio, E: El Modelo B-learning aplicado a la Enseñanza del Curso de Matemática I en la Carrera de Ingeniería Civil. Revista Electrónica Actualidades Investigativas en Educación. http://www.redalyc.org/pdf/447/44717980015.pdf. (2010). Accedido el 18 de agosto de 2016
12. Díaz Barriga, F.: Educación y Nuevas Tecnologías de la Educación: ¿Hacia un paradigma educativo innovador?. Revista Electrónica Sinéctica.. http://www.redalyc.org/pdf/998/99819167004.pdf. (2008). Accedido el 18 de agosto de 2016
13. Hernández Carvajal, N.: El chat como herramienta de comunicación en la educación a distancia: usos y potencialidades para fomentar el aprendizaje cooperativo. Docencia Universitaria. http://www.ucv.ve/fileadmin/user_upload/sadpro/Documentos/docencia_vol2_n2_2001/5_art._2Nayesia_Hernandez.pdf. (2003). Accedido el 15 de mayo de 2016

Volver al Índice

Un Ejemplo de Construcción de un Universo Matemático Local: El Universo de la Derivada

José Ismael Gómez[1], Elsa del Valle Ibarra [2]
[1]Facultad de Agronomía y Agroindustrias, Universidad Nacional de Santiago del Estero, Argentina.
jgomez@unse.edu.ar
[2]Facultad de Ciencias Forestales. Universidad Nacional de Santiago del Estero, Argentina.
egomez@unse.edu.ar

Resumen. En este artículo nos propusimos analizar un texto de los que comúnmente manejamos en el desarrollo de nuestra asignatura desde un ángulo distinto. Para ello tomamos el modelo sostenido por Marianna Bosch ya que lo consideramos un modelo rico e interesante. Examinaremos cómo un autor en especial presenta el universo de objetos relativos a la derivada. El autor propone en su texto su propia solución al problema, solución que será utilizada después por los docentes para desarrollar en cada una de sus clases su propia estrategia ontológica satisfactoria. El texto es pues una herramienta de creación de un universo institucional. Este estudio forma parte del proyecto: "Un estudio de los significados institucionales y personales de las principales nociones del análisis matemático"

Palabras Clave: **E**nfoque Antropológico, Texto, Derivada, Ostensividad, Objeto, Institución

1 Introducción

El enfoque antropológico en didáctica de las matemáticas, sustentado por Yves Chevallard [1] tiene como nociones fundamentales las nociones de *objeto, sujeto, institución y relación personal e institucional a un objeto* y encara el estudio de la actividad matemática entendida como una actividad humana como las demás.

En ella, el universo de prácticas sociales está formado por *instituciones*, siendo instituciones la familia, la cultura, la tienda del barrio, el país, su sistema de enseñanza, los distintos niveles de la misma, una clase de matemática, los matemáticos, los investigadores entre otras.

En esta teoría, una persona en cuanto *sujeto* institucional es un *objeto,* es decir, una entidad dotada de existencia objetiva. También son objetos las cosas materiales, las ideas y los conceptos; la lección, el ejercicio, un número, etc. Todo es objeto.

El universo de la teoría antropológica está enteramente poblado de objetos; éstos constituyen la base de la construcción teórica. Las personas, las instrucciones y los objetos no viven de manera aislada; forman ecosistemas o universos de objetos.

La institución atribuye nombre a cada uno de sus objetos. Dichos nombres son instrumentos de la actividad institucional. Tanto los objetos, las interrelaciones entre objetos, como las relaciones personales e institucionales son entidades que sólo pueden ser analizadas en el marco de las prácticas institucionales.

La teoría antropológica contempla dos nociones fundamentales: la de tarea y la de técnica.

Toda actividad se identifica con la puesta en obra de una técnica. Los objetos de una institución existen en cuanto objetos de una actividad, se manifiestan y estabilizan como elementos constitutivos de una técnica.

Es lo que ocurre con el cálculo de derivadas de funciones, por ejemplo, que supone el empleo de una técnica y la activación de ciertos objetos, como la función, por ejemplo.

El análisis empírico del funcionamiento institucional da lugar a la tecnología, entendiéndose por ella el discurso sobre la técnica con el propósito de justificar su empleo y hacerla comprensible. La institución dedica gran parte de su actividad a construir el marco tecnológico supuestamente adecuado para justificar y controlar las técnicas institucionales.

Más allá del nivel técnico y tecnológico, el análisis empírico del funcionamiento institucional pone en evidencia un nuevo nivel, el de la teoría, que funciona como discurso tecnológico de la propia tecnología por un lado y que permite articular la institución con el conjunto de instituciones sociales.

La actividad humana se puede describir aparentemente como una manipulación de objetos ostensivos y de una cierta cantidad de objetos no ostensivos evocados mediante objetos ostensivos.

Los objetos *ostensivos son objetos dotados de cierta materialidad, que puede ser en particular gestual, sonora o gráfica. Los no ostensivos son los que llamamos habitualmente "conceptos", "nociones", "ideas", etc.*[2].

Para ejemplificar, la notación f´(x) es un objeto ostensivo; en cambio, la noción de derivada es un objeto no ostensivo.

Ninguna actividad intencional puede desarrollarse a partir únicamente de la activación de objetos ostensivos. Esto es, uno realiza una actividad evocando o invocando objetos no ostensivos mediante objetos ostensivos. (f´(x) no se podría escribir sin la existencia de ciertos objetos no ostensivos como la noción de derivada).

Ambos objetos, ostensivos y no ostensivos emergen de la actividad humana y desempeñan papeles diferentes.

Los objetos ostensivos funcionan como signos de los objetos no ostensivos y permiten designarlos, mostrarlos y representarlos. Los objetos ostensivos son manipulables por el sujeto humano y se distinguen por ello de los no ostensivos. La ostensividad de los objetos es lo que permite su manipulación efectiva, así como la orientación y control de dicha manipulación.

La actividad humana requiere para su realización de una pluralidad de registros ostensivos: las expresiones orales, el grafismo, los gestos, etc.

En toda actividad humana existe una coactivación de objetos ostensivos y no ostensivos. Tanto unos como otros son esenciales en el desarrollo y gestión de la actividad matemática y un tratamiento adecuado de ambos debe evitar el privilegiar unos sobre otros.

Los objetos ostensivos pueden considerarse, en primer lugar, como instrumentos de la actividad; es decir, como entidades que permiten llevar a cabo cierta tarea, cierto trabajo.

Los objetos ostensivos movilizados en la actividad humana tienen una valencia instrumental y una valencia semiótica. La primera le permite funcionar como instrumento para realizar ciertas tareas y la segunda lo hace susceptible de producir sentido, pudiendo este sentido variar de una institución a otra.

Como instrumento, un objeto ostensivo puede tener un rendimiento variable, según la actividad en que intervenga. Por ejemplo, para las manipulaciones algebraicas habituales, la raíz o su respectivo exponente fraccionario tienen instrumentalidad equivalente y sin embargo, en el caso de la derivada, la instrumentalidad de la potencia fraccionaria es superior puesto que permite poner en práctica una técnica del cálculo.

Claro que esto vale en el marco de un sistema de trabajo determinado ya que si se usa la notación "y=" y se la trabaja como una función implícita, la raíz tiene una instrumentalidad superior.

Esto nos permitiría obtener la derivada de *y* de la siguiente forma:

$$y=\sqrt{x} \Leftrightarrow y^2 = x \Rightarrow 2yy' = 1 \Rightarrow y' = \frac{1}{2y} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \qquad \textbf{(1)}$$

Un objeto ostensivo puede ser utilizado en actividades diferentes y representar objetos diferentes según las mismas. Es decir al ser movilizado en una técnica concreta adquirirá su semioticidad efectiva y depende de la misma y no de nuestra voluntad.

Si bien la semioticidad y la instrumentalidad pueden estar localmente estabilizadas durante un largo período de tiempo, en una clase de matemática, donde las actividades evolucionan rápidamente, se puede producir una rápida variación de éstas. Por lo general se observa que existe una marcada tendencia a olvidar la coactivación de ostensivos y no ostensivos, a favor de los no ostensivos, es decir, de los conceptos. En el corazón mismo de la actividad humana situamos a los objetos ostensivos mediante los cuales ésta se realiza.

Un objeto ostensivo no adquiere su instrumentalidad y semioticidad más que por su movilización en una práctica regulada por una técnica. Correlativamente, los objetos ostensivos sólo existen a través de la manipulación de ostensivos regulados por la técnica.

La actividad matemática se apoya sobre objetos ostensivos y no ostensivos previamente existentes a partir de los cuales genera sus propios objetos. El olvido de esta circunstancia lleva a privarse de un apoyo esencial para analizar la actividad matemática y para concebir y gestionar las condiciones de su emergencia.

2 Nuestro objeto de estudio: La derivada

En este apartado pretendemos ilustrar el papel de los objetos ostensivos en la construcción del universo de la derivada, (entendido el mismo como universo matemático local, y como un fragmento del universo matemático), tomando como referencia el trabajo que efectúa Marianna Bosh i Casabó con relación a las fracciones en La dimensión ostensiva en la actividad matemática.

Para comenzar con nuestra tarea debemos expresar lo que entenderemos por universo institucional esto es "un sistema de objetos y de relaciones institucionales de éstos que viven en cierta institución y cuya existencia supone (e incluye) ciertas tareas, técnicas y tecnologías; es decir, en general, ciertos medio e instrumentos".

Tomaremos una institución particular; una clase de Cálculo Diferencial e Integral de un primer año en una carrera de ingeniería. Ésta existe en función de las relaciones personales e institucionales que deben darse para que el funcionamiento institucional sea posible. Nuestro interés es el estudio del proceso de construcción del universo institucional relativo a la derivada y de la naturaleza de los medios e instrumentos que intervienen en este proceso, con relación a la clase de primer año a que hicimos mención.

Para fabricar este universo institucional se necesita por lo menos tres ingredientes: los profesores, los alumnos y el "saber" relativo a la derivada.

Estos tres ingredientes operan en el marco de un universo de objetos ya construidos con anterioridad y supuestamente estables, (el medio), en la institución considerada.

Este universo institucional debe elaborarse a partir de ciertas restricciones explícitas que están anunciadas oficialmente en el programa de esta carrera superior; el número de horas de que se dispone para desarrollar el programa; la ubicación del concepto dentro del contexto general de la asignatura.

La derivada se desarrolla luego de un tratamiento adecuado de funciones y de las nociones de límite y de continuidad. En el universo de la derivada el programa hace mención a ciertos objetos como el concepto de derivada, de continuidad, de tangente, de pendiente, de coeficiente angular, que deberán hacerse vivir en la clase, aunque en el programa no consta la forma en que tendrán que vivir estos objetos.

Las restricciones que emanan del texto de saber, adaptado a la época y al nivel de estudios considerado, son restricciones implícitas.

A pesar de que este texto de saber podrá sufrir ciertas modificaciones cada vez que cambie el currículum de la asignatura, aun podremos notar que con respecto a la derivada existen una cantidad de elementos que permanecen invariantes a lo largo de un cierto período de tiempo.

Por ejemplo la notación: $\frac{dy}{dx}$, *f '(x), Df (x);* la presentación de la derivada como el límite de un cociente de incrementos

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \qquad \textbf{(2)}$$

la interpretación geométrica de la derivada como la pendiente de la recta tangente a la curva en el punto; el cálculo de la derivada de funciones empleando ciertas reglas de derivada, etc.

Los cambios que manifiestan los distintos textos del saber, sobre todo relacionados con el enfoque que se da a la presentación del concepto, se manifiestan como soluciones al problema ontológico de hacer vivir en el aula cierto complejo de objetos que constituyen la derivada.

No analizaremos aquí la estrategia desarrollada por un determinado profesor en una clase concreta sino que nos centraremos en la propuesta que ofrece un autor de un texto en particular.

Cada autor de un libro expone en él su estrategia ontológica para llevar a cabo la construcción de un concepto, en este caso el de la derivada. Examinaremos cómo un autor en especial presenta el universo de objetos relativos a la derivada. El autor propone en su texto su propia solución al problema, solución que será utilizada después por los docentes para desarrollar en cada una de sus clases su propia estrategia ontológica satisfactoria. El texto es pues una herramienta de creación de un universo institucional.

3 La construcción del concepto de derivada en un texto de cálculo

Tomaremos uno de los textos a los que ya hicimos mención para analizar la solución que ofrece el autor del texto como base para los trabajos que éstos deben desarrollar.

Consideraremos el siguiente texto: Capítulo 9: Derivadas de Cálculus. Cálculo Infinitesimal de Michael Spivak [3].

Evidentemente existe una íntima relación entre el texto y el universo institucional que se trata de crear en el aula. El texto del manual se presenta como fruto de una reducción tipográfica. Cuando nos referimos a la reducción tipográfica hacemos referencia al fenómeno de reducción ostensiva que seleccionamos entre los registros disponibles a priori; lo que se pondrán representar con facilidad en la hoja de papel y a desechar aquellos que no podrían someterse a dicha reducción.

El autor es conciente de esa reducción y específicamente en el prólogo precisa que el universo de objetos que presenta no deben ser los únicos que el profesor debe hacer vivir en la clase.

Los conceptos del análisis serán una ocasión propicia para profundizar en los conceptos básicos de la lógica.

Se fomenta la intuición y se reafirma el hecho de que la precisión y el rigor no obstaculizan la misma, ni son tampoco fines en sí mismos, sino simplemente el medio natural para formular y tratar cuestiones matemáticas.

El cálculo se presenta como la evolución de una idea y no como un listado de temas. Los problemas que se presentan tienen por objeto poner a prueba la asimilación de los conceptos.

Se usa una gran cantidad de signos como los asteriscos, distintos tipos de letras y numeración romana para poner en evidencia distintos aspectos de los mismos.

El capítulo seleccionado se compone de 30 páginas. A éste le sigue otro capítulo titulado Diferenciación, que se refiere en sí al proceso de hallar la derivada de una función f donde se mostrará que para calcular de derivada de una función no sólo se puede recurrir a la definición; sino que es posible calcularla en base a la aplicación de unos cuantos teoremas que involucran funciones simples, sumas, productos, cocientes, composición de funciones, etc.

En la génesis artificial del concepto de derivada se supone la existencia de otros objetos como los de función y continuidad, entre los más importantes. La partición particular del texto en la génesis artificial del concepto y el proceso de derivación corresponde a las restricciones que impone la construcción de un tiempo didáctico, lineal y discreto y manifiesta las estrategias ontológicas del autor; dejando que se muestre especialmente aspectos importantes del proceso de construcción del concepto que lleva a cabo. Él mismo lo expone en la presentación del capítulo.

En el capítulo 9 se presenta a la derivada como uno de los dos conceptos fundamentales del Cálculo, otorgándole al mismo su aroma particular.

Los conceptos de función, límite y continuidad son tomados según apreciaciones del mismo autor, como preparatorios para el gran concepto de derivada: noción luminosa y penetrante del cálculo infinitesimal; en las palabras del mismo.

La forma particular de presentar las ideas a introducir procede de la íntima conexión entre los conceptos matemáticos y ciertas ideas físicas que el autor percibió que se dieron en la historia.

Sin embargo, a pesar de que las necesidades físicas constituyeron la inspiración original para el desarrollo de estas ideas y de considerar que algunas definiciones y teoremas pueden muchas veces describirse en términos físicos, los conceptos se presentarán en términos matemáticos y se discutirá su significado en términos de problemas matemáticos.

El autor no divide el capítulo en partes, porque el mismo se refiere exclusivamente a la construcción del concepto de derivada. Sólo se discrimina de manera especial un teorema que plantea la relación entre la derivabilidad y la continuidad de la función.

Las tareas objetivas correspondientes a este capítulo adoptan la forma clásica de producción de una solución escrita. Los 10 primeros ejercicios de los 27 que se presentan al final del texto, suponen que el estudiante posee elementos suficientes para construir su solución y avanzar aún más en el proceso de construcción del concepto.

El autor presenta una propuesta de ejercicios y problemas que obligará al estudiante a relacionar, permitirá que el mismo descubra la notable riqueza matemática del concepto y la íntima relación del mismo con otros conceptos del cálculo como lo es el de continuidad, en muchos casos en un nivel mucho más elevado que el nivel que impone un primer año de estudios de cálculo.

La resolución de estos ejercicios, no es el único objetivo de las actividades, a nuestro entender es también el de ayudar a la construcción del concepto ya que los ejercicios tienden al descubrimiento de un número importante de resultados que hacen al mismo y que por otro lado serán imprescindibles para los temas que vendrán después. Por ejemplo, los ejercicios del 1 al 5, requieren de un proceso de demostración, que involucran, la aplicación de la definición como recurso principal e inmediato.

Como resultado de ello, se pueden llegar a construir reglas que permitirán en el futuro el cálculo directo de la derivada de una función. Este es el caso del ejercicio 4.

Se elige este ejemplo en función de lo que se propondrá después, y esto se confronta con la ficción que rige el tiempo didáctico.

Mas adelante, en el capítulo 10, el teorema 6 desarrolla esta propiedad.

El proceso de construcción es tenido en cuenta por el autor que invita al estudiante a conjeturar y a demostrar la conjetura aunque no invita a la elaboración de regla alguna, la que surgirá recién a partir del Teorema 6.

En el ejercicio 4, el estudiante utilizará los recursos conceptuales propios entre los que se encuentra la definición de derivada que es el único recurso específico con que cuenta hasta este momento.

Ejercicio 4: Para todo número natural n, sea Sn(x)=xn. Recordando que S'1(x)=1, S'2(x) =2x 7 S'3 (x)=3x2 conjeturar una fórmula para S'n(x). Demostrar la conjetura. (La expresión (x+h)n puede desarrollarse por el teorema del binomio).

Es evidente que en esta tarea la intuición juega un papel importante. El alumno podrá demostrar su conjetura. A pesar de ello su carácter de ejercicio no destaca la importancia del resultado.

La relevancia del mismo surgirá a partir del Teorema 6, donde el estudiante ya dispondrá de mayores recursos para demostrar con cierto rigor la propiedad. (Teorema 6: Si $f(x)=x^n$ para algún natural n, entonces $f'(a)=na^{n-1}$, para todo a).

El autor propone hacer vivir al alumno no sólo ciertos tipos de técnicas que serán de mayor utilidad e importancia en el futuro, sino que pretende que el mismo haga frente a procesos demostrativos y deductivos que lo obliguen, mas allá de la aplicación de una definición, a la elaboración de una red importante de relaciones del concepto de derivada con otros conceptos del cálculo y al descubrimiento de reglas que permitirán en forma operativa, obtener la derivada de distintos tipos de funciones.

Los ejercicios tienen, por otra parte, la intencionalidad de señalar sobre concepciones erróneas que pueden presentarse con frecuencia y acerca de las cuales se quiere advertir. Es el caso del ejercicio 8. (Ejercicio 8: (a) Supongamos g(x)=f(x+c). Demostrar, partiendo de la definición que f'(x)=f'(x+c). Trazar el dibujo para ilustrar esto. Para hacer este problema debe escribirse correctamente la definición de g'(x) y f'(x+c). El objeto del problema 7 era convencer al lector de que aunque este problema es fácil, no es una absoluta trivialidad y hay algo que demostrar en él; no se puede añadir simplemente signos prima a la ecuación g(x)=f(x+c),. Tratemos de destacar este punto.

(b) Demostrar que si g(x)=f(x+c), entonces f'(x)=cf'(cx). Trátese también de obtener una representación gráfica de por qué esto debe ser así.

(c)Supongamos que f es derivable y periódica con período a (es decir f(x+a)=f(x), para todo x) Demostrar que f' es también periódica.

Se observa en su apartado (a) la advertencia de la no trivialidad del problema: "No basta agregar primas a la ecuación g(x) = f(x+a)". Esto hay que probarlo, y se lo puede hacer a partir de un desarrollo que arranca de la aplicación de la definición de derivada.

Luego trata de reafirmar lo observado a partir de las propuestas de los apartados (b) y (c); donde en cierta medida el autor introduce códigos: "trátese también de obtener una representación gráfica de por qué esto es así", lo cual tiende a que el estudiante reafirme sus resultados a partir de su interpretación gráfica).

El ejercicio 7 (Ejercicio 7: Supongamos que $f(x)=x^3$, (a) Cual es el valor de f'(a), f'(25) y f'(36)?; (b) Cuál es el valor de f'(32), f'(52), f'(62)?; c) Cuál es el valor de $f'(a^2)$, $f'(x^2)$?. Si el lector no encuentra trivial este problema es que3 está olvidando ya tenía la advertencia del autor acerca de la no trivialidad. Nota que $f'(x^2)$ significa la derivada de f en el número que estamos designando por x^2, no es la derivada en x de la función $f(x^2)$; y para aclararlo propone:

Para $f(x)= x^3$ comparar $f'(x^2)$ y g'(x) donde $g(x)=f(x^2)$. El autor manifiesta en principio que existe una íntima conexión entre los conceptos matemáticos y las ideas físicas y para reafirmar esta vinculación presenta dos problemas (ejercicios 11 y 12).

En ellos no solo se tiende a establecer la relación con conceptos físicos, sino que pretende interpretar éstos y sus relaciones desde un riguroso punto de vista matemático que tiene que ver con la derivación del producto de una constante por una función planteada ya en el ejercicio 8.

El autor quiere que el lector descubra que a partir de la expresión correcta de s(t) y de las condiciones de proporcionalidad, se llega a la expresión de la velocidad y de la aceleración desde el punto de vista matemático, y que las expresiones obtenidas dicen mucho más acerca de la relación de proporcionalidad existente entre la derivada de s y s' (desde el punto de vista matemático).

Esta relación trata de reafirmarse a partir de una propuesta eminentemente física que da en el ítem (c).

El hecho que la elección de los problemas depende esencialmente de lo que vendrá después, se manifiesta en muchos otros ejercicios. Tomemos por ejemplo, el ejercicio 20, donde se incorpora al estudiante al tratamiento de las derivadas de funciones polinómicas que se verán en el capítulo siguiente.

El objetivo del ejercicio no es en realidad elaborar reglas para derivar una función polinómica, ni para determinar si la misma es derivable. Lo es, lo afirma y anuncia que esto será considerado en el capítulo 10.

El objetivo del ejercicio es mucho mas amplio y toca a las funciones polinómicas sin importar demasiado cómo se llega a las derivadas de éstas. Esto será considerado después. En este ejercicio se pretende relacionar la derivada en el punto con la tangente a la gráfica de la función en el mismo, y aún más; pretende incorporar al estudiante en la problemática de la aproximación de la curva por la tangente.

Al no haber desarrollado la derivada de funciones polinómicas, el autor debe conducir al estudiante al logro gradual del objetivo y los hace a través del estudio del comportamiento de la diferencia d (x) entre f (x)-g (x); siendo g (x)= f' (a) (x-a)+f (a) la ecuación de la recta en el punto.

Comienza considerando funciones polinómicas simples como $f(x) =x^2$ y $f(x) = x^3$ y demuestra que en estos casos d (x) es divisible por $(x-a)^2$.

Sugiere el análisis de la función f (x) = x4 y propone la siguiente conjetura: d(x) es divisible por $(x-a)^2$.

La demostración debe ser construida por el estudiante el que usará sus propios argumentos orientados por el argumento intuitivo que el texto brinda.

El argumento intuitivo, que se apoya en un gráfico, deberá dar paso a la definición rigurosa la que tiene bases sólidas para ser construida sobre todo si el estudiante es capaz de responder a los cuestionamientos dados en el texto del enunciado.

El autor quiere dejar en el lector el siguiente mensaje: la tangente a la curva en el punto, es la mejor aproximación a la curva en un entorno de ese punto y esto en consonancia a lo ya desarrollado en las págs. 181 y 191, y en función de la notación adoptada en este capítulo.

El ejercicio 21está a tono con la ficción que rige el tiempo didáctico. Este ejercicio está orientado a requerir el carácter local de la derivada lo cual no se planteó específicamente en el desarrollo del capítulo, pero es necesario reafirmarlo. Ejercicio 21: (a) Demostrar que f'(a)=limx→a[f(x)-f(a)]/(x-a) (no hay aquí nada profundo). (b) Demostrar que las derivadas constituyen una "propiedad local". Si f(x)=g(x) para todo x de algún intervalo abierto que contiene a, entonces f'(a)=f'(a) (Esto significa que al calcular f'(a), se puede prescindir de f(x) para cualquier x≠a particular. Por supuesto no se puede prescindir de f(x) para todo x a la vez.

El ejercicio 30 permite al estudiante elaborar una síntesis apropiada entre el concepto de derivada, algunas propiedades especiales presentadas en los ejercicios anteriores y la notación de Leibniz que es la sostenida en el tratamiento del tema. La mayoría de los ejercicios tienen como meta hacer vivir unos objetos y unos tipos de técnicas que adquirirán su importante en el futuro aunque el lector, o eventualmente el alumnos, no tengan aún conciencia de ello. Un aspecto interesante del texto son los ejemplos, por esa razón centramos nuestra atención en ellos.

4 La derivada como lenguaje de descripción

La construcción de la noción requiere la activación de una pluralidad de registros ostensivos.

El autor dispone, en principio, de una gran variedad de objetos no ostensivos como los conceptos de funciones continuas, de recta tangente, de recta secante, de pendiente, de límite, de función y de los ostensivos que surgen con relación a estas nociones como f o f(x); el gráfico de la recta tangente a la curva, el gráfico de la función como el símbolo de límite; por nombrar algunos.

El autor supone que estos objetos forman parte del universo institucional de la clase, del medio y también forma parte del universo de objetos que existen para su lector.

Lo primero que podemos observar es que el autor construye la noción de derivada al partir del comportamiento de una serie de funciones ostentadas en forma gráfica y simbólica.

Son para el autor, funciones que tienen el derecho de recibir el nombre de "razonables", en relación con su comportamiento, y que tienen un comportamiento aún mas regular que la mayor parte de las funciones continuas, según la expresión del autor.

Comienza con la presentación de funciones continuas con un comportamiento irregular en un punto de su dominio, específicamente en el origen.

Presenta las siguientes funciones:

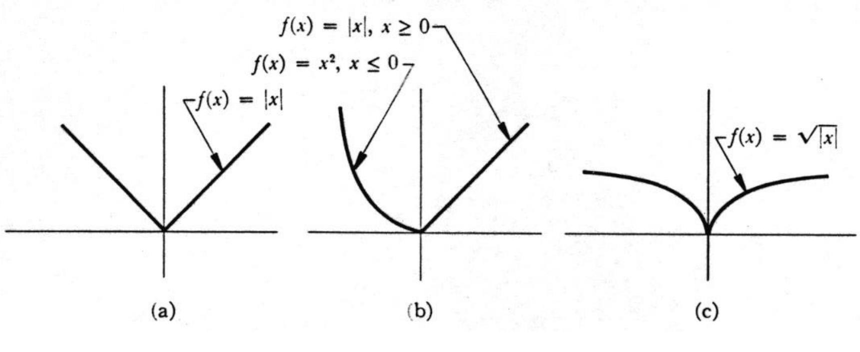


Fig. 1. Funciones continuas de comportamiento irregular

Que se contraponen a la función presentada en la Fig. 2 en el sentido de que en las primeras es imposible trazar una tangente en el origen.

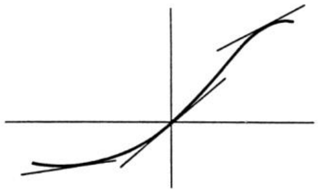


Fig. 2. Función en la que siempre se puede trazar la tangente

El autor va construyendo un lenguaje alrededor de los ejemplos presentados; lenguaje con que el lector debe familiarizarse y debe significar.

Habla de "quebrada" y de "tangente". La intención del autor es mostrar que la gráfica puede estar "quebrada" en un punto donde no se puede trazar la tangente.

El lenguaje se construye como parte del proceso de construcción del concepto de derivada.

La noción de tangente debe ser construida ahora con un sentido más amplio que el que normalmente el alumno posee hasta el momento.

La tangente puede tocar a la curva en más de un punto, como ocurre en la Fig. 3. (a)

O la recta puede tocar a la curva en un punto y no ser tangente a ella como en la Fig. 3. (b)

(a) (b)

Fig. 3. (a) La tangente corta a la curva en más de un punto, (b) Recta que corta a la curva en un punto y no es tangente

La construcción del concepto de tangente supone otro abordaje, ya no sólo geométrico, sino analítico.

Se llegará a la definición de tangente a partir de la noción de secante y usando la definición de límite. Se llega así a la pendiente de la recta tangente a la curva en el punto *(a, f (a)*), la que es:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \qquad \textbf{(3)}$$

Esto prepara al lector para la siguiente definición.

La función f es derivable en a si,

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \text{ existe} \qquad \textbf{(4)}$$

En este caso el límite se designa por f'(a) y recibe el nombre de derivada de f en a (Decimos también que f es derivable si f es derivable en a para todo a del dominio de f)

La tangente en (a, f (a)) sólo está definida si f es derivable.

A continuación el autor alude a una cuestión de lenguaje. El lenguaje escrito: los símbolos, la notación seleccionada; f '(a) que recuerda a la notación funcional. Así para cualquier función f, designamos con f ' una nueva función que tiene como dominio al conjunto de todos los números a tales que *f* es derivable en *a* y cuyo valor para tal número es

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \qquad \textbf{(5)}$$

Para precisar *f '* el autor la presenta como el conjunto de todos los pares

$$\left(a,\ \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}\right), \text{ para los cuales existe el límite.} \qquad \textbf{(6)}$$

En lo que sigue se conduce la atención a las relaciones entre el fragmento del universo matemático que el autor pretende construir y el universo de la física ya constituido con el que quiere relacionar al concepto y de donde toma los ejemplos con el objeto de establecer la relación.

La primera situación introduce al lector al campo de la física apoyada por una notación particular elegida intencionalmente, y por gráficos y expresiones que ayudan al propósito.

Por un momento el autor sale del universo matemático para introducirse en el de la física con su lenguaje específico que involucra; movimiento de una partícula, velocidad media, velocidad instantánea, rapidez instantánea, etc.

El concepto de velocidad instantánea es construido como un concepto teórico y abstracto que no corresponde exactamente a ninguna cantidad observable, pero que puede ser obtenida matemáticamente a partir del límite.

Lo que en física mide realmente es la velocidad media a lo largo de un intervalo de tiempo muy pequeño, por lo que no puede esperarse de este procedimiento una respuesta exacta.

Esto no debe representar ningún problema para quién hace uso de la física; ya que las mediciones físicas no son exactas.

El lenguaje de la física sirve para mostrar y reafirmar la conexión entres estas nociones físicas y la matemática.

A partir de ello el lector sabe, por ejemplo, que tanto la velocidad como la aceleración se obtienen a partir de un cálculo de derivada.

El objeto derivada aún no está construido. Para favorecer esta construcción el autor propone examinar la derivada de funciones particulares.

Esto ayudará al lector a tener una idea mas aproximada de cómo es la derivada de una función.

Esto debe hacerse en este capítulo, ya que en el próximo se dedicará exclusivamente a un aspecto de este problema; el cálculo de derivada de funciones complicadas.

Las derivadas de funciones particulares proponen al lector situaciones diversas e interesantes que el mismo puede percibir a partir de su expresión analítica y de su expresión gráfica.

La función constante y la función lineal se presentan como que poseen una característica común: su tangente coincide con el mismo gráfico de la función.

Las funciones $f(x)=x^2$ y $f(x)=x^3$, tienen comportamientos distintos con relación a la tangente: mientras la primera se intersecta con la tangente en un punto único, la segunda puede hacerlos en más de un punto.

Todo esto se reafirma analíticamente, lo cual permite confirmar lo observado.

Los ejemplos elegidos son suficientes para ilustrar la notación clásica y todavía muy popular adoptada en el texto.

Para una función f, la derivada f ' se designa a menudo por $\frac{d\,f(x)}{dx}$, notación que se debe a Leibniz.

La expresión representa un todo donde cada una de las partes tiene sentido; no es un cociente de partes aunque se muestra de manera muy similar a ella; aunque parezca complicarse a los ojos del lector tiene sentido en sí misma, posee generalidad, instrumentalidad y sentido; puede aplicarse a cualquier función y permite expresar, en pocas palabras todo lo dicho con respecto a la derivada.

Sin embargo, el mismo autor lo afirma, se presenta con cierta ambigüedad; a veces representa f '(x) y otras f '.

Esto hace que se presente muchas veces como $\frac{df}{dx}$, para eliminar esta ambigüedad.

La estrategia ontológica del autor hace que la prefiera esta última, con vistas a ser empleada fundamentalmente en ejercicios.

Para concluir con la construcción de la noción aún se necesita mostrar algunas funciones particulares como $f(x)=|x|$ que tiene un comportamiento extraño en el origen.

En ese punto, f no es derivable y este hecho permite la introducción de la noción de derivadas por derecha e izquierda; ejemplificadas adecuadamente, con ejemplos apropiados expresados en forma analítica y gráfica.

Para concluir el capítulo, el autor desea mostrar que la derivación como concepto supone un progreso con relación a la continuidad de la función; conclusión que se torna evidente en virtud de los múltiples ejemplos con que se trabajaron, pero, sin embargo hay que institucionalizar a través de un teorema.

5 Estrategia ontológica del autor

Podemos resumir ahora lo que hemos llamado la estrategia ontológica del autor:

- La construcción del concepto de derivada toma un punto de partida; el estudio del comportamiento de funciones en distintos puntos de su dominio.

- Sobre ese primer estrado se levanta un segundo que consiste en el análisis de las posibilidades de trazado de tangentes de ciertas funciones especialmente elegidas en puntos determinados.
- Un tercer estrato lo constituye la construcción de la noción de pendiente de esa recta tangente, usando cierta estrategia discursiva apoyada por gráficos y expresiones simbólicas que reafirman ciertas situaciones.
- El estrato siguiente muestra la definición misma de derivada que emerge naturalmente de los estratos inferiores.
- Un nuevo estrato nos permite manejarnos ya en el universo de las derivadas para indagar el comportamiento de ésta en situaciones concretas y en funciones en particular.
- Este estrato culmina con la consideración de la notación escogida y de las relaciones de la misma con el concepto en sí.
- El penúltimo estrato tiende a vincular la derivada con otras propiedades de las funciones; especialmente con la continuidad, y el último está constituido por ejercicios pensados para complementar las nociones definidas en el capítulo y profundizarlas y para sentar las bases para las nociones que se desarrollarán en el capítulo siguiente.

La forma en que este autor construye el concepto es muy similar a como se plantea en clase el proceso de construcción de este concepto central que es la derivada.

6 Conclusiones

Es sabido que el texto del saber se formaliza concretamente por medio de diversos textos, cada uno de los cuales constituye una variante, donde cada uno de los autores elabora su propia versión del texto del saber adecuado a las posibilidades didácticas de los sujetos (profesores y alumnos) a los cuales va dirigido el mismo.

Ese texto del saber está sujeto a fuertes restricciones.

La primera de ellas está dada por el público a quien va dirigido, en este caso, alumnos universitarios con una buena base matemática, sin demasiada orientación hacia las aplicaciones. Los estudiantes que queremos que construyan el concepto de derivada son estudiantes de cálculo que conocen las nociones de función, continuidad, límite y toda otra noción necesaria para que el proceso de construcción sea posible.

En segundo lugar, el autor tiene como objetivo específico la creación de un universo matemático, aquí en particular la noción de derivada, con la ayuda de los medios ostensivos y no ostensivos disponibles. Las limitaciones de la reducción tipográfica constituyen una nueva restricción. Todas estas restricciones ponen un cierto límite entre la estrategia ontológica del autor y las que posiblemente se den en un salón de clases con estudiantes particulares, aún cuando este texto pueda llegar a ser de gran importancia en la actividad áulica.

El texto pone de manifiesto además, un sistema discursivo especial, caracterizado por un léxico especial y un sistema de ostensivos adecuados. Todo esto nos permite vislumbrar el papel importante que juegan los ostensivos en la construcción del universo de objetos.

Los ostensivos juegan un doble papel; por un lado son como instrumentos de la construcción de la noción, y por otro resultan productos de dicha construcción ya que son componentes de técnicas que permiten trabajar con el universo construido.

Una lectura lineal del texto puede resultar insuficiente para entrar en el universo que el autor quiere construir. Hacer una buena educación ontológica ayudaría al respecto.

En este capítulo nos propusimos analizar un texto de los que comúnmente manejamos en el desarrollo de nuestra asignatura desde un ángulo distinto. Para ello tomamos el modelo sostenido por Marianna Bosch ya que lo consideramos un modelo rico e interesante.

Referencias

1. Chevallard, Y.; Bosch, M.; Gascon, J. Estudiar Matemática. El eslabón perdido entre la enseñanza y el aprendizaje. 1º Edición. Barcelona. Editorial Ice Horsori. Pp.71-80. 119-127. Año 1997.
2. Bosch, M. Casabó, M. La dimensión ostensiva de la actividad Matemática. El caso de la proporcionalidad Tesis doctoral. Tesis dirigida por Yves Chevallard. Universidad Autónoma de Barcelona. Octubre de 1994
3. Spivak, M. Cálculo Infinitesimal. 2° Edición. Editorial Reverté. Pp 181-210. Año 1994
4. Font, V. Representaciones ostensivas que pueden ser activadas en el cálculo de f´(x). El caso de la función seno. Revista Uno. Pp. 21-37. Universidad de Barcelona. Año 2000

Volver al Índice

Una Experiencia Didáctica Basada en el Uso de Video Lecciones

Gloria Prieto, Stella Maris Figueroa, María Laura Distéfano, Sandra Baccelli
Grupo GIEMI, Departamento de Matemática, Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de Mar del Plata
Juan B.Justo 4302. Mar del Plata.
{Gprieto, mldistefano}@fi.mdp.edu.ar, {stellafigueroa , sbaccelli}@gmail.com

Resumen. Esta experiencia proporciona una solución a la falta de tiempo áulico para desarrollar ciertos contenidos correspondientes al programa de Álgebra A, materia básica común a todas las carreras que se cursan en la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional de Mar del Plata, Argentina (UNMDP). Los contenidos abordados fueron *Números combinatorios y Binomio de Newton.* La experiencia se basó en el uso de seis videos en formato de videolecciones, que presentan desarrollos teóricos y ejemplos de aplicación. Dichos vídeos fueron diseñados en la misma la asignatura. Utilizando elementos del *Aula invertida*, se logró que estos contenidos, que se presentaban en dos clases teóricas presenciales, pudieran desarrollarse en una sola clase presencial. En la misma los estudiantes trabajaron en forma grupal, realizando ejercicios de aplicación de los conceptos teóricos presentados en las videolecciones. De esta manera la experiencia aportó a la resolución al problema mediacional planteado.

Palabras Clave: Tiempo, Videolección, Números combinatorios, Binomio de Newton, Trabajo grupal. Aula invertida.

1 Introducción

En los últimos años se ha ido acentuando el problema de falta de tiempo para desarrollar todos los contenidos de la currícula de la asignatura Álgebra A, materia básica común a todas las carreras que se cursan en la Facultad de Ingeniería de la UNMDP. En diversas ocasiones, hubo que reducir el tiempo áulico planificado para desarrollar temas cuya complejidad requería el uso total del mismo.

Este problema generó preocupación en los docentes de la asignatura, que iniciaron un intercambio de ideas acerca de posibles soluciones.

Paralelamente se puso en debate la cantidad de horas áulicas dedicadas a desarrollar ciertos contenidos teóricos de baja complejidad, en desmedro de las dedicadas a otros contenidos teóricos y/o a las dedicadas a las prácticas. Dos ejemplos que se pueden proporcionar son los contenidos teóricos correspondientes a las *Fórmulas de Vieta* y a *Números combinatorios - Binomio de Newton*.

Teniendo en cuenta que los estudiantes hacen uso continuo de la tecnología, se propuso la idea de utilizar vídeos para reemplazar el tiempo dedicado a algunas clases teóricas, de tipo magistral, por clases prácticas de resolución de problemas. Se consideró, además, la posibilidad de que esas clases prácticas se realizaran en forma grupal. La idea fue ganando consenso, y se decidió hacer un relevamiento del material existente en youtube, pero no se encontraron vídeos que se ajustaran exactamente a los contenidos y al nivel de ejercitación de los trabajos prácticos planteados por la cátedra. En base a las recomendaciones de Bravo Ramos [1], *"*A los alumnos les preocupa el examen. Por ello, los vídeos que realmente aprecian y suscitan su interés son aquellos en los que están inmersos el centro, los departamentos y, sobre todo, el profesor de la asignatura", surgió la idea de producir vídeos dentro de la asignatura.

A partir de ahí se inició un trabajo de búsqueda de material que incluyó, tanto cuestiones técnicas relativas al diseño y producción de vídeos, como pedagógicas destinadas a seleccionar el tipo de vídeos a producir y la modalidad del trabajo a realizar en las clases presenciales.

En relación al primer punto, se optó por los *vídeos didácticos* o *videolecciones* [2] por considerarse los más adecuados para la experiencia a realizar.

Se hicieron algunos ensayos iniciales abordando el tema *Fórmulas de Vieta*. Como resultado de los mismos surgieron tres vídeos en formato de videolecciones que presentan los desarrollos teóricos que conducen a las fórmulas y dan ejemplos de aplicación. Se usaron a partir del curso lectivo 2015 y tuvieron buena acogida por parte docentes y alumnos, permitiendo mejorar el uso del tiempo. Como consecuencia de esa primera experiencia, se programó y realizó una serie compuesta por seis videolecciones sobre *Números combinatorios y Binomio de Newton*, que son los que dieron origen a la experiencia presentada en este trabajo.

2 Marco teórico

En el diseño del proceso de instrucción implementado para llevar a cabo esta experiencia se utilizó una combinación de elementos que incluyen: la *Tecnología de la Información y la Comunicación (TIC)*, para la elección del tipo de vídeos a utilizar y la metodología a usar para su diseño y producción, el *trabajo grupal*, como metodología de trabajo a usar en la clase presencial, y el modelo de *aula invertida*, como marco general del proceso de instrucción.

El término *aula invertida* fue introducido por [3], para relatar una experiencia realizada en una asignatura del área Economía. Su uso se fue extendiendo y actualmente se aplica esta modalidad en cualquier asignatura en la que el profesor demanda que el estudiante aborde ciertos temas específicos en forma previa a la clase presencial [4,5]. La diferencia que propone el *aula invertida* con respecto al aula tradicional, es que el estudiante accede a esos conocimientos mediante el uso de la tecnología (videos didácticos, video conferencias, presentaciones), en tiempo extra-áulico.

"Invertir la clase significa que los eventos que tradicionalmente han tenido lugar dentro de la clase ahora tienen lugar fuera de la clase y viceversa" [3]. La propuesta de estos autores se basa en la necesidad de nivelar los diferentes tipos y estilos de aprendizaje de los estudiantes con el estilo de enseñanza del profesor. En este contexto, el uso del multimedia es considerado como un instrumento que permite al estudiante elegir el mejor método y espacio para adquirir a su propio ritmo el conocimiento previo demandado por el docente [3, 4] especialmente si el material se encuentra en la Web o es de fácil acceso. Este modelo transfiere al estudiante la responsabilidad de la aprehensión de contenidos, y al profesor la organización de su práctica a fin de guiar las actividades que posibiliten a los estudiantes el logro de los objetivos propuestos [3]. Ambas instancias de aprendizaje deben estar diseñadas de manera articulada para proporcionar un aprendizaje integrado [6]. Se decidió, además, que todo el proceso se sustente en el modelo constructivista, específicamente de Vigotsky, en cuanto a la construcción colaborativa de saberes.

"La clave de una buena experiencia en un aula invertida es la planificación estructurada que el docente elabore sobre las situaciones de aprendizaje, cuidando el acceso al material de apoyo dentro y fuera del aula, la puesta en práctica de proyectos o resolución de problemas que permita la verificación de los conocimientos adquiridos en pequeños grupos, facilitando su evaluación y permitiendo un ritmo más fluido de trabajo; así como registrar las ganancias obtenidas en la aplicación de determinada estrategia a fin de mejorar el resultado académico real, no solo el auto-percibido" [7].

En relación al docente [3, 8, 9], manifiestan que el mismo debe tener inclinación por el trabajo colaborativo, debe ser capaz de abandonar el rol central en el proceso de enseñanza para desplazarlo hacia los estudiantes, estar abierto a distintas propuestas de resolución por parte de los mismos y ser propenso a la conversación heurística. También debe tener un buen dominio de su asignatura a fin de poder guiar efectivamente a los estudiantes. Y debe manejar variados recursos de la tecnología de la información y comunicación (TIC), ya que tendrá que poder manipular aquéllos que va a utilizar en este tipo de clases.

Sin embargo, la incorporación del vídeo como medio de comunicación para la representación del conocimiento en las prácticas educativas, requiere "una profunda reflexión respecto a la integración curricular, a las características que deben reunir los programas y la producción de programas en vídeo para uso escolar y a la adaptación de estos materiales a la audiencia" [10].

Como se anticipó en la introducción, el tipo de vídeos que se decidieron utilizar para esta experiencia son los llamados v*ídeos didácticos* o *videolecciones*. Se consideraron los más adecuados para la misma por ser los más elaborados, tanto desde el punto de vista de los contenidos, como desde la producción y edición.

Las videolecciones son consideradas como *vídeos curriculares*, debido a que se adaptan expresamente a la programación de la asignatura, y son catalogadas como *de alta potencialidad expresiva* [11] por la capacidad que tienen para transmitir un contenido educativo completo [2].

Para el diseño de este tipo de vídeos, se plantean los contenidos a abordar y los objetivos de aprendizaje a lograr por los estudiantes a través de su visionado. Se pretende que la videolección sea capaz de transmitir esos contenidos con claridad, facilitando su comprensión y fijación.

Para ello, el vídeo deberá tener un alto nivel de estructuración de los contenidos y locución que complemente las imágenes. Su trama narrativa debe ser sencilla y la secuenciación de contenidos debe estar organizada en forma clara y ordenada. Su ritmo narrativo debe ser ágil y equilibrado [2].

Es recomendable que estén presentes elementos que facilitan la comprensión y fijación del contenido. Pueden ser preguntas disparadoras, imágenes (animadas o no) que faciliten la comprensión de los conceptos que se presentan, elementos separadores de bloques y/o secuencias, pistas tipográficas que ponen de manifiesto la jerarquía de los conceptos y ayudan a su fijación, repeticiones intencionadas, etc.

Se recomienda que, al comienzo de cada videolección, se anticipen los contenidos a desarrollar, los objetivos a lograr y los conocimientos previos que el estudiante debe poseer. Y que al finalizar se realice, a modo de síntesis, un breve punteo de los contenidos desarrollados. También es importante tener en cuenta la duración. Si bien, en general, se aconseja que la duración de un vídeo sea de unos pocos minutos, en el caso de las videolecciones se acepta que puedan extenderse hasta unos diez a doce minutos [2].

3 Descripción de la experiencia

En esta experiencia se realizó la siguiente inversión: el tiempo de una de las dos las clases teóricas presenciales que tradicionalmente se utilizaban para la presentación de estos contenidos, se usó para realizar un trabajo en grupal con los estudiantes, en base a una serie de actividades prácticas, que requerían del visionado previo de las videolecciones por parte de los mismos.

De esta manera, el uso de la tecnología permitió desplazar las lecciones teóricas fuera del aula empleando el tiempo que usaba el docente en una clase magistral para el desarrollo de actividades prácticas grupales.

Esta experiencia de clase invertida se llevó a cabo en una de las seis comisiones en que se divide el cursado de Álgebra A. La misma funciona en el turno tarde y es la comisión en la que se concentran los estudiantes que trabajan. Al momento de realizar la experiencia se contaba con 35 alumnos. Dado que era la primera vez que se llevaría a cabo una clase con estas características, el primer paso fue narrar a los estudiantes, en una clase previa, cuáles fueron los problemas que motivaron a los docentes de la cátedra para realizar las videolecciones. También se les explicó cómo se usarían y cuáles serían las características de la clase a desarrollar en base a las mismas. En todo momento se trató de motivarlos e implicarlos en la experiencia que se iba a realizar. La mayoría de ellos se mostró interesado. Se generó un intercambio de ideas en las que predominó una valoración positiva con respecto a que las asignaturas produzcan materiales que puedan llegar a reemplazar una clase teórica. En particular, los estudiantes que trabajaban se mostraron muy entusiastas y manifestaron que para ellos sería de mucha utilidad que este tipo de iniciativa se extendiera a otros temas y a otras asignaturas.

Luego se les distribuyó en forma impresa una guía para orientar sus acciones previas a la clase (ver Metodología). Todo esto fue realizado con una semana de antelación.

El día que se llevó a cabo la clase se encontraban presentes 29 estudiantes, que se dividieron en seis grupos conformados por cuatro o cinco estudiantes cada uno. Se realizó un breve recordatorio de la consigna entregada la semana anterior y se distribuyeron distintas actividades para realizar en cada grupo. Se procuró que su conjunto resultara una muestra representativa del tipo de problemas de la guía de trabajos prácticos de la asignatura.

Los estudiantes trabajaron debatiendo entre sí. Se observó que algunos recurrieron a la síntesis que se les había solicitado que llevaran, otros a los apuntes teóricos de la asignatura, otros volvieron a mirar algún vídeo con sus teléfonos y algunos consultaron con el docente. También se presentó el caso de tres estudiantes que manifestaron no haber podido cumplir con el visionado. Se les indicó que lo hicieran en la clase, usando el ordenador de la docente con conexión a internet.

Cumplido el tiempo estipulado, se fueron proyectando en la pantalla los enunciados de las actividades encomendadas a cada grupo, y uno o más estudiantes del mismo pasaron al pizarrón y explicaron a sus compañeros cuáles fueron los conceptos teóricos que usaron, cómo pensaron los ejercicios y cómo los resolvieron. En esta parte de la clase hubo mucha interacción entre los expositores, la docente y el resto de los estudiantes. En algunos casos se hicieron acuerdos sobre los significados involucrados. La docente pidió a los estudiantes que prestaran mucha atención al orden y la coherencia de la exposición, y al uso correcto del lenguaje coloquial y simbólico. Les indicó que era conveniente tener en cuenta estas recomendaciones cada vez que escribieran los desarrollos de los ejercicios de un examen parcial o final.

Finalmente, cada grupo entregó al docente la resolución escrita y completó una encuesta. En una clase posterior el docente hizo la devolución en base a los criterios expuestos. Es importante aclarar que los estudiantes contaban con una clase práctica adicional para consultar y/o resolver los ejercicios de la Guía de Trabajos Prácticos de la asignatura.

4 Planificación de la clase

4.1 Planteo de contenidos y objetivos

La Tabla 1 muestra los nombres de las videolecciones, sus contenidos y los objetivos de aprendizaje correspondientes.

Tabla 1: Contenidos y objetivos de cada videolección

.

Videolección	Contenidos	Objetivos de aprendizaje
Parte I: Factoriales y números combinatorios	Conceptos de factorial y número combinatorio. Ejemplos de cálculo.	Calcular factoriales, calcular números combinatorios, operar con factoriales y números combinatorios.
Parte II: Propiedades de los números combinatorios	Números combinatorios complementarios y números combinatorios sucesivos. Propiedades de los mismos. Ejemplos.	Reconocer números combinatorios complementarios y sucesivos. Aplicar sus propiedades.
Parte III: Fórmula del Binomio de Newton	Construcción inductiva de la Fórmula del Binomio de Newton. Propiedades del desarrollo. Ejemplos de aplicación..	Construir el desarrollo de potencias de exponente natural de un binomio.
Parte IV: Construcción práctica del triángulo de Tartaglia	El Triángulo de Tartaglia. Sus propiedades. Construcción del triángulo en forma algorítmica.	Construir el Triángulo de Tartaglia en forma algorítmica.
Parte V: Un ejemplo de aplicación de la fórmula del Binomio de Newton	Desarrollo de un ejemplo de aplicación de la fórmula del Binomio de Newton	Aplicar la Fórmula del Binomio de Newton y sus propiedades para obtener el desarrollo de una potencia de exponente natural de un binomio dado
Parte V: Un ejemplo de aplicación de la fórmula del Binomio de Newton	Desarrollo de un ejemplo de aplicación de la fórmula del Binomio de Newton	Aplicar la Fórmula del Binomio de Newton y sus propiedades para obtener el desarrollo de una potencia de exponente natural de un binomio dado
Parte VI: Cómo obtener un cierto término del desarrollo del Binomio de Newton	Obtención de la fórmula del término que ocupa determinado lugar en el desarrollo del Binomio de Newton. Ejemplo.	Conocer y aplicar la fórmula del término que ocupa determinado lugar en el desarrollo del Binomio de Newton. Aplicarla para calcular un término del desarrollo que cumpla determinadas condiciones.

4.2 Metodología

4.2.1 Consigna

Con una semana de anticipación, se entregó a los alumnos la siguiente consigna para la clase de Número combinatorio y Binomio de Newton que se transcribe a continuación:

> *El día 13-05 comenzaremos a desarrollar la unidad de Combinatoria. El contenido a tratar ese día es Número combinatorio- Binomio de Newton. En la clase de teoría no se dictarán los contenidos teóricos correspondientes. Los mismos están desarrollados en una serie de seis videos cuyo nombre es Número combinatorio- Binomio de Newton***,** *que se encuentran en el blog* [11] *de la asignatura con la etiqueta Videos explicativos. Para ese día deberán tener visionados los seis videos y traer a la clase una síntesis de los contenidos de cada uno de ellos.*
> *En la clase presencial se trabajará en grupos de no más de cinco alumnos. Quienes quieran pueden traer armado su grupo. Y si no, lo haremos en la clase. Cada grupo recibirá una hoja con uno o más problemas*

que deberán resolver en un período de tiempo estipulado. Para ello podrán consultar los apuntes de teoría, volver a visualizar los videos y/o consultar con el docente. Al finalizar el tiempo, uno o más representantes de cada grupo pasará al pizarrón, mostrará los enunciados del/los problemas asignados y explicará al resto de sus compañeros qué elementos teóricos utilizaron, cómo pensaron los ejercicios y cómo los resolvieron. Al finalizar la clase deberán entregar su producción con los nombres de los integrantes del grupo y la resolución correspondiente. En cuanto a este último punto, se les pedirá que presten especial atención a la claridad y coherencia de los desarrollos y al uso correcto del lenguaje coloquial, notacional y/o gráfico. Por último se les pedirá completar una encuesta para evaluar esta modalidad de trabajo.

4.2.2 Actividades a desarrollar por el docente y por los estudiantes en la clase presencial

- Actividades docentes: realizar un breve recordatorio de la consigna que figura en el inciso a), proponer la actividad e invitar al grupo a analizar, discutir y resolver los ejercicios propuestos. Ante algún tipo de duda, guiar al estudiante con preguntas y/o sugerencias. Gestionar y controlar los tiempos dedicados a cada etapa.
- Actividades discentes: realizar la actividad propuesta interactuando con los demás integrantes del grupo y con el docente. De ser necesario consultar la síntesis que se les solicitara, los apuntes teóricos de la asignatura y/o volver a ver la videolección correspondiente. Entregar al docente la resolución escrita de la actividad. Exponer la resolución en el pizarrón para la totalidad de los estudiantes, respondiendo las preguntas que puedan formularle. Completar una encuesta.

Tareas a realizar por el Grupo 1

Objetivos: operar con factoriales - operar con números combinatorios -demostrar la propiedad de los números combinatorios complementarios

1º) Simplificar las fracciones, usando el concepto de factorial

$$\frac{6!}{6! - 4!} \qquad \frac{(k+1)!\,(m+1)!}{(m+2)!\,k!}$$

2º) Determinar las condiciones de existencia de los números combinatorios que figuran en la siguiente igualdad. Luego, demostrarla.

$$\binom{m}{n} = \binom{m}{m-n}$$

3°) Verificar que

$$\binom{7}{4} - \binom{6}{2} = \binom{6}{3}$$

Tareas a realizar por el Grupo 2

Objetivos: operar con números combinatorios- demostrar propiedad de los números combinatorios sucesivos.

1º) Determinar las condiciones que deben cumplir los números m y n para que los tres números combinatorios que figuran en la igualdad existan simultáneamente.

$$\binom{m}{n} + \binom{m}{n+1} = \binom{m+1}{n+1}$$

2º) Demostrar la igualdad anterior.

Tareas a realizar por el Grupo 3

Objetivo: resolver ecuaciones combinatorias aplicando la propiedad de los números combinatorios complementarios.

1º) Completar para obtener una equivalencia $\binom{m}{t} = \binom{m}{q} \Leftrightarrow$……………….

2º) Hallar todos los valores de x que satisfacen las siguientes igualdades *a)* $\binom{3x-4}{4} = \binom{3x-4}{x-2}$

b) $\binom{4x}{2} = \binom{4x}{x^2-7}$

Tareas a realizar por el Grupo 4

Objetivo: obtener el desarrollo de una potencia de exponente natural de un binomio.

Usar la fórmula del Binomio de Newton para escribir el desarrollo de

1º) $(1+2x)^8$

2º) $\left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{2}{x^2}\right)^5$

Tareas a realizar por el Grupo 5

Objetivo: obtener directamente un término determinado del desarrollo de una potencia de exponente natural de un binomio, sin escribir el desarrollo completo.

1º) Hallar el octavo término del desarrollo de $(2m^3 - \frac{1}{2m})^{10}$ *si el mismo está ordenado en forma decreciente por las potencias de m.*

2º) Hallar el octavo término del mismo desarrollo, pero ordenado en forma creciente por las potencias de m.

Tareas a realizar por el Grupo 6

Objetivo: resolver un problema relativo a la potencia de un binomio

1º) ¿A qué potencia fue elevado el binomio $(t^4 - t^{-2})$ *si el sexto término, ordenado por potencias decrecientes de t, es de segundo grado?*

2º) ¿Existe algún número natural tal que al elevar el binomio $(t^4 - t^{-2})$ *a dicho número el sexto término, ordenado por potencias crecientes de t, es de segundo grado?*

4.2.3 Encuesta

Con la intención de obtener información sobre la opinión de los estudiantes con respecto a diversos aspectos relativos a las videolecciones, se diseñó la encuesta que se muestra en la Tabla 2.

Tabla 2: Encuesta

Para cada uno de los siguientes ítems evalúa tu grado de acuerdo según la siguiente escala. 1 2 3 4 5 Fuertemente en desacuerdo · No estoy de acuerdo · Indiferente · De acuerdo · Fuertemente de acuerdo
1. Las videolecciones fueron útiles para mi aprendizaje.
2. El lenguaje usado es muy comprensible
3. El ritmo de la exposición es muy bueno
4. La duración es adecuada a los contenidos expuestos
5. El audio es muy bueno
6. Es una ventaja poder verlos en cualquier momento.
7. Es una ventaja poder detenerlos y/o volverlos para atrás cada vez que lo necesite.
8. Me permiten estudiar a mi propio ritmo
9. Los puedo ver tantas veces como necesite.
10. Puede reemplazar a una clase teórica presencial.

4.2.4 Recursos materiales y temporales

Recursos materiales: las seis videolecciones de la serie *Números combinatorios-Binomio de Newton* (Anexo 1), computadora o teléfono con conexión a internet, apuntes teóricos de la asignatura, calculadoras, pizarrón, guía didáctica, lápiz y papel. Teléfonos celulares con conexión a internet. Blog de la asignatura (ver en Referencias).
Recursos temporales: una clase presencial de dos horas y el tiempo que los estudiantes destinaron al visionado.

5 Resultados y Conclusiones

La observación de los resultados que arrojó la encuesta, en todos los temas puestos a consideración, permite ver que la gran mayoría de los estudiantes manifestaron estar "de acuerdo" o "fuertemente de acuerdo" con la efectividad de las videolecciones usadas en el proceso de instrucción y con algunos de los beneficios que reportan al estudiante, como puede apreciarse en la Tabla 3.

Tabla 3. Resultados de la Encuesta

Preguntas de la encuesta	Fuertemente en desacuerdo (1)	En desacuerdo	Indiferente	De acuerdo	Fuertemente de acuerdo	Totales
1: Las videolecciones fueron útiles para mi aprendizaje	0	0	0	7	22	29
2: El lenguaje usado es muy comprensible	0	0	0	16	13	29
3: El ritmo de la exposición es muy bueno	0	0	0	16	13	29
4: La duración es adecuada a los contenidos expuestos	0	0	1	1	27	29
5: El audio es muy bueno	0	1	1	16	11	29
6: Es una ventaja poder verlos en cualquier momento	1	2	1	2	23	29
7: Es una ventaja poder detenerlos y/o volverlos para atrás.	1	2	3	8	15	29
8:Me permiten estudiar a mi propio ritmo	0	1	2	7	19	29
9: Los puedo ver tantas veces como necesite	0	0	0	8	21	29
10: Puede reemplazar a una clase teórica presencial.	0	1	2	10	16	29

Durante la experiencia, los estudiantes tuvieron la oportunidad de aplicar los conocimientos adquiridos mediante las videolecciones. Se observaron intervenciones en las cuales debieron argumentar para llegar a acuerdos en la resolución de los problemas. También cambiaron opiniones sobre el lenguaje coloquial y simbólico a utilizar para la presentación de la producción final del grupo.

A modo de conclusión, los contenidos que en el cronograma tradicional de la asignatura demandan cuatro clases, pudieron ser trabajados en dos. Se logró así resolver el problema mediacional planteado.

Hacerse cargo de la apropiación de los contenidos teóricos mediante el uso de las videolecciones contribuyó a fomentar el compromiso de los estudiantes con su propio aprendizaje. También su responsabilidad, ya que debieron organizar y administrar los tiempos que destinarían al aprendizaje a través del visionado.

La experiencia realizada permite colaborar con la resolución de problemas mediacionales, en distintas asignaturas de las carreras de ingeniería. Paralelamente, fomenta el desarrollo de diversas habilidades cognitivas del estudiante.

Referencias

1. Bravo Ramos, J.L.: Qué es el vídeo educativo. Comunicar: revista científica iberoamericana de comunicación y educación. Editor: Grupo Comunicar Vol.6. pp 100-105. (1996)

2. Bravo Ramos, J.L.: Rendimiento de los Vídeos de Alta Potencialidad Expresiva. Comunicación y pedagogía, Barcelona, Vol. 122, pp. 23-26 (1994,b)
3. Lage, M. J.; Platt, G. J., & Treglia, M.: Inverting the classroom: A gateway to creating an inclusive learning environment. The Journal of Economic Education, Vol. Num 31(1), 30-43. (2000)
4. Talbert, Robert Inverted Classroom, Colleagues: Vol. 9: Iss. 1, Article 7. Available at: http://scholarworks.gvsu.edu/colleagues/vol9/iss1/7. (2012)
5. Tucker: The Flipped Classroom. Revista Education Next. Vol.12, Nº 1 (2012).
6. Christensen, C.; Horn, M.B.; Staker, H.: An introduction to the theory of the hybrids pp. 10. (2013)
7. Esquivel Gámez, I. (Coordinador). Los Modelos Tecno-Educativos, revolucionando el aprendizaje del siglo XXI, pp. 156. (2016)
8. Bergman, J.; Sams, A.: Flip YOUR Classroom Reach Every Student in Every Class Every Day. International Society for Technology in Education. (2012)
9. Martínez Olvera, W.; Esquivel Gámez, I; Martínez Castillo, J.: Capítulo del libro Integración sistemática del conocimiento. Alternativas para nuevas prácticas educativas, Libro 10. Libro generado como parte del II Congreso Internacional de Transformación Educativa, México. (2015).
10. Salinas, J.: Diseño, producción y evaluación de vídeos didácticos. Investigación educativa. Palma de Mallorca: Uniersitat de les Illes Balears. (1992)
11. Cebrián, M. El vídeo Educativo. En Actas del II Congreso de Tecnología Educativa. Madrid: Sociedad Española de Pedagogía. (1987)
12. Blog de la asignatura Álgebra A de la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional de Mar del Plata fialgebraa.blogspot.com.ar

Volver al Índice

Evolución del Rendimiento Académico de los Alumnos de Matemática en Primer Año de las Carreras de Ingeniería a partir de la Incorporación de Estrategias de Enseñanza

Silvia G. Seluy, Agostina M. Zucarelli
Equipo de investigación Área Matemática Facultad de Ingeniería y Ciencias Hídricas,
Universidad Nacional del Litoral
Ruta Nacional Nº 168 –Km 472 -Ciudad Universitaria
3000 Santa Fe. Argentina
silvia_seluy@yahoo.com.ar, agostinazucarelli@gmail.com

Resumen. El rendimiento observado en los alumnos de los cursos iniciales en las carreras de Ingeniería es una preocupación y medio de inspiración para investigar sobre distintas formas de vincular la resolución de problemas con la construcción del conocimiento matemático de los estudiantes. Para ello se implementó, como complemento de las clases tradicionales, un Taller de Resolución de Problemas con el objetivo de conseguir una participación activa de los alumnos y lograr de este modo, cierta motivación por el estudio de la asignatura. En este trabajo se muestra el rendimiento académico de los alumnos en la asignatura Matemática Básica en todas las Carreras que se dictan en la Facultad de Ingeniería y Ciencias Hídricas de la Universidad Nacional del Litoral. Se puede observar cómo la implementación del Taller, al brindar a los alumnos herramientas para la resolución de problemas, implicó mejoras tanto cualitativas como cuantitativas en el desempeño de los estudiantes.

Palabras Clave: Estrategias de enseñanza, Resolución de problemas, Estudiantes participativos, Interacción docente y alumno.

1 Introducción

Al analizar los resultados que obtienen los estudiantes en las evaluaciones en el ciclo inicial universitario, se observa la misma situación con el paso del tiempo ya que se reiteran las bajas calificaciones, lo que lleva al docente a una reflexión alarmante mediante la cual se plantea que debe buscar alguna alternativa en base a distintas estrategias de enseñanza con el fin de tratar de mejorar tal situación**.**

No obstante, también es importante tener en cuenta investigar cuáles son sus causas, las que pueden observarse en primera instancia y en varios casos, que se deben a las reiteradas falencias que traen los alumnos del nivel medio, como también el docente observa en los estudiantes la falta de: hábitos de estudio, comprensión lógica, razonamiento abstracto, lo que conlleva al desinterés por lo que hace y como consecuencia a los magros resultados en la disciplina.

Es de destacar lo expresado por [1] que en Carreras como las Ingenierías, las matemáticas son insustituibles y vitales para su desarrollo y aplicación. Por tanto, en el diseño curricular de estas Carreras, están agrupadas en diferentes cursos y representan la base de otras asignaturas, de tal manera que el alumnado debe cursarla durante varios semestres consecutivos, incluso, estudiar simultáneamente varias asignaturas relacionadas directamente con las matemáticas. Por ello, teniendo en cuenta la importancia que reviste la enseñanza de esta ciencia en este tipo de Carreras, es importante que los profesores investiguen acerca de la manera de introducir mejoras para tratar de revertir, aunque sea en parte, las dificultades que se observan en los estudiantes, en el transcurso del primer año en la Universidad.

Cabe destacar que una de las Carreras con elevada dificultad en el proceso de enseñanza-aprendizaje en las matemáticas probablemente sea la de Ingeniería. En efecto, en este tipo de Carreras adquieren un carácter eminentemente formativo, además, del informativo que permite al estudiante entender la parte de la naturaleza que va a estar en el centro de su desempeño académico y profesional. Razonar con rigor y precisión, traducir un problema del mundo real a un problema matemático, discriminar datos para su solución, diseñar estudios experimentales, expresar gráficamente datos, controlar el error cometido al solucionar un problema e interpretar físicamente el resultado, analizar y predecir el comportamiento de un sistema a partir de un modelo, utilizar herramientas computacionales, entre otros, permiten al ingeniero el análisis y la previsión del comportamiento de distintos sistemas (mecánico, eléctrico, informático) donde le corresponda desempeñarse, según sea su especialidad según Zaldívar en [2].

Reafirmando lo expuesto por [3], año a año se observa cómo el bachillerato no fortalece un nivel de desarrollo que permita acceder y afrontar los cursos universitarios de matemáticas, esto implica que no cuentan con los recursos para resolver los problemas de este campo.

Según [4], existen dos maneras opuestas de transmitir el conocimiento académico y consisten, por un lado, en el aprendizaje pasivo del alumno donde el protagonismo lo asume el docente mediante la sesión transmisora y, por otra parte, el aprendizaje activo, en el que el alumno asume más protagonismo en su participación en la enseñanza. De acuerdo a lo expresado, se ha analizado la posibilidad de incorporar procesos de enseñanza más dinámicos y participativos para el alumno. Por ello se considera que este aprendizaje más activo, es el más favorable para el estudiante, dado que de esta forma se introducen ciertos elementos en la participación y se pretende que el alumno se implique en el proceso de enseñanza-aprendizaje para que pueda consolidarlo y significarse más. Por esta causa también se puede denominar a este aprendizaje interactivo y cooperativo.

Por lo expuesto, mediante un objetivo marcado en incrementar la participación activa del alumno en las clases y para contribuir a mejorar su aprendizaje, se intenta pasar del aula como tal, a un nuevo espacio de reflexión. Se considera que el aula convencional propicia la actitud pasiva del estudiante mientras que lo que se pretende es generar las bases para fomentar en el alumno un espacio de participación más dinámica, si bien tomando algunas características áulicas en la cual el rol del docente logre motivar la intervención del alumno, se espera crear situaciones de carácter fuertemente interactivas entre alumno y docente, generando lo que se ha denominado Aula-Taller.

Tomando los conceptos vertidos por [5] cuando definen al aula y al taller, los mismos expresan que la palabra “aula” evoca a una sala en la que se imparte la enseñanza de una disciplina científica y se asocia normalmente con clase o cátedra como sinónimos. En tanto el Taller pedagógico es el ámbito donde el profesor y el equipo de colaboradores interactúan con los alumnos para buscar, descubrir y/o generar el conocimiento. Si se analizan los conceptos aisladamente, se pueden resaltar sus diferencias: en el aula, el profesor se ubica al frente de los alumnos asumiendo el rol activo de transmisor del conocimiento mientras que los alumnos actúan como receptores pasivos; en contraposición, en los talleres se adopta una disposición física de alumnos y profesores, que favorece la comunicación de los estudiantes entre sí y de los estudiantes con los docentes, manteniendo todos un rol activo como constructores conjuntos del conocimiento. Sugieren Fernández et al, que en las aulas, la metodología se aplica en base al siguiente esquema: motivación, construcción de modelos matemáticos, interpretación y transferencia. Si se analizan estos conceptos, se puede pensar que la motivación se origina con el planteo del problema y finaliza cuando se arriba a la solución del mismo otorgándole al alumno las herramientas para transferir lo aprendido. De esta manera, el alumno comienza el proceso por la motivación que lo origina, luego el modelado matemático le permite establecer la conexión entre las instancias de motivación, interpretación de resultados y transferencia. La interpretación de resultados en sí misma, es un ejercicio que no debe estar aislado de la resolución de un problema, ya que representa la esencia del problema mismo. Más allá de la correcta resolución, si no puede interpretarse el significado de los números que arroja una solución, ésta carece de valor; en cuanto el alumno pone a disposición todo lo aprehendido, entra en juego el proceso de transferencia.

2 Marco teórico

Cuando los alumnos comienzan sus estudios en la Universidad, evidencian un escaso nivel de conocimientos, según lo demuestra el alto número de desaprobados en los exámenes de ingreso. Posteriormente este problema se traslada a los cursos iniciales que derivan en consecuencias de repitencia y abandono de las Carreras que decidieron comenzar.

Si se traslada este análisis particularmente a los cursos de Matemática, el panorama no es alentador, son situaciones que han motivado a que distintos autores realicen numerosas investigaciones acerca de las causas que originan estos problemas en las aulas encontrándose distintas posturas. Entre ellas se puede mencionar a Alonso y Lobato en [6] quienes han detectado entre las variables puramente comportamentales que afectan al rendimiento de los estudiantes universitarios, una gran falta de hábitos de lectura y una gran dificultad para planificar el tiempo de estudio; por otra parte, Troncoso et al en [7] mencionan el hecho que resulta de las distintas líneas de investigación referidas a la problemática del fracaso estudiantil, tales como:

- Los que centran el problema en el estudiante y orientan sus investigaciones hacia los aspectos cognitivos, afectivos y motivacionales.
- Los que consideran que el problema radica en la sociedad y se dedican a investigar la procedencia de los alumnos, el nivel cultural de la familia, el embarazo adolescente y discuten sobre la gratuidad de la universidad pública y la aparente garantía de equidad e igualdad de oportunidades.

- Los que ven el problema en las universidades y en la educación en general que se dedican a investigar falencias en la escuela media, la falta de lectura en los adolescentes, la gran extensión de los programas universitarios, la ausencia de pedagogía y la actitud de los docentes frente a los que fracasan.

Por otra parte, desde la experiencia en el aula, puede considerarse que los magros resultados de los alumnos que ingresan a la Universidad, evidencian carencias en cuanto a la falta de hábitos de estudio y escasa capacidad de razonamiento en sus producciones, lo que se traduce en un bajo rendimiento en los cursos de Matemática.

Según [8] si bien muchas de las cuestiones mencionadas escapan a las posibilidades de acción de la propia universidad, otras podrían ser mejoradas desde las propias instituciones universitarias.

Las tendencias educativas generadas a partir de las características de la sociedad contemporánea, son el marco del nuevo paradigma educativo de "enseñar a pensar", paradigma en el cual se entiende el proceso educativo como la forma en que los sujetos alcanzan el desarrollo de sus habilidades de pensamiento e intelectuales, con el cual conquistan la autonomía y la independencia cognoscitiva necesaria para aprender por si solos y para producir nuevos conocimientos. Dentro de este paradigma se encuentra la línea de trabajo académico de enseñanza por resolución de problemas y para el desarrollo de la creatividad. [9]

Camarena en [10] indica la importancia de vincular los contenidos desarrollados en las clases de Matemática con las áreas de interés para los futuros ingenieros, al expresar que:

> La Matemática en contexto: ayuda al estudiante a construir su propio conocimiento de una matemática con significado, con amarres firmes y no volátiles; refuerza el desarrollo de habilidades matemáticas, mediante el proceso de resolver problemas vinculados con los intereses del alumno.

De acuerdo a lo establecido por la Comisión Nacional de Evaluación y Acreditación Universitaria, CONEAU en [11]:

> Los componentes del plan de estudios deben estar adecuadamente integrados para conducir al desarrollo de las competencias necesarias para la identificación y solución de problemas abiertos de ingeniería, definiendo a éstos como aquellas situaciones reales o hipotéticas cuya solución requiera la aplicación de los conocimientos de las ciencias básicas y de las tecnologías.

En consecuencia la resolución de problemas queda planteada como una competencia valiosa que el alumno de ingeniería debe alcanzar en su formación, que es una competencia compleja porque implica habilidades múltiples para la identificación y solución del problema abierto de ingeniería- los verdaderamente relevantes- y que esta competencia confiere identidad profesional al egresado [12].

Como profesores de las asignaturas del ciclo inicial de las carreras de ingeniería resulta importante destacar nuestra labor en la formación integral de los alumnos. En este sentido asentimos con lo expuesto por [13] en sus investigaciones, donde expresa que el ingeniero en formación, debe adquirir unas competencias específicas para que en el área real de trabajo pueda diseñar ideas, dispositivos, sistemas, mecanismos, soluciones, alternativas. El objetivo en la formación de este estudiante, de conformar un cuerpo coherente y productivo de ideas y de competencias de diseño mediante las cuales, de manera creativa, sea capaz de modificar su entorno natural que redunde en una mejor calidad de vida de las personas que se vean dentro del alcance de su acción profesional, se logra recreando la realidad con planteamientos concretos escritos en forma de problemas que deben ser análogos a los que se enfrentará una vez que trabaje en el área. El docente de matemática debe conocer esta realidad y debe generar una serie de acciones que permitan formar esas competencias.

Si buscáramos una frase para caracterizar a la ingeniería, la más común y repetida es el ingeniero resuelve problemas [14].Como lo revela [15], la resolución de problemas está estrechamente relacionada con la creatividad, que algunos definen precisamente como la habilidad para generar nuevas ideas y solucionar todo tipo de problemas y desafíos.

Es entonces que como docentes, no sólo debemos pensar en la integración de la teoría con la práctica a través de ejercicios rutinarios mediante los cuales el alumno se familiariza con el tema, sino también facilitar el proceso de afianzar los conocimientos adquiridos, donde el alumno no sólo observa la aplicación y el sentido que le debe dar a las matemáticas sino también, según [16] la integración de los conocimientos con la vida.

En base a lo expuesto anteriormente, el Aula-Taller incorporado en la asignatura Matemática Básica, será destinado a actividades diseñadas para realizar en los Talleres de Resolución de Problemas, como espacio para que el alumno se encuentre con situaciones reales y recree la posibilidad de resolverlas a partir de los conceptos estudiados.

Es visible la importancia de desarrollar en el alumno la competencia de resolver problemas y decidir cómo se logra. Algunos interrogantes orientan la búsqueda; ¿cómo se logra esta competencia?, ¿de qué manera instrumentar el trabajo de aula para que los alumnos egresen con este saber hacer que le permita resolver problemas abiertos de ingeniería?, ¿cuáles serán los conceptos y procedimientos, también las actitudes a promover en la resolución de problemas, para que el egresado pueda competir en un entorno nacional y regional con expectativa de éxito? [17].

3 Desarrollo de la propuesta

A los efectos de realizar un análisis acerca de los posibles beneficios de la puesta en marcha de una nueva modalidad de aprendizaje, se han tomado los resultados obtenidos en el período de tiempo que va desde el año 2010 hasta el 2016 inclusive, considerando que en dicho período hubo suficientes cambios como para poder arribar a varias conclusiones como fruto del trabajo realizado para posibilitar el aprendizaje en los alumnos.

Se hará entonces un relato de las distintas instancias que se fueron implementando desde la cátedra en el período de tiempo considerado en el análisis, para tratar de mejorar la situación de los alumnos en primer año.

El cursado de la asignatura en el año 2010 como en el año 2011, era sólo en el primer cuatrimestre del primer año de las Carreras de Ingeniería y el dictado de las clases era de forma teórico-práctica con dos clases semanales de tres horas cada una.

Desde el año 2012 se implementó también el cursado en el segundo cuatrimestre (2012R) con igual modalidad de dictado que en los años anteriores.

En el año 2013 entró en vigencia el Nuevo Régimen de Enseñanza (NRE) que fuera aprobado en la Facultad a fines de 2012. En él, se expresan las funciones docentes, los tipos y formas de evaluación, los porcentajes que indican la regularidad en el cursado de las asignaturas, porcentajes de asistencia de cursado, entre otras normas tanto para docentes como para alumnos. La aplicación del NRE no cambió la forma de dictado que se venía desarrollando desde 2010 y continuó hasta el año 2013 inclusive. Lo que sí modificó, fue la obligatoriedad de asistencia a las clases en los cursos de primer año, la cantidad de evaluaciones y alguna otra mejora.

A partir del año 2014, con la mirada puesta en la aplicación de nuevas metodologías para mejorar el proceso de enseñanza-aprendizaje, se fueron incorporando anualmente distintas estrategias en el desarrollo de la asignatura. En principio, se modificó la modalidad del dictado de las clases, separando la Teoría de la Práctica.

A los efectos de continuar aplicando mejoras de manera paulatina, en el año 2015 se implementó el Taller de Resolución de Problemas, de manera que permita la actuación del docente como orientador a la hora de impartir la actividad con características de Aula-Taller.

En el año 2016 se continuó con un Taller más actualizado y se incorporó además, un cuestionario en la Plataforma Moodle, implementado previo a cada una de las dos evaluaciones parciales escritas que tiene la asignatura durante el cursado. Dada la extensión del presente trabajo, se considera sólo el análisis para el Aula-Taller. Cabe aclarar que los resultados de la implementación de cuestionarios por la Plataforma Moodle, son motivo de otro trabajo.

Actualmente, el cursado de la asignatura se divide en tres partes: clases teóricas, clases prácticas (resolución de ejercicios) y el Taller de Resolución de Problemas. Esta última instancia se lleva a cabo a continuación de la clase de práctica de la asignatura, se diferencian entre sí en que en la clase de práctica el alumno resuelve ejercicios del tema que ya se ha dado en la clase Teórica, mientras que en el Aula- Taller, se presentan problemas acerca del tema dictado en la semana en curso, a modo de facilitar al alumno el uso de los conceptos matemáticos previamente estudiados para que logre la aplicación de ellos, en situaciones problemáticas.

Las consignas se resuelven con un tiempo de devolución - extra clases- tal que les permita a los alumnos acceder a instancias de reflexión, sin pretender que lo hagan instantáneamente en el momento del Taller.

Si bien durante el desarrollo del Aula-Taller los alumnos intercambian opiniones respecto de las resoluciones que traen hechas, a modo de conclusión de cada sesión, el docente proporciona a los estudiantes la correcta resolución de los problemas dados.

Respecto a la situación planteada, se ha realizado un análisis estadístico para el período 2010-2016 y se pudo arribar a los tres gráficos que se muestran a continuación, los que reflejan los porcentajes obtenidos por alumnos promocionados (aquellos que obtuvieron porcentajes superiores a 70% como promedio de las actividades planteadas), alumnos regulares (aquellos que obtuvieron promedios superiores a 40%) y de alumnos libres (aquellos que no llegaron al 40% de promedio).

En la Fig. 1, período 2010-2012, se puede apreciar que no hay una tendencia bien diferenciada en cuanto a los resultados de los alumnos, expresados en porcentajes.

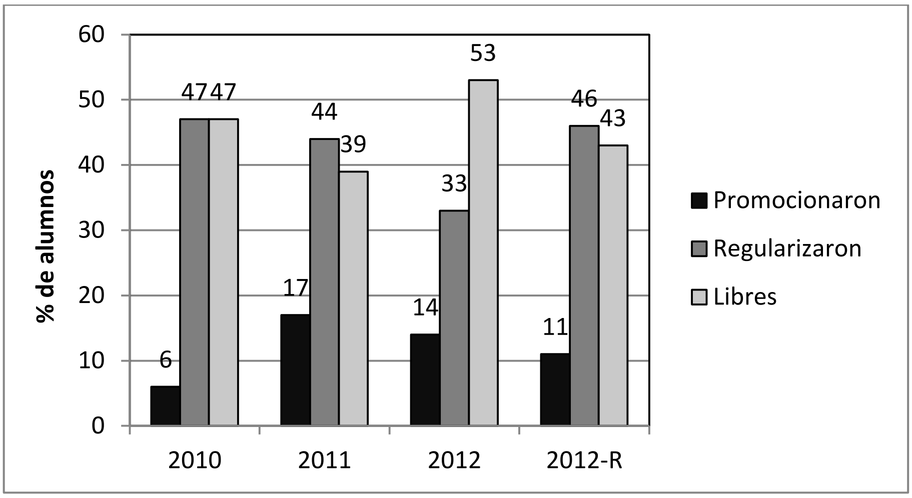


Fig. 9. Distribución de resultados de los alumnos en el período 2010 a 2012.

En la Fig. 2, período 2013-2014, se puede apreciar que en el año 2013, donde se implementó el NRE, hay un incremento de alumnos regulares, lo que permite concluir que fue beneficioso el nuevo requerimiento para que el alumno pueda obtener la regularidad en el cursado de la asignatura.

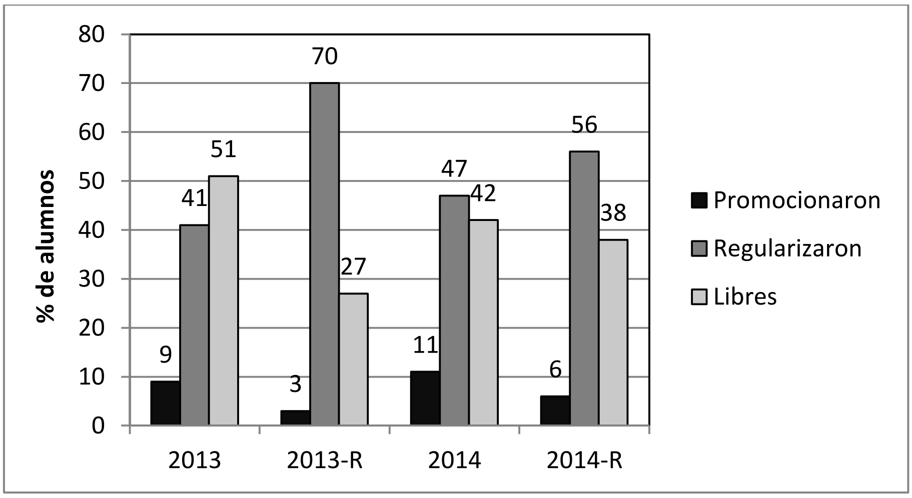


Fig. 2. Distribución de resultados de los alumnos en el período 2013- 2014.

En la Fig. 3, para los años 2015 a 2016, se puede observar a diferencia de los períodos anteriores, una tendencia definida en la que el porcentaje de los alumnos promocionados se incrementa, lo mismo ocurre con los porcentajes de alumnos regulares y por lo tanto, satisfactoriamente, disminuyó el porcentaje de alumnos libres, lo cual permite inferir que las propuestas de mejora arrojan resultados favorables.

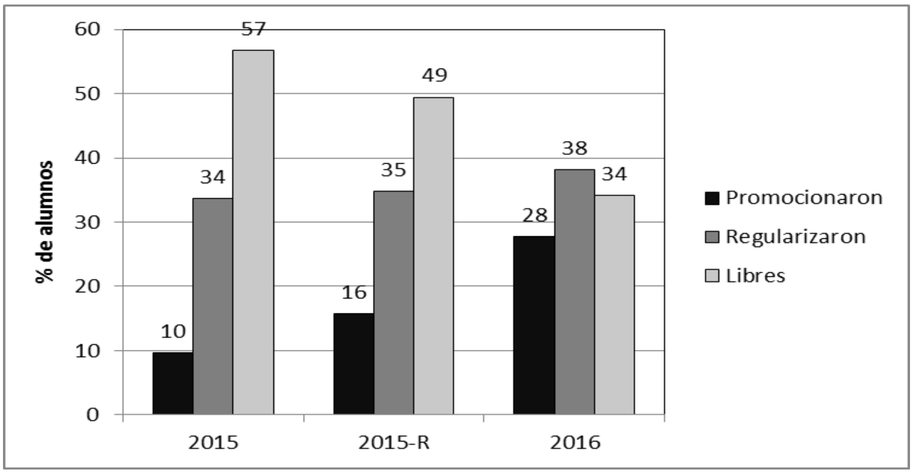


Fig. 3. Distribución de resultados de los alumnos en el período 2015- 2016.

4 Conclusiones y trabajos futuros

La incorporación de los Talleres de Resolución de Problemas, permitió aumentar los porcentajes de rendimiento de los alumnos en las evaluaciones.

Se observó una mejora en el abordaje y planteo de la resolución de las consignas, incluso mayor facilidad para expresar sus reflexiones, lo que es atribuible al proceso de incorporar en el alumno, paulatinamente, distintas modalidades en el proceso de aprendizaje.

La modalidad de enseñanza adoptada ha sido un acierto para motivar y mejorar los hábitos de estudio e incrementar las herramientas que favorecen el razonamiento ya que se realizó la conjunción de las dos formas mencionadas para impartir la enseñanza, a saber: la forma tradicional con el docente al frente de la clase y con alumnos pasivos, en contraposición con la otra forma en la que el docente actúa como guía de sus alumnos e interactúa con ellos.

Además se logró que los estudiantes adquieran capacidades para:

- Trabajar en equipo.
- Se familiaricen con conceptos matemáticos y los puedan aplicar.
- Reúnan habilidades para resolver problemas.
- Puedan arribar a interpretaciones de los resultados obtenidos.

En adelante, se continuará con esta propuesta realizando una permanente evaluación y análisis de los resultados obtenidos en cada cuatrimestre, siempre atentos a las necesidades y requerimientos relativos no sólo a la Carrera, sino también al grupo de alumnos que ingresa, por tratarse de situaciones dinámicas, es decir, situaciones en constante variación que requieren de la actualización permanente de los métodos de enseñanza.

Referencias

1. Álvarez, Y.; Soler, M. R.: Actitudes hacia las matemáticas en estudiantes de ingeniería en universidades autónomas venezolanas. *Revista de Pedagogía*, Vol. 31, Nº 89, pp. 225-249 (2010). En [1] y [2]
2. García del Valle Mota, T.: La aplicación de conceptos en la comprensión e interpretación y solución de problemas matemáticos y de razonamiento analógico, dentro del contexto de bachillerato.Tecnológico de Monterrey, Universidad Virtual. http://hdl.handle.net/11285/571851.(2012). Accedido el 5 el Febrero de 2017. En [3]
3. Imbernón, F.; Medina, J. Metodologia participativa a l'aula universitaria: la participació de l'alumnat. Universitat de Barcelona. http://diposit.ub.edu/dspace/bitstream/2445/1041/1/163.pdf. (2005).Accedido el 20 de diciembre de 2016. En [4]
4. Fernández, V. et al.:El Aula-Taller de Matemática.: *Educación Matemática para no Matemáticos*. Editorial Fundación Universidad Nacional de San Juan, pp.69-82 (1999). En [5]
5. Abasto, P.: Hábitos de estudio: lo que se aprende en la escuela y lo que requiere la universidad. *Revista Iberoamericana de Educación.* Vol. 71, N° 2, pp. 91-108 (2016). En [6], [7] y [8]

6. García García, J.J.: La creatividad y la resolución de problemas como bases de un modelo didáctico alternativo. Tratamiento de situaciones problemáticas bajo un enfoque de ambientalización del currículo. *Revista Educación y Pedagogía.* Vol. X, N° 21, pp. 145-173 (1998). En [9]
7. Zuñiga, L.: El cálculo en carreras de ingeniería: un estudio cognitivo. *Relime,* Vol. 10, Nº. 1, pp.145-175 (2007). En [10]
8. Jóver, M. L.: La resolución de problemas en la enseñanza de la Ingeniería. *Revista Argentina de Enseñanza de la Ingeniería,* Año 4, Nº 6, pp. 81-86 (2003). En [11], [12], [14] y [17]
9. Mendible, A.; Ortiz, J.: Modelización matemática en la Formación de Ingenieros. La importancia del contexto. *Enseñanza de la Matemática,* Vols. 12 al 16; Nº Extraordinario, pp. 133-150 (2007). En [13]
10. Said, J.: Resolución de problemas matemáticos. *Talleres de Formación Matemática*, Capítulo 1, pp.3-11 (2004). http://ommcolima.ucol.mx/guias/TallerdeResolucionproblemas.pdf Accedido el 2 de Febrero de 2017. En [15]
11. Matías, C.; Mejía L.: Los métodos en la enseñanza de la matemática. Una experiencia en el contexto histórico-cultural de los alumnos de la carrera de educación básica y de educación media. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, Vol.20, pp. 400-405 (2007). En [16]

Volver al Índice

La Actitud hacia la Implementación de Aulas Virtuales para el Aprendizaje de la Asignatura Matemática en el Nivel Universitario

María de los Ángeles Juarez, Alejandra Fernandez, Eduardo López Avila, Melina Delgado
[1]Cátedra de Matemática I, Instituto de Matemática, Facultad de Ciencias Económicas, Universidad Nacional de Tucumán.
Av. Independencia 1900
36angelita@gmail.com, {alematica, elavila}@hotmail.com

Resumen. El objetivo general de este estudio es, analizar la actitud de los estudiantes frente a la implementación de un aula virtual como herramienta de apoyo a la enseñanza presencial de la asignatura Matemática en el nivel universitario durante ciclo lectivo 2016. Desde el punto de vista metodológico la investigación es de tipo cuantitativa y de un diseño exploratorio descriptivo. La información se recolectó mediante un cuestionario tipo Likert en una muestra representativa. Para identificar la actitud de los estudiantes universitarios frente la implementación de aulas virtuales, en cada una de las tres carreras, se consideran tres componentes de la actitud: cognitivo, conductual y afectivo. Este instrumento se puede utilizar en alumnos de otras carreras.
Los estudiantes observados muestran una actitud moderadamente positiva del aprendizaje en las aulas virtuales, este diagnóstico nos permitió proseguir en la búsqueda de un modelo de enseñanza semipresencial que contribuya al logro cognoscitivo de los alumnos.

Palabras Clave: Actitud, Entorno virtual, Aprendizaje, Matemática.

1 Introducción

La educación superior se enfrenta a constantes desafíos en cuanto a la forma de impartir el conocimiento determinado por el auge de las nuevas tecnologías. Por eso nos identificamos plenamente con lo mencionado en la Declaración Mundial sobre la Educación Superior en el Siglo XXI [1] que en su artículo 12 afirma que: "Los rápidos progresos de las nuevas tecnologías de la información y la comunicación seguirán modificando la forma de elaboración, adquisición y transmisión de los conocimientos. También es importante señalar que las nuevas tecnologías brindan posibilidades de renovar el contenido de los cursos y los métodos pedagógicos, y de ampliar el acceso a la educación superior. No hay que olvidar, sin embargo, que la nueva tecnología de la información no hace que los docentes dejen de ser indispensables, sino que modifica su papel en relación con el proceso de aprendizaje, y que el diálogo permanente que transforma la información en conocimiento y comprensión pasa a ser fundamental. Los establecimientos de educación superior han de dar el ejemplo en materia de aprovechamiento de las ventajas y el potencial de las nuevas tecnologías de la información y la comunicación, velando por la calidad y manteniendo niveles elevados en las prácticas y los resultados de la educación, con un espíritu de apertura, equidad y cooperación internacional".

Esto nos llevó a formular el Proyecto de investigación 26/F511: "Propuesta innovadora en el empleo de un entorno virtual para la enseñanza del Álgebra en las carreras de Ciencias Económicas" y este trabajo forma parte de las tareas de investigación del mismo.

La Asignatura Matemática I se imparte en el primer cuatrimestre del primer año a los alumnos de las tres carreras que se cursan en la Facultad de Ciencias Económicas de la Universidad Nacional de Tucumán (FACE – UNT): Contador Público Nacional, Licenciatura en Economía y Licenciatura en Administración de Empresas. Es una asignatura de seis horas semanales de dictado, repartidas en clases teóricas y clases prácticas.

La cátedra se enfrenta al problema de la masividad, puesto que el número de inscriptos es muy elevado, llegando en el año 2016 a una matrícula de 1280 alumnos. Sumado a esto, se presentan las dificultades que manifiestan tener los alumnos en el cursado de la asignatura, tales como: problemas de índole personal o laboral, falta de conocimientos previos necesarios, la cantidad de horas insuficientes que dedican al estudio de los diferentes temas, clases teóricas y prácticas con muchos alumnos que no les permiten hacer todas las preguntas necesarias, entre otros.

Por los motivos mencionados, fue útil y necesaria la incorporación de un Entorno Virtual de Aprendizaje para la asignatura Matemática I, de la UNT. Teniendo en cuenta estos aspectos, se realizó una experiencia con estos alumnos, desarrollada en modalidad b-learning, complementando las clases presenciales con el uso de un entorno virtual en la plataforma Moodle, en un cursado con modalidad mixta.

En este trabajo se presentan los resultados obtenidos en un estudio exploratorio, realizado a fin de analizar las actitudes hacia la implementación del aula virtual de los alumnos que cursan la asignatura mencionada en el periodo lectivo 2016.

La experiencia sobre virtualización de la enseñanza se llevó a cabo a través deel uso del correo electrónico, el aula virtual y las autoevaluaciones virtuales

El uso de correo electrónico fue para enviar información a los alumnos. El Aula Virtual: se utilizó con el objetivo de que los alumnos puedan ingresar para informarse sobre novedades, notas de parciales y resuelvan una Autoevaluación al finalizar cada unidad temática del programa de la asignatura. Se realizó la aplicación de 6 (seis) autoevaluaciones virtuales: 3 (tres) antes del Primer Parcial (una de carácter integrador) y 3 (tres) autoevaluaciones antes del Segundo Parcial (una de carácter integrador). El promedio mayor a 7, obtenido en estas autoevaluaciones, sumaría medio punto a la nota final de cada parcial.

Los objetivos de este trabajo de investigación son Identificar y analizar las actitudes hacia la implementación del aula virtual en su aprendizaje de los estudiantes universitarios ingresantes a las tres carreras que se dictan Facultad de Ciencias Económicas de la UNT y además determinar y comparar los componentes cognitivo, conductual y afectivo que caracterizan la actitud hacia la implementación del aula virtual en su aprendizaje. *El instrumento utilizado para identificar y analizar las actitudes puede ser utilizado en alumnos de otras carreras.*

2 Marco Teórico

La incorporación de la virtualización en la docencia universitaria ha dado como resultado la existencia de tres modalidades de enseñanza: la docencia presencial tradicional, el e-Learning y el blended- learning, cada una con sus propias características.

Modalidad Mixta o B-Learning Para Cabero y Llorente [2] la modalidad mixta o B-learning es la convergencia entre lo presencial (clases tradicional) y lo virtual, donde, tanto docentes como estudiantes modifican sus roles en los procesos de enseñanza y aprendizaje.

Así pues, un sistema de educación mixta (b-learning) es aquella modalidad educativa donde, lo presencial y lo virtual juegan un papel importante en la formación del estudiante, abordando distintos estilos de aprendizaje, ya que estos describen al estudiante respecto a las condiciones educativas que logren fortalecer su aprendizaje.

En cuanto al empleo del concepto "actitud hacia el aula virtual", se fundamenta en lo que un alumno dice o hace, por lo que está cimentado sobre una conducta observable. Al hablar por ejemplo de un estudiante que muestra una actitud positiva hacia el uso de la plataforma virtual en la asignatura, indicamos que esa persona tiene una opinión favorable hacia ese recurso y contenidos, que se sitúa en presencia de ese estímulo el mayor tiempo posible y que cuando a ese alumno se le pide participación voluntaria, accede a la asignatura a través de la plataforma regularmente y por voluntad propia. Es decir, que el alumno muestra una serie de respuestas de "acercamiento" hacia ese recurso. Por el contrario, sabremos que un alumno muestra una actitud negativa o respuestas de "alejamiento" cuando observemos que no accede a la asignatura a través de la plataforma y que se muestra indiferente o contrario al uso de esta herramienta. Adaptado de Mager [3].

Asimismo Noor y Basir [4], mencionan que la actitud tiene tres componentes que los define como:

Componente Cognitivo o Perceptivo: El componente cognitivo son las creencias y el pensamiento acerca de un objeto de actitud. En este orden de ideas, las creencias se formulan a raíz de información que se acepta de una idea o situación particular, indiferentemente de la veracidad de la misma; estas creencias influyen de una manera importante, en las personas que las conservan.

Componente Afectivo o Emocional: El componente afectivo consiste en sentimientos positivos o negativos hacia el objeto. Es el componente más característico de la actitud caracterizado, por los juicios llenos de emotividad y cuya valoración (positiva o negativa) está acompañada, de categorías como lo agradable o desagradable, lo cual le da una fuerza motivacional a la actitud.

Componente Conductual o de Acción: Este componente consiste en las intenciones de comportamiento y predisposición a comportarse de una determinada manera hacia el objeto. Este componente expresa, la forma como un individuo se comporta ante una determinada situación, la misma, tiene implicaciones de pensamiento, sentimiento, considerando normas sociales y costumbres, frente al objeto de actitud o situación.

Teniendo en cuenta que la página principal de un sitio Moodle incluye información acerca del sitio que puede ser personalizada, se delineó el Aula Virtual de Matemática I en base a una estructura por temas, como se observa en la Fig.1.

Se incorporaron también recursos tales como: El bloque de Participantes donde figuran tanto los docentes como los alumnos; Calendario; Bloque de Novedades y Anuncios; foro social; una encuesta a los fines de recabar información sobre el aula virtual.

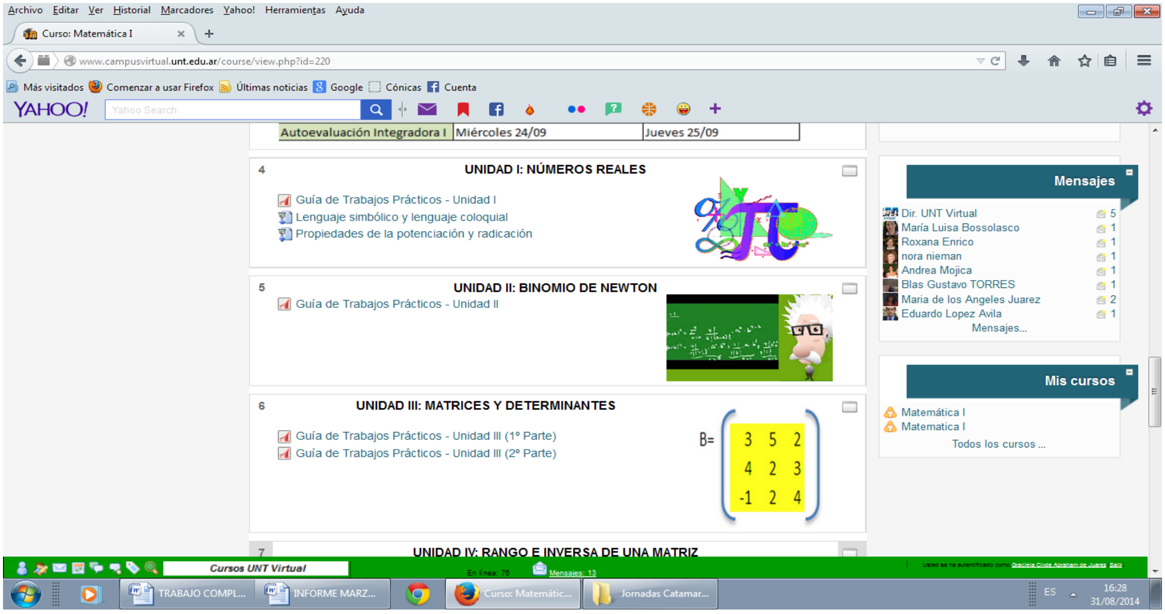


Fig. 1. Vista del Aula Virtual de Matemática I. Fuente: Aula Virtual de Matemática I. Año 2016.

3 Material y Método

La investigación realizada fue de carácter descriptivo, de corte transversal. El estudio se desarrolló en la Facultad de Ciencias Económicas de la UNT en el ciclo lectivo 2016, con alumnos de primer año de las carreras de Contador Público Nacional, Licenciatura en Administración de Empresas y Licenciatura en Economía que cursaban la asignatura Matemática I. La información se recolectó a través de una encuesta realizada a través del Aula Virtual, aplicada antes del segundo y último parcial. Se trabajó con una muestra de 544 alumnos sobre un total de 1029 inscriptos en el Aula Virtual de la asignatura, seleccionados según contestaron la encuesta.

A fin de examinar la actitud de los alumnos frente a la implementación de las aulas virtuales en su aprendizaje, se utilizó una adaptación, a nuestro contexto, del cuestionario tipo Likert utilizado por los autores Coronado, Pórteles, Zurita y Jara [5]. Las variables bajo estudio son las siguientes:

Carrera: Contador Público Nacional, Licenciatura en Administración de Empresas, Licenciatura en Economía

Actitud ante la Implementación del Aula Virtual (AV) en el Aprendizaje, junto con las subdimensiones consideradas:

Componente Cognitivo: expresiones de pensamientos, concepciones y creencias de la propia capacidad sobre el conocimiento y de las habilidades intelectuales en el AV.

Componente Conductual: actuaciones o expresiones de acción en el AV.

Componente Afectivo: expresiones de sentimiento, de agrado o desagrado hacia el AV. Cada uno de estos aspectos fue evaluado a través de 29 (veintinueve) ítems que intentaron capturar la información requerida.

Se construyó esta variable mediante el promedio de los puntajes obtenidos en los 29 ítems relativos a las opinión de los alumnos respecto a la actitud ante la implementación del Aula Virtual en el aprendizaje (variable latente). Se registró la frecuencia (Muy de acuerdo; De acuerdo; Indeciso; En desacuerdo; Muy en desacuerdo) en cada ítem. Por lo tanto, los valores que toma esta variable se representa en una escala ascendente de 1 a 5, correspondiendo el valor mínimo a una actitud desfavorable y el valor máximo de la escala, a una actitud totalmente favorable.

Para el procesamiento de la información obtenida se utilizó planilla Excel y software estadístico SPSS (versión 22.0). Se recurrió a una escala Likert aditiva como indicadora de cada variable latente y para efectuar el cálculo de confiabilidad de la escala Actitud se utilizó el método de consistencia interna.

4 Resultados

Al evaluar la consistencia interna de los ítems se encontró una muy buena consistencia entre los mismos (Alpha de Crombach=0.79) Esto nos indica que los ítems estuvieron direccionados hacia el mismo objetivo.

Como resultado de la aplicación del instrumento, se presenta un análisis descriptivo de los datos obtenidos. En la Tabla 1 se presentan los estadísticos descriptivos de los promedios de la variable Actitud ante la Implementación del AV en el Aprendizaje.

Tabla 1. Estadísticos descriptivos de la variable actitud hacia el aprendizaje de Matemática I en el Aula Virtual. Año 2016

Estadísticos Descriptivos	Actitud hacia el aprendizaje de matemática en Aulas Virtuales
n	544
Media	3.46
Mediana	3.48
Mínimo	2.14
Máximo	4.66

Los indicadores que se tuvieron en cuenta en cada uno de los aspectos considerados, para medir la variable Actitud se detallan en las siguientes tablas:

En la Tabla 2 se muestran los resultados de analizar la variable grado de actitud de la componente cognitiva que tienen que ver con la opinión de los alumnos con respecto a las ideas y creencias de la comprensión de los contenidos a través del aula virtual, importancia de su aprendizaje b-learning como alumno y futuro profesional, considerar las ventajas del aprendizaje a través de la tecnología y de manera presencial.

Tabla 2. Distribución porcentual de 544 alumnos según el grado de Actitud de la componente Cognitiva. Año 2016.

COMPONENTE COGNITIVO	Muy de acuerdo	De acuerdo	Indeciso	En desacuerdo	Muy en Desacuerdo
Comprendes fácilmente los diferentes contenidos presentados en el Aula Virtual	27.76	56.25	11.58	3.68	0.74
Aprender en entornos virtuales de aprendizaje en la formación básica del futuro profesional	22.06	51.10	20.22	5.88	0.74
Estar en contacto con un entorno virtual de aprendizaje te ayuda a comprender las ventajas de la tecnología:	30.7	50.37	13.97	4.23	0.74
En la Universidad no se tendría que enseñar a través de entornos virtuales de aprendizaje:	5.88	9.74	26.29	34.19	23.9
No entiendes la información que aparece en el Aula Virtual:	2.94	10.29	17.46	44.12	25.18
Puedes ver los temas estudiados desde otra perspectiva al participar de una educación mixta:	11.95	53.31	27.39	5.7	1.65

Piensas que los procesos utilizados en el entorno virtual de aprendizaje no te será de ayuda en tu futura profesión:	4.96	13.6	22.06	39.71	19.67
Nunca entiendes las instrucciones que debes seguir para cumplir con actividades en tu aula virtual:	2.02	9.74	14.34	46.14	27.76
La asignatura bajo la modalidad B Learning te ayuda a estar más actualizado respecto a temas de tu especialidad:	13.05	41.54	35.85	6.99	2.57
La modalidad B Learning, te ayuda a comprender en ciertos temas que no comprenderías en la clase presencial:	8.09	26.84	36.58	20.4	8.09

Se observa que el 84 % de los alumnos de la muestra está muy de acuerdo y de acuerdo con la creencia de "*Comprendes fácilmente los diferentes contenidos presentados en el Aula Virtual*". El 73% de alumnos se manifiesta Muy de acuerdo y De acuerdo "*Estar en contacto con un entorno virtual de aprendizaje te ayuda a comprender las ventajas de la tecnología*". También se observa que un 80%, está muy de acuerdo y de acuerdo con "*Estar en contacto con un entorno virtual de aprendizaje te ayuda a comprender las ventajas de la tecnología*".

Tabla 3. Distribución porcentual de 544 alumnos según el grado de actitud de componente conductual. Año 2016.

COMPONENTE CONDUCTUAL	Muy de acuerdo	De acuerdo	Indeciso	En desacuerdo	Muy en Desacuerdo
Lo que aprendes con los recursos tecnológicos, usados en el Aula Virtual, te ayudan a resolver situaciones de la vida cotidiana:	8.27	25.74	39.71	18.75	7.54
Las actividades presentadas en el Aula Virtual te parecen fáciles	6.07	34.38	35.11	20.77	3.68
Utilizas poco el Aula Virtual fuera de la Universidad	12.13	35.48	21.51	22.06	8.82
La modalidad B Learning te ayuda a profundizar ciertos temas que no comprenderías en la clase presencial:	8.09	26.47	38.97	19.49	6.99
Estudias antes de realizar las actividades del Aula Virtual:	21.88	48.71	15.63	10.29	3.49
El Aula Virtual no sirve para nada	3.13	5.33	12.50	29.96	49.08
Utilizas el Aula Virtual para explicar a tus compañeros temas de la clase presencial que no entendieron:	4.96	14.15	34.01	27.94	18.93
Entras al Aula Virtual solo cuando el profesor te lo indica:	11.58	29.23	16.54	31.80	10.85

Al no completar rápidamente una actividad propuesta en el Aula Virtual, optas por no hacerlas:	3.49	8.64	16.91	43.38	27.57

En la Tabla 3 se presenta la distribución porcentual de los indicadores que permitieron analizar la variable actitud hacia el aula virtual de su componente conductual o de acción, que tienen que ver con la formas de comportamiento, su predisposición, de actuación con respecto al aprendizaje en el aula virtual y a sus expresiones de acción en ella.

Los resultados que se destacan, corresponden a los siguientes ítems:

- *“Estudias antes de realizar las actividades del Aula Virtual”*, un 70% de alumnos se manifiesta Muy de acuerdo y De acuerdo.
- *“El Aula Virtual no sirve para nada”*, un 79% de alumnos se manifiesta Muy en desacuerdo y En desacuerdo.
- *“Al no completar rápidamente una actividad propuesta en el Aula Virtual, optas por no hacerlas”*, un 71% de alumnos se manifiesta Muy en desacuerdo y En Desacuerdo.

A continuación en la Tabla 4, se puede observar la distribución porcentual de los indicadores que permitieron analizar el comportamiento de la variable actitud hacia el aula virtual de su componente afectivo de la actitud hacia el aula virtual que tiene que ver con expresiones de sentimientos, de agrado o desagrado hacia el aula virtual.

Los ítems que se destacan son:

- “*Encuentras interesante la educación cuando utilizan herramientas tecnológicas en tu aprendizaje*”: un 67% de alumnos se manifiesta muy de acuerdo y de acuerdo.
- “*Evitas entrar en el Aula Virtual para no leer las informaciones nuevas*”: un 70% de alumnos se manifiesta muy en desacuerdo y en desacuerdo.

Tabla 4. Distribución porcentual de 544 alumnos según el grado de actitud de componente afectiva. Año 2016.

COMPONENTE AFECTIVO	Muy de acuerdo	De acuerdo	Indeciso	En desacuerdo	Muy en Desacuerdo
Te sientes intimidado ante la tecnología	2.57	8.09	23.35	27.35	38.05
Te molesta entrar en el Aula Virtual para realizar tus actividades	5.15	13.42	27.94	31.99	21.51
Te agradan las asignaturas que utilizan la educación mixta en tu aprendizaje B Learning (educación tradicional y lo virtual)	17.83	45.22	30.88	3.86	2.21
Te gusta aprender bajo la modalidad B Learning (educación tradicional y lo virtual)	17.28	47.43	27.02	4.78	3.49
Encuentras interesante la educación cuando utilizan herramientas tecnológicas en tu aprendizaje	17.85	49.45	25.37	4.41	3.13
Te desagrada cumplir con las obligaciones del Aula Virtual	7.35	15.81	31.07	31.80	13.97

Te sientes más actualizado tecnológicamente al tener contacto con tu entorno virtual:	14.71	42.10	29.96	9.74	3.49
Si pudieras eliminar una asignatura, seria las que están bajo la modalidad B Learning	4.23	8.82	35.29	28.31	23.35
Evitas entrar en el Aula Virtual para no leer las informaciones nuevas	3.31	7.90	18.75	41.73	28.31
Te da miedo utilizar un recurso nuevo sugerido en tu entorno de aprendizaje	3.31	10.11	27.39	33.46	25.74

Al estandarizar esta escala, para una mejor interpretación, se pudieron establecer cinco intervalos de amplitud 0,8 puntos como lo muestra el siguiente cuadro:

Tabla 5. Escala estandariza por intervalos de las categorías la variable actitud hacia el aprendizaje en aulas virtuales de 544 alumnos. Año 2016.

CALIFICACION DE LA ACTITUD	INTERVALOS
Muy Desfavorable	[1, 1.8)
Desfavorable	[1.8, 2.6)
Ni desfavorable ni favorable	[2.6, 3.4)
Favorable	[3.4, 4.2)
Muy Favorable	[4.2, 5]

Luego la distribución porcentual de los puntajes promedios obtenidos por los alumnos quedó determinada en cada uno de los intervalos, de la siguiente manera:

Tabla 6. Distribución de los puntajes obtenidos por los estudiantes según las categorías actitudinales hacia la implementación de las aulas virtuales. Año 2016

CALIFICACION DE LA ACTITUD	INTERVALOS	PORCENTAJES
Muy Desfavorable	[1, 1.8)	0%
Desfavorable	[1.8, 2.6)	2%
Ni desfavorable ni favorable	[2.6, 3.4)	39%
Favorable	[3.4, 4.2)	57%
Muy Favorable	[4.2, 5]	2%

La Fig. 2, corresponde a la Tabla 6, donde se puede destacar que un 57% de los estudiantes encuestados posee una actitud favorable hacia la implementación del aula virtual en su aprendizaje y el 39% presenta una actitud indiferente. También se observa que un 2% posee una actitud completamente favorable y el mismo porcentaje tiene una actitud completamente desfavorable.

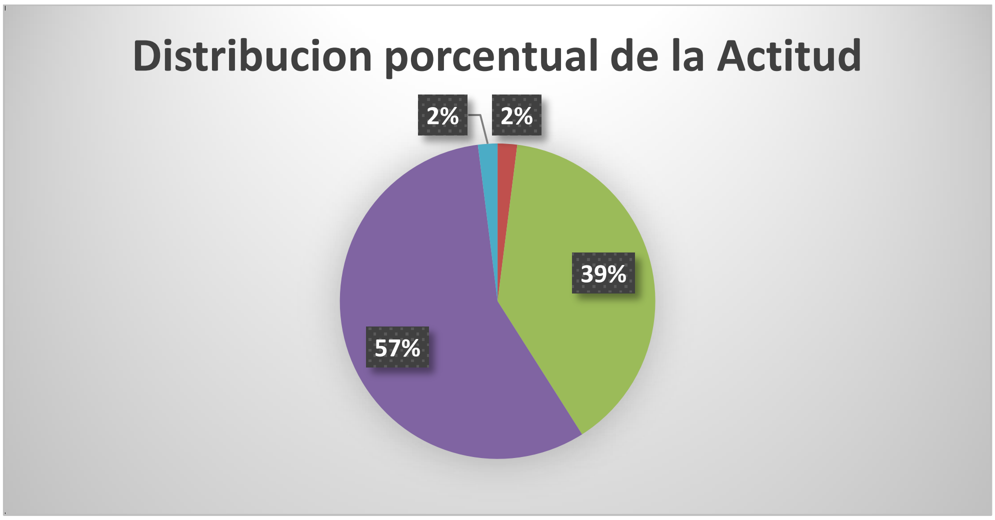


Fig. 2. Distribución porcentual de 544 alumnos según el grado de actitud de la componente afectiva. Año 2016.

En la Tabla 7, se analizó la variable Actitud hacia el Aprendizaje en el Aula Virtual, mediante un cuadro comparativo entre las carreras: Contador Público Nacional, Licenciatura en Administración y Licenciatura en Economía de primer año. Se destaca que en las tres carreras, más de un 50% presenta una Actitud Favorable y Muy Favorable hacia la implementación del Aula Virtual en su aprendizaje y un 67% en la carrera de Licenciatura en Economía que es la que presenta el mayor porcentaje.

Tabla 7. Distribución de los puntajes obtenidos por los estudiantes según las categorías actitudinales hacia la implementación del aula virtual por carreras

CALIFICACION DE LA ACTITUD	INTERVALOS	CONTADOR PUBLICO NACIONAL	LICENCIATURA EN ADMINISTRACION DE EMPRESAS	LICENCIATURA EN ECONOMIA
Muy Desfavorable	[1, 1.8)	0%	0%	0%
Desfavorable	[1.8, 2.6)	2%	2%	2%
Ni desfavorable ni favorable	[2.6, 3.4)	39%	41%	31%
Favorable	[3.4, 4.2)	57%	54%	65%
Muy Favorable	[4.2, 5]	2%	3%	2%

5 Conclusiones y trabajos futuros

Las conclusiones más relevantes de esta investigación en función de los objetivos planteados son:

- En cuanto al componente cognitivo, un alto porcentaje de los alumnos de la muestra expresa estar de acuerdo y muy de acuerdo en los enunciados positivos con respecto al aprendizaje en el aula virtual. Estas actitudes son importantes, ya que la dimensión cognitiva contiene las ideas, creencias, imágenes, percepciones y concepciones de la propia capacidad sobre los conocimientos y habilidades intelectuales en cuanto a entornos virtuales se refiere.
- Con respecto a la dimensión conductual, que está vinculada a la intención, incluyendo las expresiones y la forma de actuar o la tendencia de desenvolverse ante una situación del mundo donde están inmersos, se observó que un 70% de alumnos se manifiesta Muy de acuerdo y De acuerdo en que deben estudiar antes de

realizar las actividades del Aula Virtual y un porcentaje similar manifestó estar muy en desacuerdo y en desacuerdo con respecto al ítem que el aula virtual no sirve para nada.

- En la dimensión afectiva del comportamiento de la variable actitud hacia el aula virtual, que tiene que ver con expresiones de sentimientos, de agrado o desagrado hacia la misma, se encontró que más del 60 % de los alumnos se manifiesta muy de acuerdo y de acuerdo con el ítem que es interesante la educación cuando se utilizan herramientas tecnológicas en el aprendizaje.
- Se puede destacar que más de la mitad de los estudiantes encuestados posee una actitud favorable hacia la implementación del aula virtual en su aprendizaje, frente al 40 % que presenta una actitud indiferente.
- Del cuadro comparativo entre las tres carreras de Contador Público Nacional, Licenciatura en Administración y Licenciatura en Economía se observa que el 50% de los alumnos encuestados muestra una Actitud Favorable y Muy Favorable hacia la implementación del Aula Virtual en su aprendizaje, superando este porcentaje la carrera de Licenciatura en Economía.

El diagnóstico de la situación actual, nos permitió reafirmar la necesidad de continuar en esta línea de investigación y proseguir en la búsqueda de un modelo de enseñanza semipresencial que contribuya al fortalecimiento en el avance cognoscitivo de los estudiantes.

Para ello es necesario que los alumnos se comprometan e involucren en esta transformación en los modos de acceso al conocimiento, que asuman el reto de aprender mediante estos recursos virtuales y que los docentes planteen actividades motivadoras que propicien la optimización del proceso educativo.

Referencias

1. Unesco. Declaración Mundial sobre Educación Superior en el Siglo XXI. Visión y Acción. *Conferencia Mundial sobre los Cambios en la Educación Superior.* http://unesdoc.unesco.org/images/0011/001163/116345s.pdf . (1998). Accedido el 17 de diciembre de 2013.
2. Cabero, J. ; Llorente, M.. Del e-Learning al Blended Learning: nuevas acciones educativas. *Grupo de tecnología educativa Universidad de Sevilla*. http://sed.ucla.edu.ve/descargas/documentos/del-elearning-al-blended-learning-nuevas-acciones-educativas/view. (2008). Accedido el 13 de enero del 2014.
3. Mager, R. *Creación de actitudes y aprendizaje.* Madrid Ediciones Marova.3ª edición, pp. 35-47 (1983).
4. Noor, M. ; Basir, M.. An Attitude Approach to the Prediction of Entrepreneurship on Students at Institution of Higher Learning in Malaysia. *International Journal of and Management*,Vol.4, No 4, pp 129-135 (2009).
5. Coronado, C.; Pórteles, M.; Zurita, S. ; Jara, J. "Actitud de los estudiantes ante la implementación de aulas virtuales en su aprendizaje". *Revista Premisa*. Vol. 67, pp. 14-28. (2015).

Volver al Índice

Capítulo 4

Articulación y Etensión

Un Acercamiento entre Ingeniería y Sociedad y Álgebra y Geometría Analítica

Ana María Narvaez[1, 2], Luis Gomez[1, 3]
[1] Departamento de Materias Básicas, Facultad Regional Mendoza, Universidad Tecnológica Nacional
Rodriguez 273 (5500) Mendoza
ana.narvaez@frm.utn.edu.ar; lgomez22@yahoo.com
[2] Departamento de Ciencias Básicas, Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de Cuyo.
Ciudad Universitaria, Parque Gral. San Martín (5500) Mendoza, Argentina
[3] Facultad de Filosofía y Letras, Universidad Nacional de Cuyo.
Ciudad Universitaria, Parque Gral. San Martín (5500) Mendoza, Argentina

Resumen. El propósito de este trabajo es articular contenidos de Ingeniería y Sociedad con Álgebra y Geometría Analítica para potenciar el conocimiento científico de los docentes y, como consecuencia, de los estudiantes, futuros ingenieros, en la UTN, FRM. En Ingeniería y Sociedad se enseñan los fundamentos lógicos y metodológicos de la Matemática. La Matemática es una ciencia formal y su método es el axiomático. Este método se enseña porque es la única respuesta aceptable al problema de la regresión al infinito que le da origen. En Álgebra y Geometría Analítica se dan definiciones, la mayoría en forma axiomática. Una de las preguntas que surge es cómo establecer el puente entre ambos espacios curriculares. Con esta investigación histórica, epistemológica y didáctica sobre los axiomas en geometría, se enriquece nuestra tarea docente pues se toma consciencia de las dificultades de las definiciones axiomáticas y de la necesidad de complementar los enfoques sintético y analítico en la enseñanza de la geometría. Se concluye, en esta etapa de la investigación, con reflexiones sobre nuestras prácticas docentes.

Palabras Clave: Regresión infinita, Axiomas, Geometría Analítica

1 Introducción

El propósito de este trabajo es dar a conocer que la enseñanza de los fundamentos lógicos y metodológicos de la Matemática, dados en el espacio curricular Ingeniería y Sociedad, pueden y, en nuestra opinión, deben, ser usados como una herramienta didáctica para el estudio de Álgebra y Geometría Analítica, entendiendo este estudio desde la Teoría de la Transposición Didáctica (Chevallard,1991) que tiene como destinatarios a los alumnos de Ingeniería de esta casa de altos estudios, sin perder de vista el funcionamiento real de la enseñanza.
Ingeniería y Sociedad es una asignatura del Departamento de Materias Básicas, que se imparte en primer año de las carreras de Ingeniería Civil, Química, Electrónica y Electromecánica y en tercer año de Ingeniería en Sistemas. Álgebra y Geometría Analítica es también una asignatura del Departamento de Materias Básicas, y se dicta en primer año de todas las carreras de Ingeniería de la Facultad [1].

2 Desde Ingeniería y Sociedad

Como es bien conocido, la Matemática es una ciencia formal que utiliza el método axiomático. Ahora bien, ¿por qué se emplea este método? Porque es la única respuesta aceptable al problema de la regresión al infinito que le da origen.

Uno de los aspectos de este problema es el significado de los términos matemáticos. Es necesario que los términos sean unívocos, y para que el contenido significativo de los términos o signos sea unívoco debe tener una definición clara, precisa y distinta.

Una definición no puede ser circular. Una forma de circularidad es la simple tautología, por ejemplo, “una línea es una línea”. Pero también se habla de circularidad cuando se definen términos entre sí, por ejemplo, “una línea es una sucesión infinita de puntos” y “un punto es un elemento constitutivo de una línea”. De manera que no es posible definir todos los términos empleados pues se llegaría a una potencial serie infinita de definiciones, lo que es inaceptable. Entonces, se establecen algunos *términos primitivos* o primeros que se usan sin definir y que sirven para definir a todos los demás, directa o indirectamente.

El segundo aspecto del problema de la regresión al infinito es lo que sucede con la justificación deductiva de la verdad de los enunciados matemáticos. Se acepta un enunciado como verdadero cuando ha sido demostrado, esto es, cuando constituye la conclusión de un proceso deductivo con premisas verdaderas. Pero ¿cómo se puede justificar la verdad de cada una de las premisas? Convirtiéndolas en la conclusión de un argumento deductivo cuyas premisas, a su vez, sean verdaderas; se trata de evitar que esta regresión caiga en el vicio de la circularidad (se caería en una regresión al infinito) de forma análoga a lo que sucede con el problema de la definición de los términos.

Por lo expuesto anteriormente, es necesario aceptar o establecer algunos enunciados como primeros: son los *axiomas*. Los axiomas son enunciados que se establecen (o aceptan) como verdaderos y como primeros sin demostración, ellos son los que fundamentan la verdad de todos los demás enunciados verdaderos (o teoremas) del sistema axiomático [2, 3, 4, 5].

3 Algo sobre axiomas

En la antigüedad, los axiomas se consideraban necesarios en sí mismos. Actualmente se toman como necesarios para un sistema por convención.

En el siglo VI a.C. el matemático Pitágoras colocó la piedra angular de la geometría científica, al demostrar que diversas leyes arbitrarias e inconexas de la geometría empírica se podían deducir, como conclusiones lógicas, de un número limitado de axiomas o postulados.

Estos postulados o axiomas fueron considerados por Pitágoras y sus discípulos como verdades necesarias y evidentes por sí mismas. Sin embargo, en el pensamiento matemático moderno se consideran como un conjunto de supuestos útiles pero arbitrarios, esto significa que se puede establecer otro conjunto de axiomas para construir otro sistema axiomático.

Un ejemplo típico de los postulados desarrollados y aceptados por los matemáticos griegos es la siguiente afirmación: una línea recta es la distancia más corta entre dos puntos.

Un conjunto de teoremas sobre las propiedades de puntos, líneas, ángulos y planos se puede deducir lógicamente a partir de estos axiomas. Entre estos teoremas se encuentran: la suma de los ángulos de cualquier triángulo es igual a la suma de dos ángulos rectos o el muy conocido como teorema de Pitágoras: el cuadrado de la hipotenusa de un triángulo rectángulo es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos lados.

La geometría demostrativa de los griegos se ocupaba de triángulos, polígonos y círculos con el análisis de sus propiedades principales, así como de sus correspondientes figuras tridimensionales. Esta geometría fue mostrada rigurosamente por el matemático griego Euclides (330 a. C. – 275 a. C.) en su famosa obra Elementos.

Actualmente, un sistema axiomático puede tener expresados sus axiomas de manera formal o de manera informal: una axiomatización formal usa un lenguaje formal y en él cada axioma es una cadena finita de signos en el alfabeto del lenguaje formal, siguiendo reglas combinadas que hacen de la secuencia una fórmula bien formada (fbf). Una axiomatización informal usa una lengua natural formalizada y definiciones no ambiguas. Los libros de matemática y otras disciplinas formales, normalmente, redactan los axiomas de esta manera.

Los sistemas de axiomas formales son más sencillos de estudiar y son preferibles para caracterizar las propiedades de los sistemas matemáticos. En particular, admiten una caracterización semántica muy clara en la teoría de modelos y sus propiedades deductivas pueden ser tratadas en la teoría de la demostración. Por otro lado, las axiomatizaciones informales sólo son útiles cuando se tiene un modelo concreto en mente y se pretenden buscar propiedades que se cumplen en el modelo. Este último hecho es tenido en cuenta en la enseñanza y aprendizaje del Álgebra y la Geometría Analítica que nos ocupa en el presente trabajo.

Es conocido el hecho que los axiomas pueden variar de un sistema axiomático a otro. Por ejemplo, en geometría sintética, los axiomas, son enunciados que relacionan términos definidos en función del punto, la recta y el plano; en geometría analítica, los axiomas se definen en función del punto; y no tiene sentido hablar de recta o plano como conceptos primitivos. Así, la expresión, $f(x)$ puede definir cualquier función o relación – como una recta, circunferencia, plano, entre otros lugares geométricos [6].

4 Desde el Álgebra y la Geometría Analítica

La geometría pura o sintética es una rama de las matemáticas que se encarga de estudiar y construir de manera sintética las formas y lugares geométricos.

Se dice que la geometría pura o sintética es aquella que puede construir axiomáticamente un tratamiento lógico-deductivo. Es decir, a partir de una serie de axiomas o postulados (que se adopten a priori) se comienza a construir y demostrar proposiciones lógicas; como una especie de eslabones de una cadena de razonamientos.

La mayor diferencia entre la geometría analítica y la geometría sintética, radica en el estudio y tratamiento que se les da a estas cadenas de razonamientos. Por ejemplo, el uso del Álgebra, en especial el Álgebra Lineal, es fundamental en la geometría analítica. Sin embargo, para la geometría pura no es tan indispensable el enfoque algebraico (sin que esto signifique su exclusión).

A continuación realizaremos un breve recorrido histórico- epistemológico de la geometría sintética y la analítica, con los siguientes propósitos:

- El propósito de permitirnos determinar *obstáculos epistemológicos,* noción planteada por Bachelard como explicación para la aparición inevitable de errores dentro del conocimiento científico, constituyendo estos una parte importante en el avance del conocimiento. "*El conocimiento de lo real es una luz que siempre proyecta alguna sombra. Jamás es inmediata y plena. … se conoce en contra de un conocimiento anterior, destruyendo conocimientos mal adquiridos"* (Bachelard, 2000, p. 15) [7].
- El propósito como docentes de explicar el "espíritu" de nuestro objeto de estudio. Chevallard (1991, p. 15) dice:
  "Ese objeto –allí está el obstáculo con el que la investigación-acción tropieza– no es enteramente del orden de la naturaleza. Es lo que yo denominaría un objeto tecnocultural, cuya formación se inscribe en la historia..." [1].
- El propósito de obtener las pautas de las construcciones de los algoritmos que son frecuentemente enseñados actualmente sin justificación.
- El propósito de permitirnos generar situaciones de enseñanza de calidad, es decir actividades que permitan al alumno hacer matemática y lograr niveles de comprensión cada vez más complejos bajo una hipótesis de aprendizaje constructivista.
- El propósito de permitirnos obtener los campos de la ciencia que hacen uso de los objetos matemáticos que pretendemos enseñar.

Delimitaremos inicialmente la geometría sintética como aquella que utiliza los métodos de Euclides, Apolonio y sus sucesores, hasta Descartes, para abordar problemas de construcción geométrica sin representación en coordenadas y con la regla y el compás como principales herramientas. La determinación de los lugares geométricos aparece como una técnica básica de estas construcciones, al lado de las transformaciones de plano. (Ancochea, 2011, p. 538) [8].

La geometría analítica se entiende como "*la aplicación del álgebra simbólica al estudio de problemas geométricos mediante la asociación de curvas y ecuaciones indeterminadas en dos incógnitas en un sistema de coordenadas"* (González Urbaneja, 2007, p. 207). En geometría analítica plana se estudian aquellas curvas tales que las coordenadas de sus puntos, según un sistema de coordenadas prefijado (por ejemplo, cartesiano o en coordenadas polares), satisfacen una ecuación o un sistema de ecuaciones. El vínculo que se establece entre la geometría analítica y el álgebra por medio de la ecuación, abarca también las relaciones y operaciones entre los elementos de ambas, pues las propiedades geométricas de una curva pueden ser estudiadas a partir del comportamiento algebraico de su ecuación.

Al vincular los trabajos de Apolonio y de Viète, Fermat concibe su Geometría Analítica que establece un efectivo puente entre la Geometría y el Álgebra, que le permitirá asociar curvas y ecuaciones, sobre la base de aplicar el análisis algebraico de Viète a los problemas de lugares geométricos de Apolonio y Pappus definidos en un sistema de coordenadas por una ecuación indeterminada en dos incógnitas. De este modo, Fermat resolverá los problemas del análisis geométrico de los griegos mediante la mecánica operatoria del álgebra simbólica.

Con la Geometría Analítica de Fermat se alcanzaba el máximo grado de eficacia en la aplicación a los problemas geométricos del antiguo método de análisis, de ahí procede el adjetivo Analítica que acompaña al sustantivo Geometría. (González Urbaneja, 2007, p. 221) [9].

5 Discusión sobre el tratamiento en la enseñanza

El problema del tratamiento independiente de la geometría sintética y la geometría analítica no es actual sino que se origina en la antigüedad, como remarca Santaló (1961) quien presenta un recorrido histórico que describe la relación que existió entre la geometría analítica y la geometría sintética desde sus orígenes. El artículo resalta que el uso sistemático de la geometría analítica para resolver problemas llevó a elaborar frondosas fórmulas que complicaban el problema innecesariamente e impedían ver la esencia geométrica del mismo. Sin embargo, al introducir los métodos sintéticos para abordar los problemas, se abrían nuevas vías a la investigación geométrica. Del mismo modo, en algunos casos, la geometría sintética se tornaba insuficiente para resolver los problemas y era necesario acudir a la geometría analítica.

También señala que *"el reinado casi absoluto de la geometría analítica durante los siglos XVII y XVIII condujo a un abuso de sus métodos y muchos problemas, complicados innecesariamente, perdieron el sentido estético que debe mantener toda construcción matemática."* (Santaló, 1961, p. 146) [10].

Santaló, en su trabajo *Álgebra y Geometría: sus vinculaciones*, escribe: "*… En su famoso Programa de Erlangen* (publicado en los Mathematische Annalen, vol. 43, 1893), *Félix Klein sistematiza toda la geometría a partir de la idea de grupo; toda la geometría pasa a ser el estudio de los invariantes de un grupo determinado. Con ello todos los conocimientos geométricos se traducen en propiedades de ciertos grupos, precisamente de los llamados "grupos clásicos", a saber: el grupo ortogonal, el grupo lineal, el grupo simpléctico y el grupo unitario* [9].

Recíprocamente, la geometría actual consiste en el estudio de dichos grupos. En realidad no se trata más que de un cambio de lenguaje o un cambio de punto de vista. La diferencia entre geometría analítica y sintética subsiste igualmente, según el método por el cual se estudian los grupos correspondientes. En un principio el estudio era siempre analítico (Sophus Lie); es decir, se suponía un sistema de coordenadas y las transformaciones se representaban en función del mismo. Modernamente se vuelve a la tendencia sintética, pero no en base a la intuición geométrica, sino a la elaboración sintética que el álgebra ha hecho de sus estructuras. Con ello ha sido posible estudiar los grupos globalmente, no de manera exclusivamente local, como se hacía en sus comienzos." (Santaló, 1961, p. 56) [11].

Gascón observa la persistencia en proponer estudiar la geometría sintética y la geometría analítica de forma separada en la escuela secundaria, a pesar de ser áreas complementarias. Sugiere que este hecho, que se mantiene inalterable a lo largo de las últimas reformas educativas, parece dar a entender que no se trata de una separación accidental sino que responde a un fenómeno didáctico-matemático más profundo y que, por lo tanto, merece ser indagado. (Gascón, 2003, p. 29) [12].

Por su parte, Ancochea (2011) considera que la introducción a la geometría analítica que no considera las técnicas de construcción y estudio de figuras que proporciona la geometría sintética provoca una fuerte algoritmización de los contenidos enseñados [8].

Cabe señalar que la complementariedad entre la geometría sintética y la geometría analítica se evidencia a partir de las propiedades métricas que satisfacen los puntos de las curvas que pertenecen al lugar geométrico en cuestión, que se presentan en coordenadas.

Las técnicas de la geometría sintética permiten realizar un estudio de diferentes casos, anticipar las características de la curva que describe el lugar geométrico estudiado y esbozar una estrategia para implementar las técnicas analíticas con el fin de describir por medio de una ecuación el mencionado lugar geométrico. Así surge una técnica nueva por combinación de técnicas sintéticas y técnicas analíticas.

El abordaje de la tarea desde la geometría sintética resulta ineludible para producir una manera de elaborar la ecuación del lugar geométrico fundamentado en las propiedades métricas.

A partir del trabajo de Gascón, Alvarez presenta en su trabajo, un recorrido de estudio e investigación donde se propone establecer conexiones progresivas entre las técnicas sintéticas y las analíticas. En este proceso de estudio sugiere: a) comenzar con un enunciado analítico particular, b) traducir el problema a un enunciado de geometría sintética general, c) resolver el problema de geometría sintética mediante una construcción con regla y compás, d) hacer un estudio y discusión intuitiva de casos, e) resolver la versión analítica particular del problema. (Alvarez, 2014) [13, 14, 15].

El análisis matemático y didáctico sugiere la complementariedad de los enfoques analítico y sintético. Ambos tratamientos ponen en juego diferentes técnicas que ayudan en la comprensión de los conceptos.

Cabe destacar que en el trabajo de Alvarez, aparece una manera de complementar la Geometría Sintética y la Geometría Analítica implementando el uso de software. Mediante un problema de determinación de lugar geométrico, se muestran los alcances de los abordajes analítico y sintético. Esto le permite explorar casos posibles, elaborar conjeturas y construir pruebas. Asimismo se muestra la necesidad de combinar técnicas de la geometría sintética y de la geometría analítica para caracterizar el lugar geométrico [16].

A continuación se muestra un ejemplo propuesto por Alvarez.

5.1 Actividad

Hallar el lugar geométrico de los puntos que se encuentran a la misma distancia del punto A = (3, 2) y del punto B = (7, 5).

Para resolver esta tarea empleando técnicas propias de la geometría sintética se trazaría, usando regla no graduada y compás la mediatriz del segmento AB, probando luego que la recta obtenida es la que contiene a todos los puntos con las condiciones dadas. En cambio, con técnicas de la geometría analítica, se buscaría la ecuación del lugar geométrico a partir de igualar fórmulas de distancia obteniendo como resultado de la manipulación algebraica la ecuación de una recta que resulta perpendicular a la recta que contiene a los puntos A y B y que pasa por el punto M, punto medio del segmento [14].

Se observa que a pesar de la sencillez de la actividad, las estrategias que permite poner en juego enriquecen la tarea docente y, por lo tanto, la calidad del conocimiento que queda disponible para los estudiantes.

6 Conclusiones

En esta etapa de la investigación sobre la articulación entre Álgebra y Geometría Analítica e Ingeniería y Sociedad, propuesta en el Proyecto UTI 4034TC de SCTyP (Matemática Educativa en Carreras de Ingeniería) se ha logrado:

- Reconocer contenidos de ambos espacios curriculares cuya articulación consciente, potencia el conocimiento científico de nuestros estudiantes, futuros ingenieros. Por ejemplo: características científicas de definiciones, propiedades, teoremas, sistemas axiomáticos, etc.
- Discutir el análisis matemático y didáctico que sugiere la complementariedad de los enfoques geométricos analítico y sintético, pues ambos tratamientos ponen en juego diferentes técnicas que ayudan en la comprensión de los conceptos.
- Reflexionar sobre la conveniencia de enfocar la enseñanza y aprendizaje de la Geometría desde distintos enfoques.
- Debatir sobre la conveniencia de tratar la Geometría Analítica en el mismo espacio curricular que el Álgebra Lineal, propia de algunas facultades de Ingeniería nacionales.
- Generar un espacio de reflexión para la discusión entre pares de espacios curriculares comunes al ciclo básico de las carreras de Ingeniería de la FRM de la UTN y demás universidades nacionales.
- Aprender que el desarrollo de la matemática actual es principalmente abstracto y se realiza, en gran parte, mediante los sistemas axiomáticos.

Referencias

1. Chevallard Y.: *La Transposición Didáctica. Del saber sabio al saber enseñado*. Buenos Aires: Aique Grupo Editor S.A. (1991)
2. Copi, I.: *Lógica Simbólica*. México: CECSA (2001)
3. Klimovsky, G.: *Las ciencias formales y el método axiomático*. Buenos Aires: A-Z editora (2000)
4. Blanche R.: *La Axiomática*. México: Fondo de Cultura Económica (2002)
5. Bochenski, I. M.: *Los métodos actuales del pensamiento*. 13 ed. Madrid: Rialp (1979)
6. Font, V.: Matemáticas y Cosas. Una Mirada desde la Educación Matemática. *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana*, Vol. X, Nº 2, pp. 249 - 279 (2003)
7. Bachelard, G.: *La formación del espíritu científico*. 23ed. México: Siglo XXI (2000)
8. Ancochea, B.: *Las funciones de las calculadoras simbólicas en la articulación entre la geometría sintética y la geometría analítica en secundaria.* En M. Bosch, J. Gascón, A. Ruiz Olavarría, M. Artaud, A. Bronner, Y. Chevallard, G. Cirade, C. Ladage y M. Larguier, (Ed.), Un panorama de la TAD, pp. 533-551. Barcelona: CRM Documents (2011)
9. Gonzalez Urbaneja, P. M.: *Raíces históricas y trascendencia de la Geometría Analítica*. SIGMA, Vol. 30, pp. 205 -236 (2007)
10. Santaló, L. A.: Geometría analítica y geometría sintética. *Ciencia e investigación*, Vol.17, Nº 5, pp. 145-154 (1961)
11. Santaló, L.: Álgebra y Geometría: sus vinculaciones.
12. *dugifonsespecials.udg.edu/bitstream/handle/.../SANTALÓ%20020.pdf*. Accedido el 22 de diciembre de 2016
13. Gascón, J.: *Evolución de la controversia entre geometría sintética y geometría analítica. Un punto de vista didáctico-matemático.* Disertaciones del Seminario de Matemáticas Fundamentales, Vol. 1, Nº 20, pp. 28 (2001)
14. Gascón, J.: Geometría sintética. *En Ceferino Ruiz Garrido*. Catedrático de la Universidad de Granada. Departamento de Geometría y Topología. Jueves, 9 de julio de 2009. Centro Mediterráneo. p. 29 (2003)
15. Alvarez, M.: *Relación entre geometría sintética y analítica y tic's: análisis matemático-didáctico de una actividad.* Memoria presentada para optar por el título de Especialista en Didáctica de las Ciencias con orientación en Matemática. Universidad Nacional de General Sarmiento. Instituto del Desarrollo Humano (2014).

16. Gascón, J.: Efectos del autismo temático sobre el estudio de la Geometría en Secundaria. I: Desaparición escolar de la razón de ser de la Geometría. *Suma: sobre Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas*, Vol. 44, pp. 25 -34 (2003)
17. Klimovsky, G.; Boido, G.: *Las desventuras del conocimiento matemático*. Buenos Aires, A-Z editora (2005)

Volver al Índice

Ecuaciones Trigonométricas: Análisis y Mejora de una Secuencia Didáctica

Eliana Lucía Pennisi, María Florencia Agüero, Andrea Aznar, Gloria Prieto
Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de Mar del Plata
Juan B. Justo 4302 , Mar del Plata, Buenos Aires, Argentina.
{pennisi.eliana, gloriaprieto1}@gmail.com , florencia.aguero@outlook.com , maznar@fi.mdp.edu.ar

Resumen. En esta comunicación se presenta un trabajo de análisis y mejora de una secuencia didáctica sobre ecuaciones vinculadas a funciones trigonométricas. Dicho trabajo tuvo lugar en un taller de didáctica de la matemática desarrollado en el marco de un proyecto de articulación entre la Universidad Nacional de Mar del Plata y escuelas secundarias dependientes de la Jefatura Educativa de Gestión Estatal Región 19. En el seno de dicho taller se acordaron las prácticas matemáticas fundamentales vinculadas a ecuaciones. El análisis está sustentado por fundamentos del Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemática (EOS). En el presente trabajo se expresan los significados asociados a ecuaciones trabajados en la secuencia y se ejemplifica el análisis de idoneidad epistémica en dos de sus actividades. Para cada una de dichas actividades se muestra la versión inicial y la versión posterior, que contiene las mejoras realizadas como consecuencia del análisis.

Palabras Clave: Secuencia didáctica, Ecuaciones trigonométricas, Idoneidad epistémica, Significados.

1 Introducción

En el período 2014-2016 se desarrolló el proyecto de articulación entre la Universidad Nacional de Mar del Plata y un conjunto de quince escuelas secundarias dependientes de la Jefatura Educativa de Gestión Estatal Región 19 denominado *La UNMdP y la Escuela Secundaria. Mejora de la formación en ciencias exactas y naturales*[1]. La Facultad de Ingeniería de la UNMdP participó activamente en las distintas componentes del proyecto: aseguramiento de competencias de egreso de la escuela secundaria, desarrollo de vocaciones tempranas en ciencia y tecnología y acompañamiento pedagógico.

En el marco de la componente de acompañamiento pedagógico, durante el año 2015 se llevó a cabo un taller denominado Diseño de Secuencias Didácticas de Matemática en el contexto de las ecuaciones. El mismo estuvo a cargo del grupo de investigación enseñanza de la matemática en carreras de ingeniería (GIEMI) y participaron docentes de escuelas secundarias vinculadas al proyecto.

La elección del tema ecuaciones, a trabajar en el taller, surgió a partir de las dificultades que presentan los estudiantes, tanto de nivel medio como universitario, en dicha temática. Dan cuenta de esta afirmación los resultados de distintos instrumentos de diagnóstico en diferentes instancias, tanto nacionales como locales, a saber:

- Operativo Nacional de Evaluación [1].
- Diagnóstico de Habilidades Matemáticas Ingreso 2012 [2].
- Test diagnóstico para ingresantes, a las carreras de ingeniería de distintas universidades argentinas [3].

Otro factor que fue determinante para la elección del tema es su transversalidad tanto a nivel universitario como secundario y la cantidad de aplicaciones intra y extra matemáticas que presenta.

Uno de los logros destacables del taller fue el acuerdo conjunto entre los docentes participantes de cuáles son las principales prácticas matemáticas, asociadas a ecuaciones, que se busca que los estudiantes puedan desarrollar.

Durante el taller, se propuso como actividad a los docentes cursantes el diseño de una secuencia didáctica vinculada a ecuaciones para favorecer en los alumnos las prácticas acordadas, un análisis crítico de dicho diseño fundamentado en un marco teórico didáctico y su posterior optimización.

[1] El Proyecto *La UNMdP y la Escuela Secundaria. Mejora de la formación en ciencias exactas y naturales* forma parte del Proyecto de Desarrollo Tecnológico y Social “Estrategia nacional de articulación entre la universidad y la escuela secundaria para la generación de vocaciones y el fortalecimiento de la formación media en ingeniería y ciencias exactas y naturales” (PCTI-121) http://pdts.mincyt.gob.ar/proyectos/

Este trabajo muestra un ejemplo de resolución de la actividad mencionada. La secuencia didáctica tuvo una versión inicial y una versión mejorada a consecuencia del análisis didáctico realizado. Se exponen dos actividades de la secuencia en sus versiones inicial y mejorada, las cuales están focalizadas en ecuaciones asociadas a funciones trigonométricas.

El grupo de estudiantes al que está destinada la secuencia es 6to año, último año de la Educación Media. Se analizó la idoneidad epistémica en la propuesta original utilizando las herramientas del Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemática (EOS). Dicha evaluación de idoneidad reveló algunas deficiencias tales como el escaso aprovechamiento de los significados asociados a ecuaciones, poca precisión en el lenguaje de algunas consignas e insuficiente coordinación entre las distintas actividades de la guía de trabajo. Se realizaron modificaciones sobre la propuesta original con el objetivo de lograr una mejora en dicha idoneidad.

2 Marco Teórico

El marco que sustenta esta propuesta es el Enfoque Ontosemiótico de la Cognición y la Instrucción Matemática (EOS), desarrollado por Juan Díaz Godino, Carmen Batanero y Vicenç Font Moll [4, 5, 6].

Este enfoque considera práctica matemática a cualquier acción, expresión o manifestación (lingüística o de otro tipo) realizada por alguien para resolver problemas matemáticos, comunicar la solución obtenida a otras personas, validar y generalizar esa solución a otros contextos. A partir de lo anterior el significado de un objeto matemático, es definido como el sistema de prácticas operativas y discursivas para resolver un cierto tipo de problemas asociados a ese objeto [6].

En el contexto de una clase, los conocimientos de cada alumno, en un momento dado, son muy variados. Ante un determinado objeto matemático se considera el significado personal que cada alumno le asigna a dicho objeto para diferenciarlo del significado fijado por el profesor, por el libro de texto o en un currículo, es decir su significado institucional.

A partir de esta distinción se puede describir, metafóricamente, el aprendizaje como acoplamiento progresivo entre significados personales e institucionales en una clase [6].

Entre las herramientas metodológicas que propone el EOS, está la noción de Idoneidad didáctica [5,7]. La misma permite realizar el análisis y la valoración de procesos de enseñanza y aprendizaje de la Matemática mediante un sistema de indicadores empíricos. Esta valoración global se realiza a través de seis criterios parciales de idoneidad, atendiendo a las distintas dimensiones que caracterizan y condicionan los procesos instruccionales: epistémica, cognitiva, interaccional, mediacional, ecológica y emocional. En este trabajo se usarán indicadores de la idoneidad epistémica. Los mismos se enumeran en la siguiente tabla.

Tabla 1. Componentes y descriptores de idoneidad epistémica (Fuente: [8], p.2).

Componentes	Descriptores
Situaciones-problemas	1- Selección de una muestra representativa y articulada de situaciones de contextualización, ejercitación y aplicación. 2- Propuesta de situaciones de generación de problemas (problematización)
Lenguaje	3- Uso de diferentes modos de expresión (verbal, gráfico, simbólico…), traducciones y conversiones entre los mismos. 4- Nivel del lenguaje adecuado a quienes se dirige. 5- Propuesta de situaciones de expresión e interpretación.
Elementos regulativos (Definiciones, proposiciones, procedimientos)	6- Definiciones y procedimientos clara y correctamente enunciados, adaptados al nivel educativo al que se dirigen. 7- Presentación de los enunciados y procedimientos fundamentales del tema según el significado de referencia y el nivel educativo. 8- Propuesta de situaciones para la generación y negociación de las reglas.
Argumentos	9- Adecuación de las explicaciones, comprobaciones, demostraciones al nivel educativo a que se dirigen. 10- Se promueven momentos de validación.
Relaciones (conexiones, significados)	11- Relación y articulación significativa de los objetos matemáticos puestos en juego (situaciones, lenguaje, reglas, argumentos) y las distintas configuraciones en que se organizan.

3 Descripción y análisis de las actividades seleccionadas.

Durante el taller, los docentes participantes acordaron cuáles son las principales prácticas asociadas a ecuaciones que se desean desarrollar en los estudiantes y, en consecuencia, se plantean como objetivos pedagógicos a trabajar en el aula. Estas prácticas son entendidas, en términos del EOS, como significados asociados a ecuaciones. Así, es posible considerar distintas prácticas matemáticas:

- las que consisten principalmente en la aplicación de ciertas reglas y algoritmos por lo que se lo llamó *significado de la ecuación como práctica algorítmica*.
- aquellas en las que se debe interpretar la ecuación que modeliza un problema por eso se acordó identificarlo como *significado de la ecuación como un modelo matemático asociado a un problema intra o extra matemático*.
- aquellas en las que la ecuación traduce en una igualdad entre expresiones simbólicas, una relación expresada en lenguaje coloquial o representada en un registro gráfico. Al considerar el rol de las prácticas de conversión en sus distintas formas de representación se convino en llamarlo *significado de la ecuación como expresión de una relación entre variables representada en distintos registros* (gráfico, coloquial o simbólico).
- las que consideran a una ecuación, desde un punto de vista lógico, como la expresión de una relación de igualdad que, de acuerdo al valor con el que se sustituya a la o las variables, puede resultar una afirmación verdadera o falsa. A esta práctica elemental y lógica asociada a la ecuación se acordó distinguirla como *significado proposicional de la ecuación*, esto es como una relación de igualdad entre expresiones que contienen una o más incógnitas, que al ser reemplazadas por valores puedan resultar verdadera o falsa.

Para responder a la actividad propuesta en el taller, se eligió como tema ecuaciones trigonométricas. El mismo figura en el Diseño Curricular para el sexto año de Educación Secundaria (último año de la Educación Media), dentro de la Unidad Funciones Trigonométricas, comprendido en el Eje Álgebra y Funciones. Los conocimientos previos requeridos para trabajar con esta secuencia didáctica son: análisis de funciones, razones trigonométricas, resolución de triángulos rectángulos, sistemas sexagesimal y circular, resolución de ecuaciones de primer y segundo grado y resolución de sistema de ecuaciones.

La secuencia fue diseñada para ser desarrollada a lo largo de ocho clases, en las que se contemplan períodos de: diagnóstico, análisis y desarrollo, repaso y evaluación del tema.

Sobre la primera versión de la secuencia se analizó el cumplimiento de los descriptores de idoneidad epistémica procurando con ello abordar suficientemente los significados acordados.

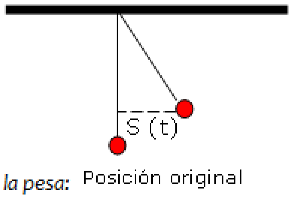
A continuación se muestran, a modo de ejemplo, las actividades 9 y 10 de la secuencia diseñada, su análisis de cumplimiento de descriptores y las consecuentes modificaciones que se realizaron para el mejoramiento de la secuencia.

3.1 Análisis y mejora de la actividad 9

Esta actividad (véase la Fig. 1.) fue pensada para ser implementada en la quinta clase de la secuencia, considerando que en las clases anteriores se ha trabajado en la resolución analítica y gráfica de ecuaciones trigonométricas. Se pretende que los alumnos puedan aplicar los conceptos adquiridos en situaciones extramatemáticas, resolviendo problemas de aplicación.

Actividad 9

El péndulo de un reloj se mueve periódicamente y se separa 5 cm de la vertical. La ecuación que describe el movimiento es: $S(t) = 5sen(4t)$, esta ecuación representa la distancia de la pesa a la vertical, en función del tiempo (t).



a) Representen gráficamente s(t) en Geogebra.

b) Decidan a qué distancia de la vertical y de qué lado de ella (derecho o izquierdo) estará la pesa:

A los 4/3 seg. *A los 2 seg.* *A los 17/8 seg.*

c) ¿Qué distancia máxima alcanza el péndulo con respecto a la posición original?

d) ¿En qué instante el péndulo del reloj alcanza la distancia máxima por primera vez en el lado derecho? ¿y en el izquierdo?

e) Indiquen el período en el que se mueve el péndulo.

Fig. 1. Primera versión de la Actividad 9.

Al analizar los descriptores de idoneidad epistémica en esta actividad se pudo apreciar que se proponen situaciones de interpretación y se utilizan diferentes modos de expresión (descriptores 3 y 5). Se observaron ciertas falencias que manifiestan el no cumplimiento de algunos descriptores:

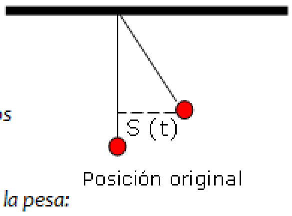
- Los incisos a) y e) no están contextualizados. La actividad no está correctamente articulada (descriptor 1).
- Cuenta con escasas propuestas de situaciones para analizar frente a un problema del que se puede sacar más provecho (descriptor 7).
- Al ejercicio le faltan datos a tener en cuenta (descriptor 6).
- No tiene propuestas para la generación y negociación de las reglas (descriptor 8).
- No se promueven momentos de validación (descriptor 10).

De acuerdo a las observaciones realizadas se efectuaron las modificaciones pertinentes para mejorar la idoneidad de la actividad. La versión modificada se muestra en la Fig. 2.

- Se modificaron los incisos a) y e) (este último pasó a ser el c) en la última versión) para contextualizar los mismos en relación al problema planteado.
- Se modificó el orden de los incisos para lograr correcta secuenciación de la actividad.
- Se adicionó el f) y se completaron los incisos a) y d) (que pasó a ser el e) en la versión modificada) para lograr el significado de la ecuación como práctica algorítmica, como un modelo matemático y como una expresión de una relación entre variables representada en distintos registros.
- Se incluyeron los ítems e) y f) para encontrar las infinitas soluciones a partir de una forma general.

Actividad 9

El péndulo de un reloj se mueve periódicamente y se separa 5 cm de la vertical. Si se desprecia la fricción, la ecuación que describe el movimiento es: $S(t) = 5sen(4t)$ *, esta ecuación representa la distancia de la pesa a la vertical, en función del tiempo (t).*



a) Representen en Geogebra el movimiento del péndulo. ¿Qué sucede con el péndulo en los momentos en los que la función alcanza los máximos y mínimos?

b) Decidan a qué distancia de la vertical y de qué lado de ella (derecho o izquierdo) estará la pesa:

A los 4/3 seg. A los 2 seg. A los 17/8 seg.

c) ¿Cada cuántos segundos se repite el movimiento?

d) ¿Qué distancia máxima alcanza el péndulo con respecto a la posición original?

e) ¿En qué instante el péndulo del reloj alcanza la distancia máxima por primera vez en el lado derecho? ¿y en el izquierdo? ¿En qué otros momentos llegará a la misma altura?

f) ¿En qué momento/s el péndulo llegará a los 4 cm de distancia respecto a la vertical?

Fig. 2. Versión modificada de la Actividad 9.

3.2 Análisis y mejora de la actividad 10

Esta actividad, en la secuencia diseñada, se encuentra a continuación de la analizada anteriormente. En ella se plantea un problema extramatemático, con una función trigonométrica que modela la situación. Su enunciado, en versión original, se muestra en la Fig. 3.

Actividad 10

Los científicos han descubierto un planeta en el cual las temperaturas se repiten cíclicamente, y aproximaron la temperatura (en °C) en función de los meses transcurridos según la ley: $f(x) = 5 + 10sen(x)$.

a. *¿Cuándo la temperatura llega a los 5°C?*
b. *¿En cuántos meses la temperatura llegará a los 20°C ?*

Fig. 3. Primera versión de la actividad 10.

Al evaluar la actividad se observó que la misma propone una situación de interpretación, utilizando distintos modos de expresión. Se pretendía trabajar los significados del objeto ecuación como expresión de un modelo matemático asociado a un problema extramatemático. Del análisis crítico realizado, observando los descriptores mencionados, se notaron diversas falencias. Entre ellas se destacan:

- Se reconocen escasas propuestas de situaciones para analizar frente a un problema del que se puede sacar más provecho (descriptores 2 y7).
- Sólo se presenta resolución analítica del problema (descriptor 3).
- Ejercicio incorrectamente enunciado (descriptor 6).
- No cuenta con propuestas para la generación y negociación de las reglas (descriptor 8).
- No se proponen incisos que lleven a la generación de reglas, ni tampoco a momentos de validación (descriptor 10).

De acuerdo a las observaciones realizadas se efectuaron las modificaciones que se creyeron adecuadas para una mejora en la idoneidad de la actividad. La versión modificada se muestra en la Fig. 4. Los cambios realizados se enumeran a continuación:

- Se modificó la redacción de incisos buscando la coherencia con el relato del problema.

- Se adicionó el inciso 1 para lograr el aprovechamiento de distintas situaciones apuntando a trabajar también los significados de práctica algorítmica y diversos modos de expresión (modo gráfico).
- Se agregaron las consignas 2 y 3 consignas para trabajar con momentos de generalización y validación de los conceptos trabajados en clase.
- Se agregaron ejercicios para fomentar la utilización de NTIC's

Actividad 10

Los científicos han descubierto un planeta en el cual las temperaturas se repiten cíclicamente, y aproximaron la misma (en °C) en función de los meses transcurridos según la ley: $f(x) = 5 + 10.sen\left(\frac{\pi}{15}.x\right)$

1. Con la ayuda de Geogebra, responde las siguientes preguntas:
   a. ¿En qué momentos la temperatura llega a los 5°C ? ¿Cuántas veces alcanza esa temperatura?
   b. ¿En algún momento la temperatura llegará a los 20°C? ¿Por qué?
   c. ¿En qué momentos las temperaturas alcanzadas son máximas? ¿y mínimas?
2. Analíticamente, encuentra las respuestas exactas de los incisos del ejercicio 1.
3. Busca una fórmula general que te permita hallar los momentos en los que la temperatura sea nula.

Fig. 4. Versión modificada de la Actividad 10.

4 Conclusiones

En este trabajo se mostró la aplicación de algunos conceptos de una teoría didáctica, el EOS, en la labor de diseño de materiales de clases vinculadas a ecuaciones.

El acuerdo entre los docentes participantes del taller de articulación, en la definición de las prácticas matemáticas fundamentales asociadas a ecuaciones, determinó los significados a trabajar como objetivos pedagógicos. Este acuerdo, en el contexto de la articulación entre el nivel medio y el universitario, es particularmente valioso pues conduce al desarrollo de habilidades requeridas de los estudiantes en la facultad.

Esto contribuyó a dar una orientación para el diseño de una secuencia didáctica que favorezca en los estudiantes la construcción de esos significados.

Por otra parte, el análisis de la idoneidad epistémica, fue una herramienta útil para valorar y mejorar la propuesta. Dado que la secuencia aún no había sido llevada al aula, el análisis estuvo acotado a la idoneidad epistémica. Con la implementación en clase se podrán contemplar otras idoneidades, como por ejemplo la cognitiva o interaccional, que darán lugar a nuevas retroalimentaciones.

Finalmente, la secuencia didáctica diseñada pretendió ser un aporte que favorezca la resolución de ecuaciones trigonométricas, tanto para estudiantes de nivel medio como universitario, permitiendo asimismo la valoración y el análisis de nuestras prácticas docentes.

Referencias

1. Ministerio de Educación y Deportes (MED). Resultados del Operativo Nacional de Evaluación. http://portales.educacion.gov.ar/diniece/files/2015/04/INFORME-DE-RESULTADOS-ONE-CENSO-2013.pdf. (2013) Accedido el 3 de febrero de 2017.
2. Aznar, A., Baccelli, S., Prieto, G., Figueroa, S., Distéfano, M. L. y Moler, E.. Habilidades matemáticas en ingresantes a carreras de ingeniería: un análisis de las dificultades desde el enfoque ontosemiótico. Actas del Foro Mundial de Educación en Ingeniería World Engineering Education Forum (WEEF 2012) Buenos Aires. http://weef2012.edu.ar/archivos/papers/WEEF2012.pdf (2012) Accedido el 20 de Noviembre de 2016
3. Programa Estratégico para la Formación de Ingenieros (PEFI) 2012-2016. http://pefi.siu.edu.ar/aplicacion.php?ah=st530a7badf1bbc&ai=contenidos||19000030&id_id%20ioma=2&id_menu=18. Accedido el 20 de febrero de 2017
4. Godino, J. D., Batanero, C. Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. Recherches en Didactique des Mathématiques, 14 (3), 325-355 (1994).
5. Godino, J. D., Contreras, A. y Font, V. Análisis de procesos de instrucción basado en el enfoque ontológico-semiótico de la cognición matemática. Recherches en Didactiques des Mathematiques, 26 (1), 39-88. (2006).

6. Godino, J. D., Batanero, C., y Font, V. Un enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada. Versión ampliada del artículo: Godino, J. D., Batanero, C., y Font, V. (2007). The Onto-Semiotic Approach to Research in Mathematics Education, ZDM-The International Journal on Mathematics Education, Vol. 39 (1-2), pág. 127-135. http://www.ugr.es/~jgodino/funciones-semioticas/sintesis_eos_10marzo08.pdf. 2009. Accedido el 12 de abril de 2016.
7. Godino, J. D. Indicadores de la idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. XIII CIAEM-IACME, Recife, Brasil. 2011
8. Godino, J. D., Bencomo, D., Font, V. & Wilhelmi, M. R.. Pauta de análisis y valoración de la idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. http://www.ugr.es/~jgodino/funciones-semioticas/pauta_valoracion_idoneidad_5enero07.pdf. (2007) Accedido el 2 de abril de 2016.

Volver al Índice

Reflexiones que Optimizan los Procesos Enseñanza y Aprendizaje de la Geometría

María Rosa Rodríguez, Sandra Noemí Franco
Facultad de Ciencias Económicas – Universidad Nacional de Tucumán
mrrodriguez@face.unt.edu.ar, sandranfranco@hotmail.com

Resumen. La Geometría consta de tres procesos cognitivos: visualización, construcción y razonamiento, que contribuyen en el desarrollo del pensamiento abstracto y formal. Este trabajo es un aporte para los docentes de Matemática del nivel medio que fomenta la articulación con las carreras universitarias promoviendo el desarrollo de competencias en Geometría. La estrategia didáctica consistió en el desarrollo de un Taller destinado a docentes del nivel medio sobre "Cuerpos Geométricos" donde se propuso a los participantes la resolución y discusión de una actividad práctica y a posteriori una autoevaluación, pudiendo identificar sus fortalezas y debilidades. También, se propuso la reflexión del alumno a través de un autointerrogatorio durante la resolución de un problema, que contribuya a la destreza del estudiante. Ambas tareas cooperaron en el crecimiento y el análisis introspectivo del proceso educativo favoreciendo el ingreso y permanencia de los alumnos en las carreras de Ingeniería.

Palabras Clave: Articulación, Autoevaluación, Interrogatorio, Fortalezas, Debilidades.

1 Introducción

La Geometría es considerada como una disciplina intuitiva, concreta y ligada a la realidad; que se fundamenta en un proceso extenso de formalización, desarrollado por más de dos mil años en niveles crecientes de rigor, abstracción y generalidad. En ella se distinguen tres áreas fundamentales: la empírica, la deductiva y la axiomática donde se desarrollan las capacidades de pensamiento abstracto y formal para generalizar, elaborar hipótesis y operar con símbolos.

La importancia de la Geometría en la formación académica de los estudiantes de carreras científicas es destacable, ya que fomenta la creación del razonamiento lógico, el desarrollo en la construcción y representación de formas bidimensionales y tridimensionales y facilita la medición de estructuras sólidas reales. Además, aplica relaciones entre propiedades de las formas y generaliza los procesos seguidos en su construcción. También, se argumentan y demuestran propiedades y teoremas por medio de la deducción, recurriendo a tres procesos cognitivos: de visualización, de construcción y de razonamiento.

Interesadas en el "saber hacer" de los docentes formadores de ingresantes a carreras de Ingeniería se recurrió a una estrategia pedagógica que además de abordar contenidos de Geometría dirige sus acciones hacia su práctica. La metodología de trabajo es el Taller que se caracteriza por la investigación, por el aprendizaje a través del descubrimiento y por el trabajo en equipo. Además, se enfatiza la solución de problemas, la capacitación y la participación de los asistentes.

En este trabajo se muestra el desarrollo de un Taller destinado a docentes del Nivel Medio de la Provincia de Tucumán, interesados en capacitaciones de temas de Geometría y se seleccionó el referido a "Los Cuerpos Geométricos".

Para la enseñanza de la Geometría, el docente debe:

a) Tener un nivel de competencia suficiente para llevar a cabo la práctica formal, operativa y discursiva, en el nivel donde imparte;
b) Poder analizar y valorar la actividad de los alumnos en la identificación de los objetos y sus significados, con el fin de mejorar su aprendizaje, incrementando su desempeño.

Este análisis permite al docente prever conflictos de significados y establecer distintas posibilidades de adquisición de los conocimientos geométricos implicados [1].

El desarrollo del Taller se basó, fundamentalmente, en las competencias que adquiere el alumno.

La competencia matemática consiste en la habilidad para utilizar y relacionar los números, sus operaciones básicas, los símbolos y las formas de expresión y razonamiento matemático, tanto para producir e interpretar distintos tipos de información, como para ampliar el conocimiento sobre aspectos cuantitativos y espaciales de la realidad, y para resolver problemas relacionados con la vida cotidiana y con el mundo laboral [2].

Las competencias que debe desarrollar un estudiante en Geometría son las habilidades de visualización, de comunicación y de dibujo, que en general se dan en forma conjunta. Es una disciplina eminentemente visual y los conceptos geométricos son reconocidos y comprendidos a través de la visualización. Esta habilidad está muy relacionada con la imaginación espacial, ya que la visualización puede ser mental. La habilidad de comunicación se refiere a que el alumno sea capaz de interpretar, entender y comunicar información geométrica, ya sea en forma oral, escrita o gráfica, usando símbolos y vocabulario propios de la Geometría. Las habilidades de dibujo están relacionadas con las reproducciones o construcciones gráficas que los alumnos hacen de los objetos geométricos [3].

En muchas ocasiones, para favorecer el aprendizaje de la Geometría, el docente propone el uso de diversas representaciones, visualizaciones, diagramas, materiales manipulativos, etc., con la presunción de que tales materializaciones constituyen modelos de los conceptos geométricos y de las estructuras en las cuales se organizan. Se supone que el uso de representaciones materiales es necesario no solo para comunicar las ideas geométricas, sino también para su propia construcción.

Los docentes trataron el tema Cuerpos Geométricos con el propósito de que sus alumnos reconozcan los distintos cuerpos geométricos según la clasificación dada, utilicen correctamente las fórmulas en los problemas propuestos, descubran relaciones y propiedades de los cuerpos a partir de su desarrollo plano, calculen correctamente área lateral, total y volumen y adquieran destreza en el planteo y resolución de situaciones problemáticas. Para lograr aprendizajes significativos, es indispensable que revisen los conceptos de perímetros y áreas de figuras, reducción de medidas, operaciones con números reales y resolución de ecuaciones.

Los objetivos generales que se persiguieron en esta propuesta fue que los docentes participantes logren que sus alumnos adquieran conceptos para explicar un procedimiento y destreza en los distintos caminos de solución; desarrollen habilidades de medir, trazar, imaginar relaciones geométricas planas y espaciales y generen actitudes de investigación y trabajo grupal.

Como autorreflexión sobre la enseñanza de la Geometría en sus aulas se propuso, a los docentes asistentes al Taller, la resolución y discusión de un trabajo práctico que abarcó todos los conceptos adquiridos. Además, como requisito indispensable en la enseñanza del tema en tratamiento se propuso la realización de una autoevaluación relacionada con la planificación de la actividad docente y la propia práctica docente en el aula. Con respecto al estudiante, se sugirió al docente que realice en el aula una práctica, dirigiendo al alumno a que reflexione a través de un autointerrogatorio durante la resolución de un problema, reconociendo sus debilidades y fortalezas para lograr destreza en las soluciones.

Pensamos que ambas tareas cooperan en el crecimiento y el análisis introspectivo del proceso educativo favoreciendo el ingreso y permanencia de los alumnos en la carrera universitaria seleccionada.

2 Desarrollo de la experiencia

La experiencia consistió en el desarrollo de un Taller destinado a 60 docentes del nivel medio de la provincia de Tucumán, interesados en el tratamiento de temas de Geometría. Luego de un sondeo de opinión entre los futuros asistentes surgió como tema seleccionado “Los Cuerpos Geométricos”.

Los contenidos didáctico – geométricos implicados fueron la conceptualización y el uso de diagramas y recursos manipulativos, que impliquen procesos de visualización y de razonamiento.

Para optimizar del desarrollo de esta modalidad pedagógica se propuso la siguiente Estrategia:

1) Reconocimiento de los diferentes cuerpos geométricos y sus elementos.
2) Planteo y discusión sobre la clasificación de los cuerpos según sus distintas características.
3) Constitución de equipos de trabajo para la discusión y exposición sobre el planteo y resolución de un problema disparador, distinguiendo los lenguajes visual, gráfico y analítico.
4) Presentaciones grupales y discusiones sobre el desarrollo de un trabajo práctico en el aula.
5) Reflexiones sobre las prácticas docentes a través de una autoevaluación individual.
6) Proponer al alumno que responda algunas preguntas durante el planteo, la solución y la verificación de problemas.

En el inicio del taller se propuso un:

Problema Disparador: Un rompecabezas está formado por 24 piezas cúbicas de 2 cm de arista.

a) ¿Cuál es el volumen del rompecabezas armado?
b) Si las piezas se guardan en una caja de 8,5 cm por 45 mm por 0,6 dm ¿Queda espacio libre?

2.1 Definiciones elementales

Se denominan *cuerpos geométricos* a aquellos elementos que, ya sean reales o ideales, existen en la realidad o pueden concebirse mentalmente, ocupando un volumen en el espacio, requiriendo tres dimensiones alto, ancho y largo y están compuestos por figuras geométricas.

Si las superficies que limitan al cuerpo geométrico son planas, se llaman *caras* del cuerpo. Las líneas que corresponden a los lados comunes de los diversos planos que componen los cuerpos geométricos, se denominan *aristas.* A los puntos en los cuales concurren tres caras o más se llaman *vértices.*

Un cuerpo se dice *convexo*, si el segmento que une dos puntos cualesquiera que pertenecen a él, está completamente contenido en el cuerpo. Al contrario, se dice *cóncavo* si el trazo que vincula dos puntos de él, no está completamente **c**ontenido en el cuerpo.

2.2 Clasificaciones de los cuerpos geométricos

1. Los cuerpos geométricos se clasifican principalmente en dos tipos dependiendo de que sus caras sean planas o superficies curvas: *Poliedros* y *Redondos o No Poliedros*.

Los Poliedros son cuerpos limitados por caras planas.

Los Redondos o No Poliedros son cuerpos limitados total o parcialmente por superficies curvas.

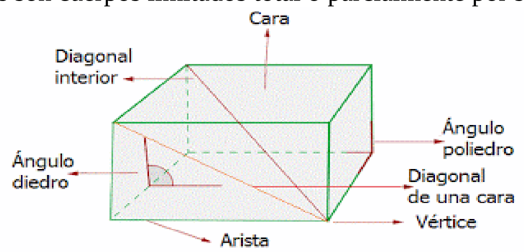


Fig. 1. Elementos principales de un poliedro.

2. Los poliedros se pueden clasificar en *Cóncavos* y *Convexos*. Un poliedro es Convexo si se puede apoyar en todas sus caras; en caso contrario es Cóncavo.
3. Otra clasificación de los poliedros es en *Regulares* e *Irregulares*.

Poliedro regular es aquel cuyas caras conforman polígonos regulares iguales, y todos sus ángulos diedros y poliedros también iguales. Para que estas condiciones se cumplan, el poliedro tiene que ser convexo, puesto que en los cóncavos los ángulos diedros no son todos iguales.

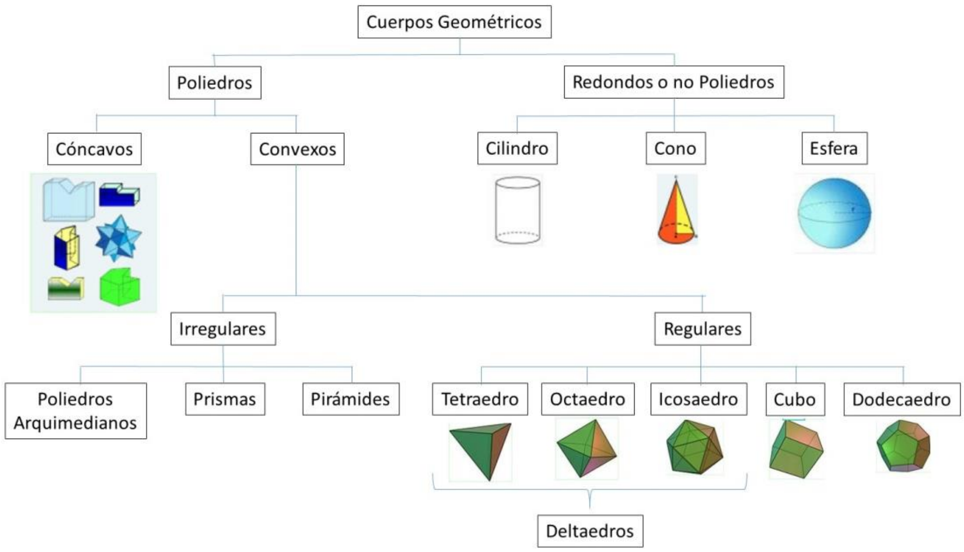
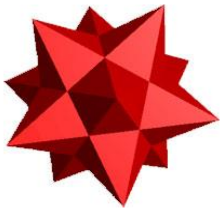


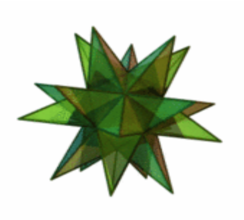
Fig. 2. Clasificación de los cuerpos geométricos en poliedros y no poliedros; convexos y cóncavos; regulares e irregulares; arquimedianos y deltaedros.

Existen nueve poliedros regulares, que se dividen en dos grupos: cinco de ellos son convexos, que corresponden a los sólidos perfectos o platónicos (tetraedro, octaedro, icosaedro, cubo y dodecaedro) y los cuatro restantes son cóncavos (pequeño dodecaedro estrellado, el gran dodecaedro estrellado, el gran dodecaedro y el gran icosaedro).

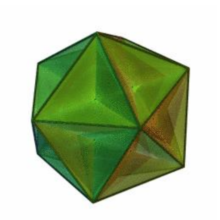
Los poliedros regulares convexos son los únicos poliedros puramente regulares.



Pequeño dodecaedro estrellado



Gran dodecaedro estrellado



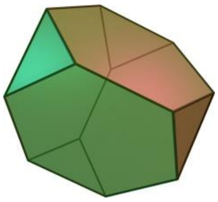
Gran dodecaedro

Fig. 3. Poliedros cóncavos regulares.

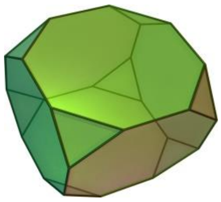
Se dice que un poliedro es *Irregular* si tiene caras o ángulos desiguales. Los poliedros irregulares son los prismas, las pirámides y los arquimedianos.

Los *prismas* pueden ser rectos u oblicuos. En la *pirámide* si la altura pasa por el centro de la base, la pirámide es recta, en caso contrario oblicua.

Los poliedros *Arquimedianos* son convexos, cuyas caras son polígonos regulares (no necesariamente el mismo polígono) y sus vértices uniformes (en todos los vértices del poliedro convergen el mismo número de caras y en el mismo orden). Fueron ampliamente estudiados por Arquímedes y sólo hay 13 poliedros arquimedianos: el Tetraedro truncado, el Cuboctaedro, el Cubo truncado, el Octaedro truncado, el Rombicuboctaedro, el Cuboctaedro truncado, el Cubo romo, el Icosidodecaedro, el Dodecaedro truncado, el Icosaedro truncado, el Rombicosidodecaedro, el Dodecaedro rombo y el Icosidodecaedro truncado. De los cuales once se obtienen truncando los poliedros regulares o platónicos.



Tetraedro truncado



Cubo truncado

Cuboctaedro

Fig. 4. Algunos de los trece poliedros arquimedianos.

El *Deltaedro* es un poliedro cuyas caras son triángulos equiláteros iguales. El nombre tiene su origen en la letra griega delta, cuya mayúscula es un triángulo equilátero.

Existen 12 Deltaedros regulares, tres son convexos y nueve son cóncavos. Los convexos pertenecen a los sólidos platónicos: tetraedro, octaedro e icosaedro.

Dos poliedros son *Duales* si el número de vértices del primero coincide con el número de caras del segundo y viceversa. Además, ambos deben tener el mismo número de aristas. Puede construirse uno a partir del otro uniendo con segmentos los centros de dos caras contiguas del primero.

Una propiedad de los regulares o sólidos platónicos es que están relacionados entre sí por la dualidad. Por ejemplo, el dual del tetraedro es el propio tetraedro, el dual del cubo es el octaedro y el dual del icosaedro, el dodecaedro

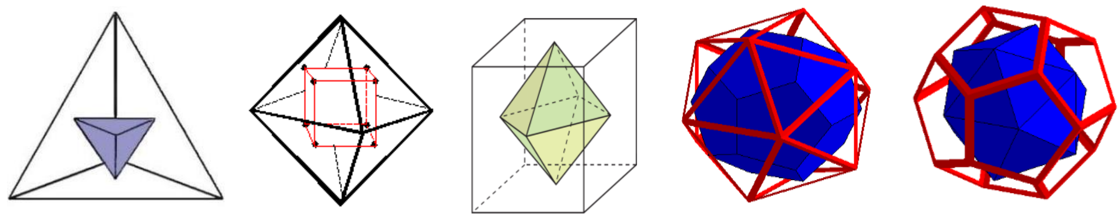


Fig. 5. Poliedros duales.

3 Propiedades de los poliedros

3.1 Fórmula de Euler

Fue descubierta en 1752 por el matemático suizo Leonhard Euler

$$V + C - A = 2 \qquad \textbf{(1)}$$

donde V: número de vértices C: número de caras y A: número de aristas

Este resultado es útil para optimizar la capacidad visual y los procesos aritméticos en los estudiantes de los primeros niveles usando como estrategia didáctica la construcción y posterior corte de un poliedro para que el estudiante verifique con algunos ejemplos la validez de la fórmula.

3.2 Prismas rectangulares

El volumen de un prisma rectangular es la raíz cuadrada del producto de las áreas de las tres caras distintas.

a: largo de la base b: ancho de la base y h: altura del prisma

$$A_1 = a\,b\,, \quad A_2 = a\,h \quad y \quad A_3 = b\,h \qquad \textbf{(2)}$$

$$A_1\,A_2\,A_3 = a\,b\,a\,h\,b\,h = a^2\,b^2\,h^2 = V^2 \qquad \textbf{(3)}$$

$$V = \sqrt{A_1\,A_2\,A_3} \qquad \textbf{(4)}$$

4 Justificaciones empíricas

4.1 Área de la esfera

El área total de los cuerpos se obtiene realizando sus desarrollos planos, pero en la esfera surge que no puede desarrollarse sobre un plano.

Arquímedes demostró que el área de una esfera es igual al área lateral de un cilindro que tenga el mismo radio y cuya altura sea el diámetro de la esfera.

La imagen muestra una esfera envuelta por un cilindro que se ajusta por completo a ella, un cilindro de radio r y altura 2 r. Entonces el área de la esfera es igual al área lateral del cilindro:

$$A_{\text{Esfera}} = A_{\text{Lat. Cilindro}} = 4\,\pi\,r^2 \qquad \textbf{(5)}$$

4.2 Relaciones entre los volúmenes de algunos cuerpos

1) Se considera un prisma y una pirámide de bases y alturas congruentes. Si se llena la pirámide con arena y se vierte todo el contenido en el prisma, se observa que es necesario llenar otras dos pirámides para completar el volumen del prisma.

Vol. Pirámide = 1/3 Vol. Prisma **(6)**

2) Se considera un cono y un cilindro con bases y alturas congruentes. Se necesitan tres conos para llenar el cilindro.

Vol. Cono = 1/3 Vol. Cilindro **(7)**

3) Se considera un cilindro y un cono de radio r y altura 2 r cada uno y una esfera de radio r. Se llena el cilindro con el agua de la esfera y el cono.

Vol. Cono = 1/3 Vol. Cilindro **(8)**

Vol. Esfera = 2/3 Vol. Cilindro = $4/3\ \pi\ r^3$ **(9)**

5 Discusión de resultados

En la actualidad se puede afirmar que existe consenso en la enseñanza basada en competencias y es considerada eje central de importantes reformas educativas**.** Esto se debe a que las competencias enfatizan el saber hacer, el saber convivir, el saber ser y el saber conocer; integran la teoría con la práctica; relacionan los conocimientos, habilidades y actitudes y promueven la autorrealización humana.

La metodología de enseñanza basada en competencias supone:

1º Que el profesor modifique su papel en el proceso enseñanza-aprendizaje y se concentre en las tareas de organización, seguimiento y evaluación del aprendizaje de los estudiantes.

2º Que a los estudiantes se les exija dedicación constante y sistemática al aprendizaje y mayor compromiso para planificar y gestionar adecuadamente su tiempo, logrando mayor destreza en las resoluciones.

Con el propósito de *reflexionar* sobre la enseñanza de la Geometría en sus aulas se propuso en el Taller el desarrollo de un trabajo práctico que englobe todos los conceptos adquiridos. Sus planteos y resoluciones se realizaron a través de exposiciones grupales que condujeron a valiosas discusiones, al considerar las competencias adquiridas por el alumno. Por lo tanto, se logró monitorear (supervisar, analizar, revisar, modificar) y controlar (dirigir) sus prácticas docentes.

Como cierre del Taller se propuso a los docentes una *autoevaluación individual* que hizo reconsiderar sus capacidades docentes que influyen en el proceso enseñanza-aprendizaje.

La autoevaluación del docente estuvo orientada a reconsiderar los siguientes ítems:

A. Defina brevemente los siguientes conceptos:

a. Habilidad visual

b. Habilidades de comunicación

c. Habilidades de dibujo

B. ¿Cuáles son las principales dificultades técnicas que presentan los estudiantes para abordar un problema geométrico?

C. Responde detalladamente la siguiente pregunta: ¿Qué conceptos geométricos considera que sus alumnos, generalmente, no comprenden con facilidad?

D. ¿Se detectan y se registran las dificultades que presenta el alumnado en relación con aprendizajes básicos no adquiridos?

E. ¿Cómo distingue que un alumno ha adquirido habilidades y las emplea con fluidez?

F. ¿Se planifican explícitamente y llevan a cabo actividades en el aula en las que se desarrollan las competencias básicas?

G. ¿La corrección de las actividades que se realizan contribuyen al conocimiento y reflexión del alumno sobre su propio aprendizaje?

Todo docente sabe que para un aprendizaje significado, no basta la aplicación reiterada de un procedimiento para resolver un problema, sino que el alumno reflexione acerca de los recursos aplicados en su resolución. Para ello, el docente propone al alumno un *autointerrogatorio* que consiste en que el estudiante se formule las siguientes preguntas para la realización de una tarea, tales como:

a) Al inicio: ¿Qué conozco acerca del problema propuesto? ¿Cuáles conceptos aplico para resolverlo? ¿Cómo puedo aplicarlo?;

b) Durante la resolución: ¿Qué, para qué y cómo lo estoy resolviendo? ¿Hacia dónde me conduce este procedimiento?;

c) Al final: ¿Hay coherencia entre las respuestas y las preguntas? ¿Hay otro camino para resolverlo? ¿Es general el método que apliqué? ¿Es posible el resultado encontrado? ¿Cumple las condiciones iniciales del problema? Este tipo de autointerrogatorio contribuye a incrementar la destreza del alumno en la resolución de problemas, reconociendo sus debilidades y fortalezas.

Creemos que estos recursos didácticos, extensibles a otros aprendizajes, favorecen tanto el ingreso como la permanencia de los estudiantes en carreras de Ingeniería. La importancia de la distinción y la manipulación de los cuerpos geométricos en estas carreras se debe al uso frecuente de la combinación de poliedros regulares en diseño industrial, en habitaciones, en mallas espaciales planas, en cúpulas geodésicas, etc. Las combinaciones poliédricas también aparecen en la naturaleza, tanto en la estructura de diversos minerales como en elementos estructurales de seres vivos.

6 Citas y referencias

Godino J. Categorías de análisis de los conocimientos del profesor de matemáticas. *UNIÓN: Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 20, 13-31. (2009). Ejemplo en [1].
Gutiérrez Ocerín L.; Martínez Rosales E. y Nebreda Saiz T. *Cuadernos de Educación N°5. Las competencias básicas en las áreas de Matemáticas.* España: Consejería de Educación de Cantabria. (2008). Ejemplo en [2].
Gaona Vargas, G. Desarrollo de Competencias en Geometría en *Guía de Unidad de Aprendizaje Disciplinar 3.* Guanajuato, México: Universidad Pedagógica Nacional. 71-80. (2012). Ejemplo en [3].

7 Conclusiones

En Geometría el uso de diagramas apoya la formulación de conjeturas, ya que la intuición y la visualización deben completarse con el reconocimiento de los cuerpos implicados en la deducción de las proposiciones geométricas. Así mismo, el uso de diagramas en la práctica matemática debe ir acompañado de otros medios de expresión no visuales para argumentar (comunicar, justificar y explicar) su desarrollo.

Consideramos que el profesor de Matemática debe tener conocimiento, comprensión y competencia para discriminar los distintos tipos de objetos, sistemas de representación y sus relaciones sinérgicas en la práctica. Además, debe ser competente para diseñar y gestionar los procesos de particularización y generalización.

La resolución de problemas se complementa con el análisis epistémico – cognitivo provocada por las consignas: ¿Qué geometría se necesita en la resolución del problema? ¿Qué conceptos usa el alumno?

La autoevaluación de la práctica docente parte de una actitud del profesor favorable a un cambio y centra la mejora del proceso enseñanza - aprendizaje en el aula. Esto abarca tanto los procesos de planificación docente, como la evaluación de los resultados, por ser ambos aspectos partes inseparables de la práctica docente. Esta estrategia optimiza el proceso educativo siempre que su desarrollo sea continuo. Tiene un sentido instrumental y se convierte en un factor decisivo para el cambio y la innovación, favoreciendo los procesos de reflexión personal y colectiva del docente.

Pensamos que las respuestas a las preguntas formuladas, permitirá al docente identificar sus fortalezas y sus debilidades en la enseñanza de la Geometría, realizando los cambios necesarios y pertinentes para mejorar el proceso de enseñanza.

Las respuestas al interrogatorio propuesto optimiza el aprendizaje permitiendo a los alumnos reconocer que existe más de un método de resolución, o que no hay ningún método disponible o que no es aplicable o que resulta inadecuado para el problema propuesto. También, identifica los aspectos positivos y negativos de la estrategia usada, estableciendo condiciones para su aplicabilidad y creando bases para su generalización y transferencia.

Este análisis debería ser una competencia instrumental del profesor de Matemática al permitirle reconocer la complejidad de objetos y significados puestos en juego en las actividades matemáticas, prever potenciales conflictos, adaptarlas a las capacidades de sus estudiantes y a los objetivos del aprendizaje.

Referencias

1. Effenberger P. *Matemática 1° año-II Educ. Secundaria*. Buenos Aires: Kapelusz. (2010).
2. Gaona Vargas, G. Desarrollo de Competencias en Geometría en *Guía de Unidad de Aprendizaje Disciplinar 3.* Guanajuato, México: Universidad Pedagógica Nacional. 71-80. (2012).
3. Godino J. Categorías de análisis de los conocimientos del profesor de matemáticas. *UNIÓN: Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 20, 13-31. (2009).

4. Gutiérrez Ocerín L.; Martínez Rosales E. y Nebreda Saiz T. *Cuadernos de Educación N°5. Las competencias básicas en las áreas de Matemáticas.* España: Consejería de Educación de Cantabria. (2008).
5. Pimienta Prieto, J. *Estrategias de Enseñanza-Aprendizaje. Docencia Universitaria Basada en Competencias*. México: Pearson Educación. (2012).

Volver al Índice

Una experiencia de articulación con el tema expresiones algebraicas

María de las Mercedes Ganim, María Eugenia Roig, Isabel del Valle Lomas, Juana Ester Vizchi
Grupo de investigación NUGIM, Departamento de Matemática, Facultad de Ciencias Exactas y Tecnología (FACET)
Universidad Nacional de Tucumán (UNT)
Avda. Independencia 1800, San Miguel de Tucumán, CP 4000 Tucumán
{mganim, mroig, ilomas, jvizchi} @herrera.unt.edu.ar

Resumen. Se comparte la experiencia del taller *Expresiones Algebraicas: Transición desde la Aritmética al Álgebra*, destinado a docentes en actividad y alumnos avanzados del nivel superior, realizada en agosto de 2015 por integrantes del grupo de investigación NUGIM, docentes del Departamento de Matemática FACET-UNT. Se describen las características de la experiencia, la metodología y las conclusiones más relevantes. La temática de esta capacitación son herramientas básicas para un alumno de ingeniería, al momento de modelizar fenómenos, para lo cual es fundamental el lenguaje simbólico. Por eso realizamos acciones de articulación con docentes de otros niveles para el logro de competencias que les permitan motivar y guiar a sus alumnos, proponiendo situaciones de enseñanza que pongan en juego distintos aspectos del saber, promoviendo un conocimiento superior a la verbalización, que resulte en un saber, un saber hacer y un saber explicar lo que se hace.

Palabras Clave: Articulación, Aprendizaje significativo, Expresiones algebraicas, Lenguaje simbólico, Estrategias de enseñanza.

1 Introducción

La educación atraviesa un tiempo de redefiniciones de nuevos y tradicionales problemas. Éstos se resignifican a partir de la discusión en torno a las funciones y competencias, requeridas a docentes y estudiantes, ante el impacto de la tecnología, el papel preponderante del conocimiento y las demandas de transformación del perfil en la formación de recursos humanos.

Uno de los principales inconvenientes detectados en los ingresantes a la universidad es de tipo comunicacional. En particular, la matemática universitaria requiere fuertemente un lenguaje que involucra símbolos que frecuentemente se desconocen o se interpretan erróneamente. Esta problemática puede ser determinante para el éxito en la resolución de un problema. Muchas veces la dificultad para leer, escribir y entender el lenguaje simbólico, genera situaciones de frustración y lleva al alumno a considerar que no está capacitado para aprender esta disciplina. Por ello, el docente es quien debe procurar que su alumno domine la sintaxis y la semántica del lenguaje simbólico.

Los diversos diagnósticos que se han explicitado en las voces de diferentes actores de la universidad refiriéndose a los desempeños académicos de sus ingresantes, dan cuenta de una baja calidad de los procesos de enseñanza en las escuelas de las que provienen. En consecuencia, abandonando la queja y avanzando a la acción superadora, mediante comisiones de articulación, se priorizó ofrecer alternativas de capacitación disciplinar y didáctica, soportada en la solidez de la formación de sus docentes.

Del análisis de la problemática de la articulación, concibiéndola como un marco de referencia, enfoque, perspectiva que nos invita a integrar y conectar toda la acción pedagógica, la articulación no se agota en lo formal, en la ley. Articular significa intervenir, actuar, provocar prácticas desde una concepción holística del pensamiento y de la vida. Es decir, la articulación no es un hecho o un objeto, es un proceso, una construcción que sólo se puede lograr desde el consenso, el trabajo conjunto y desde acciones concretas.

Entendemos a la articulación como un punto de conexión que actúa entre dos componentes de un mismo sistema para su correcto funcionamiento. Condición indispensable para facilitar el pasaje sin fracturas de un nivel a otro, garantizar la continuidad de los estudios y asegurar la movilidad de los alumnos dentro del sistema educativo.

El propósito de esta articulación no sólo arroja beneficios a los estudiantes, también concurre a generar un mecanismo que orienta a restituir la equidad social, amplía los horizontes del sistema educativo sentando los fundamentos para una educación a lo largo de toda su vida y otorga consistencia a los derechos del ciudadano en consonancia con una sociedad democrática e inclusiva.

En la búsqueda de soluciones y trabajando para la articulación de la universidad con el nivel medio, nos involucramos en diferentes proyectos de actualización y perfeccionamiento de docentes del sistema educativo de la Provincia de Tucumán. Algunos de nuestros aportes específicos fueron: diseño, elaboración y participación en los Postítulos en Matemática, asesoramiento y capacitación disciplinar-didáctica en el marco de convenios de la UNT con Instituciones Educativas de la Provincia, participación en comisiones mixtas con Instituciones de Educación Superior No Universitaria y en convenios y comisiones de articulación de la UNT con el Nivel Medio de la Provincia de Tucumán.

A partir de nuestra experiencia como docentes de matemática en el nivel superior, pudimos advertir las principales dificultades que enfrentan, algunos alumnos, en el inicio del ciclo universitario.

En particular, nuestra preocupación por el bajo rendimiento de los estudiantes de primer año de carreras de ingenierías de la FACET, revalidó la necesidad de reforzar la formación de los alumnos en matemática básica. Y teniendo en cuenta que toda acción realizada con docentes de los niveles pre-universitarios impacta directamente sobre nuestros futuros ingresantes, se decidió trabajar en el fortalecimiento disciplinar y didáctico de docentes de matemática en actividad.

Desde el grupo de investigación educativa NUGIM, integrado por docentes del Departamento de Matemática de la FACET-UNT y como contribución a la enseñanza y el aprendizaje de la matemática, nos hemos propuesto abordar algunos temas de la curricula de la disciplina en el nivel medio y desarrollarlos desde un punto de vista diferente.

El libro *Polinomios y ecuaciones en una indeterminada*[1] materializa parte del trabajo que realizamos en el grupo de investigación NUGIM. En él se presenta a los Polinomios y ecuaciones en una indeterminada de manera formal, las definiciones y los teoremas se enuncian en lenguaje coloquial y simbólico. Incluye una selección de ejercicios y problemas que permiten aplicar lo desarrollado en el texto, algunos están resueltos y acompañados de sugerencias didácticas específicas.

2 Fundamentación

Basándonos en las concepciones pedagógicas que afirman que *educación y comunicación* son procesos inseparables, sostenemos que todo hecho educativo requiere mediaciones comunicativas y cualquier situación comunicativa tiene influencias educativas, por lo tanto, la enseñanza debe pensarse como un proceso de interacción, de influencia mutua, entre profesor y alumnos.

Para comprender un texto matemático, que suele combinar expresiones verbales y simbólicas, el lector necesita establecer relaciones entre la representación que encuentra en el texto y el concepto matemático al que se refiere, por lo tanto será necesario que conozca las diferentes representaciones posibles de un mismo concepto.

A partir de la teoría de Vigotsky, afirmamos que para lograr el desarrollo del pensamiento lógico matemático y la formación de conceptos, es necesario realizar actividades como identificar, comparar, agrupar, ordenar y clasificar. Y que por medio de experiencias propias es como mejor se aprende, por esto es fundamental que las actividades propuestas por el docente, estén adaptadas al momento de desarrollo evolutivo de sus alumnos.

2.1 Importancia del tema

Del diagnóstico de debilidades y fortalezas en la enseñanza y el aprendizaje de la Matemática [2], surgió que *expresiones algebraicas, operaciones y factoreo* es un eje conceptual crítico. Particularmente porque suele enseñarse como un conjunto de reglas prácticas que pone el énfasis en una ejercitación, que termina siendo mecánica y rutinaria. La importancia de las *expresiones algebraicas* radica principalmente en que permite traducir expresiones del lenguaje coloquial al lenguaje simbólico y recíprocamente.

El lenguaje simbólico es el lenguaje de la matemática, de él se valen las demás ciencias para interpretar y modelar situaciones reales, físicas o teóricas a resolver. Es claro que la problemática del lenguaje simbólico puede ser determinante para el éxito, en la búsqueda de la solución de un problema, es por ello que, el docente es quien debe procurar que sus alumnos no sólo dominen la sintaxis del lenguaje simbólico, sino también la semántica.

Además las *expresiones algebraicas* representan uno de los modelos matemáticos más útiles e importantes por cuanto contribuyen al desarrollo matemático en la transición de la aritmética al álgebra.

Esta construcción es la base de la enseñanza de la Matemática en las escuelas secundarias y el nivel superior. Sin embargo hay evidencia de que su comprensión resulta matemática, didáctica y psicológicamente compleja transformándose en un desafío, tanto para su aprendizaje como para su enseñanza.

En el nivel superior, el proceso enseñanza-aprendizaje incluye el desarrollo del pensamiento lógico matemático donde el lenguaje simbólico cumple un papel de extrema importancia. Sin la expresión verbal de estos símbolos no hay comprensión de los nuevos conceptos.

Nuestro desafío fue diseñar un sistema de tareas que incluya actividades de comprensión lectora y razonamiento lógico con el apoyo del texto *Polinomios y ecuaciones en una indeterminada*[1], donde se presenta a las expresiones algebraicas de manera rigurosa y formal.

Elegimos para su aplicación, la modalidad de taller porque permite la estimulación de actitudes y procederes propios del pensamiento matemático. Consideramos necesario elaborar un *sistema de acciones* para compartir enfoques alternativos e ideas de cómo conviene trabajar algunos conceptos básicos de temas específicos.

Al experimentar situaciones reales de aprendizaje significativo, el participante del taller dispondrá de herramientas para mejorar su práctica profesional, permitiendo a sus alumnos fortalecer su formación y lograr las competencias propuestas.

3 La metodología

Se seleccionó para la experiencia un abordaje constructivista para facilitar que cada participante modifique su propia práctica docente, la que en general, suele ser conductista. Los contenidos fueron tratados con profundidad, buscando altos niveles de comprensión.

Se eligió como modalidad de trabajo la de aula-taller, ya que la misma favorece la confrontación de la teoría con la práctica, da lugar al intercambio de experiencias e inquietudes personales y permite el apoyo tutorial.

Nuestro *eje principal* es fortalecer la formación en Matemática a fin de potenciar las competencias de alumnos y docentes, poniendo énfasis en el razonamiento lógico y en la implementación de recursos.

La estrategia es presentar los temas con una perspectiva moderna y motivadora, con actividades especialmente diseñadas, que permita vivir la matemática desde el asombro y la creatividad, pretendiendo lograr educadores con autonomía y seguridad, que impacte positivamente en la calidad de la enseñanza y el aprendizaje de la Matemática; que valorice las aplicaciones, la resolución de problemas, el análisis de resultados; que entrene en la práctica del control personal y de la auto corrección, logrando una comunicación eficaz entre colegas y aclarando su propio pensamiento.

La dinámica de trabajo incluía un problema disparador, planificación de estrategias y acciones superadoras, búsqueda de interrelaciones de conceptos, reunidos en pequeños grupos, para posibilitar el intercambio de opiniones, con el apoyo tutorial de los capacitadores.

Se implementaron plenarios, al final de cada encuentro, como estrategia para el control de lectura y discusión sobre contenido, metodología y sugerencias para reajustar las propuestas didácticas.

Al finalizar el taller se realizó una encuesta de opinión para evaluar las actividades del taller, conocer el impacto de la experiencia y posible implementación, en sus aulas, de alguna actividad o parte de la metodología del taller.

4 La experiencia

Entre el 10 y 23 de agosto de 2015, en la FACET-UNT, se realizó la *Escuela de Matemática de América Latina y el Caribe* – EMALCA Argentina 2015, entre sus actividades se desarrolló el taller: *“Expresiones Algebraicas: Transición desde la Aritmética al Álgebra”* destinado a docentes en actividad y alumnos avanzados del nivel superior.

Se utilizó como insumo el libro “*Polinomios y Ecuaciones en una Indeterminada*” publicado por EDUNT, de producción propia, como texto troncal para el desarrollo del taller. Se diseñaron actividades especiales para cada encuentro, las que se incluyeron en el material didáctico que se entregó al inicio de cada jornada. En grupos de dos o tres participantes se discutieron y desarrollaron las actividades con el apoyo tutorial de los capacitadores.

La propuesta de trabajar con dinámica de taller facilitó la interacción entre pares y capacitadores, siendo éste uno de los objetivos de la capacitación.

En el taller se enfatizaron los siguientes aspectos:

- fortalecimiento disciplinar y didáctico desde la óptica de la integración de conceptos;

- reflexión sobre la acción y reajustes del proceso de enseñanza y aprendizaje desarrollado por cada docente en su aula;
- reflexión sobre el proceso de comunicación: lenguaje coloquial y simbólico;
- profundización en el desarrollo de competencias para la comprensión y producción de textos matemáticos.

Es importante señalar que se lograron los objetivos propuestos:

- intercambio enriquecedor entre docentes de Matemática, al reflexionar sobre ciertos temas de la disciplina y sobre los posibles cambios a introducir en la enseñanza de las expresiones algebraicas, eje conceptual seleccionado;
- fortalecer conocimientos disciplinares, generar razonamientos lógicos, integrar conceptos y articular con otras ciencias.

Para lograr una atención personalizada se trabajó en grupos de no más de tres participantes, lo cual posibilitó el intercambio de opiniones y la resolución de las actividades de manera exitosa.

Cada encuentro comenzó con un problema disparador, dando lugar a que cada participante reflexione sobre la situación planteada, planifique estrategias adecuadas y ejecute las acciones correspondientes. En todo momento se estimuló la búsqueda de interrelaciones entre los conceptos propuestos y otras áreas de la disciplina.

A fin de evitar que la enseñanza de la matemática se reduzca a memorizar fórmulas y para lograr que los conceptos abstractos adquieran significado propio, se decidió trabajar primero con planteos geométricos.

En el *primer encuentro* se comenzó con un problema disparador con figuras geométricas, para deducir las expresiones algebraicas (fórmulas) que permiten calcular el área de triángulos particulares, a partir del área del rectángulo que lo contiene.

Este procedimiento se replicó para la obtención de las expresiones correspondientes al área de paralelogramos, rombos y trapecios. La necesidad de experimentar la justificación y argumentación de las fórmulas que se utilizan habitualmente, logrando fortalecer el proceso de *construcción del conocimiento* exigió este tipo de actividades.

Se aprovecharon las expresiones algebraicas encontradas para realizar la revisión y estudio de los conceptos relacionados con su clasificación y su valor numérico, entre otros. Además poder reconocer, del universo en el que se trabaja, los valores posibles de la expresión para que sean solución/es de la situación problemática propuesta.

Se participó en la Conferencia *"La resolución de problemas como estrategia para la enseñanza de la matemática escolar y para fomentar el gusto por la matemática"*, a cargo del Dr. Rafael Labarca, docente-investigador de la Universidad de Santiago de Chile y Coordinador General de la EMALCA Argentina 2015.

Esta conferencia fue seleccionada como insumo didáctico para el taller. La misma resultó muy motivadora, el conferencista mostró una matemática dinámica, cotidiana, atractiva y creativa, enfatizó la importancia de una buena lectura comprensiva de la consigna, para poder encarar y resolver un problema y sugirió que todo docente debería hacer de esto un hábito en su propia práctica.

El Dr. Labarca recomendó el trabajo interdisciplinario, en particular con la asignatura Lengua. La exposición y apreciaciones particulares del conferencista impactaron favorablemente en los asistentes, posibilitando en algunos reflexionar y comentar sobre su actividad docente, sintiéndose particularmente motivados tanto en lo disciplinar como en lo didáctico.

En el *segundo encuentro* se comenzó con la propuesta de un ejercicio disparador sobre división entera para lograr la "manipulación" del algoritmo de división. Esto facilitó la comprensión del *Algoritmo de División de Polinomios*.

Con ejemplos sencillos los participantes advirtieron la secuencia a seguir para completar y obtener cada uno de los elementos de la división. Se tomó conciencia de que la Regla de Ruffini es un caso particular del algoritmo de división de polinomios y no una simple regla.

Para reflexionar sobre la articulación entre los lenguajes coloquial y simbólico, se trabajaron enunciados donde la expresión dada es válida o no, según el universo considerado. Esto es así teniendo en cuenta que, en matemática, se va ampliando el universo a lo largo de la escolaridad, en los primeros años se trabaja con los números enteros, mientras que al finalizar el nivel medio y en el superior, el universo son los números racionales, reales y hasta complejos.

Se insistió en que los enunciados deben ser claros y precisos, se mostró su importancia con un ejemplo sencillo como la simbolización de los "números pares", concepto que sólo tiene validez en los números enteros, contrapuesto por el "doble de un número" que tiene validez en cualquier universo.

Para estas actividades se utilizó como recurso la técnica de construcción del conocimiento a partir del error.

En cada situación particular, el universo de trabajo, cobra importancia al momento de decidir la validez de un enunciado, ya que por ejemplo: un polinomio dado puede ser *irreducible* en los números reales y *compuesto* en los complejos. Por lo que un polinomio dado puede factorearse en irreducibles de manera diferente en los números reales, que en los números complejos.

Para destacar la importancia de la factorización de un polinomio, se eligió como metodología de trabajo dar los factores para que al efectuar las operaciones, se obtengan los correspondientes polinomios, de manera similar a los productos notables.

Los conceptos de *divisor*, *múltiplo* y *factoreo* de expresiones algebraicas se reforzaron a partir de éstos ejemplos. Los participantes quedaron sorprendidos por algunos resultados y la simplicidad del razonamiento. Aún cuando multiplicando los factores dados obtenían el polinomio, no les resultó obvio obtener su factorización en primos, particularmente el caso de binomios que son suma de potencias de igual grado, con potencia par mayor que dos. Con enunciados coloquiales y gráficos se plantearon situaciones problemáticas cuyas respuestas debían expresarse en forma factoreada.

Para revisar los conceptos de ceros y ceros múltiples de un polinomio, polinomios reducibles e irreducibles, se recordó el *Teorema Fundamental de Álgebra*, su corolario y el *Teorema de Gauss*. Se trabajaron actividades específicas y sencillas aplicando estos teoremas y el *Teorema del Resto*.

En esta instancia se utilizó un *programa informático* para visualizar el comportamiento de algunos polinomios y sus ceros, analizando diferentes gráficos.

En el *tercer encuentro* para trabajar el tema ecuaciones algebraicas de manera conceptual, se eligió realizar un control de lectura del texto en pequeños grupos, a fin de una toma de conciencia sobre fortalezas y dificultades en el abordaje de la temática. Esto permitió marcar la importancia de la *comprensión lectora en la disciplina matemática* como una actividad que los docentes deben desarrollar, con sus alumnos, de manera habitual.

Se eligió para la revisión de conceptos, actividades específicas sobre el caso particular de las *ecuaciones recíprocas*. Estas ecuaciones, en general, no se incluyen en la currícula de los Institutos de Educación de Nivel Superior no Universitario, por lo que resultó novedoso y atractivo para los participantes.

Se analizaron las particularidades de los *polinomios asociados a estas ecuaciones* y las características de sus raíces. Se trabajaron, en forma paralela, las ecuaciones recíprocas de grado impar y las de grado par, deduciendo regularidades y diferencias que caracterizan cada tipo.

Al final de cada encuentro se realizaron *plenarios* como estrategia para el control de lectura y discusión sobre contenido, metodología y sugerencias para reajustar las propuestas didácticas. Esto contribuyó a la toma de conciencia sobre fortalezas y debilidades de cada participante en la temática abordada.

El plenario de cada encuentro tuvo diferentes momentos, primero un grupo exponía lo trabajado, el resto de los participantes enriquecía con aportes diferentes a los expuestos, quedando para los capacitadores la etapa de integración y aclaración, fortaleciendo así el contenido disciplinar y metodológico de la temática.

Según las dificultades encontradas en cada jornada, se propusieron acciones superadoras, las que incluían nuevas estrategias con ejemplos y sugerencias didácticas complementarias.

Al finalizar el taller se realizó una *encuesta de opinión* para evaluar las actividades desarrolladas y conocer el impacto producido por la experiencia.

En una etapa posterior, mediante correo electrónico, se indagó sobre cuántos participantes implementaron, en sus aulas, algunas de las actividades del taller, otras con un enfoque diferente o un tema diferente presentado mediante un nuevo sistema de tareas a partir de lo experimentado.

5 Conclusiones

5.1 De la experiencia

Entre las *opiniones individuales y grupales* vertidas por los participantes, durante el proceso, en la socialización mediante los plenarios y en las encuestas, se citan:

- Las diferentes estrategias didácticas trabajadas nos permitieron descubrir y resignificar las expresiones algebraicas y sus diversas aplicaciones.
- La lectura comprensiva del texto elegido sustentó, en todo momento, la argumentación y desarrollo de las actividades desde una mirada formal.

- Las sugerencias brindadas para la enseñanza de las expresiones algebraicas, posibilitó revisar y reformular estrategias y recursos, para lograr un enfoque más atractivo e innovador del tema.
- Los participantes tuvimos la oportunidad de reflexionar y compartir experiencias de enseñanza, fortalecer nuestra formación disciplinar y rectificar falencias.
- La metodología implementada resulta adecuada, impulsa a la reflexión sobre la propia práctica y estimula a promover la integración de conceptos.
- La modalidad de trabajo en pequeños grupos facilita la comunicación, la participación activa y el aprendizaje significativo.
- La atención personalizada nos permitió aclarar dudas individuales, posibilitándonos la rápida conexión de la teoría con la práctica para encarar las actividades de resolución y razonamiento.
- Los temas para futuras actividades de perfeccionamiento en matemática podrían ser: geometría, fracciones, estadística y estrategias para la enseñanza de la matemática, entre otros.

5.2 Reflexiones finales

Desde la mirada del equipo técnico que coordinó la experiencia se concluye que:

- El trabajo colaborativo entre ambos niveles permitió aportar las dos miradas docentes en cuanto a capacidades curriculares básicas, de la temática, con que los alumnos egresan del nivel medio e ingresan al universitario.
- La inclusión de la comprensión lectora fue valorada tanto como metodología de trabajo como recurso didáctico.
- La vivencia de la metodología posibilita que cada docente participante actúe como agente multiplicador y genere un posicionamiento crítico sobre los libros de texto, que tiene de referencia, a partir del análisis epistemológico del conocimiento disciplinar.
- El entusiasmo en las jornadas de trabajo y la producción de los participantes evidenciaron que la modalidad imprentada tenía algunos aciertos al momento de iniciar la comunicación e interrelación entre docentes de dos niveles educativos con el fin de articular o armonizar lo diferente, en función de sus alumnos.

Entendemos que a los participantes no les será sencilla la tarea de implementar modificaciones de su práctica docente que involucre tanto la articulación horizontal como la vertical e interdisciplinaria ya que la decisión de participar en la capacitación es personal, sin apoyo explícito de la institución educativa en la que desempeña su tarea docente.

Para lograr un mayor impacto de la experiencia, lo óptimo sería que los participantes tuvieran apoyo institucional, para realizar los talleres y las adecuaciones de su planificación articulando tanto con los docentes de su área como de otras disciplinas.

Los resultados parciales, obtenidos en el grupo de investigación NUGIM, muestran que las experiencias de capacitación realizadas en distintas oportunidades y diferentes Instituciones Educativas, de gestión pública o privada, resultan muy satisfactorias.

El camino por recorrer todavía es largo, habrá que enfrentar nuevos desafíos, diseñar y desplegar nuevas experiencias, delinear nuevos espacios de acción y consolidar las alianzas institucionales para avanzar hacia una articulación sustentable.

6 Trabajos futuros

Nuestra tarea de investigación-acción continúa con el análisis de las planificaciones y el seguimiento de las prácticas docentes de los participantes de cada experiencia. Para lograr que el docente incorpore este nuevo enfoque en su actividad cotidiana.

En Tucumán desde 2009 rige la resolución Ministerial Nº 754/5 (MEd) que establece el ordenamiento normativo para la evaluación y otorgamiento de puntaje de propuestas de desarrollo profesional docente, con aprobación del Área de Registro, Evaluación, Monitoreo y Certificación de acciones de desarrollo profesional docente (AREMyC). Esto hizo que cayeran los convenios de articulación FACET-UNT con instituciones educativas, actividad que el grupo venía realizando sistemáticamente con tres instituciones provinciales.

Para dar continuidad a estas acciones y teniendo en cuanta que el nodo trabajado no está acabado, se presentó, al AREMyC, en 2016 un nuevo proyecto avanzando en la temática y el apoyo de las TICs.

Referencias

1. Vizchi, J. E.; Ganim, M. M.; Roig, M. E. *Polinomios y Ecuaciones en una Indeterminada*. EDUNT (2012)
2. Ganim de Prieto, M. M.; [et al.] Asignatura MATEMATICA. Yapur, M. C. *ARTICULACIÓN Informe Final*. Imprenta Central UNT. pp.156-199 (1999)
3. Kaseberg, A. *Algebra Elemental. Un enfoque Justo a Tiempo.* Thompson Learning (2001)
4. Gentile, E. *Notas de Algebra*. Eudeba Ediciones Colihue (1988)
5. Hoffman, Kenneth y Kunze, Ray. *ALGEBRA LINEAL*. Traducción y Adaptación de Fisterbusch, H. Prentice-Hall Hispanoamericana, S.A. (1973)
6. Salim de Sirimaldi, R. *Los desafíos de la articulación UNT – Escuela Media*. Imprenta Central UNT (2006)

Volver al Índice

Análisis Estadístico Aplicado en la Proposición de una Red de Ciclovías en el Gran San Juan

Mariana Laura Espinoza, Aníbal Leodegario Altamira
Escuela de Ingeniería de Caminos de Montaña. Universidad Nacional de San Juan
Av. Libertador 1109 (O) - Capital San Juan, Argentina, CPA: J5400ARL
Tel: (54) (264) 4228666 / 4272439
mespinoza@eicam.unsj.edu.ar , altamira@eicam.unsj.edu.ar

Resumen. El uso de la bicicleta está muy difundido en la provincia de San Juan tanto para la práctica deportiva, recreacional y también como medio de transporte. En la Universidad Nacional de San Juan se está desarrollando una investigación que tiene como objetivo proponer lineamientos a seguir para materializar una red de ciclovías en el área urbana del Gran San Juan. Para esto se están realizando una serie de encuestas de origen y destino y censos de tipo volumétrico como forma de determinar cómo es el movimiento ciclista a través de las calles. En este artículo se muestra la aplicación de la estadística como herramienta de análisis y toma de decisiones en la investigación.

Palabras Clave: Estadística, Ciclovías, Análisis, Toma de decisiones.

1 Introducción

El crecimiento poblacional, la mejor y mayor calidad del nivel de vida, han derivado en un mayor grado de motorización de la población en general. Argentina es el país con más unidades por habitante de la región. Este nivel de motorización, trae consigo ciertas ventajas y desventajas. La provincia de San Juan no está ajena a esto, si se observa el modelo de movilidad en la ciudad de San Juan [1], este se ha tornado insostenible. Mayores costos de operación y tiempos de viaje, mayor polución de partículas, gases y emisión sonora al ambiente, incremento del número de accidentes con heridos graves y fallecidos son costos que, desde un punto de vista social, no superan los beneficios sociales de un mayor grado de motorización. Con el ánimo de enfrentar esta problemática, la incorporación de alternativas técnicamente viables y económicamente factibles como las ciclovías o el fortalecimiento del transporte público automotor, suele ser las mejores tentativas de solución, tanto desde el punto de vista económico como ecológico, facilitando la diminución del alto impacto que causa el vehículo automotor en el ambiente y en la economía de los ciudadanos.

En San Juan el uso de la bicicleta como modo de transporte y como práctica deportiva está muy arraigado en la comunidad y puede reducir la problemática enunciada.

Este trabajo está enmarcado dentro de un proyecto de investigación llevado a cabo en la Universidad Nacional de San Juan que tiene como objetivo proponer las directrices a seguir para materializar una red de ciclovías en el Gran San Juan. El proyecto tiene una duración prevista de dos años, estando actualmente desarrollado en un cincuenta por ciento. La investigación pondrá en evidencia la necesidad de contar con un sistema de ciclovías en el área urbana del gran San Juan. A través de censos de tránsito y encuestas se valorará y justificará esta consideración.

2 Antecedentes

Los ciclistas son usuarios vulnerables de la vía, por ello necesitan un entorno seguro en el cual viajar desde donde viven hasta donde estudian, juegan, compran y trabajan. En la medida de lo posible, deben circular segregados de los vehículos motrices, por lo tanto se los debe proveer de ciclovías para que viajen seguros y con menor riesgo de accidentes.

La ciclovía es una plataforma exclusiva para la circulación ciclista, situada en la calzada de circulación vehicular y delimitada por señalización.

En nuestro país existen sistemas de ciclovías en ciudades como Buenos Aires, Rosario, Córdoba. A nivel internacional podemos citar los sistemas de ciclovías de Santiago de Chile, Bogotá, Río de Janeiro, Madrid, Copenhague, Ámsterdam, entre otras. La provincia de San Juan aún no cuenta con una red de ciclovías que permita la circulación fluida y segura.

3 Objetivo del trabajo

El objetivo del artículo es mostrar la aplicación de la estadística como herramienta de análisis y toma de decisiones en la investigación de una problemática real en cuanto al desplazamiento de los usuarios urbanos de bicicletas en el Gran San Juan y orientar en la proposición de posibles soluciones.

4 Relevamientos

El trabajo consta de dos fases: una cuantitativa y otra cualitativa. La fase cuantitativa es la que se lleva a cabo mediante la realización de un conteo de usuarios de bicicletas en distintos puntos seleccionados de la ciudad de San Juan. La fase cualitativa se desarrolla mediante la realización de encuestas a los usuarios.

La finalidad de los relevamientos es:

Conocer el número diario de viajes en bicicleta que se realizan en la ciudad de San Juan en un día laboral tipo.
Analizar el uso de la bicicleta en la ciudad en función del género.
Valorar la evolución del uso de la bicicleta a lo largo de las distintas horas del día.
Caracterizar la movilidad en bicicleta en un día laborable.
Conocer las alternativas y la procedencia modal de los usuarios de la bicicleta.

Los datos obtenidos durante estas dos fases se analizan y se cruzan con otros datos conocidos obtenidos por otro equipo de investigación de la Escuela de Ingeniería de Caminos de Montaña (EICAM) o los datos del Atlas Socioeconómico de la provincia de San Juan; para llevar a cabo una estimación del número total de desplazamientos en bicicleta y de su participación en el reparto modal.

5 Metodología

En la primera etapa del proyecto se realizó el conteo de bicicletas en distintos puntos de la ciudad de San Juan, los mismos se llevaron a cabo sobre algunos puentes seleccionados de la Avenida de Circunvalación (meses de Octubre, Noviembre y Diciembre 2016), como los de la Av. Rawson, Av. Libertador Este, Av. Sarmiento (Rivadavia), Hipólito Irigoyen, 9 de Julio, Av. Ignacio de la Roza, Av. Libertador Oeste, P. A. de Sarmiento Norte (codificados en el mapa como C1, C2, C3, C4, C5, C6, C7, C8). El conteo se hizo en ambos sentidos de circulación. También se evalúo el reparto por género entre los ciclistas detectados.

Se establecieron turnos de trabajo, cada turno formado por un alumno. Los turnos fueron: 07 a 10 hs, 10 a 13 hs, 13 a 16 hs, 16 a 20 hs. Se contaron, durante periodos de media hora, el número de hombres y de mujeres que pasaban por el punto, en cualquier tipo de bicicleta, sea para el transporte o de tipo deportiva.

El conteo se realizó en días con buenas condiciones climáticas, sin lluvia y sin viento lo que hizo que las condiciones fueran óptimas para este tipo de censo.

También se realizaron encuestas a los usuarios de la bicicleta en determinados "puntos atractores" de la ciudad de San Juan, con el objeto de evaluar el perfil del ciclista urbano. Los puntos atractores censados fueron, la Residencia Universitaria “El Palomar”, la Facultad de Ingeniería, el Centro Cívico y el Hospital Rawson (codificados en el mapa como E1, E2, E3, E4).

La Ilustración 1 muestra la ubicación de cada uno de los puntos censales.

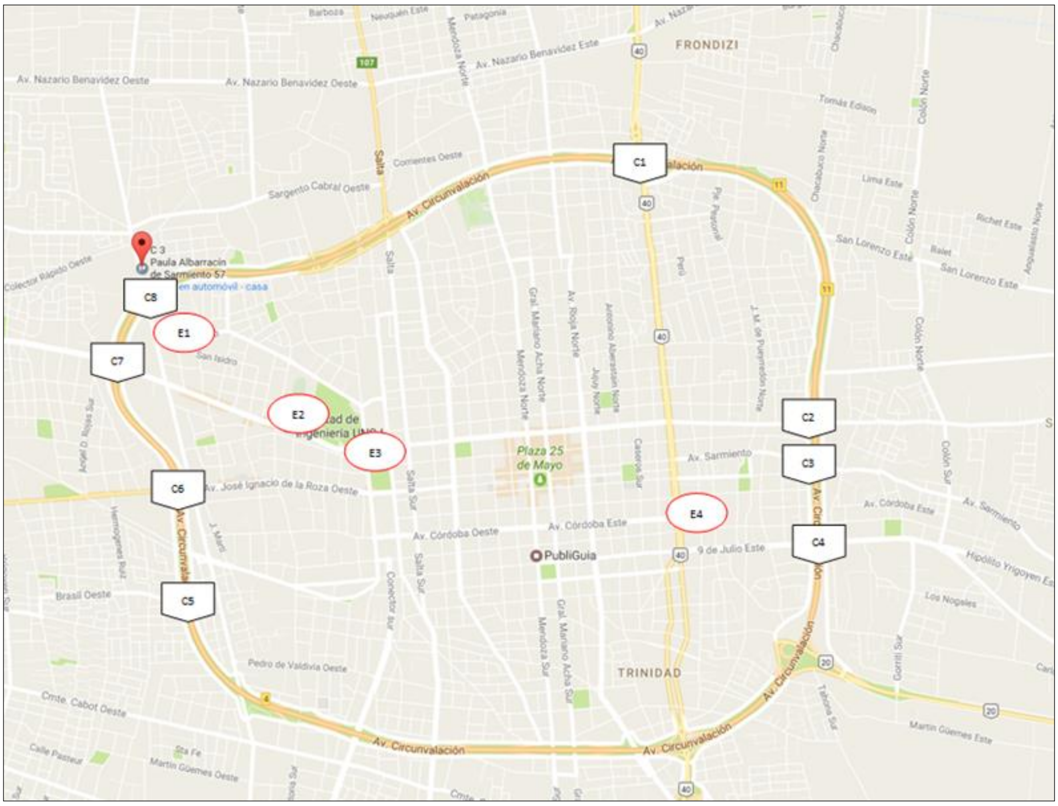


Ilustración 1. Ubicación de conteos y encuestas realizadas

6 Planillas de conteo y Encuestas a los ciclistas

Los modelos usados para los conteos y las encuestas fueron los que se muestran en la Tabla 1 y en la Tabla 2**.**

Tabla 1. Planilla de conteo

	Nombre censista:						
	Fecha		**Ubicación:**				
			Movimiento		**Movimiento**		
Hora	**Media Hora**		**De:** **Hacia:**	**Total**	De: Hacia:		Total
7hs	**7 a 7:30hs**	**H**			**H**		
		M			**M**		
	7:30 a 8hs	**H**			**H**		
		M			**M**		

Tabla 2. Encuestas a los usuarios de bicicletas (Adaptada de "Investigación sobre el uso de la bicicleta en la ciudad de Sevilla, 2011"[2]).

Encuesta Orientada a la Justificación e Implementación de un Sistema de Ciclovías en el Gran San Juan
Escuela de Ingeniería de Caminos de Montaña - Facultad de Ingeniería - Universidad Nacional de San Juan

Fecha: Hora:	Encuestador:	Ubicación:
1. Datos del encuestado Edad	**2. Actividad**	**3. Nivel de Estudio (terminado)**
Varón	1.Trabajador en relación de dependencia	1. Sin estudios
Mujer	2. Trabajador autónomo	2. Estudios primarios
	3. Desempleado	3. Estudios secundarios
Tipo de bicicleta	4. Jubilado/pensionado	4. Universitario
Común	5. Estudiante (P - S - U)	
Deportiva	6. Ama/o de casa	
4. Frecuencia de uso	**5. Motivo principal de la elección de la bicicleta para este viaje (según importancia)**	**6. ¿En el pasado realizaba este desplazamiento en otro modo?**
1. Casi todos los días mañana y tarde	1. Más económico	Sí - No
2. Casi todos los días mañana o tarde	2. Menor tiempo	1. A pie
3. Casi todos los días por la mañana	3. Más ecológico	2. Auto - Conductor
4. Casi todos los días por la tarde	4. Motivos de salud	3. Auto - Compartido
5. Algún día por semana	5. Facilidad de estacionamiento	4. Motocicleta
6. Sólo los fines de semana	6.Otros (Especificar)	5. Omnibus
		6. Taxi/remís
7. Si no hubiera utilizado la bicicleta para este viaje ¿Qué modo habrías utilizado?	**8. Desde la seguridad vial, cuáles son los principales problemas que detectas para el uso de la bicicleta**	**9. ¿Cuál considera el aspecto más importante a mejorar para el desplazamiento en bicicleta? (según importancia)**
1. A pie	1. Conflicto con vehículos motorizados	1. Construir red de ciclovías
2. Auto - conductor	2. Conflicto con peatones	2. Mejorar estacionamientos existentes (bicis)
3. Auto - acompañante	3. Señalización	3. Construir nuevos estacionamientos (bicis)
4. Motocicleta	4. Estado de la infraestructura	4. Mayor seguridad (robos.. Estacionamiento - Trayecto)
5. Omnibus	5. Otros (especificar)	bicicletas
6. Taxi/remis		6. Mejorar infra estructura existente
	(según importancia)	(Estado del pavimento, poda de árboles, limpieza,etc.)
10. Origen - Destino (trayecto atrás)	**11. Motivo del viaje (Actual)**	¿Si se mejorara el aspecto señalado arriba, usaría con mayor frecuencia la bicicleta?
Origen viaje actual:	1. Trabajo	
	2. Estudio	Sí
	3. Ocio	No
Tiempo de viaje:	4. Compras	
Destino viaje siguiente:	5. Otros (Especificar)	
Tiempo estimado de viaje:		

7 Análisis estadístico

Después de realizar los conteos de bicicletas en distintos puntos de la ciudad de San Juan y las encuestas entre los usuarios de la bicicleta con el objeto de evaluar el perfil del ciclista urbano, se comenzó con el análisis de la información relevada. El análisis estadístico de la muestra obtenida, se divide en dos fases, cuantitativa y cualitativa.

Resultados de la fase cuantitativa

En esta fase del análisis se trabajó con *planillas de conteo*. El primer paso fue volcar la información en una planilla de cálculo, de su procesamiento se obtuvo la información que se detalla a continuación.

Número total de bicicletas

Se procesaron todas las planillas de conteo. En cada una ellas se sumaron los totales, así se obtuvo "el número total de bicicletas en cada punto censal".

Evolución diaria del uso de la bicicleta

El conteo de cada planilla se realizó cada media y representa la evolución del número total de bicicletas contabilizadas a lo largo del día. La Fig. 1 muestra, como ejemplo, el conteo realizado el día 07/12/2016 en la A014 y Av. Libertador (O), codificado como C7 en la Ilustración 1 . Puede observarse que hay picos horarios en función del sentido que se está contando, los más representativos en este lugar fueron: entre las 13:30 y 14:30hs hay un pico en sentido E-O (desde el centro hacia Rivadavia); a las 16:30 puede observarse otro pico en sentido O-E (desde Rivadavia hacia el centro). Lo observado coincide con los horarios en donde hay mayor actividad poblacional.

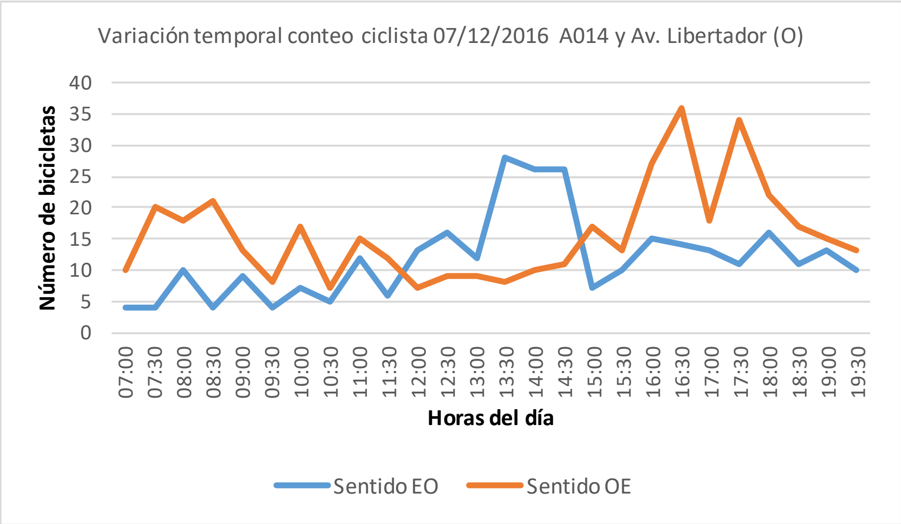


Fig. 1. Evolución del número de bicicletas a lo largo del día

Uso de la bicicleta en función del género

La distribución de género en los intervalos horarios medidos a lo largo del día se muestra en la Fig. 2, la cual exhibe como ejemplo, el conteo realizado el día 07/12/2016 en la A014 y Av. Libertador (O), punto censal C7.

La mayoría de los usuarios detectados fueron hombres, alcanzando el mayor número de desplazamientos contabilizados durante todo el día, mientras que las mujeres suponen un porcentaje menor. Cada período de media hora está representado por dos barras paralelas que representan cada género. Se observan algunos picos siendo el más importante el de los hombres en el período 16:30 a 17hs. Lo observado coincide con los horarios donde hay mayor actividad poblacional.

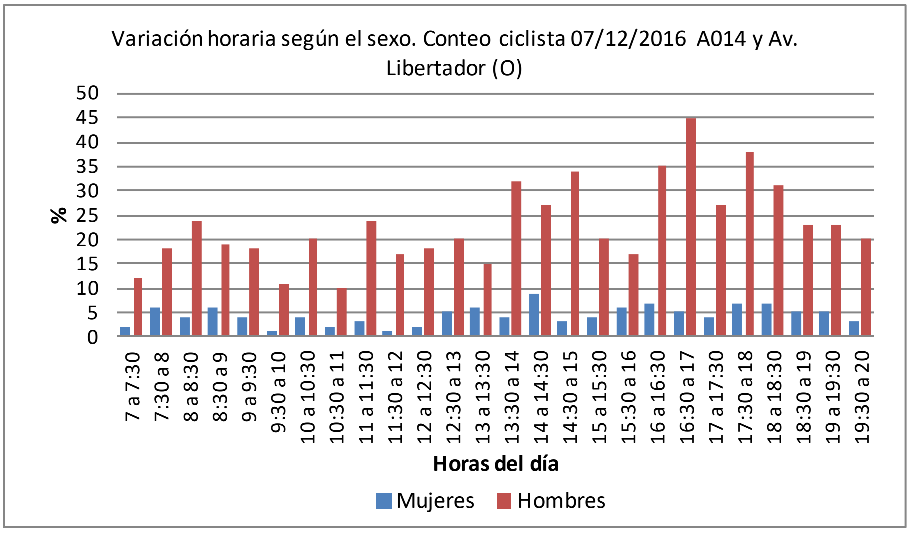


Fig. 2. Porcentaje de uso de bicicleta por género a lo largo del día

Resultados de la fase cualitativa

En esta fase del análisis se trabajó con las *encuestas a los usuarios*.

Descripción de la muestra
Edad

La distribución por edades de la muestra se observa en la Fig. 3. Cada franja etaria está representado por dos barras paralelas, una los usuarios de bicicletas y la otra la población total de San Juan. De este gráfico puede rápidamente deducirse que la mayoría de los usuarios de bicicleta se encuentra en la franja etaria comprendida entre los 15 y 29 años.

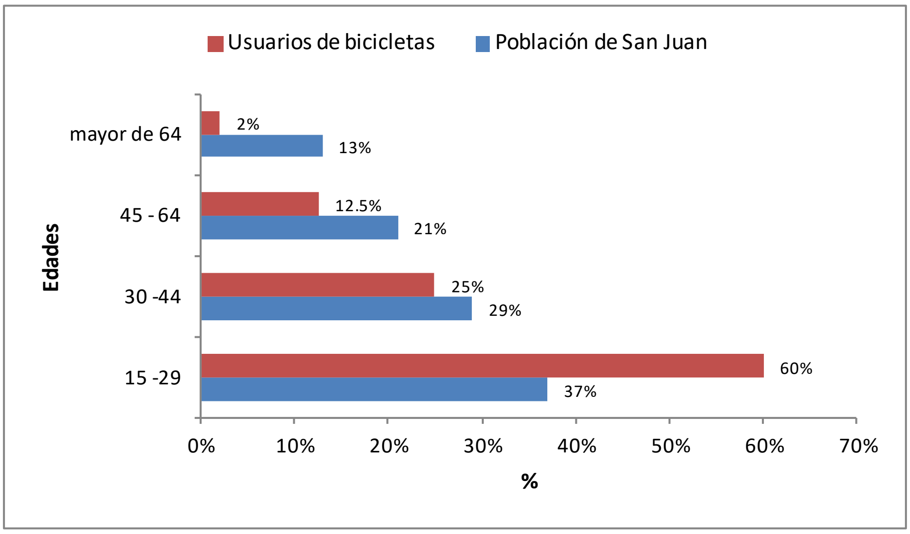


Fig. 3. Distribución por edades de la muestra

Si se comparan estos datos con el reparto de población general por edades de la población total de San Juan (Atlas Socioeconómico de la Provincia de San Juan), puede deducirse en que franjas etarias de población hay mayor uso de la bicicleta como medio de transporte.

Género:

La distribución de género de la muestra se representa en la Fig. 4. Observando el gráfico de torta es clara la predominancia masculina en el uso de la bicicleta.

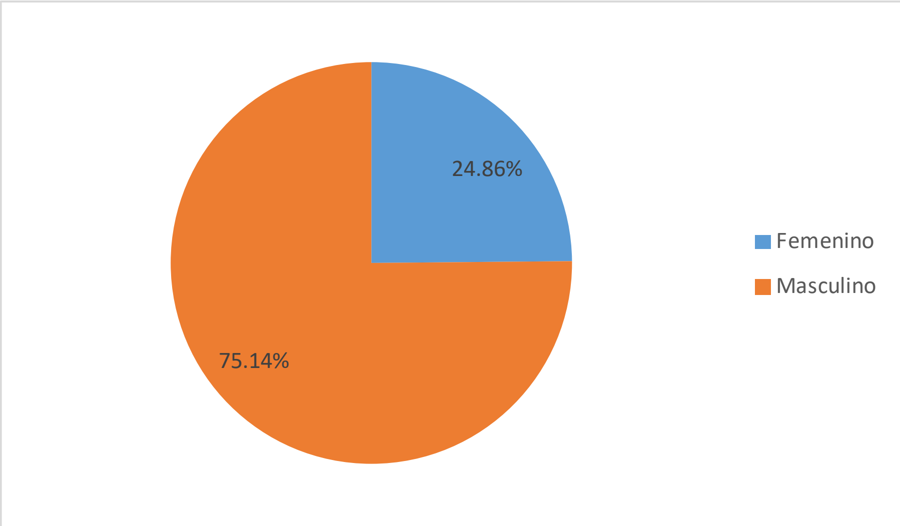


Fig. 4. Distribución de encuestados por género

También se muestra el reparto de género según franjas de edades en la Fig. 5. Cada franja etaria se corresponde con dos barras, una para cada género.

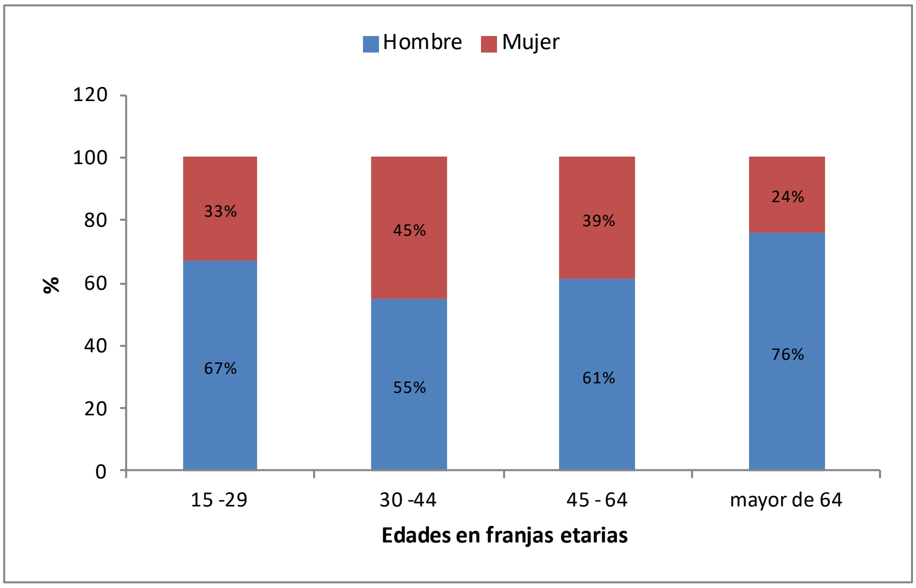


Fig. 5. Distribución por género según franja de edad

Nivel de estudio de los encuestados

La Fig. 6 representa la distribución de los encuestados según el nivel de estudios que declaran. Con ella puede rápidamente apreciarse cuál es el nivel de estudios de la mayoría de los encuestados. Los encuestados debían responder con el nivel de estudios terminado. El nivel de estudio es función de la edad del encuestado, por lo tanto es relativo.

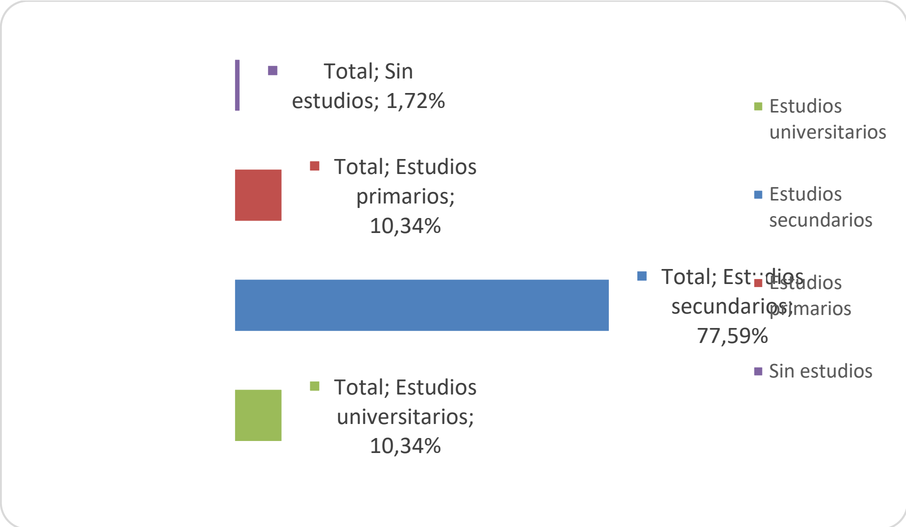


Fig. 6. Distribución de los encuestados según el nivel de estudios

Tipo de bicicleta

La clasificación se realiza entre bicicletas comunes y deportivas. La situación se muestra en el gráfico de torta de la Fig. 7. De la observación del gráfico se desprende que el tipo de bicicleta que se utiliza como medio de transporte en la ciudad es predominantemente la bicicleta común. La bicicleta de uso deportivo se utiliza menos en la ciudad y más en las rutas aledañas a la ciudad.

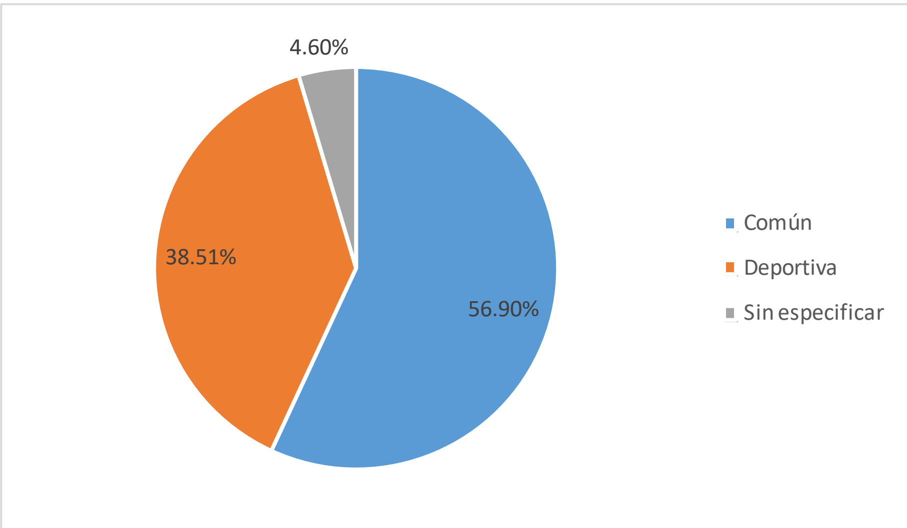


Fig. 7. Tipo de bicicleta

Actividad

La Fig. representa la distribución de los encuestados según la actividad que declaran. El porcentaje más importante de usuarios declaró ser estudiante, a estos le siguen los trabajadores en relación de dependencia.

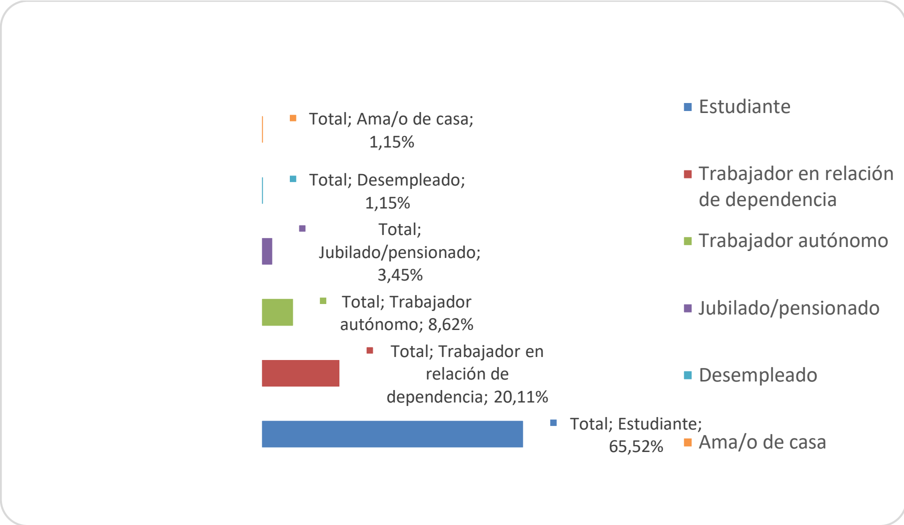


Fig. 8. Distribución de los encuestados según la actividad

Resultados de la encuesta

Frecuencia de uso

La periodicidad del uso de la bicicleta entre los encuestados se muestra en la Fig. 9 De su observación directa puede apreciarse la frecuencia de uso de los usuarios de bicicleta en días laborables, y concluirse cuál es el porcentaje de usuarios cotidianos de este modo de transporte.

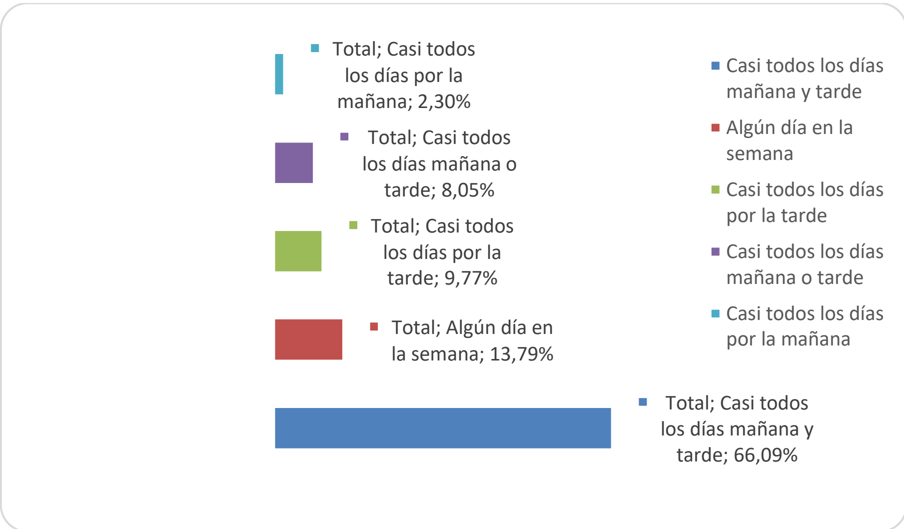


Fig. 9. Frecuencia de uso de la bicicleta

Motivo del viaje

Los motivos "obligados", Trabajo y Estudio, suponen actividades con horarios rígidos que necesitan de un modo de transporte fiable que garantice no sólo llegar al destino sino cumplir con un horario. Como se muestra en la Fig. 10, los motivos de viaje "obligados" suponen la mayoría de los viajes, reflejando de esta forma la fiabilidad de la bicicleta como modo de transporte cotidiano.

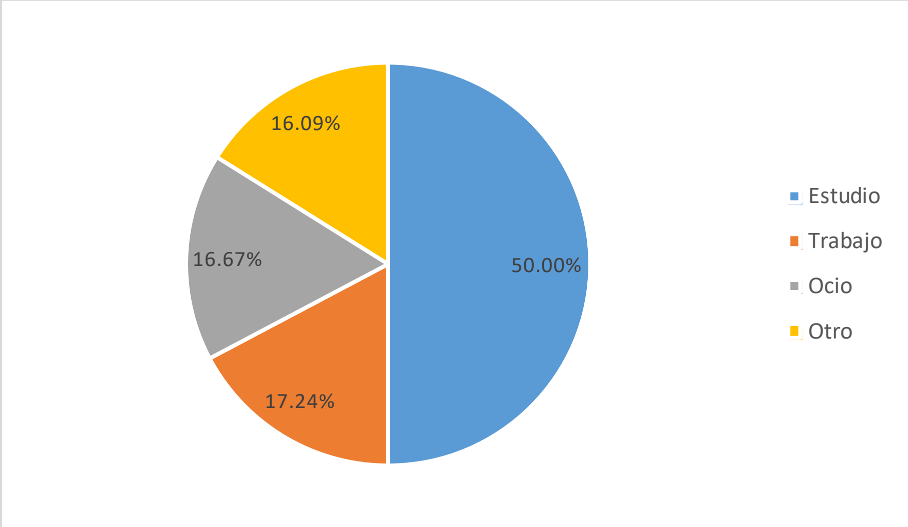


Fig. 10. Motivos del Viaje

8 Conclusiones

La estadística permite en este trabajo realizar un análisis descriptivo en forma cuantitativa y cualitativa:
En forma cuantitativa evaluar la cantidad de bicicletas que se desplazan en el gran San Juan, su distribución a lo largo del día en diferentes puntos censales y la distribución según género.
En forma cualitativa evaluar, las edades de los usuarios de bicicletas según determinadas franjas etarias, género, nivel de estudios, tipo de bicicleta, actividad, frecuencia de uso y motivo de viaje.

Mediante los gráficos y las tablas es posible cumplir con el objetivo de analizar el comportamiento sobre el uso de la bicicleta como medio de transporte y de poder proponer con mayor eficiencia una red ciclista en el área urbana.

Referencias

1. Malmod, A.; Altamira, A; Baer, L.: Plan de Ordenamiento Territorial del Área Metropolitana de San Juan – Plam-SJ. *Programa de fortalecimiento Institucional de la Subsecretaría de Planificación Territorial de la Inversión Pública.* Documento Final. (2013).
2. Calvo Salazar, M.; García Cebrián, J.; Hernández Herrador, V.: Investigación sobre el uso de la bicicleta en la ciudad de Sevilla, 2011. *Sistema Integral de la Bicicleta de la Universidad de Sevilla* (2011).

Volver al Índice

Herramientas TIC para aulas del nivel secundario: una experiencia de articulación bajo la modalidad b-learning

Saritha G. Figueroa[1], Verónica E. Leiva[1], Ricardo D. Cordero[2], Pedro J. Basualdo[3]
[1] Centro Universitario Virtual, Facultad de Ciencias Exactas y Tecnologías, Universidad Nacional de Santiago del Estero, Av. Belgrano 1912, Santiago del Estero
sarithaf@unse.edu.ar, veroleiva@gmail.com
[2] Departamento de Matemática, Facultad de Ciencias Exactas y Tecnologías, Universidad Nacional de Santiago del Estero, Av. Belgrano 1912, Santiago del Estero
rcordero@unse.edu.ar
[3] Departamento de Obras Viales, Facultad de Ciencias Exactas y Tecnologías, Universidad Nacional de Santiago del Estero
Av. Belgrano 1912, Santiago del Estero
basualdo@unse.edu.ar

Resumen. Las Tecnologías de la Información y de la Comunicación (TIC) han transformado las formas y modos en que se genera, gestiona y difunde la información y el conocimiento. La formación docente no es ajena a esta circunstancia, si bien las herramientas y los recursos están en constante cambio y evolución, seguirá vigente la necesidad de aprender, de colaborar y actuar críticamente. En este trabajo se presenta una experiencia de capacitación docente desarrollada bajo la modalidad b-learning en el marco del Programa “Articulación Universidad y Escuela Secundaria – Mejora de la Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales”. En la propuesta se abordan cuestiones relacionadas con herramientas TIC que les permitirá a los docentes de nivel medio, no sólo concebirlas como un recurso de trabajo o material de apoyo en sus tareas docentes, sino también como un espacio en el cual pueden aprender a usarlas para resolver situaciones áulicas.

Palabras Clave: TIC, b-learning, Estrategias de articulación, Capacitación docente.

1 Introducción

Las Tecnologías de la Información y de la Comunicación (TIC) pasaron a formar parte de toda organización, y en cuanto a la educación, han transformado las formas y modos en que se genera, gestiona y difunde la información y el conocimiento. La formación docente no es ajena a esta circunstancia, por lo cual se realizó una capacitación a docentes pertenecientes al nivel medio de la provincia de Santiago del Estero.

Se debe tener en cuenta que el aprendizaje actual de los estudiantes es mucho más virtual, multimedia y con experiencias multisensoriales. Siendo que esta es una generación que creció con la televisión y los videos, no sólo viéndolos sino haciéndolos. Este entorno multimedia también aporta un nuevo aprendizaje conceptual, nuevas oportunidades para aprender, pero también desafía a los profesores y a los educadores, de todos los niveles, incluso universitario, para que desarrollen materiales de nuevas maneras [1].

Si bien las herramientas y los recursos irán cambiando y evolucionando, seguirá vigente el llamado a abrir el mundo para aprender, para crear una sociedad mejor mediante la educación, y continuar el impulso hacia la colaboración universal y el crecimiento intelectual, pero sobre todo un llamado a la acción.

Para desenvolverse con éxito en una sociedad cada vez más compleja, rica en información y basada en el conocimiento, estudiantes y docentes deben utilizar la tecnología digital con eficacia. En un contexto educativo sólido, las TIC pueden ayudar a los estudiantes a adquirir las capacidades necesarias para llegar a ser [2], [3]:

- Competentes para utilizar tecnologías de la información;
- Buscadores, analizadores y evaluadores de información;
- Solucionadores de problemas y tomadores de decisiones;
- Usuarios creativos y eficaces de herramientas de productividad;
- Comunicadores, colaboradores, publicadores y productores; y
- Ciudadanos informados, responsables y capaces de contribuir a la sociedad.

Mediante la utilización continua y eficaz de las TIC en procesos educativos, los estudiantes tienen la oportunidad de adquirir capacidades importantes en el uso de éstas [4]. El docente es la persona que desempeña el rol más importante en este proceso, ya que es el que puede ayudar a los estudiantes a adquirir esas capacidades. Además, es el responsable de diseñar tanto oportunidades de aprendizaje como el entorno propicio en el aula que faciliten el uso de las TIC para aprender y comunicar. Por esto, es fundamental que todos los docentes estén preparados para ofrecer esas oportunidades a sus estudiantes [5].

Los programas de desarrollo profesional para docentes en ejercicio y los de formación inicial para futuros profesores deben incorporar experiencias enriquecidas con TIC.

En la actualidad los docentes en ejercicio necesitan estar preparados para ofrecer a sus estudiantes oportunidades de aprendizaje apoyadas en las TIC; para utilizarlas y para saber cómo éstas pueden contribuir al aprendizaje.

En este trabajo se presenta una experiencia de capacitación docente desarrollada bajo la modalidad b-learning en el marco del Programa “Articulación Universidad y Escuela Secundaria – Mejora de la Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales” donde se abordaron algunas cuestiones relacionadas con las herramientas TIC que les permitirá a los docentes de nivel medio, no sólo concebirlas como un recurso de trabajo o material de apoyo en sus tareas docentes, sino también como un espacio o entorno sobre el cual pueden aprender a usarlas para resolver situaciones del aula donde se requieran oportunamente.

2 Descripción del curso de capacitación docente

2.1 Objetivos

Entre los objetivos generales del Programa “Articulación Universidad y Escuela Secundaria – Mejora de la Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales” se plantean:

- Aportar al proceso de construcción de una cultura digital que promueva la toma de decisión para la continuidad de estudios superiores vinculados con las ciencias exactas, naturales y tecnológicas.
- Fortalecer en los docentes del nivel secundario del último curso, competencias didácticas mediadas por tecnologías informáticas para innovar los procesos de enseñanza y de aprendizaje; utilizando recursos socialmente significativos para estudiantes que cursan el quinto año y están próximos al ingreso en el nivel superior.

En este marco en el Centro Universitario Virtual de la Facultad de Ciencias Exactas y Tecnologías (CUV-FCEyT) se diseñó la propuesta de capacitación docente “Herramientas TIC para aulas del nivel secundario” con los siguientes objetivos específicos:

- Reconocer el uso de los diferentes recursos de las TIC en los procesos de enseñanza y de aprendizaje, considerando las particularidades de cada contexto social y educativo.
- Diseñar propuestas pedagógicas que incluyan aplicaciones digitales para facilitar el aprendizaje.
- Lograr autonomía en la planificación de actividades dentro del aula con herramientas tecnológicas que faciliten el proceso educativo

2.2 Selección y organización de los contenidos

En el Marco del Programa “Articulación Universidad y Escuela Secundaria – Mejora de la Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales” promovido por la Universidad Nacional de Santiago del Estero, con el apoyo de la Facultad de Ciencias Exactas y Tecnologías (FCEyT), se implementó una experiencia de formación docente en el uso de aplicaciones digitales orientadas a la educación, evaluación de sitios de Internet, clasificación de recursos educativos Web y características de los nuevos ambientes de aprendizaje.

- *Eje 1*: Tecnologías de la Información y la Comunicación (TIC): concepto, características. Computadora. Componentes físicos (Hardware) y lógicos (Software). Funcionamiento. Clasificación. Las TIC en la educación.
- *Eje 2:* Medio de enseñanza o material didáctico. Concepto. Tipos de medios y materiales didácticos Medios digitales. Aplicaciones digitales orientadas a la educación. Clasificación. Creación de mapas conceptuales con CMapTools. Aplicaciones para crear presentaciones y videos.

- *Eje 3:* Internet: conceptualización, aspectos generales, servicios. Web: características y evolución. Aplicaciones web. Nubes de palabras. Navegación y búsqueda en Internet. Evaluación de sitios y recursos educativos de Internet. Nuevos ambientes de aprendizaje.

2.3 Proceso de difusión e inscripción

La convocatoria a los docentes estuvo a cargo del personal del CUV-FCEyT, mediante un equipo responsable de la implementación de la capacitación. Los criterios de selección de los docentes otorgaron prioridad a aquellos que se encontraban en ejercicio de la docencia en el nivel medio.

La inscripción se realizó on-line mediante un formulario electrónico y personalmente.

2.4 Estrategias metodológicas

En este curso se concibe al aprendizaje como un proceso constructivo interno mediante el cual se incorporan conocimientos, procedimientos, métodos, que generan cambios cualitativos (además de cuantitativos) a nivel cognitivo y afectivo en un entorno socio-cultural determinado.

En las estrategias metodológicas seleccionadas el docente cumplió el rol de guía orientando y sugiriendo caminos para que cada participante "descubra" por sí mismo la solución.

En el curso se implementaron como estrategias el aprendizaje personal guiado por el docente, diálogo, interrogatorios, la resolución de problemas, análisis de ejemplos y/o casos de estudio, etc.

De esta manera los participantes del curso valoraron las aplicaciones digitales no sólo como un recurso más de trabajo para su tarea docente, sino también visualizaron la posibilidad de aprender a usarlas para resolver situaciones del aula donde se requiera de su uso oportuno para facilitar el proceso de aprendizaje de sus alumnos.

2.5 Modalidad

Se trabajó bajo la modalidad b-learning donde se combinaron características del trabajo presencial y del trabajo en línea, que enriquecieron el aprendizaje de contenidos y la dinámica de trabajo. La comunicación entre profesores y participantes fue fluida y personalizada [7].

2.6 Diseño del aula virtual

En el diseño del aula virtual del curso de capacitación se consideraron las cuatro dimensiones pedagógicas que muestra la Fig. 1.

Fig. 1. Dimensiones pedagógicas del aula virtual diseñada.

Se incluyeron materiales en diversos formatos, algunos seleccionados y otros específicamente desarrollados por el equipo docente, de manera que los participantes tuvieron alternativas variadas para acceder a la información y aprender, según sus propios estilos y preferencias [8].

En cuanto a las actividades, se plantearon tareas para realizar en línea y otras en los encuentros presenciales. En todos los casos fueron acompañados por los docentes del curso.

La comunicación fue sincrónica y asincrónica, se estableció mediante foros, salas de chat, mensajería interna, correo electrónico, etc. Esto permitió un trabajo ágil, dinámico y enfocado en las necesidades de los participantes. La Fig. 2 muestra la pantalla de bienvenida al curso y en la Fig. 3 se observa el tratamiento de los contenidos del eje temático 2.

Fig. 2. Pantalla principal del aula virtual diseñada.

.

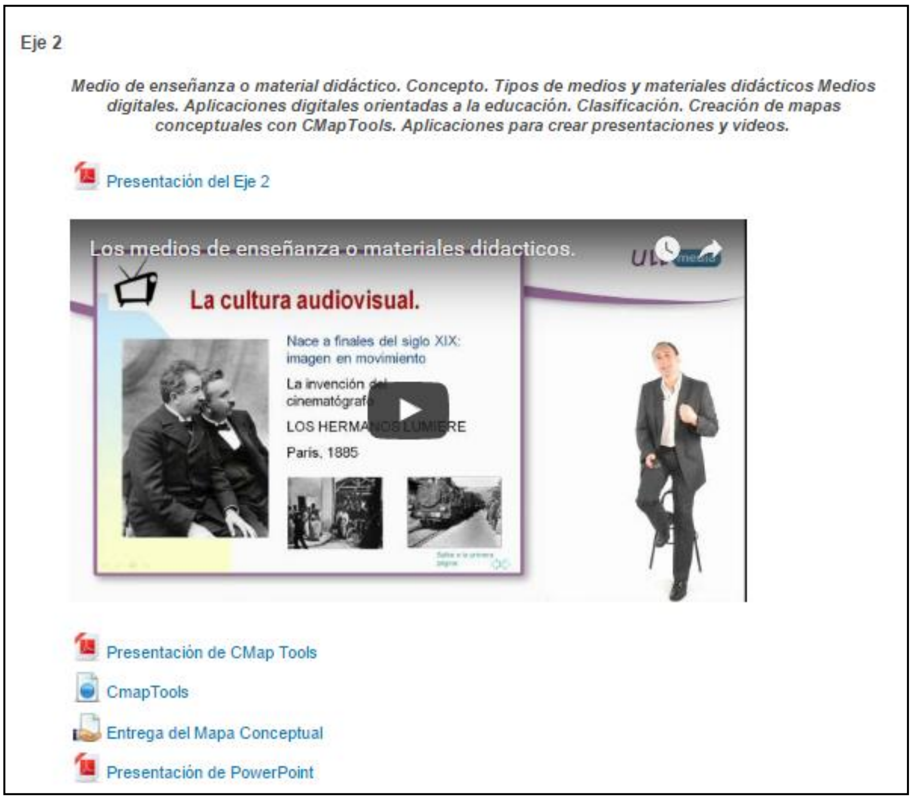


Fig. 3. Pantalla del aula virtual sobre el Eje 2.

2.7 Herramientas trabajadas

Se trabajó con el software CMapTools como una aplicación digital de uso general. Se trata de un programa que permite crear mapas conceptuales en forma muy sencilla. Permite realizar planificaciones, trabajar con conceptos generales y específicos sobre un determinado tema. En un simple mapa conceptual, se pueden destacar los puntos más relevantes de un tema a enseñar. También permite elaborar mapas de ideas y diagramas.

Cada participante tenía la posibilidad de seleccionar la herraminta digial de su interes de acuerdo al área disciplinar que pertenecía. En el caso de los docentes de matemática elegian softwares que les permitían trabajar con cálculos, gráficos de funciones, figuras geométricas, cálculo de superficies, derivadas, integrasles, etc. Por ejemplo trabajaron con:

- Calcu*ladora C*ientífica (Oficalc): es una completa calculadora ofimática que incorpora agenda, tareas, cronómetro, alarma, conversor de unidades, Sistema Métrico Internacional., notas, apuntes. Además ofrece doble display conversor de monedas, módulos de física, estadística, polinomios, ecuaciones, geometría, trigonometría, etc. , ideal para estudiantes de nivel medio, Fig. 4.

Fig. 4. Pantalla de Oficalc

- Geogebra: este programa combina elementos de geometría, álgebra, análisis, cálculo y estadística de forma dinámica, representando a los objetos desde cada una de sus posibles perspectivas: vistas gráficas, algebraicas y hojas de datos dinámicamente vinculadas. Con él se pueden realizar construcciones tanto con puntos, vectores, segmentos, rectas y secciones cónicas, así como con funciones que a posteriori, pueden modificarse dinámicamente.

2.8 Evaluación

Durante la capacitación se consideró a la evaluación como un conjunto de acciones realizadas con el fin de obtener, analizar e interpretar información para mejorar cualitativamente los procesos de enseñanza y de aprendizaje. Por lo tanto, se evaluó de manera integrada en tres momentos: al comienzo del curso y de cada eje temático, durante el proceso de enseñanza y de aprendizaje (de manera continua) y al término de una fase de aprendizaje.

Los participantes del curso diseñaron propuestas educativas interdisciplinarias que involucraron la utilización de una herramienta tecnológica en el aula.

2.8.1 Trabajo final

Para el trabajo final se plantearon los siguientes objetivos:

- Proponer estrategias que posibiliten el empleo creativo de aplicaciones digitales en contextos de enseñanza y de aprendizaje.
- Analizar alternativas que incluyan las TIC como herramientas facilitadoras de la gestión de los procesos educativos.
- Plantear la incorporación pedagógica de recursos didácticos basados en aplicaciones digitales.

El trabajo final consistía en elaborar de manera individual una propuesta pedagógica concreta en la cual se incorpore alguna aplicación digital. Para lo cual se sugirieron las siguientes tareas:

- Seleccionar un tema dentro de un área de su interés, por ejemplo, una unidad temática, un tema multidisciplinar, una propuesta para trabajar en horas libres, un proyecto tecnológico, etc. Considere las características del contenido a desarrollar, disponibilidad de material y recursos tecnológicos necesarios (computadoras, laboratorios de informática, netbooks, conexión a Internet, etc.)
- Diseñar dos o tres actividades que puedan ser implementadas con el apoyo de algún tipo de aplicación digital. Fundamentar la propuesta (¿Qué criterios tuvo en cuenta para elegir la aplicación?, ¿cuáles son los objetivos de aprendizaje que pretende lograr?, etc.).
  Describir las ventajas y dificultades que a su criterio implicaría la implementación de la propuesta presentada.

3 Resultados obtenidos

3.1 Seguimiento y trabajo final del curso

Los trabajos finales cumplieron en un 90 % con lo solicitado. En la mayoría de los casos se evidenció coherencia entre las herramientas propuestas y los objetivos de aprendizaje perseguidos. Además, se visualizaron restricciones de factibilidad impuestas por la realidad de cada institución educativa en la que el docente se desempeña y la forma creativa de superarlas.

3.2 Encuesta realizada en el aula virtual

A partir de una encuesta realizada en el aula virtual del curso se obtuvieron los siguientes resultados:

- El 100 % de los participantes considera importante el uso de la tecnología para su tarea docente.
- La totalidad de los docentes que asistieron consideraron que los contenidos abordados en el curso resultaron útiles para mejorar el desarrollo de tu tarea docente.
- El 100 % de los participantes manifestaron que se cumplieron sus expectativas con respecto al curso y el material del curso les resultó comprensible.
- Al 80% de los asistentes los temas abordados en el curso resultaron sencillos y la carga horaria les resultó suficiente.

4 Conclusiones y trabajos futuros

En la actualidad los docentes en ejercicio necesitan estar preparados para ofrecer a sus estudiantes oportunidades de aprendizaje apoyadas en las TIC; para utilizarlas y para saber cómo éstas pueden contribuir al aprendizaje. Con este curso de capacitación se buscó brindar un espacio de reflexión crítica sobre el papel de las TIC en la sociedad y en la educación; y los desafíos que ello implica. Además de promover el empleo creativo de aplicaciones digitales en contextos de enseñanza y de aprendizaje, se intentó favorecer la participación activa para analizar y discutir alternativas que incluyan las herramientas provistas por las TIC para facilitar la gestión de los procesos educativos. También se posibilitó el intercambio de experiencias surgidas en diferentes contextos educativos. Como líneas de trabajo futuro se continuará trabajando en el fortalecimiento de los procesos de articulación entre la universidad y la escuela secundaria.

Referencias

1. Burbules, N. Ubiquitous Learning and the Future of Teaching. *Encounters on Education*, vol. 13, pp. 3–14. (2012).
2. UNSECO. Estándares de competencias en TIC para docentes. Recuperado el 27 de Julio del 2010 de http://www.eduteka.org/EstandaresDocentesUnesco.php.
3. Cacheiro González, M. L. Recursos educativos TIC de información, colaboración y aprendizaje. (2010)
4. Almerich Cerveró, G., Suárez Rodríguez, J. M., Jornet Meliá, J. M., & Orellana Alonso, M. N. Las competencias y el uso de las Tecnologías de Información y Comunicación (TIC) por el profesorado: estructura dimensional. *Revista electrónica de investigación educative*. 13(1), 28-42. (2011)
5. Inés Dussel - Luis Alberto Quevedo. “Educación y nuevas tecnologías: los desafíos pedagógicos ante el mundo digital”. *VI Foro Latinoamericano de Educación*. Santillana. Bs. As. (2010).
6. Magdalena Claro. “La incorporación de tecnologías digitales en educación. Modelos de identificación de buenas prácticas”. *CEPAL*. Santiago de Chile. (2010).
7. Area Moreira Manuel. Introducción a la Tecnología Educativa. *Manual Electrónico*. (2009).
8. Arauz, R., Ernesto, F., Ruiz Torres, A. A., García García, M. A., López González, R., & Martínez Sánchez, M. E.. TIC en Educación. Ediciones Díaz de Santos. (2015)

Volver al Índice