El desafío de enseñar y aprender Análisis Matemático I

Silvina G. Suau[1], Romina V. Ferrando[1]
[1] Departamento de Materias Básicas, Facultad Regional Santa Fe, Universidad Tecnológica Nacional
Lavaise 610, Santa Fe, CP3000
silvinasuau@yahoo.com.ar, romivfh@gmail.com

Resumen. En este trabajo presentamos algunas experiencias de cátedra que surgen de analizar las prácticas de enseñanza docente en relación con la comprensión de conceptos por parte de los alumnos, en la asignatura "Análisis Matemático I" del primer nivel de las carreras de Ingeniería de la Universidad Tecnológica Nacional, Facultad Regional Santa Fe. En este contexto, observamos que existe una fuerte tendencia de los alumnos a resolver problemas y ejercicios en forma mecánica y algorítmicamente, mostrando dificultades para abordar situaciones diferentes a las resueltas en el aula. Ante esto, consideramos necesario apuntar a una enseñanza para la comprensión, para ayudar al alumno a que sea capaz de solucionar problemas, razonar, transferir conocimientos, interpretar enunciados y resultados, argumentar, justificar y fundamentar. Para ello, las autoras de este trabajo y actuales docentes de algunas comisiones de la cátedra llevamos adelante diferentes propuestas y materiales didácticos para mejorar la comprensión de los alumnos.

Palabras Clave: Prácticas de enseñanza, Comprensión, Aprendizaje significativo, Tecnología.

1 Introducción

La experiencia como docentes universitarias ha permitido reconocer varias dificultades de los estudiantes, muchas veces derivadas en fracasos en las instancias de exámenes, en la comprensión de conceptos de "Análisis Matemático I" (AMI) y en la interpretación de consignas y resultados. Esta asignatura forma parte de las materias básicas de las cinco carreras de grado que se dictan en la UTN-FRSF: Ingeniería Civil, Mecánica, Eléctrica, Industrial y en Sistemas de Información.
Observamos en los alumnos un modo de pensar más mecánico que reflexivo. En las prácticas vemos que los alumnos presentan dificultades para reflexionar sobre los temas y conceptos dados, y poder transferirlos a situaciones nuevas. Generalmente realizan la resolución de problemas de una manera mecánica y repetitiva. Además, presentan dificultades en la integración e interrelación de conceptos. Si bien la Ingeniería requiere el uso de la matemática, la física, fórmulas y “mecanismos” para resolver problemas, es relevante para un ingeniero poder razonar y comprender los conceptos, ser creativo, ingenioso y reflexivo, pensar significativamente los temas, conceptos y problemas, más allá de las fórmulas.
A menudo, sin darnos cuenta, los mismos docentes fomentamos el pensamiento “mecanicista” o “de repetición” en nuestros alumnos. Promovemos el esquema de repetición de contenidos, de memorización de fórmulas y mecanismos, de resolver problemas “copiando” lo que explicamos en clase, en vez de potenciar el pensamiento reflexivo o significativo en los estudiantes.
Así, las experiencias de cátedra presentadas en este trabajo surgen de analizar la importancia de la enseñanza como motor para la comprensión de conceptos. Por supuesto, sin dejar de lado que el alumno tiene una gran responsabilidad para que el proceso quede completo y pueda comprender y aprender, ya que la mera enseñanza no garantiza el aprendizaje.

2 Objetivo

El objetivo general de este trabajo es difundir lo que estamos realizando en la cátedra de AMI para diseñar y aplicar nuevas propuestas de enseñanza y materiales didácticos que apunten a un aprendizaje significativo en los alumnos.
Este proceso se realiza dentro de nuestras posibilidades como docentes de la cátedra, ya que al ser una asignatura homogénea deben darse ciertos contenidos comunes a todas las ingenierías y respetarse ciertas pautas para todas las comisiones. Cabe destacar que los contenidos de la asignatura, los apuntes teóricos, las guías de trabajos prácticos, las formas de evaluación, la cantidad de trabajos prácticos individuales y de exámenes parciales

durante el año lectivo, las fechas establecidas para la toma de dichas evaluaciones entre otras cosas, son comunes para todas las comisiones de la cátedra.

3 Marco teórico conceptual

Dentro del marco teórico conceptual consideramos importante mencionar dos aspectos fundamentales: las prácticas de la enseñanza y la comprensión por parte de los alumnos en la universidad. Asimismo, se exponen unas líneas sobre los conceptos de AMI más relevantes y sobre el contexto en el cual se encuentra la educación hoy en día.

El primer concepto clave tiene que ver con las prácticas de la enseñanza, los procesos de enseñanza, la pedagogía y la didáctica en el ámbito de la educación universitaria. Las prácticas de enseñanza incluyen, entre otros aspectos: la forma, estrategias, o metodología para dar un contenido y los recursos o materiales que se utilizan. Es fundamental tener en cuenta que estas prácticas están situadas en un contexto social, cultural e histórico.

Como menciona Litwin [1] la "configuración didáctica" es la manera particular que utiliza el profesor para favorecer el proceso de construcción de conocimientos. Esto incluye formas de relacionarse con los alumnos, visiones de la realidad, recortes de contenidos, metodologías, supuestos respecto del aprendizaje, relaciones entre la práctica y la teoría, entre otros aspectos. La construcción didáctica evidencia una clara intensión de enseñar y favorecer la comprensión en los alumnos.

Por tanto, para poder analizar las prácticas de enseñanza o prácticas docentes es fundamental situarse desde una postura en torno al aprendizaje. En este sentido, existen varios enfoques: el conductista, el constructivista y el cognitivo, según las teorías del aprendizaje. Se considera importante pensar este trabajo desde el enfoque cognitivo y constructivista.

Como se puede observar en la introducción de este artículo, mencionamos “la comprensión” de conceptos, temas y problemas por parte de los alumnos. En este sentido, hacemos referencia al concepto de "comprensión" de Perkins [2]. Según este autor, la comprensión tiene que ver no sólo con los datos o contenidos particulares sino con una actitud respecto de la disciplina. Comprender implica entender algo en su contexto y concebir el todo en relación a sus partes. Implica, por supuesto, que haya interés por comprender y aprender. La comprensión va más allá de la posesión del conocimiento, implica un estado de capacitación, “*la persona que entiende es capaz de “ir más allá de la información suministrada”*” [2]. "*En pocas palabras, comprender es la habilidad de pensar y actuar con flexibilidad a partir de lo que uno sabe*" [3]. Enseñar para la comprensión es desarrollar un desempeño flexible, no sólo aprender o memorizar hechos o conceptos, sino saber y poder utilizarlos.

Por lo visto, la capacidad de comprender y de pensar en forma significativa están estrechamente relacionadas. Aquí es importante considerar también el concepto de aprendizaje significativo de Ausubel [4]. Como menciona este autor, éste sirve para utilizar lo aprendido en situaciones nuevas, en un contexto distinto, por lo que implica comprender más que memorizar. Por lo tanto el aprendizaje o pensamiento significativo contrasta con el aprendizaje mecanicista, que es el que parece predominar en las carreras de ingeniería, al menos en los primeros años de cursado. Cabe destacar, sin embargo, que ambos tipos de pensamiento son necesarios para aprender.

Por otra parte, vinculando los conceptos mencionados se encuentra la "Enseñanza para la comprensión" (EpC). Según Stone Wiske [3] la enseñanza para la comprensión implica involucrar a los alumnos en actividades de comprensión, entendiendo la misma como un desempeño flexible y como la capacidad de usar el propio conocimiento de maneras novedosas. El marco de referencia de la pedagogía para la comprensión implica responder preguntas tales como: *"¿Qué tópicos vale la pena comprender? ¿Qué aspectos de esos tópicos deben ser comprendidos? ¿Cómo podemos promover la comprensión? ¿Cómo podemos averiguar lo que comprenden los alumnos?*" [3].

Por otro lado, cabe mencionar la importancia de ciertos conceptos de AMI para el contexto del ingeniero. Dentro de estos conceptos se encuentra el de "función", el cual es de suma importancia en la enseñanza de la matemática, pues se lo considera como elemento unificador, generalizador y de naturaleza modelizadora. Además, su aprendizaje es un tema presente en los currículos escolares de los distintos niveles de la Educación, motivo por el cual ha sido objeto de muchas investigaciones en Didáctica de la Matemática. Las cuestiones estudiadas contemplan diversos aspectos de la problemática planteada por los procesos de enseñanza y aprendizaje sobre la noción de función. Asimismo, el concepto de "función" es fundamental para un futuro Ingeniero ya que es la base para modelar situaciones reales. Reconociendo que es un concepto complejo debido a que se expresa en una multiplicidad de registros y genera diferentes niveles de abstracción y de significados, el aprendizaje del tema "funciones" es uno de los principales objetivos en la enseñanza de AMI y su importancia se

debe a que es indispensable para la comprensión de conceptos tales como continuidad, límite, derivadas, integrales, entre otros.
Por último, queremos mencionar que nos encontramos actualmente en lo que algunos denominan como la Era Digital, debido al gran avance de las tecnologías y la digitalización de la información. Sin embargo, la educación actual continúa siguiendo el modelo de la Era Industrial, marcada por la aplicación de la tecnología a los medios de producción. El sistema educativo diseñado en aquel momento permitía formar grandes cantidades de personas en base a conocimientos estandarizados y en el menor tiempo posible; era un sistema educativo eficiente y cuantificable que producía la mano de obra necesaria para la economía de producción en masa. Pero en la actualidad los procesos industriales son distintos: ya no se basan en la fuerza de las máquinas sino en el conocimiento. Además, la digitalización de la información, internet, las redes sociales y el avance exponencial de la tecnología, hacen que los alumnos -y las personas en general- ya no sean los mismos de antes. Sin embargo el sistema educativo sí lo es. Al estar atentas a esta situación, intentamos tener experiencias de cátedra que contemplen el uso de la tecnología en nuestras prácticas educativas.

4 Experiencias de cátedra

Antes de comenzar a exponer nuestras experiencias creemos importante mencionar el contexto en el cual están inmersas nuestras prácticas docentes. En este sentido, la cátedra AMI en nuestra Facultad es una cátedra homogénea, es decir, es igual para las cinco carreras que se dictan. El equipo de cátedra está conformado por 9 docentes, de los cuales un Profesor es el Coordinador y los demás son Profesores, JTP y Ayudantes de Primera.
Actualmente hay 12 comisiones de cursado anual, 10 de alumnos ingresantes y 2 de recursantes: Civil A y B, Eléctrica, Industrial A y B, Mecánica A y B, Ingeniería en Sistemas de Información (ISI) B, ISI E, ISI F, Recursantes I y Recursantes II. Además, hay una comisión de cursado cuatrimestral, para alumnos con tres o cuatro aplazos.
Los contenidos de la signatura están agrupados en cuatro Ejes Temáticos: 1) Conjuntos numéricos y Funciones, 2) Cálculo Diferencial, 3) Cálculo Integral y 4) Sucesiones y Series.
Las clases de los Profesores son generalmente teórico-prácticas y se desarrollan en 2 hs. 15 min. por semana y las clases de los JTP y Ayudantes son exclusivamente de práctica de 1 h. 30 min. de duración. Los Profesores brindan consultas todas las semanas del año y los JTP y Ayudantes en las semanas de exámenes.
La cátedra cuenta con apuntes elaborados especialmente y a disposición de los alumnos en formato papel. Todos los docentes utilizan los mismos apuntes, siguen el mismo cronograma y utilizan para el dictado de las clases el pizarrón. Los exámenes (parciales, finales) se toman a todos los alumnos juntos.
Dentro de este contexto realizamos algunas experiencias de cátedra para intentar mejorar la comprensión de los alumnos y aplicar las nuevas tecnologías disponibles. Las mismas se detallan a continuación.

4.1 Modificación de las guías de ejercicios

A partir del año pasado comenzamos en la cátedra un proceso de modificación y actualización de las guías de trabajos prácticos para todas las comisiones de AMI.
Los motivos del cambio responden a que las guías utilizadas habían sido elaboradas hace varios años, no todos los ejercicios y problemas eran aprovechables para el momento actual y la mayoría no contaban con las respuestas, tema que para los alumnos era muy importante y tenía sus reclamos en las encuestas realizadas a los alumnos al final de cada año lectivo.
Asimismo, los cursos de alumnos recursantes veían los mismos ejercicios cada vez que recursaban la materia, lo cual no era motivador para ellos al momento de estudiar; si bien podían obtener ejercicios de libros, durante las clases se utilizaban las mismas guías.
Cabe destacar que existe actualmente una cantidad importante de alumnos recursantes (aproximadamente 120 sobre un total de 470 alumnos que cursan AMI). Esta población de estudiantes no debe ser menospreciada porque son los alumnos que más dificultades presentan para el aprendizaje de la matemática.
Las nuevas guías de ejercicios han sido implementadas a partir de este año con buenos comentarios por parte de docentes y alumnos.
Estas guías cuentan con una cantidad de ejercicios y problemas para trabajar en clase, y otra parte como ejercitación complementaria, para que el alumno realice cuando estudia. Algunos ejemplos de ejercicios pueden observarse en la Fig. 1, Fig. 2 y Fig. 3. Se incluyen ejercicios de diferentes tipos, entre otros:

- ejercicios para aplicar procedimientos,

- ejercicios más complejos para reflexionar y razonar,
- problemas relacionados con la realidad,
- problemas para aplicar la creatividad,
- ejercicios teórico-prácticos, para relacionar conceptos y cálculos.

Graficar una función que cumpla con las siguientes condiciones:

a) $\lim_{x\to 2^+} f(x) = 2;\ \lim_{x\to 2^-} f(x) = 0;\ \lim_{x\to 0} f(x) = 1;\ f(2) = 0;\ f(0) = 1$

b) $\lim_{x\to 1^+} f(x) = 1;\ \lim_{x\to 1^-} f(x) = -2;\ \lim_{x\to 3} f(x) = 0;\ f(-1) = 1;\ f(3) = 0$

c) $\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty;\ \lim_{x\to 2^-} f(x) = -\infty;\ \lim_{x\to 4} f(x) = -1;\ \lim_{x\to 2^+} f(x) = 2;\ f(4) = 0;\ f(2) = 0$

d) $\lim_{x\to 3^+} f(x) = +\infty;\ \lim_{x\to 3^-} f(x) = -\infty;\ \lim_{x\to 0} f(x) = 3;\ \lim_{x\to +\infty} f(x) = 1;\ \lim_{x\to -\infty} f(x) = +\infty;\ f(0) = 3$

Fig. 1. Ejercicio de la nueva guía práctica correspondiente al tema Límites. Este es el caso de un ejercicio de tipo conceptual, en que se requiere que el alumno conozca y maneje los conceptos teóricos.

En las distintas comisiones, los docentes detectamos dificultades en los alumnos en el momento de la resolución del ejercicio de la Fig. 1, debido a que tenían que interpretar el enunciado, manejar varios conceptos teóricos desarrollados tales como el de límite de una función, límites laterales, imagen de la función en un valor determinado y además, saber las gráficas de las funciones elementales dadas. Observamos que los ejercicios de tipo más mecanicistas, les resultaron mucho más fácil de resolver.
El ejercicio de la Fig. 1 en particular tiene la ventaja de que el alumno puede "inventar" una función, es decir, no necesariamente tiene que elegir las elementales. Sin embargo, la mayoría de los alumnos trabajaban con las funciones "conocidas". Y además, es un ejercicio con respuesta múltiple, ya que cada alumno puede graficar una función distinta que cumpla con el enunciado.
Por otra parte, el ejercicio de la Fig. 2 resulta muy útil al momento de comprobar si nuestros alumnos han comprendido en clase el concepto de continuidad de una función en un punto y además para repasar conceptos anteriores relacionados con límites e interpretaciones de los mismos en gráficas de funciones.
Dicho ejercicio consiste en completar el cuadro que se muestra en la Fig. 2, observando los gráficos de funciones anexados, de los cuales tres presentan distintos tipos de discontinuidades y en uno de ellos la función es continua en el punto. Al aplicarlo en las clases, cuando los alumnos completaron la última columna del cuadro, tuvieron que justificar su respuesta.

Completar el siguiente cuadro teniendo en cuenta los gráficos:

	$f(1)$	$\lim_{x\to 1^+} f(x)$	$\lim_{x\to 1^-} f(x)$	$\lim_{x\to 1} f(x)$	¿Es continua?
a)					
b)					
c)					
d)					

Fig. 2. Ejercicio 1 de la nueva guía práctica correspondiente al tema Continuidad. Se observa el enunciado y la tabla para completar. Aparte de este enunciado, la guía de ejercicios incluye los gráficos de cuatro funciones, para que puedan analizar y completar los incisos a), b), c) y d).

El ejercicio presentado en la Fig. 3, se trabaja actualmente en las clases prácticas y la metodología implementada fue mediante resolución en forma grupal. Luego algunos grupos expusieron sus resultados en el pizarrón y de esta manera todos los alumnos intercambiaron las distintas posibilidades de resolución del ejercicio y además se sugirió, como un complemento al enunciado, la utilización de algún software para graficar el ejercicio de manera de comprobar si las gráficas realizadas eran las correctas. En estos casos es importante la participación activa de los docentes para orientar a los alumnos en el proceso de aprendizaje.
El objetivo planteado al seleccionar estos ejercicios, fue que los alumnos pongan en juego un aprendizaje significativo, es decir, que relacionen y conecten los conocimientos nuevos adquiridos con los que ya poseían, reajustando y reconstruyendo ambas informaciones para resolver los desafíos propuestos por las docentes.

Escribir y graficar una función continua para todos los reales, excepto en los siguientes puntos:

a) $x = -5;\ x = 3$

b) $x = -1/2;\ x = 0;\ x = 1$

c) $x = -1;\ x = \sqrt{2}$

Fig. 3. Ejercicio 2 de la nueva guía práctica correspondiente al tema Continuidad. Este ejercicio es muy interesante, ya que no tiene una única respuesta y además es de aplicación conceptual.

4.2 Utilización del campus virtual

Un aspecto importante a la hora de comunicarnos con los alumnos es la utilización del campus virtual de la UTN-FRSF, el cual no se utilizaba hasta este año en AMI y no es utilizado actualmente por la totalidad de los docentes de la cátedra.

Las autoras de este artículo utilizamos esta plataforma virtual para comunicarnos con nuestros alumnos, subirles información y plantearles actividades, con muy buenos resultados en su implementación. Normalmente les enviamos material interesante de estudio y propuestas de actividades extra para que las lleven resueltas a clase.

La opción de enviarles tarea a través del campus ha dado mejores resultados que cuando la tarea es encomendada en la misma clase en persona. Por lo que hemos observado, los alumnos han respondido satisfactoriamente cuando reciben un email con la tarea, que cuando el docente se las solicita la clase anterior. Creemos que esto tiene que ver con el contexto "digital" en el que se encuentran inmersos nuestros alumnos. Ellos están acostumbrados al uso de la tecnología diariamente.

La idea de las actividades propuestas es que sean distintas cada vez, para mantener a los alumnos interesados, motivados y activos en la materia. Algunos de los materiales elaborados y actividades propuestas por el campus virtual se presentan en el apartado 4.3 del presente artículo.

Por último, queremos destacar mediante algunos gráficos el alto porcentaje de utilización del campus virtual por parte de los alumnos en las cuatro comisiones en donde lo hemos implementado.

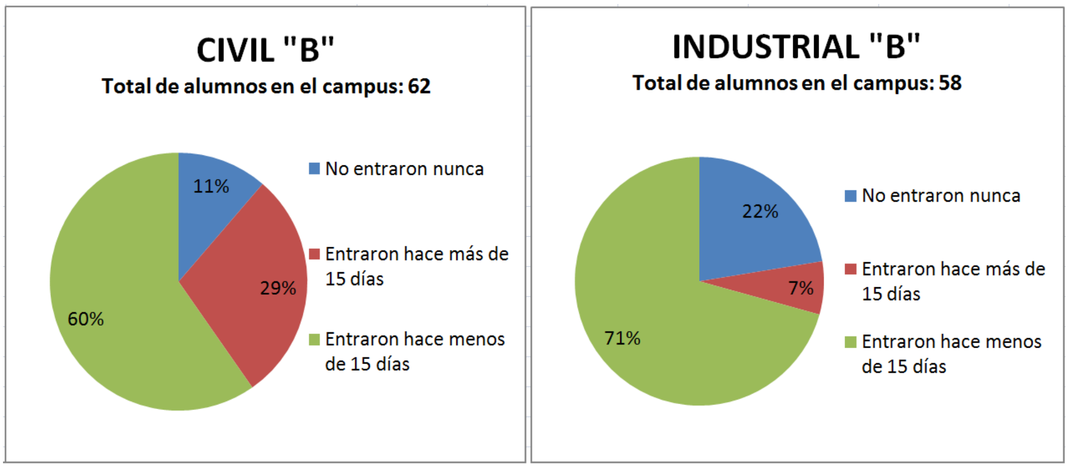


Fig. 4. Utilización del campus virtual en las comisiones de alumnos ingresantes. Se observa en ambos cursos que por lo menos un 60% de los alumnos ingresó al campus hace menos de quince días, lo cual indica una buena participación en el mismo.

La Fig. 4 y Fig. 5 ilustran los porcentajes de alumnos que ingresaron al campus al finalizar el primer cuatrimestre, hace menos de 15 días, hace más de 15 días y los que no ingresaron nunca.

Cabe destacar que en el campus se encuentran registrados la mayoría de los alumnos que cursan regularmente la asignatura.

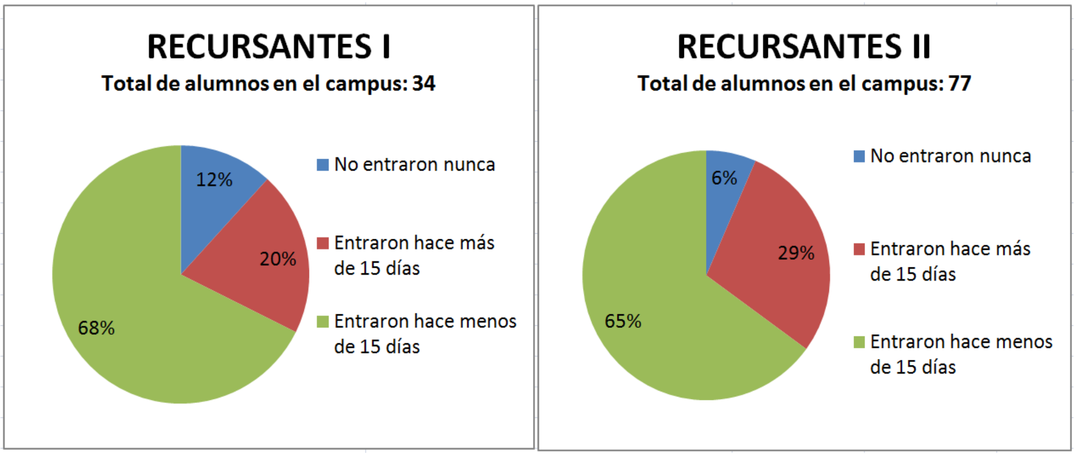


Fig. 5. Utilización del campus virtual en las comisiones de alumnos recursantes. Se observa en ambos cursos un bajo porcentaje de alumnos que no ingresaron nunca al campus. La mayoría accede al campus regularmente debido a las actividades subidas por las docentes.

4.3 Materiales didácticos para enseñar y para aprender

A continuación exponemos algunos de los materiales elaborados y aplicados este año para favorecer los procesos de enseñanza y aprendizaje. Algunos de estos materiales apuntan a complementar ciertos conceptos dados y otros materiales plantean ejercicios o actividades propuestas para que los alumnos trabajen, siempre con el objetivo de favorecer la comprensión y el interés del alumno. Todos los materiales didácticos se trabajaron a través del campus virtual.

Algunos de los materiales brindados a los alumnos para que puedan lograr una mejor comprensión de los temas dados en las clases y sean capaces de relacionar conceptos, de razonar y desarrollar la capacidad lógica-deductiva, incluyen archivos en formato pdf o links con información sobre:

- La construcción paso a paso de algunos gráficos de funciones trigonométricas en un período.
- Características de las funciones trigonométricas y sus gráficas.
- Transformaciones de funciones, donde se estudia cómo ciertas transformaciones de una función (desplazamientos, reflexión, estiramiento) afectan a su gráfica.

Por otro lado, algunas actividades propuestas como materiales didácticos incluyen:

- Resolver un ejercicio integrador de temas (elaborado especialmente por las docentes) en grupos, y llevarlo resuelto a clase. En clase revisamos todas las resoluciones y algunos pasaron al pizarrón a exponer sus resultados. El 80% del curso realizó la actividad y se obtuvieron conclusiones importantes a partir de lo representado en el pizarrón. Se expone el enunciado de la actividad en la Fig. 6, para que se pueda observar que el ejercicio integra los temas I y II de AMI y además es un ejercicio con respuestas múltiples y que favorece el ingenio de cada grupo para inventar una función a partir de sus conocimientos.
- Completar un cuadro con las definiciones y gráficos correspondientes al tema "Límites", con la propuesta de "no memorizar" las definiciones, sino de pensarlas y deducirlas en base al concepto y la interpretación de límite. Dicho cuadro contiene un resumen de las definiciones de límite según la tendencia de la variable y de la función.
- Completar un cuadro de los Teoremas de las funciones continuas (Teorema del Valor Intermedio, Teorema de Bolzano, Teorema de conservación de los signos, Teorema de Weierstrass). En dicho cuadro aparece el enunciado y un ejercicio de aplicación de cada teorema y los alumnos deben completar en los espacios correspondientes: Hipótesis, Tesis y su Interpretación Geométrica.

Por otro lado, con el objetivo de aprovechar las posibilidades didácticas de las tecnologías, innovar y ayudar a los alumnos a adquirir autonomía y a lograr un desarrollo de sus capacidades cognitivas, decidimos utilizar el software GeoGebra, dado que esta herramienta potencia la percepción visual y geométrica de los conceptos, facilitando con ello su comprensión.

GeoGebra es un software libre, sencillo y fácil de utilizar, nos permite la representación de imágenes dinámicas que facilitan la visualización de los conceptos y la resolución de problemas a través de las herramientas y opciones que ofrece.

EJERCICIO INTEGRADOR – TEMAS I Y II

a) Escribir una función $f\!:\Re \rightarrow A \;/\; y = f(x)$ que cumpla con las siguientes características:

- Esté definida por tramos
- Se pueda graficar a partir de las transformaciones estudiadas
- Su dominio sea el conjunto de los números reales ($\Re$)
- Su conjunto imagen sea el conjunto solución (A) del sistema de inecuaciones siguiente: $\begin{cases} |2y-1| \leq 3 \\ |y+2|^2 < 9 \end{cases}$

b) Realizar la gráfica de la función $y = f(x)$. Calcular las intersecciones con los ejes coordenados y colocar los valores en el gráfico.

c) En el mismo sistema de ejes coordenados del inciso anterior, graficar la función $y_1 = |f(x)|$ de tal manera que se diferencie de la gráfica de $y = f(x)$ realizada en b). (Utilizar otro color o un trazo distinto para realizar la gráfica de la segunda función).

Fig. 6. Ejercicio integrador del Tema I: Números Reales y del Tema II: Funciones. Esta actividad fue realizada por los alumnos en sus casas y luego puesta en común en una clase.

En las figuras siguientes (Fig. 7, Fig. 8, Fig. 9) mostramos tres imágenes de algunas de las animaciones que realizamos para la comprensión de conceptos dados en el Tema VI: Derivada. Las mismas están en el campus a disposición de los alumnos.

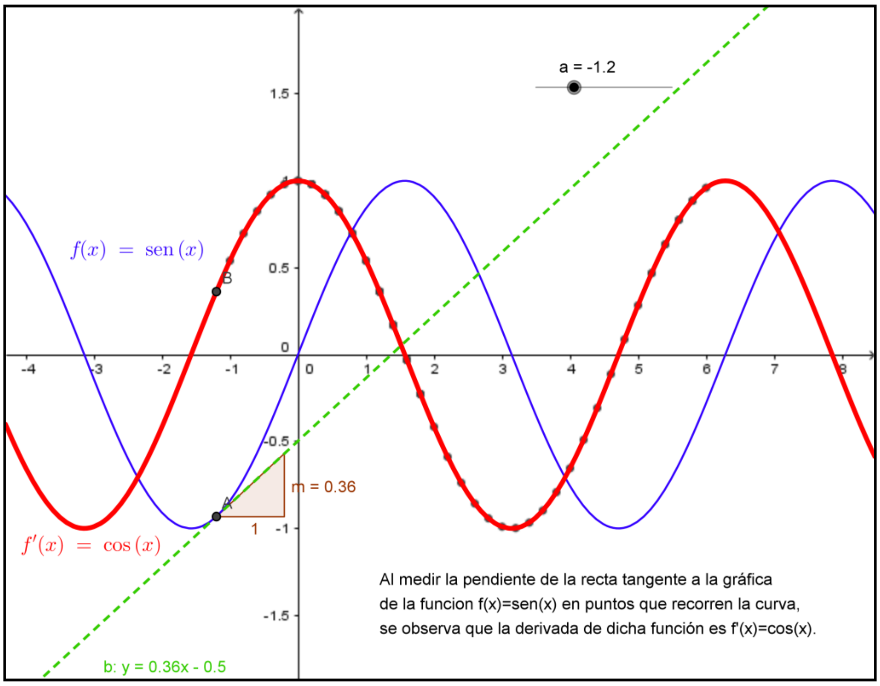


Fig. 7. Imagen de una animación donde se observa que la derivada de la función seno es la función coseno.

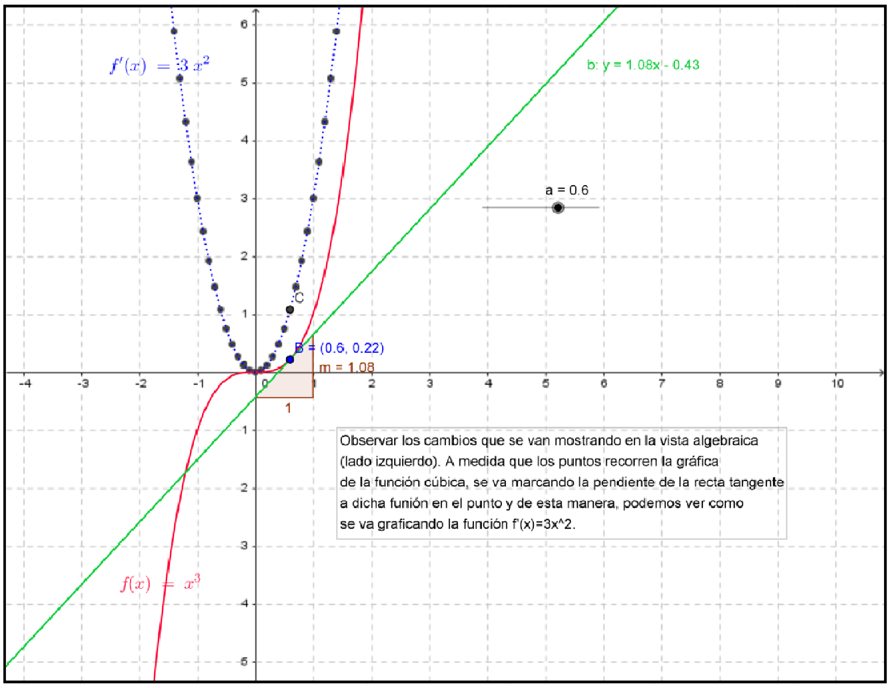


Fig. 8. Imagen de una animación donde se observa cómo se va construyendo la derivada de la función $y=x^3$. El texto que aparece en la imagen explica lo que va ocurriendo en la animación.

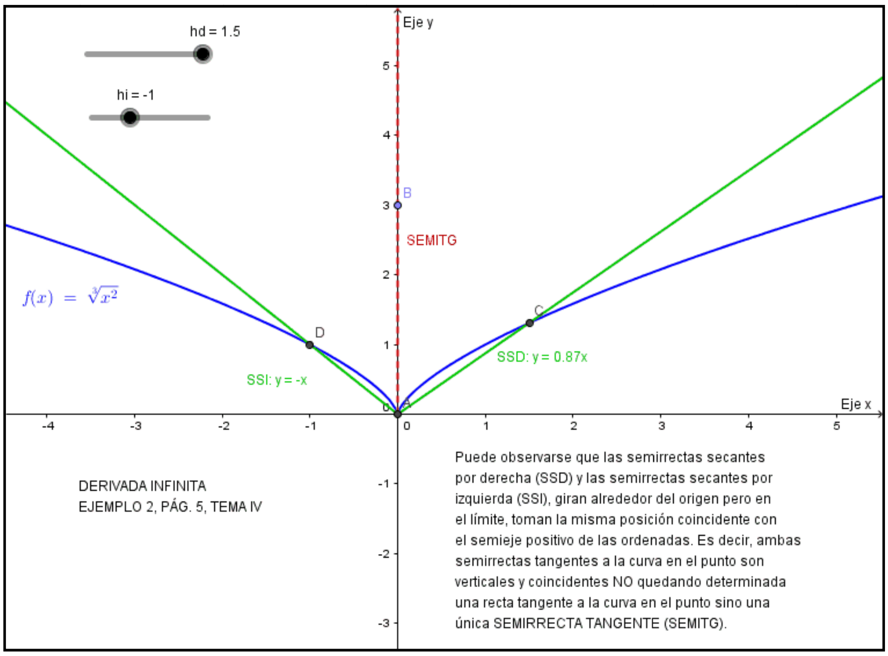


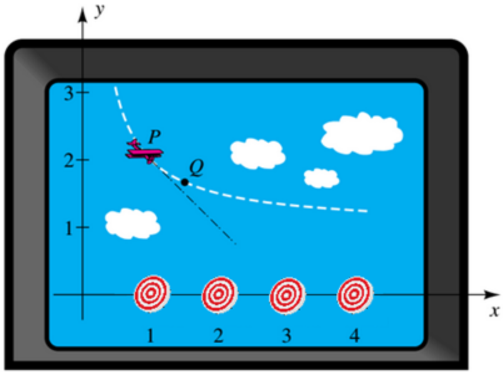
Fig. 9. Imagen de una animación donde se observa un ejemplo de derivada infinita y de semirrecta tangente. El texto que aparece en la imagen explica lo que va ocurriendo en la animación.

Por último, como cierre del primer cuatrimestre, les propusimos a los alumnos un trabajo práctico (TP) sobre recta tangente. La consigna brinda los enunciados de tres problemas para pensar y el TP plantea que cada grupo debe elegir sólo un problema (que les resulte interesante) para resolverlo en forma manual y luego graficarlo en un software a elección para verificar los cálculos y aprender a usar un software. Además les anexamos un listado de software de fácil utilización y algunos comandos que podrían ser de utilidad según el software seleccionado.
El archivo con la resolución del TP debían subirlo directamente al campus virtual, ya que se creó una tarea especial para ello. Los problemas son de resolución sencilla, ya que la idea no era complicarlos con eso, sino que aplicaran los conceptos dados, trabajaran en grupos, utilizaran un software y además el campus. En la figuras

siguientes se muestran los enunciados de los problemas del TP, los cuales fueron recientemente entregados por los alumnos y cuyos resultados analizaremos al comienzo del segundo cuatrimestre.

Video juego.

En el juego de video que se muestra en la figura, un avión vuela de izquierda a derecha a lo largo de la trayectoria dada por $f(x) = 1 + \frac{1}{x}$ y dispara balas en la dirección tangente a dicha curva, para impactar en el centro de los blancos ubicados sobre el eje x en $x = 1, 2, 3, 4$.



a) ¿En qué punto debe estar el avión para que impacte al blanco ubicado en $x = 3$? Justificar la respuesta.

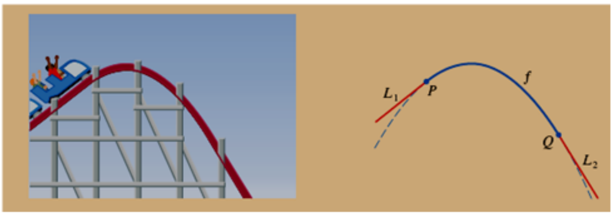
b) Si el avión está en $Q(\frac{3}{2}, \frac{5}{3})$, ¿su disparo impactará en algún blanco de balas? Justificar la respuesta.

c) Utilizar algún software para representar gráficamente las dos situaciones (a) y (b) presentadas en los incisos anteriores (representar la curva, la recta tangente y los puntos).

Fig. 10. Enunciado del problema 1 del TP de recta tangente. En un primer análisis de los TP entregados por los alumnos observamos que éste fue el problema más elegido por los grupos.

Montaña rusa.

Suponga que se le pide diseñar el primer ascenso y descenso de una nueva montaña rusa. Después de estudiar fotografías de sus montañas rusas favoritas, decide que la pendiente de ascenso sea 0.8 y la de descenso -1.6. Opta por conectar estos dos tramos rectos $y = L_1(x)$ e $y = L_2(x)$ mediante una función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$, donde x y $f(x)$ se miden en metros. Para que el trayecto sea uniforme no puede haber cambios abruptos de dirección, por lo tanto desea que los segmentos lineales L_1 y L_2 sean tangentes a la parábola en los puntos de intersección P y Q, como se muestra en la figura.



a) Si decide colocar el origen en P ¿cuál será el valor de c?

b) Suponga que la distancia horizontal entre P y Q es 50m. Para asegurar que la pista sea uniforme en los puntos de transición, ¿cuáles deben ser los valores de $f'(0)$ y $f'(50)$?

c) Utilizar lo anterior para determinar los valores de a y b. Es decir, encontrar una expresión para $y = f(x)$.

d) Utilizar un software para representar en un mismo sistema de ejes coordenados, L_1, f y L_2. Comprobar en forma gráfica que las transiciones son uniformes.

Fig. 11. Enunciado del problema 2 del TP de recta tangente. A futuro, se propone comentarles a los alumnos sobre el uso de curvaturas apropiadas para el diseño real de una montaña rusa, como es la clotoide, y continuar con su estudio en la asignatura Análisis Matemático II.

Parábolas.

a) ¿Cuántas rectas son tangentes a las gráficas representativas de $f_1(x) = -1 - x^2$ y $f_2(x) = 1 + x^2$, simultáneamente? Graficar ambas curvas para ubicarse mejor.

b) Calcular las coordenadas de los puntos en los cuales estas rectas tangentes intersecan a las parábolas.

c) Utilizar un software para representar gráficamente en un mismo sistema de ejes coordenados: f_1, f_2, las rectas tangentes y los puntos obtenidos en b).

Fig. 12. Enunciado del problema 3 del TP de recta tangente. Unos pocos grupos eligieron este problema para desarrollarlo.

5 Conclusiones y trabajos futuros

Cuando nos preguntamos ¿qué es la comprensión?, las respuestas surgen generalmente vinculadas a procesos que podemos observar. Decimos que alguien ha comprendido no sólo si sabe del tema sino que puede pensar a partir de él. Dos ideas surgen de estas afirmaciones.

Primero, para apreciar la comprensión de una persona en un momento determinado, hay que pedirle que haga algo que ponga en juego su comprensión, explicando, resolviendo un problema, construyendo un argumento, etc.

Segundo, lo que los estudiantes responden no sólo demuestra su nivel de comprensión actual, sino que lo más probable es que los haga avanzar.

Por eso nuestra tarea docente es poner al alumno en situaciones que lo ayuden a comprender. Mucho de esto se puede lograr a partir de los materiales didácticos y las formas de enseñanza.

Nuestro objetivo para el cuatrimestre siguiente es utilizar el software GeoGebra en las clases de teoría, ya que esta herramienta nos permite la representación de imágenes dinámicas que facilitan la visualización de los conceptos, para su comprensión mediante un proceso de razonamiento o deducción por parte de los alumnos.

La idea es promover un cambio en la metodología de trabajo en el aula apoyado en el uso de las TIC con el propósito de lograr en los alumnos que:

- adquieran una actitud más activa en su participación en clase,
- aumenten el interés por la materia y la dedicación a la misma fuera de clase,
- sean capaces de tomar decisiones, reflexionar, comprobar, conjeturar, razonar,
- mejoren el rendimiento académico.

Asimismo, continuaremos con las actividades propuestas, los materiales didácticos y el uso del campus virtual.

Consideramos que es importante introducir metodologías que ayuden al alumno a “aprender a aprender” mediante la idea de investigar, consultar, pensar, repensar conceptos, etc. Para ello es imprescindible que los docentes cambiemos nuestra actitud adoptando las estrategias que promuevan el aprendizaje significativo de conceptos fundamentales de las asignaturas y generen las habilidades necesarias para el aprendizaje autónomo. Así podemos contribuir al mejoramiento de las prácticas docentes, lo que redundará en una mejor calidad de la educación y formación del alumno y futuro profesional. Por lo tanto, continuaremos con el desafío de enseñar y aprender Análisis Matemático I en carreras de Ingeniería.

Referencias

1. Litwin, E.: *Las configuraciones didácticas. Una nueva agenda para la enseñanza superior*. Paidós (2000)
2. Perkins, D.: *La escuela inteligente*. Gedisa (1995)
3. Stone Wiske, M. (comp.): *La enseñanza para la comprensión. Vinculación entre la investigación y la práctica*. Paidós (1999)
4. Ausubel, D.; Novak, J.; Hanesian, H.: *Psicología Educativa: Un punto de vista cognoscitivo*. Trillas (1983)