

Universidad Tecnológica Nacional
Facultad Regional General Pacheco

Licenciatura en Enseñanza de la Matemática

***“APRENDIZAJE SIGNIFICATIVO DE LA DERIVADA EN LA
ESCUELA MEDIA A PARTIR DE UNA INGENIERÍA DIDÁCTICA
DISEÑADA EN TORNO A LA OPTIMIZACIÓN DE FUNCIONES”***

Autora: Prof. Carolina Chavez

Directora: Lic. Silvia Seminara

TESINA PRESENTADA PARA OBTENER EL TÍTULO DE LICENCIADA
EN ENSEÑANZA DE LA MATEMÁTICA

Año: **2015**

***“APRENDIZAJE SIGNIFICATIVO DE LA DERIVADA EN LA
ESCUELA MEDIA A PARTIR DE UNA INGENIERÍA DIDÁCTICA
DISEÑADA EN TORNO A LA OPTIMIZACIÓN DE FUNCIONES”***

.....
Prof. Carolina Chavez

.....
Lic. Silvia Seminara

TRIBUNAL

.....

.....

.....
Lugar y fecha

RESUMEN

En esta investigación se pretendió analizar la posibilidad de que sea efectiva una transferencia de conocimientos previos sobre la derivada y recta tangente, que poseían alumnos de 5to año de una escuela secundaria de Capital Federal, a la resolución de problemas de optimización. Es decir, si mediante la aplicación de la propuesta que se describirá en este trabajo, estos alumnos pueden lograr un aprendizaje significativo de la idea de optimización de funciones y dotar de sentido el concepto de derivada.

Decidimos basar dicha propuesta en las ideas planteadas en la Teoría de Situaciones de Guy Brousseau, usando la Ingeniería Didáctica como metodología de investigación.

La secuencia didáctica que propusimos, contiene problemas de optimización que fueron aumentando en dificultad a lo largo de la implementación de esta Ingeniería didáctica, de manera tal que los recursos algebraicos resultaron insuficientes para resolverlos - en un momento de la experimentación - y, por lo tanto tuvieron que acudir a la aplicación de la derivada y al concepto de recta tangente. Así, transfirieron sus saberes previos sobre el tema, para la adquisición de un saber nuevo, y de esta manera vimos cumplido nuestro cometido de propiciar las condiciones adecuadas para que estos alumnos arriben a un aprendizaje significativo de la derivada. Además de recabar información sobre cómo resultó para los alumnos, este aprendizaje, mediante una encuesta que consideramos resultó considerablemente positiva.

Habiendo realizado esta síntesis, esperamos que esta investigación resulte de interés para otros docentes que deseen que sus alumnos logren un aprendizaje significativo del concepto

derivada, como así también- con las modificaciones pertinentes- sirva de modelo para introducir otros contenidos matemáticos.

Esta investigación se encuentra organizada de la siguiente manera:

- Introducción, donde contamos brevemente las líneas conceptuales.
- Capítulo 1, en el que comentamos la problemática, preguntas y objetivos de la investigación.
- Capítulo 2, en el cual exponemos los antecedentes y el marco teórico.
- Capítulo 3, donde reseñamos la metodología empleada, que en nuestro caso es la Ingeniería Didáctica, y los análisis preliminares cuyas conclusiones nos dan herramientas para el análisis *a priori* de lo que esperamos lograr con la aplicación de la secuencia didáctica diseñada para lograr nuestros objetivos.
- Capítulo 4, donde analizamos los resultados de esta investigación luego de la implementación de la secuencia elaborada, realizando un análisis *a posteriori* contrastando con las conclusiones obtenidas del análisis a posteriori.
- Capítulo 5, las conclusiones obtenidas.

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN	5
CAPÍTULO 1: PROBLEMÁTICA, PREGUNTAS DE INVESTIGACIÓN Y OBJETIVOS	8
1.1 PROBLEMÁTICA	8
1.2 PREGUNTAS DE INVESTIGACIÓN	11
1.3 OBJETIVOS DE LA INVESTIGACIÓN	12
CAPÍTULO 2: ESTADO DEL ARTE Y MARCO TEÓRICO	13
2.1 ESTADO DEL ARTE	13
2.2 MARCO TEÓRICO: TEORÍA DE SITUACIONES DIDÁCTICAS	25
CAPÍTULO 3: ASPECTOS METODOLÓGICOS	28
3.1. INGENIERÍA DIDÁCTICA	29
3.2. ANÁLISIS PRELIMINARES	30
3.2.1. ANÁLISIS EPISTEMOLÓGICO.....	30
3.2.2. ANÁLISIS DIDÁCTICO	38
3.2.3. ANÁLISIS COGNITIVO.....	46
3.2.4 CONCLUSIONES DE LOS ANÁLISIS PRELIMINARES	48
3.3. ANÁLISIS A PRIORI	49
3.3.1. PRELIMINARES A LA SECUENCIA DIDÁCTICA	49
3.3.2. LA SECUENCIA DIDÁCTICA Y SU ANÁLISIS	50
3.3.3. RECOLECCIÓN DE DATOS DURANTE LA EXPERIMENTACIÓN	63
CAPÍTULO 4: RESULTADOS	65
4.1. ANÁLISIS A POSTERIORI DE LA EXPERIMENTACIÓN	65
4.1.1. SOBRE EL PRIMER PROBLEMA	65
4.1.2. SOBRE EL SEGUNDO PROBLEMA	80
4.1.3. SOBRE EL TERCER PROBLEMA.....	86
4.2 ENCUESTA	92
CAPÍTULO 5: CONCLUSIONES	97
BIBLIOGRAFÍA	100
ANEXOS	104

INTRODUCCIÓN

Aprender matemática implica una actividad de modelización que, tal como lo expresan Giuliani y Segal (2008), provee una visión integrada de la matemática que permite reconstruir en el aula el “quehacer” de la misma.

Pero además, estas autoras afirman que:

“*[H]acer matemática* es más que resolver problemas. Es encontrar buenas preguntas, buscar medios para resolverlos, desarrollar nuevos métodos, conjeturar propiedades, validar soluciones, confrontar resultados, técnicas y validaciones. Teoremas y definiciones son a la vez productos y herramientas de todo este trabajo de construcción de conocimiento matemático” (Giuliani & Segal, 2008, p.7)

Hoy en día se requiere cada vez más del conocimiento científico para poder desarrollarse y ser parte de la sociedad tecnológica actual, y esto incluye al conocimiento matemático.

Al mismo tiempo, continuamente se presentan escenarios rápidamente cambiantes a los que cada individuo debe tener la habilidad de adecuarse, y esto lleva a la necesidad de tener cierta autonomía para lograr dicha adaptación. Esto conduce, a su vez, a otra necesidad: la de adquirir metodologías en la resolución de problemas, en las que se requiere de la autonomía mencionada anteriormente, la cual debe fomentar el docente de algún modo, estimulando la creatividad. El logro de esa autonomía requerirá, por parte del docente, un cambio de actitud, ya que deberá eliminar su tendencia a dar respuestas para convertirse en un generador de preguntas que permitan al alumno indagar qué saberes le permitirán resolver problemas, y en esa búsqueda, requiera también acudir a sus conocimientos previos.

Por otro lado, la resolución autónoma de problemas no es sinónimo de trabajo individual, por el contrario el trabajo grupal, con el debate de ideas que supone, es esencial para enriquecer el proceso.

Ahora bien, es importante que los alumnos se interesen por resolver los problemas planteados, y en este sentido los aportes de Brousseau (2007) respecto de las situaciones didácticas nos brindan una herramienta a tener en cuenta, tanto en el momento de diseñar la actividad como en el momento de plantearlas en el aula.

A su vez, los docentes necesitamos ser investigadores en el aula para mejorar las prácticas educativas y la calidad de nuestras clases. La ingeniería didáctica es una buena herramienta para tal fin dado que “designa un conjunto de secuencias de clase concebidas, organizadas y articuladas en el tiempo de manera coherente por un profesor-ingeniero, con el fin de realizar un proyecto de aprendizaje para una población determinada de alumnos” (Douady, 1995, p.61).). Este proyecto evoluciona según las respuestas de los alumnos y en función de la selección de actividades y decisiones del profesor. Así, la ingeniería didáctica es el producto resultante de un análisis a priori pero también un proceso durante el cual el docente lleva a cabo ese producto adaptándolo, si es necesario, a la dinámica de la clase.

Con relación a los contenidos de los que nos ocuparemos, el concepto de derivada, como muchos otros en matemática, es muy importante para entender el comportamiento de funciones, sobre todo aquellas que intentan describir y modelizar algún aspecto de la realidad. Sin embargo, en ocasiones los alumnos no llegan a ver o comprender esa importancia sobre la aplicación de la derivada y solamente ven el cálculo de derivadas como un mero procedimiento que deben aplicar en algunas situaciones - que no siempre identifican- o cuando lo solicita el

profesor. Artigue (1995) afirma respecto a esto que los alumnos son capaces de aprender a derivar en forma mecánica, pero que muchas veces en realidad no entienden para qué lo hacen, cuál puede ser su utilidad práctica, y por lo tanto no se puede afirmar que sea un contenido que sepan y posiblemente, al poco tiempo, lo olviden fácilmente.

Es por ello, que en nuestra investigación nos propusimos analizar si era posible lograr en un grupo de estudiantes de 5to año de escuela media, alumnos de la autora de esta tesis, un aprendizaje significativo de la derivada y recta tangente a partir una secuencia didáctica compuesta por problemas de optimización de funciones diseñada para tal fin, apoyada en la Teoría de Situaciones empleando la metodología de la Ingeniería Didáctica.

CAPÍTULO 1: PROBLEMÁTICA, PREGUNTAS DE INVESTIGACIÓN Y OBJETIVOS

1.1 PROBLEMÁTICA

A través de nuestro trabajo diario en el aula tenemos evidencias constantes de cuán complejos resultan la enseñanza y el aprendizaje de la matemática en la escuela media, tanto para nosotros, los docentes, como para los alumnos. Las recogemos a través de los comentarios que los mismos estudiantes realizan durante las clases, acerca de lo dificultoso que les resulta comprender aquello que intentamos enseñar, como también a través de las conversaciones que los docentes llevamos a cabo en salas de profesores, o en las reuniones de trabajo orientadas, entre otras cosas, a pensar estrategias para disminuir esos problemas en la comprensión de los conceptos matemáticos.

Douady (1995) sostiene que para un profesor, enseñar representa la creación de las condiciones que generarán la apropiación del conocimiento en el alumno y que para éste, aprender quiere decir comprometerse en una actividad intelectual cuyo resultado final será disponer de un conocimiento con su doble rol: de herramienta y de objeto. “Para que haya aprendizaje y enseñanza, es necesario que el conocimiento sea un objeto importante, casi esencial de la interacción entre el profesor y sus alumnos” (Douady, op. cit., p.64).

Muchas de las dificultades que los alumnos encuentran para aprender matemática radican en la baja significatividad que algunos contenidos tienen para ellos, en muchas ocasiones porque el docente mismo no propicia los medios ni diseña sus clases de modo que esos contenidos les resulten relevantes y necesarios para resolver situaciones problemáticas reales y se establezcan las conexiones de los nuevos contenidos con el bagaje de saberes previos que tienen los alumnos.

Antoni Ballester (2002) enfatiza la idea de que “si enseñamos de la manera como aprende el alumnado, es decir de manera conectada y relacionada, la mayoría de los alumnos y alumnas aprenderán. En caso contrario pueden aparecer dificultades en el aprendizaje” (p.12)

La importancia de la significatividad de un aprendizaje radica en que si un contenido es incorporado de esa forma por un alumno, éste perdurará en su estructura cognitiva teniéndolo disponible y/o pudiendo evocarlo para aplicarlo a situaciones que estén relacionadas a ese saber directa o indirectamente. Por el contrario, si el contenido que se pretende que el alumno comprenda y aprenda no tiene sentido o lógica para él, y en consecuencia, no tiene significatividad o ésta es muy baja, entonces tenderá a rechazarlo y no se incorporará a su red de conocimientos. En relación a esto último, Ballester también agrega:

El aprendizaje es construcción de conocimiento donde unas piezas encajan con las otras en un todo coherente. Por tanto, para que se produzca un auténtico aprendizaje, es decir un aprendizaje a largo plazo y que no sea fácilmente sometido al olvido, es necesario conectar la estrategia didáctica del profesorado con las ideas previas del alumnado y presentar la información de manera coherente y no arbitraria, “construyendo”, de manera sólida, los conceptos, interconectando los unos con los otros en forma de red de conocimiento. (Ballester, op. cit., p.16)

Este mismo autor sostiene que un aprendizaje adquirido de este modo, significativamente, predispone de manera favorable a los alumnos ya que aumenta su autoestima y motivación, y potencia su enriquecimiento personal.

En opinión de algunos autores, una de las formas de lograr significatividad es que el docente escoja, de entre las situaciones que llevará al salón de clases, aquellas que conduzcan a construir conocimiento de manera tal que el alumno, en su actividad escolar, pueda reproducir, de cierta manera, la actividad científica (Barreiro & Casetta, 2015, p.16). Esto implica que el alumno trabaje con un problema o situación tal como lo haría un científico investigador, es decir que lo tome como propio -con la motivación de hallar su solución- poniendo en juego su creatividad y utilizando todas las herramientas que tiene en su bagaje de conocimientos previos, lo que ocurrirá solamente si la actividad le resulta significativa y se involucra genuinamente con la tarea.

Para llevar adelante tal empresa, la Teoría de Situaciones Didácticas propuesta por Guy Brousseau ofrece un modelo teórico que responde a las intenciones mencionadas anteriormente. Plantea que, a partir de *situaciones adidácticas* y cumpliendo con una serie de fases que el docente procurará cumplir mediante la selección y aplicación de una secuencia de actividades, “los alumnos pueden ‘construir’ un saber que no les fue enseñado y, en cierta medida, pueden ponerlo en juego para resolver nuevos problemas” (Brousseau, 2007, p.114). Este mismo autor sostiene que esta construcción involucrará también la articulación y/o transformación de saberes antiguos que el alumno adquirió en su carrera escolar.

En este trabajo nos preocupa, en particular, la significatividad del concepto de derivada y consideramos que el planteo y resolución de problemas de optimización, que involucran el cálculo de derivadas y su relación con la recta tangente a la gráfica de una función en puntos de su dominio de definición, permite dar sentido a dicho concepto. Si se enseña a derivar, introduciendo un procedimiento que simplemente transforma unas funciones en otras y, luego se dan ejemplos de su aplicación, declamando su utilidad, sin incentivar al alumno para que la

descubra, será difícil que para él el concepto adquiriera un sentido y se transforme en una herramienta que necesita manejar para resolver situaciones problemáticas. Artigue (1995) afirma:

Numerosas investigaciones realizadas muestran, con convergencias sorprendente, que si bien se puede enseñar a los estudiantes a realizar de forma más o menos mecánica algunos cálculos de derivadas (...) y a resolver algunos problemas estándar, se encuentran grandes dificultades para hacerlos entrar en verdad en el campo del cálculo y para hacerlos alcanzar una comprensión satisfactoria de los conceptos y métodos de pensamiento que son el centro de este campo de las matemáticas (p. 97).

En pos de lograr un aprendizaje significativo de la derivada, se propone en este trabajo una secuencia didáctica basada en la teoría de situaciones, con el objetivo de ayudar a los alumnos a que den sentido al concepto de derivada, a su relación con la recta tangente y a sus aplicaciones, a través de la resolución de una secuencia de problemas - de dificultad gradual - escogidos convenientemente.

La secuencia fue aplicada, consideramos que exitosamente. Los alumnos con los que se realizó la experiencia pertenecen a un 5to año bachiller de una escuela secundaria privada del barrio de Belgrano, Capital Federal, donde se desempeña como profesora de matemática la autora de esta tesina.

1.2 PREGUNTAS DE INVESTIGACIÓN

Los interrogantes que guiaron esta investigación fueron los siguientes:

¿Resultan significativos, para los alumnos, los problemas de optimización de funciones elegidos para completar el aprendizaje del concepto de derivada? ¿Son capaces de deducir por sí mismos procedimientos adecuados y eficientes para encontrar los extremos de funciones? ¿Son capaces luego de transferir los conocimientos adquiridos sobre la búsqueda de extremos de funciones a la resolución de nuevas situaciones problemáticas?

Para tratar de dar respuesta a estas preguntas se diseñó la secuencia didáctica que se presentará en este trabajo.

1.3 OBJETIVOS DE LA INVESTIGACIÓN

El objetivo general de este trabajo fue:

Estudiar la transferencia, a nuevas situaciones problemáticas, de conocimientos sobre la derivada mediante una propuesta didáctica centrada en problemas de optimización, basada en Teoría de Situaciones Didácticas y diseñada para tal fin.

Del cual se desprende como objetivo específico:

Describir los desempeños, productos y procesos que se manifiestan a través del trabajo realizado por los alumnos a partir de la aplicación de esta propuesta didáctica.

CAPÍTULO 2: ESTADO DEL ARTE Y MARCO TEÓRICO

2.1 ESTADO DEL ARTE

Tanto el tema de la comprensión del concepto de derivada, como el del aprendizaje significativo de este concepto - y de otros contenidos matemáticos relacionados con él - han sido investigados ampliamente en las últimas décadas, dado que son de gran importancia en los últimos años de la escuela media y en los primeros de la educación universitaria.

Sobre la comprensión de la derivada existen varias investigaciones y documentos que hablan de ello, y en particular nos hemos basado en algunos trabajos del ámbito iberoamericano.

Uno de éstos es un trabajo realizado por el Dr. Crisólogo Dolores Flores titulado “Una propuesta didáctica para la enseñanza de la derivada” (Dolores Flores, 2000), motivado por la vasta cantidad de estudiantes que, en cursos tradicionales del Cálculo Diferencial, no logran comprender sus conceptos básicos, en especial el de derivada, de acuerdo con los resultados obtenidos al finalizar un curso de Cálculo Diferencial, principalmente en México pero con resultados similares en otros países. En el trabajo se señala que la mayoría de los alumnos pueden obtener derivadas de funciones algebraicas mediante fórmulas, pero no llegan a entender el para qué de esos algoritmos que realizan ni el significado de los conceptos. Tampoco consiguen aplicar las ideas clave del Análisis Matemático a la resolución de problemas básicos que involucren fenómenos de variación.

El autor propone en su proyecto de investigación elaborar una propuesta didáctica que favorezca la comprensión del concepto de derivada a través de la formación de ideas

variacionales, y en especial a través de la noción de rapidez de la variación. Esto lo llevó a cabo con estudiantes del centro educativo del Estado de Guerrero de México. En su trabajo, Dolores Flores expone las que, a su entender, son las causas de los problemas que se mencionaron anteriormente y dieron origen a su propuesta. Una de esas causas, sostiene, es la organización de los contenidos del programa de la asignatura, ya que observa que existe en general una marcada estructura formal donde predomina un enfoque abstracto con una débil relación con los fenómenos de variación física. Esto también se ve en los textos de Cálculo utilizados habitualmente en la región, puesto que introducen el concepto de derivada siguiendo un enfoque *intramatemático* dado que lo presentan como un concepto abstracto que pareciera que sólo existe dentro de la misma matemática y que apenas se dan algunos ejemplos relacionados con la realidad. Afirma Dolores Flores (2000):

Todo parece indicar que los textos sacrifican el desarrollo de ideas y significados de conceptos básicos del Cálculo Diferencial imponiendo el predominio del trabajo algorítmico. Como complemento plantean la interpretación geométrica de la derivada, pero ésta poco revela su naturaleza ligada a la cuantificación de la rapidez de la variación. En la cuantificación relativa del cambio encuentra su razón de ser el concepto de derivada [y] los textos usuales en el medio están muy lejos de reflejar esta característica fundamental del cálculo (p.3).

Otra de las causas de la falta de comprensión de los conceptos elementales del Cálculo Diferencial la halla el autor a partir de entrevistas que realizó con docentes de la materia del centro educativo donde llevó a cabo su trabajo, ya que en ellas los docentes manifestaron que, dadas las grandes diferencias en el nivel de partida de los estudiantes al comenzar el curso y a la

gran cantidad de contenidos del programa, deben dedicar la mayor parte del tiempo de las clases a explicar - usando en demasía el método expositivo de enseñanza - relegando la práctica a un tiempo mucho menor en comparación con el anterior, por lo que poco se utilizan los métodos participativos y los estudiantes no tienen un aprendizaje activo. Otra de las causas está vinculada a las dificultades de asimilación de los nuevos conocimientos a los preexistentes, debido a las *preconcepciones y obstáculos epistemológicos* que se generan en la estructura cognitiva de los estudiantes. Finalmente, expone como una de las dificultades intrínsecas en la formación del concepto de derivada al conflicto que genera pasar de la idea de recta tangente con carácter estático, como lugar geométrico en la geometría euclidiana, a una idea de carácter dinámico como sugiere el concepto de recta tangente en el Análisis Matemático a partir de las sucesivas posiciones que van tomando las rectas secantes, puesto que les resulta difícil a los alumnos comprender que realmente se obtenga la tangente por medio de este proceso infinito. Además, a los estudiantes les cuesta aceptar que la tangente pueda cortar a la curva en otros puntos, además de tocarla en el punto de tangencia, pues predomina la idea de la tangente a una circunferencia, en que esto no sucede.

Analizando textos de Cálculo Diferencial, el autor notó que había dos grandes tendencias en cuanto a la enseñanza de la derivada. En una predomina la estructura clásica del Análisis Matemático donde al final se dan las aplicaciones prácticas, mientras que en la otra el contenido se genera a partir de la necesidad de resolver problemas prácticos, de manera tal que los conceptos básicos se forman a partir del problema de las tangentes o de su significado físico. Ambas tendencias suelen manifestarse con ciertas variantes que el autor llamó *enfoques*. En la primera de las tendencias distingue:

- el *enfoque algebraico*, donde se prioriza el trabajo con algoritmos, reglas de derivación y fórmulas;
- el *enfoque numérico*, en el cual abunda el uso de sucesiones numéricas y el concepto de límite de sucesiones;
- el *enfoque formal*, en el que el orden de los contenidos es: números reales, concepto de función como caso particular de relaciones, la definición de límite en términos de ε y δ , una definición rigurosa de continuidad a partir de límite, y finalmente se arriba al concepto de derivada;
- el *enfoque infinitesimalista*, a partir del estudio de infinitésimos;
- y el enfoque de la *aproximación afín local*, en la que se introduce la derivada partiendo de la idea de coeficiente direccional (pendiente) de la recta para definir la pendiente de la secante y luego llegar a los conceptos de velocidad media e instantánea.

En la segunda tendencia mencionada por el autor, destaca esencialmente dos enfoques: el *geométrico* y el *variacional*. En el primero de estos enfoques se parte de la necesidad de resolver problemas de optimización donde los recursos algebraicos no son suficientes por lo que surge la necesidad de calcular pendientes de tangentes en un punto y luego sigue una línea casi histórica de la formación del concepto de derivada a través del problema de las tangentes. En este enfoque se prioriza el aspecto utilitario del cálculo y el significado geométrico de la derivada y según el autor una de las ventajas de este enfoque es que se enfatiza el significado y la utilidad práctica que la derivada tiene en la resolución de problemas, aunque también comenta que, por experiencia propia y la de otros profesores que se la transmitieron, el desarrollo de esta manera insume mucho tiempo y deja poco para el desarrollo de otros temas.

En el enfoque variacional, se propone tomar a la razón de cambio como el concepto fundamental. Se considera como núcleo organizador a la idea de predicción para conocer cantidades por medio de variaciones y se sugiere presentar las ideas fundamentales en forma significativa con un uso mínimo del formalismo matemático y mediante el desarrollo de métodos matemáticos para cuantificar, describir y pronosticar cambios. Se parte de las razones de cambio promedio del estudio de fenómenos de la vida cotidiana y se llega a la derivada como razón de cambio instantánea a través de la idea intuitiva de límite. En este último enfoque se basó la propuesta didáctica del autor. El investigador realiza en primer lugar un trabajo exploratorio con un grupo de alumnos para indagar sobre el estado de sus ideas variacionales luego de realizar un curso tradicional de Cálculo Diferencial. Las preguntas de opción múltiple involucran el concepto de función, la noción de velocidad media y el concepto de derivada. A partir de los resultados de esta encuesta que arrojaron evidencias de que la mayoría de los estudiantes no tienen formadas las ideas correctas sobre la derivada y no la relacionan con los problemas de variación, el investigador diseñó la propuesta didáctica que ofrece en su trabajo, estructurada en, considerando al estudio de la variación como el eje principal del que se desprende el concepto de derivada. Dice el autor: “No se trata de enseñar derivada porque es un concepto matemático interesante sino porque resuelve muchos problemas de variación” (Dolores Flores, 2000, p. 16).

Principalmente en la propuesta se trataron tres nociones físicas: la variación, la rapidez promedio de la variación y la rapidez instantánea de la variación. Y a partir de ahí la propuesta se diseñó en tres fases:

- una *preparatoria*, donde partieron de la modelización de problemas sencillos de la física donde se extraen los conceptos de variable y función, y se estudian sus propiedades básicas.

- otra de *formación del concepto*, que se inicia a través de la rapidez de la variación, particularmente de la velocidad y aceleración promedio. Luego se llega al concepto de rapidez instantánea mediante una aproximación intuitiva al concepto de límite y la utilización de infinitesimales.
- y otra *fase de fijación*, donde se amplía el concepto extendiéndolo a funciones que no dependen del tiempo y así introducir la definición de derivada y la de función derivada que se deducen, por medio de los diferenciales, y se utilizan las fórmulas y reglas básicas de derivación, pero esencialmente en esta fase se resuelven problemas con la intención de fijar el concepto.

Al final de la aplicación de la propuesta, analizaron mediante cuestionarios la influencia que las ideas variacionales desarrolladas tuvieron sobre la comprensión del concepto de derivada donde obtuvieron mejor resultado que los que mostraron el experimento previo al diseño de la propuesta, ya que éstos últimos lograron construir el concepto a través de la propuesta a partir de una aprendizaje más activo, donde el alumno es protagonista.

Por otra parte, Diana Castillo Del Rosario y Víctor Rivera Mancera (2004) también tratan el tema en su tesis de Licenciatura para la Escuela Superior de Física y Matemática del Instituto Politécnico Nacional de México, titulada “Algunos elementos para el aprendizaje significativo de Cálculo con un enfoque constructivista”. En este trabajo, los autores se propusieron diseñar ejercicios y actividades – que llamaron *elementos* – para propiciar un aprendizaje significativo de diversos contenidos de las materias Cálculo I y II de la institución a la que ellos pertenecían. En particular tienen un capítulo dedicado al concepto de derivada y su comprensión, donde las

actividades propuestas intentan evitar la mecanización y contribuir a que el alumno establezca relaciones con conocimientos previos y con base en ellos construya los nuevos. Proponen actividades para realizar tanto con lápiz y papel como a través de la computadora en especial utilizando el programa Cabri Géomètre II.

Concluyen en que el objetivo de lograr un aprendizaje significativo de contenidos de Cálculo fue alcanzado, ya que los mismos estudiantes observaron que aquellos compañeros que aprendían a resolver problemas en forma mecánica tenían luego dificultades para encarar nuevos ejercicios mientras que esto disminuyó notablemente con la propuesta constructivista que ellos llevaron adelante.

Señalan que para llevar a cabo la propuesta fue imprescindible una buena predisposición por parte del alumnado a recibir la enseñanza de los contenidos de forma no tradicional, y que, si bien lo que se aprende de este modo perdura, este tipo de trabajo lleva más tiempo en comparación con la enseñanza tradicional.

Otro trabajo de investigación relacionado con la problemática planteada en esta tesis, es el que realizaron Silvia Vrancken, Adriana Engler y Daniela Müller para la Facultad de Ciencias Agrarias de la Universidad Nacional del Litoral (UNL) de la Provincia de Santa Fe, Argentina, que titularon “Una propuesta para la introducción del concepto de derivada desde la variación” cuyos análisis de resultados publicaron en la revista *Premisa* de la Sociedad Argentina de Educación Matemática (SOAREM) en el año 2008.

Lo que hicieron fue preparar una secuencia didáctica con el propósito de facilitar la construcción del concepto de derivada, asumiendo que el tratamiento y la conversión entre los

diferentes *registros de representación* - numérico, coloquial, geométrico, algebraico - y el desarrollo de ideas variacionales, como la noción de la *razón de cambio*, pueden contribuir a ese propósito. Analizaron los errores y las dificultades que presentaron los alumnos en la resolución de las actividades, para indagar sobre las concepciones de los estudiantes sobre los conceptos de velocidad promedio e instantánea, así como los inconvenientes que se presentaron en el tratamiento de funciones y la conversión entre distintos registros. Para ello elaboraron una secuencia didáctica cuyas actividades pretendían desarrollar habilidades relacionadas con las variables, las funciones y la variación. Dichas actividades se presentaron en distintos registros y requerían las conversiones entre los mismos. Dividieron la secuencia en dos partes. En la primera de ellas, las actividades propuestas demandaban el manejo de los conceptos de variable, función y variación de cada una de las variables involucradas y su resolución pretendía la aplicación de destrezas como representar variables, evaluar y graficar funciones, cuantificar cambios por medios numéricos, geométricos o analíticos y analizar el comportamiento de esos cambios. En la segunda parte aparecen las razones de cambio y su representación geométrica y en la resolución de las actividades se requerían habilidades para calcular cambios relativos - velocidad media e instantánea - e interpretar la velocidad promedio como la pendiente de la recta secante y la velocidad instantánea como la pendiente de la recta tangente.

La secuencia la llevaron a cabo con alumnos que cursaban Matemática II en la carrera de Ingeniería Agronómica de la Facultad de Ciencias Agrarias de la UNL. Los alumnos trabajaron de a pares. La actividad principal realizada en el aula fue el abordaje de los problemas propuestos que los alumnos resolvieron mayormente sin la intervención del docente a cargo de la clase. En síntesis, la propuesta se basó en una introducción intuitiva e informal al cálculo

diferencial y mediante la resolución de los problemas se buscó desarrollar ideas variacionales que llevaran a la comprensión de los conceptos fundamentales.

En cuanto a los resultados, las investigadoras señalan que hubo actividades a las que la mayoría de los alumnos pudo responder correctamente, mientras que a otras sólo un bajo porcentaje de ellos pudo resolverlas sin errores, como por ejemplo aquellas en que debían relacionar el valor de las pendientes de rectas secantes con los cálculos realizados sobre variación o aquellas en que debían hallar la velocidad en base a datos de la trayectoria.

Del análisis de las respuestas, las autoras concluyen que la formación de las nociones de variable, función y derivada se basan en la comprensión de los procesos de cambio, fundamentales para el desarrollo de un pensamiento y lenguaje variacionales, y que un pobre desarrollo de esa comprensión de los procesos de cambio no permitirá la adquisición de los conceptos relativos al cálculo. Señalan que tal desarrollo no se consigue de manera instantánea, sino que es imprescindible un proceso diseñado para tal fin. Analizaron además las dificultades que tienen los alumnos para relacionar de manera correcta los diferentes registros de representación. Concluyen que la modalidad de trabajo que emplearon motivó a los alumnos a la búsqueda de sus propias estrategias de resolución para los problemas planteados y que así lograron promover un aprendizaje más activo, que condujo a aprender mediante la construcción y la reflexión, ya que alentaron además la discusión de las diferentes formas de encarar los problemas y motivaron la fundamentación de las mismas pidiendo argumentaciones y demostraciones de lo que los alumnos iban afirmando a lo largo de la secuencia.

Otra de las experiencias analizadas es la de Álvarez M., Colorado T. y Ospina M. , que realizaron una investigación para la Universidad del Quindío, Bogotá, Colombia, y publicaron luego el trabajo “Una propuesta didáctica para la enseñanza del concepto de derivada” (Álvarez et al., 2013), en el que pretenden determinar la diferencia en el aprendizaje significativo del concepto de derivada y reglas de derivación, en dos grupos de estudiantes de Cálculo Diferencial de la Universidad del Quindío, en uno utilizando la estrategia didáctica de enseñanza orientada desde conceptos previos, recorrido histórico, fases real, simbólica y conceptual y la resolución de problemas, y en el otro la estrategia didáctica tradicional; el tipo de investigación fue comparativa y correccional. Se aplicó la prueba t-student para comparar los resultados entre los dos grupos y llegaron a la conclusión que la propuesta didáctica diseñada en la investigación consiguió que los alumnos del grupo experimental entendieran mejor el concepto de derivada además de que despertaron en ellos un mayor interés por los temas abordados, logrando así que el aprendizaje sea significativo y no por simple reproducción de los contenidos enseñados mediante exposición del docente en clase.

Por otro lado, Gloria Sánchez Matamarros, Mercedes García y Salvador Llinares (2008) publicaron un artículo en la Revista Latinoamericana de Educación Matemática. Estos autores españoles estuvieron motivados a escribir sobre el tema a raíz de las dificultades que presenta la comprensión de la noción de derivada por parte de los estudiantes de Bachillerato -16 a18 años - y primeros años de Cálculo de la Universidad. En este escrito se analizan aportes hechos en otras investigaciones en Educación Matemática sobre el concepto de derivada y su comprensión. En otras palabras, este trabajo es un estado del arte en sí mismo sobre las últimas investigaciones del

tema mencionado. El fin de los autores fue justamente identificar el conocimiento existente sobre este tema hasta el momento. La revisión que lleva a cabo este trabajo se ocupa de tres aspectos:

- a) lo que se conoce sobre la comprensión del concepto de derivada de una función en un punto;
- b) el papel que desempeña los sistemas de representación;
- c) las relaciones lógicas que se establecen entre los conceptos matemáticos que constituyen la noción de derivada

En este trabajo, no sólo se detallan los resultados de las investigaciones acerca de la comprensión del concepto de derivada, sino que también se muestra la manera en que los investigadores han interpretado las formas de resolución utilizadas por los estudiantes describiendo de este modo las características del proceso de aprendizaje.

Otra investigación que merece ser mencionada y que inspiró la metodología del presente trabajo, es el que realizaron Alicia Matassa, Mariana del Valle Pérez, Marisa Piraino y Ana Sadagorsky para la Universidad Nacional de Rosario (UNR), Argentina (Matassa et al., 2011), en el que proponen la resolución de problemas como herramienta de aprendizaje de la matemática y para ello llevaron a cabo una experiencia didáctica con estudiantes de Ingeniería en la materia Análisis Matemático II aplicando la metodología de la Ingeniería Didáctica basada en la Teoría de situaciones didácticas. Este trabajo formó parte dentro de un proyecto de investigación más amplio que luego derivó en la publicación de un libro por parte de la UNR pero en particular la experiencia realizada por las autoras se expuso en la XIII Conferencia Internacional de Educación Matemática llevada a cabo en Brasil en el año 2011.

El objetivo del trabajo propuesto por las autoras era lograr un aprendizaje significativo del concepto de integral definida proponiendo un problema de Física que lo relacionara con el concepto de trabajo. La intención de las autoras fue que los alumnos llegaran a tener la necesidad de plantear y resolver una integral para encontrar la solución del problema propuesto y así la actividad resultara mucho más motivante y significativa que si se la hubiera introducido de manera tradicional.

Previamente se encargaron de precisar qué entendían por aprendizaje significativo o buen aprendizaje - tal como mencionan las autoras en su trabajo - y arribaron a lo siguiente: “La construcción de un buen aprendizaje tiene que ver con todo aquello que hace posible la obtención de aprendizajes duraderos en el tiempo y de fácil transferencia a nuevas situaciones problemáticas” (Matassa et al., 2011, p.2)

En los resultados y conclusiones de la experiencia cuentan que sólo algunos alumnos pudieron resolver el problema en primera instancia mientras que los demás lo lograron luego de recibir un aporte a través de la discusión que generaron ellas entre los alumnos sobre las distintas formas de abordaje surgida casi al final del encuentro en que realizaron la experiencia. Y que así fueron superándose los obstáculos y los errores de planteo, tras lo cual el ciclo de resolución se reinició en esos casos, llegando a la solución del problema a través del planteo de la integral definida tal como era la intención de las autoras. Destacan entonces que, si bien algunos alumnos lograron resolver de manera autónoma el problema acudiendo a sus conocimientos previos de integral definida y transfiriendo éstos a la resolución de la situación planteada, muchos otros lo consiguieron luego del trabajo en equipo con sus compañeros, y/o con la guía de las docentes a cargo que en ningún momento dijeron cómo debía resolverse el problema, sino que propiciaron

que la estrategia surgiera de la discusión generada. En sus conclusiones las investigadoras afirman que “para poder resolver un problema utilizando los conocimientos que [el alumno] posee, éstos deben haber sido aprendidos significativamente y lo importante es el nexo entre la estructura cognitiva del alumno y la nueva información que recibe” (Matassa et al., 2011, p. 8).

2.2 MARCO TEÓRICO: TEORÍA DE SITUACIONES DIDÁCTICAS

La secuencia didáctica que se propuso para cumplir los objetivos planteados en este trabajo se basan en las ideas formuladas en la Teoría de Situaciones Didácticas que desarrolló Guy Brousseau. Por eso es que a continuación las expondremos a fin de luego poder fundamentar la secuencia didáctica mencionada.

La Teoría de Situaciones Didácticas nace a fines de la década del '60 inspirada en el pensamiento constructivista de Piaget puesto que se apoya en la idea de que el alumno aprende por adaptaciones al medio, aunque Brousseau (2007) lo concibe de diferente manera a él. Mientras que Piaget se refiere a la realidad que rodea al individuo, para Brousseau “el medio está formado por saberes disciplinarios, por situaciones matemáticas que el alumno debe aprender”.

Entonces, los marcos conceptuales de uno y otro pertenecen a distintos dominios de investigación: psicológico, el de Piaget, y didáctico, el de Brousseau. Además, oponiéndose al desarrollo de la psicogénesis natural piagetiana, Brousseau propone una génesis artificial donde se destaca el carácter intencional de la intervención con fines de enseñanza” (Carnelli, 2005, citado por Barreiro y Casseta, 2015, p.16).

Esta Teoría es un enfoque sistémico sobre los procesos de enseñanza y aprendizaje que se dan dentro del llamado *triángulo didáctico* formado por el docente, los alumnos y los conocimientos que se ponen en juego, prestando también atención a las relaciones entre esas tres componentes. Se puede decir que esta teoría analiza los procesos relacionados con la transmisión y adquisición del conocimiento matemático intentando descubrir e interpretar cuáles son, como así también producir situaciones adaptadas a los saberes y a los alumnos.

Según Brousseau (1986), lo mejor sería que se llevaran adelante situaciones adidácticas, que son aquellas en las que se hace hincapié en la autonomía del alumno que toma como propio el problema que se propone, y es en su intención de resolverlo por sí mismo que está adquiriendo un conocimiento sin que el profesor intervenga en calidad de oferente de ese saber que quiere ver aparecer con el planteo de dicho problema, sino que su tarea es simplemente ser un guía que genere las condiciones necesarias para tal fin. Una de esas condiciones, y se podría decir que es la principal, es la elección sensata de los problemas. Brousseau (2007) afirma:

Esos problemas, elegidos de modo tal que el alumno pueda aceptarlos, deben lograr, por su propio movimiento, que actúe, hable, reflexione y evolucione (...) [pero] no habrá adquirido verdaderamente este conocimiento hasta no ser capaz de utilizarlo en situaciones que encuentre fuera de todo contexto de enseñanza y en ausencia de cualquier indicación intencional (p. 31).

Con ese espíritu se escogieron los problemas de la secuencia didáctica de este trabajo, de manera tal que éstos movilicen a los alumnos a construir un saber - el de encontrar extremos de funciones - y a su vez puedan reutilizarlos en otras situaciones problemáticas. Cada problema

escogido intentó hacer pasar a los alumnos por las 4 *situaciones* que caracterizan, a su vez, a una situación didáctica, según Brousseau: *acción, formulación, validación e institucionalización*, aunque luego incorporó dos más que Carnelli (2005) describe en su trabajo de investigación acerca de la función cuadrática: *consolidación y aplicación*.

La situación de acción se refiere a los movimientos del alumno por intentar resolver, con los recursos que ya tiene, el problema propuesto. Aquí es donde el alumno examina la situación problemática que se le planteó, busca en su bagaje de conocimientos aquellos que creen que le serán útiles y los reorganiza en su estructura mental.

La situación de formulación hace referencia al planteo de la o las estrategias que el alumno elige para lograr su objetivo. Aquí el estudiante también intercambia información con sus compañeros para ponerse en contacto con otras formas de resolución que luego se llevarán a un debate en clase.

En la situación de validación el alumno, en el debate mencionado anteriormente, trata de justificar y argumentar lo que planteó en la etapa anterior en la que puede descubrir que sus caminos fueron los correctos, o no, y en ese caso es necesario volver a las etapas anteriores. Esta fase es sumamente importante porque da lugar luego a la institucionalización del conocimiento que dio lugar la resolución de dicho problema.

En la situación de institucionalización reaparece explícitamente la intencionalidad didáctica puesto que esta instancia está a cargo del profesor y es su momento de control. Aquí es donde se pone de manifiesto el o los conocimientos que surgieron de las etapas anteriores, y éstos pasan a ser un saber cultural que el alumno tendrá disponible para ser reutilizado en futuros problemas.

Esta etapa es la que más se parece a la clase tradicional donde el docente enseña un contenido, puesto que es él quien resalta el conocimiento que se aprendió.

En las situaciones de consolidación es cuando se intenta que el alumno relacione los contenidos aprendidos con la estructura conceptual que posee y se manifiesta a través de la práctica. Se trata de fijar el conocimiento aprendido.

Y por último, en las situaciones de aplicación, los alumnos deberán emplear los conocimientos y el lenguaje que acaban de adquirir a otras situaciones problemáticas diferentes de las anteriores, es decir transfiriendo lo aprendido a la resolución de otros problemas. Las situaciones de aplicación son las que permiten detectar el grado de significatividad del nuevo contenido que se aprendió midiendo su nivel de funcionalidad.

Otro concepto importante dentro de la Teoría de las Situaciones Didácticas es el de *contrato didáctico* que es el que regula implícitamente las interacciones entre docente, alumno y saber dentro de una situación didáctica. Son aquellas reglas que, sin proclamarse de manera explícita, tanto docente como alumno conocen - por ejemplo, el alumno sabe que su profesor eligió un problema para que él aprenda algo aunque desconozca cuál es ese contenido que surgirá de esa actividad y a su vez el docente, espera que el estudiante actúe en función de las consignas que dio-. Dicho contrato no es estático sino que va transformándose a lo largo del desarrollo de una situación didáctica, que contiene dentro una situación adidáctica. Este contrato didáctico va pasando por rupturas y/o reelaboraciones que tienen que ver con lo que cada actor va esperando del otro en el transcurso de la secuencia.

CAPÍTULO 3: ASPECTOS METODOLÓGICOS

3.1. INGENIERÍA DIDÁCTICA

La ingeniería didáctica que surgió en la enseñanza de la matemática a principios de la década del 80, Artigue (1995) la define como “una forma de trabajo didáctico equiparable con el trabajo de un ingeniero quien, para realizar un proyecto determinado, se basa en los conocimientos científicos de su dominio y acepta someterse a un control de tipo científico” (p.33). Es un tipo de investigación-acción la cual es a la vez una metodología de enseñanza - un producto - y una metodología de investigación- un proceso - y nace asociada a la Teoría de las Situaciones Didácticas. La ingeniería didáctica se caracteriza por poseer en un esquema experimental basado en el diseño, realización, observación y análisis de secuencias de enseñanza aplicados sobre el grupo de alumnos que se quiere estudiar. Al decir de Godino (2013), “se trata del diseño y evaluación de secuencias de enseñanza de las matemáticas teóricamente fundamentadas, con la intención de provocar la emergencia de determinados fenómenos didácticos, al tiempo que se logra elaborar recursos para la enseñanza científicamente experimentados” (p.7).

Para llevarla a cabo se deben cumplimentar 4 etapas:

- Análisis preliminares: donde se deben tener en cuenta los aspectos didácticos y epistemológicos del contenido como así también los aspectos cognitivos de la población a la que se dirige la ingeniería didáctica.
- Análisis a priori: en el cual se diseña la secuencia a enseñar y se detallan las tareas, tiempos, rol del docente, anticipación de posibles respuestas y errores, etc. Se fundamenta en forma teórica la secuencia. En esta etapa los análisis preliminares son insumos para el diseño de la secuencia.

- Experimentación: en esta etapa se lleva a cabo en clase la secuencia y se toman los datos necesarios para la fase siguiente.
- Análisis a posteriori: aquí es cuando se analiza la información recogida y se la contrapone con el análisis a priori. Es cuando se produce el proceso de validación interna y se obtienen conclusiones.

Para llevar a cabo los objetivos de este trabajo se eligió la metodología de la ingeniería didáctica, recién descrita, basada en los conceptos de la Teoría de Situaciones Didácticas que se desarrollaron en el marco teórico. Es por eso que a continuación se detallarán los análisis -fases- definidas anteriormente, propias de una ingeniería, pero en relación a la finalidad de la propuesta de esta tesis.

3.2. ANÁLISIS PRELIMINARES

A continuación se pormenorizarán los análisis propios de esta fase de la ingeniería didáctica en función de los objetivos descritos anteriormente en el Capítulo 2. Estos análisis preliminares guiaron el análisis a priori a partir del cual se diseñó la secuencia didáctica que luego se llevó a cabo en la fase de experimentación.

3.2.1. ANÁLISIS EPISTEMOLÓGICO

El concepto de derivada es primordial en el Análisis Matemático, tanto por la importancia de sus aplicaciones como por su centralidad, conjuntamente con el concepto de integral, en el desarrollo de todo el Cálculo Infinitesimal.

Hoy en día, y desde hace varios años, se estudia este concepto básico en los últimos años de la escuela media y en los primeros años de ciertas carreras universitarias, para luego reaparecer constantemente en las asignaturas de los niveles superiores de muchas carreras universitarias, cada vez que se estudien procesos dinámicos.

La derivada de una función – de una sola variable independiente - mide la rapidez con la que cambia el valor de dicha función, respecto del cambio de valor de la variable independiente.

Según la simbología actual, esta definición se expresa así:

Sea $f: D_f \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ y $a \in D_f$. La función f es derivable en $x = a$, si existe el siguiente límite: $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$

A este límite, cuando existe, se lo expresa como $f'(a)$ que se denomina “la derivada de f en a ”.

Equivalentemente, llamando h o Δx a $x - a$, el numerador queda como $f(a + \Delta x) - f(a)$ -también indicado Δy – y la derivada puede expresarse como el límite de un cociente incremental:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Cualquiera de estas definiciones se utiliza hoy en día en las clases de Análisis Matemático y aparecen en los libros de texto actuales.

Sin embargo, transcurrieron muchos años, desde la génesis del concepto, hasta su definición como límite del cociente incremental. Es más: los conceptos fundamentales del Cálculo no surgieron, cronológicamente, en el orden en el que hoy se enseñan – límite, derivada, integral - sino que se puede afirmar que fue al contrario, ya que las ideas del Cálculo Integral se desarrollaron con anterioridad a las del Cálculo Diferencial, en el cual el límite fue uno de los últimos conceptos importantes del cálculo en formalizarse.

Ponce Campuzano (2015) dice que “históricamente, podemos describir cuatro etapas en el desarrollo del concepto actual de derivada. Primero, la derivada se *utilizó*, después se *descubrió*, posteriormente se *exploró y desarrolló* y, finalmente se *definió*” (Ponce Campuzano, op. cit., p.7). Con esto quiere decir que lo que hoy conocemos como derivada primero se utilizó - aunque no con ese nombre - para resolver problemas puntuales, específicos. Luego se vislumbró que había un concepto general detrás de esos usos y esto podemos considerarlo como el inicio del Cálculo. Después, muchas propiedades de la derivada fueron expuestas y desarrolladas en aplicaciones matemáticas y físicas, pero recién después de un tiempo se la definió en forma rigurosa.

A continuación se desarrollará en forma sintética la historia del desarrollo del concepto de derivada.

El descubrimiento de la derivada - y del cálculo infinitesimal - se atribuye en forma prácticamente simultánea a Isaac Newton (1642-1727) y Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) hacia fines del siglo XVII.

Como ya se dijo, las ideas no surgieron en el mismo orden en que hoy se estudian. Primero, la idea de integración aparece como un proceso de adición ligado a la búsqueda de áreas, volúmenes

y longitudes de arco. Más tarde, la diferenciabilidad surge en conexión con problemas de tangentes de curvas y con cuestiones de máximos y mínimos de funciones. Y aún más tarde se observó que la integración y la diferenciabilidad están relacionados como operaciones inversas.

Aunque la mayor parte de esta historia sucede en el siglo XVII, debemos rastrear su origen en la antigua Grecia, allá por el siglo V a.C. Los griegos definieron a la recta tangente como aquella que toca a una curva solamente en un punto pero no la corta. Pero esa definición sólo es correcta para la circunferencia ya que no funciona para todas las curvas, aunque sabían trazar la tangente para algunas curvas. Por ejemplo, en el siglo III a.C., Apolonio de Pérgamo (262-190 a. C.) definió la tangente a una sección cónica y sabía trazarla en cada caso. Las técnicas para el cálculo de tangentes se limitaban al campo de la geometría. Arquímedes (287-212 a. C) sabía trazar las tangentes a su espiral pero se estima que para hacerlo pensó el problema desde un punto de vista cinemático, hallando la dirección del movimiento de un punto que genera la espiral.

Asimismo, se puede decir que otro indicio de que los griegos se acercaron a las ideas actuales del cálculo, es a través del método de exhaustión de Eudoxo de Cnido (408-355 a.C.) que también podría llamarse *método de agotamiento* puesto que la idea es que toda magnitud finita puede ser agotada mediante la substracción de una cantidad determinada y así lograr arribar al resultado buscado aumentando el grado de precisión del mismo *acercándose tanto como se quiera*, que sería el equivalente al paso al límite actual. El ejemplo más famoso donde se aplicó este método es el procedimiento que usó Arquímedes para hallar una aproximación del número π , en el cual se acerca al área del círculo y a la longitud de la circunferencia a través de polígonos inscritos y circunscriptos a ella, y de esa manera *agota* el círculo. Es decir que, en manos de Arquímedes, el método de exhaustión se convierte en un poderoso instrumento infinitesimal, rigurosamente

lógico, que le permite demostrar numerosos resultados sobre cuadraturas, cubicaciones y centros de gravedad, que hoy obtenemos con nuestras integrales. Uno de ellos es la conocida cuadratura del segmento parabólico (Collete, 2006).

Muchos historiadores consideran a Arquímedes como el verdadero artífice del Cálculo Infinitesimal. Sin embargo, hay ingredientes esenciales de lo que es el Cálculo Infinitesimal que están ausentes en la obra de Arquímedes. Por ejemplo, elude el paso al límite con la doble reducción al absurdo del método de exhaustión, y carece de una formulación de procedimientos generales para resolver problemas análogos; tampoco hay en la obra de Arquímedes siquiera un bosquejo de clasificación de los problemas, sino que a raíz de no manejar álgebra simbólica sino geométrica, la manera de abordar cada problema depende de la estructura geométrica particular del mismo. Tampoco se observa en su trabajo un reconocimiento de la relación de las cuadraturas con las tangentes.

Recién en el siglo XVI, los matemáticos vuelven a ocuparse del trabajo de los griegos respecto a los procesos de variación para solucionar problemas que se plantearon desde la mecánica, y así es que retoman los aportes de Eudoxo y Arquímedes acerca del método de exhaustión para hallar áreas bajo curvas. En esta parte de la historia aparecen matemáticos como Galileo (1564-1642), Kepler (1571-1630), Huygens (1596-1695), Descartes (1596-1650), Cavalieri (1598-1647), Fermat (1601-1665), Wallis (1616-1703), Pascal (1623-1662) y Barrow (1630-1677) entre otros. Durante este período va creciendo el rigor matemático con el que se formalizan los conceptos que van surgiendo y descubriéndose, distinto al usado por los griegos que era geométrico. Se buscan nuevas formas de demostrar los procesos matemáticos diferentes a los del álgebra y la geometría y se estudian las relaciones del movimiento, áreas bajo curvas, recta tangente y máximos y

mínimos como procesos de variación. Durante este período la intuición como razonamiento matemático era muy importante y se destaca el trabajo realizado por Fermat. Él desarrolló un método para calcular máximos y mínimos que data aproximadamente de la década de 1630, que lo explica a partir de un problema simple, que incluso se utiliza hoy en día – con alguna variante - para introducir problemas de optimización. Esta idea la pensó antes de que nacieran Newton y Leibniz, a quienes, como ya se dijo, se consideran los verdaderos padres del cálculo diferencial e integral. El problema analizado por Fermat era el siguiente: dada una línea, dividirla en dos partes de tal manera que el producto de sus partes sea un máximo. En su resolución (Collete, 2006, p.28; Ponce Campuzano, 2015, p. 11), utiliza un término que él llama E , el cual hoy en día puede considerarse como un infinitésimo, y en el proceso de resolución realiza un paso al límite, aunque aún no se conocían estos dos conceptos. Tampoco supo relacionar su método de búsqueda de extremos con la forma de calcular una recta tangente. Lo que Fermat realizó fue un caso especial de lo que más tarde se convertiría en un concepto más general: el de la derivada, aunque él no lo supiera, pero de todos modos puede considerarse que el desarrollo de Fermat fue un gran avance puesto que conjeturó un método funcional que producía resultados precisos.

Durante el período previo a los desarrollos de Newton y Leibniz, afirma Ponce Campuzano:

[E]l contexto físico preparó el camino para el establecimiento de algunas propiedades de la derivada y para la introducción del concepto de cambio dentro de las matemáticas. Sin embargo, la principal motivación para el concepto general de derivada no se originó en la física. La idea principal de la derivada, así como sus aplicaciones, se originó para resolver problemas en un contexto geométrico (Ponce Campuzano, op.cit., p.15).

Luego del trabajo de Fermat, la derivada (que aún no estaba definida en forma precisa) se seguiría desarrollando gradualmente, aunque aún sin encontrar métodos generales de cálculo dado que en general los matemáticos predecesores a Newton y Leibniz se preocupaban más que nada por encontrar soluciones a problemas específicos. Dice Collete (2007) con respecto a Newton y Leibniz:

[F]ueron los primeros que estudiaron los problemas del análisis infinitesimal elaborando un método general y nuevo, aplicable a muchos problemas. La notación algebraica y las técnicas que utilizaron les permitieron no sólo emplear una herramienta más eficaz que la de la geometría, sino también estudiar diversos problemas de geometría y física mediante el mismo método general (Collete, op. cit., p.100).

Newton y Leibniz aprovechando los métodos existentes para el cálculo de tangentes, extremos y áreas, forjaron dos conceptos más generales donde incluían lo ya conocido, que son los que actualmente conocemos como integral y derivada. Newton llamó *fluxión* a su derivada, la cual consideraba como la razón de flujo o cambio, y Leibniz la consideraba como una razón de diferencias infinitesimales y la llamó *cociente diferencial*. Ambos, de forma independiente, pudieron argumentar la relación entre la derivada y la integral -a la que Newton llamó *fluente* - descubriendo que son conceptos inversos.

Además, desarrollaron una notación que hizo más simple el uso de estas dos ideas. Por ejemplo, Newton usaba \dot{x} mientras que Leibniz empleaba dy/dx . Aunque de todos modos aún les faltaba rigor en sus justificaciones debido a que no había todavía un claro concepto de límite y función. Esa carencia de rigor, trajo algunos cuestionamientos de los matemáticos de la época, sin

embargo dado que ambos confiaban en la coherencia, eficacia y fecundidad de sus resultados, ninguno de los dos tuvo algún reparo en continuar con sus investigaciones a pesar de esa falta de rigurosidad (Mateus Nieves, 2011).

Se puede decir que la definición de derivada, tal como hoy se estudia y aprende, se debe a las contribuciones de Lagrange (1736-1813), Cauchy (1789-1857) y Weierstrass (1815-1897). Ellos fueron los que aportaron la rigurosidad que faltaban a las definiciones y a las demostraciones. Aunque antes, también, fueron importantes los trabajos de Taylor (1685-1731), Euler (1707-1783) y MacLaurin (1698-1746).

Lagrange fue el primero en hablar de *función derivada* y utilizar la notación f', f'' , etc que hoy en día usamos y su definición se acercaba a la definición actual a partir de límite, aunque cometió algunos errores que Cauchy corrigió, mejorando así la definición y los métodos empleados por Lagrange para probar resultados vinculados al concepto. Se considera también que Cauchy fue el primero en dar una demostración analítica del famoso Teorema Fundamental del Cálculo que vincula los conceptos de derivada e integral. Luego del trabajo de Cauchy, el cálculo diferencial e integral avanzaron con una base más sólida y formal, con definiciones más precisas y con teoremas cuyas demostraciones estaban apoyadas en esas definiciones.

Pero fue Weierstrass quien introdujo la definición actual, usando el delta (δ) y el épsilon (ϵ) con el fin de que sus alumnos pudieran entender mejor el concepto de derivada. De hecho su trabajo nunca se publicó sino que se hizo famoso en Europa gracias a la difusión de sus alumnos, entre ellos Schwartz y Cantor, por solo mencionar algunos.

A modo de conclusión, diremos que desde Fermat a Weierstrass hay doscientos años de diferencia, aproximadamente, que fue el período de tiempo donde se desarrolló el concepto de derivada hasta llegar a la definición moderna. A modo de síntesis:

Primero, Fermat utilizó la derivada de manera implícita. Después, Newton y Leibniz la descubrieron. Más tarde Taylor, Euler y Maclaurin, entre otros, la desarrollaron. Lagrange la nombró y la caracterizó. Solo hasta el final de este largo periodo de desarrollo, Cauchy y Weierstrass la definieron de manera sistemática (Ponce Campuzano, op. cit., p.30).

Conocer la evolución histórica de este concepto tan importante y que es el eje central de este trabajo, ayuda a su comprensión puesto que muestra la creatividad y el trabajo arduo de los matemáticos que se dedicaron a estudiar la derivada y cómo surgió el concepto puede orientar al docente sobre cómo encarar el concepto en el aula.

3.2.2. ANÁLISIS DIDÁCTICO

En esta sección analizaremos cómo se aborda el tema de la aplicación de la derivada a la optimización de funciones en distintos libros de texto-de uso habitual en la escuela media, para de este modo esbozar un panorama de cómo se enseña, en general, este contenido en las escuelas.

Los libros que se analizarán son:

- 1) *Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales. 2º Bachillerato*. Martínez-Mediano, J. y Cuadra López, R. España: Editorial Mc Graw Hill. 1997.
- 2) *Análisis 2. Matemática Polimodal*. Altman, S.; Comparatore, C. y Kurzrok, L. Buenos Aires: Editorial Longseller. 2005.

3) *Matemática 3*. Itzcovich, H. y Novembre, A. (coordinadores). Carnelli, G. y Lamela, C.

Buenos Aires: Tinta fresca ediciones. 2006.

4) *Nueva carpeta de matemática VI. Cuadernillo 4: Análisis matemático II*. Schaposchnik, R

(coord.). Abdala, C.; Garaventa, L.; Turano, C. Buenos Aires: Aique Grupo Editor. 2007.

Análisis del primer libro (*Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales. 2º Bachillerato*):

En este texto el capítulo 7 se titula “Aplicaciones de la derivada al estudio de funciones. Optimización” y está a continuación del capítulo “La derivada”. Es decir, muestran en forma separada las aplicaciones y no forma parte de la sección anterior. Aunque, por supuesto lo vinculan con todo lo expuesto en el capítulo precedente.

El capítulo en cuestión comienza anunciando los objetivos y procedimientos para cumplimentar los mismos. El primer objetivo es profundizar en el concepto de derivada a partir de algunas aplicaciones, y la lista sigue con objetivos relacionados a la búsqueda de máximos y mínimos y a la resolución de problemas de optimización. Lo que realizan previamente es, como se muestra en la Figura 3.1, analizar en qué puntos la función crece, decrece o toma sus valores máximos y mínimos y cómo se comporta la recta tangente a dicha curva en los puntos señalados. Luego, sin mediar ninguna actividad que sirva para reflexionar lo observado, se pasa a enunciar los teoremas sobre el signo de la derivada primera y su relación con tipo de monotonía de la función en un punto específico. Posteriormente, se exhiben las demostraciones de estos teoremas en forma sencilla a partir de la definición de actual de derivada como límite del cociente incremental. Seguidamente, se dan ejemplos de los teoremas demostrados para luego definir máximos y mínimos a partir del criterio de cambio de signo de la derivada primera y su anulación

o no existencia en dichos puntos, definiendo así el concepto de puntos críticos. Luego se dan ejemplos de funciones que cumplan las diferentes situaciones explicadas y se enuncia una serie de pasos para hallar extremos de funciones y como realizar la gráfica de curvas a partir de la derivada primera, se da un nuevo ejemplo y finalmente se proponen ejercicios de aplicación.

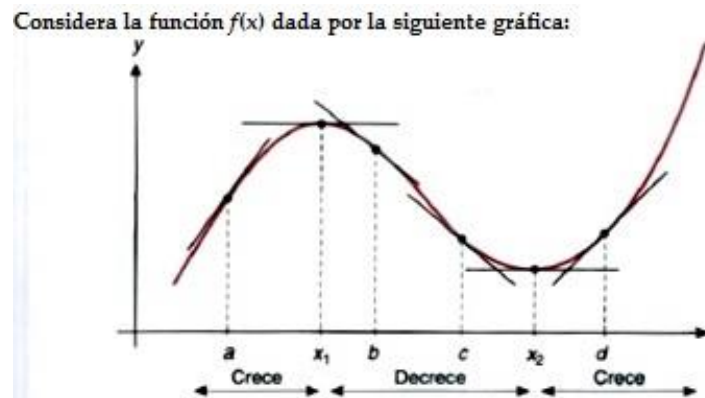


Figura 3.1

Inmediatamente, el texto continúa con las aplicaciones de la derivada segunda: relación con la concavidad y puntos de inflexión, y el segundo criterio para determinar extremos. De nuevo se dan ejemplos aplicados a funciones concretas para mostrar todo lo enunciado anteriormente y luego aparece la sección 4 cuyo título es “Problemas de optimización” donde a partir de una situación problemática concreta se explica directamente cómo usar la derivada en estos casos. Seguidamente, se proponen ejercicios para que los alumnos resuelvan solos aplicando todo lo expuesto. Se puede decir entonces que el tratamiento dado al tema por este texto es lineal y con una tendencia notablemente conductual ya que se exponen los contenidos de manera tradicional - explicación, ejemplo, ejercicios - sin dar lugar a la reflexión del alumno, sino que se los presenta de manera acabada.

Análisis del segundo libro (*Análisis 2. Matemática Polimodal*)

En este libro, y en general toda la serie a la cual pertenece, la forma de presentar la mayoría de los contenidos es constructivista, y se trata de que el alumno arribe al concepto principal de cada unidad a partir de actividades que generen la construcción del mismo. Casi todos los capítulos comienzan con un problema disparador y es en la búsqueda de la respuesta del mismo que el alumno se va acercando de a poco al conocimiento que se quiere introducir.

Sin embargo, no sucede eso en la sección que se encarga de las aplicaciones de la derivada. De hecho, al igual que en el texto anterior, está separado de la unidad donde se introduce el concepto de derivada - el cual se hace a partir de un problema de cálculo de velocidades-. La propuesta de este capítulo es idéntica a la del texto que se analizó anteriormente, donde a partir de un gráfico se pide analizar en qué intervalos la función crece o decrece y en qué valores alcanza algún extremo. La diferencia con el libro anterior es que en éste, si bien se propone analizar también una función continua, la curva presenta un punto *anguloso*, donde no existe la derivada, como se observa en la Figura 3.2, y eso lo hace un poco más interesante que el texto anterior. A medida que se va resolviendo el ejercicio propuesto se van extrayendo conclusiones que luego se convierten en definiciones, que se destacan con recuadros y otro color de letra.

Finalmente se enuncian los teoremas que se refieren al crecimiento o decrecimiento de una función y su relación con signo de la derivada. Luego de desarrollar todo lo referido a la derivada segunda y su relación con el gráfico, se dan más ejemplos resueltos de estudios completos de funciones, para finalizar el capítulo con unos pocos ejemplos de problemas donde se requiere la modelización y la posterior optimización de la función correspondiente. Llamativamente, de la

vasta cantidad de ejercicios propuestos, solo un número muy pequeño son problemas de optimización.

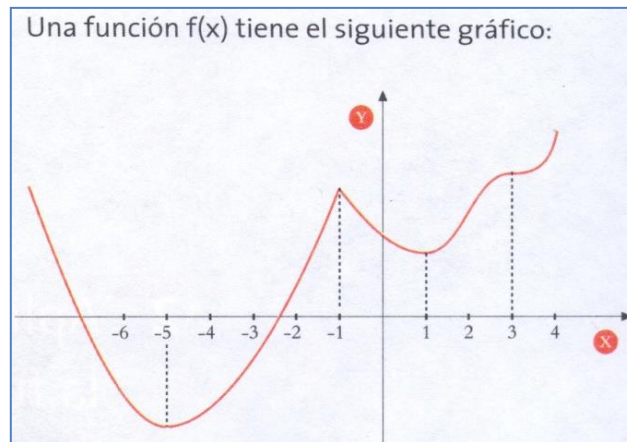


Figura 3.2

Análisis del tercer libro (Matemática 3)

Este texto contiene un capítulo muy amplio que se llama *Límites y derivadas* que tiene subsecciones. Una de ellas está titulada *Estudio de funciones* a continuación aparece otra cuyo título es *Problemas de optimización*.

En la primera de estas subsecciones mencionadas, también se introducen los teoremas que relacionan los signos de f' a partir del análisis del gráfico de f , que es continua, y que posee intervalos donde la curva crece, decrece y tiene máximos y mínimos, donde también aparece un punto *anguloso*, como se muestra en la Figura 3.3. Una diferencia respecto de los gráficos propuestos por los textos anteriores es que se aclara que la función está definida solamente en un intervalo y no para todos los números reales, como sugieren los otros gráficos. Debajo de dicho gráfico se va respondiendo lo pedido y analizando lo que sucede, para luego enunciar los teoremas relacionados con la derivada primera y el comportamiento de la función, tal como en los textos anteriores. Lo curioso es que en este texto no se desarrolla lo relacionado con el criterio

de la derivada segunda y se pasa directamente a la sección “Problemas de optimización”, donde se retoma un problema que se planteó al inicio del capítulo, anunciándose que durante el desarrollo del mismo se adquirirán las herramientas que permitirían encontrar su resolución. Cabe señalar que el problema propuesto lleva a plantear una función cuadrática, pero no se muestra que podría haberse resuelto también pensando en que el extremo se localiza en el vértice de la parábola, sino que se propone la resolución del problema aplicando lo expuesto en la subsección anterior acerca de la búsqueda de extremos aplicando la derivada primera, sin tener en cuenta que los alumnos ya poseían herramientas más sencillas para resolverlo. Posteriormente, se proponen problemas para que el alumno resuelva pero la dificultad de planteo y resolución es muy similar al ofrecido como ejemplo – conducen también a funciones cuadráticas - con excepción de uno que llevará al planteo de una función en el que aparecerá una raíz cuadrada.

Con todo lo analizado anteriormente, se puede concluir que este texto no invita al alumno a pensar distintos tipos de problemas sino que su propósito se limita a que éste mecanice un procedimiento y lo replique varias veces mediante los problemas propuestos de consignas muy parecidas.

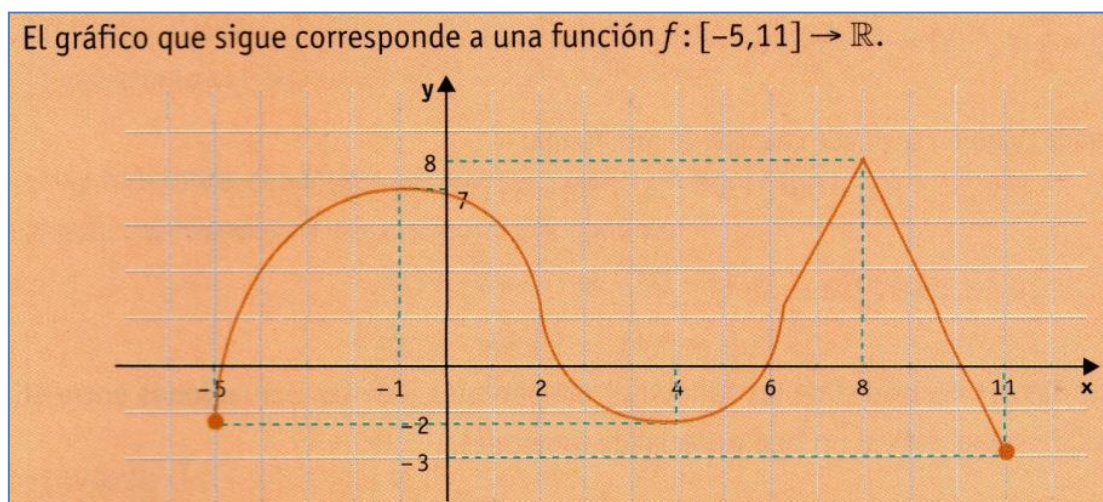


Figura 3.3

Análisis del cuarto libro (*Nueva carpeta de matemática VI. Cuadernillo 4: Análisis matemático II*)

Este texto tiene la particularidad de estar dividido en cuadernillos que tienen contenido mayoritariamente práctico, con una mínima cantidad de elementos teóricos: la necesaria para resolver los ejercicios propuestos que, incluso, pueden desarrollarse en el mismo cuadernillo, que puede utilizarse entonces como carpeta de clase.

Uno de estos cuadernillos, el número 4, lleva el título “Análisis matemático II” porque es la continuación del cuadernillo anterior donde se desarrollaron los conceptos de límite y derivada, y aquí se tratan las aplicaciones de la derivada al estudio de función y el concepto de primitiva.

Respecto de las aplicaciones de la derivada, el cuadernillo comienza con ejercicios de revisión de las reglas de derivación y otros que incluyen gráficos de funciones para que se analice la monotonía de las mismas, pero sin establecer aún relación alguna con conceptos de derivada y recta tangente. En el quinto ejercicio se muestra la gráfica de una función cúbica que se da de manera explícita— sin explicar cómo se obtuvo el gráfico. De manera similar a lo que ocurre en todos los textos analizados con anterioridad, las consignas promueven pensar en el signo de las pendientes de las rectas tangentes en los intervalos donde la función crece, decrece o alcanza un máximo o un mínimo, pero inmediatamente, sin ninguna consigna que invite a reflexionar sobre las respuestas, se procede a enunciar los teoremas relacionados al crecimiento o decrecimiento de una función según el criterio de la derivada primera. A continuación se explica cómo hallar un máximo o un mínimo a partir de dichos teoremas y luego se ofrece un único ejemplo resuelto con detalle, haciendo uso de lo que se enunció anteriormente, pero aplicado nuevamente a una función polinómica de tercer grado. Señalemos que en los textos analizados en primero y

segundo lugar se ofrecen también ejemplos de funciones discontinuas con presencia de asíntotas verticales, horizontales u oblicuas.

Luego se dan los elementos necesarios para analizar la concavidad de una función a partir de la derivada segunda, exponiendo también el criterio de f'' para la determinación de extremos, y a continuación se pasa a la resolución de problemas de optimización. El primer ejemplo ofrecido corresponde, como en el tercer libro, a una función cuadrática y se lo resuelve aplicando el criterio de la derivada primera, sin reflexionar sobre el hecho de que también podría haberse resuelto con lo que los alumnos ya saben sobre la función cuadrática y sus características. Los siguientes problemas propuestos para que el alumno ejercite lo aprendido tienen dificultad similar en su planteo, aunque en algunos casos la resolución requerirá el planteo de una función cúbica, racional homográfica o, a lo sumo, una función irracional, vale decir que requiera de alguna raíz cuadrada en su fórmula.

Conclusión general:

Luego de haber analizado esta muestra de textos de uso en la escuela media, donde aparecen las aplicaciones de la derivada a la búsqueda de extremos de funciones y a problemas de optimización, tema de interés de este trabajo, se puede afirmar que la tendencia de los mismos es conductista, ya que se le cuenta al alumno de forma explícita cómo resolver esas situaciones problemáticas sin permitir que él indague qué herramientas y conocimientos de los que ya posee le serán útiles a la hora de hallar la respuesta o solución correcta y adecuada a cada situación.

3.2.3. ANÁLISIS COGNITIVO

El grupo de estudiantes con el cual se llevó a cabo la aplicación de la secuencia didáctica, que han sido alumnos de la autora de esta tesina durante los años 2014 y 2015 en que cursaron cuarto y quinto años de su escuela secundaria, presenta las siguientes características:

- Está formado por 36 adolescentes, 19 mujeres y 17 varones.
- Al momento de llevar a cabo la fase de experimentación de la secuencia didáctica, en el mes de setiembre, algunos alumnos cuentan con 17 años y otros con 18, por haber cumplido esa edad en el momento del año en que se realizó la experiencia pero no por tratarse de alumnos repetidores ya que el colegio no admite esta opción en el turno mañana.
- Es un grupo que en general tiene un rendimiento académico bueno en matemática, tanto en la participación en clase como en el resultado de las evaluaciones, exceptuando a algunos alumnos en que el rendimiento es muy bajo debido a la falta total de interés en la asignatura.
- Durante los dos años que han tenido de docente a la profesora autora de esta tesina han trabajado varias veces agrupados de a dos alumnos, y en ocasiones, hasta cuatro. Al trabajar de ese modo, la docente ha observado que mejora la participación de aquellos alumnos que no suelen hacerlo cuando ella hace preguntas al grupo durante una explicación en la que no han trabajado previamente en equipo. Es decir, al trabajar en parejas o grupos mayores, algunos alumnos ganan confianza. A su vez, aquellos que sí suelen participar, ejercitan más la argumentación puesto que son los que, en general, lideran esas parejas o grupos fundamentando sus ideas.

- Previo al momento de la puesta en marcha de la secuencia didáctica, han desarrollado y trabajado en clase, junto a su docente, los conceptos de límite, derivada por definición y a partir de las reglas de derivación - algunas de las cuales se demostraron en clase - y la interpretación geométrica de la derivada como pendiente de la recta tangente a la gráfica de una función en un punto. Cabe aclarar que los alumnos ya habían detectado que la recta tangente tiene relación con los intervalos de crecimiento y decrecimiento de una función dado que lo manifestaban oralmente en aquellos ejercicios donde se pedía hallar la fórmula de dicha recta, anticipando posibles respuestas para la pendiente y la ordenada al origen de la misma a partir de la idea intuitiva que les otorgaba el gráfico de las funciones sobre las cuáles se les planteaba la consigna. En general la docente les solicitaba que hallaran la recta tangente a la gráfica de funciones básicas que ellos eran capaces de graficar como funciones cuadráticas, homográficas, exponenciales, logarítmicas. Estos contenidos fueron evaluados antes de la aplicación de la secuencia con un 65% de aprobación a ese examen.
- También durante el año actual de aplicación de la secuencia y el anterior, han trabajado con la profesora problemas que involucren funciones y han tenido que determinar el dominio adecuado para la situación propuesta, de manera que tenga sentido para dicha resolución. Por ejemplo, observando que, si un problema se puede modelizar con una función exponencial cuyo dominio es el conjunto de los números reales, en una situación en particular puede ocurrir que sólo tenga sentido para los reales positivos, o los naturales, como ocurre en los problemas de población.

- La aplicación de la secuencia se realizó durante la semana posterior a que los alumnos hubieran regresado de su viaje de egresados a Bariloche, por lo que se encontraban un tanto dispersos y aún excitados por tal acontecimiento.

3.2.4 CONCLUSIONES DE LOS ANÁLISIS PRELIMINARES

El objetivo de los análisis preliminares detallados anteriormente, fue identificar qué elementos serían tenidos en cuenta a la hora de diseñar la secuencia didáctica para cumplir con los objetivos planteados y responder a las preguntas de investigación.

Si bien estos alumnos ya saben calcular derivadas y conocen su significado geométrico - como pendiente de la recta tangente a una función en un punto -, no se les mencionarán los teoremas sobre crecimiento y decrecimiento de funciones en relación al signo de la derivada primera ni el criterio vinculado con esto último para la búsqueda de extremos, tal como se hace en los libros analizados en el análisis didáctico, puesto que consideramos que esto no favorecería un aprendizaje significativo. Se les plantearán, en cambio, a los alumnos, problemas en los cuales tengan que hallar un máximo o un mínimo a través de con una consigna libre, sin ningún tipo de sugerencia, para que ellos mismos, junto a su compañero de banco, piensen de qué manera pueden lograrlo, y a su vez pongan a prueba el procedimiento y las herramientas que decidieron utilizar para tal fin. Luego, en una puesta en común con el resto de los compañeros, se discutirá la validez y eficacia de las ideas surgidas y se pondrán en evidencia los conocimientos previos que pusieron en juego para resolver y cuáles son las conclusiones nuevas y los contenidos nuevos que fueron emergiendo. La idea será que entonces, a partir del aumento de dificultad de los problemas, vaya emergiendo la necesidad de acudir al concepto de recta tangente, y cómo varía

su pendiente según si la función crezca o decrezca, y así se vayan deduciendo los teoremas sobre la monotonía de un función y extremos de la misma en relación al signo de la derivada primera. Y para esto, también se acudirá, en principio, al registro gráfico de la función para que en su observación se vea como varían las rectas tangentes en los diferentes puntos de la misma. Tratando de emular, en parte, el recorrido histórico del concepto, tal como se describió en el análisis epistemológico. Dado que además, algunas de estas ideas ya traen estos alumnos al momento de aplicar la secuencia según lo comentado en el análisis cognitivo.

3.3. ANÁLISIS A PRIORI

3.3.1. PRELIMINARES A LA SECUENCIA DIDÁCTICA

La intención de la secuencia didáctica será que los alumnos recurran al concepto de derivada, interpretada como pendiente de la recta tangente, para analizar los intervalos donde la función crece, decrece o alcanza un extremo, y de esa manera, que ellos mismos, con la guía de la profesora, enuncien los teoremas que relacionan el signo de la derivada primera con la monotonía de la función, y los ceros de la derivada con la búsqueda de extremos. Para que surja todo esto como una necesidad, se plantearán problemas de optimización de dificultad gradual, para los que al principio podrán responder a la consigna incluso sin necesidad de acudir a la derivada, sino aplicando otros conocimientos previos sobre funciones elementales, pero posteriormente estas herramientas previas serán insuficientes y resultará inevitable recurrir al concepto de derivada, que adquirirá así significatividad por responder a una necesidad genuina de los alumnos. Concretamente se pretende que los alumnos acudan a un análisis funcional, es decir que puedan modelizar la situación mediante la fórmula de una función, para luego hallar el modo y las

herramientas pertinentes que les permitan encontrar los valores extremos que le solicita la consigna. En la sección siguiente se describirán los problemas elegidos para llevar a cabo la secuencia para alcanzar las intenciones antes mencionadas, como así también lo que se pretende con cada uno de ellos, la intervención de la docente y los tiempos destinados a los mismos. Previamente, se recuerda que los alumnos cuentan con los siguientes conocimientos previos – que se tuvieron en cuenta para el diseño de la secuencia didáctica:

- Concepto de función, dominio e imagen.
- Elementos y características de funciones básicas como función lineal, cuadrática, exponencial, logarítmica, homográfica, como así también una idea aproximada del comportamiento de las funciones polinómicas de grado mayor o igual que tres, a partir de la búsqueda de sus raíces, y de las funciones racionales a partir de la búsqueda de sus asíntotas.
- Derivada por definición y a partir de las reglas de derivación.
- Recta tangente de una función en un punto.

3.3.2. LA SECUENCIA DIDÁCTICA Y SU ANÁLISIS

A continuación se explicitarán los tres problemas de la secuencia didáctica que se diseñaron para intentar cumplir los objetivos planteados en esta tesina, junto con la fundamentación de su elección en base a las ideas de la Teoría de Situaciones que constituye el marco teórico de este trabajo, aplicando las conclusiones obtenidas en los análisis preliminares, y tomando ideas de las investigaciones analizadas en el Estado del Arte.

Como se mencionó anteriormente, las consignas serán libres, es decir que simplemente se les pedirá a los alumnos que resuelvan los problemas, sin ninguna sugerencia por parte de la profesora. Se les pedirá que trabajen con el compañero de banco para que discutan cuál es la manera de resolver cada problema y luego decidan una estrategia y las herramientas – contenidos, saberes - que pondrán en juego. Trabajarán sin la ayuda de la docente, la que sólo podrá intervenir si considera que su aporte puede ayudar al razonamiento de los alumnos que soliciten su asistencia, pero revelarles cómo resolver los problemas propuestos. Luego de darles unos minutos para el trabajo con el compañero de banco, la docente dirigirá la puesta en común donde, en forma voluntaria, cada pareja de alumnos deberá explicar cómo resolvió el problema, fundamentando la elección de las herramientas y las estrategias aplicadas, permitiendo que sus pares opinen acerca de estas cuestiones. Se pretende que surja de cada problema alguna o algunas ideas importantes, relacionadas al concepto de derivada y el nexo que tiene con la optimización de funciones, vinculando con la idea de pendiente de la recta tangente a una función en un punto, para lo cual se pretende que los alumnos piensen en la representación gráfica de la función que modeliza cada situación propuesta.

Luego de trabajar con los tres problemas, en cada uno de los cuales se pretende que los alumnos arriben a ciertas conclusiones que se detallan a continuación en la descripción de cada uno, se les pedirá a los estudiantes que enumeren en una lista los pasos necesarios para resolver problemas de optimización, detallando las herramientas que se necesitan usar para tal fin. Finalmente, en la última puesta en común a cargo de la docente, se determinará una única lista de pasos a seguir para resolver este tipo de problemas, previo debate - dirigido por ella - entre los alumnos.

Se estima que el tiempo aproximado que llevará la aplicación de toda la secuencia, incluyendo la confección y discusión de la lista de pasos mencionada, será de 4 clases las cuáles algunas son de 40 minutos y otras de 80 minutos.

Las consignas de cada problema, como así también la propuesta de trabajar en grupos de a dos alumnos, invitan a que los alumnos transiten las situaciones propuestas por Brosseau en su Teoría de Situaciones. Esto es: habrá una primera fase de acción y formulación - en el momento de manipulación de los datos del problema y en el planteo de estrategias de resolución como así también en la búsqueda de herramientas, dentro de su bagaje de conocimientos previos; luego los alumnos pasarán a la fase de validación - cuando tengan que explicar y/o convencer a su compañero de banco, como así también a los demás en la puesta en común, acerca de la eficacia de su elección de conocimientos y estrategias puestas en juego en la resolución de las consignas. La etapa de institucionalización la atravesarán con la intervención de la docente luego de las conclusiones parciales de las puestas en común después de resolver cada problema, como así también al término de toda la secuencia cuando se efectúen las conclusiones finales que integren las anteriores. A su vez, a medida que se avance en la resolución de los problemas, sobre todo del primero al segundo - aunque también se espera que se dé del segundo al tercero - se pondrá en evidencia la fase de consolidación, puesto que se pretende que el alumno relacione los contenidos aprendidos con aquellos que ya posee, y se manifieste a través de la práctica y así fijar el conocimiento – nuevo- aprendido. Por último, se espera que – sobre todo - con el tercer problema de la secuencia, los alumnos transiten la situación de aplicación, ya que deberán emplear los conocimientos y el lenguaje que acaban de adquirir a una nueva situación problemática diferente de las anteriores, transfiriendo por lo tanto lo aprendido a la resolución de otro problema. De esta

manera, como se explicó en el marco teórico, se detectará el grado de significatividad del nuevo contenido, analizando la funcionalidad del mismo.

El primero de los problemas es el siguiente:

Si la entrada a un boliche muy popular cuesta \$70, van a bailar 1000 jóvenes por noche. Debido a que el espacio resulta casi insuficiente para esa cantidad de personas, el local desea que concurra menos gente pero tratando de mantener su ingreso actual o aumentándolo. Por eso, realizan un estudio de mercado, y llegan a la conclusión de que por cada \$5 de aumento que se efectúe en el precio ingresarán 50 personas menos cada noche (debido a que concurrirán a otro boliche).

- a) ¿Conviene que el boliche haga aumentos en el precio de la entrada para mejorar su ingreso por noche?*
- b) ¿A qué precio deberá poner la entrada este boliche para obtener el máximo ingreso? A ese precio, ¿cuántas personas concurrirían a bailar?*
- c) ¿Cuál sería el ingreso máximo?*

En primer lugar, la elección de este problema como primera situación a resolver por los alumnos, se basó en dos cuestiones fundamentales:

- 1) Que su enunciado fuera lo más atractivo posible para generar interés en su resolución. Días antes de la aplicación de la secuencia los alumnos habían regresado de su viaje de egresados a Bariloche y la docente observó que estaban aún muy entusiasmados con la experiencia vivida allí; principalmente se destacaba el impacto que habían causado en ellos

las discos del lugar - locales bailables - ya que las mencionaban reiteradamente en pequeñas charlas con su profesora. Se pensó que si el problema contenía un enunciado que mencionara cuestiones cercanas a su realidad de adolescente podría interesarles más.

- 2) Que su resolución no fuera complicada y pudiera hacerse utilizando conocimientos previos, que no involucraran la derivada, para así poder comparar luego las diferentes formas de resolución.

Lo que se espera de este problema es que los alumnos intenten resolverlo en primera instancia mediante *tanteo*, es decir, proponiendo diferentes valores para la entrada del boliche con su consecuente disminución de público y así analicen la conveniencia de realizar un aumento y cuál sería el monto apropiado para aumentar el ingreso de dinero. Vale aclarar que este primer problema tiene una solución entera: la ganancia se maximiza si se realizan 3 aumentos de 5 pesos, es decir 15 pesos en total, con lo cual ingresarán 850 personas al boliche dando un ingreso – máximo - de 72.250 pesos, con un valor de la entrada de 85 pesos. Se pretende que luego de ese primer tanteo, algunos alumnos al menos lleven esos datos a un gráfico y así observen que los ingresos aumentan con los primeros aumentos pero luego, a partir de cierto monto, comienzan a disminuir, al punto tal de que si se hace indefinidamente se puede llegar a no generar ingreso o incluso a que éste sea negativo, cosa que no tendría sentido para este tipo de problema. También sería de esperar, que luego del tanteo inicial o del gráfico, algunos alumnos logren plantear una fórmula general que permita encontrar el ingreso del boliche en función del aumento al precio inicial y así fundamentar de forma contundente el valor máximo que posiblemente hayan encontrado mediante el tanteo por tabla de valores. Como dicha fórmula corresponderá a la de una función cuadrática cuya gráfica es una parábola cóncava hacia abajo, se espera que

justifiquen el valor máximo hallando el vértice de esta curva. Y dado que ya han trabajado anteriormente con problemas que involucren funciones en su modelización, se cree que algunos alumnos determinarán el dominio de los valores que tienen sentido para esta situación problemática.

Como se indicó anteriormente, la docente hará su principal intervención en la puesta en común donde en primer lugar la dirigirá de tal modo que *salga a la luz* la resolución mediante el planteo de la función cuadrática, cuya variable será la cantidad de aumentos que se irán efectuando al precio de la entrada del boliche, que influirá en la cantidad de personas que ingresan al lugar. Es decir, se pretende que al menos algunos alumnos arriben a la siguiente función: $f(x) = (70 + 5x)(1000 - 50x)$, siendo x la cantidad de veces que se efectúa el aumento al valor de la entrada, con x entre 0 y 6. La docente, realizará preguntas que inviten a pensar cuál es el dominio adecuado del problema, si eso no surgiera en las argumentaciones de los alumnos mientras hacen la puesta en común.

Una vez que todos los alumnos hayan arribado a este modo de resolución-mediante la función cuadrática-, la docente pedirá que piensen si pueden encontrar otro modo de resolución, diferente a los expuestos en la puesta en común. Dado que el tema de recta tangente y derivadas ha sido muy reciente, se espera que algunos alumnos piensen al menos que puede haber una relación y que sugieran que hallando el valor donde la recta tangente es horizontal, se encuentre el máximo – aun cuando esa condición no sea suficiente pero creemos que si arriban a esa conclusión será un gran avance para cumplir el objetivo principal de este trabajo-. Si no llegara a suceder eso, entonces la docente propondrá inmediatamente el segundo problema en el cual no se podrá hallar el máximo solicitado mediante una fórmula – como la del vértice de una parábola- puesto que la

función que quedará planteada será una polinómica de tercer grado. Y en este caso, guiará la puesta en común para que los alumnos piensen en la derivada y recta tangente como herramientas posibles, si es que no surgió dentro de las propuestas de resolución del mismo. Si llegara a surgir como segunda opción de resolución del primer problema la búsqueda del valor del dominio donde la recta tangente es horizontal, es decir donde la derivada de la función se anule, se espera que apliquen esta conclusión a la resolución del segundo problema. Sería deseable también que también en si es suficiente que la derivada valga cero en un valor del dominio, para afirmar que en ese punto se produce un extremo de la misma, y que reflexionen también acerca de los cambios de signo de las pendientes de las rectas tangentes. Si no surgiera esta idea de ellos mismos, la docente intentará conducir a ella mediante preguntas adecuadas, ofreciendo, si fuera necesario, ejemplos donde se advierta que esta condición no es suficiente.

Respecto del tiempo destinado a este problema, se considera que el planteo y resolución por parte de los alumnos, la posterior puesta en común y discusión, llevará una clase de 80 minutos – Es posible que la exploración de la resolución mediante la recta tangente y la derivada – si surge - quede pendiente para el inicio de la clase siguiente.

El segundo problema es el que se enuncia a continuación:

Se quiere construir una caja, sin tapa, partiendo de una lámina rectangular de 24cm por 32cm, recortando un cuadrado de cada esquina y doblando la lámina. ¿Cuánto hay que cortar para que el volumen de la caja sea máximo? ¿Y mínimo?

Este segundo problema fue elegido de modo tal que la función que modeliza la situación sea un poco más compleja que la del problema anterior, pero sin elevar demasiado su dificultad.

Puesto que la función que debería plantearse en este caso es cúbica, los alumnos no podrán utilizar la misma herramienta – determinación del vértice – que usaron con la función cuadrática; sin embargo poseen conocimientos suficientes para realizar un gráfico aproximado y encontrar los extremos mediante sucesivas aproximaciones, hallando imágenes de valores interiores a intervalos que contengan como extremos a las raíces de dicha función.

En esta situación, la respuesta a la primera pregunta es un valor no entero – aproximadamente el corte debe ser un cuadrado de 4,52 cm de lado. Se pensó así para que esta vez no les resulte sencillo hallar la solución por tanteo y este hecho los obligue a explorar otras maneras de resolución más apropiadas. De todos modos, se espera que algunos alumnos vuelvan a intentar resolver *tanteando* la solución, es decir, proponiendo diversos cortes hasta encontrar aquellos que se acerquen a la solución correcta. Una de las expectativas que se tiene con este problema es que la mayoría de los alumnos intente plantear la función modelizadora de la situación, sin explorar mediante el tanteo ya que se supone que extrapolarán lo sucedido en la puesta en común del problema anterior, donde se observó que la resolución mediante el planteo de la función cuadrática fue la más eficiente y permite tener la certeza de que la respuesta obtenida es la correcta.

Una vez planteada la función cúbica, a la que creemos que arribarán planteando el producto de las tres dimensiones – largo, ancho y alto -, se estima que varios alumnos intentarán bosquejar su gráfica aproximada a partir de la observación de ésta, propondrán valores donde se producen el máximo y mínimo solicitados, puesto que se considera que en el problema anterior también acudirán al registro gráfico de la función para analizar la ubicación de su valor máximo. Es importante aclarar que se pretende que tengan en cuenta el dominio para este problema ya que es

algo que se habrá discutido en el problema anterior, es decir, es otra de las ideas que se desea que retomen de las surgidas anteriormente. Con esto queremos decir que esperamos que piensen cuáles son los cortes posibles que darían como resultado una caja, *hasta dónde se puede cortar* y donde deja de tener sentido el corte de la lámina de cartón ya que no podría armarse una caja, tal como lo plantea el enunciado del problema. Se contempla la posibilidad de que haya alumnos que no comprendan cómo debe ser el corte y los dobleces que deben hacerse para armar la caja, en ese caso la docente ayudará en la interpretación a los alumnos que lo soliciten.

La función del volumen de la caja en función del lado x del cuadrado que debe cortarse en cada esquina es: $f(x) = x(32-2x)(24-2x)$, donde x pertenece al conjunto de los número reales mayores que cero y menores que 12 – dado que para valores fuera de este intervalo no tiene sentido. Un croquis similar al que se muestra en la Figura 3.4 es el que se espera que dibujen los alumnos para ayudarse en el planteo de la función.

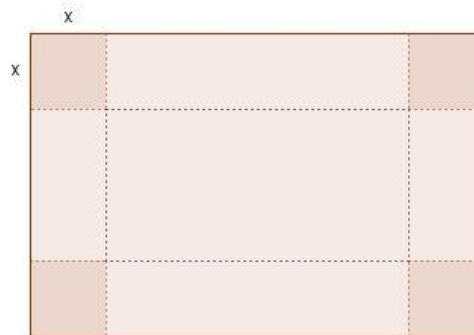


Figura 3.4

Si en la puesta en común del problema anterior, se arribó a la idea de que los puntos en donde la recta tangente a la curva que representa la función resulta horizontal, éstos pueden ser extremos, y que luego, para decidir si efectivamente lo son y de qué tipo – máximo o mínimo – basta con analizar si la función crece o decrece a cada lado de esos puntos, se aspira a que los

algunos alumnos apliquen dichas conclusiones para hallar la solución de este problema, inmediatamente después de haber planteado la función -y esperamos que- con su dominio adecuado.

En cambio, si en el problema anterior no surgiera la resolución mediante el uso de la derivada, la docente irá guiando a los alumnos que plantearon la función correspondiente a que arriben al uso de esta herramienta, basándonos en las sugerencias que C. Dolores Flores (2000) plantea en su trabajo - ya mencionado en la sección Estado del Arte -, cuando describe el enfoque *geométrico* y hace notar la necesidad de resolver problemas de optimización donde los recursos algebraicos no son suficientes y resulta imprescindible calcular pendientes de tangentes en diferentes puntos de la función, puesto que el signo de las mismas está relacionado con el crecimiento o decrecimiento de la curva que la representa. La guía hasta tal objetivo se llevará a cabo mediante comentarios, por parte de la docente, como: “Ahora que saben cuál es la función que calcula el volumen de las diferentes cajas que pueden armarse según el corte que se realice en las esquinas, ¿cómo encuentran el valor máximo? ¿Hay una fórmula para hallar los valores máximos y mínimos, como para hallar el vértice de una parábola, en el caso de la función cúbica?”. La intención de este tipo de preguntas es que los alumnos detecten que no existe un procedimiento algebraico para hallar lo pedido y que entonces deberán explorar otro modo de hallar la solución deseada. Posiblemente, la docente los tenga que ayudar a pensar en cómo son las tangentes en los puntos máximos o mínimos y en los intervalos anteriores y posteriores a dichos valores. Dado que, como se mencionó en el análisis cognitivo, los alumnos ya habían detectado que el valor de la pendiente de la recta tangente tiene relación con los intervalos de crecimiento y decrecimiento de una función anticipando posibles respuestas para la misma a

partir de la idea observación que efectuaban del gráfico de las funciones sobre las cuáles calculaban tangentes, consideramos que a partir de las preguntas-guía de la docente, arribarán a la conclusión esperada: que para hallar un extremo deben encontrar el valor del dominio donde la función derivada se anula como así también analizar el signo de ésta antes y después de dicho valor. Como se dijo antes, en principio, la docente realizará estas preguntas, que induzcan a llegar a las conclusiones esperadas, a aquellos alumnos que observe que han modelizado el problema, es decir hayan encontrado la función correspondiente pero se encuentren imposibilitados de continuar la resolución, buscando los extremos pedidos. Pero si esto les ocurre a la mayoría de los estudiantes – hecho que consideramos bastante probable-, entonces realizará los cuestionamientos – preguntas - a toda la clase, procediendo luego como ya se relató unas líneas atrás. Si bien en este momento ya se arribará a importantes conclusiones, no se formalizará mediante la enunciación directa de los teoremas que vinculan el crecimiento o decrecimiento de una función con el signo de la derivada primera, sino que se dejará para el final de la puesta en común del tercer – y último- problema. De todos modos, el arribo a estas conclusiones, mediante la intervención de la docente, constituye el tránsito por la fase de institucionalización planteada en la Teoría de Situaciones.

Respecto de la segunda pregunta de este segundo problema, ésta no tiene solución. Es decir, la respuesta correcta es que no existe un corte que proporcione una caja cuyo volumen sea mínimo, puesto que si se realiza dicho corte de manera tal que alguna de las dimensiones –largo, ancho y alto- sea muy pequeña, tendiendo a cero, el volumen será casi nulo. Se espera que esta pregunta genere un debate, para arribar luego a una respuesta en forma conjunta.

El tercer, y último, problema de la secuencia es el siguiente:

Se van a construir saleros con forma de un cilindro vertical que debe tener una capacidad de 50 cm^3 . ¿Qué dimensiones deberá tener para que el costo de la materia prima sea mínimo?

La resolución de este problema es más compleja que la anterior. Sobre todo porque la función que se debe plantear tiene una fórmula más complicada que a las que se arriban en los dos problemas anteriores puesto que será la siguiente función racional –llamando A al área lateral- :

$A(r) = 2\pi r^2 + \frac{100}{r^2}$, si se plantea en función del radio del cilindro, pudiendo tomar éste valores reales positivos. O quedará planteada de la siguiente manera si se toma como variable la altura del cilindro, siendo h cualquier número real positivo: $A(h) = \frac{100}{h} + 2\pi h \sqrt{\frac{50}{\pi h}}$.

Para este problema, es de esperar que los alumnos no intenten encontrar la solución correcta por aproximaciones – tanteo-, porque se supone que las puestas en común de los problemas anteriores colaborarán a que los estudiantes se convenzan de que el planteo de una función modelizadora de la situación problemática conduce a una forma de resolución más efectiva y económica –tanto en tiempo como en cantidad de cálculos-. Además, si logran arribar a alguna de las funciones mencionadas en el párrafo anterior, observarán que sus fórmulas son más complicadas que las del ejercicio anterior y que hallar imágenes de ciertos valores requiere de mayor trabajo aritmético y es complicado estimar valores posibles que minimicen la función por simple ensayo y error.

También en este caso, se cree que no intentarán acudir al registro gráfico de la función puesto que ya no se trata de funciones cuya curva representativa es fácil de imaginar y/o bosquejar. Por lo tanto, consideramos que las dos posibles funciones que se pueden plantear para resolver este problema, conducen a que los alumnos piensen que las estrategias de hallar la solución mediante tanteo y/o mediante la observación de su gráfico son ineficientes, y por lo tanto no tendrán más opción que acudir a la aplicación de la derivada, empleando las conclusiones obtenidas con los problemas anteriores. Es decir, derivando la función e igualándola a cero para hallar los posibles valores extremos de la función, pero luego analizando el cambio de signo de ésta, a izquierda y a derecha de dichos valores que anulan la derivada primera. La intención con la resolución de esta situación problemática es que consoliden el nuevo saber que emergió a partir del planteo, resolución y puesta en común de los dos problemas anteriores. En la discusión de la resolución de este problema, es decir en la puesta en común, la docente les pedirá a los alumnos, que junto a ella, intenten enunciar los teoremas relacionados a la monotonía y búsqueda de extremos de funciones y de esta manera se institucionalizará el nuevo saber: la aplicación de la derivada para la optimización de funciones. Y a su vez, se le está otorgando una utilidad concreta al concepto de derivada que ya conocían antes de la aplicación de esta secuencia, tal como destaca C. Dolores Flores (2000) en su trabajo respecto del enfoque geométrico de la derivada, donde enfatiza el significado y la utilidad práctica que este enfoque tiene en la resolución de problemas. Se espera que con este problema los alumnos atraviesen las fases de consolidación y aplicación – descritas en el marco teórico- . La primera de ellas porque habrán de reforzar lo aprendido y, la segunda porque se podrá detectar el grado de significatividad del nuevo contenido si logran apreciar la utilidad de la derivada y a su vez relacionarla con una idea nueva, transfiriendo los conocimientos

previos al contenido nuevo: la de optimización de funciones. Si ambas fases se consiguen, estaremos en condiciones de afirmar que hemos cumplido los objetivos – general y específico - propuestos en esta tesina.

Luego de haber enunciado los teoremas, la docente le solicitará a los alumnos que piensen cuáles son los pasos necesarios que hay que llevar a cabo para resolver un problema de optimización. Con esto, se tendrá un indicio más acerca de que si los estudiantes comprendieron los teoremas y son capaces de generalizarlos a cualquier situación, sin importar la función que se pueda plantear para modelizar los problemas. También se realizará una puesta en común de estas listas de pasos, para que se genere una nueva discusión acerca de cuál es la lista de procedimientos más adecuada, que podría llegar a ser una combinación de las sugerencias que escriban los alumnos y no una que haya hecho un estudiante en particular.

3.3.3. RECOLECCIÓN DE DATOS DURANTE LA EXPERIMENTACIÓN

Todo lo ocurrido en las clases donde se efectúe la experimentación de la secuencia descrita en la sección anterior, se registrará de la siguiente manera:

- Por un lado, la docente tomará nota de todo lo relevante que se haya observado durante cada clase, haciendo un relato minucioso de todo lo que haya sucedido: reacciones de los alumnos, maneras de proceder, diálogos importantes, etc.
- Por otro lado, se recogerán las producciones de los alumnos al final de cada clase, aun cuando no se llegara a terminar un problema, para que los alumnos no alteren el material que surge de la misma y sea el genuino surgido de la actividad en clase, de producción de

los propios alumnos, sin intervenciones de personas externas a la clase – como la colaboración de un padre o profesor particular-. Dichas producciones se escanearán para contar con esa evidencia al momento de realizar el análisis a posteriori, luego se les devolverá ese material a los alumnos dado que será también parte de su carpeta de estudios para realizar futuras tareas o evaluaciones.

CAPÍTULO 4: RESULTADOS.

4.1. ANÁLISIS A POSTERIORI DE LA EXPERIMENTACIÓN

4.1.1. SOBRE EL PRIMER PROBLEMA

Tal como se relató en el capítulo anterior, en el primer encuentro la docente se limitó a entregar la consigna del primer problema a los alumnos y pedirles que intentaran resolver cada ítem, pensado y discutiendo con su compañero de banco, hasta ponerse de acuerdo en una respuesta única por cada par de alumnos.

Micaela – quien en general ha sido buena alumna y es de las más participativas en clase - enseguida preguntó: “¿Cómo lo resolvemos? ¿Tenemos que hacerlo de un modo en especial?”, y varios compañeros se sumaron a esta pregunta también. La docente les respondió que lo resolvieran como quisieran, como lo creyeran más conveniente. La respuesta los sorprendió como denotaban las expresiones de sus rostros y las preguntas que hicieron a continuación, como por ejemplo “¿Entonces podemos usar cualquier *cosa* de las que sabemos, aunque no la hayamos aprendido este año ni con vos?”. Cuando la docente les respondió que podían apelar a cualquier conocimiento que tuvieran, sin importar cuándo ni con quién lo aprendieron, comenzaron a leer con atención el enunciado, e hicieron algunos comentarios sobre la consigna; por ejemplo Ilan preguntó en tono de broma “¿Qué boliche es? ¿Grisú? ¿Cerebro?” – dado que, como se comentó en el análisis cognitivo, hacía unos días que habían regresado de su viaje de egresados a Bariloche y esos locales bailables que el alumno mencionó son de esa ciudad. Sus compañeros respondían con risas y sonrisas, pero también se generó este diálogo entre Ilan y su compañero Sebastián R.:

Sebastián: – No, Ilan. No puede ser ninguno de los boliches de Bariloche... ¡porque la entrada vale más de 70 pesos!

Ilan: – Bueno, es un chiste. Pero bueno, podría ser un boliche de acá [Capital Federal]. ¡*Apple* por ejemplo!

S: – Sí, puede ser. *Profe*, ¿qué boliche es? ¡Con ese precio, vamos todos!

I: – Y sí. Por eso va tanta gente, porque [el valor de] la entrada es barata, como en *Apple*. Yo creo que le va a convenir al dueño del boliche subir el precio pero un poco, sino no van a dejar de ir muchos [jóvenes].

Luego de escuchar la reflexión de Ilan, la docente le dice que intente resolver el problema y así podrá comprobar si lo que afirmó en el diálogo con Sebastián R. es cierto o no.

El resto de los alumnos emitían opiniones mientras transcurría el diálogo de estos dos alumnos y varios estaban de acuerdo con la reflexión de Ilan. Enseguida comenzaron todos a trabajar sobre el problema. La mayoría de los alumnos lo hizo con su compañero de banco, tal como lo solicitó la docente, pero hubo excepciones: cuatro chicas pidieron hacerlo juntas y la docente accedió porque consideró que no generaría ningún cambio esencial en lo planeado en el análisis a priori.

El tiempo que se destinó a que los alumnos pensaran el problema y probaran sus estrategias, fue de 20/25 minutos aproximadamente; solicitaron más tiempo cuando la docente quiso empezar la puesta en común a los 15 minutos, ya que se encontraban entusiasmados en hallar las respuestas.

Mientras los estudiantes trabajan en equipo, la docente recorría el aula observando los debates internos, que eran intensos en algunos casos, cuando cada uno proponía una forma diferente de resolver y no lograban un acuerdo al respecto; en esos casos, en su mayoría, decidían que cada uno resolviera el problema con su estrategia y luego compararían las respuestas. En algunos grupos, escogían una de esas formas de resolución para exponer en la puesta en común, puesto que sucedía que uno de los alumnos lograba convencer al otro sobre su estrategia y las herramientas que utilizó. Aquí es donde se observó los alumnos transitar las situaciones de acción y formulación, tal como lo planteó Brousseau (2007). También se observa que se producen situaciones de validación, en el seno de cada par de alumnos, al argumentar y probar la eficacia de la estrategia y herramientas elegidas ante su compañero de equipo.

La mayoría de las parejas de alumnos, eligió comenzar a buscar la respuesta de la primer pregunta calculando el ingreso total –en dinero– de una noche, considerando un aumento de la entrada en 5 pesos, es decir si ésta valiera 75 pesos, y calculando la cantidad de personas que ingresarían al localailable en ese caso, 950, para luego multiplicar dichos valores y comparar ese valor con el ingreso inicial del boliche cuando la entrada es de 70 pesos y acuden al local 1000 personas. Aplicando sucesivamente esta misma estrategia intentarían investigar qué valor de la entrada genera el ingreso máximo. Algunos grupos organizaban la información en una tabla de valores, otros simplemente realizaban cálculos sueltos. También se observó que algunas parejas se dividían la tarea de realizar cálculos, es decir uno de los alumnos realizaba los cálculos si el valor de la entrada aumentaba, por ejemplo, hasta 4 veces 5 pesos y el otro a partir de 5 aumentos.

Algunos alumnos notaban que el ingreso aumentaba hasta cierto valor y que luego comenzaba a disminuir, entonces pensaron que una función cuadrática podría describir la situación – ellos decían, a la profesora, “creemos que tiene que ver con una parábola, tendríamos que encontrar la fórmula”. Los grupos que detectaron esto concentraron sus esfuerzos en lograr encontrar esa función. Algunos lo consiguieron, otros no.

En la Figura 4.1 se muestra la producción de Sebastián B. y Santiago; ellos no lograron plantear la función, pero hicieron una reflexión acerca de los valores del ingreso total según la cantidad de personas y precio de la entrada.

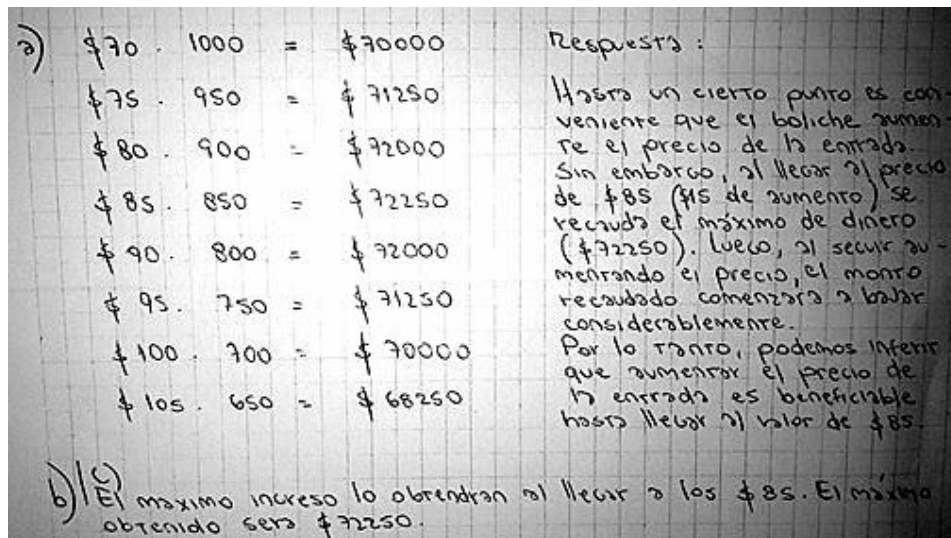


Figura 4.1

Algo similar, con una reflexión más breve, es lo que también hicieron Tomás y Donna, como se ve en la Figura 4.2.

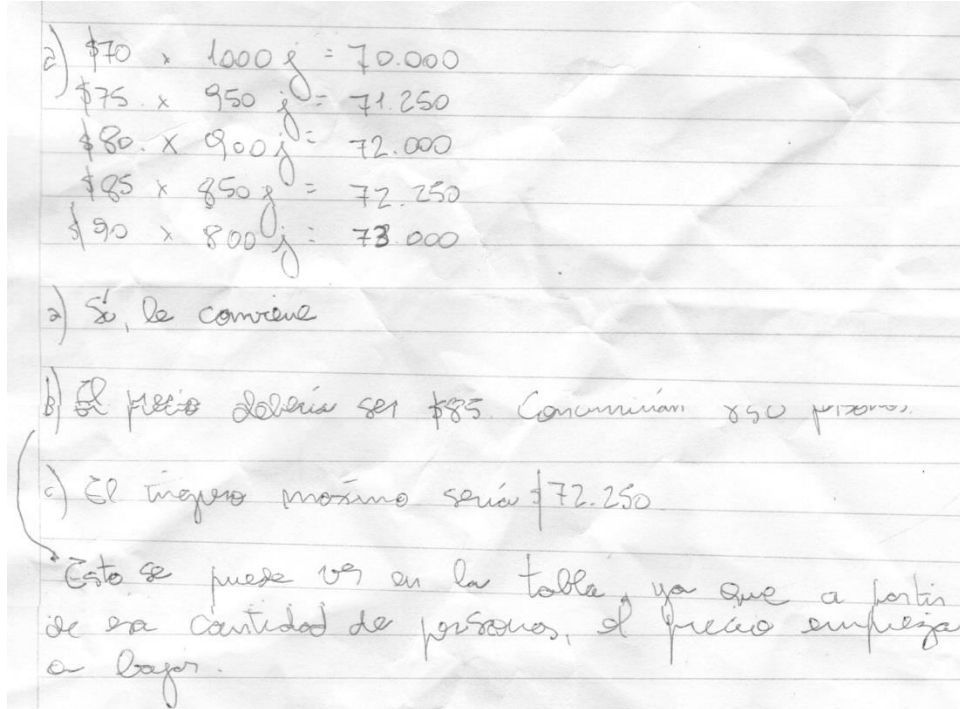


Figura 4.2

Luego del trabajo en parejas, la docente propone realizar la puesta en común. Le solicita a alumnado que, en forma voluntaria, relaten cómo resolvieron el problema y a qué respuesta llegaron.

Todos respondieron que convenía que el boliche realice aumentos en el precio de la entrada puesto que, si bien concurrirían menos personas, el ingreso total – monetario – aumentaría. A este hecho llegaron en principio, como se dijo antes, mediante el cálculo del ingreso suponiendo un valor del precio de la entrada mayor al actual con el correspondiente cálculo de la cantidad de personas que asistirían al local.

Todos los grupos llegaron a la respuesta correcta respecto de qué valor es el apropiado para que el ingreso sea máximo. Más de la mitad de los alumnos contaron que lo lograron

mediante el tanteo; el resto relató que lo encontraron a partir del de determinar el vértice de la función cuadrática que consiguieron plantear, aunque la mayoría de éstos arribaron a ese resultado mediante tanteo primero, y a partir del uso de la función, constataron dicho valor.

Por ejemplo, es el caso de Mateo y Franco, quienes primero realizan los cálculos para determinar si conviene o no aumentar la entrada – en este caso, trabajando de manera más desordenada, como se ve en la Figura 4.3- para luego plantear la función cuadrática correspondiente.

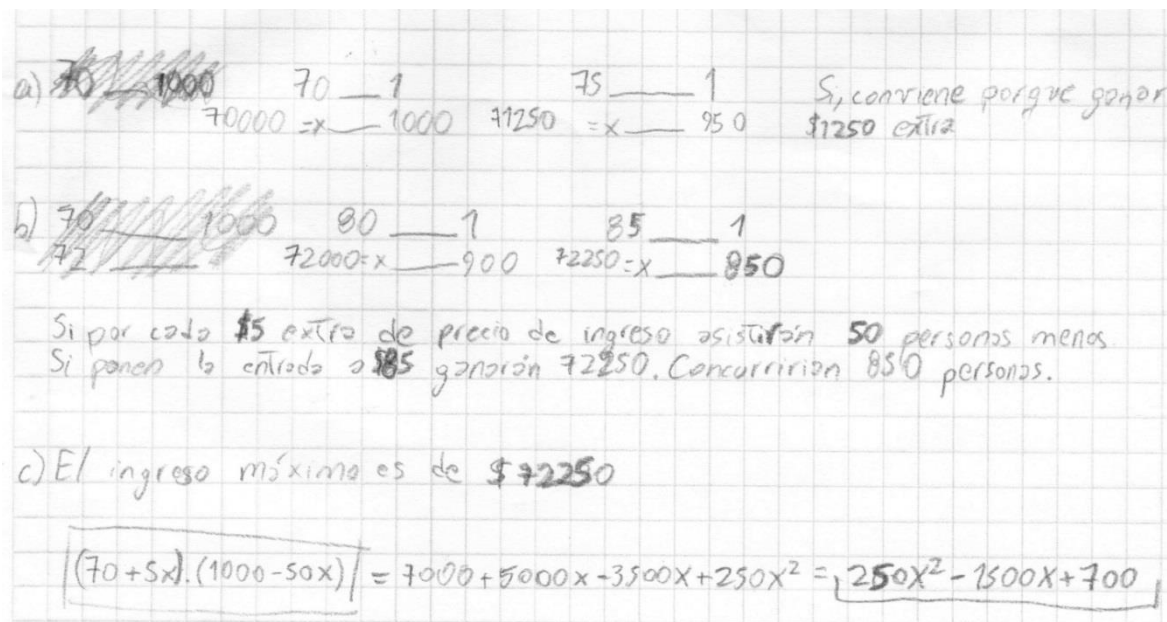


Figura 4.3

Se puede observar que estos alumnos no aclaran en su trabajo escrito qué significa la variable x , sin embargo lo aclararon en la puesta en común ya que algunos de los compañeros les

cuestionaron qué significaba *ésa letra* – como suelen llamar los alumnos a las variables literales.

Según las propias palabras de Mateo y Franco:

Mateo: – x significa la cantidad de veces que van a aumentar la entrada y tuvimos en cuenta eso porque también hace cambiar la cantidad de personas que entran al boliche. Porque por ejemplo, si hacen dos aumentos, se suma al precio 10 pesos, que es 2×5 , pero al número de personas le tenés que restar 100, porque es 2×50 .

Franco: – Sí, y si fueran 3 aumentos, tenés que sumarle 15 pesos, o sea 3×5 , y a las personas le restás 150 porque hacés 3×50 , ¿Ven que se repite en las dos cuentas el número de aumentos?

Por eso la función depende de eso. Y como para calcular el ingreso total hay que multiplicar el precio por la cantidad de gente que entra [al boliche] entonces hay que multiplicar las dos cosas Y por eso nos quedó esa fórmula que escribimos en el pizarrón.

Luego de la exposición de la resolución de Mateo y Franco, varios compañeros dieron a conocer que habían llegado a la misma fórmula, y que lo habían pensado de modo similar. Se inició entonces una discusión en torno al dominio de la función, ya que en la gráfica que mostraron en el pizarrón consideraron una variable continua y no graficaron en función de la x que propusieron, sino en función del valor de la entrada – tal como puede verse en la Figura 4.4.

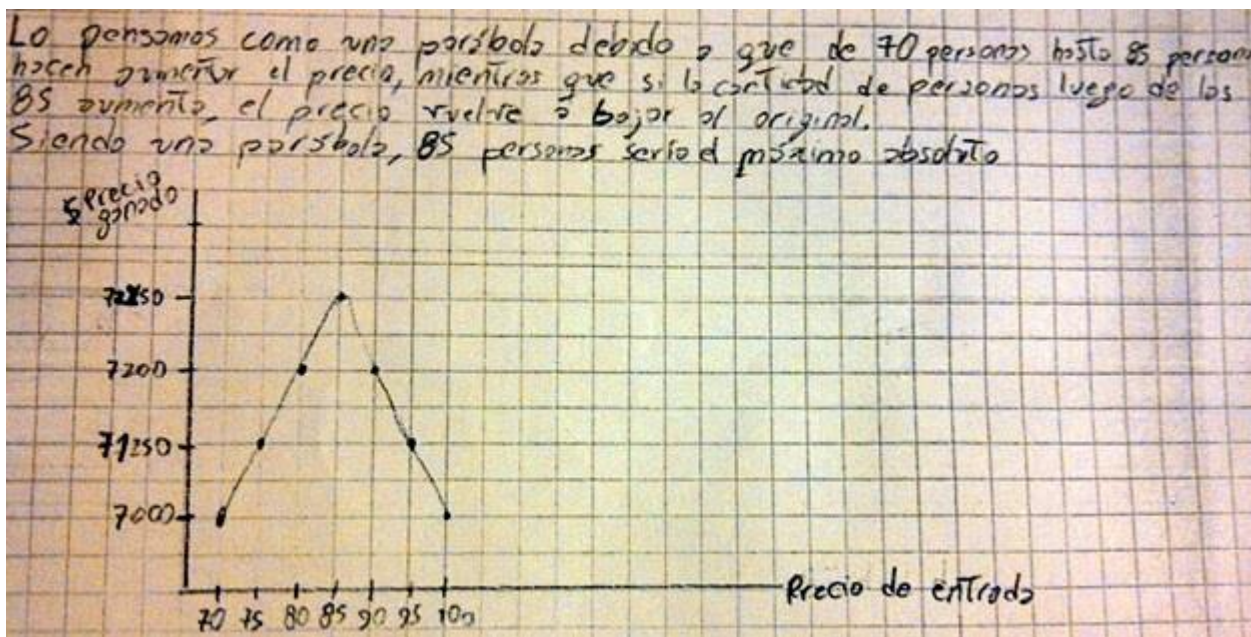


Figura 4.4

Cuando los compañeros les señalaron que no habían graficado en función de la cantidad de aumentos x advirtieron la incoherencia. Señalaron que el precio no podía ser menor al inicial - 70 pesos - pero tampoco mayor a 100 pesos porque en ese caso el dinero ingresado sería menor que el actual. Entonces otro par de alumnos, Sebastián M. y Nicole, opinaron que los valores del gráfico de Mateo y Franco deberían haber sido los correspondientes a los aumentos que generan los precios de la entrada que ellos indicaron sobre el eje de abscisas, tal como lo habían hecho ellos mismos en su producción, como se muestra en la Figura 4.5: al valor 70 del gráfico de Mateo y Franco, le debería corresponder el número cero, dado que no se efectúa ningún aumento, al valor 75 le debería corresponder el número 1, puesto que ese precio proviene de realizar un aumento, y así sucesivamente. Se observa que Sebastián M. y Nicole, no tuvieron en cuenta las

restricciones del dominio de la función, de acuerdo con el contexto del problema, ya que en el gráfico se observa que consideraron a x en el conjunto de los reales.

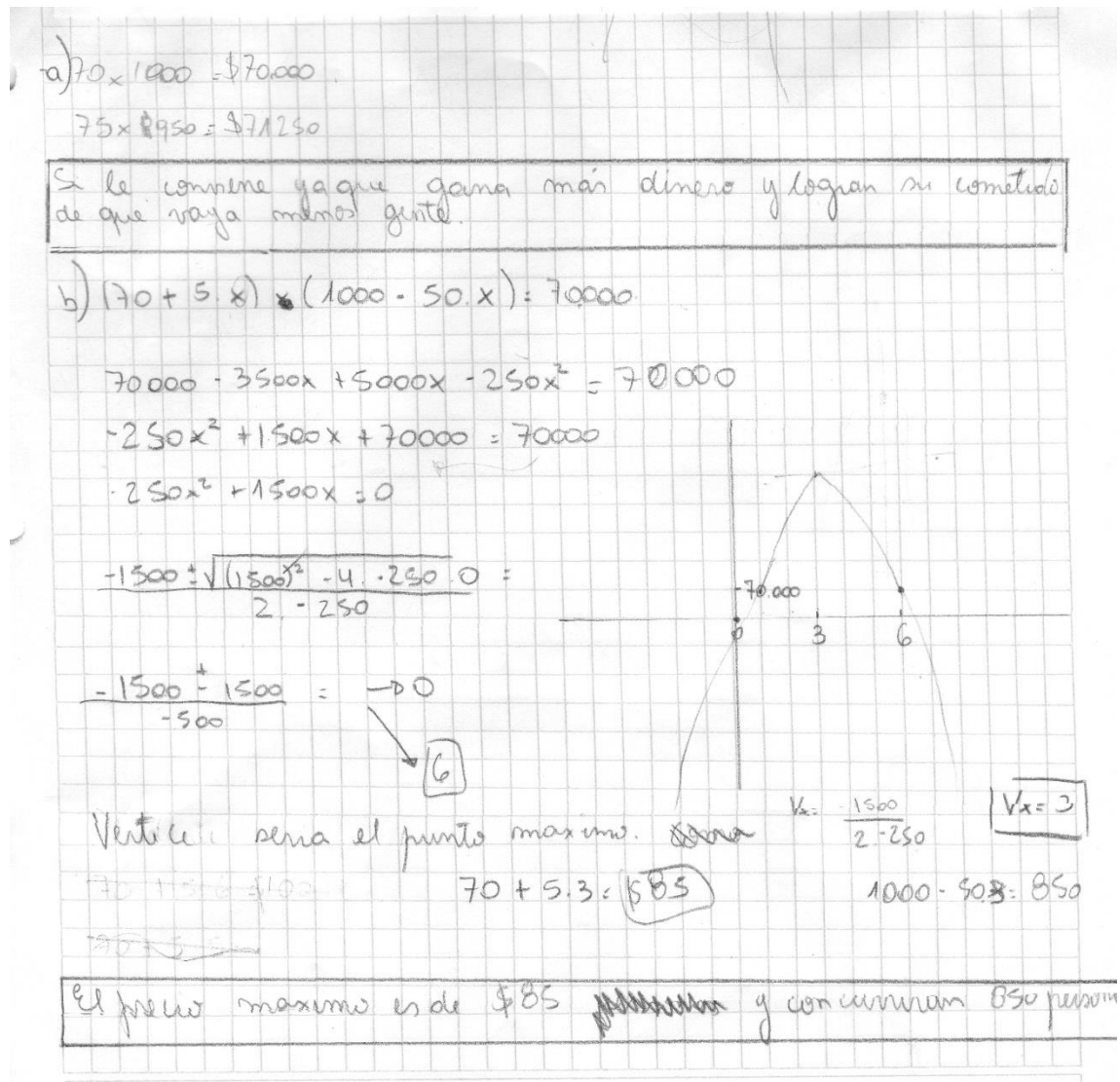


Figura 4.5

Julián, quien no había logrado plantear la función, pensó que el gráfico no podía ser continuo sino formado por “puntitos sueltos”, según sus palabras, ya que los aumentos se hacen “de a uno”. Algunos compañeros estaban de acuerdo con él pero otros decían que sí puede ser continua

porque “por regla de tres –según palabras de Micaela y Lucas - por ejemplo, podés calcular medio aumento que sería subir al precio 2,50 pesos, o el aumento que quieras”. Esta explicación fue la que más convenció al grupo, ya que además señalaban que el valor de la entrada podría ser cualquier número real positivo. Respecto a esto Aldana dijo “la entrada puede valer 80,30 pesos si querés. Es un precio válido” a lo que Ilan respondió “pero ningún boliche te pone la entrada con centavos”, entonces Aldana le responde: “pero poder, se puede. Entonces tenemos que tenerlo en cuenta”. Ilan, y el resto de los compañeros quedaron de acuerdo con esto y acordaron en que el dominio de la función podía ser parte del conjunto de los números reales, aunque no lograban ponerse de acuerdo en qué intervalo concreto era el dominio: mientras que unos sostenían que era desde cero hasta que el ingreso fuese cero, es decir hasta 20 aumentos – la minoría de los alumnos-, el resto estaba dividido entre los que sostenían que era hasta 3 o hasta 6. En el primer caso por ser la abscisa del vértice de la función cuadrática que describe el problema, cuyo valor genera el máximo ingreso y a partir de ahí comienza a disminuir; y en el segundo caso porque con esa cantidad de aumentos se genera un precio de 100 pesos e ingresan 700 personas al local, con lo cual el ingreso da como resultado el mismo valor que el inicial, en cuyo caso no disminuyó el ingreso, sino que se mantuvo. Finalmente, se llegó a la conclusión de que el dominio de esta función, que modeliza la situación problemática, es el intervalo $[0; 6]$, y que si se admite que se podría tener cualquier valor para el precio de la entrada, entonces no solamente se considerarán los valores naturales de dicho intervalo, sino que todos los reales incluidos en él, que no generen un número de personas absurdo, es decir, que ese factor de la función $(1000-50x)$ dé como resultado un número natural. Sebastián M., fue entonces quien agregó: “Pero entonces no son *tooodos* los valores del intervalo, sino que son bastantes, pero tiene *agujeritos*, y

entonces la parábola también. Pero ¿no podemos graficarla continua, así – dibujaba con su dedo, en el aire, el gráfico del arco de parábola en cuestión - para que sea más fácil? ¿Sino cómo sabemos bien, donde están esos agujeritos?, ¡es muy difícil marcarlos, si no!”. Inmediatamente, Julián agrega: “¡Ah! ¡Pero entonces yo tenía razón! Son puntitos, pero no sólo seis...¡muchos más!”. Por lo que luego, la profesora intervino afirmando que Sebastián M. estaba en lo cierto con su afirmación, y se aceptaba, como una figura de análisis, la gráfica del arco de parábola correspondiente al intervalo $[0; 6]$, aun cuando en realidad algunos puntos no corresponden al contexto del problema, como por ejemplo si x tomara valor 0,89 que da como resultado 955,5 para la cantidad de personas – resultado absurdo– o si x tomara un valor irracional cualquiera del intervalo, por ejemplo $\sqrt{3}$. Luego de este debate acerca del dominio, la docente representó, en el pizarrón, el arco de parábola en cuestión, donde se hizo la misma aclaración para la imagen: será $[70.000; 72.250]$, exceptuando los valores cuyas preimágenes estuvieran excluidas del dominio.

En lo que todos estuvieron de acuerdo, una vez que observaron que este problema se podía modelizar mediante una función cuadrática, fue en que para hallar la cantidad de aumentos que genere el máximo ingreso, debía calcularse la coordenada x del vértice de la parábola que la representa, y así lo habían hecho los que habían logrado plantear la función. Lo interesante fue que aquellos que solo resolvieron por tanteo, hacían comentarios referidos a la eficacia de esta manera de resolver el problema, por ejemplo Julián dijo: “Claro, así hay que hacer menos cuentas, no tenés que probar con varios valores del precio para la entrada”. Aprovechando esa reflexión, la docente les pregunta qué otras ventajas encuentran en esta manera de resolver el problema, es decir modelizando a partir de una función. Agregando preguntas como: “¿Y si el precio conveniente no fuera entero como en este caso, por ejemplo 80,30 como dijo Aldana,

alguien hubiese probado con ese valor, es decir, con el aumento que dé ese precio?”, a lo que respondieron que no, que en general o “casi siempre se prueba en la fórmula con valores redondos porque es más fácil para hacer las cuentas”- según dijo Micaela. Entonces esto llevó a pensar en la eficacia y economía que conlleva plantear una función adecuada, ya que por el tanteo se generan muchos cálculos y no siempre se podría arribar a una solución exacta, sobre todo si el resultado no es entero.

Hasta esta instancia, sucedió parte de lo esperado en el análisis a priori sobre este problema: los alumnos acudieron en primer lugar al tanteo para arribar a la solución del problema, y luego algunos alumnos consiguieron formular la función que modeliza la situación, la cual permite hallar el máximo solicitado utilizando un saber que habían adquirido en segundo año – la determinación del vértice de una parábola. Además, se pusieron de manifiesto las situaciones de acción, formulación y validación definidas en la Teoría de Situaciones dado que primero manipularon los datos del problema e hicieron intentos básicos – como el tanteo - para lograr solucionarlo, luego idearon una estrategia pensando en qué herramientas – contenidos, conocimientos - de los que ya poseían podían utilizar para la resolución y luego tuvieron que argumentar, fundamentar y justificar esta elección tanto con su compañero de banco como al resto del curso en el momento de la puesta en común.

Todo lo relatado hasta aquí, ocupó por completo una clase de 80 minutos, con lo cual la segunda parte de lo pretendido con este problema – narrado en el análisis a priori del mismo - ocurrió en la siguiente clase que también fue de 80 minutos de duración.

Al comienzo de la siguiente clase- al día siguiente -, la profesora repasa en forma oral las conclusiones del encuentro anterior, escribiendo en el pizarrón la función a la que se había

arribado, con el dominio que se discutió, y su gráfico – el arco de parábola, tal como se observó la clase anterior-, y pide a los alumnos que piensen si puede haber otra forma de resolver ese mismo problema, distinta del uso del tanteo y de la aplicación de los conocimientos sobre función cuadrática; es decir, que analicen la existencia de otra forma de hallar el valor que maximice el ingreso monetario del localailable. A los pocos segundos de que la profesora realizara dicha pregunta, Micaela grita: “¡Con derivadas!”; entonces la profesora le pregunta el porqué de su respuesta, a lo que ella respondió: “Porque es el tema que estuvimos viendo hace poco, antes de la clase pasada que nos trajiste el problema”. Esta respuesta da la pauta del tipo de contrato didáctico que tienen incorporado mayoritariamente los estudiantes: el que cada ejercicio que se proponga en clase tiene que estar vinculado al tema estudiado recientemente, como dice Brousseau (2007), los alumnos saben que detrás de cada problema elegido por el docente hay una intencionalidad didáctica, aunque desconozcan cuál es, y que a partir de cada situación problemática escogida - que está o estará avalada por una lógica interna - surgirá por lo menos un saber.

Volviendo a la respuesta de Micaela, la profesora le pregunta: “¿sólo por eso creés que tiene que *aparecer* la derivada en este problema? ¿Cómo la usarías en este caso?”, a lo que, luego de pensar apenas un minuto, ella responde: “¡Ya sé! Por lo de la recta tangente, porque allá arriba – señalando el vértice de la parábola representada en el pizarrón-, va a ser horizontal...”, en ese momento la interrumpe Lucas diciendo enérgicamente: “¡Ah! Y en ese punto la pendiente vale cero... ¡entonces la derivada también! ¡Listo profe! Tenemos que encontrar el valor de la función donde la recta tangente es horizontal, como dijo *Mica*, o sea, donde la derivada es cero.” Ambos se mostraban muy contentos por su *descubrimiento* y se notaba, por las expresiones de

varios de sus compañeros, que habían comprendido la idea e incluso algunos hicieron comentarios del estilo “¿Cómo no se me ocurrió?”. Enseguida, la profesora les pregunta si solamente con ese hecho que acababan de descubrir, haciendo lo propuesto por Lucas, era suficiente para encontrar el máximo solicitado. Seguidamente les propone que piensen qué sucedería si la parábola fuese cóncava hacia arriba y qué pasaría en el mínimo. Luego de pensar apenas unos segundos, varios alumnos responden que en ese punto – el vértice de la parábola y mínimo de la función- también la recta tangente será horizontal y, consecuentemente, su derivada es nula. Luego de recibir esas respuestas, la docente hace más preguntas, para ayudarlos en la reflexión; les pregunta acerca de la suficiencia de encontrar los valores del dominio de la función cuya derivada sea cero para hallar un máximo o un mínimo. A lo que, Damián y otros compañeros más agregan que también hay que ver qué pasa antes y después con la función, “si baja o sube antes y después de ese punto”. Ante esa reflexión, la profesora vuelve a hacer preguntas que induzcan a los estudiantes a extraer conclusiones: “¿cómo se puede saber si la función crece o decrece en un intervalo de su dominio sin la necesidad de graficarla?”, y les sugiere que piensen, otra vez, en las rectas tangentes a la gráfica de la función y los valores posibles de sus pendientes. Con esto, los alumnos pudieron arribar a la conclusión de que en los intervalos de crecimiento de la función, la recta tangente también es creciente y por lo tanto tiene pendiente positiva, y que sucede lo contrario en los intervalos de decrecimiento de la función. Luego de realizada esta institucionalización parcial, - puesto que no se enunciaron los teoremas que formalizan estas conclusiones - la profesora invita a todo su alumnado a que verifiquen, junto con ella, todo lo que se estuvo analizando y descubriendo hasta ese momento: se derivó la función - previa escritura de la cuadrática en forma polinómica dado que los alumnos lo

sugirieron porque *así es más fácil para derivar*, según sus propias palabras -; luego se igualó a cero para despejar el valor donde la recta tangente es horizontal, tal como lo dijeron los alumnos y, finalmente se analizó el signo de la función derivada para valores del dominio – el intervalo $[0;6]$ - menores y mayores que 3, que fue el valor encontrado para la anulación de la derivada. Observaron entonces que: para valores anteriores a 3, la derivada es positiva y, como habían notado del gráfico, la función es creciente en ese caso; la derivada es negativa para valores posteriores a 3, siendo que según lo observado a partir del gráfico la función decrece para dichos valores. Y así, se verificó que se obtuvo la misma respuesta que la hallada en la clase anterior, mediante la búsqueda del vértice de la función cuadrática planteada. En este momento, Micaela dijo: “¡Entonces para esto sirve la derivada! Para encontrar un máximo o un mínimo”. A partir de este comentario, que la mayoría de los compañeros apoyó, se puede concluir que los alumnos parecían haber detectado el carácter utilitario de la derivada, a través del trabajo dentro del enfoque geométrico que describe C. Dolores Flores. A su vez, podemos afirmar que, en esta clase, los alumnos que pudieron identificar el vínculo de los conceptos de derivada, recta tangente y búsqueda de extremos, mostraron evidencias de que su aprendizaje resultó significativo puesto que lograron establecer conexiones entre saberes previos con un contenido nuevo.

Para finalizar, la docente consulta a sus estudiantes acerca de qué les parecía esta forma de resolución – a partir de la derivada- que habían encontrado en esa clase, a lo que respondieron que les resultaba novedosa e interesante, pero que en este caso no le veían demasiado sentido hallar el máximo de esta forma dado que ya habían encontrado una manera más sencilla de hacerlo en la clase anterior, buscando el vértice de la parábola.

4.1.2. SOBRE EL SEGUNDO PROBLEMA

En la tercera clase – al día siguiente de la relatada anteriormente –, que fue de 40 minutos de duración, la profesora presentó a los alumnos el segundo de los problemas de la secuencia, otra vez con la consigna de que podían resolverlo del modo en que ellos creyeran conveniente, sin ninguna especificación en particular. Varios alumnos dijeron en voz alta que seguramente plantear una función sería lo más adecuado. De todos modos, algunos intentaron, otra vez, encontrar lo pedido mediante aproximaciones sucesivas acudiendo al método del tanteo, tal como ocurrió en un principio con el primer problema, pero esta vez fueron más los alumnos que directamente comenzaron a pensar la resolución del problema intentando plantear la función que mejor se adecuara a la situación, teniendo en cuenta las conclusiones a las que se arribara en la puesta en común del primer problema.

Cabe aclarar que, aproximadamente, una tercera parte del alumnado tuvo dificultad en comprender cómo era posible que, cortando y doblando la lámina de cartón, formara una caja – sin tapa, pero esta dificultad fue dirimida entre los mismos alumnos, ya que quienes lo habían comprendido les explicaban a los que no lo tenían claro. Incluso uno de los jóvenes, Franco, tomó una hoja de papel y simuló un corte como sugerido por el enunciado del problema- recortando cuadrados de igual tamaño en cada esquina- y realizó los dobleces necesarios para formar la caja y mostrarle a sus compañeros. Esto lo hizo para explicarle a su compañero de banco, pero enseguida los que estaban a su alrededor lo vieron y se acercaron a ver *su* caja, entonces, en ese momento, la docente interviene exhibiendo al resto del curso el modelo realizado por Franco. Esto sirvió para que todos los alumnos terminaran de comprender el enunciado del problema,

incluso algunas parejas de alumnos reprodujeron lo hecho por Franco y, con ese objeto concreto, se ayudaron para llegar a plantear la fórmula de la función que da el volumen de dicha caja.

Algunos grupos solicitaron la asistencia de la profesora para recordar la fórmula de volumen del prisma. Otros no necesitaron esa ayuda y pudieron plantearlo solos.

Esta vez el tiempo empleado por los estudiantes en la etapa de acción fue más breve que en el problema anterior, dado que se notó la influencia que tuvo la resolución y debate posterior del problema anterior. Ellos mismos solicitaron comenzar con la puesta en común, antes del tiempo estipulado por la docente, puesto que el haber podido plantear la función, y en algunos casos, encontrar la solución sin intervención de la profesora, los entusiasmaba en contar a sus compañeros lo que habían logrado. Otros solicitaban la realización de la puesta en común porque habían logrado formular la función – en algunos casos teniendo en cuenta el dominio y en otros no-, la habían derivado pero no se daban cuenta de cómo continuar en la búsqueda de los extremos solicitados en el enunciado, como les sucedió a Agustina y Camila, cuya resolución se ve en la Figura 4.6, o a Ilan y Joaquín, cuyo trabajo se ve en la Figura 4.7.

$$f(x) = (24 - 2x)(32 - 2x) \cdot x$$
$$f(x) = (768 - 48x - 64x + 4x^2) \cdot x$$
$$f(x) = 768x - 48x^2 - 64x^2 + 4x^3$$
$$f(x) = 4x^3 - 112x^2 + 768x$$
$$f'(x) = 12x^2 - 224x + 768$$
$$12x^2 - 224x + 768 = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} 14,14 \\ 4,52 \end{array} \right. \left. \begin{array}{l} \text{no se cómo determinar} \\ \text{cuál es máximo o} \\ \text{mínimo.} \end{array} \right.$$

Figura 4.6

Problema:

$V(x) = (24 - 2x) \cdot (32 - 2x) \cdot x$
 $V(x) = (768 - 48x - 64x + 4x^2) \cdot x$
 $V(x) = 4x^3 - 112x^2 + 768x \rightarrow \text{se deriva } \text{Dom} = \mathbb{R}$
 $V'(x) = 12x^2 - 224x + 768 \quad 0 < x < 12$

Figura 4.7

Dado que esta clase fue de menor duración que la anterior, sólo hubo tiempo para que algunas parejas de alumnos expusieran su resolución y se discutiera acerca de la función pertinente con su dominio adecuado.

En la siguiente clase, se debatió acerca de la resolución y búsqueda de los extremos solicitados. En primer lugar la docente pidió que se expresaran los alumnos que habían probado el método del tanteo y no habían pensado en una función – 4 alumnos en total. Éstos contaron que fueron asignando, primero, valores naturales pequeños para el lado del cuadrado de corte, como por ejemplo los 7 primeros números, y notaron que 5cm resultaba ser el valor de corte con que obtenían el máximo volumen en ese caso; luego empezaron a ajustar la aproximación con valores no enteros mayores y menores que 5, descubriendo que para obtener el máximo del volumen el corte debía ser menor a 5 cm pero mayor a 4. Estos alumnos no lograron responder el

problema, y esta forma de resolución fue muy cuestionada por el resto de los alumnos quienes decían que esta manera de encontrar extremos la veían muy imprecisa y que nunca podrían estar seguros de que el valor hallado fuera exactamente el buscado. Quienes realizaron estos cuestionamientos habían podido plantear la función, y explicaron que la variable a tener en cuenta era el lado del cuadrado - que también es altura de la caja, y que las dimensiones de la base se ven afectadas por éste. Uno de los alumnos, escribió en el pizarrón la fórmula de la función que encontró – la misma que comentamos en el análisis a priori- y el resto de los alumnos estuvo de acuerdo con él, pero hubo quienes abrieron la discusión acerca del dominio adecuado. Los que habían determinado el mismo, explicaron que lo dedujeron pensando en la lógica de hasta dónde se puede cortar para que exista una caja – tal como se esperaba en el análisis a priori-, y así llegaron a que no podía ser más de 12 cm, que es la mitad del lado más pequeño del rectángulo de cartón. Para la siguiente clase quedó pendiente pensar el gráfico de la función – para lo cual los alumnos solicitaron a la profesora que se hiciera como en el problema anterior- y la búsqueda de los extremos solicitados, pero por cuestiones de tiempo, no se pudo llevar a cabo en esta clase.

En la siguiente clase, es decir la cuarta desde que se comenzó la secuencia, la docente retomó lo que se había logrado en la anterior, anotando en el pizarrón la función y dominio hallados. Respecto del gráfico, algunos lo habían traído hecho desde su casa, pero representaron la función cúbica planteada sin tener en cuenta las consideraciones del dominio que se habían debatido antes. Uno de ellos la había graficado – de manera aproximada, a partir de las raíces - en el pizarrón y la profesora abrió el debate –y puesta en común- respecto de la validez de dicho gráfico, pidiéndoles que observen el dominio de la función – que estaba anotado en el pizarrón- y

la representación del alumno. Con esta sugerencia notaron que había una incoherencia ya que el compañero había graficado la función para todos los números reales, mientras que el dominio planteado era el intervalo $(0; 12)$. Entonces la profesora sugirió que se modificara ese gráfico para adaptarlo a la situación, un alumno pasó al pizarrón a hacer eso. Borró lo que estaba de más y mientras lo hacía reflexionó que en ese gráfico se estaba considerando que el volumen de la caja pueda ser negativo, cosa que es imposible – según sus propias palabras. Lo que no supieron identificar es qué sucedía en los extremos del intervalo, es decir en los valores 0 y 12, y en ese caso fue la docente quien tuvo que explicar que dichos puntos no pertenecen a la gráfica puesto que son los casos de volumen cero, y en consecuencia es la no existencia de caja. Indicaron este hecho en el gráfico marcando ambos puntos con dos círculos pequeños sobre las coordenadas $(0;0)$ y $(12; 0)$ y la curva que quedó determinada entre esos puntos era cóncava hacia abajo con un máximo que no podía determinarse con precisión, ya que el gráfico era. Varios estudiantes dijeron que “se parecía a una parábola cóncava hacia abajo” y entonces propusieron que el máximo estuviese en el punto medio de las raíces, como sucede en las funciones cuadráticas – es decir en 6, pero enseguida quedó descartada esta opción porque los compañeros que habían hallado volúmenes posibles mediante tanteo en la clase anterior, habían mostrado que cerca de 5 se encontraba el valor máximo y que si consideraban $x=6$, el volumen de dicha caja era menor que si se considera $x=5$.

Quedaba entonces planteada la discusión acerca de cuál era la estrategia más eficiente para la búsqueda de los extremos, y el hallazgo de los mismos. Lo primero que surgió por parte de los alumnos fue que no podía existir un mínimo porque en el gráfico se observaba que la función no tenía raíces, y “si los puntos sobre 0 y 12 fueran llenos, esos serían los mínimos” según las

palabras de Lucas, y continuó “pero como están vacíos, no podemos considerarlos”. Entonces la profesora preguntó a toda la clase que quería decir lo que estaba afirmando Lucas, a lo que Ilan respondió “siempre podés encontrar una caja tan chica como quieras, si cortás un *cuadradito* muy chico - es decir con lado de valor muy próximo a cero - o si cortás un cuadrado de lado casi 12cm”.

Quedaba entonces por encontrar el valor máximo, pero varios alumnos ya se habían dado cuenta de que debían proceder como en la segunda resolución del primer problema: aplicando el concepto de derivada. Micaela dijo al respecto: “Acá no queda otra [opción] profe que hacer como la otra forma que usamos en el problema del boliche, derivando, porque esta función no tiene una fórmula para los vértices” - refiriéndose a los máximos o mínimos de la función cúbica. La profesora aclaró a Micaela, y al resto del curso, que en las funciones polinómicas de grado mayor o igual a tres, no se llama vértice a ese tipo de puntos, sino simplemente *extremos*. Aprovechando este comentario, la docente preguntó a todo el alumnado si sabían a qué se refería Micaela, y entonces la mayoría pudo responder que sí, que se trataba de derivar la función, encontrar los valores donde se anula y luego investigar si hay cambio de signo de la función derivada para intervalos anteriores y posteriores a dichos valores.

La profesora les dejó unos minutos para que llevaran adelante lo propuesto. Dado que en este caso la derivada se anula en dos valores - en 4,53 y 14,14, aproximadamente-, y uno de ellos no pertenece al dominio de la función, hay que descartarlo; aún luego de la discusión de la clase anterior sobre este asunto, algunos no se detuvieron en ese detalle, pero la mayoría sí lo hizo e investigó el cambio de signo de la derivada a izquierda y a derecha de 4,53, concluyendo que

efectivamente es el corte que da el volumen máximo, puesto que hallaron que la función crece hasta ese valor y decrece luego, pues la derivada resultaba positiva antes y negativa luego.

En el cierre de este problema, en la nueva puesta en común, los alumnos comentaron lo que hicieron y luego de haber respondido las preguntas, una de las alumnas, Agustina, preguntó si siempre que haya que encontrar un máximo o un mínimo hay que llevar adelante este procedimiento, cuando no es una función cuadrática, y algunos alumnos más se sumaron a esta pregunta, a lo que la docente les respondió que luego de resolver un problema más responderían entre todos a esta inquietud, cuando se enunciaran los teoremas correspondientes. En este momento, se observa que algunos alumnos de manera indirecta necesitaban una institucionalización de lo que estaban aprendiendo, sin embargo, la profesora consideró que era conveniente formalizar los teoremas sobre la monotonía de una función y sobre la búsqueda de extremos relacionados al concepto de derivadas, luego de la resolución del próximo, y último, problema antes de dicha formalización. Puesto que, como ya se analizó, en dicho problema resulta aún más indispensable el uso de la derivada.

4.1.3. SOBRE EL TERCER PROBLEMA

En la quinta clase, de 80 minutos de duración, se presentó el tercer problema, que requirió que la docente recordara cómo se calcula el volumen de un cilindro porque los alumnos se lo solicitaron dado que la mayoría no lo recordaba.

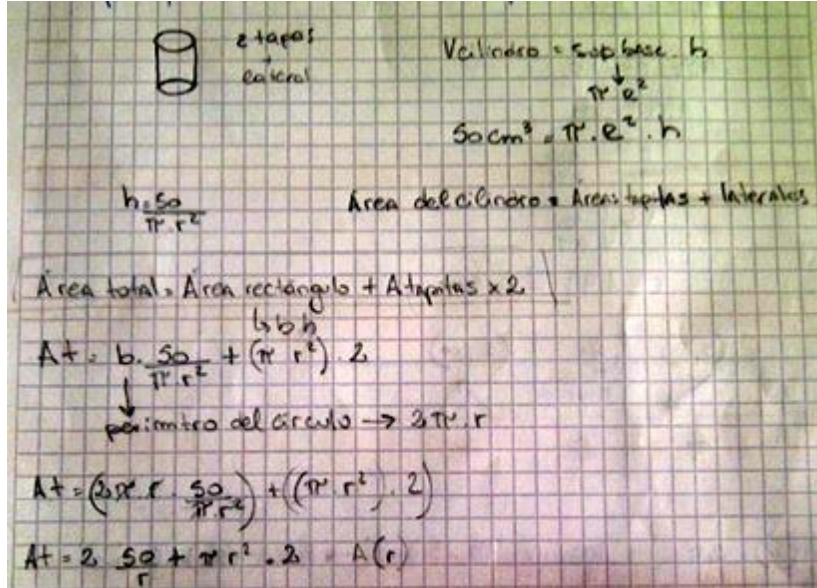
El enunciado de este problema y su planteo les resultó mucho más complicado a los estudiantes dado que tampoco recordaban cómo calcular el área lateral del cilindro y la docente

tuvo que explicar la situación ejemplificando con una hoja de papel rectangular que enrolló para simular el salero – sin las tapas-. Una vez que les ayudó a pensar cómo se determina el área, les dejó tiempo para que continuaran trabajando solos. Pero esta vez, a los pocos minutos, la mayoría de los alumnos pidió a la profesora que explicara cómo plantear la función, porque no lograban hacerlo; de hecho se pudieron registrar pocas producciones, ya que pocos alumnos lograron plantear algo. Una de las producciones que mostraremos para ejemplificar es la de Mateo, quien fue de los pocos alumnos que logró bosquejar una idea, aunque no pudo obtener la fórmula de la función, consideramos que es un intento que merece ser exhibido y se observa en la Figura 4.8.

The image shows handwritten work on a grid background. On the left side, there are two equations: $C_{\text{superf. h}} = \pi \cdot r^2 \cdot h = 50 \text{ cm}^2$ and $A_T = A_{\square} + A_{O \cdot 2}$. Below these, it says "base = per" with a small circle drawn next to the word "per". On the right side, there are three equations: $50 \text{ cm}^2 = r^2 \cdot h$, $15,9 \text{ cm}^2 = r^2 \cdot h$, and $\frac{15,9 \text{ cm}^2}{h} = r^2$.

Figura 4.8

Sofía y Rocío fueron las únicas que lograron plantear la función -tal como se muestra en la Figura 4.9 - aunque no se detuvieron a pensar en el dominio hasta la puesta en común.



$$V_{\text{cilindro}} = \text{superficie base} \cdot h$$

$$50 \text{ cm}^3 = \pi \cdot r^2 \cdot h$$

$$h = \frac{50}{\pi \cdot r^2}$$

$$\text{Área del cilindro} = \text{Área tapas} + \text{laterales}$$

$$\text{Área total} = \text{Área rectángulo} + \text{Área tapas} \times 2$$

$$A_t = b \cdot \frac{50}{\pi r^2} + (\pi r^2) \cdot 2$$

↓
perímetro del círculo → $2\pi r$

$$A_t = (2\pi r \cdot \frac{50}{\pi r^2}) + ((\pi r^2) \cdot 2)$$

$$A_t = 2 \cdot \frac{50}{r} + \pi r^2 \cdot 2 = A(r)$$

Figura 4.9

La mayoría de los alumnos comentaban a la profesora que sabían cómo tenían que hallar el mínimo pedido y así resolver la situación problemática; esto es: plantear la función adecuada y su dominio y luego proceder como en el segundo problema, aplicando las conclusiones respecto de la aplicación de la derivada, pero la dificultad se les presentaba a la hora de plantear la función, puesto que no lograban relacionar las variables r – radio de la circunferencia de la base del cilindro - y h – altura del cilindro. Otros alumnos no pudieron identificar - aún con el aporte antes mencionado de la profesora- que la parte lateral del cilindro es un rectángulo cuya base es la longitud de la circunferencia de la parte superior e inferior del salero.

Esto nos conduce a reflexionar varias cuestiones, antes de continuar con el relato de la clase. Una de estas reflexiones es que la elección de este problema, quizás, no haya sido acertada dado que se presentó una dificultad algebraica mucho mayor de la esperada y que no fue considerada en el análisis a priori. Pero sí consideramos positivo el hecho de que los alumnos sabían esta vez

como proceder, una vez que tuviesen planteada la función, ya que aplicarían lo aprendido mediante la resolución de los dos problemas anteriores, habiendo dejado de lado la resolución por tanteo. Es decir, esto evidencia que este tercer problema, junto con las conclusiones obtenidas en los anteriores, invitaba a los alumnos a transitar una situación de consolidación, que como se explicó en el Marco Teórico, son las que permiten detectar el grado de significatividad del nuevo contenido que se aprendió, midiendo su nivel de funcionalidad.

La profesora entonces accedió a lo pedido por los alumnos y les reveló cómo relacionar las variables, aunque lo hizo de manera tal que, con preguntas adecuadas, los alumnos fueran descubriendo la manera de hacerlo. Si bien en ese momento la intervención de la docente fue una de las más extensas, y esta clase se pareció más a una tradicional, ella intentó que fuera lo menos conductual posible y hubiera un tinte constructivista, aun en la explicación del planteo de la función adecuada.

Una vez que se planteó la función, ya casi todos los alumnos – con excepción de unos pocos que estuvieron desinteresados durante toda la aplicación de la secuencia- pudieron hallar el mínimo solicitado sin inconvenientes aplicando los mismos procedimientos que en los problemas anteriores al momento de hallar un extremo con la aplicación de la derivada.

Esta vez no recurrieron a graficar la función para tener una idea previa sobre dónde podría localizarse el mínimo, aunque la docente realizó preguntas referidas a esto, como si podían imaginar el gráfico fácilmente como en los problemas anteriores, o si era necesario conocer la curva que representa función para hallar el extremo, a lo que los alumnos respondieron que no; “¡si sabés hacerlo con la derivada!...” dijo, por ejemplo, Lucas.

Luego de trabajar con este problema, la profesora se dirigió en voz alta a Agustina, quien había consultado sobre si siempre había que proceder de este modo - aplicando el concepto de derivada - para recordarle su pregunta y si ahora ella, o cualquier compañero, se sentían capaces de responder esa cuestión, a lo que dijeron que sí, que esta les parecía la manera en que había que resolver los problemas de optimización, siempre y cuando no fuera más sencillo hacerlo de otro modo, como en el primer problema. Por lo tanto, luego de esto, la profesora consideró que ya era momento propicio para enunciar los teoremas asociados a todo lo trabajado, por eso mediante preguntas orientadoras, los fueron planteando, escribiéndolos en el pizarrón en lenguaje coloquial y simbólico, e institucionalizando así los nuevos contenidos que surgieron de la aplicación de esta secuencia didáctica.

Este último problema se pudo resolver en forma completa en una sola clase, pero antes de finalizar la misma, la docente solicitó a su alumnado que realizaran una lista de los pasos que creyeran necesarios para resolver problemas de optimización. Les adelantó que en la siguiente clase los compartirían en una puesta en común, y así, entre todos, aunarían criterios para decidir cuál es la lista más acertada.

Efectivamente, eso sucedió en la clase siguiente y fue interesante la puesta en común, ya que todos estaban de acuerdo en que, una vez planteada la función que modelice el problema, se deben aplicar los teoremas formalizados en la clase anterior, pero hubo algunas diferencias, como que algunos consideraban que como primer paso era necesario leer atentamente el enunciado, mientras que otros consideraban necesario primero el planteo del dominio y otros proponían realizar una figura de análisis si se trataba de un problema geométrico, y algunas variantes más que se muestran en el anexo.

A continuación, se muestra la lista de pasos necesarios para resolver problemas de optimización que se diseñó con los aportes de los alumnos, tal como quedó redactada por los propios estudiantes:

- Leer atentamente el enunciado e identificar los datos importantes y las variables.
- Vincular las variables a partir de los datos que brinde el enunciado del problema y plantear una fórmula para la función con una única variable.
- Hallar el dominio de la función planteada teniendo en cuenta el sentido lógico del problema.
- Hallar la función derivada, ya que esta nos permite calcular la pendiente de las tangentes en diferentes puntos.
- Igualar a cero la función derivada para encontrar los valores donde la pendiente de la tangente sea horizontal, porque en esos puntos puede existir un máximo o un mínimo.
- Evaluar el signo de la derivada antes y después de los valores despejados de la ecuación anterior. Si hay cambio de signo de la función derivada de positiva a negativa, entonces la función creció antes de dicho valor y luego decreció, entonces encontramos un máximo. Y si sucedió lo contrario, entonces encontramos un mínimo. Recordar que siempre debemos verificar si los extremos encontrados pertenecen al dominio de la función.

Con esta lista se dio por finalizada la secuencia didáctica de este trabajo. Luego, en las clases siguientes continuaron resolviendo problemas de optimización pero su análisis excede lo propuesto en esta tesis.

4.2 ENCUESTA

Luego de la aplicación de la secuencia, es decir, de la resolución de los tres problemas y la elaboración de la lista de pasos necesarios para resolver problemas de optimización, diseñamos una encuesta de carácter anónimo y con un lenguaje informal – para que sea de fácil comprensión para los alumnos - con el fin de tener un instrumento más para indagar y analizar si se produjo un aprendizaje significativo mediante la experimentación de esta Ingeniería didáctica. Las preguntas de la encuesta fueron formuladas de modo tal que se pudiera extraer información adicional sobre:

- cómo les resultó a los alumnos que la consigna general de los problemas fuera que ellos decidieran cómo resolverlos, con total libertad de elegir las herramientas, conocimientos previos, recursos y estrategias para llegar a las respuestas correctas;
- si la puesta en común y el debate del primer problema les aportaron ideas para pensar la resolución del segundo, y a su vez, si las conclusiones del primero y segundo problemas les fueron útiles para pensar la resolución del tercero;
- si consideran que resolver problemas mediante el planteo de funciones es importante;
- qué problema les interesó más;
- si resolviendo los problemas, y con la puesta en común que se hizo luego de cada problema, piensan que entendieron mejor el concepto de derivada y recta tangente;

- y si todo lo que se desarrolló para la búsqueda de extremos les parece una herramienta útil y creen que podrían usarla en situaciones reales.

El texto completo de la encuesta se puede ver en el anexo de este trabajo, como así también, las respuestas textuales, de algunos de los alumnos, que nos parecieron relevantes.

En términos generales podemos decir que las respuestas a la encuesta reflejan que ha sido una experiencia positiva para los alumnos dado que, en primer lugar destacan que se sintieron *libres* al poder elegir ellos mismos con qué conocimientos previos resolverían cada situación: pudieron utilizar cualquier saber de los incorporados durante sus cinco años de escuela media. Por ejemplo, en una de las encuestas un alumno responde lo siguiente: “Me encantó que seamos libres para resolverlo. Me pareció muy bueno poder encararlo [el problema] como queramos [porque] no me gusta que me digan cómo lo tengo que hacer, pudiendo hacerlo con mis conocimientos”.

También varios afirmaron que les pareció interesante y enriquecedor poder intercambiar ideas con sus compañeros y poder debatirlas en las puestas en común. A la mayoría les pareció importante esta instancia de debate, con la mediación de la docente, puesto que sintieron que los ayudaba a entender mejor los conceptos trabajados en los problemas – derivada, recta tangente y optimización de funciones – y que de cada puesta en común surgieron ideas que les sirvieron para plantear y resolver el o los siguientes problemas, por ejemplo en una de las encuestas, un alumno señaló que “el segundo problema me resultó más fácil, ya que usé los mismos procedimientos que en el primero”.

Es necesario comentar, sin embargo, que también hubo unos pocos alumnos que respondieron que esa *libertad* que los otros veían como positiva, ellos no la consideraban del mismo modo porque no sabían cómo empezar –una alumna dijo que la hacía sentir *confundida* y *otra*, “nerviosa, porque no sabía si lo que estaba haciendo estaba bien”- y que preferían la clase tradicional donde el profesor explica un contenido, cómo se usa y luego lo reproducen en ejercicios.

Otra conclusión que se puede obtener de las respuestas de las encuestas, es que el problema que más les interesó a la mayoría de los alumnos – aproximadamente al 60% - fue el del boliche, principalmente porque les resultó el problema más fácil de los tres propuestos y casi todos pudieron resolverlo de algún modo, ya sea por tanteo o hallando el vértice de la función cuadrática que queda planteada; o también – y en algunos casos fue por las dos cosas- porque se refiere a una actividad cercana a ellos: ir a bailar a discotecas. En una de las encuestas, uno de los alumnos dice: “[me gustó más el problema] del boliche ya que de los tres, es la situación más cotidiana en mi vida”. Los otros dos problemas les parecieron interesantes cada uno al 20%, de los alumnos, aproximadamente. A los que les gustó el problema de la caja fue porque era una situación que podían ver en forma concreta, tal como hizo Franco al simular su construcción con una hoja de papel. Sin embargo a los alumnos que les resultó más interesante el problema de los saleros adujeron que fue porque lo vieron más cercano a una situación real de la vida y también porque les pareció *desafiante* al tener un planteo más complicado que los dos primeros.

Otro hecho para destacar es que, unánimemente, todos respondieron que es importante resolver los problemas planteando una función adecuada a la situación ya que así resulta más fácil encontrar la respuesta correcta y les parece más práctico. Aún alumnos que no estaban muy

de acuerdo con el modo de trabajar los problemas se manifestaron de esta forma; por ejemplo, en una de esas encuestas, cuyas respuestas fueron mayormente negativas, su autor, que manifestó que a él no le sirvió lo realizado en la secuencia para entender mejor derivada- se puede leer que resolver un problema planteando una función es importante “porque es una forma de crear un método, e incluso de simplificar la resolución del problema”. Otro alumno, cuyas respuestas fueron todas positivas, dijo que “de otro modo, deberíamos probar valores y la mayoría de las veces no llegaríamos al resultado”.

Por último, la mayoría de los estudiantes – aproximadamente el 70% - dijo que resolviendo estos problemas y, a partir de la puesta en común, lograron entender mejor el concepto de derivada y de recta tangente. Por ejemplo, un alumno dijo que con lo realizado “contesta la pregunta de todos que es *¿y para qué te sirve en la vida?*”; de manera similar, otro alumno dijo que lo “ayudó a entender para qué se usan las derivadas”. Respecto a esto último, la mayoría contestó que la derivada y las conclusiones – teoremas- que surgieron de la resolución de los problemas, les parecen herramientas útiles para encontrar extremos de funciones y que lo ven aplicable a la vida real, y sobre todo lo relacionaron con situaciones económicas. Un alumno dijo al respecto: “Sí, es una herramienta útil porque no requiere hacer el gráfico ni tantos pasos. Creo que se puede usar en una situación real, parecida a la del primer problema”. De manera similar, otro alumno dijo “me parece útil. En la vida real se pueden usar en las empresas, en situaciones como la del primer o último problema”.

También hubo pocos alumnos que respondieron negativamente respecto de la utilidad de la herramienta desarrollada en los problemas, o que no saben qué tipo de situaciones podrían requerir de ella. Una alumna dijo que le parece “muy difícil [de aplicar] en situaciones

cotidianas” - aunque eso no fue lo que se preguntó- “a no ser que estudies o trabajes de eso.

Ejemplo: profesor de matemática”.

CAPÍTULO 5: CONCLUSIONES

A la luz de todo lo ocurrido durante la aplicación de esta secuencia didáctica, y en comunión con los resultados observados y examinados mediante el análisis a posteriori de la Ingeniería Didáctica diseñada, podemos decir que la misma permitió corroborar la transferencia de conocimientos previos, por parte de la mayor parte de los alumnos, a la resolución de situaciones problemáticas, que a su vez lograron hacer surgir un contenido nuevo y que, de esa manera, se generara un aprendizaje significativo, que es aquel que no se produce por repetición ni memorización de conceptos, sino que se adquiere apropiándose de los contenidos a través de la resolución de problemas convenientemente elegidos para tal fin, tal como sugiere Brousseau (2007), de modo que contribuyan a la integración de los nuevos conocimientos a la red de saberes previos. Como se expresó en el marco teórico, un problema bien elegido en términos de este autor es aquel que da la posibilidad de que se piensen estrategias variadas para su resolución, pero que a su vez genere ciertos desequilibrios cognitivos de manera tal que el alumno accione en pos de volver a acomodarse cognoscitivamente y así, durante el recorrido de ese *camino*, atravesase por distintas situaciones que lo conducirán a apropiarse de un conocimiento nuevo.

Creemos que los alumnos con los que se realizó esta experiencia recorrieron dicho camino y llegaron a *buen puerto*, puesto que - como se mostró en el análisis a posteriori - aprendieron, mediante la resolución de los problemas propuestos en la secuencia, a optimizar funciones, pudiendo hallar los extremos de éstas a partir de la aplicación del concepto de derivada, en relación con la idea de recta tangente a una curva en un punto. Estos alumnos lograron poner en juego los conocimientos de que disponían en su bagaje de saberes previos y que supieron

transferirlos, a partir de situaciones adidácticas, en las que la docente procuró intervenir sólo con carácter de guía; también lograron descubrir, casi motu proprio, los teoremas sobre la relación del signo de la derivada primera con la monotonía de una función y la búsqueda de extremos. Todo esto fue posible porque los problemas fueron elegidos de manera apropiada para que los alumnos transitaran por las situaciones de acción, validación y formulación, en primera instancia, y para que junto con la profesora institucionalizaran los conocimientos nuevos que emergieron a partir de esas situaciones mencionadas y de la resolución de los problemas, y para que luego se afianzaran con la propuestas de otros problemas que generaran las situaciones de consolidación y aplicación, que son las que permiten identificar si los contenidos nuevos resultaron funcionales y significativos para el alumno. Consideramos que esto ocurrió satisfactoriamente puesto que queda en evidencia a partir de lo relatado en el análisis a posteriori, donde puede observarse que en gran medida se cumplió lo vaticinado y esperado en el análisis a priori. Principalmente se esperaba que los estudiantes tuvieran que acudir al concepto de derivada, dado que la resolución del segundo y tercer problema no era posible mediante recursos algebraicos básicos, pues éstos resultaban insuficientes e ineficientes, y entonces surgió la necesidad de pensar en las pendientes de las tangentes de las funciones, el signo de éstas y su relación con el crecimiento o decrecimiento de las curvas que representan dichas funciones. Y esto es tal como lo plantea C. Dolores Flores (2000) en lo que define como enfoque geométrico de la derivada, que intenta seguir la línea histórica de generación de este concepto – recordemos que el problema de hallar extremos preocupó a Fermat, bastante antes que a Newton y Leibniz desarrollaran el concepto-, como así también enfatizar el carácter utilitario de la derivada en la resolución de problemas de optimización. Debemos señalar que acordamos con Dolores Flores (2000) en que una enseñanza

basada en este enfoque insume más tiempo del habitual, ya que nuestra experiencia, que se planeó llevar a cabo en 4 clases, finalmente se realizó en 6.

Así mismo, deseamos señalar que rescatamos del trabajo de Matassa, Del Valle Pérez, Piraino y Sadagorsky (2011) la idea de generar la necesidad de utilizar un concepto puntual – en el caso de estas autoras, el de integral- para resolver un problema concreto, debido a que así tendrá más sentido para los alumnos, dado que será una herramienta necesaria, y no impuesta a partir de un ejercicio tradicional. En nuestro caso, la idea pretendió generar en los alumnos la necesidad de derivar, como herramienta fundamental, para encontrar la solución del problema de optimización propuesto y así la actividad resultara mucho más atractiva, motivadora y significativa que si se la hubiera introducido de manera tradicional, es decir, solicitando explícitamente la búsqueda de extremos de funciones dadas explícitamente.

Por último, la encuesta final llevada a cabo con los alumnos refleja mayoritariamente un alto grado de satisfacción con el modo de trabajo elegido, así como una actitud positiva por parte de los alumnos, que lograron apreciar la utilidad del procedimiento de optimización de funciones descubierto por ellos mismos, estimándolo como un *método aplicable en situaciones reales*, calificativo no muy frecuentemente escuchado por los docentes de matemática.

BIBLIOGRAFÍA

- Alagia, H.; Bressan, A.; Sadovsky, P. (2005). *Reflexiones teóricas para la Educación Matemática*. Buenos Aires: Libros del Zorzal.
- Altman, S.; Comparatore, C. y Kurzrok, L. (2005). *Análisis 2. Matemática Polimodal*. Buenos Aires: Editorial Longseller.
- Alvárez Mejía, D.; Colorado Torres, H.; Ospina, L. (2013). *Una propuesta didáctica para la enseñanza del concepto de derivada*. *Revista científica*, edición especial, octubre de 2013. Recuperado desde <http://revistas.udistrital.edu.co/ojs/index.php/revcie/article/view/5961>
- Artigue, M.; Douady, R.; Moreno, L.; Gómez, P. (Ed.). (1995). *Ingeniería didáctica en educación matemática. Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas*. Bogotá: Grupo Editorial Iberoamericana.
- Ballester, A. (2003). *El aprendizaje significativo en la práctica. Cómo hacer el aprendizaje significativo en el aula*. Libro digital. Recuperado el 15 de diciembre de 2015 desde <http://www.aprendizajesignificativo.es/>
- Barreiro, P.; Casseta, I. (2015). Teoría de situaciones didácticas. En: Pochulu, M. y Rodríguez, M. (compiladores). *Educación Matemática: Aportes a la formación docente desde distintos enfoques teóricos*. Editorial UGS - EDUVIM.

- Brousseau, G. (1986). *Fundamentos y métodos de la didáctica de la matemática*. Universidad Nacional de Córdoba, Facultad de Matemática Astronomía y Física, Serie B, Trabajos de Matemática Nro. 19 (versión castellana 1993).
- Brousseau, G. (2007). *Iniciación al estudio de la teoría de las situaciones didácticas*. Buenos Aires: Libros del Zorzal.
- Carnelli, G. (2005). *Una ingeniería didáctica para la función cuadrática*. Tesis de Licenciatura no publicada. Universidad Nacional de San Martín. Argentina.
- Castillo Del Rosario, D.; Rivera Mancera, V. (2004). *Algunos elementos para el aprendizaje significativo de Cálculo con un enfoque constructivista*. Tesis para obtener el título de de Licenciado para la Escuela Superior de Física y Matemática del Instituto Politécnico Nacional de México. Recuperado desde <http://tesis.ipn.mx:8080/xmlui/handle/123456789/589>
- Collete, J.P. (2006). *Historia de las matemáticas I*. Séptima edición en español. México: Siglo XXI Editores.
- Collete, J.P. (2007). *Historia de las matemáticas II*. Séptima edición en español. México: Siglo XXI Editores.
- Cuadra López, R.; Martínez-Mediano, J. (1997) *Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales. 2º Bachillerato*. España: Editorial Mc Graw Hill.
- Dolores Flores, C. (2000). Una propuesta didáctica para la enseñanza de la derivada. En: Cantoral R. (coordinador). *El futuro del cálculo infinitesimal*. Capítulo V: ICME-8 Sevilla, España.

Grupo Editorial Iberoamérica. México D. F. pp. 155-181. Recuperado el 15 de diciembre de 2015 desde <http://cimateuagro.org/images/pdf/ICME8.pdf>

Giuliani, D.; Segal, S. (2008). *Modelización matemática en el aula, posibilidades y necesidades*. Buenos Aires: Libros del Zorzal.

Godino, J.; Batanero, C.; Contreras A.; Estepa, A.; Lacasta, E.; Wilhemi, M. (2013). La ingeniería didáctica como investigación basada en el diseño. Versión ampliada en español de la comunicación presentada en el CERME 8 (Turquía, 2013) con el título “Didactic engineering as design-based research in mathematics education”. Versión original disponible en: http://cerme8.metu.edu.tr/wgpapers/WG16/WG16_Godino.pdf). Recuperado desde http://www.ugr.es/~jgodino/eos/JDGodino%20et%20al_2013%20Ingenieria%20didactica.pdf

Itzcovich, H. Novembre, A. (coordinadores). (2006). Carnelli, G. y Lamela, C. *Matemática 3*. Buenos Aires: Tinta fresca ediciones.

Matassa, A.; Del Valle Pérez, M.; Piraino, M.; Sadagorsky, A. (2011). *La resolución de problemas como herramienta de aprendizaje de la matemática*. Recuperado el 28 de septiembre de 2015 desde http://www.cimm.ucr.ac.cr/ocs/index.php/xiii_ciaem/xiii_ciaem/paper/viewFile/808/692

Mateus Nieves, E. (2011). Epistemología de la derivada como fundamento del cálculo diferencial. *Voces y Silencios: Revista Latinoamericana de Educación*, Vol. 2, N° Especial, pp. 3-21. Recuperado desde <http://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=4058842>

Miyara, A. Piraino, M.; Anido, M. (2010). Del texto a la ecuación: reflexiones y propuestas para una enseñanza de la matemática basada en modelos. Rosario: UNR Editora.

- Ponce Campuzano, J.C. (2015). *Breve historia del concepto de derivada*. Recuperado desde http://www.researchgate.net/publication/270684035_Breve_historia_del_concepto_de_derivada
- Ramírez Rincón, E. (2009). Historia y epistemología de la función derivada. *TED: Tecné, Episteme y Didaxis*, Número extraordinario, pp. 157 – 162. Recuperado desde <http://revistas.pedagogica.edu.co/index.php/TED/article/viewFile/261/252>
- Sanchez Matamorros, G.; García, M.; Llinares, S. (2008). La comprensión de la derivada como objeto de investigación en didáctica de la matemática, *Revista Latinoamericana en Investigación en Matemática Educativa*, Vol. 11, N° 2, pp. 267-296. Recuperado desde http://www.scielo.org.mx/scielo.php?pid=S1665-24362008000200005&script=sci_arttext
- Schaposchnik, R (coord.). Abdala, C. ; Garaventa, L. ;Turano, C. *Nueva carpeta de matemática VI. Cuadernillo 4: Análisis matemático II*. (2007). Buenos Aires: Aique Grupo Editor.

ANEXOS

A continuación se muestran algunas producciones de los alumnos que consideramos interesantes pero no se utilizaron en el cuerpo de la tesina. Las mismas forman parte de los registros que realizamos de la secuencia didáctica que formó parte de la Ingeniería Didáctica desarrollada en el presente trabajo.

Sobre las primeras resoluciones del primer problema:

La primera producción –que se muestra en las Figuras A.1 y A.2 - nos resultó interesante puesto que, si bien es desprolija, muestra de manera bastante clara los intentos y conjeturas que realizaron Tomás M. y Damián para resolver la situación planteada. Por ejemplo, aunque esté tachado, se puede observar que en principio pensaron en dos variables – a la profesora le dijeron que x representaba el valor de la entrada e y la cantidad de personas que concurren a ese precio, pero luego lograron pensar en una sola.

La segunda producción –que se muestra en la Figura A.3 y pertenece a Kenneth - nos resultó interesante porque fue el único alumno que pensó que el dominio de la función planteada debía ser solamente el intervalo de 0 a 3, es decir hasta el valor x del vértice de la parábola, puesto que hasta dicho valor los ingresos del localailable aumentan, y considera que debe tomarse así porque hasta ese valor los ingresos, crecen, aumentan.

Las Figuras A.4 y A.5 corresponden a la producción de Matías. Lo que nos llamó la atención fue que él interpreto como precio máximo a aquel que permitiera generar una menor concurrencia de personas al local, pero que no disminuyera los ingresos actuales. Por eso el precio propuesto

por él es 100 pesos e ingresarían 700 personas al local. También observamos que para él hay una relación lineal entre las variables personas y dinero, como se ve en la Figura A.5.

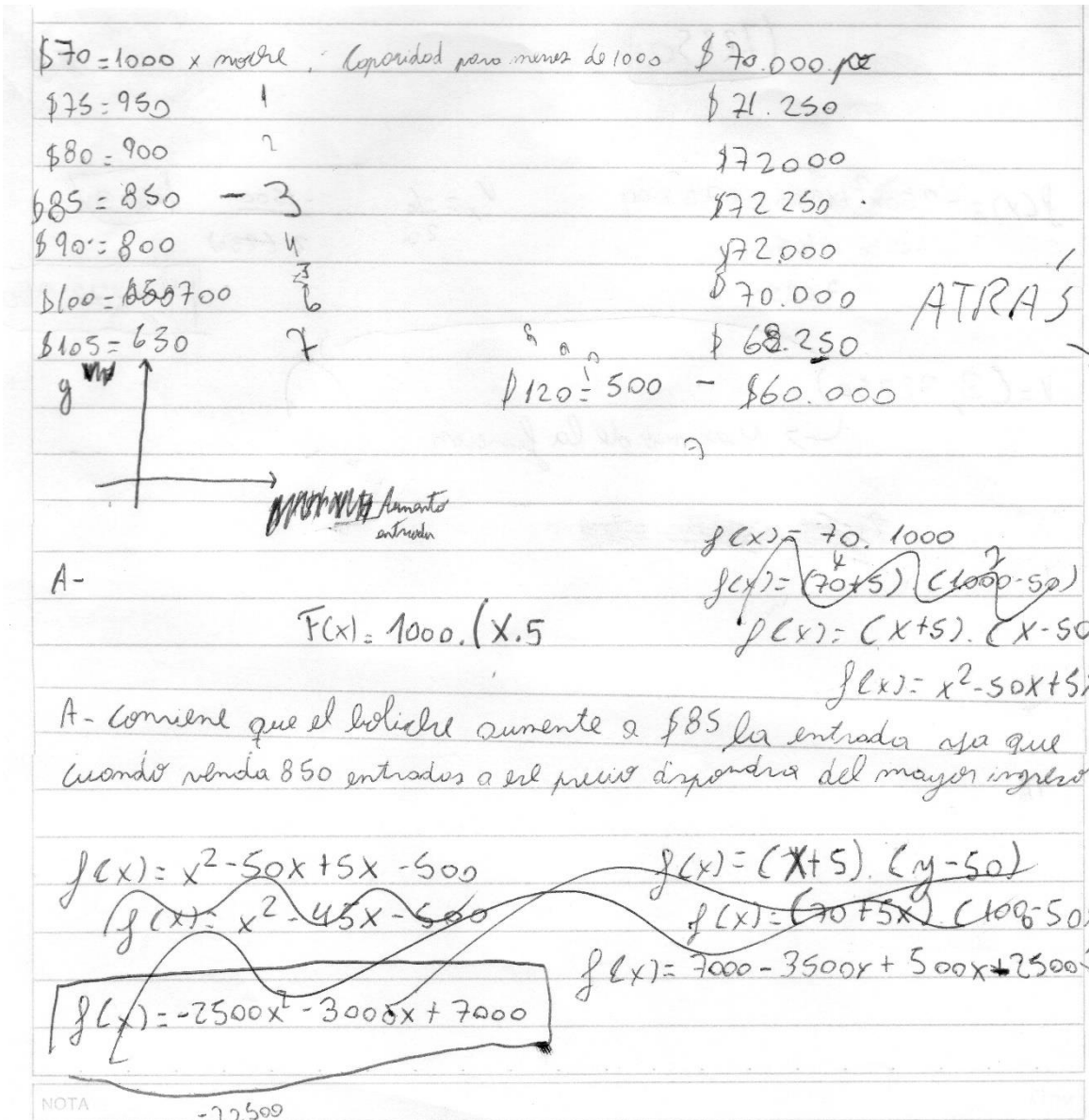


Figura A.1

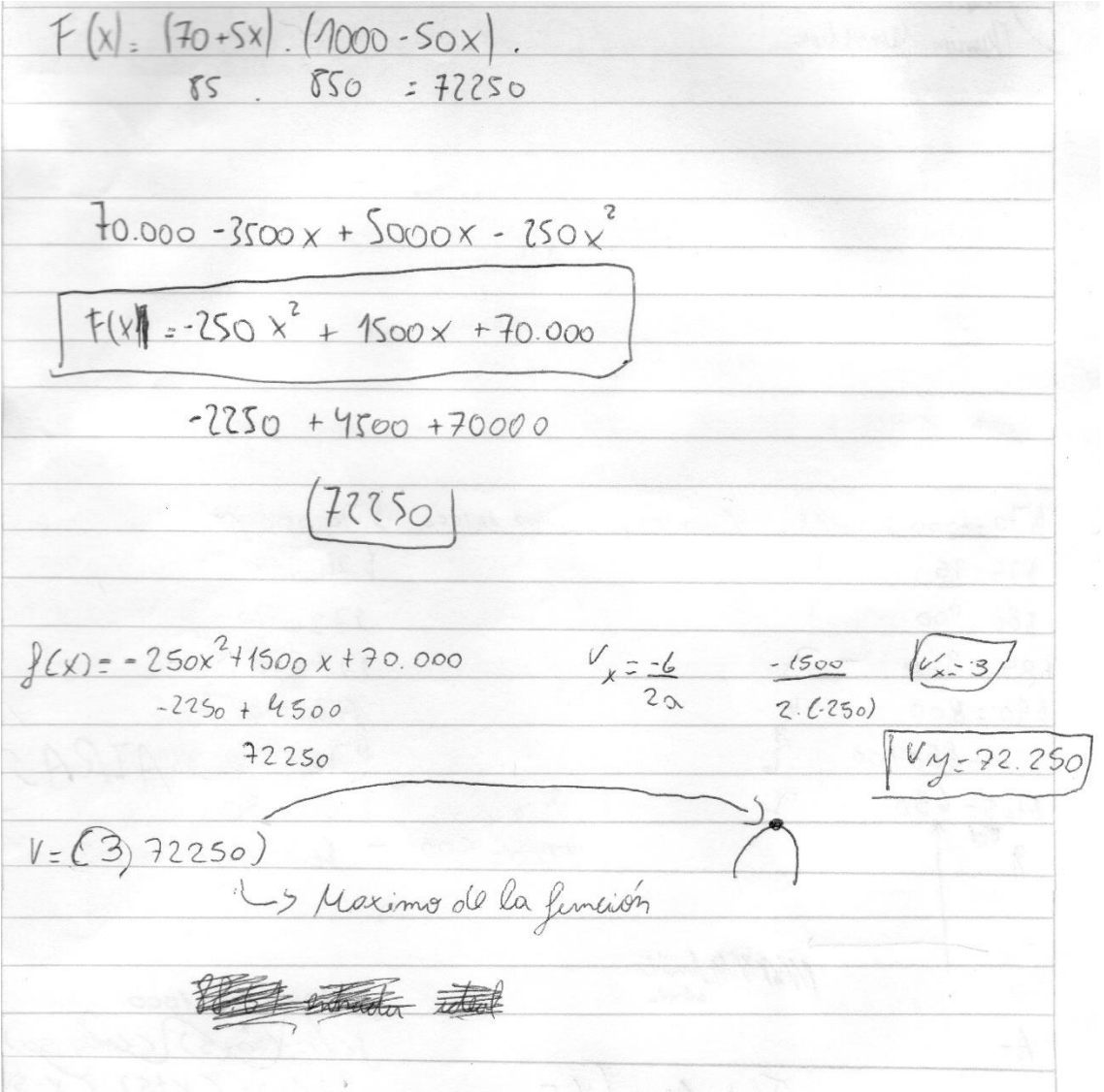


Figura A.2

1000 p (70 \$)	70000 / noche
950 p (75 \$)	71250 / noche
900 p (80 \$)	72000 / " "
850 p (85 \$)	72250 / " "
800 p (90)	72000

- a) Si le conviene.
 b) 85 \$ y van 850 p.
 c) 72250 \$.

$$f(x) = (70 + 5x) \cdot (7000 - 50x)$$

donde x es las veces que aumenta de 5 \$, x no varia en la que es las veces que se piden.

$$V = (3; 72250)$$

$$f(x) = -250x^2 + 7500x + 70000$$

Dom: $(0; 3)$ siendo el objetivo reducir la cant. de personas y aumentar el ingreso.

Figura A.3

Precio	Personas	
70	1000	
75	950	
80	900	
70	1000	= 70.000
75	950	= 71.250
80	900	= 72.000
A) Conviene ya que el ingreso irá aumentando		
85	850	= 72.250
90	800	= 70.000
B) El precio máximo de lo entredos sea \$100 ya que sino el ingreso disminuirá, concurirán 700 personas.		

Figura A.4

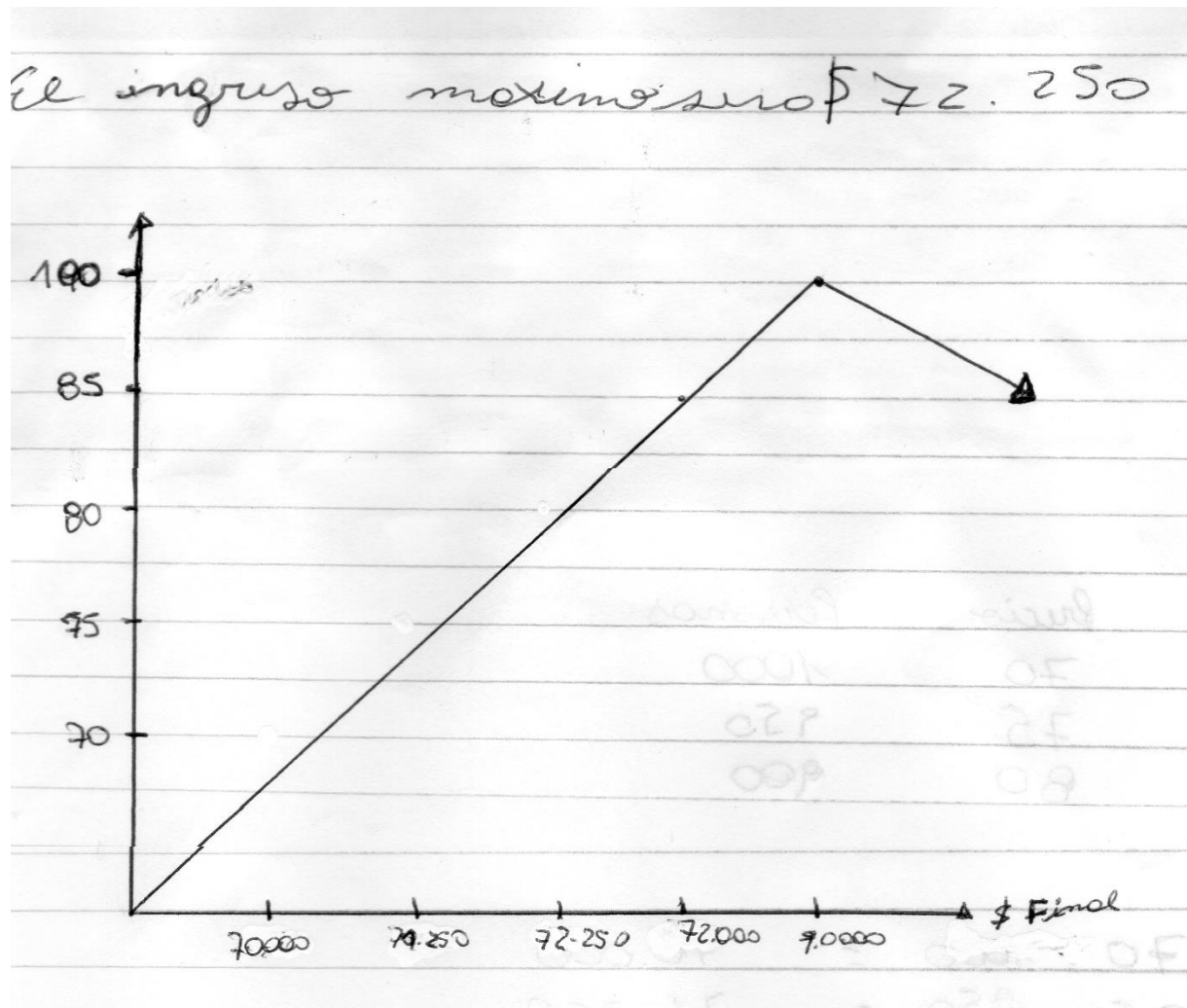


Figura A.5

Algunas de las listas de pasos necesarios para la resolución de problemas de optimización que realizaron los alumnos:

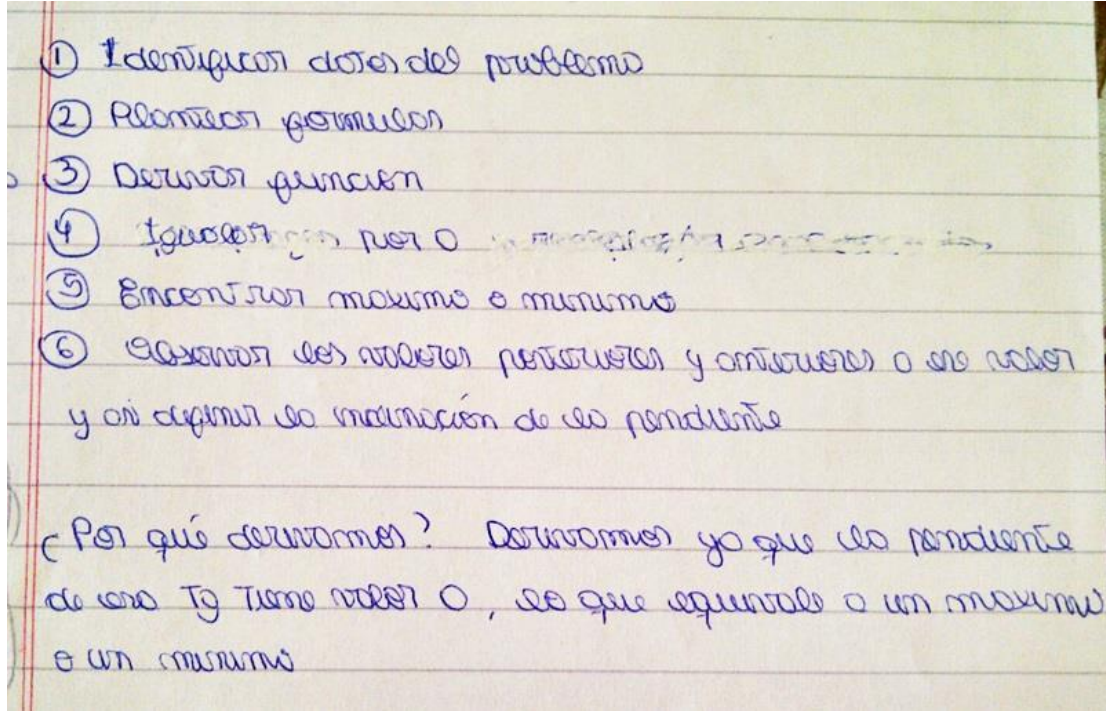


Figura A.6

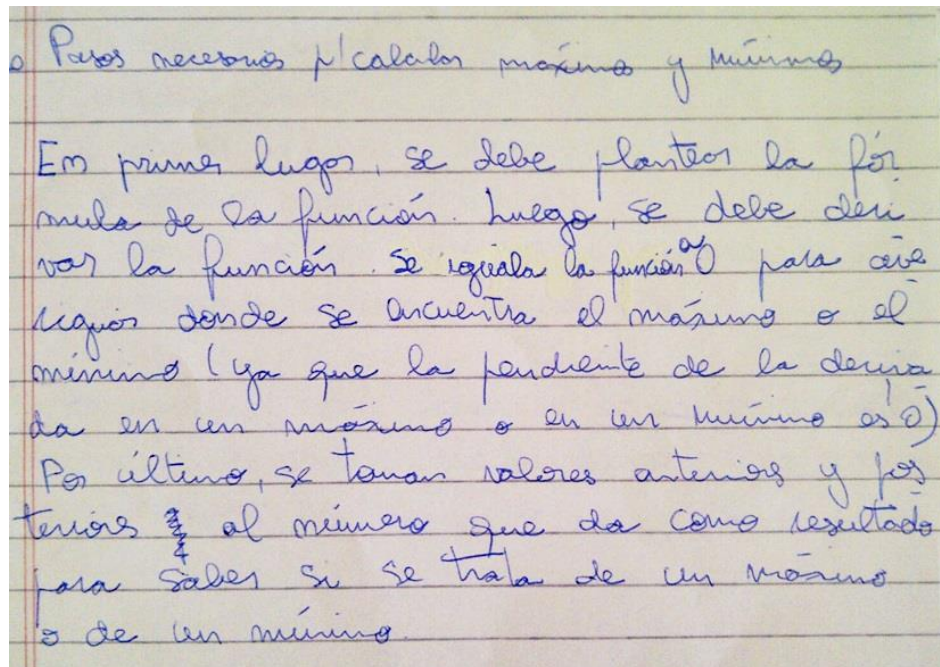


Figura A.7

Pasos para resolver un problema con derivadas.

1er paso: Se debe plantear la función, dejando solamente una incógnita.

En un caso como por ejemplo de un cilindro, la altura se puede resolver con la fórmula correspondiente.

- Una vez que la fórmula está planteada, se simplifica para que quede de una manera simple.

2do paso: Se deriva la función utilizando la tabla de derivadas.

Se obtiene como resultado un valor muy importante para la resolución (por ejemplo si se trata de un cilindro, se obtiene el radio).

3er paso: El valor obtenido es el que hace 0 (cero) a la derivada. Entonces se plantea una tabla donde:

4to paso: Con la función en base a su derivada.

	$(0/2)$	2	$(2; \infty^+)$
A	↓		→
A'	-	0	+

por ej $x=2$ sea radio

Reemplazar función por un valor mayor a 2. $(2; \infty)$

$x=2$ se obtiene una raíz que hace 0 a la función

Ej: función "A"

Figura A.8

(Continuación de la lista anterior)

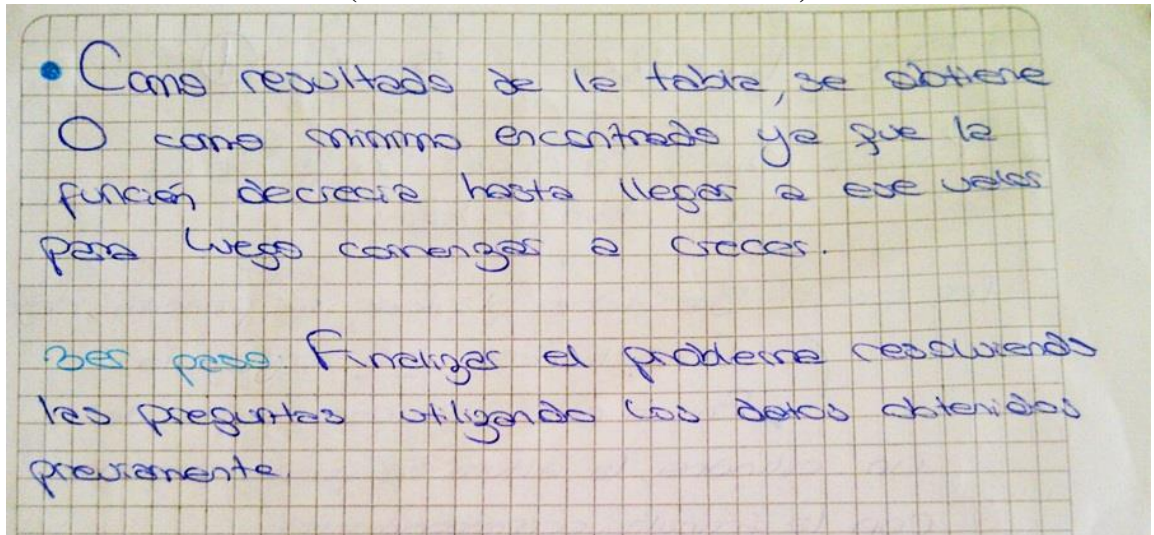


Figura A.9

Encuesta realizada a los alumnos al finalizar la aplicación de la secuencia:

- 1) ¿Qué te pareció que la consigna de cada problema sea resolverlo “como quieras y como puedas”? ¿Podrías explicar lo que pensaste y/o sentiste ante esta consigna con el primer problema? ¿Y con los demás?
- 2) ¿Cuál problema te interesó más? (Recordá que fueron 3: El del boliche, el de la caja y el de los saleros) ¿Por qué?
- 3) ¿Te gustó trabajar de este modo, intentando resolver problemas reales pudiendo usar libremente todo lo que sabés de matemática?
- 4) Luego de la puesta en común de la resolución del primer problema, ¿Te surgieron nuevas ideas para la resolución del segundo?
- 5) Luego de la puesta en común de la resolución del segundo problema, ¿Te surgieron nuevas ideas para la resolución del tercero?

- 6) ¿Pensás que es importante resolver los problemas planteando una función que se adapte a la situación? ¿Por qué?
- 7) Resolviendo los problemas y con la puesta en común que se hizo con la guía de la profesora, ¿sentís que entendiste mejor el concepto de derivada y de recta tangente?
- 8) ¿Te parece una herramienta útil esta que desarrollamos para encontrar máximos y mínimos de funciones? ¿Crees que se podría usar en alguna situación real? ¿Podrías dar un ejemplo?

Algunas de las encuestas que respondieron los alumnos:

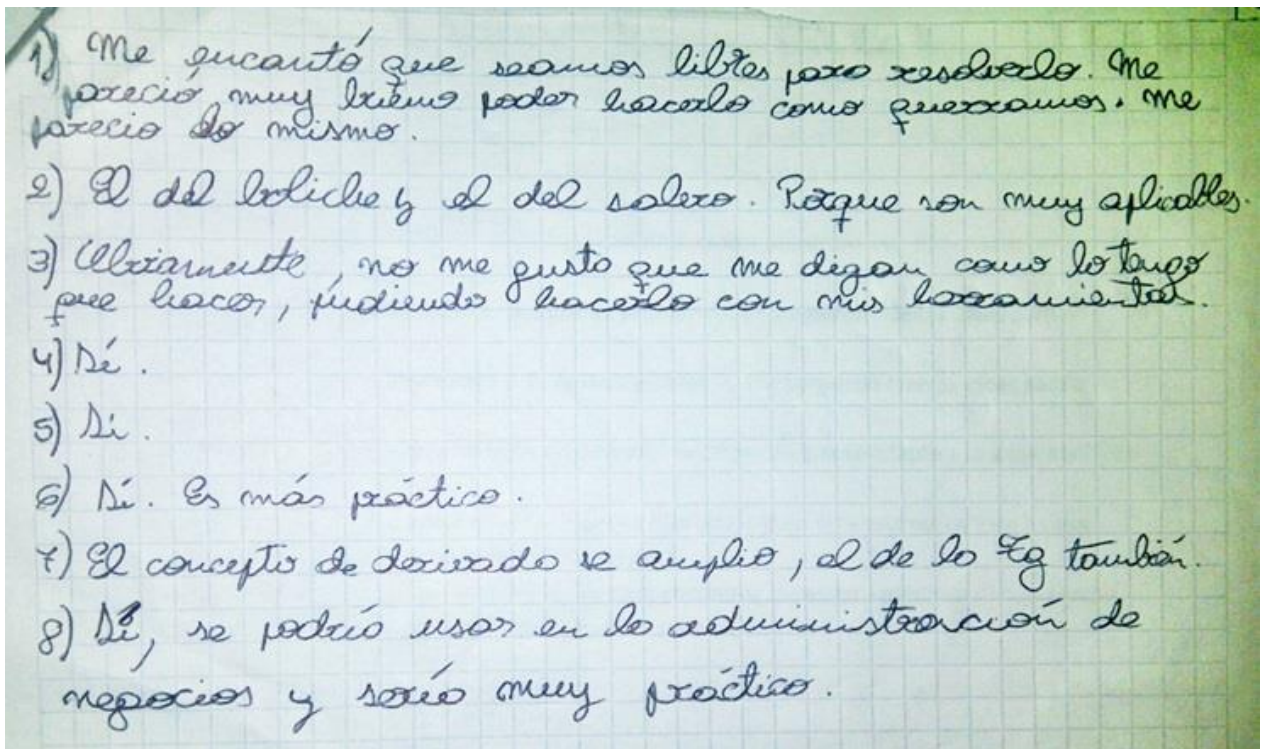


Figura A.10

1. Me pareció una muy buena idea ya que no solo encuentre formas de resolver los problemas, sino que pude ver las formas de mis amigos y llevo al debate. Al principio me sentí desorientado pero luego, al leerlo varias veces, logre poder hacerlo.
2. Los 3 me gustaron por igual ya que cada uno presentaba un desafío y dificultad diferente.
3. Sí, me parece una buena manera de juntar todo lo aprendido a lo largo de estos 6 años.
4. El primer problema me sirvió mucho para saber como proceder en los próximos.
5. Sí, entre el primer y segundo problema me surgieron mayor ideas para poder resolver el tercero.
6. Sí, ya que el hecho de plantear una función facilita las cosas y me permite trabajar de mejor manera.
7. Totalmente, la puesta en común me sirvió para entender mejor el temario y resolver dudas.
8. Sí, me parece útil. Hay millones de situaciones donde se puede utilizar, muchas de ellas en la vida cotidiana.

Figura A.11

- 1) Me pareció interesante ya que es la primera vez que me dicen que los resuelva con mis conocimientos. Me sentí como siempre.
- 2) Sinceramente el que más me interesó fue el primero.
- 3) Maso, ya que prefiero el método tradicional.
- 4) Sí se me surgieron nuevos ideas.
- 5) No ya tanto no.
- 6) Sí, y no sabría responder porque.
- 7) No la verdad que no, el tema lo entiendo, pero la forma de plantear el problema, no me aportó mucho a mi conocimiento.
- 8) Me abstengo a responder, ya que desconfío la respuesta.

Figura A.12