



UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA NACIONAL
Facultad Regional Bahía Blanca

Tesis presentada para acceder al grado académico de
Doctora en Ingeniería
con Mención en Mecánica Teórica y Aplicada

Estrategias de optimización para el control de la calidad de agua en estuarios y otros problemas relacionados

Cecilia Inés Stoklas

Magíster en Ingeniería Ambiental
Licenciada en Organización Industrial

Director: Dr. Víctor H. Cortinez

Co-director: Dr. Marcelo T. Piovan

Septiembre de 2018



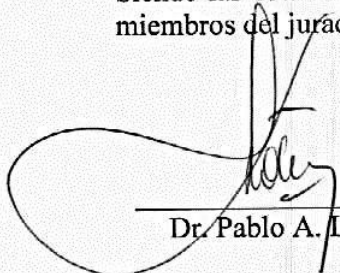
*Ministerio de Educación
Universidad Tecnológica Nacional
Facultad Regional Bahía Blanca*

**DICTAMEN FINAL DE TESIS DOCTORAL
ASPIRANTE: MAG. CECILIA INES STOKLAS**

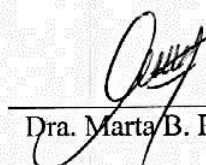
En Bahía Blanca, a los 13 días del mes de septiembre de 2018, a las 11:00 horas, en la Sala 1, Planta Baja de la Facultad Regional Bahía Blanca, se reúne el Jurado designado por la Universidad Tecnológica Nacional según Resolución CSU 685/2018, para dictaminar sobre la tesis de la Magíster en Medio Ambiente: Lic Cecilia Inés STOKLAS, DNI 27.952.757, Legajo 16664, para optar al título de Doctor en Ingeniería, Mención Mecánica Teórica y Aplicada, con la tesis intitulada "Estrategias de optimización para el control de la calidad de agua en estuarios y otros problemas relacionados", bajo la dirección del Dr. Víctor Hugo Cortínez y la co-dirección del Dr. Marcelo Tulio Piovan.-- Son miembros del Jurado, el Dr. Pablo A. LOTITO, la Dra. Marta B. ROSALES y la Dra. Liz G. NALLIM. -----

El trabajo de la Mag. Stoklas está orientado a la formulación de procedimientos integrados para la toma de decisiones sobre el control y manejo de agua, involucrando un planteo multidisciplinar y un enfoque integral del problema técnico, ambiental y económico. Las formulaciones fueron abordadas mediante simulación-optimización. Además, en la tesis se desarrollan estrategias tendientes a disminuir la cantidad de simulaciones que demanda el proceso de optimización. Tanto el planteo unificado e integral del problema, como los modelos matemáticos que se proponen para disminuir el costo computacional asociado al diseño óptimo, constituyen aportes originales. La tesis demuestra un muy buen nivel académico con excelente manejo de las herramientas de optimización en problemas que involucran ecuaciones diferenciales no lineales a derivadas parciales. La metodología empleada consistió en una discretización del problema en elementos finitos y su combinación con el método de optimización heurístico de recocido simulado, resultando en una integración eficiente de técnicas. La redacción de la tesis es sumamente clara y precisa. Las fuentes de información son actualizadas y completas. Los ejemplos desarrollados no sólo permiten verificar la metodología propuesta sino también mostrar la potencialidad en cuanto a las aplicaciones a casos reales, así como a otros problemas afines. La tesis presenta conclusiones que son coherentes con las hipótesis y objetivos planteados. La defensa oral fue clara, ordenada y concisa. Finalmente, la Mag. Stoklas respondió con solvencia a las preguntas del jurado.- Por lo expuesto, como complemento de los dictámenes individuales redactados por los suscritos, este tribunal dictamina APROBAR la tesis doctoral presentada y calificarla con DIEZ (10) - Sobresaliente.-----


Siendo las 13.30 horas, se da por concluido el acto de defensa oral, con la firma de los miembros del jurado en cinco (5) originales. -----



Dr. Pablo A. Lotito



Dra. Marta B. Rosales



Dra. Liz G. Nallim

UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA NACIONAL
Facultad Regional Bahía Blanca

PLANILLA DE EXAMEN

Tomo : 356
Folio : 188

Asignatura: (411-2008-2) Tesis

Especialidad: Doctorado en Ingeniería, mención Mecánica Teórica Fecha : 13/09/2018

Departamento: DocIngMenMeTA

Horario: Noche

Tribunal: Tesis

PRESIDENTE: Rosales, Marta Beatriz

1er. VOCAL: Lotito, Pablo Andrés

2do. VOCAL: Nallim, Liz Graciela

Nro. Legajo Apellido y Nombre Nota En Letras

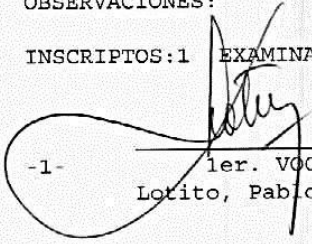
1 16.664 Stoklas, Cecilia Inés

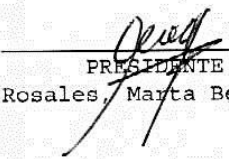
10 DIEZ


OBSERVACIONES:

INSCRIPTOS: 1 EXAMINADOS: 1 APROBADOS: 1 AUSENTES: - NO APROBADOS: -

-1-


1er. VOCAL
Lotito, Pablo Andrés


PRESIDENTE
Rosales, Marta Beatriz


2do. VOCAL
Nallim, Liz Graciela

Mg. Ing. CARLOS VERA
Secretario Académico

*A mis hijas Giovanna y Francesca,
y a mi esposo Ariel por su
incondicional apoyo.*

AGRADECIMIENTOS

Este trabajo de tesis fue posible gracias a la colaboración de todas aquellas personas que, de un modo u otro, han estado a mi lado y me han ayudado a alcanzar este difícil objetivo. Entre ellas quiero nombrar:

A mi director de tesis el Dr. Víctor H. Cortínez, por haberme dirigido por segunda vez. A él le quiero agradecer su dedicación, su visión y sobre todo su paciencia... su doble paciencia. A mi co-director el Dr. Marcelo T. Piovan, quien ha acompañado mi formación doctoral. A la Dra. Patricia Dominguez por su incondicional apoyo, siempre dispuesta a ayudarme y escucharme en todo momento. Trabajar con ellos ha sido un placer, y por suerte lo seguirá siendo.

A mi segundo hogar, la Universidad Tecnológica Nacional, Facultad Regional Bahía Blanca, por haberme brindado tantas posibilidades. Nunca voy a olvidar mi primer día en esta casa de altos estudios cuando el decano, el Ing. Vicente Egidi, parado casi sobre el borde de la escalera de lo que en su momento fue la “vieja casona”, recibió a todos los ingresantes con un cálido discurso de bienvenida. Suegro querido, donde quieras que estés, gracias por tus palabras.

A mis compañeros y colegas del Centro de Investigaciones en Mecánica Teórica y Aplicada de la UTN-FRBB, Martín Sequeira, Lucas Di Giorgio, Marta Vidal, Adrián Azzurro y Andrés Romero, por su grata compañía.

Finalmente deseo agradecer, muy especialmente y de una forma infinitamente cariñosa, a mis hijas Giovanna y Francesca, y a mi esposo Ariel por estar siempre, siempre a mi lado, por acompañarme nuevamente en este desafío, por alentarme a seguir y por tantas horas de espera. Gracias a ellos, mi vida es hermosa.

RESUMEN

Los estuarios son espacios naturales de gran importancia para los seres humanos, concentrando a más de un tercio de la población mundial. Debido a las características que presentan, en ellos se desarrollan diversas actividades tales como la pesca, el turismo y/o la explotación industrial, entre otras. Toda esta situación conlleva a que sean zonas proclives a soportar cambios, que impactan negativamente en su dinámica natural.

En particular, una situación muy importante de contaminación ambiental en estuarios, corresponde al vertido no controlado de desechos cloacales e industriales provenientes de localidades aledañas. Muchas veces el nivel contaminante de tales descargas supera las posibilidades de autodepuración de los sistemas acuáticos, generando efectos nocivos.

La contaminación provocada por tales efluentes, alcanza niveles que pueden medirse utilizando diversos indicadores ambientales. Por esta razón, resulta imprescindible considerarlos y establecer las correspondientes concentraciones máximas (o mínimas) admisibles para garantizar un nivel de contaminación tolerable en determinadas zonas de resguardo ambiental.

A los efectos de no superar las restricciones ambientales en las zonas aludidas, las aguas residuales deben ser purificadas previamente a su vertido mediante la instalación de plantas de tratamiento adecuadamente diseñadas. Sin embargo, la construcción y operación de tales plantas implica costos elevados que dependen de las variables de diseño de mayor importancia. Entre estas pueden considerarse a las funciones de descarga, entendiéndose como la distribución temporal del vertido, y también a la longitud de la tubería submarina, que depende de las coordenadas de la zona de descarga. Por tal motivo es conveniente adoptar una solución que relacione de forma apropiada aspectos económicos, técnicos y/o ambientales en su diseño.

En general se busca un diseño cuyo objetivo sea el mejor desempeño en alguno de estos aspectos, manteniendo los otros dentro de determinados límites. Para ello, se debe evaluar un gran número de combinaciones de diferentes valores de las variables de diseño que intervienen, verificando en cada caso el cumplimiento de las restricciones impuestas, hasta encontrar aquel conjunto de variables que mejor cumplan con el objetivo propuesto. Esta metodología de selección se denomina *Diseño Óptimo*.

Se proponen en este trabajo diferentes alternativas de plantas de tratamiento de efluentes. A los efectos de establecer el mejor diseño se formulan para cada una, expresiones matemáticas

que relacionan a los costos de construcción y de operación con las variables de diseño seleccionadas. Como tales expresiones están sujetas al cumplimiento de las restricciones ambientales, se debe plantear un método adecuado para estimar los niveles de concentración temporal y espacial de los indicadores de calidad de agua. Tal estimación se logra resolviendo, mediante el método de elementos finitos, las ecuaciones bidimensionales hidrodinámicas para aguas poco profundas y de difusión-advención, con el programa de simulación numérica FlexPDE.

Luego, se establece un procedimiento de búsqueda de la mejor alternativa de diseño en función de los objetivos propuestos. Tal procedimiento se realiza con una técnica de optimización conocida como "Recocido Simulado", que controla de forma automática, y con un número menor de simulaciones, un proceso que asegura la convergencia (o al menos se acerca lo suficiente).

Aun así, el tiempo computacional de cálculo que demanda tal procedimiento es elevado, debido al costo computacional asociado a la simulación numérica de cada escenario. Consecuentemente, se desarrollan en esta tesis diversas estrategias matemáticas basadas en simplificaciones, reformulaciones y combinaciones de los enfoques teóricos-numéricos del modelo de transporte.

La aplicación de estas metodologías en el proceso de diseño, permiten reducir la cantidad de simulaciones y también el tiempo de cálculo computacional que insume cada una de éstas.

Finalmente este enfoque de Optimización-Simulación propuesto, es también aplicado a otros tipos de problemas que pueden ocurrir dentro de un estuario, tales como en el diseño de puertos anti-resonantes y en sistemas de extracción de agua dulce en acuíferos costeros.

Tales modelos computacionales de optimización (calidad de agua, resonancia en puertos y extracción de agua dulce), se programan en un ambiente que permite controlar todo el proceso. Particularmente, se utiliza el programa de álgebra computacional MATLAB.

ÍNDICE GENERAL

CAPÍTULO I - INTRODUCCIÓN

1.1. EL PROBLEMA DE CONTAMINACIÓN EN ESTUARIOS Y ZONAS COSTERAS.	1
1.2. OTROS PROBLEMAS DE DISEÑO RELACIONADOS A ZONAS COSTERAS.	4
1.2.1. Diseño anti-resonante en puertos.	4
1.2.2. Extracción de agua dulce en acuíferos costeros.	5
1.3. ANTECEDENTES RELACIONADOS A ENFOQUES DE SIMULACIÓN Y OPTIMIZACIÓN EN PROBLEMAS DE DISEÑO Y CONTROL DE CALIDAD DE AGUA EN ESTUARIOS Y ZONAS COSTERAS.	6
1.3.1. Modelos matemáticos de transporte.	6
1.3.2. Modelos simplificados para el estudio de hidrodinámica ambiental.	7
1.3.3. Aplicación de métodos numéricos en problemas de transporte en estuarios y zonas costeras.	8
1.3.4. Desarrollo de programas computacionales para el análisis de calidad de agua.	8
1.3.5. Diseño y control óptimo.	9
1.4. MOTIVACIÓN DEL PRESENTE TRABAJO.	11
1.5. ALCANCE DEL ESTUDIO.	12
1.6. OBJETIVOS DE LA PRESENTE TESIS.	12
1.6.1. Objetivo general.	12
1.6.2. Objetivos particulares.	12
1.7. METODOLOGÍA.	13
1.8. CONTENIDOS DE LA TESIS.	16

CAPÍTULO II - DISEÑO Y CONTROL ÓPTIMO DE CALIDAD DE AGUA EN ESTUARIOS Y ZONAS COSTERAS

2.1 PROBLEMA DE CALIDAD DE AGUA EN ESTUARIOS Y ZONAS COSTERAS.	19
2.1.1. Indicadores de calidad de agua.	21
2.1.2. Restricciones ambientales. Definición de zonas protegidas.	22
2.2. PLANTAS DE TRATAMIENTO DE EFLUENTES: ASPECTOS GENERALES.	23
2.2.1. Recolección y transporte de las aguas residuales.	23
2.2.2. Sistemas de tratamiento de efluentes.	25

2.3. ESQUEMAS DE DISEÑO PARA EL CONTROL DE LA CALIDAD DE AGUA EN ESTUARIOS Y ZONAS COSTERAS:	
VARIABLES DE DISEÑO	27
2.3.1. Esquema general de tratamiento. Variables de diseño	27
2.3.2. Esquema de diseño 1.	29
2.3.3. Esquema de diseño 2.	30
2.4. ASPECTOS ECONÓMICOS DE LAS PLANTAS DE TRATAMIENTO	31
2.5. PROBLEMA DE DISEÑO ÓPTIMO DE DESCARGAS DE EFLUENTES EN ESTUARIOS: FORMULACIÓN MATEMÁTICA	33
2.5.1. Alternativa 1: Minimización de los costos de construcción en el diseño de plantas de tratamiento de efluentes con caudales máxicos constantes.	35
2.5.2. Alternativa 2: Minimización de los costos constructivos y operativos considerando funciones de descarga variables temporalmente.	37
2.5.3. Alternativa 3: Minimización del impacto ambiental considerando funciones de descarga variables temporalmente.	37

CAPÍTULO III - MECANISMOS DE TRANSPORTE EN ESTUARIOS

3.1. GENERALIDADES DE LOS FLUJOS EN ESTUARIOS: CORRIENTES DE MAREA	40
3.2. ECUACIONES HIDRODINÁMICAS PARA AGUAS POCO PROFUNDAS	42
3.2.1. Ecuaciones gobernantes.	42
3.2.2. Condiciones iniciales y de frontera.	45
3.3. ECUACIONES DE TRANSPORTE DE SUSTANCIAS	47
3.3.1. Ecuaciones gobernantes.	47
3.3.2. Condiciones iniciales y de frontera.	49
3.3.3. Sistema de ecuaciones de transporte.	50

CAPÍTULO IV - ENFOQUE GENERAL DE SOLUCIÓN: OPTIMIZACIÓN BASADA EN SIMULACIÓN

4.1. ESTRATEGIA DE SOLUCIÓN BASADA EN UN ENFOQUE DE SIMULACIÓN-OPTIMIZACIÓN	53
4.1.1. Solución numérica de las ecuaciones gobernantes: Simulación.....	53
4.1.2. Procedimiento de optimización.	54
4.1.3. Enfoque Simulación-Optimización.	55
4.2. MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS	57
4.2.1. Generalidades.	57
4.2.2. Aspectos básicos del programa computacional de elementos finitos FlexPDE.	58
4.3. MÉTODO DE “RECOCIDO SIMULADO” (SA)	63
4.4. IMPLEMENTACIÓN COMPUTACIONAL DEL ENFOQUE DE SIMULACIÓN (MEF) – OPTIMIZACIÓN (SA)	66
4.5. OBSERVACIONES GENERALES	67

CAPÍTULO V - SOLUCIÓN DEL PROBLEMA HIDRODINÁMICO MEDIANTE EL ENFOQUE DE PERTURBACIÓN COMBINADO CON EL MÉTODO DE FOURIER

5.1. MÉTODO DE PERTURBACIÓN APLICADO A LA TEORÍA HIDRODINÁMICA DE AGUAS POCO PROFUNDAS.	70
5.2. ECUACIÓN DE ONDA PERTURBADA.	74
5.3. SOLUCIÓN DEL PROBLEMA HIDRODINÁMICO PERTURBADO MEDIANTE EL MÉTODO DE FOURIER.....	77

CAPÍTULO VI - FORMULACIÓN DEL PROBLEMA ADJUNTO DE DIFUSIÓN – ADVECCIÓN: APLICACIÓN AL CONTROL ÓPTIMO DE CALIDAD DE AGUA

6.1. DEFINICIÓN DE FUNCIONES DE INFLUENCIA.	85
6.2. FORMULACIÓN DEL PROBLEMA ADJUNTO PARA LA DETERMINACIÓN DE LAS FUNCIONES DE INFLUENCIA (AT)....	86
6.2.1. Formulación teórica.	86
6.2.2. Metodología de diseño óptimo basado en el problema Adjunto de Transporte (AT-O).....	92

CAPÍTULO VII - SOLUCIÓN DE LOS PROBLEMAS DE TRANSPORTE Y SU FORMULACIÓN ADJUNTA MEDIANTE EL MÉTODO DE FOURIER: APLICACIÓN DEL PROBLEMA DE DISEÑO ÓPTIMO

7.1. MÉTODO DE FOURIER PARA LA SOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE DESCARGA PERIÓDICA.	95
7.2. SOLUCIÓN AL PROBLEMA DE TRANSPORTE (FDT).	97
7.2.1. Formulación teórica.	97
7.2.2. Metodología de diseño óptimo basado en el desarrollo de Fourier sobre la ecuación de Transporte (FDT-O).	98
7.3. SOLUCIÓN AL PROBLEMA ADJUNTO DE TRANSPORTE (FAT).	101
7.3.1. Formulación teórica.	101
7.3.2. Metodología de diseño óptimo basado en el desarrollo de Fourier sobre la ecuación Adjunta de Transporte (FAT-O).	103

CAPÍTULO VIII - ESTUDIOS NUMÉRICOS DE PROBLEMAS DE CONTROL DE CALIDAD DE AGUA

8.1. PROBLEMA HIDRODINÁMICO.	106
8.1.1. Estudio numérico de un problema hidrodinámico 1D: Comparación entre los métodos HPOF y Diferencias Finitas.....	106
8.1.2. Comparación entre las soluciones hidrodinámicas bidimensionales obtenidas mediante el método HPOF y el MEF aplicado a la ecuación original de onda para aguas poco profundas.	109

8.1.3. Comparación entre el comportamiento hidrodinámico lineal y no lineal.	113
8.2. PROBLEMA DE TRANSPORTE.	115
8.2.1. Efectos de la no linealidad hidrodinámica sobre el transporte de contaminantes.	115
8.2.2. Influencia de la distribución espacial y temporal de las descargas en el nivel de las concentraciones existentes.....	116
8.3. SOLUCIÓN A LOS PROBLEMAS DE DISEÑO ÓPTIMO.	125
8.3.1. Utilización del método Adjunto de Transporte (AT-O).	125
8.3.1.1. Validación del método AT.....	126
8.3.1.2. Método AT-O: Ejemplos de problemas de diseño óptimo.	128
8.3.1.2.A. Ejemplo 1 basado en AT-O: Diseño con funciones de descargas constantes.	128
8.3.1.2.B. Ejemplo 2 basado en AT-O: Diseño con funciones de descargas variables temporalmente.....	132
8.3.1.2.C. Ejemplo 3 basado en AT-O: Diseño para la reducción del impacto ambiental.	134
8.3.2. Utilización del método de Fourier aplicado al Problema de Transporte (FDT-O).....	137
8.3.2.1. Validación del método FDT.....	137
8.3.2.2. Método FDT-O: Ejemplos de problemas de diseño óptimo.	138
8.3.2.2.A. Ejemplo 1 basado en FDT-O.	139
8.3.2.2.B. Ejemplo 2 basado en FDT-O.....	146
8.3.2.3. Discusión de los resultados de los problemas de diseño óptimo resueltos con el método FDT-O.....	148
8.3.3. Utilización del método de Fourier aplicado al problema Adjunto de Transporte (FAT-O). .	150
8.3.3.1. Validación del método FAT.	150
8.3.3.2. Método FAT-O: Ejemplo de un problema de diseño óptimo.	151
8.3.3.2.A. Ejemplo basado en FAT-O.....	151
8.3.3.3. Discusión de los resultados del problema de diseño óptimo resuelto con el método FAT-O.....	155

CAPÍTULO IX - OTROS PROBLEMAS DE DISEÑO RELATIVOS A ESTUARIOS

9.1. DISEÑO ÓPTIMO DE ESTRUCTURAS PORTUARIAS PARA ATENUAR EFECTOS RESONANTES POR ONDAS LARGAS. ..	157
9.1.1. Generalidades	157
9.1.2. Oscilaciones de puertos.	159

9.1.2.1.	Oscilaciones forzadas.....	159
9.1.2.2.	Oscilaciones Libres.....	161
9.1.3.	Formulación del problema de diseño óptimo.....	162
9.1.3.1.	Problema de diseño 1: Minimización del costo de escolleras en puertos no resonantes.	162
9.1.3.2.	Problema de diseño 2: Minimización de la posibilidad de resonancia portuaria.	165
9.1.4.	Solución computacional y ejemplos numéricos.....	166
9.1.4.1.	Caso 1: Minimización de longitud de escolleras.....	168
9.1.4.2.	Caso 2: Diseño de un puerto no resonante.	169
9.1.5.	Discusión de los resultados.	172
9.2.	UN ENFOQUE DE DISEÑO ÓPTIMO DE UN SISTEMA DE EXTRACCIÓN DE AGUA DULCE EN ACUÍFEROS COSTEROS. .	174
9.2.1.	Generalidades.	174
9.2.2.	Modelo de flujo subterráneo.	175
9.2.3.	Formulación del problema de diseño óptimo: Maximización del caudal a extraer.....	178
9.2.4.	Solución computacional y ejemplos numéricos.....	179
9.2.4.1.	Ejemplo numérico 1.....	180
9.2.4.2.	Ejemplo numérico 2.....	181
9.2.5.	Discusión de los resultados.	185

CAPÍTULO X - CONCLUSIONES

10.1	SUMARIO.	187
10.2	APORTES.	188
10.3	PUBLICACIONES REALIZADAS.....	189
10.4	SUGERENCIAS SOBRE FUTURAS LÍNEAS DE INVESTIGACIÓN	191

REFERENCIAS	193
--------------------	------------

APÉNDICES	201
------------------	------------

A.1.	DESARROLLO ADIMENSIONAL EN LAS ECUACIONES DE AGUAS POCO PROFUNDAS.	201
A.2.	DESARROLLO RE-DIMENSIONAL SOBRE LOS SISTEMAS PERTURBADOS.	203
A.3.	TRANSFORMACIÓN A ECUACIÓN DE ONDA EL SEGUNDO SISTEMA PERTURBADO.....	206
A.4.	EXPANSIÓN EN SERIES DE FOURIER TEMPORAL.....	208

ÍNDICE DE FIGURAS

2.1	Fases del tratamiento de aguas residuales.	26
2.2	Esquema general de planta de tratamiento.....	27
2.3	Esquema de diseño de capacidad de tratamiento.	30
2.4	Esquema de diseño de descargas con tanques de almacenamiento.	31
2.5	Relación costo/depuración.....	33
2.6	Variables de diseño de plantas de tratamiento.	35
3.1	Período - energía de las ondas	42
3.2	Dimensiones de cuerpos de agua poco profundos.	43
3.3	Sistema de coordenadas y plano de referencia.	44
3.4	Condiciones de borde típicas en estuarios para el modelo hidrodinámico	46
3.5	Condiciones de borde típicas en estuarios para el modelo de transporte.	50
4.1	Esquema Simulación-Optimización.	55
4.2	Modelo computacional de diseño óptimo.	56
4.3	Representación del proceso de discretización.....	57
4.4	Pantalla de escritura (descriptor) del programa FlexPDE.	59
4.5	Ingreso de datos en el programa FlexPDE.....	60
4.6	Solución gráfica del programa FlexPDE.....	62
4.7	Algoritmo de “Recocido Simulado” (SA).	64
4.8	Búsqueda por “Recocido Simulado”	65
4.9	Modelo computacional de diseño óptimo para el problema de calidad de agua.	68
5.1	Condiciones de borde en un estuario.	76
6.1	Proceso de diseño óptimo empleando el método AT-O	94
7.1	Esquema de evolución de la concentración.....	96

7.2	Proceso de diseño óptimo empleando el método FDT-O.	100
7.3	Proceso de diseño óptimo empleando el método FAT-O.	104
8.1	Representación de un dominio unidimensional con diferencias finitas.	107
8.2a	Comparación en el Nodo 2 ($H \approx 10.5\text{m}$).	108
8.2b	Comparación en el Nodo 5 ($H \approx 8\text{m}$).	108
8.2c	Comparación en el Nodo 10 ($H \approx 4\text{m}$).	109
8.3	Geometría y profundidad del dominio.	110
8.4a	Variación temporal de la velocidad en medio del estuario en $x=12\text{ Km}$	111
8.4b	Variación temporal de la velocidad en medio del estuario en $x=30\text{ Km}$	111
8.4c	Variación temporal de la velocidad en medio del estuario en $x=60\text{ Km}$	112
8.4d	Variación temporal de la velocidad cerca del margen en $x=30\text{ Km}$	112
8.5a	Diferencia porcentual de velocidad.	114
8.5b	Diferencia porcentual de velocidad.	114
8.5c	Diferencia porcentual de velocidad.	114
8.5d	Diferencia porcentual de velocidad.	114
8.6	Ubicación de descarga y zonas de monitoreo en un estuario hipotético.	115
8.7a	Comparación de valores de concentración con hidrodinámica lineal y no lineal para la Zona 1 ($\eta_c/H_c=0.2$).	116
8.7b	Comparación de valores de concentración con hidrodinámica lineal y no lineal para la Zona 2 ($\eta_c/H_c=0.2$).	116
8.8	Esquema de diseño de planta y capacidad de tratamiento.	117
8.9	Esquemas de los escenarios de análisis de descarga.	118
8.10	Distribución espacial de CF.	118
8.11	Historias temporales de concentración de CF en las 4 zonas de monitoreo.	119
8.12.a	Comparación porcentual valores máximos entre la política 1 y 2 en la Zona 1.	120
8.12.b	Comparación porcentual valores máximos entre la política 1 y 2 en la Zona 2.	121

8.12.c	Comparación porcentual valores máximos entre la política 1 y 2 en la Zona 3.....	121
8.12.d	Comparación porcentual valores máximos entre la política 1 y 2 en la Zona 4.....	121
8.13	Comparación entre la dinámica mareal y funciones de descarga para la zona 2.	122
8.14	Evolución temporal de CF.....	123
8.15	Comportamientos de descargas variable y escalonada en la boca del estuario.....	124
8.16	Estuario y batimetría bajo análisis (AT).....	126
8.17	Concentración de CF en la zona 1 del problema de diseño 1 (AT-O).....	130
8.18	Concentración de DBO en la zona 1 del problema de diseño 1 (AT-O).....	130
8.19	Concentración de OD en la zona 1 del problema de diseño 1 (AT-O).....	131
8.20	Evolución de la Función Objetivo en el proceso de optimización del problema de diseño 1 (AT-O).....	131
8.21a	Distribución temporal de la descarga óptima para el Problema de Diseño 2 (AT-O).	132
8.21b	Distribución temporal de la descarga factible para el Problema de Diseño 2 (AT-O).....	132
8.22	Concentración de CF en la zona 1 del segundo problema de diseño 2 (AT-O).	133
8.23	Concentración de DBO en la zona 1 del segundo problema de diseño 2 (AT-O).....	134
8.24	Concentración de OD en la zona 1 del segundo problema de diseño 2 (AT-O).	134
8.25	Distribución temporal de la descarga para el problema de diseño 3 (AT-O).	135
8.26	Estuario y batimetría bajo análisis del ejemplo 1 (FDT).	137
8.27	Evolución de la Función Objetivo durante el proceso de optimización. Ejemplo 1 (FDT-O)...	141
8.28a	Comparación de la historia temporal de concentración de CF en la zona 1 (FDT-O).	141
8.28b	Comparación de la historia temporal de concentración de DBO en la zona 1 (FDT-O).	142
8.28c	Comparación de la historia temporal de concentración de OD en la zona 1 (FDT-O).	142
8.29a	Comparación de la historia temporal de concentración de CF en la zona 2 (FDT-O).	143
8.29b	Comparación de la historia temporal de concentración de DBO en la zona 2 (FDT-O).	143
8.29c	Comparación de la historia temporal de concentración de OD en la zona 2 (FDT-O).	144
8.30a	Comparación de la historia temporal de concentración de CF en la zona 3 (FDT-O).	144

8.30b	Comparación de la historia temporal de concentración de DBO en la zona 3 (FDT-O).	145
8.30c	Comparación de la historia temporal de concentración de OD en la zona 3 (FDT-O).	145
8.31	Estuario y batimetría bajo análisis del ejemplo 2 (FDT).	146
8.32	Evolución de la Función Objetivo durante el proceso de optimización. Ejemplo 2 (FDT-O)...	147
8.33	Estuario y batimetría bajo análisis (FAT).	150
8.34	Evolución de la Función Objetivo durante el proceso de optimización (FAT-O).....	152
8.35a	Comparación de la historia temporal de concentración de CF en la zona 1 (FAT-O).	154
8.35a	Comparación de la historia temporal de concentración de CF en la zona 2 (FAT-O).	154
8.35a	Comparación de la historia temporal de concentración de CF en la zona 3 (FAT-O).	155
9.1	Esquema del puerto.	159
9.2	Configuración del puerto.....	164
9.3	Procedimiento de optimización	167
9.4	Diagrama de amplificación. Caso 1	169
9.5	Diagrama de amplificación. Caso 2	171
9.6	Convergencia del Caso 2.....	171
9.7	Condiciones de oleaje en bajamar cuando $\omega=0,0068$ rad/s.	172
9.8	Sección transversal de un acuífero no confinado. Esquema de interfaz agua dulce-salada. .	176
9.9	Representación del área de estudio.....	180
9.10	Variación de los niveles freáticos (H) sobre el área de estudio.	182
9.11a	Corte transversal del cono de descenso de los pozos 1, 2 y 3.	183
9.11b	Corte transversal del cono de descenso de los pozos 4, 5 y 6.	183
9.11c	Corte transversal del cono de descenso de los pozos 7 y 8.	184
9.11d	Corte transversal del cono de descenso del pozo 9.	184
9.12	Campo vectorial normalizado del flujo de agua.....	185

ÍNDICE DE TABLAS

2.1	Contaminantes presentes en aguas residuales.....	21
2.2	Detalle general de costos para una planta de tratamiento	32
3.1	Armónicos de marea	40
8.1	Comparación entre los valores de concentraciones medias en zonas protegidas (DT-AT)	127
8.2	Resultados del problema de diseño 1 (AT-O).....	129
8.3	Resultados del problema de diseño 2 (AT-O).....	133
8.4	Resultados del problema de diseño 3 (AT-O).....	136
8.5	Comparación entre los valores de concentraciones en las zonas protegidas (DT-FDT).....	138
8.6	Resultados del problema de diseño (FDT-O).....	140
8.7	Valores de concentración de CF, DBO y OD en las zonas protegidas (situación inicial)	147
8.8a	Resultados del diseño de optimización ejemplo 2 (FDT-O)	148
8.8b	Resultados del diseño de optimización ejemplo 2 (FDT-O) (continuación)	148
8.9	Comparación entre valores de concentraciones medias en zonas protegidas (DT-FAT).....	151
8.10	Resultados de la optimización (FAT-O)	153
9.1	Valores de coordenadas. Caso 1.	168
9.2	Valores de coordenadas. Caso 2.	170
9.3	Comparación de los valores obtenidos en con la alternativa de diseño A	181
9.4	Comparación de los valores obtenidos en con la alternativa de diseño B.....	181
9.5	Valores finales obtenidos en cada iteración.	182

1.1. EL PROBLEMA DE CONTAMINACIÓN EN ESTUARIOS Y ZONAS COSTERAS.

Los estuarios son cuerpos de agua costeros semicerrados conectados con el mar. En ellos coexisten corrientes de marea, que ingresan y egresan de forma periódica, y drenajes de agua dulce, procedentes de ríos y escorrentías. Esta situación genera que en su interior se produzca un intercambio salobre cuya dilución, distribución vertical y extensión de su límite efectivo horizontal responde al aporte de la masa de agua que ejerce la mayor influencia.

Debido al balance entre diversos factores como el clima, la litología costera, el caudal de los ríos, las fuerzas mareales, etc., se forman distintos tipos de configuraciones, como por ejemplo fiordos, rías, esteros, planicies aluviales, llanuras de inundación, marismas y bahías, entre otros. Estas últimas se producen cuando los aportes fluviales son despreciables o nulos para diluir el agua marina (Cameroon y Pritchard, 1963).

A todas estas formas confinadas entre límites costeros, con una libre conexión con el mar abierto, con o sin aporte de agua dulce, donde la acción de las mareas produce corrientes residuales en el interior de las mismas se las denomina, a los efectos de esta investigación, estuarios.

Estos ambientes son muy productivos y de gran biodiversidad debido a la transición entre el continente y el mar, lo que favorece el desarrollo de actividades tales como la pesca y el turismo. Por las características naturales y morfológicas que presentan, son refugios naturales para las embarcaciones, ideales para la instalación de infraestructuras portuarias, dársenas, astilleros, así como para el emplazamiento de grandes industrias y/o represas para la explotación energética. En consecuencia, son espacios naturales de gran importancia para los seres humanos, concentrando a más de un tercio de la población mundial en sus proximidades (Barbier et al., 2008).

Toda esta situación conlleva a que los estuarios sean zonas proclives a soportar cambios, que impactan negativamente en su dinámica ambiental. En particular, un aspecto adverso a destacar corresponde al vertido no controlado de desechos cloacales e industriales provenientes de

emplazamientos urbanos que se encuentran aledaños a estas zonas. Muchas veces el nivel contaminante de tales descargas supera las posibilidades de autodepuración de los sistemas acuáticos, degradando la calidad del agua.

Esta problemática ha puesto de manifiesto la necesidad de efectuar un adecuado control ambiental. Para ello, es necesario un conocimiento profundo de los fenómenos físico-químicos asociados al transporte de sustancias, como así también de los aspectos técnicos y económicos relacionados con distintos tipos de descargas.

La polución provocada por estos efluentes, puede medirse a través de diversos indicadores ambientales. Por esta razón, resulta imprescindible considerarlos y establecer las correspondientes concentraciones máximas (o mínimas), para garantizar un nivel de calidad de agua aceptable.

Una de las acciones fundamentales para lograr una estrategia de control de la contaminación en el medio hídrico, es la medición de tales indicadores para evaluar si los niveles se encuentran dentro de los límites tolerables. En caso de superarse los mismos, deberían implementarse acciones de remediación del ambiente contaminado. Sin embargo, esta metodología reactiva de solución de problemas ambientales puede resultar muy ineficiente, tanto desde el punto de vista económico como ambiental. En efecto, tales medidas son extremadamente costosas y los daños producidos sobre el ecosistema en ocasiones resultan muy difíciles de revertir.

Un método más razonable para abordar el impacto que produce la actividad humana en estos ambientes costeros, es hacerlo desde un punto de vista preventivo, con el objeto de evitar situaciones críticas que deban luego ser subsanadas. Este enfoque, se basa en la estimación del efecto que la actividad antrópica provoca en el medio considerado.

Antiguamente, tal estimación se basaba solamente en la experiencia surgida de casos similares y empirismo. Sin embargo, el desarrollo de las técnicas computacionales ha permitido que los modelos matemáticos se conviertan en herramientas cualitativa y cuantitativamente eficientes para dicho estudio. Por otra parte, las mejoras en la capacidad predictiva de los modelos, conjuntamente con la concientización sobre la problemática ambiental, están promoviendo el surgimiento de un nuevo paradigma desde el punto de vista del diseño de diferentes sistemas antropogénicos, en el cual el propósito del cuidado ambiental es tenido en cuenta conjuntamente con los clásicos objetivos económicos y/o funcionales diversos.

Si bien resguardar la totalidad del medio hídrico es lo deseable, esto resulta imposible o al menos muy costoso. Sin embargo, es viable definir algunas zonas de especial interés, como por

ejemplo áreas de pesca, recreación, playas o toma de agua entre otras, y realizar en ellas un control y monitoreo de la calidad del agua.

A los efectos de no superar las restricciones ambientales en las zonas aludidas, las aguas residuales deben ser purificadas previamente a su vertido, mediante la instalación de plantas de tratamiento de efluentes adecuadamente diseñadas, cuya eficiencia en la depuración dependerá de las variables de diseño de mayor importancia. Entre estas pueden considerarse, la capacidad de tratamiento, entendiéndose como el caudal máximo de agua residual que puede depurar la planta de tratamiento, y también la longitud de la tubería submarina de descarga, cuya finalidad es alejar los puntos de vertido de las zonas de resguardo ambiental. Otro aspecto de gran importancia, está relacionado a la distribución temporal con la que los efluentes son descargados al mar. En ocasiones, si tales vertidos se realizan cuando las corrientes mareales se dirigen hacia mar abierto, es posible generar un efecto de mayor depuración (o dilución) del contaminante dentro del estuario.

Teniendo en cuenta que tales variables de diseño implican costos muy elevados de construcción, operación y mantenimiento de las plantas de tratamiento, es conveniente plantear un diseño con una adecuada relación entre los aspectos técnicos, económicos y ambientales que intervienen.

En general se busca un diseño cuyo objetivo sea el mejor desempeño en alguno de estos aspectos, manteniendo los otros dentro de determinados límites. Para ello, se debe evaluar un gran número de posibilidades de combinación de diferentes valores de las variables de diseño que intervienen, verificando en cada caso el cumplimiento de las restricciones impuestas. Este procedimiento de evaluación, continúa hasta encontrar el conjunto de aquellas variables que mejor cumplan con el objetivo propuesto. Esta metodología de selección se denomina *Diseño Óptimo*.

La definición adecuada de un diseño óptimo no es única, sino que responde a un juicio de valor sobre la importancia relativa de los aspectos económicos y ambientales puestos en juego. Por ejemplo, una forma de plantearlo podría ser definiendo el objetivo de minimizar los costos, respetando restricciones ambientales mínimas o, en el otro extremo, se podría formular el problema como la minimización de los efectos nocivos hacia el medio ambiente, manteniendo el costo dentro de ciertas posibilidades presupuestarias.

La forma más eficiente de realizar este proceso es abordarlo desde un punto de vista matemático, estableciendo un procedimiento que permita comparar de forma automática

diferentes escenarios posibles, y seleccionar aquel que resulte más conveniente de acuerdo a los objetivos propuestos. Tales escenarios se simulan numéricamente, utilizando modelos de predicción de calidad de agua.

Desde un punto de vista más técnico, tal procedimiento involucra la integración de conceptos de modelación matemática, simulación computacional y teoría de optimización, y constituye la forma más racional de responder a las cuestiones de diseño que se han planteado, proveyendo un adecuado marco para la comprensión del costo y del beneficio resultante de la decisión técnica a adoptar.

1.2. OTROS PROBLEMAS DE DISEÑO RELACIONADOS A ZONAS COSTERAS.

El enfoque de diseño óptimo también es de utilidad para el diseño de otros problemas relacionados con estuarios. A manera de ejemplo se describen a continuación, dos de ellos:

1.2.1. Diseño anti-resonante en puertos.

Los puertos deben brindar un ambiente propicio para la realización segura de tareas de carga y descarga de mercaderías. En tal sentido, para garantizar tales operaciones, se diseñan obras de abrigo para atenuar dentro del recinto portuario, los efectos que ejerce la acción de diferentes ondas de agua, conocido como oleaje.

Una de estas situaciones de oleaje corresponde a la agitación de la marea por la acción del viento, que actúa sobre la superficie del océano. Este fenómeno, produce perturbaciones en las aguas que se propagan hacia las costas, y se caracteriza por tener frecuencias altas y períodos bajos, del orden de segundos. Muchas veces la protección contra esta condición climática, se realiza orientando de forma adecuada la bocana del puerto.

Existe también otro fenómeno ondulatorio que se genera en el océano, con períodos de mayor duración, que oscilan entre 30 segundos y 5 minutos, y longitud de onda más grande. Cuando la longitud de estas ondas que se propagan hacia la costa coincide aproximadamente con la longitud característica de las dársenas de los puertos, pueden generar oscilaciones sobre-amplificadas de marea dentro de los recintos. Este efecto, conocido como resonancia portuaria, ocurre en general cuando las frecuencias naturales propias del puerto coinciden con las frecuencias de las ondas externas de las olas que lo excitan. Debido a la peligrosidad de este fenómeno, muchas veces la operación del puerto es detenida hasta que cesa tal condición, ocasionando importantes pérdidas

económicas, tanto por la paralización de la actividad portuaria como por los daños materiales que puede acarrear.

Por lo tanto, el diseño de puertos debe considerar la geometría adecuada de obras de abrigo tales como escolleras, rompeolas, diques, etc., para poder hacer frente a estos fenómenos. En particular, para evitar los efectos resonantes, se debe procurar que la geometría portuaria sea tal que su frecuencia natural no coincida con la frecuencia de excitación del oleaje.

Como la construcción y operación de los puertos implica costos substanciales, la selección de la geometría de las obras portuarias puede plantearse mediante un procedimiento de diseño óptimo. Por ejemplo, se podría definir un diseño que busque el menor volumen de construcción de obras de abrigo a los efectos de reducir tales costos y que garantice condiciones de navegabilidad y operatividad, evitando efectos resonantes, o también se podría plantear otro diseño cuyo objetivo esté dirigido a maximizar la seguridad frente a oscilaciones resonantes, manteniendo los costos dentro del presupuesto prefijado.

1.2.2. Extracción de agua dulce en acuíferos costeros.

La extracción de agua dulce de los acuíferos costeros para usos agrícolas, municipales o industriales es una actividad habitual. Estos acuíferos, a diferencia de los que se encuentran ubicados en zonas continentales interiores, presentan un límite permeable con una masa de agua salada que se dispone sobre el continente en forma de cuña salina. Por diferencia de densidades el agua dulce se encuentra por encima de la salada, pero si la primera se extrae de forma no controlada el sistema se sobreexplota, ingresando agua salada más allá del límite de equilibrio natural que existe entre ambas. Esta situación de contaminación se conoce como intrusión salina, y puede ocasionar que determinados sectores del acuífero estén inutilizados debido al exceso de salinidad.

Una vez producida la contaminación, la recuperación de estos acuíferos puede llegar a ser muy costosa. Por lo tanto, a los efectos de impedir que esto suceda es necesario realizar un diseño de extracción de agua dulce que maximice el caudal que puede ser bombeado, sin intrusión salina, y cumpliendo con otras restricciones relacionadas con la capacidad de bombeo.

1.3. ANTECEDENTES RELACIONADOS A ENFOQUES DE SIMULACIÓN Y OPTIMIZACIÓN EN PROBLEMAS DE DISEÑO Y CONTROL DE CALIDAD DE AGUA EN ESTUARIOS Y ZONAS COSTERAS.

1.3.1. Modelos matemáticos de transporte.

El desarrollo de modelos de transporte, en particular el hidrodinámico, para el estudio computacional de diversas situaciones es una actividad que lleva más de medio siglo. Tales modelos se han convertido en herramientas valiosas para la predicción de condiciones ambientales futuras, proporcionando una mejor comprensión de los procesos que forman parte del ambiente que nos rodea. Este criterio ha sido compartido por diversos autores, como Menéndez (1995) y Wainwright et. al (2004), entre otros.

Particularmente, la modelización matemática de la circulación de agua en estuarios, ríos o lagos involucra a las ecuaciones tridimensionales de Navier-Stokes para flujos incompresibles junto con la ecuación de continuidad, desde un punto de vista promediado según Reynolds (Potter, 2002). Se trata de un sistema de ecuaciones que tiene como incógnitas los campos de presión y velocidad en el cuerpo de agua considerado. Sin embargo, su tratamiento analítico es inabordable, motivo por el cual se han investigado y desarrollado una gran cantidad de esquemas numéricos y computacionales para su resolución. En líneas generales, se pueden citar los métodos basados en diferencias finitas y elementos finitos, siendo estos últimos de mayor generalidad a los efectos de tratar con dominios de geometría compleja. La investigación primitiva sobre tales aspectos se puede encontrar en diversos textos especializados tales como el de Zienkiewicz (1980), Reddy, (1993) y Rubin, (2001). Sin embargo, el desarrollo de nuevos enfoques y mejoras de tales metodologías numéricas sigue siendo aún un campo activo de investigación.

De la misma manera, el problema de transporte de sustancias en el agua puede ser resuelto mediante los métodos mencionados, habiéndose investigado formulaciones específicas para superar problemas de inestabilidad numérica inherentes a su estructura matemática. Al respecto es importante mencionar, que el Método de Elementos Finitos (MEF) ha sido la base de numerosos programas multipropósito que, en particular, permiten resolver algunos problemas asociados con este tipo de ecuaciones.

1.3.2. Modelos simplificados para el estudio de hidrodinámica ambiental.

Es posible abordar, con programas basados en el MEF disponibles en el mercado, la simulación de diferentes situaciones hidrodinámicas acopladas con otros modelos físicos desde un enfoque tridimensional. Sin embargo, el tiempo computacional requerido suele ser alto, especialmente en un contexto de diseño (ya que en estos casos las simulaciones deben ser repetidas una gran cantidad de veces), y además pueden resultar complejas al requerir el conocimiento detallado de una gran cantidad de parámetros y variables.

Por tal razón, en la aplicación de modelos numéricos a problemas ambientales, se ha procurado frecuentemente aliviar la carga computacional utilizando algunas versiones simplificadas de las ecuaciones mencionadas, en contextos adecuados para dichos enfoques.

En el caso de ríos o de algunos estuarios, cuando la dimensión longitudinal del dominio bajo estudio es mucho mayor que las dimensiones correspondientes a la sección transversal, las ecuaciones hidrodinámicas y de transporte son sustituidas por un sistema espacialmente unidimensional. Tal sistema está conformado por tres ecuaciones diferenciales, dos de ellas conocidas como ecuaciones de Saint Venant, permiten obtener las variaciones de profundidad y de velocidad longitudinal, y la tercera, denominada ecuación de advección-dispersión, permite obtener la distribución longitudinal y temporal de la concentración de una sustancia dada. Para resolver tales ecuaciones se han propuesto diversos esquemas numéricos (Strelkoff, 1969; Chertok, 1996; Bellos, 2003; Hashemi, 2008; Strub, 2009).

Por otra parte, cuando se tiene que tratar con problemas donde la geometría es tal que una de las dimensiones (profundidad) es mucho menor que las dimensiones horizontales, las ecuaciones gobernantes pueden ser simplificadas efectuando una integración a lo largo de la vertical, llegando a lo que se conoce como aproximación de aguas poco profundas bidimensional. Diversos enfoques numéricos se han desarrollado para resolver tales ecuaciones, en particular aquellos basados en elementos finitos (Katopodes, 1987; Heniche, 2000; Ji, 2007).

Los problemas mencionados son generalmente de naturaleza no lineal, sin embargo a los efectos de abordarlos de forma más sencilla Pearson (1977) efectuó una simplificación al considerar que la circulación de las corrientes mareales podía representarse como un movimiento periódico. De esta forma reemplazó a las ecuaciones originales hidrodinámicas dependientes del tiempo por un conjunto de expresiones modales, obtenidas por descomposición en Series de

Fourier. Bajo la misma línea de investigación, Li et al. (1997, 1999, 2006 y 2008) emplearon el método de perturbación sobre tales ecuaciones para estudiar el comportamiento hidrodinámico ante diferentes formas (curvaturas) y profundidades de estuarios y obtener un conjunto de sistemas lineales.

1.3.3. Aplicación de métodos numéricos en problemas de transporte en estuarios y zonas costeras.

Una de las tendencias en la investigación sobre métodos numéricos aplicados a problemas ambientales se dirige hacia la modelización de situaciones reales. En esta línea, puede citarse el trabajo desarrollado por Revilla et al. (1994) quienes, utilizando modelos bidimensionales, estudiaron el déficit de oxígeno originado por descargas procedentes de redes de saneamiento en la Bahía de Pasajes (Guipúzcoa, España). Engelhardt et al. (1995), analizaron problemas de polución provocados por el transporte de sedimentos en el Río Elba (Alemania) empleando un modelo bidimensional. Por su parte, Campolo et al. (2002), estudiaron la contaminación en el Río Arno utilizando una ecuación de dispersión-advención no estacionaria unidimensional. Tsanis y Saied (2007) simularon, mediante un modelo 2D promediado en la vertical, la circulación inducida por el viento en el Lago Ontario (Canadá) a los efectos de estudiar la variación de la concentración de contaminantes debido a descargas puntuales. Zabalett et al. (2011), evaluaron la incidencia de las descargas de líquidos cloacales crudos de las ciudades de Concordia y Salto en la zona de Colón en el Río Uruguay, con un modelo de calidad de agua unidimensional.

En relación a la dinámica de sedimentos en el fondo del lecho, Neil et al. (2009) estudiaron el transporte de estos, debido al efecto que produce un sistema de turbinas que aprovechan las corrientes de marea en el Canal de Bristol, Reino Unido. Por otra parte, Chu et al. (2015) estudiaron el desarrollo morfológico debido a la asimetría en la circulación dentro de un estuario, producto de la interacción entre mareas, sus constituyentes y los aportes de ríos.

1.3.4. Desarrollo de programas computacionales para el análisis de calidad de agua.

A la fecha se han realizado importantes avances en los aspectos numéricos como así también en la elaboración de programas computacionales amigables utilizados para cuantificar los impactos ambientales producto de proyectos, o para evaluar la pertinencia de una obra en

particular, lo que en síntesis los convierte en una herramienta fundamental en la toma de decisiones. En general los modelos hidrodinámicos y de transporte existentes, se basan en el MEF como así también en el método de Diferencias Finitas.

Como ejemplos de programas computacionales basados en el método de diferencias finitas puede mencionarse el HIDROBID II (Menéndez, 1990) para simular flujos cuasi-bidimensionales a superficie libre y el desarrollado por el Cuerpo de la Armada de Estados Unidos, denominado HEC-RAS para flujos unidimensionales (ríos) basado en las ecuaciones de Saint Venant.

Varias líneas de investigación se han enfocado en el desarrollo de programas computacionales orientados al estudio de problemas ambientales. En tal sentido Yu y Salvador (2005), crearon un software en un ambiente amigable para Windows, para el estudio de calidad de agua en ríos desde el punto de vista unidimensional, denominado Aguario 2.0. Siguiendo la misma línea, Chapra et al. (2008), desarrollaron un ambiente computacional de simulación desde el punto de vista unidimensional, denominado Qual2K, que a su vez es una mejora del programa Qual2E desarrollado por la USEPA (Brown y Barnwell, 1987). Por su parte, Colonna Rosman (2011) ha desarrollado un programa para el análisis 2D y 3D de problemas de hidrodinámica ambiental denominado SisBaHiA. Asimismo, la administración pública española, en colaboración con las universidades de España, diseñaron un modelo matemático bidimensional de uso libre para la simulación del flujo en ríos y estuarios (IBER) desarrollado como herramienta de gestión técnica en problemas de aplicación de la legislación vigente en materia de aguas (Bladé et al. 2014).

Existen programas generales de simulación numérica, tales como FlexPDE y COMSOL, que resuelven ecuaciones diferenciales mediante el MEF. Como tales softwares no están limitados a una librería de modelos, permiten combinar diferentes tipos de problemas físicos y de ingeniería, como por ejemplos los hidrodinámicos (bi y tridimensionales), de transporte, o térmicos, entre otros. Esta cualidad hace potencialmente posible el estudio de la problemática ambiental desde diversos puntos de vista usando un mismo ambiente computacional.

1.3.5. Diseño y control óptimo.

Existe una gran variedad de problemas que pueden ser planteados desde un punto de vista de diseño óptimo. En relación a problemas de ingeniería portuaria puede mencionarse por ejemplo, el desarrollado por Zhu et al. (1999), quienes aplicaron el control óptimo para el dragado en canales de navegación basándose en lo que se denomina cibernética natural, disciplina que estudia los mecanismos de autocontrol y control artificial del ambiente natural. Por otra parte en

problemas de extracción de agua, Sanders et al. (2002) desarrollaron una metodología para optimizar las desviaciones de agua dulce en diferentes sectores de un estuario bien mezclado, procurando que las concentraciones de salinidad en la zona de agua salobre no excedan los niveles estipulados por normativa.

Por otra parte, en problemas ambientales de transporte de sustancias puede mencionarse por ejemplo, el abordado por Thomann y Mueller (1987) quienes presentaron el problema de la modelización y control de contaminantes considerando la influencia de las mareas en estuarios angostos. Un análisis adecuado de transporte de contaminantes en ríos anchos o estuarios, fue abordado por Katopodes y Piasecki (1996, 1997) quienes utilizaron un modelo de elementos finitos de Petrov-Galerkin, junto con la técnica conocida como ecuación adjunta del problema de transporte a los efectos de minimizar la cantidad de simulaciones necesarias para establecer localizaciones de descargas de efluentes. Tal enfoque de simulación fue combinado con métodos de optimización basados en gradiente. Estudios similares, aunque orientados a problemas de contaminación atmosférica fueron desarrollados por Skiba et al. (2000) y Parra-Guevara et al. (2000) quienes se basaron a su vez en formulaciones adjuntas del problema de transporte, desarrolladas por Marchuk (1986). Un problema similar fue abordado por Álvarez Vázquez et al. (2008). Estos autores, también estudiaron problemas de remediación de aguas poco profundas contaminadas y el diseño óptimo de estructuras hidráulicas para el traslado de peces en ríos (Álvarez Vázquez et al., 2007). Más recientemente, siguiendo con problemas de transporte, Louaked y Saidi (2011) presentaron un enfoque que combina un esquema TVD (Total Variation Dimishing) para las ecuaciones de aguas poco profundas, con un enfoque Lagrangiano de partículas para analizar el problema de difusión-convección, relacionado con el control óptimo de la calidad de aguas en ríos.

Un aspecto de especial importancia en el diseño y control óptimo de plantas de tratamiento, corresponde a la relación de los costos de construcción, mantenimiento y operación, con las variables de diseño de mayor importancia. Diversos autores se han orientado en este sentido, establecido fórmulas matemáticas que determinan tales relaciones, entre los cuales pueden citarse los trabajos publicados por Salas (2000), Álvarez-Vázquez et al. (2005), Friedler y Pisanty (2006) y Hernández-Sancho et al. (2010), entre otros.

1.4. MOTIVACIÓN DEL PRESENTE TRABAJO.

El problema de calidad de agua en estuarios debido al vertido no controlado de efluentes urbanos e industriales, puede estudiarse mediante la comparación de diferentes escenarios futuros posibles, bajo un procedimiento automático de simulación numérica de los modelos de transporte de contaminantes. De esta forma, se puede llegar a aquella configuración de las variables de diseño seleccionadas que mejor cumplan con los objetivos y restricciones establecidas. Sin embargo, esta metodología de solución mediante prueba y error, resulta muy costosa desde el punto de vista computacional, ya que requiere el cálculo de una gran cantidad de situaciones en un tiempo de cómputo que puede ser excesivo.

Por otra parte, es posible disminuir el tiempo de cálculo preseleccionando un conjunto mínimo de alternativas en base a experiencia surgida de casos similares. Sin embargo, se corre el riesgo de dejar fuera de análisis varias opciones que pueden ser mejores. En tal sentido, el diseño final obtenido podría llegar a estar lejos del esperado, con las consecuentes desventajas ambientales y económicas que esto representaría.

De acuerdo a lo anterior, es de gran conveniencia utilizar un procedimiento de búsqueda, basado en una técnica de optimización adecuada, que permita obtener la mejor alternativa posible en función del objetivo propuesto, con el menor número de evaluaciones de situaciones posibles.

Aun así, el tiempo computacional de cálculo que demanda el procedimiento de diseño óptimo puede seguir siendo elevado, debido al costo computacional asociado a la simulación numérica de cada escenario.

En tal sentido, la motivación del presente trabajo consiste en el desarrollo y combinación de diversos enfoques matemáticos, tendientes a minimizar la cantidad de simulaciones, así como a reducir el tiempo de cálculo computacional de cada una de ellas. La aplicación adecuada de cada uno de estos enfoques, dependerá de la estructura que presenta cada problema de diseño a resolver.

En consecuencia se buscará una técnica de optimización adecuada para controlar el procedimiento de diseño completo, de forma tal que sea lo suficientemente versátil para ser aplicada en distintos problemas ambientales que pueden ocurrir en estuarios y que minimice la cantidad de evaluaciones necesarias para converger a las variables óptimas del diseño.

1.5. ALCANCE DEL ESTUDIO.

El enfoque de esta tesis es esencialmente teórico y numérico. Los modelos computacionales que se desarrollan corresponden a la resolución bajo un enfoque de diseño óptimo de problemas de calidad de agua, debido al vertido de efluentes de origen domiciliario. Es decir, no se consideran descargas de origen industrial. Sin embargo la metodología propuesta puede ser extendida también a tales situaciones.

El procedimiento de optimización desarrollado no está dirigido al diseño de los detalles de plantas de tratamiento, sino al diseño de la magnitud, de la distribución temporal y de la ubicación de las descargas de los efluentes que provienen de las mismas, bajo determinados objetivos económicos y/o ambientales.

También se analizan otros problemas de diseño relativos a estuarios tales como, diseños de puertos anti-resonantes y extracción de agua dulce en acuíferos costeros, bajo el enfoque propuesto de simulación-optimización.

1.6. OBJETIVOS DE LA PRESENTE TESIS.

1.6.1. Objetivo general.

Desarrollar modelos computacionales para el control y mantenimiento óptimo de la calidad de agua en estuarios, y para otros problemas de diseño óptimo asociados. Se propenderá a mejorar la eficiencia de un enfoque combinado de simulación y optimización.

1.6.2. Objetivos particulares.

- **Objetivo N°1:** Formular diferentes alternativas de diseño óptimo para el control y mantenimiento de calidad de agua en estuarios.
- **Objetivo N°2:** Desarrollar enfoques de optimización-simulación, basados en la aplicación del MEF, a modelos de transporte en combinación con la técnica denominada “Recocido Simulado”.
- **Objetivo N°3:** Reducir el tiempo de simulación en un contexto de diseño óptimo:
 - **A):** desacoplando el Problema Hidrodinámico mediante el uso del Enfoque de Perturbación combinado con el Método de Fourier Temporal;
 - **B):** aplicando la formulación Adjunta al Problema de Transporte;

- **C):** aplicando el Método de Fourier Temporal para resolver los problemas de Transporte y su formulación Adjunta, en situaciones de descarga periódica.
- **Objetivo N°4:** Estudiar otros problemas de diseño en estuarios mediante modelos de optimización-simulación:
 - **A):** Diseño anti-resonante en puertos;
 - **B):** Extracción de agua dulce en acuíferos costeros.
- **Objetivo N°5:** Implementar computacionalmente los modelos desarrollados en un ambiente de programación MATLAB (2010), en combinación con el programa computacional de simulación numérica mediante el MEF, FlexPDE (2015).

1.7. METODOLOGÍA.

Para abordar el problema del control y mantenimiento de la calidad de agua en estuarios, debido a la descarga no controlada de efluentes urbanos, es posible plantear diferentes alternativas de diseño de plantas de tratamiento.

Se formulan matemáticamente tres alternativas de diseño, dos de las cuales persiguen el objetivo de minimizar los costos económicos de construcción y operación de las plantas de tratamiento, y la tercera busca la reducción del impacto ambiental. En cada una de las tres se definen las variables de diseño que intervienen, es decir la determinación de las funciones de descarga y/o la localización de cada punto de vertido dentro del estuario, y se establecen las correspondientes restricciones que el diseño debe respetar. Tales condiciones establecen el cumplimiento de los niveles de concentración admisible de diferentes indicadores de calidad de agua en ciertas áreas dentro del estuario, definidas como zonas protegidas. En el presente trabajo se analizan las concentraciones de los Coliformes Fecales (CF), la materia orgánica a partir de la Demanda Bioquímica de Oxígeno (DBO) y el Oxígeno Disuelto (OD).

Para evaluar si la configuración del diseño cumple con las restricciones ambientales impuestas, se emplea un modelo de calidad de agua que predice el comportamiento temporal y espacial de la concentración de tales indicadores dentro del estuario. Este modelo está conformado por un sistema de ecuaciones diferenciales hidrodinámicas, para aguas poco profundas, y de difusión- advección (que requiere de las velocidades hidrodinámicas), junto con las correspondientes condiciones de borde e iniciales.

El régimen de velocidades dentro del estuario se obtiene resolviendo tres ecuaciones diferenciales parciales no lineales que corresponden a la conservación de la masa y del momentum, integradas en la vertical. Las mismas son expresadas en términos de las variables suavizadas, aplicando el enfoque conocido como Promediación según Reynolds.

Una vez conocidas tales velocidades, el transporte de sustancias dentro del cuerpo de agua se determina empleando las ecuaciones de difusión-advención para cada uno de los indicadores ambientales. Como la evolución de OD depende de la cantidad de DBO, las correspondientes ecuaciones se plantean de forma acoplada.

Debido a la complejidad que presentan estas ecuaciones de transporte (hidrodinámicas y difusión-advención), las mismas se resuelven mediante el MEF utilizando el programa computacional de simulación numérica denominado FlexPDE.

Con este modelo de calidad de agua se aborda cada alternativa de diseño planteada simulando numéricamente distintas situaciones, para diferentes valores de las variables de diseño, y seleccionando aquella configuración factible (que verifique las restricciones establecidas), que mejor cumpla con los objetivos propuestos (minimización del costo económico o ambiental). Este procedimiento de diseño óptimo se realiza mediante la técnica de optimización denominada Método de Recocido Simulado, que controla las simulaciones numéricas en un proceso que asegura la convergencia al valor óptimo buscado (o al menos se acerca lo suficiente).

Para disminuir los tiempos de cálculo computacional que demanda la simulación de cada alternativa (en un contexto de diseño óptimo), se desarrollan distintas estrategias matemáticas. Las mismas se basan en simplificaciones y/o reformulaciones de los enfoques teóricos del modelo de transporte, y dependen de la tipología del problema de diseño a resolver.

En tal sentido, para simplificar el carácter no lineal de las expresiones hidrodinámicas se desarrolla un enfoque analítico basado en el Método de Perturbación, que representa mediante dos sistemas consecutivos lineales, el grado de no linealidad del problema a través de un parámetro de perturbación. Por otra parte, aprovechando el carácter periódico de la marea, tales sistemas son resueltos efectuando un desarrollo en Series de Fourier en la variable temporal. Este enfoque permite desacoplar el problema hidrodinámico, evitando realizar el cálculo evolutivo hasta llegar al estado estacionario. De esta forma, las variables hidrodinámicas (elevación y velocidad) se expresan de forma analítica, sin necesidad de almacenarlas temporalmente.

Para la evaluación de las restricciones ambientales en las diferentes alternativas de diseño, se emplean funciones de influencia obtenidas convenientemente a partir del Enfoque Adjunto del

problema de difusión-advección. Estas funciones se deben calcular numéricamente una sola vez por cada zona protegida (independientemente de la localización de las salidas de tubería o de su cantidad). Luego, las concentraciones medias espaciales y temporales en dichas zonas, se obtienen de forma analítica multiplicando cada contribución de flujo másico por coeficientes de influencia, asociados a cada descarga.

Por otra parte, como estrategia alternativa para aquellos problemas de diseño que presentan descargas periódicas de efluentes urbanos, se efectúan dos desarrollos en Series de Fourier, uno aplicado a la ecuación de Transporte (difusión-advección) y el otro sobre la ecuación Adjunta al problema de transporte. De esta forma se consiguen sistemas de ecuaciones independientes del tiempo, que permiten evaluar las concentraciones de CF, DBO y OD en cada zona protegida.

Una vez desarrollados los enfoques propuestos, se realizan validaciones entre las soluciones obtenidas de los modelos de transporte con otros enfoques de solución. Se comparan los tiempos que demanda el cálculo computacional de cada uno con la solución mediante el modelo directo de transporte y se analiza la convergencia de optimización. Luego, se resuelven las alternativas de diseño planteadas (aplicando en cada una el correspondiente enfoque de solución) mediante el procedimiento de optimización basado en la técnica de Recocido Simulado.

Seguidamente, se abordan además otros dos problemas de diseño en estuarios mediante modelos de optimización-simulación.

El primero corresponde al diseño de estructuras portuarias (obras de abrigo), para evitar los efectos de resonancia. Para ello se plantean dos alternativas de diseño. Una corresponde a configurar un puerto con el menor volumen posible, evitando situaciones resonantes y cumpliendo en simultáneo con restricciones de navegabilidad y operatividad. La otra, implica diseñar un puerto con la mayor seguridad posible ante oscilaciones resonantes. En este caso se establecen restricciones en el volumen de las estructuras de abrigo así como de navegabilidad.

Para verificar si los diseños de tales alternativas cumplen con las restricciones anti-resonantes, se utiliza un modelo matemático basado en la teoría linealizada de aguas poco profundas, que representa apropiadamente el fenómeno de propagación de ondas largas. Las ecuaciones correspondientes son resueltas mediante el MEF con el programa FlexPDE, lo que permite evaluar para diferentes configuraciones portuarias, las condiciones de oscilación ante distintas condiciones de oleaje dado. El procedimiento de búsqueda de las variables de diseño adecuadas, en función de los objetivos planteados, se realiza mediante la técnica de optimización de Recocido Simulado.

El segundo problema corresponde a determinar el mayor rendimiento posible que puede tener un sistema de extracción de agua dulce en acuíferos costeros, sin que la interfaz agua dulce-salada alcance el fondo del pozo. Inicialmente debe conocerse para cada pozo de bombeo, la profundidad de tal interfaz. Eso se logra resolviendo funciones de influencia, mediante el MEF, obtenidas a partir de la ecuación diferencial lineal del potencial de flujo propuesta por Strack (1976), para aguas subterráneas en acuíferos no confinados. Luego, el procedimiento de búsqueda de las variables de diseño, que en este caso corresponde a la capacidad máxima de extracción de agua por cada bomba, se realiza mediante la técnica de Recocido Simulado.

Los enfoques computacionales de optimización mencionados (calidad de agua, resonancia en puertos y extracción de agua dulce) se programan en ambiente MATLAB (2010), que permite controlar las simulaciones, bajo el MEF, efectuadas en el programa FlexPDE (2015), intercambiando la información necesaria mediante funciones adecuadas.

1.8. CONTENIDOS DE LA TESIS.

Inicialmente, en el *Capítulo II*, se realiza una introducción sobre la problemática ambiental debida al vertido no controlado de los efluentes urbanos e industriales en estuarios. Se describen en términos generales la composición de tales efluentes, los parámetros de medición de calidad de agua utilizados en esta tesis y las restricciones ambientales que intervienen en el problema. Luego, se mencionan aspectos generales relacionados a la recolección y depuración de las aguas residuales en las plantas de tratamiento de efluentes y los impactos que produce en el cuerpo receptor la descarga de efluentes. Finalmente, se describen posibles esquemas de diseño, donde se definen las variables de mayor importancia y las funciones de costos asociadas. A partir de tales aspectos, se formulan diferentes problemas de diseño y control óptimo.

En el *Capítulo III* se presentan las ecuaciones que describen los mecanismos de transporte en los estuarios, es decir las ecuaciones hidrodinámicas acopladas con la de transporte de sustancias disueltas.

En el *Capítulo IV* se establece el esquema general de solución numérica de los problemas de control y mantenimiento de la calidad de agua debido al vertido de efluentes urbanos, bajo un procedimiento de diseño óptimo

Los *Capítulos V, VI y VII* conforman la parte central de la tesis y en ellos se plantean las distintas estrategias matemáticas que se aplican a los problemas de transporte, para la minimización de los tiempos computacionales de cálculo que demanda la simulación numérica de

cada procedimiento de diseño. En el capítulo V se aplica el enfoque de Perturbación combinado con el Método de Fourier para la solución del problema hidrodinámico. En el capítulo VI se desarrolla el Enfoque Adjunto del problema de transporte para los indicadores de CF, DBO y se deducen las ecuaciones acopladas de OD-DBO. Luego en el capítulo VII se desarrolla el Método de Fourier aplicado a los problemas Directo y Adjunto del problema de transporte.

En el *Capítulo VIII* se realiza la validación de los modelos desarrollados y se muestra la solución numérica de los distintos métodos teóricos-matemáticos propuestos, utilizados en la solución de problemas de diseño óptimo para el control y mantenimiento de la calidad de agua en estuarios. Inicialmente se comparan las soluciones numéricas obtenidas con el modelo hidrodinámico propuesto, con las que resultan de la aplicación de enfoques numéricos a partir de diferentes modelos publicados en la literatura. Luego, se desarrollan estudios numéricos del problema de transporte de contaminantes y finalmente, se desarrollan los ejemplos de diseño óptimo resueltos con los tres métodos alternativos de solución al problema de transporte de contaminantes formulados en esta tesis.

En el *Capítulo IX* se desarrollan dos modelos de diseño óptimo bajo el enfoque de simulación-optimización, uno orientado al diseño anti-resonante de puertos en estuarios y el otro al diseño de sistemas de extracción de agua dulce en zonas costeras.

Finalmente, en el *Capítulo X* se presentan la discusión de los resultados obtenidos, las conclusiones y las posibles líneas futuras de investigación.

CAPÍTULO II

DISEÑO Y CONTROL ÓPTIMO DE CALIDAD DE AGUA EN ESTUARIOS Y ZONAS COSTERAS

Se realiza una introducción general de la problemática de la calidad de agua en estuarios, donde se comentan aspectos básicos sobre la caracterización de aguas residuales, los impactos que produce en el medio y los niveles guía de control que determinan las restricciones de admisibilidad ambiental de los indicadores de calidad de agua. Luego, se mencionan aspectos generales de las etapas de depuración que realizan las plantas de tratamiento de efluentes, y se explica el comportamiento de transporte de las sustancias que son vertidas en cuerpos de agua dominados por marea.

Se proponen esquemas para la depuración de efluentes y se definen las principales variables de diseño que intervienen en cada uno. Finalmente, a partir de éstas, se formulan matemáticamente posibles alternativas de diseño dirigidas al control óptimo de calidad de agua en estuarios y zonas costeras, atendiendo además a aspectos económicos.

2.1 PROBLEMA DE CALIDAD DE AGUA EN ESTUARIOS Y ZONAS COSTERAS.

Las aguas residuales provienen básicamente, de usos industriales y domésticos. Los efluentes industriales, constituidos principalmente por disoluciones de productos químicos diversos, presentan una composición muy variable que depende del uso industrial al que son destinadas las aguas. Los efluentes urbanos, por su parte, están constituidos por un 99% de agua y el resto por sólidos en suspensión, coloidales y disueltos, orgánicos e inorgánicos. La parte orgánica es una mezcla de residuos alimenticios, heces, material vegetal, sales minerales y materiales diversos como jabones y detergentes. Está formada mayormente por proteínas y carbohidratos, y en menor porcentaje por lípidos.

En promedio, cada persona puede generar 1.8 litros de materia fecal diariamente, compuesta por 350 gramos de sólidos secos, 90 gramos de materia orgánica, 20 gramos de nitrógeno, más otros nutrientes como fósforo y potasio (Mara y Cairncross, 1990). La parte inorgánica está

compuesta por residuos minerales pesados, sales y metales. Esto implica, que en una ciudad típica de 500.000 habitantes, por ejemplo, la carga orgánica total en promedio sea del orden de 25.000 Kg/día aproximadamente.

Los desperdicios generados por el uso del agua doméstica, así como los industriales (con acondicionamiento previo fijado por ley), son volcados y transportados a través del sistema de red cloacal junto con aquellas aguas superficiales o subterráneas que puedan penetrar en la colectora.

La carga contaminante que generalmente presentan estas aguas, comúnmente supera las posibilidades de autodepuración del medio. Esta situación, es conocida como *impacto humano no sustentable*. Por lo tanto, el vertido no controlado de efluentes cloacales en cuerpos de aguas, genera diversas consecuencias, entre las principales alteraciones pueden resumirse las siguientes:

- *Disminución del oxígeno disuelto*, causado por el aumento de bacterias que necesitan de oxígeno para degradar la materia orgánica;
- *Eutrofización*, provocado por el exceso de materia orgánica que causa un crecimiento descontrolado de fitoplancton (particularmente de algas diatomeas);
- *Variación de la biodiversidad*, por el desarrollo de depredadores, competidores y parásitos;
- *Cambios en la estética de la naturaleza* causados por olores fuertes y desagradables y cambios en el color natural del agua; y
- *Pérdidas en las explotaciones económicas* regionales tales como el turismo y la pesca comercial y deportiva.

Un resumen de los contaminantes que comúnmente se encuentran en las aguas residuales y los impactos que generan sobre el medio receptor puede observarse en la Tabla 2.1.

Por tal motivo, y considerando que la carga orgánica que poseen tales efluentes fomenta el surgimiento de bacterias, tales efluentes deben ser tratados antes de su vuelco a un cuerpo receptor a los efectos de resguardar las aguas como el ambiente aledaño.

Contaminantes	Motivo de su importancia
Sólidos Suspendidos	Pueden llevar al desarrollo de depósitos de barro y condiciones anaerobias, cuando las aguas residuales no tratadas son volcadas en el ambiente acuático.
Materia orgánica biodegradable	Compuesta principalmente de proteínas, carbohidratos y grasas. Si es descargada sin tratamiento al medio ambiente, su estabilización biológica puede llevar al consumo del oxígeno natural y al desarrollo de condiciones sépticas.
Microorganismos Patógenos	Los organismos patógenos existentes en las aguas negras pueden transmitir enfermedades.
Nutrientes	Tanto el Nitrógeno como el Fósforo, junto con el Carbono, son nutrientes esenciales para el crecimiento. Cuando son lanzados en el ambiente acuático, pueden llevar al crecimiento de la vida acuática indeseable. Cuando son lanzados en cantidades excesiva en el suelo, pueden contaminar también el agua subterránea.
Materia orgánica refractaria	Esta materia orgánica tiende a resistir los métodos convencionales de tratamiento de aguas residuales. Ejemplos típicos incluyen detergentes, pesticidas agrícolas, etc.
Metales pesados	Los metales pesados son normalmente adicionados a los residuos de actividades comerciales e industriales.
Sólidos inorgánicos disueltos	Componentes inorgánicos como el calcio, sodio y sulfato son adicionados a los sistemas domésticos de abastecimiento de agua.

Tabla 2.1: Contaminantes presentes en aguas residuales. (Romero Rojas, 1999)

2.1.1. Indicadores de calidad de agua.

A los efectos de determinar la calidad del agua para diferentes usos o actividades a la que esté destinada, es decir consumo humano, pesca, esparcimiento, etc., se definen diferentes parámetros físico-químicos y biológicos que deben ser cumplidos, donde se evalúa el color, el sabor, el olor, la turbidez, el PH, la temperatura, los Sólidos Totales (ST), Suspendidos (SS), Disueltos (SD), el Nitrógeno Total (Nt), el Fósforo Total (Pt) y las Grasas, entre otros. De esta manera, la variación en alguno de estos parámetros debido al aporte de distintas sustancias al medio acuático receptor, indican si el mismo se encuentra o no dentro de los niveles de calidad de agua establecidos.

Entre los niveles guía más comúnmente utilizados se encuentran los Coliformes fecales (CF), la Demanda Bioquímica de Oxígeno (DBO) y el Oxígeno Disuelto (OD).

De todos los organismos patógenos que pueden existir en el agua residual, particularmente los coliformes son empleados como indicadores de contaminación fecal (o indicador de existencia de organismos productores de enfermedad), debido a que son más resistentes que otro tipo de bacterias patógenas y porque su origen es principalmente fecal. Por lo tanto su ausencia indica que el agua es bacteriológicamente segura. El grupo de coliformes incluye varios géneros de bacterias. En general se considera el género *Escherichia*, especie *E. Coli*, como la población de bacterias coliformes más representativa de contaminación fecal (en promedio el hombre arroja diariamente entre 10^9 a 4×10^{11} coliformes en sus excrementos). Los coliformes fecales se miden en NMP/100ml. Estas unidades corresponden a un método de estimación de densidades poblacionales de bacterias, denominado Número Más Probable (NMP). Es una estrategia eficiente de estimación, especialmente cuando una evaluación cuantitativa de células individuales no es factible.

La DBO es una medida de oxígeno que usan los microorganismos en un volumen unitario de agua para descomponer la materia orgánica durante un período de tiempo y se mide en masa/volumen [Kg/m^3]. Si hay una gran cantidad de desechos orgánicos, implica que habrá una cantidad importante de bacterias presentes trabajando para descomponer el desecho presente en el agua. En este caso, la DBO será alta. Conforme el desecho es consumido o dispersado en el agua, los niveles de la DBO empezarán a disminuir.

Finalmente el OD es la cantidad de oxígeno que está disuelto en el agua [Kg/m^3] y que es esencial para el desarrollo de la mayoría de los organismos acuáticos. El nivel de OD puede ser un indicador del grado de contaminación del agua e indica cuánto soporte de vida vegetal y animal puede existir. Generalmente, un nivel más alto de oxígeno disuelto implica una mejor calidad de agua. Si los niveles de oxígeno disuelto son demasiado bajos, algunos peces y otros organismos no pueden sobrevivir.

De acuerdo a lo mencionado, en este trabajo se utilizan éstos indicadores de calidad de agua, donde los primeros dos (CF y DBO) deben ser menores que límites admisibles prefijados, mientras que el último (OD) no debe ser menor que un límite inferior establecido.

2.1.2. Restricciones ambientales. Definición de zonas protegidas.

Las normas que reglamentan los niveles de admisibilidad de indicadores ambientales en los cuerpos receptores, muchas veces son modificadas con el tiempo en función de la evolución de nuevos criterios de calidad. Asimismo, tales valores difieren entre países, siendo algunos más

restrictivos que otros. Un estudio interesante para la compatibilización de los distintos valores límites de vuelco, establecidos en literatura científica y en regulaciones de varios países para diferentes usos, puede encontrarse en el trabajo realizado por Menéndez et al. (2011), quienes consideraron 21 parámetros de calidad de agua para la realización de tal estudio.

De esta manera, para definir el estado ambiental admisible en el cuerpo receptor se identifican zonas que se desean resguardar tales como playas, tomas de agua, áreas de protección ecológica, etc., en las cuales los valores de los indicadores de calidad de agua deben encontrarse dentro de los límites establecidos. Estas regiones, identificadas por las por áreas que ocupan Ω_i , se definen aquí como *zonas protegidas*.

Como resumen de lo anterior, las **restricciones ambientales** pueden determinarse de la siguiente manera:

$$C_{CF_i} \leq C_{admCF} \quad , \quad C_{DBO_i} \leq C_{admDBO} \quad , \quad C_{OD_i} \geq C_{admOD} \quad \quad i = 1, 2, \dots, NP \quad , \quad (2.1)$$

donde C_{CF_i} , C_{DBO_i} y C_{OD_i} son medidas de la concentración característica de CF, DBO y OD en la zona protegida *i-ésima* definidas en las áreas Ω_i , NP es el número de zonas protegidas, mientras que C_{admCF} , C_{admDBO} y C_{admOD} corresponden a los niveles admisibles permitidos de tales indicadores. La concentración característica podría ser la máxima (o mínima) concentración en algún caso, o eventualmente la media mareal.

2.2. PLANTAS DE TRATAMIENTO DE EFLUENTES: ASPECTOS GENERALES.

A los efectos de garantizar que los niveles en las zonas protegidas se encuentren dentro de los valores admisibles, las aguas residuales deben ser purificadas previamente a su vertido mediante la construcción de plantas de tratamiento adecuadamente diseñadas. Esto no significa el tratamiento completo, sino el necesario y suficiente que mejor se ajuste a los aspectos tecnológicos o económicos. En términos generales, un proceso de saneamiento de aguas residuales involucra las siguientes etapas:

2.2.1. Recolección y transporte de las aguas residuales.

Las aguas residuales de origen domiciliario, son recolectadas y transportadas hasta la planta de tratamiento a través de una compleja red de tuberías (alcantarillado, colectores). Los vertidos de

origen industrial deben ser acondicionados antes de ser descargados y, de acuerdo a la categoría en la que se encuentren, los mismos pueden ser incorporados a la colectora cloacal o directamente a los cursos naturales de agua. Luego, dependiendo de la topografía del lugar, las aguas corren por gravedad o se recurre a su bombeo.

Normalmente, la red colectora recoge tanto las aguas residuales como las de lluvia. Sin embargo, aunque en menor medida, existen esquemas donde se derivan las aguas de uso domiciliario por un lado, mientras que las aguas de lluvia se recogen en colectores independientes (sistemas separativos).

Las plantas de tratamiento cuentan con aliviaderos que se instalan antes de la entrada a la depuradora, con el objeto de poder derivar los excesos de caudal que puedan ocurrir en períodos de fuertes lluvias o en caso de algún problema de funcionamiento. Asimismo, también se instalan “bypass” antes de cada etapa de tratamiento para evitar pasar a la siguiente fase en caso de incidentes operativos.

Los esquemas de saneamiento son varios y dependen de las necesidades de cada sector. Por ejemplo, se puede prever, la recolección total del agua residual y tratarla en una sola gran planta, o utilizar varias plantas de tratamiento ubicadas estratégicamente, que depuren parcialmente el caudal volumétrico total que llega a cada una de ellas (proveniente de diferentes ciudades, o sectores de una ciudad). El volumen de agua residual que se genera en una ciudad es proporcional al consumo de agua de abastecimiento y este consumo depende de su grado de desarrollo socio económico. De esta forma, las plantas de tratamiento deben considerar las fluctuaciones diarias de los caudales que ingresan, producto de la actividad poblacional del lugar. Generalmente, el consumo de agua durante la madrugada es mínimo, por lo que los caudales que ingresan a las plantas también lo serán. Sin embargo, durante el transcurso del día pueden ocurrir varios picos máximos de variación de caudal. Por lo general, las curvas que representan las oscilaciones diarias del caudal de aguas residuales que llegan a las estaciones de tratamiento son similares a las curvas de consumo de agua de abastecimiento, pero con un cierto retraso, como consecuencia de la distancia entre los centros urbanos y las plantas de tratamiento.

Por otra parte, la carga contaminante también puede variar, por lo que habitualmente es conveniente emplear valores medios integrados. La carga de DBO máxima horaria puede variar hasta 3 ó 4 veces el valor de la carga mínima de DBO en un mismo período de 24 horas, lo cual debe tenerse en cuenta en el diseño del tratamiento biológico. Cuando resulta imposible llevar a cabo un estudio de caracterización del agua residual y no se dispone de otros datos, las cargas

totales que hay que tratar se estiman empleando factores de contaminación per cápita (CEPIS/OPS-OMS 2002).

Las principales causas que determinan las variaciones en las cargas del efluente son las siguientes:

- Las costumbres de los residentes de la población, que producen variaciones a corto plazo (horarias, diarias y semanales)
- Condiciones de tipo estacional que producen variaciones a mayor plazo,
- Actividades industriales que causan variaciones a corto y a largo plazo.

2.2.2. Sistemas de tratamiento de efluentes.

Una vez que los caudales residuales ingresan a la planta de tratamiento, estos son depurados mediante una secuencia de procesos que dependen de las características propias de estas aguas, del grado de purificación requerido según los niveles de contaminación permitidos por la legislación, del lugar de descarga y del cuerpo receptor. Esta secuencia de purificación se sintetiza en la Figura 2.1, donde se observa además el porcentaje típico de remoción de los contaminantes en cada proceso. Básicamente se involucran las siguientes etapas:

1. *Pretratamiento*: En toda planta depuradora se realiza un pretratamiento, donde se mide y regula el caudal de agua que ingresa a la planta y se efectúa una remoción física de objetos grandes por medio de rejas, tamices, trituradores y/o desarenadores, a los efectos de separar aquellos componentes que puedan causar dificultades de operación y mantenimiento en los procesos posteriores. En algunos casos, según sean las características del afluente, se realiza la separación de grasas mediante desengrasadores.
2. *Tratamiento primario*: Se eliminan sólidos en suspensión, materia orgánica u organismos patógenos mediante sedimentación por gravedad de las partículas sólidas y contaminantes adheridos. De esta forma se prepara el agua para el tratamiento secundario, donde por medio de unidades llamadas sedimentadores primarios se trata de imitar los procesos de la naturaleza poniéndolos bajo control y acelerándolos por medio de instalaciones.
3. *Tratamiento secundario*: Se elimina la materia orgánica mediante procesos de oxidación, seguido de sedimentación por medio de digestión biológica usando lodos activados, filtros percoladores, sistemas de lagunas que fomentan el crecimiento de microorganismos.
4. *Tratamiento terciario*: Este tratamiento es utilizado cuando se requiere un nivel más alto de eliminación de contaminantes, removiendo nutrientes para prevenir la eutrofización de los

cuerpos receptores o de mejorar la calidad del efluente secundario con el fin de adecuar el agua para su reutilización.

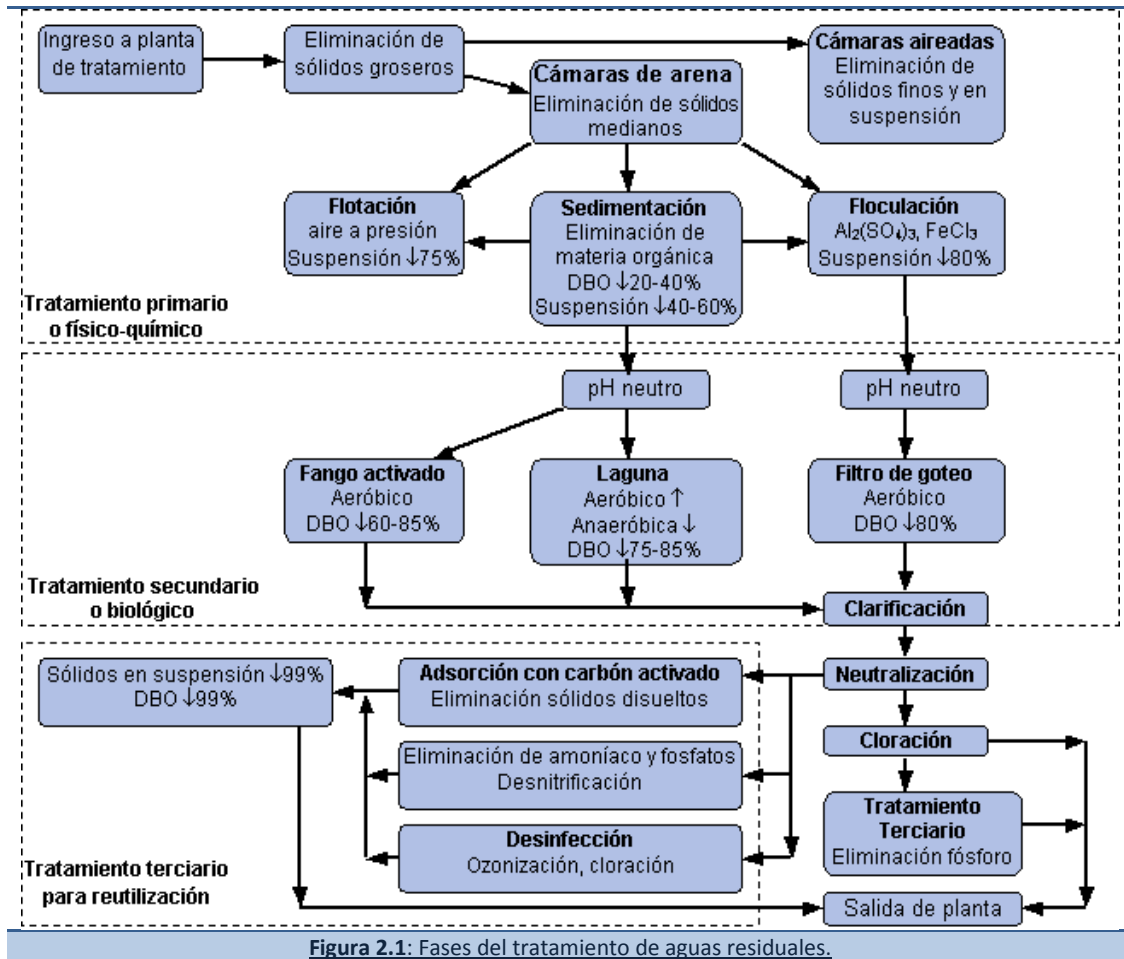


Figura 2.1: Fases del tratamiento de aguas residuales.

Otro sistema de tratamiento de aguas residuales, puede realizarse mediante emisarios submarinos. Estas instalaciones, básicamente consisten en el transporte y dilución del efluente directamente en el mar, y generalmente constan de tres etapas:

- *Un tratamiento físico*, donde se eliminan las partículas sedimentables y flotantes del líquido que ingresa a la planta e incluye:
 - o cribas o rejillas (fijas o mecanizadas),
 - o unidades desarenadoras,
 - o Desgrasador,
 - o triturador del material orgánico suspendido.
- *Transporte y pre tratamiento biológico*: desde la costa hasta un punto en el océano en que se den las condiciones óptimas de dilución y dispersión.
- *Tratamiento submarino*: Mediante dilución del efluente a través de los difusores.

2.3. ESQUEMAS DE DISEÑO PARA EL CONTROL DE LA CALIDAD DE AGUA EN ESTUARIOS Y ZONAS COSTERAS: VARIABLES DE DISEÑO.

A los efectos de resolver el problema de calidad de agua en estuarios bajo un enfoque de diseño óptimo, a continuación se plantea un esquema general de tratamiento de efluentes, donde se definen las correspondientes variables de diseño de mayor importancia que intervienen en dicho proceso de purificación. Luego, a manera de ejemplo, se muestran dos posibles esquemas de plantas de depuración que siguen dicho enfoque general.

2.3.1. Esquema general de tratamiento. Variables de diseño

Desde una localización urbana arriba a la planta depuradora j un caudal de aguas residuales, con una determinada carga contaminante $M_j(t)$ el cual debe ser tratado antes de ser vertido al estuario, a los efectos de procurar que los niveles de concentración de los indicadores de calidad de agua CF, DBO y OD se encuentren dentro de los parámetros de admisibilidad en determinadas zonas protegidas Ω_i .

La planta puede depurar parcialmente el flujo másico que ingresa y luego libera el efluente depurado al cuerpo de agua receptor. La descarga se realiza a través de tuberías submarinas, que transportan el flujo residual hasta el punto de vertido F_{x_j}, F_{y_j} . Una vez liberado, el mismo se distribuye dentro del estuario de forma espacial y temporal de acuerdo a las corrientes hidrodinámicas, influenciadas por la acción de la marea. Teniendo en cuenta esta característica de periodicidad, en ocasiones se aplican diferentes estrategias de vertido para el control de calidad de agua. Varias investigaciones se han realizado en tal sentido, como las desarrolladas por Giles (1995), Purnama et al. (1999), Smith (2000) y Passone et al. (2001), entre otros.

Consecuentemente, la descarga másica residual vendrá dada por $M_j(t)\beta_j(t)$, siendo $\beta_j(t)$ una función periódica de descarga. Para garantizar el principio de conservación de la masa, esta función debe ser positiva, caso contrario se estaría absorbiendo agua del estuario. Este esquema general de tratamiento se ilustra en la Figura 2.2.

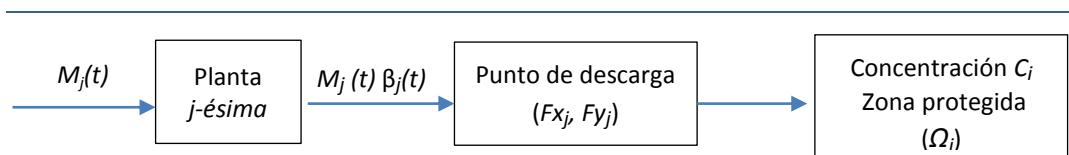


Figura 2.2: Esquema general de planta de tratamiento.

Debido a que las descargas másicas dependen de la periodicidad mareal es conveniente realizar, cada determinado tiempo, correcciones en los períodos de las mismas a los efectos de que no se desfasen con respecto al corrimiento diario de la marea.

Como el objetivo es el saneamiento, debe verificarse que la carga contaminante másica total en un período mareal que se vierte, sea menor que la que ingresa a la planta de tratamiento. Para ello, a los efectos de garantizar tal condición, la función de descarga $\beta_j(t)$ en un período mareal T_M debe estar restringida de la siguiente manera:

$$\int_0^{T_M} \beta_j(t) M_j(t) dt \leq \int_0^{T_M} M_j(t) dt \quad . \quad (2.2)$$

Como caso particular, si el flujo másico es constante, la expresión (2.2) resulta de la siguiente forma:

$$\frac{\int_0^{T_M} \beta_j(t) dt}{T_M} \leq 1 \quad . \quad (2.3)$$

Por otra parte, la multiplicidad de puntos de vertido, la proximidad entre éstos y las composiciones de sus cargas másicas, también influyen en los niveles de calidad de agua. Por lo tanto debe considerarse la distancia entre tales puntos de vertido con respecto a las zonas protegidas.

De acuerdo a este esquema general, el problema de diseño para el control óptimo de la calidad de agua en estuarios consiste en obtener las funciones de descarga, que eventualmente pueden ser constantes o variables en el tiempo, así como la localización de las correspondientes tuberías de descarga, tal que los niveles espaciales y temporales de concentración en las zonas de resguardo ambiental, cumplan con las condiciones de admisibilidad definidas en (2.1).

De esta forma, las **variables de diseño** vienen dadas por:

$\beta_j(t)$: Funciones de descarga;

Fx_j, Fy_j : Coordenadas de la salida de la tubería de descarga;

Considerando entonces la cantidad de alternativas posibles que pueden realizarse en el proceso de diseño, a continuación se plantean dos esquemas.

2.3.2. Esquema de diseño 1.

En este caso se considera que cada planta de tratamiento puede depurar parcialmente el caudal volumétrico total que llega a cada una de ellas. En particular se supone que existe un límite máximo con respecto al caudal volumétrico de aguas servidas a tratar, cuyo valor depende de las características de cada planta. Tal límite se lo define como **capacidad de tratamiento** MT de la planta j -ésima, y se lo mide en $[M/T]$. De esta forma las aguas depuradas se consideran purificadas, es decir con contaminación residual despreciable. Sin embargo, el caudal de aguas servidas que excede a la capacidad de tratamiento es derivado sin ser tratado.

Bajo este esquema, se considera que las aguas residuales provenientes de los centros urbanos poseen una carga contaminante constante M_j , la cual puede estimarse por el nivel medio de concentración C del efluente medida en $[M/V]$ y el caudal medio de aguas servidas Q_j $[V/T]$ que llega a la planta de depuración. Por lo tanto, el flujo que se vierte sin ser tratado al curso de agua mediante una tubería de descarga, puede expresarse como la diferencia entre el flujo másico máximo de aguas residuales que ingresa a la planta M_j y la capacidad de tratamiento MT_j . Entonces, es posible expresar esta capacidad como:

$$MT_j = M_j (1 - \beta_j) \quad j = 1, 2, \dots, ND \quad , \quad (2.4)$$

donde $(1-\beta_j)$ indica el grado de purificación de la planta, que se corresponde con el sistema de tratamiento, β_j es el factor de depuración en las tasas de vertido, que en este caso es constante y puede variar entre 0 (reducción máxima) y 1 (reducción mínima) y ND es el número de plantas de tratamiento. Por lo tanto, las descargas másicas residuales vendrán dadas por $M_j\beta_j$. Este esquema de diseño se muestra en la Figura 2.3.

Por otra parte, como las concentraciones de los indicadores ambientales en las zonas protegidas Ω_j dependen de la ubicación de los vertidos, es adecuado que la localización de éstos sea la apropiada. Entonces, es de gran interés determinar además las coordenadas Fx_j , Fy_j de descarga de las tuberías submarinas dentro del estuario.

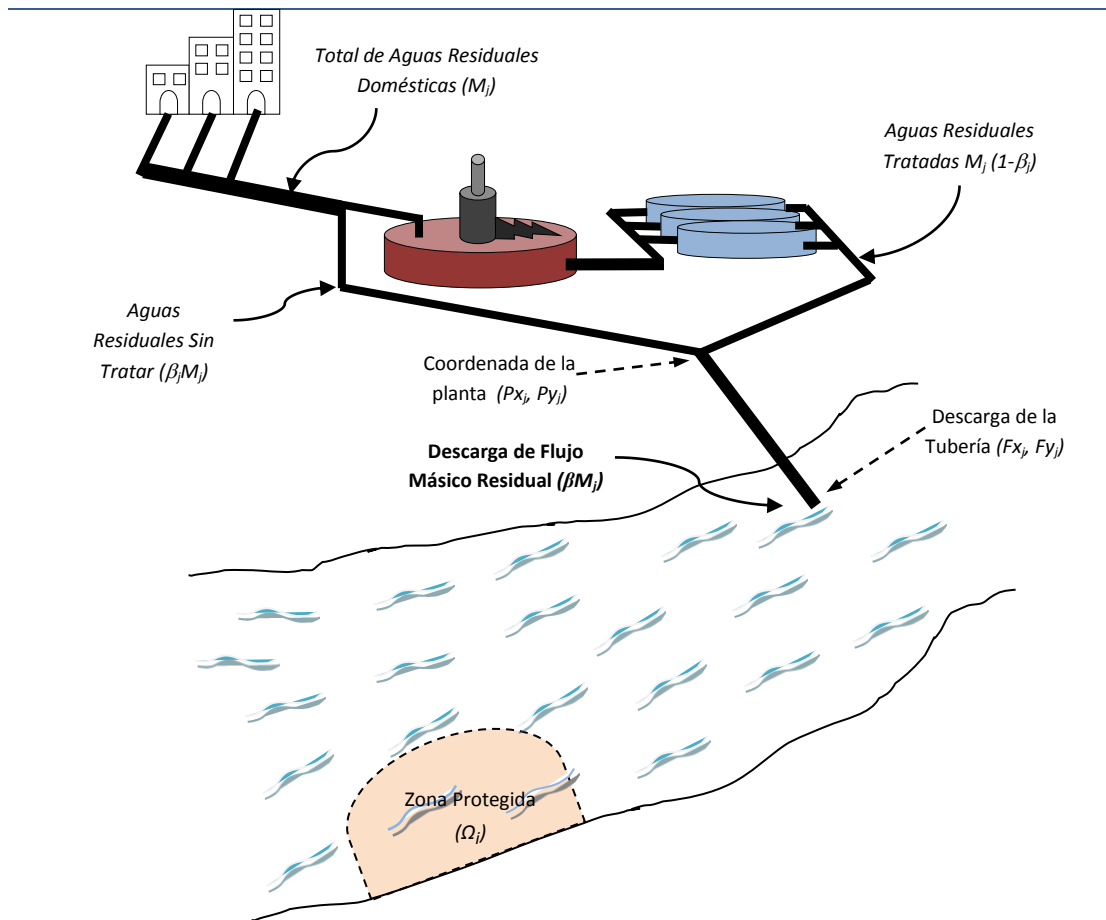


Figura 2.3: Esquema de diseño de capacidad de tratamiento.

2.3.3. Esquema de diseño 2.

Otro posible esquema de diseño, puede plantearse aprovechando las condiciones hidrodinámicas periódicas del estuario. Muchas veces resulta beneficioso, ya sea desde el punto de vista económico como ambiental, efectuar variaciones en las descargas de los efluentes, durante un período mareal o submareal. Es posible establecer en el diseño una política de descarga, analizando los momentos adecuados donde es conveniente realizar los vertidos, es decir la **distribución temporal de la descarga** en función de la dinámica del flujo y refluo de la marea. En este caso, la depuración de las aguas residuales en cada planta puede estimarse mediante la determinación de funciones de descarga. Tales funciones se expresan matemáticamente mediante $\beta(t)$, y dependen de dicha distribución temporal. Entonces, asumiendo que el flujo másico que llega a cada planta de tratamiento es periódico $M_j(t)$, la descarga efectiva realizada en la salida de la tubería vendrá dada por $\beta(t)_j M(t)_j$. Este esquema de diseño se detalla en la Figura 2.4.

En este caso, debe preverse la construcción de tanques adecuadamente diseñados para el almacenamiento de los efluentes, de forma que puedan ser descargados conforme las condiciones de periodicidad mareal sean propicias, es decir, se genere el menor impacto en las zonas protegidas.

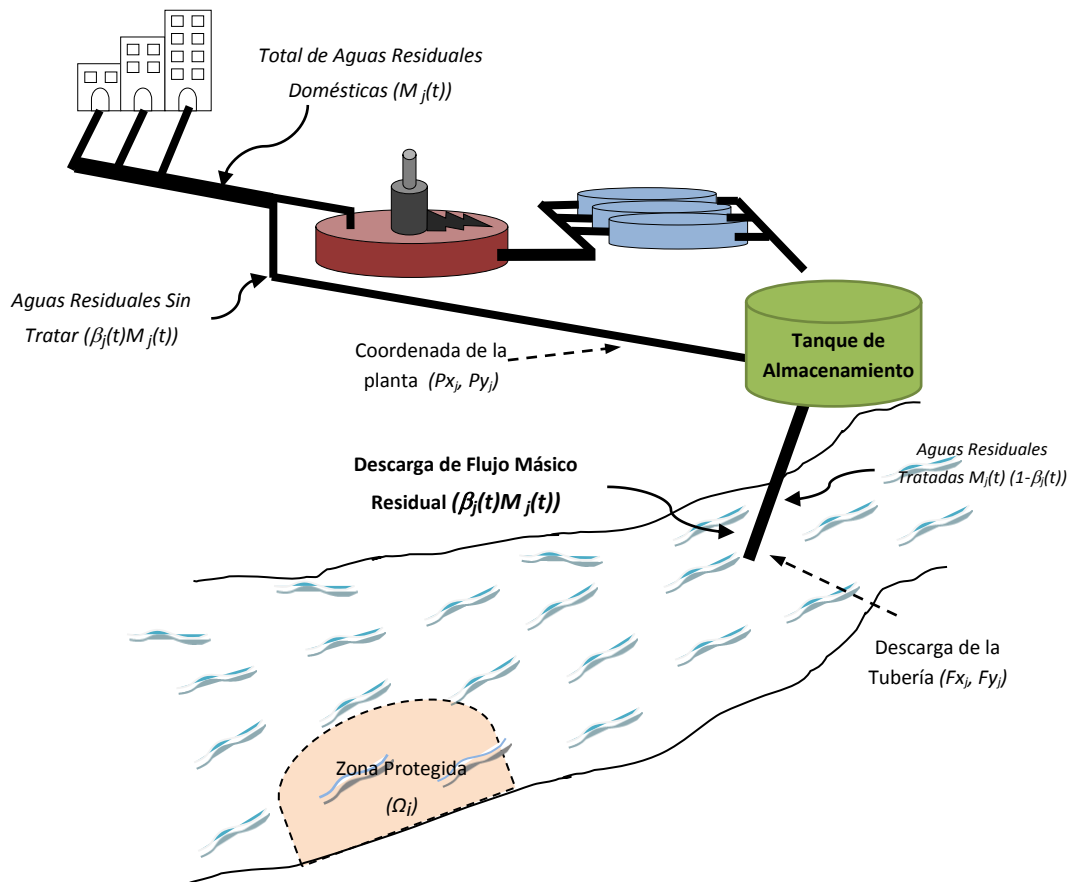


Figura 2.4: Esquema de diseño de descargas con tanques de almacenamiento.

2.4. ASPECTOS ECONÓMICOS DE LAS PLANTAS DE TRATAMIENTO.

Un aspecto de vital importancia en el diseño de una planta de tratamiento, es la evaluación de la viabilidad económica del proyecto.

Los costos que intervienen en las plantas de tratamientos de aguas residuales están directamente relacionados al sistema de depuración que se pretenda implementar y dependen de varios factores tales como, la magnitud del caudal diseño, su composición, el financiamiento del proyecto y por supuesto del nivel de depuración final que se desee, entre otros. Por lo tanto su determinación es necesaria para la selección de un correcto diseño.

Básicamente se pueden clasificar en dos grandes categorías, los asociados a la inversión inicial y los relacionados al funcionamiento de la planta. Los mismos son detallados en la Tabla 2.2 junto a sus principales indicadores.

El análisis conjunto es necesario ya que los sistemas de depuración que precisan menos inversión inicial, a su vez, implican mayor cantidad de recursos humanos y consumos de productos químicos y/o energía. Recíprocamente, la reducción de estos costes de explotación suele requerir la ocupación de mayores superficies de terreno y mayores volúmenes de inversión. Por lo que habrá que buscar el óptimo económico, integrado por la amortización de la inversión inicial más los correspondientes gastos de explotación del sistema.

COSTOS	Indicadores de los Costos		
Inversión	Estudios Preliminares y Estudios de Suelo.		
	Diseño e Ingeniería.		
	Construcción.		
	Terreno.		
	Supervisión Técnica.		
	Gastos Administrativos, Legales y Financieros.		
	Varios.		
Funcionamiento	Operación y Mantenimiento	Reposición.	
		Reparaciones.	
		Energía.	
		Monitoreo de los procesos.	
		Mano de Obra para la Operación y Mantenimiento.	
		Insumos Químicos.	
		Disposición de lodos.	
	Administrativos	Mantenimiento de Equipos.	
		Personal Administrativo.	
		Gastos Generales.	
		Tasas Ambientales.	
		Tabla 2.2: Detalle general de costos para una planta de tratamiento. (Salas Quintero, 2007).	

La selección de un determinado conjunto de indicadores de costo es de gran importancia para la estimación preliminar de los montos de inversión y pueden variar de una región a otra dependiendo, entre otros factores, de la geografía y de la cultura. Generalmente, los *Costos de Inversión* están asociados a todas las actividades necesarias para la construcción de la infraestructura física de la planta de tratamiento y dependen del sistema de depuración elegido, mientras que los *Costos de Funcionamiento* dependen de la complejidad del sistema de tratamiento e incluyen mano de obra, energía, compra de productos químicos y mantenimiento de equipos entre otros.

Se han desarrollado diferentes formulaciones matemáticas que relacionan los costos con las variables de diseño de mayor importancia. Una expresión general que resulta de gran utilidad para tal estimación puede plantearse de la siguiente forma:

$$CT_j = \frac{\alpha_1 \int_0^{T_M} f_1 [(M_j(t)\beta_j(t))] dt}{T_M} + \alpha_2 f_2 [Px_j, Py_j, Fx_j, Fy_j] \quad , \quad (2.5)$$

donde CT_j corresponde al costo total anual [US\$/año], f_1 es una función que depende de depuración y representa los costos de inversión (fijos) y de operación (variables) de la planta [US\$/seg], f_2 corresponde al costo de construcción de la tubería y es una función asociada a la longitud de ésta [US\$/año] determinada por las coordenadas de las plantas de tratamiento (Px_j, Py_j) y de las descargas de los efluentes (Fx_j, Fy_j), α_1 es un factor de escala del costo [84600seg/día * 365día/año] y α_2 es un factor de escala adimensional. Estos factores contemplan diferencias relativas entre los costos asociados a las plantas de tratamiento y dependen de las economías propias del lugar, tales como sistema de tratamiento elegido, diámetro de la tubería, número de habitantes equivalentes, etc.

La Figura 2.5 muestra, a título ilustrativo, una forma cualitativa posible de la función f_1 (Alvarez-Vázquez et al. 2005).

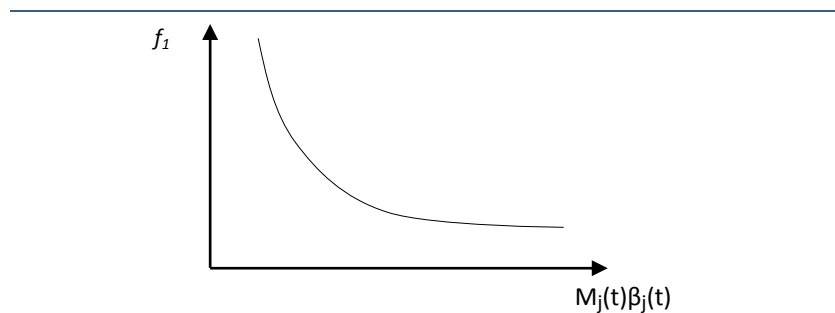


Figura 2.5: Relación costo/depuración.

2.5. PROBLEMA DE DISEÑO ÓPTIMO DE DESCARGAS DE EFLUENTES EN ESTUARIOS: FORMULACIÓN MATEMÁTICA.

Conforme a lo explicado en las secciones anteriores, el problema de diseño y control de calidad de agua en los estuarios y zonas costeras, debido a la descarga no controlada de efluentes, puede plantearse de diferentes formas.

La **Función Objetivo** (FO) del diseño, se puede formular de manera tal que contemple tanto los costos económicos definidos en la expresión (2.5) como los costos ambientales, es decir la

erogación económica anual que implica remediar un ambiente dañado, expresado en [US\$/año], de la siguiente manera:

$$FO = \lambda_1 CT + \lambda_2 CA , \quad (2.6)$$

donde CT es el costo definido en (2.5), mientras que CA corresponde a los costos ambientales definidos de la siguiente forma:

$$CA = \alpha_3 f_3(C_i) , \quad (2.7)$$

siendo C_i la concentración característica en la zona a remediar i -ésima, α_3 un factor de escala [US\$.m³/Año.Kg] y f_3 una función asociada a la concentración característica. Los factores λ_1 y λ_2 pueden adoptar un valor de 0 o de 1 y permiten modificar la importancia relativa entre CT y CA .

Se considera como situación base, un estuario en el cual se vierten efluentes urbanos $M_j(t)\beta_j(t)$, que se suponen son funciones T_M periódicas. La descarga no controlada de tales vertidos genera que, en determinadas zonas de resguardo ambiental, los niveles de concentración de los indicadores de calidad de agua en un ciclo de marea no cumplan con los valores de admisibilidad. Para controlar tal situación se prevé la instalación de una o más plantas de tratamiento, como se ilustra en la Figura 2.6.

De acuerdo a lo mencionado, el problema general de diseño óptimo puede ser formulado matemáticamente de la siguiente manera:

$$(\beta_j(t)^+, Fx_j^+, Fy_j^+, \psi^+) = \arg \min FO , \quad (2.8)$$

Sujeto a:

$$\beta_j(t) \text{ funciones } T_M \text{ periódicas positivas } \quad \text{ó} \quad 0 \leq \beta_j \leq 1 \in \Omega_j \quad j=1,2,\dots,ND , \quad (2.9 a)$$

$$\int_0^{T_M} \beta_j(t) M_j(t) dt \leq \int_0^{T_M} M_j(t) dt \quad \in \Omega_j \quad j=1,2,\dots,ND , \quad (2.9 b)$$

$$(Fx_j, Fy_j) \quad \in \Omega_j \quad j=1,2,\dots,ND , \quad (2.9 c)$$

$$C_{CF_j} \leq C_{admCF} , \quad C_{DBO_j} \leq C_{admDBO} , \quad C_{OD_j} \geq C_{admOD} \quad \in \Omega_i \quad i=1,2,\dots,NP , \quad (2.9 d)$$

recordando que las coordenadas de descarga Fx_j , Fy_j y las funciones de descarga $\beta_j(t)$ son las variables de diseño que fueron detalladas anteriormente, ψ involucra a otras variables que pueden afectar el costo, el símbolo (*) corresponde a las variables óptimas que minimizan la función objetivo (FO). Luego, las restricciones ambientales corresponden a las definidas en (2.1).

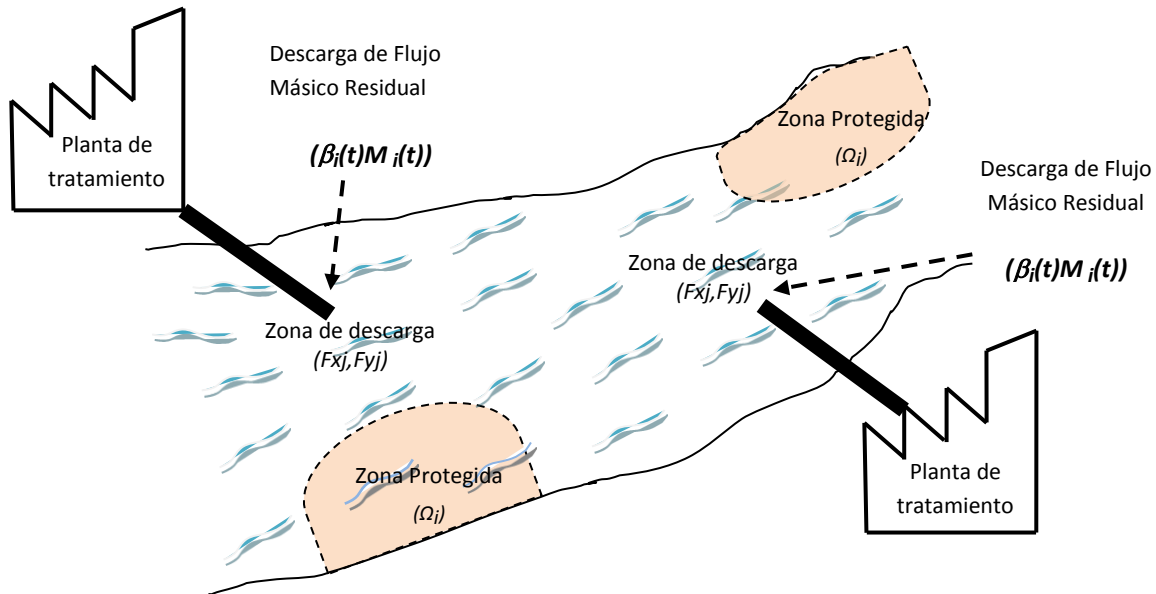


Figura 2.6: Variables de diseño de plantas de tratamiento.

En tal sentido, a continuación se formulan matemáticamente tres alternativas de diseño de vertido de efluentes, en base los esquemas que fueron explicados en la sección anterior.

2.5.1. Alternativa 1: Minimización de los costos de construcción en el diseño de plantas de tratamiento de efluentes con caudales másicos constantes.

Se considera la determinación óptima de factores de descarga que en este caso se los asume constantes β_j , de manera tal de minimizar el costo económico asociado a la construcción de las plantas de depuración, asegurando que los niveles de concentración sean los admisibles en las zonas protegidas. Esta situación se corresponde con el esquema de diseño desarrollado en la sección 2.3.2.

Para este problema la función f_1 de la expresión (2.5) adopta la siguiente forma:

$$\alpha_1 f_1 = \tilde{\alpha}_1 M_j^s (1 - \beta_j)^s, \quad (2.10)$$

donde S es un factor de economía de escala e indica que a mayor grado de depuración del efluente, mayores serán los costos asociados y $\tilde{\alpha}_1$ es un coeficiente que representa el costo con respecto a la capacidad del sistema de tratamiento [US\$/Kg/s/años]. Existen en la bibliografía diferentes estimaciones para la determinación de este parámetro. Por ejemplo Friedler y Pisanty

(2006), para un tratamiento secundario proponen la siguiente forma para el cálculo de este coeficiente:

$$\tilde{\alpha}_1 = \frac{8988}{(1-r)vu} , \quad (2.11)$$

donde vu corresponde a la vida útil estimada de la planta de tratamiento medida en años y r es una función de la capacidad de tratamiento de la planta que puede expresarse de la siguiente manera:

$$r = 0.352 + 6.557 \times 10^{-6} MT_j - 6.429 \times 10^{-11} MT_j^2 , \quad (2.12)$$

recordando que MT_j fue definida en (2.4).

Por otra parte, existen funciones que relacionan la magnitud del caudal tratado con la longitud de la tubería de descarga. Por ejemplo la propuesta por Salas (2000), quien considera el costo de construcción de la tubería (CL_j) proporcional a la longitud [US\$/año]. Por lo tanto la localización de la planta de tratamiento y las coordenadas de descarga se establecen de la siguiente forma:

$$\alpha_2 f_2 = \tilde{\alpha}_2 \sqrt{(Px_j - Fx_j)^2 + (Py_j - Fy_j)^2} , \quad (2.13)$$

siendo $\tilde{\alpha}_2$ un coeficiente que establece la razón entre el costo por metro construido de tubería [US\$/m] y la vida útil estimada.

Por lo tanto, para esta alternativa de diseño, considerado un factor λ_2 nulo, e introduciendo los costos (2.10) y (2.13) en la expresión general (2.5), la función objetivo definida en (2.6) a minimizar viene dada por el siguiente Costo Total Anual expresado en [US\$/año]:

$$CT_j = \sum_{j=1}^{ND} \left[\tilde{\alpha}_1 M_j^s (1 - \beta_j)^s + \tilde{\alpha}_2 \sqrt{(Px_j - Fx_j)^2 + (Py_j - Fy_j)^2} \right] . \quad (2.14)$$

Luego se procede con el problema de diseño formulado en (2.8) con las restricciones (2.9a) para β_j constante, (2.9c) y (2.9d).

2.5.2. Alternativa 2: Minimización de los costos constructivos y operativos considerando funciones de descarga variables temporalmente.

Se pretende obtener funciones de descarga dependientes del tiempo, de manera tal de minimizar el costo total de construcción y de operación. Una manera de establecer dicho costo es a partir de la hipótesis seguida para el caso anterior aunque considerando la integral sobre un período de marea, ya que en este caso las funciones de descarga son funciones periódicas del tiempo, de acuerdo a lo explicado en el segundo esquema de diseño de la sección 2.3.3. Por otra parte, se considera que ya existe una tubería de descarga. En consecuencia, la función f_1 de la expresión (2.5) se determina de la siguiente forma:

$$\alpha_1 f_1 = \tilde{\alpha}_1 \frac{M_j^S \int_0^{T_M} (1 - \beta_j(t))^S dt}{T_M} . \quad (2.15)$$

De esta manera, reemplazando la función (2.15) en el costo total (2.5) y luego en (2.6), considerando nuevamente que el factor λ_2 en este caso es nulo, la función objetivo a minimizar queda expresada de la siguiente manera:

$$CT = \sum_{j=1}^{ND} \frac{\tilde{\alpha}_1 M_j^S \int_0^{T_M} (1 - \beta_j(t))^S dt}{T_M} , \quad (2.16)$$

sujeta a las restricciones definidas en (2.9a) para $\beta_j(t)$ periódico, (2.9b) y (2.9d).

2.5.3. Alternativa 3: Minimización del impacto ambiental considerando funciones de descarga variables temporalmente.

Se parte de los valores de descargas máxicas constantes en el tiempo \overline{M}_j , obtenidos en la primera alternativa de diseño, los cuales verifican que los niveles de tales descargas no superan los valores de concentración admisible en las zonas de resguardo ambiental. En este caso es de interés analizar si es posible minimizar aún más la concentración en las zonas protegidas, aprovechando la dinámica de las corrientes de marea.

Para ello, debe considerarse una distribución temporal de tales descargas \overline{M}_j durante un período mareal, sin modificar la cantidad total de contaminante. Esto quiere decir que se efectuará una descarga efectiva por cada planta, dada por:

$$M_j^e(t) = \beta_j(t) \overline{M_j} \quad , \quad (2.17)$$

Por lo tanto, el problema consiste en obtener $\beta_j(t)$. Para ello se puede requerir que el promedio de las concentraciones de todas las zonas protegidas se encuentre dentro de los límites de admisibilidad, es decir en este caso la función f_3 es:

$$f_3 = \frac{\sum_{i=1}^{NP} C_i}{NP} \quad . \quad (2.18)$$

Otra forma posible de indicar la reducción del impacto ambiental (f_3) puede ser, por ejemplo, minimizando la máxima concentración de la i -ésima zona protegida.

De esta manera, reemplazando (2.18) en (2.7) y luego considerando que en este caso el factor λ_1 en (2.6) es nulo, la función objetivo a minimizar viene dada por la siguiente expresión:

$$CA = \frac{\sum_{i=1}^{NP} C_i}{NP} \alpha_3 \quad . \quad (2.19)$$

Esta función está sujeta a la siguiente restricción:

$$\frac{\int_0^{T_M} \beta_j(t) dt}{T_M} = 1 \quad , \quad (2.20)$$

que asegura que la descarga total del vertido no varíe, ya que lo que se pretende es redistribuirla en un período mareal. Luego, las restricciones (2.9a), (2.9b), (2.9c) y (2.9d) no aplican, ya que las descargas máxicas $\overline{M_j}$ verifican tales condiciones.

CAPÍTULO III

MECANISMOS DE TRANSPORTE EN ESTUARIOS

Para abordar los problemas de diseño del control y mantenimiento de calidad de agua en estuarios, formulados en el capítulo anterior, es necesario efectuar predicciones sobre el comportamiento espacial y temporal de las distintas sustancias contaminantes que son vertidas al cuerpo de agua. A partir de éstas, es posible determinar si el diseño seleccionado cumple con las condiciones de admisibilidad ambiental en las zonas protegidas.

Las ecuaciones que permiten realizar tales predicciones surgen a partir del planteo de un balance de masa de tales sustancias considerando sus principales mecanismos de transporte, el difusivo y el advectivo. El transporte difusivo, es un proceso dirigido por un gradiente de concentración que produce un desplazamiento de sustancias desde entornos de mayor a menor concentración. Por su parte, el transporte advectivo corresponde al movimiento de la sustancia debido al arrastre de la corriente y es el que ejerce la mayor influencia, por lo que resulta necesario conocer previamente el régimen de velocidades hidrodinámicas.

En el presente capítulo se comentan generalidades acerca de las corrientes de marea en estuarios. Se presentan, las ecuaciones bidimensionales que describen la circulación hidrodinámica en aguas poco profundas, junto con las condiciones de borde e iniciales correspondientes, basadas en las leyes de conservación de masa y cantidad de movimiento promediadas según Reynolds. Seguidamente, se realiza una explicación de los diferentes mecanismos de transporte de sustancias dentro de un fluido y se plantean las ecuaciones gobernantes de difusión-advención, junto con las correspondientes condiciones de borde e iniciales. Finalmente se extiende tal ecuación para predecir la distribución espacial y temporal de CF, DBO y OD.

A esta metodología de solución de las ecuaciones de difusión-advención (también llamadas ecuaciones de Transporte), resueltas mediante el MEF con el programa de simulación numérica FlexPDE (2015), se la denomina en esta tesis con las siglas **DT**.

3.1. GENERALIDADES DE LOS FLUJOS EN ESTUARIOS: CORRIENTES DE MAREA.

Las fuerzas de atracción gravitatoria entre el Sol, la Luna y la Tierra generan movimientos periódicos de ascenso y descenso del agua, con respecto al nivel del mar, que producen desplazamientos horizontales en el océano, llamados corrientes de marea.

Cada combinación entre estas fuerzas orbitales de atracción (Tierra-Luna-Sol), representa determinados tipos de movimientos periódicos, conocidos como armónicos o componente de marea, y se clasifican en mareas semidiurnas, diurnas y mixtas. La primera corresponde a aquellos movimientos que generan dos mareas altas y dos mareas bajas en un día, la segunda sólo un ciclo por día, es decir una pleamar y una bajamar, y la tercera involucra una combinación de armónicos que produce dos pleamares y una bajamar o dos bajamares y una pleamar. Estas componentes de marea, tienen amplitud (A_i) y fase distinta (ϕ_i), y frecuencia (ω_i) característica en cada punto del océano.

En la Tabla 3.1 se indican, junto con sus nombres, las principales componentes de marea astronómica. A partir de las mismas, se calculan las predicciones de marea que figuran en las Tablas de Marea de cada país para los distintos puertos.

Componentes Semidiurnas		
Símbolo de la componente	Nombre	Período (h)
M2	Lunar principal	12.42
S2	Solar principal	12
N2	Lunar elíptica mayor	12.66
K2	Lunisolar declinacional	11.97
Componentes Diurnas		
Símbolo de la componente	Nombre	Período (h)
K1	Lunisolar declinacional	23.93
O1	Lunar principal	25.82
P1	Solar principal	24.04
Q1	Lunar elíptica mayor	26.87

Tabla 3.1: Armónicos de marea.

De acuerdo a lo dicho, la variación total del nivel del mar en una localización dada, se representa matemáticamente como la suma de todos los armónicos, es decir:

$$\eta(t) = \sum_{i=1}^N A_i \cos(\omega_i t - \phi_i) \quad i = 1, 2, \dots, N \quad , \quad (3.1)$$

donde $\eta(t)$ es la elevación del mar respecto de un nivel medio en función del tiempo (t), i corresponde al i -ésimo armónico y N al número total de componentes. De igual manera, las corrientes de marea corresponden a flujos oscilatorios y se pueden expresar de la siguiente forma:

$$U(t) = \sum_{i=1}^N u_i \cos(\omega_i t - \phi_i) \quad i=1,2,\dots,N \quad , \quad (3.2)$$

Las ondas de marea que se propagan hacia la costa (o aguas arriba de un estuario), se las conoce como corrientes de flujo, y corresponden al período donde la marea comienza a subir. Después se invierten alejándose de la costa y fluyen durante casi el mismo tiempo en dirección contraria. Estas últimas se conocen como corrientes de refluo, y corresponden al período bajante de marea. Durante el momento de cambio de dirección, el agua se caracteriza por un estado de inmovilidad o calma, denominado estoa de marea.

Conforme la onda de marea se propaga hacia el interior del estuario se va distorsionando, mostrando asimetrías en la superficie libre y en la velocidad a lo largo del tiempo. Esta deformación se debe en general, a que la cresta de la onda se propaga más rápidamente que el seno, como consecuencia de diversos factores que intervienen tales como las fuerzas de fricción en el fondo, la diferencia de profundidades entre la pleamar y la bajamar, la disminución de la profundidad hacia el interior, el cambio en la anchura, el aporte de un río, la intensidad viento, o la combinación de mareas (sobremareas) en la boca del estuario. Por tal motivo, se producen cambios en la velocidad de la corriente de marea y en su duración, generando corrientes residuales.

Los flujos residuales en los estuarios son de gran importancia, ya que producen el transporte propiamente dicho de cualquier sustancia. Si la onda de marea fuese perfectamente sinusoidal, el promedio de las corrientes sería igual a cero. Esto supone, en términos generales, que cuando los flujos residuales hacia el mar son altos, el tiempo de residencia de los contaminantes puede ser corto y el sistema se podría depurar más rápido.

Por lo tanto, dentro de los estuarios se produce un amplio espectro de movimientos ondulatorios cuyos períodos van desde segundos hasta días. En la Figura 3.1 se resumen los diferentes tipos de ondas con sus mecanismos generadores, períodos y longitudes características, así como sus fuerzas restauradoras.

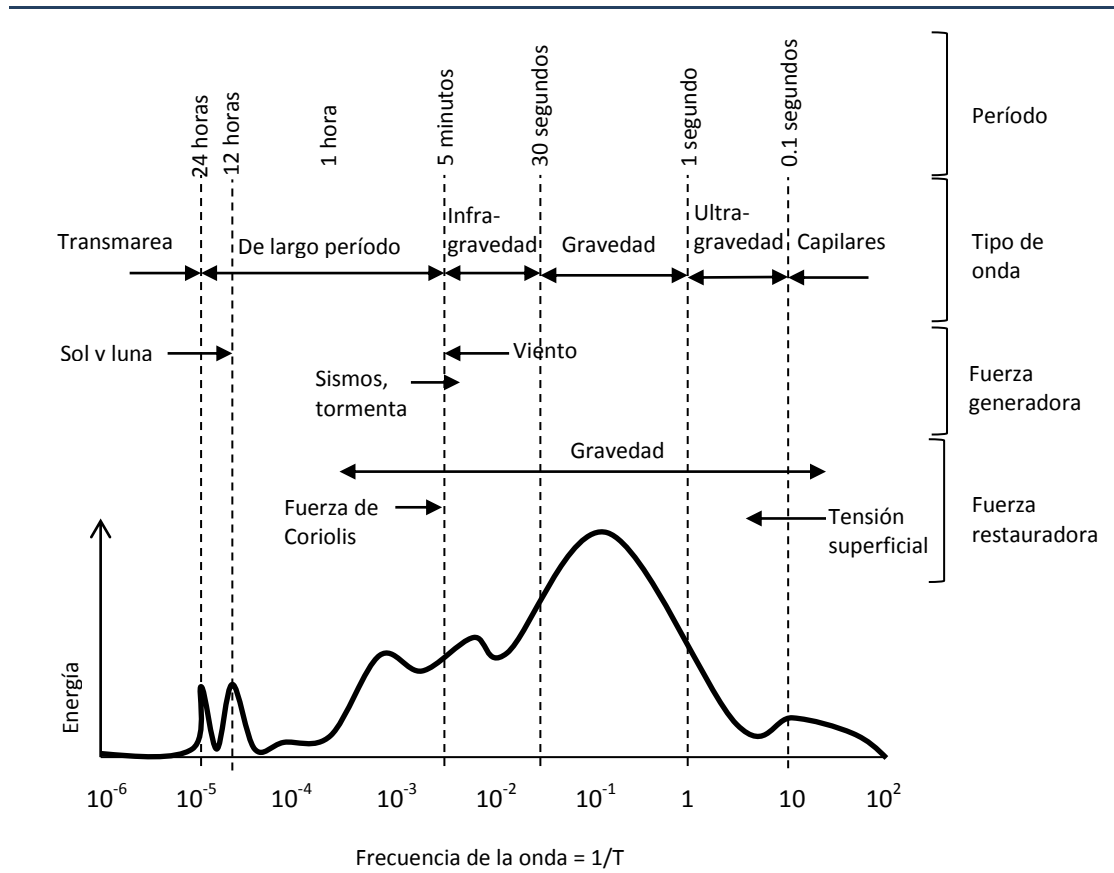


Figura 3.1: Período - energía de las ondas (adaptado de Kinsman, 1965).

3.2. ECUACIONES HIDRODINÁMICAS PARA AGUAS POCO PROFUNDAS.

3.2.1. Ecuaciones gobernantes.

Se describen las expresiones que formulan matemáticamente las leyes de movimiento de un fluido incompresible sometido a fuerzas exteriores. Las mismas se establecen a partir de las ecuaciones diferenciales de continuidad y de cantidad de movimiento 3D y se denominan ecuaciones de Navier Stokes. Estas son válidas tanto para flujos laminares como turbulentos. Sin embargo, la mayoría de los flujos encontrados en el ambiente natural son turbulentos, es decir cantidades como velocidad, presión y concentración de una sustancia muestran una variación aleatoria en el tiempo y en el espacio. Por tal motivo, es conveniente expresarlas en términos de las variables suavizadas, aplicando el enfoque conocido como *Promediación según Reynolds* (Rubin y Atkinson, 2001).

Los estuarios, en general, presentan una particularidad desde el punto de vista geométrico. Una de las dimensiones del dominio (profundidad) es mucho menor que las dimensiones horizontales:

$$h \ll L ,$$

siendo h la profundidad del cuerpo de agua y L una longitud horizontal característica (Figura 3.2).

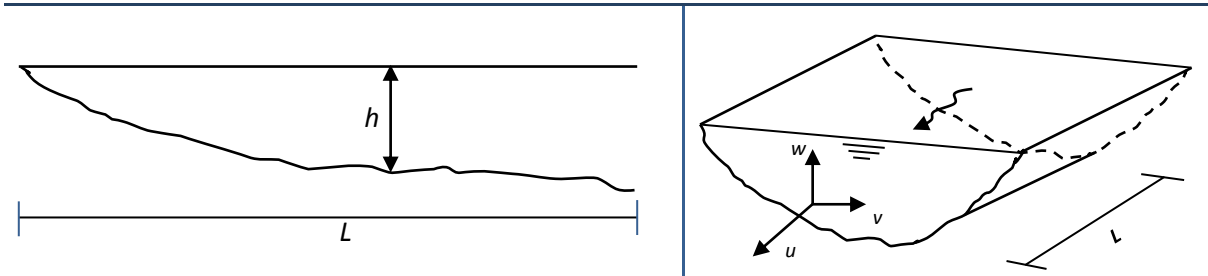


Figura 3.2: Dimensiones de cuerpos de agua poco profundos.

Esto quiere decir que los movimientos horizontales son mucho mayores que los verticales, pudiéndose simplificar el sistema a dos dimensiones. Para lograr esto, se procede a integrar las ecuaciones de continuidad y de movimiento respecto a z , entre el fondo y la superficie libre como se indica en la Figura 3.3.

De esta forma, se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones en un dominio bidimensional, conocido como *ecuaciones de aguas poco profundas*:

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial (h+\eta)U}{\partial x} + \frac{\partial (h+\eta)V}{\partial y} = 0 , \quad (3.3)$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} - fV = -g \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{C_a W_x |\mathbf{W}|}{h+\eta} - \frac{C_D U |\mathbf{U}|}{h+\eta} , \quad (3.4)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + U \frac{\partial V}{\partial x} + V \frac{\partial V}{\partial y} + fU = -g \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{C_a W_y |\mathbf{W}|}{h+\eta} - \frac{C_D V |\mathbf{U}|}{h+\eta} , \quad (3.5)$$

donde η es la elevación en la superficie libre, U y V corresponden a las velocidades verticalmente promediadas en las direcciones de x e y respectivamente, t es el tiempo, h es la profundidad, g es la aceleración de la gravedad, f es el factor de Coriolis, C_a es el coeficiente de arrastre del viento cuyo valor típico, propuesto por numerosos estudios experimentales (Tsanis et al., 2007), es del orden de 10^{-6} ; W_x y W_y son las velocidades del viento en las direcciones de x e y , respectivamente, $|\mathbf{W}|$ y $|\mathbf{U}|$ son las magnitudes de las velocidades horizontales del viento e hidrodinámicas, respectivamente y C_D es el coeficiente de arrastre, del orden de 0.0026 (Li et al. 2008), calculado

como $C_D = g / C_z^2$, siendo $C_z = h^{1/6} / n_b$ el coeficiente de Chezy y n_b es el coeficiente de Manning.

Valores típicos de C_z corresponden a 60 m/seg. Nótese que, en las ecuaciones de momentum, el término de fricción cuadrática considera el efecto no lineal de la profundidad.

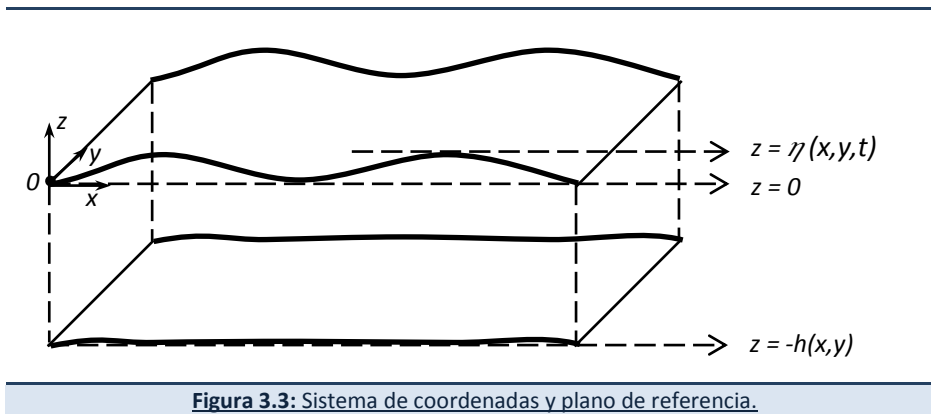


Figura 3.3: Sistema de coordenadas y plano de referencia.

Generalmente, como en la mayoría de los estuarios la relación η / h es pequeña, es posible reformular los correspondientes términos de fricción de fondo de las ecuaciones (3.4)-(3.5), efectuando un desarrollo de Taylor de la siguiente manera:

$$\frac{1}{1 + \frac{\eta}{h}} = 1 - \frac{\eta}{h} + o\left[\left(\frac{\eta}{h}\right)^2\right]. \quad (3.6)$$

Por otra parte, se puede demostrar que la razón entre las velocidades horizontales dentro del estuario es del orden de D/L , siendo D el ancho y L el largo. Considerando tal hecho, en los cuales dicha relación es muy pequeña, el problema puede ser reformulado como un flujo unidimensional. Varios autores han aproximado tales términos, en particular se seguirá el desarrollo propuesto por Parker (1984) quien demostró, empleando series de Fourier, que para un problema unidimensional con una única componente astronómica de marea, tales términos pueden ser aproximados de la siguiente manera:

$$U|U| = U\tilde{U} \frac{8}{3\pi}, \quad (3.7)$$

donde \tilde{U} corresponde a la amplitud máxima de la velocidad que corresponde en general a la componente longitudinal en estuarios angostos.

Luego, reemplazando (3.6) y (3.7) en los términos de fricción de las ecuaciones (3.4) y (3.5), se pueden obtener las siguientes expresiones:

$$\frac{C_D U |U|}{h + \eta} = \frac{B}{h} U - \frac{B}{h^2} U \eta \quad , \quad \frac{C_D V |U|}{h + \eta} = \frac{B}{h} V - \frac{B}{h^2} V \eta \quad , \quad (3.8)$$

donde B es el factor de resistencia de fondo definido como:

$$B = \frac{8C_D \tilde{U}}{3\pi} \quad . \quad (3.9)$$

La expresión (3.9) es una buena aproximación, cuando las corrientes mareales son predominantemente monocromáticas y longitudinales. En otros casos, puede obtenerse empíricamente el valor de B que mejor se ajuste a la problemática real, mediante mediciones “in situ”. Muchas veces, debido a que el coeficiente de fricción en el fondo generalmente no presenta grandes variaciones, normalmente se asume una amplitud de velocidad característica constante U_c , por ejemplo la velocidad en la boca del estuario, así como también un valor aproximado para el coeficiente de arrastre. Generalmente, la magnitud de la velocidad de los estuarios se encuentra entre el rango de 0.5 a 1 m/s, lo que implica que B puede adoptar valores entre $1.06e^{-3}$ a $3.12e^{-3}$ m/s, para un C_D de 0.0025.

Consecuentemente, las ecuaciones hidrodinámicas basadas en la teoría de Aguas Poco Profundas, conocidas también como ecuaciones bidimensionales de Saint Venant, quedan reformuladas de la siguiente forma (Li y O’Donnell, 1997):

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial (h + \eta) U}{\partial x} + \frac{\partial (h + \eta) V}{\partial y} = 0 \quad , \quad (3.10)$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} - fV = -g \frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{B}{h} U + \frac{B}{h^2} U \eta \quad , \quad (3.11)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + U \frac{\partial V}{\partial x} + V \frac{\partial V}{\partial y} + fU = -g \frac{\partial \eta}{\partial y} - \frac{B}{h} V + \frac{B}{h^2} V \eta \quad , \quad (3.12)$$

Este sistema, donde se ha supuesto que los efectos del viento son despreciables, debe ser resuelto conjuntamente con las condiciones de iniciales y de borde apropiadas.

3.2.2. Condiciones iniciales y de frontera.

Las condiciones iniciales del sistema (3.10)-(3.12) precisan de valores conocidos de la superficie libre η y de las velocidades U y V en un instante inicial, es decir:

$$\begin{aligned}
 \eta(x,y,0) &= \eta_1(x,y) , \\
 U(x,y,0) &= u_1(x,y) , \\
 V(x,y,0) &= v_1(x,y) ,
 \end{aligned}
 \tag{3.13}$$

donde $\eta_1(x,y)$, $u_1(x,y)$ y $v_1(x,y)$ son los valores conocidos de tales variables.

Luego, las condiciones de contorno Γ para el problema hidrodinámico pueden ser las siguientes:

En el límite entre el estuario con el mar abierto (borde abierto, *BA*), el sistema está sometido a la acción de las mareas. Esto significa que el valor de la elevación de la marea en la boca es un dato conocido, por lo tanto:

$$\eta|_{BA} = \eta_{ext}(x,y,t) .
 \tag{3.14}$$

En los bordes de la costa (borde impermeable, *BI*) se asume que la velocidad normal es nula, es decir:

$$\mathbf{U}_n|_{BI} = 0 ,
 \tag{3.15}$$

donde n es el vector unitario normal a la frontera.

Por otra parte, en aquellos estuarios que cuentan con el aporte de un río (borde río, *BR*), la velocidad normal en esa frontera corresponderá al valor de las corrientes hídricas del afluente, siendo:

$$\mathbf{U}_n|_{BR} = U_{Rio}(x,y,t) .
 \tag{3.16}$$

Tales condiciones se indican a modo ilustrativo en la Figura 3.4.

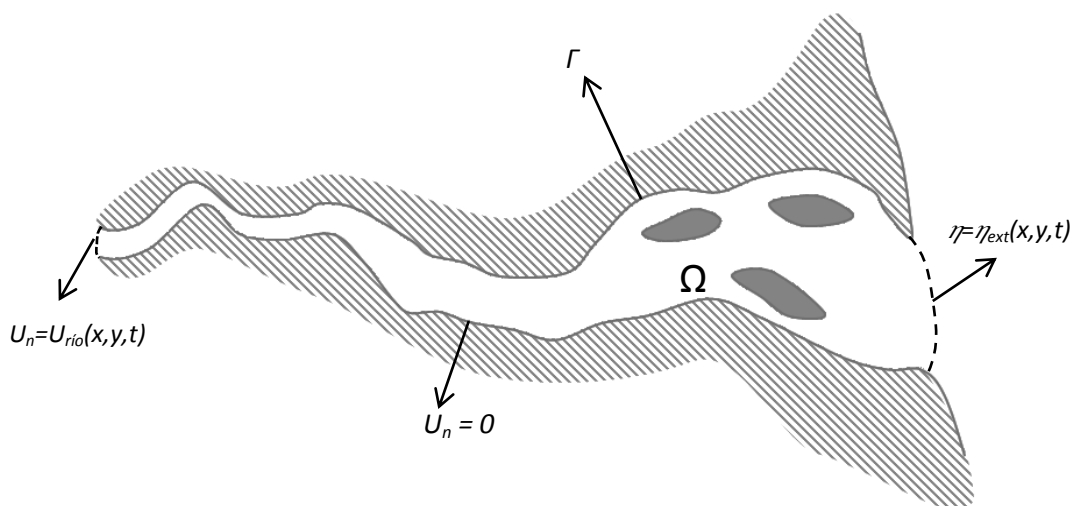


Figura 3.4: Condiciones de borde típicas en estuarios para el modelo hidrodinámico.

Existe otra condición de frontera que en ocasiones es conveniente utilizar para el BA, conocida como condición de radiación de Sommerfeld (1949) para casos periódicos. Es una forma aproximada de representar que las olas reflejadas en la costa no puedan volver a hacerlo en el borde abierto.

3.3. ECUACIONES DE TRANSPORTE DE SUSTANCIAS.

3.3.1. Ecuaciones gobernantes.

El transporte de sustancias es un proceso físico complejo que ocurre comúnmente en la naturaleza y que presenta diversas escalas espaciales y temporales. Cuando se pretende describir la concentración promediada en la vertical de una sustancia que se transporta en un flujo de aguas poco profundas, es posible hacer uso con suficiente precisión de leyes empíricas de los mecanismos de transporte, expresadas matemáticamente de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} J_x &= U C - K \frac{\partial C}{\partial x} , \\ J_y &= V C - K \frac{\partial C}{\partial y} , \end{aligned} \quad (3.17)$$

donde J_x y J_y , corresponden a las componentes de la densidad de flujo (cantidad de contaminante que atraviesa un área por unidad de tiempo), U y V son las velocidades horizontales promediadas correspondientes a las direcciones x e y respectivamente, C es la concentración integrada en la profundidad y K es el coeficiente de difusión que en general debe ser obtenido experimentalmente.

Los primeros términos de los miembros derechos de las expresiones (3.17) corresponden al transporte advectivo, definiéndose como tal al movimiento de la sustancia conjuntamente con el fluido, por lo tanto requiere de la determinación previa del campo de velocidades del agua. Luego, los últimos términos corresponden al transporte difusivo, impulsado por los gradientes de concentración (Ley de Fick). El signo negativo indica que el transporte difusivo se da desde una concentración alta hacia una concentración baja. Existen diversos procesos que contribuyen a este transporte:

- La difusión molecular, donde se produce un desplazamiento aleatorio de moléculas de solutos entre las moléculas de agua. De esta forma las moléculas de solutos se desplazan

desde las zonas de mayor concentración hacia las de menor, por lo que siempre que exista un gradiente de concentración se producirá este fenómeno.

- La difusión turbulenta, que involucra la parte de la estructura fluctuante. Este proceso es dominante frente a la difusiva molecular.
- La dispersión, que considera los efectos de no uniformidad de las velocidades y la concentración de sustancias en la vertical.

Para el tipo de flujo en consideración, los fenómenos dispersivos dominan el transporte difusivo. Por tal razón K también se denomina coeficiente de dispersión (turbulenta).

En la mayoría de los casos relacionados con transporte en cursos de agua naturales, el transporte advectivo es más importante que el difusivo puesto que las escalas espaciales son muchos mayores.

A partir de las expresiones de las densidades de flujo (3.17), puede formularse un balance de masa en un elemento de fluido conformado por una base de dimensiones infinitésimas (dx y dy) y de altura H (profundidad). De esta manera, se llega a la ecuación gobernante bidimensional de transporte de masa que modela la concentración (promediada según Reynolds) de una sustancia en un cuerpo de agua (Rubin y Atkinson, 2001):

$$\frac{\partial(CH)}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{U}HC) - \text{div}(KH\nabla C) + R_R H - R_G H = 0 \quad , \quad (3.18)$$

donde \mathbf{U} corresponde al vector de las velocidades horizontales promediadas en la vertical con dimensiones de $[L/T]$, $H(x,y)$ la profundidad del estuario $[L]$, C la concentración media promediada en la vertical $[M/L^3]$, K el coeficiente de dispersión $[L^2/T]$ que en esta tesis se asume independiente de la dirección (isótropo), R_G y R_R corresponden a las tasas de generación y de reacción de la sustancia bajo estudio que pueden producirse por unidad de volumen de fluido. Estas últimas se refieren a la velocidad de transformación o reacción de la/s sustancia/s dentro del volumen y tiene que ver con los tiempos asociados a los cambios de concentración generados por el proceso de transporte, hasta aproximarse al equilibrio del sistema. Muchos procesos de decaimiento o descomposición pueden ser representados por una cinética de primer orden, es decir el término de reacción implica la siguiente relación:

$$R_R = C\sigma \quad , \quad (3.19)$$

donde $\sigma [T^{-1}]$ es el coeficiente de tasa de decaimiento o constante de reacción (inverso de la constante de tiempo de reacción). Luego, si se considera que las fuentes de emisión son

puntuales, los términos de generación $R_G H$ se expresan en función de la descarga másica distribuida (m), que corresponde a la suma de las tasas de flujo másico $M_j(t)$ con dimensiones $[M/T]$, debidas a ND zonas de descarga, cuyas ubicaciones (F_x_j, F_y_j) se encuentran en el área Ω_j , es decir:

$$m(x, y, t) = \sum_{j=1}^{ND} M_j(t) \varphi_j \quad ,$$

donde:

$$\varphi_j = \begin{cases} \frac{1}{\Omega_j} & \text{si } (x, y) \in \Omega_j \\ 0 & \text{si } (x, y) \notin \Omega_j \end{cases} \quad . \quad (3.20)$$

Entonces, la ecuación (3.18) queda formulada de la siguiente forma:

$$\frac{\partial(CH)}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{UHC}) - \text{div}(KH \nabla C) + C\sigma H = m(x, y, t) \quad . \quad (3.21)$$

3.3.2. Condiciones iniciales y de frontera.

La ecuación de transporte bidimensional (3.21) precisa de valores conocidos de la concentración C^0 en un instante inicial, es decir:

$$C(x, y, 0) = C^0 \quad , \quad (3.22)$$

Generalmente, en la boca del estuario (BA) o en el la desembocadura de un río (BR), la concentración de una sustancia es conocida, entonces la condición de frontera en estos casos se determina de la siguiente forma:

$$C|_{BA, BR} = C^0 \quad . \quad (3.23)$$

Luego, en los bordes impermeables (BI) alejados de la zona de descarga, se asume que no existe flujo respecto a la normal n , con lo cual la condición de frontera se plantea de la siguiente manera:

$$-KH \left. \frac{\partial C}{\partial n} \right|_{BI} = 0 \quad . \quad (3.24)$$

Tales condiciones de contorno se indican a modo ilustrativo en la Figura 3.5.

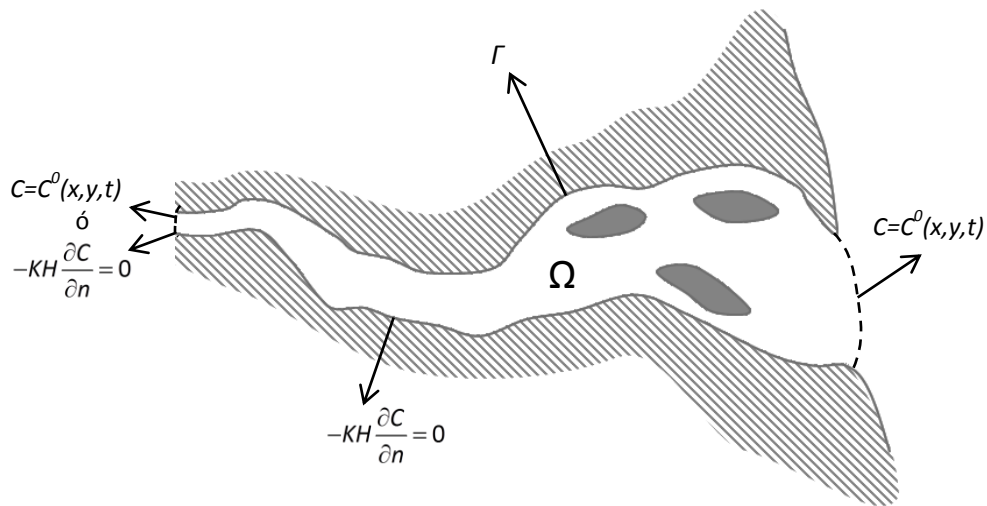


Figura 3.5: Condiciones de borde típicas en estuarios para el modelo de transporte.

3.3.3. Sistema de ecuaciones de transporte.

Con el fin de predecir los niveles de calidad de agua y determinar la distribución espacial y temporal de las concentraciones en las zonas de resguardo ambiental, la ecuación de transporte (3.21) debe resolverse para cada uno de los indicadores ambientales (CF, DBO y OD). Teniendo en cuenta que la evolución del OD depende de la evolución de la DBO, estas están acopladas. De esta manera, las correspondientes ecuaciones se expresan a continuación de la siguiente forma general:

$$\frac{\partial(C_D H)}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{U} H C_D) - \text{div}(K H \nabla C_D) + C_D \sigma_D H = m_D(x, y, t) + \xi_D \quad D=1,2,3 \quad , \quad (3.25)$$

donde, D hace referencia a los indicadores de calidad de agua siendo C_1 , C_2 y C_3 las concentraciones de CF, DBO y OD, luego σ_1 y σ_2 son las constantes de degradación de CF y DBO, σ_3 es la constante de transferencia de OD, $\xi_1 = \xi_2 = 0$ y $\xi_3 = -H\sigma_2 C_2 + \sigma_3 H(d_s - C_3)$, d_s es la saturación de oxígeno disuelto, m_1 y m_2 corresponden a la descarga másica distribuida (para m_3 no hay descarga) y se expresan de la siguiente manera:

$$m_D(x, y, t) = \sum_{j=1}^{ND} M_{Dj}(t) \varphi_j \beta_j(t) \quad , \quad (3.26)$$

recordando que $\beta(t)$ son funciones de descarga que fueron definidas en el capítulo anterior.

Debido al acoplamiento mencionado anteriormente, en la ecuación de OD (C_3), aparece un término de degradación proporcional a la DBO (C_2). Esto se debe a la cantidad de oxígeno que consumen los microorganismos para descomponer la materia orgánica. Asimismo d_s representa el déficit de oxígeno disuelto. Cuando es mayor que OD implica que ingresa oxígeno de la atmósfera al agua (reaireación). Las condiciones de borde e iniciales asociadas a este sistema son las siguientes:

$$-KH \frac{\partial C_D}{\partial n} \Big|_{BI} = 0, \quad C_D \Big|_{BA} = \gamma_D, \quad C_D(x, y, 0) = \gamma_D \quad D=1,2,3, \quad (3.27)$$

siendo el flujo nulo en los márgenes de la costa (borde impermeable BI) y en la boca del estuario (borde abierto BA) $\gamma_1=\gamma_2=0$ y $\gamma_3=C_3^0$, donde C_3^0 es una concentración conocida de OD. Esto se debe a que en aguas no contaminadas siempre existe oxígeno disuelto. Luego, las condiciones iniciales para cada indicador son $\gamma_1=\gamma_2=0$ y $\gamma_3=C_3^0$.

CAPÍTULO IV

ENFOQUE GENERAL DE SOLUCIÓN: OPTIMIZACIÓN BASADA EN SIMULACIÓN

En el presente Capítulo, se plantea el procedimiento general de solución a problemas de diseño óptimo, basados en un esquema combinado de simulación y optimización.

Para ello, se comentan aspectos generales sobre los enfoques de solución numérica para distintos problemas físicos de contorno y de valor inicial, y se realiza una introducción sobre el concepto y métodos de optimización. Seguidamente, se describe brevemente el Método de Elementos Finitos (MEF) y se realiza una descripción del software computacional FlexPDE (2015), utilizado como simulador de los problemas de contorno. Luego se desarrolla el método de optimización “Recocido Simulado” (SA) donde se presenta el correspondiente algoritmo empleado para la obtención del diseño óptimo.

Finalmente se explica la implementación computacional del enfoque general de simulación-optimización y se muestra, a manera de ejemplo, su aplicación al problema de calidad de agua.

4.1. ESTRATEGIA DE SOLUCIÓN BASADA EN UN ENFOQUE DE SIMULACIÓN-OPTIMIZACIÓN.

4.1.1. Solución numérica de las ecuaciones gobernantes: Simulación.

Los problemas diferenciales de contorno y valor inicial, que se abordan en esta tesis, aplicados a las geometrías usuales de estuarios resultan muy complejos para su solución analítica, por lo que es necesario recurrir a técnicas numéricas. Las mismas permiten transformar las ecuaciones diferenciales, en sistemas de ecuaciones algebraicas que pueden ser resueltas con menor dificultad.

En tal sentido, uno de los métodos de solución numérica más usados ha sido el de Diferencias Finitas. Esta técnica aproxima a los operadores diferenciales por otros denominados operadores en diferencias, aplicados a un conjunto finito de puntos en un dominio discreto. Resulta ser eficiente en problemas cuyas geometrías presentan dominios simples y regulares.

Otros métodos utilizados en la década de los cincuenta se basan en el enfoque de los Residuos Ponderados. Este método resuelve de forma aproximada el problema de contorno o inicial, haciendo uso de alguna función de ponderación, cuyo requerimiento implica que la integral del residuo deba ser igual a cero. Estas funciones de aproximación surgen a partir de diversos métodos, tales como de colocación por puntos, de colocación por subdominios, de mínimos cuadrados y de Galerkin. Debido a que este método es global, en el sentido de que se extienden a todo el dominio donde se busca la solución aproximada, puede ser evaluado en cualquier punto del dominio, en oposición al método de Diferencias Finitas que solo permite realizar la evaluación únicamente en los nodos. Con el tiempo este método fue modificado, en relación a su forma original, definiéndose funciones de aproximación de forma local, es decir en subdominios del dominio general. Este enfoque, que corresponde al MEF, permite tratar con dominios de geometría compleja y será el utilizado en esta tesis para la resolución de problemas hidrodinámicos y de transporte de CF, DBO y OD en estuarios.

4.1.2. Procedimiento de optimización.

Esencialmente, para obtener las variables de diseño que minimicen una función objetivo, es necesario resolver mediante el MEF la ecuación gobernante del problema, junto con sus correspondientes condiciones de borde e iniciales, para diferentes configuraciones factibles de variables de diseño. De esta manera, es posible verificar si tal combinación cumple con las restricciones impuestas y de ser así, se comparan los valores de la función objetivo. Este procedimiento debe hacerse en general simulando un gran número situaciones, hasta encontrar aquel conjunto de variables factibles, es decir que verifique las restricciones establecidas, y que mejor cumpla con los objetivos propuestos.

Por supuesto tal metodología de búsqueda por prueba y error puede ser muy costoso, desde el punto de vista computacional, ya que requiere del cálculo de una gran cantidad de situaciones (simulaciones) posibles, hasta llegar a las variables óptimas. Por tal motivo, resulta necesario desarrollar un método de optimización adecuado, que permita obtener la solución óptima con el menor número de evaluaciones posibles.

Existen varios de estos métodos, muchos de los cuales están basados en técnicas de gradiente descendiente. Sin embargo, los problemas formulados en esta tesis pueden presentar dificultad para el cálculo del gradiente de la función objetivo y además, como general tales problemas no son convexos, podrían existir varios mínimos.

Por tal motivo, resulta conveniente el uso de técnicas metaheurísticas. Estas técnicas son algoritmos aproximados que exploran adecuadamente el espacio de solución, mediante procedimientos iterativos que guían la búsqueda de forma inteligente.

Asimismo, como no requieren del cálculo del gradiente de la función estas técnicas son simples, cuando se combinan con el MEF, ya que las simulaciones del problema de transporte para evaluar el cumplimiento de las restricciones ambientales son independientes de la estructura del algoritmo de optimización.

Existen diferentes técnicas heurísticas de búsqueda tales como las *Constructivas*, que parten de una solución inicial vacía y añaden componentes hasta construir una solución. Ejemplo de este tipo son las técnicas GRASP y Colonias de Hormigas, entre otras. Luego están las basadas en *Trayectorias*, que parten de una solución inicial e iterativamente tratan de reemplazarla por otra solución de su vecindario con mejor calidad (Recocido Simulado, Búsqueda Tabú) y finalmente las basadas en *Poblaciones*, cuando evolucionan una población de soluciones iterativamente (Algoritmos Genéticos, Scatter Search, Particle Swarm).

En este trabajo de tesis se utiliza la técnica metaheurística conocida como “Recocido Simulado”, basada en una analogía del comportamiento de sistemas termodinámicos. La misma será explicada con mayor detalle más adelante.

4.1.3. Enfoque Simulación-Optimización.

El enfoque de *simulación-optimización* planteado consiste en el uso de un método de optimización para seleccionar las de *Variables de Diseño* adecuadas, verificar su factibilidad, y calcular y comparar los correspondientes valores de la *Función Objetivo* hasta encontrar su valor óptimo, invocando para la evaluación de las *Restricciones* establecidas, a un método apropiado de simulación.

Este enfoque es muy interesante por la simplicidad del cálculo, ya que no necesita modificar la estructura del programa de simulación, sino que solamente varía los datos de entrada y de salida, como se indica a modo ilustrativo en la Figura 4.1.



Figura 4.1: Esquema Simulación-Optimización.

Por lo tanto, el modelo computacional general para la obtención del diseño óptimo final de cualquier problema físico, mediante el enfoque de simulación-optimización se resume a continuación en la Figura 4.2:

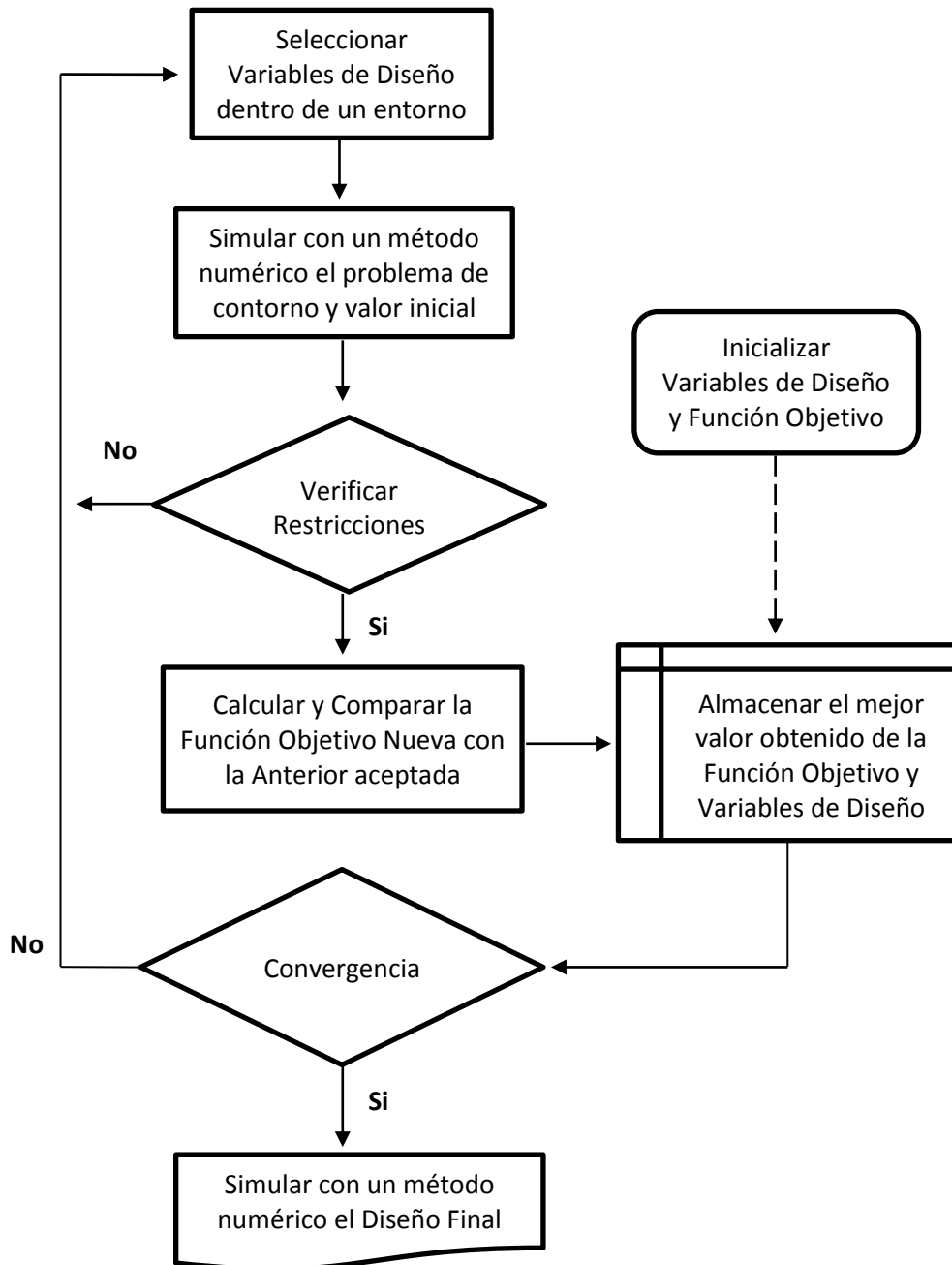


Figura 4.2: Modelo computacional de diseño óptimo.

4.2. MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS.

4.2.1. Generalidades.

El MEF se basa en una transformación de un problema de contorno y valor inicial por otro algebraico aproximadamente equivalente, para el cual se conocen detalladamente técnicas generales de resolución. Se trata de la aplicación del método de Galerkin para la resolución de un sistema de ecuaciones a derivadas parciales. El MEF utiliza un procedimiento denominado discretización donde transforma las incógnitas básicas del problema, que son funciones continuas de las coordenadas espaciales y de la variable temporal, en un conjunto (muy grande) de variables. Cada una de estas variables es asociada a un punto particular denominado “nodo”, definido en un número finito de subdominios llamados “elementos” del dominio analizado, como se muestra en la Figura 4.3. De esta manera, el problema se reduce a uno más simple gobernado por un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias cuya variable independiente es el tiempo, o en un sistema de ecuaciones algebraicas para problemas estacionarios.

Así, el sistema de ecuaciones a derivadas parciales se transforma en un sistema algebraico que puede ser programado y resuelto numéricamente en una computadora. Tal método involucra una gran cantidad de técnicas de cálculo numérico, como así también de administración de datos y de visualización gráfica de resultados, dado que a partir de los valores discretos determinados es factible recuperar el carácter continuo de las variables de interpolación.

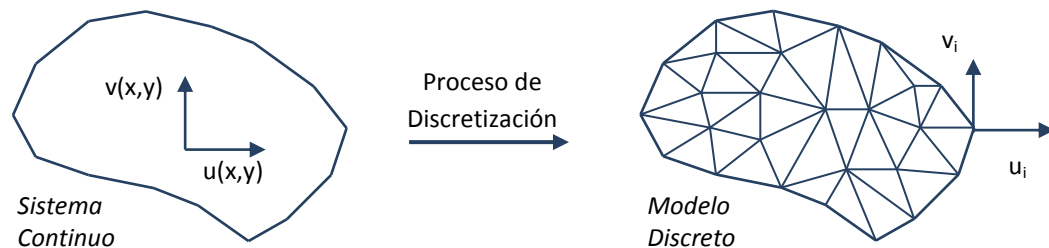


Figura 4.3: Representación del proceso de discretización.

Se trata en la actualidad del método numérico más poderoso para analizar prácticamente cualquier situación que pueda ser formulada como un problema de contorno e inicial. Una de sus mayores ventajas, es la posibilidad de analizar dominios con cualquier complejidad geométrica.

Existen programas computacionales generales de simulación numérica basados en el MEF, que permiten resolver diferentes problemas de valor inicial y de contorno. Particularmente en esta tesis se utilizará el software de simulación numérica de elementos finitos denominado FlexPDE (2015).

El mismo se explica a continuación, donde se exponen brevemente las características del programa y algunos detalles relacionados con el cálculo de las ecuaciones que describen el transporte de contaminantes dentro del estuario.

4.2.2. Aspectos básicos del programa computacional de elementos finitos FlexPDE.

Este programa puede resolver sistemas de ecuaciones diferenciales a derivadas parciales lineales, no lineales, de 1º y 2º orden en una, dos y tres dimensiones, tanto para problemas estacionarios como dependientes del tiempo.

Como aspecto específico, no está basado en una librería predefinida de modelos, sino que la elección de las ecuaciones diferenciales a derivadas parciales y la geometría del dominio deben ser establecidas por el usuario. Permite la definición de regiones con distintas propiedades, por lo que muchos problemas diferentes pueden ser resueltos con el mismo software.

Se trata de un ambiente computacional para la resolución de problemas iniciales y de contorno, que comprende las diversas etapas necesarias para el análisis: un generador de malla, un simulador basado en elementos finitos, y un sistema gráfico para presentar los resultados. Además, posee un estimador de error relativo que gobierna automáticamente el remallado del dominio hasta alcanzar un error estimado (rms) del orden de la tolerancia solicitada por el usuario.

El planteo de un problema de contorno (o de valor inicial) se realiza mediante un texto escrito por el usuario, denominado “descriptor” donde el FlexPDE convierte el texto ingresado en un modelo de elementos finitos para la resolución del problema.

Para comenzar a trabajar se escribe en formato de texto en el “descriptor”, los principales datos que necesita el programa para definir matemáticamente un problema de contorno. En la Figura 4.4 se presenta un ejemplo del descriptor del FlexPDE donde se indican las principales secciones (*Title, Coordinates, Variables, Select, Definitions, Initial Values, Boundaries, Time, Plots*). La forma en que se describe el problema en el área de escritura es similar a la empleada cuando se desea resolver el problema de modo manual. El programa tiene asignada algunas letras y palabras claves que corresponden a la definición de ciertas funciones, variables, operadores o parámetros y no hace diferencia entre caracteres alfabéticos en mayúscula o minúscula. Cuando se desee realizar comentarios, estos pueden colocarse libremente en el texto, mediante el uso de llaves { }, o empleando el símbolo de la exclamación ! para ignorar el resto de la línea.

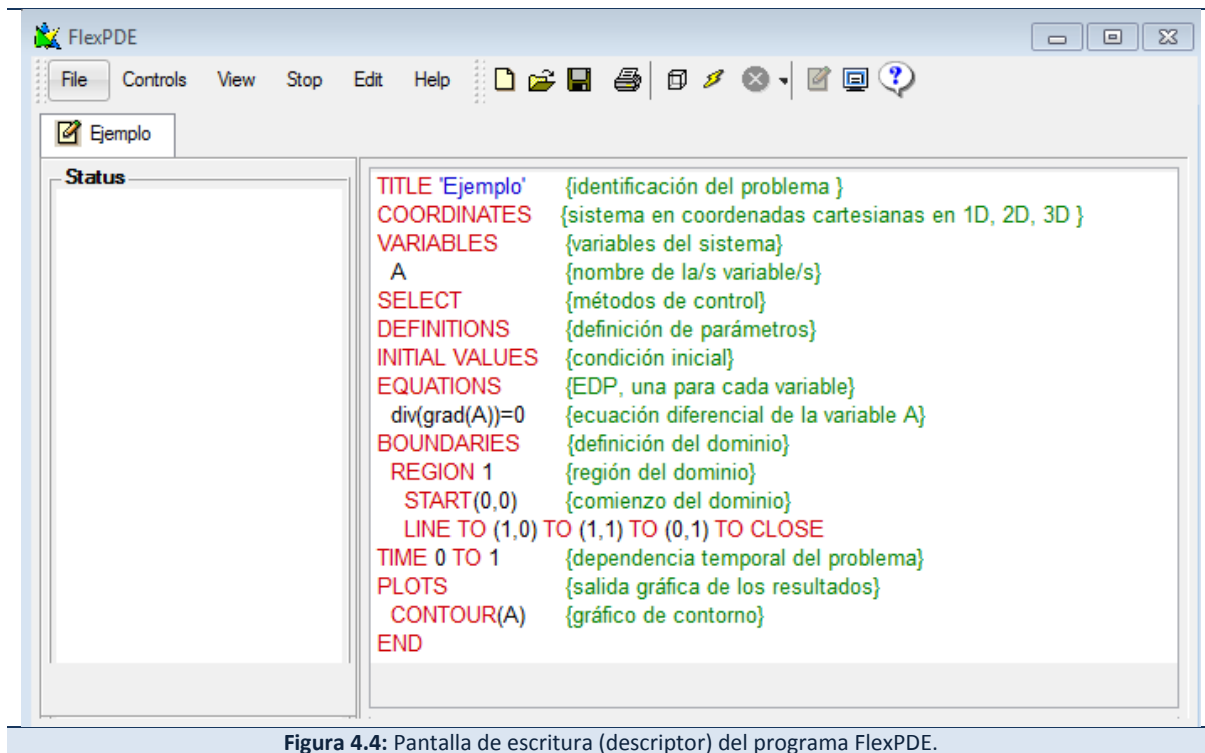


Figura 4.4: Pantalla de escritura (descriptor) del programa FlexPDE.

De esta manera, a los efectos de mostrar las características del programa, se presentan en el “descriptor” los datos requeridos para resolver, a manera de ejemplo, un problema lineal de transporte de Coliformes fecales en un dominio idealizado de forma rectangular, donde uno de sus bordes (izquierdo) limita con el mar. Para ello se muestra en la Figura 4.5 las ecuaciones gobernantes, junto con las condiciones iniciales y de contorno (lado izquierdo), y su equivalente de escritura en el programa FlexPDE (lado derecho), y se explican los datos que requieren cada una de las secciones a continuación.

Se inicia en la sección TITLE, escribiendo el título que se le va a dar al problema. En este caso se denomina ‘Problema de Transporte’. Luego, como el dominio del ejemplo corresponde a una forma rectangular, en la sección COORDINATES se especifica el sistema correspondiente a coordenadas bidimensionales.

Seguidamente, en la sección VARIABLES se definen todas las variables que presenta el problema. En este caso corresponden a las variables hidrodinámicas, es decir la elevación de la superficie libre y las velocidades longitudinales y transversales promediadas en la vertical y a la variable de concentración del problema de difusión-advención. Como el programa no tiene asignado el alfabeto griego, en el caso de la variable η se la identifica como “eta”. Por otra parte, se debe definir de forma auxiliar otra variable, llamada “etat”, que corresponde a la derivada segunda con respecto al tiempo de la superficie libre (término que se encuentra en la

correspondiente ecuación de continuidad) debido a que FlexPDE no puede integrar directamente ecuaciones de segundo orden temporal.

<p>COORDINATES cartesianas en 2D</p> <p>VARIABLES η, U, V, C</p> <p>SELECT Funciones específicas del programa</p> <p>DEFINITIONS Parámetros y relaciones del problema de contorno y valor inicial</p> <p>INITIAL VALUES $\eta_0 _{t=0} = \bar{\eta}$ $C _{t=0} = 0$</p> <p>EQUATIONS $\frac{\partial^2 \eta_0}{\partial t^2} + \frac{B}{H} \frac{\partial \eta_0}{\partial t} - \text{div}(gH\nabla \eta_0) = 0$ $\frac{\partial U}{\partial t} = -g \frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{B}{h} U$ $\frac{\partial V}{\partial t} = -g \frac{\partial \eta}{\partial y} - \frac{B}{h} V$ $\frac{\partial (CH)}{\partial t} + \nabla \cdot (VHC) - \text{div}(HK\nabla C) + H\sigma C = m$</p> <p>BOUNDARIES $-g \frac{\partial \eta_0}{\partial n} \Big _{BI} = 0$ $-KH \frac{\partial C}{\partial n} \Big _{BI} = 0$ $\eta_0 _{BA} = \eta_{ext}(x, y, t)$ $C _{BA} = 0$</p> <p>TIME 0 a 10 periodos cada 450 seg.</p> <p>PLOTS Gráficos solicitados por cada hora</p> <p>END</p>	<pre> TITLE 'Problema de Transporte' COORDINATES cartesian2 VARIABLES etat eta U V C SELECT fixdt=on regrid=off DEFINITIONS Tp =3600*12 {Periodo de marea: seg} Tf =Tp*10 {Tiempo total : seg} w= 2*Pi/Tp {Frecuencia:1/seg} Tau=Tp*4 {Periodo estacionario} Eta0=1 {Elevación: m} H=10 {Profundidad del estuario: m} Lx=25000 {Longitud: m} Ly=4000 {Ancho: m} g=9.81 {Aceleración grav.: m/s2} Cd=0.0025 {Coeficiente de arrastre} ui=1 vi=0 Ud=(ui^2+vi^2)^0.5 {Magnitud de la velocidad: m/s} B=(8*Cd*Ud)/(3*Pi) {Fricción: m/s2} Radio=50 {Radio de la descarga:m} Ad=Pi*Radio^2 {Area descarga: m2} Cfec=10e7 {conc. CF: NMP/100m} QT=0.8 {Caudal descarga: m3/s} R=1e-6 {coeficiente de degradación: 1/s} M=0 Mc=Cfec*QT {Tasa de descarga de coliformes} Kx=2000 Ky=Dlon*0.1 {coef. dispersión en x e y: m2/s} INITIAL VALUES etat=0 eta=Eta0 C=0 EQUATIONS etat: dt(etat)=etat eta: dt(eta)+(B/H)*dt(eta)-dx(g*H*dx(eta))-dy(g*H*dy(eta))=0 U: dt(U)+g*dx(eta)+(B/H)*U=0 V: dt(V)+g*dy(eta)+(B/H)*V=0 C: dt(C*H)+dx(U*C*H)+dy(V*C*H)-dx(H*Kx*dx(C))-dy(H*Ky*dy(C))+H*R*C=M/Ad BOUNDARIES REGION 1 'Canal' start (0,0) NATURAL (etat)=0 NATURAL (eta)=0 NATURAL (C)=0 line to (Lx,0) line to (Lx,Ly) line to (0,Ly) VALUE (etat)=-eta0*w*sin(w*t) VALUE (eta)=eta0*cos(w*t) VALUE (C)=0 line to close REGION 2 'Descarga' M=Mc start (Lx/2,Ly/2) arc(center=Lx/2,Ly/2+Radio) angle = 360 to close TIME 0 TO Tf by 3600/8 PLOTS for t = 0 by 3600 to Tf elevation (Eta) from (0,Ly/2) to (Lx,Ly/2) contour (C) HISTORIES history (U) at (Lx/2,Ly/2) history (C) at (Lx/4,Ly/2) (3*Lx/4,Ly/2) END </pre>
---	--

Figura 4.5: Ingreso de datos en el programa FlexPDE.

En la sección SELECT, se pueden invocar una serie de funciones que el programa proporciona para controlar o ajustar la solución numérica del problema, en este caso se emplearon dos de ellas, "fixdt=on" y "regrid=off". Con la primer función se fija un tamaño de paso temporal, el cual se lo define luego en la sección TIME, y con la segunda, al deshabilitarla, se establece una malla fija, es decir el programa no recalcula un remallado automático. Otras funciones que brinda el programa, por ejemplo, corresponden a modificar la cantidad de iteraciones de Newton-Raphson definiéndolas con "Newton =< valor >" o el límite del error estimado en las celdas de la malla que produce el ajuste automático de la misma con "Errlim =< valor >". También es posible acelerar tiempos de cálculo usando una malla fija más densa utilizando "ngrid =< valor >".

Posteriormente, en la sección DEFINITIONS se especifican todos los parámetros y relaciones necesarias del problema, como por ejemplo el período de la marea, la gravedad, la aceleración de Coriolis, la amplitud de ola, la profundidad, etc.

Luego, se indican las condiciones iniciales en la sección INITIAL VALUES, y se escriben las ecuaciones gobernantes en EQUATIONS, que en este caso son cinco: la ecuación de continuidad, las dos de movimiento, la de difusión-advención y una auxiliar que permite calcular la derivada segunda de η con respecto al tiempo ("etat").

El dominio del problema, y las condiciones de borde, se describen en la sección BOUNDARIES, donde se definen las diferentes regiones o partes que lo conforman en subsecciones denominadas REGION. Cada región comparte las mismas propiedades del sistema, sin embargo puede suceder que los coeficientes definidos asuman diferentes valores en determinadas partes del sistema, en ese caso se puede especificar el nuevo valor dentro de la correspondiente región. Para poder determinar las condiciones de borde, se debe definir primero la región que contenga todo el dominio, y luego las diferentes partes, si las hubiere, en las siguientes regiones. La forma de cada región se dibuja especificando las coordenadas de inicio mediante el argumento START y luego hacia el siguiente punto empleando LINE TO, si se desea trazar una línea recta, SPLINE TO, si se quiere dibujar curvas o ARC para determinar círculos o semicírculos. El dominio finaliza con la palabra CLOSE. Para el problema bajo análisis se requieren de dos tipos de condiciones de borde, VALUE y NATURAL. La condición VALUE permite asignar un valor a una variable, mientras que la condición NATURAL representa el flujo normal al borde que delimita una superficie. Entonces por ejemplo en este caso se conoce que no existe concentración en la boca del estuario, es decir donde limita con el mar $C(x,y)=0$ y se especifica con VALUE (C)=0. Luego el valor de la concentración en la costa es NATURAL (C)=0 lo que indica que no hay flujo contaminante en ese

borde. De igual forma, se procede con las condiciones asociadas a las ecuaciones hidrodinámicas, señalando que las mismas están redefinidas en función de η , como se explicará con mayor detalle en el *Capítulo V*. En la sección TIME se establece el inicio, los intervalos de cálculo y el fin temporal que se quiere calcular.

Finalmente, en la sección PLOTS se muestran los resultados a través de distintas formas gráficas tales como de curvas de nivel, denominadas CONTOUR, de elevación (ELEVATION), de superficie (SURFACE), gráficos del campo vectorial (VECTOR) o historias temporales (HISTORY). Para visualizar los resultados en forma de datos numéricos se utiliza la función REPORT y para exportar información requerida por otros descriptores se utiliza la función TRANSFER. En los problemas que son dependientes del tiempo, como en este caso, la evolución de los resultados gráficos se muestra en cada intervalo de tiempo especificado dentro de esta sección (PLOTS).

Una vez que el problema de transporte se definió correctamente dentro del descriptor, el cálculo del modelo inicia al ejecutar el comando RUN, donde es posible ir viendo la evolución de la simulación mediante las salidas gráficas que fueron solicitadas en la sección PLOT. Una vez finalizado, el programa muestra las gráficas finales junto con un resumen de información relacionada a los valores del mallado (cantidad de nodos, celdas y número de incógnitas), el error estimado (RMS) y máximo, el tiempo de cálculo insumido y un gráfico de la malla (Mesh) del dominio, como se indica en la Figura 4.6.

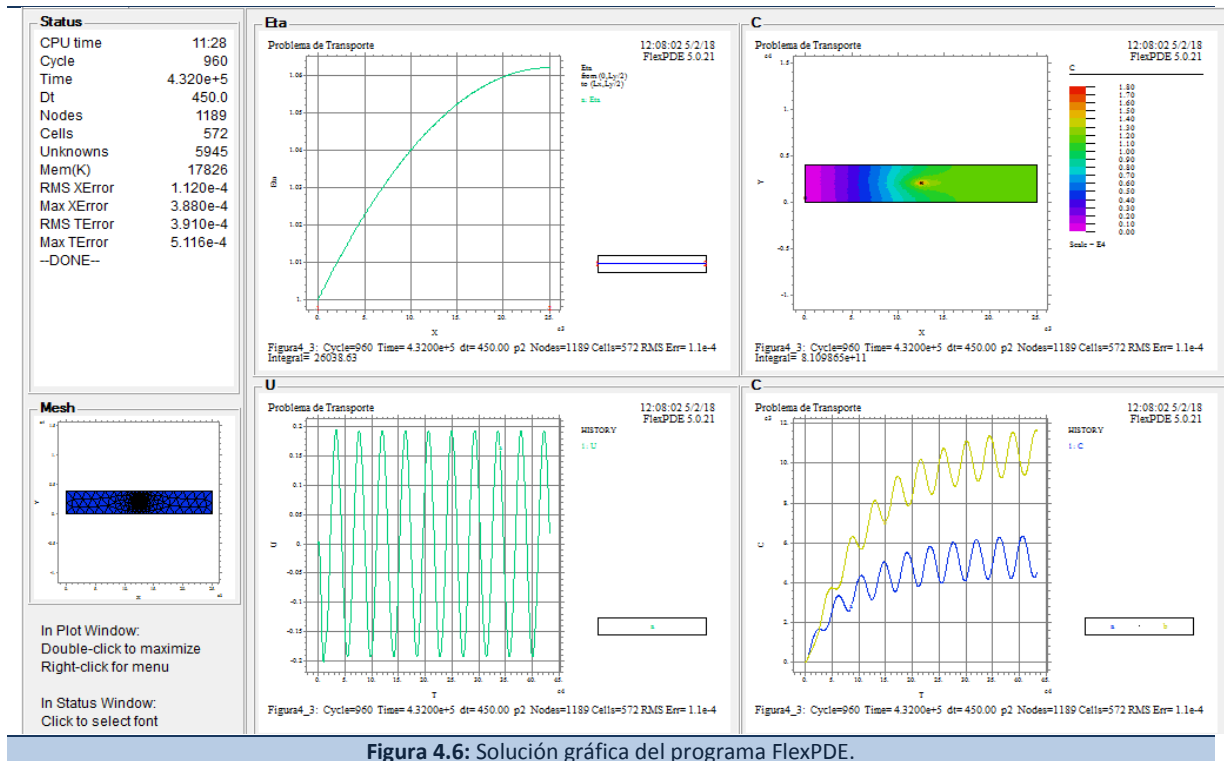


Figura 4.6: Solución gráfica del programa FlexPDE.

El primer gráfico de la Figura 4.6 corresponde a una elevación longitudinal de la superficie libre. En él se observa que $x=0$, la amplitud vale 1, de acuerdo a lo indicado en la condición de borde correspondiente. El segundo gráfico muestra la distribución espacial en el tiempo final de CF para una descarga ubicada en medio del dominio, (identificada por un círculo negro). Los últimos dos gráficos muestran la evolución temporal de la velocidad U y de la concentración C . este último solicitado en dos puntos del dominio (identificados con la letra “a” y “b”).

4.3. MÉTODO DE “RECOCIDO SIMULADO” (SA).

El método de “Recocido Simulado” es una técnica heurística de optimización propuesta por Metropolis et al. (1953). Su nombre, en inglés “Simulated Annealing” (**SA**) deriva de un proceso termodinámico aplicado a metales para mejorar sus propiedades físicas y mecánicas. Consiste en someter a sólidos (acero y cerámica) en un baño de calor, a una temperatura elevada durante tiempo un determinado, y luego ir enfriándolo lentamente hasta alcanzar el equilibrio térmico, evitando que se produzcan defectos en el material. Treinta años más tarde (Kirkpatrick et al. 1983) crearon el algoritmo conocido actualmente, que se basa en el cumplimiento de cierto valor probabilístico, para la búsqueda de aquellas variables de diseño que mejor se acerquen al óptimo global, evitando de esta forma soluciones óptimas locales.

En la Figura 4.7 se muestra el correspondiente algoritmo para la búsqueda, en este caso, del mínimo de una función, donde X corresponde al conjunto de variables de diseño y FO a la función objetivo. Para una búsqueda del máximo de la función, la diferencia Δ deberá ser superior a cero. Si bien el esquema que se muestra es solo explicativo, en el mismo puede notarse que el procedimiento utiliza dos variables iniciales de prueba, X_{min} y $X_{anterior}$ así como las correspondientes evaluaciones de la función objetivo, FO_{min} y $FO_{anterior}$. X_{min} almacena el valor mínimo obtenido hasta el momento y $X_{anterior}$ el último valor aceptado.

El procedimiento comienza inicializando tales variables y el proceso de búsqueda consiste en una iteración de los pasos que se comentan a continuación.

Se busca un valor de prueba de las variables de diseño X_{nueva} en un entorno al vector $X_{anterior}$ (de manera aleatoria) y se verifica que cumpla con determinadas condiciones de factibilidad. Si cumplen, se evalúa la función objetivo en este valor de prueba y se la compara con el valor $FO_{anterior}$. Si la función objetivo mejora (se hace menor) la variable X_{nueva} sustituye a $X_{anterior}$, es

decir es aceptada automáticamente. Sin embargo, aun cuando la función objetivo empeore (aumente) todavía puede aceptarse la solución de prueba con cierta probabilidad p , que depende de la diferencia entre la solución anterior aceptada y la nueva y de un parámetro conocido como “temperatura”. Este último paso es el que impide que la búsqueda quede atrapada en un mínimo local. A medida que el algoritmo avanza, va disminuyendo $Temp$ y en consecuencia la probabilidad de aceptar soluciones factibles que no produzcan una mejora en la función objetivo, es decir las excursiones ascendentes van disminuyendo, lo que asegura que luego de un número de iteraciones adecuado la búsqueda se dirija hacia un mínimo local, presumiblemente coincidente (o cercano al global).

Paso 1. Inicializar Variables de Diseño:

$$X_{min}=X_0, \quad X_{anterior}=X_0, \quad FO_{min}=FO(X_0), \quad FO_{anterior}=FO(X_0)$$

$$Temp=T_0 \alpha TempFinal$$

Mientras $Temp \geq TempFinal$ hacer:

Paso 2. Repetir $iter$ veces

2.1 Calcular $X_{nueva} \in N(X_{anterior})$ (entorno de X)

Evaluar cambio en función objetivo:

$$\Delta = FO(X_{nueva}) - FO_{anterior}$$

2.2 Decidir si X_{nueva} es aceptada

si $\Delta < 0$ ir a **2.3**

si no generar una variable aleatoria $p \in (0,1)$

si $p < e^{-\frac{\Delta}{Temp}}$ ir a **2.3**

si no ir a **2.1**

2.3 Actualizar $X_{anterior} = X_{nueva}$ y $FO_{anterior} = FO(X_{nueva})$.

Decidir si corresponde al valor mínimo:

Si $FO(X_{nueva}) < F_{min}$ ir a **2.4**

Si no ir a **2.1**

2.4 Actualizar $X_{min} = X_{nueva}$ y $FO_{min} = FO(X_{nueva})$ ir a **2.1**

$Temp = \alpha (Temp)$

FIN

Figura 4.7: Algoritmo de “Recocido Simulado” (SA).

Este concepto se ilustra en la Figura 4.8 mediante un gráfico de curvas de nivel que muestra el camino de descenso de la función objetivo, donde al principio del recorrido acepta un mayor número de soluciones factibles pero no mejores, y a medida que se aproxima al mínimo, tal aceptación se va reduciendo.

Claro está que la función objetivo correspondiente a las variables $X_{anterior}$ se comparan en cada caso con la función objetivo que le corresponde a X_{min} , actualizando esta última a medida que se van encontrando valores menores.

Exploración hacia el mínimo

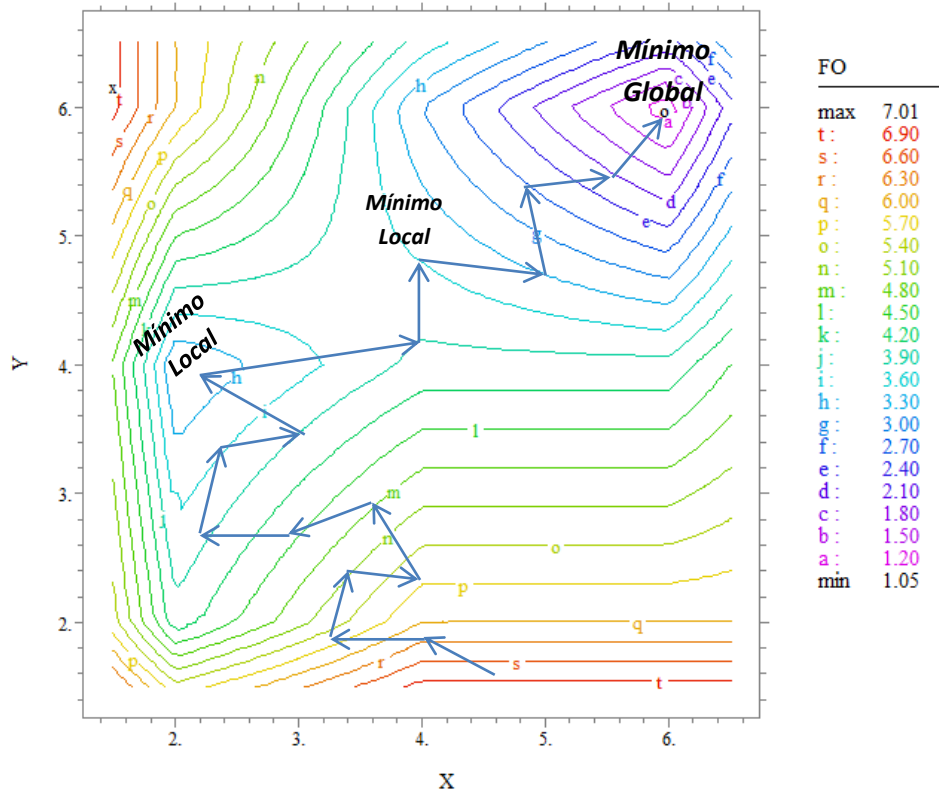


Figura 4.8: Búsqueda por "Recocido Simulado".

En este algoritmo es necesario fijar:

- el valor inicial del parámetro de control $Temp$;
- el mecanismo de enfriamiento α (descenso constante de temperatura, descenso exponencial, esquema de Cauchy, criterio de Boltzmann);
- la velocidad de enfriamiento, es decir, decidir cuándo bajar la temperatura (máximo número de soluciones vecinas, máximo número de soluciones aceptadas, entre otras)

- la condición de parada (número fijo de iteraciones, $Temp \leq Temp_{Final}$, cantidad de soluciones no aceptadas, etc.).

De cada una de estas elecciones depende el éxito del algoritmo y las mismas pueden requerir varios ajustes. Una revisión de los fundamentos del método y algunos puntos interesantes en la implementación del algoritmo pueden verse en el trabajo de Dowland y Adenso Díaz (2003).

4.4. IMPLEMENTACIÓN COMPUTACIONAL DEL ENFOQUE DE SIMULACIÓN (MEF) – OPTIMIZACIÓN (SA).

A los efectos de integrar el proceso de simulación con la técnica de optimización se utiliza el programa de algebra computacional MATLAB (2010) que permite controlar todo el proceso (incluyendo la administración de datos de entrada, diseño óptimo y visualizaciones gráficas de los resultados obtenidos). Asimismo, cuenta con varias funciones para realizar cálculo numérico, además de ser un lenguaje de programación de alto nivel.

En él se implementa el algoritmo de **SA** y se controlan las simulaciones de FlexPDE, mediante la programación de una función que permite el intercambio de la información necesaria.

Ambos programas comerciales multipropósito son de uso muy extendido y en general de bajo costo. Asimismo, la flexibilidad de éstos en cuanto a programación, los hace especialmente aptos para extender el algoritmo a otras situaciones de diseño.

Es posible, además, presentar visualizaciones gráficas tanto en MATLAB (para magnitudes asociadas con el proceso de optimización tales como evolución de la convergencia del algoritmo, comparaciones con diseños de referencia, etc.), así como en FlexPDE (por ejemplo para el escenario final de diseño, para la comparación con escenarios de referencia, etc.).

Particularmente, a los efectos de abordar los problemas de diseño óptimo formulados en *Capítulo II*, es necesario estimar la concentración en diferentes lugares dentro del estuario mediante simulación numérica con el MEF. Esto conduce a la necesidad de resolver las seis ecuaciones del problema de transporte que se formularon en el *Capítulo III*, es decir la de continuidad (3.10), las de movimiento (3.11) y (3.12) y las de difusión-advección (3.25) para CF, DBO y OD, junto con las correspondientes condiciones de borde e iniciales. Luego, es posible encontrar las variables de diseño que mejor se acerquen al objetivo propuesto (2.8) cumpliendo con las restricciones definidas en (2.9). Este procedimiento de diseño, aplicado al problema de calidad de agua en estuarios, se indica en el esquema de la Figura 4.9, donde se advierte que en la

generación de nuevos valores de la variables de diseño, particularmente las funciones de descarga $\beta_j(t)$ son parametrizadas.

Para los problemas de diseño anti-resonante en puertos y de extracción de agua dulce de acuíferos costeros, el procedimiento de simulación-optimización es similar, teniendo en cuenta las ecuaciones gobernantes que aplican en cada problema, las variables de diseño que intervienen, las restricciones establecidas y los objetivos perseguidos.

4.5. OBSERVACIONES GENERALES.

A pesar de utilizar esta metodología de solución (simulación-optimización) en problemas de diseño, el tiempo computacional de cálculo que demanda la resolución numérica de cada simulación es en sí mismo elevado. Sobre todo en un contexto de optimización, donde se evalúan cientos de posibilidades. Es por ello que se buscará disminuir tales tiempos, mediante el desarrollo de distintas metodologías matemáticas basadas en simplificaciones y/o reformulaciones del enfoque teórico del modelo de transporte, cuya solución se obtiene mediante el MEF. Tales métodos serán aplicados de forma conveniente, de acuerdo a las características que presenta cada problema de diseño a resolver. Los mismos se desarrollan en los Capítulos siguientes.

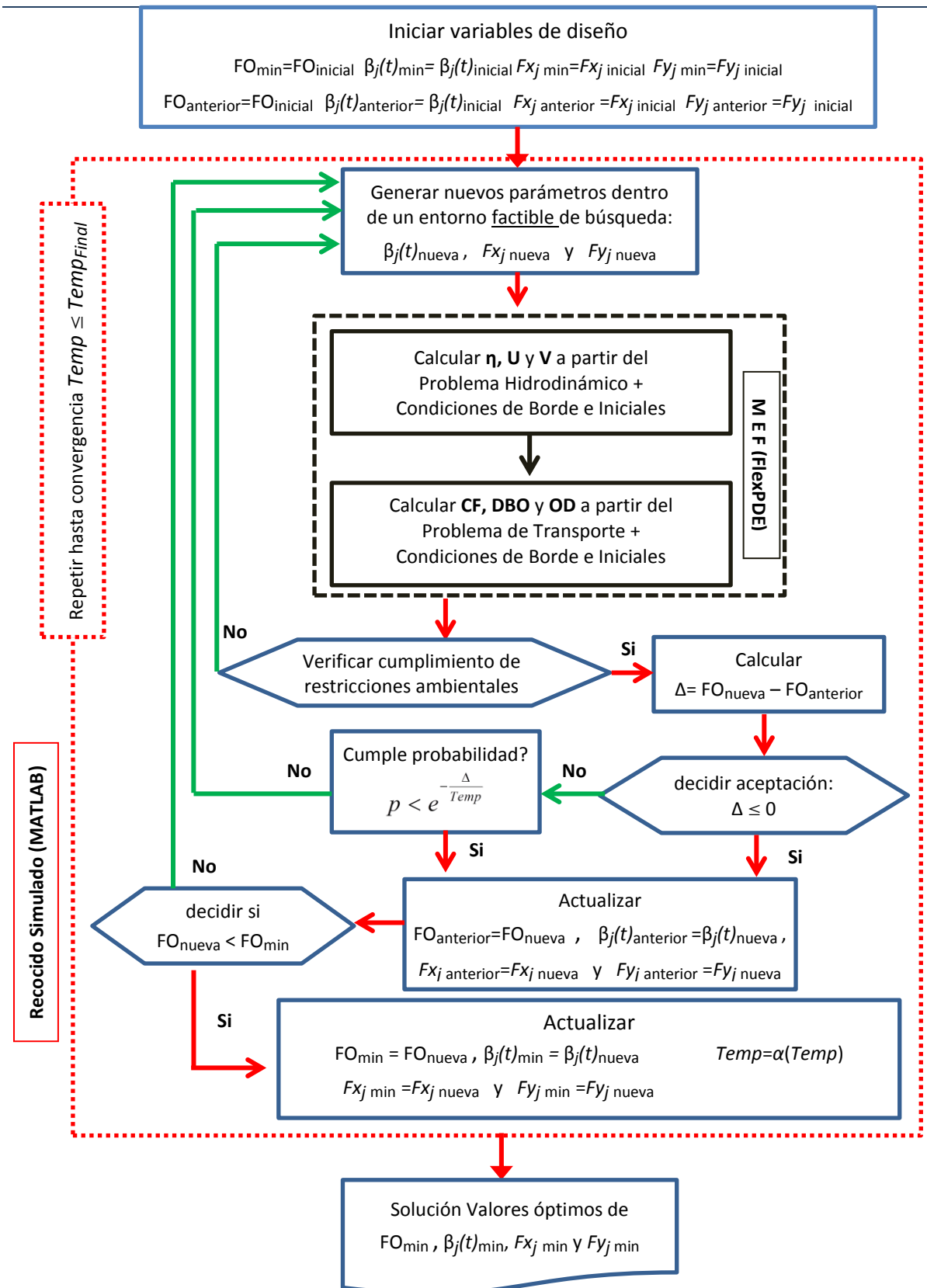


Figura 4.9: Modelo computacional de diseño óptimo para el problema de calidad de agua.

CAPÍTULO V

SOLUCIÓN DEL PROBLEMA HIDRODINÁMICO MEDIANTE EL ENFOQUE DE PERTURBACIÓN COMBINADO CON EL MÉTODO DE FOURIER

Como se ha visto en el *Capítulo* anterior, la evaluación de cada escenario posible de distribución de contaminantes en el estuario, requiere de la solución mediante el MEF del sistema acoplado hidrodinámico – transporte de sustancias. Debe observarse, que el acoplamiento de dicho sistema es unidireccional, en el sentido de que el problema hidrodinámico podría ser resuelto de manera desacoplada de las ecuaciones de transporte (difusión-advención). Este aspecto es de gran importancia práctica, puesto que se podrían evaluar diferentes escenarios de contaminación, resolviendo para cada caso las ecuaciones de transporte, pero una sola vez el problema hidrodinámico.

De todas maneras, la necesidad de incorporar la historia temporal del problema hidrodinámico (velocidades) en las ecuaciones de difusión-advención, implicaría la necesidad del almacenamiento de una gran cantidad de datos correspondientes a las variables hidrodinámicas.

Considerando este último aspecto, se presenta en este *Capítulo* una metodología simplificada para evitar dicho almacenamiento, en un tiempo de simulación menor que el que demanda la solución numérica del sistema (3.10-3.12).

El enfoque propuesto consiste en una combinación de dos estrategias de solución para analizar las ecuaciones correspondientes a la Teoría de Aguas Poco Profundas.

En primer lugar, se desarrolla un enfoque analítico basado en el Método de Perturbación, donde se representa el grado de no linealidad del proceso a través de un parámetro pequeño. Este se obtiene efectuando un análisis dimensional de las ecuaciones hidrodinámicas formuladas en el *Capítulo III*, y corresponde a la relación entre la amplitud de onda de marea y la profundidad media. Seguidamente, se realiza un desarrollo en series de potencias en función de dicho parámetro de perturbación hasta el segundo orden de aproximación. De esta forma se consiguen

dos sistemas lineales que deben resolverse de forma sucesiva, y que tienen en cuenta de forma aproximada los efectos de la no linealidad del problema.

Luego, el problema hidrodinámico perturbado se expresa apropiadamente en términos de ecuaciones de onda para las amplitudes de marea.

Finalmente, aprovechando el carácter periódico de la marea, la solución a las ecuaciones perturbadas se obtienen realizando un desarrollo en Series de Fourier en la variable temporal. De esta forma se consiguen sistemas independientes del tiempo. A partir de las soluciones de tales sistemas pueden expresarse las variables hidrodinámicas (elevación y velocidad) correspondientes al estado dinámico estacionario.

A esta metodología de solución a las ecuaciones para aguas poco profundas, que involucra al problema Hidrodinámico Perturbado, reformulado a ecuación de Onda, combinado con el método de Fourier temporal, y resuelto mediante el MEF con el programa de simulación numérica FlexPDE (2015), se la denomina en esta tesis con las siglas **HPOF**. Debe observarse que tal metodología no requiere de la solución numérica del estado transitorio.

A continuación se desarrollan tales enfoques de solución, siguiendo el orden en el que fueron mencionados.

5.1. MÉTODO DE PERTURBACIÓN APLICADO A LA TEORÍA HIDRODINÁMICA DE AGUAS POCO PROFUNDAS.

El método de perturbación, es una técnica empleada comúnmente para resolver problemas gobernados por ecuaciones no lineales. La idea se basa en considerar que las variables incógnitas de un problema pueden representarse como una serie de potencias en función de un parámetro arbitrario de pequeña magnitud. Así, es posible formular las ecuaciones no lineales como un sistema de ecuaciones diferenciales lineales que deben resolverse de forma sucesiva. La solución individual de cada subsistema corresponde a un orden dado del término de potencias.

Para seleccionar el parámetro de perturbación, se realiza un análisis dimensional sobre las ecuaciones bidimensionales de aguas poco profundas planteadas en el *Capítulo III*, con el objeto de conocer el orden de magnitud de cada término. Para ello, se proponen a continuación las siguientes variables normalizadas identificadas con el símbolo (ϵ):

$$\hat{\eta} = \eta / \eta_c, \quad \hat{H} = H / H_c, \quad \hat{x} = x / L, \quad \hat{y} = y / D, \quad L = T_p \frac{\sqrt{gH_c}}{2\pi}, \quad T_M = 2\pi / \omega, \quad (5.1)$$

$$\hat{U} = U / U_c, \quad U_c = \eta_c \sqrt{\frac{g}{H_c}}, \quad \hat{V} = V / V_c, \quad V_c = \frac{\eta_c}{H_c} \omega D, \quad \hat{t} = \frac{t}{T_M} = \frac{t\omega}{2\pi} \rightarrow \tau\omega,$$

donde η_c , H_c , U_c , V_c , L , D son parámetros característicos de amplitud, profundidad, velocidad longitudinal, velocidad transversal, longitud y ancho del estuario respectivamente, luego T_M y ω corresponden al período y a la frecuencia angular de la marea.

Aplicando estas relaciones al sistema (3.10)-(3.12) se obtienen las siguientes ecuaciones de continuidad y movimiento adimensionalizadas (ver Apéndice A.1.):

$$\frac{\partial \hat{\eta}}{\partial \hat{t}} + \frac{\partial(\hat{H}\hat{U})}{\partial \hat{x}} + \frac{\partial(\hat{H}\hat{V})}{\partial \hat{y}} + e \frac{\partial(\hat{U}\hat{\eta})}{\partial \hat{x}} + e \frac{\partial(\hat{V}\hat{\eta})}{\partial \hat{y}} = 0, \quad (5.2)$$

$$\frac{\partial \hat{U}}{\partial \hat{t}} + e\hat{U} \frac{\partial \hat{U}}{\partial \hat{x}} + e\hat{V} \frac{\partial \hat{U}}{\partial \hat{y}} = -\frac{\partial \hat{\eta}}{\partial \hat{x}} - R \frac{\hat{U}}{\hat{H}} + eR \frac{\hat{U}\hat{\eta}}{\hat{H}^2}, \quad (5.3)$$

$$\frac{\partial \hat{V}}{\partial \hat{t}} + e\hat{U} \frac{\partial \hat{V}}{\partial \hat{x}} + e\hat{V} \frac{\partial \hat{V}}{\partial \hat{y}} = -Q \frac{\partial \hat{\eta}}{\partial \hat{y}} - R \frac{\hat{V}}{\hat{H}} + eR \frac{\hat{V}\hat{\eta}}{\hat{H}^2}, \quad (5.4)$$

siendo $R = B / \omega H_c$, $Q = gH_c / (\omega D)^2$ y $e = \frac{\eta_c}{H_c}$.

Como puede observarse, en el sistema adimensional anterior, el parámetro e es el que indica la magnitud de la no linealidad. Esto se ve claramente ya que al anularse el mismo, el sistema hidrodinámico se reduce a uno lineal. Entonces se adoptará a éste como el parámetro de perturbación, mientras se cumpla la siguiente relación:

$$e = \frac{\eta_c}{H_c} \ll 1, \quad (5.5)$$

es decir, en general la amplitud de marea es mucho menor que la profundidad media (Li et. al, 2006).

En consecuencia, se propone el desarrollo en series de potencia de la elevación y las velocidades en función de e de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \hat{\eta} &= \hat{\eta}_0 + e\hat{\eta}_1 + e^2\hat{\eta}_2 \dots\dots\dots, \\ \hat{U} &= \hat{U}_0 + e\hat{U}_1 + e^2\hat{U}_2 \dots\dots\dots, \\ \hat{V} &= \hat{V}_0 + e\hat{V}_1 + e^2\hat{V}_2 \dots\dots\dots. \end{aligned} \quad (5.6)$$

Teniendo en cuenta (5.5), se observa que los primeros términos son los más importantes, y las magnitudes de los siguientes son cada vez más pequeñas, por lo que los errores de no

considerarlos serán también menores. Por tal motivo, aquí se adopta una serie truncada considerando los primeros dos términos, y así obtener una representación aproximada del problema no lineal.

Sustituyendo las series (5.6) en las ecuaciones (5.2-5.4) se obtienen las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \hat{\eta}_0}{\partial \hat{t}} + e \frac{\partial \hat{\eta}_1}{\partial \hat{t}} + \frac{\partial(\hat{H}\hat{U}_0)}{\partial \hat{x}} + e \frac{\partial(\hat{H}\hat{U}_1)}{\partial \hat{x}} + \frac{\partial(\hat{H}\hat{V}_0)}{\partial \hat{y}} + e \frac{\partial(\hat{H}\hat{V}_1)}{\partial \hat{y}} + e \frac{\partial(\hat{U}_0\hat{\eta}_0)}{\partial \hat{x}} + e^2 \frac{\partial(\hat{U}_0\hat{\eta}_1)}{\partial \hat{x}} \\ & + e^2 \frac{\partial(\hat{U}_1\hat{\eta}_0)}{\partial \hat{x}} + e^3 \frac{\partial(\hat{U}_1\hat{\eta}_1)}{\partial \hat{x}} + e \frac{\partial(\hat{V}_0\hat{\eta}_0)}{\partial \hat{y}} + e^2 \frac{\partial(\hat{V}_0\hat{\eta}_1)}{\partial \hat{y}} + e^2 \frac{\partial(\hat{V}_1\hat{\eta}_0)}{\partial \hat{y}} + e^3 \frac{\partial(\hat{V}_1\hat{\eta}_1)}{\partial \hat{y}} = 0 \end{aligned} \quad , \quad (5.7)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \hat{U}_0}{\partial \hat{t}} + e \frac{\partial \hat{U}_1}{\partial \hat{t}} + e \hat{U}_0 \frac{\partial \hat{U}_0}{\partial \hat{x}} + e^2 \hat{U}_0 \frac{\partial \hat{U}_1}{\partial \hat{x}} + e^2 \hat{U}_1 \frac{\partial \hat{U}_0}{\partial \hat{x}} + e^3 \hat{U}_1 \frac{\partial \hat{U}_1}{\partial \hat{x}} \\ & + e \hat{V}_0 \frac{\partial \hat{U}_0}{\partial \hat{y}} + e^2 \hat{V}_0 \frac{\partial \hat{U}_1}{\partial \hat{y}} + e^2 \hat{V}_1 \frac{\partial \hat{U}_0}{\partial \hat{y}} + e^3 \hat{V}_1 \frac{\partial \hat{U}_1}{\partial \hat{y}} = \end{aligned} \quad , \quad (5.8)$$

$$-\frac{\partial \hat{\eta}_0}{\partial \hat{x}} - e \frac{\partial \hat{\eta}_1}{\partial \hat{x}} - \frac{R}{\hat{H}} \hat{U}_0 - e \frac{R}{\hat{H}} \hat{U}_1 + e \frac{R}{\hat{H}^2} \hat{U}_0 \hat{\eta}_0 + e^2 \frac{R}{\hat{H}^2} \hat{U}_0 \hat{\eta}_1 + e^2 \frac{R}{\hat{H}^2} \hat{U}_1 \hat{\eta}_0 + e^3 \frac{R}{\hat{H}^2} \hat{U}_1 \hat{\eta}_1$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \hat{U}_0}{\partial \hat{t}} + e \frac{\partial \hat{U}_1}{\partial \hat{t}} + e \hat{U}_0 \frac{\partial \hat{U}_0}{\partial \hat{x}} + e^2 \hat{U}_0 \frac{\partial \hat{U}_1}{\partial \hat{x}} + e^2 \hat{U}_1 \frac{\partial \hat{U}_0}{\partial \hat{x}} + e^3 \hat{U}_1 \frac{\partial \hat{U}_1}{\partial \hat{x}} \\ & + e \hat{V}_0 \frac{\partial \hat{U}_0}{\partial \hat{y}} + e^2 \hat{V}_0 \frac{\partial \hat{U}_1}{\partial \hat{y}} + e^2 \hat{V}_1 \frac{\partial \hat{U}_0}{\partial \hat{y}} + e^3 \hat{V}_1 \frac{\partial \hat{U}_1}{\partial \hat{y}} = \end{aligned} \quad , \quad (5.9)$$

$$-\frac{\partial \hat{\eta}_0}{\partial \hat{x}} - e \frac{\partial \hat{\eta}_1}{\partial \hat{x}} - \frac{R}{\hat{H}} \hat{U}_0 - e \frac{R}{\hat{H}} \hat{U}_1 + e \frac{R}{\hat{H}^2} \hat{U}_0 \hat{\eta}_0 + e^2 \frac{R}{\hat{H}^2} \hat{U}_0 \hat{\eta}_1 + e^2 \frac{R}{\hat{H}^2} \hat{U}_1 \hat{\eta}_0 + e^3 \frac{R}{\hat{H}^2} \hat{U}_1 \hat{\eta}_1$$

Agrupando los términos de acuerdo a su orden de magnitud y requiriendo un desarrollo hasta el segundo orden, es decir hasta $O(e^1)$, se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones hidrodinámicas perturbadas:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \hat{\eta}_0}{\partial \hat{t}} + \frac{\partial(\hat{H}\hat{U}_0)}{\partial \hat{x}} + \frac{\partial(\hat{H}\hat{V}_0)}{\partial \hat{y}} = 0 \quad , \\ e^0 : & \quad \frac{\partial \hat{U}_0}{\partial \hat{t}} = -\frac{\partial \hat{\eta}_0}{\partial \hat{x}} - \frac{R}{\hat{H}} \hat{U}_0 \quad , \\ & \quad \frac{\partial \hat{V}_0}{\partial \hat{t}} = -Q \frac{\partial \hat{\eta}_0}{\partial \hat{y}} - \frac{R}{\hat{H}} \hat{V}_0 \quad , \end{aligned} \quad (5.10)$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial \hat{\eta}_1}{\partial \hat{t}} + \frac{\partial(\hat{H}\hat{U}_1)}{\partial \hat{x}} + \frac{\partial(\hat{H}\hat{V}_1)}{\partial \hat{y}} + \frac{\partial(\hat{\eta}_0\hat{U}_0)}{\partial \hat{x}} + \frac{\partial(\hat{V}_0\hat{\eta}_0)}{\partial \hat{y}} = 0 \quad , \\
e^1: \quad & \frac{\partial \hat{U}_1}{\partial \hat{t}} + \hat{U}_0 \frac{\partial \hat{U}_0}{\partial \hat{x}} + \hat{V}_0 \frac{\partial \hat{U}_0}{\partial \hat{y}} = -\frac{\partial \hat{\eta}_1}{\partial \hat{x}} - \frac{R}{\hat{H}} \hat{U}_1 + \frac{R}{\hat{H}^2} \hat{U}_0 \hat{\eta}_0 \quad , \\
& \frac{\partial \hat{V}_1}{\partial \hat{t}} + \hat{U}_0 \frac{\partial \hat{V}_0}{\partial \hat{x}} + \hat{V}_0 \frac{\partial \hat{V}_0}{\partial \hat{y}} = -Q \frac{\partial \hat{\eta}_1}{\partial \hat{y}} - \frac{R}{\hat{H}} \hat{V}_1 + \frac{R}{\hat{H}^2} \hat{V}_0 \hat{\eta}_0 \quad .
\end{aligned} \tag{5.11}$$

En el primer sistema, las incógnitas vienen dadas por $\hat{\eta}_0$, \hat{U}_0 y \hat{V}_0 , y en el segundo (aproximación de segundo orden) por $\hat{\eta}_1$, \hat{U}_1 y \hat{V}_1 respectivamente. Debe observarse que el sistema (5.10) debe ser resuelto en primer lugar y en forma sucesiva el sistema (5.11), que requiere de la solución obtenida por el primer sistema. Como es posible apreciar, en ambos casos, se consideran sistemas de ecuaciones lineales (de resolución más sencilla que el problema original).

Es posible re-exresar el sistema perturbado (5.10-5.11) en función de los términos dimensionales (ver Apéndice A.2). De esta forma, se obtienen las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned}
\eta^* &= \eta_0 + \eta_1 \quad , \\
U^* &= U_0 + U_1 \quad , \\
V^* &= V_0 + V_1 \quad ,
\end{aligned} \tag{5.12}$$

$$\frac{\partial \eta_0}{\partial t} + \frac{\partial(HU_0)}{\partial x} + \frac{\partial(HV_0)}{\partial y} = 0 \quad , \tag{5.13}$$

$$\frac{\partial U_0}{\partial t} = -g \frac{\partial \eta_0}{\partial x} - B \frac{U_0}{H} \quad , \tag{5.14}$$

$$\frac{\partial V_0}{\partial t} = -g \frac{\partial \eta_0}{\partial y} - B \frac{V_0}{H} \quad , \tag{5.15}$$

$$\frac{\partial \eta^*}{\partial t} + \frac{\partial(HU^*)}{\partial x} + \frac{\partial(HV^*)}{\partial y} = -\frac{\partial(\eta_0 U_0)}{\partial x} - \frac{\partial(\eta_0 V_0)}{\partial y} \quad , \tag{5.16}$$

$$\frac{\partial U^*}{\partial t} + g \frac{\partial \eta^*}{\partial x} + \frac{B}{H} U^* = -U_0 \frac{\partial U_0}{\partial x} - V_0 \frac{\partial U_0}{\partial y} + B \frac{(U_0 \eta_0)}{H^2} + f V_0 \quad , \tag{5.17}$$

$$\frac{\partial V^*}{\partial t} + g \frac{\partial \eta^*}{\partial y} + \frac{B}{H} V^* = -U_0 \frac{\partial V_0}{\partial x} - V_0 \frac{\partial V_0}{\partial y} + B \frac{(V_0 \eta_0)}{H^2} - f U_0 \quad , \tag{5.18}$$

Debe observarse que en esta forma dimensional, el sistema correspondiente a las variables perturbadas η_1 , U_1 y V_1 se han combinado con el sistema lineal (5.13) – (5.15), para llegar a una

expresión de las ecuaciones en la cual las incógnitas vengan dadas en términos de las aproximaciones finales η^* , U^* y V^* .

Así expresadas, el método requiere en primer lugar la solución del sistema lineal (5.13) – (5.15) y luego la solución del sistema (5.16)-(5.18) que permite obtener la aproximación final del problema original.

5.2. ECUACIÓN DE ONDA PERTURBADA.

Es conveniente reformular el sistema hidrodinámico perturbado (5.13) – (5.18), en función de ecuaciones de onda que tengan como incógnita la amplitud de la superficie libre η . A continuación se explica el procedimiento para la obtención de la ecuación de onda para el primer sistema.

En primer lugar, se deriva respecto al tiempo la ecuación de continuidad (5.13). Luego se multiplica a las ecuaciones de movimiento (5.14) y (5.15) por la profundidad H y seguidamente se las deriva con respecto a x e y , respectivamente, llegando a las siguientes expresiones:

$$\frac{\partial^2 \eta_0}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 (HU_0)}{\partial t \partial x} + \frac{\partial^2 (HV_0)}{\partial t \partial y} = 0, \quad (5.19)$$

$$\frac{\partial^2 (HU_0)}{\partial t \partial x} = -\frac{\partial}{\partial x} \left(gH \frac{\partial \eta_0}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(BH \frac{U_0}{H} \right), \quad (5.20)$$

$$\frac{\partial^2 (HV_0)}{\partial t \partial y} = -\frac{\partial}{\partial y} \left(gH \frac{\partial \eta_0}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(BH \frac{V_0}{H} \right). \quad (5.21)$$

Sustituyendo (5.20) y (5.21) en los correspondientes términos de (5.19) se obtiene a la siguiente expresión:

$$\frac{\partial^2 \eta_0}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x} \left(gH \frac{\partial \eta_0}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(gH \frac{\partial \eta_0}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(BH \frac{U_0}{H} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(BH \frac{V_0}{H} \right) = 0, \quad (5.22)$$

Es posible re-expresar los últimos dos términos de la expresión (5.22) en función de η_0 , haciendo uso de la ecuación de continuidad (5.13). De esta manera se consigue la siguiente expresión:

$$\frac{B}{H} \frac{\partial \eta_0}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} \left(BH \frac{U_0}{H} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(BH \frac{V_0}{H} \right), \quad (5.23)$$

donde se ha supuesto que el coeficiente de fricción y la profundidad no varían espacialmente. Si bien esto no es estrictamente cierto, se supondrá la validez aproximada de dicha expresión, lo cual será razonable mientras la batimetría no presente variaciones abruptas.

De esta manera utilizando la expresión (5.23) en la ecuación (5.22), la ecuación de onda correspondiente a la primera aproximación del sistema hidrodinámico queda formulada de la siguiente manera:

$$\frac{\partial^2 \eta_0}{\partial t^2} + \frac{B}{H} \frac{\partial \eta_0}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left(gH \frac{\partial \eta_0}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(gH \frac{\partial \eta_0}{\partial y} \right) = 0. \quad (5.24)$$

El sistema se completa con las ecuaciones de movimiento (5.14) y (5.15) que permiten obtener las velocidades U y V .

Luego, procediendo de manera similar con el sistema perturbado (5.16)-(5.18) se llega a la siguiente ecuación de onda correspondiente a la segunda aproximación (ver Apéndice A.3):

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 \eta^*}{\partial t^2} + \frac{B}{H} \frac{\partial \eta^*}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left(gH \frac{\partial \eta^*}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(gH \frac{\partial \eta^*}{\partial y} \right) = HU_0 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{B}{H} \right) + HV_0 \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{B}{H} \right) \\ & + \frac{\partial}{\partial x} \left(HU_0 \frac{\partial (U_0)}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(HU_0 \frac{\partial (V_0)}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(HV_0 \frac{\partial (U_0)}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(HV_0 \frac{\partial (V_0)}{\partial y} \right), \quad (5.25) \\ & - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{B}{H} (U_0 \eta_0) \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{B}{H} (V_0 \eta_0) \right) - \frac{B}{H} \frac{\partial (\eta_0 U_0)}{\partial x} - \frac{B}{H} \frac{\partial (\eta_0 V_0)}{\partial y} - \frac{\partial^2 (\eta_0 U_0)}{\partial t \partial x} \\ & - \frac{\partial^2 (\eta_0 V_0)}{\partial t \partial y} - \frac{\partial}{\partial x} (fHV_0) + \frac{\partial}{\partial y} (fHU_0) \end{aligned}$$

El sistema se completa con las ecuaciones de movimiento (5.17) y (5.18).

Así expresadas deben resolverse en forma sucesiva la primera aproximación, dada por el sistema (5.24), (5.14) y (5.15), y a continuación la segunda aproximación dada por (5.25), (5.17) y (5.18). Debe observarse, que los sistemas obtenidos son lineales y tienen que ser resueltos conjuntamente con las condiciones de borde e iniciales correspondientes.

En tal sentido, es conveniente expresar a los términos de contorno en función de la variable η , a los efectos de poder aplicar el método de solución por Series de Fourier, que será explicado en la siguiente sección. Para ello se procede de la siguiente manera:

En un punto p ubicado en el borde, como se muestra en la Figura 5.1, la componente normal al borde del vector de velocidad se puede expresar de la siguiente manera:

$$U_n = U \cos \alpha + V \sin \alpha \quad . \quad (5.26)$$

donde n es el vector unitario normal a la frontera.

Derivando (5.26) con respecto al tiempo y considerando las ecuaciones de movimiento (5.14) y (5.15) se obtiene la siguiente expresión:

$$\frac{\partial U}{\partial t} \cos \alpha + \frac{\partial V}{\partial t} \sin \alpha = -g \frac{\partial \eta_0}{\partial n} - \frac{B}{H} U \cos \alpha - \frac{B}{H} V \sin \alpha \quad , \quad (5.27)$$

En el Borde Impermeable (*BI*), se aplica la condición que fue definida en (3.15), donde la componente de velocidad perpendicular a la frontera debe ser cero en cualquier punto de esta. Luego, considerando que la misma no varía en el tiempo, los correspondientes términos de (5.27) se anulan, obteniendo la siguiente condición de frontera válida para todo *BI*:

$$-g \frac{\partial \eta_0}{\partial n} = 0 \quad . \quad (5.28)$$

En el borde correspondiente al río (*BR*), se aplica la condición definida en (3.16). Si se supone que el aporte fluvial se encuentra en el sentido del eje *x*, como se indica en la Figura 5.1, la velocidad normal en este caso será la siguiente:

$$-U_{rio} = U \cos \alpha + V \sin \alpha \quad . \quad (5.29)$$

Nuevamente, derivando (5.29) con respecto al tiempo y considerando las ecuaciones de movimiento (5.14) y (5.15) se llega a la siguiente expresión:

$$-\frac{\partial U_{rio}}{\partial t} = -g \frac{\partial \eta_0}{\partial n} + \frac{B}{H} [U \cos \alpha + V \sin \alpha] \quad , \quad (5.30)$$

donde, se consideró el signo de la velocidad normal (5.29) en dicho borde. Asumiendo que el aporte del río es constante en el tiempo, la condición para (*BR*) resulta ser la siguiente:

$$-\frac{B}{H} U_{rio} = -g \frac{\partial \eta_0}{\partial n} \quad . \quad (5.31)$$

Luego, en el borde con el mar abierto (*BA*), se aplica la condición definida en (3.14).

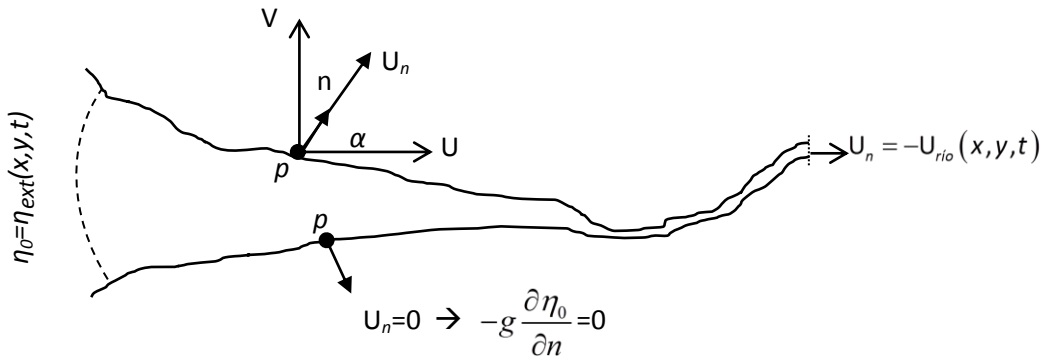


Figura 5.1: Condiciones de borde en un estuario.

Finalmente, el sistema (5.24), (5.14) y (5.15) está sujeto a las siguientes condiciones de contorno e iniciales:

$$\eta_0|_{t=0} = \bar{\eta}(x, y), \quad \eta_0|_{BA} = \eta_{ext}(x, y, t), \quad -g \frac{\partial \eta_0}{\partial n} \Big|_{BI} = 0, \quad -g \frac{\partial \eta_0}{\partial n} \Big|_{BR} = -\frac{B}{H} U_{río}. \quad (5.32)$$

Resumiendo, la primera condición implica que se asume un valor conocido de la amplitud $\bar{\eta}$ en el instante inicial. La segunda condición de borde corresponde a la elevación de la marea en la boca del estuario (Borde Abierto, *BA*) y es un dato conocido, la tercera indica la anulación de la velocidad en la costa (Borde Impermeable, *BI*) y la cuarta condición de borde se refiere al aporte de agua que proviene de un río (Borde del Río *BR*).

De forma similar, se opera sobre el segundo sistema (5.25), (5.17) y (5.18) para obtener las correspondientes condiciones de borde re-expresadas en función de la variable η .

5.3. SOLUCIÓN DEL PROBLEMA HIDRODINÁMICO PERTURBADO MEDIANTE EL MÉTODO DE FOURIER.

Una característica importante de los problemas hidrodinámicos asociados a estuarios es que su comportamiento es de carácter periódico (se repite después de un intervalo fijo de tiempo), debido a su forzante mareal.

Este tipo de movimiento (estado oscilatorio) puede representarse como una serie infinita de funciones trigonométricas, conocido como Análisis Espectral o Método de Fourier Temporal. Con esta metodología es posible descomponer fenómenos de mayor complejidad en constituyentes elementales y determinar la contribución de cada uno de ellos al proceso, pudiendo obtener un conocimiento de la evolución temporal del sistema. El Método de Fourier se ha convertido en una poderosa herramienta para la solución de ecuaciones diferenciales, tanto por su buena precisión en las soluciones numéricas como por su relativo bajo costo computacional asociado, ya que en definitiva no se debe calcular la historia temporal del sistema.

De esta manera, la solución aproximada de los sistemas anteriores (5.24), (5.14-5.15) y (5.25), (5.17-5.18) puede ser expresada como una suma finita (truncada) en componentes trigonométricas, tanto para la elevación en la superficie libre como de la velocidad:

$$\eta_0 = \eta_r + \sum_{k=1}^K [\eta_{ck} \cos(k\omega t) + \eta_{sk} \text{sen}(k\omega t)], \quad (5.33)$$

$$U_0 = U_r + \sum_{k=1}^K [U_{ck} \cos(k\omega t) + U_{sk} \text{sen}(k\omega t)], \quad (5.34)$$

$$V_0 = V_r + \sum_{k=1}^K [V_{ck} \cos(k\omega t) + V_{sk} \sin(k\omega t)], \quad (5.35)$$

$$\eta^* = \eta_0^* + \sum_{k=1}^K [\eta_{ck}^* \cos(k\omega t) + \eta_{sk}^* \sin(k\omega t)] \quad , \quad (5.36)$$

$$U^* = U_0^* + \sum_{k=1}^K [U_{ck}^* \cos(k\omega t) + U_{sk}^* \sin(k\omega t)] \quad , \quad (5.37)$$

$$V^* = V_0^* + \sum_{k=1}^K [V_{ck}^* \cos(k\omega t) + V_{sk}^* \sin(k\omega t)] \quad , \quad (5.38)$$

donde $\eta_r, \eta_{ck}, \eta_{sk}, U_r, U_{ck}, U_{sk}, V_r, V_{ck}, V_{sk}, \eta_0^*, \eta_{ck}^*, \eta_{sk}^*, U_0^*, U_{ck}^*, U_{sk}^*, V_0^*, V_{ck}^*$ y V_{sk}^* son funciones de (x, y) y K es el número de componentes. Debe observarse que las primeras componentes de las expresiones (5.33) a (5.35) corresponden a los términos que surgen de considerar el aporte de un río dentro del dominio del estuario.

Las expresiones (5.33) a (5.38) sirven para expresar la respuesta de constituyentes fundamentales de marea. Para considerar, por ejemplo mareas compuestas o sobremareas, las correspondientes componentes deben ser sumadas a tales expresiones.

Tomando como ejemplo un estuario que es forzado en la boca por una marea semidiurna $\eta_{ext} = \bar{\eta} \cos(\omega t)$, las expresiones (5.33-5.35) se sustituyen en (5.24). (5.14-5.15) junto a las correspondientes condiciones de borde, donde luego anulando cada componente trigonométrica de las expresiones resultantes, se obtienen sistemas de ecuaciones diferenciales acopladas independientes del tiempo, que permiten obtener las amplitudes de elevación y velocidad. (ver Apéndice A.4):

Primer Sistema:

$$\begin{aligned} -\frac{\partial}{\partial x} \left(gH \frac{\partial \eta_r}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(gH \frac{\partial \eta_r}{\partial y} \right) &= 0 \quad , \\ -\omega^2 \eta_c - \frac{\partial}{\partial x} \left(gH \frac{\partial \eta_c}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(gH \frac{\partial \eta_c}{\partial y} \right) + \frac{B}{H} \omega \eta_s &= 0 \quad , \\ -\omega^2 \eta_s - \frac{\partial}{\partial x} \left(gH \frac{\partial \eta_s}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(gH \frac{\partial \eta_s}{\partial y} \right) - \frac{B}{H} \omega \eta_c &= 0 \quad , \end{aligned} \quad (5.39)$$

$$\begin{aligned} \left. \begin{array}{l} \text{Condiciones} \\ \text{de Borde} \end{array} \right\} \begin{cases} -g \frac{\partial \eta_r}{\partial n} \Big|_{BI} = 0 \quad , & -g \frac{\partial \eta_c}{\partial n} \Big|_{BI} = 0 \quad , & -g \frac{\partial \eta_s}{\partial n} \Big|_{BI} = 0 \quad , \\ \eta_r \Big|_{BA} = 0 \quad , & \eta_c \Big|_{BA} = \bar{\eta} \quad , & \eta_s \Big|_{BA} = 0 \quad , \\ -g \frac{\partial \eta_r}{\partial n} \Big|_{BR} = -\frac{B}{H} U_{rio} \quad , & -g \frac{\partial \eta_c}{\partial n} \Big|_{BR} = 0 \quad , & -g \frac{\partial \eta_s}{\partial n} \Big|_{BR} = 0 \quad . \end{cases} \quad (5.40) \end{aligned}$$

Es de interés indicar que en las expresiones (5.36) a (5.38), tanto la elevación de la superficie libre como las corrientes determinadas por este enfoque, presentan las componentes en la frecuencia de excitación y también, debido a efectos no lineales, componentes en el doble de esta frecuencia así como términos.

Luego, factorizando los términos resultantes de haber reemplazando (5.34) y (5.35) en las ecuaciones de movimiento (5.14) y (5.15), se obtiene:

$$\begin{aligned} -BU_r &= -gH \frac{\partial \eta_r}{\partial x} , \\ U_c \left(\frac{B}{H} \right) + \omega U_s &= -g \frac{\partial \eta_c}{\partial x} , \\ U_c (-\omega) + \frac{B}{H} U_s &= -g \frac{\partial \eta_s}{\partial x} , \end{aligned} \quad (5.41a,b,c)$$

$$\begin{aligned} -BV_r &= -gH \frac{\partial \eta_r}{\partial y} , \\ V_c \left(\frac{B}{H} \right) + \omega V_s &= -g \frac{\partial \eta_c}{\partial y} , \\ V_c (-\omega) + \frac{B}{H} V_s &= -g \frac{\partial \eta_s}{\partial y} . \end{aligned} \quad (5.42a,b,c)$$

Finalmente las velocidades quedan definidas de la siguiente manera:

$$U_r = g \frac{H}{B} \frac{\partial \eta_r}{\partial x} , \quad U_c = \frac{-g \frac{B}{H} \frac{\partial \eta_c}{\partial x} + \omega g \frac{\partial \eta_s}{\partial x}}{\left(\frac{B}{H} \right)^2 - (-\omega^2)} , \quad U_s = \frac{-g \frac{B}{H} \frac{\partial \eta_s}{\partial x} - \omega g \frac{\partial \eta_c}{\partial x}}{\left(\frac{B}{H} \right)^2 - (-\omega^2)} , \quad (5.43 a,b,c)$$

$$V_r = g \frac{H}{B} \frac{\partial \eta_r}{\partial y} , \quad V_c = \frac{-g \frac{B}{H} \frac{\partial \eta_c}{\partial y} + \omega g \frac{\partial \eta_s}{\partial y}}{\left(\frac{B}{H} \right)^2 - (-\omega^2)} , \quad V_s = \frac{-g \frac{B}{H} \frac{\partial \eta_s}{\partial y} - \omega g \frac{\partial \eta_c}{\partial y}}{\left(\frac{B}{H} \right)^2 - (-\omega^2)} , \quad (5.44 a,b,c)$$

Se procede de igual forma para la segunda aproximación (5.25), (5.17-5.18) junto a las correspondientes condiciones de borde. Sin embargo, a los efectos de mostrar la metodología, en las expresiones que se muestran a continuación no se considerará el aporte del río aguas arriba para el desarrollo de la segunda aproximación, debido a la gran cantidad de términos resultantes que surgen como productos entre sí en cada uno de los términos de la ecuación de onda (5.25).

De esta forma, efectuando una expansión en las series periódicas (5.36-5.38), por ejemplo hasta $K=2$, asumiendo una marea semidiurna como forzante en la boca, se llega al segundo sistema de ecuaciones independientes del tiempo:

Segundo Sistema:

$$\begin{aligned}
 & -\frac{\partial}{\partial x} \left(gH \frac{\partial \eta_0^*}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(gH \frac{\partial \eta_0^*}{\partial y} \right) = F_0(x,y) , \\
 & -\omega^2 \eta_{1c}^* - \frac{\partial}{\partial x} \left(gH \frac{\partial \eta_{1c}^*}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(gH \frac{\partial \eta_{1c}^*}{\partial y} \right) + \frac{B}{H} \omega \eta_{1s}^* = F_1(x,y) , \\
 & -\omega^2 \eta_{1s}^* - \frac{\partial}{\partial x} \left(gH \frac{\partial \eta_{1s}^*}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(gH \frac{\partial \eta_{1s}^*}{\partial y} \right) + \frac{B}{H} (-\omega) \eta_{1c}^* = F_2(x,y) , \\
 & -(2\omega)^2 \eta_{2c}^* - \frac{\partial}{\partial x} \left(gH \frac{\partial \eta_{2c}^*}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(gH \frac{\partial \eta_{2c}^*}{\partial y} \right) + \frac{B}{H} 2\omega \eta_{2s}^* = F_3(x,y) , \\
 & -(2\omega)^2 \eta_{2s}^* - \frac{\partial}{\partial x} \left(gH \frac{\partial \eta_{2s}^*}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(gH \frac{\partial \eta_{2s}^*}{\partial y} \right) + \frac{B}{H} (-2\omega) \eta_{2c}^* = F_4(x,y) ,
 \end{aligned} \tag{5.45}$$

$$\begin{aligned}
 & \left. \begin{aligned}
 & -gH \frac{\partial \eta_0^*}{\partial n} \Big|_{BI} = -(HJ_{U_0} n_x + HJ_{V_0} n_y) , \\
 & -gH \frac{\partial \eta_{1c}^*}{\partial n} \Big|_{BI} = fH(U_c - V_c) , \quad -gH \frac{\partial \eta_{1s}^*}{\partial n} \Big|_{BI} = fH(U_s - V_s) , \\
 & -gH \frac{\partial \eta_{2c}^*}{\partial n} \Big|_{BI} = -H(J_{U_1} + J_{V_1}) , \quad -gH \frac{\partial \eta_{2s}^*}{\partial n} \Big|_{BI} = -H(J_{U_2} + J_{V_2}) , \\
 & \eta_0^* \Big|_{BA} = 0 , \quad \eta_{1c}^* \Big|_{BA} = \bar{\eta} , \quad \eta_{1s}^* \Big|_{BA} = 0 , \quad \eta_{2c}^* \Big|_{BA} = 0 , \quad \eta_{2s}^* \Big|_{BA} = 0 ,
 \end{aligned} \right\} \text{Condiciones de Borde} \tag{5.46}
 \end{aligned}$$

donde se han efectuado las siguientes definiciones:

$$F_0(x,y) = \frac{1}{2} \left[\begin{aligned}
 & -\frac{2B}{H} \left(\eta_c \frac{\partial U_c}{\partial x} + \eta_s \frac{\partial U_s}{\partial x} + \eta_c \frac{\partial V_c}{\partial y} + \eta_s \frac{\partial V_s}{\partial y} + U_c \frac{\partial \eta_c}{\partial x} + V_c \frac{\partial \eta_c}{\partial y} + U_s \frac{\partial \eta_s}{\partial x} + V_s \frac{\partial \eta_s}{\partial y} \right) \\
 & -\frac{\partial(B/H)}{\partial x} U_c \eta_c - \frac{\partial(B/H)}{\partial x} U_s \eta_s - \frac{\partial(B/H)}{\partial y} V_c \eta_c - \frac{\partial(B/H)}{\partial y} V_s \eta_s \\
 & + 2H \frac{\partial U_c}{\partial y} \frac{\partial V_c}{\partial x} + H_2 \frac{\partial U_s}{\partial y} \frac{\partial V_s}{\partial x} + HU_c \frac{\partial^2 U_c}{\partial x^2} + HU_s \frac{\partial^2 U_s}{\partial x^2} + HV_c \frac{\partial^2 V_c}{\partial y^2} + HV_s \frac{\partial^2 V_s}{\partial y^2} \\
 & + HU_c \frac{\partial^2 V_c}{\partial y \partial x} + HU_s \frac{\partial^2 V_s}{\partial y \partial x} + HV_c \frac{\partial^2 U_c}{\partial x \partial y} + HV_s \frac{\partial^2 U_s}{\partial x \partial y} \\
 & + H \left(\frac{\partial U_c}{\partial x} \right)^2 + H \left(\frac{\partial U_s}{\partial x} \right)^2 + H \left(\frac{\partial V_c}{\partial y} \right)^2 + H \left(\frac{\partial V_s}{\partial y} \right)^2 \\
 & + \frac{\partial H}{\partial x} U_c \frac{\partial U_c}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial y} U_c \frac{\partial V_c}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial x} V_c \frac{\partial U_c}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial y} V_c \frac{\partial V_c}{\partial y} \\
 & + \frac{\partial H}{\partial x} U_s \frac{\partial U_s}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial x} V_s \frac{\partial U_s}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial y} U_s \frac{\partial V_s}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial y} V_s \frac{\partial V_s}{\partial y}
 \end{aligned} \right] \tag{5.47a}$$

$$F_{1(x,y)} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{B}{H} \right) H U_c + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{B}{H} \right) H V_c - f \frac{\partial H}{\partial x} V_c - f H \frac{\partial V_c}{\partial x} + f \frac{\partial H}{\partial y} U_c + f H \frac{\partial U_c}{\partial y} , \quad (5.47b)$$

$$F_{2(x,y)} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{B}{H} \right) H U_s + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{B}{H} \right) H V_s - f \frac{\partial H}{\partial x} V_s - f H \frac{\partial V_s}{\partial x} + f \frac{\partial H}{\partial y} U_s + f H \frac{\partial U_s}{\partial y} , \quad (5.47c)$$

$$F_{3(x,y)} = \frac{1}{2} \left[\begin{aligned} & -\frac{B}{H} \left(\eta_c \frac{\partial U_c}{\partial x} + \frac{\partial \eta_c}{\partial x} U_c + \eta_c \frac{\partial V_c}{\partial y} + \frac{\partial \eta_c}{\partial y} V_c + \frac{\partial U_c}{\partial x} \eta_c + U_c \frac{\partial \eta_c}{\partial x} + \frac{\partial V_c}{\partial y} \eta_c + V_c \frac{\partial \eta_c}{\partial y} \right) \\ & + \frac{B}{H} \left(\eta_s \frac{\partial U_s}{\partial x} + \frac{\partial \eta_s}{\partial x} U_s + \eta_s \frac{\partial V_s}{\partial y} + \frac{\partial \eta_s}{\partial y} V_s + \frac{\partial U_s}{\partial x} \eta_s + U_s \frac{\partial \eta_s}{\partial x} + \frac{\partial V_s}{\partial y} \eta_s + V_s \frac{\partial \eta_s}{\partial y} \right) \\ & + \frac{\partial H}{\partial x} \left(U_c \frac{\partial U_c}{\partial x} + V_c \frac{\partial U_c}{\partial y} - U_s \frac{\partial U_s}{\partial x} - V_s \frac{\partial U_s}{\partial y} \right) + \frac{\partial H}{\partial y} \left(U_c \frac{\partial V_c}{\partial x} + V_c \frac{\partial V_c}{\partial y} - U_s \frac{\partial V_s}{\partial x} - V_s \frac{\partial V_s}{\partial y} \right) \\ & + H \left(\left(\frac{\partial U_c}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial V_c}{\partial y} \right)^2 - \left(\frac{\partial U_s}{\partial x} \right)^2 - \left(\frac{\partial V_s}{\partial y} \right)^2 \right) + 2H \left(\frac{\partial U_c}{\partial y} \frac{\partial V_c}{\partial x} - \frac{\partial U_s}{\partial y} \frac{\partial V_s}{\partial x} \right) \\ & + H \left(U_c \frac{\partial^2 V_c}{\partial y \partial x} - U_s \frac{\partial^2 V_s}{\partial y \partial x} + V_c \frac{\partial^2 U_c}{\partial x \partial y} - V_s \frac{\partial^2 U_s}{\partial x \partial y} + U_c \frac{\partial^2 U_c}{\partial x^2} + V_c \frac{\partial^2 V_c}{\partial y^2} - U_s \frac{\partial^2 U_s}{\partial x^2} - V_s \frac{\partial^2 V_s}{\partial y^2} \right) \\ & + \frac{B}{H^2} \frac{\partial H}{\partial x} (U_c \eta_c - U_s \eta_s) + \frac{B}{H^2} \frac{\partial H}{\partial y} (V_c \eta_c - V_s \eta_s) \\ & + 2\omega \left(\frac{\partial U_c}{\partial x} \eta_s + \frac{\partial U_s}{\partial x} \eta_c + U_c \frac{\partial \eta_s}{\partial x} + U_s \frac{\partial \eta_c}{\partial x} + \frac{\partial V_c}{\partial y} \eta_s + \frac{\partial V_s}{\partial y} \eta_c + V_c \frac{\partial \eta_s}{\partial y} + V_s \frac{\partial \eta_c}{\partial y} \right) \end{aligned} \right] , \quad (5.47d)$$

$$F_{4(x,y)} = \frac{1}{2} \left[\begin{aligned} & \frac{2B}{H} \left(-\eta_c \frac{\partial U_s}{\partial x} - \eta_s \frac{\partial U_c}{\partial x} - \eta_c \frac{\partial V_s}{\partial y} - \eta_s \frac{\partial V_c}{\partial y} - U_c \frac{\partial \eta_s}{\partial x} - U_s \frac{\partial \eta_c}{\partial x} - V_c \frac{\partial \eta_s}{\partial y} - V_s \frac{\partial \eta_c}{\partial y} \right) \\ & + H U_c \frac{\partial^2 U_s}{\partial x^2} + H U_s \frac{\partial^2 U_c}{\partial x^2} + H V_c \frac{\partial^2 V_s}{\partial y^2} + H V_s \frac{\partial^2 V_c}{\partial y^2} \\ & + H U_c \frac{\partial^2 V_s}{\partial y \partial x} + H U_s \frac{\partial^2 V_c}{\partial y \partial x} + H V_c \frac{\partial^2 U_s}{\partial x \partial y} + H V_s \frac{\partial^2 U_c}{\partial x \partial y} \\ & + \frac{\partial H}{\partial x} U_c \frac{\partial U_s}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial x} U_s \frac{\partial U_c}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial x} V_c \frac{\partial U_s}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial x} V_s \frac{\partial U_c}{\partial y} \\ & + \frac{\partial H}{\partial y} U_c \frac{\partial V_s}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial y} U_s \frac{\partial V_c}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial y} V_c \frac{\partial V_s}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial y} V_s \frac{\partial V_c}{\partial y} \\ & + 2H \left(\frac{\partial U_s}{\partial x} \frac{\partial U_c}{\partial x} + \frac{\partial V_s}{\partial y} \frac{\partial V_c}{\partial y} \right) \\ & + H \left(\frac{\partial U_c}{\partial y} \frac{\partial V_s}{\partial x} + \frac{\partial U_s}{\partial y} \frac{\partial V_c}{\partial x} + \frac{\partial V_c}{\partial x} \frac{\partial U_s}{\partial y} + \frac{\partial V_s}{\partial x} \frac{\partial U_c}{\partial y} \right) \\ & + \frac{B}{H^2} \left(\frac{\partial H}{\partial x} U_c \eta_s + \frac{\partial H}{\partial x} U_s \eta_c + \frac{\partial H}{\partial y} V_c \eta_s + \frac{\partial H}{\partial y} V_s \eta_c \right) \\ & + 2\omega \left(-\frac{\partial U_c}{\partial x} \eta_c + \frac{\partial U_s}{\partial x} \eta_s - \frac{\partial V_c}{\partial y} \eta_c + \frac{\partial V_s}{\partial y} \eta_s - U_c \frac{\partial \eta_c}{\partial x} + U_s \frac{\partial \eta_s}{\partial x} - V_c \frac{\partial \eta_c}{\partial y} + V_s \frac{\partial \eta_s}{\partial y} \right) \end{aligned} \right] , \quad (5.47e)$$

$$J_{U0(x,y)} = \frac{1}{2} \left[\left(-U_c \frac{\partial U_c}{\partial x} - V_c \frac{\partial U_c}{\partial y} + \frac{B}{H^2} \eta_c U_c \right) + \left(-U_s \frac{\partial U_s}{\partial x} - V_s \frac{\partial U_s}{\partial y} + \frac{B}{H^2} \eta_s U_s \right) \right] ,$$

$$J_{U1(x,y)} = \frac{1}{2} \left[\left(-U_c \frac{\partial U_c}{\partial x} - V_c \frac{\partial U_c}{\partial y} + \frac{B}{H^2} \eta_c U_c \right) - \left(-U_s \frac{\partial U_s}{\partial x} - V_s \frac{\partial U_s}{\partial y} + \frac{B}{H^2} \eta_s U_s \right) \right] , \quad (5.48a,b,c)$$

$$J_{U2(x,y)} = \frac{1}{2} \left[-U_c \frac{\partial U_s}{\partial x} - U_s \frac{\partial U_c}{\partial x} - V_c \frac{\partial U_s}{\partial y} - V_s \frac{\partial U_c}{\partial y} + \frac{B}{H^2} \eta_c U_s + \frac{B}{H^2} \eta_s U_c \right] ,$$

$$J_{V0(x,y)} = \frac{1}{2} \left[\left(-U_c \frac{\partial V_c}{\partial x} - V_c \frac{\partial V_c}{\partial y} + \frac{B}{H^2} \eta_c V_c \right) + \left(-U_s \frac{\partial V_s}{\partial x} - V_s \frac{\partial V_s}{\partial y} + \frac{B}{H^2} \eta_s V_s \right) \right] ,$$

$$J_{V1(x,y)} = \frac{1}{2} \left[\left(-U_c \frac{\partial V_c}{\partial x} - V_c \frac{\partial V_c}{\partial y} + \frac{B}{H^2} \eta_c V_c \right) - \left(-U_s \frac{\partial V_s}{\partial x} - V_s \frac{\partial V_s}{\partial y} + \frac{B}{H^2} \eta_s V_s \right) \right] , \quad (5.49a,b,c)$$

$$J_{V2(x,y)} = \frac{1}{2} \left[-U_c \frac{\partial V_s}{\partial x} - U_s \frac{\partial V_c}{\partial x} - V_c \frac{\partial V_s}{\partial y} - V_s \frac{\partial V_c}{\partial y} + \frac{B}{H^2} \eta_c V_s + \frac{B}{H^2} \eta_s V_c \right] ,$$

siendo $F_0(x,y)$, $F_1(x,y)$, $F_2(x,y)$, $F_3(x,y)$ y $F_4(x,y)$ funciones que surgen de aplicar identidades trigonométricas al sustituir (5.33-5.35) en la ecuación de onda (5.25). Luego $J_{U0(x,y)}$, $J_{U1(x,y)}$, $J_{U2(x,y)}$, $J_{V0(x,y)}$, $J_{V1(x,y)}$ y $J_{V2(x,y)}$ también son funciones que surgen de aplicar identidades trigonométricas, al sustituir (5.33-5.35) en las ecuaciones de movimiento (5.17) y (5.18). De esta forma, factorizando los términos resultantes que surgen de efectuar estas últimas sustituciones, se obtienen las siguientes expresiones:

$$g \frac{\partial \eta_0^*}{\partial x} + \frac{B}{H} U_0^* = J_{U0} ,$$

$$\omega U_{1s}^* + g \frac{\partial \eta_{1c}^*}{\partial x} + \frac{B}{H} U_{1c}^* = f V_c ,$$

$$-\omega U_{1c}^* + g \frac{\partial \eta_{1s}^*}{\partial x} + \frac{B}{H} U_{1s}^* = f V_s , \quad (5.50a,b,c,d,e)$$

$$(2\omega) U_{2s}^* + g \frac{\partial \eta_{2c}^*}{\partial x} + \frac{B}{H} U_{2c}^* = J_{U1} ,$$

$$-(2\omega) U_{2c}^* + g \frac{\partial \eta_{2s}^*}{\partial x} + \frac{B}{H} U_{2s}^* = J_{U2} ,$$

$$\begin{aligned}
g \frac{\partial \eta_0^*}{\partial y} + \frac{B}{H} V_0^* &= J_{V0} \quad , \\
\omega V_{1s}^* + g \frac{\partial \eta_{1c}^*}{\partial y} + \frac{B}{H} V_{1c}^* &= -f U_c \quad , \\
-\omega V_{1c}^* + g \frac{\partial \eta_{1s}^*}{\partial y} + \frac{B}{H} V_{1s}^* &= -f U_s \quad , \\
(2\omega) V_{2s}^* + g \frac{\partial \eta_{2c}^*}{\partial y} + \frac{B}{H} V_{2c}^* &= J_{V1} \quad , \\
-(2\omega) V_{2c}^* + g \frac{\partial \eta_{2s}^*}{\partial y} + \frac{B}{H} V_{2s}^* &= J_{V2} \quad .
\end{aligned}
\tag{5. 51a,b,c,d,e}$$

Finalmente, las velocidades de este segundo sistema quedan definidas de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
U_0^* &= \frac{H}{B} \left(J_{U0} - g \frac{\partial \eta_0^*}{\partial x} \right) \quad , \\
U_{1c}^* &= \frac{\frac{B}{H} \left(-g \frac{\partial \eta_{1c}^*}{\partial x} + f V_c \right) - \omega \left(-g \frac{\partial \eta_{1s}^*}{\partial x} + f V_s \right)}{\left(\frac{B}{H} \right)^2 + \omega^2} \quad , \\
U_{1s}^* &= \frac{\frac{B}{H} \left(-g \frac{\partial \eta_{1s}^*}{\partial x} + f V_s \right) + \omega \left(-g \frac{\partial \eta_{1c}^*}{\partial x} + f V_c \right)}{\left(\frac{B}{H} \right)^2 + \omega^2} \quad , \\
U_{2c}^* &= \frac{-g \frac{B}{H} \frac{\partial \eta_{2c}^*}{\partial x} + J_{U1} \frac{B}{H} + g(2\omega) \frac{\partial \eta_{2s}^*}{\partial x} - J_{U2}(2\omega)}{\left(\frac{B}{H} \right)^2 + (2\omega)^2} \quad , \\
U_{2s}^* &= \frac{-g \frac{B}{H} \frac{\partial \eta_{2s}^*}{\partial x} + \frac{B}{H} J_{U2} - g(2\omega) \frac{\partial \eta_{2c}^*}{\partial x} + (2\omega) J_{U1}}{\left(\frac{B}{H} \right)^2 + (2\omega)^2} \quad ,
\end{aligned}
\tag{5.52a,b,c,d,e}$$

$$\begin{aligned}
V_0^* &= \frac{H}{B} \left(J_{V0} - g \frac{\partial \eta_0^*}{\partial y} \right) , \\
V_{1c}^* &= \frac{\frac{B}{H} \left(-g \frac{\partial \eta_{1c}^*}{\partial y} - fU_c \right) - \omega \left(-g \frac{\partial \eta_{1s}^*}{\partial y} - fU_s \right)}{\left(\frac{B}{H} \right)^2 + \omega^2} , \\
V_{1s}^* &= \frac{\frac{B}{H} \left(-g \frac{\partial \eta_{1s}^*}{\partial y} - fU_s \right) + \omega \left(-g \frac{\partial \eta_{1c}^*}{\partial y} - fU_c \right)}{\left(\frac{B}{H} \right)^2 + \omega^2} , \\
V_{2c}^* &= \frac{-g \frac{B}{H} \frac{\partial \eta_{2c}^*}{\partial y} + J_{V1} \frac{B}{H} + g(2\omega) \frac{\partial \eta_{2s}^*}{\partial y} - J_{V2}(2\omega)}{\left(\frac{B}{H} \right)^2 + (2\omega)^2} , \\
V_{2s}^* &= \frac{-g \frac{B}{H} \frac{\partial \eta_{2s}^*}{\partial y} + J_{V2} \frac{B}{H} - g(2\omega) \frac{\partial \eta_{2c}^*}{\partial y} + J_{V1}(2\omega)}{\left(\frac{B}{H} \right)^2 + (2\omega)^2} .
\end{aligned} \tag{5.53a,b,c,d,e}$$

Resolviendo numéricamente el primer sistema (5.39-5.40) y luego el segundo sistema (5.45-5.46), se obtienen las componentes de las velocidades hidrodinámicas en U (5.43a,b,c) y (5.52a,b,c,d,e) y en V (5.44a,b,c) y (5.53a,b,c,d,e), independientes del tiempo. A tales sistemas Hidrodinámicos reformulados en ecuaciones de Onda, Perturbados y combinados con el Método de Fourier se nombrarán de aquí en adelante como “**HPOF**”.

Tales funciones, que dependen de (x,y) , ingresan como datos a las ecuaciones de difusión- advección (3.25) para la predicción de la variación temporal y espacial de las concentraciones de CF, DBO y OD.

CAPÍTULO VI

FORMULACIÓN DEL PROBLEMA ADJUNTO DE DIFUSIÓN – ADVECCIÓN: APLICACIÓN AL CONTROL ÓPTIMO DE CALIDAD DE AGUA

En el presente *Capítulo* se desarrollan fórmulas analíticas para obtener las concentraciones medias temporales y espaciales, en diferentes puntos del dominio en función de las descargas. Para ello es necesario determinar coeficientes de influencia del problema Adjunto de Transporte tantas veces como zonas protegidas se hayan definido, independientemente de la cantidad de contribuciones consideradas.

Este enfoque resulta conveniente cuando el número de zonas protegidas es menor que el de cantidad de ubicaciones posibles de descargas.

Es importante hacer notar que la determinación de los coeficientes de influencia bajo el enfoque adjunto sigue la metodología explicada por Marchuk (1986), aunque aquí se emplea la solución numérica por el MEF. Por otra parte, para el caso de las ecuaciones acopladas (OD-DBO) el presente desarrollo es más general que el expuesto por el autor mencionado.

A esta metodología de solución con el problema Adjunto de las ecuaciones Directas de Transporte, resueltas temporalmente mediante el MEF, hasta llegar al estado estacionario, con el programa de simulación numérica FlexPDE, se la denomina en esta tesis con las siglas **AT**.

6.1. DEFINICIÓN DE FUNCIONES DE INFLUENCIA.

Para resolver los problemas de diseño planteados en el *Capítulo II*, es necesario calcular la concentración media espacial y temporal del contaminante en las denominadas zonas protegidas. Dichas magnitudes se definen de la siguiente manera:

$$\bar{C}_{Dj} = \frac{\int_{\tau}^{T_F} \int_{\Omega_j} C_D d\Omega_j dt}{(T_F - \tau)\Omega_j} , \quad (6.1)$$

donde $\overline{C_{D_i}}$ es la concentración media espacial y temporal del contaminante D , T_F corresponde al tiempo total bajo análisis, τ al tiempo en el cual se ha alcanzado la oscilación estacionaria y Ω_i es el área de la zona *protegida i-ésima*.

Es posible determinar tales valores de manera conveniente, mediante la aplicación de coeficientes de influencia $g_{D_{ij}}(t)$, que surgen de utilizar el enfoque adjunto del problema de transporte (3.25). Estos coeficientes miden el efecto que tiene un flujo unitario de contaminante de la tubería de descarga j sobre el área de interés i (Marchuk, 1986) y se definen de la siguiente manera:

$$g_{D_{ij}}(t) = \int_{\Omega_j} G_{D_i}(x, y, t) d\Omega_j / \Omega_j, \quad (6.2)$$

donde Ω_j es el área de descarga j -ésima, y G_{D_i} son funciones de influencia del área de interés i -ésima, obtenidas a partir del método **AT**.

De esta forma, la concentración media espacial y temporal en la zona i -ésima puede expresarse de la siguiente manera:

$$\overline{C_{D_i}} = \sum_{j=1}^{ND} M_{D_j} \varphi_j \int_0^{T_F} \beta_{D_j}(t) g_{D_{ij}}(t) dt, \quad (6.3)$$

$$\overline{C_{3_i}} = C_3^0 + \sum_{j=1}^{ND} M_{2_j} \varphi_j \int_0^{T_F} \beta_{D_j}(t) g_{2^*_{ij}}(t) + \int_0^{T_F} \int_{\Omega} \left(-\nabla \cdot (\mathbf{U} H C_3^0) G_3 + G_3 \sigma_3 H d_{si} \right) d\Omega dt, \quad (6.4)$$

$(i = 1, 2, \dots, NP)$

6.2. FORMULACIÓN DEL PROBLEMA ADJUNTO PARA LA DETERMINACIÓN DE LAS FUNCIONES DE INFLUENCIA (AT).

6.2.1. Formulación teórica.

En particular se desarrollan las ecuaciones adjuntas para la obtención de los coeficientes de influencia asociados a CF y a DBO, ya que el procedimiento es similar para ambos indicadores. Sin embargo, la obtención de estos coeficientes para el OD difiere debido a que este indicador depende de la evolución de DBO, por lo que las ecuaciones de transporte en este caso están acopladas. Esto último se desarrollará más adelante.

Los coeficientes de influencia asociados a CF y DBO se obtienen a partir de multiplicar las ecuaciones de transporte (3.25) correspondiente a los indicadores D=1 y D=2, por una función arbitraria, llamada en este caso $G(x,y,t)$, y luego integrarla con respecto al dominio Ω del estuario y para un tiempo $(0, T_F)$ de la siguiente manera:

$$\int_0^{T_F} \int_{\Omega} G_D(x,y,t) \left(\frac{\partial(HC_D)}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{U}HC_D) - \text{div}(KH\nabla C_D) \right) d\Omega dt = 0 \quad D=1,2 \quad (6.5)$$

$$+ \sigma_D HC_D - m_D(x,y,t)$$

Luego aplicando las propiedades de integración derivadas del teorema de la divergencia y de gradiente se llega a la siguiente expresión:

$$\int_0^{T_F} \int_{\Omega} \left(-\frac{\partial(G_D)}{\partial t} HC_D - \mathbf{U}HC_D \cdot \nabla G_D - \text{div}(KH\nabla G_D) C_D + G_D \sigma_D HC_D \right) d\Omega dt$$

$$- \int_0^{T_F} \int_{\Omega} (G_D m_D(x,y,t)) d\Omega dt + \int_{\Omega} (HC_D G_D) \Big|_{t=0}^{t=T_F} d\Omega \quad (6.6)$$

$$+ \int_0^{T_F} \int_{\Gamma} \left(G_D HC_D V_n + KH \frac{\partial G_D}{\partial n} C_D - G_D KH \frac{\partial C_D}{\partial n} \right) d\Gamma dt = 0$$

Sacando a C_D como factor común, la expresión anterior puede escribirse de la siguiente forma:

$$\int_0^{T_F} \int_{\Omega} C_D \left(-H \frac{\partial G_D}{\partial t} - \mathbf{U}H \cdot \nabla G_D - \text{div}(KH\nabla G_D) + G_D \sigma_D H \right) d\Omega dt$$

$$- \int_0^{T_F} \int_{\Omega} (G_D m_D(x,y,t)) d\Omega dt + \int_{\Omega} (HC_D G_D) \Big|_{t=0}^{t=T_F} d\Omega \quad (6.7)$$

$$+ \int_0^{T_F} \int_{\Gamma} \left(G_D HC_D V_n + KH \frac{\partial G_D}{\partial n} C_D - G_D KH \frac{\partial C_D}{\partial n} \right) d\Gamma dt = 0$$

Teniendo en cuenta las condiciones definidas en (3.15) y (3.22-3.24), los términos de contorno e iniciales de (6.7) se anulan a partir de requerir el cumplimiento de lo siguiente:

$$KH \frac{\partial G_D}{\partial n} \Big|_{BI} = 0 \quad , \quad G_D \Big|_{BA} = 0 \quad , \quad G_D(x,y,T_F) = 0 \quad , \quad (6.8)$$

obteniendo la siguiente expresión:

$$\int_0^{T_F} \int_{\Omega} C_D \left(-H \frac{\partial G_D}{\partial t} - \mathbf{U}H \cdot \nabla G_D - \text{div}(KH\nabla G_D) + G_D \sigma_D H \right) d\Omega dt =$$

$$\int_0^{T_F} \int_{\Omega} (G_D m_D(x,y,t)) d\Omega dt \quad (6.9)$$

Para obtener la concentración media definida en (6.1), es posible elegir convenientemente la función $G_D(x,y,t)$ en Ω , denominada en esta tesis como *función adjunta de influencia asociada al indicador D*, de forma tal que verifique la siguiente ecuación diferencial:

$$\left(-H \frac{\partial G_{D_i}}{\partial t} - \mathbf{UH} \cdot \nabla G_{D_i} - \text{div}(KH \nabla G_{D_i}) + G_{D_i} \sigma_D H \right) = P_{D_i}(x,y,t), \quad (6.10)$$

donde la función de peso $P_{D_i}(x,y,t)$ adopta los siguientes valores:

$$P_{D_i} = \begin{cases} \frac{1}{(T_F - \tau)\Omega_i} & \text{Si } (x,y) \in \Omega_i \\ & t \in (\tau, T_F) \\ 0 & \text{Si } (x,y) \notin \Omega_i \\ & t \notin (\tau, T_F) \end{cases}, \quad (6.11)$$

$$KH \frac{\partial G_{D_i}}{\partial n} \Big|_{BI} = 0, \quad G_{D_i} \Big|_{BA} = 0, \quad G_{D_i}(x,y,T_F) = 0. \quad (6.12)$$

La tercera expresión de (6.12) corresponde a una condición de valor final, es decir el valor de la variable es conocida en T_F .

A partir de (6.9) y (6.10) se determina la siguiente expresión:

$$\int_{\tau}^{T_F} \int_{\Omega_i} C_D P_{D_i}(x,y,t) d\Omega_i dt = \int_0^{T_F} \int_{\Omega} G_{D_i} m_D(x,y,t) d\Omega dt, \quad (6.13)$$

Teniendo en cuenta en el primer miembro de la ecuación (6.13) la definición de concentración media (6.1) y efectuando las correspondientes integraciones en el segundo miembro, considerando la descarga másica definida en (3.26), se obtiene la formulación analítica (6.3), planteada inicialmente, que permite obtener el valor de las concentraciones medias espaciales y temporales, para CF y de DBO respectivamente, en el área *i-ésima* distinto de la zona de descarga *j-ésima*.

Para obtener los coeficientes de influencia asociados a las ecuaciones de transporte para $D=3$, se opera de manera similar al procedimiento desarrollado anteriormente, considerando el acoplamiento de las ecuaciones de transporte (3.25) debido a la dependencia del OD con respecto a la evolución de DBO. Además, como la condición (3.27) en el borde abierto (BA) asociada al OD no es homogénea, resulta conveniente introducir el siguiente cambio de variable, con el objeto de

anular los términos de contorno que surgen de obtener las expresiones integrales de las funciones de influencia:

$$C_3^* = C_3 - C_3^0 \quad , \quad (6.14)$$

despejando (6.14) se obtiene:

$$C_3 = C_3^* + C_3^0 \quad . \quad (6.15)$$

De esta manera, reemplazando (6.15) en la ecuación (3.25), teniendo en cuenta que la concentración conocida C_3^0 es una constante, se llega a:

$$\frac{\partial(HC_3^*)}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{U}HC_3^*) - \text{div}(KH\nabla C_3^*) + C_3^* \sigma_3 H = -\nabla \cdot (\mathbf{U}HC_3^0) - H\sigma_2 C_2 + \sigma_3 H d_{si} \quad , \quad (6.16)$$

donde d_{si} corresponde a la diferencia entre e la saturación de oxígeno disuelto d_s y la concentración inicial de oxígeno disuelto C_3^0 . Considerando el cambio de variable efectuado en (6.15), la condición de borde en la superficie de entrada de flujo queda planteada de la siguiente forma:

$$C_3^* = 0 \quad . \quad (6.17)$$

Asimismo, se procede con el término de contorno (3.27) del borde impermeable (BI) obteniendo la siguiente condición:

$$-KH \left. \frac{\partial C_3^*}{\partial n} \right|_{BI} = 0 \quad . \quad (6.18)$$

Con la introducción del cambio de variable, y considerando el acoplamiento entre las ecuaciones de transporte de OD y DBO, los coeficientes de influencia asociados al OD se obtienen de forma similar a la explicada anteriormente para los indicadores de CF y DBO. De esta forma, multiplicando a las ecuaciones de transporte (3.25) para DBO y OD por las funciones arbitrarias $G_{2^*}(x, y, t)$ y $G_3(x, y, t)$ respectivamente e integrándolas en el dominio Ω , y para un tiempo $(0, T_F)$ se obtienen las siguientes expresiones:

$$\int_0^{T_F} \int_{\Omega} G_{2^*}(x, y, t) \left(\frac{\partial(HC_2)}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{U}HC_2) - \text{div}(KH\nabla C_2) \right) d\Omega dt = 0 \quad , \quad (6.19)$$

$$+ \sigma_2 HC_2 - m_2(x, y, t)$$

$$\int_0^{T_F} \int_{\Omega} G_3(x, y, t) \left(\begin{aligned} & \frac{\partial(HC_3^*)}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{U}HC_3^*) - \text{div}(KH\nabla C_3^*) + \sigma_3 HC_3^* \\ & + \sigma_2 HC_2 + \nabla \cdot (\mathbf{U}HC_3^0) - \sigma_3 Hd_{si} \end{aligned} \right) d\Omega dt = 0 \quad (6.20)$$

Como se explicó con anterioridad, la evolución de OD depende de la cantidad de DBO, en tal sentido es conveniente obtener una única ecuación integral, sumando las ecuaciones (6.19) y (6.20). Luego aplicando las propiedades de integración, derivadas del teorema de la divergencia y de gradiente se llegan a la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} & \int_0^{T_F} \int_{\Omega} \left(-\frac{\partial(G_{2^*})}{\partial t} HC_2 - \mathbf{U}HC_2 \cdot \nabla G_{2^*} - \text{div}(KH\nabla G_{2^*}) C_2 + G_{2^*} \sigma_2 HC_2 \right) d\Omega dt \\ & + \int_0^{T_F} \int_{\Omega} \left(-\frac{\partial(G_3)}{\partial t} HC_3^* - \mathbf{U}HC_3^* \cdot \nabla G_3 - \text{div}(KH\nabla G_3) C_3^* + G_3 \sigma_3 HC_3^* \right) d\Omega dt \\ & + \int_0^{T_F} \int_{\Omega} \left(-G_{2^*} m_2(x, y, t) + \nabla \cdot (\mathbf{U}HC_3^0) G_3 - G_3 \sigma_3 Hd_{si} + G_3 \sigma_2 HC_2 \right) d\Omega dt \\ & - \int_{\Omega} \left((HC_2 G_{2^*}) \Big|_{t=0}^{t=T_F} + (HC_3^* G_3) \Big|_{t=0}^{t=T_F} \right) d\Omega \\ & + \int_0^{T_F} \int_{\Gamma} \left(\begin{aligned} & G_{2^*} HC_2 V_n + KH \frac{\partial G_{2^*}}{\partial n} C_2 - G_{2^*} KH \frac{\partial C_2}{\partial n} \\ & + G_3 HC_3^* V_n + KH \frac{\partial G_3}{\partial n} C_3^* - G_3 KH \frac{\partial C_3^*}{\partial n} \end{aligned} \right) d\Gamma dt = 0 \quad (6.21) \end{aligned}$$

Por otra parte, sacando a C_2 y a C_3^* como factor común, la expresión (6.21) puede escribirse de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} & \int_0^{T_F} \int_{\Omega} C_2 \left(-H \frac{\partial G_{2^*}}{\partial t} - \mathbf{U}H \cdot \nabla G_{2^*} - \text{div}(KH\nabla G_{2^*}) + G_{2^*} \sigma_2 H + G_3 \sigma_2 H \right) d\Omega dt \\ & + \int_0^{T_F} \int_{\Omega} C_3^* \left(-H \frac{\partial G_3}{\partial t} - \mathbf{U}H \cdot \nabla G_3 - \text{div}(KH\nabla G_3) + G_3 \sigma_3 H \right) d\Omega dt \\ & + \int_0^{T_F} \int_{\Omega} \left(-G_{2^*} m_2(x, y, t) + \nabla \cdot (\mathbf{U}HC_3^0) G_3 - G_3 \sigma_3 Hd_{si} \right) d\Omega dt \\ & + \int_{\Omega} \left((HC_2 G_{2^*}) \Big|_{t=0}^{t=T_F} + (HC_3^* G_3) \Big|_{t=0}^{t=T_F} \right) d\Omega \\ & + \int_0^{T_F} \int_{\Gamma} \left(\begin{aligned} & G_{2^*} HC_2 V_n + KH \frac{\partial G_{2^*}}{\partial n} C_2 - G_{2^*} KH \frac{\partial C_2}{\partial n} \\ & + G_3 HC_3^* V_n + KH \frac{\partial G_3}{\partial n} C_3^* - G_3 KH \frac{\partial C_3^*}{\partial n} \end{aligned} \right) d\Gamma dt = 0 \quad (6.22) \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta las condiciones definidas en (3.15) y (3-22-3.24), los términos de contorno e iniciales de (6.22) se anulan a partir de requerir el cumplimiento de lo siguiente:

$$KH \frac{\partial G_{2^*}}{\partial n} \Big|_{BI} = 0 , \quad G_{2^*} \Big|_{BA} = 0 , \quad G_{2^*}(x, y, T_F) = 0 , \quad (6.23)$$

$$KH \frac{\partial G_3}{\partial n} \Big|_{BI} = 0 , \quad G_3 \Big|_{BA} = 0 , \quad G_3(x, y, T_F) = 0 , \quad (6.24)$$

Por lo tanto tal expresión queda planteada de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} & \int_0^{T_F} \int_{\Omega} C_2 \left(-H \frac{\partial G_{2^*}}{\partial t} - \mathbf{UH} \cdot \nabla G_{2^*} - \text{div}(KH \nabla G_{2^*}) + G_{2^*} \sigma_2 H + G_3 \sigma_2 H \right) d\Omega dt \\ & + \int_0^{T_F} \int_{\Omega} C_3^* \left(-H \frac{\partial G_3}{\partial t} - \mathbf{UH} \cdot \nabla G_3 - \text{div}(KH \nabla G_3) + G_3 \sigma_3 H \right) d\Omega dt = \\ & \int_0^{T_F} \left(\int_{\Omega} (G_{2^*} m_2(x, y, t)) d\Omega + \int_{\Omega} (-\nabla \cdot (\mathbf{UHC}_3^0) G_3 + G_3 \sigma_3 H d_{si}) d\Omega \right) dt . \end{aligned} \quad (6.25)$$

Luego se elige convenientemente a $G_{2^*}(x, y, t)$ y $G_3(x, y, t)$ en Ω , las cuales deben verificar la siguiente ecuación diferencial:

$$\begin{aligned} & \left(-H \frac{\partial G_{3_i}}{\partial t} - \mathbf{UH} \cdot \nabla G_{3_i} - \text{div}(KH \nabla G_{3_i}) + G_{3_i} \sigma_3 H \right) = P_{3_i}(x, y, t) , \\ & \left(-H \frac{\partial G_{2^*_i}}{\partial t} - \mathbf{UH} \cdot \nabla G_{2^*_i} - \text{div}(KH \nabla G_{2^*_i}) + G_{2^*_i} \sigma_2 H + G_{3_i} \sigma_2 H \right) = 0 , \end{aligned} \quad (6.26)$$

donde la función de peso $P_{3_i}(x, y, t)$ adopta los siguientes valores:

$$P_{3_i} = \begin{cases} \frac{1}{(T_F - \tau) \Omega_i} & \text{Si } (x, y) \in \Omega_i \\ & t \in (\tau, T_F) \\ 0 & \text{Si } (x, y) \notin \Omega_i \\ & t \notin (\tau, T_F) \end{cases} , \quad (6.27)$$

$$\begin{aligned} & KH \frac{\partial G_{2^*_i}}{\partial n} \Big|_{BI} = 0 , \quad KH \frac{\partial G_{3_i}}{\partial n} \Big|_{BI} = 0 , \\ & G_{2^*_i} \Big|_{BA} = 0 , \quad G_{3_i} \Big|_{BA} = 0 , \\ & G_{2^*_i}(x, y, T_F) = 0 , \quad G_{3_i}(x, y, T_F) = 0 , \end{aligned} \quad (6.28)$$

A partir de (6.25) y (6.26) se determina la siguiente expresión:

$$\int_{\tau}^{T_F} \int_{\Omega_i} C_{3i}^* P_{3i}(x, y, t) d\Omega_i dt = \int_0^{T_F} \left(\int_{\Omega} G_{2^*} m_2(x, y, t) - \nabla \cdot (\mathbf{UHC}_3^0) G_3 + G_3 \sigma_3 H d_{si} \right) d\Omega dt \quad (6.29)$$

Teniendo en cuenta en el primer miembro de la ecuación (6.29) la definición de concentración media (6.1), y efectuando las correspondientes integraciones en el primer término del segundo miembro, considerando la definición de descarga másica (3.26), se obtiene la siguiente expresión:

$$\overline{C_{3i}^*} = \sum_{j=1}^{ND} M_{2j} \varphi_j \int_0^{T_F} \left(\beta_{Dj}(t) g_{2^*ij}(t) \right) dt + \int_0^{T_F} \int_{\Omega} \left(-\nabla \cdot (\mathbf{UHC}_3^0) G_3 + G_3 \sigma_3 H d_{si} \right) d\Omega dt, \quad (i = 1, 2, \dots, NP) \quad (6.30)$$

Finalmente reemplazando (6.30) en (6.15), se llega a la formulación analítica definida inicialmente en (6.4), que permite obtener el valor de la concentración media para OD en el área i -ésima distinto de la zona de descarga j -ésima.

6.2.2. Metodología de diseño óptimo basado en el problema Adjunto de Transporte (AT-O).

Una vez obtenidas las componentes hidrodinámicas con el método **HPOF** (5.39-5.40) y (5.45-5.46), discutido en el *Capítulo V*, se determinan las funciones de influencia $G_{Dj}(x, y, t)$ para cada una de las zonas protegidas del estuario mediante el método **AT**, es decir a partir de la solución mediante el MEF con el programa FlexPDE de los problemas de contorno (6.10-6.12) y (6.26-6.28). En tal sentido, como los programas generales de solución numérica trabajan con variables temporales evolutivas, es conveniente efectuar un cambio de variable temporal:

$$t' = T_F - t \quad (6.31)$$

De esta forma la dirección del tiempo en los problemas de contorno se transforma de $t=T_F$ a $t=0$ donde, junto con las condiciones de frontera, se resuelve en la dirección opuesta de tiempo usando la condición final o "inicial" nula en el momento $t=T_F$.

Finalmente, conociendo las funciones de influencia, las concentraciones medias espaciales temporales para cada zona protegida se determinan con las fórmulas analíticas (6.3) y (6.4). Luego, el procedimiento de diseño óptimo se realiza a partir de estas últimas fórmulas mediante el método de "Recocido Simulado" (SA), bajo ambiente de programación MATLAB, lo cual hace innecesaria la resolución de un problema diferencial (3.25-3.27) para cada iteración,

minimizándose notablemente los tiempos de cómputo. La combinación entre el Método **AT** y el procedimiento de diseño óptimo mediante el método **SA**, se lo denomina en esta tesis como **AT-O**.

Cuando las zonas protegidas son menos numerosas en relación a la cantidad de descargas, la formulación del problema adjunto de transporte para la obtención de los coeficientes de influencia resulta ser considerablemente efectiva, ya que solo necesita resolver por única vez las funciones de influencia, para cada indicador, tantas veces como zonas protegidas se consideren, independientemente de la ubicación de las salidas de tubería (F_{x_j}, F_{y_j}) o de su descarga $M_{D_j}(t)\beta(t)$. Como estas zonas son limitadas en número, tal enfoque presupone un notable ahorro de tiempo computacional, a diferencia del problema directo que debe calcular nuevamente el problema de transporte (3.25) cada vez que varíe algunas de estas variables de diseño.

Un esquema del procedimiento **AT-O** para la obtención del diseño óptimo se muestra en el Figura 6.1.

DATOS
 Características físicas del estuario, batimetría, parámetros hidrodinámicos, mareas, parámetros de transporte, indicador ambiental

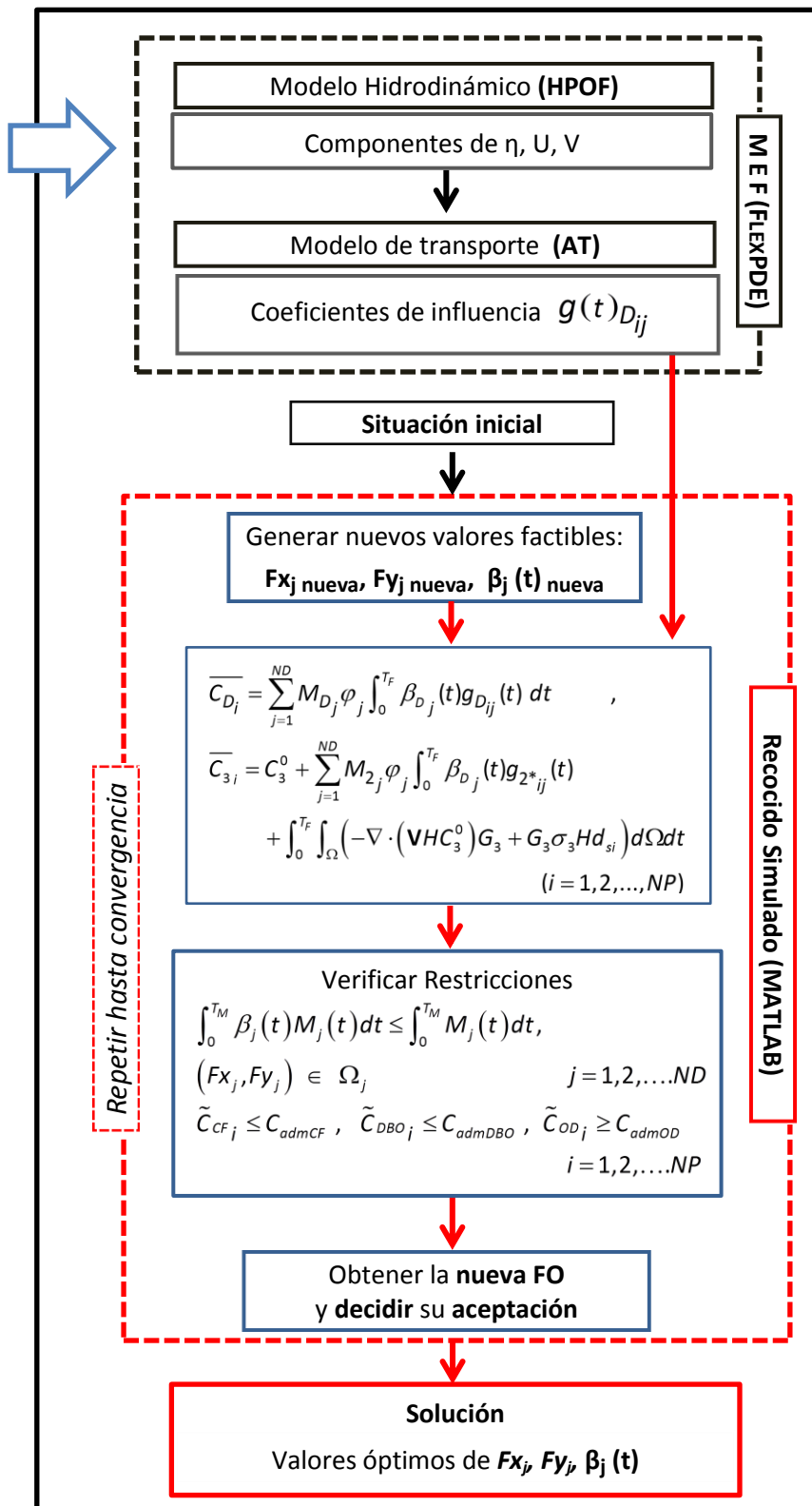


Figura 6.1: Proceso de diseño óptimo empleando el método AT-O.

CAPÍTULO VII

SOLUCIÓN DE LOS PROBLEMAS DE TRANSPORTE Y SU FORMULACIÓN ADJUNTA MEDIANTE EL MÉTODO DE FOURIER: APLICACIÓN DEL PROBLEMA DE DISEÑO ÓPTIMO

En el *Capítulo* anterior se ha explicado el concepto de coeficientes de influencia, los cuales se obtienen a partir del cálculo temporal de las funciones del problema adjunto de valor final tantas veces como zonas protegidas se consideren, independientemente de la ubicación o cantidad de descargas. Esta condición resulta conveniente frente al problema de transporte para el cálculo de las concentraciones medias espaciales y temporales en determinadas zonas de interés. Sin embargo, eventualmente puede requerir de un tiempo computacional no despreciable al tener que calcular el problema transitorio hasta obtener el estado estacionario.

Es de interés entonces, poder obtener soluciones que apliquen directamente sobre la parte estacionaria, y de esta forma minimizar tales tiempos. En tal sentido, es posible emplear desarrollos en series de Fourier en aquellos problemas de diseño que involucren descargas periódicas de efluentes y alcanzar directamente la respuesta estacionaria de la concentración, a partir de sistemas de ecuaciones independientes del tiempo.

A continuación se comentarán aspectos relacionados a las descargas periódicas, luego se desarrollarán dos métodos alternativos de solución a los problemas de Transporte y Adjunto basados en desarrollos de Fourier resueltos mediante el MEF, denominados en esta tesis con las siglas **FDT** y **FAT**, respectivamente.

7.1. MÉTODO DE FOURIER PARA LA SOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE DESCARGA PERIÓDICA.

Con el objeto de obtener directamente el estado estacionario de la solución del problema de transporte de contaminantes dentro del estuario, como se grafica en la Figura 7.1, se formula la siguiente condición de periodicidad, siendo T_M el período mareal:

$$C(x,y,0) = C(x,y,T_M) \quad (7.1)$$

Cuando las descargas másicas residuales son periódicas y coincidentes con los de la marea, el desarrollo en series de Fourier Temporal puede utilizarse como método de solución a los problemas de diseño óptimo que fueron planteados en el *Capítulo 2*. De esta forma tales descargas pueden expresarse de la siguiente manera:

$$m_{D_j}(t) = \sum_{j=1}^{ND} M_{D_j} \varphi_j \left(\beta_{D_{0j}} + \sum_{r=1}^R \left[\beta_{D_{crj}} \cos(r\omega t) + \beta_{D_{srj}} \sen(r\omega t) \right] \right), \quad (r=1,2,\dots,R) \quad (7.2)$$

siendo $\beta_{D_{0j}}$, $\beta_{D_{crj}}$ y $\beta_{D_{srj}}$ constantes y R corresponde al número total de componentes consideradas en la representación de las funciones periódicas.

Teniendo en cuenta la condición de periodicidad (7.1), la concentración media espacial y temporal en la zona protegida i -ésima se define de la siguiente manera:

$$\bar{C}_{D_i} = \frac{\int_0^{T_M} \int_{\Omega_i} C_D d\Omega_i dt}{T_M \Omega_i} \quad (7.3)$$

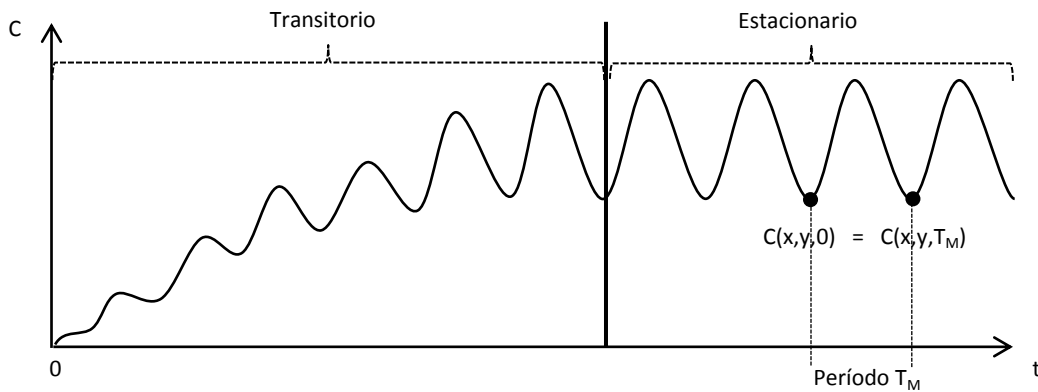


Figura 7.1: Esquema de evolución de la concentración.

Considerando esta expresión de descarga, es posible emplear dos métodos alternativos de solución, basados en desarrollos en Series de Fourier, para la determinación de los niveles de concentración de CF, DBO y OD dentro del estuario.

El primer método hace uso de tal desarrollo en el problema de transporte. De esta forma se consiguen coeficientes de influencia, tantas veces como puntos de descarga existan, por lo que resulta conveniente cuando se requiera de la evaluación de la concentración en varias zonas protegidas frente a pocos puntos de descarga. El mismo se desarrolla en la *Sección 7.2*.

En el segundo método alternativo, se aplica también una solución en Series de Fourier del problema adjunto de transporte, a efectos de obtener una fórmula analítica para las concentraciones medias temporales y espaciales en las zonas protegidas. Este enfoque es conveniente cuando la cantidad de descargas son mayores frente a las zonas protegidas, y se explica en la *Sección 7.3*.

Ambos métodos requieren resolver sistemas de ecuaciones independientes del tiempo, permitiendo reducir ampliamente los tiempos de cálculo para obtener las concentraciones correspondientes.

La conveniencia en la aplicación de cada una de estas alternativas de solución está sujeta a la cantidad de descargas y de zonas protegidas que presenta cada tipo de problema de diseño a resolver.

7.2. SOLUCIÓN AL PROBLEMA DE TRANSPORTE (FDT).

7.2.1. Formulación teórica.

Para determinar la concentración media de los indicadores de calidad de agua en determinadas áreas protegidas (Ω_j) cuando las descargas son periódicas, se realiza un desarrollo en Series de Fourier en la ecuación directa de transporte, obteniendo de esta manera la respuesta estacionaria.

Sustituyendo el término de descarga periódica definido en (7.2) en la ecuación de transporte (3.25), y considerando la linealidad que presenta esta última, la concentración de una sustancia C_D queda expresada de la siguiente forma:

$$C_D(x,y,t) = \sum_{j=1}^{ND} M_{D_j} \varphi_j \left[\beta_{D_{0j}} C_{D_{0j}}(x,y,t) + \sum_{r=1}^R \left(\beta_{D_{crj}} C_{D_{crj}}(x,y,t) + \beta_{D_{srj}} C_{D_{srj}}(x,y,t) \right) \right], \quad (7.4)$$

Luego, reemplazando esta expresión en dicha ecuación de transporte se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones desacopladas:

$$\begin{aligned} \frac{\partial C_{D_{0j}}}{\partial t} H + \nabla \cdot \left(\mathbf{U} H C_{D_{0j}} \right) - \text{div} \left(K H \nabla C_{D_{0j}} \right) + C_{D_{0j}} \sigma_D H &= \varphi_j \\ \frac{\partial C_{D_{crj}}}{\partial t} H + \nabla \cdot \left(\mathbf{U} H C_{D_{crj}} \right) - \text{div} \left(K H \nabla C_{D_{crj}} \right) + C_{D_{crj}} \sigma_D H &= \cos(r\omega t) \varphi_j, \\ \frac{\partial C_{D_{srj}}}{\partial t} H + \nabla \cdot \left(\mathbf{U} H C_{D_{srj}} \right) - \text{div} \left(K H \nabla C_{D_{srj}} \right) + C_{D_{srj}} \sigma_D H &= \text{sen}(r\omega t) \varphi_j \end{aligned} \quad (7.5)$$

donde cada una de estas ecuaciones se resuelve a partir de expansiones en serie de Fourier (obteniendo un sistema de ecuaciones independientes del tiempo), de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} C_{D_{O_j}}(x,y,t) &= a_{0_j} + \sum_{l=1}^L \left[a_{c_{jl}} \cos(l\omega t) + a_{s_{jl}} \text{sen}(l\omega t) \right] , \\ C_{D_{cr_j}}(x,y,t) &= b_{0_j} + \sum_{l=1}^L \left[b_{c_{jl}} \cos(l\omega t) + b_{s_{jl}} \text{sen}(l\omega t) \right] , \\ C_{D_{sr_j}}(x,y,t) &= d_{0_j} + \sum_{l=1}^L \left[d_{c_{jl}} \cos(l\omega t) + d_{s_{jl}} \text{sen}(l\omega t) \right] , \end{aligned} \quad (7.6)$$

siendo a_{0_j} , $a_{c_{jl}}$, $a_{s_{jl}}$, b_{0_j} , $b_{c_{jl}}$, $b_{s_{jl}}$, d_{0_j} , $d_{c_{jl}}$ y $d_{s_{jl}}$ funciones de (x,y) , y L al número total de componentes consideradas. De igual manera se procede con las condiciones de borde (3.27).

Finalmente, la concentración media en la zona i se obtiene después de reemplazar (7.6) en (7.4) y luego en (7.3), llegando a la siguiente expresión:

$$\bar{C}_{D_i} = \sum_{j=1}^{NP} M_{D_j} \varphi_j \left(\beta_{D_{O_j}} \bar{a}_{0_{ij}} + \sum_{r=1}^R \left[\beta_{D_{cr_j}} \bar{b}_{0_{ij}} + \beta_{D_{sr_j}} \bar{d}_{0_{ij}} \right] \right) \quad (7.7)$$

donde $\bar{a}_{0_{ij}}$, $\bar{b}_{0_{ij}}$ y $\bar{d}_{0_{ij}}$ son valores medios y pueden ser interpretados como *componentes de influencia del problema de transporte* evaluadas en el área i -ésima.

$$\begin{aligned} \bar{a}_{0_{ij}} &= \int_{\Omega_i} a_{0_j}(x,y) d\Omega_i / \Omega_i , \\ \bar{b}_{0_{ij}} &= \int_{\Omega_i} b_{0_j}(x,y) d\Omega_i / \Omega_i , \\ \bar{d}_{0_{ij}} &= \int_{\Omega_i} d_{0_j}(x,y) d\Omega_i / \Omega_i . \end{aligned} \quad (7.8)$$

7.2.2. Metodología de diseño óptimo basado en el desarrollo de Fourier sobre la ecuación de Transporte (FDT-O).

Una vez calculadas las velocidades hidrodinámicas con los sistemas **HPOF**, se obtienen por única vez las componentes de las serie de Fourier definidas en (7.6) mediante el MEF utilizando el programa FlexPDE, es decir empleando el método **FDT**. Una vez obtenidas tales componentes independientes del tiempo, las mismas son transferidas al ambiente MATLAB, donde finalmente la evolución de la concentración en la zona protegida se calcula con la

expresión (7.4). En este último programa se evalúan diferentes situaciones posibles de diseño considerando distintos valores de las funciones de descarga, se verifica el cumplimiento de las restricciones ambientales y se calcula la función objetivo correspondiente. Mediante la implementación en dicho programa del algoritmo Recocido Simulado, se realiza la búsqueda de los valores de las variables de diseño que minimizan dicha función objetivo. Un esquema del procedimiento de diseño óptimo basado en el desarrollo de Series de Fourier en la ecuación Directa de Transporte se muestra en la Figura 7.2.

La combinación entre el método **FDT** y el procedimiento de diseño óptimo mediante el método **SA** se lo denomina en esta tesis como **FDT-O**, y resulta conveniente cuando el problema bajo análisis contempla pocos puntos de descarga j y muchas zonas de resguardo ambiental i , ya que requiere del cálculo de ecuaciones desacopladas (una por cada localización de descarga), para obtener los *coeficientes de influencia del problema de transporte*.

Asimismo, implica un gran ahorro de tiempo computacional de cálculo, debido a que no necesita resolver una ecuación evolutiva en el tiempo para la obtención de los coeficientes.

De acuerdo a este enfoque debe observarse que la expresión (7.6) en (7.4) permite obtener, también, tanto los valores máximos como mínimos de concentración en la zona i -ésima en el período mareal. Además, es independiente de los flujos máxicos M_j , lo que resulta ventajoso en un contexto de diseño óptimo, ya que es posible variar tales valores máxicos sin necesidad de calcular nuevamente estos coeficientes.

DATOS
 Características físicas del estuario, batimetría, parámetros hidrodinámicos, mareas, parámetros de transporte, indicador ambiental

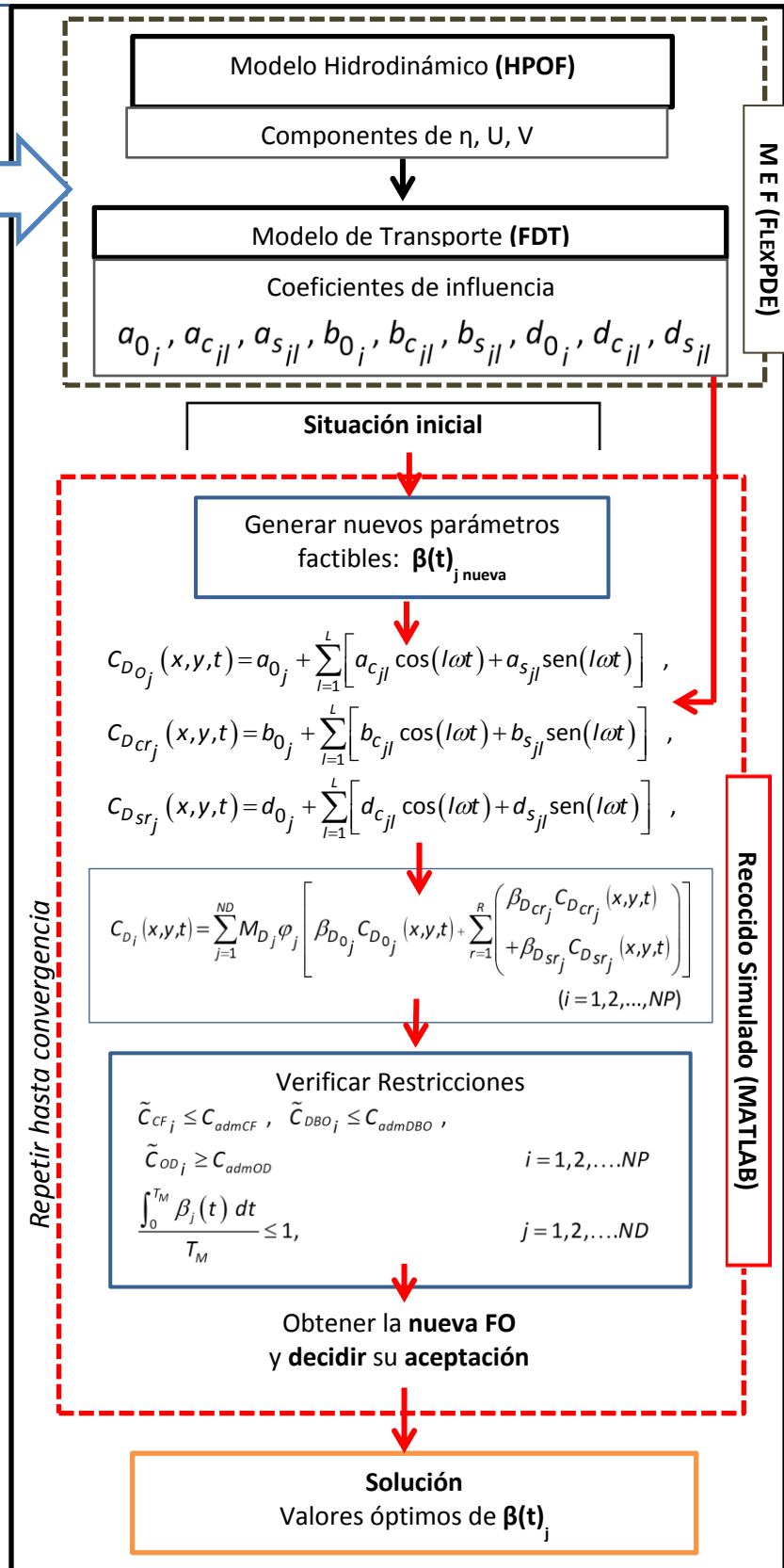


Figura 7.2: Proceso de diseño óptimo empleando el método FDT-O.

7.3. SOLUCIÓN AL PROBLEMA ADJUNTO DE TRANSPORTE (FAT).

7.3.1. Formulación teórica.

Otra forma de determinar la concentración media de los indicadores de calidad de agua en determinadas áreas protegidas (Ω_i) cuando las descargas son periódicas, es aplicando un desarrollo en series de Fourier en las funciones de influencia del Problema Adjunto, obteniendo de esta manera la respuesta estacionaria.

Se procede de forma similar al desarrollo explicado en el *Capítulo 6* para obtener la ecuación adjunta, considerando en este caso que la integral debe efectuarse sobre un período de marea T_M . Sin pérdida de generalidad, el desarrollo de este método se explicará para los indicadores con subíndice $D=1$ y $D=2$, es decir para CF y DBO, recordando que para ecuaciones acopladas se procede de forma similar a la explicada oportunamente para $D=3$.

De esta forma, multiplicando a la ecuación de transporte (3.25) por una función arbitraria $G_D(x,y,t)$, luego integrarla con respecto al dominio Ω y a un período $(0, T_M)$, se obtiene la siguiente expresión junto con los correspondientes términos de contorno y de periodicidad:

$$\int_0^{T_M} \int_{\Omega} C_D \left(-H \frac{\partial G_D}{\partial t} - \mathbf{UH} \cdot \nabla G_D - \text{div}(KH \nabla G_D) + G_D H \sigma_D \right) d\Omega dt = \int_0^{T_M} \int_{\Omega} G_D m_D d\Omega dt \quad (7.9)$$

$$+ \int_{\Omega} (HC_D G_D) \Big|_{t=0}^{t=T_M} d\Omega - \int_0^{T_M} \int_{\Gamma} \left(G_D HC_D V_n + KH \frac{\partial G_D}{\partial n} C_D - G_D KH \frac{\partial C_D}{\partial n} \right) d\Gamma dt .$$

A partir de (7.9), y considerando las condiciones de borde definidas en (3.15) y (3.22-3.24), y de periodicidad (7.1), la concentración media espacial y temporal en la zona protegida i -ésima, definida en (7.3), puede ser expresada de la siguiente manera:

$$\overline{C_{D_i}} = \int_0^{T_M} \int_{\Omega} G_{D_i} m_D d\Omega dt \quad , \quad (7.10)$$

para lo cual se requiere que la función de influencia G_D (o G_{D_i} para la zona i), verifique el siguiente sistema:

$$-H \frac{\partial G_{D_i}}{\partial t} - \mathbf{UH} \cdot \nabla G_{D_i} - \text{div}(KH \nabla G_{D_i}) + G_{D_i} H \sigma_D = P_{D_i}(x,y,t) \quad , \quad (7.11)$$

donde

$$P_{D_i} = \begin{cases} [T_M \Omega_i]^{-1} & \text{Si } (x,y) \in \Omega_i \\ 0 & \text{Si } (x,y) \notin \Omega_i \end{cases} \quad , \quad (7.12)$$

y el cumplimiento de las siguientes condiciones:

$$KH \frac{\partial G_{D_i}}{\partial n} \Big|_{BI} = 0 \quad , \quad G_{D_i} \Big|_{BA} = 0 \quad , \quad G_{D_i}(x,y,0) = G_{D_i}(x,y,T_M) \quad . \quad (7.13)$$

Finalmente, teniendo en cuenta el término de descarga periódica (7.2), es posible llegar a la siguiente expresión para la concentración media definida en (7.3) en las zonas protegidas NP:

$$\overline{C_{D_i}} = \sum_{j=1}^{ND} M_{D_j} \varphi_j \int_0^{T_M} \beta_{D_j}(t) g_{D_{ij}}(t) dt \quad (i=1,2,\dots, NP) \quad , \quad (7.14)$$

donde el coeficiente $g_{D_{ij}}(t)$ se define como:

$$g_{D_{ij}}(t) = \frac{\int_{\Omega_j} G_{D_i}(x,y,t) d\Omega_j}{\Omega_j} \quad , \quad (7.15)$$

siendo Ω_j el área de descarga del efluente j -ésimo.

Aprovechando la periodicidad que presenta el problema, es posible conocer la concentración media aproximando las funciones de influencia $G_{D_i}(x,y,t)$ mediante series de Fourier de la siguiente forma:

$$G_{D_i}(x,y,t) = G_{D_{0i}} + \sum_{r=1}^R \left[G_{D_{Cr_i}} \cos(r\omega t) + G_{D_{Sr_i}} \sin(r\omega t) \right] \quad (r=0, 1, \dots, R) \quad , \quad (7.16)$$

donde $G_{D_{0i}}$, $G_{D_{Cr_i}}$ y $G_{D_{Sr_i}}$ son componentes de influencia de (x,y) y R al número total de componentes consideradas en la representación de las funciones periódicas. Luego, reemplazando (7.16) en (7.11) se llega a las siguientes ecuaciones acopladas:

$$\begin{aligned} -H\mathbf{U}_0 \cdot \nabla G_{D_{0i}} - \text{div} \left(KH \nabla G_{D_{0i}} \right) + \sigma_D H G_{D_{0i}} &= P_{D_i} + \zeta_{0i} \left(\mathbf{U}_{Cr}, \mathbf{U}_{Sr}, G_{D_{Cr_i}}, G_{D_{Sr_i}} \right) \\ -\omega H G_{D_{S2i}} - H\mathbf{U}_0 \cdot \nabla G_{D_{C1i}} - \text{div} \left(KH \nabla G_{D_{C1i}} \right) + \sigma_D H G_{D_{C1i}} &= \zeta_{1i} \left(\mathbf{U}_{Cr}, \mathbf{U}_{Sr}, G_{D_{0i}}, G_{D_{Cr_i}}, G_{D_{Sr_i}} \right) \quad , \quad (7.17) \\ +\omega H G_{D_{C1i}} - H\mathbf{U}_0 \cdot \nabla G_{D_{S2i}} - \text{div} \left(KH \nabla G_{D_{S2i}} \right) + \sigma_D H G_{D_{S2i}} &= \zeta_{2i} \left(\mathbf{U}_{Cr}, \mathbf{U}_{Sr}, G_{D_{0i}}, G_{D_{Cr_i}}, G_{D_{Sr_i}} \right) \end{aligned}$$

donde los términos $\zeta_i \left(\mathbf{U}_{Cr}, \mathbf{U}_{Sr}, G_{D_{0i}}, G_{D_{Cr_i}}, G_{D_{Sr_i}} \right)$ involucran a los productos entre las componentes de las velocidades obtenidas con el método **HPOF** y las de influencia (7.16).

Finalmente, sustituyendo (7.16) en (7.15), y el resultado en (7.14), considerando la periodicidad de la descarga másica (7.1), la concentración media de la zona i puede expresarse, después de integrarse en el período, de la siguiente manera:

$$\bar{C}_{D_i} = M_{D_j} \varphi_j \frac{\pi}{\omega} \sum_{j=1}^{NP} \left(2\beta_{D0_j} g_{D0_{ij}} + \sum_{r=1}^R \left[\beta_{Dcr_j} g_{Dcr_{ij}} + \beta_{DSr_j} g_{DSr_{ij}} \right] \right), \quad (7.18)$$

donde β_{D0_j} , β_{Dcr_j} y β_{DSr_j} son constantes y $g_{D0_{ij}}$, $g_{Dcr_{ij}}$ y $g_{DSr_{ij}}$ son componentes de los coeficientes de influencia evaluados en la j -ésima descarga.

La metodología para la evaluación de los coeficientes de las componentes de influencia (7.15), que permiten determinar las concentraciones (7.18) mediante la solución por el MEF del sistema acoplado de ecuaciones independientes del tiempo (7.17), se la denomina **FAT**.

7.3.2. Metodología de diseño óptimo basado en el desarrollo de Fourier sobre la ecuación Adjunta de Transporte (FAT-O).

Una vez determinadas las corrientes hidrodinámicas mediante el método **HPOF**, como se explicó anteriormente, las restricciones ambientales se obtienen mediante el método **FAT**. Debe observarse que el sistema definido en (7.17), se resuelve por única vez y para cada zona protegida. Luego, las concentraciones medias en las áreas de resguardo ambiental se obtienen fácilmente con la expresión (7.18) mediante ambiente de programación en MATLAB, donde para cada localización posible (F_{xj} , F_{yj}) se evalúan las componentes de las funciones de influencia en la j -ésima área (7.15). El proceso de búsqueda de las variables óptimas que verifican el cumplimiento de las restricciones, evaluando en cada caso la función objetivo, se realiza con el método de **SA**. A este procedimiento de diseño óptimo se los denomina **FAT-O**. Un esquema del mismo, basado en el desarrollo del método **FAT** se muestra en la Figura 7.3.

Este método resulta conveniente cuando el problema presenta muchos puntos de descarga j y pocas zonas de resguardo ambiental i , ya que requiere del cálculo de un sistema de ecuaciones acopladas lineales independientes del tiempo por cada zona protegida considerada.

Debe observarse que, la obtención de las componentes de coeficientes de influencia a partir del método **FAT** resulta conveniente ya que el cálculo de las concentraciones insume un tiempo computacional considerablemente menor, comparado con su determinación a partir de una integración temporal (**AT**), como se ha realizado previamente en el *Capítulo 6*.

De esta forma es posible evaluar, de una forma más rápida un gran número de posibles ubicaciones de descargas de efluentes que, por su independencia temporal, resulta ser práctico en la implementación del procedimiento de optimización.

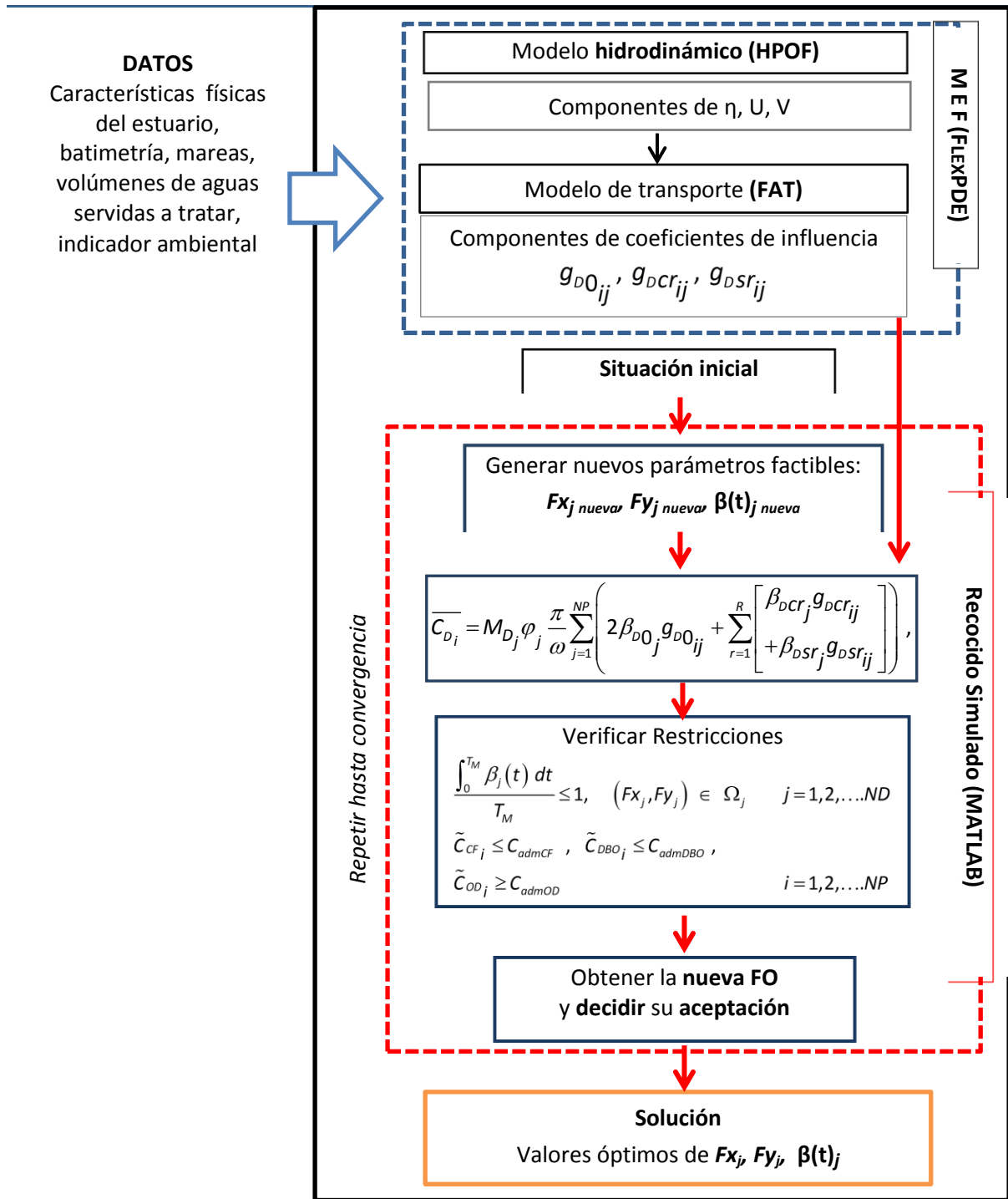


Figura 7.3: Proceso de diseño óptimo empleando el método FAT-O.

CAPÍTULO VIII

ESTUDIOS NUMÉRICOS DE PROBLEMAS DE CONTROL DE CALIDAD DE AGUA

En el presente *Capítulo* tiene como objetivo mostrar la efectividad de los distintos métodos de simulación, utilizados en los problemas de diseño óptimo para el control y monitoreo de la calidad de agua en estuarios. Para ello el capítulo se divide en tres grandes secciones.

Inicialmente, en la sección 8.1 se exponen distintos estudios numéricos sobre la resolución del problema hidrodinámico utilizando el método **HPOF**. Como se ha explicado en el *Capítulo V*, este consiste en la solución numérica del enfoque Hidrodinámico Perturbado, reformulado a ecuación de Onda, combinado con el método de Fourier temporal mediante el MEF, utilizando el programa de elementos finitos FlexPDE. Se desarrollan ejemplos que involucran la validación de los resultados hidrodinámicos obtenidos por el método **HPOF**, con otros métodos numéricos y enfoques teóricos, y se analizan también los comportamientos lineales y no lineales de las correspondientes ecuaciones.

En la sección 8.2, se efectúan estudios numéricos relativos al comportamiento del problema de transporte de sustancias contaminantes dentro del estuario mediante el método **DT**, es decir resolviendo por el MEF las ecuaciones de transporte hasta alcanzar el estado estacionario, utilizando el programa FlexPDE. El primer estudio corresponde a los efectos que produce el comportamiento no lineal hidrodinámico en el transporte de contaminantes, y el segundo a la influencia que ejerce la distribución espacial y temporal de las descargas sobre los niveles de concentración de los contaminantes en zonas protegidas.

Finalmente, en la sección 8.3 se muestran los resultados numéricos obtenidos de aplicar las diferentes metodologías de solución al problema de transporte, que fueron explicados en los *Capítulos VI y VII*, para la optimización del control y mantenimiento de la calidad de agua en estuarios (*Capítulo II*) bajo el enfoque de Simulación—Optimización. En tal sentido, se formulan tres problemas de diseño óptimo. En el primer problema se utiliza el método Adjunto de Transporte (**AT-O**), en el segundo problema se emplea el método de Fourier sobre el problema de

Transporte (**FDT-O**) y, finalmente en el último problema de diseño se aplica el método de Fourier al problema Adjunto de Transporte (**FAT-O**). En cada uno de ellos se realiza una validación con el método **DT**, se comparan los tiempos de cálculo logrados y se analizan los resultados obtenidos.

8.1. PROBLEMA HIDRODINÁMICO.

Se desarrollan varias comparaciones numéricas entre el método HPOF, y otros métodos y enfoques de solución, a los efectos de mostrar la precisión del mismo.

En primer lugar, se realiza un estudio numérico de un problema hidrodinámico unidimensional donde se comparan las soluciones obtenidas por los métodos HPOF y Diferencias Finitas (aplicada a las ecuaciones de Saint Venant).

Seguidamente, se desarrolla un caso similar pero para un dominio 2D, donde se comparan las soluciones obtenidas por los métodos HPOF y MEF (aplicado a la Ecuación de Onda Temporal).

Finalmente, se realiza un análisis donde se muestran los efectos de la no linealidad debido a diferentes relaciones entre la amplitud de la marea y la profundidad del estuario.

8.1.1. Estudio numérico de un problema hidrodinámico 1D: **Comparación entre los métodos HPOF y Diferencias Finitas.**

Se comparan las soluciones numéricas de un problema hidrodinámico unidimensional obtenidas entre el método **HPOF** (aproximación lineal) y el método de Diferencias Finitas (aplicado a las ecuaciones de Saint Venant 1D). La formulación de tales ecuaciones, expresadas en Diferencias Finitas, se muestra a continuación:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \eta_i}{\partial t} &= -\frac{(H_{i+1}U_{i+1}) - (H_{i-1}U_{i-1})}{2\Delta\ell} - \frac{(\eta_{i+1}U_{i+1}) - (\eta_{i-1}U_{i-1})}{2\Delta\ell} \\ \frac{\partial U_i}{\partial t} &= -U_i \frac{(U_{i+1} - U_{i-1})}{2\Delta\ell} - g \frac{(\eta_{i+1} - \eta_{i-1})}{2\Delta\ell} - \frac{B}{H_i} U_i + \frac{B}{H_i^2} U_i \eta_i, \quad i = 1 \dots N_{\text{nodos}} \end{aligned} \quad (8.1a,b)$$

donde $\Delta\ell$ es el tamaño del elemento calculado como la razón entre la longitud total del dominio (Lx) y el número de segmentos considerados, i es el nodo i -ésimo y N_{nodos} el número total de nodos del dominio.

Se considera un estuario idealizado de 75 km de longitud (Lx) que es forzado en la boca por una marea $S2$, donde la elevación de marea es un valor conocido ($\bar{\eta}=1\text{m}$). La profundidad (H) en la boca es de 12 m, disminuyendo hacia la cabeza hasta alcanzar los 2 m. Luego, se consideran para

el análisis 12 segmentos de aproximadamente 6 km cada uno, como se muestra de forma ilustrativa en la Figura 8.1, donde se indican también las correspondientes condiciones iniciales de frontera. De esta forma las ecuaciones (8.1a,b) en los extremos del dominio quedan expresadas de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \eta_0}{\partial t} &= \frac{\partial \tilde{\eta}}{\partial t} \\ \frac{\partial U_0}{\partial t} &= -U_0 \frac{(U_1 - U_0)}{\Delta l} - g \frac{(\eta_1 - \eta_0)}{\Delta l} - \frac{B}{H_0} U_0 + \frac{B}{H_0^2} U_0 \eta_0 \end{aligned} \quad (8.2)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \eta_{13}}{\partial t} &= -\frac{(H_{12} U_{12})}{\Delta l} - \frac{(\eta_{12} U_{12})}{\Delta l} \\ \frac{\partial U_{13}}{\partial t} &= 0 \end{aligned} \quad (8.3)$$

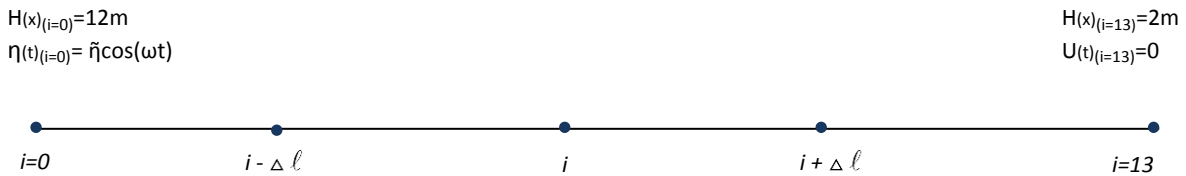


Figura 8.1: Representación de un dominio unidimensional con diferencias finitas.

Se calculan y comparan las velocidades con ambos métodos en cada uno de los nodos. Los resultados obtenidos se muestran en las Figuras 8.2a, 8.2b y 8.2c donde se grafican las historias temporales de las velocidades (expresadas en m/s) calculadas en los nodos 2, 5 y 10, respectivamente, es decir a 12, 30 y 60 km aproximadamente con respecto a la boca del estuario. A la derecha de cada una de las figuras se indica además, la ubicación en el dominio donde se encuentra el nodo bajo análisis. También se indica al pie de cada una la profundidad que le corresponde, entre paréntesis.

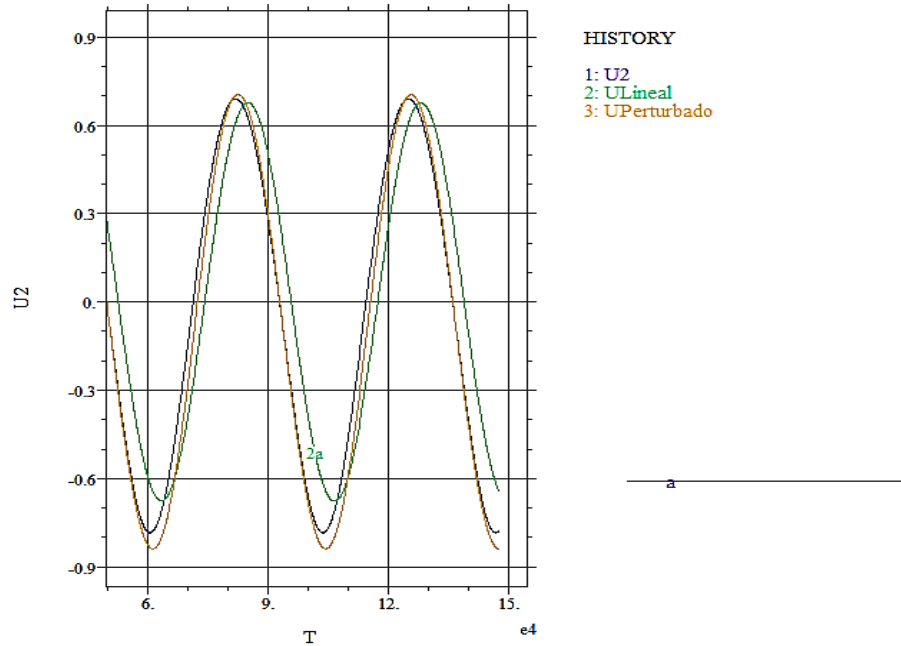


Figura 8.2a: Comparación en el Nodo 2 (H≈10.5m).

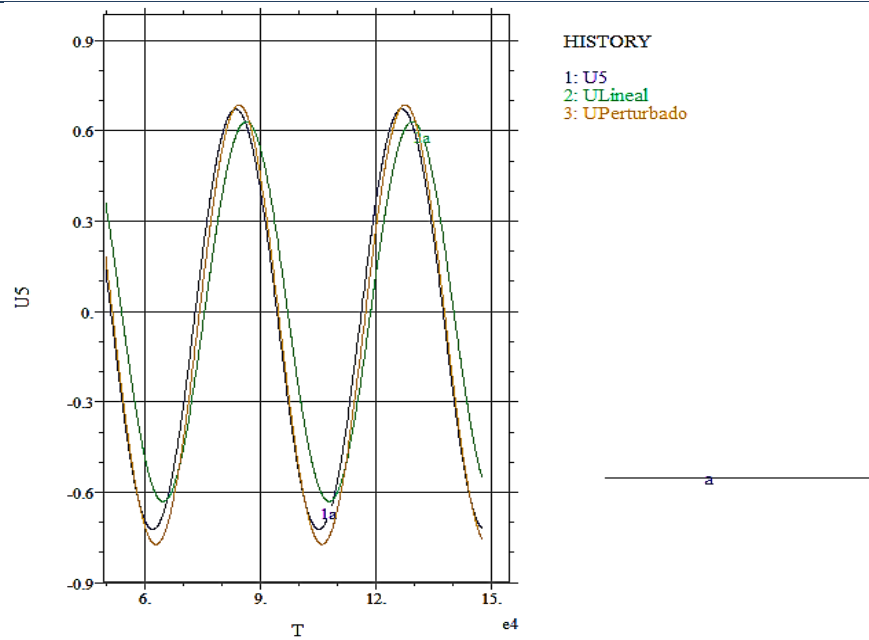


Figura 8.2b: Comparación en el Nodo 5 (H≈8m).

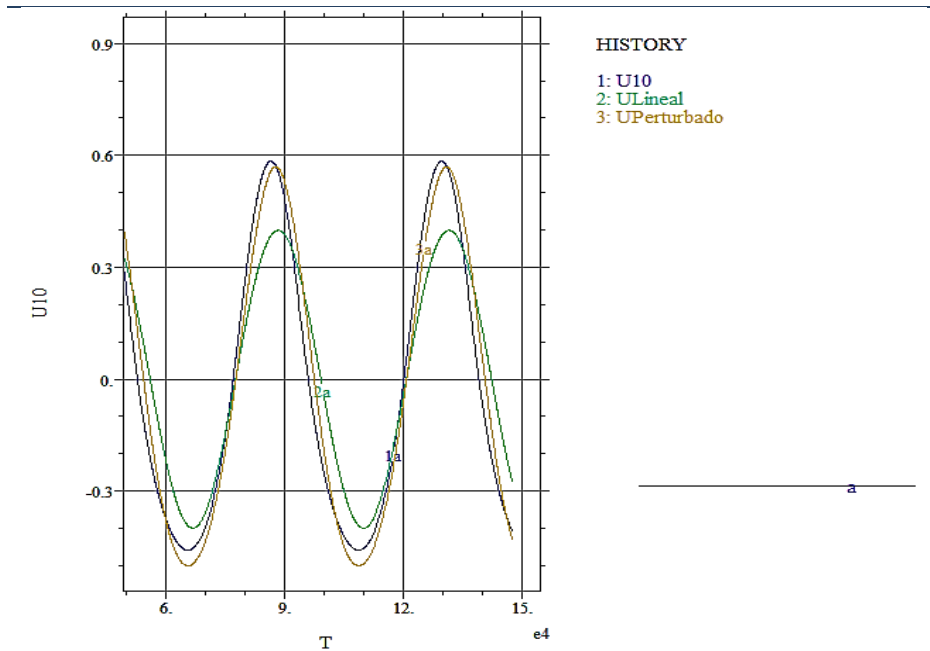


Figura 8.2c: Comparación en el Nudo 10 ($H \approx 4\text{m}$).

Es posible observar que las velocidades hidrodinámicas obtenidas por Diferencias Finitas (curva azul) de la ecuación de Saint Venant y por el método **HPOF** (curva naranja), son prácticamente coincidentes. A medida que la profundidad disminuye (nodo 10 de la Figura 8.2c) ambas soluciones siguen manteniendo la misma relación. Esto indica la consistencia del método empleado en esta tesis (**HPOF**). Al comparar tales curvas con la solución obtenida con la aproximación lineal del método **HPOF** (curva verde), es posible observar el comportamiento no lineal de estas. Tal efecto, que se analiza con mayor detalle al final de esta sección, depende de la relación entre la amplitud y la profundidad (cuanto más grande es tal relación, mayores serán tales efectos).

8.1.2. Comparación entre las soluciones hidrodinámicas bidimensionales obtenidas mediante el método HPOF y el MEF aplicado a la ecuación original de onda para aguas poco profundas.

Se considera un estuario angosto que es forzado en la boca por una marea S2, cuya longitud es de 75 km y su ancho uniforme de 4 km. Cuenta con un canal de 12 m de profundidad en la boca

que disminuye hasta los 2 m en la cabeza, distribuyéndose a lo largo del mismo en forma de V como se muestra en la Figura 8.3.

Bajo este escenario, se comparan las soluciones bidimensionales calculadas mediante el método **HPOF** y el MEF aplicado a las ecuaciones originales de la Teoría de Aguas poco Profundas (3.10)-(3.16).

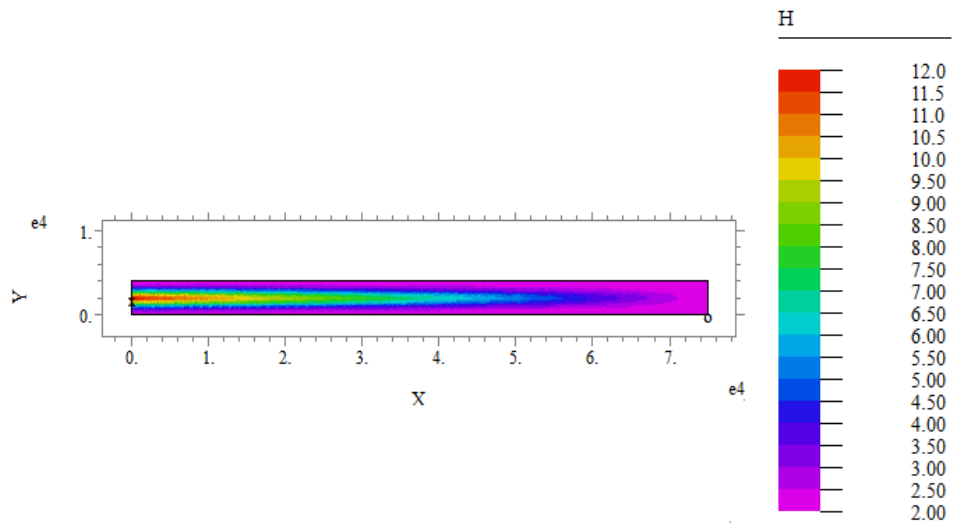


Figura 8.3: Geometría y profundidad del dominio.

Se calculan las velocidades hidrodinámicas en puntos ubicados en lugares similares a los que fueron definidos en el ejemplo anterior. Los mismos se distribuyen longitudinalmente en el medio del canal a 12, 30 y 60 km aproximadamente con respecto a la boca del estuario. Para este cálculo se empleó una malla de 482 elementos y un tamaño de paso temporal de 360 seg.

Los resultados hidrodinámicos obtenidos por ambos métodos se comparan y grafican temporalmente en las Figuras 8.4a, 8.4b y 8.4c, donde la curva verde corresponde a la solución obtenida con la aproximación lineal del método **HPOF**, la curva naranja es la solución de la 2° aproximación del método **HPOF** y la curva azul es la solución de la ecuación hidrodinámica original para aguas poco profundas.

En tales gráficos se observa que en la boca, donde la profundidad es mayor, no se producen diferencias significativas entre los enfoques. Sin embargo, a medida que la profundidad en el interior del estuario disminuye, tales efectos comienzan a notarse (Figura 8.4c).

Por otra parte, en la Figura 8.4b, se observa que los valores máximos de las velocidades hidrodinámicas dentro del canal se encuentran en el orden de 0.7 m/s, mientras que en la Figura 8.4d se observa que para la misma distancia longitudinal (x=30km) pero fuera del canal cerca del

margen, las velocidades son menores, del orden de 0.4 m/s. Este comportamiento concuerda con aquel informado en el trabajo realizado por Li et. al, 1997, quienes emplearon una solución analítica para obtener las velocidades en un estuario de características similares a este ejemplo.

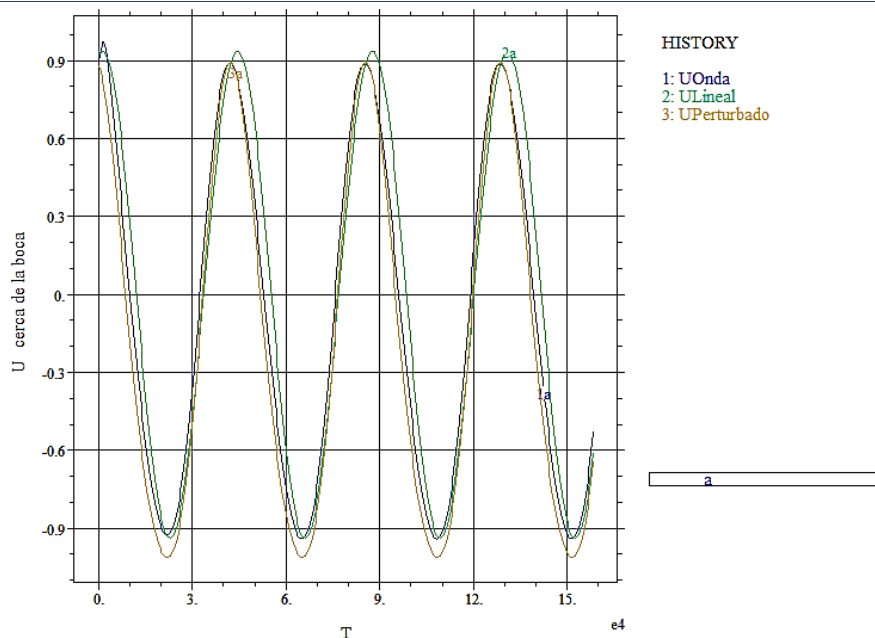


Figura 8.4a: Variación temporal de la velocidad en medio del estuario en $x=12$ Km.

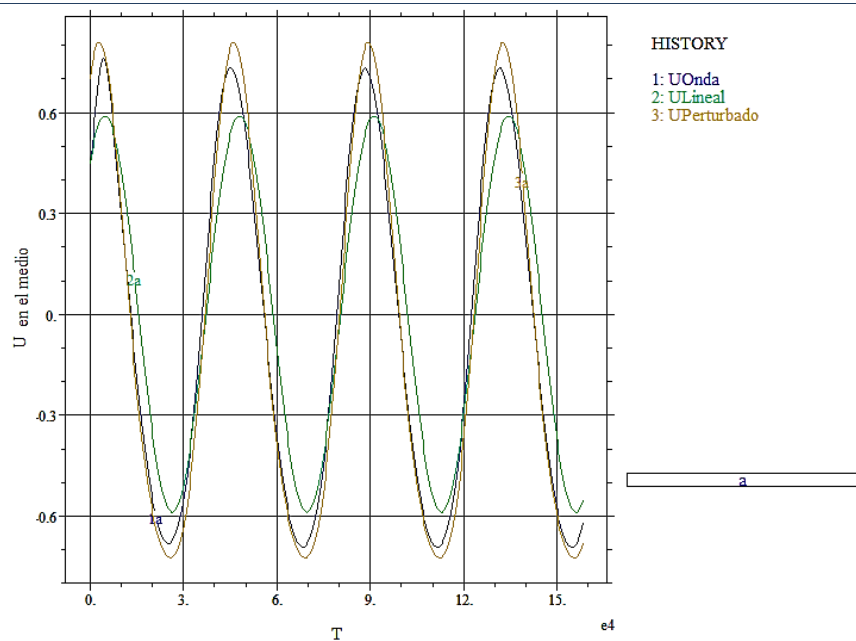


Figura 8.4b: Variación temporal de la velocidad en medio del estuario en $x=30$ Km.

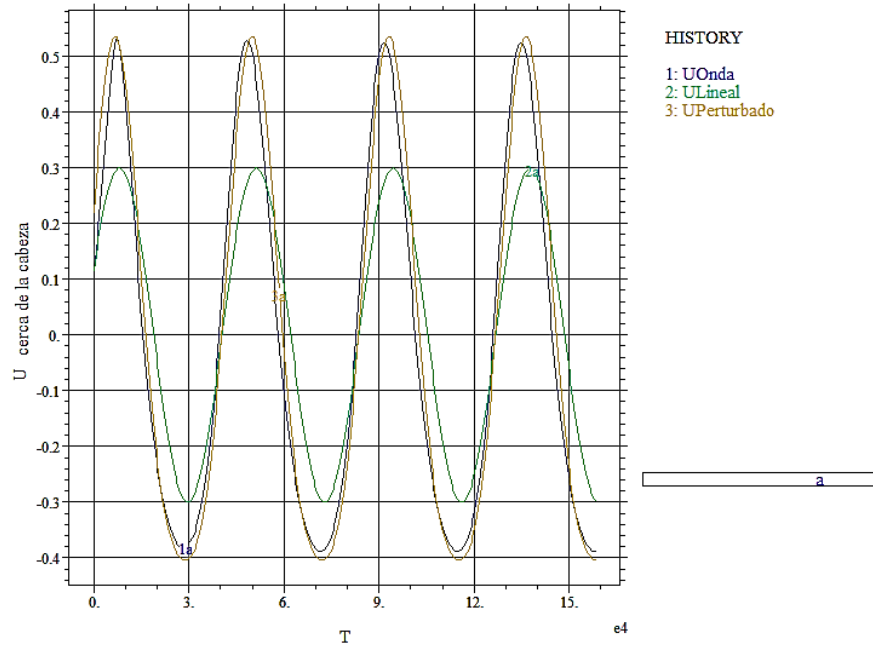


Figura 8.4c: Variación temporal de la velocidad en medio del estuario en $x=60$ Km.

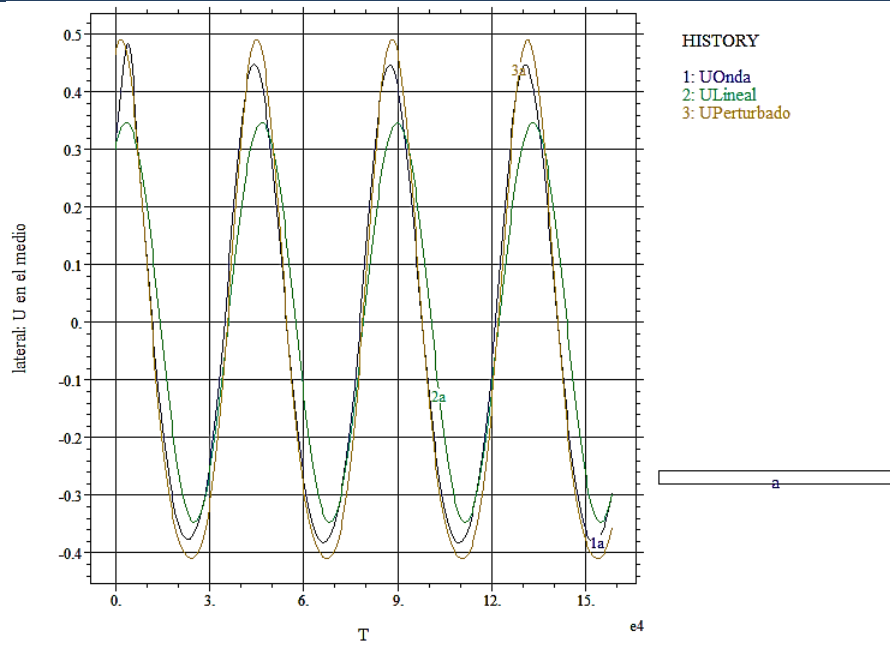


Figura 8.4d: Variación temporal de la velocidad cerca del margen en $x=30$ Km.

8.1.3. Comparación entre el comportamiento hidrodinámico lineal y no lineal.

Considerando un estuario hipotético de 25 km de longitud y 2 km de ancho uniforme, con un forzante mareal S2, se realiza un estudio de los efectos no lineales hidrodinámicos. Para ello se comparan los resultados obtenidos de la aproximación lineal (5.43) - (5.44) con la aproximación no lineal (5.49) - (5.50) del método **HPOF**, para diferentes relaciones entre amplitud característica (η_c) y profundidad característica (H_c), en tres zonas dentro del estuario. La primera se encuentra ubicada a 6 km de la boca, la segunda en el medio del estuario y la tercera a 9 km de la cabeza.

Considerando que los efectos no lineales dependen del siguiente parámetro de perturbación e , definido en el *Capítulo V*:

$$e = \frac{\eta_c}{H_c}, \quad (8.4)$$

se calculan para cada sistema hidrodinámico las siguientes relaciones características: 0.5m, 1m, 1.5m y 2m para (η_c) y 5 m a 10 m, variando cada 1 m para (H_c). Con estos valores se comparan las velocidades longitudinales mediante la siguiente relación porcentual:

$$\varepsilon_{U_i} = \frac{U_{i,\text{lineal}} - U_{i,\text{no lineal}}}{U_{i,\text{lineal}}} * 100\% \quad (i = 1, \dots, 3) \quad (8.5)$$

donde ε_{U_i} indica las diferencias expresadas en valor porcentual de la velocidad longitudinal, y el símbolo \sim corresponde al cálculo de los valores máximos o valores mínimos de U.

Los resultados de los valores máximos porcentuales durante el período de flujo se grafican en las Figuras 8.5a, 8.5b, 8.5c y 8.5d. En las mismas se observa que a mayor amplitud con respecto a la profundidad, mayores son las diferencias de los valores máximos de U entre el enfoque lineal y el no lineal. A medida que tal relación disminuye, las diferencias porcentuales se reducen. Se observa además que para relaciones aproximadamente inferiores a 0.15, se obtienen diferencias porcentuales máximas del orden de 6% aproximadamente, con lo cual los efectos de la no linealidad comienzan a advertirse a partir de ese valor.

Las diferencias porcentuales entre los valores mínimos del enfoque lineal con respecto al no lineal, siguen un comportamiento similar al de los picos máximos.

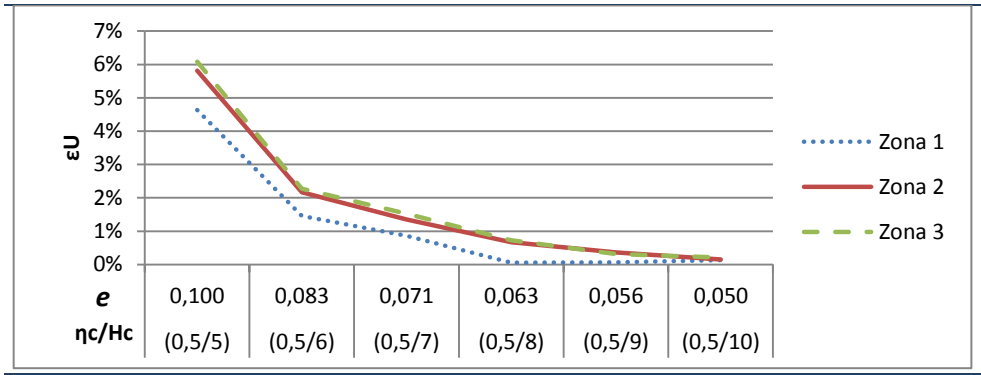


Figura 8.5a: Diferencia porcentual de velocidad.

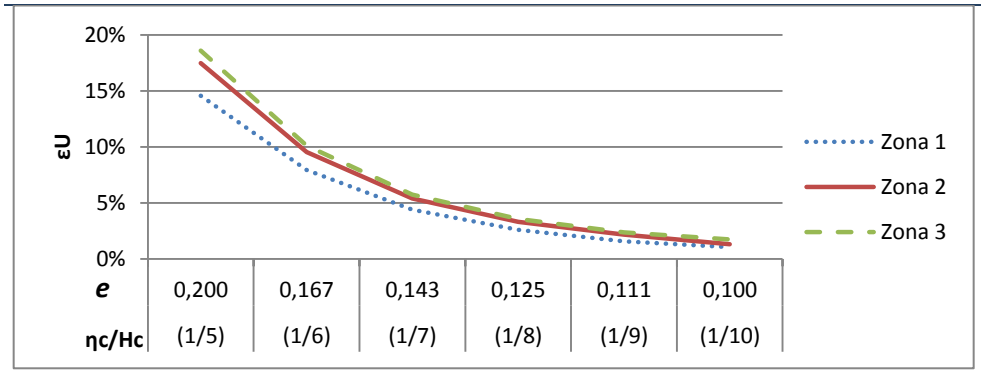


Figura 8.5b: Diferencia porcentual de velocidad.

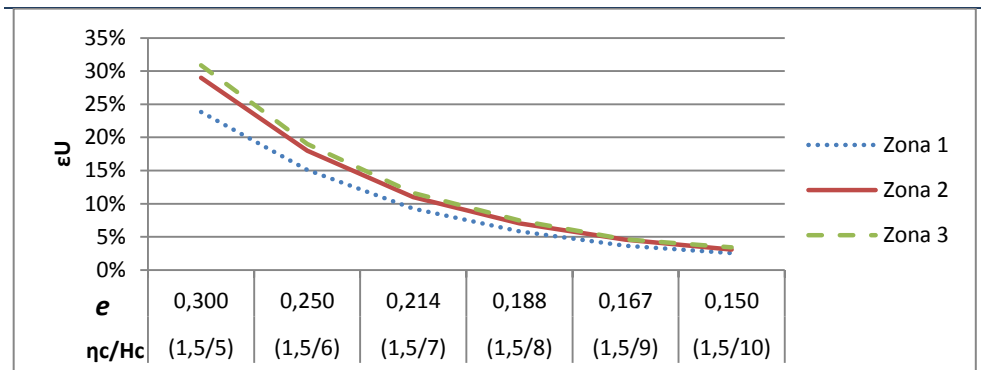


Figura 8.5c: Diferencia porcentual de velocidad.

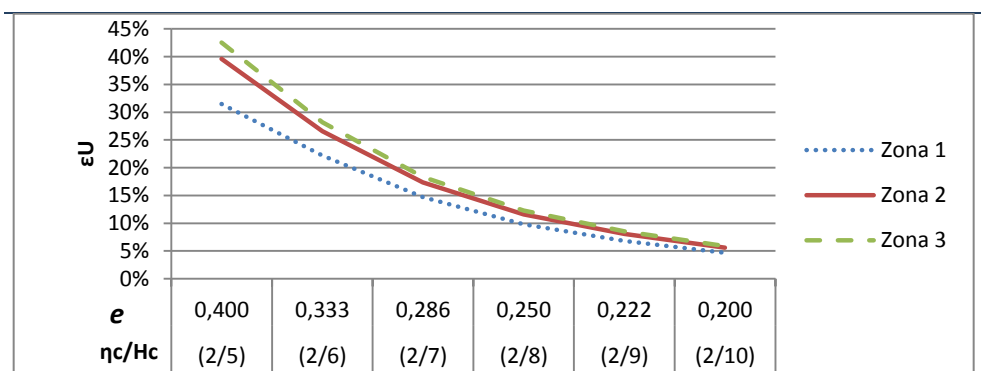


Figura 8.5d: Diferencia porcentual de velocidad.

8.2. PROBLEMA DE TRANSPORTE.

8.2.1. Efectos de la no linealidad hidrodinámica sobre el transporte de contaminantes.

De acuerdo al análisis desarrollado en la sección anterior, a continuación se muestra la influencia del parámetro de perturbación e (8.4) en el transporte de contaminantes, para distintas relaciones entre (η_c) y (H_c) . Para ello se considera un estuario hipotético angosto de 70 km de largo por 4 km de ancho, dominado por una marea S2, donde a 13 km de la boca se vierten $8 \times 10^6 \text{ NMP}/100 \text{ ml} \cdot \text{m}^3/\text{s}$ CF.

En tal sentido, se analiza el comportamiento temporal y espacial de CF en dos zonas ubicadas aproximadamente a una distancia de 30 km y 55 km respecto a dicha descarga. Este escenario se indica en la Figura 8.6, donde también se muestra la malla, de 1359 elementos, empleada por el MEF.

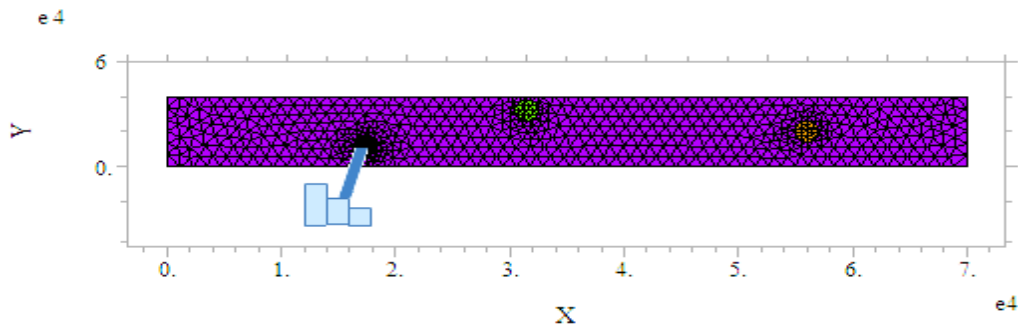


Figura 8.6: Ubicación de descarga y zonas de monitoreo en un estuario hipotético.

Considerando un parámetro de perturbación de $e = 0.2$ (obtenido a partir de $\eta_c=1\text{m}$ y $H_c= 5\text{m}$), se determina la variación de CF, calculando las ecuaciones de Transporte (3.25-3.27). Dicho cálculo se realiza primero con la aproximación lineal de las velocidades hidrodinámicas y luego con la aproximación no lineal del método **HPOF**, para comparar la influencia de los efectos no lineales hidrodinámicos sobre la dinámica del transporte de contaminantes.

Los resultados de la variación temporal de CF en las dos zonas monitoreadas, bajo esta condición, se muestran en las Figuras 8.7a y 8.7b, respectivamente. Se observa la variación de la concentración durante un período mareal teniendo en cuenta la hidrodinámica lineal (curva discontinua) y la no lineal (curva continua). El promedio de las diferencias porcentuales, entre los valores máximos, mínimos y medios, para ambas curvas es del orden del 12% para la zona 1 y del 16% para la zona 2.

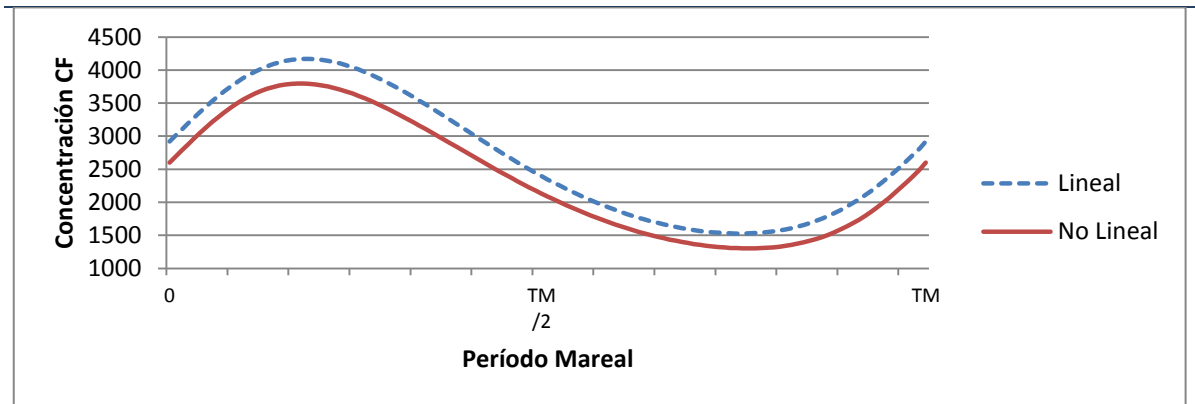


Figura 8.7a: Comparación de valores de concentración con hidrodinámica lineal y no lineal para la Zona 1 ($\eta_c/H_c=0.2$).

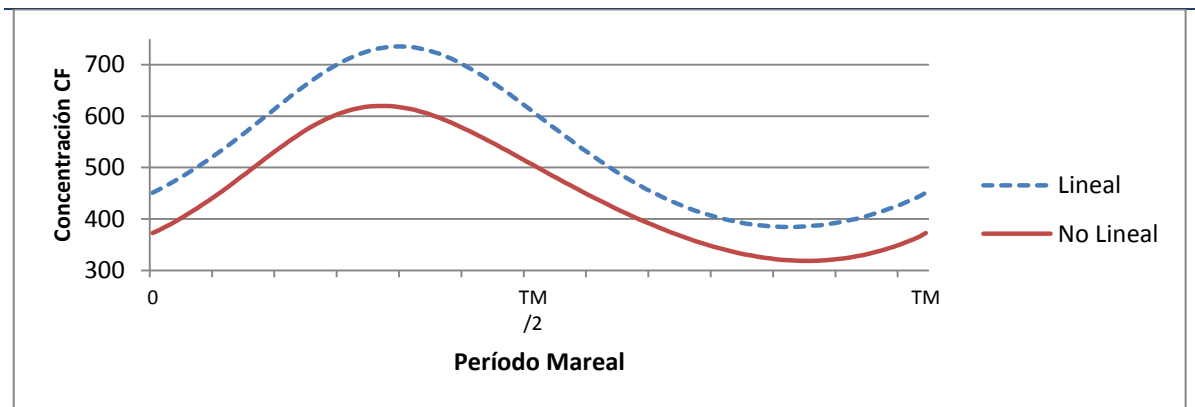


Figura 8.7b: Comparación de valores de concentración con hidrodinámica lineal y no lineal para la Zona 2 ($\eta_c/H_c=0.2$).

8.2.2. Influencia de la distribución espacial y temporal de las descargas en el nivel de las concentraciones existentes.

El comportamiento de los contaminantes dentro de un estuario debido a las descargas de efluentes, ha sido estudiado por diversos autores. Los picos de concentración asociados con el giro de la marea, cuando tales vertidos se realizan de forma constante, son un rasgo característico de la contaminación en estos cuerpos de agua (Smith, 1993).

En tal sentido, es de interés analizar la variación temporal de las descargas durante un período de marea para minimizar tales picos, suponiendo que los efectos negativos disminuyen cuando se logra reducir la concentración máxima, Giles (1995).

De acuerdo a lo planteado, se desarrolla a continuación un ejemplo donde se muestra la variación de CF en cuatro zonas de interés distribuidas sobre la misma línea de costa en un estuario angosto, debido a la descarga de efluentes. El propósito de este ejemplo es analizar la influencia de las descargas en los niveles de concentración para diferentes momentos de la marea,

los efectos de los contaminantes que regresan debido al movimiento oscilatorio del agua y el impacto que se produce en determinados lugares ubicados a cierta distancia de la descarga.

Entonces, es de interés conocer el comportamiento del contaminante debido a la influencia de funciones de descarga de efluentes determinadas bajo distintas políticas de vertido, entre las cuales se formulan las siguientes:

- *Política 1:* Descarga constante del efluente durante en un período de marea, es decir:

$$\beta = 1,$$

- *Política 2:* Descarga variable y continua durante el período mareal, mediante la siguiente función:

$$\beta(t) = 1 + \alpha \cos(\omega t - \phi),$$

donde α es la amplitud, ϕ el desfase con respecto al período mareal y vale $\frac{2\pi}{T_M} \psi$, y ψ es

el retardo.

- *Política 3:* Descarga discontinua (o escalonada), es decir por intervalos determinados dentro de un período mareal. En este caso si se consideran 4 sub intervalos por período T_M (como se ilustra a modo de ejemplo en la Figura 8.8), la función queda restringida de la siguiente forma:

$$\beta(t) = \begin{cases} \beta_1 & \text{si } t \in [0, \frac{T_M}{4}] \\ \beta_2 & \text{si } t \in [\frac{T_M}{4}, \frac{T_M}{2}] \\ \beta_3 & \text{si } t \in [\frac{T_M}{2}, \frac{3T_M}{4}] \\ \beta_4 & \text{si } t \in [\frac{3T_M}{4}, T_M] \end{cases}$$

donde β_1 , β_2 , β_3 y β_4 corresponden a la intensidad de descarga que es vertida en cada cuarto de intervalo de T_M .

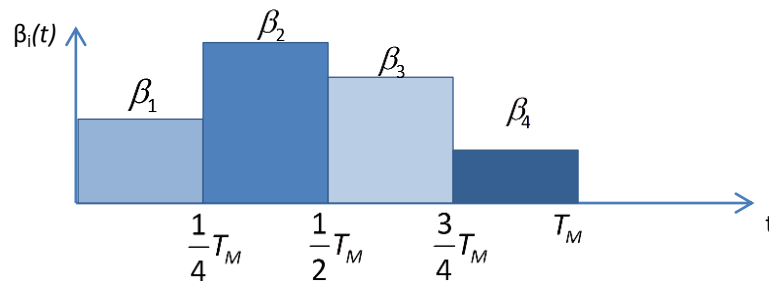
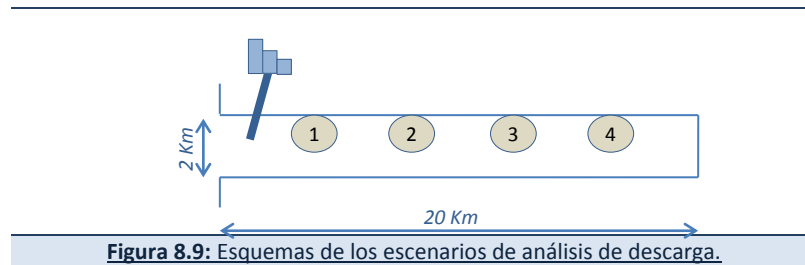


Figura 8.8: Esquema de diseño de planta y capacidad de tratamiento.

Cabe aclarar que en las políticas 2 y 3 la función de descarga media mareal $\bar{\beta}$ debe ser igual 1, ya que no se pretende reducir el vertido.

Se analizan tales políticas para una descarga ubicada en cercanías de la boca del estuario, como se indica en el esquema de la Figura 8.9.



La distribución espacial y temporal de concentración en las cuatro zonas se estima resolviendo mediante el MEF las ecuaciones de transporte para CF (3.25-3.27, para un estuario hipotético angosto con una profundidad constante de 8 m, una marea M2 y una descarga másica M de $8 \times 10^6 \text{ NMP}/100\text{ml} \cdot \text{m}^3/\text{s}$. La simulación se calcula hasta alcanzar el estado estacionario, que en este caso demoró 8 períodos.

-Política 1:

Si se efectúa una descarga constante en la boca del estuario durante un período de marea, la distribución de CF en el tiempo final corresponde a la que se muestra en la Figura 8.10.

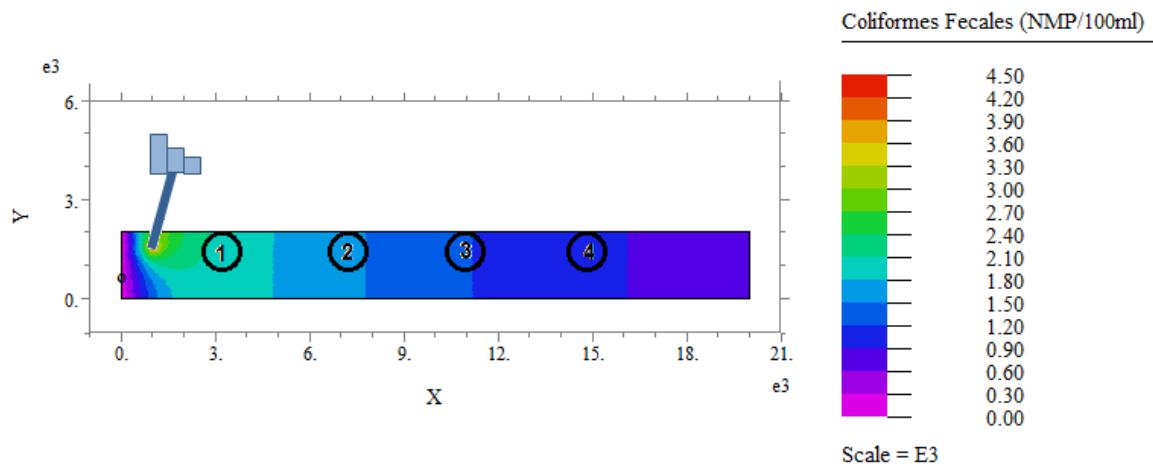


Figura 8.10: Distribución espacial de CF.

Los niveles de concentración máxima temporal en cada una de las cuatro zonas, localizadas a una distancia de 2, 6, 10 y 14 km con respecto a la descarga, son de 2085, 1617, 1226 y 948

NMP/100ml y los valores medios de 1992, 1339, 990 y 782 NMP/100ml, respectivamente. Tales variaciones temporales pueden observarse en las Figuras 8.11a, 8.11b, 8.11c y 8.11d.

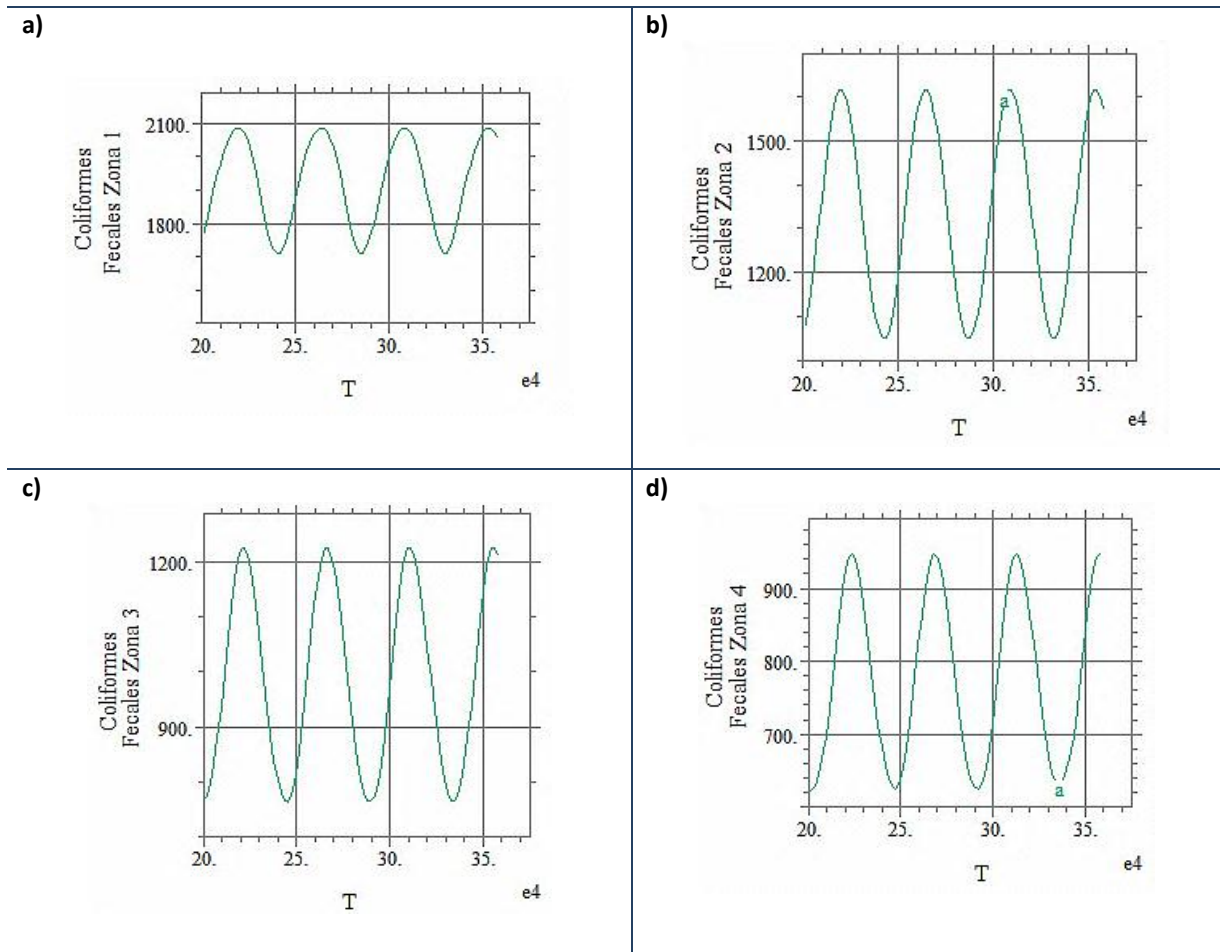


Figura 8.11: Historias temporales de concentración de CF en las 4 zonas de monitoreo.

-Política 2:

Luego se calcula el mismo escenario pero para una descarga variable. En este caso se realizan simulaciones con diferentes funciones de descarga $\beta(t)$, combinando distintos valores de los parámetros α (0.1 a 1) y ψ (0 a 12 horas). Los resultados obtenidos de concentración máxima temporal en las cuatro zonas por cada función de descarga $\beta(t)$ se comparan con los valores máximos estimados con la *política 1*, a los efectos de determinar la influencia de estas dos estrategias en el comportamiento de CF. Para ello se calcula la siguiente relación, expresada en valor porcentual:

$$\tilde{\varepsilon}_i = \frac{C_{i,continua} - C_{i,variable}}{C_{i,continua}} * 100\% \quad (j = 1, \dots, 4) \quad (8.6)$$

Los resultados obtenidos indican que si la descarga se efectúa de forma variable, para valores de α que van de 0.1 a 0.3, a partir de la segunda hasta la quinta hora con respecto al período de la marea como se resume en la Figura 8.12a, se reducen (porcentajes positivos) en la zona 1 hasta un 7% los valores máximos de concentración con respecto a los valores máximos obtenidos de realizar una descarga constante. En las zonas restantes (Figura 8.12b, 8.12c, 8.12d) pueden obtenerse reducciones de niveles máximos de hasta un 15% aproximadamente. Luego, los niveles medios de concentración se reducen un 4% para la zona 1 y alrededor de un 7% para las restantes.

Sin embargo, para los mismos subperíodos de descarga, pero con otros valores de amplitud, los niveles de concentración en la zona 1 aumentan significativamente, es decir hasta un 40% aproximadamente, mientras que en las otras disminuyen entre un 20% y 35%.

Este comportamiento indica que debido a la corta distancia de la zona 1 con respecto al punto del vertido, esta se ve significativamente influenciada por el comportamiento de tal descarga.

Por otra parte, si la descarga se realiza durante otros subperíodos (ψ), dependiendo de los valores de α , los niveles máximos de concentración de CF pueden aumentar desde un 3% hasta un 80 % en la zona más cercana a esta. En las otras zonas sucede un comportamiento similar, donde el aumento en los valores máximos de concentración de CF también son sustanciales, pero menores con respecto a la zona 1, como se observa en la Figura 8.12d.

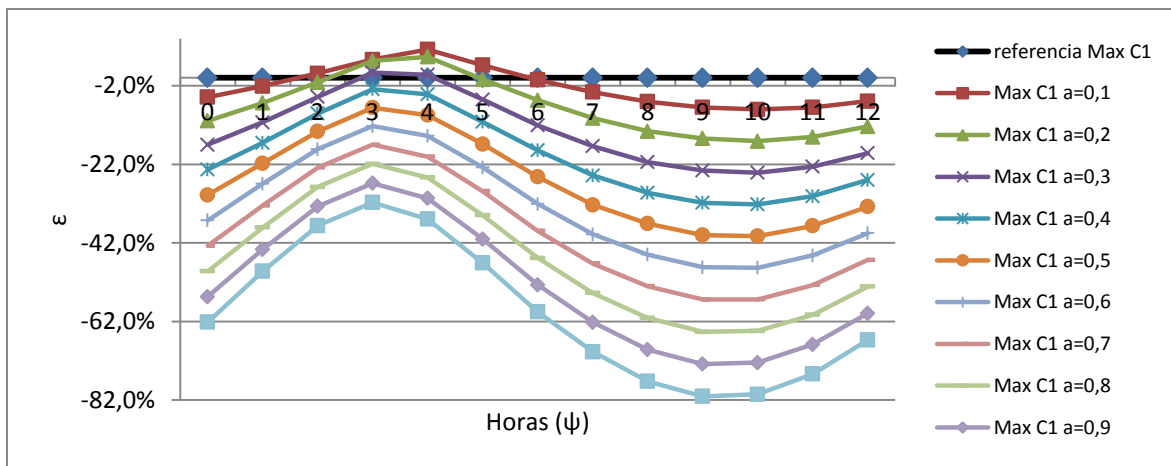


Figura 8.12.a: Comparación porcentual valores máximos entre la política 1 y 2 en la Zona 1.

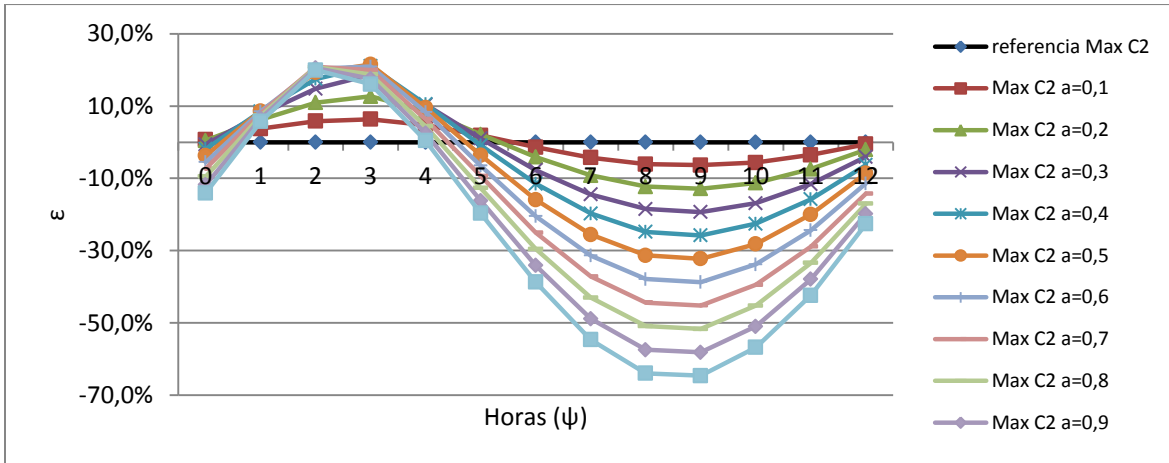


Figura 8.12.b: Comparación porcentual valores máximos entre la política 1 y 2 en la Zona 2.

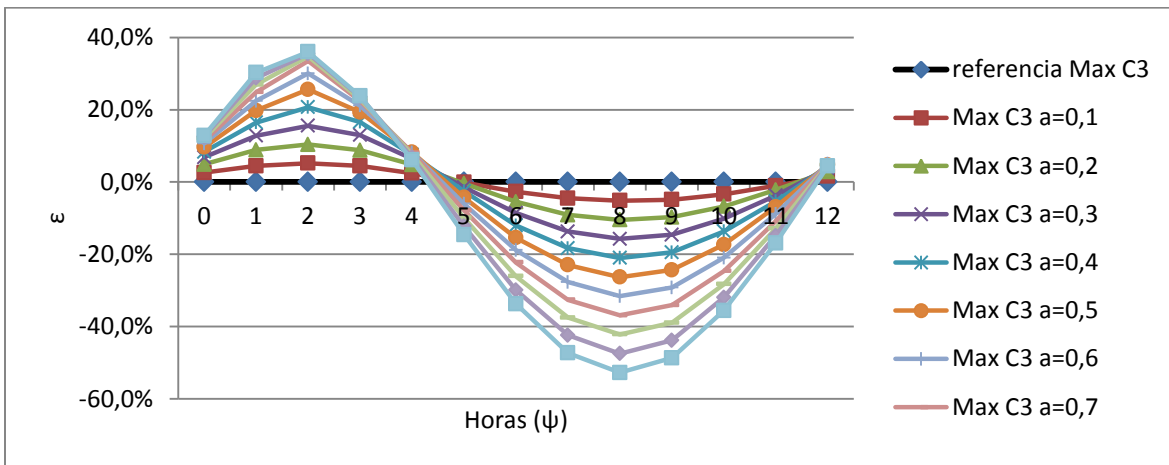


Figura 8.12.c: Comparación porcentual valores máximos entre la política 1 y 2 en la Zona 3.

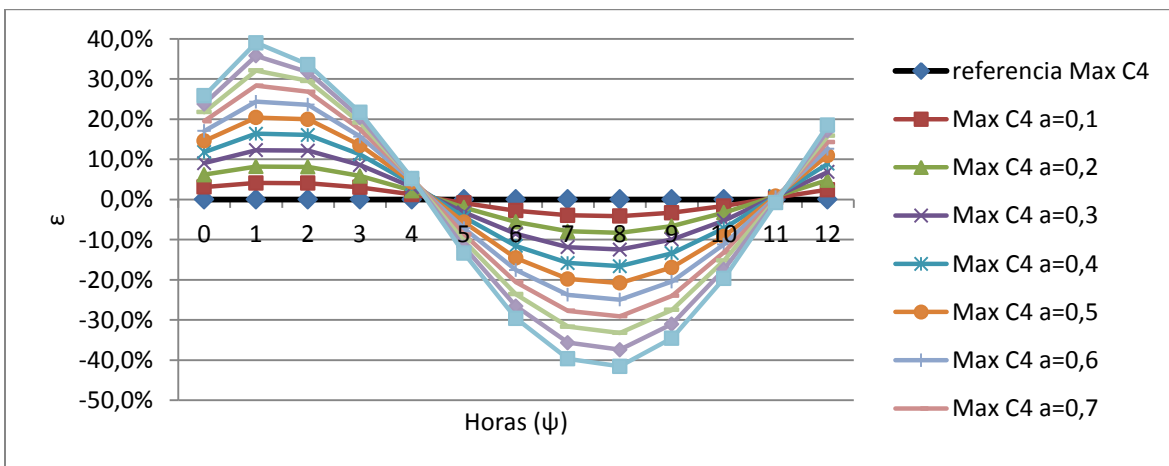


Figura 8.12.d: Comparación porcentual valores máximos entre la política 1 y 2 en la Zona 4.

En la Figura 8.13 se muestra una comparación temporal para la zona 2, de dos funciones de descarga variable (*política 2*), una para un $\alpha = 1$ y $\psi = 2$ horas, llamada $\beta_1(t)$ (curva discontinua roja), y otra para un $\alpha = 0,5$ y $\psi = 6$ horas, llamada $\beta_2(t)$ (curva discontinua verde). Asimismo se grafica también la dinámica mareal (curva celeste) y las variaciones temporales de CF que generan cada una de estas funciones de descarga (curvas continuas roja y verde respectivamente) en dicha zona.

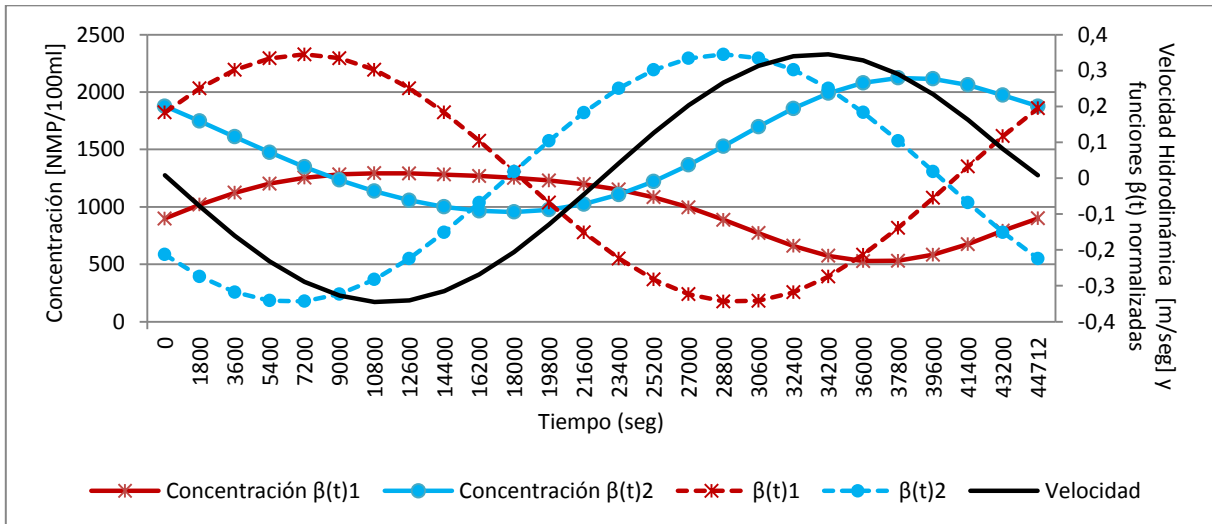


Figura 8.13: Comparación entre la dinámica mareal y funciones de descarga para la zona 2.

Se observa que los comportamientos temporales de las concentraciones 1 y 2, depende de la combinación entre la periodicidad hidrodinámica con las curvas de descarga $\beta(t)_1$ y $\beta(t)_2$.

Si comparamos los valores máximos de CF generados por cada una de estas funciones de descarga, con respecto al valor máximo de concentración generado por una descarga continua (1617 NMP/100ml), vemos que con la forma de la función $\beta(t)_1$ los niveles máximos se reducen un 20% (1295 NMP/100ml), mientras que con una función de la forma de $\beta(t)_2$ los valores aumentan alrededor de un 30% (2123 NMP/100ml).

-Política 3:

La última política consiste en realizar vertidos en determinados intervalos de tiempo durante un período mareal. Se evalúa la variación de los niveles de concentración en las cuatro zonas de acuerdo a la distribución de las descargas dentro de un período, que en este caso se fijó en tres horas cada uno. En este caso el flujo másico puede adoptar diferentes valores en cada subperíodo, pero la cantidad total en el mismo no varía.

Con esta política, si la descarga se realiza durante las primeras tres horas, los niveles máximos de CF con respecto a la misma descarga vertida de forma constante (*política 1*) se incrementan más del doble en la primera zona, se mantiene igual en la segunda zona y se reducen desde un 40% hasta un 50% en las últimas dos, como se observa en la Figura 8.14.

Sin embargo, no sucede lo mismo con los valores medios de concentración para las primeras dos zonas, donde se logran reducciones aproximadas del 25% (1458 NMP/100ml) y 45% (743 NMP/100ml) respectivamente, manteniéndose en un 50% (491 y 387 NMP/100ml) de disminución para las últimas dos.

Si bien con esta política la concentración máxima aumenta significativamente en la zona 1 con respecto al 7% obtenido en la *política 2* para la misma zona, la reducción de los niveles de concentración media son ampliamente superiores frente al 4% de la política anterior.

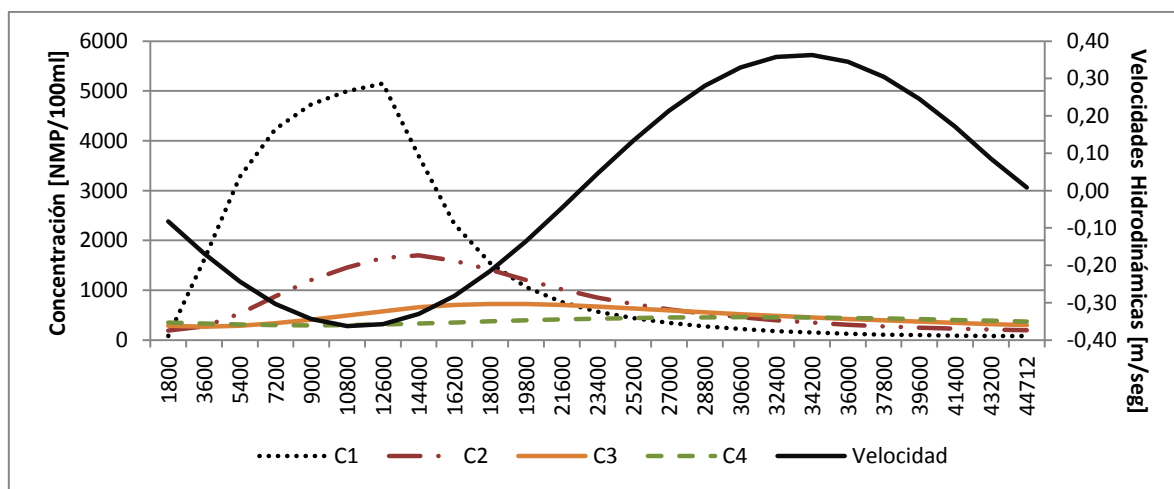


Figura 8.14: Evolución temporal de CF.

Finalmente, a modo comparativo en la Figura 8.15 se grafican los comportamientos de las descargas entre la *política 2* (descarga variable) para la función $\beta_1(t)$ y la *política 3* (descarga escalonada), con respecto a la dinámica de la marea. Se observa el desfase de aproximadamente dos horas con respecto al período de la marea, de la descarga $\beta_1(t)$ (12600seg. - 7200seg.). Esto significa que si se descarga dos horas antes del momento en el que la marea alcanza su mayor amplitud, los niveles de CF medios serán menores en la zona más cercana a la descarga, mientras que para una descarga intermitente o escalonada, la misma debe efectuarse únicamente en el primer sub-intervalo mareal, es decir durante el momento en el cual la marea se encuentra en vaciante (reflujo).

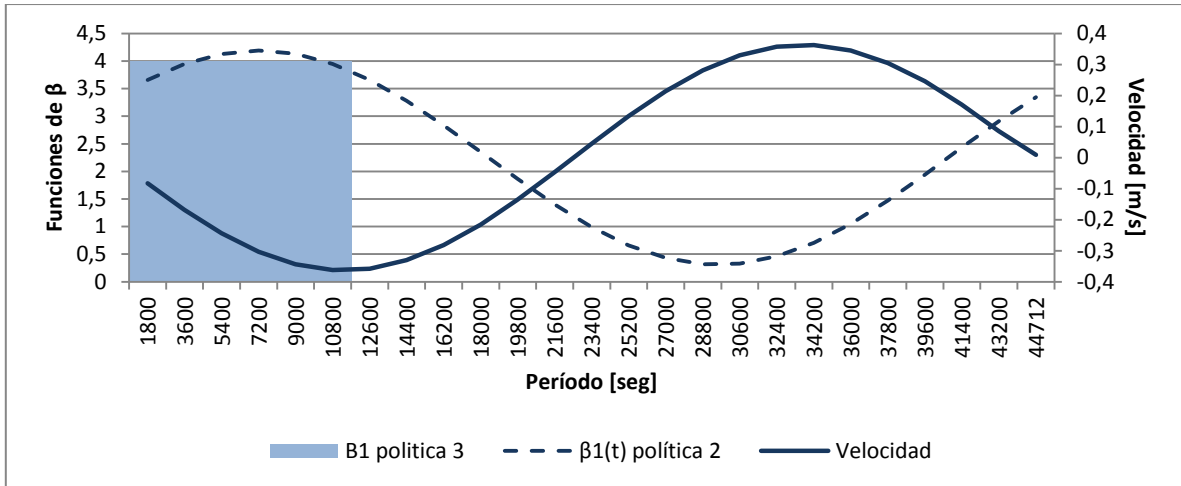


Figura 8.15: Comportamientos de descargas variable y escalonada en la boca del estuario.

- Observaciones concluyentes:

Mediante el desarrollo de este ejemplo, se mostró que de acuerdo a la política de descarga que se adopte en el diseño de plantas de tratamiento, los niveles de concentración en determinadas zonas presentan variaciones, que en algunos casos resultan ser significativos. Sin embargo, si bien es posible, con el desarrollo de estos casos, realizar una estimación general del comportamiento de un contaminante dentro de un estuario, tal predicción deja de ser general cuando se consideran además otros factores como un mayor número de fuentes de descarga, la ubicación de estas en distintos sectores, otros indicadores de calidad de agua, la variación del lecho marino, meandros, etc. En tal sentido es conveniente el empleo del diseño óptimo que permite tomar decisiones en el desarrollo de políticas de descarga, teniendo en cuenta diversos factores y sus relaciones.

8.3. SOLUCIÓN A LOS PROBLEMAS DE DISEÑO ÓPTIMO.

Se desarrollan a continuación tres problemas de diseño óptimo para el control y mantenimiento de la calidad de agua en estuarios, bajo el enfoque de Simulación-Optimización. Se procura seleccionar el método de solución más apropiado al problema de transporte, en función de las características de diseño que presenta cada uno de estos problemas. Tales métodos, que a su vez hacen uso del método **HPOF** para el cálculo de las velocidades hidrodinámicas, son aplicados en esta sección a cada problema bajo el siguiente orden:

En la subsección 8.3.1 se plantean tres ejemplos de diseño, los cuales son abordados utilizando el método **AT-O**, que consiste en la combinación de los métodos Adjunto de Transporte (**AT**) y el método de optimización de “recocido simulado” (**SA**), para determinar concentraciones medias espaciales y temporales de CF, DBO y OD debido a descargas constantes.

En la subsección 8.3.2 se desarrollan dos ejemplos de diseño mediante la aplicación del método **FDT-O**, recordando que el mismo consiste en la combinación entre el desarrollo de Fourier en las ecuaciones de Transporte (**FDT**) y el método **SA**. De esta forma es posible determinar el comportamiento de los indicadores de calidad de agua en las zonas protegidas debido a descargas temporales. Se muestra la efectividad del enfoque propuesto en función del número de vertidos de efluentes y de zonas protegidas.

Finalmente, en la subsección 8.3.3 se da otro ejemplo de diseño, también para descargas temporales, mediante el método **FAT-O**. Consiste en la combinación de Series de Fourier en las ecuaciones Adjuntas de Transporte (**FAT**) y el método de **SA**. En este caso se determinan niveles medios de concentración espacial y temporal debido a posibles ubicaciones de descarga.

En cada uno de estos problemas de diseño, con geometrías y características hidrodinámicas distintas, los métodos de solución empleados son validados con el método **DT**, recordando que este último corresponde a la solución del problema de Transporte, hasta alcanzar el estado estacionario, mediante el MEF. Asimismo, se comparan los tiempos de simulación de cada uno y se discuten los resultados obtenidos de los problemas de diseño propuestos.

8.3.1. Utilización del método Adjunto de Transporte (AT-O).

Se considera en forma idealizada un estuario de profundidad constante de 20 m, cuyo dominio longitudinal de 35km se extiende desde la cabecera hasta una línea imaginaria en la boca. El ancho en el interior es de 2 km aproximadamente, aumentando hasta llegar a 25 Km en el límite con el mar abierto donde una onda de marea, de escala semidiurna S_2 , ingresa a través de la

desembocadura generando una elevación de 1 m de amplitud. En la cabeza del estuario un río descarga agua dulce sin carga contaminante a una velocidad de 0.3 m/s.

Tres tuberías submarinas que provienen de ciudades aledañas vierten efluentes cuyas descargas másicas de CF y de DBO son de 8×10^7 , 8×10^7 y 6×10^7 (NMP/100ml) m^3/s y 152, 192 y 24 Kg/s, respectivamente. Se pretende proteger tres zonas dentro del estuario, que pueden tener especial interés desde el punto de vista recreativo, económico o ecológico.

En la Figura 8.16 se muestra la geometría (a escala) del estuario, así como las ubicaciones de las descargas, identificadas con cruces negros, y las zonas protegidas, indicadas con círculos.

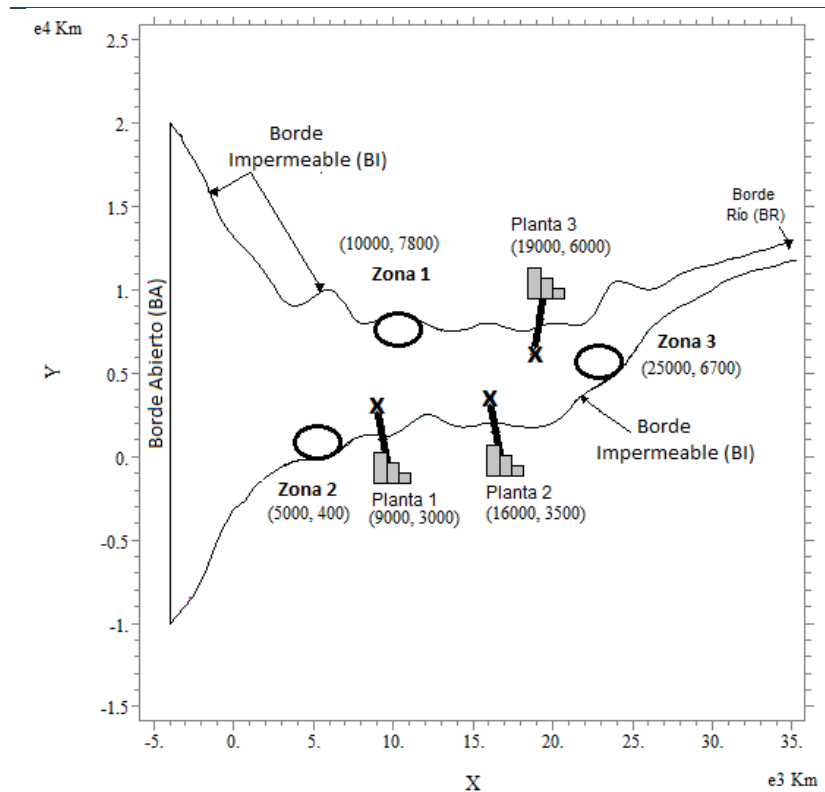


Figura 8.16: Estuario y batimetría bajo análisis (AT).

8.3.1.1. Validación del método AT.

Con este escenario, se calculan las corrientes hidrodinámicas del estuario a los efectos de poder obtener luego las concentraciones medias espaciales y temporales de CF, DBO y OD. Considerando la extrema pequeñez del cociente e (8.4), las velocidades se obtienen utilizando la aproximación lineal del método HPOF (5.39-5.40). Luego se aplica el método DT (3.25-3.27) con los siguientes parámetros de transporte: coeficiente de dispersión $K=2000 \text{ m}^2/\text{s}$, constante de

degradación de CF $\sigma_1=2 \times 10^{-5} \text{s}^{-1}$ y de DBO $\sigma_2=1.15 \times 10^{-5} \text{s}^{-1}$ y constante de reaeración de OD $\sigma_3=9 \times 10^{-6} \text{s}^{-1}$.

Posteriormente se resuelve para la misma situación el método **AT** (6.10-6.12) y (6.26-6.28), se determinan las concentraciones medias espaciales y temporales en cada una de las tres zonas protegidas y se comparan los resultados obtenidos con aquellos calculados mediante solución del método **DT**, a los efectos de verificar la consistencia del enfoque propuesto. Los mismos se muestran en la Tabla 8.1, donde es posible observar que las diferencias entre ambos modelos son del orden del 2%.

Concentración media temporal de:	Método DT	Método AT	Diferencia Porcentual
CF en Zona 1 (NMP/100 ml)	1856	1827	1,6%
CF en Zona 2 (NMP/100 ml)	1333	1307	2,0%
CF en Zona 3 (NMP/100 ml)	1217	1189	2,3%
DBO en Zona 1 (Kg/m ³)	4,23E-03	4,16E-03	1,7%
DBO en Zona 2 (Kg/m ³)	3,19E-03	3,12E-03	2,1%
DBO en Zona 3 (Kg/m ³)	2,24E-03	2,19E-03	2,3%
OD en Zona 1 (Kg/m ³)	6,19E-03	6,16E-03	0,5%
OD en Zona 2 (Kg/m ³)	6,94E-03	6,87E-03	1,1%
OD en Zona 3 (Kg/m ³)	7,11E-03	7,05E-03	0,9%

Tabla 8.1: Comparación entre los valores de concentraciones medias en zonas protegidas (DT - AT).

La simulación de las concentraciones medias temporales de los tres indicadores ambientales realizada con el método **DT** requiere un tiempo de cálculo de 110 minutos. Vale decir que en un proceso de optimización, el tiempo total corresponde al producto entre la simulación numérica de las ecuaciones de transporte por la cantidad de iteraciones, lo que lo convierte en un enfoque computacionalmente caro por su vasta demanda en tiempo de cálculo.

El método **AT** para las mismas condiciones demanda un total de 330 minutos. Si bien este último es mayor, resulta ser mucho más expeditivo debido a que el cálculo de las funciones de influencia $G_i(x,y,t)$ para cada una de las zonas protegidas se realiza una sola vez, permitiendo contemplar diferentes situaciones posibles de diseño en el mismo tiempo cálculo, mientras que el método **DT** debe calcularse para cada nueva situación posible.

8.3.1.2. Método AT-O: Ejemplos de problemas de diseño óptimo.

Los valores de concentración media en cada zona protegida indicados en la Tabla 8.1, muestran que los mismos no se encuentran dentro de los niveles de admisibilidad, que en este caso corresponden a $C_{admCF}=1000$ NMP/100ml, $C_{admDBO}=3 \times 10^{-3}$ Kg/m³ y en $C_{admOD}=7.5 \times 10^{-3}$ Kg/m³.

Por tal motivo se deben reducir las cargas contaminantes de los efluentes que son vertidos al estuario mediante el diseño adecuado de plantas de tratamiento, a los efectos de garantizar niveles medios espaciales y temporales de CF, DBO y OD dentro de los límites de admisibilidad.

Se plantean tres problemas de diseño basadas en aquellas desarrolladas en la *Sección 2.5*, recordando que las primeras dos corresponden a la minimización de los costos económicos, mediante la determinación óptima de funciones de descarga de efluentes urbanos en estuarios, y la tercera alternativa, persigue la minimización de la concentración en las zonas protegidas.

Para resolver tales problemas de diseño, bajo el enfoque de Simulación-Optimización mediante el método **AT-O**, se realiza el procedimiento que se indicó en la Figura 6.1, en combinación con el algoritmo de optimización desarrollado en la Figura 4.7. De esta forma se realiza la búsqueda de las variables de diseño que minimizan la función objetivo, de acuerdo a la formulación matemática general planteada en (2.8-2.9). Para cada situación posible de diseño, se verifica el cumplimiento de los niveles de medios temporales y espaciales de CF, DBO y OD mediante el cálculo de las funciones analíticas (6.3 y 6.4), como fue explicado oportunamente en el Capítulo VI.

A continuación se formulan los tres problemas de diseño.

8.3.1.2. A. Ejemplo 1 basado en AT-O. Diseño con funciones de descargas constantes.

Se considera que las funciones de descarga no varían con el tiempo, y a su vez el flujo másico M_j que ingresa a la planta es constante, por lo que interesa conocer la capacidad de la planta y los costos de inversión y funcionamiento asociados a dicha capacidad. De esta forma, el problema de diseño que se calcula se formula de la siguiente manera:

$$\text{Minimizar} \quad FO(\beta_j) = \sum_{j=1}^{ND} M_j^2 (1 - \beta_j)^2 \quad ND=1,2,3 \quad , \quad (8.7)$$

Sujeto a:

$$\begin{aligned} 0 \leq \beta_j \leq 1 & \quad \in \Omega_j \quad j = 1, 2, \dots, ND \quad , \\ \bar{C}_{CF_j} \leq C_{admCF} \quad , \quad \bar{C}_{DBO_i} \leq C_{admDBO} \quad , \quad \bar{C}_{OD_i} \geq C_{admOD} & \quad \in \Omega_i \quad i = 1, 2, \dots, NP \quad , \end{aligned}$$

donde la función (8.7) indica que los costos de inversión y funcionamiento son proporcionales a la depuración. Se asume un factor de economía de escala cuadrático y no se prevé la construcción de una tubería.

Con el procedimiento de optimización **AT-O**, se obtienen los resultados de diseño óptimo que se indican en la Tabla 8.2. Asimismo, se muestran también los resultados correspondientes a otra opción factible arbitraria (es decir, que origina concentraciones admisibles en las zonas protegidas).

Método AT-O		Solución óptima	Solución factible
Factor de reducción en las tasas de vertido	β_1	0,55	0,1
	β_2	0,25	0,1
	β_3	0,75	0,4
Función objetivo Valores en ($\$/m^3/s$) ²		0,4484	1,1921
Concentración media CF en Zona 1 < 1000 (NMP/100 ml)		916	357
Concentración media CF en Zona 2 < 1000 (NMP/100 ml)		665	198
Concentración media CF en Zona 3 < 1000 (NMP/100 ml)		670	316
Concentración media DBO en Zona 1 < 3×10^{-3} (Kg/m ³)		2,73E-03	1,65E-03
Concentración media DBO en Zona 2 < 3×10^{-3} (Kg/m ³)		2,11E-03	1,39E-03
Concentración media DBO en Zona 3 < 3×10^{-3} (Kg/m ³)		8,53E-04	3,26E-04
Concentración media OD en Zona 1 > 7.5×10^{-3} (Kg/m ³)		7,58E-03	8,30E-03
Concentración media OD en Zona 2 > 7.5×10^{-3} (Kg/m ³)		7,78E-03	8,24E-03
Concentración media OD en Zona 3 > 7.5×10^{-3} (Kg/m ³)		7,92E-03	8,32E-03
Tabla 8.2: Resultados del problema de diseño 1.			

Los valores óptimos se alcanzaron mediante una búsqueda del orden de 800 iteraciones lo cual implicó un tiempo de cálculo de aproximadamente 1 minuto. De esta forma, considerando además el tiempo que demanda la simulación de las funciones de influencia, el proceso computacional total de cálculo es de 331 minutos.

Si bien los niveles de concentración para CF y DBO obtenidos con la solución factible son menores (y mayores para OD), que las calculadas con la solución óptima, es claro apreciar que la función objetivo es mucho menor para el caso optimizado, lo que implica un menor costo económico de construcción.

En las siguientes Figuras 8.17, 8.18 y 8.19 se muestran las comparaciones de variación temporal de CF, DBO y OD entre la solución óptima y la factible para la zona 1, respectivamente, donde se observa que tales niveles se reducen con respecto a la situación de base, como es de esperar. En esta zona los valores medios se encuentran próximos a los límites admisibles. En las otras zonas también se verifica el cumplimiento de los indicadores ambientales, sin embargo los niveles medios de CF y DBO se hallan un

poco más alejados de tales límites. Esto se debe a que la zona 1 se encuentra más influenciada por las descargas de los efluentes aledaños. Consecuentemente, en el proceso de verificación de las restricciones, dicha zona rige sobre las restantes, lo que ocasiona que en las zonas 2 y 3 tales niveles sean más bajos.

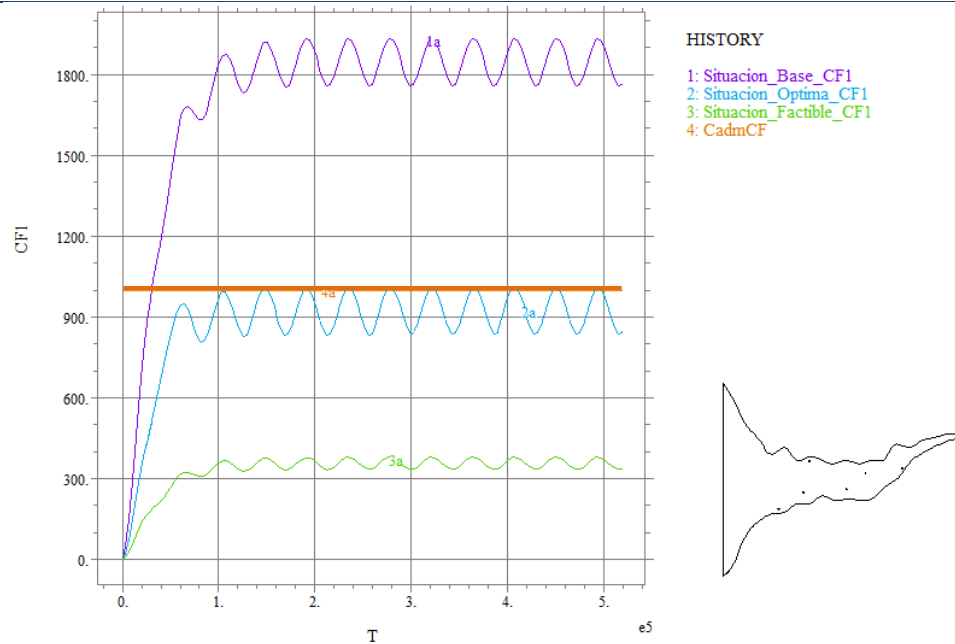


Figura 8.17: Concentración de CF en la zona 1 del problema de diseño 1 (AT-O).

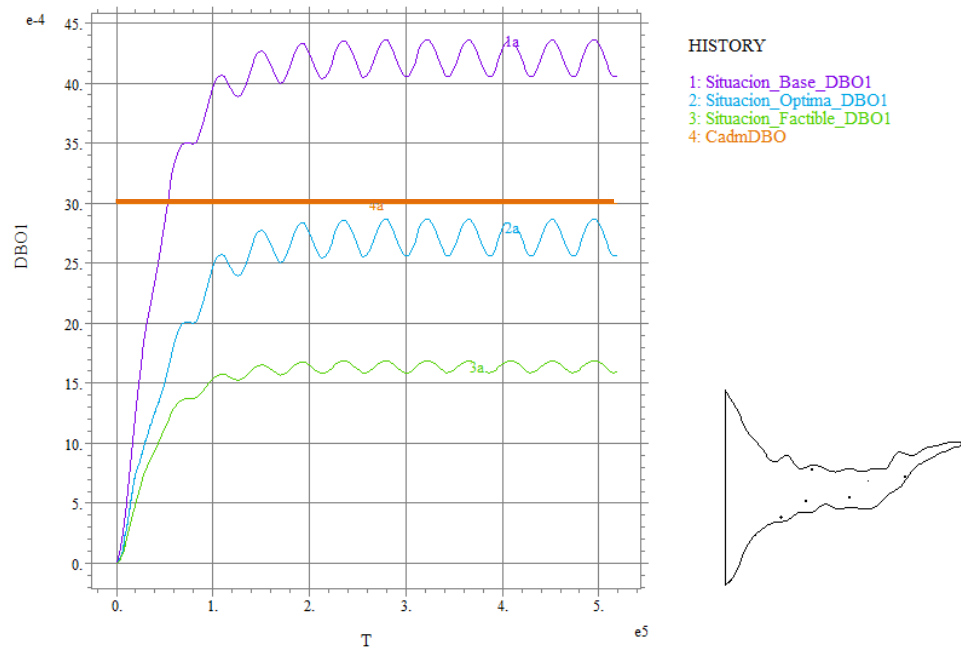


Figura 8.18: Concentración de DBO en la zona 1 del problema de diseño 1 (AT-O).

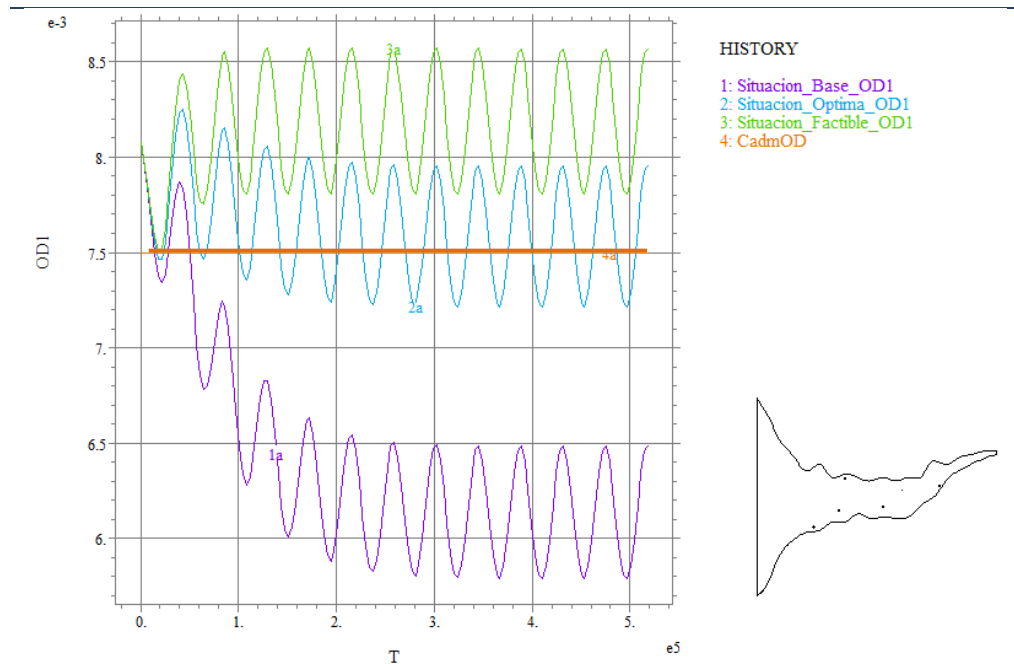


Figura 8.19: Concentración de OD en la zona 1 del problema de diseño 1 (AT-O).

El procedimiento de búsqueda que realiza el método **SA** (“recocido simulado”) hasta encontrar la función objetivo mínima (FO_{\min}), cuyas variables de diseño indicadas en la Tabla 8.2 verifican las restricciones ambientales, se muestra en la Figura 8.20.

Se observa que el valor mínimo obtenido en cada iteración se va almacenando. Sin embargo, cuando la función objetivo empeora (aumenta), la solución puede ser aceptada (FO_{anterior}) si cumple con cierta probabilidad. Este último paso es el que impide que la búsqueda quede atrapada en un mínimo local, como se explicó oportunamente en el *Capítulo IV*.

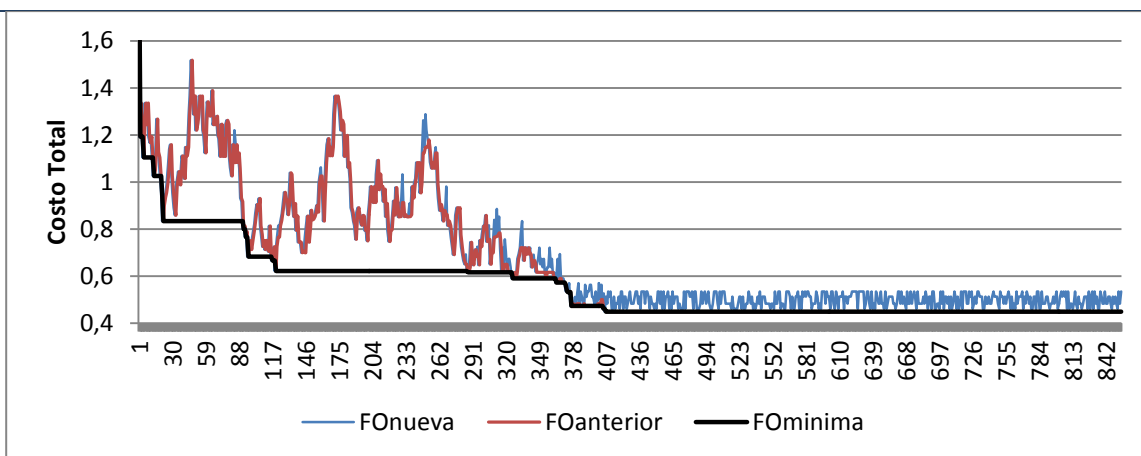


Figura 8.20: Evolución de la Función Objetivo en el proceso de optimización del problema de diseño 1(AT-O).

8.3.1.2. B. Ejemplo 2 basado en AT-O: Diseño con funciones de descarga variables temporalmente.

Se consideran que las funciones de descarga ($\beta_j(t)$) dependen del tiempo y que el flujo másico que llega a la planta es constante (M_j), debiéndose determinar los costos operativos asociados a dicha variación. De esta forma, la función objetivo es la siguiente:

$$\text{Minimizar } FO(\beta_j(t)) = \sum_{j=1}^{ND} \frac{M_j^2 \int_0^{T_M} (1 - \beta_j(t))^2 dt}{T_M} \quad ND=1,2,3 \quad (8.8)$$

Sujeto a:

$$\beta_j(t) \text{ funciones } T_M \text{ periódicas positivas} \quad \in \Omega_j \quad j=1,2,\dots,ND$$

$$\frac{\int_0^{T_M} \beta_j(t) dt}{T_M} \leq 1 \quad \in \Omega_j \quad j=1,2,\dots,ND$$

$$\bar{C}_{CF_j} \leq C_{admCF} \quad , \quad \bar{C}_{DBO_j} \leq C_{admDBO} \quad , \quad \bar{C}_{OD_j} \geq C_{admOD} \quad \in \Omega_j \quad i=1,2,\dots,NP$$

En este caso se permite que la descarga másica de cada planta pueda adoptar 4 valores diferentes para cada subintervalo mareal, como se explicó con anterioridad en las políticas de descarga de los ejemplos de la sección 8.2.2 para descargas escalonadas.

Se resuelve el problema con el procedimiento **AT-O**, a partir de la bajamar. La búsqueda de las variables óptimas demoró menos de 1 minuto evaluando un poco más de 800 iteraciones. Los resultados obtenidos que se indican en la Figura 8.21a. Asimismo, en la Figura 8.21b se muestran los obtenidos para otra opción factible arbitraria.

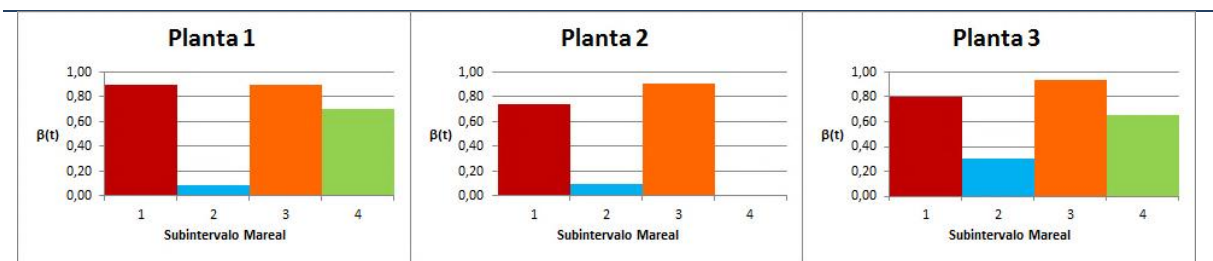


Figura 8.21a: Distribución temporal de la descarga óptima para el Problema de Diseño 2 (AT-O).

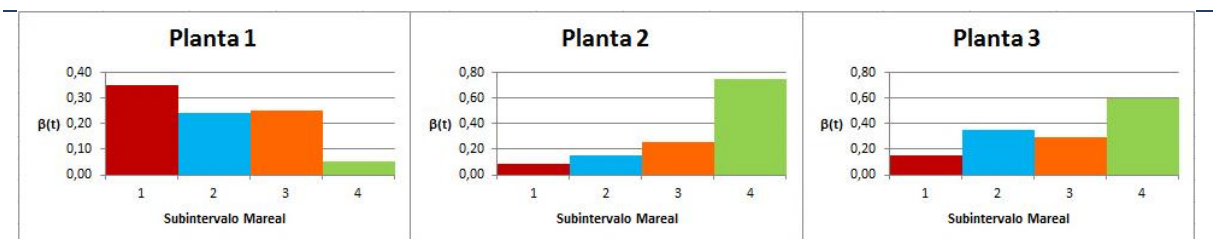


Figura 8.21b: Distribución temporal de la descarga factible para el Problema de Diseño 2 (AT-O).

De esta forma, si cada planta varía su descarga, las concentraciones medias espaciales y temporales vienen dadas por los valores que se indican en la Tabla 8.3, donde se observa que en todas las zonas protegidas se verifica el cumplimiento de los límites de admisibilidad para cada indicador de calidad de agua.

Método AT-O	Solución óptima	Solución factible
Concentración media CF en Zona 1 < 1000 (NMP/100 ml)	897	590
Concentración media CF en Zona 2 < 1000 (NMP/100 ml)	659	357
Concentración media CF en Zona 3 < 1000 (NMP/100 ml)	586	421
Concentración media DBO en Zona 1 < 3×10^{-3} (Kg/m ³)	2,52E-03	1,29E-03
Concentración media DBO en Zona 2 < 3×10^{-3} (Kg/m ³)	1,45E-03	8,49E-04
Concentración media DBO en Zona 3 < 3×10^{-3} (Kg/m ³)	8,74E-04	7,25E-04
Concentración media OD en Zona 1 > 7.5×10^{-3} (Kg/m ³)	7,54E-03	7,77E-03
Concentración media OD en Zona 2 > 7.5×10^{-3} (Kg/m ³)	7,68E-03	7,82E-03
Concentración media OD en Zona 3 > 7.5×10^{-3} (Kg/m ³)	7,86E-03	7,96E-03
Función objetivo Valores en ($\$ * m^3/s$) ²	0,29	0,83

Tabla 8.3: Resultados del problema de diseño 2 (AT-O).

Al igual que en el ejemplo anterior, el cumplimiento de las restricciones ambientales de la zona 1 manda sobre las restantes.

En las Figuras 8.22, 8.23 y 8.24, se muestra la comparación entre la situación base, la situación óptima y una situación factible de las concentraciones medias de CF, DBO y OD, respectivamente, de la zona 1.

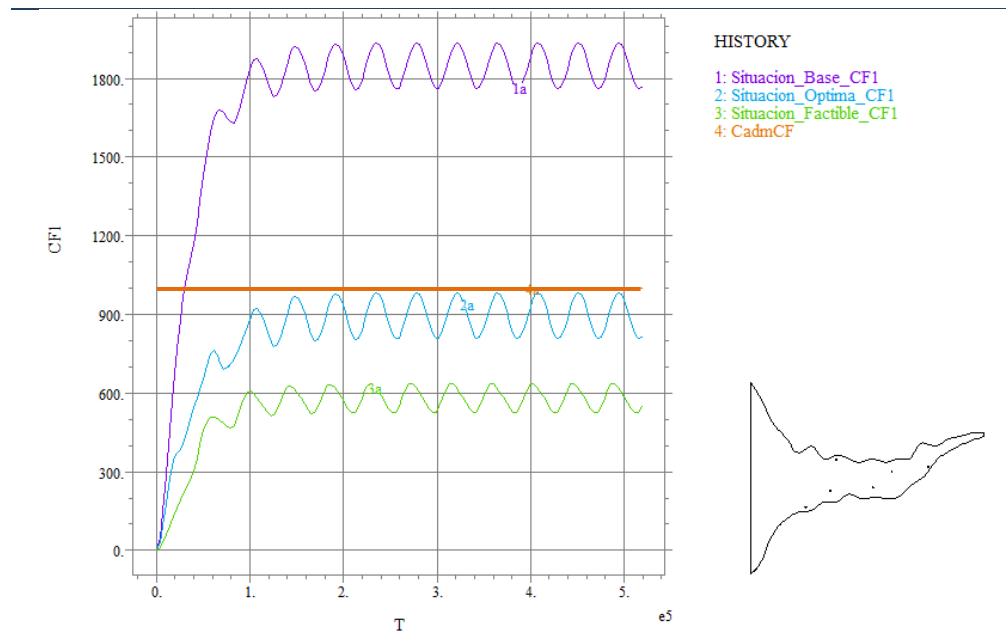


Figura 8.22: Concentración de CF en la zona 1 del segundo problema de diseño 2 (AT-O).

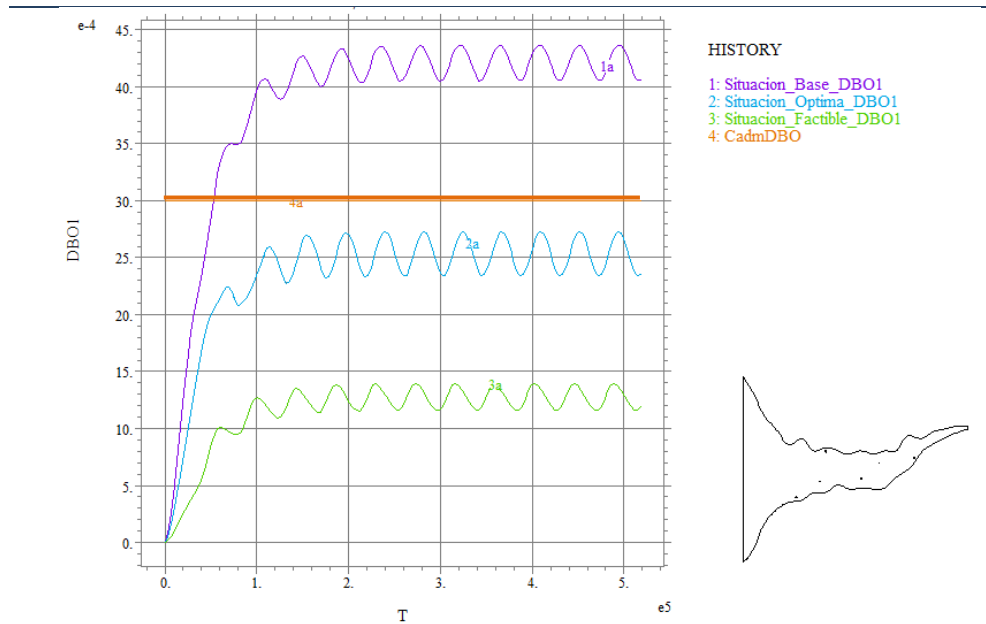


Figura 8.23: Concentración de DBO en la zona 1 del segundo problema de diseño 2 (AT-O).

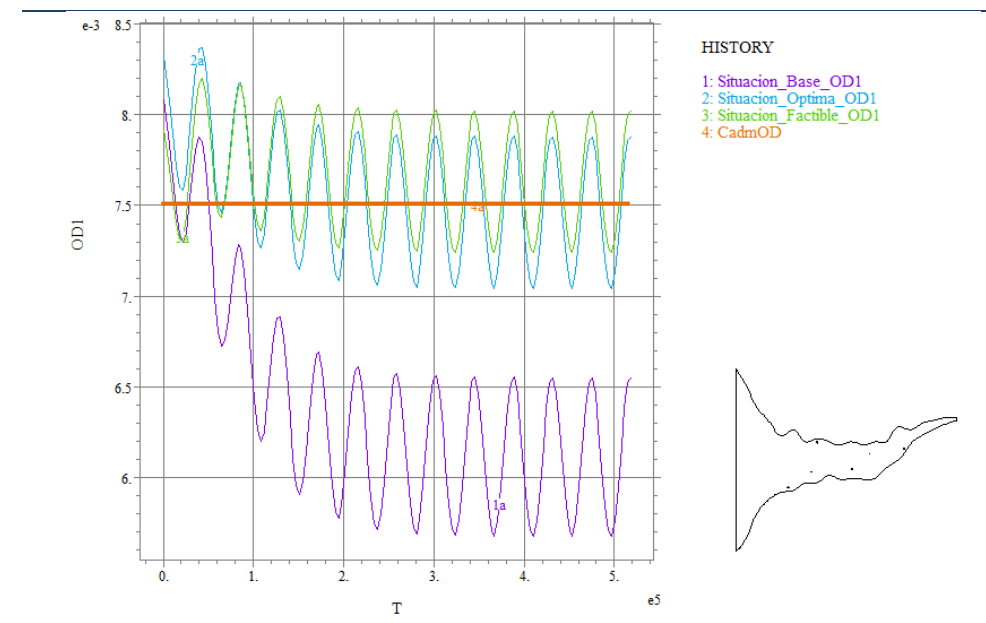


Figura 8.24: Concentración de OD en la zona 1 del segundo problema de diseño 2 (AT-O).

8.3.1.2.C. Ejemplo 3 basado en AT-O: Diseño para la reducción del impacto ambiental.

En este caso se considera que los niveles de descarga másica de los vertidos de efluentes ya han sido reducidos y verifican el cumplimiento de las restricciones ambientales. Sin embargo, debido a políticas ambientales más estrictas, se pretende reducir aún más la concentración de contaminantes en las zonas protegidas (ver Figura

8.16) aprovechado la dinámica de las corrientes de marea. Es decir, el objetivo en este caso es la disminución del impacto ambiental.

En tal sentido, se consideran para este ejemplo los valores constantes de descarga másica efectiva $M_j^e = \beta_j(t)\bar{M}_j$, que fueron calculados en el **Ejemplo 1**, siendo la función objetivo a minimizar la siguiente:

$$\text{Minimizar} \quad FO(\beta_j(t)) = \frac{\sum_{i=1}^{NP} \bar{C}_i}{NP} \quad NP=1,2,3 \quad , \quad (8.9)$$

Por lo tanto, el problema consiste en obtener las funciones de descarga $\beta_j(t)$ sujetas a la restricción (2.20), que asegura que la descarga total del vertido no varíe.

Al igual que en los problemas anteriores, la evaluación de las restricciones ambientales se realiza mediante el procedimiento **AT-O**.

Finalmente se resuelve problema donde, a los efectos de minimizar el impacto ambiental, tales flujos másicos se redistribuyen en el período de marea. Para ello se supone que el flujo másico para cada una de las plantas puede adoptar diferentes valores en cada subperíodo de tres horas. El resultado del enfoque de optimización se muestra en la Figura 8.25.

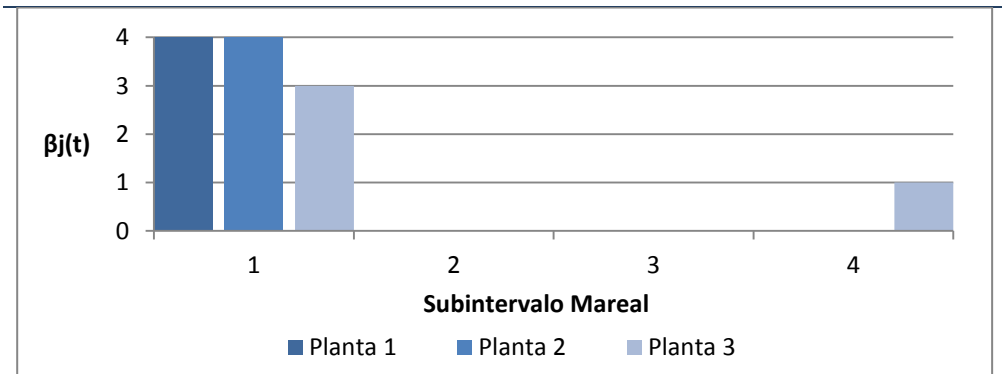


Figura 8.25: Distribución temporal de la descarga para el problema de diseño 3 (AT-O).

De acuerdo a este resultado las plantas 1 y 2 deben realizar la descarga másica solamente en uno de los intervalos de tres horas en que se ha subdividido el período mareal, es decir en el primero, mientras que la planta 3 debe descargar el 75% durante el primer intervalo y el 25% restante en el cuarto. Debe notarse que para la definición de los coeficientes de reducción se ha comenzado a considerar el período mareal a partir de la bajamar.

Con las descargas optimizadas se calculan las concentraciones medias en las zonas protegidas, obteniendo valores de concentración que se muestran en la Tabla 8.4:

Método AT-O	Solución óptima Problema 1	Solución óptima Problema 3	Reducción impacto ambiental
Concentración media de CF en Zona 1 < 1000 (NMP/100 ml)	916	668	27%
Concentración media de CF en Zona 2 < 1000 (NMP/100 ml)	665	460	31%
Concentración media de CF en Zona 3 < 1000 (NMP/100 ml)	670	487	27%
Concentración media de DBO en Zona 1 < 3×10^{-3} (Kg/m ³)	2,73E-03	1,83E-03	33%
Concentración media de DBO en Zona 2 < 3×10^{-3} (Kg/m ³)	2,11E-03	1,39E-03	34%
Concentración media de DBO en Zona 3 < 3×10^{-3} (Kg/m ³)	8,53E-04	5,61E-04	34%
Concentración media de OD en Zona 1 > 7.5×10^{-3} (Kg/m ³)	7,58E-03	7,81E-03	3%
Concentración media de OD en Zona 2 > 7.5×10^{-3} (Kg/m ³)	7,78E-03	7,86E-03	1%
Concentración media de OD en Zona 3 > 7.5×10^{-3} (Kg/m ³)	7,92E-03	8,00E-03	1%

Tabla 8.4: Resultados del problema de diseño 3 (AT-O).

Esto permite deducir que si el mismo volumen de aguas servidas es distribuido apropiadamente en el período mareal, el impacto ambiental decrece.

8.3.1.3. Discusión de los resultados de los problemas de diseño óptimo resueltos con el método AT-O.

Se ha formulado el diseño las plantas de tratamiento de aguas residuales urbanas descargando en un estuario, como un problema de optimización. Dicho enfoque, implementado computacionalmente de manera adecuada, permite el cumplimiento de las exigencias ambientales y al mismo tiempo la generación de alternativas de mayor economía, o a la inversa, para una dada posibilidad económica permite lograr el mínimo impacto ambiental.

Se analizaron tres problemas de diseño. El primero corresponde a la determinación de descargas constantes en el tiempo. Los últimos dos en cambio permiten la variación temporal de las descargas, lo que potencialmente puede conducir a una eficiencia mucho mayor de la planta de depuración ya que se aprovecha también la dinámica de las corrientes mareales para minimizar el impacto ambiental.

Se ha demostrado que la aplicación del método **AT-O** resulta ser muy conveniente puesto que conduce a fórmulas analíticas para la determinación de las concentraciones medias, lo que hace posible evaluar una enorme cantidad de alternativas de diseño (del orden de mil) en muy poco tiempo (aproximadamente un minuto). El cálculo total para la obtención de las tres funciones de influencia (una por cada zona protegida) para cada indicador ambiental fue de 330 minutos. Dicho cálculo debe realizarse una sola vez, a diferencia de la solución del método **DT** que demanda 110 minutos en el cálculo de cada alternativa de diseño posible. Esto último en con contexto de diseño óptimo, es computacionalmente costo.

8.3.2. Utilización del método de Fourier aplicado al Problema de Transporte (FDT-O).

Cuando las descargas de efluentes que se vierten en los estuarios son periódicas, se puede emplear el método **FDT** que permite determinar el comportamiento temporal de los indicadores de calidad de agua en determinadas zonas de resguardo ambiental.

Se considera un estuario de geometría similar a la utilizada en la *Sección 8.3.1*, a diferencia de que en este ejemplo se considera una batimetría variable y se desprecia el aporte de un río. La misma presenta una profundidad máxima en el límite con el mar abierto de 13 m, disminuyendo hacia el interior hasta alcanzar los 2 m aproximadamente. En la boca del estuario, el sistema es forzado por una componente mareal M2 de 1 m de amplitud.

En este caso existen 2 emisarios submarinos que descargan de forma periódica efluentes urbanos con valores de flujo másico M_j de CF de 5.6×10^7 y 4.8×10^7 NMP/100ml* m³/s y de DBO 80 y 60 Kg/seg, respectivamente. Con tales valores, se pretende determinar los niveles de concentración de los indicadores de calidad de agua en tres zonas dentro del estuario. Tal escenario se muestra en la Figura 8.26, donde las descargas se identifican con cruces, y las áreas protegidas con círculos.

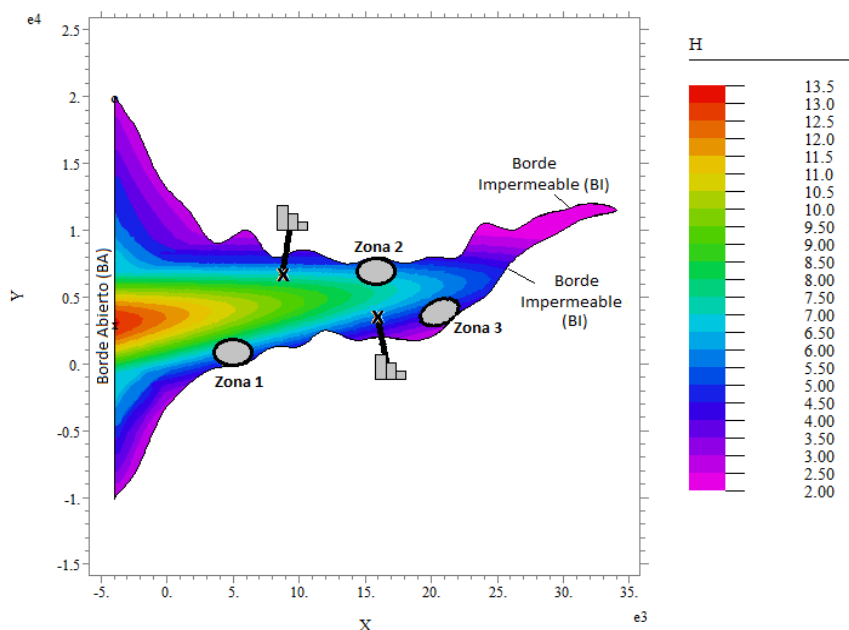


Figura 8.26: Estuario y batimetría bajo análisis del ejemplo 1 (FDT).

8.3.2.1. Validación del método FDT.

Para la situación planteada, se considera la no linealidad de las velocidades hidrodinámicas

utilizando el método **HPOF** (5.39-5.40)- (5.45-5.46) donde se asume un factor de ficción de fondo constante. Luego la evolución de la concentración de CF, DBO y OD se obtiene con el método **DT**, asumiendo los mismos parámetros de transporte que se emplearon en la *Sección* anterior para cada uno de los indicadores de calidad de agua.

Teniendo en cuenta la misma situación bajo análisis, se calculan las concentraciones temporales máximas y mínimas de cada indicador de calidad de agua en cada una de las zonas protegidas con el método **FDT**. Luego se comparan tales valores con aquellos obtenidos con el método **DT**, a los efectos de mostrar la precisión de los resultados. Los mismos se indican en la Tabla 8.5, donde se observa que la diferencia porcentual entre ambas soluciones no supera el 3%. Tal diferencia se logra calculando 13 componentes del método **FDT** (7.6).

		Método DT	Método FDT
Concentración máxima temporal de CF	Zona 1	2495	2428
	Zona 2	3598	3496
	Zona 3	3970	3882
Concentración máxima temporal de DBO	Zona 1	4,19E-03	4,08E-03
	Zona 2	6,05E-03	5,91E-03
	Zona 3	6,55E-03	6,39E-03
Concentración mínima temporal de OD	Zona 1	6,72E-03	6,87E-03
	Zona 2	5,99E-03	5,86E-03
	Zona 3	5,79E-03	5,63E-03

Tabla 8.5: Comparación entre los valores de concentraciones en las zonas protegidas (DT-FDT).

El tiempo computacional requerido por el método **DT** hasta obtener el estado oscilatorio estacionario de la distribución de CF en el estuario demora aproximadamente 180 minutos, y 300 minutos para la DBO y el OD ya que éstas últimas deben calcularse de forma acoplada.

Luego, calcular las componentes (7.5-7.6) del método **FDT**, demora aproximadamente 50 minutos por cada indicador y por cada descarga, es decir un total de 300 minutos.

Debe recordarse que el método **DT** se calcular para cada escenario posible de diseño, en cambio el método **FDT** se calcula una única vez, lo que implica que en un procedimiento de optimización el tiempo total de cálculo es considerablemente menor que el directo.

8.3.2.2. **Método FDT-O: Ejemplos de problemas de diseño óptimo.**

Los valores máximos de CF, DBO y mínimo de OD que se indican en la Tabla 8.5 exceden los valores límites admisibles en las zonas protegidas, fijados en este caso en $C_{admCF}=2000$ NMP/100ml, $C_{admDBO}=3.5 \times 10^{-3}$ Kg/m³ y $C_{admOD}=7 \times 10^{-3}$, por lo que el problema consiste en reducir tales valores máxicos a los efectos de cumplir con los requerimientos de admisibilidad

en dichas zonas. Se plantean a continuación dos ejemplos de diseño óptimo con el procedimiento **FDT-O**. En el primero se analiza esta metodología evaluando la situación de contaminación bajo análisis. En el segundo ejemplo se analiza un caso similar pero evaluando las restricciones ambientales en un número mayor de zonas protegidas frente al vertido de dos descargas.

8.3.2.2. A. Ejemplo 1 basado en FDT-O.

Considerando la situación de base planteada (ver Figura 8.26), se desea establecer el grado de depuración de cada una de las plantas determinando sus respectivas funciones de descarga $\beta_j(t)$, considerando que el flujo másico que ingresa a cada una es constante. Se pretende minimizar el costo económico, asegurando niveles de concentración aceptables.

Se plantea el siguiente problema de diseño que considera en este caso valores de restricciones ambientales máximas y mínimas (en el caso del OD):

$$\text{Minimizar } FO(\beta_j(t)) = \sum_{j=1}^{ND} \frac{M_j^2 \int_0^{T_M} (1 - \beta_j(t))^2 dt}{T_M} \quad ND=1,2,3 \quad . \quad (8.10)$$

Sujeto a:

$$\begin{aligned} \beta_j(t) \text{ funciones } T_M \text{ periódicas positivas} & \in \Omega_j \quad j=1,2,\dots,ND \quad , \\ \frac{\int_0^{T_M} \beta_j(t) dt}{T_M} \leq 1 & \in \Omega_j \quad j=1,2,\dots,ND \quad , \\ C_{\max CF} < C_{\text{admCF}} \quad , \quad C_{\max DBO} < C_{\text{admDBO}} \quad , \quad C_{\min OD} > C_{\text{admOD}} & \in \Omega_i \quad i=1,2,\dots,NP \quad , \end{aligned}$$

Una vez obtenidas por única vez las componentes de las ecuaciones (7.6) con el método **FDT**, la evaluación de las restricciones del problema de diseño se realiza mediante (7.4). Luego, el procedimiento de optimización para la búsqueda de las variables de diseño que hacen mínima la función objetivo (8.10) se basa en la combinación entre el método **SA** (ver Figura 4.7) y la metodología planteada en esquema de la Figura 7.2. Cabe aclarar que las variables de diseño corresponden a valores parametrizados $\beta_{j0}^*, \beta_{jcr}^*, \beta_{jsr}^*$ de las funciones de descarga $\beta_j(t)$, como se mencionó oportunamente en el esquema del método **FDT-O**. En este ejemplo se emplea la siguiente función:

$$\beta_j(t) = \beta_{j_0}^* + \sum_{r=1}^3 \left[\beta_{j_{cr}}^* \cos(r\omega t) + \beta_{j_{sr}}^* \sin(r\omega t) \right]. \quad (8.11)$$

Una vez realizado el procedimiento **FDT-O**, las variables óptimas se obtienen luego de evaluar un poco más de 1000 escenarios factibles, en un tiempo de que demora aproximadamente 2 minutos. Esto lo convierte en un enfoque computacionalmente eficiente frente al tiempo total que insume realizar la misma búsqueda con el método **DT**.

Los resultados del diseño óptimo obtenido se muestran en la Tabla 8.6.

Método FDT-O	Planta 1		Planta 2	
Funciones de vertido parametrizadas	β_0^*	0.85	β_0^*	0.45
	$\beta_{c_1}^*$	0.05	$\beta_{c_1}^*$	0.15
	$\beta_{s_1}^*$	0.05	$\beta_{s_1}^*$	0.25
	$\beta_{c_2}^*$	0.05	$\beta_{c_2}^*$	0.05
	$\beta_{s_2}^*$	0.05	$\beta_{s_2}^*$	0.05
	$\beta_{c_3}^*$	0.05	$\beta_{c_3}^*$	0.15
	$\beta_{s_3}^*$	0	$\beta_{s_3}^*$	0.10
Función Objetivo ($\$/m^3/s^2$)		0.146		
Concentración máxima temporal de CF < 2000 (NMP/100ml)	Zona 1	1573		
	Zona 2	1998		
	Zona 3	1947		
Concentración máxima temporal de DBO < 3.5×10^{-3} (Kg/m ³)	Zona 1	2.68E-03		
	Zona 2	3.48E-03		
	Zona 3	3.44E-03		
Concentración mínima temporal de OD > 7×10^{-3} (Kg/m ³)	Zona 1	7.37E-03		
	Zona 2	7.11E-03		
	Zona 3	7.04E-03		

Tabla 8.6: Resultados del problema de diseño (FDT-O).

La exploración que realiza el método **SA** (“recocido simulado”) hasta encontrar la función objetivo mínima (FO_{\min}) se muestra en la Figura 8.27.

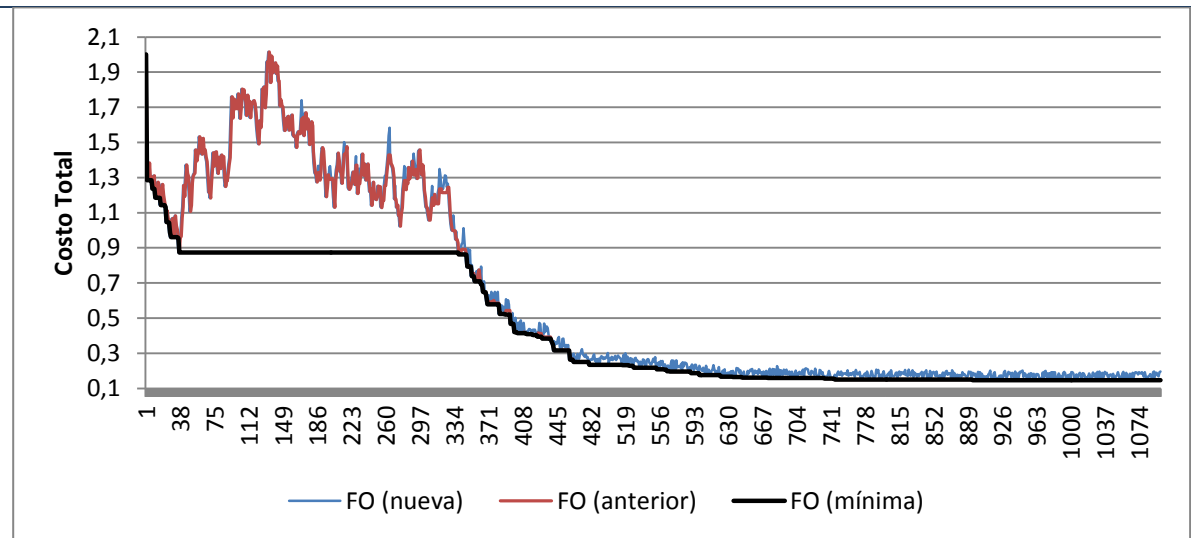


Figura 8.27: Evolución de la Función Objetivo durante el proceso de optimización del ejemplo 1 (FDT-O).

En las Figuras 8.28a,b,c, 8.29a,b,c, y 8.30a,b,c, se comparan las historias temporales de concentración de los indicadores de calidad de agua, para cada una de las tres zonas protegidas, entre la situación de base y la situación óptima (calculada con los valores óptimos de funciones de descarga). Se observa que los valores máximos (y mínimos para el caso del OD) en todas las zona se encuentran dentro de los límites de admisibilidad fijados. En tales figuras es posible observar que el cumplimiento de las restricciones ambientales de las zonas 2 y 3 manda sobre la zona 1. Consecuentemente tales valores extremos se encuentran próximos a los límites de admisibilidad (zonas 2 y 3) y un poco más alejados en la zona 1.

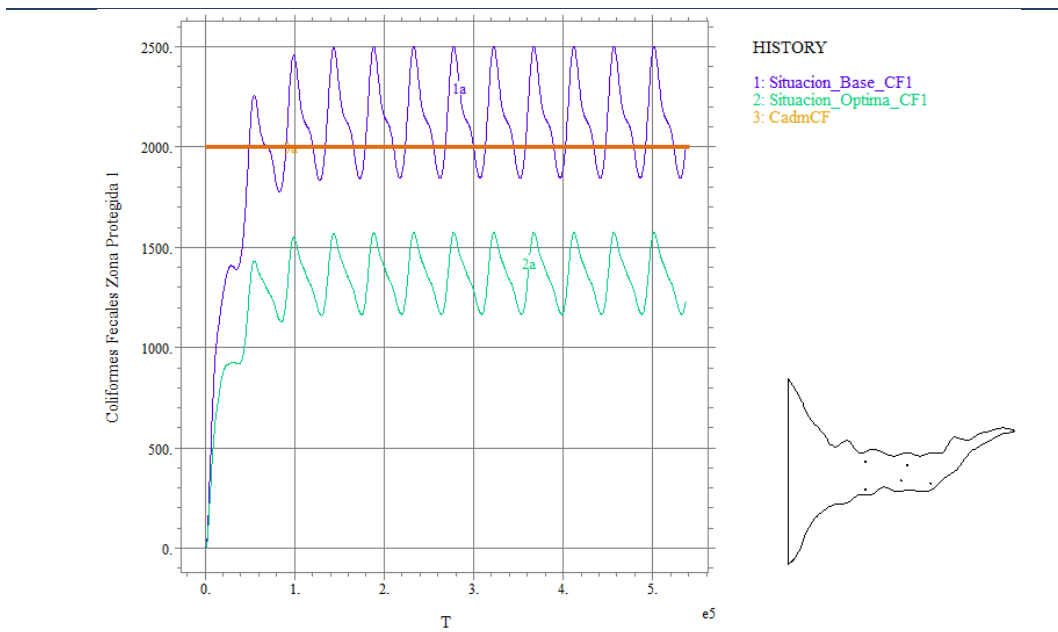


Figura 8.28a: Comparación de la historia temporal de concentración de CF en la zona protegida 1 (FDT-O).

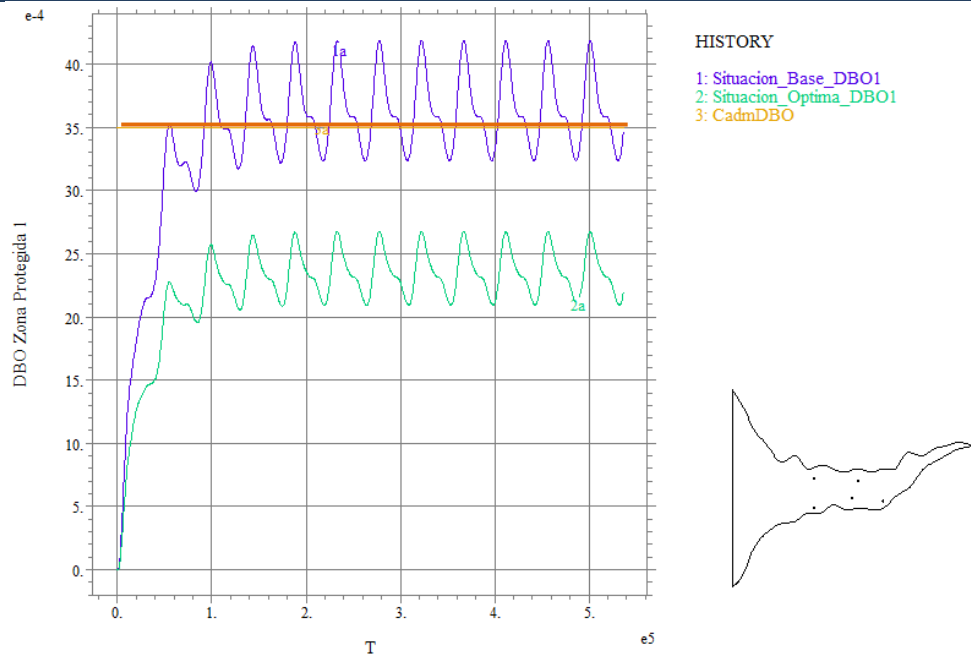


Figura 8.28b: Comparación de la historia temporal de concentración de DBO en la zona protegida 1 (FDT-O).

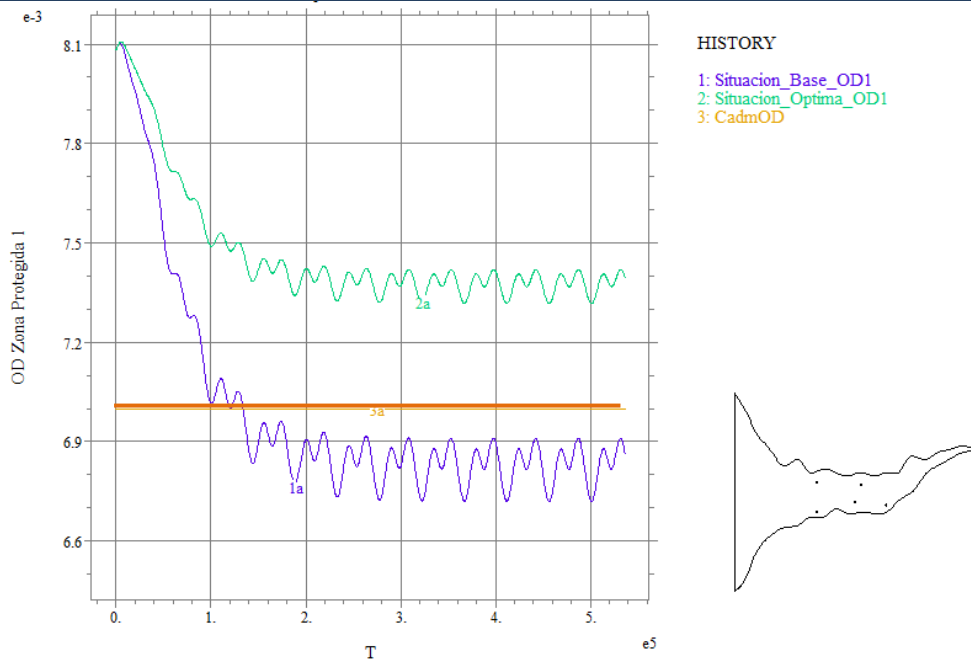


Figura 8.28c: Comparación de la historia temporal de concentración de OD en la zona protegida 1 (FDT-O).

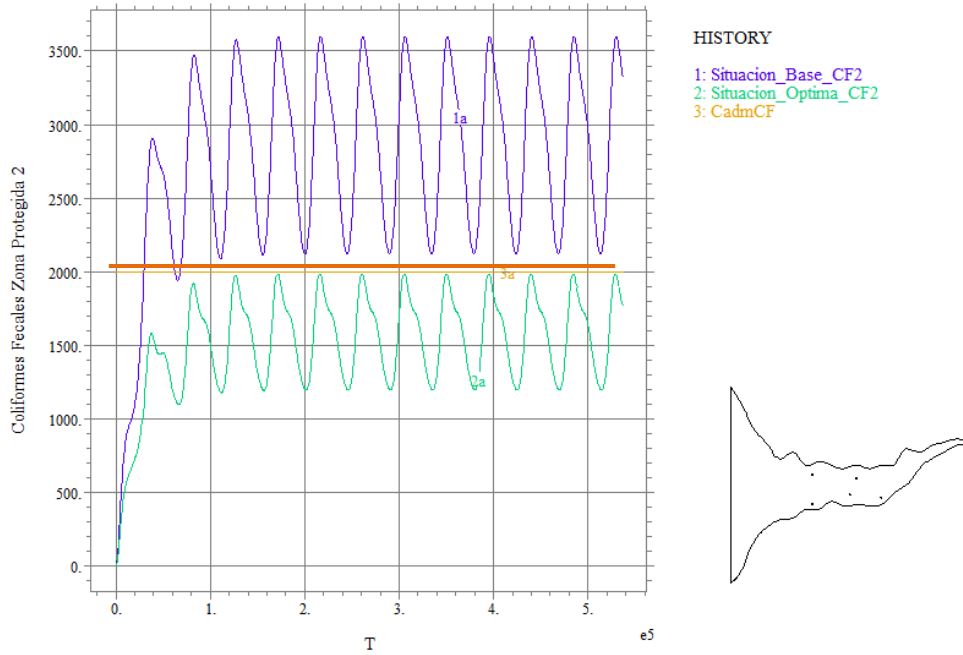


Figura 8.29a: Comparación de la historia temporal de concentración de CF en la zona protegida 2 (FDT-O).

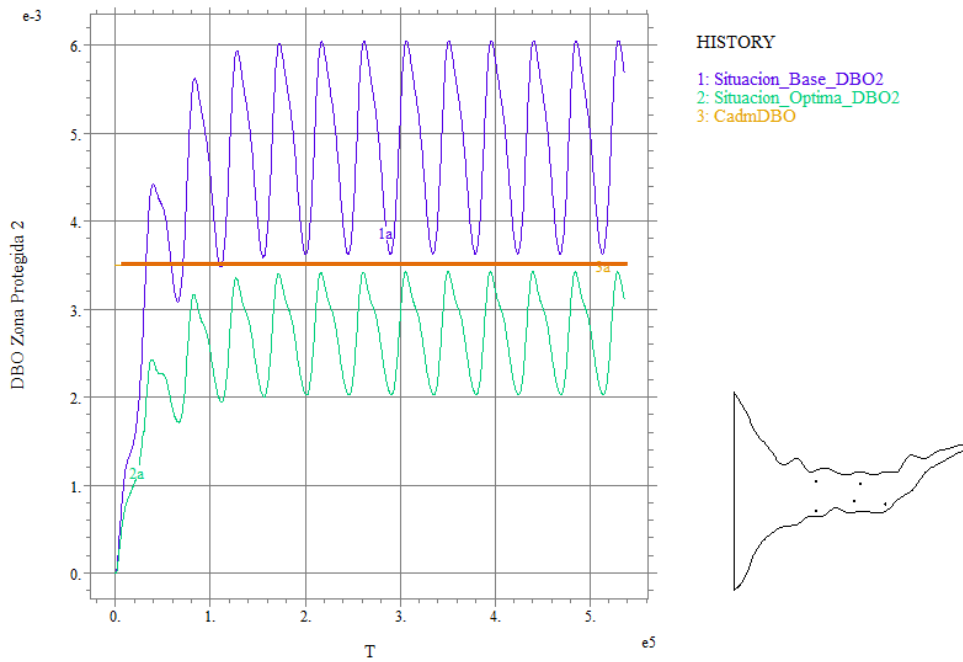


Figura 8.29b: Comparación de la historia temporal de concentración de DBO en la zona protegida 2 (FDT-O).

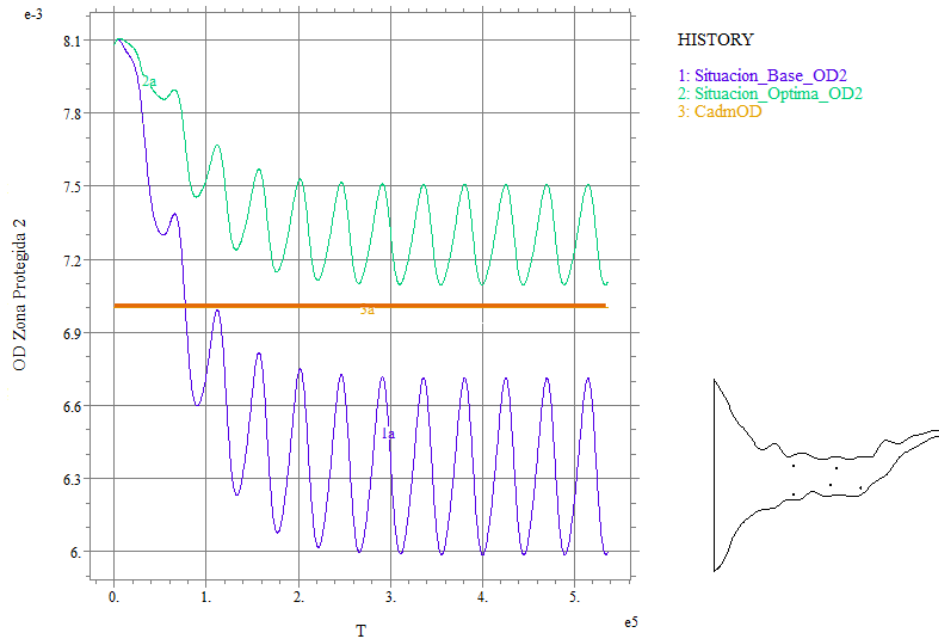


Figura 8.29c: Comparación de la historia temporal de concentración de OD en la zona protegida 2 (FDT-O).

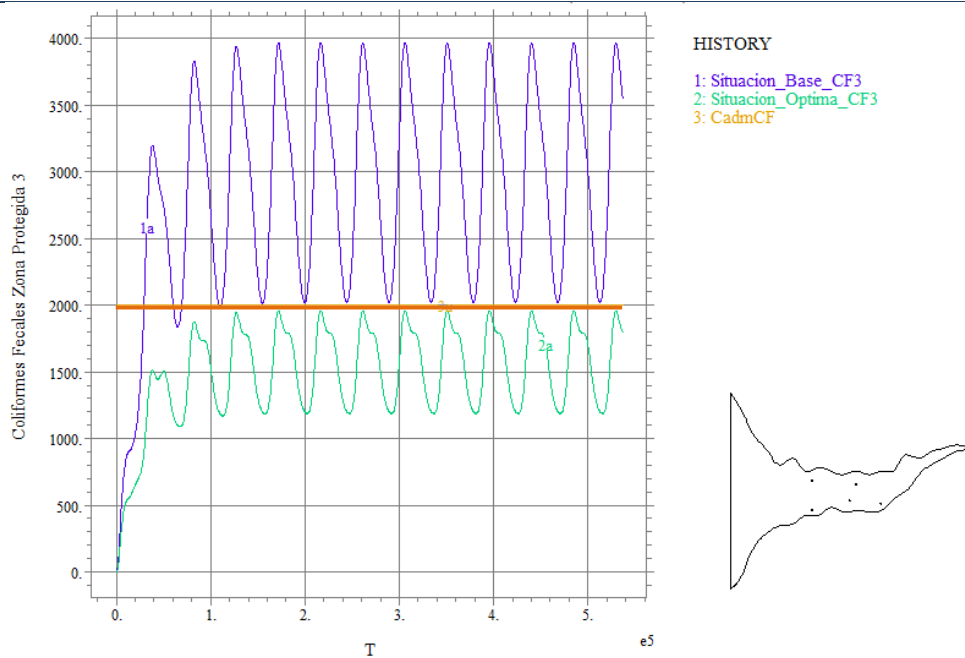


Figura 8.30a: Comparación de la historia temporal de concentración de CF en la zona protegida 3 (FDT-O).

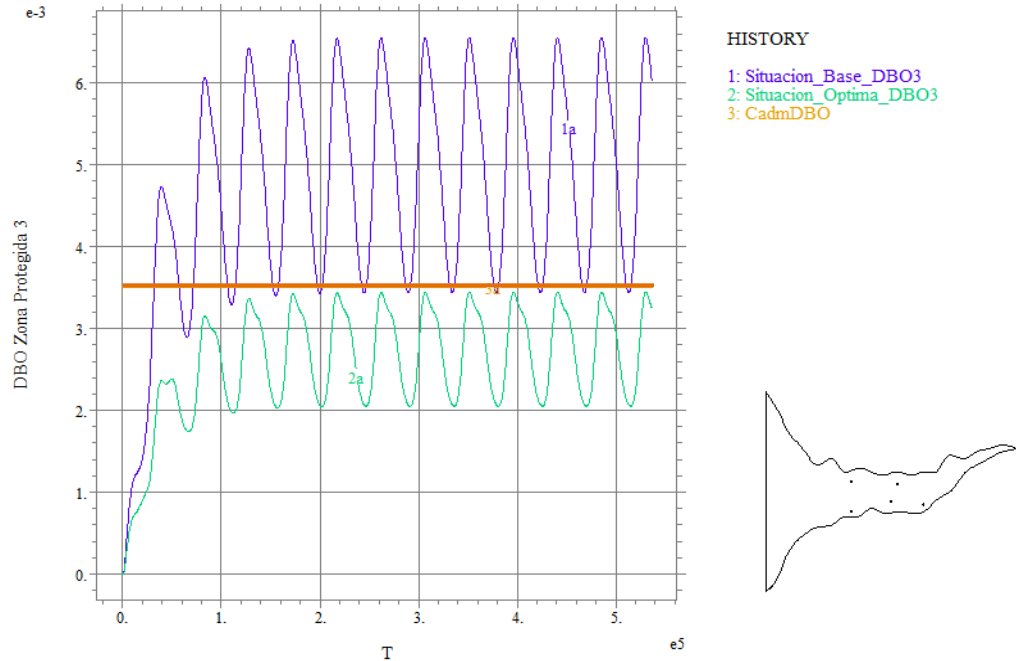


Figura 8.30b: Comparación de la historia temporal de concentración de DBO en la zona protegida 3 (FDT-O).

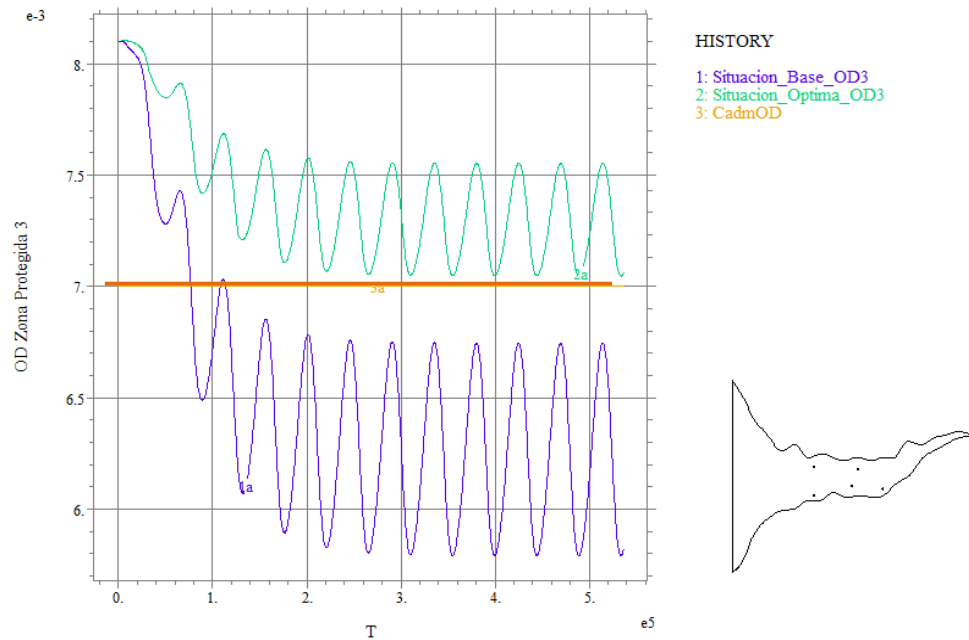


Figura 8.30c: Comparación de la historia temporal de concentración de OD en la zona protegida 3 (FDT-O).

Como la obtención de las componentes depende del número de descargas, con este enfoque (**FDT-O**) la evaluación del comportamiento de los indicadores ambientales, considerando un mayor número de zonas protegidas, debiera requerir el mismo tiempo de cálculo computacional que el que el analizado en este ejemplo con tres zonas

protegidas. En tal sentido, a continuación se mostrará un ejemplo similar al anterior donde se resuelve el mismo problema de diseño establecido en (8.10), pero en este caso las restricciones ambientales deben verificarse en 10 zonas protegidas.

8.3.2.2. B. Ejemplo 2 basado en FDT-O.

En este caso, dos emisarios descargan de forma periódica efluentes urbanos con valores máxicos de CF de 8×10^7 y 8×10^7 NMP/100ml* m3/s y de DBO de 120 y 80 Kg/seg, respectivamente. La dimensión aproximada del dominio bajo estudio es de 20 Km de largo por 20 Km de ancho, con una profundidad máxima en la boca de 14 m disminuyendo hasta 5 m en el interior, como se muestra en la Figura 8.31. El forzante corresponde a una marea M2 con amplitud de 1 m. Tales vertidos, indicados con cruces, provocan que los valores de admisibilidad de los indicadores ambientales ($C_{admCF}=2000$ NMP/100ml, $C_{admDBO}=3.5 \times 10^{-3}$ Kg/m³ y $C_{admOD}=7 \times 10^{-3}$) en la mayoría de las zonas protegidas indicadas con números no se encuentren dentro de los valores tolerables (ver Tabla 8.7).

Se resuelve el mismo problema de diseño que el caso anterior (8.10), evaluando en este caso el cumplimiento de las restricciones ambientales en 10 zonas protegidas.

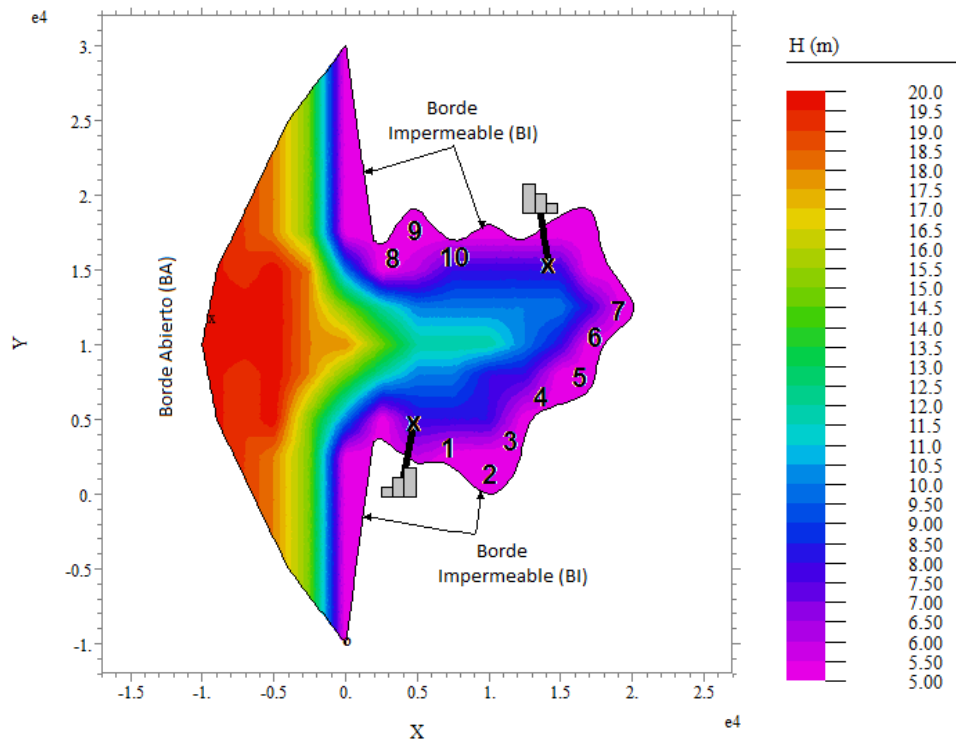


Figura 8.31: Estuario y batimetría bajo análisis del ejemplo 2 (FDT).
El tiempo de cálculo requerido para obtener las componentes de las ecuaciones (7.6)

para este ejemplo, es del orden de magnitud que el que demandó el cálculo de las componentes del ejemplo anterior.

	Concentración máxima temporal de CF	Concentración máxima temporal de DBO	Concentración mínima temporal de OD
Zona 1	2449	4.09E-03	6.90E-03
Zona 2	2408	4.11E-03	6.71E-03
Zona 3	2350	3.99E-03	6.68E-03
Zona 4	2420	3.93E-03	6.52E-03
Zona 5	2610	4.13E-03	6.39E-03
Zona 6	2930	4.45E-03	6.28E-03
Zona 7	3256	4.81E-03	6.17E-03
Zona 8	1124	1.83E-03	7.37E-03
Zona 9	1268	2.04E-03	7.26E-03
Zona 10	2014	3.07E-03	6.90E-03

Tabla 8.7: Valores de concentración de CF, DBO y OD en las zonas protegidas (situación inicial).

Luego, al igual que el problema de diseño anterior, el procedimiento de optimización tarda aproximadamente 2 minutos, evaluando un poco más de 1000 situaciones factibles de diseño. El comportamiento de la evaluación de la función objetivo en el procedimiento de búsqueda de las funciones de descarga de cada planta depuradora que hace mínima la función de costo (8.10) se indica en la Figura 8.32.

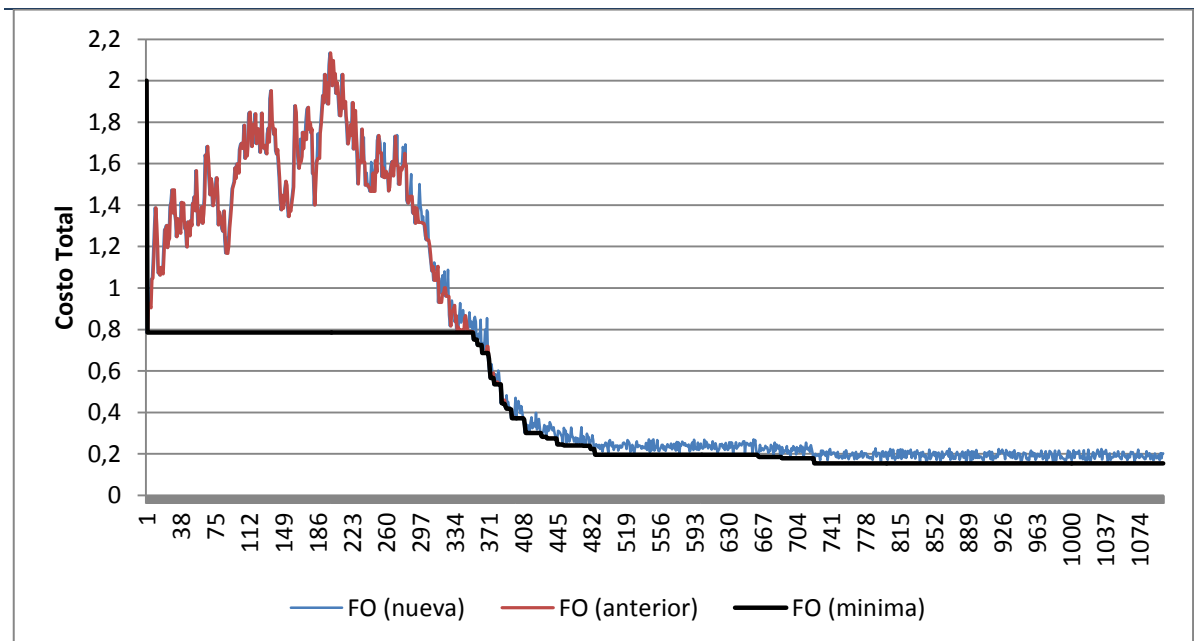


Figura 8.32: Evolución de la Función Objetivo durante el proceso de optimización del ejemplo 2 (FDT-O).

En la Tabla 8.8a y 8.8b se muestran los resultados obtenidos con los valores de las variables

de diseño óptimas, donde se observa que las restricciones ambientales en las 10 zonas protegidas verifican las condiciones de admisibilidad.

Método FDT-O	Planta 1		Planta 2	
Funciones de vertido parametrizadas	β_0^*	0.75	β_0^*	0.55
	$\beta_{c_1}^*$	0.15	$\beta_{c_1}^*$	0.05
	$\beta_{s_1}^*$	0.08	$\beta_{s_1}^*$	0.08
	$\beta_{c_2}^*$	0	$\beta_{c_2}^*$	0.1
	$\beta_{s_2}^*$	0.05	$\beta_{s_2}^*$	0.05
	$\beta_{c_3}^*$	0.15	$\beta_{c_3}^*$	0.05
	$\beta_{s_3}^*$	0.1	$\beta_{s_3}^*$	0.1
Función Objetivo ($\$/m^3/s$) ²	0.155			

Tabla 8.8a: Resultados del diseño de optimización ejemplo 2 (FDT-O).

Método FDT-O	Concentración máxima temporal de CF < 2000 (NMP/100ml)	Concentración máxima temporal de DBO < 3.5x10 ⁻³ (Kg/m ³)	Concentración mínima temporal de OD > 7x10 ⁻³ (Kg/m ³)
Zona 1	1693	2.87E-03	7.43E-03
Zona 2	1585	2.74E-03	7.33E-03
Zona 3	1527	2.64E-03	7.32E-03
Zona 4	1494	2.49E-03	7.24E-03
Zona 5	1574	2.57E-03	7.17E-03
Zona 6	1722	2.70E-03	7.12E-03
Zona 7	1888	2.88E-03	7.07E-03
Zona 8	705	1.18E-03	7.72E-03
Zona 9	780	1.30E-03	7.66E-03
Zona 10	1214	1.91E-03	7.46E-03

Tabla 8.8b: Resultados del diseño de optimización ejemplo 2 (FDT-O), (continuación)

8.3.2.3. Discusión de los resultados de los problemas de diseño óptimo resueltos con el método FDT-O.

La aplicación del método **FDT** en el diseño óptimo para situaciones periódicas resulta ser eficiente. Debido a la independencia temporal que brinda el desarrollo en series de Fourier, el cálculo para obtener el diseño óptimo es más expeditivo que si se hubiese realizado mediante el método **DT**. Sin embargo el desarrollo de las series de Fourier en las ecuaciones de directas de transporte requiere un trabajo analítico importante.

Este enfoque (**FDT**) permite conocer, además, los valores máximos (o mínimos) de admisibilidad, mostrando resultados muy similares respecto al método **DT**. Por tal motivo, su utilización en problemas de oscilación periódica donde se requiera la simulación de diferentes escenarios para determinar la variación de concentración distintas zonas de interés ambiental es apropiada, ya que solo debe calcularse por única vez, un sistema de ecuaciones independientes del tiempo por cada zona de descarga, permitiendo abordar la solución para diversos enfoques de diseño ambiental.

Debido a que las componentes dependen del número de descargas, se ha analizado un problema de diseño similar al presentado en el Ejemplo 1 verificando el cumplimiento de un mayor número de restricciones ambientales (10 zonas protegidas), obteniendo prácticamente el mismo tiempo de cálculo computacional. Por lo tanto, este método resulta ser eficiente para el análisis del comportamiento de los indicadores ambientales cuando el número de zonas protegidas es superior al de las descargas.

8.3.3. Utilización del método de Fourier aplicado al problema Adjunto de Transporte (FAT-O).

Se desea reducir la carga contaminante de 2 efluentes que vierten de forma periódica flujos máxicos de 8×10^7 y 6×10^7 NMP/100ml* m^3/s CF y de 80 y 60 Kg/seg de DBO, respectivamente, en un estuario con las características detalladas en el primer ejemplo de la Sección 8.3.2. La ubicación de las descargas (cruces negras), así como de las zonas protegidas (círculos negros) se indica en el esquema de la Figura 8.33.

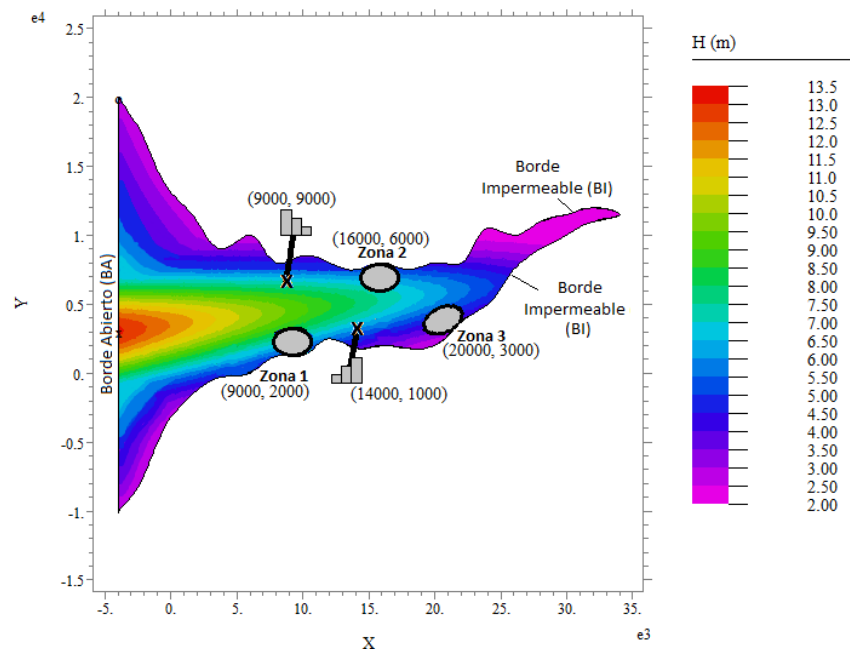


Figura 8.33: Estuario y batimetría bajo análisis (FAT).

8.3.3.1. Validación del método FAT.

Se obtienen los niveles medidos temporales de CF, DBO y OD en tales zonas protegidas con el método DT. Luego, se comparan tales valores medios con aquellos obtenidos de resolver el método FAT. Tales resultados se muestran en la Tabla 8.9 donde se observa que la diferencia porcentual es del orden del 1%, lo que indica la consistencia del método propuesto.

El tiempo computacional requerido para obtener la concentración en cada zona protegida con el método DT hasta obtener el estado oscilatorio estacionario, para el ejemplo bajo análisis, demora aproximadamente 480 minutos, como se mencionó anteriormente en el ejemplo 1 de la sección anterior. En cambio, el tiempo total requerido utilizando el método FAT es de 120

minutos, es decir 4 veces menor, donde una vez obtenidas las componentes de influencia (9 en este caso, por cada indicador ambiental) por única vez, la determinación de los niveles medios temporales de concentración (7.14) es prácticamente instantánea.

		Método DT	Método FAT
Concentración media temporal de CF (NMP/100ml)	Zona 1	3321	3339
	Zona 2	4571	4615
	Zona 3	4000	4044
Concentración media temporal de DBO (Kg/m ³)	Zona 1	4,20E-03	4,18E-03
	Zona 2	6,04E-03	5,97E-03
	Zona 3	5,57E-03	5,51E-03
Concentración media temporal de OD (Kg/m ³)	Zona 1	7,77E-03	7,79E-03
	Zona 2	6,68E-03	6,74E-03
	Zona 3	6,41E-03	6,48E-03
Tabla 8.9: Comparación entre valores de concentraciones medias en zonas protegidas (DT-FAT).			

8.3.3.2. Método FAT-O: Ejemplo de un problema de diseño óptimo.

Los valores mostrados en la Tabla 8.9, de concentración media temporal de los indicadores ambientales calculados en cada zona, no se encuentran dentro de los límites permitidos, fiados en este ejemplo en $C_{admCF}=2000$ NMP/100ml, $C_{admDBO}=3 \times 10^{-3}$ Kg/m³ y $C_{admOD}=7 \times 10^{-3}$ Kg/m³.

Se desea entonces reducir la carga contaminante en las tres zonas de resguardo ambiental mediante la construcción de plantas de tratamiento al menor costo posible. Para ello en este caso, no solo se determinan las capacidades de tratamiento de cada efluente sino que también se establece la ubicación de las salidas de tuberías de descarga a los efectos de minimizar los costos de construcción y operación, procurando que tales concentraciones se encuentren dentro de los valores permitidos.

Se resuelve el primer esquema de diseño planteado en el *Apartado 2.3.2*, donde el flujo másico M_j que ingresa a la planta de tratamiento no varía.

8.3.3.2.A. Ejemplo basado en FAT-O.

En este problema se determinan las variables de diseño que hacen mínima la función de costo de inversión, operación y construcción de las tuberías de descarga. Éstas corresponden a los factores β_j , así como a las coordenadas de descarga de las tuberías (F_{xj} , F_{yj}). Luego la función objetivo a minimizar viene dada por:

$$\text{Minimizar } FO = \sum_{j=1}^{ND} \alpha_1 M_j^s (1 - \beta_j)^s + \alpha_2 \sqrt{(Px_j - Fx_j)^2 + (Py_j - Fy_j)^2} \quad ND=1,2 \quad (8.12)$$

$$\text{Siendo } \alpha_1 = \frac{8988}{(1-r)vu} \quad (8.13)$$

$$r = 0.352 + 6.557 \times 10^{-6} MT_j - 6.429 \times 10^{-11} MT_j^2 \quad (8.14)$$

$$\alpha_2 = (2732 + 1167 * Di + 238 * Di^2) / vu$$

$$MT_j = M_j (1 - \beta_j) \quad j = 1, 2, \dots, ND \quad (8.15)$$

Sujeto a:

$$0 \leq \beta_j \leq 1 \quad \in \Omega_j \quad j = 1, 2, \dots, ND \quad ,$$

$$(Fx_j, Fy_j) \quad \in \Omega_j \quad j = 1, 2, \dots, ND \quad ,$$

$$\bar{C}_{CF_i} \leq C_{admCF} \quad , \quad \bar{C}_{DBO_i} \leq C_{admDBO} \quad , \quad \bar{C}_{OD_i} \geq C_{admOD} \quad \in \Omega_i \quad i = 1, 2, \dots, NP \quad ,$$

recordando que α_1 es el costo de inversión asociado a la capacidad de tratamiento, vu es la vida útil estimada en 20 años, r es una función que relaciona el costo con la capacidad de tratamiento, s es un exponente que tiene que ver con la economía del país, estimado en este caso en 0.71, α_2 es el costo de construcción del emisario, Di es el diámetro del emisario, Ω_j es el área posible de descarga para la tubería j -ésima, \bar{C}_i es la concentración media de CF, DBO y OD en la i -ésima zona protegida. Se desarrolla el ejemplo de diseño óptimo siguiendo el procedimiento **FAT-O** explicado en la Figura 7.3.

En la Figura 8.34 se observa el comportamiento de la Función Objetivo (FO_{min}) durante el proceso de búsqueda de las variables óptimas, donde es posible notar, que el valor mínimo obtenido en cada iteración se va almacenando.

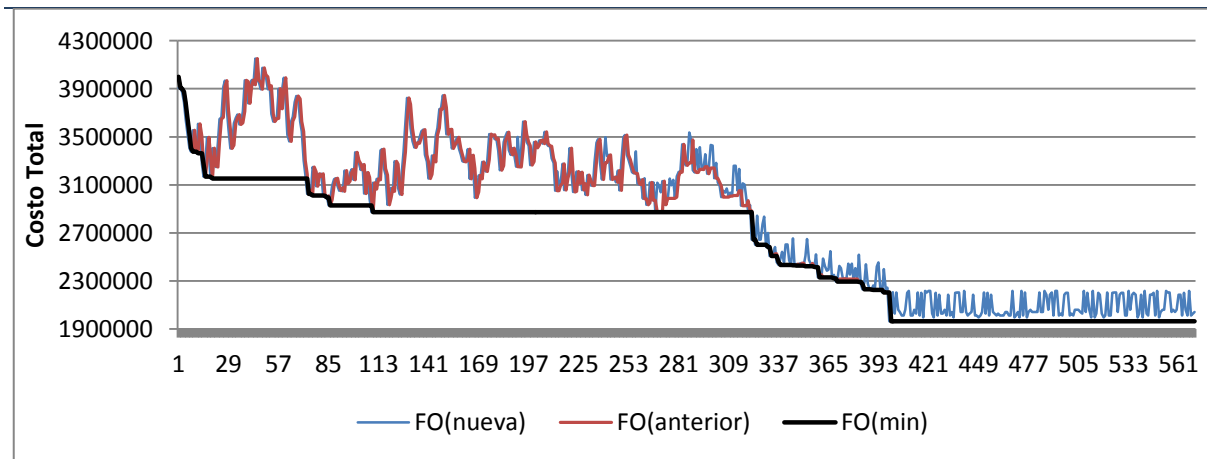


Figura 8.34: Evolución de la Función Objetivo durante el proceso de optimización (FAT-O).

Los resultados de los valores de las variables de diseño óptimas, obtenidos después de evaluar un poco más de 500 iteraciones, se obtienen después de un tiempo de cálculo de 10 minutos. Tales valores se muestran en la Tabla 8.10.

	Método FAT-O	
	Factores de Reducción	β 1
	β 2	0,24
Longitud de tubería m	L1	1044
	L2	1676
Coordenadas de descarga	Fx1	8700
	Fy1	8000
	Fx2	13500
	Fy2	2600
Concentración media temporal de CF < 2000 (NMP/100ml)	Zona 1	1943
	Zona 2	1976
	Zona 3	1627
Concentración media temporal de DBO < 3×10^{-3} Kg/m ³	Zona 1	2.43E-03
	Zona 2	2.63E-03
	Zona 3	2.30E-03
Concentración media temporal de OD > 7×10^{-3} Kg/m ³	Zona 1	8.53E-03
	Zona 2	8.10E-03
	Zona 3	8.01E-03
Costo Total Anual (US\$/Año)	CT	1.964.618

Tabla 8.10: Resultados de la optimización (FAT-O).

Se comparan las historias temporales de concentración de CF en las Figuras 8.35a,b,c, simuladas con los valores óptimos indicados en la Tabla 8.10. El comportamiento con el resto de los indicadores ambientales es similar. En ellas es posible ver que la media temporal en cada zona, calculada con las componentes de los coeficientes de influencia (**FAT**), coincide con la media temporal calculada con el método **DT**, donde los valores medios obtenidos no superan las restricciones de concentración admisible. Sin embargo, debido al carácter periódico de la marea, es posible observar que los picos máximos y mínimos exceden tales valores límites. En tal sentido, si se desea mantener los valores pico dentro de los admisibles, deben considerarse valores límites de mayor restricción. De esta forma es posible garantizar que los niveles de concentración se encuentren dentro de los aceptables durante todo un período de marea.

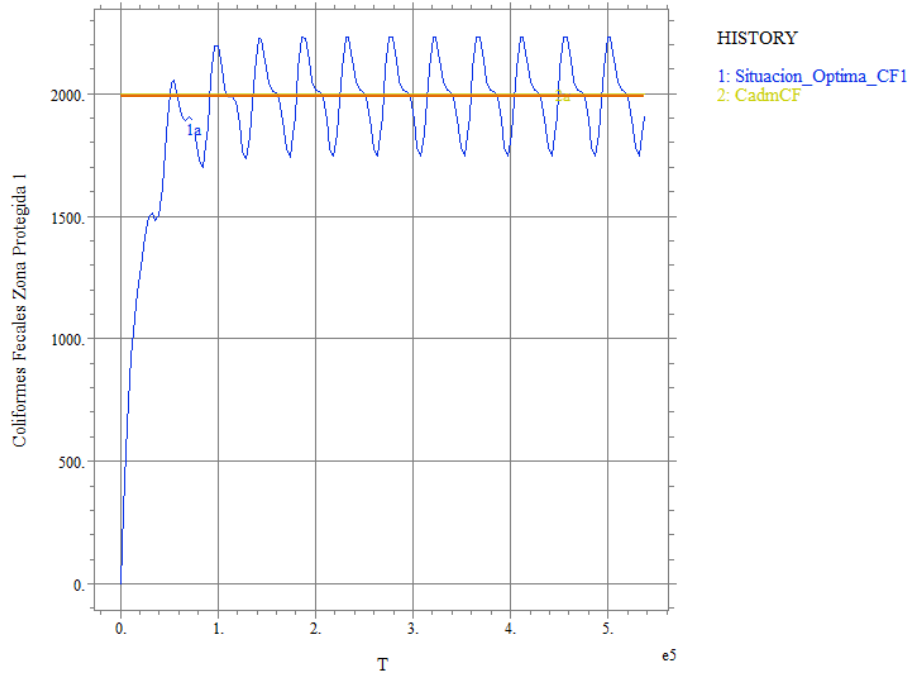


Figura 8.35a: Comparación de la historia temporal de concentración de CF en la zona protegida 1 (FAT-O).

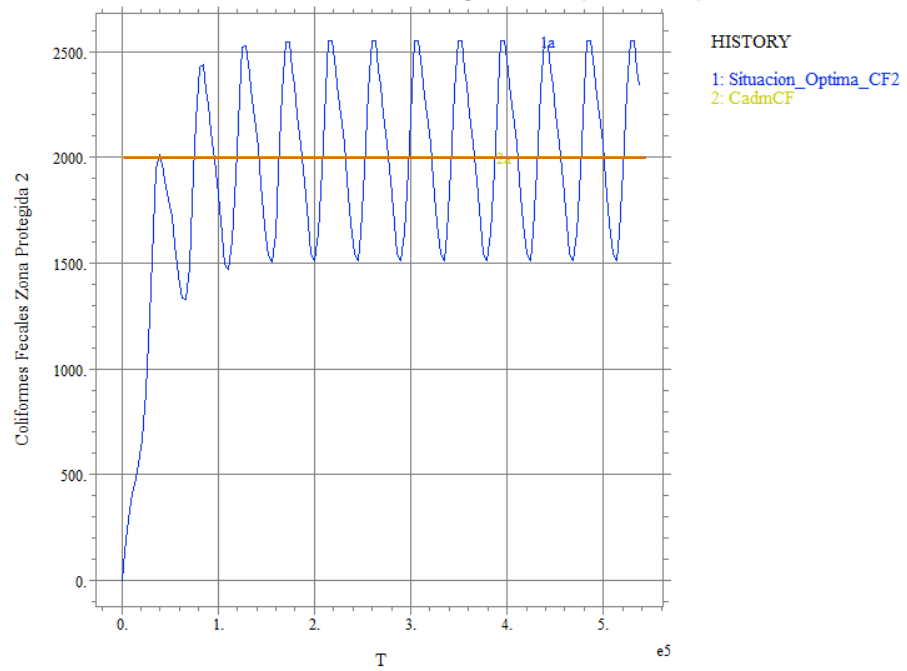


Figura 8.35b: Comparación de la historia temporal de concentración de CF en la zona protegida 2 (FAT-O).

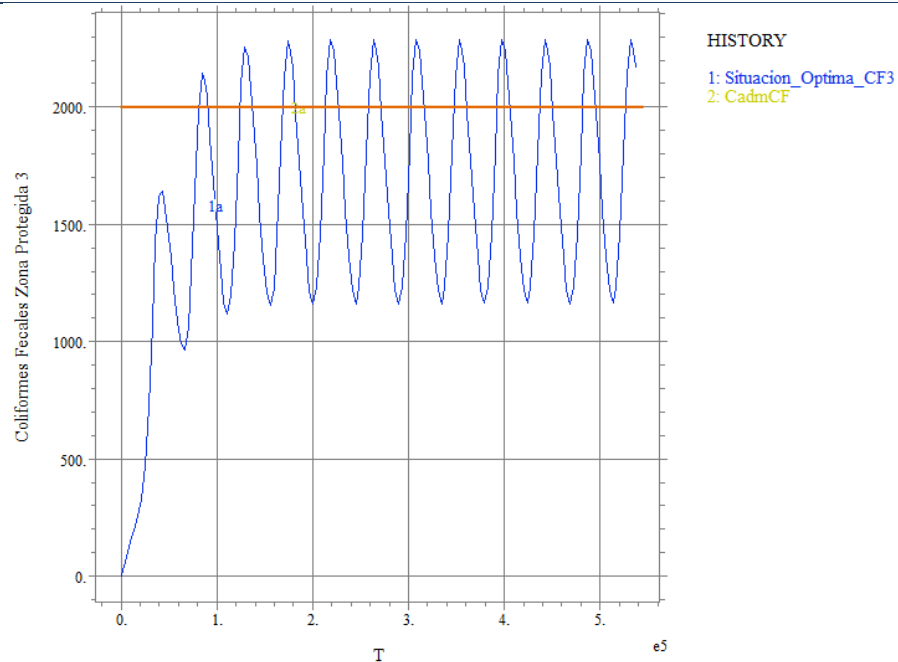


Figura 8.35c: Comparación de la historia temporal de concentración de CF en la zona protegida 3 (FAT-O).

8.3.3.3. Discusión de los resultados del problema de diseño óptimo resuelto con el método FAT-O.

Se desarrolló un modelo computacional para el diseño óptimo de descargas de efluentes urbanos dentro en un cuerpo de agua dominado por mareas mediante el método **FAT**. Dicha metodología permite determinar las ubicaciones de las descargas, así como el grado de depuración a un costo de inversión y operación mínimo, respetando las restricciones ambientales fijadas. Se ha demostrado que los resultados obtenidos son consistentes, y requiere de un tiempo de cálculo 4 veces menor al que demanda la solución obtenida con el método **DT**. Esto último, en un contexto de optimización, lo convierte en una metodología eficiente.

CAPÍTULO IX

OTROS PROBLEMAS DE DISEÑO RELATIVOS A ESTUARIOS

La estructura que presenta el enfoque de Simulación-Optimización desarrollado en el *Capítulo IV*, permite además ser utilizado en otro tipo de problemas, relativos a estuarios. En el presente *Capítulo* se desarrollan dos de ellos.

El primer problema corresponde al diseño óptimo de estructuras portuarias para permitir el anclaje de barcos y la realización de forma segura de tareas de carga y descarga de mercaderías, en ambientes protegidos de la agitación generada por las olas marinas. En este caso, se deben resolver numéricamente las ecuaciones hidrodinámicas asociadas a la propagación de ondas largas a los efectos de obtener la respuesta dinámica del recinto portuario.

El segundo consiste en el diseño óptimo de sistemas de extracción de agua dulce en acuíferos costeros, a los efectos de evitar la intrusión salina debido a la sobreexplotación de tales extracciones. Este problema requiere de la solución numérica del problema diferencial lineal de potencial de flujo propuesto por (Strack, 1976) para aguas subterráneas en acuíferos no confinados.

Ambos problemas de diseño son desarrollados a continuación con el mismo enfoque de simulación-optimización, es decir resolviendo numéricamente las correspondientes ecuaciones diferenciales mediante el MEF, utilizando el programa de FlexPDE, en combinación con el método de "recocido simulado SA para la búsqueda de las variables de diseño óptimas, propias de cada problema.

9.1. DISEÑO ÓPTIMO DE ESTRUCTURAS PORTUARIAS PARA ATENUAR EFECTOS RESONANTES POR ONDAS LARGAS.

9.1.1. Generalidades

Los puertos deben ser diseñados para asegurar un ambiente para el amarre de barcos, protegido de la agitación generada por las olas marinas, a los efectos de permitir la realización

segura de tareas de carga y descarga de mercaderías. Para ello es muy importante establecer adecuadamente la geometría de las obras de abrigo tales como rompeolas y diques (Memos, 2004; Bellotti, 2007; Palomino Monzón et al., 2001; Rabinovich, 2009; Xing, 2009).

El oleaje incidente desde el océano presenta en general un espectro amplio que va desde las ondas de marea, cuyos períodos son del orden de horas, hasta oleaje generado por viento, de períodos del orden de segundos. Entre tales extremos aparecen las denominadas ondas u olas largas, especialmente peligrosas ya que sus períodos (entre 30 segundos y 5 minutos) son cercanos a los naturales de la mayoría de los puertos existentes (ver Figura 3.1). Esto puede dar lugar un fenómeno resonante, es decir el oleaje incidente va reforzando el movimiento oscilatorio natural del puerto, pudiéndose llegar a amplitudes de elevación mucho mayores que las del oleaje incidente. Además de las grandes elevaciones que se producen dentro de las dársenas, los movimientos resonantes producen, en las líneas nodales (de elevación nula), velocidades de corriente muy elevadas, eventualmente mayores a 2 m/seg para elevaciones de ondas del orden de centímetros. Tales corrientes pueden provocar daños en amarres de embarcaciones, dificultades para efectuar maniobras de acceso y también colisiones entre barcos. Los fenómenos de resonancia portuaria pueden ser aún más severos si las longitudes de las ondas incidentes son del orden de la longitud de los barcos, ya que entonces el movimiento de los mismos se verá notablemente amplificado.

Por la peligrosidad de las oscilaciones portuarias ante efectos resonantes (que pueden durar varios días), la operación del puerto es detenida y muchas veces las embarcaciones deben dirigirse a mar abierto hasta que finalice tal condición. Esto ocasiona importantes pérdidas económicas por el cese de la actividad portuaria y también por los daños materiales que puede acarrear.

Si bien las estructuras de abrigo como escolleras, diques, etc. son efectivas para reducir la energía asociada con olas generadas por viento, éstas pierden su efectividad ante las ondas largas (de períodos cercanos a los del puerto) que penetran fácilmente hasta el interior de las dársenas.

Para evitar efectos resonantes debe procurarse especialmente, al diseñar o rediseñar un puerto, que sus frecuencias naturales se aparten en la mayor medida posible de las frecuencias características del oleaje de larga longitud de la zona.

En tal sentido, se propone un método para el diseño del esquema portuario definido a través de la geometría de sus obras de abrigo. Para ello se analizan dos formas de diseño. La primera consiste en lograr un puerto con el menor volumen posible de dichas obras, atendiendo a su considerable costo, que evite situaciones resonantes para el oleaje de la zona y al mismo tiempo

cumpla con restricciones desde el punto de vista de la navegabilidad y operatividad. La segunda corresponde a aquel diseño que brinde la mayor seguridad frente a oscilaciones resonantes, intentando maximizar la diferencia entre las frecuencias naturales portuarias y aquellas correspondientes al oleaje incidente de gran longitud de la zona. En este caso se establece un límite permisible para el volumen de estructuras de abrigo además de las restricciones de navegabilidad.

Se presentan a continuación los modelos utilizados para describir las oscilaciones portuarias, tanto libres como forzadas. Luego, se formulan las dos variantes del problema de diseño óptimo anti-resonante, y seguidamente se comentan los aspectos más importantes de los métodos numéricos empleados. Finalmente se presentan algunos ejemplos numéricos para mostrar la eficiencia de los métodos de diseño desarrollados y se describen las principales conclusiones.

9.1.2. Oscilaciones de puertos.

9.1.2.1. Oscilaciones forzadas.

Se considera una región consistente en un puerto y parte del mar adyacente. El dominio así comprendido está formado por bordes impermeables que corresponden a la interfaz mar-tierra y un borde ficticio abierto, que separa la porción de mar considerada del resto. Sobre esta última se asume conocido el oleaje incidente. En general es habitual asumir que la amplitud de marea es mucho menor que la profundidad media, es decir que la relación $\frac{\eta_c}{H_c} \ll 1$. En tal sentido se hace uso de la teoría hidrodinámica lineal, que describe apropiadamente los aspectos más importantes de la propagación de olas largas. Un esquema de tal dominio puede verse en la Figura 9.1.

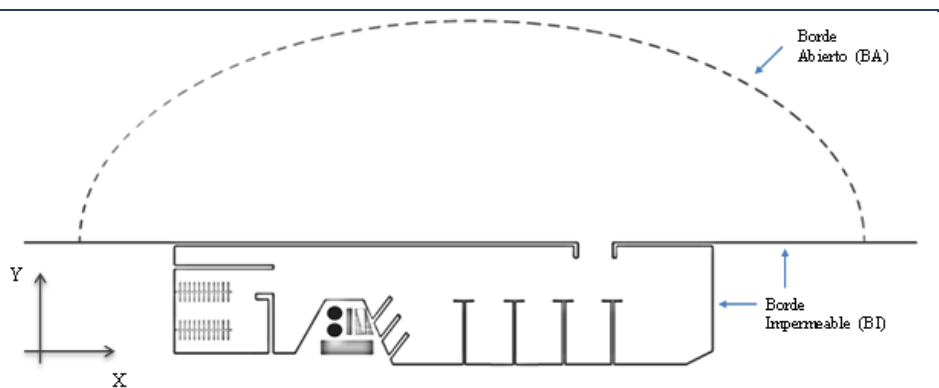


Figura 9.1: Esquema del puerto.

Para la descripción matemática de las oscilaciones de gran longitud en puertos, se emplean las ecuaciones linealizadas de aguas poco profundas reformuladas en función de la superficie libre η (5.24), (5.14-5.15), como se explicó oportunamente en el *Capítulo V*, donde para este problema, las correspondientes condiciones de contorno (ver Figura 9.1) son las siguientes:

$$\left. \frac{\partial \eta}{\partial n} \right|_{BI} = 0 \quad , \quad \left. \frac{\partial \eta}{\partial n} + \frac{1}{c} \frac{\partial \eta}{\partial t} \right|_{BA} = \left. \frac{\partial \eta_0}{\partial n} + \frac{1}{c} \frac{\partial \eta_0}{\partial t} \right|_{BA} \quad (9.1)$$

La primera expresión se aplica sobre los contornos impermeables y representa la condición de velocidad nula en la dirección normal a los bordes (como se deduce fácilmente de las ecuaciones de movimiento), mientras que la segunda corresponde a una combinación de oleaje incidente y condición de radiación de Sommerfeld, que expresa de manera aproximada el hecho de que las olas reflejadas en la costa no pueden volver a hacerlo en el borde abierto (Bellotti, 2007). Luego η_0 es la ola incidente y se supone expresada de la siguiente manera:

$$\eta_0 = \tilde{\eta} \text{sen}(k\bar{x} - \omega t) = \tilde{\eta} \left[\text{sen}(k\bar{x}) \cos \omega t - \cos(k\bar{x}) \text{sen} \omega t \right] \quad , \quad (9.2)$$

donde $\tilde{\eta}$ es la amplitud del oleaje incidente, k es el número de onda, ω es la frecuencia del oleaje incidente, \bar{x} es la coordenada en la dirección de propagación del frente de olas en mar abierto dada por:

$$\bar{x} = x \cos \theta + y \text{sen} \theta \quad , \quad (9.3)$$

siendo θ el ángulo entre la dirección de propagación \bar{x} y el eje x de referencia.

Teniendo en cuenta el carácter armónico del oleaje, la respuesta dinámica linealizada del puerto se obtiene de acuerdo con la aproximación lineal del método **HPOF** (5.39). Despreciando en este caso el aporte de un río, el estado oscilatorio estacionario para la elevación de la superficie libre definida en (5.33) se escribe de la siguiente manera:

$$\eta = \eta_c \cos \omega t + \eta_s \text{sen} \omega t \quad , \quad (9.4)$$

Considerando el término correspondiente a la ola incidente en el borde abierto, se reemplaza (9.2) y (9.4) en (9.1). De esta manera, la condición de contorno (5.40) en el *BA* queda re-expresada de la siguiente manera:

$$\left. \frac{\partial \eta_c}{\partial n} \right|_{BA} = \left(\alpha_0 - \eta_s \frac{\omega}{c} \right) \quad , \quad \left. \frac{\partial \eta_s}{\partial n} \right|_{BA} = \left(\gamma_0 - \eta_c \frac{\omega}{c} \right) \quad , \quad (9.5)$$

donde

$$\alpha_0 = A_0 \cos(k\bar{x}) \left(k \frac{\partial \bar{x}}{\partial n} - \frac{\omega}{c} \right) , \quad \gamma_0 = A_0 \sin(k\bar{x}) \left(k \frac{\partial \bar{x}}{\partial n} - \frac{\omega}{c} \right) . \quad (9.6)$$

Luego, las velocidades de la corriente vienen dadas por (5.43b,c) y (5.44b,c). Las correspondientes amplitudes pueden determinarse a partir de (5.33)-(5.35), siendo la elevación de la superficie libre la siguiente:

$$\eta_A = \sqrt{\eta_c^2 + \eta_s^2} . \quad (9.7)$$

Así, resolviendo para diferentes valores de la frecuencia del oleaje incidente, es posible representar las amplitudes en función de dicha frecuencia en un gráfico denominado diagrama de amplificación, donde pueden observarse los picos de respuesta que representan las amplitudes resonantes y sus correspondientes frecuencias. Tales gráficos serán mostrados más adelante.

9.1.2.2. Oscilaciones Libres.

El método linealizado **HPOF** para la condición de *BA* (9.5-9.6), permite determinar las frecuencias de resonancia a partir del análisis de oscilaciones forzadas, aunque para ello es necesario efectuar una gran cantidad de cálculos para distintas frecuencias forzantes.

Un procedimiento menos costoso computacionalmente es el cálculo de frecuencias naturales considerando el sistema sin forzante ni amortiguamiento, es decir no se contempla el oleaje incidente, ni la fricción de fondo, ni la radiación hacia el mar abierto. Esto es así ya que generalmente la disipación de energía es suficientemente pequeña como para considerar, con buena aproximación, que las frecuencias naturales del sistema se corresponden con las de resonancia.

Para realizar el procedimiento aludido se considera únicamente el dominio del puerto, y no el mar aledaño. Como varios estudios han demostrado, en la boca del puerto es posible suponer de manera aproximada la ubicación de una línea nodal en lugar de la condición de radiación (Rabinovich, 2009; Palomino Monzón et al., 2001). Otros han indicado que se trata de una condición intermedia entre una línea nodal y una línea impermeable (Ortiz y Pastor, 1990). En este trabajo se propone una manera de establecer tal condición intermedia. Consecuentemente a partir de (5.39-5.40), despreciando el forzante, la fricción y la radiación (9.5-9.6), y asumiendo una condición de borde aproximada para la boca del puerto, se llega a la siguiente expresión:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(gH \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(gH \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) + \omega_n^2 \psi = 0 , \quad (9.8)$$

$$\psi|_{BA^*} = 0 \quad , \quad \frac{\partial \psi}{\partial n} \Big|_{BI^*} = 0 \quad , \quad (9.9)$$

donde $BA^* \subset BA$, siendo ésta última longitud de la boca del puerto definida como el segmento entre los extremos de las escolleras que la limitan. La longitud de BA^* se ha considerado del 10% de BA (centrada en BA). BI^* es el resto del contorno del puerto, considerado como un borde impermeable.

Los experimentos numéricos realizados han mostrado que en líneas generales el enfoque previo permite obtener las frecuencias de resonancia del puerto con un error (por exceso) del orden del 5% aproximadamente. Sin embargo, en algunos casos se ha encontrado un error de hasta el 20% para el modo fundamental (modo Helmholtz). Para mejorar la aproximación y llevar la frecuencia fundamental a un error de estimación del orden del 5%, se ha utilizado el procedimiento que se describe a continuación.

Una vez determinada la primera aproximación para la frecuencia fundamental del modo Helmholtz, ω_{ap} , se resuelven las oscilaciones forzadas con el método linealizado **HPOF** con el BA (9.5-9.6), para algunos pocos valores de frecuencias forzantes distribuidas de manera uniforme entre $0.8 \omega_{ap}$ y ω_{ap} . Aquella que corresponda a la respuesta de la elevación mayor de la superficie libre definida en (9.7), estará más cerca de la resonancia y se corresponderá con la frecuencia fundamental del puerto (ω_H). En general cinco cálculos de la respuesta forzada alcanzan para determinar tal frecuencia con un error menor a 2%.

9.1.3. Formulación del problema de diseño óptimo.

Se pretende establecer el trazado geométrico de los rompeolas que definen el puerto a los efectos de verificar restricciones relacionadas con su navegabilidad y operatividad, y al mismo tiempo procurando minimizar la posibilidad de resonancia. Se asume que el oleaje incidente de onda larga presenta frecuencias bien definidas $\bar{\omega}_i$ con un ancho de banda pequeño ε_i . Se presentan a continuación dos maneras de formular el problema de diseño óptimo.

9.1.3.1. Problema de diseño 1: Minimización del costo de escolleras en puertos no resonantes.

Se buscan las coordenadas que definen el trazado geométrico de las escolleras de mínima longitud asumiendo que ésta última es proporcional al costo.

Las escolleras se materializan mediante una poligonal definida a través de las posiciones de sus vértices. Consecuentemente las coordenadas de éstos últimos $(x_j; y_j)$ constituyen las variables de diseño. La longitud total que se pretende minimizar se denota mediante L .

Existen ciertas restricciones geométricas que deben verificarse por razones de navegabilidad y operatividad (Memos, 2004). En particular aquí se han tomado en cuenta las siguientes: El ancho de la entrada al puerto, d_E , debe ser suficientemente grande para que los buques puedan operar con seguridad. Generalmente tal distancia debe ser mayor que la longitud de los mayores barcos que operan en el mismo. Asimismo, es conveniente acotar superiormente dicha entrada para resguardar adecuadamente las dársenas de la acción de olas de viento. Consecuentemente tal longitud estará acotada inferior y superiormente por d_{min} y d_{max} respectivamente.

Por otra parte, para que los buques puedan frenar y girar con suficiente seguridad hacia el área de amarre, es necesario definir una región suficientemente grande para ello en la zona central. Aquí se establece tal área como una sección circular de radio R cuyo mínimo valor, R_{min} , es del orden de tres veces la máxima longitud de los barcos de diseño.

Asimismo, el área de amarre depende del número y tamaño de los barcos que el puerto requiere albergar. En este caso se establece mediante la longitud l_M de la zona de muelles sobre la línea de costa que debe ser mayor que un valor predeterminado l_{min} .

Para atenuar los efectos de agitación ante ondas de gran longitud debe procurarse que las amplitudes de elevación para las posibles frecuencias de las olas incidentes estén acotadas. Es importante tener en cuenta el efecto de la marea, ya que modifica las profundidades medias del puerto y en consecuencia sus frecuencias naturales. Este hecho se ve reflejado en las respuestas ante el oleaje incidente.

Para establecer un indicador adecuado de tal restricción anti-resonante se obtienen las elevaciones medias en el puerto para las diferentes frecuencias forzantes y profundidades de marea, eligiendo entre éstas la mayor, que debe ser acotada superiormente por un valor tolerable Ψ .

Luego, la amplitud característica dentro del puerto se define como la máxima amplitud media $\bar{\eta}_{max}$ con respecto a las diferentes frecuencias forzantes y amplitudes de marea pertinentes:

$$\bar{\eta}_{max} = \max_{\omega, H_m} \left(\frac{\int_{\Omega_p} (\eta_A, \omega, H_m) d\Omega_p}{\Omega_p} \right) \quad (9.10)$$

En esta expresión η_A ; ω ; H_m es la amplitud de elevación de un punto genérico del puerto ante un oleaje monocromático incidente con frecuencia $\bar{\omega}$ para una profundidad de marea H_m mientras que Ω_p es el área del puerto.

Adicionalmente, es necesario definir el dominio de búsqueda de las variables de diseño $(x_j; y_j)$ asociadas a cada vértice, lo que puede realizarse a través del establecimiento de un subdominio acotado S_j para cada uno de los mismos. Matemáticamente tal subdominio se define de la siguiente manera:

$$S_j = \{(x, y) / x_{j\min} \leq x_j \leq x_{j\max}, y_{j\min} \leq y_j \leq y_{j\max}\} \quad (9.11)$$

Esto permite acomodar de manera general la configuración de las escolleras para asegurar la protección contra oleajes de viento dominantes (de corta longitud). Para una mejor comprensión, en la Figura 9.2 se indican las variables y parámetros definidos.

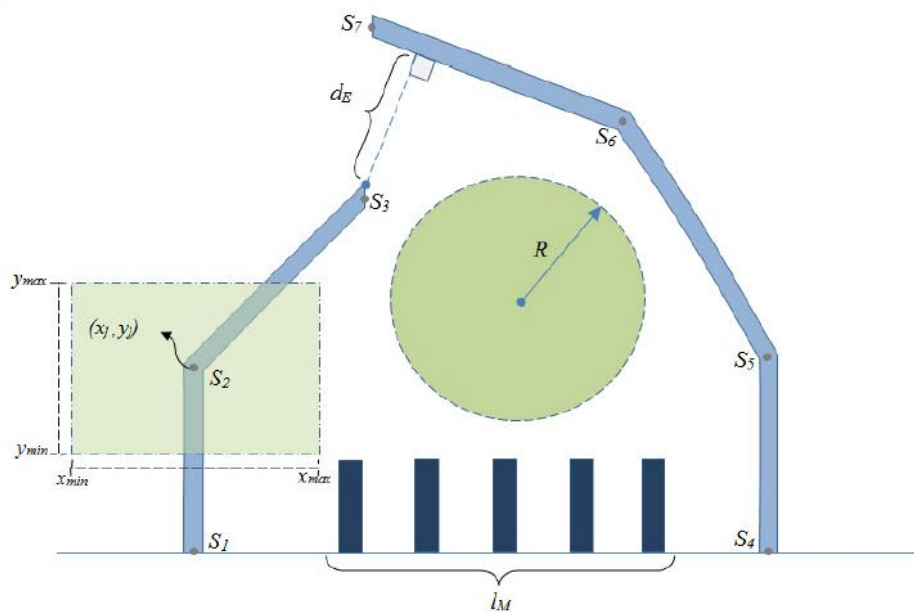


Figura 9.2: Configuración del puerto.

De acuerdo a lo explicado, el problema de diseño óptimo puede formularse matemáticamente de la siguiente manera:

$$(x_j, y_j) = \arg \min L(x_j, y_j), \quad (9.12)$$

sujeito a:

$$d_{\min} < d_E < d_{\max}, \quad (9.13)$$

$$I_M > I_{\min}, \quad (9.14)$$

$$R > R_{\min}, \quad (9.15)$$

$$(x_j, y_j) \in S_j, \quad (9.16)$$

$$\bar{\eta}_{\max} < \Psi. \quad (9.17)$$

La restricción (9.17), planteada a los efectos de evitar respuestas resonantes, está relacionada con la asignación de la amplitud del oleaje incidente $\tilde{\eta}$. Sin embargo, tal magnitud no es, en general, perfectamente conocida para ondas largas. Luego, una práctica habitual consiste en utilizar un valor de amplitud de onda incidente relativo al valor correspondiente a un punto de referencia exterior al puerto y cercano a la entrada, por lo que $\bar{\eta}_{\max}$ corresponde a un coeficiente de amplificación. Asimismo, en ocasiones tampoco se conoce con precisión la dirección de incidencia por lo cual deben realizarse cálculos para diferentes direcciones y considerar la más desfavorable.

9.1.3.2. Problema de diseño 2: Minimización de la posibilidad de resonancia portuaria.

En esta metodología de diseño se pone énfasis en minimizar la posibilidad de resonancia. Para ello se pretende que las frecuencias naturales del puerto se encuentren lo más alejadas posibles de las correspondientes al oleaje incidente $\bar{\omega}_i$. Este criterio busca maximizar la mínima diferencia entre las frecuencias naturales y las frecuencias de excitación.

Se agrega una restricción al costo de construcción de escollera, medida mediante un valor máximo posible de su longitud. Tal problema de diseño se formula de la siguiente manera:

$$(x_j, y_j) = \arg \max \left(\frac{E_{nk}^2}{\bar{\omega}_k^2 \gamma_{nk}} \right), \quad (9.18)$$

$$E_{nk} = \min_{n,k,H_m} \left| \omega_n H_m - \bar{\omega}_k \right|, \quad (9.19)$$

$$\gamma_{nk} = \begin{cases} 1 & \text{si } E_{nk} \geq \frac{\varepsilon_k}{2} \\ 10 & \text{si } E_{nk} < \frac{\varepsilon_k}{2} \end{cases}, \quad (9.20)$$

sujeto a

$$L < L_{\max}, \quad (9.21)$$

$$d_{\min} < d_E < d_{\max}, \quad (9.22)$$

$$I_M > I_{\min}, \quad (9.23)$$

$$R > R_{\min}, \quad (9.24)$$

$$(x_j, y_j) \in S_j, \quad (9.25)$$

donde n corresponde al modo de oscilación libre, E_{nk} es la mínima diferencia en valor absoluto entre las frecuencias naturales y las frecuencias forzantes. El cuadrado de la frecuencia $\bar{\omega}_k$ se agrega en la función objetivo a los efectos de normalizar el indicador de comparación. Asimismo se ha introducido un factor γ_{nk} que penaliza la función objetivo cuando aparecen condiciones de resonancia (recordar que la frecuencia del oleaje forzante $\bar{\omega}_k$ puede variar dentro de un rango ε_k).

9.1.4. Solución computacional y ejemplos numéricos.

Para resolver el primer problema de diseño es necesario determinar las amplitudes del oleaje portuario para verificar la restricción (9.17). Para ello deben resolverse las oscilaciones forzadas con el método linealizado **HPOF** para el **BA** (9.5-9.6). El enfoque de optimización consiste en seleccionar una alternativa de diseño factible, es decir que verifique las restricciones (9.13-9.16), evaluar la función objetivo FO (9.12) y luego repetir la evaluación con un nuevo conjunto de variables de diseño a efectos de comparación, dirigiendo la búsqueda mediante el método **SA**.

El segundo problema de diseño se resuelve de una manera similar, aunque el **MEF** se utiliza en este caso para resolver el problema de autovalores (9.8–9.9) y obtener así las frecuencias naturales. De esta manera es posible evaluar la función objetivo dada por (9.18), que en este caso debe ser maximizada.

En la Figura 9.3 se muestra un esquema de la metodología propuesta. En este ejemplo se utilizan mallas (de elementos triangulares de 3 nodos) de 1000 y 8000 grados de libertad aproximadamente para los problemas de vibraciones libres y forzadas respectivamente. Se ha corroborado que las mallas tienen entre 5 y 10 elementos por longitud de onda.

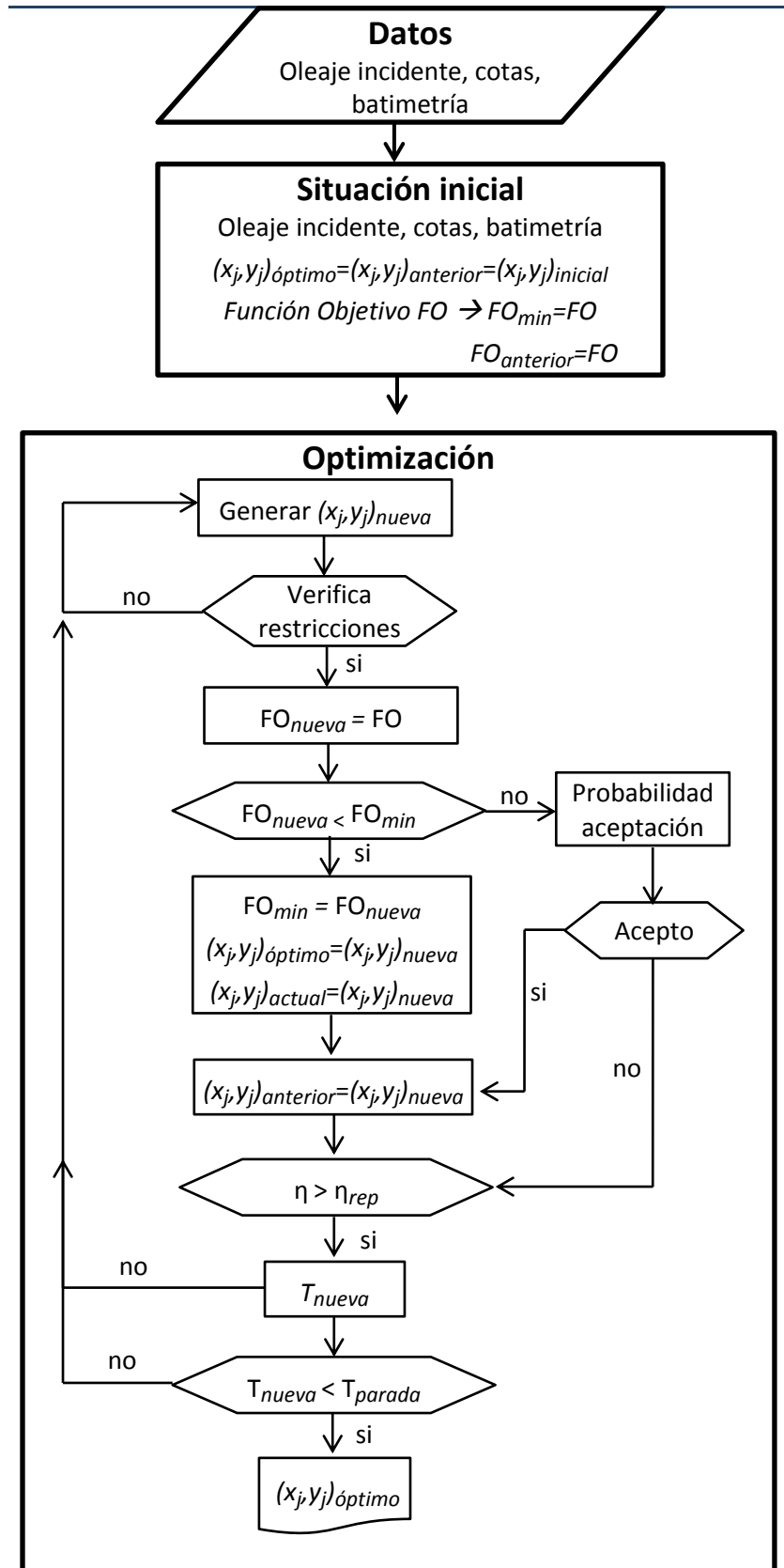


Figura 9.3: Procedimiento de optimización.

9.1.4.1. Caso 1: Minimización de longitud de escolleras.

Para ejemplificar el modelo propuesto en la sección 9.1.3.1 se parte de un prediseño compuesto por dos escolleras de 25 m de ancho compuestas por 2 y 3 tramos respectivamente. Las coordenadas de los extremos de dichos tramos, así como las restricciones en cuanto a la posibilidad de modificación de los mismos (ecuación 9.15) se detallan en la Tabla 9.1. Se ha procurado definir el dominio de búsqueda de los extremos de las escolleras (puntos 3 y 7) de manera tal que la escollera “Este” quede externa a la escollera “Oeste” para proteger el puerto de olas generadas por viento provenientes de la dirección NE. El puerto se diseña teniendo en cuenta que las olas predominantes en la localidad ingresan desde el norte presentando 2 bandas angostas de frecuencias. La primera va desde 0,018 hasta 0,022 rad/s y la segunda desde 0,052 hasta 0,056 rad/s. Se evalúan diferentes configuraciones para varias condiciones de marea entre las correspondientes a pleamar (H =14 m) y a la de bajamar (H =10 m). En este caso se ha supuesto de manera simplificada que la batimetría es uniforme.

Punto	Coordenada x_j				Coordenada y_j			
	Inicial	Máxima	Mínima	Óptima	Inicial	Máxima	Mínima	Óptima
1	2500	2750	2200	2610	0	0	0	0
2	2500	2750	2200	2575	500	700	300	375
3	2800	3000	2400	2735	1000	1200	800	930
4	3500	3700	3200	3505	0	0	0	0
5	3500	3700	3200	3460	500	700	400	430
6	3400	3600	3200	3375	1000	1200	900	920
7	2800	3000	2600	2800	1500	1600	1300	1540

Tabla 9.1: Valores de coordenadas. Caso 1.

A partir de la condición inicial se utiliza el método **SA** para generar y evaluar nuevas configuraciones. La generación de un diseño alternativo se realiza variando en forma aleatoria las coordenadas de los puntos entre 0 y 20 metros cada vez. Se verifica que la nueva configuración respete las restricciones de ingreso al puerto para lo cual se fija una apertura mínima de boca de acceso $d_{\min}= 250$ m y máxima $d_{\max}= 500$ m (ecuación 9.13). La navegación interna y factibilidad de maniobras se determina fijando un radio mínimo (ecuación 9.15) en la zona central $R_{\min}=300$ m. La condición necesaria de operatividad requiere una longitud libre para muelles sobre la línea de costa (ecuación 9.14) cuyo valor mínimo se fija en $l_{\min}=750$ m.

Una vez evaluadas las restricciones geométricas, si la nueva configuración cumple con todas las condiciones de diseño mencionadas, se calculan los factores de amplificación de las elevaciones de la superficie del agua para las distintas frecuencias mediante el método **HPOF**.

Los valores de tales coeficientes se calculan como un valor medio en el área del puerto para cada frecuencia. El mayor de los valores así calculados para todas las frecuencias no debe superar $\Psi = 1,5$ (ecuación 9.17). Una vez evaluadas todas las restricciones se calcula la función objetivo (9.12). La mejor configuración, es decir aquella que proporciona la menor longitud de escolleras, se muestra en la Tabla 9.1.

En la Figura 9.4 se pueden ver los diagramas de amplificación correspondientes a las situaciones extremas de mareas y las bandas de frecuencia analizadas. Es posible apreciar que para la configuración seleccionada los picos resonantes caen fuera de las bandas de frecuencia de excitación.

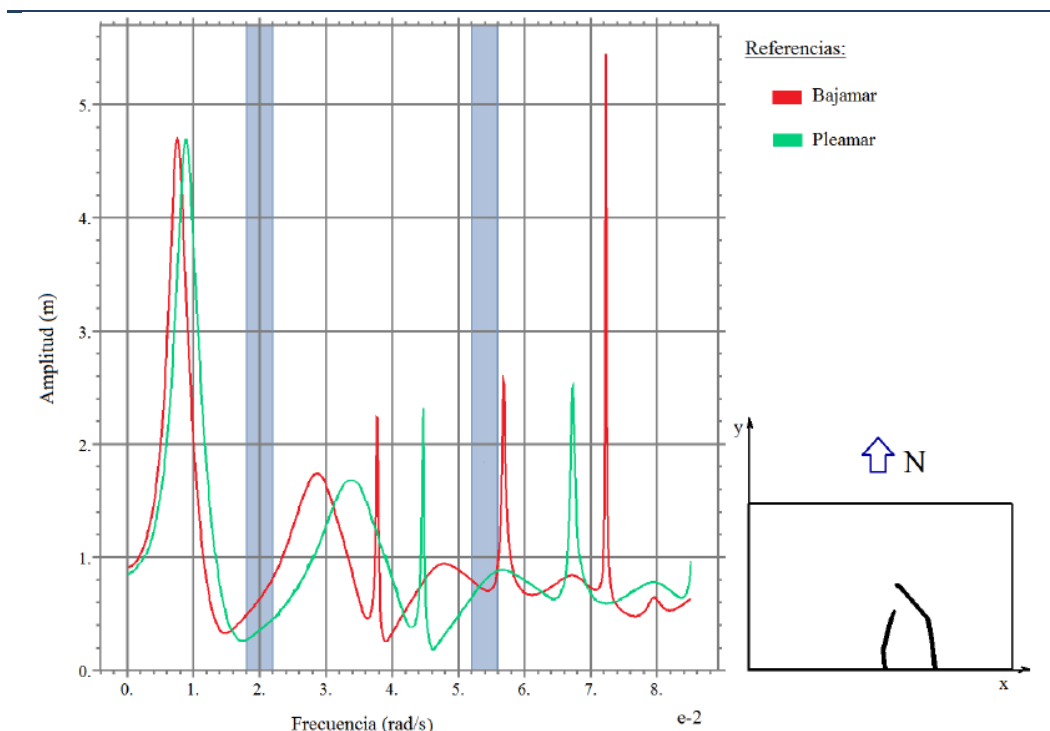


Figura 9.4: Diagrama de amplificación. Caso 1.

9.1.4.2. Caso 2: Diseño de un puerto no resonante.

La geometría utilizada en este caso consta, al igual que en el caso anterior, de 5 tramos cuyas características se detallan en la Tabla 9.2.

Punto	Coordenada x_j				Coordenada y_j			
	Inicial	Máxima	Mínima	Óptima	Inicial	Máxima	Mínima	Óptima
1	2160	2750	1400	2110	0	0	0	0
2	2200	2750	1400	2120	625	800	300	645
3	2890	3000	1600	2900	1080	1600	900	1045
4	3590	4000	3000	3550	0	0	0	0
5	3970	4000	3000	3900	395	800	300	430
6	3380	3800	2750	3350	985	1600	900	1005
7	2560	3000	1200	2400	1430	2000	1300	1440

Tabla 9.2: Valores de coordenadas. Caso 2.

El puerto se diseña teniendo en cuenta que las olas predominantes en la localidad ingresan, al igual que en el caso anterior desde el norte, pero ahora sus frecuencias características son $\bar{\omega}_1 = 0,0068$ y $\bar{\omega}_2 = 0,0295$, con un ancho espectral $\varepsilon_1 = 0,0027$ rad/s y $\varepsilon_2 = 0,00295$ rad/s, respectivamente.

El objetivo, en este caso, es buscar una configuración que aleje las frecuencias naturales del puerto de las correspondientes al oleaje incidente. Para ello se calculan las primeras 6 frecuencias naturales, para la configuración que se evalúa y las diferentes profundidades de mareas, con las ecuaciones (9.8-9.9). Luego, se calcula la función objetivo (9.18) que busca maximizar las diferencias entre tales frecuencias y las correspondientes a las del oleaje incidente. Se limita la longitud máxima de escolleras (restricción 9.21) en $L_{\max} = 4500$ m y el ancho de la boca de acceso entre un valor mínimo $d_{\min} = 200$ m y un valor máximo $d_{\max} = 500$ m (expresión 9.22). Para las profundidades de baja y pleamar se adoptan los mismos valores que en el ejemplo anterior. Es interesante mencionar la muy buena precisión que se consigue para determinar las frecuencias naturales del puerto con la utilización del procedimiento de la condición de borde aproximada indicada en la expresión (9.9). Por ejemplo, para la configuración de diseño óptimo las primeras 4 frecuencias naturales en bajamar, expresadas en rad/s, son las siguientes: 0,00403; 0,0206; 0,0317 y 0,0396 con línea nodal reducida, 0,00710; 0,0206; 0,0357 y 0,0395 utilizando una línea nodal en toda la longitud de la boca del puerto y 0,0042; 0,0206; 0,0329 y 0,0395 mediante el enfoque más preciso a partir del diagrama de amplificación. Es posible observar que la ubicación de una línea nodal en toda la longitud de la boca arroja valores imprecisos, especialmente para la frecuencia fundamental.

En la Figura 9.5 se pueden ver los diagramas de amplificación para el diseño óptimo correspondientes a las situaciones extremas de mareas y las bandas de frecuencia incidentes.

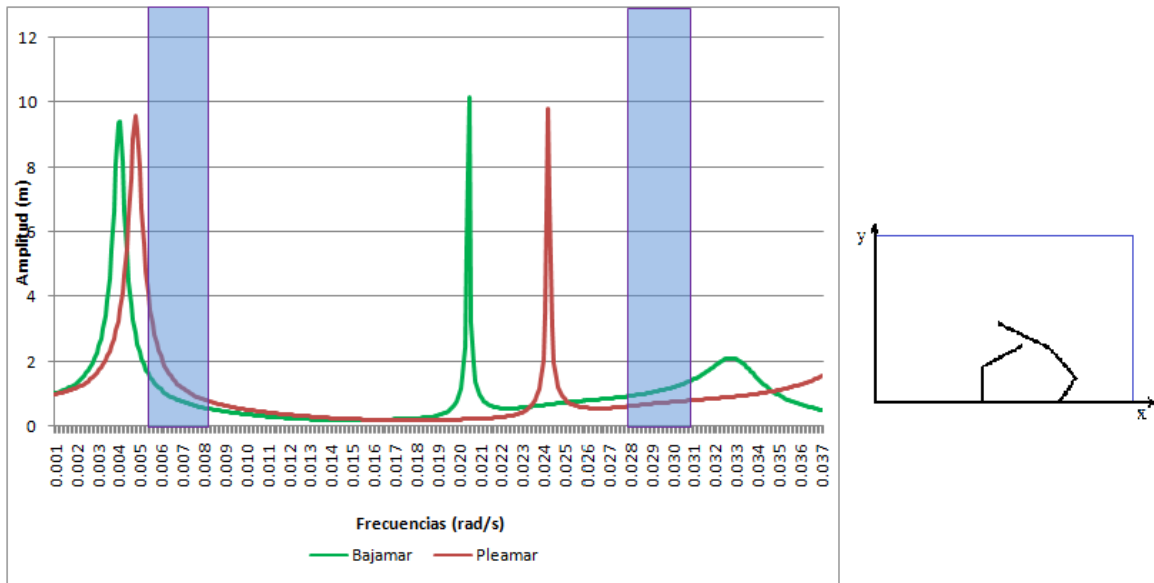


Figura 9.5: Diagrama de amplificación. Caso 2.

En general en ambos problemas los valores óptimos de las variables de diseño se consiguen en menos de 600 iteraciones que en una notebook con procesador i5 requiere menos de una hora. En la Figura 9.6 se puede apreciar cómo se acerca la solución al valor óptimo para el Caso 2.

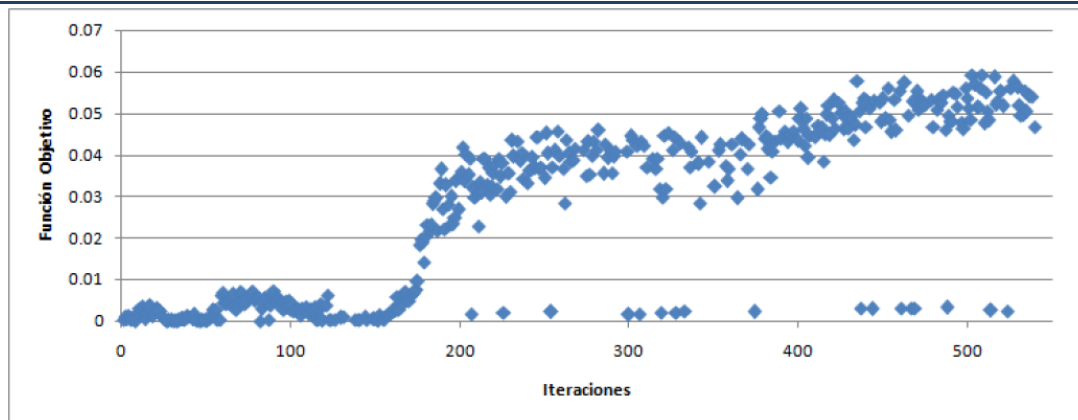


Figura 9.6: Convergencia del Caso 2

Finalmente, a los propósitos de ilustración, en la Figura 9.7 se muestra la distribución de amplitudes para el oleaje incidente correspondiente a la frecuencia $\bar{\omega}=0,0068$ rad/s en la condición de bajamar ($H=10$ m).

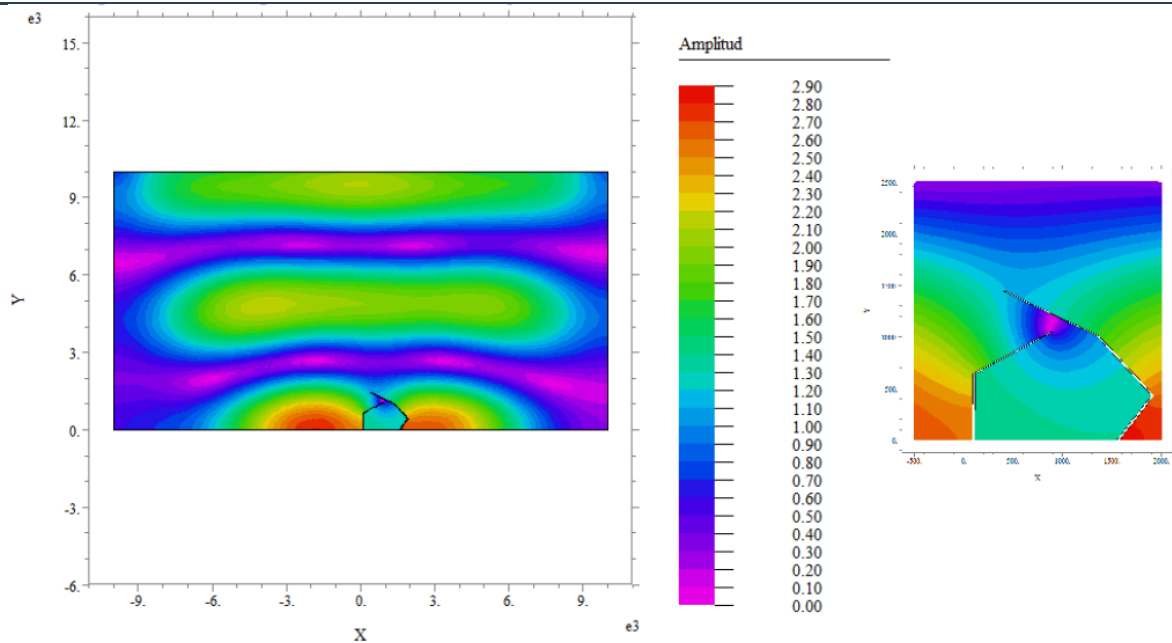


Figura 9.7: Condiciones de oleaje en bajamar cuando $\omega=0,0068$ rad/s.

9.1.5. Discusión de los resultados.

Se ha propuesto un enfoque de diseño óptimo para el diseño de la geometría de puertos procurando evitar situaciones de resonancia ante ondas largas y simultáneamente cumplir con restricciones relacionadas con la navegabilidad, operatividad y economía.

Para ello se ha utilizado la aproximación lineal del método **HPOF** con una combinación de oleaje incidente y condición de radiación de Sommerfeld, que describen de manera razonablemente precisa las principales características de las oscilaciones portuarias y, al mismo tiempo, se pueden resolver eficientemente mediante diversos procedimientos numéricos.

El enfoque de solución para el problema propuesto consiste en la aplicación del método de los elementos finitos para resolver las ecuaciones gobernantes, y entonces poder evaluar la función objetivo y/o las restricciones, en combinación con el método “recocido simulado” para guiar la búsqueda hacia los valores óptimos de las variables de diseño.

Si bien existen modelos más precisos que la teoría de aguas poco profundas, tales como las ecuaciones de Boussinesq (Losada et al., 2008), el procedimiento empleado es poco demandante desde el punto de vista computacional y constituye una herramienta de utilidad para la concepción del diseño preliminar de puertos.

Por otra parte, el aspecto de atenuación del oleaje de viento (ondas cortas) se ha considerado de manera indirecta, al seleccionar el dominio de búsqueda de las coordenadas de las escolleras. Sin embargo, es posible incorporar esta cuestión de manera directa sustituyendo, para ello, el modelo de aguas poco profundas por la ecuación de Berkhoff que tiene validez para longitudes más cortas y coincide con el anterior para ondas largas.

En los problemas de diseño analizados, se ha supuesto que las ondas largas de la región presentan frecuencias bien definidas. Cuando el espectro tiene un ancho de banda muy amplio, el concepto de diseño es diferente ya que se hace prácticamente imposible evitar posibles situaciones resonantes y entonces las geometrías adecuadas serán aquellas que presenten menor severidad en tales casos.

9.2. UN ENFOQUE DE DISEÑO ÓPTIMO DE UN SISTEMA DE EXTRACCIÓN DE AGUA DULCE EN ACUÍFEROS COSTEROS.

9.2.1. Generalidades.

La necesidad de disponer de agua potable en cantidad y calidad es un factor de gran importancia a la hora de cubrir aspectos socioeconómicos. Sobre todo considerando que las tasas de crecimiento tanto urbano como agrícola-ganadero sostienen un aumento progresivo. Es por ello que los acuíferos de agua dulce se han convertido en una de las opciones más convenientes para afrontar tal situación y en muchos casos representan el único recurso de abastecimiento.

Probablemente aquellos lugares que se ven más afectados por esta realidad correspondan a ciudades turísticas aledañas a zonas costeras, donde rápidamente en períodos estivales su población aumenta significativamente repercutiendo directamente en dicho recurso. Esta situación conduce a grandes extracciones de agua potable de forma no controlada que, sumado a condiciones climatológicas adversas tales como largos períodos de sequías, puede generar una disminución en la napa dando lugar al desarrollo de una intrusión salina. Este fenómeno varía de acuerdo al volumen de recarga del acuífero ya que en épocas de menor recarga, el acuífero disminuye avanzando el frente de agua salada tierra adentro y en períodos de mayor recarga dicho frente retrocede hacia el mar. Por lo tanto esta dinámica propia del sistema puede alterarse cuando la tasa de extracción por bombeo de agua dulce es superior a la recarga, provocando un descenso de la napa. Consecuentemente puede producirse un ingreso de cuña salina al acuífero deteriorando la calidad del mismo, y si bien es posible revertir esta situación, su remediación puede llegar a ser lenta y costosa.

Para asegurar un suministro de agua potable sostenible en el tiempo, resulta necesaria la práctica de políticas dirigidas al control y gestión del agua subterránea que garanticen por ejemplo que el volumen de caudal extraído de agua cubra con las necesidades actuales y futuras, sujetas a la limitación de la no intrusión de agua salada en cada pozo de extracción y a otras restricciones relacionadas con la capacidad de bombeo. Además, para no sobreexplotar el sistema, el volumen total de extracción no debe superar la recarga natural del mismo.

A los efectos de determinar el mayor rendimiento posible que puede tener un sistema de extracción de agua dulce sin que la interfaz de agua dulce-salada alcance el fondo del pozo, se desarrolla un modelo computacional de diseño óptimo.

Consiste en determinar para cada pozo considerado la profundidad de dicha interfaz utilizando

funciones de influencia resueltas mediante el MEF. Las mismas son obtenidas convenientemente a partir de la ecuación diferencial lineal del potencial de flujo propuesta por (Strack, 1976) para aguas subterráneas en acuíferos no confinados. Luego haciendo uso del método **SA** se determina el mayor rendimiento posible que puede tener el sistema de extracción evaluando en cada búsqueda el cumplimiento de las restricciones del problema, es decir la ausencia de intrusión salina y la capacidad (o eficiencia) de bombeo de agua dulce por cada pozo.

El modelo computacional planteado constituye una extensión del trabajo presentado por (Mantoglou et al. 2004b, a). La modificación consiste en la utilización de funciones de influencia para analizar la posición de la interfaz entre el agua dulce y salada. Esto hace al procedimiento más eficiente desde el punto de vista computacional. Finalmente se analizan algunos ejemplos para determinar las ventajas de la presente metodología.

9.2.2. Modelo de flujo subterráneo.

Se considera un acuífero subterráneo costero no confinado de acuerdo con el esquema mostrado en la Figura 9.8. Para su modelización es posible considerar ciertas aproximaciones que son factibles de aplicar en el estudio de las aguas subterráneas y en problemas de intrusión salina. Las mismas suponen en primer lugar que en la zona donde se separa el agua dulce con el agua salada no se produce mezcla, esto quiere decir que se asume una superficie de separación o interfaz. Esta aproximación es razonable en problemas de escala regional, siendo la zona de transición relativamente pequeña en relación a la escala real del problema. En segundo lugar se asume que no existen pérdidas de carga del agua de mar tierra adentro ni tampoco gradientes verticales de carga. En tercer lugar se considera que el movimiento del flujo es horizontal (aproximación de Dupuit). De esta manera se define el problema sobre un dominio bidimensional integrando verticalmente la ecuación de flujo. Finalmente la posición de la interfaz se puede determinar asumiendo que el agua dulce “flota” sobre el agua salada que se encuentra detenida, es decir que para régimen estacionario es posible deducir la relación entre la altura piezométrica H_{DS} con la profundidad de la interfaz agua dulce-salada E establecida por (Ghyben, 1889; Herzberg, 1901) que se expresa de la siguiente manera:

$$S E = H_{DS} - D, \quad (9.24)$$

siendo D la profundidad del acuífero medido a partir de su base hasta el nivel medio del mar y S la siguiente relación entre las densidades de agua salada ρ_s y dulce ρ_d :

$$S = \frac{(\rho_s - \rho_d)}{\rho_d} \quad (9.27)$$

Con la hipótesis anterior, la ecuación para flujo subterráneo en acuíferos no confinados resulta ser la siguiente:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(K_h H_F \frac{\partial H_{DS}}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(K_h H_F \frac{\partial H_{DS}}{\partial y} \right) + N - \sum_{i=1}^M Q_i \delta(x - x_i) \delta(y - y_i) = 0, \quad (9.28)$$

donde K_h es la conductividad hidráulica, N la recarga superficial, M el número de pozos, δ la función Delta de Dirac, Q_i la tasa de bombeo en cada pozo y H_F es la profundidad total del acuífero medida a partir de la napa freática calculada de la siguiente manera:

$$H_F = H_{DS} - D + E. \quad (9.29)$$

Debe observarse que la expresión (9.28) es una ecuación de difusión no lineal.

Basado en las aproximaciones mencionadas anteriormente, es posible transformar la expresión (9.28) en una única ecuación diferencial lineal aplicable tanto para zonas donde se encuentra agua dulce como salada (Strack, 1976). De esta manera el problema se reduce a la siguiente ecuación gobernante:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(K_h \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(K_h \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) + N - \sum_{i=1}^M Q_i \delta(x - x_i) \delta(y - y_i) = 0, \quad (9.30)$$

donde ϕ corresponde a un potencial de flujo.

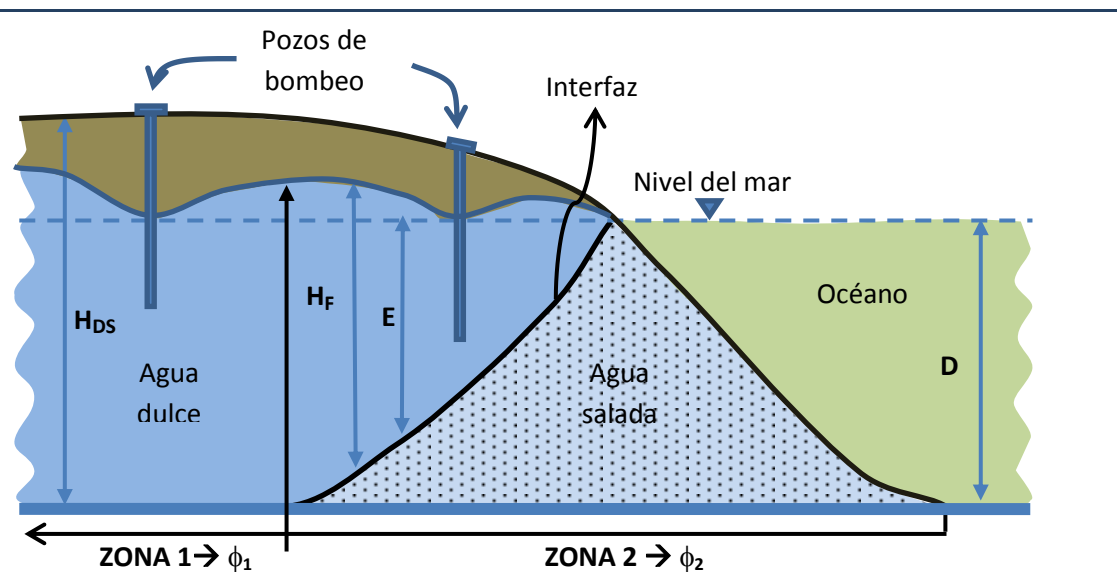


Figura 9.8: Sección transversal de un acuífero no confinado. Esquema de interfaz agua dulce-salada.

Existen dos zonas, separadas por el lugar geométrico donde la interfaz se corta con la base del acuífero (ver Figura 9.8) y que presentan características diferentes. En la zona 1 el comportamiento es netamente de un acuífero no confinado de agua dulce, mientras que la zona 2 abarca toda el área de transición de la interfaz agua dulce-salada. De esta manera el potencial se define de la siguiente forma:

$$\phi = \begin{cases} \frac{1}{2} [H_{DS}^2 - (1+S)D^2] & \text{para la zona 1} \\ \frac{1}{2} \left(\frac{S+1}{S} \right) (H_{DS} - D)^2 & \text{para la zona 2} \end{cases} \quad (9.31a,b)$$

Como condición de frontera se considera que en los puntos correspondientes al sector de la costa la profundidad de la interfaz agua dulce-salada es nula, mientras que en los bordes impermeables la derivada con respecto a la normal es nula (no existe flujo subterráneo):

$$K_h \frac{\partial \phi}{\partial n} = 0 \quad (9.32)$$

siendo n la dirección perpendicular al borde.

De esta forma, aplicando un procedimiento similar al enfoque adjunto desarrollado en el *Capítulo VI* (para un caso estacionario), la solución de la ecuación (9.30) para las condiciones de borde apropiadas puede ser expresada de la siguiente manera:

$$\phi(x,y) = N\phi_0(x,y) + \sum_{i=1}^M Q_i \phi_i(x,y) \quad (9.33)$$

donde ϕ_0 y ϕ_i corresponden a las funciones de influencia, y vienen dadas mediante la solución de las siguientes ecuaciones:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(K_h \frac{\partial \phi_0}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(K_h \frac{\partial \phi_0}{\partial y} \right) + 1 = 0 \quad (9.34)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(K_h \frac{\partial \phi_i}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(K_h \frac{\partial \phi_i}{\partial y} \right) - \delta(x-x_i)\delta(y-y_i) = 0 \quad (9.35)$$

Una vez resuelto el problema de contorno (9.34-9.35), utilizando la expresión (9.26) junto con la expresión (9.31b), es posible determinar la profundidad de la interfaz en la localización del pozo j -ésimo de la siguiente manera:

$$E_j = \sqrt{\frac{2}{S(S+1)} \left[N\phi_0(x_j, y_j) + \sum_{i=1}^M Q_i \phi_i(x_j, y_j) \right]} \quad (9.36)$$

Debe observarse que esta expresión es solamente válida si el pozo se encuentra ubicado en la zona 2 y puede definirse de forma generalizada como se expresa a continuación:

$$E_j^* = \begin{cases} D & \text{si } E_j \geq D \\ E_j & \text{si } E_j \leq D \end{cases} \quad (9.37)$$

Lo que significa que si el valor de la ecuación (9.36) es superior al nivel medio del mar D , la misma se encuentra en la zona 1 y se adopta igual a esta última. Caso contrario se aplica la expresión (9.36).

9.2.3. Formulación del problema de diseño óptimo: Maximización del caudal a extraer.

El problema de la determinación del caudal máximo de agua dulce posible de extraer por cada pozo, sin que dicho proceso produzca una intrusión salina, puede ser formulado matemáticamente de la siguiente manera:

$$(Q_j, \alpha_j) = \arg \max(Q_T), \quad (9.38)$$

siendo $Q_j = Q_{\max} \beta_j$

$$\text{Sujeto a } \begin{cases} 0 \leq \beta_j \leq 1 \\ \alpha_j = \begin{cases} 1 & \text{si } Q_j \geq Q_{\min} \\ 0 & \text{si } Q_j \leq Q_{\min} \end{cases} \\ E_j^* \geq E_p & \text{si } \alpha_j = 1 \end{cases} \quad (9.39)$$

donde Q_T es la función objetivo a maximizar correspondiente al volumen total de extracción de agua dulce de M pozos existentes, Q_j son los caudales a extraer de cada pozo, β_j corresponde a las variables de diseño, E_p la profundidad máxima del pozo medida desde el nivel del mar, Q_{\max} es el caudal máximo de extracción que depende de la capacidad de las bomba, Q_{\min} es un caudal mínimo debajo del cual la construcción del pozo no resulta eficiente y α_j es un indicador. Si su valor es 0, el pozo no se construirá.

La primera restricción determina el rango de búsqueda de las variables de diseño. Debe notarse que corresponden a asumir el caudal de cada pozo como una cantidad positiva menor que el

caudal máximo establecido Q_{max} . La segunda indica si el pozo será o no construido y finalmente la tercera establece que la intrusión salina no debe alcanzar el fondo de los pozos.

9.2.4. Solución computacional y ejemplos numéricos

Para obtener la solución adecuada al problema planteado es necesario en primer lugar determinar las funciones de influencia ϕ_0 y ϕ_i ($i=1,2,\dots,M$) que intervienen en la expresión (9.39). Una vez obtenidas las funciones de influencia debe observarse que la evaluación de la intrusión salina se realiza analíticamente mediante la expresión (9.36). Por otra parte la determinación de tales funciones requiere resolver numéricamente $M+1$ problemas, donde M es el número de pozos. Esto resulta diferente al enfoque utilizado por (Mantoglou et al. 2004b, a) quienes obtienen la solución numérica de la ecuación (9.30) para cada escenario de extracción, lo cual en general implica la resolución computacional de un mayor número de casos y por consiguiente el tiempo de cálculo resulta mayor que el del método aquí propuesto.

El modelo computacional propuesto se aplica a un caso hipotético de una ciudad turística situada en cercanías al mar que necesita abastecer de agua potable a una población, que en época estival triplica su cantidad. Como ejemplo se estima una población permanente de 6000 habitantes. Para ello se proyecta la construcción de una batería de 9 pozos ubicados estratégicamente para la extracción de agua dulce en un área de 16 km^2 aproximadamente, sobre un suelo conformado por una capa de arena y otra de mezcla de arenas y grava. Los valores asumidos de conductividad hidráulica (K_h) son de 25 y 10 m/d respectivamente. Por otra parte se estima que la precipitación media anual supera los 700 mm. Tales cuantificaciones se ilustran en la Figura 9.9.

Se desea determinar el volumen máximo que puede bombearse en cada uno de los pozos a los efectos de no contaminar la napa de agua dulce con agua de mar. Para ello, si bien la capacidad de extracción puede variar entre 0 y $1500 \text{ m}^3/\text{d}$, se establece que si el pozo j -ésimo bombea una cantidad inferior a $100 \text{ m}^3/\text{d}$ el mismo no será considerado por resultar antieconómico. Asimismo se fija una perforación máxima de 15 m por cada estación de bombeo.

En tal sentido se analiza la construcción de dichos pozos planteando dos problemas de diseño. El primero de ellos (A) consiste en determinar el volumen bombeado de agua potable suponiendo que todas las bombas deben extraer el mismo caudal, mientras que en el segundo diseño (B) se suponen volúmenes diferentes para cada pozo.

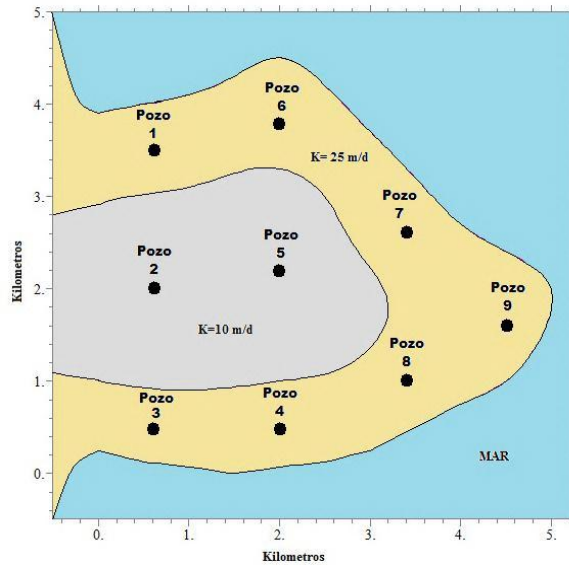


Figura 9.9: Representación del área de estudio.

Para ambos diseños se realizan y comparan los siguientes enfoques alternativos:

ALTERNATIVA (A)

1. Diseño de referencia: Diseñar la construcción de los 9 pozos de forma tal que, con un consumo promedio de 300 lt/día, se llegue a cubrir con la demanda total en períodos estivales;
2. Búsqueda exhaustiva del volumen máximo necesario.

ALTERNATIVA (B)

3. Diseño de referencia factible;
4. Diseño Optimizado: Método de “recocido simulado” (empleando 10, 100, 500 y 1000 iteraciones).

9.2.4.1. Ejemplo numérico 1.

El enfoque 1 de la alternativa (A), plantea un diseño que garantiza el abastecimiento de agua potable en períodos estivales de 5400 m3/día. Sin embargo el mismo no cumple con la limitante ambiental en el pozo 9, como puede observarse en la Tabla 9.3 indicado con las siglas *IS* (Intrusión Salina). En el segundo enfoque se recurre a una búsqueda exhaustiva (tomando un $\Delta b=0.05$) del volumen máximo que debe tener cada pozo para poder cubrir con dicha demanda sin que se produzca intrusión. De esta forma se plantea la siguiente expresión:

$$Q_T = \beta Q_{\max} \sum_{j=1}^M \alpha_j \tag{9.40}$$

Nuevamente se observa en la Tabla 9.3 que si bien dicho enfoque cumple con las restricciones del problema no llega a cubrir con el volumen mínimo requerido.

Pozo	Diseño para abastecimiento		Búsqueda Aleatoria	
	Q_i (m ³ /d)	E_i (m)	Q_i (m ³ /d)	E_i (m)
1	600	35	410,5	35
2	600	35	410,5	35
3	600	35	410,5	35
4	600	35	410,5	35
5	600	35	410,5	35
6	600	35	410,5	35
7	600	35	410,5	35
8	600	35	410,5	35
9	600	IS	410,5	15
Totales	5400 (m³/d)		3694,5 (m³/d)	

Tabla 9.3 Comparación de los valores obtenidos en con la alternativa de diseño A.

9.2.4.2. Ejemplo numérico 2.

Seguidamente en la Tabla 9.4 se muestran los valores obtenidos correspondientes a la alternativa (B), donde el tercer enfoque corresponde a un diseño arbitrario y factible ya que verifica las restricciones del problema como también la demanda necesaria, y se lo utiliza a los efectos de ser comparado con el método propuesto en el presente trabajo (enfoque 4).

Si bien ambos diseños cumplen con la restricción ambiental, es decir verifican la no intrusión salina en cada uno de los pozos, el desarrollo del enfoque basado en el método de optimización “recocido simulado” implica un mayor volumen de caudal total extraído, siendo aproximadamente del orden del 47% con respecto al diseño de referencia.

Nº de pozo	Diseño de referencia		Método de Recocido Simulado (SA)	
	Q_i (m ³ /d)	E_i (m)	Q_i (m ³ /d)	E_i (m)
1	500	35	1164	24
2	600	35	1500	19
3	500	35	967	25
4	400	35	854	21
5	1400	23	1295	26
6	400	35	552	35
7	700	35	583	35
8	700	29	644	31
9	200	29	363	18
Totales	5400 (m³/d)		7922 (m³/d)	

Tabla 9.4 Comparación de los valores obtenidos en con la alternativa de diseño B.

A los efectos de mostrar la eficiencia del método SA, este último es comparado con otro enfoque de optimización basado en una búsqueda aleatoria de las variables de diseño, es decir un

simple método de prueba y error.

Los resultados ampliados de esta comparación para cada una de las iteraciones se muestran en la Tabla 9.5 donde los valores nulos indican la anulación del pozo en la solución final.

Nº de Iteración	Búsqueda Aleatoria						Método de recocido simulado					
	100		500		1000		100		500		1000	
Nº de pozo	Q_i (m ³ /d)	E_i (m)	Q_i (m ³ /d)	E_i (m)	Q_i (m ³ /d)	E_i (m)	Q_i (m ³ /d)	E_i (m)	Q_i (m ³ /d)	E_i (m)	Q_i (m ³ /d)	E_i (m)
1	979	35	442	35	1201	27	1103	29	755	35	1164	24
2	348	35	1330	35	1053	35	1430	35	1370	35	1500	19
3	1012	31	1039	23	928	31	753	35	1071	18	967	25
4	410	35	838	26	755	30	239	35	813	25	854	21
5	692	35	564	35	932	35	1221	35	1021	35	1295	26
6	777	29	628	35	346	35	579	35	616	35	552	35
7	745	35	860	28	244	35	417	35	760	32	583	35
8	270	35	224	35	882	17	734	28	561	35	644	31
9	261	26	307	23	390	16	0	0	149	31	363	18
Totales	5494		6232		6731		6476		7116		7922	

Tabla 9.5: Valores finales obtenidos en cada iteración.

En la Figura 9.10 se muestra la salida gráfica del nivel de la superficie freática, calculada con el MEF. La misma corresponde a la solución óptima obtenida con el método de “recocido simulado”.

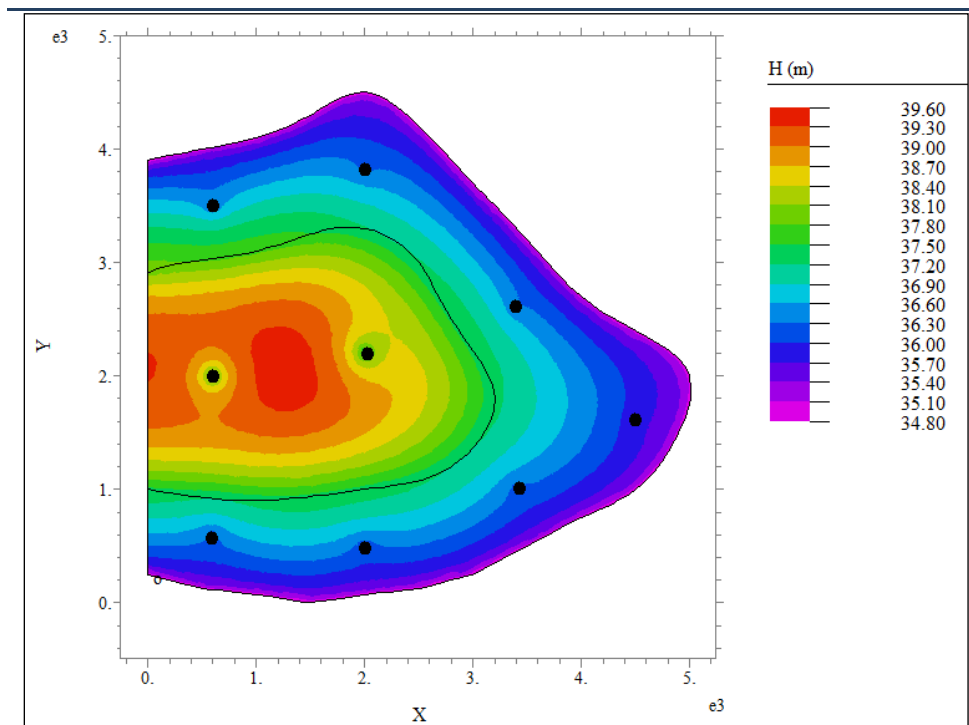


Figura 9.10: Variación de los niveles freáticos (H) sobre el área de estudio.

En ella puede observarse que la superficie freática (H) máxima, ubicada en el centro de la región, se encuentra a 4.6 m por encima del nivel del mar, y se deprime en cada localización de los

pozos que bombean agua. Estos hundimientos denominados conos de descenso son graficados mediante cortes transversales, en las Figuras 9.11a (pozos 1, 2 y 3), 9.11b (pozos 4, 5 y 6), 9.11c (pozos 7 y 8) y 9.11d (pozo 9).

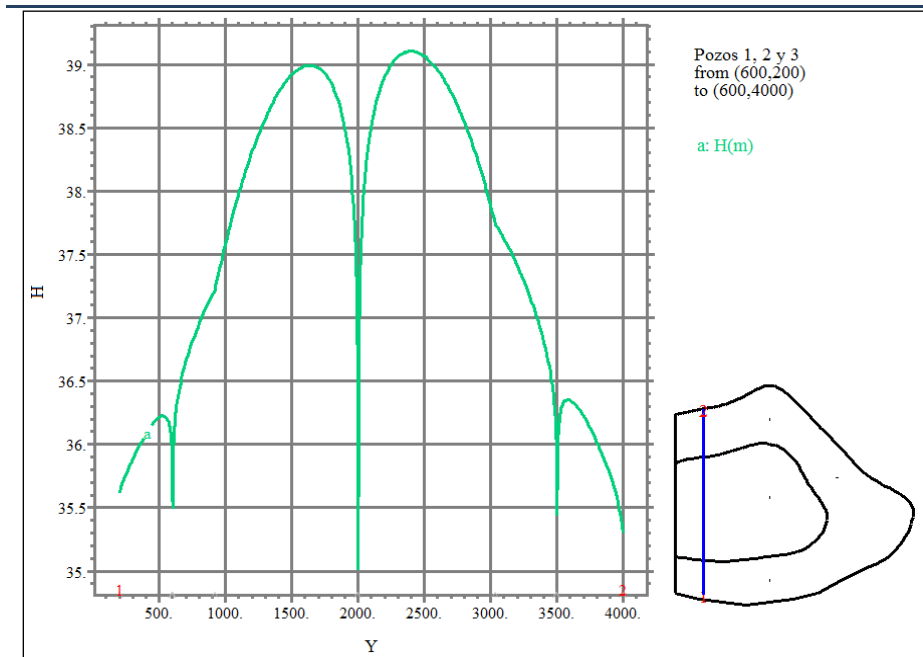


Figura 9.11a: Corte transversal del cono de descenso de los pozos 1, 2 y 3.

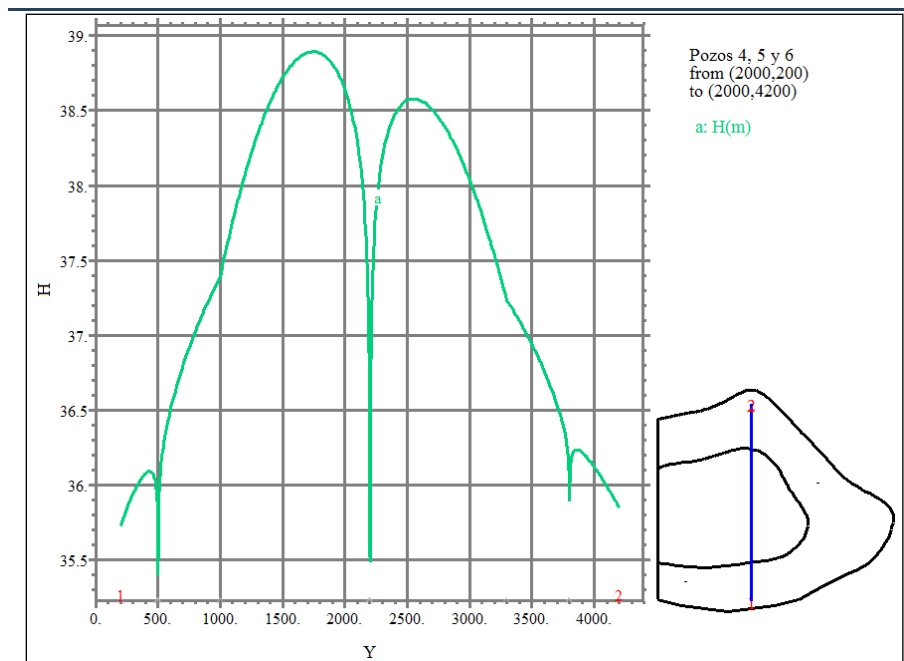


Figura 9.11b: Corte transversal del cono de descenso de los pozos 4, 5 y 6.

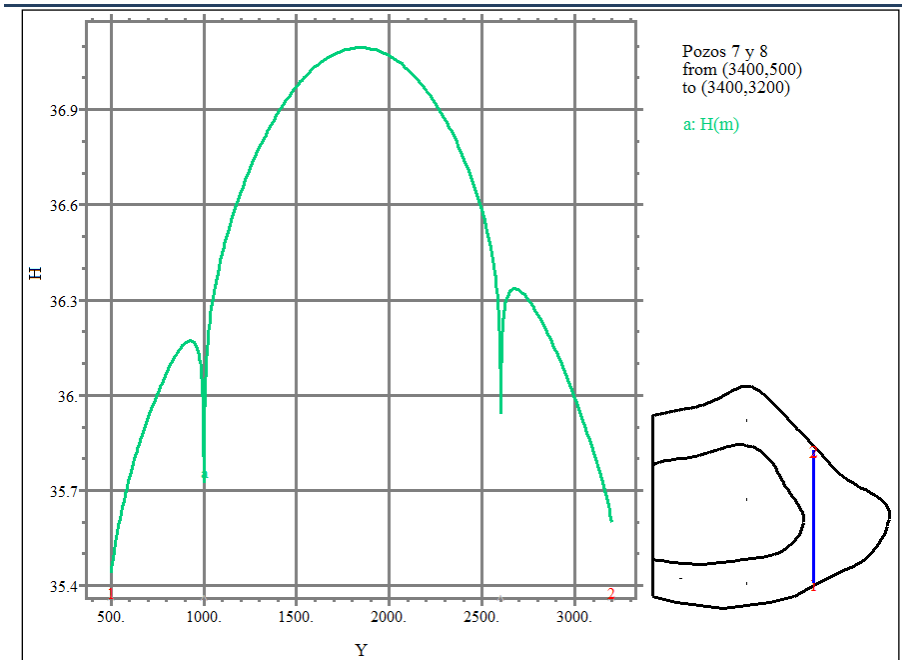


Figura 9.11c: Corte transversal del cono de descenso de los pozos 7 y 8.

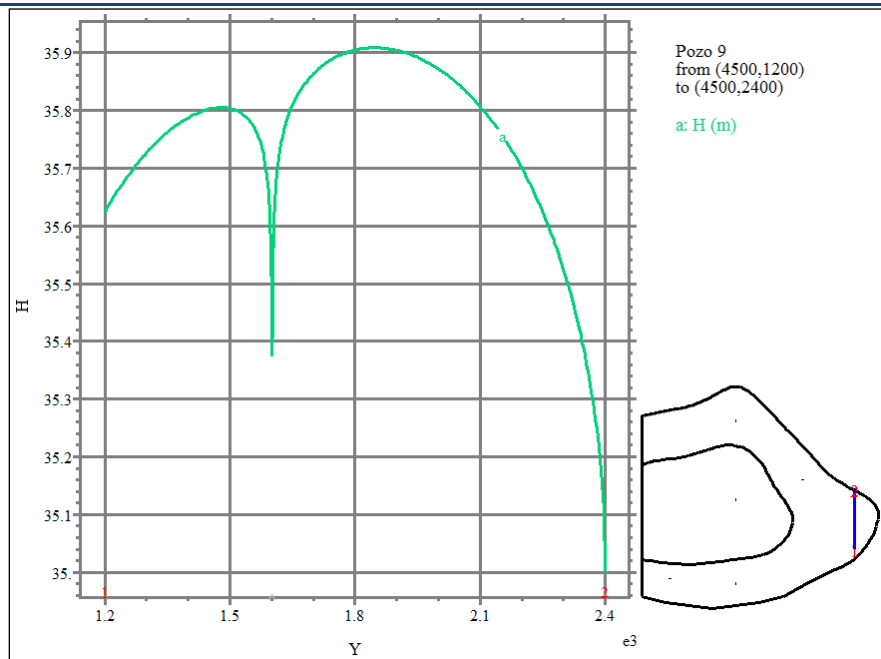


Figura 9.11: Corte transversal del cono de descenso del pozo 9.

En la Figuras 9.12 se grafica la distribución del campo vectorial normalizado del flujo del agua subterránea, es decir se muestra solamente la dirección del flujo. El mismo se obtiene al dividir el siguiente vector de flujo \vec{q} por su magnitud:

$$\vec{q} = \left(-K_h \frac{\partial \phi}{\partial x}; -K_h \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) \quad (9.41)$$

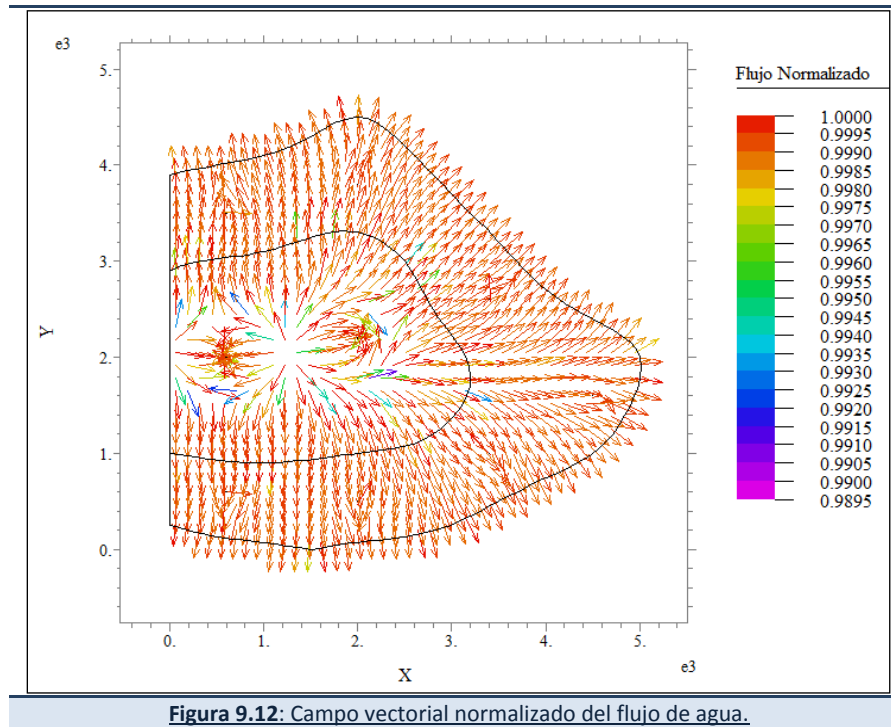


Figura 9.12: Campo vectorial normalizado del flujo de agua.

9.2.5. Discusión de los resultados.

Se desarrolló un modelo computacional para el diseño óptimo del volumen total de extracción de agua potable en una zona costera, sin que se produzca una intrusión salina dentro del acuífero de agua dulce. Este enfoque maximiza el volumen bombeado y sirve como herramienta de planificación y gestión para los gestores del recurso hídrico.

El procedimiento se basó en el uso de coeficientes de influencia obtenidos a partir de la ecuación de potencial de flujo, resueltas mediante el método de elementos finitos. La expresión obtenida para la posición de la interfaz agua dulce-salada (9.39) permite calcular rápidamente las restricciones del problema planteado. Tal enfoque ha sido combinado con la técnica de “recocido simulado” a los efectos de establecer las variables de diseño óptimas. Se ha demostrado que dicha metodología se comporta muy eficientemente.

El presente enfoque supone una mejora al propuesto por (Mantoglou et al., 2004b) y es aplicable a otros casos de diseño como por ejemplo determinar la mejor ubicación de los pozos o bien aumentar el número de éstos.

Asimismo la metodología empleada es extrapolable para acuíferos confinados como también para otros enfoques de diseño como por ejemplo la determinación del máximo beneficio económico con el mayor caudal total de extracción, respetando restricciones ambientales.

10.1 SUMARIO.

Los estuarios y bahías constituyen escenarios de gran importancia para el desarrollo humano. La concentración demográfica en dichas áreas y la consecuente explotación de recursos, han traído aparejados problemas de contaminación. Esto ha motivado diversas investigaciones, con miras a predecir el efecto de varias acciones antrópicas sobre tales ambientes, mediante la utilización de modelos matemáticos.

En esta tesis, se procuró contribuir a la formulación de enfoques de control y mantenimiento de la calidad de agua, contemplando los aspectos económicos relacionados, bajo un punto de vista de diseño óptimo. Tales problemas de interés fueron abordados mediante el paradigma denominado Simulación – Optimización.

Este enfoque se basa en la simulación numérica de diferentes situaciones de interés relativas al transporte de contaminantes en estuarios, utilizando una metodología computacional muy general como es el método de elementos finitos (MEF).

Utilizando este enfoque se pueden determinar aquellas variables de diseño que aseguren el cumplimiento del objetivo propuesto y al mismo tiempo verifiquen las restricciones impuestas, es decir que garanticen valores de concentraciones de CF, DBO y OD admisibles en determinadas zonas protegidas. Tales variables óptimas se obtienen comparando muchos escenarios posibles de diseño hasta obtener aquel conjunto que mejor se acerque al objetivo propuesto.

Para realizar adecuadamente tal optimización es necesario considerar conjuntamente una metodología destinada a minimizar la cantidad de simulaciones necesarias para resolver los problemas de diseño formulados, atendiendo al alto costo computacional que suelen presentar los procedimientos de solución numérica.

En tal sentido, en este trabajo se ha adoptado como técnica de optimización aquella denominada como “Recocido Simulado” la cual es muy versátil y, en conjunto con el MEF, constituye una metodología de diseño óptimo de gran generalidad.

Dicho enfoque combinado, ha sido aplicado a diferentes problemas de calidad de agua tales como la minimización de los costos de construcción y/u operación en el diseño de plantas de tratamiento de efluentes como así también en la minimización del impacto ambiental, garantizando en cada uno el cumplimiento de las restricciones ambientales.

Si bien la metodología de optimización desarrollada disminuye notablemente la cantidad de simulaciones necesarias para la convergencia respecto a simples estudios de prueba y error, los tiempos computacionales aún pueden seguir siendo de importancia. En consecuencia, en esta tesis se desarrollaron estrategias adicionales para minimizar los tiempos demandados por la simulación numérica de los problemas de transporte asociados, como se describe en la sección siguiente.

Se ha evaluado la precisión y eficiencia de tales enfoques a partir de experimentos numéricos, efectuando comparaciones con otras metodologías, lográndose excelentes resultados.

El enfoque general de Simulación-Optimización ha sido también aplicado con éxito a otros problemas de interés, relativos a escenarios de bahías y estuarios, tales como el diseño de estructuras portuarias anti-resonantes y de sistemas eficientes de extracción de agua potable.

10.2 APORTES.

Los aportes realizados de la presente investigación se detallan a continuación:

1. El enfoque de simulación-optimización desarrollado es de gran generalidad y ha sido aplicado en esta tesis al control y mantenimiento de calidad de agua con mayor énfasis, y también al diseño de puertos y de sistemas de extracción de agua dulce.

Se ha desarrollado una herramienta computacional, basada en el enfoque propuesto, en ambiente MATLAB que controló el proceso de búsqueda, invocando al programa de elementos finitos FlexPDE.

2. Uno de los aportes fundamentales del trabajo desarrollado ha sido la disminución de la cantidad de simulaciones, del tiempo que demanda cada una de ellas, y consecuentemente del tiempo total insumido por el procedimiento de diseño óptimo. Tales objetivos se lograron mediante la simplificación, reformulación y combinación de las siguientes estrategias matemáticas:

- a. **Solución del problema hidrodinámico mediante el enfoque de Perturbación combinado con el método de Fourier Temporal.** Esta estrategia ha permitido desacoplar el problema hidrodinámico del problema de transporte de sustancias. La formulación aproximada del problema hidrodinámico mediante el Método de Perturbación, aborda su no linealidad a partir de la solución de dos sistemas lineales consecutivos. Además, la aplicación del Método de Fourier sobre tal sistema perturbado, logra evitar la necesidad de simular los períodos transitorios, permitiendo evaluar directamente el estado estacionario de interés. Una ventaja adicional de este enfoque, frente a la simulación de la historia temporal completa, es que no requiere el almacenamiento de tal historial, lo que es muy conveniente para incorporar la hidrodinámica dentro del problema de transporte de sustancias.
- b. **Formulación y solución del problema adjunto de transporte.** Dicha formulación permite obtener, con un número reducido de simulaciones mediante el MEF, funciones de influencia que conducen a fórmulas muy simples para la evaluación de las concentraciones medias temporales y espaciales de CF, DBO y OD en zonas de interés ambiental. La utilización de este enfoque frente al enfoque general de simulación - optimización insume tiempos hasta doscientas veces menores.
- c. **Solución estacionaria de los problemas de Transporte y su formulación Adjunta mediante el Método de Fourier.** El uso de este método en Problemas de Transporte de Sustancias con descarga periódica, permite reducir aún más los tiempos de simulación, al no requerir el cálculo de la historia temporal completa de tales problemas de difusión-advención. Este enfoque frente al método directo produce disminuciones de tiempos de simulación-optimización de hasta mil veces menores.

10.3 PUBLICACIONES REALIZADAS.

Se detallan a continuación las publicaciones que surgieron de la presente investigación doctoral:

1. Stoklas C. y Cortínez V. "Un enfoque de optimización para el control de vertido de efluentes urbanos en ríos". Mecánica Computacional. Vol. XXX. pp. 3577-3594. ISSN: 1666-6070. (2011a).

2. Stoklas C. y Cortínez V. "Un Modelo Computacional para el Estudio de Contaminación en Cuerpos de Aguas Poco Profundas". Contaminación Atmosférica e Hídrica en Argentina. pp, 523-532. ISBN: 978-950-42-0136-6. (2011b).
3. Stoklas C. y Cortínez V. "Diseño Óptimo de Plantas de Tratamiento de Aguas Residuales". Matemática Aplicada, Computacional e Industrial. Vol. 3, pp. 327-330. ISSN 2314-3282. (2011c).
4. Stoklas C y Cortínez V. "Estrategia de optimización para la toma de decisiones en el diseño de plantas de depuración de efluentes urbanos". Gestión y Tratamiento Integral del Agua. ISBN: 978-987-1253-76-0. (2012).
5. Cortínez V. y Stoklas C. "Determinación de los máximos volúmenes de extracción de agua en acuíferos costeros". Matemática Aplicada, Computacional e Industrial. Vol. 4. pp. 433-436. ISSN 2314-3282. (2013).
6. Stoklas C. y Cortínez V. "Un enfoque de diseño óptimo de un sistema de extracción de agua dulce en acuíferos". Mecánica Computacional Vol. XXXII. pp. 2811-2824. ISSN: 1666-6070. (2013).
7. Cortínez V., Stoklas C. y Dominguez P. "Diseño Óptimo de Estructuras Portuarias para Atenuar Efectos de Agitación por Olas Largas". Mecánica Computacional Vol. XXXIII. pp. 307-322. ISSN: 1666-6070. (2014).
8. Cortínez V., Stoklas C. y Dominguez P. "Control Óptimo de Descargas de Aguas Residuales Urbanas en Estuarios". Contaminación Atmosférica e Hídrica en Argentina. Tomo III. pp, 733-746. ISBN: 978-950-42-0136-2. (2015).
9. Cortínez V., Stoklas C. y Domínguez P. "Control óptimo de vertidos industriales o urbanos en estuarios dominados por mareas". Mecánica Computacional Vol. XXXIV, pp. 3223-3236. ISSN: 1666-6070. (2016).
10. Stoklas C., Cortínez V. y Domínguez P. "Calidad de agua en estuarios: control óptimo de descargas de efluentes domiciliarios". VI Congreso de Matemática Aplicada, Computacional e Industrial (MACI 2017). Comodoro Rivadavia, 2-5 Mayo 2017.
11. Stoklas C., Cortínez V. y Domínguez P. "Calidad de agua en estuarios: método espectral aplicado a un problema de optimización". IV Congreso Bianual de Proyecto Integrador para la Determinación de la Calidad del Agua (PRODECA). Bahía Blanca, 5-8 Septiembre 2017.

12. Stoklas C., Cortínez V. y Domínguez P. “Contaminación en cuerpos de agua dominados por mareas: aplicación del método espectral en la ecuación adjunta del problema de transporte de sustancias”. *Mecánica Computacional* Vol. XXXV, pp. 1683-1696. ISSN: 1666-6070. La Plata, 7-10 Noviembre 2017.

10.4 SUGERENCIAS SOBRE FUTURAS LÍNEAS DE INVESTIGACIÓN

Se prevén las siguientes líneas de trabajos de investigación futura:

- El desarrollo de una interfaz adecuada que facilite el uso de los modelos computacionales, para su utilización por parte de personas no expertas en computación ni en modelos matemáticos (aunque sí en temas ambientales).
- Extensión del problema de diseño de estructura portuaria para contemplar, de forma simultánea, los efectos de resonancia por ondas largas y la agitación por ondas más cortas generadas por el viento.
- Diseño y control óptimo de sedimentación en canales de navegación mediante tareas de dragado. El diseñar el trazado del canal principal, la localización y el cronograma de dragado que minimicen los costos económicos, manteniendo operativo el canal de navegación.
- Combinación de las ideas propuestas con otras técnicas de minimización de tiempos de simulación, tales como la aplicación de funciones empíricas ortogonales (bases de Karhunen-Loeve).

- Alvarez-Vázquez, L.J. Martínez, A. Rodríguez, C. Vázquez-Méndez, M.E. Mathematical model for optimal control in wastewater discharges: the global performance. *Comptes rendus*, 328:327-336, 2005.
- Alvarez-Vázquez, A. Martínez, C. Rodríguez, M.E. Vázquez-Méndez, M.A. Vilar. Optimal shape design for fishways in rivers. *Mathematics and computers in simulation*, 76:218-222, 2007.
- Álvarez-Vázquez, L.J., Balsa- Canto, E. y Martínez, A. Optimal design and operation of a wastewater purification system. *Mathematics and Computers in Simulation*, 79:668-682, 2008.
- Bellos, C. Hrisanthou, V. Numerical simulation of morphological changes in rivers and reservoirs. *Computers and mathematics with applications*, 45:453-467, 2003.
- Bellotti G. Transient response of harbors to long waves under resonance conditions. *Coastal Engineering*, 54:680–693, 2007.
- Bladé, E., Cea, L., Corestein, G., Escolano, E., Puertas, J., Vázquez-Cendón, M.E., Dolz, J., Coll, A. "Iber: herramienta de simulación numérica del flujo en ríos". *Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería*, 30(1):1-10, 2014.
- Booth, T. *Metodología para determinar caudales de dilución en estuarios*. Departamento de Ingeniería Civil, Universidad de Chile, 2011.
- Caceres M., Valle-Levinson A., Fierro J., Valenzuela C., Castillo M., Variabilidad transversal del flujo y de la densidad en la boca del fiordo Aysén. *Ciencia, Tecnología y Mar*, 33(1):5-15, 2010.
- Cameron W.M., Pritchard D.W. *Estuaries in the sea*. Wiley & Sons, New York, 2:306-324, Hill 1 edition, 1963.
- Campolo, M, Adreussi, P y Soldati, A. Water quality control in the river Arno. *Water Research*, 36:2673-2680, 2002.
- Cardini, J., Zabalett, A., Oliver, N. y Mársico, D. Efecto de los coeficientes de dispersión sobre la modelación bidimensional del transporte de contaminantes. Caso de estudio. *Mecánica Computacional, (Asociación Argentina de Mecánica Computacional)*, XXIII: 1201-1214, 2004.
- Cea, L., Vázquez-Cendón, M.E. y Puertas, J. El método de volúmenes finitos aplicados a problemas de ingeniería fluvial y costera, *La Gaceta de la RSME*, 12(1):71–93, 2009.

- CEPIS/OPS-OMS GETIÓN INTEGRAL DE TRATAMIENTO DE AGUAS RESIDUALES. 2002
- Chapra, S. Pelletier, G. y Tao, H. *Modeling framework for simulating river and stream water quality*. Versión 2.11. Documentation and users manual. Civil and environmental engineering dept. Tufts University, Medford, MA. 2008.
- Chertok, D.L. Lardner, R.W. Variational data assimilation for a nonlinear hydraulic model. *Application of mathematical modeling*, 20:675-682, 1996.
- Chiang W.L. Modelling long and intermediate waves in a harbor. *Applied Mathematical Modelling*, 12:423-428, 1988.
- Colonna Rosman, P.C. SisBaHiA. Sistema Base de Hidrodinámica Ambiental. Versión 8.5. COPPE, Engenharia Costeira & Oceanográfica. Universidad Nacional de Río de Janeiro, Brasil. 2011.
- COMSOL AB FEMLAB 1998-2017.
- Cortínez, V.H. y Sequeira, M.E. Un enfoque híbrido para el rediseño acústico óptimo de recintos industriales. *Mecánica Computacional, (Asociación Argentina de Mecánica Computacional)*, XXVIII:39-61, 2009.
- Cortínez V. y Sequeira M. Diseño acústico óptimo de recintos contemplando baja y alta frecuencia. *Mecánica Computacional, (Asociación Argentina de Mecánica Computacional)*, XXXI:3957-3968, 2012.
- Dominguez P. y Cortínez V. Un método continuo-discreto para el diseño óptimo de transporte urbano. *Mecánica Computacional, (Asociación Argentina de Mecánica Computacional)*, XXXI:3335-3355, 2012.
- Dowland K. y Adenso Díaz B. *Diseño de heurísticas y fundamentos del recocido simulado*. Revista Iberoamericana de Inteligencia Artificial, 19:93-102, 2003.
- Dyer K.R. *Estuaries: a physical introduction*. J. Wiley & Sons, Chichester, 195 pp, 2nd edition 1997.
- Elchahal G., Younes R., y Lafon P. Optimization of coastal structures: Application on detached breakwaters in ports. *Ocean Engineering*, 63:35-43, 2013.
- Engelhardt, C., Prochnow, D. y Bungartz, H. Modeling and simulation of sedimentation processes in a lowland river. *Mathematics and Computers in Simulation*, 39:627-633, 1995.
- FlexPDE. V.6, PDE Solutions Inc. 2010. www.pdesolutions.com.
- Florez-Giraldo J., Camacho, L. A., Muñoz, J. D. Transporte de Sustancias en Aguas Someras por medio del Método Lattice Boltzmann, *Revista Colombiana de Física*, Vol. 42, No. , 2010.

- Friedler, E. y Pisanty, E. Effects of design flow and treatment level on construction and operation costs of municipal wastewater treatment plants and their implications on policy marking. *Water Research*. 40:3751-3758, 2006.
- Ghijben, B.W., Nota in verband met de voorgenomen put boring nabij Amsterdam. The Hague. K. Inst. Ing. Tydschrift, 8–22, 1889.
- Godin, G. Frictional effects in river tides. Tidal Hydrodynamics. Edited by B.B. Parker. John Wiley & Sons, Inc. New York, 1991.
- Gómez Orea, D. *Evaluación de Impacto Ambiental*. Ed. Agrícola Española, S.A., 1999.
- Hashemi, M.R. Abedini, M.J. Neill, S.P. Malekzadeh, P. Tidal and surge modelling using differential quadrature: A case study in the Bristol Chanel. *Coastal Engineering*, 55(10):811-819, 2008.
- Heniche, M. Secretan, Y. Boudreau, P. Leclerc, M. A two-dimensional finite element drying-wetting shallow water model for rivers and estuaries. *Advances in water resources*, 23:359-372, 2000.
- Herzberg, A., Die Wasserversorgung einiger Nordseebäder. *Journal für Gas-beleuchtung und Wasserversorgung*, 44: 815–819, 842–844, 1901.
- Hernandez-Sancho, F., Molinos-Senante, M y Sala-Garrido, R. Economic valuation of environmental benefits from wastewater treatment processes: An empirical approach for Spain. *Science of the Total Environment*. 408:953–957, 2010.
- Isebe D., Azerad P., Mohammadi B., y Bouchette F. Optimal shape design of defense structures for minimizing short wave impact. *Coastal Engineering*, 55:35–46, 2008.
- Ji, Y. Zhang, J. Zhao, D. Analysis of water quality in shallow lakes with a two-dimensional flow-sediment model. *Journal of hydrodynamics*. 19(4): 501-508, 2007.
- Johnsonm R., Mansard, E., & Ploeg, J. *Effects of wave grouping on breakwater stability*. Int. Conference on Coastal Engineering, ASCE, Hamburgo, 1978.
- Katopodes, N.D. *Finite element model for the hydrodynamics and mass transport in the Upper Potomac Estuary*. Rep., Metropolitan Council of Washington Governments, Washington, D.C. 1987.
- Katopodes, N.D. Piasecki, M. Site and size optimization of contaminant sources in surface water systems. *Journal of environmental engineering*. 122(10), 917-923. 1996.
- Kinsman, B. (1965). *Wind waves*. Printice-Hall, Englewood Cliffs, Nueva Jersey.
- Kirkpatrick, S. Gelatt, C. D. y Vecchi, M. P. Optimization by Simulated Annealing. *Science*. 220(4598):671-680, 1983.

- Li C. y O'Donnell J. Tidally driven residual circulation in shallow estuaries with lateral depth variation. *Journal of Geophysical Research*, 102:27,915-27,929, 1997.
- Li C. y Valle-Levinson A. A two-dimensional analytic tidal model for a narrow estuary of arbitrary lateral depth variation: The intratidal motion. *Journal of Geophysical Research*, 104:23,525-23,543, 1999.
- Li C., Modeling of bathymetry-locked residual eddies in well-mixed tidal channels with arbitrary depth variations. *Journal of physical oceanography*, 36:1974-1993, 2006.
- Li C., Chen C., Guadagnoli D. y Georgiou I. Geometry-induced residual eddies in estuaries with curved channels: Observations and modeling studies. *Journal of Geophysical Research*, 113, 2008.
- Losada I., Gonzalez-Ondina J., Díaz-Hernandez G., y González E. Numerical modeling of nonlinear resonance of semi-enclosed water bodies: Description and experimental validation. *Coastal Engineering*, 55(1):21–34, 2008.
- Louaked, M. Saidi, A. Pointwise control and hybrid scheme for quality equation. *Nonlinear analysis*, 71(12):2337-2349, 2009.
- Louaked, M. Saidi, A. Application of Mathematics in Technical and Natural Sciences: 3rd International Conference--AMiTaNS'11. AIP Conference Proceedings, 1404(1):405-413, 2011.
- Mantoglou A., and P. Giannouloupoulos, Sustainable yield of coastal aquifers: simulation, optimization and application to Santorini island, *Protection and restoration of the environment VII*, Mykonos, 2004a.
- Mantoglou, A., Papantoniou, M. and Giannouloupoulos, P. Management of coastal aquifers based on nonlinear optimization and evolutionary algorithms. *Journal of Hydrology*, 297(1):209–228, 2004b.
- Mara, D. y S. Cairncross. Directrices para el uso sin riesgos de aguas residuales y excretas en agricultura y acuicultura. *Medidas de protección de la Salud Pública*. OMS, p. 213, 1990.
- Marchuk, G. I. *Mathematical Models in Environmental Problems*. North Holland, 16:1-217, 1986.
- Matlab. R2010a The MathWorks, Inc. 2010. www.mathworks.com.
- Memos C. Port planning, Port Engineering (Ed. Gregory P. Tsinker). John Wiley and Son. Canada., 2004.
- Menéndez A. Sistema Hidrobid II para simular corrientes en cuencos. *Revista internacional de métodos numéricos para cálculo y diseño en ingeniería*, 6(1):25-36, 1990.

- Menéndez A. La simulación numérica en estudios de impacto ambiental. *Mecánica Computacional, (Asociación Argentina de Mecánica Computacional)*, XV:181-191, 1995.
- Metropolis N., Rosenbluth A., Rosenbluth M., Teller A. y Teller E. Equation of state calculations by fast computing machines. *Journal of Chemical Physics*, Vol. 21, N°6, pp. 1087-1092. 1953.
- Neill S. P., Litt E. J., Couch S. J., Davies A. G. The impact of tidal stream turbines on large-scale sediment dynamics. *Renewable Energy*, 34:2803–2812, 2009.
- Ortiz P. y Pastor M. Un modelo numérico de refracción-difracción de ondas en zonas costeras. *Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería*, 6(3):409–436, 1990.
- Ortiz Figueroa M. Agitación por oleaje en el puerto de Ensenada, Baja California, México. Medidas de atenuación. *GEOS*, 29(2), 2009.
- Palomino Monzón M., Almazán Gárate J.L., y Arrayás González J.L. Oscilaciones en masas de agua confinadas: resonancia en puertos. Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos. Universidad Politécnica de Madrid, 2001.
- Parker, B.B., Frictional effects on the tidal dynamics of shallow estuary, Ph.D. dissertation, 291 pp., Johns Hopkins Univ., Baltimore, Md., 1984.
- Parra-Guevara, D. y Skiba, Y. N. Industrial pollution transport. Part 2. Control of industrial emissions. *Environmental Modeling and Assessment*, 5:177-184, 2000.
- Pearson C. y Winter. On the calculation of tidal currents in homogeneous estuaries. *Journal of Physical Oceanography*. 7:520-531, 1977.
- Piasecki, M. Katopodes, N.D. Control of contaminant releases in rivers. I: Adjoint sensitivity analysis. *Journal of hydraulic engineering*. 123(6), 486-492. 1997a.
- Piasecki, M. Katopodes, N.D. Control of contaminant releases in rivers. II: Optimal Design. *Journal of hydraulic engineering*. 123(6), 493- 503, 1997b.
- Potter M. y Wiggert D. *Mecánica de Fluidos*. Ed. Thomson, 2002.
- Rabinovich A. *Seiches and harbor oscillations*, Handbook of Coastal and Ocean Engineering (Ed. Y.C. Kim. World Scientific Publications, Singapore, 2009.
- Reddy, J.N. *An Introduction to the Finite Element Method*. 3ª edición. Ed. McGraw-Hill, 2005.
- Revilla, J.A., Koev, K.N., Roldám, A., Alvarez, C. y Díaz, R. Métodos de estudio del déficit de oxígeno originado por vertidos de aguas residuales en zonas costeras. *Ingeniería del Agua*. 1(2):83-96, 1994.

- Romero Rojas J. A. *Calidad del agua*. Ed. Escuela Colombiana de Ingeniería. pp.484, 3ª edición, 1999.
- Rubin, H. y Atkinson, J. *Environmental Fluid Mechanics*. Ed. Marcel Dekker Inc., 2001.
- Sanders B. F. y Piasecki M. Mitigation of salinity intrusion in well-mixed estuaries by optimization of freshwater diversion rates. *Journal of hydraulic engineering*, 128(1):65-77, 2002.
- Salas Quintero, D., Zapata, M.A. y Guerrero, J. *Modelo de costos para el tratamiento de las aguas residuales en la región*. Scientia Et Technica. Universidad Tecnológica de Pereira, Colombia, 2007
- Sarker M., Sleigh A., y Hoyle A. Optimizing the entrance channel layout for a major new port development in the middle east: A numerical model study. 7th International Conference on Coastal, Ports and Marine Structures, 2006.
- Skiba, Y. N. y Parra-Guevara, D. Industrial pollution transport. Part 1. Formulation of the problem and air pollution estimates. *Environmental Modeling and Assessment*. 5(3):169-175, 2000.
- Strack, O.D.L., A single potential solution for regional interface problems in coastal aquifers. *Water Resources Research*, 12(6):1165-1174, 1976.
- Strub, I.S. Percelay, J. Stacey, M.T. Bayen, A.M. Inverse estimation of open boundary conditions in tidal channels. *Ocean modeling*, 29:85-93, 2009.
- Stoklas C. y Cortínez V. Un enfoque de optimización para el control de vertido de efluentes urbanos en ríos *Mecánica Computacional, (Asociación Argentina de Mecánica Computacional)*, XXX:3577–3594, 2011.
- Strelkoff, T. One-dimensional equations of open channel flow, *Journal of the Hydraulics Division*, ASCE 95(3): 861-876, 1969.
- Strub, I.S. Percelay, J. Stacey, M.T. Bayen, A.M. Inverse estimation of open boundary conditions in tidal channels. *Ocean modeling*, 29(1):85-93, 2009.
- Thomann, R.V. Mueller, J.A. *Principles of surface water quality modeling and control*. Harper & Row, New York, N.Y, 1987.
- Tsanis, I.K. y Saied, U. A wind-driven hydrodynamic and pollutant transport model. *Global NEST Journal*. 9(2):117-131, 2007.
- US Army Corps of Engineers. HEC RAS River Analysis System, (1997-2018).
- Valle-Levinson A.E. *Contemporary issues in estuarine physics*. Cambridge Univ. Press, pp.315, 2010.
- Wainwright, J. y Mulligan, M. *Finding Simplicity in Complexity*. Environmental Modelling. Ed. John Wiley & Sons Inc., 2004.
- Wolanski E. *Estuarine ecohydrology*. Elsevier, Amsterdam, pp.157, 2007.

- Xing X. Computer modeling for wave oscillation problems in harbors and coastal regions. Tesis de Doctorado, University of Southern California, 2009.
- Yu, L. y Salvador, N.N.B. Modeling water quality in rivers. *American Journal of Applied Sciences*. 2(4):881-886, 2005.
- Zabalett, A., Cardini, J., Mársico, D y Oliver, N. Incidencia en la calidad de agua del Río Uruguay de las descargas cloacales de las ciudades de Concordia y Salto. *Contaminación Atmosférica e Hídrica en la Argentina*. 2:503-512, 2011.
- Zhu J., Zeng Q., Guo D. y Liu Z. Optimal control of sedimentation in navigation channels. *Journal of hydraulic engineering*, 125(7):750-759, 1999.
- Zienkiewicz, O.C. El método de los elementos finitos. Ed. Reverté, 1980.

A.1. DESARROLLO ADIMENSIONAL EN LAS ECUACIONES DE AGUAS POCO PROFUNDAS.

Para conocer el orden de magnitud de cada término de las ecuaciones bidimensionales de aguas poco profundas (3.10-3.12) se realiza un análisis dimensional. En tal sentido se proponen las siguientes variables normalizadas identificadas con el símbolo (^):

$$\begin{aligned} \hat{\eta} &= \eta / \eta_c, & \hat{H} &= H / H_c, & \hat{x} &= x / L, & \hat{y} &= y / D, \\ \hat{U} &= U / U_c, & U_c &= \eta_c \sqrt{\frac{g}{H_c}}, & \hat{V} &= V / V_c, & V_c &= \frac{\eta_c}{H_c} \omega D, \\ e &= \eta_c / H_c, & L &= T_p \frac{\sqrt{g H_c}}{2\pi}, & T_p &= 2\pi / \omega, & \hat{t} &= \frac{t}{T_p} = \frac{t\omega}{2\pi} \rightarrow t\omega, \end{aligned} \quad (A.1)$$

donde η_c , H_c , U_c , V_c , L , D son los parámetros característicos de amplitud, profundidad, velocidad longitudinal, velocidad transversal, longitud y ancho del estuario respectivamente y, T_p y ω corresponden al período y a la frecuencia angular de la marea.

El procedimiento consiste en aplicar tales relaciones al sistema (3.10-3.12). A continuación se indica para la ecuación de continuidad de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \eta_c \omega \frac{\partial \eta / \eta_c}{\partial t \omega} + \frac{H_c U_c}{L} \frac{\partial}{\partial x / L} \left(\frac{H / H_c}{U_c} \frac{U}{U_c} \right) + \frac{H_c V_c}{D} \frac{\partial}{\partial y / D} \left(\frac{H / H_c}{V_c} \frac{V}{V_c} \right) + \\ \frac{\eta_c U_c}{L} \frac{\partial}{\partial x / L} \left(\frac{U}{U_c} \frac{\eta / \eta_c} \right) + \frac{\eta_c V_c}{D} \frac{\partial}{\partial y / D} \left(\frac{V}{V_c} \frac{\eta / \eta_c} \right) = 0 \end{aligned} \quad (A.2)$$

$$\eta_c \omega \frac{\partial \hat{\eta}}{\partial \hat{t}} + \frac{H_c U_c}{L} \frac{\partial (\hat{H} \hat{U})}{\partial \hat{x}} + \frac{H_c V_c}{D} \frac{\partial (\hat{H} \hat{V})}{\partial \hat{y}} + \frac{\eta_c U_c}{L} \frac{\partial (\hat{U} \hat{\eta})}{\partial \hat{x}} + \frac{\eta_c V_c}{D} \frac{\partial (\hat{V} \hat{\eta})}{\partial \hat{y}} = 0 \quad (A.3)$$

luego se divide término a término por $\eta_c \omega$:

$$\frac{\partial \hat{\eta}}{\partial \hat{t}} + \frac{H_c U_c}{L \eta_c \omega} \frac{\partial (\hat{H} \hat{U})}{\partial \hat{x}} + \frac{H_c V_c}{D \eta_c \omega} \frac{\partial (\hat{H} \hat{V})}{\partial \hat{y}} + \frac{U_c}{L \omega} \frac{\partial (\hat{U} \hat{\eta})}{\partial \hat{x}} + \frac{V_c}{D \omega} \frac{\partial (\hat{V} \hat{\eta})}{\partial \hat{y}} = 0 \quad (A.4)$$

y se reemplaza a U_c , V_c , L y D por las igualdades definidas en (A.1), obteniendo la siguiente ecuación de continuidad sin dimensión:

$$\frac{\partial \hat{\eta}}{\partial \hat{t}} + \frac{\partial(\hat{H}\hat{U})}{\partial \hat{x}} + \frac{\partial(\hat{H}\hat{V})}{\partial \hat{y}} + e \frac{\partial(\hat{U}\hat{\eta})}{\partial \hat{x}} + e \frac{\partial(\hat{V}\hat{\eta})}{\partial \hat{y}} = 0, \quad (\text{A.5})$$

recordando que $e = \eta_c / H_c$.

Luego se procede de igual forma con la ecuación de movimiento, reemplazando las correspondientes variables normalizadas (A.1) en (3.11):

$$\begin{aligned} \frac{U_c}{1/\omega} \frac{\partial U/U_c}{\partial t\omega} + \frac{U_c^2}{L} \left(\frac{U}{U_c} \right) \frac{\partial U/U_c}{\partial x/L} + \frac{V_c U_c}{D} \left(\frac{V}{V_c} \right) \frac{\partial U/U_c}{\partial y/D} = \\ - \frac{g\eta_c}{L} \frac{\partial \eta/A}{\partial x/L} - \frac{BU_c}{H_c} \left(\frac{U}{U_c} \right) \left(\frac{H}{H_c} \right) + \frac{B}{\left(\frac{H}{H_c} \right)^2} \frac{U_c \eta_c}{H_c^2} \left(\frac{U}{U_c} \right) \left(\frac{\eta}{\eta_c} \right) \end{aligned}, \quad (\text{A.6})$$

se divide cada término por $U_c \omega$:

$$\frac{\partial \hat{U}}{\partial \hat{t}} + \frac{U_c}{\omega L} \hat{U} \frac{\partial \hat{U}}{\partial \hat{x}} + \frac{V_c}{D\omega} \hat{V} \frac{\partial \hat{U}}{\partial \hat{y}} = - \frac{g\eta_c}{U_c \omega L} \frac{\partial \hat{\eta}}{\partial \hat{x}} - \frac{BU_c}{U_c \omega H_c} \frac{\hat{U}}{\hat{H}} + \frac{BU_c \eta_c}{U_c \omega H_c^2} \frac{\hat{U}\hat{\eta}}{\hat{H}^2}, \quad (\text{A.7})$$

y luego se reemplaza a U_c , V_c , L y D por las igualdades definidas en (A.1) obteniendo la siguiente expresión adimensional de la ecuación de movimiento:

$$\frac{\partial \hat{U}}{\partial \hat{t}} + e\hat{U} \frac{\partial \hat{U}}{\partial \hat{x}} + e\hat{V} \frac{\partial \hat{U}}{\partial \hat{y}} = - \frac{\partial \hat{\eta}}{\partial \hat{x}} - R \frac{\hat{U}}{\hat{H}} + eR \frac{\hat{U}\hat{\eta}}{\hat{H}^2}, \quad (\text{A.8})$$

donde $R = B / \omega H_c$.

De igual manera se procede con (3.12) resultando la siguiente expresión:

$$\frac{\partial \hat{V}}{\partial \hat{t}} + e\hat{U} \frac{\partial \hat{V}}{\partial \hat{x}} + e\hat{V} \frac{\partial \hat{V}}{\partial \hat{y}} = -Q \frac{\partial \hat{\eta}}{\partial \hat{y}} - R \frac{\hat{V}}{\hat{H}} + eR \frac{\hat{V}\hat{\eta}}{\hat{H}^2}, \quad (\text{A.9})$$

siendo $Q = gH_c / (\omega D)^2$.

A.2. DESARROLLO RE-DIMENSIONAL SOBRE LOS SISTEMAS PERTURBADOS.

Para re-dimensionar el sistema (5.10) se reemplazan las relaciones definidas en (A.1) de la siguiente manera:

$$\frac{1}{\eta_c \omega} \frac{\partial \eta_0}{\partial t} + \frac{L}{H_c U_c} \frac{\partial (H U_0)}{\partial x} + \frac{D}{H_c V_c} \frac{\partial (H V_0)}{\partial y} = 0 \quad , \quad (\text{A.10})$$

se multiplica cada término por $\eta_c \omega$:

$$\frac{\partial \eta_0}{\partial t} + \frac{\eta_c \omega L}{H_c U_c} \frac{\partial (H U_0)}{\partial x} + \frac{\eta_c \omega D}{H_c V_c} \frac{\partial (H V_0)}{\partial y} = 0 \quad , \quad (\text{A.11})$$

y seguidamente se reemplaza a U_c , V_c , L y D por las igualdades definidas en (A.1), obteniendo la siguiente ecuación de continuidad de orden cero:

$$\frac{\partial \eta_0}{\partial t} + \frac{\partial (H U_0)}{\partial x} + \frac{\partial (H V_0)}{\partial y} = 0 \quad , \quad (\text{A.12})$$

Luego se opera de igual forma en las ecuaciones de movimiento del sistema (5.10):

$$\frac{1}{\omega U_c} \frac{\partial U_0}{\partial t} = -\frac{L}{\eta_c} \frac{\partial \eta_0}{\partial x} - \frac{H_c R}{U_c} \frac{U_0}{H} \quad , \quad (\text{A.13})$$

$$\frac{1}{\omega V_c} \frac{\partial V_0}{\partial t} = -\frac{QD}{\eta_c} \frac{\partial \eta_0}{\partial y} - \frac{H_c R}{V_c} \frac{V_0}{H} \quad , \quad (\text{A.14})$$

se multiplican todos los términos de (A.13) por $U_c \omega$ y de (A.14) por $V_c \omega$, se reemplazan U_c , V_c , L y D por las igualdades definidas en (A.1), y R y Q por $B/\omega H_c$ y $g H_c / (\omega D)^2$, respectivamente:

$$\frac{\partial U_0}{\partial t} = -g \frac{\partial \eta_0}{\partial x} - B \frac{U_0}{H} \quad , \quad (\text{A.15})$$

$$\frac{\partial V_0}{\partial t} = -g \frac{\partial \eta_0}{\partial y} - B \frac{V_0}{H} \quad , \quad (\text{A.16})$$

Se procede de igual forma para el sistema de orden $O(e^1)$ (5.11), teniendo en cuenta que también se debe re-dimensionar (5.6) de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \frac{\eta}{\eta_c} &= \frac{\eta_0}{\eta_c} + e \frac{\eta_1}{\eta_c} + e^2 \frac{\eta_2}{\eta_c} \dots\dots \\ \frac{U}{U_c} &= \frac{U_0}{U_c} + e \frac{U_1}{U_c} + e^2 \frac{U_2}{U_c} \dots\dots \quad , \quad (\text{A.17}) \\ \frac{V}{V_c} &= \frac{V_0}{V_c} + e \frac{V_1}{V_c} + e^2 \frac{V_2}{V_c} \dots\dots \end{aligned}$$

Luego se reemplaza (A.1) en la ecuación de continuidad de (5.11):

$$\frac{1}{\eta_c \omega} \frac{\partial \eta_1}{\partial t} + \frac{L}{H_c U_c} \frac{\partial (H U_1)}{\partial x} + \frac{D}{H_c V_c} \frac{\partial (H V_1)}{\partial y} + \frac{L}{\eta_c U_c} \frac{\partial (\eta_0 U_0)}{\partial x} + \frac{D}{\eta_c V_c} \frac{\partial (\eta_0 V_0)}{\partial y} = 0 \quad , \quad (\text{A.18})$$

se multiplica cada termino por $\eta_c \omega$ y se reemplazan U_c , V_c , L y D por las igualdades definidas en (A.1) :

$$\frac{\partial \eta_1}{\partial t} + \frac{\partial (H U_1)}{\partial x} + \frac{\partial (H V_1)}{\partial y} + \frac{H_c}{\eta_c} \frac{\partial (\eta_0 U_0)}{\partial x} + \frac{H_c}{\eta_c} \frac{\partial (\eta_0 V_0)}{\partial y} = 0 \quad , \quad (\text{A.19})$$

y luego se reemplaza en (A.19) las variables (A.17):

$$\frac{\partial \eta_1}{\partial t} + \frac{\partial (H U_1)}{\partial x} + \frac{\partial (H V_1)}{\partial y} + \frac{\partial (\eta_0 U_0)}{\partial x} + \frac{\partial (\eta_0 V_0)}{\partial y} = 0 \quad . \quad (\text{A.20})$$

De igual forma se obtienen las ecuaciones de movimiento, resultando las siguientes:

$$\frac{1}{U_c \omega} \frac{\partial U_1}{\partial t} + \frac{L}{U_c^2} U_0 \frac{\partial U_0}{\partial x} + \frac{D}{V_c U_c} V_0 \frac{\partial U_0}{\partial y} = -\frac{L}{\eta_c} \frac{\partial \eta_1}{\partial x} - \frac{B}{\omega U_c} \frac{U_1}{H} + \frac{B H_c}{\omega U_c \eta_c} \frac{U_0 \eta_0}{H^2} \quad , \quad (\text{A.21})$$

$$\frac{1}{V_c \omega} \frac{\partial V_1}{\partial t} + \frac{L}{U_c V_c} U_0 \frac{\partial V_0}{\partial x} + \frac{D}{V_c^2} V_0 \frac{\partial V_0}{\partial y} = -\frac{g D H_c}{\eta_c (\omega D)^2} \frac{\partial \eta_1}{\partial y} - \frac{B H_c}{\omega H_c V_c} \frac{V_1}{H} + \frac{B H_c^2}{\omega H_c V_c \eta_c} \frac{V_0 \eta_0}{H^2} \quad . \quad (\text{A.22})$$

Se multiplican todos los términos de (A.21) por $U_c \omega$ y de (A.22) por $V_c \omega$, y se reemplazan U_c , V_c , L y D por las igualdades definidas en (A.1), llegando a las siguientes expresiones :

$$\frac{\partial U_1}{\partial t} + \frac{H_c}{\eta_c} U_0 \frac{\partial U_0}{\partial x} + \frac{H_c}{\eta_c} V_0 \frac{\partial U_0}{\partial y} = -g \frac{\partial \eta_1}{\partial x} - B \frac{U_1}{H} + \frac{H_c}{\eta_c} B \frac{U_0 \eta_0}{H^2} \quad , \quad (\text{A.23})$$

$$\frac{\partial V_1}{\partial t} + \frac{H_c}{\eta_c} U_0 \frac{\partial V_0}{\partial x} + \frac{H_c}{\eta_c} V_0 \frac{\partial V_0}{\partial y} = -g \frac{\partial \eta_1}{\partial y} - B \frac{V_1}{H} + \frac{H_c}{\eta_c} B \frac{V_0 \eta_0}{H^2} \quad . \quad (\text{A.24})$$

Luego se reemplaza en (A.23) y en (A.24) las correspondientes variables definidas en (A.17):

$$\frac{\partial U_1}{\partial t} + U_0 \frac{\partial U_0}{\partial x} + V_0 \frac{\partial U_0}{\partial y} = -g \frac{\partial \eta_1}{\partial x} - B \frac{U_1}{H} + B \frac{U_0 \eta_0}{H^2} \quad , \quad (\text{A.25})$$

$$\frac{\partial V_1}{\partial t} + U_0 \frac{\partial V_0}{\partial x} + V_0 \frac{\partial V_0}{\partial y} = -g \frac{\partial \eta_1}{\partial y} - B \frac{V_1}{H} + B \frac{V_0 \eta_0}{H^2} \quad . \quad (\text{A.26})$$

De esta forma, con las ecuaciones (A.12), (A.15), (A.16), (A.20), (A.25) y (A.26) se obtiene el siguiente sistema dimensionalizado.

$$\frac{\partial \eta_0}{\partial t} + \frac{\partial (H U_0)}{\partial x} + \frac{\partial (H V_0)}{\partial y} = 0 \quad , \quad (\text{A.27a})$$

$$\frac{\partial U_0}{\partial t} = -g \frac{\partial \eta_0}{\partial x} - B \frac{U_0}{H} , \quad (\text{A.27b})$$

$$\frac{\partial V_0}{\partial t} = -g \frac{\partial \eta_0}{\partial y} - B \frac{V_0}{H} , \quad (\text{A.27c})$$

$$\frac{\partial \eta_1}{\partial t} + \frac{\partial(HU_1)}{\partial x} + \frac{\partial(HV_1)}{\partial y} + \frac{\partial(\eta_0 U_0)}{\partial x} + \frac{\partial(\eta_0 V_0)}{\partial y} = 0 , \quad (\text{A.28a})$$

$$\frac{\partial U_1}{\partial t} + U_0 \frac{\partial U_0}{\partial x} + V_0 \frac{\partial U_0}{\partial y} = -g \frac{\partial \eta_1}{\partial x} - B \frac{U_1}{H} + B \frac{U_0 \eta_0}{H^2} + fV_0 , \quad (\text{A.28b})$$

$$\frac{\partial V_1}{\partial t} + U_0 \frac{\partial V_0}{\partial x} + V_0 \frac{\partial V_0}{\partial y} = -g \frac{\partial \eta_1}{\partial y} - B \frac{V_1}{H} + B \frac{V_0 \eta_0}{H^2} - fU_0 , \quad (\text{A.28c})$$

Es posible interpretar el problema como una aproximación sucesiva, sumando el sistema (A.27) con el sistema (A.28) y obtener las siguientes expresiones:

$$\frac{\partial \eta^*}{\partial t} + \frac{\partial(HU^*)}{\partial x} + \frac{\partial(HV^*)}{\partial y} = -\frac{\partial(\eta_0 U_0)}{\partial x} - \frac{\partial(\eta_0 V_0)}{\partial y} , \quad (\text{A.29a})$$

$$\frac{\partial U^*}{\partial t} + g \frac{\partial \eta^*}{\partial x} + \frac{B}{H} U^* = -U_0 \frac{\partial U_0}{\partial x} - V_0 \frac{\partial U_0}{\partial y} + B \frac{(U_0 \eta_0)}{H^2} + fV_0 , \quad (\text{A.29b})$$

$$\frac{\partial V^*}{\partial t} + g \frac{\partial \eta^*}{\partial y} + \frac{B}{H} V^* = -U_0 \frac{\partial V_0}{\partial x} - V_0 \frac{\partial V_0}{\partial y} + B \frac{(V_0 \eta_0)}{H^2} - fU_0 , \quad (\text{A.29c})$$

donde

$$\begin{aligned} \eta^* &= \eta_0 + \eta_1 \\ U^* &= U_0 + U_1 \\ V^* &= V_0 + V_1 \end{aligned} . \quad (\text{A.30})$$

A.3. TRANSFORMACIÓN A ECUACIÓN DE ONDA EL SEGUNDO SISTEMA PERTURBADO.

Para reformular el sistema (5.16)-(5.18) en función de ecuación de onda, se deriva con respecto al tiempo la ecuación de continuidad (5.16)

$$\frac{\partial^2 \eta^*}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 (HU^*)}{\partial t \partial x} + \frac{\partial^2 (HV^*)}{\partial t \partial y} = -\frac{\partial^2 (\eta_0 U_0)}{\partial t \partial x} - \frac{\partial^2 (\eta_0 V_0)}{\partial t \partial y}, \quad (\text{A.31})$$

Luego se multiplica las ecuaciones de movimiento (5.17) y (5.18) por la profundidad H y seguidamente se las deriva con respecto al x y a y, respectivamente:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 (HU^*)}{\partial t \partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left(gH \frac{\partial \eta^*}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{B}{H} HU^* \right) = \\ & -\frac{\partial}{\partial x} \left(HU_0 \frac{\partial (U_0)}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(HV_0 \frac{\partial (U_0)}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(BH \frac{(U_0 \eta_0)}{H^2} \right) + \frac{\partial}{\partial x} (fHV_0) \end{aligned}, \quad (\text{A.32})$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 (HV^*)}{\partial t \partial y} + \frac{\partial}{\partial y} \left(gH \frac{\partial \eta^*}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{B}{H} HV^* \right) = \\ & -\frac{\partial}{\partial y} \left(HU_0 \frac{\partial (V_0)}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(HV_0 \frac{\partial (V_0)}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(BH \frac{(V_0 \eta_0)}{H^2} \right) - \frac{\partial}{\partial y} (fHU_0) \end{aligned}. \quad (\text{A.33})$$

Sustituyendo (A.32) y (A.33) en los correspondientes términos de (A.31) se obtienen la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 \eta^*}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x} \left(gH \frac{\partial \eta^*}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(gH \frac{\partial \eta^*}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(HU_0 \frac{\partial (U_0)}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(HU_0 \frac{\partial (V_0)}{\partial x} \right) \\ & - \frac{\partial}{\partial x} \left(HV_0 \frac{\partial (U_0)}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(HV_0 \frac{\partial (V_0)}{\partial y} \right) \\ & + \frac{\partial}{\partial x} \left(BH \frac{(U_0 \eta_0)}{H^2} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(BH \frac{(V_0 \eta_0)}{H^2} \right) \\ & + \frac{\partial}{\partial x} (fHV_0) - \frac{\partial}{\partial y} (fHU_0) \\ & - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{B}{H} HU^* \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{B}{H} HV^* \right) \\ & = -\frac{\partial^2 (\eta_0 U_0)}{\partial t \partial x} - \frac{\partial^2 (\eta_0 V_0)}{\partial t \partial y} \end{aligned}. \quad (\text{A.34})$$

Es posible re-exresar los últimos dos términos del 1º miembro de la expresión (A.34) de la siguiente manera:

$$-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{B}{H}(U^*H)\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{B}{H}(V^*H)\right) = -\frac{B}{H}\frac{\partial}{\partial x}(U^*H) - \frac{B}{H}\frac{\partial}{\partial y}(V^*H) - U^*H\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{B}{H}\right) - V^*H\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{B}{H}\right), \quad (\text{A.35})$$

Luego, haciendo uso de la ecuación de continuidad, se reemplazan los términos correspondientes de (A.35) en (A.29a) y luego en (A.34), obteniendo la siguiente ecuación de onda de la segunda aproximación:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 \eta^*}{\partial t^2} + \frac{B}{H} \frac{\partial \eta^*}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left(gH \frac{\partial \eta^*}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(gH \frac{\partial \eta^*}{\partial y} \right) - HU^* \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{B}{H} \right) - HV^* \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{B}{H} \right) = \\ & \frac{\partial}{\partial x} \left(HU_0 \frac{\partial (U_0)}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(HU_0 \frac{\partial (V_0)}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(HV_0 \frac{\partial (U_0)}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(HV_0 \frac{\partial (V_0)}{\partial y} \right) \\ & - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{B}{H} (U_0 \eta_0) \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{B}{H} (V_0 \eta_0) \right) - \frac{B}{H} \frac{\partial (\eta_0 U_0)}{\partial x} - \frac{B}{H} \frac{\partial (\eta_0 V_0)}{\partial y} \\ & - \frac{\partial^2 (\eta_0 U_0)}{\partial t \partial x} - \frac{\partial^2 (\eta_0 V_0)}{\partial t \partial y} - \frac{\partial}{\partial x} (fHV_0) + \frac{\partial}{\partial y} (fHU_0) \end{aligned}, \quad (\text{A.36})$$

El sistema se completa con las ecuaciones de movimiento (A.29b) y (A.29c).

A.4. EXPANSIÓN EN SERIES DE FOURIER TEMPORAL.

Teniendo en cuenta el carácter armónico del oleaje, es posible hacer uso de una expansión en Series de Fourier, donde las variables dinámicas η y U , pueden representarse como la siguiente suma de términos periódicos:

$$\eta_0 = \eta_c \cos \omega t + \eta_s \sin \omega t \quad , \quad (\text{A.37a})$$

$$U_0 = U_c \cos \omega t + U_s \sin \omega t \quad , \quad (\text{A.37b})$$

$$V_0 = V_c \cos \omega t + V_s \sin \omega t \quad , \quad (\text{A.37c})$$

$$\eta^* = \eta_0^* + \eta_{1c}^* \cos \omega t + \eta_{1s}^* \sin \omega t + \eta_{2c}^* \cos 2\omega t + \eta_{2s}^* \sin 2\omega t \quad , \quad (\text{A.38a})$$

$$U^* = U_0^* + U_{1c}^* \cos \omega t + U_{1s}^* \sin \omega t + U_{2c}^* \cos 2\omega t + U_{2s}^* \sin 2\omega t \quad , \quad (\text{A.38b})$$

$$V^* = V_0^* + V_{1c}^* \cos \omega t + V_{1s}^* \sin \omega t + V_{2c}^* \cos 2\omega t + V_{2s}^* \sin 2\omega t \quad , \quad (\text{A.38c})$$

Cabe recordar que estas expresiones son válidas cuando se asume un forzante compuesto por una marea monocromática, como por ejemplo una M2. Si se consideran más componentes entonces tales expresiones deberán contar más términos periódicos.

Se reemplazan las expresiones (A.37a), (A.37b) y (A.37c) en las variables correspondientes del primer sistema (5.24), (5.14) y (5.15), y del segundo sistema (5.25), (5.17) y (5.18). Este procedimiento se desarrolla término a término a continuación:

- Primera Aproximación

Desarrollo en la ecuación de onda (5.24):

$$\frac{\partial^2 \eta_0}{\partial t^2} = -\omega^2 \eta_c \cos \omega t - \omega^2 \eta_s \sin \omega t \quad ,$$

$$-\frac{\partial}{\partial x} \left(gH \frac{\partial \eta_0}{\partial x} \right) = -\frac{\partial}{\partial x} \left(gH \frac{\partial \eta_c}{\partial x} \right) \cos \omega t - \frac{\partial}{\partial x} \left(gH \frac{\partial \eta_s}{\partial x} \right) \sin \omega t \quad ,$$

$$-\frac{\partial}{\partial y} \left(gH \frac{\partial \eta_0}{\partial y} \right) = -\frac{\partial}{\partial y} \left(gH \frac{\partial \eta_c}{\partial y} \right) \cos \omega t - \frac{\partial}{\partial y} \left(gH \frac{\partial \eta_s}{\partial y} \right) \sin \omega t \quad ,$$

$$\frac{B}{H} \frac{\partial \eta_0}{\partial t} = -\frac{B}{H} \omega \eta_c \sin \omega t + \frac{B}{H} \omega \eta_s \cos \omega t \quad .$$

Factorizando:

$$\begin{aligned} \cos \omega t \left[-\omega^2 \eta_c - \frac{\partial}{\partial x} \left(gH \frac{\partial \eta_c}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(gH \frac{\partial \eta_c}{\partial y} \right) + \frac{B}{H} \omega \eta_s \right] &= 0 \\ \sin \omega t \left[-\omega^2 \eta_s - \frac{\partial}{\partial x} \left(gH \frac{\partial \eta_s}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(gH \frac{\partial \eta_s}{\partial y} \right) - \frac{B}{H} \omega \eta_c \right] &= 0 \end{aligned} \quad , \quad (\text{A.39})$$

De esta forma, se obtienen los siguientes sistemas acoplados, independientes del tiempo, que permiten obtener las amplitudes de elevación y velocidad.

$$\begin{aligned}
 -\omega^2 \eta_c - \frac{\partial}{\partial x} \left(gH \frac{\partial \eta_c}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(gH \frac{\partial \eta_c}{\partial y} \right) + \frac{B}{H} \omega \eta_s &= 0 \\
 -\omega^2 \eta_s - \frac{\partial}{\partial x} \left(gH \frac{\partial \eta_s}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(gH \frac{\partial \eta_s}{\partial y} \right) - \frac{B}{H} \omega \eta_c &= 0
 \end{aligned}
 \tag{A.40}$$

Desarrollo en la ecuación de movimiento (5.14):

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial U_0}{\partial t} &= -\omega U_c \text{sen } \omega t + \omega U_s \text{cos } \omega t \quad , \\
 -g \frac{\partial \eta_0}{\partial x} &= -g \frac{\partial \eta_c}{\partial x} \text{cos } \omega t - g \frac{\partial \eta_s}{\partial x} \text{sen } \omega t \quad , \\
 -B \frac{U_0}{H} &= -\frac{B}{H} U_c \text{cos } \omega t - \frac{B}{H} U_s \text{sen } \omega t \quad .
 \end{aligned}$$

Factorizando:

$$\begin{aligned}
 \text{cos } \omega t [\omega U_s] &= \left[-g \frac{\partial \eta_c}{\partial x} - \frac{B}{H} U_c \right] \text{cos } \omega t \\
 \text{sen } \omega t [-\omega U_c] &= \left[-g \frac{\partial \eta_s}{\partial x} - \frac{B}{H} U_s \right] \text{sen } \omega t \quad ,
 \end{aligned}
 \tag{A.41}$$

despejando U_c y U_s por regla de Cramer:

$$U_c = \frac{\begin{vmatrix} -g \frac{\partial \eta_c}{\partial x} & \omega \\ -g \frac{\partial \eta_s}{\partial x} & \frac{B}{H} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \left(\frac{B}{H}\right) & \omega \\ (-\omega) & \frac{B}{H} \end{vmatrix}} \rightarrow U_c = \frac{-g \frac{B}{H} \frac{\partial \eta_c}{\partial x} + \omega g \frac{\partial \eta_s}{\partial x}}{\left(\frac{B}{H}\right)^2 + \omega^2} \quad ,
 \tag{A.42}$$

$$U_s = \frac{\begin{vmatrix} \left(\frac{B}{H}\right) & -g \frac{\partial \eta_c}{\partial x} \\ (-\omega) & -g \frac{\partial \eta_s}{\partial x} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \left(\frac{B}{H}\right) & (\omega) \\ (-\omega) & \left(\frac{B}{H}\right) \end{vmatrix}} \rightarrow U_s = \frac{-g \frac{B}{H} \frac{\partial \eta_s}{\partial x} - \omega g \frac{\partial \eta_c}{\partial x}}{\left(\frac{B}{H}\right)^2 + \omega^2} . \quad (\text{A.43})$$

De igual forma se procede con la ecuación de movimiento (5.15) obteniendo las siguientes componentes de V_c y V_s :

$$V_c = \frac{\begin{vmatrix} -g \frac{\partial \eta_c}{\partial y} & \omega \\ -g \frac{\partial \eta_s}{\partial y} & \frac{B}{H} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \left(\frac{B}{H}\right) & \omega \\ (-\omega) & \frac{B}{H} \end{vmatrix}} \rightarrow V_c = \frac{-g \frac{B}{H} \frac{\partial \eta_c}{\partial y} + \omega g \frac{\partial \eta_s}{\partial y}}{\left(\frac{B}{H}\right)^2 + \omega^2} , \quad (\text{A.44})$$

$$V_s = \frac{\begin{vmatrix} \left(\frac{B}{H}\right) & -g \frac{\partial \eta_c}{\partial y} \\ (-\omega) & -g \frac{\partial \eta_s}{\partial y} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \left(\frac{B}{H}\right) & (\omega) \\ (-\omega) & \left(\frac{B}{H}\right) \end{vmatrix}} \rightarrow V_s = \frac{-g \frac{B}{H} \frac{\partial \eta_s}{\partial y} - \omega g \frac{\partial \eta_c}{\partial y}}{\left(\frac{B}{H}\right)^2 + \omega^2} . \quad (\text{A.45})$$

Las condiciones de borde se obtienen a partir de (5.14)-(5.15) considerando (3.14)-(3.15):

$$\eta_c|_{BA} = \bar{\eta} , \quad \eta_s|_{BA} = 0 , \quad -g \frac{\partial \eta_c}{\partial n} \Big|_{BI} = 0 , \quad -g \frac{\partial \eta_s}{\partial n} \Big|_{BI} = 0 . \quad (\text{A.46})$$

- Segunda Aproximación

Desarrollo del 2° miembro de la ecuación de onda (5.25):

$$\begin{aligned}
U_0 H \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{B}{H} \right) &= (U_c \cos \omega t + U_s \sin \omega t) H \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{B}{H} \right) \\
&= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{B}{H} \right) H U_c \cos \omega t + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{B}{H} \right) H U_s \sin \omega t
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V_0 H \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{B}{H} \right) &= (V_c \cos \omega t + V_s \sin \omega t) H \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{B}{H} \right) \\
&= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{B}{H} \right) H V_c \cos \omega t + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{B}{H} \right) H V_s \sin \omega t
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-\frac{\partial}{\partial x} (f H V_0) &= -\frac{\partial}{\partial x} (f H V_c \cos \omega t + f H V_s \sin \omega t) \\
&= -f \frac{\partial H}{\partial x} V_c \cos \omega t - f \frac{\partial H}{\partial x} V_s \sin \omega t - f H \frac{\partial V_c}{\partial x} \cos \omega t - f H \frac{\partial V_s}{\partial x} \sin \omega t
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial y} (f H U_0) &= \frac{\partial}{\partial y} (f H U_c \cos \omega t + f H U_s \sin \omega t) \\
&= f \frac{\partial H}{\partial y} U_c \cos \omega t + f \frac{\partial H}{\partial y} U_s \sin \omega t + f H \frac{\partial U_c}{\partial y} \cos \omega t + f H \frac{\partial U_s}{\partial y} \sin \omega t
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-\frac{B}{H} \frac{\partial (\eta_0 U_0)}{\partial x} &= -\frac{B}{H} \frac{\partial}{\partial x} [\eta_c U_c \cos^2 \omega t + \eta_c U_s \cos \omega t \sin \omega t + \eta_s U_c \sin \omega t \cos \omega t + \eta_s U_s \sin^2 \omega t] \\
&= -\frac{B}{H} \eta_c \frac{\partial U_c}{\partial x} \cos^2 \omega t - \frac{B}{H} \eta_c \frac{\partial U_s}{\partial x} \cos \omega t \sin \omega t - \frac{B}{H} \eta_s \frac{\partial U_c}{\partial x} \sin \omega t \cos \omega t \\
&\quad - \frac{B}{H} \eta_s \frac{\partial U_s}{\partial x} \sin^2 \omega t - \frac{B}{H} \frac{\partial \eta_c}{\partial x} U_c \cos^2 \omega t - \frac{B}{H} \frac{\partial \eta_c}{\partial x} U_s \cos \omega t \sin \omega t \\
&\quad - \frac{B}{H} \frac{\partial \eta_s}{\partial x} U_c \sin \omega t \cos \omega t - \frac{B}{H} \frac{\partial \eta_s}{\partial x} U_s \sin^2 \omega t
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-\frac{B}{H} \frac{\partial (\eta_0 V_0)}{\partial y} &= -\frac{B}{H} \frac{\partial}{\partial y} [\eta_c V_c \cos^2 \omega t + \eta_c V_s \cos \omega t \sin \omega t + \eta_s V_c \sin \omega t \cos \omega t + \eta_s V_s \sin^2 \omega t] \\
&= -\frac{B}{H} \eta_c \frac{\partial V_c}{\partial y} \cos^2 \omega t - \frac{B}{H} \eta_c \frac{\partial V_s}{\partial y} \cos \omega t \sin \omega t - \frac{B}{H} \eta_s \frac{\partial V_c}{\partial y} \sin \omega t \cos \omega t \\
&\quad - \frac{B}{H} \eta_s \frac{\partial V_s}{\partial y} \sin^2 \omega t - \frac{B}{H} \frac{\partial \eta_c}{\partial y} V_c \cos^2 \omega t - \frac{B}{H} \frac{\partial \eta_c}{\partial y} V_s \cos \omega t \sin \omega t \\
&\quad - \frac{B}{H} \frac{\partial \eta_s}{\partial y} V_c \sin \omega t \cos \omega t - \frac{B}{H} \frac{\partial \eta_s}{\partial y} V_s \sin^2 \omega t
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x} \left(HU_0 \frac{\partial U_0}{\partial x} \right) &= \frac{\partial}{\partial x} \left[(HU_c \cos \omega t + HU_s \sin \omega t) \left(\frac{\partial U_c}{\partial x} \cos \omega t + \frac{\partial U_s}{\partial x} \sin \omega t \right) \right] \\
&= \frac{\partial}{\partial x} \left[HU_c \frac{\partial U_c}{\partial x} \cos^2 \omega t + HU_c \frac{\partial U_s}{\partial x} \cos \omega t \sin \omega t + HU_s \frac{\partial U_c}{\partial x} \sin \omega t \cos \omega t + HU_s \frac{\partial U_s}{\partial x} \sin^2 \omega t \right] \\
&= \frac{\partial H}{\partial x} U_c \frac{\partial U_c}{\partial x} \cos^2 \omega t + \frac{\partial H}{\partial x} U_c \frac{\partial U_s}{\partial x} \cos \omega t \sin \omega t + \frac{\partial H}{\partial x} U_s \frac{\partial U_c}{\partial x} \sin \omega t \cos \omega t + \frac{\partial H}{\partial x} U_s \frac{\partial U_s}{\partial x} \sin^2 \omega t \\
&\quad + H \left(\frac{\partial U_c}{\partial x} \right)^2 \cos^2 \omega t + 2H \frac{\partial U_s}{\partial x} \frac{\partial U_c}{\partial x} \sin \omega t \cos \omega t + H \left(\frac{\partial U_s}{\partial x} \right)^2 \sin^2 \omega t + HU_c \frac{\partial^2 U_c}{\partial x^2} \cos^2 \omega t \\
&\quad + HU_c \frac{\partial^2 U_s}{\partial x^2} \cos \omega t \sin \omega t + HU_s \frac{\partial^2 U_c}{\partial x^2} \sin \omega t \cos \omega t + HU_s \frac{\partial^2 U_s}{\partial x^2} \sin^2 \omega t
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial y} \left(HU_0 \frac{\partial V_0}{\partial x} \right) &= \frac{\partial}{\partial y} \left[(HU_c \cos \omega t + HU_s \sin \omega t) \left(\frac{\partial V_c}{\partial x} \cos \omega t + \frac{\partial V_s}{\partial x} \sin \omega t \right) \right] \\
&= \frac{\partial}{\partial y} \left[HU_c \frac{\partial V_c}{\partial x} \cos^2 \omega t + HU_c \frac{\partial V_s}{\partial x} \cos \omega t \sin \omega t + HU_s \frac{\partial V_c}{\partial x} \sin \omega t \cos \omega t + HU_s \frac{\partial V_s}{\partial x} \sin^2 \omega t \right] \\
&= \frac{\partial H}{\partial y} U_c \frac{\partial V_c}{\partial x} \cos^2 \omega t + \frac{\partial H}{\partial y} U_c \frac{\partial V_s}{\partial x} \cos \omega t \sin \omega t + \frac{\partial H}{\partial y} U_s \frac{\partial V_c}{\partial x} \sin \omega t \cos \omega t + \frac{\partial H}{\partial y} U_s \frac{\partial V_s}{\partial x} \sin^2 \omega t \\
&\quad + H \frac{\partial U_c}{\partial y} \frac{\partial V_c}{\partial x} \cos^2 \omega t + H \frac{\partial U_c}{\partial y} \frac{\partial V_s}{\partial x} \cos \omega t \sin \omega t + H \frac{\partial U_s}{\partial y} \frac{\partial V_c}{\partial x} \sin \omega t \cos \omega t + H \frac{\partial U_s}{\partial y} \frac{\partial V_s}{\partial x} \sin^2 \omega t \\
&\quad + HU_c \frac{\partial^2 V_c}{\partial y \partial x} \cos^2 \omega t + HU_c \frac{\partial^2 V_s}{\partial y \partial x} \cos \omega t \sin \omega t + HU_s \frac{\partial^2 V_c}{\partial y \partial x} \sin \omega t \cos \omega t + HU_s \frac{\partial^2 V_s}{\partial y \partial x} \sin^2 \omega t
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x} \left(HV_0 \frac{\partial U_0}{\partial y} \right) &= \frac{\partial}{\partial x} \left[(HV_c \cos \omega t + HV_s \sin \omega t) \left(\frac{\partial U_c}{\partial y} \cos \omega t + \frac{\partial U_s}{\partial y} \sin \omega t \right) \right] \\
&= \frac{\partial}{\partial x} \left[HV_c \frac{\partial U_c}{\partial y} \cos^2 \omega t + HV_c \frac{\partial U_s}{\partial y} \cos \omega t \sin \omega t + HV_s \frac{\partial U_c}{\partial y} \sin \omega t \cos \omega t + HV_s \frac{\partial U_s}{\partial y} \sin^2 \omega t \right] \\
&= \frac{\partial H}{\partial x} V_c \frac{\partial U_c}{\partial y} \cos^2 \omega t + \frac{\partial H}{\partial x} V_c \frac{\partial U_s}{\partial y} \cos \omega t \sin \omega t + \frac{\partial H}{\partial x} V_s \frac{\partial U_c}{\partial y} \sin \omega t \cos \omega t + \frac{\partial H}{\partial x} V_s \frac{\partial U_s}{\partial y} \sin^2 \omega t \\
&\quad + H \frac{\partial V_c}{\partial x} \frac{\partial U_c}{\partial y} \cos^2 \omega t + H \frac{\partial V_c}{\partial x} \frac{\partial U_s}{\partial y} \cos \omega t \sin \omega t + H \frac{\partial V_s}{\partial x} \frac{\partial U_c}{\partial y} \sin \omega t \cos \omega t + H \frac{\partial V_s}{\partial x} \frac{\partial U_s}{\partial y} \sin^2 \omega t \\
&\quad + HV_c \frac{\partial^2 U_c}{\partial x \partial y} \cos^2 \omega t + HV_c \frac{\partial^2 U_s}{\partial x \partial y} \cos \omega t \sin \omega t + HV_s \frac{\partial^2 U_c}{\partial x \partial y} \sin \omega t \cos \omega t + HV_s \frac{\partial^2 U_s}{\partial x \partial y} \sin^2 \omega t
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial y} \left(HV_0 \frac{\partial V_0}{\partial y} \right) &= \frac{\partial}{\partial y} \left[(HV_c \cos \omega t + HV_s \sin \omega t) \left(\frac{\partial V_c}{\partial y} \cos \omega t + \frac{\partial V_s}{\partial y} \sin \omega t \right) \right] \\
&= \frac{\partial}{\partial y} \left[HV_c \frac{\partial V_c}{\partial y} \cos^2 \omega t + HV_c \frac{\partial V_s}{\partial y} \cos \omega t \sin \omega t + HV_s \frac{\partial V_c}{\partial y} \sin \omega t \cos \omega t + HV_s \frac{\partial V_s}{\partial y} \sin^2 \omega t \right] \\
&= \frac{\partial H}{\partial y} V_c \frac{\partial V_c}{\partial y} \cos^2 \omega t + \frac{\partial H}{\partial y} V_c \frac{\partial V_s}{\partial y} \cos \omega t \sin \omega t + \frac{\partial H}{\partial y} V_s \frac{\partial V_c}{\partial y} \sin \omega t \cos \omega t + \frac{\partial H}{\partial y} V_s \frac{\partial V_s}{\partial y} \sin^2 \omega t \\
&\quad + H \left(\frac{\partial V_c}{\partial y} \right)^2 \cos^2 \omega t + 2H \frac{\partial V_s}{\partial y} \frac{\partial V_c}{\partial y} \sin \omega t \cos \omega t + H \left(\frac{\partial V_s}{\partial y} \right)^2 \sin^2 \omega t + HV_c \frac{\partial^2 V_c}{\partial y^2} \cos^2 \omega t \\
&\quad + HV_c \frac{\partial^2 V_s}{\partial y^2} \cos \omega t \sin \omega t + HV_s \frac{\partial^2 V_c}{\partial y^2} \sin \omega t \cos \omega t + HV_s \frac{\partial^2 V_s}{\partial y^2} \sin^2 \omega t
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{B}{H} \eta_0 U_0 \right) &= \frac{\partial}{\partial x} \left[-\frac{B}{H} U_c \eta_c \cos^2 \omega t - \frac{B}{H} U_c \eta_s \cos \omega t \sin \omega t - \frac{B}{H} U_s \eta_c \sin \omega t \cos \omega t - \frac{B}{H} U_s \eta_s \sin^2 \omega t \right] \\
&= \frac{B}{H^2} \frac{\partial H}{\partial x} U_c \eta_c \cos^2 \omega t + \frac{B}{H^2} \frac{\partial H}{\partial x} U_c \eta_s \cos \omega t \sin \omega t + \frac{B}{H^2} \frac{\partial H}{\partial x} U_s \eta_c \sin \omega t \cos \omega t + \frac{B}{H^2} \frac{\partial H}{\partial x} U_s \eta_s \sin^2 \omega t \\
&\quad - \frac{B}{H} \frac{\partial U_c}{\partial x} \eta_c \cos^2 \omega t - \frac{B}{H} \frac{\partial U_c}{\partial x} \eta_s \cos \omega t \sin \omega t - \frac{B}{H} \frac{\partial U_s}{\partial x} \eta_c \sin \omega t \cos \omega t - \frac{B}{H} \frac{\partial U_s}{\partial x} \eta_s \sin^2 \omega t \\
&\quad - \frac{B}{H} U_c \frac{\partial \eta_c}{\partial x} \cos^2 \omega t - \frac{B}{H} U_c \frac{\partial \eta_s}{\partial x} \cos \omega t \sin \omega t - \frac{B}{H} U_s \frac{\partial \eta_c}{\partial x} \sin \omega t \cos \omega t - \frac{B}{H} U_s \frac{\partial \eta_s}{\partial x} \sin^2 \omega t
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{B}{H} \eta_0 V_0 \right) &= \frac{\partial}{\partial y} \left[-\frac{B}{H} V_c \eta_c \cos^2 \omega t - \frac{B}{H} V_c \eta_s \cos \omega t \sin \omega t - \frac{B}{H} V_s \eta_c \sin \omega t \cos \omega t - \frac{B}{H} V_s \eta_s \sin^2 \omega t \right] \\
&= \frac{B}{H^2} \frac{\partial H}{\partial y} V_c \eta_c \cos^2 \omega t + \frac{B}{H^2} \frac{\partial H}{\partial y} V_c \eta_s \cos \omega t \sin \omega t + \frac{B}{H^2} \frac{\partial H}{\partial y} V_s \eta_c \sin \omega t \cos \omega t + \frac{B}{H^2} \frac{\partial H}{\partial y} V_s \eta_s \sin^2 \omega t \\
&\quad - \frac{B}{H} \frac{\partial V_c}{\partial y} \eta_c \cos^2 \omega t - \frac{B}{H} \frac{\partial V_c}{\partial y} \eta_s \cos \omega t \sin \omega t - \frac{B}{H} \frac{\partial V_s}{\partial y} \eta_c \sin \omega t \cos \omega t - \frac{B}{H} \frac{\partial V_s}{\partial y} \eta_s \sin^2 \omega t \\
&\quad - \frac{B}{H} V_c \frac{\partial \eta_c}{\partial y} \cos^2 \omega t - \frac{B}{H} V_c \frac{\partial \eta_s}{\partial y} \cos \omega t \sin \omega t - \frac{B}{H} V_s \frac{\partial \eta_c}{\partial y} \sin \omega t \cos \omega t - \frac{B}{H} V_s \frac{\partial \eta_s}{\partial y} \sin^2 \omega t
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-\frac{\partial^2}{\partial t \partial x}(\eta_0 U_0) &= -\frac{\partial^2}{\partial t \partial x} [U_c \eta_c \cos^2 \omega t + U_c \eta_s \cos \omega t \sin \omega t + U_s \eta_c \sin \omega t \cos \omega t + U_s \eta_s \sin^2 \omega t] \\
&= -\frac{\partial}{\partial x} \left[-2\omega U_c \eta_c \sin \omega t \cos \omega t - \omega U_c \eta_s \sin \omega t \sin \omega t + \omega U_c \eta_s \cos \omega t \cos \omega t \right. \\
&\quad \left. + \omega U_s \eta_c \cos \omega t \cos \omega t - \omega U_s \eta_c \sin \omega t \sin \omega t + 2\omega U_s \eta_s \cos \omega t \sin \omega t \right] \\
&= -\frac{\partial}{\partial x} \left[-2\omega U_c \eta_c \sin \omega t \cos \omega t - \omega U_c \eta_s \sin^2 \omega t + \omega U_c \eta_s \cos^2 \omega t \right. \\
&\quad \left. + \omega U_s \eta_c \cos^2 \omega t - \omega U_s \eta_c \sin^2 \omega t + 2\omega U_s \eta_s \cos \omega t \sin \omega t \right] \\
&= 2\omega \frac{\partial U_c}{\partial x} \eta_c \sin \omega t \cos \omega t + \omega \frac{\partial U_c}{\partial x} \eta_s \sin^2 \omega t - \omega \frac{\partial U_c}{\partial x} \eta_s \cos^2 \omega t \\
&\quad - \omega \frac{\partial U_s}{\partial x} \eta_c \cos^2 \omega t + \omega \frac{\partial U_s}{\partial x} \eta_c \sin^2 \omega t - 2\omega \frac{\partial U_s}{\partial x} \eta_s \cos \omega t \sin \omega t \\
&\quad + 2\omega U_c \frac{\partial \eta_c}{\partial x} \sin \omega t \cos \omega t + \omega U_c \frac{\partial \eta_s}{\partial x} \sin^2 \omega t - \omega U_c \frac{\partial \eta_s}{\partial x} \cos^2 \omega t \\
&\quad - \omega U_s \frac{\partial \eta_c}{\partial x} \cos^2 \omega t + \omega U_s \frac{\partial \eta_c}{\partial x} \sin^2 \omega t - 2\omega U_s \frac{\partial \eta_s}{\partial x} \cos \omega t \sin \omega t \\
-\frac{\partial^2}{\partial t \partial y}(\eta_0 V_0) &= -\frac{\partial^2}{\partial t \partial y} [V_c \eta_c \cos^2 \omega t + V_c \eta_s \cos \omega t \sin \omega t + V_s \eta_c \sin \omega t \cos \omega t + V_s \eta_s \sin^2 \omega t] \\
&= -\frac{\partial}{\partial y} \left[-2\omega V_c \eta_c \sin \omega t \cos \omega t - \omega V_c \eta_s \sin \omega t \sin \omega t + \omega V_c \eta_s \cos \omega t \cos \omega t \right. \\
&\quad \left. + \omega V_s \eta_c \cos \omega t \cos \omega t - \omega V_s \eta_c \sin \omega t \sin \omega t + 2\omega V_s \eta_s \cos \omega t \sin \omega t \right] \\
&= -\frac{\partial}{\partial y} \left[-2\omega V_c \eta_c \sin \omega t \cos \omega t - \omega V_c \eta_s \sin^2 \omega t + \omega V_c \eta_s \cos^2 \omega t \right. \\
&\quad \left. + \omega V_s \eta_c \cos^2 \omega t - \omega V_s \eta_c \sin^2 \omega t + 2\omega V_s \eta_s \cos \omega t \sin \omega t \right] \\
&= 2\omega \frac{\partial V_c}{\partial y} \eta_c \sin \omega t \cos \omega t + \omega \frac{\partial V_c}{\partial y} \eta_s \sin^2 \omega t - \omega \frac{\partial V_c}{\partial y} \eta_s \cos^2 \omega t \\
&\quad - \omega \frac{\partial V_s}{\partial y} \eta_c \cos^2 \omega t + \omega \frac{\partial V_s}{\partial y} \eta_c \sin^2 \omega t - 2\omega \frac{\partial V_s}{\partial y} \eta_s \cos \omega t \sin \omega t \\
&\quad + 2\omega V_c \frac{\partial \eta_c}{\partial y} \sin \omega t \cos \omega t + \omega V_c \frac{\partial \eta_s}{\partial y} \sin^2 \omega t - \omega V_c \frac{\partial \eta_s}{\partial y} \cos^2 \omega t \\
&\quad - \omega V_s \frac{\partial \eta_c}{\partial y} \cos^2 \omega t + \omega V_s \frac{\partial \eta_c}{\partial y} \sin^2 \omega t - 2\omega V_s \frac{\partial \eta_s}{\partial y} \cos \omega t \sin \omega t
\end{aligned}$$

Luego se reemplazan los desarrollos en series obtenidos en los correspondientes términos de la ecuación de onda (5.25). Se aplican identidades trigonométricas y se procede a factorizar, obteniendo los siguientes bloques:

$$\cos \omega t \overbrace{\left[\begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{B}{H} \right) H U_c + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{B}{H} \right) H V_c - f \frac{\partial H}{\partial x} V_c \\ -fH \frac{\partial V_c}{\partial x} + f \frac{\partial H}{\partial y} U_c + fH \frac{\partial U_c}{\partial y} \end{array} \right]}^{G1} + \sin \omega t \overbrace{\left[\begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{B}{H} \right) H U_s + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{B}{H} \right) H V_s - f \frac{\partial H}{\partial x} V_s \\ -fH \frac{\partial V_s}{\partial x} + f \frac{\partial H}{\partial y} U_s + fH \frac{\partial U_s}{\partial y} \end{array} \right]}^{G2}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\cos 2\omega t + 1}{2} \left[\begin{aligned}
& -\frac{B}{H}\eta_c \frac{\partial U_c}{\partial x} - \frac{B}{H} \frac{\partial \eta_c}{\partial x} U_c - \frac{B}{H}\eta_c \frac{\partial V_c}{\partial y} - \frac{B}{H} \frac{\partial \eta_c}{\partial y} V_c + \frac{\partial H}{\partial x} U_c \frac{\partial U_c}{\partial x} + H \left(\frac{\partial U_c}{\partial x} \right)^2 + H U_c \frac{\partial^2 U_c}{\partial x^2} + \frac{\partial H}{\partial y} U_c \frac{\partial V_c}{\partial x} \\
& + H \frac{\partial U_c}{\partial y} \frac{\partial V_c}{\partial x} + H U_c \frac{\partial^2 V_c}{\partial y \partial x} + \frac{\partial H}{\partial x} V_c \frac{\partial U_c}{\partial y} + H \frac{\partial V_c}{\partial x} \frac{\partial U_c}{\partial y} + H V_c \frac{\partial^2 U_c}{\partial x \partial y} + \frac{\partial H}{\partial y} V_c \frac{\partial V_c}{\partial y} + H \left(\frac{\partial V_c}{\partial y} \right)^2 + H V_c \frac{\partial^2 V_c}{\partial y^2} \\
& + \frac{B}{H^2} \frac{\partial H}{\partial x} U_c \eta_c - \frac{B}{H} \frac{\partial U_c}{\partial x} \eta_c - \frac{B}{H} U_c \frac{\partial \eta_c}{\partial x} + \frac{B}{H^2} \frac{\partial H}{\partial y} V_c \eta_c - \frac{B}{H} \frac{\partial V_c}{\partial y} \eta_c - \frac{B}{H} V_c \frac{\partial \eta_c}{\partial y} - \omega \frac{\partial U_c}{\partial x} \eta_s - \omega \frac{\partial U_s}{\partial x} \eta_c \\
& - \omega U_c \frac{\partial \eta_s}{\partial x} - \omega U_s \frac{\partial \eta_c}{\partial x} - \omega \frac{\partial V_c}{\partial y} \eta_s - \omega \frac{\partial V_s}{\partial y} \eta_c - \omega V_c \frac{\partial \eta_s}{\partial y} - \omega V_s \frac{\partial \eta_c}{\partial y}
\end{aligned} \right]
\end{aligned}$$

G3

$$\begin{aligned}
& + \frac{1 - \cos 2\omega t}{2} \left[\begin{aligned}
& -\frac{B}{H}\eta_s \frac{\partial U_s}{\partial x} - \frac{B}{H} \frac{\partial \eta_s}{\partial x} U_s - \frac{B}{H}\eta_s \frac{\partial V_s}{\partial y} - \frac{B}{H} \frac{\partial \eta_s}{\partial y} V_s + \frac{\partial H}{\partial x} U_s \frac{\partial U_s}{\partial x} + H \left(\frac{\partial U_s}{\partial x} \right)^2 + H U_s \frac{\partial^2 U_s}{\partial x^2} \\
& + \frac{\partial H}{\partial y} U_s \frac{\partial V_s}{\partial x} + H \frac{\partial U_s}{\partial y} \frac{\partial V_s}{\partial x} + H U_s \frac{\partial^2 V_s}{\partial y \partial x} + \frac{\partial H}{\partial x} V_s \frac{\partial U_s}{\partial y} + H \frac{\partial V_s}{\partial x} \frac{\partial U_s}{\partial y} + H V_s \frac{\partial^2 U_s}{\partial x \partial y} + \frac{\partial H}{\partial y} V_s \frac{\partial V_s}{\partial y} \\
& + H \left(\frac{\partial V_s}{\partial y} \right)^2 + H V_s \frac{\partial^2 V_s}{\partial y^2} + \frac{B}{H^2} \frac{\partial H}{\partial x} U_s \eta_s - \frac{B}{H} \frac{\partial U_s}{\partial x} \eta_s - \frac{B}{H} U_s \frac{\partial \eta_s}{\partial x} + \frac{B}{H^2} \frac{\partial H}{\partial y} V_s \eta_s - \frac{B}{H} \frac{\partial V_s}{\partial y} \eta_s \\
& - \frac{B}{H} V_s \frac{\partial \eta_s}{\partial y} + \omega \frac{\partial U_c}{\partial x} \eta_s + \omega \frac{\partial U_s}{\partial x} \eta_c + \omega U_c \frac{\partial \eta_s}{\partial x} + \omega U_s \frac{\partial \eta_c}{\partial x} + \omega \frac{\partial V_c}{\partial y} \eta_s + \omega \frac{\partial V_s}{\partial y} \eta_c + \omega V_c \frac{\partial \eta_s}{\partial y} + \omega V_s \frac{\partial \eta_c}{\partial y}
\end{aligned} \right]
\end{aligned}$$

G4

$$\begin{aligned}
& + \frac{\text{sen} 2\omega t}{2} \left[\begin{aligned}
& -\frac{B}{H}\eta_c \frac{\partial U_s}{\partial x} - \frac{B}{H}\eta_s \frac{\partial U_c}{\partial x} - \frac{B}{H} \frac{\partial \eta_c}{\partial x} U_s - \frac{B}{H} \frac{\partial \eta_s}{\partial x} U_c - \frac{B}{H}\eta_c \frac{\partial V_s}{\partial y} - \frac{B}{H}\eta_s \frac{\partial V_c}{\partial y} - \frac{B}{H} \frac{\partial \eta_c}{\partial y} V_s - \frac{B}{H} \frac{\partial \eta_s}{\partial y} V_c \\
& + \frac{\partial H}{\partial x} U_c \frac{\partial U_s}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial x} U_s \frac{\partial U_c}{\partial x} + 2H \frac{\partial U_s}{\partial x} \frac{\partial U_c}{\partial x} + H U_c \frac{\partial^2 U_s}{\partial x^2} + H U_s \frac{\partial^2 U_c}{\partial x^2} + \frac{\partial H}{\partial y} U_c \frac{\partial V_s}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial y} U_s \frac{\partial V_c}{\partial x} \\
& + H \frac{\partial U_c}{\partial y} \frac{\partial V_s}{\partial x} + H \frac{\partial U_s}{\partial y} \frac{\partial V_c}{\partial x} + H U_c \frac{\partial^2 V_s}{\partial y \partial x} + H U_s \frac{\partial^2 V_c}{\partial y \partial x} + \frac{\partial H}{\partial x} V_c \frac{\partial U_s}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial x} V_s \frac{\partial U_c}{\partial y} + H \frac{\partial V_c}{\partial x} \frac{\partial U_s}{\partial y} \\
& + H \frac{\partial V_s}{\partial x} \frac{\partial U_c}{\partial y} + H V_c \frac{\partial^2 U_s}{\partial x \partial y} + H V_s \frac{\partial^2 U_c}{\partial x \partial y} + \frac{\partial H}{\partial y} V_c \frac{\partial V_s}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial y} V_s \frac{\partial V_c}{\partial y} + 2H \frac{\partial V_s}{\partial y} \frac{\partial V_c}{\partial y} + H V_c \frac{\partial^2 V_s}{\partial y^2} \\
& + H V_s \frac{\partial^2 V_c}{\partial y^2} + \frac{B}{H^2} \frac{\partial H}{\partial x} U_c \eta_s + \frac{B}{H^2} \frac{\partial H}{\partial x} U_s \eta_c - \frac{B}{H} \frac{\partial U_c}{\partial x} \eta_s - \frac{B}{H} \frac{\partial U_s}{\partial x} \eta_c - \frac{B}{H} U_c \frac{\partial \eta_s}{\partial x} - \frac{B}{H} U_s \frac{\partial \eta_c}{\partial x} \\
& + \frac{B}{H^2} \frac{\partial H}{\partial y} V_c \eta_s + \frac{B}{H^2} \frac{\partial H}{\partial y} V_s \eta_c - \frac{B}{H} \frac{\partial V_c}{\partial y} \eta_s - \frac{B}{H} \frac{\partial V_s}{\partial y} \eta_c - \frac{B}{H} V_c \frac{\partial \eta_s}{\partial y} - \frac{B}{H} V_s \frac{\partial \eta_c}{\partial y} + 2\omega \frac{\partial U_c}{\partial x} \eta_c \\
& - 2\omega \frac{\partial U_s}{\partial x} \eta_s + 2\omega U_c \frac{\partial \eta_c}{\partial x} - 2\omega U_s \frac{\partial \eta_s}{\partial x} + 2\omega \frac{\partial V_c}{\partial y} \eta_c - 2\omega \frac{\partial V_s}{\partial y} \eta_s + 2\omega V_c \frac{\partial \eta_c}{\partial y} - 2\omega V_s \frac{\partial \eta_s}{\partial y}
\end{aligned} \right]
\end{aligned}$$

G5

$$= G1 \cos \omega t + G2 \text{sen } \omega t + G3 \frac{\cos 2\omega t + 1}{2} + G4 \frac{1 - \cos 2\omega t}{2} + G5 \frac{\text{sen} 2\omega t}{2}$$

De esta manera, reacomodando tales desarrollos, el segundo término de la ecuación de onda (5.25) queda re-expresada de la siguiente forma:

$$\frac{\partial^2 \eta^*}{\partial t^2} \frac{B}{H} \frac{\partial \eta^*}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left(gH \frac{\partial \eta^*}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(gH \frac{\partial \eta^*}{\partial y} \right) = \quad , \quad (\text{A.47})$$

$$F_0(x, y) + F_1(x, y) \cos \omega t + F_2(x, y) \text{sen} \omega t + F_3(x, y) \cos 2\omega t + F_4(x, y) \text{sen} 2\omega t$$

donde

$$\begin{aligned} F_0(x, y) &= \left(\frac{1}{2} G3 + \frac{1}{2} G4 \right) \quad , \\ F_1(x, y) &= G1 \quad , \\ F_2(x, y) &= G2 \quad , \\ F_3(x, y) &= \left(\frac{1}{2} G3 - \frac{1}{2} G4 \right) \quad , \\ F_4(x, y) &= \frac{G5}{2} \quad , \end{aligned} \quad (\text{A.48})$$

lo que implica que:

$$F_{0(x,y)} = \frac{1}{2} \left[\begin{aligned} & -\frac{2B}{H} \left(\eta_c \frac{\partial U_c}{\partial x} + \eta_s \frac{\partial U_s}{\partial x} + \eta_c \frac{\partial V_c}{\partial y} + \eta_s \frac{\partial V_s}{\partial y} + U_c \frac{\partial \eta_c}{\partial x} + V_c \frac{\partial \eta_c}{\partial y} + U_s \frac{\partial \eta_s}{\partial x} + V_s \frac{\partial \eta_s}{\partial y} \right) \\ & - \frac{\partial(B/H)}{\partial x} U_c \eta_c - \frac{\partial(B/H)}{\partial x} U_s \eta_s - \frac{\partial(B/H)}{\partial y} V_c \eta_c - \frac{\partial(B/H)}{\partial y} V_s \eta_s \\ & + 2H \frac{\partial U_c}{\partial y} \frac{\partial V_c}{\partial x} + H2 \frac{\partial U_s}{\partial y} \frac{\partial V_s}{\partial x} + HU_c \frac{\partial^2 U_c}{\partial x^2} + HU_s \frac{\partial^2 U_s}{\partial x^2} + HV_c \frac{\partial^2 V_c}{\partial y^2} + HV_s \frac{\partial^2 V_s}{\partial y^2} \\ & + HU_c \frac{\partial^2 V_c}{\partial y \partial x} + HU_s \frac{\partial^2 V_s}{\partial y \partial x} + HV_c \frac{\partial^2 U_c}{\partial x \partial y} + HV_s \frac{\partial^2 U_s}{\partial x \partial y} \\ & + H \left(\frac{\partial U_c}{\partial x} \right)^2 + H \left(\frac{\partial U_s}{\partial x} \right)^2 + H \left(\frac{\partial V_c}{\partial y} \right)^2 + H \left(\frac{\partial V_s}{\partial y} \right)^2 \\ & + \frac{\partial H}{\partial x} U_c \frac{\partial U_c}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial y} U_c \frac{\partial V_c}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial x} V_c \frac{\partial U_c}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial y} V_c \frac{\partial V_c}{\partial y} \\ & + \frac{\partial H}{\partial x} U_s \frac{\partial U_s}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial x} V_s \frac{\partial U_s}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial y} U_s \frac{\partial V_s}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial y} V_s \frac{\partial V_s}{\partial y} \end{aligned} \right] \quad , \quad (\text{A.49})$$

$$F_1(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{B}{H} \right) HU_c + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{B}{H} \right) HV_c - f \frac{\partial H}{\partial x} V_c - fH \frac{\partial V_c}{\partial x} + f \frac{\partial H}{\partial y} U_c + fH \frac{\partial U_c}{\partial y} \quad , \quad (\text{A.50})$$

$$F_2(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{B}{H} \right) HU_s + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{B}{H} \right) HV_s - f \frac{\partial H}{\partial x} V_s - fH \frac{\partial V_s}{\partial x} + f \frac{\partial H}{\partial y} U_s + fH \frac{\partial U_s}{\partial y} \quad , \quad (\text{A.51})$$

$$F_3(x,y) = \frac{1}{2} \left[\begin{aligned}
& -\frac{B}{H} \left(\eta_c \frac{\partial U_c}{\partial x} + \frac{\partial \eta_c}{\partial x} U_c + \eta_c \frac{\partial V_c}{\partial y} + \frac{\partial \eta_c}{\partial y} V_c + \frac{\partial U_c}{\partial x} \eta_c + U_c \frac{\partial \eta_c}{\partial x} + \frac{\partial V_c}{\partial y} \eta_c + V_c \frac{\partial \eta_c}{\partial y} \right) \\
& + \frac{B}{H} \left(\eta_s \frac{\partial U_s}{\partial x} + \frac{\partial \eta_s}{\partial x} U_s + \eta_s \frac{\partial V_s}{\partial y} + \frac{\partial \eta_s}{\partial y} V_s + \frac{\partial U_s}{\partial x} \eta_s + U_s \frac{\partial \eta_s}{\partial x} + \frac{\partial V_s}{\partial y} \eta_s + V_s \frac{\partial \eta_s}{\partial y} \right) \\
& + \frac{\partial H}{\partial x} \left(U_c \frac{\partial U_c}{\partial x} + V_c \frac{\partial U_c}{\partial y} - U_s \frac{\partial U_s}{\partial x} - V_s \frac{\partial U_s}{\partial y} \right) + \frac{\partial H}{\partial y} \left(U_c \frac{\partial V_c}{\partial x} + V_c \frac{\partial V_c}{\partial y} - U_s \frac{\partial V_s}{\partial x} - V_s \frac{\partial V_s}{\partial y} \right) \\
& + H \left(\left(\frac{\partial U_c}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial V_c}{\partial y} \right)^2 - \left(\frac{\partial U_s}{\partial x} \right)^2 - \left(\frac{\partial V_s}{\partial y} \right)^2 \right) \\
& + 2H \left(\frac{\partial U_c}{\partial y} \frac{\partial V_c}{\partial x} - \frac{\partial U_s}{\partial y} \frac{\partial V_s}{\partial x} \right) \\
& + H \left(U_c \frac{\partial^2 V_c}{\partial y \partial x} - U_s \frac{\partial^2 V_s}{\partial y \partial x} + V_c \frac{\partial^2 U_c}{\partial x \partial y} - V_s \frac{\partial^2 U_s}{\partial x \partial y} + U_c \frac{\partial^2 U_c}{\partial x^2} + V_c \frac{\partial^2 V_c}{\partial y^2} - U_s \frac{\partial^2 U_s}{\partial x^2} - V_s \frac{\partial^2 V_s}{\partial y^2} \right) \\
& + \frac{B}{H^2} \frac{\partial H}{\partial x} (U_c \eta_c - U_s \eta_s) + \frac{B}{H^2} \frac{\partial H}{\partial y} (V_c \eta_c - V_s \eta_s) \\
& + 2\omega \left(\frac{\partial U_c}{\partial x} \eta_s + \frac{\partial U_s}{\partial x} \eta_c + U_c \frac{\partial \eta_s}{\partial x} + U_s \frac{\partial \eta_c}{\partial x} + \frac{\partial V_c}{\partial y} \eta_s + \frac{\partial V_s}{\partial y} \eta_c + V_c \frac{\partial \eta_s}{\partial y} + V_s \frac{\partial \eta_c}{\partial y} \right)
\end{aligned} \right] , (A.52)$$

$$F_4(x,y) = \frac{1}{2} \left[\begin{aligned}
& \frac{2B}{H} \left(-\eta_c \frac{\partial U_s}{\partial x} - \eta_s \frac{\partial U_c}{\partial x} - \eta_c \frac{\partial V_s}{\partial y} - \eta_s \frac{\partial V_c}{\partial y} - U_c \frac{\partial \eta_s}{\partial x} - U_s \frac{\partial \eta_c}{\partial x} - V_c \frac{\partial \eta_s}{\partial y} - V_s \frac{\partial \eta_c}{\partial y} \right) \\
& + HU_c \frac{\partial^2 U_s}{\partial x^2} + HU_s \frac{\partial^2 U_c}{\partial x^2} + HV_c \frac{\partial^2 V_s}{\partial y^2} + HV_s \frac{\partial^2 V_c}{\partial y^2} \\
& + HU_c \frac{\partial^2 V_s}{\partial y \partial x} + HU_s \frac{\partial^2 V_c}{\partial y \partial x} + HV_c \frac{\partial^2 U_s}{\partial x \partial y} + HV_s \frac{\partial^2 U_c}{\partial x \partial y} \\
& + \frac{\partial H}{\partial x} U_c \frac{\partial U_s}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial x} U_s \frac{\partial U_c}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial x} V_c \frac{\partial U_s}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial x} V_s \frac{\partial U_c}{\partial y} \\
& + \frac{\partial H}{\partial y} U_c \frac{\partial V_s}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial y} U_s \frac{\partial V_c}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial y} V_c \frac{\partial V_s}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial y} V_s \frac{\partial V_c}{\partial y} \\
& + 2H \left(\frac{\partial U_s}{\partial x} \frac{\partial U_c}{\partial x} + \frac{\partial V_s}{\partial y} \frac{\partial V_c}{\partial y} \right) \\
& + H \left(\frac{\partial U_c}{\partial y} \frac{\partial V_s}{\partial x} + \frac{\partial U_s}{\partial y} \frac{\partial V_c}{\partial x} + \frac{\partial V_c}{\partial x} \frac{\partial U_s}{\partial y} + \frac{\partial V_s}{\partial x} \frac{\partial U_c}{\partial y} \right) \\
& + \frac{B}{H^2} \left(\frac{\partial H}{\partial x} U_c \eta_s + \frac{\partial H}{\partial x} U_s \eta_c + \frac{\partial H}{\partial y} V_c \eta_s + \frac{\partial H}{\partial y} V_s \eta_c \right) \\
& + 2\omega \left(-\frac{\partial U_c}{\partial x} \eta_c + \frac{\partial U_s}{\partial x} \eta_s - \frac{\partial V_c}{\partial y} \eta_c + \frac{\partial V_s}{\partial y} \eta_s - U_c \frac{\partial \eta_c}{\partial x} + U_s \frac{\partial \eta_s}{\partial x} - V_c \frac{\partial \eta_c}{\partial y} + V_s \frac{\partial \eta_s}{\partial y} \right)
\end{aligned} \right] , (A.53)$$

Seguidamente se procede a efectuar el mismo desarrollo en el 1º miembro de la ecuación de onda (5.25) considerando las expansiones (A.38):

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \eta^*}{\partial t^2} &= -\omega^2 \eta_{1c}^* \cos \omega t - \omega^2 \eta_{1s}^* \text{sen} \omega t - (2\omega)^2 \eta_{2c}^* \cos 2\omega t - (2\omega)^2 \eta_{2s}^* \text{sen} 2\omega t \quad , \\ \frac{B}{H} \frac{\partial \eta^*}{\partial t} &= -\omega \frac{B}{H} \eta_{1c}^* \text{sen} \omega t + \omega \frac{B}{H} \eta_{1s}^* \cos \omega t - 2\omega \frac{B}{H} \eta_{2c}^* \text{sen} 2\omega t + 2\omega \frac{B}{H} \eta_{2s}^* \cos 2\omega t \quad , \\ -\frac{\partial}{\partial x} \left(gH \frac{\partial \eta^*}{\partial x} \right) &= -\frac{\partial}{\partial x} \left(gH \frac{\partial \eta_0^*}{\partial x} + gH \frac{\partial \eta_{1c}^*}{\partial x} \cos \omega t + gH \frac{\partial \eta_{1s}^*}{\partial x} \text{sen} \omega t + gH \frac{\partial \eta_{2c}^*}{\partial x} \cos 2\omega t + gH \frac{\partial \eta_{2s}^*}{\partial x} \text{sen} 2\omega t \right) \\ &= -\frac{\partial}{\partial x} \left(gH \frac{\partial \eta_0^*}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(gH \frac{\partial \eta_{1c}^*}{\partial x} \right) \cos \omega t - \frac{\partial}{\partial x} \left(gH \frac{\partial \eta_{1s}^*}{\partial x} \right) \text{sen} \omega t - \frac{\partial}{\partial x} \left(gH \frac{\partial \eta_{2c}^*}{\partial x} \right) \cos 2\omega t \quad , \\ &\quad - \frac{\partial}{\partial x} \left(gH \frac{\partial \eta_{2s}^*}{\partial x} \right) \text{sen} 2\omega t \\ -\frac{\partial}{\partial y} \left(gH \frac{\partial \eta^*}{\partial y} \right) &= -\frac{\partial}{\partial y} \left(gH \frac{\partial \eta_0^*}{\partial y} + gH \frac{\partial \eta_{1c}^*}{\partial y} \cos \omega t + gH \frac{\partial \eta_{1s}^*}{\partial y} \text{sen} \omega t + gH \frac{\partial \eta_{2c}^*}{\partial y} \cos 2\omega t + gH \frac{\partial \eta_{2s}^*}{\partial y} \text{sen} 2\omega t \right) \\ &= -\frac{\partial}{\partial y} \left(gH \frac{\partial \eta_0^*}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(gH \frac{\partial \eta_{1c}^*}{\partial y} \right) \cos \omega t - \frac{\partial}{\partial y} \left(gH \frac{\partial \eta_{1s}^*}{\partial y} \right) \text{sen} \omega t - \frac{\partial}{\partial y} \left(gH \frac{\partial \eta_{2c}^*}{\partial y} \right) \cos 2\omega t \quad , \\ &\quad - \frac{\partial}{\partial y} \left(gH \frac{\partial \eta_{2s}^*}{\partial y} \right) \text{sen} 2\omega t \end{aligned}$$

Factorizando se obtienen las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned} &-\frac{\partial}{\partial x} \left(gH \frac{\partial \eta_0^*}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(gH \frac{\partial \eta_0^*}{\partial y} \right) \\ &+ \cos \omega t \left[-\omega^2 \eta_{1c}^* - \frac{\partial}{\partial x} \left(gH \frac{\partial \eta_{1c}^*}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(gH \frac{\partial \eta_{1c}^*}{\partial y} \right) + \frac{B}{H} \omega \eta_{1s}^* \right] \\ &+ \text{sen} \omega t \left[-\omega^2 \eta_{1s}^* - \frac{\partial}{\partial x} \left(gH \frac{\partial \eta_{1s}^*}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(gH \frac{\partial \eta_{1s}^*}{\partial y} \right) + \frac{B}{H} (-\omega) \eta_{1c}^* \right] \quad . \quad (A.54) \\ &+ \cos 2\omega t \left[-(2\omega)^2 \eta_{2c}^* - \frac{\partial}{\partial x} \left(gH \frac{\partial \eta_{2c}^*}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(gH \frac{\partial \eta_{2c}^*}{\partial y} \right) + \frac{B}{H} 2\omega \eta_{2s}^* \right] \\ &+ \text{sen} 2\omega t \left[-(2\omega)^2 \eta_{2s}^* - \frac{\partial}{\partial x} \left(gH \frac{\partial \eta_{2s}^*}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(gH \frac{\partial \eta_{2s}^*}{\partial y} \right) + \frac{B}{H} (-2\omega) \eta_{2c}^* \right] \end{aligned}$$

Luego, reemplazando (A.54) en (A.47) se obtiene el segundo sistema de ecuaciones independientes del tiempo:

$$\begin{aligned}
& -\frac{\partial}{\partial x} \left(gH \frac{\partial \eta_0^*}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(gH \frac{\partial \eta_0^*}{\partial y} \right) = F_0(x, y) , \\
& \left[-\omega^2 \eta_{1c}^* - \frac{\partial}{\partial x} \left(gH \frac{\partial \eta_{1c}^*}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(gH \frac{\partial \eta_{1c}^*}{\partial y} \right) + \frac{B}{H} \omega \eta_{1s}^* \right] = F_1(x, y) , \\
& \left[-\omega^2 \eta_{1s}^* - \frac{\partial}{\partial x} \left(gH \frac{\partial \eta_{1s}^*}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(gH \frac{\partial \eta_{1s}^*}{\partial y} \right) + \frac{B}{H} (-\omega) \eta_{1c}^* \right] = F_2(x, y) , \quad (A.55) \\
& \left[-(2\omega)^2 \eta_{2c}^* - \frac{\partial}{\partial x} \left(gH \frac{\partial \eta_{2c}^*}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(gH \frac{\partial \eta_{2c}^*}{\partial y} \right) + \frac{B}{H} 2\omega \eta_{2s}^* \right] = F_3(x, y) , \\
& \left[-(2\omega)^2 \eta_{2s}^* - \frac{\partial}{\partial x} \left(gH \frac{\partial \eta_{2s}^*}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(gH \frac{\partial \eta_{2s}^*}{\partial y} \right) + \frac{B}{H} (-2\omega) \eta_{2c}^* \right] = F_4(x, y) .
\end{aligned}$$

Se procede de igual forma para el análisis de las ecuaciones de movimiento (5.17) y (5.18) teniendo en cuenta las expresiones periódicas (A.37).

Desarrollo el miembro derecho de la ecuación de movimiento (5.17):

$$\begin{aligned}
-U_0 \frac{\partial U_0}{\partial x} &= -(U_c \cos \omega t + U_s \sin \omega t) \left(\frac{\partial U_c}{\partial x} \cos \omega t + \frac{\partial U_s}{\partial x} \sin \omega t \right) \\
&= -U_c \frac{\partial U_c}{\partial x} \cos^2 \omega t - U_c \frac{\partial U_s}{\partial x} \cos \omega t \sin \omega t - U_s \frac{\partial U_c}{\partial x} \sin \omega t \cos \omega t - U_s \frac{\partial U_s}{\partial x} \sin^2 \omega t ,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-V_0 \frac{\partial U_0}{\partial y} &= -(V_c \cos \omega t + V_s \sin \omega t) \left(\frac{\partial U_c}{\partial y} \cos \omega t + \frac{\partial U_s}{\partial y} \sin \omega t \right) \\
&= -V_c \frac{\partial U_c}{\partial y} \cos^2 \omega t - V_c \frac{\partial U_s}{\partial y} \cos \omega t \sin \omega t - V_s \frac{\partial U_c}{\partial y} \sin \omega t \cos \omega t - V_s \frac{\partial U_s}{\partial y} \sin^2 \omega t ,
\end{aligned}$$

$$\frac{B}{H^2} \eta_0 U_0 = \frac{B}{H^2} \eta_c U_c \cos^2 \omega t + \frac{B}{H^2} \eta_c U_s \cos \omega t \sin \omega t + \frac{B}{H^2} \eta_s U_c \sin \omega t \cos \omega t + \frac{B}{H^2} \eta_s U_s \sin^2 \omega t ,$$

$$fV_0 = fV_c \cos \omega t + fV_s \sin \omega t .$$

Luego, aplicando las identidades trigonométricas y seguidamente factorizando se llega a lo siguiente:

$$\begin{aligned}
& \overbrace{\frac{1}{2} \left[\left(-U_c \frac{\partial U_c}{\partial x} - V_c \frac{\partial U_c}{\partial y} + \frac{B}{H^2} \eta_c U_c \right) + \left(-U_s \frac{\partial U_s}{\partial x} - V_s \frac{\partial U_s}{\partial y} + \frac{B}{H^2} \eta_s U_s \right) \right]}^{J_{U0}} \\
& + \cos 2\omega t \overbrace{\frac{1}{2} \left[\left(-U_c \frac{\partial U_c}{\partial x} - V_c \frac{\partial U_c}{\partial y} + \frac{B}{H^2} \eta_c U_c \right) - \left(-U_s \frac{\partial U_s}{\partial x} - V_s \frac{\partial U_s}{\partial y} + \frac{B}{H^2} \eta_s U_s \right) \right]}^{J_{U1}} , \quad (A.56) \\
& + \sin 2\omega t \overbrace{\frac{1}{2} \left[-U_c \frac{\partial U_s}{\partial x} - U_s \frac{\partial U_c}{\partial x} - V_c \frac{\partial U_s}{\partial y} - V_s \frac{\partial U_c}{\partial y} + \frac{B}{H^2} \eta_c U_s + \frac{B}{H^2} \eta_s U_c \right]}^{J_{U2}}
\end{aligned}$$

De igual forma se procede con la ecuación de movimiento (5.18) obteniendo las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned}
& \overbrace{\frac{1}{2} \left[\left(-U_c \frac{\partial V_c}{\partial x} - V_c \frac{\partial V_c}{\partial y} + \frac{B}{H^2} \eta_c V_c \right) + \left(-U_s \frac{\partial V_s}{\partial x} - V_s \frac{\partial V_s}{\partial y} + \frac{B}{H^2} \eta_s V_s \right) \right]}^{J_{V0}} \\
& + \cos 2\omega t \overbrace{\frac{1}{2} \left[\left(-U_c \frac{\partial V_c}{\partial x} - V_c \frac{\partial V_c}{\partial y} + \frac{B}{H^2} \eta_c V_c \right) - \left(-U_s \frac{\partial V_s}{\partial x} - V_s \frac{\partial V_s}{\partial y} + \frac{B}{H^2} \eta_s V_s \right) \right]}^{J_{V1}} , \quad (A.57) \\
& + \sin 2\omega t \overbrace{\frac{1}{2} \left[-U_c \frac{\partial V_s}{\partial x} - U_s \frac{\partial V_c}{\partial x} - V_c \frac{\partial V_s}{\partial y} - V_s \frac{\partial V_c}{\partial y} + \frac{B}{H^2} \eta_c V_s + \frac{B}{H^2} \eta_s V_c \right]}^{J_{V2}}
\end{aligned}$$

Desarrollo el miembro izquierdo de la ecuación de movimiento teniendo en cuenta la expansión definida en (A.38):

$$\begin{aligned}
\frac{\partial U^*}{\partial t} &= -\omega U_{1c}^* \sin \omega t + \omega U_{1s}^* \cos \omega t - (2\omega) U_{2c}^* \sin 2\omega t + (2\omega) U_{2s}^* \cos 2\omega t , \\
g \frac{\partial \eta^*}{\partial x} &= g \frac{\partial \eta_0^*}{\partial x} + g \frac{\partial \eta_{1c}^*}{\partial x} \cos \omega t + g \frac{\partial \eta_{1s}^*}{\partial x} \sin \omega t + g \frac{\partial \eta_{2c}^*}{\partial x} \cos 2\omega t + g \frac{\partial \eta_{2s}^*}{\partial x} \sin 2\omega t , \\
\frac{B U^*}{H} &= \frac{B}{H} U_0^* + \frac{B}{H} U_{1c}^* \cos \omega t + \frac{B}{H} U_{1s}^* \sin \omega t + \frac{B}{H} U_{2c}^* \cos 2\omega t + \frac{B}{H} U_{2s}^* \sin 2\omega t ,
\end{aligned}$$

Luego, aplicando las identidades trigonométricas y seguidamente factorizando se llega a lo siguiente:

$$\begin{aligned}
& g \frac{\partial \eta_0^*}{\partial x} + \frac{B}{H} U_0^* + \cos \omega t \left[\omega U_{1s}^* + g \frac{\partial \eta_{1c}^*}{\partial x} + \frac{B}{H} U_{1c}^* \right] + \sin \omega t \left[-\omega U_{1c}^* + g \frac{\partial \eta_{1s}^*}{\partial x} + \frac{B}{H} U_{1s}^* \right] + \\
& \cos 2\omega t \left[(2\omega) U_{2s}^* + g \frac{\partial \eta_{2c}^*}{\partial x} + \frac{B}{H} U_{2c}^* \right] + \sin 2\omega t \left[-(2\omega) U_{2c}^* + g \frac{\partial \eta_{2s}^*}{\partial x} + \frac{B}{H} U_{2s}^* \right] , \quad (A.58)
\end{aligned}$$

De igual forma se procede con la ecuación de movimiento (5.18) obteniendo las siguientes expresiones:

$$g \frac{\partial \eta_0^*}{\partial y} + \frac{B}{H} V_0^* + \cos \omega t \left[\omega V_{1s}^* + g \frac{\partial \eta_{1c}^*}{\partial y} + \frac{B}{H} V_{1c}^* \right] + \text{sen} \omega t \left[-\omega V_{1c}^* + g \frac{\partial \eta_{1s}^*}{\partial y} + \frac{B}{H} V_{1s}^* \right] + \cos 2\omega t \left[(2\omega) V_{2s}^* + g \frac{\partial \eta_{2c}^*}{\partial y} + \frac{B}{H} V_{2c}^* \right] + \text{sen} 2\omega t \left[-(2\omega) V_{2c}^* + g \frac{\partial \eta_{2s}^*}{\partial y} + \frac{B}{H} V_{2s}^* \right] , \quad (\text{A.59})$$

Reemplazando los términos (A.56)-(A.59) en las correspondientes ecuaciones de movimiento (5.17) y (5.18) se obtienen a los siguientes sistemas:

$$\begin{aligned} g \frac{\partial \eta_0^*}{\partial x} + \frac{B}{H} U_0^* &= J_{U0} , \\ \cos \omega t \left[\omega U_{1s}^* + g \frac{\partial \eta_{1c}^*}{\partial x} + \frac{B}{H} U_{1c}^* \right] &= f V_c , \\ \text{sen} \omega t \left[-\omega U_{1c}^* + g \frac{\partial \eta_{1s}^*}{\partial x} + \frac{B}{H} U_{1s}^* \right] &= f V_s , \\ \cos 2\omega t \left[(2\omega) U_{2s}^* + g \frac{\partial \eta_{2c}^*}{\partial x} + \frac{B}{H} U_{2c}^* \right] &= J_{U1} \cos 2\omega t , \\ \text{sen} 2\omega t \left[-(2\omega) U_{2c}^* + g \frac{\partial \eta_{2s}^*}{\partial x} + \frac{B}{H} U_{2s}^* \right] &= J_{U2} \text{sen} 2\omega t , \end{aligned} \quad (\text{A.60})$$

$$\begin{aligned} g \frac{\partial \eta_0^*}{\partial y} + \frac{B}{H} V_0^* &= J_{V0} , \\ \cos \omega t \left[\omega V_{1s}^* + g \frac{\partial \eta_{1c}^*}{\partial y} + \frac{B}{H} V_{1c}^* \right] &= -f U_c , \\ \text{sen} \omega t \left[-\omega V_{1c}^* + g \frac{\partial \eta_{1s}^*}{\partial y} + \frac{B}{H} V_{1s}^* \right] &= -f U_s , \\ \cos 2\omega t \left[(2\omega) V_{2s}^* + g \frac{\partial \eta_{2c}^*}{\partial y} + \frac{B}{H} V_{2c}^* \right] &= J_{V1} \cos 2\omega t , \\ \text{sen} 2\omega t \left[-(2\omega) V_{2c}^* + g \frac{\partial \eta_{2s}^*}{\partial y} + \frac{B}{H} V_{2s}^* \right] &= J_{V2} \text{sen} 2\omega t . \end{aligned} \quad (\text{A.61})$$

Luego, las componentes U_0^* , U_{1c}^* , U_{1s}^* , U_{2c}^* y U_{2s}^* se obtienen a partir del sistema (A.60):

$$U_0^* = \frac{H}{B} \left(J_{U0} - g \frac{\partial \eta_0^*}{\partial x} \right) , \quad (\text{A.62})$$

$$U_{1c}^* = \frac{\begin{vmatrix} \left(-g \frac{\partial \eta_{1c}^*}{\partial x} + fV_c\right) & (\omega) \\ \left(-g \frac{\partial \eta_{1s}^*}{\partial x} + fV_s\right) & \left(\frac{B}{H}\right) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \left(\frac{B}{H}\right) & (\omega) \\ (-\omega) & \left(\frac{B}{H}\right) \end{vmatrix}} \rightarrow U_{1c}^* = \frac{\frac{B}{H} \left(-g \frac{\partial \eta_{1c}^*}{\partial x} + fV_c\right) - \omega \left(-g \frac{\partial \eta_{1s}^*}{\partial x} + fV_s\right)}{\left(\frac{B}{H}\right)^2 + \omega^2}, \quad (A.63)$$

$$U_{1s}^* = \frac{\begin{vmatrix} \left(\frac{B}{H}\right) & \left(-g \frac{\partial \eta_{1c}^*}{\partial x} + fV_c\right) \\ (-\omega) & \left(-g \frac{\partial \eta_{1s}^*}{\partial x} + fV_s\right) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \left(\frac{B}{H}\right) & (\omega) \\ (-\omega) & \left(\frac{B}{H}\right) \end{vmatrix}} \rightarrow U_{1s}^* = \frac{\frac{B}{H} \left(-g \frac{\partial \eta_{1s}^*}{\partial x} + fV_s\right) + \omega \left(-g \frac{\partial \eta_{1c}^*}{\partial x} + fV_c\right)}{\left(\frac{B}{H}\right)^2 + \omega^2}, \quad (A.64)$$

$$U_{2c}^* = \frac{\begin{vmatrix} -g \frac{\partial \eta_{2c}^*}{\partial x} + J_{U1} & (2\omega) \\ -g \frac{\partial \eta_{2s}^*}{\partial x} + J_{U2} & \left(\frac{B}{H}\right) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \left(\frac{B}{H}\right) & (2\omega) \\ (-2\omega) & \left(\frac{B}{H}\right) \end{vmatrix}} \rightarrow U_{2c}^* = \frac{-g \frac{B}{H} \frac{\partial \eta_{2c}^*}{\partial x} + J_{U1} \frac{B}{H} + g(2\omega) \frac{\partial \eta_{2s}^*}{\partial x} - J_{U2}(2\omega)}{\left(\frac{B}{H}\right)^2 + (2\omega)^2}, \quad (A.65)$$

$$U_{2s}^* = \frac{\begin{vmatrix} \left(\frac{B}{H}\right) & -g \frac{\partial \eta_{2c}^*}{\partial x} + J_{U1} \\ (-2\omega) & -g \frac{\partial \eta_{2s}^*}{\partial x} + J_{U2} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \left(\frac{B}{H}\right) & (2\omega) \\ (-2\omega) & \left(\frac{B}{H}\right) \end{vmatrix}} \rightarrow U_{2s}^* = \frac{-g \frac{B}{H} \frac{\partial \eta_{2s}^*}{\partial x} + \frac{B}{H} J_{U2} - g(2\omega) \frac{\partial \eta_{2c}^*}{\partial x} + (2\omega) J_{U1}}{\left(\frac{B}{H}\right)^2 + (2\omega)^2}, \quad (A.66)$$

De igual forma se procede con V_0^* , V_{1c}^* , V_{1s}^* , V_{2c}^* y V_{2s}^* :

$$V_0^* = \frac{H}{B} \left(J_{V0} - g \frac{\partial \eta_0^*}{\partial y} \right), \quad (\text{A.67})$$

$$V_{1c}^* = \frac{\frac{B}{H} \left(-g \frac{\partial \eta_{1c}^*}{\partial y} - fU_c \right) - \omega \left(-g \frac{\partial \eta_{1s}^*}{\partial y} - fU_s \right)}{\left(\frac{B}{H} \right)^2 + \omega^2}, \quad (\text{A.68})$$

$$V_{1s}^* = \frac{\frac{B}{H} \left(-g \frac{\partial \eta_{1s}^*}{\partial y} - fU_s \right) + \omega \left(-g \frac{\partial \eta_{1c}^*}{\partial y} - fU_c \right)}{\left(\frac{B}{H} \right)^2 + \omega^2}, \quad (\text{A.69})$$

$$V_{2c}^* = \frac{-g \frac{B}{H} \frac{\partial \eta_{2c}^*}{\partial y} + J_{V1} \frac{B}{H} + g(2\omega) \frac{\partial \eta_{2s}^*}{\partial y} - J_{V2}(2\omega)}{\left(\frac{B}{H} \right)^2 + (2\omega)^2}, \quad (\text{A.70})$$

$$V_{2s}^* = \frac{-g \frac{B}{H} \frac{\partial \eta_{2s}^*}{\partial y} + J_{V2} \frac{B}{H} - g(2\omega) \frac{\partial \eta_{2c}^*}{\partial y} + J_{V1}(2\omega)}{\left(\frac{B}{H} \right)^2 + (2\omega)^2}. \quad (\text{A.71})$$

Las condiciones de borde del sistema (A.55) se obtienen a partir de (5.17)-(5.18) considerando (3.14)-(3.15):

$$\begin{aligned} -gH \frac{\partial \eta_0^*}{\partial n} \Big|_{BI} &= -(HJ_{U0}n_x + HJ_{V0}n_y), \\ -gH \frac{\partial \eta_{1c}^*}{\partial n} \Big|_{BI} &= fH(U_c - V_c), \quad -gH \frac{\partial \eta_{1s}^*}{\partial n} \Big|_{BI} = fH(U_s - V_s), \\ -gH \frac{\partial \eta_{2c}^*}{\partial n} \Big|_{BI} &= -H(J_{U1} + J_{V1}), \quad -gH \frac{\partial \eta_{2s}^*}{\partial n} \Big|_{BI} = -H(J_{U2} + J_{V2}), \\ \eta_0^* \Big|_{BA} &= 0, \quad \eta_{1c}^* \Big|_{BA} = \bar{\eta}, \quad \eta_{1s}^* \Big|_{BA} = 0, \quad \eta_{2c}^* \Big|_{BA} = 0, \quad \eta_{2s}^* \Big|_{BA} = 0. \end{aligned} \quad (\text{A.72})$$

