

**UTN**  
**UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA NACIONAL**  
**Facultad Regional Delta**

**ANÁLISIS DE SEÑALES DE EMISIÓN ACÚSTICA Y SU  
RELACIÓN CON FUENTES Y SENSORES**

**Dino Filipussi**

**TESIS DOCTORAL**

**Título de Doctor en Ingeniería, Mención Ensayos Estructurales**

**DIRECTOR: Dr. José Ruzzante**  
**CO-DIRECTORA: Dra. Rosa Piotrkowski**

**COMISIÓN NACIONAL DE ENERGÍA ATÓMICA**  
**Centro Atómico Constituyentes**  
**Proyecto ICES – Grupo Ondas Elásticas**

**BUENOS AIRES**  
**ARGENTINA**  
**Noviembre de 2012**

*A la memoria de mi Madre*

*A mi Esposa, a mi Padre*

## AGRADECIMIENTOS

Agradezco principalmente a mis directores de tesis la Dra. Piotrkowski y al Dr. Ruzzante.

Al grupo de trabajo Proyecto ICES/Ondas Elásticas-CNEA, especialmente la ayuda que me brindaron Nicolás Nuñez y Martín Gómez y el servicio del Laboratorio de Ensayos Mecánicos-CNEA con la colaboración del Ing. Gonzalo Porta. Agradezco también al Ing. Luis De Vedia por sus sugerencias en lo referente al diseño experimental de esta tesis.

A la Gerencia de Área Investigación y Aplicaciones de la CNEA.

A la Facultad Regional Delta, Universidad Tecnológica Nacional con el apoyo del Dr. Horacio Lescano.

# ÍNDICE

RESUMEN	6
PUBLICACIONES Y PRESENTACIONES EN CONGRESOS	7
NOMENCLATURA	9
INTRODUCCIÓN	11
CAPÍTULO I ONDAS ELÁSTICAS Y EMISIÓN ACÚSTICA	
1.1 Ondas elásticas	19
1.2 Emisión acústica	21
1.3 Sensores piezoeléctricos	23
1.4 Equipo de emisión acústica	26
1.5 Viscoelasticidad	27
CAPÍTULO II FRACTURA DE MATERIALES	
2.1 Introducción	29
2.2 Fractura frágil y dúctil	30
2.3 Transición dúctil-frágil	33
2.4 Tenacidad a la fractura	34
CAPÍTULO III MODELO DE FUENTE Y DE PROPAGACIÓN DE ONDA	
3.1 Introducción	36
3.2 Fundamentos de la teoría de la elasticidad	37
3.3 Función de Green en la dinámica de la elasticidad	39
3.4 Teorema Reciprocidad en la dinámica de la elasticidad	39
3.5 Teorema de Representación del campo de desplazamiento	41
3.6 Representación para una fuente de fractura	42
3.7 Campo de desplazamiento en un medio lineal homogéneo e isótropo	44
3.8 Modelo de fuente de fractura en la aproximación de campo lejano	45
CAPÍTULO IV DESARROLLO EXPERIMENTAL	
4.1 Introducción	47
4.2 Procedimiento experimental	48

CAPÍTULO V	RESULTADOS Y DISCUSIÓN	
5.1	Resultados Teóricos	50
5.1.1	Forma de onda de la señal a la entrada del detector	50
5.1.2	Ajuste del modelo de sensor a un sensor real	54
5.1.3	Forma de onda de la señal a la salida del detector	54
5.1.4	Análisis de los cambios de forma de onda de la señal	57
5.1.5	Espectro de amplitud del campo de desplazamiento	65
5.2	Resultados Experimentales	67
	CONCLUSIONES	73
	APÉNDICE A	75
	APÉNDICE B	85
	APÉNDICE C	88
	APÉNDICE D	91
	APÉNDICE E	96
	REFERENCIAS	111

## RESUMEN

*La Emisión Acústica (EA) es generada en distintas escalas espaciales y temporales abarcando desde la ruptura de ligaduras atómicas a fallas sísmicas. La información sísmica y la EA son complementarias tanto en sus aplicaciones como en su base teórica. En este trabajo se simula la señal de EA, cuya fuente es una fisura que se propaga en un medio material, a partir de un modelo de fractura cuyos fundamentos provienen de la geofísica. Se tiene en cuenta también el efecto del detector sobre la señal de EA. El objetivo de este trabajo es el análisis de las señales de EA y su relación con la fuente de fractura y el sensor que detecta las señales. Si es conocida la señal detectada queremos saber qué se puede decir de las características de la fuente y del medio donde se propagan las ondas. La duración del evento de EA, el tiempo de subida del mismo y la amplitud relativa son estimados con el modelo y se relacionan con las características de la fuente de fractura. La longitud de la fisura, en orden de magnitud, queda determinada por el análisis del espectro de Fourier de la señal. Se aplicaron los resultados de este modelo a señales de EA generadas durante ensayos de "expansión". Las probetas, placas planas, se diseñaron con un orificio para permitir el avance de una herramienta de forma cónica accionada por una máquina de ensayo industrial de forma tal de aumentar el diámetro del orificio (expansión) hasta la rotura. El material utilizado fue metacrilato de metilo (acrílico), de rotura frágil. Se compararon los resultados experimentales con el modelo desarrollado. El espectro de las señales de EA en la rotura es de la misma forma que el predicho por el modelo como así también lo es el valor de la longitud de la fractura.*

## PUBLICACIONES\*

### **“Characterization of a crack by the acoustic emission signal generated during propagation”**

Dino Filipussi, Rosa Piotrkowski, José Ruzzante, 11th International Congress on Metallurgy & Materials SAM/CONAMET 2011, *Procedia Materials Science*, Volume 1, 2012, Pages 266–272

### **“Acoustic Emission Waveform Obtained With A Far Field Fracture Model”**

D.A. Filipussi, R. Piotrkowski y J.E. Ruzzante

Presentado en la revista *LAAR, Latin American Applied Research*, 2010. En revision.

### **“Acoustic Emission: a process operating at different scales and with many applications”**

M. Armeite, D. Filipussi, M.P. Gómez, , S. Isaacson, M.I. López Pumarega, N. Núñez, R. Piotrkowski, J.E. Ruzzante, D. Torres, *Revista ABENDI*, Asociación Brasileña de Ensayos No Destructivos e Inspección, Año 6, **35**, Fascículo Especial de END Latina, , 2009, 58-59.

## PRESENTACIONES A CONGRESOS\*

### **“Caracterización de una fisura mediante la señal de Emisión Acústica generada al propagarse”**

Presentación oral de D.A. Filipussi, R. Piotrkowski y J.E. Ruzzante

SAM/CONAMET 2011 (11° Congreso Binacional de Metalurgia y Materiales”, Rosario, Argentina. 18-21 de Octubre del 2011.

Instituto de Física Rosario IFIR-CONICET-UNR, Facultad de Cs Exactas, Ingeniería y Agrimensura de Rosario FCEIA-UNR, Universidad Tecnológica Regional San Nicolás FRSN-UTN.

### **“Análisis de Señales de Emisión Acústica en la Rotura de Probetas Planas de Acrílico”**

Presentación oral de D.A. Filipussi, R. Piotrkowski y J.E. Ruzzante, Actas EGLEA 7

EGLEA 7 (7mo. Encuentro del Grupo Latino Americano de Emisión Acústica) Mendoza, Argentina. 25-27 de agosto del 2011.

Universidad Tecnológica Nacional, Facultad de Ingeniería.

### **“Formas De Onda En Señales De Emisión Acústica Con Modelo Sísmico”**

Presentación oral de D.A. Filipussi, R. Piotrkowski y J.E. Ruzzante, Actas E-ICES 6.

VI Encuentro Científico Internacional, E-ICES 6 (ICES: Internacional Center Earth Sciences) Malargüe, Mendoza, Argentina. 4-8 de Octubre del 2010.

Participación en calidad de asistente y miembro del comité organizador.

### **“Evento de Emisión Acústica en un Modelo de Fractura a Campo Lejano”**

D. Filipussi, R. Piotrkowski y J. Ruzzante

XIII Reunión de Trabajo en Procesamiento de la Información y Control, (XIII RPIC) – Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura UNR. 16 al 18 de septiembre 2009.

Rosario, Argentina

### **“Simulación de Eventos de Emisión Acústica Mediante un Modelo de Falla Sísmica”**

Dino Filipussi , Rosa Piotrkowski , José Ruzzante

IV Congreso Internacional de Matemática Aplicada a la Ingeniería y Enseñanza de la Matemática en Ingeniería, 4 al 7 de agosto del 2008, Buenos Aires Argentina.

**“Análisis Espectral de Señales Sísmicas y de Emisión Acústica. Determinación de Parámetros en un Modelo de sus Fuentes”**

Presentación oral de D.A. Filipussi, J.E. Ruzzante, y R. Piotrkowski, Actas E-ICES 4. IV Encuentro Científico Internacional, E-ICES 4 (ICES: Internacional Center Earth Sciences) Malargüe, Mendoza, Argentina. 29 al 31 de Octubre del 2008. Participación en calidad de expositor y miembro del Comité Organizador.

**“Tamaño de fractura en materiales por análisis espectral de la señal de emisión acústica”**

Dino Filipussi, Rosa Piotrkowski, José Ruzzante  
5to. Encuentro del Grupo Latinoamericano de Emisión Acústica, 29 de Agosto al 1 de Septiembre de 2007, Oberá, Argentina.

**“Modelización de la relación Amplitud-Duración en Eventos de Emisión Acústica”**

D. Filipussi, R. Piotrkowski y J. Ruzzante  
XI Reunión de Trabajo en Procesamiento de la Información y Control, 21 al 23 de Septiembre de 2005

**“Modelo de propagación de ondas en un conducto viscoelástico”**

D. Filipussi, J. Ruzzante y R. Piotrkowski, INMAT 2003. II Congreso Internacional de Matemática Aplicada a la Ingeniería y Enseñanza de la Matemática en Ingeniería, 15 al 17 de Diciembre de 2003 en Buenos Aires, Facultad de Ingeniería UBA, ARGENTINA

\*Publicaciones y presentaciones a congresos que se han elaborado para el desarrollo de esta tesis.

## NOMENCLATURA

$A, \Sigma$	Área de fractura
$c$	Velocidad de propagación de onda
$c_{ijpq}$	Constantes elásticas del material
$D$	Ancho de la fractura, Desplazamiento eléctrico, Rozamiento
$\varepsilon_{ij}$	Tensor de deformación del material
$\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$	Fuerza externa por unidad de volumen
$\hat{f}(\omega)$	Transformada de Fourier de una función $f(t)$
$\mathfrak{F}$	Operador de transformada de Fourier
$G(x, t, \xi, \tau)$	Función de Green
$G_{np}$	Tensor de Green
$G_{np,q}$	Derivada del tensor de Green respecto de $q$
$h(t)$	Respuesta al Impulso del sensor
$\hat{h}(\omega)$	Respuesta en Frecuencia del sensor
$H(t)$	Función de Heaviside
$j$	Unidad imaginaria
$L$	Largo de la fractura
$M_{pq}$	Tensor de momento sísmico
$\hat{\mathbf{n}}$	Versor normal a una superficie $S$ , versor normal al plano de fractura
$p_a(t)$	Función pulso unitario de ancho $2a$
$r$	Distancia de la fuente de fractura al detector
$r_0$	Distancia del origen del sistema de referencia al detector
$R_n$	Patrón de radiación de onda
$S$	Superficie
$s(t)$	Señal de salida del detector
$t, \tau$	Variable tiempo
$T$	Tiempo de duración de la propagación de la fractura

$T_i$	Vector fuerza de tracción por unidad de área
$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$	Campo de desplazamiento
$u(t)$	Señal de entrada del detector
$\Delta \mathbf{u}$	Discontinuidad del campo de desplazamiento en el punto de fractura
$V$	Volumen
$v$	Velocidad de propagación de la fractura
$\mathbf{x}$	Vector posición del detector (punto campo)
$\alpha$	Velocidad de propagación de onda longitudinal (onda P)
$\beta$	Velocidad de propagación de onda transversal (onda S)
$\delta(t)$	Función Delta de Dirac
$\delta_{ij}$	Delta de Kronecker
$\phi(t)$	Función temporal de la fuente de fractura
$\hat{\gamma}$	Versor en la dirección del vector $\mathbf{x}$
$\eta$	Coefficiente de ductilidad
$\lambda, \mu$	Constantes elásticas de Lamé
$\theta$	Ángulo de detección ( $\cos \theta = \hat{\xi} \cdot \hat{\gamma}$ )
$\rho$	Densidad del medio material
$\sigma_{ij}$	Tensor de tensiones o de los esfuerzos
$\tau_0$	Parámetro de tiempo de subida
$\hat{v}$	Versor en la dirección de $\Delta \mathbf{u}$
$\omega$	Variable frecuencia circular
$\omega_0$	Frecuencia de resonancia del sensor
$\xi$	Vector posición de la fractura (punto fuente)
$\Omega(\mathbf{x}, t)$	Forma funcional del campo de desplazamiento
*	Operador de convolución
$\phi, \psi, \Phi, \Psi$	Potenciales de Helmholtz

## INTRODUCCIÓN

La Emisión Acústica (EA) es la clase de fenómenos por los cuales se generan ondas elásticas transitorias por la rápida liberación de energía a partir de fuentes localizadas en el material. Los diferentes procesos emiten ondas elásticas que emanan de las fuentes. La mayor parte de los materiales y estructuras emiten energía en la forma de vibraciones mecánicas como resultado de cambios súbitos en su estado de tensiones inducida por una sollicitación del material, (Pollock, 1989; Grosse y Ohtsu, 2008). Esto es usualmente debido a fenómenos relacionados con el movimiento de dislocaciones y de propagación de fisuras que actúan como fuentes de EA. Un sensor de EA, generalmente piezoeléctrico, en contacto con el material que es monitoreado, detecta la onda mecánica impulsiva de muy baja amplitud (0.01 nV) y altas frecuencias (1kHz a 2 MHz) y la convierte en una señal eléctrica que es amplificada y procesada por el instrumento de EA.

La EA es generalmente de naturaleza transitoria, ocurriendo en paquetes o eventos discretos (“bursts”: explosiones), en algunos casos la señal de EA es continua. El equipo de EA procesa estos eventos analizando varios aspectos de la forma de onda asociada con cada evento, principalmente la duración, el tiempo de subida y la amplitud de los mismos.

La señal de EA que es detectada por el sensor contiene información de las fuentes, del medio en que se propaga la onda elástica y del sensor. Es de esperar que la señal pueda ser analizada para determinar componentes de estos tres factores: fuentes, medio y detector que intervienen en la caracterización de un evento de EA. Se investigará entonces como inciden estos factores en la síntesis de los eventos que caracterizan a una señal de EA, como así también la influencia del detector. Por otra parte, para una fuente de EA generada por una fractura, se investigará si es posible determinar a partir de la señal de EA, las dimensiones de una fractura con la metodología empleada en el análisis de señales sísmicas (Savage, 1972; Molnar, Tucker y Brune, 1973).

En el presente trabajo de Tesis se ha desarrollado, a partir de la teoría de señales sísmicas en geofísica (Aki y Richards, 1980) un modelo de fractura en materiales frágiles que permite relacionar la información de la señal de EA con los parámetros que determinan una fuente de fractura y caracterizar al evento de EA en los cambios de forma de onda al variar las características de la fuente y el detector. Además se efectuaron experimentos de fractura en acrílico que permitieron confirmar las predicciones del modelo. El objetivo fue mostrar que el modelo proveniente de la geofísica se podía llevar a señales de EA analíticamente, ampliándose así el rango de aplicación del modelo: a grandes y pequeñas escalas espaciales.

En nuestro trabajo, la importancia de este tema de investigación es que permitirá una interpretación física con acento en lo conceptual, de la señal de EA en relación a los factores que la determinan: fuentes, medio y detector cuyas aplicaciones están en relación directa con la determinación de fallas y caracterización de materiales. Se buscó el modelo más simple que condujera a los resultados esenciales. Es sabido que la aplicación de la EA para el diagnóstico de fallas tiene limitaciones debidas en parte a la dificultad del procesado, clasificación e interpretación de los datos adquiridos.

El tema propuesto de análisis de señales de EA desde el punto de vista de considerar los factores que intervienen en la síntesis de la señal; la aplicación de metodología propia de sismología, (Aki y Richards, 1980) y la realización de experimentos que confirman el modelo para un material frágil (acrílico), constituye la novedad de este trabajo de investigación.

En el análisis de un experimento de EA hay tres factores importantes por considerar: la fuente de emisión acústica, el medio material en el cual se propaga la onda elástica y por último el sensor, que detecta las señales originadas en la fuente. Cada uno de estos factores interviene en la producción de la señal que luego será procesada y analizada. La señal a la salida del sensor es síntesis de estos tres factores mencionados, en consecuencia cada uno de estos factores constituye un sistema que será descrito por su ecuación diferencial correspondiente. La señal que sale de la fuente se convoluciona con un sistema que es el medio donde se propaga y luego se convoluciona con otro sistema que es el detector obteniendo finalmente la señal observada. El modelo que describe el comportamiento de la señal desde la fuente hasta el sensor tiene en cuenta el comportamiento del medio material, que supondremos lineal, homogéneo e isótropo y determina la onda que se propaga en el mismo. Esta es descrita por la ecuación diferencial de deformación de los medios elásticos.

Una forma de tratar esta ecuación diferencial es utilizando la función de Green. La función de Green está asociada a una ecuación diferencial y permite obtener soluciones de la misma en forma integral con el uso del operador convolución. Dado un sistema lineal e invariante en el tiempo descrito por una ecuación diferencial, la señal de salida se determina como la convolución de la señal de entrada con la función de Green. La función de Green corresponde a la respuesta impulsiva de un sistema. Es decir que conocida la solución de una ecuación diferencial para una función impulso se conocen todas las soluciones de la ecuación diferencial. Esto constituye una técnica apropiada para determinar el comportamiento de las soluciones de un sistema modelado por una ecuación diferencial. En geofísica se aplica el formalismo de la función de Green para determinar el comportamiento del espectro de Fourier de las soluciones del campo de desplazamiento de ondas cuya fuente es una falla sísmica (Aki y Richards, 1980). Los trabajos en el tema concluyen que del espectro de una señal de onda sísmica es posible determinar las dimensiones de la falla sísmica. La función de Green servirá también para describir el comportamiento espectral de las señales de emisión acústica que llegan al sensor y se

obtendrán indicadores espectrales que luego se compararán con los resultados experimentales. Uno de los objetivos de este trabajo es estudiar la posible aplicación de esta metodología, usada en el campo de la sismica, en la EA para estudiar el comportamiento espectral de la señal a la salida del sensor ya que se quiere relacionar el tamaño de la falla con indicadores del mismo en el espectro de la señal.

En geofísica (Aki y Richards, 1980) usan la técnica de la función de Green para determinar el tamaño de una falla sísmica a partir de la indicación de la frecuencia esquina (Savage, 1972; Molnar, Tucker y Brune, 1973) en el espectro de la señal recibida por un sismógrafo. El uso de la función de Green para modelar el comportamiento del material durante el viaje de la onda elástica de la fuente hasta el sensor no es la única técnica utilizada. El sensor es modelado por una función transferencia típica de segundo orden que suele bastar para caracterizar al mismo. Conocida la respuesta en frecuencia del sensor utilizado es posible describir la señal obtenida a la salida del sensor conocida la señal a la entrada del mismo. Para la síntesis de la señal se utilizó el programa Mathematica en la resolución del problema de convolución.

En este trabajo, además de la modelización, se compararon los resultados experimentales con los predichos por el modelo, para lo cual se realizaron ensayos de “expansión” monitoreados con EA usando probetas de material frágil como el acrílico (metacrilato de metilo). Las probetas, placas planas, se diseñaron con un orificio para permitir el avance de una herramienta de forma cónica accionada por una máquina de ensayo industrial de forma de aumentar el diámetro del orificio hasta la rotura de la probeta, este procedimiento describe un ensayo de expansión.

Luego se procesaron los datos medidos donde principalmente interesa obtener el comportamiento espectral, para ello se usó la técnica de Fourier implementado con el programa Mathcad. Luego se comparó el modelo con los resultados experimentales con el objetivo de validar un método que prediga las dimensiones de la falla en el material a partir de un análisis de los espectros de las señales de emisión acústica. Para ello se midieron las dimensiones de las fracturas luego de la rotura de las probetas y se compararon con las dimensiones predichas por el modelo propuesto.

Resumiendo, nos interesa fundamentalmente la detección de fallas y la identificación de fuentes en materiales frágiles a partir de la EA originada en una fractura. Para ello se estudió el comportamiento de las soluciones de la ecuación de los medios elásticos con la aplicación del formalismo de la función de Green.

La metodología usada en este trabajo fue el planteo del modelo, diseño de experimentos, realización de las experiencias, análisis de datos y comparación con el modelo, como se detalla a continuación:

- Modelización de los eventos de emisión acústica y de la propagación de ondas en el material por resolución de ecuaciones diferenciales de los medios elásticos con el uso de la función de

Green para predecir el comportamiento espectral de las señales de emisión acústica en función de las dimensiones de la falla.

- Diseño de una serie de arreglos experimentales para medir emisión acústica: ensayos de “expansión”. Se usó un material frágil: acrílico (metacrilato de metilo).
- Análisis de los datos paramétricos obtenidos: duración, rise time y amplitud, etc. de los eventos de emisión acústica utilizando técnicas estadísticas.
- Digitalizando la señal de emisión acústica se realizará los análisis espectrales correspondientes de Fourier.
- Comparación del modelo con los resultados experimentales con el objetivo de validar un método que prediga las dimensiones de la fractura en el material a partir de un análisis de los espectros de las señales de emisión acústica. Para ello se midieron las dimensiones de las fracturas luego de la deformación de las probetas y se comparó con las dimensiones predichas por el modelo propuesto.
- Análisis de datos y comparación con el modelo.
- Obtención de resultados, discusión de los mismos y conclusiones.

Por lo antedicho, nuestro objetivo fundamental fue desarrollar cuidadosamente los modelos más sencillos de fuente, medio y detector, que condujeran a resultados correctos sin que se perdieran de vista los conceptos físicos fundamentales.

En la bibliografía hay desarrollados modelos que intentan modelar la mayor cantidad posible de detalles, lo que conduce a enmascarar los conceptos físicos básicos, aunque los trabajos son muy valiosos. Citamos y describimos a continuación los que por ser considerados relevantes fueron estudiados en esta Tesis.

En el artículo de Pekeris y Lifson (1957), se obtiene una solución exacta para el movimiento de una superficie en un medio elástico homogéneo debido a la aplicación de una fuerza concentrada debajo de una superficie. El tiempo de variación de la fuerza aplicada se supone que está representada por la función de unidad de Heaviside. La solución para las componentes horizontal y vertical de desplazamiento se determina en forma de integrales individuales. La fuente emite ondas S y ondas P más allá de una distancia  $r_1$  del epicentro. En el caso  $\lambda = \mu$ , la onda S original se convierte, al llegar a la superficie, en una onda difractada SP que viaja a lo largo de la superficie. A distancias grandes, la fase de SP es más pronunciada que la fase P. La fase S se caracteriza por un salto finito para  $r < r_1$ , y por una función logarítmica para  $r > r_1$ . El coeficiente del término logarítmico es cero en  $r = r_1$  que tiene un

máximo en  $r = 1.004 r_1$ . No hay onda de Rayleigh para  $r > r_1$ . A distancias grandes ( $r / H \gg 1$ ) la solución se aproxima a la forma de la solución para un pulso en la superficie.

En otro trabajo, en el campo de la geofísica, Savage (1972), estudia el espectro de radiación del desplazamiento a campo lejano a partir de un modelo convencional de falla sísmica calculado por comparación con el espectro del modelo de Brune (1970). Los espectros son similares, pero algunos de los detalles se atribuye a efectos diferentes en los dos modos de ondas S y P. Ambas teorías determinan una proporcionalidad inversa entre las dimensiones de falla y la frecuencia de esquina en el espectro de desplazamiento. Las constantes de proporcionalidad en las dos teorías son similares.

En el artículo de Sinclair (1979), se resuelve en forma integral las expresiones para la ecuación de la elasticodinámica de un medio. Los experimentos de emisión acústica con sensores de banda ancha han proporcionado una motivación para este trabajo. Un formalismo debido a Willis (1973) se utiliza para obtener expresiones analíticas para las derivadas espaciales, a cualquier orden, del campo de desplazamiento en un punto donde se aplica una fuerza impulsiva en la superficie de un medio. Un teorema recíproco determina los desplazamientos superficiales en el epicentro debido a una fuente multipolar.

Ceranoglu y Pao (1981), analizan, en una primera parte teórica, ondas transitorias generadas en una placa elástica por una variedad de fuentes: una fuerza concentrada, una fuerza doble, un par doble sin momento, un centro de rotación y un centro de explosión. Algunas de estas fuentes, o una combinación de ellos, podría ser utilizado para modelar el proceso dinámico de defectos de un material. El análisis se basa en la teoría de los rayos generalizados y en el método de Cagniard (1962) y las soluciones se presentan en términos de la función de Green para una placa. En una segunda parte de este trabajo, se parte del método de Cagniard para obtener la respuesta transitoria a lo largo de los puntos epicentrales de una placa elástica. Los resultados numéricos se muestran para una fuerza concentrada, un par único y una fuerza doble. En una última parte una versión modificada del método de Cagniard se aplica para obtener la respuesta transitoria de la placa en cualquier lugar debido a las fuentes puntuales aplicadas en la superficie interior de la placa. Los resultados numéricos se muestran para una fuerza concentrada, un par único, una fuerza doble, un par doble sin momento y un centro de rotación.

En el artículo de Rouby, Fleischmann y Duvergier (1982), los autores presentan, en una primera parte teórica, un modelo de emisión acústica. La fuente se describe mediante una dislocación que se mueve entre dos posiciones estables mediante el uso de las funciones de Green que expresan el desplazamiento de onda emitida por la creación de un bucle de dislocación pequeño. Se obtiene la onda elástica emitida por una fuente, en dominios de tiempo y frecuencia, teniendo en cuenta el movimiento de dislocaciones. Para frecuencias superiores a 2 MHz, el desplazamiento, que es en forma de pulsos, tiene una estrecha relación con el área de la fuente y la velocidad de desplazamiento.

Se analiza también la señal producida por fuentes muy numerosas y aleatorias que permite la interpretación de la emisión acústica continua. En una segunda parte experimental del trabajo, se utiliza el modelo para interpretar tanto la emisión continua y la emisión discontinua. La emisión acústica se registra mediante el uso de transductores piezoeléctricos de banda ancha. En el caso de emisión continua, ligado a la deformación plástica homogénea, se hace un análisis espectral. Para soluciones sólidas de Al-Mg, se encuentra evidencia para respuesta térmica: el tiempo de emisión disminuye si aumenta la temperatura del ensayo y si disminuye el contenido de Mg. En el caso de emisión tipo burts, se dan ejemplos de señales registradas en pruebas de resistencia a la tracción de la aleación de aluminio 2024 T351. La señal contiene numerosos ecos que se analizan: hay resultados de las reflexiones y las conversiones en modo dentro de la muestra y la localización de la fuente. Se describe la detección directa de la onda de desplazamiento, predicha por el modelo de fuente, utilizando un transductor piezoeléctrico. La forma del impulso de desplazamiento determina el arribo del evento y el tamaño de la fuente.

Ohtsu y Ono (1986), en su artículo se caracteriza una fuente de emisión acústica con una teoría generalizada. El modelado de una fisura se correlaciona con la representación del tensor de momentos. Los vectores principales del tensor de momentos representan la orientación de las fisuras y los valores principales representan los ejes principales del patrón de radiación que emana de la fisura. La teoría se basa en la discontinuidad de las componentes del desplazamiento, se puede incorporar una distribución de desplazamiento explícita debido a una fisura. Se presentan fórmulas para sintetizar formas de onda de emisión acústica debido a dislocaciones en movimiento. Son calculados los efectos de los ángulos de la orientación de la fisura en las formas de onda y se estudia el problema inverso. Se muestra que la orientación de la fisura tiene efectos considerables sobre los resultados del análisis de deconvolución. Estos resultados confirman la utilidad y aplicabilidad de la teoría generalizada en la aclaración de los mecanismos fundamentales de la emisión acústica.

Ohtsu (1986), en este trabajo se resume los desarrollos de tratamiento teórico sobre la base de una teoría generalizada de la emisión acústica. Se discute su verificación y aplicación a las ondas elásticas de emisión acústica. Los conceptos y las técnicas presentadas son básicamente indispensable para llevar a cabo el análisis cuantitativo de la forma de onda de emisión acústica. Aunque las formas de onda de emisión acústica detectadas también están asociados con propiedades elásticas e inelásticas del medio en el que las ondas se propagan y las respuestas del instrumento, la discusión se limita al caso de un material isotrópico y linealmente elástico para establecer las bases para las teorías matemáticas de emisión acústica.

En Naber y Bahai (2006), las funciones dinámicas de Green son esenciales para el modelado de EA y la propagación de onda para la caracterización cuantitativa de las fuentes de AE. En este trabajo se

presenta un método para evaluar la función de Green de un cuerpo utilizando el método de elementos finitos. La ventaja del método propuesto es que puede ser utilizado para modelar geometrías realistas, propiedades de los materiales y fuentes que no pueden ser tratados analíticamente. Los resultados numéricos presentados en este documento se comparan con las conocidas soluciones analíticas de la función de Green para una placa infinita isotrópica y también con medidas experimentales de las ondas generadas por AE de fuentes artificiales (impacto de una pelota y romper la punta de un lápiz).

La EA es una especialidad inmersa en el campo de las ondas elásticas, tema de estudio que también fue el objetivo de la presente tesis. Una aplicación interesante fue estudiar la propagación de ondas elásticas en tubos viscoelásticos. Se consideró un material viscoelástico en un modelo lineal y se obtuvieron soluciones analíticas exactas. El estudio de la propagación de ondas sobre la pared de un conducto cilíndrico tiene importancia en las aplicaciones relacionadas con el ensayo estructural no destructivo para la verificación de tubos. Nosotros estudiamos la propagación de ondas sobre la pared de un conducto viscoelástico resolviendo el problema dinámico con un modelo 3-D para determinar la deformación del medio y por el método de separación de variables resultan soluciones analíticas exactas. Se discutió la forma funcional de las ondas longitudinales y transversales que se propagan en el medio.

Describimos a continuación la organización de este trabajo de Tesis:

El cuerpo principal de la tesis se presenta, en primer lugar, una Introducción seguido por cinco Capítulos y por último las Conclusiones. En los Capítulos I y II se describen las Ondas Elásticas, la Emisión Acústica y la Fractura de Materiales, como se presenta en la bibliografía (Pollock, 1989; Echevarria, 2003). En el Capítulo III, Modelo de Fuente y de Propagación de Onda, se desarrolla, en detalle, la base teórica del modelo propuesto en esta tesis con referencia a la sismología cuantitativa (Aki, 1980) y se completa su lectura con el Apéndice A, que desarrolla la solución general de la ecuación de onda para un problema con simetría esférica por el formalismo de la función de Green. En el Capítulo IV se presenta el Desarrollo Experimental y en el Capítulo V se muestran los Resultados teóricos y experimentales de la tesis que se complementan con los Apéndices B y C que muestran en detalle el cálculo de la transformada del campo de desplazamiento para el modelo propuesto de fractura rectangular y crecimiento exponencial de la discontinuidad en la fractura y la obtención del patrón de radiación de las ondas S y P generadas en la fractura del material. El Apéndice D muestra la solución analítica de la propagación de ondas elásticas en tubos viscoelásticos, un trabajo preliminar

de esta Tesis, previo al modelo principal propuesto y finalmente el Apéndice E muestra, como ejemplo, las señales registradas durante los experimentos realizados para algunas probetas.

# CAPÍTULO I

## ONDAS ELÁSTICAS Y EMISIÓN ACÚSTICA

### 1.1 Ondas elásticas

El efecto de aplicar un golpe fuerte sobre la superficie de un cuerpo elástico produce una deformación instantánea en la región del impacto y se comprueba que la deformación no permanece localizada alrededor del impacto sino que se propaga por todo el cuerpo. Este fenómeno representa la propagación de una onda elástica. La explicación física de la propagación de estas perturbaciones está relacionada con la interacción de los átomos que constituyen el medio. Considerando dos puntos próximos del medio material en la dirección de propagación de onda, cuando el punto más cercano al impacto puede haber vuelto a su posición original el punto más alejado puede estar desplazado respecto de su posición inicial. La propagación de onda elástica no involucra de esta manera transporte de materia sino transporte de energía. El medio transmite la energía por el cambio de tensión y deformación del mismo. La onda elástica estará entonces descrita por el estado de deformaciones de cada punto material del cuerpo en función de la posición y el tiempo. Este fenómeno se presenta en muchos ejemplos familiares como la transmisión de sonido en el aire, las ondas producidas por una piedra que cae en el agua o la transmisión de ondas sísmicas en la tierra.

Un modelo mecánico que describe el fenómeno de propagación de onda en un cuerpo sólido resulta de suponer que el medio material está constituido por elementos discretos como una serie de masas y resortes interconectados. Una perturbación sobre una masa es transmitida al resto de las masas a través del vínculo dado por los resortes. Así la perturbación alcanza puntos remotos del medio y sin embargo las masas oscilan alrededor de sus puntos de equilibrio. Este modelo físico explica que la velocidad de propagación de onda está determinada por la densidad y las constantes elásticas del medio así como en un sistema masa-resorte la velocidad de oscilación depende de la masa y la constante elástica del resorte (Graff, 1975).

En la propagación de una onda elástica en un sólido dos tipos de acción son posibles, en un caso el sólido transmite esfuerzos por tracción y compresión y el movimiento de las partículas es en la dirección de propagación de onda. Este comportamiento es análogo en un fluido sin embargo en un sólido hay también transmisión de esfuerzos de corte y el movimiento de las partículas es transversal a la dirección de propagación de onda. Así este fenómeno está caracterizado por dos velocidades de propagación de onda, una velocidad longitudinal y otra transversal.

Se describe ahora el formalismo matemático para estudiar el fenómeno de propagación de ondas elásticas en sólidos (Graff, 1975). Determinamos primero la ecuación dinámica de los medios elásticos homogéneos e isótropos en un medio infinito. Un medio material no rígido experimenta deformaciones cuando es sometido a esfuerzos, cada punto  $\mathbf{x}$  del medio, inicialmente no deformado, tiene asociado el campo de desplazamiento  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$  del punto material (dimensiones de longitud). Este da cuenta de la deformación del punto material  $\mathbf{x}$  para cada instante de tiempo  $t$ . La ecuación dinámica para el desplazamiento es

$$\rho \ddot{\mathbf{u}} = \mathbf{f} + \vec{\nabla} \cdot \boldsymbol{\sigma} \quad (1.1)$$

donde  $\mathbf{u}$  es el campo de desplazamiento,  $\rho$  la densidad,  $\mathbf{f}$  las fuerzas en volumen y  $\boldsymbol{\sigma}$  el tensor de tensiones.

Definiendo una deformación relativa como el tensor de deformación  $\boldsymbol{\varepsilon}$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2}(\vec{\nabla} \mathbf{u} + (\vec{\nabla} \mathbf{u})^T) \quad (1.2)$$

Entonces para un medio lineal vale la ley de Hooke: que la tensión es proporcional a la deformación

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \quad (1.3)$$

donde  $\mathbf{C}$  es el tensor que define las constantes elásticas del material.

Además si el medio es isótropo vale

$$\mathbf{C} = c_{ijpq} \hat{e}_{ijpq} \rightarrow c_{ijpq} = \lambda \delta_{ij} \delta_{pq} + \mu (\delta_{ip} \delta_{jq} + \delta_{iq} \delta_{jp}) \quad (1.4)$$

donde  $\lambda$  y  $\mu$  son las constantes de Lamé y  $\delta_{ij}$  es la función delta de Kronecker ( $\delta_{ij} = 0$  si  $i \neq j$  y  $\delta_{ij} = 1$  si  $i = j$ )

Para determinar la ecuación dinámica de los medios elásticos se reemplaza la Ec.(1.2) y la Ec.(1.4) en la Ec.(1.3) y se calcula el tensor de tensiones obteniendo

$$\boldsymbol{\sigma} = \lambda \mathbf{I} \vec{\nabla} \cdot \mathbf{u} + 2\mu \boldsymbol{\varepsilon} \quad (1.5)$$

donde  $\mathbf{I}$  es el tensor identidad. Reemplazando la Ec.(1.5) en la Ec.(1.1) resulta

$$\rho \ddot{\mathbf{u}} = \mathbf{f} + (\lambda + 2\mu) \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \mathbf{u}) - \mu \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \mathbf{u}) \quad (1.6)$$

Esta ecuación rige la dinámica de los medios elásticos homogéneos e isótropos (ver desarrollo en el Apéndice A).

El teorema de Lamé determina las ecuaciones de onda que resuelve la Ec.(1.6) proponiendo una solución  $\mathbf{u}$  escrita en términos de un campo escalar  $\phi$  y un campo vectorial  $\boldsymbol{\psi}$  conocidos como potenciales de Helmholtz del campo  $\mathbf{u}$ . La solución escrita de esta forma da un sentido físico al problema ya que descompone al campo de desplazamiento en dos componentes que se corresponden con una onda P (longitudinal) y una onda S (transversal).

Se propone descomponer al campo  $\mathbf{u}$  como sigue

$$\mathbf{u} = \vec{\nabla}\phi + \vec{\nabla} \times \boldsymbol{\Psi} \quad \text{Imponiendo} \quad \vec{\nabla} \cdot \boldsymbol{\Psi} = 0 \quad (1.7)$$

luego la Ec.(1.6) es separable en otras dos ecuaciones siempre y cuando se proponga la misma descomposición de  $\mathbf{u}$  para  $\mathbf{f}$  las fuerzas en volumen, es decir que existan dos campos  $\Phi$  y  $\boldsymbol{\Psi}$  que verifiquen

$$\mathbf{f} = \vec{\nabla}\Phi + \vec{\nabla} \times \boldsymbol{\Psi} \quad \text{Imponiendo} \quad \vec{\nabla} \cdot \boldsymbol{\Psi} = 0 \quad (1.8)$$

luego reemplazando la Ec.(1.7) y la Ec.(1.8) en la Ec.(1.6) resultan las ecuaciones (ver desarrollo en el Apéndice A)

$$\begin{cases} \ddot{\phi} - \alpha^2 \nabla^2 \phi = \frac{\Phi}{\rho} \\ \ddot{\boldsymbol{\Psi}} - \beta^2 \nabla^2 \boldsymbol{\Psi} = \frac{\boldsymbol{\Psi}}{\rho} \end{cases} \quad (1.9)$$

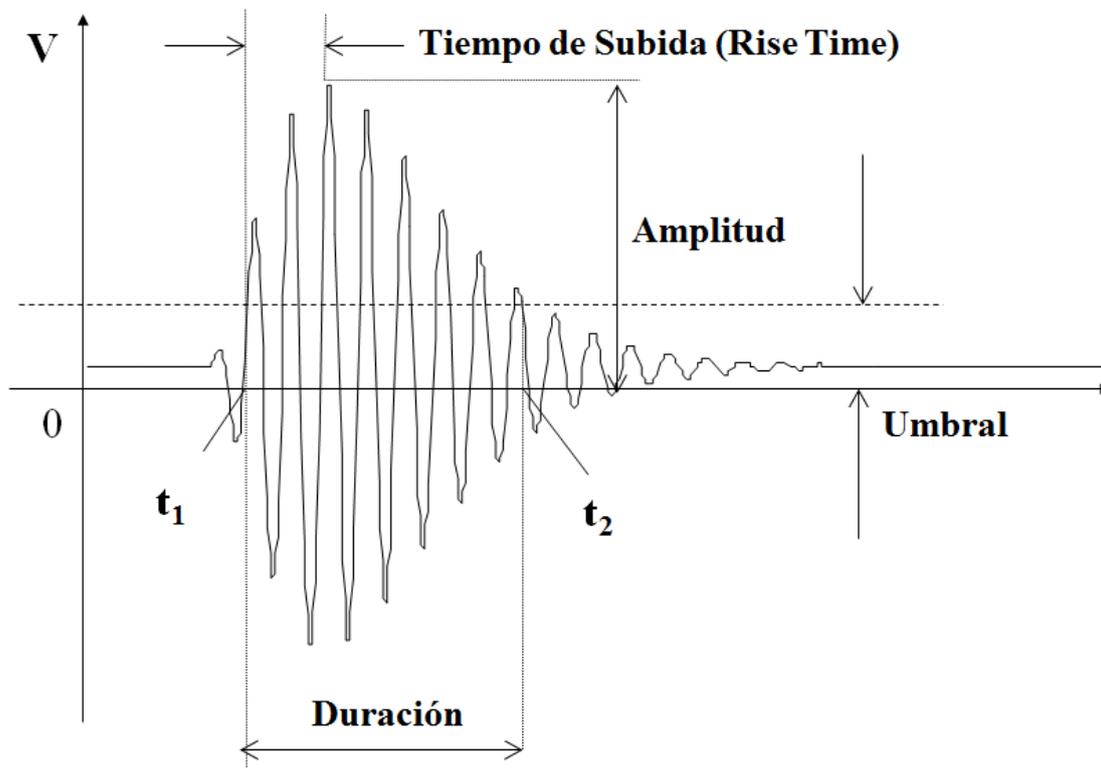
Estas ecuaciones son ecuaciones de onda donde  $\alpha = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho}$  y  $\beta = \sqrt{\mu/\rho}$  son las velocidades de propagación de onda longitudinal (ondas P) y transversal (ondas S) respectivamente.

## 1.2 Emisión acústica

La Emisión Acústica (EA) es el fenómeno por el cual se libera energía rápidamente en forma de ondas transitorias elásticas en el interior de un material sometido a algún tipo de sollicitación externa. Las fuentes de EA tienen su origen en el cambio rápido del campo de tensiones dentro del material y están relacionadas con procesos de deformación, crecimiento de fisuras, movimiento de dislocaciones, rotura de inclusiones, etc. Las ondas elásticas de EA que se propagan dentro del material llegan a su superficie y son detectadas por sensores generalmente de cristal piezoeléctrico que convierten la vibración mecánica en señal eléctrica para su posterior procesamiento y análisis, (Pollock, 1989; Grosse y Ohtsu, 2008).

Las pruebas de EA son un poderoso método para examinar el comportamiento de los materiales bajo tensión, con el equipo de EA se puede “escuchar” los sonidos del crecimiento de grietas, de rotura y muchos otros modos de daños activos en una estructura.

La EA se puede utilizar como una técnica no destructiva para encontrar defectos durante una prueba de ensayo estructural y funcionamiento de planta ya que daños a pequeña escala son detectables mucho antes del fallo de la estructura. La EA también ofrece capacidades únicas para la investigación y el desarrollo de materiales en el laboratorio. Finalmente, el equipo de EA es adaptable a muchas formas de ensayos para: producción, control de calidad, incluido el control de la soldadura, la detección de fugas y desgaste de herramientas.



**Figura 1.1** Esquema de evento de EA y sus parámetros.

La señal de EA es descrita en forma elemental por eventos o *bursts* y pueden ser estudiados por medio de sus parámetros: Amplitud, Duración y Tiempo de subida (*risetime*), ver Fig. 1.1. Para definir la duración y el tiempo de subida se debe fijar previamente un umbral de tensión, siendo la duración el tiempo que transcurre entre la primera y la última vez que la señal sobrepasa el umbral.

Algunas aplicaciones típicas de la EA en ensayos de materiales son las siguientes:

Comportamiento de materiales, metales, cerámicos, compuestos, rocas, concreto: propagación de grietas; fatiga; corrosión; creep y fractura.

Ensayos no destructivos en procesos de manufacturación: procesamiento del material; transformación de fase en metales y aleaciones (transformación martensítica); detección, bajo sollicitación del material, de defectos tales como poros, grietas por enfriamiento, inclusiones, etc.; fabricación; procesos de deformación - laminación, forjado, extrudado; soldadura - detección de inclusiones; fracturas; TIG, MIG, haz de electrones, etc.

Monitoreo de estructuras: Monitoreo continuo (estructuras metálicas, minas, etc.); ensayo periódico (presión en tuberías, puente, cables); detección de piezas sueltas; detección de fugas.

Aplicaciones especiales: Petroquímica y química: tanques de almacenamiento, recipientes de presión, plataformas en alta mar, tubos de perforación, tuberías, válvulas; geofísica: estudio de sismos y volcanes, (PCI-2-Manual de usuario, 2007)

### 1.3 Sensores piezoeléctricos

Un transductor piezoeléctrico consiste en una capa de material piezoeléctrico con electrodos de metal fino en ambos lados. (Kuttruff H, 1991). Si una tensión eléctrica alterna se aplica a los electrodos, el grosor de la capa varía de acuerdo a la variación del campo eléctrico. El efecto piezoeléctrico es reversible y por lo tanto puede ser empleado también para la detección de desplazamientos mecánicos traducidos a señales eléctricas correspondientes, por ejemplo para sensar ultrasonidos. La piezoelectricidad es causada por un mecanismo particular en la asimetría de la estructura de un cristal ("piezo": presión de los medios). Debido a esta asimetría elástica ciertas deformaciones del cristal causa un desplazamiento de los iones de carga positiva con respecto a los negativos de tal manera que cada una de sus células elementales adquiere un momento dipolar eléctrico que es proporcional a la tensión (ver Fig, 1.2). El mejor material piezoeléctrico más conocido es el cuarzo (dióxido de silicio, SiO<sub>2</sub>) que en la naturaleza se encuentra por ejemplo en cristales de roca y arena normal. Es el material en el que el efecto piezoeléctrico fue descubierto por J. y P. Curie en 1880. El cuarzo es fácil de cortar, es muy resistente a agentes químicos y pueden ser utilizados a altas temperaturas. Varios materiales piezoeléctricos importantes son básicamente ferroeléctricos. Estos materiales presentan un momento dieléctrico interno, incluso sin un campo eléctrico aplicado. Este momento se genera por la orientación uniforme dentro de ciertas regiones locales llamados dominios. Por encima de una determinada temperatura, la temperatura de Curie, el material pierde su ferroelectricidad. A partir de un punto de vista fenomenológico, piezoelectricidad es muy similar al ferromagnetismo.

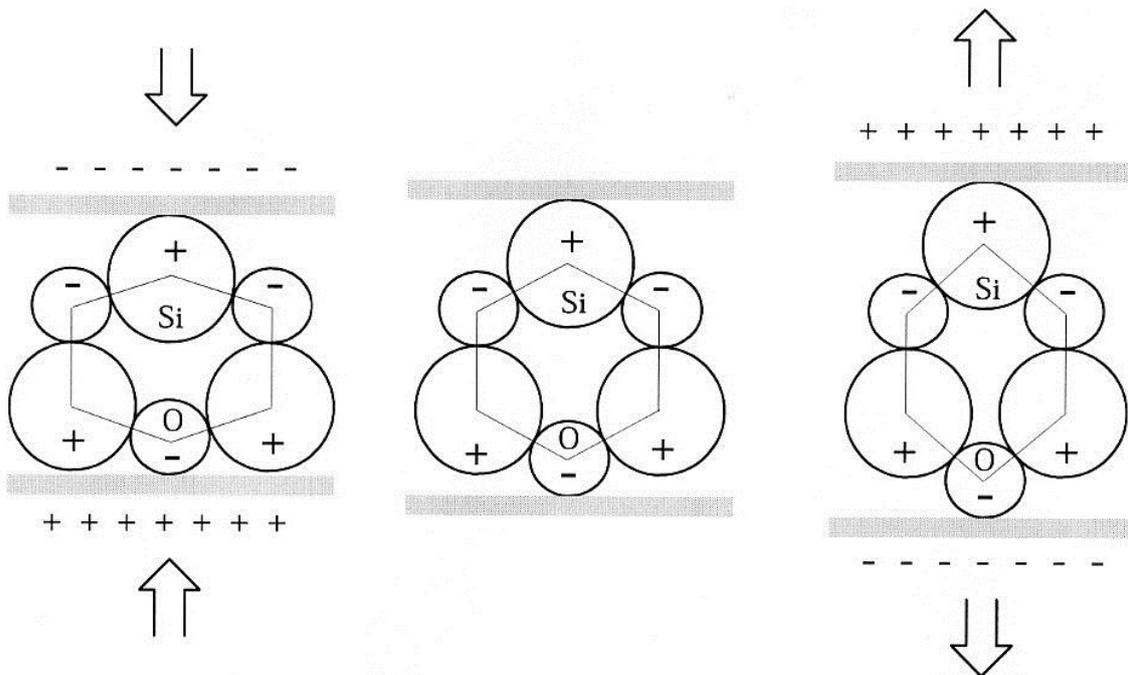
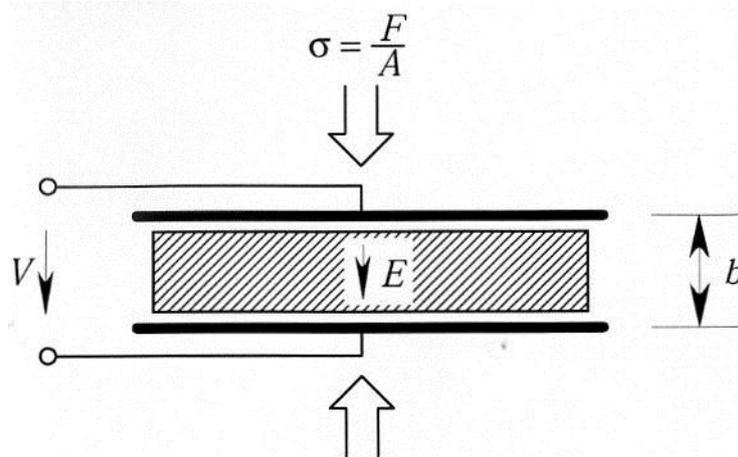


Figura 1.2 Efecto piezoeléctrico en Cuarzo.

Los materiales ferroeléctricos tienen constantes dieléctricas muy altas (permitividad eléctrica). Cuando están polarizados, los materiales ferroeléctricos son fuertemente piezoeléctricos. Los materiales ferroeléctricos más importantes son de bariotitanato ( $\text{BaTiO}_2$ ) y zirconato titanato de plomo ( $\text{Pb}(\text{Zr}, \text{Ti})\text{O}_3$ ) llamado PZT. Estos son fabricados con materiales de base cerámicos en polvo en forma arbitraria. En general, el sinterizado del material tiene polaridad al aplicar un campo eléctrico de CC de 20 kV/cm a temperatura elevada. Durante este proceso, la polarización de los dominios en la dirección del campo, crecen a expensas de los demás. Por el enfriamiento del material en presencia de la fuerte polarización de campo eléctrico, el momento dieléctrico se congela en la cerámica. La polaridad en algunos materiales ferroeléctricos están sujetos al envejecimiento, por ejemplo la polarización se reduce en función de los esfuerzos mecánicos y los campos eléctricos, y las temperaturas a que están expuestos. Nuevos materiales y prometedores para transductores de ultrasonido piezoeléctricos son polímeros, tales como fluoruro de polivinilideno (PVDF), que son disponibles en forma de láminas delgadas.

A continuación se explicará el efecto piezoeléctrico empleado en la mayoría de los transductores ultrasónicos, (Kuttruff H, 1991). Una placa vibra en su grosor de modo que sufre tracción y compresión. Se considera un disco de espesor  $b$  (ver Fig. 1.3) que se corta de una manera adecuada de un piezocristal. Sus dimensiones transversales se suponen que son muy grandes en comparación con su espesor.



**Figura 1.3** Sensor piezoeléctrico y parámetros de interés.

El efecto piezoeléctrico directo se observa cuando un objeto piezoeléctrico de cuarzo se deforma por las fuerzas externas. Debido a su naturaleza, esta deformación produce una polarización dieléctrica en el material. Cuando la placa es un corto circuito eléctrico, la polarización induce una carga eléctrica en

los electrodos. La densidad de carga o desplazamiento dieléctrico  $D$  es proporcional a la deformación  $S$  del material

$$D = eS \quad (1.10)$$

donde  $e$  es la llamada constante piezoeléctrica.

El efecto piezoeléctrico inverso se produce en la placa cuando un voltaje eléctrico se aplica a los electrodos y producen un campo eléctrico  $E$ . Cuando la placa se fija, el campo eléctrico produce una determinada tensión elástica normal en la placa

$$\sigma = -eE \quad (1.11)$$

Si la placa no está completamente fijada, el estrés elástico produce una variación del espesor en función de la tensión inducida y la carga mecánica. Es una característica de los efectos piezoeléctricos reversibles que la misma constante  $e$  se introduce en ambas ecuaciones. Por ejemplo, en el corte del cuarzo  $e = 0.159 \text{ N/Vm}$ . Debido al efecto piezoeléctrico, que forma parte del desplazamiento dieléctrico en un material piezoeléctrico, se produce la deformación mecánica. La Ec.(1.10) representa sólo esta parte del desplazamiento dieléctrico que es proporcional a la deformación elástica del material. Naturalmente, un material piezoeléctrico es también un sólido elástico por lo tanto, habrá un desplazamiento dieléctrico adicional debido al campo eléctrico aplicado. Así, las ecuaciones constitutivas para un material piezoeléctrico pueden escribirse de la siguiente forma

$$\begin{aligned} D &= \varepsilon_S E + eS \\ \sigma &= -eE + K_E S \end{aligned} \quad (1.12)$$

En este caso, la constante dieléctrica del material está bajo tensión constante (por ejemplo, la placa es fijada de tal manera que su grosor se ve obligado a permanecer constante). Del mismo modo  $\varepsilon_S, K_E$  son las constantes elásticas del material en el caso de un campo eléctrico constante (por ejemplo, los electrodos en cortocircuito o conectado a una fuente de tensión constante). Con el fin de comprender el funcionamiento de un transductor piezoeléctrico, es necesario considerar las relaciones anteriores al mismo tiempo. En primer lugar, vamos a suponer que el disco está completamente libre de fuerzas, esto es  $S = 0$ . Se deduce de la Ec.(1.12) que

$$S = \frac{e}{K_E} \sigma \quad (1.13)$$

$$D = \left( \varepsilon_S + \frac{e^2}{K_E} \right) E \quad (1.14)$$

La constante dieléctrica en ausencia de una fuerza externa es mayor que el de la placa fijada

$$\varepsilon_{\sigma} = \varepsilon_s + \frac{e^2}{K_E} \quad (1.15)$$

La energía eléctrica almacenada en el material piezoeléctrico por unidad de volumen es

$$\frac{1}{2}DE = \frac{1}{2}\varepsilon_s E^2 + \frac{e^2}{K_E} E^2 \quad (1.15)$$

El segundo término en el lado derecho de la Ec.(1.14) representa la energía de interacción, debido al efecto piezoeléctrico. Si dividimos la energía total almacenada, se obtiene la unión llamada factor de acoplamiento

$$k^2 = \frac{e^2 E}{K_E D} = \frac{e^2}{K_E \varepsilon_{\sigma}} \quad (1.16)$$

El factor de acoplamiento es una combinación adimensional del dieléctrico piezoeléctrico y las propiedades elásticas. Se puede utilizar para volver a escribir la Ec.(1.15) en la siguiente forma

$$\varepsilon_s = \varepsilon_{\sigma}(1 - k^2) \quad (1.17)$$

Por un razonamiento similar, se encuentra para una placa de piezoeléctrico en circuito abierto ( $D = 0$ ) que

$$\sigma = \left(K_E + \frac{e^2}{\varepsilon_s}\right)S = K_D S \quad (1.18)$$

$$k^2 = \frac{e^2}{K_D \varepsilon_s} \quad (1.19)$$

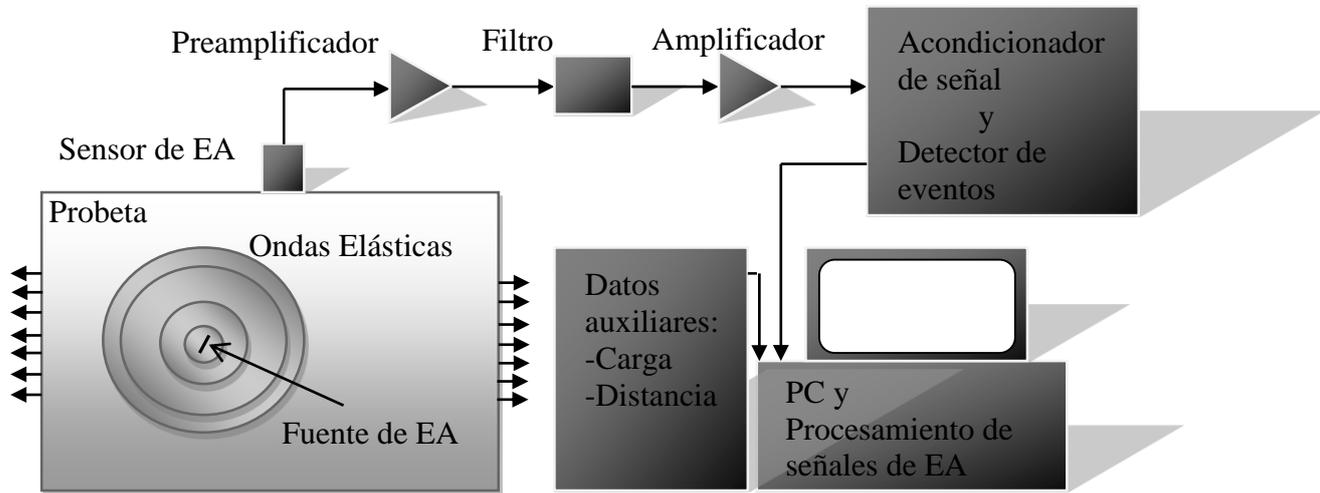
$$K_E = K_D(1 - k^2) \quad (1.20)$$

Esto significa que la rigidez mecánica de una placa piezoeléctrica disminuye cuando los electrodos se ponen en cortocircuito o se mantienen a un voltaje constante. La dependencia mutua de las propiedades eléctricas y las propiedades mecánicas de un material piezoeléctrico (Ec. 1.17 y 1.20) pueden ser muy fuertes ya que el factor de acoplamiento de algunos materiales es tan alto como 0.5 o incluso más (para el cuarzo, el factor de acoplamiento es de aproximadamente 0.1).

#### 1.4 Equipo de emisión acústica

Un sistema de Emisión Acústica (EA) se muestra en la Fig. 1.4. Se dispone de un canal de EA formado por un sensor, el preamplificador y el equipo de EA que mide las características de la señal y además permite la medición de parámetros externos, como por ejemplo: carga, desplazamiento o temperatura. La señal de EA es detectada y convertida en señal eléctrica por el sensor piezoeléctrico, amplificada por un preamplificador y llega a un equipo que registra y procesa la señal. Los datos que el equipo registra son el valor RMS, la cantidad de cruces por cero o por el umbral de la señal, la

amplitud máxima o registra secuencias de la forma de onda de la señal. Actualmente los equipos comerciales consisten en placas electrónicas que se añaden al computador personal y permiten adquisición de parámetros característicos de EA, formas de onda y señal de EA de modo completo (streaming).



**Figura 1.4** Equipo de Emisión Acústica

## 1.5 Viscoelasticidad

La viscoelasticidad es un tipo de comportamiento reológico anelástico que presentan ciertos materiales que exhiben tanto propiedades viscosas como propiedades elásticas cuando se deforman.

En un sólido viscoelástico: la deformación generalmente depende del tiempo; aún en ausencia de fuerzas, la velocidad de deformación puede ser diferente de cero; las tensiones y esfuerzos resistidos dependen tanto de la deformación como de la velocidad de deformación, por tanto la ecuación constitutiva que relaciona tensiones y deformaciones dependen tanto de los tensores de tensión y deformación como así también de sus derivadas temporales. Físicamente las propiedades elásticas son el resultado de desplazar ligeramente los átomos de su posición de equilibrio a lo largo de planos cristalográficos, mientras las propiedades viscosas proceden de la difusión de átomos o moléculas en el interior del material (Meyers y Chawla, 1999).

Existen diversos modelos constitutivos para materiales viscoelásticos lineales. Esos modelos incluyen el modelo de Maxwell, el modelo de Kelvin-Voigt y el modelo de sólido viscoelástico lineal estándar que combina los dos modelos anteriores. Todos estos modelos descomponen la tensión y deformación en dos sumandos, uno que representa los efectos elásticos y otro que representa los efectos viscosos,

siendo estos modelos, interpretables en términos de muelles y amortiguadores. Cada uno de estos modelos difiere en la disposición de los muelles y amortiguadores.

Otra propiedad interesante es que las ecuaciones constitutivas también pueden ser interpretadas en términos de circuitos eléctricos, en los que la tensión mecánica sería el equivalente del voltaje y la velocidad de deformación sería equivalente a la intensidad de corriente. El módulo elástico sería equivalente a la capacitancia del circuito (que mide la capacidad de almacenaje de energía) y la viscosidad a la resistencia del circuito (que mide la capacidad de disipar energía), (Roylance, 2001).

## CAPÍTULO II

### FRACTURA DE MATERIALES

#### 2.1 Introducción

La fractura de materiales de ingeniería es casi siempre un hecho indeseable por varias razones las que incluyen, la seguridad de vidas humanas, pérdidas económicas, y la interferencia con la disponibilidad de productos y servicios. Aun cuando las causas de la fractura y el comportamiento de materiales pueden ser conocidos, la prevención de fracturas puede ser difícil de garantizar. Las causas usuales de ello son la selección de materiales, procesado y diseños inadecuados de los componentes o su mal manejo. Es responsabilidad del ingeniero anticipar y planificar las posibles fracturas y, en el caso de que ocurran, determinar sus causas y tomar medidas preventivas apropiadas para futuros incidentes.

Las típicas clases de fracturas son fractura dúctil, fractura frágil, fractura por fatiga, fractura por Creep y fractura debida al medio ambiente, (Echevarria, 2003).

La fractura simple es la separación de un cuerpo en dos o más trozos como respuesta a una tensión que puede ser estática (constante o variando lentamente con el tiempo) y a temperaturas que son bajas en relación a la temperatura de fusión del material. Las tensiones aplicadas pueden ser de tracción, compresión, de corte o torsionales. Los tipos comunes de fractura son dúctiles y frágiles. Esta clasificación está basada en la capacidad del material a experimentar deformación plástica. Los materiales dúctiles típicamente exhiben una sustancial deformación plástica, con alta absorción de energía antes de la fractura. Por otro lado, hay una pequeña deformación plástica y una baja absorción de energía en la fractura frágil.

La ductilidad puede ser cuantificada en términos de elongación porcentual y reducción de área porcentual, y es función de la temperatura del material, la velocidad de carga y estado de tensiones.

Cualquier proceso de fractura involucra dos etapas, iniciación de la fisura y su propagación como respuesta a las tensiones impuestas. El tipo de fractura es altamente dependiente de los mecanismos de propagación de la fisura.

## 2.2 Fractura frágil y dúctil

En general, la fractura metálica puede clasificarse en dúctil y frágil. La fractura dúctil ocurre después de una intensa deformación plástica y se caracteriza por una lenta propagación de la grieta. Esta fractura ocurre bajo una intensa deformación plástica. La fractura dúctil de una probeta cilíndrica comienza con la formación de un cuello y la formación de cavidades dentro de la zona de estrangulamiento. Luego las cavidades se fusionan en una grieta en el centro de la muestra y se propaga hacia la superficie en dirección perpendicular a la tensión aplicada. Cuando se acerca a la superficie, la grieta cambia su dirección a  $45^\circ$  con respecto al eje de tensión y resulta una fractura de cono y embudo. Además, el proceso es relativamente lento a medida que la fisura se extiende. Así se dice que la fisura es estable. Esto significa que se resiste a cualquier propagación a menos que haya un incremento en las tensiones aplicadas. Además generalmente se apreciara un incremento grosero en la deformación en sus superficies de fractura, (Echevarria, 2003).

La fractura frágil se produce a lo largo de planos cristalográficos llamados planos de fractura y tiene una rápida propagación de la grieta. La fractura frágil es una particularidad de los materiales que tienen estructura cristalina cúbica de cuerpo centrado (BCC) y hexagonal. En la fractura frágil, la fisura se puede propagar extremadamente rápido (300 a 2000 m/s) con muy poca deformación plástica. Tales fisuras se llaman inestables y su propagación, una vez comenzada, continuará espontáneamente sin un incremento en las tensiones aplicadas. Se aclara que también pueden existir inestabilidades dúctiles. Estos materiales tienen suficiente ductilidad alrededor de la temperatura ambiente, pero se vuelven frágiles como un vidrio o un cerámico a bajas temperaturas. Este fenómeno se llama transición dúctil- frágil.

La fractura dúctil es casi preferible por dos razones. Primero, la fractura frágil ocurre repentina y catastróficamente sin ninguna advertencia, consecuencia de la espontánea y rápida propagación de la fisura. Por otro lado, en la fractura dúctil la presencia de deformación plástica da aviso de que la fractura será inminente, permitiendo que se tomen medidas preventivas. La segunda, es que se requiere mayor energía para inducir la fractura dúctil por lo que los materiales dúctiles son generalmente más tenaces. Bajo la acción de una tensión de tracción, a mayoría de los metales son dúctiles, mientras que los cerámicos son notablemente frágiles.

Muchos ejemplos de este tipo de fracturas se han reportado desde hace mucho tiempo, quizás el más antiguo, es el de una barra de acero Bessemer que se quebró bajo una pequeña carga de impacto en el invierno de 1879. Es famosa la fractura de puentes de estructura soldada en Europa entre 1936 a 1938. Durante la Segunda Guerra mundial, se pudieron observar cerca de mil soldaduras de barcos de transporte, fuera de combate, y diecinueve de ellas repentinamente partiéndolos en mitades. Los cascos fueron contruidos de acero que poseía una adecuada ductilidad en ensayos de tracción a

temperatura ambiente. Las fracturas frágiles se produjeron a temperaturas relativamente bajas con respecto a la temperatura ambiente, a aproximadamente 4°C, en la vecindad de la temperatura de transición del acero. Cada fisura de la fractura se originó en algún punto de concentración de tensiones, probablemente en alguna forma angular o de esquina o en algún defecto de fabricación, propagándose luego alrededor de todo el casco del barco.

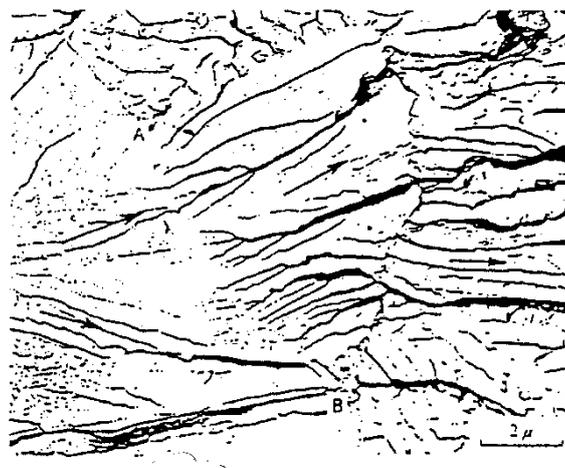
La superficie de fractura frágil está caracterizada por dos tipos de marcas llamadas “v-shaped chevron”, Fig. 2.1 y “river patterns”, Fig. 2.2.

La dirección de movimiento de la fisura es aproximadamente perpendicular a la dirección de las tensiones aplicadas y da una superficie de fractura relativamente plana.

Para la mayoría de los materiales cristalinos frágiles, la propagación de la fisura corresponde a sucesivas y repetidas roturas de los enlaces atómicos a lo largo de planos cristalinos específicos. A este proceso se lo conoce con el nombre de clivaje. Este tipo de fractura se dice que es transgranular debido a que las fisuras atraviesan los granos.



**Figura 2.1** Marcas de V chevron características.



**Figura 2.2** Patrones tipo “river patterns” característicos de la fractura frágil.

Macroscópicamente, la superficie de fractura tiene una textura granular o facetada (Fig. 2.3) como el resultado de cambios en la orientación de los planos de clivaje de un grano a otro. Esta característica es más evidente en una micrografía electrónica de barrido, Fig. 2.4.

En algunas aleaciones, la propagación de la fisura se da a lo largo de los bordes de grano, esta fractura se denomina intergranular. La Fig. 2.4 (b) es una micrografía electrónica de barrido que muestra una típica fractura intergranular, en la cual se puede observar la naturaleza tridimensional de los granos. Este tipo de fractura normalmente se produce luego de algún proceso que debilita o fragiliza la región de bordes de grano.

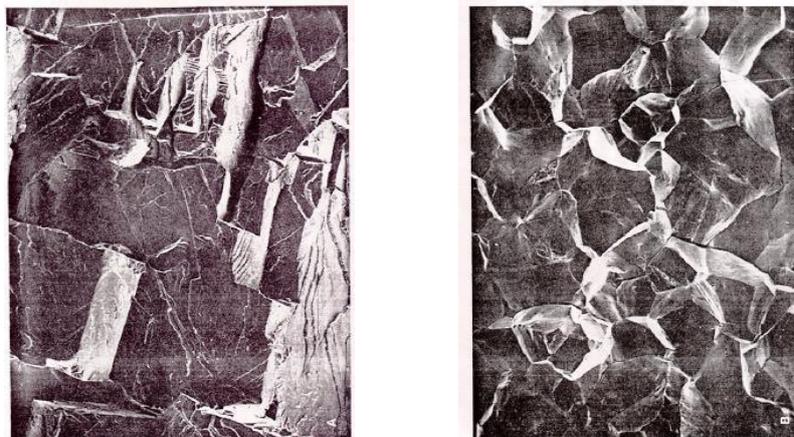
Como resultado de la investigación detallada de la causa y medidas preventivas de la fractura frágil, se encontró que las siguientes tres condiciones deben presentarse simultáneamente:

1. La existencia de un concentrador de tensiones
2. La existencia de tensiones de tracción
3. Falta de tenacidad de la entalla (baja temperatura).

Entallas que originan la fractura frágil pueden ser defectos de soldaduras tales como fisuras, falta de penetración socavados, y solapes, etc.



**Figura 2.3** Fractura frágil característica de un acero de bajo % de carbono.



**Figura 2.4** Fractografías de barrido electrónico mostrando una superficie de fractura a) transgranular, b) intergranular.

### 2.3 Transición dúctil-frágil

Un acero con bajo % de carbono tiene fractura dúctil alrededor de la temperatura ambiente, pero se vuelve frágil a más bajas temperaturas. La energía de impacto, también llamada tenacidad de la entalla, se usa para evaluar cuantitativamente esta transición. Los ensayos de Charpy (el más común) y el de Izod fueron diseñados y son aun utilizados para medir la energía de impacto. Para la técnica de Charpy V la probeta tiene una sección cuadrada, con una entalla maquinada. La carga es aplicada como un impacto de un martillo pendular con una cierta masa cuando se libera, (Echevarria, 2003)

La determinación del factor de intensidad de tensiones en mecánica de Fractura, y el ensayo de impacto determinan las propiedades a la fractura del material. El primero es de naturaleza cuantitativa, dado que se determina una propiedad específica del material (por ejemplo K<sub>ic</sub>).

Los resultados del ensayo de impacto, por otro lado, son cualitativos y no tienen aplicación en propósitos de diseño. Las energías de impacto tienen importancia en un sentido relativo y solamente para realizar comparaciones; los valores absolutos son de poca significación.

Se han realizado intentos para correlacionar tenacidad a la fractura en estado plano de deformaciones con las energías de impacto de Charpy V. El ensayo de tenacidad no es tan simple de ejecutar como el ensayo de impacto, además, el equipamiento y las probetas de ensayo son más caras.

A altas temperaturas la energía de Charpy V es relativamente alta, correlacionándose con el modo de fractura dúctil. Cuando se observa una fractura 100% fibrosa la energía se llama “upper shelf energy”. A medida que la temperatura desciende, la energía absorbida cae relativamente rápido en un rango de temperaturas estrecho. A menores temperaturas la energía absorbida tiene un valor pequeño y aproximadamente constante. Esta zona corresponde a la fractura frágil. Esta curva es llamada curva de transición dúctil- frágil. Alternativamente, la apariencia de la superficie de fractura es indicativa de la naturaleza de la fractura. Para fractura dúctil, esta superficie aparece fibrosa; contrariamente una superficie totalmente frágil tiene una textura granular (o carácter clivaje). Entre la transición dúctil-frágil existen las características de ambos tipos. Frecuentemente el porcentaje de fractura de cizalladura es graficado en función de la temperatura.

Para muchas aleaciones hay un rango de temperaturas donde se produce la transición dúctil- frágil; esto presenta alguna dificultad en especificar una sola temperatura de transición dúctil- frágil. No ha sido explicitado un criterio, y entonces esta temperatura es comúnmente definida como la temperatura a la cual la energía de Charpy V cae a la mitad de la energía superior (llamada temperatura de energía de transición). Otras formas de definirla es cuando la fractura es del 50% dúctil (llamada Temperatura de transición de la superficie de fractura VTS) o cuando la energía es de 20 Joule. Estos criterios para definir la temperatura tienen aproximadamente los mismos valores.

Cuando ejecutamos un ensayo de fractura frágil usando grandes probetas la temperatura de transición es mayor con entallas más marcadas, espesores mayores, la tensión residual es más grande y la velocidad de carga es más alta. Esto significa que la fractura frágil se produce fácilmente.

No todas las aleaciones muestran una transición dúctil- frágil. Aquellos que tiene estructuras cúbicas de caras centradas (FCC) (incluyendo aleaciones de Al y Cu) permanecen dúctiles aún a extremadamente bajas temperaturas.

La mayoría de los cerámicos también experimentan una transición dúctil- frágil aunque la transición ocurre solamente a elevadas temperaturas, comúnmente por encima de los 1000 ° C.

## **2.4 Tenacidad a la fractura**

El término tenacidad a la fractura significa, en un sentido amplio, la resistencia característica a la fractura de una probeta entallada. En un sentido más acotado, sin embargo, esto significa energía absorbida cuando nosotros ejecutamos un ensayo de impacto Charpy V. En algunos casos esto es evaluado por la temperatura de transición. En Charpy V a mayor energía absorbida (a la menor temperatura de transición posible), la tenacidad del material será mayor. El factor que afecta la tenacidad de entalla de un acero de bajo carbono y un acero de baja aleación son composición química, microestructura, tamaño de grano, grado de trabajado en frío y envejecimiento.

La tenacidad de la entalla puede ser incrementada bajando el contenido de carbono e incrementando el contenido de Mn. El contenido de C tiene una decidida influencia en el comportamiento de la energía de Charpy V versus la temperatura de un acero. Los elementos que incrementan la tenacidad de entalla son: Ni, Al y Ti. además, del Mn. Por el contrario, C, P, y S decrecen la tenacidad de entalla. El Si menor que 0,2% es efectivo para la tenacidad de entalla pero este se vuelve peligroso cuando el contenido es mayor del 0,2%. El Cu y el Cr mayores que 0,5%, son perjudiciales. Los elementos tales como: O y N son en general perjudiciales. Nitruros finamente dispersados tales como AlN y TiN también afectan.

La tenacidad de entalla es mayor cuando se normaliza una pieza rolada. El acero templado y revenido tiene una tenacidad de entalla, superior debido a que se desarrolla una martensita revenida de bajo C. En aceros de bajo C menores que 0,18 % de C, la tenacidad de entalla disminuye debido a: la bainita inferior, martensita, ferrita + perlita y bainita superior.

Disminuyendo el tamaño de grano promedio de un acero da una disminución de la temperatura de transición. Para disminuir el tamaño de grano, es necesario una temperatura de rolado más baja y agregar elementos tales como Al y Ti en un acero. En un acero de bajo C, la tenacidad de entalla algunas veces disminuye debido al trabajado en frío y subsecuente envejecimiento. La zona afectada

por el calor (ZAC) de la soldadura tiene características diferentes de tenacidad de entalla que las del metal base, debido a varias clases de microestructuras que se desarrollan en la ZAC.

El área calentada por debajo de la temperatura eutectoide, alrededor de 720°C, se vuelve frágil debido al envejecimiento de templado. Esta fragilidad es más marcada en un acero efervescente en el cual no es suficiente la desoxidación, pero menor en un acero calmado. El área calentada (transformación hierro  $\alpha$ - $\gamma$ ) se vuelve frágil, debido a que la perlita cambia parcialmente a austenita y se desarrolla con alto contenido de C durante el enfriamiento, Zona que es calentada por encima de 1200°C se vuelve frágil debido al crecimiento del tamaño de grano. Esta fragilización se hace más remarcable con el incremento del calor aportado en la soldadura. Este fenómeno es afectado por el crecimiento del tamaño de grano y el desarrollo de bainita superior debido a la disminución de la velocidad de enfriamiento. Las tres condiciones anteriormente mencionadas al final son necesarias simultáneamente para que ocurra la fractura frágil. Por ello, se puede prevenir la fractura frágil eliminando al menos una de esas condiciones. En primer término, es necesario reducir discontinuidades geométricas en la estructura, fisuras y defectos de soldaduras, tales como falta de penetración, socavados y distorsiones angulares poniendo atención al diseño y ejecución de las soldaduras. El próximo paso sería aliviar tensiones como un medio efectivo para la prevención de la fractura frágil dado que las tensiones residuales debido a la soldadura incrementan la temperatura de transición. Además es necesario para su utilización, seleccionar apropiadamente los materiales considerando las tensiones de diseño y temperatura ambiente de trabajo.

Los factores que afectan las fracturas frágiles son: material, espesores, tipo de estructura, condiciones de tensiones, temperatura de trabajo entre otras. Recientemente, la mecánica de fractura ha sido aplicada para prevenir la fractura frágil dando buenos resultados.

## CAPÍTULO III

### MODELO DE FUENTE Y DE PROPAGACIÓN DE ONDA

#### 3.1 Introducción

El estudio del mecanismo de una fuente sísmica comprende diversos temas: la teoría de los modelos cinemáticos; la teoría de la dinámica de la fractura (relaciona los desplazamientos sobre el plano de falla con las condiciones de esfuerzos, la resistencia del material y la propagación de la falla); el problema de la disipación de la energía en la fuente sísmica y su propagación en las ondas sísmicas; los métodos en la determinación del mecanismo focal (inversión del tensor momento sísmico) y los métodos de análisis de formas de onda (Buforn, Udías y Madariaga, 1994).

Los modelos de fractura tienen como fin determinar el campo de desplazamiento producido por una falla sísmica. Se puede determinar la naturaleza de un foco sísmico comparando estos desplazamientos con los observados (Kasahara, 1981). Aki y Richards (1980) consideran el fenómeno de fractura desde dos perspectivas de análisis: cinemático y dinámico. Estos se corresponden con los modelos cinemáticos y dinámicos de fractura. Estos modelos pueden ser sencillos como los de focos puntuales o más complicados como los de focos extensos y permiten determinar el campo de desplazamiento elástico resultante para cada caso. Nuestra atención en este capítulo se centrará en un modelo cinemático que presupone conocida las características de la discontinuidad del desplazamiento en el plano de fractura en un modelo de foco extenso.

La fuente de fractura es modelada por una representación integral del campo de desplazamiento para un medio elástico, homogéneo, isótropo e infinito. El punto de partida de este enfoque es la aplicación los teoremas de reciprocidad y representación del campo de desplazamiento en un medio material. Estas representaciones son soluciones de la ecuación diferencial dinámica de los medios elásticos. La solución es formulada en términos de la función de Green que tiene en cuenta la propagación en el medio material de la onda elástica desde la fuente de onda (punto fuente) al punto de observación (punto campo) donde se calculan los desplazamientos elásticos.

El objetivo de este capítulo es ver como esta teoría es aplicable a la técnica de emisión acústica para determinar formas de onda de la señal detectada en fracturas de materiales. La emisión acústica opera sobre distintas escalas espaciales y temporales abarcando desde la ruptura de ligaduras atómicas a fallas sísmicas. Por ello la información sísmica y la emisión acústica son complementarias tanto en sus

aplicaciones como en su base teórica (Paparo, Gregori, Coppa, De Ritis y Taloni, 2002; Ruzzante, López Pumarega, Gregori, Paparo, Piotrkowski, Poscolieri, Zanini, 2008).

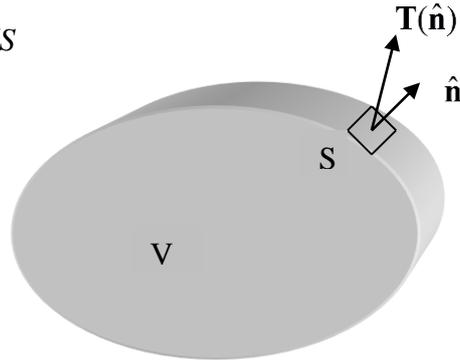
### 3.2 Fundamentos de la teoría de la elasticidad

Un medio material no rígido experimenta deformaciones cuando es sometido a esfuerzos. Cada punto  $\mathbf{x}$  del medio, inicialmente no deformado, tiene asociado un vector  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ : el campo de desplazamiento del punto material (dimensiones de longitud). Este da cuenta de la deformación del punto material  $\mathbf{x}$  para cada instante de tiempo  $t$ . El tensor de deformaciones en la Ec.(3.1) determina el estado local de deformaciones del medio (desplazamiento relativo).

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (3.1)$$

La ecuación integral de Newton para un medio material de volumen  $V$  y superficie de contorno  $S$ , como se muestra en la Fig. 3.1, da cuenta de la fuerza global a que son sometidos los puntos materiales debida a las contribuciones en volumen y superficie, dada por la siguiente ecuación

$$\iiint_V \rho \ddot{\mathbf{u}} dV = \iiint_V \mathbf{f} dV + \iint_S \mathbf{T}(\hat{\mathbf{n}}) dS \quad (3.2)$$



**Figura 3.1** Un material de volumen  $V$  con superficie  $S$ .

donde  $\rho$  es la densidad del medio material,  $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$  es la fuerza externa por unidad de volumen que actúa en el medio y  $\mathbf{T}(\hat{\mathbf{n}})$  la fuerza de tracción por unidad de superficie. Para analizar las fuerzas internas que actúan mutuamente entre los puntos materiales se introduce el tensor de tensiones o de esfuerzos dada por la relación de Cauchy en la Ec.(3.3) combinación lineal de las componentes del versor normal

$$T_i = \sigma_{ij} n_j \quad (3.3)$$

donde  $\hat{\mathbf{n}}$  es el versor normal exterior en cada punto de la superficie  $S$ . Se usó la convención de Einstein: los índices repetidos corresponden a una sumatoria.

Considerando un medio lineal es válida la ley de Hook: las tensiones en el medio material son proporcionales a las deformaciones. En la forma tensorial de la Ec.(3.4) cada componente del tensor de tensiones es una combinación lineal de las componentes del tensor de deformación

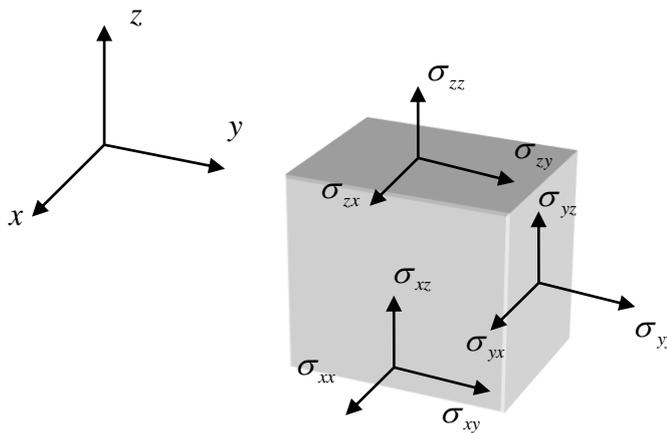
$$\sigma_{ij} = c_{ijpq} \varepsilon_{pq} \quad (3.4)$$

donde  $c_{ijpq}$  son las constantes elásticas del medio material. En la Fig. 3.2 se presenta un esquema de las nueve componentes del tensor de tensiones.

En el caso de que el medio material fuera no homogéneo las constantes elásticas son funciones del punto material  $c_{ijpq}(\mathbf{x})$ . Para un medio material isótropo se prueba que las constantes elásticas dependen sólo de las constantes  $\lambda$  y  $\mu$  de Lamé como sigue

$$c_{ijpq} = \lambda \delta_{ij} \delta_{pq} + \mu (\delta_{ip} \delta_{jq} + \delta_{iq} \delta_{jp}) \quad (3.5)$$

donde  $\delta_{ij}$  es la función delta de Kronecker ( $\delta_{ij} = 0$  si  $i \neq j$  y  $\delta_{ij} = 1$  si  $i = j$ ).



**Figura 3.2** Componentes del tensor de tensiones  $\sigma_{ij}$ .

La ecuación de Newton para cada punto material, es decir localmente, se escribe como sigue:

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + f_i = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \quad (3.6)$$

Esta relación puede obtenerse por sustitución de la Ec.(3.3) en la Ec.(3.2) y aplicar el teorema de la divergencia:

$$\int_S \sigma_{ij} n_j dS = \int_V \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} dV \quad (3.7)$$

De las Ec.(3.1), (3.4) y (3.6) se obtiene la siguiente ecuación dinámica de los medios lineales elásticos que describe el comportamiento de cada punto del material deformado

$$\frac{\partial}{\partial x_j} (c_{ijpq} \frac{\partial u_p}{\partial x_q}) + f_i = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \quad (3.8)$$

### 3.3 Función de Green en la dinámica de la elasticidad

Se introduce la función de Green desde el punto de vista de la teoría de señales y sistemas considerando que la Ec.(3.8) describe a un sistema en el cual la señal de entrada es la fuerza por unidad de volumen y la señal de salida es el campo de desplazamiento. Se considera en la Ec.(3.8) una señal de entrada impulsiva

$$f_i(\mathbf{x}, t) = \delta(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}) \delta(t - \tau) \delta_{in} \quad (3.9)$$

donde  $\delta(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi})$  y  $\delta(t - \tau)$  son las funciones delta de Dirac que especifican la posición espacial y el instante de acción del impulso y  $\delta_{in}$  indica la dirección de aplicación de la fuerza ( $f_i = 0$  para  $i \neq n$ ).

Luego la función tensorial de Green  $G_{in}(\mathbf{x}, t; \boldsymbol{\xi}, \tau)$  es por definición la respuesta impulsiva del campo de desplazamiento del sistema y por tanto verifica la Ec.(3.8) de la forma

$$\frac{\partial}{\partial x_j} (c_{ijpq} \frac{\partial G_{pn}}{\partial x_q}) + \delta(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}) \delta(t - \tau) \delta_{in} = \rho \frac{\partial^2 G_{in}}{\partial t^2} \quad (3.10)$$

en un volumen  $V$  del medio material. Las condiciones iniciales son nulas es decir  $G = 0$  y  $\partial_t G = 0$  para  $t \leq \tau$  y  $\mathbf{x} \neq \boldsymbol{\xi}$ .

Esta ecuación tiene solución única si se especifican además las condiciones de contorno sobre la superficie  $S$  (contorno del volumen  $V$ ), y en ese caso se plantearán una variedad de condiciones de contorno para diferentes aplicaciones.

Si las condiciones de contorno son independientes del tiempo ( $S$  es fijo) la función de Green dependerá de  $t$  y de  $\tau$  solo en la combinación  $t - \tau$  como en la Ec.(3.10).

$$G_{np}(\mathbf{x}, t; \boldsymbol{\xi}, \tau) = G_{np}(\mathbf{x}, t - \tau; \boldsymbol{\xi}, 0) \quad (3.11)$$

### 3.4 Teorema de Reciprocidad en la dinámica de la elasticidad

Se muestra un teorema general entre un par de soluciones del campo de desplazamiento para un medio material elástico de volumen  $V$  y superficie  $S$ .

Se supone que  $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$  es una solución del campo de desplazamiento cuando actúa sobre el medio una fuerza en volumen  $\mathbf{f}$  con condiciones de contorno sobre  $S$  y condiciones iniciales a tiempo  $t = 0$ . Sea  $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$  otra solución del campo de desplazamiento cuando actúa una fuerza en volumen  $\mathbf{g}$  con condiciones iniciales y de contorno en general diferentes que para  $\mathbf{u}$ . Para distinguir la tracción sobre la superficie en los dos casos, de normal  $\hat{\mathbf{n}}$ , se usa la notación  $\mathbf{T}(\mathbf{u}, \hat{\mathbf{n}})$  para la tracción debida al

desplazamiento  $\mathbf{u}$  y, similarmente,  $\mathbf{T}(\mathbf{v}, \hat{\mathbf{n}})$  para la tracción debida a  $\mathbf{v}$ . La relación de reciprocidad entre  $\mathbf{u}$  y  $\mathbf{v}$  es dada por la Ec.(3.12).

$$\iiint_V (\mathbf{f} - \rho \ddot{\mathbf{u}}) \cdot \mathbf{v} dV + \iint_S \mathbf{T}(\mathbf{u}, \hat{\mathbf{n}}) \cdot \mathbf{v} dS = \iiint_V (\mathbf{g} - \rho \ddot{\mathbf{v}}) \cdot \mathbf{u} dV + \iint_S \mathbf{T}(\mathbf{v}, \hat{\mathbf{n}}) \cdot \mathbf{u} dS \quad (3.12)$$

donde la operación punto indica el producto escalar de vectores.

Este resultado fue encontrado por Betti y puede obtenerse por sustitución de las Ec.(3.1), (3.3) y (3.4) en la Ec.(3.2) y aplicar el teorema de la divergencia reduciendo el primer miembro a  $\iiint_V c_{ijpq} v_{i,j} u_{p,q} dV$ .

En forma similar el segundo miembro se reduce a  $\iiint_V c_{ijpq} u_{i,j} v_{p,q} dV$  y entonces se obtiene la Ec.(3.12)

al considerar la simetría  $c_{ijpq} = c_{pqij}$ .

El teorema de Betti no involucra las condiciones iniciales para  $\mathbf{u}$  o  $\mathbf{v}$ .

Reordenando la Ec. (3.12) como sigue e integrando en el tiempo pueden considerarse las condiciones iniciales

$$\iiint_V (\mathbf{u} \cdot \mathbf{g} - \mathbf{v} \cdot \mathbf{f}) \cdot dV - \iint_S [\mathbf{v} \cdot \mathbf{T}(\mathbf{u}, \hat{\mathbf{n}}) - \mathbf{u} \cdot \mathbf{T}(\mathbf{v}, \hat{\mathbf{n}})] dS = \iiint_V \rho (\ddot{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{u} - \ddot{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{v}) dV \quad (3.13)$$

Las cantidades  $\mathbf{u}$ ,  $\ddot{\mathbf{u}}$ ,  $\mathbf{T}(\mathbf{u}, \hat{\mathbf{n}})$  y  $\mathbf{f}$  son evaluadas en un tiempo  $t_1$  pero  $\mathbf{v}$ ,  $\ddot{\mathbf{v}}$ ,  $\mathbf{T}(\mathbf{v}, \hat{\mathbf{n}})$  y  $\mathbf{g}$  son evaluadas a un tiempo diferente  $t_2$ . Se elige  $t_1 = t$  y  $t_2 = \tau - t$ , y se integra la Ec.(3.13) en el intervalo temporal  $0 \leq t \leq \tau$ . Entonces se verifica que el segundo miembro de la Ec.(3.13) es nulo

$$\int_{-\infty}^{\infty} \rho [\ddot{\mathbf{v}}(\tau - t) \cdot \mathbf{u}(t) - \ddot{\mathbf{u}}(t) \cdot \mathbf{v}(\tau - t)] dt = 0 \quad (3.14)$$

$$\text{pues } \int_0^{\tau} \rho [\ddot{\mathbf{u}}(t) \cdot \mathbf{v}(\tau - t) - \ddot{\mathbf{v}}(\tau - t) \cdot \mathbf{u}(t)] dt = \rho \int_0^{\tau} \frac{\partial}{\partial t} [\dot{\mathbf{u}}(t) \cdot \mathbf{v}(\tau - t) + \mathbf{u}(t) \cdot \dot{\mathbf{v}}(\tau - t)] dt$$

$$= \rho [\dot{\mathbf{u}}(\tau) \cdot \mathbf{v}(0) - \dot{\mathbf{u}}(0) \cdot \mathbf{v}(\tau) + \mathbf{u}(\tau) \cdot \dot{\mathbf{v}}(0) - \mathbf{u}(0) \cdot \dot{\mathbf{v}}(\tau)]$$

y entonces de considerar que  $\dot{\mathbf{u}} = \dot{\mathbf{v}} = 0$  para todo  $\tau \leq \tau_0$  si en  $\tau_0$   $\mathbf{u}$  y  $\mathbf{v}$  son nulos para todo punto del volumen  $V$ .

Finalmente se obtiene de la Ec.(3.15) resultado para los campos de desplazamiento

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} dt \iiint_V (\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{g}(\mathbf{x}, \tau - t) - \mathbf{v}(\mathbf{x}, \tau - t) \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x}, t)) \cdot dV \\ & = \int_{-\infty}^{\infty} dt \iint_S [\mathbf{v}(\mathbf{x}, \tau - t) \cdot \mathbf{T}(\mathbf{u}(\mathbf{x}, t), \hat{\mathbf{n}}) - \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{T}(\mathbf{v}(\mathbf{x}, \tau - t), \hat{\mathbf{n}})] dS \end{aligned} \quad (3.15)$$

### 3.5 Teorema de Representación del campo de desplazamiento

Si en la forma integral del teorema de Betty en la Ec.(3.15) se reemplaza uno de los campos de desplazamiento por la función de Green entonces es posible obtener una representación integral del campo de desplazamiento  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ . Sustituyendo en la Ec.(3.15) a  $\mathbf{g}$  por una fuerza en volumen impulsiva:  $g_i(\mathbf{x}, t) = \delta(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}) \delta(t - \tau) \delta_{in}$  resulta entonces que la correspondiente solución del campo de desplazamiento es:  $v_i(\mathbf{x}, t) = G_{in}(\mathbf{x}, t; \boldsymbol{\xi}, 0)$  y se obtiene la Ec.(3.16)

$$u_n(\boldsymbol{\xi}, \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} dt \iiint_V f_i(\mathbf{x}, t) G_{in}(\mathbf{x}, \tau - t; \boldsymbol{\xi}, 0) dV \quad (3.16)$$

$$+ \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \iint_S [G_{in}(\mathbf{x}, \tau - t; \boldsymbol{\xi}, 0) T_i(\mathbf{u}(\mathbf{x}, t), \hat{\mathbf{n}}) - u_i(\mathbf{x}, t) c_{ijpq} n_j \frac{\partial}{\partial x_q} G_{pn}(\mathbf{x}, \tau - t; \boldsymbol{\xi}, 0)] dS$$

en la cual se realizó el siguiente cálculo reemplazando las Ec.(3.1), (3.3) y (3.4)

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{T}(\mathbf{v}(\mathbf{x}, \tau - t), \hat{\mathbf{n}}) = u_i T_i = u_i \sigma_{ij} n_j = u_i c_{ijpq} \varepsilon_{pq} n_j \quad (3.17)$$

$$= u_i c_{ijpq} n_j \frac{1}{2} (G_{pn,q} + G_{qn,p}) = u_i c_{ijpq} n_j G_{pn,q}$$

donde se usó la simetría del tensor de tensiones  $\sigma_{ji} = \sigma_{ij}$  y la simetría en la derivada de la función de Green:  $G_{pn,q} = G_{qn,p}$ . Se obtiene así la Ec.(3.18) como una expresión que evalúa el campo de desplazamiento en una posición  $\mathbf{x}$  a un tiempo  $t$  arbitrarios, para eso en la Ec.(3.16) se intercambian los símbolos  $\mathbf{x}$  y  $\boldsymbol{\xi}$ , y los símbolos  $t$  y  $\tau$  lo cual es correcto ya que las variables son mudas.

$$u_n(\mathbf{x}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \iiint_V f_i(\boldsymbol{\xi}, \tau) G_{in}(\boldsymbol{\xi}, t - \tau; \mathbf{x}, 0) dV(\boldsymbol{\xi}) \quad (3.18)$$

$$+ \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \iint_S [G_{in}(\boldsymbol{\xi}, t - \tau; \mathbf{x}, 0) T_i(\mathbf{u}(\boldsymbol{\xi}, \tau), \hat{\mathbf{n}}) - u_i(\boldsymbol{\xi}, \tau) c_{ijpq}(\boldsymbol{\xi}) n_j \frac{\partial}{\partial \xi_q} G_{pn}(\boldsymbol{\xi}, t - \tau; \mathbf{x}, 0)] dS(\boldsymbol{\xi})$$

El campo de deformación en un punto material resulta así de la contribución debida a la fuerza  $\mathbf{f}$  en el volumen  $V$ , más la contribución debida a la tracción  $\mathbf{T}(\mathbf{u}, \hat{\mathbf{n}})$  en la superficie  $S$ . Sin embargo la formulación de estas contribuciones de fuerzas no es adecuada debido a que involucra a la función de Green con fuente en el punto  $\mathbf{x}$  y observación en el punto  $\boldsymbol{\xi}$ . Se quiere que  $\mathbf{x}$  sea el punto de observación y que el desplazamiento total pueda ser obtenido como la integral de las contribuciones de los desplazamientos debidos a cada elemento de volumen y superficie. El teorema recíproco de la función de Green debe usarse:  $G_{in}(\boldsymbol{\xi}, t - \tau, \mathbf{x}, 0) = G_{in}(\mathbf{x}, t - \tau, \boldsymbol{\xi}, 0)$  pero requiere una condición extra sobre la misma función de Green: que esta satisfaga condiciones de contorno homogéneas sobre  $S$ . La Ec.(3.19) será válida para cualquier conjunto de funciones de Green con una fuerza impulsiva en la componente  $n$  para  $\boldsymbol{\xi} = \mathbf{x}$  o  $\boldsymbol{\eta} = \mathbf{x}$  y  $\tau = t$ .

Finalmente el teorema de representación viene dado por la Ec.(3.19) donde se indica con diferente notación un punto material  $\boldsymbol{\eta}$  en el volumen y  $\boldsymbol{\xi}$  en la superficie.

$$u_n(\mathbf{x}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \iiint_V f_i(\boldsymbol{\eta}, \tau) G_{in}(\mathbf{x}, t - \tau; \boldsymbol{\eta}, 0) dV(\boldsymbol{\eta}) + \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \iint_S [G_{in}(\mathbf{x}, t - \tau; \boldsymbol{\xi}, 0) T_i(\mathbf{u}(\boldsymbol{\xi}, \tau), \hat{\mathbf{n}}) - u_i(\boldsymbol{\xi}, \tau) c_{ijpq}(\boldsymbol{\xi}) n_j \frac{\partial}{\partial \xi_q} G_{pn}(\mathbf{x}, t - \tau; \boldsymbol{\xi}, 0)] dS(\boldsymbol{\xi}) \quad (3.19)$$

### 3.6 Representación para una fuente de fractura

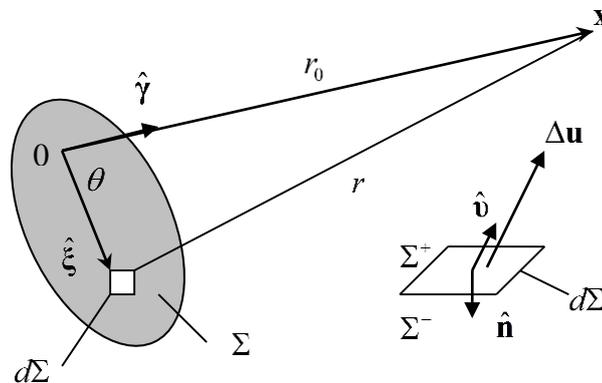
Una fractura en el interior de un material puede interpretarse como una fuente de onda elástica producida por una discontinuidad en el campo de desplazamiento del material. Esta discontinuidad se produce en una superficie en el interior del material que se denomina plano de fractura.

La onda elástica es producida por una discontinuidad en los esfuerzos en el volumen del material en un entorno de la fuente de fractura. Ahora se mostrará un modelo del mecanismo producido en el plano de fractura y se obtendrá el campo de desplazamiento resultante de las ondas radiadas de la fuente de fractura, aplicando el teorema de representación Ec.(3.19).

La Fig. 3 es un esquema de un medio material de volumen finito  $V$  y contorno de superficie  $S$  donde en el punto campo  $\mathbf{x}$  en su superficie se detecta el campo de desplazamiento  $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$  generado por una fuente de fractura en el elemento de superficie en el punto fuente  $\boldsymbol{\xi}$  en el plano de fractura. La discontinuidad en el campo de desplazamiento sobre el plano de fractura está definida de la forma

$$\Delta \mathbf{u}(\boldsymbol{\xi}, \tau) = \mathbf{u}(\boldsymbol{\xi}, \tau)|_{\Sigma^+} - \mathbf{u}(\boldsymbol{\xi}, \tau)|_{\Sigma^-} \quad (3.20)$$

donde  $\Sigma^+$  y  $\Sigma^-$  indican las caras adyacentes al plano de fractura y  $\hat{\mathbf{n}}$  es el versor normal interior al mismo.



**Figura 3.3** Esquema del punto fuente (fractura) y punto campo (punto de detección del campo de desplazamiento).

En ausencia de fuerzas de volumen  $\mathbf{f}$  y debido a que en una fractura espontánea la tracción debe ser continua, es decir  $\mathbf{T}(\mathbf{u}, \hat{\mathbf{n}})|_{\Sigma^+} = \mathbf{T}(\mathbf{u}, \hat{\mathbf{n}})|_{\Sigma^-}$  el teorema de representación Ec.(3.19) tomará la forma

$$u_n(\mathbf{x}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \iint_{\Sigma} \Delta u_i(\xi, \tau) c_{ijpq}(\xi) n_j \frac{\partial}{\partial \xi_q} G_{pn}(\mathbf{x}, t - \tau; \xi, 0) d\Sigma(\xi) \quad (3.21)$$

donde  $\Delta \mathbf{u}$  indica la discontinuidad del campo de desplazamiento en el plano de la fractura. El versor normal  $\hat{\mathbf{n}}$  es ahora interior al plano de fractura.

La operación de convolución entre dos funciones  $f$  y  $g$  está definida como

$$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) g(t - \tau) d\tau \quad (3.22)$$

luego la Ec.(2.21) toma la forma

$$u_n(\mathbf{x}, t) = \iint_{\Sigma} n_j c_{ijpq} \Delta u_i * G_{pn,q} d\Sigma = (M_{pq} * G_{pn,q})(\mathbf{x}, t) \quad (3.23)$$

Esta es la representación del campo de desplazamiento para una fuente sísmica donde se introduce el tensor de momento sísmico (Backus, 1976):

$$M_{pq} = \iint_{\Sigma} n_j c_{ijpq} \Delta u_i d\Sigma \quad (3.24)$$

La Ec.(3.6) describe a un sistema en el cual la señal de entrada es la fuerza por unidad de volumen y la señal de salida el campo de desplazamiento. La teoría de sistemas lineales e invariantes en el tiempo prueba que conocida la respuesta impulsiva de un sistema es posible encontrar todas las respuestas del sistema para cualquier señal de entrada (teorema de convolución). Entonces para la Ec.(3.6) se tiene la solución que se corresponde con el primer término de la Ec.(3.19) debida a la contribución de las fuerzas en volumen

$$u_n(\mathbf{x}, t) = \iiint_V dV (f_i * G_{in})(\mathbf{x}, t) = \iiint_V dV(\eta) \int_{-\infty}^{\infty} f_i(\boldsymbol{\eta}, \tau) G_{in}(\mathbf{x}, t - \tau, \boldsymbol{\eta}, 0) d\tau \quad (3.25)$$

Si se compara las Ec.(3.23) y (3.25) se observa la diferencia en la derivada de  $G_{pn}$  con respecto al punto fuente  $\xi_q$ . La explicación de esta diferencia es que en la Ec.(3.23) se describe el campo de desplazamiento para una discontinuidad en el plano de fractura no así en la Ec.(3.24) para una contribución al campo de desplazamiento en el volumen. La derivada  $G_{pn,q}$  en la Ec.(3.23) se interpreta físicamente como la acción sobre  $\Sigma$  en  $\xi$  de una cupla de fuerzas (con brazo de palanca en la dirección  $\xi_q$ ) como se estudia en la teoría de los modelos dinámicos de falla sísmica.

### 3.7 Campo de desplazamiento en un medio lineal, homogéneo e isótropo

Se determinará el campo de desplazamiento a campo lejano (punto de observación alejado de la fuente de fractura) en un medio material lineal y homogéneo.

Se obtiene la función de Green en la Ec.(3.26) al resolver la ecuación diferencial de segundo orden: Ec.(3.10) para un medio lineal e isótropo (ver desarrollo en el Apéndice A). Además se supuso homogeneidad del medio al considerar las constantes elásticas del mismo como no dependientes del punto  $\mathbf{x}$ .

$$G_{pn}(\mathbf{x}, t; \xi, \tau) = \frac{1}{4\pi\rho} (3\gamma_n\gamma_p - \delta_{np}) \frac{1}{r^3} \int_{r/\alpha}^{r/\beta} t' \delta(t - \tau - t') dt' + \frac{1}{4\pi\rho\alpha^2} \gamma_n\gamma_p \frac{1}{r} \delta(t - \tau - \frac{r}{\alpha}) - \frac{1}{4\pi\rho\beta^2} (\gamma_n\gamma_p - \delta_{np}) \frac{1}{r} \delta(t - \tau - \frac{r}{\beta}) \quad (3.26)$$

En esta última ecuación  $\alpha = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho}$  y  $\beta = \sqrt{\mu/\rho}$  son las velocidades de onda longitudinal (onda P) y onda transversal (onda S) respectivamente que caracterizan las ondas radiadas por un foco de fractura y  $\lambda$ ,  $\mu$  son las constantes elásticas de Lamé definidas en la Ec.(3.5). La cantidad  $r = |\mathbf{x} - \xi|$  es la distancia del punto fuente  $\xi$  al punto campo  $\mathbf{x}$  de observación. La cantidad  $\gamma_i = x_i / r$  es el coseno director del vector  $\mathbf{x}$  en la dirección del eje  $\hat{\mathbf{x}}_i$ .

Reemplazando la Ec.(3.26) en la Ec.(3.21) se obtiene la Ec.(3.27) haciendo la aproximación a campo lejano al despreciar el primer término de la Ec.(3.26) frente a los otros dos términos y usando la relación  $\partial/\partial\xi_q = -\partial/\partial x_q$ .

$$u_n(\mathbf{x}, t) \approx -\frac{1}{4\pi\rho\alpha^2} \frac{\partial}{\partial x_q} \iint_{\Sigma} c_{ijpq} \frac{\gamma_n\gamma_p}{r} \Delta u_i(\xi, t - \frac{r}{\alpha}) n_j d\Sigma + \frac{1}{4\pi\rho\beta^2} \frac{\partial}{\partial x_q} \iint_{\Sigma} c_{ijpq} \left( \frac{\gamma_n\gamma_p - \delta_{np}}{r} \right) \Delta u_i(\xi, t - \frac{r}{\beta}) n_j d\Sigma \quad (3.27)$$

donde  $c_{ijpq}$  son las constantes elásticas del medio que en el caso de un medio material isótropo se determina por la Ec.(3.5),  $\Delta u$  es la discontinuidad del desplazamiento y  $v_i$  es el versor en la dirección de la misma ( $\Delta u_i = v_i \Delta u$ ).

Derivando las integrales con respecto a  $x_q$  sin tener en cuenta todos los términos que se atenúan más rápidamente que  $r^{-1}$  resulta

$$u_n(\mathbf{x}, t) \approx \iint_{\Sigma} \frac{c_{ijpq}}{4\pi\rho\alpha^3 r} \gamma_n\gamma_p \Delta \dot{u}(\xi, t - \frac{r}{\alpha}) \frac{\partial r}{\partial x_q} v_i n_j d\Sigma - \iint_{\Sigma} \frac{c_{ijpq}}{4\pi\rho\beta^3 r} (\gamma_n\gamma_p - \delta_{np}) \Delta \dot{u}(\xi, t - \frac{r}{\beta}) \frac{\partial r}{\partial x_q} v_i n_j d\Sigma \quad (3.28)$$

donde  $\dot{u} = du / dt$

Finalmente, teniendo en cuenta que  $\partial r / \partial x_q = x_q / r = \gamma_q$  se obtiene la Ec.(3.29) para el campo de desplazamiento observado a campo lejano para una fuente de fractura en un medio lineal, homogéneo e isótropo

$$u_n(\mathbf{x}, t) \approx \frac{\gamma_n}{4\pi\rho\alpha^3 r} c_{ijpq} \gamma_p \gamma_q \nu_i n_j \iint_{\Sigma} \Delta \dot{u}(\xi, t - \frac{r}{\alpha}) d\Sigma + \frac{\delta_{np} - \gamma_n \gamma_p}{4\pi\rho\beta^3 r} c_{ijpq} \gamma_q \nu_i n_j \iint_{\Sigma} \Delta \dot{u}(\xi, t - \frac{r}{\beta}) d\Sigma \quad (3.29)$$

Considerando la contribución de cada onda se observa en esta expresión que la dependencia es dada por la misma forma integral siguiente

$$\Omega(\mathbf{x}, t) = \iint_{\Sigma} \Delta \dot{u}(\xi, t - \frac{r}{c}) d\Sigma \quad (3.30)$$

donde  $c$  es la velocidad de propagación de onda correspondiente a la onda P o S.

Luego el campo de desplazamiento se puede expresar como sigue donde la Ec.(3.32) da cuenta del patrón de radiación de onda proveniente de la fuente de fractura

$$u_n(\mathbf{x}, t) \approx \frac{R_n}{4\pi\rho c^3 r} \Omega(\mathbf{x}, t) \quad (3.31)$$

$$R_n(\hat{\gamma}, \hat{\nu}, \hat{\mathbf{n}}) = \begin{cases} c_{ijpq} \gamma_n \gamma_p \gamma_q \nu_i n_j & \text{onda P} \\ c_{ijpq} (\delta_{np} - \gamma_n \gamma_p) \gamma_q \nu_i n_j & \text{onda S} \end{cases} \quad (3.32)$$

### 3.8 Modelo de fuente de fractura en la aproximación de campo lejano

En este modelo de fuente de fractura es necesario hacer una aproximación para simplificar el cálculo posterior. Aplicando la fórmula del coseno:  $r^2 = r_0^2 + |\xi|^2 - 2r_0|\xi|\cos\theta$  (ver Fig. 3.3), se obtiene una expresión aproximada de la distancia  $r$  desarrollando en serie de potencias a orden uno

$$r = r_0 \left[ 1 + \frac{|\xi|^2}{r_0^2} - \frac{2(\xi \cdot \hat{\gamma})}{r_0} \right]^{1/2} \approx r_0 - (\xi \cdot \hat{\gamma}) + \frac{1}{2} \frac{|\xi|^2}{r_0} + \dots \quad (3.33)$$

luego para  $r_0$  mucho mayor comparado con las dimensiones de la fractura puede aproximarse la Ec.(3.33) como sigue

$$r \approx r_0 - (\xi \cdot \hat{\gamma}) \quad (3.34)$$

con un error dado por

$$\Delta r \approx \frac{1}{2} \frac{|\xi|^2}{r_0} \quad (3.35)$$

Considerando la onda elástica que se propaga de la fuente de fractura al punto de observación, la aproximación será válida para un error en el desarrollo en serie que sea mucho menor a un cuarto de longitud de onda ( $\Delta r \ll \lambda/4$ ). El criterio de validez de la aproximación a campo lejano será

$$r_0 \gg \frac{2L^2}{\lambda} \quad (3.36)$$

donde  $\lambda$  es la longitud de onda y  $L$  la máxima longitud de las dimensiones de la fractura.

La forma funcional que da cuenta del campo de desplazamiento se aproxima entonces como sigue

$$\Omega(\mathbf{x}, t) \approx \iint_{\Sigma} \Delta u(\xi, t - \frac{r_0 - (\xi \cdot \hat{\gamma})}{c}) d\Sigma \quad (3.37)$$

## CAPÍTULO IV

### DESARROLLO EXPERIMENTAL

#### 4.1 Introducción

En esta parte del trabajo se describe los experimentos para obtener señales de Emisión Acústica (EA) generadas durante ensayos de “expansión” que forma la fisura en un material frágil. Las probetas, placas planas, se diseñaron con un orificio para permitir el avance de una herramienta de forma cónica accionada por una máquina de ensayo industrial de forma tal de aumentar el diámetro del orificio (expansión) hasta la rotura. El material utilizado fue metacrilato de metilo (acrílico), de rotura frágil. En el capítulo siguiente se compara los resultados experimentales con el modelo desarrollado. El espectro de las señales de EA en la rotura es de la misma forma que el predicho por el modelo como así también lo es el valor de la longitud de la fractura.

En este trabajo se simuló una señal de emisión acústica, cuya fuente es una fisura que se propaga en un medio material, a partir de un modelo de fractura cuyos fundamentos provienen de la geofísica (ver el capítulo siguiente, sección 5.1.1). La duración del evento de EA, el tiempo de subida del mismo y la amplitud relativa son estimados por el modelo y se relacionan con características de la fuente. La longitud de la fisura queda determinada por el análisis del espectro de Fourier de la señal cuya amplitud es dada por la Ec.( 4.1):

$$|\hat{u}(\omega)| \approx \frac{|\mathbf{R}|}{4\pi\rho c^3 r} \frac{U_0 A}{\sqrt{1+\omega^2 T^2}} \left| \frac{\text{sen}(\tau_0 \omega / 2)}{\tau_0 \omega / 2} \right| \quad (4.1)$$

donde  $\hat{u}(\omega)$  es la transformada de Fourier del campo de desplazamiento;  $U_0$  el valor máximo alcanzado por la discontinuidad del desplazamiento en la fractura;  $A$  el área de la fractura;  $T$  el tiempo en alcanzar la discontinuidad del desplazamiento en la fractura, el 63% de  $U_0$  y  $\tau_0$  el tiempo de subida de la señal a detectar;  $|\mathbf{R}|$  el módulo del patrón de radiación;  $\rho$  la densidad del medio;  $c$  la velocidad de propagación de onda en el medio y  $r$  la distancia de la fuente al punto de detección.

En el espectro determinado por el modelo se observa que la señal es constante a bajas frecuencias y luego decrece a altas frecuencias como la inversa del cuadrado de la frecuencia. El punto de discontinuidad del espectro se denomina frecuencia esquina que se corresponde a un máximo del espectro y se prueba que ésta es inversamente proporcional a las dimensiones de la fractura. Se

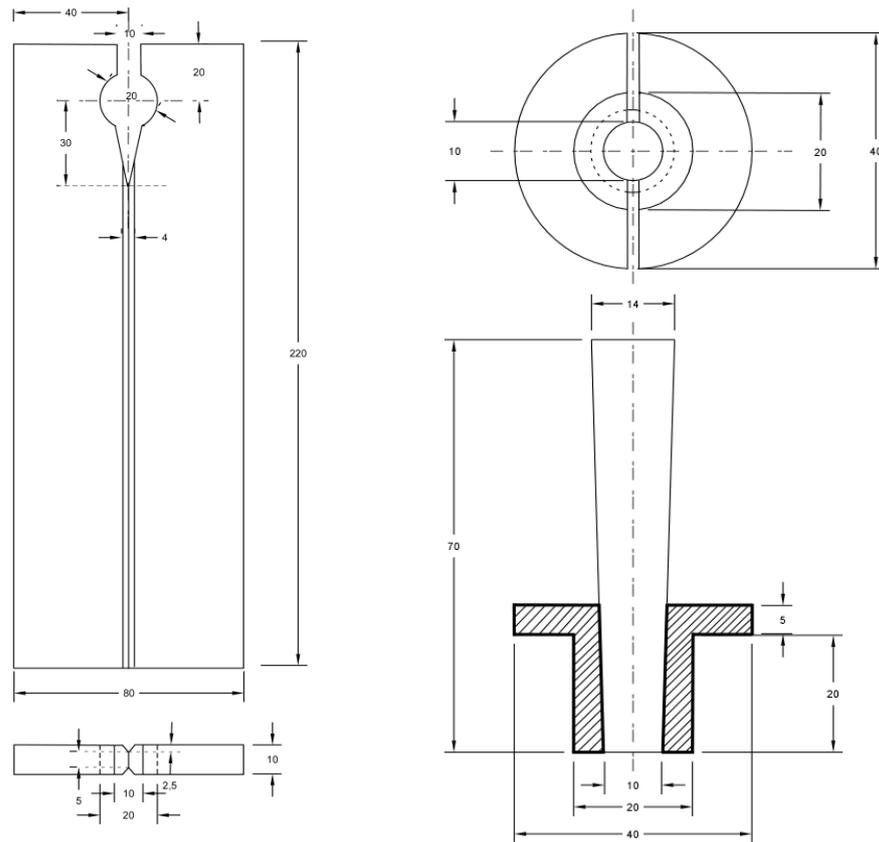
encuentra que el risetime (tiempo de subida) de la señal detectada está relacionado también con la longitud de la fisura como se muestra en la Ec.(4.2):

$$\tau_0 = L(1 - \eta \cos \theta) / v \quad (4.2)$$

Donde  $L$  es la longitud de la fisura;  $\eta = v/c$  es la proporción entre la velocidad de avance de la fractura y la velocidad de onda del sonido en el medio material (cerca de 1 para un material frágil) y  $\theta$  el ángulo de detección respecto a la línea de avance de la fractura.

## 4.2. Procedimiento experimental

Se realizaron ensayos con 25 probetas de metacrilato de metilo (acrílico) fabricadas por el sistema de colada en celda con una resistencia a la tracción de 72 MPa. Las probetas, placas planas, se diseñaron con un orificio para permitir el avance de una herramienta de expansión de forma cónica accionada por una máquina de ensayo industrial Shimadzu AG con una carga máxima de 100 kN. Para favorecer la fractura de las probetas se las debilitó con una canaleta a lo largo de ellas. Una abertura en forma de cuña permitió concentrar tensiones en el extremo de la canaleta. Para la detección de las señales de EA se colocaron dos sensores piezoeléctricos apoyados sobre las probetas, un sensor con respuesta resonante en 150 kHz y otro con respuesta de banda ancha de 100 kHz - 1 MHz. La probeta y la herramienta de expansión se muestran en la Fig. 4.1. La máquina de ensayo industrial y el diseño experimental en las Figs. 4.2 y 4.3.

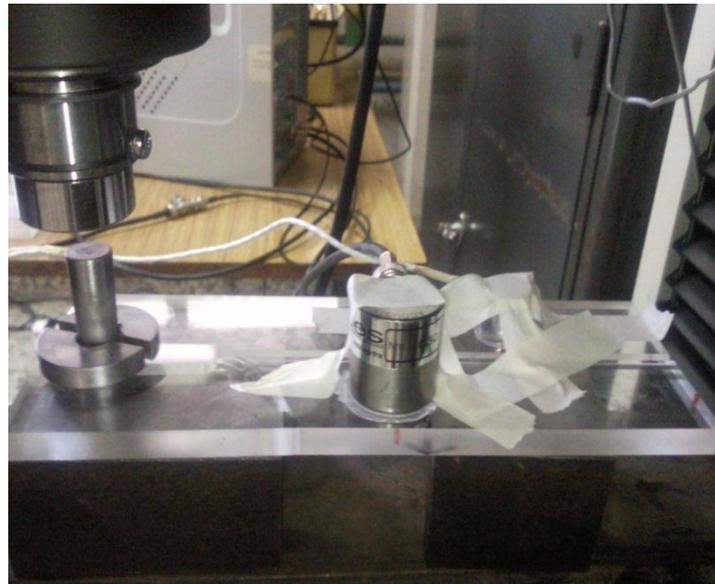


**Figura 4.1.** Probeta y herramienta de expansión.

Las ondas elásticas que se generan en la fisura luego del avance de la herramienta de expansión, se propagan dentro del material, llegan a su superficie y son detectadas por los sensores que convierten la vibración mecánica en señal eléctrica para su posterior procesamiento y análisis. El equipo de EA consistió en una placa PAC (PCI-2 Based AE System) en PC y el procesamiento de datos se efectuó con el software AEWIN. La placa de adquisición de datos poseía dos canales, uno por sensor, para la toma de las amplitudes de EA en voltios registrados en función del tiempo (forma de onda del campo de desplazamiento) y además se contó con un canal externo para medir, simultáneamente con la EA, la carga a la que fue sometida la probeta.



**Figura 4.2** Máquina de Ensayo Industrial Shimadzu AG.



**Figura 4.3** Arreglo experimental de la probeta, herramienta de expansión y sensores.

# CAPÍTULO V

## RESULTADOS Y DISCUSIÓN

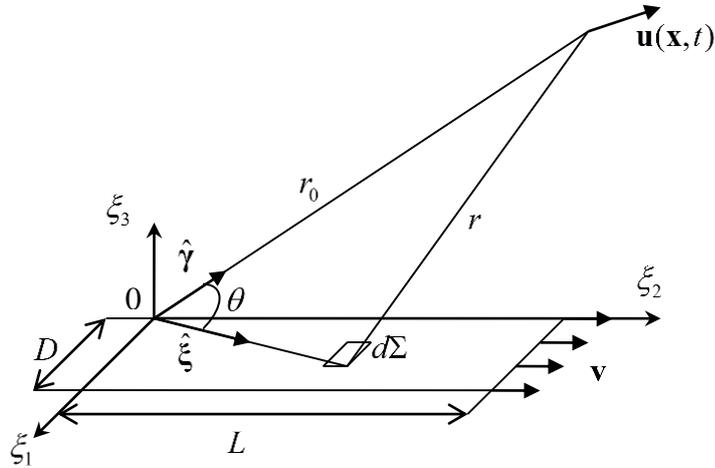
### 5.1 Resultados teóricos

#### 5.1.1 Forma de onda a la entrada del detector en un modelo de fuente de fractura unidireccional de forma rectangular

En el Capítulo III, en la Ec.(3.37) se determinó, presentadas por Aki y Richards (1980), como calcular el campo de desplazamiento para un medio lineal homogéneo e isótropo para un modelo de fuente de fractura en la aproximación de campo lejano como sigue

$$u_n(\mathbf{x}, t) \approx \frac{R_n}{4\pi\rho c^3 r} \Omega(\mathbf{x}, t) \quad (5.1)$$

$$\Omega(\mathbf{x}, t) = \iint_{\Sigma} \Delta \dot{u}(\xi, t - \frac{r_0 - (\xi \cdot \hat{\gamma})}{c}) d\Sigma \quad (5.2)$$



**Figura 5.1** Modelo de fuente de fractura rectangular.

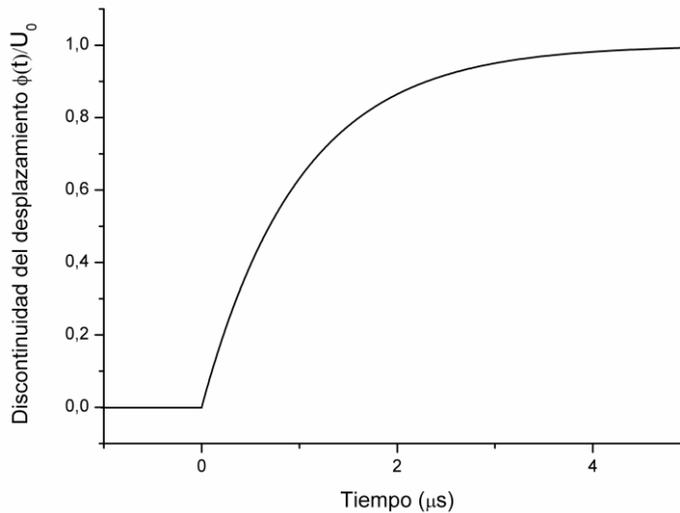
Para un modelo de fractura rectangular unidireccional como se muestra en la Fig. 5.1 se propone la Ec.(5.3) y la Ec.(5.4) para la discontinuidad del campo de desplazamiento sobre el plano de fractura

$$\Delta u(\xi, t) = \begin{cases} \phi(t - \frac{\xi}{v}) & 0 < \xi_1 < D, \quad 0 < \xi_2 < L \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases} \quad (5.3)$$

donde  $v$  es la velocidad de propagación de la fractura que avanza en la dirección  $\xi_2$ , largo de la fractura y  $\phi(t)$  es la función temporal de la discontinuidad del campo de desplazamiento en la fuente de fractura (Fig. 5.2) que se modela por una función exponencial usada por Ben-Menahed y Toksöz (1963)

$$\phi(t) = U_0(1 - e^{-t/T}) H(t) \quad (5.4)$$

donde  $U_0$  es el valor máximo alcanzado por la discontinuidad del campo de desplazamiento,  $T$  el tiempo en alcanzar, la discontinuidad del desplazamiento en la fractura, el 63% de  $U_0$  y  $H(t)$  la función de Heaviside ( $H(t) = 0$  si  $t < 0$ ,  $H(t) = 1$  si  $t > 0$ ).



**Figura 5.2** Función temporal de la discontinuidad del campo de desplazamiento en la fuente de fractura.

Reemplazando la Ec.(5.3) y la Ec.(5.4) en la Ec.(5.2) se obtiene

$$\Omega(\mathbf{x}, t) = \int_0^D \int_0^L \phi(t - \frac{r_0}{c} - \frac{\xi_2}{v} + \frac{\xi_1 \hat{\gamma}}{c}) d\xi_1 d\xi_2 = D \int_0^L \phi(t - \frac{r_0}{c} - \xi_2(\frac{1}{v} - \frac{\cos \theta}{c})) d\xi_2 \quad (5.5)$$

donde  $D$  y  $L$  son el ancho y el largo de la fractura ( $D \ll L$ ),  $r_0$  la posición del punto campo donde se mide el campo de desplazamiento,  $\theta$  el ángulo de detección. Se aproximó:  $|\xi_1| \approx \xi_2$  pues  $\xi_1 \ll \xi_2$ .

Se define un coeficiente de ductilidad que aumenta cuando la velocidad de fractura  $v$  se acerca a la velocidad de propagación de onda  $c$  de la forma  $v = \eta c$  ( $0 < \eta < 1$ , aproximadamente  $\eta = 0.8$  para

un material frágil y  $\eta = 0.2$  para un material dúctil). Más abajo se comprobará que la señal a detectar consta de dos etapas: primero presenta un crecimiento exponencial y luego decae también exponencialmente. Para dar cuenta del tiempo de subida de la señal que llega al detector conviene definir el parámetro

$$\tau_0 = L(1 - \eta \cos \theta) / v \quad (5.6)$$

$$\Omega(\mathbf{x}, t) = D \int_0^L \dot{\phi} \left( t - \frac{r_0}{c} - \frac{\xi}{v} (1 - \eta \cos \theta) \right) d\xi = D \int_0^L \dot{\phi} \left( t - \frac{r_0}{c} - \frac{\xi}{L} \tau_0 \right) d\xi \quad (5.7)$$

Para evaluar la Ec.(5.7) usamos la transformada de Fourier (ver desarrollo en el Apéndice B), y se obtiene

$$\hat{\Omega}(\mathbf{x}, \omega) = \frac{U_0 A}{T} \frac{\text{sen}(\tau_0 \omega / 2)}{\tau_0 \omega / 2} \frac{e^{-j\omega(\frac{r_0}{c} + \frac{\tau_0}{2})}}{\frac{1}{T} + j\omega} \quad (5.8)$$

donde  $A = DL$  es el área de la fractura rectangular y  $j$  la unidad imaginaria.

Luego calculando la transformada inversa de Fourier (ver desarrollo en el Apéndice B) resulta

$$\Omega(\mathbf{x}, t) = \frac{U_0 A}{\tau_0} \begin{cases} 1 - C_1 e^{-t/T} & \text{si } \frac{r_0}{c} < t < \frac{r_0}{c} + \tau_0 \\ C_2 e^{-t/T} & \text{si } t > \frac{r_0}{c} + \tau_0 \end{cases} \quad (5.9)$$

donde  $C_1 = e^{r_0/cT}$  y  $C_2 = C_1(e^{\tau_0/T} - 1)$ .

El campo de desplazamiento a campo lejano resulta entonces de reemplazar la Ec.(5.9) en la Ec.(5.1) y se obtiene

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \approx \frac{\mathbf{R}}{4\pi\rho c^3 r} \frac{U_0 A}{\tau_0} \begin{cases} 1 - C_1 e^{-t/T} & \text{si } \frac{r_0}{c} < t < \frac{r_0}{c} + \tau_0 \\ C_2 e^{-t/T} & \text{si } t > \frac{r_0}{c} + \tau_0 \end{cases} \quad (5.10)$$

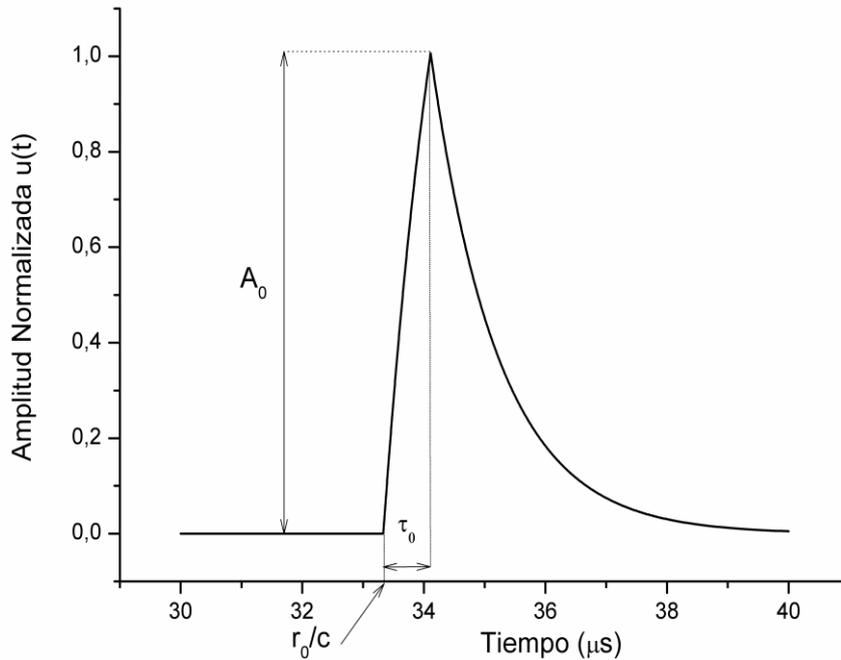
Se obtiene así la forma de onda de la señal  $u(t)$  que llega al sensor, ver Fig. 5.3. La señal obtenida presenta a partir del instante que la onda llega al sensor, en un tiempo dado por  $r_0/c$ , un crecimiento exponencial hasta alcanzar un máximo  $A_0$  en un intervalo de tiempo dado por  $\tau_0$ : tiempo de subida y luego decae exponencialmente a cero.

$$u(t) = \begin{cases} \frac{\mu U_0 A}{4\pi\rho c^3 \tau_0} \frac{1}{r} (1 - C_1 e^{-t/T}) & \text{si } \frac{r_0}{c} < t < \frac{r_0}{c} + \tau_0 \\ \frac{\mu U_0 A}{4\pi\rho c^3 \tau_0} \frac{1}{r} C_2 e^{-t/T} & \text{si } t > \frac{r_0}{c} + \tau_0 \end{cases} \quad (5.11)$$

$$\tau_0 = L(1 - \eta \cos \theta) / v \quad (5.12)$$

$$A_0 = \frac{\mu}{4\pi\rho c^3 r} \frac{U_0 A}{\tau_0} (1 - e^{-\tau_0/T}) \quad (5.13)$$

Los valores de las magnitudes físicas que se han adoptado y determinado para la simulación del evento de EA fueron: velocidad de propagación del sonido en el material  $c = 2870$  m/s (valor tabulado), longitud de la fractura alrededor de  $L = 35$  mm (valor experimental y predicho por el modelo), y la distancia del sensor a la fuente de fractura  $r \cong r_0 = 10$  cm (valor medido con aproximación a campo lejano), es decir con ángulo de detección  $\theta \cong 8^\circ$ . El valor de  $\eta = 0.94$  (fractura frágil) se obtuvo por el ajuste de cuadrados mínimos de los valores teóricos con los valores experimentales. Resultando la velocidad de propagación de la fractura  $v = 2698$  m/s



**Figura 5.3** Forma de onda de la señal  $u(t)$  a la entrada del sensor originada por una fractura en un material.

La señal que llega al sensor, obtenida teóricamente en el presente trabajo mediante un modelo de falla sísmica, es más detallada que los pulsos rectangulares propuestos en otros trabajos (Ono K., 1978; López Pumarega M.I., 1999).

### 5.1.2 Ajuste del modelo de sensor a un sensor real

Para dar cuenta de la influencia del detector en la señal obtenida en el apartado anterior se realiza la convolución en el dominio de tiempo de la señal producida por la fractura en el lugar de detección y la respuesta del sensor a un impulso. El sensor piezoeléctrico es modelado como un sistema tipo filtro pasa-banda y sus parámetros son ajustados con la respuesta en frecuencia de un sensor real.

El modelo de sensor propuesto tiene la siguiente respuesta al impulso

$$h(t) = 2pe^{-pt} \left( \cos qt - \frac{p}{q} \operatorname{sen} qt \right) H(t) \quad (5.13)$$

donde  $p = 1/2RC$  y  $q = \sqrt{4R^2LC - L^2} / 2LRC$ . Los valores de los parámetros del filtro obtenido para una banda de frecuencia del sensor de 100 kHz a 800 kHz resultaron ser:  $R = 0.4 \Omega$ ,  $L = 0.1 \mu\text{H}$  y  $C = 1\mu\text{F}$ . La respuesta del sensor real se obtuvo a partir de la curva de calibración provista por el fabricante (Sensor PAC, Modelo: WD, Serie: AE65, Metodología de calibración basada en ASTM E976). El ajuste de la respuesta del sensor del modelo con respecto a un sensor real se muestra en la Fig. 5.4. El parámetro del modelo que se varió para hacer el ajuste fue la frecuencia de resonancia del modelo.

### 5.1.3 Forma de onda de la señal a la salida del detector en un modelo de fuente de fractura unidireccional de forma rectangular

El resultado de la señal de salida del sensor esta dado en la Ec.(5.13). La señal de salida del sensor  $s(t)$  se determina por la convolución en el dominio de tiempo de la señal de entrada al sensor  $u(t)$  y la respuesta al impulso  $h(t)$  del mismo:  $s(t) = u(t) * h(t)$ .

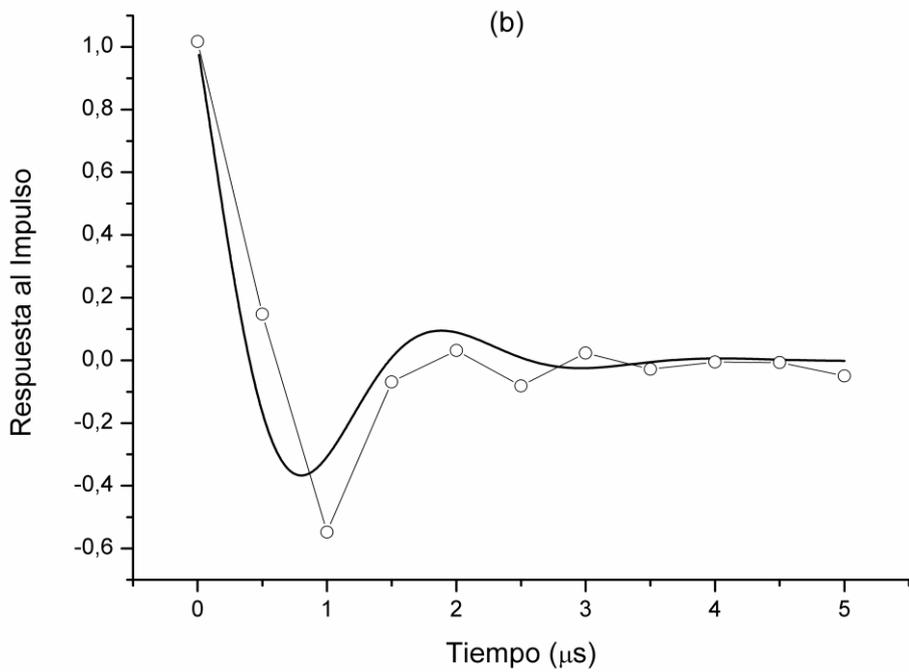
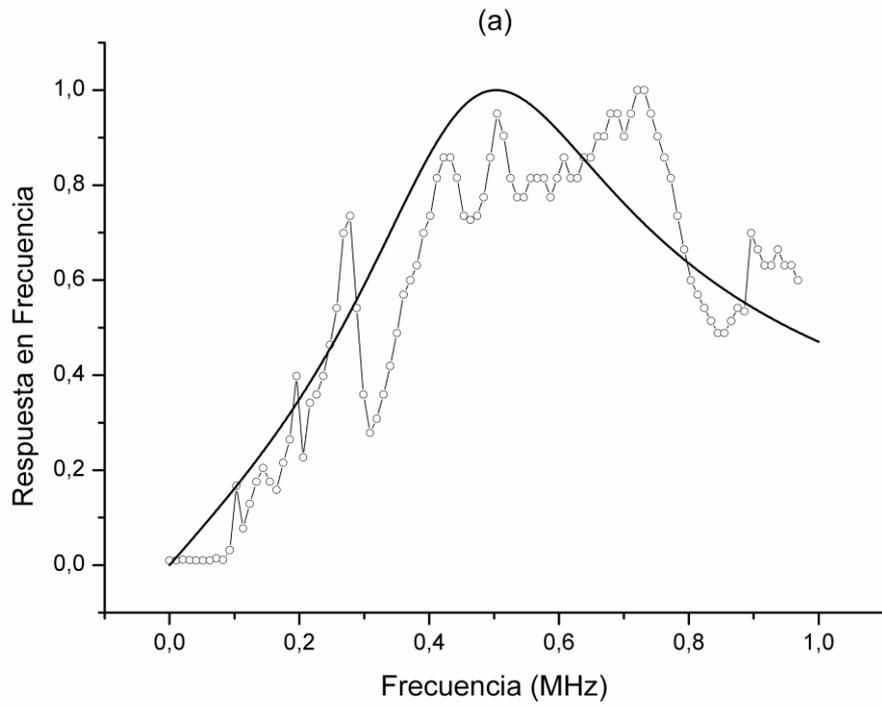
$$s(t) = \begin{cases} \frac{\mu U_0 A}{4\pi\rho c^3 \tau_0 r} \frac{1}{r} \left\{ A_1 e^{-t/T} - B_1 e^{-pt} \cos \left[ q \left( t - \frac{r_0}{c} \right) - \varphi_1 \right] \right\} & \text{si } \frac{r_0}{c} < t < \frac{r_0}{c} + \tau_0 \\ \frac{\mu U_0 A}{4\pi\rho c^3 \tau_0 r} \frac{1}{r} \left\{ A_2 e^{-t/T} - B_2 e^{-pt} \cos \left[ q \left( t - \frac{r_0}{c} \right) - \varphi_2 \right] \right\} & \text{si } t > \frac{r_0}{c} + \tau_0 \end{cases} \quad (5.14)$$

$$\text{donde} \quad A_1 = \frac{T e^{r_0/cT}}{q^2 T^2 + (pT - 1)^2} \quad B_1 = \frac{e^{p r_0/c}}{q \sqrt{q^2 T^2 + (pT - 1)^2}} \quad \varphi_1 = \operatorname{arctg} \left( \frac{pT - 1}{qT} \right)$$

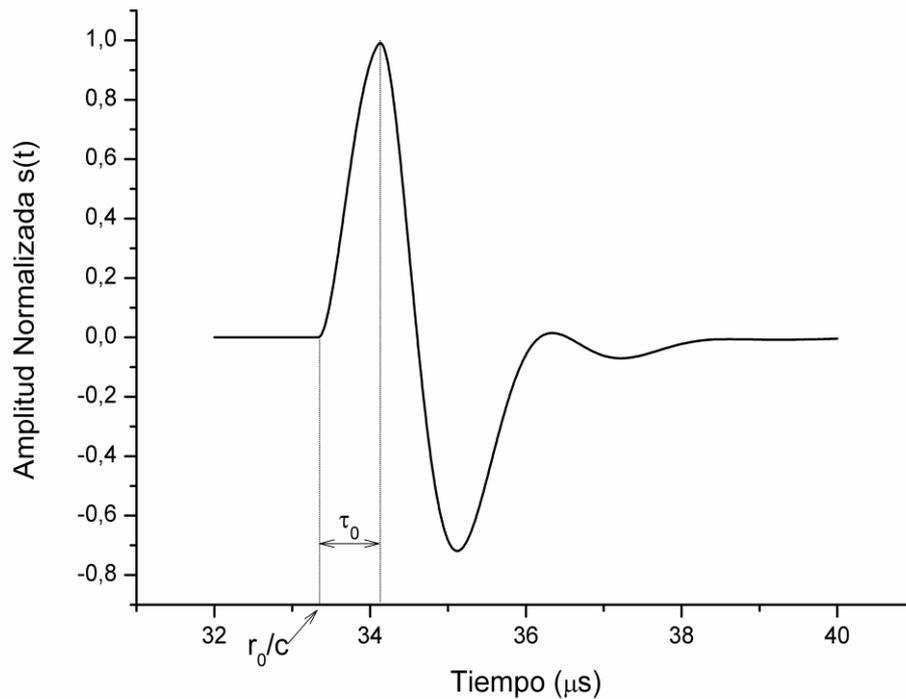
$$A_2 = \frac{T(1 - e^{2\tau_0/T}) e^{r_0/cT}}{q^2 T^2 + (pT - 1)^2} \quad B_2 = \frac{\pm e^{p r_0/c} \sqrt{a^2 + b^2}}{q(q^2 T^2 + (pT - 1)^2)} \quad \varphi_2 = \operatorname{arctg} \left( \frac{b}{a} \right)$$

$$\text{y donde} \quad a = e^{\tau_0 p} (qT \cos(\tau_0 q) - (pT - 1) \operatorname{sen}(\tau_0 q)) - qT$$

$$b = e^{\tau_0 p} (qT \operatorname{sen}(\tau_0 q) + (pT - 1) \cos(\tau_0 q)) - pT + 1$$



**Figura 5.4** Ajuste del modelo de sensor al sensor real usado en los experimentos. (a) Ajuste con la respuesta en frecuencia. (b) Ajuste con la respuesta al impulso.



**Figura 5.5** Forma de onda de la señal  $s(t)$  a la salida del sensor originada por una fractura en un material.

En la Fig. 5.5 se observa que la señal de salida del sensor se comporta como una oscilación que se amortigua rápidamente en el tiempo. La señal crece hasta alcanzar un valor máximo que se corresponde aproximadamente con el parámetro  $\tau_0$  y caracteriza el tiempo de subida del evento, en esta simulación este tiempo es aproximadamente de  $0.5 \mu s$ . La duración del evento en este caso es del orden de diez veces el tiempo de subida es decir aproximadamente  $5 \mu s$ .

En trabajos anteriores (Filipussi D.A., 2005) se pudo localizar en el evento mediante la elección adecuada del valor del umbral una componente determinística, y una componente asociada a los procesos estocásticos que rigen gran parte del proceso de EA. El evento presenta alrededor de su máximo una zona de comportamiento determinístico modelada por una ecuación diferencial de cuarto orden. Se obtuvo en dichos trabajos a partir de los resultados experimentales una distribución de duraciones para la componente determinística con una mediana de  $8 \mu s$ , valor que se corresponde adecuadamente con la duración obtenida en la simulación del evento en este trabajo.

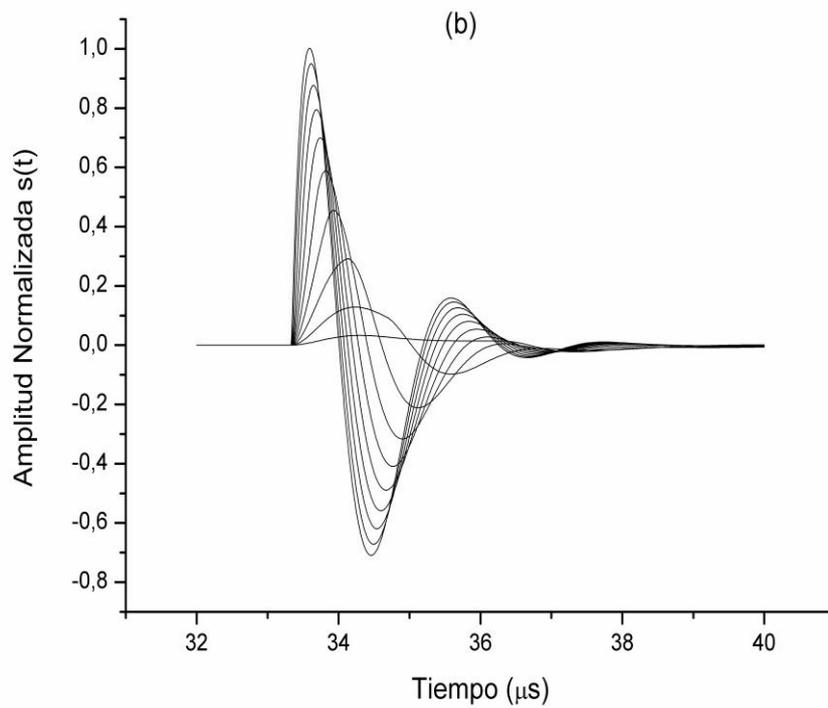
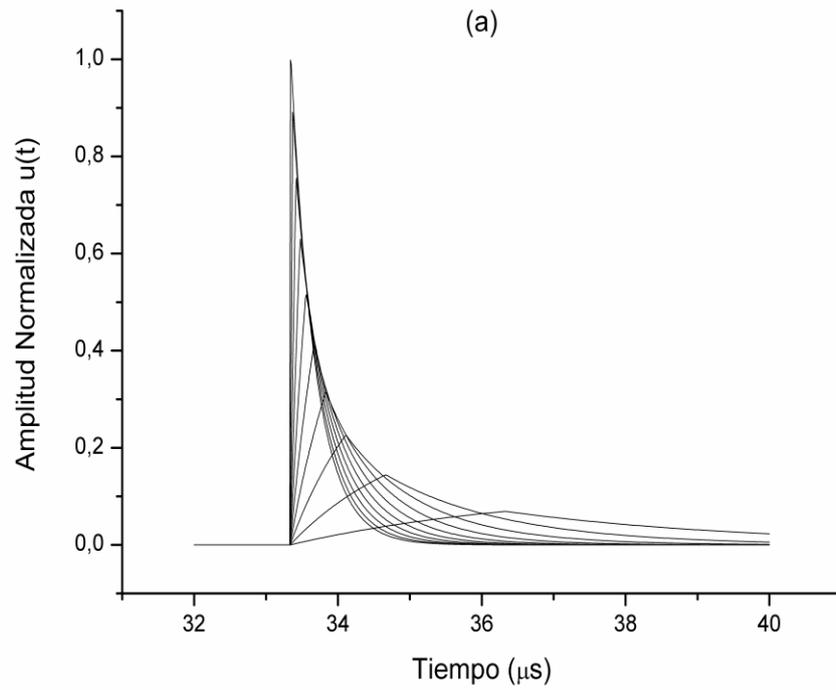
#### **5.1.4 Análisis de los cambios de forma de onda de la señal al variar las características de la fuente y del sensor.**

El modelo descrito anteriormente permite predecir la señal que se obtiene a la salida del sensor al variar las características de la fuente y el sensor. Esta señal es una simulación de un evento de EA cuya escala temporal corresponde a la observada experimentalmente. No ocurre lo mismo con su escala en amplitud. No obtuvimos directamente el campo de desplazamiento sino una magnitud proporcional al mismo. Existe una cadena de amplificaciones que no conocemos detalladamente que representa la ganancia del equipo de EA.

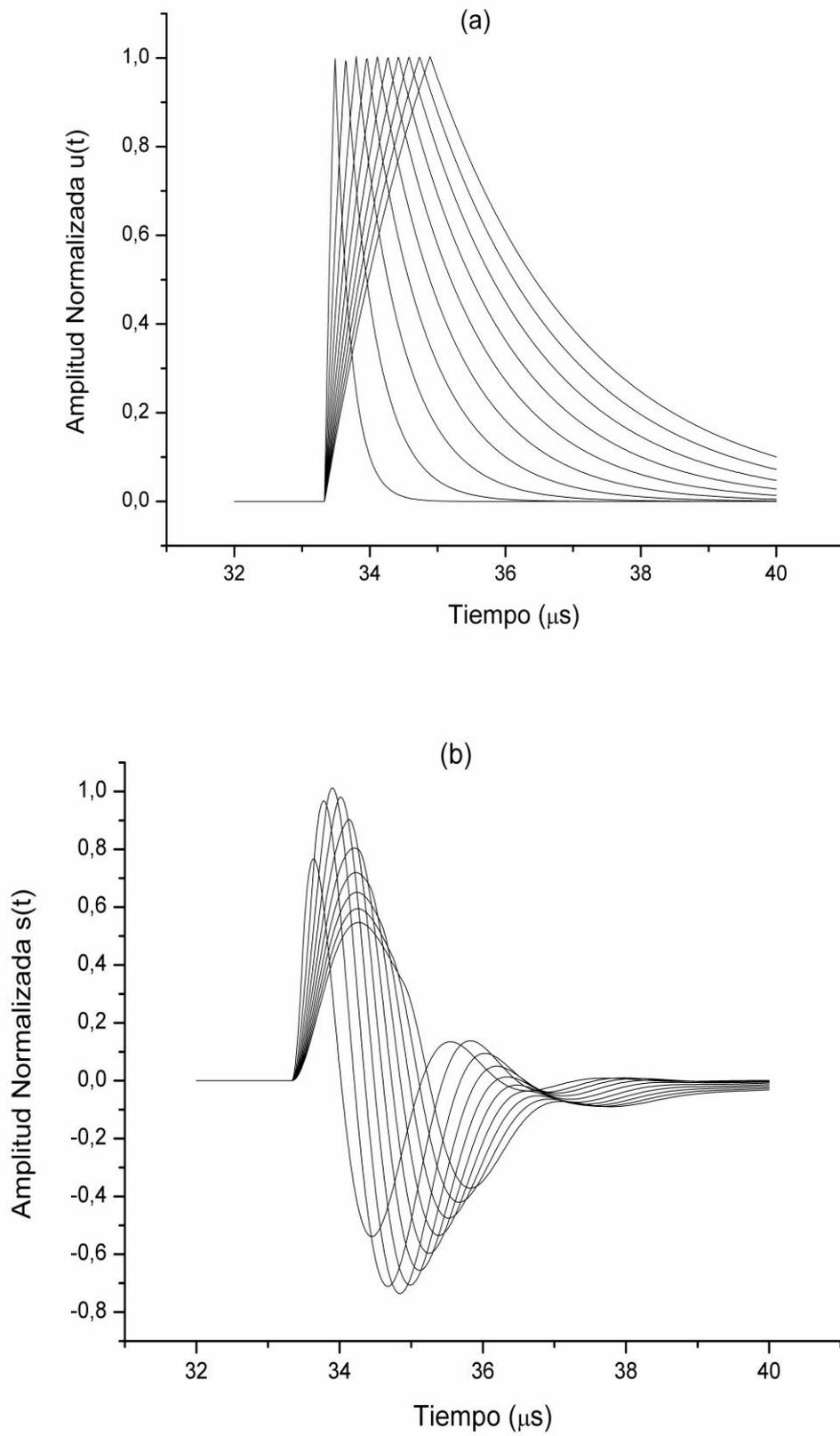
En la Fig. 5.6 se varió la velocidad de propagación de fractura del material. Dicha velocidad está directamente relacionada con la fragilidad del material. Se observa para  $u(t)$  un aumento de amplitud y disminución de la duración del evento cuanto más frágil es el material. Para  $s(t)$  la amplitud y la duración del evento sigue el mismo comportamiento de la señal de entrada. Esta respuesta del sistema a un aumento de la fragilidad del material se corresponde con la señal de salida calculada ya que se esperaría que la señal tienda a una señal impulsiva de corta duración y gran amplitud cuanto mayor sea la fragilidad del material.

En la Fig. 5.7 al variar el tamaño de la fractura (relación largo-ancho) se observa para  $u(t)$  una amplitud constante y un aumento en la duración cuando aumenta la longitud en relación al ancho de la fractura. Para  $s(t)$  la amplitud crece y luego decrece. Estas diferencias en el cambio de amplitud se deberían a la acción del sistema de detección. El cambio de la forma de la fractura no afecta la amplitud de la señal observada pues ésta no se relaciona con la geometría del problema sino con las características del material, si en cambio afecta a la duración de la señal pues cambia la cinemática del problema.

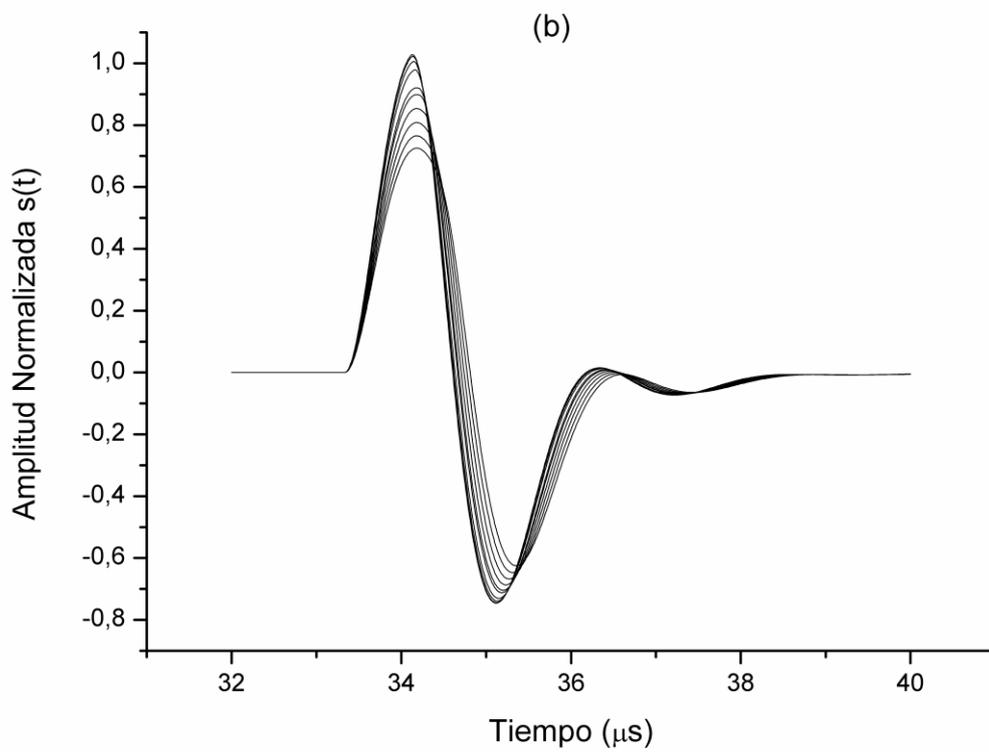
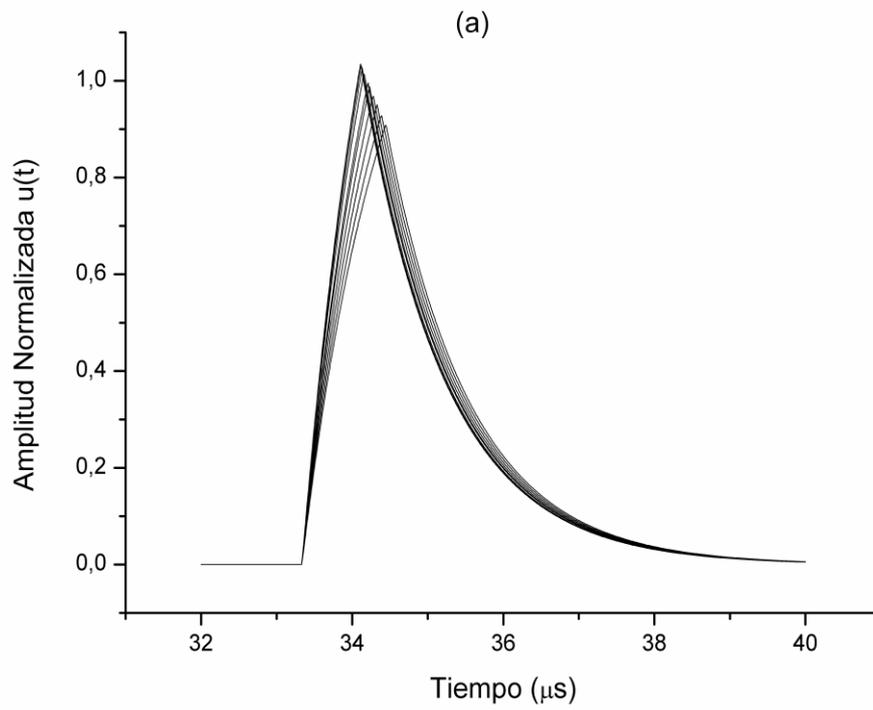
En la Fig. 5.8 se varió el ángulo de detección del detector. Se observa que al aumentar el ángulo de detección de  $0^\circ$  a  $90^\circ$  la amplitud del evento disminuye tanto a la entrada como a la salida del detector, y el tiempo de subida aumenta para la señal que llega al sensor, sin embargo a la salida del detector es aproximadamente constante. Esta disminución de la amplitud se explica por el cambio de direccionalidad de la onda elástica que viaja hacia el punto de observación, ésta se ve más atenuada al alejarse de la dirección principal de avance de la fractura.



**Figura 5.6** Formas de onda al variar la velocidad de fractura del material. (a) Señal a la entrada del sensor. (b) Señal a la salida del sensor.



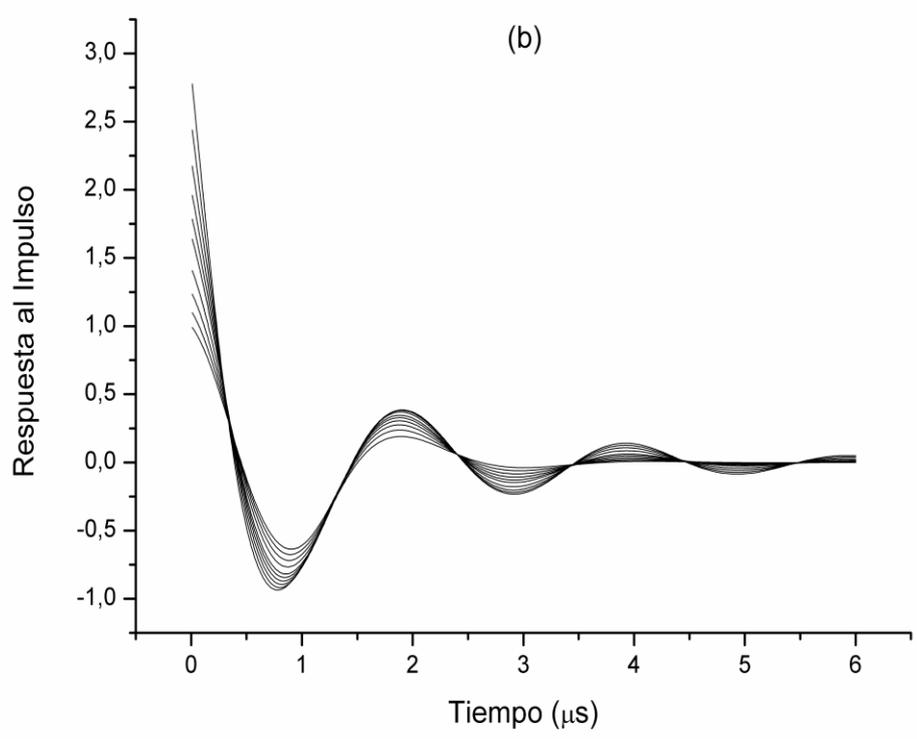
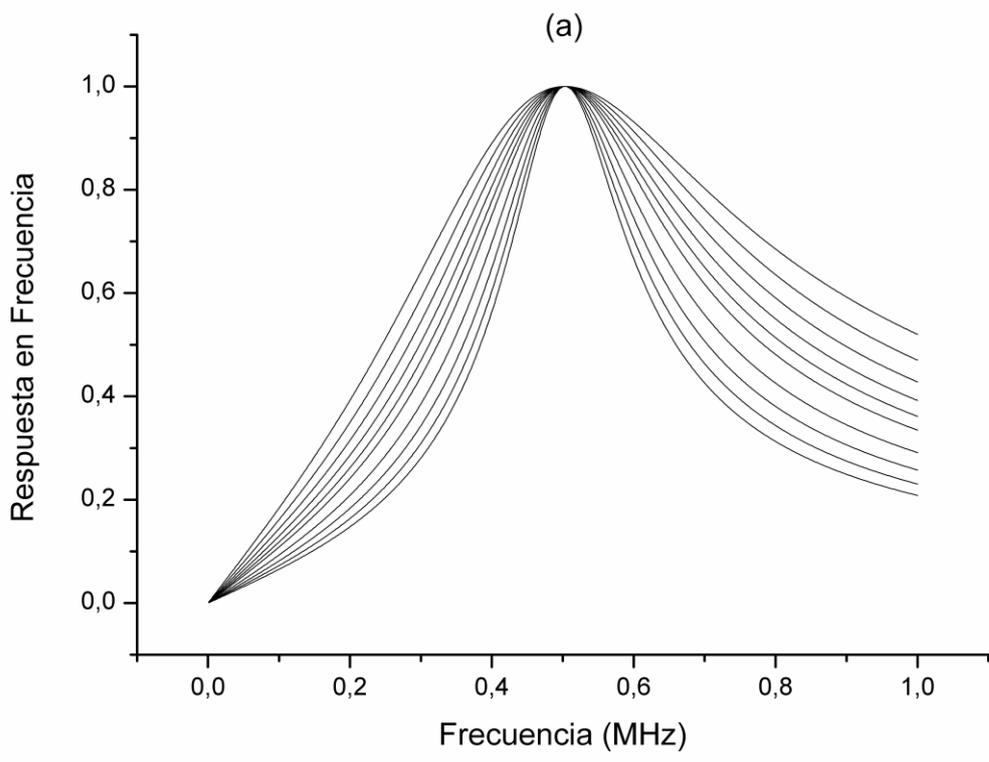
**Figura 5.7** Formas de onda al variar el tamaño de la fractura. (a) Señal a la entrada del sensor. (b) Señal a la salida del sensor.



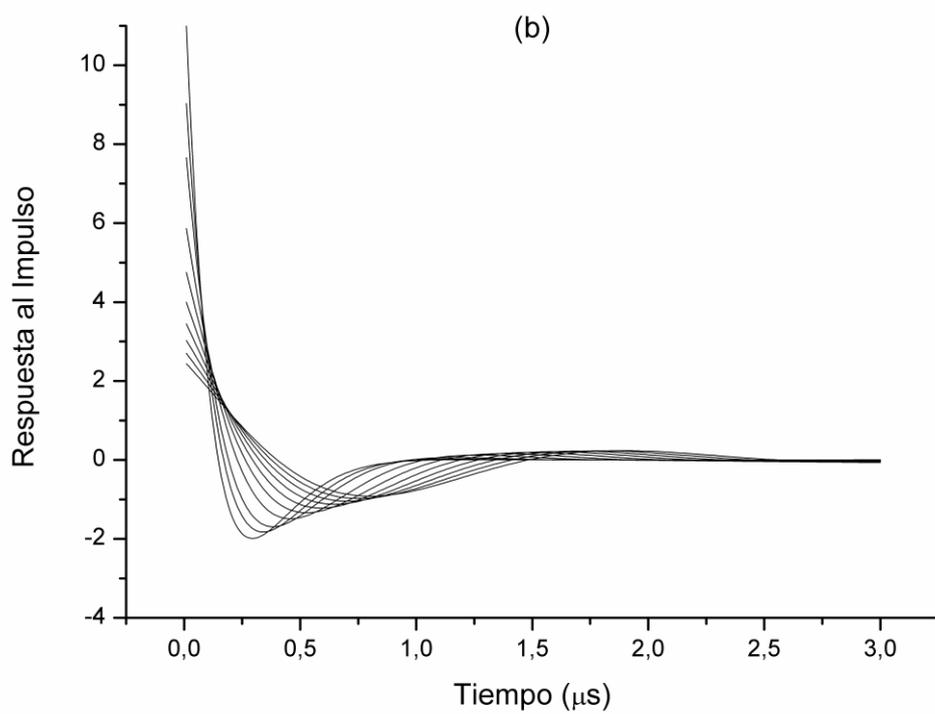
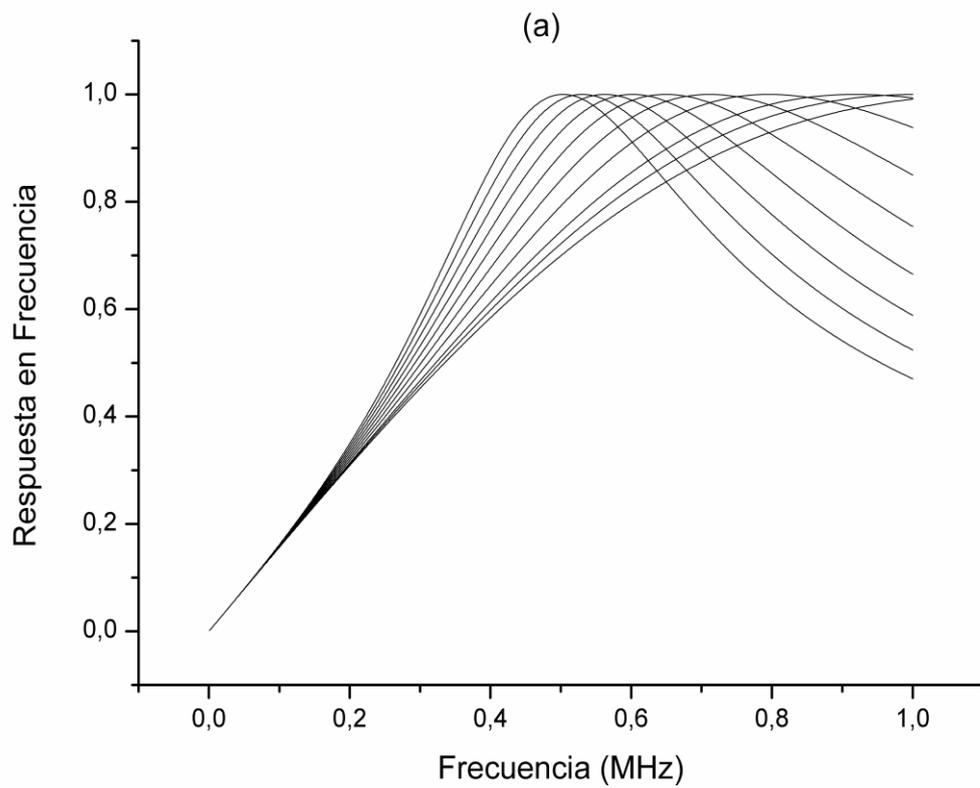
**Figura 5.8** Formas de onda al variar el ángulo de detección del sensor. (a) Señal a la entrada del sensor. (b) Señal a la salida del sensor.

Al variar la distancia del detector a la fuente de fractura no se observó cambio en la forma de la señal. La distancia si afecta al tiempo de llegada del evento y también a la amplitud, disminuyendo esta última a mayor distancia entre fuente y detector debido a la atenuación de la onda elástica.

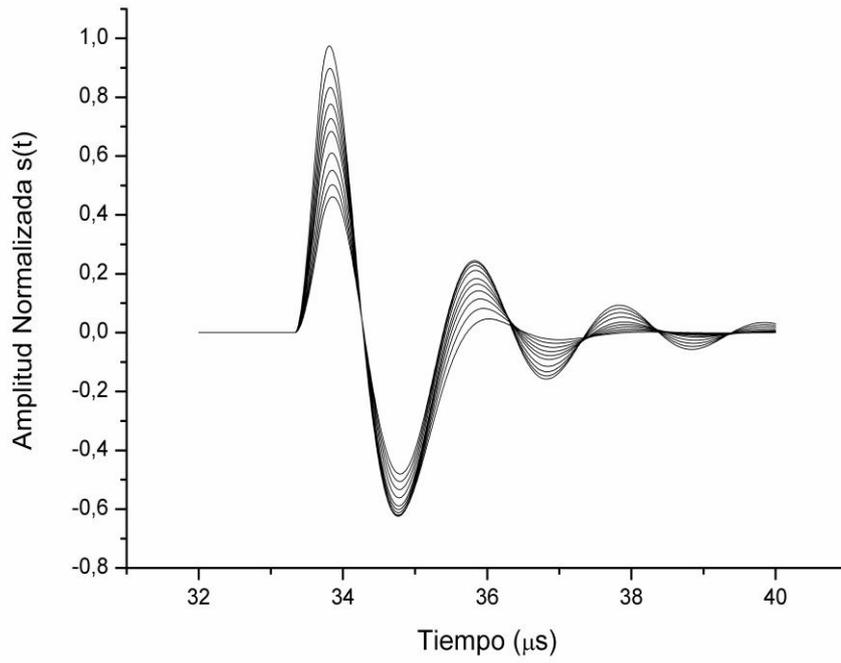
En las Fig. 5.9 y 5.10 se modificaron la respuesta del sensor variando el ancho de banda y la frecuencia de resonancia respectivamente. El efecto en la señal de salida se observa en las Fig. 5.11 y 5.12. Cuanto menor es el ancho de banda de la respuesta en frecuencia del sensor mayor es la amplitud de la señal de salida y se observa el mismo comportamiento en la respuesta impulsiva del sensor. Cuanto mayor es la frecuencia de resonancia del sensor la señal de salida aumenta la duración y disminuye la amplitud, el mismo comportamiento se observa en la respuesta impulsiva del sensor.



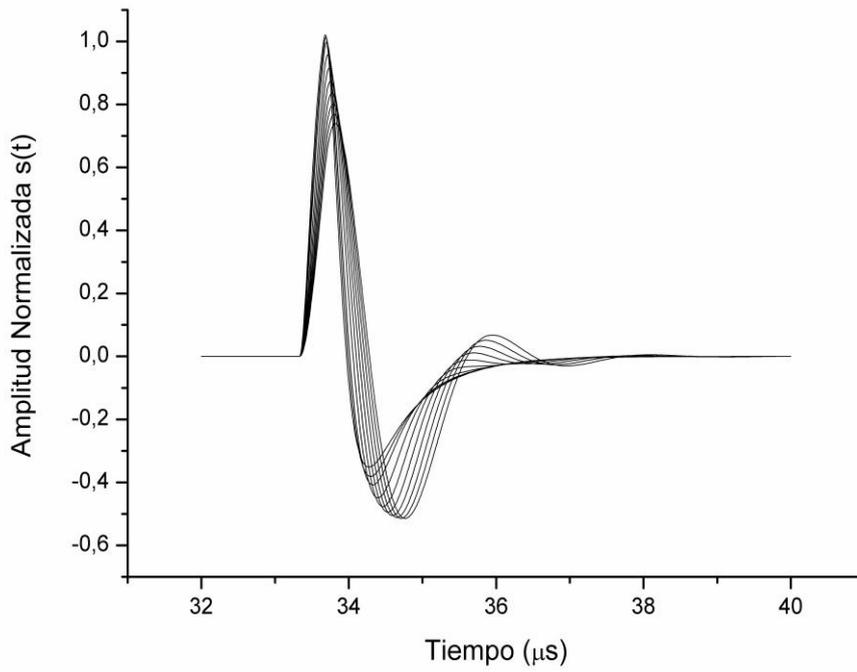
**Figura 5.9** Respuestas del sensor al variar el ancho de banda. (a) Respuesta en frecuencia. (b) Respuesta al impulso.



**Figura 5.10** Respuestas del sensor al variar la frecuencia de resonancia. (a) Respuesta en frecuencia. (b) Respuesta al impulso.



**Figura 5.11** Forma de onda de la señal a la salida del sensor al variar el ancho de banda del mismo.



**Figura 5.12** Forma de onda de la señal a la salida del sensor al variar la frecuencia de resonancia del mismo.

### 5.1.5 Espectro de amplitud del campo de desplazamiento

Se obtuvo la Ec. (5.15) para el espectro del campo de desplazamiento observado en la aproximación de campo lejano para una fuente de fractura de forma rectangular (ver Ec. 5.8 y desarrollo en el Apéndice B)

$$\hat{\Omega}(\mathbf{x}, \omega) = \frac{U_0 A}{T} \frac{\text{sen}(\tau_0 \omega / 2)}{\tau_0 \omega / 2} \frac{e^{-j\omega(\frac{r_0}{c} + \frac{\tau_0}{2})}}{\frac{1}{T} + j\omega} \quad (5.15)$$

$$\tau_0 = L(1 - \eta \cos \theta) / v \quad (5.16)$$

donde  $\tau_0$  es el tiempo de subida de la señal que llega al detector,  $L$  es el largo de la fractura  $r_0$  la posición del punto campo donde se mide el campo de desplazamiento,  $\theta$  el ángulo de detección,  $U_0$  es el valor máximo alcanzado por la discontinuidad del campo de desplazamiento y  $T$  el tiempo en alcanzar la discontinuidad del desplazamiento en la fractura, el 63% de  $U_0$ . Se define un coeficiente de ductilidad que aumenta cuando la velocidad de fractura  $v$  se acerca a la velocidad de propagación de onda  $c$  de la forma  $v = \eta c$  ( $0 < \eta < 1$ , aproximadamente  $\eta = 0.8$  para un material frágil y  $\eta = 0.2$  para un material dúctil).

Calculando el módulo

$$|\hat{\Omega}(\omega)| = \frac{U_0 A}{\sqrt{1 + \omega^2 T^2}} \left| \frac{\text{sen}(\tau_0 \omega / 2)}{\tau_0 \omega / 2} \right| \quad (5.17)$$

Analizando esta última expresión se obtiene que para bajas frecuencias,  $\omega \rightarrow 0$ , el espectro en módulo es constante y vale

$$\Omega_0 = U_0 A \quad (5.18)$$

donde se usó el límite  $\text{sen}\theta/\theta \rightarrow 1$  cuando  $\theta \rightarrow 0$ .

Para altas frecuencias,  $\omega \rightarrow +\infty$ , el espectro en módulo decae como  $\omega^{-2}$  de la forma

$$|\hat{\Omega}(\omega)| = \frac{U_0 A}{\tau_0 T \omega^2} \quad (5.19)$$

donde se promedió  $\langle |\text{sen}(\tau_0 \omega / 2)| \rangle = 1/2$

La intersección de las dos tendencias a baja y alta frecuencia determina la frecuencia esquina

$$\omega_c = \frac{1}{\sqrt{\tau_0 T}} \quad (5.20)$$

En el espectro determinado por el modelo se observa que la señal es constante a bajas frecuencias y luego decrece a altas frecuencias como la inversa del cuadrado de la frecuencia. El punto de

discontinuidad del espectro se denomina frecuencia esquina que se corresponde a un máximo del espectro y se prueba que ésta es inversamente proporcional a las dimensiones de la fractura.

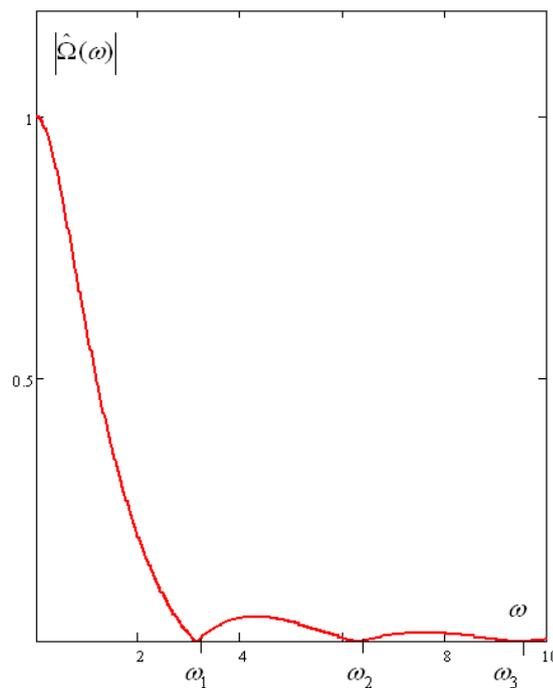
Considerando que el tiempo de subida de la señal detectada se corresponde con el tiempo en que aproximadamente se desarrolló la fractura podemos hacer la siguiente aproximación  $\tau_0 \approx T$  por consiguiente se obtiene

$$\omega_c = \frac{1}{\tau_0} \tag{5.21}$$

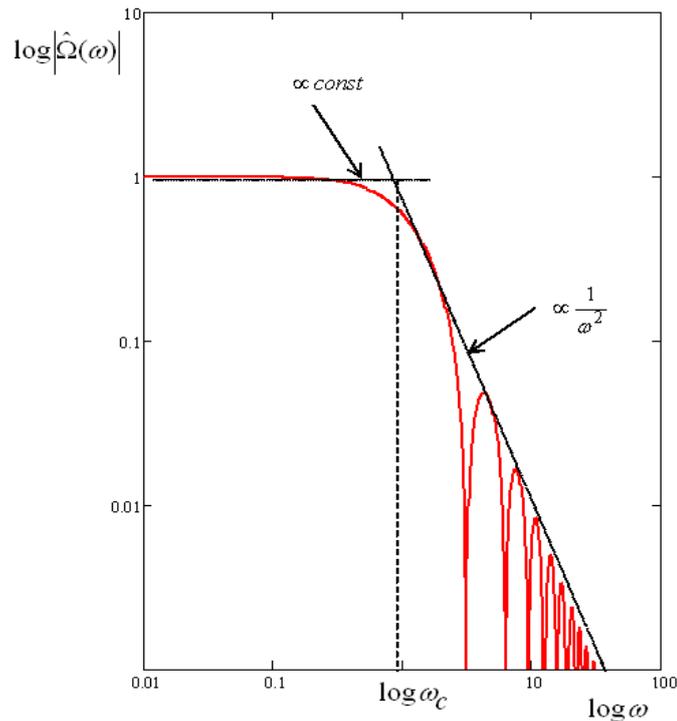
Reemplazando en la Ec. (5.16) se obtiene una relación que permitiría predecir la longitud de la fractura a partir del valor de la frecuencia esquina determinado por espectro de la señal detectada.

$$L = \frac{1}{2\pi f_c} \frac{v}{(1 - \eta \cos \theta)} \tag{5.22}$$

Así la longitud de fractura es inversamente proporcional a la frecuencia esquina. La longitud de la fractura es un parámetro que caracteriza a la fuente de emisión acústica y la frecuencia esquina es un parámetro que caracteriza a la señal detectada, de esta forma la Ec.(5.22) relaciona la fuente con la señal detectada.



**Figura 5.13** Gráfico del espectro de amplitud del campo de desplazamiento en el punto de detección.



**Figura 5.14** Gráfico en escala log-log del espectro de amplitud del campo de desplazamiento en el punto de detección y determinación de la frecuencia esquina.

## 5.2 Resultados experimentales

Los ensayos de cada probeta (desde el inicio del aumento de carga hasta la fractura), duraron desde 12 min para un avance de la herramienta de expansión a 0,75 mm/min hasta 5 min para un avance a 3 mm/min. Las cargas máximas alcanzadas en la fractura en estos casos fueron de 1022 N y 1217 N respectivamente. La mayoría de las probetas presentó fractura tipo arresto (se desarrolló sin fractura total de la probeta). El inicio de la fractura siempre fue en el punto debilitado de la probeta diseñado para tal fin. En estos casos es factible determinar una longitud de fractura indicando la velocidad adecuada de avance de la herramienta de expansión para estos ensayos en 1,5 mm/min.

El análisis de las señales de EA consistió, por una parte, en evaluar los parámetros de los eventos que caracterizaban a la fractura. El número total de eventos registrados por los sensores fue del orden de 60 eventos. El 80 % de los eventos fueron tomados por el canal 1 (sensor resonante) colocado más próximo al inicio de la fractura y estos eventos indicaron los valores máximos de los parámetros de la señal. El valor de la carga para cada evento presentó un crecimiento con el avance de la herramienta de expansión hasta alcanzar un máximo seguido de una caída abrupta. Este indicador de la fractura del material se tomó como referencia para determinar el o los eventos precursores de la fisura.

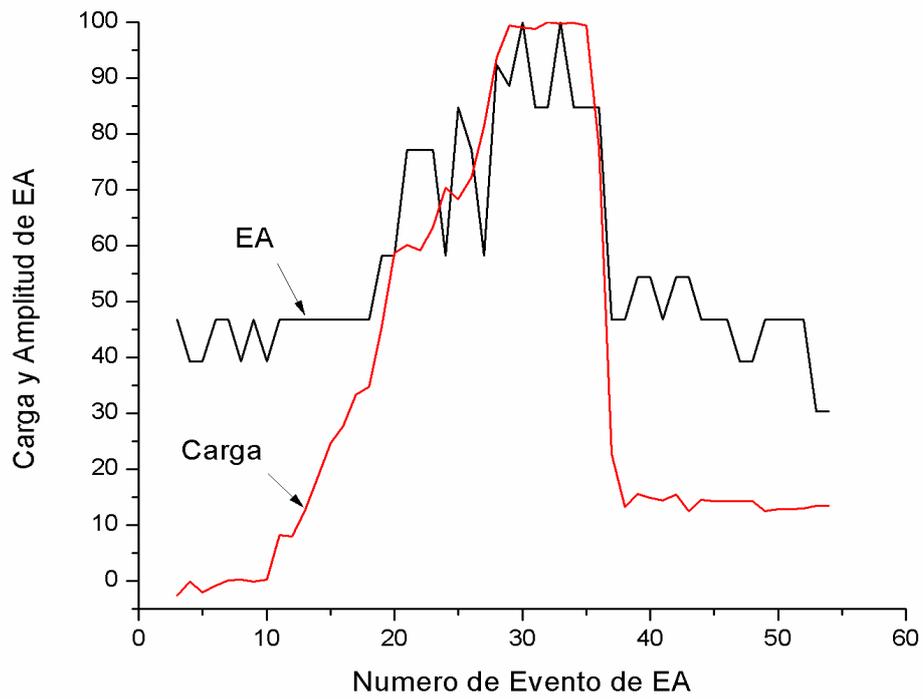
**Tabla 5.1** Descripción de parámetros máximos para los eventos de EA en las primeras tres probetas.

Probeta	Evento	Parámetros máximos de EA
1	31	C
1	32	A
1	33	RT
1	34	D, E, RMS
1	35, 36	RMS
2	59	A
2	60	C
2	61	D, E, RMS;RT
2	64, 65	RMS
2	67, 68	RMS
3	35	C
3	43	D, E, RMS, RT, A
3	44	A

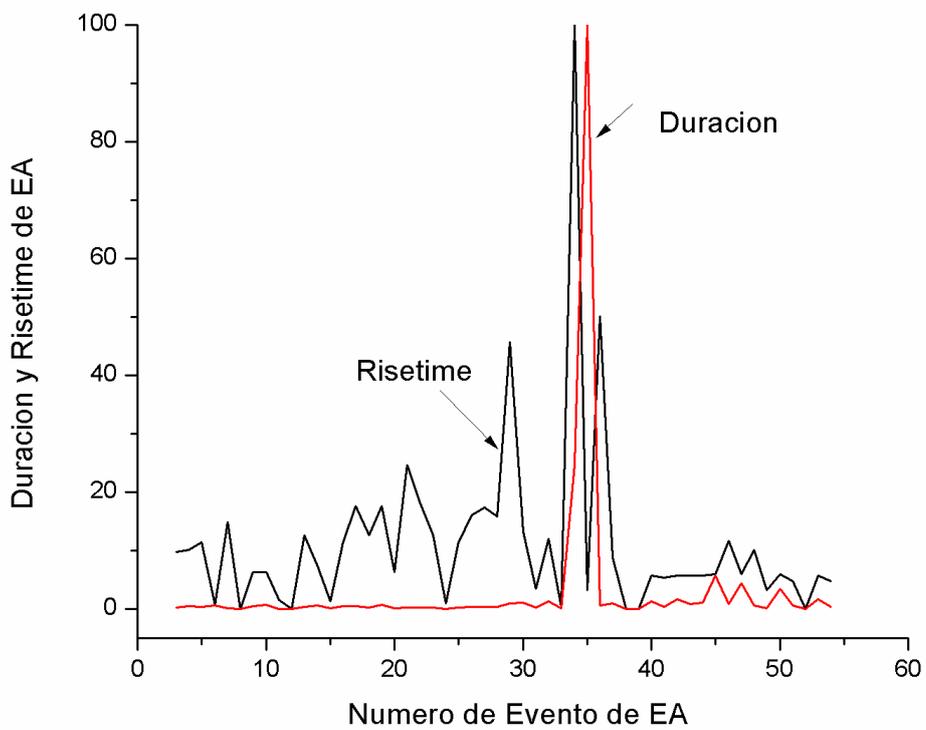
En la Tabla 5.1, se indican los parámetros de los eventos que alcanzaron valores máximos coincidentes con la fractura del material, a modo de ejemplo, para las tres primeras probetas; es similar para el resto de las mismas. Se usó la notación siguiente: A (Amplitud), RT (Risetime), D (Duración), E (Energía), RMS (Valor cuadrático medio) de los eventos y con C la carga. El criterio adoptado para determinar el evento que caracteriza a la fractura fue el que presentaba la mayor cantidad de parámetros máximos (eventos resaltados para cada probeta).

El paso siguiente del análisis fue, a partir del evento precursor, estudiar su forma de onda. Se obtuvo el espectro de Fourier del evento, previa elección de una ventana temporal que caracterizaba al mismo, y se filtró el espectro reduciendo el ruido de la señal. En las Figs. 5.15 a 5.18 se muestran distintos gráficos que indican la evolución de los parámetros de los eventos y la carga durante todo el ensayo a modo de ejemplo para la probeta 1; los valores de los parámetros de los eventos y la carga fueron normalizados a sus valores máximos.

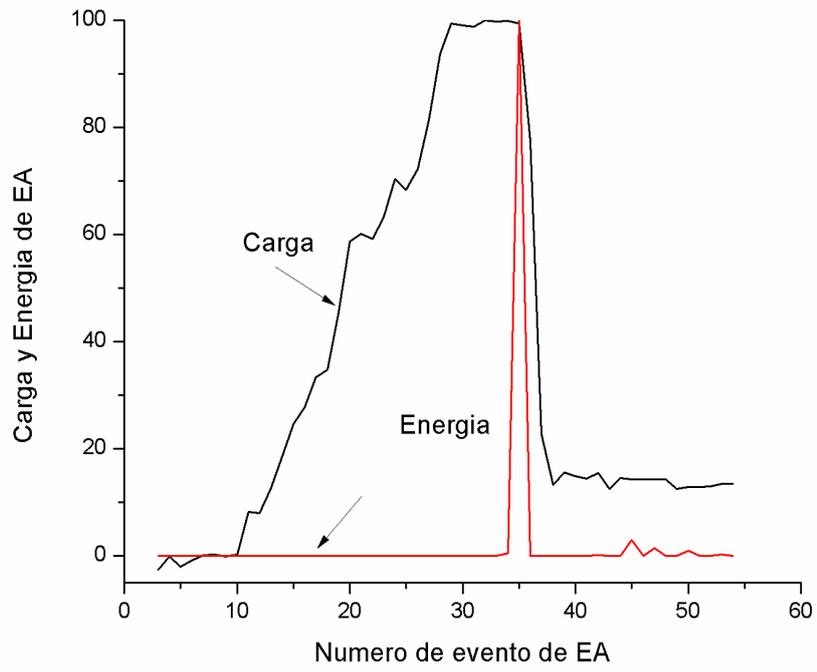
La carga que soporta el material tiene la misma forma de señal que la que presenta la amplitud de los eventos. El risetime presenta oscilaciones durante el proceso de carga y muestra un pico en la fractura. La duración de los eventos es similar al risetime, no presenta oscilaciones sino un valor constante bajo y el mismo pico en la fractura. Tanto la energía como el RMS alcanzan un pico en la fractura, el primero coincidiendo con la caída abrupta de la carga y el segundo mantiene un valor constante máximo durante toda la caída de la carga.



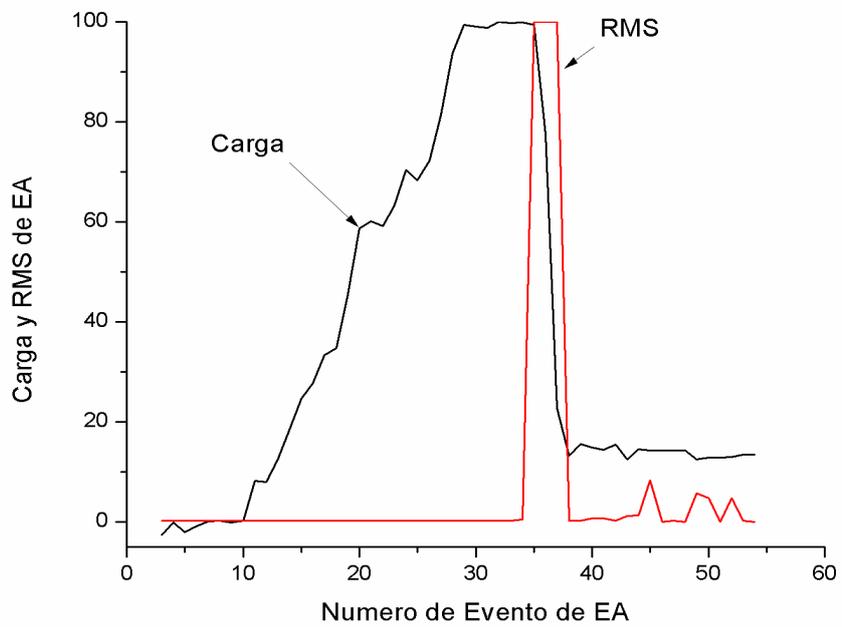
**Figura 5.15** Carga y amplitud de EA en función de los eventos registrados para la probeta 1.



**Figura 5.16** Risetime y duración de EA en función de los eventos registrados para la probeta 1.



**Figura 5.17.** Carga y energía de EA en función de los eventos registrados para la probeta 1.



**Figura 5.18.** Carga y RMS de EA en función de los eventos registrados para la probeta 1.

La correspondencia cualitativa (ver Figura 5.19) entre el espectro real de los eventos que caracterizan a una fractura y el propuesto por el modelo en trabajos anteriores permite concluir que el modelo de fractura propuesto para la EA es válido en esta área a pesar que los supuestos parten de la geofísica.

Del análisis de los parámetros de los eventos de EA se puede decir que en la fractura del material estos alcanzan valores máximos, como era de esperar, dado la gran liberación de energía que se presenta en la misma. La Tabla 5.2 y la Figura 5.20 muestran la correspondencia entre los valores de longitud de fractura predichos con el modelo y los obtenidos experimentalmente. Los valores son aproximadamente iguales en orden de magnitud. Los gráficos experimental y teórico fueron ajustados por cuadrados mínimos usando como parámetro libre el coeficiente  $\eta$  que da cuenta de la fragilidad del material y se obtuvo un valor de 0.94 cercano a 1 como era de esperar en un material frágil como el acrílico.

**Tabla 5.2** Frecuencia esquina y longitudes calculadas y medidas para 8 probetas como ejemplo.

PROBETA	FRECUENCIA ESQUINA (kHz)	LONGITUD CALCULADA (mm)	LONGITUD MEDIDA (mm)
1	160±10	27±3	27±1
2	136±10	37±5	23±1
3	136±10	37±5	20±1
4	133±10	39±6	43±1
5	129±10	41±6	38±1
6	168±10	25±3	24±1
7	148±10	31±4	42±1
8	141±10	34±5	33±1

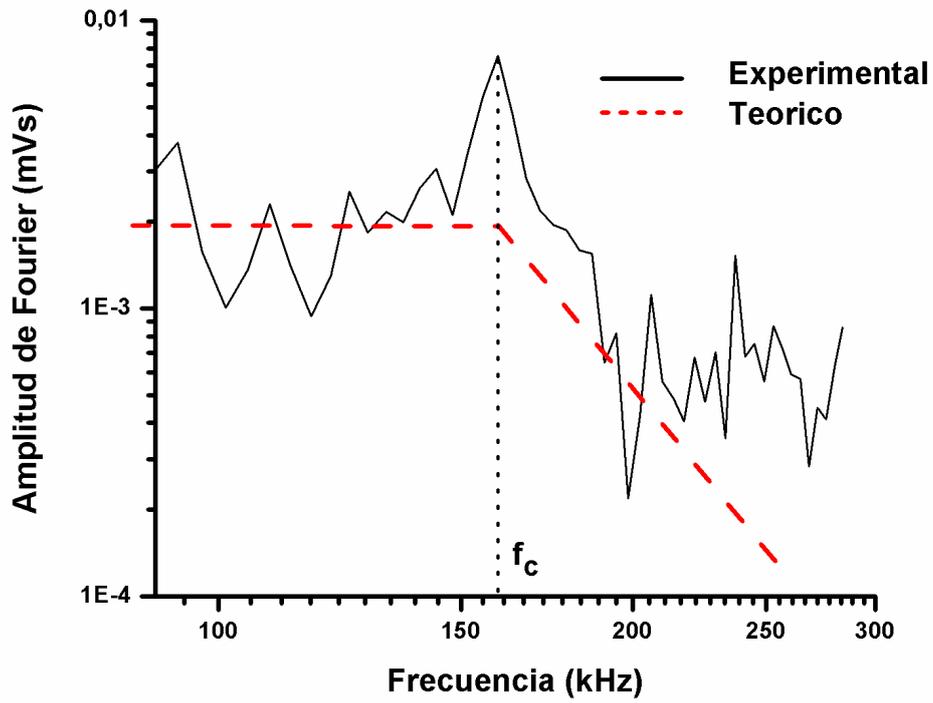


Figura 5.19 Espectro de Fourier teórico y experimental (probeta 1) de la amplitud de EA (escala log-log).

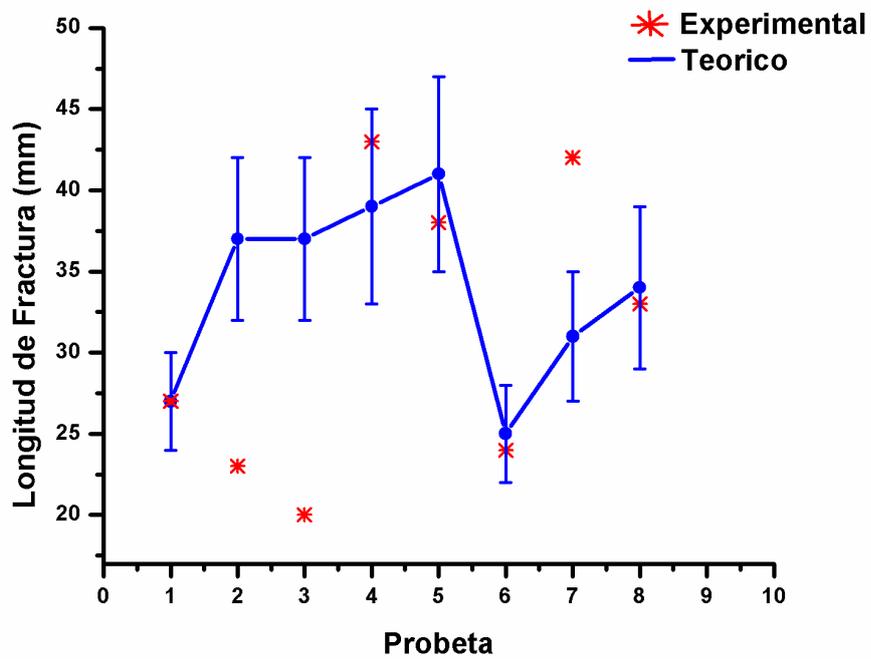


Figura 5.20 Gráfico de la longitud de la fractura experimental (cruces) y teórica (puntos) en función de las probetas.

## CONCLUSIONES

En este trabajo se desarrolló, a partir de la teoría de la sismología cuantitativa, un modelo que determina, con el uso de la función de Green, el campo de deformación en un punto lejano a una fuente de fractura y se realizaron experimentos para validar el modelo.

La señal a la salida del sensor representa adecuadamente la tendencia de un evento de Emisión Acústica (EA) real. El tiempo de subida así como la duración de la señal de salida quedan determinados por parámetros de la fuente de fractura. El valor obtenido para la duración del evento de EA con el presente modelo, se ajusta adecuadamente a resultados anteriores obtenidos tanto en determinaciones experimentales como modelados, con la ventaja que el presente modelo incluye una representación física de la fractura.

En el modelo teórico hay un parámetro libre que permite ajustar por cuadrados mínimos los datos experimentales. El parámetro libre es el coeficiente que informa de la fragilidad o ductilidad del material. El valor obtenido coincide con la alta fragilidad del material utilizado: acrílico.

La simulación del evento de EA, en este trabajo, predice la forma de la señal a la salida del detector variando la fragilidad del material, el tamaño de la fractura en la fuente y el ángulo de detección.

La correspondencia cualitativa entre el espectro real de los eventos que caracterizan a una fractura y el propuesto por el modelo que proviene de la geofísica permite concluir que el modelo propuesto para la EA es válido en el área de las pequeñas distancias espaciales del orden del cm. Como un ejemplo, para una probeta, el valor obtenido de la frecuencia esquina del espectro de Fourier de la señal de EA fue de  $(160 \pm 10)$  kHz que se corresponde en el modelo con una longitud de la fractura de  $(3,5 \pm 0,5)$  cm, coincidiendo este valor con el medido en la probeta luego de la rotura.

Hay un ajuste adecuado del modelo del sensor propuesto, como un sistema de segundo orden, con un sensor real.

Se diseñó y realizaron experimentos de fractura en material acrílico para determinar la longitud de la fractura a partir del espectro de las señales de emisión acústica como predice el modelo teórico.

Se concluye de los resultados experimentales del análisis de las señales de EA que: Los valores de energía y RMS de los eventos de EA permiten identificar aquellos que se corresponden con la rotura de las probetas: cuando alcanzan valores máximos. El espectro de las señales del evento de EA en la rotura se corresponde cualitativamente con los predicho por el modelo. En las probetas llevadas a la rotura la frecuencia esquina determina aproximadamente la longitud de la fractura. La señal de la carga que soporta el material, medida como un parámetro externo por el equipo de EA, tiene el

mismo comportamiento que la amplitud de los eventos. La señal de risetime presenta oscilaciones durante el proceso de carga y muestra un pico en la fractura. La duración de los eventos es similar al risetime, no presenta oscilaciones sino un valor constante bajo y el mismo pico en la fractura. Tanto la energía como el RMS alcanzan un pico en la fractura, el primero coincidiendo con la caída abrupta de la carga y el segundo mantiene un valor constante máximo durante toda la caída de la carga para luego decrecer abruptamente. Del análisis de los parámetros de los eventos de EA se puede decir que en la fractura del material estos alcanzan valores máximos, como era de esperar, dado la gran liberación de energía que se presenta en la misma.

Se presentó como una aplicación adicional de resolución analítica de las ecuaciones diferenciales de ondas elástica, la propagación de ondas elásticas en tubos viscoelásticos por el método de separación de variables y resultan soluciones analíticas exactas. Se discute la forma funcional de las ondas longitudinales y transversales que se propagan en el medio.

## APÉNDICE A

### Solución general de la ecuación de onda para un problema con simetría esférica por el formalismo de la función de Green

Dada  $\phi(\mathbf{x}, t)$  función de onda asociada a la propagación de una onda con velocidad  $c$  entonces la ecuación general de onda es

$$\ddot{\phi} - c^2 \nabla^2 \phi = F(\mathbf{x}, t) \quad (\text{A.1})$$

con condición inicial nula  $\phi(\mathbf{x}, 0) = 0$  y donde  $\ddot{\phi} = \partial^2 \phi / \partial t^2$ . La función de Green  $g(\mathbf{x}, t)$ , será la solución de la Ec. (A.1) para una función impulsiva en la posición  $\mathbf{x} = 0$  y a tiempo  $t = 0$

$$\ddot{g} - c^2 \nabla^2 g = \delta(\mathbf{x}) \delta(t) \quad (\text{A.2})$$

con condición inicial nula y donde  $\delta$  es la función impulso unitario delta de Dirac.

Se propone solución con simetría esférica es decir que  $g = g(r, t)$  con  $r = |\mathbf{x}|$ , luego el laplaciano en coordenadas esféricas con  $\partial_\theta \equiv 0$  y  $\partial_\phi \equiv 0$  (simetría de rotación) es

$$\nabla^2 g = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial g}{\partial r} \right) = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (rg) \quad (\text{A.3})$$

La última igualdad se justifica por los siguientes desarrollos:

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial g}{\partial r} \right) = \frac{1}{r^2} \left( 2r \frac{\partial g}{\partial r} + r^2 \frac{\partial^2 g}{\partial r^2} \right) = \frac{2}{r} \frac{\partial g}{\partial r} + \frac{\partial^2 g}{\partial r^2} \quad (\text{A.4})$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (rg) &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial}{\partial r} (rg) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( g + r \frac{\partial g}{\partial r} \right) = \frac{1}{r} \frac{\partial g}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial g}{\partial r} \right) = \\ &= \frac{1}{r} \frac{\partial g}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial g}{\partial r} + \frac{\partial^2 g}{\partial r^2} = \frac{2}{r} \frac{\partial g}{\partial r} + \frac{\partial^2 g}{\partial r^2} \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

Luego la ecuación homogénea asociada a la Ec. (A.2) será de la forma

$$\ddot{g} - c^2 \nabla^2 g = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{\partial^2 g}{\partial t^2} = c^2 \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (rg) \quad \rightarrow \quad \frac{\partial^2 (rg)}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 (rg)}{\partial r^2} \quad (\text{A.6})$$

La última ecuación de (A.6) es la conocida ecuación de onda unidimensional cuya solución dada por D'Alembert corresponde a dos funciones de onda viajeras:  $f_+$  con velocidad  $c$  y  $f_-$  con velocidad  $-c$

$$\frac{\partial^2 \phi(x, t)}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \phi(x, t)}{\partial x^2} \quad \rightarrow \quad \phi(x, t) = f_+ \left( t - \frac{x}{c} \right) + f_- \left( t + \frac{x}{c} \right) \quad (\text{A.7})$$

En nuestro caso de simetría esférica debe ser  $f_- \equiv 0$  pues  $f_+$  contiene a la solución  $f_-$ , por lo tanto la solución de (A.6) será de la forma

$$g(r,t) = \frac{1}{r} f\left(t - \frac{r}{c}\right) \quad (\text{A.8})$$

Luego se propone como solución general de la Ec.(A.2)

$$g(r,t) = \frac{A}{r} \delta\left(t - \frac{r}{c}\right) \quad (\text{A.9})$$

donde  $A$  es una constante a determinar y  $\delta$  es la función impulso unitario delta de Dirac.

Si la Ec.(A.9) es solución de la Ec.(A.2) deberá verificar esta última ecuación como sigue

$$\begin{aligned} \ddot{g} - c^2 \nabla^2 g &= \frac{A}{r} \delta''\left(t - \frac{r}{c}\right) - c^2 \nabla^2 \left(\frac{A}{r} \delta\left(t - \frac{r}{c}\right)\right) = \\ &= \frac{A}{r} \ddot{\delta}\left(t - \frac{r}{c}\right) - Ac^2 \left[ \nabla^2 \left(\frac{1}{r}\right) \delta\left(t - \frac{r}{c}\right) + \frac{1}{r} \nabla^2 \left(\delta\left(t - \frac{r}{c}\right)\right) + 2 \vec{\nabla} \left(\frac{1}{r}\right) \cdot \vec{\nabla} \left(\delta\left(t - \frac{r}{c}\right)\right) \right] \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

donde las derivadas primas temporales corresponden a derivar con respecto al argumento total:

$$\partial \delta / \partial t = (d\delta(\tau) / d\tau) (\partial \tau / \partial t) = \delta'(\tau) (\partial \tau / \partial t)$$

$$\partial \delta / \partial x_i = (d\delta(\tau) / d\tau) (\partial \tau / \partial x_i) = \delta'(\tau) (\partial \tau / \partial x_i)$$

y usando las identidades vectoriales:

$$\nabla^2(\phi\psi) = \psi \nabla^2 \phi + \phi \nabla^2 \psi + 2 \vec{\nabla} \phi \cdot \vec{\nabla} \psi \quad \nabla^2 \left(\frac{1}{r}\right) \equiv -4\pi \delta(\mathbf{x}) \quad \vec{\nabla} \left(\frac{1}{r}\right) \equiv -\frac{\mathbf{x}}{r^3}$$

y calculando  $\nabla^2 \left(\delta\left(t - \frac{r}{c}\right)\right)$ ,  $\vec{\nabla} \left(\delta\left(t - \frac{r}{c}\right)\right)$  usando la Ec.(A.5)

$$\nabla^2 \left(\delta\left(t - \frac{r}{c}\right)\right) = \frac{\partial^2 \left(\delta\left(t - \frac{r}{c}\right)\right)}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \left(\delta\left(t - \frac{r}{c}\right)\right)}{\partial r} = \frac{1}{c^2} \delta''\left(t - \frac{r}{c}\right) - \frac{2}{cr} \delta'\left(t - \frac{r}{c}\right)$$

$$\vec{\nabla} \left(\delta\left(t - \frac{r}{c}\right)\right) = \partial_i \delta\left(t - \frac{r}{c}\right) \hat{e}_i = \delta'\left(t - \frac{r}{c}\right) \left(-\frac{1}{c}\right) \partial_i r \hat{e}_i = -\frac{1}{c} \delta'\left(t - \frac{r}{c}\right) \frac{x_i}{r} \hat{e}_i = -\frac{1}{cr} \delta'\left(t - \frac{r}{c}\right) \mathbf{x}$$

y se calculó, con la convención de Einstein:  $r = (x_k x_k)^{1/2}$  de sumar índices iguales

$$\partial_i r = \partial_i (x_k x_k)^{1/2} = \frac{1}{2} (x_k x_k)^{-1/2} \partial_i (x_k x_k) = \frac{1}{2r} (x_k \partial_i x_k + x_k \partial_i x_k) = \frac{\delta_{ik} x_k}{r} = \frac{x_i}{r}$$

$$\partial_i \left(\frac{1}{r}\right) = \partial_i (x_k x_k)^{-1/2} = -\frac{1}{2} (x_k x_k)^{-3/2} \partial_i (x_k x_k) = -\frac{1}{2r^3} (x_k \partial_i x_k + x_k \partial_i x_k) = -\frac{\delta_{ik} x_k}{r^3} = -\frac{x_i}{r^3}$$

$$\partial^2_{ii} \left(\frac{1}{r}\right) = -\partial_i (x_i r^{-3}) = -\partial_i (x_i) r^{-3} - x_i \partial_i (r^{-3}) = -3r^{-3} + 3x_i r^{-4} \partial_i r = -3r^{-3} + 3x_i r^{-4} x_i r^{-1} = 0 \quad \text{si } r \neq 0$$

$$\iiint_{\mathbb{R}^3} \nabla^2 \left(\frac{1}{r}\right) d^3 x = \iiint_{\mathbb{R}^3} \nabla^2 \left(\frac{1}{r}\right) r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi = \iiint_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial (r^{-1})}{\partial r}\right) \sin \theta dr d\theta d\varphi = -4\pi$$

Entonces reemplazando en la Ec.(A.10)

$$\begin{aligned}
\ddot{g} - c^2 \nabla^2 g &= \\
&= \frac{A}{r} \delta''(t - \frac{r}{c}) - Ac^2 [-4\pi \delta(\mathbf{x}) \delta(t - \frac{r}{c}) + \frac{1}{c^2 r} \delta''(t - \frac{r}{c}) - \frac{2}{c r^2} \delta'(t - \frac{r}{c}) + 2 \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}}{r^3} \frac{1}{c r} \delta'(t - \frac{r}{c})] = \\
&= \frac{A}{r} (\delta''(t - \frac{r}{c}) - \delta''(t - \frac{r}{c})) + \frac{2}{c r^2} (\delta'(t - \frac{r}{c}) - \delta'(t - \frac{r}{c})) + 4\pi c^2 A \delta(\mathbf{x}) \delta(t - \frac{r}{c}) = \\
&= 4\pi c^2 A \delta(\mathbf{x}) \delta(t) \equiv \delta(\mathbf{x}) \delta(t) \quad \text{si } 4\pi c^2 A = 1
\end{aligned}$$

donde se usó  $r^2 = \mathbf{x} \cdot \mathbf{x}$

Entonces se verifica la Ec.(A.2) y además se obtiene que  $A = \frac{1}{4\pi c^2}$

Resumiendo la solución de la función de Green a la Ec.(A.2) con condiciones iniciales nulas es

$$\boxed{\ddot{g} - c^2 \nabla^2 g = \delta(\mathbf{x}) \delta(t) \rightarrow g(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{4\pi c^2 |\mathbf{x}|} \delta(t - \frac{|\mathbf{x}|}{c})} \quad (\text{A.11})$$

La solución de la Ec.(A.1) se obtiene entonces por la convolución del término no homogéneo  $F(\mathbf{x}, t)$  con la función de Green, esto es por el teorema de convolución para ecuaciones diferenciales lineales e invariantes en el tiempo

$$\phi(\mathbf{x}, t) = (F * g)(\mathbf{x}, t) = \int d\tau \iiint d^3 \xi F(\xi, \tau) g(\mathbf{x} - \xi, t - \tau) \quad (\text{A.13})$$

reemplazando la solución de la Ec.(A.12) en la Ec.(A.13) se obtiene para un recinto de integración de volumen  $V$

$$\phi(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{4\pi c^2} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \iiint_V \frac{F(\xi, \tau) \delta(t - \tau - \frac{|\mathbf{x} - \xi|}{c})}{|\mathbf{x} - \xi|} dV(\xi) \quad (\text{A.14})$$

y usando la propiedad de la función delta de Dirac  $\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \delta(t - \tau) d\tau = f(t)$

resulta finalmente la solución general de la ecuación de onda con condición inicial nula.

$$\ddot{\phi} - c^2 \nabla^2 \phi = F(\mathbf{x}, t) \rightarrow \phi(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{4\pi c^2} \iiint_V \frac{F(\xi, t - \frac{|\mathbf{x} - \xi|}{c})}{|\mathbf{x} - \xi|} dV \quad (\text{A.15})$$

## Ecuación dinámica de los medios elásticos homogéneos e isótropos

En el capítulo II se determinó la siguiente ecuación dinámica para el desplazamiento la Ec.(2.6)

$$\rho \ddot{\mathbf{u}} = \mathbf{f} + \vec{\nabla} \cdot \boldsymbol{\sigma} \quad (\text{A.16})$$

donde  $\mathbf{u}$  es el campo de desplazamiento,  $\rho$  la densidad,  $\mathbf{f}$  las fuerzas en volumen y  $\boldsymbol{\sigma}$  el tensor de tensiones. Para un medio lineal vale la ley de Hooke

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \quad (\text{A.17})$$

donde  $\mathbf{C}$  es el tensor que define las constantes elásticas del material y  $\boldsymbol{\varepsilon}$  el tensor de deformación Ec.(2.1)

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2}(\vec{\nabla} \mathbf{u} + (\vec{\nabla} \mathbf{u})^T) \quad (\text{A.18})$$

Además si el medio es isótropo vale la Ec.(2.5)

$$\mathbf{C} = c_{ijpq} \hat{e}_{ijpq} \rightarrow c_{ijpq} = \lambda \delta_{ij} \delta_{pq} + \mu (\delta_{ip} \delta_{jq} + \delta_{iq} \delta_{jp}) \quad (\text{A.19})$$

donde  $\lambda$  y  $\mu$  son las constantes de Lamé y  $\delta_{ij}$  es la función delta de Kronecker ( $\delta_{ij} = 0$  si  $i \neq j$  y  $\delta_{ij} = 1$  si  $i = j$ ). Para determinar la ecuación dinámica de los medios elásticos se reemplaza primero la Ec.(A.19) y la Ec.(A.18) en la Ec.(A.17) y se calcula el tensor de tensiones

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= c_{ijpq} \varepsilon_{pq} = \lambda \delta_{ij} \delta_{pq} \varepsilon_{pq} + \mu (\delta_{ip} \delta_{jq} + \delta_{iq} \delta_{jp}) \varepsilon_{pq} = \\ &= \frac{\lambda}{2} \delta_{ij} \delta_{pq} (\partial_p u_q + \partial_q u_p) + \frac{\mu}{2} (\delta_{ip} \delta_{jq} + \delta_{iq} \delta_{jp}) (\partial_p u_q + \partial_q u_p) = \\ &= \frac{\lambda}{2} \delta_{ij} (\partial_p u_p + \partial_p u_p) + \frac{\mu}{2} \delta_{ip} \delta_{jq} (\partial_p u_q + \partial_q u_p) + \frac{\mu}{2} \delta_{iq} \delta_{jp} (\partial_p u_q + \partial_q u_p) = \\ &= \lambda \delta_{ij} \partial_p u_p + \frac{\mu}{2} (\partial_i u_j + \partial_j u_i) + \frac{\mu}{2} (\partial_j u_i + \partial_i u_j) = \lambda \delta_{ij} \partial_p u_p + \mu (\partial_i u_j + \partial_j u_i) \end{aligned} \quad (\text{A.20})$$

ecuación que se escribe

$$\boldsymbol{\sigma} = \lambda \mathbf{I} \nabla \cdot \mathbf{u} + 2\mu \boldsymbol{\varepsilon} \quad (\text{A.21})$$

donde  $\mathbf{I}$  es el tensor identidad. Reemplazando la Ec.(A.21) en la Ec.(A.16) resulta

$$\begin{aligned} \rho \ddot{u}_i &= f_i + \partial_j \sigma_{ij} = f_i + \partial_j (\lambda \delta_{ij} \partial_p u_p + \mu (\partial_i u_j + \partial_j u_i)) = \\ &= f_i + \lambda \delta_{ij} \partial_j \partial_p u_p + \mu (\partial_j \partial_i u_j + \partial_j \partial_j u_i) = f_i + \lambda \partial_i \partial_p u_p + \mu (\partial_j \partial_i u_j + \partial_{jj}^2 u_i) = \\ &= f_i + \lambda \partial_i \partial_p u_p + \mu (\partial_i \partial_j u_j + \partial_{jj}^2 u_i) = f_i + (\lambda + \mu) \partial_i \partial_j u_j + \mu \partial_{jj}^2 u_i \end{aligned} \quad (\text{A.22})$$

ecuación que se escribe

$$\rho \ddot{\mathbf{u}} = \mathbf{f} + (\lambda + \mu) \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \mathbf{u}) + \mu \nabla^2 \mathbf{u} \quad (\text{A.23})$$

y finalmente usando la identidad

$$\nabla^2 \mathbf{A} = \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \mathbf{A}) - \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \mathbf{A}) \quad (\text{A.24})$$

resulta la ecuación dinámica de los medios elásticos homogéneos e isótropos

$$\boxed{\rho \ddot{\mathbf{u}} = \mathbf{f} + (\lambda + 2\mu) \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \mathbf{u}) - \mu \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \mathbf{u})} \quad (\text{A.25})$$

### Teorema de Lamé. Potenciales de Helmholtz

El teorema de Lamé determina las ecuaciones de onda que resuelven la Ec.(A.25) proponiendo una solución  $\mathbf{u}$  escrita en términos de un campo escalar  $\phi$  y un campo vectorial  $\boldsymbol{\psi}$  conocidos como potenciales de Helmholtz del campo  $\mathbf{u}$ . La solución escrita de esta forma da un sentido físico al problema ya que descompone al campo de desplazamiento en dos componentes que se corresponden con una onda P y una onda S como se verá a continuación.

Se propone descomponer al campo  $\mathbf{u}$  como sigue

$$\mathbf{u} = \vec{\nabla} \phi + \vec{\nabla} \times \boldsymbol{\psi} \quad \text{Imponiendo} \quad \vec{\nabla} \cdot \boldsymbol{\psi} = 0 \quad (\text{A.26})$$

luego la Ec.(A.25) es separable en otras dos ecuaciones siempre y cuando se proponga la misma descomposición de  $\mathbf{u}$  para  $\mathbf{f}$  las fuerzas en volumen, es decir que existan dos campos  $\Phi$  y  $\boldsymbol{\Psi}$  que verifiquen

$$\mathbf{f} = \vec{\nabla} \Phi + \vec{\nabla} \times \boldsymbol{\Psi} \quad \text{Imponiendo} \quad \vec{\nabla} \cdot \boldsymbol{\Psi} = 0 \quad (\text{A.27})$$

Reemplazando la Ec.(A.26) y la Ec. (A.27) en la Ec.(A.25) y usando las siguientes identidades

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \phi) \equiv 0 \quad \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \boldsymbol{\psi}) \equiv 0 \quad (\text{A.28})$$

se obtienen los resultados

$$\vec{\nabla} \cdot \mathbf{u} = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \phi + \vec{\nabla} \times \boldsymbol{\psi}) = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \phi + \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \boldsymbol{\psi}) = \nabla^2 \phi$$

$$\vec{\nabla} \times \mathbf{u} = \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \phi + \vec{\nabla} \times \boldsymbol{\psi}) = \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \phi) + \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \boldsymbol{\psi}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \boldsymbol{\psi}) - \nabla^2 \boldsymbol{\psi} = -\nabla^2 \boldsymbol{\psi}$$

$$\rho \ddot{\mathbf{u}} = \mathbf{f} + (\lambda + 2\mu) \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \mathbf{u}) - \mu \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \mathbf{u})$$

$$\rightarrow \rho(\vec{\nabla} \ddot{\phi} + \vec{\nabla} \times \ddot{\boldsymbol{\psi}}) = \vec{\nabla} \Phi + \vec{\nabla} \times \boldsymbol{\Psi} + (\lambda + 2\mu) \vec{\nabla}(\nabla^2 \phi) - \mu \vec{\nabla} \times (-\nabla^2 \boldsymbol{\psi})$$

$$\rightarrow \vec{\nabla}(\rho \ddot{\phi} - (\lambda + 2\mu) \nabla^2 \phi - \Phi) + \vec{\nabla} \times (\rho \ddot{\boldsymbol{\psi}} - \mu \nabla^2 \boldsymbol{\psi} - \boldsymbol{\Psi}) = 0 \quad (\text{A.29})$$

$$\rightarrow \begin{cases} \rho \ddot{\phi} - (\lambda + 2\mu) \nabla^2 \phi - \Phi = 0 \\ \rho \ddot{\boldsymbol{\psi}} - \mu \nabla^2 \boldsymbol{\psi} - \boldsymbol{\Psi} = 0 \end{cases}$$

luego

$$\begin{cases} \ddot{\phi} - \alpha^2 \nabla^2 \phi = \frac{\Phi}{\rho} \\ \ddot{\boldsymbol{\psi}} - \beta^2 \nabla^2 \boldsymbol{\psi} = \frac{\boldsymbol{\Psi}}{\rho} \end{cases} \quad (\text{A.30})$$

donde  $\alpha = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho}$  y  $\beta = \sqrt{\mu/\rho}$ . Para pasar de la Ec.(A.29) a las ecuaciones siguientes se aplicó el teorema

$$\vec{\nabla}A + \vec{\nabla} \times \mathbf{B} = 0 \quad \text{con} \quad \vec{\nabla} \cdot \mathbf{B} = 0 \quad \Rightarrow \quad A = 0 \quad \wedge \quad \mathbf{B} = 0 \quad (\text{A.31})$$

Las ecuaciones Ec.(A.30) son ecuaciones de onda para los campos escalar  $\phi$  y vectorial  $\boldsymbol{\psi}$ . Las velocidades de propagación de onda  $\alpha$  y  $\beta$  corresponden a una onda longitudinal (onda P) y una onda transversal (onda S) respectivamente. La solución de las Ec.(A.30) se determinó en la sección anterior, en la Ec.(A.15) y se escribe

$$\phi(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{4\pi\rho\alpha^2} \iiint_V \frac{\Phi(\boldsymbol{\xi}, t - \frac{|\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}|}{\alpha})}{|\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}|} dV(\boldsymbol{\xi}) \quad (\text{A.32})$$

$$\boldsymbol{\psi}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{4\pi\rho\beta^2} \iiint_V \frac{\boldsymbol{\Psi}(\boldsymbol{\xi}, t - \frac{|\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}|}{\beta})}{|\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}|} dV(\boldsymbol{\xi}) \quad (\text{A.33})$$

El problema se completa determinando los potenciales de Helmholtz  $\Phi$  y  $\boldsymbol{\Psi}$  de las fuerzas en volumen  $\mathbf{f}$  como en la Ec.(A.27). Se propone entonces encontrar un campo  $\mathbf{H}$  que verifique

$$\begin{cases} \Phi = \vec{\nabla} \cdot \mathbf{H} \\ \boldsymbol{\Psi} = -\vec{\nabla} \times \mathbf{H} \end{cases} \quad (\text{A.34})$$

Luego se verifica reemplazando en la Ec.(A.27)

$$\mathbf{f} = \vec{\nabla}\Phi + \vec{\nabla} \times \boldsymbol{\Psi} = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \mathbf{H}) + \vec{\nabla} \times (-\vec{\nabla} \times \mathbf{H}) = \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \mathbf{H}) + \nabla^2 \mathbf{H} - \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \mathbf{H}) = \nabla^2 \mathbf{H}$$

resulta la ecuación de Poisson para un campo vectorial

$$\nabla^2 \mathbf{H} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \quad (\text{A.35})$$

Esta ecuación es un caso especial de la ecuación de onda Ec.(A.15) para un campo vectorial en el caso que la parte no homogénea no depende del tiempo y fijando  $c = 1$  resulta

$$\ddot{\mathbf{H}} - c^2 \nabla^2 \mathbf{H} = \mathbf{F}(\mathbf{x}, t) \quad \rightarrow \quad \mathbf{f} = \nabla^2 \mathbf{H} = -\mathbf{F} \quad \rightarrow \quad \mathbf{H}(\mathbf{x}) = \frac{-1}{4\pi} \iiint_V \frac{\mathbf{f}(\boldsymbol{\xi})}{|\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}|} dV \quad (\text{A.36})$$

Finalmente la solución de la ecuación dinámica de los medios elásticos homogéneos e isótropos Ec.(A.25) es resuelta aplicando el teorema de Lamé utilizando los potenciales de Helmholtz al reemplazar las Ec.(A.32) y (A.33) en la Ec.(A.26) determinando así el campo  $\mathbf{u}$  (una vez resuelto previamente el campo  $\mathbf{f}$  al reemplazar la Ec.(A.34) en la Ec.(A.27) usando la Ec.(A.36)).

### **Determinación de la función de Green para la ecuación dinámica de los medios elásticos homogéneos e isótropos**

La función de Green  $g(\mathbf{x}, t)$  para la ecuación dinámica de los medios elásticos homogéneos e isótropos, será la solución de la Ec. (A.25) para una fuerza en volumen impulsiva en la posición  $\mathbf{x} = 0$

y a tiempo  $t=0$  aplicada en la dirección del versor  $\hat{\mathbf{x}}_k$ ,  $k=1,2,3$  del sistema de coordenadas cartesiano sin pérdida de generalidad en la solución final, es decir

$$\rho \ddot{\mathbf{g}} = \delta(\mathbf{x})\delta(t) \hat{\mathbf{x}}_k + (\lambda + 2\mu)\vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \mathbf{g}) - \mu\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \mathbf{g}) \quad (\text{A.37})$$

con condición inicial nula. Se propone entonces una solución para  $\mathbf{g}$  de la forma

$$\mathbf{g} = \vec{\nabla}\phi + \vec{\nabla} \times \boldsymbol{\Psi} \quad \text{imponiendo} \quad \vec{\nabla} \cdot \boldsymbol{\Psi} = 0 \quad (\text{A.38})$$

Aplicando el teorema de Lamé de la sección anterior se determina primero los potenciales de Helmholtz  $\Phi$  y  $\boldsymbol{\Psi}$  que cumplen

$$\delta(\mathbf{x})\delta(t) \hat{\mathbf{x}}_k = \vec{\nabla}\Phi + \vec{\nabla} \times \boldsymbol{\Psi} \quad \text{imponiendo} \quad \vec{\nabla} \cdot \boldsymbol{\Psi} = 0 \quad (\text{A.39})$$

Usando la Ec.(A.34) se determina el campo  $\mathbf{H}(\mathbf{x},t)$  que verifica las Ec.(A.32)

$$\mathbf{H}(\mathbf{x},t) = \frac{-1}{4\pi} \iiint_V \frac{\delta(\boldsymbol{\xi})\delta(t) \hat{\mathbf{x}}_k}{|\mathbf{x}-\boldsymbol{\xi}|} d^3\xi = \frac{-\delta(t)}{4\pi|\mathbf{x}|} \hat{\mathbf{x}}_k \quad (\text{A.40})$$

luego se calculan los potenciales

$$\left\{ \begin{aligned} \Phi(\mathbf{x},t) &= \vec{\nabla} \cdot \mathbf{H} = \frac{-\delta(t)}{4\pi} \vec{\nabla} \cdot \left( \frac{\hat{\mathbf{x}}_k}{|\mathbf{x}|} \right) = \frac{-\delta(t)}{4\pi} \partial_i \left( \frac{1}{|\mathbf{x}|} \right) \hat{\mathbf{x}}_i \cdot \hat{\mathbf{x}}_k = \\ &= \frac{-\delta(t)}{4\pi} \left( \frac{-x_i}{|\mathbf{x}|^3} \right) \delta_{ik} = \frac{\delta(t)}{4\pi} \frac{x_k}{|\mathbf{x}|^3} \\ \boldsymbol{\Psi}(\mathbf{x},t) &= -\vec{\nabla} \times \mathbf{H} = \frac{\delta(t)}{4\pi} \vec{\nabla} \times \left( \frac{\hat{\mathbf{x}}_k}{|\mathbf{x}|} \right) = \frac{\delta(t)}{4\pi} \varepsilon_{ipq} \partial_p \left( \frac{\delta_{qk}}{|\mathbf{x}|} \right) \hat{\mathbf{x}}_i = \\ &= \frac{\delta(t)}{4\pi} \varepsilon_{ipq} \delta_{qk} \partial_p \left( \frac{1}{|\mathbf{x}|} \right) \hat{\mathbf{x}}_i = -\varepsilon_{ipk} \frac{\delta(t)}{4\pi} \frac{x_p}{|\mathbf{x}|^3} \hat{\mathbf{x}}_i = \varepsilon_{ikp} \frac{\delta(t)}{4\pi} \frac{x_p}{|\mathbf{x}|^3} \hat{\mathbf{x}}_i \end{aligned} \right. \quad (\text{A.41})$$

donde se aplicó el tensor de Levi-Civita:  $\varepsilon_{ijk} = 0,1,-1$ , según sea algún índice repetido en el primer caso, una permutación par en el segundo caso y una permutación impar en el último caso.

Luego los potenciales de Helmholtz  $\phi$  y  $\boldsymbol{\Psi}$  de  $\mathbf{g}$  se determinan por las Ec.(A.32) y Ec.(A.33)

$$\phi(\mathbf{x},t) = \frac{1}{(4\pi\alpha)^2 \rho} \iiint_V \frac{\delta(t - \frac{|\mathbf{x}-\boldsymbol{\xi}|}{\alpha})}{|\mathbf{x}-\boldsymbol{\xi}|} \frac{\xi_k}{|\boldsymbol{\xi}|^3} dV(\boldsymbol{\xi}) \quad (\text{A.42})$$

$$\boldsymbol{\Psi}(\mathbf{x},t) = \frac{\varepsilon_{ikp} \hat{\mathbf{x}}_i}{(4\pi\beta)^2 \rho} \iiint_V \frac{\delta(t - \frac{|\mathbf{x}-\boldsymbol{\xi}|}{\beta})}{|\mathbf{x}-\boldsymbol{\xi}|} \frac{\xi_p}{|\boldsymbol{\xi}|^3} dV(\boldsymbol{\xi}) \quad (\text{A.43})$$

donde  $k=1,2,3$  según la dirección  $k$  en que se aplica la fuerza impulsiva.

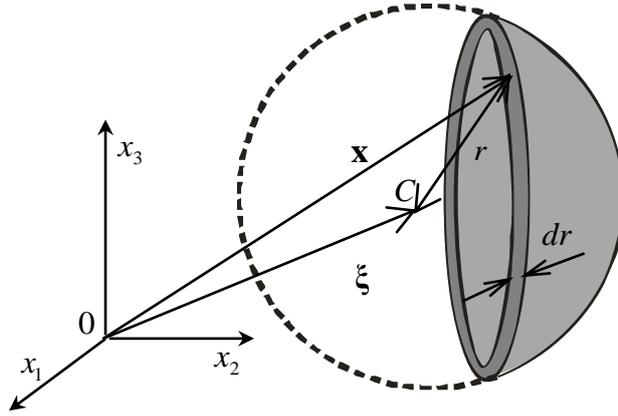
Estas expresiones se simplifican al considerar la física del problema. El valor de  $\phi(\mathbf{x},t)$  se obtiene como la suma de las contribuciones del integrando en la ecuación (A.42) en todo el volumen. Estas

contribuciones se pueden distribuir en una cáscara esférica de radio  $r = |\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}|$  y espesor  $dr$  con centro en el punto de observación  $\mathbf{x}$  (ver figura). Si  $\tau$  es el intervalo de tiempo empleado por la onda para desplazarse el radio de la cáscara esférica, entonces vale  $r = \alpha\tau$  y el diferencial volumen se expresará en coordenadas esféricas como

$$\begin{aligned} dV(\boldsymbol{\xi}) &= 4\pi r^2 dr \\ &= 4\pi\alpha^3\tau^2 d\tau \end{aligned} \quad (\text{A.44})$$

con el cambio de variable a  $\tau$  se reduce la expresión (A.42) a

$$\begin{aligned} \phi(\mathbf{x}, t) &= \frac{1}{(4\pi\alpha)^2 \rho} \int_0^{|\mathbf{x}|/\alpha} \frac{\delta(t-\tau)}{\alpha\tau} \frac{\xi_k}{|\boldsymbol{\xi}|^3} \delta(\mathbf{x}-\boldsymbol{\xi}) 4\pi\alpha^3\tau^2 d\tau \\ &= \frac{1}{4\pi\rho} \frac{x_k}{|\mathbf{x}|^3} \int_0^{|\mathbf{x}|/\alpha} \tau \delta(t-\tau) d\tau \end{aligned} \quad (\text{A.45})$$



Resulta finalmente, de aplicar la Ec. (A.38), el valor de la función de Green para el problema planteado.

Se calcula primero el gradiente de la función  $\phi(\mathbf{x}, t)$  y se obtiene

$$\vec{\nabla}\phi = \partial_i \phi \hat{\mathbf{x}}_i = \hat{\mathbf{x}}_i \frac{1}{4\pi\rho} \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{x_k}{|\mathbf{x}|^3} \right) \int_0^{|\mathbf{x}|/\alpha} \tau \delta(t-\tau) d\tau + \hat{\mathbf{x}}_i \frac{1}{4\pi\rho} \frac{x_k}{|\mathbf{x}|^3} \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \int_0^{|\mathbf{x}|/\alpha} \tau \delta(t-\tau) d\tau \right)$$

$$\partial_i (x_k r^{-3}) = \partial_i x_k r^{-3} + x_k \partial_i (x_n x_n)^{-3/2} = \delta_{ik} r^{-3} + x_k \left( -\frac{3}{2} \right) (x_k x_n)^{-5/2} 2x_n \partial_i x_n =$$

$$= \delta_{ik} r^{-3} - 3x_k r^{-5} x_n \delta_{in} = \frac{1}{r^3} (\delta_{ik} - 3 \frac{x_i x_k}{r}) = \frac{1}{r^3} (\delta_{ik} - 3\gamma_i \gamma_k)$$

$$\text{si } F(\theta, t) = \int_0^\theta \tau \delta(t - \tau) d\tau \rightarrow \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \int_0^{|\mathbf{x}|/\alpha} \tau \delta(t - \tau) d\tau \right) = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial}{\partial \left( \frac{|\mathbf{x}|}{\alpha} \right)} \left( F \left( \frac{|\mathbf{x}|}{\alpha}, t \right) \right) \frac{d|\mathbf{x}|}{dx_i} =$$

$$= \frac{1}{\alpha} \tau \delta(t - \tau) \Big|_{\tau = \frac{|\mathbf{x}|}{\alpha}} \cdot \frac{x_i}{|\mathbf{x}|} = \frac{x_i}{\alpha^2} \delta \left( t - \frac{|\mathbf{x}|}{\alpha} \right)$$

$$\vec{\nabla} \phi = \frac{\hat{\mathbf{x}}_i}{4\pi\rho} (\delta_{ik} - 3\gamma_i\gamma_k) \frac{1}{r^3} \int_0^{|\mathbf{x}|/\alpha} \tau \delta(t - \tau) d\tau + \frac{\hat{\mathbf{x}}_i}{4\pi\rho\alpha^2} \gamma_i\gamma_k \frac{1}{r} \delta(t - \tau) \quad (\text{A.46})$$

donde se definió el coseno director  $\gamma_i = x_i / r$  del vector  $\mathbf{x}$ .

Para  $\Psi(\mathbf{x}, t)$  con el cambio de variable a  $\tau$ , donde  $r = \beta\tau$ , se reduce la expresión (A.43) a

$$\Psi(\mathbf{x}, t) = \frac{\varepsilon_{qkp} \hat{\mathbf{x}}_q}{4\pi\rho} \frac{x_p}{|\mathbf{x}|^3} \int_0^{|\mathbf{x}|/\beta} \tau \delta(t - \tau) d\tau \quad (\text{A.47})$$

Se calcula el rotor de la función  $\Psi(\mathbf{x}, t)$  y se obtiene

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times \Psi &= \varepsilon_{ijq} \partial_j \Psi_q \hat{\mathbf{x}}_i = \varepsilon_{ijq} \varepsilon_{kpq} \frac{\hat{\mathbf{x}}_i}{4\pi\rho} \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{x_p}{|\mathbf{x}|^3} \right) \int_0^{|\mathbf{x}|/\beta} \tau \delta(t - \tau) d\tau + \\ &+ \varepsilon_{ijq} \varepsilon_{kpq} \frac{\hat{\mathbf{x}}_i}{4\pi\rho} \frac{x_p}{|\mathbf{x}|^3} \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \int_0^{|\mathbf{x}|/\beta} \tau \delta(t - \tau) d\tau \right) \end{aligned} \quad (\text{A.48})$$

donde  $\varepsilon_{qkp} = \varepsilon_{kpq}$  y vale la igualdad  $\varepsilon_{ijq} \varepsilon_{kpq} = \delta_{ik} \delta_{jp} - \delta_{ip} \delta_{jk}$

y resolviendo

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ijq} \varepsilon_{kpq} \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{x_p}{r^3} \right) &= (\delta_{ik} \delta_{jp} - \delta_{ip} \delta_{jk}) (\delta_{jp} - 3\gamma_j \gamma_p) \frac{1}{r^3} = \\ &= (\delta_{ik} \delta_{jp} \delta_{jp} - 3\gamma_j \gamma_p \delta_{ik} \delta_{jp} - \delta_{ip} \delta_{jk} \delta_{jp} + 3\gamma_j \gamma_p \delta_{ip} \delta_{jk}) \frac{1}{r^3} = \\ &= (3\delta_{ik} - 3\delta_{ik} \gamma^2 - \delta_{ik} + 3\gamma_k \gamma_i) \frac{1}{r^3} = (3\gamma_i \gamma_k - \delta_{ik}) \frac{1}{r^3} \end{aligned}$$

además resulta por lo resuelto más arriba

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \int_0^{|\mathbf{x}|/\beta} \tau \delta(t - \tau) d\tau \right) &= \frac{x_j}{\beta^2} \delta \left( t - \frac{r}{\beta} \right) \\ \varepsilon_{ijq} \varepsilon_{kpq} \frac{\hat{\mathbf{x}}_i}{4\pi\rho} \frac{x_p}{|\mathbf{x}|^3} \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \int_0^{|\mathbf{x}|/\beta} \tau \delta(t - \tau) d\tau \right) &= \frac{\hat{\mathbf{x}}_i}{4\pi\rho \beta^2} (\delta_{ik} \delta_{jp} - \delta_{ip} \delta_{jk}) \frac{x_p x_j}{r^3} \delta \left( t - \frac{r}{\beta} \right) = \\ &= \frac{\hat{\mathbf{x}}_i}{4\pi\rho \beta^2} (\delta_{ik} \frac{x_p x_p}{r^2} - \frac{x_i x_k}{r^2}) \frac{1}{r} \delta \left( t - \frac{r}{\beta} \right) = \frac{\hat{\mathbf{x}}_i}{4\pi\rho \beta^2} (\delta_{ik} - \gamma_i \gamma_k) \frac{1}{r} \delta \left( t - \frac{r}{\beta} \right) \end{aligned} \quad (\text{A.49})$$

Finalmente la función de Green buscada es:

$$\begin{aligned}
\mathbf{g} &= \vec{\nabla} \phi + \vec{\nabla} \times \boldsymbol{\psi} = \frac{\hat{\mathbf{x}}_i}{4\pi\rho} (3\gamma_i\gamma_k - \delta_{ik}) \frac{1}{r^3} \int_0^{|\mathbf{x}|/\beta} \tau \delta(t-\tau) d\tau - \frac{\hat{\mathbf{x}}_i}{4\pi\rho} (3\gamma_i\gamma_k - \delta_{ik}) \frac{1}{r^3} \int_0^{|\mathbf{x}|/\alpha} \tau \delta(t-\tau) d\tau + \\
&+ \frac{\hat{\mathbf{x}}_i}{4\pi\rho\alpha^2} \gamma_i\gamma_k \frac{1}{r} \delta(t-\tau) + \frac{\hat{\mathbf{x}}_i}{4\pi\rho\beta^2} (\delta_{ik} - \gamma_i\gamma_k) \frac{1}{r} \delta(t - \frac{r}{\beta}) = \\
&= \frac{\hat{\mathbf{x}}_i}{4\pi\rho} (3\gamma_i\gamma_k - \delta_{ik}) \frac{1}{r^3} \int_{|\mathbf{x}|/\alpha}^{|\mathbf{x}|/\beta} \tau \delta(t-\tau) d\tau + \frac{\hat{\mathbf{x}}_i}{4\pi\rho\alpha^2} \gamma_i\gamma_k \frac{1}{r} \delta(t-\tau) + \frac{\hat{\mathbf{x}}_i}{4\pi\rho\beta^2} (\delta_{ik} - \gamma_i\gamma_k) \frac{1}{r} \delta(t - \frac{r}{\beta})
\end{aligned}$$

La solución de la función de Green a la Ec.(A.37) es:

$$\begin{aligned}
\rho \ddot{\mathbf{g}} &= \delta(\mathbf{x})\delta(t) \hat{\mathbf{x}}_k + (\lambda + 2\mu)\vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \mathbf{g}) - \mu\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \mathbf{g}) \\
\rightarrow \mathbf{g}(\mathbf{x}, t) &= \left[ \frac{1}{4\pi\rho} (3\gamma_i\gamma_k - \delta_{ik}) \frac{1}{|\mathbf{x}|^3} \int_{|\mathbf{x}|/\alpha}^{|\mathbf{x}|/\beta} \tau \delta(t-\tau) d\tau + \right. \\
&\left. + \frac{1}{4\pi\rho\alpha^2} \gamma_i\gamma_k \frac{1}{|\mathbf{x}|} \delta(t - \frac{|\mathbf{x}|}{\alpha}) + \frac{1}{4\pi\rho\beta^2} (\delta_{ik} - \gamma_i\gamma_k) \frac{1}{|\mathbf{x}|} \delta(t - \frac{|\mathbf{x}|}{\beta}) \right] \hat{\mathbf{x}}_i
\end{aligned} \tag{A.50}$$

## APÉNDICE B

### Cálculo de la transformada de Fourier de la relación funcional $\Omega(\mathbf{x}, t)$ para un modelo de fractura rectangular y crecimiento exponencial de la discontinuidad en la fractura

Dada la E.(5.1) para la forma funcional del campo de desplazamiento:

$$\Omega(\mathbf{x}, t) \approx D \int_0^L \dot{\phi} \left( t - \frac{r_0}{c} - \frac{\xi}{L} \tau_0 \right) d\xi \quad (\text{B.1})$$

y teniendo en cuenta la función temporal de la discontinuidad del campo de desplazamiento en la fuente de fractura dada por la Ec.(5.3):

$$\phi(t) = U_0(1 - e^{-t/T}) H(t) = U_0(H(t) - e^{-t/T} H(t)) \quad (\text{B.2})$$

se calcula la transformada de Fourier de  $\Omega(\mathbf{x}, t)$  usando las propiedades de la transformada.

Sea  $\hat{\phi}(\omega)$  la transformada de Fourier de  $\phi(t)$ :

$$\phi(t) \xrightarrow{\mathfrak{F}} \hat{\phi}(\omega), \quad \hat{\phi}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(t) e^{-j\omega t} dt \quad (\text{B.3})$$

valen entonces las relaciones:

$$\phi(t - t_0) \xrightarrow{\mathfrak{F}} e^{-j\omega t_0} \hat{\phi}(\omega), \quad \dot{\phi}(t) = \frac{d\phi(t)}{dt} \xrightarrow{\mathfrak{F}} j\omega \hat{\phi}(\omega) \quad (\text{B.4})$$

y conocidas las transformadas:

$$H(t) \xrightarrow{\mathfrak{F}} \pi \delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}, \quad e^{-at} H(t) \xrightarrow{\mathfrak{F}} \frac{1}{a + j\omega}, \quad a > 0 \quad (\text{B.5})$$

Resulta

$$\dot{\phi}(t - t_0) \xrightarrow{\mathfrak{F}} j\omega e^{-j\omega t_0} \hat{\phi}(\omega) \quad \text{y entonces para} \quad t_0 = \frac{r_0}{c} + \frac{\xi}{L} \tau_0 \quad (\text{B.6})$$

donde

$$\hat{\phi}(\omega) = U_0 \left( \pi \delta(\omega) + \frac{1}{j\omega} - \frac{1}{\frac{1}{T} + j\omega} \right) \quad (\text{B.7})$$

luego

$$\dot{\phi}(t - t_0) \xrightarrow{\mathfrak{F}} j\omega U_0 e^{-j\omega \left( \frac{r_0}{c} + \frac{\xi}{L} \tau_0 \right)} \left( \pi \delta(\omega) + \frac{1}{j\omega} - \frac{1}{\frac{1}{T} + j\omega} \right) \quad (\text{B.8})$$

distribuyendo factores y teniendo en cuenta que  $\omega \delta(\omega) = 0$

$$\dot{\phi}(t-t_0) \xrightarrow{\mathfrak{F}} U_0 e^{-j\omega(\frac{r_0}{c} + \frac{\xi\tau_0}{L})} \left(1 - \frac{j\omega}{\frac{1}{T} + j\omega}\right) = \frac{U_0}{T} e^{-j\omega(\frac{r_0}{c} + \frac{\xi\tau_0}{L})} \frac{1}{\frac{1}{T} + j\omega} \quad (\text{B.9})$$

Entonces la integral

$$\Omega(\mathbf{x}, t) \approx D \int_0^L \dot{\phi}(t-t_0(\xi)) d\xi \xrightarrow{\mathfrak{F}} \hat{\Omega}(\mathbf{x}, \omega) \approx \frac{U_0 D}{T} \frac{1}{\frac{1}{T} + j\omega} e^{-j\omega\frac{r_0}{c}} \int_0^L e^{-j\omega\frac{\xi\tau_0}{L}} d\xi \quad (\text{B.10})$$

$$= \frac{U_0 D}{T} \frac{1}{\frac{1}{T} + j\omega} \left[ \frac{e^{-j\omega\frac{\xi\tau_0}{L}}}{-j\omega\frac{\tau_0}{L}} \right]_0^L = \frac{2U_0 D L}{\omega\tau_0 T} \frac{e^{-j\omega\frac{r_0}{c}}}{\frac{1}{T} + j\omega} \frac{1 - e^{-j\omega\tau_0}}{2j} \quad (\text{B.11})$$

$$= \frac{2U_0 D L}{\omega\tau_0 T} \frac{1}{\frac{1}{T} + j\omega} e^{-j\omega\frac{r_0}{c}} e^{-j\frac{\omega\tau_0}{2}} \left( \frac{e^{j\frac{\omega\tau_0}{2}} - e^{-j\frac{\omega\tau_0}{2}}}{2j} \right) \quad (\text{B.12})$$

Finalmente:

$$\hat{\Omega}(\mathbf{x}, \omega) \approx \frac{U_0 A}{T} \frac{\text{sen}(\tau_0\omega/2)}{\tau_0\omega/2} \frac{e^{-j\omega(\frac{r_0}{c} + \frac{\tau_0}{2})}}{\frac{1}{T} + j\omega} \quad (\text{B.13})$$

donde  $A = DL$

### Cálculo de la Transformada inversa de Fourier de la relación funcional $\hat{\Omega}(\mathbf{x}, \omega)$

Conocidas las Transformadas inversas:

$$\frac{\text{sen}(a\omega)}{a\omega} \xrightarrow{\mathfrak{F}^{-1}} \frac{1}{2a} p_a(t) \quad \text{donde } p_a(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } |t| < a \\ 0 & \text{si } |t| > a \end{cases} \quad (\text{B.14})$$

$$\frac{1}{a + j\omega} \xrightarrow{\mathfrak{F}^{-1}} e^{-at} H(t) \quad , \quad a > 0 \quad (\text{B.15})$$

$$e^{-j\omega t_0} \xrightarrow{\mathfrak{F}^{-1}} \delta(t - t_0) \quad (\text{B.16})$$

y usando las propiedades:

$$\hat{f}(\omega)\hat{g}(\omega) \xrightarrow{\mathfrak{F}^{-1}} f(t) * g(t) \quad f(t) * \delta(t - t_0) = f(t - t_0) \quad (\text{B.17})$$

resulta

$$\hat{\Omega}(\mathbf{x}, \omega) \xrightarrow{\mathfrak{F}^{-1}} \Omega(\mathbf{x}, t) \approx \frac{U_0 A}{\tau_0 T} p_{\tau_0/2}(t) * \delta\left(t - \left(\frac{r_0}{c} + \frac{\tau_0}{2}\right)\right) * e^{-t/T} H(t) \quad (\text{B.18})$$

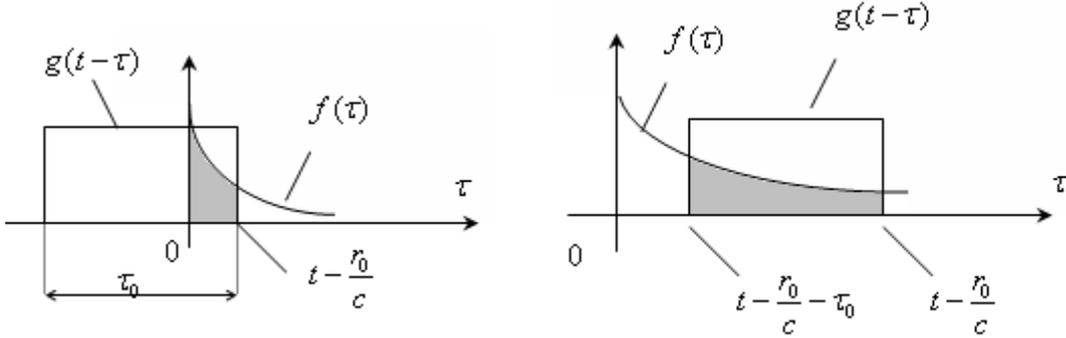
$$\Omega(\mathbf{x}, t) \approx \frac{U_0 A}{\tau_0 T} p_{\tau_0/2}\left(t - \left(\frac{r_0}{c} + \frac{\tau_0}{2}\right)\right) * e^{-t/T} H(t) \quad (\text{B.19})$$

luego hay que hacer la convolución de dos funciones:

$$f(t) = e^{-t/T} H(t) \quad g(t) = p_{\tau_0/2}\left(t - \left(\frac{r_0}{c} + \frac{\tau_0}{2}\right)\right) \quad (\text{B.20})$$

$$\Omega(\mathbf{x}, t) \approx \frac{U_0 A}{\tau_0 T} f(t) * g(t) = \frac{U_0 A}{\tau_0 T} \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) g(t-\tau) d\tau = \frac{U_0 A}{\tau_0 T} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\tau/T} H(\tau) g(t-\tau) d\tau \quad (\text{B.21})$$

Hay dos zonas de integración:



Zona 1:  $0 < t - \frac{r_0}{c} < \tau_0$

$$\begin{aligned} \Omega(\mathbf{x}, t) &\approx \frac{U_0 A}{\tau_0 T} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\tau/T} H(\tau) g(t-\tau) d\tau = \frac{U_0 A}{\tau_0 T} \int_0^{t-\frac{r_0}{c}} e^{-\tau/T} d\tau = \frac{U_0 A}{\tau_0 T} \left[ \frac{e^{-\tau/T}}{-1/T} \right]_0^{t-\frac{r_0}{c}} \\ &= \frac{U_0 A}{\tau_0} (1 - e^{r_0/cT} e^{-t/T}) \end{aligned} \quad (\text{B.22})$$

Zona 2:  $t - \frac{r_0}{c} > \tau_0$

$$\begin{aligned} \Omega(\mathbf{x}, t) &\approx \frac{U_0 A}{\tau_0 T} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\tau/T} H(\tau) g(t-\tau) d\tau = \frac{U_0 A}{\tau_0 T} \int_{t-\frac{r_0}{c}-\tau_0}^{t-\frac{r_0}{c}} e^{-\tau/T} d\tau = \frac{U_0 A}{\tau_0 T} \left[ \frac{e^{-\tau/T}}{-1/T} \right]_{t-\frac{r_0}{c}-\tau_0}^{t-\frac{r_0}{c}} \\ &= \frac{U_0 A}{\tau_0} (e^{\tau_0/T} - 1) e^{r_0/cT} e^{-t/T} \end{aligned} \quad (\text{B.23})$$

Finalmente

$$\Omega(\mathbf{x}, t) \approx \begin{cases} \frac{U_0 A}{\tau_0} (1 - C_1 e^{-t/T}) & \text{si } \frac{r_0}{c} < t < \frac{r_0}{c} + \tau_0 \\ \frac{U_0 A}{\tau_0} C_2 e^{-t/T} & \text{si } t > \frac{r_0}{c} + \tau_0 \end{cases} \quad (\text{B.24})$$

donde  $C_1 = e^{r_0/cT}$  y  $C_2 = C_1(e^{\tau_0/T} - 1)$ .

## APÉNDICE C

### Determinación del patrón de radiación de las ondas S y P

#### Patrón de la onda P

$$R_n = c_{ijpq} \gamma_n \gamma_p \gamma_q \nu_i n_j \quad (C.1)$$

donde para un medio material isótropo

$$c_{ijpq} = \lambda \delta_{ij} \delta_{pq} + \mu (\delta_{ip} \delta_{jq} + \delta_{iq} \delta_{jp}) \quad (C.2)$$

Luego

$$\begin{aligned} R_n &= (\lambda \delta_{ij} \delta_{pq} + \mu (\delta_{ip} \delta_{jq} + \delta_{iq} \delta_{jp})) \gamma_n \gamma_p \gamma_q \nu_i n_j \\ &= \lambda \delta_{ij} \delta_{pq} \gamma_n \gamma_p \gamma_q \nu_i n_j + \mu (\delta_{ip} \delta_{jq} + \delta_{iq} \delta_{jp}) \gamma_n \gamma_p \gamma_q \nu_i n_j \\ &= \lambda \delta_{ij} \delta_{pq} \gamma_n \gamma_p \gamma_q \nu_i n_j + \mu (\delta_{ip} \delta_{jq} \gamma_n \gamma_p \gamma_q \nu_i n_j + \delta_{iq} \delta_{jp} \gamma_n \gamma_p \gamma_q \nu_i n_j) \end{aligned}$$

$$\mathbf{R} = \lambda (\hat{\mathbf{v}} \cdot \hat{\mathbf{n}}) (\hat{\boldsymbol{\gamma}} \cdot \hat{\boldsymbol{\gamma}}) \hat{\boldsymbol{\gamma}} + \mu ((\hat{\boldsymbol{\gamma}} \cdot \hat{\mathbf{n}}) (\hat{\boldsymbol{\gamma}} \cdot \hat{\mathbf{v}}) \hat{\boldsymbol{\gamma}} + (\hat{\boldsymbol{\gamma}} \cdot \hat{\mathbf{n}}) (\hat{\boldsymbol{\gamma}} \cdot \hat{\mathbf{v}}) \hat{\boldsymbol{\gamma}})$$

$$\boxed{\mathbf{R} = (\lambda (\hat{\mathbf{v}} \cdot \hat{\mathbf{n}}) + 2\mu (\hat{\boldsymbol{\gamma}} \cdot \hat{\mathbf{n}}) (\hat{\boldsymbol{\gamma}} \cdot \hat{\mathbf{v}})) \hat{\boldsymbol{\gamma}}} \quad (C.3)$$

#### Patrón de la onda S

$$R_n = c_{ijpq} (\delta_{np} - \gamma_n \gamma_p) \gamma_q \nu_i n_j \quad (C.4)$$

donde para un medio material isótropo

$$c_{ijpq} = \lambda \delta_{ij} \delta_{pq} + \mu (\delta_{ip} \delta_{jq} + \delta_{iq} \delta_{jp}) \quad (C.5)$$

luego

$$\begin{aligned} R_n &= (\lambda \delta_{ij} \delta_{pq} + \mu (\delta_{ip} \delta_{jq} + \delta_{iq} \delta_{jp})) (\delta_{np} - \gamma_n \gamma_p) \gamma_q \nu_i n_j \\ &= (\lambda \delta_{ij} \delta_{pq} + \mu (\delta_{ip} \delta_{jq} + \delta_{iq} \delta_{jp})) (\delta_{np} \gamma_q \nu_i n_j - \gamma_n \gamma_p \gamma_q \nu_i n_j) \\ &= \lambda \delta_{ij} \delta_{pq} (\delta_{np} \gamma_q \nu_i n_j - \gamma_n \gamma_p \gamma_q \nu_i n_j) + \mu (\delta_{ip} \delta_{jq} + \delta_{iq} \delta_{jp}) (\delta_{np} \gamma_q \nu_i n_j - \gamma_n \gamma_p \gamma_q \nu_i n_j) \\ &= \lambda \delta_{ij} \delta_{pq} (\delta_{np} \gamma_q \nu_i n_j - \gamma_n \gamma_p \gamma_q \nu_i n_j) + \mu (\delta_{ip} \delta_{jq} (\delta_{np} \gamma_q \nu_i n_j - \gamma_n \gamma_p \gamma_q \nu_i n_j) \\ &\quad + \delta_{iq} \delta_{jp} (\delta_{np} \gamma_q \nu_i n_j - \gamma_n \gamma_p \gamma_q \nu_i n_j)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{R} &= \lambda ((\hat{\mathbf{v}} \cdot \hat{\mathbf{n}}) \hat{\boldsymbol{\gamma}} - (\hat{\boldsymbol{\gamma}} \cdot \hat{\boldsymbol{\gamma}}) (\hat{\mathbf{v}} \cdot \hat{\mathbf{n}}) \hat{\boldsymbol{\gamma}}) + \mu ((\hat{\boldsymbol{\gamma}} \cdot \hat{\mathbf{n}}) \hat{\mathbf{v}} - (\hat{\boldsymbol{\gamma}} \cdot \hat{\mathbf{v}}) (\hat{\boldsymbol{\gamma}} \cdot \hat{\mathbf{n}}) \hat{\boldsymbol{\gamma}}) \\ &\quad + \mu ((\hat{\boldsymbol{\gamma}} \cdot \hat{\mathbf{v}}) \hat{\mathbf{n}} - (\hat{\boldsymbol{\gamma}} \cdot \hat{\mathbf{v}}) (\hat{\boldsymbol{\gamma}} \cdot \hat{\mathbf{n}}) \hat{\boldsymbol{\gamma}}) \end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbf{R} = \mu ((\hat{\boldsymbol{\gamma}} \cdot \hat{\mathbf{n}}) \hat{\mathbf{v}} + (\hat{\boldsymbol{\gamma}} \cdot \hat{\mathbf{v}}) \hat{\mathbf{n}} - 2(\hat{\boldsymbol{\gamma}} \cdot \hat{\mathbf{n}}) (\hat{\boldsymbol{\gamma}} \cdot \hat{\mathbf{v}}) \hat{\boldsymbol{\gamma}})} \quad (C.6)$$

## Determinación de los patrones de radiación para fractura de corte y fractura de tracción

Para una fractura de corte (shear crack) el vector de discontinuidad del campo de desplazamiento es perpendicular al vector normal a la superficie de fractura como se ve en la figura y el vector de radiación para las ondas P y S se simplifica de la siguiente manera

$$\hat{\gamma} \cdot \hat{n} = \cos(\pi/2 - \theta) = \text{sen}\theta$$

$$\hat{\gamma} \cdot \hat{v} = \cos\theta$$

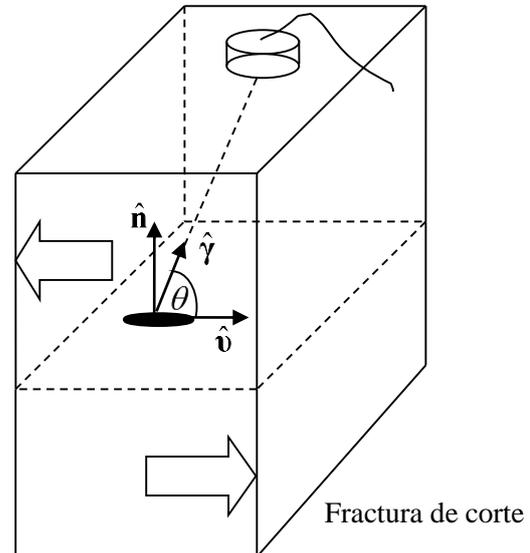
$$\hat{v} \cdot \hat{n} = 0$$

Luego para una onda P

$$\mathbf{R}_P = 2\mu \text{sen}\theta \cos\theta \hat{\gamma}$$

y para una onda S

$$\mathbf{R}_S = \mu(\text{sen}\theta \hat{v} + \cos\theta \hat{n} - 2\text{sen}\theta \cos\theta \hat{\gamma})$$



Para una fractura de tracción (tensile crack) el vector de discontinuidad del campo de desplazamiento es paralelo al vector normal a la superficie de fractura como se ve en la figura y el vector de radiación para las ondas P y S se simplifica de la siguiente manera

$$\hat{\gamma} \cdot \hat{n} = \cos(\pi/2 - \theta) = \text{sen}\theta$$

$$\hat{\gamma} \cdot \hat{v} = \text{sen}\theta$$

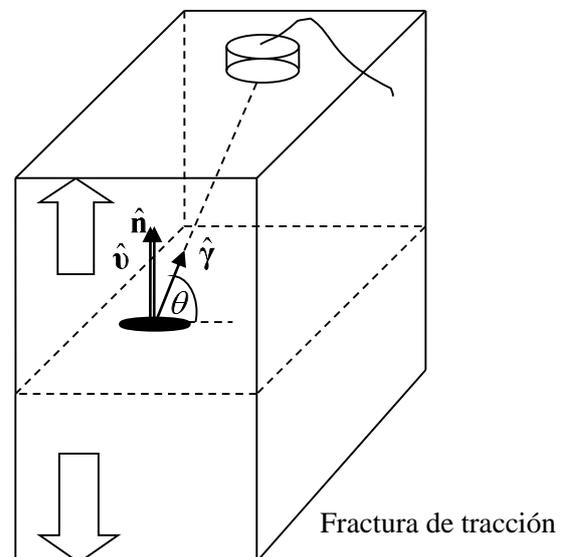
$$\hat{v} \cdot \hat{n} = 1$$

Luego para una onda P

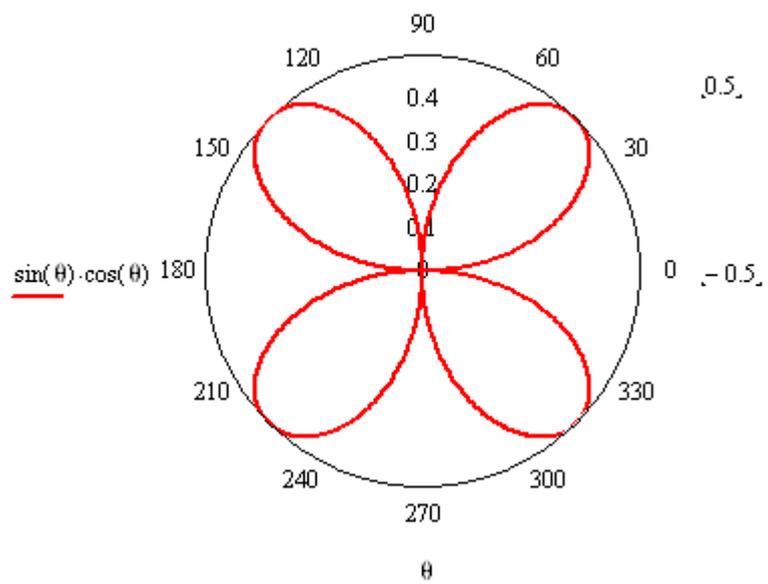
$$\mathbf{R}_P = (\lambda + 2\mu \text{sen}^2\theta) \hat{\gamma}$$

y para una onda S

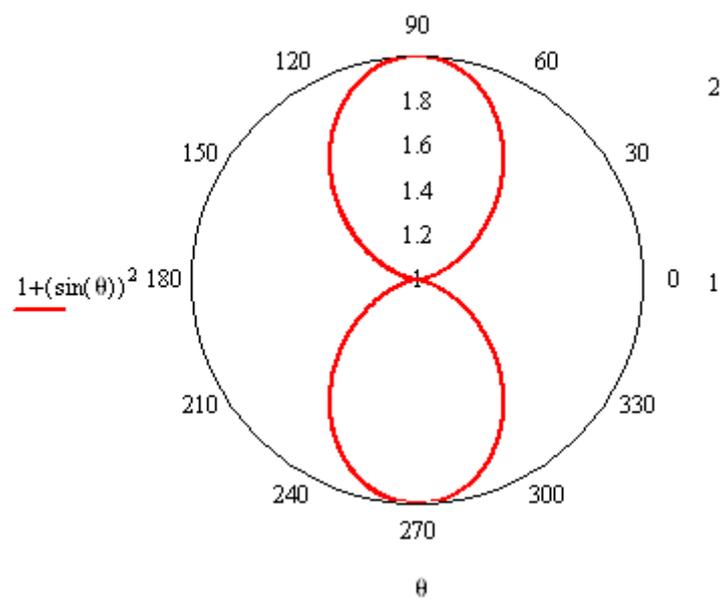
$$\mathbf{R}_S = \mu(\text{sen}\theta(\hat{v} + \hat{n}) - 2\text{sen}^2\theta \hat{\gamma})$$



FRACTURA DE CORTE – ONDA P



FRACTURA DE TRACCIÓN – ONDA P



## APÉNDICE D

### Propagación de ondas en conductos viscoelásticos

El ensayo no destructivo para la prueba de tubos reconoce la importancia de modelos matemáticos que describan el comportamiento de materiales que funcionan como guías de ondas cuando interactúan con fuentes sonoras. Varios autores han implementado ensayos o pruebas para la inspección de tubos. Las propiedades visco elásticas de los materiales produce atenuación de la propagación de ondas de Lamb y esto representa un obstáculo en el momento de medir señales limitadas por las señales de ruido que se presentan en todo ensayo experimental. Gazis (1959) realiza un estudio de los modos de oscilación en un tubo que se comporta como guía de onda usando funciones potenciales con el método de Helmholtz. Nosotros proponemos un modelo que tiene en cuenta la amortiguación radial y se resuelve directamente las ecuaciones diferenciales de la dinámica del problema por el método de separación de variables.

Se trata el problema de un tubo cilíndrico visco elástico de longitud infinita en la dirección  $z$ . La ley que rige el movimiento de la pared del tubo sin la acción de fuerzas externas bajo las hipótesis de linealidad, isotropía y homogeneidad del material se escribe:

$$\rho \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} = (\lambda + \mu) \nabla (\nabla \cdot \vec{u}) + \mu \nabla^2 \vec{u} \quad (D.1)$$

$\vec{u}$  : Vector desplazamiento.

$\lambda, \mu$  : Coeficientes de Lamé.

$\rho$  : Densidad del medio elástico.

Las Ec. (D.2-D.4) se escriben, dada la simetría del problema, en coordenadas cilíndricas  $(r, \theta, z)$ . Son hipótesis de este modelo que actúa una fuerza viscosa interna en la dirección radial proporcional a la velocidad de deformación del medio elástico, que el desplazamiento no es función de  $\theta$  y hay simetría en la dirección  $\theta$ .

Esto conduce a tres ecuaciones diferenciales acopladas para las componentes de la deformación:

$$\frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2} = \alpha^2 \left( \frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r^2} \right) + \beta^2 \frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2} + \frac{D}{\rho} \frac{\partial u_r}{\partial t} + (\alpha^2 - \beta^2) \frac{\partial^2 u_z}{\partial r \partial z} \quad (D.2)$$

$$\frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} = (\alpha^2 - \beta^2) \left( \frac{\partial^2 u_r}{\partial r \partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} \right) + \beta^2 \left( \frac{\partial^2 u_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) + \alpha^2 \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} \quad (D.3)$$

$$\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial t^2} = \beta^2 \left( \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r^2} + \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial z^2} \right) \quad (D.4)$$

donde  $D$  : Coeficiente de viscosidad.

Velocidades de onda:  $\alpha = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}$   $\beta = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$  longitudinal y transversal respectivamente.

La Ec. (D.4) es una ecuación autónoma, se puede resolver de forma independiente de las otras dos, se considera como separación de variables una dependencia radial y una onda armónica viajera en la dirección  $z$ . Resulta de la parte radial una función de Bessel de orden 1:

$$u_\theta(r, z, t) = \phi_\theta(r) \psi_\theta(z, t) \quad (D.5)$$

Se sustituye (1.14) en (1.13) y se obtiene:

$$\frac{1}{\beta^2 \psi_\theta} \frac{\partial^2 \psi_\theta}{\partial t^2} - \frac{1}{\psi_\theta} \frac{\partial^2 \psi_\theta}{\partial z^2} = \frac{\phi_\theta''}{\phi_\theta} + \frac{\phi_\theta'}{\phi_\theta r} - \frac{1}{r^2} \quad (D.6)$$

La dependencia en  $r$  está separada del resto y resulta:

$$\phi_\theta'' + \frac{\phi_\theta'}{r} \pm (\delta^2 \mp \frac{1}{r^2}) \phi_\theta = 0 \quad (D.7)$$

$$\frac{1}{\beta^2} \frac{\partial^2 \psi_\theta}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \psi_\theta}{\partial z^2} = \pm \delta^2 \psi_\theta \quad (D.8)$$

Donde  $\delta$  : Constante de separación de variables.

Finalmente la Ec. (D.7) es la ecuación de Bessel de orden 1 y la Ec. (D.8) es la de propagación de onda armónica. De acuerdo al signo elegido en (D.7) se obtienen funciones de Bessel de primera clase ( $J(\delta r), Y(\delta r)$ ) o modificadas de primera clase ( $I(\delta r), K(\delta r)$ ).

Las Ec. (D.2) y (D.3) están acopladas; constituyen un sistema de dos ecuaciones diferenciales no ordinarias de segundo orden. Se separa variables como en el caso anterior:

$$u_{r,z}(r, z, t) = \phi_{r,z}(r) \psi_{r,z}(z, t) \quad (D.9)$$

Resulta, de sustituir (D.9) en el sistema (D.2-D.3):

$$\frac{1}{\psi_r} \frac{\partial^2 \psi_r}{\partial t^2} + \frac{D}{\rho \psi_r} \frac{\partial \psi_r}{\partial t} = \alpha^2 \left( \frac{\phi_r''}{\phi_r} + \frac{1}{r} \frac{\phi_r'}{\phi_r} - \frac{1}{r^2} \right) + \frac{\beta^2}{\psi_r} \frac{\partial^2 \psi_r}{\partial z^2} + \frac{(\alpha^2 - \beta^2) \phi_z'}{\phi_r \psi_r} \frac{\partial \psi_z}{\partial z} \quad (D.10)$$

$$\frac{1}{\psi_z} \frac{\partial^2 \psi_z}{\partial t^2} - \frac{\alpha^2}{\psi_z} \frac{\partial^2 \psi_z}{\partial z^2} = \frac{\beta^2}{\phi_z} \left( \phi_z'' + \frac{\phi_z'}{r} \right) + \frac{(\alpha^2 - \beta^2)}{\phi_z \psi_z} \left( \phi_r' + \frac{\phi_r}{r} \right) \frac{\partial \psi_r}{\partial z} \quad (D.11)$$

Para desacoplar al sistema se hace la hipótesis  $\phi_z' = -\phi_r$ , de esta manera se obtienen ecuaciones diferenciales de Bessel de orden 1 y orden 0 para la dependencia radial:

$$\phi_r'' + \frac{\phi_r'}{r} \pm (\gamma^2 \mp \frac{1}{r^2}) \phi_r = 0 \quad (D.12)$$

$$\phi_z'' + \frac{\phi_z'}{r} \pm \gamma^2 \phi_z = 0 \quad (\text{D.13})$$

Donde  $\gamma$  : Constante de separación de variables.

Al desacoplar el sistema anterior se obtiene un nuevo sistema para la dependencia  $z, t$  :

$$\frac{\partial^2 \psi_r}{\partial t^2} + \frac{D}{\rho} \frac{\partial \psi_r}{\partial t} - \beta^2 \frac{\partial^2 \psi_r}{\partial z^2} + (\alpha^2 - \beta^2) \frac{\partial \psi_z}{\partial z} - \gamma^2 \alpha^2 \psi_r = 0 \quad (\text{D.14})$$

$$\frac{\partial^2 \psi_z}{\partial t^2} - \alpha^2 \frac{\partial^2 \psi_z}{\partial z^2} + (\alpha^2 - \beta^2) \gamma^2 \frac{\partial \psi_r}{\partial z} - \beta^2 \gamma^2 \psi_z = 0 \quad (\text{D.15})$$

Se propone para separar el sistema anterior que  $\psi_r$  sea una onda armónica viajera en la dirección  $z$  y luego de sustituir en el sistema (D.14-D.15) se obtiene una solución para  $\psi_z$  :

$$\psi_r(z, t) = e^{i(kz - \omega t)} \quad (\text{D.16})$$

$$\psi_z(z, t) = A(\omega) e^{i(kz - \omega t)} + \varphi(t) \quad (\text{D.17})$$

Donde  $\varphi(t)$  verifica la ecuación diferencial:

$$\varphi''(t) \pm \rho \gamma^2 \beta^2 \varphi(t) = B e^{i(kz - \omega t)} \quad (\text{D.18})$$

$A$  Y  $B$  son constantes que dependen principalmente de  $\omega$ . La solución de  $\varphi(t)$  se corresponde con oscilaciones de dos clases de acuerdo al signo elegido en la Ec. (D.18).

Las soluciones encontradas para las componentes del vector desplazamiento son:

$$u_r(r, z, t) = \gamma B_1(\gamma r) e^{-b(\omega)z} \text{Cos}[a(\omega)z - \omega t] \quad (\text{D.19})$$

$$u_z(r, z, t) = B_0(\gamma r) \{ M(\omega) e^{-b(\omega)z} \text{Cos}[a(\omega)z - \omega t + \varphi(\omega)] + K \text{Cos} \omega_0 t \} \quad (\text{D.20})$$

$$u_\theta(r, z, t) = B_1(\delta r) \text{Cos}[k_\theta(\Omega)z - \Omega t] \quad (\text{D.21})$$

Donde se definieron las funciones:  $B_n(\gamma r) = C_{1n} J_n(\gamma r) + C_{2n} Y_n(\gamma r)$  en un caso y  $B_n(\gamma r) = D_{1n} I_n(\gamma r) + D_{2n} K_n(\gamma r)$  en otro caso según el signo elegido. Donde  $C_{in}$  y  $D_{in}$  son constantes de integración. Esta elección depende del rango de frecuencias de las oscilaciones. En el caso de las oscilaciones del desplazamiento en la dirección  $\theta$  se comprueba que el signo positivo corresponde a velocidades de propagación de onda  $c < \beta$  y el signo negativo al caso contrario donde  $c$  es:

$$c^2 = \beta^2 [1 \pm (\delta / k_\theta)^2] \quad (\text{D.22})$$

Los parámetros  $a(\omega)$  y  $b(\omega)$  se definen a partir del número de onda  $k$  en (D.16-D.18) por  $k(\omega) = a(\omega) + j b(\omega)$  donde  $j$  es la unidad imaginaria.

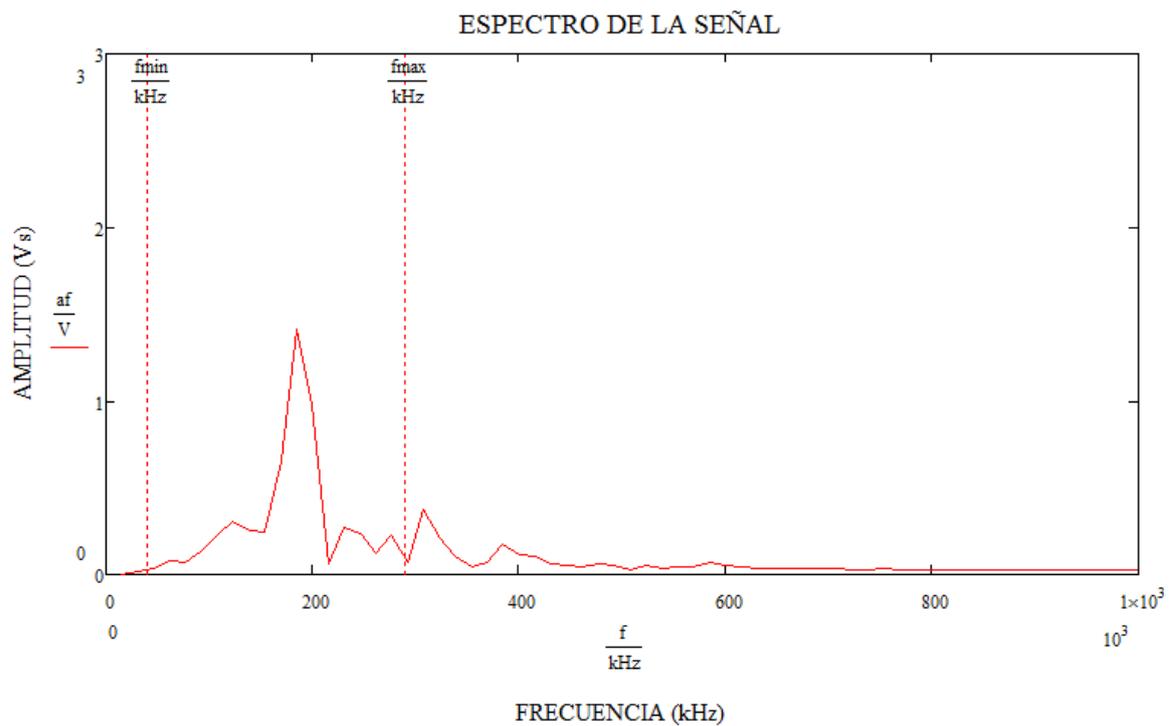
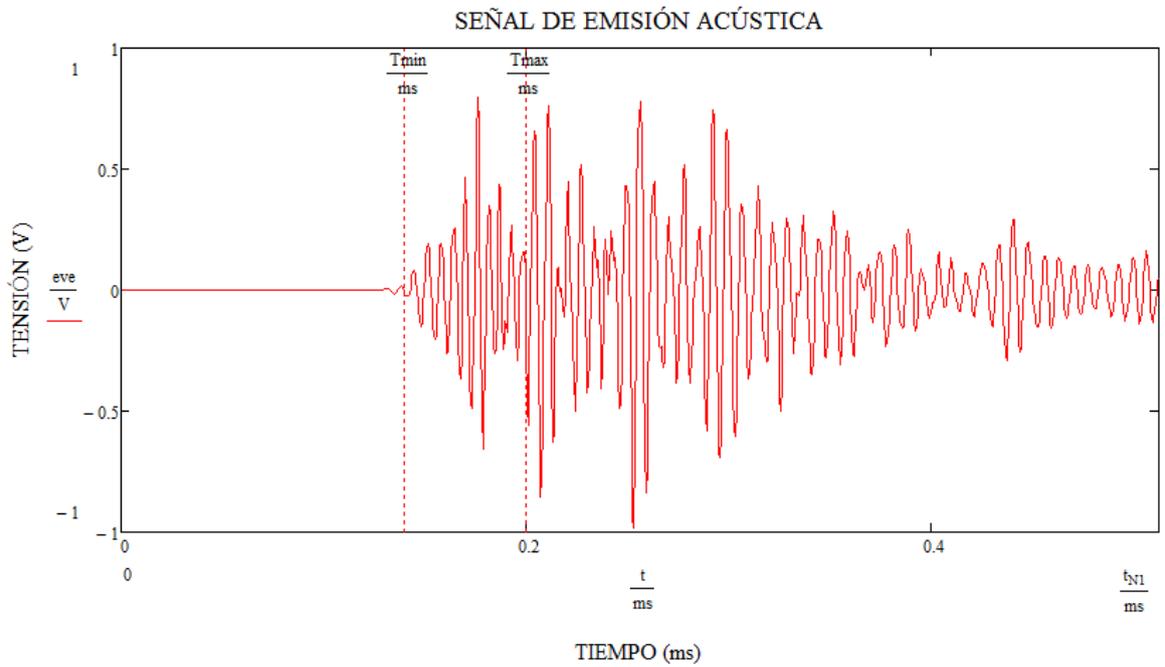
El análisis de las expresiones encontradas muestra en primer lugar una dependencia radial de tipo Bessel, como era de esperar en un problema de simetría cilíndrica, que modula en todas las componentes de la deformación a ondas viajeras que se propagan en la dirección axial. El caso más

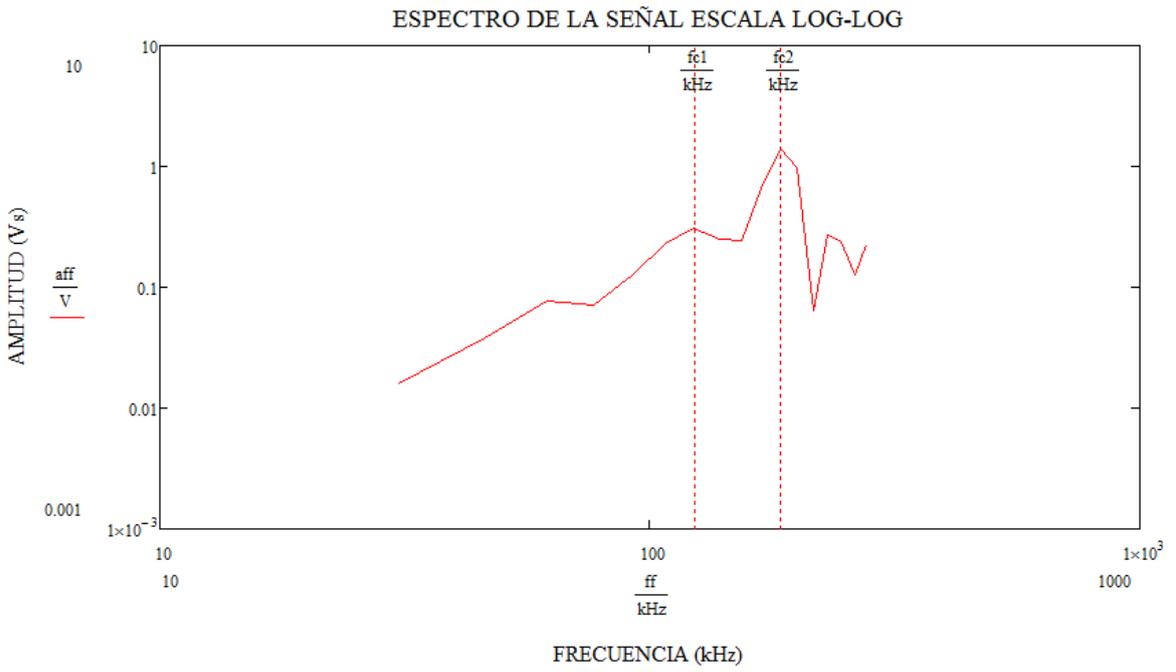
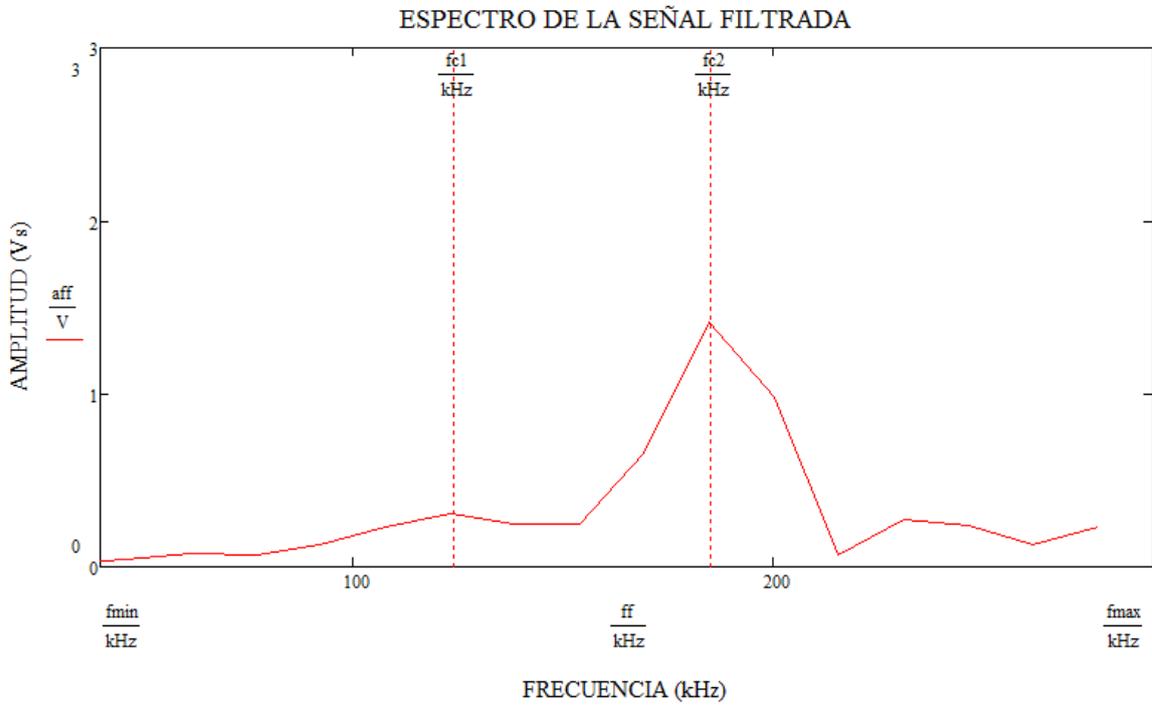
simple corresponde a la componente circunferencial, que modula a una onda viajera transversal. En el caso de la componente radial también modula a una onda viajera transversal pero que se amortigua exponencialmente a medida que la onda avanza en la dirección axial, donde  $b(\omega)$  es el coeficiente de amortiguamiento dependiente de la frecuencia. Para la componente axial de la deformación, se trata de una onda longitudinal y se encontró el mismo efecto de amortiguamiento con el agregado de una modulación dependiente de la frecuencia tanto en fase como en amplitud. Es interesante observar que para zonas alejadas de la fuente de onda, se obtiene una oscilación permanente no amortiguada. Se explica por su dependencia exclusiva de las constantes elásticas y no viscosas. Las velocidades de fase encontradas corresponden a medios dispersivos, dada su dependencia con la frecuencia de oscilación. El paso siguiente en este estudio es plantear las condiciones de contorno en el conducto cilíndrico y determinar las constantes de integración correspondientes.

## APÉNDICE E

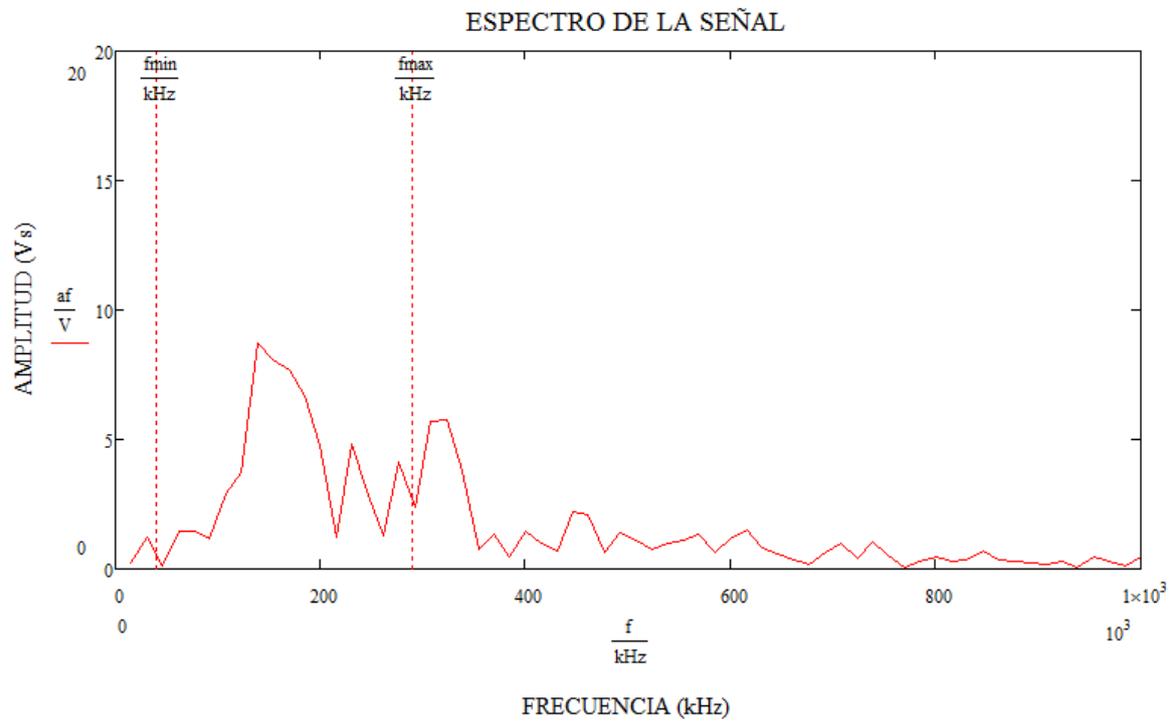
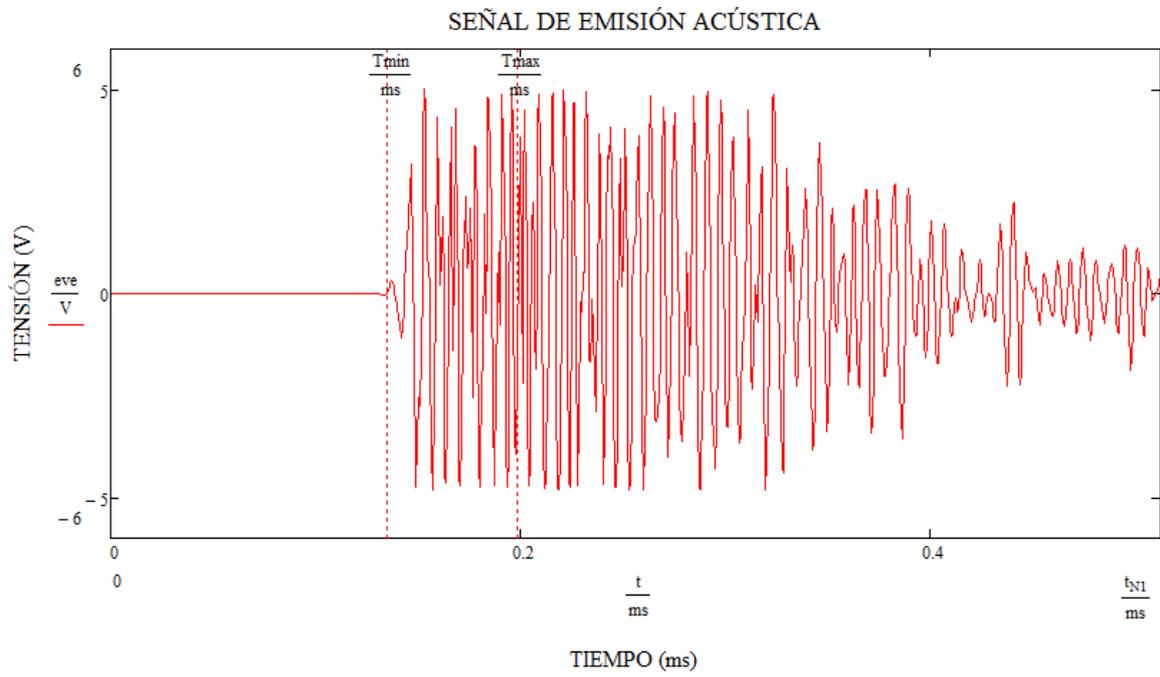
Señales analizadas de las probetas 11 a 15 como ejemplo.

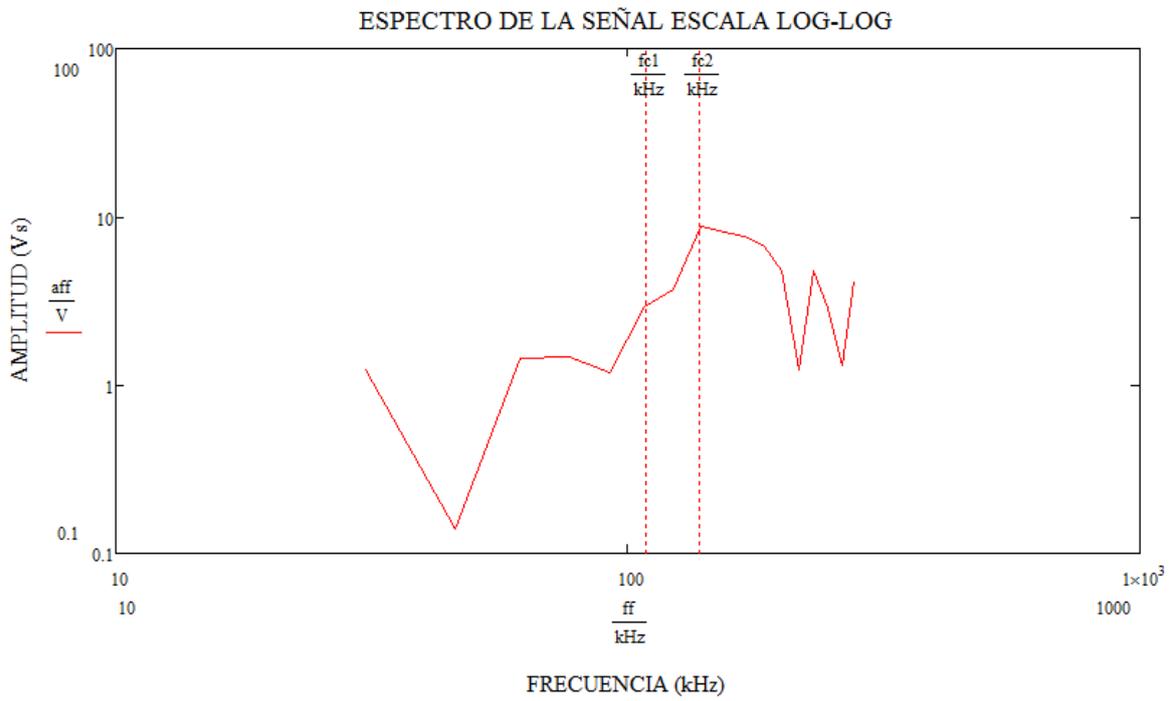
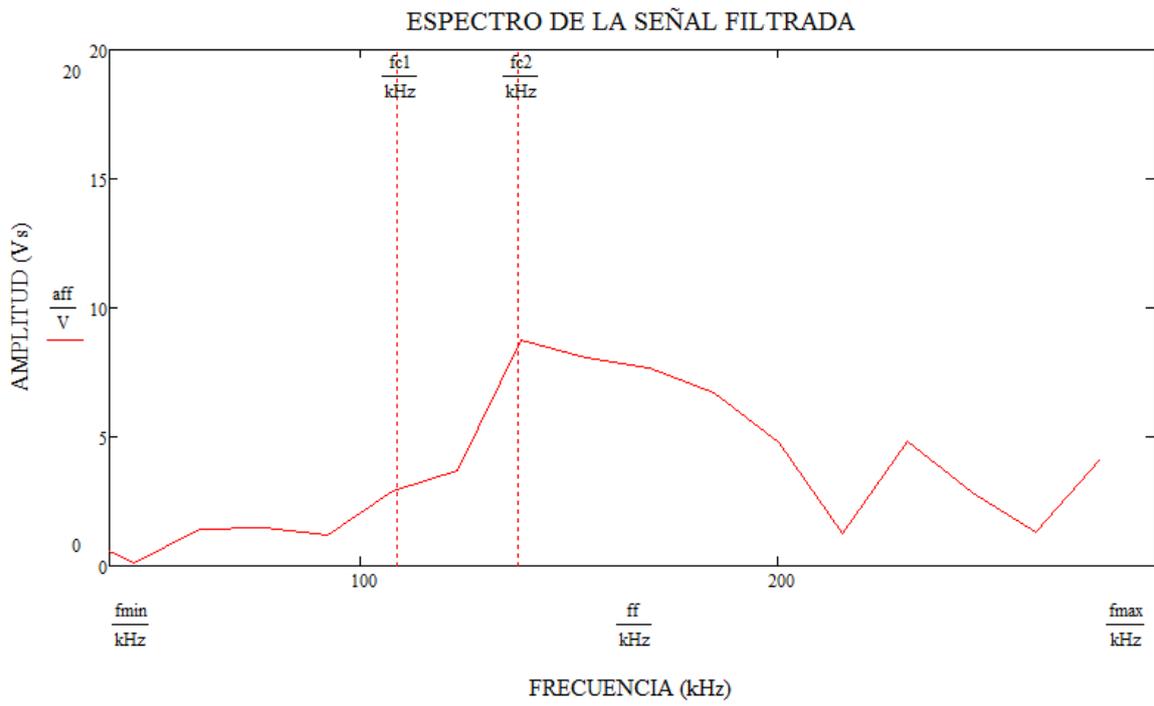
### PROBETA 11





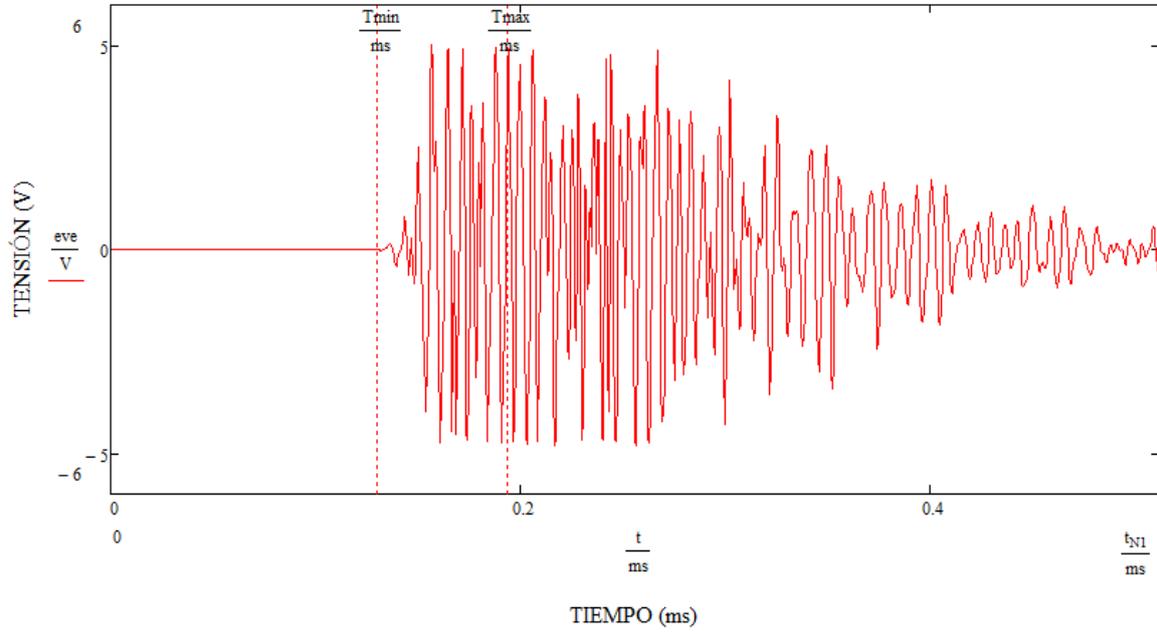
## PROBETA 12



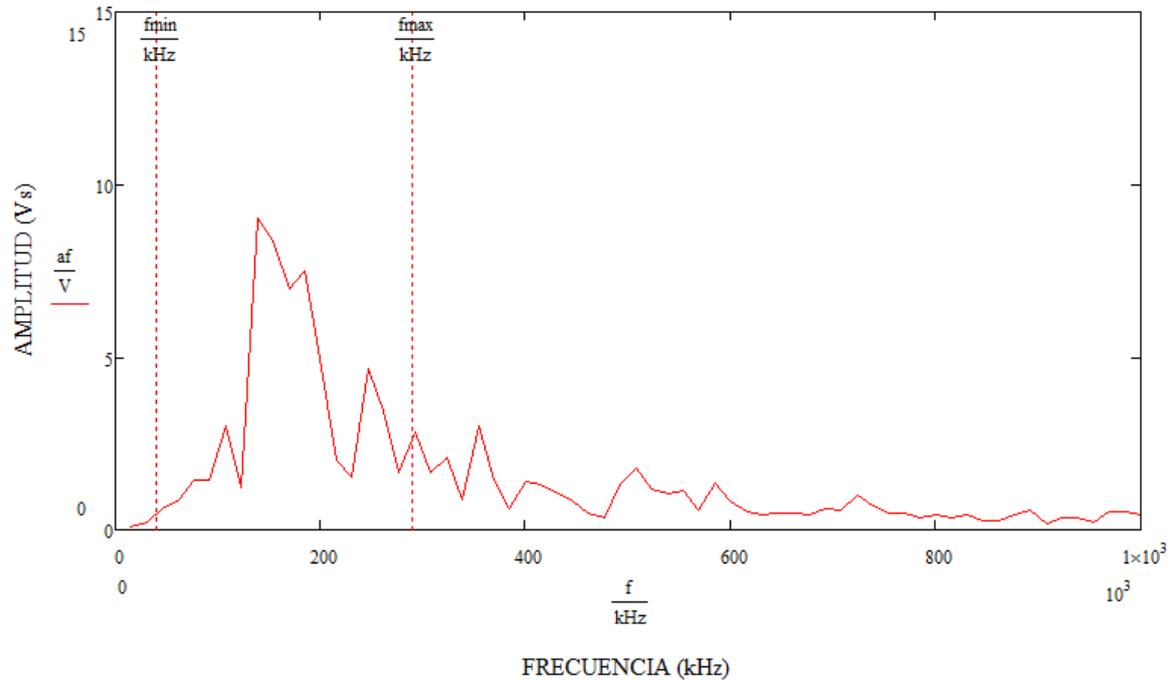


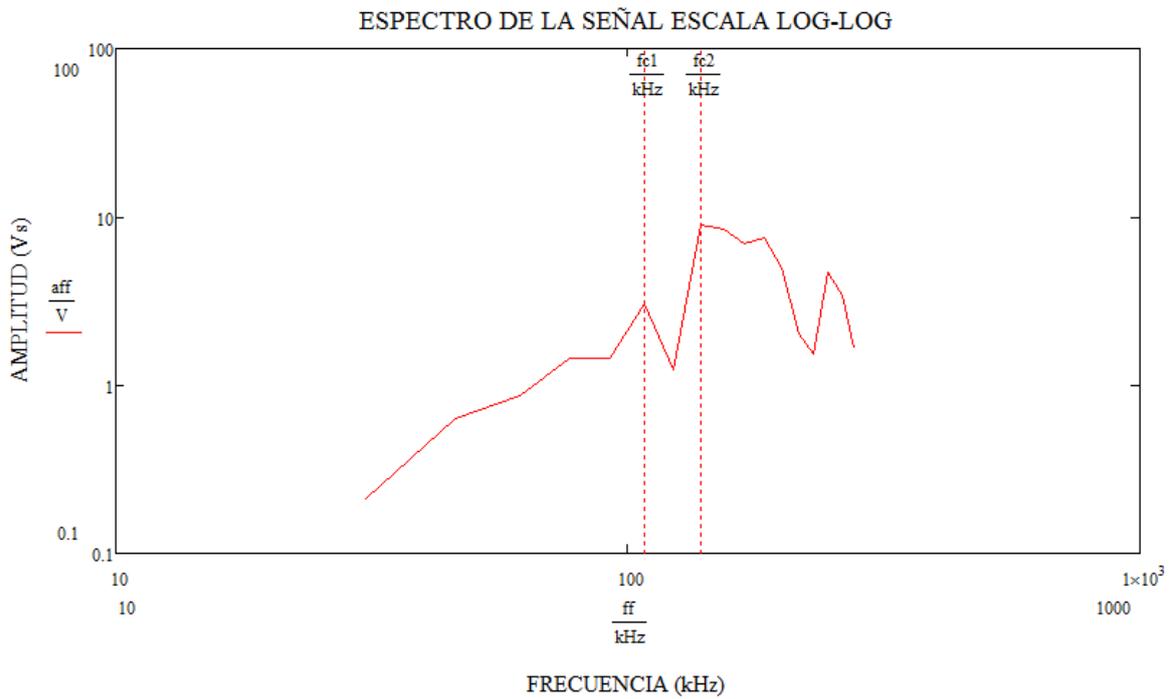
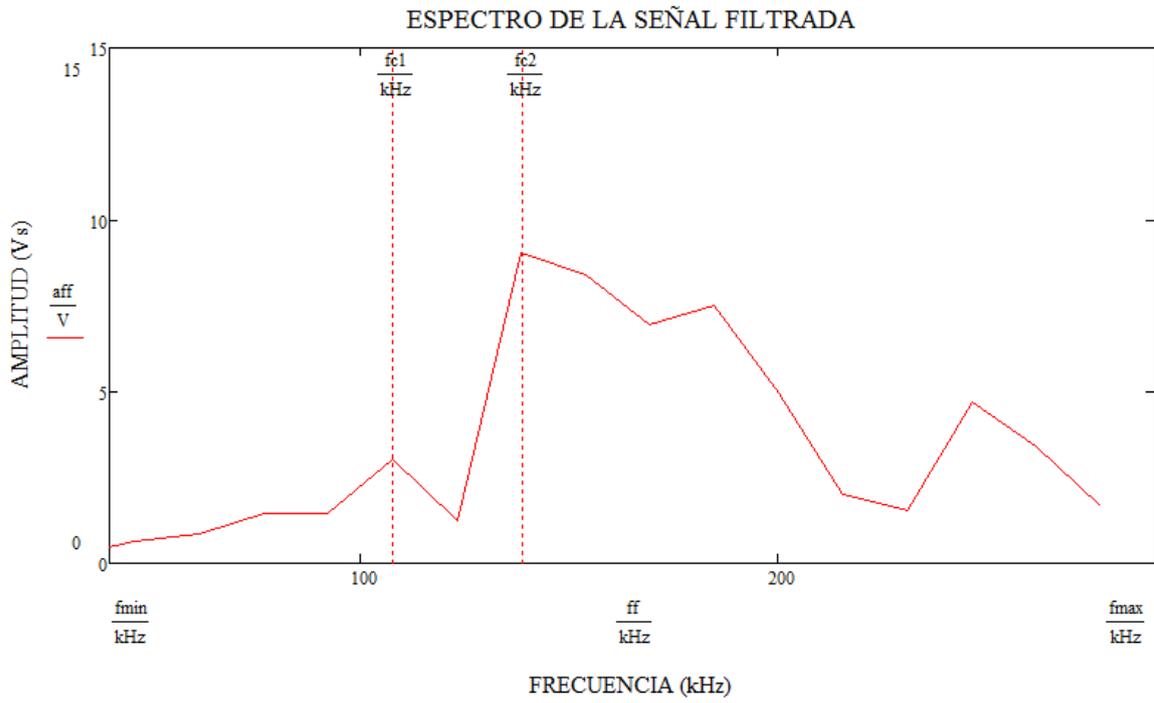
# PROBETA 13

## SEÑAL DE EMISIÓN ACÚSTICA

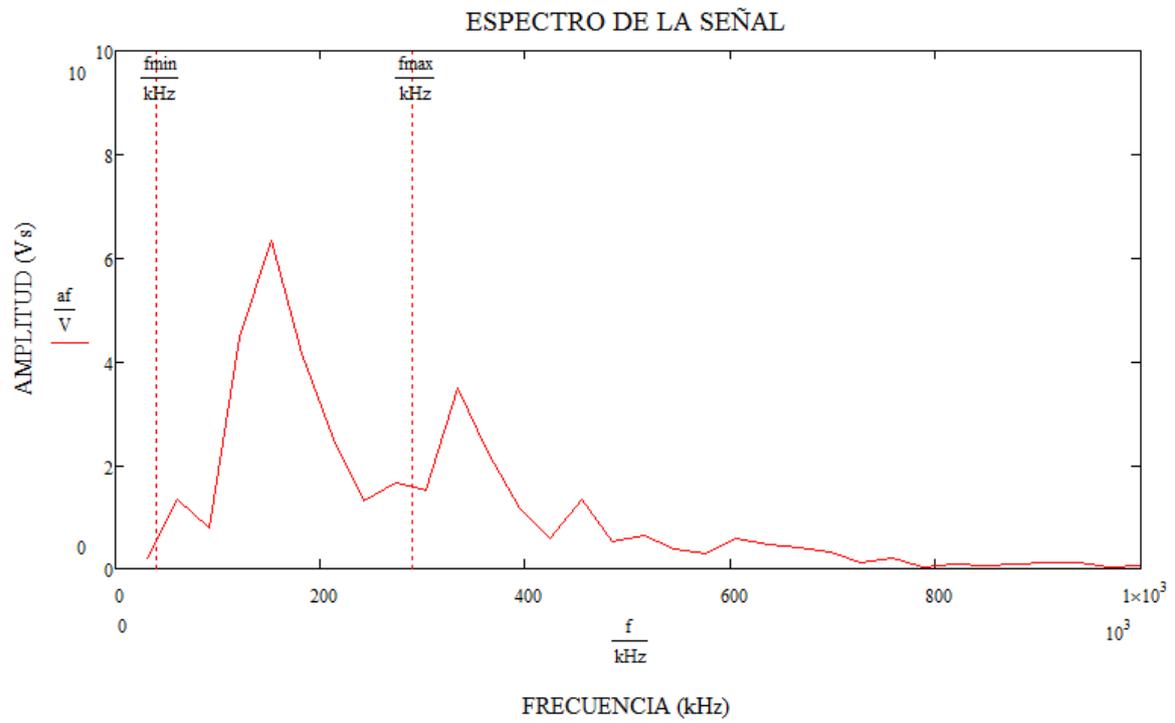
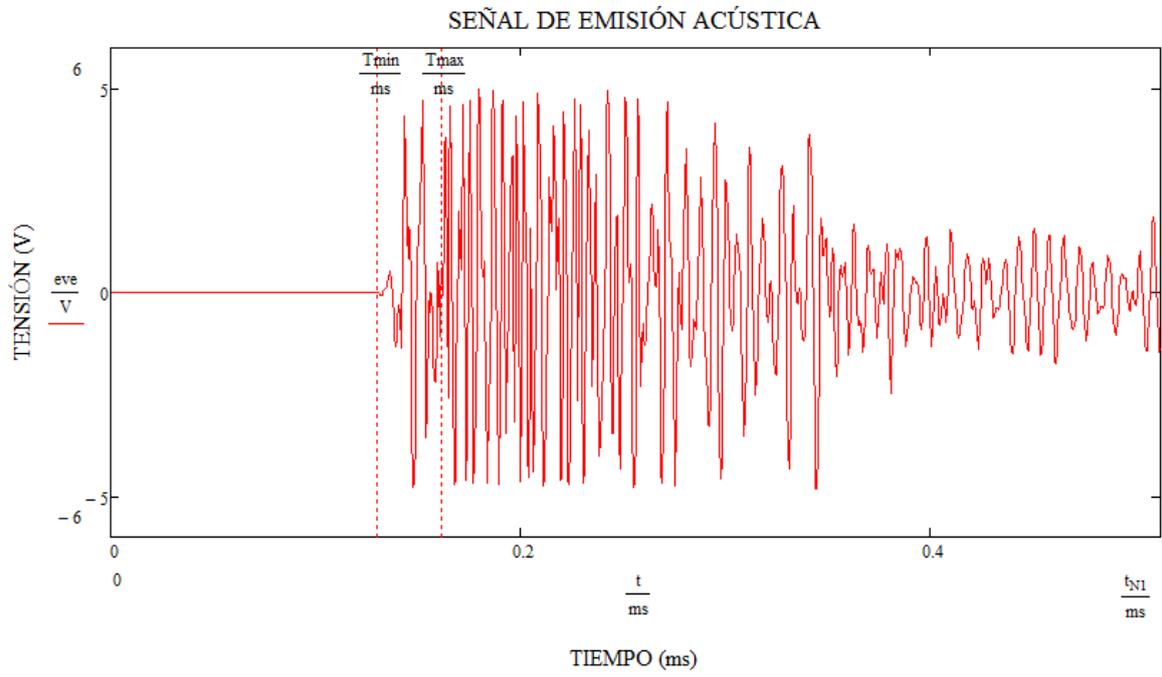


## ESPECTRO DE LA SEÑAL

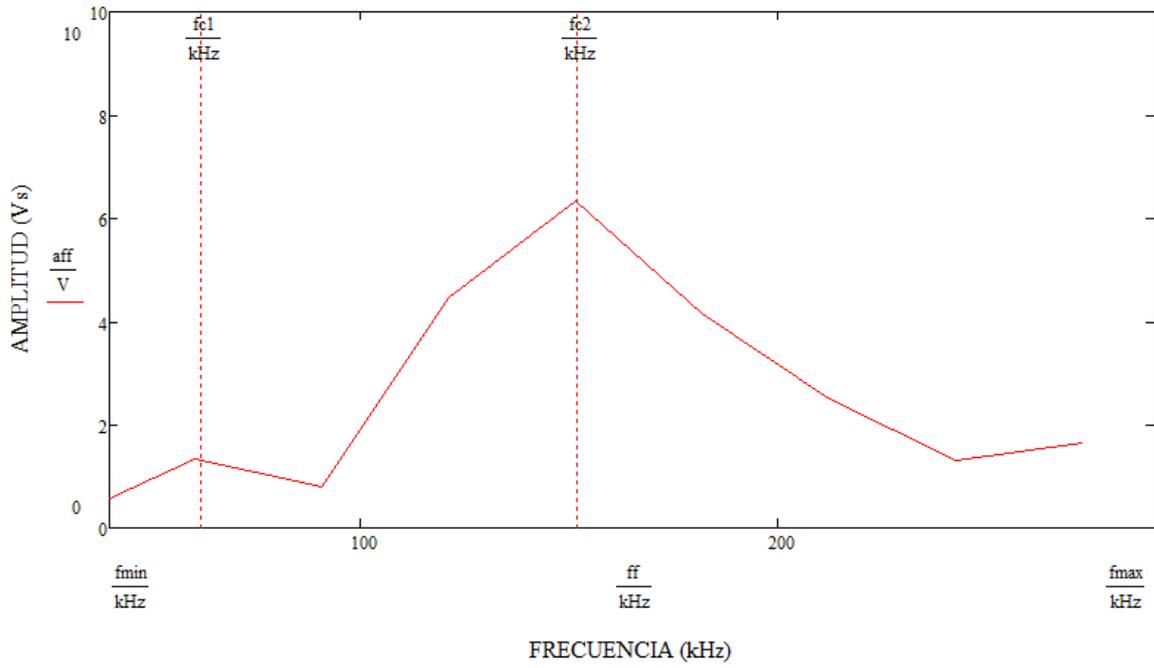




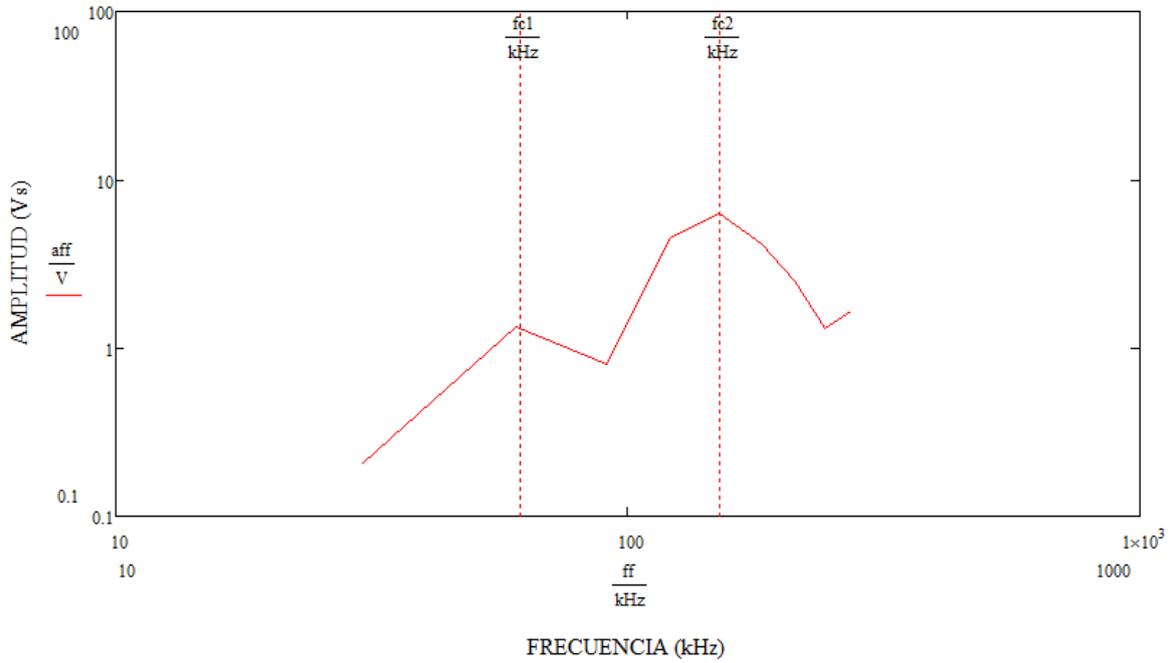
# PROBETA 14



ESPECTRO DE LA SEÑAL FILTRADA

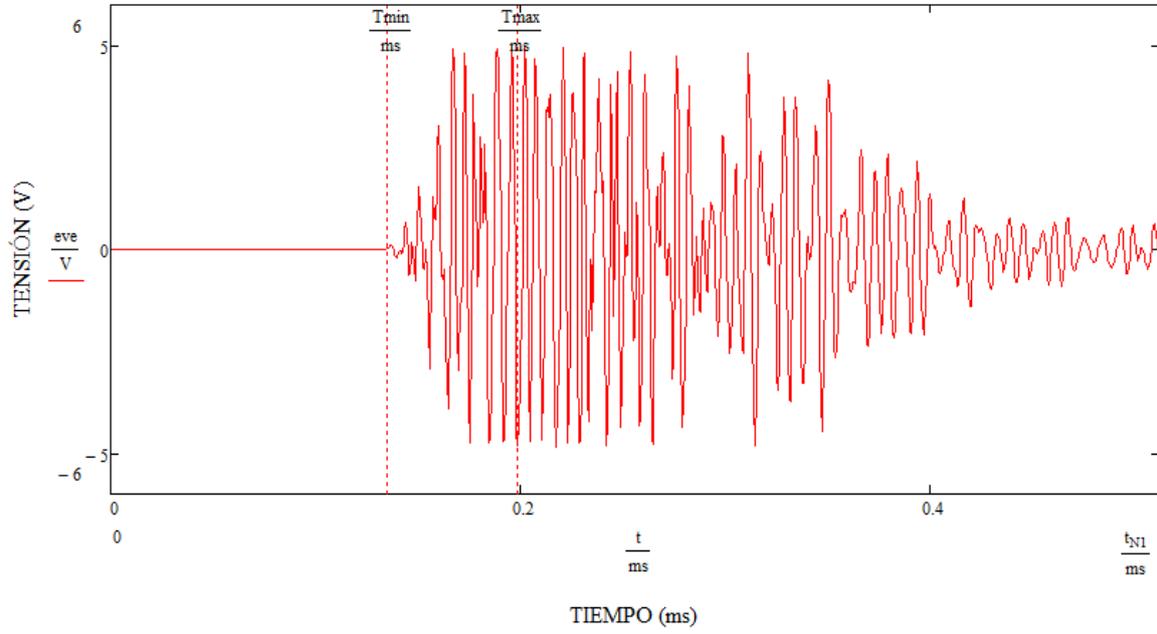


ESPECTRO DE LA SEÑAL ESCALA LOG-LOG

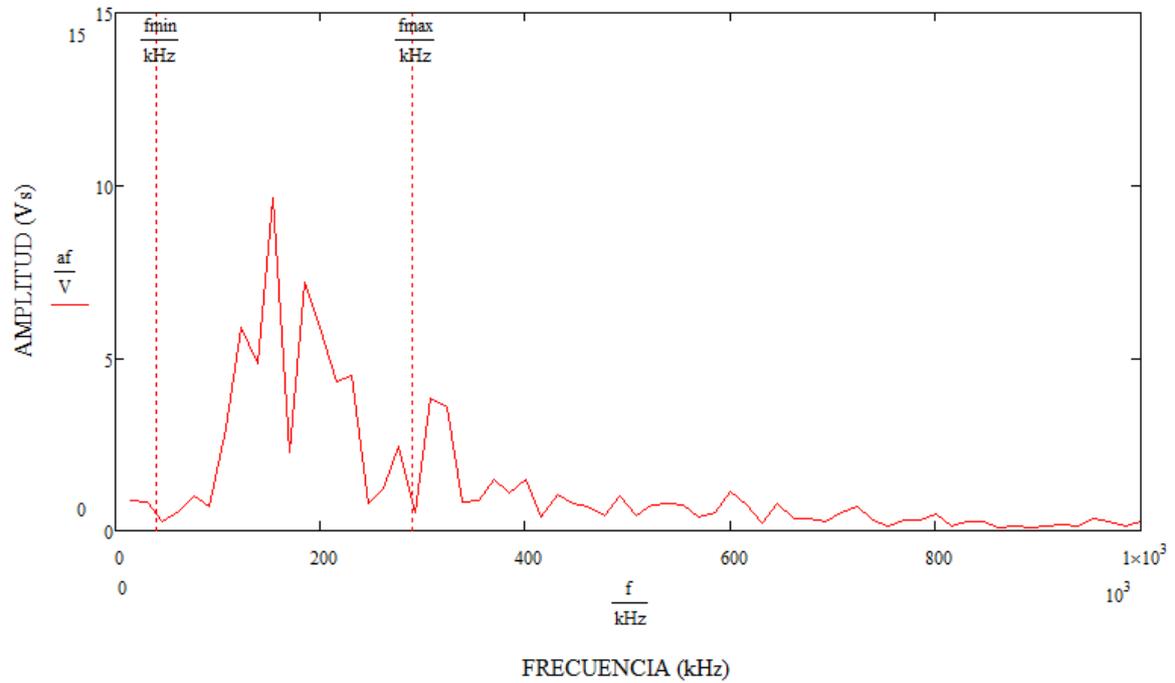


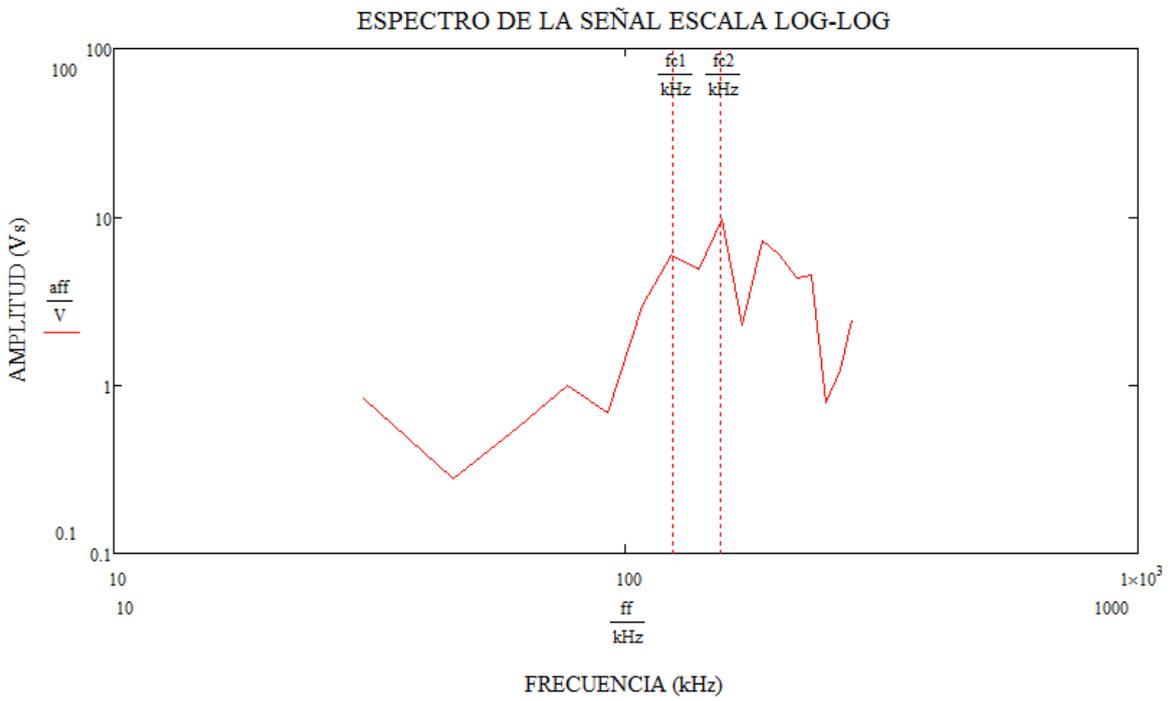
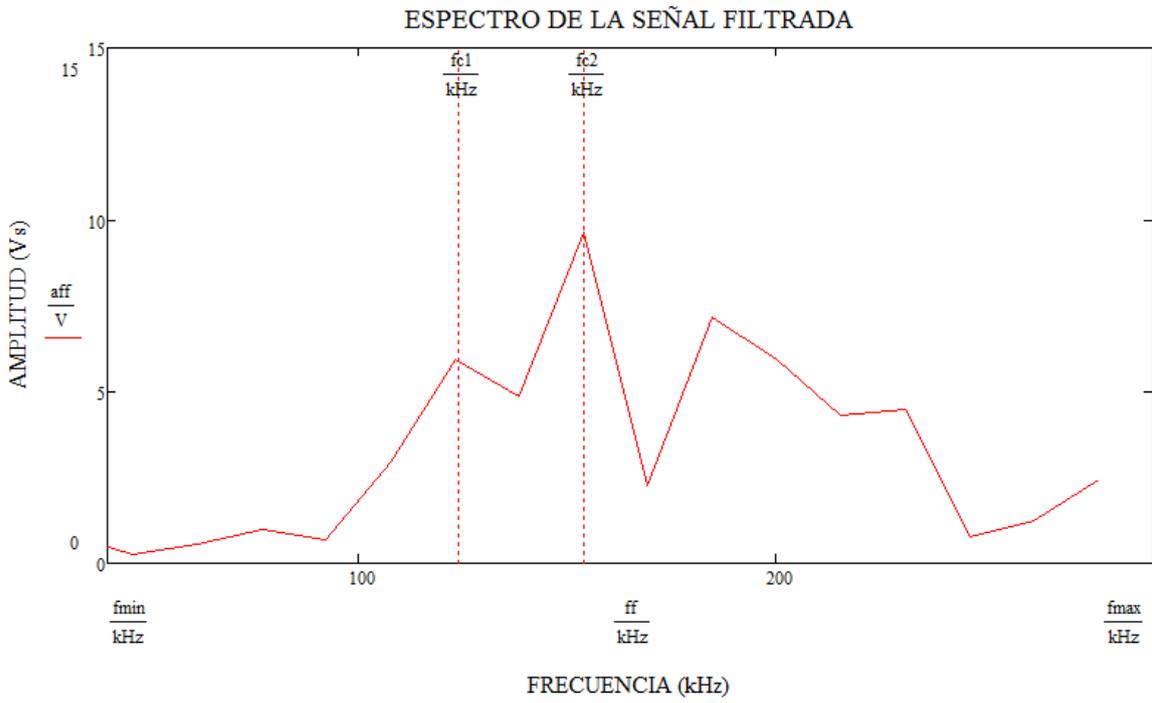
# PROBETA 15

## SEÑAL DE EMISIÓN ACÚSTICA



## ESPECTRO DE LA SEÑAL





## REFERENCIAS

- Abraham FF, Brdbeck D, Rafey RA and Rudge WE (1994). "Instability Dynamics of Fracture: A Computer Simulation Investigation", *Physical Review Letters*, **73** (2), 272-275.
- Aki K, Richards PG (1980). *Quantitative Seismology, Theory and Methods*, W. H. Freeman and Company, San Francisco, California.
- Backus G, Mulcahy M (1976). "Moment tensors and other phenomenological descriptions of seismic sources. I, Continuous displacements", *Geophys. J.R Astr. Soc.*, **46**, 341-361.
- Buform E, Udías A y Madaragia R (1994). *Mecanismo Focal de los Terremotos*, Ed. Complutense.
- Brune JN (1970). "Tectonic stress and the spectra of seismic shear waves from earthquakes", *J. Geophys. Res.*, **75**, 4997-5009.
- Cagniard L, (1962). *Reflection and Refraction of Progressive Seismic Waves*, Mc Graw-Hill, New York.
- Ceranoglu AN and Yih-Hsing P (1981). "Propagation of Elastic Pulses and Acoustic Emission in a Plate, Part1: Theory", *Journal of Applied Mechanics*, **48**, 125-132.
- Ceranoglu AN and Yih-Hsing P (1981). "Propagation of Elastic Pulses and Acoustic Emission in a Plate, Part2: Epicentral Responses", *Journal of Applied Mechanics*, **48**, 133-138.
- Ceranoglu AN and Yih-Hsing P (1981). "Propagation of Elastic Pulses and Acoustic Emission in a Plate, Part3: General Responses", *Journal of Applied Mechanics*, **48**, 139-147.
- Ching ESC, Langer JS and Nakanishi H (1996). "Dynamic Instabilities in Fracture", *Physical Review Letters*, **76** (7), 1087-1090.
- Dulaney EN and BraceWF (1960). "Velocity Behavior of a Growing Crack", *Journal of Applied Physics*, **31** (1), 2233-2236.
- Echevarria R (2003). *Fractura de Materiales*, Universidad Nacional del Comahue, Facultad de Ingeniería, Laboratorio de Ensayos No Destructivos.
- Fineberg J, Gross SP, Marder M and Swinney (1992). "Instability in the propagation of fast cracks", *Physical Review B*, **45** (10), 5146-5154.
- Gazis DC (1959), "Three-dimensional investigation of the propagation of waves in hollow circular cylinders. I. Analytical foundation", *Journal of the Acoustical Society of America*, **31**, 568-573.
- Graff KF (1975). *Wave Motion in Elastic Solids*, Oxford University Press.
- Gross SP, Fineberg J, Marder M, McCormick WD and Swinney HL (1993). "Acoustic Emissions from Rapidly Moving Cracks", *Physical Review Letters*, **71** (19), 3162-3165.

- Grosse CU, Ohtsu M (2008). *Acoustic Emission Testing*, Springer.
- Kasahara K (1981). *Earthquake Mechanics*, Cambridge Univ. Press. Cambridge, UK.
- Kiesewetter N (1974). “Acoustic emission from moving dislocations”, *Scripta Metallurgica*, **8**, 249-252.
- Kuttruff H (1991). *Ultrasonics, Fundamentals and Applications*, Elsevier, London, 78-118.
- López Pumarega MI and Ruzzante JE (1996). “Acoustic Emission signal analysis from steel tubes”, *Proc. 14<sup>th</sup> World Conference on Non-Destructive Testing*, 2493-2497.
- Marder M and Gross SP (1995). “Origin of Crack Tip Instabilities”, *J. Mech. Phys. Solids*, **43** (1), 1-48.
- Marder M and Xiangming Liu (1993). “Instability in Lattice Fracture”, *Physical Review Letters*, **71** (15), 2417-2420.
- Meyers and Chawla (1999), *Mechanical Behavior of Materials*, 98-103.
- Mieza, JI (2004), “Caracterización y Propagación de Ondas de Emisión Acústica en Probetas Tubulares de Acero”, Tesis de Maestría, Instituto Sábató, UNSAM - CNEA, (IT/T 89/04), Argentina.
- Mejías H D, de Vedia L A (1987). “Influence of side grooving on crack arrest toughness of C-Mn steels”, *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 26, **5**, 625-636.
- Mittrakovic D, Grabec I and Sedmak S (1985). “Simulation of AE signals and signal analysis systems”, *Ultrasonics*, 227-232.
- Molnar P, Tucker BE and Brune JN (1973). “Corner frequencies of P and S waves and models of earthquake sources”, *Bull. Seism. Soc. Am.*, **63**, 2091-2104.
- Naber RR, Bahai H and Jones BE (2006). “A reciprocal band-limited Green’s function approach for modeling acoustic emission using the finite element method”, *Journal of Sound and Vibration*, **292**, 802-823.
- Naber RR and Bahai H (2006). “Analytical and experimental validations of a numerical band-limited Green’s function approach for modeling acoustic emission waves”, *Advances in Engineering Software*, **38**, 876-885.
- Ohtsu M (1989). “Inverse inspection by acoustic emission based on the boundary element formulation”, *The American Society of Mechanical Engineers*, **177**, 201-205.
- Ohtsu M, Yuyama S and Imanaka T (1987). “Theoretical treatment of acoustic emission sources in microfracturing due to disbanding”, *J. Acoust. Soc. Am.*, **82** (2), 506-512.
- Ohtsu M (1987). “Mathematical Theory of acoustic emission and its application”, *Memoirs of the Faculty of Engineering, Kumamoto University*, **32** (1), 1-28.

- Ohtsu M and Ono K (1986). "The Geeneralized Theory and Source Representations of Acoustic Emission", *Journal of Acoustic Emission*, **5** (4), 124-132.
- Paparo G, Gregori GP, Coppa U, De Ritis R and Taloni A (2002). "Acoustic Emission as a diagnostic tool in geophysics", *Annals of Geophysics* Vol. 45, **2**, 401.
- PCI-2 Based AE System (2007), User's Manual, Physical Acoustics Corporation (PAC), Princeton Junction, New York.
- Pekeris CL and Lifson H (1957). "Motion of the Surface of a Uniform Elastic Half-Space Produced by a Buried Pulse", **29** (11), 1233-1238.
- Pollock A (1989). "Acoustic Emission Inspection", *Methods of Non-Destructive Evaluation*, **4**, 278-281.
- Roylance D (2001). *Engineering Viscoelasticity*. Department of Materials Science and Engineering Massachusetts Institute of Technology. Cambridge.
- Rouby D, Fleischmann P and Douvergier C (1983). "Un modèle de sources d'émission acoustique pour l'analyse de l'émission continue et de lémission par salves, I. Analyse théorique", *Philosophical Magazine*, **47** (5), 671-687.
- Rouby D, Fleischmann P and Douvergier C (1983). "Un modèle de sources d'émission acoustique pour l'analyse de l'émission continue et de lémission par salves, II. Vérifications expérimentales", *Philosophical Magazine*, **47** (5), 689-705.
- Ruzzante J, López Pumarega, MI, Gregori GP, Paparo G, Piotrkowski R, Poscolieri M and Zanini A (2008). "Acoustic emission, tides, and degassing on the Peteroa volcano Argentina", in *Microseismic: Acoustic emission*, Vol.1, CNEA, 37.
- Savage JC (1972). "Relation of corner frequency to fault dimensions", *J. Geophys. Res.*, **77**, 3788-3795.
- Sharon E, Gross SP and Fineberg J (1995). "Local Crack Branching as a Mechanism for Instability in Dynamic Fracture", *Physical Review Letters*, **74** (25), 5096-5099.
- Sharon E, Gross SP and Fineberg J (1996). "Energy Dissipation in Dynamic Fracture", *Physical Review Letters*, **76** (12), 2117-2120.
- Sinclair JE (1979). "Epicentre solutions for point multipole sources in an elastic half-space", *Phys.D: Appl. Phys.*, **12**, 1309-1315.
- Udias A (1991). "Source Mechanism of Earthquakes", *Advances in Geophysics*, **33**, 81-140.
- Willis JR (1973). "Self-similar problems in elastodynamics", *Phil. Trans. R. Soc.*, **A274**, 435-491.
- Yuyama S, Imanaka T and Ohtsu M (1988). "Quantitative evaluation of microfracture due to disbanding by waveform analysis of acoustic emission", *J. Acoust. Soc. Am.*, **83** (3), 976-983.