

## 27 Validación de un modelo matemático para los factores de concentración de esfuerzo en arboles escalonados sometidos a torsión

Carlos Alberto Bello; Alfredo Amico; Alejandro Herrerías

**Resumen:** El propósito de esta investigación fue validar un modelo numérico, desarrollado con un software de cálculo mediante *Elementos Finitos*, utilizando como comparación un modelo clásico para determinar la distribución de tensiones en los árboles sometidos a torsión, donde se hacen cambios de sección, estas discontinuidades introducen condiciones de entalla y dan por resultado concentración de tensiones. Se estudió un modelo establecido en la bibliografía, resultados de las investigaciones de Peterson y Mathews y Hooke El método utilizado fue simular un árbol con cambio de sección mediante el programa Solid-Works y procesada mediante el modulo de cálculo COSMOS. Se determinaron las condiciones de validez del modelo numérico a partir de las cartas del Factor de concentración de esfuerzo que se encuentran en la bibliografía y son de uso generalizado. Se espera determinar criterios de utilización del programa para transferir a las cátedras de Elementos de Máquinas y Máquinas y Equipos Industriales que utilizan este software.

**Palabras clave:** factor, concentración, esfuerzo, tensión, torsión, elementos finitos.

### Introducción

En la práctica de la ingeniería cuando se diseñan elementos de máquinas, la determinación de la forma de los componentes impone cambios de sección, lo que hace que aparezcan condiciones de sollicitación muy cambiantes. Para el caso de los árboles y ejes, la combinación de los principales esfuerzos a que están sometidos, tales como flexión y torsión, con estas discontinuidades propias del diseño, generan zonas donde los esfuerzos se concentran y adquieren valores varias veces superiores a los de secciones contiguas. El caso de estudio que abordamos será solo para la sollicitación de torsión simple y las discontinuidades de cambio de diámetro. La aplicación del teorema de superposición de los efectos permite hacer los

análisis de cada efecto simple y luego hacer una integración los mismos.

La ciencia de la resistencia de materiales ha utilizado estrategias diversas para evaluar los coeficientes de magnificación de las tensiones, de modo de tener la posibilidad de obtener las condiciones de sollicitación al momento de dimensionar los componentes.

El método matemático para determinar las tensiones localizadas se sustenta en la teoría matemática de la elasticidad y en general requiere de ecuaciones diferenciales de difícil solución. Cabe destacar que los modelos matemáticos suponen hipótesis simplificadoras tales como que la pieza es de un material homogéneo, isótropo y elástico, por lo tanto el valor de la tensión obtenida depende sólo de la forma geométrica. Esto implica que el efecto de las discontinuidades de los materiales reales no se tiene en cuenta.

Son muy usadas otras estrategias tales como los métodos experimentales para determinar el efecto de la concentración de tensiones, que permiten validar los modelos matemáticos y definir las restricciones propias del uso de dichos modelos. Algunos de estos procedimientos utilizados son, por ejemplo, los estudios de foto elasticidad y las analogías con membrana elástica.

En muchos casos no se desarrollaron modelos matemáticos para las discontinuidades por ser muy eficientes algunas estrategias empíricas de obtención de coeficientes, que luego se aplican a los modelos sencillos de cálculo. El caso de los árboles sometidos a torsión es uno de ellos, ya que es muy simple la utilización de la ecuación de torsión encontrada por la ciencia de resistencia de materiales. Por ello, al disponer de los coeficientes a aplicar en las discontinuidades, el dimensionamiento se vuelve un procedimiento sencillo.

El objetivo principal del trabajo fue encontrar las configuraciones de modelización para el programa utilizado, tales como tipos de mallado y método de cálculo, que se valida con un modelo existente que han dado los mejores resultados.

Se pretende demostrar que la utilización de métodos numéricos permite desarrollar modelos que describen en forma eficiente las sollicitaciones producidas en entallas de escalón en árboles

sometidos a torsión y dan resultados comparables a los obtenidos por métodos clásicos con un costo razonable de proceso.

### Modelos de concentrador

Este trabajo se ha desarrollado utilizando la experiencia existente sobre los coeficientes de concentración de tensiones para árboles sometidos a torsión simple con discontinuidades. En la bibliografía específica sobre el diseño de máquinas (Shigley: 2004), (Norton: 2011), (Seely, F.:1967), se utilizan los gráficos expuestos en la bibliografía específica de estudios de concentración de tensiones (Peterson: 1974) de los estudios de Mathews y Hooke. Estos investigadores utilizaron una técnica numérica basada en las ecuaciones de la elasticidad y el método *point matching* para satisfacer aproximadamente las condiciones de contorno. El gráfico de la Fig. N°1, permite obtener el coeficiente de concentración de esfuerzo debido al acuerdo en un árbol escalonado sometido a torsión.

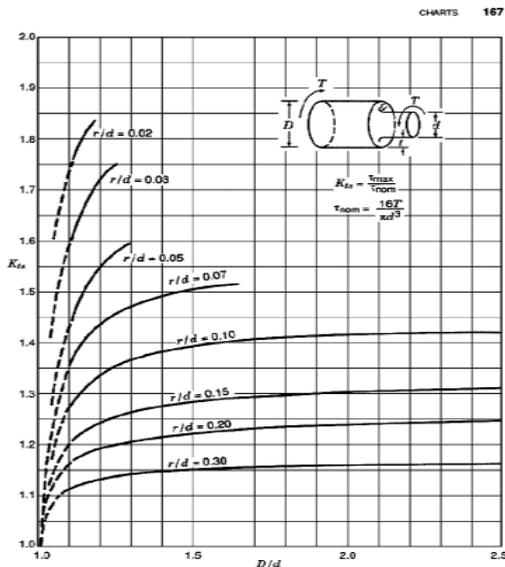


Chart 3.13 Stress concentration factors  $K_{ts}$  for torsion of a shaft with a shoulder fillet (data from Mathews and Hooke 1971). This chart serves to supplement Chart 3.12.

**Fig. N°1.** Factor de concentración de esfuerzo en función de la relación de diámetros y el radio de acuerdo, fuente: Mathews&Hooke (1971).

## Materiales y métodos

Para este estudio se utilizó la carta 3.13 que se encuentra en la bibliografía (Pilkey: 1997, 167) de la Fig. N°1, de donde se obtuvieron los valores de Kts de referencia, de modo de reconstruir una tabla en Excel y poder compararla con los valores calculados, emergentes de una simulación numérica mediante el programa Solid-Works. Este programa incluye un módulo de cálculo denominado COSMOS mediante el método de cálculo por elementos finitos (MEF), (FEA en inglés).

De la carta de la Fig. N°1, se obtuvieron los valores correspondientes de abscisas (D/d) y ordenadas (Kts), que volcados a la planilla de cálculo, permitieran la reproducción electrónica de dichas curvas con la mayor fidelidad posible. Esto con el fin de facilitar la posterior comparación. Los valores se pueden ver en la Tabla N°1.

D/d	Kts							
	0,02	0,03	0,04	0,07	0,10	0,15	0,20	0,30
1,00				1,100			1,073	1,050
1,01				1,102			1,075	1,052
1,02				1,104			1,077	1,054
1,03				1,106			1,079	1,056
1,04				1,108			1,081	1,058
1,05				1,110			1,083	1,060
1,06				1,112			1,085	1,062
1,07				1,114			1,087	1,064
1,08				1,116			1,089	1,066
1,09				1,118			1,091	1,068
1,10				1,120			1,093	1,070
1,11				1,122			1,095	1,072
1,12				1,124			1,097	1,074
1,13				1,126			1,099	1,076
1,14				1,128			1,101	1,078
1,15				1,130			1,103	1,080
1,16				1,132			1,105	1,082
1,17				1,134			1,107	1,084
1,18				1,136			1,109	1,086
1,19				1,138			1,111	1,088
1,20				1,140			1,113	1,090
1,21				1,142			1,115	1,092
1,22				1,144			1,117	1,094
1,23				1,146			1,119	1,096
1,24				1,148			1,121	1,098
1,25				1,150			1,123	1,100
1,26				1,152			1,125	1,102
1,27				1,154			1,127	1,104
1,28				1,156			1,129	1,106
1,29				1,158			1,131	1,108
1,30				1,160			1,133	1,110
1,31				1,162			1,135	1,112
1,32				1,164			1,137	1,114
1,33				1,166			1,139	1,116
1,34				1,168			1,141	1,118
1,35				1,170			1,143	1,120
1,36				1,172			1,145	1,122
1,37				1,174			1,147	1,124
1,38				1,176			1,149	1,126
1,39				1,178			1,151	1,128
1,40				1,180			1,153	1,130
1,41				1,182			1,155	1,132
1,42				1,184			1,157	1,134
1,43				1,186			1,159	1,136
1,44				1,188			1,161	1,138
1,45				1,190			1,163	1,140
1,46				1,192			1,165	1,142
1,47				1,194			1,167	1,144
1,48				1,196			1,169	1,146
1,49				1,198			1,171	1,148
1,50				1,200			1,173	1,150
1,51				1,202			1,175	1,152
1,52				1,204			1,177	1,154
1,53				1,206			1,179	1,156
1,54				1,208			1,181	1,158
1,55				1,210			1,183	1,160
1,56				1,212			1,185	1,162
1,57				1,214			1,187	1,164
1,58				1,216			1,189	1,166
1,59				1,218			1,191	1,168
1,60				1,220			1,193	1,170
1,61				1,222			1,195	1,172
1,62				1,224			1,197	1,174
1,63				1,226			1,199	1,176
1,64				1,228			1,201	1,178
1,65				1,230			1,203	1,180
1,66				1,232			1,205	1,182
1,67				1,234			1,207	1,184
1,68				1,236			1,209	1,186
1,69				1,238			1,211	1,188
1,70				1,240			1,213	1,190

**Tabla N°1.** Valores del Coeficiente de concentración de esfuerzo Kts en función de la relación de diámetros y el radio de acuerdo, fuente propia.

Si bien se relevaron todas las curvas de la carta, se utilizaron solo dos curvas para hacer el análisis comparativo. Se eligieron las correspondientes a  $r/d=0,03$  y  $r/d=0,10$  y la búsqueda más importante se orientó a determinar las mejores configuraciones de mallado y la optimización del tiempo de proceso.

### **Diseño del modelo virtual**

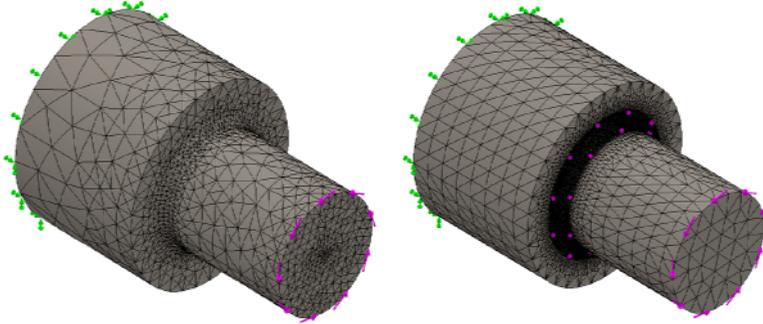
En cuanto a las dimensiones del modelo, se probaron varias alternativas hasta encontrar la más adecuada para que la duración de los cálculos durante la simulación fuera razonablemente corta. Finalmente se optó por una pieza con  $d=20\text{mm}$ , longitud  $L=4d$  y el escalón ubicado en  $L/2$ . Es necesario alejar la discontinuidad de los extremos donde se aplican las condiciones de restricciones y solicitaciones para evitar los errores que se introducen por las condiciones de contorno. Para cada relación  $r/d$  la variable es el diámetro mayor  $D$  (el diámetro menor  $d$  permanece constante); la cantidad de modelos virtuales ensayados fue nueve, es decir se obtuvieron 9 puntos para trazar cada curva. El material seleccionado para la simulación es un acero SAE 1010 con  $E=2100000 \text{ kgf/cm}^2$  y  $\mu=0,3$ .

Debe recordarse que los estudios de modelación por elementos finitos tiene base en las ecuaciones diferenciales de la elástica de deformación, por lo que esto se hace valido para todos los aceros al carbono de baja y media aleación, para los cuales el coeficiente de elasticidad  $E$  es prácticamente el mismo.

Diseñado el prototipo, se aplicaron las condiciones de restricción y de sollicitación, el vínculo de empotramiento en el extremo de mayor diámetro y una sollicitación de torsión  $T=100\text{kgf/cm}^2$  en el extremo de menor diámetro. Se discretizó el sólido mediante los dos métodos de mallado que utiliza el programa, para ello, se aplicó:

- Mallado con control adaptativo, donde el software aumenta el número de elementos donde la variación de tensiones o deformaciones es mayor, Fig. N°2 a.

- Mallado con control manual, en el que el usuario define el lugar y los parámetros de malla, Fig. N°2 b.



2a: mallado control adaptativo

2b: mallado control manual

**Fig. N°2.** Mallados del sólido de ensayo, fuente propia.

La simulación con el mallado adaptativo utiliza el criterio de iteraciones guiadas por la variación de tensión encontrada en el cálculo, cambiando la malla según estos, para aumentar la densidad de elementos en los lugares de alta variación y disminuir los mismos donde no hay variación, obteniéndose una optimización de elementos y por consiguiente del tiempo de proceso.

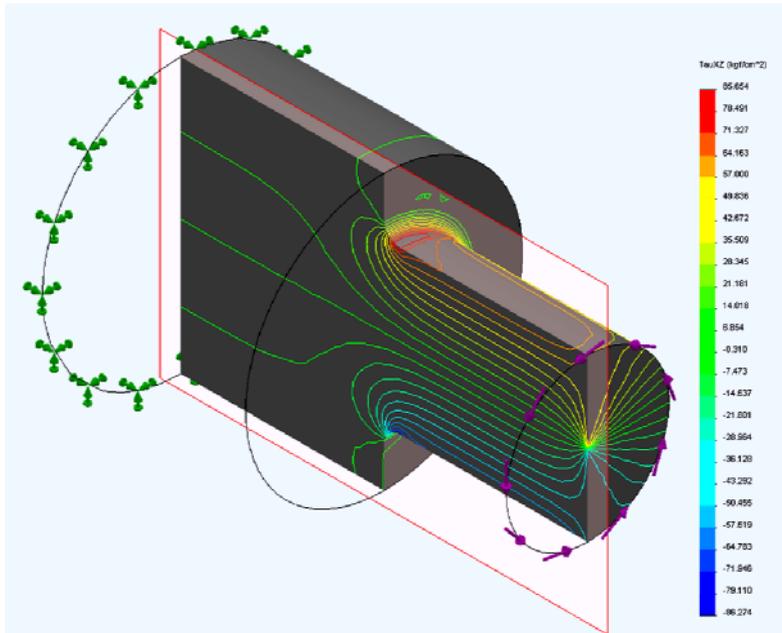
## Resultados

El cálculo determina los valores máximos de tensión cortante y el lugar donde se producen para las condiciones de ensayo (valores de  $D/d$  y  $r/d$ ). La determinación del  $K_{ts}$  se obtiene de la definición del mismo del gráfico de Fig. N°1.

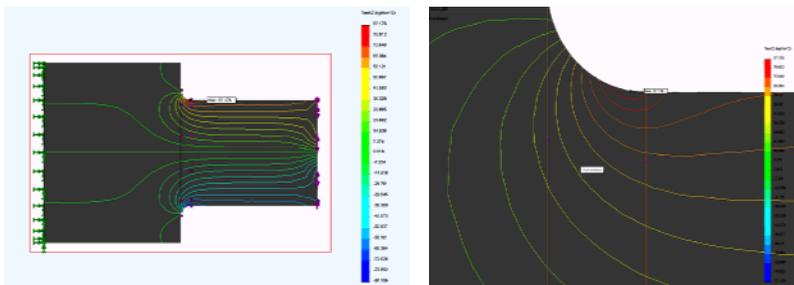
En la Fig. N°3 pueden observarse los grafismos que el programa muestra para visualizar los resultados, donde para los valores de las tensiones se utilizan colores, en este caso de variación discreta y para su configuración espacial, líneas de isotensión.

En los diagramas puede observarse además el resultado de haber tomado las distancias correctas al lugar de aplicación de las solicitaciones y restricciones, las líneas de isotensión muestran una configuración estable y continua lo que evita errores por

proximidad de irregularidades asociadas a la condición de contorno.



3a: Configuración de tensiones mediante líneas de isotensión y valores de las solicitaciones



3b: detalle mediante vista del corte longitudinal

3c: detalle de la configuración en el acuerdo

**Fig. N°3.** Valores y distribución de tensiones, fuente propia, salida gráfica de resultados Mallados de simulación, modulo COSMOS de Solid-Works.

De los valores observados en la simulación se obtienen para las curvas  $r/d=0,03$  y  $r/d=0,10$  los resultados que se muestran en Tabla N°2 y Tabla N°3.

$d = 20 \text{ mm}; r/d = 0,03 \implies r = 0,6 \text{ mm}$

D/d	D (mm)	$\tau_{\max}$ (kgf/cm <sup>2</sup> )	(Kts) <sub>ref</sub>	(Kts) <sub>MEF</sub>	Difer. (%)
1,04	20,8	88,7	1,425	1,393	-2,214
1,06	21,2	93,2	1,525	1,463	-4,053
1,08	21,6	96,2	1,570	1,511	-3,751
1,10	22,0	98,7	1,605	1,550	-3,403
1,12	22,4	100,5	1,635	1,579	-3,446
1,14	22,8	102,2	1,662	1,605	-3,408
1,16	23,2	103,6	1,685	1,627	-3,422
1,18	23,6	104,8	1,705	1,646	-3,449
1,20	24,0	105,9	1,717	1,663	-3,117

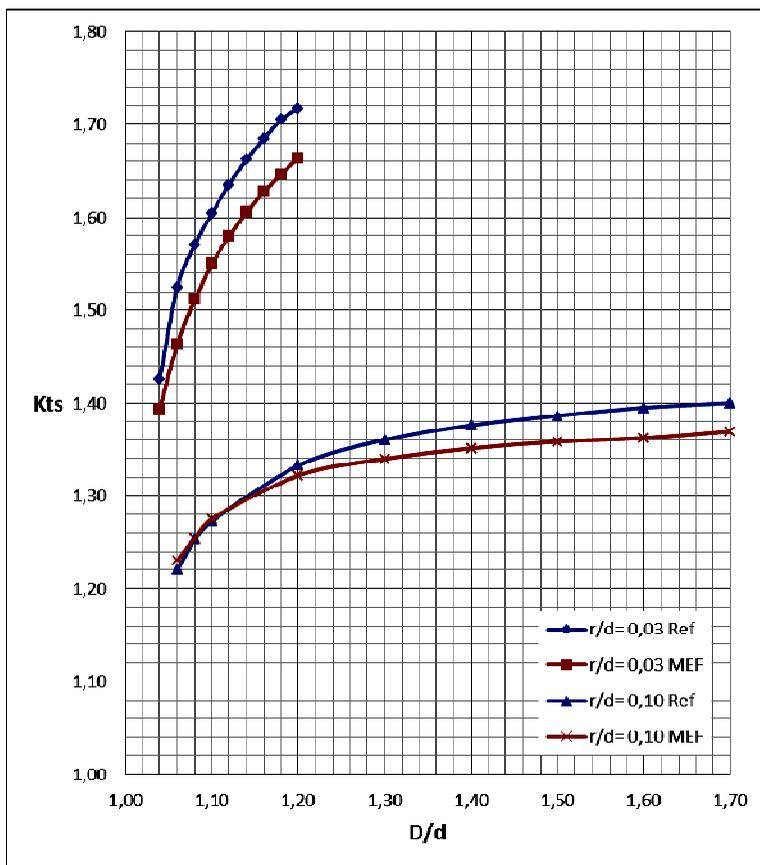
**Tabla N°2:** Resumen de datos y valores de Kts para  $r/d = 0,03$

$d = 20 \text{ mm}; r/d = 0,10 \implies r = 2,0 \text{ mm}$

D/d	D (mm)	$\tau_{\max}$ (kgf/cm <sup>2</sup> )	(Kts) <sub>ref</sub>	(Kts) <sub>MEF</sub>	Difer. (%)
1,06	21,2	78,4	1,220	1,231	0,891
1,08	21,6	79,8	1,253	1,254	0,077
1,10	22,0	81,2	1,273	1,275	0,185
1,20	24,0	84,2	1,333	1,322	-0,789
1,30	26,0	85,3	1,360	1,340	-1,502
1,40	28,0	86,0	1,376	1,351	-1,825
1,50	30,0	86,5	1,387	1,358	-2,048
1,60	32,0	86,7	1,395	1,362	-2,363
1,70	34,0	87,2	1,400	1,369	-2,195

**Tabla N°3:** Resumen de datos y valores de Kts para  $r/d = 0,10$

Estos resultados se pueden comparar gráficamente como se muestra en la Fig. N°4.



**Figura N°4:** Factor de concentración de tensiones  $K_{ts}$  para torsión en un árbol escalonado. Valores obtenidos por MEF versus datos relevados de Mathews & Hooke (1971), fuente propia.

## Discusión

El modelo que se está validando es el de la simulación numérica mediante el programa utilizado, siendo los valores de referencia

los obtenidos empíricamente por el algoritmo de correspondencia del método *point matching* (Denton: 2002, 18-26). Este utiliza un programa de análisis gráfico de imágenes obtenidas por fotoelasticidad y que se han utilizado eficientemente con excelentes resultados durante los últimos 50 años.

Se observa que, si bien los valores de  $K_{ts}$  obtenidos por la simulación en general son inferiores a los obtenidos de la gráfica, presentan la misma variación y acompañan a estos dando valores semejantes.

Para  $r/d=0,03$  se mantienen por debajo de los valores de referencia para todo el rango de la relación de diámetros, con una diferencia porcentual promedio del 3%. En cambio, para  $r/d=0,10$  resultan superiores en el intervalo  $1,06 < D/d < 1,08$  e inferiores en el intervalo  $1,08 < D/d < 1,7$ . En este caso la diferencia porcentual promedio es 1%. Valores más bajos de  $K_{ts}$  tiene la connotación de dar como resultado esfuerzos cortantes menores en el cálculo de la concentración de tensiones y significa la utilización de secciones menores. En el caso contrario, usar valores más altos genera un aumento de las secciones, haciendo consideraciones de mayor seguridad de la pieza resultante.

Hay que mencionar que en el diseño de árboles escalonados, las relaciones de diámetros  $D/d$  más usuales son pequeñas, generalmente se encuentran entre 1 y 1,2.

En la carta de Fig. N°1 las curvas aparecen en líneas de trazo para  $D/d < 1,1$ . Esto indica que hasta ese valor de  $D/d$  los valores de  $K_{ts}$  han sido calculados utilizando una función de ajuste por extrapolación. El programa permite para estos casos hacer un control de mallado o utilizar el mallado adaptativo para obtener resultados convergentes que validen el modelo numérico en dichas relaciones. Es aquí donde la utilización de esta herramienta de diseño moderna adquiere su importancia.

## **Conclusiones**

La comparación de las curvas obtenidas por este estudio, debido a la similitud, infiere la validez del modelado numérico que utiliza el mallado adaptativo y toma como referencia el modelo de Mathews y Hooke, que tiene gran confirmación empírica.

La modelización numérica por el MEF permite obtener evaluaciones consistentes para relaciones D/d menores de 1,1; siendo ésta una condición muy utilizada en los diseños.

El modelado de sólidos por Solid-Works permite simular piezas mecánicas eficazmente y los sistemas de visualización del módulo COSMOS se mostraron muy eficientes para mostrar los resultados y guían muy bien el proceso de la simulación.

El control de mallado manual requiere experiencia y suele dar como resultado un mayor tiempo de proceso, el mallado adaptativo se mostró más eficiente respecto de este criterio, dando una convergencia de resultados en menor tiempo.

### **Bibliografía**

- Denton, J. (2002) *Two Dimensional Projective Point Matching*. En <http://greatpanic.com/papers/dissertation.pdf>, 26 de julio de 2012.
- Jacobsen, L. S. (1925). Torsional-stress concentrations in shafts of circular cross-section and variable diameter. *Transactions of the American Society of Mechanical Engineering*, 47(1925), 619-638.
- Matthews, G. J. & Hooke, C. J. (1971). Solution of axisymmetric torsion problems by point matching. *The Journal of Strain Analysis for Engineering Design*, 6(2), 124-133.
- Norton, R. L. (2011). *Diseño máquinas. Un enfoque integrado*. Barcelona, Pearson Educación.
- Peterson, R. E. (1974). *Stress concentration factors*. Nueva York, NY, EE. UU.: John Wiley & Sons.
- Pilkey, W. D. (1997). *Peterson's stress concentration factors (2a. ed.)*. Nueva York, NY, EE. UU.: John Wiley & Sons, Inc.
- Seely, F. B. & Smith, J. O. (1967). Valores y significado de las tensiones localizadas en distintas piezas. En Librería y Editorial Nigar S.R.L. (Eds.), *Curso superior de resistencia de materiales* (pp. 365-399). Buenos Aires, Argentina.
- Shigley, E. (2004). *Diseño en Ingeniería Mecánica*, México: Mc Graw Hill.

\*\*\*