3 La Lógica de Relaciones y la Lógica Cuantificacional: aportes de Charles S. Peirce

Luis Gómez, Guillermo Cuadrado

Resumen: El propósito de este artículo es mostrar el origen de la Lógica de relaciones a través de las contribuciones de Charles Peirce y destacar su rol histórico protagónico. Asimismo, se pretende resaltar la importancia de las contribuciones de Peirce a la Lógica cuantificacional.

Palabras claves: Lógica de relaciones, Lógica cuantificacional, signos lógicos, clases, cuantificadores.

1. Introducción

Peirce construye su Lógica de relaciones teniendo como antecedentes inmediatos los aportes de Boole, Jevons y De Morgan. A mediados del siglo XIX el matemático inglés George Boole escribió dos obras que dieron una orientación algebraica a los estudios tradicionales de Lógica. Jevons fue el primer pensador que objetó la operación de adición de Boole, que suponía una vinculación entre clases disjuntas. En lugar de ello, Jevons propuso sustituir la adición por la operación de unión, que consistía en un “o inclusivo” y que representaba con el mismo signo que Boole (+). En 1863 Jevons envió una carta a Boole con tal sugerencia, pero no fue bienvenida por su receptor pues esto modificaría sustancialmente su sistema lógico, basado en el álgebra ordinaria. En 1864 publicó su objeción, incluyendo la Ley de Unidad: A + A = A (Jevons, p. 83) luego llamada Idempotencia (AvA = A). El gran lógico y matemático inglés Augustus De Morgan estableció la Lógica de Relaciones con su obra escrita en 1860.

Peirce desarrolló la obra de sus antecesores con una serie de contribuciones, comenzando con su importante escrito de 1870 (nos referiremos a este artículo como DNLR). Finalmente fue Schröder quien sistematizó la Lógica de relaciones en su obra *Vorlesungen über die Algebra der Logik (exacte Logik)* Vol.3, *Algebra und Logik der Relative* de 1895 -*Conferencias sobre el álgebra de la lógica (Lógica exacta)*.

2. La Lógica de relativos de Peirce.

2.1. Conceptos fundamentales.

Para poder comprender la Lógica de relativos de Peirce primero es necesario hacer una referencia a dos obras tempranas suyas *Upon the Logic of Mathematics*, y *On an Improvement in Boole's Calculus of Logic,* ambas del año 1867. En la primera establece los principales signos y algunas definiciones que permiten comprender sus escritos posteriores.

1) Establece *las letras del alfabeto* para denotar clases de cosas o de ocurrencias. Y clasifica los eventos o las cosas en singulares, como "esta sonrisa", o generales, como "toda sonrisa".

2) Expresa la *identidad lógica* por medio del signo '=,'. Así '*a =, b* tiene el sentido de que *a* y *b* denotan la misma clase - la misma colección de individuos (CP 3.2).

3) Establece la *adición lógica* ('*a +, b'*) como un proceso que "denota todos los individuos contenidos bajo *a* y *b* juntos." Es decir, '*a +, b'* es la clase de aquellas cosas que son *a no-b*, *b no-a*, o ambas *a y b*. Al igual que Jevons, Peirce toma esta operación en el sentido del *o inclusivo*. Es lo que actualmente llamamos *unión* o suma lógica de clases.

Esta operación *difiere de la adición aritmética* en dos aspectos: primero que hace referencia a la identidad, no a la igualdad (CP 3.13, 3.42), y segundo, que lo que es común a ***a*** y ***b*** no se tiene en cuenta dos veces, como lo sería en la adición aritmética. La primera de estas diferencias, sin embargo, no es importante, ya que el signo de identidad indicaría la distinción en que se funda, y por lo tanto podemos decir que

Si No a es b entonces a +, b =, a + b (CP 3.3).

La adición lógica es inclusiva, permite la conjunción, mientras que la adición aritmética es exclusiva. Ambas coinciden cuando se trata de clases disjuntas.

Establece para la adición lógica tres leyes: la idempotencia, la conmutatividad y la asociatividad:

a +, a =, a
a +, b =, b +, a
(a +, b) +, c =, a +, (b +, c)

4) *multiplicación lógica* ("*a,b*"): "a,b denota los individuos que figuran a la vez en las clases a y b, aquellos de los que a y b son las especies comunes. Si a y b fueran eventos independientes, *a,b* denotaría el evento cuya probabilidad es el producto de las probabilidades de cada uno. Sobre la base de esta analogía (para no hablar de ninguna otra), la operación indicada por la coma puede llamarse la multiplicación lógica" (CP 3.4). También establece para la multiplicación lógica tres leyes: la idempotencia, la conmutatividad y la asociatividad:

a, a =, a
a,b =, b,a
(a,b),c =, a,(b,c).

Y prueba que la adición lógica y la multiplicación lógica son doblemente distributivas:

(a +, b) , c =, a,c +, b,c
y *a,b +, c =, (a +, c) , (b +, c)*

Estas fórmulas revelan la prioridad de operadores: 1) '=, '; 2) ',' y 3) '+,'.

Define la sustracción lógica (*a -, b*): "*Si b +, x =, a entonces x =, a -, b*", el cero: "*0 =, x -, x =, x - x*", la división lógica (*a;b*): "Si *b,x =, a entonces x =, a;b*" y la unidad (1): siendo x una clase cualquiera "*1 =, x;x =, x:x*"

En el segundo artículo reitera algunas definiciones.

1) *identidad* ("*a =, b*") "expresa dos hechos: que todo a es b y que todo b es a", Es una identidad lógica o equivalencia y no una igualdad numérica. Cabe observar que Peirce habla de hechos (*facts*) en lugar de clases (*class*), como si fueran intercambiables.

2) *adición lógica* ("*a +, b*") "denota los miembros de una clase que contiene todos los a y todos los b y nada más",

3) *multiplicación lógica* ("*a,b*") "denota sólo aquello que es ambos a y b". Es lo que llamamos *intersección* o producto de clases.

4) *cero:* "denota nada, o la clase sin extensión, por lo cual significamos que, si **a** es un miembro cualquiera de cualquier clase, **a+,0** es **a**". Es la "clase vacía".

5) *unidad:* denota el ser (*being*), o la clase universal, sin contenido, por lo cual significamos que, si **a** es un miembro de cualquier clase, **a** es **a**,1. Aquí Peirce omite exceptuar la clase vacía: *a,0 =, 0 y 1,0 =, 0*.

6) *adición aritmética* ('*a+b'*) "si **a,b=,0**, es lo mismo que **a+,b**, pero, si **a** y **b** son clases que tienen cualquier extensión en común, [a+b] no es una clase". Lo que quiere decir aquí Peirce es que '*a+b',* la adición aritmética*, es distinta de* '*a+,b',* la adición lógica*, excepto* cuando *a* y *b* son clases disjuntas, es decir, cuando su multiplicación lógica es nula (*a,b=,0)*.

7) *multiplicación aritmética* ("*ab*") **ab** representa un evento cuando **a** y **b** son eventos, sólo si **a** y **b** son independientes entre sí, en cuyo caso **ab =, a,b**. Que los eventos sean independientes significa que es posible tomar dos series de términos, **A**[1], **A**[2], **A**[3], etc., y **B**[1], **B**[2], **B**[3], etc., tal que se satisfagan las siguientes condiciones. Aquí '**x'** denota cualquier individuo o clase, no nada; **A**[m], **A**[n], **B**[m], **B**[n], denotan cualquier miembro de las dos series de términos, y **ΣA**, **ΣB**, **Σ(A,B)** sumas lógicas de algún término de **A**[n], de **B**[n], y de **A[n],B[n]** respectivamente.

Condición 1. No **A**[m] es **A**[n].
Condición 2. No **B**[m] es **B**[n].
Condición 3. **x =, Σ(A,B)**
Condición 4**. a =, ΣA**.
Condición 5**. b =, ΣB**.
Condición 6. Algún **A**[m] es **B**[n]." (CP 3.21).

2.2. El desarrollo de la Lógica de relativos de Peirce.

En el año 1870 Peirce escribe un artículo que lo posicionó como un lógico importante en la comunidad científica, titulado *Description of a notation for the logic of relatives, resulting from an amplification of the conceptions of Boole's calculus of logic*. Ya desde su título, queda en claro el propósito de Peirce: ampliar o extender el ámbito de la lógica algebraica de Boole desde la no-relación (las clases como términos absolutos) hacia las relaciones (o términos relativos).

> *El álgebra lógica de Boole tiene tal belleza singular, en lo que trata, que es interesante preguntarse si no puede ser ampliada sobre el reino entero de la lógica formal, en vez de estar restringida a aquella parte más simple y menos útil del tema, la lógica de términos absolutos, que, cuando él escribió, era la única lógica formal conocida* (CP 3.45).

En este artículo Peirce introduce, nueve años antes que el *Begriffschrift* de Frege, una sintaxis completa de la Lógica de relaciones con cualquier aridad (Burch, § 13).

Comienza su DNLR (1870) estableciendo el significado de la notación para la nueva Lógica. Primero Peirce retoma la simbología de De Morgan.

1. De Morgan representa las variables de individuos (sin utilizar tal nombre) mediante las letras mayúsculas X e Y. En realidad no habla de individuos sino de "objetos de pensamiento".

2. Representa las relaciones con letras mayúsculas, excepto las últimas del alfabeto, asignadas a las variables.

> *X . . LY significa que X es alguno de los objetos de pensamiento que se encuentra con Y en la relación L, o que es uno de los L's de Y* (CP 3.45).

3. Representa la negación y otras operaciones entre relaciones.

X . LMY	*significa que*	*X no es un L de un M de Y.*
X . . (L,M)Y	*significa que*	*X es un L o un M de Y.*
LM'	*significa*	*un L de cada M.*
L[,]M	*significa*	*un L de nada excepto de M's.*
L[[^{1}*]]Y*	*significa*	*algo para lo cual Y es L.*
l (L minúscula)	*significa*	*no-L* (CP 3.45).

Después, Peirce desarrolla un álgebra de las relaciones, y continúa con sus propios aportes a partir de lo establecido por De Morgan.

Peirce estudia en primer lugar las relaciones representadas por los operadores usados comúnmente en el álgebra. En este contexto las letras x, y, z, son variables que representan clases cualesquiera.

Peirce toma como operador primario la relación binaria de *inclusión* en lugar de la igualdad. Esto es muy importante pues lo diferencia de todos sus antecesores. La razón para hacerlo es que toda igualdad es una inclusión pero no toda inclusión es una igualdad. (CP 3.47 Nota 1) La representa con el signo "-<" y la traduce como "está incluido en" o bien "es tan pequeño como". Y reconoce su propiedad transitiva:

Si (x -< y) y (y -< z) entonces (x -< z)

Seguidamente define otras relaciones en función de esta relación primaria y de operaciones lógicas como la conjunción, o la conversión.

Así la igualdad es definida como una inclusión mutua, es decir, como la conjunción entre una inclusión y su conversa.

Decir que x = y es decir que x -< y e y -< x (CP 3.48).

Por lo tanto, su fórmula sería

(x = y)=def. (x -< y) y *(y -< x)*

Define la relación "menor que" en función de la inclusión con exclusión de su conversa.

Decir que x < y es decir que x -< y, y que no es verdad que y -< x. (CP 3.49).

Define la relación "mayor que" como la conversa de la relación "menor que".

Decir que x > y es decir que y < x. (CP 3.50).

Establece la diferencia entre la adición entre relaciones como adición lógica y la "adición invertible" como adición matemática, y utiliza ambas en el cálculo de relaciones. Representa la segunda con el signo "+" y la primera con el signo "+," (el signo de suma acompañado de una coma) y establece dos propiedades de la misma: la asociatividad y la conmutatividad. Pero no la define.

Asociatividad de la adición lógica: *(x +, y) +, z = x +, (y +, z).* (CP 3.51).

Conmutatividad de la adición lógica: $x +, y = y +, x.$ (CP 3.51).

Ambas leyes son válidas también para la adición matemática. Y permiten, además, la siguiente consecuencia:

$$
\begin{array}{rl}
\text{Si} & x + y = z, \\
\text{y} & x + y' = z, \\
\text{entonces} & y = y'.
\end{array}
$$

3. Cuantificación.

En su trabajo de 1883 *Note B: The Logic of Relatives*, Peirce introduce el uso de cuantificadores, cuatro años después que lo hiciera Frege, pero independientemente de él. Al definir los términos relativos utiliza el signo Σ con su clásico significado matemático de sumatoria (CP 3.329). Pero luego emplea los signos Σ y Π como cuantificador particular y universal respectivamente (CP 3.351 y ss.).

En su representación de las proposiciones Peirce utiliza variables de individuo, expresadas con letras minúsculas (mientras los individuos son representados con las correspondientes letras mayúsculas). Y emplea la cuantificación múltiple para todos los términos poliádicos. En tal caso remarca la importancia del orden en que se escriben tanto los cuantificadores como las variables. Así,

$$\Sigma[i]\Sigma[j](a)[ij](I{:}J)$$

se interpreta como: “alguien ama a alguien” mientras que

$$\Sigma[i]\Sigma[j](a)[ji](I{:}J)$$

se interpreta como: “alguien es amado por alguien”

Se puede concebir un término relativo general como una agregación lógica de relativos individuales. Así, un relativo diádico como “amante” es definido como el conjunto de pares de individuos, en un universo de discurso, que constituyen un agregado definido cuantificacionalmente como:

$$a = \Sigma[i]\Sigma[j](a)[i\ j](I{:}J)$$

Y *(a)[i j]* es un coeficiente numérico, de 1 ó 0, según que sea verdad o no, en algún caso, es decir, en tanto haya al menos un individuo I que ame a (otro) J, o no, entre todos los individuos del universo (CP 3.329).

> *Cualquier proposición en absoluto es equivalente a decir que algún complejo de agregados y productos de tales coeficientes numéricos son mayores que cero. Así*
>
> $\Sigma[i]\Sigma[j]l[i\ j] > 0$
>
> *significa que alguien es un amante de alguien; y*
>
> $\Pi[i]\Sigma[j]l[i\ j] > 0$
>
> *significa que todos son amantes de alguien.*
> *Sin embargo, al escribir las desigualdades omitiremos naturalmente el > 0 en que terminan todos ellos; y las dos susodichas proposiciones aparecerán como*
>
> $\Sigma[i]\Sigma[j]l[i\ j]$ y $\Pi[i]\Sigma[j]l[i\ j]$ (CP 3.351).

En 1885 Peirce publica su artículo *On the Algebra of Logic: A contribution to the Philosophy of Notations*. En él amplía su teoría de la cuantificación. Peirce reconoce que un colega, Oscar Mitchell, es quien introduce los signos matemáticos para producto y suma, Π y Σ, como cuantificadores lógicos universal y particular. Y lo explica en CP 3.393:

> *Su método realmente es hacer consistir la expresión entera de la proposición en dos partes, una expresión booleana pura que se refiere a un individuo y una parte de cuantificación que dice cuál individuo es. Así, si k significa 'él es un rey,' y h, 'él es feliz,' la expresión booleana*
>
> *(~k+h)*
>
> *significa que el individuo de quien se habla no es un rey o es feliz. Ahora, aplicando el cuantificador, podemos escribir*
>
> *Cualquier (~k+h)*
>
> *para significar que esto es verdad para cualquier individuo en el universo (limitado), o*
>
> *Algún (~k+h)*
>
> *para significar que existe un individuo que no es un rey o es feliz*
>
> *Así Algún (k h)*
>
> *significa que algún rey es feliz*
>
> *y Cualquier (k h)*

significa que cada individuo es ambas cosas, un rey y feliz. Las reglas para el uso de esta notación son obvias. Las dos proposiciones

Cualquier (x) Cualquier (y)

son equivalentes a Cualquier (x y).

De las dos proposiciones

Cualquier (x) Algún (y)

podemos inferir Algún (x y).

*El Sr. Mitchell tiene también una extensión muy interesante e instructiva de su notación para **algunos** y **todos**, para un universo de dos dimensiones, es decir, para la lógica de relativos. Aquí, a fin de hacer la anotación tan icónica como sea posible podemos utilizar Σ para **algunos**, lo que sugiere una suma, y Π para **todos**, lo que sugiere un producto. Por lo tanto Σ[i] x[i] significa que x es verdad de alguno de los individuos denotado por **i**, o sea:*

Σ[i]x[i] = x[i]+x[j]+x[k]+etc.

De igual modo, Π[i]x[i] significa que x es verdad de todos los individuos, o:

Π[i]x[i] = x[i]x[j]x[k], etc.

Si x es una relación simple, Π[i]Π[j] x[i j] significa que en esta relación cada i es a cada j, Σ[i]Π[j] x[i j] que en esta relación alguna i es a cada j, Π[j]Σ[i]x[i j] que en esta relación para cada j existe uno u otro i, Σ[i]Σ[j]x[i j] que en esta relación algún i es a algún j. Debe señalarse que Σ[i]x[i] y Π[i]x[i] son sólo similares a una suma y a un producto; pero que no son estrictamente de aquella naturaleza, porque los individuos del universo pueden ser innumerables.

Es decir que existe una *analogía formal* entre Σ[i]x[i] y una suma, y entre Π[i]x[i] y un producto.

Conclusión

Las definiciones de adición lógica, de multiplicación lógica, y de identidad, que son términos que denotan operaciones formales, se hacen en función de términos que tienen contenido empírico. Lo mismo sucede en otros textos de Peirce de épocas posteriores.

En el siguiente cuadro comparativo se contrastan las notaciones de Boole, Peirce y Mitchell referidas a las cuatro proposiciones A, E, I, O de la lógica clásica (Shin et al. § 2.1). Las negaciones se representan con apóstrofes, en lugar de la línea superpuesta.

	Boole 1854	Peirce 1870	Mitchell 1883
Todo *a* es *b*	$ab' = 0$	$a \prec b$	$(a' + b)_1$
Ningún *a* es *b*	$ab = 0$	$a \prec b'$	$(a' + b')_1$
Algún *a* es *b*	$va = vb$	$[a \prec b']$	$(ab)_u$
Algún *a* no es *b*	$va = vb'$	$[a \prec b]'$	$(ab')_u$

Hay una *analogía formal* entre Σ[i]x[i] y una suma, y entre Π[i]x[i] y un producto. No son iguales porque los individuos del universo pueden ser innumerables.

Referencias Bibliográficas

Boole, G. (1847). *The Mathematical Analysis of Logic, Being an Essay Towards a Calculus of Deductive Reasoning.* Cambridge: MacMillan, Barclay, & MacMillan.

Boole, G. (1854). *An Investigation of the Laws of Thought, on which are founded the mathematical theories of Logic and Probabilities*. London: Walton and Maberly.

Brady, G. (*2000*). *From Pierce to Skolem: A Neglected Chapter in the History of Logic.* Studies in the history and philosophy of mathematics, Vol. 4. Amsterdam: North-Holland / Elsevier.

Burch, R. (2010). Charles Sanders Peirce, § 13. En: *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*. URL = <http://plato.stanford.edu/entries/peirce/>

Carnap, R. (1958). *Introduction to Symbolic Logic and its Applications*. New York: Dover Publications.

De Morgan, A. (1864). On the Syllogism, No. IV., and on the Logic of Relations. (1860). En: *Cambridge Philosophical Transactions*, vol. 10. pp. 331-358.

Dipert, R. (2004). Peirce's Deductive Logic. En: Misak, Cheryl (ed.). *The Cambridge Companion to Peirce*. Cambridge: Cambridge University Press.

Jevons, W. S. (1864). *Pure Logic, or the Logic of quality apart from quantity: with remarks on Boole's system and on the relation of Logic and Mathematics*. London: E. Stanford,

Merrill, D. The 1870 Logic of Relatives Memoir. En: *Writings of Charles S. Peirce: a chronological edition*. 1867-1871, Introduction. URL: http://www.iupui.edu/ ~peirce/writings/v2/ v2intro.htm. 24/09/2010.

Mitchell, O. H. (1883). On a new algebra of logic*.* En: Peirce C. S. (Ed.), *Studies in Logic by Members of the Johns Hopkins University.* Boston: Little, Brown, and Company. pp. 72-106.

Peirce, C. S. (1867a). On an Improvement in Boole's Calculus of Logic. En: *Proceedings of the American Academy of Arts and Sciences*. Vol. 7. Boston and Cambridge: Welch, Bigelow, and Company, March 1867. pp. 250-61.

Peirce, C. S. (1867b). Upon the Logic of Mathematics. *Proceedings of the American Academy of Arts and Sciences*. Vol. 7. Boston & Cambridge: Welch, Bigelow, & Co., Sept. pp. 402-412.

Peirce, C. S. (1870). Description of a notation for the logic of relatives, resulting from an amplification of the conceptions of Boole’s calculus of logic. En: *Memoirs of the American Academy of Sciences* 9. pp.317–378.

Peirce, C. S. (1883). A Theory of Probable Inference. Note B: the logic of relatives. En: Peirce, C. S. (Ed.), *Studies in Logic by Members of the Johns Hopkins University*, Boston: Little, Brown & Co. pp. 187–203.

Peirce, C. S. On the algebra of logic. En: *American Journal of Mathematics,* Vol. 3, 1880, 15–57; Vol. 7, Nº 1, 1884, pp.180-196, y Vol. 7, Nº 3, 1885, pp.197-202.

Peirce, C. S. (1889). Relatives. En: Whitney, William Dwight. *The Century dictionary; an encyclopedic lexicon of the English language*. Vol. VI. New York: The Century co.

Peirce, C. S. (1897). The logic of relatives. En: *The Monist.* Vol. 7, Nº 2. Chicago, The Open Court Publishing. pp.161–217.

Peirce, C. S. (1902). Relatives. En: Baldwin, J. M. *Dictionary of Philosophy & Psychology.* Vol. 2. New York: MacMillan.

Peirce, C. S. (1931-1935). *Collected Papers of Charles Sanders Peirce*. Hartshorne, Charles and Weiss, Paul (eds.). Vol. I a VI. Cambridge, MA.: Harvard University Press

Peirce, C. S. (1958).*Collected Papers of Charles Sanders Peirce*. Burks, Arthur W. (ed.). Vol. VII y VIII. Cambridge, MA.: Harvard University Press.

Prior, A. N. (1976). *Historia de la Lógica*. Madrid: Tecnos.

Shin, S. y Hammer, E. (2011). Peirce's Logic. § 2.1. En: *The Stanford Encyclopedia of Philosophy* (Summer 2011 Ed.). URL = <http://plato.stanford.edu/entries/peirce-logic/>.

Tarski, A. (1941) On the calculus of relations. En: *Journal of Symbolic Logic*, 6:73–89.

* * *