Darío Huggenberger

Ensayo histórico sobre el Principio de Relatividad a través de la Mecánica Elemental de la Partícula

70 años
UON·UTN
1948 2018

[UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA NACIONAL]
FRD
[FACULTAD REGIONAL DELTA]

edUTecNe

Ensayo histórico sobre el Principio de Relatividad a través de la Mecánica Elemental de la Partícula

Huggenberger, Darío

Ensayo histórico sobre el principio de relatividad a través de la mecánica elemental de la partícula / Darío Huggenberger. - 1a ed. - Ciudad Autónoma de Buenos Aires : edUTecNe, 2019. Libro digital, PDF

Archivo Digital: descarga y online

ISBN 978-987-4998-17-0

1. Partícula Elemental. 2. Teoría de la Relatividad. I. Título.

CDD 531.16

Diseño de interior y tapa: Fernando Cejas, Carlos Busqued

Universidad Tecnológica Nacional – República Argentina
Rector: Ing. Hector Eduardo **Aiassa**
Vicerrector: Ing. Haroldo **Avetta**
Secretaria Académica: Ing. Liliana Raquel **Cuenca Pletsch**

Facultad Regional Delta
Decano: Mg. Ing. Miguel Angel **Sosa**
Vicedecano: Ing. Luis **Perna**

edUTecNe – Editorial de la Universidad Tecnológica Nacional
Coordinador General a cargo: Fernando H. **Cejas**
Área de edición y publicación: Carlos Busqued
Director Colección Energías Renovables, Uso Racional de Energía, Ambiente: Dr. Jaime **Moragues.**

http://www.edutecne.utn.edu.ar edutecne@utn.edu.ar

Queda hecho el depósito que marca la Ley Nº 11.723

Sarmiento 440, Piso 6 (C1041AAJ) Buenos Aires, República Argentina
Publicado Argentina – Published in Argentina

ISBN 978-987-4998-17-0

A mi esposa y a mi hija

Agradecimientos

En primer lugar, a la Facultad Regional Delta y su Grupo de Vibraciones Mecánicas por haberme ofrecido un lugar físico y tiempo para dedicar a esta tarea.

En especial al Lic. Julio Piñeyro, al Dr. Vicente Lescano, al Dr. José Ruzzante por sus lecturas y comentarios, al Dr. Jorge Torga y al Ing. Lis Perna por su apoyo favorable, a la Srta. María Eugenia González por su empuje y orientación para la publicación, a edUTecNe y en especial al Ing. Fernando Cejas por el apoyo, celeridad y orientaciones para la edición.

Índice

Índice 5
Prólogo 8
Parte I: Acerca de la Física, Orígenes, Método y Mediciones 10
Sobre los orígenes del pensamiento griego 10
Sobre las cuestiones de la física actual 14
Una primera mirada a la metodología 15
Acerca del carácter de la física 17
El objeto de estudio 18
El problema del espacio y el tiempo, y el movimiento de la historia 19
Cinemática 36
Mediciones 37
Parte II: Cinemática 41
Retorno a la cinemática 41
Aspectos perceptivos 41
Nociones básicas sobre el espacio y el tiempo 45
Velocidad y aceleración 47
(Paréntesis) Introducción a la noción de límite y derivada 48
Ecuaciones de movimiento 51
Movimiento Rectilíneo Uniforme 52
Representación gráfica 53
Problemas de encuentro 55
Movimiento Rectilíneo Uniformemente Variado (MRUV) 64
(Paréntesis) Integración de las ecuaciones de movimiento. Primitivas 66
Tiro vertical y caída libre 68
Tiro horizontal y tiro oblicuo 71
Movimiento circular 73
(Paréntesis) Producto vectorial y escalar 75
Velocidad angular 77
Movimientos relativos 79
Principio de relatividad de Galileo 81
Parte III: Relatividad 82
Acerca de la noción de tiempo 82
Principio de Relatividad 85
Contracción de longitudes y dilatación de tiempos 91

Adición de velocidades y aceleraciones 94
El espacio-tiempo 96
Simultaneidad 98
Encuentro en el espacio-tiempo 101
Diagramas de Minkowsky 105
Transformaciones de la aceleración 112
Sistemas acelerados 113
Parte IV: Dinámica 115
Dinámica 115
Ley de Hooke 116
Ley de Inercia o Primer Principio de Newton 116
Ley de Masa o Segundo Principio de Newton 117
Ley de Interacción o Tercer Principio de Newton 118
Mecanismos de Interacción 119
Rozamiento 130
Fuerza elástica 135
Péndulo 139
Acerca de la interacción y la noción de masa 140
Rotaciones y momentos 141
Equilibrio de momentos 142
Momento de inercia y tensor de inercia 143
Leyes de Newton para las rotaciones 144
El problema de la masa variable 145
El problema de las explosiones y del choque 148
Centro de masa 149
Rotaciones en torno al centro de masa 150
Momento angular 151
Efectos en sistemas no inerciales 155
Parte V: Trabajo y Energía 161
Trabajo mecánico 161
Teoremas de conservación 162
Potencia 169
Masas variables y choques 169
Trabajo en rotaciones 174
Energía y masa relativista[Lewis GN Tolman RC] 178
Energía y momento relativista 181

Choque perfectamente plástico en relatividad 182
Conservación y simetría. Grupo de transformación. 182
Lagrangiano. Teorema de Noether. 185
Parte VI: Gravitación 192
Gravitación universal 192
Centro de masa y centro de gravedad 197
Centro de atracción gravitacional 198
Principio de Relatividad General 199
Conclusión(es) 201
Bibliografía 206
Bibliografía complementaria 207
Páginas web 208

Prólogo

"Ahora bien, ninguna persona que piense con un mínimo de lógica se dará por satisfecha con este estado de cosas, y preguntará: ¿Cómo es posible que determinados cuerpos de referencia (o sus estados de movimiento) sean privilegiados frente a otros (o frente a sus estados de movimiento respectivos)? ¿Cuál es la razón de ese privilegio?..." Einstein, Sobre la Teoría de la Relatividad Especial y General p.68

Lo que sigue no pretende ser un libro de texto. En realidad ni siquiera pretendía ser un libro. Sólo se trataba de confeccionar unos apuntes sintéticos para el dictado de algunos cursos y resumir algo de la experiencia que se adquiere con los años. Pero se extendió en demasía en algunos aspectos, en otros resultó demasiado breve, en especial cuando hubo que “explicar” problemas resueltos, lo que fue casi completamente omitido, y describir experiencias, que finalmente fue omitido en forma completa. Y terminó siendo algo que ni siquiera se había pensado. Lo que no tenía más pretensión que ser unas notas o apuntes, se configuró en una idea de reunir al menos parcialmente tres aspectos: la historia de los orígenes de los conceptos de espacio y tiempo, los aspectos formales y conceptuales de la mecánica clásica newtoniana de la partícula, y una introducción a la mecánica relativista.

Por qué historia. Porque hay excelentes estudios sobre historia de la ciencia, de la física en especial, tanto en sus aspectos generales como en temas particulares y biografías. Hay comentarios anecdóticos e ilustrativos, a modo de paréntesis pintorescos, en libros de texto. Pero, y sólo es una opinión personal, la historia y la ciencia están imbricadas de tal modo que son inseparables si se quiere lograr una comprensión completa. La física puede ser una resultante de la creación humana en relación con la imagen de la naturaleza y haber recibido aportes en el marco de cada momento histórico. O tal vez hemos ido descubriendo verdades que estaban escritas en el mundo natural. Por dar un ejemplo, aunque no recuerdo en qué ensayo, Ernesto Sábato refería a la “manzana histórica en la cabeza histórica de Newton”. Nadie sabe y quizá nunca se sabrá si el hecho ocurrió. Es probable que una manzana real en la cabeza real de Copérnico sólo hubiese producido un edema, pero la manzana histórica en la cabeza histórica de Newton, cuando quizá estaba mirando la Luna, produjo una revolución. Nos hemos concentrado en dos momentos históricos: los orígenes de la “ciencia” griega (siglo VII a.C. al IV a.C.) y la irrupción del cristianismo, del islam, y el nacimiento de los estados europeos (siglos V al IX), por ser dos períodos “oscuros” en los que se fue configurando un modo de inquirir acerca de la naturaleza.

Por qué el formalismo conceptual. Porque además del formalismo matemático, se procura poner en palabras el significado de las ecuaciones. Porque la capacidad operatoria reversible no termina nunca de formarse y las ecuaciones, los teoremas, los operadores sintetizan ideas. Formalismo analítico, gráfico, conceptos, palabras, ejemplos forman una unidad en la que aprendemos a expresar nuestro pensamiento. En la cinemática nos hemos concentrado en la interpretación de las ecuaciones de movimiento y en una pendiente de ideas que conducen a la cinemática relativista. En dinámica hemos atendido preferentemente la noción de modelo, en planteos integradores de problemas que conducen naturalmente a las ecuaciones diferenciales, al análisis de rotaciones y al cambio de coordenadas. En el ámbito de las cantidades conservativas, a situaciones no conservativas de la energía, al rol de las “fuerzas” virtuales desde sistemas no inerciales, a la revisión de los conceptos de masa, fuerza, energía y momento en relatividad, y a una introducción a la formalización de la mecánica y los teoremas de conservación en la formulación lagrangiana y el teorema de Noether. Finalmente se aborda el planteo la gravitación universal newtoniana y apenas una “punta de ovillo” de la relatividad general.

Y por qué la relatividad. Por dos motivos. Más de una vez me encontré descolocado ante estudiantes que buscaban alguna información en el celular y planteaban cuestiones sobre los “agujeros de gusano”, los “quarks” o los “qbits”. Algunas veces no encontraba una respuesta “rápida”, otras resultaban que la “fuente” de información era algún “blog” sin ningún tipo de documentación, en algunas sencillamente no tenía una respuesta que dar, y finalmente sentía que no podía seguir enseñando las Leyes de Newton dejando para un “después”, que nunca llega, cuestiones tan actuales como la relatividad o la cuántica. Sólo me preguntaba, y me pregunto, si no es posible abordar, desde la formación básica, aspectos esenciales que ordenen un poco esa información dispersa y desagregada a la que es tan fácil acceder pero tan difícil poner en un contexto. Por eso también se intenta, desde un comienzo, tratar las cuestiones que llevaron a los fundamentos básicos de la mecánica relativista casi como una extensión natural de la mecánica newtoniana. En el marco de la mecánica clásica de la partícula, nos hemos limitado a la mecánica relativista como coronación de la mecánica clásica, pero dentro del contexto del continuo y el determinismo. En especial nos hemos concentrado en la relatividad especial con una breve incursión a la relatividad general tras abordar, también brevemente, la gravitación universal. Pero dijimos dos motivos. El segundo es que la Relatividad en cierto modo cierra, si es que acaso algo se “cierra” en forma definitiva, una discusión milenaria sobre las nociones absolutas y relacionales de espacio y tiempo, sobre el movimiento absoluto y relativo, sobre la jerarquía de algún observador privilegiado o la igualdad de derechos de todos los observadores frente a la unicidad de la naturaleza.

Orientado para quien al menos ha completado un curso básico de mecánica elemental y quiera revisar algunas ideas que a veces se diluyen en la vorágine de los exámenes. Para quien desee ver con cierta profundidad histórica y conceptual las nociones fundamentales de la mecánica. Para quien tenga interés en introducirse formalmente en los aspectos básicos de la mecánica relativista. Con la esperanza de contribuir en algo a satisfacer algunas inquietudes, o quizá a generarlas.

Parte I: Acerca de la Física, Orígenes, Método y Mediciones

Sobre los orígenes del pensamiento griego

Es difícil establecer una fecha y los procesos que dieron origen a la física, tal como se la conoce en la actualidad. Puede remontarse a los comienzos de la actividad humana, en tanto "homo faber", las primeras inquietudes sobre cómo construir herramientas con fines no inmediatos, por lo tanto, con una idea en mente de los objetivos que perseguía su fabricación. Puede comenzarse el desarrollo de un proceso en antiguas recopilaciones de observaciones y formulaciones matemáticas, como las halladas en Babilonia, Nínive o en los papiros egipcios. O proponer un comienzo simplista a partir de las inquietudes de los griegos para, haciendo una breve mención a la física aristotélica, luego al tomismo, continuar con la aparición de la mecánica en el siglo XVII tras un renacimiento cultural que deja en el medio casi dos milenios de supuesto estancamiento. Con ello la mecánica parece ser el descubrimiento necesario tras dos mil años de oscurantismo teológico y la física es lo que es porque así debía ser. Tampoco se puede caer en un detallado análisis histórico, que transformaría apuntes sobre mecánica elemental en notas sobre historia de la ciencia. Ni considerar la historia como una mera secuencia de hechos y anécdotas ilustrativas.

Es decir que, sin pretender remontarnos a los orígenes últimos, si acaso es posible, sin reducir la historia a hechos y breves biografías, sin dejar un vacío de dos mil años ni seguir en detalle la evolución de un proceso, se intentará ver la mecánica como el resultado de un desarrollo, no necesario pero sí consecuente de la historia de la humanidad. Por lo tanto, la física es una de las tantas físicas posibles. O quizá no. Sólo queda abierta la pregunta.

El siglo VI es el siglo de Buda (563-483), y es el siglo en que en la India "…Los reyes y jefes militares pierden su carácter sobrehumano, por sus hazañas épicas, y se convierten en personajes históricos…."[Embree p.32] Tras la caída del Imperio Asirio a finales del siglo VII, del que es famosa la Biblioteca de Asurbanipal en Nínive, tiene un breve auge el reino Neobabilónico durante el siglo VI, a su vez desplazado por el avance persa bajo los aqueménidas, que tanta importancia tendrá en la historia de Grecia. El siglo VI es el de la deportación del pueblo judío a Babilonia y el posterior retorno bajo la dominación persa; siglo en que los cimerios, forzados por los escitas y estos a su vez por grupos poco conocidos originarios del Asia Central, avanzan sobre el Reino Hitita en Asia Menor, lo que los lleva a buscar ayuda en Asiria, luego en Babilonia y por fin en Persia, entrando los estados griegos en el juego de la diplomacia y las alianzas. En el siglo VII renace el Imperio Egipcio bajo Psamético, atrayendo a mercenarios y comerciantes griegos, junto con otras nacionalidades, a participar en el renacer de la cultura del Nilo. Un Egipto que, a la vez que se abre a otras culturas, se define por su religiosidad y por su pasado imperial. A comienzos del siglo VI el faraón Nekao habría enviado una expedición marítima que circunnavegó por primera vez toda la costa africana desde el Mediterráneo por el Atlántico hasta el Mar Rojo. Pero este renacimiento se tradujo en rebelión a mediados del siglo VI. Un nuevo faraón, Amasis, trató de conservar un difícil equilibrio de fuerzas en el oriente del Mediterráneo, más difícil aun considerando que muchos de sus combatientes eran mercenarios griegos que ocupaban extensos territorios en varios sitios de las costas del Nilo. Y el final de aquel renacimiento terminó con el avance persa a finales del siglo VI.

Sería poco menos que ingenuo y casi digno de un pensamiento mágico, creer que los griegos, por el azar de la historia, comenzaron a buscar explicaciones racionales al mundo exterior. En aquel antiguo siglo VI antes de Cristo, no sólo los griegos hurgaban en sus mentes ideas nuevas. Por aquel entonces coexistían Pitágoras, Buda, Confucio, Zoroastro…. Pero en formas más colectivas, los matemáticos babilonios, las exploraciones egipcias, los profetas en Judea, las leyes de Solón, la fundación de la República Romana…. Es difícil pensar que estos procesos estaban desvinculados entre sí. Si es que algo tienen en común, es la síntesis de leyes, normas y preceptos no exentos de racionalidad en diversas formas. Esto no significa que se haya tratado de una especie de confabulación, más bien asumir que los diversos territorios no eran mundos aislados sino que se interconectaban con un lento goteo de ideas a través de mercaderes, viajantes y vecindades. En estas comunicaciones, el mythos (*μῦθος)* era un relato o cuento, originalmente de transmisión oral pero que nos ha llegado a través de textos escritos por poetas y dramaturgos. El logos (*λόγος*) también era un relato que conllevaba una argumentación que podría llamarse racional, al menos debatible sobre bases que podrían fundarse en acuerdos o llevar a ellos. En el marco de las polis, las primigenias ciudades en las que los miembros se reunían en asamblea a debatir, argumentar, acordar, votar y decidir, sería el logos más que el mito la forma racional de fundamentar las opiniones. Y al decir esto es imposible que no vengan a la mente referencias a la doxa, la areté, a Sócrates, los sofistas. Comienza de pronto a quedar indefinido el límite entre la racionalidad "científica" en busca de una explicación de la naturaleza, la racionalidad "religiosa" en teogonías y augurios, y la racionalidad "política" en la faz agonal del poder. La misma figura de Pitágoras se enreda en una secta con influencias políticas. Más adelante Platón escribirá e intentará la República y Aristóteles será maestro de Alejandro Magno.

Nos dice Russell, "…Entre los antiguos filósofos griegos, los jónicos eran los más científicos, y los sicilianos más místicos. Pero, entre los últimos, Pitágoras, por ejemplo, fue en sí mismo una curiosa mezcla de las dos tendencias…. Platón, por supuesto, une ambas actitudes, la científica y la mística en una forma superior a la de sus predecesores, pero la actitud mística es claramente la más fuerte de las dos…"[Russell, p. 24] Y luego… "La física, como aparece en el *Timeo* de Platón, por ejemplo, está llena de nociones éticas: es una parte esencial de su propósito mostrar que la Tierra es merecedora de admiración…."[Russell, p.30-31].

De modo que en aquel ámbito griego, que se extendía entre las costas del Asia Menor, actual Turquía, y el sur de Italia, pero que se expandía a las costas africanas y de hecho, todo el Mediterráneo e inclusive el Mar Negro, las transformaciones sociales y pugnas políticas pudieron tener consecuencias sobre el plano de las ideas.

Los antiguos micénicos, muy vinculados a los reinos orientales, se ven desplazados por el avance dorio del norte. La monarquía micénica tiene un carácter más belicoso, organizado desde el palacio, en medio de disputas aristocráticas, y con control sobre la población campesina. Esta crisis política (stasis) habría conducido en parte a la emigración y fundación de colonias en las costas del Mediterráneo, a ofrecer servicios mercenarios. Hacia el final del período micénico, es posible que el poder aristocrático haya entrado en crisis y las reuniones militares se hayan transformado en reuniones civiles. El orador debía emplear la palabra para convencer a la concurrencia de las decisiones a tomar. Estas asambleas realizadas en el ágora habrían sido el núcleo político de deliberación en las polis.

Pero esa deliberación contiene un elemento racional, susceptible de ser comunicado, fundamentado, discutido, expuesto y hasta escrito en forma de leyes. No puede negarse la vinculación entre los sacerdotes, la filosofía, las sectas secretas, los sofistas y los "físicos" de los primeros tiempos. Entre las sectas, los pitagóricos, iniciados en un ritual e introducidos en un secreto que no debe ser revelado, pero con injerencia en la vida política. Entre los sacerdotes, los augures, sobre la base de cierta causalidad en los hechos naturales, quizá a partir de mitos, que muchas veces fueron consultados para la toma de decisión política. Los conocidos sofistas, como maestros del buen uso del logos para fundamentar ideas en las asambleas. Los físicos, como Heráclito, Parménides, y más aún Anaximandro, Empédocles, Anaxímenes, Demócrito, en busca de los principios últimos. Quizá los menos involucrados en la vida política pero no por ello desvinculados de una corriente racional de pensamiento que aplicó la versión del relato del logos, en lugar del mito, en la fundamentación de los fenómenos naturales[Vernant, 2008] Finalmente los filósofos, a veces consejeros y maestros, así Platón en su República, Aristóteles en su lógica.

Quizá la expansión del comercio en el Mediterráneo y el contacto con los reinos orientales, la transformación de las relaciones de poder originadas en la ascendencia y expresadas en la faz agonal de la política, se fueron transformando en vínculos de interés y de negocios. La crisis de finales del siglo VII y comienzos del siglo VI condujo a rebeliones contra la monarquía. "El factor común era la impotencia de la aristocracia hereditaria ante la agudización de los conflictos, ya fueran los concernientes a la misma aristocracia o aquellos que afectaban a los 'nuevos ricos', a la creciente población urbana o al campesinado empobrecido y cargado de deudas…"[Finley, p.279] Los allegados a la lucha por el poder ya no eran descendientes de patricios ni de dioses pero pretendían ser iguales en derechos apoyándose en parte en el carisma y en la fuerza. Tras un par de generaciones en que se recurrió al "tirano", se desarrolló un nuevo modo de debatir sobre la "cosa pública". Esos derechos comunes debían ser establecidos en acuerdos, en leyes, preferentemente escritas, en relaciones y proporciones. No hay otra manera para regular las desigualdades que las proporciones diferentes de la unidad después de la proporción más simple: un ciudadano, un voto. Es al menos llamativo que Esparta y Atenas, que no recurrieron a la fundación de colonias, hayan desarrollado soluciones alternativas a la crisis general del mundo helénico en el siglo VI. En Atenas se recurrió a la formulación de leyes por Cilón, Dracón y, el más conocido, Solón. Pero no lograron resolver la crisis entre el campesinado y la aristocracia. En el siglo VI Pisístrato y su hijo Hipias se erigen como tiranos, una forma de monarquía ante la oligarquía deseada por los aristócratas. Sin embargo era una monarquía regulada por la constitución de Solón.

Por la misma época en Jonia surgen los nombres de Tales, Anaximandro y Anaxímenes. "…lo innegable es que estos filósofos iniciaron una auténtica revolución en el pensamiento, revolución que podemos resumir en una frase familiar: del mito al *logos* o razón. Durante largo tiempo la revolución consistió en el modo de pensar más que en las respuestas que se daban..."[Finley p.302]. "Fueron los griegos quienes nos enseñaron a preguntarnos: '¿Cómo se sostiene?' o incluso '¿Por qué está colocado así?'. No sería aventurado relacionar estas preguntas que, suponemos, se hacían a sí mismos los primitivos escultores griegos, con el tipo de preguntas que los fisicistas se hacían al mismo tiempo. La confianza y la seguridad del hombre en sí mismo, que permitieron e impulsaron estas preguntas, tanto en política como en arte y filosofía, son la raíz del 'milagro griego'" Finley p.305

En Roma se establece la República. La igualdad, la isonomía, debía expresarse también en la naturaleza. Ya no son los dioses los creadores del cosmos y las primeras dinastías sino que hay una sola "physis" de la que surge el todo y todos. Allí el mito tiene cierta continuidad con los primeros pasos hacia una explicación racional de la naturaleza. El Khaos de Hesíodo es el Nyx de Orfeo, el Érebos de Museo, el Tártaros de Epiménides y el Ápeiron de Anaximandro. Aquello indefinido e ilimitado que se encuentra en la sustancia de todo. Luego será el Agua en Tales, serán los Átomos de Demócrito, el Número en Pitágoras, será el Fuego, el Aire, el Agua y la Tierra en Empédocles. Después se sumará el Éter con Aristóteles. Sustancias primigenias más que entidades concretas. Logos más que explicación científica. La experimentación está ausente. Las matemáticas apenas son proporciones en muy contados casos y sólo en el marco del Logos. Pero más que las respuestas, lo singular es la forma en que se formula la pregunta acerca de la naturaleza. El germen de la filosofía y de la ciencia se encuentra en el modo de preguntar y en el intento de responder desde el Logos, desde la ley que genera un cosmos en la polis, desde la argumentación racional que puede ser defendida en el ágora como las leyes y las decisiones, con el mismo carácter colectivo de la isonomía.

Si en algo difiere la cosmogonía mítica de la cosmogonía física, es en que los dioses son a su vez demiurgos y ordenadores del mundo pero previos a la creación del cosmos. En la cosmogonía naturalista, la ley de organización del cosmos coexiste o es previa a la physis. En cierta medida, la creación y organización de la naturaleza como decisión de los dioses pasa a ser reemplazada por la consecuencia natural de la ley. Y la ley es igual para todos en el marco de la isonomía. El dios del mito se ha transformado en el dios del logos. El relato mítico se ha transformado en el relato lógico. Faltaba organizar la lógica en sus categorías.

La concepción de los milesios contenía elementos extraídos de la astronomía y la matemática babilónica. Pero quizá abstraídos de su contenido místico, tanto la astronomía como la geometría se configuraron en sí mismas como modos de expresar un relato. Si en algo difiere la cosmogonía milesia, es en la búsqueda de una explicación natural. Para Tales lo esencial era el agua, pero lo novedoso es el intento de explicación natural, así los terremotos se debían a olas en el agua sobre la que flotaba la Tierra. En Anaximandro el "ápeiron" estaba en el principio y lo penetraba todo, y habría dibujado en una esfera un modelo de su interpretación del cosmos. Para Anaxímenes los elementos de la naturaleza se formaban por grados de rarefacción o condensación del aire, introduciendo, si no lo cuantitativo, al menos un orden entre los extremos del fuego y la roca a partir del aire. También Tales expresaba el orden del universo en el espacio a través de una geometría. Para Tales la Tierra descansaba sobre el Agua. Pero en Anaximandro la Tierra era el centro del cosmos, todo giraba alrededor. De allí que la Tierra no tuviese por qué moverse, simplemente porque todos los radios de una esfera son iguales. No requería desplazarse en ninguna dirección, y todos los vivientes se alejan de la Tierra pero se mantienen erguidos en uno de sus radios, y los no vivientes caen hacia ella según uno de sus radios. De modo que las propiedades de la esfera bastan para explicar la inmovilidad de la Tierra y la movilidad de los objetos y seres vivos. Es la simetría, la igualdad, la isonomía ante la ley, preexistente o coexistente con la Physis, la que gobierna el cosmos, de la misma manera que es la ley la que gobierna el orden en la Polis, la misma ley coexistente o preexistente a los ciudadanos, a la que deben estar sometidos, como diera Sócrates el ejemplo paradigmático.

De todos modos no debe sobrevalorarse el aporte griego sino en el modo de inquirir, en el uso de la lógica y la fundamentación racional. "…desde el punto de vista tecnológico las glorias de Grecia y Roma han sido a menudo exageradas. Cuando los griegos y los romanos, sucesivamente, vencieron a las antiguas civilizaciones del Oriente Próximo se apropiaron –y heredaron- muchas cosas, pero también destruyeron mucho, y lo que crearon para sustituirlo fue pocas veces mejor, y a menudo inferior, a los logros técnicos de los primeros tiempos."[Derry, p. 24]

La explicación histórica difiere de la explicación física. Pero se emparenta con ella en la fundamentación racional sobre hechos, sobre documentos escritos y arqueológicos, sobre una consistencia entre fuentes y relaciones. A diferencia de la explicación física actual, expresada en lenguaje matemático y validada por la experiencia, y que por lo tanto deja poco margen a la discusión aún en el marco de lo verosímil, la explicación histórica adquiere la forma de un discurso lleno de huecos por donde puede colarse la discusión, la duda, el recurso a diversas hipótesis. La presente introducción no pretende "demostrar" el origen del pensamiento físico sino sólo ser un ejercicio del Logos en una versión libre, mezcla de modernidad que pretende escribirse sobre un palimpsesto.

Sobre las cuestiones de la física actual

En el fondo, el objeto de estudio se mantiene estable, pero no inalterable y mucho menos agotable. Es la naturaleza. Pero una naturaleza cargada de divinidad en sus orígenes, se fue desprendiendo progresivamente de los dioses y demonios. Un gran salto, quizá un salto al vacío, fue dado en el siglo XVII, que encontró un nuevo terreno donde establecerse en el siglo XVIII. Si la naturaleza se resume a partículas en movimiento sometidas a interacciones, concepción que se sintetiza bajo la denominación de "Mecánica"; si el establecimiento de las leyes temporales del movimiento permitiera determinar el futuro y reconstruir el pasado, tal el determinismo en el sentido de Laplace, parece no ser necesaria la mano de un Dios creador y ordenador. Si la naturaleza es una realidad mecánica, nada podría escaparse a su explicación. Así la descripción de los movimientos, de lo simple a lo complejo, se inicia desde una partícula en movimiento rectilíneo, primero uniforme, luego acelerado. Después las trayectorias circulares y curvas. Todo aquello en el marco de la cinemática. Luego la explicación dinámica. La identificación y caracterización de fuerzas. La progresiva aplicación a sistemas más y más complejos. Después la síntesis teórica, los teoremas de conservación. Pero la realidad es más compleja. Entonces hay que extenderla a muchas partículas, a masas variables, a cuerpos rígidos, a pequeñas oscilaciones, a movimientos planetarios, a cuerpos deformables, a fluidos. Los fenómenos periódicos y las ondas parecen ser un eje transversal a todos los procesos mecánicos. Pero los fluidos se extienden a manifestase como calor, electricidad, magnetismo. La luz parece ser partículas. Sin embargo la mecánica fue llegando a sus propios límites. La luz se comporta como una onda pero no se sabe qué vibra. El calor es un imponderable. El fluido magnético se desvanece. Cuando, a comienzos del siglo

XIX, la mecánica parecía ser coronada en elegantes síntesis teóricas, comenzó a mostrar las primeras grietas.

La gravitación universal conducía al colapso del universo, la entropía termodinámica conducía a su "muerte térmica". La búsqueda de una corrección a la mecánica en el siglo XIX se tradujo en la mecánica estadística para incorporar la termodinámica y expandirse a otros ámbitos a comienzos del siglo XX. Pero fue la síntesis del electromagnetismo que, a mediados del siglo XIX, sustrajo a la mecánica la explicación de la electricidad, el magnetismo y la luz, y con ella todo el espectro de radiación. Y fue la interacción entre la radiación electromagnética y la materia mecánica la que llevó al estudio del mundo atómico. Por otra parte, la contradicción entre el electromagnetismo y el principio de relatividad de Galileo llevó a la gran coronación de la mecánica en la Relatividad, primero Especial y luego General, uno de los dos grandes pilares actuales de la física. Sin embargo sería lo más pequeño, lo invisible excepto a los ojos de la imaginación, sólo manifiesto en forma indirecta a través de experimentos, lo que derribaría por fin el andamiaje mecánico. La mecánica, apoyada en la hipótesis del continuo, debió asumir el fracaso ante la noción del "cuanto". De una forma oscura pero arrasadora, inundó el mundo de lo atómico y lo subatómico. El átomo, lo indivisible, no sólo resultó divisible sino que se expresó como onda y como partícula, o ninguna de las dos; negó el determinismo, negó la materialidad y la posibilidad de conocer la naturaleza última, continuó dividiéndose más y más en un complejo de partículas elementales que sólo a mediados del siglo XX pudo comenzar a organizarse y recién a comienzos del siglo XXI consolidó su estatus. En la electrodinámica cuántica, la cromodinámica cuántica y la relatividad general descansan los pilares de la física actual. Las grandes cuestiones van desde el mundo de los bosones, leptones y hadrones, la computación cuántica y la tele transportación, hasta el origen del universo en un Big Bang, quizá uno de tantos universos. En el medio, una miríada de problemas teóricos, prácticos, éticos, políticos y una vorágine de tecnología.

Una primera mirada a la metodología

Es altamente complejo el problema de la metodología, que se emparenta con la epistemología, la lógica, la misma filosofía y su historia. Pero en una primera mirada, puede proponerse una estructura que, más que resolver un problema, lo plantea.

Si consideramos que el objetivo de la física es la "naturaleza", sin precisar qué se entiende por ella aún, podemos decir que el problema primario consiste en estudiar un fenómeno natural. Estudiar implica describir, aislar del entorno pero enmarcar el fenómeno en un contexto, caracterizarlo, exponer una pregunta en forma concreta que se pretende responder. Si aun de un modo un tanto ingenuo decimos que el fenómeno es "el hecho en sí", sólo considerándonos iluminados podríamos decir que podemos conocerlo con la mera contemplación, aunque esta concepción estaba en la base del Logos, se proyectó sobre la Edad Media desde el platonismo y sobrevivió hasta los tiempos modernos.

Por lo tanto es la formulación concreta de un problema o pregunta la que nos conducirá en la primera etapa de la investigación. Pero la pregunta se alimenta con alguna información primaria. Su formulación conduce a la búsqueda de más información, a la reformulación del problema y así sucesivamente en un proceso recursivo que nunca termina pero del que se sale cuando, por algún motivo, se propone una posible respuesta que al menos se ofrezca como verosímil.

Una hipótesis, en tanto posible respuesta al problema, requiere algún modo de validación. En principio, si la hipótesis es verdadera, debe manifestarse en alguna consecuencia necesaria y verificable. Más aún, en el ámbito de la física actual, tanto los datos y la formulación del problema es numérica, la hipótesis es numérica y la consecuencia necesaria y verificable debe ser, consistentemente, cuantificable. Notemos que la consecuencia verificable puede no ser verificada por diversos motivos, como errores en el procedimiento de medición o cualquier evento no considerado, y sin embargo la hipótesis ser válida. Pero también podría ocurrir lo esperado como simple eventualidad o por otras razones sin que la hipótesis sea correcta, y aceptarla igualmente como válida. Suele llamarse "errores de tipo I y II" respectivamente a estas dos posibilidades. (Tipo I: rechazar una hipótesis "deseable" que es correcta, y Tipo II: rechazar una hipótesis alternativa que es correcta). Es decir que la hipótesis podría ser aceptada o rechazada por error, por lo que nunca se tiene la certeza absoluta acerca de la validez y, por lo tanto, la investigación siempre permanece abierta.

El motivo es que no se valida la hipótesis de modo directo sino a través de la consecuencia necesaria de tal hipótesis, que debe ser verificable y, en física, cuantificable. Para ello se requiere un diseño experimental y observacional apropiado, que delimite el objeto de estudio y las condiciones de verificación de la consecuencia esperada de la hipótesis. Luego la realización concreta de la experiencia, y finalmente el resultado. Este resultado puede coincidir o no con el esperado. Como se dijo más arriba, la verificación o no verificación no ofrecen certidumbre acerca de la validez de la hipótesis. En caso de no coincidencia entre lo esperado y lo obtenido, se requiere una revisión de los resultados, del experimento, del diseño experimental, del razonamiento seguido para arribar a la consecuencia verificable, y entonces, si todo el proceso ha permanecido incólume, de la hipótesis. Pero aún puede requerirse más información o incorporar algún dato que fue pasado por alto. Inclusive se puede requerir una reformulación del problema planteado.

Pero una correspondencia entre lo esperado y lo obtenido, si bien no confirma de modo absoluto y terminante la hipótesis, al menos es un elemento de juicio para seguir adelante por el camino abierto. Puede insistirse con más experiencias asociadas a la validez de la hipótesis y plantear como una regularidad la sucesión de resultados exitosos. Con un poco más de confianza, puede plantearse una ley general si se asume como válida. En tal caso, la ley comienza a jugar un rol deductivo para nuevos experimentos y, si se confía en ella, entra en el campo de la tecnología dado que se asume su validez y se confía en que todo diseño basado en ella debería funcionar. Si esta ley se emparenta con otras leyes, puede incorporarse en un cuerpo de teoría dentro de la cual nuestra ley pasa a ser un caso particular. Esa teoría puede apoyarse en principios generales.

Sin embargo, toda esta estructura se apoya en concepciones, rara vez explícitamente manifiestas, pero siempre presentes, que podríamos llamar "paradigmas". En un marco histórico, filosófico, hasta teológico y asociado a una cosmovisión, hay ciertos puntos de partida no explícitos pero asumidos por todos los investigadores y hasta forman parte de la mentalidad colectiva. Tal la concepción mecánica de un universo formado por partículas en movimiento sometidas a interacciones, o la presencia de Dios como creador y primer motor inmóvil, o la concepción aristotélica o la visión actual del universo.

Finalmente se obtiene una imagen mental del fenómeno. Es claro que tal imagen mental, sin cuestionarnos qué es una “imagen mental”, no sólo no es definitiva sino que está muy lejos de la “cosa en sí”. Inclusive, si la mente es el objeto de estudio, será la mente misma la que generará una imagen de sí misma incorporando el riesgo de entrar en un proceso recursivo en el que el objeto se explicaría a sí mismo.

La metodología también tiene su origen y su historia, quizá más compleja y más remota que la ciencia. Aquellos “físicos” de la antigua Mileto, quienes buscaban la explicación de todo en un principio natural originario, diferían en el enfoque de la última explicación con una visión completamente diferente. En el sur de la actual Italia, en Elea, quizá fue Parménides, o al menos el primero de quien se tiene referencia, quien pretendió mirar el mundo sólo con los ojos de la mente. En una discusión con su propio pensamiento y en la forma de un poema, concluye con la inmovilidad del ser. Si existe más de un ser, estarían separados por algo que no es, por lo que el ser es único. Si cambiase, dejaría de ser, por lo tanto no existe el cambio. Más allá de caracterizar las propiedades del ser, a lo que arriba es a negar la posibilidad de conocer a través de los sentidos. Por ello, la imagen de la realidad no puede apoyarse en la engañosa experiencia sensible sino en el intelecto, sólo el pensamiento puede conducir a la verdad. Mucho después será la experiencia y los instrumentos los que reemplacen a los sentidos y su falibilidad. Pero de este modo no sólo imposibilita la explicación del cambio, como se manifiesta en las conocidas paradojas de Zenón de Elea, sino niega la misma existencia de los fenómenos.

El gran problema resulta así la explicación del cambio. Una manera de salir del callejón era aceptar la existencia del no ser. La explicación atomista de Demócrito deja el no ser entre el ser de los átomos. Empédocles resume en cuatro seres los fundamentales componentes de la naturaleza: el fuego, el aire, al agua y la tierra. Pitágoras y su secta, con una mezcla de matemáticas, mística y política, recurre al número como realidad última. Más allá de los intentos a través de agregados materiales y la visión mística del número, y volviendo al problema de la metodología, será Platón quien separe el mundo de las ideas, el verdadero, del mundo de los fenómenos, limitado a la capacidad de los sentidos. Y será Aristóteles quien le dé forma a la lógica como método de razonamiento.

Más próximo a la visión de Heráclito, el del permanente cambio, quien recurrió a un “logos” como un pensamiento ordenador de la diversidad y la variabilidad, Platón, el de “anchas espaldas”, separó el mundo cambiante y engañoso al que acceden los sentidos, del verdadero mundo de las ideas. Hasta el presente es esta dicotomía entre el mundo de las ideas y el mundo de los fenómenos, el principio rector de la metodología: cómo arribar a la idea, la forma, la síntesis, el concepto, el modelo, desde la descripción de los fenómenos a partir de los sentidos, ahora a través de la experiencia y la medida.

Acerca del carácter de la física

Es difícil responder qué estudia la física y también es difícil sintetizar en pocas palabras qué tipo de ciencia es. La palabra misma refiere a la naturaleza, de modo que tiene un componente de ciencia natural. Pero no se trata de una visión naturalista en el sentido descriptivo del ambiente sino de una expresión matemática formal del mundo natural con fuerte componente deductivo, con importantes abstracciones e idealizaciones en el proceso de investigación. Por lo tanto tiene claros aspectos de una ciencia formal. El número, el cálculo, la expresión analítica y algebraica de las leyes le da el carácter de una ciencia exacta. El recurso a la experimentación como juez supremo y a veces herramienta de descubrimiento, antes de síntesis en leyes empíricas, obliga a enmarcarla como ciencia experimental. Es imposible negar las tremendas aplicaciones de la física en todas sus áreas. Tampoco puede negarse que es una de las más grandes exploraciones del pensamiento humano, que no sólo se cuestiona sobre el mundo exterior sino también sobre el mismo pensamiento: desde las investigaciones ya más que centenarias en el ámbito de la psicofísica hasta las actuales búsquedas de la explicación física del pensamiento y del origen de la vida.

Por ello es también al menos muy pretencioso, si acaso posible, sintetizar en una palabra ni siquiera el carácter de la física como ciencia. Tratando de ser breves, al precio de un exceso de simplificación, podemos decir que la Física es un lenguaje, esencialmente escrito en código matemático, en el que se pretende sintetizar un modelo conceptual del mundo exterior.

Con un poco más de solidez, podemos decir que es una ciencia natural por su objeto, experimental por su método, exacta por su lenguaje, pura por su objetivo y aplicada por el espectro potencial de tecnología, teórica por su síntesis conceptual, humana por ser obra de la humanidad y de su historia.

El objeto de estudio

En primera aproximación, el objeto de estudio es la "naturaleza", la antigua "physis". Pero en el estado actual de los conocimientos, no podemos menos que ser conscientes de que debemos contentarnos con apenas un modelo del mundo natural. No es el ámbito apropiado para tratar el problema del modelo, pero apuntemos algunas ideas que ayudarán a interpretar lo que sigue.

En cierto modo, un modelo es poner algo donde no va o quitar algo de donde va. Pero esto puede dar lugar a al menos cinco efectos. Puede ser gracioso, patético, erróneo, una locura o un modelo. Tomemos un ejemplo. Si recordamos la ecuación de estado de los gases ideales (PV=nRT), si decimos que el producto "PV" es una "constante que depende de la temperatura" en un tono pícaro y cómplice, puede resultar gracioso dada la contradicción que encierra la frase. Si lo decimos sin percatarnos de la contradicción, puede resultar patético. Si sólo hemos omitido la referencia a la dependencia de la temperatura (y el número de moles), o aclarar que nos referimos a un sistema material cerrado de gas ideal en un proceso isotérmico, será un error. Si decimos que esto es así porque el demiurgo constructor del mundo así lo hizo, y lo afirmase con plena convicción y seguridad absoluta, sería una locura. Pero si hacemos referencia al sistema cerrado de gas ideal en un proceso isotérmico, es un modelo. Ese modelo asume por ejemplo, entre otras hipótesis, que las moléculas de gas sólo interactúan cuando chocan. Esto no es verdad pero, junto con otras hipótesis y algunas herramientas matemáticas, permite construir una aproximación válida para explicar y comprender muchos fenómenos naturales.

Veremos, en lo que sigue, que los modelos ponen cosas donde no van, por ejemplo resortes entre moléculas, o quitan cosas de donde van, por ejemplo el aire en una caída libre idealizada. Dejando de lado simples errores, casos patéticos y extremos de locura, estas abstracciones de la realidad llevadas al límite de lo absurdo resultan en cuentos de salón (en los pasillos se contaba un chiste sobre un entrenador del hipódromo que suponía un caballo puntual en una pista sin rozamiento…). Pero en las aulas y en los laboratorios, es la forma en que nos aproximamos a la realidad, tanto como sea posible.

El problema del espacio y el tiempo, y el movimiento de la historia

Volvamos a uno de los núcleos de inquietud de los antiguos griegos: el cambio y la permanencia; a un modo de expresar nuestra relación con el mundo exterior: las ideas frente a los fenómenos que impresionan nuestros sentidos; y a un modo de razonar: la lógica. Intentaremos elaborar una imagen mental del cambio sobre la base de un razonamiento lógico a partir de la experiencia sensible. Pero faltaban las matemáticas y el experimento. Tras la negación del movimiento por Parménides y Zenón de Elea, y la aparición del no-ser y los elementos, desde el siglo III antes de Cristo, el estoicismo, fundado por Zenón de Citio, retoma las ideas de cambio de Heráclito. Todo en el cosmos se rige por un principio activo, un soplo racional casi como "dios" que penetra todas las cosas en una concepción atomista, y una necesidad o destino a lo que todo tiende. La naturaleza es divina, nada es azaroso sino regido por principios deterministas y racionales en un orden cíclico recomenzando el cosmos a partir de los elementos constitutivos originales, consumiéndose en un fuego para retornar en aire, agua y tierra. El epicureísmo, también surgido a finales del siglo IV antes de Cristo, es esencialmente atomista, inclusive el alma está constituida por átomos muy ligeros. Permite cierto azar dado que los átomos pueden apartarse eventualmente de los movimientos predeterminados. Fueron estas concepciones filosóficas las que predominaron y se expandieron con el helenismo tras el efímero imperio de Alejandro Magno, y en los finales de la República de Roma.

Lentamente la República fue involucrándose en todo el ámbito Mediterráneo. Pero nunca Roma dejó de admirar la cultura griega. De República se transformó en Imperio, y se disgregó ya a partir del siglo III, separándose el Imperio Romano en una parte oriental, con centro en Constantinopla, y los restos en el Occidente latino. En el Neoplatonismo, desarrollado a partir del siglo II, se vuelve parcialmente sobre las concepciones originales de Platón relativas a la búsqueda de la unidad y la idea pura. En el Neopitagorismo, también desde el siglo I y originado en la escuela de Alejandría, hay cierto eclecticismo con el platonismo, el estoicismo y las concepciones de la antigua escuela pitagórica. Los objetos matemáticos se encuentran a medio camino entre la unidad de lo absoluto y la multiplicidad de los acontecimientos.

Desde el siglo IV, los dioses, ubicados en una esfera superior a la humana por su inmortalidad y poderes, fueron desplazados por la comunión del Cristianismo, por un dios de la salvación y el perdón, aglutinante de comunidades de ayuda mutua. Es ilustrativo el enfoque de Manfredi en La Última Legión, novela histórica que refiere al último emperador romano Rómulo.

"….El mundo se fragmentaba, se desintegraba en muchas esquirlas a la deriva en el río de la historia. Sólo la religión parecía tener aún la virtud de mantener unidos a los hombres con su promesa de inmortalidad, con su esperanza de felicidad en otra vida, pero sólo superficialmente. Se difundían continuamente herejías que desencadenaban conflictos a menudo sangrientos, y provocaban anatemas y excomuniones mutuas, lanzadas en el nombre de un único dios que debería ser el padre común de la humanidad entera. La existencia era tan mísera para la mayoría de las personas que para muchos hubiera sido imposible soportarla, de no haber sido por su promesa de una felicidad sin fin tras las exequias, a menudo prematuras."[Manfredi, p. 306]

De las persecuciones en el siglo III, en especial bajo Diocleciano, se pasó al reconocimiento del cristianismo como religión del Imperio bajo Constantino en el siglo IV. No resultan muy claros los motivos por los cuales el Emperador adoptó la religión cristiana, quizá no más que una bandera que estimule y unifique a sus tropas hacia la batalla, pero no sólo fue una cuestión de fe dado que convocó concilios ecuménicos y expuso, o más bien impuso, sus ideas acerca de la doctrina. En el siglo V fue definitivamente la religión imperial. Pero también fue el siglo de las primeras grandes divisiones: el catolicismo en Roma, la ortodoxia en Constantinopla, el donatismo en el norte de África, donde se instaló el efímero reino de los vándalos, el arrianismo entre los "bárbaros", léase "extranjeros", que fundaron los reinos visigodos en la Península Ibérica y el sur de la actual Francia, donde los merovingios se convirtieron al catolicismo, y el nestorianismo en algunas regiones lejanas de Oriente Medio. La caída del último emperador a finales del siglo V, la ocupación y fundación del efímero reino ostrogodo en Italia, acabado en la lucha por la recuperación del Imperio Romano desde Bizancio en el siglo VI. La reocupación de Italia por los lombardos en el siglo VII, que dejó casi como único relicto de autoridad imperial en Roma y otras regiones al papa, quien en más de una oportunidad tuvo relevancia política secular y durante siglos un dominio territorial en los Estados Pontificios entre Roma y Rávena. En más de una ocasión los papas dialogaban con el emperador bizantino y sus enviados desde Constantinopla en igualdad de condiciones, algunas veces disputando jerarquías.

Las ciudades, a falta de un estado centralizado que ordenase la vida pública, decayeron, inclusive la misma Roma. Hasta la Corte se trasladó a Rávena en los últimos tiempos. "Puede decirse que si las ciudades medievales sobrevivieron fue gracias a su obispo; sus funciones y prerrogativas dieron forma a una estructuración social que fue afirmándose progresivamente en el transcurso de los siglos. Desde ellas el obispo administraba los dominios e inmuebles pertenecientes a su iglesia; supervisaba la explotación de tierras, casas o iglesias dotadas; como inmunista, ejercían en provecho propio los poderes públicos y recaudaba los impuestos de los habitantes de sus dominios. Pero fue la función religiosa el mejor elemento centralizador de toda la diócesis, porque transformó la cuidad en lugar santo…."[Doehaerd, p. 54] Y el primero de los obispos era el papa, en Roma.

La parte romana tuvo modos duros en las acciones pero más flexibles en lo cultural. La caída del Imperio Romano de Occidente dejó en manos del Papado parte del poder político y el sentido de la unidad en el marco de la Iglesia. En ausencia de un poder real, desde la sede pontificia hubo que dar respuesta inclusive a necesidades de la población. "…Bajo esta perspectiva, el papa, como obispo de Roma, de una Roma abandonada por el emperador, se convierte en todos los aspectos en su jefe…"[Le Goff p.111]. Hasta mediados del siglo VIII el Papado hizo equilibrio entre el reino lombardo y el Imperio bizantino. Cuando un conflicto con el rey lombardo llevó al papa Esteban II (III) a pedir auxilio al mayordomo franco Pipino (III, El Breve), dado que Bizancio estaba ocupado en contener a los búlgaros y había conflictos político-religioso-administrativos que se expresaban en relación con el culto a las imágenes, se estableció una alianza que marcaría el futuro de Europa. Pipino, mayordomo de palacio, detentaba de hecho el poder real pero no era rey.

"El acceso de Pipino a la realeza constituía una usurpación de los poderes poseídos hereditariamente por otro linaje y exigía una legitimidad distinta de la de la raza y la sangre. Pipino, cristiano convencido e incluso devoto del apóstol Pedro; la buscó en la Iglesia, que reconocía a un Dios que poseía todos los poderes…."[Paul, p.8]

Y fue el papado quien, en el siglo VIII, convocó la ayuda de los mayordomos merovingios, elevados a reyes por su reconocimiento, para desplazar los últimos reyes lombardos en un reparto de poder desconociendo a la emperatriz Irene en Bizancio. Y fue un papa quien nombró a Carlomagno como el nuevo emperador de occidente, brazo armado y secular defensor de la Fe, finalmente admitido como igual en la corte bizantina a finales del siglo VIII y comienzos del siglo IX. Y política y religión entraron en una relación simbiótica.

"La Iglesia estaba dotada, también durante la época carolingia, de sustanciales rasgos religiosos y espirituales, pero poseía, al mismo tiempo, una enorme influencia económica, y constituía un elemento indispensable en la gestión de la administración del estado. Los obispos y abades desempeñaban funciones similares a las de los condes. Tomaban parte activa en las asambleas en las que se discutían y promulgaban las leyes, y el alto clero detentaba en ellas frecuentemente una auténtica preponderancia…."

"…Desde que Pipino el Breve, tras su coronación en el año 751, fue consagrado por el papa, todos los carolingios llegados al poder recibieron la consagración, que, si no podía ser impartida directamente por el papa, era efectuada por un prelado de alto rango. La dinastía así dignificada, adquirió prácticamente una santificación religiosa, una inspiración mágica, y ello tuvo por fuerza que ejercer una profunda impresión en los sencillos súbditos de estos poderosos soberanos."[Dhondt, p. 52]

"Se produjo, sin duda, una sacralización del Imperio que, gradualmente, podía alcanzar todos los niveles. Siguiendo el ejemplo de la Roma antigua y de Bizancio, el Imperio franco se convertía en una realidad mística y en una institución sagrada…. El emperador, coronado por Dios, era el ejemplo de ese orden terrestre…. Poseedor de un poder otorgado por Dios, debía gobernar según la voluntad de Dios y ser, al mismo tiempo, reflejo de la Imagen de Cristo glorioso y triunfante."[Paul. pp.12-13]

"Aunque parezca que el papado obtuvo de tal alianza bastantes ventajas (formación del patrimonio de San Pedro, basándose en una pretendida donación de Constantino, que fue en realidad una mentira fabricada por la curia pontificia en la segunda mitad del siglo VIII; destrucción por los francos del reino lombardo, que era una amenaza permanente contra Roma y los dominios pontificios; iniciativa en la coronación imperial, lo que podía interpretarse como que 'la dignidad imperial era un cargo recibido del papa'), fue el emperador el más beneficiado por la nueva situación. Aunque Carlomagno se consideró sobre todo como rey de los francos y para irritar al emperador bizantino, no apareció como 'emperador de los romanos', sino simplemente como 'gobernador del Imperio romano', enseguida buscó el poder imperial supremo tiñéndolo de un carácter religioso, sacerdotal, sagrado. La expresión *a Deo coronatus*, 'coronado por Dios', pone directamente al emperador en relación con Dios y reduce el papel del Papa al de un intermediario más o menos innecesario.

La expresión *Imperium christianum* aparece cada vez con más frecuencia en los textos litúrgicos…. Tanto él como sus consejeros consideraban su deber defender la religión sin sustituir a los obispos ni a los papas…. La confusión que de hecho existía se debía más a la ausencia de límites claros entre los dos poderes que a la intromisión del poder imperial en las cosas religiosas…. También el papado sacó sus ventajas de las dificultades y debilidades de los sucesores de Carlomagno…. “[Le Goff pp.116-119]

La relación entre el poder imperial y la Iglesia no transcurrió sin fricciones. “La intervención de los obispos en las disputas familiares carolingias, su utilización de los grandes príncipes y el papel de garantía de legitimidad que asumían impulsaban a los reyes a elegir con prudencia. Reclutaban a los obispos en su círculo más inmediato, en su capilla de preferencia o en las familias aliadas o amigas. Los obispos, muy vinculados a los reyes, pocas veces tenían las manos libres. Con frecuencia, se veían divididos entre los deberes a su cargo y el servicio al rey. No siempre coincidían los primeros y el segundo….”[Paul. p.19] Los obispos debieron reflexionar sobre esta relación, en ocasiones imponiendo penitencias a los reyes y en otras perdonando pecados. “…La desintegración del orden político carolingio, que obligó a la Iglesia a afrontar otros problemas, interrumpió esta reflexión sobre las relaciones del poder civil y de la Iglesia. Las dificultades de los tiempos no favorecían una reflexión objetiva.”[Paúl p.20]

Por entonces había dos concepciones alternativas del espacio. Para Aristóteles, quien rechazó la idea del vacío donde se movían los átomos de Demócrito y el receptáculo absoluto de todos los acontecimientos de Platón, el espacio estaba determinado por la superficie que envuelve los cuerpos. Esta concepción se desdobló. Una imagen relacional, debida a Teofrasto, seguidor inmediato de Aristóteles en el Liceo, concebía el espacio como como un orden en que se encuentran los cuerpos que tienden a ocupar su propio lugar. La esencia del espacio es el orden y la posición relativa en su interacción con la materia. En cambio Estratón de Lámpsaco (ca. 300 a.C.) lo concebía como una entidad existente por sí misma pero que sólo se evidencia en tanto haya cuerpos que lo ocupen parcialmente. Todas las variantes de la concepción del espacio a finales de la Antigüedad rondaban en torno a las ideas de Teofrasto y de Estratón. La del *pneuma* estoico sólo introduce un aspecto móvil y dinámico al espacio que lo envuelve todo, vecina del absoluto platónico en el sentido que el espacio tiene cierta objetividad, no es estático sino que se relaciona geométricamente con los cuerpos que están envueltos en el *pneuma*. “El *pneuma* se identificó con el espíritu divino y su omnipresencia se tornó idéntica a la omnipresencia de Dios. Todo esto, unido a la concepción relacional del espacio, llevó a la identificación del espacio con Dios en las doctrinas de los filósofos helenísticos como Filón de Alejandría: ‘Hay una triple noción de lugar; primero como espacio lleno de cuerpo, en segundo lugar como el orden divino mediante el que Dios ha impregnado totalmente todo con facultades incorpóreas…, y su tercer significado es el propio Dios que se denomina lugar porque envuelve el Todo sin ser envuelto por nada’”[Sambusrsky,p.21]

Damascio, a finales del siglo V, “…considera el espacio en su multiplicidad tridimensional como una suerte de matriz que permite diversas posiciones que define en diversas direcciones. Así pues, el espacio se convierte en un concepto vectorial frente al mero concepto de longitud, comparándose a otras ‘medidas’ de la manera siguiente: ‘Estas dimensiones, a fin de no recaer plenamente en lo indefinido, se ven apoyadas por medidas; el tiempo como medida de la actividad del movimiento; la cantidad, tal como pueda ser el número, como medida de la materia discreta; la longitud, como por ejemplo un codo, como medida de la materia continua; y el espacio como medida de la ramificación de la posición….'"[Sambursky, p.23]

Proclo (412-485), neoplatónico, se expresa con una lógica aristotélica, y concluye que el espacio es un cuerpo inmóvil, indivisible e inmaterial. El espacio es *luz*, el más simple e incorpóreo de todos los cuerpos. Esta imagen se transformará en la luz como portadora del alma.

El espacio como relación de posiciones lleno de un *pneuma* sutil pero corpóreo, y el espacio como esfera de *luz* que todo lo envuelve, ambos se transformarán en expresiones de Dios.

Para Aristóteles el tiempo era un orden del antes y el después con respecto al ahora. Crisipo (siglo III a.C.) se aproximó a la idea de límite a través de la noción de encaje de intervalos. Esta idea relacional la recogen Damascio y Proclo. Para Boecio en cambio, como para Estratón, el tiempo transcurre en forma absoluta, casi como una variable independiente.

Lejos de resolver el problema del cambio, muy debatido a finales de la Antigüedad, era claro que el tiempo y el cambio estaban muy imbricados al nivel de definirse mutuamente. La consideración de procesos periódicos, en especial en las revoluciones celestes, permitía definir unidades. La eternidad se asociaba con el ser, mientras que el ser del tiempo era el devenir. Pero estas cuestiones, típicas en la discusión filosófica en la Antigüedad tardía, en las que se introdujeron los primeros pensadores cristianos para compartir el ámbito de debate filosófico con neopitagóricos y neoplatónicos en igualdad de condiciones durante el siglo V y aun el VI, no eran las del siglo VIII.

Sinteticemos un par de párrafos de Weisheipl…

"Poco interés inmediato tenían los primitivos Padres de la Iglesia en la ciencia y en la teoría física; sin embargo, aquellos que conocían el griego se hallaban familiarizados, en verdad, con la visión platónica predominante, a la cual dieron nuevo impulso Ammonio Saccas –un cristiano apóstata- y su discípulo Plotino. Eruditos cristianos, tales Clemente de Alejandría, Orígenes y los posteriores Padres capadocios, hallaron fácilmente compatible con el cristianismo la belleza espiritual del platonismo, aun en ciencia. Las ideas subsistentes de Platón fueron interpretadas como ejemplares eternos en la mente del Creador; la coeterna pantalla espacial, considerada como el caos creado y desde el cual creó Dios todos los seres físicos; y el fin del hombre era purificarse él mismo de las cosas materiales de este mundo a través de la mortificación, a fin de unirse a Cristo por toda la eternidad en el cielo."[Weisheipl. p. 21]

Y luego agrega…

"No obstante, la ciencia griega pura se habría perdido totalmente para la primitiva Edad Media de no haber sido por Boecio. Ciertamente se perdió en su mayor parte para Occidente en el colapso final del Imperio Romano y la casi total interrupción de la erudición durante la Edad Oscura que siguió, pero Boecio, cónsul romano y ministro de negocios bajo Teodoríco, rey de los ostrogodos, había recibido una excelente educación en Atenas, que lo familiarizó con la ciencia y la filosofía griegas. Consciente en general de la ignorancia de los latinos de su tiempo (ca. 475-524), tomó sobre sí la tarea de traducir las obras de Platón, Aristóteles, Euclides, Ptolomeo y Arquímedes…. legó a la Edad Media una lógica casi completa, incluyendo traducciones de al menos dos de las obras de Aristóteles, un sumario de los *Elementos* de Euclides junto con un texto elemental de aritmética y otro de música, originados ambos en Nocómaco de Gerasa.

Magra herencia, pero que sirvió por más de quinientos años como base para el estudio de las artes liberales representando, junto con una parcial traducción del *Timeo* y los comentarios a éste de Calcidio y Cicerón, toda la ciencia griega de que disponía el Occidente latino hasta el renacimiento del siglo XII….

Ningún serio esfuerzo pudo hacerse a favor de una teoría física de la naturaleza hasta la recuperación de la ciencia y la metodología aristotélica en el siglo XII"[Weisheipl, pp..22-23]

También en la *Historia de la Tecnología* leemos que "No obstante hubo siempre notables limitaciones a los logros romanos. Habían construido un Imperio en el cual el bienestar y la vida civilizada de las ciudades reposaba sobre las espaldas de la laboriosa población campesina que producía los alimentos; con todo, no hubo una revolución de la industria que acelerase la producción industrial urbana, tal como las condiciones de paz inducían a creer. Tampoco existió una edad de oro de la ciencia pura, ni los intelectuales de Roma tomaron, aparentemente, un interés por la tecnología comparable con el de las obras públicas del momento: se encomendó a los libertos y a los inmigrantes extranjeros el progreso de la industria."[Derry, pp.35-36]

Era escaso el nivel cultural del clero. "En el mundo griego y, más tarde, en el latino, el cristianismo dio lugar a la rápida aparición de una literatura y de una teología, pues era necesario justificar la elección de una religión nueva, procedente de un universo mental diferente, ante una élite de paganos cultivados. Más importante aún que defender las propias convicciones era rechazar las objeciones planteadas en nombre del buen gusto, de la retórica, del humanismo y de la filosofía."[Paul p. 3] "En la época carolingia, la elección de un cristianismo vivificado por la cultura no podía justificarse por las mismas consideraciones. El sistema cultural de la Antigüedad había desaparecido, así como las elites de las que era medio de expresión. El modo de vida de un jefe bárbaro era muy distinto del de Cicerón o de san Agustín. El dominio del saber retórico y jurídico no era ya un medio para alcanzar una posición privilegiada. Lo que resulta un tanto sorprendente no es el descenso progresivo del nivel cultural, sino el prestigio que conservó la herencia antigua."[Paul p.4]

"Este renacimiento (carolingio) fue antes que nada una reforma escolar, aunque limitada. Se dirigía a la formación del clero, sobre todo del alto clero, y de la corte imperial…. Heredero, una vez más, de España y Gran Bretaña, el cristianismo carolingio fue religión escatológica y apocalíptica. Y en este santuario del Apocalipsis nació un culto esencial, el culto del Salvador que 'moviliza a las masas.'"[Le Goff pp.127-130.]

Mientras tanto, en Bizancio ya política y religión eran una unidad. De allí la relevancia de los conflictos entre la ortodoxia y el monofisismo, o el del monotelismo como intento de mediación en lo que escondía intereses políticos regionales entre Siria y el norte de África, y Bizancio. En 529 fue cerrada definitivamente la antigua Academia de Platón por orden de Justiniano. Se combatió en todas formas el "paganismo" e inclusive las "herejías" o desviaciones de la ortodoxia dentro del cristianismo. Era un imperio fragmentado por concepciones ortodoxa, monofisita, arriana, donatista, monotelista, y además católica, donde cada uno en su propia región hacía uso de una interpretación de la divinidad o humanidad de Jesús La jerarquía de valores ponía en primer lugar la revelación, el objetivo último del conocimiento debía ser la interpretación de las escrituras. Fue la parte bizantina del Imperio Romano, entre Constantino y Justiniano, la que conservó la forma más politizada del cristianismo, disputando el poder de la Iglesia frente al poder secular. Sólo la conquista árabe del norte monofisita de África y el Cercano Oriente “resolvió” el problema separando aquellas regiones de la ortodoxia en Bizancio.

Recién en el siglo IX, “En tiempos de Teófilo “(829-842)” y merced a la protección otorgada a los artistas, escritores y profesores de la universidad bizantinos, se constituyó un círculo cultural que, por primera vez, rivalizó con el del califato.”[Maier, p.122] “…La figura clave de este renacimiento fue León el Matemático, cuyo prestigio había llegado hasta la misma corte de Bagdad…. Como consecuencia del gran impulso que le dio Teófilo, la Universidad de Constantinopla consiguió un lugar destacado dentro del mundo intelectual del siglo IX y sirvió de base para el renacimiento de la cultura y de las artes en el período macedónico.”[Maier, p.124] “…De tal modo, la síntesis que los teólogos habían elaborado, de fe y razón, del espíritu cristiano y el pensamiento griego, que dejaba intacta la fuente mística del cristianismo, se amplió en síntesis de ese mismo espíritu y de la fe, aliados al ideal griego de la armonía…. (Juan) Damasceno sintió que había llegado el momento de elaborar una síntesis definitiva…., quiso hacer, en la ciencia sagrada, lo que Aristóteles había hecho con respecto a la ciencia de su tiempo, es decir, una síntesis enciclopédica de la totalidad del saber bajo el punto de vista del dogma….”[Tatakis p.181]

La iconoclastia no sólo fue una reacción mística contra el culto a las imágenes. Se dio en el marco de un intento de consolidar el poder imperial frente al patriarcado y frente al primado romano. O más bien frente al legado romano. Quizá gran parte de la primera historia de Bizancio fue una lucha entre el pasado romano y el presente bizantino, cada uno con sus partidarios; entre el esfuerzo centrípeto del Imperio y los factores centrífugos de los intereses territoriales.

“Durante el período iconoclasta, Bizancio perdió sus territorios en Italia central y los francos construyeron un imperio en Occidente. Este alejamiento bizantino de Europa Occidental, político y eclesiástico, tuvo gran importancia no sólo para la evolución de la Europa Medieval sino también para la historia de la Europa Oriental, sobre todo para la del principado ruso de Kiev. En la evolución de la Iglesia, el cisma producido por las doctrinas iconoclastas en Oriente, confirmó las variaciones geográficas del ámbito cristiano. Después de ocho siglos, la Iglesia occidental se había alejado inevitablemente de la oriental, ya que de ella le separaban factores lingüísticos y culturales y sobre todo, el papel temporal que desempeñaba el Papado. Roma asumía la dirección espiritual y política de la Europa Occidental. En tiempos del papa Adriano I (772-795), la cancillería papal abandonó el sistema bizantino de fechas de Bizancio, afirmando así simbólicamente su independencia con respecto a la antigua tradición romana. La coronación imperial de Carlomagno fue una consecuencia natural de este proceso, así como un intento de objetivar lo que había sido una realidad política durante bastante tiempo: la sustitución de la protección bizantina por la franca a la Iglesia occidental.”[Maier, p. 127]

El reconocimiento papal del poder real en manos de Pipino, la nueva dinastía carolingia, la derrota de los lombardos y en definitiva, la simbiosis entre el Papado y el reino franco, sería el germen del futuro Sacro Imperio Romano Germánico. Desde entonces el cristianismo no sólo sería la religión oficial, ortodoxa en Oriente, católica en Occidente, sino el marco cultural al que nada podía ser ajeno. Tampoco la física. Sin embargo no pudo eludirse el entorno cultural del helenismo, los principios de la lógica racional, aunque puestos al servicio de la interpretación de los textos sagrados. Era evidente la necesidad de una síntesis entre la revelación a través de las escrituras y la racionalidad en el campo de la filosofía. Como un capítulo, también la filosofía natural. Una creación en la que los movimientos debían tender como una finalidad hacia un estado natural y propio, según la voluntad del creador; en la que lo imperfecto originado en la "caída" desde el Paraíso debía tender a un reencuentro con la perfección. Los movimientos tenían un fin predeterminado en un espacio y un tiempo originados en la mente de Dios.

Había poco margen para el desarrollo de las ciencias en los primigenios nuevos Estados del occidente europeo. "….La escasez de bienes de consumo… nos parece la inmóvil trama de la existencia material de los hombres…. la escasez en su forma endémica y a todo cuando, en aquella sociedad franca, fue tomando cuerpo bajo el signo de la renuncia a la libertad y a la independencia…."[Doehaerd, p.9]. En Francia, en el mundo germano, luego en ámbitos más nórdicos de Inglaterra y Suecia, el mundo occidental fue tomando nuevas formas frente a la lenta evolución del bizantino, expandido en principio hacia Rusia, y disputando el imperio búlgaro, el efímero reino de Moravia y la naciente Polonia. Evolución lenta pero evolución al fin, aunque demasiado concentrada en debates teológicos, de los que en gran medida dependía la estabilidad política. Y el ideal de la vida ascética también se llevó parte de la cultura a los monasterios, a veces linderos con el desierto. Pero sólo una parte. Los altos cargos eclesiásticos estaban promovidos por intereses políticos y los bajos niveles del clero no sólo tenían escasa formación sino que muchos monjes eran forzados a ocupar los cargos monacales contra su voluntad.[Dhondt, pp.32-36]

La Iglesia no sólo era imprescindible para consolidar el derecho franco al Imperio frente a la proyección de Roma sobre Bizancio y frente a la ocupación lombarda de Italia. También era un "arma" en el aspecto cultural.

"Los carolingios apenas podían oponer a la diversidad étnica y nacional de sus súbditos un elemento unificador de carácter espiritual. La cultura determinante de la dinastía sólo en territorios aislados gozaba de un prestigio superior al alcanzado por las poblaciones no francas. En muchas partes del imperio (por ejemplo, en Italia y Aquitania, dos partes con un patrimonio cultural mucho más romano que el del núcleo imperial) los francos eran culturalmente inferiores a los pueblos dominados por ellos. Pero incluso donde el fenómeno era contrario demostraron que no poseían una organización capaz de transmitir a los pueblos sometidos una espiritualidad más elevada. En tales casos la Iglesia resultaba imprescindible, y de hecho los carolingios se servían de este 'arma' profusamente. Los francos implantaron la Iglesia cristiana en las regiones sometidas a ellos, organizando siempre su representación por medio de un episcopado *franco*."[Dhondt, p.44]

Progresivamente los nuevos reinos, originados a partir del establecimiento de pueblos de diverso origen en distintas regiones de lo que aún no era Europa, se fueron convirtiendo al cristianismo, católico u ortodoxo, por diferentes vías, o bien fueron aislados o desaparecieron de la historia. Ya desde el siglo VI en la Galia franca, en las islas que serían británicas y en la España visigoda los reinos eran cristianos, con su propia iglesia gala, sus propios misioneros desde Irlanda y aun "En España se constituyó un Estado nacional católico tras la conversión de Recaredo (587) con dos cabezas: el rey, sagrado como los reyes del *Antiguo* Testamento, y el arzobispo de Toledo, jefe de la Iglesia…."[Le Goff p.100] Luego los búlgaros, tras un prematuro bautismo con fines políticos de Kuvrat en el siglo VII, no acompañado por la religión de su pueblo, fundan un Reino que debió ser reconocido a la fuerza por Bizancio en el siglo

VIII. Enfrentaron al imperio bizantino y entraron en el juego político entre el clero latino, bajo el papa Nicolás I, y el basileus Miguel III. Finalmente entre 864 y 870 reciben el bautismo en el marco del Imperio Bizantino y con autonomía eclesiástica. Intentó disputar a Bizancio el Imperio hasta lograr la coronación de Simeón como basileus asociado a Constantino VII. Pero sólo quedó un temporario Imperio búlgaro dirigido por un *zar* (césar). Los jázaros, otro pueblo de origen turco como los búlgaros, adoptaron la fe judía, fueron desplazados de la historia por los pechenegos en su avance desde el este, y por los rusos, desde el norte. Hacia mediados del siglo IX entre los alemanes se fundaban iglesias y adoptaban la administración carolingia. Los húngaros, de origen finés, tras cien años de incursiones y saqueos en el sudeste del nuevo Reino alemán y el nordeste de Italia, adoptaron el cristianismo y se insertaron en el nuevo concierto de las naciones a mediados del siglo X con el nombramiento de Esteban como rey por Otón III, emperador alemán, y el papa Silvestre II. Los pechenegos nunca aceptaron convertirse hasta disgregarse en el siglo XI. El Estado croata surge tras la cristianización y asentamiento de un obispo en la segunda mitad del siglo IX. Los servios, en el marco del Imperio Bizantino, establecen un obispado nacional a comienzos del siglo X. El Reino de Moravia adopta el cristianismo bizantino desde sus orígenes en el siglo IX. En 862 recibe a los misioneros Cirilo (Constantino) y Metodio, fundadores de una acción religiosa y de la escritura eslava glagolítica (de la que tomará algunos símbolos el alfabeto cirílico), aunque interrumpida por el avance alemán en 882 y la introducción de misiones latinas. La expansión morava hacia el sur, aunque interrumpida por los ataques húngaros, sentaron las iglesias eslavas desde Bulgaria a Rusia. En Bohemia, el primer príncipe de Praga era cristiano a fines del siglo IX. El Estado polaco se organiza a finales del siglo X. Rodeado de reinos cristianos, su rey, Mieszko, toma contacto directo con la Sede Pontificia romana para evitar ser sometido por el Reino vecino alemán, recibe misiones y comienza la cristianización. Con posterioridad entabla alianzas con el Reino alemán de Otón III.

El Reino de Kiev fue organizado sobre la cadena fluvial entre Kiev y Novgorod. "Como los búlgaros, los rusos obtuvieron, mientras eran todavía paganos, la sanción internacional que representaba un tratado formal con Constantinopla: León VI se lo concedió quizá en 907, lo más tarde en 911. Pero la verdadera consolidación no llegó, como en todas partes, hasta la cristianización…."[Musset, p.54] Entre vacilaciones e intentos de ingreso de misiones latinas desde Polonia y Bohemia, en el siglo XI se sumó definitivamente a la Iglesia de Constantinopla. "…Así Rusia se preparaba para su papel histórico de heredera de Bizancio, que la separaría profundamente de los eslavos del Oeste."[Musset, p.55]

El último descendiente conocido de Siagrio vivió como abad a mediados del siglo VIII. Siagrio fue el último magister militum romano que conservó un Reino en el nordeste de Francia hasta su derrota por Clodoveo. Es poco lo que se conoce de los últimos ciudadanos romanos en la actual Inglaterra. Sólo se sabe que se desplazaron hacia Escocia y Gales forzados por el avance vikingo en el siglo IX. Estos pueblos nórdicos, en su rama noruega, ocuparon parte de la actual Inglaterra, Islandia, Irlanda, algunas zonas costeras de Francia con breves penetraciones fluviales, inclusive hasta París, el norte de la actual España, pero llegaron más lejos hasta el Mediterráneo en eventuales incursiones. La rama sueca o varega se dirigió al este sobre la actual Rusia pero sólo como mercaderes a Bizancio y Bagdad. La rama danesa ocupó la actual Dinamarca, el sur de Suecia, el este de Inglaterra y Normandía. Los avances vikingos presentan tres fases, según Musset (pp.79-80), una primera fase de pillaje, una segunda fase de intimidación y pago de tributo, y una tercera fase en que se apoderan del país, fundan un Estado, obtienen reconocimiento público de los soberanos locales, pero "La condición más ordinaria es el bautismo, que se acepta sin repugnancia, pero sin convicción."[Musset, p.76]. Aunque muy pocos de estos estados sobrevivieron más allá del siglo X, la etapa de la conversión se dio en la segunda mitad del siglo IX. Estos primeros intentos tuvieron escaso éxito. Recién en el siglo XII los estados nórdicos se incorporaron al concierto de los estados europeos.

Mientras tanto, también desde el siglo VII, los árabes, que fueron ocupando el norte de África, tuvieron acceso a lo que quedaba de la Biblioteca de Alejandría, tras las quemas y destrucciones iniciadas por Julio César, completadas por Aureliano, Diocleciano y Teodosio; es oscuro el relato de la quema ordenada por el califa Omar a mediados el siglo VII, "recordemos a este respecto que el Incendio de la Biblioteca de Alejandría es una leyenda nacida en la época de las Cruzadas"[Cahen, p. 118] Tras un primer siglo de expansión sobre África y Medio Oriente, que los llevó hasta el sur de Francia y casi toda la Península Ibérica, la parte omeya se instaló en el califato de Córdoba mientras que los abasidas concentraron su dominio en el Oriente.

"El apogeo del poder político de los Abasidas, desde al-Mansur (754-775) hasta al-Watiq (842-847), coincide con el mayor florecimiento cultural del reino. La espléndida residencia de Bagdad se convirtió en el centro del mundo literario y científico. Aquí trabajaban traductores y eruditos, con frecuencia persas y sirios cristianos, en las obras más importantes, tanto de la ciencia griega como persa e india (las figuras griegas más apreciadas fueron Aristóteles, los neoplatónicos y Galeno). A través de España y Sicilia, este tesoro cultural árabe demostró ser un factor importante para la cultura medieval europea."[Maier, p.368].

El centro de mayor desarrollo cultural estaba en Basra desde finales del siglo VII pero el máximo exponente se logró en Bagdad en el siglo IX. Durante la segunda mitad del siglo VIII se introdujo en Bagdad el papel desde china, de menor costo y mayor durabilidad que el pergamino y el papiro, con el que acabó en el siglo X, fue utilizado en la administración y en la escritura de libros, que se vendían libremente. "…para la democratización del libro y de la cultura urbana… en la historia de la civilización ocupa un lugar del mismo orden que la imprenta."[Cahen p.155] Introdujeron los números "arábigos", provenientes de la India. Pero también el álgebra, el algoritmo, la búsqueda de las transformaciones de sustancias en la alquimia, origen de la química. El recurso a la experimentación. Los mismos términos como "álgebra", que proviene de *Kitab al jabr wa al muqabalah (El libro de la integración y la ecuación)*, escrito por Muhammad Ibn Musa Al Khwarizmi (c.780-850), de cuyo nombre nos llega el de "algoritmo".

"La civilización islámica aunó tres ventajas. Se hallaba en contacto directo con el Oriente Lejano, de donde venían materiales como el acero de alta calidad, la seda, el papel y la porcelana, y técnicas valiosas, como el sistema indio de numeración, al que aún llamamos arábigo. Fue asimismo heredera indirecta de Grecia, al haber invadido Siria, Egipto y otras regiones del Oriente Próximo, donde, por ejemplo, las obras de Aristóteles eran aún capaces de estimular la investigación. En tercer lugar, la religión islámica, a diferencia del catolicismo medieval, no hizo nada por sofocar el espíritu de investigación científica: de ahí provienen sus notables hallazgos en química, que fueron transmitidos a Occidente bajo el nombre de alquimia. Desde Basora a Córdoba surgieron grandes universidades siglos antes de que apareciera el primer studium generale en la Crsitiandad: hacia el año 1000, Córdoba poseía una biblioteca catalogada de 600000 volúmenes….”[Derry, p.45]

También heredaron instrumentos y métodos de medición. “La tradición de los científicos alejandrinos –que culminó en Tolomeo, con su detallada relación del *Almagesto* de los instrumentos existentes en su época- no se transmitió al Imperio bizantino, y siendo lentamente recuperada a partir de sus herederos más genuinos, los astrónomos del Islam….”[Derry p.224]

En aquel período de organización del imperio musulmán, el intento de explicación racional obtuvo su espacio entre la religión y el pensamiento. El Mutazilismo fue elaborado en Baṣra y Bagdad. “…Porque los mu’tazilíes eran ‘razonadores’ se les ha tomado en el siglo XIX por precursores del libre pensamiento; la verdad es justamente la contraria. Su actitud de ningún modo era la búsqueda de la verdad: ésta se basaba y venía dada por la Revelación y si se intentaba comprender esta Revelación era por una necesidad de la apologética que se teñirá, cuando tengan una influencia predominante, de intolerancia. Lo que de todos modos queda, y seguirá marcando al Islam incluso después de su caída, es que, considerando a la fe y a Dios como Razón, condujeron su apologética por medio de razonamientos que no podían por menos de proceder de la razón humana. Al hacer de la razón el *criterium* de su comprensión de Dios, se vieron impelidos a hacerse de El una idea abstracta, a ver en El al Uno, al Absoluto….”[Cahen, pp.83-84]

Uno de los aportes más singulares tiene que ver con las traducciones griegas al árabe. Ambos: traducciones y aportes.

“Si bien es cierto que las ‘sabidurías’ que se aprenderá a conocer encerraban elementos que, por ser demasiado heterogéneos al Islam, pronto parecerán peligrosos a los pietistas musulmanes, esto no quiere decir, ni mucho menos, que la curiosidad que impulsaba hacia ellas fuese considerada en sus orígenes como antitética a la fe.”

Sin que realmente se llegase a plantear el problema, lo cierto es que coexistían varias razones que explicaban aquel hecho: había, y ésta es una idea que al cristianismo le costará trabajo redescubrir, la convicción de que en toda sabiduría existía siempre algo válido, aunque esa sabiduría fuese anterior a la plena Revelación, porque, recordémoslo, para un musulmán la fe por principio no está en oposición a la razón; se daba también el hecho de que los que se convertían aportaban a su nueva fe la riqueza de su cultura; y, por último, había la certidumbre de que la profundización de la fe no podía más que beneficiarse del recurso a los conocimientos y a las formas de argumentación de los sabios del pasado. Por eso no hay por qué asombrarse de que los mismos medios que estaban mezclados en el asunto del mu’tazilismo fuesen, a menudo, los más ardientes defensores de la búsqueda de la antigua sabiduría y de que el mismo califa Ma’mūn, que había tenido una actividad teológico-política…, haya sido el mismo que en su Dār al-Hikma, ‘Casa de la Ciencia’, promoviera del modo más decisivo la traducción sistemática de las antiguas obras maestras e impulsara los primeros esfuerzos hacia un renacimiento científico.”[Cahen, p. 117]

Las traducciones se hicieron primero al sirio y al persa, de ellos al árabe, y luego directamente del griego al árabe, lo que planteaba difíciles problemas de adaptación entre lenguas estructuralmente diferentes. El trabajo de traducción fue llevado a cabo esencialmente por cristianos convertidos, en general nestorianos y monofisitas, algunos zoroastrianos para las traducciones del pehlevi.

"Lo que se busca de la cultura griega es lo que todavía era utilizable, es decir, su filosofía, aligerada de los capítulos más directamente inadmisibles para las nuevas religiones, y sus ciencias." "…se puso a disposición de los árabo-musulmanes, por lo general a partir del siglo X, la casi totalidad de Aristóteles…, una parte de Platón… Aristóteles, promovido a 'visir' de Alejandro por la opinión popular, se convirtió en una especie de mago. También era estudiado con comentarios tardíos, que se las ingeniaban para reconciliarlo con Platón, basándose en la idea de que dos genios tan eminentes no habían podido verdaderamente contradecirse." "…Euclides, Arquímedes, Ptolomeo, etc., respecto a las matemáticas, la astronomía, la mecánica, la geografía…"

"Naturalmente se reflexionaba sobre lo que se traducía, quizá porque se traducía para esto. Al-Kindi, el primer 'filósofo árabe', es un contemporáneo de Hunayn b.Ishaq, y el mismo Ma'mun, promotor de tantas traducciones, hizo hacer una medición original del meridiano terrestre. Sin embargo, el auténtico desarrollo de la filosofía y de la ciencia nuevas serán expuestos con mayor exactitud durante el siguiente período…." [Cahen, p.120-121]

El mayor matemático y poeta árabe fue Omar Kayyam (1048-1131), quien clasificó ecuaciones de primero, segundo y tercer grado.

Suele hablarse del "renacimiento carolingio" a comienzos del siglo IX, iniciado por Carlomagno y continuado sólo por Luis el Piadoso. "Nuevos instrumentos del poder, aunque todavía casi sin desarrollar, eran, por aquel entonces, la escritura y el codiciado conocimiento de los números."[Dhondt p.56] El objetivo era registrar los nombres de los vasallos que habían prestado juramento de sumisión, el número de posesiones, hombres, armas, caballos…. "En líneas generales, la impresión es que el renacimiento carolingio trajo como consecuencia una cierta madurez del entendimiento matemático. No conocemos con exactitud si Carlomagno recibió de sus funcionarios los datos que había exigido; pero en el curso del siglo IX se adquirió, al parecer por vez primera desde la Antigüedad, el dominio de cantidades exactas. Todo esto tuvo lugar, sin embargo, en un tiempo en que el poder de los carolingios decaía rápidamente."[Dhondt, p.57]

También hubo interés en conformar bibliotecas y copias de textos de la Antigüedad. "El papel de las bibliotecas y los talleres de copistas era la conservación de los textos, la multiplicación del número de ejemplares y la consecuente ampliación del horizonte cultural. A la restauración del saber cristiano realizada según la experiencia previa de las diversas iglesias nacionales se añadió un renacimiento de las letras profanas con la revalorización de los textos de la Antigüedad pagana. De todas formas, ese humanismo fue en todo momento una preocupación secundaria. Se copiaban mayor número de obras de los Padres de la Iglesia que de Cicerón."[Paul p.80]

"El interés por la filosofía antigua no hizo sino comenzar un poco antes de finales de la primera mitad del siglo IX. En cuanto a las ciencias concretas, la astronomía, medicina, arte militar, sólo suscitaba la atención de un número muy reducido. Razón por la que estos tratados son raros."[Paul p. 81]

"Muy numerosas fueron las obras que se escribieron en la época carolingia y sobre los temas más diversos. Estas obras responden a las preocupaciones del momento, ya sean morales, culturales o religiosas…. Los escritos de ese período son pedagógicos, clericales y responden a un proyecto de orden público."[Paul p.83]

"Las disputas que dividían a los francos no eran simples cuestiones terrenales para los eruditos. ¡Ciertamente, todo el mundo corría el riesgo de condenarse por ellas!

Sobre todo, la imbricación del Imperio y de la Iglesia no permite una concepción tan simplista de los acontecimientos. De la misma forma, no pueden oponerse las letras profanas y la literatura religiosa, pues todo el saber es al mismo tiempo científico y cristiano. Sólo escapaban a esta impregnación cristiana las artes cuyas leyes internas eran autónomas, como la gramática, la medicina, la construcción y la poliorcética. Mucho menos nítida era la demarcación entre lo profano y lo sagrado en las restantes disciplinas….”[Paul p.87]

También en la Península, Alfonso III, tras consolidar el reino de Asturias y entrar en contacto diplomático con la Córdoba omeya, tuvo interés en incorporar las letras y la cultura en su reino. La "ciencia" árabe comenzó a penetrar a través del reino hispano.

A mediados del siglo IX Escoto, en el marco del "renacimiento carolingio", propone una concepción cristiana de la creación y la salvación, sobre la base de un esquema neoplatónico, poniendo al hombre, en quien se reconcilian el cuerpo y el espíritu, como centro de ese universo.

"…la reflexión del siglo X prolonga con gran exactitud la ciencia de finales de la época carolingia. Las obras que guiaban el pensamiento eran, más que nunca, las de los sabios y filósofos de la última época de la Antigüedad pagana: Macrobio, Marciano Capella, Boecio…. Los eruditos ganaron en rigor intelectual en todos los dominios. De todas formas, los eruditos del siglo X mostraron gran interés por las ciencias profanas. Nadie ignora los trabajos de Gerberto de Aurillac sobre matemáticas y astronomía…. En su apertura a las artes profanas, las del *trívium* y las del *quadrivium*, la cultura del siglo X se muestra humanista….”[Paul pp.178-179] (Trivium: gramática, dialéctica y retórica. Cuadrivium: aritmética, geometría, astronomía y música)

"…El saber teórico vehiculado por las disciplinas del *quadrivium* no tenía un uso práctico evidente. Los sabios del siglo X experimentaban un gusto indudable por el conocimiento desinteresado…. Uno de los indicios de ese despertar de la conciencia científica propiamente dicha es la controversia sobre la clasificación de las ciencias que enfrentó a Gerberto de Aurillac y Otric, en 981, en presencia de Otón II".[Paul p. 196] En la cumbre estaba la Teología. La geometría era la disciplina que suscitaba menos interés. Mayor relevancia tenía la aritmética como ciencia de los números que permitía entrever el infinito, las relaciones entre las cosas y en las Escrituras se afirma que el número es la raíz de todo. La astronomía, ligada al horóscopo, pero también al cálculo, permitía ajustar calendarios para las celebraciones. La música era el estudio más importante del *quadrivium.* La teoría de la armonía se estudiaba con una cuerda tensa para fijar intervalos y ajustar proporciones. Ya Boecio pretendía "…hacer concordar la armonía cósmica de las esferas celestes con la música instrumental y coral.”[Paul p. 197] "…Los números, el cosmos y la música constituían una sola y misma cosa, pues las proporciones numéricas que explican el movimiento de los astros están presentes también en los intervalos de la música…. Un neoplatonismo cristiano, heredero de Juan Escoto y alimentado en la obra de Boecio, constituía el núcleo esencial. La influencia de este sistema de pensamiento es perceptible todavía en pleno siglo XII.”[Paul p 198]

Mientras que Simeón de Constantinopla (949-1022), conocido como "El Nuevo Teólogo", considera que el conocimiento de Dios sólo es inspirado y niega la validez del conocimiento racional de las ciencias[Tatakis, p187], en el siglo XI se conformaron centros de estudio en las ciudades, fuera del ámbito de los monasterios y se intensificó el número de traducciones con diferentes versiones, a veces desde el árabe, otras directamente desde el griego. Se disponía de fragmentos del Timeo de Platón, la lógica de Aristóteles a través de Boecio, luego otros tratados de Aristóteles desde el árabe. "Los eruditos del siglo XII se interesaban por todos los temas. Si elaboramos una lista lo más completa posible de las obras traducidas, los tratados de química, medicina, aritmética, astrología y las demás ciencias son los más numerosos. Muchas veces eran tratados de procedencia árabe. Las obras de lógica y filosofía, tan importantes para la evolución del pensamiento en la Europa occidental, desaparecieron en medio de esa auténtica marea…."[Paul p.392] Los estudiantes, en las ciudades, no estaban ligados a un orden preestablecido de enseñanza ni a un maestro en especial, sino que disponían de más libertad para organizar su propia secuencia de estudios, de acuerdo con sus intereses y alternando de uno a otro maestro.

En varios aspectos se promueve la elección y el acuerdo entre individuos. El movimiento conocido como la "paz de Dios" fue impulsado desde las masas populares, entiéndase el campesinado y habitantes de las ciudades, apoyado por el clero secular en contacto con ellas. Se trataba de un pacto juramentado entre nobles, pueblo y príncipes, ante la pena de excomunión, de prohibir la guerra y la violencia en ciertas épocas del año e inclusive en ciertos días de la semana. Durante los siglos X y XI se registraron rebeliones de los habitantes de algunas ciudades contra sus obispos. Al finalizar el primer tercio del siglo XI Venecia se constituye en república aristocrática a partir de la prohibición a su dogo de nombrar a su sucesor. Este movimiento de las comunas se extendió por toda Italia e inclusive partes de Francia, muchas veces fundamentado en la decadencia moral del clero local, pero lo esencial es que se trataba de movimientos originados en los mercaderes y agremiados sobre la base de acciones juramentadas y acuerdos colectivos.[Dhondt, pp.252-262]

El avance de las Cruzadas, desde la bisagra del primer milenio, volvió a poner en contacto aquellos mundos. Así en Occidente se accedió en forma directa a antiguos escritos griegos, mientras que una lenta penetración continuaba a través de las traducciones desde el árabe en el contacto de la Península Ibérica.

La lógica, sobre la base de la lectura de Aristóteles y los comentarios de Boecio, eran el núcleo central y básico de todo aprendizaje. "Por lo que respecta a las artes del *quadrivium*, los textos heredados de la Antigüedad eran todavía la base de la enseñanza. Sin duda, el nivel de conocimientos alcanzado por los griegos no fue superado por los sabios de la Edad Media. Además, la lectura de las traducciones nuevas era para ellos el equivalente de un descubrimiento que no podía someter a la prueba de los hechos. Esos eruditos no tenían el sentido de la experiencia, en la acepción moderna del término, no la posibilidad de hacerlo. La única herramienta crítica con que contaban ante esa afluencia de conocimientos nuevos era la dialéctica. Por ello, la asimilación del saber pasaba por el comentario del texto. Sin duda, las deficiencias de esta lógica explican en parte el estancamiento de las ciencias, a pesar de todo cuanto ellos aprendían."[Paul p. 398]

Hasta había un procedimiento para el comentario. Primero, fijar de memoria el contenido del texto. Luego, establecer el sentido de las palabras y las frases. "Estas observaciones gramaticales y lexicográficas se inscribían entre las líneas de los manuscritos y formaban una glosa interlineal… (el maestro aportaba sus consideraciones)… Esos comentarios se anotaban al margen y formaban la glosa marginal…. La multiplicación de tales notas constituía una glosa continua."[Paul p.399]

Tanto en el ámbito cristiano como en el musulmán, era difícil la interacción entre las ciencias y las actividades artesanales. "…había una especie de disociación o, más exactamente, no se había producido todavía un encuentro normal entre la ciencia y la técnica. Lo que se llama ciencia, que en ciertos casos podía traer consigo un trabajo concreto pero que, sobre todo, descansaba en la reflexión teórica, dedica poca atención a los descubrimientos esencialmente empíricos del artesano; y como el único que sabía escribir era el sabio, no es más que por medio de alusiones indirectas que somos documentados sobre la técnica artesanal y, muy a menudo, sólo a través del examen de muestras conservadas, cuando las hay, de su producción. No pretendemos decir que ciencia y técnica no hayan podido aprovecharse ocasionalmente la una de la otra, sino sólo que ese caso era bastante raro y fortuito."[Cahen p.156] Pero esta dificultad y rareza que en el ámbito musulmán corresponde al siglo IX y progresivamente se hace más frecuente e intensa, persiste en la Edad Media europea hasta el siglo XI e inclusive el XII. De allí que la lenta imbricación entre la técnica y la experimentación con la ciencia y el saber teórico, que se da fundamentalmente en las grandes ciudades, no en el campo y muy poco en los monasterios, precede en dos o tres siglos en el mundo musulmán en relación con el mundo medieval europeo.

En 1098 Anselmo de Canterbury se pregunta sobre la creación del hombre y su lugar en el mundo. Propone que el destino es sustituir a los ángeles caídos en el cielo. Uno de sus discípulos, Honorio Augustodunense, en torno a 1120, cambia sus propios puntos de vista y propone que "La creación es una armonía de seres diversos y cada uno permanece, por naturaleza, como lo que es…. Con él la causa quedó vista para sentencia. Aquella tesis no volvería a ser evocada sino como un eco de las doctrinas pasadas. La armonía del mundo, descubierta en un contexto de platonismo cósmico y, luego, la propia consistencia de la naturaleza humana, vinculada al realismo aristotélico, impedían pensar por más tiempo en un destino de ese tipo para el hombre…. A partir de entonces prevaleció una visión que imponía un respeto mayor por la consistencia propia de los seres. La reflexión sobre la armonía del mundo llevó rápidamente a la atención a la naturaleza…. La idea de naturaleza llegó a hacerse apremiante intelectualmente hasta imponer sus criterios al espíritu, al mismo nivel que los dogmas de la Iglesia. Ahora se razonaba teniendo en cuenta la naturaleza, y en eso radica la novedad…. La terminología refleja esta transformación con la utilización del término *universitas* en el sentido de universo…. En el siglo XII ya no se trataba de establecer la concordancia entre el hombre y el universo, sino de buscar las causas de los fenómenos. El descubrimiento de la naturaleza comportó el paso de la argumentación simbólica a una argumentación física…. La búsqueda de las causas encontraba dificultades sobre todo en aquellos puntos en que las creencias religiosas estaban directamente interesadas en las explicaciones por medio de la omnipotencia de Dios…. El interés nuevo por la naturaleza era un movimiento tan general y tan profundo que ningún erudito podía ignorarlo y ningún autor espiritual podía combatirlo de frente…. El naturalismo del siglo XII es filosófico y no debe mucho a la experiencia…. Parece faltar la experiencia directa, lo que confirma el carácter cultural y, sobre todo, filosófico del descubrimiento de la naturaleza…. Pronto se aprecia que los numerosos tratados de geometría, de óptica y de mecánica, traducidos del árabe, no alimentan en profundidad la reflexión…. La astronomía, la geografía, la historia natural y la medicina son cada vez más solicitadas para elaborar vastas enciclopedias filosóficas…. La filosofía del mundo se encontraba entonces en el *Timeo* de Platón, acompañado del *comentario* de Calcidio…. Platón era considerado como la verdad física y filosófica sobre la aparición del cosmos…. El platonismo, en sus diferentes formas, no parecía incompatible con las enseñanzas de la Iglesia…. El saber sobre el mundo quedó estancado hasta la renovación que se produjo gracias a la aportación de los textos aristotélicos…. A esta ciencia obtenida en los libros corresponde un método de análisis y de comprensión adaptado a la crítica de los textos: la dialéctica…. Este instrumento adquirió autonomía y planteó sus propias cuestiones. La lógica dominó entonces el debate imponiendo su problemática…. De hecho, se trataba de conocer la naturaleza de los conceptos como hombre, animal o sustancia, y qué fenómenos, reales o imaginarios, fundamentan esa atribución colectiva a múltiples individuos. El problema deja de ser puramente lógico para convertirse en un problema metafísico, por cuanto implica una toma de posición respecto a la naturaleza de los seres…. La opinión de los dialécticos del siglo XII varió entre dos posiciones extremas. Para los nominalistas, los universales sólo eran palabras sin realidad. En cambio, los realistas creían que se encuentran en las cosas…. Este debate iniciado por el extraordinario desarrollo de la dialéctica llevó a plantearse las cuestiones fundamentales de la filosofía. Era descubrir un mundo y dar impulso a todas las investigaciones abstractas. Abelardo contribuyó en gran manera a la orientación de la conciencia medieval hacia la filosofía y la teología. En contrapartida, el interés por las ciencias de la naturaleza y, sobre todo, por las ciencias exactas, pareció iniciar un declive.”[Paul p.401-407]

A partir del siglo XII vuelven a surgir universidades, la primera en Bolonia (1158). Y con ellas la e*scolástica*, renovando la discusión racional más allá de un discurso interpretativo de las escrituras. Fue un filósofo árabe, Ibn Rushd, más conocido como “Averroes” (1126-1198) quien reintrodujo a Aristóteles, hasta entonces condenado por herético. Identificó a Dios como el primer motor inmóvil y lo vio como un principio de racionalidad en la creación más que como un simple creador a su capricho. El cosmos debía estar regido por un orden racional en la mente del creador. Fue Alberto Magno y fundamentalmente su discípulo Tomás de Aquino (1125-1274) quien incorporó estas ideas en el ámbito de las universidades y de la Iglesia, conciliando a Aristóteles con la concepción cristiana. Robert de Grosseteste (1175-1253) se apoya en Aristóteles y en la luz como origen del cosmos. De allí que sus explicaciones sean esencialmente geométricas. Pero toma la idea aristotélica de considerar que la naturaleza funciona sobre un principio de máxima economía, o según el camino más corto posible. Más adelante mencionaremos el “principio de mínima acción” como base de toda la mecánica, o “principio de Hamilton”, o “principio de Grosseteste”, o “principio de Aristóteles”. La óptica geométrica se puede fundar sobre el “principio de Fermat”, un principio de tiempo mínimo para la luz. Discípulo de Grosseteste, Roger Bacon (1214-1294) reconoce la importancia de las matemáticas, fundamentales para su maestro, pero agrega que la experiencia es esencial como criterio de prueba. Guillermo de Ockham (1284-1349) fue más lejos al separar la fe de la razón, la religión de la ciencia, y admitir que sólo lo experimental, a través de la impresión sensible, puede conducir a una interpretación del cosmos. Y entre todas las interpretaciones, la que requiera menor cantidad de supuestos, entes o hipótesis, hoy conocida como la “navaja de Ockham”. Para Aristóteles los movimientos eran consecuencia de una restauración del orden en el cosmos, de modo tal que cada cosa se desplaza hacia su ámbito natural. Jean Buridan (c.1300-c.1360) cuestionó, como ya lo había hecho Juan Filopón en Alejandría en el siglo VI, que la fuerza motriz en un objeto arrojado por una mano se transfiera al aire circundante y acompañara al objeto en su movimiento, tal como había propuesto Aristóteles. Más bien introdujo la noción de "ímpetus" que le transfiere al cuerpo, no al aire, y que va perdiendo en su trayectoria hasta adoptar su movimiento o "momentum" natural. La medida del "ímpetus" era la cantidad de materia del cuerpo multiplicada por su velocidad. Este "ímpetus" se perdía por fricción con el aire, se transfería a otros cuerpos, se ganaba en caída libre, dando lugar a la aceleración, pero permanecía en el movimiento circular de los astros porque no había nada que lo suprimiese o transfiera. Desde el siglo XIII, en el Oxford College, se comenzó a representar el movimiento por medio de gráficos, a dar una medida del movimiento uniforme y "disforme", a relacionar el espacio recorrido con el tiempo empleado, idea rechazada en otros lugares por ser el tiempo y el espacio entidades no comparables. Los calculadores del Merton College o "mertonianos" llegaron a asociar el movimiento uniformemente variado con la velocidad media entre la inicial y la final. Nicolás de Oresme (1320-1382) llevó el método gráfico a su máxima expresión. Heyfetsbury (1313-1372) definió la velocidad instantánea como la conservaría el móvil si dejara de cambiar en ese instante. El problema de la balística era tratado sobre bases aristotélicas, de modo que no podía mezclarse el movimiento forzado del disparo con el movimiento natural de caída. Es así que la bala debía ascender en línea recta, detenerse, y caer verticalmente cuando perdiera el "ímpetu" inicial. Alberto de Sajonia (1316-1390) introdujo una etapa mixta entre el movimiento violento de ascenso y el movimiento natural de caída. Niccolò Tartaglia (c.1500-1557) finalmente supuso que ambos movimientos coexistían durante toda la trayectoria pero que esto debía comprobarse apropiadamente sobre la base de la teoría. Y Gianbattista Benedetti (1530-1590) asoció la velocidad de caída no con el peso del cuerpo sino con su densidad, y supuso que el "ímpetus" se conservaba en los movimientos pero sólo en línea recta. Fue Galileo Galilei (1564-1642) quien dio con las leyes del movimiento y puede tomarse como punto de partida de la ciencia moderna.

Fue Nicolás de Cusa (1401-1464) quien se atrevió a decir que la Tierra puede estar en movimiento y a hablar de movimientos relativos. Fue Nicolás Copérnico (1473-1543) quien propuso un sistema heliocéntrico. Fue Tycho Brahe (1546-1601) quien registró los datos que usaría Johannes Kepler (1571-1630) sobre las que Newton (1642-1727) inferiría su ley de gravitación.

Y fue así como desde el Renacimiento, del siglo XV, de la cultura greco-romana, la expansión a nuevos mundos del siglo XVI, coronando las Cruzadas y la lenta infiltración del Oriente a través de las caravanas, se dio un empuje lento pero inexorable sobre la cosmovisión del Dogma. Copérnico propone un cambio de visión del mundo; místicos como Kepler intentan hurgar en la mente creadora de Dios a través de relaciones numéricas expresada en la "música de las esferas" para explicar el Sistema Solar. La Tierra deja de ser el centro del universo para dejar su lugar al no menos místico Sol. Otros, menos dogmáticos pero no menos censurados, como Galileo Galilei, intentan estudiar el movimiento en sí mismo, a través de experiencias, expresado en relaciones numéricas, y hasta atisban el principio de inercia, con lo que también llevan el centro del universo a ningún lugar. Filósofos de la talla de Descartes formulan una descripción del espacio en ejes "cartesianos", lo expresan en ecuaciones a través de la geometría analítica, y elaboran síntesis, como el mismo Descartes en sus Principios de Filosofía, tratando de explicarlo todo, y una visión un poco más restringida, mecánica y científica del Mundo en el Tratado de la Luz. Matemáticos y filósofos como Leibnitz trabajan sobre funciones y el cálculo diferencial, y se cuestionan el sentido relacional del tiempo y del espacio. Físicos como Newton, aunque menos formales en los fundamentos y más absolutistas en sus concepciones, desarrollan métodos de cálculo y sintetizan leyes de la mecánica, sin por ello dejar de lado la mística: Newton dedicó sus últimos años al estudio de la teología.

En el siglo XVIII parece que la mecánica se ha coronado con el éxito. Pero no fue un camino lineal e inmediato tras la publicación de los Principia de Newton. El procedimiento inductivo defendido por Francis Bacon (1561-1626) dando lugar a leyes tras la repetición de resultados y observaciones, y el procedimiento deductivo de Rene Descartes (1596-1650) debieron llegar a una síntesis. La gran obra de Descartes es su geometría analítica, su descripción algebraica del espacio sobre la que se apoyará la representación y el análisis de funciones. Si bien su física, elaborada desde un racionalismo filosófico, fue un rotundo fracaso, aportó la síntesis entre un racionalismo formal y un empirismo de laboratorio abstrayendo parte de la realidad bajo control experimental pero dentro de un marco teórico. Y su concepción mecánica del mundo, inclusive de los seres vivos, excepto el hombre por tener "alma"…. El retorno del cometa Halley, predicho por las leyes de Newton en el año 1758, marcó un hito en el éxito de la mecánica newtoniana.

Desde finales del siglo XVIII y durante el XIX fue el formalismo, la revisión elegante y deductiva de los principios de la mecánica, la estrella de la física que parecía explicarlo todo, lo que ganó los mayores esfuerzos. Es la síntesis del álgebra y la geometría, de la filosofía y la física, de la mística y la ciencia, de la historia y el futuro.

El primer paso en el estudio formal de la física se asigna a la cinemática: un estudio descriptivo del movimiento.

Cinemática

La *Mecánica* será un intento de describir cómo funciona el mecanismo del mundo natural. Debe abordarse desde su aspecto más *Elemental*, es decir, desde las leyes más básicas y generales, y el más simple, para ello, limitada al estudio *de la Partícula* o parte más pequeña e indivisible de materia (sin detenernos a cuestionar qué es la materia).

La primera etapa en el estudio tiene como primera estación la *cinemática*: un estudio descriptivo del movimiento, lo que suele decirse, sin atender a sus "causas", sin atender nosotros a la noción de *causa*. El *estudio* digamos que es el modo en que ponemos en contacto nuestras ideas con el mundo exterior. El movimiento refiere a un *cambio de posición en el espacio a medida que transcurre el tiempo*.

El cambio, el viejo problema griego, se limita al cambio en la *posición* o localización de la partícula en el espacio, también localizada en el tiempo. El espacio y el tiempo, absolutos, eternos, independientes de los objetos y preexistentes a todo objeto material, uniformes en toda su extensión, perfectos, continuos, sin rupturas, quiebres…: creados a imagen y semejanza de Dios. Cuando la síntesis entre el aristotelismo y el cristianismo gobernaba en los claustros, los monasterios y las cortes. El primer problema es entonces localizar una partícula en el espacio y el tiempo para luego seguir la evolución de su movimiento. Y para ello hay que medir.

Mediciones

En principio podemos decir que *medir* es asignar un valor a través de un número a algo que admite tal tipo de respuesta a la pregunta “cuánto”. Aunque en realidad debemos ser más precisos en una definición compleja.

Parece una perogrullada, pero si se mide algo es porque no se sabe a priori cuánto mide. Esto nos dice que una medición es un caso particular de un *experimento aleatorio*, objeto central del estudio del cálculo de probabilidades y la estadística. El resultado del experimento *medir* no se conoce hasta que se ha medido. En un marco conceptual de la mecánica cuántica se es más extremo al decir que lo que no se ha medido, no existe en términos de conocimiento; porque el hecho físico surge de la medición, la teoría se limita a una descripción probabilista.

En el marco de la mecánica clásica, que estamos abordando, en la que alguna forma de realidad existe en cierto sentido platónico, es la medición lo que define por un lado la *magnitud* como conjunto de posibles resultados que pueden obtenerse del proceso de medición (define la variable aleatoria en un lenguaje probabilístico, la población en lenguaje estadístico), y por otro lado, la realización concreta del proceso de medición determina el valor de la medida (el evento en lenguaje probabilístico, la muestra en lenguaje estadístico). Un experimento aleatorio debe ser descripto con total precisión para que sea repetible en las mismas condiciones. En gran medida el *principio de relatividad* es esencial para la que un experimento sea repetible. Pero para ello debe precisarse algunas nociones.

Un proceso de medición pone en interacción varios elementos: un objeto a medir, un patrón de medida, un instrumento, un proceso de calibración, una unidad de medida, un observador o sujeto que mide y sus ideas; y luego sigue la etapa de registro y procesamiento de la medición, que excede a nuestro objetivo, excepto por unos pocos conceptos esenciales a la física.

El *objeto* a medir no refiere a un objeto material, en el sentido usual del término, sino a una propiedad. Por ejemplo, el objeto-material “papel” tiene un objeto-propiedad “longitud”, *la longitud de* la hoja de papel, también *el ancho de* la hoja de papel, el espesor, el peso, la densidad, la rugosidad, y podríamos seguir describiendo propiedades en tanto objetos de medida. Tomemos sólo uno: la longitud. El patrón de medida será una longitud unidad tomada como referencia. En la actualidad, el *metro-patrón* se define a partir de la velocidad de la luz, considerada como una de las pocas constantes universales. Hoy es sencillo buscar la historia y la definición internacional del *metro*, actividad que se sugiere al lector. Pero baste abrir los brazos en un abrazo fraterno para tener una noción concreta de la medida de un metro. El *segundo-patrón*, como unidad internacional de tiempo, también tiene su historia y su definición a partir de la velocidad de la luz, tarea de búsqueda que se sugiere al lector. Pero baste tomar un latido del corazón en estado de reposo. Ya Galileo lo usó como forma sencilla de medir el tiempo y, en su honor, podemos hacerlo para tener una noción concreta de la medida de un segundo. Notemos que las dos unidades han sido definidas a escala humana.

Un instrumento es un artefacto diseñado para realizar una medición. Previamente debe ser *calibrado* con el patrón de referencia. El patrón define la unidad de medida y la calibración ajusta la escala del instrumento en tal unidad. Cada unidad tiene un nombre y un símbolo. Así la letra “m” refiere a la unidad “metro” y la letra “s” a la unidad “segundo”. Las unidades no son abreviaturas, van ligadas al número, se escriben con minúsculas latinas, a menos que refieran a nombres propios.

Los múltiplos se han referenciado por medio de prefijos que no deben combinarse. Así, a partir del metro (m), tenemos el decámetro (dam=10m) y la secuencia que se presenta en la Tabla 1.I para múltiplos y submúltiplos.

Están en uso sólo siete unidades *de base*: el metro (m) para la distancia, el segundo (s) para el tiempo, el kilogramo (kg) para la masa, el kelvin (K) para la temperatura termodinámica, el mol (mol) para la cantidad de moléculas, la candela decimal (cd) para la intensidad de luz y el ampere (A) para la intensidad de corriente. Casi todas las unidades en uso corriente son *derivadas* de las de base. Algunas son agregadas en sistemas nacionales, como el minuto (min), la hora (h), el día, la semana, el mes, el año, la legua, la cuadra….

No debe combinarse múltiplos o submúltiplos dentro de una misma expresión (por ejemplo, no se debe decir “centimicrón”). Para el cambio de unidad, basta reemplazar el valor de la unidad que se estaba usando en términos de la nueva, por ejemplo 25km=25•1000m.

Finalmente, debe describirse el proceso de medición de modo claro, completo, preciso, de manera tal que sea repetible y la medición sea objetiva.

Múltiplos

Unidad	Equivalencia	Prefijo	Ejemplo en longitud	Ejemplo en tiempo
metro	1	-	Abrazo fraterno: 1m	Latido del corazón: 1s
decámetro	10	Da	Ancho de una calle: 1dam	Un minuto: 6das
hectómetro	100	H	Longitud de una cuadra: 1hm	Una hora: 36hs
kilómetro	1000	K	Altura del Everest: 8,848km	Un día: 84,6ks
megametro	10^6	M	Radio terrestre: 6,371Mm	Un año: 31,5576Ms
gigametro	10^9	G	Tierra-Luna0,3844Gm	Un siglo: 3,15576Gs
terametro	10^{12}	T	Dist. Tierra-Sol: 0,1496Tm	Historia escrita: 0,16Ts
petametro	10^{15}	P	Dist. Alfa Centaro: 41,3Pm	Primer homínido: 0,13Ps
exametro	10^{18}	E	Radio Galaxia: 1420Em	Formación Tierra: 0,14Es
zettametro	10^{21}	Z	Dist. Andrómeda: 24Zm	Universo: 0,000433Zs
yottametro	10^{24}	Y	Radio del Universo: 137Ym	-

Submúltiplos

Unidad	Equivalencia	Prefijo	Ejemplo en distancia	Ejemplo en tiempo
Metro	1	-	Distancia de lectura: 0,3m	Corchea en andante: 0,5s
Decímetro	0.1	D	Mano estirada: 2dm	Impulso nervioso: 2ds
Centímetro	0.01	C	Diam. pelota tenis: 6,67cm	Parpadeo: 5cs
milímetro	0.001	M	Diámetro del tímpano: 9mm	Período La440: 2,27ms
micrómetro	10^{-6}	M	Tamaño de bacteria: 1µm	Período 1MHz: 1µs
nanómetro	10^{-9}	N	Molécula de agua: 10nm	Transición electrón: 2ns
picometro	10^{-12}	P	Radio átomo H: 52.9pm	Rotación molecular: 1ps
femtometro	10^{-15}	F	Radio de núcleos: 5fm	Vibración atómica: 1fs
attometro	10^{-18}	A	Radio de protón: 842am	Luz atraviesa átomo: 1as
zeptometro	10^{-21}	Z	-	Vibración nuclear: 1zs
yoctometro	10^{-24}	Y	-	Vida media mesón π: 10ys

Tabla 1.I. Múltiplos y submúltiplos de unidades

En todo este desarrollo se ha considerado que el observador, como sujeto que mide y que además interpreta la medición, no influye sobre ésta. También, en el ámbito de la física clásica, se ha supuesto que el procedimiento de medición, los instrumentos, la calibración pueden llegar a perfeccionarse de modo que la interacción entre el instrumento y el patrón, y entre el instrumento y el objeto, no influyan sobre el resultado de la medición. De esta manera, se asume que el resultado es representativo de la propiedad del objeto en sí, sin verse afectada por el instrumento ni el observador. La interacción con el instrumento es inevitable en el dominio atómico, dado que instrumento y objeto son comparables. Uno de los logros conceptuales de la mecánica cuántica ha sido considerar la interacción entre el instrumento y el objeto como parte inseparable del resultado de la medición. El precio a pagar es el *principio de incertidumbre*, que nos dice que no podemos determinar en forma absolutamente precisa ciertas magnitudes *conjugadas*, como la posición y la velocidad (más precisamente el momento lineal) o la energía y el tiempo. Pero esto excede a nuestros objetivos, limitados a la mecánica del continuo.

El resultado de la medición toma el nombre de *medida*. El número *medida* expresa cuántas veces la unidad, a la que refiere el patrón, está contenida en el objeto. Lo representaremos con x de un modo general. La unidad, que refiere al patrón, se notará usando corchetes, así [x] refiere a las *unidades de* x. La unidad de una longitud x es el metro y lo notaremos [x]=m.

La suma de medidas también debe definirse por medio del proceso de medición. Algunas magnitudes son sumables y otras presentan problemas que deben tratarse con detenimiento. Por ejemplo, la suma de longitudes se define físicamente como el resultado de colocar una barra rígida de longitud L_1 y a continuación otra barra rígida de longitud L_2. Si el resultado de la longitud de las barras dispuestas de este modo vale $L = L_1 + L_2$, la longitud es sumable. El tiempo será sumable si la duración de un evento vale T_1 e inmediatamente se realiza otro proceso de duración T_2, tras lo cual se mide el tiempo total obteniendo $T = T_1 + T_2$. Esto será válido también para masas y fuerzas, y muchas magnitudes derivadas.

Pero ninguna medida es perfecta. En este contexto, la palabra "error" de medición no refiere a una equivocación al medir sino a un valor asociado a la incertidumbre o *medida de confiabilidad*, o de *tolerancia* de la medición. Lo notaremos al *error* como Δx. El *error absoluto* será el valor de incertidumbre expresado en las mismas unidades que la medida. Así 3,26m±0,02m expresa que se ha medido una longitud obteniendo, como medida más confiable, el valor de tres metros y veintiséis centímetros, con un "error" de dos centímetros. Por lo tanto es muy probable que el verdadero valor se encuentre entre 3,24m y 3,28m. En el marco de la teoría estadística de errores, esta medida expresa una probabilidad de 68% de que el verdadero valor se encuentre en ese rango. En este contexto, el intervalo de confiabilidad del 68% establece un límite de *resolución* para la diferenciación de dos medidas, como veremos luego.

El *rango* también se usa para expresar la máxima medida que permite un instrumento o un procedimiento de medición. La *sensibilidad* refiere a la mínima medida posible mientras que la *sensitividad* hace referencia a la mínima respuesta del instrumento o procedimiento, aunque no sea cuantificable.

El término *resolución* tiene gran importancia en física, al igual que la sensibilidad. Refiere a la mínima diferencia que puede determinarse entre dos medidas próximas. El error se ofrece como una medida de resolución entre dos medidas muy próximas. Así, una longitud de 3,26m y otra de 3,27m no serían resolubles con un error de 0,02m porque sus intervalos de confiabilidad se superponen.

Comentemos, además, que se distingue el error aleatorio, cuando no se conocen las fuentes de variabilidad en la medición y las variaciones entre diferentes medidas de un mismo objeto son azarosas, del error sistemático, cuando hay fuentes de error que afectan a la medida del mismo modo (con un *sesgo* positivo en exceso o *sesgo* negativo en defecto).

También distingamos el error absoluto, arriba mencionado, del *error relativo*, expresado como un cociente entre el error y el valor de la medida: Δx/x. El error relativo, al ser adimensional, permite comparar la calidad de mediciones de magnitudes de naturaleza diferente.

El último término a introducir será el de *magnitud* (medida de cuán grande es). Refiere al conjunto de resultados posibles de un proceso de medición. Así, la longitud es una magnitud con un amplio rango de resultados posibles mientras que la medida concreta obtenida de una medición en particular es el resultado específico que se ha obtenido, entre todos los posibles, asociado a un objeto concreto en especial. La longitud es una magnitud mientras que la medida concreta de la longitud de una mesa en especial es uno de los tantos resultados posibles.

En física se trabaja con magnitudes, en cuanto son expresiones de las propiedades de las entidades y procesos físicos. Las relaciones entre magnitudes se expresan como leyes en un formato matemático.

Parte II: Cinemática

Retorno a la cinemática

En primer lugar, definamos ahora la "partícula". Será una entidad material cuyas dimensiones son menores que la sensibilidad y resolución del instrumento o procedimiento de medición. De este modo no podemos determinar la forma ni el estado de rotación de una partícula. En un sentido geométrico, puede considerarse un punto material. Sólo nos ocuparemos de su posición.

Las dos magnitudes elementales de la cinemática son la distancia y el tiempo. La "distancia" será una magnitud que mide la separación entre las localizaciones espaciales de dos partículas o bien la separación entre dos posiciones de la misma partícula. El tiempo será una medida de la duración de un proceso, que puede ser el cambio de posición de una misma partícula.

Notemos que el espacio y el tiempo, es decir el espacio y el tiempo como entidades, como objetos cuya naturaleza debe ser estudiada, y no como distancia o duración, en el marco de la mecánica newtoniana no son objetos físicos susceptibles de asociarse a magnitudes. Son creaciones a imagen y semejanza de Dios, expresiones de algunos de sus atributos divinos, a los que no puede asociarse números. Durante la misma época, a fines del siglo XVIII, Leibnitz abordó el problema de modo más profundo en un sentido filosófico. Del mismo modo abordaron el problema otros filósofos como Kant o Hegel, para quien el tiempo era la esencia de la dialéctica, la contradicción en sí misma, lo que en cuanto es, deja de ser.

Veremos luego que la esencia de la Teoría de la Relatividad se encuentra en el análisis y definición de la noción de tiempo, más precisamente, de la simultaneidad. Y las consecuencias de la revisión relativista se extendieron a otras áreas, tanto es así que fue Einstein quien sugirió a Jean Piaget el estudio de la génesis de la noción de tiempo, según el mismo Piaget nos lo cuenta en *El desarrollo de la noción de tiempo en el niño.*

"Esta obra nació de una sugerencia que se sirvió hacernos Albert Einstein cuando presidió, hace más de quince años, los primeros cursos internacionales de filosofía y de psicología, en Davos." Concluye que el tiempo se construye como una coordinación de movimientos con distintas velocidades. Y cierra… "El tiempo relativista no es, por tanto, más que una extensión a las grandes velocidades y, en el caso particular de la velocidad relativa de la luz, de un principio válido desde los estadios más humildes de la formación del tiempo físico y psicológico, desde la génesis del tiempo en el niño pequeño."[Piaget, 1946, párrafo inicial y párrafo final]

En el marco de la génesis de la noción de espacio, Gréco nos dice que "Las estructuras geométricas son una construcción de las estructuras generales del pensamiento, en y por el desarrollo de la representación por imágenes."[Gréco, 1971, p. 255]

Aspectos perceptivos

"El cerebro humano está diseñado para responder a los cambios, y la unidad básica de la experiencia perceptual es el suceso…."[Coren, cap. 13 Tiempo, p. 394] Es la secuencia con la que llegan los estímulos a los órganos sensoriales y los centros de procesamiento lo que les confiere un significado real perceptivo. Inclusive al mirar, la imagen es el resultado de los movimientos conscientes e inconscientes del globo ocular como una proyección variable sobre la retina. Si este movimiento se elimina, el ojo deja de ver, la imagen desaparece en la retina y en la consciencia. Los conos y bastoncillos requieren cierto tiempo para recuperarse de un disparo neuronal como señal nerviosa ante la presencia de luz. Si la señal es permanente, no podrían recuperarse y dejan de disparar estímulos nerviosos. El movimiento del ojo es así indispensable para ver objetos en reposo, en caso contrario, sólo podríamos percibir el movimiento, como ocurre con algunos animales, entre ellos el sapo. Por otra parte, entre la presencia de un estímulo y la elaboración de una respuesta en la parte frontal del cerebro, responsable de la planificación futura y toma de decisión para una reacción consciente, se requiere unos 200ms=0,2s. Pero hay mecanismos anticipatorios en el sistema nervioso que permiten sintonizar la señal cuando es predecible que va a ocurrir de modo que pueda haber una respuesta en "tiempo real". Pero además el análisis espacial de una escena requiere de un tiempo de integración de las señales que provienen de diferentes puntos, y esto no depende del tamaño sino de la cantidad de información a procesar. Por ejemplo, para reconocer un rostro, se requiere del orden de un segundo. Uno de los aspectos esenciales de la visión es la persistencia de la imagen. Es lo que nos permite retener las imágenes de pantallas entre destellos en los píxeles, pero también nos permite visualizar "manchas" en el espacio en objetos en movimiento. Si el movimiento de los objetos es predecible, la extensión espacial de la mancha disminuye. Esto nos da una idea de que la persistencia es un mecanismo que nos permite inferir el movimiento pero que está controlado por procesos de alto nivel en relación con la predicción futura.

Hay cierta contraposición entre la estabilidad perceptual de señales de un mismo evento que cambian en forma permanente, y la plasticidad que se requiere para separar señales que pueden ser simultáneas pero que refieren a eventos diferentes. La estabilidad se logra "rellenando" perceptivamente parte de la señal faltante. Esta capacidad no la tiene un bebé en las primeras etapas de desarrollo y se elabora progresivamente junto con los procesos de abstracción. Inclusive en el estudio de las matemáticas superiores logramos un proceso perceptivo cada vez mayor en términos de estabilidad, como se evidencia al disminuir la notación necesaria para representar ecuaciones y desarrollos. La plasticidad, en cambio, depende del marco contextual; es lo que nos permite, por ejemplo, reconocer señales de habla en una secuencia sonora continua, y está asociada con la identificación de movimientos en un entorno.

Desde el punto de vista perceptivo, podemos definir el "ahora" como un intervalo perceptual en la escala de unos 100ms hasta unos pocos segundos de integración de señales. Pero la percepción del transcurso o flujo del tiempo es más compleja. Nos lleva a distinguir entre la simultaneidad y la continuidad perceptual. Y en términos de continuidad, distinguimos la percepción de la duración, de la organización de una secuencia. Un patrón biológico de tiempo en la escala *circadiana* o próxima a la duración del día, que parece ser un poco mayor que el día real (25h), está en el núcleo supraquiasmático, arriba de la glándula pineal, que secreta melatonina durante el período nocturno de sueño, y del quiasma óptico, de donde recibe estímulos de señales de luz diurna, y debajo del hipotálamo. En lo que respecta a la unidad mínima perceptual, en relación con el reconocimiento de sonidos del habla, ejecución de instrumentos musicales y experiencias sobre la visión, estaría en el orden de 25ms a 150ms, dependiendo de los sistemas sensoriales involucrados y el entorno. La estimación consciente del tiempo se hace más lenta o más rápida en relación con la menor o mayor actividad en los procesos fisiológicos, pero es más sensible al número, complejidad y tipo de sucesos que ocurren durante el intervalo, y a la atención prestada al paso del tiempo. En el lóbulo parietal izquierdo hay grupos de neuronas especializadas en el reconocimiento del ritmo en la música, mientras que el lóbulo parietal derecho tiene mayor predisposición al reconocimiento de la melodía. En ambos lóbulos hay un mapeo tonotópico de las señales que provienen de la membrana basilar del oído interno, sensible a la altura tonal del sonido. Resulta singular notar que el conteo de pulsos por segundo es difícil cuando se supera el número de tres, cinco o siete pulsos, dependiendo del entrenamiento. Un músico requiere el uso de patrones de división para llevar el conteo a órdenes de veinte pulsos por segundo. Más allá de esta secuencia de pulsos, el conteo tiene en cierta manera una continuidad en el reconocimiento de la altura tonal de sonidos en términos de frecuencia. Ya Galileo Galilei usaba no sólo su pulso para contar tiempos sino también su entrenamiento musical para establecer patrones temporales.

La percepción del espacio puede darse por medio de claves de interposición, proyección de sombras, difusión atmosférica, proyección en la retina de objetos de tamaño usual conocido, perspectivas y puntos de fuga, gradientes de textura, altura y horizontes. La contracción de los músculos ciliares para ajustar la curvatura del cristalino ante objetos a distancias entre 20cm y 3m también da una clave de distancia, así como la visión binocular.

Una clave particularmente relevante en la relación del espacio con el tiempo es la que se obtiene del movimiento relativo de objetos distantes. Cuando nos movemos y observamos el entorno, los objetos cercanos se mueven con mayor velocidad angular relativa que los objetos lejanos y hasta estos pueden moverse en sentido opuesto si tomamos como referencia un punto de fijación intermedio.

También tenemos una percepción de la dirección en dos sentidos: a lo largo de la línea media del cuerpo y a lo largo de la línea media de la cabeza, que puede girar con respecto al cuerpo. El movimiento de los globos oculares da indicios para la dirección.

También el sonido ofrece claves para la direccionalidad. En sonidos agudos, la diferencia de intensidad en cada oído da una indicación de la dirección, mientras que en sonidos graves es la diferencia de tiempos en cada oído el indicador direccional. Combinando diversas claves auditivas, podemos distinguir direcciones y movimientos con variaciones menores a un grado de arco. Y tenemos imágenes auditivas de distancia en términos de ecos y reverberación (ecos múltiples), y de composición espectral, asignando mayor proximidad a sonidos agudos y más distancia a sonidos graves. La clave dada por la intensidad está asociada con la representación de la fuente sobre la base de la experiencia previa que la involucre. Finalmente es la integración visual de la fuente y la percepción sonora lo que configura una clave más confiable de distancia.

Las claves fisiológicas parecen ser innatas o se forman en las primeras semanas o meses de vida, pero las claves más geométricas como la perspectiva y sombras es más probable que se formen durante los primeros dos o tres años. La referencia *egocéntrica* del sistema de coordenadas localizado en el cuerpo es primaria y sólo se integra una perspectiva desde otros sistemas de coordenadas, así como la referencia numérica, en forma progresiva y se consolida con la formación del pensamiento abstracto en la adolescencia.

Y otra vez el movimiento. Podría pensarse que nuestros sistemas sensoriales perciben el espacio y el tiempo en forma independiente, pero hay grupos de células en el sistema visual y regiones especializadas en el cerebro, que son sensibles al movimiento direccional. "…el problema de la correspondencia del movimiento suele resolverse de manera perceptual siguiendo la distancia más corta entre dos estímulos cercanos en el período más corto." [Coren, p.429] Hallaremos más adelante esta síntesis como una de los principios más fundamentales de la mecánica. Un efecto muy singular se conoce como *movimiento inducido*, que ocurre cuando se percibe el movimiento de un objeto fijo cuando en realidad es el contexto lo que se mueve. Tenemos también mayor capacidad de percibir movimientos con respecto a un entorno que con respecto a nosotros mismos como sujetos. Las señales propioceptivas del movimiento ocular y de cabeza contribuyen a percibir el movimiento externo, pero también pueden informar sobre la estabilidad del ambiente cuando se tiene percepción del propio movimiento, en especial de rotación de cuerpo o cabeza.

Es conocido el fenómeno ya mencionado, en el que se fundamenta el cine y las imágenes de movimiento en pantallas, de percibir movimiento en una secuencia de imágenes cambiantes. La percepción de movimiento se asocia con la presentación de estímulos en regiones angulares próximas, no mayores que 15' de arco, y en intervalos temporales de no más de 80ms. Pero hay movimientos percibidos de mayor alcance espacial y temporal que requieren cierta inferencia e interpolación espacial y temporal para asociar desplazamientos a imágenes en principio inconexas, como una persona que camina detrás de un obstáculo y reaparece tras un cierto tiempo.

Es frecuente que tengamos la sensación de movimiento cuando lo que se mueve en realidad es el entorno. Es el caso de estar en un tren o barco quieto cuando se comienza a mover lentamente uno que está próximo. Esta percepción inducida de movimiento se llama "vectación". "…el campo visual central está más especializado en el movimiento del objeto, en tanto que la estimulación del campo visual periférico es necesaria para inducir la sensación de movimiento propio. De esta manera, los patrones que se extienden hacia la periferia tienden a producir fuertes sensaciones de vectación…"[Coren, p. 445]. Este recurso se utiliza para "sumergir" al espectador en una escena utilizando pantallas anchas e incluso curvas en cines.

Junto al caracol, que forma el oído interno, hay tres canales semicirculares y otros órganos llamados *vestibulares*. Hay células pilosas o ciliares, similares a las del oído interno que, cuando se inclinan, abren canales de intercambio de sodio y potasio, despolarizan células nerviosas y disparan estímulos a los centros superiores del cerebro. La inclinación de las células ciliares se produce debido a un retraso de pequeños objetos masivos suspendidos en una sustancia gelatinosa, llamados *otolitos*, que responden a una inclinación de la cabeza o una aceleración. Cuando se recupera la posición vertical o la velocidad uniforme, vuelven a su estado normal. Los canales semicirculares responden particularmente a la aceleración en rotaciones y otros dos órganos, llamados *urtículo* y *sáculo*, responden predominantemente a la aceleración lineal. "La aceleración en una dirección específica origina movimientos oculares de compensación en dirección opuesta. Esto permite que los ojos permanezcan fijos en un objeto, aun cuando la cabeza gire en varias direcciones."[Coren, 449]. Si los indicios de aceleración o rotación son inconsistentes con percepciones de movimiento, suele producir efectos desagradables e inclusive mareos en algunas personas. Esto se observa en las salas de cine ante la percepción visual de aceleración con el cuerpo en reposo, o cuando hay leves sismos que aceleran el cuerpo sin ofrecer una imagen visual de movimiento dado que todo el entorno se mueve de acuerdo con el mismo patrón.

En síntesis, la experiencia, consciente y no consciente, de movimiento, espacio y tiempo, involucra percepciones de diverso nivel. Algunas fisiológicas y, por lo tanto, innatas, mientras que otras se desarrollan en las primeras semanas de vida. Y finalmente otras, las más abstractas, con la capacidad de organización de esquemas operatorios reversibles de alto nivel de abstracción, que se configuran en los últimos estadios del aprendizaje pero que nunca terminan de formarse en tanto logramos síntesis de mayor nivel de integración lógica.

Es notable que todos los procesos perceptivos sean indicadores espaciales, temporales y de movimiento, imbricados en una única síntesis perceptiva que no reconoce a uno o dos de estos aspectos del mundo exterior como primarios y al otro como derivado. En todo caso, parece que tenemos una mayor capacidad perceptiva del movimiento, pero en términos relativos y no absolutos cuando la velocidad es constante, inclusive de aceleraciones rotacionales y lineales pero en forma absoluta, dado que si lo que se acelera es el entorno, produce conflictos perceptivos. Un alto nivel de detalle perceptivo se obtiene en relación con el espacio, quizá más refinado en términos del grado de abstracción métrica, topológica y proyectiva en los últimos estadios del desarrollo de esquemas operatorios reversibles, lo que nos posibilita expresar nuestra perspectiva desde distintos sistemas de coordenadas, tanto en reposo como en movimiento relativo. En tal sentido, los sistemas acelerados involucran percepciones muy específicas y diferenciadas en términos de rotaciones, traslaciones, y equilibrio en el campo gravitacional. Notemos que al girar en bicicleta o en avión, se componen la aceleración gravitacional y rotacional en una única percepción. Y el tiempo parece ser la percepción menos definida. La organización de las nociones abstractas de tiempo parece estabilizarse en los últimos estadios de formación de la inteligencia.

No sólo las unidades de espacio y tiempo, por lo tanto de velocidad y aceleración, están definidas a escala humana sino las propias nociones de espacio, movimiento y tiempo. La misma relatividad de sistemas en reposo y en movimiento uniforme, y de sistemas acelerados y gravitacionales, están condicionados por aspectos perceptivos. Es válida aún la pregunta si el entorno natural preexiste y tiene leyes propias a las cuales están condicionados los procesos sensoriales, o bien hemos construido un conjunto de leyes que amplían nuestra capacidad de control y adaptación al entorno como extensión abstracta de las percepciones. En ellas se incluirían extrapolaciones al mundo subatómico y al universo como un todo, a modo de modelar ambos extremos de lo que excede la escala humana a partir de nuestro mundo perceptivo.

Nociones básicas sobre el espacio y el tiempo

En el marco de la mecánica clásica, partiremos de las nociones elementales de espacio y tiempo. Notemos que no es lo mismo *duración* que *orden secuencial* de eventos, ni el *encaje de intervalos* o *simultaneidad* de sucesos. Tampoco es lo mismo el *tamaño* que el *ordenamiento espacial*, el *encaje espacial* o la *ocurrencia de eventos en el mismo lugar*, correlativo con la noción de simultaneidad en el tiempo.

Y nuestro problema es la medida. Nos limitaremos primero a la localización de acontecimientos en el espacio y en el tiempo. De allí, de la localización del inicio y el final, de los contornos, surgirán las de duración y tamaño, y los ordenamientos. El encaje de intervalos temporal y espacial es mucho más complejo. Podemos comenzar ocupándonos de la medida de posición y tiempo, describir el patrón, instrumento, unidad y métodos, tratarlos como variables, dependiente la posición e independiente el tiempo, y así avanzar en nuestro estudio de los movimientos. Pero no debemos olvidar dejamos "para después" una cuestión bastante delicada en relación con la simultaneidad. También notemos que nuestra magnitud elemental *distancia* difiere de la noción de *posición*. Ésta última refiere a la localización de una partícula en el espacio mientras que la distancia es la medida de separación entre dos posiciones. Veremos pronto que la distancia es una *magnitud escalar*, al igual que el tiempo, mientras que la posición es una *magnitud vectorial*. Distinguiremos también el tiempo como localización de un suceso y el tiempo como duración de un evento o intervalo.

Por el momento entonces, el tiempo y el espacio existen por sí mismos, según su propia naturaleza, son homogéneos (iguales en todo punto y momento), isótropos (iguales en toda dirección y en pasado y futuro, con la particularidad del tiempo que transcurre por sí mismo en un solo sentido independiente del espacio, de los sucesos y de nosotros). En mecánica relativista, las nociones de distancia y tiempo deberán ser redefinidas.

Comencemos por el principio. Una partícula no es resoluble en tamaño ni forma, dado que sus dimensiones son menores que la resolución instrumental, de modo que sólo puede determinarse su posición. Para ubicar ésta en forma unívoca, es decir, sin posibilidad de confusión con otra posición, y utilizar para ello un formato numérico, nos remitimos a un sistema de coordenadas *cartesiano* –en referencia a Descartes.

En tal sistema de coordenadas se elige arbitrariamente un origen o punto de referencia, al que se asigna el cero (0). En la forma más tradicional, las tres dimensiones del espacio son descriptas por medio de tres rectas perpendiculares que se intersectan en el origen. La posición de un punto en el sistema de coordenadas se determina por medio de tres números como proyecciones sobre cada uno de los ejes, es decir, como intersección de un plano paralelo a los otros dos ejes que corta a aquel en el que se efectúa la proyección. La unidad de medida de posiciones relativas al origen en cada eje es la unidad de distancia. En el Sistema Internacional de unidades (SI) y en el Sistema Métrico Legal Argentino (SiMeLA) es el metro (m). Se elige una orientación para el sistema de coordenadas y representa cada posición por medio de tres números de acuerdo con un orden establecido. A uno de los ejes se lo llama "eje x", al otro el "eje y" y al tercero el "eje z". La terna de números se asume en el orden (x, y, z), de modo que una posición indicada como $\boldsymbol{x} = (2; 3; -1)m$ refiere a un punto localizado a dos metros sobre el eje "x", tres metros sobre el eje "y", y menos un metro sobre el eje "z". A una magnitud como la posición, que requiere tres medidas como coordenadas, se la llama una *magnitud vectorial* (El concepto de magnitud vectorial es más general y abstracto). Suele decirse que una magnitud vectorial tiene módulo (valor absoluto o intensidad), dirección (recta de acción) y sentido (una de las dos orientaciones en la recta de acción), pero no nos ocuparemos de estas cuestiones.

El tiempo, en cambio, es una *magnitud escalar* porque, a diferencia de la posición, sólo requiere un suceso de referencia y una unidad, el *segundo* (s) en el Sistema Internacional de medidas. Como hemos dicho, se asume, en mecánica clásica, que el tiempo es el mismo en todo el espacio y que transcurre de modo uniforme e inexorable hacia el futuro.

De modo que una posición $\boldsymbol{x}$ referida a un tiempo t describe en forma unívoca (de modo único, sin doble interpretación ni posibilidad de confusión) la localización de un punto en el espacio en cierto momento del tiempo, de acuerdo con un sistema de coordenadas para las posiciones, un origen de tiempos y unidades para ambas medidas. El punto en el espacio y tiempo puede describir la localización de una partícula o punto material.

Estamos a un paso de abordar el significado del movimiento e introducir la primera expresión matemática. Diremos que

$$\Delta\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x_o} = (x - x_o; y - y_o; z - z_o)$$

representa un *cambio de posición* o *desplazamiento* y que

$$\Delta t = t - t_o$$

representa un *cambio en el tiempo* o *intervalo de tiempo*. Usamos negrita para expresar un vector y texto normal para sus componentes.

Velocidad y aceleración

El primer parámetro que caracteriza una propiedad del movimiento es la *velocidad*. Se obtiene de distribuir el desplazamiento $\Delta\boldsymbol{x}$ en el tiempo empleado en realizarlo Δt. Más estrictamente, ésta es una primera aproximación a la velocidad, que definiremos más adelante. La llamaremos *velocidad media* dado que refiere a un desplazamiento finito, para el que utilizaremos el símbolo "Δ", en un tiempo finito. A modo de ejemplo, refiere a considerar que un colectivo, que recorre diez kilómetros en una hora dentro de la ciudad, se mueve a una velocidad de diez kilómetros por hora, lo cual es cierto en términos medios en el marco temporal de la hora, pero sabemos que se detiene durante períodos que superan el minuto en el ascenso y descenso de pasajeros, frente a semáforos, y que por momentos se mueve a alta velocidad. Luego definiremos la velocidad como la *derivada de la posición con respecto al tiempo*, pero por el momento basta esta noción de velocidad media dado que contiene la esencia del concepto que se intenta parametrizar, el carácter vectorial de la velocidad, y es suficiente para los dos primeros abordajes de la cinemática de la partícula. Por lo tanto, la velocidad media es una medida vectorial del cambio de la posición con el tiempo o de la rapidez del desplazamiento. En el formato de una ecuación

$$\mathbf{v} = \frac{\Delta\mathbf{x}}{\Delta \mathrm{t}} = \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x_o}}{\mathrm{t} - \mathrm{t_o}} = \left(\frac{\mathrm{x} - \mathrm{x_o}}{\mathrm{t} - \mathrm{t_o}}; \frac{\mathrm{y} - \mathrm{y_o}}{\mathrm{t} - \mathrm{t_o}}; \frac{\mathrm{z} - \mathrm{z_o}}{\mathrm{t} - \mathrm{t_o}}\right)$$

El segundo parámetro que caracteriza el estado de movimiento es la *aceleración*. Resulta de distribuir el cambio de velocidad en el tiempo, por lo tanto, es una medida vectorial de la rapidez del cambio en la velocidad. En una expresión algebraica queda

$$\mathbf{a} = \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta \mathrm{t}} = \frac{\mathbf{v} - \mathbf{v_o}}{\mathrm{t} - \mathrm{t_o}} = \left(\frac{\mathrm{v_x} - \mathrm{v_{xo}}}{\mathrm{t} - \mathrm{t_o}}; \frac{\mathrm{v_y} - \mathrm{v_{yo}}}{\mathrm{t} - \mathrm{t_o}}; \frac{\mathrm{v_z} - \mathrm{v_{zo}}}{\mathrm{t} - \mathrm{t_o}}\right)$$

La última expresión, desarrollada en las componentes de la velocidad.

(Paréntesis) Introducción a la noción de límite y derivada

En los paréntesis matemáticos no se pretende ofrecer un tratamiento formal y, mucho menos, completo de los conceptos involucrados. Hay muchos y muy buenos abordajes de las cuestiones formales. Sólo introducir brevemente y en forma elemental algunas nociones, sin desnaturalizar la definición formal matemática, pero apenas lo suficiente para lograr una mejor interpretación de los conceptos físicos involucrados.

Cuando expresamos que la velocidad es un cociente de incrementos o cociente incremental entre el desplazamiento $\Delta\boldsymbol{x}$ y el tiempo Δt, podemos tomar intervalos de tiempo progresivamente más pequeños, con lo cual los desplazamientos también lo serán y el cociente, representativo de la velocidad en un intervalo de tiempo más breve. Podemos escribir la siguiente notación

$$\boldsymbol{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \boldsymbol{x}}{\Delta t}$$

para expresar el valor instantáneo de la velocidad restringiendo el intervalo de tiempo tanto como sea físicamente posible, se dice a un infinitésimo de tiempo en un sentido más matemático. Se lee que "la velocidad es el límite de la variación de la posición cuando el intervalo de tiempo tiende a cero".

Para expresar lo antedicho de una manera sintética, se usan varios símbolos como los siguientes,

$$\boldsymbol{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \boldsymbol{x}}{\Delta t} = \boldsymbol{x}' = D\boldsymbol{x} = \dot{\boldsymbol{x}} = \frac{d\boldsymbol{x}}{dt}$$

Se da el nombre de *derivada de la posición con respecto al tiempo* a este límite del cociente incremental entre el desplazamiento y el tiempo, lo que en física se suele llamar *velocidad instantánea* para diferenciarla de la *velocidad media*, aunque simplemente debe ser llamado *velocidad*. Será la última notación, originalmente de Leibnitz, la que emplearemos más frecuentemente en lo que sigue.

En síntesis, escribimos

$$\boldsymbol{v} = \frac{d\boldsymbol{x}}{dt}$$

para expresar la definición analítica de velocidad. Dado que es un vector, la notación en componentes será

$$\boldsymbol{v} = \frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = \left(\frac{dx}{dt}; \frac{dy}{dt}; \frac{dz}{dt}\right)$$

En el caso de la aceleración, puede aplicarse la misma interpretación de límite de un cociente incremental entre el cambio en la velocidad cuando el intervalo de tiempo empleado en tal cambio tiende a ser progresivamente más pequeño (tiende a cero). La aceleración será la derivada de la velocidad con respecto al tiempo. Pero como a su vez la velocidad es una derivada, se la llamará la *derivada segunda de la posición con respecto al tiempo*, es decir, derivada dos veces. La notaremos

$$\boldsymbol{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \boldsymbol{v}}{\Delta t} = \boldsymbol{v}' = D\boldsymbol{v} = \dot{\boldsymbol{v}} = \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \ddot{\boldsymbol{x}} = \frac{d^2\boldsymbol{x}}{dt^2}$$

Una forma alternativa de expresar la derivada es como una proporción de incrementos. Si escribimos

$$d\boldsymbol{x} = \boldsymbol{v}dt$$

queremos decir que a medida que el tiempo cambia en un *intervalo diferencial o infinitesimal* dt (diferencial de tiempo), la posición cambia proporcionalmente a la velocidad de acuerdo con la expresión indicada más arriba (diferencial de desplazamiento).

En términos más generales, la derivada de una función de un parámetro t, que notaremos $f_{(t)}$, se expresa en la forma

$$\frac{df_{(t)}}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f_{(t+\Delta t)} - f_{(t)}}{\Delta t}$$

Apliquemos la definición a tres casos: la derivada de una constante, la derivada de una función lineal y la derivada de una función cuadrática.

Sea $f_{(t)} = C$, una constante

$$\frac{dC}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{C - C}{\Delta t} = 0$$

Lo que nos dice que la derivada de una constante es nula.

Sea ahora $f_{(t)} = t$, la función identidad.

$$\frac{dt}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{t + \Delta t - t}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta t}{\Delta t} = 1$$

Sea $f_{(t)} = t^2$, la forma más elemental de la función cuadrática.

$$\frac{dt^2}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{(t + \Delta t)^2 - t^2}{\Delta t}$$
$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{t^2 + 2t\Delta t + \Delta t^2 - t^2}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{2t\Delta t + \Delta t^2}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} 2t + \Delta t$$

En la última expresión sólo queda presente $2t$ dado que Δt tiende a cero y será despreciable en relación con $2t$. De modo que la derivada de t^2 vale $2t$.

$$\frac{dt^2}{dt} = 2t$$

En general, se muestra que la derivada de cualquier potencia entera vale

$$\frac{dt^n}{dt} = nt^{n-1}$$

Sea ahora una función cuadrática $f_{(t)} = at^2 + bt + c$.

$$\frac{d(at^2 + bt + c)}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{a(t + \Delta t)^2 + b(t + \Delta t) + c - at^2 - bt - c}{\Delta t}$$

El desarrollo de la expresión a la derecha lleva a

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{at^2 + 2at\Delta t + a\Delta t^2 + bt + b\Delta t + c - at^2 - bt - c}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{2at\Delta t + a\Delta t^2 + b\Delta t}{\Delta t}$$

Simplificando los Δt en la última expresión

$$\lim_{\Delta t \to 0} 2at + a\Delta t + b = 2at + b.1 + 0 = 2at + b$$

Esto es un caso particular de lo que se llama la *linealidad* de la derivación, que en general expresa que la derivada de cualquier combinación lineal de funciones es una combinación lineal de las derivadas con los mismos coeficientes que la derivación propuesta. Vemos que $2t$ es la derivada de t^2 multiplicada por el coeficiente a. Que 1 es la derivada de t, multiplicada por su coeficiente b, y que 0 es la derivada de una constante c.

La derivada segunda de la función cuadrática será $2a$ y la derivada tercera será nula.

No demostraremos las reglas de derivación para el producto ni para el cociente, sólo las enunciaremos.

$$\frac{d[f_{(t)} . g_{(t)}]}{dt} = \frac{df_{(t)}}{dt} . g_{(t)} + f_{(t)} . \frac{dg_{(t)}}{dt}$$

$$\frac{d[f_{(t)} / g_{(t)}]}{dt} = \frac{\frac{df_{(t)}}{dt} . g_{(t)} - f_{(t)} . \frac{dg_{(t)}}{dt}}{g_{(t)}^2}$$

Y la derivada de la función compuesta,

$$\frac{d[f(g_{(t)})]}{dt} = \frac{df(g_{(t)})}{dg_{(t)}} . \frac{dg_{(t)}}{dt}$$

La interpretación gráfica de la derivada de una función, cuando es representada por una curva, es la pendiente de la tangente a la curva en el punto donde se calcula la derivada. De allí que en los extremos de una curva (máximos y mínimos) la derivada es nula y, si es un máximo, la derivada segunda es negativa (la curva es cóncava hacia abajo) y positiva si es un mínimo (la curva es cóncava hacia arriba).

En funciones multivariadas suele usarse la *derivada parcial* cuando la derivación se efectúa sobre una variable dejando el resto como constantes. Limitándonos a tres variables a modo de ejemplo, se suele usar la notación

$$\frac{\partial f(x;y;z)}{\partial x}$$

para indicar que se deriva con respecto a la variable x dejando a y y z constantes. La forma en que se expresa un diferencial total debe incluir la variación en todas las variables, así en tres dimensiones será

$$df_{(x;y;z)} = \frac{\partial f_{(x;y;z)}}{\partial x}dx + \frac{\partial f_{(x;y;z)}}{\partial y}dy + \frac{\partial f_{(x;y;z)}}{\partial z}dz$$

Otra forma en que utilizaremos la derivación es en el formato de *gradiente*, que se suele notar $\nabla f_{(\boldsymbol{x})}$, donde $f_{(\boldsymbol{x})}$ es una función vectorial. El gradiente representa la máxima variación de una función en módulo, dirección y sentido. Utilizando la expresión en derivadas parciales en tres variables

$$\nabla f_{(x;y;z)} = \left(\frac{\partial f_{(x;y;z)}}{\partial x};\frac{\partial f_{(x;y;z)}}{\partial y};\frac{\partial f_{(x;y;z)}}{\partial z}\right) = \frac{df(\boldsymbol{x})}{d\boldsymbol{x}}$$

donde la última expresión es, en apariencia, similar a la derivación simple pero debemos notar que se trata de la derivada de una función escalar con respecto al vector como argumento de la función.

Ecuaciones de movimiento

También llamadas *ecuaciones de pronóstico*, nos informan sobre la evolución de una partícula en el tiempo, tanto en su posición como en su estado de movimiento. Son expresiones que pueden sintetizarse en la forma $\boldsymbol{x}_{(t)}$ y $\boldsymbol{v}_{(\mathrm{t})}$, que expresan la posición y la velocidad respectivamente como funciones del tiempo. Si pudiese conocerse tales funciones, toda la historia y el futuro de una partícula estarían determinados. En la versión más extrema (determinismo en el sentido de Laplace), si se pudiese conocer la posición y velocidad de todas las partículas del Universo y sus ecuaciones de movimiento, toda la historia y evolución del Universo estaría determinada. Si se considera que “todo” está formado por partículas (mecanicismo clásico cartesiano y laplaciano), “todo” sería conocido y determinado. Más que una posibilidad fáctica, se trata de un lineamiento de trabajo: medir posiciones, tiempos y todo otro parámetro necesario, buscar leyes que establezcan la evolución y el estado de movimiento de las partículas, desarrollar herramientas teóricas y prácticas de cálculo y cómputo. De este modo la Física daría respuestas a todas las preguntas, la historia sería reconstruida y el futuro estaría pronosticado. La Física, con mayúsculas, sería la ciencia por excelencia. Insistimos en notar que más que una posibilidad de realización, se trata de una línea de trabajo que progresivamente iría dando más y más respuestas. Pero cuando esta ilusión parecía ser una realidad al alcance de la mano, todo se derrumbó….

Movimiento Rectilíneo Uniforme

Con un poco de fe en el último argumento, debemos iniciar el estudio de los movimientos, desde el más simple a los más complejos. En principio nos conformaremos con el movimiento en línea recta (rectilíneo) y con velocidad constante (uniforme) o MRU.

Como tal movimiento se desarrolla en línea recta, dos de las coordenadas del espacio pueden omitirse y limitarnos a una sola de las tres: sea la coordenada "x". De modo que la velocidad media se expresa

$$v_x = \frac{(x - x_o)}{(t - t_o)}$$

Y la velocidad (instantánea)

$$v_x = \frac{dx}{dt}$$

En adelante omitiremos el subíndice x en v_x. Basta despejar la posición de la definición de velocidad media que, por ser constante, será la misma que la velocidad instantánea,

$$x_{(t)} = x_o + v(t - t_o)$$

para obtener una expresión que describa la posición en un movimiento rectilíneo uniforme a partir de una dada posición inicial x_o en un tiempo inicial t_o.

La función de los problemas y ejercicios, en el marco de la mecánica elemental de la partícula, es la de fijar conceptos e ir aproximando la teoría a situaciones reales. En la Figura 2.1 se presenta uno de los ejes coordenados.

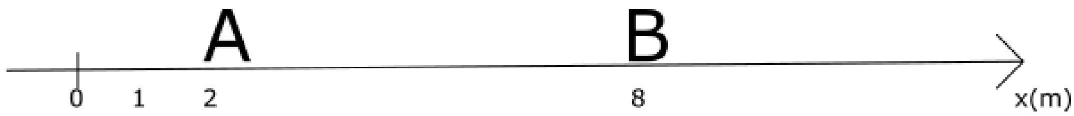

Fig. 2.1. Posiciones en un eje de coordenadas

Puede pensarse como una representación de un camino recto. El punto extremo izquierdo "O" refiere el origen de coordenadas. La flecha hacia la derecha indica el sentido positivo de la coordenada. Una partícula se localiza en un cierto tiempo $t_o = 0$ en la posición A y, en el tiempo $t = 4s$ en la posición B. La pequeña barra divisoria entre O y A representa la unidad (un metro). Puede decirse que A corresponde a dos metros, como posición inicial $x_o = 2m$ y B refiere a la posición de ocho metros $x = 8m$. De modo que el desplazamiento entre A y B vale $\Delta x = x – x_o = 8m - 2m = 6m$. Si este desplazamiento ocurrió entre 0s y 3s, el intervalo de tiempo transcurrido vale $\Delta t = t - t_o = 3s - 0s = 3s$. Así la velocidad vale

$$v = \frac{8m - 2m}{3s - 0s} = \frac{6m}{3s} = 2\frac{m}{s}$$

es decir, dos metros por segundo, entendido como dos metros por cada segundo.

En la Figura 2.2 se cambia el origen de coordenadas a un punto entre A y B, a cuatro metros a la derecha del origen primario.

Fig. 2.2. Posiciones en un eje de coordenadas (cambio de origen)

Se conserva la unidad de medida y la orientación del eje de coordenadas, pero ahora A se encuentra a -2m del origen y B a +4m del nuevo cero. Sin embargo la velocidad media del desplazamiento vale

$$v = \frac{4m - (-2m)}{3s - 0s} = 2\frac{m}{s}$$

Se sugiere tomar a A, luego a B como origen de coordenadas, cambiar las unidades y también la orientación del eje de coordenadas. En todos los casos se medirá una velocidad de $2\frac{m}{s}$, expresada en forma equivalente en otras unidades o bien será negativa si se cambia la orientación del eje. En tal caso, no ha cambiado el sentido del movimiento, que es siempre hacia la derecha, sino del sistema de coordenadas.

También podemos cambiar la unidad de tiempo o el suceso de referencia. En el ejemplo, hemos tomado como suceso o tiempo de referencia t_r el momento en que la partícula pasa por el punto A. Podría haberse tomado como referencia diez segundos antes, de modo que $t_o = 10s, t = 13s$ y la velocidad es *invariante* por cambio de origen de tiempos.

La palabra "invariante" tiene mucha importancia en física. El proceso de desplazamiento de la partícula de A hacia B es un evento en sí mismo que, se asume, no debe depender de la ubicación del observador, es decir, la descripción del proceso físico tiene que ser invariante por cambios de coordenadas en tanto el proceso físico es único y existe por sí mismo independientemente del observador. Más aún, el observador no interviene en el proceso en sí, es un observador externo que se limita a describir lo que ocurre sin alterar el evento de ninguna manera. Esta concepción de una realidad externa e independiente de quien la describa es esencial a la mecánica clásica. Notemos la connotación "platónica" de la imagen del proceso. Se asume que la descripción y explicación de un proceso físico no puede ser afectada por la elección del sistema de coordenadas. Esto es decir que hay una única realidad y una única física que la describe, en relación con lo que más adelante se enunciará como el Principio de Relatividad de Galileo.

Representación gráfica

Del mismo modo que se grafica una función, la variable independiente *tiempo* se representa en un eje horizontal, indicándolo con sus unidades, y la variable *posición* se despliega sobre un eje vertical, denotándolo con sus unidades. En el ejemplo inicial del ítem anterior, Figura 1, se representaría con un segmento de recta entre los puntos $(t_o; x_o) = (0; 2)$ y $(t, x) = (3; 8)$. En el gráfico de la Figura 2.3 se representa un proceso más complejo.

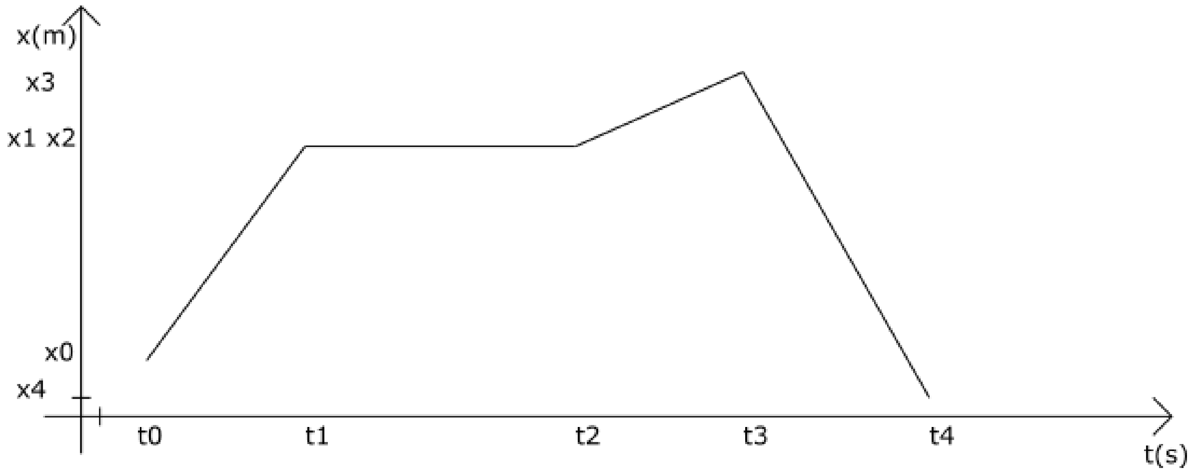

Fig. 2.3. Representación de un movimiento rectilíneo uniforme por tramos

En la Figura 2.3, entre el tiempo t_o y t_1 el móvil se ha desplazado de la posición x_o a la posición x_1. Hasta el tiempo t_2 se mantuvo en reposo. Luego el móvil continuó alejándose del origen hasta la posición x_3 en el tiempo t_3 a una velocidad menor, como se infiere de la inclinación del segmento. Luego retornó hacia el punto de partida pero fue más allá acercándose al origen; el último tramo lo realizó con velocidad negativa, según se denota por la inclinación del segmento, y a una rapidez con un valor máximo de los tres desplazamientos expresado en módulo, como lo denota la pendiente. Debe notarse la continuidad en el proceso pero también los poco realistas cambios abruptos de velocidad. Podríamos imaginar que, mientras leíamos estas páginas, un amigo partió dos segundos después que nos despedimos desde dos metros de nuestra puerta, se alejó hasta cinco metros durante los próximos dos segundos $\mathrm{t}_1 = 4s$, se detuvo durante cinco segundos pensando en algo que olvidó que debía hacer, a $t_2 = 9s$ siguió caminando lentamente hasta $t_3 = 12s$, pero sólo se alejó un metro más, recordó lo que debía hacer y en dos segundos retornó pasando por delante de nuestra puerta y siguió su camino hasta pasar un metro más allá de nuestra entrada en sentido opuesto. Es un útil ejercicio trazar gráficos e imaginar procesos posibles que describan.

También los gráficos tienen su historia. En el siglo XIV, en el Merton College de Oxford, “calculistas mertonianos” como Heytesbury o Bradwardine utilizaron representaciones gráficas poligonales para representar movimientos. En el eje horizontal representaban diferentes momentos del tiempo. La altura en el eje vertical representa el “grado” de la magnitud que pretenda graficarse. Tanto puede ser el “grado de placer” como el “grado de velocidad”. Si la cualidad cuyo grado se expresa en el eje vertical es invariable, el área del rectángulo es representativa de “toda la magnitud acumulada”, es decir, de “todo el placer” y de “toda la velocidad”. No definieron la velocidad en el sentido moderno, como una relación entre el desplazamiento espacial y el cambio temporal, de modo que estas representaciones gráficas no pueden entenderse en el sentido moderno. Sin embargo esta idea la extendieron al movimiento “disforme”, entre los que el más sencillo era el "uniformemente disforme", representado por un triángulo como un "grado de velocidad creciente con el tiempo". Como el área del triángulo es igual a la del rectángulo que tiene la misma altura que la correspondiente al punto medio de la base del triángulo, la *regla de Merton* establece que "Toda cualidad uniformemente disforme tiene la misma cantidad total que se la afectase uniformemente al sujeto según el grado de su punto medio."[Boido p.55] Un resultado más singular se obtiene de observar que el área del triángulo al que se duplica la base es cuatro veces mayor que el área original. Si se triplica la base, el área es nueve veces mayor que el área inicial. De modo que la relación del "total de la magnitud" en un cambio *uniformemente disforme* sigue una ley de cuadrados, ley que tendrá relevancia en los trabajos de Galileo Galilei, en el siglo XVII, sobre los movimientos uniformemente acelerados.

Problemas de encuentro

Los llamados *problemas de encuentro* contienen la mayor parte de los componentes más generales de la cinemática elemental de la partícula. Tomemos un ejemplo. Dos móviles A y B, separados inicialmente por una distancia d, se mueven con velocidades opuestas de valores v_a y v_b. Se propone hallar, en forma analítica y gráfica, el tiempo y la posición de encuentro. Intuitivamente, si dos móviles inicialmente separados se mueven en sentido opuesto sobre una misma línea, en algún momento habrán de encontrarse y por única vez. Uno de los aspectos más didácticos de la física es mostrar cómo responde, desde el formalismo matemático, a la intuición y cómo, en ocasiones, la realidad no es congruente con la respuesta intuitiva, pero el planteo físico en formato matemático explica por qué parece ser anti intuitiva.

Para plantear este problema, iniciemos el tratamiento desde la selección de un origen de coordenadas espaciales y de un suceso como referencia de tiempos. Ya sabemos que cualquier posición y tiempo de referencia es igualmente válido, de modo que los elegiremos apropiadamente para simplificar el planteo y el tratamiento del problema. Primero hagamos un esquema gráfico de la situación que nos "ayude a pensar".

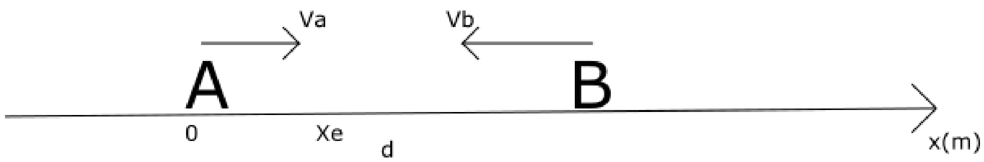

Fig. 2.4. Representación esquemática de un problema de encuentro

Podemos ubicar el origen de coordenadas en cualquier punto, por ejemplo, en la barra vertical representada en la Figura 2.4. Pero es más conveniente ubicar el origen de coordenadas espaciales en la posición inicial de uno de los móviles, de modo que ésta coincida con el cero, por ejemplo la posición inicial del móvil A tomada como referencia, por lo cual $x_{oA} = 0$, y facilite la resolución. También elegiremos el tiempo o suceso de referencia de modo que los dos tiempos iniciales valgan cero. Cualquier suceso puede usarse como tiempo de referencia, y la elección del inicio conjunto como *cero* sólo es posible en la medida que el inicio de los dos movimientos sea simultáneo.

Si así no fuera, es conveniente elegir cualquiera de los dos tiempos iniciales o, si es posible, el que menos complejidad de cálculo involucre. En tanto el planteo describa un estado inicial simultáneo, como en nuestro primer ejemplo, diremos que el tiempo de referencia corresponde a la situación inicial descripta, a modo de una fotografía que congele el estado inicial. Así $t_{oA} = t_{oB} = 0$. En el esquema, la longitud de las flechas, que representan las velocidades de A y de B, son diferentes; en este caso, se simula que la velocidad de B es mayor en módulo que la de A. En tal situación cinemática se intuye que, en un mismo intervalo de tiempo, el móvil B recorrerá una distancia mayor que el móvil A. Llamaremos el *tiempo de encuentro* t_e al que tardarán ambos móviles en recorrer cada uno parcialmente la distancia d hasta encontrarse, de modo que la *posición de encuentro* x_e debería estar más próxima a A que a B si la velocidad de B fuese mayor en módulo.

Más arriba hablamos de la metodología de investigación. Ante un problema planteamos una posible respuesta. Nuestra solución intuitiva funciona a modo de una hipótesis con consecuencias verificables. Desde la experiencia, habría que armar un diseño experimental acorde con el esquema propuesto y ponerlo a funcionar, medir velocidades, tiempos y posiciones de encuentro. Desde la teoría, habría que plantear las ecuaciones de la cinemática que, si son correctas nuestras hipótesis sobre cómo definir la velocidad, las unidades, el formalismo matemático, la independencia entre el espacio y el tiempo, la uniformidad con que transcurre un tiempo único para ambos móviles, la homogeneidad del espacio (las mismas características en todos los puntos) y la isotropía del espacio (las mismas características en todas direcciones), entonces el resultado formal debería coincidir con nuestra intuición. Además, el cálculo nos permitiría precisar valores numéricos que nos aporten algún conocimiento predictivo más preciso al resultado intuitivo *más cerca de A que de B*, por ejemplo. Hemos mencionado algunas de las hipótesis, unas explícitas y otras más ocultas, que involucra un simple problema de encuentro. Si algo no funciona, cualquiera de ellas puede ser responsable, o un razonamiento incorrecto, o un simple error de cálculo.

Observemos entonces que el más simple de los problemas puede dar lugar a un trabajo experimental, pone en funcionamiento el método científico y en acción todo el marco teórico, explícito e implícito en el planteo formal. Más que un simple ejercicio de aplicación, es la puesta en marcha de todo el andamiaje teórico y experimental de la física.

Pero volvamos a nuestro problema. Si toda nuestra teoría es correcta, las ecuaciones de movimiento de cada uno de los móviles deberían describir las respectivas evoluciones de sus posiciones a medida que transcurre el tiempo. En particular, deben ser válidas en el momento de encuentro.

$$x_{A(t)} = 0 + v_A t \qquad \text{y} \qquad x_{B(t)} = x_{oB} - v_B t$$

Si las igualamos para expresar que hubo encuentro, esto sólo puede darse en un momento del tiempo, por lo tanto

$$x_e = x_{A(te)} = x_{B(te)} = v_A t_e = x_{oB} - v_B t_e$$

De la igualación podemos despejar t_e en la forma

$$t_e = \frac{x_{oB}}{v_A + v_B}$$

Así la posición de encuentro será

$$x_e = v_A t_e = v_A \frac{x_{oB}}{v_A + v_B} = \frac{x_{oB}}{1 + {}^{v_B}/_{v_A}}$$

En un planteo más general, podemos escribir

$$\boldsymbol{x}_{A(t)} = \boldsymbol{x_{Ao}} + \boldsymbol{v_A}(t - t_{Ao}) \qquad \text{y} \qquad \boldsymbol{x_{B(t)}} = \boldsymbol{x_{Bo}} + \boldsymbol{v_B}(t - t_{Bo})$$

como las formas vectoriales de las dos ecuaciones de movimiento. Notemos que las posiciones de A y de B son funciones del tiempo, lo que se expresa poniendo t entre paréntesis. Omitiremos en adelante, en varias ocasiones por simplicidad de notación, la colocación de t entre paréntesis pero recordaremos este carácter funcional. La velocidad de B es negativa, pero en la expresión general en formato vectorial, recordemos que v_B es la primera componente del vector velocidad. En nuestro ejemplo, la posición inicial de A y los tiempos iniciales son nulos, pero se conservan en la expresión general. El tiempo t no es un valor numérico sino una variable independiente, de modo que no tiene un valor específico sino un dominio entre el tiempo inicial, en tanto se asume que antes no se sabe qué ocurría (cero en nuestro problema) y el tiempo final (el momento de encuentro, si allí termina el problema, con un choque entre partículas, o indefinido si sólo se cruzan y cada una sigue su camino).

"Encuentro" quiere decir 'estar en el mismo lugar al mismo tiempo'. Hemos llamado t_e al *tiempo de encuentro*. La *posición de encuentro* $\boldsymbol{x_e}$ es la que corresponde a ambos móviles al tiempo de encuentro. Así:

$$\boldsymbol{x_e} = \boldsymbol{x_{A(te)}} = \boldsymbol{x_{B(te)}} = \boldsymbol{x_{Ao}} + \boldsymbol{v_A}(t_e - t_{Ao}) = \boldsymbol{x_{Bo}} + \boldsymbol{v_B}(t_e - t_{Bo})$$

En un movimiento rectilíneo uniforme en que sólo consideramos la coordenada "x" para analizar el problema de encuentro, queda

$$x_e = x_{A(te)} = x_{B(te)} = x_{Ao} + v_A(t_e - t_{Ao}) = x_{Bo} + v_B(t_e - t_{Bo})$$

La última igualdad expresa una ecuación lineal con una incógnita, el tiempo de encuentro, que puede ser despejada. Con la solución de esta incógnita se obtiene la posición de encuentro. Se podría haber planteado desde las dos ecuaciones originales como un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, en este caso resuelto por igualación. Pero de este modo se visualiza más las hipótesis físicas que subyacen en la resolución.

Para resolverlo en nuestro caso particular, omitamos todos los términos que se anulan, de acuerdo con nuestra elección del sistema de coordenadas.

$$x_e = 0 + v_A(t_e - 0) = x_{Bo} + v_B(t_e - 0)$$

Y en forma más abreviada

$$x_e = v_A t_e = x_{Bo} + v_B t_e$$

Notemos que la posición inicial de B coincide con la distancia d que los separa $x_{Bo} = d$.

$$\overrightarrow{x_e} = \overrightarrow{v_A} t_e = \vec{d} + \overrightarrow{v_B} t_e$$

Hemos colocado una flecha sobre $\overrightarrow{v_A}$ y $\overrightarrow{v_B}$ para denotar que los estamos considerando como un vector, al igual que todas las cantidades involucradas, aunque sólo se trate de la primera componente del vector correspondiente. Considerado con carácter vectorial, $\overrightarrow{v_B}$ contiene un valor y un signo. En la siguiente expresión escribimos la variable en módulo, en particular la velocidad de B, y denotamos en la ecuación que v_B es negativa con el signo afectando al término que contiene a v_B

$$x_e = v_A t_e = d - v_B t_e$$

Basta un simple pasaje de términos para obtener

$$t_e = \frac{d}{v_A + v_B}$$

Desde un planteo más general, llegamos al mismo resultado al que arribamos en forma más intuitiva. El tiempo de encuentro es menor que el que le llevaría a cada uno en llegar a recorrer la misma distancia que los separa. Este tiempo es equivalente al que tardaría cualquiera de los móviles en recorrer la misma distancia en tanto tenga una velocidad suma de las dos. Veamos la posición de encuentro

$$x_e = v_A \frac{d}{v_A + v_B} = \frac{d}{1 + \frac{v_B}{v_A}} = d - v_B \frac{d}{v_A + v_B} = d\left(1 - \frac{v_B}{v_A + v_B}\right) = d\left(1 - \frac{1}{\frac{v_B}{v_B} + 1}\right)$$

Cada una de las expresiones permite obtener algunas conclusiones. La primera es la deducción más simple: basta reemplazar el tiempo de encuentro en la primera igualdad para obtener la posición de encuentro. La segunda nos ayuda a ver que, si la velocidad de B es mayor que la de A, el cociente v_B/v_A es mayor que 1, que la distancia d es dividida por un denominador mayor que 2 y, por lo tanto, el punto de encuentro está más próximo a A que a B, dado que A ha sido tomado como referencia. Lo contrario ocurriría si la velocidad de A fuese mayor que la de B y, si fuesen iguales, el punto de encuentro estaría en el centro de la distancia que los separa inicialmente. Las otras expresiones, de un modo más complejo, permiten hacer el mismo análisis desde la perspectiva de B.

Hemos hablado de la *intuición*. No es otra cosa que la experiencia cotidiana elaborada en un *modelo* que no es puesto en palabras, que resulta “obvio” y no merece ser justificado. Sin embargo en él se encuentran las nociones intuitivas del espacio y el tiempo. La teoría física nos permite ampliar nuestro horizonte intuitivo en un modelo cada vez más complejo, que abarca más fenómenos con una pretensión de alcanzar la naturaleza en su totalidad. Sobre la base de este modelo, progresivamente ampliado, se elaboran hipótesis ante cada nueva situación problemática. Si algunos resultados son “anti intuitivos”, apenas puede tratarse de un ajuste de la hipótesis o de su interpretación, o bien del proceso deductivo o, eventualmente, del modelo sobre el que se apoya la hipótesis. Y es en este último caso cuando hay un *progreso* en la investigación científica. Es la síntesis entre el modelo previo (lo intuitivo, la heurística que conduce a la hipótesis), el marco teórico (lo deductivo, la formalización del planteo consecuente de la hipótesis) y la experiencia (que involucra el diseño, la medición, el tratamiento de errores para justificar por qué nunca la experiencia coincide con la teoría), lo que consolida el modelo o lo transforma. En física, expresado en lenguaje matemático.

Traduzcamos el problema a modo de un gráfico de dos funciones, tal como se hace en matemáticas. En el eje horizontal se representa la variable independiente, el tiempo, y en el vertical, la variable dependiente, la posición. Los dos móviles A y B parten en forma simultánea, el A desde el origen de coordenadas y el B desde una distancia d del origen. El A se mueve con velocidad positiva de mayor módulo que la de B, ambas denotadas en la pendiente de las rectas, y la inclinación negativa del segmento que representa al móvil B indica el signo de su velocidad. En el punto de intersección de las rectas es cuándo y dónde se produce el encuentro. Tras el encuentro, un simple cruce en el camino, ambos móviles siguen en movimiento rectilíneo uniforme.

En la Figura 2.5 se representa el planteo del problema discutido previamente. Podemos notar que, después del encuentro en el punto de intersección de los segmentos, le damos continuidad a modo de una recta considerando que no se ha indicado que el movimiento termina con el encuentro, por lo tanto no se trata de una posición final sino sólo de un momento más en el proceso, un cruce en el camino. Pero no se ha llevado los segmentos más atrás del origen de tiempos porque se ha dicho que los móviles parten en ese momento. En tal sentido, cuidamos que la representación gráfica refleje con la mayor fidelidad posible el proceso físico.

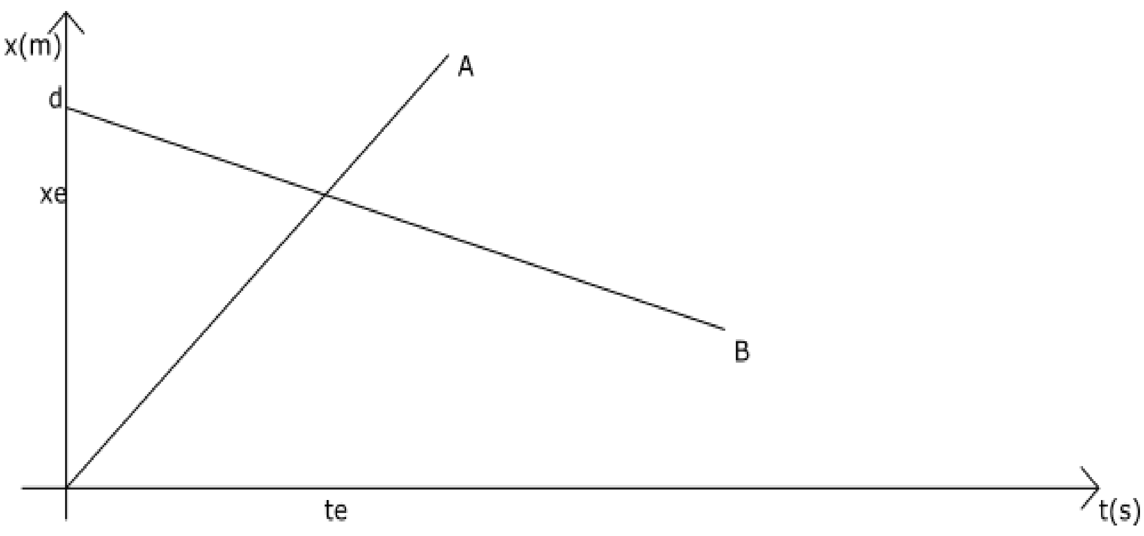

Fig. 2.5. Representación gráfica de un problema de encuentro (cruce)

En la Figura 2.6 se denota un choque en tanto el movimiento se interrumpe tras el encuentro.

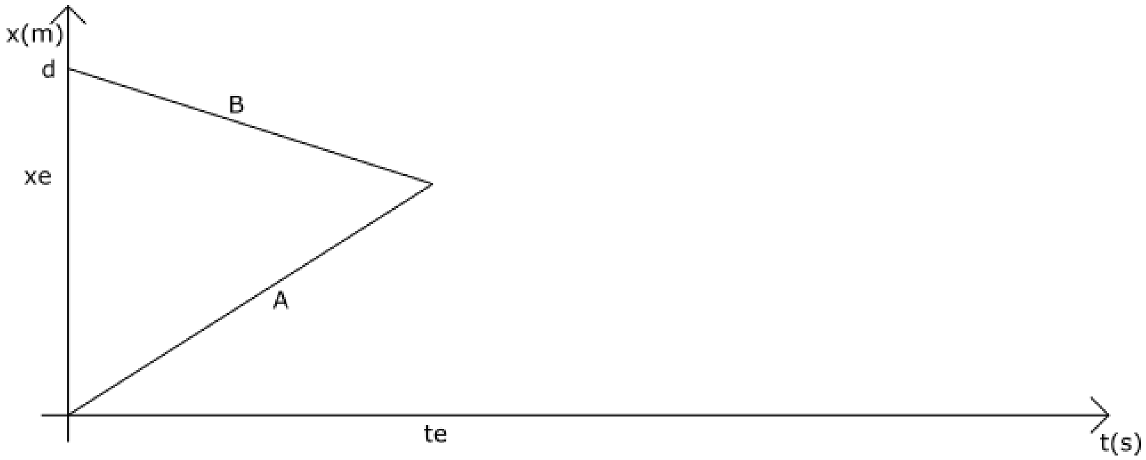

Fig. 2.6. Representación gráfica de un problema de encuentro (choque)

En el gráfico de la Figura 2.7 se muestra que B sale con velocidad positiva, al igual que A, pero de un módulo menor, de modo que A alcanza a B en algún momento de encuentro. Podría ser algo así como "un móvil B parte desde una posición adelantada una distancia d con respecto a otro móvil A, en forma simultánea pero con una velocidad menor que la de A; hallar el tiempo y posición de encuentro". El planteo sería similar al analizado más arriba pero las dos velocidades serían positivas. El resultado sería

$$t_e = \frac{d}{v_A - v_B} \quad y \quad x_e = v_A \frac{d}{v_A - v_B} = \frac{d}{1 - \frac{v_B}{v_A}}$$

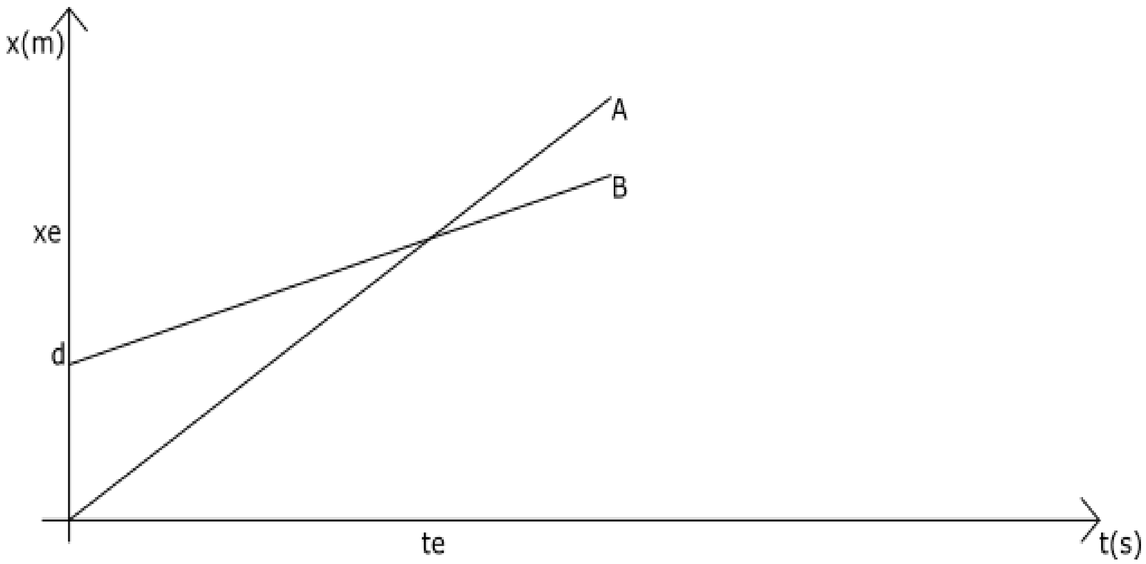

Fig. 2.7. Problema de encuentro en el que un móvil alcanza a otro

Lo que determina el encuentro es la velocidad relativa nuevamente, ahora la diferencia entre las velocidades de ambos móviles.

En la Figura 2.8, la velocidad de B es mayor que la de A y el encuentro no se produce, o bien pudo haberse producido antes del tiempo referenciado como inicial y expresado en un tiempo negativo de encuentro y a la izquierda del origen de coordenadas. Notemos que tal respuesta es válida en tanto se asume que el movimiento comenzó antes del tiempo de referencia, pero si se informa que se ha iniciado en la situación indicada, no habrá encuentro y el resultado matemático no tiene sentido en el marco de la interpretación física del problema.

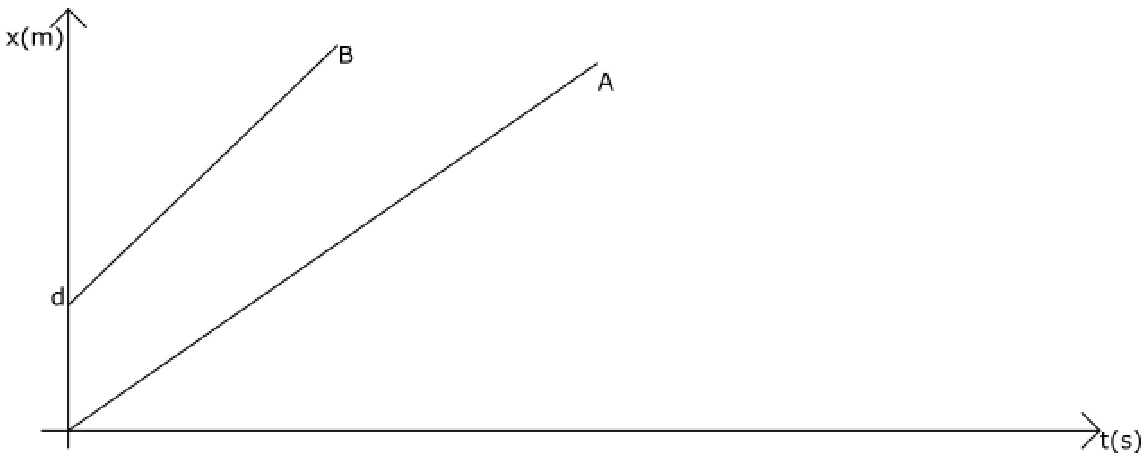

Fig. 2.8. Problema de encuentro en el que un móvil no alcanza a otro

También puede expresarse que B está inicialmente a la izquierda de A, de modo que d sería negativa y, si la velocidad de B es mayor que la de A, habría encuentro. Esa situación se muestra en la Figura 2.9.

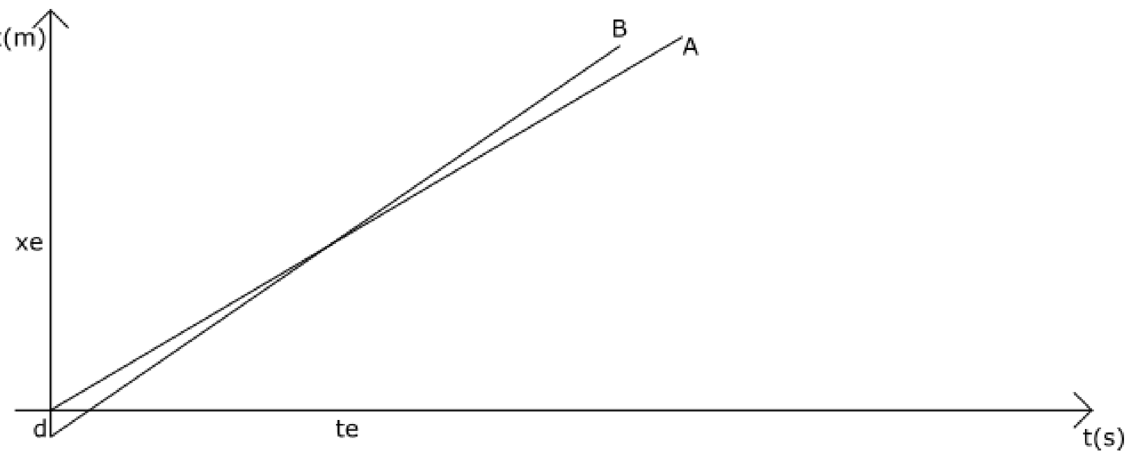

Fig. 2.9. Encuentro con origen de coordenadas en el móvil más adelantado

Notemos aquí que el gráfico es similar al de la Figura 2.7 y, desde el punto de vista de la situación física, son equivalentes si se considera que en la Figura 2.7 se cambia el origen de coordenadas al móvil B. Vemos que si $v_B > v_A$, la diferencia $v_A - v_B$ sería negativa y no tendría sentido físico el encuentro si parten en la situación descripta por el gráfico.

También puede denotarse que B parte un tiempo inicial (t_{oB} o t_{Bo} son notaciones equivalentes) posterior a la partida de A pero con una velocidad mayor y del mismo sitio tomado como origen de coordenadas. En tal caso habría que replantear analíticamente el problema de encuentro. La expresión

$$x_e = x_{A(te)} = x_{B(te)} = x_{Ao} + v_A(t_e - t_{Ao}) = x_{Bo} + v_B(t_e - t_{Bo})$$

se resume a

$$x_e = x_{A(te)} = x_{B(te)} = 0 + v_A(t_e - 0) = 0 + v_B(t_e - t_{Bo})$$

y luego a

$$x_e = x_{A(te)} = x_{B(te)} = v_A t_e = v_B(t_e - t_{Bo}) = v_B t_e - v_B t_{Bo}$$

de donde:

$$t_e = v_B \frac{t_{Bo}}{v_B - v_A}$$

y reemplazando en la ecuación anterior

$$x_e = v_A v_B \frac{t_{Bo}}{v_B - v_A} = \frac{t_{Bo}}{\frac{1}{v_A} - \frac{1}{v_B}}$$

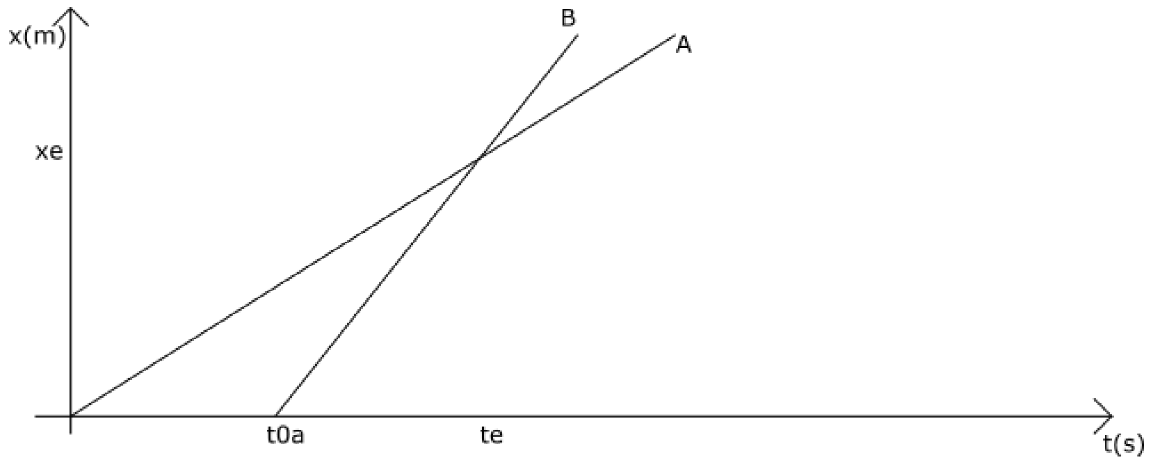

Fig. 2.10. Encuentro entre móviles con tiempos de partida diferentes

Si calculamos el producto $v_B t_{Bo}$, se obtiene una distancia que equivale a la que habría recorrido el móvil B si hubiese partido conjuntamente con A y que, si prolongamos el segmento que corresponde al móvil B hasta cortar el eje de ordenadas, se obtiene la *ordenada al origen*, representativa de tal posición inicial equivalente y con origen de posiciones en el punto de partida de A.

O en una versión gráfica más general, puede no ser nula la posición inicial ni el tiempo inicial de ambos móviles, como se muestra en la Figura 2.11, y podemos agregar un tercer móvil y, así sucesivamente, incrementar la complejidad al infinito, como se representa en la Figura 2.12.

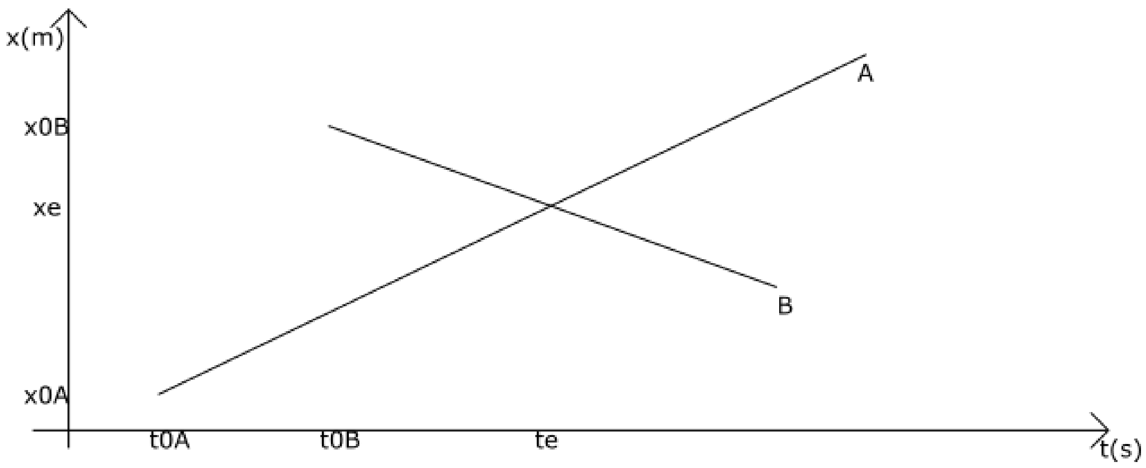

Fig. 2.11. Encuentro entre móviles con tiempo y posición inicial no nulos

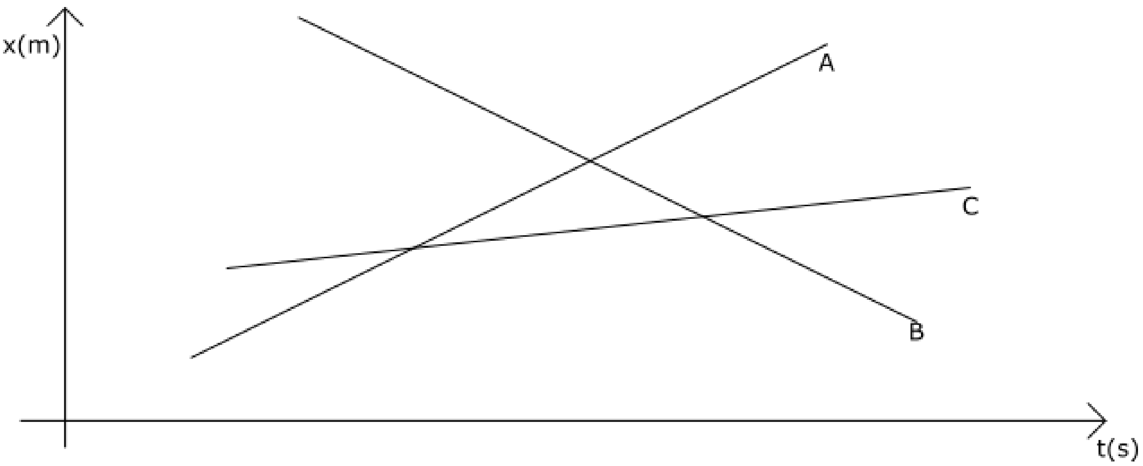

Fig. 2.12. Encuentros entre tres móviles.

Y también puede notarse que, si se conserva los segmentos que representan los movimientos de A y de B, pero se desplazan los ejes del sistema de coordenadas o se cambia las unidades, se representa el mismo proceso físico pero desde diferentes perspectivas.

La versión gráfica del principio de relatividad es la invariancia de la representación del proceso ante cambios en los sistemas de coordenadas utilizados para describirlo.

Basta imaginar que, en la Figura 2.12, dejamos los segmentos que representan a los movimientos en su lugar y cambiamos los ejes desplazándolos en forma horizontal para modificar el origen de tiempos, en forma vertical para elegir otro origen de posiciones, y hasta podemos rotarlos rígidamente o en forma oblicua combinando las variables posición y tiempo en nuevas coordenadas generalizadas. Veremos que es algo así lo que nos ofrecen los diagramas de Minkowsky.

Vemos entonces que el *evento físico* no se encuentra en los valores numéricos de los resultados sino en la forma de las ecuaciones que representan los procesos y los gráficos que representan las funciones. Nuestra *realidad física* ni siquiera es numérica sino que está expresada en ecuaciones y funciones. Lo que pone de relieve el carácter abstracto de lo que llamamos "real" en física.

Movimiento Rectilíneo Uniformemente Variado (MRUV)

El siguiente paso, en orden de complejidad creciente, es el movimiento rectilíneo con aceleración constante o uniformemente variado. Desde el punto de vista analítico, a partir de la definición de aceleración, se obtiene la velocidad como función lineal del tiempo.

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t}, entonces\ \Delta v = a\Delta t, o\ bien\ v = v_o + a(t - t_o)$$

Si graficamos la velocidad constante de un MRU en función del tiempo en un gráfico (v, t), resulta un segmento horizontal de recta.

Fig. 2.13. Representación $(v; t)$ en un MRU

El área encerrada en el rectángulo de la Figura 2.13, calculada como $v(t - t_o)$, equivale al desplazamiento Δx. Extender esta asociación entre el área y el desplazamiento a un MRUV, representado por un segmento no horizontal de recta en un gráfico (v, t), conduce a separar el paralelepípedo como la suma de un rectángulo, de área $v_o(t - t_o)$, y de un triángulo, cuya área vale $\frac{(v-v_o)(t-t_o)}{2}$.

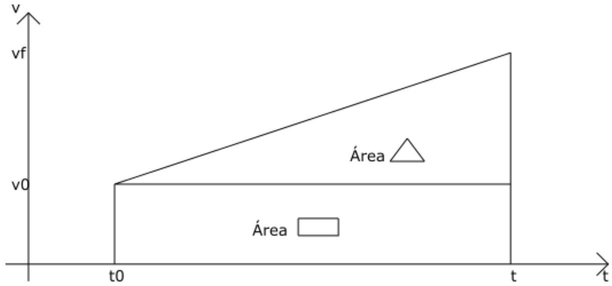

Fig. 2.14. Representación $(v; t)$ en un MRUV

Si sumamos ambas áreas tenemos

$$Área\ Total = Área\ Rectángulo\ + Área\ Triángulo$$

$$\Delta x = v_o(t - t_o) + \frac{1}{2}(v - v_o)(t - t_o)$$

Al reemplazar $(v - v_o)$ por $a(t - t_o)$, se obtiene la expresión

$$\Delta x = x - x_o = v_o(t - t_o) + \frac{1}{2}a(t - t_o)(t - t_o)$$

Finalmente

$$x_{(t)} \ = \ x_o \ + \ v_o(t - t_o) + \frac{1}{2}a(t - t_o)^2.$$

y para la velocidad

$$v_{(t)} \ = \ v_o + a(t - t_o).$$

La posición como función del tiempo será representada por arcos de parábola. Veremos luego que estas expresiones tienen carácter vectorial.

Los primeros planteos corresponden a calcular posiciones y velocidades para diferentes aceleraciones, asociar el movimiento acelerado a una coincidencia de signos entre la aceleración y la velocidad, mientras que si los signos difieren, se trata de un movimiento de frenado. La pregunta sobre el tiempo que requiere para alcanzar cierta posición se resume a una resolución de la ecuación cuadrática. Si se pretende conocer el tiempo y el desplazamiento para alcanzar cierta velocidad, en particular hasta detenerse, sólo requiere imponer el valor de $v_{(te)}$ para cierto valor de t_e a despejar, en especial $v_{(td)} = 0$ para el tiempo de detención. De allí se obtiene que

$$t_d = t_o - \frac{v_o}{a}.$$

Notemos que t_d será mayor que t_o porque los signos de v_o y a difieren. Reemplazando este valor de t_d en $x_{(td)}$, se obtiene

$$x_{(td)} = x_o + \frac{v_o^2}{2a}$$

Si se despeja el tiempo de la ecuación de velocidad y se reemplaza en la de posición, se obtiene una relación que será útil al momento de estudiar la conservación de la energía. Se trata de

$$x_{(t)} - x_o \ = \ \frac{v_{(t)}^2}{2a} - \frac{v_o^2}{2a}$$

Puede escribirse

$$x_{(t)} - \frac{v_{(t)}^2}{2a} \ = \ x_o \ - \ \frac{v_o^2}{2a}$$

que define una *constante de movimiento*.

La aplicación a problemas de encuentro se traduce en escribir las ecuaciones correspondientes a ambos móviles, igualarlas, armar la forma de la ecuación cuadrática y resolverla, interpretando los resultados. En especial, tiene interés el caso en que el discriminante es cero, es decir, hay un único punto de encuentro, y cuando es negativo, lo que significa que no hay encuentro.

Es particularmente interesante el planteo en el que se busca relacionar las posiciones y velocidades relativas iniciales con la aceleración relativa de modo que haya o no haya encuentro, lo que se consigue conservando los parámetros en las ecuaciones e imponiendo la condición de discriminante positivo, negativo o nulo para la condición límite.

(Paréntesis) Integración de las ecuaciones de movimiento. Primitivas

Más arriba se definió la velocidad como la derivada de la posición con respecto al tiempo y la aceleración como la derivada de la velocidad con respecto al tiempo. Se llama *anti derivada* o *primitiva* de una función $f_{(t)}$ a otra función $F_{(t)}$ cuya derivada es la función propuesta, es decir, $F'_{(t)} = f_{(t)}$.

Por lo pronto, existen infinitas primitivas dado que, si $F_{(t)}$ es una primitiva de $f_{(t)}$, $F_{(t)} + C$, si C es una constante cualquiera, también será primitiva, dado que

$$(F_{(t)} + C)' = F'_{(t)} + C' = f_{(t)} + 0 = f_{(t)}.$$

A esta constante C, que en situaciones concretas de cálculo debe resolverse con algún dato adicional, se la llama *constante de integración*.

No es el objetivo desarrollar una teoría ni siquiera rudimentaria del procedimiento de integración ni de todos los casos y situaciones en que sea necesario resolver una integral, solamente plantear el concepto desde la noción de anti derivada y su interpretación para el cálculo de áreas.

Si se grafica una función $f_{(t)}$ y se quiere determinar el área encerrada entre la curva $f_{(t)}$ y el eje "t", considerando que el área es positiva si está en el semiplano "f" positivo, y que el *sentido de integración* es hacia las t *crecientes*, la forma de definir una integral recurre a la noción de límite.

Para ello basta subdividir la curva $f_{(t)}$ en el dominio de integración, sea el intervalo $[a; b]$, en sub intervalos Δt. La curva $f_{(t)}$ estará acotada en cada sub intervalo por dos valores o extremos de $f_{(t)}$ en cada intervalo. Si calculamos el área en forma aproximada por medio de los rectángulos definidos por las cotas superiores, se obtiene un valor estimado en exceso de la verdadera área bajo la curva. Si se aproxima por las cotas inferiores, se tendrá una estimación por defecto. En la medida que el tamaño de los intervalos se hace más pequeño, en lenguaje de cálculo diferencial *tiende a cero*, a la vez se incrementa el número de intervalos, lo que se dice *tiende a infinito* tal número de intervalos cuyas áreas se deberá sumar. Si cuando la suma de un número de intervalos que tiende a infinito y cada uno de ellos aporta un área infinitesimal, resulta que las dos sumas por exceso y por defecto convergen a un único valor, ese valor es la *integral definida* de $f_{(t)}$ en el intervalo $[a; b]$. Se nota

$$I = \int_a^b f_{(t)}\,dt$$

El cálculo de integrales es muy complejo desde la noción de límite. Afortunadamente existe la llamada "regla de Barrow" (Isaac Barrow (1639-1677), uno de los maestros de Newton) que nos permite calcular integrales por medio de la diferencia entre primitivas. Así.

$$I = \int_a^b f_{(t)}\,dt = F_{(b)} - F_{(a)}$$

No siempre existen primitivas para todas las funciones y no suele ser fácil el cálculo, por lo que en la práctica es frecuente que sea necesaria una aproximación numérica al cálculo de integrales.

Con esta notación, puede escribirse la primitiva de una función en la forma

$$F_{(t)} = \int f_{(t)}\,dt + C$$

incorporando la constante de integración.

Si aplicamos lo dicho a una aceleración constante, con notación vectorial como integración en las tres componentes, la velocidad resulta ser

$$\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v_o} = \int_{\boldsymbol{v_o}}^{\boldsymbol{v}} d\boldsymbol{v} = \int_{t_o}^{t} \boldsymbol{a}\,dt = \boldsymbol{a}(t - t_{o)}$$

Esta integración conduce a la conocida relación

$$\boldsymbol{v}(t) = \boldsymbol{v_o} + \boldsymbol{a}(t - t_o)$$

Si ahora volvemos a integrar la velocidad para obtener la posición como función del tiempo, será

$$\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x_o} = \int_{\boldsymbol{x_o}}^{\boldsymbol{x}} d\boldsymbol{x} = \int_{t_o}^{t} \boldsymbol{v}(t)\,dt = \boldsymbol{v_o}(t - t_o) + \frac{1}{2}\boldsymbol{a}(t - t_o)^2$$

Vemos así que la ecuación de movimiento del MRUV

$$\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{x_o} + \boldsymbol{v_o}(t - t_o) + \frac{1}{2}\boldsymbol{a}(t - t_o)^2$$

no es otra que la integral de la velocidad y ésta a su vez la integral de la aceleración. De allí que se las denomine *integración de las ecuaciones de movimiento*. Se sugiere derivar dos veces la función $\boldsymbol{x}_{(t)}$ para verificar que se obtienen $\boldsymbol{v}_{(t)}$ y $\boldsymbol{a}$ constante.

Tiro vertical y caída libre

El problema de la caída libre, en el marco de la cinemática elemental, no es más que un caso particular de MRUV. Desde los trabajos de Galileo Galilei se conoce la gravedad terrestre como la aceleración con la que caen todos los cuerpos en el vacío. Desde una perspectiva más física, se trata de un problema asociado con la gravitación universal como medida de campo gravitatorio, pero esto será tratado más adelante.

Puede medirse el valor en diferentes lugares de la Tierra y altitudes. Se adopta como valor estándar el de g=9.80665m/s², que correspondería a una latitud de 45º y al nivel del mar. Hay una leve variación con la latitud, que alcanza unos 9,84m/s² en los polos y unos 9,78m/s² en el ecuador. A los fines de una estimación de alcance global para toda la Tierra, se toma g=9,8m/s² pero, para una rápida aproximación en ejercitación, se redondea a g=10m/s² y muchas veces se refiere sólo a "g" como aceleración de la gravedad.

Desde al punto de vista de la cinemática de la partícula, es un caso particular de MRUV en el que se toma como eje de coordenadas a la vertical, usualmente positivo hacia arriba con origen de coordenada en el suelo. Suele expresarse como *altura* (h, del inglés y el alemán), como coordenada "z" cuando "x" e "y" representan la superficie, o como coordenada "y" cuando nos limitamos a movimientos en dos dimensiones, convención a la que adherimos, y con signo positivo hacia arriba en el eje "y". De modo que, en este sistema de coordenadas, la gravedad será negativa, independientemente de que el cuerpo suba o baje.

Por lo tanto, la ecuación de movimiento será

$$\mathrm{y}_{(\mathrm{t})} = \mathrm{y}_o + \mathrm{v}_o(\mathrm{t} - \mathrm{t}_o) - \frac{1}{2}\mathrm{g}(\mathrm{t} - \mathrm{t}_o)^2$$

para la posición,

$$\mathrm{v}_{(\mathrm{t})} = \mathrm{v}_o - \mathrm{g}(\mathrm{t} - \mathrm{t}_o)$$

para la velocidad, asumiendo g constante, lo que es muy razonable en la práctica porque disminuye apenas unos 0,03m/s² a diez mil metros de altitud.

El signo "-" que precede a g se debe a que se escribe g en módulo pero un formato vectorial requeriría el signo positivo en el término cuadrático.

Este sistema de ecuaciones puede simplificarse si se admite como tiempo de referencia el que corresponde al momento del disparo, así $t_o = 0$ y las ecuaciones quedan en la forma

$$y_{(t)} = y_o + v_o t - \frac{1}{2}gt^2 \quad y \quad v_{(t)} = v_o - gt$$

Podemos plantear toda una variedad de problemas pero trataremos de entrenarnos en la búsqueda de soluciones generales a problemas tipo, lo que nos llevará a lo que se suele denominar "fórmulas". Por ejemplo, podemos preguntarnos por una solución general al problema del tiempo de caída desde una altura inicial conocida y_o, cuando se lo deja caer libremente sin velocidad inicial $v_o = 0$. En primer lugar, las ecuaciones de movimiento se limitan a:

$$y_{(t)} = y_o - \frac{1}{2}gt^2 \quad y \quad v_{(t)} = -gt$$

Al llegar al suelo,

$$y_{(ts)} = 0$$

donde t_s refiere al momento puntual en que el cuerpo toca el suelo, a diferencia de "t" que representa a la variable independiente *tiempo*. Por lo tanto, despejando t_s de la primera ecuación igualada a cero,

$$0 = y_o - \frac{1}{2} g t_s^2$$

de donde

$$t_s = \sqrt{2y_o/g}$$

Esta solución general responde a cualquier planteo similar y permite determinar el tiempo que tarda en llegar al suelo t_s para cualquier altura inicial y_o en caída libre. En este problema en particular, puede agregarse la determinación de la velocidad de impacto v_s. Para ello basta reemplazar el tiempo que tarda en caer en la ecuación de velocidad obteniendo

$$v_{(ts)} = \sqrt{2y_o g}$$

Otro problema que puede plantearse es el relativo a la altura máxima en un disparo vertical desde el suelo con velocidad inicial conocida. En tal caso las ecuaciones quedan en la forma

$$y_{(t)} = v_o t - \frac{1}{2} g t^2 \quad y \quad v_{(t)} = v_o - gt$$

Al llegar a la altura máxima, la velocidad será instantáneamente cero para detenerse y luego volver a caer. De modo que

$$v_{(tm)} = 0 = v_o - g t_m$$

de donde

$$t_m = \frac{v_o}{g}$$

Este tiempo, el que tarda en llegar a la altura máxima, lo reemplazamos en la otra ecuación y obtenemos el valor de la altura máxima a través de

$$y_m = v_o t_m - \frac{1}{2} g t_m^2 = v_o \frac{v_o}{g} - \frac{1}{2} g \left(\frac{v_o^2}{g^2} \right) = \frac{v_o^2}{g} - \frac{1}{2} \frac{v_o^2}{g} = \frac{1}{2} \frac{v_o^2}{g}$$

De modo que la altura máxima estará dada por

$$y_m = \frac{1}{2} \frac{v_o^2}{g}$$

Si se sigue el desarrollo del proceso de tiro vertical y plantea cuánto tiempo tardará en volver a caer, basta imponer que la altura final sea nula, con lo que

$$y_{(ts)} = 0 = v_o t_s - \frac{1}{2} g t_s^2$$

Hay dos soluciones para esta ecuación cuadrática. Una corresponde a $t_s = 0$, es decir, al momento del disparo, y otra a $t_s = 2v_o/g$, que es la que nos interesa y el doble del tiempo que tarda en ascender. Si reemplazamos este tiempo en la ecuación de velocidad, obtenemos que el impacto se produce con la misma velocidad de disparo pero negativa,

$$v_{(t_s)} = v_o - g\frac{2v_o}{g} = -v_o$$

lo que muestra que el proceso de ascenso y descenso es simétrico.

Podemos plantear también un problema genérico de encuentro para dos móviles que parten de diferentes alturas con diferentes velocidades y sólo sometidos a la gravedad. En tal caso tendríamos

$$y_{1(t)} = y_{o1} + v_{o1}t - \frac{1}{2}gt^2 \quad y \quad y_{2(t)} = y_{o2} + v_{o2}t - \frac{1}{2}gt^2$$

Al igualar ambas ecuaciones, los dos términos cuadráticos se cancelan y queda un problema lineal en el tiempo de encuentro, como si los dos móviles estuviesen en MRU

$$y_{1(te)} = y_{o1} + v_{o1}t_e - \frac{1}{2}gt_e^2 = y_{2(te)} = y_{o2} + v_{o2}t_e - \frac{1}{2}gt_e^2$$

$$\mathrm{y_e = y_{o1} + v_{o1}t_e = y_{o2} + v_{o2}t_e}$$

Al reemplazar este tiempo en las ecuaciones cuadráticas, nos dará la altura de encuentro. Este problema tiene interés particular, desde el punto de vista práctico, como método empleado para el entrenamiento en condiciones de ingravidez utilizando aviones en caída libre. Pero desde el punto de vista teórico, nos dice que estar en un sistema en caída libre junto con todos los objetos materiales que forman parte del sistema, hace que el observador sito en él y en caída libre, no pueda distinguirlo de un sistema inercial. Es decir, como todos los cuerpos están afectados por la misma aceleración, cuando *todo* está en caída libre, el sistema se comporta como un sistema inercial en equilibrio de fuerzas, a pesar de estar *todos* los objetos sometidos a la fuerza peso. Esta imposibilidad de distinguir un sistema en un estado gravitacional de un sistema inercial, es decir, no "darse cuenta" si está en equilibrio o todos sometidos a la fuerza peso, fue uno de los factores heurísticos para la Relatividad General.

Algunos problemas generales tienen especial interés, como determinar el tiempo y altura de encuentro de dos móviles si se dispara uno desde el suelo con velocidad conocida y otro se deja caer, en el mismo momento del disparo del otro, desde una altura dada, en especial cuando es la altura máxima que alcanza el que es disparado. Otro problema de interés, y relacionado con el anterior, es el del malabarista, que dispara cuerpos hacia arriba con la misma velocidad a intervalos regulares para mantener un ritmo de disparo y contención.

Si hacemos gráficos de movimiento (x, t), se dibuja arcos de parábola. Las raíces de la ecuación cuadrática $x_{(t)}$, que es representada por la parábola, corresponde a los momentos de impacto, y el vértice de la parábola responde a la altura máxima.

Tiro horizontal y tiro oblicuo

Se llama *tiro horizontal* a un disparo que se hace desde cierta altura conocida en dirección horizontal. Nos limitaremos a responder dos preguntas: dónde cae y con qué velocidad impacta en el suelo.

En principio, notamos que se trata de un movimiento en dos dimensiones, cada una de las cuales se describe en modo independiente dado que responde a diferentes leyes. El desplazamiento horizontal, o coordenada "x", es un MRU dado que no hay ninguna aceleración que lo afecte, mientras que el movimiento vertical está determinado por la aceleración de la gravedad a modo de una caída libre desde una altura inicial de disparo y_o.

La ecuación horizontal de movimiento será

$$x_{(t)} = v_o t,$$

si asumimos que el sistema de coordenadas espaciales se ubica en la vertical del disparo y que el tiempo de referencia es el momento del disparo. Para el eje vertical será

$$y_{(t)} = y_o - \frac{1}{2} g t^2$$

a modo de una caída libre.

El momento de impacto será cuando $y_{(ts)} = 0$, y esto ocurre para

$$t_s = \sqrt{\frac{2y_o}{g}}.$$

Reemplazando este tiempo en la ecuación de posición, se obtiene el punto de impacto como

$$x_s = v_o \sqrt{2y_o/g}$$

Por otra parte, la velocidad vertical de impacto será

$$v_{y_{(ts)}} = g t_s = \sqrt{2 y_o g}.$$

Pero la componente horizontal de velocidad sigue siendo v_o, de modo que puede determinarse el módulo de la velocidad de impacto usando el teorema de Pitágoras (módulo del vector velocidad) y el ángulo de impacto a través de la tangente, que puede obtenerse a partir de las coordenadas de velocidad.

$$v = |\boldsymbol{v}| = \sqrt{v_{ox}^2 + 2y_o g} \qquad \alpha = arctg(\frac{\sqrt{2yog}}{v_{ox}})$$

El *tiro oblicuo* es un disparo que se hace con un cierto ángulo α con respecto a la horizontal, con velocidad conocida v_o. Nos limitaremos a plantear el disparo desde el suelo, tomado como referencia al igual que el momento del disparo como referencia de tiempo.

Se trata de un movimiento bidimensional con coordenadas independientes, un MRU en la horizontal y un MRUV en la vertical. Para determinar las componentes horizontal y vertical de la velocidad, se proyecta el vector usando trigonometría:

$$v_{ox} = v_o \cos(\alpha) \qquad y \qquad v_{oy} = v_o sen(\alpha)$$

Con estas componentes de velocidad inicial tenemos

$$x_{(t)} = v_o \cos(\alpha)\, t \qquad y \qquad y_{(t)} = v_o sen(\alpha) t - \frac{1}{2} g t^2.$$

La componente vertical de la velocidad estará dada por

$$v_{y(t)} = v_o sen(\alpha) - gt$$

Nos limitaremos a determinar el punto de impacto o *alcance* del disparo, la altura máxima y la velocidad de impacto. Luego definiremos la noción de trayectoria.

En el punto de alcance la altura vale cero, luego

$$y_{(ts)} = 0 = v_o sen(\alpha) t_s - \frac{1}{2} g t_s^2,$$

que tiene solución para $t_s = 0$ (el momento del disparo) y

$$t_s = \frac{2 v_o sen(\alpha)}{g}.$$

Este tiempo de caída permite obtener la posición horizontal de caída como

$$x_{(ts)} = \frac{2 v_o^2 sen(\alpha) \cos(\alpha)}{g},$$

que, usando una relación trigonométrica, se escribe

$$x_{(ts)} = \frac{v_o^2 sen(2\alpha)}{g}.$$

Si reemplazamos α por $\pi/2 - \alpha$ (ángulo complementario), se obtiene el mismo alcance (verificarlo usando propiedades del seno de la suma de ángulos). Es decir que hay dos ángulos de elevación con el mismo alcance que sólo difieren en la trayectoria y, puntualmente, en la altura máxima.

Para determinar la altura máxima, anulamos la componente vertical de velocidad al tiempo

$$t_m = \frac{v_o sen\alpha}{g}.$$

Reemplazando este tiempo en la ecuación de la componente vertical, se obtiene

$$y_m = \frac{1}{2}\frac{v_o^2 sen^2(\alpha)}{g}.$$

Se sugiere probar que la altura máxima se logra a la mitad del alcance.

Para obtener la velocidad de impacto, basta reemplazar el tiempo de impacto en la ecuación de velocidad. Se sugiere mostrar que la velocidad de impacto tiene el mismo módulo que la velocidad de disparo y un ángulo de impacto $-\alpha$.

La *trayectoria* es la secuencia de puntos que el móvil recorre en el espacio o lugar geométrico de los puntos que ocupa durante el desplazamiento. Para obtenerla, trataremos de poner la coordenada "y" en función de la coordenada "x". Despejamos el tiempo de la ecuación de posición de "x" y lo reemplazamos en la ecuación de posición de "y". Resulta una expresión de la forma

$$y_{(x)} = x.tg(\alpha) - \frac{1}{2}\frac{gx^2}{cos^2(\alpha).v_o^2}.$$

Una de las raíces de la ecuación de la trayectoria, dada por una parábola, será el alcance y el punto máximo o vértice de la curva será la altura máxima.

Movimiento circular

El estudio del movimiento circular requiere la definición de una trayectoria en el plano (x, y), que está dada en forma implícita por $x^2 + y^2 = r^2$, donde r es el radio de la circunferencia. La descripción de este movimiento en coordenadas cartesianas es compleja, por lo que se utiliza coordenadas polares (r, α), donde α mide el ángulo de la posición con respecto al eje "x", en el sentido positivo o anti horario. Las ecuaciones de transformación resultan

$$x = rcos(\alpha), \quad y = rsen(\alpha) \quad y \quad \alpha = arctg(y/x)$$

con la ecuación de la trayectoria determinada por el parámetro r.

La velocidad de giro o *velocidad angular* suele representarse con ω y definirse la velocidad angular media como

$$\omega = \frac{\Delta\alpha}{\Delta t}$$

en unidades de 1/s o rad/s (usando el cálculo diferencial es $\omega = \frac{d\alpha}{dt}$) Del mismo modo puede definirse la aceleración angular media

$$\gamma = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}$$

en 1/s² o rad/s² (usando el cálculo diferencial es $\gamma = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\omega}{dt^2}$).

El movimiento circular uniforme (MCU) responde a la ecuación de movimiento, similar a la del MRU,

$$\alpha_{(t)} = \alpha_o + \omega(t - t_o).$$

El movimiento circular uniformemente variado (MCUV) responde a las ecuaciones

$$\alpha_{(t)} = \alpha_o + \omega_o(t - t_o) + \frac{1}{2}\gamma(t - t_o)^2 \qquad y \qquad \omega_{(t)} = \omega_o + \gamma(t - t_o).$$

Con la excepción de la trayectoria circular, de las unidades y que, si se plantea problemas de encuentro, estos pueden repetirse varias veces en cada vuelta sobre la circunferencia, el tratamiento es análogo al del movimiento rectilíneo. Es conveniente introducir algunos conceptos generales, que luego se extienden a los procesos periódicos y las ondas.

Se llama *período* T al tiempo que requiere el movimiento circular en realizar una vuelta completa. Se llama *frecuencia* ν (nu) o f al número de vueltas por unidad de tiempo. Es inmediato observar que el período es recíproco de la frecuencia.

$$f = 1/T$$

Para encontrar una relación entre el período y la velocidad angular, basta observar que una vuelta completa equivale a 360° o 2π radianes. Si dividimos la vuelta completa por la velocidad angular, es decir, la rapidez con que gira en MCU, tendremos el período

$$T = \frac{2\pi}{\omega}, \text{así como la frecuencia } f = \frac{\omega}{2\pi}.$$

El perímetro recorrido en una vuelta completa vale $L = 2\pi r$ y el tiempo en recorrerlo vale T, de modo que tenemos una forma de determinar la velocidad "tangencial", definida en módulo como el arco de circunferencia recorrido en el tiempo empleado en recorrerlo, que no es sino la velocidad definida en movimientos rectilíneos pero referida a la que tiene en cada punto de la trayectoria y que conservaría en MRU si se desprendiese de la trayectoria circular para seguir desplazándose sobre la tangente a la trayectoria, y se la llama "tangencial" para diferenciarla de la velocidad angular en el tratamiento del movimiento circular, es

$$v = \frac{L}{T} = r\omega$$

Del mismo modo la aceleración "tangencial" será $a = r\gamma$.

El aspecto más singular es la necesidad de definir lo que se conoce como *aceleración centrípeta* a_c. Si bien la velocidad angular es constante en un MCU, la dirección de la velocidad, en tanto parámetro vectorial, cambia a medida que el móvil se desplaza sobre la trayectoria. Por lo tanto la velocidad cambia y se trata de un movimiento acelerado. Pero la aceleración no modifica el módulo del vector velocidad sino sólo su dirección, por lo que se trata de una aceleración perpendicular a la velocidad y dirigida hacia el centro de la trayectoria: de allí "centrípeta".

El módulo del vector velocidad puede determinarse observando que la velocidad tangencial vale $v = \Delta s/\Delta t$, el arco barrido por unidad de tiempo. Aquí el término "tangencial" otra vez sólo hace referencia a diferenciar la velocidad propiamente dicha de lo que hemos definido como velocidad angular cuando, en el contexto de referencia, podría haber confusión. El cambio del vector velocidad es perpendicular a la trayectoria y la relación entre el cambio de velocidad y el valor del módulo de la velocidad equivale a la proporción entre el arco barrido y el radio de la trayectoria. De allí que se puede escribir $\Delta v/v = \Delta s/r$ y, dividiendo en ambos miembros por el tiempo $a_s/v = v/r$ o

$$a_{\boldsymbol{c}} = \frac{v^2}{r}.$$

Como $v = \omega r$ también puede expresarse

$$a_c = \omega^2 r$$

Si además de una aceleración centrípeta, normal a la trayectoria y responsable del cambio de dirección, hubiese una aceleración sobre la trayectoria, tal aceleración tangencial estaría asociada a una variación de la velocidad tangencial y de la velocidad angular. La aceleración tangencial repercute sobre la aceleración centrípeta en forma cuadrática generando trayectorias que se apartan de la circularidad.

(Paréntesis) Producto vectorial y escalar

Un modo particular de operar con vectores se llama *producto vectorial*. A modo de justificación de esta nueva forma de operar, tomemos dos vectores en el plano $(x;\ y)$, $\boldsymbol{A} = (A_x; A_y; 0)$ y $\boldsymbol{B} = (B_x; B_y; 0)$, que forman entre sí un ángulo $\alpha = \alpha_B - \alpha_A$. Pidamos un operador vectorial que genere un vector (en realidad un pseudo-vector porque depende de la orientación del espacio, que para nosotros es la terna derecha) en el eje perpendicular al plano donde se encuentran **A** y **B** de módulo $M_z = ABsen(\alpha)$. Este producto será máximo cuando el ángulo sea recto (α=π/2=90º) y será nulo cuando los vectores sean colineales. Como el ángulo α es una diferencia que, usando identidades trigonométricas queda,

$$sen(\alpha) = sen(\alpha_B - \alpha_A) = sen(\alpha_B).cos(\alpha_A) - cos(\alpha_B).sen(\alpha_A).$$

Pero

$$sen(\alpha_B) = \frac{B_y}{B},\ \ cos(\alpha_A) = \frac{A_x}{A},\ \ cos(\alpha_B) = \frac{B_x}{B}\ \ y\ \ sen(\alpha_A) = \frac{A_y}{A},$$

reemplazando en la expresión de producto vectorial, vemos que

$$M_z = AB\left(\frac{B_y}{B}\frac{A_x}{A} - \frac{B_x}{B}\frac{A_y}{A}\right) = A_x B_y - A_y B_x$$

Lo mismo puede obtenerse para las otras coordenadas,

$$M_x = A_y B_z - A_z B_y \qquad M_y = A_z B_x - A_x B_z$$

La definición formal excede los límites de lo propuesto, sólo se pretende una justificación que dé un sentido "físico" a la expresión. Para facilitar la operación y como regla mnemotécnica, nótese la circularidad de los índices en el producto positivo siguiendo el orden xyz, yzx y zxy, y la inversión tras el signo de diferencia.

Dejamos la teoría que justifica esto para para otras lecturas más formales en el ámbito del análisis vectorial y de las matemáticas en general. El producto vectorial tiene varias propiedades muy especiales. Entre ellas, que es anti conmutativo. Se sugiere probar qué ocurre si calculamos $\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}$ y luego $\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{A}$. Se verá que $\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} = -\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{A}$.

Notemos además que a partir del producto de dos vectores hemos obtenido un tercer vector perpendicular a los dos que se multiplican. Para visualizarlo, escribamos a $\boldsymbol{A}$ como un vector en el eje "x" y a $\boldsymbol{B}$ como un vector en el eje "y", es decir $\boldsymbol{A} = (A; 0; 0)$ y $\boldsymbol{B} = (0; B; 0)$. Utilizando la "definición" propuesta, se obtiene que **A×B**=(0;0;AB). Es un vector en el eje "z". Es además positivo, dirigido de acuerdo con la regla del tirabuzón o de la mano derecha. Esta regla establece que las rotaciones anti horarias son positivas, como las que se logran abriendo una canilla o cerrando los dedos de la mano derecha en sentido anti horario y observando la dirección hacia la que apunta el pulgar. Otra de las peculiaridades es que el producto vectorial de dos vectores paralelos es nulo y que esto es una expresión algebraica de la condición de paralelismo. Esta definición y resultado es consistente con nuestro sistema de coordenadas *terna derecha* por la orientación de los ejes $(x; y; z)$, es decir, con la mano derecha abierta apuntando en dirección positiva del eje "x", cerrando la mano en dirección positiva al eje "y", el pulgar apunta en la dirección positiva del eje "z". Este eje "z" tendría un sentido opuesto si usamos la mano izquierda o *terna izquierda*.

El *producto escalar* entre vectores se define de un modo muy general dado que caracteriza las propiedades métricas del espacio. Para nuestro objetivo, nos limitaremos a la definición dada a partir de dos vectores $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$ expresados en sus componentes

$$\boldsymbol{A} = (A_x; A_y; A_z) \qquad \boldsymbol{B} = (B_x; B_y; B_z)$$

Se define

$$\boldsymbol{A}.\boldsymbol{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z = AB cos(\widehat{AB})$$

como "producto escalar" entre $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$. Esta expresión ofrece una medida de la proyección de un vector sobre la recta en la que se describe el otro. Así, si los dos vectores son colineales, el producto escalar es máximo, será positivo si tienen el mismo sentido y negativo si tienen sentido opuesto. Si los dos vectores son perpendiculares, el coseno y el producto escalar será nulo. Notemos las propiedades complementarias con respecto a las del producto vectorial. Podemos utilizarlo para calcular el ángulo entre dos vectores cualesquiera si se pasa dividiendo el producto de los módulos. Si sólo se divide por uno de los módulos, se obtiene la proyección de un vector sobre el otro, así

$$P_{\boldsymbol{B}|\boldsymbol{A}} = \frac{\boldsymbol{A}.\boldsymbol{B}}{A} = Bcos(\widehat{AB})$$

es la proyección del vector $\boldsymbol{B}$ sobre el vector $\boldsymbol{A}$. También nos sirve para definir el *módulo o valor absoluto* de un vector como

$$|\boldsymbol{A}| = A = \sqrt{\boldsymbol{A}.\boldsymbol{A}} = \sqrt{\boldsymbol{A^2}}$$

Y puede utilizarse para medir la distancia entre dos vectores

$$d = \sqrt{(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B})^2}$$

También suele notarse

$$\boldsymbol{A}.\boldsymbol{B} = \langle \boldsymbol{A}|\boldsymbol{B} \rangle$$

Velocidad angular

Puede resultar extraño que un vector llamado *producto vectorial* sea perpendicular al plano definido por los otros dos vectores, por lo que también se dice que es un *producto externo* al plano donde se encuentran los dos vectores que lo originan, pero esto es muy útil para interpretar la velocidad angular. También se dice que es un *pseudovector* porque su orientación depende de la elección derecha o izquierda de la terna que define el sistema de coordenadas. Basta observar que para "ver" un movimiento circular, esto es, una circunferencia descripta por la trayectoria del móvil, se requiere observarlo desde un eje perpendicular al plano de rotación. Desde cualquier otra perspectiva veríamos algo más parecido a una elipse y, si nos ubicamos en el plano de rotación, ni siquiera veríamos un movimiento circular sino sólo una oscilación. Es precisamente esta equivalencia entre un movimiento oscilatorio en ascenso y descenso visto desde el plano de rotación, a un movimiento circular visto desde el eje perpendicular, lo que justifica el uso de herramientas matemáticas, diseñadas para este tipo de movimiento, en procesos oscilatorios y ondas.

En primer lugar, observemos que podemos usar el producto vectorial para escribir la velocidad angular. En la expresión $\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}$ veremos que, si para simplificar el desarrollo y facilitar la interpretación, tomamos $\boldsymbol{\omega} = (0; 0; \omega)$, sólo sobre el eje "z" mientras el radio de giro $\boldsymbol{r} = (r_x; r_y; 0)$ se ubica en el plano $(x; y)$, el producto vectorial se expresa en la forma

$$(-r_y\omega;\ r_x\omega;\ 0) = \omega(-rsen(\alpha);\ rcos(\alpha);\ 0) = \omega r(-sen(\alpha);\ cos(\alpha);\ 0).$$

Es fácil verificar que se obtienen las componentes de la velocidad tangencial a la trayectoria. Por lo tanto podemos escribir $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}$ como expresión vectorial de la velocidad tangencial a partir de la angular.

Si, por otra parte, escribimos $\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{v}$, la expresión $\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{v} = \boldsymbol{r} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r})$ es un doble producto vectorial. El producto dentro del paréntesis, en forma general queda

$$\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} = (\omega_y r_z - \omega_z r_y;\ \omega_z r_x - \omega_x r_z;\ \omega_x r_y - \omega_y r_x)$$

Si se pre multiplica por el vector posición, se obtiene la expresión en coordenadas del triple producto vectorial,

$$\mathbf{r} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) = (r_y\omega_x r_y - r_y\omega_y r_x + r_z\omega_x r_z - r_z\omega_z r_x;\ r_z\omega_y r_z - r_z\omega_z r_y + r_x\omega_y r_x - r_x\omega_x r_y;\ r_x\omega_z r_x - r_x\omega_y r_z + r_y\omega_z r_y - r_y\omega_y r_z)$$

Este vector puede escribirse en la forma

$$\mathbf{r} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) = \left(\left(r_y^2 + r_z^2\right)\omega_x - r_x\left(\omega_y r_y + \omega_z r_z\right); (r_x^2 + r_z^2)\omega_y - r_y(\omega_x r_x + \omega_z r_z); (r_x^2 + r_y^2)\omega_z - r_z(\omega_x r_x + \omega_y r_y)\right)$$

Tomemos sólo la primera componente para ver que puede escribirse sumando y restando un término del siguiente modo

$$\left(r_y^2 + r_z^2\right)\omega_x - r_x\left(\omega_y r_y + \omega_z r_z\right) + r_x^2\omega_x - r_x\omega_x r_x = ((r_y^2 + r_z^2 + r_x^2)\omega_x - r_x(\omega_x r_x + \omega_y r_y + \omega_z r_z)$$

El primer paréntesis contiene el cuadrado del módulo del vector posición, que escribiremos simplemente r^2 (recordemos que es el producto escalar del vector posición $\boldsymbol{r}$ consigo mismo), y el segundo paréntesis es lo que hemos definido como *producto escalar* $\boldsymbol{\omega.r}$, cuyo resultado es un número o escalar.

Esto puede hacerse también con las otras dos componentes del triple producto vectorial para obtener la expresión

$$\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{v} = \boldsymbol{r} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}) = \left(r^2\omega_x - r_x\boldsymbol{\omega.r}; r^2\omega_y - r_y\boldsymbol{\omega.r}; r^2\omega_z - r_z\boldsymbol{\omega.r}\right) = r^2\boldsymbol{\omega} - (\boldsymbol{\omega.r})\boldsymbol{r} = (\boldsymbol{r.r})\boldsymbol{\omega} - (\boldsymbol{r.\omega})\boldsymbol{r}$$

En el caso particular en que los vectores $\boldsymbol{\omega}$ y $\boldsymbol{r}$ son perpendiculares, el producto escalar es nulo. En toda rotación pura en torno a un eje fijo, el producto propuesto se limita a la expresión $r^2\boldsymbol{\omega}$, de modo que puede escribirse $\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{v} = r^2\boldsymbol{\omega}$ o bien,

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{v}}{r^2}$$

Un análisis similar conduce a expresar la aceleración centrípeta como un doble producto vectorial.

$$\boldsymbol{a_c} = \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}) = -\omega^2\boldsymbol{r} + (\boldsymbol{r.\omega})\boldsymbol{\omega} = (\boldsymbol{\omega.r})\boldsymbol{\omega} - (\boldsymbol{\omega.\omega})\boldsymbol{r}$$

Nuevamente, si la rotación es plana con **ω** y **r** perpendiculares, el producto escalar es nulo y $\boldsymbol{a_c} = -\omega^2\boldsymbol{r}$.

Movimientos relativos

El problema de los movimientos relativos expresa la situación más general en que un sistema de coordenadas al que se refiere la observación de un proceso físico pueda estar a su vez en movimiento. El estado de movimiento del sistema de referencia puede ser altamente complejo, pero en una primera aproximación nos limitaremos a sistemas de referencia en movimiento rectilíneo uniforme o *sistemas inerciales*.

Sea $O(x; y; z)$ una manera de hacer referencia a un sistema de coordenadas de origen "O" y ejes (x, y, z), y sea $O'(x'; y'; z')$ otro sistema de coordenadas en movimiento relativo con respecto a O con velocidad constante $\boldsymbol{V}$, entendida como $\boldsymbol{V_{O'|O}}$, es decir, velocidad de O' con respecto a O. Sea $\boldsymbol{r}$ el vector que define la posición de un punto en el espacio que, visto desde O, esto es, referenciado al sistema O, lo escribimos $\boldsymbol{r_O}$ o simplemente $\boldsymbol{r}$, y referenciado a O' lo escribimos $\boldsymbol{r_{O'}}$ o simplemente $\boldsymbol{r}'$. Por simple suma vectorial, $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{OO}' + \boldsymbol{r}'$, o bien, en notación de sistemas de coordenadas queda $\boldsymbol{r_O} = \boldsymbol{O'_O} + \boldsymbol{r_{O'}}$ (La posición de $\boldsymbol{r}$ vista desde O es igual a la posición de O' vista desde O más la posición de $\boldsymbol{r}$ vista desde O'). Si se divide por el intervalo de tiempo Δt, se obtiene

$$\boldsymbol{V_r}|_o = \boldsymbol{VO'}|_{\boldsymbol{O}} + \boldsymbol{V_r}|_{\boldsymbol{O'}}$$

(la velocidad de $\boldsymbol{r}$ vista desde O es la velocidad de O' vista desde O más la velocidad de $\boldsymbol{r}$ vista desde O'). Esta expresión se conoce como *ley de adición de velocidades*.

Las aplicaciones de esta ley tratan de movimientos referidos a sistemas de coordenadas móviles o bien de composición de movimientos. Tal es el típico caso de un barco que se desplaza en un río o un avión que se mueve en contra, a favor o transversalmente al viento.

Por ejemplo, si un pescador está en la costa y ve pasar un barco río abajo con una velocidad de 10m/s con respecto al río, cuya corriente se mueve a 5m/s y sobre el barco un marino camina a 1m/s, la velocidad del marino con respecto al pescador en la costa vale 16m/s=5m/s+10m/s+1m/s, es decir, la velocidad de la corriente con respecto a la costa más la velocidad del barco con respecto a la corriente más la velocidad del marino con respecto al barco. Pero a su vez el pescador se mueve a -16m/s con respecto al marino, que a sí mismo se considera en reposo.

Si un bote debe atravesar un río con una corriente de 5m/s, la distancia entre costas vale 100m y la velocidad del bote vale 2m/s, durante los 50s que le lleva al bote cruzar el río, la corriente lo ha desplazado 250m río abajo. Si quiere atravesar perpendicularmente a la costa vecina, su velocidad tendrá que superar la de la corriente, de modo que pueda descomponer su vector velocidad compensando la corriente y, por otra parte, cruzar el río.

El caso particular de un avión que vuela con velocidad c entre dos localidades separadas una distancia d primero a favor del viento, que tiene velocidad v, y luego debe volver en contra del viento, es particularmente instructivo. En principio puede pensarse que durante el vuelo de ida *a favor* del viento, el tiempo de vuelo disminuye dado que la velocidad del avión se suma a la del viento $c + v$, mientras que de vuelta el tiempo de vuelo debe ser mayor con viento *en contra* y velocidad relativa al suelo de valor $v - c$, de modo que los tiempos deben compensarse. Pero al hacer un cálculo del tiempo de ida, vemos que $t_i = \frac{d}{c+v}$ y el tiempo de vuelta vale $t_v = \frac{d}{c-v}$. Es claro que el tiempo de vuelta es mayor que el de ida, pero si no hubiese viento $v = 0$, el tiempo total de vuelo valdría $t_o = \frac{2d}{c}$, mientras que la suma de nuestros tiempos $t_i + t_v$ vale

$$t_i + t_v = \frac{d}{c+v} + \frac{d}{c-v} = \frac{2dc}{c^2 - v^2} = \frac{\frac{2d}{c}}{1 - v^2/c^2} = \frac{t_o}{1 - v^2/c^2}$$

Si el vuelo se realizara transversalmente al viento, el avión debería compensar la velocidad del viento orientando el vuelo y usando parte de su velocidad, la componente paralela al viento para ello, y la componente transversal al viento para desplazarse. La velocidad del avión vale c y la velocidad del viento transversal vale v. La componente paralela al viento debe valer $-v$. Por lo tanto la componente de velocidad del avión debe formar un ángulo α tal que $c.cos(\alpha) = v$. Pero la velocidad del avión que le permitirá volar hasta la otra localidad será $v.sen(\alpha)$ de modo que la distancia total d será recorrida en un tiempo t, relacionados de acuerdo con la ecuación $d = v.sen(\alpha).t$. Si escribimos

$$c^2 = v^2cos^2(\alpha) \quad y \quad \frac{d^2}{t^2} = v^2sen^2(\alpha)$$

Sumando las ecuaciones y recordando que $sen^2(\alpha) + cos^2(\alpha) = 1$, queda

$$c^2 + \frac{d^2}{t^2} = v^2$$

De donde

$$t = \frac{d}{c}\frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{t_o}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

Siendo t_o el tiempo de vuelo que tardaría sin viento. Un análisis comparable pero aplicado a un observador en movimiento relativo con respecto a otro, como si la localidad B se moviese con velocidad v con respecto a la localidad A, mientras el avión se reemplaza por una señal que viaja con la velocidad de la luz c, la misma para ambos observadores, conduce a las ecuaciones utilizadas por Michelson y Morley para determinar el movimiento de la Tierra por las variaciones direccionales de la velocidad de la luz, y a las ecuaciones de *dilatación temporal* de la Relatividad Especial, como veremos más adelante.

Principio de relatividad de Galileo

El llamado principio de relatividad de Galileo será enunciado de una manera más formal y precisa después de abordar la dinámica. En el marco de la cinemática, podemos plantear que la descripción de los movimientos conserva la forma de las ecuaciones $\boldsymbol{x}_{(t)}$ y $\boldsymbol{v}_{(t)}$ ante transformaciones de coordenadas entre sistemas en movimiento rectilíneo uniforme o, lo que es lo mismo, todos los sistemas inerciales son equivalentes para la descripción de los movimientos. Esto nos dice que las propiedades de los movimientos están expresadas en la forma funcional de las ecuaciones que los describen y que esta forma es invariante por transformaciones de sistemas de coordenadas inerciales. Por lo tanto no es posible saber si un observador está en reposo o movimiento rectilíneo uniforme dado que todos los observadores son equivalentes para describir un movimiento, cualquiera fuese su naturaleza. En un sentido más filosófico, nos dice que hay una única realidad física y que todos los sistemas de coordenadas son igualmente válidos para su descripción. Si así no fuese, bien habría un único sistema privilegiado desde el cual describir los movimientos, o bien habría tantas *realidades* físicas como observadores. En un sentido experimental, no habría ninguna experiencia repetible bajo las *mismas condiciones* dado que éstas involucrarían la posición, el tiempo, la velocidad y la orientación del experimento.

El centro del universo se trasladó de la Tierra al Sol, el principio de relatividad, coronando la revolución copernicana, nos dice que simplemente no existe.

Parte III: Relatividad

Acerca de la noción de tiempo

Volvamos un poco más sobre este problema. Cuando tratamos de abordar la noción de *tiempo*, en la propia expresión a través de un sustantivo está implícita la idea objetiva de tiempo como “algo” que de algún modo existe por sí mismo y pre existe a los sucesos. Más un tiempo platónico que una construcción mental. Y ésta ha sido la noción de tiempo en la que se ha apoyado la mecánica newtoniana. Además de ser un tiempo-objeto, es el mismo y uniforme en todo el universo.

Para Platón el tiempo tuvo un comienzo junto con el cielo. Aristóteles asimila al tiempo como una medida del movimiento y, como al pensar en un comienzo, se piensa en un *antes*, el tiempo tuvo que existir siempre tanto como el movimiento y, si cesaran todos los cambios, no habría tiempo. En el marco de la creación divina, el tiempo real tuvo un comienzo junto con el primer impulso dado al movimiento del universo, mientras que el tiempo imaginario es algo que podemos concebir en nuestra mente como un *antes* pero que tiene existencia real. Para la escolástica medieval, la filosofía de la naturaleza trata de substancias con cantidad o cualidad, la sustancia con cantidad puede ser continua o discreta, la continua puede ser permanente o sucesiva: el tiempo es una substancia cuantitativa continua sucesiva, y su estudio queda enmarcado en la filosofía pura más que en la filosofía natural, relativa a los fenómenos. Para Barrow el tiempo preexiste al mundo, fue creado por Dios y fluye por su propia naturaleza, similar a la divina, independiente del universo y de la mente. Para Leibnitz, su contemporáneo, el tiempo era una entidad ideal que permitía establecer una relación de orden y eventualmente de causalidad entre los sucesos. Leibnitz tenía así una concepción diferente, negaba el tiempo absoluto de Barrow y Newton considerando que, para pensar en un tiempo antes del primer cambio, debería existir algo que pudiera haber ocurrido pero no ocurrió, para lo que no existe ningún referente fáctico que no haya ocurrido antes del primer evento. Podría asociarse la noción de simultaneidad con la de interacción mientras que la sucesión temporal estaría vinculada con la integración temporal de las ecuaciones de movimiento.

Cuando se establece un proceso periódico para definir una medida de tiempo, en realidad se asume la periodicidad y la medida de tiempo resulta como consecuencia de tal asunción. Pensemos simplemente en un *tiempo subjetivo*, el tiempo de la espera, y miremos el reloj mientras esperamos, quizá de pie, incómodos, cansados… se trata de un tiempo que “no pasa nunca”, pero si estamos disfrutando del momento, el *mismo tiempo* pasa “más rápido”. Si eligiésemos una *unidad subjetiva* de tiempo, nuestro reloj adelantaría o atrasaría de acuerdo con nuestro estado de ánimo. Hasta podríamos definir una función que transforme el tiempo del reloj en nuestro *tiempo subjetivo* y la función inversa describiría la no periodicidad del reloj. En el ámbito de la psicofísica hemos referido a estudios acerca de la percepción del tiempo y hemos mencionado los desarrollados por Piaget en el ámbito de la psicología genética.

Podemos movernos en el espacio a voluntad, ir y volver, pero esto parece no estar permitido en el tiempo. No podemos volver al pasado o ir al futuro y regresar. Y sin embargo no hay nada en la mecánica clásica, tampoco en la cuántica ni en la relatividad especial que permita deducir esto. Sí en la termodinámica y en la relatividad general. Tanto es así que la simetría en los desplazamientos temporales, como veremos, justifica la conservación de la energía. Pero en la termodinámica hay una direccionalidad en los procesos temporales, expresada en un parámetro llamado "entropía", más claramente en la probabilidad de evolución de los estados macroscópicos. Por otra parte, en la relatividad general habría una irreversibilidad en la inmersión de la materia, la luz y la información en los agujeros negros.

Asumamos que el tiempo puede ser pensado como una forma de ordenar los acontecimientos en términos de antes, simultáneo y después, o bien ordenar eventos entre dos sucesos de referencia. Podemos remontarnos a la antigua Grecia usando parcialmente nuestras unidades. Pensar en una caravana mercantil que debía ser transportada a pie entre dos puntos separados por cien kilómetros hacia el norte, luego ir a otra localidad ubicada a cien kilómetros hacia el este, y volver al punto de partida. Dado que conocían la geometría (término de origen griego), y que desde la experiencia de transporte por tierra se sabe que puede recorrerse diez kilómetros por día, puede estimarse que se necesitarán diez días (diez soles) para llegar a la primera localidad al norte, otros diez para ir a la del este, y unos quince días para regresar (catorce días y unas horas). Todo ello dependerá del estado del terreno, por lo tanto del estado del tiempo meteorológico, y de eventuales acontecimientos inesperados. Lo que se ha hecho es ordenar sucesos en el tiempo tomando como referencia la marcha periódica del Sol.

El número ha sido puesto en términos de un suceso que se repite con uniformidad, esperable, del que no se duda. Puede ser el ciclo diurno, el ciclo anual, el ciclo de un péndulo o la oscilación de un átomo, pero al fin un ciclo estable que pueda usarse como referencia para asignar un número y una unidad cuando se haya establecido un patrón, sea el día, el año o el segundo.

En otras palabras, el tiempo, como medida, se ha definido a partir del movimiento, más precisamente sobre la base de una velocidad, los *diez kilómetros por día*, y numerado en términos de un evento periódico confiable. El tiempo de viaje, en la mente del mercader, fue obtenido de dividir la distancia que debía recorrer por la velocidad con la cual se movería, y expresado en una unidad de referencia. *Su* tiempo para ordenar acontecimientos no requiere de un tiempo absoluto que evoluciona uniformemente en todo el universo, sólo requiere de un número para acordar con un navegante que estará en el puerto esperando para la carga de su barco en forma *simultánea* con su regreso. Para establecer la simultaneidad sólo mirará el *mismo Sol* salir y entrar en el horizonte y contará el número de salidas y entradas.

Se trata de un problema de encuentro. En la formulación cinemática de las ecuaciones de movimiento se utiliza un parámetro t que se supone que *se mueve* uniformemente en forma independiente de los móviles, del mismo modo que el Sol sale y entra en forma independiente del mercader y el navegante. Pero el planteo del problema establece la simultaneidad de acontecimientos en términos de posiciones. Si el navegante da una vuelta a la Tierra en torno al ecuador terrestre hacia el oeste, es decir, hacia donde se pone el Sol, *sus* días serán más largos y a medida que gira en torno a la Tierra, habrá contado un día menos al volver al punto de partida. Cuando el navegante regrese al cabo de *sus* treinta y cinco días, *sus* treinta y cinco salidas y puestas de Sol, cada una más larga que un día normal dado que se desplaza hacia el oeste, habrán pasado treinta y seis días para el comerciante que regresa con su caravana, de modo que el encuentro no se dará. Si el navegante conoce este fenómeno y regresa al cabo de *sus* treinta y cuatro días, para el comerciante en tierra habrán pasado *sus* treinta y cinco días dándose el encuentro en tiempos *diferentes*. De modo que la simultaneidad de acontecimientos no requiere la coincidencia de tiempos sino eventualmente conocer la regla apropiada de transformación.

Hacia 1785 Coulomb halla una ley de atracción y repulsión de cargas eléctricas muy similar a la que Newton había propuesto para la gravitación cien años antes. En torno a 1820 Oersted muestra que el movimiento de cargas es responsable de los fenómenos magnéticos. Poco después Faraday prueba que los imanes móviles producen efectos eléctricos como corrientes en conductores. Progresivamente va configurándose la idea de *campo* como una propiedad que caracteriza el espacio, no ya la entidad absoluta e inmutable de Newton sino con propiedades cuantificables en términos de fenómenos eléctricos y magnéticos. Hacia 1860 fue Maxwell quien sintetizó los fenómenos eléctricos, magnéticos e inclusive los ópticos en ecuaciones relativas al *campo* como descripción del comportamiento y propiedades del espacio. De sus ecuaciones se dedujo la velocidad de la luz, constante en el espacio inmóvil. Se abrió un nuevo problema: la detección del movimiento de la Tierra en el espacio estático. Hacia finales del siglo XIX Michelson y Morley dedicaron grandes esfuerzos a medir cuidadosamente las variaciones de la velocidad de la luz para detectar el movimiento absoluto de la Tierra en el espacio quieto. Si bien lograron refinar con mucha precisión la medición de la velocidad de la luz, no detectaron ninguna variación, no importaba la dirección en que se la midiese, en el marco de las estrellas "fijas". La velocidad de la luz aparecía como una constante universal y límite máximo de velocidades alcanzables.

Por otra parte, la validez de las ecuaciones de Maxwell llevaba a ciertas contradicciones con el Principio de Relatividad. Así lo plantea Einstein en la introducción a "Sobre la Electrodinámica de Cuerpos en Movimiento". Escribe que "Es conocido que la electrodinámica de Maxwell –como se entiende la misma en la actualidad- en su aplicación a cuerpos en movimiento conduce a asimetrías, a las cuales parecen no adherirse los fenómenos. Piénsese, p. ej., en la interacción electrodinámica entre un imán y un conductor. *El fenómeno observable depende aquí sólo del movimiento relativo de imán y conductor; mientras que en el tratamiento habitual ambos casos, bien sea uno, o el otro de esos cuerpos el que se mueve, son estrictamente separables.* Si se mueve el imán y está quieto el conductor, aparece en el entorno del imán un campo eléctrico con un cierto valor de energía, el cual, en los lugares donde se encuentra partes del conductor, genera una corriente. Si está quieto el imán y se mueve el conductor, no aparece en el entorno del imán ningún campo eléctrico, y por el contrario aparece en el conductor una fuerza electromotriz, que no corresponde a ninguna energía, y que, empero, -a igualdad del movimiento relativo supuesto en ambos casos considerados-, produce unas corrientes de la misma magnitud y el mismo recorrido como en el primer caso las fuerzas eléctricas."[Einstein, 2005, p.95]

Destacamos en bastardilla el problema esencial, que el fenómeno *observable* depende sólo del movimiento relativo mientras que el tratamiento *teórico* es diferente según el estado *absoluto* de movimiento de imán o conductor. El fenómeno observable, es decir, la corriente inducida en el conductor, era el mismo independientemente de que se mueva uno u otro, pero la aparición de un campo en torno al conductor dependía del planteo teórico y, por lo tanto, de cuál de los dos, imán o conductor, se moviese. Es decir que la física elaborada por un observador que está en reposo con el conductor sería diferente de la elaborada por otro observador que esté en reposo con respecto al imán.

Y entonces propone la solución. En el segundo párrafo escribe….

Principio de Relatividad

"…que más bien son válidas las mismas leyes electrodinámicas y ópticas en los sistemas de coordenadas en que son válidas las mismas leyes mecánicas…. Queremos plantear esta suposición (cuyo contenido llamaremos en lo que sigue "Principio de la Relatividad") como hipótesis, y además introducir la hipótesis, sólo aparentemente incompatible con ella, de que la luz se propaga en el espacio vacío siempre con una velocidad determinada, independiente del estado de movimiento del cuerpo emisor…."

Llama *sistema en reposo* aquel en el que son válidas las leyes de Newton, es decir, un sistema inercial. En primer lugar aborda el problema de la definición de simultaneidad. Se ha asumido, por ejemplo, que el estado inicial de movimiento de cada móvil en los problemas de encuentro se describe en forma simultánea, pero asignar un tiempo a un evento es asumir la simultaneidad entre el evento y la indicación de tiempo en un reloj localmente situado junto con el evento. Así un evento A tiene un tiempo-A determinado por un reloj-A, mientras otro evento B tiene asociado un tiempo-B asignado por un reloj-B. Pero no se ha definido *un tiempo común* a A y B para determinar si ambos eventos son simultáneos. Si la velocidad de la luz fuese infinita, no habría inconveniente, pero al ser finita, como se sabía desde el siglo XVII, se requiere que se asuma que el tiempo que tarda en llegar la luz con la información del evento ocurrido en A hasta el lugar B es el mismo que tarda la luz con la información de la ocurrencia del evento B hasta la localización del evento A.

Einstein propone un método para definir simultaneidades. Una señal de luz sale de A, medido en A, al tiempo t_A. La señal se refleja en B al tiempo t_B medido en B. Llega nuevamente a A en el tiempo t'_A, medido en A. Los relojes en A y B corren sincronizados cuando

$$t_B - t_A = t'_A - t_B$$

(El tiempo de ida de A a B, medida la partida en A y la llegada en B, es el mismo que el de retorno de B a A, medida la partida en B y la llegada en A)

Si el reloj en A es sincrónico con B, B es sincrónico con A, y si además el reloj A es sincrónico con otro reloj C, el reloj B también será sincrónico con C. Se considera *el tiempo* de un evento al dado por el reloj local al evento, que corre sincrónicamente con otro reloj en otro sistema inercial tomado como referencia. Aquí debemos notar que, aunque los dos relojes *corran al mismo ritmo*, no quiere decir que den la misma indicación de tiempo del evento dado que uno es local con el evento en A y el otro está ubicado en una posición diferente y es local con el evento en B.

Se estipula además que la velocidad de la luz c dada por

$$c = \frac{2d_{\overline{AB}}}{t'_A - t_A}$$

es una constante universal, la misma para los dos sistemas A y B. En la ecuación $d_{\overline{AB}}$ expresa la distancia espacial entre A y B.

Sea entonces una varilla de longitud L que se mueve con velocidad v positiva a lo largo del eje “x” de un sistema inercial K. La longitud L de la varilla puede medirse sobre la varilla misma o sobre el sistema inercial como la distancia entre dos puntos en los que se encontraban sus extremos en un momento determinado. En los extremos de la varilla hay relojes que son sincrónicos con relojes ubicados en el sistema inercial. Sean estos extremos dos puntos A y B. Un rayo de luz parte de A en t_A y se refleja en B en t_B para volver a A en t'_A. Como la varilla se aleja de la señal de luz emitida por A durante la ida de A a B, el observador en el sistema inercial, supuesto en reposo, medirá un tiempo de ida

$$(t_B - t_A)_K = \frac{L}{c-v} \qquad \text{y de vuelta} \qquad (t'_A - t_B)_K = \frac{L}{c+v}$$

porque ahora el extremo A se acerca a la señal de luz que vuelve.

Mientras que el observador móvil k junto con la varilla mide un tiempo total o *tiempo propio* τ

$$\tau = (t_B - t_A)_k = \frac{2L}{c},$$

el observador desde el sistema inercial en reposo mide

$$(t'_A - t_A)_K = \frac{L}{c-v} + \frac{L}{c+v} = \frac{2Lc}{c^2 - v^2} = \frac{\frac{2L}{c}}{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{(t'_A - t_A)_k}{1 - \frac{v^2}{c^2}},$$

tiempo que difiere del medido desde el sistema inercial en movimiento. Por lo tanto, eventos simultáneos en un sistema no lo son en el otro. Puede verse que el tiempo que tarda en ir y volver la luz a lo largo de la varilla en movimiento, según el observador desde el sistema en reposo, es más largo que el que tarda en ir y volver la señal de luz emitida con el mismo fin de acuerdo con el sistema en movimiento junto con la varilla.

Se ha asumido aquí que la longitud de la varilla es la misma en los dos sistemas, pero se requiere establecer una ecuación de transformación entre tiempos medidos en uno y otro sistema de coordenadas. En el paradigma clásico, los dos tiempos eran equivalentes y no se requería una transformación, y las posiciones responden a las ecuaciones de transformación de Galileo.

$$\boldsymbol{x_K} = \boldsymbol{x_k} - \boldsymbol{V_{k|K}}.t \quad y \quad t_K = t_k$$

Para hacerlo supongamos un sistema de coordenadas K en reposo y otro sistema k en movimiento relativo uniforme con velocidad v a lo largo del eje “x” de K. Sean $(x; y; z; t)$ las coordenadas espacio-temporales de un suceso en K y las coordenadas $(\xi; \eta; \zeta; \tau)$ en el sistema k (conservamos la notación de Einstein en el trabajo original). Los ejes “x” y “ξ” son colineales, los ejes “y” y “z” son respectivamente paralelos a “η” y “ζ”. Buscamos una transformación para $\tau(x; y; z; t)$, el tiempo propio medido en el sistema k en movimiento, en función de las coordenadas en el sistema K en reposo.

Esta transformación nos daría el tiempo en el sistema móvil medido en el sistema en reposo, es decir, $\tau_{k|K}$, que notaremos simplemente τ mientras que el tiempo propio en el sistema en reposo medido en el sistema en reposo K será $t_{K|K}$, notado simplemente t. Lo mismo es válido para las coordenadas espaciales.

Supongamos que el observador en k emite una señal de luz desde su origen de coordenadas en un tiempo τ_o hasta un punto x' sobre su eje "ξ", coincidente con un punto x en el eje "x" del sistema K. El observador en k dirá que tarda un tiempo τ_1 en llegar desde el origen a x', y que retorna al tiempo τ_2 nuevamente al origen tras reflejarse. Como admite la constancia de la velocidad de la luz en su sistema k, dirá que tarda lo mismo en ir y volver, de modo que el tiempo en llegar a x' será

$$\tau_1 = \frac{\tau_o + \tau_2}{2}$$

Sin embargo el observador en K medirá tiempos de emisión t_o, llegada a x' en

$$t_1 = t_o + \frac{x'}{c-v}$$

y de retorno al origen en

$$t_2 = t_o + \frac{x'}{c-v} + \frac{x'}{c+v}$$

Escribiendo la igualdad de arriba como función de las coordenadas medidas en K se obtiene

$$\left(\frac{1}{2}\right)\left[\tau_{(0;0;0;t_o)} + \tau_{(0;0;0;t_2)}\right] = \tau_{(x';0;0;t_1)}$$

Si escribimos a t_o como un tiempo t genérico medido en K y reemplazamos por los correspondientes valores para t_1 y t_2, tenemos

$$\left(\frac{1}{2}\right)\left[\tau_{(0;0;0;t)} + \tau_{\left(0;0;0;t+\frac{x'}{c-v}+\frac{x'}{c+v}\right)}\right] = \tau_{(x';0;0;t+\frac{x'}{c-v})}$$

Diferenciando las dos expresiones para puntos infinitesimales en x' (dx') y en t (dt), tenemos

$$\left(\frac{1}{2}\right)\frac{\partial\tau}{\partial t}dt_{iv} = \frac{\partial\tau}{\partial x'}dx' + \frac{\partial\tau}{\partial t}dt_i$$

donde dt_{iv} indica el diferencial de tiempo en ida y vuelta y dt_i el diferencial de tiempo en ida. Reemplazando por las variaciones expresadas en términos de dx', queda

$$\left(\frac{1}{2}\right)\frac{\partial\tau}{\partial t}\left[\frac{1}{c-v} + \frac{1}{c+v}\right]dx' = \frac{\partial\tau}{\partial x'}dx' + \frac{\partial\tau}{\partial t}\left[\frac{1}{c-v}\right]dx'$$

Y entonces

$$(ec.1) \quad \left(\frac{1}{2}\right)\left[\frac{1}{c-v}+\frac{1}{c+v}\right]\frac{\partial\tau}{\partial t}=\frac{\partial\tau}{\partial x'}+\left[\frac{1}{c-v}\right]\frac{\partial\tau}{\partial t}$$

Luego

$$\frac{\partial\tau}{\partial x'}+\left\{\left[\frac{1}{c-v}\right]-\left(\frac{1}{2}\right)\left[\frac{1}{c-v}\right]-\left(\frac{1}{2}\right)\left[\frac{1}{c+v}\right]\right\}\frac{\partial\tau}{\partial t}=0$$

O

$$\frac{\partial\tau}{\partial x'}+\left\{\left[\left(\frac{1}{2}\right)\left[\frac{1}{c-v}\right]-\left(\frac{1}{2}\right)\left[\frac{1}{c+v}\right]\right]\right\}\frac{\partial\tau}{\partial t}=0$$

$$\frac{\partial\tau}{\partial x'}+\left(\frac{1}{2}\right)\left\{\left[\frac{1}{c-v}\right]-\left[\frac{1}{c+v}\right]\right\}\frac{\partial\tau}{\partial t}=0$$

$$\frac{\partial\tau}{\partial x'}+\left(\frac{1}{2}\right)\left[\frac{2v}{c^2-v^2}\right]\frac{\partial\tau}{\partial t}=0$$

$$\frac{\partial\tau}{\partial x'}+\left[\frac{v}{c^2-v^2}\right]\frac{\partial\tau}{\partial t}=0$$

Si la barra estuviese colocada paralela al eje “y” de dimensión y’, como la luz tarda en ir y volver un tiempo dado por $t=y'/\sqrt{c^2-v^2}$ tanto a la ida como a la vuelta, según vimos en nuestro planteo del vuelo de los aviones al tratar sobre movimientos relativos, tendríamos, reescribiendo la ec. 1

$$\left(\frac{1}{2}\right)\left[\frac{1}{\sqrt{c^2-v^2}}+\frac{1}{\sqrt{c^2-v^2}}\right]\frac{\partial\tau}{\partial t}=\frac{1}{\sqrt{c^2-v^2}}\frac{\partial\tau}{\partial t}=\frac{\partial\tau}{\partial y'}+\frac{1}{\sqrt{c^2-v^2}}\frac{\partial\tau}{\partial t}$$

Con lo cual $\partial\tau/\partial y'=0$ y lo mismo $\partial\tau/\partial z'=0$. Sólo queda la variación relativa a “x”.

A la ecuación diferencial planteada en derivadas con respecto a x' y a t proponemos una solución de la forma

$$\tau=\alpha_{(v)}\left[t-\frac{vx'}{c^2-v^2}\right]$$

donde α no depende de x' ni de t, porque estaría asignando un significado absoluto a la posición y al tiempo, pero puede depender de v como velocidad relativa.

Si se hace coincidir las referencias de tiempo en k y K, de modo que $\tau=0$ cuando $t=0$ y evitar un término aditivo que no altera la forma de las ecuaciones, para una señal de luz que parte a $t=0$ del origen en dirección de “x” y “ξ” creciente, será

$$\xi=c\tau$$

medido en k, pero por la relación entre τ y t, escribimos

$$\xi=c\alpha_{(v)}\left[t-\frac{vx'}{c^2-v^2}\right]$$

El tiempo, medido en el sistema K, será $t = x'/(c - v)$ dado que la luz viaja en el mismo sentido que k. Luego

$$\xi = c\alpha_{(v)}\left[\frac{x'}{c-v} - \frac{vx'}{c^2-v^2}\right] = c\alpha_{(v)}\left[\frac{x'(c+v)}{c^2-v^2} - \frac{vx'}{c^2-v^2}\right] = c\alpha_{(v)}x'\left[\frac{c+v-v}{c^2-v^2}\right]$$

$$\xi = \frac{\alpha_{(v)}c^2x'}{c^2-v^2}$$

En el eje "y" será $t = y'/\sqrt{c^2-v^2}$ pero $x' = 0$, luego

$$\eta = c\alpha_{(v)}\frac{y'}{\sqrt{c^2-v^2}} = \frac{\alpha_{(v)}y'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \quad y \quad \zeta = c\alpha_{(v)}\frac{z'}{\sqrt{c^2-v^2}} = \frac{\alpha_{(v)}z'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

Sustituyendo x' por $x' = x - vt$ en las coordenadas de K

$$\tau = \alpha_{(v)}\left[t - \frac{v(x-vt)}{c^2-v^2}\right] = \alpha_{(v)}\frac{[tc^2 - tv^2 - vx + tv^2]}{c^2-v^2} = \alpha_{(v)}\left[\frac{1}{1-\frac{v^2}{c^2}}\right]\left[t - \frac{vx}{c^2}\right]$$

$$\xi = \alpha_{(v)}\left[\frac{1}{1-\frac{v^2}{c^2}}\right](x - vt)$$

$$\eta = \alpha_{(v)}\frac{y}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

$$\zeta = \alpha_{(v)}\frac{z}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

Sea ahora un sistema K^* que se mueve con velocidad $-v$ con respecto a k. Es claro que K^* está en reposo con respecto a K. Las ecuaciones de transformación para pasar de k a K^* son

$$t^* = \frac{\alpha_{(-v)}\left[\tau + \frac{v\xi}{c^2}\right]}{1-\frac{v^2}{c^2}} = t$$

$$x^* = \alpha_{(-v)}\frac{[\xi + v\tau]}{1-\frac{v^2}{c^2}} = x$$

$$y^* = \alpha_{(-v)} \frac{\eta}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = y$$

$$z^* = \alpha_{(-v)} \frac{\zeta}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = z$$

Pero

$$\eta = \alpha_{(v)} \frac{y}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \qquad y \qquad y^* = y = \alpha_{(-v)} \frac{\eta}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Entonces

$$y = \frac{\alpha_{(-v)}\alpha_{(v)}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}^2} y$$

$$1 = \frac{\alpha_{(-v)}\alpha_{(v)}}{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

$\alpha_{(v)}$ no puede ser una función impar porque el producto no podría ser positivo, y tampoco puede depender la transformación del signo de v porque depende de las velocidades relativas. Luego

$$\alpha_{(v)} = \alpha_{(-v)} = \alpha_{(v)}^2 = 1 - \frac{v^2}{c^2}$$

con lo que

$$\alpha_{(v)} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

y las ecuaciones quedan

$$\tau = \frac{t - \frac{vx}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \qquad t = \frac{\tau + \frac{v\xi}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$\xi = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \qquad x = \frac{\xi + v\tau}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$\eta = y \qquad y = \eta$$

$$\zeta = z \qquad z = \zeta$$

como transformación de coordenadas en sistemas en movimiento relativo uniforme. La columna derecha representa la transformación inversa, es decir de $\tau_{k|k}$ a $t_{K|k}$.

Para verificar que todos los observadores registrarían la misma velocidad de la luz, podemos imaginar una señal de luz como un frente de onda esférica emitido desde una fuente pero medido en las coordenadas del sistema K y del sistema k. En el primero, el frente de onda esférico responde a las coordenadas

$$x^2 + y^2 + z^2 = c^2t^2$$

Y en el sistema k

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = c^2\tau^2$$

Usando las ecuaciones de transformación

$$\left[\frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}\right]^2 + y^2 + z^2 = c^2\left[\frac{t - \frac{vx}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}\right]^2$$

$$\frac{x^2 - 2vxt + v^2t^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}} + y^2 + z^2 = c^2\frac{t^2 - \frac{2vxt}{c^2} + \frac{v^2x^2}{c^4}}{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

$$\frac{x^2 - 2vxt + v^2t^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}} + y^2 + z^2 = \frac{c^2t^2 - 2vxt + v^2x^2/c^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

$$(x^2 - 2vxt + v^2t^2) + \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)y^2 + \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)z^2 = c^2t^2 - 2vxt + \frac{v^2x^2}{c^2}$$

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2vxt + v^2t^2 - \frac{v^2}{c^2}y^2 - \frac{v^2}{c^2}z^2 = c^2t^2 - 2vxt + \frac{v^2x^2}{c^2}$$

$$v^2t^2 - \frac{v^2}{c^2}y^2 - \frac{v^2}{c^2}z^2 = \frac{v^2x^2}{c^2}$$

$$v^2t^2c^2 = v^2x^2 + v^2y^2 + v^2z^2$$

$$c^2t^2 = x^2 + y^2 + z^2,$$

expresión similar a la observada desde K. Ambos observadores registran la misma propagación del frente de onda independientemente de su estado de movimiento.

Contracción de longitudes y dilatación de tiempos

Si consideramos un cuerpo rígido esférico en el sistema k que se mueve con velocidad v con respecto a un sistema en reposo K, el observador desde k verá que las coordenadas que se escriben en su sistema responden a la ecuación implícita de la esfera

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = r^2$$

mientras que expresado en el sistema K se medirá las coordenadas

$$\frac{x^2}{1-\frac{v^2}{c^2}}+y^2+z^2=r^2$$

Cuando $y=z=0$, será $x=r\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$ lo que defina el radio de la esfera en la dirección del movimiento, por lo que K ve un elipsoide de radios

$$\left(r\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}};r;r\right)$$

contraído en la dirección del movimiento. De la misma manera, un observador en k verá una esfera en K con dimensiones

$$\frac{\xi^2}{1-\frac{v^2}{c^2}}+\eta^2+\zeta^2=r^2$$

es decir, una esfera de radios

$$\left(r\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}};r;r\right),$$

también contraída desde el sistema k, mientras que K describirá su propia esfera con la ecuación

$$x^2+y^2+z^2=r^2$$

La visualización de objetos con velocidades próximas a la de la luz presenta aspectos singulares en los que no entraremos, para lo que se remite a la consulta de la página web "Through Einstein's Eyes". Australian National University

Un reloj colocado en el sistema k que se mueve con velocidad v y ocupa la posición $x=vt$ en el sistema K, registra el tiempo de un proceso que, en el sistema K vale t, pero en el sistema k en movimiento uniforme, visto desde K, responde a la ecuación de transformación

$$\tau_{k|K}=\tau=\frac{\left(t-\frac{vx}{c^2}\right)}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}=\frac{t-\frac{vvt}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}=t\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}=t_{K|K}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$$

mientras que el mismo suceso, registrado desde k como ocurrido en K, desplazándose en un punto $\xi=-v\tau$ con respecto a k, da un tiempo

$$t_{K|k}=t=\frac{\tau+\frac{v\xi}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}=\frac{\tau+v(-v\tau)}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}=\tau\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}=\tau_{k|k}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$$

Tanto el sistema en reposo K como el sistema en movimiento uniforme k ve en el otro sistema que las longitudes se contraen en el sentido del movimiento y que lo relojes retrasan, que el tiempo transcurre en forma más lenta en el otro sistema. De modo que si se realiza un viaje que, en el mundo newtoniano duraría diez años, a una velocidad que sólo difiere un centésimo de la velocidad de la luz ($v = 0.99c$), tanto un sistema como otro vería que el tiempo empleado, en el mundo relativista, fue de un año. En el caso límite de una señal de luz, su tiempo propio es nulo, por lo que puede decirse que para la luz el tiempo no transcurre. Si una señal de luz fue emitida hace miles de años por una estrella, nos traerá la información de lo ocurrido en la estrella en el momento de la emisión porque nada habrá cambiado en la señal mientras viajaba a la velocidad de la luz, no habrá registro de *su tiempo de viaje*, al igual que quienes reciban nuestra luz en la otra estrella sólo sabrán lo que nos ocurría hace miles de años. Una señal de luz, vista desde cualquier sistema material, es atemporal, siempre está allí sin cambios, al menos hasta el momento en que interactúan y transfieren información.

Para interpretar la dilatación temporal suele referirse a una emisión de luz transversal a un observador en movimiento a una distancia d. El observador móvil verá un trayecto recto de ida y vuelta recorrido en un tiempo $2d/c$ como tiempo propio. El observador en reposo verá que la luz emitida sigue una trayectoria en ida y vuelta, como lo vimos en el problema de los aviones, y cubre una distancia $\frac{\frac{2d}{c}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ como las hipotenusas de los triángulos que debe recorrer la luz para el observador en movimiento (Figura 3.1). De modo que el trayecto y el tiempo medido será mayor, como si los relojes del sistema móvil funcionasen con más lentitud.

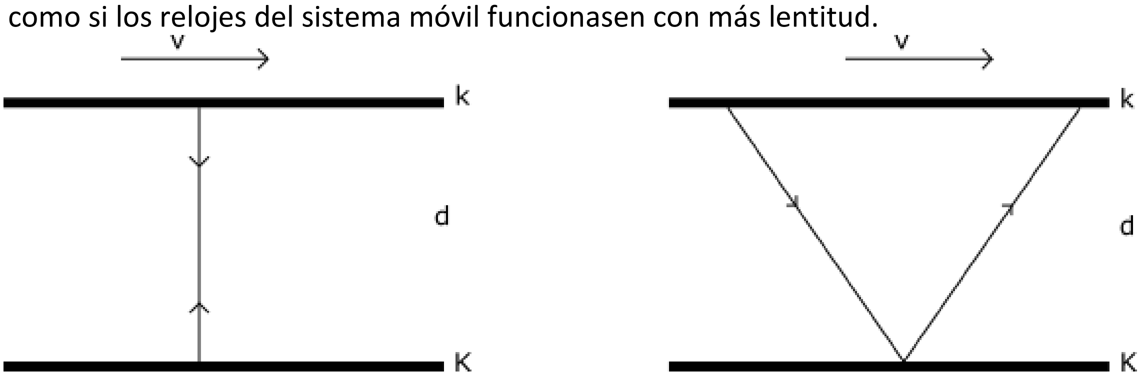

Fig. 3.1 Izquierda: Visto por el observador móvil k. Derecha: visto por el observador en reposo K

Para visualizar el efecto sobre la longitud, se suele referir a un observador ubicado en el punto medio de un objeto de longitud L cuando pasa otro objeto similar con velocidad v. Al coincidir los extremos, emiten sendos rayos de luz hacia dos observadores, uno móvil junto con su barra rígida y otro en reposo. El observador en reposo ubicado en el punto medio recibe las dos señales de luz en forma simultánea y asigna una longitud L, mientras que el que está en movimiento se acerca a la señal emitida en la parte delantera, que tardará $\frac{L/2}{c-v}$ en llegar, y se aleja de la señal trasera, que tarda $\frac{L/2}{c+v}$ en ser recibida, en total $\frac{\frac{L}{2c}}{1-\frac{v^2}{c^2}}$. Esto genera una diferencia de tiempos dada por $1-\frac{v^2}{c^2}$, pero el tiempo se ha dilatado en $\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$, de modo que la longitud tiene que haberse contraído en la misma proporción para que el producto dé el resultado medido en el tiempo.

Adición de velocidades y aceleraciones

Si hay un móvil en k con velocidad μ sobre su eje ξ de modo que las posiciones del móvil estén dadas por $\xi=\mu\tau$, si usamos las ecuaciones de transformación para describir el suceso desde K tenemos

$$\xi=\frac{x-vt}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}=\mu\frac{\left(t-\frac{vx}{c^2}\right)}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}=\mu\tau$$

Omitiendo ambas raíces

$$x-vt=\mu\left(t-\frac{vx}{c^2}\right)=\mu t-\mu\frac{vx}{c^2}$$

Agrupando x y t

$$x+\mu\frac{xv}{c^2}=vt+\mu t$$

y

$$x(1+\frac{v\mu}{c^2})=(v+\mu)t$$

o

$$x=\frac{v+\mu}{1+\frac{v\mu}{c^2}}t=ut$$

donde

$$u=\frac{v+\mu}{1+\frac{v\mu}{c^2}}$$

es la ley de adición de velocidades del sistema k con respecto a K, y del móvil en el sistema k.

Puede verse que si $\mu=c$,

$$u=\frac{v+c}{1+\frac{v}{c}}=\frac{(v+c)c}{v+c}=c$$

Es decir que si el móvil en k es una señal de luz, la velocidad de la señal también se verá con valor c desde el sistema K.

Podemos replantear el problema de un modo más general. Las ecuaciones de transformación de Lorentz, si escribimos $\gamma=1/\sqrt{1-v^2/c^2}$ son

$$x=\gamma(\xi+v\tau)\quad y=\eta\quad z=\zeta\quad \tau=\gamma\left(\tau+\frac{v\xi}{c^2}\right)$$

Y la velocidad de un móvil visto desde un sistema en reposo es

$$\boldsymbol{u} = \left(\frac{dx}{dt}; \frac{dy}{dt}; \frac{dz}{dt}\right)$$

Diferenciando las transformaciones de Lorentz

$$dx = \gamma(d\xi + vd\tau) \quad dy = d\eta \quad dz = d\zeta \quad dt = \gamma\left(d\tau + \frac{vd\xi}{c^2}\right)$$

Si escribimos para la coordenada "x"

$$u_x = \frac{dx}{dt} = \frac{\gamma(d\xi + vd\tau)}{\gamma\left(d\tau + \frac{vd\xi}{c^2}\right)} = \frac{\frac{d\xi}{d\tau} + v}{1 + \frac{v\frac{d\xi}{d\tau}}{c^2}} = \frac{\mu_x + v}{1 + \frac{\mu_x v}{c^2}}$$

Para la coordenada "y" y "z" queda

$$u_y = \frac{dy}{dt} = \frac{d\eta}{\gamma\left(d\tau + \frac{vd\xi}{c^2}\right)} = \frac{\mu_y}{1 + \frac{\mu_x v}{c^2}}$$

$$u_z = \frac{dz}{dt} = \frac{d\zeta}{\gamma\left(d\tau + \frac{vd\xi}{c^2}\right)} = \frac{\mu_z}{1 + \frac{\mu_x v}{c^2}}$$

Pasar del sistema k al sistema K requiere escribir

$$\mu_x = \frac{u_x - v}{1 - \frac{u_x v}{c^2}} \quad \mu_y = \frac{u_y}{1 - \frac{u_x v}{c^2}} \quad \mu_z = \frac{u_z}{1 - \frac{u_x v}{c^2}}$$

También podemos obtener las ecuaciones de transformación para la aceleración de un móvil, vista desde dos sistemas de coordenadas en movimiento relativo uniforme. Sea

$$\boldsymbol{a} = \frac{d\boldsymbol{u}}{dt} = \left(\frac{du_x}{dt}; \frac{du_y}{dt}; \frac{du_z}{dt}\right)$$

la aceleración de un móvil vista desde un sistema K en reposo y

$$\boldsymbol{\alpha} = \frac{d\boldsymbol{\mu}}{dt} = \left(\frac{d\mu_x}{dt}; \frac{d\mu_y}{dt}; \frac{d\mu_z}{dt}\right)$$

la aceleración vista desde el sistema k en movimiento uniforme a lo largo del eje "x". Si escribimos

$$\frac{du_x}{dt} = \frac{d\mu_x\left(1 + \frac{\mu_x v}{c^2}\right) - (\mu_x + v)\frac{d\mu_x v}{c^2}}{\gamma\left(d\tau + \frac{d\xi v}{c^2}\right)\left(1 + \frac{\mu_x v}{c^2}\right)^2} = \frac{d\mu_x}{d\tau}\frac{1 + \frac{\mu_x v}{c^2} - \frac{\mu_x v}{c^2} - \frac{vv}{c^2}}{\gamma\left(1 + \frac{\mu_x v}{c^2}\right)\left(1 + \frac{\mu_x v}{c^2}\right)^2}$$

Resulta

$$\frac{du_x}{dt} = \frac{\frac{d\mu_x}{d\tau}\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)}{\gamma\left(1 + \frac{\mu_x v}{c^2}\right)^3} = \frac{\frac{d\mu_x}{d\tau}}{\gamma^3\left(1 + \frac{\mu_x v}{c^2}\right)^3}$$

Para las tres coordenadas queda

$$a_x = \frac{\alpha_x}{\gamma^3\left(d\tau + \frac{\mu_x v}{c^2}\right)^3} \quad a_y = \frac{\alpha_y - \alpha_x\left(\frac{\mu_y v}{c^2}\right)}{\gamma^2\left(1 + \frac{\mu_x v}{c^2}\right)^2} \quad a_z = \frac{\alpha_z - \alpha_x\left(\frac{\mu_z v}{c^2}\right)}{\gamma^2\left(1 + \frac{\mu_x v}{c^2}\right)^2}$$

El espacio-tiempo

Tratemos de precisar en qué sentido se habla de *espacio-tiempo* en la Relatividad Especial. En el marco de la Mecánica Newtoniana, el espacio y el tiempo son entidades independientes que poseen su propia naturaleza, también independiente de los cuerpos y los sucesos. Pero los cuerpos y los sucesos ocurren en determinados lugares y momentos del espacio y el tiempo. Para localizarlos se requiere de una métrica. En el espacio euclidiano la métrica responde a la invariancia de la distancia por transformaciones rígidas, esto es, por desplazamientos y rotaciones. Si un proceso tiene cierta duración, dada por los fenómenos físicos involucrados, de valor Δt, una traslación en el tiempo del mismo proceso a partir de otro tiempo inicial, conserva la duración, es decir $\Delta t = t - t_o = \tau - \tau_o$ donde t_o y τ_o representan dos inicios diferentes de un mismo proceso con dos finalizaciones diferentes t y τ, pero con duraciones equivalentes. En el espacio el planteo es más complejo. La distancia entre dos puntos $\boldsymbol{x} = (x; y; z)$ y $\boldsymbol{\chi} = (\xi; \eta; \zeta)$ está dada por

$$d = \sqrt{(\boldsymbol{\chi} - \boldsymbol{x})^2} = \sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2}$$

En todo desplazamiento o rotación esta distancia debe ser un invariante.

En la Relatividad Especial la distancia entre dos puntos no puede determinarse en forma absoluta sino en referencia a sistemas de coordenadas y sus estados de movimiento. Lo que es invariante es la velocidad de la luz, pero no los intervalos espacial y temporal, que a su vez están interrelacionados. Supongamos que una señal de luz parte del origen del sistema K y que en un instante t se encuentra a una distancia dada por $d = ct$, la velocidad de la luz por el tiempo de desplazamiento. Al cabo de ese tiempo la señal estará en una posición $\boldsymbol{x} = (x; y; z)$ tal que $d = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Pero estas dos medidas tienen que ser equivalentes, es decir

$$c^2t^2 = x^2 + y^2 + z^2 \quad o \quad (ct)^2 - x^2 - y^2 - z^2 = 0$$

Escribamos esta distancia desde el sistema de coordenadas k en movimiento relativo con velocidad v con respecto a K.

$$c^2\tau^2 - \xi^2 - \eta^2 - \zeta^2 = \frac{c^2\left(\mathrm{t} - \frac{xv}{c^2}\right)^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}} - \frac{(x - vt)^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}} - y^2 - z^2 =$$

$$\frac{c^2t^2 - \frac{2c^2txv}{c^2} + \frac{c^2x^2v^2}{c^4} - x^2 + 2xvt - v^2t^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}} - y^2 - z^2 =$$

$$\frac{c^2t^2 - 2txv + \frac{x^2v^2}{c^2} - x^2 + 2vxt - v^2t^2 - y^2 - z^2 + \frac{v^2y^2}{c^2} + \frac{v^2z^2}{c^2}}{1 - \frac{v^2}{c^2}} =$$

$$\frac{c^2t^2 + \frac{v^2}{c^2}(x^2 + y^2 + z^2) - x^2 - y^2 - z^2 - v^2t^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}} =$$

$$\frac{\left[c^2t^2 + (x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2)\frac{v^2}{c^2} - x^2 - y^2 - z^2\right]}{1 - \frac{v^2}{c^2}} =$$

$$\frac{\left[c^2t^2 + (0)\left(\frac{v^2}{c^2}\right) - x^2 - y^2 - z^2\right]}{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{[c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2]}{1 - \frac{v^2}{c^2}} = 0$$

Es decir que la distancia nula o simultaneidad en posición y tiempo, por lo tanto encuentro, en el sistema k coincide en el sistema K. Pero esto requiere redefinir la distancia invariante en sistemas de coordenadas en movimiento relativo uniforme como

$$d = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2}$$

Y, si definimos al *tiempo* como $t^* = it$, un tiempo imaginario, queda

$$d = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2 + c^2t^{*2}}$$

Y la coordenada "tiempo imaginario" en unidades de velocidad de la luz ($t_c^* = ict$), lo que equivale a adoptar la velocidad de la luz como unidad, adquiere la misma forma que las coordenadas espaciales.

$$d = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2 + t_c^{*2}}$$

En ocasiones se escribe

$$d = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2}$$

incorporando al tiempo como una coordenada equivalente a las espaciales.

El espacio y el tiempo están ligados en una medida invariante de distancia en tanto al hacer traslaciones o rotaciones (en la métrica de Minkowski la rotación requiere una interpretación diferente que trataremos luego) consideremos el tiempo que lleva a una señal llegar de un punto a otro que vincula las coordenadas espaciales del evento considerado. *Encuentro* no se interpreta como *el mismo lugar al mismo tiempo*, es decir, distancia nula e intervalo de tiempo nulo por separado, sino *distancia relativista nula* de acuerdo con la definición explicitada en la última ecuación en formato de tiempo imaginario, o en la anterior como un tiempo real.

Simultaneidad

Para establecer la simultaneidad entre eventos, es necesario sincronizar relojes. Nada impide sincronizar dos relojes en el mismo lugar, localmente con el evento, pero si están separados una distancia d, será necesario enviar una señal desde la posición A de un reloj a la posición B de otro, y luego esperar la confirmación. Podemos automatizar el proceso enviando una señal que vaya de A a B partiendo a un tiempo t_o, que se refleje en B en tu tiempo t_R, y que retorne a A en un tiempo final t_F. Lo que en principio podemos asegurar es que t_R se encuentra entre t_o y t_F. Si mejoramos el método de transmisión de señales utilizando medios cada vez más veloces, podemos suponer que, en el logro final de la tecnología, la velocidad será infinita y ambos tiempos t_o y t_F convergen, de modo que t_R resulte acotado en un intervalo que tiende a cero y los relojes puedan ser sincronizados en forma perfecta y automática junto con la reflexión. En tal caso habría un tiempo universal coordinado posible, sólo limitado por la tecnología. Negar que exista la velocidad infinita equivale a negar la posibilidad de establecer un tiempo universal coordinado. Por lo tanto el tiempo sólo puede definirse en forma local como una coordenada más asociada a cada evento en un sistema de coordenadas arbitrario. En consecuencia, es natural que la distancia entre eventos deba incluir la coordenada *tiempo* en tanto que debe transmitirse información acerca de la ocurrencia de eventos y esto no puede hacerse a mayor velocidad que la de la luz.

Retomando el problema de la sincronización, lo que puede asegurarse es que el tiempo de reflexión t_R se encuentra entre los tiempos de emisión t_o y el de recepción de la señal reflejada t_F. Es decir que tiene que estar dado por

$$t_R = t_o + \varepsilon(t_F - t_o)$$

para cierto valor de ε. Einstein tomó $\varepsilon = 1/2$, lo que equivale a decir que los dos sistemas son equivalentes dado que se obtendría el mismo resultado si la luz parte de B y se refleja en A; que el espacio es isótropo, dado que la luz tarda lo mismo en ir que en volver; y era consistente con los experimentos de Michelson-Morley y de Fizeau para determinar el movimiento absoluto de la Tierra en un espacio en reposo. Si acaso algún día un experimento mostrase que no es apropiado tomar $\varepsilon = 1/2$, nos enfrentaríamos a una nueva teoría y a una nueva visión de la física.

En la Figura 3.2 se presenta un gráfico posición-tiempo en los ejes vertical y horizontal respectivamente en el formato usual.

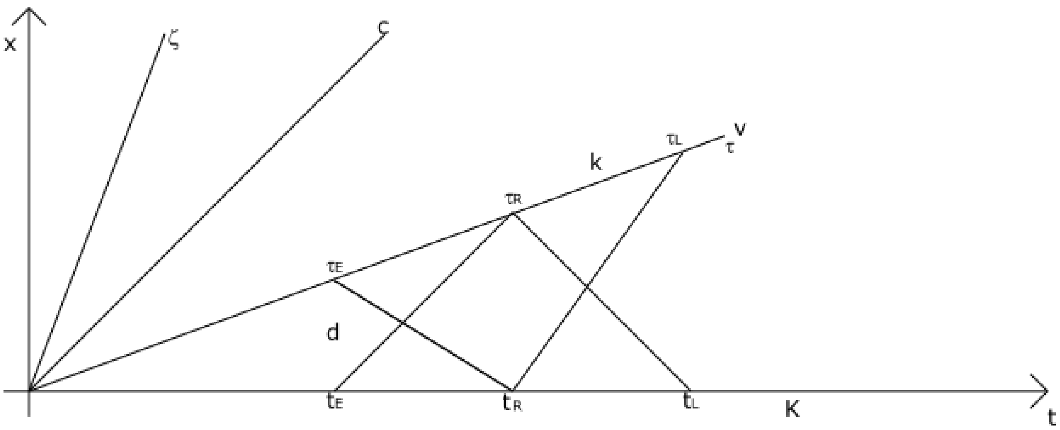

Fig. 3.2 Lectura relativa de tiempos en sistemas en MRU

El eje horizontal de tiempos puede pensarse como una representación de un “móvil” que permanece en reposo en su origen de coordenadas con un vector espacio-temporal de la forma $(t; 0; 0; 0)$. La línea oblicua rotulada con v pero a la vez con τ, representa un movimiento rectilíneo uniforme de un móvil que pasa por el origen de coordenadas a $t = 0$. Sabemos ahora que no existe el tiempo absoluto y que el móvil con velocidad v mide su tiempo local con su propio reloj en términos de una coordenada espacio temporal $(\tau; 0; 0; 0)$, dado que él se considera en reposo, de allí que rotulemos al eje que representa la velocidad en MRU como eje de tiempos τ. El eje rotulado con v no es otro sino el eje de tiempos del sistema en movimiento relativo k de coordenadas $(\xi; \tau)$ con respecto al sistema $(x; t)$ en reposo K. El eje de representación temporal τ es el eje t rotado un ángulo dado por la pendiente de la velocidad relativa v. Esta rotación tiene un límite dado por la velocidad de la luz, representada por un ángulo de 45°. Supongamos que en un dado momento t_E y casualmente en forma simultánea τ_E, envían sendos rayos de luz para ver el reloj del otro sistema. El segmento $\overline{t_E \tau_R}$, paralelo a la velocidad de la luz, representa la señal de luz enviada desde K al tiempo t_E para ver el reloj de k, que es reflejada en el otro sistema y retorna al sistema K al tiempo t_L según una paralela a la velocidad de la luz de retorno. Lo mismo representa el segmento $\overline{\tau_E t_R}$, paralela también a la velocidad de la luz de retorno de k a K, que se refleja en K y vuelve al sistema k al tiempo τ_L. El tiempo t es el que registra el sistema K en su reloj, de acuerdo con la señal reflejada, a la vez que τ es el tiempo que registra k en su sistema del reloj en K al ver el retorno de la señal reflejada.

Considerando $\varepsilon = 1/2$, el tiempo de ida y retorno de la luz son iguales, de modo que, cuando el sistema k está a una distancia d del origen del sistema K, tras el encuentro a $t = \tau = 0$, el intervalo de emisión y reflexión de luz será

$$t_E = t_R - \frac{d}{c}$$
$$t_L = t_R + \frac{d}{c}$$

Las coordenadas espacio temporales del tiempo de reflexión en el sistema K son $(t_R; d; 0; 0)$ y las coordenadas en el sistema k son $(\tau_R; 0; 0; 0)$. Como la distancia que se conserva en el espacio-tiempo está dada por el cuadri-vector $(t; x; y; z)$ de modo que la expresión $c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2$ sea constante en ambos sistemas, debe ser

$$c^2 t_R^2 - d^2 = c^2 \tau_R^2$$

pero dado que k se mueve con velocidad constante v con respecto a K, $d = vt_R$ visto desde el sistema K. Por lo tanto

$$c^2 t_R^2 - v^2 t_R^2 = c^2 \tau_R^2 = t_R^2 (c^2 - v^2)$$

o bien

$$\tau_R = t_R \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

El tiempo que K ve en k en el momento de la reflexión τ_R es menor que el tiempo que registra en su reloj t_R en el intervalo de transmisión de información de tiempo. Pero veamos ahora cómo interpreta k el mismo proceso desde su sistema de coordenadas. Para k el tiempo corre de modo "normal" dado que se considera en reposo y ve a K moverse hacia atrás con velocidad $-v$. Emitirá una señal de luz al tiempo τ_E, se reflejará en K al tiempo t_R y retornará a k al tiempo τ_L. Al relacionar las coordenadas de espacio y tiempo, k escribirá que K está en $(t_R; -d; 0; 0)$ pero K registrará la señal emitida por k en el tiempo t_R. Por equivalencia de la distancia cuadri-dimensional será nuevamente

$$c^2 \tau_R^2 - d^2 = c^2 \tau_R^2 - v^2 \tau_R^2 = c^2 t_R = \tau_R^2 (c^2 - v^2)$$

de modo que

$$t_R = \tau_R \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

Ambos registran tiempos similares $t_R = \tau_R$ en sus propios relojes, pero una dilatación temporal o retardo en el reloj del otro sistema que cada uno considera se mueve con velocidad constante con respecto al propio en reposo. Puede notarse que el retraso de los relojes se manifiesta en el intercambio de información entre los sistemas en movimiento relativo.

Planteemos ahora un problema equivalente pero desplazando el segmento que representa la historia de k hacia atrás en el tiempo, es decir, prolongando el segmento hacia las coordenadas negativas de tiempo y posición. Realicemos el mismo experimento emitiendo haces de luz para ver el reloj del otro participante en el ahora futuro encuentro. Registraremos la misma dilatación temporal en ambos relojes. Pero en el momento del encuentro, en el $(0; 0; 0; 0)$, coincidirán las coordenadas espaciales y temporales de ambos sistemas. Si no ocurriese de este modo y uno de los dos sistemas, sea el K o el k, tuviese su reloj retrasado, habría una manera de detectar el movimiento absoluto y podríamos decir cuál de los dos estuvo en reposo y cuál en movimiento rectilíneo uniforme.

Encuentro en el espacio-tiempo

En el diagrama de la Figura 3.3 se muestra los ejes usuales de posición en ordenadas "x" y de tiempo en abscisas "t". Se agrega líneas diagonales rotuladas con c. Estas líneas representan la velocidad de la luz en el diagrama $(x;t)$ de un sistema K. La región a la izquierda delimitada por las diagonales de c representa el pasado del sistema K, mientras que la región delimitada a la derecha representa el futuro de K como sistema de coordenadas. Un evento como B podría ser detectado en el futuro si en cierto tiempo t de K se emite un haz de luz, representable por una paralela a la línea oblicua c que pase por B, se refleje y retorne al eje "t" para determinar el tiempo t_B en K y el tiempo $\tau_B = t_B\sqrt{1 - v^2/c^2}$, donde v representa la velocidad con la que un móvil que ha pasado por el origen $(0;0)$ se mueve sobre el segmento que pasa por B en la región del futuro de K desde donde podrá ser seguido el proceso. Simultáneamente en la posición $(0;d)$ ocurre un evento en la región estrictamente espacial del diagrama, es decir, aquella que no puede ser alcanzada por ninguna señal de luz desde K a partir del estado actual $(0;0)$ porque tal señal debería superar la velocidad de la luz. Especialmente para $(0;d)$ debería tener velocidad infinita. Pero a medida que pasa el tiempo en K y A se desplaza con una velocidad menor que la de la luz, penetra en el cono de acontecimientos de K pudiendo ser detectado. Cuando su línea de espacio-tiempo intersecta el cono de luz c, A podrá ser detectado por primera vez. En algún momento los móviles representados por las líneas de espacio-tiempo A y B se encontrarán en un punto C, cuando las distancias en el espacio-tiempo coincidan al ser sus cuatro coordenadas iguales desde la perspectiva de K.

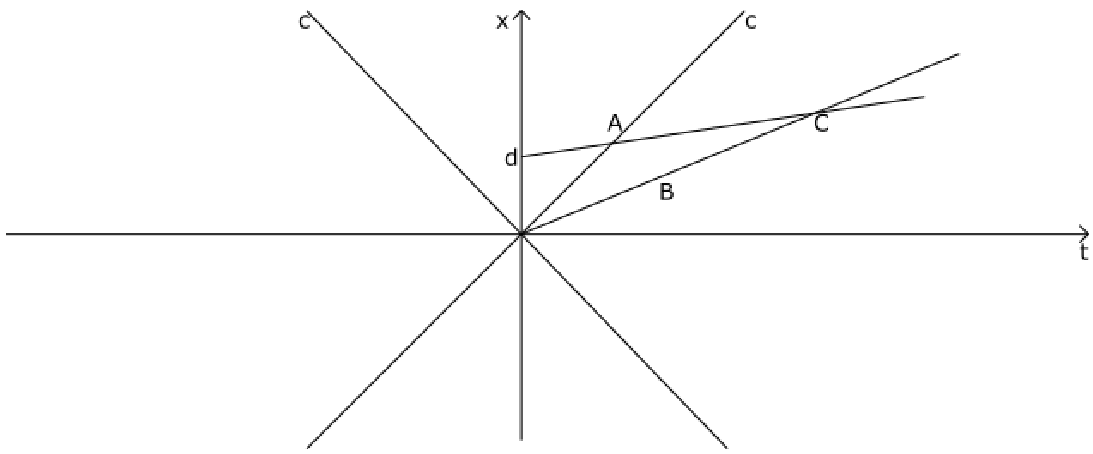

Fig. 3.3 Diagrama problema de encuentro

El momento en que A penetra en el dominio de acontecimientos visibles para K puede determinarse a partir de su expresión de distancia pidiendo que ésta sea positiva, es decir

$$c^2 t_{oA}^2 - (d + v_A t_{oA})^2 \geq 0$$

En el límite de acontecimientos, cuando esta expresión es nula, puede determinarse t_{oA} resolviendo una ecuación cuadrática, y se obtiene

$$t_{oA} = \frac{d}{c - v_A}$$

Esto corresponde a un $\tau_{oA} = 0$ como tiempo inicial de k_A visto desde K. Durante la evolución del movimiento de k_A y k_B, las ecuaciones que igualan sus respectivas distancias en el espacio-tiempo son

$$c^2t^2 - (d + v_A t)^2 = c^2\tau_A^2$$

y

$$c^2t^2 - v_B^2 t^2 = c^2\tau_B^2$$

La ecuación de movimiento para B puede escribirse en la forma usual

$$x_B = v_B t$$

La ecuación de movimiento para A también puede escribirse como

$$x_A = d + v_A t$$

pero más apropiadamente habría que hacerlo desde el tiempo y posición inicial en que es visible para K, esto es

$$(d + v_A t_{oA}) + v_A(t - t_{oA}) = d + v_A \frac{d}{c - v_A} + v_A \left(t - \frac{d}{c - v_A}\right) =$$

$$= d + v_A \frac{d}{c - v_A} + v_A t - v_A \frac{d}{c - v_A} = d + v_A t$$

De modo que podemos usar la notación usual para los problemas de encuentro, siempre que se tenga en cuenta si tal encuentro es posible en el dominio de los acontecimientos visibles para el sistema K usado para la descripción.

Por lo tanto

$$t_e = \frac{d}{v_B - v_A} \quad y \quad x_e = v_B \frac{d}{v_B - v_A}$$

Si reemplazamos el tiempo de encuentro en las transformaciones relativistas

$$\tau_{Be} = \frac{d}{v_B - v_A}\sqrt{1 - \frac{v_B^2}{c^2}}$$

y

$$\tau_{Ae} = \sqrt{\frac{d^2}{(v_B - v_A)^2} - \frac{\left(d + v_A \frac{d}{v_B - v_A}\right)^2}{c^2}}$$

Al desarrollar a través de un denominador común y extraer $d/(v_B - v_A)$ fuera de la raíz, obtendremos que $\tau_{Ae} = \tau_{Be}$. Si aplicamos las ecuaciones de transformación a B obtendremos los mismos resultados para el tiempo de encuentro y la coordenada 0 para la posición de encuentro. No podemos aplicar estas ecuaciones al sistema k_A porque fueron diseñadas para sistemas que en algún momento coinciden en sus coordenadas de espacio-tiempo $(0; 0; 0; 0)$. Podríamos remitirnos a un tiempo de referencia $-d/v_A$ en el que k_A coincidiría con K, pero tendríamos un problema similar con k_B. Lo que podemos usar es la conservación de la distancia en el espacio-tiempo en tanto sea positiva en el dominio de los acontecimientos visibles. No debe sorprender que las coordenadas espaciales de encuentro sean nulas para k_A y para k_B dado que para ambos sistemas, que se consideran en reposo, el proceso de encuentro es puramente temporal. En un tiempo τ_e habrá un móvil B que pase por el sistema k_A y también habrá un móvil A que pase por el sistema k_B. Desde nuestra perspectiva en el sistema K esto ocurrirá en las coordenadas $(t_e; x_e; 0; 0)$.

Tenemos todo el derecho a cuestionar cómo es que sabíamos que el móvil A estaba en su sistema k_A si no era posible que hubiésemos recibido una señal de que estaba allí dado que no existen métodos de transmisión de información con velocidades infinitas. Y la respuesta es simple: no lo sabíamos. Pero podemos argumentar que, en cuanto A penetre en el cono de acontecimientos visibles desde nuestro sistema K y desde k_B, estamos en condiciones de plantear nuestro problema de encuentro con el mismo resultado. De modo que la cuestión no es el planteo de los problemas de encuentro sino la limitación que impone la aceptación del principio de relatividad y la constancia de la velocidad de la luz. Podemos plantear y resolver el problema de encuentro, pero no podemos argumentar que el móvil A estaba a una distancia d de nuestro sistema K y del sistema k_B por algún motivo que nos relacione. Podría haber relación causal entre la presencia de K y la de k_B, digamos que el móvil B fue enviado con velocidad v en el momento $t = 0$ de K en dirección de las "x" positivas. Pero no podía haber relación causal entre K y k_A porque simplemente no había información sobre la existencia del móvil A. De modo que podemos haber tomado la decisión en K de enviar al móvil B pero no argumentar que lo enviamos al encuentro del móvil A porque no sabíamos que A estaba allí. El móvil A puede moverse con velocidad v_A desde una distancia d de K; el móvil B puede partir de K con una velocidad v_B y puede ocurrir un encuentro con A. Pero no podemos argumentar una conexión causal dado que la velocidad de la luz impone un límite a la transmisión de información. De allí la importancia de definir el dominio *visible* desde cualquier sistema de coordenadas.

Habremos notado que cada sistema se considera a sí mismo en reposo. De allí que las rectas que en una representación $(x; t)$, que usualmente sólo eran una expresión funcional de $x_{(t)}$, ahora son *líneas de universo* en el sentido que cada sistema sólo *se mueve en el tiempo* mientras sus coordenadas espaciales las considera en reposo. La descripción de sí mismo de todo sistema de coordenadas será de la forma $(t; 0; 0; 0)$ mientras que otros sistemas separarán una componente espacial de su componente de tiempo a modo de una rotación en el espacio-tiempo.

Veamos la Figura 3.4. Dos amigos, o podrían ser mellizos, conviven hasta t_o. Entonces uno de ellos dispara un cohete y se aleja con velocidad v pero, para no alterar su estado de movimiento, el que se queda dispara otro cohete en sentido opuesto con las mismas características de modo que él pueda conservar su condición de reposo, como veremos luego al tratar la conservación de la cantidad de movimiento. En un determinado momento τ_1, que corresponde con t_1 del que se quedó, el que se alejó dispara otro cohete en sentido opuesto para volver apoyándose en una parte desechable del cohete que se separa de su cápsula. Finalmente regresa en τ_2 y se reencuentra pero, cuando comparan sus relojes, el que permaneció en reposo registra t_2. Veamos las relaciones.

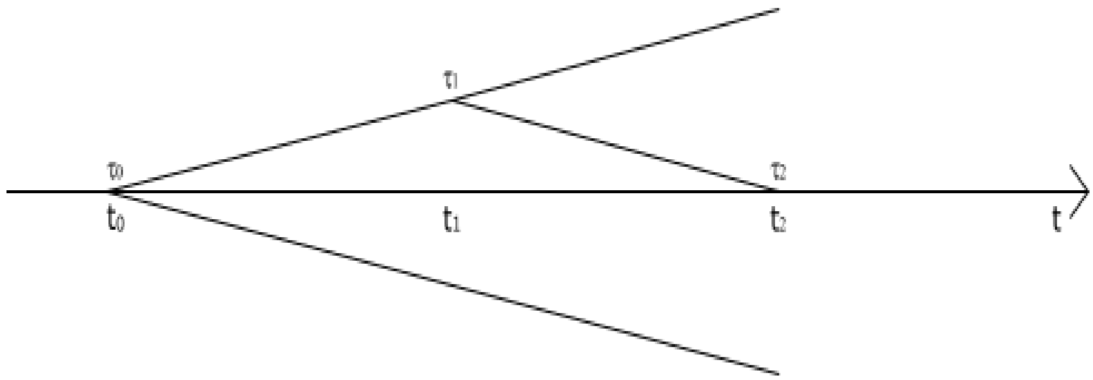

Fig. 3.4 El problema del viajero

Entre t_o y t_1, es decir, τ_o y τ_1 en el otro sistema viajero

$$\tau_o = t_o$$

$$\tau_1 = t_1\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$$

Como la dilatación temporal depende del cuadrado de la velocidad, por lo tanto de su valor absoluto y no de su sentido, cuando regrese, el tiempo transcurrido para el que se quedó en reposo responde a la relación trivial

$$\Delta t = (t_1 - t_o) + (t_2 - t_1) = t_2 - t_o$$

Y para el que se alejó será

$$\Delta\tau = (t_1 - t_o)\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} + (t_2 - t_1)\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$$

Si consideramos que el viaje de ida y vuelta se hizo a la misma velocidad, los intervalos parciales de tiempo serán iguales, de modo que

$$\Delta\tau = \Delta t\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$$

Estos tiempos son diferentes, lo que parece contradecir lo que habíamos dicho acerca de la coincidencia de tiempos en los problemas de encuentro. Pero antes nos referíamos a sistemas inerciales en movimiento rectilíneo uniforme, es decir, que tenían una velocidad y la conservaban. En este caso hubo dos aceleraciones: al partir y al volver. El resultado ha sido una dilatación *real* del tiempo del que se fue y volvió, es decir, del que sufrió la aceleración. En dinámica diremos que el viajero estuvo sometido a fuerzas, aceleraciones, a una alteración de su estado dinámico. De alguna manera las aceleraciones alteran en forma real el ritmo de un reloj, inclusive el biológico. Las aceleraciones en general, la gravedad en especial. *Algo* pasa en sistemas sometidos a acciones dinámicas que no se manifiesta en sistemas inerciales.

Diagramas de Minkowsky

Hermann Minkowsky (1864-1909), uno de los profesores de Einstein, propuso en 1908 una representación geométrica del espacio-tiempo. A diferencia de nuestro modo usual en que el eje de tiempos es el de abscisas y el de posición es el de ordenadas, se invierte la representación de los ejes, a veces el eje de *tiempo* representa el producto ct, es decir, el tiempo por la velocidad de la luz, de modo que ambos ejes están representados en las mismas unidades de distancia, y hasta puede usarse ict como expresión imaginaria en el tiempo, y se escalan las unidades de modo tal que sean comparables en ambos ejes. De esta manera, la velocidad de la luz c es representada por medio de dos rectas que cortan en el origen los ejes de posición y tiempo en un ángulo de 45º. En adelante usaremos coordenadas primadas para referirnos al sistema móvil.

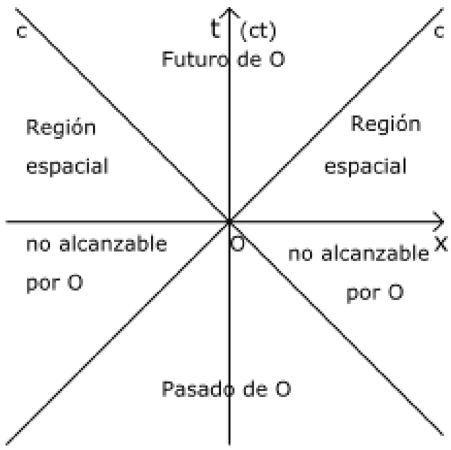

Fig. 3.5 Diagrama de Minkowsky

En el diagrama de la figura 3.5 sólo se representa una coordenada espacial. Para representar el espacio debería ser un gráfico en cuatro dimensiones. Una señal de luz, como frente de onda esférica, se expande espacialmente a lo largo del eje horizontal a medida que el tiempo transcurre en el eje vertical. El cono superior formado por los ejes c a 45º con respecto al eje de tiempo vertical, representan la región espacial alcanzable por el frente de onda generado en el origen O en el futuro a medida que avanza el tiempo. El origen O puede recibir información de eventos ocurridos en el pasado en tanto la información de tales eventos pueda llegar con la velocidad de la luz o menor. De allí que el cono inferior, delimitado por la velocidad de la luz, acote la región visible por O en su pasado.

En la Figura 3.6 se representan con A….E varios eventos en el espacio-tiempo. Un evento como A pertenece localmente al futuro de O y un evento como C pertenece localmente al pasado de O. Imaginemos un viaje a velocidad constante a lo largo de un camino recto. Como sistema en MRU nos consideramos en reposo. En algún momento en el pasado nos hemos encontrado con C y en algún momento en el futuro nos encontraremos con A a lo largo del camino.

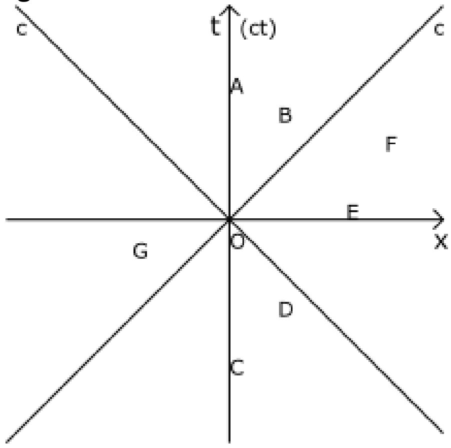

Fig. 3.6 Eventos en el espacio-tiempo

Un evento como B pertenece al futuro de O pero no es local. Si enviamos un vehículo para contactarnos con B, el vehículo, a una velocidad menor que la de la luz, en algún momento alcanzaría a B y podría retornar con una respuesta en forma de un objeto material. Pero a medida que transcurre el tiempo de O, habrá un límite en que sólo podrá enviar una señal de luz a B y esperar su respuesta mediante otra señal de luz. Pasado ese momento, el evento B será inalcanzable penetrando en la región espacial. En la Figura 3.7 reproducimos la Figura 3.6 pero hemos representado con “L” el límite de tiempo para emitir una señal de luz desde O a B, de allí que el segmento $\overline{LB}$, con la misma inclinación que c, representa la señal de luz que permitirá conocer el tiempo de B como coordenada espacio-temporal $(t_B; x_B; 0; 0)$, mientras que A y C sólo tendrán una coordenada temporal para O que será $(t_A; 0; 0; 0)$ y $(t_C; 0; 0; 0)$.

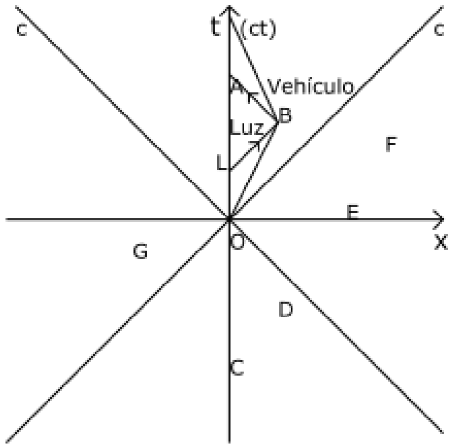

Fig. 3.7 Alcance de eventos en el espacio-tiempo

Si el evento D envió alguna señal de luz hacia O, habrá llegado en el momento t_d y tal información ya pertenecerá al pasado de O. Si D envía algún vehículo material hacia O, podría llegar después de t_d pero nunca antes. Estas regiones temporales suelen asociarse con la noción de causalidad, no en el sentido suficiente sino necesario. El evento O podría ser causante de los eventos A y B. Los eventos C y D podrían ser causantes del evento O. Es necesario que estén dentro de la región alcanzable al menos por la luz.

Un evento como E es totalmente espacial para O. Sus coordenadas serían $(0; x_E; 0; 0)$, pero su ocurrencia no sería conocida por O a menos que envíe una señal de luz o un vehículo que llegarán en el futuro de O. Lo mismo ocurriría con eventos como F y G, que se encuentran en la región espacial no alcanzable por O, excepto en algún momento futuro, representado por los segmentos de luz que parten de E, F y G hacia el eje temporal local de O, como se muestra en la Figura 3.8.

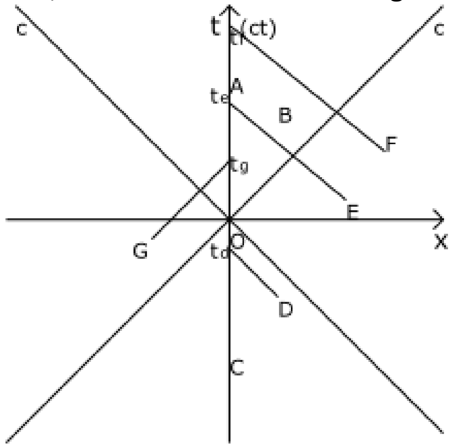

Fig. 3.8 Información de eventos espaciales para O

Si se grafica una *línea de universo* dentro del cono de luz visible por O, tanto en su pasado como en su futuro, los eventos sobre esa línea de universo podrían tener una relación causal con el evento O y son completamente alcanzables en toda su trayectoria.

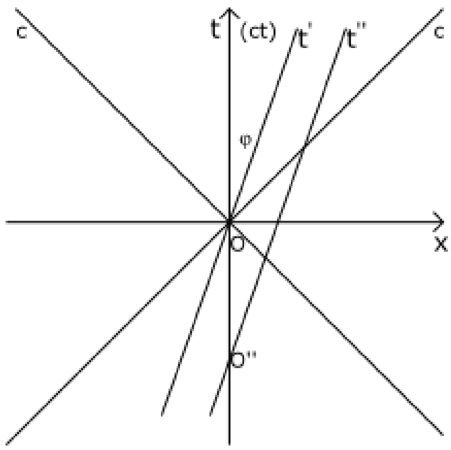

Fig. 3.9 Sistemas móviles con respecto a O

En la Figura 3.9 hemos representado como t' una línea de universo visible por O. Del mismo modo t es una línea de universo visible desde el sistema O'. Una línea de universo como t'' tendrá una coincidencia temporal en O'' pero en cualquier otro momento transmitirá información con retraso con respecto a O.

En la Figura 3.10, los ejes c' no representan un cambio en el valor numérico de la velocidad de la luz sino el cono de luz o universo visible por O'. Del mismo modo que t' está contenido en el cono de luz o universo visible por t, también t está contenido en el cono de luz o universo visible por t'.

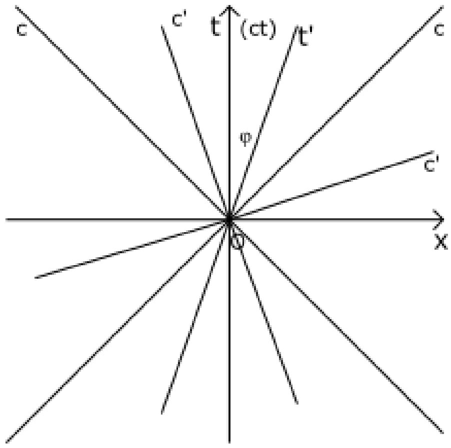

Fig. 3.10 Conos de visibilidad desde O y desde O’

En la Figura 3.11 se muestra la localización de un punto A en el espacio-tiempo de acuerdo con sus coordenadas en $(t; x)$ y en $(t’; x’)$. Las proyecciones se construyen a partir de una paralela a “t” que corte a “x” para determinar x_A, y una paralela a “x” que corte a “t” para determinar t_A. De la misma manera, se construye una paralela a “x’” que corte a “t’” para determinar t'_A, y una paralela a “t’” que corte a “x’” para determinar x'_A.

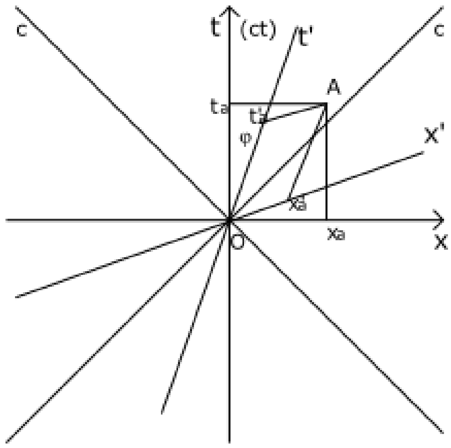

Fig. 3.11 Determinación gráfica de las coordenadas en (t;x) y en (t’;x’)

Notemos que una rotación, en el plano espacial, de la coordenada “x” a la coordenada “x’” de ángulo φ es consistente con una rotación del mismo signo de la coordenada “y” a la coordenada “y’”. En el espacio-tiempo de Minkowski, una rotación en la coordenada “x” de ángulo φ es acompañada por una rotación inversa del eje de tiempos de “t” a “t’” de ángulo $-\varphi$, como puede verse en la Figura 3.11, de modo tal que los ejes primados convergen hasta coincidir si la velocidad del sistema O’ es la de la luz.

De acuerdo con estas proyecciones, notemos que eventos que tienen un orden temporal en un sistema, pueden tener una inversión temporal en el otro.

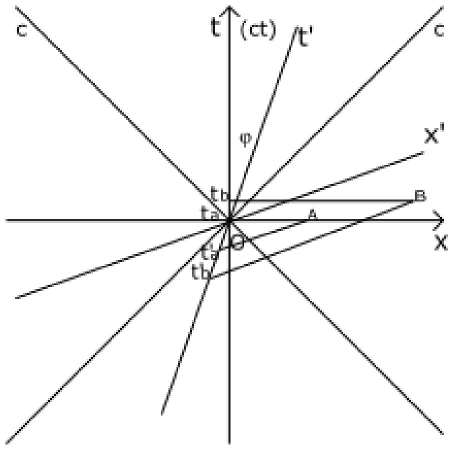

Fig. 3.12 Inversión temporal en (t;x) y en (t';x')

En la Figura 3.12 se muestra que el evento A ocurre en $t_A = 0$ y el evento B es posterior, pero al proyectarlos en las coordenadas $(t'; x')$, resulta t_B anterior a t_A.

La distancia al origen es un invariante en el espacio-tiempo. Si nos limitamos a una coordenada espacial, la expresión $d^2 = c^2t^2 - x^2 = c^2t'^2 - x'^2$ define un invariante para todo par $(t; x)$ y $(t'; x')$. Gráficamente, se representan los puntos equidistantes del origen, desde la perspectiva de un observador K o $(t; x)$ en reposo, expresados en sus propias coordenadas y en las del sistema móvil k o $(t'; x')$, por medio de arcos que responden a las ecuaciones $d^2 = c^2t^2 - x^2$ para el eje temporal en el futuro y el pasado de K, y en torno al eje espacial si $-d^2 = c^2t^2 - x^2$ (ver Figura 3.13).

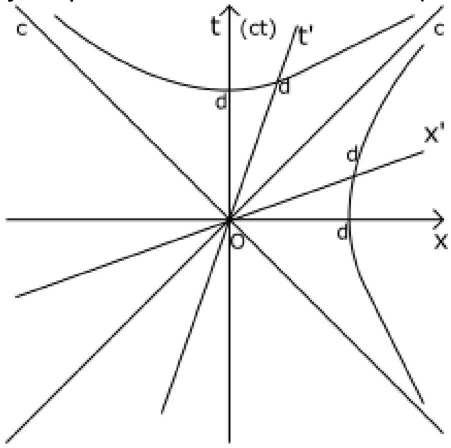

Fig. 3.13 Puntos equidistantes del origen desde la perspectiva de $(t; x)$

Podemos escribir

$$x' = \gamma\left(x - \frac{v}{c}ct\right) \qquad y \qquad ct' = \gamma\left(ct - \frac{v}{c}x\right)$$

como un modo simétrico de expresar ambos cambios de coordenadas. Si diferenciamos ambas ecuaciones considerando x' y ct' constantes, queda

$$dx - \frac{v}{c}d(ct) = 0 \qquad y \qquad d(ct) - \frac{v}{c}dx = 0$$

De allí que

$$\left(\frac{\partial ct}{\partial x}\right)_{x'=constante} = \frac{c}{v} \qquad y \qquad \left(\frac{\partial ct}{\partial x}\right)_{ct'=constante} = \frac{v}{c}$$

donde se muestra que las pendientes de las rectas que determinan la variación del tiempo con la posición en el sistema K en reposo están dadas por la relación recíproca de la velocidad de k con respecto a K bajo las condiciones de mantener la posición o el tiempo en el sistema k constante. El ángulo de inclinación de t' con respecto a t corresponde al arco tangente del cociente entre la velocidad del móvil y la de la luz, es decir, $\varphi = arctg\left(\frac{v}{c}\right)$. El eje de posición de k con respecto al eje de tiempos en K, por el arco tangente de c/v.

Los sucesos conectados por una distancia real o cuadrática positiva son de *tipo temporal* mientras que los sucesos conectados por una distancia imaginaria o cuadrática negativa, tienen una relación de *tipo espacial* y no pueden estar relacionados causalmente.

Reinterpretemos el viaje espacial en términos de los diagramas de Minkowsky. En la Figura 3.14 vemos en el eje vertical la evolución del tiempo para un sistema en reposo "t". En el eje horizontal, la posición para el sistema en reposo "x". Con un ángulo de 45º representamos la velocidad límite de la luz. El segmento $\overline{OR}$ representa el eje temporal "t'ida" del viaje de ida entre el origen y el punto de retorno. El eje "x'ida" representa el eje espacial correspondiente al sistema móvil en el viaje de ida. Podemos considerar que el sistema móvil ya tenía una velocidad constante en el momento de intersectar al sistema en reposo de modo que, en ese momento, sus lecturas temporales coincidían en cero y ninguno estaba acelerado.

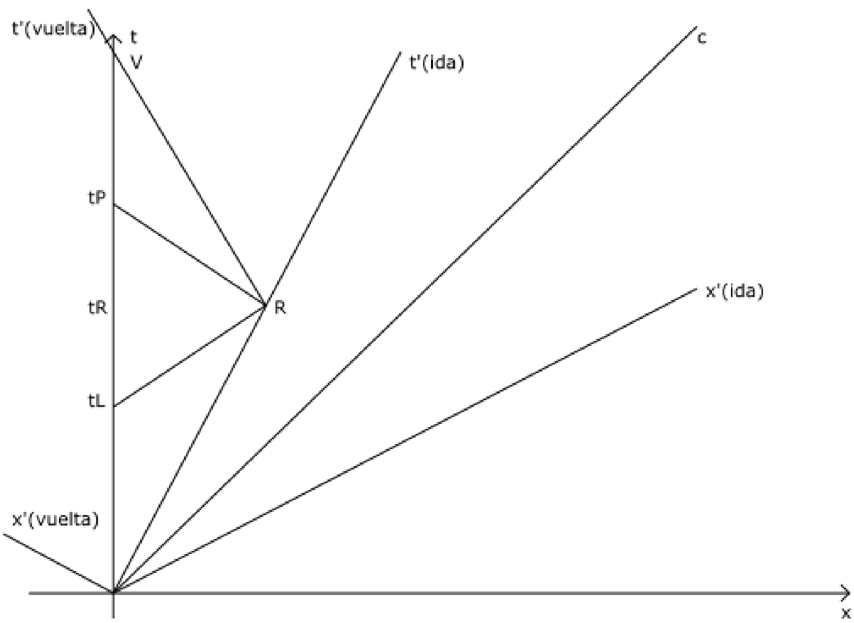

Fig. 3.14 Viaje de ida y vuelta en un diagrama de Minkowsky

El momento de llegar al punto de retorno, detenerse y cambiar de signo en la velocidad corresponde al punto t'_R en el sistema móvil y al punto t_L en el sistema en reposo. El valor de t_L en el sistema en reposo representa el tiempo medido en el sistema en reposo desde el sistema móvil del *evento retorno*. Es decir que el evento al que llamamos "retorno" vale $(t'_R, 0)_k$ desde el sistema móvil en las coordenadas del sistema móvil. Vale $(t_R; x_R)_K$ desde el sistema en reposo en las coordenadas del sistema en reposo, y ocurre en $(t_L; 0)_k$ desde el sistema móvil en las coordenadas del sistema en reposo. Esto es cómo ve el viajero móvil a quien se quedó en reposo en el sistema K. La proporción en que el tiempo del sistema móvil se ha dilatado o retrasado con respecto al sistema en reposo, está expresado por el cociente ${t_R}/{t'_R}$, mientras que la dilatación del tiempo del sistema en reposo K con respecto al sistema móvil k, que se considera en reposo al ver que el sistema K se mueve hacia atrás con velocidad $-v$, está dado por la relación ${t'_R}/{t_L}$. Las dos dilataciones son iguales, por lo que tanto uno como otro tiene derecho a considerarse en reposo y ver al otro sistema como móvil.

Durante el proceso de vuelta hay una inversión en el sentido de la velocidad, que representamos con el cambio de inclinación del eje de tiempo propio del sistema móvil. Por otra parte, y en tanto mantengamos el origen de referencia fijo O, el eje de posiciones "x'vuelta" lo referenciamos cambiado de signo hacia la izquierda del gráfico. También podemos replantear el problema desde un nuevo origen R con un eje "t'" y un eje "x'" nuevos en torno a un nuevo "eje de luz" con origen en R.

El proceso de retorno requiere un frenado, un momento instantáneo o período de reposo, y una aceleración para alcanzar la velocidad de retorno cambiando de signo la de ida. Cuando el móvil alcanza la velocidad de retorno, deja de ser el sistema inercial de origen y pasa a ser un sistema inercial con una velocidad $-v$. En este momento inicial del proceso de retorno la determinación de la posición en el espacio-tiempo es $(t'_R, 0)_k$ en el sistema móvil, en el que ha transcurrido un diferencial de tiempo si se considera un cambio instantáneo idealmente en la velocidad, por lo que coincide con el tiempo anteriormente propuesto para el *evento retorno*. Las mismas coordenadas son válidas para el sistema en reposo $(t_R; x_R)_K$. Pero la determinación del tiempo del sistema en reposo desde la perspectiva del sistema móvil, para quien ha cambiado la orientación del eje de tiempos y, correlativamente, de posiciones, en el marco de un nuevo cono de luz en el futuro del sistema móvil, conduce a proyectar un tiempo $(t_P; 0)_k$ como tiempo de partida en el proceso de retorno sobre el sistema K.

Podemos visualizar dos conos de luz centrados en el eje de tiempo "t'" en el proceso de ida, inclinado hacia la derecha con respecto al eje de tiempo del sistema en reposo "t", y luego una rotación del cono de luz que acota el futuro de "t'" en el proceso de vuelta.

El observador móvil ve que el observador en reposo tiene un tiempo más lento con respecto a su tiempo propio durante la ida, entre $t = 0$ y $t = t_L$. También ve que el tiempo pasa más lentamente en el sistema en reposo durante la vuelta entre t_P y el tiempo de llegada. Como el sistema móvil viaja siempre a la misma velocidad en módulo, el sistema en reposo verá que el tiempo del sistema móvil es siempre más lento y evoluciona con el mismo ritmo. Pero entre t_L y t_P parece que el tiempo del sistema en reposo ha transcurrido como un instante desde la perspectiva del sistema móvil. Como si el observador en reposo hubiese *envejecido* de manera repentina. Esto es resultante de suponer un cambio repentino en la velocidad, por lo tanto una aceleración infinita durante un tiempo infinitesimal. Un proceso real requeriría un frenado y una aceleración progresivos, lo que se reflejaría en un cambio gradual de la pendiente del eje de tiempos del sistema móvil, por lo tanto de la proyección sobre el eje de tiempos del sistema en reposo y un proceso rápido de *envejecimiento* pero no instantáneo. Es claro que esta diferencia entre la evolución de tiempos del sistema móvil y en reposo está asociada a la aceleración del sistema móvil. Podemos suponer que en el encuentro durante el momento de la llegada sólo comparan sus tiempos pero siguen en movimiento uniforme. De este modo destacamos una única aceleración responsable de la dilatación de tiempo propio del sistema móvil acelerado. La explicación física de este resultado se encuentra en el marco de la Relatividad General y de la dinámica relativista.

Transformaciones de la aceleración

Si recordamos la ley de adición de velocidades y la extendemos a las otras coordenadas, tomando $\gamma = \sqrt{1 - v^2/c^2}$

$$u_x = \frac{v + u'_x}{1 + \frac{vu'_x}{c^2}}$$

$$u_y = \frac{v + u'_y}{\gamma\left(1 + \frac{vu'_x}{c^2}\right)}$$

$$u_z = \frac{v + u'_z}{\gamma\left(1 + \frac{vu'_x}{c^2}\right)}$$

Definiendo $a = dv/dt$ y $\alpha = d\mu/d\tau$ como aceleraciones de un móvil vista en el sistema en reposo y en el sistema en movimiento, resulta

$$a_x = \frac{a'_x}{\gamma^3\left(1 + \frac{vu'_x}{c^2}\right)^3}$$

$$a_y = \frac{a'_y}{\gamma^2\left(1 + \frac{vu'_x}{c^2}\right)^2} - \frac{vu_y a'_x/c^2}{\gamma^2\left(1 + \frac{vu'_x}{c^2}\right)^3}$$

$$a_z = \frac{a'_z}{\gamma^2\left(1 + \frac{vu'_x}{c^2}\right)^2} - \frac{vu'_z a'_x/c^2}{\gamma^2\left(1 + \frac{vu'_x}{c^2}\right)^3}$$

Sistemas acelerados

El principio de relatividad especial, que extiende el principio de relatividad de Galileo, orientado a sistemas mecánicos, a los fenómenos electromagnéticos a través de las transformaciones de Lorentz, puede ampliarse aún más incluyendo sistemas acelerados y gravitacionales. Si bien esto es lo que se conoce como principio de la relatividad general, lo introduciremos en este punto y retomaremos al final, aunque ahora sólo nos limitaremos a sistemas acelerados sin referencia a la gravitación. En 1911, antes de enunciar la relatividad general, Einstein plantea el problema de los sistemas acelerados.[Einstein, 1911]

Hemos mencionado el viaje espacial de los dos amigos que se alejan y retornan encontrando diferencias en sus tiempos propios, y hemos asignado esas diferencias a la aceleración a la que uno estuvo sometido y el otro no. Se infiere que la aceleración introduce un retardo en los procesos físicos de naturaleza diferente al que resulta de los estados en movimiento uniforme, en que ambos observadores ven un retardo en el tiempo del otro aunque sus respectivos procesos mantengan el mismo ritmo. En sistemas acelerados hay un retardo efectivo que se verifica al comparar los tiempos tras el reencuentro.

Para limitar el análisis a aproximaciones a primer orden, lo que basta para comprender el mecanismo, pensaremos que las velocidades relativas que alcanzan durante la aceleración son sensiblemente menores que la de la luz. Imaginemos para ello un observador k que se mueve con una aceleración a con respecto a otro observador K en reposo.

Supongamos que el observador k emite señales de luz periódicas, con período de emisión T_k, desde una pared de su laboratorio hasta la otra, ubicada a una distancia d en la dirección en la que está acelerado. Si estuviese en reposo, el tiempo entre emisión y recepción sería $\Delta t = d/c$ como tiempo que tarda en llegar hasta la posición de la otra pared del laboratorio. Pero en ese tiempo la velocidad aumenta en $\Delta v = a\Delta t$ y la distancia que debe recorrer se incrementa. Despreciamos aquí la suma relativista de velocidades para una aproximación a primer orden con velocidades relativas pequeñas. Si el observador k estuviese en reposo, los pulsos llegarían a la otra pared con la misma frecuencia y el mismo período con el que fueron emitidos. Pero como la pared que recibe los pulsos se aleja tras la emisión debido a la aceleración, deberá recorrer una distancia $\delta = c\Delta t = d + \frac{1}{2}a\Delta t^2$. Al despejar de esta ecuación, $\Delta t = \frac{c}{a}\left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{2ad}{c^2}}\right)$. Esta distancia δ es mayor que d, por lo que el período entre tiempos de recepción será mayor que el período entre tiempos de emisión. Sea T_e el tiempo de emisión del segundo pulso y T_d el tiempo de detección en la otra pared, y sea Δt el tiempo de retardo por tener que atravesar la distancia d que las separa. La distancia recorrida por la luz entre la segunda emisión y recepción de la señal vale lo mismo que la distancia entre la pared de emisión y la de recepción sumando lo que se ha desplazado el laboratorio entre la segunda emisión y su recepción

$$c(\Delta t + T_d - T_e) = \left(d + \frac{1}{2}a(\Delta t + T_d)^2\right) - \left(0 + \frac{1}{2}aT_e^2\right)$$

Igualando y desarrollando el cuadrado

$$c(\Delta t + T_d - T_e) = d + \frac{1}{2}a(T_d^2 + 2T_d\Delta t + \Delta t^2 - T_e^2) \cong d + \frac{1}{2}a\Delta t^2 + aT_d\Delta t$$

Despreciando la diferencia entre T_e^2 y T_d^2 considerando que los períodos de la señal de luz son pequeños y más aún su diferencia comparados con Δt. Habíamos obtenido que $c\Delta t = d + \frac{1}{2}a\Delta t^2$ de modo que, restando esta igualdad de la aproximación anterior queda

$$c(T_d - T_e) = aT_d\Delta t$$

Y considerando que en primera aproximación $\Delta t = d/c$ resulta

$$T_d - T_e = \frac{ad}{c^2}T_d$$

De donde

$$T_e = T_d\left(1 - \frac{ad}{c^2}\right) \quad o \quad T_d = \frac{T_e}{1 - \frac{ad}{c^2}}$$

El intervalo entre pulsos recibidos, que define el tiempo de detección, es mayor que el período de emisión o tiempo de emisión. A medida que va ganando velocidad, su tiempo propio resulta más lento. Por lo tanto el tiempo propio del sistema acelerado es efectivamente menor que el tiempo propio del sistema en reposo. De allí que los amigos, que se separaron para que uno realice un viaje espacial y el otro quede en espera, al reencontrarse encuentran que sus relojes no concuerdan en el reencuentro.

Parte IV: Dinámica

Dinámica

El intento de explicación de los fenómenos naturales comienza en la dinámica, en la búsqueda de un agente que pueda asociarse a los cambios observados en el ambiente natural. En particular, si se asume que todo fenómeno natural involucra partículas en movimiento, habrá que proponer una acción responsable del movimiento y sus alteraciones. Más allá de la mística, los primeros intentos se remontan a los movimientos naturales de los constituyentes elementales, sean el agua, el fuego, la tierra y el aire, o bien los *átomos* en tanto indivisibles. La expresión más acabada fue la propuesta por Aristóteles a través del movimiento natural vertical en la Tierra, circular en los Cielos, de una acción que acompañaba a los objetos en su movimiento progresivamente debilitándose hasta devolverlos al reposo. Concepción que se proyectó sobre la Edad Media hasta el primer motor inmóvil en Dios. Algún vestigio quedaba todavía en la noción de "fuerza ínsita" de Newton, para denominar a la masa en tanto conserva su estado de movimiento, y quizá aún en la noción actual de "cantidad de movimiento", que veremos más adelante. Cuestionada por descripciones del movimiento planetario en torno al Sol como la de Copérnico, por estudios detallados de movimientos en planos inclinados y caída de cuerpos en manos de Galileo Galilei, por síntesis filosóficas en palabras de pensadores como Descartes. Pero fue en los términos propuestos por Isaac Newton cómo comenzó a elaborarse la moderna concepción de la Mecánica.

Tomemos como referencia algunas expresiones de Newton, de acuerdo con una traducción. "La cantidad de materia es la medida de la misma originada de su densidad y volumen conjuntamente." "La cantidad de movimiento es la medida del mismo obtenida de la velocidad y de la cantidad de materia conjuntamente." "La fuerza ínsita de la materia es una capacidad de resistir por la que cualquier cuerpo, por cuanto de él depende, persevera en su estado de reposo o movimiento uniforme y rectilíneo." "La fuerza impresa es la acción ejercida sobre un cuerpo para cambiar su estado de reposo o movimiento uniforme y rectilíneo."

Más adelante, las tres leyes: "Ley I: Todo cuerpo persevera en su estado de reposo o movimiento uniforme y rectilíneo a no ser en tanto que sea obligado por fuerzas impresas a cambiar su estado." Ley II: El cambio de movimiento es proporcional a la fuerza motriz impresa y ocurre según la línea recta a lo largo de la cual aquella fuerza se imprime." "Ley III: Con toda acción ocurre siempre una reacción igual y contraria: o sea, las acciones mutuas de dos cuerpos siempre son iguales y dirigidas en direcciones opuestas."

Y sus nociones de espacio, tiempo, lugar y movimiento. "El tiempo absoluto, verdadero y matemático en sí y por su naturaleza y sin relación a algo externo, fluye uniformemente, y por otro nombre se llama duración; el relativo, aparente y vulgar, es una medida sensible y externa a cualquier duración…." "El tiempo absoluto, por su naturaleza y sin relación a cualquier cosa externa, siempre permanece igual e inmóvil; el relativo es cualquier cantidad o dimensión variable de este espacio, que se define por nuestros sentidos según su situación respecto a los cuerpos…." "Lugar es la parte del espacio que un cuerpo ocupa y es, en tanto que espacio, absoluto o relativo…." "Movimiento absoluto es el paso de un cuerpo de un lugar absoluto a otro lugar absoluto, el relativo de un lugar relativo a otro lugar relativo….”(Hawking, 2010, pp. 651-660)

Muy alejado del estilo de redacción, de presentación y de formalización actual, pero en germen la forma moderna de expresar la explicación mecánica de los fenómenos físicos.

Hoy podríamos abordar la dinámica desde una exposición un poco más formal de los conceptos de fuerza (fuerza impresa) y masa (fuerza ínsita), al menos desde al proceso de medición que los define como magnitudes.

Ley de Hooke

La ley de Hooke (1635-1703, íntimo enemigo de Newton) relativa a la elasticidad, puede utilizarse para establecer un método de medición de fuerzas y un instrumento destinado a tal fin, el dinamómetro. Se trata de expresar en una ley que el estiramiento de un resorte, dentro de los límites de su elasticidad, es proporcional al peso que se cuelga de él. No se trata de otra cosa que la actualmente usada *balanza de resorte*. Si tomamos un litro de agua pura a 4°C, al nivel del mar y 45° de latitud para definir el peso de tal volumen de agua como de un kilogramo-fuerza (kgf o $\overrightarrow{kg}$) y medimos el estiramiento producido sobre el resorte, la proporcionalidad entre el estiramiento y el peso permitirá que se calibre el resorte como medidor de la fuerza-peso en la unidad kgf. Si un esfuerzo muscular o de otro origen provoca un estiramiento similar, se asociará al esfuerzo una fuerza equivalente al peso que provoca tal estiramiento. De modo que se dispone de un método para asignar un número a un *agente que estira resortes* y al que se le da el nombre de *fuerza* Como esta fuerza puede aplicarse en distintas direcciones y, en cada dirección, en dos sentidos, se le asigna una magnitud vectorial. El tratamiento del objeto matemático *vector fuerza* responde así a todo el análisis del álgebra vectorial.

Si aplicamos esta fuerza a un cuerpo libre en reposo, vemos que el cuerpo comienza a moverse. Podemos asignar esta *fuerza que estira resortes* a la noción de *fuerza impresa* de Newton, que a partir de ahora llamaremos solamente *fuerza*.

Ley de Inercia o Primer Principio de Newton

En una expresión un poco más formal, y después de operar sobre álgebra vectorial, podemos decir que si la suma de todas las fuerzas externas aplicadas sobre un cuerpo es nula, el cuerpo conserva su estado de movimiento, es decir, en reposo o movimiento rectilíneo uniforme (velocidad constante, aceleración nula). Tal cuerpo está en equilibrio de fuerzas. El estudio de los estados de equilibrio se encuadra dentro del área conocida como *estática*.

De acuerdo con la implicación contra recíproca, si el cuerpo no conserva su velocidad, por lo tanto está acelerado, no se encuentra en equilibrio de fuerzas, es decir que la suma de fuerzas no es nula y que existe al menos una fuerza que puede asumirse como responsable de la aceleración del cuerpo.

En otras palabras, el primer principio establece que es la *fuerza impresa* de Newton la responsable de las alteraciones en los estados de movimiento. En nuestro enunciado, la *fuerza externa* actuante sobre el cuerpo. Cuando la fuerza externa es nula, es la *fuerza ínsita* la que lo mantiene en su estado de movimiento, en nuestro lenguaje, la *inercialidad* del cuerpo o su *masa*.

Sin embargo, no es lo mismo decir que un cuerpo en equilibrio de fuerzas conserva su estado de movimiento que referirse a un cuerpo en ausencia de fuerzas. La única forma de asegurar que un cuerpo está libre de toda acción externa que pueda llamarse *fuerza* es pensar que se encuentra aislado en el universo. Esto conlleva cierto contrasentido porque en el mismo universo debe encontrarse el observador que describe el estado libre del cuerpo.

Desde una perspectiva filosófica, esto no puede sostenerse en el marco constructivo del pensamiento porque si no hay observador, no tiene sentido la idea de cuerpo libre, de universo ni ninguna otra idea. Pero desde una visión platónica en que las ideas no sólo tienen existencia real sino que *son lo real*, todo lo demás es apariencia, bien puede asumirse que la idea de cuerpo aislado en el universo preexiste al observador y se admite la existencia real posible de un cuerpo en tales condiciones. Tal cuerpo estaría libre de fuerzas externas, aunque no se especifique con respecto a qué puede estar en reposo o movimiento uniforme. Para salvar esto, puede referirse a las estrellas "fijas", suponiendo que lo están y que no interactúan con el objeto.

En esencia, el principio de inercia establece como postulado la existencia de al menos un sistema, llamado *inercial*, con respecto al cual un cuerpo en tales condiciones, libre de interacciones en un universo sólo para él, conserva su estado de reposo o movimiento rectilíneo uniforme.

La revolución, en el marco de la física de finales del siglo XVII, es en parte una vuelta al platonismo desde una física aristotélica. En tal física los cuerpos estaban naturalmente en reposo, los agentes que podrían llamarse *fuerzas* los apartaban de su estado natural y el movimiento era una respuesta del cuerpo en busca de recuperar tal estado que le es propio, es decir, de volver al reposo. En la nueva concepción, la inercialidad del cuerpo es lo que resiste a alterar su estado de movimiento y no algo que hace que se mueva para recuperar su estado natural de reposo. No existe ningún estado natural ni tendencia alguna sino inercia, justamente la negación de la tendencia. El primer principio refiere no tanto al estado del cuerpo sino a la existencia formal de *al menos un sistema de coordenadas desde el cual describir el estado de movimiento real como rectilíneo uniforme*. Entender esto es esencial para comprender la formalización de la mecánica en términos de los grupos de equivalencia y las simetrías.

Ley de Masa o Segundo Principio de Newton

La Segunda Ley establece la relación entre la fuerza externa aplicada sobre el cuerpo y la respuesta en términos de movimiento, es decir, su aceleración. Se expresa de modo sencillo diciendo que la suma de fuerzas externas actuantes sobre un cuerpo equivale a la *masa* del cuerpo por su aceleración. Si se utiliza para definir la noción de masa, puede tomarse la resultante de la suma de fuerzas externas en módulo, dividirla por el módulo de la aceleración, y obtener así la masa como medida escalar de la resistencia del cuerpo a que sea alterado su estado de movimiento o inercialidad del cuerpo.

Si se utiliza la unidad de fuerza definida como kilogramo-fuerza (kgf) y la aceleración en metros sobre segundo al cuadrado (m/s^2), la masa queda expresada en $\frac{\mathrm{kgf}}{\mathrm{m/s^2}}$, llamada “unidad técnica de masa” (Utm), equivalente a unos 102g, como veremos luego, usada antiguamente en el “Sistema Técnico” de unidades. En el actual Sistema Internacional y SiMeLA (Sistema Métrico Legal Argentino), se usa la unidad de masa como de base junto con el metro y el segundo (anteriormente, MKS por metro-kilogramo-segundo) y, en tal esquema, la segunda ley para definir la fuerza. La masa se mide con una balanza de platillos y el patrón de referencia se conserva en la Oficina Internacional de Pesas y Medidas de Francia. Se lo llama “kilogramo” y simboliza “kg”. En este sistema de unidades, la fuerza se obtiene de la expresión simplificada de la Segunda Ley ($F = ma$), resultando

$$[F] = [m].[a] = kg.\frac{m}{s^2} = N = newton.$$

La unidad de fuerza, derivada de las de masa, distancia y tiempo, toma el nombre de “newton” y el símbolo “N”. Un newton equivale al peso de 102g de agua pura en condiciones normales de presión (1013,3hPa) y temperatura (4ºC), a 45º de latitud y al nivel del mar.

Otro sistema, conocido como cgs (centímetro-gramo-segundo) utiliza el gramo como unidad de masa y el centímetro para la distancia. La unidad de fuerza es la “dina” simbolizada “dyn” y equivale a 10^{-5}N.

Ley de Interacción o Tercer Principio de Newton

Enunciada como principio de *acción y reacción*, ya Newton habla de *acciones mutuas* a pesar de usar los términos diferenciados. Lo que establece es que no existen fuerzas aisladas sino pares de acción mutua o *pares de interacción*. Si un cuerpo ejerce una fuerza sobre otro, el otro también ejerce una fuerza de igual magnitud y sentido contrario sobre el primero.

Como observadores externos, no nos asombra decir que dos cuerpos se empujan mutuamente, o friccionan mutuamente, aunque es usual observar el movimiento de uno mientras el otro permanece en reposo, en especial si el *otro* está ligado firmemente a la Tierra. Si empujamos un cuerpo con nuestro esfuerzo muscular, la misma fuerza actúa sobre nosotros en sentido opuesto. Para que ello se manifieste es conveniente estar de pie sobre un suelo muy pulido, como puede ser una pista de patinaje o sobre botes en un lago en calma, y empujar el otro cuerpo de modo que también se deslice sobre la pista o el agua quieta. Tanto el cuerpo como nosotros nos deslizaremos en sentidos opuestos como resultado de nuestro esfuerzo muscular empujando el cuerpo y el par de interacción que, gracias a nuestro esfuerzo muscular, el cuerpo aplica sobre nosotros. Debemos concluir que si la Tierra nos atrae hacia ella de acuerdo con nuestro *peso*, también nosotros atraemos a la Tierra con el mismo *peso* pero en sentido opuesto: nos atraemos mutuamente.

Mecanismos de Interacción

No es posible enunciar siquiera todos los mecanismos de interacción, abarcando escalas siderales y el mundo subatómico. Nos limitaremos a identificar los mecanismos primarios de interacción en el ámbito macroscópico y a escala humana. En principio habrá dos grandes modos de interacción: por contacto y a distancia. Haciendo a un lado algunas sutilezas, que no es apropiado abordar ahora, podemos decir que se trata de fuerzas de superficie (contacto) y de volumen (involucran a cada partícula del cuerpo y no sólo a las de la superficie).

Comenzaremos con la *fuerza peso*, si bien pospondremos un tratamiento más completo y formal cuando veamos las interacciones gravitacionales. Por el momento, sólo observemos que todos los cuerpos caen, cuando sólo actúa la fuerza peso en caída libre, con una aceleración g=9,8m/s^2. Si asumimos que el segundo principio tiene validez general, tendremos que expresar la fuerza peso como equivalente a la masa del cuerpo por la aceleración de la gravedad. Así la expresión

$$P = m.g$$

es la primera fuerza de acción a distancia, dado que no hay contacto material entre la Tierra y el cuerpo de masa m, y fuerza de volumen, debido a que cada partícula del cuerpo es atraída con la misma aceleración y su propio peso, resultando el peso total, la suma de los pesos individuales de cada partícula que lo forma.

En la Figura 4.1 representamos un cuerpo con el rectángulo y cuatro fuerzas aplicadas sobre él. La fuerza peso mg, en tanto fuerza de volumen, está dibujada en el centro simbolizando una aplicación en todo el cuerpo. Hacia la derecha se representa una fuerza de contacto que puede ejercer una cuerda tensa (tensión T). Dentro del cuerpo, sobre la cara izquierda y dirigida hacia la derecha, se ha dibujado una fuerza de contacto F_c representando el resultado de un contacto superficial con otro cuerpo que estaría a la izquierda. Esta fuerza a veces es llamada *reacción normal* N por ser perpendicular a las superficies. Sería más apropiado llamarla *fuerza normal de contacto* para no confundirla con algún par de interacción, especialmente con el de la fuerza peso. En la parte inferior se ha dibujado otra fuerza de contacto con una superficie sobre la que supuestamente desliza el cuerpo; se trata de la fuerza de rozamiento f_r.

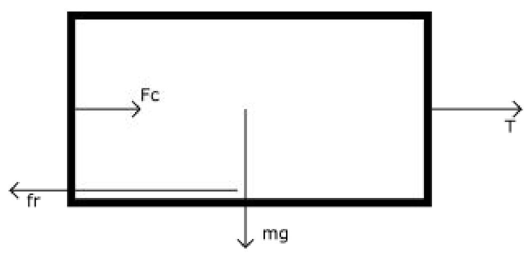

Fig. 4.1 Representación de fuerzas sobre un cuerpo

Veamos cada uno de los pares de interacción asociados. En primer lugar, la fuerza peso tendrá su par de interacción ubicado en el centro de la Tierra. La tensión lo tendrá en el otro extremo de la cuerda tensa. La fuerza normal, en la otra superficie. La fuerza de rozamiento, también en la otra superficie con la que ocurre la fricción, según se ilustra en la Figura 4.2. En el caso de la fuerza de rozamiento, más precisamente se trata de lo que llamaremos *rozamiento dinámico o cinético*, y se indica con v la dirección y el sentido de la velocidad del cuerpo apoyado para denotar que la fuerza de rozamiento se opone a la velocidad relativa del cuerpo.

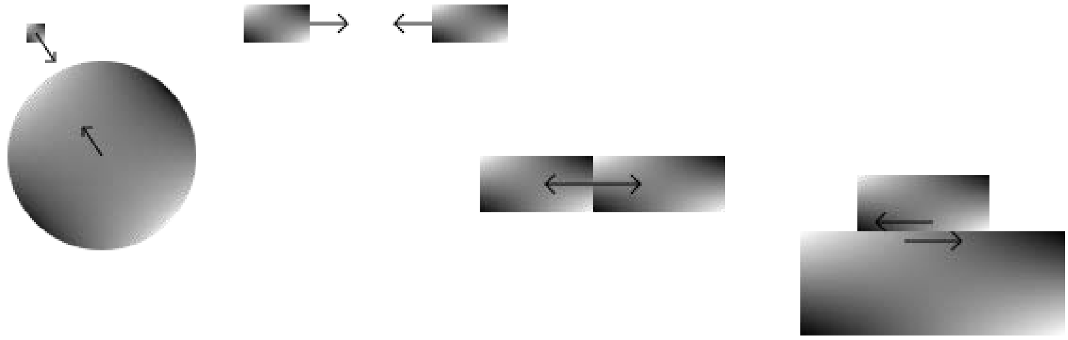

Fig. 4.2 Pares de interacción

Los signos sólo se han colocado para indicar que los miembros de los pares de interacción tienen signos opuestos. La fuerza de rozamiento se opone a la velocidad frenando el cuerpo superior mientras que el par de interacción se aplica al cuerpo inferior en sentido opuesto, acelerándolo en el sentido de la velocidad del cuerpo superior. Se ha cuidado indicar que cada fuerza se aplica sobre el cuerpo en el que actúa como fuerza externa.

Si a un cuerpo de masa m se le aplica una fuerza $\boldsymbol{F}$, éste manifiesta una aceleración $\boldsymbol{a}$ de acuerdo con la ecuación $\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}$. Si hay más de una fuerza actuante, escribiremos $\boldsymbol{R} = m\boldsymbol{a}$, donde $\boldsymbol{R}$ representa la resultante o suma de las fuerzas aplicadas sobre la masa m.

$$\boldsymbol{R} = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{F_i} = m.\boldsymbol{a}$$

Seguimos pensando en partículas, es decir, cuerpos sin dimensiones que no pueden rotar ni deformarse. En tal caso la masa puede pensarse como un parámetro escalar. Si se pretende calcular su valor, como la resultante y la aceleración son colineales, la masa puede despejarse como cociente de módulos de los vectores $\boldsymbol{R}$ y $\boldsymbol{a}$ ($m = R/a$).

El esquema de la Figura 4.3 presenta dos cuerpos, de masas m_1 y m_2, que interactúan por medio de una cuerda tensa, inextensible y sin masa. Si la cuerda tuviese masa, habría tres cuerpos en interacción. Si la cuerda no estuviese tensa, no habría tensión, como es obvio, y si fuese extensible, deberíamos incorporar la elasticidad. Es claro que una cuerda con tales características es totalmente ideal. Más que de una “cuerda modelo”, se trata de un *modelo de una cuerda*, que puede pensarse en términos de un modelo matemático *identidad* en el sentido que su única función es transmitir la tensión de un cuerpo a otro sin pérdida ni atenuación de la fuerza que transmite la cuerda. En toda la física se utilizan modelos de los sistemas que se estudian. Todo modelo involucra una idealización. Aun cuando la cuerda ideal modelada a los fines de abordar el problema de los cuerpos en interacción pueda resultar “demasiado” ideal, en el límite de lo absurdo, es sólo una forma de introducirnos en los problemas típicos de la dinámica, progresivamente más complejos y realistas.

En el esquema se muestra una fuerza $\boldsymbol{F}$ externa al sistema y sólo aplicada a la masa m_1. Al desplazarse m_1 por acción de la fuerza, tensa la cuerda y la tensión se transmite a la masa m_2 desplazándose conjuntamente con la misma aceleración. Si la aceleración de m_1 fuese mayor que la de m_2, la cuerda se cortaría porque es inextensible, y si la aceleración de m_2 fuese mayor que la de m_1, la cuerda perdería tensión y no habría interacción. Es decir que el modelo de interacción por medio de la cuerda requiere que ambos cuerpos se muevan en forma solidaria con la misma aceleración $\boldsymbol{a}$.

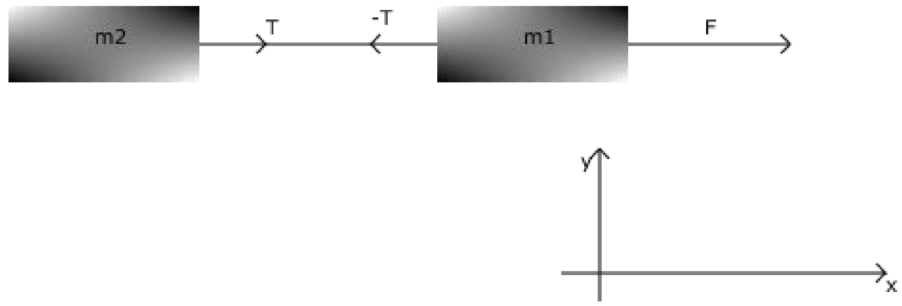

Fig. 4.3 Sistema de dos cuerpos en interacción por medio de una cuerda

Debajo se ha representado un sistema de coordenadas (x, y). Como no estamos interesados en el movimiento en términos de posición, no tiene relevancia el origen de coordenadas, pero sí las orientaciones de los ejes para determinar los signos de las fuerzas involucradas y de la aceleración consecuente. Así la fuerza externa es positiva y dirigida sobre el eje “x”, también sobre el mismo eje están aplicadas las tensiones siendo positiva la tensión ejercida sobre el cuerpo m_2 y negativa la que actúa sobre el cuerpo m_1.

Para plantear el problema, aplicamos lo que se suele llamar *diagrama de cuerpo libre*. Esto consiste en aislar idealmente cada cuerpo y analizar sólo las fuerzas que actúan sobre él. Al aislar el cuerpo m_1 vemos que hay dos fuerzas actuantes: F y $-T$, ambas sobre el eje “x”. Sobre el cuerpo m_2 hay sólo una fuerza actuante: T. Podemos escribir la segunda ley de Newton para cada uno de los cuerpos en el eje “x”, único que interviene en este problema.

Se obtiene las ecuaciones

$$F - T = m_1 . a \quad y \quad T = m_2 . a$$

La suma miembro a miembro de ambas ecuaciones elimina la tensión; en general, todos los pares de interacción se anulan mutuamente al sumar todas las ecuaciones involucradas en cualquier sistema dinámico.

Al efectuar la suma y sacar la aceleración como factor común, queda

$$F = (m_1 + m_2). a$$

y, por lo tanto

$$a = \frac{F}{m_1 + m_2}$$

Por otra parte,

$$T = m_2 \frac{F}{m_1 + m_2} = \frac{F}{\frac{m_1}{m_2} + 1}$$

La forma de la solución nos dice que la única fuerza actuante produce un efecto de aceleración equivalente al que produciría si se aplicara a un solo cuerpo de masa suma de las dos masas ligadas por la cuerda. Este resultado es bastante intuitivo. No lo es tanto el observar que la suma es conmutativa y que esto se traduce en que es indiferente el efecto si se invierte el orden de los cuerpos, es decir, si se pone m_2 delante aplicando la fuerza sobre ella, a la vez que m_2 arrastra m_1 a través de la cuerda. No ocurre lo mismo con la tensión. Si se invierte el orden de las masas,

$$T = m_1 \frac{F}{m_1 + m_2}$$

no es la misma que la obtenida. Si las dos masas fuesen iguales, la tensión sería la mitad de la fuerza aplicada. Si, en el planteo original, m_1 fuese nula, la tensión sería igual a la fuerza F, que estaría aplicada directamente sobre la cuerda. Si m_2 fuese nula, la tensión sería nula, porque la cuerda no estaría ligada a ninguna masa que debiese arrastrar. Es claro que la tensión tiene que ser tal que la fuerza neta aplicada sobre cada masa provoque la misma aceleración.

Más o menos intuitivos, la interpretación de los resultados expresados en las soluciones para la aceleración y la tensión resultan comprensibles. Es claro que si se pretende ahora resolver un problema de cinemática de MRUV, tendríamos que incorporar la posición y velocidad inicial a un tiempo dado para tener una ecuación predictiva. Es decir que la dinámica, a través de las fuerzas actuantes sobre los cuerpos, nos permite completar el planteo de las ecuaciones de movimiento y predecir el futuro del sistema dinámico.

Si se agrega un tercer cuerpo en interacción m_3, según se muestra en la Figura 4.4, la tensión entre los cuerpos 1 y 2 T_{12} y entre los cuerpos 2 y 3 T_{23} no son necesariamente iguales. Planteamos las ecuaciones de Newton para cada uno de los cuerpos.

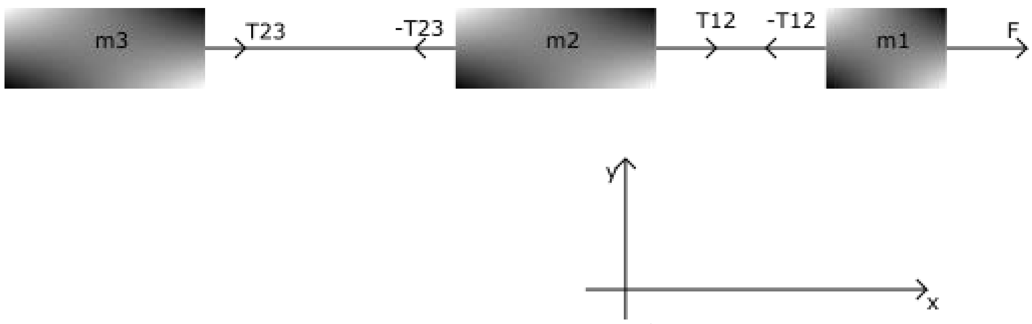

Fig. 4.4 Sistema de tres cuerpos en interacción por medio de cuerdas

Para el cuerpo 1 queda

$$F - T_{12} = m_1 a$$

Para la masa 2 será

$$T_{12} - T_{23} = m_2 a$$

Para el cuerpo 3 queda simplemente

$$T_{23} = m_3 a$$

Al resolver, primero sumando las tres ecuaciones, se obtiene que la aceleración es equivalente a la resultante de aplicar la fuerza a una masa equivalente a la masa total m_t del sistema

$$a = \frac{F}{m_1 + m_2 + m_3} = \frac{F}{m_t}$$

Sin embargo las tensiones resultan

$$T_{23} = m_3 \frac{F}{m_t} \quad y \quad T_{12} = (m_2 + m_3) \frac{F}{m_t}$$

Este resultado es consistente al considerar que T_{23} sólo está destinada a tirar de la masa 3 y T_{12} debe acelerar a las masas 2 y 3. Podemos observar que $T_{12} = T_{23}$ sólo si la masa 2 es nula, por lo que sólo habría una cuerda que liga la masa 1 con la 3.

Si se considera un cuerpo apoyado sobre una superficie horizontal en un ambiente donde hay gravedad, según se muestra en la Figura 4.5, lo que se referencia con el símbolo g asociado a una flecha que indica el sentido de la aceleración gravitatoria, se incorpora la fuerza peso mg y la fuerza normal de contacto N en equilibrio sobre el eje vertical.

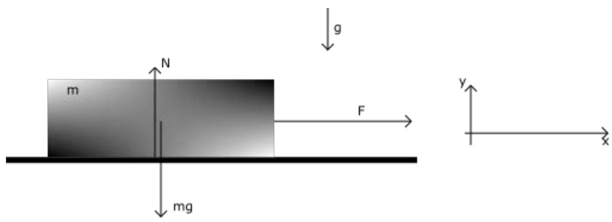

Fig. 4.5 Interacción con una superficie de apoyo

Al plantear las ecuaciones de Newton para cada uno de los ejes de coordenadas, tenemos $F = ma$ en el eje "x" y $N - mg = 0$ en el eje "y" por encontrarse en equilibrio de fuerzas. No hay otras fuerzas actuantes, de modo que la fuerza normal de contacto es igual al peso $N = mg$ y la aceleración es horizontal $a = F/m$.

Si la fuerza F se aplica con un cierto ángulo con respecto al eje horizontal, como se ilustra en la Figura 4.6, escribimos las leyes de Newton para cada eje descomponiendo la fuerza en sus componentes.

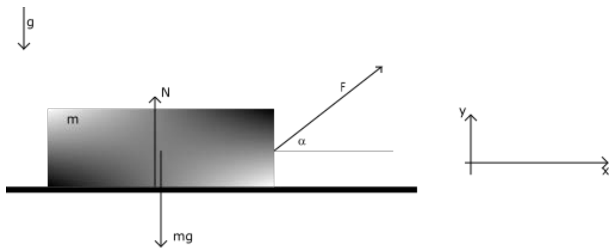

Fig. 4.6 Descomposición de una fuerza aplicada sobre un cuerpo

En el eje “x” será

$$Fcos(\alpha) = ma$$

y en el eje “y” queda

$$N + Fsen(\alpha) - mg = 0$$

de donde puede obtenerse la aceleración y la fuerza normal. Sin embargo, si $Fsen(\alpha)$ fuese mayor que el peso mg, el cuerpo se levantaría y la fuerza normal sería nula. La aceleración tendría entonces dos componentes, una sobre cada eje, y el ángulo de la aceleración sería diferente del de la fuerza F.

Dispongamos ahora un cuerpo sobre un plano inclinado, como en la Figura 4.7.

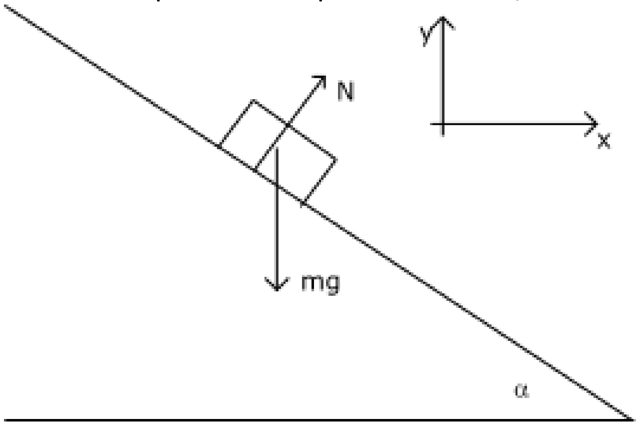

Fig. 4.7 Plano inclinado

Graficamos sólo la fuerza peso mg y la fuerza de contacto normal que ejerce el plano N. Notamos que el ángulo entre el peso y el plano inclinado, al igual que el formado entre la normal y la base del plano, son iguales al ángulo de inclinación del plano α por configurarse entre perpendiculares al plano (la normal) y la base del plano (el peso). Con el sistema de coordenadas propuesto, habrá que descomponer la fuerza normal en $Nsen(\alpha)$ en el eje “x” y $Ncos(\alpha)$ en el eje “y”. De modo que el planteo será, para el eje “x”,

$$Nsen(\alpha) = ma_x$$

y para el eje “y” queda

$$Ncos(\alpha) - mg = ma_y$$

Como

$$\frac{a_y}{a_x} = tg(\alpha)$$

se dispone de tres ecuaciones con tres incógnitas (N y las componentes de la aceleración) para resolver.

Podemos proponer un sistema de coordenadas compatible con la posibilidad de movimiento del cuerpo, más sintéticamente expresado, *compatible con los vínculos*.

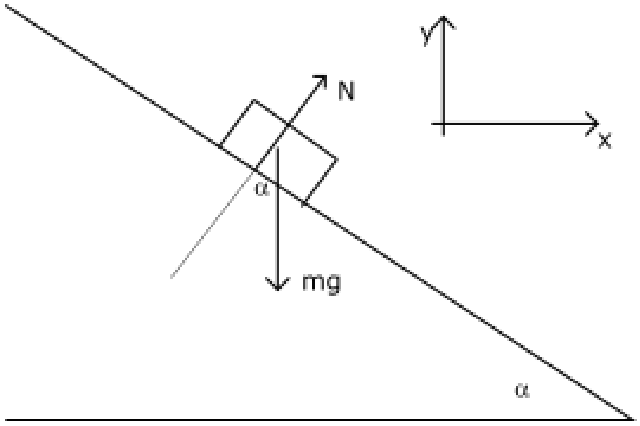

Fig. 4.8 Rotación del sistema de coordenadas

En este caso, representado en la Figura 4.8. basta inclinar el sistema de coordenadas, rotarlo un ángulo igual al de inclinación del plano α de modo que el eje “x” esté dirigido a lo largo del plano y sea el eje obligado de movimiento, mientras que el eje “y” sea perpendicular al plano y en él las fuerzas estén en equilibrio. El planteo de las leyes de Newton será

$$mgsen(\alpha) = ma$$

en el eje “x” y en el eje “y”

$$N - mgcos(\alpha) \; = \; 0$$

De aquí se obtiene inmediatamente

$$N = mgcos(\alpha)$$

y la aceleración

$$a = gsen(\alpha)$$

No siempre es fácil elegir un sistema de coordenadas “adecuado” pero el criterio de compatibilidad con los vínculos analizando la geometría y las posibilidades de movimiento suele dar indicios de “buenos” sistemas de coordenadas.

Planteemos ahora el problema de un cuerpo apoyado sobre una superficie horizontal (m_2) y otro suspendido de una cuerda que liga los dos cuerpos (m_1), como su muestra en la figura 4.9.

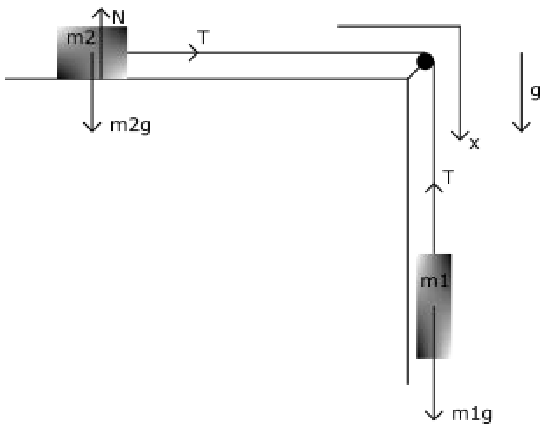

Fig. 4.9 Cuerpo suspendido que tira de otro a través de una cuerda

En un sistema de tales características es conveniente usar a la cuerda como eje "x" de coordenadas (eje cuerda) por ser el vínculo que establece la restricción al movimiento. El eje "y" será perpendicular a la cuerda en todo punto. En este sistema de coordenadas, para la masa 1 en el eje "x" tendremos $m_1 g - T = m_1 a$, para la masa 2 en el eje "x" queda $T = m_2 a$, mientras que en el eje "y" se plantea la condición de equilibrio $N - m_2 g = 0$. Inmediatamente se obtiene que la fuerza normal es igual que el peso del cuerpo 2 y que la aceleración resulta de sumar las ecuaciones en "x" y resolver siendo

$$a = \frac{m_1 g}{m_1 + m_2}$$

y la tensión

$$T = \frac{m_1 m_2 g}{m_1 + m_2}$$

Un análisis de los resultados nos lleva a ver que la aceleración siempre será menor que la gravedad, a menos que $m_2 = 0$, lo cual es equivalente a tener a m_1 en caída libre. Si $m_1 = 0$, la masa 2 estará en equilibrio y en ambos casos la tensión será nula. Esta tensión es indiferente al orden en que se coloquen las masas (m_2 suspendida y m_1 apoyada). Esta simetría de la tensión en relación con el intercambio de masas se debe a que la fuerza que acelera el sistema es proporcional al peso de la masa suspendida, la aceleración es inversamente proporcional a la masa total, pero la tensión es proporcional a la masa adicional que debe ser tirada por la misma fuerza, que a su vez es proporcional a la masa que tira debido a su peso. De modo que la tensión es proporcional al *peso* de la masa suspendida y a la *masa* de la masa apoyada. Notemos la inversión de las relaciones conmutativas de las masas con la aceleración y la tensión cuando la fuerza aplicada era externa e independiente del sistema. Cuando la fuerza externa proviene del peso de la masa suspendida, no es una fuerza independiente del sistema. Hacia el final retomaremos esta cuestión de la relación de proporcionalidad entre *peso* e *inercialidad*.

También se llega al resultado aparentemente absurdo que un granito de arena puede hacer caer una enorme roca si se lo suspende de una cuerda atada a ella. Es un pequeño precio a pagar por una idealización que nos permitió modelar una primera aproximación a la solución de estos problemas.

Se deja el siguiente sistema como ejercicio, según se muestra en la Figura 4.10.

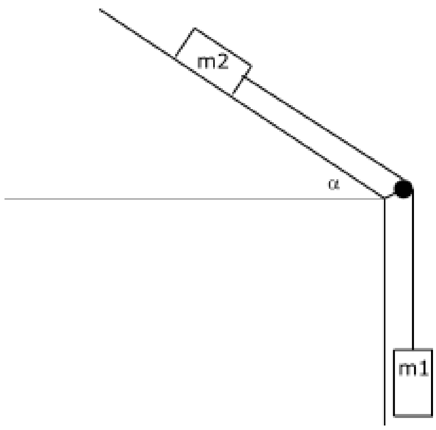

Fig. 4.10 Cuerpo suspendido vinculado a otro en un plano inclinado

El cuerpo 2 está apoyado sobre un plano con un ángulo de inclinación α medido en el sentido de la elevación del plano. Se obtendrá las siguientes soluciones. Para la aceleración será

$$a = \frac{m_1 + m_2 sen(\alpha)}{m_1 + m_2} g$$

Para la tensión quedará

$$T = \frac{m_1 m_2 \big(1 - sen(\alpha)\big)}{m_1 + m_2} g$$

Si el ángulo de inclinación es nulo, se vuelve al resultado del problema en que la masa 2 está apoyada sobre una superficie horizontal, como era de esperarse. Si el ángulo valiese 90°, se trataría de dos cuerpos en caída libre con tensión nula. Si el ángulo fuese negativo, es decir, el plano inclinado hacia abajo, basta recordar que la función seno es impar y el resultado incluye esta situación. En tal caso, la aceleración puede ser nula o negativa, deslizándose ambas masas en sentido opuesto al propuesto, de acuerdo con la orientación del sistema de coordenadas. Si el ángulo valiese -90°, es decir, las dos masas suspendidas de una polea, basta escribir $m_1 = m_2 = m$ para ajustar los resultados a esta situación particular. En tal caso, si las masas estuviesen colgadas de una polea y fuesen iguales, la aceleración sería nula (estarían en equilibrio) y la tensión sería igual al peso individual de las masas suspendidas.

Este modo de abordar la discusión final de los resultados tiene por objetivo el análisis de la solución y la exploración de otros resultados que pueden obtenerse a partir de ella. Se intenta responder al menos a dos preguntas: ¿Qué hemos aprendido con la resolución de tal problema?, y ¿qué más podemos aprender explorando la solución?

Abordemos ahora un problema más realista de una cuerda con masa $m = d.L$, donde d es la densidad lineal de masa de la cuerda y L su longitud. Sobre un extremo de la cuerda se aplica una fuerza F y sobre el otro extremo está ligada una masa M.

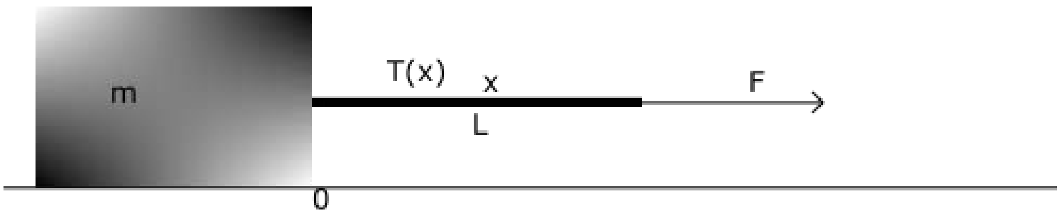

Fig. 4.11 Cuerpo tirado por una fuerza a través de una cuerda de longitud L

Tomemos el origen del sistema de coordenadas *cuerda* en el punto de contacto con el cuerpo de masa M. Así, un punto “x” de la cuerda la divide en dos partes: entre el cuerpo y el punto con una longitud igual a “x”, y entre este punto y el extremo, con una longitud igual a $L - x$. En este punto la cuerda tendrá una tensión T_x. Entre el punto de aplicación de la fuerza F y el punto “x”, la sección de la cuerda estará sometida a $F - T_x$ y responde a la segunda ley de Newton según

$$F - T_x = d(L - x)a$$

Por otra parte, en la sección entre el cuerpo y el punto "x", estará sometida a $T_x - T_o$ y responde a

$$T_x - T_o = dxa$$

La masa M está sometida sólo a T_o y responde a

$$T_o = Ma$$

Como la cuerda tiene masa pero no es elástica, la aceleración tiene que ser la misma en todos sus puntos y en el cuerpo, de modo que podemos sumar las tres ecuaciones y se obtiene

$$F = dLa + Ma = (m + M)a$$

la masa total de la cuerda y el cuerpo divide a la fuerza F para obtener la aceleración, como era de esperarse. Pero también podemos obtener la tensión en cada punto de la cuerda. En primer lugar en el punto de contacto con M,

$$T_o = \frac{MF}{M + m}$$

En cualquier otro punto de la cuerda, será

$$T = \frac{F(M + d.x)}{M + m}$$

La tensión es igual a la fuerza F en el extremo libre de la cuerda y disminuye linealmente con la proximidad al cuerpo.

Se sugiere plantear dos cuerpos, de masas m_1 y m_2, ligados por una cuerda de masa $m_c = dL$. Se obtendrá que

$$a = \frac{F}{m_1 + m_c + m_2}$$

y que

$$T = \frac{(m_2 + d.x)F}{m_1 + m_c + m_2}$$

La fuerza F se aplica sobre m_1 y éste, a través de la cuerda, tira de m_2.

Intentaremos abordar el problema con otra metodología matemática. Utilizando cálculo diferencial, podemos tomar un elemento diferencial de masa dm de la cuerda que une los cuerpos de masas m_1 y m_2 en el punto x al que están aplicadas las tensiones $T_{\mathrm{x+dx}}$ y T_x. La diferencia

$$dT = T_{x+dx} - T_x = dm.a = d.dx.a$$

expresa la segunda ley de Newton como relación entre un diferencial de tensión y un diferencial de cuerda dx con densidad d. La derivada de la tensión con la posición de la cuerda es una constante.

$$\frac{dT}{dx} = d.a$$

Si integramos entre 0 y L obtenemos que $T_L - T_o = ma$. Como $F - T_L = m_1 a$ y $T_o = m_2 a$, resulta la misma solución para la aceleración que obtuvimos antes, y ahora integrando $dT = d.a.dx$ entre 0 y x, también queda la expresión de la tensión que antes habíamos obtenido.

En el orden de abordar problemas más realistas, puede plantearse una cuerda de densidad lineal de masa d suspendida parcialmente del borde de una mesa de modo tal que cae debido al peso de la parte que cuelga. Tomando como $x = 0$ el extremo que cuelga, en cada momento del proceso de caída será $d.(L - x)$ la masa de la parte apoyada y $d.x$ la masa de la sección suspendida. Nos interesa particularmente la tensión T_x en el punto de flexión de la cuerda. Si planteamos las leyes de Newton queda, para la parte apoyada,

$$T_x = d(L - x)a$$

y, para la parte suspendida,

$$dxg - T_x = dxa$$

Al sumarlas, se obtiene que

$$dxg = ma = dLa$$

donde m es la masa total de la cuerda. Hasta aquí el planteo. Para resolver esta ecuación nos encontramos con que la aceleración no es constante y crece a medida que x aumenta (cae la cuerda). Para poder continuar, se requiere usar el cálculo infinitesimal para resolver una ecuación diferencial.

$$xg = L\frac{d^2x}{dt^2} \quad o \quad \frac{d^2x}{dt^2} - \frac{g}{l}x = 0$$

Presentaremos un método de resolución útil para ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes. Primero reemplazamos a la función incógnita $x_{(\mathrm{t})}$ por la forma exponencial

$$x_{(t)} = Ae^{\lambda t}$$

Donde A y λ son constantes a determinar. Al reemplazar la forma propuesta en la ecuación se obtiene

$$A\lambda^2 e^{\lambda t} - \frac{g}{L}Ae^{\lambda t} = 0$$

Como A puede asumirse no nula, dado que si así fuera se obtendría una solución trivial, es decir, 0=0, y por otra parte la exponencial nunca se anula, podemos deducir

$$\lambda^2 - \frac{g}{L} = 0 \quad o \quad \lambda = \pm\sqrt{\frac{g}{L}}$$

La solución general será cualquier combinación lineal de las dos soluciones posibles, es decir

$$x_{(t)} = A_1 e^{+\sqrt{\frac{g}{L}}t} + A_2 e^{-\sqrt{\frac{g}{L}}t}$$

Falta determinar las constantes A_1 y A_2. Si asumimos que la cuerda se deja caer desde el reposo y calculamos la velocidad

$$v_{(t)} = \sqrt{\frac{g}{L}}\left(A_1 e^{+\sqrt{\frac{g}{L}}t} - A_2 e^{-\sqrt{\frac{g}{L}}t}\right)$$

Especializada en $t = 0$

$$v_{(0)} = \sqrt{\frac{g}{L}}(A_1 - A_2) = 0$$

Por lo tanto $A_1 = A_2 = A$. Reemplazamos este valor único de A en la ecuación de posición

$$x_{(t)} = A\left(e^{+\sqrt{\frac{g}{L}}t} + e^{-\sqrt{\frac{g}{L}}t}\right) = 2A\left(\frac{e^{+\sqrt{\frac{g}{L}}t} + e^{-\sqrt{\frac{g}{L}}t}}{2}\right) = 2Acosh\left(\sqrt{\frac{g}{L}}.t\right)$$

donde interviene el coseno hiperbólico. La solución es, si se supone que se la deja caer desde el reposo a partir de una longitud inicial L_o

$$x_{(t)} = L_o cosh\left(\sqrt{\frac{g}{L}}.t\right)$$

Este proceso dura hasta que toda la cuerda se desprende y luego cae en caída libre. Esto ocurre cuando $t = arccosh\left(\frac{L}{L_o}\right).\sqrt{\frac{L}{g}}$.

Vemos que cuando intentamos abordar problemas más realistas, rápidamente nos encontramos con dificultades de cálculo que requiere el uso de otras herramientas matemáticas o aproximaciones numéricas.

Rozamiento

El rozamiento, fricción entre superficies materiales, es una fuerza extremadamente compleja, tanto como si se pretendiese estudiar la tensión o la compresión desde la perspectiva molecular. Desde el punto de vista macroscópico, es la síntesis de un número elevado de interacciones que impiden o dificultan el deslizamiento entre superficies. Con una visión más concreta, puede imaginarse el efecto conjunto de las rugosidades de los materiales que se deslizan entre sí.

Otra cuestión es el modelo que empleemos para expresar la fuerza de rozamiento en el marco de las leyes de Newton. Para ello distinguimos dos aspectos en que se manifiesta el rozamiento: cuando impide el deslizamiento y cuando lo dificulta. Al primero lo llamaremos condición estática de rozamiento o rozamiento estático, usando como símbolo para la *fuerza de rozamiento estático* f_{re}. Al segundo lo llamaremos condición dinámica de rozamiento o *fuerza de rozamiento dinámico*, a veces llamado también *rozamiento cinético*, y usaremos el símbolo f_{rd}. Para avanzar más en la descripción y el modelado de esta fuerza, notemos que si se aplica una fuerza F a un cuerpo con el objetivo de moverlo pero sin conseguir deslizarlo sobre la superficie en la que se apoya, debe haber otra fuerza que equilibre a la aplicada F y es precisamente la fuerza de rozamiento estático. Así $F - f_{re} = 0$ nos dice que la fuerza de rozamiento estático es siempre igual a la fuerza aplicada.

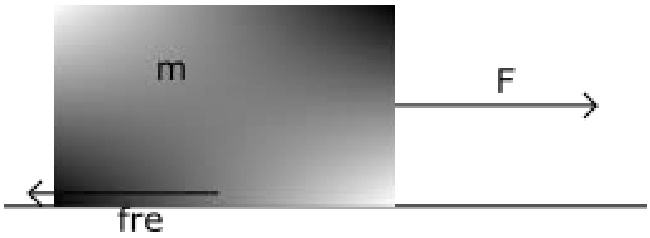

Fig. 4.12 Equilibrio en rozamiento estático

La experiencia cotidiana nos muestra que es frecuente que intentemos deslizar un cuerpo pero “algo” nos lo impide. Le hemos dado un nombre a ese “algo”. Pero también sabemos que si incrementamos la fuerza, a menos que otro “algo” lo mantenga firmemente adherido a la superficie, eventualmente podemos ejercer un esfuerzo que lo quite del estado de reposo, que “destrabe” las rugosidades, y el cuerpo comience a deslizarse. Si somos un poco observadores, veremos que es más fácil mantenerlo en movimiento que iniciar el desplazamiento. Desde el punto de vista del modelado de la fuerza de rozamiento, diremos que hay un límite, que podemos llamar *fuerza de rozamiento estático máxima o limite* f_{rel} que, si es superada con nuestra fuerza aplicada F, el equilibrio se rompe y el cuerpo comienza a deslizarse. Desde entonces comienza a funcionar otro modo de “trabarse y destrabarse” las rugosidades de manera tal que nos vemos obligados a ajustar el modelo a otra fuerza de rozamiento dinámico, un poco menor en módulo que la fuerza de rozamiento estático límite $f_{ed} < f_{rel}$.

Mientras no hemos llegado a la fuerza de rozamiento estático límite, el modelo es simplemente $f_{re} = F$. El valor de esta fuerza de rozamiento estático límite debe depender, y aquí comienza la especulación que, a modo de hipótesis de trabajo, nos llevará a proponer un modelo y luego ver si funciona en el planteo de las leyes de la mecánica, debe depender, decíamos, de las rugosidades de las superficies en contacto pero también de cuán “apretadas” estén las superficies y así “trabadas” las rugosidades. Esto es sólo una especulación que habrá que evaluar si funciona, pero tenemos una manera de cuantificar cuán “apretadas” están las superficies por medio de lo que hemos llamado fuerza de contacto de compresión o fuerza normal N. Las rugosidades las parametrizaremos en un coeficiente, como muchos comenzarán a introducirse a partir de ahora, a veces con el rótulo de *módulo*, al que llamaremos *coeficiente de rozamiento estático* y simbolizaremos μ_e. El modelo que propondremos para la fuerza de rozamiento estático límite será $f_{rel} = \mu_e . N$.

Para la fuerza de rozamiento dinámico el planteo podría ser más complejo porque en principio no sabemos si está involucrada la velocidad, la aceleración y obviamente una superficie cambiante a medida que el cuerpo se desliza. Supondremos en principio que la superficie no cambia de rugosidad y, en primera aproximación al menos, lo que deberá corroborarse en un desarrollo teórico y en la experiencia, que los aspectos cinemáticos no afectan a la fuerza de rozamiento dinámico. Le asociaremos un coeficiente constante para cada par de superficies y escribiremos $f_{ed} = \mu_d . N$ para el modelo de la fuerza de rozamiento dinámico.

Pero cuando introducimos coeficientes y parámetros nuevos en modelos, debemos acompañarlos con algún método de determinación de tales nuevas magnitudes. Podríamos decir que los coeficientes de rozamiento miden la rugosidad en reposo y en deslizamiento de las superficies que friccionan. Notemos que no se mide *la rugosidad de la superficie* sino de *ambas* en tanto interactúan. Por lo tanto, no se trata de una magnitud absoluta que mide la rugosidad sino de una magnitud relativa que se aplica al mecanismo de interacción.

Para determinar los coeficientes, podemos aplicar un método bastante simple y, si no se pretende gran precisión, casero. Apoyemos las superficies, que para que este método pueda aplicarse, tienen que ser planas, e inclinemos el sistema lentamente, a modo de un plano inclinado, hasta que el cuerpo apoyado comience repentinamente a deslizarse. Mantengamos esa inclinación y midamos el ángulo. Asumiremos que en esas condiciones se ha alcanzado a equilibrar la fuerza de rozamiento estático límite.

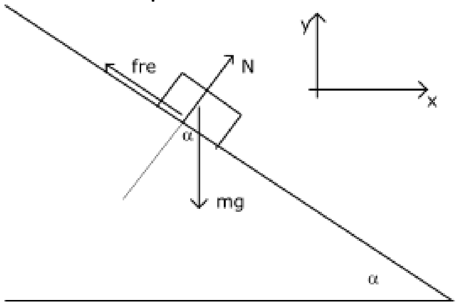

Fig. 4.13 Determinación de coeficiente de rozamiento estático

La condición de equilibrio establece que $m.g.sen(\alpha) - f_{rel} = 0$ y que en el eje perpendicular $N - m.g.cos(\alpha) = 0$. Nuestro modelo nos propone que $f_{rel} = \mu_e.N$. Como $N = m.g.cos(\alpha)$, reemplazando en la expresión de la fuerza de rozamiento estático y luego en la condición de equilibrio de desplazamiento sobre el eje horizontal, queda $m.g.sen(\alpha) = \mu_e.m.g.cos(\alpha)$, de donde deducimos que

$$\mu_e = tg(\alpha)$$

Por lo que el coeficiente de rozamiento estático puede determinarse a partir del ángulo de inclinación del plano en el que el cuerpo comienza a deslizarse. Si luego reducimos un poco la inclinación, tendremos otro ángulo α' en el que se desliza con velocidad constante. En tal caso estará actuando la fuerza de rozamiento dinámico y podremos determinar

$$\mu_d = tg(\alpha')$$

Los valores típicos para los coeficientes de rozamiento se encuentran en torno a 0,1 para superficies moderadamente lisas a cercanos a 1 o inclusive mayores para superficies muy rugosas. El coeficiente de rozamiento dinámico es un poco menor que el de rozamiento estático y el rango puede ser cercano a cero para superficies muy lisas y hasta mayor que 1 en condiciones de mucha rugosidad.

Ahora hemos completado el modelo y estamos en condiciones de ponerlo a prueba en situaciones realistas aplicando las leyes de Newton. Sea primero un cuerpo de masa m que se desliza sobre una superficie horizontal con una velocidad inicial v_o. El planteo será muy simple y, si tomamos como punto de referencia el lugar donde lo dejamos librado a la acción del rozamiento dinámico y como tiempo de referencia el momento en que comienza a frenarse, tendremos $-f_{rd} = m.a$ en el eje horizontal, y $N - mg = 0$ en el eje vertical. Como $f_{rd} = \mu_d.N$, tendremos que $-\mu_d mg = ma$, de donde la aceleración será $a = -\mu_d g$. Si recordamos las ecuaciones de la cinemática del MRUV, tendremos que $v_{(td)} = 0 = v_o - \mu_d g t_d$ cuando el cuerpo se detenga en el tiempo $t_d = v_o/\mu_d g$. En tal caso, se habrá desplazado hasta la posición final dada por la expresión $x_d = v_o t_d - \frac{a t_d^2}{2} = \frac{v_o^2}{2\mu_d g}$. Podría usarse como método para determinar el coeficiente de rozamiento dinámico, pero deberíamos tener una forma de conocer la velocidad inicial. Es claro que, si el modelo es apropiado, el comportamiento del plano inclinado y el frenado por rozamiento deben ser consistentes.

El segundo problema con la incorporación de fuerzas de rozamiento que trataremos será una versión más realista de la masa suspendida de una cuerda que tira de otra masa apoyada en una superficie, ahora con rozamiento. En el esquema de la Figura 42, similar a uno propuesto más arriba, hemos destacado la fuerza de rozamiento con un trazo más grueso. Pero la hemos identificado con f_r, sin especificar si es estático o dinámico porque en principio no lo sabemos. Si el sistema está en reposo, por lo tanto en equilibrio, será rozamiento estático f_{re}, inclusive en la condición límite f_{rel}. Pero si está en movimiento, será un rozamiento dinámico f_{rd}, inclusive en equilibrio si se desliza con velocidad constante.

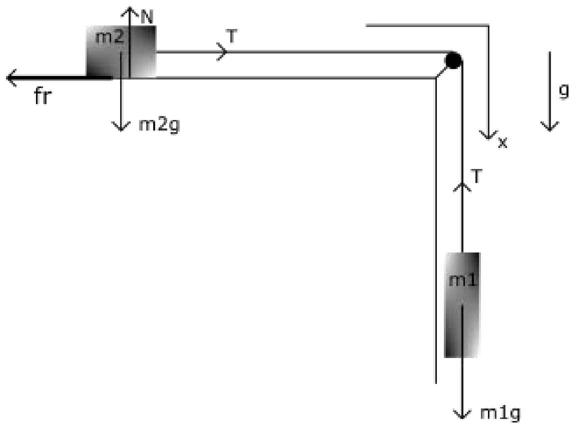

Fig. 4.14 Esquema de cuerpo suspendido con rozamiento

Si está en reposo, será $m_1 g - T = 0$, $T - f_{re} = 0$ y $N - m_2 g = 0$, por otra parte $f_{rel} = \mu_e N$. De la primera ecuación deducimos que la tensión tiene que igualar el peso de la masa 1 ($T = m_1 g$). De la segunda obtenemos que la fuerza de rozamiento estático necesaria para conservar el equilbrio tiene que igualar a la tensión y, por lo tanto al peso de la masa 1 ($f_{re} = T = m_1 g$). Por otra parte, podemos calcular la máxima fuerza de rozamiento estático disponible ($f_{rel} = \mu_e m_2 g$). Si la fuerza necesaria supera la máxima disponible, no estará en equilibrio. Esto ocurre si $m_1 > \mu_e m_2$.

Al plantear la condición dinámica escribiremos $m_1 g - T = m_1 a$, $T - f_{rd} = m_2 a$, $N - m_2 g = 0$ y $f_{rd} = \mu_d N$. Al resolver obtendremos que $a = \frac{m_1 g - \mu_d m_2 g}{m_1 + m_2}$. Esta aceleración puede ser positiva si $m_1 > \mu_d m_2$, puede ser nula y estar en equilibrio con movimiento uniforme de caída si $m_1 = \mu_d m_2$, pero también puede ser negativa y estar frenándose si $m_1 < \mu_d m_2$.

Notemos que puede ocurrir que $m_1 < \mu_e m_2$, con lo cual estaría en reposo, pero también puede ser $m_1 > \mu_d m_2$, porque el coeficiente estático es algo mayor que el dinámico. Para definir el estado del sistema, debemos informar si tiene alguna velocidad inicial que favorezca la caída. Si inicialmente está en reposo, permanecerá en reposo, pero si inicialmente está en movimiento con una velocidad inicial positiva (en el planteo del sistema de coordenadas del gráfico), continuará en caída acelerada. Si se le imprime inicialmente una velocidad negativa, se frenará por rozamiento dinámico, pero depende de la relación de masas si luego permanecerá en reposo o iniciará un proceso de caída.

La condición de rozamiento dinámico inercial, que ocurre si $m_1 = \mu_d m_2$, puede ofrecernos otro método de determinación del coeficiente de rozamiento dinámico si podemos variar la masa m_2, por ejemplo agregando lentamente agua o arena en un recipiente que se incorpore como masa 2. Cuando se mida una velocidad constante, será $\frac{m_1}{m_2} = \mu_d$.

Es claro que podemos incorporar el plano inclinado, tres masas, diferentes coeficientes de rozamiento e ir incrementando la dificultad de los problemas y, con ello, el entrenamiento en la resolución de situaciones cada vez más complejas.

Pero también hay que revisar el planteo básico acerca de la fuerza normal de contacto y las rugosidades. Es al menos llamativo que planteemos la fuerza de rozamiento como de contacto entre superficies y no aparezcan las superficies en el modelo matemático. Sólo introduciremos la definición de presión sin mucho formalismo para abordar este tema. Se interpreta la presión entre sólidos como una distribución de la fuerza de contacto en la superficie sobre la que se aplica. En módulo y omitiendo los aspectos vectoriales y diferenciales, podemos escribir $P = F/S$. Si utilizamos la presión podríamos escribir, a modo conceptual sin especificar si se trata de rozamiento estático o dinámico

$$f_r = \mu P S$$

Podríamos asumir que la fuerza F es nuestra N de contacto. Si la presión varía en cada punto de la superficie y también el coeficiente de rozamiento, podríamos integrar sobre la superficie de contacto

$$f_r = \iint \mu_{(\vec{x})} P_{(\vec{x})} dS$$

En esta expresión la doble integral extiende el concepto de integración sobre superficies. Deberíamos conocer la ley de variación del coeficiente sobre la superficie, de la presión y además integrar sobre toda la superficie, lo que casi con seguridad nos llevará a utilizar aproximaciones numéricas.

En relación con “el” coeficiente, la idea de rugosidades que se traban no es más que una aproximación que hace uso de una imagen concreta y táctil de “trabar” y “rugosidad”. Aun en superficies muy pulidas hay fuerzas que impiden o dificultan el desplazamiento pero asociadas con interacciones que pueden ser electrostáticas, involucrar desgastes de los materiales e inclusive eventuales reacciones químicas y efectos térmicos. De modo que habría que descomponer “el” coeficiente en varios términos que tengan en cuenta el aporte de diferentes mecanismos. Teniendo en cuenta las aproximaciones en todos los parámetros y en el proceso de integración, es posible que no hayamos mejorado nada la estimación de la fuerza de rozamiento a los fines prácticos, pero habremos incrementado nuestro conocimiento teórico y nunca se sabe si con eventuales aplicaciones. Sólo notemos que algo tan “simple” como el rozamiento encubre procesos muy complejos y puede abrir un campo enorme de investigación.

En otro aspecto, la discontinuidad que provoca el cambio abrupto del coeficiente de rozamiento entre los estados estático y dinámico es fuente de vibraciones al variar entre estados de reposo y movimiento, a lo que se suma fluctuaciones en el coeficiente dinámico y en las fuerzas de contacto. El resultado es un complejo de vibraciones, emisión de ruidos, desgaste, calor, efectos eléctricos y podríamos seguir en el dominio atómico sólo para destacar la complejidad sin límites de lo que en apariencia es tan simple.

Fuerza elástica

Incorporar la fuerza elástica es esencialmente escribir la Ley de Hooke en términos de las Leyes de Newton. Sea la longitud natural del resorte L_o. El estiramiento o compresión se escribirá $\Delta L = L - L_o$. Que la fuerza elástica f_e sea proporcional y opuesta al estiramiento se escribirá $f_e = -k\Delta L$. (Vectorialmente se escribe como un producto escalar $\boldsymbol{f_e} = -\boldsymbol{k}.\boldsymbol{\Delta L}$, por lo tanto la *constante elástica* es un vector con el módulo dado por el valor numérico de la constante pero componentes que expresan la direccionalidad de la ubicación del resorte)

Para simplificar el tratamiento, ubicaremos el sistema de coordenadas con un eje "x" coincidente con el extremo libre del resorte en su longitud natural y tomaremos como tiempo de referencia el momento en que es liberada la masa a la acción de la fuerza elástica. Adherimos un resorte ideal, es decir perfectamente elástico, a una pared ideal perfectamente rígida y una masa puntual m al extremo libre del resorte apoyada horizontalmente sobre una superficie sin rozamiento. De este modo podemos escribir $f_e = -kx = ma$ como la segunda ley de Newton aplicada al resorte.

Será entonces

$$f_e = -kx = ma = m\frac{d^2x}{dt^2}$$

La escribimos en forma

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0 \quad o \quad \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0$$

Si se denomina al cociente $\frac{k}{m} = \omega^2$queda expresada en la forma

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$$

Proponemos una solución de la forma $x = Ae^{\lambda t}$. Al reemplazar en la ecuación diferencial queda

$$\lambda^2 Ae^{\lambda t} + \omega^2 Ae^{\lambda t} = 0$$

Omitidos los factores comunes no nulos

$$\lambda^2 + \omega^2 = 0$$

De modo que tenemos dos soluciones para el exponente

$$\lambda = i\omega = i\sqrt{\frac{k}{m}} \quad o \quad \lambda = -i\omega = -i\sqrt{\frac{k}{m}}$$

Expresando la solución general como combinación lineal de las dos soluciones imaginarias queda

$$x_{(t)} = A_1 e^{i\sqrt{\frac{k}{m}}t} + A_2 e^{-i\sqrt{\frac{k}{m}}t}$$

Las exponenciales imaginarias admiten un desarrollo trigonométrico

$$x_{(t)} = A_1\left[\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) + isen\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)\right] + A_2\left[\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) - isen\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)\right]$$

$$x_{(t)} = (A_1 + A_2)\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) + i(A_1 - A_2)\,sen\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)$$

Para que la solución sea real, A_1y A_2 deben ser complejos conjugados, es decir, $A_1 = a/2 + ib/2$ y $A_2 = a/2 - ib/2$. Reemplazando en la ecuación anterior

$$x_{(t)} = a\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) + b\,sen\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)$$

Para determinar a y b, calculemos primero la derivada de $x_{(\mathrm{t})}$, es decir, la velocidad.

$$v_{(t)} = \sqrt{\frac{k}{m}}\left[-a\,\mathrm{sen}\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) + b\,cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)\right]$$

Especializando el tiempo en $t = 0$ para establecer las condiciones iniciales.

$$x_{(0)} = x_o = a \quad y \quad v_{(0)} = v_o = \sqrt{\frac{k}{m}}b \quad o \quad b = \frac{v_o}{\omega} = v_o\sqrt{\frac{m}{k}}$$

De modo que queda

$$x_{(t)} = x_o\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) + v_o\sqrt{\frac{m}{k}}sen\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)$$

o

$$x_{(t)} = x_o\cos(\omega t) + \frac{v_o}{\omega}sen(\omega t)$$

Propongamos una solución general de la forma

$$x_{(t)} = Asen(\omega t + \varphi_o)$$

En esta ecuación A es la *amplitud* o máximo apartamiento del resorte de su posición de equilibrio. A ω se lo llamará la *frecuencia angular* o *pulsación*, dado por $\sqrt{\frac{k}{m}}$, se mide en *radianes por segundo*, y φ_o será llamado la *fase inicial* del proceso. A todo el argumento del seno se lo llamará la *fase* y falta relacionar A y $\varphi_o$con los coeficientes dados por el estado inicial de la expresión de $x_{(t)}$. Para ello basta desarrollar el seno de la suma de ángulos

$$x_{(t)} = Asen(\omega t + \varphi_o) = A[sen(\omega t)\cos(\varphi_o) + \cos(\omega t)\, sen(\varphi_o)]$$

Debe ser

$$x_o = Asen(\varphi_o) \quad y \quad \frac{v_o}{\omega} = Acos(\varphi_o)$$

De donde

$$A = \sqrt{x_o^2 + \left(\frac{v_o}{\omega}\right)^2} \quad y \quad \varphi_o = arctg\left(\frac{v_o}{\omega x_o}\right)$$

La frecuencia o número de oscilaciones por unidad de tiempo (f o v) se obtiene de expresar la frecuencia angular en ciclos por segundo en lugar de radianes por segundo, para ello es suficiente dividir ω por 2π. Así

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$$

El período de oscilación T es el tiempo que requiere para completar un ciclo completo, es decir, hasta recuperar la misma posición y velocidad. Basta hallar la recíproca de la frecuencia

$$T = 1/f = 2\pi\sqrt{m/k}$$

Es importante notar aquí que la frecuencia de oscilación se incrementa con la rigidez del resorte y disminuye a medida que aumenta la masa que debe ser movida por él. El gráfico de posición en función del tiempo del movimiento oscilatorio responde a una función seno con variantes en amplitud, frecuencia y fase inicial.

La velocidad como función del tiempo estará dada por $v_{(t)} = \omega Acos(\omega t + \varphi_o)$ y la aceleración como función del tiempo por $a_{(t)} = -\omega^2 Asen(\omega t + \varphi_o)$. Ambos parámetros presentan la misma oscilación, la velocidad en *adelanto en cuadratura de fase*, lo que quiere decir con un adelanto de un cuarto del período con respecto a la posición, y la aceleración está en *oposición de fase* con un adelanto de medio período con respecto a la posición.

Veamos brevemente el motivo. Como

$$sen\left\{\omega\left[t - \left(-\frac{\pi}{2\omega}\right)\right]\right\} = sen\left[\omega\left(t + \frac{\pi}{2\omega}\right)\right] = sen\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = cos(\omega t),$$

la fase o estado de perturbación en el ciclo oscilatorio de la velocidad en el tiempo t corresponde al estado de perturbación en la posición al tiempo "$t+\frac{\pi}{2\omega}=t-\left(-\frac{\pi}{2\omega}\right)$", como si la velocidad se hubiese "adelantado" a lo que iba a ocurrir con la velocidad en un intervalo dado por "$\frac{\pi}{2\omega}$" o el evento hubiese ocurrido en un tiempo inicial previo a t dado por $\left(-\frac{\pi}{2\omega}\right)$.

Si no se toma como referencia el momento en que se libera la masa al proceso oscilatorio y queda definido t_o como tiempo inicial, $x_{(t)}=Asen(\omega(t-t_o)+\varphi_o)$ será la forma de la solución general, como si se hubiese liberado un tiempo t_o después del tiempo de referencia. De modo que la comparación de fases estará dada por la fase "$\omega(t-t_o)$" para la posición y "$\omega\left(t-t_o+\frac{\pi}{2\omega}\right)=\omega\left(t-\left(t_o-\frac{\pi}{2\omega}\right)\right)$" para la velocidad, *como si* el cambio de posición hubiese comenzado un tiempo *después* que el de la velocidad y dado por "$\frac{\pi}{2\omega}$" o adelanto de fase de la perturbación en la velocidad con respecto a la perturbación en la posición.

Con la aceleración ocurre algo similar, un adelanto de fase de *cuarto de onda* con respecto a la velocidad y de *media onda* con respecto a la posición.

Vemos que el planteo y solución de problemas más complejos requiere del desarrollo y aplicación de más herramientas matemáticas, y el análisis de condiciones iniciales temporales y de contorno geométrico a problemas donde la interacción elástica de uno o más resortes participa junto con otros mecanismos de interacción en el planteo de situaciones físicas más complejas y realistas.

Si nos detenemos tanto en una interacción que puede resultar más exigente que las anteriores, en lo que a herramientas matemáticas se refiere, y aparentemente "sólo" para resolver el problema de un "simple" resorte, notemos que tiene un espectro muy amplio de aplicaciones. En primer lugar, que la "constante" elástica sea constante es sólo válido para un resorte ideal, pero es una muy buena aproximación a resortes reales si se los aparta poco de su posición de equilibrio. Suele decirse que es una aproximación *a primer orden* en un desarrollo polinómico de la respuesta a las deformaciones de un sistema real. De modo que, por una parte, se trata de un primer paso hacia sistemas reales. Por otra parte, es efectivamente útil si las deformaciones son pequeñas y el sistema recupera su forma original sin cambios apreciables. Y muchos sistemas, que no son propiamente resortes, se comportan de un modo similar en la medida que recuperan su estado original ante apartamientos leves de la posición de equilibrio. Pensemos en un barco flotando en superficie que comienza a moverse al ser alcanzado por una ola. O la Tierra, que oscila como un trompo levemente en torno a su eje diurno de rotación. En el elástico de un vehículo que ha pasado sobre un badén. En la eventual vibración de un objeto que ha sido golpeado o pulsado como una cuerda. Y en el dominio atómico, las vibraciones moleculares en torno a su posición de equilibrio y aún de partículas subatómicas. Todos estos fenómenos son abordados "como si fuesen resortes", es decir, planteando ecuaciones similares a la presentada. Cuando se incorpore la posición como variable, conjuntamente con el tiempo, se transformará en la ecuación de ondas, base para resolver todos los problemas que involucran propagación de señales y perturbaciones de medios elásticos, así como de ondas electromagnéticas y *paquetes de ondas* para representar partículas en el ámbito de la mecánica cuántica. De modo que el problema del resorte no sólo es importante sino uno de los más relevantes y generales en la física. Nos limitaremos a analizar un sistema oscilatorio como el péndulo para observar esto y discutir algunos aspectos metodológicos.

Péndulo

El péndulo, en su versión más simple e ideal, consiste en una masa puntual m sujeta por una cuerda inextensible sin masa de longitud L, suspendida de un punto rígido sin rozamientos, sólo sometida a la tensión de la cuerda y a su propio peso.

Planteamos un sistema de coordenadas *polares*, es decir, el radio de giro en la oscilación del péndulo, equivalente a la longitud de la cuerda, y el ángulo α como apartamiento de la posición vertical de equilibrio, positivo en sentido anti horario. Vemos que la tensión sólo se manifiesta en el eje radial, que será negativa si consideramos positivo hacia fuera del centro de giro. Instantáneamente construimos un sistema de coordenadas intermedio con un eje "y" sobre la cuerda y un eje "x" tangencial a la cuerda. El peso deberá descomponerse en $mgcos(\alpha)$ en la componente radial sobre la cuerda y $-mgsen(\alpha)$ en la componente tangencial. De modo que las ecuaciones de Newton, en el eje "x" serán $-mgsen(\alpha) = ma_x$. En el eje "y" radial debemos recordar que está oscilando sobre una circunferencia y tiene una aceleración centrípeta, de modo que será $mgcos(\alpha) - T = ma_y = ma_c = -\frac{mv^2}{L}$. Colocamos el signo "-" al escribir la aceleración centrípeta en módulo como $\frac{v^2}{L}$.

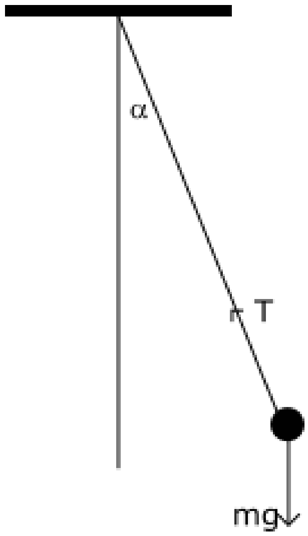

Fig. 4.15 Péndulo

Para completar la escritura de las ecuaciones, debemos traducirlas en coordenadas polares, es decir, en función de un ángulo variable α, una velocidad angular $\omega = \frac{v}{L}$ y una aceleración angular $\gamma = \frac{a_x}{L}$. De modo que el sistema queda $-gsen(\alpha) = \gamma L$ (hemos omitido la masa por estar presente como factor en los dos miembros) y, para el eje radial, $mgcos(\alpha) - T = mL\omega^2$. Nuestra incógnita α se encuentra dentro de un seno, dentro de un coseno, dentro de la velocidad ω de variación del ángulo elevada al cuadrado, y dentro de la aceleración angular, que podemos expresar en la forma

$$L\frac{d^2\alpha}{dt^2} - gsen(\alpha) = 0 \quad y \quad mgcos(\alpha) - T - mL\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2 = 0$$

Se trata de un sistema acoplado de dos ecuaciones no lineales sin solución analítica. Vemos cómo muy rápidamente, y en sistemas aparentemente muy simples, nos encontramos con limitaciones muy fuertes de cálculo. Para aproximar una solución primero hay que simplificarlo. Si asumimos ángulos de oscilación pequeños (menores que 5°, menores que 0,1 radianes), podemos aproximar el seno por el ángulo en radianes *a primer orden*, el coseno por el valor 1, y despreciar la aceleración centrípeta, es decir, considerarla nula. En tal condición, que excede lo ya ideal del modelo y conlleva errores que asumimos de menor importancia en una primera aproximación, y considerando que los errores experimentales pueden ser más relevantes que un cálculo exacto, nos queda el sistema $-g\alpha = \gamma L$ y $mg - T = 0$. Es decir, equilibrio en el eje radial y una oscilación armónica, comparable con la del resorte, sobre el arco de circunferencia en que oscila. La solución, similar por lo tanto en forma a la del resorte, resulta ser $\alpha_{(t)} = Asen(\omega t + \varphi_o)$. En esta expresión ω es la frecuencia angular de oscilación y no la velocidad angular. El valor de $\omega = \sqrt{g/L}$ ofrece un método bastante sencillo y aproximado para medir la aceleración de la gravedad. Es conocida la expresión para el período del péndulo

$$T = 2\pi\sqrt{L/g}.$$

Acerca de la interacción y la noción de masa

Durante la segunda mitad del siglo XIX, Ernst Mach propone reformular las leyes de Newton a partir de un proceso ideal de interacción. Dados dos cuerpos que interactúan (A y B), y un mecanismo que forma parte de uno de ellos (un resorte comprimido, por ejemplo), cuando éste actúa, los dos cuerpos se aceleran. Se observa, a modo de extensión a la forma de una ley general de una recurrencia experimental, que el cociente del módulo de las aceleraciones es constante

$$\frac{a_A}{a_B} = constante = m_{B|A}$$

La constante es la *masa de B relativa a A*. La *masa* resulta así una medida relativa de cuánta resistencia ofrece un cuerpo con respecto al otro a ser acelerados. Puede probarse con varios cuerpos obteniendo $m_{C|A}$, $m_{D|A}$ y, si siempre se usa la masa A como referencia de comparación, basta escribir m_B, m_C, m_D, siempre relativas a m_A.

Se prueba que la relación de respuestas en aceleración entre dos de los cuerpos, por ejemplo, entre B y C, y se obtiene $m_{C|B}$, la masa de C con respecto a B, que resulta ser

$$m_{C|B} = \frac{m_{C|A}}{m_{B|A}}$$

De modo que tenemos un sistema completo de medición de masas a partir de un patrón m_A.

Como las aceleraciones conservan una proporción en módulo inversa a las masas, podemos escribir, para dos cuerpos cualesquiera

$$a_I/a_K = m_{K|I} = m_K/m_I$$

de donde en módulo

$$m_I a_I = m_K a_K$$

Pero como las aceleraciones son vectores de signo opuesto, la misma expresión se escribe

$$m_I \boldsymbol{a_I} = -m_K \boldsymbol{a_K} \quad o \quad m_I \boldsymbol{a_I} + m_K \boldsymbol{a_K} = 0$$

Si llamamos $\boldsymbol{f}_I$ al primer término, interpretado como *la fuerza que K ejerce sobre I* $\boldsymbol{f_{I|K}}$, y $\boldsymbol{f_K}$ al segundo como *la fuerza que I ejerce sobre K* $\boldsymbol{f_{K|I}}$, tenemos una interpretación de la masa como medida de inercialidad, una definición de la fuerza como el producto $\boldsymbol{f} = m\boldsymbol{a}$ y la expresión de la interacción $\boldsymbol{f_{I|K}} = -\boldsymbol{f_{K|I}}$ como corolario.

Vemos que el planteo de Mach reduce las leyes de Newton a una sola ley inductiva "experimental" apoyándose en una noción absoluta de aceleración, lo que se conoce como *principio de Mach*, refiriendo la aceleración a las estrellas "fijas".

Rotaciones y momentos

Abordemos ahora el problema de la rotación de una o a lo sumo dos partículas en torno a un punto fijo como eje de rotación. Habrá que introducir algunos elementos un poco más extraños al lenguaje usual y menos intuitivo que las nociones de fuerza y masa. Para justificarlo, observemos algunos fenómenos cotidianos. Al querer abrir una puerta, es más fácil hacerla sujetando el picaporte que haciendo la fuerza cerca de la bisagra. Hacer girar una barra es más difícil si la sostiene y se ejerce la fuerza muy cerca del eje de rotación y resulta más fácil si el esfuerzo se realiza lo más lejos posible del eje de giro.

En síntesis, la mayor facilidad o dificultad para lograr un efecto de rotación depende no sólo de la fuerza que se aplique sino también de dónde se la aplique y, si se compara efectos rotacionales, estos dependen igualmente de la fuerza como de la distancia al eje de rotación. De allí que se defina un nuevo parámetro llamado *momento* de una fuerza. Este parámetro M se obtendrá, en principio, como el producto entre la fuerza F y la distancia al eje de rotación r. Pero más que la fuerza, tiene relevancia la proyección de la fuerza en el eje perpendicular a la barra que queremos hacer girar, o la proyección tangencial a la circunferencia. Esto puede calcularse como $M = rFsen(\alpha)$, donde el ángulo es el formado entre la fuerza y el eje de la barra. Si este ángulo es nulo, la fuerza es colineal a la barra y no provocará una rotación.

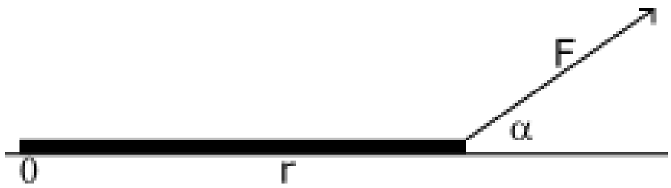

Fig. 4.16 Fuerza aplicada con un ángulo α con respecto al eje de la barra

Este planteo parece simple pero resulta algo forzado. Hay una herramienta matemática que es óptima para el trabajo con momentos. Se llama el *producto vectorial*, que notaremos "×" y hemos usado desde la definición de velocidad angular.

Analicemos un poco la rotación como observadores. Ya hemos notado que si miramos la rotación perfecta de una partícula en torno a un centro, para ver "correctamente" un movimiento circular tenemos que ubicarnos sobre el eje de rotación. Si lo miramos desde un punto que no forme parte del eje de rotación, lo veremos en forma oblicua, casi visualmente como una elipse (la elipse tiene dos focos, la circunferencia sólo uno). Y si lo vemos desde un punto situado en el eje de rotación, no veremos una rotación sino una oscilación de la partícula que se mueve alterativamente de un extremo a otro como ligada por un resorte.

En otras palabras, la descripción del fenómeno de rotación se sintetiza en el eje perpendicular al plano de rotación, desde el cual vemos la trayectoria del movimiento circular como una circunferencia. De modo que los parámetros que describan la rotación deberán estar representados sobre el eje perpendicular al plano de rotación o eje de rotación. Precisamente es lo que hace el producto vectorial. Por el momento escribiremos que, si $\boldsymbol{F} = (f_x, ; f_y; f_z)$ y $\boldsymbol{r} = (r_x; r_y; r_z)$, el producto vectorial se define

$$\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F} = (r_y f_z - r_z f_y; -r_x f_z + r_z f_x; r_x f_y - r_y f_x)$$

Definiremos el momento de una fuerza como

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}$$

Si lo aplicamos a una fuerza como la de la Figura 4.16, que puede escribirse como $\boldsymbol{F} = (f cos(\alpha); f sen(\alpha); 0)$, tomando a la barra como eje "x", un eje perpendicular hacia arriba como "y" y uno que sale de la hoja como "z", $\boldsymbol{r} = (r; 0; 0)$. En tal caso obtenemos que $\boldsymbol{M} = (0; 0; r f sen(\alpha))$, tal como lo habíamos escrito en la discusión previa.

Equilibrio de momentos

Tomemos una barra rígida sin masa de longitud L apoyada en un punto intermedio y dispuesta en forma horizontal. Apoyemos dos pesos con fuerzas F_1 y F_2 sobre dos puntos de la barra a distancias L_1 y L_2 del punto de apoyo. Si decimos que la barra se ubica sobre el eje "x", positivo hacia la derecha, y ubicamos el eje "y" en forma perpendicular a la barra, positivo hacia arriba, de modo que el eje "z" salga del plano del dibujo, positivo hacia afuera, al escribir vectorialmente las fuerzas y las posiciones será $\boldsymbol{F_1} = (0; -F_1; 0)$, $\boldsymbol{F_2} = (0; -F_2; 0)$ y las fuerzas se aplican en las posiciones $\boldsymbol{x_1} = (L_1; 0; 0)$ y $\boldsymbol{x_2} = (-L_2; 0; 0)$. Al hacer el producto vectorial para obtener los momentos de cada fuerza, resulta $\boldsymbol{M_1} = (0; 0; -F_1L_1)$ y $\boldsymbol{M_2} = (0; 0; F_2L_2)$.

La condición de equilibrio de rotación se establece sobre los momentos de modo tal que la suma de todos los momentos actuantes sobre un sistema valga cero. En este caso particular se obtiene $\boldsymbol{M_1} + \boldsymbol{M_2} = 0$, lo que conduce a $-F_1L_1 + F_2L_2 = 0$, que equivale a $F_1L_1 = F_2L_2$. Si se llama a F_1 la *potencia* (P), a F_2 la *resistencia* (R), a L_1 el *brazo de potencia* (b_p) y a L_2 el *brazo de resistencia* (b_r), la expresión $Pb_p = Rb_r$ es la conocida *ley de equilibrio de la palanca*, que se inscribe así como un caso particular de equilibrio de momentos o equilibrio de rotaciones.

En el contexto de las máquinas simples, la descripción que se hizo corresponde a la palanca de primer género, con el punto de apoyo entre la potencia y la resistencia. La palanca de segundo género tiene el punto de apoyo en un extremo y la resistencia entre el punto de apoyo y la potencia. La palanca de tercer género tiene la potencia entre el punto de apoyo y la resistencia. La polea fija resulta ser un caso particular de palanca de primer género y la polea móvil es una palanca de segundo género. Combinaciones de poleas se llaman *aparejos*. Sobre esta base también se apoya el funcionamiento de los engranajes y los mecanismos de transmisión de fuerzas.

Momento de inercia y tensor de inercia

Escribamos nuevamente la segunda ley de Newton en forma simplificada, es decir, sólo $\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}$. Usemos la definición de producto vectorial y pre multipliquemos por el radio de rotación en un movimiento circular $\boldsymbol{r}$. Nos queda

$$\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F} \;=\; \boldsymbol{r} \times m\boldsymbol{a} \;=\; \boldsymbol{r} \times m\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} \;=\; m\boldsymbol{r} \times \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \boldsymbol{r} \;= mr^2\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} = mr^2\boldsymbol{\gamma}$$

recordando que

$$\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r} = r^2\boldsymbol{\omega} - (\boldsymbol{\omega}.\boldsymbol{r})\boldsymbol{r}$$

y que la velocidad angular es perpendicular al radio, por lo que $\boldsymbol{\omega}.\boldsymbol{r} = 0$

Por lo tanto la relación

$$\mathbf{r}\times\mathbf{F} = \mathrm{m}\mathrm{r}^2\boldsymbol{\gamma}$$

vincula el momento de la fuerza con la aceleración angular.

En esta expresión, mr^2 se llamará el *momento de inercia* de la masa m que gira en torno a un punto a una distancia r de un eje de referencia. Lo notaremos $I_m = mr^2$ como *momento de inercia de la masa puntual m que gira sobre una circunferencia de radio r*. Queda $\boldsymbol{M_f} = I_m\boldsymbol{\gamma}$, una expresión análoga a la de la segunda ley de Newton $\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}$ pero la lectura como *fuerza igual a masa por aceleración* se traduce en *momento de la fuerza igual a momento de inercia por aceleración angular*.

De la misma manera que mostramos que podemos sumar las fuerzas aplicadas sobre un cuerpo para obtener una resultante para la que vale la expresión $\boldsymbol{R} = m\boldsymbol{a}$, también se puede mostrar que los momentos son sumables cuando actúan sobre la rotación de una sola masa y se obtiene un momento resultante $\boldsymbol{M_r} = I_m\boldsymbol{\gamma}$. También se puede plantear un único momento aplicado a varias masas en rotación; así como lo hicimos para una fuerza aplicada a dos masas y vimos que ejerce un efecto equivalente a ser aplicada a la suma de las masas o masa total del sistema dinámico, también puede calcularse el momento de inercia total de un sistema de partículas e inclusive el momento de inercia de un cuerpo. Esto sólo es fácil de hacer cuando los cuerpos tienen simetría y una forma geométrica simple. Este tema deberá retomarse en el ámbito de los cuerpos rígidos. En ese marco se puede ver que el término que involucra al producto escalar, que anulamos en una rotación plana, puede no ser nulo y es responsable de los movimientos de nutación, como el *cabeceo* del trompo. Al tratar este tema se debe introducir el *tensor de inercia*, que tiene en cuenta la forma completa del cuerpo y las rotaciones en torno a ejes que no son de simetría.

Leyes de Newton para las rotaciones

Así como puede expresarse las leyes de Newton para las traslaciones, tal como lo hemos hecho más arriba, puede enunciarse tres leyes relativas a las rotaciones.

La ley de inercia establece que si la suma de los momentos aplicados a un cuerpo es nula, tal cuerpo está en equilibrio de rotación y gira en movimiento circular uniforme o rotación inercial.

La segunda ley establece una relación entre la suma de momentos aplicados y la aceleración angular, dada por el momento de inercia (el tensor de inercia en cuerpos rígidos).

La tercera ley nos dice que si un cuerpo ejerce un momento de fuerza sobre otro, el otro también ejerce un momento sobre el primero con la misma dirección y sentido opuesto.

De modo que disponemos ahora de tres leyes relativas a las traslaciones y otras tres para las rotaciones. Sin embargo se presenta un problema al definir el eje de rotación dado que esta elección altera el momento de las fuerzas actuantes y la medida del momento de inercia del cuerpo.

En relación con el momento de la fuerza, si recordamos la transformación de coordenadas en movimientos relativos desde dos sistemas de referencia, habíamos escrito que una posición dada por un vector $\boldsymbol{r}$ desde un sistema O se escribe como $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{OO}' + \boldsymbol{r}'$ desde el nuevo sistema de coordenadas O’, es decir, la posición del origen vista desde O más la posición del cuerpo vista desde O’. Para el momento de la fuerza $\boldsymbol{F}$, la expresión en el nuevo sistema de coordenadas es $\boldsymbol{M}' = \boldsymbol{r}' \times \boldsymbol{F} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F} - \boldsymbol{OO}' \times \boldsymbol{F}$ y se dispone de una regla de transformación.

Para el momento de inercia, podemos aplicarlo inicialmente a dos masas puntuales en los extremos de una barra rígida o de una cuerda tensa.

En la Figura 4.17 se representa un sistema simple formado por dos masas vinculadas por una barra rígida o cuerda tensa de longitud L en las posiciones x_1 y x_2 sobre el eje “x”, a los fines de simplificar los cálculos y visualizar el efecto del cambio de coordenadas. En una localización central se indica un punto de apoyo o eje de rotación.

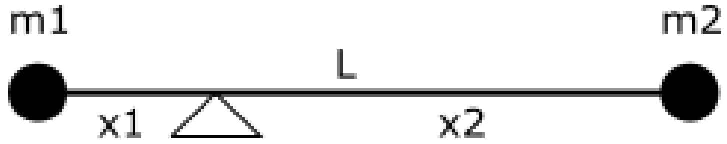

Fig. 4.17 Dos masas ligadas por una barra rígida

Si se toma como eje de rotación el punto indicado, el momento de inercia con respecto a tal eje de rotación vale $I_o = m_1x_1^2 + m_2x_2^2$. Si en cambio tomamos como eje de rotación una de las masas, por ejemplo la masa 1, el momento de inercia con respecto a la masa 1 será $I_1 = m_2L^2$ o $I_1 = m_2(x_1 + x_2)^2$. Si se toma como eje de rotación a la masa 2, será $I_2 = m_1L^2 = m_1(x_1 + x_2)^2$. Todos los resultados difieren entre sí. Más aún, si se toma una masa puntual y se ubica el eje de rotación en la masa misma, su momento de inercia es nulo, lo cual es consistente con la noción de masa puntual, dado que un punto no gira sobre sí mismo o también puede decirse que no ofrece ninguna resistencia a las rotaciones sobre sí mismo.

Cabe preguntarse si la orientación del sistema de coordenadas afecta al momento (tensor) de inercia, lo cual es cierto, pero la discusión debe dejarse para ser tratada en el ámbito del cuerpo rígido, y si existe algo que pueda ser llamado momento (tensor) de inercia *del* cuerpo, sin depender del eje de rotación tomado como sistema de coordenadas, lo cual se tratará después de definir el centro de masa, y si existe algún eje de rotación con respecto al cual la inercialidad de rotación sea mínima.

El problema de la masa variable

Hasta el momento se ha tratado el problema de acelerar un cuerpo de masa puntual y constante, bien en forma lineal o en un movimiento circular. Pero para tratar el problema de acelerar un cuerpo de masa variable, en primer lugar debemos observar que en la propia segunda ley de Newton simplificada $F = ma$ no especifica si la masa a considerar es la previa a ser acelerada, la posterior a la aceleración, o alguna otra expresión para la inercialidad.

En el esquema proponemos imaginar un cuerpo de masa m que viaja a una velocidad V y que en cierto momento expele hacia atrás una pequeña fracción de su masa Δm con una velocidad $-v$, por lo tanto con una aceleración hacia atrás $a_{\Delta m} = \frac{-v-V}{\Delta t}$. El resto y mayor parte de la masa del cuerpo $(m - \Delta m)$ incrementa su velocidad en ΔV. Como por la tercera ley de Newton sólo interviene una fuerza interna al sistema, el par de interacción F y $-F$ tiene la misma magnitud. De allí que el planteo de la segunda ley conjuntamente con la tercera ley nos lleva a la siguiente ecuación

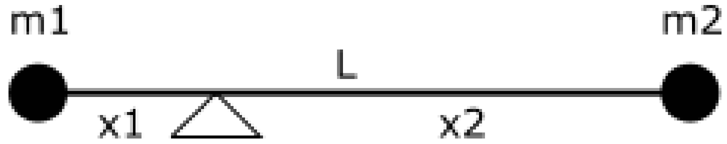

Fig. 4.17 Mecanismo de retropropulsión

$$F = -F_{m|\Delta m} = F_{\Delta m|m}$$

(la fuerza que aplica m sobre Δm es igual y opuesta a la que aplica Δm sobre m)

$$-\Delta m.\frac{(-v-V)}{\Delta t} = (m-\Delta m).\frac{(V+\Delta V-V)}{\Delta t} = (m-\Delta m).\Delta V/\Delta t.$$

Como el tiempo es el mismo para ambos cuerpos, podemos omitir Δt, o multiplicar Δt por el valor de la fuerza ($F.\Delta t$), y distribuir los productos.

$$F\Delta t = \Delta m.v + \Delta m.V = m\Delta V - \Delta m\Delta V$$

Si consideramos que la masa expelida es pequeña al igual que el incremento en la velocidad de la masa residual mayor, el término $\Delta m.\Delta V$ puede ser despreciado con respecto a los otros y quedar

$$F\Delta t = \Delta m.v + \Delta m.V = m\Delta V$$

Por otra parte el primer término $\Delta m.v + \Delta m.V = \Delta m.(v+V) = \Delta m.v_r$ dado que v_r es la velocidad relativa de expulsión de la fracción de masa Δm hacia atrás por la masa mayor, es decir, la velocidad de la masa expulsada vista desde la masa residual m. De modo que nos queda

$$F\Delta t = \Delta m.v_r = m\Delta V \ o \ \Delta V = -v_r\frac{\Delta m}{m}$$

como expresión para el cambio en la velocidad de la masa residual.

Si tomamos límite y recuperamos la segunda ley en la forma

$$F = f_r = m\frac{dV}{dt} = -v_r\frac{dm}{dt} = -v_r\mu_r,$$

donde μ_r es conocida como *caudal de expulsión de gases* en cohetería y v_r es la *velocidad de expulsión de gases*. Se obtiene lo que se llama *fuerza de retropropulsión* de un cohete $f_r = -v_r\mu_r$. Notemos que esta expresión está dada en módulo, que f_r es la fuerza de retropropulsión aplicada sobre la masa principal del cohete, y que la velocidad de expulsión de gases es hacia *atrás* por lo que la aceleración del cohete se producirá hacia *adelante* incrementando su velocidad.

El “haber pasado de miembro” el tiempo dt y haber trabajado sólo con velocidades, sugiere que pueda formalizarse y sistematizarse el planteo, escribir para masas variables una expresión que quizá sea útil en general. Al integrar en el tiempo la segunda ley de Newton se obtiene una expresión de la forma

$$\boldsymbol{I} = \int_{t_o}^{t} \boldsymbol{F}dt = \int_{t_o}^{t} m\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}dt = \int_{\boldsymbol{v_o}}^{v} md\boldsymbol{v} = \Delta\boldsymbol{p}$$

En formato de diferencias finitas queda

$$\boldsymbol{F}\Delta t = m\Delta\boldsymbol{v} = m(\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v_o}) = m\boldsymbol{v} - m\boldsymbol{v_o} = \boldsymbol{p} - \boldsymbol{p_o} = \Delta\boldsymbol{p}$$

O en formato diferencial

$$\boldsymbol{F}dt = md\boldsymbol{v} = d\boldsymbol{p}$$

O bien en la forma

$$\boldsymbol{F} = \frac{d\boldsymbol{p}}{dt}$$

Llamaremos al nuevo vector $\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v}$ la *cantidad de movimiento*, *impulso lineal* o *ímpetu* de la partícula de masa m que tiene una velocidad $\boldsymbol{v}$. Este nuevo vector ofrece una medida de *impacto* en el sentido que una masa pequeña con alta velocidad puede provocar un efecto de impacto similar al de una masa grande con velocidad pequeña. El producto $\boldsymbol{F}dt = \boldsymbol{I}$ también es un vector que llamaremos *impulsión* (en algunas versiones se lo llama *impulso*, lo que puede dar lugar a confusión con *impulso lineal*). Vemos que la expresión $\boldsymbol{F} = d\boldsymbol{p}/dt$ no es otra que la segunda ley de Newton escrita de otro modo. Si la masa es constante, se reduce a la forma conocida de la segunda ley $\boldsymbol{F} = m.\boldsymbol{a}$. Veremos si también es válida para masas variables. Para ello notemos que, si no hay fuerzas externas actuantes sobre el sistema ($\boldsymbol{F} = 0$), la variación de la cantidad de movimiento es nula.

Replanteamos el problema del cohete desde esta perspectiva. Si no hay fuerzas externas actuantes sobre el sistema, en este caso formado por el cohete y sus gases de retropropulsión que serán expelidos, la fuerza neta $\boldsymbol{F}$ es nula y la cantidad total de movimiento debe ser constante. Antes de expulsar los gases, la masa valía m, la velocidad V y la cantidad de movimiento era $\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{V}$. Después de expulsar el dm de gas con velocidad relativa $\boldsymbol{v_r}$, y sea $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v_r} - \boldsymbol{V}$ la velocidad hacia atrás con respecto a un sistema en reposo en relación con el cohete, la cantidad de movimiento del sistema formado por cohete+gases vale

$$\boldsymbol{p} =\!- dm.\boldsymbol{v} + (m - dm)(\boldsymbol{V} + d\boldsymbol{V})$$

dado que la masa residual vale $m - dm$ y su velocidad se ha incrementado a $\boldsymbol{V} + d\boldsymbol{V}$.

Considerando que el impulso lineal no cambia por no haber fuerzas externas, igualamos las dos expresiones

$$\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{V} = -m\boldsymbol{v} + (m - dm)(\boldsymbol{V} + d\boldsymbol{V})$$

Desarrollando los productos nos queda

$$m\boldsymbol{V} = -dm.\boldsymbol{v} + m\boldsymbol{V} - dm.\boldsymbol{V} + m.d\boldsymbol{V} - dm.d\boldsymbol{V}$$

Simplificando el producto $m\boldsymbol{V}$ y despreciando el término $dm.d\boldsymbol{V}$ por ser pequeña la masa expulsada y también la variación de velocidad, lo que suele decirse es un *diferencial de segundo orden*, queda

$$0 = -dm.\boldsymbol{v} - dm.\boldsymbol{V} + m.d\boldsymbol{V} = -dm.(\boldsymbol{v} + \boldsymbol{V}) + m.d\boldsymbol{V} = -dm.\boldsymbol{v_r} + m.d\boldsymbol{V},$$

Resulta que

$$m\frac{d\boldsymbol{V}}{dt} = m\boldsymbol{a} = \frac{dm}{dt}\boldsymbol{v_r} = \mu_r\boldsymbol{v_r}$$

tal como se había obtenido a partir de combinar la segunda y tercera ley de Newton, ahora considerando la primera dada la ausencia de fuerzas externas, y la conservación de la cantidad de movimiento.

El problema de las explosiones y del choque

Analicemos primero la más simple de las explosiones, que puede ejemplificarse en el disparo de un arma o de un cañón. En principio el arma, de masa m_a, y la bala, de masa m_b, están en reposo. Tras el disparo, la bala sale expelida con velocidad v_b y el arma con velocidad $-v_a$ en sentido contrario. El sistema arma+bala está en reposo y, dado que no hay fuerzas externas, su cantidad de movimiento, nula antes del disparo, debe seguir siendo nula, de modo que la relación

$$m_b v_b - m_a v_a = 0$$

expresa la ausencia de fuerzas externas y conservación de la cantidad de movimiento.

Si de algún modo puede medirse la velocidad del arma, o de la bala, puede calcularse la velocidad del otro componente del par de objetos que conformaban el arma cargada antes de disparar.

Supongamos ahora que la bala, con masa m_b y velocidad v_b, incide y queda atrapada por un saco de arena de masa M_a. Si el saco de arena estaba en reposo, su cantidad de movimiento era nula antes del impacto. Luego sólo es la bala la que aporta su cantidad de movimiento $p_b = m_b.v_b$.

Tras el impacto, el saco tendrá esa cantidad de movimiento con una masa total tras incorporar la bala $(M_a + m_b)V_a = m_b v_b$. Conociendo la velocidad de la bala y las masas de la bala y el saco de arena, podría determinarse la velocidad del saco de arena, o bien podría medirse la velocidad resultante del saco de arena tras el impacto, y determinar la velocidad que tenía la bala.

Si se trata de un choque entre dos cuerpos de masas m_1 y m_2 con velocidades $\boldsymbol{v_{o1}}$ y $\boldsymbol{v_{o2}}$, antes del choque la cantidad de movimiento será $m_1\boldsymbol{v_{o1}} + m_2\boldsymbol{v_{o2}}$ y después del choque será $m_1\boldsymbol{v_1} + m_2\boldsymbol{v_2}$. Si sólo interactúan debido al choque, no habrá fuerzas externas y podemos escribir que

$$m_1\boldsymbol{v_{o1}} + m_2\boldsymbol{v_{o2}} = m_1\boldsymbol{v_1} + m_2\boldsymbol{v_2}$$

En general se conocen las velocidades antes del choque. Quizá pueda medirse una de las velocidades después del choque. En tal caso tendríamos tres ecuaciones vectoriales para determinar la velocidad restante tras el choque. Si así no fuere, deberíamos encontrar más ecuaciones que relacionen el estado inicial con el estado final. Más adelante retomaremos este problema cuando dispongamos de otra ecuación proveniente de la conservación de la energía.

Centro de masa

Dado que la cantidad de movimiento ha resultado ser más representativa del estado dinámico de un sistema que las masas y las velocidades por separado, se plantea como problema ver si existe alguna manera de expresarlo en términos de su masa total y una velocidad representativa del sistema en su conjunto. Esa velocidad debe ser tal que, multiplicada por la masa total, nos dé como resultado la cantidad de movimiento total del sistema o suma de las cantidades de movimiento individuales de cada masa. Sea entonces $\boldsymbol{V_{cm}}$, que desde ahora llamaremos *velocidad del centro de masa*, tal que si $M = \sum_{i=1}^{n} m_i$, la suma de las masas individuales, $M\boldsymbol{V_{cm}} = \sum_{i=1}^{n} p_i = \sum_{i=1}^{n} m_i \boldsymbol{v_i}$, la suma de las cantidades de movimiento individuales de cada masa que forma el sistema.

$$M\boldsymbol{V_{cm}} = \sum_{i=1}^{n} m_i . \boldsymbol{v_i} \,,$$

De aquí que será

$$\boldsymbol{V_{cm}} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i . \boldsymbol{v_i}}{M}$$

la velocidad del centro de masa. Pero si recordamos que $\boldsymbol{V_{cm}} = \Delta\boldsymbol{X_{cm}}/\Delta t$ y que $\boldsymbol{v_i} = \Delta\boldsymbol{x_i}/\Delta t$, si suprimimos todos los Δt en ambos miembros y separamos el estado inicial y el final de las posiciones en dos miembros diferentes, será

$$\boldsymbol{X_{cm}} - \boldsymbol{X_{cmo}} = \sum_{i=1}^{n} (m_i/M)\, \boldsymbol{x_i} - \sum_{i=1}^{n} (m_i/M)\, \boldsymbol{x_{io}}$$

Si pretendemos que esta igualdad sea válida para el estado inicial y para cualquier estado posterior, debe ser

$$\boldsymbol{X_{cm}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i}{M} \boldsymbol{x_i}$$

Al mismo resultado se llega por una integración temporal. Esta posición es la del *centro de masa* del sistema de partículas. La velocidad de este punto es tal que, si se supone que toda la masa del sistema está concentrada en él, su cantidad de movimiento es igual que la de todo el sistema en su conjunto. Como se trata de un punto y responde a la dinámica de la partícula, porque no es otra cosa lo que quiere decir que *toda la masa está concentrada en un punto*, resulta que toda la mecánica de la partícula puntual puede aplicarse como válida al centro de masa del sistema.

Rotaciones en torno al centro de masa

Volvamos a la barra o cuerda con dos masas rotando. Si calculamos el centro de masa desde un punto ubicado en la masa 1, se obtiene $X_{cm} = ({}^{m_1}/_{M})L$, donde M es la masa total $M = m_1 + m_2$. El cálculo del momento de inercia, tomando como eje de rotación a m_1 da $I_1 = m_2L^2$ y girando en torno a m_2 da $I_2 = m_1L^2$. Lo calcularemos desde un punto genérico x y desde el centro de masa.

Desde un punto x cualquiera daría $I_x = m_1x^2 + m_2(L-x)^2$, mientras que para calcularlo desde el centro de masa debemos reemplazar x por X_{cm}.

El resultado da

$$I_{cm} = ({}^{m_1m_2}/_{M})L^2.$$

El desarrollo en la posición x genérica como eje de rotación de I_x lleva a escribir el momento de inercia como

$$I_x = m_1x^2 + m_2L^2 - 2m_2Lx + m_2x^2 \;= (m_1+m_2)x^2 - 2m_2Lx + m_2L^2$$

El momento de inercia, variable con la elección de x y por tanto función de x, está dado por una función cuadrática representable por un arco de parábola con mínimo (en $ax^2 + bx + c = 0$, el vértice está en $-b/2a$) en

$$x_m = -\frac{-2m_2L}{2(m_1+m_2)} = \frac{m_2}{M}L$$

que coincide con la posición del centro de masa. Este resultado, que obtuvimos para dos masas, puede ser generalizado y mostrar que es el centro de masa el punto que define un mínimo en el momento de inercia y que se puede utilizar para referir un valor propio del cuerpo para este parámetro.

En términos más generales, en un cuerpo libre puede separarse un problema dinámico como una aplicación de la mecánica de la partícula a un problema de traslación del centro de masa, y un análisis de rotación en torno al centro de masa. En un cuerpo vinculado puede haber un punto fijo como eje de rotación que no necesariamente coincida con el centro de masa.

Momento angular

La definición de momento angular proviene de aplicar la noción de momento a la cantidad de movimiento, es decir, a partir del vector $\boldsymbol{p}$, definir un nuevo vector

$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}$$

Como antes, $\boldsymbol{r}$ es el vector posición de la masa cuya cantidad de movimiento vale $\boldsymbol{p}$. Si recordamos que habíamos relacionado la velocidad angular con la tangencial en la forma

$$\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{v} = \boldsymbol{r} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}) = r^2\boldsymbol{\omega} - (\boldsymbol{\omega}.\boldsymbol{r})\boldsymbol{r} = r^2\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{r}(\boldsymbol{r}.\boldsymbol{\omega})$$

Y que $\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v}$, queda que $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p} = m[r^2\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{r}(\boldsymbol{r}.\boldsymbol{\omega})]$ que, en tanto la velocidad angular sea perpendicular al radio de giro, quedará $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p} = mr^2\boldsymbol{\omega} = I\boldsymbol{\omega}$. Es decir que la expresión del momento lineal $\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v}$ tiene una formulación análoga para el momento angular $\boldsymbol{L} = I\boldsymbol{\omega}$. Una expresión más general conserva esta forma con una definición del tensor de inercia que permite incluir la no perpendicularidad entre la velocidad angular y el plano de rotación.

Teniendo en cuenta que hemos encontrado una nueva formulación de la segunda ley de Newton más general e inclusiva de la masa variable $\boldsymbol{F} = d\boldsymbol{p}/dt$, podemos ver que si se calcula

$$\frac{d\boldsymbol{L}}{dt} = \frac{d(\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p})}{dt} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} \times \boldsymbol{p} + \boldsymbol{r} \times \frac{d\boldsymbol{p}}{dt} = \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{p} + \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F} = \boldsymbol{M}$$

donde hemos igualado a cero el producto vectorial entre la velocidad y la cantidad de movimiento por ser colineales, obtenemos una expresión simétrica a la que relaciona la fuerza con la variación de cantidad de movimiento en masas variables. En síntesis

$$\boldsymbol{F} = \frac{d\boldsymbol{p}}{dt} \quad y \quad \boldsymbol{M} = \frac{d\boldsymbol{L}}{dt}$$

expresan las leyes de Newton para traslación y rotacional.

Retomemos el problema del cohete que emite masa hacia atrás con una fuerza de retropropulsión dada por

$$f_r = \mu_r \boldsymbol{v_r}$$

Si se trata de una tobera emisora de gases para hacer girar el cohete ubicada a una distancia r de un eje rotacional, producirá un momento

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{f_r} = \boldsymbol{r} \times \mu_r \boldsymbol{v_r} = \mu_r r^2 \omega_r \boldsymbol{k} = \frac{dm}{dt} r^2 \omega_r \boldsymbol{k} = \frac{d(mr^2)}{dt} \omega_r \boldsymbol{k} = \frac{dI}{dt} \omega_r \boldsymbol{k}$$

$$\boldsymbol{M} = \lambda_r \omega_r \boldsymbol{k}$$

Donde λ_r podríamos llamarlo la *velocidad de emisión de momento de inercia*. Más allá de que no aporte un sentido práctico la introducción de la *velocidad angular de emisión de gases* ω_r, podemos escribir simplemente

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{I\gamma} = \boldsymbol{r} \times \mu_r \boldsymbol{v_r}$$

para obtener la aceleración angular del cohete si se lo intenta hacer rotar por medio de una tobera lateral.

Pero la variación del momento de inercia puede deberse a una modificación en la masa o en la distribución de masa. Consideremos que una masa m se desplaza desde el extremo de la barra de longitud r_o hasta una longitud r_1 aproximándose al eje de rotación ubicado en el extremo $r = 0$ de la barra. Dado que no hay fuerzas externas ni, por lo tanto, momentos externos porque el desplazamiento de la masa sobre la barra se debe a mecanismos internos al sistema,

$$\boldsymbol{M} = \frac{d\boldsymbol{L}}{dt} = \frac{d(I\omega)}{dt} = \frac{d(mr^2\omega)}{dt} = m\left[2r\omega\ \frac{dr}{dt} + r^2\frac{d\omega}{dt}\right] = 0$$

Se supone que $\frac{dr}{dt} = v_d$, la velocidad de desplazamiento de la masa m, es conocido porque se trata de un mecanismo interno que lo regula a diferentes distancias r a lo largo de la barra. La aceleración angular es $\frac{d\omega}{dt} = \gamma$, luego

$$2r\omega\ v_d + r^2\gamma = 0$$

Será entonces

$$\gamma = \frac{d\omega}{dt} = -\frac{2r\omega v_d}{r^2} = -\frac{2\omega v_d}{r}$$

Puede escribirse

$$\frac{d\omega/dt}{\omega} = -2\frac{dr/dt}{r}$$

O usando la derivada del logaritmo

$$\frac{dln(\frac{\omega}{\omega_o})}{dt} = -2\frac{dln\left(\frac{r}{r_o}\right)}{dt}$$

Integrando en el tiempo

$$ln(\frac{\omega}{\omega_o}) = -2ln\left(\frac{r}{r_o}\right)$$

Y tomando la exponencial a ambos miembros

$$\frac{\omega}{\omega_o} = \left(\frac{r}{r_o}\right) - 2 = \left(\frac{r_o}{r}\right)^2$$

Con lo que finalmente queda

$$\omega_{(r)} = \frac{\omega_o r_o^2}{r^2} = \omega_o\frac{I_o}{I}$$

La velocidad angular aumenta a medida que la masa se acerca al eje de rotación en forma inversamente proporcional a la disminución del momento de inercia e inversamente proporcional al cuadrado de la variación de la distancia al eje de rotación.

Esto permite entender por qué los patinadores y bailarines inician una rotación con los brazos abiertos y, al cerrarlos, se incrementa sensiblemente la velocidad de giro.

En tanto la suma de momentos externos a un sistema sea nula, se conserva el momento angular. También permite esto entender por qué no cae una bicicleta. El momento angular de la rueda en estado vertical sólo puede ser modificado en dirección por un momento externo que tenga una proyección fuera del eje de rotación de la rueda. En tanto la fuerza aplicada se encuentre dentro del plano de rotación de la rueda, como ocurre con la aplicada por los engranajes o por la fricción estática con el suelo, el momento generado será perpendicular al plano rotacional, podrá aumentar o disminuir la velocidad angular, pero se mantendrá fijo el plano de rotación, es decir que la rueda permanecerá vertical. Si forzamos una rotación desde el manubrio hacia la izquierda, por ejemplo, por lo tanto un giro en sentido anti horario (positivo) en torno al eje vertical, sea "z" positivo, la composición vectorial del momento vertical a lo largo del manubrio con el horizontal en el eje de la rueda, sea el "y" positivo en tanto sea "x" la dirección en que se mueve la bicicleta, se inclina hacia arriba el momento angular compuesto, por lo tanto en la dirección en la que se mueve la bicicleta que produce un giro horario (negativo) del plano de la rueda en torno al eje "x", que nos haría caer si no contrarrestamos el cambio en $\boldsymbol{L}$ y recuperamos la horizontalidad del momento con una inclinación del cuerpo que compense esa rotación inducida por nuestra acción sobre el manubrio. Además la fricción con el suelo sobre la rueda girada produce un momento que ya no es paralelo al propio de la rueda y contribuye a la pérdida de la verticalidad, pero notemos que aun sin rozamiento, la bicicleta caería. Es la fricción estática en el suelo lo que permite que haya una fuerza con una componente transversal al plano de rotación de la rueda lo que permite que la bicicleta gire. En caso de no haber rozamiento con el suelo, deberíamos inclinarnos para no caer pero continuaríamos moviéndonos en línea recta. Lo mismo ocurre con un avión que, al girar, debe inclinar las alas y, aunque no caería, se desplazaría paralelamente a las alas perdiendo sustentación y ampliando el radio de giro hasta que la fricción del aire encamine nuevamente el vuelo.

Muchos efectos rotacionales en pelotas de juegos se deben al momento angular, inclusive la rotación del trompo, dado que la fricción con el suelo ocurre apenas en un punto de contacto. La tierra gira permanentemente en torno a su eje debido a que no hay momentos externos que la frenen. En realidad hay pequeñas, pero sólo a largo plazo, sensibles perturbaciones externas debidas a la presencia de la Luna, el Sol, otros planetas, asteroides y hasta polvo interestelar. Las variaciones internas en la distribución de masa, ocasionadas por el movimiento de las placas tectónicas, por desplazamientos de masas de agua en los océanos y aun de aire en la atmósfera, provoca alteraciones en la velocidad de rotación terrestre, medibles en la escala de fracciones de segundo al año.

Veamos algunas propiedades más que justifican la introducción de los momentos. Sean $\boldsymbol{F_1} = F(\boldsymbol{r_2} - \boldsymbol{r_1})/|\boldsymbol{r_2} - \boldsymbol{r_1}|$ una fuerza dirigida desde el punto $\boldsymbol{r_1}$ al punto $\boldsymbol{r_2}$. Sea $\boldsymbol{F_2}$ su par de interacción $\boldsymbol{F_2} = F(\boldsymbol{r_1} - \boldsymbol{r_2})/|\boldsymbol{r_1} - \boldsymbol{r_2}|$, dirigida de $\boldsymbol{r_2}$ a $\boldsymbol{r_1}$. Se trata de dos fuerzas colineales. Calculemos la suma de sus momentos.

$$\boldsymbol{M_1} + \boldsymbol{M_2} = \boldsymbol{r_1} \times F(\boldsymbol{r_2} - \boldsymbol{r_1})/|\boldsymbol{r_2} - \boldsymbol{r_1}| + \boldsymbol{r_2} \times \boldsymbol{F_2} = F(\boldsymbol{r_1} - \boldsymbol{r_2})/|\boldsymbol{r_1} - \boldsymbol{r_2}|$$
$$= F(\boldsymbol{r_1} \times \boldsymbol{r_2}/|\boldsymbol{r_2} - \boldsymbol{r_1}| + \boldsymbol{r_2} \times \boldsymbol{r_1}/|\boldsymbol{r_1} - \boldsymbol{r_2}|) = 0$$

dado que el producto vectorial de un vector por sí mismo es nulo, que el módulo de la diferencia es conmutativo y que el producto vectorial es anti conmutativo. De modo que la suma de momentos de pares de interacción en fuerzas colineales vale cero, o el momento resultante de un par de interacción es nulo. En los pares de interacción no sólo es nula la suma de fuerzas sino la suma de momentos. Es necesario agregar esta condición para expresar la colinealidad de los pares de interacción en la tercera ley de Newton.

Veamos otra propiedad. Sean m_1 y m_2 dos masas con velocidades $\boldsymbol{v_1}$ y $\boldsymbol{v_2}$ que definen momentos lineales $\boldsymbol{p_1}$ y $\boldsymbol{p_2}$. Hemos dicho que $\boldsymbol{F} = d\boldsymbol{p}/dt$ de modo que tenemos $\boldsymbol{F_1}$ y $\boldsymbol{F_2}$, y sus momentos.

$$\boldsymbol{M_1} + \boldsymbol{M_2} = \boldsymbol{r_1} \times \boldsymbol{F_1} + \boldsymbol{r_2} \times \boldsymbol{F_2} = \boldsymbol{r_1} \times \frac{d\boldsymbol{p_1}}{dt} + \boldsymbol{r_2} \times \frac{d\boldsymbol{p_2}}{dt}$$

Mostremos primero que esto equivale a $d(\boldsymbol{r_1} \times \boldsymbol{p_1} + \boldsymbol{r_2} \times \boldsymbol{p_2})/dt$, que puede desarrollarse como

$$\frac{d\boldsymbol{r_1}}{dt} \times \boldsymbol{p_1} + \boldsymbol{r_1} \times \frac{d\boldsymbol{p_1}}{dt} + \frac{d\boldsymbol{r_2}}{dt} \times \boldsymbol{p_2} + \boldsymbol{r_2} \times \frac{d\boldsymbol{p_2}}{dt} = 0 + \boldsymbol{r_1} \times \frac{d\boldsymbol{p_1}}{dt} + 0 + \boldsymbol{r_2} \times \frac{d\boldsymbol{p_2}}{dt}$$

dado que $d\boldsymbol{r}/dt = \boldsymbol{v}$ y $\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v}$ son colineales.

Resulta entonces que

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{M_1} + \boldsymbol{M_2} = \frac{d(\boldsymbol{r_1} \times \boldsymbol{p_1} + \boldsymbol{r_2} \times \boldsymbol{p_2})}{dt} = \frac{d(\boldsymbol{L_1} + \boldsymbol{L_2})}{dt} = \frac{d\boldsymbol{L}}{dt}$$

siendo $\boldsymbol{M}$ y $\boldsymbol{L}$ el momento de fuerza total y el momento angular total respectivamente. Si el momento resultante $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{0}$, entonces el momento angular $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{constante}$.

Sea c el centro de masa. Con respecto al centro de masa el sistema formado por dos masas está en reposo, de modo que $\boldsymbol{p_1} + \boldsymbol{p_2} = 0$ aun cuando no sean colineales. Si $L = 0$, ambas masas se mueven sobre una misma recta, pero si $L \neq 0$, los momentos son iguales y de sentido opuesto pero no colineales sino que describen una rotación en torno al centro de masa. Tomemos como referencia un origen O distinto del centro de masa. Sea $\boldsymbol{r_{1|O}} = \boldsymbol{r_{cm|O}} + \boldsymbol{r_{1|cm}}$ y $\boldsymbol{r_{2|O}} = \boldsymbol{r_{cm|O}} + \boldsymbol{r_{2|cm}}$. Calculemos el nuevo momento angular

$$\boldsymbol{L_O} = \boldsymbol{r_{1|O}} \times \boldsymbol{p_1} + \boldsymbol{r_{2|O}} \times \boldsymbol{p_2} = \boldsymbol{r_{cm|O}} \times \boldsymbol{p_1} + \boldsymbol{r_{1|cm}} \times \boldsymbol{p_1} + \boldsymbol{r_{cm|O}} \times \boldsymbol{p_2} + \boldsymbol{r_{2|cm}} \times \boldsymbol{p_2}$$
$$= \boldsymbol{r_{cm|O}} \times (\boldsymbol{p_1} + \boldsymbol{p_2}) + \boldsymbol{L} = \boldsymbol{0} + \boldsymbol{L} = \boldsymbol{L}$$

Dado que $\boldsymbol{p_1} + \boldsymbol{p_2} = 0$ por estar el centro de masa en reposo con respecto a sí mismo. Si así no fuese, $\boldsymbol{p_1} + \boldsymbol{p_2} = m\boldsymbol{v_{cm}} = \boldsymbol{p_{cm}}$ el momento del centro de masa, y $\boldsymbol{r_{cm}} \times \boldsymbol{p_{cm}} = \boldsymbol{L_{cm}}$ será el momento angular del centro de masa. Por lo tanto resulta $\boldsymbol{L_{S|O}} = \boldsymbol{L_{cm|O}} + \boldsymbol{L_{S|cm}}$, el momento angular de un sistema visto desde un origen O es el momento angular *del* centro de masa en referencia a ese origen más el momento angular del sistema *con respecto al* centro de masa. Resulta así que $\boldsymbol{L}_{S|cm}$ define una cantidad propia del sistema. Si $\boldsymbol{L}_{S|cm}$ es constante, entonces el plano de rotación y el sentido de rotación de las masas interactuantes será siempre el mismo visto desde el sistema centro de masa.

Una pregunta más. ¿Tiene sentido el momento angular de un movimiento rectilíneo uniforme? Sea O un origen genérico de coordenadas ubicado a una distancia d de una recta por la que se mueve una partícula de masa m. Ubiquemos la recta y el origen en el plano $(x; y; 0)$. Si para ver la partícula debemos girar un ángulo α y está ubicada a una distancia $\boldsymbol{r}$ del origen O, las componentes de la posición serán $\boldsymbol{r} = (rcos(\alpha);\ rsen(\alpha); 0)$. Calculemos el momento angular $\boldsymbol{L} = (0; 0; -rvsen(\alpha))$. Pero $rsen(\alpha) = d$, la distancia mínima entre la recta y el origen O. Si la partícula se mueve sobre el eje “x” será $\boldsymbol{v} = (v; 0; 0)$ y $\boldsymbol{p} = (mv; 0; 0)$. De modo que el momento angular de un movimiento rectilíneo con respecto a un sistema de coordenadas vale $\boldsymbol{L} = (0; 0; -d.m.v)$, o $L = d.m.v$ en una dirección perpendicular al plano que contiene a la recta sobre la que se mueve la partícula y la dirección que define la distancia mínima entre el origen y la recta. Será positivo si la velocidad hace “girar nuestra mirada de derecha a izquierda”, es decir, cuando nuestra “rotación de cabeza” sea anti horaria.

Efectos en sistemas no inerciales

Imaginemos un estudiante que realiza un trabajo práctico en un tren. El tren acelera muy lentamente con la aceleración del tren a_{tren}, alcanza su velocidad de crucero y luego acelera nuevamente para frenar en sentido opuesto a la velocidad. Nuestro estudiante realiza un tiro vertical para verificar las ecuaciones ya estudiadas. El primer día realiza su trabajo práctico mientras el tren se mueve con la velocidad de crucero constante. Su profesor lo observa desde el exterior del tren para ver cómo realiza su tarea.

El profesor verá un tiro oblicuo con una componente vertical de la velocidad inicial dada por el estudiante, una componente horizontal dada por la velocidad del tren, por lo tanto un MRU en la horizontal y un MRUV en la vertical asociado con el peso del objeto disparado y la aceleración de la gravedad dada por el peso. El estudiante, sentado en el tren y ligado al tren, verá un tiro vertical con una velocidad inicial dada por su mano, reposo en la horizontal dado que se mueve horizontalmente junto con el objeto que tira, por lo tanto un MRU con velocidad nula, y un MRUV en la vertical vinculado al peso y la gravedad. Verificará las ecuaciones y, en su informe, omitirá la componente horizontal y toda referencia al tiro oblicuo dado que el cuerpo caerá nuevamente en su mano en los tiempos dados por las ecuaciones de la cinemática del tiro vertical que debe verificar.

Dado que tiene que realizar el experimento varias veces, al día siguiente intentará completar su trabajo haciendo el primer intento apenas parte el tren. La aceleración del tren es muy débil, él está sentado, y no percibe en su cuerpo el efecto de la aceleración de la que participa en tanto forma parte del tren al igual que el cuerpo que usa para su experiencia. El profesor verá, desde afuera, que otra vez realiza un tiro oblicuo con la velocidad horizontal que *tenía* el tren *en el momento del disparo*. Como *durante* el tiempo que el cuerpo permanece en el aire, el objeto está desligado del tren, éste no participa de la aceleración pero sí nuestro estudiante, que sigue sentado y formando parte del tren. Como el tren y el estudiante siguen acelerando, mientras el cuerpo está en el aire la velocidad del tren aumenta y, cuando el cuerpo vuelva a caer, el estudiante y por lo tanto su mano se habrá *adelantado con respecto al cuerpo*. Notará que debe desplazar su mano hacia atrás si quiere volver a recibir el cuerpo tras la caída. Quizá sorprendido por este efecto, comenzará a medir cuánto "se desplaza el cuerpo hacia atrás" con respecto al lugar donde dice la teoría que debería caer. Tal vez se le ocurra suspenderlo de un péndulo para ver que la cuerda no está vertical sino ligeramente en ángulo hacia el vagón de cola del tren. Medirá el peso, medirá la tensión, y determinará que la aceleración que la desplaza hacia atrás vale $-a_{tren}$. Sorprendido por este resultado, comenzará a redactar un informe. A diferencia de antes, en que asignaba un MRU en la horizontal bajo condiciones de equilibrio, al igual que el profesor desde afuera del tren, ahora dirá que hay un MRUV en la horizontal, resultado distinto del que describe el profesor desde afuera. En tales condiciones, los dos verán un planteo dinámico diferente desde afuera y desde adentro del tren. Como está convencido de la autoridad de Newton en la materia, intentará asignar una fuerza que igualará a la masa del cuerpo m_c por la aceleración que registra $-a_{tren}$ en la forma $f^* = -m_c a_{tren}$ (la masa *del cuerpo* por la aceleración *del tren* y además *cambiada de signo*). Mientras lo redacta, el tren alcanzará la velocidad de crucero, con lo cual dejará de estar presente el efecto de aceleración que adelanta su mano con respecto al cuerpo y el péndulo estará vertical. Nuevamente sorprendido por la desaparición de la "nueva fuerza" que acaba de descubrir, seguirá observando para ver que, cuando el tren comienza a detenerse con aceleración $-a_{tren}$, esta fuerza cambia de signo y su péndulo se inclina hacia adelante midiendo ahora una fuerza $f^* = +m_c a_{tren}$.

Al presentar su trabajo al profesor, confiado en haber descubierto una "nueva fuerza", el docente le recordará que, para presentar una fuerza de naturaleza diferente, debe indicar el mecanismo de interacción o, al menos, el par de interacción localizado en el cuerpo con el que interactúa. Nuestro estudiante volverá al tren, nuevamente detectará la fuerza, buscará en el tren, en el vagón de cola, en la máquina, debajo de los asientos, pero no encontrará ningún par de interacción.

El profesor intentará explicarle que, mientras él estaba fuera viendo el experimento que realizaba dentro del tren, las ecuaciones de composición de movimientos desde sistemas de coordenadas en movimiento relativo, no solamente involucraban la composición de velocidades sino la composición de aceleraciones. Le dirá que la aceleración del cuerpo vista desde afuera era igual que la aceleración del tren, vista desde afuera, más la aceleración del cuerpo vista desde el tren

$$a_{cuerpo|Afuera} = a_{Tren|Afuera} + a_{cuerpo|Tren}$$

Mientras el estudiante estaba dentro del tren y sometido a la aceleración del tren junto con el cuerpo que sostenía en su mano, sólo era consciente de las aceleraciones que le imprimía dentro del tren, es decir, de $a_{c|T}$, que consideraba nula cuando sostenía el cuerpo en reposo en su mano. En realidad el cuerpo estaba sometido aún a $a_{t|A}$ pero, al tirar el cuerpo hacia arriba, lo desligaba del tren, de modo que el estudiante seguía acelerado junto con el tren pero el cuerpo continuaba en MRU en la horizontal dado que había dejado de actuar $a_{t|A}$ sobre el cuerpo pero seguía presente en el estudiante. El error que estaba cometiendo era asignar *su* aceleración junto con el tren como si fuese una aceleración opuesta *del cuerpo*. El profesor le dirá que por ello no encontraba un mecanismo ni un par de interacción, que el cuerpo responde al principio de inercia en la horizontal cuando está desligado del tren. El cuerpo estaba en movimiento uniforme con respecto al sistema inercial de las estrellas fijas y era él junto con el tren quien estaba acelerado, por lo que él no era un sistema inercial en el que son válidas las leyes de Newton. Le dirá que, como en realidad al desligarse del tren no había ninguna fuerza y ninguna aceleración actuante sobre el cuerpo,

$$a_{c|A} = 0 = a_{t|A} + a_{c|T},$$

Por lo que

$$a_{c|T} = -a_{t|A}$$

Y dedujo

$$f^* = m_c . a_{c|T} = -m_c . a_{t|A}$$

Nuestro estudiante confundió lo que creyó era la aceleración real del cuerpo vista desde el tren con la aceleración real del tren vista desde afuera. Y además le asignó una fuerza *real* confiando en el segundo principio de Newton cuando era sólo un efecto resultante de hacer el experimento en un sistema acelerado pero porque en su sistema acelerado, el segundo principio no es válido. Para que no sienta que se ha despreciado su trabajo, el profesor accede a llamarla una fuerza "virtual", pidiéndole que la indique con f^*, y hasta a ponerle el nombre del estudiante, a menos que quiera llamarla "fuerza del tren". Si nuestro estudiante se convence de esta explicación, seguirá adelante con el curso general de física. En caso contrario, habrá construido una nueva física con una fuerza novedosa que sólo existe y es válida para él y el resto de los pasajeros del tren. Deberá aun así aguzar su ingenio para "hallar" un mecanismo y un par de interacción.

Afortunadamente nuestro estudiante acepta la explicación, continúa con el curso general de física y, entusiasmado con su descubrimiento, busca otras "fuerzas virtuales". Comienza a investigar en sistemas acelerados rotantes.

Descubre que cuando nos referimos a un parámetro vectorial $\boldsymbol{A}$ desde la perspectiva de un sistema de coordenadas inercial, podemos referirnos a sus variaciones en el tiempo del modo siguiente

$$\frac{d_i \boldsymbol{A}}{dt}$$

Y cuando lo describamos desde la perspectiva de un sistema de coordenadas no inercial, podemos notarlo

$$\frac{d_n \boldsymbol{A}}{dt}$$

Del mismo modo podemos referirnos al parámetro $\boldsymbol{A}$ como $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A_i} = \boldsymbol{A_n}$ dado que se trata del mismo parámetro, independiente del sistema de coordenadas, pero será escrito en las coordenadas respectivas de cada uno. Por ejemplo, usando los versores notaremos $\boldsymbol{i_i} = (1; 0; 0)_i$, $\boldsymbol{j_i} = (0; 1; 0)_i$ y $\boldsymbol{k_i} = (0; 0; 1)_i$, serán $\boldsymbol{i_n} = (1; 0; 0)_n$, $\boldsymbol{j_n} = (0; 1; 0)_n$ y $\boldsymbol{k_n} = (0; 0; 1)_n$ los respectivos versores en cada sistema. Luego

$$\boldsymbol{A} = A_{xi}\boldsymbol{i}_i + A_{yi}\boldsymbol{j}_i + A_{zi}\boldsymbol{k}_i = A_{xn}\boldsymbol{i}_n + A_{yn}\boldsymbol{j}_n + A_{zn}\boldsymbol{k}_n$$

Es decir, la suma de las componentes vistas desde "i" en las coordenadas de "i" debe ser la misma que la suma de las componentes vistas desde "n" en las coordenadas de "n". Cuando escribimos la derivada desde el sistema inercial, será

$$\frac{d_i \boldsymbol{A}_i}{dt} = \frac{d_i A_{xi}}{dt}\boldsymbol{i}_i + \frac{d_i A_{yi}}{dt}\boldsymbol{j}_i + \frac{d_i A_{zi}}{dt}\boldsymbol{k}_i$$

En esta derivación, los versores son fijos o podemos considerarlos fijos sin pérdida de generalidad. La misma derivación desde el sistema en reposo utilizando las coordenadas del sistema en movimiento será

$$\frac{d_i \boldsymbol{A_i}}{dt} = \frac{d_n A_{xn}}{dt}\boldsymbol{i_n} + \frac{d_n A_{yn}}{dt}\boldsymbol{j_n} + \frac{d_n A_{zn}}{dt}\boldsymbol{k}_n + A_{xn}\frac{d_n \boldsymbol{i_n}}{dt} + A_{yn}\frac{d_n \boldsymbol{j_n}}{dt} + A_{zn}\frac{d_n \boldsymbol{k_n}}{dt}$$

Si se trata de un sistema rotante, la velocidad de variación de los versores posición estará dada por el producto vectorial de la velocidad angular de rotación del sistema y la derivada del versor correspondiente, así

$$\frac{d_n \boldsymbol{i_n}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{i_n} \qquad \frac{d_n \boldsymbol{j_n}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{j_n} \qquad \frac{d_n \boldsymbol{k_n}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{k_n}$$

Reemplazando en la derivación de arriba

$$\frac{d_i \boldsymbol{A_i}}{dt} = \frac{d_n A_{xn}}{dt}\boldsymbol{i_n} + \frac{d_n A_{yn}}{dt}\boldsymbol{j_n} + \frac{d_n A_{zn}}{dt}\boldsymbol{k}_n + A_{xn}\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{i_n} + A_{yn}\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{j_n} + A_{zn}\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{k_n}$$

Reescribiendo la derivación de otro modo, se evidencia lo que quiere mostrarse

$$\frac{d_i \boldsymbol{A_i}}{dt} = \frac{d_n A_{xn}}{dt}\boldsymbol{i_n} + \frac{d_n A_{yn}}{dt}\boldsymbol{j_n} + \frac{d_n A_{zn}}{dt}\boldsymbol{k}_n + \boldsymbol{\omega} \times A_{xn}\boldsymbol{i_n} + \boldsymbol{\omega} \times A_{yn}\boldsymbol{j_n} + \boldsymbol{\omega} \times A_{zn}\boldsymbol{k}_n$$

O aún podemos ser más claros en la notación

$$\frac{d_i \boldsymbol{A_i}}{dt} = \frac{d_n(A_{xn}\boldsymbol{i_n} + A_{yn}\boldsymbol{j_n} + A_{zn}\boldsymbol{k}_n)}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times (A_{xn}\boldsymbol{i_n} + A_{yn}\boldsymbol{j}_n + A_{zn}\boldsymbol{k}_n)$$

Vemos que se está derivando el mismo vector $\boldsymbol{A}$ pero por una parte desde el sistema de coordenadas móvil y, por otra, pre multiplicando por la velocidad angular.

$$\frac{d_i \boldsymbol{A_i}}{dt} = \frac{d_n \boldsymbol{A_n}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{A}_n$$

En el caso particular en que el parámetro vectorial $\boldsymbol{A}$ sea la velocidad, queda

$$\frac{d_i \boldsymbol{V_i}}{dt} = \frac{d_n \boldsymbol{V_n}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{V}_n$$

La aceleración de un móvil, vista desde el sistema inercial, es igual a la aceleración del móvil, vista desde el sistema rotante más la velocidad angular del sistema rotante multiplicando vectorialmente a la velocidad del móvil.

Debemos observar que esto también vale para el vector posición $\boldsymbol{r_i}$ visto desde el sistema inercial y desde el sistema rotante $\boldsymbol{r_n}$,

$$\frac{d_i\boldsymbol{r}_i}{dt} = \frac{d_n\boldsymbol{r}_n}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_n$$

es decir que la velocidad de un móvil, vista desde un sistema en reposo $\boldsymbol{V_i}$, puede escribirse como la velocidad lineal del móvil, vista desde el sistema en roto translación $\boldsymbol{V_n}$ más el producto vectorial de la velocidad angular del sistema rotante por el vector posición.

$$\boldsymbol{V_i} = \boldsymbol{V_n} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r_n}$$

Luego

$$\frac{d_i\boldsymbol{V_i}}{dt} = \frac{d_n(\boldsymbol{V_n} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r_n})}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{V_n} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r_n})$$

Desarrollando las sumas queda

$$\frac{d_i\boldsymbol{V_i}}{dt} = \frac{d_n\boldsymbol{V_n}}{dt} + \frac{d(\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r_n})}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{V_n} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r_n})$$

Y desarrollando la derivación del producto

$$\frac{d_i\boldsymbol{V_i}}{dt} = \frac{d_n\boldsymbol{V_n}}{dt} + \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \boldsymbol{r_n} + \boldsymbol{\omega} \times \frac{d\boldsymbol{r_n}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{V_n} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r_n})$$

Pero $\frac{d\boldsymbol{r_n}}{dt} = \boldsymbol{V_n}$, es la velocidad del móvil, vista desde el sistema móvil. Luego

$$\frac{d_i\boldsymbol{V_i}}{dt} = \frac{d_n\boldsymbol{V_n}}{dt} + \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \boldsymbol{r_n} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{V_n} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{V_n} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r_n})$$

O

$$\frac{d_i\boldsymbol{V_i}}{dt} = \frac{d_n\boldsymbol{V_n}}{dt} + \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \boldsymbol{r_n} + 2\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{V_n} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r_n})$$

Desde la perspectiva del sistema móvil, escribiría

$$\frac{d_n\boldsymbol{V_n}}{dt} = \frac{d_i\boldsymbol{V_i}}{dt} - \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r_n}) - 2\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{V_n} - \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \boldsymbol{r_n}$$

La aceleración vista desde el sistema rotante es igual a la aceleración vista desde el sistema inercial, a la que responde las leyes de Newton, menos un término que podemos reconocer como la aceleración centrípeta pero cambiada de signo, por lo que se llamará *aceleración centrífuga*, primer efecto observable en el sistema no inercial si un cuerpo se mueve no ligado rígidamente a él, función de su posición. El segundo término se llama *aceleración de Coriolis*, y sólo se observa cuando un cuerpo se mueve con respecto al sistema rotante. El tercer término sólo se manifiesta cuando varía la velocidad angular de rotación, es decir, se trata de un sistema rotante con aceleración angular $\boldsymbol{\gamma} = d\boldsymbol{\omega}/dt$, y depende de la posición en el sistema rotante.

Para interpretar el segundo término, de Coriolis, pensemos que estamos en una calesita en rotación anti horaria, con el vector $\boldsymbol{\omega}$ hacia arriba, y nos acercamos desde la periferia hacia el centro a lo largo del eje "x_n" en sentido negativo, el producto vectorial cambiado de signo $-\omega x_n$ estará dirigido en el sentido positivo del eje "y_n", lo que quiere decir que nos sentiremos impulsados a desviarnos hacia nuestra derecha, como si en relación con los objetos fijos a la calesita girásemos más rápido que ellos, adelantándonos en la rotación. Lo contrario ocurriría si nos alejamos del centro, desviándonos otra vez a la derecha pero retrasándonos con respecto a los objetos fijos. El motivo es que, cuando venimos desde la periferia hacia el centro, tenemos una velocidad tangencial mayor que los objetos fijos del entorno a medida que nos acercamos al eje de rotación, y lo contrario ocurre cuando nos alejamos del centro. En la Tierra el efecto de Coriolis es esencial para comprender la circulación de vientos y las corrientes marinas.

Si escribimos la segunda ley de Newton multiplicando por la masa constante de un objeto móvil m, queda

$$m\frac{d_n\boldsymbol{V_n}}{dt} = m\frac{d_i\boldsymbol{V_i}}{dt} - m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r_n}) - 2m\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{V_n} - m\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \boldsymbol{r_n}$$

O

$$m\boldsymbol{a}_n = m\boldsymbol{a}_n - m\boldsymbol{a}_{ce} - m\boldsymbol{a}_{co} - m\boldsymbol{\gamma} \times \boldsymbol{r_n}$$

Y en término de fuerzas

$$\boldsymbol{f}_n = \boldsymbol{f}_i - \boldsymbol{f}^*_{ce} - \boldsymbol{f}^*_{co} - m\boldsymbol{\gamma} \times \boldsymbol{r}^*_{\boldsymbol{n}}$$

El último término no tiene un nombre asociado y los asteriscos los colocamos para recordar que se trata de "fuerzas virtuales". A estas fuerzas virtuales podemos agregarle la resultante de una aceleración lineal y escribir

$$\boldsymbol{f}_n = \boldsymbol{f}_i - \boldsymbol{f}^*_{\boldsymbol{l}} - \boldsymbol{f}^*_{ce} - \boldsymbol{f}^*_{co} - m\boldsymbol{\gamma} \times \boldsymbol{r}^*_{\boldsymbol{n}}$$

Este nombre de *fuerzas virtuales* merece una mayor discusión en la que no entraremos por tratarse meramente de una cuestión de nombres. Desde el punto de vista conceptual sólo debe destacarse la ausencia de un par de interacción para estas fuerzas y la no pertenencia al grupo de transformaciones inerciales. Desde el punto de vista práctico, tienen efectos tan reales como cualquier fuerza. Basta ver lo que nos ocurre en los colectivos cuando frenan, en los objetos rotantes ligados a una cuerda cuando ésta se corta, o la circulación e intensidad de vientos en la atmósfera.

Parte V: Trabajo y Energía

Trabajo mecánico

En primer lugar, tratemos de dar un sentido a la palabra “trabajo” usada en este contexto. Lo que se pretende es considerar que al medir un trabajo se trata de tener en cuenta no sólo el esfuerzo realizado sino el logro obtenido gracias a él. Por ejemplo, empujar una pared inmóvil puede significar un gran esfuerzo, pero inútil dado que el logro, en términos de desplazamiento de la pared, es nulo. Se ha realizado esfuerzo pero ningún trabajo. Por otra parte, si la pared se mueve sobre rieles gracias a algún motor que la empuja o en una pendiente tal que se movería por sí misma, el desplazamiento existe pero nuestro aporte es nulo aun cuando nos apoyemos sobre la pared, de modo que tampoco hemos realizado ningún trabajo. Finalmente, si para transportar una carga estamos sobre una cinta transportadora junto con la carga, la levantamos en nuestros brazos en la vertical mientras que la cinta se desplaza en la horizontal, y la descendemos al llegar a destino, habremos hecho un esfuerzo y hubo un desplazamiento, pero no una contribución al desplazamiento, que se hubiera realizado del mismo modo aun cuando no levantáramos la carga. Nuevamente nuestro trabajo ha sido nulo.

Lo que se llama *trabajo* es así al resultado conjunto de nuestro esfuerzo (fuerza $\boldsymbol{F}$) y el desplazamiento logrado bajo la acción de ese esfuerzo (desplazamiento $\Delta\boldsymbol{x}$). Para tener en cuenta simultáneamente ambos aspectos, podríamos pensar en una suma, pero son magnitudes de naturaleza diferente. También podemos pensar en un producto, observando que son vectores, de modo que es conveniente recordar el *producto escalar* de vectores definido a partir de dos vectores $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$

$$\boldsymbol{A} = (A_x; A_y; A_z)\ \boldsymbol{B} = (B_x; B_y; B_z),\ \ \boldsymbol{A}.\boldsymbol{B} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z = ABcos(\widehat{AB})$$

Así,

$$T = \boldsymbol{F}.\boldsymbol{\Delta x} = F_x\Delta x + F_y\Delta y + F_z\Delta z = F\Delta xcos(\widehat{F\Delta}x)$$

Puede expresarse como el producto de los módulos de **F** y **Δx** por el coseno del ángulo entre los vectores, lo que equivale a considerar sólo la proyección de la fuerza **F** en la dirección del desplazamiento **Δx**.

La última expresión resulta más simple de interpretar. El coseno de un ángulo de noventa grados entre **F** y **Δx** da por resultado un trabajo nulo, como nuestro esfuerzo vertical sobre la cinta y el desplazamiento horizontal de la carga.

También podemos notar que si hacemos un esfuerzo de 10N para desplazar un objeto una distancia de 100m, realizamos el mismo trabajo que si aplicamos una fuerza de 100N para desplazarlo 10m o de 1000N para moverlo 1m, en tanto la fuerza y el desplazamiento sean colineales.

Para considerar el trabajo en procesos más complejos, en los que la fuerza es variable y el desplazamiento puede darse sobre cualquier curva, usamos la integral curvilínea para definir

$$T = \int_{x_o}^{x} \boldsymbol{F}.d\boldsymbol{x}$$

El trabajo es así un número que resulta del producto de una fuerza, medida en newton, y un desplazamiento, medido en metros. La unidad resultante para el trabajo será [T]=N.m, a la que se da el nombre de *joule* y se simboliza "J". En el sistema Técnico se llama el *kilográmetro* (kgm), equivalente a 9,8J, y en el sistema cgs se llama el *ergio*, equivalente a 10^7J.

Teoremas de conservación

Hasta aquí el cálculo del trabajo. En el procedimiento de integración puede darse el caso en que la fuerza es función de la posición, como la fuerza elástica, o bien es una constante independiente del desplazamiento, como la fuerza peso. En tales casos podemos escribir

$$T = \int_{x_o}^{x} \boldsymbol{F}_{(x)}.d\boldsymbol{x}$$

En estas situaciones, asumiendo que existe la función primitiva que permite el cálculo explícito de la integral por medio de la *regla de Barrow*, podemos llamar a tal primitiva "-$V_{(\mathbf{x})}$" y darle el nombre de *función potencial*, *potencial* o *energía potencial*. Bajo tales condiciones el trabajo resulta

$$T = \int_{x_o}^{x} \boldsymbol{F}_{(x)}.d\boldsymbol{x} = -\left(V_{(x)} - V_{(\boldsymbol{xo})}\right) = -\Delta V_{(x)}$$

Apliquémoslo a la *fuerza peso*. Es $\boldsymbol{F_p} = (0; 0; -mg)$, el producto de la masa por la aceleración de la gravedad negativo en el eje vertical. Si el diferencial de desplazamiento es $\boldsymbol{dx} = (dx; dy; dz)$, al efectuar el producto escalar sólo queda el resultado correspondiente a la componente "z", es decir

$$T = \int_{x_o}^{x} (0; 0; -mg).(dx; dy; dz) = \int_{z_o}^{z} -mg.dz = -(-mgz + mgz_o)$$
$$= mgz - mgz_o$$

Llamaremos a la expresión $V(z) = mgz$ la *energía potencial gravitatoria* de una masa m a una altura z en el marco de la gravedad terrestre, también escrito E_{pg}.

El cálculo del trabajo adquiere una forma sencilla cuando existe una función potencial, lo que ocurre cuando tal función lo es sólo de las coordenadas y no de la velocidad, lo que suele llamarse una *función de punto* en el ámbito matemático. En el marco de la física, estas funciones están presentes cuando las fuerzas dependen de la posición, a lo que se llama un *campo escalar*, y puede escribirse

$$\boldsymbol{F}_{(x)} = -\nabla V_{(x)} = \left(-\frac{\partial V_{(x;y;z)}}{\partial x}; -\frac{\partial V_{(x;y;z)}}{\partial y}; -\frac{\partial V_{(x;y;z)}}{\partial z}\right)$$

La fuerza aplicada a un cuerpo se obtiene como el gradiente de una función potencial que describe un campo escalar en el espacio.

Apliquemos la definición a la fuerza elástica. Tal como la habíamos planteado, en un sistema de coordenadas que hace coincidir el eje "x" con el resorte y con el cero en su punto de equilibrio o longitud natural, queda

$$T = \int_{\boldsymbol{x_o}}^{\boldsymbol{x}} (-kx; 0; 0).(dx; dy; dz) = \int_{x_o}^{x} -kx.dx = -\left(-\frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}kx_o^2\right)$$
$$= \left(\frac{1}{2}kx^2 - \frac{1}{2}kx_o^2\right)$$

La expresión de la energía potencial elástica queda en la forma

$$V_{e(x)} = E_{pe(x)} = \frac{1}{2}kx^2$$

Si se toma como referencia un punto que no sea el de equilibrio del resorte, será

$$V_{e(x)} = E_{pe(x)} = \frac{1}{2}k(x - x_o)^2$$

Y en forma vectorial

$$V_{e(\boldsymbol{x})} = E_{pe(\boldsymbol{x})} = \frac{1}{2}k(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x_o})^2$$

Es fácil ver que el gradiente de esta función potencial, cambiado de signo, nos devuelve la fuerza elástica. La energía potencial queda definida con la excepción de una constante aditiva arbitraria. Como lo que interesará será la variación de energía potencial, esa constante se elige de modo conveniente para simplificar la expresión de la energía potencial. Así, para la energía potencial gravitatoria, es frecuente elegir la superficie de la Tierra como referencia para la energía potencial nula. Para el resorte es conveniente elegir la longitud natural como estado de energía potencial nula. El signo negativo en la definición de la energía potencial también es una convención apropiada para expresar lo que se llamará el *teorema de conservación de la energía*.

Notemos que la referencia a energía *potencial* no trata de una energía que "potencialmente" puede manifestarse sino que forma parte efectivamente del sistema de cuerpos y fuerzas en interacción, no en el sentido de una energía que "podría estar", sino que "está" y en todo caso "podría" expresarse como movimiento o en alguna otra forma.

También notemos que la energía potencial no está "en el cuerpo" sino *en el sistema*, por ejemplo, en el cuerpo elevado sobre la superficie de la Tierra, por lo tanto en el sistema cuerpo-Tierra, o en el resorte comprimido, por lo tanto no en el resorte en sí sino en el estado de compresión y eventualmente en el sistema que lo mantiene comprimido.

De modo que podemos escribir la segunda ley de Newton de la siguiente manera

$$\boldsymbol{F}_{(x)} = -\boldsymbol{\nabla}V_{(x)} = m\boldsymbol{a} = m\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}$$

Si calculamos ahora el trabajo de acuerdo con la expresión integral en ambos miembros, queda

$$T = \int_{x_o}^{x} \boldsymbol{F}_{(x)} . d\boldsymbol{x} = -V_{(x)} + V_{(\boldsymbol{xo})} = \int_{x_o}^{x} m\frac{d\boldsymbol{v}}{d\boldsymbol{x}}\frac{d\boldsymbol{x}}{dt}d\boldsymbol{x} = \int_{x_o}^{x} m\boldsymbol{v}\frac{d\boldsymbol{v}}{d\boldsymbol{x}}d\boldsymbol{x} = \int_{v_o}^{v} m\boldsymbol{v}d\boldsymbol{v}$$
$$= \frac{1}{2}\boldsymbol{v^2} - \frac{1}{2}\boldsymbol{v_o^2} = E_c - E_{co} = \Delta E_c$$

Donde entendemos $\frac{dv}{dx}$ como un gradiente de velocidades. (El gradiente de velocidades es un objeto matemático llamado *matriz* o *tensor* de acuerdo con el marco formal en que se desarrolle. El producto de la matriz $\frac{dv}{dx}$ por el vector $d\boldsymbol{x}$ da el vector $d\boldsymbol{v}$, que es el resultado que nos interesa y nos permite integrar la ecuación. Si se omite la notación vectorial, puede verse el proceso de integración en forma inmediata. No haremos uso de cálculo matricial en adelante, de modo que no se consideró justificado un paréntesis demasiado extenso para un fin tan limitado.)

La expresión

$$\Delta E_c = \frac{1}{2}m\boldsymbol{v}^2 - \frac{1}{2}m\boldsymbol{v_o^2}$$

se llamará la variación de *energía cinética* de la partícula de masa m.

De aquí que el trabajo sea equivalente a la variación de energía potencial, cambiada de signo, pero también a la variación de energía cinética. Si además hacemos un par de pasajes de términos de modo que las energías del estado inicial y las del estado final queden en un mismo miembro de la ecuación, resulta

$$-\left(V_{(x)} - V_{(\boldsymbol{xo})}\right) = E_c - E_{co}$$

$$E_{co} + V_{(\boldsymbol{xo})} = E_c + V_{(x)} = constante$$

Considerando que puede haber varias formas de energía potencial, las sumamos

$$E_{co} + \sum_{i=1}^{n} V_{i_{(\boldsymbol{xo})}} = E_c + \sum_{i=1}^{n} V_{i_{(x)}}$$

Digamos además que hemos considerado la energía potencial de un cuerpo sobre la superficie de la Tierra y la energía potencial elástica de un resorte ligado a un punto fijo. Cuando las masas que interactúan gravitatoria o elásticamente son comparables, es conveniente tomar el centro de masa como referencia para definir la energía cinética y potenciales del sistema como conjunto y no de sus componentes por separado.

Por el momento sólo disponemos de dos formas de energía potencial: gravitatoria y elástica, de modo que la expresión desarrollada para estas dos formas de la energía potencial es

$$\frac{1}{2}v_o^2 + mgz_o + \frac{1}{2}kx_o^2 = \frac{1}{2}v^2 + mgz + \frac{1}{2}kx^2 = constante$$

A las fuerzas que pueden derivarse como gradiente de una función potencial, que por lo tanto responden al teorema de conservación de la energía, definen un campo vectorial de fuerzas que dependen de la posición pero no de la velocidad o del desplazamiento, o como suele decirse, dependen de la posición pero no de la trayectoria o del camino seguido por el móvil, se las llama fuerzas *conservativas*. Pero hay otras, la mayoría, que no tienen asociada una función potencial, que no sólo dependen de la posición pero sí del camino, y se las llama fuerzas *no conservativas* o *disipativas*.

Al calcular el trabajo por medio de la integral

$$T = \int_{\boldsymbol{x_o}}^{\boldsymbol{x}} \boldsymbol{F}.d\boldsymbol{x}$$

Podemos separar las fuerzas en conservativas F_c y no conservativas F_{nc} de modo que resulte

$$T = \int_{\boldsymbol{x_o}}^{\boldsymbol{x}} (\boldsymbol{F_c} + \boldsymbol{F_{nc}}).d\boldsymbol{x} = -\nabla V(\boldsymbol{x}) + \int_{\boldsymbol{x_o}}^{\boldsymbol{x}} \boldsymbol{F_{nc}}.d\boldsymbol{x} = -\nabla V(\boldsymbol{x}) + T_{nc}$$

Donde T_{nc} representa la integral de las fuerzas no conservativas o *trabajo de las fuerzas no conservativas*, que sólo podemos calcularlo en cada caso en particular. Si lo introducimos en el teorema de conservación de la energía, nos queda

$$E_{co} + \sum_{i=1}^{n} V_{i_{(\boldsymbol{xo})}} + \sum_{j=1}^{m} T_{nc_j} = E_c + \sum_{i=1}^{n} V_{i_{(\boldsymbol{x})}}$$

En esta expresión se indica la suma del trabajo de todas las fuerzas no conservativas, no necesariamente la misma cantidad que de conservativas, de allí que n y m son en principio diferentes.

Nos limitaremos, al menos por el momento, a estudiar el trabajo no conservativo de la fuerza de rozamiento dinámico. En primer lugar, notemos que la fuerza de rozamiento estático no realiza trabajo porque no hay desplazamiento. Y decimos que la fuerza de rozamiento dinámico es no conservativa porque depende de la velocidad, no en el módulo pero sí en el sentido: siempre se opone a la velocidad o, equivalentemente, al desplazamiento.

Sea un cuerpo de masa m que se desplaza sobre una superficie horizontal con coeficiente de rozamiento dinámico μ_d y velocidad inicial v_o. La energía cinética inicial vale $\frac{1}{2}mv_o^2$. No hay energía elástica, no hay variación de energía potencial, y el cuerpo se desplaza hasta detenerse tras haber recorrido una distancia dada por Δx. Por lo tanto la ecuación de conservación de la energía se reduce a

$$\frac{1}{2}mv_o^2 + (-\mu_d mg\Delta x) = 0$$

Si recordamos que la fuerza de contacto normal iguala al peso, resulta que podemos simplificar la masa y obtener el desplazamiento necesario de

$$\Delta x = \frac{1}{2}\frac{v_o^2}{\mu_d g}$$

De las ecuaciones de movimiento habíamos obtenido que $v_{(t)} = 0 = v_o - at_f$, donde t_f representa el tiempo de frenado, que vale $t_f = v_o/a$. De la segunda ley de Newton aplicada al rozamiento dinámico, habíamos obtenido $f_{rd} = -\mu_d mg = ma$, y $a = -\mu_d g$. Por lo tanto el tiempo vale $t_f = \frac{v_o}{\mu_d g}$. De allí que podamos aplicar ésta aceleración a la ecuación de movimiento para la posición y obtener el desplazamiento, de valor $\Delta x = \frac{v_o v_o}{\mu_d g} - \frac{1}{2}\mu_d g(\frac{v_o}{\mu_d g})^2$. Basta resolver esta última igualdad para obtener

$$\Delta x = \frac{1}{2}\frac{v_o^2}{\mu_d g}$$

El mismo resultado que obtuvimos por conservación de la energía. No es extraño dado que hemos hecho algo que ya habíamos planteado en la cinemática, que es despejar el tiempo de la ecuación de movimiento para la velocidad y reemplazarlo en la de posición. En aquel momento habíamos obtenido

$$x_{(t)} - \frac{v_{(t)}^2}{2a} = x_o - \frac{v_o^2}{2a}$$

Si reemplazamos "x" por la coordenada vertical "z", a por la aceleración de la gravedad con su signo $-g$, y multiplicamos toda la ecuación por $-g$ y por la masa m, resulta

$$mgz_{(t)} + m\frac{v_{(t)}^2}{2} = mgz_o + m\frac{v_o^2}{2}$$

Que no es otra cosa que la conservación de la energía, limitado a la potencial gravitatoria. La diferencia está en que esta ecuación vale para toda m, g, z y v, mientras que nuestra ecuación para el rozamiento dinámico sólo vale para una superficie horizontal en un movimiento rectilíneo. Si se desplaza sobre un plano inclinado, una superficie curva, una curva sobre una superficie horizontal, ya no tiene validez y habrá que resolverla nuevamente. En otras palabras, no existe una energía potencial de rozamiento dinámico, no es una fuerza que dependa de la posición sino del camino seguido por nuestro cuerpo de masa m al moverse. En términos muy generales, atribuir el trabajo no conservativo a otras formas de energía conduce a una extensión del teorema de conservación de la energía. En cada caso debe determinarse la forma que adquiere la descripción matemática con que se expresa, lo que nos lleva a energía eléctrica, lumínica, térmica, química…, inclusive la expresión relativista de la masa en reposo $E = mc^2$ que veremos luego.

Como un dato adicional, digamos que el trabajo de las fuerzas de contacto, de vínculo o reacciones normales a las superficies es nulo precisamente por la perpendicularidad al movimiento posible. Esta observación plantea la posibilidad de enunciar un principio muy general para el planteo de problemas de cuerpos vinculados llamado *principio de los trabajos virtuales*. Notemos que, para ser más estrictos, deberíamos separar nuestras fuerzas en tres grupos: las fuerzas conservativas que definen potenciales, las no conservativas que deben tratarse en forma especial, y las fuerzas normales de vínculo que no realizan trabajo mecánico.

Planteemos un problema típico de trabajo y energía. Se trata de un cuerpo de masa m que comprime un valor Δl a un resorte de constante elástica k. Se lo suelta y el cuerpo pasa por el punto A, sube por una rampa hasta un punto B a una altura y, da vueltas por una circunferencia de radio r pasando por el punto más alto C, se desplaza sobre una superficie con rozamiento y coeficiente μ_d de longitud Δx hasta un punto D, y sube una rampa de longitud L inclinada un ángulo α hasta una cierta altura E. Luego vuelve a caer.

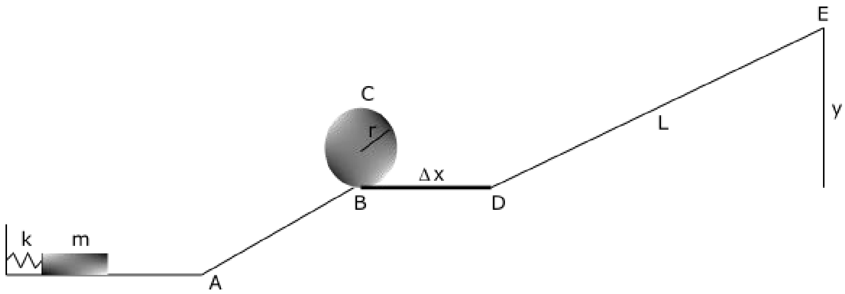

Fig. 5.1 Esquema genérico de un problema de conservación de la energía

Podríamos preguntarnos por la energía potencial inicial del resorte, por la energía cinética y velocidad en A, por la energía potencial, cinética y velocidad en B, por la energía potencial, cinética y velocidad en C, por el trabajo realizado por la fuerza de rozamiento, por la energía cinética en D, por la altura máxima que alcanza hasta E. Al caer nuevamente volverá a perder energía por el efecto disipativo del rozamiento entre D y la circunferencia, otra vez va a subir, a bajar hasta el resorte, a comprimirlo hasta detenerse. Podemos preguntar cuánto lo comprime. Nuevamente realizará el ciclo hasta gastar toda su energía en rozamiento y se detendrá en algún punto, y hasta podemos preguntar dónde.

Intentemos dar valores a los parámetros y responder a esas preguntas.

Finalmente, podemos preguntarnos qué es la energía. Y vemos que es *una cuenta*, un número que resulta de una integración. Pero hasta el momento ese número se transfiere de una expresión a otra en ecuaciones que contienen más términos como formas de la energía, pero nunca crece ni decrece. Hasta las fuerzas disipativas son mecanismos que transforman la energía en otras formas que no tienen una función potencial asociada, pero siguen siendo energía. El rozamiento genera calor, desgaste, sonido, quizá luz en una chispa, y son todas formas de la energía. El calor del Sol entrega energía al agua del suelo transformándola en vapor y aire caliente, asciende ganando energía potencial y cinética en vientos, entrega parte del calor al condensar, otra parte de la energía potencial vuelve como cinética en la lluvia; si queda en un dique, retiene algo de la energía potencial, pero la devuelve al caer sobre una turbina;

genera energía eléctrica, recorre las líneas de tensión, regresa como energía térmica en una estufa, como luz en una lámpara o en la pantalla de la computadora que podemos estar mirando.

Es una cuenta, no es un objeto, pero tiene tanta entidad física como la cantidad de movimiento y el momento angular, que se conservan en ausencia de fuerzas o momentos externos. Hasta el momento no se ha encontrado ninguna violación a la conservación de la energía total del universo, siempre reaparece en alguna parte.

Veamos una forma general de abordar ciertos problemas a través de la energía mecánica. Escribamos $E = E_c + V = \frac{1}{2}mv^2 + V$ donde en V incluimos todas las formas de energía potencial. Como E sólo depende de las condiciones iniciales y, mientras sólo intervengan fuerzas conservativas, será constante, podemos deducir que

$$v = \sqrt{\frac{2(E - V)}{m}}$$

es una forma de calcular la velocidad de la partícula en cada punto.

Grafiquemos la energía potencial en función de la posición. En la Figura 5.2 se presenta un gráfico posible, resultante de varias interacciones sobre una partícula. El eje horizontal representa la posición unidimensional, el eje vertical los valores de energía potencial resultante. La línea horizontal E denota el *nivel de energía* constante asociado a la partícula. El segmento vertical entre $r = r_1$ y $r = r_2$ representa que la energía mecánica E resulta de la suma de la energía potencial V, denotada por el segmento inferior, y la energía cinética E_c, en el segmento superior. Recordemos que la energía cinética no puede ser negativa. Por lo tanto nuestra partícula no puede estar entre $r = 0$ y $r = r_1$, tampoco más allá de r_8 ni entre r_2 y r_3, porque la energía potencial supera a la mecánica total y se requeriría una energía cinética negativa. De modo que entre r_1 y r_8 es la región de movimiento posible, excepto entre r_2 y r_3, que representa una *barrera de potencial* para el movimiento de la partícula.

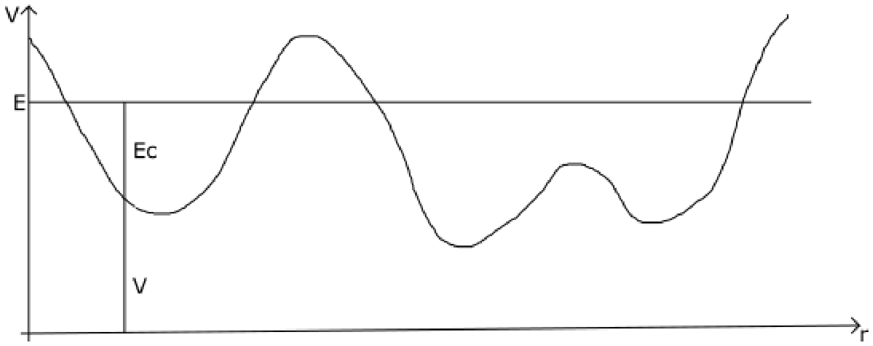

Fig. 5.2 Barreras y pozos de potencial

La pendiente cambiada de signo de $V_{(r)}$ representa la fuerza como expresión gráfica de la derivada de V con respecto a r. Entre r_1 y r_2 la pendiente es negativa, por lo tanto la fuerza es positiva, dirigida hacia los valores de r a la derecha en el gráfico. Entre r_2 y r_3 la pendiente es positiva, por lo tanto la fuerza es negativa o dirigida hacia los valores de r a la izquierda. Cuando la partícula está en $r = r_2$, un mínimo de potencial, un máximo de energía cinética, cualquier apartamiento de tal posición genera una fuerza orientada hacia r_2, por lo tanto una *fuerza de restitución* hacia r_2

como posición de *equilibrio estable* de la partícula. Entre r_1 y r_3 hay un *pozo de potencial* con un punto de equilibrio estable. Habíamos dicho que entre r_3 y r_4 hay una barrera de potencial, pero a partir de r_4 hay otra región de movimiento posible pero con dos pozos de potencial, con mínimos en r_5 y r_7 como puntos de equilibrio estable. En $r = r_6$ hay otro punto de equilibrio con una pendiente nula, pero cualquier apartamiento de la posición de equilibrio produce una fuerza que aleja más a la partícula de tal posición. Se trata de un punto de *equilibrio inestable*. Si este punto forma parte de un intervalo real, será una región de *equilibrio indiferente*.

Si la energía mecánica fuese aumentada en algún momento y luego retornase al nivel original, si supera el nivel de la barrera de potencial, la partícula pasaría de una región a otra en el gráfico, sin posibilidad de retorno hasta que no vuelva a incrementarse el nivel de energía. En ocasiones hay discontinuidades en los potenciales, inclusive $V_{(r)}$ puede representarse por medio de *escalones* de potencial. Si la partícula puede estar en regiones de equilibrio débilmente estable o indiferente, pero en forma eventual, quizá por fluctuaciones no detectables bajo el umbral de ruido en las variables que caracterizan el sistema, puede pasar a otros estados de equilibrio, suele llamarse *equilibrio metaestable*, típico de los procesos de cambio de estado, por ejemplo un líquido sobre enfriado que ante cualquier perturbación se congela en forma violenta.

Si este gráfico se representase en dos o tres dimensiones, dadas las coordenadas espaciales de r, habría un complejo de pozos y barreras de potencial. En algunas ocasiones las barreras pueden ser *rodeadas* siguiendo ciertos caminos en el movimiento. Es habitual el diseño de métodos para hallar mínimos en los potenciales y caminos en las curvas de potencial.

Potencia

La noción de *potencia* es muy simple, se trata de una medida de la velocidad con la que se realiza el trabajo, o con la que se transforma la energía. Podemos escribir

$$P = \frac{dT}{dt}$$

Hay otras formas de expresarlo que eventualmente podremos utilizar, pero con respecto a las unidades, se le llama *watt* y simboliza W a un joule por cada segundo de trabajo realizado.

Masas variables y choques

Ya hemos planteado el problema del choque a partir de la conservación de la cantidad de movimiento. Veamos ahora si es posible resolver el problema en forma completa al menos para un choque unidimensional, es decir, cuando las dos partículas de masas m_A y m_B se mueven sobre una misma recta con velocidades iniciales v_{oA} y v_{oB}. Trataremos de determinar las velocidades finales v_A y v_B considerando un choque perfectamente elástico, por lo tanto no sólo se conserva la cantidad de movimiento por no haber fuerzas externas sino que también se conserva la energía cinética. Dado que la fuerza elástica con la que se comprimen las masas m_A y m_B es conservativa, la energía potencial elástica durante la compresión será restituida como energía cinética después del choque.

La expresión

$$m_A v_{oA} + m_B v_{oB} = m_A v_A + m_B v_B$$

Representa la conservación de la cantidad de movimiento y

$$\frac{1}{2} m_A v_{oA}^2 + \frac{1}{2} m_B v_{oB}^2 = \frac{1}{2} m_A v_A^2 + \frac{1}{2} m_B v_B^2$$

expresa la conservación de la energía cinética. Deberíamos despejar una de las incógnitas de una de las ecuaciones, reemplazarla en la otra, con lo cual tendremos una expresión cuadrática bastante extensa para resolver en forma general. Limitemos entonces la solución general a un estado inicial en reposo de la masa B que es chocada por A.

$$m_A v_{oA} = m_A v_A + m_B v_B$$

$$\frac{1}{2} m_A v_{oA}^2 = \frac{1}{2} m_A v_A^2 + \frac{1}{2} m_B v_B^2$$

Podemos despejar v_B de la conservación de la cantidad de movimiento

$$v_B = \frac{m_A}{m_B}(v_{oA} - v_A)$$

Reemplazado en la conservación de la energía y desarrollado el cuadrado, suprimiendo además los $\frac{1}{2}$

$$m_A v_{oA}^2 = m_A v_A^2 + m_B \frac{m_A^2}{m_B^2}(v_{oA}^2 - 2 v_{oA} v_A + v_A^2)$$

Armando la forma usual de la ecuación cuadrática teniendo a v_A como incógnita,

$$0 = m_A \left(1 + \frac{m_A}{m_B}\right) v_A^2 - 2 \frac{m_A^2}{m_B} v_{oA} v_A + \left(\frac{m_A}{m_B} - 1\right) m_A v_{oA}^2$$

El valor de la masa m_A puede suprimirse por estar presente en todos los términos como factor e invirtiendo el signo del término independiente

$$0 = \left(1 + \frac{m_A}{m_B}\right) v_A^2 - 2 \frac{m_A}{m_B} v_{oA} v_A - \left(1 - \frac{m_A}{m_B}\right) v_{oA}^2$$

La solución de la resolvente de la cuadrática da, por una parte, $v_A = v_{oA}$ y $v_B = 0$, lo que significa que no hubo choque, pero por otra parte da

$$v_A = \left(\frac{m_A - m_B}{m_A + m_B}\right) v_{oA} \qquad y \qquad v_B = \left(\frac{2m_A}{m_A + m_B}\right) v_{oA}$$

La velocidad de la masa B es siempre positiva, es decir, adquiere el sentido de la masa A. La masa A continúa en el sentido de movimiento que tenía si es mayor que la masa B, pero rebota con velocidad de sentido opuesto si la masa B es mayor que la A. Y si ambas masas son iguales, el cuerpo A se detiene y el B adquiere su velocidad. Si la masa B es nula, la masa A continúa con su velocidad sin choque y si la masa A es nula, la B queda en reposo.

Si se considera que las velocidades iniciales de ambas masas no son nulas, se obtiene el siguiente resultado

$$v_A = \left(\frac{m_A - m_B}{m_A + m_B}\right) v_{oA} + \left(\frac{2m_B}{m_A + m_B}\right) v_{oB} \qquad v_B = \left(\frac{2m_A}{m_A + m_B}\right) v_{oA} + \left(\frac{m_B - m_A}{m_A + m_B}\right) v_{oB}$$

En el caso extremo de un choque *plástico* en el que la masa A queda adherida a la masa B y se mueven juntas tras el choque, se conserva la cantidad de movimiento igualando las velocidades a una única masa total, suma de las dos.

$$m_A v_{oA} = (m_A + m_B)\, v_{AB}$$

De aquí es fácil deducir que

$$v_{AB} = \frac{m_A}{m_A + m_B} v_{oA}$$

Este resultado es razonable, pero en relación con la conservación de la energía cinética se obtiene

$$\frac{1}{2} m_A v_{oA}^2 \neq \frac{1}{2}(m_A + m_B)\frac{m_A^2}{(m_A + m_B)^2} v_{oA}^2 = \frac{1}{2}\frac{m_A^2}{m_A + m_B} v_{oA}^2$$

La diferencia de energía cinética vale

$$\Delta Ec = \frac{1}{2} m_A v_{oA}^2 - \frac{1}{2}\frac{m_A^2}{m_A + m_B} v_{oA}^2 = \frac{1}{2} m_A v_{oA}^2 \left(\frac{m_B}{m_A + m_B}\right)$$

El cociente entre la energía cinética final y la energía cinética inicial da

$$e = \frac{m_A}{m_A + m_B}$$

Este coeficiente de "plasticidad" nos informa de la máxima pérdida de energía cinética en un choque plástico por efectos no conservativos de deformación. Si multiplicamos por e a la energía cinética inicial o adicionamos un término de la forma

$$\frac{1}{2}m_A v_{oA}^2 + (e-1)\frac{1}{2}m_A v_{oA}^2 = e\frac{1}{2}m_A v_{oA}^2 = \frac{1}{2}m_A v_A^2 + \frac{1}{2}m_B v_B^2$$

El segundo término aditivo da cuenta del trabajo negativo de las fuerzas disipativas en el choque plástico. Si $e = 1$, el choque es perfectamente elástico y si adquiere el valor máximo, dado por la masa de A sobre la masa total, es perfectamente plástico. Si la masa A que impacta es muy pequeña comparada con la B, que es impactada, el coeficiente e valdrá casi cero, con lo cual quedará muy poca energía cinética y la mayor parte se habrá transformado por efectos no conservativos aportando energía a la masa B con poco cambio en su velocidad. Pensemos en un planeta que recibe impactos de asteroides, incrementando su energía con pequeña alteración de su estado de movimiento. Pero si la masa que impacta es grande, el coeficiente e valdrá casi uno, habrá muy poca pérdida de energía cinética en la masa A y la masa B será "arrastrada" por la masa A tras el impacto.

Sin necesidad de tomar la velocidad inicial de la masa B como nula, podemos escribir la conservación de la cantidad de movimiento

$$m_A(v_A - v_{oA}) = -m_B(m_B - m_{oB})$$

y la variación de la energía cinética

$$\begin{aligned}\Delta E_c &= \frac{1}{2}m_A v_A^2 + \frac{1}{2}m_B v_B^2 - \frac{1}{2}m_A v_{oA}^2 - \frac{1}{2}m_B v_{oB}^2 \\ &= \frac{1}{2}m_A(v_A^2 - v_{oA}^2) + \frac{1}{2}m_B(v_B^2 - v_{oB}^2)\end{aligned}$$

puede reescribirse

$$\Delta E_c = \frac{1}{2}\frac{m_A m_B}{m_A + m_B}[(v_B - v_A)^2 - (v_{oB} - v_{oA})^2]$$

No demostraremos esta expresión, que se incorpora a título informativo, observando que el resultado anteriormente obtenido es un caso particular si $v_A = v_B$ y $v_{oB} = 0$. Destacamos que la variación de energía cinética es proporcional a la diferencia de cuadrados entre las velocidades finales e iniciales, que es máxima y negativa cuando las masas quedan adheridas en un choque perfectamente plástico y que es nula en un choque perfectamente elástico, en el cual la diferencia cuadrática de velocidades antes y después del impacto debe ser nula. Si eventualmente la variación de energía cinética es positiva, nos diría que el impacto genera una explosión y energía adicional debido a algún proceso que altera los cuerpos que chocan. El parámetro $\frac{m_A m_B}{m_A+m_B}$ suele llamarse la *masa reducida* del sistema.

Planteemos ahora un cohete impulsado por retropropulsión. Antes de la emisión de gases a alta velocidad hacia atrás para impulsar el cohete hacia adelante, la energía cinética del cohete vale $E_{co} = MV^2$. Tras la emisión de un dm de gases hacia atrás con velocidad v y el incremento de la velocidad de la masa residual del cohete $M - dm$ a un valor $V + dV$, tenemos por conservación de la cantidad de movimiento y despreciando diferenciales de segundo orden

$$MV = -dm.v + MV + MdV - dm.V$$

$$0 = -dm.v + MdV - dm.V = MdV - dm.(v + V) = MdV - dm.v_r$$

$$MdV = dm.v_r$$

La cantidad de movimiento "ganada" por el cohete es la que lleva los gases emitidos en sentido opuesto con velocidad relativa al cohete. Esta relación es válida en tanto lo sea la omisión de diferenciales de segundo orden y la no existencia de fuerzas externas.

Veamos qué ocurre con la conservación de la energía. Inicialmente la masa del cohete con sus gases tiene una energía cinética

$$\frac{1}{2}MV^2$$

La energía cinética del sistema tras la emisión de gases vale

$$\frac{1}{2}dmv^2 + \frac{1}{2}(M - dm)(V + dV)^2$$

Al desarrollar esta ecuación y despreciando diferenciales de segundo y tercer orden

$$\frac{1}{2}dm.v^2 + \frac{1}{2}MV^2 + MVdV - \frac{1}{2}dm.V^2$$

Si restamos la energía cinética final menos la inicial, queda

$$\frac{1}{2}dmv^2 + \frac{1}{2}MV^2 + MVdV - \frac{1}{2}dmV^2 - \frac{1}{2}MV^2 = \frac{1}{2}dmv^2 + MVdV - \frac{1}{2}dmV^2$$
$$= \frac{1}{2}dm(v^2 - V^2) + MVdV = \frac{1}{2}dm(v - V)v_r + MVdV$$

Pero

$$MdV = dmv_r$$

Entonces

$$\frac{1}{2}dm(v - V)v_r + MVdV = \frac{1}{2}dm(v - V)v_r + dmVv_r = dm\left(\frac{1}{2}vv_r - \frac{1}{2}Vv_r + Vv_r\right)$$

Por lo tanto la diferencia de energía cinética vale

$$dm\left(\frac{1}{2}vv_r + \frac{1}{2}Vv_r\right) = \frac{1}{2}dm(v + V)v_r = \frac{1}{2}dm.v_r^2$$

Pero esta energía cinética fue *ganada por el sistema*. Mientras que los gases se llevan una energía cinética dada por $\frac{1}{2}dm.v^2$, el resto de la energía cinética se la lleva el cohete.

$$\frac{1}{2}dm(v+V)^2-\frac{1}{2}dm.v^2=\frac{1}{2}dm(V^2+2vV)$$

Podemos preguntarnos cómo se ha "creado" esta energía. En este sentido debemos recordar que la emisión de gases ha sido consecuencia de algún reactor, consumo de combustible, reacción química o algún otro mecanismo que ha provocado la emisión, es decir, que ha ejercido una fuerza sobre los gases y los ha desplazado hacia atrás. Imaginemos que el mecanismo ha sido un resorte con constante elástica k lo que ha impulsado los gases hacia atrás.

Con una compresión inicial dada por Δr tendría una energía potencial elástica dada por $E_{pe}=\frac{1}{2}k\Delta r^2$. Con esta energía potencial inicial, como se conserva la energía mecánica, la energía cinética adquirida por la masa de gases emitida vale

$$\frac{1}{2}k\Delta r^2=\frac{1}{2}dm.v_r^2$$

Pero ésta es precisamente la energía cinética "creada" por la expulsión de gases. Hemos hallado la "fuente" de energía cinética en la energía potencial del resorte, y la hallaríamos si dispusiéramos de las ecuaciones adecuadas para describir la transformación de energía de otras fuentes térmicas, químicas, eléctricas, nucleares o mecánicas.

Trabajo en rotaciones

Hemos tratado de definir el momento de una fuerza de un modo un tanto arbitrario, haciendo referencia a la perspectiva de un plano de rotación. Pero podemos usar la definición de trabajo y notar así el significado profundo de esta definición, que nos ha llevado a un teorema de conservación.

Consideremos ahora una fuerza F aplicada a una masa puntual m para que realice una rotación de radio r en torno a un origen O describiendo un ángulo $d\varphi$. El trabajo de la fuerza F en el desplazamiento dx será

$$\boldsymbol{F}.\boldsymbol{dx}=F_x dx+F_y dy$$

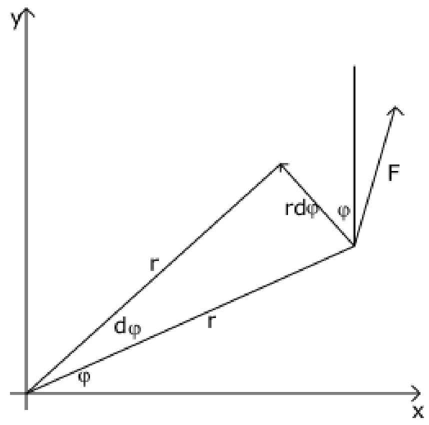

Fig.5.3 Fuerza y desplazamiento rotacional

Pero el desplazamiento vale $dx = -r.d\varphi.sen(\varphi)$ dado que el ángulo que indica la posición del objeto en rotación coincide con el ángulo formado entre el vector desplazamiento y una paralela al eje "y", con sentido opuesto a la posición sobre el eje "x". Por otra parte, el desplazamiento sobre el eje "y" será dy=+r.dϕ.cos(ϕ). Como sen(ϕ)=y/r y cos(ϕ)=x/r, queda

$$dx = -yd\varphi \qquad y \qquad dy = xd\varphi$$

El trabajo resulta entonces

$$dT = \boldsymbol{F}.\boldsymbol{dx} = F_x.(-yd\varphi) + F_y(xd\varphi) = (xF_y - yF_x)d\varphi$$

En esta expresión del trabajo notamos la primera componente del producto vectorial entre la posición radial r y la fuerza F, de modo que $dT = (\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}).\mathbf{d\varphi} = \mathbf{M}.\mathbf{d\varphi}$

El trabajo es el producto escalar entre el vector $\boldsymbol{M}$, momento de la fuerza $\boldsymbol{F}$ y el desplazamiento angular $\boldsymbol{d\varphi}$, expresado en las rotaciones en torno a los ejes "x", "y" y "z".

Notamos que, en el marco de la noción general de trabajo, el momento de una fuerza, definido a través de un producto vectorial, surge en forma natural como proyección de la fuerza $\boldsymbol{F}$ en la dirección tangencial a la trayectoria circular, de modo que contribuya a la rotación.

Habíamos visto que

$$\omega_{(r)} = \frac{\omega_o r_o^2}{r^2} = \omega_o \frac{I_o}{I}$$

Esta expresión nos dice que la velocidad angular de una partícula en rotación en torno a un punto fijo cambia en función de su distancia al eje de rotación. Es decir que, si por algún mecanismo, la partícula se desplaza radialmente acercándose al eje y se reduce el círculo que describe su trayectoria, su velocidad angular se incrementa cuadráticamente en relación con la proximidad al eje. Veamos cómo la "fuerza" de Coriolis se relaciona con este efecto.

Sobre la base de la Figura 5.3, en una rotación en el plano (x;y), escribamos la posición y diferencial de desplazamiento de la partícula como

$$\boldsymbol{x} = (rcos(\varphi);\ rsen(\varphi);\ 0)$$

y

$$\boldsymbol{dx} = (dr.cos(\varphi) - rsen(\varphi)d\varphi;\ dr.sen(\varphi) + rcos(\varphi)d\varphi;\ 0)$$

Sea $\boldsymbol{\omega} = (0;0;\omega)$ la velocidad angular del plano rotante $(x;y)$, y sea también $\boldsymbol{v_r} = (vcos(\varphi);\ vsen(\varphi);\ 0)$ una velocidad radial de una partícula de masa m sobre el eje de rotación, que por algún mecanismo interno se mantiene constante. La "fuerza" de Coriolis valdrá

$$\boldsymbol{f_{co}} = -2m\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v_r} = -2mv\omega(-sen(\varphi);\ \cos(\varphi);0)$$

Calculemos el momento rotacional de la "fuerza" de Coriolis.

$$\boldsymbol{M_{co}} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{f_{co}} = \ (0; 0; -2mv\omega r(cos2(\varphi) + sen2(\varphi))) = (0; 0; -2mv\omega r)$$

Se trata de un momento positivo sobre el eje "z" cuando la velocidad es negativa o de acercamiento al eje, que contribuye a incrementar la velocidad angular de rotación, y negativo si se aleja haciendo más lenta la rotación, y explica, desde la dinámica, el efecto resultante de la conservación del momento angular debido a una redistribución de masa en los sistemas rotantes.

Calculemos la energía cinética de rotación de una partícula en torno a un punto con un radio de giro r. Si tiene una velocidad –tangencial- v, será $E_c = \frac{1}{2}mv^2$. Pero como $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}$, queda $E_c = \frac{1}{2}m(\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r})^2$. En módulo $E_c = \frac{1}{2}mr^2\omega^2 = \frac{1}{2}I\omega^2$.

Calculemos el trabajo de la "fuerza" de Coriolis. Hemos obtenido que

$$dT = \mathbf{M}.\mathbf{d\varphi} = -2mv\omega r d\varphi = -2mv\omega^2 r dt = P_{co}dt$$

Donde hemos escrito $d\varphi = \omega dt$ y $P_{co} = 2mv\omega^2 r$ es la "potencia" de Coriolis.

Si escribimos ahora a $\omega_{(r)} = \frac{\omega_o r_o^2}{r^2}$ resulta

$$dT = -2mv\frac{\omega_o^2 r_o^4}{r^4}rdt = -2mv\frac{\omega_o^2 r_o^4}{r^3}dt = -2m\frac{\omega_o^2 r_o^4}{r^3}dr$$

Considerando que $vdt = dr$, asumimos además que algún mecanismo mantiene la velocidad radial constante de acercamiento hacia el eje de rotación, podemos calcular el trabajo total entregado por la "fuerza" de Coriolis en un desplazamiento radial entre r_o y r.

$$T_{co} = m\omega_o^2 r_o^4\left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{r_o^2}\right)$$

Si el cuerpo se acerca al eje de rotación, el trabajo será positivo, consistente con la contribución a la rotación y el incremento de velocidad angular.

Podemos calcular también el trabajo realizado por la "fuerza" centrífuga. Si expresamos el diferencial de trabajo en relación con el desplazamiento en la forma $T_{ce} = mr\omega^2 dr$, resulta

$$T_{ce} = -m\omega_o^2 r_o^4/2\left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{r_o^2}\right)$$

Si la partícula se aleja del eje de rotación, $r > r_o$, el trabajo de la "fuerza" centrífuga será positivo contribuyendo a que la partícula se aleje.

Hay un término adicional que se manifiesta cuando la velocidad angular es variable, de la forma

$$\boldsymbol{f} = -m\boldsymbol{\gamma} \times \boldsymbol{r_n} = -mr\left(-\frac{d\omega}{dt}sen(\varphi);\ \frac{d\omega}{dt}cos(\varphi);\ 0\right)$$

Como $\frac{d\omega}{dt} = \frac{d\omega}{dr}\frac{dr}{dt} = -2\omega_o r_o^2 v/r^3$ dada la relación entre ω y r, resulta

$$\boldsymbol{f} = -\frac{2mr\omega_o r_o^2 v}{r^3}(sen(\varphi); -cos(\varphi); 0) = \frac{2m\omega_o r_o^2 v}{r^2}(-sen(\varphi); cos(\varphi); 0)$$

Si consideramos $\varphi = 0$, cuando la partícula está sobre el eje "x", si la velocidad es positiva, alejándose sobre el radio de giro, esta fuerza contribuye en forma negativa sobre el eje "y" y, si la velocidad es negativa, acercándose al eje de rotación, la fuerza es negativa en "y". Notemos que cuando la "fuerza" de Coriolis acelera la velocidad angular, este término contribuye al frenado y viceversa. Funciona con carácter inercial, es decir, oponiéndose al cambio de velocidad angular.
Si calculamos un diferencial de trabajo sobre esta fuerza se obtiene

$$dT = \frac{2m\omega_o r_o^2 v}{r^2}\omega r dt = \frac{2m\omega_o r_o^2}{r}\frac{\omega_o r_o^2}{r^2}dr = 2m\omega_o^2 r_o^4 \frac{dr}{r^3}$$

Integrando sobre un desplazamiento radial da

$$T = -\frac{2m\omega_o^2 r_o^4}{2}\left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{r_o^2}\right) = -m\omega_o^2 r_o^4\left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{r_o^2}\right)$$

Si la partícula se aleja del eje de rotación, el trabajo es positivo y, si se acerca, el trabajo es negativo.

Podemos notar que la "fuerza" de Coriolis, en respuesta a la velocidad radial y angular instantáneas, es igual y de sentido opuesto a la "fuerza" que se manifiesta en respuesta a la variación de la velocidad angular. Por otra parte, el trabajo positivo de la "fuerza" de Coriolis es igual al trabajo negativo de la "fuerza" dependiente de la aceleración angular. Si se aplica una fuerza sobre la partícula que la acerque al eje de rotación, habrá que vencer la oposición de la "fuerza" de Coriolis. De este modo, al forzar que la masa m se acerque al eje de rotación, se imprime una mayor velocidad angular y se incrementa la acumulación de energía en el sistema rotante.

Calculemos la energía cinética inicial como $\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\omega_o^2 r_o^2$. Supongamos que se reduce el radio de giro a la mitad. Dada la relación $\omega = \omega_o r_o^2/r^2$, la velocidad angular se habrá incrementado cuatro veces. La energía cinética final será

$$E_c = \frac{1}{2}m\omega^2 r^2 = \frac{1}{2}m(4\omega_o)^2\left(\frac{r_o}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}m\omega_o^2 r_o^2 . \frac{16}{4} = 4E_{co}$$

La energía cinética se habrá incrementado cuatro veces. Calculemos el trabajo ejercido *sobre* la "fuerza" centrífuga, que resulta

$$T_{ce} = (-1)\left[-\frac{1}{2}m\omega_o^2 r_o^4\left(\frac{1}{\left(\frac{r_o}{2}\right)^2} - \frac{1}{r_o^2}\right)\right] = \frac{\frac{1}{2}m\omega_o^2 r_o^4(4-1)}{r_o^2} = 3E_{co}$$

La energía cinética final era cuatro veces mayor que la inicial, por lo tanto incorporó tres veces la energía cinética inicial gracias a la incorporación del trabajo aportado por la fuerza que desplazó la partícula desde la posición radial inicial hasta la posición final.

Energía y masa relativista[Lewis GN Tolman RC]

Sean dos sistemas K y k en movimiento relativo con velocidad v. En el sistema K se construye una masa esférica de 1kg y radio r, y se la pone en movimiento a una velocidad de 1m/s hacia k en dirección perpendicular a la velocidad relativa v. En k se construye otra masa similar de 1kg y radio r, y se le da una velocidad de 1m/s hacia K al encuentro con la primera masa. El choque es perfectamente elástico y cada una rebota hacia su sistema de origen. Como el proceso es totalmente simétrico, ambos sistemas registran el mismo cambio en la velocidad tras el impacto. El sistema K, considerándose en reposo, concluye que el cambio de velocidad de la otra masa es diferente porque la distancia d que las masas atraviesan es la misma para ambos sistemas por ser el movimiento de las masas perpendicular a v. Pero el tiempo en ambos sistemas es diferente y hay una dilatación temporal en el sistema k visto desde K dado por

$$t = \frac{\tau}{\sqrt{1 - {v^2}/{c^2}}}.$$

Como la relación entre el tiempo propio del sistema móvil τ con respecto al medido en el sistema en reposo t vale ${\tau}/{t} = \sqrt{1 - {v^2}/{c^2}}$, es decir, transcurre más lentamente en el sistema móvil, la relación entre el cambio de velocidad tras el choque en el sistema móvil será menor que en el sistema en reposo en la misma proporción. El producto del cambio en la velocidad por la masa nos da el cambio en el momento lineal. Como no hay fuerzas externas, no hay cambio en el momento total tras el choque. Si el cambio en la velocidad es menor en el sistema móvil, la conservación del momento requiere que sea compensado con una masa mayor. El sistema K establecerá una igualdad en los momentos debido a un choque perfectamente elástico y escribirá

$$m\frac{d}{t} = \mu\frac{d}{\tau}$$

de donde

$$m = \frac{\mu}{\sqrt{1 - {v^2}/{c^2}}}.$$

Podemos llamar a μ la *masa en reposo* en el sistema k y notarla m_o, y m como masa en movimiento relativo. Así

$$m = \frac{m_o}{\sqrt{1 - {v^2}/{c^2}}}.$$

es el valor de la masa que ve el sistema K en reposo sobre el sistema k en movimiento relativo con velocidad v, como si su masa de 1kg hubiese impactado contra una masa de $\frac{1kg}{\sqrt{1 - {v^2}/{c^2}}}$ para que sea válida la conservación de la cantidad de movimiento.

La velocidad de la luz resulta un límite natural para el cuerpo porque su masa sería infinita, lo que quiere decir que la inercialidad es infinita o, más apropiadamente, que no puede incrementarse su velocidad más allá de la velocidad de la luz porque ofrece una resistencia infinita a la aceleración.

En relación con la fuerza, si el observador en reposo K considera que en el sistema móvil k la fuerza aplicada sobre una masa m, que se ha incrementado, la acelera en forma perpendicular a la dirección de movimiento a través de una longitud $L = L_o$, que no se ha modificado, pero en un tiempo dilatado τ, y escribe las ecuaciones considerando los cambios en las unidades, obtiene

$$F = m\frac{L}{T^2} = \frac{m_o}{\sqrt{1 - v^2/_{c^2}}} \frac{L_o}{T_o^2 \Big/ \sqrt{1 - v^2/_{c^2}}^{\,2}} = m_o \frac{L_o}{T_o^2}\sqrt{1 - v^2/_{c^2}} = F_o\sqrt{1 - v^2/_{c^2}}$$

El vector fuerza, transversal al sistema móvil, disminuye en módulo en un factor $\sqrt{1 - v^2/_{c^2}}$ en relación con la fuerza registrada en el sistema en reposo. Es decir que en el sistema en movimiento relativo se incrementa la resistencia a la alteración de los estados de movimiento y se reduce en la misma proporción la capacidad de las fuerzas para efectivizar tales cambios.

Para comparar la fuerza longitudinal entre dos sistemas en movimiento relativo, analicemos el efecto rotacional de dos fuerzas sobre un sistema rígido formado por dos barras de igual longitud, tal como se muestra en la Figura 5.5.

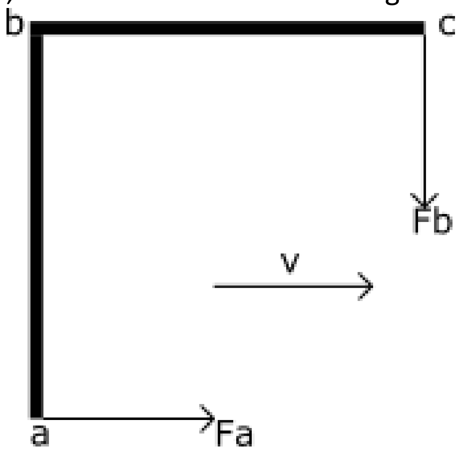

Fig. 5.5 Sistema rígido formado por dos barras en perpendiculares

Los segmentos $\overline{ab}$ y $\overline{bc}$ son iguales. El sistema rígido se mueve con velocidad v, longitudinal a una de las barras ($\overline{bc}$), de modo que el segmento $\overline{bc}$ será más corto en la proporción $\sqrt{1 - v^2/_{c^2}}$ y, para que dos fuerzas F_a y F_c lo mantengan en equilibrio rotacional, si F_c es menor que una fuerza equivalente en el sistema en reposo en la proporción $\sqrt{1 - v^2/_{c^2}}$, la fuerza F_a debe compensar ambos efectos siendo menor en un factor $1 - v^2/_{c^2}$.

Para calcular la energía cinética de una masa m que se mueve a una velocidad v con respecto a un sistema en reposo, pensemos que el cuerpo es sometido a una fuerza F a lo largo de esta línea de movimiento dada por v. Su cantidad de movimiento vale p y se modifica integrando la expresión $dp = Fdt$, mientras que su energía cinética se obtiene de integrar $dE_c = Fds$ a lo largo del desplazamiento. Pero $ds = vdt$ escrito en términos de la velocidad. De modo que podemos relacionar $dE_c = Fvdt = vdp$. Como $p = mv$ y diferenciando en términos de la variación de la masa y la velocidad, queda

$$dp = mdv + vdm$$

$$dE_c = mvdv + v^2dm$$

Reemplazando por m y su diferencial de acuerdo con la anterior expresión $m_{(v)}$

$$dE_c = \frac{c^2 m_o v dv}{c^2\sqrt{1 - {v^2}/{c^2}}} + \frac{m_o v^3}{c^2\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}} dv$$

Llamando $u = \sqrt{1 - {v^2}/{c^2}}$, $du = -\frac{v}{c^2\sqrt{1 - {v^2}/{c^2}}} dv$ y $v^2 = c^2(1 - u^2)$

$$dE_c = -m_o\left(c^2 + \frac{v^2}{1 - {v^2}/{c^2}}\right)\frac{(-1)vdv}{c^2\sqrt{1 - {v^2}/{c^2}}} = -m_o\left(c^2 + \frac{c^2(1 - u^2)}{u^2}\right)du$$

Que se reduce a

$$dE_c = -m_o c^2\left(1 + \frac{1}{u^2} - 1\right)du = -m_o c^2\frac{1}{u^2}du$$

Cuya integración da, dado que para $v = 0, u = 1$

$$\Delta E_c = -m_o c^2\int_1^u \frac{1}{u^2}du = m_o c^2(u - 1) = m_o c^2\left(\frac{1}{\sqrt{1 - {v^2}/{c^2}}} - 1\right)$$

De allí que $E_o = m_o c^2$ y que $E_c = \frac{m_o c^2}{\sqrt{1 - {v^2}/{c^2}}}$, las conocidas ecuaciones que relacionan la masa con la energía cinética y que expresan que la masa en reposo contiene energía. Más aún, la masa en sí misma es una forma de energía. El factor "c^2" es una constante de proporcionalidad que ajusta unidades pero habría una equivalencia entre la masa y la energía.

Energía y momento relativista

A partir de la expresión $E = mc^2 = \frac{m_o c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \gamma m_o c^2$, donde la recíproca de la raíz se referencia como γ, podemos expresar también el momento en dos ecuaciones de la forma

$$\frac{E}{c^2} = \frac{m_o}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \gamma m_o \quad y \quad \boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v} = \frac{m_o \boldsymbol{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \gamma m_o \boldsymbol{v}$$

queda

$$\left(\frac{E}{c^2}\right)^2 - \frac{p}{c^2}^2 = \gamma^2 m_o^2 - \gamma^2 m_o^2 \frac{v^2}{c^2} = \gamma^2 m_o^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) = m_o^2$$

o

$$E^2 - p^2 c^2 = m_o^2 c^4 = (m_o c^2)^2$$

Notemos que en mecánica newtoniana la conservación de la energía y del momento eran dos teoremas independientes. En el marco de la mecánica relativista, se sintetiza en el teorema de conservación de la energía-momento y la diferencia nos da la masa en reposo o la energía propia de la masa en reposo.

Si un objeto tiene una velocidad u visto desde un sistema en reposo y se quiere escribir su velocidad u' desde un sistema animado con una velocidad v, se requiere usar la composición relativista de velocidades

$$u' = \frac{u - v}{1 - \frac{uv}{c^2}}$$

Para calcular su energía E' es necesario obtener el coeficiente γ' a partir de

$$u'^2 = \frac{u^2 - 2uv + v^2}{1 - \frac{2uv}{c^2} + \frac{u^2 v^2}{c^4}}$$

Por lo que

$$1 - \frac{u'^2}{c^2} = \frac{1 - \frac{2uv}{c^2} + \frac{u^2 v^2}{c^4} - \frac{u^2}{c^2} + 2\frac{uv}{c^2} - \frac{v^2}{c^2}}{1 - \frac{2uv}{c^2} + \frac{u^2 v^2}{c^4}} = \frac{1 + \frac{u^2 v^2}{c^4} - \frac{u^2}{c^2} - \frac{v^2}{c^2}}{1 - \frac{2uv}{c^2} + \frac{u^2 v^2}{c^4}} =$$

$$= \frac{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)\left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)}{(1 - \frac{uv}{c^2})^2}$$

Luego

$$\gamma' = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v'^2}{c^2}}} = \frac{1 - \frac{uv}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} . \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$$

Entonces

$$E' = \gamma' m_o c^2 = \frac{m_o c^2 - m_o uv}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}.\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} = \frac{m_o c^2/\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}} - m_o u/\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}\,v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

y

$$E' = \frac{E - vp}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

Por otra parte

$$p' = \frac{E'}{c^2}u' = m_o \frac{1-\frac{uv}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}.\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}\frac{u-v}{1-\frac{uv}{c^2}} = \frac{m_o u - m_o v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}.\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} = \frac{p-\frac{vE}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

Vemos que hay una analogía en la transformación de las coordenadas espacial y temporal con las ecuaciones de transformación de los momentos y la energía. De allí que el sentido del otro invariante

$$E^2 - p^2c^2 = m_o^2c^4 = (m_o c^2)^2$$

como ley de conservación de la energía-momento, donde E/c guarda analogía con la variable *tiempo* y $\boldsymbol{p}$, con carácter vectorial, es análogo a la variable *posición*. En el ámbito de la cuántica, la energía y el tiempo por una parte, y la posición y el momento por la otra, son variables *conjugadas*, y juegan un rol esencial en lo que se llama el *principio de incertidumbre* de Heisenberg.

Choque perfectamente plástico en relatividad

Imaginemos ahora un sistema en reposo K al que se aproximan dos masas, moviéndose en sentido opuesto con velocidades v y $-v$. Cada una de las masas tiene una energía $E = mc^2 = \gamma m_o c^2$. Al chocar quedarán en reposo en el sistema K. La mecánica newtoniana nos dice que la masa final vale $2m_o$ y la energía cinética se habrá transformado completamente en trabajo no conservativo de deformación vinculado con la unión plástica de las masas que chocaron. La mecánica relativista nos dice que la masa final en reposo no es la suma de las masas sino la equivalente a la que corresponde como masa en reposo a la suma de las energías $2\gamma m_o c^2$, es decir $M = 2\gamma m_o$.

Conservación y simetría. Grupo de transformación.

La conservación remite a lo absoluto. Si todos los movimientos son relativos, debe haber *algo* absoluto. Para Demócrito eran los *átomos*. Para Platón era la *Idea*. Para Santo Tomás era *Dios*, el *primer motor inmóvil*. Para Newton era el espacio y el tiempo, creados a imagen y semejanza de Dios. Para Descartes lo que se conservaba era algo parecido a la cantidad de movimiento; si bien distinguía el movimiento y el reposo absolutos, admitía que Dios debió poner cierta cantidad de movimiento en el universo y eso no debía cambiar. Christian Huyghens (1629-1695) halló que en los choques se conserva el producto de la cantidad de materia por el cuadrado de la velocidad. Gottfried Leibnitz (1646-1716) sostenía que lo que se conserva es la “fuerza viva” causante de los movimientos, en referencia a lo que luego se llamaría “energía cinética”. Jean D’Alembert (1717-1783) fue quien pudo demostrar la conservación de la cantidad de movimiento a partir de las leyes de Newton. Antoine Lavoisier (1743-1794) propone la conservación de la masa. Thomas Young (1773-1829) introduce la noción de energía asociándola al producto de la masa de un cuerpo y el cuadrado de su velocidad, las “fuerzas vivas” de Leibnitz a las que Julius Mayer (1814-1878) llamó “fuerza”, y se preguntaba en qué se convierte la “fuerza” cuando el movimiento se detiene: halló el calor como respuesta. En 1847 James Joule (1818-1889) verificó experimentalmente la transformación de “fuerza” mecánica en calor. También en 1847 Hermann Helmholtz (1821-1894) propone la conservación de la “fuerza” pero extendiéndola a otros campos como la electricidad, el magnetismo y la química. En 1862 enuncia la ley de conservación de la energía (nueva denominación para el término “fuerza”), cantidad inalterable en todo el universo. William Thomson (Lord Kelvin, 1824-1907) lo plantea como primer principio de la termodinámica en 1849. Durante la segunda mitad del siglo XIX la conservación de la energía fue el principio unificador de la física. La conservación del momento lineal, del momento angular y de la energía se mantuvo incólume ante la Relatividad, no así la conservación de la masa, del tiempo y del espacio.

La conservación se transforma en otra de las grandes ideas del siglo XX: la noción de *simetría*. Cada uno de los teoremas de conservación está asociado a una simetría en términos de traslación en el espacio u homogeneidad espacial, en este caso el momento lineal; a una rotación en el espacio o isotropía espacial, lo que lleva a la conservación del momento angular; y traslación en el tiempo, lo que conduce a la conservación de la energía. La extensión de esta idea a través de las *simetrías gauge* condujo a la conservación de la carga y otros parámetros en el dominio de la física de partículas elementales. Trataremos de esbozar estas nociones dentro del marco de la mecánica clásica de la partícula.

Hemos planteado que las leyes de la física deben ser invariantes cuando se las expresa en diferentes sistemas de coordenadas. La invariancia se manifiesta en la forma de las ecuaciones y en algunos parámetros que se conservan. En el caso particular de la distancia entre dos puntos, resulta invariante en traslaciones y rotaciones rígidas o, lo que es lo mismo, en cambios de sistemas de coordenadas expresados en traslaciones y rotaciones. De allí que objetos geométricos como un triángulo o una esfera sigan siendo el mismo triángulo o la misma esfera desde distintos sistemas de coordenadas. Esto se aplica al cuerpo rígido, cuya forma no cambia por traslaciones y rotaciones. El Principio de Relatividad de Galileo establece que las leyes de la física son invariantes ante transformaciones de coordenadas en sistemas inerciales, es decir, en movimiento rectilíneo uniforme relativo. El Principio de Relatividad de Einstein (podríamos decir de Poncaré-Lorentz-Einstein) conserva esta interpretación admitiendo la constancia de la velocidad de la luz y modificando las leyes de transformación de coordenadas para establecer como invariante la distancia espacio-temporal.

Para introducirnos en un planteo más formal de la conservación y la simetría, introduzcamos primero la noción de *grupo*. Un conjunto es un grupo si entre sus elementos hay una operación binaria cerrada, es decir, (1) que devuelve un elemento perteneciente al grupo, (2) asociativa, (3) con elemento neutro y (4) con inverso. Un grupo de transformaciones refiere a operaciones que pueden definirse como grupo y ser aplicadas a elementos. Así puede definirse el grupo de rotaciones planas, dado que la rotación de una rotación devuelve una rotación, una sucesión de rotaciones planas no importa en qué orden se realice, conduce a la misma rotación conjunta, tiene elemento neutro dado por la rotación de ángulo nulo, e inverso a través de una rotación de signo opuesto. Las transformaciones de coordenadas dadas por $x_K = x_k + V_k t_k$ y $t_K = t_k$ definen el grupo de transformaciones de Galileo, donde x_K es la coordenada de un punto vista desde un sistema K, x_k la misma coordenada visto desde un sistema k en MRU, V_k es la velocidad del sistema k con respecto al sistema K, y t_k es la coordenada temporal en el sistema k, que coincide con la del sistema K. Diremos que las traslaciones espaciales, las rotaciones espaciales, las traslaciones temporales y las transformaciones de Galileo definen el Grupo de Galileo. Los sistemas de referencia inerciales son un grupo cerrado con respecto a las transformaciones definidas por el Grupo de Galileo. Puede decirse ahora que las leyes de la mecánica deben ser covariantes, es decir, no cambiar la forma en que se expresan, en el marco del Grupo de Galileo. Y el principio de inercia puede formularse admitiendo que existe al menos un sistema inercial en el cual las leyes de la mecánica son covariantes en el Grupo de Galileo. Una partícula en reposo o movimiento uniforme seguirá en reposo o movimiento uniforme aun cuando cambiemos el origen de tiempos, el origen de coordenadas, rotemos el sistema de coordenadas o nos movamos también con velocidad constante con respecto a ella. Insistamos en destacar que el grupo no está formado por elementos (triángulos) ni por operaciones (rotaciones) sino por sistemas de referencia, desde los cuales podrían describirse los triángulos y sus rotaciones en modo covariante, al igual que todas las leyes de la física. El Grupo de Galileo de sistemas inerciales nos dice que no existe un sistema de coordenadas absoluto desde el cual debe describirse la naturaleza. Todos los sistemas de referencia pertenecientes al Grupo de Galileo son equivalentes. Recordemos que en el marco de la física aristotélica, existe tal sistema de coordenadas absoluto en el cual los cuerpos se encuentran en su estado natural, hacia el que tienden para alcanzar su estado de reposo. En cierto modo, el Grupo de Galileo es la expresión formal de la Revolución Copernicana. Al precio de volver a un cierto "platonismo" al considerar que tienen existencia real el espacio, el tiempo, las estrellas fijas y el cuerpo aislado en un universo vacío en ausencia del observador.

La existencia de grupos de transformaciones es esencial a la física. Diferentes observadores en distintos lugares, mirando en cualquier dirección en todo momento del tiempo y sin importar si están en reposo o movimiento relativo uniforme, describen los mismos fenómenos de acuerdo con las mismas leyes. Si así no fuera, ningún experimento sería repetible, no habría modo de verificar que un resultado obtenido por un investigador sea comparable con el obtenido por otro en las mismas condiciones por el simple hecho de haber cambiado la posición, orientación, tiempo o estado de movimiento del sistema en el que realiza la experiencia. No habría leyes y no habría física. El Principio de Relatividad de Galileo se limitaba originalmente a la mecánica, el Principio de Relatividad Restringido de Einstein se extiende al electromagnetismo, y el Principio de Relatividad General de Einstein lo amplía a los campos gravitacionales.

Admitimos entonces que existe al menos un sistema de coordenadas en el cual son válidas las leyes de la mecánica, y todo otro sistema en el cual sean válidas, que pueda obtenerse por traslación temporal o espacial, rotación o transformación de Galileo, será un sistema inercial con leyes de transformación adecuadas para obtener coordenadas en la forma $(t; x; y; z)$ en las que se conserven en forma independiente los intervalos en el tiempo y las distancias en el espacio. Extender este principio a todas las leyes de la física (mecánica y electromagnetismo), y sostener la constancia de la velocidad de la luz, define el Grupo de Einstein con sus ecuaciones de transformación de coordenadas, también llamado Grupo de Lorentz por las ecuaciones de transformación que llevan su nombre.

Lagrangiano. Teorema de Noether.

Trataremos de abreviar un planteo general en mecánica teórica. En primer lugar, se extiende la noción de coordenadas a cualquier conjunto de parámetros que puedan determinar de forma unívoca la posición de un sistema en el espacio. Para una partícula puede ser las coordenadas cartesianas, polares, esféricas…. Pero si hay n partículas, cada una requerirá tres coordenadas, de modo que se necesitará $3n$ coordenadas para determinar unívocamente la posición del sistema como conjunto. Como podemos usar cualquier coordenada, no necesariamente cartesianas, notaremos $(q_1; q_2; \dots; q_n)$ a las *coordenadas generalizadas del sistema*. El número de coordenadas generalizadas que se necesite se llama el *número de grados de libertad* del sistema. A sus derivadas con respecto al tiempo se las llama *velocidades generalizadas* y suele notarse $(\dot{q_1}; \dot{q_2}; \dots; \dot{q_n})$.

Un principio, conocido como *principio de mínima acción* o *principio de Hamilton* (William Hamilton, 1805-1865), establece que todo sistema mecánico está determinado por un *lagrangiano*

$$L(q_1; q_2; \dots; q_n; \dot{q_1}; \dot{q_2}; \dots; \dot{q_n}; t) = L(q; \dot{q}; t)$$

escrito en cada coordenada o en forma sintética, función de las coordenadas y velocidades generalizadas y del tiempo, tal que la *acción* S definida como

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q; \dot{q}; t) dt$$

es mínima.

Nuestro problema será determinar la función $q_{(t)}$ que cumpla esta condición. Supongamos que $q_{(t)}$ es tal que la acción es mínima. Si reemplazamos a $q_{(t)}$ por $q_{(t)} + \delta q_{(t)}$, donde $\delta q_{(t)}$ representa una variación de $q_{(t)}$, la acción debería incrementarse. Supongamos además que se han establecido dos límites para las trayectorias $q_1 = q_{(t1)}$ y $q_2 = q_{(t2)}$ que no pueden modificarse, es decir, se sabe de dónde parte y a dónde llega el sistema pero no se conoce el camino que debe seguir. Escribimos la variación de la acción

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} L(q+\delta q;\ \dot{q}+\delta\dot{q};t)dt - \int_{t_1}^{t_2} L(q;q.;t)dt = \delta \int_{t_1}^{t_2} L(q;\dot{q};t)dt$$

Pedimos que esta variación se anule a primer orden en función de la condición de extremo. Como la variación depende de las coordenadas de posición y velocidad pero no del tiempo, introducimos la variación dentro de la integral.

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} (\frac{\partial L}{\partial q}\delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\delta\dot{q})dt = 0$$

Como $\delta\dot{q} = \frac{d\delta q}{dt}$, dado que

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\delta q\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)\delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\frac{d\delta q}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)\delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\delta\dot{q}$$

la integración por partes del segundo término da

$$\delta S = \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\delta q\right]_{t1}^{t2} + \int_{t_1}^{t_2} (\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}})\delta q dt = 0$$

El primer término es una integral exacta que se anula al restar en los extremos. Como esta expresión es válida para todas las coordenadas en forma independiente, los integrandos tienen que anulare y se obtienen las *ecuaciones de Lagrange* de la forma

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = 0$$

Veamos cómo se relaciona este planteo con el Principio de Relatividad de Galileo. Tratemos de hallar el lagragiano de una partícula libre. Como todos los puntos de referencia son igualmente válidos y cualquier traslación en el espacio debe conducir al mismo lagrangiano acorde con las ecuaciones de Lagrange, lo que equivale a decir que el espacio es homogéneo (igual en todos sus puntos), el lagrangiano no puede depender explícitamente de la posición. Lo mismo podemos decir con respecto a la homogeneidad del tiempo, por lo que podemos elegir cualquier evento de referencia y el lagrangiano no puede depender explícitamente del tiempo. Sólo queda la velocidad, pero como la orientación del sistema de coordenadas es arbitraria en una partícula libre, es decir, el espacio es isótropo (todas las direcciones son equivalentes), el lagrangiano sólo puede depender del módulo, del cuadrado o de cualquier potencia par de la velocidad. Más allá de transformaciones en la función lagrangiana, podemos suponer que tales opciones son equivalentes y proponer una dependencia con el cuadrado de la velocidad, de modo que $L_{(v^2)}$ será nuestra opción. Notemos las posiciones cartesianas con r.

En las ecuaciones de Lagrange, $\frac{\partial L}{\partial r} = 0$, por lo tanto $\frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial v}) = 0$, por lo que será $\frac{\partial L}{\partial v} = \frac{\partial L}{\partial v^2}\frac{\partial v^2}{\partial v} = \frac{\partial L}{\partial v^2}.2v = constante$, por lo que la velocidad debe ser constante dado que L es función sólo del cuadrado de la velocidad. De donde deducimos el "principio" de inercia. Pero también debe haber invariancia ante transformaciones de Galileo, es decir que si se cambia el vector velocidad por otro $\boldsymbol{v}+\boldsymbol{\delta v}$, siendo $\boldsymbol{\delta v}$ una variación independiente de $\boldsymbol{v}$, de la posición y del tiempo, en un sistema de coordenadas en movimiento relativo, al desarrollar la nueva lagrangiana en términos de tal variación a primer orden, será

$$L_{[(v+\delta v)^2]} = L_{(v^2)} + \frac{\partial L}{\partial v^2}.2.v.\delta v$$

En términos muy generales, si $L'(q;\dot{q};t) = L(q;\dot{q};t) + \frac{df(q;t)}{dt}$, al calcular la acción $S' = S + f(q_2;t_2) - f(q_1;t_1) = S + \Delta f$, pero Δf sólo depende de los estados inicial y final, de modo que se anula al variar la acción, y resulta que el lagrangiano está definido con la excepción de una función aditiva derivada total de las coordenadas y el tiempo.

De modo que $\frac{\partial L}{\partial v^2}.2.v.\delta v$ debe ser una derivada total de las coordenadas y el tiempo para que sea válida la transformación de Galileo. Pero L no depende de las coordenadas ni del tiempo sino de v^2, por lo que sólo puede ser proporcional a v^2 de manera que al derivar con respecto a v^2 quede solamente una constante. Sea $L = "constante".v^2$ y se llamará la *masa* de la partícula al duplo de la constante. De modo que queda la expresión $L=\frac{1}{2}mv^2$ como lagrangiana de una partícula libre, es decir, lo que habíamos llamado su energía cinética.

Como el lagrangiano está definido con excepción de una derivada total de las coordenadas y el tiempo, sea en principio $V_{(r)}$ una función sólo de las coordenadas. Escribamos $L=\frac{1}{2}mv^2 - V_{(r)}$. Al ser $V_{(r)}$ función únicamente de las coordenadas, se infiere que establece una conexión simultánea entre todas las partículas del sistema, lo que equivale a una velocidad de transmisión de información infinita. La independencia del tiempo también incluye la isotropía temporal, es decir que una inversión en el tiempo es posible en mecánica clásica, donde todos los procesos son reversibles.

Si aplicamos las ecuaciones de Lagrange a esta función lagrangiana, se obtiene

$$m\frac{dv}{dt} = -\frac{dV}{dr}$$

para cada partícula, expresión de la segunda ley de Newton, que hemos limitado a una coordenada.

El teorema de Noether (Emmy Noether, 1882-1935) establece que hay una relación entre la invariancia de las leyes físicas y los teoremas de conservación. Como las leyes físicas se derivan de la forma de la función lagrangiana, basta encontrar las leyes de conservación derivadas de la invariancia del lagrangiano. Consideremos primero la homogeneidad del tiempo. La lagrangiana de un sistema cerrado no debe depender del tiempo por lo que su derivada total con respecto al tiempo debe ser nula. Escribimos la derivada total del lagrangiano

$$\frac{dL}{dt} = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial q_i}\frac{dq_i}{dt} + \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\frac{d\dot{q}_i}{dt} = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial q_i}\dot{q}_i + \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\ddot{q}_i$$

De acuerdo con las ecuaciones de Lagrange, $\frac{\partial L}{\partial q_i} = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$, luego

$$\frac{dL}{dt}=\sum_{i=1}^{n}\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\ddot{q}_i=\sum_{i=1}^{n}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i\right)$$

Incorporando las dos derivaciones temporales en una sola expresión

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i-L\right)=0$$

Y se obtiene la primera integral de movimiento a la que llamaremos *energía total del sistema* como

$$E=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i-L=constante$$

En coordenadas cartesianas toma la forma usual de la energía mecánica.

Para obtener el teorema de la conservación del momento lineal se observa que el lagrangiano debe ser invariante ante desplazamientos espaciales por la homogeneidad del espacio. En coordenadas espaciales

$$\delta L=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{r_i}}.\boldsymbol{\delta r_i}=0$$

Como $\boldsymbol{\delta r_i}$ es arbitrario, debe ser $\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial r_i}=0$. Pero usando las ecuaciones de Lagrange,

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{v_i}}\right)=\frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{v_i}}\right)=0$$

Por lo tanto la cantidad

$$\boldsymbol{P}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{v_i}}$$

debe ser constante, se la llama *cantidad de movimiento* o *impulso lineal* y, en coordenadas cartesianas, adopta la forma usual definida antes $\boldsymbol{p}=m\boldsymbol{v}$. Por otra parte la derivada $\frac{\partial L}{\partial r_i}=-\frac{\partial V}{\partial r_i}=\boldsymbol{F_i}$ representa la fuerza que actúa sobre una partícula *i*. La expresión $\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial r_i}=0$ nos dice que la suma de fuerzas debe ser nula para que se conserve el momento y en particular, si sólo hay dos masas en interacción, será válido el "principio" de interacción $\boldsymbol{F_{12}}=-\boldsymbol{F_{21}}$.

En relación con el momento angular, se obtiene de la isotropía del espacio. Si escribimos que $\boldsymbol{\delta\varphi}$ representa una rotación infinitesimal, será $\boldsymbol{\delta r}=\boldsymbol{\delta\varphi}\times\boldsymbol{r}$ y también $\boldsymbol{\delta v}=\boldsymbol{\delta\varphi}\times\boldsymbol{v}$. Llevando estas transformaciones de coordenadas a la expresión de una variación del lagrangiano

$$\delta L = \sum_{i=1}^{n} (\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{r_i}} \delta \boldsymbol{r_i} + \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{v_i}} \delta \boldsymbol{v_i}) = 0$$

De acuerdo con las definiciones y las ecuaciones de Lagrange, $\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{r_i}} = \dot{\boldsymbol{p}_\iota}$ y $\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{v_i}} = \boldsymbol{p_i}$, por lo tanto

$$\delta L = \sum_{i=1}^{n} (\dot{\boldsymbol{p}_\iota}.\delta \boldsymbol{r_i} + \boldsymbol{p_i}.\delta \boldsymbol{v_i}) = \sum_{i=1}^{n} (\dot{\boldsymbol{p}_\iota}.\delta \boldsymbol{\varphi} \times \boldsymbol{r_i} + \boldsymbol{p_i}.\boldsymbol{\delta\varphi} \times \boldsymbol{v_i}) = 0$$

Extrayendo el $\boldsymbol{\delta\varphi}$ arbitrario de la sumatoria, tras un poco de álgebra sobre el producto vectorial (permutación circular) queda

$$\boldsymbol{\delta\varphi}.\sum_{i=1}^{n} (\dot{\boldsymbol{p}_\iota} \times \boldsymbol{r_i} + \boldsymbol{p_i} \times \boldsymbol{v_i}) = \boldsymbol{\delta\varphi}.\frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{r_i} \times \boldsymbol{p_i}\right) = 0$$

De modo que la suma de productos vectoriales debe ser constante. Se define

$$\boldsymbol{l} = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{r_i} \times \boldsymbol{p_i}$$

como momento angular del sistema.

Una formulación alternativa y más "elegante" que el lagrangiano es el *hamiltoniano*. Se define

$$H(p; q; t) = \sum_{i=1}^{n} p_i \dot{q_\iota} - \dot{L}(q; \dot{q}; t)$$

Se considera que las coordenadas y los momentos generalizados son variables independientes que caracterizan el estado de un sistema dinámico. Derivando el hemiltoniano con respecto al momento se obtiene

$$\dot{q_\iota} = \frac{\partial H}{\partial p_i} \qquad (1)$$

Si se deriva con respecto a la coordenada resulta

$$\frac{\partial H}{\partial q_i} = -\frac{\partial L}{\partial q_i} = -F_i = -\dot{p_\iota}$$

De modo que

$$\dot{p_\iota} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \qquad (2)$$

Las expresiones (1) y (2) son las ecuaciones canónicas de Hamilton. Configuran un sistema de 2n ecuaciones diferenciales en las n variables de posición y n variables de momento. Si se deriva el hamiltoniano con respecto al tiempo

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial H}{\partial q_i} \dot{q}_\iota + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial H}{\partial p_i} \dot{p}_\iota = \frac{\partial H}{\partial t}$$

si se observa que las sumatorias se anulan usando las ecuaciones de Hamilton. Si el hamiltoniano no depende explícitamente del tiempo, su derivada parcial será nula y por lo tanto también la total, de modo que el hamiltoniano es una cantidad conservativa en el tiempo y representa la energía del sistema.

Recordemos que la concepción de la naturaleza funcionando sobre un principio de máxima economía tiene un origen aristotélico. Grosseteste, a comienzos del siglo XIII, se apoya en esta idea y en la luz como última explicación del funcionamiento del cosmos. El estudio de la luz se hacía sobre la base de lo que hoy llamamos la *óptica geométrica*. Que la luz habría de seguir el camino más corto posible para determinar la trayectoria entre dos puntos, lo plantea Fermat (1601-1665) a mediados del siglo XVII como principio fundamental de la óptica geométrica, de donde deduce las leyes de la reflexión, la refracción y el funcionamiento de espejos y lentes. El principio de Hamilton (1805-1865) se apoya en enunciados y trabajos previos comenzados por D'Alembert (1717-1783).

El principio de Fermat propone que el camino que sigue la luz entre dos puntos no es el camino espacialmente más corto sino el que le lleva un tiempo mínimo para recorrerlo. Si se piensa la luz como un frente de onda que define una superficie que se expande en el espacio y el "rayo" de luz no es más que una construcción geométrica perpendicular al frente de onda, el principio de tiempo mínimo resulta bastante natural: el "rayo" de luz está definido por la parte del frente de onda que llega primero. Pero extender este principio a la mecánica de la partícula, sugiere que, de algún modo, la partícula explora el entorno y "elige" el camino que le lleva un tiempo mínimo en llegar a un "objetivo". No es extraña esta idea en el marco de la física aristotélica en la que los movimientos tenían un objetivo: el reposo en el estado "natural" del cuerpo. Los cuerpos no sólo se mueven en busca de su estado natural de reposo sino que lo hacen en el menor tiempo posible. Pero extender estas ideas a un principio minimal sobre una partícula que se comporta idealmente e inercialmente en un cosmos platónico, y puede ser descripta por medio de una función lagrangiana desde cualquier sistema inercial perteneciente a un grupo de simetría, no deja de resultar al menos llamativo si no contradictorio. Y esa contradicción se proyecta sobre la postura antitética de los paradigmas platónico y aristotélico desde la Edad Media. Una forma de resolverlo es considerar que el principio de Fermat, tanto como el de Hamilton, no es estrictamente de un tiempo mínimo sino de un tiempo invariante a primer orden ante pequeñas perturbaciones en la trayectoria. Ese invariante se expresa como una simetría local en perturbaciones a primer orden en torno a la trayectoria "óptima", que es la que efectivamente sigue el cuerpo. De modo que no sigue una trayectoria de tiempo mínimo, lo que tendría un sentido teleológico (la partícula sabe dónde quiere ir y pretende llegar lo más rápido posible) sino un modo de expresión de simetría local (la partícula se desplaza en el continuo hacia el punto donde conserva su estado cinético). Esta interpretación se proyecta sobre la mecánica relativista, pero en el ámbito de que Mecánica Cuántica, que excede el marco propuesto, la imagen de la partícula como una onda lleva a revisar la interpretación estos principios.

En esta sección no se ha pretendido ser estrictamente formal en cada detalle ni desarrollar exhaustivamente cada ecuación, sino dar un paso más, algo así como una “punta de ovillo” al formalismo en la mecánica analítica. El principio de mínima acción para definir trayectorias sobre la base de un principio minimal, más apropiadamente habría que mencionarlo como *principio variacional* y el teorema de Noether, que se extiende al ámbito del electromagnetismo y de la física de partículas elementales a través del hamiltoniano y de formas más generales de simetrías conocidas como *gauge*, son dos de los grandes ejes transversales y fundamentos heurísticos para toda la física actual.

Parte VI: Gravitación

Gravitación universal

El movimiento natural debía tener como objetivo reacomodar los objetos en su orden natural. Y todo, en el orden de la Creación, debía respetar su posición tal y como se había gestado en la mente del Creador. Inclusive en la organización de las abadías en torno al siglo IX. "Se advierte claramente que semejante organización de lo que trata es de reflejar las estrictas jerarquías de la corte celestial. En el centro (de una típica abadía benedictina) está el lugar de Dios, el santuario; a su derecha en la prolongación del tramo norte del transepto, el del abad, aislado: como a jefe de la familia, se le alza en solitario sobre un plano superior; a la izquierda del Todopoderoso, en tercer grado, se sitúa el grueso de la parentela, los hijos, todos ellos hermanos, todos ellos iguales, los monjes, homólogos de los ángeles, formando como estos una milicia, una guarnición cuidada por un servicio doméstico siempre a su disposición en un refectorio, en virtud de un ideal de autarquía, de suficiencia; en el punto más alejado de la puerta, que es la fisura abierta al mundo corrompido, se juntan los inválidos y los jóvenes reclutas en período de formación, niños, viejos –así como los mismos muertos-, el cementerio se halla en este recinto; porque la parte más vulnerable de la comunidad debe, en efecto, estar al margen, resguardada, en razón de su debilidad, pero también protegida por la divina diestra; a esta misma derecha se encuentran los lugares consagrados a las funciones espirituales, la escuela y el taller de escritura, mientras que lo material, sustento del cuerpo, se relega a la izquierda de Dios. Es de notar también que las tumbas se alinean hacia el este, del lado de la aurora, símbolo de resurrección, mientras que, hacia el oeste, del lado del poniente, de la perversidad del siglo, se alojan las gentes de paso."[Duby,p.55]

Algunos se atrevieron a insinuar una revisión en este orden, Copérnico se atrevió a escribirlo, pero tuvo la precaución de morir primero. Otros, como Kepler, quisieron hurgar en la mente del Creador en busca de una música celestial. Galileo se atrevió a decirlo y Newton a expresarlo en una ley gravitacional.

Hemos sintetizado las leyes de la dinámica en los principios de Newton. Aun cuando tenemos diferentes versiones, no cuestionamos el principio de interacción. La *fuerza gravitacional* es un tipo de interacción. Decimos que es una interacción *a distancia* porque no requiere contacto material entre las superficies de los cuerpos que interactúan. Hasta ahora nos hemos referido al *peso* de un cuerpo y asociado casi descuidadamente el peso con la gravedad para avanzar en nuestro estudio de la dinámica. Pero debemos notar que esto se hizo considerando sólo la aceleración de la gravedad g en la superficie de la Tierra y que "si un cuerpo de masa m está acelerado con una aceleración g, *debe* estar sometido a una fuerza que responsable llamada *peso*". En síntesis, hemos "creído" en el segundo principio y hemos "inventado" un par de interacción en el centro de la Tierra. Algo parecido a lo que alguien que estudia el movimiento de los cuerpos en un tren acelerado que "inventa" una "fuerza del tren" y decide ubicar mágicamente el par de interacción en la locomotora. En tanto nuestra "fuerza del tren" sea consistente con otros fenómenos, que seguramente pasarán en el tren, nos sentiremos más confiados en que ella "existe" y seguiremos adelante, quizá pensando que la locomotora "atrae" a los cuerpos y que los cuerpos "atraen" a la locomotora. Quizá algún día encontremos una explicación mejor. Pero al menos deberíamos conservar la inquietud acerca de "por qué" la locomotora y los cuerpos en el tren se atraen, al menos cuando frena y se repelen cuando acelera.

En primer lugar, la gravitación es sólo atractiva. Todos los cuerpos se atraen sin necesidad de contacto material. Al menos debemos conservar la inquietud de "por qué" aunque no encontremos una respuesta. En relación con la búsqueda de formalizar la atracción gravitacional como fuerza por derecho propio y no sólo por "creer" en la segunda ley, comencemos a estudiar la interacción gravitacional en sí misma y pensar en una experiencia que formalice su aparición en la física.

Supongamos un cuerpo μ_o como objeto de estudio de sus efectos gravitacionales. Lo ubicamos en un punto del espacio y, por comodidad, ubicamos en él nuestro sistema de coordenadas. Sea $\boldsymbol{r}$ el vector posición de otro cuerpo μ_1 ubicado en las proximidades de μ_o. Como disponemos de un dinamómetro, mediremos la fuerza con que interactúan, es decir, con que se atraen, y obtendremos un valor $\boldsymbol{f_{1|o}}$. De este modo nos referimos a la fuerza que el cuerpo μ_o atrae al cuerpo μ_1 o *fuerza gravitatoria sobre* μ_1 *ejercida por* μ_o. En lo que sigue omitiremos la referencia a μ_o y escribiremos sólo $\boldsymbol{f_1}$. Si tomamos otro cuerpo μ_2 y lo ubicamos en las mismas posiciones que μ_1, tendremos relaciones entre $\boldsymbol{f_2}$ y $\boldsymbol{f_1}$ para distintas posiciones. Notemos $f_{1(ra)}, f_{2(ra)}, f_{1(rb)}, f_{2(rb)}, f_{1(rc)}, f_{2(rc)} \dots$ a las fuerzas sobre μ_1 y μ_2 registradas en posiciones $r_a, r_b, r_c \dots$ Si calculamos los cocientes entre los módulos

$$\frac{f_{2(r_a)}}{f_{1(r_a)}} = \frac{f_{2(r_b)}}{f_{1(r_b)}} = \frac{f_{2(r_c)}}{f_{1(r_c)}} = \cdots = \mu_{2|1}$$

Resultará un valor constante que podemos llamar "factor" gravitacional entre cuerpos. Lo podemos hacer con otro cuerpo $\mu_3, \mu_4 \dots$ y obtendremos "factores" gravitacionales para cada uno de ellos. Si luego hacemos el cociente

$$\frac{\mu_{n|1}}{\mu_{k|1}} = \mu_{n|k}$$

y observamos que el "factor" gravitacional del cuerpo n en relación con el del cuerpo k equivale a la proporción entre los "factores" gravitacionales de n y de k en relación con el cuerpo 1, podemos elegir al cuerpo 1 como referencia de "factores" gravitacionales y omitirlo en las expresiones de μ. Es decir, μ_1 es nuestro "factor" de referencia en el estudio de la interacción con μ_o. Los "factores" μ_2, μ_k, μ_n, en proporción con el unitario del cuerpo 1, son proporciones que miden cuánto mayor o menor es la fuerza gravitacional de atracción sobre los cuerpos $2, k$ y n en relación con la atracción sobre el cuerpo 1.

Si $f_{1(\boldsymbol{r})}$ es la fuerza que μ_o ejerce sobre μ_1 dada para distintas posiciones $\boldsymbol{r}$ en las proximidades del cuerpo fuente μ_o, podemos calcular la fuerza de atracción gravitacional sobre otros cuerpos como $\mu_2, \mu_3, \dots \mu_n$ en la forma

$$f_{2(r)} = \mu_2 f_{1(r)}, \qquad f_{3(r)} = \mu_3 f_{1(r)}, \qquad \dots, \qquad f_{n(r)} = \mu_n f_{1(r)}$$

Como todos los cocientes $f_{i(r)}/\mu_i$ dan el mismo resultado, podemos definir

$$G_{(r)} = \frac{f_{1(r)}}{\mu_1} = \frac{f_{2(r)}}{\mu_2} = \frac{f_{3(r)}}{\mu_3} = \cdots = \frac{f_{n(r)}}{\mu_n}$$

como el *campo gravitatorio o campo gravitacional* del cuerpo μ_o. El campo G es vectorial, por lo que $\boldsymbol{G}_{(\boldsymbol{x})} = (G_{x(x;y;z)};\ G_{y(x;y;z)};\ G_{z(x;y;z)})$, cada componente del campo será a su vez función del vector posición $\boldsymbol{x}$.

Si queremos plantear una posible interpretación física de este campo vectorial, podemos pensar que el cuerpo μ_o "emite" cierto "flujo" que, al ser intersectado por los cuerpos que lo rodean, se ven atraídos hacia él. Este "flujo" se expande en torno de μ_o distribuyéndose en una superficie que crece a medida que se aleja del cuerpo fuente. Como la superficie de una esfera de radio r que rodea a μ_o vale $S = 4\pi r^2$, es esperable que el flujo por unidad de área en tal superficie disminuya con el cuadrado de la distancia para conservar la cantidad total de "flujo emitido". De allí que podamos proponer una forma funcional para el módulo del campo G, en expresión escalar, en la forma

$$G = \frac{K_o^{'}}{4\pi r^2} = \frac{K_o}{r^2}$$

Podemos omitir el 4π dado que K_o es una constante desconocida. Pero si fuese un "flujo" que intercepta el cuerpo que es atraído $\mu_1 \ldots . \mu_n$, la fuerza gravitacional debería depender de la superficie de los cuerpos atraídos orientada hacia el cuerpo de prueba. Un mismo cuerpo debería ser atraído con distinta fuerza en función de su orientación. Pero la fuerza de atracción no responde de este modo, por lo que debe tratarse de alguna forma de "emisión" que "llena" el entorno del cuerpo fuente y en la que está sumergido el cuerpo atraído. Por lo tanto K_o es función exclusiva del cuerpo fuente y define una propiedad del espacio que lo rodea.

Debemos elegir una unidad y un nombre para el cuerpo gravitacional. Propongamos el nombre "gravio" y el símbolo "v". En tales condiciones, el campo gravitacional se medirá en "newton sobre gravio N/v". Además se trata de una fuerza, de modo que responde a la segunda ley de Newton. Si usamos un cuerpo de referencia como podría ser el "kilogramo patrón" o al menos un litro de agua para μ_1, resulta que

$$f_{1(r)} = G_{(r)}\, \mu_1 = m_1 a_1 \quad \ldots \quad f_{n(r)} = G_{(r)} \mu_n = m_n a_n$$

Podemos convenir en evitar la introducción de una nueva unidad, el "gravio", dado que hay una correspondencia uno a uno entre masa gravitatoria µ y masa inercial m en tanto asignemos como medida de $G_{(r)}$ una aceleración, es decir m/s^2. Si convenimos entonces en que un "kilogramo" (unidad de masa inercial) corresponde a un "gravio" (unidad de masa gravitatoria), olvidamos el "gravio" y nos quedamos con el kilogramo, sólo teniendo en cuenta que cuando lo usemos para una fuerza cualquiera, se trata de la masa inercial, y cuando lo usemos para la atracción gravitacional o "fuerza peso", se trata de la masa gravitatoria. El Experimento de Eötvös (Lörand Eötvös, 1848-1919) mostró que la equivalencia por medio de una balanza de torsión hasta una diferencia relativa menor que 3.10^{-9}. Los métodos se han perfeccionado hasta asegurar que la diferencia, si existe, es menor que 10^{-13}. Por otra parte, la masa gravitatoria responde con la misma aceleración que la masa inercial, con lo cual, a los fines prácticos de cálculo, no hay diferencia alguna. Medir una fuerza peso o cualquier otra fuerza con un dinamómetro y determinar la aceleración de la gravedad o cualquier otra aceleración, nos habilita a hablar de una coincidencia o *igualdad* entre la masa inercial y la masa gravitatoria, aunque no de una *identidad* porque una es la que responde inercialmente a cualquier fuerza con una aceleración, y otra sólo responde a la atracción gravitacional con una fuerza. Si ésta fuerza es la única actuante, la aceleración resultante del peso es la misma que aquella con la que responde la masa inercial. La respuesta es la misma medida en aceleración, en m/s^2, lo cual nos facilita la operatoria como si se tratase de una fuerza muy simple de manipular si se dispone de $G_{(r)}$ que, cerca de la superficie terrestre, debería coincidir con lo que hemos llamado g, la aceleración de la gravedad.

Es necesario notar que la *masa inercial* es una medida de cómo responde o, más precisamente, la resistencia que ofrece el cuerpo a responder a una fuerza externa, expresada esta respuesta en términos de la aceleración que manifiesta. Por otra parte, la *masa gravitatoria* es, de algún modo desconocido, la causante de la fuerza externa a través de algún mecanismo de interacción. Debe ser al menos sorprendente que aquello que "causa" la atracción gravitacional coincida con aquello que "resiste" a la manifestación del efecto. Al ser iguales el forzante y la resistencia, todos los cuerpos manifiestan el mismo efecto, es decir, la aceleración de la gravedad es la misma para todos los cuerpos. Recordemos los problemas de encuentro en caída libre y el rol de la fuerza externa en el planteo de dos cuerpos sometidos a una fuerza externa independiente y cuando es producida por el peso de un cuerpo suspendido. La gravitación, la más universal de las fuerzas, es la única que presenta esta característica. Pensemos en la fuerza elástica, determinada por la elasticidad pero la aceleración es resultante de la masa inercial sobre la que actúa la fuerza, de allí que no todos los cuerpos responden con la misma aceleración ante una interacción elástica similar. Pensemos en la carga eléctrica, un protón tiene la misma carga pero con signo opuesto a la de un electrón, pero una masa 1840 veces mayor, de allí que responde con aceleraciones diferentes. Y podríamos seguir, pero basta notar esto y que es precisamente esta equivalencia la que hace que no sea posible distinguir un sistema inercial de un sistema gravitacional en el que todos los cuerpos están en caída libre. Todos los sistemas inerciales son equivalentes entre sí y a su vez a todos los sistemas en campos gravitacionales en caída libre. Todos los sistemas en campos gravitacionales, expresados en sus masas gravitatorias, son equivalentes a todos los sistemas acelerados, expresados en sus masas inerciales. La extensión del principio de relatividad a los sistemas gravitacionales y acelerados es la piedra fundamental de la Relatividad General.

Podríamos haber dicho simplemente que Newton "descubrió" la ley de gravitación universal como una atracción entre dos "masas" sin hacer todo este rodeo. Hubiéramos llegado a lo mismo, o más que "llegado", enunciado lo mismo y plantear aplicaciones. Pero hubiésemos pasado por alto esta equivalencia como si fuese una identidad. Notemos que si el efecto gravitacional hubiera dependido de la sección del cuerpo atraído orientada hacia el cuerpo fuente, o si la fuerza hubiese dependido de la densidad del cuerpo atraído, o del volumen o del número de moléculas que lo componen o de algún otro parámetro, no habríamos establecido la equivalencia, entonces dos kilogramos de agua no pesarían 19,6N ni serían acelerados con $9{,}8m/s^2$, ni dos kilogramos de plomo ni nada sería como es. Fue justamente la observación de esta igualdad tan "sorprendente" el punto de partida para la Relatividad General.

Pero aún tenemos que terminar de completar nuestra ley de atracción. Hemos visto que

$$f_{1(r)} = \frac{\mu_1 K_o}{r^2} = \frac{m_1 K_o}{r^2} \quad y\ en\ general \quad f_{n(r)} = \frac{\mu_n K_o}{r^2} = \frac{m_n K_o}{r^2}$$

Si cambiamos nuestro cuerpo fuente por $\mu_1 = m_1$, por lo tanto con una constante propia K_1, la fuerza sobre μ_o valdrá

$$f_{o(r)} = \frac{m_o K_1}{r^2}$$

y a partir de ahora usamos el símbolo m para la masa gravitatoria sabiendo que es numéricamente igual a μ.

Lo mismo podríamos hacer con los otros cuerpos gravitacionales. Como es válido también el tercer principio, de interacción, $f_{1(r)}$ y $f_{o(r)}$ tienen que ser iguales en módulo a una misma distancia r. De allí que

$$\frac{m_1 K_o}{r^2} = \frac{m_o K_1}{r^2}$$

es decir

$$m_1 K_o = m_o K_1$$

o

$$\frac{K_o}{m_o} = \frac{K_1}{m_1} = \frac{K_2}{m_2} = \cdots = \frac{K_n}{m_n} = \gamma$$

A γ se la llamará *constante de gravitación universal* y queda $K_o = \gamma m_o$, $K_1 = \gamma m_1, \dots, K_n = \gamma m_n$. Escribimos entonces nuestra ecuación de gravitación entre un cuerpo fuente m_o y un cuerpo m_n cualquiera

$$f_{n(r)} = \gamma \frac{m_o m_n}{r_{on}^2}$$

donde r_{on} representa la distancia radial entre la masa fuente m_o y la masa de prueba m_n. Si dividimos la fuerza de atracción gravitacional por la masa del cuerpo de prueba m_n tenemos

$$G_{(r)} = \frac{f_{n(r)}}{m_n} = \gamma \frac{m_o}{r_{on}^2}$$

Vectorialmente podemos escribir

$$\boldsymbol{f}_{\boldsymbol{n}(\boldsymbol{r})} = \gamma \frac{m_o m_n}{\boldsymbol{r}_{\boldsymbol{on}}^2} \hat{r}_{on} \quad y \quad \boldsymbol{G}_{(\boldsymbol{r})} = \frac{\boldsymbol{f}_{\boldsymbol{n}(\boldsymbol{r})}}{m_n} = \gamma \frac{m_o}{\boldsymbol{r}_{\boldsymbol{on}}^2} \hat{r}_{on}$$

donde $\hat{r}_{on}$ representa el vector en la dirección de la recta que une las masas m_o y m_n.

Falta determinar el valor de la "constante" γ. Para ello bastará colocar dos masas unitarias, es decir, de 1kg cada una, a un metro de distancia y medir la fuerza. El problema es que esta fuerza es tan pequeña que el método resultará muy difícil de aplicar de este modo. De todas maneras esto se pudo hacer y obtuvo

$$\gamma = 6.6738.10^{-11}\, Nm^2/kg^2$$

Si hemos puesto entre comillas la palabra “constante”, es porque aún no se ha evaluado si esta ecuación y este valor, válidos en las proximidades de la Tierra, también lo son en otros lugares del Universo. La exploración, iniciada en el Sistema Solar, llevada cada vez más lejos, ha conservado la validez de la ecuación y de la constante, de modo que podemos decir que es la *constante de gravitación universal* y la *ley de gravitación universal*.

El pequeño valor de esta constante permite evaluar el carácter débil de la fuerza, puesto que se requerirían masas de varios miles de toneladas separadas por pocos centímetros para que se manifiesten fuerzas apenas perceptibles por instrumentos muy sensibles. Por darnos una idea, supongamos dos masas de 100000Tn separadas por una distancia de unos 100m, algo así como dos enormes buques en un puerto. Apenas alcanzaría una fuerza de unos $66{,}7\mathrm{N} = 6{,}8\overrightarrow{kg}$. El viento y las olas ejercen fuerzas muy superiores, pero este valor no es despreciable y actualmente es medible. Por esta razón sólo tiene aplicación práctica en la evaluación de interacciones astronómicas, disparos de proyectiles de muy largo alcance o movimiento de satélites.

El llamado *experimento de Cavendish*, realizado en 1798, fue destinado a determinar la masa y la densidad de la Tierra por medio de un cuidadoso instrumento, a través de medir la fuerza de atracción gravitacional entre dos masas de 175kg de plomo por medio de un péndulo de torsión. El valor de la constante de gravitación universal se obtuvo explícitamente por primera vez en 1897 por Boys perfeccionando el método de Cavendish.

Mientras nos limitemos a usarla para explicar los movimientos de los planetas, satélites, meteoritos, cometas, asteroides, movimiento de otras estrellas, de la Galaxia, del Universo, y a la caída de los cuerpos, los efectos de marea, las variaciones en la rotación terrestre, todo estará bien. Pero hemos dejado un par de puntos pendientes, uno es la equivalencia entre masa gravitatoria y masa inercial, y el otro es “qué es lo que llena” el espacio en torno al cuerpo fuente para que haya una atracción a distancia sobre otros cuerpos y que determina las propiedades del campo gravitacional.

Centro de masa y centro de gravedad

Hemos definido el centro de masa como un punto donde podemos considerar que se concentra toda la masa del cuerpo y al que se puede aplicar la mecánica de la partícula. El centro de gravedad refiere a un punto donde puede concentrarse el peso total del sistema de partículas. Comparemos las ecuaciones

$$x_{cm} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i} \qquad y \qquad x_{cg} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i g_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i\, g_i}$$

Si la aceleración de la gravedad es la misma sobre todas las masas del sistema, es un factor común en el numerador y denominador que se simplifica y resulta que el centro de masa y el centro de gravedad coinciden. Esto ocurre en campos gravitatorios uniformes y es válido cerca de la superficie terrestre en tanto la dependencia con la altura es muy pequeña a escala humana. Pero en cuerpos de grandes dimensiones pueden no coincidir ambos puntos. El centro de gravedad de la Luna, por ejemplo, está desplazado hacia la Tierra con respecto a su centro de masa, por ser la atracción gravitacional mayor sobre el lado de la Luna que mira hacia la Tierra. Como la rotación de un cuerpo libre se da en torno a su centro de masa, al estar desplazado el centro de gravedad se genera un momento de fuerza que produce una rotación de la Luna en torno al centro de masa de modo tal que el centro de gravedad esté más próximo a la Tierra que el centro de masa. Esta es una posición de equilibrio estable para la Luna, por lo que permanece en ella y siempre ofrece la misma cara hacia la Tierra. En realidad hay una pequeña oscilación apenas perceptible desde la Tierra. El efecto conjunto de la rotación de la Tierra en torno al centro de masa común y la atracción diferencial de la Luna sobre la Tierra en los lados que da hacia la Luna y el opuesto de la superficie terrestre, da lugar a los *efectos de marea* o *efectos tidales*.

Centro de atracción gravitacional

Imaginemos que un cuerpo esférico es separado en esferas huecas superpuestas. Calcularemos la energía potencial gravitacional sobre una masa m ubicada a una distancia d del centro de una esfera hueca de masa M y radio R.

Tomemos una esfera hueca y un plano que corte a la esfera a una distancia x del centro sobre el eje radial perpendicular al plano. El plano de corte define un anillo sobre la esfera. La energía potencial del anillo de masa dM sobre la masa m vale $dE_{pg} = -\gamma m dM/r$, donde r es la distancia en línea recta del anillo a la masa m. La masa contenida en el anillo vale entonces $dM = 2\pi y \frac{M}{4\pi R^2} ds = 2\pi R \frac{M}{4\pi R^2} dx = \frac{M}{2R} dx$, donde $\frac{M}{4\pi R^2}$ representa la densidad superficial de masa de la esfera, $2\pi R$ es el perímetro del anillo, y $dx = ds.sen(\varphi)$ y $sen(\varphi) = y/R$ es un diferencial de desplazamiento radial que determina la superficie diferencial del anillo.

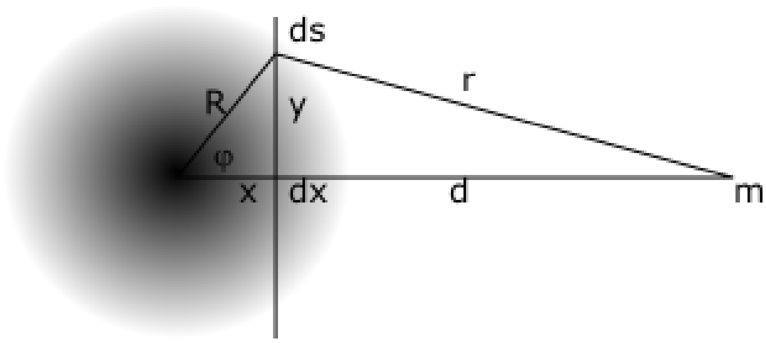

Fig. 6.1 Centro de atracción gravitacional

El diferencial de energía potencial sobre la masa m vale

$$dE_{pg} = -\frac{\gamma m dM}{r} = -\frac{\gamma m M}{2Rr} dx$$

Pero $r^2 = y^2 + (d - x)^2 = y^2 + d^2 + x^2 - 2dx$, diferenciando resulta

$$2rdr = -2d.dx.$$

de donde

$$dE_{pg} = \frac{\gamma mM}{2Rr}\frac{r}{d}dr = \frac{\gamma mM}{2Rd}dr$$

La distancia r puede variar entre $d + R$ y $d - R$, desde el extremo más alejado al extremo más próximo, con x creciente, sobre la superficie de la esfera, luego

$$E_{pg} = \int_{d+R}^{d-R} \frac{\gamma mM}{2Rd} dr = -\frac{\gamma mM}{d}$$

Podemos notar que la energía potencial de la esfera hueca es equivalente la que produciría una masa puntual ubicada en el centro de la esfera, más precisamente, en el centro de masa de la esfera. Como podemos pensar al volumen que ocupa la masa total del cuerpo gravitacional separado en esferas, y cada una con una masa gravitacional equivalente en su centro de masa, llegamos a que el efecto gravitacional equivale al producido por una masa puntual equivalente ubicado en el centro de masa del cuerpo extenso.

En síntesis, podemos pensar que el efecto gravitacional que *produce* un cuerpo de masa M es equivalente al producido por una masa puntual del mismo valor ubicada en el centro de masa del objeto extenso. Pero el efecto gravitacional que *recibe* un objeto extenso está localizado en su centro de gravedad y es debido a los campos externos.

Principio de Relatividad General

Supongamos que un observador, conocedor de la mecánica clásica, ha nacido y vivido en un cohete acelerado con una aceleración de valor g alejándose de la Tierra. Nadie le ha dicho la verdad y le han dejado creer que vive en la Tierra. Puede comprobarlo porque, al dejar un cuerpo libre de toda interacción en una cámara de vacío, sin importar la masa del cuerpo, todos caen con la misma aceleración de valor $-g$ en ausencia de aire. Ocurre tal como lo ha estudiado en los libros de mecánica elemental. Todos los cuerpos en tiro oblicuo o tiro horizontal describen trayectorias parabólicas. Si se deja caer junto con los cuerpos en una gran cámara de vacío, todo se mueve alrededor con velocidad constante, los encuentros ocurren como si todo estuviese en estado inercial. Pero al volver al suelo, siente el peso de los objetos, su propio peso y todo funciona como en un campo gravitacional. Pero nadie le permite ver el cielo, los bosques, los lagos, mares y montañas a través de ninguna ventana. No hay ventanas. No hay modo de interactuar con el mundo exterior. De pronto lo invade una duda. Podría estar en un cohete acelerado. Recuerda un viejo proyecto para abandonar la Tierra pero tenía entendido que se había abandonado el proyecto… o quizá no. Sabe que, si está en un cohete con aceleración g, todos los objetos que no interactúen por contacto con el cohete permanecerán en movimiento inercial con la velocidad que el cohete tenía al desprenderse de la interacción de contacto, el cohete seguiría acelerando pero los objetos no ligados se retrasarían y todos manifestarían, con respecto al cohete, una aceleración $-g$, opuesta a la del cohete.

Sabe que esta aceleración sería un efecto resultante de realizar tal experimento en un sistema no inercial acelerado con una aceleración igual a la gravedad terrestre.

Tiene dos teorías en mente: la fuerza que mide es el peso del cuerpo, de valor $P = -mg$, o bien se trata de una "fuerza virtual" o efecto resultante de estar en un sistema acelerado, con lo cual se trataría de una "fuerza" $f^* = -mg$, pero esta g sería la aceleración real del cohete y no la aceleración real de la gravedad. Pero ¿cómo distinguirlas si tienen el mismo valor? La tercera ley de Newton le ofrece una respuesta: buscar el par de interacción. La fuerza peso tiene el par de interacción en el centro de la Tierra y la "fuerza virtual" no tiene ningún par de interacción. Pero no tiene manera de "ir al centro de la Tierra" y ni siquiera de mirar por una ventana para ver otros cuerpos celestes en las proximidades.

Los relojes retrasan en sistemas acelerados, del mismo modo que retrasan en campos gravitatorios. De pronto se da cuenta de que todos los objetos masivos caen con la misma aceleración en el vacío, si están en un campo gravitatorio. Pero la luz no tiene masa, por lo que no debería "caer" junto con los cuerpos y seguir viajando en línea recta. Y precisamente por seguir en línea recta, mientras el cohete acelera, debería dejar detrás el trazo recto de luz que habría de verse curvada como en un tiro horizontal en una trayectoria parabólica. La luz, por no tener masa, debe seguir en línea recta en un campo gravitatorio y verse curvada en forma parabólica desde un cohete acelerado.

Recuerda haber leído, en unos apuntes sobre Relatividad Especial, que hay una equivalencia entre la masa y la energía dada por $E = mc^2$, de modo que, dado que la luz tiene energía, tiene asociada una equivalencia en términos de masa dada por $m = E/c^2$. Entonces se pregunta… ¿y si la trayectoria de esta pequeña masa equivalente fuese curvada por un campo gravitatorio al igual que los otros cuerpos? ¿O si acaso el espacio mismo fuese curvado por la masa gravitatoria? En tal caso no existe la "fuerza gravitatoria" sino una curvatura espacial, de modo que tampoco hallaría el "par de interacción". Al consultar unos apuntes sobre Relatividad General, se encuentra con que también la luz se curva en campos gravitatorios, como fue probado por Eddington en 1919 al medir la curvatura de la luz proveniente de estrellas al pasar cerca del Sol durante un eclipse, de modo que la equivalencia entre masa inercial y masa gravitacional conduce a que no puede distinguirse un campo gravitacional de un sistema acelerado haciendo experimentos sólo dentro del sistema.

Y nuestro amigo deberá seguir con la duda mientras no pueda salir y contemplar el mundo exterior.

Conclusión(es)

La fe mueve montañas pero no decisiones políticas. Poco se sabe de los comienzos, excepto apenas algo de los pocos intentos que sobrevivieron, un poco más de los que tuvieron éxito. Los orígenes de los que trascendieron como motores de la historia se enredan en la leyenda. En aquellos siglos que se hunden en los bordes de la historia surgieron grandes movimientos religiosos de los que algunos han persistido hasta el presente. Pero se busca el calor del Sol en invierno y la sombra fresca en verano del mismo modo que se busca la luz en la oscuridad.

Mencionemos el judaísmo, con la redacción de la Torá y el Talmud tras la primera diáspora y exilio en Babilonia después de la conquista del reino en 586 a.C. por Nabucodonosor; el mazdeísmo de Zoroastro, que habría vivido en torno al año 600 a.C.; el budismo, en tanto doctrina filosófica y religiosa originada en las enseñanzas de Buda a finales del siglo VI a.C.; época del renacimiento egipcio con capital en Sais; época de la quizá conflictiva transición romana de la monarquía a la república; época de la fundación del imperio de Cartago, de la breve expansión del imperio Neobabilónico y la rápida conquista de los persas, que tanto influyeron en la historia de Grecia. Época también de Pitágoras, de Tales, de Anaximandro…. Época de la *stasis* griega que desembocó en las reformas de Solón (siglo VI a.C.), el *siglo de Pericles* (Siglo V a.C.), en la democracia, en Sócrates, en Platón, en Aristóteles. Es al menos llamativo que en aquellos siglos históricamente oscuros, políticamente conflictivos, religiosamente creadores hayan culminado en una nueva forma de inquirir acerca de la naturaleza; la misma naturaleza de la que participan los hombres y les da derechos como iguales, y se haya desarrollado la herramienta discursiva de la oratoria a la vez que la fundamentación lógica y el razonamiento geométrico. Como si la política, la religión y el modo de inquirir estuviesen indisolublemente imbricados en un mismo proceso histórico. Allí quizá debemos buscar el origen de la ciencia.

En el medio el intento imperial de Alejandro, la expansión del helenismo, las bibliotecas de Alejandría, de Pérgamo, el Liceo, la Academia, el estoicismo, el epicureísmo, la Paz Romana en un Imperio que se extendía de la India a Londinum. En el medio Jesús, que en el medio de otras comunidades místicas, sus seguidores desarrollaron un complejo de ayuda mutua, al modo de cofradías, tan típicas hasta la Edad Media, entre fieles sin interponer un origen étnico. La crisis del Imperio romano del siglo III pudo tener componentes sociales expresados en esas comunidades y quizá eso justifique las persecuciones que sufrieron los cristianos, pero no sólo los cristianos fueron perseguidos. Tal vez porque eran comunidades numerosas o políticamente activas, o por el desarrollo histórico a posteriori de los hechos, hayan tenido más repercusión. Pero fue la respuesta de las comunidades, de sus obispos, de sus fieles mártires y sus no tan fieles que abjuraron, lo que ocasionó las primeras fragmentaciones.

Quizá por convicción propia, tal vez por convicción de sus tropas, Constantino adoptó el estandarte de Jesús. ¿Cálculo político? ¿Genuina fe? ¿Ambos? ¿Algo más? Es una discusión abierta. Pero el proceso no fue abrupto ni fue lineal. Hubo intentos de restaurar los cultos romanos. Y hubo nuevos pueblos en el horizonte de Roma. Algunos apenas dejaron huella en la historia, otros sólo un lejano recuerdo, como los hunos de Atila. El Imperio romano, en la figura del emperador delante del patriarca, se trasladó a Constantinopla para transformarse en el Imperio bizantino. En Roma, a veces en Rávena, el Imperio romano de Occidente dejó en el papa la imagen del emperador, muchas veces ocupándose de los problemas seculares de Roma, al igual que otros obispos de sus ciudades como referentes de las comunidades humanas, no necesariamente cristianas. Y otros pueblos ocuparon el espacio de la antigua Roma imperial. Hasta que uno de ellos obtuvo la corona de manos del papa.

¿Quién heredaría el occidente romano? El efímero reino de Siagrio, en el nordeste de la actual Francia, sucumbió ante los francos. Los núcleos romanos y cristianos en la actual Inglaterra estaban muy lejos, si bien Offa de Mercia fue uno de los primeros reyes coronados en el marco de la Iglesia Cristiana, en los mismos años que Pipino entre los Francos, pero en las islas se vieron desplazados hacia Escocia y Gales ante el avance vikingo. Los reinos orientales estaban demasiado lejos en el espacio o en el tiempo, y más cerca de Bizancio o en el ámbito musulmán. Los judíos estaban demasiado lejos en la tradición. Los estoicos, los epicúreos, los neoplatónicos estaban demasiado lejos en la abstracción y las ideas. Los bereberes, demasiado lejos en sus núcleos tribales y en la arena de su historia. Los nórdicos, demasiado lejos en la cultura y muy adelante en el tiempo. Los visigodos formaron un reino cristiano que fue constreñido a las montañas de Asturias tras el avance de los árabes omeyas. Los ostrogodos, quizá los más romanos de los bárbaros, sucumbieron ante el intento de recuperación del Imperio realizado por Justiniano desde Bizancio. Un intento que fracasó en ambos bandos, dejando al papa en solitario como referente religioso y civil ante el nuevo ocupante lombardo de los fragmentos romanos. Un papa que basculaba entre el apoyo militar bizantino y su voluntad de primacía como obispo de la cristiandad. Quizá por ser ocupado el trono bizantino por una emperatriz, o por un desencuentro con la iconoclastia entre el papa y Constantinopla, o simples cálculos políticos, porque tal vez el enfrentamiento entre iconódulos e iconoclastas no eran las imágenes sino lo que ellas simbolizaban como estandartes descentralizadores en intereses de tipo feudal, los mismos que impulsaban la fragmentación en Occidente, frente a la unificación en la sola imagen del emperador, que intentaba llevar las riendas de Bizancio.

Uno tras otro, los nuevos reinos fueron adoptando el bautismo como una forma de “pertenecer” al mundo que se iba gestando. El bautismo de Oriente en el área de poder bizantina o el bautismo de Occidente en el área…. Faltaba un brazo armado en Occidente. Los francos estaban suficientemente cerca y suficientemente lejos para que el papa, sin tropas y sin reino, pero con fieles y con tierras, otorgase el derecho real a un mayordomo y luego el derecho imperial a un rey.

Cuestionar el cristianismo era cuestionar los poderes establecidos. Cuando la marea humana de los siglos III al IX comenzó a estar en calma, cuando sólo en el norte los vikingos noruegos, los daneses, los suecos varegos entre Novgorod y Kiev, buscaban su lugar de pertenencia en el nuevo mundo, hubo otra vez lugar para el renacimiento de la ciencia en Occidente. Magro renacimiento, poco más que utilitario, mientras que en Bagdad y Córdoba, los abasíes y omeyas conformaban centros de cultura donde en especial las matemáticas se desarrollaban y la química comenzaba a nacer. Mientras en el mundo árabe había mayor libertad de pensamiento, mayor tolerancia confesional, en el mundo europeo, tanto occidental como oriental, ninguna especulación de las ideas podía cuestionar las bases del cristianismo sin cuestionar a la vez el poder establecido.

A partir de disquisiciones teológicas acerca de la creación del hombre y su relación con el mundo, la naturaleza comenzó a ser motivo de debate filosófico. Lentamente fue ganando espacio la discusión pura sobre el cambio, el movimiento, el centro del universo, que se trasladó de la Tierra al Sol, y luego a ninguna parte o a todas partes, según se entienda la existencia de sistemas inerciales y el principio de relatividad.

El resto es un poco más conocido. La ruptura en parte política, en parte económica, si acaso son separables, que condujo al mundo de la Ilustración a través de la Baja Edad Media y el Renacimiento, transfirió el impulso del inquirir científico del ámbito mediterráneo al marco nórdico continental. ¿Puede ser casual que el último emperador coronado en Roma haya sido Federico III de Alemania en 1452, un año antes de la caída de Constantinopla en manos turcas, veinte años antes de que Copérnico llevase el centro del universo al Sol, cuarenta años antes del encuentro con la barrera americana en el camino a Oriente, cincuenta años antes de Leonardo, cien años antes del Imperio donde no se ponía el Sol, de Lutero y de Carlos V(I), dos siglos antes de Galileo y Newton? Poco a poco el orden natural en un universo estático habría ido cediendo ante el empuje del norte contra los relictos de la antigua Roma. Y el duelo de los imperios en la Edad Contemporánea fue en parte de la mano con la tecnología hasta el paroxismo de la Guerra Fría, cada vez más despojados del corsé místico.

A manera de síntesis: el modo de inquirir acerca de la naturaleza, la argumentación lógica, el rigor de la geometría, junto con la resolución de una antigua crisis griega; luego el álgebra, la alquimia en pendiente hacia la química, la apertura de los nuevos ocupantes hacia las culturas milenarias; y por fin la componente mística asociada a lo romano que se resistía a ceder las últimas cuotas de poder remanente, en un lento brote con desarrollo secular desde un tronco filosofal hacia las distintas ciencias. Entre ellas, en el marco del continuo, desde una física del reposo en el orden natural en un espacio y tiempo absolutos, la "revolución copernicana", expresada por fin en el principio de relatividad de Galileo en términos de sistemas de coordenadas, decantó hacia las transformaciones de Lorentz-Einstein hasta la concepción del espacio y el tiempo flexibles en la relatividad general.

Desde un punto de vista neurológico, parece que nuestro cerebro está más adaptado a identificar cambios, ritmos, perspectivas y orientaciones que espacio y tiempo propiamente dichos en un sentido absoluto. Podemos decir, junto con Hofstadter[p.189], que nuestro cerebro está equipado con las herramientas para decodificar un mensaje común a todos los humanos en relación con nuestra ubicación y perspectiva en el espacio, el tiempo y el movimiento. Las percepciones primarias involucran movimientos y, a partir de ellas, las representaciones de espacio y tiempo. Desde la perspectiva de la construcción de estas nociones primarias, es el aspecto relacional en términos de una organización progresiva en una disposición de objetos y seriación de acontecimientos. Esta organización abstracta puesta en un lenguaje y una representación lo que nos permite comunicarnos y expresar ideas en un marco espacio temporal.

A pesar de que la mecánica newtoniana se configura originariamente en un espacio y tiempo absoluto, el replanteo de los Principios conduce a la equivalencia formal de todos los sistemas de coordenadas. Expresados en términos de simetrías, la igualdad de derechos en la descripción del mundo natural nos lleva a mantener vigentes algunos absolutos, como la energía, el impulso o la velocidad de la luz en el vacío.

Entre esos absolutos está la explicación racional de los fenómenos naturales a modo de un lenguaje común entre los humanos. ¿Algún atisbo histórico en la igualdad -entre todos los sistemas de coordenadas-, libertad -de elección del sistema de referencia más apropiado- y fraternidad –entre los que compartimos el mismo lenguaje, de lo que alguna vez se habló allí donde hoy está la Oficina Internacional de Pesas y Medidas?

Se ha intentado acompañar la discusión histórica con el encadenamiento de algunas nociones en física clásica determinista en el continuo del espacio y el tiempo. Sin descuidar el formalismo, se puso énfasis en la discusión conceptual de las ideas. Se ha intentado que ciertas definiciones abstractas, como el producto vectorial o escalar, resulten naturales en la interpretación de los fenómenos físicos. Cada uno de ellos requiere un tratamiento formal en textos apropiados y sólo se ha pretendido una discusión conceptual en el marco de la física.

La secuencia de situaciones problemáticas propuestas se mantuvo dentro del marco de lo que típicamente se halla en libros de texto, preferentemente planteos simples que permitan concentrarse en una discusión conceptual más profunda, y destacar el aspecto integrador de soluciones a problemas sencillos en casos más complejos. Finalmente se intentó, en especial en dinámica, salir del marco limitante de las fuerzas constantes para introducir naturalmente el planteo de ecuaciones diferenciales. En los problemas relativos a la conservación de la energía, se procuró ver dónde se la vuelve a encontrar en procesos no conservativos, como el choque plástico, los planteos con masa variable, las rotaciones y las “fuerzas virtuales”, que merecen un análisis más detallado.

Nos hemos detenido más en las nociones más primarias y antiguas, por lo tanto más arraigadas de espacio, tiempo y relatividad. Un poco menos en las de velocidad y aceleración, muy poco en los conceptos de fuerza, momento, masa, energía, impulso y centro de masa. Apenas fueron mencionados la acción y el campo. Nada en el problema de la causalidad, su relación con la inducción y con el planteo experimental como validación o modo de rebatir la validez de una teoría. Nada sobre la entropía y otras cuestiones que exceden el marco propuesto.

El problema de la relatividad, pariente cercano del problema de la conservación, se hunde en las raíces griegas del platonismo y la concepción aristotélica, en el viejo planteo del cambio y la permanencia, el finalismo y el libre albedrío, lo absoluto y lo relacional, quizá en los ideales más nobles de la humanidad. Del estado natural de reposo con la Tierra como centro a la relatividad como expresión formal y conceptual de la revolución copernicana llevada al extremo. De los absolutos en el espacio y el tiempo, por lo tanto del movimiento absoluto, a la velocidad de la luz, apenas un parámetro de escala, y otros pocos “absolutos” resultantes de la aplicación del teorema de Noether a los lagrangianos, como expresión abstracta de los sistemas mecánicos. En la actualidad se expresa como simetrías “gauge” en el ámbito de la física de partículas elementales, a la que el planteo del “hamiltoniano” resulta más acorde. El “método del grupo de renormalización” como un modo de ajustar amplios rangos de escalas de variabilidad. Pero el viejo problema sigue vigente.

Con la esperanza de haber contribuido a sintetizar en aspectos formales y conceptuales los principios básicos de la mecánica elemental de la partícula, desde la noción misma de medida y de partícula hasta los primeros pasos en la mecánica teórica en el formalismo lagrangiano; propuesto una reflexión sobre las relaciones entre la ciencia, la política, la mística y la historia; introducido los aspectos formales de la mecánica relativista especial y una breve incursión en la general como extensión natural de la mecánica clásica, sin renunciar aún al continuo, al determinismo ni a la causalidad; Eso es otra historia.

Tratemos de dar indirectamente una respuesta a la pregunta que nos dejara Einstein en 1916 y que enunciamos en el prólogo: "*¿Cuál es la razón de ese privilegio?*"

No acerca de cuál es la razón sino sobre quién puede darla. En una teocracia, esa razón la puede dar el sumo sacerdote en el nombre del demiurgo supremo creador; en una monarquía o imperio, el rey o el emperador; en una oligarquía, unos pocos iluminados; en una aristocracia, unos pocos ungidos; en una plutocracia, quien pueda comprar el sistema de coordenadas universal pero en una democracia, una república o una anarquía: todos y nadie.

Quizá el principio de relatividad fue la manzana histórica que cayó en el momento preciso en la cabeza histórica de Einstein.

Bibliografía

-Boido G Noticias del Planeta Tierra. Galileo Galilei y la Revolución Científica. Buenos Aires, A-Z Editora, 1998 3ª ed.
-Cahen C El Islam I. Desde los orígenes hasta el comienzo del Imperio Otomano 9ª ed. Historia Universal Siglo XXI Vol 14 México, Siglo Veintiuno Editores, 1985.
-Coren S Lawrence MW James TE Sensación y Percepción 5ª ed. México, McGraw-Hill Interamericana, 2000.
-Derry TK Williams TI Historia de la Tecnología. Vol 1. Desde la Antigüedad hasta 1750. Madrid, Siglo XXI de España Editores, 2004 6ª ed.
-Doehaerd R Occidente durante la Alta Edad Media. Economías y Sociedades. Nueva Clío Vol 14. Barcelona, Labor, 1984.
-Dhondt J La Alta Edad Media Historia Universal Siglo XXI Vol. 10 14ª ed. México, Siglo Veintiuno Editores, 1984.
-Duby G Barthelémy D La Ronciére Ch de Historia de la Vida Privada. Vol. 3 Poder privado y poder público en la Europa Feudal. Cap. 2 Cuadros. Madrir, Taurus, 1991.
-Einstein A Sobre la Electrodinámica de Cuerpos en Movimiento. En “Albert Einstein a cien años de sus trabajos más importantes y a ochenta de su visita a la Argentina” Buenos Aires, Weissmann MD y Baran EJ (Editores) Academia Nacional de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales (ANCEFN), serie Publicaciones Científicas Nº 4 (2005). Traducción del original en Annalen der Physik 17, pp.891-921, 1905.
-Einstein A. Sobre la Teoría de la Relatividad Especial y General. Madrid, Debate, 1998.
-Embree AT Wilhelm F India. Historia del Subcontinente desde las Culturas del indo hasta el Comienzo del Dominio Inglés. Historia Universal Siglo XXI Vol. 17 6ª ed. México, Siglo Veintiuno Editores, 1987.
-Finley MI Los Imperios del Antiguo Oriente III La Primera Mitad del Primer Milenio Cap. 7 Los Griegos. Historia Universal Siglo XXI. Vol. 4. 12ª ed. México, Siglo Veinituno Editores, 1983.
-Gréco Pierre Estudio genético de un sistema de representaciones por imágenes concernientes a un grupo de tansformaciones espaciales En Piaget, Jean y colaboradores La epistemología del espacio Buenos Aires, El Ateneo, 1971.
-Hawking S. A hombros de gigantes. Barcelona, Crítica, 2010, pp. 651-660.
-Hofstadter DR Gödel, Escher, Bach. Un Eterno y Gracil Bucle. Buenos Aires, Tusquets Editores, 2011.
-Landau LD Lifshitz EM Mecánica Volumen 1 del Curso de Física Teórica. Barcelona, Reverté, 1975.
-Le Goff J El Cristianismo Medieval en Occidente desde el Concilio de Nicea (325) hasta la Reforma (principios del siglo XVI) En: Puech HC (Dir.) Historia de las Religiones. Vol. 7 Las Religiones Constituidas en Ocidente y sus Contracorrientes I. México, Siglo Veintiuno Editores, 1990.
-Lewis GN Tolman RC The Principle of Relativity, and Non-Newtonian Mechanics. Research Laboratory of Physical Chemistry of the Massachusets Institute of Technology. Nº 42. 18. 1909.
-Maier FG Las Transformaciones del Mundo Mediterráneo. Siglos III-VIII. Historia Universal Siglo XXI. Vol. 9. 9ª ed. México, Siglo Veinituno Editores, 1984.

-Maier FG Bizancio. Historia Universal Siglo XXI. Vol. 13. 8ª ed. México, Siglo Veinituno Editores, 1986.
-Manfredi VM La Última Legión. Buenos Aires, Sudamericana, 2012.
-Moledo L Olszevicki N Historia de las Ideas Científicas de Tales de Mileto a la Máquina de Dios. Buenos Aires, Planeta, 2014.
-Musset L. Las Invasiones. El Segundo Asalto Contra la Europa Cristiana (Siglos VII-XI) Nueva Clío Vol. 14bis. Barcelona, Labor, 1982.
-Paul J La Iglesia y la Cultura en Occidente (Siglos IX-XII) 1/La Santificación del Orden Temporal y Espiritual Nueva Clío Vol. 15. Barcelona, Labor, 1988.
-Paul J La Iglesia y la Cultura en Occidente (Siglos IX-XII) 2/El Despertar Evangélico y las Mentalidades Religiosas Nueva Clío Vol. 15bis. Barcelona, Labor, 1988.
-Piaget Jean El desarrollo de la noción de tiempo en el niño. México, Fondo de Cultura Económica, 1978 (le développement de la notion de temps chez l'enfant París, Presses universitaires de france, 1946)
-Roederer JG Mecánica Elemental. Buenos Aires, Eudeba, 1975 (5ª ed.)
-Russell B Conocimiento del Mundo Exterior. Buenos Aires, Los Libros del Mirasol, 1964.
-Sambursky S El Mundo Físico a Finales de la Antigüedad. Madrid, Alianza Editorial, 2009.
-Tatakis B La Filosofía Griega Patrística y Bizantina En: Parain B (Dir.) Historia de la Filosofía Vol. 3 Del Mundo Romano al Islam Medieval. Madrid, Siglo Veintiuno de España Editores, 1990.
-van Fraasen BC Introducción a la Filosofía del Tiempo y del Espacio. Barcelona, Labor, 1978.
-Vernant JP Los orígenes del pensamiento griego. Buenos Aires, 2008 (1962), Paidós.
-Vucetich H Introducción a la Mecánica Analítica. Buenos Aires, Eudeba, 2008.

Bibliografía complementaria

-Corbin H Yahia O Nasr SH La Filosofía Islámica desde sus Orígenes hasta la Muerte de Averroes En Historia de la Filosofía. Del Mundo Romano al Islam Medieval. Vol. 3 Siglo Veintiuno Editores, 1990.
-Descartes R El Mundo o el Tratado de la Luz. Madrid, Alianza Universidad, 1991.
-Einstein A Sobre la Influencia de la Gravitación en la Propagación de la Luz (1911) en Hawking S. A hombros de gigantes. Barcelona, Crítica, 2010, pp. 1055-1062.
-Feynman RP Leighton RB Sands M Física. Volumen 1: Mecánica, Radiación y Calor. Wilmington, Addison-Wesley Iberoamericana, 1987.
-Goldstein H Mecánica Clásica. Barcelona, Reverté, 1987.
-Grosseteste R Suma de los Ocho Libros de la Física de Aristóteles. Buenos Aires, Eudeba, 1972.
-Illana JI Descubre la Relatividad Departamento de Física Teórica y del Cosmos. Universidad de Granada. 2017.
-Janssen B Teoría de la Relatividad General Universidad de Granada. 2013.
-Kienitz FK Los Imperios del Antiguo Oriente III La Primera Mitad del Primer Milenio Cap. 6 El Renacimiento Saíta. Historia Universal Siglo XXI. Vol. 4. 12ª ed. México, Siglo Veinituno Editores, 1983.

-Kuhn TS La Estructura de las Revoluciones Científicas. México, Fondo de Cultura Económica, 1971.
-Labat R Los Imperios del Antiguo Oriente III La Primera Mitad del Primer Milenio Cap. 1 Asiria y los Países Vecinos (Babilonia, Elam, Irán) desde al 1000 hasta el 617 a.C. Historia Universal Siglo XXI. Vol. 4. 12ª ed. México, Siglo Veinituno Editores, 1983.
-Michel A La Filosofía en Grecia y Roma desde al 130 a. de C. hasta el 250 d. de C. En Historia de la Filosofía. Del Mundo Romano al Islam Medieval. Vol. 3 Siglo Veintiuno Editores, 1990.
-Neher A La Filosofía Judía Medieval En Historia de la Filosofía. Del Mundo Romano al Islam Medieval. Vol. 3 Siglo Veintiuno Editores, 1990.
-Palacios J Relatividad. Una Nueva Teoría. Madrid, Espasa-Calpe, 1960.
-Parain B Historia de la Filosofía. Vol. II La Filosofía Griega. Madrid, Siglo XXI, 1992 17ª ed.
-Parain B Historia de la Filosofía. Vol. III Del Mundo Romano al Islam Medieval. Madrid, Siglo XXI, 1990 9ª ed.
-Penrose R El Camino a la Realidad. Una Guía Completa de las Leyes del Universo. México, Debate, 2007.
-Piaget Jean y colaboradores La dirección de los móviles. Buenos Aires, Troquel, 1974
-Sánchez Albornoz C Orígenes de la Nación Española. El Reino de Asturias (Selección). Madrid, Sarpe, 1985.
-Schrödinger E La Naturaleza y los Griegos. Barcelona, Tusquets Editores, 1997.
-Serway RA Jewett JW Física para Ciencias e Ingeniería Volumen 1. 7ª ed. México, Cengage Learning, 2008.
-t'Hooft G Teorías Gauge de las Fuerzas entre Partículas Elementales. Grandes Ideas de la Física. Investigación y Ciencia. Número especial 20° Aniversario. Pp.40-59
-Trouillard J El Neoplatonismo En Historia de la Filosofía. Del Mundo Romano al Islam Medieval. Vol. 3 Siglo Veintiuno Editores, 1990.
-Weisheipl JA La Teoría Física en la Edad Media. Buenos Aires, Nuevos Esquemas, 1967.
-Wilson J El Grupo de Renormalización Grandes Ideas de la Física. Investigación y Ciencia. Número especial 20° Aniversario. Pp.6-25

Páginas web

-Australian National University. Research School of Physics & Engineering.
https://physics.anu.edu.au/
http://people.physics.anu.edu.au/~cms130/TEE/

Darío Huggenberger

Licenciado en Ciencias de la Atmósfera y Profesor de Física. Docente en la Facultad Regional Delta desde 1994, actualmente en Estadística, Métodos Numéricos y Acústica.

Con dedicación exclusiva desde 2006 y actividades de investigación en meteorología, redes neuronales y desde 2012 en acústica.

edUTecNe

[UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA NACIONAL]

FRD

[FACULTAD REGIONAL DELTA]