7 Perfectos, amigos y sociables

Jorge Claudio Joffrés: Lisa Marisel Joffrés

Resumen: Desde la antigua Grecia y hasta la actualidad, los matemáticos y los amantes de los números en general, los han clasificados de muy distintas formas. Una de las mas extrañas fue la de denominarlos números perfectos, números amigos y números sociables. En este trabajo se presentan estos tipos de números a partir de su definición, se hace un recorrido a través del tiempo para conocer como se han ido calculando y las dificultades por las cuales han debido atravesar los matemáticos para ello, se analiza la vinculación con el mas conocido conjuntos de los números primos, se enuncian sus propiedades y se dejan planteados los interrogantes que aún hoy, siglos después de ser definidos, perduran sobre ellos. Durante siglos y siglos estos conjuntos numéricos sólo han sido una mera curiosidad y la obtención de más y mayores números eran únicamente una especie de deleite intelectual para los matemáticos ya que no tenían absolutamente ninguna aplicación práctica. Sin embargo, el advenimiento de nuevas y poderosas tecnologías permitió, a fines del siglo pasado, el comenzar a utilizar estos números en la vida real y hoy son parte integrante de sistemas de encriptamiento utilizados por gobiernos del mundo entero, distintos ejércitos, grandes corporaciones y cualquier ente que necesite transmitir información confidencial. Esto es lo que se presenta en la parte final del trabajo y permite concluir que años y años de esfuerzos por calcular gigantescos números aparentemente inútiles tuvo finalmente su recompensa..

Palabras claves: perfectos, primos, amigos, sociables

Los antiguos griegos sentían una fascinación especial por los números, los amaban, los reverenciaban y procuraban establecer entre ellos las relaciones más insólitas. Así fue como comenzaron a vincular cada número con sus divisores y se encontraron con tres situaciones distintas. Números como el 8, cuyos divisores menores que él (1, 2 y 4) al ser sumados daban por resultado 7 menor que el número original. A este tipo los denominaron "números defectuosos". En cambio los divisores de 12 (1, 2, 3, 4 y

6) sumaban 16, mayor que el número original y fueron denominados “números abundantes”.
Lo que realmente los sorprendió fue lo que sucedía con el número 6. Sus divisores, menores que él, eran 1, 2 y 3 y su suma era exactamente 6. Esta particularidad los llevó a denominarlos **“números perfectos”**. El siguiente que encontraron fue el 28 y enseguida vincularon estos números a cuestiones religiosas y de la naturaleza. En efecto, Dios había creado al mundo en 6 días y el ciclo lunar era de 28 días. La vinculación entre el primer número perfecto y la religiosidad perduró durante muchos siglos. En el siglo I San Agustín, un estudioso de la teología, sostuvo que Dios podría haber creado el mundo en un instante, pero prefirió hacerlo en 6 días porque la perfección del número 6 significaba la perfección del Universo.

El tercer número perfecto que se conoció fue el 496 y años después salió a la luz el 8128. Euclides dio una muy ingeniosa demostración de que la fórmula $\mathbf{2^{n-1}(2^n-1)}$ genera siempre un número perfecto si la expresión entre paréntesis resulta ser un número primo. Los números primos de la forma $\mathbf{2^n-1}$ se denominan primos de Mersenne en homenaje al matemático y monje francés que los estudió durante el siglo XVII. El gran matemático suizo Leonhard Euler (1707-1783) demostró que la fórmula planteada por Euclides genera **todos** los números perfecto pares.

Lo notable de esta fórmula es que establece una vinculación directa entre los números perfectos y los primos de Mersenne y a partir de allí el problema se redujo a encontrar primos de esa característica. Es importante destacar que para que la expresión $\mathbf{2^n-1}$ sea un número primo es necesario, pero no suficiente, que el exponente **n** sea, a su vez, un número primo. Durante muchos años los matemáticos pensaron que este procedimiento generaría infinitos primos de Mersenne. Recién en 1953 y ya con ayuda de un ordenador, se demostró que $\mathbf{2^{8191}-1}$ no era primo, lo cual echó por tierra la suposición anterior. Todavía no se ha logrado determinar si existen o no infinitos primos de Mersenne.

Después de conocidos los cuatro primeros números perfectos debieron pasar varios siglos hasta que se encontró el quinto. Se desconoce quien pudo hallarlo. En 1588 el matemático italiano

Pietro Cataldi (1548-1626) encontró los números perfectos sexto y séptimo correspondientes a n = 17 y n= 19 de los primos de Mersenne. Luego, en 1772, Euler encuentra el siguiente número perfecto correspondiente a n = 31. El mismo tiene 19 dígitos y es 2 305 843 008 139 952 128. Durante mas de cien años fue el mas grande conocido. En 1811 el matemático Peter Barlow en su libro *"Theory of numbers"* expresó que el número perfecto hallado por Euler *"…será el mas grande encontrado, ya que al ser simples curiosidades sin ninguna utilidad práctica nadie se preocupará por encontrar uno mayor. "*

Sin embargo se equivocó y por partida doble. Siguieron calculándose números perfectos y se les encontró una gran utilidad, por esos años absolutamente insospechada.

El ruso Pervushin halló el correspondiente a n = 61 y ya en el siglo XX, el inglés Powers presentó los generados por n = 89 y n = 107 y posteriormente el francés Edwards Lucas anunció el que se pudo obtener de n = 127 que tenía 77 dígitos y que fue el mayor que pudo obtenerse sin ayuda de las computadoras.

A partir de allí, con la nueva tecnología disponible, el proceso de hallar números perfectos se aceleró y todos los nuevos fueron hallados a partir de 1951, hasta llegar a la actualidad donde se han logrado encontrar 47 siendo el mayor de todos ellos el obtenido a partir del primo de Mersenne correspondiente a n = 43 112 609. Este número gigantesco consta de 25 956 377 dígitos y fue calculado en el año 2008.

La obtención de números perfectos es una consecuencia de la obtención de primos de Mersenne y a estos números es a los que han apuntado siempre los matemáticos. Se han ofrecido premios, en dinero en efectivo, para quien obtuviera números primos de determinados dígitos.

El record pasó el millón de dígitos en 1999, ganando un premio de $50,000. En 2008 el record pasó los 10 millones de dígitos, siendo premiado con $100,000. Otros premios son ofrecidos por el primer número primo encontrado que tenga al menos cien millones de dígitos y también el primero que tenga mil millones de dígitos. Por supuesto, cada nuevo primo que se obtenga permitirá un nuevo número perfecto.

El conjunto de los números perfectos está lleno de propiedades extrañas y de preguntas sin respuestas.

Todos los números perfectos son triangulares. Esto significa que si se posee un número perfecto de granos siempre pueden ser agrupados en forma de triángulo equilátero, como los bolos del juego de bowling o como las bolas de billar en el juego llamado pool. Dicho en forma matemática, los perfectos son una suma parcial de la serie

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + \ldots\ldots$$

También se puede demostrar que todo número perfecto, excepto el 6, es una suma parcial de la serie de cubos consecutivos $1^3 + 3^3 + 5^3 + 7^3 + \ldots\ldots$

Todos los números perfectos, también a excepción del 6 tienen raíz digital igual a 1.

La suma de los recíprocos de todos los divisores de un número perfecto, incluyéndolo a él, es igual a 2. Por ejemplo, en el caso del 28

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{7}+\frac{1}{14}+\frac{1}{28}=2$$

También es válida la propiedad recíproca: si los recíprocos de los divisores de un número **n** suman 2, entonces **n** es un número perfecto

Todo número perfecto, expresado en sistema binario esta formado por **n** unos seguidos de **n – 1** ceros. Así, por ejemplo, 496 escrito en binario es 111110000.

La cifra final de todo número perfecto es 6 u 8. Si termina en 8, la cifra precedente es un 2 y si termina en 6, excepto el 496, la cifra anterior es 1, 3, 5 o 7.

Si en la fórmula utilizada para obtener los números perfectos: $\mathbf{2^{n-1}(2^n - 1)}$ el exponente del primer factor, es decir, **n – 1** es múltiplo de 4, el número perfecto termina en 6, en caso contrario finaliza en 28. La única excepción es el número 6.

Después de tantos siglos de conocidos y de tantos y tantos matemáticos que se dedicaron a su estudio, aún subsisten dos grandes interrogantes: ¿existen infinitos números perfectos? ¿Existe algún número perfecto impar? Nadie ha podido contestar todavía ninguna de estas dos preguntas, ni por la afirmativa, ni por la negativa.

Los pitagóricos también definieron los llamados **números amigos.** Lo hicieron casi al mismo tiempo que los números perfectos y basándose en el mismo criterio. Si se tienen dos números y la suma de los divisores del primero, menores que él, da por resultado el segundo y viceversa, ese par de números se denominan “amigos”. Los más pequeños de tales números son el 220 y el 284. Los divisores de 220 son: 110, 55, 44, 22, 20, 11, 10, 5, 4, 2 y 1. Su suma es 284. Por otra parte, los divisores de 284 son: 142, 71, 4, 2 y 1 cuya suma resulta ser 220.

Los griegos que se reunían en la llamada “hermandad pitagórica” consideraban a este par de números símbolos de la amistad y solían usar medallones donde aparecían grabados ambos números.

Alrededor del año 850, el matemático árabe Tabit ibn Qurra (826-901) descubrió una fórmula general para la cual se podían hallar números amigos: si

$$p = 3 \times 2^{n-1} - 1$$
$$q = 3 \times 2^{n} - 1$$
$$r = 9 \times 2^{2n-1} - 1$$

donde $n > 1$ es entero y p, q, y r son números primos, entonces: $2^n pq$ y $2^n r$ son un par de números amigos. Durante muchos siglos, la pareja 220 y 284 fueron los únicos amigos conocidos, hasta que en 1636 Fermat descubrió que 17.296 y 18.416 también lo son. En 1638 Descartes, colega y competidor de Fermat, encontró la tercera pareja: 9.363.584 y 9.437.056. Tanto Pierre de Fermat como René Descartes redescubrieron, independientemente uno del otro, una regla para construir algunos pares de números amigos. Era la misma que siglos antes había enunciado el matemático árabe. Luego, Euler en el siglo XVIII presentó una lista de 64 pares de amigos, aunque posteriormente se demostró que dos de esos pares en realidad no lo eran. Adrien Legrende (1752-1833), unos de los grandes matemáticos franceses, agregó en 1830 un par más.

En 1867. Nicolo Paganini, un estudiante de tan solo 16 años dejó asombrado al mundo matemático. Demostró que el par 1.184 y 1.210 eran números amigos. Por orden creciente era el segundo par y se les había pasado por alto a todos los matemáticos.

Para el 2007 se conocen más de mil pares de números amigos, y el mayor de ellos está formado por dos números de ciento cincuenta y dos dígitos. Los números amigos poseen una particularidad: todos los pares de números amigos tienen en sus dos términos igual paridad, es decir, ambos son pares o los dos son impares. Éste último, los dos impares, es bastante raro y son muy pocos los conocidos. No se ha demostrado todavía que sean imposibles los amigos de distinta paridad. Todos los pares de amigos impares descubiertos son múltiplos de 3. Se ha conjeturado que así sucede con todos los impares. No se conoce ninguna fórmula para generar todos los pares de números amigos y se desconoce además si su número es finito o infinito.

Una generalización del concepto utilizado para definir los números amigos, permite obtener otro conjunto de números sumamente extraños y muy poco conocidos: los denominados **números sociables.** Se denomina así a un conjunto de números en los cuales, la suma de los divisores del primero permite obtener el segundo, la del segundo el tercero y así sucesivamente hasta volver al primer número. Se dice que forman una “cadena” y que cada número es un “eslabón”.

Hasta el año 1969 sólo se conocían dos grupos de números sociables. Ambos fueron presentados en el año 1918 por el matemático francés P. Poulet. El primero es una cadena de 5 eslabones, también llamada “sociables de orden 5”, y está formada por los números 12.496, 14.288, 15472, 14.536 y 14.264. La segunda es una cadena de nada más ni nada menos que ¡28 eslabones! y comienza con 14.316. Sigue siendo la mas larga conocida.

A partir de 1969 y con ayuda de las computadoras comenzaron a encontrarse más conjuntos de números sociables, fundamentalmente de orden 4. Se han determinado trece cadenas de este tipo. La que comienza con el número mas pequeño, lo hace con 1.264.460 y la mayor con 498.215.416

Uno de los problemas planteados en torno a este tipo de números es saber si existe alguna cadena de 3 eslabones a la que se ha asignado el nombre de “multitud”. Se han analizado, con ordenadores, todos los números menores de 6.600.000.000 y no se ha logrado encontrar ninguna. Nadie ha podido demostrar que existan o que no, pero, la búsqueda continúa.
Durante muchos siglos los matemáticos siguieron calculando números primos, perfectos y amigos, y éstos, solo seguían siendo una mera curiosidad sin ninguna aplicación práctica. Parecía que la palabras pronunciadas por Barlow en 1811 eran una realidad, más allá del afán de los matemáticos por seguir obteniendo números cada vez más grandes y deleitándose con la simple contemplación de los mismos.

Pero, ya casi terminando el siglo XX todo cambió radicalmente. Los gobiernos del mundo entero, los ejércitos , las grandes corporaciones y hasta los particulares necesitaban, cada vez mas, transmitir información reservada y confidencial y para ello se valían de distintos tipos de códigos, que mas tarde o mas temprano terminaban siendo descubiertos y el proceso debía comenzar de nuevo. La encriptación de la información era vital en muchos y variados aspectos. Los criptógrafos generaban nuevas claves y métodos de encriptamiento y los criptoanalistas eran los encargados de descifrarlos.

Con las cada vez mas poderosas computadoras al alcance de la mano, los métodos para generar claves indescifrables comenzaron a ser cada vez mas seguros y fueron los matemáticos los que finalmente llegaron al mejor sistema de encriptamiento jamás utilizado. Para ello comenzaron a generar claves utilizando los gigantescos números primos, los aún más gigantescos números perfectos y hasta los mas grandes números amigos conocidos.

En el año 1977 en la revista *Scientific Americany* y con el título “Un nuevo tipo de cifrado que costaría millones de años descifrar” el conocido divulgador científico Martín Gardner presenta un problema de claves públicas que termina siendo expresado a través de un número de ¡127! dígitos. Para el descifrado era necesario factorizar el número como producto de dos primos. Recién 17 años mas tarde se recibió la respuesta correcta, constaba del producto de dos primos, uno de ellos de 65 dígitos y el otro de 64.

Este método de encriptación fue desarrollado por los matemáticos e informáticos del MIT, Ron Rivers, Adi Shamir y Len Adelman y es conocido como Algoritmo RSA. Actualmente los números primos y perfectos utilizados en el encriptado de los mensajes de mayor confidencialidad superan los 200 dígitos y todavía los criptoanalistas no han encontrado la forma de descifrarlo ni siquiera con ayuda de las potentes computadoras.

Una vez mas se hace realidad la frase pronunciada por el gran matemático ruso Nikolai Lobachevsky “No hay rama de la matemática, por abstracta que sea, que más tarde o más temprano no tenga aplicación en la vida real”.

Bibliografía

Gardner, M. (1978). *Festival mágico-matemático* (6ª ed). Madrid, España: Alianza.

Gómez, J. (2011). *Matemáticos, espías y piratas informáticos.* España: RBA.

Garfunkel, S. (1998). *Las matemáticas en la vida cotidiana*. Madrid. España: Addison-Wesley.

***