10 La Didáctica de la Matemática como disciplina experimental: el caso de las inecuaciones

Ana María Narváez, Marcela Rodríguez, Clarisa N. Berman

Resumen: Las investigaciones que venimos realizando en el tema Límite Funcional desde la teoría APOE, en algunos de nuestros cursos de primer año de la Facultad Regional Mendoza de la UTN, permitieron obtener entre otras conclusiones, la necesidad de lograr mejorar la enseñanza y aprendizaje de temas previos al límite como es el caso de las inecuaciones. Debido a esta conclusión se propone el presente trabajo, siendo el objetivo del mismo elaborar un conjunto de actividades basadas en una metodología que sustente una mejor enseñanza y como consecuencia, un mejor aprendizaje de inecuaciones. Como es bien conocido, el estudio de inecuaciones implica varias nociones que deben encadenarse coherentemente, tales como la estructura de orden en el conjunto de números reales, funciones, análisis de gráficos de funciones, operaciones lógicas de implicación y equivalencia, entre otros, que por lo observado ha tenido una comprensión limitada por parte de los actores de la comunidad universitaria. La Teoría APOE mencionada previamente es el marco teórico utilizado en esta investigación. Por otra parte, se destaca que este contenido disciplinar es una fuente casi inagotable de cambios entre registros de representación semiótica, lo que es aprovechado en el proceso de enseñanza. Se presentan actividades que permiten a los estudiantes universitarios realizar un conjunto de construcciones mentales a fin de que entiendan el concepto en cuestión. La metodología utilizada en esta investigación del área de la Didáctica de la Matemática concebida como disciplina experimental, es la Ingeniería Didáctica que nos permitirá ir haciendo los ajustes necesarios para lograr un material didáctico de calidad. Una de las conclusiones más importantes en esta etapa, se refiere a la necesidad de realizar análisis didácticos permanentes para optimizar la calidad de los aprendizajes matemáticos en las carreras de Ingeniería.

Palabras Clave: inecuaciones en reales, teoría APOE

Introducción

La enseñanza universitaria de Matemáticas en carreras de Ingeniería, viene discutiéndose desde hace varios años no sólo

en el país sino que existe un movimiento que tiene como finalidad el mejoramiento de la enseñanza y aprendizaje de la Matemática. Los estudios psicológicos de Piaget (1972), Vergnaud (1982) y Dubinsky (1996), entre otros, han contribuido científicamente en tales discusiones. En particular, para el tema de inecuaciones es de destacar el trabajo de Alvarenga (2003).
El propósito del presente trabajo es entender la problemática que presentan los estudiantes de primer año de la Facultad Regional Mendoza de la Universidad Tecnológica Nacional en este tema, para diseñar un material didáctico que les permita superar obstáculos cognitivos (en el sentido de Verignon).

Antecedentes

En el trabajo de investigación en Matemática Educativa que se viene realizando en la Facultad Regional Mendoza de la UTN respecto de la enseñanza y aprendizaje de la noción de límite (2009, 2010 y 2011) para los cursos de primer año, se obtuvieron las siguientes conclusiones:

- ✓ Los alumnos conocen las técnicas de cálculo para límite funcional pero no logran darle significado, más aún no logran interpretarlo.
- ✓ Los alumnos ingresantes no están habituados a participar activamente en sus aprendizajes, y difícilmente pueden realizar análisis críticos de los resultados que obtienen.
- ✓ Los docentes no utilizan generalmente situaciones didácticas que permitan una mayor participación del estudiante, lo que puede revertirse haciendo uso de las herramientas que brinda la Didáctica de la Matemática universitaria y las Teorías Cognitivas.

En otras palabras, se puede decir que en esta etapa se concluyó que los estudiantes no habían alcanzado un nivel *objeto* según la teoría APOE del concepto límite funcional y parte de la dificultad de la comprensión del mismo estaba relacionada con el hecho de no haber alcanzado un nivel *esquema* de conceptos previos como inecuaciones y funciones reales. Si bien estos conceptos se desarrollaron en el aula, se había seguido lo que se conoce como metodología “tradicional” en el sentido de Alvarenga. Entiéndase por *enseñanza tradicional a un sistema pedagógico que no se fundamenta en una investigación científica en educación* *matemática y que, en general, no ha logrado avances en el aprendizaje de los conceptos matemáticos* (Alvarenga, 2003, p.2).

Objetivo

Por lo expuesto precedentemente, en este trabajo se pretende lograr que los estudiantes alcancen el nivel cognitivo *esquema* según la teoría APOE en el tema "inecuaciones en reales".

La Teoría APOE

Para lograr el objetivo, el marco teórico privilegiado en esta investigación-acción es la Teoría APOE (*Acción, Proceso, Objeto, Esquema*) o en inglés APOS (*Action-Process-Objet-Schema*) que permite modelar la construcción mental matemática, se debe a Ed Dubinsky (RUMEC, Research in Undergraduate Mathematics Education Community), quien a partir del constructivismo de Piaget intenta explicar la forma en la que se construyen o se aprenden conceptos matemáticos.

El principio de aprendizaje en esta teoría es que un individuo no aprende los conceptos matemáticos directamente; si tiene las estructuras apropiadas, aprender es fácil, casi automático; si no las tiene, es casi imposible. Por lo tanto, la meta de la enseñanza debe ser ayudar a los estudiantes a construir las estructuras de mejor manera, y a conectar los conceptos matemáticos. Esta teoría está en continuo desarrollo (DeVries, 2001).

La siguiente proposición muestra la base de la Teoría APOE *"El conocimiento matemático es una tendencia individual a la respuesta, en un contexto social y construyendo y reconstruyendo acciones, procesos y objetos matemáticos y organizándolos en esquemas con el fin de manejar las situaciones"* (Asiala et al., 1996).

Se observan tres tipos especiales o estructuras básicas para la construcción del conocimiento matemático: *acción*, *proceso* y *objeto* que están organizados en estructuras que se denominan *esquemas*. Los mecanismos mentales para construir dichas estructuras son las reflexiones abstractas tales como *interiorización*, *encapsulación* y *coordinación*.

En este trabajo se considera que esta teoría cognitiva ofrece un soporte adecuado para la Didáctica de la Matemática universitaria, en el sentido que es un marco teórico en el cual es posible buscar soluciones o estrategias pedagógicas para la aprehensión del tema considerado.

La Metodología

La metodología de enseñanza – aprendizaje a aplicar requiere de una participación activa del estudiante y del docente quien tiene como tarea fundamental generar la aparición de competencias en el alumno, por lo que se deben diseñar secuencias didácticas que den lugar a los objetivos previstos, esto lleva al docente a planificar los contenidos vinculándolos a situaciones que resulten de interés para el aprendiz.

Las falencias mencionadas anteriormente son consideradas como resultados a priori para el diseño de la presente metodología que privilegia no sólo *qué enseñar* sino *cómo mejorar la enseñanza y aprendizaje* de los contenidos disciplinares.

La experiencia áulica

Según Alvarenga (2003), *interpretar* y *resolver* una inecuación en el contexto algebraico, requiere de manera general, como prerrequisitos: hacer una correspondencia biyectiva entre el conjunto de los números reales IR y la recta numérica; comprender nociones de operaciones con intervalos y el uso de los conectivos lógicos de conjunción y disyunción, aplicar correctamente las propiedades del cuerpo ordenado IR, entender las implicaciones y doble implicaciones lógicas como así también hacer uso correcto de los cuantificadores lógicos.

Interpretar y *resolver* una inecuación en el contexto gráfico, requiere como prerrequisitos: esbozar algunos tipos de funciones como por ejemplo funciones polinómicas sencillas, función raíz cuadrada y funciones homográficas realizando las interpretaciones adecuadas.

Por lo mencionado anteriormente, se encaró la enseñanza y aprendizaje con actividades de dificultad creciente para que los alumnos fueran construyendo los distintos niveles cognitivos indicados en la Teoría APOE y profundizando en los mismos para lograr alcanzar el nivel de *esquema*, siendo esta una construcción óptima para el entendimiento del tema.

La clase se desarrolló mediante actividades realizadas en el siguiente orden:

1. **Resolución algebraica de inecuaciones sencillas e interpretación del conjunto solución**

Para esta etapa se solicitó la resolución e interpretación de la inecuación

$$3x – 4 > x – 1.$$

Prácticamente todos los alumnos resolvieron sin dificultad esta inecuación, pero al preguntarles qué significaba resolverla, las respuestas fueron dispares:
- "Es encontrar el valor aproximado de la x"
- "Es encontrar los dos valores de x"
- Muy pocos alumnos se refirieron a "es un intervalo …"
También se les preguntó qué propiedades de orden habían aplicado y nadie pudo responder.

Sin duda, los estudiantes estaban en etapa *acción* en cuanto a la resolución algebraica de inecuaciones, ya que si bien la resolvían sin dificultades no supieron explicar las propiedades de orden utilizadas. También estaban en etapa *acción* en cuanto a la interpretación de inecuaciones porque no supieron definir qué significaba resolver una inecuación y cual era el conjunto solución.

2. **Resolución algebraica de inecuaciones más complicadas que requieren análisis de signos**

Para esta etapa se solicitó la resolución e interpretación de la inecuación

$$3/x < 15.$$

Los alumnos resolvieron la inecuación pasando x multiplicando al segundo miembro de la desigualdad y llegaron a la conclusión que la respuesta de la inecuación era

$$x > 1/5.$$

Ningún alumno advirtió que la respuesta incluía el conjunto de los números reales negativos, tampoco pudieron identificar cuál era el error que habían cometido en la resolución. Entonces, se les recordó las propiedades de orden de IR y se les explicó cómo resolver la inecuación según el análisis de signos.

Se esperaba que al recordarles el concepto de conjunto solución en el primer ejemplo y las propiedades de orden en el segundo ejemplo alcanzaran un nivel *proceso* en cuanto a la interpretación y resolución algebraica.

Luego se les pidió que resolvieran la inecuación

$$x^2 - x - 2 \geq 0.$$

- Muchos alumnos sacaban las raíces pero tenían dificultad para factorizar la expresión.
- Algunos alumnos resolvieron la inecuación algebraicamente sin dificultad.
- Un alumno resolvió correctamente la inecuación en forma gráfica.
- Algunos alumnos la resolvieron ubicando las raíces sobre el eje x en forma intuitiva pero sin interpretar correctamente la resolución gráfica.
- Muchos alumnos seguían en etapa *acción* en cuanto a la resolución algebraica, muchos habían alcanzado un nivel *proceso*, pero todos estaban en etapa acción en cuanto a la resolución gráfica.

Se explicó en el pizarrón en qué consistía la resolución gráfica.

3. Resolución en forma gráfica y algebraica de la inecuación

$$1 < x^2 – 2 x < 3$$

- La gran mayoría de los estudiantes interpretó que para resolver algebraicamente la inecuación, se la debía separar en dos partes.
- Muchos alumnos obtuvieron dos conjuntos solución correspondientes a las dos desigualdades, pero muy pocos lograron interpretar que la solución era la intersección de los dos conjuntos.
- Cuando se les pidió que lo resolvieran en forma gráfica dibujaron dos parábolas y analizaron la solución en el eje x.
- Un alumno logró interpretar que la parábola estaba entre 1 y 3 en el eje de las ordenadas.
- La mayoría de los alumnos dibujaron la parábola y decían que debía estar entre 1 y 3 en el eje de las x.

Seguían en etapa *acción* en cuanto a la resolución algebraica.

Luego de varios intentos algunos alumnos entendieron que se debía leer la función sobre el eje de las ordenadas y que la solución representaba la proyección de la gráfica sobre el eje x.
Se explicó en el pizarrón lo que implicaba la resolución gráfica para lograr que alcanzaran un nivel *proceso* en cuanto a la resolución gráfica.

4. Planteamiento de equivalencias entre inecuaciones

Se solicitó la resolución en forma algebraica y gráfica de la inecuación

$$\sqrt{x+1} < \sqrt{2}x$$

Para resolverla, una estrategia consiste en elevar al cuadrado a ambos miembros, pero la nueva inecuación no es equivalente a la anterior, para darse cuenta que la solución no puede incluir los números negativos, el estudiante debe manejar la estructura algebraica de cuerpo del conjunto IR.

- Muchos alumnos detectaron antes de resolver la inecuación que la solución no debía incluir los números menores que -1.
- La mayoría la resolvió elevando al cuadrado y en la solución algebraica estaba incluido el intervalo (-∞; -0,5).
- Algunos alumnos detectaron que el conjunto solución no podía incluir el intervalo (- ∞; -0,5).

Se pidió la verificación del cálculo gráficamente y muchos alumnos resolvieron en forma correcta e interpretaron que la solución debía ser el intervalo (1; ∞).

A partir de dicha respuesta se repasaron las propiedades de orden en IR.

Se espera que a posteriori de la precedente institucionalización, los alumnos estén en condiciones de alcanzar un nivel *objeto* del concepto de inecuaciones al tener competencias para analizar equivalencias, verificar qué valores no pueden ser solución y resolver correctamente la inecuación en forma algebraica y gráfica.

Conclusiones

El manejo insuficiente de propiedades del cuerpo IR y de propiedades de orden en IR son fuente de una problemática importante en la adquisición y el manejo correcto de una gran cantidad de contenidos utilizados en las materias básicas de las Ingenierías.

Se debería, en la medida de lo posible, diseñar actividades que involucren los contenidos matemáticos troncales de las asignaturas de la currícula de Ingeniería que faciliten la adquisición de los niveles cognitivos deseados.

En particular, se debería rever la metodología de enseñanza de inecuaciones, propiciando la realización de actividades que requieren del correcto manejo de propiedades que permitan obtener equivalencia, o no, entre ellas. Este hecho favorece el aprendizaje, puesto que el alumno está acostumbrado a manejarse con listas de propiedades que utiliza, en general, de forma rutinaria, sin entender la potencia operativa de las mismas.

Un tema relativamente sencillo, como es el de inecuaciones, genera dificultades que son difíciles de superar para la adquisición de otros conceptos asociados al mismo, como es el caso, justamente del concepto de límite funcional.

La discusión y verificación de resultados adquiere relevancia utilizando la formalización en el lenguaje de expresión del conjunto solución de las inecuaciones.

Los estudiantes se motivan con actividades que les resultan desafiantes y se comprometen con las que requieren cambios de registros de representación semiótica.

Las reflexiones finales se refieren a la necesidad de realizar análisis didácticos continuos de los temas que se pretende sean aprehendidos por los estudiantes y la necesidad de investigar en Didáctica de la Matemática pues esta actividad elevará el nivel de los aprendizajes.

Referencias bibliográficas

Alvarenga, K. (2003) La enseñanza de inecuaciones desde el punto de vista de la teoría APOE. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* 6(3), 119-199.

Artigue, M., (1995). Ingeniería Didáctica. En P. Gómez (ed.) *Ingeniería Didáctica en Educación matemática. Un esquema para la investigación, la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas,* 33-59. Mexico: Grupo Editorial Iberoamérica.

Artigue, M. (1996). Learning and Teaching Elementary Analysis. En C. Alsina, M. Alvarez, M.Niss, A´erez, L.Rico, A.Sfard (Eds.), 8th International Congress on Mathematics Education – Selected Lectures, pp. 15-30. Sevilla: S.A.E.M. Thales.

Asiala, M.; Brown, N.; De Vries, D.; Dubinsky, E.; Mathews D. y Thomas, K. (1996). A Framework for Research and Development in Undergraduate Mathematics Education. *Research in Collegiate Mathematics Education II. CBMS Issues in Mathematics Education 6*, 1-32.

Contreras de la Fuente, A. (2002). ¿Se aprende por medio de los cambios entre sistemas de representación semiótica? XVIII JORNADASDEL SI- IDM, Castellón.

Cornu, B. (1983). Quelques obstacles á l'apprentissage des notion des limite. *Recherches en Didactiqué des Mathématiques 4*, 236-268.

Cornu, B. (1991). Limits. En David Tall (Ed.). *Advanced Mathematical Thinking 1*, 153-166. Boston/London: Kluwer Academic Pres Dordrecht.

Cottrill, J.; Dubinsky, E.; Nichols D.; Schwingendorf K.; Thomas K. y Vidakovic D. (1996). Understanding the Limit Concept: Beginning with a Coordinated Process Schema. *The Journal for Mathematical Behavior 15*, 167-192.

DeVries, D. Publicación electrónica. RUMEC/APOS theory glossary. Obtenido en http://www.cs.gsu.edu/rumec/ Papers/Glossary.html en junio de 2002.

Dubinsky, E. (1991). The Constructive Aspects of Reflective Abstraction in Advanced Mathematics, en L. P. Steffe (ed.), *Epistemological Foundation of Mathematical Experience.* Nueva York: Springer-Verlag.

Dubinsky, E. (1996). Una aplicación de la perspectiva piagetiana a la educación matemática postsecundaria. *Educación Matemática 8*(3), 24-45.

Narváez, A. M; Berman, C.; Rodríguez, Marcela. (2011) *¿Problemas con el límite o el límite de los problemas enseñados?* Publicado en: Acta Latinoamericana de Matemática Educativa. ALME 24. Volumen: 24 Año 2011. Editores: Patricia Lestón. Editorial: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A.C. Páginas: 585 a 595. Guatemala. Universidad Galileo. ISBN: 978-607-95306-4-8.

Narváez, A. M; Berman, C.; Rodríguez, Marcela. (2011) *Una descomposición genética del límite,* publicado en: Libro de Artículos JEIN 2011. Volumen II. Páginas: 18 a 25, 2011, Bs. As. UTNacional. Compiladores: Zulma Cataldi y Fernando Lage. Publicado en CD y en Internet con ISBN 978-950-42-138-0; http://www.utn.edu.ar/secretarias/scyt/jornadaJEI2011.utn.

Sierpinka, A. (1985). La notion d'obstacle épistémologique dans l'enseignement des mathématiques. Actes de la 37e Rencontre CIEAEM, 73-95. Leiden.

Sierpinka, A. (1987). Obstacles épistémologique relatifs á la notion de limite. Recherches en Didactiqué des Mathématiques, 6(1), 5 -67.

* * *