# 33. Modelos matemáticos en primer año de ingeniería

Clarisa Noemí Berman; Ana María Narváez

**Resumen**: El propósito de este trabajo es mostrar la riqueza de la construcción de modelos para ser utilizados como herramienta didáctica en situaciones de enseñanza y aprendizaje de los contenidos de la asignatura Análisis Matemático de una variable real. El método utilizado se basa en la investigación - acción, trabajando con situaciones de la realidad, actuando sobre ellas, analizando sus limitaciones e interactuando con el concepto a tratar. En esta etapa se observó que trabajar con modelos favorece la construcción del pensamiento matemático, afianzando su lenguaje y la correcta formulación de situaciones; en consecuencia, para el estudiante es significativo el conocimiento adquirido, lo que redunda en un aprendizaje de calidad.

**Palabras claves**: modelización, modelación, didáctica de la matemática.

## Introducción

La construcción de modelos matemáticos sencillos en primer año de las carreras de ingenierías se relaciona con el objeto *función de una variable real*, contenido de Análisis Matemático I. Por lo tanto, su estudio es una variable didáctica en este trabajo que se encuadra en la Didáctica de la Matemática universitaria, considerada como una disciplina experimental.

Teniendo en cuenta las preguntas ¿cuáles son los recursos más eficientes que permiten una mejor comprensión de un concepto matemático?; ¿es lo mismo comprender un concepto que usarlo?, se han buscado respuestas considerando investigaciones de Brousseau (1983), Duval (1991), Rico (1997), Ruiz Higueras (1998) y Dubinsky (1991), entre otros.

Rico (1997, p.111) expresa que *El modelo ofrece al usuario, generalmente resolutor de un problema, un esquema que sustituye al concepto original y que por sus cualidades, está* *mejor adaptado al pensamiento humano que el original; esto facilita al resolutor su tarea.*

**Objetivo**

El objetivo del presente trabajo es construir aprendizajes de los contenidos de Análisis Matemático de una variable real mediante la utilización de modelos, debido a su funcionalidad como recurso didáctico.

Son objetivos específicos, el desarrollo de competencias en el tratamiento del concepto de función mediante la modelización y la utilización del mismo como un instrumento en el modelo.

**Hipótesis**

Suponemos que los estudiantes que ingresan a nuestra universidad están habituados a:
- Trabajar con funciones como un objeto en sí mismo, sin otorgarle significación a los conceptos dominio, imagen, ceros, crecimiento, decrecimiento.
- Una enseñanza en la que se favorece la conexión de la fórmula al gráfico; motivo por el cual la representación se convierte en un fin.
- Una enseñanza de conceptos aislados.

Respecto de sus conocimientos, los estudiantes:
- Evidencian un buen manejo de los mismos cuando éstos son requeridos en ejercicios rutinarios, no en situaciones nuevas; lo que dificulta el trabajo de modelización.
- Muestran interés en la tarea que se les propone, sin embargo, se visualiza un bloqueo cuando frente a situaciones nuevas requieren para su solución de contenidos que han sido tratados en el nivel medio y en el curso preuniversitario.
- Poseen las herramientas necesarias para resolver situaciones nuevas pero no son conscientes de las mismas para utilizarlas en el planteo y solución.
- Presentan dificultades en la resolución de problemas sencillos que involucran geometría y cálculo.
- No participan activamente en su aprendizaje.

**Análisis histórico epistemológico del concepto de función**

Haciendo un breve recorrido histórico y epistemológico del concepto, pueden explicarse los motivos de ciertas dificultades que presentan los estudiantes en el proceso de *modelización,* encontrando una tendencia en la relación causa- efecto.

Según García et al. (2013), Villa establece una distinción entre *modelización matemática* y *modelación matemática*. Modelización es una actividad científica, en la que se involucra la construcción de un modelo matemático con el propósito de generar conocimiento.

La modelación es la construcción de significados de los objetos matemáticos. En este trabajo se utilizarán ambas**.**

En la época de los babilónicos se utilizaban tablas de valores similares a las que actualmente usan los estudiantes para funciones, sin embargo no se puede asegurar que los babilónicos llegaran a una expresión formal de los resultados, lo que es lícito de pensar ya que la expresión algebraica de la misma es uno de los registros de representación.

*El hecho de que no se haya conservado ninguna formulación general de estas tablas no significa necesariamente que no existiera en el pensamiento antiguo prehelénico conciencia de la generalidad de dichas reglas o principios…*(Boyer, 1986, p. 66).

Teniendo en cuenta que sus tabulaciones representaban relaciones principalmente astronómicas, imposibles de medir, las tablas podrían tomarse como una herramienta para conjeturar un *modelo* que mostraría regularidades empíricas. En la actualidad se observa que un alto porcentaje de estudiantes de primer año de las carreras de ingenierías presentan dificultades cuando deben realizar el pasaje de una representación a otra. Identificar un mismo *objeto* matemático en distintos sistemas de representación semiótica aparece como un obstáculo en el aprendizaje.

Los griegos aceptaban ideas como movimiento y variable, tenían una idea intuitiva de función, sin embargo, no se permitían asociarla con la matemática en la que números y magnitudes no se relacionaban. La matemática considerada estática y, por ende, externa a la física, se limitaba a expresar ecuaciones con incógnitas y no relaciones entre variables. De lo anterior se deduce que la asociación de un número con determinada magnitud, tan natural en la actualidad, no lo era en esa época.

Los pitagóricos sortearon el obstáculo citado anteriormente, pero no en forma total, ya que se permitían relacionar mediante razones numéricas, magnitudes semejantes. No aceptaban relacionar magnitudes diferentes, por ejemplo, perímetro con área o área con volumen. Adicionalmente, tenían las limitaciones derivadas del manejo del conjunto de números enteros (discreto), con magnitudes continuas usadas en física.

La misma dificultad registrada anteriormente, se observa en los estudiantes cuando deben expresar, por ejemplo, el área de un rectángulo en *función* de su perímetro o deben obtener una variable en función de otra a partir de magnitudes no semejantes.

En la Edad Media, se aceptaba todo lo que pudiese explicarse racionalmente, en especial los fenómenos dinámicos y no los estáticos.
Mientras Platón sostenía que las causas podían expresarse matemáticamente, Aristóteles no relacionaba la matemática (considerada como ciencia de carácter abstracto) con la física.

Oresme (1320 - 1382) introdujo de manera primitiva, lo que hoy constituye un registro gráfico de funciones, observándose aún la presencia del pensamiento griego, donde número y magnitud no se relacionaban. Sus representaciones eran cualitativas; representaba por medio de una figura la dependencia cualitativa de una determinada cualidad en relación con otra de la cual dependía.

En los siglos XV y XVI se produce un perfeccionamiento en el simbolismo algebraico, observándose una diferenciación entre los conceptos de variable e incógnita y, un avance importante en el concepto de función.

La identificación de cambios en fenómenos físicos, astronómicos y geométricos se asociaron a la cuantificación de variables.

La noción de función fue evolucionando a través del tiempo según distintas concepciones y fue presentando distintos obstáculos cognitivos, siendo la tabla numérica de simple entrada, el elemento inicial relacionado con el concepto; posteriormente aparecen las gráficas y por último la expresión analítica.

En la actualidad, el concepto de función es una concepción integrada y refinada de la evolución del pensamiento humano. Ruiz Higueras (1998, p.112) dice que de acuerdo con los filósofos Gosseteste y Bacón *las matemáticas son el principal instrumento para estudiar los fenómenos naturales.* Por lo que el proceso de modelización permite reproducir en forma simplificada fenómenos complejos de la física, astronomía, ingenierías, entre otros, externos de la matemática pura.

Según Sierpinska (1989), el desarrollo de la notación simbólica y de la resolución de ecuaciones fue tan significativo que, por medio de él, se fue superando el obstáculo metodológico de la diferenciación entre número y magnitud, aunque agregó un problema nuevo, pensar que sólo eran funciones aquellas que podían expresarse mediante fórmulas o ecuaciones.

En nuestros cursos de primer año el concepto de función se define mediante las condiciones de existencia y unicidad.

## Marco Teórico

Las investigaciones utilizadas como antecedente del presente trabajo, explican cómo se construyen los conceptos matemáticos teniendo como marco teórico la Teoría APOE (Acción, Proceso, Objeto, Esquema). Ed Dubinsky (1991) creador de la misma, parte de la hipótesis que los individuos no aprenden directamente los conceptos matemáticos, si tienen las estructuras apropiadas, aprender es fácil, si no las tienen, es casi imposible. Por lo mencionado, esta Teoría es la indicada para favorecer la construcción y conexión de los conceptos de estudio mediante modelización y modelación.

**Metodología**

Los procesos involucrados en la modelización, las competencias que se desean lograr en los estudiantes, el análisis comparativo de la evolución histórica del concepto de función con el quehacer del estudiante y las características principales de los mismos, son los ejes tenidos en cuenta para el diseño de la metodología.

Como es bien conocido, la movilidad y el tratamiento en los distintos registros de representación semiótica, favorecen la utilización del concepto como herramienta en la elaboración de un modelo matemático y, es allí donde el objeto de estudio adquiere sentido.

¿No son acaso las ciencias las que proveen de problemas a la matemática y por ende quienes la enriquecen?

Debido a las características de los estudiantes se comienza con modelos sencillos, en lo posible, se parte de datos obtenidos empíricamente y se trabaja, principalmente con funciones lineales, cuadráticas, de Heaviside, y también las definidas por partes.

En otras palabras, la metodología se fundamenta en el hecho de no enseñar para aplicar sino aplicar para enseñar. Por lo que en función del concepto a construir, se selecciona una situación didáctica particular en la que el *modelo* es una herramienta para su tratamiento.

Para contestar el interrogante ¿es suficiente tener determinados conocimientos matemáticos para resolver situaciones nuevas?, se inicia la actividad didáctica con dos situaciones que requieren del mismo concepto o herramienta para su resolución: la función cuadrática En primera instancia la situación es un ejercicio rutinario y en segunda instancia, al ser una situación contextualizada, se requiere de la construcción de un modelo.

**Experiencia áulica**

El trabajo que se viene realizando hace tres años en cuatro cursos de primer año de distintas ingenierías de la Facultad Regional Mendoza, solicita a los estudiantes resolver las siguientes situaciones.

Actividad 1
*Realizar un análisis de la función* $f(x) = 7x - x^2$ *indicando dominio, imagen, ceros, cotas, intervalos de crecimiento y positividad, máximos y mínimos. Graficar aproximadamente la función indicando coordenadas del vértice.*

Se ha notado que la mayoría de los estudiantes no presentan dificultades en esta tarea.

Posteriormente, se solicita que resuelvan como tarea extraclase el siguiente problema.

Actividad 2
*Se desea delimitar una zona de seguridad rectangular para lo que se dispone de 14 metros de cinta. ¿Qué modelo matemático representa adecuadamente el área en función de un lado del sector?*
*Utilice el modelo encontrado para cuantificar el área máxima en función del lado.*

En el control de esta actividad, se ha observado que sólo un alumno lo ha resuelto satisfactoriamente.

Las explicaciones orales de los estudiantes más relevantes, fueron:
- utilicé tablas de valores colocando valores enteros
- resolví la ecuación cuadrática
- no sabía por dónde empezar
- no intenté resolverlo
- si dispongo de 14 metros no puedo tener distinta superficie.

En la institucionalización, al esquematizar la situación, se corrobora geométricamente la posibilidad de perímetro constante y área variable. Luego se analiza el enunciado para diseñar el modelo matemático, es la misma función cuadrática de la actividad 1, que permite la solución del problema.

## Discusión

Se observa que los pasos utilizados en el tratamiento del problema se corresponden, justamente, con los procesos involucrados en la modelación: pensar, razonar, asociar, calcular, relacionar, analizar, articular y formalizar.

Esta experiencia áulica permite un aprestamiento en el uso de la modelación como herramienta.

Se observó que la resolución correcta, de la actividad 1 no permitió la concreción de la actividad 2. Por lo tanto, se reafirma el propósito de dar las dos situaciones para que el estudiante reflexione sobre la no funcionalidad de lo estudiado, si dichos conceptos no están disponibles cuando se los requiere.

Como ya se ha corroborado en otras investigaciones didácticas, se observa que no alcanza el conocimiento del concepto función para resolver situaciones nuevas que involucren dicho concepto.

## Conclusiones

Se concluye que las hipótesis planteadas han sido corroboradas.

Se deduce que la evolución histórica y epistemológica del concepto función está íntimamente relacionada con las dificultades que se presentan en el tratamiento del tema.

Es importante abordar los contenidos partiendo de la *modelización* para que el estudiante logre la *modelación* de los temas involucrados.

Se reafirma la relevancia del tratamiento didáctico de la función cuadrática en las etapas de escolaridad anteriores a la universitaria.

Para achicar la brecha en la conversión de registros es importante reconocer que el *objeto* matemático es distinto de su representación (un mismo objeto puede expresarse en distintos registros), como indica Duval (1991).

El uso de modelos favorece el desarrollo de competencias como: interés, voluntad, habilidad, disposición, uso correcto del lenguaje y formalización.

Se destaca la necesidad de contextualizar los problemas mediante la utilización de modelos funcionales acordes a las características de los estudiantes (por ejemplo, conocimientos previos y perfil de la carrera). La riqueza de estos modelos en la currícula de las ingenierías permite un amplio y variado diseño de situaciones didácticas.

## Reflexiones Finales

Se espera preparar un material didáctico con actividades que incluyan modelos específicos de las distintas carreras de Ingeniería de la FRM, UTN para estudiantes de primer año con el objeto de dar tratamiento a los contenidos de la asignatura.

## Bibliografía


Boyer, C. (1986). *Historia de las Matemáticas*. Alianza Universidad. Madrid. Edición original

Brousseau, G. (1983). *Les obstacles épistémologiques et les problemes en Mathématiques. Recherches en didactique des Mathématiques.*

Dubinsky, E. (1991). The Constructive Aspects of Reflective Abstraction in Advanced Mathematics, en L. P. Steffe (ed.), *Epistemological Foundation of Mathematical Experience.* Nueva York: Springer-Verlag.

Duval, R. (1991). *Semiosis y pensamiento humano. Registros semióticos y aprendizajes intelectuales.* Universidad del Valle. Instituto de Educación y Pedagogía, Grupo de Educación Matemática. Peter Lang S.A. Editions scientifiques européennes.

García Quiroga B., Coronado A., Montealegre Quintana L., Giraldo Ospina A., Tovar Piza B., Morales Parra S., Cortés Joven D. (2013). *Competencias matemáticas y actividad matemática de aprendizaje.* Blog del núcleo de investigación en educación matemática. Universidad de la Amazonia Florencia. Colombia. Fecha de consulta

28/03/14. Disponible en: http://niemupelmaracay.blogspot.com/
Rico, L. (coord.), Castro Encarnación, Castro Enrique, Coriat E. Marín A., Puig L., Sierra M., Socas M. (1997). La educación matemática en la enseñanza secundaria. Cuadernos de formación de profesorado. Red Federal de Formación Docente. Ministerio de Cultura y Educación de la Nación.
Ruiz Higueras, L. (1998). *La noción de función: Análisis epistemológico y didáctico*. Universidad de Jaén, Servicio de Publicaciones.
Sierpinska, A. (1989). *On 15-17 years old students' conceptions of functions, iteration of functions and atractive points.* Warsaw, Poland: Institute of Mathematics, Polish Academy of Sciences, preprint, 454
Villa, J. A. (2007) *La modelación como proceso en el aula de matemáticas. Un nuevo marco de referencia y un ejemplo.* Tecno Lógicas, p. 63-85, 2012. Fecha de consulta 29/03/14. Disponible en: http:// funes.uniandes.edu.co/959/

***