

Formulación de un LPV-MPC Adaptativo para Procesos Industriales No Lineales

Hugo A. Pipino

*Facultad Regional San Francisco,
Universidad Tecnológica Nacional,
San Francisco, Argentina,
hpipino@sanfrancisco.utn.edu.ar
ORCID: 0000-0003-4937-6685*

Emanuel Bernardi

*Facultad Regional San Francisco,
Universidad Tecnológica Nacional,
San Francisco, Argentina.
ebernardi@sanfrancisco.utn.edu.ar
ORCID: 0000-0001-5248-9352*

Marcelo M. Morato

*Departamento de Automação e Sistemas,
Universidade Federal de Santa Catarina,
Florianópolis, Brazil.
marcelomnzm@gmail.com
ORCID: 0000-0002-7137-0522*

Carlos A. Cappelletti

*Facultad Regional Paraná,
Universidad Tecnológica Nacional,
Paraná, Argentina.
ccappelletti@frp.utn.edu.ar*

Eduardo J. Adam

*Facultad de Ingeniería Química,
Universidad Nacional del Litoral,
Santa Fe, Argentina.
eadam@fiq.unl.edu.ar
ORCID: 0000-0003-0156-9832*

Julio E. Normey-Rico

*Departamento de Automação e Sistemas,
Universidade Federal de Santa Catarina,
Florianópolis, Brazil.
julio.normey@ufsc.br
ORCID: 0000-0002-6510-9803*

Resumen—En general los procesos de la industria química son no lineales, lo que hace que los algoritmos convencionales de control predictivo lineal resulten no factibles. Por lo tanto, este artículo investiga una formulación de Control Predictivo basado en Modelos (MPC) para procesos no lineales representados a través de modelos Lineales de Parámetros Variables (LPV). El método propuesto se formula como un MPC adaptativo basado en la solución de dos problemas consecutivos de Programación Cuadrática (QP), resueltos en cada instante de muestreo. El primer QP tiene un horizonte hacia atrás y estima una variable de ajuste asociada al proceso, que se utiliza para determinar el mejor modelo lineal de predicción. El segundo QP utiliza este modelo para optimizar el desempeño a lo largo del horizonte futuro. El método propuesto se aplica a un sistema Reactor Continuo de Tanque Agitado (CSTR). Las discusiones se constituyen en torno al procedimiento de diseño *a-priori*, el esfuerzo computacional en línea y las dificultades de su aplicación.

Index Terms—Control Predictivo, Sistema Lineal de Parámetros Variables, Problema de Programación Cuadrática, Sistemas No Lineales, CSTR.

I. INTRODUCCIÓN

La industria de procesos químicos se ha vuelto cada vez más compleja, expandiéndose junto a los desarrollos recientes y continuos en áreas como la computación, el control avanzado y la optimización. Entre los métodos de control más establecidos, el Control Predictivo basado en Modelos (MPC) aparece en gran parte de estas aplicaciones industriales [1].

MPC es una técnica de control elegante que emplea un modelo para predecir el comportamiento de la salida del proceso, utilizando una capa de optimización para determinar la política de control óptima que se aplicará de acuerdo a los costos de rendimiento. Este marco también incluye analíticamente restricciones de estado, entrada y salida, y además puede incorporar restricciones terminales y de tasas de variación [2].

Debido a su formulación, el modelo del proceso es la piedra angular del MPC [3]. En las formulaciones originales de MPC, el sistema controlado generalmente se representa a través de ecuaciones diferenciales Lineales e Invariantes en el Tiempo (LTI). Así, la solución de control se encuentra resolviendo un problema simple de programación cuadrática (QP) con restricciones. Por lo que, la inclusión de modelos de procesos no lineales no es una tarea trivial y aumenta considerablemente la complejidad de la capa de optimización resultante [4], dificultando su aplicación en tiempo real. En consecuencia, si se busca que el controlador sea implementable (lo suficientemente rápido), los algoritmos de MPC no lineales (NMPC) deben adaptarse o aproximarse, de modo que su complejidad numérica pueda reducirse [5].

Al tiempo que se presentaban en la literatura muchos avances respecto al MPC, otros documentos se han dedicado a diseñar métodos para modelos Lineales de Parámetros Variables (LPV) [6], [7]. Los modelos LPV se usan para representar sistemas no lineales como modelos dependientes de parámetros de ajuste conocidos y acotados (en lo sucesivo, el vector ρ). El paquete de herramientas LPV ofrece muchas de las ventajas de síntesis de controladores, propios de los modelos LTI. Como se revisó en [8], las estrategias MPC basadas en modelos LPV para procesos no lineales son una ventaja prometedora para los algoritmos NMPC aplicables en tiempo real.

Teniendo lo anterior en cuenta, la principal motivación de este artículo es modificar el esquema adaptativo LPV MPC (a saber, LPV-MPC) de [9] al ámbito de procesos químicos industriales. El MPC propuesto por los autores en [9] reside en la operación de dos QP consecutivos, como se detalla en la Sección III. El sistema no lineal está integrado en una representación LPV politópica. Luego, un primer QP funciona

como un Estimador de Horizonte Móvil (MHE) [10], [11], utilizando los datos disponibles (un horizonte de N pasos hacia atrás) para determinar una variable de ajuste virtual que indica el mejor modelo LTI, desde el politopo LPV, que se utilizará con fines de predicción. Considerando este parámetro estimado se construye un modelo LTI constante y se resuelve un MPC QP convencional para determinar la política de control a aplicar. El MPC QP incluye un costo terminal y una restricción de conjunto de terminal para garantizar la factibilidad recursiva y la estabilidad asintótica. El conjunto terminal se determina fuera de línea a través del uso de Desigualdades Lineales Matriciales (LMI).

Respecto a la literatura disponible, es importante enfatizar que hay dos caminos principales para el diseño de un LPV-MPC, como se analizó en [8]:

- Diseño robusto, asumiendo que los parámetros de ajuste son desconocidos a lo largo del horizonte de predicción. Estos métodos son mucho más conservadores y generalmente se basan en procedimientos de maximización o en preparaciones fuera de línea.
- Soluciones sub-óptimas, que determinan una posible trayectoria de ρ a lo largo de los pasos futuros. La solución resultante puede ser ligeramente diferente de los óptimos no lineales, pero la literatura muestra buenos rendimientos, pequeña carga numérica y en muchos casos se pueden lograr resultados comparables (es decir, cercano al óptimo). Este es el camino seguido en este artículo.

El resto del documento está estructurado de la siguiente manera: la Sección II presenta los conceptos preliminares con respecto al modelo LPV y al MPC para procesos no lineales. La sección III detalla el método LPV-MPC utilizado. La sección IV presenta su aplicación a un proceso industrial, el problema del Reactor Continuo de Tanque Agitado (CSTR), y también analiza los resultados de la simulación, en términos de rendimiento y complejidad numérica. Las conclusiones finales se presentan en la última sección.

II. MPC PARA SISTEMAS CON MODELOS LPV

II-A. Representación del Modelo LPV

En este artículo se contemplan procesos industriales no lineales que pueden representarse como modelos LPV.

Un proceso no lineal arbitrario puede modelarse a través de la siguiente representación general en espacio de estados:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(x(t), u(t)) \\ y(t) &= g(x(t), u(t)) \\ x(0) &= x_0 \end{aligned} \quad (1)$$

donde $x(t) \in \mathbb{R}^{n_x}$, $u(t) \in \mathbb{R}^{n_u}$, $y(t) \in \mathbb{R}^{n_y}$ son los vectores de estados, entradas y salidas, respectivamente. Además, x_0 es el vector de estados iniciales del sistema.

Entonces, si las funciones no lineales $f(x(t), u(t))$ y $g(x(t), u(t))$ son continuamente diferenciables con respecto a x y u , simplemente se puede seguir la técnica de Linealización Jacobiana Parametrizada (PJJ), basada en la expansión de la

serie Taylor de primer orden. Al hacerlo, es posible incorporar el comportamiento dinámico del sistema (1) dentro de un politopo convexo de L vértices (modelos), con una dependencia afín a un parámetro de ajuste ρ [12].

Luego, a través de la discretización de Euler del modelo obtenido usando PJJ y bajo dicha representación LPV¹, se obtiene el siguiente modelo:

$$\begin{aligned} x(k+1) &= A(\rho(k))x(k) + B(\rho(k))u(k), \\ \rho(k) &= f_\rho(x(k)) \in \mathcal{P}, \end{aligned} \quad (2)$$

donde f_ρ representa la función no lineal endógena para la evolución del parámetro de ajuste, y $[A(\rho(k)), B(\rho(k))]$ son las matrices de este modelo. Por último, el conjunto $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^{n_p}$ es convexo y compacto.

Por otro lado, las restricciones físicas del proceso industrial se expresan directamente como:

$$x(k) \in \mathcal{X} \quad \text{y} \quad u(k) \in \mathcal{U} \quad \text{para todo } k \geq 0, \quad (3)$$

siendo éstos subconjuntos convexos y compactos de \mathbb{R}^{n_x} y \mathbb{R}^{n_u} , respectivamente. Ambos conjuntos contienen el origen, es decir, son conjuntos \mathcal{C} propios. Estas restricciones deben ser tomadas en cuenta por cualquier método de control que tenga como objetivo mantener una operación admisible del sistema.

Además, a lo largo de este trabajo, se asume que para todos los instantes discretos k :

$$[A(\rho(k)), B(\rho(k))] \in \Omega, \quad (4)$$

donde Ω es un politopo que representa (2) con modelos LTI en sus L vértices, el cual es representado como:

$$\Omega = \text{Co}\{[A_1, B_1], [A_2, B_2], \dots, [A_L, B_L]\}, \quad (5)$$

donde $\text{Co}\{\cdot\}$ denota un casco convexo y $[A_j, B_j]$ son las matrices de cada modelo LTI en los vértices del casco.

Cualquier par de matrices arbitrarias para el modelo LPV $[A(\rho(k)), B(\rho(k))]$ que se encuentra dentro del politopo se puede obtener como una suma convexa de sus vértices, de la siguiente manera:

$$A(\rho(k)) = \sum_{j=1}^L \mu_j(\rho(k))A_j \quad \text{y} \quad B(\rho(k)) = \sum_{j=1}^L \mu_j(\rho(k))B_j, \quad (6)$$

donde se debe cumplir que:

$$\sum_{j=1}^L \mu_j(\rho(k)) = 1 \quad \text{y} \quad 0 \leq \mu_j(\rho(k)) \leq 1, \quad j \in \mathbb{Z}_{1:L}. \quad (7)$$

Así, cada vértice se corresponde a un modelo LTI, mientras que el modelo LPV es una combinación de estos L modelos. El número de modelos viene dado por $L = n_l^{n_p}$, donde n_p representa el número de parámetros de ajuste y n_l el número de puntos de linealización por parámetro.

¹Se debe tener en cuenta que, aunque en este artículo se propone una formulación para sistemas LPV, este modelo también podría usarse para el caso de sistemas Lineales y Variantes en el Tiempo (LTV).

II-B. Control predictivo utilizando un modelo LPV

Cualquier algoritmo MPC estándar es capaz de obtener una ley de control óptima que tenga en cuenta las restricciones sobre los estados, las salidas y las acciones de control. Esta estrategia de control consta en resolver el siguiente problema:

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{u}} V_N &= \min_{\mathbf{u}} \sum_{i=0}^{N-1} \ell(x(k+i), u(k+i)) \\ \text{s.a. Modelo del Sistema,} & \\ u(k+i) &\in \mathcal{U} \quad \forall i \in \mathbb{Z}_{0:N-1}, \\ x(k+i) &\in \mathcal{X} \quad \forall i \in \mathbb{Z}_{0:N-1}, \end{aligned} \quad (8)$$

donde \mathbf{u} es la secuencia óptima de acciones de control a lo largo del horizonte de predicción. El costo de etapa $\ell(\cdot)$ pondera la acción de control y los estados en cada instante futuro; esta función es, en general, cuadrática en x y u . Adicionalmente, en ciertas ocasiones, se considera un costo terminal ($V_f[x(N)]$) y restricciones de salida, así como el uso de restricciones terminales ($x(N) \in \mathbf{X}_f$) y en la velocidad de respuesta ($\delta u(k+i) = u(k+i) - u(k+i-1)$).

Cuando el problema MPC dado en (8) se aplica a un proceso no lineal bajo una representación de modelo LPV, la evolución del parámetro de ajuste a lo largo del horizonte de predicción N se hace necesaria para describir los valores futuros de los estados. Por ende, se considera que la función no lineal $f_\rho(\cdot)$ da la evolución del parámetro de ajuste endógeno, desde el punto de vista del instante k . De esta forma, el marco LPV ofrece algunas ventajas que pueden usarse para simplificar el problema de programación no lineal en una formulación QP. En cambio, en el caso de un NMPC convencional, sería imperioso conocer el comportamiento exacto del modelo de proceso $f(\cdot)$ a lo largo del horizonte de predicción. Así, la ventaja que presenta la configuración LPV radica en que el modelo se describe, para todos los instantes futuros $k+i$, por un par genérico $[A(\rho(k+i)), B(\rho(k+i))]$ que pertenece al polítopo Ω .

En consecuencia, debido a esta característica de la representación LPV, el modelo no lineal es reemplazado en el problema MPC de (8) por la respectiva suma convexa de L modelos LTI, siempre conocidos, dada por (2) y (6). Si se supone que las L variables de ponderación $\mu_j(k+i)$ son conocidas a lo largo de N , la programación no lineal se convierte en una versión QP, que puede evaluarse más rápido que los procedimientos NMPC.

III. FORMULACIÓN LPV MPC ADAPTATIVO

Esta sección presenta el diseño de un MPC adaptativo bajo un formalismo LPV, basado en [9]. Esta política de regulación LPV-MPC halla, en cada instante de muestreo k , el mejor modelo LTI posible que describa los datos de los N pasos anteriores, y usa ingredientes terminales para garantizar la estabilidad y la convergencia. Este método considera las variables de ponderación μ_j del modelo LPV politópico de (6) y (7) como pesos virtuales que, en cada instante de muestreo, indican cuál es la mejor combinación de los modelos LTI para

describir momentáneamente al proceso industrial (basado en las mediciones anteriores).

Por lo tanto, el vector $\mu \in \mathbb{R}^L$ es tratado como una nueva variable de decisión del problema de optimización y (6)-(7) se convierten en restricciones, junto con la región factible dada por las restricciones duras en (3).

Debido a la simplificación de encontrar un modelo de predicción LTI, el método propuesto es obviamente *a priori* sub-óptimo, lo que no significa que los resultados obtenidos no estén cerca de la condición óptima. Además, una gran ventaja de utilizar un modelo de predicción simplificado es que este marco de control predictivo produce un problema QP para fines de “identificación” (con respecto a μ) y otro QP para fines de control, el cual puede ser resuelto en línea y ser utilizado para implementaciones de control en tiempo real.

III-A. Problema QP hacia atrás (MHE)

El QP hacia atrás se utiliza para encontrar un vector constante μ que haga coincidir de manera adecuada al modelo LPV politópico con los datos reales del pasado. Este procedimiento minimiza la discrepancia entre los datos y el modelo con respecto a μ y la varianza de μ a lo largo de la simulación.

La variable de ponderación virtual se encuentra con la solución del siguiente problema de optimización, considerando x y u como datos medidos y μ_{k-1} como resultado de la iteración anterior:

$$\begin{aligned} \min_{\mu} \sum_{i=k-N+1}^k (e(i)^T Q_e e(i) + \nu_\mu^T Q_\nu \nu_\mu) \\ \text{s.a. } e(i+1) &= x(i+1) - (Ax(i) + Bu(i)), \\ A &= \sum_{j=1}^L \mu_j A_j \text{ y } B = \sum_{j=1}^L \mu_j B_j, \\ \sum_{j=1}^L \mu_j &= 1, \quad 0 \leq \mu_j \leq 1, \\ \mu &= \mu_{k-1} + \nu_\mu, \end{aligned} \quad (9)$$

con $i \in \mathbb{Z}_{k-N:k-1}$ y $j \in \mathbb{Z}_{1:L}$. Q_e y Q_ν son matrices de peso de este procedimiento de optimización. Por simplicidad, se toman como matrices identidades.

Se debe tener en cuenta que el QP anterior funciona como el esquema MHE propuesto en la literatura [10], [11] para la estimación de parámetros variables en el tiempo.

III-B. Problema QP hacia adelante (MPC)

En base a [9], el método de “MPC para seguimiento” [13] es considerado para propósitos de regulación. Este diseño de control permite garantizar que el controlador conduzca asintóticamente al proceso hacia una referencia de estado estacionario x_s , en una trayectoria admisible desde cualquier estado inicial factible x_0 .

El enfoque incorpora una referencia artificial $p_a = (x_a, u_a)$ al problema de optimización y establece los estados del sistema para seguir esta variable artificial. Además, determina que este punto de ajuste artificial debe estar lo más cerca

posible de la referencia de estado real x_s , lo que asegura un dominio de atracción ampliado.

El problema MPC se formula con una función de costo tradicional ($V_N(\cdot)$), considerando que μ representa el valor obtenido por el MHE QP. El costo de etapa es cuadrático en x y u , con las matrices de peso, $Q \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$ y $R \in \mathbb{R}^{n_u \times n_u}$, definidas positivas y una ganancia arbitraria que estabiliza el control de retroalimentación de estados, $\kappa \in \mathbb{R}^{n_u \times n_x}$, así $A_\kappa(\rho(k)) = A(\rho(k)) + B(\rho(k))\kappa$ es Schur estable. Además, existe otra matriz definida positiva $P \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$ tal que,

$$A_\kappa(\rho(k))^T P A_\kappa(\rho(k)) - P = -(Q + \kappa^T R \kappa)$$

se mantiene para todo $\rho(k) \in \mathcal{P}$. Por lo tanto, se considera el término $\|x(k+N) - x_a\|_P^2$ (una compensación que penaliza la desviación del estado final con el objetivo p_a) y otro término $\|x_a - x_s\|_{T_x}^2$ para garantizar que la variable artificial siga al objetivo real, siendo este definido por $p_s = (x_s, u_a)$ [14].

Finalmente, el controlador se obtiene mediante solución del siguiente problema de optimización:

$$\begin{aligned} & \min_{\mathbf{u}} V_N(x, \mu; \mathbf{u}) \\ \text{s.a. } & x(k+i+1) = Ax(k+i) + Bu(k+i), \\ & A = \sum_{j=1}^L \mu_j A_j \quad \text{y} \quad B = \sum_{j=1}^L \mu_j B_j, \\ & x(k+i) \in \mathcal{X}, \\ & u(k+i) \in \mathcal{U}, \\ & x(k+N) \in \mathbf{X}_f, \end{aligned} \quad (10)$$

donde $i \in \mathbb{Z}_{0:N-1}$ y \mathbf{X}_f es un conjunto invariante positivo robusto de control que contiene a p_s , determinado como se muestra en la Sección III-C.

Así, al considerar un horizonte deslizante, la política de control propuesta para regulación está dada por:

$$\kappa(x(k_0)) = \mathbf{u}^*(0; x(k_0)),$$

siendo \mathbf{u}^* la solución del segundo QP, que representa la secuencia óptima de acciones de control que se aplicarán para seguimiento de referencia.

III-C. Ingredientes Terminales

Para definir los ingredientes terminales, se considera como control local una versión sin restricciones del Regulador Lineal Cuadrático (LQR) con un modelo LPV politópico como (2). Este control local establece una ley de control lineal $u(k) = \kappa_{LQR} x(k)$ para regular al sistema hacia el origen². Por lo tanto, el sistema a lazo cerrado se describe mediante:

$$x(k+1) = A_{cl}(\rho)x(k),$$

donde $A_{cl}(\rho) = A(\rho) + B(\rho)\kappa_{LQR}$ se garantiza como Schur estable para todos los valores posibles de ρ .

Considerando un costo terminal cuadrático $V_f[x(k)] = x(k)' P x(k)$ como en la Sección III-B y tomando $P \succ 0$,

²Se puede hacer un cambio de coordenadas para referencias distintas de cero, por lo que el único punto de equilibrio es el origen.

para garantizar la estabilidad asintótica del algoritmo MPC en (10), este costo terminal debe ser una función de Lyapunov decreciente:

$$V_f[x(k+1)] - V_f[x(k)] \leq 0 \quad \forall x(k) \in \mathbf{X}_f.$$

Esto se garantiza si se cumple la siguiente LMI:

$$\begin{pmatrix} Y & Y A_j^T + L^T B_j^T & Y Q^{1/2} & L^T R^{1/2} \\ A_j Y + B_j L & Y & 0 & 0 \\ Q^{1/2} Y & 0 & \gamma I & 0 \\ R^{1/2} L & 0 & 0 & \gamma I \end{pmatrix} \succ 0 \quad (11)$$

donde $Y = P^{-1}\gamma \succ 0$, $L = \kappa_{LQR} Y$, $\gamma > 0$ y $j \in \mathbb{Z}_{1:L}$.

En consecuencia, el LQR de tiempo discreto se resuelve mediante el siguiente problema:

$$\begin{aligned} & \min_{\gamma, L, Y \succ 0} \gamma \\ \text{s.a. } & (11) \quad \forall j \in \mathbb{Z}_{1:L}. \end{aligned} \quad (12)$$

A través del problema (12) se obtiene la matriz de peso P para el problema (10), mientras que \mathbf{X}_f se obtiene como (ver [15]):

$$\mathbf{X}_f = \lambda \bigcap_{j=1}^L \mathbf{X}_{f_j} \quad (13)$$

donde \mathbf{X}_{f_j} está dado por los métodos tradicionales con

$$\kappa_j = [R + B_j^T P B_j]^{-1} B_j^T P A_j$$

y $\lambda \in (0, 1]$ es un parámetro arbitrariamente cercano a 1.

De esta forma, $\mathbf{X}_f \subset \mathcal{X}$ se obtiene para todos los sistemas en el interior de Ω y para todos los posibles $x(k) \in \mathbf{X}_f$, entonces hay una entrada factible $u = \kappa(x(k)) \in \mathcal{U}$ que garantiza que $x(k+1)$ se encuentre dentro de \mathbf{X}_f , a pesar de las incertidumbres de modelado del proceso, y además garantice factibilidad recursiva.

IV. RESULTADOS DE LA SIMULACIÓN Y DISCUSIONES

En esta sección, la técnica MPC analizada se aplica a un proceso CSTR. Este contempla que el reactivo A se convierte en el producto B mediante una reacción química irreversible y exotérmica. El objetivo de este sistema es regular la concentración de A , C_A , la temperatura del reactor, T y el volumen de reacción, V , manipulando el caudal de salida del proceso, Q_s y el caudal refrigerante, Q_c . La reacción tiene lugar en un tanque cilíndrico agitado.

IV-A. Modelo No Lineal

La dinámica no lineal del sistema es la siguiente:

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &= Q_o - Q_s(t), \\ \dot{C}_A(t) &= \frac{Q_o}{V(t)} (C_{Ao} - C_A(t)) - k_0 e^{-\frac{E/R}{T(t)}} C_A(t), \\ \dot{T}(t) &= \frac{Q_o}{V(t)} (T_o - T(t)) - k_1 e^{-\frac{E/R}{T(t)}} C_A(t) \\ &+ k_2 \frac{Q_c(t)}{V(t)} \left(1 - e^{-\frac{-k_3}{Q_c(t)}}\right) (T_{co} - T(t)), \end{aligned} \quad (14)$$

donde $V(t)$, $C_A(t)$ y $T(t)$ son estados medibles del sistema. Los parámetros del modelo son reportados en la Tabla I.

Tabla I
PARÁMETROS DEL MODELO Y SUS RESTRICCIONES

Param.	Valor	Param.	Valor
Q_o	1001 min^{-1}	C_{Ao}	1 mol l^{-1}
T_o	350 K	T_{co}	350 K
k_0	$7,2 \times 10^{10} \text{ min}^{-1}$	E/R	$1 \times 10^4 \text{ K}$
ΔH	$-2 \times 10^5 \text{ cal mol}^{-1}$	ρC_p	$1000 \text{ cal l}^{-1} \text{ K}^{-1}$
hA	$7 \times 10^5 \text{ cal min}^{-1} \text{ K}^{-1}$	$\rho_c C_{pc}$	$1000 \text{ cal l}^{-1} \text{ K}^{-1}$
k_1	$\Delta H k_0 / (\rho C_p)$	k_2	$\rho_c C_{pc} / (\rho C_p)$
k_3	$hA / (\rho_c C_{pc})$	$V(t)$	$[80, 110] \text{ l}$
$C_A(t)$	$[0,03, 0,12] \text{ mol l}^{-1}$	$T(t)$	$[440, 460] \text{ K}$
$Q_s(t)$	$[90, 110] \text{ l min}^{-1}$	$Q_c(t)$	$[80, 100] \text{ l min}^{-1}$
V_{lin}	$[80, 100, 110] \text{ l}$	T_{lin}	$[440, 450, 460] \text{ K}$

IV-B. Modelo LPV

En base a [16], el modelo LPV del proceso (obtenido empleando PJL con $n_l = 3$) tiene dos parámetros de ajuste, es decir $\rho(t) := [V(t) \ T(t)]$. Por lo tanto, hay nueve modelos LTI. Los puntos de linealización para estos modelos se obtienen de la combinación de los valores que se muestran en la última fila de la Tabla I, $(V_{\text{lin}}, T_{\text{lin}})$. Además, para fines de comparación, y para resaltar el comportamiento del controlador propuesto, se ha diseñado un MPC con modelo nominal (linealizado en los valores medios de V_{lin} y T_{lin}).

IV-C. Resultados

Los resultados de las simulaciones numéricas se lograron usando Matlab con el conjunto de herramientas Yalmip y Gurobi. Además, el modelo LPV del proceso CSTR, presentado en [16], se discretiza con un período de muestreo de $T_s = 3 \text{ s}$. Este modelo se utiliza para la síntesis del MPC, mientras que el modelo fenomenológico no lineal real (14) se usa para simular el comportamiento del proceso real. Seguidamente, *LPV-MPC* denota el método de MPC adaptativo propuesto, mientras que *MPC nominal* representa el MPC más simple, con un único modelo LTI del sistema CSTR (linealizado). El objetivo de seguimiento de referencia se establece en 100 l para el volumen y 450 K para la temperatura del reactor, garantizando las restricciones en x y u dadas en la Tabla I.

Es importante remarcar que el MPC nominal es solo capaz de alcanzar factibilidad con un horizonte de predicción de 22 pasos, mientras que el método LPV-MPC es sintonizado solo con $N = 5$ pasos. Esto significa, *a priori*, que el método LPV-MPC es numéricamente más efectivo, ya que necesita hacer una predicción de menos pasos hacia adelante, en cada instante de muestreo k .

Con respecto a esta discusión, la Fig. 1 muestra la evolución temporal del volumen de reacción, la concentración de reactivo y la temperatura del reactor con respecto a las señales de control aplicadas (Fig. 2). En estas, se observa cómo ambos métodos conducen al sistema hacia el punto de ajuste objetivo, mientras que el LPV-MPC conduce las variables de temperatura y concentración relativamente más rápido.

Con respecto al método propuesto, debe tenerse en cuenta que éste encuentra de manera eficiente, en línea, un mejor

modelo de predicción que el modelo LTI único (utilizado en el enfoque de MPC nominal), para cada instante de muestreo, a través de la variable de ajuste del modelo μ , cuya evolución en el tiempo (como se indica en el esquema MHE) se muestra en la Fig. 3.

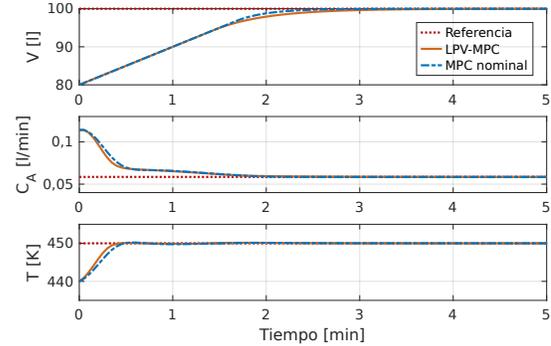


Figura 1. Volumen del reactor, concentración y temperatura.

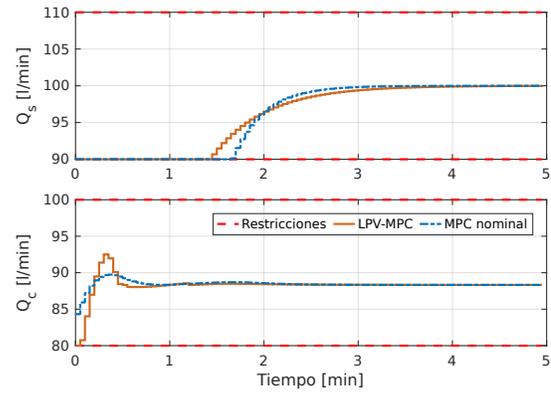


Figura 2. Caudal de salida del proceso y refrigerante.

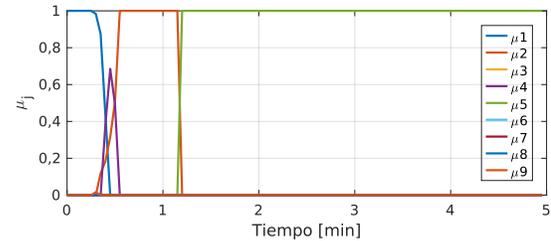


Figura 3. Evolución de la pertenencia de los modelos en el LPV-MPC.

La Fig. 4 muestra una vista 3D de la evolución de los estados y su convergencia al punto objetivo x_s , considerando el estado inicial $x_0 = [80 \ 0,114 \ 440]^T$ con la aplicación de ambos controladores. Además, ilustra el conjunto de restricción terminal para el LPV-MPC, que es invariante para los nueve modelos LTI.

De acuerdo con los resultados presentados en la Tabla II, considerando los índices IAE, ISE e ITAE³ para las variables

³Integral del Error Absoluto, Integral del Error Cuadrado e Integral del Error Absoluto ponderado en el Tiempo

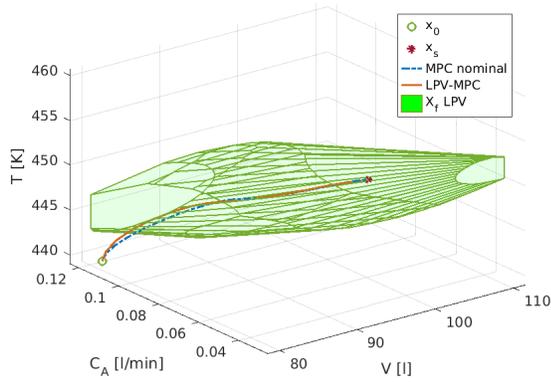


Figura 4. Conjunto invariante terminal y evolución de los estados del sistema.

controladas, queda claro que el método LPV-MPC produce en general mejores rendimientos que el MPC nominal, con respecto a T y C_A (que son los estados con términos no lineales e integran el objetivo de control principal)

Además, el índice de Esfuerzo de Cómputo en Línea (OCE), dado por el porcentaje del período de muestreo necesario para evaluar la solución de control⁴, muestra que el LPV-MPC es más rápido que el MPC nominal. Esto se debe al hecho de que el LPV-MPC tiene un horizonte de predicción más corto. Por lo tanto, parece razonable que, para aplicaciones en tiempo real, el LPV-MPC resulte un enfoque elegante y eficiente. Asimismo, el LPV-MPC tiene un mejor desempeño frente a los métodos LTI aproximados en sistemas con fuertes no linealidades, manteniendo una eficiencia computacional similar y considerablemente menor que los métodos NMPC. Debe observarse que un NMPC es muy costoso en términos de materia computacional, ya que necesita evaluar en línea las ecuaciones no lineales explícitas (consulte la discusión en [8]).

Tabla II
ÍNDICES DE RESULTADOS

		LPV-MPC	Nominal MPC
IAE	V	21,5927	20,5437
	C_A	0,0241	0,0254
	T	2,0175	2,5038
ITAE	V	17,0921	14,5321
	C_A	0,0117	0,0112
	T	0,55867	0,67665
ISE	V	269,7508	267,3395
	C_A	0,0007	0,0008
	T	12,62	15,8226
OCE		0,56%	0,67%

V. CONCLUSIÓN

Este artículo presenta una estrategia de MPC adaptativo para procesos no lineales, como el CSTR, el cual puede representarse con modelos LPV. Este algoritmo adaptativo simplifica la programación no lineal en un marco LTI utilizando una variable de ajuste para determinar el modelo que predice el

comportamiento futuro del sistema dentro del horizonte. Esta variable de ajuste se optimiza en línea, a través del MHE QP, para minimizar las discrepancias de modelado del proceso y su resultado se utiliza para el MPC QP, lo que garantiza la estabilidad asintótica y la factibilidad recursiva a través de un costo terminal basado en funciones de Lyapunov y una restricción de conjunto terminal invariante.

Además, este método se aplicó a un CSTR y se presentaron discusiones sobre el desempeño de esta estrategia en comparación con un MPC nominal. Para trabajos futuros, se incluirán métodos de filtrado (como la minimización de la norma H_2) en el procedimiento de diseño del MHE para obtener resultados de estimación de μ más uniformes.

AGRADECIMIENTOS

Los Autores agradecen a la *Universidad Tecnológica Nacional* y a la *CNPq* por financiar este trabajo bajo los proyectos *CNPq 401126/2014-5*, *CNPq 303702/2011-7*, *CNPq 305785/2015-0* y *CNPq 304032/2019-0*.

REFERENCIAS

- [1] J. M. Simkoff and M. Baldea, "Production scheduling and linear MPC: Complete integration via complementarity conditions," *Computers and Chemical Engineering*, vol. 125, pp. 287–305, 2019.
- [2] J. Normey-Rico and E. Camacho, *Control of dead-time processes*. Springer Science & Business Media, 2007.
- [3] E. F. Camacho and C. Bordons, *Model Predictive Control*. Springer, 2007.
- [4] F. Allgöwer and A. Zheng, *Nonlinear model predictive control*. Birkhäuser, 2012, vol. 26.
- [5] R. Quirynen, M. Vukov, M. Zanon, and M. Diehl, "Autogenerating microsecond solvers for nonlinear MPC: a tutorial using ACADO integrators," *Optimal Control Applications and Methods*, vol. 36, no. 5, pp. 685–704, 2015.
- [6] J. Mohammadpour and C. W. Scherer, *Control of linear parameter varying systems with applications*. Springer Science & Business Media, 2012.
- [7] O. Sename, P. Gaspar, and J. Bokor, *Robust control and linear parameter varying approaches: application to vehicle dynamics*. Springer, 2013, vol. 437.
- [8] M. M. Morato, J. E. Normey-Rico, and O. Sename, "Model predictive control design for linear parameter varying systems: A survey," *Annual Reviews in Control*, vol. 49, pp. 64–80, 2020.
- [9] H. A. Pipino, M. M. Morato, E. Bernardi, E. J. Adam, and J. E. Normey-Rico, "Nonlinear Temperature Regulation of Solar Collectors with a Fast Adaptive Polytopic LPV MPC Formulation," *Solar Energy*, vol. 209, pp. 214–225, 2020.
- [10] J. B. Rawlings and B. R. Bakshi, "Particle filtering and moving horizon estimation," *Computers & chemical engineering*, vol. 30, no. 10-12, pp. 1529–1541, 2006.
- [11] P. Kühn, M. Diehl, T. Kraus, J. P. Schlöder, and H. G. Bock, "A real-time algorithm for moving horizon state and parameter estimation," *Computers & chemical engineering*, vol. 35, no. 1, pp. 71–83, 2011.
- [12] D. Rotondo, *Advances in Gain- Scheduling and Fault Tolerant Control Techniques*. Springer International, 2018.
- [13] D. Limón, I. Alvarado, T. Alamo, and E. F. Camacho, "MPC for tracking piecewise constant references for constrained linear systems," *Automatica*, vol. 44, no. 9, pp. 2382–2387, 2008.
- [14] A. Ferramosca, D. Limon, I. Alvarado, T. Alamo, and E. F. Camacho, "Mpc for tracking of constrained nonlinear systems," in *Proceedings of the 48th IEEE Conference on Decision and Control held jointly with 28th Chinese Control Conference*, 2009, pp. 7978–7983.
- [15] H. A. Pipino and E. J. Adam, "MPC for linear systems with parametric uncertainty," *2019 18th Workshop on Information Processing and Control, RPIC 2019*, pp. 42–47, 2019.
- [16] E. Bernardi and E. J. Adam, "Reduced Order Observer Applied to a Linear Parameter Varying System with Unknown Input," *2018 Argentine Conference on Automatic Control, AAECA 2018*, no. 3, pp. 3–8, 2018.

⁴En un i5-3337U CPU@2.7 GHz (2 núcleos), con 8 GB de RAM.