



UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA NACIONAL
FACULTAD REGIONAL BAHÍA BLANCA

TESIS PRESENTADA PARA ACCEDER AL GRADO ACADÉMICO DE
DOCTOR EN INGENIERÍA
CON MENCIÓN EN MECÁNICA TEÓRICA Y APLICADA

**DISEÑO DE METAESTRUCTURA
PIEZOELÉCTRICA CURVA:
DESARROLLO DEL MODELO NUMÉRICO Y
ESTUDIO DINÁMICO**

LUCAS EMANUEL DI GIORGIO

BAHÍA BLANCA

ARGENTINA

AÑO 2020

Agradecimientos

Deseo agradecer en primer lugar al Dr. Marcelo Tulio Piovan, por haberme brindado la posibilidad de realizar este doctorado bajo su dirección, por sus consejos, entusiasmo y motivación durante todo el proceso, aún en los momentos más difíciles. Agradecido infinitamente por brindarme su conocimiento, pero más aún por su amistad. A mi co-directora de tesis y amiga la Dra Marta Vidal, quien me abrió las puertas de esta facultad, depositando su confianza en mí como docente y estando a mi lado en todo momento.

A mis compañeros y amigos del Centro de Investigación en Mecánica Teórica y Aplicada, Martín Sequeira, Adrián Azzurro, Víctor Cortínez, Patricia Dominguez, Cecilia Stoklas, Andrés Romero y Carlos Mainetti, por el apoyo y ayuda desinteresada, por las risas y los buenos momentos también, tan necesarios en este largo e intenso camino.

A la Facultad Regional Bahía Blanca y al Rectorado de UTN, por haberme brindado esta gran posibilidad de continuar mis estudios, y por el fundamental soporte económico, sin el cual nada de esto hubiese sido posible.

A mi esposa Flavia y mi hija Renata, que son el motor que me impulsa todos los días y por las que dejaría mi vida de ser necesario. En ellas encuentro la pausa, la calma, y el empuje necesario para lograr cualquier objetivo que me pueda proponer.

A mis viejos Jorge y Graciela, y a mi hermana Yamila por su apoyo incondicional en todas las aventuras en las que me sumerjo, estando siempre a mi lado, en especial durante esta etapa tan importante para mí.

Resumen

Los grandes avances de la ciencia y tecnología de la última década han permitido en la actualidad concebir distintos tipos de materiales y estructuras que a finales del siglo XX pertenecían únicamente al campo de posibilidades hipotéticas. Estas nuevas técnicas de manufactura han logrado que se retomasen estudios estructurales teóricos muy importantes del pasado, los cuales fueron discontinuados en su momento por la imposibilidad de implementación práctica. Este es el caso de las estructuras periódicas, las cuales lograron evolucionar en un tipo de estructura inteligente mediante el uso de elementos resonantes en su constitución. Estas nuevas estructuras se conocen hoy como *metaestructuras*, y han revolucionando el campo de la mecánica y acústica por su capacidad de absorber determinadas vibraciones de manera selectiva. Asimismo, dichos avances en la manufactura permiten trabajar con cerámicas piezoeléctricas en distintas topologías capaces de recrear la dinámica de una estructura resonante mecánica pura, pero de pequeñas dimensiones. De lo anterior surge la posibilidad de diseñar una metaestructura de pequeñas dimensiones basada en resonadores piezoeléctricos, la cual pueda ser utilizada como un dispositivo de absorción de vibraciones mecánicas, o como sensor y/o actuador dentro de un sistema de control, entre las posibles aplicaciones prácticas.

El propósito de este trabajo es el diseño de una nueva metaestructura electromecánica basada en piezoeléctricos y el desarrollo de un modelo computacional que permita el estudio de su comportamiento dinámico de manera precisa, considerando sus dimensiones reales y con un bajo costo computacional. El modelo debe contar con la capacidad de representar la curvatura de la estructura, de radio constante y en dos posibles planos geométricos (que contiene el caso de viga recta como caso particular). Este modelo además, debe permitir utilizar Materiales Graduados Funcionales como soporte de los piezoeléctricos, y lograr representar desplazamientos

en las tres dimensiones espaciales. Una vez desarrollado el modelo, se realizan inicialmente distintos tipos de estudios dinámicos determinísticos con el fin de analizar las características que la estructura posee, y luego una serie de estudios estadísticos paramétricos que permitan evaluar la propagación de incertidumbre de los parámetros más importantes del modelo hacia la dinámica del mismo. Finalmente, como parte del diseño de esta metaestructura, se realiza un estudio de optimización paramétrica considerando la geometría de la misma.

Abstract

Great advances in science and technology in the last decade have now made it possible to conceive different types of materials and structures that at the end of the 20th century only belonged to the field of hypothetical possibilities. These new manufacturing techniques have succeeded in taking up very important theoretical structural studies of the past, which were discontinued at the time due to the impossibility of practical implementation. This is the case of periodic structures, which managed to evolve into a type of intelligent structure through the use of resonant elements in their constitution. These new structures are known today as *metastructures*, and they have revolutionized the field of mechanics and acoustics due to their ability to absorb certain vibrations selectively. Likewise, these advances in manufacturing allow to work with piezoelectric ceramics in different topologies capable of recreating the dynamics of a pure mechanical resonant structure, but with small dimensions. From the above arises the possibility of designing a small-dimension metastructure based on piezoelectric resonators, which can be used as a mechanical vibration absorption device, or as a sensor and/or actuator within a control system, among the possible practical applications.

The purpose of this work is the design of a new electromechanical metastructure based on piezoelectrics and the development of a computational model that allows the study of its dynamic behavior in a precise way, considering its real dimensions and with a low computational cost. The model must have the ability to represent the curvature of the structure, of constant radius and in two possible geometric planes (containing the straight beam as particular case). This model should also allow the use of Functional Graded Materials as a support for piezoelectrics, and be able to represent displacements in the three spatial dimensions. Once the model has been developed, different types of deterministic dynamic studies are initially carried out in order to

analyze the behavior and dynamics features of the structure, and then a series of parametric statistical studies that allow evaluating the propagation of uncertainty of the most important parameters of the model towards its dynamics. Finally, as part of the design of this metastructure, parametric optimization study is carried out considering its geometry.

Índice general

Agradecimientos	I
Resumen	III
Abstract	VI
Índice General	VIII
Lista de Figuras	XII
Lista de Tablas	XVI
1. Introducción	1
1.1. Historia de los materiales y estructuras fonónicas	1
1.2. Concepto de metaestructura 1D	4
1.3. Antecedentes y marco histórico de metaestructuras 1D	7
1.4. Motivación	11
1.5. Objetivos	13
1.6. Metodología	13
1.7. Contenidos	14
2. Marco Conceptual de Referencia	16
2.1. Materiales piezoeléctricos	16
2.1.1. Introducción	16

2.1.2.	Modos de generación	17
2.1.3.	Ecuaciones constitutivas	17
2.1.4.	Energía almacenada en un piezoeléctrico	18
2.2.	Configuraciones de tipo unimorfo y bimorfo	20
2.2.1.	Introducción	20
2.2.2.	Conexión serie y paralelo	20
2.2.3.	Utilización como elemento sensor	21
2.2.4.	Utilización como elemento actuador	22
2.3.	Materiales Graduados Funcionales y Porosidad	22
2.3.1.	Introducción	22
2.3.2.	Modelado del Material Graduado Funcional	24
2.3.3.	Modelado de la porosidad del material	26
2.4.	Modelo analítico de metaestructura piezoeléctrica recta bajo concepción de Bernoulli-Euler	27
2.4.1.	Introducción	27
2.4.2.	Análisis modal	27
2.4.3.	Estimación del bandgap electroelástico	32
3.	Desarrollo del Modelo Dinámico	35
3.1.	Introducción	35
3.2.	Descripción de la metaestructura propuesta	36
3.3.	Hipótesis principales y campo de desplazamientos	37
3.4.	Campo de deformaciones	38
3.5.	Ecuaciones constitutivas	39
3.5.1.	Capa piezoeléctrica	39
3.5.2.	Capa sustrato	41
3.5.3.	Metaestructura	42
3.6.	Formulación débil	43
3.7.	Discretización en elementos finitos	45

<i>ÍNDICE GENERAL</i>	X
3.7.1. Introducción	45
3.7.2. Descripción del elemento finito	46
3.7.3. Matriz elemental de rigidez	47
3.7.4. Vector elemental de acoplamiento	48
3.7.5. Matriz elemental de masa	49
3.7.6. Capacidad elemental	50
3.8. Ensamble de las matrices y vectores elementales	51
3.9. Ensamble de los bloques resonadores	54
3.10. Movimiento de excitación desde la base	55
3.11. Sintonía de los bloques resonadores	56
4. Análisis Estadístico	58
4.1. Introducción	58
4.2. Enfoque Probabilístico Paramétrico	58
4.2.1. Método de Monte Carlo	59
4.2.2. Principio de Máxima Entropía	60
4.3. Modelo estocástico	61
5. Estudios Computacionales	64
5.1. Validaciones preliminares y estudios comparativos	64
5.2. Estudios paramétricos	68
5.2.1. Introducción	68
5.2.2. Frecuencia de sintonía $\{f_t\}$	69
5.2.3. Cantidad de resonadores $\{N_b\}$	69
5.2.4. Resistencia de carga $\{R_k\}$	72
5.2.5. Radio de curvatura $\{R\}$	74
5.2.6. Altura de la capa piezoeléctrica y sustrato $\{h_{pz}, h_s\}$	76
5.3. Movimiento de excitación desde la base con rotación	79
5.4. Estudios de propagación de incertidumbre	83
5.4.1. Introducción	83

<i>ÍNDICE GENERAL</i>	XI
5.4.2. Incertidumbre en los parámetros $\{\bar{c}_{11}^E, \bar{e}_{31}, \bar{\epsilon}_{33}^S\}$	84
5.4.3. Incertidumbre en los parámetros $\{b, h_{pz}, h_s\}$	98
5.4.4. Incertidumbre en los parámetros $\{L_k\}$	111
5.4.5. Convergencia de las simulaciones	116
6. Optimización de Metaestructura	117
6.1. Introducción	117
6.2. Método de punto interior	118
6.3. Caso de optimización de parámetros	119
7. Conclusiones	124
7.1. Sumario	124
7.2. Contribuciones de la tesis	127
7.3. Trabajos a futuro	127
7.4. Publicaciones realizadas	128
A. Ley de Difracción de Bragg	130
B. Teorema de Bloch	132
C. Método del Lugar de las Raíces	134
C.1. Concepto	134
C.2. Criterio del módulo	135
C.3. Criterio de la fase	136
C.4. Reglas de Evans	136
D. Movimiento de Excitación Desde la Base	138
E. Radio de Curvatura Variable	142
Bibliografía	145

Índice de figuras

1.1. Viga discretizada en arreglo de masa-resorte.	4
1.2. Arreglo de masa-resorte 1D con resonadores internos.	5
1.3. Curvas de dispersión para el arreglo 1D con resonadores internos para $\bar{m}_R = 0,125$, $\omega_0 = 1$, $\Omega_R = 1$. En línea negra cortada sin amortiguamiento y en línea sólida roja con amortiguamiento.	6
1.4. Metaestructura 1D sándwich con resonadores transversales.	7
1.5. Metaestructura 1D con resonadores transversales interconectados.	8
1.6. Metaestructura 1D con resonadores longitudinales tipo viga.	9
1.7. Metaestructura 1D con resonadores longitudinales simétricos tipo viga.	9
1.8. Metaestructura 1D con resonadores transversales electromecánicos.	10
1.9. Metaestructura 1D con resonadores transversales mecánicos y electromecánicos.	11
2.1. Modos de generación. (a) Modo d_{33} , (b) Modo d_{31}	17
2.2. Esquema de las distintas configuraciones. (a) Unimorfo, (b) Bimorfo serie, (c) Bimorfo paralelo	23
2.3. Tipos de MGF.	25
2.4. Curvas de transición según p	25
2.5. Tipos de porosidad	26
2.6. Esquema de la metaestructura piezoeléctrica simple.	27
2.7. $H_r(s)/Q_r(s)$ como sistema de lazo cerrado.	33
2.8. Lugar de las raíces para ω_r^2 con $\alpha = 1$	34

3.1. Esquema de la metaestructura curva.	36
3.2. Esquema de estructura tipo viga curva	37
3.3. Dimensiones de un elemento de la estructura.	51
4.1. Enfoque Probabilístico Paramétrico EPP.	59
5.1. Comparativa del modelo 1D y Comsol 3D. (a) Cortocircuito, (b) Circuito abierto.	66
5.2. Propagación y frecuencias vs N_b . (a) Modelo Sugino, (b) Modelo numérico 1D.	68
5.3. Propagación de vibraciones para diferentes frecuencias de sintonía.(a) $f_t = 2kHz$, (b) $f_t = 5kHz$, (c) $f_t = 8kHz$	70
5.4. Bandgap normalizado para diferentes f_t	71
5.5. Propagación y frecuencias vs N_b . (a) $f_t = 2,2kHz$, (b) $f_t = 5kHz$	72
5.6. Propagación para diferentes R_k de carga, incluyendo L_k	73
5.7. Propagación para diferentes valores de R_k de carga, en ausencia de L_k	73
5.8. Esquema de la curvaturas. (a) Tipo A, (b) Tipo B.	74
5.9. Propagación y frecuencias vs R/L para curvatura A. (a) Electrodo en cortocircuito, (b) Sintonizado a $\omega_t = 50 \omega_1$	75
5.10. Propagación para diferentes radios de curvatura Tipo A.	75
5.11. Propagación en curvatura Tipo B. Línea punteada para estructura recta, línea sólida para estructura curvada en relación $R/L=2$	76
5.12. Acoplamiento electromecánico α vs altura \hat{h} y rigidez γ . En línea punteada los valores máximos de α según el valor de \hat{h} o γ	77
5.13. Acoplamiento electromecánico α y ancho de bandgap $\Delta\omega/\omega$ vs altura \hat{h} , para los parámetros $\gamma = 1,1311$ y $\varepsilon = 0,1865$	78
5.14. Propagación para diferentes valores de h_{pz} manteniendo la relación $\hat{h} = 2$	79
5.15. Esquema de la dirección de excitación de la base.	80
5.16. Respuesta del modelo en distintas configuraciones para movimiento de excitación desde la base con rotación.	81
5.17. Respuesta del modelo curvo para movimiento de excitación desde la base con rotación.	82

5.18. Esquema del bandgap en la respuesta dinámica estocástica.	84
5.19. Respuesta del modelo estocástico para la variable aleatoria \bar{c}_{11}^E	89
5.20. Histogramas de la respuesta para la variable aleatoria \bar{c}_{11}^E . En los histogramas del bandgap, la línea negra indica valor determinístico, línea azul valor medio y línea roja valor efectivo.	90
5.21. Respuesta del modelo estocástico para la variable aleatoria \bar{e}_{31}	91
5.22. Histogramas de la respuesta para la variable aleatoria \bar{e}_{31} . En los histogramas del bandgap, la línea negra indica valor determinístico, línea azul valor medio y línea roja valor efectivo.	92
5.23. Respuesta del modelo estocástico para la variable aleatoria \bar{e}_{33}^S	93
5.24. Histogramas de la respuesta para la variable aleatoria \bar{e}_{33}^S . En los histogramas del bandgap, la línea negra indica valor determinístico, línea azul valor medio y línea roja valor efectivo.	94
5.25. Respuesta del modelo estocástico para la variable aleatoria \bar{c}_{11}^E , \bar{e}_{31} y \bar{e}_{33}^S	95
5.26. Histogramas de la respuesta para las variables aleatorias \bar{c}_{11}^E , \bar{e}_{31} y \bar{e}_{33}^S . En los histogramas del bandgap, la línea negra indica valor determinístico, línea azul valor medio y línea roja valor efectivo.	96
5.27. Sensibilidad del modelo frente a variaciones de \bar{c}_{11}^E , \bar{e}_{31} y \bar{e}_{33}^S	97
5.28. Respuesta del modelo estocástico para la variable aleatoria b	102
5.29. Histogramas de la respuesta para la variable aleatoria b . En los histogramas del bandgap, la línea negra indica valor determinístico, línea azul valor medio y línea roja valor efectivo.	103
5.30. Respuesta del modelo estocástico para la variable aleatoria h_{pz}	104
5.31. Histogramas de la respuesta para la variable aleatoria h_{pz} . En los histogramas del bandgap, la línea negra indica valor determinístico, línea azul valor medio y línea roja valor efectivo.	105
5.32. Respuesta del modelo estocástico para la variable aleatoria h_s	106

5.33. Histogramas de la respuesta para la variable aleatoria h_s . En los histogramas del bandgap, la línea negra indica valor determinístico, línea azul valor medio y línea roja valor efectivo.	107
5.34. Respuesta del modelo estocástico para la variable aleatoria b, h_{pz} y h_s	108
5.35. Histogramas de la respuesta para las variables aleatorias b, h_{pz} y h_s . En los histogramas del bandgap, la línea negra indica valor determinístico, línea azul valor medio y línea roja valor efectivo.	109
5.36. Sensibilidad del modelo frente a variaciones de b, h_{pz} y h_s	110
5.37. Respuesta del modelo estocástico para las variables aleatorias L_k	113
5.38. Histogramas de la respuesta para las variables aleatorias L_k . En los histogramas del bandgap, la línea negra indica valor determinístico, línea azul valor medio y línea roja valor efectivo.	114
5.39. Sensibilidad del modelo frente a variaciones de L_k	115
5.40. Comparación de la respuesta dinámica determinística con una simulación de Monte Carlo para distintos coeficientes de variación. (a) Respuesta determinística, (b) CV=0,01, (c) CV=0,03, (d) CV=0,05.	115
5.41. Convergencia de las distintas simulaciones. En azul CV=0,01 - rojo CV=0,03 - amarillo CV=0,05.	116
6.1. Propagación y frecuencias vs N_b utilizando PZT-5H.	123
A.1. Esquema de interferencias: (a) Constructiva, (b) Destructiva.	131
C.1. Esquema de un sistema de lazo cerrado.	135
D.1. Viga cantilever bajo movimiento de excitación desde la base.	139

Índice de tablas

5.1. Propiedades materiales del alúmina y el aluminio.	64
5.2. Comparación simulando solo el sustrato de MGFP.	65
5.3. Propiedades materiales del PZT-5A y el aluminio.	65
5.4. Comparación simulando solo un bloque bimorfo.	66
5.5. Bandgap analítico de Sugino vs computacional del presente modelo.	71
5.6. Ancho de bandgap analítico de Sugino vs el presente modelo para $\hat{h} = 2$	78
5.7. Frecuencias naturales de cortocircuito para la metaestructura recta y curva.	81
6.1. Propiedades materiales de las cerámicas PZT-5A y PZT-5H.	122
6.2. Valores optimizados para el ejemplo 1.	123

Capítulo 1

Introducción

1.1. Historia de los materiales y estructuras fonónicas

Los materiales o estructuras periódicas son aquellas que exhiben alguna forma de periodicidad espacial en las fases materiales constituyentes, en la geometría interna, o en las condiciones de contorno. El estudio de materiales y estructuras periódicas tiene una larga historia en el campo de las vibraciones y la acústica, con orígenes que se remontan al primer intento de Newton por describir la propagación del sonido en el aire (Newton, 1686) y al estudio temprano de las estructuras periódicas continuas realizado por Rayleigh y Strutt (1945). Observando de cerca el estudio de los sistemas periódicos en el último medio siglo, encontramos que los investigadores en vibraciones y acústica, y la comunidad de dinámica estructural en general, han realizado una gran cantidad de trabajos sobre los fundamentos teóricos, conceptos y técnicas de análisis, que son relevantes para los sistemas periódicos en otras disciplinas no mecánicas. Podría decirse que una de las aplicaciones más motivadoras en mecánica de materiales, la cual se remonta a la década del 1950 y continúa en la actualidad, es el área de materiales compuestos, convenientemente modelados como materiales periódicos (Sun *et al.*, 1968; Nemat-Nasser, 1972). En el área de la ingeniería estructural, Cremer y Leilich fueron de los primeros en investigar el movimiento de ondas armónicas de flexión a lo largo de una viga periódica 1D (Cremer y Leilich, 1953). La periodicidad fue introducida por apoyos simples o por masas puntuales ubicadas a

intervalos regulares. El haz periódico es un ejemplo de un sistema periódico monoacoplado mediante el cual cada celda unitaria se comunica con sus vecinas a través de un solo grado de libertad. Por tanto, sus características de onda a cualquier frecuencia se describen mediante un modo de onda única, con solo un par de constantes de propagación iguales y opuestas (Heckl, 1961, 1964; Ungar, 1966).

La noción de *fonón* surge con el estudio de vibraciones en una red cristalina. Definido formalmente como un cuanto de energía vibratoria en un medio elástico, que puede interpretarse como una cantidad discreta de sonido similar a una partícula en un sólido, el término también se ha asociado con las vibraciones y la acústica ondulatoria clásica, principalmente en el contexto de los medios periódicos. Posteriormente, se ha vuelto habitual referirse a un material o estructura periódica, incluso para estructuras de gran escala ingenieril, como un *material fonónico* o una *estructura fonónica*. Luego de los cristales fonónicos a principios de la década de 1990, el interés en los materiales periódicos recibió otro avance a principios de la década de 2000 con el surgimiento de un nuevo material fonónico, denominado metamaterial acústico o elástico, en analogía con un metamaterial electromagnético. En este contexto la palabra *metamaterial*, con el prefijo griego *meta*: *más allá o por encima* implicaría una característica superior del comportamiento mecánico de la estructura o del material. Esto está relacionado con la comprensión de que los metamateriales exhiben propiedades que generalmente se consideran, van más allá de lo que se espera encontrar en materiales naturales o convencionales. Ejemplos de tales propiedades inusuales incluyen la generación de una banda prohibida, denominada *bandgap*, de sublongitud de onda y refracción negativa. En los metamateriales acústicos/elásticos y metaestructuras, el *bandgap* se presenta en el espectro en frecuencia de la propagación de ondas vibratorias a través del mismo, como una zona de atenuación total o parcial carente de frecuencias de resonancia. Una característica clave de estas estructuras es la presencia de resonancia local. Un artículo fundamental que ha introducido una realización conceptual de un metamaterial acústico fue publicado por Liu *et al.* (2000). En este documento, se apiló una matriz 3D de esferas de plomo recubiertas con una capa de caucho de silicona de 2,5 mm en una disposición cúbica simple dentro de una matriz epoxi. La constante de red del sistema de material periódico fue de 1,55 cm. Tras la excitación con ondas acústicas, se reveló que el medio exhibía un *bandgap* en una

longitud de onda muy por debajo del régimen correspondiente a la generación de banda prohibida basada en la periodicidad espacial de las áreas de desajuste de impedancia, lo que conduce a la *difracción de Bragg*. Además, se demostró que la estructura resonante localizada hace que el material se comporte como si sus constantes elásticas efectivas fueran negativas en ciertos rangos de frecuencia (más precisamente en las frecuencias alrededor del bandgap, asociadas con las resonancias locales).

Varios autores han realizado estudios sobre distintos tipos de metamateriales de resonancia local puramente mecánicos, basándose en diferentes métodos que permiten obtener el modelo de respuesta. Entre estos métodos se encuentran, el método de expansión de onda plana (Dal Poggetto y Serpa, 2020; Miranda Jr *et al.*, 2020), el método de matriz de transferencia (Gnawali *et al.*, 2020; Zhu *et al.*, 2014), el método de elementos finitos (Baravelli y Ruzzene, 2013; Matlack *et al.*, 2016; Nouh *et al.*, 2015; Oudich *et al.*, 2011; Wang *et al.*, 2014; Yang *et al.*, 2008) y el análisis modal (Meng *et al.*, 2020; Aladwani y Nouh, 2020). Una aplicación obvia de este tipo de materiales es el aislamiento acústico y de vibraciones, especialmente si puede realizarse en una banda de frecuencias relativamente amplia (Ho *et al.*, 2003; Ding y Zhao, 2011; Bilal y Hussein, 2013). Puede anticiparse la aplicación de este concepto a la insonorización en edificios, la minimización de vibraciones en estructuras de vehículos y electrodomésticos, la mitigación de impactos en equipos blindados, etc. Además del aislamiento, donde es normal la reflexión, los investigadores han considerado los metamateriales con el objetivo de generar absorción de la onda sonora, minimizando así la reflexión (Hong-Gang *et al.*, 2006; Romero-García *et al.*, 2011; Mei *et al.*, 2012).

Otros investigadores han explorado últimamente el uso de elementos piezoeléctricos, derivados a circuitos resonantes, para la formación de bandgap en la respuesta dinámica de la estructura (Airoidi y Ruzzene, 2011; Bergamini *et al.*, 2015; Casadei *et al.*, 2009; Jin *et al.*, 2014; Senesi y Ruzzene, 2011; Sugino *et al.*, 2017). Estos resonadores electromecánicos tienen el beneficio de requisitos de masa significativamente menores que los resonadores de resorte de masa puramente mecánicos. Cuando muchos de estos resonadores electromecánicos se colocan en una estructura, en analogía con una metaestructura resonante puramente mecánica, la estructura puede exhibir un bandgap electromecánico resonante, cuyo tamaño depende princi-

palmente del acoplamiento electromecánico a nivel del sistema (Sugino *et al.*, 2017).

1.2. Concepto de metaestructura 1D

Según Brillouin (1953), el primer trabajo en una red unidimensional periódica (1D) es el resultado del intento de Newton para derivar la fórmula de la velocidad del sonido en el aire. Se puede especular que un enfoque natural habría consistido en discretizar los medios continuos que soportan la propagación del sonido en una serie de masas condensadas conectadas por un resorte o elemento elástico condensado equivalente. Estos elementos condensados (masa y resorte) sintetizan la inercia másica y la elasticidad de una parte del medio continuo. La Figura 1.1 muestra este proceso, el cual conduce a un sistema periódico que tiene un comportamiento ondulatorio más complejo que el sistema continuo original. El mismo sistema fue investigado más tarde por John Bernoulli y su hijo Daniel, quienes en una serie de estudios que comenzaron en 1727, demostraron que un sistema de N masas se caracteriza por N modos de vibración y frecuencias asociadas, formulando esencialmente el principio de superposición.

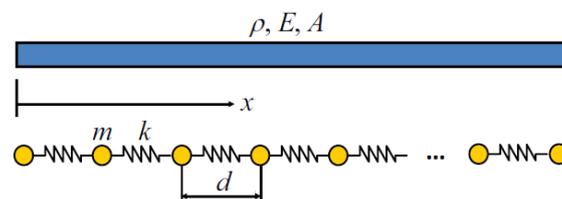


Figura 1.1: Viga discretizada en arreglo de masa-resorte.

La Figura 1.2 muestra una variante al arreglo 1D anterior, el cual consiste en la adición de un oscilador de segundo orden de constante elástica k_R y masa m_R , conectado a cada una de las masas que componen el arreglo. Esto conduce a una configuración caracterizada por resonancias internas centradas en la frecuencia de resonancia de los osciladores, i.e. $\omega_R = \sqrt{k_R/m_R}$, produciendo un bandgap en las proximidades de ω_R . En contraste con los bandgaps para las redes estándar, la brecha de resonancia interna no está relacionada con la longitud de onda y, por lo tanto, se puede producir a frecuencias arbitrariamente bajas. Los bandgaps observados en

las redes estándar solo ocurren en longitudes de onda del orden del tamaño de la celda unitaria y están estrictamente restringidas por las dimensiones de esta celda. Estos son el resultado de la interferencia generada por la interacción de ondas incidentes y de difracción en los límites de la celda unitaria, fenómeno que se conoce como difracción de Bragg (ver Anexo A). La naturaleza independiente de la longitud de onda de los bandgaps de resonancia interna tiene importantes implicaciones, motivando estudios para su implementación práctica (Liu *et al.*, 2000), así como interpretaciones en términos de masa negativa, las cuales pueden encontrarse en (Huang *et al.*, 2009; Huang y Sun, 2009, 2011).

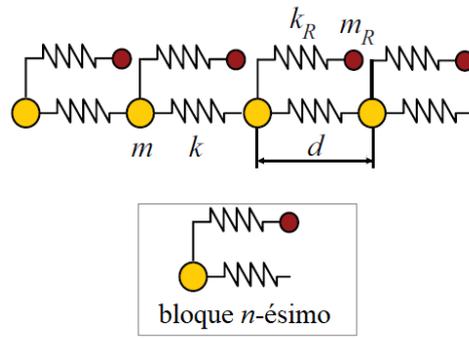


Figura 1.2: Arreglo de masa-resorte 1D con resonadores internos.

El análisis de las propiedades de dispersión de la cadena 1D de la Figura 1.2 se realiza considerando el movimiento de la celda unitaria n , que se rige por las siguientes ecuaciones de movimiento:

$$\begin{aligned} (-\omega^2 m + 2k)u_n - k(u_{n-1} + u_{n+1}) - k_R(u_{R_n} - u_n) &= 0 \\ (-\omega^2 m_R + k_R)u_{R_n} - k_R u_n &= 0 \end{aligned} \quad (1.1)$$

donde k_R y m_R son la constante del resorte y la masa del oscilador respectivamente, mientras que u_{R_n} es el grado de libertad asociado. El sistema de ecuaciones (1.1) puede combinarse de la siguiente manera:

$$\left(-\omega^2 m + 2k - \frac{k_R^2}{k_R - \omega^2 m_R} + k_R\right)u_n - k(u_{n-1} + u_{n+1}) = 0. \quad (1.2)$$

Aplicando el teorema de Bloch (ver Anexo B) y algunas manipulaciones algebraicas se obtiene la siguiente relación de dispersión:

$$2(1 - \cos(\mu)) - \Omega^2 \left(1 + \frac{\bar{m}_R}{1 - \Omega^2/\Omega_R^2}\right) = 0 \quad (1.3)$$

donde μ es el número de onda, $\Omega = \omega/\omega_0$ y $\Omega_R = \omega_R/\omega_0$ siendo $\omega_0 = \sqrt{k/m}$, mientras que $\bar{m}_R = m_R/m$ define la relación entre la masa del resonador y la asociada con la cadena primaria. La solución de la ecuación (1.3) para los valores de frecuencia asignados proporciona las partes real e imaginaria del número de onda μ , donde la parte real representa el parámetro de atenuación [Np/m] y la imaginaria el parámetro de fase [rad/m]. La presencia de los resonadores internos hace que la curva de dispersión se divida en dos ramas separadas, entre las cuales se observa la zona de bandgap, centrado en la frecuencia de sintonía Ω_R , sobre un rango que también se destaca por el parámetro de atenuación distinto de cero (Figura 1.3). La frecuencia de resonancia Ω_R puede seleccionarse o "sintonizarse" para obtener atenuación en una banda deseada, sin ninguna restricción impuesta por la longitud de onda. Por supuesto en la práctica la atenuación de baja frecuencia requiere grandes valores de masa y/o baja rigidez, lo que plantea un desafío de implementación cuando se trata de estructuras puramente mecánicas.

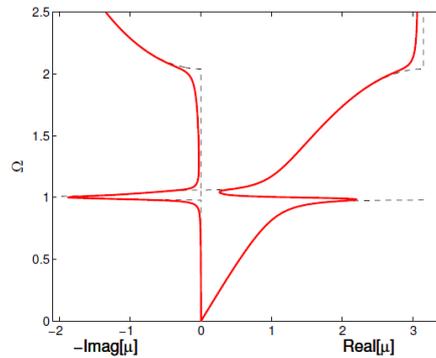


Figura 1.3: Curvas de dispersión para el arreglo 1D con resonadores internos para $\bar{m}_R = 0,125$, $\omega_0 = 1$, $\Omega_R = 1$. En línea negra cortada sin amortiguamiento y en línea sólida roja con amortiguamiento.

1.3. Antecedentes y marco histórico de metaestructuras 1D

Existen diversos tipos de metaestructuras o metamateriales elásticos en el campo de la investigación, los cuales abarcan desde configuraciones unidimensionales, mayoritariamente del tipo viga, bidimensionales del tipo platos, hasta llegar a los arreglos volumétricos o tridimensionales. El concepto de metaestructura elástica unidimensional, introducido en la sección anterior, se basa en una estructura lineal periódica constituida por celdas unitarias, las cuales están dotadas de un oscilador o elemento resonante asociado. Es posible encontrar en la literatura metaestructuras mecánicas puras, donde la estructura y los elementos resonadores son exclusivamente mecánicos, o metaestructuras del tipo electromecánicas, las cuales están provistas de elementos electromecánicos a modo de transductor, permitiendo un vínculo entre la energía mecánica y eléctrica. Este último normalmente formula el elemento resonador de la celda de manera electromecánica, evitando así el uso de masas considerables en los mismos.

Las metaestructuras elásticas unidimensionales suelen ser del tipo viga, donde los resonadores se disponen de manera transversal o longitudinal, permitiendo compensar vibraciones en flexión o axiales respectivamente. La Figura 1.4 representa el esquema de la metaestructura de resonadores transversales propuesta por Sharma y Sun (2016). Esta estructura es del tipo sandwich, donde se intercalan de manera equidistante los resonadores masa-resorte en alojamientos del núcleo. La configuración propuesta consigue generar un bandgap en la respuesta dinámica de la propagación vibratoria flexural a una frecuencia $\omega_0 = \sqrt{k/m}$, donde m y k corresponden a la masa y constante elástica de cada resonador.

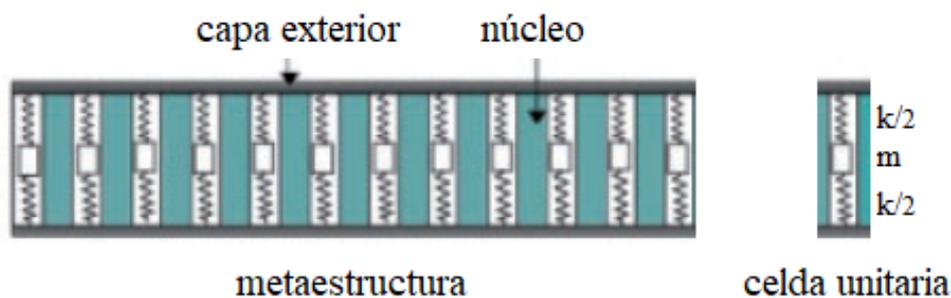


Figura 1.4: Metaestructura 1D sándwich con resonadores transversales.

Otro ejemplo interesante de compensación vibratoria flexural puede observarse en la Figura 1.5 correspondiente al trabajo de Beli *et al.* (2018). Esta metaestructura tipo viga cuenta con resonadores masa-resorte en configuración trasversal, de manera similar a la metaestructura de Sharma (resortes k_1), pero interconectando las masas de los resonadores mediante un vínculo elástico (resortes k_2). Esta particularidad le permite a la estructura generar dos bandgaps flexurales, uno amplio a la frecuencia de resonancia de los resonadores independientes, y otro mas pequeño en una frecuencia superior.

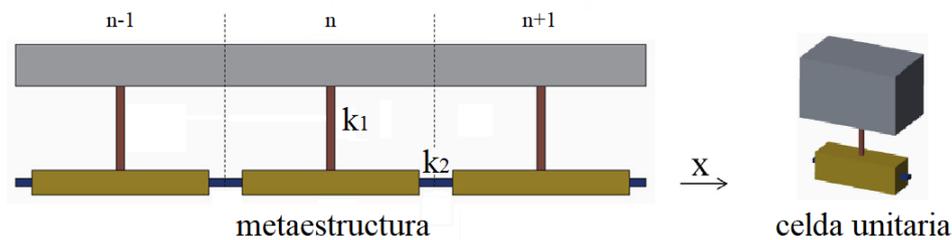


Figura 1.5: Metaestructura 1D con resonadores transversales interconectados.

En lo que respecta a metaestructuras unidimensionales para compensación vibratoria de tipo axial, podemos referirnos inicialmente a la estructura de la Figura 1.6, correspondiente al trabajo de Qureshi *et al.* (2016). En este caso los resonadores mecánicos se componen de pequeñas vigas las cuales se encuentran vinculadas a la estructura por el extremo inferior, y sujetan una masa en el extremo superior. Las vibraciones axiales de esta estructura se transmiten a los resonadores haciendo que las pequeñas vigas que los componen trabajen en flexión. Estos resonadores actúan como un sistema masa-resorte en configuración axial, análogo al esquema mostrado en la Figura 1.2, consiguiendo generar un bandgap en la respuesta dinámica a una frecuencia $\omega_0 = \sqrt{k/m}$, donde la “constante elástica del resorte” está dada por $k = 3EI_z/L^3$ y la masa asociada al resonador es m_2 .

La metaestructura de la Figura 1.7 pertenece al trabajo realizado por Beli *et al.* (2019) y se basa nuevamente en la idea de resonadores longitudinales tipo viga, con algunos cambios estructurales que le permiten mejorar ampliamente la respuesta dinámica. Estas mejoras se componen de un soporte tipo H a fin de incrementar la rigidez flexural, minimizando vibraciones que no

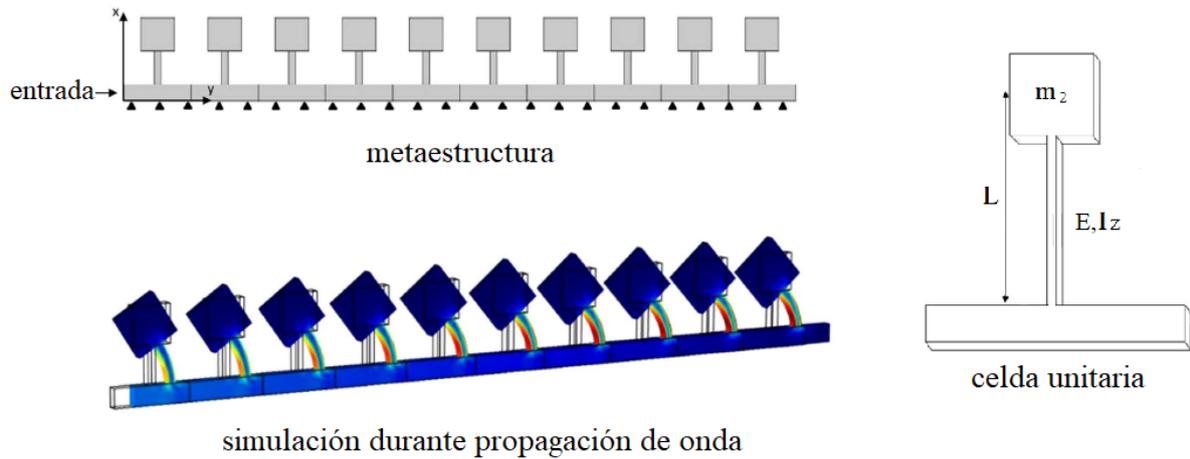


Figura 1.6: Metaestructura 1D con resonadores longitudinales tipo viga.

pueden ser compensadas, y una nueva disposición de los resonadores, ubicados simétricamente sobre ambos lados del perfil, que permiten reducir el tamaño de las masas y mitigan el momento que los mismos ejercen sobre la viga.

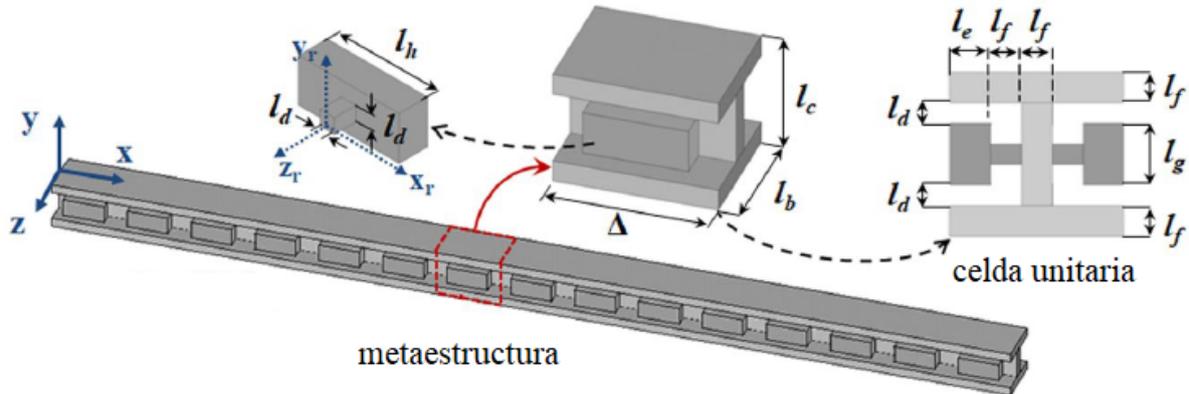


Figura 1.7: Metaestructura 1D con resonadores longitudinales simétricos tipo viga.

En el caso de las metaestructuras elásticas electromecánicas unidimensionales de tipo viga, las mismas se basan en amortiguación piezoeléctrica en su totalidad. El esquema de Figura 1.8 muestra una metaestructura de este tipo perteneciente al trabajo de Sugino *et al.* (2017). En

la misma, las celdas unitarias son del tipo sandwich, donde las capas externas se conforman de material piezoeléctrico, mientras que el núcleo puede construirse en cualquier tipo material con o sin propiedades eléctricas. En esta configuración, las vibraciones armónicas flexurales de la viga se traducen en energía eléctrica que fluye hacia cada una de las inductancias L_j . Éstas se encargan de almacenar y reintegrar la energía eléctrica a los piezoeléctricos, quienes nuevamente la transforman en vibraciones flexurales, generando de esta manera una resonancia similar a la que producen el sistema masa-resorte en configuración transversal. De esta manera, la metaestructura es capaz de generar bandgap flexural a una frecuencia dependiente del valor de L_j . Si bien existen en la bibliografía algunos ejemplos de metaestructuras electromecánicas elásticas utilizando otro tipo de transductor, las mismas son estructuras más complejas, y no pertenecen al subgrupo de vigas. Esto se debe a que el material piezoeléctrico es el transductor electromecánico más compacto que existe en la actualidad, particularidad que le permite generar el efecto resonante sin necesidad de recurrir a estructuras complejas.

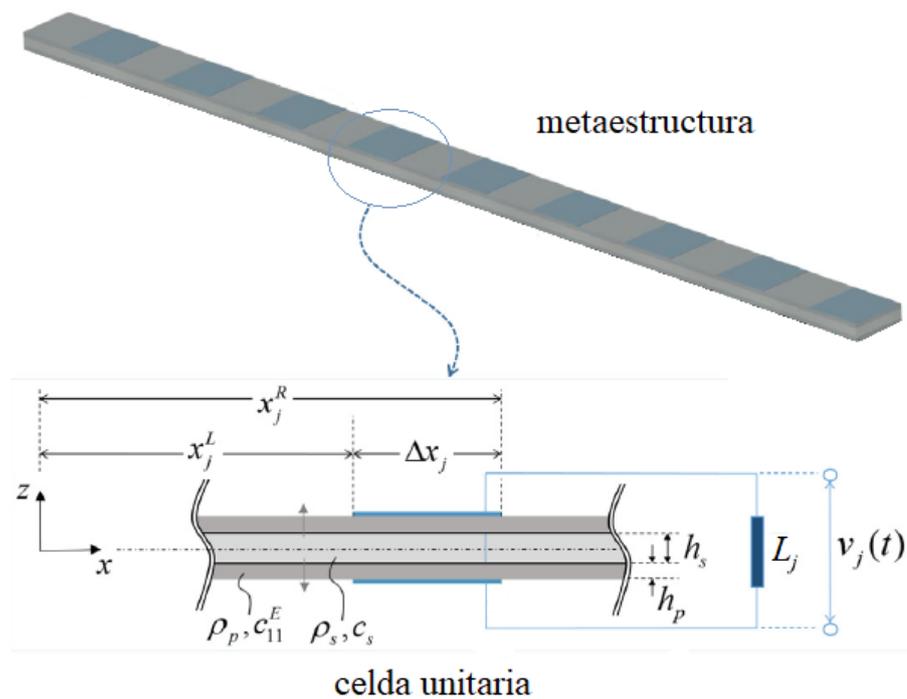


Figura 1.8: Metaestructura 1D con resonadores transversales electromecánicos.

Pueden encontrarse en la literatura además, metaestructuras tipo viga que surgen de distintas combinaciones de las configuraciones anteriores, con el fin de lograr múltiples zonas de bandgap, o compensaciones de distintos modos de vibración. Un ejemplo de estas combinaciones puede observarse en la Figura 1.9 perteneciente al trabajo de Sugino *et al.* (2018). En la misma se combina resonancia piezoeléctrica con resonadores masa-resortes transversales. Esta combinación permite a la metaestructura generar dos bandgaps flexurales independientes, uno mecánico puro a frecuencia $\omega_1 = f(k_j, m_j)$, y otro electromecánico a frecuencia $\omega_2 = f(L_j)$.

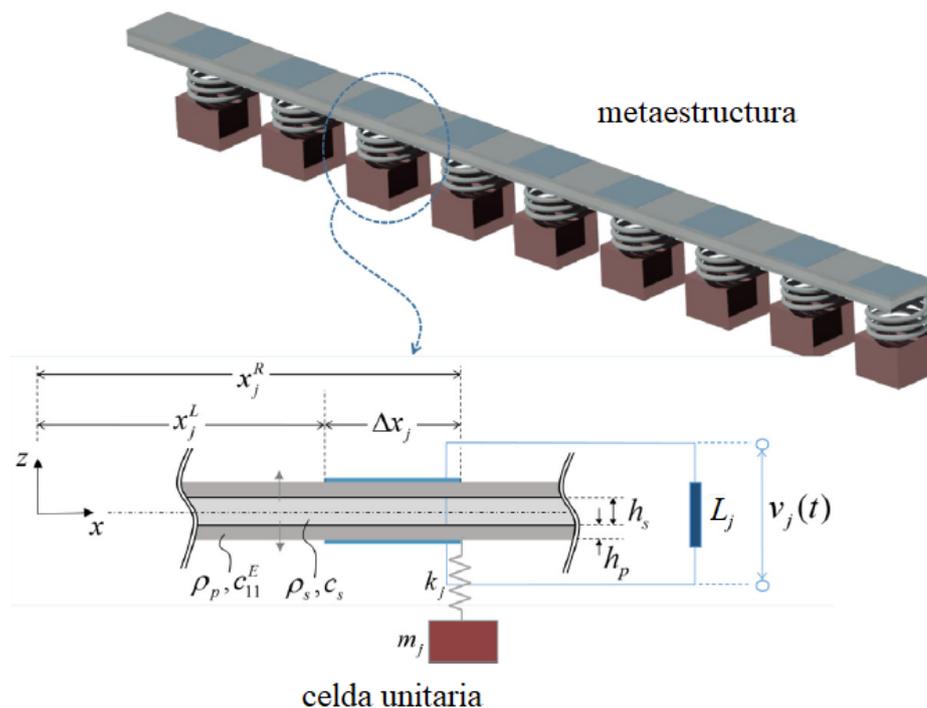


Figura 1.9: Metaestructura 1D con resonadores trasversales mecánicos y electromecánicos.

1.4. Motivación

Las estructuras con amortiguación piezoeléctrica son de considerable interés debido a su capacidad de reducir vibraciones sin necesidad de utilizar masas considerables, problema típico de las estructuras puramente mecánicas (Lesieutre, 1998; Hagood y von Flotow, 1991). Bajo

este concepto, puede reproducirse el comportamiento de un resonador mecánico puro mediante resonadores electromecánicos en base a piezoeléctricos, derivando en metaestructuras elásticas electromecánicas tipo viga. Si bien el desarrollo de estas metaestructuras es reciente, no existen en la bibliografía modelos estructurales de este tipo que contemplen una posible curvatura de la estructura. Es bien sabido que existen infinidad de aplicaciones que utilizan estructuras curvas de todo tipo (p.e. soportes de rotores, rodamientos de grandes instalaciones: radares, telescopios, equipamiento aeroespacial, etc.), por lo que resulta importante entonces, contar con un modelo dinámico unidimensional de metaestructura piezoeléctrica curva que permita predecir la respuesta dinámica de manera precisa y con un bajo costo computacional. Teniendo en cuenta además, que el material piezoeléctrico es del tipo anisótropo, la posibilidad de contemplar distintas curvaturas en la estructura elevarían la utilidad y alcance del modelo. Asimismo, dicho modelo debe ser capaz de reproducir desplazamientos en las 3 dimensiones espaciales, permitiendo el análisis de la mayor cantidad de modos de vibración posible, sean éstos afectados por los resonadores o no, a fin de lograr una respuesta dinámica más representativa. Considerando también la inclusión de materiales graduados funcionales en la capa eléctricamente inerte de la estructura, resultaría en un nuevo diseño de metaestructura con un alto potencial de estudio.

Un enfoque típico para el modelado de una estructura periódica es considerarla infinita o semi-infinita, permitiendo la utilización del teorema de Floquet-Bloch (Bloch, 1929), que rige la propagación de ondas planas en un medio periódico. Este teorema implica que el cambio en la amplitud de onda que se produce de una celda a otra no depende de la ubicación de la celda dentro del retículo, en la medida en que la celda unitaria es simplemente un componente de un retículo infinito. Sin embargo, las dimensiones finitas de estos dispositivos, exigen que el estudio de su dinámica se realice mediante un modelo que incorpore tanto sus dimensiones reales, como también a las condiciones de borde efectivas. En este contexto, es de capital importancia contar con un nuevo modelo dinámico de la metaestructura en cuestión, que contemple los requisitos expuestos hasta el momento y que sea de bajo costo computacional, de manera que permita realizar estudios dinámicos de tipo determinísticos, estocásticos referidos a propagación de incertidumbre, como también optimización de comportamiento dinámico.

1.5. Objetivos

El objetivo principal del presente trabajo de investigación reside en desarrollar un modelo computacional que permita predecir la dinámica de estado estacionario de una metaestructura curva creada con materiales piezoeléctricos y graduados funcionales. Este modelo debe ser capaz de representar desplazamientos en las tres dimensiones espaciales con un bajo costo computacional.

A raíz de este objetivo principal se deslindan los siguientes objetivos secundarios:

- Realizar estudios dinámicos que permitan evaluar el rol de los parámetros más importantes del modelo en respuesta dinámica de la metaestructura.
- Realizar estudios de propagación de incertidumbre con el fin de evaluar la sensibilidad de la respuesta dinámica de la metaestructura a la variación de algunos parámetros del modelo.
- Realizar un estudio de optimización referido a parámetros de modelación de la metaestructura a fin de lograr el mejor desempeño dinámico posible en función de las restricciones que se impongan.

1.6. Metodología

La metodología de investigación y de desarrollo de los contenidos de la tesis se concentra en los aspectos teóricos de la mecánica de materiales, bajo la idealización de teorías técnicas de vigas. Posteriormente se construye el modelo computacional en base a la precedente teoría. En resumidas cuentas las etapas metodológicas se sintetizan en los siguientes puntos:

- Inicialmente se propone el diseño de la metaestructura y se enuncian las hipótesis constitutivas del modelo dinámico unidimensional, las cuales se basan en la teoría de Timoshenko y la elasticidad lineal, considerando la curvatura y el alabeo de la estructura.

- A partir de las hipótesis anteriores se proponen el campo de desplazamientos considerando el primer tipo de curvatura posible y el campo de deformaciones en la línea expresado coordenadas curvilíneas. Luego, se introducen las ecuaciones constitutivas de los materiales involucrados, reducidas al modelo de viga esbelta.
- Se obtiene previamente la formulación débil del modelo dinámico de estado estacionario a partir del Principio de Hamilton para sistemas electromecánicos. Acto seguido, se desarrolla la formulación en elementos finitos del modelo mediante la discretización de la formulación débil, utilizando elementos isoparamétricos de tres nodos y funciones de forma cuadráticas.
- Se construye el modelo probabilístico a partir de la formulación de elementos finitos del modelo determinístico, considerando como variables aleatorias a los parámetros que pueden variar debido a incertidumbre en la construcción de la estructura. Estas variables aleatorias son representadas por funciones de densidad de probabilidad obtenidas mediante el principio de Máxima Entropía.
- Finalmente se procede a la validación del modelo comparando su respuesta dinámica frente a distintas realizaciones, se efectúan los distintos estudios dinámicos paramétricos y de propagación de incertidumbre incluidos en los objetivos de este trabajo y se expone un ejemplo de optimización paramétrica basado en una posible aplicación práctica.

1.7. Contenidos

El presente trabajo de tesis doctoral se encuentra organizado de la siguiente manera:

- * *Capítulo 1:* Se presentan las características generales de la investigación, se describe la motivación que originó el estudio, se presentan los objetivos y alcances del mismo, y la metodología a utilizar en su desarrollo.
- * *Capítulo 2:* Se introducen algunos conceptos necesarios para el desarrollo de la investigación. Entre ellos se encuentran una breve descripción de los materiales piezoeléctricos

y sus configuraciones, se introduce el concepto de material graduado funcional poroso, y se realiza el análisis modal de una metaestructura piezoeléctrica básica a fin de exponer algunos aspectos importantes de este tipo de estructuras.

- * *Capítulo 3:* Se realiza la descripción de la metaestructura piezoeléctrica curva propuesta. Se introducen las hipótesis del modelo dinámico y se obtienen las ecuaciones del mismo, inicialmente en una formulación débil, y finalmente de manera computacional mediante una discretización en elementos finitos.
- * *Capítulo 4:* Se presenta la metodología del análisis estadístico de propagación y cuantificación de incertidumbre, y los principios utilizados para el desarrollo del modelo estocástico de la metaestructura.
- * *Capítulo 5:* Se realiza la validación del modelo dinámico computacional obtenido frente a distintas realizaciones. Se efectúa un análisis determinístico con motivo de comprender la influencia de algunos parámetros importantes del modelo en la respuesta dinámica. Se realiza un estudio de propagación de incertidumbre paramétrica a modo de evaluar la sensibilidad del modelo frente a variaciones de distintos parámetros de interés.
- * *Capítulo 6:* Se realiza la optimización de los parámetros constructivos de la metaestructura a fin de obtener el mejor desempeño dinámico posible, en función de las especificaciones previas de construcción.
- * *Capítulo 7:* Se exponen las conclusiones del trabajo, incluyendo un resumen de los estudios realizados, los aportes fundamentales de la presente tesis, las publicaciones derivadas de la misma, y las recomendaciones para trabajos futuros.

Capítulo 2

Marco Conceptual de Referencia

2.1. Materiales piezoeléctricos

2.1.1. Introducción

Los materiales piezoeléctricos (del griego *piezein*: presionar) producen el llamado efecto piezoeléctrico, que históricamente se divide en dos fenómenos: el *directo*, que implica una polarización eléctrica del material cuando se lo deforma mecánicamente; y el *inverso*, donde el material se deforma mecánicamente cuando está sometido a una polarización eléctrica. La teoría de piezoelectricidad lineal considera lineal la relación entre la polarización y la deformación.

En la primera mitad del siglo pasado se observó que varios cristales naturales exhibían el efecto piezoeléctrico, por ejemplo, la sal de Rochelle, el cuarzo, etc (Voigt, 1928). Sin embargo, las aplicaciones de ingeniería requieren de un fuerte acoplamiento electromecánico del material. Las cerámicas piezoeléctricas fueron desarrolladas en la segunda mitad del siglo pasado y exhiben un acoplamiento mucho mayor en comparación con los cristales naturales. El piezocerámico más popular es el PZT (titanato de zirconato de plomo), desarrollado en el Instituto de Tecnología de Tokio en la década de 1950. El PZT, junto a otras versiones del mismo como el PZT-5A y PZT-5H, son los piezocerámicos más utilizados en la actualidad.

2.1.2. Modos de generación

Existen dos formas de aprovechar la deformación de un piezoeléctrico, llamados modo d_{33} y modo d_{31} . En el modo d_{33} , la deformación mecánica se aplica y/o produce en la misma dirección que la dirección de polarización (Figura 2.1.a), por lo que es utilizado en aplicaciones sujetas a cargas axiales. En el modo d_{31} , la deformación mecánica se aplica y/o produce en la dirección perpendicular a la dirección de polarización (Figura 2.1.b), normalmente utilizado para vigas en flexión, como es el caso del presente trabajo.

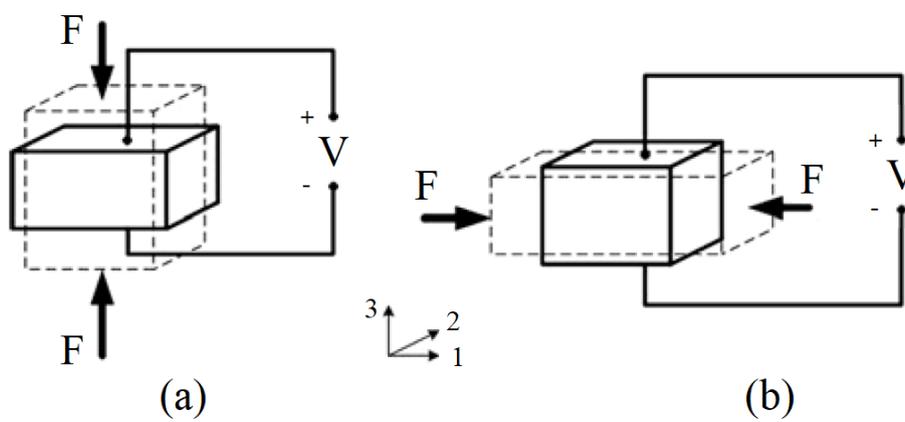


Figura 2.1: Modos de generación. (a) Modo d_{33} , (b) Modo d_{31}

2.1.3. Ecuaciones constitutivas

Los piezoeléctricos cerámicos, como PZT-5A y PZT-5H, son materiales transversalmente isótropos. Para coincidir con el Estándar sobre Piezoelectricidad de IEEE (1988), el plano de isotropía definido en esta sección es el plano 12 (plano xy) y el eje 3 (eje z) el eje de polarización del material. Las variables de campo son las componentes de tensión T_{ij} [N/m^2], las componentes de deformación S_{ij} [adimensional], las componentes de campo eléctrico E_k [V/m] y las componentes de desplazamiento eléctrico D_k [Cb/m^2]. Considerando la representación tensorial de deformación-desplazamiento eléctrico, donde las variables independientes son las componentes de tensión y las componentes del campo eléctrico, las ecuaciones constitutivas

del piezoeléctrico se expresan como:

$$\begin{aligned} S_{ij} &= s_{ijkl}^E T_{kl} + d_{kij} E_k \\ D_i &= d_{ikl} T_{kl} + \varepsilon_{ik}^T E_k \end{aligned} \quad (2.1)$$

siendo s_{ijkl} [m^2/N] constantes de compresibilidad, d_{kij} [m/V] ó [Cb/N] constantes de acoplamiento piezoeléctrico, y ε_{ik} [F/m] constantes de permisividad eléctrica. Los superíndices T y E implican que fueron evaluados a tensión y campo eléctrico constantes respectivamente.

Utilizando notación de Voigt (i.e. $11 \rightarrow 1, 22 \rightarrow 2, 33 \rightarrow 3, 23 \rightarrow 4, 13 \rightarrow 5, 12 \rightarrow 6$), y considerando la simetría producto de un comportamiento isótropo del material en el plano xy , la ecuación (2.1) puede expresarse mediante la siguiente ecuación matricial:

$$\begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \\ S_5 \\ S_6 \\ D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_{11}^E & s_{12}^E & s_{13}^E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d_{31} \\ s_{12}^E & s_{11}^E & s_{13}^E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d_{31} \\ s_{13}^E & s_{13}^E & s_{33}^E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d_{33} \\ 0 & 0 & 0 & s_{55}^E & 0 & 0 & 0 & d_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & s_{55}^E & 0 & d_{15} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & s_{66}^E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & d_{15} & 0 & \varepsilon_{11}^T & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_{15} & 0 & 0 & 0 & \varepsilon_{11}^T & 0 \\ d_{31} & d_{31} & d_{33} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \varepsilon_{33}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \\ T_6 \\ E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

donde las componentes de deformación tangencial en la notación de Voigt corresponden a la deformación tangencial ingenieril, es decir:

$$\begin{bmatrix} S_4 \\ S_5 \\ S_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2S_{23} \\ 2S_{13} \\ 2S_{12} \end{bmatrix}. \quad (2.3)$$

2.1.4. Energía almacenada en un piezoeléctrico

La densidad de energía de deformación, también llamada densidad de energía mecánica, es la energía almacenada en un cuerpo elástico deformado bajo la acción de una fuerza externa

(Ugural y Fenster, 2003). Para un material linealmente elástico se calcula mediante la siguiente expresión:

$$W_{0m} = \frac{1}{2} \mathbf{T}^T \mathbf{S} \quad (2.4)$$

donde \mathbf{T} y \mathbf{S} corresponden al vector de esfuerzos y deformaciones internas del cuerpo respectivamente. Por otra parte, la densidad de energía almacenada en un campo electrostático, en presencia de un dieléctrico lineal (el piezoelectrico actúa como dicho dieléctrico entre los electrodos), se define como sigue (Halliday *et al.*, 2013):

$$W_{0e} = \frac{1}{2} \mathbf{D}^T \mathbf{E} \quad (2.5)$$

donde \mathbf{D} y \mathbf{E} corresponden al vector de desplazamiento eléctrico y campo eléctrico aplicado. Finalmente, la energía almacenada en un piezoelectrico se debe a tensiones internas y al campo electrostático desarrollado como resultado de cargas externas. Considerando al piezoelectrico un elemento conservativo, la densidad de energía interna total resulta en la suma del trabajo mecánico y eléctrico efectuado sobre el mismo, es decir:

$$\begin{aligned} W_{0em} &= W_{0m} + W_{0e} \\ &= \frac{1}{2} \mathbf{T}^T \mathbf{S} + \frac{1}{2} \mathbf{D}^T \mathbf{E}. \end{aligned} \quad (2.6)$$

La función de densidad de coenergía interna se define mediante la transformada de Legendre de la siguiente manera:

$$W_{0em}^* = \mathbf{E}^T \mathbf{D} - W_{0em} = \frac{1}{2} \mathbf{D}^T \mathbf{E} - \frac{1}{2} \mathbf{T}^T \mathbf{S}. \quad (2.7)$$

Reemplazando la ecuación (2.2) correspondiente a las constitutivas del piezoelectrico en la ecuación anterior, se obtiene la siguiente expresión de densidad de coenergía electromecánica interna del piezoelectrico:

$$\begin{aligned} W_{0em}^* &= \frac{1}{2} (\mathbf{e}^T \mathbf{S} + \epsilon \mathbf{E})^T \mathbf{E} - \frac{1}{2} (\mathbf{c} \mathbf{S} - \mathbf{e} \mathbf{E})^T \mathbf{S} \\ &= \frac{1}{2} (\mathbf{E}^T \epsilon \mathbf{E} + 2 \mathbf{S}^T \mathbf{e} \mathbf{E} - \mathbf{S}^T \mathbf{c} \mathbf{S}) \end{aligned} \quad (2.8)$$

donde el primer término involucra energía electrostática, el tercero energía mecánica y el segundo el acoplamiento entre las dos anteriores.

2.2. Configuraciones de tipo unimorfo y bimorfo

2.2.1. Introducción

Las configuraciones de tipo unimorfo y bimorfo consisten en la utilización de una o dos capas delgadas de material piezoeléctrico idénticas y una capa de un segundo material no piezoeléctrico, llamado sustrato portante. La Figura 2.2 muestra las distintas configuraciones, donde la dirección de polarización de placas piezoeléctricas es normal a la longitud, permitiendo al piezoeléctrico trabajar en el modo d_{31} , tanto como dispositivo actuador o de sensado. Para el caso de los bimorfos, existen dos tipos de conexiones eléctricas entre los electrodos, denominadas serie y paralelo (Wang *et al.*, 1999).

2.2.2. Conexión serie y paralelo

En la conexión en serie, los electrodos interiores se encuentran cortocircuitados a través del sustrato y los terminales de salida corresponden a los electrodos exteriores de cada una de las capas. Debido a que las deformaciones por flexión poseen signos opuestos en cada capa, los voltajes generados en las mismas son de igual magnitud y signo opuesto. Por este motivo, la constitución del bimorfo serie se realiza ubicando los piezoeléctricos con las polaridades opuestas entre sí, de manera que el voltaje en los terminales del mismo sea la suma de los voltajes generados por cada capa piezoeléctrica (Figura 2.2.b). En la conexión bimorfo paralelo, ambas placas piezoeléctricas se ubican con sus polaridades en la misma dirección, siendo la conexión eléctrica del tipo antiparalelo, permitiendo que el voltaje generado en los terminales de salida del bimorfo corresponda al voltaje en paralelo de ambas capas (Figura 2.2.c).

2.2.3. Utilización como elemento sensor

Las configuraciones unimorfo y bimorfo pueden utilizarse como elementos sensores electromecánicos debido a que ambas generan un voltaje en los electrodos proporcional al momento mecánico, fuerza o carga externa. Si una fuerza F actúa perpendicularmente en la punta de un bimorfo en serie montado en voladizo, se produce una deformación por flexión que induce tensiones de tracción en la placa superior y de compresión en la placa inferior, en la dirección de la longitud de la viga. La distribución de estas tensiones no es uniforme, con un valor máximo en la superficie superior (positiva) y la superficie inferior (negativa) y cero en la interfaz (plano neutro). En consecuencia, el desplazamiento eléctrico en la capa superior es positivo, es decir:

$$D_3 = d_{31}T_1 \Rightarrow \text{Polaridad (+)} \Rightarrow V_{sup} = V \quad (2.9)$$

lo que produce cargas negativas en el electrodo superior y positivas en el inferior, generando un voltaje positivo entre los electrodos de éste piezoeléctrico. Para la capa inferior, el desplazamiento eléctrico es negativo, es decir:

$$D_3 = d_{31}(-T_1) \Rightarrow \text{Polaridad (-)} \Rightarrow V_{inf} = V \quad (2.10)$$

lo que también produce un voltaje positivo, debido a que el piezoeléctrico inferior se encuentra contrapolarizado en esta configuración. Finalmente, el voltaje total del bimorfo serie corresponde a la suma de los voltajes de cada capa piezoeléctrica. Para un bimorfo conectado en paralelo, se generan cargas eléctricas con el mismo signo en los electrodos superior e inferior de ambas capas, esto es:

$$D_3 = d_{31}T_1 \Rightarrow \text{Polaridad (+)} \Rightarrow V_{sup} = V \quad (2.11)$$

$$D_3 = d_{31}T_1 \Rightarrow \text{Polaridad (+)} \Rightarrow V_{inf} = V \quad (2.12)$$

generando así, el mismo voltaje para ambas capas. Sin embargo, el voltaje del bimorfo paralelo no se eleva por el de las capas, sino que es exactamente el mismo. La comparación de voltajes entre ambas configuraciones resulta:

$$\left. \begin{array}{l} V_{serie} = 2V \\ V_{paralelo} = V \end{array} \right\} \Rightarrow V_{serie} = 2V_{paralelo}. \quad (2.13)$$

Para aplicaciones de sensado suele ser deseado un alto voltaje generado, por lo que la conexión serie suele ser la mas utilizada.

2.2.4. Utilización como elemento actuador

La aplicación del campo eléctrico en la configuración bimorfo, obliga a una de las placas a expandirse y mientras que la restante se contrae. Dado que existe una restricción en la interfaz de estas dos placas debida al sustrato portante, se produce una deformación de flexión en toda la estructura. De manera similar, la flexión puede producirse en la configuración unimorfo, donde la deformación transversal de la placa piezoeléctrica está limitada por el sustrato portante (Figura 2.2.a). El voltaje de conducción para un actuador bimorfo paralelo puede reducirse a la mitad del valor para un bimorfo serie, manteniendo la misma fuerza eléctrica y capacidad de actuación. Sin embargo, la capacidad eléctrica interna de la conexión paralelo es cuatro veces mayor que la correspondiente a la conexión serie. Siendo que el consumo de energía es igual en ambos casos y está dado por $P = 1/2 CV^2$, a igual voltaje de conducción en ambas configuraciones, la capacidad de actuación de un bimorfo paralelo es del doble que el bimorfo serie. En aplicaciones como elemento actuador, donde generalmente es deseable un bajo voltaje de accionamiento, la conexión paralela suele ser la mas utilizada.

2.3. Materiales Graduados Funcionales y Porosidad

2.3.1. Introducción

El Material Graduado Funcional (MGF) es un interesante tipo de compuesto, en el que dos o más componentes se mezclan siguiendo cierta ley o función característica en direcciones seleccionadas, de manera de modificar y/o mejorar las propiedades del material en dichas direcciones (Bui *et al.*, 2013; Ghayesh y Farokhi, 2018; Ghayesh, 2018). También pueden diseñarse patro-

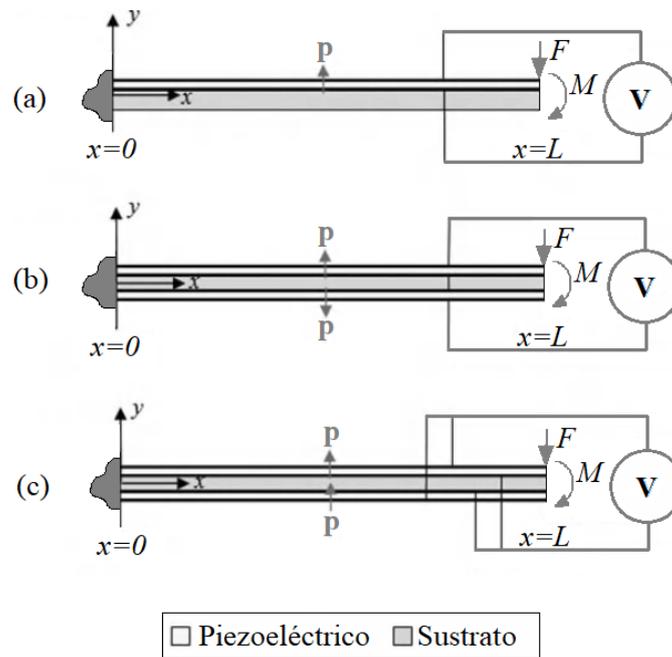


Figura 2.2: Esquema de las distintas configuraciones. (a) Unimorfo, (b) Bimorfo serie, (c) Bimorfo paralelo

nes constructivos para optimizar la respuesta estructural, como puede observarse en el trabajo publicado por Roque *et al.* (2016).

La formación de porosidades o pequeñas cavidades en el dominio estructural de un MGF pueden presentarse como resultado de algunos procedimientos de construcción basados en deposición de material, debido a la presión y/o calor localizado que dichos procedimientos utilizan. Puede encontrarse en la bibliografía también, microestructuras diseñadas con pequeñas cavidades ubicadas regularmente, tal es el caso de (Miao y Sun, 2010; Jouneghani *et al.*, 2018). En ambos casos, el MGF recibe la nueva denominación de Material Graduado Funcional Poroso (MGFP) (Fazzolari *et al.*, 2017).

2.3.2. Modelado del Material Graduado Funcional

La Figura 2.3 muestra un esquema de los dos tipos de MGF que aborda el presente trabajo, formado por capas homogéneas creadas a partir de la mezcla aditiva de un material cerámico y otro metálico, donde la transición entre ellas se realiza mediante una función llamada ley de mezcla. Esta ley controla la fracción volumétrica del compuesto según el tipo de MGF que se desea modelar:

Tipo A *Parte inferior metálica y superior cerámica:*

$$V_c^{(1)}(y) = \left(\frac{y}{h} + \frac{1}{2} \right)^p \quad y \in \left\{ -\frac{h}{2}, \frac{h}{2} \right\} \quad (2.14)$$

Tipo B *Parte inferior/superior metálica y centro de cerámica:*

$$\begin{aligned} V_c^{(1)}(y) &= \left(\frac{y-h_0}{h_1-h_0} \right)^p & y \in \{h_0, h_1\} \\ V_c^{(2)}(y) &= 1 & y \in \{h_1, h_2\} \\ V_c^{(3)}(y) &= \left(\frac{h_3-y}{h_3-h_2} \right)^p & y \in \{h_2, h_3\} \end{aligned} \quad (2.15)$$

donde el parámetro $p \in \mathbb{R}$ determina el tipo de curva de transición desde la capa metálica hacia la cerámica, como muestra la Figura 2.4. Para el MGF Tipo B, la fracción volumétrica se define mediante una función a trozos, indicada en la numeración del superíndice. Cabe destacar que $V_c^{(i)}$ corresponde a la fracción volumétrica del cerámico, mientras que la del metal está dada por $V_m^{(i)} = 1 - V_c^{(i)}$.

Los materiales que componen el MGF se consideran elásticos lineales isótropos y homogéneos. Luego, la densidad de material y los módulos de elasticidad del sustrato se computan partir de la Regla de mixtura de Voigt (1889), considerando la ley de mezcla de las ecuaciones (2.14) y (2.15) según el tipo de MGF requerido:

$$\begin{aligned} c_{xx}(y) &= (c_{xxc} - c_{xxm})V_c^{(i)} + c_{xxm} \\ c_{xy}(y) &= (c_{xyc} - c_{xym})V_c^{(i)} + c_{xym} \\ c_{xz}(y) &= (c_{xzc} - c_{xzm})V_c^{(i)} + c_{xzm} \\ \rho(y) &= (\rho_c - \rho_m)V_c^{(i)} + \rho_m \end{aligned} \quad (2.16)$$

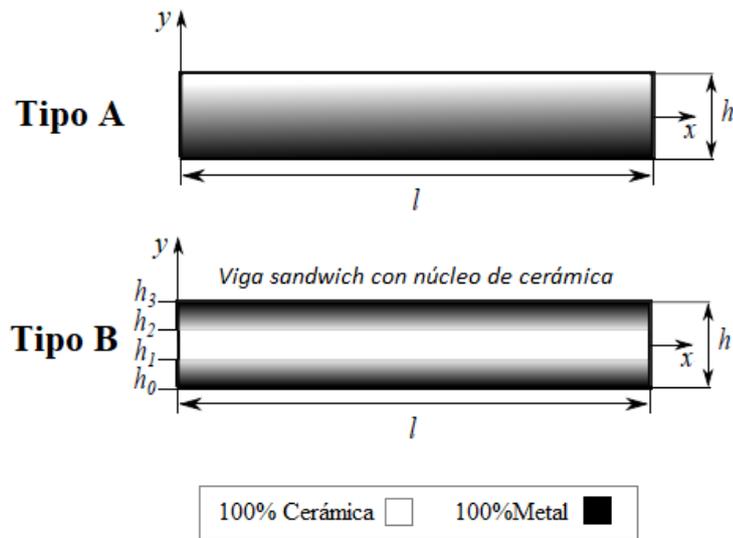


Figura 2.3: Tipos de MGF.

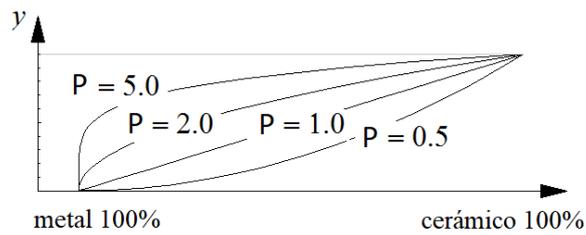


Figura 2.4: Curvas de transición según p .

siendo

$$c_{xyc} = c_{xzc} = \frac{c_{xxc}}{2(1 + \nu_c)}, \quad c_{xym} = c_{xzm} = \frac{c_{xxm}}{2(1 + \nu_m)} \quad (2.17)$$

donde ν es el coeficiente de Poisson, y los subíndices c y m corresponden al material cerámico y metálico respectivamente.

2.3.3. Modelado de la porosidad del material

La Figura 2.5 muestra un esquema de los tipos de porosidad incluidos en el modelo computacional. El efecto de la porosidad en el material se modela por medio de variaciones del coeficiente de elasticidad y la densidad del MGF, como se detalla a continuación:

Tipo I La densidad de porosidad se considera uniforme en toda la sección transversal,

$$\begin{aligned}
 c_{xx}(y) &= c_{xx} - \beta c_{xx} \\
 c_{xy}(y) &= c_{xy} - \beta c_{xy} \\
 c_{xz}(y) &= c_{xz} - \beta c_{xz} \\
 \rho(y) &= \rho - \beta \rho
 \end{aligned}
 \tag{2.18}$$

Tipo II La densidad de porosidad se concentra mayormente en el centro de la sección. (Este es el caso cuando la estructura de material compuesto se construye mediante la técnica de infiltración secuencial de múltiples pasos),

$$\begin{aligned}
 c_{xx}(y) &= c_{xx} - \beta c_{xx} \left(1 - \frac{2|y|}{h}\right) \\
 c_{xy}(y) &= c_{xy} - \beta c_{xy} \left(1 - \frac{2|y|}{h}\right) \\
 c_{xz}(y) &= c_{xz} - \beta c_{xz} \left(1 - \frac{2|y|}{h}\right) \\
 \rho(y) &= \rho - \beta \rho \left(1 - \frac{2|y|}{h}\right)
 \end{aligned}
 \tag{2.19}$$

donde el coeficiente adimensional $\beta \ll 1$ permite ajustar la densidad de porosidad.

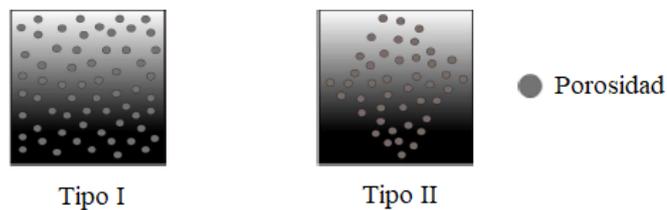


Figura 2.5: Tipos de porosidad

2.4. Modelo analítico de metaestructura piezoeléctrica recta bajo concepción de Bernoulli-Euler

2.4.1. Introducción

En la siguiente sección se detalla el desarrollo de un modelo analítico de metaestructura piezoeléctrica tipo viga recta, constituido por infinitos resonadores, utilizando la teoría de vigas de Bernoulli-Euler. El mismo fue propuesto por Sugino *et al.* (2017), y facilitará la comprensión de algunos aspectos dinámicos de la metaestructura piezoeléctrica curva de sustrato MGFP desarrollada en el Capítulo 3. La Figura 2.6 muestra un esquema de dicha estructura unidimensional tipo viga esbelta, de sección rectangular, conformada por un arreglo de bloques piezoeléctricos en configuración bimorfo serie (ver Sección 2.2), realimentados cada uno mediante una admitancia de carga Y_c .

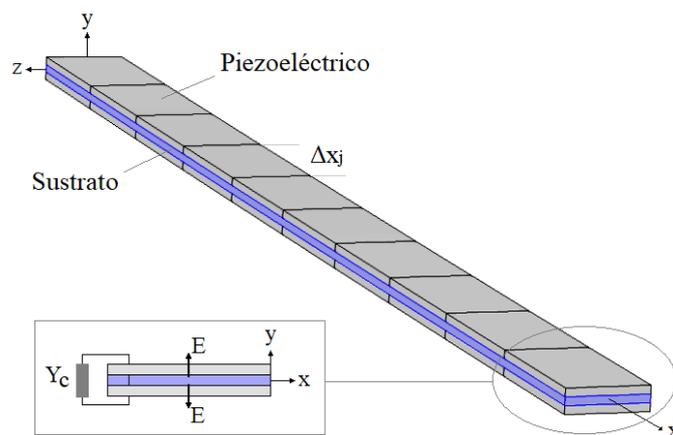


Figura 2.6: Esquema de la metaestructura piezoeléctrica simple.

2.4.2. Análisis modal

Considerando pequeñas oscilaciones y teniendo en cuenta un comportamiento elástico lineal, la estructura puede modelarse mediante la teoría de vigas de Bernoulli-Euler. A fin de

mantener simplicidad en el modelo, no se considera en esta etapa amortiguamiento de ningún tipo. Considerando las hipótesis anteriormente mencionadas, las ecuaciones electromecánicas que rigen la dinámica de la estructura bajo aplicación de una fuerza distribuida por unidad de longitud $f(x,t)$ actuando en la dirección del eje y , se expresan como sigue (Erturk e Inman, 2011):

$$EI \frac{\partial^4 w(x,t)}{\partial x^4} + m \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} - \vartheta \sum_{j=1}^S v_j(t) \frac{d^2}{dx^2} [H(x-x_j^L) - H(x-x_j^R)] = f(x,t), \quad (2.20)$$

$$C_{p,j} \frac{dv_j}{dt} + Y_j v_j(t) + \vartheta \int_{x_j^L}^{x_j^R} \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial t} dx = 0, \quad j = 1, \dots, S$$

donde $w(x,t)$ es el desplazamiento trasversal de la viga en la posición x en un tiempo t , Y_j la admitancia conectada en cada celda, $v_j(t)$ la tensión en sus bornes, y $H(x)$ es la función de Heaviside. Además, EI corresponde a la rigidez flexural de corto circuito, m a la masa por unidad de longitud, ϑ al acoplamiento electromecánico, y $C_{p,j}$ a la capacidad interna del piezoelectrico en bloque j , donde

$$EI = \frac{2b}{3} \left[c_s \frac{h_s^3}{8} + \bar{c}_{11}^E \left[\left(h_{pz} + \frac{h_s}{2} \right)^3 - \frac{h_s^3}{8} \right] \right],$$

$$m = b(\rho_s h_s + 2\rho_p h_{pz}),$$

$$\vartheta = \frac{\bar{e}_{31} b_e}{2h_{pz}} \left[\left(h_{pz} + \frac{h_s}{2} \right)^2 - \frac{h_s^2}{4} \right], \quad (2.21)$$

$$C_{p,j} = \bar{e}_{33}^S b_e \frac{(x_j^R - x_j^L)}{2h_{pz}}.$$

En las expresiones anteriores, c_s , ρ_s y h_s corresponden al módulo de elasticidad, la densidad de masa y altura del sustrato respectivamente, mientras que la densidad de masa y la altura de cada piezoelectrico se expresan como ρ_p y h_{pz} , y b es el ancho del sustrato, el cual se considera idéntico al ancho de la capa piezoelectrica b_e . Las ecuaciones constitutivas del material piezoelectrico en la forma tensión-desplazamiento, se obtienen mediante una reducción de las ecuaciones constitutivas de la Sección 2.1.3 para una viga Bernoulli-Euler. Las mismas se expresan como sigue:

$$\begin{bmatrix} T_{xx} \\ D_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{c}_{11}^E & -\bar{e}_{31} \\ \bar{e}_{31} & \bar{\epsilon}_{33}^S \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_{xx} \\ E_y \end{bmatrix} \quad (2.22)$$

siendo

$$\bar{c}_{11}^E = \frac{1}{s_{11}^E}, \quad \bar{e}_{31} = \frac{d_{31}}{s_{11}^E}, \quad \bar{\epsilon}_{33}^S = \bar{\epsilon}_{33}^T - \frac{d_{31}^2}{s_{11}^E}$$

donde las barras indican que son propiedades efectivas del material para un modelo 1D. Los electrodos sobre las capas piezoeléctricas están segmentados y aislados entre sí, generando los bloques numerados $\{j = 1, \dots, S\}$, comenzando cada uno en $x = x_j^L$ y terminando en $x = x_j^R$, con un largo total $\Delta x = x_j^R - x_j^L$.

Considerando una expansión modal en N modos asumidos, el desplazamiento trasversal de la viga está dado por:

$$w(x,t) = \sum_{r=1}^N \Phi_r(x) \eta_r(t) \quad (2.23)$$

donde $\eta_r(t)$ son los pesos modales a ser determinados. Las formas modales $\Phi_r(x)$ son obtenidas a partir de las condiciones de borde (con los electrodos en cortocircuito) normalizadas de manera que:

$$\begin{aligned} \int_0^L \Phi_r(x) \Phi_s(x) dx &= \delta_{rs}, & r, s &= 1, 2, \dots \\ \int_0^L EI \Phi_r(x) \frac{d^4 \Phi_s(x)}{dx^4} dx &= \omega_r^2 \delta_{rs}, & r, s &= 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (2.24)$$

siendo L el largo total de la viga, ω_r la r -ésima frecuencia natural, y δ_{rs} la función delta de Kronecker. Sustituyendo la ecuación (2.23) en la ecuación (2.20), pre-multiplicando por algún modo $\Phi_k(x)$ e integrando en el dominio de la viga, se obtienen las siguientes ecuaciones discretizadas que gobiernan la dinámica:

$$\ddot{\eta}_r(t) + \omega_r^2 \eta_r(t) - \vartheta \sum_{j=1}^S v_j(t) \Delta \Phi'_{r,j} = q_r(t) \quad (2.25)$$

$$C_{p,j} \dot{v}_j(t) + Y_j v_j(t) + \vartheta \sum_{r=1}^N \Delta \Phi'_{r,j} \dot{\eta}_r(t) = 0 \quad (2.26)$$

donde la diferencia en pendiente del r -ésimo modo dentro de los límites del j -ésimo electrodo está dada por:

$$\Delta\Phi'_{r,j} = \left(\frac{d\Phi_r}{dx} \right)_{x_j^L}^{x_j^R} = \frac{d\Phi_r}{dx}(x_j^R) - \frac{d\Phi_r}{dx}(x_j^L) \quad (2.27)$$

y la fuerza modal se expresa:

$$q_r(t) = \int_0^L f(x,t)\Phi_r(x)dx. \quad (2.28)$$

Tomando las transformadas de Laplace de las ecuaciones (2.25) y (2.26), se obtienen las ecuaciones separadas que gobiernan los pesos modales y voltajes respectivamente:

$$(s^2 + \omega_r^2)H_r(s) + s\vartheta^2 \sum_{j=1}^S \frac{\Delta\Phi'_{r,j}}{sC_{p,j} + Y_j(s)} \sum_{k=1}^N \Delta\Phi'_{k,j}H_k(s) = Q_r(s) \quad (2.29)$$

$$(sC_{p,j} + Y_j(s))V_j(s) + s\vartheta^2 \sum_{r=1}^N \frac{\Delta\Phi'_{r,j}}{s^2 + \omega_r^2} \sum_{k=1}^S \Delta\Phi'_{k,j}V_k(s) = Q_j(s). \quad (2.30)$$

Considerando unicamente los modos de vibración, la ecuación (2.29) puede expresarse como sigue:

$$(s^2 + \omega_r^2)H_r(s) + \frac{\alpha s}{s + h(s)} \sum_{j=1}^S EI \frac{\Delta\Phi'_{r,j}}{\Delta x_j} \sum_{k=1}^N \frac{\Delta\Phi'_{k,j}}{\Delta x_j} \Delta x_j H_k(s) = Q_r(s) \quad (2.31)$$

donde α es un parámetro adimensional referido al acoplamiento electromecánico, dado por:

$$\alpha = \frac{2\vartheta^2 h_{pz}}{EI\bar{\epsilon}_{33}^S b_e} = \frac{\bar{\epsilon}_{31}^2 b_e h_{pz} (h_s + h_{pz})^2}{2EI\bar{\epsilon}_{33}^S} \quad (2.32)$$

y $h(s)$ es la admitancia normalizada del circuito, idéntica por cada par de electrodos, expresándose como sigue:

$$h(s) = \frac{Y_j(s)}{C_{p,j}}. \quad (2.33)$$

El sistema de ecuaciones descrito en la ecuación (2.31) no posee una solución analítica simple para $H_r(s)$ debido al segmentado de los electrodos, sin embargo, considerando el caso

límite donde la longitud del electrodo es infinitesimal, es decir $\Delta x_j \rightarrow 0$ y $S \rightarrow \infty$, se obtiene que:

$$\lim_{\Delta x_j \rightarrow 0} \frac{\Delta \Phi'_{r,j}}{\Delta x_j} = \frac{d^2 \Phi_r}{dx^2}(x_j) \quad (2.34)$$

y

$$\begin{aligned} & \lim_{S \rightarrow \infty} \lim_{\Delta x_j \rightarrow 0} \sum_{j=1}^S EI \frac{\Delta \Phi'_{r,j}}{\Delta x_j} \sum_{k=1}^N \frac{\Delta \Phi'_{k,j}}{\Delta x_j} \Delta x_j H_k(s) \\ &= \int_0^L EI \frac{d^2 \Phi_r}{dx^2} \sum_{k=1}^N \frac{d^2 \Phi_k}{dx^2} dx H_k(s) = \omega_r^2 H_r(s). \end{aligned} \quad (2.35)$$

Esta simplificación es exacta únicamente en el caso límite, es decir, considerando infinitos electrodos. Aún así, continúa siendo una buena aproximación para un número finito de bloques piezoeléctricos. Reemplazando la ecuación (2.35) en la ecuación (2.31) se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones dinámicas desacoplado de la estructura:

$$(s^2 + \omega_r^2)H_r(s) + \frac{\alpha s}{s + h(s)}\omega_r^2 H_r(s) = Q_r(s) \quad (2.36)$$

donde la respuesta modal puede calcularse explícitamente como:

$$H_r(s) = \frac{Q_r(s)}{s^2 + \omega_r^2 \left(1 + \frac{\alpha s}{s + h(s)}\right)}. \quad (2.37)$$

Del análisis anterior se desprende que en este tipo de estructuras piezoeléctricas con idénticas dimensiones e impedancias asociadas, la rigidez modal es dependiente de la frecuencia y está dada por:

$$\frac{K(s)}{K_{sc}} = 1 + \frac{\alpha s}{s + h(s)} \quad (2.38)$$

donde la rigidez modal de cortocircuito K_{sc} se obtiene a partir de la ecuación (2.25) con $v_j = 0$. Esta singular característica difiere de las metaestructuras con resonadores puramente mecánicos (masa-resorte), donde el resultado suele ser masa modal dependiente de la frecuencia (Sugino *et al.*, 2016).

2.4.3. Estimación del bandgap electroelástico

Con el fin de generar un resonador electromecánico local en cada bloque de la metaestructura, se conecta una impedancia inductiva ideal (sin pérdidas) en las terminales de cada bloque, es decir:

$$Z_j(s) = \frac{1}{Y_j(s)} = L_j s \quad (2.39)$$

donde L_j es la inductancia asociada al bloque j -ésimo, creando un circuito resonante paralelo con la capacidad asociada a cada bloque piezoeléctrico Cp_j , con una frecuencia de resonancia ω_r tal que:

$$h(s) = \frac{\omega_r^2}{s}, \quad \omega_r^2 = \frac{1}{L_j C p_j}. \quad (2.40)$$

Reescribiendo la ecuación (2.37) y reemplazando $h(s)$ por la expresión anterior, se obtiene la siguiente función de transferencia del r -ésimo modo de vibración:

$$\frac{H_r(s)}{Q_r(s)} = \frac{1}{s^2 + \omega_r^2 \left(1 + \frac{\alpha s^2}{s^2 + \omega_r^2}\right)}. \quad (2.41)$$

Puede observarse con facilidad que $H_r(s)/Q_r(s) \rightarrow 0$ cuando $s \rightarrow \omega_r$, lo que implica una anti-resonancia para cada modo en esta frecuencia. La función de transferencia $H_r(s)/Q_r(s)$ puede ser interpretada como una función de lazo cerrado, donde

$$\begin{aligned} G(s) &= \frac{1}{s^2} \\ F(s) &= 1 + \frac{\alpha s^2}{s^2 + \omega_r^2}, \end{aligned} \quad (2.42)$$

son las funciones de lazo abierto que la componen (Figura 2.7). Esto permite una interpretación de la respuesta modal mediante el *Método del lugar de las raíces* (ver Anexo C), de la siguiente manera:

$$\frac{H_r(s)}{Q_r(s)} = \frac{1}{s^2 + \omega_r^2 \left(1 + \frac{\alpha s^2}{s^2 + \omega_r^2}\right)} = \frac{G(s)}{1 + \omega_r^2 G(s) F(s)} \quad (2.43)$$

siendo la función de sistema:

$$G(s)F(s) = \frac{1}{s^2} \left(1 + \frac{\alpha s^2}{s^2 + \omega_t^2} \right) = \frac{(1 + \alpha)s^2 + \omega_t^2}{s^2(s^2 + \omega_t^2)} \quad (2.44)$$

cuyos ceros se ubican en $s = \pm j\omega_t/\sqrt{1 + \alpha}$ y los polos en $s = \pm j\omega_t$ y uno doble en $s = 0$.

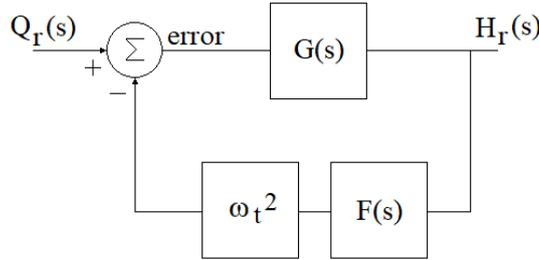


Figura 2.7: $H_r(s)/Q_r(s)$ como sistema de lazo cerrado.

El diagrama de la Figura 2.8 deriva de la función de sistema, e indica en línea roja las posibles ubicaciones polos de lazo cerrado (frecuencias de resonancia de $H_r(s)/Q_r(s)$) según el aumento de la ganancia ω_r^2 , donde puede observarse la imposibilidad de encontrar dichos polos en el rango de:

$$\frac{\omega_t}{\sqrt{1 + \alpha}} < \omega < \omega_t \quad (2.45)$$

definiendo así el bandgap local resonante para un número infinito de electrodos infinitesimales, con un ancho de banda de atenuación a la vibración normalizado de:

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_t} = 1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \alpha}}. \quad (2.46)$$

A continuación, substituyendo la ecuación (2.42) en la ecuación (2.38) y asumiendo $s = j\omega$, se obtiene la rigidez modal dinámica:

$$\frac{K(j\omega)}{K_{sc}} = 1 - \frac{\alpha\omega^2}{\omega_t^2 - \omega^2} \quad (2.47)$$

donde puede notarse que en valores de frecuencia dentro del bandgap expresado en la ecuación (2.45), la rigidez se vuelve negativa. Para valores de frecuencia anteriores a esta banda

($\omega \ll \omega_t$) la rigidez de la estructura es similar a la de cortocircuito, y para valores de frecuencia elevados ($\omega \gg \omega_t$) la rigidez de la estructura es $K = K_{sc}(1 + \alpha)$, indicando una tendencia a su valor de circuito abierto.

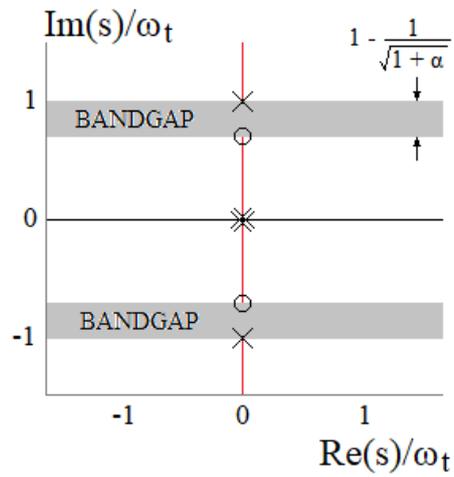


Figura 2.8: Lugar de las raíces para ω_r^2 con $\alpha = 1$.

Capítulo 3

Desarrollo del Modelo Dinámico de una Metaestructura Piezoeléctrica Curva de Sustrato MGFP

3.1. Introducción

Esta sección presenta el desarrollo del modelo dinámico unidimensional de la metaestructura piezoeléctrica motivo de este trabajo. El diseño de esta estructura toma como punto de partida el modelo introducido en la Sección 2.4, extendiendo sus cualidades constructivas con el propósito de expandir su desempeño y mejorar notablemente el análisis dinámico. Entre estas nuevas características se encuentra la posibilidad de curvar la estructura con un radio constante, conservando la sencillez propia de un modelo unidimensional. Esta característica no es menor, debido a que la anisotropía del material piezoeléctrico resulta compleja de ser modelada cuando la estructura no es perfectamente recta. Una segunda característica, no menos importante que la anterior, es capacidad de representar desplazamientos en las tres dimensiones espaciales, lo que permite al modelo dinámico resolver una mayor cantidad de modos de vibración. Asimismo, el modelo incluye la representación de los esfuerzos cortantes debido a que el mismo deriva de la teoría de vigas de Timoshenko. Como última característica, se considera el sustrato de la

estructura de Material Graduado Funcional Poroso, ampliando las posibilidades dinámicas y de construcción de la metaestructura. El modelo unidimensional se obtiene en base al Método de Elementos Finitos, permitiendo simular las dimensiones reales de la estructura, al igual que las condiciones de borde a las que pueda ser sometida.

3.2. Descripción de la metaestructura propuesta

La metaestructura a modelar está representada en la Figura 3.1 y consiste en un par de piezoeléctricos en configuración bimorfo a través de un material sustrato portante de sección rectangular, inicialmente en curvatura Tipo A. Los electrodos de los piezoeléctricos están seccionados y aislados eléctricamente en segmentos de longitud Δx , formando bloques electromecánicos de esa longitud, llamados *bloques resonadores*. La conexión eléctrica de los bloques puede ser paralelo o serie, siendo la misma para todos los bloques de la estructura (ver Sección 2.2). Cada bloque posee su propia admitancia Y_k conectada a los terminales del mismo. El sustrato de la metaestructura se considera del tipo Material Graduado Funcional Poroso, considerando la ley de mezcla en la dirección del eje y .

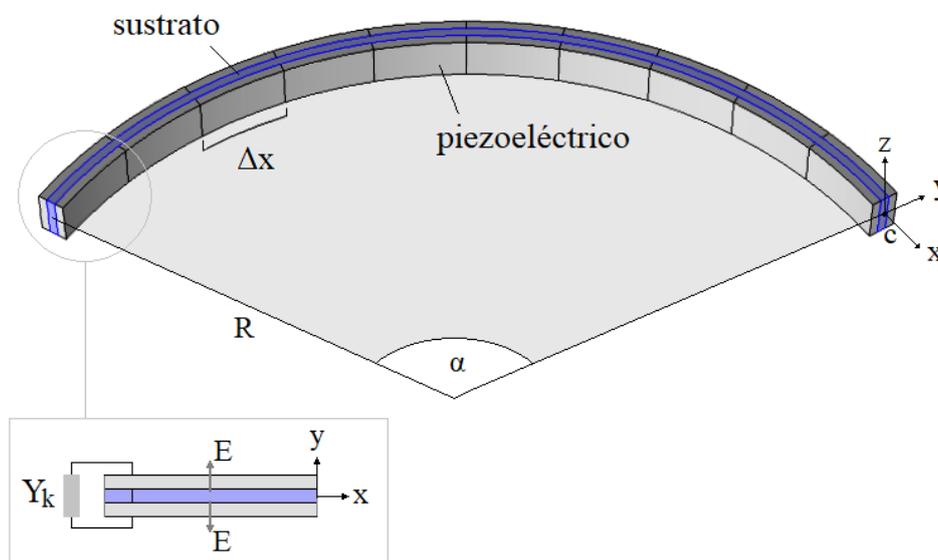


Figura 3.1: Esquema de la metaestructura curva.

3.3. Hipótesis principales y campo de desplazamientos

Para establecer el campo de desplazamientos del modelo unidimensional, inicialmente se considera a la metaestructura como una estructura del tipo viga curva, según se muestra en la Figura 3.2. Esta estructura posee un radio de curvatura R y un ángulo de apertura α . El sistema de referencia se expresa en coordenadas curvilíneas, y el origen del sistema de referencia c está ubicado en el centroide. El modelo teórico se basa en las siguientes hipótesis:

- La curvatura de se ubica sobre el plano xy y su radio de curvatura R es constante.
- La sección transversal es regular y rígida en su propio plano.
- Se consideran pequeños desplazamientos y elasticidad lineal.
- Se considera el esfuerzo cortante producido por flexión y torsión.
- Se define una función de alabeo referida al centroide.

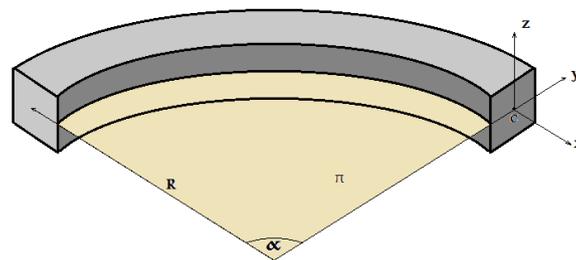


Figura 3.2: Esquema de estructura tipo viga curva

De las hipótesis se desprende el siguiente campo de desplazamientos (Piovan y Cortinez, 2007):

$$\begin{Bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_{xc} - \omega \phi_w \\ u_{yc} \\ u_{zc} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\phi_z & \phi_y \\ \phi_z & 0 & -\phi_x \\ -\phi_y & \phi_x & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ y \\ z \end{Bmatrix} \quad (3.1)$$

donde

$$\phi_x = \theta_x, \phi_y = \theta_y, \phi_z = \theta_z - \frac{u_{xc}}{R}, \phi_w = \theta_w + \frac{\theta_y}{R} \quad (3.2)$$

siendo $\{u_{xc}, u_{yc}, u_{zc}\}$ los desplazamientos del centro de referencia, $\{\theta_y, \theta_z\}$ los parámetros de flexión, θ_x el ángulo de torsión y θ_w la intensidad de alabeo. La función de alabeo para una viga curva puede ser aproximada con la siguiente expresión (Yang y Kuo, 1987; Piovan *et al.*, 2012):

$$\omega = \bar{\omega} \mathcal{F} \quad \text{donde} \quad \mathcal{F} = \frac{R}{R+y} \quad (3.3)$$

siendo $\bar{\omega}$ la función de alabeo deducida del problema de torsión pura de Saint Venant (Piovan *et al.*, 2012).

3.4. Campo de deformaciones

El campo de deformaciones se calcula en coordenadas curvilíneas mediante las siguientes expresiones (Boresi *et al.*, 2010):

$$\begin{aligned} S_{xx} &= \mathcal{F} \left[\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{u_y}{R} \right], & S_{xy} &= \mathcal{F} \left[\frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{u_x}{R} \right] + \frac{\partial u_x}{\partial y} \\ S_{yy} &= \frac{\partial u_y}{\partial y}, & S_{yz} &= \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \\ S_{zz} &= \frac{\partial u_z}{\partial z}, & S_{xz} &= \mathcal{F} \left[\frac{\partial u_z}{\partial x} \right] + \frac{\partial u_x}{\partial z} \end{aligned} \quad (3.4)$$

donde $\{S_{xx}, S_{yy}, S_{zz}\}$ son las deformaciones axiales y $\{S_{xy}, S_{yz}, S_{xz}\}$ son las deformaciones tangenciales ingenieriles. Reemplazando la ecuación (3.1) en la ecuación (3.4) se obtiene la siguiente expresión matricial del campo de deformaciones para el modelo unidimensional curvo:

$$\mathbf{S} = \mathcal{F} \mathbf{G} \mathbf{B} \mathbf{U} \quad (3.5)$$

donde

$$\mathbf{S}^T = \{S_{xx}, S_{xy}, S_{xz}\}, \quad \mathbf{U}^T = \{u_{xc}, u_{yc}, \theta_z, u_{zc}, \theta_y, \theta_x, \theta_w\} \quad (3.6)$$

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 1 & z & -y & -\omega & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial y} & -(z + \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial y}) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial z} & (y - \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial z}) \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \partial_x & 1/R & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \partial_x & -1/R & 0 & 0 \\ -\partial_x/R & 0 & \partial_x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\partial_x/R & 0 & \partial_x & 0 \\ 0 & \partial_x & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \partial_x & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \partial_x & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/R & \partial_x & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

siendo importante destacar, que debido a la isotropía planar, se verifica que:

$$S_{yy} = S_{zz} = S_{yz} = 0. \quad (3.9)$$

3.5. Ecuaciones constitutivas

3.5.1. Capa piezoeléctrica

Para modelar la capa piezoeléctrica se considera el plano xz como plano de isotropía y el eje y como eje de polarización del material piezoeléctrico, tal como se muestra en la Figura 3.1, permitiendo al bimorfo trabajar en modo d31 (ver Sección 2.1.2). Para la obtención de las ecuaciones constitutivas de esta capa, se tienen en cuenta las hipótesis de la Sección (3.3) y las deformaciones nulas de la ecuación (3.9). Estas definiciones reducen las ecuaciones constitutivas del piezoeléctrico de la Sección 2.1.3 a la siguiente expresión:

$$\begin{bmatrix} S_{xx} \\ S_{xy} \\ S_{xz} \\ D_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_{11}^E & 0 & 0 & d_{31} \\ 0 & s_{55}^E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_{66}^E & 0 \\ d_{31} & 0 & 0 & \epsilon_{33}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_{xx} \\ T_{xy} \\ T_{xz} \\ E_y \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

donde $\{T_i, S_i\}$ son las componentes de tensión y deformación del material respectivamente, E_y el campo eléctrico al cuál se somete el material, D_y el desplazamiento eléctrico en la dirección del campo eléctrico, $\{s_{11}^E, s_{55}^E, s_{66}^E\}$ las constantes de compresibilidad evaluadas a campo eléctrico constante, d_{31} la constante de acoplamiento piezoeléctrico, y ϵ_{33}^T la permisividad eléctrica evaluada a tensión constante. Es importante notar que campo eléctrico, para esta configuración, existe sólo en la dirección del eje y . Despejando de la ecuación anterior las componentes de tensión T_i y desplazamiento eléctrico D_i en función de las componentes de deformación S_i y campo eléctrico E_i , se obtienen las siguientes ecuaciones constitutivas tensión-desplazamiento eléctrico:

$$\begin{bmatrix} T_{xx} \\ T_{xy} \\ T_{xz} \\ D_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{c}_{11}^E & 0 & 0 & -\bar{e}_{31} \\ 0 & \bar{c}_{55}^E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{c}_{66}^E & 0 \\ \bar{e}_{31} & 0 & 0 & \bar{\epsilon}_{33}^S \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_{xx} \\ S_{xy} \\ S_{xz} \\ E_y \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

donde

$$\bar{c}_{11}^E = \frac{1}{s_{11}^E}, \quad \bar{c}_{55}^E = \frac{1}{s_{55}^E}, \quad \bar{c}_{66}^E = \frac{1}{s_{66}^E}, \quad \bar{e}_{31} = \frac{d_{31}}{s_{11}^E}, \quad \bar{\epsilon}_{33}^S = \epsilon_{33}^T - \frac{d_{31}^2}{s_{11}^E} \quad (3.12)$$

siendo $\{\bar{c}_{11}^E, \bar{c}_{55}^E, \bar{c}_{66}^E\}$ $[N/m^2]$ las constantes de elasticidad longitudinal y trasversal evaluadas a campo eléctrico constante, \bar{e}_{31} $[Cb/m^2]$ la constante de acoplamiento y $\bar{\epsilon}_{33}^S$ $[F/m]$ la constante de permisividad eléctrica evaluada a deformación constante. La barra superior indica que la constante es reducida del modelo 3D hacia el 1D.

3.5.2. Capa sustrato

La capa sustrato de la estructura se modela en base al modelo de viga unidimensional de MGFP realizado por Fazzolari *et al.* (2017), introducido en la Sección 2.3. Combinando la ecuación (2.16) que modela al MGF, con las ecuaciones (2.18) y (2.19) que refieren al tipo de porosidad a modelar, se derivan las siguientes expresiones para el cálculo del modulo de elasticidad longitudinal y la densidad del MGFP:

- MGFP con porosidad Tipo I

$$\begin{aligned}
 c_{xx}(y) &= (c_{xxc} - c_{xxm})V_c^{(i)} + c_{xxm} - \frac{\beta}{2}(c_{xxc} + c_{xxm}) \\
 c_{xy}(y) &= (c_{xyc} - c_{xym})V_c^{(i)} + c_{xym} - \frac{\beta}{2}(c_{xyc} + c_{xym}) \\
 c_{xz}(y) &= (c_{xzc} - c_{xzm})V_c^{(i)} + c_{xzm} - \frac{\beta}{2}(c_{xzc} + c_{xzm}) \\
 \rho(y) &= (\rho_c - \rho_m)V_c^{(i)} + \rho_m - \frac{\beta}{2}(\rho_c + \rho_m)
 \end{aligned} \tag{3.13}$$

- MGFP con porosidad Tipo II

$$\begin{aligned}
 c_{xx}(y) &= (c_{xxc} - c_{xxm})V_c^{(i)} + c_{xxm} - \frac{\beta}{2}(c_{xxc} + c_{xxm})\left(1 - \frac{2|y|}{h}\right) \\
 c_{xy}(y) &= (c_{xyc} - c_{xym})V_c^{(i)} + c_{xym} - \frac{\beta}{2}(c_{xyc} + c_{xym})\left(1 - \frac{2|y|}{h}\right) \\
 c_{xz}(y) &= (c_{xzc} - c_{xzm})V_c^{(i)} + c_{xzm} - \frac{\beta}{2}(c_{xzc} + c_{xzm})\left(1 - \frac{2|y|}{h}\right) \\
 \rho(y) &= (\rho_c - \rho_m)V_c^{(i)} + \rho_m - \frac{\beta}{2}(\rho_c + \rho_m)\left(1 - \frac{2|y|}{h}\right)
 \end{aligned} \tag{3.14}$$

A partir de las ecuaciones anteriores, teniendo en cuenta las hipótesis de la Sección 3.3, las deformaciones nulas de la ecuación (3.9), y considerando el MGFP completamente inerte al campo eléctrico, se formulan las siguientes ecuaciones constitutivas para el MGFP:

$$\begin{bmatrix} T_{xx} \\ T_{xy} \\ T_{xz} \\ D_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{xx} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_{xy} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_{xz} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_{xx} \\ S_{xy} \\ S_{xz} \\ E_y \end{bmatrix}. \tag{3.15}$$

3.5.3. Metaestructura

Considerando que la metaestructura está compuesta por material piezoeléctrico y Material Graduado Poroso Funcional (MGFP), sus ecuaciones constitutivas se obtienen combinando las ecuaciones (3.11) y (3.15) en función a la capa que se encuentre integrando, es decir:

$$\begin{aligned}
 \text{Capa superior:} \quad \begin{bmatrix} \mathbf{T} \\ \mathbf{D} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \mathbf{c}_{pz} & -\mathbf{e}_{pz} \\ \mathbf{e}_{pz}^T & \boldsymbol{\varepsilon}_{pz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{S} \\ \mathbf{E} \end{bmatrix} \\
 \text{Capa MGFP:} \quad \begin{bmatrix} \mathbf{T} \\ \mathbf{D} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \mathbf{c}_s & \mathbf{e}_s \\ \mathbf{e}_s & \boldsymbol{\varepsilon}_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{S} \\ \mathbf{E} \end{bmatrix} \\
 \text{Capa inferior:} \quad \begin{bmatrix} \mathbf{T} \\ \mathbf{D} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \mathbf{c}_{pz} & \mathbf{e}_{pz} \\ -\mathbf{e}_{pz}^T & \boldsymbol{\varepsilon}_{pz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{S} \\ \mathbf{E} \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{3.16}$$

donde

$$\begin{aligned}
 \mathbf{c}_{pz} &= \begin{bmatrix} \bar{c}_{11}^E & 0 & 0 \\ 0 & \bar{c}_{55}^E & 0 \\ 0 & 0 & \bar{c}_{66}^E \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e}_{pz} = \begin{bmatrix} \bar{e}_{31} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\varepsilon}_{pz} = \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{33}^S \\
 \mathbf{c}_s &= \begin{bmatrix} c_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & c_{xy} & 0 \\ 0 & 0 & c_{xz} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e}_s = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\varepsilon}_s = 0.
 \end{aligned} \tag{3.17}$$

Además, teniendo en cuenta que el bimorfo puede conectarse eléctricamente en serie o paralelo (ver Sección 2.2), los voltajes de cada piezoeléctrico perteneciente a un bloque, respecto del voltaje en los terminales de dicho bloque, está dado por:

$$\begin{aligned}
 \text{Serie: } \{v_{pz} = v_k/2\} \\
 \text{Paralelo: } \{v_{pz} = v_k\}.
 \end{aligned} \tag{3.18}$$

3.6. Formulación débil

La formulación débil de las ecuaciones que rigen la dinámica de la metaestructura se obtienen a partir del Principio de Hamilton para sistemas electromecánicos. Los requisitos de admisibilidad implican que los desplazamientos virtuales δu_i deben ser compatibles con la cinemática del sistema, y las variaciones admisibles de enlace de flujo $\delta \lambda_k$ deben ser compatibles con la ley de voltaje de Kirchoff. Teniendo en cuenta el siguiente indicador variacional:

$$\int_{t_1}^{t_2} [\delta(K^* + W_{em}^*) + \delta W_{nc}] dt = 0 \quad (3.19)$$

donde $K^* + W_{em}^*$ es el Lagrangiano y δW_{nc} el trabajo de las fuerzas externas; el set de ecuaciones dinámicas se obtiene a partir de cancelar la ecuación (3.19) respecto de toda variación admisible de δu_i y $\delta \lambda_k$ entre t_1 y t_2 , donde $\delta u_i(t_1) = \delta u_i(t_2) = \delta \lambda_k(t_1) = \delta \lambda_k(t_2) = 0$.

La coenergía cinética del sistema en coordenadas curvilíneas está dada por:

$$K^* = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho \dot{\mathbf{u}}^T \dot{\mathbf{u}} \frac{d\Omega}{\mathcal{F}} \quad (3.20)$$

siendo su contribución al variacional, tal que:

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} \delta K^* dt &= \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega} \rho \delta \dot{\mathbf{u}}^T \dot{\mathbf{u}} \frac{d\Omega}{\mathcal{F}} dt \\ &= \int_{\Omega} \rho \delta \mathbf{u}^T \dot{\mathbf{u}} \Big|_{t_1}^{t_2} \frac{d\Omega}{\mathcal{F}} - \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega} \rho \delta \mathbf{u}^T \ddot{\mathbf{u}} \frac{d\Omega}{\mathcal{F}} dt \end{aligned} \quad (3.21)$$

donde el primer término de la ecuación anterior se desvanece debido a $\delta u_i(t_1) = \delta u_i(t_2) = 0$.

La coenergía electromecánica interna del piezoelectrico se obtiene integrando en el volumen la densidad de coenergía electromecánica almacenada (ver Sección 2.1.4), es decir:

$$W_{em}^* = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\mathbf{E}^T \boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{E} + 2 \mathbf{S}^T \mathbf{e} \mathbf{E} - \mathbf{S}^T \mathbf{c} \mathbf{S}) \frac{d\Omega}{\mathcal{F}} \quad (3.22)$$

siendo su contribución al variacional, tal que:

$$\delta W_{em}^* = \int_{\Omega} (\delta \mathbf{E}^T \boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{E} + \delta \mathbf{E}^T \mathbf{e}^T \mathbf{S} + \delta \mathbf{S}^T \mathbf{e} \mathbf{E} - \delta \mathbf{S}^T \mathbf{c} \mathbf{S}) \frac{d\Omega}{\mathcal{F}}. \quad (3.23)$$

El trabajo de las fuerzas externas está constituido por la suma del trabajo el generado por las fuerzas mecánicas aplicadas a la estructura W_{ncm} y el trabajo generado por las corrientes aplicadas a los electrodos W_{nce} . El trabajo externo mecánico se expresa:

$$W_{ncm} = \int_{\Omega} \mathbf{u}^T \mathbf{f} \frac{d\Omega}{\mathcal{F}} + \int_S \mathbf{u}^T \mathbf{t} dS \quad (3.24)$$

donde \mathbf{f} y \mathbf{t} son las fuerzas volumétricas y superficiales respectivamente, y el dS se afecta por \mathcal{F} según el plano donde se aplique \mathbf{t} ; mientras que el trabajo externo eléctrico se expresa:

$$W_{nce} = -I_k \lambda_k \quad (3.25)$$

donde el signo indica pérdida de energía interna debido al mismo, siendo I_k la corriente y λ_k el flujo del en el k -ésimo bloque resonador. La contribución de la ecuación (3.25) al variacional puede reescribirse:

$$- \int_{t_1}^{t_2} I_k \delta \lambda_k dt = -Q_k \delta \lambda_k \Big|_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} Q_k \delta \dot{\lambda}_k dt \quad (3.26)$$

siendo Q_k la carga eléctrica asociada a la corriente I_k tal que $\dot{Q}_k = I_k$. Teniendo en cuenta que $\delta \lambda_k(t_1) = \delta \lambda_k(t_2) = 0$ y que la derivada del flujo es igual al voltaje eléctrico, es decir $v_k = \dot{\lambda}_k$, el variacional del trabajo de las corrientes aplicadas a los electrodos se expresa:

$$\delta W_{nce} = Q_k \delta v_k \quad (3.27)$$

A partir del indicador variacional de la ecuación (3.19), se obtiene finalmente la siguiente expresión correspondiente a la formulación débil de las ecuaciones dinámicas del modelo:

$$\int_{\Omega} (\delta \mathbf{E}^T \boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{E} + \delta \mathbf{E}^T \mathbf{e}^T \mathbf{S} + \delta \mathbf{S}^T \mathbf{e} \mathbf{E} - \delta \mathbf{S}^T \mathbf{c} \mathbf{S} - \rho \delta \mathbf{u}^T \ddot{\mathbf{u}}) \frac{d\Omega}{\mathcal{F}} + Q_k \delta v_k = 0 \quad (3.28)$$

donde el trabajo mecánico externo no es considerado, debido a que la excitación mecánica se realizará por medio de las condiciones de borde del modelo.

3.7. Discretización en elementos finitos

3.7.1. Introducción

Como se menciona en la introducción del presente capítulo, el modelo dinámico de la metaestructura se implementa computacionalmente mediante el Método de Elementos Finitos, por lo que amerita realizar una breve descripción del mismo a fin de comprender la secuencia del desarrollo matemático del modelo dinámico en cuestión, especialmente en lo atinente al acoplamiento electroelástico y su ensamble local y global para ciertos problemas que se evalúan.

El Método de Elementos Finitos (MEF) fue originalmente conceptualizado en 1943 por Richard Courant, quien utilizó el método de Ritz de análisis numérico y minimización de las variables de cálculo para obtener soluciones aproximadas de un sistema vibratorio. Más tarde, Turner *et al.* (1956) establece una definición más amplia del análisis numérico, centrado en *la rigidez y deformación de estructuras complejas*. Finalmente con la llegada de los primeros ordenadores, se instaura el cálculo matricial de estructuras, iniciando así el desarrollo del método que evoluciona paralelamente a la evolución de la informática. El MEF permite obtener una solución numérica aproximada de las ecuaciones diferenciales en forma débil que caracterizan el comportamiento dinámico de la metaestructura, dividiendo al problema en un número de subdominios denominados *elementos finitos*. El conjunto de elementos finitos forma una partición del dominio, también denominada *discretización*. Dentro de cada elemento se distinguen una serie de puntos representativos llamados *nodos*. El algoritmo computacional de elementos finitos se programa inicialmente para calcular el campo de desplazamientos, con el que más tarde, se calculan las tensiones y deformaciones utilizando relaciones cinemáticas y constitutivas. El desarrollo de este algoritmo requiere de las siguientes etapas (Rao, 2017; Reddy, 2004):

1. Inicialmente se formula el problema en forma variacional.
2. Se genera una división del dominio de variables independientes en subdominios. Estos nuevos subdominios se denominan elementos finitos.
3. Se construye un espacio vectorial de dimensión finita asociado a la partición de elementos finitos, denominado espacio de elementos finitos. La solución numérica aproximada

obtenida por el método corresponderá a una combinación lineal de este espacio vectorial.

4. Se proyecta el problema variacional original sobre el espacio de elementos finitos, dando lugar a un sistema de ecuaciones finito. El número de incógnitas del mismo será igual a la dimensión del espacio vectorial de elementos finitos obtenido.
5. Finalmente se calcula numéricamente la solución del sistema de ecuaciones.

3.7.2. Descripción del elemento finito

Para la discretización del modelo se utilizan elementos isoparamétricos de 3 nodos de longitud L_e y funciones de forma cuadráticas. Este elemento es una generalización del desarrollado por Piovan (2014), puesto que incorpora las variables piezoeléctricas y su acoplamiento. El vector de las variables cinemáticas nodales del elemento se expresa teniendo en cuenta las variables cinemáticas de la ecuación (3.1), de la siguiente manera:

$$\bar{U}_e^T = \{\bar{U}_{e1}^T, \bar{U}_{e2}^T, \bar{U}_{e3}^T\}, \quad \bar{U}_{ej}^T = \{u_{xcj}, u_{ycj}, \theta_{zj}, u_{zcj}, \theta_{yj}, \theta_{xj}, \theta_{wj}\}, \quad j = 1, 2, 3 \quad (3.29)$$

y las funciones de forma en coordenadas locales sobre el elemento máster se definen tal que:

$$\begin{aligned} H_1(\xi) &= 1 - 3\xi + 2\xi^2 \quad \{0 \leq \xi \leq 1\} \\ H_2(\xi) &= 4\xi - 4\xi^2 \\ H_3(\xi) &= -\xi + 2\xi^2 \end{aligned} \quad (3.30)$$

donde el mapeo de la coordenada global de la línea x a la coordenada local ξ se realiza a mediante la siguiente función lineal:

$$\left. \begin{array}{l} x = x_1 \longrightarrow \xi = 0 \\ x = x_2 \longrightarrow \xi = \frac{1}{2} \\ x = x_3 \longrightarrow \xi = 1 \end{array} \right\} \implies \begin{aligned} x &= x_1 + \xi(x_3 - x_1) \\ &= x_1 + \xi L_e. \end{aligned} \quad (3.31)$$

Las derivadas de las funciones de forma respecto de la coordenada global se obtienen por regla de la cadena según la ecuación (3.31):

$$\begin{aligned}
 H_1'(\xi) &= \frac{dH_1}{d\xi} \frac{d\xi}{dx} = \frac{dH_1}{d\xi} \frac{1}{L_e} = -3 + 4\xi \\
 H_2'(\xi) &= \frac{dH_2}{d\xi} \frac{d\xi}{dx} = \frac{dH_2}{d\xi} \frac{1}{L_e} = 4 - 8\xi \\
 H_3'(\xi) &= \frac{dH_3}{d\xi} \frac{d\xi}{dx} = \frac{dH_3}{d\xi} \frac{1}{L_e} = -1 + 4\xi.
 \end{aligned} \tag{3.32}$$

Las variables cinemáticas dentro del elemento máster se aproximan utilizando las ecuaciones (3.29) y (3.30) de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
 u_{xc} &= H_1(\xi) u_{xc1} + H_2(\xi) u_{xc2} + H_3(\xi) u_{xc3} \\
 u_{yc} &= H_1(\xi) u_{yc1} + H_2(\xi) u_{yc2} + H_3(\xi) u_{yc3} \\
 \theta_z &= H_1(\xi) \theta_{z1} + H_2(\xi) \theta_{z2} + H_3(\xi) \theta_{z3} \\
 u_{zc} &= H_1(\xi) u_{zc1} + H_2(\xi) u_{zc2} + H_3(\xi) u_{zc3} \\
 \theta_y &= H_1(\xi) \theta_{y1} + H_2(\xi) \theta_{y2} + H_3(\xi) \theta_{y3} \\
 \theta_x &= H_1(\xi) \theta_{x1} + H_2(\xi) \theta_{x2} + H_3(\xi) \theta_{x3} \\
 \theta_w &= H_1(\xi) \theta_{w1} + H_2(\xi) \theta_{w2} + H_3(\xi) \theta_{w3}
 \end{aligned} \tag{3.33}$$

derivando en la siguiente expresión matricial:

$$U = \mathbf{N} \bar{U}_e. \tag{3.34}$$

3.7.3. Matriz elemental de rigidez

La matriz elemental de rigidez se obtiene a partir del cuarto término de la ecuación (3.28), reemplazando por la expresión del campo de deformaciones de la ecuación (3.5) y la aproximación de la ecuación (3.34), como sigue:

$$\begin{aligned}
 - \int_{\Omega_e} \delta \mathbf{S}^T \mathbf{c} \mathbf{S} \frac{d\Omega}{\mathcal{F}} &= - \int_{\Omega_e} \delta U^T \mathbf{B}^T \mathbf{G}^T \mathbf{c} \mathbf{G} \mathcal{F} \mathbf{B} U d\Omega \\
 &= - \delta \bar{U}_e^T \int_0^1 \mathbf{N}^T \mathbf{B}^T \int_S \mathbf{G}^T \mathbf{c} \mathbf{G} \mathcal{F} dS \mathbf{B} \mathbf{N} L_e d\xi \bar{U}_e \\
 &= - \delta \bar{U}_e^T k_e \bar{U}_e
 \end{aligned} \tag{3.35}$$

donde las derivadas de la función de forma de la matriz $\mathbf{B} \cdot \mathbf{N}$ se realizan considerando la ecuación (3.31), y la matriz \mathbf{c} toma los valores correspondientes a la superficie que se está integrando, según las ecuaciones constitutivas de la ecuación (3.16), siendo indistinto el tipo de conexión que se utilice.

3.7.4. Vector elemental de acoplamiento

Los vectores elementales de acoplamiento se obtienen a partir del segundo y tercer término de la ecuación (3.28), siendo traspuestos entre sí. Como la totalidad de los nodos del elemento está sometida al mismo voltaje debido a la continuidad eléctrica que generan los electrodos, y considerando que el campo eléctrico sólo existe en la dirección del eje y (Sección 3.5.1), la relación entre el campo y el potencial eléctrico es la siguiente:

$$\mathbf{E} = -\nabla\Phi \quad \text{se reduce a} \implies \quad -E_y = \frac{v_{pz}}{h_{pz}} \quad (3.36)$$

donde la altura de la capa piezoeléctrica h_{pz} corresponde a la distancia entre los electrodos que producen la diferencia de potencial v_{pz} , con la que se genera el campo eléctrico a través de la capa piezoeléctrica. Tomando el segundo término de la ecuación (3.28), reemplazando por la ecuación (3.36), por la expresión del campo de deformaciones de la ecuación (3.5), y por la aproximación de la ecuación (3.34), se obtiene:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_e} \delta \mathbf{E}^T \mathbf{e}^T \mathbf{S} \frac{d\Omega}{\mathcal{F}} &= \int_{\Omega_e} \frac{\delta v_{pz}}{h_{pz}} \mathbf{e}^T \mathbf{G} \mathbf{B} U d\Omega \\ &= \delta v_{pz} \int_0^1 \int_S h_{pz}^{-1} \mathbf{e}^T \mathbf{G} dS \mathbf{B} \mathbf{N} L_e d\xi \bar{U}_e \\ &= \delta v_{pz} \vartheta_e^T \bar{U}_e. \end{aligned} \quad (3.37)$$

Se procede a continuación, de igual manera con el tercer término de la ecuación (3.28):

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_e} \delta \mathbf{S}^T \mathbf{e} \mathbf{E} \frac{d\Omega}{\mathcal{F}} &= \int_{\Omega_e} \delta U^T \mathbf{B}^T \mathbf{G}^T \mathbf{e} \frac{v_{pz}}{h_{pz}} d\Omega \\ &= \delta \bar{U}_e^T \int_0^1 \mathbf{N}^T \mathbf{B}^T \int_S \mathbf{G}^T \mathbf{e} h_{pz}^{-1} dS L_e d\xi v_{pz} \\ &= \delta \bar{U}_e^T \vartheta_e v_{pz} \end{aligned} \quad (3.38)$$

donde la matriz e toma los valores correspondientes a la superficie que se está integrando, según las ecuaciones constitutivas de la ecuación (3.16).

3.7.5. Matriz elemental de masa

El campo de desplazamientos de la ecuación (3.1) puede reformularse en función de las variables cinemáticas, de la siguiente manera:

$$\begin{Bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + \frac{y}{R} & 0 & -y & 0 & z - \frac{\omega}{R} & 0 & -\omega \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & y & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{xc} \\ u_{yc} \\ \theta_z \\ u_{zc} \\ \theta_y \\ \theta_x \\ \theta_w \end{Bmatrix} \quad (3.39)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{Q} \mathbf{U}.$$

Tomando el quinto término de la ecuación (3.28), reemplazando por la ecuación (3.38) y la aproximación de la ecuación (3.34), se obtiene:

$$\begin{aligned} - \int_{\Omega_e} \rho \delta \mathbf{u}^T \ddot{\mathbf{u}} \frac{d\Omega}{\mathcal{F}} &= - \int_{\Omega_e} \rho \delta \mathbf{U}^T \mathbf{Q}^T \mathbf{Q} \ddot{\mathbf{U}} \frac{d\Omega}{\mathcal{F}} \\ &= - \delta \bar{\mathbf{U}}_e^T \int_0^1 \mathbf{N}^T \int_S \frac{\rho}{\mathcal{F}} \mathbf{Q}^T \mathbf{Q} dS \mathbf{N} L_e d\xi \ddot{\mathbf{U}}_e \\ &= - \delta \bar{\mathbf{U}}_e^T m_e \ddot{\mathbf{U}}_e \end{aligned} \quad (3.40)$$

donde la densidad del material toma los valores según la capa que se encuentra integrando, siendo $\rho = \rho_{pz}$ en la capa piezoeléctrica, y $\rho = \rho_s$ según la ecuación (3.13) o ecuación (3.14) en la capa sustrato.

3.7.6. Capacidad elemental

La capacidad del elemento se desprende del primer término de la ecuación (3.28), reemplazando por la ecuación (3.36) de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega_e} \delta \mathbf{E}^T \boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{E} \frac{d\Omega}{\mathcal{F}} &= \int_{\Omega_e} \frac{\delta v_{pz}}{h_{pz}} \boldsymbol{\varepsilon} \frac{v_{pz}}{h_{pz}} \frac{d\Omega}{\mathcal{F}} \\
&= \delta v_{pz} \int_S \frac{\boldsymbol{\varepsilon}}{\mathcal{F} h_{pz}^2} dS \int_0^1 L_e d\xi v_{pz} \\
&= \delta v_{pz} \int_S \frac{\boldsymbol{\varepsilon} L_e}{\mathcal{F} h_{pz}^2} dS v_{pz} \\
&= \delta v_{pz} \underbrace{\int_{S_{inf}} \frac{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{33}^S L_e}{\mathcal{F} h_{pz}^2} dS}_{C_{inf}} v_{pz} + \delta v_{pz} \underbrace{\int_{S_{sup}} \frac{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{33}^S L_e}{\mathcal{F} h_{pz}^2} dS}_{C_{sup}} v_{pz}
\end{aligned} \tag{3.41}$$

donde C_{inf} y C_{sup} son las capacidades generadas por el piezoeléctrico inferior y superior respectivamente. Las mismas se calculan de forma analítica como se muestra a continuación:

$$C_{inf} = \int_{-b/2}^{b/2} \int_{-h_2}^{-h_1} \frac{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{33}^S L_e}{\mathcal{F} h_{pz}^2} dydz = \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{33}^S \frac{L_e b}{h_{pz}} \left[1 - \frac{h_1 + h_2}{2R} \right] = C \left[\frac{L_e^-}{L_e} \right] \tag{3.42}$$

$$C_{sup} = \int_{-b/2}^{b/2} \int_{h_1}^{h_2} \frac{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{33}^S L_e}{\mathcal{F} h_{pz}^2} dydz = \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{33}^S \frac{L_e b}{h_{pz}} \left[1 + \frac{h_1 + h_2}{2R} \right] = C \left[\frac{L_e^+}{L_e} \right] \tag{3.43}$$

donde h_1 es la distancia desde la línea media de la estructura hasta la capa piezoeléctrica, h_2 la distancia desde la línea media de la estructura hasta el electrodo exterior de la capa piezoeléctrica, $h_{pz} = h_2 - h_1$ la altura de la capa piezoeléctrica, L_e la longitud media de la estructura, y L_e^- , L_e^+ la longitud media de la capa piezoeléctrica inferior y superior de cada bloque piezoeléctrico elemental respectivamente (ver Figura 3.3). Además $C = \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{33}^S \frac{L_e b}{h_{pz}}$ es la capacidad de un capacitor de placas paralelas de base b , altura h_{pz} , y longitud L_e . La capacidad equivalente se obtiene sumando las capacidades de cada piezoeléctrico de forma algebraica:

$$C_{eq} = C_{inf} + C_{sup} = 2C. \tag{3.44}$$

La ecuación (3.41) se expresa finalmente:

$$\int_{\Omega_e} \delta \mathbf{E}^T \boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{E} \frac{d\Omega}{\mathcal{F}} = \delta v_{pz} C_{eq} v_{pz} \quad (3.45)$$

donde C_{eq} representa la capacidad equivalente de cada elemento finito.

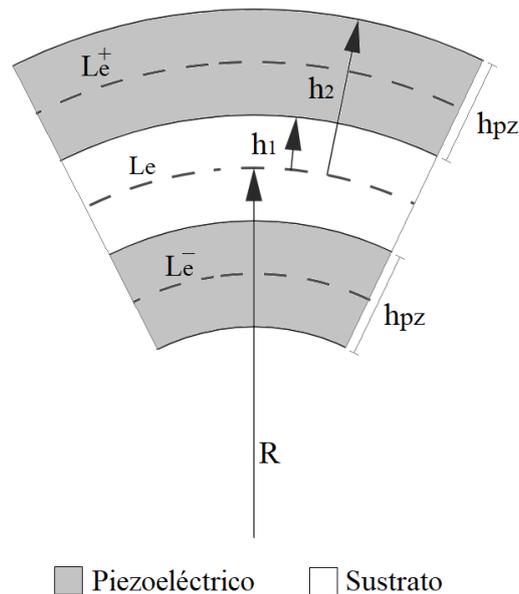


Figura 3.3: Dimensiones de un elemento de la estructura.

3.8. Ensamble de las matrices y vectores elementales

El procedimiento de ensamblar las matrices y vectores elementales tiene la finalidad reconstruir el dominio global original Ω basándose en el requisito de “compatibilidad” en los nodos de unión entre los elementos finitos. Esto significa que el valor de las variables nodales en los nodos de unión es el mismo para todos los elementos que se unen en ese nodo. Para este modelo en particular, las variables nodales corresponden a los desplazamientos generalizados. Cuando los desplazamientos generalizados se corresponden en un nodo común, la rigidez nodal y la carga nodal de cada uno de los elementos que comparten el nodo se agregan para obtener la rigidez neta y la carga neta en ese nodo. Inicialmente se ensambla un bloque resonador de la es-

estructura, debido a que el voltaje a largo del bloque resonador no varía, y finalmente se ensambla la estructura completa. Sean N_e el número de elementos necesarios para cubrir un solo bloque resonador en su totalidad y \tilde{N} el total de grados de libertad del mismo (incluyendo los grados de libertad de frontera y de restricción), podemos expandir las matrices elementales de rigidez $k_e^{(i)}$ y masa $m_e^{(i)}$ de orden $n \times n$, y el vector elemental de acoplamiento $\vartheta_e^{(i)}$ de orden $n \times 1$ (siendo i el elemento a quien corresponde la matriz y n el número de grados de libertad del elemento), en las matrices $\mathbf{K}_e^{(i)}$ y $\mathbf{M}_e^{(i)}$ de orden $\tilde{N} \times \tilde{N}$ y en el vector $\Theta_e^{(i)}$ de orden $\tilde{N} \times 1$ colocando ceros en las posiciones vacías. Luego, el vector y las matrices globales de un bloque resonador, se obtienen mediante la siguiente suma algebraica:

$$\mathbf{K}_b = \sum_{i=1}^{N_e} \mathbf{K}_e^{(i)}, \quad \mathbf{M}_b = \sum_{i=1}^{N_e} \mathbf{M}_e^{(i)}, \quad \Theta_b = \sum_{i=1}^{N_e} \Theta_e^{(i)} \quad (3.46)$$

y la capacidad global del bloque resonador se obtiene mediante la suma algebraica de la capacidad de cada elemento, es decir:

$$\mathbf{C} = \sum_{i=1}^{N_e} C_{eq} = N_e C_{eq}. \quad (3.47)$$

Teniendo en cuenta las ecuaciones (3.46) y (3.47), el indicador variacional de la ecuación (3.28) deriva en la siguiente expresión, para un bloque resonador bimorfo paralelo ($v_{pz} = v_k$):

$$\delta v_k \mathbf{C} v_k + \delta v_k \Theta_b^T \bar{U}_b + \delta \bar{U}_b^T \Theta_b v_k - \delta \bar{U}_b^T \mathbf{K}_b \bar{U}_b - \delta \bar{U}_b^T \mathbf{M}_b \ddot{\bar{U}}_b + Q_k \delta v_k = 0 \quad (3.48)$$

donde v_k es el voltaje del k -ésimo bloque resonador y \bar{U}_b de orden $\tilde{N} \times 1$ es el vector de variables cinemáticas modales del bloque resonador máster. De la expresión variacional anterior se obtienen las siguientes ecuaciones electromecánicas:

$$\mathbf{M}_b \ddot{\bar{U}}_b + \mathbf{K}_b \bar{U}_b - \Theta_b v_k = 0 \quad (3.49)$$

$$\Theta_b^T \bar{U}_b + \mathbf{C} v_k + Q_k = 0. \quad (3.50)$$

Diferenciando la carga eléctrica del bloque se recupera la corriente del bloque, es decir $I_k = \dot{Q}_k$. Esta corriente puede expresarse en función de la admitancia y el voltaje del bloque mediante la Ley de Ohm como $I_k = Y_k v_k$. Luego, el sistema de ecuaciones anterior puede reescribirse como:

$$\mathbf{M}_b \ddot{\bar{U}}_b + \mathbf{K}_b \bar{U}_b - \Theta_b v_k = 0 \quad (3.51)$$

$$\Theta_b^T \dot{\bar{U}}_b + \mathbf{C} \dot{v}_k + Y_k v_k = 0. \quad (3.52)$$

Asumiendo una respuesta armónica para $\bar{U}_b = \hat{U}_b e^{j\omega t}$ y $v_k = \hat{v}_k e^{j\omega t}$, y sustituyendo en el sistema de ecuaciones anterior, obtenemos las ecuaciones electromecánicas del bloque resonador bimorfo paralelo en estado estacionario:

$$[\mathbf{K}_b - \omega^2 \mathbf{M}_b] \hat{U}_b - \Theta_b \hat{v}_k = 0 \quad (3.53)$$

$$j\omega \Theta_b^T \hat{U}_b + (j\omega \mathbf{C} + Y_k) \hat{v}_k = 0. \quad (3.54)$$

A continuación, despejando \hat{v}_k de la ecuación (3.54) y reemplazando en la ecuación (3.53), se obtiene la ecuación dinámica de estado estacionario del bloque resonador bimorfo paralelo:

$$[\mathbf{K}_b - \omega^2 \mathbf{M}_b + j\omega \mathbf{T}_b (j\omega \mathbf{C} + Y_k)^{-1}] \hat{U}_b = 0 \quad (3.55)$$

donde $\mathbf{T}_b = \Theta_b \Theta_b^T$ es la matriz de acoplamiento del bloque máster, de orden $\tilde{N} \times \tilde{N}$.

Si por el contrario, se considera al bloque resonador bimorfo serie ($v_{pz} = v_k/2$), la ecuación (3.48) se expresa:

$$\delta v_k \frac{\mathbf{C}}{4} v_k + \delta v_k \frac{\Theta_b^T}{2} \bar{U}_b + \delta \bar{U}_b^T \frac{\Theta_b}{2} v_k - \delta \bar{U}_b^T \mathbf{K}_b \bar{U}_b - \delta \bar{U}_b^T \mathbf{M}_b \ddot{\bar{U}}_b + Q_k \delta v_k = 0. \quad (3.56)$$

Operando la ecuación (3.56) de forma exacta a la ecuación (3.48), se obtiene la ecuación dinámica de estado estacionario del bloque resonador bimorfo serie:

$$[\mathbf{K}_b - \omega^2 \mathbf{M}_b + j\omega \mathbf{T}_b (j\omega \mathbf{C} + 4Y_k)^{-1}] \hat{U}_b = 0. \quad (3.57)$$

Comparando la ecuación (3.55) con la ecuación (3.57) se verifica que la ecuación dinámica para conexión serie y paralelo son idénticas si se mantiene la siguiente relación entre admitancias:

$$Y_{ks} = \frac{Y_{kp}}{4}, \quad (3.58)$$

donde $\{Y_{ks}, Y_{kp}\}$ son las admitancias para la conexión en serie y paralelo respectivamente.

3.9. Ensamble de los bloques resonadores

El procedimiento de ensamble de bloques resonadores consiste en ensamblar las matrices de la ecuación dinámica de un solo bloque resonador en función la cantidad de resonadores utilizados, para completar el dominio global de la metaestructura, de manera similar al ensamble de las matrices elementales de la Sección 3.8. Sean N_b el número de bloques necesarios para cubrir la estructura en su totalidad y N el total de grados de libertad de la metaestructura (incluyendo los grados de libertad de frontera y de restricción), podemos expandir las matrices de rigidez $\mathbf{K}_b^{(k)}$, masa $\mathbf{M}_b^{(k)}$ y acoplamiento $\mathbf{T}_b^{(k)}$ de orden $\tilde{N} \times \tilde{N}$ (siendo k el bloque a quien corresponde la matriz y \tilde{N} el número de grados de libertad del bloque), en las matrices $\mathbf{K}_b^{(k)}$, $\mathbf{M}_b^{(k)}$ y $\mathbf{T}_b^{(k)}$ de orden $N \times N$ colocando ceros en las posiciones vacías. Luego, las matrices globales de rigidez y masa de la metaestructura, se obtienen mediante la siguiente suma algebraica:

$$\mathbf{K} = \sum_{k=1}^{N_b} \mathbf{K}_b^{(k)}, \quad \mathbf{M} = \sum_{k=1}^{N_b} \mathbf{M}_b^{(k)} \quad (3.59)$$

mientras que la matriz de acoplamiento expandida se conserva sin sumar, tantas como bloques se consideren, debido la independencia eléctrica de cada bloque, es decir:

$$\mathbf{T}_k = \mathbf{T}_b^{(k)}. \quad (3.60)$$

Teniendo en cuenta las ecuaciones (3.59) y (3.60), y asumiendo el amortiguamiento mecánico mediante la matriz $\mathbf{C} = \eta_1 \mathbf{M} + \eta_2 \mathbf{K}$ (Rayleigh y Strutt, 1945), la ecuación (3.55) se expande al dominio global de la metaestructura, para obtener la siguiente ecuación dinámica de estado estacionario de la metaestructura paralelo:

$$[\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M} + j\omega \mathbf{C} + \sum_{k=1}^{N_b} j\omega \mathbf{T}_k (j\omega \mathbf{C} + Y_k)^{-1}] \hat{\mathbf{U}} = 0 \quad (3.61)$$

donde $\bar{\mathbf{U}} = \hat{\mathbf{U}} e^{j\omega t}$ de orden $N \times 1$ es el vector de variables nodales cinemáticas de la metaestructura.

3.10. Movimiento de excitación desde la base

El movimiento de excitación desde la base se modela siguiendo las pautas del Anexo D. Sea $g = 7$ el número de grados de libertad de un nodo, G el número total de grados de libertad de la estructura, y el movimiento de excitación desde la base de tipo armónico de amplitud v en la dirección y (dirección de polarización de los piezoeléctricos), la ecuación (3.61) puede reformularse como:

$$[\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M} + j\omega \mathbf{C} + \sum_{k=1}^{N_b} j\omega \mathbf{T}_k (j\omega \mathbf{C} + Y_k)^{-1}] \hat{\mathbf{U}} = \hat{\mathbf{F}} \quad (3.62)$$

donde

$$\begin{aligned} \mathbf{K} &= \mathbf{K}[\{8, \dots, G\}; \{8, \dots, G\}] \\ \mathbf{M} &= \mathbf{M}[\{8, \dots, G\}; \{8, \dots, G\}] \\ \mathbf{C} &= \mathbf{C}[\{8, \dots, G\}; \{8, \dots, G\}] \\ \mathbf{T}_k &= \mathbf{T}_k[\{8, \dots, G\}; \{8, \dots, G\}] \\ \hat{\mathbf{U}} &= \hat{\mathbf{U}}[\{8, \dots, G\}; \{1\}] \end{aligned} \quad (3.63)$$

y $\hat{\mathbf{F}}$ el vector de fuerza externa aplicada a los nodos, tal que:

$$\hat{\mathbf{F}} = -v [K - \omega^2 M + j\omega C + \sum_{k=1}^{N_b} j\omega T_k (j\omega C + Y_k)^{-1}] \quad (3.64)$$

donde

$$\begin{aligned} K &= \mathbf{K}[\{8, \dots, G\}; \{2\}] \\ M &= \mathbf{M}[\{8, \dots, G\}; \{2\}] \\ C &= \mathbf{C}[\{8, \dots, G\}; \{2\}] \\ T_k &= \mathbf{T}_k[\{8, \dots, G\}; \{2\}]. \end{aligned} \quad (3.65)$$

La formulación de la ecuación (3.62) puede interpretarse como la correspondiente a una estructura tipo viga, cuya condición de borde es empotrado-libre, sometida a una fuerza distribuida equivalente a la fuerza inercial que le provocaría el movimiento armónico del empotramiento.

3.11. Sintonía de los bloques resonadores

Con el fin de generar un resonador electromecánico local en cada bloque de la metaestructura, la impedancia asociada a cada bloque resonador debe ser de tipo inductiva (ver Sección 2.4.3), es decir:

$$Z_k(j\omega) = Y_k^{-1}(j\omega) = j\omega L_k \quad (3.66)$$

donde L_k representa a la inductancia conectada a los terminales de cada bloque. Reemplazando la ecuación (3.66) en ecuación (3.62), considerando el mismo valor de inductancia para todos los bloques resonadores ($L_k = L$), y operando algebraicamente, se obtiene la siguiente ecuación dinámica de estado estacionario de la metaestructura paralelo, cuyos bloques resonadores ideales se encuentran sintonizados a la misma frecuencia:

$$\hat{U} = \left[\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M} + j\omega \mathbf{C} - \mathbf{T} \frac{\omega^2 L}{1 - \omega^2 LC} \right]^{-1} \hat{F} \quad (3.67)$$

donde $\mathbf{T} = \sum_{k=1}^{N_b} \mathbf{T}_k$. De igual manera que la ecuación (2.40), la ecuación anterior muestra una antiresonancia en $\omega_t = (LC)^{-2}$, definiendo de esta manera a ω_t como la frecuencia de sintonía de la metaestructura. Para el caso de la metaestructura serie, según la relación de la ecuación (3.58), la frecuencia de sintonía será $\omega_t = (LC/4)^{-2}$, implicando que el valor de la inductancia en la conexión serie debe ser 4 veces mayor que en la conexión paralelo, para obtener la misma frecuencia de sintonía. Con el fin de obtener una representación numérica mas cercana a la realidad, se coloca una resistencia en serie a la inductancia para contemplar las pérdidas de energía eléctrica propias de un circuito eléctrico real. La impedancia asociada a cada bloque resulta entonces:

$$Z_k(j\omega) = Y_k^{-1}(j\omega) = j\omega L_k + R_k \quad (3.68)$$

donde R_k representan a la resistencia eléctrica en cuestión. Reemplazando la ecuación (3.68) en ecuación (3.62) se obtiene la ecuación dinámica de estado estacionario de la metaestructura paralelo:

$$\hat{U} = \left[\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M} + j\omega \mathbf{C} + \sum_{k=1}^{N_b} j\omega \mathbf{T}_k \left(j\omega \mathbf{C} + \frac{1}{j\omega \mathbf{L}_k + \mathbf{R}_k} \right)^{-1} \right]^{-1} \hat{F} \quad (3.69)$$

y considerando la relación de la ecuación (3.58), se obtiene la ecuación dinámica de estado estacionario de la metaestructura serie:

$$\hat{U} = \left[\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M} + j\omega \mathbf{C} + \sum_{k=1}^{N_b} j\omega \mathbf{T}_k \left(j\omega \mathbf{C} + \frac{4}{j\omega \mathbf{L}_k + \mathbf{R}_k} \right)^{-1} \right]^{-1} \hat{F}. \quad (3.70)$$

Las ecuaciones dinámicas anteriores permiten obtener los desplazamientos de cualquier punto de la metaestructura cuando la misma es sometida a un movimiento armónico desde la base y serán de utilidad para efectuar los distintos análisis de propagación de vibraciones desde la base hacia cualquiera de estos puntos.

Capítulo 4

Análisis Estadístico

4.1. Introducción

En el presente capítulo se detalla la metodología del análisis estadístico de propagación y cuantificación de incertidumbre, así como también los principios utilizados para el desarrollo del modelo estocástico de la metaestructura. El análisis estadístico del presente trabajo se realiza mediante un *Enfoque Probabilístico Paramétrico* (EPP), el cual se basa en considerar la incertidumbre presente en los distintos parámetros que constituyen al modelo dinámico de la metaestructura.

4.2. Enfoque Probabilístico Paramétrico

La metodología para el análisis de propagación de incertidumbre se basa en un enfoque de tipo EPP, cuya representación esquemática se observa en la Figura 4.1, y consta de los siguientes pasos para su realización:

1. Se construye el modelo estocástico a partir del modelo computacional de elementos finitos determinístico, considerando como fuente de incertidumbre a los parámetros asociados a la fabricación de la estructura (ej.:incertidumbre en la geometría), así como la incertidumbre propia de los componentes que la constituyen (ej.:incertidumbre en los

parámetros constitutivos de los materiales, entre otros). Los parámetros inciertos serán considerados variables aleatorias del modelo estocástico, representados mediante funciones de densidad de probabilidad, las cuales se deducen empleando el *Principio de Máxima Entropía*.

2. Se emplea el *Método de Monte Carlo* como una herramienta para obtener así el conjunto de observaciones necesarios para el análisis de la respuesta. Luego se realiza el análisis de propagación de incertidumbre de las variables aleatorias a través del modelo computacional, el cual se considera como valor medio del análisis estadístico.
3. Se realiza un análisis de convergencia en base a un criterio de error prescrito, a fin de obtener estadísticas representativas.
4. Se realiza el estudio estadístico de la respuesta, donde los resultados son presentados en distintas tablas y gráficas acordes.

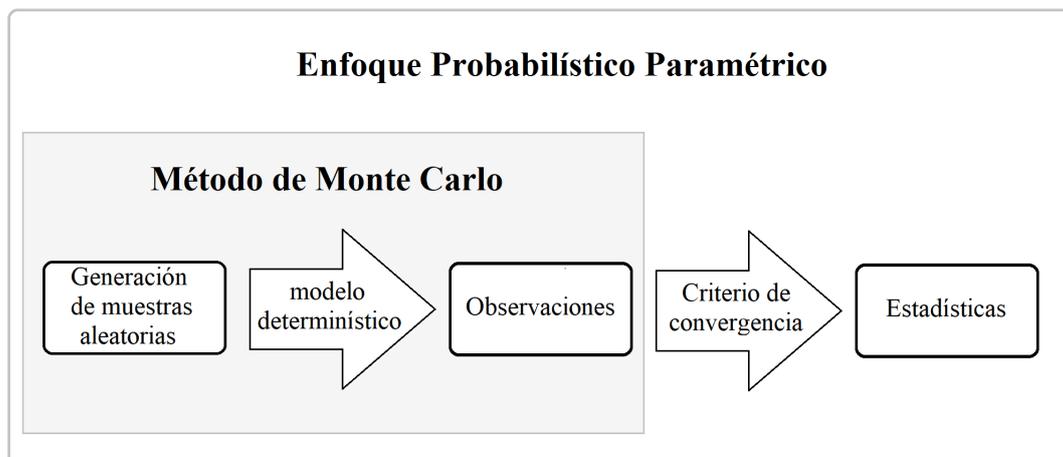


Figura 4.1: Enfoque Probabilístico Paramétrico EPP.

4.2.1. Método de Monte Carlo

El Método de Monte Carlo es un proceso estocástico numérico, el cual consiste en la generación de muestras a partir de una determinada distribución de probabilidad asociada a los

objetos aleatorios en consideración, donde cada muestra generada define un problema particular asociado al modelo determinístico computacional (Shonkwiler y Mendivil, 2009; Sampaio y Lima, 2012). Luego se construye el modelo estadístico de la respuesta en base a las observaciones anteriores, donde el mínimo número necesario de dichas observaciones se determina por medio de un análisis de convergencia, según el criterio prescrito. La justificación inicial de este método proviene de dos teoremas centrales de la probabilidad y estadística, los cuales se enuncian a continuación:

■ **Ley Débil de los Grandes Números**

Sea $X^{(1)}, X^{(2)}, \dots, X^{(n)}$ un conjunto de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas, siendo $S_n = X^{(1)} + X^{(2)} + \dots + X^{(n)}$. Si existe la esperanza $\mu = E(X_i)$, entonces para todo $\varepsilon > 0$ se verifica que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{Prob} \left(\left| \frac{S_n}{n} - \mu \right| > \varepsilon \right) = 0. \quad (4.1)$$

La interpretación de este enunciado implica la convergencia de la respuesta para un número de realizaciones suficientemente alto.

■ **Teorema Central del Límite**

Si adicionalmente existe la varianza $\sigma^2 = E((X_i - \mu)^2)$ entonces:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{Prob} \left(\frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} < \gamma \right) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\gamma} e^{-x^2/2} dx. \quad (4.2)$$

El teorema del límite central garantiza una distribución aproximadamente normal cuando n es suficientemente grande.

4.2.2. Principio de Máxima Entropía

El Principio de Máxima Entropía constituye un método eficaz para la obtención de la función de densidad de probabilidad de un parámetro aleatorio utilizando la información disponible del mismo (Jaynes, 1957; Shannon, 1948). Este principio establece que:

* De todas las funciones de densidad de probabilidad posibles (las que satisfacen las restricciones impuestas por la información disponible del mismo), se selecciona aquella que minimiza la incertidumbre (Entropía).

En el caso de una variable aleatoria real continua X con soporte $k = [a, b] \subset \mathbb{R}$ y función de densidad p , la medida de entropía de Shannon S está dada por:

$$S(p) = - \int_k p(x) \ln(p(x)) dx. \quad (4.3)$$

Como p es una función de densidad de probabilidad, se debe cumplir que:

$$\int_a^b p(x) dx = 1 \quad \text{y} \quad p(x) \geq 0, \quad \forall x \in [a, b]. \quad (4.4)$$

Sea \mathcal{C}_{ab} el espacio de funciones $x \mapsto p(x)$ de \mathbb{R} en $\mathbb{R} \geq 0$ que satisfacen los requerimientos establecidos en la ecuación (4.4). La función $p \in \mathcal{C}_{ab}$ que maximiza la entropía S de la ecuación (4.3) se obtiene resolviendo el siguiente problema de optimización:

$$\max_{P \in \mathcal{C}_{ab}} S(p). \quad (4.5)$$

La respuesta al problema de la ecuación (4.5) con las condiciones que se impongan con respecto a cuanto se sepa a priori de la variable aleatoria, implica el planteo de un problema variacional que involucra multiplicadores de Lagrange, uno por cada condición y/o restricción. A modo de ejemplo, si solo se fijan las condiciones dadas por la ecuación (4.4) la función de densidad de probabilidad deducida según la ecuación (4.5) resulta ser una distribución uniforme en el dominio $[a, b]$.

4.3. Modelo estocástico

Para la construcción del modelo estocástico, las variables aleatorias $V_i, i = 1, \dots, n$ se consideran acotadas, cuyos valores límites son conocidos. Se asume que el valor medio de las mismas coincide con el valor determinístico de cada parámetro con el fin de chequear convergencia.

Además, al no existir correlación o dependencia entre las mismas, se asumen variables aleatorias independientes. Se considera el coeficiente de variación (CV) como medida de dispersión adimensional de las variables aleatorias, definido como:

$$\delta_{V_i} = \frac{\sigma_{V_i}}{\mu_{V_i}}. \quad (4.6)$$

De lo anterior, las funciones de densidad de probabilidad de las variables aleatorias, expresadas en función del coeficiente de variación, se calculan mediante la siguiente expresión:

$$p_{V_i}(V_i) = \mathcal{S}_{[L_{V_i}, U_{V_i}]}(V_i) \frac{1}{U_{V_i} - L_{V_i}} = \mathcal{S}_{[L_{V_i}, U_{V_i}]}(V_i) \frac{1}{2\sqrt{3} \bar{V}_i \delta_{V_i}}, \quad i = 1, \dots, n \quad (4.7)$$

siendo \bar{V}_i la expectativa de la variable aleatoria, y $\mathcal{S}_{[L_{V_i}, U_{V_i}]}(V_i)$ la función de soporte genérica, donde L_{V_i} y U_{V_i} corresponden a sus cotas inferior y superior respectivamente, mismas que pueden definirse en función de la expectativa y el coeficiente de variación. Claramente la ecuación (4.7) es una distribución uniforme. Esto implica que la dispersión de información corresponde al máximo margen de incertidumbre obtenible con los datos que se empleen (i.e. fijando expectativa y coeficiente de variación o los límites de la variable aleatoria).

Considerando el modelo de elementos finitos representado por las ecuaciones (3.69) y (3.70) para la metaestructura en conexión paralelo y serie respectivamente, por medio del Método de Monte Carlo y las funciones de densidad de probabilidad definidas en la ecuación (4.7), el modelo estocástico para una metaestructura en conexión paralelo se expresa como:

$$\hat{\mathbf{U}}(\omega) = \left[\mathbb{K} - \omega^2 \mathbf{M} + j\omega \mathbf{C} + \sum_{k=1}^{N_b} j\omega \mathbf{T}_k \left(j\omega \mathbf{C} + \frac{1}{j\omega L_k + R_k} \right)^{-1} \right]^{-1} \hat{\mathbf{F}} \quad (4.8)$$

mientras que la expresión para la conexión serie resulta:

$$\hat{\mathbf{U}}(\omega) = \left[\mathbb{K} - \omega^2 \mathbf{M} + j\omega \mathbf{C} + \sum_{k=1}^{N_b} j\omega \mathbf{T}_k \left(j\omega \mathbf{C} + \frac{4}{j\omega L_k + R_k} \right)^{-1} \right]^{-1} \hat{\mathbf{F}} \quad (4.9)$$

donde la tipografía negrita de pizarra indica que las entidades son estocásticas. La convergencia del método es analizada bajo un criterio de media cuadrática mediante la siguiente expresión:

$$\text{conv}(N_S) = \sqrt{\frac{1}{N_{MS}} \sum_{j=1}^{N_{MS}} \int_W \left\| \hat{U}_j(\omega) - \hat{U}(\omega) \right\|^2 d\omega} \quad (4.10)$$

donde N_S es el número de iteraciones de Monte Carlo y W es la banda de frecuencia del análisis.

Capítulo 5

Estudios Computacionales

5.1. Validaciones preliminares y estudios comparativos

Esta sección corresponde a la comparación y validación del modelo dinámico numérico de la metaestructura, deducido en el Capítulo 3, respecto de otros enfoques. El primer ejemplo consiste en la comparación del modelo numérico 1D con el modelo de viga MGFP propuesto por Fazzolari (2018), es decir el análisis de caso particular de viga recta. Para ello, el modelo numérico 1D se compone únicamente del sustrato portante de Material Graduado Funcional Poroso (MGFP), compuesto por alúmina y aluminio, considerando lineal a la transición entre ambos materiales mediante el parámetro $p = 1$, y una densidad de porosidad media según el parámetro $\beta = 0,2$. Las propiedades de los materiales que componen al MGFP se encuentran en la Tabla 5.1.

	Alúmina	Aluminio
Constante de elasticidad longitudinal, c_{xx} [GPa]	380	70
Coefficiente de Poisson, ν	0.3	0.3
Densidad, ρ [Kg/m ³]	3960	2700

Tabla 5.1: Propiedades materiales del alúmina y el aluminio.

La condición de borde de la estructura es empotrada en ambos extremos. La Tabla 5.2 mues-

tra la comparación entre ambos modelos considerando la primera frecuencia natural, mediante el parámetro de frecuencia adimensional $\tilde{\omega} = \omega(l^2/h)\sqrt{\rho/c}$. En la misma puede observarse la similitud en la respuesta de ambos modelos, con un porcentaje de error inferior a 0.3 %.

	l/h				
	5	10	15	20	50
Modelo numérico 1D	7.7609	8.6615	8.8696	8.9465	9.0325
Modelo de Fazzolari	7.7388	8.6806	8.8962	8.9746	9.0594

Tabla 5.2: Comparación simulando solo el sustrato de MGFP.

El segundo ejemplo corresponde a la comparación del modelo numérico 1D con el modelo analítico propuesto por Erturk e Inman (2011) y el modelo de elementos finitos propuesto por Surabhi (2014), ambos para una estructura piezoeléctrica recta en configuración bimorfo de un solo bloque resonador (i.e $R \rightarrow \infty, N_b = 1$). La estructura en cuestión es del tipo bimorfo, compuesta por dos capas piezoeléctricas PZT-5A y un sustrato de aluminio, cuyas propiedades se encuentran en la Tabla 5.3.

	PZT-5A	Aluminio
Constante de elasticidad longitudinal, [GPa]	$\bar{c}_{11}^E = 61,0$	$c_{xxm} = 70,0$
Constante de elasticidad por corte, [GPa]	$\bar{c}_{55}^E = 21,1$	$c_{xym} = 26,9$
Densidad, [Kg/m ³]	$\rho_{pz} = 7750$	$\rho_m = 2700$
Constante de permisividad, [F/m]	$\bar{\epsilon}_{33}^S = 13,33e^{-9}$	na
Constante de acoplamiento, [C/m ²]	$\bar{e}_{31} = 12,3$	na

Tabla 5.3: Propiedades materiales del PZT-5A y el aluminio.

Las dimensiones de la estructura son: largo $l = 30mm$, ancho $b = 5mm$, altura de la capa piezoeléctrica $h_{pz} = 0,15mm$, y altura del sustrato $h_s = 0,05mm$. Cabe destacar que tanto el modelo analítico de Erturk, como el modelo MEF de Surabhi, trabajan unicamente sobre el plano xy . La Tabla 5.4 muestra las 3 primeras frecuencias naturales considerando los piezoeléctricos cortocircuitados y a circuito abierto, donde las diferencias no superan el 0.33 %.

Modelo	Frecuencia en circuito abierto y cerrado [Hz]					
	f_1^{cc}	f_2^{cc}	f_3^{cc}	f_1^{ca}	f_2^{ca}	f_3^{ca}
Modelo numérico 1D	185.7	1163.5	3254.9	191.8	1175.5	3266.6
Modelo de Erturk	185.1	1159.7	3245.3	191.1	1171.6	3254.1
Modelo de Surabhi	185.1	1160.7	3252.4	191.1	1171.6	3254.1

Tabla 5.4: Comparación simulando solo un bloque bimorfo.

El tercer ejemplo compara la respuesta dinámica entre el modelo numérico 1D y el modelo de elementos finitos 3D realizado en Comsol. El estudio se realiza evaluando la respuesta en frecuencia de las estructuras cuyas condiciones de borde son *empotrado-libre*, aplicando una carga puntual $F(L) = 1 e^{j\omega t}$ [N] en el extremo libre. Los parámetros constitutivos de la estructura son los mismos que el ejemplo anterior. Las dimensiones de la misma son: $l = 100mm$, $b = 5mm$, $h_{pz} = 1mm$, y $h_s = 0,5mm$. La estructura es recta y se conforma de 5 bloques. La Figura 5.1 muestra los resultados computacionales, donde puede apreciarse la similitud entre las respuestas en los casos de cortocircuito y circuito abierto. Sin embargo cabe destacar el ahorro de tiempo computacional, siendo el modelo propuesto 22 veces más rápido que la realización en Comsol3D (30seg. vs. 11min.).

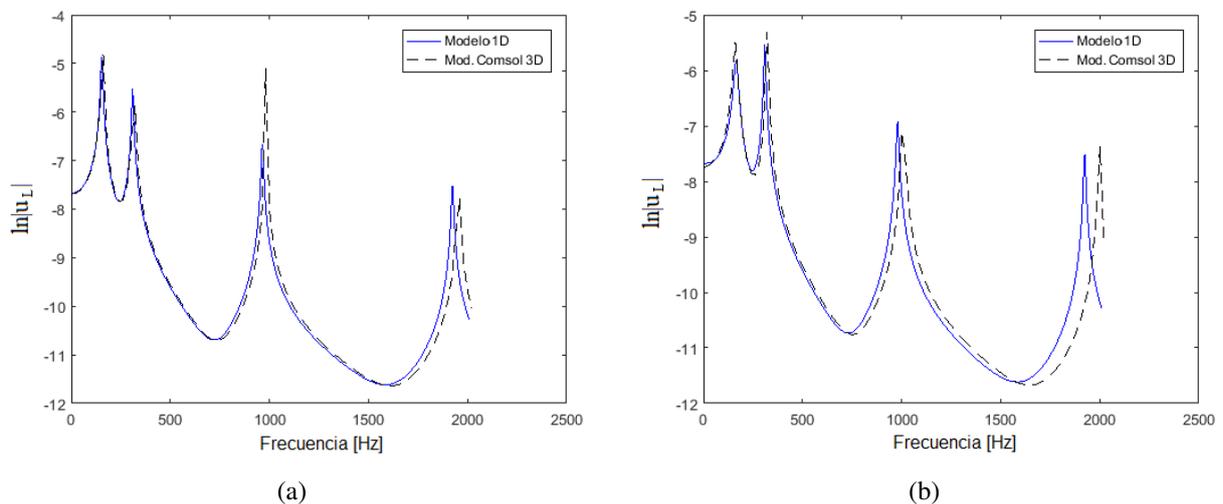


Figura 5.1: Comparativa del modelo 1D y Comsol 3D. (a) Cortocircuito, (b) Circuito abierto.

Finalmente, el modelo numérico 1D es comparado con el modelo analítico propuesto por Sugino, presentado en la Sección 2.4. Para este estudio, ambas metaestructuras se componen de material piezoeléctrico PZT-5A y sustrato de aluminio, cuyas dimensiones son $l = 100mm$, $b = 10mm$, $h_{pz} = 0,3mm$, y $h_s = 0,1mm$. La metaestructura se encuentra sintonizada a una frecuencia $\omega_t = 100\omega_1$. La Figura 5.2 muestra los resultados computacionales de la dinámica de propagación de ondas de vibración a través de la metaestructura para diferente número de bloques resonadores N_b , donde la respuesta dinámica de propagación vibratoria es definida como el cociente entre el desplazamiento de un punto del extremo libre $x_L = (L, y, z)$ y un punto del extremo empotrado a la base $x_0 = (0, 0, 0)$, cuando la estructura es excitada mediante un movimiento armónico desde la base, es decir:

$$RP(\omega) = \left| \frac{u(x_L)}{u(x_0)} \right| = \left| \frac{u_L}{u_0} \right|. \quad (5.1)$$

Claramente puede observarse la similitud entre las respuestas, no solo en la zona de bandgap (sección en tonos de azul), sino también en el resto de las frecuencias. Sin embargo, es necesario recordar que el modelo analítico representa estructuras exclusivamente rectas y solo contempla desplazamientos en el plano, mientras que el presente modelo 1D se extiende para estructuras curvas y puede representar desplazamientos en 3 direcciones.

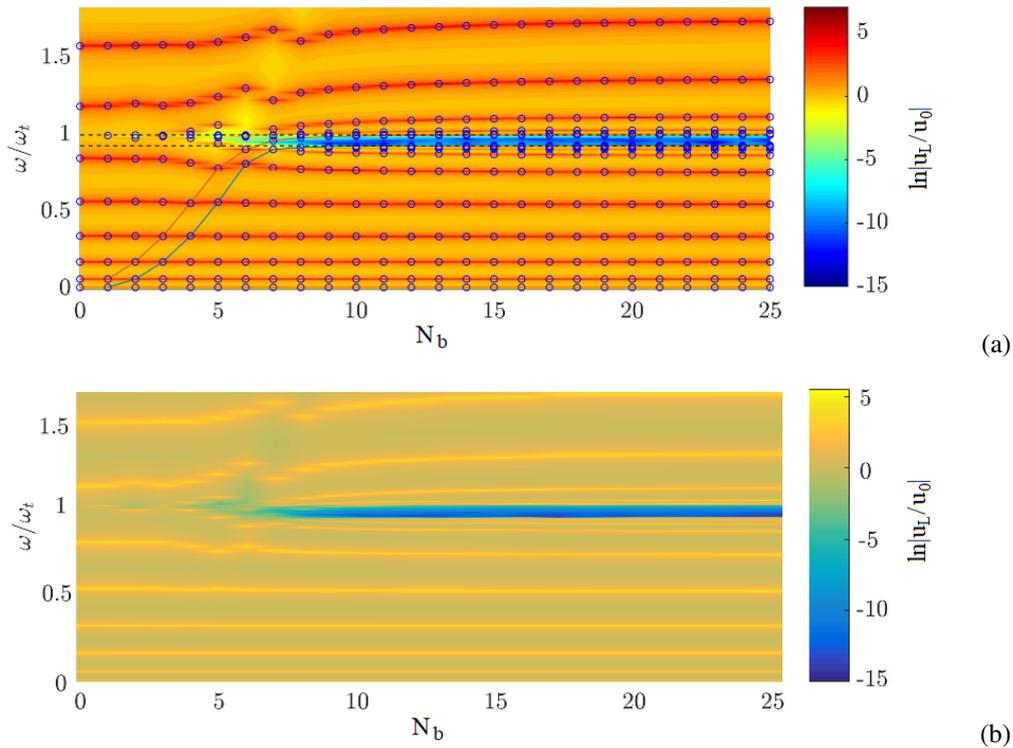


Figura 5.2: Propagación y frecuencias vs N_b . (a) Modelo Sugino, (b) Modelo numérico 1D.

5.2. Estudios paramétricos

5.2.1. Introducción

El estudio paramétrico consiste en un análisis determinístico de la respuesta del modelo dinámico frente a variaciones de algunos de los parámetros más importantes del mismo. Este análisis se ofrece como complemento al análisis paramétrico estadístico que se efectúa en la Sección 5.4, con el fin de anticipar parte del comportamiento dinámico del modelo. Los parámetros incluidos en el estudio son los que corresponden a la frecuencia de sintonía $\{f_t\}$, la cantidad de resonadores $\{N_b\}$, la resistencia de carga $\{R_k\}$, el radio de curvatura $\{R\}$, y por último los parámetros $\{h_{pz}, h_s\}$ correspondientes a la altura de la capa piezoeléctrica y altura del sustrato respectivamente. Antes de comenzar el análisis, es importante tener en consideración las siguientes definiciones referidas al bandgap:

- *Frecuencias de corte*: son las frecuencias que delimitan el bandgap. Se sitúan en el inicio y fin de la atenuación de la propagación de vibración, es decir, cuando $\ln|u_L/u_0| = 0$, siendo f_i y f_s las frecuencias de corte inferior y superior respectivamente.
- *Ancho de bandgap*: Es la distancia en frecuencia que hay entre las frecuencias de corte inferior y superior, y se calcula como $AB = f_s - f_i$.
- *Frecuencia central*: Es la frecuencia ubicada al centro del bandgap, y se calcula como $f_0 = (f_i + f_s)/2$.

5.2.2. Frecuencia de sintonía $\{f_t\}$

El parámetro de sintonía de la metaestructura es uno de los más importantes, ya que permite posicionar la de zona de bandgap en la ubicación del espectro que la aplicación práctica requiera. El valor de la frecuencia de sintonía depende de la capacidad y la inductancia asociada a cada resonador mediante la ecuación (2.40), el cual puede expresarse en Hertz como $f_t = \omega_t/2\pi$. El siguiente es un estudio de la propagación para diferentes valores de sintonía de una metaestructura recta de $N_b = 25$, de material piezoeléctrico PZT-5A y sustrato de aluminio, cuyas dimensiones son $l = 100mm$, $b = 10mm$, $h_{pz} = 1mm$, y $h_s = 0,5mm$. La Figura 5.3 muestra como se posiciona el bandgap en la respuesta, según la frecuencia de sintonía correspondiente, mientras que en la Figura 5.4 puede observarse que el ancho de bandgap normalizado del bandgap se mantiene sin importar el valor de sintonía de la metaestructura. En la Tabla 5.5 se encuentra el valor estimado por la ecuación (2.46) y los valores calculados mediante el modelo numérico 1D para cada frecuencia de sintonía. Puede observarse una diferencia en los valores calculados por ambos modelos de alrededor del 6%, la cual puede aducirse a que el modelo de esta tesis contempla flexibilidad por corte y finitud de las dimensiones.

5.2.3. Cantidad de resonadores $\{N_b\}$

El parámetro N_b corresponde a la cantidad de resonadores utilizados por la metaestructura, generados mediante la segmentación de los electrodos. La Figura 5.5 muestra los resultados

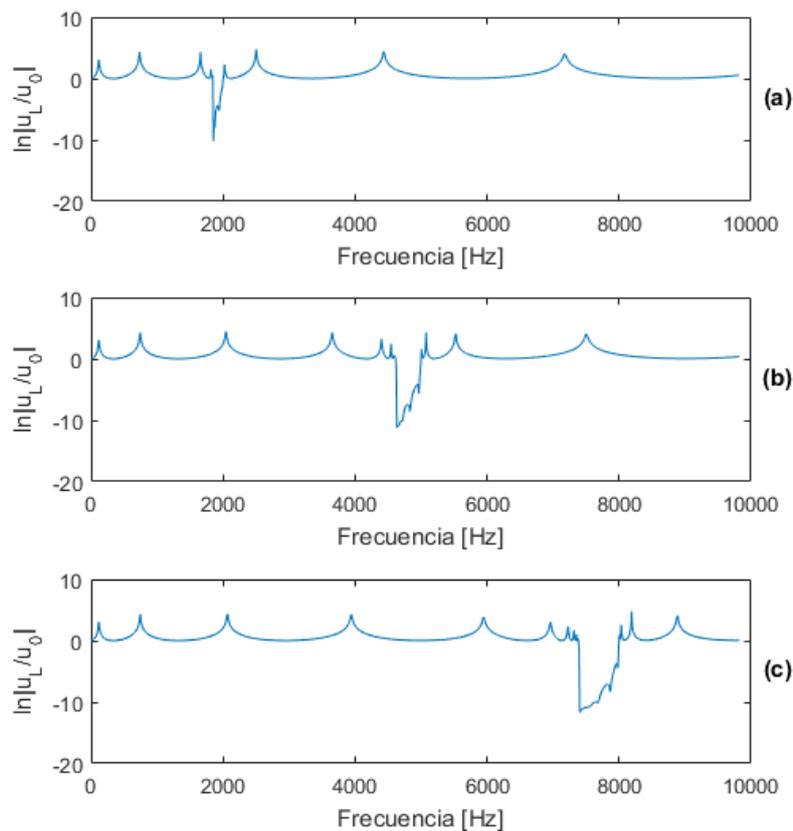


Figura 5.3: Propagación de vibraciones para diferentes frecuencias de sintonía. (a) $f_t = 2kHz$, (b) $f_t = 5kHz$, (c) $f_t = 8kHz$.

computacionales de la propagación para diferente número de resonadores N_b , inicialmente sintonizados a $f_t = 2,2kHz$ y luego a $f_t = 5kHz$. La estructura es recta, de material piezoeléctrico PZT-5A y sustrato de aluminio, cuyas dimensiones son $l = 100mm$, $b = 10mm$, $h_{pz} = 1mm$, y $h_s = 0,5mm$. En las gráficas del estudio puede observarse como el ancho de bandgap converge al estimado por la ecuación (2.46) cuando N_b aumenta, como también la necesidad de un valor de N_b mínimo para la formación de bandgap. Es importante tener en cuenta que grandes valores de N_b implican una mayor segmentación de la estructura, reduciendo así el valor de la capacidad interna de cada bloque, requiriendo un aumento del valor de inductancia para conservar la sin-

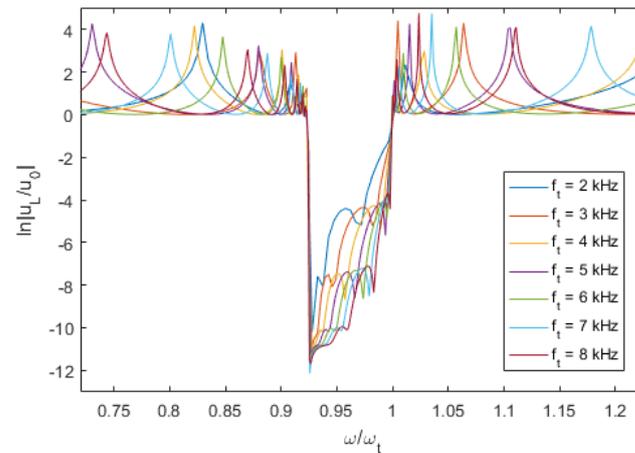


Figura 5.4: Bandgap normalizado para diferentes f_t .

Ancho de bandgap $\Delta\omega/\omega_t$	
Estimado	0.071903
$f_t = 2kHz$	0.077575
$f_t = 3kHz$	0.077379
$f_t = 4kHz$	0.076793
$f_t = 5kHz$	0.076707
$f_t = 6kHz$	0.077273
$f_t = 7kHz$	0.077032
$f_t = 8kHz$	0.076850

Tabla 5.5: Bandgap analítico de Sugino vs computacional del presente modelo.

tonía según la ecuación (2.40). Este factor es importante en la práctica, donde altos valores de inductancia resultan en voluminosos bobinados. En el ejemplo de la Figura 5.5 sería prudente utilizar un valor de N_b cercano al 10, donde puede asegurarse un bandgap bien formado con muy pocos bloques resonadores.

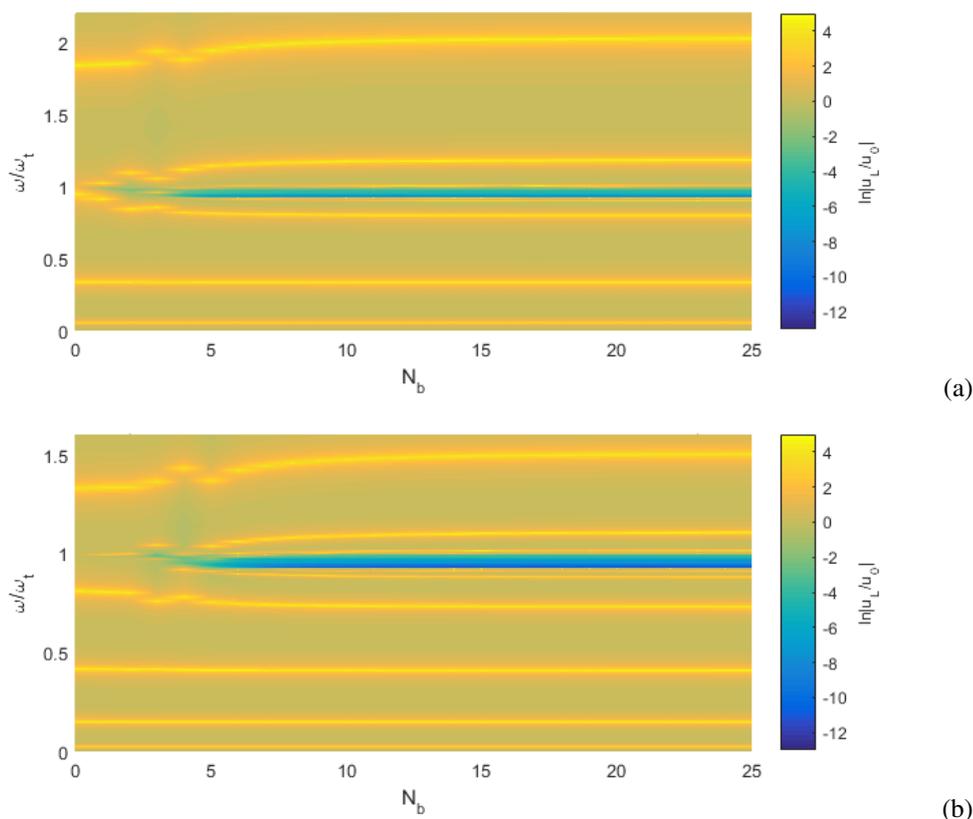


Figura 5.5: Propagación y frecuencias vs N_b . (a) $f_t = 2,2kHz$, (b) $f_t = 5kHz$.

5.2.4. Resistencia de carga $\{R_k\}$

El parámetro R_k de la ecuación (3.68) simula la resistencia eléctrica equivalente en el conjunto inductancia asociada - capacidad interna de cada bloque resonador. El mismo puede ser utilizado para modelar la resistencia propia de la inductancia y/o capacidad, o simular una resistencia conectada en serie a la inductancia a modo de amortiguación electromecánica. El siguiente estudio compara la propagación de ondas de una metaestructura para diferentes valores de R_k . Tratándose de una estructura recta de material piezoeléctrico PZT-5A y sustrato de aluminio, cuyas dimensiones son $l = 100mm$, $b = 10mm$, $h_{pz} = 1mm$, y $h_s = 0,5mm$. La Figura 5.6 muestra parte del estudio, donde puede observarse como la presencia de R_k produce una amortiguación en el conjunto resonante LC, suavizando los picos de resonancia de la respuesta, pero perdiendo atenuación en el bandgap, aumentando ambos efectos con el aumento del valor resistivo. Si bien altos valores de atenuación reducen la vibración en esa banda, una

correcta elección de R_k permite atenuar notablemente las resonancias acumuladas en las fronteras del bandgap, efecto derivado de la metaestructura que suele ser no deseado. La Figura 5.7 corresponde al estudio de propagación quitando la inductancia y dejando en su lugar solo la resistencia eléctrica. En la gráfica puede apreciarse como la estructura cambia las frecuencias naturales desde las provocadas por la rigidez de cortocircuito de los piezoeléctricos ($R_k = 0\Omega$) hasta la de circuito abierto ($R_k = \infty$).

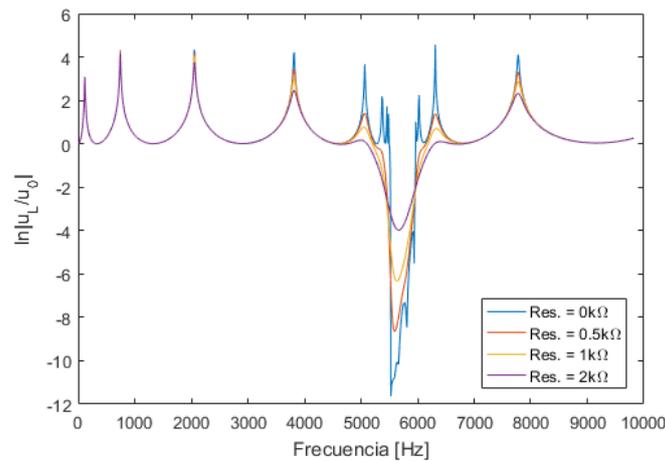


Figura 5.6: Propagación para diferentes R_k de carga, incluyendo L_k .

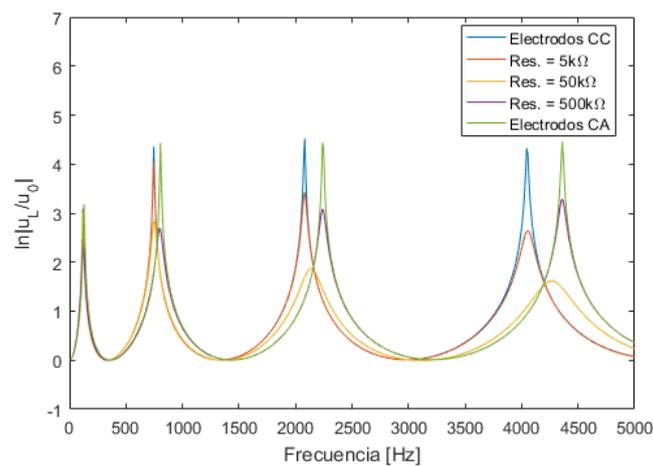


Figura 5.7: Propagación para diferentes valores de R_k de carga, en ausencia de L_k .

5.2.5. Radio de curvatura $\{R\}$

El modelo desarrollado permite variar el radio de curvatura de la metaestructura mediante el parámetro R , tal como lo muestra la Figura 5.8.a, donde los resonadores actúan por flexión en el plano π , y el movimiento desde la base se produce en la dirección del eje y (curvatura Tipo A). Si se efectúa una rotación de 90° durante la integración de la sección de los elementos finitos en la Sección 3.7 (i.e. $y \rightarrow z, z \rightarrow -y$) se obtiene el modelo de la Figura 5.8.b. En este modelo los resonadores actúan de manera ortogonal al plano de curvatura (curvatura Tipo B).

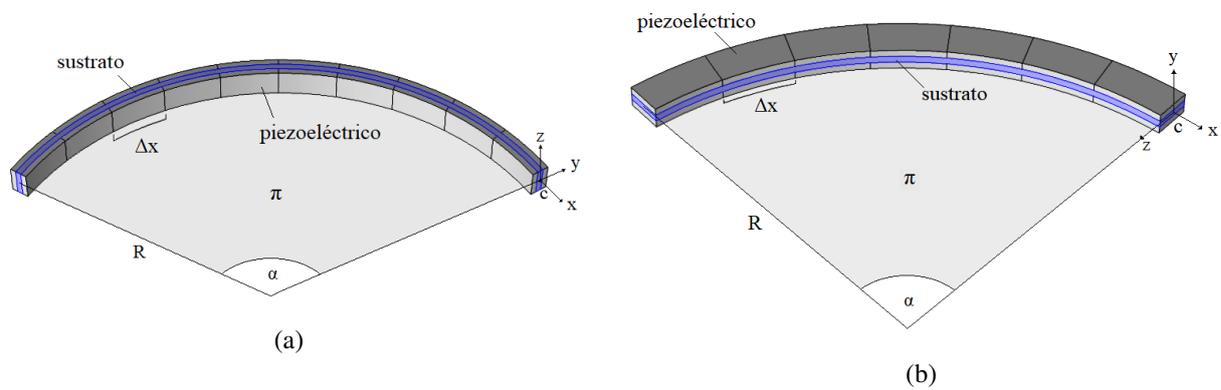


Figura 5.8: Esquema de la curvaturas. (a) Tipo A, (b) Tipo B.

El siguiente estudio corresponde al análisis de la influencia de ambos tipos de curvatura en la respuesta de la propagación para una estructura de material piezoeléctrico PZT-5A y sustrato de aluminio, cuyas dimensiones son $l = 100\text{mm}$, $b = 10\text{mm}$, $h_{pz} = 1\text{mm}$, y $h_s = 0,5\text{mm}$. La Figura 5.9 muestra la propagación para distintos valores de R en curvatura Tipo A, a izquierda con los electrodos cortocircuitados (resonadores inactivos), y a derecha sintonizados a frecuencia $\omega_t = 50 \omega_1$ mediante las inductancias. En la misma puede apreciarse el efecto de las frecuencias naturales en tanto R decrece, sin embargo, la ubicación en frecuencia de la zona de bandgap permanece inalterable, mostrando su independencia en posición al radio de curvatura. La Figura 5.10 muestra el verdadero efecto de una curvatura Tipo A, que implica la pérdida de atenuación en la zona de bandgap en tanto R decrece, al mismo tiempo que corrobora la ubicación en frecuencia de la zona de bandgap. Es importante tener en cuenta que la excitación generada por el movimiento desde la base y la curvatura de la metaestructura están contenidas en el mismo plano de acción de los resonadores, lo que produce que todos los modos de

vibración generados puedan ser atenuados por la metaestructura.

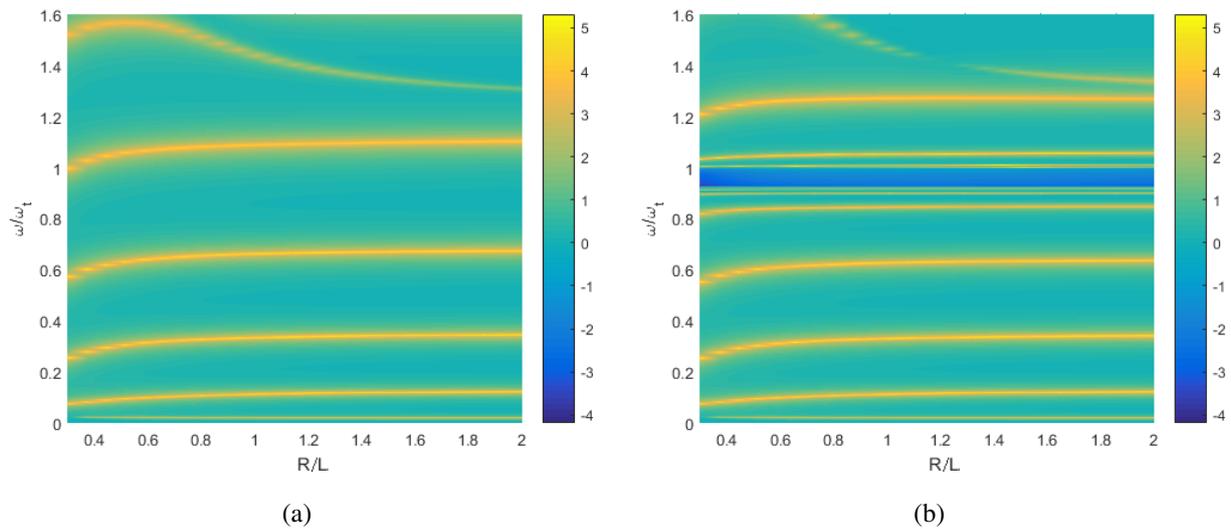


Figura 5.9: Propagación y frecuencias vs R/L para curvatura A. (a) Electrodes en cortocircuito, (b) Sintonizado a $\omega_r = 50 \omega_l$.

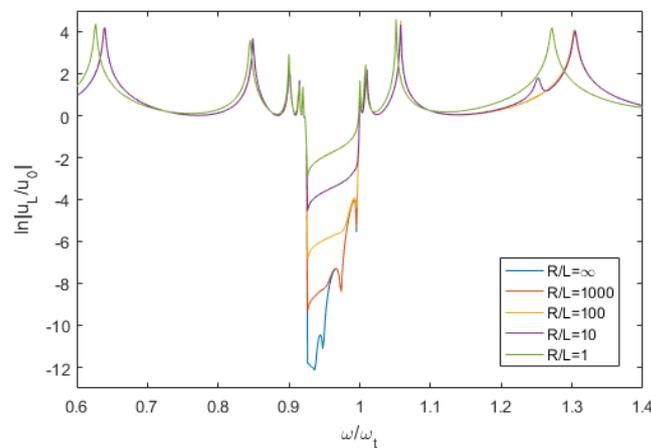


Figura 5.10: Propagación para diferentes radios de curvatura Tipo A.

La Figura 5.11 corresponde al análisis de la influencia de la curvatura Tipo B en la respuesta de la propagación de ondas. En la gráfica superior de esta figura se observa como un modo de flexión pura, cuando la estructura se considera recta, se desdobra en 2 modos de flexotorsión

cerca de los 2kHz al considerarla curva, manteniendo inactivos los resonadores (resonadores en cortocircuito CC). La gráfica inferior derecha muestra la incapacidad de generar un bandgap sobre este nuevo modo flexotorsional en 2kHz debido a que los resonadores sólo actúan en flexión pura, imposibilitados de compensar una torsión. La gráfica inferior izquierda muestra como efectivamente se consigue generar un bandgap en 700Hz, donde antes existía un modo de flexión pura. Este estudio pone de manifiesto la imposibilidad de generar bandgap en ubicaciones del espectro donde existen frecuencias naturales correspondientes a modos de vibración que no son puramente flexionales en el plano de acción de los resonadores.

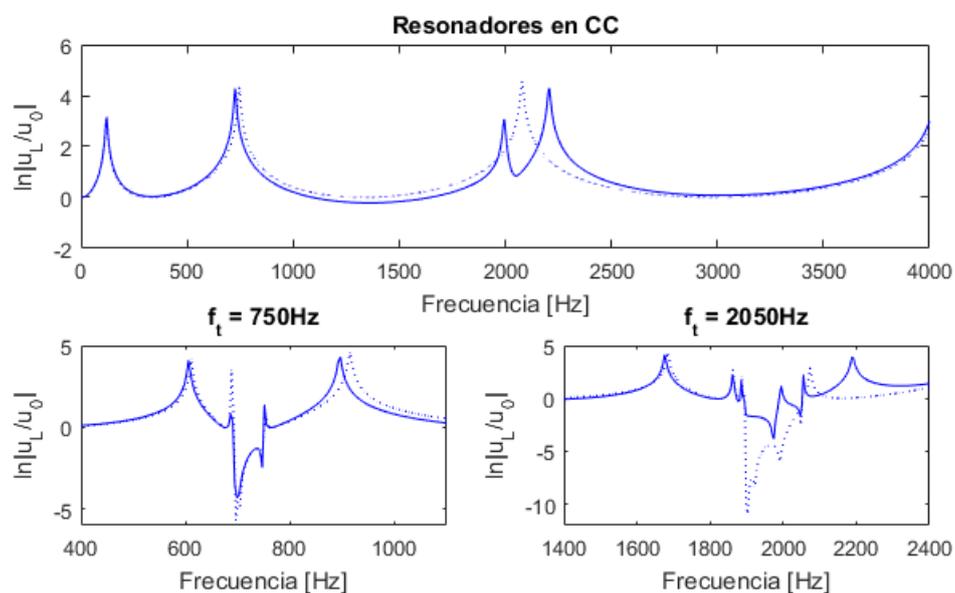


Figura 5.11: Propagación en curvatura Tipo B. Línea punteada para estructura recta, línea sólida para estructura curvada en relación $R/L=2$.

5.2.6. Altura de la capa piezoeléctrica y sustrato $\{h_{pz}, h_s\}$

Según la ecuación (2.46), ancho de bandgap para el modelo de metaestructura analítico de infinitos resonadores, depende del parámetro adimensional de acoplamiento electromecánico α , aumentando el bandgap con el aumento del mismo. Definiendo los siguientes parámetros adimensionales:

$$\hat{h} = \frac{h_{pz}}{h_s}, \quad \gamma = \frac{c_s}{c_{11}^E}, \quad \varepsilon = \frac{\bar{e}_{31}^2}{\bar{c}_{11}^E \bar{e}_{33}^S}, \quad (5.2)$$

la expresión de α en la ecuación (2.32) puede reformularse como:

$$\alpha = \frac{6\varepsilon\hat{h}(\hat{h}+1)^2}{\gamma+2\hat{h}(4\hat{h}^2+6\hat{h}+3)}. \quad (5.3)$$

La Figura 5.12 representa el acoplamiento electromecánico α normalizado en su valor máximo de todo el espacio de parámetros, en función de la altura \hat{h} y rigidez ε adimensional. En la misma se observa en línea punteada los valores máximos de α , los cuales ocurren en $\gamma = 4\hat{h}^3/(1+3\hat{h})$. Si se considera una estructura de material piezoeléctrico PZT-5A y sustrato de aluminio, los parámetros adimensionales de rigidez y del material toman los valores $\gamma = 1,1311$ y $\varepsilon = 0,1865$. Luego, el valor de α en la ecuación (5.3) depende únicamente de \hat{h} , al igual que el valor del bandgap adimensional $\Delta\omega/\omega$. Los valores de α y $\Delta\omega/\omega$ son representados en la Figura 5.13, donde el máximo se produce en $\hat{h} = 1,056$, independientemente de los valores particulares de altura de cada capa, es decir, h_{pz} y h_s .

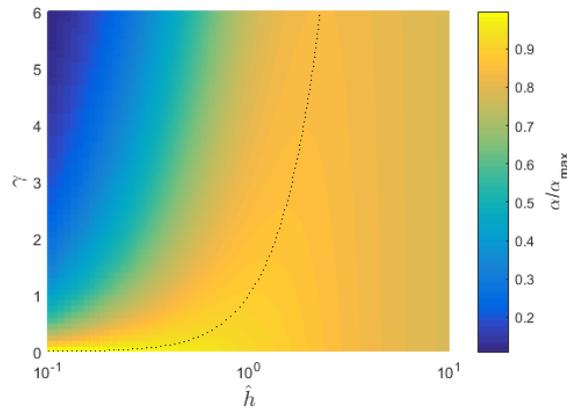


Figura 5.12: Acoplamiento electromecánico α vs altura \hat{h} y rigidez γ . En línea punteada los valores máximos de α según el valor de \hat{h} o γ .

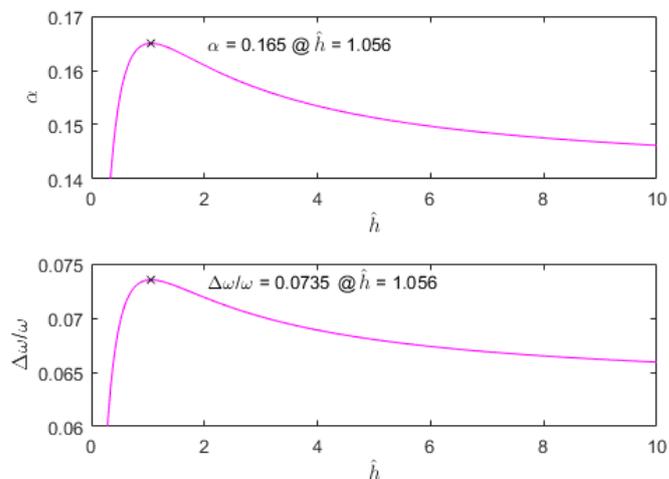


Figura 5.13: Acoplamiento electromecánico α y ancho de bandgap $\Delta\omega/\omega$ vs altura \hat{h} , para los parámetros $\gamma = 1,1311$ y $\varepsilon = 0,1865$.

La Figura (5.14) muestra la gráfica de propagación obtenida utilizando el modelo computacional, manteniendo la altura adimensional $\hat{h} = 2$, considerando las dimensiones $l = 100mm$ y $b = 10mm$. En la misma puede verse como se degrada la atenuación con el aumento de la altura de las capas, independientemente se conserve \hat{h} , en contraste con el modelo analítico. Esto se debe a que el modelo computacional no solo considera finitos resonadores, sino que contempla también a las deformaciones por corte. Los valores de ancho de bandgap calculados se encuentran en la Tabla 5.6, siendo los mismos superiores cuando se calculan con el modelo computacional.

Ancho de bandgap $\Delta\omega/\omega_t$	
Estimado	0.0719
$h_{pz} = 0,5mm$	0.0790
$h_{pz} = 1,0mm$	0.0781
$h_{pz} = 1,5mm$	0.0760

Tabla 5.6: Ancho de bandgap analítico de Sugino vs el presente modelo para $\hat{h} = 2$.

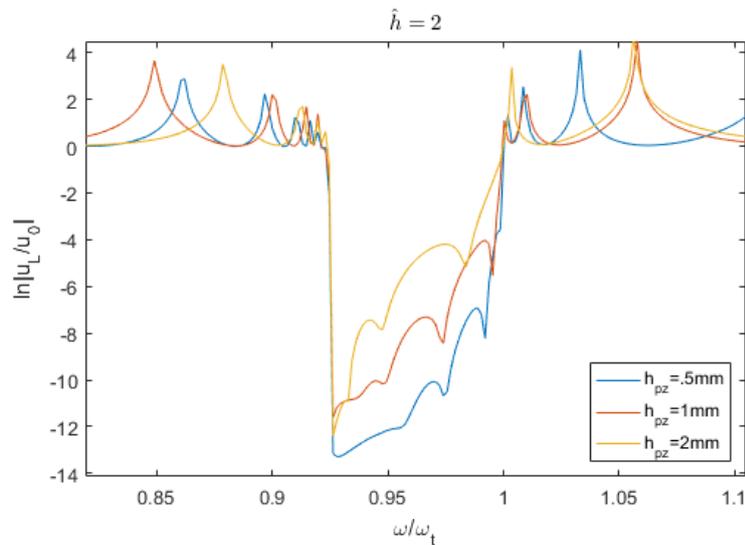


Figura 5.14: Propagación para diferentes valores de h_{pz} manteniendo la relación $\hat{h} = 2$.

5.3. Movimiento de excitación desde la base con rotación

En esta sección se analiza la influencia de la dirección de excitación de la base con el fin de excitar la mayor cantidad de modos de la estructura. De esta manera se pone de manifiesto la capacidad de representar desplazamientos en las 3 dimensiones espaciales que el modelo dinámico de la metaestructura posee. El presente estudio simula la dinámica de propagación de vibraciones para una metaestructura recta y luego con una curvatura Tipo A de 500mm de radio, considerando los resonadores cortocircuitados y luego activos. Se analizarán la influencia de direcciones de excitación de la base desfasadas en un ángulo de $0^\circ, 1^\circ, 3^\circ, 9^\circ, 15^\circ$ y 30° , donde 0° corresponde al caso de movimiento de la base ortogonal al plano de las capas. Estas direcciones se contemplan mediante el siguiente vector de desplazamiento armónico de la base:

$$\vec{U}_B(\psi, \omega) = \{0, A\cos(\psi)e^{j\omega t}, A\sin(\psi)e^{j\omega t}\} \quad (5.4)$$

donde A es la amplitud del desplazamiento y ψ el ángulo de dirección (ver Figura 5.15). La metaestructura modelada se considera de material piezoeléctrico PZT-5A y sustrato de aluminio, cuyas dimensiones son $l = 100\text{mm}$, $b = 10\text{mm}$, $h_{pz} = 1\text{mm}$, y $h_s = 0,5\text{mm}$, compuesta por 25 re-

sonadores, sujeta a un desplazamiento máximo de la base de $A = 1\text{mm}$, sintonizada inicialmente a $f_i = 5968\text{Hz}$ y luego a $f_i = 3000\text{Hz}$.

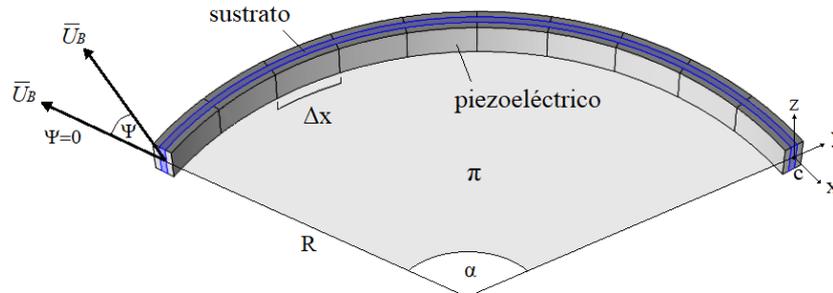
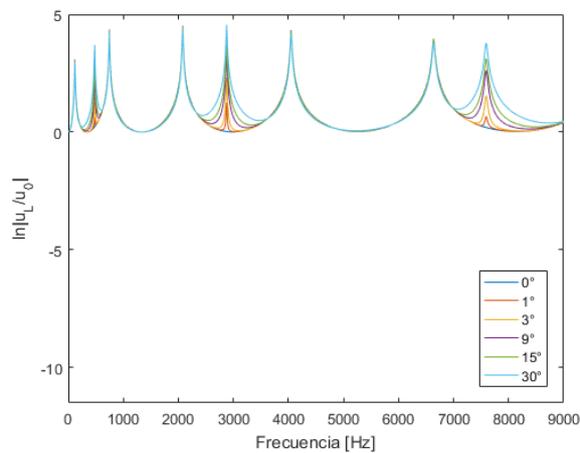


Figura 5.15: Esquema de la dirección de excitación de la base.

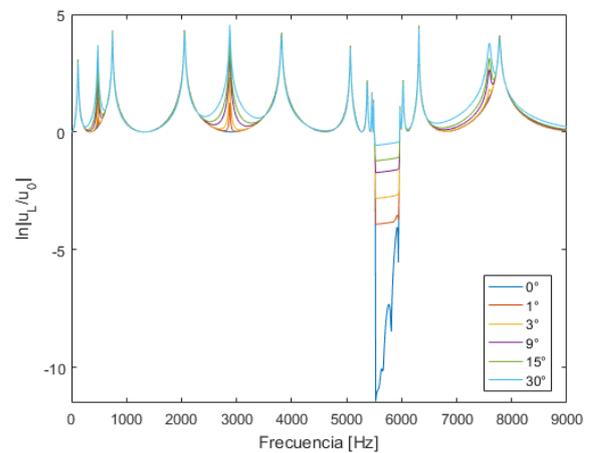
La Figura 5.16 contiene las gráficas de la respuesta dinámica del estudio para una sintonía de 5968Hz . En las gráficas para la metaestructura en cortocircuito se observa como la rotación de la base comienza a excitar los modos fuera del plano de acción de los resonadores, completando las primeras 10 frecuencias naturales de la metaestructura, cuyos valores numéricos se encuentran en la Tabla 5.7. Comparando las respuestas de la Figura 5.16.a con la Figura 5.16.b, y las de la Figura 5.16.c con la Figura 5.16.d, puede observarse como el bandgap se abre camino entre las frecuencias naturales, desplazando en este caso hacia la izquierda a las frecuencias naturales ubicadas a 7465Hz y $7523,4\text{Hz}$ para la estructura recta y curva respectivamente, y generando sus 2 frecuencias naturales de frontera. Este desplazamiento ocurre debido a que las frecuencias naturales en cuestión pertenecen a modos de flexión pura en el plano de acción de los resonadores. En las Figura 5.16.b y Figura 5.16.d se observa como la rotación de la base influye en el bandgap deteriorando su atenuación, pero sin modificar su posición en frecuencia. Esto se debe a que la metaestructura es incapaz de atenuar la componente de vibración ortogonal al plano de acción de los resonadores, y en la medida que ésta aumenta, dicho aumento se refleja en la respuesta dinámica.

	Frecuencias naturales [Hz]				
Recta	119.36	478.8	745.9	2079.4	2079.5
	2877.3	4048.5	6264.6	6637.8	7465.0
Curva Tipo A	119.46	469.69	742.51	2030.5	2075.3
	2983.5	4043.6	6266.9	6626.1	7523.4

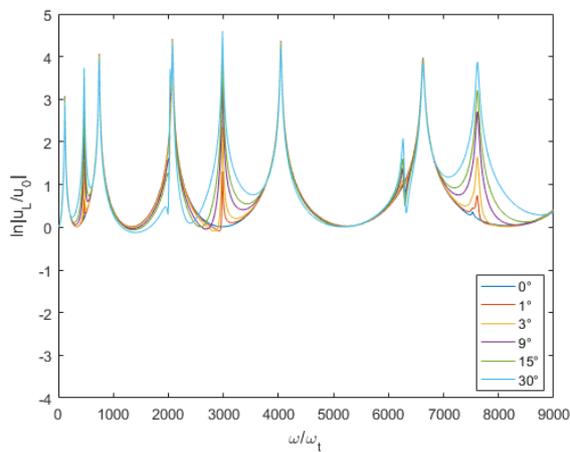
Tabla 5.7: Frecuencias naturales de cortocircuito para la metaestructura recta y curva.



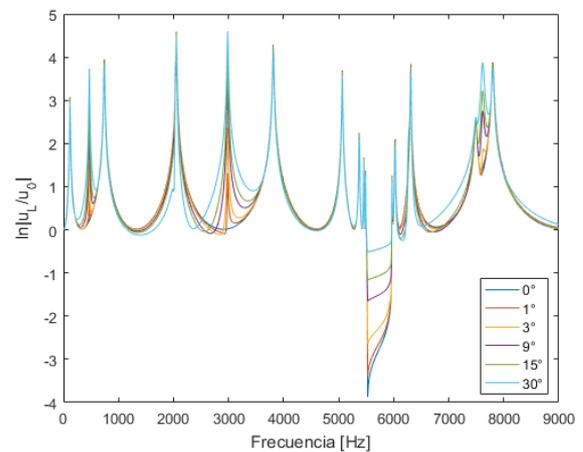
(a) Metaestructura recta en cortocircuito.



(b) Metaestructura recta sintonizada a 5968Hz.



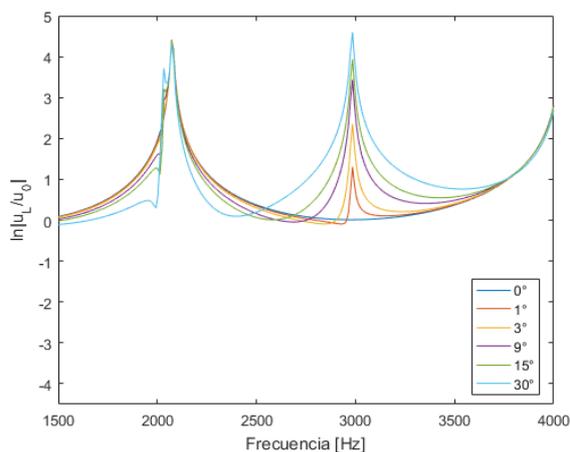
(c) Metaestructura curva en cortocircuito.



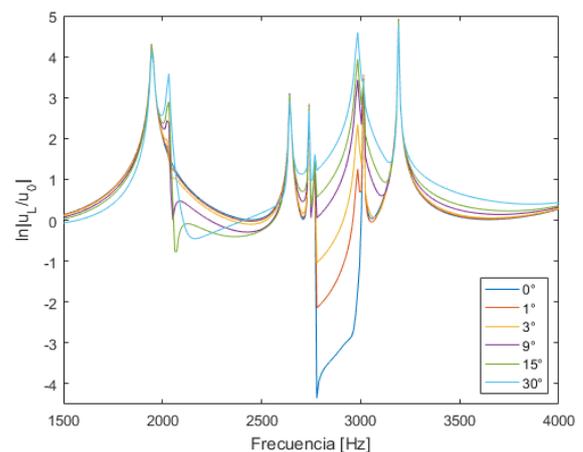
(d) Metaestructura curva sintonizada a 5968Hz.

Figura 5.16: Respuesta del modelo en distintas configuraciones para movimiento de excitación desde la base con rotación.

La Figura 5.17 muestra la respuesta en la zona del bandgap para la misma estructura curva del estudio anterior, pero en este caso, sintonizada a 3000Hz. En la misma puede observarse la inexistencia de frecuencias naturales a 3000Hz cuando el movimiento de la base se realiza en el plano de acción de los resonadores (0° de rotación), lo que permite la formación del bandgap en esa frecuencia. A medida que la rotación aumenta, se genera una componente de vibración de la base que excita un modo de flexo-torsión cuya frecuencia natural es de 2983Hz. Este modo escapa del plano de acción de los resonadores, impidiendo que la metaestructura pueda desplazar su frecuencia natural como el ejemplo anterior, lo que produce la extinción del bandgap. Este ejemplo es una clara muestra de la importancia de considerar todos los posibles desplazamientos de la estructura, a fin de asegurar el bandgap requerido en cualquier condición de excitación.



(a) Metaestructura curva en cortocircuito.



(b) Metaestructura curva sintonizada a 3000Hz.

Figura 5.17: Respuesta del modelo curvo para movimiento de excitación desde la base con rotación.

5.4. Estudios de propagación de incertidumbre

5.4.1. Introducción

En esta sección se realiza el estudio de propagación y cuantificación de incertidumbre del modelo estocástico obtenido en el Capítulo 4, considerando incertidumbre en algunos parámetros, producto de la manufactura de la estructura. De estos parámetros se desprenden las variables aleatorias del modelo estocástico, cuyas funciones de densidad se obtienen a partir de la ecuación (4.7), donde el valor determinístico de los parámetros coincide con el valor medio de cada una de las variables aleatorias derivadas, y las cotas dependen del coeficiente de variación. A fin de evaluar la sensibilidad del modelo frente a la incertidumbre de los parámetros, se simula el proceso estocástico con tres coeficientes de variación en aumento: $\{0,01 - 0,03 - 0,05\}$ en una distribución uniforme, equivalentes a un error relativo máximo de los parámetros de 1,73 %, 5,19 % y 8,66 % respectivamente. Se realizan tres estudios estadísticos independientes, donde el inicial involucra a los parámetros elasticidad longitudinal del piezoelectrico $\{\bar{c}_{11}^E\}$, la constante de acoplamiento $\{\bar{e}_{31}\}$, y la constante de permisividad eléctrica $\{\bar{\epsilon}_{33}^S\}$; el segundo estudio considera incertidumbre en los parámetros de altura de la capa piezoelectrica $\{h_{pz}\}$, altura de la capa sustrato $\{h_s\}$, y ancho de la metaestructura $\{b\}$; y por último, el estudio estadístico donde se consideran inciertos los valores de cada una de las inductancias de los resonadores, mediante el parámetro $\{L_k\}$. Cada uno de los estudios se realiza evaluando la respuesta en frecuencia de la propagación de vibración de la metaestructura sujeta a movimiento de excitación armónico desde la base. Dicho movimiento se ejecuta en dirección ortogonal al plano de las capas, con un desplazamiento máximo de la base de 1mm.

Antes de comenzar el análisis, es importante tener en consideración las siguientes definiciones referidas al bandgap en la respuesta dinámica estocástica (ver Figura 5.18):

- *Ancho de bandgap determinístico:* Es el valor del ancho de bandgap del modelo determinístico, asociado al valor determinístico de los parámetros.
- *Ancho de bandgap medio:* Es el valor medio de la variable aleatoria ancho de bandgap correspondiente al modelo estocástico, es decir $\overline{\tilde{A}B}$.

- *Ancho de bandgap efectivo:* Es la distancia en frecuencia que hay entre el mayor valor de frecuencia de corte inferior y el menor valor de frecuencia de corte superior estadísticas, siempre que la primera sea menor que la segunda. Este ancho de bandgap es propio del modelo estocástico, y se calcula como $AB_e = \min\{\tilde{f}s\} - \max\{\tilde{f}i\} > 0$.
- *Frecuencia central efectiva:* Es la frecuencia ubicada al centro del bandgap efectivo, siempre que éste exista, calculada como $fc_e = (\max\{\tilde{f}i\} + \min\{\tilde{f}s\})/2$.

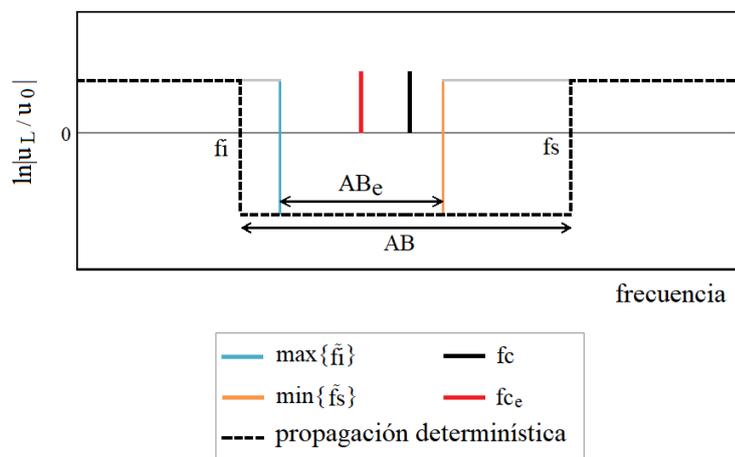


Figura 5.18: Esquema del bandgap en la respuesta dinámica estocástica.

5.4.2. Incertidumbre en los parámetros $\{\bar{c}_{11}^E, \bar{e}_{31}, \bar{\epsilon}_{33}^S\}$

El siguiente estudio corresponde al análisis de propagación de incertidumbre de los parámetros constitutivos del piezoeléctrico correspondientes a la elasticidad longitudinal $\{\bar{c}_{11}^E\}$, acoplamiento $\{\bar{e}_{31}\}$, y permisividad eléctrica $\{\bar{\epsilon}_{33}^S\}$ hacia la dinámica del modelo. La metaestructura modelada se considera recta, de material piezoeléctrico PZT-5A y sustrato de aluminio, cuyas dimensiones son $l = 100mm$, $b = 10mm$, $h_{pz} = 1mm$, y $h_s = 0,5mm$, compuesta por 25 resonadores, sintonizada a $f_t = 5968Hz$, sujeta a un movimiento de excitación desde la base del tipo $u_y(\omega) = 1e^{j\omega t} mm$. Los valores determinísticos de los parámetros son: $\bar{c}_{11}^E = 61 GPa$, $\bar{e}_{31} = 12,3 C/m^2$, $\bar{\epsilon}_{33}^S = 13,33e^{-9} F/m$.

En una primera simulación, se considera incertidumbre únicamente en el parámetro \bar{c}_{11}^E . La Figura 5.19 muestra los gráficos de propagación del modelo estocástico para los diferentes valores de CV simulados. En el mismo puede observarse como la incertidumbre en \bar{c}_{11}^E está presente sobre las frecuencias de resonancia de la estructura, mayoritariamente sobre la tercera, cuarta y quinta frecuencia natural correspondientes a modos de flexión pura, y con una pequeña influencia en la zona de bandgap sobre la frecuencia de corte inferior. Los histogramas correspondientes esta simulación se incluyen en la Figura 5.20, donde la primer columna muestra un histograma de propagación a dos frecuencias normalizadas particulares, la primera, ubicada a las afueras del bandgap, entre la tercer y cuarta frecuencia de natural, y la segunda cercana al centro del bandgap; mientras que la segunda columna de la figura se compone de histogramas correspondientes a parámetros propios del bandgap. En el histograma a frecuencia 0.5 se observa un aumento en la dispersión conforme aumenta la incertidumbre paramétrica, en consonancia con lo observado en la figura anterior para la misma zona, con una distribución cuasi exponencial acotada. En cuanto a la zona de bandgap, se observa en los histogramas de ancho de banda y frecuencias de corte, que el AB determinístico coincide prácticamente con AB medio del modelo estocástico, al igual que lo hace la frecuencia central con la frecuencia central media estocástica, siendo la frecuencia de corte inferior la más afectada, lo que produce una pequeña reducción de AB ($AB_e < AB$), y el desplazamiento de la frecuencia central hacia la derecha ($fc_e > fc$). El histograma de frecuencia central muestra distribuciones similares a una distribución uniforme, sin embargo con baja dispersión aún para el máximo valor del CV. Puede afirmarse de lo anterior, que hasta un CV de 0.05 en \bar{c}_{11}^E no produce efectos significativos en el desempeño dinámico de la metaestructura.

La segunda simulación considera la incertidumbre asociada únicamente al parámetro \bar{e}_{31} . En la Figura 5.21 asociada a dicho estudio, se observa como la incertidumbre en el parámetro afecta la frontera inferior del bandgap, así como también a las frecuencias naturales que limitan al mismo, tanto por izquierda como por derecha. También puede verse una degradación del bandgap acorde al aumento de incertidumbre, sin deteriorarlo por completo aún con el máximo CV simulado. Comparando la similitud entre las gráficas de máximo y mínimo con las de intervalo de confianza, se concluye de la figura que no hay valores espurios lejanos a la media de la

propagación. En los histogramas de la Figura 5.22 se observa una dispersión muy pequeña en la propagación a frecuencia 0,5 y un aumento en la dispersión a 0,96 indicando degradación de la atenuación del bandgap conforme aumenta la incertidumbre en el parámetro. Los histogramas propios del bandgap indican la coincidencia del AB y frecuencia central con sus valores medios, así como también una disminución del bandgap efectivo y un desplazamiento de la frecuencia central efectiva frente a los valores determinísticos, ambos en magnitudes similares al estudio anterior, concluyendo que la incertidumbre en $\bar{\epsilon}_{31}$ tampoco produce efectos significativos en el desempeño dinámico de la metaestructura.

La tercera simulación considera incertidumbre en el parámetro $\bar{\epsilon}_{33}^S$. Las gráficas de propagación del modelo estocástico se encuentran en la Figura 5.23, donde puede observarse como la incertidumbre del parámetro se refleja pura y exclusivamente en la zona de bandgap, incluidas sus frecuencias naturales de frontera. Al igual que los estudios anteriores, el aumento de incertidumbre se traduce en un aumento de la degradación del bandgap, tanto en AB como su atenuación, hasta su completa desaparición para el máximo valor de incertidumbre simulado. Otro dato particular obtenido de estas gráficas es la presencia de máximos y mínimos lejanos al intervalo de confianza, en la zona de la frecuencia de corte superior, indicando el grado de sensibilidad de la respuesta a la incertidumbre del parámetro $\bar{\epsilon}_{33}^S$ en esta zona, en contraste con los estudios de incertidumbre anteriores, donde fs permanece prácticamente inalterable. Los histogramas de propagación de la Figura 5.24 muestran, para la frecuencia fuera de la zona de bandgap, una dispersión casi inexistente, aún para el máximo CV simulado, reafirmando que la propagación no sufre alteraciones en esta zona. Por el contrario, la dispersión de la propagación es significativa para la frecuencia interior al bandgap desde la primera simulación, indicando el deterioro de la atenuación debido a la incertidumbre en el parámetro $\bar{\epsilon}_{33}^S$, siendo progresivo este deterioro con el aumento del CV. En los histogramas propios del bandgap puede observarse una coincidencia de la frecuencia central efectiva con su valor medio y determinístico, indicando un desplazamiento nulo de la zona de bandgap, con un descenso del valor de AB efectivo debido al aumento de la dispersión que sufren ambas frecuencias de corte, conforme aumenta la incertidumbre en el parámetro. Para el máximo CV simulado ocurre un solapamiento en las frecuencias de corte, que produce finalmente la completa degradación del bandgap debido a la

desaparición de AB efectivo. Otro punto importante a tener en cuenta es que la frecuencia de corte superior es la encargada de la sintonía de la metaestructura, y por lo tanto, una dispersión en aumento de dicha frecuencia implica una alta sensibilidad de la sintonía a variaciones del parámetro.

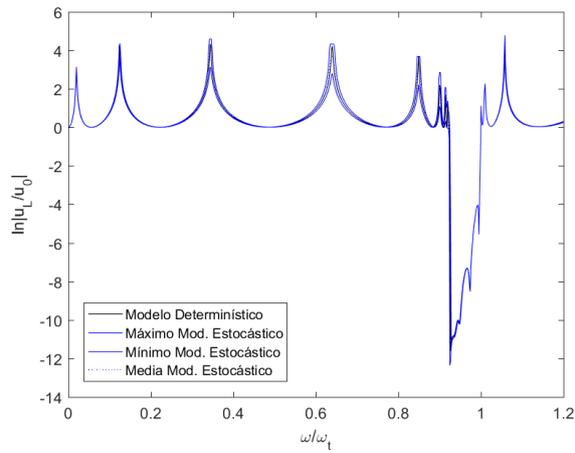
La última simulación de este estudio considera la incertidumbre presente en los tres parámetros en simultaneo. En las gráficas de propagación estadística de la Figura 5.25 puede observarse como la incertidumbre de los parámetros se propaga, tanto hacia la zona de bandgap, como a las frecuencias naturales de la estructura. Dicha incertidumbre se incrementa con el incremento de incertidumbre de los parámetros, hasta el punto de una completa degradación del bandgap al máximo CV simulado. Comparando las gráficas de máximos y mínimos con las de intervalo de confianza puede notarse valores máximos y mínimos de propagación lejanos al intervalo de confianza en toda la zona de bandgap, incluidas ambas frecuencias naturales de frontera. Los histogramas de propagación de la Figura 5.26 para la frecuencia de 0,5 son prácticamente idénticos a los obtenidos en la simulación del parámetro \bar{c}_{11}^E , lo que da un indicio de ser éste el responsable de la incertidumbre producida en la propagación mas allá de la zona de bandgap. El histograma de propagación a frecuencia 0,96 se muestra similar al obtenido durante la simulación del parámetro \bar{e}_{33}^S , mostrándose como un parámetro mas influyente que \bar{e}_{31} en dicha zona. En los histogramas propios del bandgap se observa la coincidencia de la frecuencia central efectiva con su valor determinístico y valor medio, afirmando el desplazamiento nulo del bandgap debido a incertidumbre en todos los parámetros. En los histogramas de AB puede apreciarse una distribución tipo campana de Gauss, con un valor medio coincidente con el valor determinístico, donde la dispersión aumenta con el aumento de incertidumbre de los parámetros, evidenciando que el AB puede aumentar o disminuir en las mismas proporciones debido a dicha incertidumbre. En cuanto al AB efectivo, se aprecia que su disminución conforme aumenta la incertidumbre en los parámetros, siendo en esta simulación donde la degradación del AB fue mayor, finalizando con la desaparición de la zona de bandgap para el máximo CV simulado.

En la Figura 5.27 se muestra la dispersión de la respuesta en frecuencia de la propagación vibratoria estocástica para las distintas simulaciones. En las mismas se evidencian las zonas afectadas por la incertidumbre de cada parámetro y en que magnitud lo hacen. En las mismas se

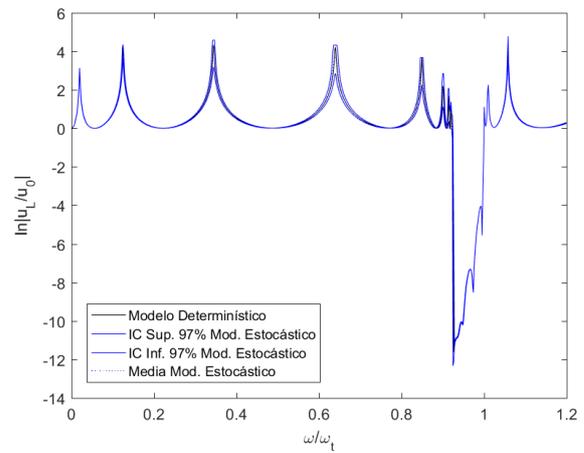
observa como la incertidumbre de \bar{c}_{11}^E afecta la zona externa al bandgap, sobre cada una de las frecuencias naturales, y la incertidumbre producida por \bar{e}_{31} se concentra propiamente en la zona de bandgap y frecuencia naturales de frontera, al igual que \bar{e}_{33}^S , siendo la respuesta mas sensible a éste último. La gráfica de dispersión de todas las variables en simultaneo se aprecia como una combinación de las gráficas de dispersión independientes, mostrando un comportamiento lineal del modelo estocástico respecto de los parámetros simulados. El histograma final muestra los valores máximos de dispersión de la respuesta en cada simulación.

Del presente estudio se pueden extraer las siguientes observaciones:

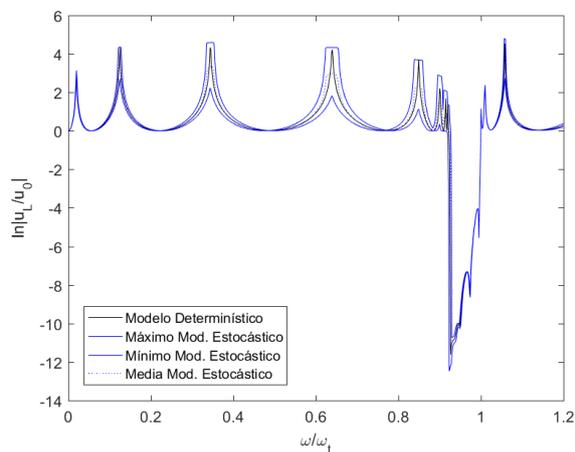
- La incertidumbre en estos parámetros no produce un desplazamiento de la frecuencia central del bandgap.
- La incertidumbre en el parámetro \bar{c}_{11}^E no produce efectos significativos en el bandgap.
- La incertidumbre en los parámetros \bar{e}_{31} y \bar{e}_{33}^S se propaga de manera exclusiva hacia la zona de bandgap, siendo la respuesta del modelo mas sensible al segundo parámetro, logrando una degradación completa del bandgap cuando la dispersión del mismo es de 0,05.
- La sintonía de la metaestructura es sensible a variaciones del parámetro \bar{e}_{33}^S .
- La respuesta del modelo estocástico muestra un comportamiento lineal frente a la incertidumbre de estos parámetros.



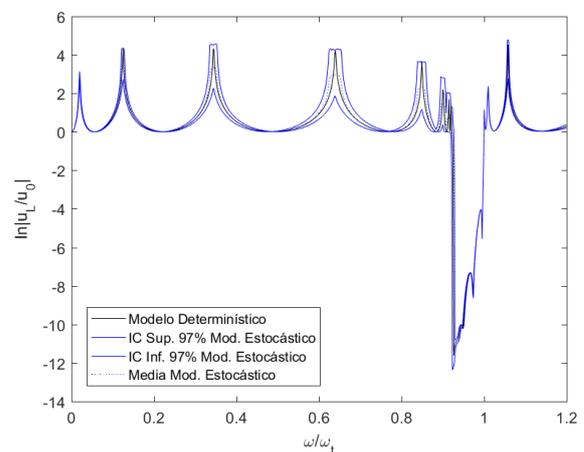
Máximo y mínimo con $CV=0,01$.



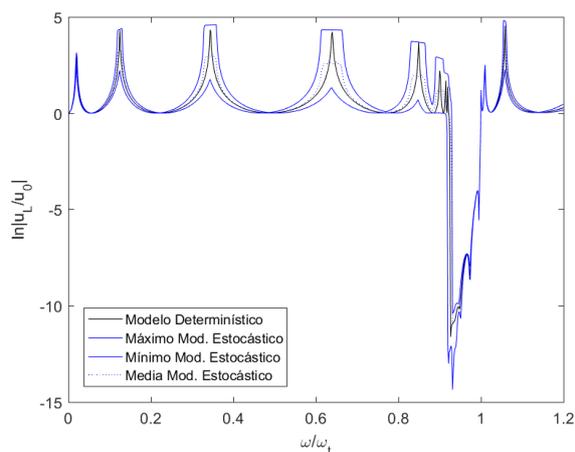
Intervalo de confianza con $CV=0,01$.



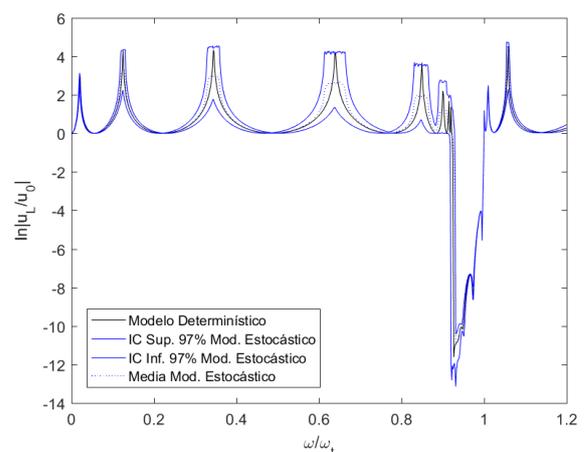
Máximo y mínimo con $CV=0,03$.



Intervalo de confianza con $CV=0,03$.

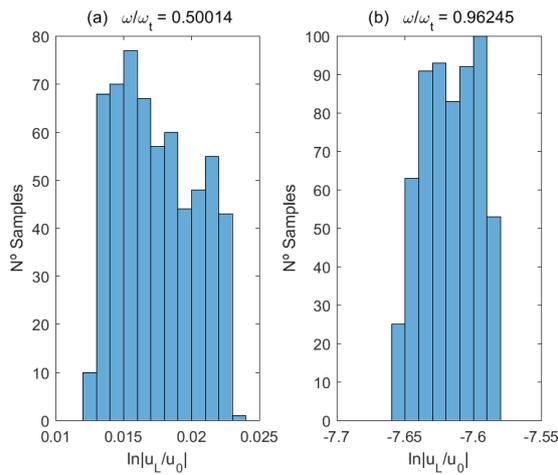


Máximo y mínimo con $CV=0,05$.

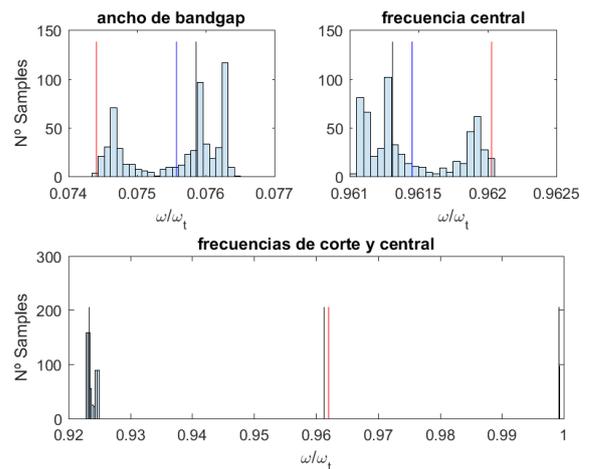


Intervalo de confianza con $CV=0,05$.

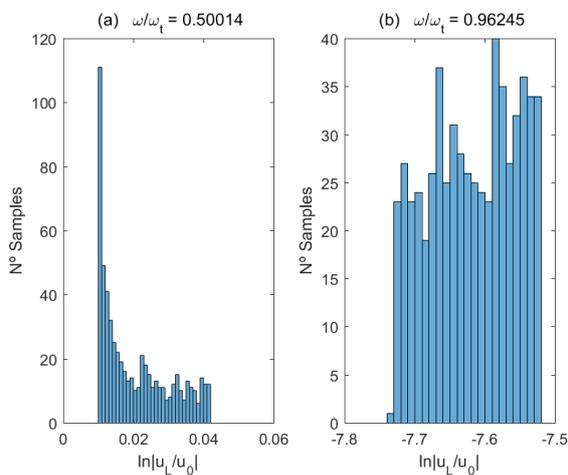
Figura 5.19: Respuesta del modelo estocástico para la variable aleatoria \bar{c}_{11}^E .



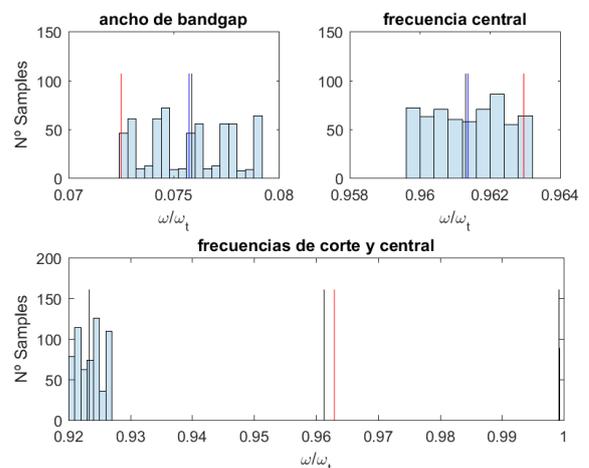
Histograma a frecuencia dada con CV=0,01.



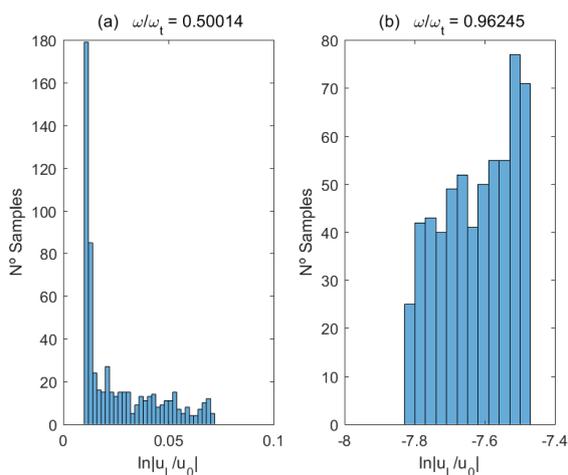
Histograma del bandgap con CV=0,01.



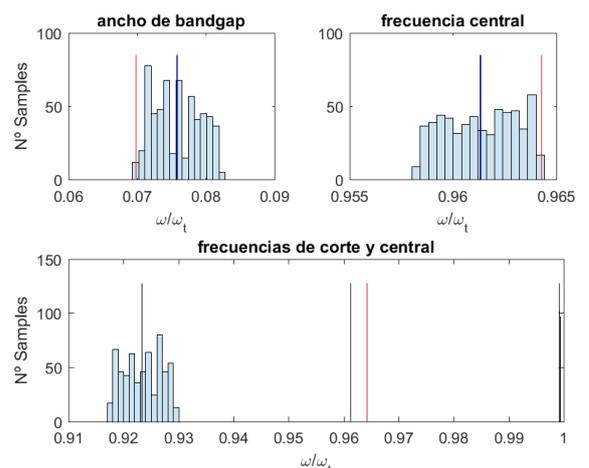
Histograma a frecuencia dada con CV=0,03.



Histograma del bandgap con CV=0,03.

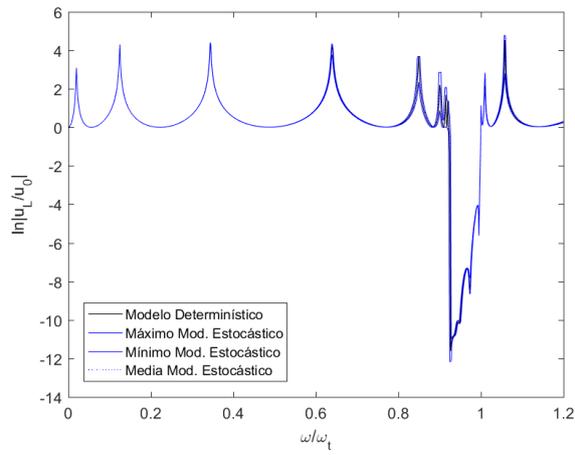


Histograma a frecuencia dada con CV=0,05.

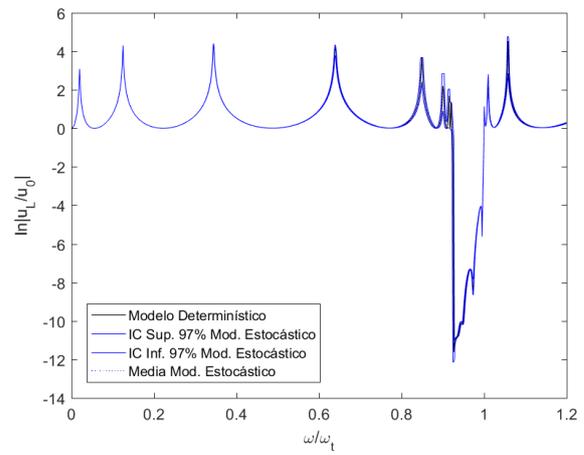


Histograma del bandgap con CV=0,05.

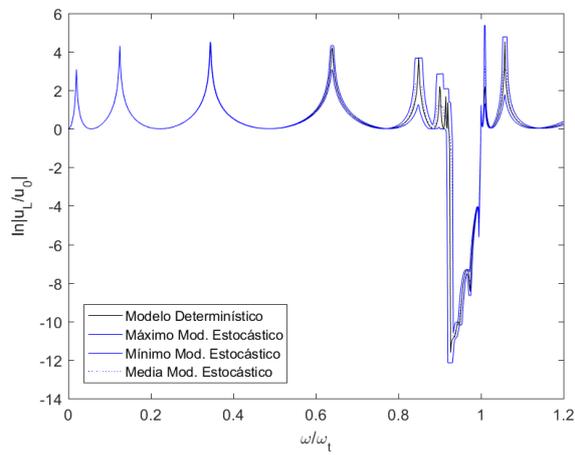
Figura 5.20: Histogramas de la respuesta para la variable aleatoria \bar{c}_{11}^E . En los histogramas del bandgap, la línea negra indica valor determinístico, línea azul valor medio y línea roja valor efectivo.



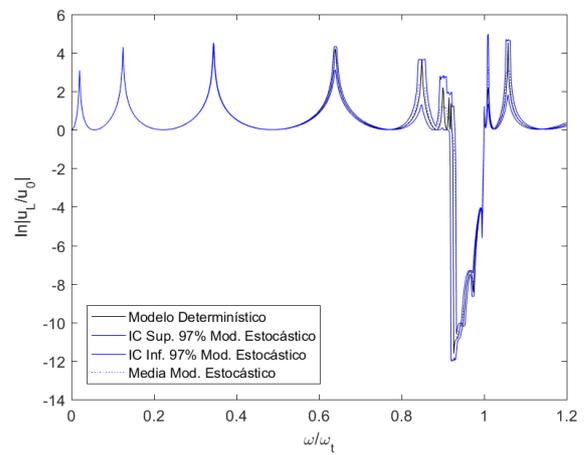
Máximo y mínimo con $CV=0,01$.



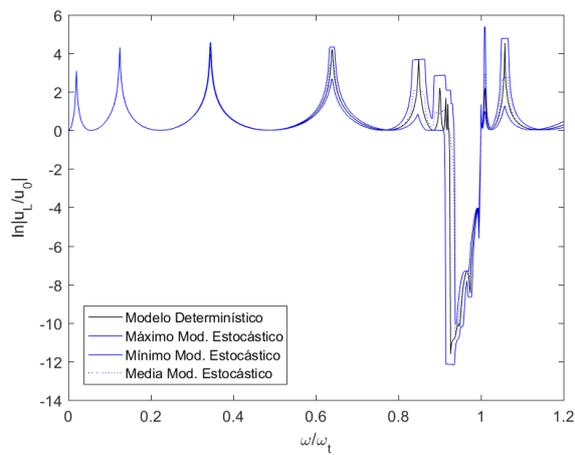
Intervalo de confianza con $CV=0,01$.



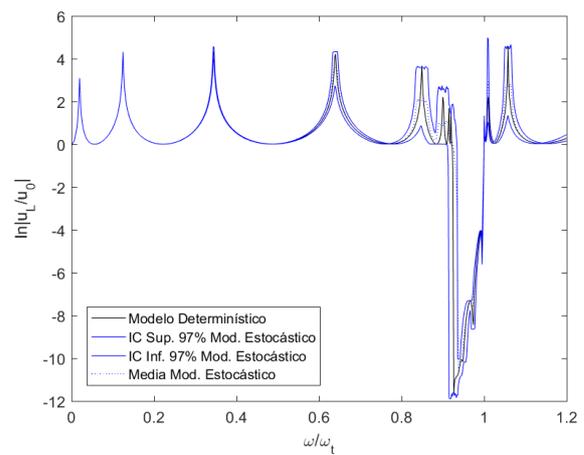
Máximo y mínimo con $CV=0,03$.



Intervalo de confianza con $CV=0,03$.

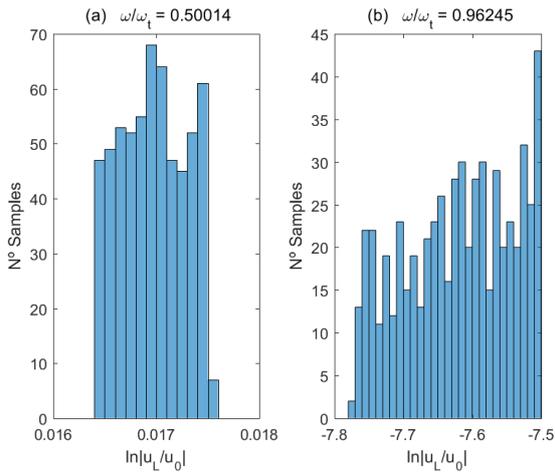


Máximo y mínimo con $CV=0,05$.

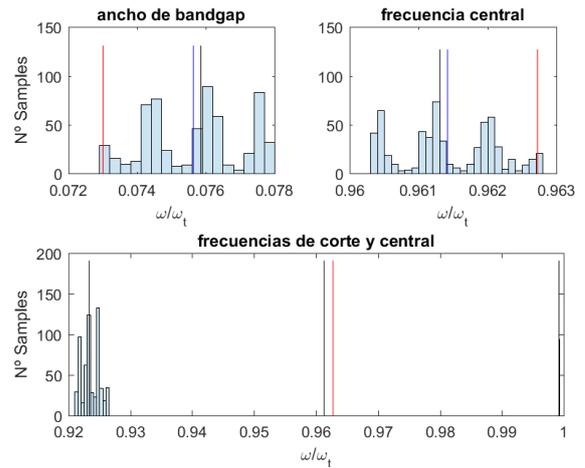


Intervalo de confianza con $CV=0,05$.

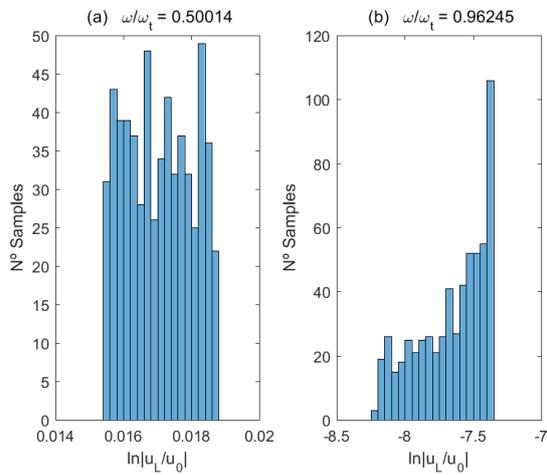
Figura 5.21: Respuesta del modelo estocástico para la variable aleatoria \bar{e}_{31} .



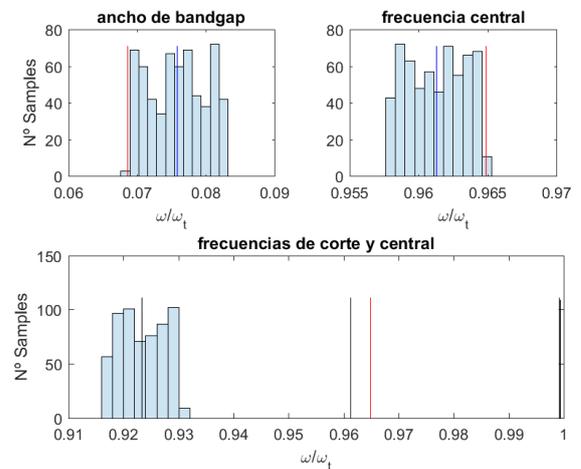
Histograma a frecuencia dada con CV=0,01.



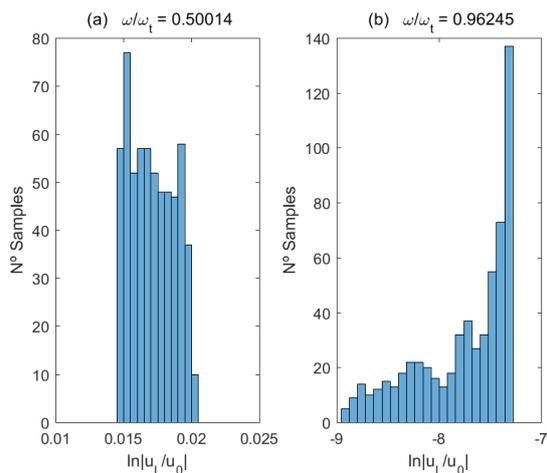
Histograma del bandgap con CV=0,01.



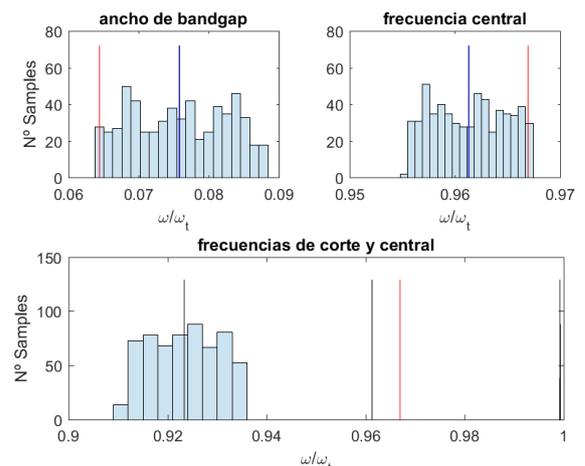
Histograma a frecuencia dada con CV=0,03.



Histograma del bandgap con CV=0,03.

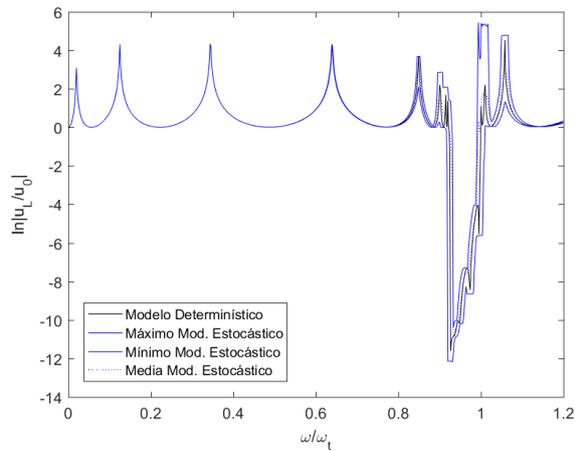


Histograma a frecuencia dada con CV=0,05.

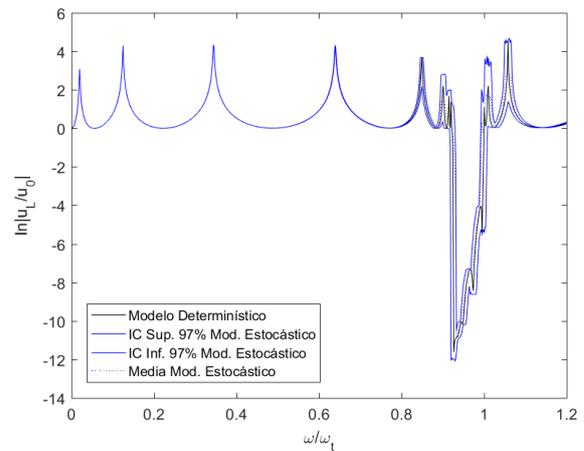


Histograma del bandgap con CV=0,05.

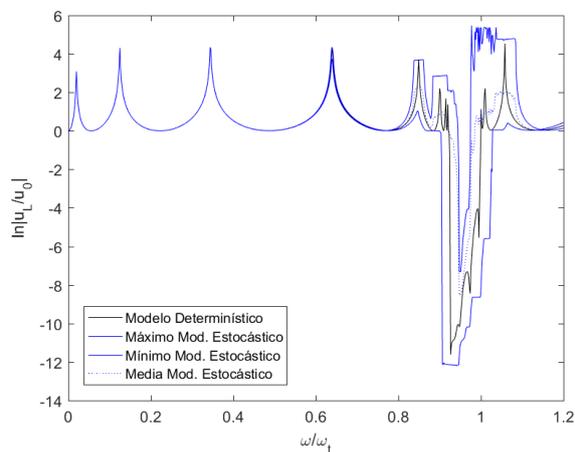
Figura 5.22: Histogramas de la respuesta para la variable aleatoria $\bar{\epsilon}_{31}$. En los histogramas del bandgap, la línea negra indica valor determinístico, línea azul valor medio y línea roja valor efectivo.



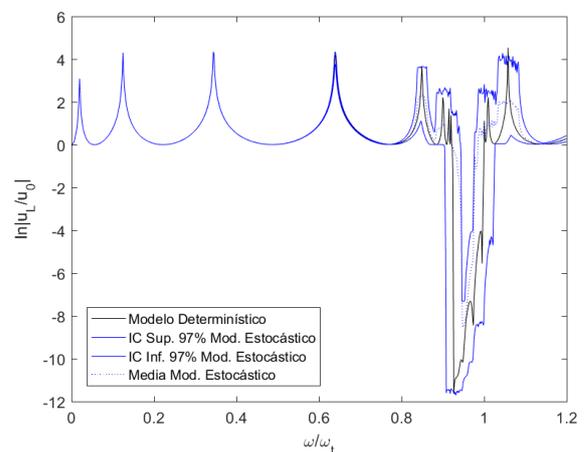
Máximo y mínimo con $CV=0,01$.



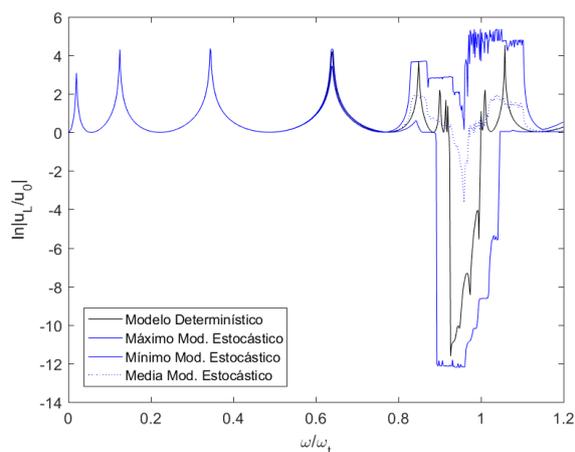
Intervalo de confianza con $CV=0,01$.



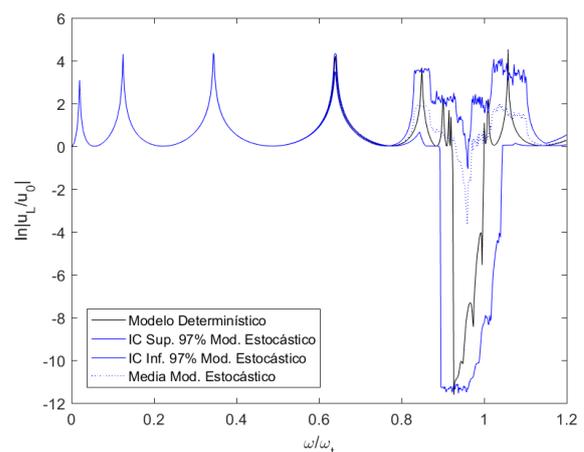
Máximo y mínimo con $CV=0,03$.



Intervalo de confianza con $CV=0,03$.

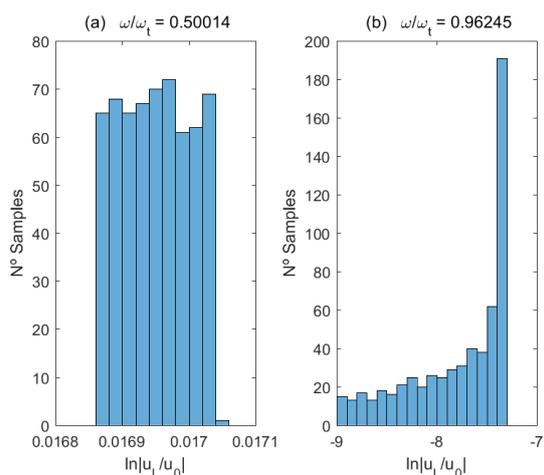


Máximo y mínimo con $CV=0,05$.

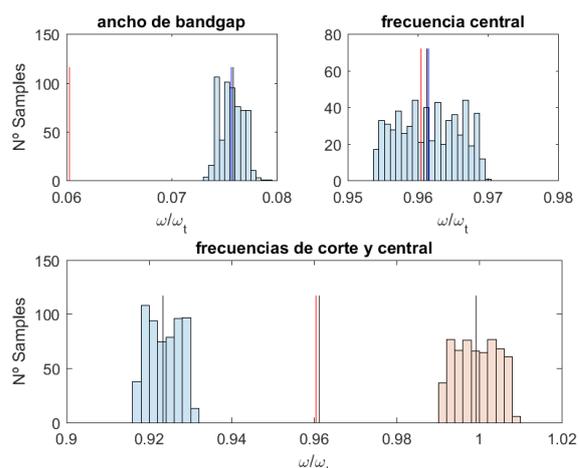


Intervalo de confianza con $CV=0,05$.

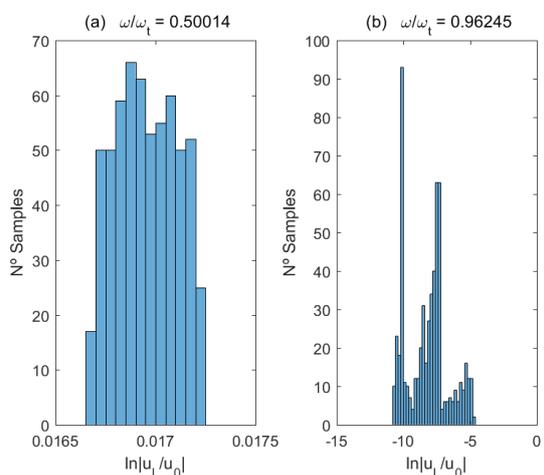
Figura 5.23: Respuesta del modelo estocástico para la variable aleatoria $\bar{\epsilon}_{33}^S$.



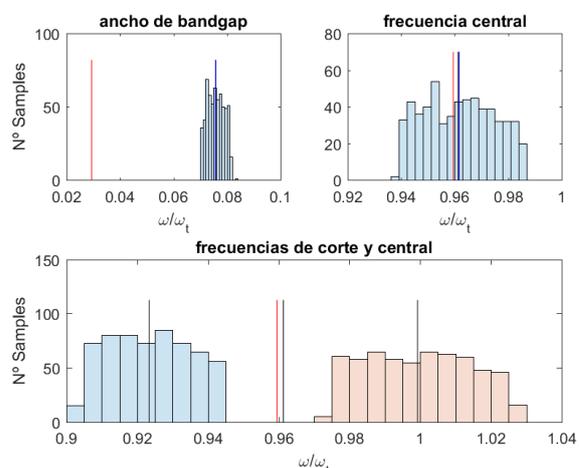
Histograma a frecuencia dada con CV=0,01.



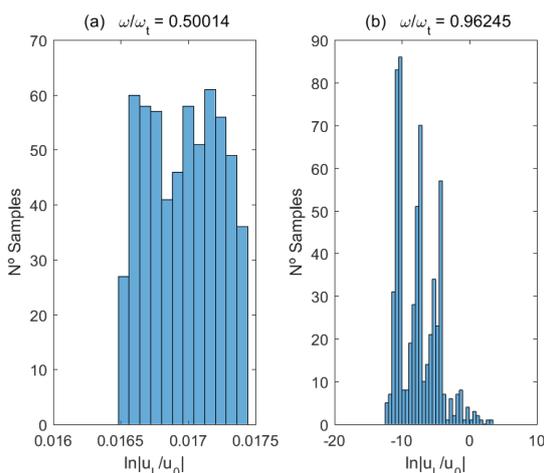
Histograma del bandgap con CV=0,01.



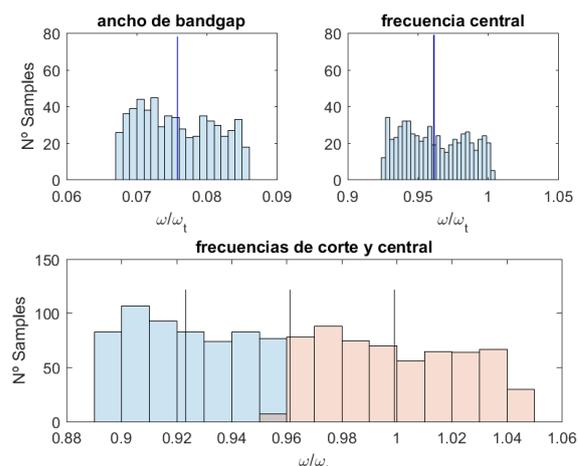
Histograma a frecuencia dada con CV=0,03.



Histograma del bandgap con CV=0,03.

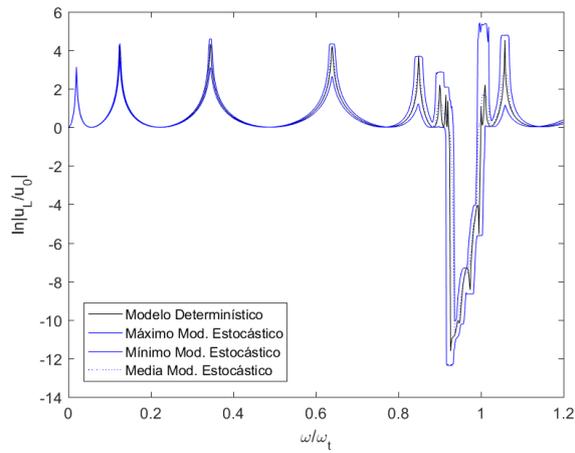


Histograma a frecuencia dada con CV=0,05.

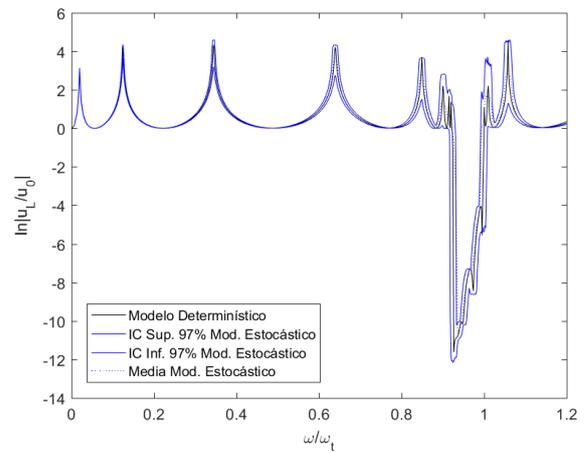


Histograma del bandgap con CV=0,05.

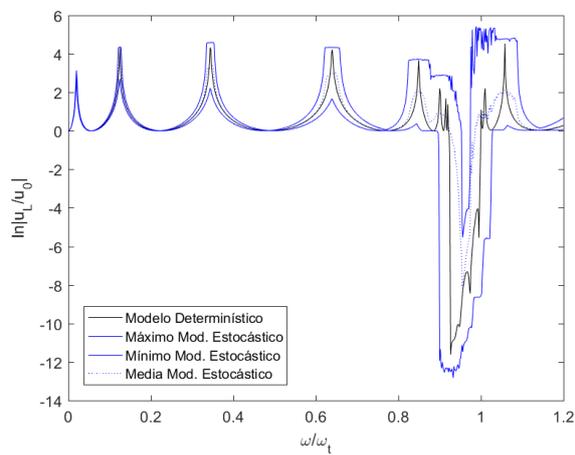
Figura 5.24: Histogramas de la respuesta para la variable aleatoria $\bar{\epsilon}_{33}^S$. En los histogramas del bandgap, la línea negra indica valor determinístico, línea azul valor medio y línea roja valor efectivo.



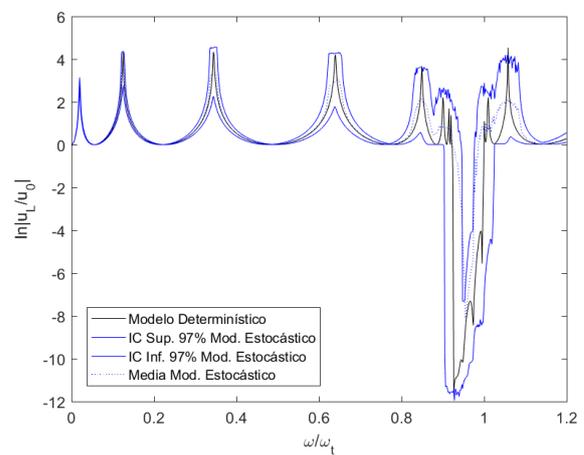
Máximo y mínimo con $CV=0,01$.



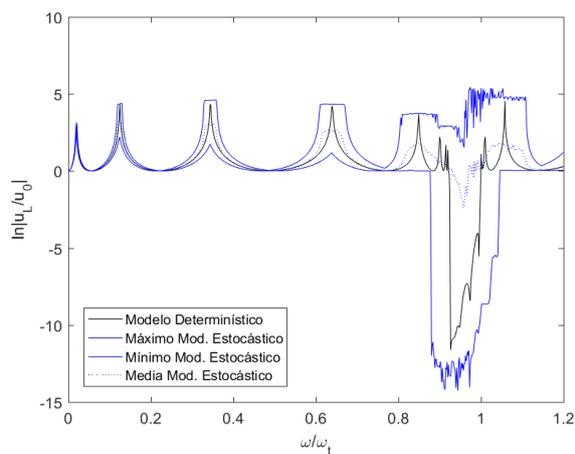
Intervalo de confianza con $CV=0,01$.



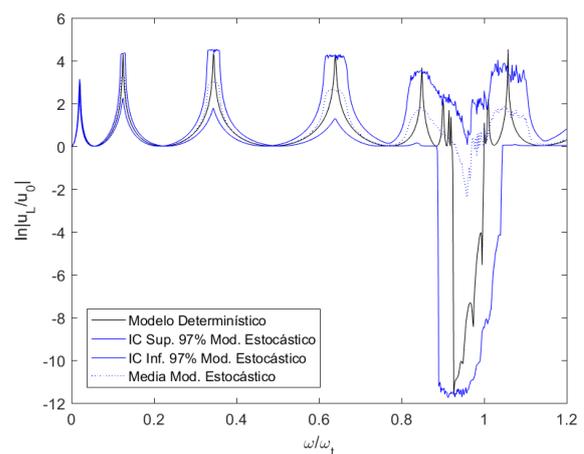
Máximo y mínimo con $CV=0,03$.



Intervalo de confianza con $CV=0,03$.

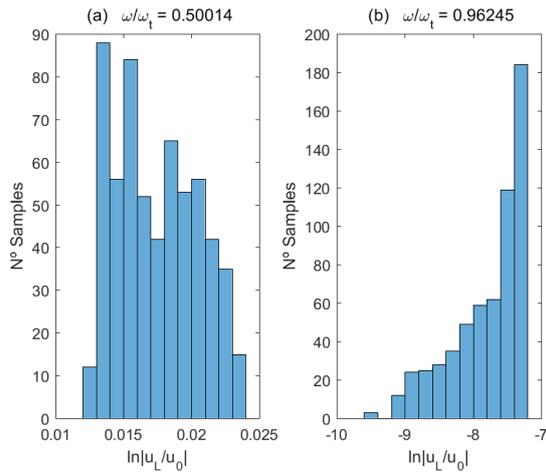


Máximo y mínimo con $CV=0,05$.

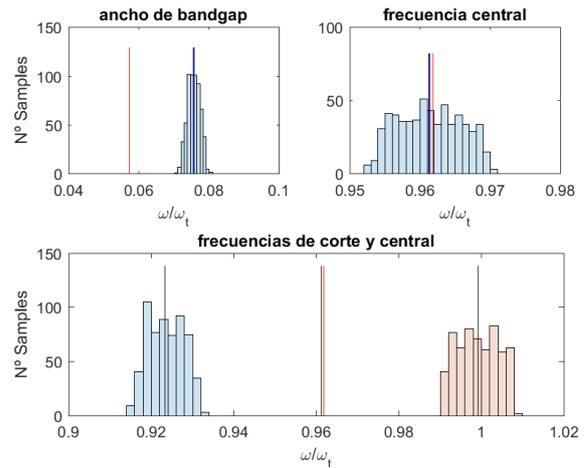


Intervalo de confianza con $CV=0,05$.

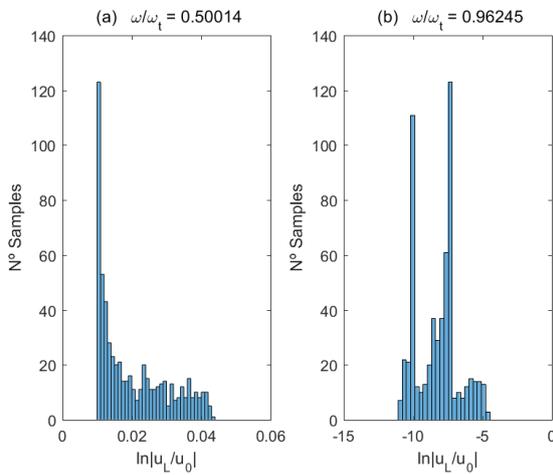
Figura 5.25: Respuesta del modelo estocástico para la variable aleatoria \bar{c}_{11}^E , \bar{e}_{31} y \bar{e}_{33}^S .



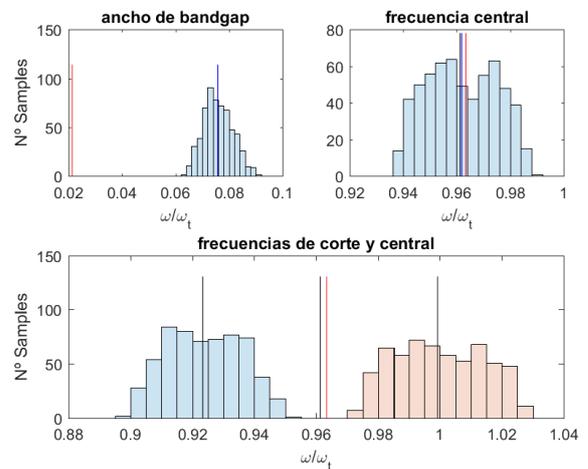
Histograma a frecuencia dada con CV=0,01.



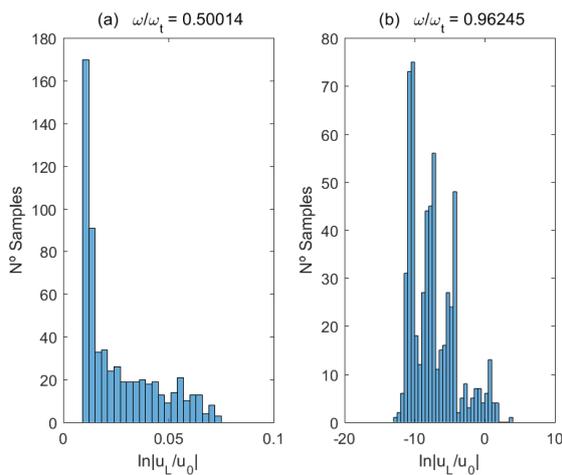
Histograma del bandgap con CV=0,01.



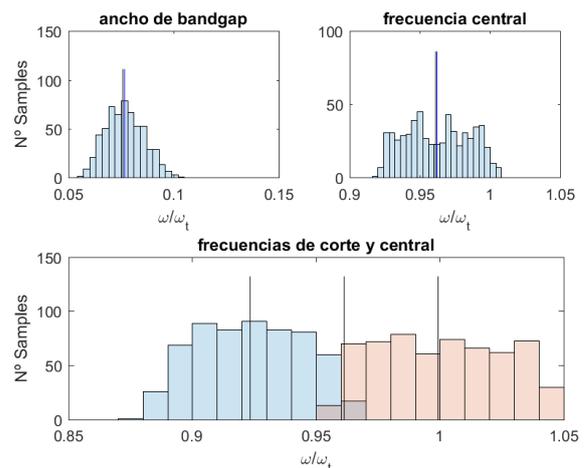
Histograma a frecuencia dada con CV=0,03.



Histograma del bandgap con CV=0,03.

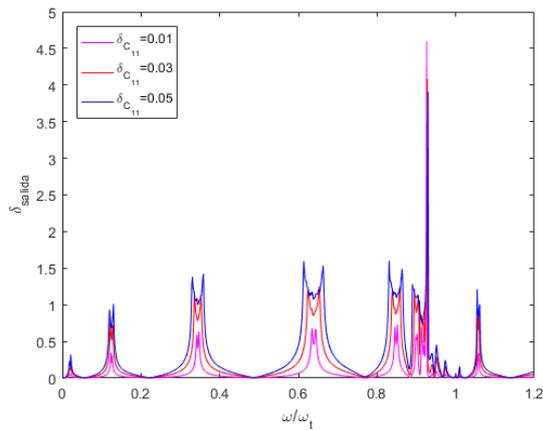


Histograma a frecuencia dada con CV=0,05.

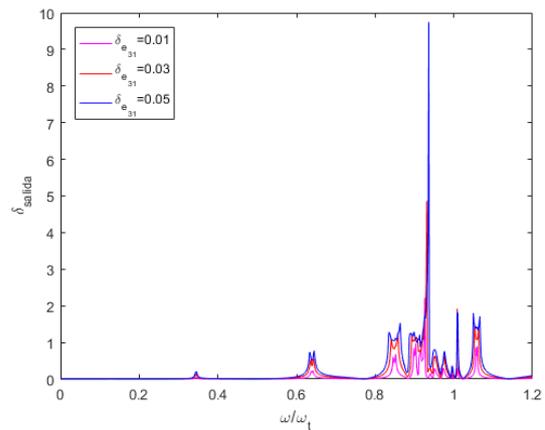


Histograma del bandgap con CV=0,05.

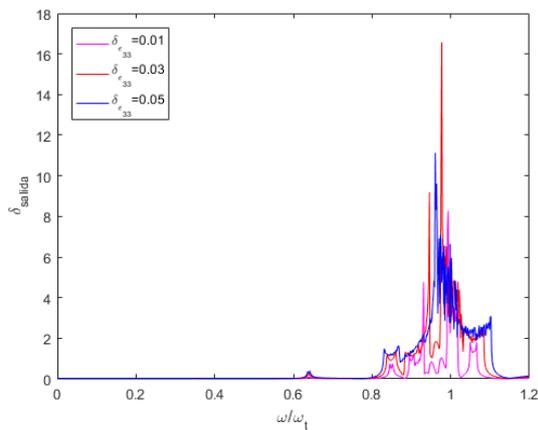
Figura 5.26: Histogramas de la respuesta para las variables aleatorias \bar{c}_{11}^E , \bar{e}_{31} y \bar{e}_{33}^S . En los histogramas del bandgap, la línea negra indica valor determinístico, línea azul valor medio y línea roja valor efectivo.



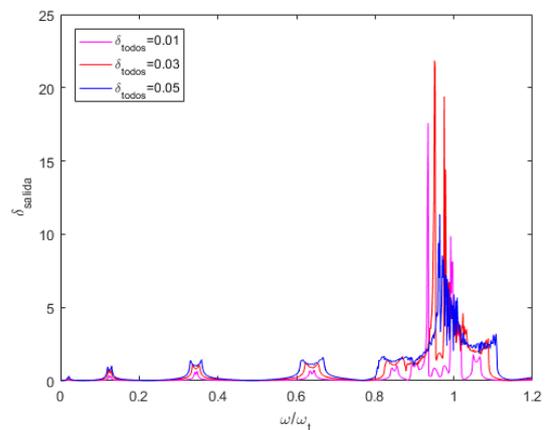
Dispersión de la respuesta para la VA \bar{c}_{11}^E .



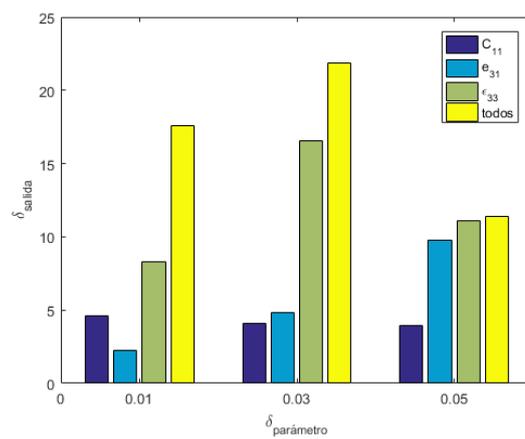
Dispersión de la respuesta para la VA \bar{e}_{31} .



Dispersión de la respuesta para la VA \bar{e}_{33}^S .



Dispersión de la respuesta para todas las variables.



Dispersión máxima.

Figura 5.27: Sensibilidad del modelo frente a variaciones de \bar{c}_{11}^E , \bar{e}_{31} y \bar{e}_{33}^S .

5.4.3. Incertidumbre en los parámetros $\{b, h_{pz}, h_s\}$

El segundo estudio corresponde al análisis de propagación de incertidumbre hacia la dinámica del modelo de los siguientes parámetros geométricos de la metaestructura: base $\{b\}$, altura de la capa piezoeléctrica $\{h_{pz}\}$, altura del sustrato $\{h_s\}$. La metaestructura modelada se considera recta y de longitud $l = 100mm$, constituida de material piezoeléctrico PZT-5A y sustrato de aluminio, compuesta por 25 resonadores. La misma se encuentra sintonizada a $f_t = 5968Hz$, sujeta a un movimiento de excitación desde la base del tipo $u_y(\omega) = 1e^{j\omega t}$ mm. Los valores determinísticos de los parámetros son: $b = 10mm$, $h_{pz} = 1mm$, y $h_s = 0,5mm$.

La primera simulación del estudio considera incertidumbre únicamente en el parámetro b . La Figura 5.28 muestra los gráficos de propagación vibratoria estocástica para los diferentes valores de CV simulados, en los cuales puede observarse como la incertidumbre del parámetro se propaga sobre la zona de bandgap, incluidas sus frecuencias naturales de frontera, y afectando levemente la frecuencia natural correspondiente a un modo de flexión, ubicada anterior al bandgap. De forma similar a las simulaciones anteriores, se aprecia el aumento de dispersión en la respuesta con el aumento de incertidumbre del parámetro, degradando completamente el bandgap para el máximo CV simulado. Puede observarse también la existencia de valores máximos y mínimos alejados del intervalo de confianza para la zona ubicada en la frecuencia de corte superior del bandgap. Los histogramas de la Figura 5.29 muestran una dispersión prácticamente nula para la respuesta a frecuencia 0,5 indicando una baja sensibilidad de la misma en esta zona. Sin embargo, para la frecuencia interior al bandgap, una alta dispersión de la respuesta se traduce en una pérdida de atenuación, que aumenta junto con la incertidumbre del parámetro. En los histogramas del bandgap se observa la coincidencia de la frecuencia central efectiva con su valor determinístico y valor medio, indicando un desplazamiento efectivo nulo del bandgap. Se observa dispersión en aumento de la frecuencia de corte superior, que se traduce en sensibilidad de la frecuencia de sintonía a variaciones del parámetro. También es importante notar una baja dispersión del AB, que sumada a la alta dispersión en las frecuencias de corte, resultan en un bandgap que no altera su tamaño, sino que modifica su ubicación, moviéndose equitativamente hacia izquierda y derecha, provocando una disminución del bandgap efectivo. En el último histograma para frecuencias de corte, puede observarse la degradación total del bandgap debido al

solapamiento de ambas frecuencias de corte.

La segunda simulación considera incertidumbre únicamente en el parámetro h_{pz} . La respuesta del modelo se muestra en la Figura 5.30, donde inicialmente se observa como la incertidumbre del parámetro se propaga a lo largo de toda la respuesta, desde las frecuencias naturales hasta la zona de bandgap, aumentando la dispersión en la respuesta con el aumento de dicha incertidumbre. Se observa también la completa degradación del bandgap para el máximo CV simulado, y la presencia de valores máximos y mínimos lejanos al intervalo de confianza en la zona correspondiente a la frecuencia de corte superior. En los histogramas de la Figura 5.31 se observa una distribución cuasi exponencial acotada para la respuesta fuera de la zona de bandgap, afectando esta zona de manera similar al parámetro \bar{c}_{11}^E del estudio anterior, pero con una mayor dispersión. Una alta dispersión de la respuesta se presenta para la frecuencia interior al bandgap, aumentando con la incertidumbre, exponiendo de ésta manera la degradación de atenuación que produce la incertidumbre de este parámetro. En los histogramas propios del bandgap puede apreciarse, al igual que la simulación anterior, la susceptibilidad de la frecuencia de sintonía a variaciones del parámetro. Existe coincidencia de la frecuencia central efectiva con su valor determinístico y valor medio, lo que representa un desplazamiento efectivo nulo del bandgap. Además, una baja dispersión del AB en conjunto con una alta dispersión en las frecuencias de corte, resultan en un bandgap que no cambia su tamaño, sino que varía su ubicación en el espectro, tal cual sucede en la simulación para el parámetro b . Finalmente se observa un solapamiento de ambas frecuencias de corte que implican la degradación completa del bandgap para $CV=0,05$.

En la tercera simulación del estudio se considera incertidumbre en el parámetro h_s . En la Figura 5.32 puede notarse a simple vista que este parámetro afecta el desempeño dinámico de la estructura de manera sutil, aún con la máxima dispersión simulada. Se observa como la incertidumbre paramétrica se propaga levemente hacia las frecuencias naturales de flexión y parte de la atenuación del bandgap. Puede apreciarse también que no existen valores de la respuesta alejados del intervalo de confianza, dando otra pauta de la baja sensibilidad de la respuesta a las variaciones del parámetro. En los histogramas de la Figura 5.33 se consolida el análisis de la figura anterior, donde inicialmente se observa una muy baja dispersión de la respuesta para am-

bas frecuencias dadas, aún con el máximo CV simulado. En los gráficos propios del bandgap, puede observarse una baja dispersión en la frecuencia de corte inferior y prácticamente inexistente en la frecuencia de corte superior, que se traduce en un desplazamiento de la frecuencia central efectiva levemente hacia la derecha.

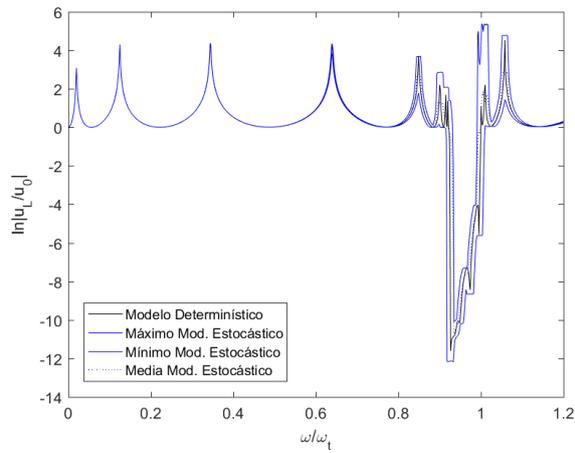
Por último se considera incertidumbre en los tres parámetros del estudio en simultáneo. La Figura 5.34 contiene las gráficas de la respuesta del modelo estocástico, donde se observa como la incertidumbre de los parámetros se propaga a lo largo de toda la respuesta, desde las frecuencias naturales hasta la zona de bandgap por completo, mostrándose degradada en su totalidad para una incertidumbre paramétrica de 0,03. También es notorio los valores máximos y mínimos alejados del intervalo de confianza en toda la zona de bandgap, incluidas sus frecuencias naturales de frontera, indicando gran sensibilidad de la respuesta en dicha zona. En la Figura 5.35 los histogramas de la respuesta a frecuencia 0,5 coinciden con los obtenidos en la simulación de incertidumbre del parámetro h_{pz} , poniendo de manifiesto la sensibilidad de esta zona a dicho parámetro. El primer histograma de la respuesta a frecuencia 0,96 tiene una forma exponencial acotada, con un valor medio cercano al valor determinístico y una gran dispersión que se traduce en pérdida de atenuación del bandgap. En los histogramas propios del bandgap se observa una distribución estrecha del AB que implica que el bandgap no modifica prácticamente su tamaño debido a incertidumbre. Además, existe coincidencia entre los valores de frecuencia central efectiva, determinística y media, que se traduce en desplazamiento equitativo del bandgap a derecha e izquierda. Finalmente se observa la degradación total del bandgap para incertidumbre media y máxima de los parámetros.

El estudio concluye con las gráficas de dispersión de la respuesta en frecuencia de la Figura 5.36. En la misma se aprecia una dispersión muy similar de la respuesta en la zona de bandgap para los parámetros b y h_{pz} , tanto en forma como magnitud, exponiendo la sensibilidad del bandgap a las variaciones de ambos. Sin embargo, la dispersión de la respuesta supera la unidad en las frecuencias naturales para h_{pz} , implicando heterogeneidad en dichas zonas, que se traduce en una alta sensibilidad de las frecuencias naturales a las variaciones del parámetro. También puede observarse, en concordancia con el análisis de las figuras anteriores, la baja sensibilidad de la respuesta a variaciones del parámetro h_s . En la gráfica de dispersión para todas

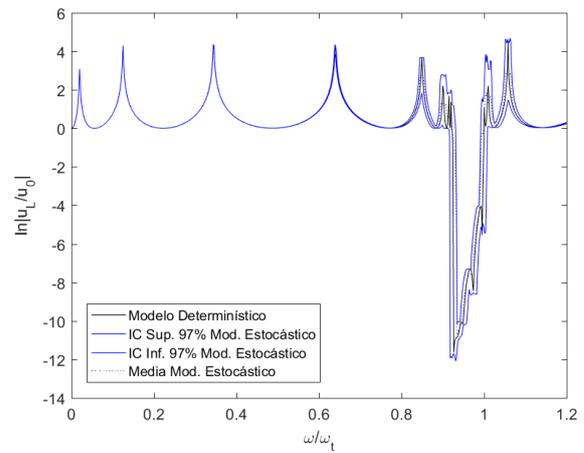
las variables puede apreciarse la influencia del parámetro h_{pz} fuera de la zona de bandgap. El histograma final muestra los valores máximos de dispersión de la respuesta en cada simulación.

Del presente estudio se pueden extraer las siguientes observaciones:

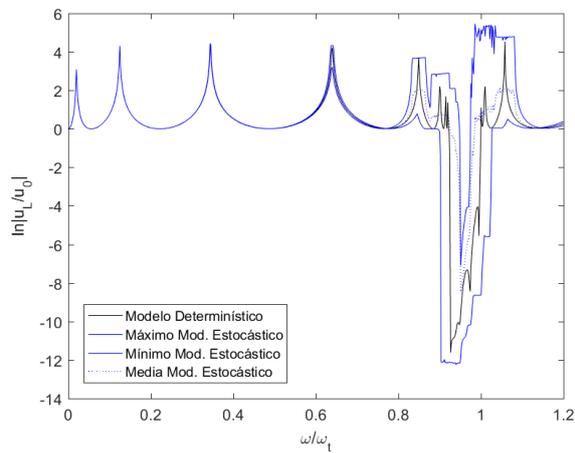
- La incertidumbre en estos parámetros no produce desplazamiento de la frecuencia central del bandgap.
- Variaciones en el parámetro h_s no producen efectos significativos en la respuesta dinámica de la metaestructura.
- La respuesta dinámica es altamente sensible a variaciones del parámetro h_{pz} .
- La sintonía de la metaestructura es sensible a variaciones de los parámetros b y h_{pz} .
- Se logra una degradación completa del bandgap con coeficiente de variación de 0,05 del parámetro b ó h_{pz} , y de 0,03 cuando ambos varían en simultáneo.



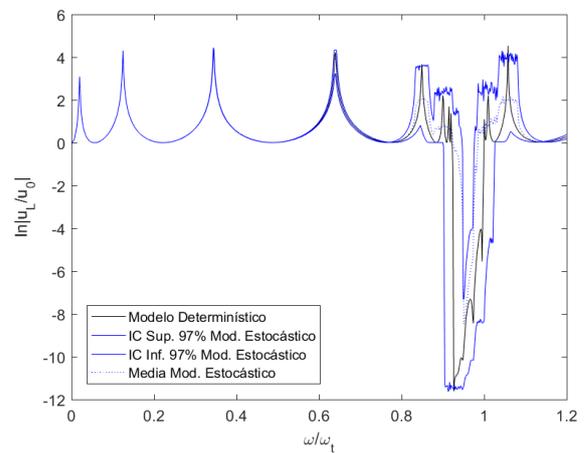
Máximo y mínimo con $CV=0,01$.



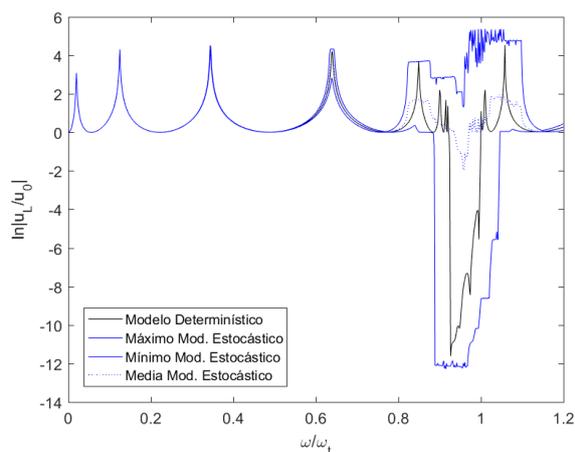
Intervalo de confianza con $CV=0,01$.



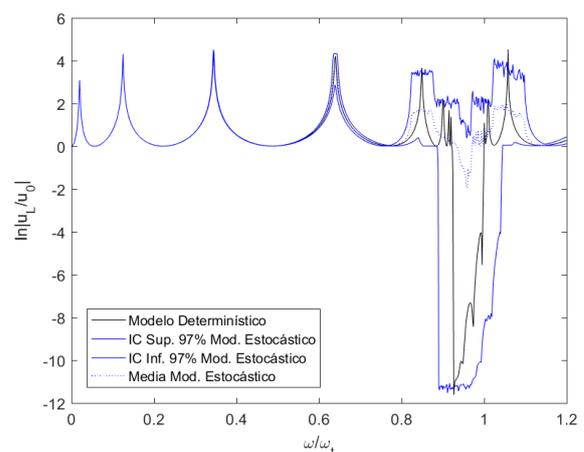
Máximo y mínimo con $CV=0,03$.



Intervalo de confianza con $CV=0,03$.

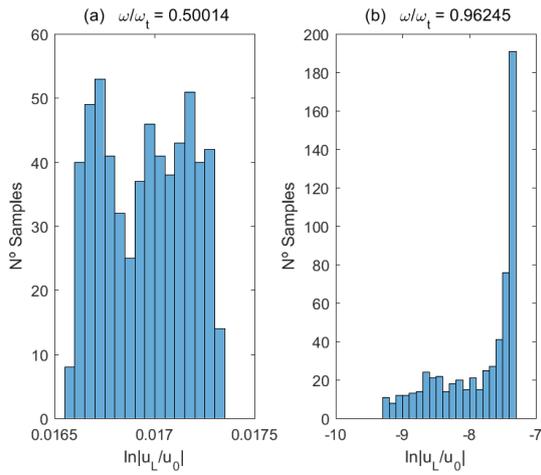


Máximo y mínimo con $CV=0,05$.

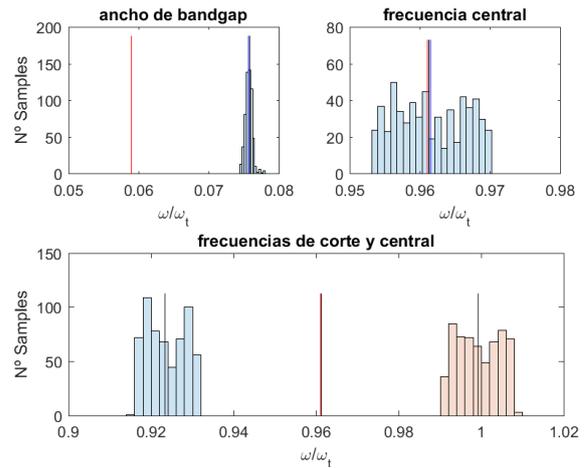


Intervalo de confianza con $CV=0,05$.

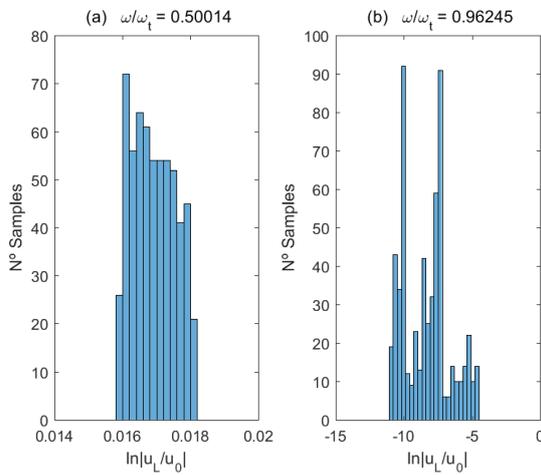
Figura 5.28: Respuesta del modelo estocástico para la variable aleatoria b .



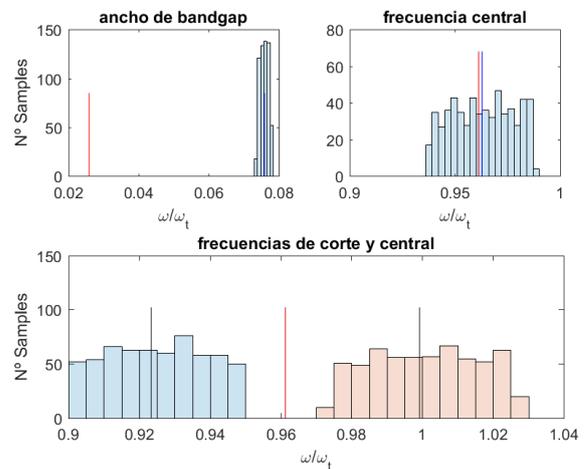
Histograma a frecuencia dada con CV=0,01.



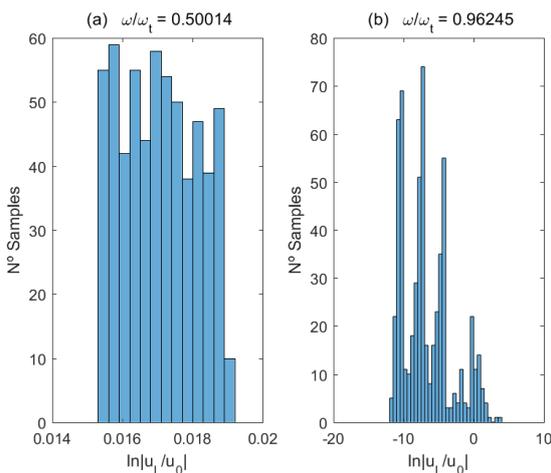
Histograma del bandgap con CV=0,01.



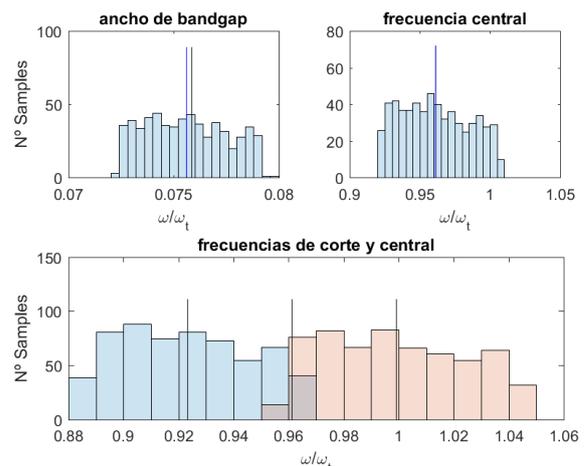
Histograma a frecuencia dada con CV=0,03.



Histograma del bandgap con CV=0,03.

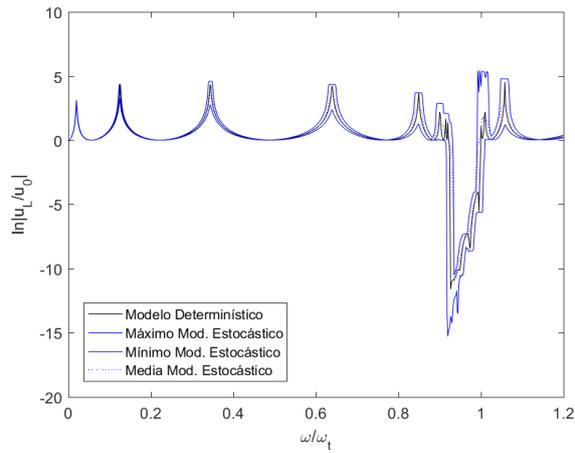


Histograma a frecuencia dada con CV=0,05.

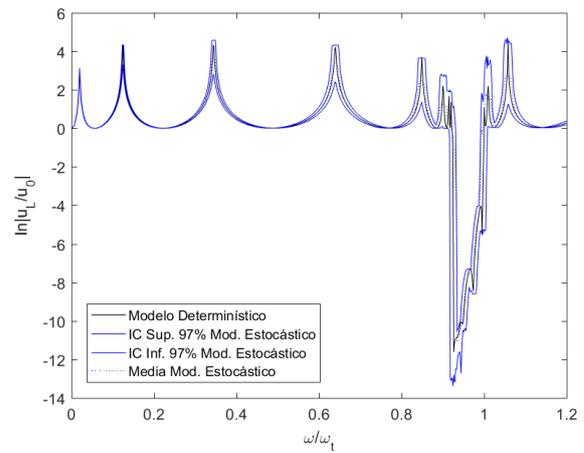


Histograma del bandgap con CV=0,05.

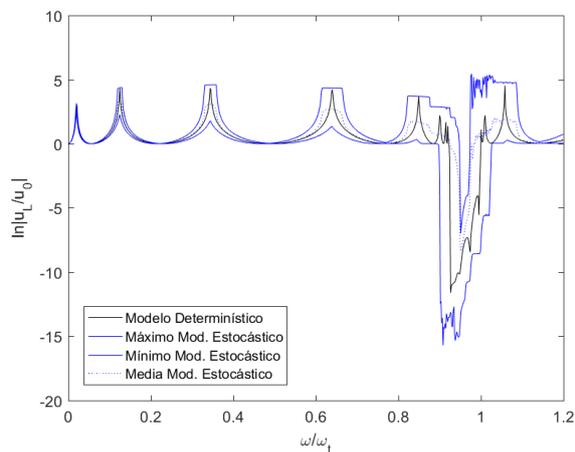
Figura 5.29: Histogramas de la respuesta para la variable aleatoria b . En los histogramas del bandgap, la línea negra indica valor determinístico, línea azul valor medio y línea roja valor efectivo.



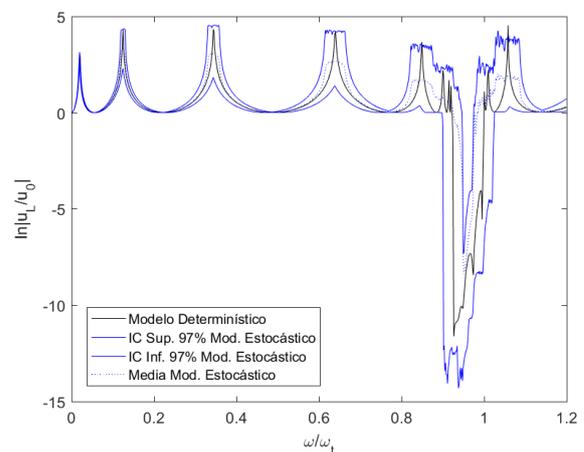
Máximo y mínimo con CV=0,01.



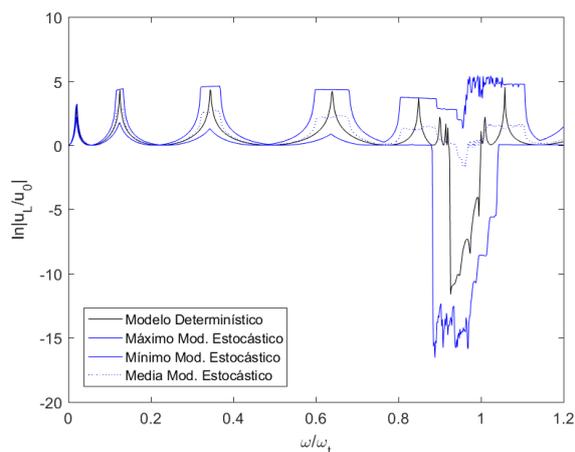
Intervalo de confianza con CV=0,01.



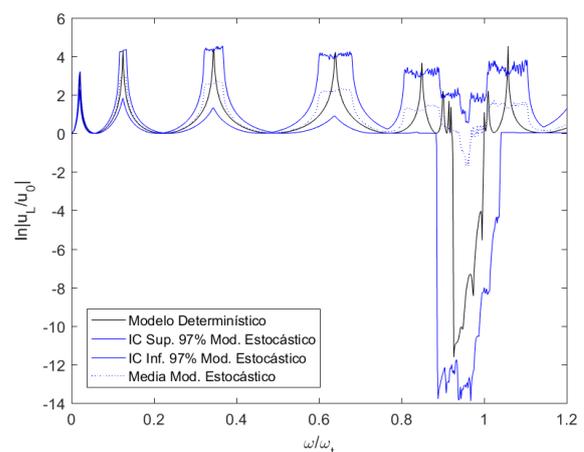
Máximo y mínimo con CV=0,03.



Intervalo de confianza con CV=0,03.

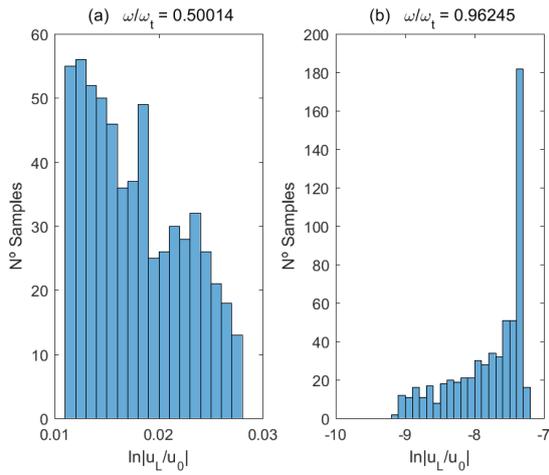


Máximo y mínimo con CV=0,05.

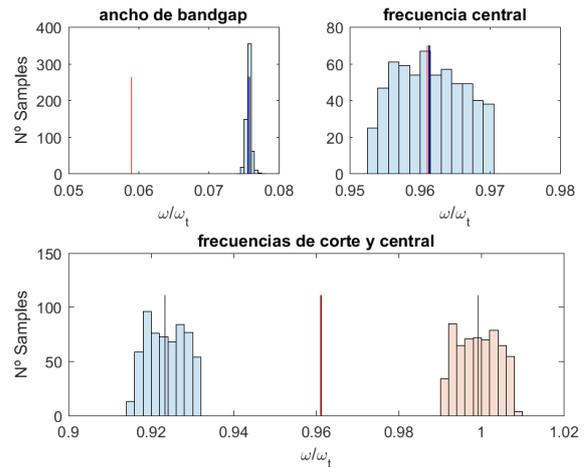


Intervalo de confianza con CV=0,05.

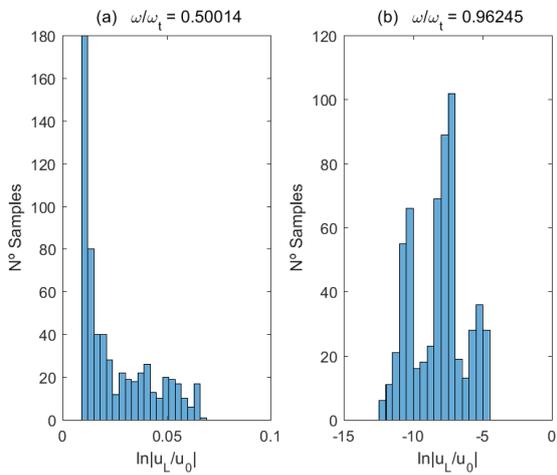
Figura 5.30: Respuesta del modelo estocástico para la variable aleatoria $h_{p\zeta}$.



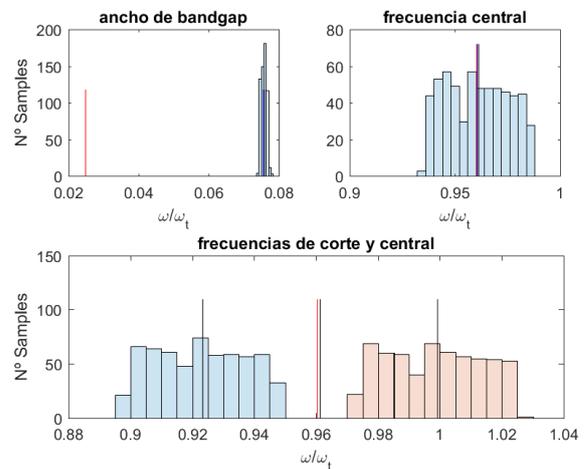
Histograma a frecuencia dada con CV=0,01.



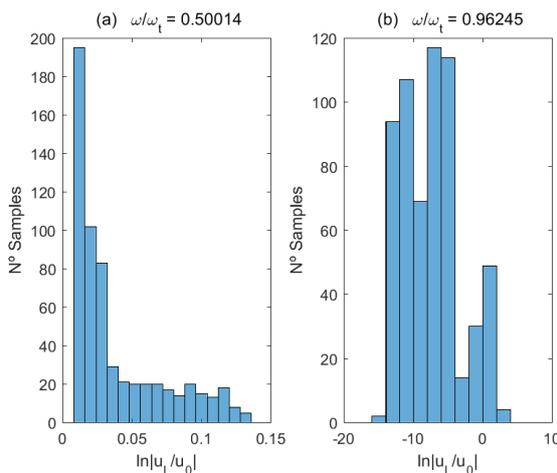
Histograma del bandgap con CV=0,01.



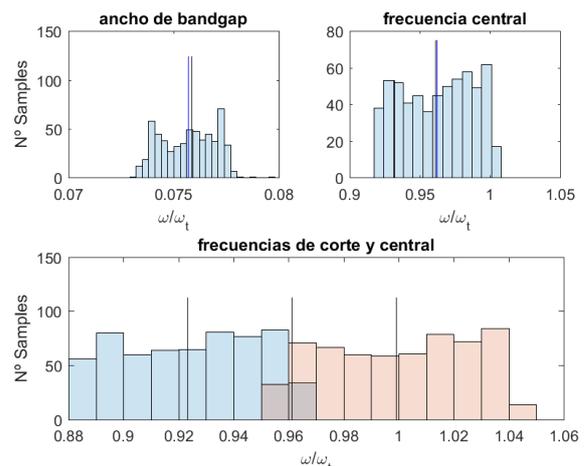
Histograma a frecuencia dada con CV=0,03.



Histograma del bandgap con CV=0,03.

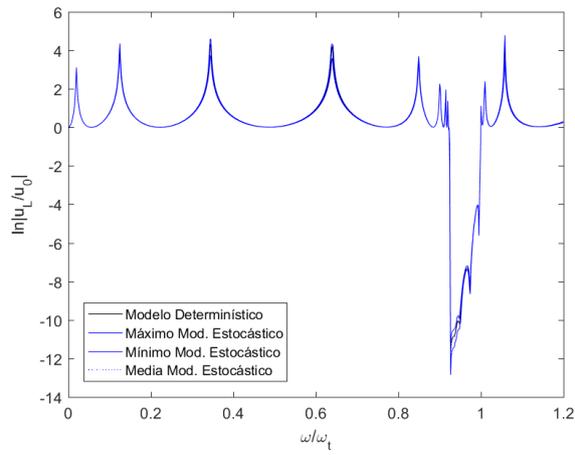


Histograma a frecuencia dada con CV=0,05.

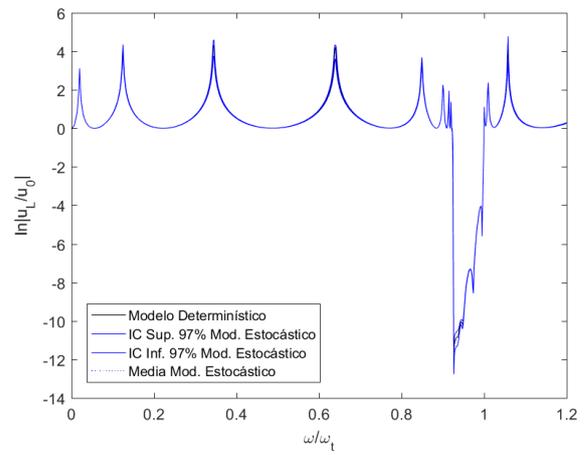


Histograma del bandgap con CV=0,05.

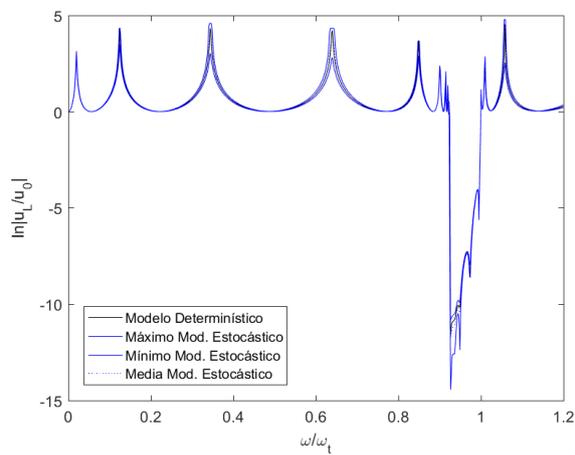
Figura 5.31: Histogramas de la respuesta para la variable aleatoria h_{pz} . En los histogramas del bandgap, la línea negra indica valor determinístico, línea azul valor medio y línea roja valor efectivo.



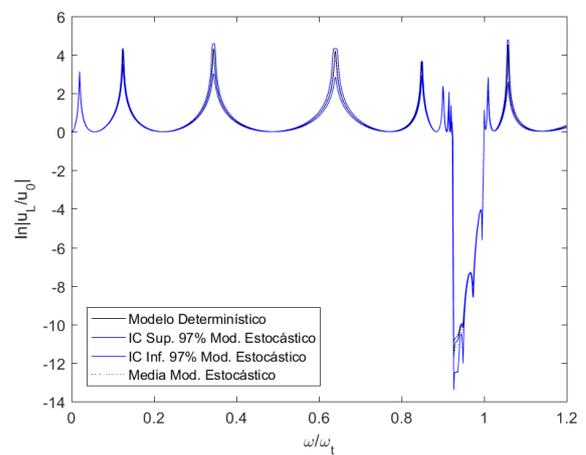
Máximo y mínimo con $CV=0,01$.



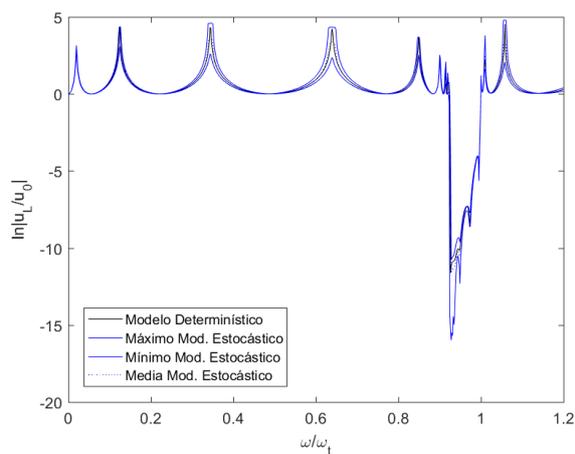
Intervalo de confianza con $CV=0,01$.



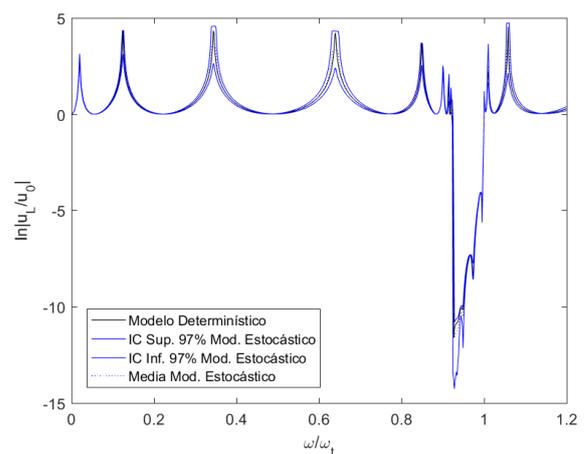
Máximo y mínimo con $CV=0,03$.



Intervalo de confianza con $CV=0,03$.

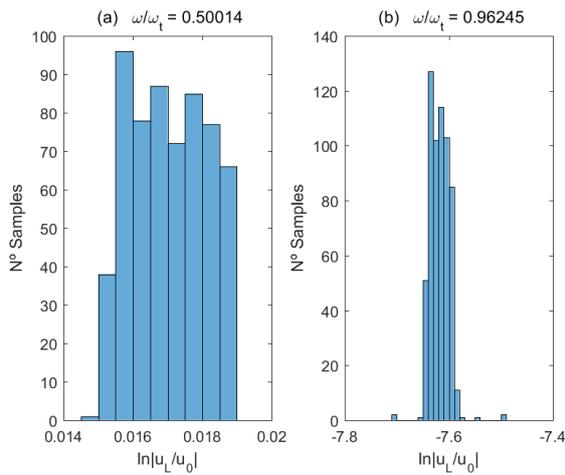


Máximo y mínimo con $CV=0,05$.

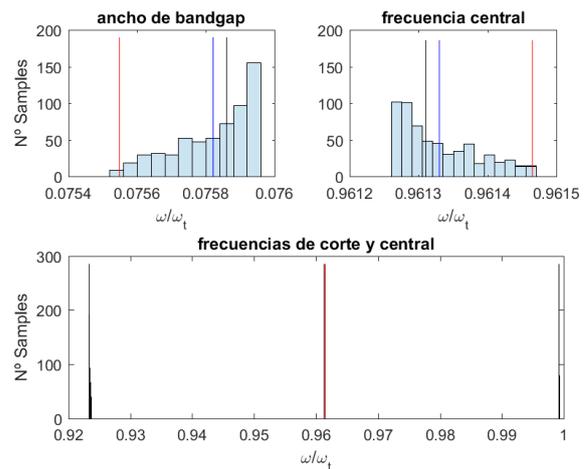


Intervalo de confianza con $CV=0,05$.

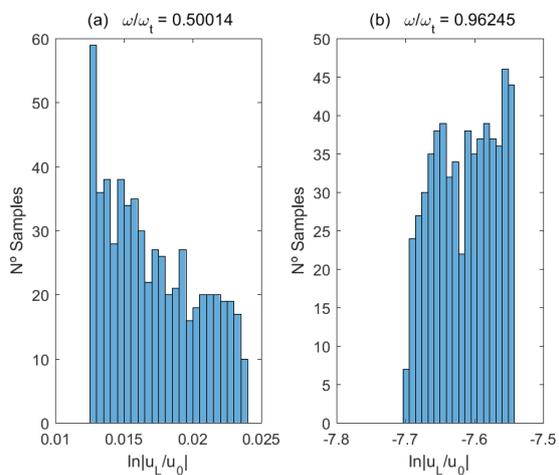
Figura 5.32: Respuesta del modelo estocástico para la variable aleatoria h_s .



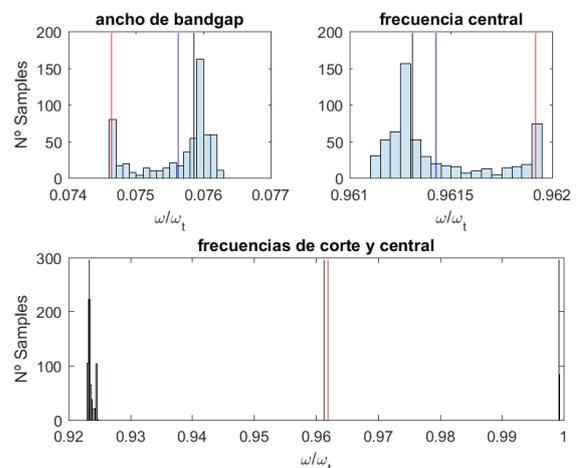
Histograma a frecuencia dada con CV=0,01.



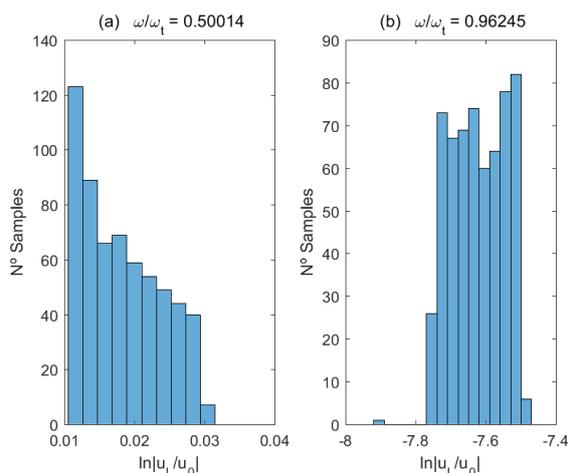
Histograma del bandgap con CV=0,01.



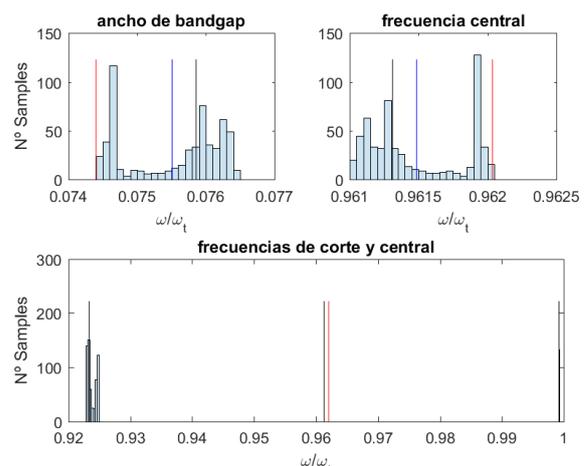
Histograma a frecuencia dada con CV=0,03.



Histograma del bandgap con CV=0,03.

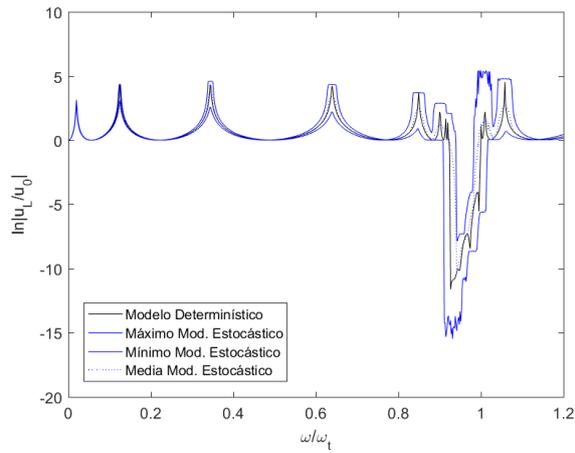


Histograma a frecuencia dada con CV=0,05.

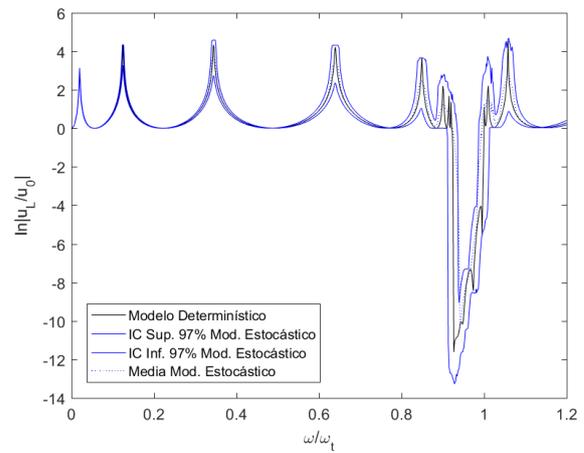


Histograma del bandgap con CV=0,05.

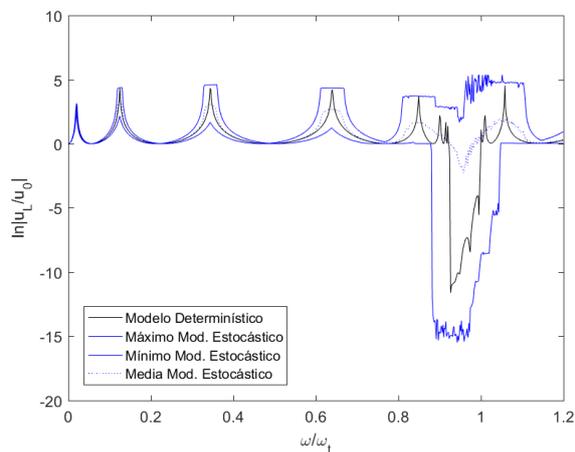
Figura 5.33: Histogramas de la respuesta para la variable aleatoria h_s . En los histogramas del bandgap, la línea negra indica valor determinístico, línea azul valor medio y línea roja valor efectivo.



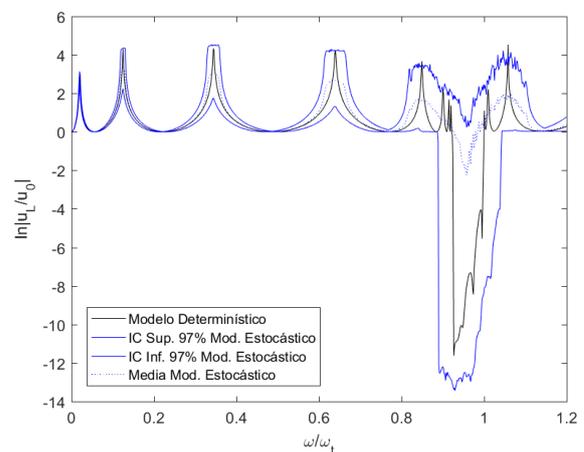
Máximo y mínimo con CV=0,01.



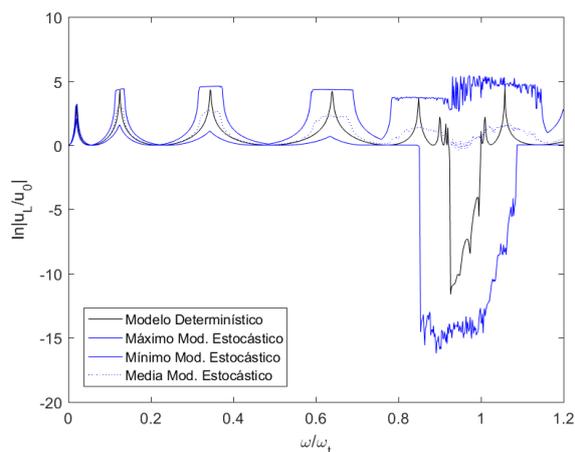
Intervalo de confianza con CV=0,01.



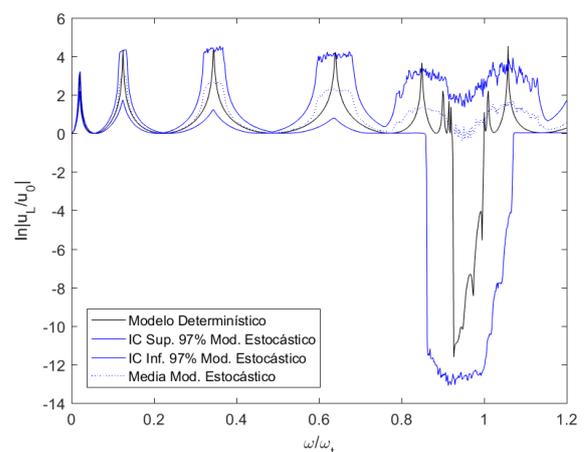
Máximo y mínimo con CV=0,03.



Intervalo de confianza con CV=0,03.

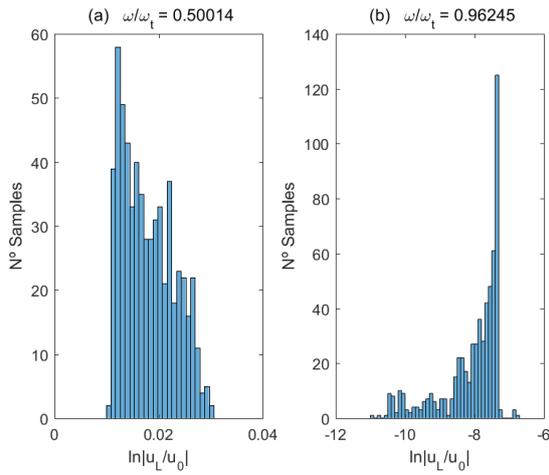


Máximo y mínimo con CV=0,05.

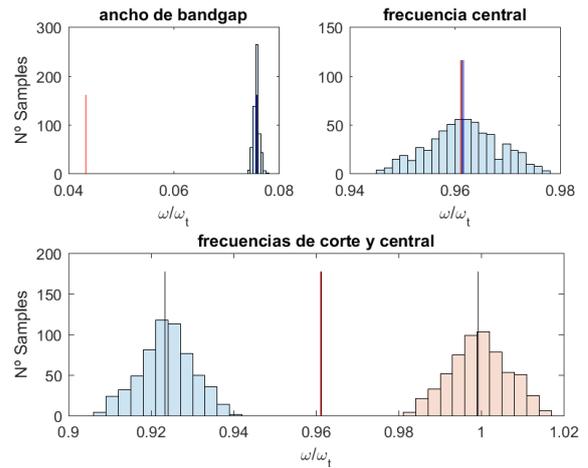


Intervalo de confianza con CV=0,05.

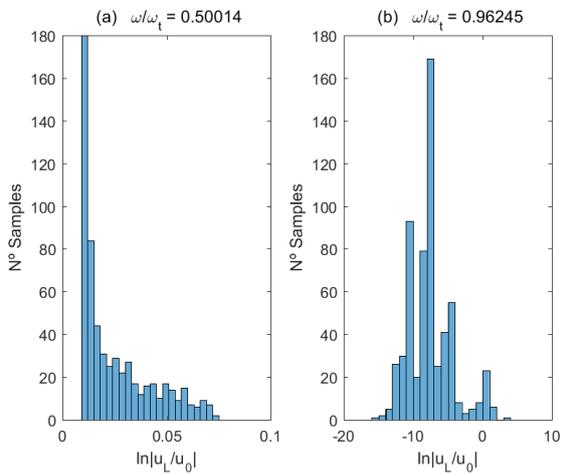
Figura 5.34: Respuesta del modelo estocástico para la variable aleatoria b , h_{pz} y h_s .



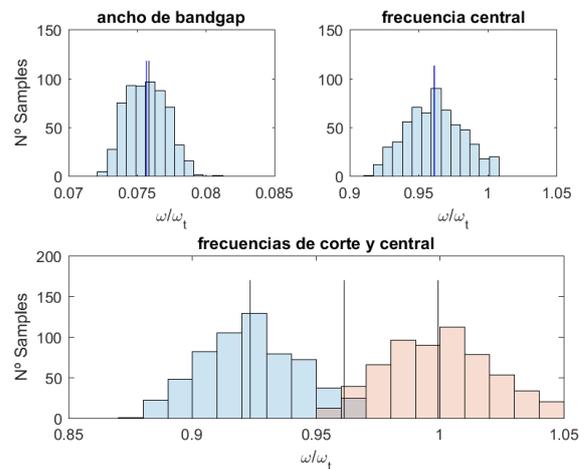
Histograma a frecuencia dada con CV=0,01.



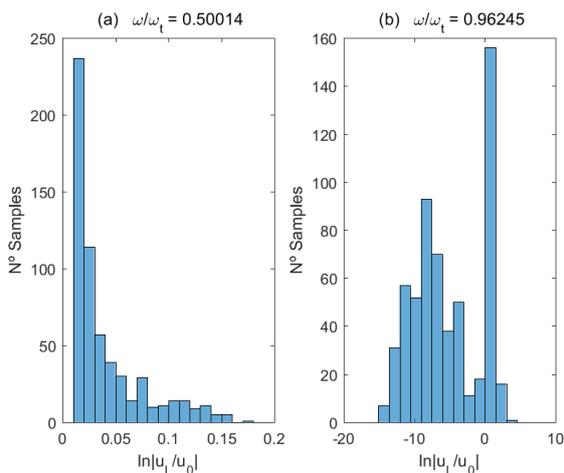
Histograma del bandgap con CV=0,01.



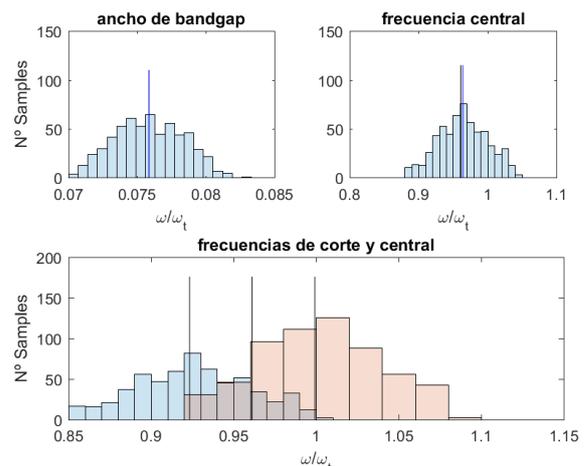
Histograma a frecuencia dada con CV=0,03.



Histograma del bandgap con CV=0,03.

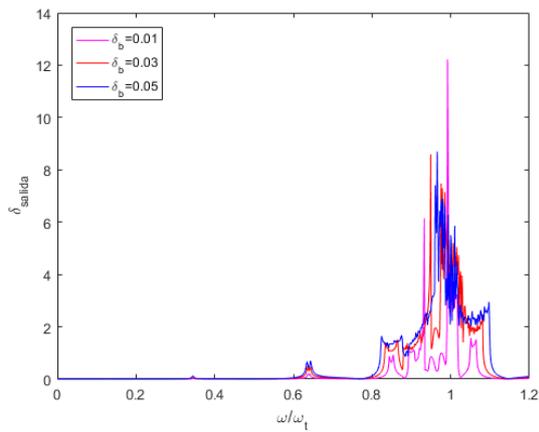


Histograma a frecuencia dada con CV=0,05.

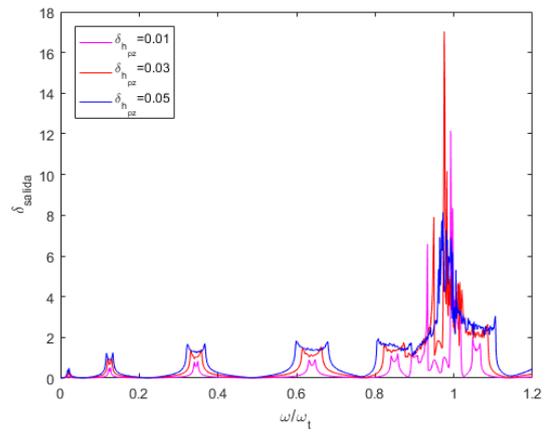


Histograma del bandgap con CV=0,05.

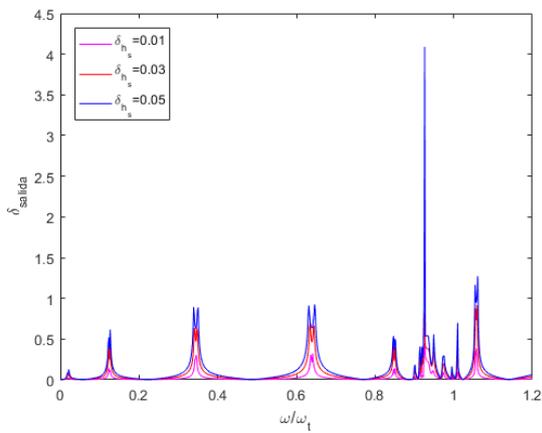
Figura 5.35: Histogramas de la respuesta para las variables aleatorias b , h_{pz} y h_s . En los histogramas del bandgap, la línea negra indica valor determinístico, línea azul valor medio y línea roja valor efectivo.



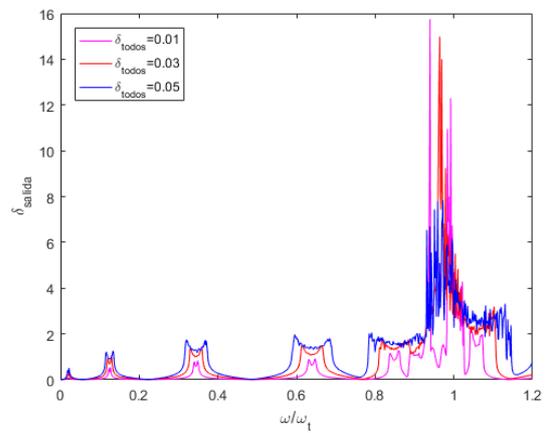
Dispersión de la respuesta para la VA b .



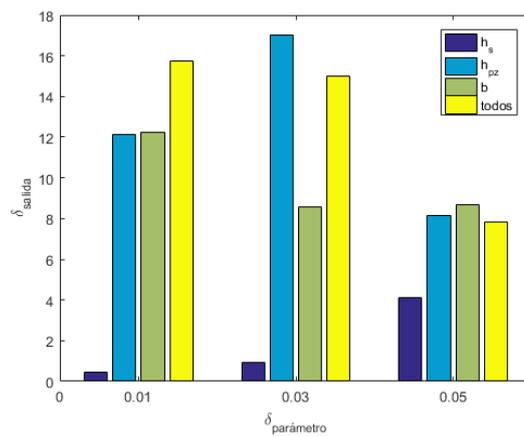
Dispersión de la respuesta para la VA h_{pz} .



Dispersión de la respuesta para la VA h_s .



Dispersión de la respuesta para todas las variables.



Dispersión máxima.

Figura 5.36: Sensibilidad del modelo frente a variaciones de b , h_{pz} y h_s .

5.4.4. Incertidumbre en los parámetros $\{L_k\}$

El siguiente estudio estadístico analiza la propagación de incertidumbre del valor de las inductancias asociadas a cada resonador hacia la respuesta dinámica del modelo. La metaestructura modelada se compone de 10 resonadores, los cuales generan 10 parámetros inductivos inciertos $\{L_1, L_2, \dots, L_{10}\}$, cuyos valores determinísticos coinciden en $L_k = 0,67Hy$. La misma se considera recta, de material piezoeléctrico PZT-5A y sustrato de aluminio, cuyas dimensiones son $l = 100mm$, $b = 10mm$, $h_{pz} = 1mm$, y $h_s = 0,5mm$, sintonizada a $f_t = 5968Hz$, sujeta a un movimiento de excitación desde la base del tipo $u_y(\omega) = 1e^{j\omega t} mm$.

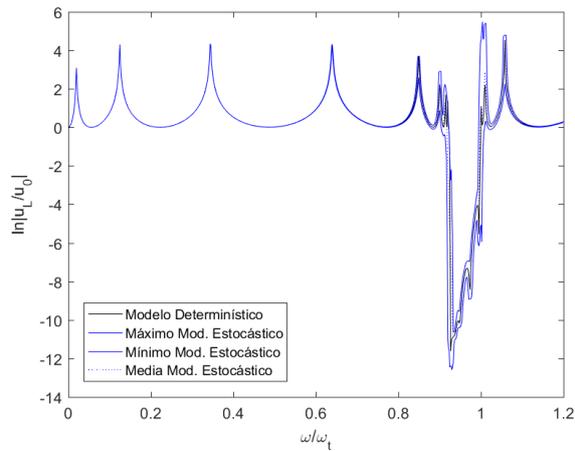
A continuación, se consideran todas las inductancias variando en conjunto, aumentando el coeficiente de variación con cada simulación, de igual manera que los estudios de incertidumbre anteriores. La Figura 5.37 muestra las gráficas de respuesta del modelo para los diferentes coeficientes de variación simulados, donde puede apreciarse como la incertidumbre de los parámetros se propaga únicamente a la zona de bandgap, incluidas las frecuencias naturales de frontera, aumentando la dispersión con el aumento de incertidumbre paramétrica. Se observa además, que el intervalo de confianza no acompaña completamente a la respuesta determinística, producto de la pérdida de sintonía de la metaestructura. En la Figura 5.38 se aprecian los histogramas de la respuesta dinámica a frecuencia dada, con una distribución de muestras de tipo campana acotada en ambas frecuencias, con una baja dispersión fuera de la zona de bandgap, pero importante dentro de esta zona, en concordancia con las gráficas de la Figura 5.37, dando un indicio de la sensibilidad de la respuesta a variaciones de L_k . En los histogramas propios del bandgap, puede observarse que el AB medio supera su valor determinístico para un $CV=0,01$. Esto se debe a que el valor de frecuencia de corte inferior está por debajo de su valor determinístico. Sin embargo, debido a la dispersión de ambas frecuencias de corte, el AB efectivo se reduce por debajo de su valor determinístico, indicando el deterioro del bandgap. La dispersión en la frecuencia superior indica alta sensibilidad de la sintonía a variaciones de L_k , tal como era previsible, debido a la importancia de este parámetro en la sintonía de la metaestructura. En la simulación para $CV=0,03$ se incrementan los efectos de la simulación anterior, debido a una mayor dispersión de las frecuencias de corte. En la simulación a máximo CV, un mínimo solapamiento de las frecuencias de corte provoca la degradación completa del bandgap.

La Figura 5.39 muestra la gráfica de dispersión de la respuesta para las diferentes simulaciones y sus valores máximos. En la misma se observa que la respuesta es sensible a variaciones de las inductancias pura y exclusivamente en la zona de bandgap, con una dispersión uniforme en toda esta zona.

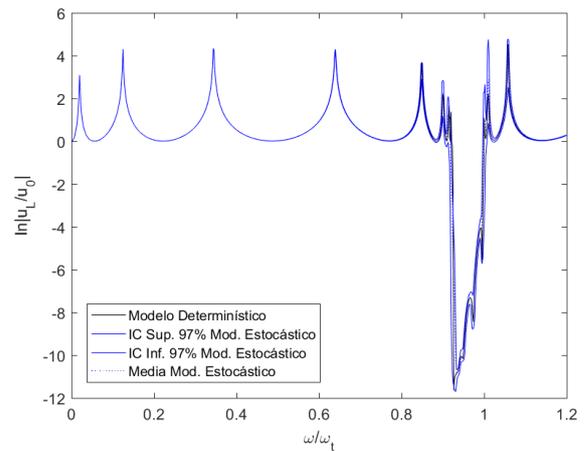
Finalmente, la Figura 5.40 muestra una gráfica de la respuesta dinámica por cada una de las simulaciones en contraste con la respuesta determinística, a modo de ejemplificar lo que ocurre con el bandgap en las distintas simulaciones. En las mismas puede observarse un leve aumento del AB producto del desplazamiento de las frecuencias de corte hacia ambos lados. Este aumento sin embargo, conlleva una reducción en la atenuación y una respuesta dinámica mas "sucia". Los efectos anteriores se deben a que las antiresonancias creadas por cada resonador ya no se encuentran ubicadas a la misma frecuencia. Dichos efectos aumentan con el aumento de incertidumbre en el parámetro, derivando finalmente en la pérdida de sintonía de la metaestructura y una degradación completa del bandgap.

Del presente estudio se pueden extraer las siguientes observaciones:

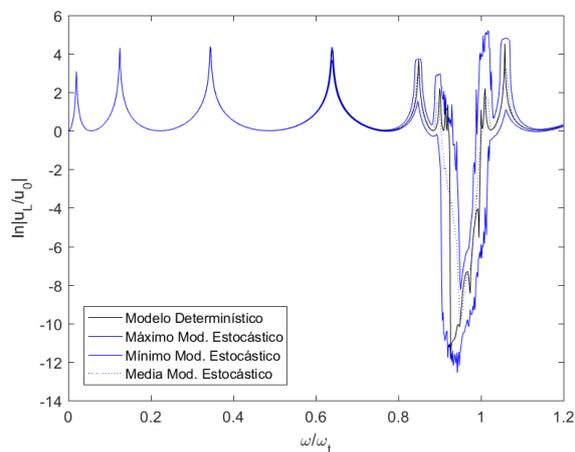
- La respuesta dinámica es sensible a variaciones del parámetro L_k unicamente en la zona del bandgap.
- La sintonía de la metaestructura es sensible a variaciones de los parámetros L_k .
- No se produce un desplazamiento significativo de la frecuencia central del bandgap.
- Se logra una degradación completa del bandgap con coeficiente de variación de 0,05 del parámetro.
- Si bien se reduce el AB efectivo, el valor medio del AB es superior al valor determinístico.



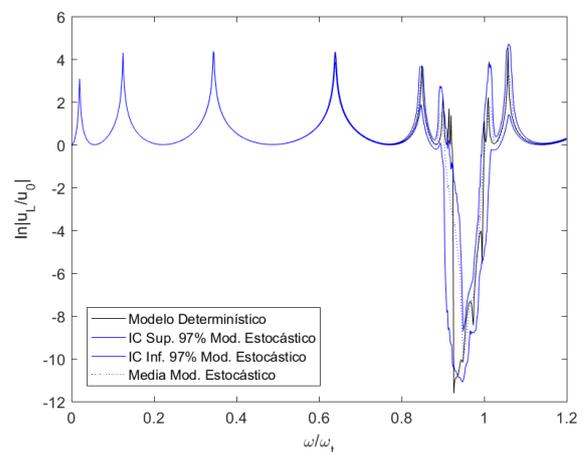
Máximo y mínimo con $CV=0,01$.



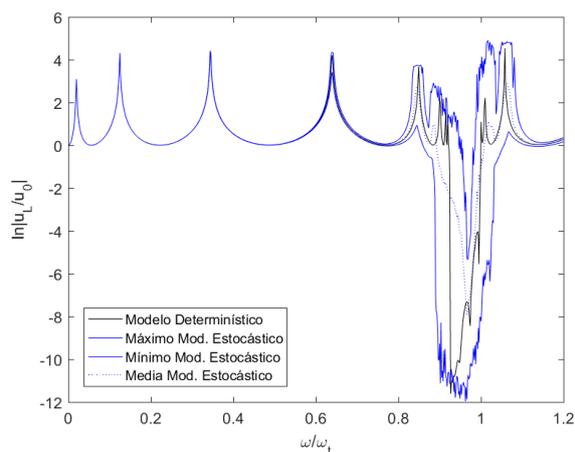
Intervalo de confianza con $CV=0,01$.



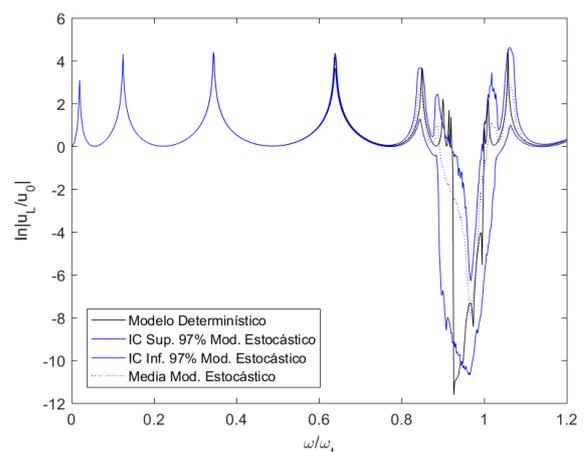
Máximo y mínimo con $CV=0,03$.



Intervalo de confianza con $CV=0,03$.

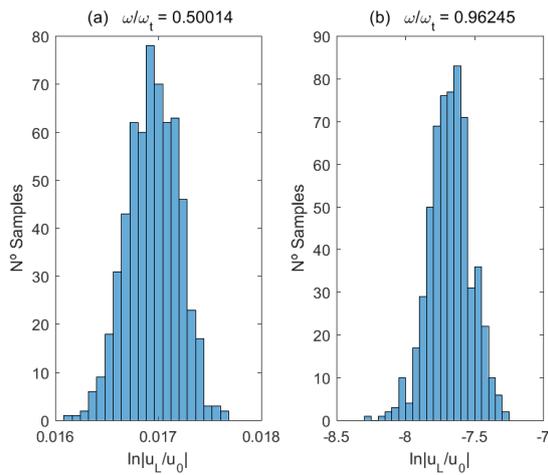


Máximo y mínimo con $CV=0,05$.

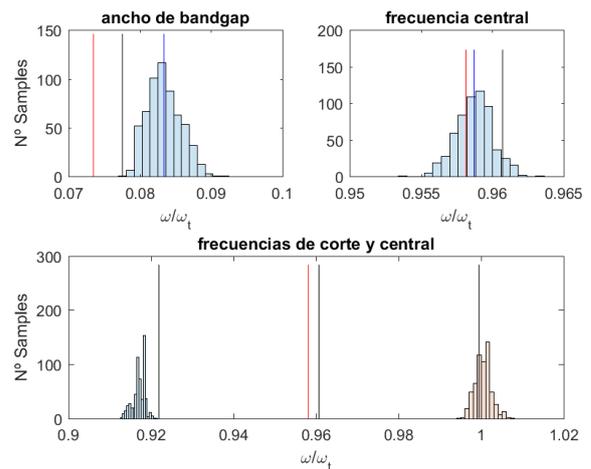


Intervalo de confianza con $CV=0,05$.

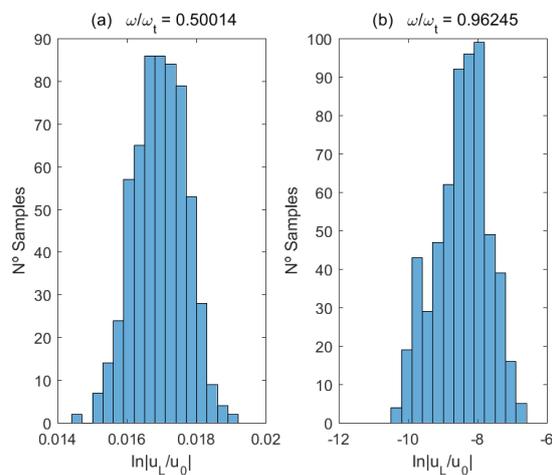
Figura 5.37: Respuesta del modelo estocástico para las variables aleatorias L_k .



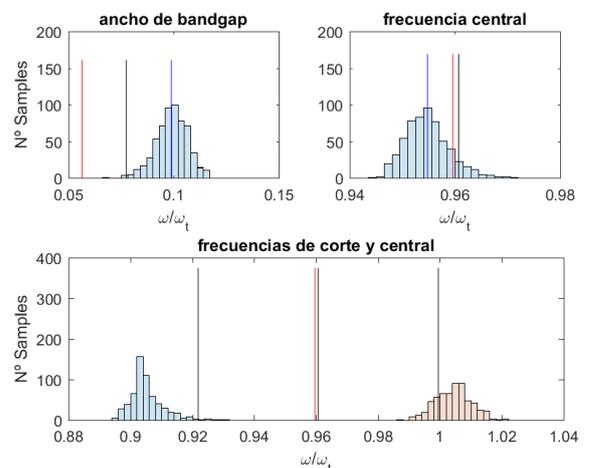
Histograma a frecuencia dada con CV=0,01.



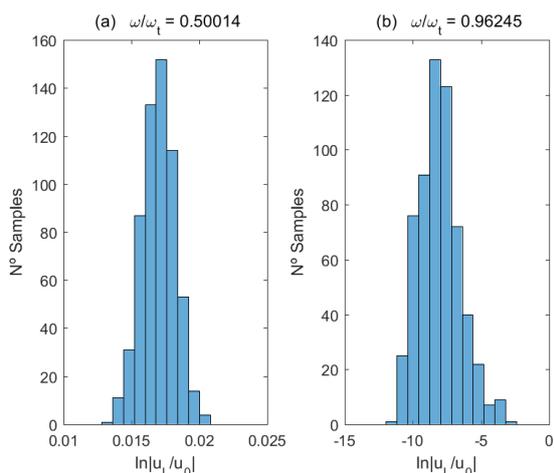
Histograma del bandgap con CV=0,01.



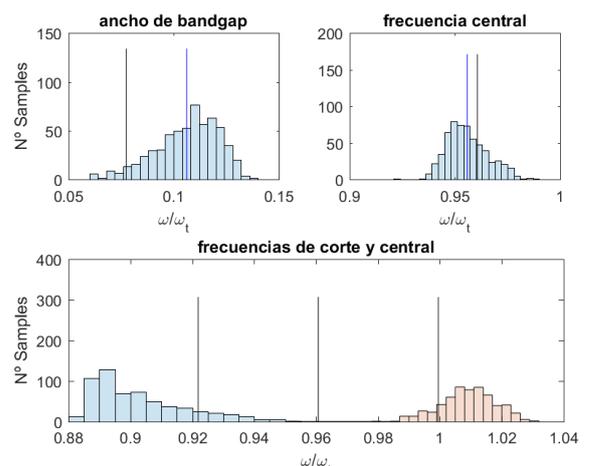
Histograma a frecuencia dada con CV=0,03.



Histograma del bandgap con CV=0,03.

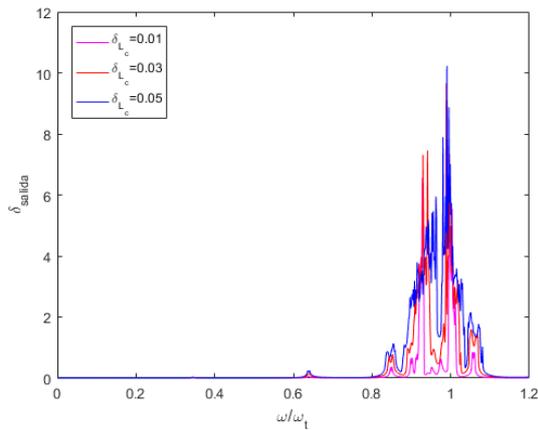


Histograma a frecuencia dada con CV=0,05.

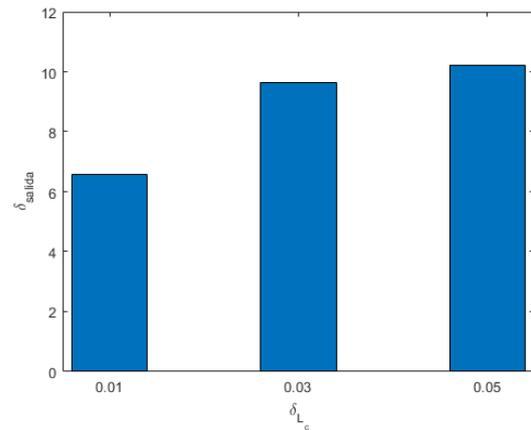


Histograma del bandgap con CV=0,05.

Figura 5.38: Histogramas de la respuesta para las variables aleatorias L_k . En los histogramas del bandgap, la línea negra indica valor determinístico, línea azul valor medio y línea roja valor efectivo.



Dispersión de la respuesta para las VA L_k .



Dispersión máxima.

Figura 5.39: Sensibilidad del modelo frente a variaciones de L_k .

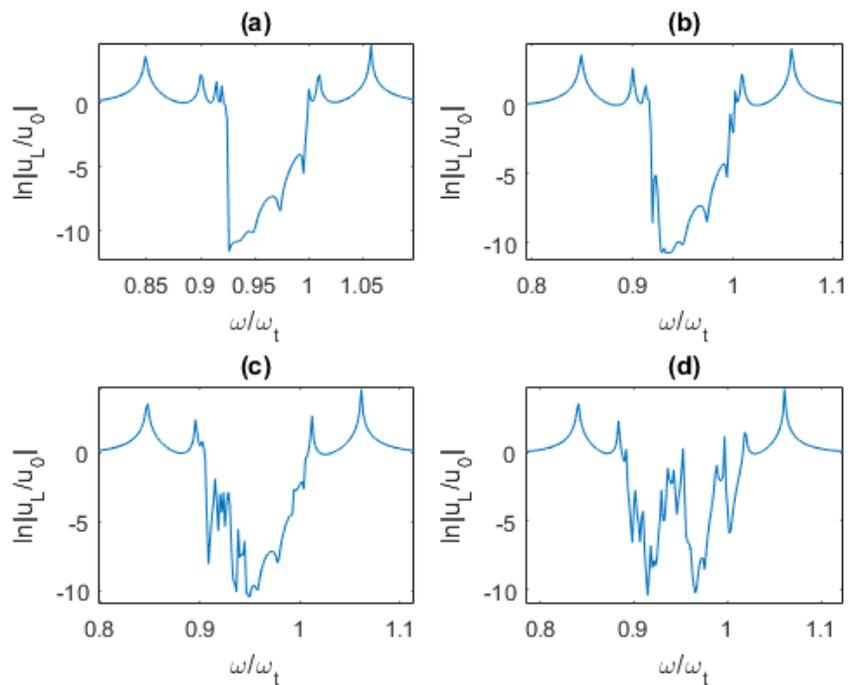


Figura 5.40: Comparación de la respuesta dinámica determinística con una simulación de Monte Carlo para distintos coeficientes de variación. (a) Respuesta determinística, (b) $CV=0,01$, (c) $CV=0,03$, (d) $CV=0,05$.

5.4.5. Convergencia de las simulaciones

La Figura 5.41 muestra la convergencia de las distintas simulaciones realizadas según la ecuación (4.10). En las gráficas puede observarse que la mayoría de las realizaciones tienen una convergencia estable luego de las 500 iteraciones.

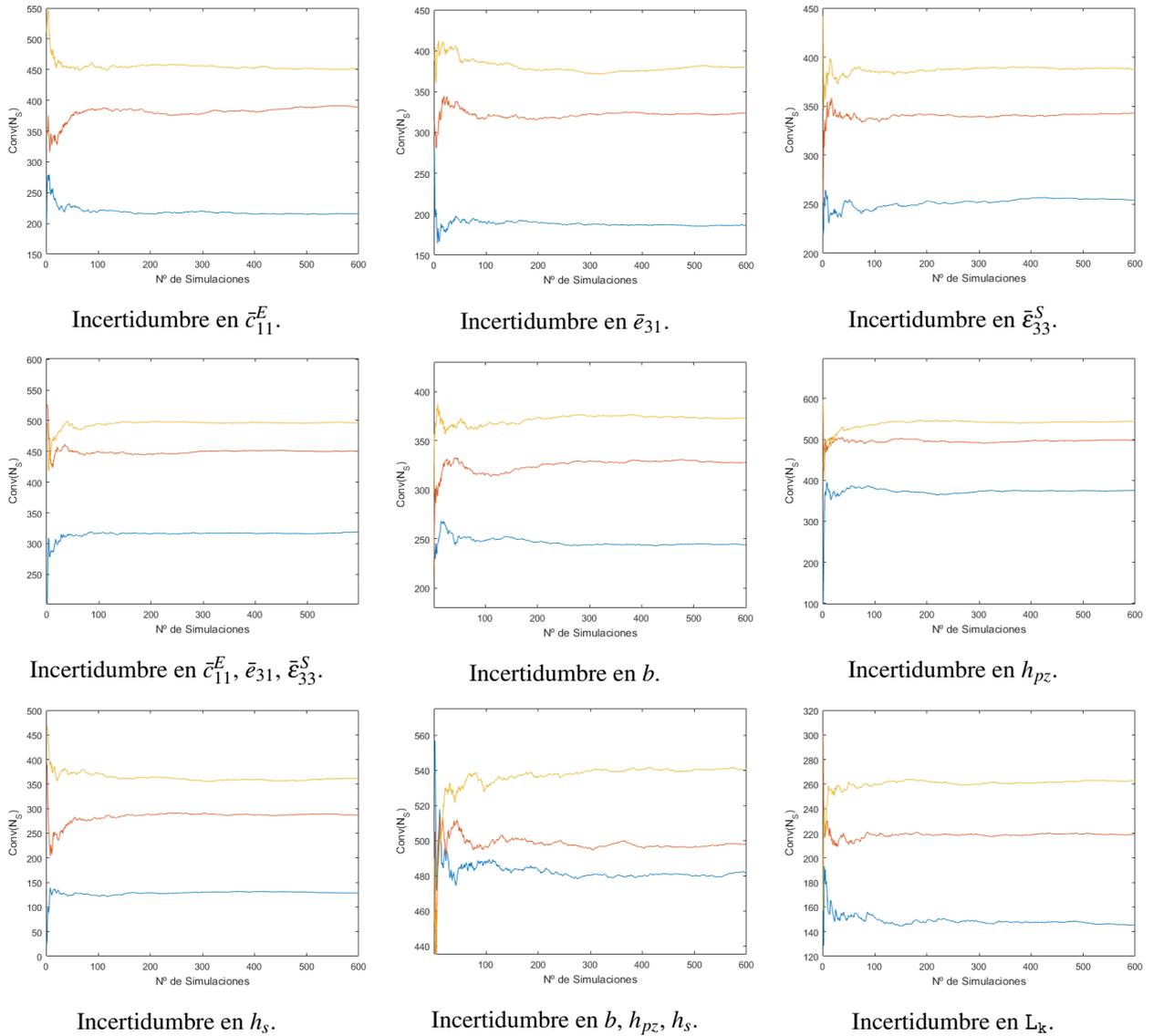


Figura 5.41: Convergencia de las distintas simulaciones. En azul CV=0,01 - rojo CV=0,03 - amarillo CV=0,05.

Capítulo 6

Optimización de Metaestructura

6.1. Introducción

En matemática, estadística, ciencias empíricas, ciencia de la computación, o economía, la optimización implica la selección del mejor elemento de un conjunto de elementos disponibles respecto de algún criterio. En los orígenes, Pierre de Fermat y Joseph Louis Lagrange encontraron fórmulas basadas en el cálculo para identificar valores óptimos, mientras que Isaac Newton y Carl Friedrich Gauss propusieron métodos iterativos para aproximar el óptimo. Aparece luego la programación lineal, campo de la optimización matemática dedicado a maximizar o minimizar una función lineal, denominada función objetivo, de tal forma que las variables de dicha función estén sujetas a una serie de restricciones expresadas mediante un sistema de ecuaciones o inecuaciones también lineales. Los fundadores de esta técnica son George Dantzig, quien publicó en 1947 el algoritmo Simplex (Dantzig, 1990) y John Von Neumann, que desarrolló la teoría de la dualidad en el mismo año (Von Neumann, 1963). Más tarde, en 1984, Narendra Karmarkar introduce un nuevo método del punto interior para resolver problemas de programación lineal (Karmarkar, 1984), lo que constituiría un enorme avance en los principios teóricos y prácticos de este área.

El presente capítulo está dedicado a la optimización de los parámetros constructivos de la metaestructura, en función de sus especificaciones previas, de manera que el bandgap generado

sea lo mas amplio posible y a su vez, que las inductancias asociadas a cada resonador sean lo mas pequeñas posibles, logrando así la reducción de sus bobinados. La optimización de estos parámetros se realiza mediante un algoritmo de punto interior que minimice una función objetivo $F(X)$ tal que:

$$\min_X F(X), \quad F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \quad (6.1)$$

sujeto a las restricciones:

$$\begin{aligned} h_i(X) &= 0, & h_i: \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R} \\ g_j(X) &\geq 0, & g_j: \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R} \end{aligned} \quad (6.2)$$

donde $X \in \mathbb{R}^n$ es el vector de parámetros a optimizar y h_i, g_j los sistemas de ecuaciones e inecuaciones de restricción respectivamente.

6.2. Método de punto interior

Los métodos de punto interior, también conocidos como métodos de barrera, son una clase de algoritmos iterativos que resuelven problemas lineales y no lineales optimización convexa. Estos algoritmos crean una sucesión de puntos sobre una curva en el interior de la región factible, a diferencia del método Simplex donde la sucesión de puntos generada pertenece a la frontera de la región factible, más precisamente sobre los vértices de ésta. La sucesión de puntos generada por los métodos de punto interior pueden no satisfacer todas las restricciones hasta que el método converge y ninguno de los puntos necesita ser un punto extremo. Esto permite cruzar la región factible en vez de moverse de un punto extremo a otro como en el método Simplex. Por este motivo, usualmente requiere muchas menos iteraciones que el método Simplex, pero cada iteración requiere más tiempo de cálculo. Los detalles y comparaciones entre ambos métodos pueden verse en los trabajos de Wright (1997); Martin (2012); Vanderbei (2020). Las implementaciones actuales de los métodos de punto interior compiten con los mejores códigos Simplex, siendo normalmente más rápidos en problemas muy grandes. Los métodos de punto interior se basan en el algoritmo original de Karmarkar y siguen los siguientes pasos básicos:

Paso 1 Se escoge un punto de prueba inicial X_0 en la región factible para el algoritmo iterativo.

Paso 2 Se realiza una transformación lineal de la región factible para que el punto de prueba actual X_i se encuentre alejado de la frontera.

Paso 3 Se escoge una dirección de movimiento desde el punto de prueba actual hacia otro punto de prueba dentro de la región factible que mejore el valor de la función objetivo.

Paso 4 Si cumple cierta condición de parada, normalmente $|F(X_i) - F(X_{i-1})| \leq \varepsilon$, el algoritmo se detiene, de lo contrario vuelve al paso 2.

6.3. Caso de optimización de parámetros

Se ha comprobado en las secciones anteriores la similitud entre las respuestas dinámicas de los modelos analítico y computacional, en cuanto al ancho y frecuencia central del bandgap. Se verificó además, que este ancho y posición no se ve afectado por las distintas curvaturas (Tipo A o Tipo B), sino que las mismas degradan la atenuación y contribuyen a la aparición de modos vibratorios fuera del alcance compensatorio de los resonadores. Si se tiene en cuenta entonces, la ubicación de estos modos generados por la curvatura, a fin de que los mismos no generen frecuencias naturales dentro de la zona de bandgap, resulta eficiente optimizar los parámetros geométricos e inductivos de la metaestructura mediante el modelo analítico de infinitos resonadores, y luego utilizar estos parámetros óptimos como punto de partida en una optimización paramétrica del modelo computacional.

Reemplazando por la expresión de α en la ecuación (2.46) se obtiene la siguiente ecuación de ancho de bandgap normalizado en función de los parámetros geométricos de la metaestructura:

$$AB = \frac{\Delta\omega}{\omega_t} = 1 - \left(1 + \frac{6\bar{\varepsilon}_{31}^2 h_p (h_s + h_p)^2}{\bar{\varepsilon}_{33}^S (c_s h_s^3 + 2\bar{c}_{11}^E h_p (4h_p^2 + 6h_p h_s + 3h_s^2))} \right)^{-1/2}. \quad (6.3)$$

Por otro lado, la sintonía de la metaestructura está dada por la Ec(2.40), implicando que el valor de la inductancia asociada disminuye con el aumento de la capacidad interna de los resonadores. La optimización del valor inductivo se basa entonces, en maximizar el valor de la capacidad interna del resonador, cuya expresión es:

$$C = 2\bar{\epsilon}_{33}^S \frac{bl}{N_b h_{pz}} \quad (6.4)$$

para luego obtener el valor óptimo de la inductancia como:

$$L = (\omega_l^2 C)^{-1}. \quad (6.5)$$

En las ecuaciones (6.3) y (6.4) se encuentran todos los parámetros que influyen al ancho de bandgap y/o el valor de las inductancias asociadas a los resonadores. Para definir que parámetros son libres en el diseño de la metaestructura, puede suponerse inicialmente que los compuestos $\{\bar{\epsilon}_{33}^S, \bar{\epsilon}_{31}, \bar{c}_{11}^E, c_s\}$ están definidos por especificación, así como también el largo l . El número de resonadores N_b inicialmente se toma elevado a fin de asegurar una correcta formación de bandgap. Toda la suposición anterior implica que la altura y el ancho de la capa piezoeléctrica y sustrato pueden no ser definidas por la aplicación, requiriendo se escogidos entre valores máximos y mínimos, de manera maximizar el bandgap y minimizar las inductancias. Teniendo en cuenta lo expresado hasta el momento, puede definirse el problema de optimización de la siguiente manera

- **Vector de parámetros libres:** Se define el vector considerando los parámetros de altura de la capa piezoeléctrica, altura de la capa sustrato y ancho de la base de las mismas:

$$X^T = \{h_{pz}, h_s, b\}. \quad (6.6)$$

- **Función objetivo:** Se construye la siguiente función objetivo considerando el valor de la inductancia y el ancho de bandgap:

$$F(X) = -\eta_1 AB - \eta_2 C \quad (6.7)$$

donde η_1 y η_2 son escalares de ponderación de cada uno de los términos, y el signo (-) de los términos permite maximizarlos.

- **Restricciones:** Se consideran las cotas inferior y superior de cada parámetro como restricciones del problema:

$$\begin{aligned} \min\{b\} &\leq b \leq \max\{b\} \\ \min\{h_s\} &\leq h_s \leq \max\{h_s\} \\ \min\{h_{pz}\} &\leq h_{pz} \leq \max\{h_{pz}\}. \end{aligned} \quad (6.8)$$

El problema de optimización planteado puede ser resuelto de manera muy efectiva mediante métodos de punto interior, utilizando el siguiente comando de Matlab:

$$fmincon(F(X), X0, A, B, Aeq, Beq, Lb, Ub, optimset('Algorithm', 'interior-point'))$$

donde X es el vector de parámetros libres, $X0$ el punto inicial, y $F(X)$ la función objetivo sujeta a las siguientes restricciones:

$$\begin{aligned} A.X &\leq B \\ Aeq.X &= Beq \\ Lb &\leq X \leq Ub. \end{aligned}$$

Como se mencionó anteriormente, el algoritmo de optimización se aplica inicialmente en el modelo analítico para obtener un set de valores cercanos al óptimo. Estos valores luego, se utilizan como iniciales en una segunda etapa, donde el algoritmo se aplica sobre el modelo computacional, y así obtener los parámetros óptimos del problema.

El siguiente es un ejemplo de optimización paramétrica para una metaestructura de material piezoeléctrico y sustrato de aluminio, de 100mm de longitud, seccionada en 25 resonadores, sintonizada a una frecuencia de 7kHz. Las cotas de la altura de las capas y el ancho de la estructura están referidas en porcentaje al largo de la misma, siendo del 1% y 10% para la altura mínima y máxima respectivamente, y del 10% y 50% para el ancho mínimo y máximo respectivamente. La optimización se realiza considerando las dos cerámicas piezoeléctricas más

utilizadas en la actualidad: PZT-5A y PZT-5H, a fin de determinar cual es la mejor alternativa. Las propiedades de ambas cerámicas se encuentran en la tabla a continuación:

	PZT-5A	PZT-5H
Constante de elasticidad longitudinal, \bar{c}_{11}^E [GPa]	61,0	60,6
Constante de elasticidad por corte, \bar{c}_{55}^E [GPa]	21,1	23,0
Densidad, ρ_{pz} [Kg/m ³]	7750	7500
Constante de permisividad, $\bar{\epsilon}_{33}^S$ [F/m]	$13,33e^{-9}$	$13,33e^{-9}$
Constante de acoplamiento, \bar{e}_{31} [C/m ²]	12,3	16,6

Tabla 6.1: Propiedades materiales de las cerámicas PZT-5A y PZT-5H.

El problema entonces, se define de la siguiente manera:

$$\min_X F(X) = -AB - C \times 10^8, \quad X^T = \{h_{pz}, h_s, b\} \quad (6.9)$$

donde η_1 y η_2 se escogen de manera de que ambos términos sean comparables, sujetos a las siguientes restricciones:

$$\{1mm, 1mm, 10mm\}^T \leq X^T \leq \{10mm, 10mm, 50mm\}^T. \quad (6.10)$$

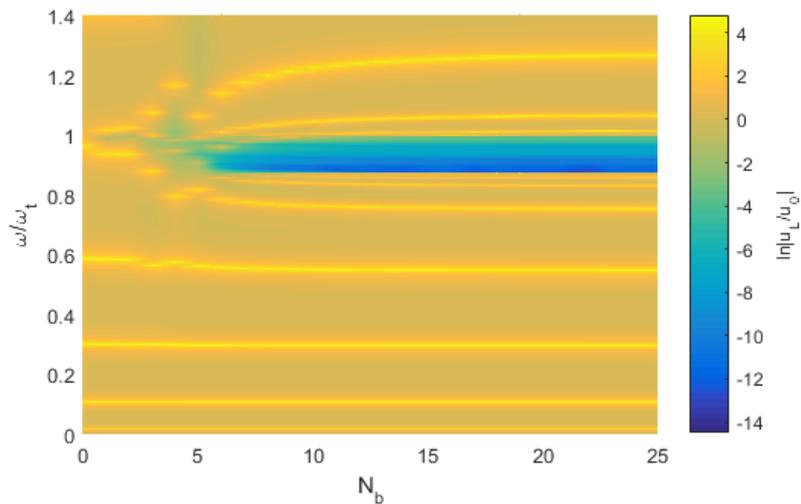
La Tabla 6.2 contiene los resultados de las dos etapas de cada optimización, donde puede apreciarse que los parámetros h_s y b mantienen su valor en la segunda etapa, mientras que h_{pz} aumenta un 20% en la segunda etapa para ambos materiales. Puede apreciarse también que el AB obtenido con PZT-5H es casi el doble del obtenido con PZT-5A, para valores inductivos muy similares, lo que vuelve al primero como la mejor opción en este caso. Es importante notar la diferencia entre los AB calculados con el modelo analítico y el computacional, siendo el segundo más preciso.

Una vez optimizada la metaestructura mediante el algoritmo descrito, puede reducirse la cantidad de resonadores N_b al mínimo valor que asegure la correcta formación de bandgap. Esto produce un aumento de la capacidad interna de cada resonador, disminuyendo el valor de la inductancia asociada. La Figura 6.1 muestra la respuesta de la metaestructura optimizada

Material	Etapa	$h_{pz}[mm]$	$h_s[mm]$	$base[mm]$	$AB[adim.]$	$C[nF]$	$L[mHy]$
PZT-5A	I	1	1,0009	50	0.0735	5.32	97.17
	II	1	1.1934	49.999	0.0829	5.3198	97.20
PZT-5H	I	1	1,0009	50	0.1237	5.32	97.17
	II	1	1.1961	49.906	0.1372	5.2978	97.57

Tabla 6.2: Valores optimizados para el ejemplo 1.

para diferente cantidad de bloques, donde puede apreciarse que con 10 bloques resonadores el bandgap ya se encuentra consolidado. Calculando nuevamente la inductancia para 10 bloques resonadores resulta en $L=39,031mHy$.

Figura 6.1: Propagación y frecuencias vs N_b utilizando PZT-5H.

Capítulo 7

Conclusiones

7.1. Sumario

En este trabajo de tesis se presentó el diseño de una nueva metaestructura piezoeléctrica curva de sustrato MGFP y un estudio dinámico de la misma mediante un modelo numérico computacional unidimensional previamente desarrollado, el cual permite predecir su dinámica de estado estacionario. El diseño de esta nueva metaestructura se basó en el trabajo de Sugino, y su modelo dinámico 1D se formuló mediante el Método de Elementos Finitos, utilizando la teoría de vigas de Timoshenko, y un sistema de coordenadas curvilíneo que permite representar la curvatura de radio constante propia de la estructura. Asimismo, fue considerada la teoría de elasticidad lineal en el desarrollo del modelo debido a que las pequeñas dimensiones de la estructura, sumado a las vibraciones de baja amplitud y alta frecuencia a las que es sometida (superiores a 5kHz), no requieren del modelado de las posibles no-linealidades que puedan estar presentes en su dinámica. Dentro de las hipótesis fue considerado el alabeo, con el fin de enriquecer su respuesta dinámica.

Una vez desarrollado el modelo, se comparó su respuesta dinámica con estructuras de diferentes autores. Inicialmente considerando solo la capa sustrato MGFP recta en comparación con el trabajo de Fazzolari *et al.* (2017); luego considerando la estructura bimorfo sin segmentar respecto del modelo analítico propuesto por Erturk e Inman (2011) y el modelo de elementos

finitos propuesto por Surabhi (2014); en tercer lugar considerando la estructura curvada y segmentada, excluyendo los resonadores, en comparación con el modelo de elementos finitos 3D realizado en Comsol; y por último, comparando la respuesta dinámica respecto del modelo analítico de infinitos resonadores presentado por Sugino *et al.* (2017). En todos los casos anteriores, el modelo dinámico desarrollado en esta tesis se mostró preciso, y muy superior en velocidad, comparado con la realización 3D en Comsol.

El estudio dinámico de la metaestructura se realizó inicialmente de forma determinística, a fin de comprender la influencia en la respuesta dinámica de los parámetros: frecuencia de sintonía f_t , cantidad de resonadores N_b , resistencia de carga R_k , radio de curvatura R , altura de la capa piezoeléctrica h_{pz} y altura de la capa sustrato h_s . Las conclusiones del estudio para cada parámetro fueron las siguientes:

- $\{f_t\}$ Este parámetro resulta en uno de los más importantes de la estructura debido a que el mismo permite ubicar, mediante una correcta sintonía, la zona de bandgap en el lugar del espectro que la aplicación requiera.
- $\{N_b\}$ El número de bloques resonadores debe superar un valor mínimo para la correcta formación del bandgap. Sin embargo, este valor mínimo no debe superarse de manera excesiva, ya que por cada nuevo resonador debe incluirse una nueva inductancia asociada.
- $\{R_k\}$ La resistencia de carga permite controlar la amortiguación del resonador mediante la disipación de energía electromecánica en forma de calor. Este parámetro permite suavizar los picos de resonancia en las fronteras del bandgap, pero con el costo adicional de una disminución en la atenuación vibratoria.
- $\{R\}$ Este parámetro permite controlar la curvatura de la estructura. El estudio dinámico puso de manifiesto que tanto la curvatura Tipo A como la Tipo B, no modifican la ubicación del bandgap en el espectro ni su AB, pero sí degradan su atenuación y contribuyen a la presencia de modos de vibración que la estructura no es capaz de atenuar. Por esta razón, es de suma importancia considerar la curvatura en el modelo, cuando la misma está presente en la implementación.

- $\{h_{pz}\}$ La altura del piezoeléctrico controla la capacidad eléctrica interna de los bloques resonadores, aumentando la misma con el descenso de dicha altura. Considerando que un aumento de la capacidad implica un descenso en el valor de las inductancias asociadas, es conveniente mantener la altura de los piezoeléctricos en valores bajos.
- $\{h_s\}$ Los estudios muestran que la altura del sustrato portante no influye de manera vital en el desempeño dinámico de la estructura, siempre que la misma sea del orden de la altura de la capa piezoeléctrica.

La segunda parte del estudio dinámico constó de tres estudios independientes basados en un enfoque probabilístico paramétrico, a fin de evaluar la propagación de incertidumbre hacia la respuesta dinámica de la metaestructura. El primer estudio involucró el parámetros elasticidad longitudinal del piezoeléctrico \bar{c}_{11}^E , la constante de acoplamiento \bar{e}_{31} , y la constante de permisividad eléctrica $\bar{\epsilon}_{33}^S$, donde se observó que \bar{c}_{11}^E no produce efectos significativos en la zona de bandgap, mientras que la incertidumbre en \bar{e}_{31} y $\bar{\epsilon}_{33}^S$ se propaga de manera exclusiva hacia la zona de bandgap, siendo la respuesta del modelo mas sensible al segundo parámetro, logrando una degradación completa del bandgap cuando el coeficiente de variación del mismo es de 0,05. En el segundo estudio se consideraron inciertos los parámetros de altura de la capa piezoeléctrica h_{pz} , altura de la capa sustrato h_s , y ancho de la metaestructura b , donde los resultados indicaron una baja sensibilidad de la respuesta en la zona del bandgap para h_s , tal como se observó inicialmente durante el análisis determinístico, contrariamente a lo que ocurre con los parámetros h_{pz} y b , los cuales afectan considerablemente la zona de bandgap en tamaño y sintonía, con una degradación completa del bandgap cuando los parámetros varían con un coeficiente de variación de 0,05 de manera independiente, y con un coeficiente de variación de 0,03 cuando lo hacen en simultáneo. Finalmente se consideraron inciertos los valores de cada una de las inductancias de los resonadores mediante el parámetro L_k . Los resultados del estudio mostraron una gran sensibilidad de la respuesta a variaciones en los valores de la inductancias en la zona de bandgap, incluyendo una alta pérdida de sintonía, como era de esperarse teniendo en cuenta el rol de las inductancias en la metaestructura.

El trabajo de tesis concluyó con un estudio de optimización paramétrica de la metaestructura

considerando una posible implementación. Tanto en la validación del modelo numérico, como en algunos de los estudios paramétricos determinísticos, pudo observarse la similitud de la respuesta dinámica del modelo desarrollado en este trabajo con el modelo analítico de Sugino. Esto derivó en la conveniencia de utilizar el modelo analítico para llevar a cabo la optimización, debido al bajo costo computacional que esto produce. Cabe destacar que no existe un dispositivo óptimo de por sí, sino que éste debe ser optimizado en función al entorno o aplicación para la cual es diseñado.

7.2. Contribuciones de la tesis

El desarrollo del modelo numérico dinámico unidimensional de la metaestructura con sus dos posibles curvaturas representa el aporte más significativo en el contexto de esta tesis. Este modelo permite predecir los desplazamientos de la misma en estado estacionario en las tres dimensiones espaciales con buena precisión y un muy bajo costo computacional. Cabe destacar que el modelo involucra física mecánica y electrostática, las cuales necesariamente interactúan en simultáneo. Esto resulta en el primer inconveniente a resolver al momento de simular la dinámica de la metaestructura con programas de simulación comerciales. El segundo inconveniente que posee la estructura en cuestión a la hora de utilizar este tipo de programas, es la anisotropía del material piezoeléctrico, por lo que el programa debe contar con la posibilidad de utilizar coordenadas curvilíneas para la correcta representación del mismo. Lo expuesto anteriormente, sumado a las pequeñas dimensiones que la metaestructura posee, hacen que resulte compleja y costosa su simulación mediante programas de elementos finitos comerciales.

7.3. Trabajos a futuro

Como continuación del trabajo expuesto en esta tesis, se encuentra la posibilidad de extensión del modelo dinámico a metaestructuras curvas de radio variable. Este trabajo fue realizado durante el transcurso del doctorado para una estructura de MGFP. El mismo se encuentra en el Anexo E. Este nuevo atributo al diseño lograría extender las capacidades de la metaestructura,

manteniendo su simpleza computacional.

Una segunda posibilidad a ser realizada en un futuro cercano es el reemplazo de las inducciones eléctricas por un sistema basado en Procesamiento Digital de Señales (PDS), en el cual puedan programarse diferentes estrategias de control activo de los piezoeléctricos, a modo de explorar las capacidades de esta estructura. Cabe aclarar que la utilización de un dispositivo PDS alejaría a la estructura del concepto de metaestructura, que son elementos exclusivamente pasivos, pero le aportaría nuevos grados de libertad que la convertirían en un dispositivo electromecánico de propiedades muy interesantes para el ámbito de los sistemas de control y la robótica.

7.4. Publicaciones realizadas

Artículos en congresos:

- Di Giorgio LE, Piovan MT (2018), *Dynamics of Porous Functionally Graded Curved Beams with Uncertain Parameters*. WCCM XIII & PANACM II.
- Di Giorgio LE, Piovan MT (2018), *Parametric Probabilistic Approach in the Dynamics of Porous FGM Beams*. *Mecánica Computacional* 36, 673-682.
- Di Giorgio LE, Piovan MT (2019), *Aspectos de Incertidumbre en la Dinámica de Metaestructuras Piezoeléctricas Curvas*. *Mecánica Computacional* 36, 629-637.
- Di Giorgio, LE, Piovan, MT (2020). *Modelo Dinámico Computacional de Metaestructura Piezoeléctrica Curva*. *AJEA*, (5). <https://doi.org/10.33414/ajea.5.713.2020>
- Di Giorgio LE, Piovan MT (2021), *Stochastic Aspects in Dynamics of Curved Electromechanic Metastructures*. *Proceedings of the 5th International Symposium on Uncertainty Quantification and Stochastic Modelling. Uncertainties 2020. Lecture Notes in Mechanical Engineering*. Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-030-53669-5_9

Artículos en revistas:

- Di Giorgio LE, Piovan MT (2021), *Dynamic reduced model and stochastic aspects for PFGM curved beams with variable curvature*. Mechanics Research Communications (Próximo a aparecer).

Apéndice A

Ley de Difracción de Bragg

La ley de Bragg, formulada por los físicos británicos William Henry Bragg y su hijo William Lawrence Bragg en 1913, permite estudiar las direcciones en las que la difracción de rayos X sobre la superficie de un cristal produce interferencias constructivas, dado que permite predecir los ángulos en los que los rayos X son difractados por un material con estructura atómica periódica (materiales cristalinos).

Cuando los rayos X alcanzan un átomo interactúan con sus electrones exteriores. Estos reemiten la radiación electromagnética incidente en diferentes direcciones y con la misma frecuencia (en realidad debido a varios efectos hay pequeños cambios en su frecuencia). Este fenómeno se conoce como dispersión de Rayleigh (o dispersión elástica). Los rayos X reemitidos desde átomos cercanos interfieren entre sí de manera constructiva o destructiva, constituyendo así el fenómeno de la difracción (ver Figura A.1). La interferencia es constructiva cuando la diferencia de fase entre la radiación emitida por diferentes átomos es proporcional a 2π . Esta condición se expresa en la ley de Bragg:

$$n\lambda = 2d.\text{sen}(\theta) \quad (\text{A.1})$$

donde n es un número entero, λ la longitud de onda de los rayos X, d la distancia entre los planos de la red cristalina, y θ el ángulo entre los rayos incidentes y los planos de dispersión. Esta ley confirma la existencia de partículas reales en la escala atómica, proporcionando una

técnica muy poderosa de exploración de la materia, la difracción de rayos X.

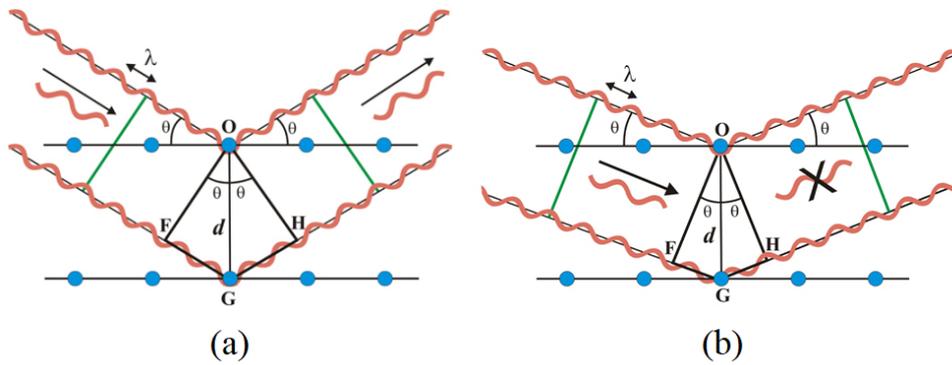


Figura A.1: Esquema de interferencias: (a) Constructiva, (b) Destructiva.

Apéndice B

Teorema de Bloch

El teorema de Bloch (1929) describe el movimiento de los electrones en un sólido. Fue enunciado por el físico suizo Felix Bloch basándose en la idea de que un sólido posee una estructura microscópica periódica. A partir de esta hipótesis, el teorema establece de qué manera deben ser las funciones de onda de los electrones, y permite tratar el movimiento de todos los electrones analizando únicamente el movimiento de un solo electrón.

Hipótesis:

- Los átomos del cristal forman una estructura periódica y ocupan las posiciones de una red de Bravais denotadas por el vector \mathbf{r} .
- Debido al ordenamiento de los átomos, el potencial del cristal es una función periódica que cumple $U(\mathbf{r} + \mathbf{R}) = U(\mathbf{r})$ para todo vector de traslación \mathbf{R} de la red.
- Los electrones son independientes, no interactúan entre sí y cada uno satisface la ecuación de Schrödinger para un potencial periódico.

Partiendo de estas bases, el teorema de Bloch establece que los autoestados ψ de un electrón vienen dados por el producto de una onda plana y una función periódica en \mathbf{R} llamada función de Bloch, es decir:

$$\psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} u_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) \quad (\text{B.1})$$

(Autoestado del electrón) = (onda plana) x (función de Bloch)

donde \mathbf{k} representa el vector de onda y $u_{\mathbf{k}}(\mathbf{r})$ la función de Bloch, la cual puede ser una función periódica cualquiera, cuya periodicidad \mathbf{R} es la misma que la periodicidad de la red cristalina. La función de Bloch se obtiene mediante la resolución de la ecuación de Schrödinger, sin embargo, no es necesario saber la forma analítica de esta función para abordar el tratamiento de un sólido. Es más, haciendo uso de su periodicidad se tiene que $u_{\mathbf{k}}(\mathbf{r} + \mathbf{R}) = u_{\mathbf{k}}(\mathbf{r})$, de modo que la ecuación anterior se puede reescribir como:

$$\psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r} + \mathbf{R}) = e^{i\mathbf{k}\mathbf{R}} \psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}). \quad (\text{B.2})$$

Nótese que como la forma analítica de la función periódica que multiplica a la onda plana es desconocida y además irrelevante, la misma podría ser $u_{\mathbf{k}}(\mathbf{r})$ en lugar de $\psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r})$. Así pues, en la anterior ecuación sigue cumpliéndose que:

(Autoestado del electrón) = (onda plana) x (función de Bloch).

Estas dos ecuaciones son por tanto equivalentes, y son usadas indistintamente para referirse al teorema de Bloch. El teorema de Bloch es de gran utilidad porque permite simplificar enormemente el tratamiento de un sólido, ya que la tercera hipótesis implica que todos los electrones se comportan igual. De manera que, para tratar el movimiento de todos los electrones del sólido, basta con resolver la ecuación de Schrödinger para un único electrón que tenga una función de ondas de la forma indicada por Bloch.

Apéndice C

Método del Lugar de las Raíces

C.1. Concepto

Se denomina *lugar de las raíces* al lugar geométrico de los polos (o raíces) de la función transferencia de un sistema de lazo cerrado al variar su ganancia desde cero hasta infinito. El método consiste en determinar este lugar a través de ciertos criterios, partiendo de la ubicación de los polos y ceros de las funciones de transferencia a lazo abierto (Gaviño, 2010; Evans, 2004). Para el sistema de la Figura C.1, la función de transferencia de lazo cerrado se expresa como:

$$M(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + k G(s) F(s)} \quad (\text{C.1})$$

donde $G(s)$ y $F(s)$ son funciones de transferencia, y k la ganancia del lazo. Se define función de sistema (o función de lazo abierto) a la siguiente expresión:

$$G(s)F(s) = \frac{\prod(s - z_j)}{\prod(s - p_i)} \quad \begin{array}{l} i = 1, \dots, n \\ j = 1, \dots, m \end{array} \quad (\text{C.2})$$

donde $\{z_i, p_j\}$ corresponden a los ceros y polos de la misma, respectivamente. Los polos de $M(s)$ son las raíces del polinomio denominador, es decir:

$$1 + k G(s) F(s) = 0 \tag{C.3}$$

por lo que debe cumplirse:

$$k G(s) F(s) = -1. \tag{C.4}$$

A continuación se detalla una serie de reglas y criterios basados en la ecuación (C.4), que permiten determinar en que regiones del plano complejo pueden ubicarse las raíces de $M(s)$ cuando varía el parámetro de ganancia k .

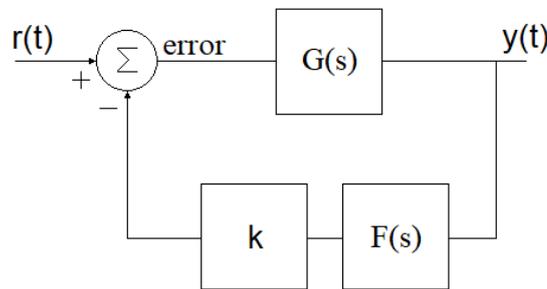


Figura C.1: Esquema de un sistema de lazo cerrado.

C.2. Criterio del módulo

Este criterio establece la distancia de las raíces de $M(s)$ al origen en función del valor k . Teniendo en cuenta el módulo de la ecuación (C.4) se obtiene que:

$$|k G(s) F(s)| = 1 \tag{C.5}$$

lo que implica que para valores positivos de ganancia ($k \geq 0$) y considerando la ecuación (C.2):

$$k \frac{\prod |s - z_j|}{\prod |s - p_i|} = 1 \tag{C.6}$$

estableciendo el criterio del módulo de la siguiente manera:

$$\frac{\prod |s - p_i|}{\prod |s - z_j|} = k. \quad (\text{C.7})$$

C.3. Criterio de la fase

Al igual que el módulo, el criterio de la fase establece una relación entre las fases de las raíces de $M(s)$ basándose las fase de la ecuación (C.4) como sigue:

$$\arg(k G(s) F(s)) = (2q + 1)\pi, \quad \{q \in \mathbb{Z}\} \quad (\text{C.8})$$

lo que implica que para valores positivos de ganancia ($k \geq 0$) y considerando la ecuación (C.2):

$$\arg\left(\frac{\prod(s - z_j)}{\prod(s - p_i)}\right) = (2q + 1)\pi, \quad \{q \in \mathbb{Z}\} \quad (\text{C.9})$$

estableciendo el criterio de la fase de la siguiente manera:

$$\sum_i \arg(s - z_j) - \sum_i \arg(s - p_i) = (2q + 1)\pi, \quad \{q \in \mathbb{Z}\}. \quad (\text{C.10})$$

C.4. Reglas de Evans

Las reglas de Evans se basan en el desarrollo de Evans (1954), y permiten graficar el lugar de las raíces para ($k \geq 0$) empleando como dato los polos y los ceros de la función de lazo abierto, sin necesidad de resolver la ecuación característica para cada uno de los valores de k . Las reglas son las siguientes:

1. *Número de ramas:* El número n de ramas del lugar de raíces es igual al orden de la ecuación característica de la función de transferencia a lazo cerrado. Para sistemas racionales, esto equivale al orden de la ecuación característica de la función de transferencia a lazo abierto, es decir, el denominador de la función de transferencia a lazo abierto.

2. *Simetría:* Dado que la ecuación característica es de coeficientes reales, las raíces complejas deben ser complejas conjugadas. Por tanto, el lugar de raíces es simétrico respecto al eje real.
3. *Polos de lazo abierto:* Los polos de la función de transferencia a lazo abierto pertenecen al lugar de raíces y corresponden a $k = 0$.
4. *Ceros de lazo abierto:* Los ceros de la función de transferencia a lazo abierto pertenecen al lugar de raíces y corresponden a $k = \infty$. Si hay más polos que ceros, entonces habrá $n - m$ ceros en el infinito. Por cada cero en el infinito, el lugar de las raíces tendrá una asíntota.
5. *Asíntotas:* Si la función de transferencia de lazo cerrado tiene $n - m$ polos más que ceros, entonces el lugar de raíces tiene $n - m$ asíntotas equiespaciadas. La dirección de cada asíntota viene dada por:

$$\gamma_k = \frac{\pi(2k + 1)}{n - m}, \quad \{k = 0, 1, \dots, n - m - 1\}. \quad (\text{C.11})$$

6. *Centroide de las asíntotas:* Es el punto del eje real donde las asíntotas se intersectan, se calcula mediante:

$$\sigma_0 = \frac{\sum p_i - \sum z_j}{n - m}. \quad (\text{C.12})$$

7. *Criterio del módulo:* Las raíces deben cumplir con la ecuación (C.7).
8. *Criterio de la fase:* Las raíces deben cumplir con la ecuación (C.10).

Apéndice D

Movimiento de Excitación Desde la Base

El movimiento de excitación desde la base es un método muy utilizado para analizar dinámica de estructuras debido que utiliza una entrada estable de energía y se encuentra muy cerca de la condición real de restricción, es decir, que las predicciones analíticas se encuentran cercanas a los datos experimentales en el laboratorio (Rao, 2004; Sun *et al.*, 2013). Para el caso particular del estudio de propagación de ondas mecánicas en una estructura tipo viga, éste método resulta de vital importancia, ya que la condición real de restricción no altera en absoluto dicha propagación. El método consiste en considerar la estructura empotrada a una base o soporte en movimiento periódico constante. El siguiente desarrollo analítico se basa en las ecuación dinámica de vibración transversal de una viga esbelta a fin de simplificar su desarrollo, y puede extenderse a otro tipo de dinámica con total facilidad.

El desplazamiento total de un punto de una viga empotrada de la Figura D.1 se expresa como:

$$v(x,t) = y(t) + w(x,t) \quad (D.1)$$

donde $y(t)$ corresponde al desplazamiento de la base y $w(x,t)$ al desplazamiento de la viga respecto de la base. La ecuación de vibración transversal de una viga Bernoulli-Euler sin considerar las pérdidas por fricción ni fuerzas exteriores aplicadas es:

$$EI \frac{\partial^4 v(x,t)}{\partial x^4} + m \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial t^2} = 0. \quad (D.2)$$

Reemplazando la ecuación D.1 en la ecuación D.2 y despejando hacia la derecha los términos sin $w(x,t)$:

$$EI \frac{\partial^4 w(x,t)}{\partial x^4} + m \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} = -m \frac{\partial^2 y(t)}{\partial t^2} \quad (D.3)$$

donde el lado derecho de la ecuación actúa de la misma manera que una fuerza distribuida a lo largo de la viga, en la dirección de y . Esto permite reformular el problema de movimiento de excitación desde la base como una viga empotrada con una fuerza distribuida aplicada, como sigue:

$$EI \frac{\partial^4 w(x,t)}{\partial x^4} + m \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} = f(t) \quad \text{siendo} \quad f(t) = -m \frac{\partial^2 y(t)}{\partial t^2}. \quad (D.4)$$

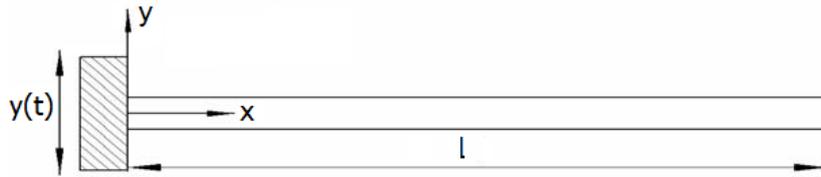


Figura D.1: Viga cantilever bajo movimiento de excitación desde la base.

El razonamiento anterior puede aplicarse a un continuo que ha sido discretizado en elementos finitos de la siguiente manera: considerando una estructura del tipo viga 1D, discretizada en un solo elemento de 3 nodos, donde cada nodo posee 3 grados de libertad $\{u_{xj}, u_{yj}, u_{zj}\}$, los vectores de variables cinemáticas y fuerzas nodales de la estructura se expresan:

$$\bar{\mathbf{U}}^T = \{u_{x1}, u_{y1}, u_{z1}, u_{x2}, u_{y2}, u_{z2}, u_{x3}, u_{y3}, u_{z3}\} \quad (D.5)$$

$$\bar{\mathbf{F}}^T = \{f_{x1}, f_{y1}, f_{z1}, f_{x2}, f_{y2}, f_{z2}, f_{x3}, f_{y3}, f_{z3}\}. \quad (D.6)$$

Asumiendo una respuesta armónica para $\bar{\mathbf{U}} = \hat{\mathbf{U}} e^{j\omega t}$ y $\bar{\mathbf{F}} = \hat{\mathbf{F}} e^{j\omega t}$, la ecuación dinámica de estado estacionario de la estructura se representa mediante la siguiente ecuación matricial:

$$\mathbf{A}\hat{\mathbf{U}} = \hat{\mathbf{F}}. \quad (\text{D.7})$$

Tomando al nodo 1 como nodo perteneciente a la base, requiriendo que ésta oscile armónicamente con una amplitud v en la dirección de y , debido a una fuerza aplicada en este nodo, la ecuación (D.7) queda:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} & a_{17} & a_{18} & a_{19} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & a_{26} & a_{27} & a_{28} & a_{29} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} & a_{36} & a_{37} & a_{38} & a_{39} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} & a_{46} & a_{47} & a_{48} & a_{49} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} & a_{56} & a_{57} & a_{58} & a_{59} \\ a_{61} & a_{62} & a_{63} & a_{64} & a_{65} & a_{66} & a_{67} & a_{68} & a_{69} \\ a_{71} & a_{72} & a_{73} & a_{74} & a_{75} & a_{76} & a_{77} & a_{78} & a_{79} \\ a_{81} & a_{82} & a_{83} & a_{84} & a_{85} & a_{86} & a_{87} & a_{88} & a_{89} \\ a_{91} & a_{92} & a_{93} & a_{94} & a_{95} & a_{96} & a_{97} & a_{98} & a_{99} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ v \\ 0 \\ u_{x_2} \\ u_{y_2} \\ u_{z_2} \\ u_{x_3} \\ u_{y_3} \\ u_{z_3} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_{x_1} \\ f_{y_1} \\ f_{z_1} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}. \quad (\text{D.8})$$

Como sólo resulta de interés calcular las variables cinemáticas, la ecuación (D.8) puede reformularse de la siguiente manera:

$$\begin{bmatrix} a_{44} & a_{45} & a_{46} & a_{47} & a_{48} & a_{49} \\ a_{54} & a_{55} & a_{56} & a_{57} & a_{58} & a_{59} \\ a_{64} & a_{65} & a_{66} & a_{67} & a_{68} & a_{69} \\ a_{74} & a_{75} & a_{76} & a_{77} & a_{78} & a_{79} \\ a_{84} & a_{85} & a_{86} & a_{87} & a_{88} & a_{89} \\ a_{94} & a_{95} & a_{96} & a_{97} & a_{98} & a_{99} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{x_2} \\ u_{y_2} \\ u_{z_2} \\ u_{x_3} \\ u_{y_3} \\ u_{z_3} \end{Bmatrix} = - \begin{bmatrix} a_{42} \\ a_{52} \\ a_{62} \\ a_{72} \\ a_{82} \\ a_{92} \end{bmatrix} v. \quad (\text{D.9})$$

Al igual que la ecuación (D.4), esto permite reformular el problema de movimiento de excitación desde la base, como una viga empotrada en su base, con una fuerza distribuida aplicada. El ejemplo anterior puede generalizarse de la siguiente manera: sea g el número de grados de libertad de un nodo, G el número total de grados de libertad de la estructura, e i el grado de libertad de la base tal que $u_{i_1} = v e^{j\omega t}$, luego la ecuación (D.7) puede reformularse como:

$$\mathbf{A} \hat{\mathbf{U}} = \hat{\mathbf{Y}} \quad (\text{D.10})$$

donde

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \mathbf{A}[\{(g+1), \dots, G\}; \{(g+1), \dots, G\}] \\ \hat{\mathbf{U}} &= \hat{\mathbf{U}}[\{(g+1), \dots, G\}; \{1\}] \\ \hat{\mathbf{Y}} &= -\mathbf{A}[\{(g+1), \dots, G\}; \{i\}] \mathbf{v}. \end{aligned} \quad (\text{D.11})$$

Apéndice E

Campo de Deformaciones para Radio de Curvatura Variable

Esta sección presenta la deducción del campo de deformaciones unidimensional para una estructura curva de radio variable. Este campo de deformaciones será empleado en futuros modelos de metaestructuras piezoeléctricas curvas, permitiendo generar variaciones del radio, ampliando el alcance del modelo presentado en esta tesis. Para obtener el campo de deformaciones para curvatura variable, el parámetro R debe considerarse variable en la línea durante el reemplazo de la ecuación (3.1) en la ecuación (3.4) de la Sección 3.3, es decir:

$$\begin{aligned} S_{xx} &= \mathcal{F} \left[\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{u_y}{R} \right] \\ &= \mathcal{F} \left[\left(u'_{xc} + \frac{u_{yc}}{R} \right) + z \left(\theta'_y - \frac{\theta_x}{R} \right) - y \left(\theta'_z - \frac{u'_{xc}}{R} \right) - \omega \left(\theta'_w + \frac{\theta'_y}{R} \right) \right] + \\ &+ \mathcal{F} \left[\omega \frac{\theta_y}{R^2} - y \frac{u_{xc}}{R^2} - \omega y \frac{\mathcal{F}}{R^2} \left(\theta_w + \frac{\theta_y}{R} \right) \right] R' \end{aligned} \quad (\text{E.1})$$

$$\begin{aligned} S_{xy} &= \frac{\partial u_x}{\partial y} + \mathcal{F} \left[\frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{u_x}{R} \right] \\ &= \mathcal{F} \left[(u'_{yc} - \theta_z) + \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial y} (\theta'_x - \theta_w) - \left(z + \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial y} \right) \left(\theta'_x + \frac{\theta_y}{R} \right) \right] + \\ &+ \mathcal{F} \omega \left(\theta_w + \frac{\theta_y}{R} \right) \frac{R}{(R+y)^2}. \end{aligned} \quad (\text{E.2})$$

Teniendo en cuenta que $\frac{R}{(R+y)^2} \ll 1$, puede despreciarse el último término de la ecuación anterior, derivando en la siguiente expresión:

$$S_{xy} = \mathcal{F} \left[(u'_{yc} - \theta_z) + \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial y} (\theta'_x - \theta_w) - \left(z + \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial y} \right) \left(\theta'_x + \frac{\theta_y}{R} \right) \right] \quad (\text{E.3})$$

$$\begin{aligned} S_{xz} &= \frac{\partial u_x}{\partial z} + \mathcal{F} \left[\frac{\partial u_z}{\partial x} \right] \\ &= \mathcal{F} \left[(u'_{zc} + \theta_y) + \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial z} (\theta'_x - \theta_w) - \left(y - \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial z} \right) \left(\theta'_x + \frac{\theta_y}{R} \right) \right]. \end{aligned} \quad (\text{E.4})$$

Debido a isotropía planar se conserva que:

$$S_{yy} = S_{zz} = S_{yz} = 0. \quad (\text{E.5})$$

De lo anterior, el campo de deformaciones para el modelo unidimensional de curvatura variable puede expresarse como:

$$\mathbf{S} = \mathcal{F} \mathbf{G} \mathbf{B} \mathbf{U} + \mathcal{F} \frac{R'}{R^2} \mathbf{V} \mathbf{U} \quad (\text{E.6})$$

donde

$$\mathbf{S}^T = \{S_{xx}, S_{xy}, S_{xz}\}, \quad \mathbf{U}^T = \{u_{xc}, u_{yc}, \theta_z, u_{zc}, \theta_y, \theta_x, \theta_w\} \quad (\text{E.7})$$

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 1 & z & -y & -\omega & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial y} & -(z + \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial y}) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial z} & (y - \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial z}) \end{bmatrix} \quad (\text{E.8})$$

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} -y & 0 & 0 & 0 & \omega \mathcal{F} & 0 & \omega y \mathcal{F} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{E.9})$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \partial_x & 1/R & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \partial_x & -1/R & 0 \\ -\partial_x/R & 0 & \partial_x & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\partial_x/R & 0 & \partial_x \\ 0 & \partial_x & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \partial_x & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \partial_x & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/R & \partial_x & 0 \end{bmatrix}. \quad (\text{E.10})$$

Es importante destacar que la ecuación (3.5) obtenida en la Sección 3.3 corresponde al caso particular de la ecuación (E.6) cuando la curvatura se considera constante, es decir $R' = 0$.

Bibliografía

- Airoldi, L. y Ruzzene, M. (2011). Design of tunable acoustic metamaterials through periodic arrays of resonant shunted piezos. *New Journal of Physics*, 13(11):113010.
- Aladwani, A. y Nouh, M. (2020). Mechanics of metadamping in flexural dissipative metamaterials: Analysis and design in frequency and time domains. *International Journal of Mechanical Sciences*, 173:105459.
- Baravelli, E. y Ruzzene, M. (2013). Internally resonating lattices for bandgap generation and low-frequency vibration control. *Journal of Sound and Vibration*, 332(25):6562–6579.
- Beli, D., Arruda, J., y Ruzzene, M. (2018). Wave propagation in elastic metamaterial beams and plates with interconnected resonators. *International Journal of Solids and Structures*, 139:105–120.
- Beli, D., Fabro, A. T., Ruzzene, M., y Arruda, J. R. F. (2019). Wave attenuation and trapping in 3d printed cantilever-in-mass metamaterials with spatially correlated variability. *Scientific reports*, 9(1):1–11.
- Bergamini, A. E., Zündel, M., Flores Parra, E. A., Delpero, T., Ruzzene, M., y Ermanni, P. (2015). Hybrid dispersive media with controllable wave propagation: A new take on smart materials. *Journal of Applied Physics*, 118(15):154310.
- Bilal, O. R. y Hussein, M. I. (2013). Trampoline metamaterial: Local resonance enhancement by springboards. *Applied Physics Letters*, 103(11):111901.

- Bloch, F. (1929). Über die quantenmechanik der elektronen in kristallgittern. *Zeitschrift für physik*, 52(7-8):555–600.
- Boresi, A. P., Chong, K., y Lee, J. D. (2010). *Elasticity in engineering mechanics*. John Wiley & Sons.
- Brillouin, L. (1953). Wave propagation in periodic structures: electric filters and crystal lattices.
- Bui, T., Khosravifard, A., Zhang, C., Hematiyan, M., y Golub, M. (2013). Dynamic analysis of sandwich beams with functionally graded core using a truly meshfree radial point interpolation method. *Engineering structures*, 47:90–104.
- Casadei, F., Ruzzene, M., Dozio, L., y Cunefare, K. (2009). Broadband vibration control through periodic arrays of resonant shunts: experimental investigation on plates. *Smart materials and structures*, 19(1):015002.
- Cremer, L. y Leilich, H. (1953). Zur theorie der biegekettenteiler. *Archiv der elektrischen Übertragung*, 7:261–270.
- Dal Poggetto, V. F. y Serpa, A. L. (2020). Elastic wave band gaps in a three-dimensional periodic metamaterial using the plane wave expansion method. *International Journal of Mechanical Sciences*, p. 105841.
- Dantzig, G. B. (1990). Origins of the simplex method. En *A history of scientific computing*, pp. 141–151.
- Ding, C.-L. y Zhao, X.-P. (2011). Multi-band and broadband acoustic metamaterial with resonant structures. *Journal of Physics D: Applied Physics*, 44(21):215402.
- Erturk, A. e Inman, D. J. (2011). *Piezoelectric energy harvesting*. John Wiley & Sons.
- Evans, G. W. (2004). Bringing root locus to the classroom. *IEEE Control Systems Magazine*, 24(6):74–81.
- Evans, W. R. (1954). Control system dynamics,(1954), 117.

- Fazzolari, F. (2018). Generalized exponential, polynomial and trigonometric theories for vibration and stability analysis of porous fg sandwich beams resting on elastic foundations. *Composites Part B: Engineering*, 136:254–271.
- Fazzolari, F. A., Carrera, E., y Cinefra, M. (2017). *Thermal Stress Analysis of Composite Beams, Plates and Shells: Computational Modelling and Applications*. Academic Press.
- Gaviño, R. H. (2010). *Introducción a los sistemas de control, conceptos, aplicaciones y simulación con MATLAB*. Pearson Educación.
- Ghayesh, M. H. (2018). Vibration analysis of shear-deformable afg imperfect beams. *Composite Structures*, 200:910–920.
- Ghayesh, M. H. y Farokhi, H. (2018). Bending and vibration analyses of coupled axially functionally graded tapered beams. *Nonlinear Dynamics*, 91(1):17–28.
- Gnawali, R., Kota, A., Banerjee, P. P., Haus, J. W., Reshetnyak, V., y Evans, D. R. (2020). A simplified transfer function approach to beam propagation in anisotropic metamaterials. *Optics Communications*, 461:125235.
- Hagood, N. W. y von Flotow, A. (1991). Damping of structural vibrations with piezoelectric materials and passive electrical networks. *Journal of sound and vibration*, 146(2):243–268.
- Halliday, D., Resnick, R., y Walker, J. (2013). *Fundamentals of physics*. John Wiley & Sons.
- Heckl, M. (1961). Wave propagation on beam-plate systems. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 33(5):640–651.
- Heckl, M. A. (1964). Investigations on the vibrations of grillages and other simple beam structures. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 36(7):1335–1343.
- Ho, K. M., Cheng, C. K., Yang, Z., Zhang, X., y Sheng, P. (2003). Broadband locally resonant sonic shields. *Applied physics letters*, 83(26):5566–5568.

- Hong-Gang, Z., Yao-Zong, L., Ji-Hong, W., Dian-Long, Y., Gang, W., y Xi-Sen, W. (2006). Sound absorption of locally resonant sonic materials. *Chinese Physics Letters*, 23(8):2132.
- Huang, H. y Sun, C. (2009). Wave attenuation mechanism in an acoustic metamaterial with negative effective mass density. *New Journal of Physics*, 11(1):013003.
- Huang, H. y Sun, C. (2011). Locally resonant acoustic metamaterials with 2d anisotropic effective mass density. *Philosophical Magazine*, 91(6):981–996.
- Huang, H., Sun, C., y Huang, G. (2009). On the negative effective mass density in acoustic metamaterials. *International Journal of Engineering Science*, 47(4):610–617.
- IEEE (1988). *An American National Standard: IEEE Standard on Piezoelectricity Standard*. IEEE.
- Jaynes, E. (1957). Information theory and statistical mechanics i and ii. *The Physical Review*, 106:1620–1630.
- Jin, Y., Bonello, B., y Pan, Y. (2014). Acoustic metamaterials with piezoelectric resonant structures. *Journal of Physics D: Applied Physics*, 47(24):245301.
- Jouneghani, F. Z., Dimitri, R., y Tornabene, F. (2018). Structural response of porous fg nano-beams under hygro-thermo-mechanical loadings. *Composites Part B: Engineering*, 152:71–78.
- Karmarkar, N. (1984). A new polynomial-time algorithm for linear programming. En *Proceedings of the sixteenth annual ACM symposium on Theory of computing*, pp. 302–311.
- Lesieutre, G. A. (1998). Vibration damping and control using shunted piezoelectric materials. *Shock and Vibration Digest*, 30(3):187–195.
- Liu, Z., Zhang, X., Mao, Y., Zhu, Y., Yang, Z., Chan, C. T., y Sheng, P. (2000). Locally resonant sonic materials. *science*, 289(5485):1734–1736.

- Martin, R. K. (2012). *Large scale linear and integer optimization: a unified approach*. Springer Science & Business Media.
- Matlack, K. H., Bauhofer, A., Krödel, S., Palermo, A., y Daraio, C. (2016). Composite 3d-printed metastructures for low-frequency and broadband vibration absorption. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 113(30):8386–8390.
- Mei, J., Ma, G., Yang, M., Yang, Z., Wen, W., y Sheng, P. (2012). Dark acoustic metamaterials as super absorbers for low-frequency sound. *Nature communications*, 3(1):1–7.
- Meng, H., Chronopoulos, D., y Fabro, A. T. (2020). Numerical simulation data for the dynamic properties of rainbow metamaterials.
- Miao, X. y Sun, D. (2010). Graded/gradient porous biomaterials. *Materials*, 3:26–47.
- Miranda Jr, E., Nobrega, E., Rodrigues, S., Aranas Jr, C., y Dos Santos, J. (2020). Wave attenuation in elastic metamaterial thick plates: Analytical, numerical and experimental investigations. *International Journal of Solids and Structures*, 204:138–152.
- Nemat-Nasser, S. (1972). General variational methods for waves in elastic composites. *Journal of Elasticity*, 2(2):73–90.
- Newton, I. (1686). 1686, principia—book ii, imprimatur s. *Pepys, Reg. Soc. Præses, London*.
- Nouh, M., Aldraihem, O., y Baz, A. (2015). Wave propagation in metamaterial plates with periodic local resonances. *Journal of Sound and Vibration*, 341:53–73.
- Oudich, M., Senesi, M., Assouar, M. B., Ruzenne, M., Sun, J.-H., Vincent, B., Hou, Z., y Wu, T.-T. (2011). Experimental evidence of locally resonant sonic band gap in two-dimensional phononic stubbed plates. *Physical Review B*, 84(16):165136.
- Piovan, M. (2014). Parametric uncertainties in the modeling of non-local beam theories for vibratory and buckling problems. En *Proceedings of Uncertainties 2014*, p. sn.

- Piovan, M. y Cortinez, V. (2007). Mechanics of thin-walled curved beams made of composite materials, allowing for shear deformability. *Thin-Walled Structures*, 45:759–789.
- Piovan, M. T., Domini, S., y Ramirez, J. M. (2012). In-plane and out-of-plane dynamics and buckling of functionally graded circular curved beams. *Composite Structures*, 94(11):3194–3206. Cited By :26.
- Qureshi, A., Li, B., y Tan, K. (2016). Numerical investigation of band gaps in 3d printed cantilever-in-mass metamaterials. *Scientific reports*, 6:28314.
- Rao, S. S. (2004). *Mechanical vibrations 5th*. Pearson Educación.
- Rao, S. S. (2017). *The finite element method in engineering*. Butterworth-heinemann.
- Rayleigh, B. y Strutt, J. W. (1945). *The theory of sound*. Dover.
- Reddy, J. (2004). *An introduction to the finite element method*, volumen 1221. McGraw-Hill New York.
- Romero-García, V., Sánchez-Pérez, J. V., y Garcia-Raffi, L. (2011). Tunable wideband bandstop acoustic filter based on two-dimensional multiphysical phenomena periodic systems. *Journal of applied physics*, 110(1):014904.
- Roque, C., Martins, P., Ferreira, A., y Jorge, R. (2016). Differential evolution for free vibration optimization of functionally graded nano beams. *Composite Structures*, 156:29–34.
- Sampaio, R. y Lima, R. (2012). Modelagem estocástica e geração de amostras de variáveis e vetores aleatórios. *Notas de Matemática Aplicada*, 70.
- Senesi, M. y Ruzzene, M. (2011). Piezoelectric superlattices as multi-field internally resonating metamaterials. *AIP Advances*, 1(4):041504.
- Shannon, C. E. (1948). A mathematical theory of communication. *Bell system technical journal*, 27(3):379–423.

- Sharma, B. y Sun, C. (2016). Impact load mitigation in sandwich beams using local resonators. *Journal of Sandwich Structures & Materials*, 18(1):50–64.
- Shonkwiler, R. W. y Mendivil, F. (2009). *Explorations in Monte Carlo Methods*. Springer Science & Business Media.
- Sugino, C., Leadenham, S., Ruzzene, M., y Erturk, A. (2016). On the mechanism of band-gap formation in locally resonant finite elastic metamaterials. *Journal of Applied Physics*, 120(13):134501.
- Sugino, C., Leadenham, S., Ruzzene, M., y Erturk, A. (2017). An investigation of electroelastic bandgap formation in locally resonant piezoelectric metastructures. *Smart Materials and Structures*, 26(5):055029.
- Sugino, C., Ruzzene, M., y Erturk, A. (2018). Merging mechanical and electromechanical bandgaps in locally resonant metamaterials and metastructures. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 116:323–333.
- Sun, C.-T., Achenbach, J., y Herrmann, G. (1968). Time-harmonic waves in a stratified medium propagating in the direction of the layering.
- Sun, W., Liu, Y., Li, H., y Pan, D. (2013). Determination of the response distributions of cantilever beam under sinusoidal base excitation. En *Journal of Physics: Conference Series*, volumen 448, p. 012010. IOP Publishing.
- Surabhi, A. (2014). *Finite element beam model for piezoelectric energy harvesting using higher order shear deformation theory*. Tesis doctoral, Graduate School of Clemson University.
- Turner, M. J., Clough, R. W., Martin, H. C., y Topp, L. (1956). Stiffness and deflection analysis of complex structures. *Journal of the Aeronautical Sciences*, 23(9):805–823.
- Ugural, A. C. y Fenster, S. K. (2003). *Advanced strength and applied elasticity*. Pearson education.

- Ungar, E. E. (1966). Steady-state responses of one-dimensional periodic flexural systems. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 39(5A):887–894.
- Vanderbei, R. J. (2020). *Linear programming: foundations and extensions*, volumen 285. Springer Nature.
- Voigt, W. (1889). Ueber die beziehung zwischen den beiden elasticitätsconstanten isotroper körper. *Annalen der physik*, 274(12):573–587.
- Voigt, W. (1928). *Lehrbuch der kristallphysik*, volumen 962. Teubner Leipzig.
- Von Neumann, J. (1963). Discussion of a maximum problem. volume vi of collected works.
- Wang, P., Casadei, F., Shan, S., Weaver, J. C., y Bertoldi, K. (2014). Harnessing buckling to design tunable locally resonant acoustic metamaterials. *Physical review letters*, 113(1):014301.
- Wang, Q.-M., Du, X.-h., Xu, B., y Cross, L. E. (1999). Theoretical analysis of the sensor effect of cantilever piezoelectric benders. *Journal of Applied Physics*, 85(3):1702–1712.
- Wright, S. J. (1997). *Primal-dual interior-point methods*. SIAM.
- Yang, Y.-B. y Kuo, S.-R. (1987). Effect of curvature on stability of curved beams. *Journal of structural Engineering*, 113(6):1185–1202.
- Yang, Z., Mei, J., Yang, M., Chan, N., y Sheng, P. (2008). Membrane-type acoustic metamaterial with negative dynamic mass. *Physical review letters*, 101(20):204301.
- Zhu, R., Liu, X., Hu, G., Sun, C., y Huang, G. (2014). A chiral elastic metamaterial beam for broadband vibration suppression. *Journal of Sound and Vibration*, 333(10):2759–2773.