

Flujos magnetohidrodinámicos axisimétricos con conductividad finita

Parte II. Geometría cilíndrica anular*

Néstor O. Rotstein¹, Constantino Ferro Fontán

¹ Universidad Tecnológica Nacional, Facultad Regional Buenos Aires
Medrano 951 (C1179AAQ), Ciudad Autónoma de Buenos Aires, Argentina

nrotstein@cedi.frba.utn.edu.ar

Recibido el 27 de Diciembre de 2011, aprobado el 15 de Mayo de 2012

Resumen

En este artículo analizamos flujos magnetohidrodinámicos rotantes, estacionarios, simétricos respecto del eje propio de estructuras cilíndricas generales, suponiendo finita la conductividad del plasma encerrado, plasma que, por lo demás, se encuentra congelado a un campo magnético de líneas parcialmente abiertas. En este marco, en el que la densidad de corriente juega ahora un rol preponderante, se hallan todas las soluciones que autoconsistentemente soportan el flujo. Se estudia el problema axisimétrico completo y se aplica en particular a plasmas confinados en cilindros cerrados circularmente. Se aborda en particular el problema magnetohidrostático y se resuelve en algunos casos sencillos, aunque absolutamente generales, el problema magnetohidrodinámico. Se muestra que sólo en el caso de conductividad infinita (resistividad nula) las isosuperficies de flujo másico coinciden con las isosuperficies de flujo magnético. Este trabajo forma parte del proyecto UTN-FRBA 1234 "Detección remota y análisis de cambios de patrones de radiación medioambientales".

PALABRAS CLAVE: MHD – PLASMAS – RESISTIVIDAD – FLUJO MÁSCO CILÍNDRICO

Abstract

In this paper we analyze magnetohydrodynamic, rotating, stationary outflows, symmetric with respect to the principal axis of a cylindrical structure, assuming finite conductivity of the enclosed plasmas, for all purposes embedded and freeze in partially open magnetic fields. In this framework, in which the current density plays now a central role, we find all solutions that auto-consistently confine the outflow. We study the axisymmetric problem paying particular attention on flow confined in circularly closed cylinders. We also focus attention on the magnetohydrostatic problem and we solve the magnetohydrodynamic problem in some simple but at the same time general cases. We find that only in the infinite conductivity models (say, null resistivity), magnetic flux isosurfaces are not aligned with mass flux function isosurfaces. This work belongs to UTN-FRBA 1234 project "Remote detection and change analysis of environmental radiation patterns".

KEYWORDS: MHD – PLASMAS – RESISTIVITY – CYLINDRICAL MASS FLUX

* La "Parte I. Geometría esférica" de este trabajo fue publicada en ROTSTEIN, N. (2011, Revista Proyecciones FRBA 9, 27)

Introducción

Es sabido que todo sistema que evoluciona bajo un particular grupo de simetrías lo hace acompañado de un particular grupo de teoremas de conservación. La formulación matemática que representa el fenómeno se verá a la par simplificada porque cada simetría supone una coordenada ignorable.

En la primera parte de este trabajo (Rotstein: 2011) hemos estudiado flujos magnetizados con simetría de rotación alrededor de un eje (de ahí el nombre de *simetría axial*) es decir, *flujos magnetohidrodinámicos axisimétricos*, en los que la coordenada ignorable es el ángulo azimutal φ (y, en consecuencia, las ecuaciones de movimiento no pueden depender de esa coordenada y el momento angular alrededor del eje polar es una constante de movimiento). En esta segunda parte, explotaremos la misma simetría, pero ahora aplicada a sistemas con simetría cilíndrico anular.

Sin ir más lejos, digamos que las máquinas de fusión (*tokamaks* y *spheromaks*), así como los arcos coronales, los filamentos o los *jets* de diferentes objetos astrofísicos, son sistemas en los que el flujo posee básicamente este tipo de simetría, es decir, una suerte de cilindro cerrado en forma de circunferencia.

En estas configuraciones (salvo en los *tokamaks*, que están gobernados por campos magnéticos externos) las dos componentes del campo magnético, la poloidal y la toroidal, son generadas por las mismas corrientes de plasma vía efecto dínamo. La dinámica propia de los estados de equilibrio, que se alcanzan a partir del alineamiento particular de las corrientes internas y los campos magnéticos del plasma, es mediada (y de hecho gobernada) por la helicidad y la turbulencia magnética en los tubos de flujo.

Los estudios de flujos axisimétricos con resistividad nula poseen una larga tradición. A los trabajos pioneros de Tsinganos (1982) o la brillante formulación de Heyvaerts y Norman (1989, 2003) y su extensión relativista (Chiueh, Li y Begelman: 1991) podemos agregar los de Bogovalov (1995), Rotstein y Ferro Fontán (1995), Stone y Hardee (2000), Preuss et al. (2004) referidos a diferentes configuraciones correspondientes a diferentes estructuras a escala astrofísica.

En el caso de la corona solar, por ejemplo, las observaciones obtenidas con satélites como el Hinode o el STEREO, han revelado que los arcos coronales son mucho más frecuentes que lo que se creía (Kamio, Hara, Watanabe y Curdt: 2009; Pariat, Antiochos y DeVore: 2010). Se ha sugerido que los *jets* astrofísicos MHD son el resultado de la dinámica propia de los plasmas en campos magnéticos helicoidales en los que la compresión del campo helicoidal resulta en una componente toroidal de la fuerza de Lorentz que acelera el plasma del *jet* en la dirección toroidal, transformando de esta manera momento angular magnético en momento angular de rotación (Tordella et al, 2010; Fendt, 2011). Se han estudiado con algún detalle los *jets* en objetos astrofísicos compactos (Mirabel: 2003; Murphy et al.: 2008; Beskin: 2010; Sauty et al.: 2011), *jets* relativistas (Fendt y Memola: 2001; Contopoulos: 2007) y se ha prestado especial a la estabilidad de las configuraciones (Appl y Camenzind: 1992; Hardee, Clarke y Rosen: 1997; Keppens y Tóth: 1999 y Baty: 2005) y a las simulaciones numéricas (Blandford y Rees: 1974; Norman et al.: 1981; Sakurai: 1990; Vilkoviskij y Tambovtsena: 1992; Okamoto: 1995, 2003 y Lin Jiang et a.: 2011).

En este artículo habremos de concentrarnos en los flujos axisimétricos con conductividad finita, con simetría cilíndrica. Para ello, en primer lugar presentamos la formulación del problema en términos absolutamente generales en lo que concierne a la simetría de rotación cilíndrica, a continuación abordamos el tratamiento tradicional (conductividad infinita) para tener un sistema de comparación de resultados, mientras que luego trataremos formalmente el caso de flujos de plasmas con resistividad no nula aplicado a estructuras particulares cilíndrico anulares. Finalmente, en el apartado Análisis y conclusiones analizaremos las implicaciones de esta formulación y discutiremos sus resultados.

Tratamiento general

Las ecuaciones magnetohidrodinámicas que gobiernan la evolución estacionaria de fluidos de conductividad σ (o, equivalentemente, resistividad η), compresibles, magnetizados, sin viscosidad, en presencia de un campo gravitatorio, independientemente de la geometría propia del fenómeno, se escriben como:

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \rho \mathbf{v} = 0 \quad (2)$$

$$\nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) = \eta \mathbf{j} \quad (3)$$

$$\rho (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\nabla P + \frac{1}{\mu_0} (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} - \rho \nabla G \quad (4)$$

donde, como es habitual, ρ representa la densidad volumétrica de masa, \mathbf{v} el campo de velocidades, \mathbf{B} el campo de inducción magnética, G el potencial gravitatorio generado por una fuente externa, P representa la presión del fluido y $\eta=1/\sigma$ la resistividad intrínseca del plasma. Eventualmente, las ecuaciones (1)-(4) se cierran con una ecuación de balance termodinámico, que no hemos incluido porque la distribución de fuentes de calor, que de manera consistente cierra el sistema de ecuaciones MHD, no forma parte de este estudio.

Debido a la simetría, la topología de las configuraciones magnéticas no habrá de depender de las condiciones de equilibrio, sino más bien que habrá de quedar completamente determinada por la propiedad solenoidal del campo magnético (ecuación (1)). De esta forma, es posible introducir una función de flujo magnético $A(r,z)$ (la simetría de rotación, esto es, en la coordenada ϕ , lleva a que la función A solo dependa de las coordenadas r y z .) que gobierna la existencia de superficies de flujo magnético.

Es fácil ver que en coordenadas cilíndricas, con simetría axial, el flujo magnético y el flujo másico, representados por las expresiones (1) y (2), pueden escribirse en las formas:

$$\mathbf{B} = \frac{1}{r \sin\theta} \nabla A(r, \theta) \times \mathbf{e}_\phi + B_\phi \mathbf{e}_\phi \quad (5)$$

$$\rho \mathbf{v} = \frac{1}{r} \nabla \psi(r, z) \times \mathbf{e}_\phi + \rho v_\phi \mathbf{e}_\phi \quad (6)$$

donde hemos introducido también la función de flujo másico $\psi(r,z)$ con un significado funcional similar al flujo magnético. Obsérvese que la función de flujo magnético $A(r, z)$ es constante sobre cada superficie de flujo (o sea, define las isosuperficies de flujo magnético) y describe el flujo poloidal entre las diferentes superficies.

El producto vectorial de las expresiones (6) y (5) conduce de manera inmediata a una relación entre las componentes azimutales de los campos magnético \mathbf{B} y de velocidades \mathbf{v}

$$\mathbf{v} \times \mathbf{B} = \frac{1}{\rho r^2} (\nabla \psi \times \nabla A - r B_\phi \nabla \psi + \rho r v_\phi \nabla A) \quad (7)$$

Calculemos ahora la densidad de corriente \mathbf{j} . Para ello escribamos la ley de Maxwell-Ampere, en situación estacionaria ($\partial \mathbf{D} / \partial t = 0$), que a partir de la expresión (5) resulta en la forma:

$$\mathbf{j} = \frac{\nabla \times \mathbf{B}}{\mu_0} = \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \left(\frac{1}{r} \nabla A(r, z) \times \mathbf{e}_\phi + B_\phi \mathbf{e}_\phi \right) \quad (8)$$

El desarrollo de la expresión (8) es tan sencillo como tedioso. Para tratar de arrojar un poco de luz sobre el procedimiento, introduzcamos la función ϕ , de manera tal que sea:

$$\nabla \cdot \phi = \left(\partial_r, \frac{1}{r} \partial_\phi, \partial_z \right) \phi = \frac{1}{r} e_\phi \quad (9)$$

En concordancia con la identidad (9) introduciremos también la función $F(r,z)$ según:

$$F = r B_\phi \quad (10)$$

que podemos pensar como una medida de la cantidad de movimiento por unidad de carga que el campo magnético intercambia en la dirección azimutal. En términos de esta nueva función podemos reescribir coherentemente la expresión (8) en la forma:

$$\mathbf{j} = \frac{\nabla \times \mathbf{B}}{\mu_0} = \frac{1}{\mu_0} \nabla \times (\nabla A(r, z) \times \nabla \phi + F \nabla \phi) \quad (11)$$

Obsérvese que las unidades del miembro derecho corresponden efectivamente a las de una densidad de corriente. Podemos desarrollar ahora la expresión (8) en la forma:

$$\begin{aligned} \mathbf{j} &= \frac{1}{\mu_0} (\nabla \times (\nabla A \times \nabla \phi) + \nabla F \times \nabla \phi) = \\ &= \frac{1}{\mu_0} [(\nabla \phi \cdot \nabla) \nabla A - (\nabla A \cdot \nabla) \nabla \phi + \\ &\quad \nabla^2 \phi \nabla A - \nabla^2 A \nabla \phi + \nabla F \times \nabla \phi] \end{aligned} \quad (12)$$

La expresión (12), contrariamente a lo que podría parecer, es muy sencilla: Obsérvese que el laplaciano de la función ϕ (véase su definición en la expresión (9)) es nulo. Por lo demás,

$$\begin{aligned} (\nabla \phi \cdot \nabla) \nabla A &= \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \phi} \right) \left(\frac{\partial A}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{\partial A}{\partial z} \mathbf{e}_z \right) \\ &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial A}{\partial r} \frac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial \phi} = \frac{1}{r} \frac{\partial A}{\partial r} \nabla \phi \end{aligned} \quad (13)$$

Obsérvese que en la forma anterior hemos tenido en cuenta la identidad entre las componentes de la base polar,

$$\frac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial \phi} = \mathbf{e}_\phi \quad (14)$$

Por otro lado, es fácil ver que el segundo término de la expresión (12) se reduce a la forma:

$$\left(\frac{\partial A}{\partial r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial A}{\partial z} \frac{\partial}{\partial z} \right) \frac{1}{r} \mathbf{e}_\phi = -\frac{1}{r} \frac{\partial A}{\partial r} \nabla \phi \quad (15)$$

Así, en términos de las expresiones (13)-(15) la ecuación (12) puede escribirse en la forma:

$$\begin{aligned} \mathbf{j} &= -\frac{1}{\mu_0} \left[\left(\nabla^2 A - \frac{2}{r} \frac{\partial A}{\partial r} \right) \nabla \phi - \nabla F \times \nabla \phi \right] \\ &= -\frac{1}{\mu_0} \mathcal{D}^2 A \nabla \phi + \frac{1}{\mu_0} \nabla F \times \nabla \phi \end{aligned} \quad (16)$$

en la que hemos introducido el operador vectorial $\mathcal{D}^2 = \nabla^2 - (2/r)\partial/\partial r$.

Parece evidente, y de hecho lo es a partir de su definición en la ecuación (11), que la densidad de corriente \mathbf{j} es un vector solenoidal, cuya estructura es similar a la de los vectores definidos en las expresiones (5) y (6). En estas condiciones, la fuerza de Lorentz se escribe como:

$$\mathbf{j} \times \mathbf{B} = \frac{1}{\mu_0} \frac{1}{r^2} (\nabla F \times \nabla A - \mathcal{D}^2 A \nabla A - F \nabla F) \quad (17)$$

Pasemos ahora a calcular la vorticidad

$$\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{v} \quad (18)$$

Obsérvese que matemáticamente la vorticidad es al campo de velocidades lo que la corriente al campo de inducción magnética, de ahí que la estructura funcional de la vorticidad debe ser similar a la de la corriente \mathbf{j} definida en la expresión (11) (o su equivalente (12)) que deriva en la forma final que le dimos en la expresión (16). Para hacer más evidente la analogía y ganar en simplicidad definamos la función $\Lambda(r, z)$

$$\Lambda = \rho r v_\phi \quad (19)$$

que podemos pensar como una medida de la cantidad de movimiento por unidad de volumen que el plasma transporta en la dirección azimutal. En términos de esta nueva función, la identidad (6) se escribe como:

$$\mathbf{v} = \frac{1}{\rho} (\nabla \psi \times \nabla \phi + \Lambda \nabla \phi) \quad (20)$$

y luego, en términos de las expresiones (6), (9), (19) y (20) escribimos la vorticidad $\boldsymbol{\omega}$ como:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\omega} &= \nabla \times \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \mathcal{D}^2 \psi \nabla \phi + \\
&\frac{1}{\rho} \nabla \Lambda \times \nabla \phi + \nabla \left(\frac{1}{\rho} \right) \times (\nabla \psi \times \nabla \phi + \Lambda \nabla \phi) \\
&= -\frac{1}{\rho} \mathcal{D}^2 \psi \nabla \phi + \frac{1}{\rho} \nabla \Lambda \times \nabla \phi \\
&+ \frac{1}{\rho} \nabla \Lambda \times \nabla \phi
\end{aligned} \tag{21}$$

donde el último término aparece porque, a diferencia de la permeabilidad magnética μ_0 de la expresión (11), la densidad de masa no es constante (de hecho estamos trabajando en la hipótesis de un fluido compresible).

La forma análoga a la expresión (17), en virtud de las expresiones (6), (20) y (21), se escribe como:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\omega} \times \rho \mathbf{v} &= \frac{1}{\rho r^2} (\nabla \Lambda \times \nabla \psi - \mathcal{D}^2 \psi \nabla \psi \\
&- \Lambda \nabla \Lambda) + v^2 \nabla \rho - \mathbf{v} (\mathbf{v} \cdot \nabla \rho)
\end{aligned} \tag{22}$$

Formulación para $\eta = 0$

La manera más sencilla de satisfacer la ley de inducción de Faraday (ecuación (3)), en virtud de la ecuación (7) cuando tratamos con un plasma de resistividad nula o, equivalentemente, de conductividad infinita, es proponer que la función de flujo másico sea función de la función de flujo magnético, esto es,

$$\psi = \psi(A) \tag{23}$$

en cuyo caso el primer término del miembro derecho de la expresión (7) se anula idénticamente ($\nabla \psi \times \nabla A = (\partial \psi / \partial A) \nabla A \times \nabla A = 0$) y luego, o bien proponer una relación definida entre las componentes toroidales de los campos \mathbf{v} y \mathbf{B} en la forma:

$$v_\phi = \frac{B_\phi}{\rho} \frac{d\psi}{dA} \tag{24}$$

o bien introducir una función potencial $\Omega(A)$ de manera tal que sea:

$$\frac{1}{\rho r^2} (\rho r v_\phi - r B_\phi \frac{\partial \psi}{\partial A}) = \Omega(A) \tag{25}$$

Obsérvese por el momento que las dimensiones de la función $\Omega(A)$ corresponden a una velocidad angular. Es fácil ver que en estas condiciones la ecuación (3) resulta:

$$\nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) = \nabla \times (\Omega \nabla A) = \frac{\partial \Omega}{\partial A} \nabla A \times \nabla A +$$

$$\Omega (\nabla \times \nabla A) = 0 \tag{26}$$

A partir de las funciones que hemos definido, y usando las ecuaciones (5), (6) y (25), es muy sencillo demostrar ahora que la función de velocidad puede escribirse en términos del campo magnético como:

$$\mathbf{v} = \frac{\mathbf{B}}{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial A} + r \Omega(A) \mathbf{e}_\phi \tag{27}$$

La expresión (27) indica que para todo estado de equilibrio las superficies de flujo másico coinciden con las superficies de flujo magnético, a excepción de la rotación rígida de cada una de las superficies de flujo másico (representada por el segundo término del miembro derecho, precisamente en función de la velocidad angular Ω).

En la hipótesis (23) de que el flujo másico es función del flujo magnético, y en virtud de la expresión (17) para la fuerza de Lorentz, la componente toroidal (esto es, la componente e_ϕ) de la ecuación de movimiento (4) puede escribirse como:

$$\frac{\partial \psi}{\partial A} \nabla \left(\frac{\Lambda}{\rho} \right) \times \nabla A = \frac{1}{\mu_0} \nabla F \times \nabla A \tag{28}$$

Una forma alternativa de la expresión anterior es:

$$\nabla \left(\frac{\Lambda}{\rho} - \frac{1}{\mu_0} \frac{F}{\partial \psi / \partial A} \right) \times \nabla A = 0 \tag{29}$$

que puede ser integrada rápidamente suponiendo que el paréntesis es una función del

flujo magnético, digamos $L(A)$. Si usamos la expresión (25) en la forma:

$$\left(\Lambda - \frac{1}{\mu_0} F \frac{\partial \psi}{\partial A}\right) = \rho r^2 \Omega(A) \quad (30)$$

y por simplicidad en la notación llamamos ψ'_A a la derivada $\partial \psi / \partial A$, podemos escribir de manera casi inmediata:

$$\frac{\Lambda}{\rho} = r^2 \Omega(A) + \frac{1}{\mu_0} \frac{F \psi'_A}{\rho} \quad (31)$$

de donde resulta inmediatamente:

$$\frac{\Lambda}{\rho} - \frac{1}{\mu_0} \frac{F}{\psi'_A} = L(A) \implies L(A) = r^2 \Omega(A) + \frac{F}{\mu_0 \psi'_A} \left(\mu_0 \frac{(\psi'_A)^2}{\rho} - 1 \right) \quad (32)$$

En la última expresión puede verse de manera casi evidente que la cantidad $L(A)$, de acuerdo a sus unidades, representa un momento angular por unidad de masa. Observemos de paso que el primer término del paréntesis del miembro derecho define el cuadrado del número de Mach-Alfvén poloidal

$$M^2 = \mu_0 \frac{\rho v_p^2}{B_p^2} = \mu_0 \frac{(\psi'_A)^2}{\rho} \quad (33)$$

pues de acuerdo a la ecuación (27) la velocidad poloidal (componentes e_r y e_z) se escribe como $v_p = B_p \psi'_A / \rho$.

En términos del número de Mach-Alfvén podemos escribir ahora las expresiones de las componentes toroidales de los campos (algunos autores, vg, Tsinganos, 1982; Heyvaerts y Norman, 1989, han desarrollado la formulación general de este problema y vale la pena remitirse a esos trabajos para una descripción matemática completa del mismo)

$$v_\phi = \frac{\rho \Omega r^2 - \mu_0 L(A) (\psi'_A)^2}{\rho r (1 - M^2)} \quad (34)$$

$$B_\phi = \mu_0 \psi'_A \frac{\Omega r^2 - L(A)}{r(1 - M^2)} \quad (35)$$

Obsérvese que si el flujo es subalfvénico en la base y a cierta distancia es $M^2 > 1$ (como es característico en los vientos estelares, típicamente el viento solar) debe existir una distancia, digamos $r_{A'}$, en la que es $M^2 = 1$, y en ese punto los numeradores de las ecuaciones (34) y (35) deben anularse consistentemente de manera tal de mantener finitos los valores de v y B .

Parece evidente, a partir de las expresiones (32), (34) y (35), que la función $L(A)$ debe ser entonces:

$$L(A) = \Omega(A) r_A^2 \quad (36)$$

Escribamos ahora la componente poloidal (es decir, en planos meridionales que contienen al eje de rotación) de la ecuación de movimiento (4).

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{\rho r^2} \left(\frac{\nabla \Lambda^2}{2} + \mathcal{D}^2 \psi \nabla \psi \right) + (v^2 - v_p v_p) \\ & \cdot \nabla \rho + \rho \frac{\nabla v^2}{2} + \nabla \mathcal{P} + \frac{1}{\mu_0 r^2} \\ & \left(\frac{\nabla F^2}{2} + \mathcal{D}^2 A \nabla A \right) + \rho \nabla G = 0 \end{aligned} \quad (37)$$

Teniendo en cuenta la expresión (19), que relaciona a la función $\Lambda(A)$ con la velocidad azimutal, podemos escribir la identidad (37) en la forma:

$$\begin{aligned} & v_p^2 \nabla_\perp \rho + \rho \frac{\nabla v_p^2}{2} + \nabla \mathcal{P} + \rho \left(\nabla G - \frac{v_t^2}{r} e_r \right) \\ & + \frac{1}{2\mu_0 r^2} \nabla F^2 + \frac{1}{\mu_0 r^2} \end{aligned}$$

$$\left[(1 - M^2) \mathcal{D}^2 A - \frac{\mu_0}{2\rho} \nabla \psi_A'^2 \cdot \nabla A \right] \nabla A = 0 \quad (38)$$

donde el símbolo ∇_{\perp} denota el gradiente perpendicular a la dirección del movimiento poloidal y, junto al gradiente de potencial gravitatorio, aparece ahora la aceleración centrífuga. Para propósitos posteriores habremos de escribir de una manera ligeramente diferente la última ecuación teniendo en cuenta que, tratándose de funciones axisimétricas, en el caso que estamos tratando podemos desarrollar el gradiente perpendicular como:

$$\nabla_{\perp} = \frac{\nabla A}{r B_p} \cdot \nabla \quad (39)$$

En concordancia con la expresión (39) reescribimos la ecuación (38) en la forma:

$$\begin{aligned} & \rho \frac{\nabla v_p^2}{2} + \nabla \mathcal{P} + \rho \left(\nabla G - \frac{v_t^2}{r} e_r \right) + \\ & + \frac{1}{2\mu_0 r^2} \nabla F^2 + \frac{1}{\mu_0 r^2} \left[(1 - M^2) \mathcal{D}^2 A - \right. \\ & \left. \frac{\rho}{2} \nabla \frac{M^2}{\rho} \cdot \nabla A \right] \nabla A = 0 \end{aligned} \quad (40)$$

Hay en este punto una interesante observación: si la velocidad fuera nula en todas partes y no hubiera gravedad, la ecuación (37), en caso de que las funciones F y P fueran funciones del flujo magnético A , se reduciría a la forma magnetohidrostática. Obsérvese que en esta situación resulta nulo el miembro derecho de la expresión (28), y se desprende de forma casi inmediata que el paréntesis del miembro izquierdo debe ser también una función pura del flujo magnético, esto es:

$$\frac{\Lambda}{\rho} = \Gamma(A) \quad (41)$$

Debemos notar que se trata de un caso libre de fuerzas en la dirección toroidal, pero que sin embargo muestra rotación con velocidad tangencial:

$$v_t = \frac{\Gamma(A)}{r} \quad (42)$$

Si la función Γ es constante, el movimiento

toroidal es irrotacional y la única componente de la vorticidad es perpendicular a los planos meridianos. En la ecuación (40) podemos separar inmediatamente la componente paralela al movimiento como:

$$\nabla_{\parallel} \frac{v_p^2}{2} + \frac{1}{\rho} \nabla_{\parallel} p + \nabla_{\parallel} G - \frac{v_t}{r} \nabla_{\parallel} r = 0 \quad (43)$$

pero como la velocidad tangencial expresada por la ecuación (42) es el producto de una función del flujo magnético A (y en consecuencia constante de movimiento) por una potencia integrable de r , se llega inmediatamente al teorema de Bernoulli. Si llamamos h a la entalpía por unidad de masa, y s a la entropía por unidad de masa, podemos escribir la ecuación (44) en la forma:

$$\nabla_{\parallel} \frac{v_p^2}{2} + \nabla_{\parallel} h - T \nabla_{\parallel} s + \nabla_{\parallel} \left(G + \frac{\Gamma^2}{2r^2} \right) = 0 \quad (44)$$

donde hemos usado la identidad (42) para escribir la componente tangencial de la energía por unidad de masa y hemos usado la identidad:

$$d(U + pV) = dH = Tds + Vdp \quad (45)$$

El balance transversal de fuerzas se escribe como:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\rho r^2} \left[(1 - M^2) \mathcal{D}^2 A - \frac{\rho}{2} \nabla \left(\frac{M^2}{\rho} \right) \cdot \nabla A + \right. \\ & \left. \mu_0^{-1} F F'_A \right] = T s'_A - h'_A + \frac{\Gamma \Gamma'_A}{r^2} \end{aligned} \quad (46)$$

donde s'_A denota la derivada de la entropía específica $s(A)$, que se supone conocida en la base del viento. Observemos ahora que a partir de la expresión (31), teniendo en cuenta la definición (41), podemos escribir la densidad de masa como:

$$\rho = \frac{\mu_0^{-1} F \psi'_A}{\Gamma - r^2 \Omega} \quad (47)$$

donde parece evidente que las funciones Γ y

Ω deberían tener signos opuestos para evitar la posibilidad de una singularidad del denominador como función de r que provocaría, a su vez, densidades negativas. Obsérvese de paso que en esta situación el número de Mach-Alfvén definido en la ecuación (33) puede escribirse como:

$$M^2 = \mu_0 \frac{\rho v_p^2}{B_p^2} = \mu_0 \frac{(\psi'_A)^2}{\rho} = \psi'_A \frac{\Gamma - r^2 \Omega}{\mu_0^{-1} F} \quad (48)$$

Es interesante notar que si reescribimos la vorticidad (definida en la expresión (21)) usando la ecuación (48), obtenemos:

$$\boldsymbol{\omega} = - \frac{M^2}{\psi'_A} \left[\mathcal{D}^2 A + \frac{1}{2} \nabla \ln \left(\frac{M^2}{\rho} \right) \cdot \nabla A \right] \nabla \phi + \Gamma'_A \nabla A \times \nabla \phi \quad (49)$$

y, en consecuencia, la ecuación (46) puede expresarse como:

$$\frac{1}{r^2} [\mathcal{D}^2 A + \mu_0^{-1} F F'_A] = \rho \left(T s'_A - h'_A + \frac{\Gamma \Gamma'_A}{r^2} \right) - \psi'_A \boldsymbol{\omega} \cdot \nabla \phi \quad (50)$$

Vale aquí una pequeña digresión. Para ello regresemos a la expresión de la fuerza de Lorentz, ecuación (17), que aquí repetimos por comodidad:

$$\mathbf{j} \times \mathbf{B} = \frac{1}{\mu_0} \frac{1}{r^2} (\nabla F \times \nabla A - \mathcal{D}^2 A \nabla A - F \nabla F)$$

Obsérvese que el vector $\mathbf{j} \times \mathbf{B}$ no es necesariamente irrotacional. Pero si la función F definida en la ecuación (10) es función del flujo magnético A , es decir, si $F = F(A)$ es fácil ver que el primer término del paréntesis del miembro derecho se anula, quedando:

$$\nabla F \times \nabla A = \frac{\partial F}{\partial A} \nabla A \times \nabla A = 0 \quad (51)$$

y que en tal caso, y al cabo de un mínimo análisis dimensional, podemos definir una función presión, función del flujo magnético, $p = p(A)$, tal que cumpla:

$$\frac{1}{\mu_0 r^2} \left(\mathcal{D}^2 A + F \frac{\partial F}{\partial A} \right) = - \frac{dp}{dA} \quad (52)$$

A partir de la expresión anterior, dado que la presión (y su derivada) no habrán de depender del ángulo toroidal, parece evidente que en el caso $F = F(A)$ la fuerza de Lorentz no tiene componente en la dirección toroidal (un estudio detallado de este tipo de soluciones puede encontrarse en Weinbaum y O'Brien, 1967).

Las ecuaciones (47)-(50), precisamente, junto con la ecuación de estado $T = T(\rho, S)$, constituyen la generalización de la ecuación magnetohidrostática (52) para el caso que nos ocupa. Además está decirlo, la integración de la ecuación (50) requiere de técnicas numéricas especiales, salvo que alguna hipótesis adicional pudiera hacerse y mantener el problema dentro de un marco matemáticamente más ameno. Una primera idea sería considerar el flujo irrotacional y homentrópico, en cuyo caso el miembro derecho de la ecuación (50) se reduciría a $\rho h'_A$, pero obsérvese que en este caso no sería posible satisfacer la irrotacionalidad del flujo poloidal debido a la presencia de la fuerza de Lorentz (el miembro izquierdo de la ecuación (50)). Es decir, no se cumpliría el teorema de Crocco (recordemos brevemente que el teorema de Crocco demuestra que en un flujo homentrópico y homentrópico la vorticidad es nula y el flujo es irrotacional). En particular, si el flujo es uniforme a grandes distancias de la fuente (típico de los vientos estelares) también resulta $h'_A = 0$ y la ecuación (50) muestra la proporcionalidad directa entre la fuerza de Lorentz y la vorticidad.

Habiendo analizado con algún detalle el caso magnetohidrostático representado en las ecuaciones (41) a (52), estamos en condiciones de escribir la formulación completa en el caso general. A partir de las ecuaciones (27) a (32) se obtiene formalmente la identidad:

$$\mu_0^{-1} \frac{F}{\psi'_A} = \frac{r v_t - \Omega r^2}{M^2} = r v_t - L = \frac{r B_t}{\psi'_A} \quad (53)$$

Entonces, la componente paralela al movimiento poloidal de la ecuación (40) se escribe como:

$$\nabla_{\parallel} \left(\frac{v_p^2}{2} + \frac{v_t^2}{2} \right) + \frac{1}{\rho} \nabla_{\parallel} p + \nabla_{\parallel} G - \nabla_{\parallel} (\Omega r v_t) = 0 \quad (54)$$

Obsérvese que de esta última expresión se obtiene el teorema de Bernoulli para el caso isentrópico, es decir,

$$\frac{v_p^2}{2} + \frac{v_t^2}{2} + h + G - \frac{\mu_0^{-1} \Omega F}{\psi'_A} = H(A) \quad (55)$$

La expresión de la vorticidad es análoga a la obtenida en la expresión (49), salvo por el hecho de que el término poloidal debe ser reemplazado por $\nabla(r v_t) \times \nabla \phi$.

$$\boldsymbol{\omega} = - \frac{M^2}{\psi'_A} \left[\mathcal{D}^2 A + \frac{1}{2} \nabla \ln \left(\frac{M^2}{\rho} \right) \cdot \nabla A \right] \nabla \phi + \nabla(r v_t) \times \nabla \phi \quad (56)$$

Por su lado, la expresión (50) debe sustituirse por:

$$\frac{1}{r^2} [\mathcal{D}^2 A + \mu_0^{-1} F F'_A] = \rho \left(T s'_A - h'_A + \frac{\Gamma \Gamma'_A}{r^2} \right) - \psi'_A \boldsymbol{\omega} \cdot \nabla \phi \quad (57)$$

donde hemos definido la función f como:

$$f = \frac{(L - r^2 \Omega)(L'_A - r^2 \Omega'_A)}{M^2 - 1} = F \frac{\partial(L - r^2 \Omega, r)}{\partial(\psi, r)} \quad (58)$$

Obsérvese que en todas estas expresiones interviene el número de Mach-Alfvén, cuya evaluación en términos de cantidades supuestamente conocidas puede efectuarse siempre a partir de la ecuación de Bernoulli, aunque en la mayoría de los casos prácticos esta tarea es sumamente complicada. Debemos notar que el punto $M_2=1$ es un polo de dicha ecuación

y que la rama física debe pasar por los puntos críticos lento y rápido (una discusión completa al respecto puede hallarse en Heyvaerts y Norman, 1989).

Caso resistivo ($\eta \neq 0$)

La ley de Ohm microscópica y la fuerza de Lorentz pueden escribirse sucintamente como:

$$\mathbf{E} = -\mathbf{v} \times \mathbf{B} + \eta \mathbf{j} = -\nabla \phi \quad (59)$$

donde ϕ representa el potencial eléctrico. Podemos usar las expresiones (7) y (16) para escribir el miembro derecho en la forma:

$$\nabla \times \left[-\frac{1}{\rho r^2} (\nabla \psi \times \nabla A - F \nabla \psi + \Lambda \nabla A) + \frac{\eta}{\mu_0} (\mathcal{D}^2 A \nabla \phi + \nabla F \times \nabla \phi) \right] = 0 \quad (60)$$

Obsérvese que el segundo término puede reducirse a la forma:

$$\nabla \times \frac{\eta}{\mu_0} (\mathcal{D}^2 A \nabla \phi + \nabla F \times \nabla \phi) = \frac{\eta}{\mu_0} \nabla \mathcal{D}^2 A \times \nabla \phi + \frac{\eta}{\mu_0} \mathcal{D}^2 F \nabla \phi \quad (61)$$

de manera tal que la ecuación (60) puede separarse en:

$$\frac{1}{\rho r} \frac{\partial(A, \psi)}{\partial(r, z)} + \eta \mathcal{D}^2 A = 0 \quad (62)$$

$$r \left(\frac{\partial(A, \tilde{\Lambda})}{\partial(r, z)} - \frac{\partial(\psi, \tilde{F})}{\partial(r, z)} \right) + \frac{\eta}{\mu_0} \mathcal{D}^2 F = 0 \quad (63)$$

donde hemos definido:

$$\tilde{\Lambda} = \frac{\Lambda}{\rho r^2} \quad \tilde{F} = \frac{F}{\rho r^2} \quad (64)$$

$$\frac{\partial(f, g)}{\partial(u, v)} \equiv [f, g] = \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial g}{\partial v} - \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial g}{\partial u} \quad (65)$$

Si se quiere que los flujos poloidales estén alineados debe tomarse $\psi = \psi(A)$, porque en ese caso resulta $D^2 A=0$. En tal escenario es fácil ver que podemos reescribir la expresión (61) en la forma:

$$r \frac{\partial(A, \tilde{\Lambda} - \psi'_A \tilde{F})}{\partial(r, z)} + \frac{\eta}{\mu_0} \mathcal{D}^2 F = 0 \quad (66)$$

Ahora multipliquemos escalarmente por \mathbf{B} la expresión (59); es fácil ver que resulta:

$$\eta \mathbf{j} \cdot \mathbf{B} + \nabla \varphi \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (67)$$

que, en vista de la expresión (16) para la corriente y el operador de la ecuación (65), lo mismo que decir:

$$\frac{\eta}{\mu_0 r^2} (\nabla A \cdot \nabla F - F \mathcal{D}^2 A) + \frac{\partial(A, \varphi)}{\partial(r, z)} = 0 \quad (68)$$

Soluciones analíticas de esta ecuación general no parecen evidentes. De hecho no lo son. Pero podemos proponer algunas (sin romper la hipótesis de axisimetría).

En primer lugar, notemos que dentro de cada estructura cilíndrica puede hacerse el cambio de variables:

$$\rho = \sqrt{r^2 + z^2} \quad (69.a)$$

$$\theta = \arctg \left(\frac{r}{z} \right) \quad (69.b)$$

Si ahora pensamos en flujos sin componente toroidal de la fuerza de Lorentz, esto es, flujos que cumplen:

$$[F, A] = 0 \quad (70)$$

donde F es la componente toroidal del campo magnético (la hemos definido en la ecuación (10)) y el significado del operador es el de la ecuación (65), proponemos las formas funcionales:

$$A(\rho, \theta) = W(\rho) \text{sen}^2 \theta \quad (71)$$

$$\varphi(\rho, \theta) = Q(\rho) \cos \theta \quad (72)$$

$$F = b_0 A(\rho, \theta) \quad (73)$$

Estas formas permiten separar variables en la ecuación general (68), y lleva automáticamente a las ecuaciones:

$$W'' + mW' - \frac{2W}{R^2} = 0 \quad (74)$$

$$Q' = -\frac{2b_0 \eta}{\mu_0} W \quad (75)$$

donde m es una constante que define la curvatura de las líneas de campo y cuyas soluciones para $\rho > 0$ son:

$$W(\rho) = C_1 e^{-m\rho} \left(1 + \frac{2}{m\rho} \right) + C_2 \left(\frac{m}{2} - \frac{1}{\rho} \right) \quad (76)$$

$$Q(\rho) = \frac{2b_0 \eta}{\mu_0} \left[\frac{C_1}{\rho^2} e^{-m\rho} + \frac{C_2}{\rho} \left(1 - \frac{1}{m\rho} \right) \right] \quad (77)$$

Una discusión completa de estas soluciones puede hallarse en Rotstein (2011). Otras formas integrables pueden obtenerse pensando el problema general en simetría toroidal. La figura 1 ilustra las variables que definen las coordenadas cartesianas ($x; y; z$), cilíndricas ($r; \varphi; z$) y toroidales ($R; \theta; \epsilon$), en la que hemos cambiado la designación de la distancia radial dentro del toroide por R , para evitar confusiones. A partir de la figura 1 es fácil ver que valen las siguientes relaciones:

$$r = r_0 + R \cos \theta \quad (78.a)$$

$$z = R \text{sen} \theta \quad (78.b)$$

$$R = \sqrt{(r - r_0)^2 + z^2} \quad (78.c)$$

$$\theta = \arctg \left(\frac{z}{r - r_0} \right) \quad (78.d)$$

$$\xi = \frac{\pi}{2} - \phi \quad (78.e)$$

En términos de las variables definidas en las ecuaciones (78.a) – (78.d) es posible, en principio, hallar soluciones analíticas desplazadas del origen (obsérvese que el centro de la circunferencia está desplazado una cantidad r_0 y que, en consecuencia, pensamos en configuraciones tales que sea $r_0 > R$) si se supone una particular dependencia angular con la latitud. La dificultad que se enfrenta es que aun en la hipótesis de que los flujos magnéticos estén linealmente relacionados ($F \propto A$, o sea, sin componente toroidal de la fuerza de Lorentz) las elecciones posibles no siempre separan variables y las ecuaciones se tornan matemáticamente muy complicadas. Una solución plausible es la que se obtiene si proponemos:

$$A(R, \theta) = W(R) \operatorname{sen}^2 \theta \quad (79)$$

$$F(R, \theta) = U(R) \operatorname{sen}^2 \theta \quad (80)$$

$$\varphi(R, \theta) = Q(R) \operatorname{sen} \theta \quad (81)$$

en cuyo caso resultan las ecuaciones:

$$W'U' - UW'' = 0 \quad (82)$$

$$2 \frac{WU}{R^2} + \kappa [W'Q - 2WQ'] = 0 \quad (83)$$

donde las variables primadas denotan derivación respecto de la variable R y $\kappa = \mu_0/\eta$. Obsérvese que el sistema de ecuaciones puede resolverse suponiendo conocida alguna de las tres variables radiales. En particular, estamos trabajando en la suposición de que es nula la componente toroidal de la fuerza de Lorentz, de manera tal que parece razonable definir:

$$U(R) = b_0 W(R) \quad (84)$$

en cuyo caso resultan:

$$W(R) = C_1 e^{-R} \quad (85)$$

$$Q(R) = C_2 e^{-R/2} + C_2 \left[\ln(R) + \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n!n} R^n \right] \quad (86)$$

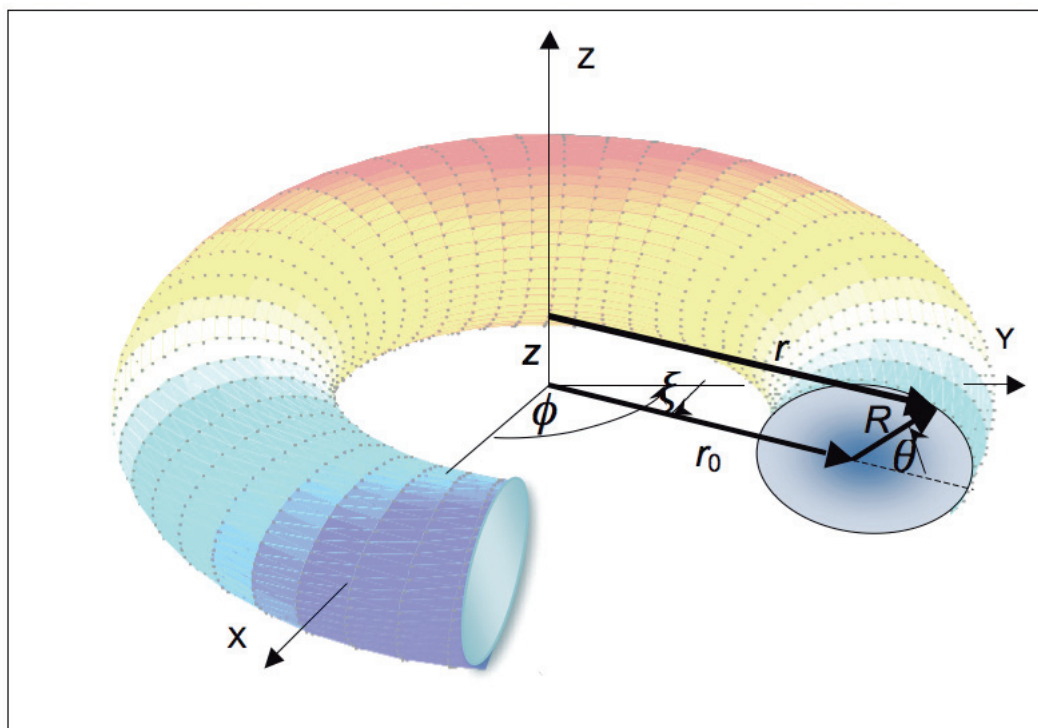


Tabla 1. Cálculo de la fluencia diferencial Φ debida al flujo de radiación que atraviesa el volumen de detección VD en cada uno de los cuatro cuadrantes

Análisis y conclusiones

En este artículo hemos analizado el flujo estacionario de fluidos magnetizados con conductividad finita en coordenadas cilíndricas y una extensión al caso cilíndrico anular. Para ello, hemos escrito las ecuaciones completas y hallado la forma de las estructuras magnéticas que sostienen ese flujo de manera autoconsistente. Vale la pena recordar que, respecto del caso de conductividad infinita, las soluciones generales cambian porque ahora debemos incorporar el término del potencial eléctrico, y esta es una condición vinculante de peso porque incorpora una variable más al problema.

Las formas analíticas que en general se invocan para tratar los flujos MHD (con conductividad infinita) proponen una forma del flujo magnético y, a partir de estructuras plausibles, resuelven el problema para la densidad de masa y la velocidad (y eventualmente la distribución de fuentes térmicas).

Nosotros hemos optado por resolver el problema sin proponer la forma del campo magnético, salvo la imposición de que se trate de flujos colimados. Al respecto, vale la pena mencionar que aunque no hemos escrito la ecuación de las líneas de campo que resultan de la resolución de las ecuaciones, se trata siempre de líneas que se convergen hacia un eje. En el caso de la ecuación (76) hacia el eje de simetría axial del cilindro, en el caso de la ecuación (86) hacia el eje polar de la sección toroidal.

La ecuación (76), de hecho, conduce a formas de campo en un todo similares a las halladas en Rotstein (2011). Hay, sin embargo, diferencias que vale la pena mencionar. Por un lado, en aquel trabajo, referido a geometría esférica, las líneas de campo no se tratan en el origen porque sólo interesan en la región exterior de un sistema de radio no nulo. En este trabajo debemos establecer taxativamente el valor $R > 1$. Por otro lado, es necesario recordar que ahora no se trata de esferas concéntricas sino de superficies esféricas contenidas en un cilindro.

Ni falta hace decirlo, las que hemos hallado y propuesto no son las únicas soluciones posibles, y debe tenerse en cuenta que hemos trabajado en todo momento con flujos sin

componente toroidal de la fuerza de Lorentz. El principal obstáculo radica siempre en la dificultad matemática que supone la elección. Por ejemplo, si en el marco que nos llevó a la ecuación (76) proponemos las formas:

$$A(\rho, \theta) = W(\rho) \operatorname{sen}\theta \quad (87)$$

$$\varphi(\rho, \theta) = Q(\rho) \operatorname{cos}\theta \quad (88)$$

$$F = b_0 \rho A(\rho, \theta) \quad (89)$$

las variables vuelven a ser separables, pero ahora la ecuación a resolver para $W(\rho)$ es de la forma:

$$W'' - 2 \log\left(\frac{W}{\rho}\right) \frac{W'}{\rho} - \frac{W}{\rho^2} = 0 \quad (90)$$

y, posiblemente, las líneas de campo no sean colimadas.

Hemos demostrado que la hipótesis de conductividad no nula (y esta es una de las consecuencias más importantes respecto del caso de conductividad infinita) conduce a estructuras de flujo en las que las isosuperficies de flujo másico no coinciden con las isosuperficies de flujo magnético, y, aunque no lo hemos discutido en detalle, podemos adelantar que esta propiedad modifica de manera sustancial la estructura de la vorticidad. Es de esperar que nuevos avances se realicen en estos tópicos con el objeto de progresar en el conocimiento de las maneras de confinar campos magnéticos de manera estable.

Agradecimiento (in memoriam)

Buena parte de los resultados de este trabajo fueron obtenidos por el Dr. Constantino Ferro Fontán, una de las mentes más lúcidas y brillantes que diera la Física argentina, fallecido en 2011. Espero sinceramente que este artículo de alguna manera honre su memoria.

Referencias

- APPL, S. y CAMENZIND, M. (1992), *Astron. Astrophys*, 256, 354.
- BATY, H. (2005), *Astron. Astrophys*, 430, 9.
- BESKIN, V. (2010), *Phys.-Usp*, 53, 1199.
- BLANDFORD, R. y REES, M. (1974), *MNRAS*, 169, 395.
- BOGOVALOV, S. (1995), *Ast L*, 21, 565
- CHIUEH, T.; LI, Z. y BEGELMAN, M. (1991), *Astrophys. J*, 377, 462.
- CONTOPOULOS, I. (2007), *Astron. Astrophys*, 472, 219.
- FENDT, C. (2011), *Astrophys. J.*, 737, 43.
- FENDT, C. y MEMOLA, E. (2001), *Astron. Astrophys*, 365, 631.
- FERRARI, A. (2010), *New J. Phys.* 13, 43011.
- HARDEE, P.; CLARKE, D. y ROSEN, A. (1997), *Astrophys. J*, 485, 533.
- HEYVAERTS, J. y NORMAN, C. (1989), *Astrophys. J*, 347, 1055.
- (2003), *Astrophys. J*, 596, 1270.
- KAMIO, S.; HARA, H.; WATANABE, T. y CURDT, W. (2009), *Astron. Astrophys*, 502, 345.
- KEPPENS, R. y TOTH, G. (1999), *Phys. Plasmas*, 6, 1461.
- LIN JIANG, R.; SHIBATA, K.; ISOBE, H. y FANG, C. (2011), *Astrophys. J*, 726, L1.
- MIRABEL, I. F. (2003), *NewAR*, 47, 471.
- MURPHY, G.; LERY, T.; O'SULLIVAN, S.; SPICER, D.; BACCIOTTI, F. y ROSEN, A (2008), *Astron. Astrophys*, 478, 453.
- NORMAN, M.; SMARR, L.; SMITH, M. y WILSON, J. (1981), *Astrophys. J*, 247, 52.
- OKAMOTO, I. (1975), *MNRAS*, 173, 357.
- (2003), *Astrophys. J*, 589, 671
- PARIAT, E.; ANTIOCHOS, S. y DEVORE, C. (2010), *Astrophys. J*, 714, 1762.
- PREUSS, O.; HOLZWARTH, V.; SOLANKI, S. y SCHÜSSLER, M. (2004), *Astron. Astrophys*, 417, 987.
- ROTSTEIN, N. (2011), *Proyecciones*, 9, 27.
- ROTSTEIN, N. y FERRO FONTÁN, C. (1995), *Astrophys. J*, 449, 764.
- SAKURAI, T. (1990), *Comp. Phys. Rep*, 12, 247.
- SAUTY, C.; MELIANI, Z.; LIMA, J.; TSINGANOS, K.; CAYATTE, V. y GLOBUS, N. (2011); *Astron. Astrophys*, 533, 46.
- STONE, J.; HARDEE, P. (2000), *Astrophys. J*, 540, 192.
- TORDELLA, D.; BELAN, M.; MASSAGLIA, S.; DE PONTE, S.; MIGNONE, A.; BODENSCHATZ, E. y FERRARI, A. (2010), *New J.Phys*, 13, 43011.
- TSINGANOS, K. (1982), *Astrophys. J*, 252, 775.
- VILKOVISKIJ, E.; TAMBOVTSEVA, I. (1992), *Astron. Astrophys Sup. Series*, 94, 109.
- WEINBAUM, S. y O'BRIEN, V. (1967), *Phys.Fluids*, 10, 1438.