



APLICACIÓN DEL MÉTODO DE LA MATRIZ DE TRANSFERENCIA PARA LA DETERMINACIÓN DE LAS FORMAS MODALES Y VELOCIDADES CRÍTICAS EN ROTORES FLEXIBLES

Violante, Dario, Palmieri, Fernando, Klempnow, Andreas¹

¹ Grupo de Estudio de Vibraciones Mecánicas, U.T.N. Facultad Regional San Nicolás, Colón 332, (CP2900) San Nicolás, Buenos Aires, Argentina.
fpalmieri@frsn.utn.edu.ar.

² Grupo Investigación Vibraciones Mecánicas, U.T.N. Facultad Regional Delta, Campana, Buenos Aires, Argentina.

RESUMEN.

El estudio de la dinámica de los rotores y la determinación de las velocidades críticas es un tema de constante desarrollo en la mecánica. El mismo cobra fundamental importancia en las modernas turbomáquinas, ya sea, a la hora de realizar un adecuado diseño, o al momento de realizar el análisis de su respuesta en funcionamiento, es decir, sus vibraciones y orbitas [1]. Esto se debe principalmente a que, al reducir el peso de las máquinas e incrementar su potencia, estas generalmente, trabajan por encima de alguna de sus velocidades críticas.

El método de la matriz de transferencia es uno de los métodos propuestos en la bibliografía [2,3] para la determinación de las formas modales y las frecuencias críticas de un rotor. El mismo es de sencilla aplicación, se basa íntegramente en ecuaciones de la mecánica clásica y permite obtener resultados empleando relativamente poca capacidad de cálculo. Actualmente hay enfoques que emplean el método de los elementos finitos con el mismo objetivo, pero este implica una matemática y una programación más compleja y mayor capacidad de cálculo.

Es por ello que en este trabajo se emplea el método de la matriz de transferencia para generar un algoritmo que permite determinar las formas modales y velocidades críticas de un rotor partiendo de algunos datos geométricos simples. El programa presenta una interface amigable e intuitiva para que el analista de vibraciones o el diseñador mecánico lo puedan emplear fácilmente.

Los datos que entrega el programa son útiles para estimar pesos y posiciones de masas de balanceo mediante el método de balanceo modal, para estimar las vibraciones del sistema, o para corregir condiciones desfavorables de operación.

Los resultados obtenidos por este método se comparan con modelos de elementos finitos y resultados experimentales. Además se emplea el método para analizar un rotor real de una turbina de gas de una central de generación de energía.

Palabras Claves: Dinámica de rotores, formas modales, Matriz de Transferencia

Tercer Congreso Argentino de Ingeniería Mecánica

III CAIM 2012



1. INTRODUCCIÓN

El estudio de la dinámica de rotores, hoy en día, ha adquirido una importancia fundamental en muchas aplicaciones de ingeniería. La demanda creciente de equipos de alta potencia, elevado número de vueltas y bajo peso, ocasiona que en muchos casos, estos equipos funcionen por encima de una o varias de sus velocidades críticas. Es por ello, que el análisis del comportamiento dinámico de los rotores se convierte en un elemento fundamental en el diseño y durante la operación de los equipos si se desea obtener un funcionamiento seguro, confiable y duradero.

Cada vez es más habitual que los diseñadores de equipos como turbinas de vapor y de gas, compresores y husillos de máquinas herramientas deban recurrir a herramientas para estudiar cómo será el comportamiento dinámico de los rotores una vez construidos. A sí mismo, quienes son los usuarios de estos equipos deben poseer herramientas para poder comprender los fenómenos derivados de la dinámica de rotores que afectan el funcionamiento de los equipos.

Actualmente, el método de los elementos finitos y el método de la matriz de transferencia son los dos caminos más usuales para analizar el comportamiento de los sistemas rotor-cojinete. El método de los elementos finitos permite modelar el sistema rotor-cojinetes mediante un sistema de ecuaciones diferenciales de segundo orden que se deben resolver numéricamente para poder estimar la respuesta del rotor.

La aplicación de modelos de elementos finitos en dinámica de rotores ha sido exitosamente verificada [1]. No obstante, el principal inconveniente de este camino es que emplea una gran capacidad de cálculo, la programación es compleja y, en general, requiere un conocimiento de la geometría preciso. Estos factores lo convierten en un método poco práctico en ciertas situaciones.

El método de la matriz de transferencia, en cambio, resuelve el problema dinámico en el dominio de las frecuencias, utilizando un procedimiento de aproximación que consiste en partir de un extremo del rotor, donde las condiciones de contorno son conocidas. Luego usando expresiones lineales simples se va determinando los parámetros del rotor en determinados puntos característicos a lo largo del mismo (cambios de sección, apoyos intermedios, rodets de alabes, etc.). Se continúa avanzando en forma progresiva hasta llegar al otro extremo. La condición de satisfacción de las condiciones de contorno de este último extremo y en todos los puntos intermedios permite plantear un sistema de ecuaciones lineales para determinar las velocidades críticas. Luego con esa solución se puede obtener el estado del rotor en esos puntos característicos intermedios a través de las matrices de transferencia.

Este método tiene como principal ventaja que no requiere almacenar o manipular grandes matrices de datos, se puede trabajar con datos concretos, como son los diámetros del rotor y las masas de los componentes y resulta más rápido para obtener resultados cuando la capacidad de cálculo es reducida.

La idea fundamental del método de las matrices de transferencias fue propuesta por Holtzer para sistemas sometidos a vibraciones torsionales, luego Myklestad lo generalizó para sistemas sometidos a la flexión [2]. Desde entonces distintas publicaciones fueron ofreciendo generalizaciones del método para sistemas rotor-cojinete considerando variable compleja para reflejar el comportamiento en dos direcciones, incluyendo los efectos giroscópicos, de torsión y flexión combinadas, usando distintos modelos para los cojinetes, etc. [1]

Como sugiere Murphy [3] este método en algunos casos puede presentar errores en la determinación de algunas de las velocidades críticas, pero existen técnicas para asegurar la precisión y mejorar los resultados. En otro trabajo el mismo autor sostiene que puede limitarse el error a un máximo del siete por ciento [4] si se tiene cuidado en optimizar correctamente el algoritmo de cálculo.

En este trabajo se presenta la implementación del Método De la Matriz de Transferencia (TMM, por sus siglas en inglés) mediante un programa ejecutable en una PC de interface gráfica apto para ser empleado por una analista de vibraciones o un diseñador iniciado. Dicho programa se validó por diversos caminos y que se aplicó para la determinación de las velocidades críticas de un rotor de una turbina de gas de una central termoeléctrica.

2. FORMULACIÓN MATEMÁTICA

El método de la Matriz de Transferencia es un método aproximado que trata al sistema continuo como un sistema de n -grados de libertad, donde n es un número finito. Se plantean ecuaciones de equilibrio que se resuelven asumiendo una solución que tiene generalmente la forma de series de

Tercer Congreso Argentino de Ingeniería Mecánica

III CAIM 2012



funciones conocidas. Este procedimiento conduce a un problema de auto-valores, similar en estructura al problema de un sistema discreto de n-grados de libertad. Su solución es un conjunto de "n" auto-valores distintos, que proveen las aproximaciones para las primeras "n" frecuencias naturales o velocidades críticas del sistema dependiendo de los datos y las simplificaciones realizadas: estos auto-valores se corresponden con los "n" auto vectores, que se calculan por el mismo método y son usados para construir las "n" formas modales para el sistema continuo. Como ya se dijo, Holtzer propuso este método en primera instancia para vibraciones torsionales y luego Myklestad lo amplió a la vibración transversal de las vigas [2].

La formulación del método de Holtzer parte de considerar que, para un sistema continuo torsional, la relación entre el ángulo de torsión $\theta(x, t)$ y el momento torsor $M_t(x, t)$ es:

$$\frac{\partial \theta(x, t)}{\partial x} = \frac{M_t(x, t)}{GJ(x)} \quad (1)$$

Siendo x la coordenada a lo largo del eje, t es el tiempo, G es el módulo de elasticidad transversal y J el momento de inercia de la sección transversal. Además para vibraciones libres la ecuación de movimiento resulta tomar la forma:

$$M_t(x, t) = I(x) \cdot \frac{\partial^2 \theta(x, t)}{\partial x^2} \quad (2)$$

Donde se considera que $\theta(x, t)$ y $M_t(x, t)$ tienen forma de funciones armónicas lo que permite simplificar la ecuación 2 como:

$$M_t(x) = -I(x) \cdot \theta''(x) \quad (3)$$

Entonces, si se considera un eje no uniforme y se aproxima su geometría a un número de discos rígidos conectados por tramos de eje de masa despreciable, como se muestra en la Figura 1. Las ecuaciones diferenciales 1 y 2 se aproximan a ecuaciones de diferencias finitas.

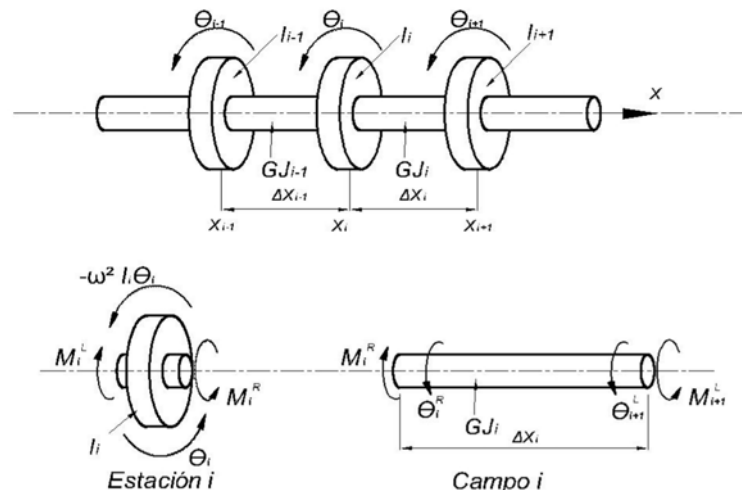


Figura 1 Sistema torsional.

Los discos, que son considerados como cuerpos rígidos, son llamados estaciones y los tramos de eje, campos. También, se consideran estaciones en los extremos o apoyos. Se aplican las expresiones antes vistas a estaciones y campos, obteniéndose expresiones de diferencias finitas para cada uno.

Para la i -ésima estación (disco) se obtiene:

$$M_i^R = M_i^L - \omega^2 I_i \theta_i \quad (4)$$

Donde M_i^R es el momento a la derecha del disco, M_i^L es el momento a la izquierda del disco, I_i es el momento de inercia de masa del disco respecto a su eje central y θ_i es el ángulo de torsión.

Para el j -ésimo campo (tramo de eje) se obtiene:

$$\frac{M_{i+1}^L - M_i^R}{x_i} = \frac{1}{2} \frac{M_{i+1}^L + M_i^R}{GJ_i} \quad (5)$$

Con estas expresiones se arman las matrices de transferencia de estación y campo respectivamente.

$$\begin{Bmatrix} M_i^R \\ M_i^L \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 & 0 \\ -\omega^2 I_i & 1 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} M_i^L \\ M_i^R \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} M_i^R \\ M_i^L \end{Bmatrix} = [T_s]_i \begin{Bmatrix} M_i^L \\ M_i^R \end{Bmatrix} \quad (6)$$

$$\begin{Bmatrix} M_{i+1}^L \\ M_{i+1}^R \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 & x_i/GJ_i \\ 0 & 1 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} M_i^R \\ M_i^L \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} M_{i+1}^L \\ M_{i+1}^R \end{Bmatrix} = [T_f]_i \begin{Bmatrix} M_i^R \\ M_i^L \end{Bmatrix} \quad (7)$$

Donde $[T_f]_i$ es la matriz de transferencia del campo i y $[T_s]_i$ es la matriz de transferencia de la estación i . Comenzando en uno de los extremos y continuando hasta el otro, se obtiene la matriz de transferencia del sistema completo.

$$\begin{Bmatrix} M_{n+1}^R \\ M_{n+1}^L \end{Bmatrix} = [T_s]_{n+1} [T_f]_n \cdots [T_f]_2 [T_s]_2 [T_f]_1 [T_s]_1 \begin{Bmatrix} M_1^L \\ M_1^R \end{Bmatrix} \quad (8)$$

Resolviendo este sistema para las condiciones particulares de contorno se llega al problema de autovalores que permite encontrar las frecuencias naturales torsionales del eje y luego reemplazando desde un extremo para cada auto-valor se puede determinar el auto-vector correspondiente que equivale a la forma modal.

Como presenta Huang [5] en su trabajo sobre la base de este método se puede arribar a un modelo más complejo y realista, incluyendo efectos de amortiguamiento interno y externo, usando variable compleja y un algoritmo de Newton-Raphson para obtener matemáticamente las aproximaciones de las frecuencias críticas.

En forma similar, se establece un método para las vibraciones transversales, considerando las siguientes relaciones para un sistema en flexión:

$$\frac{\partial Q(x,t)}{\partial x} = m(x) \cdot \frac{\partial^2 (x,t)}{\partial t^2} \quad (9)$$

$$Q(x,t) = - \frac{\partial M_f(x,t)}{\partial x} \quad (10)$$

Donde se considera que $Q(x,t)$ es el esfuerzo de corte, $M_f(x,t)$ el momento flector y (x,t) es la deformación, todas expresadas como función del tiempo y de la abscisa a lo largo del eje. Suponiendo que las tres expresiones tienen la forma de funciones armónicas se puede escribir:

$$\frac{\partial Q(x)}{\partial x} = - \omega^2 m(x) \cdot (x) \quad (11)$$

$$Q(x) = - \frac{\partial M_f(x)}{\partial x} \quad (12)$$

Donde ω es la frecuencia armónica y $\psi(x)$, $Q(x)$, y $M_f(x)$ son las amplitudes de la deformación, el esfuerzo de corte y el momento flector respectivamente, todas expresadas como función de la abscisa a lo largo del eje. Estas se traducen en las expresiones de diferencias finitas, que se transcriben a continuación, considerando, para ello, tramos de eje elástico de masa despreciable, como campos, y masas puntuales que reemplazan a los discos, como estaciones, tal como se presenta en la Figura 2.

$$Q_i^R - Q_i^L = - \omega^2 m_i \cdot \delta_i \quad (11)$$

$$M_{fi}^R - M_{fi}^L = -Q_i^R \cdot x_i \quad (12)$$

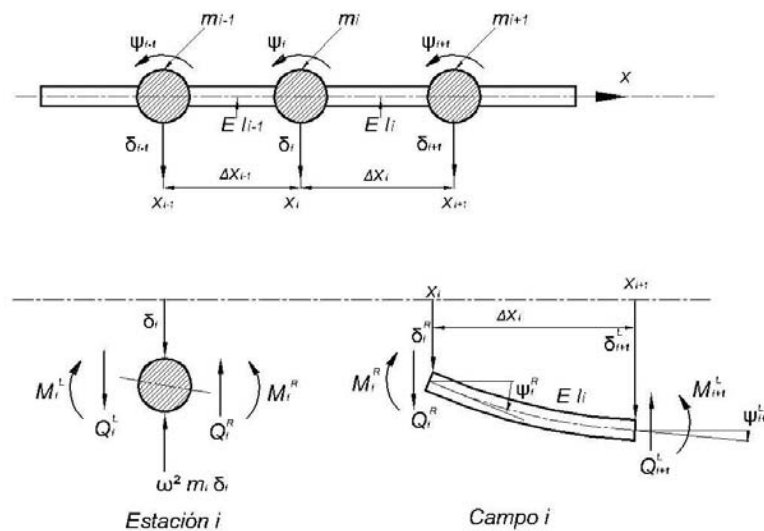


Figura 2 Sistema a la flexión

Además, se deben plantear la relación entre las fuerzas y momentos en un extremo del campo y el desplazamiento lineal y angular en el otro, que normalmente, se puede expresar en términos de los coeficientes de influencia.

Considerando, entonces, los coeficientes de influencia y las relaciones de continuidad de una viga se pueden escribir las matrices de transferencia para disco y campo respectivamente.

$$\begin{Bmatrix} R_i \\ R_i \\ M_i^R \\ Q_i^R \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\omega^2 m_i & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} L_i \\ L_i \\ M_i^L \\ Q_i^L \end{Bmatrix} = [T_s]_i \begin{Bmatrix} L_i \\ L_i \\ M_i^L \\ Q_i^L \end{Bmatrix} \quad (13)$$

$$\begin{Bmatrix} L_{i+1} \\ L_{i+1} \\ M_{i+1}^L \\ Q_{i+1}^L \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_i & x_i^2/2E l_i & -x_i^2/6E l_i \\ 0 & 1 & x_i/E l_i & -x_i^2/2E l_i \\ 0 & 0 & 1 & -x_i \\ -\omega^2 m_i & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} R_i \\ R_i \\ M_i^R \\ Q_i^R \end{Bmatrix} = [T_f]_i \begin{Bmatrix} R_i \\ R_i \\ M_i^R \\ Q_i^R \end{Bmatrix} \quad (14)$$

Por último considerando todos los campos y estaciones se llega al sistema de ecuaciones que rige el comportamiento del sistema.

$$\begin{Bmatrix} r \\ n+1 \\ r \\ n+1 \\ M_{n+1}^r \\ Q_{n+1}^r \end{Bmatrix} = [T_s]_{n+1} [T_f]_n \cdots [T_f]_2 [T_s]_2 [T_f]_1 [T_s]_1 \begin{Bmatrix} l \\ 1 \\ l \\ 1 \\ M_1^l \\ Q_1^l \end{Bmatrix} \quad (15)$$

A partir de estas ecuaciones, se puede estimar las frecuencias naturales de vibración transversal de un eje y si se incorpora el efecto giroscópico como desarrolló Lovejoy [1] en la matriz de transferencia del disco, también se logra una buena aproximación de las velocidades críticas del rotor.

Con el objetivo de incorporar el efecto giroscópico se debe describir el movimiento del disco en función de los ángulos de Euler, y luego, a partir de las ecuaciones de Lagrange se pueden plantear las ecuaciones de equilibrio del disco que sirven para llegar a la matriz de transferencia. Un desarrollo detallado de este método se puede encontrar en el trabajo de Hsieh y colaboradores [1]. Trabajando sobre las expresiones desarrolladas por estos autores y despreciando el efecto de torsión, se arriba a las siguientes ecuaciones de equilibrio para el disco en dos direcciones, vertical y horizontal.

$$Q_y^R - Q_y^L - 2m \cdot \ddot{y} - m g = 0 \quad (16)$$

$$Q_x^R - Q_x^L - 2m \cdot \ddot{x} = 0 \quad (17)$$

$$M_y^R - M_y^L - I \cdot \ddot{\theta}_y - I_p \cdot \dot{\theta}_x = 0 \quad (18)$$

$$M_x^R - M_x^L - I \cdot \ddot{\theta}_x - I_p \cdot \dot{\theta}_y = 0 \quad (19)$$

Donde Q es esfuerzo de corte, M momento flector, m es la masa del disco, δ es deformación transversal, θ es ángulo de giro, ω es frecuencia de rotación, I es momento de inercia de masa del disco respecto al eje de giro, I_p es el momento de inercia del disco respecto a un eje perpendicular al de giro, g es la aceleración de la gravedad, los subíndices x e y indican dirección horizontal y vertical respectivamente y los superíndices R y L indican derecha e izquierda del disco.

Estas expresiones permiten llegar una matriz de transferencia similar a la presentada en la ecuación 14, pero el orden de la matriz depende de la cantidad de términos que se empleen en la serie armónica usada para representar cada una de las variables.

Por último, en el Método de la Matriz de Transferencia los soportes son considerados también como estaciones y la matriz de transferencia de estas se obtiene considerando que los apoyos tienen una determinada rigidez K_i constante y aplicando la ley de Newton a un elemento de eje de longitud despreciable ubicado en el centro del apoyo, de esa forma se llega a la siguiente ecuación:

$$\begin{Bmatrix} R \\ i \\ R \\ i \\ M_i^R \\ Q_i^R \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -K_i & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} L \\ i \\ L \\ i \\ M_i^L \\ Q_i^L \end{Bmatrix} = [T_s]_i \begin{Bmatrix} L \\ i \\ L \\ i \\ M_i^L \\ Q_i^L \end{Bmatrix} \quad (20)$$

Donde K_i es la rigidez del soporte. Cuando este parámetro es conocido por algún camino se puede incluir en el algoritmo, pero de no ser así, la estimación de este parámetro es un tema bastante complejo pero algunos autores [6] lo resuelven exitosamente suponiendo que la misma es equivalente a 10^4 veces la rigidez de los campos (tramos de ejes) adyacentes a la estación.

Tercer Congreso Argentino de Ingeniería Mecánica

III CAIM 2012



3. IMPLEMENTACIÓN

La implementación del programa de cálculo basado en las ecuaciones del apartado anterior se desarrolló en lenguaje Pascal con un programa orientado a objetos llamado Delphi®. Esto permite obtener un entorno amigable con botones y pantallas de fácil manejo similares a todos los programas de uso comercial. En la Figura 3 se presenta una pantalla del programa usada para calcular velocidades críticas en rotores simples.

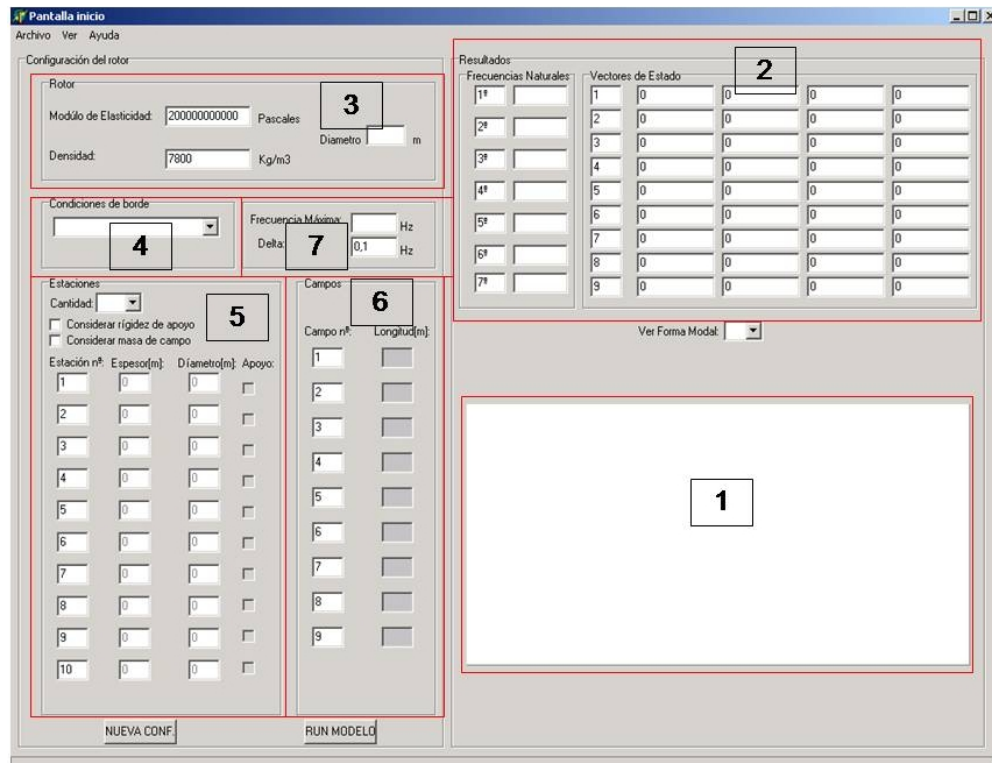


Figura 3 Pantalla del software

En esta pantalla se puede apreciar diferentes zonas:

- La zona 1 donde se visualiza formas modales.
- La zona 2 que presenta las frecuencias naturales calculadas.
- La zona 3 se emplea para cargar datos generales del eje.
- La zona 4 se emplea para ingresar las condiciones de soporte de los extremos.
- La zona 5 indica el rango de búsqueda de frecuencias.
- Las zonas 5 y 6 se emplean para realizar la carga de datos y además permiten indicar la cantidad de estaciones, donde hay soportes, si se debe o no, considerar la masa del eje, si se debe considerar las rigideces de los apoyos.

El algoritmo implementado es una variante del algoritmo de Myklestad que puede incluir o no los efectos giroscópicos dependiendo de los datos disponibles del rotor. Además, se puede considerar la masa del eje para mejorar la aproximación. Para ello se realiza un cálculo interno en base a los diámetros de cada tramo de eje determinando la masa del campo que luego se añade en forma repartida a los discos adyacentes (estaciones adyacentes).

Cuando el analista lo considera necesario, puede incluir la rigidez de los soportes. Pudiendo ser estimada partiendo de la rigidez de los campos adyacentes o ser ingresada como un dato determinado por el operador.

Para hallar las frecuencias naturales y resolver el polinomio resultante de la matriz de transferencia usa un algoritmo de bisección simple.

4. RESULTADOS

Para la validación del programa se usaron dos vías, la primera fue comparar los resultados que arroja el programa TMM para distintas configuraciones de rotores, con los obtenidos mediante un programa de cálculos por elementos finitos. Para eso se empleó el software I-deas 10.

El segundo camino, fue confrontar los resultados obtenidos por el programa de matriz de transferencia versus mediciones experimentales realizadas en un banco de pruebas. Dicho banco está dotado de discos y apoyos móviles de forma tal de poder probar diferentes configuraciones de rotores. Las velocidades críticas fueron medidas mediante pruebas de arranque del banco y las frecuencias naturales por test de impacto, midiendo simultáneamente con un analizador de vibraciones comercial marca I-dear® modelo Vibrachek y un analizador de laboratorio instrumentado mediante un placa de adquisición de datos National Instruments® de 16bit montada sobre una PC con un sistema de filtros adosado con conectores para emplear acelerómetros o sensores de proximidad.

En la Figura 4 se muestra el banco de pruebas empleado en una de las configuraciones adoptadas.



Figura 4 Banco de pruebas

En ambos caminos de validación la metodología empleada fue similar, primero se define una configuración de rotor, es decir, se establece una determinada cantidad de discos como estaciones, una determinada cantidad y ubicación de soportes y también los diámetros de eje para cada campo, luego se emplea el programa de matriz de transferencia y se determina las velocidades críticas y comparan con el modelo de elementos finitos o con la medición experimental para determinar el error

4.1. Resultados obtenidos por comparación con el método de elementos finitos

En esta primera etapa de validación se empleó el software I-deas 10 en su módulo de respuesta dinámica. Para determinar las frecuencias naturales distintos rotores se construyeron dos tipos de modelos, primero se emplearon modelos discretos de elementos de masa (lumped mass) y vigas elásticas (beam). Posteriormente se pasó a modelos tridimensionales sólidos, como el que muestra en la Figura 5, que fueron resueltos empleando elementos parabólicos tetraédricos con el algoritmo de cálculo del software basado en el método de Lanczos para determinar frecuencias características.

I-DEAS Visualizer
Display 1
Frequency: 35.4 Hz

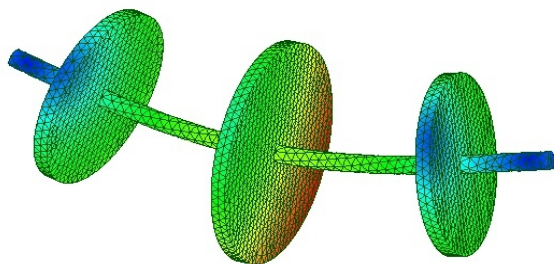


Figura 5 Modelo de elementos finitos construido mediante el programa I-deas

Tercer Congreso Argentino de Ingeniería Mecánica

III CAIM 2012



A partir de estos modelos y del programa de matriz de transferencia se obtuvieron las velocidades críticas y frecuencias naturales para distintas configuraciones de rotor. En la Tabla 1 se presenta un resumen de algunos resultados representativos.

Tabla 1 Comparación Software de Matriz de Transferencia & Elementos Finitos.

Configuración de rotor	Software de Matriz de Transferencia		Programa de Elementos Finitos		Diferencia porcentual	
	1ºcrit	2ºcrit	1ºcrit	2ºcrit	1ºcrit	2ºcrit
1	20,02Hz	77,64Hz	20,35Hz	79,41Hz	1,6%	2,2%
2	21,35Hz	84,64Hz	21,65Hz	85,96Hz	1,4%	1,5%
3	73,35Hz	167,61Hz	78,58Hz	182,53Hz	6,6%	8,2%
4	85,19Hz	120,69Hz	87,13Hz	126,96Hz	2,2%	4,9%
5	179,69Hz	359,56Hz	183,72Hz	384,73Hz	2,2%	6,5%
6	50,67Hz	ND	53,09Hz	290,54Hz	4,5%	ND
7	169,28Hz	ND	172,87Hz	ND	2,1%	ND
8	127,96Hz	ND	130,01Hz	1168Hz	1,6%	ND
Diferencia Promedio					2,77%	4,74%

De estos resultados se observa que la aproximación es bastante buena, salvo en las configuraciones como en el caso 6, que corresponde a rotores dotados de discos en voladizo. Además, en general la primera crítica se aproxima con una diferencia menor que las segunda.

4.2. Resultados de la aplicación sobre el banco de pruebas

La segunda validación se realizó mediante mediciones experimentales, estas mediciones se realizaron en el banco de pruebas de la Figura 4. Este banco tiene la posibilidad de alterar la posición y distancia entre sus soportes y está dotado de 4 discos de diferentes diámetros que se pueden desplazar sobre el eje de forma tal de obtener distintas configuraciones de rotor.

Se emplearon dos tipos de mediciones, primero se realizaron ensayos de impacto para determinar frecuencias naturales. Estos ensayos consisten básicamente en dar un impulso a la estructura del rotor mediante un golpe y medir la respuesta graficando el espectro en frecuencia para detectar las zonas de resonancias.

En los casos donde las condiciones operativas del banco lo permitieron, se realizó la medición continua de los valores de vibración durante el arranque del rotor para determinar los picos de la respuesta que ocurren al superar las velocidades críticas. En la Figura 6 se presenta la respuesta filtrada de una de las mediciones del banco.

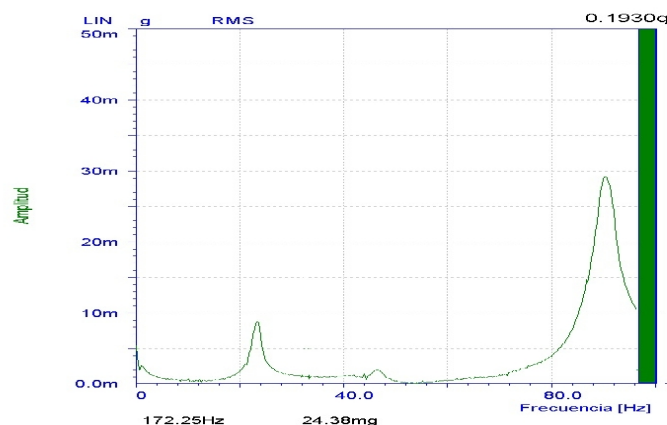


Figura 6 Medición de velocidades críticas en banco

Tercer Congreso Argentino de Ingeniería Mecánica

III CAIM 2012



A partir de estas mediciones realizadas para distintas configuraciones del banco se obtuvieron las velocidades críticas y frecuencias naturales y se compararon con los resultados del programa. En la Tabla 2 se presenta un resumen de algunos resultados representativos.

Tabla 2 Comparación Software de Matriz de Transferencia & Mediciones.

Configuración de rotor	Software de Matriz de Transferencia		Medición experimental		Diferencia porcentual	
	1 ^o crit	2 ^o crit	1 ^o crit	2 ^o crit	1 ^o crit	2 ^o crit
1	36,9Hz	130,5Hz	36,2Hz	128,3Hz	1,9%	1,7%
2	33,6Hz	144,3Hz	33,3Hz	142,5Hz	0,9%	1,3%
3	31,6Hz	173,3Hz	32,2Hz	168,3Hz	1,8%	2,9%
4	23,5Hz	98,7Hz	24,9Hz	89,8Hz	5,6%	9,9%
5	22,2Hz	102,5Hz	23,5Hz	90,5Hz	5,5%	13,3%
6	22,6Hz	107,8Hz	22,5Hz	95,8Hz	0,4%	12,5%
7	19,9Hz	152,4Hz	22Hz	ND	9,5%	ND
8	37,2Hz	148,2Hz	32,5Hz	138,5Hz	14,4%	7%
9	26,5Hz	90,6Hz	26,5Hz	87,8Hz	0,1%	3,2%
10	29,4Hz	80,5Hz	29,3Hz	78,5Hz	0,3%	2,5%
Diferencia Promedio					4,04%	6,03%

De estos resultados se observa que la aproximación es bastante buena para la primera velocidad crítica, salvo en las configuraciones 7 y 8. Dichas configuraciones corresponden a los casos de soporte intermedio y extremos con discos en voladizo. En general la segunda velocidad crítica, presentó mayor error de estimación sólo cuando la distancia entre los discos era muy reducida.

4.3. Resultados sobre rotor real

El algoritmo desarrollado se aplicó a la determinación de las velocidades críticas de un rotor de una turbina de gas de una central generadora de Neuquén que tiene una masa de aproximadamente 16000kg, una velocidad nominal de 5400rpm y se acopla a un generador por una caja reductora simple. El rotor en cuestión está formado por dos ejes unidos por un acople mediante tornillos, el eje de la turbina propiamente dicho y el del piñón de la caja reductora. En la Figura 7 se presentan fotos de ambas partes y en el esquema de la Figura 8 se muestra como es el conjunto armado.

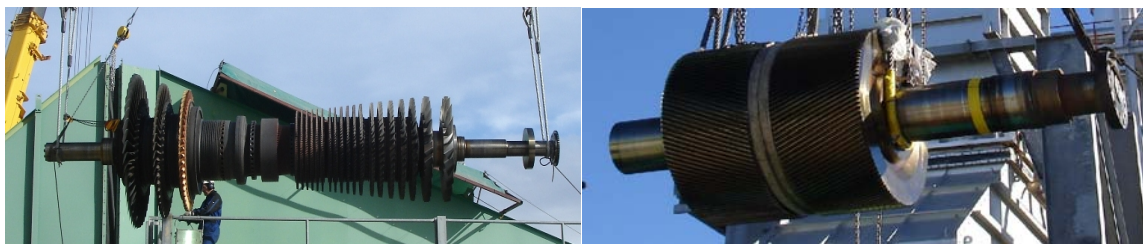


Figura 7 Fotos del eje y piñón que forman el rotor

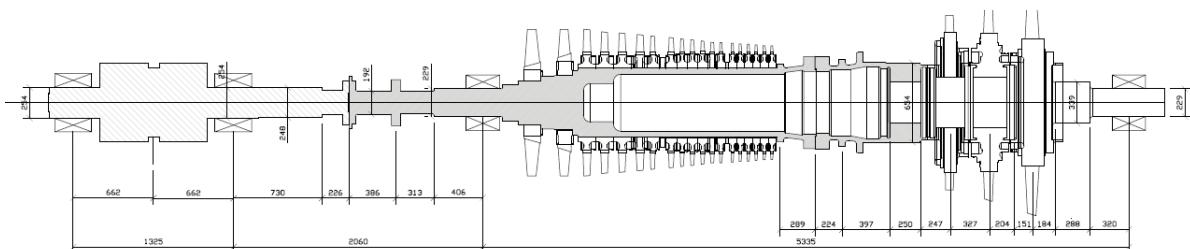


Figura 8 Esquema del conjunto armado

Tercer Congreso Argentino de Ingeniería Mecánica

III CAIM 2012



UTN.BA
UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA NACIONAL
FACULTAD REGIONAL BUENOS AIRES



FoDAMI

Con los datos de los planos disponibles del eje del rotor y el piñón se construye un modelo de 45 estaciones y 44 campos que se resume en la Tabla 3. Este modelo es usado por el programa para la determinación de las velocidades críticas.

Tabla 3 *Tabla resumen del modelo de la turbina.*

Campos					Estaciones				
Número	Longitud (mm)	F (m ²)	m/l (kg/m)	J (m ⁴)	Número	Soporte/disco o cambio de sección	Cantidad de alabes	Masa estación (kg)	I (kgm ²)
1	662	0,0507	395,23	0,00020432	1	Cojinete	---	---	---
2	662	0,0507	395,23	0,00020432	2	Disco	0	2235	208
3	730	0,0483	376,78	0,00018568	3	Cojinete	---	---	---
4	226	0,0324	252,45	8,3359E-05	4	Cambio de sección	---	---	---
5	386	0,0290	225,83	6,6708E-05	5	Disco	0	90	0,91
6	313	0,0275	214,22	6,0026E-05	6	Disco	0	50,5	0,59
7	406	0,0412	321,26	0,00013499	7	Cambio de sección	---	---	---
8	163	0,0412	321,26	0,00013499	8	Cojinete	---	---	---
9	130	0,0721	562,43	0,00041375	9	Cambio de sección	---	---	---
10	114	0,1041	811,68	0,00086174	10	Cambio de sección	---	---	---
11	179	0,1486	1159,21	0,00175763	11	Disco	19	196,66	4,1
12	91	0,1590	1240,54	0,00201289	12	Cambio de sección	---	---	---
13	63	0,1590	1240,54	0,00201289	13	Disco	23	236,59	8,17
14	119	0,2552	1990,37	0,00518166	14	Cambio de sección	---	---	---
15	147	0,1767	1378,64	0,0046922	15	Disco	41	179,91	9,05
16	72	0,1767	1378,64	0,0046922	16	Disco	41	179,25	9,05
17	75	0,0817	637,11	0,00278636	17	Cambio de sección	---	---	---
18	138	0,0817	637,11	0,00278636	18	Disco	43	179,84	9,05
19	118	0,0817	637,11	0,00278636	19	Disco	43	174,24	8,85
20	76	0,0817	637,11	0,00278636	20	Disco	63	127,96	6,51
21	72	0,0817	637,11	0,00278636	21	Disco	0	57,70	3,14
22	91	0,0817	637,11	0,00278636	22	Disco	71	134,23	6,81
23	83	0,0817	637,11	0,00278636	23	Disco	85	115,02	6,06
24	83	0,0817	637,11	0,00278636	24	Disco	90	114,48	6,06
25	79	0,0817	637,11	0,00278636	25	Disco	85	113,90	6,06
26	73	0,0817	637,11	0,00278636	26	Disco	99	120,40	6,74
27	49	0,0817	637,11	0,00278636	27	Disco	115	101,24	5,62
28	47	0,0817	637,11	0,00278636	28	Disco	0	21,48	1,05
29	66	0,0817	637,11	0,00278636	29	Disco	115	94,54	5,24
30	66	0,0817	637,11	0,00278636	30	Disco	103	138,38	5,24
31	66	0,0817	637,11	0,00278636	31	Disco	115	136,84	5,24
32	66	0,0817	637,11	0,00278636	32	Disco	121	138,60	5,24
33	66	0,0817	637,11	0,00278636	33	Disco	121	136,42	5,24
34	67	0,0817	637,11	0,00278636	34	Disco	121	134,55	5,24
35	289	0,0664	517,73	0,00257687	35	Cambio de sección	---	---	---
36	224	0,0566	441,35	0,00239433	36	Disco	0	406,00	23,46
37	146	0,0566	441,35	0,00239433	37	Cambio de sección	0	40,82	2,31
38	251	0,0695	542,04	0,00348024	38	Disco	0	78,94	5,62
39	250	0,2446	1907,88	0,00831637	39	Cambio de sección	---	---	---
40	247	0,1270	990,44	0,00405641	40	Cambio de sección	---	---	---
41	327	0,1270	990,44	0,00405641	41	Disco	51	1142,89	88,12
42	204	0,1270	990,44	0,00405641	42	Disco	51	1222,67	108,77
43	151	0,0903	704,02	0,00064829	43	Cambio de sección	---	---	---
44	472	0,0903	704,02	0,00064829	44	Disco	43	1840,03	117,68
45	320	0,0412	321,26	0,00013499	45	Cambio de sección	---	---	---
					46	Cojinete	---	---	---

Para corroborar las velocidades obtenidas se comparó con valores determinados en mediciones de vibraciones durante el arranque de la turbina. Estas mediciones fueron realizadas empleando los sensores de monitoreo continuo de la turbina y un sistema de adquisición de datos similar al empleado en el laboratorio. En las mediciones se pudo determinar que la zona de la primera velocidad crítica está en el orden de las 1740 r.p.m. y la segunda entre las 2870 y las 2950 rpm como se puede observar a partir de la lectura de tres sensores distintos graficada en la Figura 9. La turbina no pudo ser llevada a la velocidad de régimen producto de que las alarmas se dispararon y debió ser sometida a una serie de operaciones de balanceo que finalizaron en la reparación de la misma.

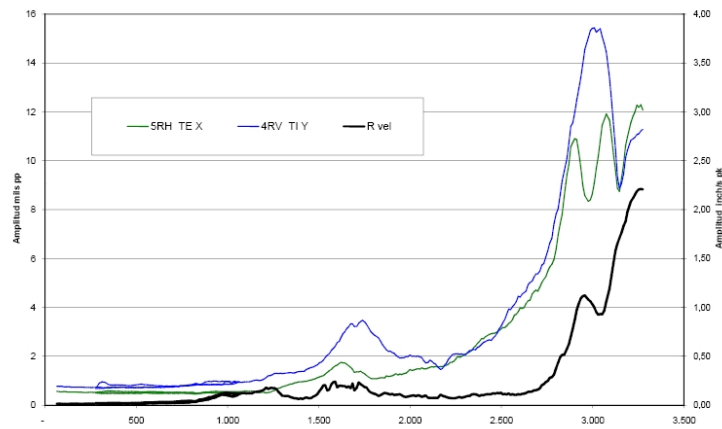


Figura 9 Respuesta del rotor durante el arranque

En la Tabla 4 se resumen los valores obtenidos de la medición en comparación con el programa de matriz de transferencia.

Tabla 4 Comparación Software de Matriz de Transferencia & Mediciones de la Turbina.

Velocidad crítica	Obtenida mediante Software de Matriz de Transferencia	Obtenida por mediciones durante el arranque	Diferencia porcentual
1	1774rpm	Entre 1720 y 1760rpm	0,7 al 3,1%
2	2805rpm	Entre 2870 y 2950rpm	2,2 al 4,9%
3	5524rpm	ND	ND

5. CONCLUSIONES.

El programa desarrollado permite obtener en forma rápida y empleando una capacidad de cálculo reducida las velocidades críticas de rotores simples y complejos.

La aproximación de la primera velocidad crítica es muy buena salvo en aquellos casos donde los rotores presentan discos de alabes o masas muy importantes en voladizo. En los restantes casos el error se mantiene debajo del 7%.

La aproximación de la segunda velocidad crítica por este método es menos exacta que la primera.

6. REFERENCIAS.

- [1] Sheng-Chung Hsieh, Juhn-Horng Chen, An-Chen Lee. (2006). "A modified transfer matrix method for the coupling lateral and torsional vibrations of symmetric rotor-bearing systems". *Journal of Sound and Vibration*. 289, pp294-333.
- [2] Meirovitch, Leonard. (1967). *Analytical Methods in Vibrations*. Londres. 1ª edición. The Macmillan Company. E.E.U.U.
- [3] Murphy, B.T. ; Vance, J. M. (1983). "An improved method for calculating critical speeds and rotordynamic stability of turbomachinery". *Transactions of the ASME- Journal of Engineering for Power*. 105 pp 591-595
- [4] Murphy, B.T.; Vance, J. M.; Tripp H. A. (1983). "Critical Speeds of turbomachinery: computer predictions & experimental Measurements". *Proceedings of the thirteenth turbomachinery symposium* pp 105-130
- [5] Huang, Y.M.; Horng, C. D. (1999). "Analysis of Torsional Vibration Systems by the Extended Transfer Matrix Method". *Transactions of the ASME. Journal of Vibration and Acoustics* 121 pp 250-255
- [6] Al-Bahkali, E.; ElMandany M. (2009). "Dynamic Analysis of Rotating Machinery Using Computer Aided design Approach". Research Center, King Saud University. pp 1-10. Disponible en: <http://faculty.ksu.edu.sa>