

## ANÁLISIS DE ROTORES POR EL MÉTODO DE LA MATRIZ DE TRANSFERENCIA USANDO EL MODELO DE EJE CON DISTRIBUCIÓN CONTINÚA DE MASA O EL DE VIGA IDEAL

Fernando Palmieri <sup>\*1</sup>, Darío Violante <sup>1</sup> y Andreas Klempnow <sup>2</sup>

<sup>\*1</sup> Facultad Regional San Nicolás. Universidad Tecnológica Nacional  
Colon 332 San Nicolás Buenos Aires Argentina  
correo-e: fpalmieri@frsn.unt.edu.ar

<sup>2</sup> Facultad Regional Delta. Universidad Tecnológica Nacional  
San Martín 1171 Campana Buenos Aires Argentina.

### RESUMEN

La dinámica de rotores es el estudio del comportamiento de dichos elementos en funcionamiento. Incluye la determinación de velocidades críticas y formas modales, condiciones de inestabilidad, respuesta a la desalineación, etc. Esos fenómenos se pueden estudiar experimentalmente o numéricamente. Una herramienta de modelado numérico es el Método de la Matriz de Transferencia, que se basa íntegramente en ecuaciones de la mecánica clásica y permite obtener resultados adecuados, empleando poca capacidad de cálculo y sin la necesidad de tener un modelo sólido. Consiste en dividir el rotor en tramos de eje llamados campos. Los acuerdos entre tramos de ejes, los cambios de sección, soportes y rodets, son llamados estaciones. Para cada campo o estación se plantea una matriz de transferencia que relaciona desplazamientos y esfuerzos a ambos lados del elemento. Finalmente con estas matrices se arma una matriz que representa el rotor completo. Para la obtención de las matrices de campos existen, dos corrientes claramente diferenciadas, mientras algunos autores usan un modelo de distribución continua de masa y ecuaciones continuas de movimiento para obtener la matriz de transferencia, otros, en cambio, adoptan el modelo de viga ideal que responde a la formulación de Euler-Bernoulli, llegando generalmente a matrices de campo más simples. Aún cuando existen numerosos trabajos que emplean una de las dos variantes, existen pocos trabajos donde se comparen ambas formulaciones. Es por ello que en este trabajo se analiza la literatura específica y se modelan algunos rotores simples siguiendo ambos caminos, con el propósito de entender cuando es más conveniente usar una u otra. En general el modelo de viga continua es más complejo de programar que el de viga ideal, no obstante, esa complejidad se ve compensada a la hora de modelar algunos defectos.

**Palabras Claves:** Matriz de Transferencia. Dinámica de rotores, Velocidades críticas

## 1. INTRODUCCIÓN

Como es conocido en el ámbito industrial, las turbo-máquinas modernas funcionan por encima de una o varias de sus velocidades críticas. Es por ello que la determinación de dichas velocidades es fundamental para el diseño correcto y la operación segura de este tipo de máquinas.

En la literatura específica [1] se pueden encontrar métodos analíticos para determinar velocidades críticas y la respuesta del rotor a fenómenos como desbalance o cambios en las propiedades de los cojinetes, entre otros; pero dichos métodos casi siempre se aplican a modelos relativamente simples como el rotor de Jeffcot y los resultados de los mismos, si bien permiten comprender conceptualmente los fenómenos, no tienen precisión o simpleza a la hora de analizar los rotores más complejos. Actualmente, el método de los elementos finitos (FEM) y el Método de la Matriz de Transferencia (MMT) son los dos caminos numéricos más usuales para analizar el comportamiento de rotores. La aplicación de modelos de elementos finitos en dinámica de rotores ha sido exitosamente verificada [2]. No obstante, el principal inconveniente de este camino es que emplea una gran capacidad de cálculo, la programación es compleja y, en general, requiere un conocimiento preciso de la geometría del rotor.

El Método de la Matriz de Transferencia, en cambio, resuelve el problema dinámico utilizando un procedimiento de aproximación que consiste en partir de un extremo del rotor, donde las condiciones de contorno son conocidas, luego usando expresiones clásicas obtenidas de la Mecánica de Newton, de la Resistencia de Materiales y de la teoría de la Elasticidad, se determina la deflexión lateral, el ángulo de giro y los esfuerzos del eje en determinados puntos característicos a lo largo del eje (cambios de sección, apoyos intermedios, rodetes de alabes, etc.), avanzando en forma progresiva hasta llegar al otro extremo. La satisfacción de las condiciones de contorno de en los extremos y en todos los puntos intermedios permite plantear un sistema de ecuaciones lineales para determinar las velocidades críticas. Luego para cada velocidad se puede obtener el estado del rotor en esos puntos característicos intermedios, a través de las mismas ecuaciones, y de esa manera se obtienen las formas modales.

Este método tiene como principal ventaja que no requiere almacenar o manipular grandes matrices, se puede trabajar con datos concretos, como son los diámetros del rotor y las masas de los componentes y resulta más rápido para obtener resultados cuando la capacidad de cálculo es reducida.

La idea fundamental del método de las matrices de transferencias fue propuesta por Holtzer para sistemas sometidos a vibraciones torsionales, luego Myklestad lo generalizó para sistemas

[www.caim2018.com.ar](http://www.caim2018.com.ar)

sometidos a la flexión [3]. Desde entonces distintas publicaciones fueron ofreciendo variantes del método para distintos sistemas rotor-cojinete. Como sugiere Murphy [4] en algunos casos puede presentar errores en la determinación de algunas de las velocidades críticas, pero existen técnicas para asegurar la precisión y mejorar los resultados.

Existen muchos trabajos realizados con el propósito de determinar las velocidades críticas, frecuencias de precesión o batido y formas modales que incorporan distintos efectos o detalles, como la influencia de los soportes y cojinetes [5, 6,7], la inercia rotacional de los rodetes [8] o la distribución de masa e inercia rotacional del eje [9]. También se han desarrollado trabajos que usan este método para estudiar la respuesta del rotor a fenómenos como el desbalance, la desalineación [10, 11] o la presencia de una fisura del eje [12].

Una particularidad que se puede observar en estos trabajos es que no en todos ellos se modela de la misma manera a los tramos de eje o campos. Mientras algunos consideran que el campo se comporta como un sistema de masa despreciable y lo tratan como una viga ideal unida en los extremos a las estaciones [6,12]. Otros plantean que el campo es un elemento continuo y escriben ecuaciones diferenciales para resolver la relación entre las deformaciones y esfuerzos en ambos extremos [8, 10, 11]. En líneas generales, el modelo puede resolverse considerando sólo una dirección de movimiento transversal o dos direcciones, dependiendo del grado de complejidad que se plantee y del fenómeno que se desea modelar.

En un par de trabajos previos [13, 14] se había empleado la formulación del Método de la Matriz de Transferencia considerando los campos como vigas ideales y se desarrolló una aplicación para determinar las velocidades críticas y formas modales de ejes flexibles que tenía una precisión aceptable. El propósito de este trabajo es desarrollar una formulación del Método de la Matriz de Transferencia a partir de las ecuaciones diferenciales de movimiento de cada tramo de eje, que consideran una distribución continua de masa, para implementar en el mismo software, antes desarrollado, y comparar los resultados para analizar las ventajas y desventajas de cada formulación.

## 2. FORMULACIÓN MATEMÁTICA

El método de la Matriz de Transferencia es un método aproximado que trata al sistema continuo como un sistema de  $n$ -grados de libertad, donde  $n$  es un número finito. Se plantean ecuaciones de equilibrio que se resuelven asumiendo una solución que tiene generalmente la forma de series de funciones conocidas. Este procedimiento conduce a un problema de auto-valores, similar en estructura al problema de un sistema discreto de  $n$ -grados de libertad. Su solución es un conjunto

de “n” auto-valores distintos, que proveen las aproximaciones para las primeras “n” frecuencias naturales o velocidades críticas del sistema, dependiendo de los datos y las simplificaciones realizadas, estos auto-valores se corresponden con los “n” auto vectores, que se calculan por el mismo método y son usados para construir las “n” formas modales del sistema original. Para tal fin, se aproxima la geometría del rotor a un número de discos rígidos conectados por tramos de eje (Figura 1). Los discos son considerados como cuerpos rígidos y son llamados estaciones. Los tramos de eje son llamados campos. También, se consideran estaciones en los extremos, en los apoyos y los cambios de sección.

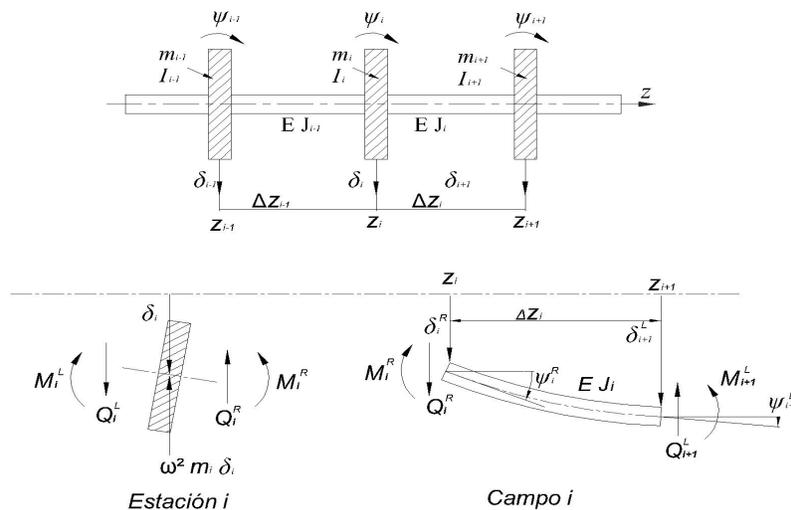


Figura 1: Ejemplo de descomposición de un rotor en campos y estaciones

Para cada estación o campo se plantea un sistema de ecuaciones que relacione la deflexión lateral  $\delta$ , el ángulo de giro  $\psi$ , el esfuerzo de corte  $Q$ , y el momento flector  $M_f$  a ambos lados de dicho elemento. Ese sistema se presenta como una matriz de coeficientes o matriz de transferencia.

$$\{\delta_i^r \quad \psi_i^r \quad M_i^r \quad Q_i^r\}^T = [T_{f/s}]_i \{\delta_i^l \quad \psi_i^l \quad M_i^l \quad Q_i^l\}^T \quad (1)$$

Por último, considerando todos los campos y estaciones se llega al sistema de ecuaciones que rige el comportamiento del rotor y se puede expresar de la forma.

$$\{\delta_{n+1}^r \quad \psi_{n+1}^r \quad M_{n+1}^r \quad Q_{n+1}^r\}^T = [T_s]_{n+1} [T_f]_n \dots [T_f]_2 [T_s]_2 [T_f]_1 [T_s]_1 \{\delta_1^l \quad \psi_1^l \quad M_1^l \quad Q_1^l\}^T \quad (2)$$

## 2.1. Formulación de matriz de transferencia de campo

Como se ha mencionado en la introducción, se pueden presentar dos caminos para modelar cada campo.

### 2.1.1 Viga ideal de masa despreciable

Si se considera cada tramo de eje como una viga ideal de masa despreciable, las relaciones entre deformación y esfuerzos entre ambos extremos del campo, se pueden encontrar planteado los coeficientes de influencia que relacionan esfuerzos y deformaciones entre extremos de una viga, a partir de las expresiones tradicionales de la resistencia de materiales, esto permite armar el siguiente sistema de ecuaciones presentado matricialmente a continuación.

$$\begin{Bmatrix} \delta_{i+1}^L \\ \psi_{i+1}^L \\ M_{i+1}^L \\ Q_{i+1}^L \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \Delta z_i & \Delta z_i^2/2EI & -\Delta z_i^2/6EI \\ 0 & 1 & \Delta z_i/EI & -\Delta z_i/2EI \\ 0 & 0 & 1 & -\Delta z_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_i^R \\ \psi_i^R \\ M_i^R \\ Q_i^R \end{Bmatrix} = [T_i]_i \begin{Bmatrix} \delta_i^R \\ \psi_i^R \\ M_i^R \\ Q_i^R \end{Bmatrix} \quad (3)$$

Donde  $T_i$  es la matriz de campo,  $I$  es momento de inercia de la sección del eje,  $E$  es el módulo de elasticidad y los superíndices  $R$  y  $L$  indican derecha e izquierda del disco. El desarrollo de esta formulación se puede encontrar en algunos textos clásicos de dinámica de rotores [1,3].

### 2.1.2 Viga con distribución de masa continúa

En caso de considerar los campos como vigas de distribución de masa continua, se puede analizar cada tramo de eje a partir de la ecuación diferencial de vibraciones transversales de la viga, dicha expresión, considerando la teoría de Timoshenko [15], se escribe de la siguiente manera.

$$EI_i \frac{\partial^4 \delta_y}{\partial z^4} + \rho A \frac{d^2 \delta_y}{dt^2} - \rho I_i \left( 1 + \frac{E}{KG} \right) \frac{\partial^4 \delta_y}{\partial z^2 \partial t^2} + \left( \frac{\rho^2 I_i}{KG} \right) \frac{d^4 \delta_y}{dt^4} \quad (4)$$

Entonces se propone una solución como la siguiente, donde la deflexión a lo largo del eje es una serie de funciones trigonométricas.

$$\delta_y(z,t) = \delta_y(z) e^{i\omega t}, \text{ siendo } \delta_y(z) = A \cosh(\lambda_1 z) + B \sinh(\lambda_1 z) + C \cos(\lambda_2 z) + D \sin(\lambda_2 z) \quad (5)$$

Reemplazando en (4) se llega a una ecuación independiente del tiempo cuyas raíces son los valores de  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$ . Una vez obtenidas estas raíces, se puede escribir la expresión de la deflexión lateral y sus derivadas sucesivas, respecto de la ordenada a lo largo del eje, como función de los coeficientes  $A$ ,  $B$ ,  $C$  y  $D$ , obteniendo un vector de estado como el siguiente.

$$W = \left( \delta, \frac{\partial \delta}{\partial z}, \frac{\partial^2 \delta}{\partial z^2}, \frac{\partial^3 \delta}{\partial z^3} \right)^T \quad (6)$$

Este último se puede expresar para ambos extremos del tramo de eje mediante las ecuaciones lineales que representadas de forma matricial.

$$\begin{aligned} W_{z=0} &= [A_0] \{B\} \\ W_{z=L} &= [A_L] \{B\} \end{aligned} \quad (7)$$

Donde  $B = \{A, B, C, D\}$  es el vector de los coeficientes de la expresión (5) y las matrices de coeficientes  $A_0$  y  $A_L$  se obtienen de reemplazar en la expresión de  $\delta$  y de sus derivadas, los valores de  $z=0$  y  $z=L$ , siendo  $L$  es la longitud del tramo de eje considerado. Trabajando algebraicamente se llega a la ecuación siguiente.

$$W_{z=L} = [A_L] [A_0]^{-1} W_{z=0} \quad (9)$$

A partir de ecuación (9) la deflexión y sus derivadas a en un extremo del tramo de eje se pueden escribir como función las mismas variables del otro extremo. Recurriendo entonces a las relaciones entre dichas derivadas y el ángulo de giro  $\psi$ , el esfuerzo de corte  $Q$ , y el momento flector  $M_f$  para la sección de la viga presentadas a continuación, que se deducen de la teoría de vigas [15].

$$\begin{aligned} \frac{\partial \delta}{\partial z} &= \psi + \frac{Q}{KAG}; \\ \frac{\partial^2 \delta}{\partial z^2} &= \frac{M_f}{EI} + \frac{\rho}{KG} \frac{d^2 \psi}{dt^2}; \\ \frac{\partial^3 \delta}{\partial z^3} &= \frac{Q + I\rho(d^2\psi/dt^2)}{EI} - \frac{\rho}{KG} \left( \frac{d^2\psi}{dt^2} - \frac{1}{KAG} \frac{d^2Q}{dt^2} \right) \end{aligned} \quad (10)$$

Se puede plantear un sistema de ecuaciones que se presenta matricialmente como:

$$W = [F] \{S\} \quad (11)$$

Siendo  $S$  el vector formado por la deflexión lateral  $\delta$ , el ángulo de giro  $\psi$ , el esfuerzo de corte  $Q$ , y el momento flector  $M_f$ , entonces despejando:

$$S_{z=L} = [F]^{-1} [A_L] [A_0]^{-1} [F] S_{z=0} \quad (12)$$

De forma tal que este último sistema de ecuaciones, permite obtener los esfuerzos y desplazamientos en un extremo del tramo de eje como función del otro extremo, por lo que la matriz de transferencia del campo queda expresada:

$$[T] = [F]^{-1} [A_L] [A_0]^{-1} [F] \quad (13)$$

Tanto esta última expresión (13) para el modelo de eje con distribución continua de masa, como la expresión (3) del apartado anterior, se desarrollaron considerando que la deflexión se producía en una sola dirección y con ellos se llega a matrices de transferencia de 4x4. No obstante, se puede generalizar a un modelo de dos direcciones y se obtendrán matrices de 8x8 o de 16x16 elementos.

## 2.2. Formulación de la matriz de transferencia de una estación

Para obtener las matrices de transferencia de cada disco o estación, algunos autores plantean la energía cinética del disco y usan el principio de Hamilton [10]. Otros, en cambio plantean las ecuaciones clásicas de movimiento de un cuerpo rígido expresando el momento cinético en un sistema solidario al disco [5]. Partiendo de esta manera, considerando el efecto giroscópico y la masa del disco, se puede llegar a un sistema de ecuaciones que permite obtener una matriz de transferencia relativamente simple para el disco [1,8].

$$\begin{Bmatrix} \delta_i^L \\ \psi_i^L \\ M_i^L \\ Q_i^L \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \Omega\omega - I_p\omega^2 & 1 & 0 \\ -m_t\omega^2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_i^R \\ \psi_i^R \\ M_i^R \\ Q_i^R \end{Bmatrix} = [T_f]_i \begin{Bmatrix} \delta_i^R \\ \psi_i^R \\ M_i^R \\ Q_i^R \end{Bmatrix} \quad (3)$$

Donde  $\omega$  es velocidad de rotación,  $I$  es momento de inercia de masa del disco respecto al eje de giro,  $I_p$  es el momento de inercia del disco respecto a un eje perpendicular al de giro,  $\omega_c$  es la velocidad crítica y los superíndices  $R$  y  $L$  indican derecha e izquierda del disco.

## 3. IMPLEMENTACIÓN Y VALIDACIÓN

La implementación de los algoritmos de cálculo a partir de las ecuaciones del apartado anterior se desarrolló en lenguaje Pascal con un programa orientado a objetos llamado Delphi®. Esto permite obtener un entorno amigable con botones y pantallas de fácil manejo similares a todos los programas de uso comercial.

Se analizaron tres variantes distintas para la formulación de las matrices de transferencia, todas ellas considerando una única dirección de movimiento. La primera, llamada Formulación 1, había sido desarrollada previamente [13, 14], consideraba tramos de viga ideal, sin masa, vinculadas por discos rígidos y constituye una variante del algoritmo de Myklestad que puede incluir, o no, los efectos giroscópicos dependiendo de los datos disponibles del rotor.

La segunda variante (Formulación 2) es similar a la anterior, pero se incluye la masa de los tramos de eje como una masa adicional en cada estación, a los efectos de mejorar la aproximación. Para

ello se realiza un cálculo en base a los diámetros de cada tramo de eje para determinar la masa del campo que luego se añade en forma repartida a las estaciones adyacentes.

Por último, la tercera variante del método implementada (Formulación 3), reemplaza las matrices de transferencia de campo descriptas por la expresión (3), por las descriptas por la expresión (13) para considerar una distribución de masa continua.

A los efectos de comparar cada variante del método, se programó una rutina o función para cada formulación. Dicha función o algoritmo realiza, a partir de los datos de los ejes, los cálculos para determinar todas las matrices de campo y estación, luego determina la matriz de transferencia de todo el eje y arroja como resultado del determinante de la matriz de los coeficientes (matriz de transferencia de todo el sistema) que previamente es simplificada considerando las condiciones de contorno de los extremos del rotor [16]. Luego se emplea un segundo programa de búsqueda de las velocidades críticas, que encuentra los ceros de esa función por un algoritmo de determinación de raíces basado en el método de la secante. El mismo programa de búsqueda de ceros se usó en los tres casos.

Para poder comparar los resultados de las tres formulaciones, se modelaron rotores extraídos de la literatura [9, 16] cuyas velocidades críticas eran conocidas y habían sido determinadas de forma analítica y por el método de los elementos finitos. Se compararon las diferencias en las velocidades críticas con la determinación por elementos finitos y la analítica, cuando estaba presente, y el tiempo que tardaba en encontrar las raíces en cada caso.

#### 4. RESULTADOS Y DISCUSIÓN

En la tabla 1 se muestran las primeras cinco velocidades críticas para cuatro rotores distintos, que fueron determinadas por las 3 formulaciones descriptas en el apartado anterior. En la última columna esta el tiempo total de cálculo que le tomo a un sólo núcleo de una CPU Intel (R) Core I5-2450M 2,5Ghz determinar esas velocidades con los algoritmos desarrollados trabajando con una carga de trabajo equivalente.

A los efectos de validar los resultados se usaron 4 rotores analizados en la bibliografía consultada [9,16]. Los rotores 1 y 2 habían sido modelados analíticamente y por elementos finitos por Jong-Shyong Wu [9], el primero tenía un solo disco central, el segundo tres discos equiespaciados y en ambos casos estaban simplemente apoyados. Los rotores 3 y 4 eran idénticos pero con distintas condiciones de contorno y fueron modelados por Elementos Finitos y por el Método de la Matriz de transferencia pero considerando dos direcciones [16].

Tabla 2. Comparativa con métodos analíticos y de Elementos Finitos

		1	2	3	4	5	T [s]
Rotor 1	Método analítico [9]	63.9603	401.5251	1139.5836	1232.5813	3601.9354	
	Elementos Finitos [9]	63.9603	401.5251	1139.5838	1232.5815	3601.9431	
	Formulación 1	68.9591	459.7475	N/D	N/D	N/D	11.9
	Formulación 2	64.3258	404.1377	1147.7004	1242.1106	3568.2248	91.5
	Formulación 3	63.9657	401.3707	1135.2378	1227.9709	3566.466	339.4
Rotor 2	Método analítico [9]	75.3973	290.8641	611.9586	958.4773	1288.8920	
	Elementos Finitos [9]	75.3973	290.8691	611.9586	958.4773	1288.8920	
	Formulación 1	83.8904	320.7843	664.2700	1009.4533	1331.5348	34.0
	Formulación 2	75.8409	292.5453	615.3369	966.2243	1299.5088	33.5
	Formulación 3	75.3722	290.4925	610.1941	957.7185	1283.3027	120.6
Rotor 3	Matriz de Transferencia en dos direcciones [16]	57.3303	108.1611	268.9405	281.6411	467.3322	
	Elementos Finitos [16]	57.3303	108.1651	268.9206	281.6434	467.3489	
	Formulación 1	59.2768	108.0635	288.6924	318.9408	N/D	8.9
	Formulación 2	52.8469	104.9366	271.0061	280.9743	464.8919	13.6
	Formulación 3	52.9560	104.5257	267.6843	278.2080	466.0191	45.9
Rotor 4	Matriz de Transferencia en dos direcciones [16]	97.0301	131.5889	293.7608	317.5620	751.8541	
	Elementos Finitos [16]	97.0273	131.5916	293.7228	317.5617	751.9331	
	Formulación 1	102.2450	131.0377	323.5975	370.4084	814.8455	20.2
	Formulación 2	94.2698	128.9405	296.2526	317.6587	751.1779	18.9
	Formulación 3	98.7897	128.3091	291.7871	313.9638	744.5564	68.4

Como se puede apreciar de los resultados hasta aquí obtenidos la formulación 3 que considera la masa del eje distribuida es la que más se aproxima a los resultados de elementos finitos y a la formulación analítica. No obstante la formulación 2 que incorpora la masa de los tramos de eje en cada estación entrega una buena aproximación en la mayoría de los casos. La formulación 1 entrega resultados que se alejan bastante de las restantes e incluso no logra encontrar algunas de las velocidades críticas. En contrapartida la formulación 3 utiliza entre 3 y 4 veces más tiempo de cálculo que las restantes dado que para cada campo debe completar 4 matrices y multiplicarlas entre sí, cosa que no ocurre en los otros dos casos.

[www.caim2018.com.ar](http://www.caim2018.com.ar)

En general, en la literatura consultada [1, 6,12] para modelar la respuesta al desbalance y el comportamiento cuando varía la rigidez de los cojinetes se emplea una formulación como la descrita en el apartado 2.1.1. Para poder incluir el efecto de la desalineación [10, 11] o poder modelar orbitas [2] se emplea una formulación en dos direcciones similar a la del apartado 2.1.2. No obstante, ninguno de los autores especifica porque elige un camino u otro. Por último, para el caso de fisuras en ejes se encontraron trabajos usando ambos caminos [12,17].

## 5. CONCLUSIONES

La formulación del Método de la Matriz de Transferencia, empleando la ecuación diferencial de la viga de Timoshenko para hallar la matriz de campo, es la más precisa, pero emplea 3 veces más tiempo de cálculo. El modelo de viga ideal es más simple matemáticamente y requiere menos recursos, pero arroja resultados erróneos después de la tercera velocidad crítica.

El modelo de viga ideal incluyendo la masa de cada tramo del eje como masa repartida en las estaciones adyacentes es una buena alternativa porque los resultados son aceptables y emplea menos recursos.

En futuros trabajos se pueden analizar los resultados de modelar desbalance o desalineación por las tres formulaciones estudiadas.

## 6. REFERENCIAS

- [1] Vance, J. M. *Rotordynamics of Turbomachinery*, Jhon Willey & Sons, New York, 1988.
- [2] Sheng-Chung Hsieh, Juhn-Horng Chen, An-Chen Lee. *A modified transfer matrix method for the coupling lateral and torsional vibrations of symmetric rotor-bearing systems*, Journal of Sound and Vibration, Vol. 289, pp 294-333, 2006.
- [3] Meirovitch, L. *Analytical Methods in Vibrations*, The Macmillan Company, Londres, 1967.
- [4] Murphy, B.T. , Vance, J. M. *An improved method for calculating critical speeds and rotordynamic stability of turbomachinery*, Transactions of the ASME- Journal of Engineering for Power, vol. 105, pp 591-595, 1983.
- [5] Ghasemalizadeh, O., Reza Mirzaee, M., Sadeghi, H., Taghi Ahmadian, M. *Rotor bearing System Analysis Using the Transfer Matrix Method with Thickness Assumption of Disk and Bearing*, International Journal of Mechanical, Industrial and Aerospace Engineering, Vol. 2, N° 4, pp 206-213, 2008.

- [6] Varney, P., Green, I. *Rotordynamic analysis using the Complex Transfer Matrix: An application to elastomer supports using the viscoelastic correspondence principle*. Journal of Sound and Vibration, Vol. 333, pp 6258-6272, 2014.
- [7] Sung Jun, O. *Influence coefficients on rotor having thick shaft elements and resilient bearings*. Journal of Sound and Vibration, Vol. 272, pp 657-673, 2004.
- [8] Farshidianfar, A., Soheili, S. *Effects of Rotary Inertia and Gyroscopic Momentum on the Flexural Vibration of Rotating Shafts Using Hybrid Modeling*, Transaction B: Mechanical Engineering, Vol. 16, N° 1, pp. 75-86, 2009.
- [9] Jong-Shyong Wu, Fong-Tang Lin, Huei-Jou Shaw. *Analytical Solution for Whirling Speeds and Mode Shapes of a Distributed-Mass Shaft With Arbitrary Rigid Disks*, Journal of Applied Mechanics, Vol. 81, N° 3, 034503: 10 pág. 2014.
- [10] Chao-Yang Tsai, Shyh-Chin Huang. *Transfer matrix for rotor with parallel misalignment*. Journal of Mechanical Science and Technology, Vol. 23, pp 1383-1395, 2009.
- [11] Chao-Yang Tsai, Shyh-Chin Huang. *Vibrations of a rotor system with multiple coupler offsets*. Transactions of the Canadian Society for Mechanical Engineering, Vol. 35, N° 1, pp 81-100, 2011.
- [12] Green, I & Casey, C. *Crack Detection in a Rotor Dynamic System by vibration Monitoring- Part I: Analysis*, Journal of Engineering for gas turbines and Power, Vol. 127, pp 425-436, 2005.
- [13] Violante, D., Palmieri, F., Klempnow, A. *Aplicación del método de la matriz de transferencia para la determinación de las formas modales y velocidades críticas en rotores flexibles*, III CAIM, Ciudad de Buenos Aires, Argentina, del 2 al 5 de octubre de 2012.
- [14] Violante, D., Palmieri, F., Klempnow, A. *Análisis de variaciones de las velocidades críticas de un rotor producto de cambios de rigidez de los cojinetes*, V CAIM, Santiago del Estero, Argentina, del 5 al 7 de Octubre de 2016.
- [15] Timoshenko, S. *Vibrations problems in engineering*, D. Van-Nostrand C. New York, 1937.
- [16] Jong-Shyong Wu, Chin-Tzu Chen. *A lumped-mass TMM for free vibration analysis of a multi-step Timoshenko beam carrying eccentric lumped masses with rotary inertias*, Journal of Sound and Vibration, Vol. 301, pp 878–897, 2007.
- [17] T.C. Tsai, Y.Z. Wang. *Vibration analysis and diagnosis of a cracked shaft*, Journal of Sound and Vibration, Vol. 192, N° 3, pp 607-620, 1996.