



Doctorado en Ingeniería

Tesis de Doctorado

Desarrollo de dispositivos de tecnología piezoeléctrica para la recolección de energía en pavimentos

Autor

Ing. Santiago Manuel Osinaga

Director

Dr. Sebastián Pablo Machado

Codirector

Dr. Mariano Febbo

Bahía Blanca | 31 de octubre del 2022

PREFACIO

Esta tesis se presenta como parte de los requisitos para optar al grado Académico de Doctor en Ingeniería de la Universidad Tecnológica Nacional Facultad Regional Bahía Blanca (UTN FRBB) y no ha sido presentada previamente para la obtención de otro título en esta Universidad u otra. La misma contiene los resultados obtenidos en investigaciones llevadas a cabo en el ámbito del Grupo de Investigación en Multifísica Aplicada (GIMAP), durante el período comprendido entre el 1 de Abril de 2018 y el 31 de octubre del 2022, bajo la dirección del Dr. Ing. Sebastián Pablo Machado, Profesor Asociado de la cátedra Mecánica de los Fluidos de la carrera Ingeniería Mecánica de la UTN FRBB, e Investigador Independiente del Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET), y la co-dirección del Dr. Lic. Mariano Febbo, Profesor Asociado de las cátedras Dinámica Analítica y Mecánica, de la carrera Licenciatura en Física de la Universidad Nacional del Sur (UNS) e Investigador Independiente del CONICET.

Osinaga, Santiago Manuel

DNI: 38230896

Bahía Blanca, Buenos Aires, Argentina

AGRADECIMIENTOS

En primer lugar me gustaría agradecer a mis directores: el Dr. Sebastián Machado y el Dr. Mariano Febbo, por su motivación y consejos durante mis primeros pasos en el camino de la investigación científica.

Al *Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas*, por haber financiado mis estudios de doctorado y a la *Universidad Tecnológica Nacional Facultad Regional Bahía Blanca*, por aceptarme como parte de su alumnado y brindarme las instalaciones donde he trabajado.

A mis amigos y compañeros del *Grupo de Investigación de Multifísica Aplicada*: Martín, José, Julián, Franco, Claudio, Nicolás, Lisandro, Lucas, Augusto y Facundo, por todas las horas de laboratorio compartidas y por su ayuda totalmente desinteresada para resolver cualquier dificultad que se me haya presentado.

A mi profesora y amiga Made, por su increíble dedicación, profesionalidad, paciencia y afecto durante este tiempo.

A mi familia, mis hermanos Agus y Nacho, mi cuñada Meli y mi sobrino Nahi, quienes quiero con todo mi corazón, por su apoyo incondicional, tolerancia y cariño que siempre me brindaron.

A mis padres Cecilia y Guillermo, por levantarme cuando más lo necesité, escuchándome y dándome con las palabras justas que necesitaba escuchar con el amor que siempre los caracterizó, haciendo que todo esto fuera posible.

RESUMEN

En la última década, la recolección de energía o *energy harvesting*, por su nombre en inglés, ha ganado gran popularidad en el entorno de las energías renovables adoptadas a escala micro. Dentro de este contexto, la generación de energía eléctrica a partir de pequeñas variaciones energéticas como: presión, vibraciones mecánicas, gradientes térmicos o radiofrecuencias, es posible mediante diferentes mecanismos de transducción tales como el piezoeléctrico, el electromagnético, el termoeléctrico, entre otros. En particular, el efecto piezoeléctrico ha sido uno de los que recientemente más atención ha atraído a la comunidad científica debido a sus beneficios asociados a una mayor densidad de potencia y su capacidad de generar energía de manera espontánea.

Entre las distintas posibles fuentes de aplicación, las carreteras y calles fabricadas con mezclas asfálticas u hormigón se encuentran continuamente expuestas a cargas térmicas causadas por la radiación solar y fricción, así como cargas dinámicas, producto de las fuerzas verticales desarrolladas por los vehículos circulantes. Esta enorme cantidad de energía, disipada sin ser aprovechada, puede ser convertida en electricidad para la iluminación o el monitoreo estructural de la infraestructura de transporte.

Con el propósito de alcanzar una circulación de vehículos más segura, la Organización Mundial de la Salud (OMS) propone al control de la velocidad como el factor más contribuyente para evitar o disminuir los accidentes de tránsito. Entre la gran cantidad de formas de lograr esto, la implementación de reductores de velocidad es probablemente una de la más utilizadas debido a su probada efectividad. Los reductores consisten en elementos que sobresalen del pavimento y producen un malestar cuando son atravesados a una velocidad mayor a la de diseño, obligando al conductor a reducir su velocidad. De esta forma, los reductores desarrollan importantes fuerzas verticales debido a su perfil geométrico, haciéndolos especialmente atractivos para aplicaciones de recolección de energía.

En este contexto, en esta tesis se estudia la posibilidad de recolectar energía empleando la transducción piezoeléctrica a partir de las vibraciones inducidas en reductores de velocidad al ser atravesadas por un vehículo. Para ello, se desarrolla un modelo matemático no lineal de una viga piezoeléctrica bi-empotrada sometida a una carga axial tanto en sus estados de pre-pandeo como de pos-pandeo. Además, se modela y simula la interacción vehículo-pavimento con el propósito de caracterizar la excitación sobre el dispositivo recolector de energía. Se analiza la influencia de una gran cantidad de parámetros que intervienen tanto en el modelo matemático como en la dinámica de interacción vehículo-reductor-recolector de energía. En función de los estudios realizados, la viga en el estado de pre-pandeo presenta algunas ventajas en comparación con el resto de los sistemas analizados.

ABSTRACT

In the last decade, *energy harvesting* has gained great popularity in the field of renewable energies adopted at a micro scale. In this context, the generation of electrical power from small energy variations such as: pressure, mechanical vibrations, thermal gradients or radio frequencies, is possible through different transduction mechanisms as piezoelectric, electromagnetic, and thermoelectric, among others. In particular, the piezoelectric effect has recently attracted the most attention in the scientific community due to its benefits associated with higher power density levels and its ability to spontaneously generate energy.

Among the different possible application, roads and streets built with asphalt mixtures or concrete are continuously exposed to thermal loads caused by solar radiation and friction, as well as to dynamic loads, as a result of the vertical forces developed by passing vehicles. This enormous amount of energy, dissipated without being used, can be converted into electricity for lighting or structural health monitoring of transportation infrastructure.

In order to achieve safer vehicle traffic, the World Health Organization (WHO) proposes speed control as the most contributing factor to avoid or reduce traffic accidents. Among the large number of ways to achieve this, the implementation of speed bumps is probably one of the most used due to its proven effectiveness. Reducers consist of elements that protrude from the pavement and cause discomfort when they are crossed at a speed greater than the designed one, forcing the driver to decelerate. Due to their geometric profile, they develop significant vertical forces, which make them especially attractive for energy harvesting applications.

In this context, this thesis studies the possibility of harvesting energy using piezoelectric transduction from the vibrations induced in speed reducers when they are crossed by a vehicle. In order to attain this, a nonlinear mathematical model of a clamped-clamped piezoelectric beam subjected to an axial load, in both its pre-buckling and post-buckling states, is developed. In addition, the vehicle-pavement interaction is modeled and simulated in order to characterize the excitation on the energy harvester device. The influence of a large number of parameters that intervene, both in the mathematical model and in the dynamics of the vehicle-reducer-harvester interaction, is analyzed. Based on the studies carried out, the beam in the pre-buckling state presents some advantages compared to the other systems analyzed.

ÍNDICE GENERAL

1. Introducción	23
1.1. Objetivo	25
1.2. Contenido	25
2. Piezoelectricidad	27
2.1. Materiales piezoeléctricos	27
2.2. Ecuaciones constitutivas	30
2.3. Actuadores piezoeléctricos	36
3. Estado del arte de la recolección de energía en pavimentos	41
3.1. Energía solar	41
3.2. Energía térmica	43
3.3. Energía mecánica	45
3.4. Discusión final	55
4. Formulación matemática	61
4.1. Antecedentes	62
4.2. Ecuaciones electromecánicas	71
4.3. Consideraciones previas a la resolución del modelo	75
4.4. Modelo electromecánico en estado de pre-pandeo	84
4.5. Modelo electromecánico en estado de pos-pandeo	87
4.6. Solución reducida por método de perturbación	92
5. Verificación numérica y validación experimental	99
5.1. Verificación numérica	99
5.2. Validación experimental	110
5.3. Importancia de la consideración de términos no lineales	127
6. Modelo interacción vehículo-pavimento	131
6.1. Formulación matemática	132
6.2. Simulaciones y resultados numéricos	143
7. Aplicación a la recolección de energía	153
7.1. Consideraciones sobre la forma de onda de la generación	153
7.2. Estudios numéricos	157
8. Conclusiones	165
Bibliografía	169
A. Evaluación de materiales libres de plomo de origen nacional para generación de energía	187
A.1. Proceso de conformación de la muestras	187
A.2. Métodos de caracterización de las muestras	189
A.3. Evaluación para la recolección de energía	191
B. Formas constitutivas materiales piezoeléctricos	197
C. Ecuaciones electromecánicas de Euler-Lagrange	199

ÍNDICE DE FIGURAS

1.1.	Procesos involucrados en la recolección de energía.	23
2.1.	Representación gráfica de la estructura <i>perovskita</i> cúbica ABO_3 [24].	28

2.2.	Direcciones que afectan a los elementos piezoeléctricos tomando eje z coincidente con la dirección de polarización.	31
2.3.	Modos de generación de energía (a) d_{33} y (b) d_{31} .	35
2.4.	Configuraciones (a) unimorfa y (b) bimorfa con conexión en paralelo y (c) bimorfa con conexión en serie.	35
2.5.	Piezocerámicas tipo bulk fabricados por <i>Beijing Ultrasonic</i> [45].	36
2.6.	Transductores (a) <i>moonie</i> , (b) <i>cymbal</i> y (c) <i>bridge</i> .	37
2.7.	Actuador de electrodos interdigitados fabricado por <i>Smart Materials: Macro Fiber Composite (MFC)</i> [50].	38
2.8.	Modos de generación (a) d_{33} y (b) d_{31} para diferentes actuadores fabricados por <i>Smart Materials: Micro Fiber Composite (MFC)</i> .	38
2.9.	Piezostacks fabricados por (a) <i>PiezoTechnics</i> [51], (b) <i>PiezoDrive</i> [52], (c) <i>PI Ceramics</i> [53] y (d) <i>Pant</i> [54].	39
2.10.	Piezocomposites fabricados por <i>Advanced Cerametric Inc.</i> (a) Esquema constructivo, (b) Imágenes obtenidas con microscopio electrónico de barrido (SEM).	39
2.11.	Piezocomposites fabricados por (a) <i>APC - American Piezo</i> [55] y (b) <i>CeramTec</i> [56].	40
3.1.	Vista aérea de los paneles solares colocados en la ciudad de Oregon [71]: (a) prueba de valor de 594 celdas (b) estación solar <i>Baldock</i> .	41
3.2.	Recolectores solares para pavimentos desarrollados por (a) <i>Solar Roadways</i> [72] y (b) <i>Solaroad</i> [73] y (c) <i>Wattway</i> [74].	42
3.3.	Esquema del sistema de enfriamiento del pavimento combinando CSA y GTE presentado Hasebe y col. [80].	44
3.4.	GTE para la REPa propuesto por Tahami y col. [83].	44
3.5.	GEM desarrollados para la RE del caminar humano: (a) prototipo propuesto por Liu y col. [94], (b) <i>Pavegen</i> [95].	46
3.6.	GEM desarrollados para la REPa en reductores de velocidad (a) Generador lineal propuesto por Pirisi y col. [98], (b) Modelo de medio vehículo utilizado por Wang y col. [99], (c) prueba piloto llevada a cabo por Duarte y col. [100] en conjunto con la compañía <i>Waydip</i> [101] y (d) ensayo de laboratorio del recolector propuesto por Gholikhani y col. [102].	47
3.7.	Transductores <i>cymbals</i> propuestos para la REPP: (a) común [117], (b) ranurado radialmente [118], (c) ranurado circunferencialmente [119], (d) <i>unimorph</i> [120, 121] ,y (e) con capas radiales [122].	50
3.8.	Transductores <i>bridge</i> propuestos para la REPP: (a) <i>trapezoidal</i> [127], (b) <i>arc</i> [128], (c) <i>arch</i> [129], (d) electrodos segmentados [125, 130].	51
4.1.	Representación adimensional de la respuesta en frecuencia de un recolector de energía en régimen lineal.	61
4.2.	Funciones de (a) fuerza restauradora y (b) energía potencial para diferentes dispositivos de REP basados en vibración.	62

4.3.	Representación esquemática de la solución al primer modo de pandeo para una viga bi-empotrada. Líneas continuas representan soluciones estables mientras que discontinuas, inestables.	63
4.4.	Esquema del recolector piezoeléctrico tipo viga sometido a una carga axial.	71
4.5.	Representación esquemática de la condición de borde axial para el <i>Caso A</i>	77
4.6.	Representación esquemática de la condición de borde axial para el <i>Caso B</i>	78
4.7.	Representación esquemática de la condición de borde axial para el <i>Caso C</i>	80
5.1.	Muestras ensayadas (a) Muestra 1 (MFC 2814-P2) en configuración biempotrada, (b) Muestra 1 en configuración cantilever, (c) Muestra 2 (MFC 8507-P2) en configuración biempotrada.	100
5.2.	Comparativa entre soluciones obtenidas por Método de Escalas Múltiples (MEM) frente a la integración numérica de las ecuaciones (RK: Runge-Kutta). Respuestas en frecuencia de la amplitud para la Muestra 1 en la configuración cantilever. (a) Desplazamiento, (b) Generación de voltaje. Líneas discontinuas y continuas representan contribución de uno y tres armónicos respectivamente.	102
5.3.	Comparativa entre soluciones obtenidas por Método de Escalas Múltiples (MEM) frente a la integración numérica de las ecuaciones (RK: Runge-Kutta). Respuestas temporales para la Muestra 1 en la configuración cantilever ($\omega_n = 28\text{Hz}$) para: (a) $\Omega = 25\text{Hz}$ y $G = 1,4\text{g}$; (b) $\Omega = 28\text{Hz}$ y $G = 1,4\text{g}$; (c) $\Omega = 28\text{Hz}$ y $G = 5\text{g}$	104
5.4.	Comparativa entre soluciones obtenidas por Método de Escalas Múltiples (MEM) frente a la integración numérica de las ecuaciones (RK: Runge-Kutta). Respuestas de amplitud en frecuencia para la Muestra 1 en la configuración biempotrada (Régimen de pre-pandeo, $P = 104\text{N}$). (a) Desplazamiento, (b) Generación de voltaje. Líneas discontinuas y continuas representan superposición de uno y tres armónicos respectivamente.	105
5.5.	Comparativa entre soluciones obtenidas por Método de Escalas Múltiples (MEM) frente a la integración numérica de las ecuaciones (RK: Runge-Kutta). Respuestas de amplitud en frecuencia para la Muestra 2 en la configuración biempotrada (Régimen de pre-pandeo, $P = 35,5\text{N}$). (a) Desplazamiento, (b) Generación de voltaje. Líneas discontinuas y continuas representan superposición de uno y tres armónicos respectivamente.	106

5.6.	Comparativa entre soluciones obtenidas por Método de Escalas Múltiples (MEM) frente a integración numérica de las ecuaciones (RK: Runge-Kutta). Respuestas temporales para la Muestra 1 en la configuración biempotrada, ($\omega_n = 137\text{Hz}$, Régimen de pre-pandeo, $P = 104\text{N}$) para $\Omega = 128\text{Hz}$ y $G = 5\text{g}$	107
5.7.	Comparativa entre soluciones obtenidas por Método de Escalas Múltiples (MEM) frente a integración numérica de las ecuaciones (RK: Runge-Kutta). Respuestas de amplitud en frecuencia para la Muestra 2 en la configuración biempotrada (Régimen de pos-pandeo, $P = 80,5\text{N}$). (a) Desplazamiento, (b) Generación de voltaje. Líneas discontinuas y continuas representan suposición de uno y tres armónicos respectivamente.	108
5.8.	Comparativa entre soluciones obtenidas por Método de Escalas Múltiples (MEM) frente a integración numérica de las ecuaciones (RK: Runge-Kutta). Respuestas temporales para la Muestra 2 en la configuración biempotrada ($\omega_n = 90\text{Hz}$, $P = 80,5\text{N}$) para $\Omega = 85\text{Hz}$ y $G = 2\text{g}$	109
5.9.	Configuración experimental. (a) Esquema completo. (b) Vista detallada de la muestra.	111
5.10.	Configuraciones de pos-pandeo (líneas continuas) contra su configuración no pandeada (líneas discontinuas) de las Muestras (a) 1 y (b) 2.	112
5.11.	Representación adimensional de la variación frecuencia natural fundamental de una viga producto de una carga axial. Las líneas de puntos indican los niveles de carga axial objetivo que serán ensayados, que involucran estados en condición de pre- y pos-pandeo con iguales frecuencias naturales.	113
5.12.	Resultados del ajuste por mínimos cuadrados para la identificación del amortiguamiento modal lineal. Muestra 1 en configuración cantilever. ($\zeta_1 = 0,00923$).	114
5.13.	Amortiguamiento modal lineal identificado para distintos valores de la carga axial P para las Muestras (a) 1 y (b) 2.	115
5.14.	Rol de la constante k en (a) coeficiente de la no linealidad geométrica, líneas punteadas denotan los valores de $EA/2L^{eff}$ como caso extremo B ; y (b) relación entre la carga axial efectiva P_0 aplicada a la viga comparada con la real P	116
5.15.	Comparativas de la FRFs predichas numéricamente frente a resultados experimentales correspondientes a la Muestra 2 para (a) $P = 0$ (b) $P = 36\text{N}$. Niveles de excitación: $0,2\text{g}$, $0,5\text{g}$, 1g , $1,4\text{g}$ y 2g . $k_c = 5,5 \times 10^5$ para el Caso C.	117

5.16.	Comparativas de la FRFs predichas numéricamente frente a resultados experimentales correspondientes a la Muestra 1 para (a) $P = 0$ (b) $P = 65\text{N}$. Niveles de excitación: 0,2g, 0,5g, 1g. $k_c = 5,5 \times 10^5$ para el Caso C.	119
5.17.	Diagramas de bifurcación tipo tridente del desplazamiento lateral evaluado a $x = L/2$ a medida que la carga axial es variada. Líneas continuas representan soluciones estables mientras que las discontinuas, inestables. Soluciones numéricas y experimentales para la (a) Muestra 1, (b) Muestra 2. (c) Representación adimensional de los diagramas de bifurcación perfectos e imperfectos para una viga pandeada para $a = P/P_{crit}$, $b = 1$ y $h = 0,05$ en la Ec. (5.3).	120
5.18.	Modificación de la frecuencia natural transversal para distintos valores de la carga axial P . (a) Muestra 1, (b) Muestra 2.	122
5.19.	Generación de voltaje para la Muestra 1 en configuración cantilever. Los puntos representan resultados experimentales mientras que líneas continuas, las predicciones de la solución reducida del MEM: (a) 0,05g y (b) 1g	123
5.20.	Generación de voltaje para la Muestra 2 en configuración biempotrada. Régimen monoestable. Los puntos representan resultados experimentales mientras que líneas continuas predicciones de la solución reducida del MEM: (a) $P_0 = 0$ y (b) $P_1 = 36\text{N}$.	124
5.21.	Generación de voltaje para la Muestra 2 en configuración biempotrada. Régimen biestable. Los puntos representan resultados experimentales mientras que líneas continuas predicciones de la solución reducida del MEM: (a) $P_2 = 81\text{N}$, (b) $P_3 = 95\text{N}$ y (c) $P_4 = 107\text{N}$.	126
5.22.	Influencia de los términos no lineales en el estado permanente de la respuesta dinámica de la (a) Muestra 1, configuración biempotrada en el estado de pre-pandeo ($P = 104\text{N}$, $G = 1,4\text{g}$). (b) Muestra 2 configuración biempotrada en el estado de pos-pandeo ($P = 107\text{N}$, $G = 2\text{g}$).	128
6.1.	Esquema representativo de los modelos de (a) cuarto y (b) medio vehículo de 2 y 4 GDL respectivamente.	132
6.2.	Esquema del modelo completo de vehículo de 7 GDL.	133
6.3.	Distribución de presión vertical del neumático en la dirección de movimiento.	139
6.4.	Modelo de cuarto de vehículo con reductor acoplado a reductor de velocidad móvil.	141
6.5.	Influencia del modelo de vehículo para reductor cóncavo en (a) desplazamiento vertical del vehículo, (b) desplazamiento del centro de la rueda y (c) fuerzas verticales totales. ($v_0 = 5\text{m/s}$).	145

6.6.	Influencia del modelo de vehículo para el reductor tipo trapecoidal en (a) desplazamiento vertical del vehículo x_v , (b) desplazamiento del centro de la rueda x_n y (c) fuerzas verticales totales F_v . ($v_0 = 5m/s$).	146
6.7.	Influencia de los parámetros del vehículo en la fuerza vertical total máxima para reductor cóncavo: (a) Masa del vehículo m_v , (b) Masa de la rueda m_n , (c) Rigidez suspensión k_s , (d) Amortiguamiento de la suspensión c_s y, (e) Rigidez del neumático k_n	148
6.8.	Influencia de los parámetros del vehículo en la fuerza vertical total máxima para reductor tipo trapecoidal: (a) Masa del vehículo m_v , (b) Masa de la rueda m_n , (c) Rigidez suspensión k_s , (d) Amortiguamiento de la suspensión c_s y, (e) Rigidez del neumático k_n	149
6.9.	Influencia de la longitud del parche de contacto a y velocidad del vehículo v_0 en las fuerzas verticales máximas para los reductores (a) cóncavo, (b) trapecoidal.	150
6.10.	Influencia de los parámetros dinámicos del vehículo y del reductor en las fuerzas verticales máximas para el reductor cóncavo. (a) altura máxima del perfil h_{max} - velocidad v_0 , (b) amortiguamiento c_r - rigidez k_r del reductor; y (c) x_t distancia tope y masa m_r del reductor.	151
6.11.	Influencia de los parámetros dinámicos del vehículo y del reductor en las fuerzas verticales máximas para el reductor tipo trapecoidal. (a) altura máxima del perfil h_{max} - velocidad v_0 , (b) amortiguamiento c_r - rigidez k_r del reductor; y (c) x_t distancia tope y masa m_r del reductor.	152
7.1.	Respuestas temporales típicas para la REPP de los (a) Desplazamientos, y (b) Voltaje generado.	154
7.2.	Esquemas de los circuitos eléctricos comúnmente acoplados a los materiales piezoeléctricos. (a) Rectificado, (b) Rectificado y filtrado, (c) Rectificado, filtrado y almacenamiento.	155
7.3.	Formas de onda (a) Generación, (b) Rectificado, (c) Rectificado y filtrado	156
7.4.	Estudio paramétrico $P - R$ del pico de voltaje. Reductor tipo trapecoidal. Estados de (a) pre-pandeo y (b) pos-pandeo. ($v_0 = 5m/s$).	157
7.5.	Estudio paramétrico $P - R$ del pico de potencia. Reductor tipo trapecoidal. Estados de (a) pre-pandeo y (b) pos-pandeo. ($v_0 = 5m/s$).	158
7.6.	Estudio paramétrico $P - R$ de la energía transferida. Reductor tipo trapecoidal. Estados de (a) pre-pandeo y (b) pos-pandeo. ($v_0 = 5m/s$).	159
7.7.	Estudio paramétrico $v_0 - R$ del pico de voltaje. Reductor tipo trapecoidal. Estados de (a) pre-pandeo con $P = 45N$ y (b) pos-pandeo con $P = 105N$	160

7.8.	Estudio paramétrico $v_0 - R$ del pico de potencia. Reductor tipo trapezoidal. Estados de (a) pre-pandeo con $P = 45\text{N}$ y (b) pos-pandeo con $P = 105\text{N}$	160
7.9.	Estudio paramétrico $v_0 - R$ de la energía transferida. Reductor tipo trapezoidal. Estados de (a) pre-pandeo con $P = 45\text{N}$ y (b) pos-pandeo con $P = 105\text{N}$	161
7.10.	Comparativas del rendimiento de los recolectores de energía óptimos en regímenes de pre- ($P = 45\text{N}$) y pos-pandeo ($P = 105\text{N}, R = 25\text{k}\Omega$): (a) Energía total en función de la velocidad; y formas de onda para (b) $v_0 = 6\text{m/s}$ y (c) $v_0 = 9\text{m/s}$	162
A.1.	(a) Preparación de reactivos, (b) Molino planetario de bolas <i>Fritsch Pulverisette 7 Classic Line</i>	187
A.2.	(a) Horno eléctrico <i>Indef 273</i> empleado para calcinación y sinterizado, (b) Prensa hidráulica utilizada para la conformación de las muestras.	188
A.3.	Proceso de polarización. (a) Tester de alta potencia <i>Vitretek V73</i> , (b) Muestra sometida a temperatura.	189
A.4.	Instrumental empleado (a) Analizador de rayos X <i>PANalytical X'pert Pro</i> , (b) Impedancímetro <i>Hewlett-Packard 4284A</i> , (c) Medidor de d_{33} <i>SINOCERA YE2730A</i>	190
A.5.	Obtención del modo de vibración a partir de <i>COMSOL</i> (a) Malla desarrollada, (b) Solución del primer modo de vibración.	193
A.6.	Ajuste por mínimos cuadrados para las muestras (a) BNKT (placa) y (b) KNL-NTS (disco).	193
A.7.	Densidad de potencia generada para distintos materiales sobre una $R = 248\text{k}\Omega$	194

ÍNDICE DE CUADROS

3.1.	Comparativa distintos transductores piezoeléctricos [110, 111]	48
3.2.	Comparativas de los diferentes mecanismos de transducción para la REPa en términos de Eficiencia, TRL y LCOE.	55
3.3.	Ventajas y desventajas asociadas a los diferentes mecanismo de transducción para la REPa.	57
4.1.	Formulaciones ideal y no ideales para una CB situada en $x = a$	68
4.2.	Valores elegidos para k_c y α pertenecientes al <i>Caso C</i> para recuperar los <i>Casos A</i> y <i>B</i>	81
5.1.	Parámetros geométricos y de materiales de las distintas muestras (BE: Biempotrada, C: Cantilever)	101
6.1.	Distintas funciones para representar perfiles de carretera.142	
6.2.	Valores asumidos para la simulación numérica de la interacción vehículo-pavimento, teniendo en cuenta un vehículo típico real.	144
A.1.	Dimensiones geométricas de las muestras elegidas para la evaluación de la recolección de energía.	192

A.2.	Valores caracterizados para las muestras libres de plomo de los resultados experimentales. Valores resaltados grises denotan aquellos obtenidos por mínimos cuadrados.	194
B.1.	Simbología utilizada para variables y parámetros constitutivos en materiales piezoeléctricos.	197

NOMENCLATURA

α	Factor reductor de la carga axial.
a_v	Aceleración del vehículo.
B	Densidad de flujo magnético.
β	Ángulo de fase asociado al problema de vibraciones libres.
c	Matriz de elasticidad.
c_1	Coefficiente del amortiguamiento lineal viscoso en la dirección axial.
c_{111p}	Constantes de elasticidad no lineales del piezoeléctrico.
c_{11s}, c_{11p}	Constantes de elasticidad lineales de la estructura y del piezoeléctrico respectivamente.
c_2	Coefficiente del amortiguamiento lineal viscoso en la dirección transversal.
c_3	Coefficiente del amortiguamiento no lineal cuadrático en la dirección transversal.
C_p	Capacidad equivalente del piezoeléctrico.
C	Matriz de amortiguamiento.
d	Matriz de acoplamiento piezoeléctrico.
D	Función de disipación.
D	Vector desplazamiento eléctrico.
E	Vector campo eléctrico.
E_3	Componente del campo eléctrico en la dirección z.
e	Matriz de acoplamiento piezoeléctrico.
e_{31}	Constante piezoeléctrica lineal en vigas.
e_{311}	Constante piezoeléctrica no lineal en vigas.
EA, EI	Rigideces seccionales axial y flexional lineales constitutivas.
EI_n, EJ_n	Rigideces seccionales axial y flexional no lineales constitutivas del piezoeléctrico.
ϵ	Matriz de permitividad eléctrica
ϵ_{33}	Constante dieléctrica piezoeléctrica en la dirección z.
ϵ	Parámetro de contabilidad (<i>bookkeeping parameter</i>).
F	Forzante modal.
F_v	Fuerzas verticales inducidas por el vehículo.
g	Matriz de acoplamiento piezoeléctrico.
$g(t)$	Excitación de base como función del tiempo.
γ	Ángulo de fase asociado al problema de vibraciones forzadas.
H_s, H_p	Ecuaciones de entalpía específica de la estructura y del piezoeléctrico respectivamente.
k_C	Constante elástica para la condición de borde axial.
K_C, K_C^s	Rigideces no lineales constitutiva.
K_G, K_G^s	Rigideces no lineales geométrica.

K	Matriz de rigidez.
L	Funcional Lagrangiano
L_j^{eff}	Longitud total efectiva de la viga asociado al j -ésimo tramo de la viga.
Λ	Función escalón.
m	Masa por unidad de longitud.
M	Matriz de masa.
μ_2	Amortiguamiento modal viscoso en la dirección transversal.
μ_3	Amortiguamiento modal cuadrático en la dirección transversal.
ν	Parámetro correspondiente a la inercia no lineal.
ν	Inercia no lineal modal.
ω	Frecuencia natural del sistema.
Ω	Frecuencia de excitación.
p	Potencia eléctrica
P	Carga axial estática.
ϕ_i	Modo de vibración asociado a la i -ésima frecuencia natural.
Φ	Flujo eléctrico.
Ψ_i	Acoplamientos electromecánicos constitutivamente no lineales.
ψ	Acoplamiento electromecánico lineal para la ecuación eléctrica.
ψ_G, ψ_G^s	Acoplamientos electromecánicos no lineales constitutivos para la ecuación eléctrica.
ψ_C, ψ_C^s	Acoplamientos electromecánicos no lineales geométricos para la ecuación eléctrica.
q	Desplazamiento generalizado.
\mathbf{q}	Matriz de acoplamiento piezoeléctrico.
q_0, q_1, q_2	Soluciones de desplazamiento asociado a las distintas escalas de tiempo.
R	Resistencia eléctrica.
s_v	Posición del vehículo en la dirección del movimiento.
\mathbf{s}	Tensor de flexibilidad mecánica.
\mathbf{S}	Tensor de deformaciones.
S_1	Componente de deformación en la dirección x .
ζ_j	Rigidez total efectiva asociada al j -ésimo tramo de la viga.
σ	Parámetro de sintonizador.
t	Coordenada temporal.
\mathbf{T}	Tensor de tensiones mecánicas.
T_0, T_1, T_2	Escalas de tiempo.
T_s, T_p	Energía cinética de la estructura y del piezoeléctrico respectivamente.
Θ_i	Acoplamientos electromecánicos constitutivamente lineales.
θ	Acoplamiento electromecánico lineal para la ecuación mecánica.
θ_G, θ_G	Acoplamientos electromecánicos no lineales geométricos para la ecuación mecánica.

θ_C, θ_C^s	Acoplamiento electromecánico no lineal constitutivo para la ecuación mecánica.
ϑ	Ángulo de rotación de la sección de la viga.
u	Desplazamiento axial.
\mathbf{u}	Vector desplazamiento.
U_s, U_p	Energía interna de la estructura y del piezoeléctrico respectivamente.
v	Voltaje en la resistencia eléctrica.
v_0, v_1, v_2	Soluciones de voltaje asociado a las distintas escalas de tiempo.
V_s, V_p	Volúmenes totales de la estructura y del piezoeléctrico respectivamente.
w	Desplazamiento transversal.
W_{nc}	Trabajo realizado por fuerzas no conservativas
w_s	Desplazamiento estático asociado al problema de pandeo.
x, y, z	Coordenadas espaciales.

GLOSARIO

AFAC	Asociación de Fabricas Argentinas de Componentes.
CA	Corriente Alterna.
CB	Condición de Borde.
CC	Corriente continua.
CEC	Comisión de Energía de California (<i>California Energy Commission</i>)
CSA	Colector solar asfáltico (<i>Asphalt Solar Collector</i>).
EDO	Ecuación Diferencial Ordinaria.
EDP	Ecuación a derivadas parciales.
FFT	Transformada rápida de Fourier (<i>Fast Fourier Transform</i>).
FHWA	Administración Federal de Carreteras (<i>Federal Highway Administration</i>)
FRF	Función de Respuesta en Frecuencia.
GDL	Grados de libertad.
GTE	Generador termoeléctrico.
GEM	Generador electromagnético.
IEEE	Instituto de Ingenieros Eléctricos y Electrónicos (<i>Institute of Electrical and Electronics Engineers</i>).
LCOE	Costo Nivelado de la Energía (<i>Levelized Cost Of Energy</i>).
MEF	Método de Elementos Finitos (<i>Finite Element Method</i>).
MEM	Método de Escalas Múltiples.
MFC	<i>Macro Fiber Composite</i>
MRUV	Movimiento Rectilíneo Uniformemente Variado.
PVA	Acetato de polivinilo
PVDF	Fluoruro de polivinilideno.
PZT	Titanato zirconato de plomo.
RE	Recolección de Energía.
REP	Recolección de Energía Piezoeléctrica.
REPa	Recolección de Energía en Pavimentos.
REPP	Recolección de Energía Piezoeléctrica en Pavimentos.

RK	Runge-Kutta.
SEM	Microscopio electrónico de barrido (<i>Scanning Electron Microscope</i>)
TEP	Toneladas Equivalentes de Petróleo.
TNO	Organización Holandesa de Investigación Científica Aplicada.
TRL	Nivel de madurez tecnológica (<i>Technology Readiness Levels</i>).

INTRODUCCIÓN

La cosecha o Recolección de Energía (RE), o también conocida por sus nombres en inglés como *energy harvesting* o *energy scavenging*, es el proceso por el cual diversos dispositivos o sistemas son capaces de capturar y transformar la energía presente en el medio ambiente en una forma aprovechable, generalmente eléctrica [1, 2]. Este proceso, es usualmente clasificado en dos grandes grupos conocidos como *macro-recolección de energía*, donde principalmente se identifican la recuperación de energía solar y eólica [3]; y por su contra partida, la *micro-recolección de energía*, generalmente asociada a aquella que involucra fuentes como las vibraciones mecánicas [4]. La principal diferencia entre estas dos radica en la cantidad de energía a ser capturada: mientras que la primera usualmente es del orden de los kJ o incluso más, la energía capturada en la micro-recolección de energía puede tomar valores incluso menores al Joule [5]. Pese a que los niveles energéticos en esta última clasificación resultan mínimos, la motivación del estudio de este tipo de dispositivos radica en la posibilidad de alimentar pequeños dispositivos electrónicos en vistas de su autonomía energética.

En las últimas décadas, el avance en la electrónica ha permitido reducir considerablemente los niveles de consumo de sensores tipo nodo para la medición de variables fundamentales como temperatura o deformaciones, comúnmente utilizados en monitoreo estructural [6]. Si bien estos dispositivos poseen un nivel de consumo y costo relativamente bajo, los mismos deben ser continuamente alimentados para su funcionamiento, es decir, que deben ser utilizados cables o baterías. Estas dos alternativas presentan problemas en términos de costos asociados al cableado y/o mantenimiento si se prevé el remplazo de baterías. En este contexto, la *micro-recolección de energía* emerge como una gran alternativa para dar solución al problema de la implementación de dispositivos capaces de recolectar pequeñas cantidades de energía y funcionar de forma autónoma.

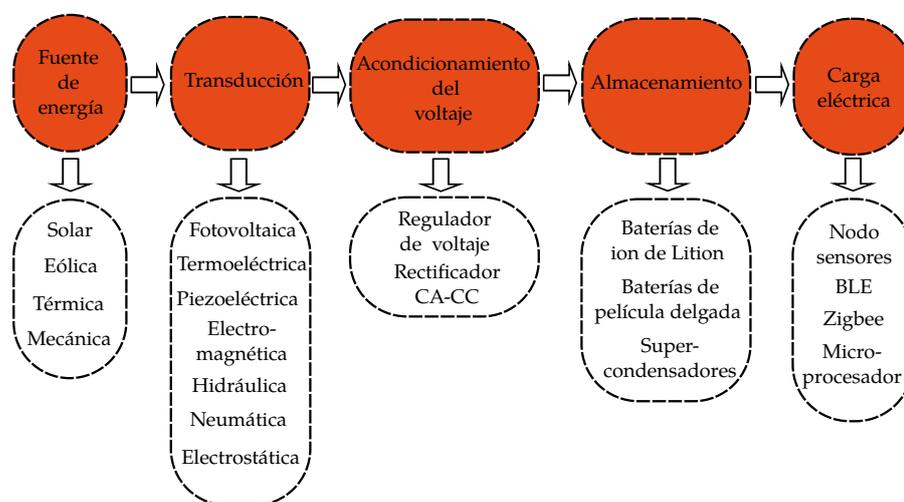


Figura 1.1: Procesos involucrados en la recolección de energía.

La energía mecánica se manifiesta en forma de vibraciones o tensiones.

Por lo general, la transducción hidráulica y neumática se acopla en conjunto con la electromagnética para la generación de energía eléctrica.

Un dispositivo autónomo de RE esta compuesto en su integridad por diversos bloques [7], cada uno cumpliendo un rol bien diferenciado tal como es representando en la Figura 1.1. De acuerdo a las características de cada bloque, diversas sub-clasificaciones pueden ser realizadas. Comenzando con la *fuerza de energía* a aprovechar, las más comúnmente exploradas son la solar [8], eólica [9], térmica [10] y mecánica [11]. Dependiendo de la fuente se emplean distintos tipos de mecanismos de *transducción*, entre los cuales se destacan la: fotovoltaica [12], termoeléctrica [13], piezoeléctrica [14], electromagnética [15], hidráulica [16], neumática y electrostática [17]. El siguiente bloque, referido como el *acondicionamiento del voltaje*, es opcional y depende de la selección anterior; aplica en los casos donde la salida de los mecanismos de transducción no proveen naturalmente una generación de corriente continua y/o generen picos de generación por encima de los operacionales y por lo tanto, deben ser acoplados a rectificadores y/o reguladores de voltaje. El siguiente bloque, y también opcional dependiendo de la aplicación, consiste en el *almacenamiento* de la energía recuperada, donde las baterías de litio o supercapacitores son generalmente las opciones preferidas dependiendo de las necesidades de alimentación. El último bloque de la cadena, lo conforma la *carga eléctrica*, la cual esta relacionado con el dispositivo electrónico de baja potencia a alimentar. Comúnmente, el modo de operación de estos dispositivos es solo activo durante un limitado período de tiempo, permitiendo de esta forma disminuir su consumo total de energía.

Dentro de diferentes técnicas de transducción utilizados para la RE, la piezoelectricidad es una de las técnicas más prometedoras para proveer pequeñas cantidad de energía a fines de suplir de potencia a sensores y dispositivos electrónicos en busca de sistemas autónomos reales [18]. Entre sus principales ventajas, destacan su alta densidad de energía, estructura relativamente simple y conversión directa a energía eléctrica [19].

Posibilidad de recolectar energía de pavimentos

Dentro de las obras civiles construidas por la humanidad a lo largo de su historia, las carreteras son sin duda unas de las de mayor envergadura, cumpliendo el rol fundamental de conectar comunidades para el movimiento de personas e intercambio de bienes de consumo. Solamente en Argentina, la totalidad de las redes de carreteras poseen aproximadamente 430.000 km lineales pavimentadas o asfaltadas, de los cuales: 27.000 km pertenecen a la red troncal primaria con jurisdicción nacional, 175.000 km provinciales y se estima que más 220.000 km municipales [20]. A su vez, acorde a la AFAC (Asociación de Fabricas Argentinas de Componentes), la flota circulante de vehículos en Argentina estaba conformada hasta el año 2020 con 14.564.842 vehículos [21], cantidad que viene aumentando año tras año. El balance energético de hidrocarburos del año 2020, elaborado por el Ministerio de Economía de nuestro país, mostró que más de 13 mil TEP (Toneladas Equivalentes de Petroleo), de las cuales 70 mil totales consumidas en el país, fueron por el sector transporte [22].

La gran cantidad de vehículos de transporte circulando por las carreteras, sumado a la exposición solar de la mayoría de ellas, implican cargas dinámicas y térmicas que el asfalto o pavimento debe soportar donde grandes cantidades de energía (en forma de energía cinética y calor) están involucradas. Esto

implica que existe un enorme potencial de energía lista para ser recolectada a través de diversas formas de transducción. En la actualidad, existen grandes avances en la tecnología de vehículos eléctricos que se conducen solos o asisten al conductor para estacionar sin necesidad de tocar el volante; sin embargo, las carreteras parecen no seguir el mismo ritmo evolutivo.

1.1 OBJETIVO

Dentro del contexto aquí presentado, como *objetivo general* de esta tesis se pretende diseñar, modelar matemáticamente y validar en forma experimental dispositivos capaces de recolectar energía mediante la transducción piezoeléctrica a partir de la deformación y vibración sufrida por el pavimento al pasar un vehículo.

1.2 CONTENIDO

La presente tesis se estructura de la siguiente forma: después del presente Capítulo 1 introductorio, el Capítulo 2 presenta los conceptos y definiciones básicas referidas a la piezoelectricidad, incluyendo los distintos tipos de materiales, ecuaciones constitutivas y modos de generación.

El Capítulo 3 describe el estado del arte actual de la Recolección de Energía en Pavimentos (REPa) con un especial énfasis en la transducción piezoeléctrica, mostrando las ventajas, desafíos y nivel de desarrollo actual de cada mecanismo.

En el Capítulo 4 se desarrolla la formulación matemática de un dispositivo electromecánico conformado por una viga biempotrada sometida a una carga axial. Diversas fuentes de no linealidad son incluidas en la formulación provenientes de la inercia, rigidez geométrica, relaciones constitutivas piezoeléctricas y disipación. Adicionalmente, las ecuaciones válidas tanto para los regímenes de pre- como pos-pandeo son obtenidas y una solución analítica reducida es formulada mediante el Método de Escalas Múltiples (MEM).

Seguido a esto, la validación numérica y experimental del dispositivo bajo estudio son llevadas a cabo en el Capítulo 5. La validación numérica, consiste en la comparación de la solución reducida obtenida en forma analítica frente a la integración numérica de las ecuaciones sin reducir. Por otro lado, la validación experimental se lleva a cabo en base a distintos ensayos de laboratorio estáticos y dinámicos, que luego son comparados con los predichos por la presente formulación evaluando su correspondencia.

Un modelo sencillo capaz de modelar la dinámica de la interacción de un vehículo atravesando un obstáculo o reductor de velocidad es presentado en el Capítulo 6. En este caso, distintos modelos de vehículos son considerados basados en la consideración de distintas cantidades de grados de libertad así como de perfiles de velocidad. Adicionalmente, la influencia de los parámetros más importante es estudiada y su rol en las fuerzas verticales máximas es determinada.

Luego, el Capítulo 7 acopla los modelos desarrollados en los Capítulos 4 y 6. con el objetivo de estudiar la posibilidad de recolectar energía a partir de la vibración inducida a un reductor de velocidad cuando un vehículo lo atraviesa.

Finalmente, el Capítulo 8 esboza las conclusiones y contribuciones más relevantes de la presente tesis, en conjunto con las publicaciones realizadas durante su desarrollo.

PIEZOELECTRICIDAD

El efecto piezoeléctrico (del griego *piezein*, «apretar») es la capacidad que presentan ciertos materiales de producir carga eléctrica o polarización como respuesta a una tensión mecánica. El fenómeno, descrito de esta forma, es conocido como el efecto piezoeléctrico *directo*, sin embargo, una de las características más importantes del mismo es su reversibilidad. Esto quiere decir, que si éstos son sometidos a una carga eléctrica, presentan una deformación mecánica, proceso que se conoce como efecto piezoeléctrico *inverso*.

La piezoelectricidad fue descubierta por los hermanos Jacques y Pierre Curie en el año 1880, quienes observaron que bajo tensión mecánica, cristales de cuarzo se cargaban eléctricamente por debajo de ciertos valores de temperatura. Dicha temperatura crítica es denominada temperatura de Curie, y es una propiedad intensiva a partir de la cual el material pierde sus propiedades piezoeléctricas. Existen varios materiales presentes en la naturaleza donde este fenómeno es observable (p. ej. la turmalina, la sal de La Rochelle y la caña de azúcar), sin embargo, su efecto piezoeléctrico es generalmente muy pequeño. Por ello, diversos materiales sintéticos han sido desarrollados para mejorar las propiedades piezoeléctricas de estos materiales.

Actualmente los materiales piezoeléctricos pueden ser encontrados en gran cantidad de aplicaciones de sensado y actuación, destacándose:

- Aislamiento de vibraciones.
- Detección de impactos.
- Acelerómetros.
- Encendedores.
- Zumbadores.
- Nano-posicionadores.
- **Recolección de energía.**

2.1 MATERIALES PIEZOELÉCTRICOS

Los materiales piezoeléctricos pueden ser divididos en tres grandes categorías: monocristalinos, cerámicos y polímeros [23]. La selección de un material frente a otro para una aplicación determinada depende de una gran cantidad de características, que van desde las características materiales, como es el grado de acoplamiento electromecánico, hasta otros como pueden ser los costos, impacto ambiental o riesgos de manipulación y fabricación.

2.1.1 Monocristalinos

Un monocristal es un material que presenta un red cristalina continua, es decir, sin ninguna interrupción producto de bordes de grano. En materiales

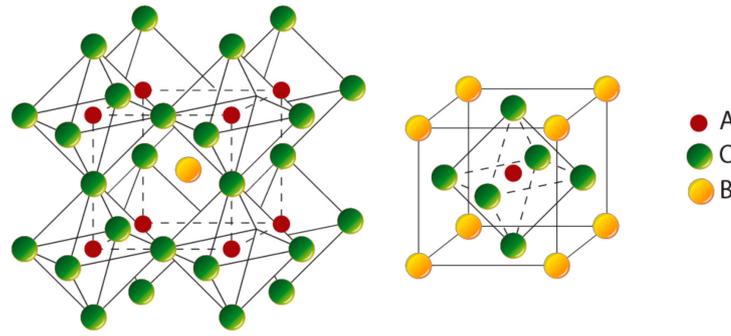


Figura 2.1: Representación gráfica de la estructura *perovskita* cúbica ABO_3 [24].

que presentan propiedades piezoeléctricas, este comportamiento es debido a la presencia de iones positivos y negativos ordenados regularmente en toda la estructura que conduce a una alineación adecuada de los dipolos. Este tipo de configuración monocristalina, presenta excelentes propiedades piezoeléctricas y su campo de aplicación incluye gran cantidad de mecanismos de actuación y sensado. Algunos ejemplos de estos materiales son:

- Niobato de litio ($LiNbO_3$), con y sin añadido de dopantes.
- Borato de litio ($Li_2Ba_4O_7$).
- Niobato de plomo y magnesio / titanato de plomo (PMT – PT).
- Niobato de zirconato de plomo / titanato de plomo PZN – PT
- Cuarzo.

2.1.2 Cerámicas ferroeléctricas

Una cerámica es un material sólido inorgánico no metálico formado por compuestos metálicos o no metálicos que han sido moldeados y luego endurecidos por calentamiento a altas temperaturas. Por lo general, son duros y resistentes a la corrosión pero quebradizos. En este grupo de cerámicas ferroeléctricas, éstas adoptan sus capacidades piezoeléctricas debido a la forma de su red cristalina conocida como *perovskita* [24] la cual se encuentra esquemáticamente representada en 2.1. En el caso del grupo de las cerámicas, dos grandes subgrupos de materiales pueden ser identificados entre aquellos que poseen o no poseen plomo (Pb) en su estructura.

Basados en circonato-titanato de plomo (PZT)

Las cerámicas basadas en circonato-titanato de plomo (PZT) fueron desarrolladas por primera vez en el año 1952 en el Instituto de Tecnología de Tokio. Estos materiales son probablemente los más comúnmente utilizados para cualquier tipo de aplicación piezoeléctrica debido a sus propiedades superiores frente a los demás en lo referido a su resistencia física, son químicamente inertes y su costo es relativamente bajo.

La clasificación más comúnmente difundida de estos cerámicos está basada en el estándar militar *MIL-STD-1376B*. Acorde a esto, los materiales no se diferencian de acuerdo a una composición química exacta, sino más bien por sus propiedades mecánicas y eléctricas:

- *Navy Type I* («Hard») o comercialmente *PZT-4*: De aplicación ideal para uso continuo y repetitivo en aplicaciones de mediana y alta potencia.
- *Navy Type II* («Soft») o comercialmente *PZT-5A*: Recomendado para transmisión y recepción de los dispositivos de baja potencia debido a su alta sensibilidad.
- *Navy Type III* («Hard») o comercialmente *PZT-8*: De características similares pero mejoradas (menores pérdidas mecánicas y dieléctricas) al *Navy-Type I*.
- *Navy Type V* («Soft») o comercialmente *PZT-5J*: Preferido para aplicaciones con requerimientos de alta cantidad de energía y/o diferencia de potencial.
- *Navy Type VI* («Soft») o comercialmente *PZT-5H*: Preferido para aplicaciones que involucran grandes deformaciones mecánicas.

Libres de plomo (Lead-free)

Si bien las cerámicas piezoeléctricas PZT son reconocidas por presentar propiedades superiores para su aplicación en sensado y actuación, resulta necesario notar que el mayor compuesto que conforma estos materiales es el óxido de plomo, el cual es un material peligroso de manipular debido a su relativamente alta presión de vapor a temperaturas de calcinación. Recientemente, la Unión Europea ha legislado en el año 2003 restricciones en su uso, lo que ha incrementado los esfuerzos relacionados al desarrollo de alternativas libre de plomo [25]. Entre los materiales más comunes utilizados para suplantar al PZT en este sentido, se encuentran:

- *Navy Type IV* («Soft») o Titanato de bario (BaTiO_3)
- Niobato de potasio (KNbO_3).

Actualmente, el Instituto de Investigaciones en Ciencia y Tecnología de Materiales (*INTEMA*) ubicado en la ciudad de Mar del Plata, Buenos Aires, Argentina desarrolla y estudia diversas alternativas libre de plomo entre las que se podrían mencionar:

- KNL-NTS: $(\text{K}_{0,44}\text{Na}_{0,52}\text{Li}_{0,04})(\text{Nb}_{0,86}\text{Ta}_{0,10}\text{Sb}_{0,04})\text{O}_3$ [26, 27].
- KNN: $(\text{K}_{0,5}\text{Na}_{0,5})\text{NbO}_3$ [28, 29].
- BNKT: $\text{Bi}_{0,5}(\text{Na}_{0,8}\text{K}_{0,2})_{0,5}\text{TiO}_3$ [30-33].
- BNT: $\text{Bi}_{0,5}\text{Na}_{0,5}\text{TiO}_3$ [34-36].

Durante el desarrollo de esta tesis, la evaluación de estos tipos de materiales para la recolección de energía es estudiada y la contribución al respecto puede encontrarse en el Apéndice A.

2.1.3 Polímeros

La palabra plástico procede del término griego *plastikos*, que significa «capaz de ser moldeado». El término expresa la principal propiedad de este material: su capacidad para deformarse y, por tanto, su facilidad para adoptar prácticamente cualquier forma. Estas propiedades son alcanzadas debido a su estructura a base de carbono con largas cadenas de polímeros. Ejemplos de estos compuestos son:

- Fluoruro de polivinilideno (PVDF).
- Fluoruro de polivinilideno-trifluoroetileno (PVDF-TrFE).
- Poliamida.

2.2 ECUACIONES CONSTITUTIVAS

2.2.1 Modelo constitutivo lineal

Las ecuaciones constitutivas para un material piezoeléctrico continuo pueden ser deducidas a partir de considerar el principio de conservación de energía, o primera ley de la termodinámica como [37]

$$\dot{U} = T_{ij}\dot{S}_{ij} + E_i\dot{D}_i. \quad (2.1)$$

Donde U es la densidad de energía almacenada por el piezoeléctrico, T_{ij} es el tensor simétrico de tensiones, S_{ij} es el tensor de deformaciones, mientras que E_i y D_i son, la intensidad del campo y el desplazamiento eléctrico, respectivamente. El punto sobre las variables se refiere a derivada respecto al tiempo. La densidad de entalpía H puede ser definida como

$$H = U - E_i D_i. \quad (2.2)$$

Que reemplazando la Ec. (2.1) en la Ec. (2.2), y derivando respecto al tiempo se obtiene

$$\dot{H} = T_{ij}\dot{S}_{ij} - D_i\dot{E}_i. \quad (2.3)$$

Lo que implica que $H = H(S_{kl}, E_k)$, siendo posible observar que

$$T_{ij} = \partial H / \partial S_{ij}, \quad (2.4)$$

$$D_i = -\partial H / \partial E_i, \quad (2.5)$$

Donde la siguiente expresión es deducida

$$\partial S_{ij} / \partial S_{ji} = 0, \quad i \neq j. \quad (2.6)$$

Para materiales piezoeléctricos constitutivamente lineales, la expresión de H resulta ser

$$H = \frac{1}{2} c_{ijkl}^E S_{ij} S_{kl} - e_{kij} E_k S_{ij} - \frac{1}{2} \epsilon_{ij}^S E_i E_j. \quad (2.7)$$

Donde c_{ijkl}^E , e_{kij} y ϵ_{ij}^S son constantes elásticas, piezoeléctricas y dieléctricas, respectivamente. Para estos parámetros, los superíndices E y S son usados para indicar que son medidos a campo eléctrico o deformación constante, respectivamente. Respecto a la cantidad de parámetros, en el caso más general

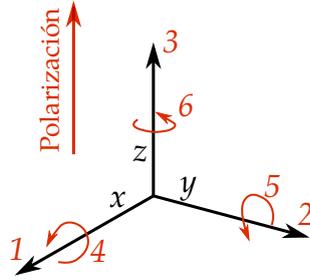


Figura 2.2: Direcciones que afectan a los elementos piezoeléctricos tomando eje z coincidente con la dirección de polarización.

se tendrán 21 constantes elásticas independientes, 18 constantes piezoeléctricas independientes y 6 constantes dieléctricas independientes [37]. Sin embargo, estos números se reducen si consideramos la naturaleza ortótropa de los mismos tal como se verá más adelante. Reemplazando la Ec. (2.7) en las Ecs. (2.4) y (2.5), las siguientes ecuaciones constitutivas, válidas para materiales piezoeléctricos lineales son obtenidas

$$\begin{aligned} T_{ij} &= c_{ijkl}^E S_{kl} - e_{kij} E_k, \\ D_i &= e_{ikl} \cdot S_{kl} + \epsilon_{ij}^S E_k. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Las cuales resultan tener la forma de tensión-carga (*stress-charge from*) de estos materiales. Modificando la notación indicial por la negrita, esta misma expresión puede ser expresada de una forma más clara y compacta como

$$\begin{aligned} \mathbf{T} &= \mathbf{c}_E \cdot \mathbf{S} - \mathbf{e}^T \cdot \mathbf{E}, \\ \mathbf{D} &= \mathbf{e} \cdot \mathbf{S} + \epsilon_S \cdot \mathbf{E}. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Donde \mathbf{S} es el tensor de deformación, \mathbf{T} el tensor de tensión, \mathbf{D} el vector desplazamiento eléctrico y \mathbf{E} el vector campo eléctrico, mientras que las matrices constitutivas elásticas, piezoeléctricas y dieléctricas son notadas como: \mathbf{c}_E , \mathbf{e} y ϵ_S respectivamente.

Forma tridimensional de las ecuaciones constitutivas

Los materiales piezoeléctricos son por naturaleza materiales ortotrópicos o, más específicamente, transversalmente isotrópicos, siendo estos un caso particular de los anteriores. En estos materiales existe un plano denominado isotrópico, donde tanto sus propiedades eléctricas como mecánicas son iguales en cualquier dirección, mientras que, a lo largo del eje perpendicular a dicho plano, las propiedades son distintas. Usualmente, la dirección de polarización de los piezoeléctricos es tomado de forma coincidente la dirección del eje z del sistema de coordenadas cartesianos (véase Figura 2.2). En este caso, las direcciones x , y o z son representadas utilizando los subíndices 1, 2, y 3, respectivamente; mientras que el corte alrededor de cada uno de estos ejes con los subíndices 4, 5, y 6.

Existen diversas alternativas para expresar las ecuaciones constitutivas lineales además de la forma tensión-carga deducidas en la Ec. (2.9). Una de ellas, y probablemente de las más utilizadas junto a la anterior, es la forma deformación-carga (*strain-charge from*), la cual adopta la forma

$$\begin{aligned} \mathbf{S} &= \mathbf{s}_E \cdot \mathbf{T} + \mathbf{d}^t \cdot \mathbf{E} \\ \mathbf{D} &= \mathbf{d} \cdot \mathbf{T} + \epsilon_T \cdot \mathbf{E} \end{aligned} \quad (2.10)$$

Donde nuevos tensores constitutivos son definidos como: $s_E = c_E^{-1}$ conocido como tensor de flexibilidad, $d = e \cdot s_E$ el tensor de acoplamiento electromecánico y ϵ_T el tensor dieléctrico medido a tensión mecánica constante. Debido a la naturaleza ortótropa de estos materiales, las matrices constitutivas no son matrices completas, por ello, considerando las relaciones geométricas asociadas, estas adoptan en su forma más general la siguiente forma

$$s = \begin{pmatrix} s_{11}^E & s_{12}^E & s_{33}^E & 0 & 0 & 0 \\ s_{21}^E & s_{22}^E & s_{23}^E & 0 & 0 & 0 \\ s_{31}^E & s_{32}^E & s_{33}^E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s_{44}^E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & s_{55}^E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & s_{66}^E \end{pmatrix}, \quad (2.11)$$

$$d = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & d_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_{24} & 0 & 0 \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.12)$$

$$\epsilon_r = \begin{pmatrix} \epsilon_{11}^T/\epsilon_0 & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_{22}^T/\epsilon_0 & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_{33}^T/\epsilon_0 \end{pmatrix}, \quad (2.13)$$

donde la notación de Voigt-Kelvin ha sido utilizada. A su vez, cabe mencionar que existen otras formas no tan utilizadas para denotar las relaciones constitutivas, entre las que destacamos la forma deformación-voltaje (*strain-voltage form*)

$$\begin{aligned} S &= s_D \cdot T + g^t \cdot E, \\ E &= d \cdot T + \epsilon_T^{-1} \cdot D, \end{aligned} \quad (2.14)$$

o la forma tensión-voltaje (*stress-voltage form*)

$$\begin{aligned} T &= c_D \cdot S - q^t \cdot D, \\ E &= -q \cdot S + \epsilon_T^{-1} \cdot D, \end{aligned} \quad (2.15)$$

Un resumen de la notación de los parámetros asociados a las distintas formas de expresar las ecuaciones constitutivas, así como las formas de conversión, puede ser encontrado en el Apéndice B.

Simplificaciones basadas en la teoría de vigas esbeltas

En la mecánica de materiales, para elementos estructurales lo suficientemente esbeltas, diversas teorías basadas en simplificaciones del campo del desplazamiento han sido desarrolladas. Para la teoría de vigas esbeltas como son las de *Bernoulli-Euler* o *Rayleigh*, las siguientes simplificaciones pueden ser asumidas respecto al campo tensional de forma que [38]

$$T_2 = T_3 = T_4 = T_5 = T_6 = 0. \quad (2.16)$$

Por lo que las ecuaciones constitutivas en su forma deformación-carga eléctrica (*strain-charge from*), presentadas en la Ec. (2.10) toman la forma

$$\begin{pmatrix} S_1 \\ D_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_{11}^E & d_{31} \\ d_{31} & \epsilon_{33}^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_1 \\ E_3 \end{pmatrix}. \quad (2.17)$$

O, en forma escalar

$$\begin{aligned} S_1 &= s_{11}^E T_1 + d_{31} E_3, \\ D_3 &= d_{31} T_1 + \epsilon_{33}^T E_3, \end{aligned} \quad (2.18)$$

mientras que las expresiones que representan la forma tensión-carga (*stress-charge from*) dadas por la Ec. (2.9) pasan a ser

$$\begin{aligned} T_1 &= \bar{c}_{11}^E S_1 - \bar{e}_{31} E_3, \\ D_3 &= \bar{e}_{31} S_1 + \bar{\epsilon}_{33}^S E_3. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Donde las barras superiores son usadas para indicar que las constantes fueron obtenidas de la reducción de la teoría tridimensional acorde a las siguientes expresiones:

$$\bar{c}_{11}^E = \frac{1}{s_{11}^E}, \quad \bar{e}_{31} = \frac{d_{31}}{s_{11}^E}, \quad \bar{\epsilon}_{33}^S = \epsilon_{33}^T - \frac{d_{31}^2}{s_{11}^E}. \quad (2.20)$$

Por último, la función de entalpía reducida dada por la Ec. (2.7) es

$$H = \frac{1}{2} \bar{c}_{11}^E S_1^2 - \bar{e}_{31} E_3 S_1 - \frac{1}{2} \bar{\epsilon}_{33}^S E_3^2. \quad (2.21)$$

2.2.2 Modelos constitutivos no lineales en vigas

Durante los últimos años, diversos autores han trabajado con ecuaciones constitutivas lineales a la hora de modelar materiales piezoeléctricos; sin embargo, las relaciones asociadas a las variables electromecánicas en estos tipos de materiales presentan un comportamiento no lineal si son sometidos a valores elevados de excitación [39]. Entre las múltiples formulaciones que pueden ser encontradas, una de las primeras verificada experimentalmente para vigas bimorfas fue la presentada por Von Wagner y Hagedorn [40], quienes modificaron la función entalpía lineal a partir del caso lineal dado por

$$H = \frac{1}{2} \bar{c}_{11}^E S_1^2 - \bar{c}_{11}^E d_{31} E_3 S_1 - \frac{1}{2} \left(\bar{\epsilon}_{33}^T - d_{31} \bar{c}_{11}^E \right) E_3^2. \quad (2.22)$$

mediante la hipótesis de una dependencia no lineal entre c_{11}^E y d_{31} respecto a S_1 como

$$\begin{aligned} \bar{c}_{11}^E &= c_{11}^{E(0)} + c_{11}^{E(1)} S_1 + c_{11}^{E(2)} S_1^2, \\ d_{31} &= d_{31}^{(0)} + d_{31}^{(1)} S_1 + d_{31}^{(2)} S_1^2, \end{aligned} \quad (2.23)$$

mientras que las relaciones asociadas a D_3 y E_3 se mantuvieron lineales. Reemplazando la Ec. 2.23 en 2.22, la función de entalpía modificada de la Ec. (2.21) resulta ser:

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2} c_{11}^{E(0)} S_1^2 + \frac{1}{3} c_{11}^{E(1)} S_1^3 + \frac{1}{4} c_{11}^{E(2)} S_1^4 - \gamma^{(0)} E_3 S_1 - \frac{1}{2} \gamma^{(1)} E_3 S_1^2 - \frac{1}{3} \gamma^{(2)} E_3 S_1^3 \\ &\quad - \frac{1}{2} \epsilon_{33}^S E_3^2, \end{aligned} \quad (2.24)$$

donde $\gamma^{(0)} = c_{11}^{E(0)} d_{31}^{(0)}$, $\gamma^{(1)} = c_{11}^{E(0)} d_{31}^{(1)} + c_{11}^{E(1)} d_{31}^{(0)}$ y $\gamma^{(2)} = c_{11}^{E(0)} d_{31}^{(2)} + c_{11}^{E(1)} d_{31}^{(1)} + c_{11}^{E(2)} d_{31}^{(0)}$. Reemplazando la Ec. (2.24) en las Ecs. (2.4) y (2.5), manteniendo

Los términos resaltados en rojo representan la no-linealidad.

términos de orden cúbico, las siguientes ecuaciones constitutivas no lineales alternativas a las lineales (2.9) pueden ser obtenidas

$$\begin{aligned} T_1 &= c_{11}^{E(0)} S_1 + c_{11}^{E(1)} S_1^2 + c_{11}^{E(2)} S_1^3 - \gamma^{(0)} E_3 - \gamma^{(1)} S_1 E_3 - \gamma^{(2)} S_1^2 E_3, \\ D_3 &= \gamma^{(0)} S_1 + \frac{1}{2} \gamma^{(1)} S_1^2 + \frac{1}{3} \gamma^{(2)} S_1^3 + \epsilon_{33}^S E_3. \end{aligned} \quad (2.25)$$

Otros autores siguieron enfoques similares empleando expresiones polinómicas en las ecuaciones constitutivas. Por ejemplo, Stanton y col. [41] desarrollaron un modelo no lineal siguiendo una formulación con una función de entalpía alternativa a la Ec. (2.21) de órdenes superiores desarrollada por Maugin [42]. En este caso, siguiendo un proceso similar al anterior, ecuaciones constitutivas no lineales alternativas a la Ec. (2.9) resultaron ser

$$\begin{aligned} T_1 &= c_{11}^E S_1 + c_{111}^E S_1^2 + c_{1111}^E S_1^3 - e_{31} E_3 - e_{311} S_1 E_3 - e_{3111} S_1^2 E_3, \\ D_3 &= e_{31} S_1 + e_{311} S_1 E_3 + e_{3111} S_1^2 E_3 + \epsilon_{33}^S E_3. \end{aligned} \quad (2.26)$$

Donde ahora los parámetros no lineales c_{111}^E , c_{1111}^E , e_{311} y e_{3111} fueron incluidos. Por último, Leadenham y Erturk [43] desarrollaron un modelo constitutivo no lineal a partir de introducir funciones «signo» en la ecuación de entalpía. Su propósito, fue el de replicar matemáticamente el efecto no lineal de ablandamiento, observado experimentalmente la forma lineal de la «curva columna vertebral» de la Función de Respuesta en Frecuencia (FRF), la cual se traza uniendo los picos de amplitud de generación para distintos niveles de excitación. En este caso, la función de entalpía adopta la forma

$$H = \frac{1}{2} c_{11}^E S_1^2 + \frac{1}{3} c_{111}^E S_1^3 \operatorname{sgn}(S_1) - e_{31} E_3 S_1 - \frac{1}{2} e_{311} E_3 S_1 \operatorname{sgn}(S_1) - \frac{1}{2} \epsilon_{33}^S E_3^2. \quad (2.27)$$

Reemplazando la Ec. (2.24) en las Ecs. (2.4) y (2.5), manteniendo términos de orden cúbico, las siguientes ecuaciones constitutivas no lineales alternativas a (2.9) fueron obtenidas

$$\begin{aligned} T_1 &= c_{11} S_1 + c_{111} S_1^2 \operatorname{sgn}(S_1) - e_{31} E_3 - e_{311} S_1 E_3 \operatorname{sgn}(S_1), \\ D_3 &= e_{31} S_1 + \frac{1}{2} e_{311} S_1^2 \operatorname{sgn}(S_1) + \epsilon_{33}^S E_3. \end{aligned} \quad (2.28)$$

Una de las ventajas de este último modelo, es que logra replicar el comportamiento no lineal de los materiales piezoeléctricos introduciendo solo dos parámetros no lineales, los cuales son: c_{111} representando la rigidez no lineal y e_{311} representando el acoplamiento electromecánico no lineal. Una revisión minuciosa de los distintos modelos constitutivos encontrados en la literatura puede ser encontrada en la Sección 4.1 de la tesis de Gatti [44]. A su vez, y para el modelo constitutivo propuesto por Leadenham y Erturk [43], la identificación de parámetros no lineales puede ser encontrada en el Capítulo 5 para actuadores tipo MFC y MIDÉ Quickpad.

2.2.3 Modo de generación d_{33} y d_{31}

Si bien existen diferentes modos de generación, es común encontrar dos modos de generación para la recolección de energía denominados d_{33} y d_{31} . En el primero, la deformación mecánica es producida debido a una carga aplicada en la misma dirección que la polarización del material (véase Figura 2.3a). Por otro lado, el modo de generación d_{31} es aquel en el que la carga

La «curva columna vertebral» es más bien conocida como «backbone curve» por su nombre en inglés.

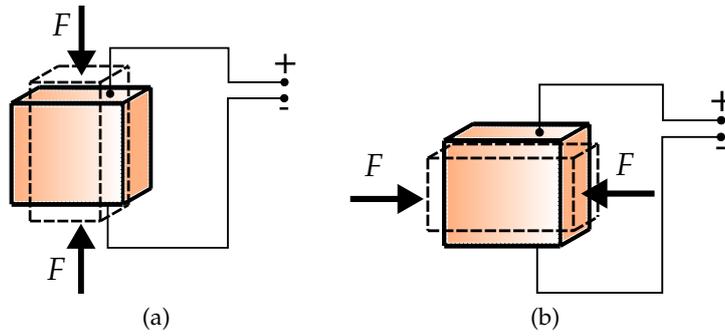


Figura 2.3: Modos de generación de energía (a) d_{33} y (b) d_{31} .

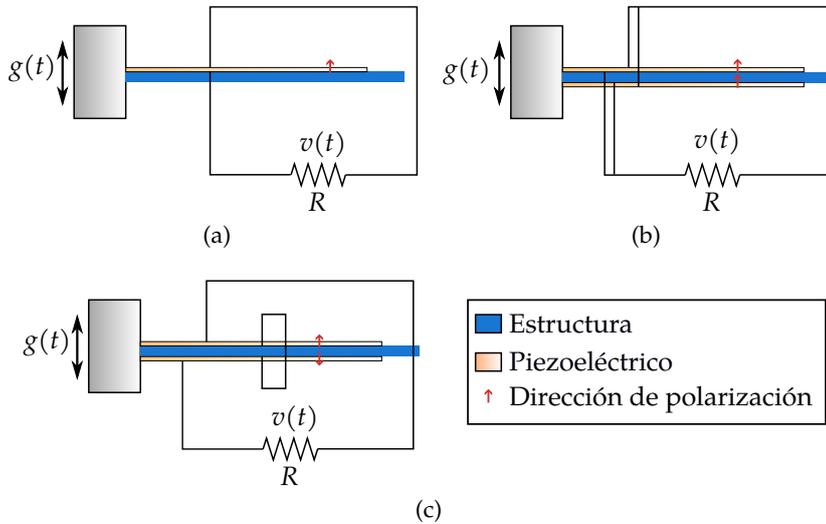


Figura 2.4: Configuraciones (a) unimorfa y (b) bimorfa con conexión en paralelo y (c) bimorfa con conexión en serie.

aplicada y la deformación se producen en una dirección perpendicular a la polarización del material (véase Figura 2.3b). Este último modo de generación, es el comúnmente empleado en vigas sometidas a flexión.

2.2.4 Estructuras unimorfas y bimorfas

Además del modo de generación elegido, existe otra clasificación de recolectores de energía basada en la cantidad de elementos piezoeléctricos independientes empleados. Para una estructura tipo viga cantilever, nos referimos a este recolector como «uniformo» (o *unimorph*) cuando un solo elemento es utilizado como puede observarse en la Figura 2.4a. Por otro lado, para un mismo recolector, pero empleados dos laminas piezoeléctricas, una en cada lado de la portante, nos referimos a esta como la configuración «bimorfa» (o *bimorph*). En este último caso, dos alternativas de conexión eléctrica surgen debido a la posibilidad de conectar ambos piezoeléctricos en serio o paralelo, siendo estas esquemáticamente representadas en las Figuras 2.4b y 2.4c respectivamente.



Figura 2.5: Piezocerámicas tipo bulk fabricados por *Beijing Ultrasonic* [45].

2.3 ACTUADORES PIEZOELÉCTRICOS

Durante los últimos años, distintos tipos de actuadores piezoeléctricos han sido desarrollados para responder a diferentes requisitos dependientes de la aplicación [1]. Actualmente, la mayoría de ellos también poseen potencial para su aplicación como recolectores de energía. En esta sección, presentaremos y describiremos brevemente los más relevantes, incluyendo sus características más importantes, ventajas, desventajas y origen de los mismos.

2.3.1 Cerámicas piezoeléctricas tipo «bulk»

Llamamos cerámicas piezoeléctricas tipo «bulk» al producto formado por una única capa de cerámica piezoeléctrica con electrodos metálicos eléctricamente conductores aplicados en dos lados opuestos [46]. Comercialmente, estos tipos de cerámicos son los que se ofrecen en una mayor diversidad de formas y patrones de electrodos incluyendo: discos y cilindro, medios discos, anillos y medio anillos, placas, tubos huecos, duelas, medias esferas, barras de sección cuadrada, etc., con una gran cantidad de patrones de polarización tal como se puede observar en la Figura 2.5.

Dentro de los materiales elegidos para conformar piezocerámicos en forma de *bulk*, para aplicaciones de sensado y actuación, destaca tanto el circonato-titanato de plomo (PZT) como el titanato de bario (BaTiO_3). Recientemente, estos materiales también han ganado popularidad para su uso en dispositivos de recolección de energía debido a sus propiedades de acoplamiento electromecánico inherentemente altas, donde excitaciones eléctricas relativamente pequeñas son suficientes para activar las cerámicas piezoeléctricas. Sin embargo, la naturaleza frágil de estas limita sus aplicaciones a pequeñas tensiones y deformaciones. Comercialmente, son los más fáciles de encontrar en el mercado debido a su geometría relativamente simple.

2.3.2 Transductores Cymbal y Moonie

Con el fin de fabricar un actuador piezoeléctrico capaz de generar mayores desplazamientos y soportar mayores fuerzas que las cerámicas tipo *bulk*, Newnham y col. [47] propusieron el actuador flexional tipo *moonie* compuesto por una cerámica piezoeléctrica (*bulk* o de multicapas) entre dos tapas metálicas tal como se representa en la Figura 2.6a. Este actuador, presenta la ventaja de aprovechar ambos acoplamientos d_{31} ($= d_{32}$) y d_{33} en la generación el desplazamiento axial gracias a la geometría de la cavidad, donde el despla-

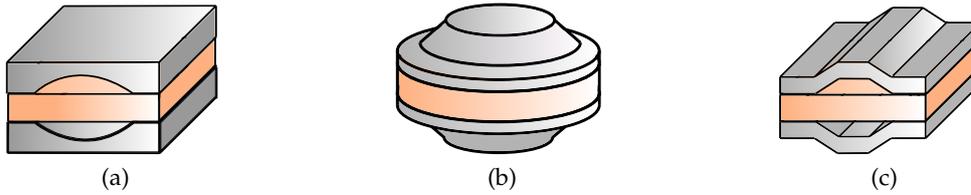


Figura 2.6: Transductores (a) *moonie*, (b) *cymbal* y (c) *bridge*.

zamiento lateral de la cerámica es mecánicamente amplificado. Por otro lado y años más tarde, un actuador alternativo pero de similares características denominado címbalo o *cymbal* fue introducido por Dogan y col. [48], siendo éste una versión mejorada del primer transductor *moonie*, aportando una disminución de la concentración de tensión asociadas al primer actuador en la cerámica piezoeléctrica, así como una mejoría en el nivel de desplazamiento producido. Al igual que el actuador *moonie*, este actuador está conformado por dos tapas metálicas con un disco cerámico piezoeléctrico entre ellas, tal como se representa de forma esquemática en la Figura 2.6b. En su función como generador, una carga vertical debe ser aplicada en la tapa metálica que, debido a la transferencia de energía mecánica, el disco piezoeléctrico es sometido a un estado tensional tanto radial como normal. Esto, da como resultado la generación de campo eléctrico debido al efecto piezoeléctrico, que combina así los modos de generación d_{33} y d_{31} . A fines de cuantificar la contribución de cada acoplamiento, Ochoa y col. [49] determinaron y verificaron experimentalmente una expresión para el d_{33} efectivo (dependiente tanto de los parámetros d_{33} y la así como del d_{31}) para un transductor tipo címbalo simétrico siguiendo un enfoque puramente mecánico

$$d_{33}^{eff} = -d_{31} \frac{2r_T (r_T - r_1)}{t_h (t_c + t_m)} + d_{33}. \quad (2.29)$$

Donde r_T , y r_1 son los radios asociados a la parte superior e inferior de la cavidad respectivamente, t_h la altura de la cavidad; mientras que t_c y t_m los espesores asociados al piezoeléctrico y a la tapa metálica respectivamente.

2.3.3 Transductor Bridge

El transductor tipo *bridge* tiene una geometría similar al transductor tipo *cymbal*, excepto que la forma es cuadrada en lugar de circular. Por esto, muchas veces también es referido en la literatura como «címbalo rectangular» (*rectangular cymbal*). Este transductor ofrece las mismas propiedades y es recomendado para las mismas aplicaciones que el tipo *cymbal*, es decir, donde se requiera una amplificación de desplazamientos. Actualmente, ninguno de los actuadores *moonie*, *cymbal* ni *bridge* son distribuidos de forma comercial, siendo estos en su mayor parte fabricados *ad-hoc* por investigadores utilizando generalmente cerámicas tipo PZT, acero y resina epoxi como pegamento.

2.3.4 Electrodo interdigitados

Una alternativa que ha ganado gran popularidad para la recolección de energía en los últimos años son las láminas piezoeléctricas de fibras compues-



Figura 2.7: Actuador de electrodos interdigitados fabricado por *Smart Materials: Macro Fiber Composite (MFC)* [50].

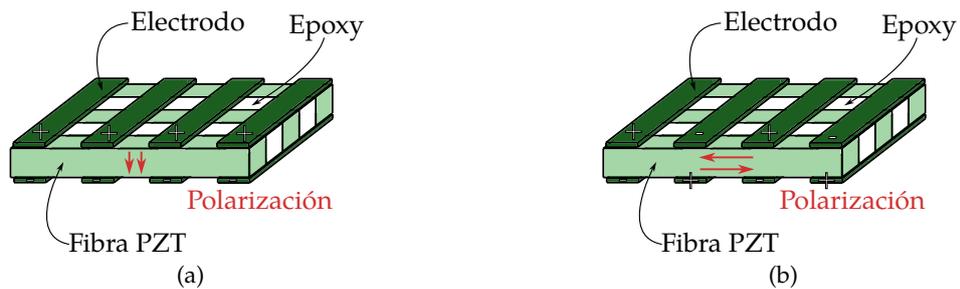


Figura 2.8: Modos de generación (a) d_{33} y (b) d_{31} para diferentes actuadores fabricados por *Smart Materials: Micro Fiber Composite (MFC)*.

tas *Macro Fiber Composites (MFC)*, desarrolladas por la NASA en el año 1999, y comercializadas desde el 2002 en una gran variedad de dimensiones por *Smart Materials* [50]. Estas laminas, a diferencia de las cerámicas tipo *bulk* en las cuales la polarización se produce entre caras opuestas con electrodos que las cubren completamente, constan de una serie de fibras rectangulares piezoeléctricas de PZT-5H y PZT-5A intercaladas entre una serie de capas de adhesivo, electrodos y una película de poliamida. Los electrodos se encuentran conectados siguiendo un patrón interdigitado que transfiere el voltaje de las fibras piezoeléctricas en ambas direcciones según la aplicación. Esta estructura, da solución a los problemas asociados a la fragilidad intrínseca de las cerámicas piezoeléctricas, logrando así un compuesto extremadamente flexible (véase Figura 2.7). Entre sus principales beneficios se destacan su durabilidad, confiabilidad y rendimiento. A su vez, dos versiones diferentes de estos actuadores se encuentran disponibles dependiendo del modo de generación d_{33} y d_{31} (comercialmente identificados como P1 y P2 respectivamente) tal como se representan el Figura 2.8.

2.3.5 Transductor Multilayer o Piezostacks

Los actuadores *multilayer* o *piezostacks* son actuadores de estado sólido con muy poca fricción y desgaste. Estructuralmente, están conformados por un arreglo de discos o anillos piezocerámicos y laminas de electrodo, ambas de muy pequeño espesor, intercaladas consecutivamente. Entre sus principales beneficios se encuentra su alta velocidad de actuación y posicionamiento de alta resolución, lo que lo hace especialmente atractivo para aplicaciones que incluyen nano-posicionamiento, microscopia, mecanizado de precisión,

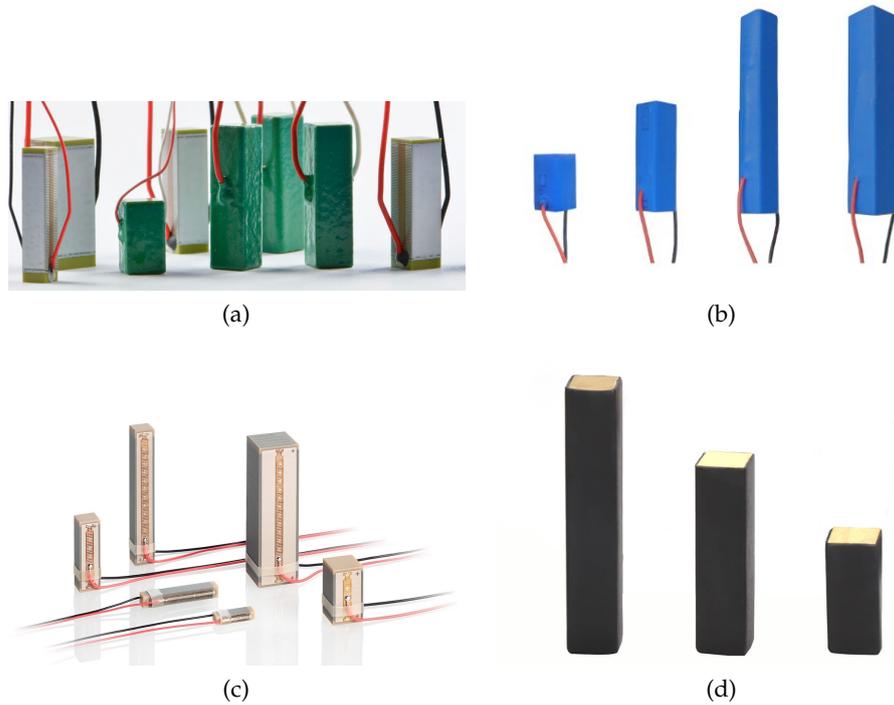


Figura 2.9: Piezostacks fabricados por (a) *PiezoTechnics* [51], (b) *PiezoDrive* [52], (c) *PI Ceramics* [53] y (d) *Pant* [54].

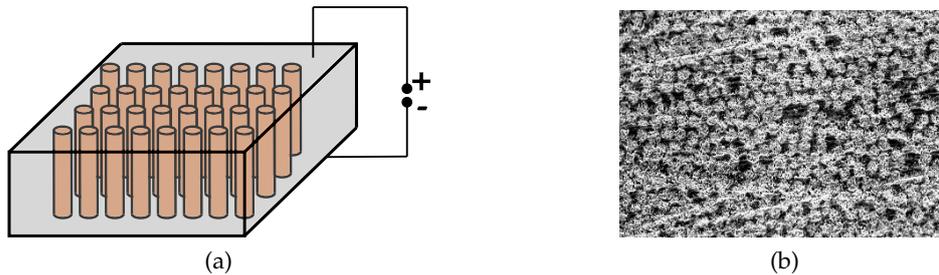


Figura 2.10: Piezocomposites fabricados por *Advanced Cerametric Inc.* (a) Esquema constructivo, (b) Imágenes obtenidas con microscopio electrónico de barrido (SEM) .

y control de vibraciones. Algunos de los fabricantes más conocidos a nivel mundial de este tipo de actuadores pueden encontrarse en la Figura 2.9.

2.3.6 Transductor Piezocomposite

Los piezoeléctricos *Piezocomposites* (*PMC 1-3*) se utilizan normalmente para diversas aplicaciones de transductores incluyendo monitorización de presión, ultrasonido y sonar. Este transductor, esta formado por una serie de fibras piezoeléctricas incorporadas al azar en una matriz de polímero en forma de un material compuesto 1-3. Una representación esquemática constructiva, así como imágenes reales obtenidas por Microscopio Electrónico de Barrido (*MEB* o *SEM* por sus siglas en inglés) brindadas por el fabricante de estos actuadores fabricados por *Advanced Cerametric Inc.* es mostrado en la Figura 2.10. Las propiedades de este material compuesto, pueden ser adaptadas mediante la variación de la distancia entre las fibras, que es controlada por la fracción de

*SEM: Scanning
Electron Microscope*

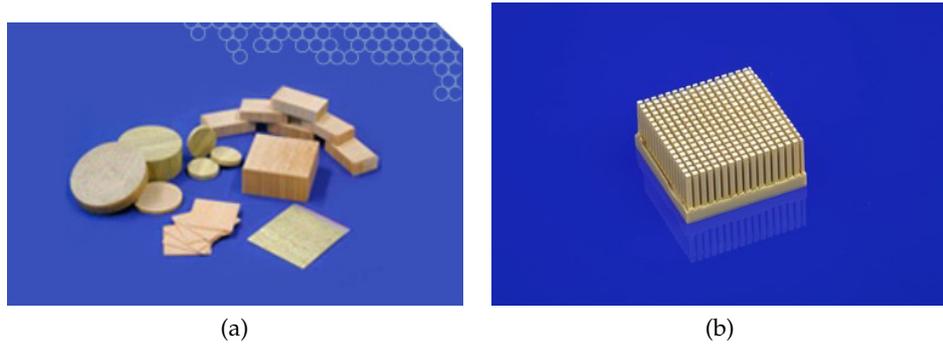


Figura 2.11: Piezocomposites fabricados por (a) APC - *American Piezo* [55] y (b) *CeramTec* [56].

volumen de fibra, medido en forma porcentual (%). El diámetro de fibra y la fracción de volumen en el *PMC* pueden ser variados a medida. Como bondad a la naturaleza de este proceso de fabricación, destaca la posibilidad de fabricar materiales compuestos piezoeléctricos de gran tamaño y con formas complejas. Respecto a este fabricante, actualmente ha cedido su producción de materiales piezoeléctricos, sin embargo, otras alternativas similares son ofrecidas por proveedores como *APC*, *CeramTec* y *Smart Materials* (que redistribuye los fabricados por *CeramTec*).

ESTADO DEL ARTE DE LA RECOLECCIÓN DE ENERGÍA EN PAVIMENTOS

En lo que respecta a la Recolección de Energía en Pavimentos (REPa), diversas revisiones bibliográficas han sido publicadas en: artículos científicos [5, 57-64], capítulos de libros [65, 66], e incluso trabajos de tesis [67, 68], analizando las distintas técnicas de recolección de energía. En este Capítulo, daremos lugar a un análisis general de las tecnologías más importantes para la recuperación de energía en pavimentos con un especial énfasis en la transducción piezoeléctrica, de principal interés en esta tesis.

3.1 ENERGÍA SOLAR

3.1.1 Fotovoltaicas

Principio de funcionamiento

La mayoría de las celdas solares operan según el efecto fotovoltaico, proceso en el cual la radiación de la energía solar es convertida directamente en energía eléctrica. Esta tecnología, es una de las alternativas más maduras para la generación eléctrica amigable con el medio ambiente además de ser la de mayor densidad de potencia registrada [69]. El principio de funcionamiento está basado en el efecto fotoeléctrico, descubierto por Heinrich Hertz en el año 1887 y explicado teóricamente por Albert Einstein en el año 1905. Estas celdas, consisten en un par de semiconductores tipo *P* y *N*, que cuando la luz solar incide sobre este material semiconductor, electrones son liberados y forzadas a moverse en una cierta dirección, creando un flujo de corriente eléctrica cuando es conectado a una carga eléctrica [12, 70].

Trabajos de investigación

La primera implementación de celdas solares en carreteras data del año 2008, cuando el Departamento de Transporte de Oregon (ODOT por sus siglas

*ODOT: Oregon
Department of
Transportation*



(a)



(b)

Figura 3.1: Vista aérea de los paneles solares colocados en la ciudad de Oregon [71]:
(a) prueba de valor de 594 celdas (b) estación solar *Baldock*.

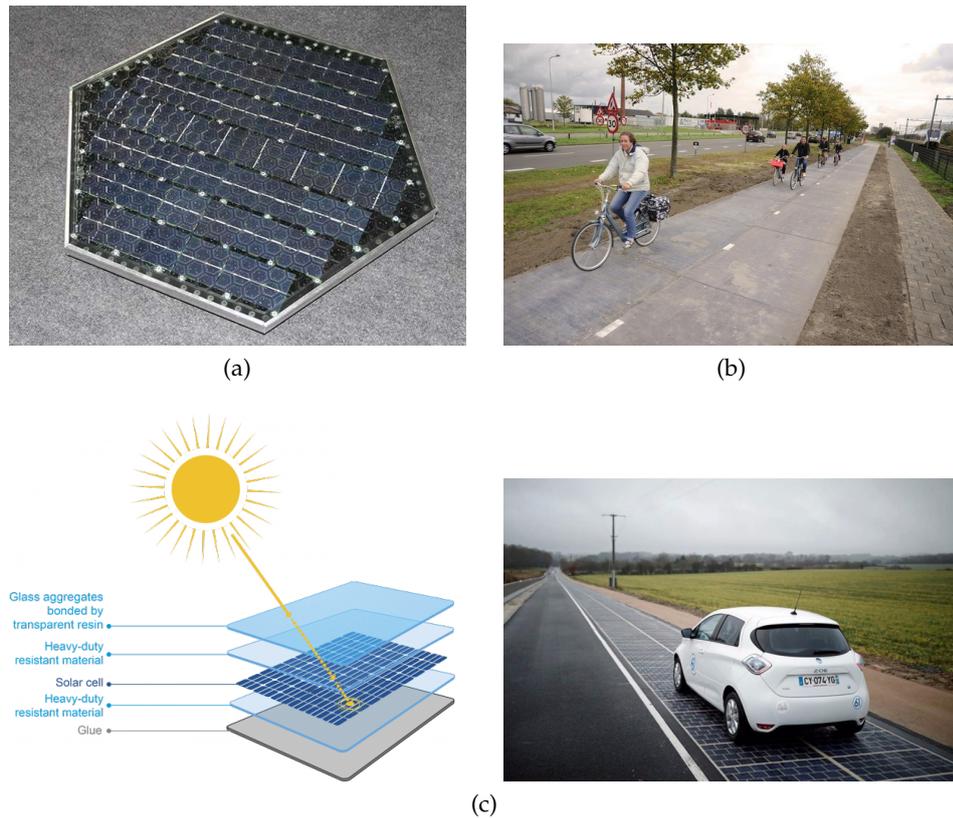


Figura 3.2: Recolectores solares para pavimentos desarrollados por (a) *Solar Roadways* [72] y (b) *Solaroad* [73] y (c) *Wattway* [74].

en inglés), instaló 594 paneles solares a un costado de las rutas interestatal 5 y 205 cercanas a la ciudad de Portland [71] tal como puede observarse en la Figura 3.1a. En esta primera prueba de valor, una generación de 104kW fue alcanzada durante la exposición solar, logrando recolectar energía suficiente para alimentar la luminaria en los cruces dichas rutas en la noche. Considerando el grado satisfactorio de este proyecto, una segunda etapa de una estación solar denominada *Baldock* y compuesta por 6994 paneles solares fue implementada en el sur de la ciudad de Wilsonville (véase Figura 3.1b). En este caso, una potencia de 1,75MW fue reportada, significativamente mayor a la primera.

Si bien las pruebas realizadas por la ODOT fueron satisfactorias, la posibilidad de incluir celdas solares embebidas en el pavimento fue estudiada por primera vez por Kang-Won y Correia [75], quienes concluyeron que las delgadas películas que componen las celdas podían rápidamente sufrir corrosión o deterioro mecánico producto de las cargas repetitivas y condiciones climáticas. La primera prueba piloto documentada de celdas embebidas en el pavimento data del año 2011, cuando la Administración Federal de Carreteras (FHWA por sus siglas en inglés) colocó un prototipo en un parque de estacionamiento en Sagle, Idaho [76]. La compañía *Solar Roadway*TM [72] desarrolló una tecnología basada en una estructura de paneles tricapas: una primera transparente, a prueba de agua y de alta resistencia capaz de soportar cargas mecánicas; una segunda capa electrónica contenedora de las celdas solares e indicadores LED para señalar la carretera; y una tercera que servía de base. Esta compañía fabricó paneles en forma hexagonal (véase Figura 3.2a) y declararon que su último modelo denominado SR-4 fue capaz

de entregar 48W de potencia cubriendo un área de 4,39ft². Un proyecto de similares características fue desarrollado en el año 2014 por la Organización Holandesa de Investigación Científica Aplicada (TNO por sus siglas en holandés) denominado *SolaRoad* [73]. En este caso, construyeron un carril para bicicletas de 70 metros de longitud, conformado por módulos de hormigón con células fotovoltaicas integradas (véase Figura 3.2b).

Pese a los notables esfuerzos desarrollados por *Solar Roadway* y *Solaroad*, actualmente sus soluciones presentan serios inconvenientes y desafíos a resolver. Entre los puntos más cuestionados se encuentran, la incapacidad de soportar *grandes cargas*, y su *bajo rendimiento* en comparación con paneles solares tradicionales [77], debido a múltiples causas como: a) pérdidas inherentes en la primera capa protectora, imposibilidad de ajustar el ángulo de incidencia solar y disminución del rendimiento por la suciedad; b) los *costos*, relacionados tanto en la etapa de fabricación como de mantenimiento (debido a la limpieza periódica requerida); y c) el serio riesgo de *seguridad* durante la conducción, debido a la menor rugosidad de la superficie respecto al pavimento convencional.

Por último y más recientemente, el grupo francés Colas comenzó en 2016 el proyecto de un panel solar extraordinariamente fino denominado *Wattway*, capaz de ser colocado en carreteras, sendas peatonales y ciclovías[74]. Al igual que los previamente comentados, se trató de una tecnología multicapas y una prueba piloto de 1km de longitud fue llevada a cabo en Normandía (véase Figura 3.2c). Sin embargo, dicha prueba no logró dar solución a los mismos problemas enfrentados por *Solar Roadway* y *Solaroad*, y fue duramente catalogado como un fracaso, ni energéticamente eficiente, ni económicamente rentable, por parte del prestigioso periódico *Le Monde* en el 2019.

3.2 ENERGÍA TÉRMICA

3.2.1 Termoeléctricos

Principio de funcionamiento

Los materiales termoeléctricos han sido utilizados para la Recolección de Energía (RE) proveniente de gradientes térmicos en una gran cantidad de aplicaciones [78]. Se denomina material termoeléctrico a todo aquel que al ser sometido a una diferencia de temperatura produce un potencial eléctrico; o viceversa. Usualmente, el fenómeno directo en el cual se genera un voltaje eléctrico es conocido como *efecto Seebeck* [79]. En este punto, resulta importante aclarar que la termoelectricidad no debe ser confundida con la piroelectricidad: si bien en ambos efectos la temperatura es convertida en energía eléctrica y han sido utilizados para la recolección de energía eléctrica [10], en el efecto termoeléctrico la polarización sucede cuando la temperatura varía con la *posición*, mientras que en el piroeléctrico, a medida que la temperatura varía con el *tiempo*.

Trabajos de investigación hasta la fecha

Mediante la implementación de un sistema de Colectores Solares Asfálticos (CSA), sumado a la utilización de Generadores Termoeléctricos (GTE), Hasebe y col. [80] propusieron un sistema de enfriamiento del pavimento esquemáticamente representado en la Figura 3.3. El sistema consistía en dos

*TNO: Nederlandse
Organisatie voor
Toegepast Natuurwet-
enschappelijk
Onderzoek*

*Los CSA consisten
en una red de
bombas y caños
embebidos en el
pavimento que
mediante la
circulación de un
fluido el calor
generado en el
pavimento es
capturado.*

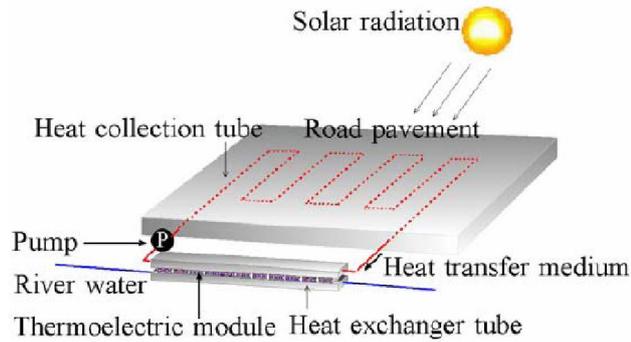


Figura 3.3: Esquema del sistema de enfriamiento del pavimento combinando CSA y GTE presentado Hasebe y col. [80].

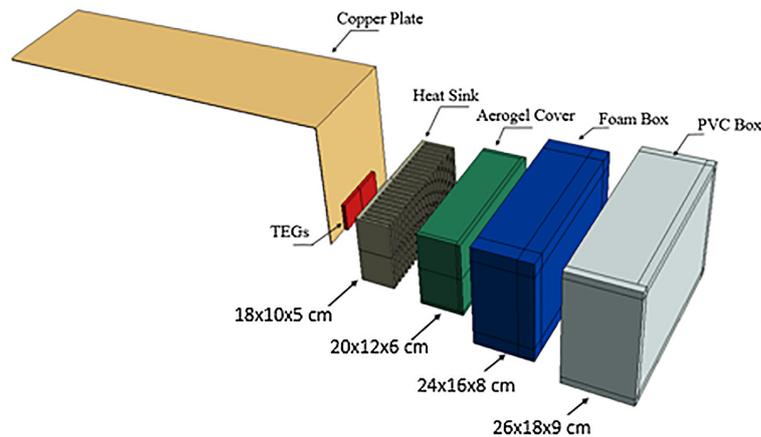


Figura 3.4: GTE para la REPa propuesto por Tahami y col. [83].

circuitos de agua: uno cerrado a través de caños embebidos en el suelo y de circulación forzada por una bomba; y uno abierto proveniente de un río. La energía eléctrica era generada en el intercambiador de calor entre ambos circuitos, cumpliendo la doble función de enfriar el agua del circuito cerrado y generar energía eléctrica. Mediante ensayos experimentales de laboratorio a escala y simulaciones por el Método de Elementos Finitos (MEF o FEM por sus siglas en inglés) utilizando *ANSYS*, determinaron un valor máximo de generación de aproximadamente 5W para una resistencia eléctrica de 30Ω , y una capacidad de enfriar el pavimento de 60 a 30°C .

Wu y Yu [81] presentaron un diseño de un GTE ubicado en la superficie del pavimento, capaz de aprovechar el gradiente de temperatura con respecto a las capas de suelo inferiores. Mediante ensayos experimentales de laboratorio, emulando las condiciones de pavimento, un rendimiento total de apenas un 1,6% fue alcanzado. Realizando ensayos similares, Liang y Li [82] encontraron que la profundidad óptima para un dispositivo GTE se situaba entre los 2 y 3cm a fines de garantizar su seguridad estructural. Recientemente, Tahami y col. [83] propusieron un GTE novedoso en forma de «L» para el extremo caliente, sumado a un disipador de calor relleno de material micro-encapsulado de cambio de fase para el extremo frío con el fines de maximizar el gradiente térmico (véase Figura 3.4). En base a un prototipo experimental de laboratorio, ellos fueron capaces de entregar un promedio de 29mW constantes por día.

En lo que respecta a la aplicación *in situ* de la implementación de GTEs en pavimentos, no existe información disponible en la literatura de pruebas

fehacientes realizadas, ni siquiera a nivel de prototipo. Probablemente, se debe al bajo rendimiento de estos transductores y la falta de interés de entes gubernamentales. No obstante, existen estudios como el de Guo y Lu [84] quienes analizaron la red de carretera de Florida, Estados Unidos, determinando que la tecnología termoeléctrica podría llegar a ser mejor candidato en términos de costo-efectividad que la utilización de materiales piezoeléctricos embebidos, excepto para secciones con alto volumen de tráfico.

3.3 ENERGÍA MECÁNICA

3.3.1 Electromagnética

Principio de funcionamiento

Los Generadores Electromagnéticos (GEM) operan en base a la ley de inducción electromagnética, o más conocida como *Ley de Faraday* en honor a Michael Faraday quien, en 1821, vislumbró mediante una serie de experimentos que el movimiento relativo de un material conductor en un campo magnético inducía una diferencia de potencial o fuerza electromotriz [85]. Acorde a esta ley, si consideramos un imán cilíndrico permanente, moviéndose de forma lineal y concéntrica en una bobina, una fuerza electromotriz \mathcal{E} será inducida acorde a esta Ley cuyo valor será

$$\mathcal{E} = \oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d}{dt} \int_S (\mathbf{B} \cdot \mathbf{n}) dA = -\frac{d\Phi}{dt}. \quad (3.1)$$

Donde, \mathbf{E} es el campo eléctrico, \mathbf{B} la densidad de flujo magnético, C y S las curvas y superficies descritas por una bobina, y Φ el flujo magnético a través de la superficie S . Debido a la naturaleza del principio de inducción electromagnética, ciertas consideraciones deben ser tenidas en cuenta a la hora de desarrollar dispositivos RE que operen bajo esta transducción: (i) A diferencia de otros tipos de transductores como los GTE, donde el efecto de generación eléctrica se da de forma directa y espontánea, los GEM requieren de una interfaz capaz de trasladar la energía mecánica al recolector, las cuales mayormente se basan en sistemas mecánicos, hidráulicos o neumáticos [5]. (ii) Por otro lado, la generación de energía está íntimamente relacionada con los desplazamiento como ilustra la Ec. (3.1). Por lo tanto, los esfuerzos en desarrollar dispositivos basados en este tipo de transducción fueron principalmente orientados para fuentes *basadas en vibración*, como p. ej. puentes [60], reductores de velocidad [86] o incluso a bordo de vehículos [87].

Trabajos de investigación hasta la fecha

En los últimos años, gran cantidad de investigadores y empresas han sido atraídos por la cantidad de energía disponible para recuperar en frenos y suspensiones de vehículos de transporte. Por ejemplo, la reconocida empresa *Tesla* ha desarrollado en sus automóviles eléctricos un sistema de frenado regenerativo mediante un complejo algoritmo capaz de regular la inducción, y por lo tanto el torque de sus motores [88]. Por otro lado, los distintos tipos de suspensiones de vehículo capaces de recuperar energía han sido clasificados por Pan y col. [64] acorde tres grandes grupos: (i) de actuadores lineales [89, 90], (ii) amortiguadores de tipo hidráulico [16], y (iii) amortiguadores

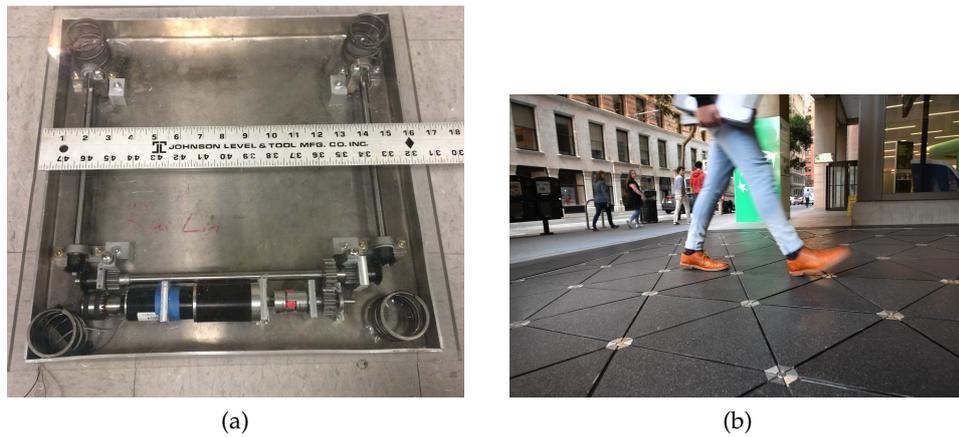


Figura 3.5: GEM desarrollados para la RE del caminar humano: (a) prototipo propuesto por Liu y col. [94], (b) Pavegen [95].

mecánicos (i.e, engranajes helicoidales [91], piñón y cremallera [92], husillo de bolas [93], etc). Existen numerosos estudios en la literatura de estos tipos de tecnologías implementadas a nivel numérico y experimental los cuales no serán abordados debido a que exceden los objetivos planteados en esta tesis.

Una de las fuentes de energía preferidas para la RE mediante la utilización GEM es la disipada en los pasos del caminar humano. En este sentido, Liu y col. [94] diseñaron y experimentaron un pavimento capaz de convertir el desplazamiento vertical en un movimiento de rotación unidireccional acoplado a un motor magnético permanente (véase Figura 3.5a). Otra variante, fue desarrollada por la compañía Pavegen [95], basada en baldosas triangulares descansando sobre tres generadores lineales como se presenta en Figura 3.5b.

En lo referido a obras de ingeniería civil, Jung y col. [96] llevaron a cabo un estudio preliminar *in situ* para evaluar la factibilidad de la RE de la vibración de cables suspendidos de un puente mediante la utilización de GEM. En este caso, ellos propusieron un dispositivo basado en una combinación de una masa móvil con una barra rígida y un motor conectado con un engranaje, generando suficiente energía como para alimentar un nodo sensor. Shen y col. [97] estudiaron en laboratorio la posibilidad de extraer energía de esta misma fuente empleando un generador lineal, demostrando no solo la posibilidad de recolectar energía, sino también de controlar de forma semi-activa las vibraciones del puente.

La implementación de GEM para la REPa ha sido en gran medida orientada a la utilización en reductores de velocidad. El primer recolector de este tipo fue presentado por Pirisi y col. [98] quienes emplearon GEM lineales basados de imanes tubulares permanentes como se muestra en la Figura 3.6a. En sus estudios de prototipo, concluyeron que su dispositivo tenía el potencial de producir 137MWh por año si se considera una eficiencia de 60% y un largo del modulo recolector de 10m. Zhang y col. [103] también propusieron y construyeron un lomo recolector de energía basado en un GEM lineales, logrando producir 194V y 55,2V de voltajes pico y promedio, respectivamente, con el paso de un vehículo a una velocidad de 40^{km}/h. Con el fin de aprovechar tanto el movimiento de descenso como el de ascenso del reductor cuando un auto pasaba por encima, Todaria y col. [104] modelaron y construyeron otro GEM acoplado a un mecanismo de rectificación de movimiento que convertía el movimiento unidireccional en uno de rotacional acoplado a un generador

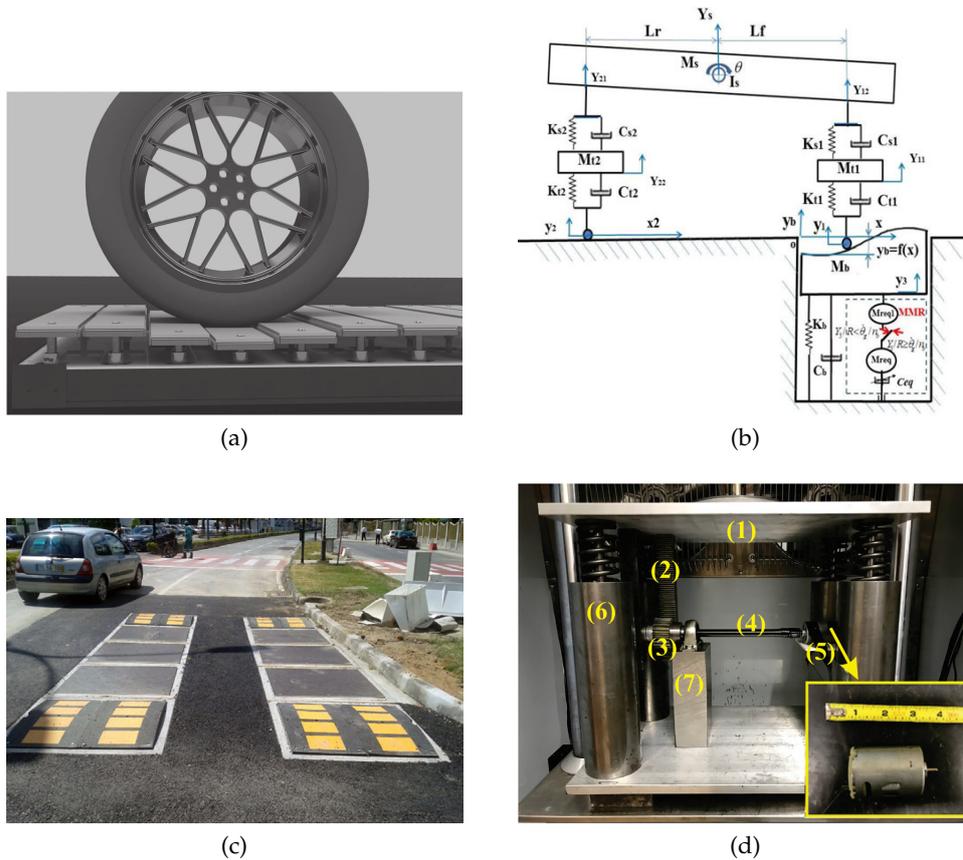


Figura 3.6: GEM desarrollados para la REPa en reductores de velocidad (a) Generador lineal propuesto por Pirisi y col. [98], (b) Modelo de medio vehículo utilizado por Wang y col. [99], (c) prueba piloto llevada a cabo por Duarte y col. [100] en conjunto con la compañía *Waydip* [101] y (d) ensayo de laboratorio del recolector propuesto por Gholikhani y col. [102].

electromagnético. En sus pruebas experimentales, ellos afirmaron obtener valores de energía de entre 4-5 veces mayores a los reportados previamente, con picos de 200W con el paso de un vehículo tipo sedan viajando entre 5 a 10km/h. Más adelante, los mismos autores presentaron un modelo analítico adoptando el *modelo de medio vehículo* (véase Figura 3.6b) del mismo diseño del recolector para su optimización [99]. En este caso, una potencia máxima instantánea de 647W fue documentada para un sedan pasando entre aproximadamente 3 a 11km/h.

Duarte y col. [105] demostraron teóricamente que el mecanismo manivela-deslizador era entre 2 y 4 veces más eficiente a los usualmente utilizados piñón-cremallera y palanca comparando en términos de la cantidad de energía transmitida y eficiencia, considerando diferentes perfiles para el reductor de velocidad, el mismo vehículo e idéntica carga eléctrica del generador en todos los casos. Más adelante Duarte y col. [100] en conjunto con la compañía *Waydip* [101] y la Universidad de Coímbra, implementaron una prueba piloto formada por 10 módulos de recolección de energía embebidos en la superficie de una carretera de Covilhã, Portugal mostrados en la Figura 3.6c. Este sistema, fue capaz de recolectar un máximo de 150Wh por día y aproximadamente 145J por cada vehículo. No obstante, la implementación presentó serios problemas asociados al rápido deterioro en las zonas de contactos entre las cajas contenedora de los módulos y el pavimento flexible.

Transductor	k	λ_{max}	U_E (mJ)	Rigidez
Multilayer	0.75	0.281	0.03	Alta
THUNDER	0.74	0.237	43.38	Baja
Bridge	0.29	0.057	1.13	Media
Cymbal	0.25	0.043	0.49	Media
MFC	0.24	0.029	0.0001	Muy baja
Moonie	0.23	0.012	0.012	Media

Cuadro 3.1: Comparativa distintos transductores piezoeléctricos [110, 111]

Por último y más recientemente, Gholikhani y col. [102] propusieron un diseño basado en el mecanismo piñón-cremallera acoplado a un embrague unidireccional y un GEM (véase Figura 3.6d). De esta manera, un prototipo experimental fue construido y ensayado en condiciones de laboratorio considerando cargas de 2, 3 y 4kN; sin embargo, apenas una potencia media de 3,21mW para cada eje fue reportada en esta ocasión, representando valores bajos pero aceptables para una primera etapa de implementación.

3.3.2 Piezoeléctrica

En lo que respecta a la Recolección de Energía Piezoeléctrica en Pavimentos (REPP), una gran variedad de transductores han sido propuestos en los últimos años. Comúnmente, estos pueden ser agrupados acorde a su forma de operación en dos grupos: *basados en tensión mecánica*, recomendados principalmente para ser directamente embebidos en calles y carreteras [106]; y *basados en vibraciones*, recomendados para ser aplicados en puentes y reductores de velocidad [60].

Para este mecanismo de transducción existen documentadas algunas propuestas llevadas a cabo por compañías privadas. Por ejemplo, en el año 2009 una empresa israelí llamada *Innowatech*, en colaboración con el Instituto Tecnológico de Israel (Technion), realizó una prueba piloto colocando módulos piezoeléctricos embebidos en el pavimento en una profundidad de 5cm, logrando así alimentar eléctricamente la iluminación de la carretera, señales de paro y sensores de velocidad [107]. A su vez, declararon que su solución poseía el potencial de producir 200kWh por kilómetro y carril. Otro proyecto de características similares fue llevado a cabo por *Genziko* quienes patentaron una solución que, según sus afirmaciones, poseía el potencial de generar 13600kW gracias a un sistema persistente de vibración que seguía recuperando energía luego del impacto de la rueda [108]. No obstante, pese a lo prometedor de los resultados reportados por *Innowatech* y *Genziko*, un informe técnico llevado a cabo por la Comisión de Energía de California [109] (CEC) concluyeron que estos resultados eran demasiado «optimistas», y que mayores validaciones en ambientes reales deberían ser realizadas para validar sus resultados, debido a la falta de información técnica disponible. Actualmente, ningún desarrollo posterior fue documentado por alguna de estas empresas.

Transductores basados en tensión mecánica

Zhao y col. [110] compararon mediante el MEF utilizando *ABAQUS* el rendimiento de diferentes actuadores piezoeléctricos embebidos en el pavimento considerando: *multilayer*, *MFC* [50], *moonie* [47], *cymbal* [48], *bridge* [112], *THUNDER* [113, 114] y *rainbow* [115]. La comparativa, fue realizada considerando el factor de acoplamiento k y el coeficiente de transmisión de energía λ_{max} definidos como

$$k^2 = \frac{\text{Energía eléctrica acumulada}}{\text{Entrada de energía mecánica}}, \quad (3.2)$$

$$\lambda_{max} = \left(\frac{\text{Salida de energía eléctrica}}{\text{Entrada de energía eléctrica}} \right)_{max}.$$

En sus simulaciones, los transductores tipo *multilayer* y *THUNDER* fueron los que presentaron mejores valores de k y λ_{max} (véase Cuadro 3.1); no obstante, estos fueron desestimados en una primera instancia debido a su mayor rigidez comparada con la del pavimento, lo cual sugiere el rápido deterioro del pavimento. Por otro lado, los transductores tipo *cymbal* y *bridge* fueron los sugeridos para la recolección en pavimentos. Un estudio más reciente analizando los distintos transductores fue conducido por Najini y Muthukumaraswamy [116], donde en este caso el transductor tipo *pile* (PZT) fue sugerido en conjunto con el material PZT-5H debido a sus mejores propiedades piezoeléctricas.

A esta altura, resulta importante remarcar que los nombres que reciben distintos actuadores en la literatura para la REPP puede ser un tanto confusa y/o inconsistente para los tipo: *multilayer*, *piezostacks*, *layered* y *piles*. A fines de estandarización, usaremos los términos *multilayer* y *piezostacks* como sinónimos, y nos referiremos a ellos como los actuadores que se componen de capas piezoeléctricas extremadamente finas intercaladas por electrodos interconectados en paralelo y producidas por la técnica de fabricación de co-cocción. Por otro lado, nos referiremos al actuador *piles* o *layered* como al arreglo de cerámicas tipo *bulk* conectadas eléctricamente en serio y/o paralelo adoptando distintos arreglos espaciales (número de pilas y cantidad de piezos por pila).

EL TRANSDUCTOR TIPO CYMBAL El primer estudio de la capacidad del transductor tipo *cymbal* para la recolección de energía fue liderado por Kim y col. [117] (véase Fig. 3.7a), quienes mediante ensayos de laboratorio con muestras de 29mm de diámetro y 1mm de espesor determinaron que el tipo de material a utilizar tenía una gran influencia en la rendimiento del dispositivo. Posteriormente, los mismos autores Kim y col. [123] desarrollaron un modelo analítico, asumiendo un estado tensional basado en la teoría de resortes tipo Belleville [124] en conjunto con la validación numérica de dichas expresiones mediante simulaciones basadas en el MEF utilizando el software *ATILA*. El MEF (*ABAQUS*) también fue empleado por Zhao y col. [112] para estudiar *cymbals* embebidos en el pavimento y con el fin de encontrar una geometría óptima considerando tanto el rendimiento para la RE y los desplazamientos superficiales del pavimento. Acorde a sus simulaciones, una energía de 0,06J podía ser recuperada con las dimensiones optimizadas.

En otro sentido, diversas modificaciones geométricas han sido propuestas para el *cymbal* «común» en orden de mejorar el rendimiento de este actuador. Por ejemplo, Yuan y col. [118] propusieron una variante que consistía en una

MFC: Macro Fiber Composite

THUNDER: thin layer unimorph ferroelectric driver and sensor

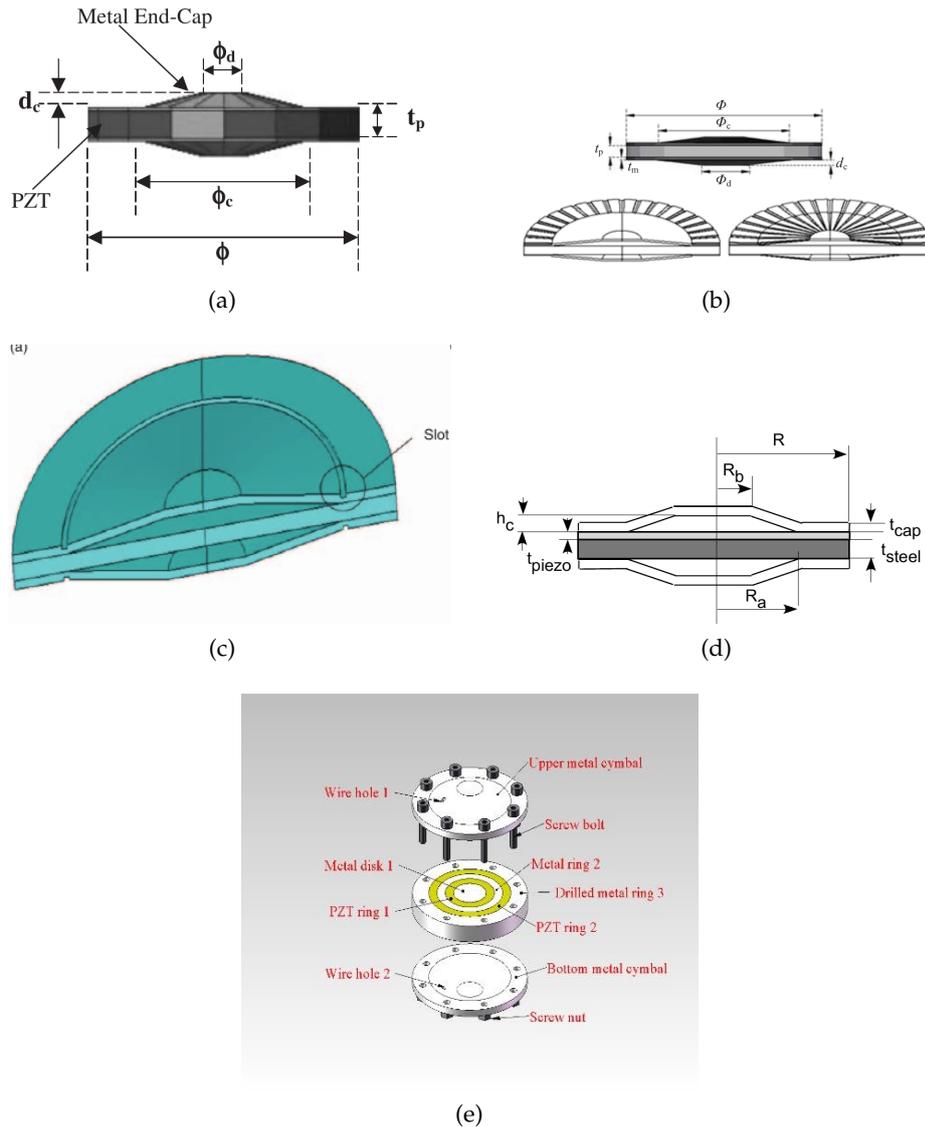


Figura 3.7: Transductores *cymbals* propuestos para la REPP: (a) común [117], (b) ranurado radialmente [118], (c) ranurado circunferencialmente [119], (d) *unimorph* [120, 121] y (e) con capas radiales [122].

serie ranuras radiales en los tapas metálicas del mismo que buscaba reducir las tensiones circunferenciales y así aumentar el grado de conversión en energía eléctrica (Fig. 3.7b). Dichas hipótesis, fueron confirmadas mediante simulación numérica utilizando ANSYS donde una mejoría significativa del 60% respecto a un transductor *cymbal* «común» fue alcanzada para el mismo tamaño y condiciones de excitación. Por otro lado y extendiendo este trabajo, Yuan y col. [119] también estudiaron la influencia de una ranura circunferencial buscando los mismos beneficios que en el diseño anterior (Fig. 3.7c). En este caso, desarrollaron un modelo analítico capaz de predecir correctamente sus resultados experimentales obteniendo así una mejoría de un 80% del rendimiento. Arnold y col. [120] presentaron otra alternativa del transductor tipo *cymbal* denominada *unimorph* (Fig. 3.7d). En esta variante, una portante de acero fue adosada a la cerámica piezoeléctrica en búsqueda de lograr aumentar la tensión máxima soportada por el transductor. No obstante, diversos problemas en los ensayos de laboratorio de su dispositivo fueron encontrados, donde el empleo de resina epoxi no dio buenos resultados para transmitir la

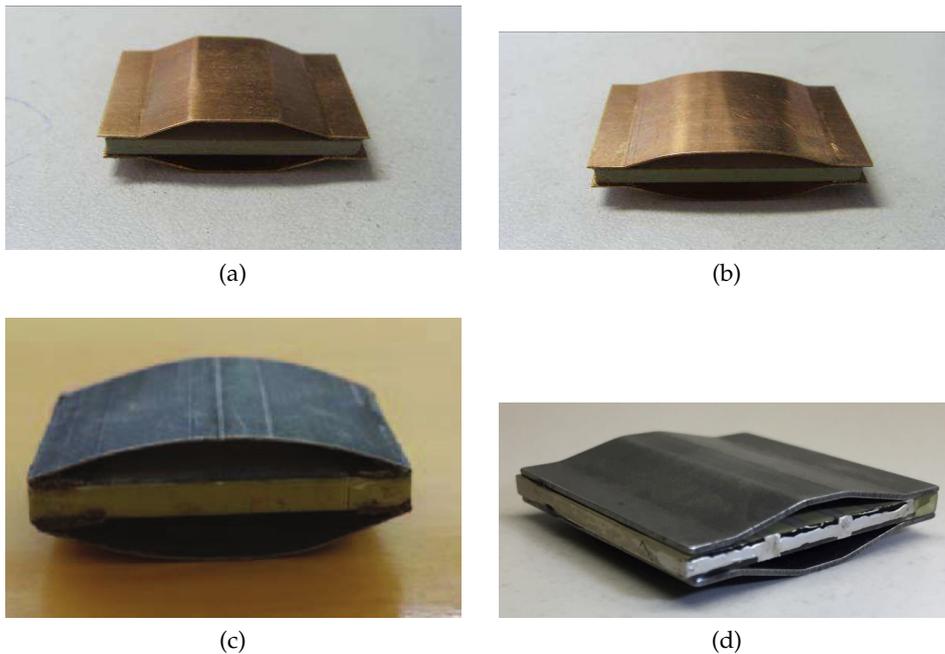


Figura 3.8: Transductores *bridge* propuestos para la REPP: (a) *trapezoidal* [127], (b) *arc* [128], (c) *arch* [129], (d) electrodos segmentados [125, 130].

carga mecánica. Posteriormente, los mismos autores, desarrollaron un modelo analítico basado en el cálculo estático de tensiones en el plano de este mismo actuador [121]. Estas expresiones, fueron años más tarde verificadas por Jasim y col. [125] mediante el MEF utilizando *COMSOL*, quienes advirtieron que si bien la predicción de la generación eléctrica era buena, la concentración de tensiones presente en la unión de los materiales podía ser importante y no observable en el modelo analítico. En el trabajo conducido por [121] ellos también construyeron un prototipo experimental el cual fue capaz de producir una potencia máxima de $121,3\mu\text{W}$ para cargas de hasta hasta 1940N a 1Hz . La última y más reciente alternativa, fue propuesta por Liu y Wang [122], quienes presentaron un *cymbal* con un patrón de electrodos radiales capaz de soportar grandes cargas, especialmente pensado para la REPa (Fig. 3.7e). De esta forma, ellos diseñaron y validaron un dispositivo logrando obtener un valor máximo de potencia de apenas 1mW , los cuales, considerando las cargas que involucradas, el rendimiento obtenido fue inferior a los obtenidos por los previamente mencionados.

Pese a que diversos investigadores exploraron la posibilidad de utilizar *cymbals* para la REPa, la primera y única prueba fehaciente en condiciones de campo controladas fue llevada a cabo por Moure y col. [126], quienes en 2016 embebieron transductores de este tipo a una profundidad de 2cm y fueron capaces de recuperar $16\mu\text{W}$ por el pasaje de una rueda de vehículo pesado.

EL TRANSDUCTOR TIPO BRIDGE Yao y col. [127] y Li [128] mediante una máquina universal de ensayos compararon el rendimiento de dos variantes de transductores tipo *bridge*, embebidos en resina epoxi y arena, denominados *trapezoidal* (o «común») y *arc* (Fig. 3.8a y 3.8b respectivamente). De esta forma, ellos encontraron que en ambos casos la eficiencia de conversión de energía era mayor en el transductor tipo *arc*; no obstante, era el más propenso a sufrir destrucción o rotura. Los valores máximos alcanzados para el voltaje a

circuito abierto fueron de 160V para el *trapezoidal*, con una presión de 0,7MPa, y de 220V para el *arc*, con una presión de 0,45MPa, valor máximo alcanzado antes de romperse. Hongduo y col. [129] compararon el rendimiento de estos dos mismos transductores añadiendo una nueva variante denominada *arch* mediante el MEF y ensayos de laboratorio (Fig. 3.8c). En base al análisis del estado tensional proporcionado por el MEF encontraron que el *arch* presentaba una menor concentraciones de tensiones comparadas con el transductor *arc*. A su vez, la nueva variante *arch* fue la que generó experimentalmente un mayor voltaje, siendo así la alternativa más prometedora.

Yesner y col. [125, 130] propusieron un novedoso transductor tipo *bridge* formado por electrodos segmentados (véase Fig. 3.8d) capaz de generar hasta cuatro veces más energía que el *bridge* tradicional gracias al cambio de la dirección de la polarización, el cual era coincidente con la dirección principal de las tensiones. Mediante simulaciones en COMSOL, ellos encontraron dimensiones que maximizaban la generación de energía. De esta manera, un total de 64 transductores con la geometría optimizada fueron construidos y embalados en una caja de aluminio en un arreglo de 4x4x4. Este dispositivo, fue testeado experimentalmente utilizando un pistón neumático, alcanzando una potencia máxima de 2,1mW para una resistencia eléctrica de 400kΩ. Seguido a este trabajo, los mismos autores estudiaron la falla por fatiga de este modulo (debido a las carga repetitivas) basado en la observación numérica de las concentraciones de tensiones en el *bridge* en los bordes de contacto del tapa metálica y el piezoeléctrico [131, 132]. De esta manera, encontraron que existía una condición de falla por fatiga en el actuador tipo *bridge*, afectando la vida útil en gran medida.

OTROS TRANSDUCTORES BASADOS EN TENSIÓN PARA LA REPP Además de los transductores tipo *cymbal* y *bridge* otros transductores basadas en tensión han sido propuestos para la REPP, incluyendo desde los tipo *bulk* directamente embebidos en el pavimento hasta actuadores tipo *pile* o *layered* en diferentes arreglos eléctricos y mecánicos.

Entre los estudios teóricos desarrollados para estudiar la REPP empleando transductores tipo *bulk*, Xiang y col. [133] modelaron al pavimento como una viga Bernoulli-Euler de infinita longitud, descansando en una fundación elástica de Winkler y sometida a cargas distribuidas móviles. Ellos encontraron que la velocidad del auto, la constante elástica del suelo y el amortiguamiento del sistema tenían una gran influencia en los valores de generación. Un modelo más sofisticado fue desarrollado por Zhang y col. [134] quienes emplearon la teoría de placas de Kirchhoff para modelar el pavimento y cargas móviles uniformemente distribuidas para cada rueda del vehículo circulante, logrando identificar las mismas dependencias en los valores de voltaje, sumado a la capacidad de estudiar la influencia de la posición del recolector en la posición lateral del pavimento. Por último Zhao y col. [135] contemplaron la interacción vehículo-pavimento asumiendo una viga simplemente apoyada de gran longitud para el pavimento y el modelo de un cuarto de vehículo. Mediante una serie de estudios paramétricos, determinaron que cada velocidad de vehículo estaba asociada a una resistencia óptima, que la energía máxima recolectada no dependía del tipo de conexión entre piezoeléctricos (serie o paralelo) pero si de la distancia entre transductores, y que el estado de la carretera afectaba fuertemente a la generación.

Por otro lado, una gran cantidad de investigadores evaluaron en campo y laboratorio la viabilidad de emplear diferentes arreglos de discos *bulk* PZT (o también denominados *piles*). Por ejemplo, Xiong y Wang [136], instalaron 6 módulos constituido por 9 discos piezoeléctricos cada uno en pavimento real en una carretera cercana a la ciudad Roanoke, Estados Unidos. Su sistema mostró la factibilidad de la REPP produciendo una potencia media de 3,106mW pese a que solo un 14.43 % de la carga aplicada fue transmitida a los materiales piezoeléctricos. Jiang y col. [137] propusieron un dispositivo compuesto por 36 discos piezoeléctricos, divididos en 3 pilas, sumados a una placa rígida para garantizar la transmisión de fuerzas al transductor. Respecto a la generación, ellos reportaron mediante estudios de laboratorio que existía una carga eléctrica resistiva óptima, la cual era inversamente proporcional a la frecuencia de excitación e independiente de su amplitud. Papagiannakis y col. [138], emplearon el MEF pero esta vez mediante *ABAQUS*, sumado a ensayos de prototipos en condiciones de laboratorio bajo estados tensionales controlados. De esta manera, mostraron la factibilidad de este tipo de aplicaciones para la REPP y la alimentación de tanto luces LED como de sensores inalámbricos. Más recientemente, una nueva variante de transducción fue llevada a cabo de manera experimental por los mismos investigadores [139], donde concluyeron que la generación debido al pasaje de vehículos de gran envergadura (camiones) está asociada con mayores niveles de generación. Yang y col. [140] desarrollaron un módulo piezoeléctrico formado por 9 pilas de 3 cerámicas PZT cada una, apiladas y conectadas en paralelo para estudiar la resistencia contra la fatiga, el agua y la influencia de la temperatura en transductores piezoeléctricos. A través de un ensayo de 100 mil ciclos de carga, pruebas de inmersión y de calentamiento, descubrieron que las propiedades piezoeléctricas no eran afectadas en ninguno de los casos salvo para temperaturas cercanas a la necesaria para conformar la mezcla asfáltica, por lo que una empaquetadura debía ser desarrollada. A su vez, cada módulo contaba con sus respectivos puente rectificadores y conmutares para el acondicionamiento de la señal eléctrica. Luego Yang y col. [141] integraron 20 módulos compuestos por 12 unidades piezoeléctricas cada uno al pavimento como prueba piloto en una carretera cercana a la ciudad de Zhaotong, China, recolectando suficiente energía para iluminar un cartel LED. Además, identificaron que el voltaje generado por los materiales piezoeléctricos era altamente sensible a la velocidad del movimiento del vehículo circulante, donde mayores valores de voltaje fueron asociados a una mayor rapidez.

Transductores basados en vibraciones

Los primeros estudios para cuantificar la energía mecánica disponible en forma de vibraciones en túneles de carretera y vías de ferrocarriles fueron llevados a cabo por Wischke y col. [142], quienes mediante la medición con acelerómetros demostraron que las vibraciones en las carreteras eran pequeñas, producto de la suspensión de los vehículos y la flexibilidad de los neumáticos. Otros investigadores, también analizaron mediciones reales para el diseño de REPP; como por ejemplo Elvin y col. [143], quienes estudiaron la energía disponible en forma de vibración causada por terremotos, viento y cargas dinámicas del tráfico en puentes y edificios. De esta manera, establecieron que un dispositivo para la REPP real debe variar entre 20 y 200cm³ para alimentar un nodo sensor. Ye y col. [144] utilizaron algoritmos genéticos para encon-

trar las dimensiones ideales de un REPP tipo viga cantilever considerando excitaciones reales medidas en la boca de una alcantarilla, demostrando que la técnica implementada era útil para la correcta selección de la frecuencia natural del dispositivo. Peigney y Siegert [145] identificaron la frecuencia natural de un puente del norte de Francia mediante mediciones de vibraciones. Luego, diseñaron y construyeron un REPP tipo viga cantilever el cual fue colocado en los soportes de los caños de agua de la estructura generando una potencia promedio de 30 W, suficiente energía para alimentar un sensor de monitoreo estructural.

En contraste con los estudios previamente mencionados, otros investigadores optaron por simular las vibraciones productos de las cargas dinámicas de los vehículos. Por ejemplo, Erturk [146] formuló analíticamente el problema de vibraciones en puentes para la REPP, empleando la teoría de vigas de Bernoulli-Euler y proponiendo dos enfoques bien diferenciados: (i) una viga cantilever piezoeléctrica bimorfa suspendida en un punto arbitrario de un puente simplemente apoyado, y (ii) considerando un parche piezoeléctrico cubriendo una región específica del mismo puente. De esta forma, se determinó que ambos enfoques son válidos para la REPP, además de la posibilidad de extender su modelo a otros mecanismos de transducción (i.e. electromagnética y electrostática). Zhang y col. [147] modelaron analíticamente un REPP tipo viga cantilever adosado a diferentes puentes típicos de hormigón de Estados Unidos. Para estudiar la dinámica de los puentes, un complejo modelo utilizando ANSYS fue desarrollado considerando las cargas dinámicas por el pasar de los vehículos, demostrando que la generación aumentaba con las peores condiciones del camino y con longitudes de tramos de puente más pequeños. Karimi y col. [148] investigaron la cantidad de energía cinética disponible en la vibración de puentes, modelando a este como una viga simplemente apoyada y asumiendo dos tipos de excitaciones: una carga puntual o una carga distribuida móvil. Como resultado, encontraron que los resultados pueden diferir debido a la diferentes excitaciones cuando la longitud de la carga distribuida era grande comparada con la longitud del puente. Además, encontraron que el voltaje máximo de generación producida para un REPP tipo viga cantilever aumentaba a medida que lo hacía la velocidad de los vehículos.

Por otro lado, los estudios más recientes de la REPP basados en vibraciones fueron orientados a la implementación en reductores de velocidad. Por ejemplo, Ekawati y col. [149] propusieron un sistema compuesto por tres módulos: el primero formado principalmente por resortes capaces de capturar la energía del vehículo y topes para limitar el desplazamiento máximo; el segundo formado por 10 vigas piezoeléctricas cantilever con imanes en la punta; y un tercer modulo rectificador y conversor para cargar un capacitor. De esta forma, un total de 68,82mJ de energía fue capturada por el pasar de un vehículo. Chen y col. [150] también propusieron un dispositivo REPP para aplicar en reductores de velocidad conformado por vigas cantilever. Como aspecto novedoso, ellos diseñaron un circuito de bajo consumo eléctrico capaz de quedar inactivo (*sleep mode*) cuando ningún vehículo estaba excitando al sistema [151]. En este caso, la energía generada por el pasaje de un solo auto es de aproximadamente 1,26mJ. Por último, Song y col. [152] evaluaron el rendimiento de un modulo conformado por 40 parches piezoeléctricos diseñado para la REPP en reductores de velocidad. Cada parche, fue fijado de sus extremos y deformado al pasar el vehículo con un desplazamiento máximo

Tecnología	Eficiencia		TRL				LCOE		
	[65]	[62]	[5]	[60]	[62]	[63]	[60]	[62]	[63]
Fotovoltaica	Med-Alt	Med-Alt	4-7	9	3	4-9	0.5	0.45	19.8
Termoeléctrica	N/A	Med-Alt	3	3	3	3	95.74	0.89	0.89-2.31
Electromagnética	N/A	Med-Alt	3-4	4	2	4	278.95	N/A	37.36
Piezoeléctrica	Med	Med	4	4	4	3-5	106.387	27.9	19.5-240

Cuadro 3.2: Comparativas de los diferentes mecanismos de transducción para la REPa en términos de Eficiencia, TRL y LCOE.

permitido de 2mm. El módulo fue construido y ensayado en condiciones controladas, cargando hasta los 6V un capacitor de $10,000\mu\text{F}$, suficiente para operar un celular durante 200s, luego del pasaje de nueve vehículos.

3.4 DISCUSIÓN FINAL

Hasta aquí fueron presentados los aportes más destacados de la REPa hasta la fecha. Esta sección pretende discutir y analizar el estado actual de desarrollo de cada una de las tecnologías documentadas.

En los últimos años, se ha observado cómo la implementación de soluciones tecnológicas para aprovechar la energía disipada en el pavimento (en forma de vibraciones y calor), ha atraído la atención tanto de la comunidad científica, como del sector privado y entes gubernamentales. A la hora de comparar los distintos resultados y/o conclusiones reportados en la literatura, existen algunos desafíos o inconvenientes. Por lo general, los estudios conducidos por investigadores y universidades presentan un mayor grado de desarrollo y análisis; no obstante, en la mayoría de los casos, las pruebas se vieron limitadas a la simulación computacional o pruebas en laboratorio de prototipos. Por otro lado, las industrias han sido pioneras en implementaciones en pavimento real, pero existe escasa información técnica fehaciente documentada [109]. Además, aún cuando la información técnica está disponible, diferentes variables fueron elegidas para evaluar el rendimiento, como por ejemplo: voltaje a circuito abierto o para una resistencia específica, potencia, potencia por unidad de volumen, energía y eficiencia. Otra razón que dificulta la comparativa entre dispositivos, sobretudo las tecnologías que intentan recolectar la energía mecánica, es que no todos fueron excitados de la misma forma: mientras que algunos autores estudiaron el rendimiento de sus transductores considerando fuerzas o tensiones armónicas, con distintos valores de frecuencia y amplitud [122], otros lo hicieron de forma impulsiva [152] o incluso considerando ruido blanco [38]. Por último, a la hora de extrapolar la generación de un solo transductor, rara vez se utilizan las mismas consideraciones sobre kilómetros de carretera, volumen de tráfico, velocidad y/o tipo de vehículos, cantidad de carriles, estado del asfalto, etc.

Con el fin de dar una comparativa más fehaciente del estado actual y viabilidad de las distintas tecnologías, diversos autores recurrieron generalmente a los siguientes indicadores presentados en el Cuadro 3.2:

- *Eficiencia*: Entendiendo a esta como una descripción de la relación costo-beneficio de su implementación.

TRL: *Technological
Readiness Level*

- *Nivel de madurez tecnológica (TRL)*: Método desarrollado por la NASA en la década del 70 y adoptado por la Comisión Europea en el 2014, que asigna un valor numérico en una escala del 1 al 9 en base a la etapa asociada al nivel de madurez de una cierta tecnología. Cada valor de la escala representa lo siguiente: TRL 1 – Observación de principios básicos, TRL 2 – Formulación del concepto tecnológico, TRL 3 - Prueba de concepto experimental, TRL 4 – Validación tecnológica en laboratorio, TRL 5 - Validación tecnológica en un entorno relevante, TRL 6 - Demostración tecnológica en un entorno relevante, TRL 7 - Demostración del prototipo del sistema en el entorno operativo, TRL 8 - Sistema completo y calificado, TRL 9 - Sistema real probado en el entorno operativo.

LCOE: *Levelized
Cost of Energy*

- *Coste nivelado de Energía (LCOE)*: Medida del costo neto promedio de la generación de electricidad para una cierta tecnología durante toda su vida útil. Su forma de calcularla es

$$\text{LCOE} = \frac{\text{suma de costos durante la vida útil}}{\text{suma de energía eléctrica total producida en la vida útil}} \quad (3.3)$$

En el Cuadro 3.2, donde las referencias están ordenadas de izquierda a derecha en orden cronológico, puede observarse como el LCOE ha tendido a disminuir; no obstante, esto no ha sido observado para el TRL. Esto sugiere que si bien ciertas optimizaciones de los sistemas han sido llevadas a cabo recientemente aumentando la eficiencia de conversión y/o disminuyendo los costos, el nivel de madurez de ellas (exceptuando la fotovoltaica) es relativamente bajo.

Independientemente de lo anteriormente comentado, cada tecnología ofrece ventajas y desventajas que la hacen más o menos aplicables para ciertas carreteras o aplicaciones, tal como se ha desarrollado en los apartados anteriores y se sintetiza en el Cuadro 3.3. Observando este Cuadro puede notarse que ninguna tecnología domina totalmente sobre las otras, por lo que la investigación y desarrollo de dispositivos basados en cualquiera de ellas podría resultar viable para la REPa. Sin embargo, la *transducción piezoeléctrica* presenta un gran atractivo sobre las otras debido a ser, dentro de las capaces de proveer energía de manera continua por no depender de las condiciones climáticas, la de mayor densidad de potencia; convirtiéndola así en una de las más prometedoras para la REPa [153]. Es por ello, que en esta tesis nos centraremos en este mecanismo de transducción para el desarrollo de dispositivos capaces de recolectar energía del pavimento.

Condiciones de diseño para dispositivos de REPP

En base a lo observado y documentado por otros investigadores, existen una serie de lineamientos y desafíos técnicos que deben ser considerados a la hora de diseñar un REPP. Acorde a Zhao y col. [154], un dispositivo embebido debe tener la capacidad de convertir la mayor cantidad de energía mecánica en energía eléctrica, manteniendo su deformación entre valores mínimos en orden de garantizar su integridad estructural. Además, el desplazamiento de la superficie libre del pavimento no debe ser superior a lo normal sin el recolector embebido, en orden de garantizar que tanto el confort de conducción como el consumo del vehículo se vean afectados. Por otro lado, respecto a la rigidez del transductor, ésta debe tener un valor cercano a la del pavimento, es decir, lo suficientemente alta para garantizar la máxima transferencia de energía

Tecnología	Ventajas	Desventajas
Fotovoltaica	<p>La mayor densidad de potencia en comparación con otros mecanismos de transducción.</p> <p>Es la tecnología más madura en alternativas amigables al medio ambiente.</p>	<p>Dependiente de las condiciones climáticas.</p> <p>Los paneles transparentes son susceptibles a la suciedad y disminuyen la fricción de frenado de los vehículos.</p> <p>Los paneles embebidos presentan considerable menor rendimiento que los colocados a un costado de la carretera.</p> <p>Compromiso estructural del panel por las cargas mecánicas</p> <p>Alto costo inicial por el uso de baterías.</p>
Termoeléctrica	<p>Simplicidad estructural sin partes móviles.</p> <p>Podrían colaborar a mitigar el efecto de isla de calor.</p>	<p>Extremadamente baja potencia generada y rendimiento, además de alto costo.</p> <p>Dependiente de las condiciones climáticas.</p>
Electromagnética	<p>Diversas técnicas pueden ser utilizadas para capturar y transmitir la energía.</p> <p>Es también aplicable en vehículos (suspensión, frenado regenerativo, etc.)</p>	<p>Grandes desplazamientos son en general requeridos, limitando su aplicabilidad a puentes y reductores de velocidad.</p> <p>Tienen alto mantenimiento debido a las componentes mecánicas utilizadas y partes móviles.</p>
Piezoeléctrica	<p>Gran densidad de potencia y simplicidad estructural.</p> <p>La conversión de energía cinética a energía eléctrica se da de forma directa.</p> <p>Pueden ser instalados en cualquier carretera y es independiente de las condiciones climáticas.</p>	<p>Alto costo en comparación con los bajos niveles de energía, recomendados solo a nivel micro de recolección.</p> <p>Difícil instalación en pavimentos ya construidos</p> <p>Requieren un cuidadoso diseño de la empaquetadura capaz de soportar las cargas</p>

Cuadro 3.3: Ventajas y desventajas asociadas a los diferentes mecanismo de transducción para la REPa.

mecánica, y lo suficientemente baja para no producir un deterioro prematuro del pavimento [100, 155]. Otra variable importante es la profundidad de embebido, siendo que menores valores de profundidad producirán mayores niveles de generación pero con el aumento del riesgo de falla por fatiga del pavimento [156]. De acuerdo a Walubita y col. [87], el almacenamiento de la energía es un problema a resolver que no ha sido tratado en la mayoría de los trabajos. El deterioro de las propiedades piezoeléctricas del material debido a las cargas dinámicas repetitivas, también es un factor que no ha sido ampliamente estudiado [60], sobretodo si no se tiene fácil acceso al transductor instalado. Otro aspecto importante a considerar es la temperatura; si bien ha sido probado que la misma no afecta el rendimiento del dispositivo una vez colocado [139, 155], pueden existir problemas en el proceso de fabricación del pavimento donde temperaturas de aproximadamente 180°C son alcanzadas, la cual puede estar cerca a la temperatura de Curie del piezoeléctrico, entre 150°C y 250°C dependiendo del material [140].

Todos estos desafíos mencionados, implican un diseño acorde para la empaquetadura que contenga los materiales piezoeléctricos que debe ser llevado a cabo para protegerlos de tensiones y temperaturas excesivas, pero a su vez, siendo lo suficientemente flexible para transmitir la energía mecánica. Es por esto que la REPP utilizando materiales embebidos en pavimentos presenta gran cantidad de desventajas y problemas que aún no han sido resueltos.

A fines de eludir estos inconvenientes, los esfuerzos de desarrollar un dispositivo recuperador de energía en esta tesis se orientarán a la implementación en *reductores de velocidad* [149-152]. Diversas ventajas ofrece la implementación de REPP en reductores de velocidad por sobre los embebidos directamente en el pavimento, las cuales pueden ser detalladas como:

1. Pueden emplearse velocidades bajas del vehículo para la REPP. Tener velocidad altas de circulación no siempre está asociada a mayor generación de energía, pues si la velocidad del vehículo es demasiado alta entonces el tiempo de aplicación de la carga será muy poco pequeño y puede afectar significativamente la energía transmitida [157].
2. Es posible mejorar la cantidad de energía transmitida en la dirección vertical mediante un correcto diseño del perfil del obstáculo [158]. En este sentido, existen numerosos sistemas de reducción de velocidad: lomas de burro, rampas y tachas son algunos de los más comunes de utilizar.
3. La condición referida al desplazamiento máximo permitido en la superficie no debe ser necesariamente tan restrictiva si se considera que el recolector va a estar dentro de un obstáculo para el vehículo.
4. El no intervenir el pavimento trae ventajas técnicas asociadas a su fácil instalación e inspección de mantenimiento involucrando menores costos. Además, evita problemas de temperatura y puede instalarse en carreteras ya construidas.

Por último, un estudio sistemático de la REPP fue desarrollado por Razali y col. [159], quienes mediante el análisis de más de 30 artículos científicos observaron que el material preferido para esta aplicación era el PZT-5H debido a sus mayores niveles de generación. Esto, se encuentra en total concordancia con lo

observado por las evaluaciones realizadas por otros autores que recomendaron este material para esta aplicación [160, 161]

Debido a las dimensiones geométricas de los parches piezoeléctricos, diversas formulaciones basadas en distintas teorías de vigas (p. ej. Bernoulli-Euler, Rayleigh y Timoshenko) han sido utilizadas a la hora de desarrollar modelos matemáticos de dispositivos recolectores de energía [162]. Dentro de la gran cantidad de configuraciones que éstos pueden adoptar, la viga en voladizo o *cantilever*, es la más comúnmente elegida, donde una o dos láminas piezoeléctricas (*unimorfa* o *bimorfa* respectivamente) son colocadas tan cerca como sea posible del extremo fijo donde las tensiones y deformaciones, y por lo tanto también la generación, son máximas [163-165]. Este tipo de dispositivos son usualmente modelados asumiendo hipótesis de linealización tanto para los campos de desplazamiento, deformaciones y relaciones constitutivas con el fin de dar un tratamiento matemático sencillo y simplificado. Actualmente, incluso considerando las ventajas que presentan los recolectores piezoeléctricos frente a otros mecanismos de transducción, como fuera mencionado en el Capítulo 1, el rendimiento asociado a ellos presenta los siguientes problemas y desafíos a resolver [166]:

Referimos como «configuración» a las condiciones de borde que el dispositivo se encuentra sujeto.

1. *Ancho de banda y sintonización*: asumiendo una excitación armónica, los osciladores lineales pueden alcanzar un rendimiento aceptable cuando la frecuencia de excitación Ω se encuentra cerca a una de las frecuencias naturales del sistema ω_n . Este comportamiento, se debe al fenómeno que se conoce como *resonancia* y se manifiesta en el notable aumento de amplitud, tanto para el desplazamiento como para el voltaje, como puede observarse de manera esquemática y adimensional en la Figura 4.1. Sin embargo, tan pronto como Ω se aleja de ω_n , una caída drástica en la generación del dispositivo es identificada disminuyendo en gran medida su rendimiento [167, 168]. Ante esto, la necesidad de aumentar el ancho de frecuencia de funcionamiento, o bien poder variar la frecuencia natural mediante la alteración de un parámetro, emergen como dos alternativas de mejora posibles.

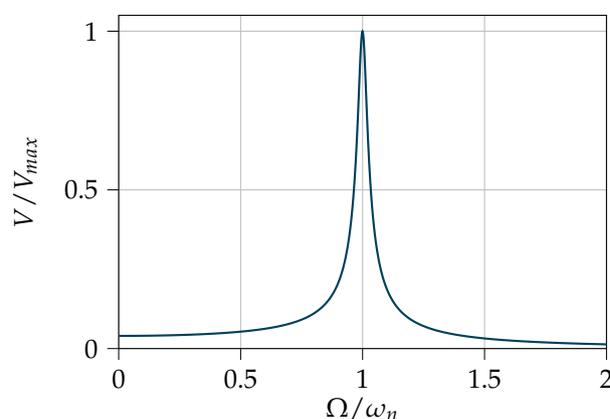


Figura 4.1: Representación adimensional de la respuesta en frecuencia de un recolector de energía en régimen lineal.

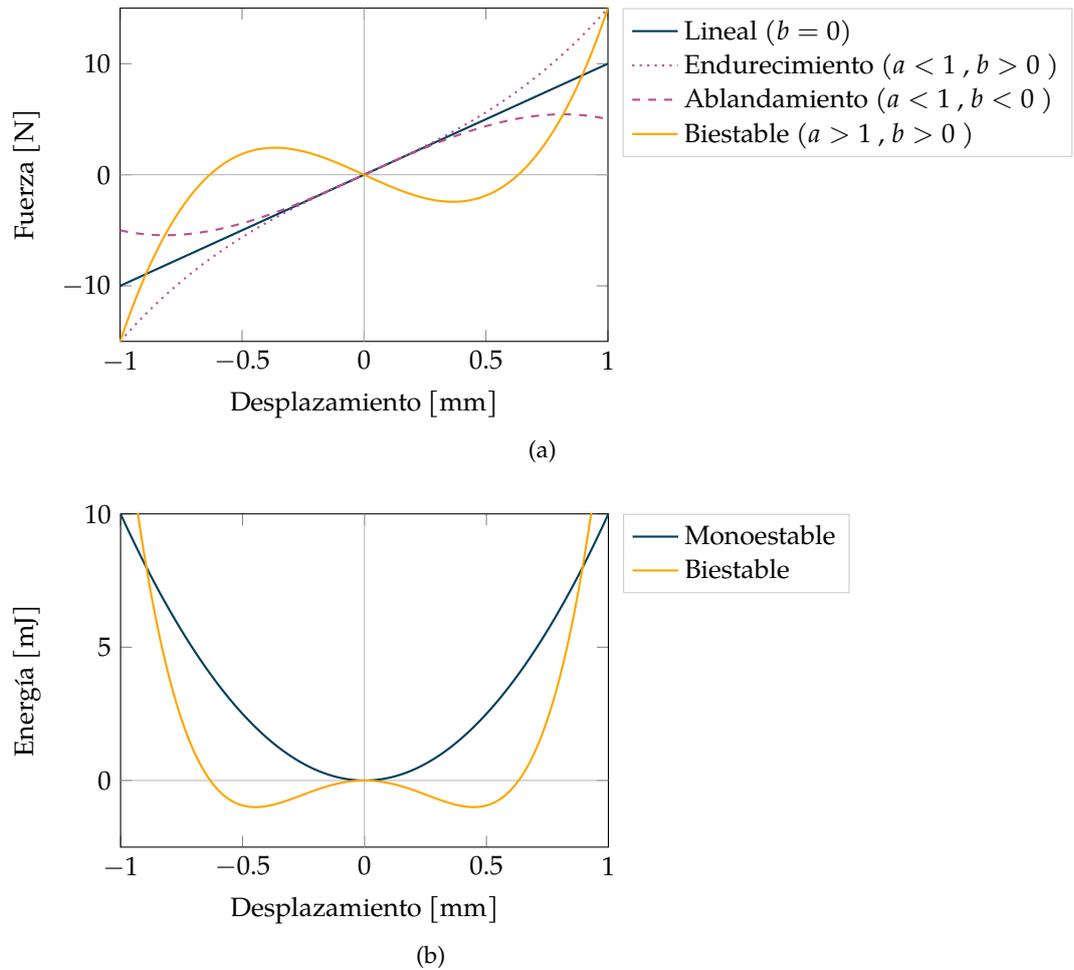


Figura 4.2: Funciones de (a) fuerza restauradora y (b) energía potencial para diferentes dispositivos de REP basados en vibración.

2. *Baja frecuencia y escalabilidad:* Muchas fuentes de vibraciones mecánicas poseen bajas frecuencias [169]. Esto significa que a fin de obtener un rendimiento razonable, la frecuencia natural del dispositivo debe ser sintonizada a valores bajos. Con este objetivo, la mayoría de los dispositivos se valen de grandes masas puntuales, p. ej. en el extremo libre para la configuración cantilever [164]. No obstante, pese a que esta técnica logra cumplir satisfactoriamente su propósito, este tipo de implementaciones atenta contra la escalabilidad del dispositivo, debido al considerable aumento de su tamaño y de sus desplazamientos.

Con el fin de buscar una solución a estos problemas, distintos investigadores desarrollaron diversos dispositivos basados en distintos enfoques como: multimodalidad [170, 171], no linealidades [166], aumento en frecuencia [172, 173], biestabilidad o multiestabilidad [174-176], *pluckling* [150, 177], entre otros.

4.1 ANTECEDENTES

4.1.1 Breve introducción matemática a osciladores no lineales biestables

Entre los diversos enfoques utilizados para mejorar el rendimiento de recolectores de energía piezoeléctricos, la inclusión de tanto fuentes de no linealidad como de biestabilidad han sido estudiadas en profundidad como

El enfoque de «aumento en frecuencia» es comúnmente encontrado en la literatura como «frequency-up» por sus nombres en inglés.

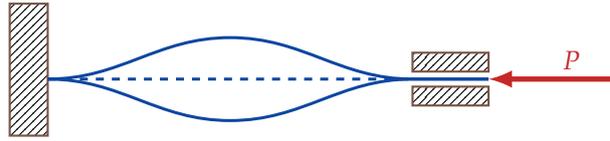


Figura 4.3: Representación esquemática de la solución al primer modo de pandeo para una viga bi-empotrada. Líneas continuas representan soluciones estables mientras que discontinuas, inestables.

una alternativa prometedora durante la última década [178]. Las principales ventajas asociadas a este enfoque de recolector se asocian a: (i) la mayor potencia debido a la amplificación de desplazamientos durante la oscilación entre pozos de energía potencial (ver Figura (4.2b)), (ii) el aumento del ancho de banda y la capacidad de generar energía a valores más bajos de frecuencia debido al efecto de ablandamiento, y (iii) la innecesidad de energía extra para mantener cualquiera de los puntos de equilibrio [179].

Con el fin de introducir los principales conceptos matemáticos de un sistema oscilatorio no lineal, tanto en los regímenes mono- como biestable, la Ecuación Diferencial Ordinaria (EDO) del oscilador de Duffing es presentada siguiendo el enfoque de [167]

$$\ddot{x} + c\dot{x} + (1 - a)x + bx^3 = F(t), \quad (4.1)$$

donde \ddot{x} representa la fuerza inercial, $c\dot{x}$ la fuerza de amortiguamiento viscoso, $F(t)$ la fuerza de excitación o motriz, mientras que $f(x) = (1 - a)x + bx^3$ la fuerza restauradora (o elástica) no lineal. Acorde a los distintos valores que toman los parámetros a y b en esta última función, diferentes características del sistema pueden ser alcanzadas. Sus influencias en la forma de la fuerza restauradora, así como la denominación de los sistemas resultantes, se encuentran esquemáticamente representados en la Figura 4.2a. El primer y más simple escenario posible es cuando $b = 0$, que implica que el término no lineal de orden cúbico desaparece y la Ec. (4.1) se reduce a un oscilador lineal. En este caso, existe una relación directamente proporcional entre la fuerza restauradora y los desplazamientos, lo cual facilita enormemente la obtención de una solución analítica exacta. El segundo escenario, se da cuando $a < 1$ y $b \neq 0$, dando lugar al oscilador monoestable con comportamiento de endurecimiento ($b > 1$) o de ablandamiento ($b < 1$). En estos casos, a diferencia del oscilador lineal, la tasa de crecimiento de la fuerza restauradora tiende a aumentar o disminuir respectivamente a medida que el desplazamiento aumenta. Por último, el oscilador biestable es alcanzado cuando $a > 1$ y $b > 0$ debido a la existencia de múltiples valores de x que satisfacen la condición $f(x^*) = 0$. Estos valores, usualmente referidos como puntos de equilibrio y denotados como x^* , son frecuentemente estudiados utilizando la función de energía potencial obtenida a partir de $f(x) = dU/dx$. La principal ventaja radica en mostrar de una manera más clara la estabilidad dinámica de dichos puntos [180]. Para el presente oscilador de Duffing dado por la Ec. (4.1), la función $U(x)$ resulta ser

$$U(x) = \frac{1}{2}(1 - a)x^2 + \frac{1}{4}bx^4, \quad (4.2)$$

la cual se encuentra esquemáticamente representada en la Figura 4.2b. Se puede observar que para cualquier configuración se verifica que $x^* = 0$ es un punto de equilibrio. Particularmente, si $a < 1$ nos referimos al oscilador

Los comportamientos de «endurecimiento» y «ablandamiento» son comúnmente conocidos como «hardening» y «softening» por sus nombres en inglés.

monoestable y el único punto de equilibrio resulta estable debido a que representa un mínimo absoluto de la Ec. (4.2). Sin embargo, tan pronto como se verifique que $a > 1$ y $b > 0$, dos nuevos puntos de equilibrio estables aparecen para $x^* = \pm\sqrt{(1-a)/b}$ a la vez que se produce un cambio en la estabilidad del punto $x^* = 0$, convirtiéndose en inestable por tratarse ahora de un máximo relativo. En esta configuración, el sistema es referido como biestable debido a la coexistencia de dos pozos de energía potencial separados por una barrera de una determinada altura. Comparado con el oscilador monoestable, y dependiendo de la amplitud de excitación este sistema puede exhibir oscilaciones entre los pozos o incluso caos, implicando así un análisis dinámico más complejo.

Las oscilaciones entre y dentro del pozo potencial son también conocidas como «inter-well» y «intra-well oscillations» por sus nombres en inglés.

Existe una gran variedad de métodos para generar potenciales biestables en recolectores de energía, incluyendo: métodos mecánicos puros [19, 181, 182], fuerzas magnéticas involucrando imanes permanentes [175, 183-185] o incluso una combinación de ambos [176, 186, 187]. Los métodos mecánicos puros presentan diversas ventajas respecto al uso de imanes entre las que destacan: simplicidad constructiva, costo, evitar una posible interacción magnética en la aplicación de sensores inalámbricos, y beneficios en términos de la densidad de potencia total [188]. Para una estructura en forma de viga, la biestabilidad es usualmente creada a través de una carga compresiva axial. Cuando un elemento estructural esbelto es comprimido con una carga relativamente pequeña, toda la estructura es deformada en la dirección axial con un insignificante cambio en su geometría. En este punto, podemos afirmar que la misma se encuentra en su estado de *pre-pandeo* o, dinámicamente hablando, en su régimen *monoestable*. Sin embargo, tan pronto como la carga sobrepasa a un valor crítico, la estructura experimenta una gran deformación manifestada en un desplazamiento fuera del plano transversal [189]. En este nuevo caso, nos referimos a la estructura como en su estado de *pos-pandeo* o en régimen *biestable*, donde la posición inestable corresponde a la configuración inicial recta y las dos inestables a las configuraciones de pandeo superior e inferior.

La carga crítica de pandeo viene dada por la expresión de Euler que relaciona características materiales, geométricas y de sujeción de la estructura.

Con el propósito de ilustrar este fenómeno, la Figura 4.3 representa las soluciones al primer modo de pandeo inestable (línea discontinua) y estables (líneas continuas) para una viga homogénea bi-empotrada.

4.1.2 Estudios experimentales de recolectores de energía piezoeléctricos cargados axialmente

Los estudios pioneros de recolectores de energía piezoeléctricos sujetos a cargas axiales fueron llevados a cabo por Leland y Wright [190], quienes estudiaron experimentalmente una viga bimorfa simplemente apoyada con una masa puntual en el centro durante su régimen de pre-pandeo. Ellos demostraron que era posible sintonizar la frecuencia natural respecto a la de excitación en un 24% mediante una correcta regulación de la pre-carga. Además, observaron que la pre-carga producía un aumento de aproximadamente el mismo porcentaje para el acoplamiento piezoeléctrico. Eichhorn y col. [191-193] también estudiaron la pre-carga axial en el régimen de pre-pandeo pero para vigas tipo cantilever ensambladas en conjunto con dos brazos laterales que distribuían una carga axial a la viga. De este modo, también lograron demostrar la capacidad de sintonización observada por Leland y Wright, pero asociado a otra configuración. En este punto, resulta necesario resaltar que si

bien los trabajos mencionados fueron los primeros en involucrar una carga axial, todos ellos fueron limitados al estado de pre-pandeo.

En lo referido a recolectores de energía basados en estructuras biestables, Arrieta y col. [194] fueron precursores de esta área investigando experimentalmente el comportamiento no lineal de una placa con diversos parches flexibles de PZT-5A adheridos a la misma. En su estudio, ellos pudieron observar un interesante comportamiento no-lineal producto de oscilaciones de ciclo límite de gran amplitud así como también *caos*. En cuanto a vigas biestables por pandeo, Ando y col. [195] estudiaron una lámina piezoeléctrica bi-empotrada de electrodos interdigitados fabricados por impresión de inyección de tinta sobre un PET flexible (tereftalato de polietileno). Al igual que Arrieta y col., estos autores observaron un comportamiento dinámico no lineal descrito por el cambio de estabilidad alcanzado por la gran flexibilidad de la estructura.

Con el fin de modificar la función energía potencial y así facilitar las oscilaciones entre los pozos potenciales de vigas más rígidas, algunos investigadores emplearon masas puntuales en distintas posiciones de sus dispositivos. Por ejemplo, Jung y Yun [196] propusieron un diseño novedoso de un recolector basado en una gran masa puntual conectada a un puente pandeado y un conjunto de vigas cantilever piezoeléctricas unidas a dicha masa. En este caso, el cambio de estabilidad del puente, servía como excitación de base para las vigas cantilever. Otra alternativa fue propuesta por Ando y col. [197], quienes colocaron dos transductores piezoeléctricos en los laterales de la viga bi-empotrada que eran impactados por una masa puntual cuando la viga pasaba de un estado estable a otro.

Por otra parte, la mayoría de los investigadores añadieron parches piezoeléctricos y masas puntuales directamente en la viga pospandeada [181, 197-200]. Las conclusiones más relevantes de estas implementaciones fueron que el cambio de estabilidad puede inducir respuestas periódicas entre pozos potenciales y caos [181], un significativo incremento del rendimiento del recolector [198], así como la posibilidad de recolectar energía a partir de bajas frecuencias y bajos niveles de aceleración [199]. Por último, Zhu y Zu [201] presentó una viga bi-empotrada con un imán permanente en el centro a fin de introducir una fuerza magnética capaz de facilitar aún más la oscilación entre pozos potenciales para bajas frecuencias y excitaciones. En el trabajo observaron que la presencia del magneto inducía el segundo modo de pandeo de la viga y proporcionaba un fuerte movimiento entre pozos que resulta beneficioso para aplicaciones de recolección de energía.

El movimiento entre pozos de energía potencial es conocido como «snap-through motion» debido a la rapidez con el que este ocurre.

4.1.3 Modelos matemáticos desarrollados para recolectores piezoeléctricos biestables cargados axialmente

Con el fin de dar tratamiento matemático a recolectores de energía piezoeléctricos sometidos a cargas axiales, una gran cantidad de modelos analíticos han sido desarrollados. El primer modelo experimentalmente validado fue presentado por Masana y Daqaq [166], quienes basaron su formulación en relaciones constitutivas lineales para el material piezoeléctrico y en la teoría no lineal de vigas Bernoulli-Euler durante el régimen de pre-pandeo. En este trabajo, demostraron tanto de forma experimental como teórica (solución aproximada obtenidas por el Método de Escalas Múltiples), la capacidad de sintonización de la frecuencia natural, el aumento de desplazamientos y potencia de salida,

así como del ancho de banda de funcionamiento, a medida que aumenta la carga axial. Más tarde, los mismos autores compararon el rendimiento relativo del mismo sistema considerando tanto los estados de pre- como pos-pandeo, proponiendo las mismas condiciones de carga eléctrica y de forzamiento [202]. Sus resultados, probaron que la mejoría del ancho de banda de frecuencia del dispositivo depende del nivel de aceleración de la base y de la forma de la función de potencial. Complementariamente, los mismos autores Masana y Daqaq [203] también investigaron numérica y experimentalmente el fenómeno de resonancia super-armónica para el oscilador biestable, probando que para ciertos niveles de aceleración el oscilador biestable puede exhibir grandes voltajes para valores de frecuencia de forzamiento de aproximadamente la mitad de la frecuencia natural.

Otro modelo analítico experimentalmente validado fue desarrollado por Cottone y col. [204], quienes consideraron relaciones constitutivas lineales, una teoría de vigas de primer orden no lineal en el régimen de pos-pandeado y excitaciones de base aleatorias. En este caso, ellos reportaron un orden de magnitud superior de potencia eléctrica generada cuando la estructura se encontraba pre-cargada. Años más tarde, los mismos autores emplearon este modelo para un estudio teórico del efecto de las configuraciones bi-articulada y bi-empotrada en vigas pos-pandeadas [205]. Considerando ruido gaussiano como forzamiento, determinaron que un 26% más de energía puede ser recolectada con la configuración bi-empotrada.

Empleando otro enfoque, algunos investigadores propusieron dispositivos piezoeléctricos donde la excitación se produce en la dirección axial. Por ejemplo, Zhu y col. [186] modelaron y validaron experimentalmente un recolector conformado por una viga simplemente apoyada, restringida axialmente en un extremo y con una masa móvil en el otro donde una fuerza magnética era aplicada a través de un imán permanente. Una configuración diferente, fue realizada por Ansari y Karami [206] quienes propusieron un recolector de energía piezoeléctrico con características *up-converting* formado por una viga piezoeléctrica pandeada y un mecanismo tipo tijera capaz de operar tanto en dirección horizontal como vertical. En ambos trabajos, las ecuaciones diferenciales a derivadas parciales (EDP) que gobiernan el problema fueron obtenidas acorde a la teoría de vigas de Bernoulli-Euler, discretizadas espacialmente mediante una expansión modal, y resueltas por integración numérica. En este sentido, ambos autores confirmaron la capacidad mejorada de la generación eléctrica debido a la biestabilidad.

En contraste con los modelos validados experimentalmente, diversos investigadores orientaron sus investigaciones a estudios puramente teóricos. Por ejemplo, Garg y Dwivedy [207] desarrollaron un complejo modelo analítico basado en la teoría de vigas Bernoulli-Euler en el régimen de pre-pandeo considerando no linealidades provenientes de términos inerciales, rigidez y acoplamiento electromecánico. En su trabajo, se centraron en el estudio de resonancias primarias, sub-armónicas y super-armónicas simultáneas mediante el Método de Escalas Múltiples (MEM), concluyendo que la existencia de varias condiciones de resonancia podría ser beneficioso para incrementar el ancho de banda. Otro estudio de esta índole, pero considerando un oscilador biestable genérico, fue llevado a cabo por Panyam y Daqaq [208], quienes empleando ecuaciones adimensionales y métodos de perturbación, determinaron que el rendimiento del recolector posee una compleja dependencia de la forma de la

Nos referimos a oscilador biestable «genérico», como aquel al que no se hace referencia sobre como es físicamente creado dicho potencial.

función potencial, de la amplitud de excitación y de la carga eléctrica externa. A pesar de esto, concluyeron que el recolector en régimen biestable produce una potencia mayor para todas las formas de la función potencial, siempre y cuando la condición de carga eléctrica sea óptima. Con el objetivo de añadir un parámetro sintonizador de la función energía potencial, Qian y col. [209] introdujeron un resorte pre-comprimido en un extremo de una viga piezoeléctrica bi-empotrada. Como principal contribución, estudiaron la dinámica de la viga empleando el método de balance armónico a la vez que analizaron la estabilidad de su solución aproximada a partir del estudio de la matriz Jacobiana. De esta manera, basados en sus resultados numéricos confirmaron, de manera teórica, la posibilidad de recolectar energía en un amplio ancho de banda. Por último, Chen y Yan [210] presentaron un modelo electromecánico geoméricamente no lineal para una viga Bernoulli-Euler unimorfa simplemente apoyada sometida a carga axial, incluyendo el efecto flexoeléctrico. En este caso, la configuración pre-deformada de la viga asociada al régimen de pos-pandeo fue obtenida por primera vez de manera analítica en esta aplicación para luego ser considerada en la respuesta dinámica del sistema. Las ecuaciones discretizadas del movimiento fueron numéricamente integradas por el método de Runge-Kutta (RK), observando el efecto de ablandamiento y endurecimiento para los regímenes mono- y biestables, respectivamente. Sin embargo, y al igual que todos los artículos basados en desarrollos meramente teóricos, ninguna de estas conclusiones fueron validadas por resultados experimentales.

Para concluir, Derakhshani y col. [212] recientemente modelaron y ensayaron experimentalmente una viga bi-empotrada fabricada en PVDF formada por dos tramos unidos a una masa puntual en el centro. Basado en la teoría de vigas geoméricamente no lineal de Bernoulli-Euler, un modelo matemático fue desarrollado considerando la configuración pre-deformada y además verificado experimentalmente bajo diferentes condiciones de forzamiento con una buena concordancia, incluyendo fenómenos como el cambio de estabilidad y la resonancia secundaria, beneficiosos para la recolección de energía.

4.1.4 Condiciones de borde no ideales

En el modelado de vibraciones de vigas, así como en cualquier medio continuo, la elección de las condiciones de borde (CB) resulta un paso fundamental debido a su gran influencia en la respuesta dinámica. En la mayoría de los modelos matemáticos, las CB son aproximadas a casos idealizados adoptando diferentes formas como p. ej. libre, simplemente apoyada, empotrada, entre otras [213]. No obstante en escenarios reales, pequeños huelgos y/o fricción pueden existir en los extremos, permitiendo pequeños desplazamientos o giros en los soportes, resultando en un desvío de las CB ideales mencionadas anteriormente. En consecuencia, esto, puede llevar a desacuerdos indeseables entre los resultados experimentales y las predicciones numéricas. Los recolectores de energía piezoeléctricos no están exentos de este fenómeno, donde dichas discrepancias pueden provocar resultados inaceptables. Por esta razón, tener un modelo matemático confiable y capaz de tratar con condiciones de borde no ideales resulta altamente atractivo para el diseño y optimización de recolectores de energía, sobretodo para aquellos que involucran comportamientos no lineales complejos.

La flexoelectricidad es un efecto de acoplamiento electromecánico que existe en todos los materiales dieléctricos [211].

Con el propósito de dar tratamiento matemático a este problema, distintos investigadores han modelado CB no ideales de diferentes maneras, las cuales pueden generalmente clasificarse en dos grandes grupos: (i) aquellas que añaden algún parámetro de perturbación o (ii) aquellas que añaden una restricción elástica. A fines de clarificar sus diferencias, asumiendo una función continua $U(x)$ con un valor restringido en la posición $x = a$, las formulaciones matemáticas para la CB ideal y las dos no ideales previamente mencionadas resultan ser:

Ideal	No ideal
$U(a) = 0$	$U(a) = \varepsilon\alpha(t)$ (i)
	$U'(a) = -kU(a)$ (ii)

Cuadro 4.1: Formulaciones ideal y no ideales para una CB situada en $x = a$.

En estas expresiones, son necesarios (i) pequeños valores de ε , siendo $\alpha(t)$ una función determinista del tiempo, o bien (ii) un valor tan grande de k como pequeña sea la perturbación en la CB. A pesar de que ambas expresiones pueden ser válidamente utilizadas, la condición de borde elástica posee la principal ventaja de recrear las condiciones libre y empotrada estableciendo $k = 0$ y $k \rightarrow \infty$, respectivamente. Esto quiere decir, que cualquier valor finito de k representa un caso intermedio entre los dos ideales. Esta ventaja no ocurre con el caso (i), que mientras $\varepsilon = 0$ representa al caso fijo ideal, la condición de borde libre no puede ser recuperada para ningún valor de ε .

Condición de borde perturbada

En el análisis de CB no ideales en vigas, uno de los estudios pioneros fue llevado a cabo por Pakdemi y Boyaci [214] quienes introdujeron un parámetro de perturbación pequeño en un extremo de una viga. Empleando la técnica de Lindstedt-Poincaré, dieron solución del problema de vibraciones libres, demostrando que la frecuencia natural de la viga es el único cambio apreciable introducido por la pequeña perturbación. Seguido a esto, los mismos autores incluyeron la no linealidad geométrica debido al efecto de alargamiento, al asumir extremos axiales inmóviles no ideales. Usando el MEM, observaron que dependiendo del modo y la amplitud de vibración, la frecuencia natural de la viga podía disminuir o aumentar dependiendo del valor numérico de perturbación. Además, Pakdemi y Boyaci también estudiaron la vibración forzada para una viga simplemente apoyada con un soporte intermedio no ideal ubicado en diferentes posiciones [215, 216]. En este caso, sus estudios relevaron que dependiendo del modo y la localización de este último apoyo, la frecuencia natural podía aumentar, disminuir o mantenerse inalterada mientras que la forma modal se veía afectada en un orden superior a ε^2 . El problema de vibración forzada para una viga simplemente apoyada con CB no ideales y considerando el efecto de alargamiento fue llevado a cabo por Boyaci [217], quien arribó a conclusiones similares a los trabajos previos. Para una viga con las mismas restricciones que la estudiada por Boyaci [217], Eigoli y Ahmadian [218] investigaron la influencia de CB no ideales de las vibraciones no lineales de una viga Bernoulli-Euler sometida a una forzante armónica lateral en concordancia con una teoría de quinto orden. Añadiendo un parámetro pequeño perturbador en la CB, observaron que una pequeña

El efecto de alargamiento es más comúnmente conocido como «stretching» por su nombre en inglés.

variación de dicho parámetro podía afectar fuertemente en la Función de Respuesta en Frecuencia (FRF) en dos formas: modificando la frecuencia natural, y modificando el efecto de endurecimiento a medida que la amplitud de la excitación era aumentada.

Un enfoque ligeramente diferente a los previamente mencionados fue propuesto por Lee [219], quien basó la condición de borde no ideal como una combinación lineal de los casos ideales empotrado y simplemente apoyado. En este caso, se utilizaron tanto las teorías de Bernoulli-Euler como de Timoshenko para identificar numéricamente el rol de los coeficientes afectando la CB ideal.

Condición de borde elástica

En lo que respecta a la utilización de restricciones elásticas para modelar CB no ideales, Onur Ekici y Boyaci [220] combinaron condiciones de borde perturbadas para el desplazamiento transversal en conjunto con resortes helicoidales para el giro en los soportes de una microviga simplemente apoyada. Utilizando el MEM, ellos identificaron que el corrimiento en frecuencia se podía producir en casos de resonancias secundarias. Xing y Wang [221] presentaron la solución al problema de vibraciones libres de una viga con sección constante sometida a una carga axial y sujeta tanto a resortes torsionales como transversales en cada extremo. Dichas restricciones elásticas, resultaron altamente efectivas para reproducir todos los casos ideales de las condiciones de borde, incluyendo fijo y simplemente apoyado, mediante la correcta elección de la rigidez de los resortes. Pese a que no estudiaron la influencia de la no idealidad en la condición de borde axial, confirmaron mediante un estudio paramétrico que la condición flexible en un extremo puede modificar significativamente la frecuencia natural del sistema, pero el modo de vibración en menor medida. Ni y Hua [222] utilizaron el método de matriz de transferencia para obtener una solución analítica a los problemas de vibración libre y forzada para una viga laminada y escalonada, cargada axialmente con condiciones de borde arbitrarias basada en la teoría de la deformación cortante de primer orden. Considerando el grado de libertad axial, realizaron estudios paramétricos de la FRF variando la rigidez de las restricciones axiales, transversales y torsionales asumidas. Los resultados analíticos fueron comparados con el método de los elementos finitos, mostrando una excelente concordancia. Además, demostraron que las frecuencias naturales transversales del sistema no son sensibles a la rigidez del resorte axial. Sin embargo, debido a que su estudio se basó en campos de desplazamiento y deformaciones lineales, el efecto de *alargamiento* no fue capturado.

El acoplamiento axial flexional no lineal fue estudiado en profundidad por Lenci y col. [223-225], quienes consideraron un resorte axial en un extremo de una viga Timoshenko. En este caso, el desplazamiento axial en ese extremo estaba perfectamente restringido o libre para los casos límites de $k = 0$ y $k \rightarrow \infty$. En sus estudios, demostraron que el valor de k posee una enorme influencia en el efecto de endurecimiento de la respuesta transversal de la viga. Sin embargo, pese a que pudieron explicar completamente la dicotomía del comportamiento de endurecimiento (debido a la rigidez geométrica no lineal) frente al ablandamiento (debido a términos inerciales no lineales), sus estudios no tuvieron en cuenta el efecto de una carga axial aplicada.

La consideración de CB elásticas para recolectores piezoeléctricos biestables por pandeo inducido fueron consideradas por Liu y col. [200] quienes, con el fin de utilizar la constante elástica como parámetro de modificación de la función energía potencial, propusieron un recolector biestable formado por dos vigas pandeadas, una masa central concentrada y condiciones de borde elásticas como parámetros de imperfección. En su trabajo, los modos de vibración fueron verificados mediante el MEF utilizando ANSYS® [226] con excelentes resultados. Por parte de la formulación analítica, concluyeron que la condición de borde elástica en el extremo y la rigidez influyen fuertemente en la forma de la función energía potencial así como en la potencia generada por el dispositivo.

4.1.5 Modelo electromecánico adoptado

Acorde a lo mencionado en los apartados anteriores, existe una gran cantidad de modelos e implementaciones experimentales de dispositivos piezoeléctricos basados en vigas bi-empotradas cargadas axialmente. En lo referido a las formulaciones matemáticas, distintas alternativas han sido presentadas respondiendo a diferentes hipótesis asumidas en: la teoría de vigas empleada, condiciones de borde asumidas, fuentes de no linealidad y condiciones no ideales, entre otras. Pese a que gran cantidad de trabajos han dado un correcto tratamiento a alguno/s de estos puntos, no ha sido presentado aún un modelo matemático que contemple la mayoría de ellos en simultaneo. Por ello, en esta tesis presentamos una compleja formulación matemática para este tipo de dispositivos con la idea de considerar los siguientes aspectos que presentan gran influencia ante determinadas condiciones, a saber:

- *Inercia no lineal*: Cuando los niveles de aceleración son lo suficientemente grandes, es de esperar que los desplazamientos también lo sean. Por ello, los términos provenientes del campo de desplazamiento no lineal pueden tomar relevancia [227].
- *Rigidez no lineal geométrica*: Cuando la viga es lo suficientemente esbelta, la relación amplitud/longitud tiende a tomar niveles grandes, especialmente en configuraciones como la cantilever. Por ello, los términos de rigidez geométrica no lineal provenientes del tensor de Green-Lagrange serán tenidos en cuenta en la presente formulación [228].
- *Relaciones constitutivas no lineales*: Tal como se comentó en la Subsección 2.2.2, los materiales piezoeléctricos presentan un comportamiento no lineal incluso para bajos niveles de excitación o aceleración. Por ello, el modelo constitutivo propuesto por Leadenham y Erturk [43] será empleado debido a sus ventajas de poseer solo dos parámetros no lineales, además de haber sido previamente experimentalmente verificado. Otra gran ventaja de utilizar este modelo, es que la identificación de dichas constantes ya ha sido previamente llevadas a cabo de forma exhaustiva para los materiales utilizados en esta tesis [44, 229].
- *Disipación no lineal*: Con el fin de contemplar los efectos de disipación de energía no lineal de los materiales piezoeléctricos que aparecen con niveles de aceleración moderado y altos, el modelo viscoso no lineal

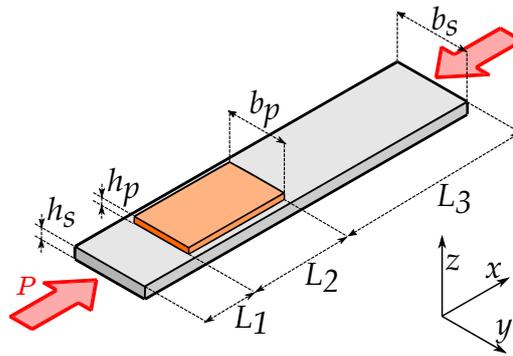


Figura 4.4: Esquema del recolector piezoeléctrico tipo viga sometido a una carga axial.

cuadrático propuesto por Stanton y col. [41], Gatti y col. [229] y Stanton y col. [230] será considerado.

- *Condiciones de borde no ideales:* Considerando el rol fundamental de las CB en la respuesta dinámica del sistema, la configuración bi-empotrada será seleccionada debido a ser una de las condiciones más prometedoras para aplicaciones de recolección de energía [205]. Por otro lado, en lo referido a las condiciones de borde axiales, una condición de borde no ideal será planteada debido a su capacidad de representar tanto casos intermedios como extremos ideales. Esta CB, resulta similar a la propuesta por Lenci y col. [223-225]. Sin embargo aquí involucraremos también a la carga axial, la cual no fue contemplada por dichos autores.
- *Configuración pre-deformada:* Por último, obtener una solución apropiada al problema de pandeo estático resulta fundamental a la hora de resolver la respuesta dinámica en la configuración biestable. Para ello, la ecuación diferencial asociada al problema de pandeo estático será obtenida [210, 231] y resuelta dando lugar, tanto a los valores de carga crítica como a la configuración pre-deformada.

De esta manera, las ecuaciones diferenciales a derivadas parciales (EDP) que gobiernan el problema de acoplamiento electromecánico de una viga bi-empotrada con una lámina piezoeléctrica cargada axialmente serán obtenidas siguiendo una formulación Lagrangiana. Seguido a esto, la discretización espacial del problema será desarrollada a partir de la descomposición modal del sistema. Asimismo, el Método de Escalas Múltiples (MEM) será utilizado para reducir el sistema de ecuaciones y obtener una solución analítica aproximada. Luego, se presentará por primera vez una expresión analítica para calcular la generación de energía de una viga piezoeléctrica pandeada, válida tanto para el régimen de pre- como de pos-pandeo, contemplando todas las características mencionadas anteriormente. Además, las expresiones serán desarrolladas asumiendo una viga escalonada genérica de tramos J con el propósito de poder considerar la discontinuidad donde el material piezoeléctrico se encuentra presente.

4.2 ECUACIONES ELECTROMECAICAS

Con el fin de obtener las ecuaciones electromecánicas para el dispositivo esquemáticamente representado en la Figura 4.4, la teoría de viga Bernoulli-Euler es asumida considerando que la viga es lo suficientemente esbelta y

despreciando los efectos relacionados a la inercia rotacional y la deformación por corte. De acuerdo a esta teoría, las secciones se mantienen planas y perpendiculares a la línea de referencia de deformación, por lo tanto, el vector desplazamiento puede ser expresado como

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u(x,t) - z \sin[\vartheta(x,t)] \\ 0 \\ w(x,t) - z\{1 - \cos[\vartheta(x,t)]\} + g(t) \end{bmatrix}, \quad (4.3)$$

donde $u(x,t)$ y $w(x,t)$ son las funciones asociadas al desplazamiento axial y transversal, respectivamente; $\vartheta(x,t)$ es el ángulo de rotación de la sección transversal; y $g(t)$ es la función excitación lateral. Comúnmente, el campo de desplazamiento es linealizado asumiendo pequeñas rotaciones, lo que significa que el ángulo de rotación de la sección puede ser aproximada como la derivada espacial del desplazamiento transversal ($\vartheta \approx w'$). Sin embargo, en la formulación propuesta en la presente tesis se consideran valores pequeños pero finitos para u y w , incluyendo los siguientes términos de orden superior [227]

$$\vartheta = \arctan\left(\frac{w'}{1+u'}\right) = w' - u'w' + u'^2w' - \frac{1}{3}w'^3 + \dots, \quad (4.4)$$

$$\cos(\vartheta) = 1 - \frac{1}{2}w'^2 + u'w'^2 + \dots, \quad (4.5)$$

$$\sin(\vartheta) = w' - u'w' + u'^2w' - \frac{1}{2}w'^3 + \dots, \quad (4.6)$$

donde el subíndice ' es utilizado para indicar derivadas respecto a la coordenada espacial ($\partial/\partial x$). Con el objetivo de considerar la influencia de una carga axial estática en la dinámica transversal de la viga, se propone un campo de deformaciones no lineal capaz de capturar el acoplamiento axial-flexional. Acorde al tensor de deformaciones de Green-Lagrange, la única componente no nula del mismo puede ser expresada como [228]

$$S_1 = \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u_1}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_2}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_3}{\partial x}\right)^2 \right]. \quad (4.7)$$

Donde u_j representa la j -ésima componente del vector de desplazamiento ($x \equiv 1$, $y \equiv 2$ y $z \equiv 3$). Reemplazando las expresiones (4.5) y (4.6) en la Ec. (4.3) y luego en la Ec. (4.7), despreciando la componente no lineal debida a la deformada axial pura y manteniendo términos cúbicos en u o w , se obtiene la siguiente expresión

$$S_1 = u' + \frac{1}{2}w'^2 - z \left(w'' - w'u'' - \frac{1}{2}w'^2w'' + z\frac{1}{2}w'^2 \right), \quad (4.8)$$

la cual representa el campo de deformaciones no lineal propuesto, donde la hipótesis $O(u) = O(w^2)$ fue implícitamente asumida *a priori* [232]. Las Ecuaciones diferenciales a Derivadas Parciales (EDP) que gobiernan el problema electromecánico acoplado pueden ser obtenidas siguiendo una formulación variacional mediante la aplicación del principio de mínima acción o principio de Hamilton enunciado como [233]

$$\int_{t_2}^{t_1} (\delta T - \delta U + \delta W_{nc}) dt = 0, \quad (4.9)$$

donde δT , δU y δW_{nc} son las variaciones de la energía cinética, energía interna, y el trabajo realizado por las fuerzas no conservativas, respectivamente. En este último término, se considera tanto el trabajo realizado por las fuerzas disipativas debido al amortiguamiento viscoso axial (c_1), transversal (c_2) y cuadrático no lineal en la dirección transversal (c_3), como la energía disipada en la resistencia eléctrica (R) por efecto Joule. Resolviendo la Ec. (4.9) se obtienen las siguientes ecuaciones electromecánicas de Euler-Lagrange (véase Apéndice C)

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{u}} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial L}{\partial u'} \right) - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial L}{\partial u''} \right) + c_1 \dot{u} = 0, \quad (4.10)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{w}} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial L}{\partial w'} \right) - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial L}{\partial w''} \right) + c_2 \dot{w} + c_3 \dot{w}^2 \operatorname{sgn}(\dot{w}) = 0, \quad (4.11)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial L}{\partial v} \right) + \frac{v}{R} = 0, \quad (4.12)$$

donde $L = T - U$ es conocido como el funcional Lagrangiano, el cual se lo define como la diferencia entre la energía cinética T y potencial del sistema U . Los términos marcados con un punto superior ($\dot{}$) denotan derivadas respecto a la coordenada temporal ($\partial/\partial t$). A continuación, deben ser encontradas expresiones tanto para T como U en términos de las variables del problema. Primeramente, la energía cinética total del sistema puede ser obtenida a partir de la suma de la correspondiente a la estructura (T_s) y al material piezoeléctrico (T_p) como

$$T_{\{s,p\}} = \frac{1}{2} \int_{V_{\{s,p\}}} \rho_{\{s,p\}} \left[\sum_{i=1}^3 \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} \right)^2 \right] dV_{\{s,p\}}. \quad (4.13)$$

Donde ρ_s , ρ_p , V_s y V_p son las densidades y volúmenes de la estructura y del piezoeléctrico, respectivamente. Por otro lado, las expresiones de la energía interna pueden ser obtenidas a partir de la integración de las expresiones para la entalpía específica. Respetando la misma notación que el IEEE [37], las ecuaciones constitutivas no lineales son asumidas de manera idéntica a las propuestas por [43], como fuera señalada en la Sección (2.2.2). Asumiendo que la polarización del elemento piezoeléctrico solo se produce en la dirección 3), y que la única componente no nula del tensor de deformación es la expresada en la Ec. (4.8), las expresiones de entalpía específica resultan ser

$$\begin{aligned} H_s &= \frac{1}{2} c_{11s} S_1^2, \\ H_p &= \frac{1}{2} c_{11p} S_1^2 + \frac{1}{3} c_{111p} S_1^3 \operatorname{sgn}(S_1) - e_{31} S_1 E_3 - \frac{1}{2} e_{311} S_1^2 \operatorname{sgn}(S_1) - \frac{1}{2} \epsilon_{33} E_3^2. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Donde c_{11s} y c_{11p} son los módulos de Young, de la estructura y el piezoeléctrico, respectivamente; e_{31} es una constante piezoeléctrica lineal; E_3 es la componente del campo eléctrico en la dirección 3 y ϵ_{33} es la constante dieléctrica del piezoeléctrico asociada a la misma dirección. Además, c_{111p} y e_{311} son constantes elásticas y piezoeléctricas provenientes de la no linealidad del material [229]. La energía interna total del sistema puede ser calculada como la suma de las energías provenientes de la estructura (U_s) y del piezoeléctrico (U_p) como

$$U_{\{s,p\}} = \int_{V_{\{s,p\}}} H_{\{s,p\}} dV_{\{s,p\}}. \quad (4.15)$$

Por otra parte, debido a que el material piezoeléctrico puede ocupar una parte de la longitud la estructura, se utiliza la función escalón $\Lambda(x)$ igual a 1 en la longitud del piezoeléctrico e igual a 0 en caso contrario, cuya expresión general para una viga con piezoeléctricos intercalados adopta la forma

$$\Lambda(x) = \left| \sum_{j=1}^{J-1} (-1)^j H \left(x - \sum_{k=j}^{J-1} L_{J-k} \right) \right|, \quad (4.16)$$

donde $H(x)$ representa la función de Heaviside y J es el número de tramos. Debido a que la diferenciación de la función $H(x)$ resulta en la función de Dirac $\delta(x)$, una relación útil entre ellas resulta [234]

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^{(n)}\delta(x-x_0)}{dx^{(n)}} f(x) dx = (-1)^n \frac{d^{(n)}f(x)}{dx^{(n)}} \Big|_{x=x_0}, \quad (4.17)$$

siendo $f(x)$ es cualquier función continua y diferenciable. La importancia de esta función $\Lambda(x)$ es para asegurar que el termino de acoplamiento electromecánico lineal sobreviva a la diferenciación respecto a la coordenada espacial en la aplicación de las ecuaciones de Euler-Lagrange (4.10) y (4.11). Además de asumir que el campo eléctrico solo se produce en el espesor del piezoeléctrico, otra hipótesis asumida es que el mismo es constante en dicha dirección [44], es decir

$$E_3 = \frac{v(t)}{h_p}. \quad (4.18)$$

Resolviendo la Ec. (4.10) en conjunto con las Ecs. (4.13) y (4.15) se obtiene la ecuación de movimiento asociada a la dirección axial

$$\begin{aligned} m\ddot{u} - v\dot{w}' + c_1\dot{u} - \frac{\partial}{\partial x} \left[EA \left(u' + \frac{w'^2}{2} \right) \right] - \frac{\partial}{\partial x} \left[EI \left(\frac{3}{2}w'^2 + w'w''' \right) \right] \\ + \Theta_0'v + \Theta_1vw' - \Psi_0v \left[u' + \frac{w'^2}{2} \right]' \operatorname{sgn}(w'') + EI_n [w''^2]' \operatorname{sgn}(w'') = 0. \end{aligned} \quad (4.19)$$

Mientras que los siguientes parámetros seccionales surgen a partir de la integración en la dirección del espesor

$$\begin{aligned} v &= \int_{A_s} \rho_s z dA_s + \Lambda \int_{A_p} \rho_p z dA_p, \\ \{EA, EI\} &= \int_{A_s} c_{11s} \{1, z^2\} dA_s + \Lambda \int_{A_p} c_{11p} \{1, z^2\} dA_p, \\ \{EI_n, EJ_n\} &= \Lambda \int_{A_p} c_{11p} \{z^2, z^3\} dA_p, \\ \Theta_i &= \Lambda \int_{A_p} \frac{e_{31}}{h_p} z^i dA_p \\ \Psi_i &= \Lambda \int_{A_p} \frac{e_{311}}{h_p} z^i dA_p. \end{aligned} \quad (4.20)$$

Donde A_p y A_s representan las áreas transversales asociadas a la estructura y al piezoeléctrico, respectivamente; EA y EI son la rigidez lineal constitutiva axial y flexional, respectivamente; EI_n y EJ_n son las rigideces no lineales constitutivas piezoeléctricas; mientras que Θ_i y Ψ_i denotan los acoplamientos constitutivos lineales y no lineales, respectivamente. A esta altura, resulta importante notar que las propiedades seccionales son funciones de x debido

a la función $\Lambda = \Lambda(x)$. Resolviendo la Ec. (4.11), se obtiene la ecuación de movimiento asociada a la dirección transversal

$$\begin{aligned} m\ddot{w} + \nu \frac{\partial}{\partial t} (w' \dot{w}') + c_2 \dot{w} + c_3 w |\dot{w}| - \frac{\partial}{\partial x} \left[EA \left(u' + \frac{w'^2}{2} \right) w' \right] \\ + \frac{\partial^2}{\partial x^2} [EI w''] + EI \left[u'' w'' - \frac{1}{2} w' w''^2 - w' u'''' + u' w'''' - \frac{1}{2} w' w'''' \right]' \\ + \Theta_1' v + (\Theta_0 w)' v - \Psi_2 v [w^{IV} + u' w^{IV}] \operatorname{sgn}(w'') \\ + EJ_n [(w''^2)'' + 3u' w''^2] \operatorname{sgn}(w'') = -m\ddot{g}. \end{aligned} \quad (4.21)$$

Por último, la ecuación eléctrica puede ser obtenida resolviendo la última ecuación de Euler-Lagrange (4.12)

$$\begin{aligned} C_p \dot{v} + \frac{v}{R} + \int_{L_p} \frac{\partial}{\partial t} \left[\Theta_0 \left(u' + \frac{w'^2}{2} \right) - \Theta_1 (w'') + \Theta_2 \left(\frac{1}{2} w'^2 \right) \right] dx \\ - \int_{L_p} \Psi_2 \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} w'^2 - u' w''^2 - w' u'' w'' \right) \operatorname{sgn}(w'') dx = 0. \end{aligned} \quad (4.22)$$

Donde L_p corresponde al dominio asociado al piezoeléctrico para la coordenada x , mientras que C_p representa la capacidad equivalente del piezo, donde para cerámicas tipo *bulk* puede ser calculada como

$$C_p = \frac{\epsilon_{33}}{h_p} \int_{A_p} dA_p, \quad (4.23)$$

donde A_p es el área del piezoeléctrico en el plano z .

4.3 CONSIDERACIONES PREVIAS A LA RESOLUCIÓN DEL MODELO

En la Sección anterior, se dedujeron las Ecs. (4.19), (4.21) y (4.22) que gobiernan el problema axial, flexional y eléctrico acoplado. Como se puede observar, este conjunto de EDP presentan un grado de complejidad que dificulta su resolución. Por ello en esta sección se presenta una versión reducida de estas expresiones en base dos puntos que simplifican el problema:

1. *Eliminación del grado de libertad axial basado en la hipótesis de gran esbeltez:* Cuando una estructura tipo viga posee una dimensión longitudinal lo suficientemente grande comparada con sus dimensiones seccionales, pueden ser asumidas diversas simplificaciones, permitiendo obtener una relación explícita entre las variables dependientes $u(x, t)$ y $w(x, t)$. Alcanzar una relación de este tipo resulta altamente atractivo debido a que permite eliminar por completo el grado de libertad axial del movimiento. Para llevar a cabo esta simplificación es necesario definir las CBs axiales, donde distintas relaciones son planteadas asumiendo diferentes configuraciones. Por este motivo, serán estudiadas las posibilidades más comunes incluyendo el caso de una CB no ideal, de principal interés para esta tesis.
2. *Análisis adimensional de las expresiones:* El análisis dimensional es una técnica ampliamente utilizada en problemas de ingeniería proporcionando un método sistemático capaz de identificar aquellos términos «pequeños» que puedan ser despreciados en ecuaciones diferenciales

[180]. Una de las principales virtudes de esta técnica radica en que la definición de «pequeño» no resulta en una arbitrariedad, sino que son definidos por aquellos término que sean mucho menores a 1. De esta manera, una ecuación diferencial puede ser adimensionalizada y algunos términos puede ser despreciados, permitiendo de esta forma obtener una solución más sencilla. Además, otra de las ventajas asociadas a este análisis radica en la disminución de los parámetros asociados a la ecuación diferencial, debido a que los términos quedan expresados en cantidades adimensionales.

4.3.1 Hipótesis del acoplamiento axial-flexional basado en el grado de esbeltez

Para una viga esbelta sujeta a excitaciones laterales, es posible despreciar la inercia longitudinal y la rigidez flexional frente a la rigidez axial [235] en la ecuación de movimiento axial (Ec. 4.19). Tomando esto en consideración, los términos inerciales, de amortiguamiento y piezoeléctricos también puede ser despreciados en la Ec. (4.19) obteniendo así

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[E_j A_j \left(u_j' + \frac{w_j'^2}{2} \right) \right] = 0. \quad (4.24)$$

Donde el subíndice j ha sido introducido para indicar el j -ésimo tramo de la viga $j = 1..J$, siendo J el número total de tramos. Integrando la ecuación anterior respecto a la coordenada espacial x la siguiente relación es obtenida [232]

$$E_j A_j \left(u_j' + \frac{w_j'^2}{2} \right) = C_{j1}(t), \quad (4.25)$$

lo que indica que la deformación axial es una función constante a tramos. Integrando una vez mas, la solución aproximada al desplazamiento axial es

$$u_j = C_{j2}(t) + \frac{x C_{j1}(t)}{E_j A_j} - \frac{1}{2} \int_{x_{j0}}^{x_{jf}} w_j'^2 dx, \quad (4.26)$$

donde un total de $2J$ constantes de integración, denotadas por $C_{j1}(t)$ y $C_{j2}(t)$, emergen y sus valores deben ser determinados mediante la aplicación de las condiciones de borde y de compatibilidad axial. En esta última expresión, los parámetros x_{j0} y x_{jf} son utilizados para denotar las coordenadas x de inicio y fin de cada tramo. Distintas condiciones de borde pueden ser asumidas para el problema axial obteniendo resultados diferentes en las ecuaciones reducidas. Asumiendo que el primer extremo de la viga se encuentra perfectamente empotrado, la condición de borde (ideal) resulta ser

$$u_1(0, t) = 0. \quad (4.27)$$

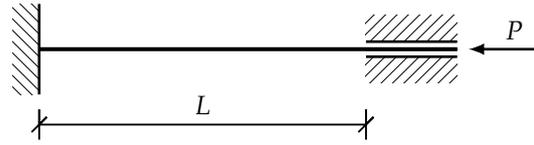


Figura 4.5: Representación esquemática de la condición de borde axial para el *Caso A*.

Además, las ecuaciones de compatibilidad para cada par de tramos consecutivos son los correspondientes a asumir desplazamientos y esfuerzos internos continuos

$$\begin{aligned} u_i \left(\sum_{n=1}^i L_n, t \right) &= u_{i+1} \left(\sum_{n=1}^i L_n, t \right), \\ N_i \left(\sum_{n=1}^i L_n, t \right) &= N_{i+1} \left(\sum_{n=1}^i L_n, t \right), \end{aligned} \quad (4.28)$$

donde $i = 1, \dots, J - 1$, L_n es la longitud del n -ésimo tramo, mientras que $N_j(x, t)$ es el esfuerzo normal correspondiente al j -ésimo tramo de la viga cuya expresión es

$$N_j(x, t) = E_j A_j \left(u_j'(x, t) + \frac{w_j'^2(x, t)}{2} \right). \quad (4.29)$$

Por último, es necesario definir la condición de borde correspondiente al otro extremo de la viga, donde es aplicada la carga axial. En este caso, se estudia en profundidad diversas maneras de introducir la pre-carga basados en tres enfoques distintos producto de considerar: (a) una fuerza axial aplicada, (b) un desplazamiento prescrito, o (c) una fuerza axial sumado a una restricción elástica. Los primeros dos representan las condiciones de borde ideales propuestas. En el *Caso A*, asumiendo una fuerza axial, el desplazamiento axial debido al acoplamiento flexional está totalmente libre, como será probado luego. Por el contrario, asumiendo un desplazamiento prescrito como en el *Caso B*, resulta equivalente a restringir totalmente el grado de libertad axial. Por último, el *Caso C* resulta ser un caso intermedio, donde la rigidez de dicho extremo puede ser modificada a través del parámetro k , el cual actúa como una condición de borde no ideal.

Caso A: Fuerza axial aplicada en el extremo

Asumiendo que una fuerza axial estática es aplicada en el extremo derecho, representada esquemáticamente en la Figura 4.5, la condición de borde para el problema axial es [166]

$$N(L, t) = -P. \quad (4.30)$$

Donde P es la fuerza axial estática aplicada. Reemplazando las Ecs. (4.27), (4.28) y (4.30) en la Ec. (4.26), y resolviendo para las constantes de integración, éstas adoptan los siguientes valores

$$\begin{aligned} C_{j1} &= \sum_{k=1}^j \left(\frac{PL_k}{E_k A_k} - \frac{PL_k}{E_j A_j} \right) - \frac{1}{2} \int_0^{x_{ji}} w'^2 dx, \\ C_{j2} &= -P. \end{aligned} \quad (4.31)$$

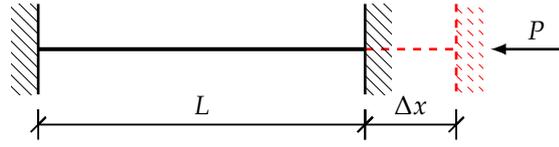


Figura 4.6: Representación esquemática de la condición de borde axial para el *Caso B*.

Donde la variable $w = w(x)$ es introducida por simplicidad para indicar el desplazamiento lateral en todo el dominio, independiente de los tramos de la viga. Luego, el campo de desplazamientos axial correspondiente al j -ésimo tramo resulta de reemplazar la Ec. (4.31) en la Ec. (4.26)

$$u_j(x, t) = \left(\sum_{k=1}^j \frac{PL_k}{E_k A_k} - \frac{PL_k}{E_j A_j} \right) - \frac{Px}{E_j A_j} - \frac{1}{2} \int_0^x w'^2 dx. \quad (4.32)$$

Por último, derivando con respecto a la coordenada espacial, se obtiene la siguiente expresión

$$u'_j = -\frac{P}{E_j A_j} - \frac{1}{2} w_j'^2, \quad (4.33)$$

la cual representa la principal expresión a inyectar en la ecuación flexional (4.21). Evaluando el desplazamiento dado por la Ec. (4.32) en el extremo donde la carga se encuentra aplicada ($x = L$) se obtiene

$$u(L) = -\sum_{j=1}^J \frac{PL_j}{E_j A_j} - \frac{1}{2} \int_0^L w'^2 dx, \quad (4.34)$$

donde el primer término corresponde al desplazamiento estático asociado al problema axial y el segundo corresponde al acoplamiento axial flexional, el cual varía con el tiempo a través de $w = w(x, t)$. La existencia de este término muestra que el extremo donde es aplicada la carga axial posee un grado de libertad de movimiento, tal como se había mencionado previamente.

Resulta interesante identificar los términos que emergen en la ecuación flexional al asumir un desplazamiento axial simplificado. Para ello, reemplazamos la Ec. (4.33) en la ecuación flexional (4.21), determinamos que el término de acoplamiento axial queda de la siguiente manera

$$-\frac{\partial}{\partial x} \left[E_j A_j \left(u'_j + \frac{w_j'^2}{2} \right) w'_j \right] = P w_j'', \quad (4.35)$$

donde el término obtenido da lugar a la influencia de la carga axial en la dinámica transversal de la viga. Además, el término de la rigidez geométrica no lineal queda definido a partir de la siguiente expresión

$$EI \left[u'' w'' - \frac{1}{2} w' w''^2 - w' u'''' + u' w'''' - \frac{1}{2} w' w''^2 \right]' = EI (w' w''^2)'' . \quad (4.36)$$

Case B: Desplazamiento prescrito en el extremo

Otra condición de borde comúnmente utilizada es la de asumir un desplazamiento prescrito, igual al que se produciría si una carga axial estática P fuera aplicada en dicho extremo [181, 204]. Este fenómeno, es comúnmente referido

como *alargamiento* o *stretching* [227]. En este caso, la última CB asociado al extremo derecho representada esquemáticamente en la Figura 4.6 es

$$u_j(L, t) = - \sum_{j=1}^J \frac{PL_j}{E_j A_j}, \quad (4.37)$$

Donde el valor desplazamiento asumido surge de resolver el problema axial estático lineal para una viga de J tramos. Reemplazando las Ecs. (4.27), (4.28) y (4.37) en la Ec. (4.26), la solución de las constantes de integración resulta ahora

$$\begin{aligned} C_{j1} &= \sum_{k=1}^j \left(\frac{PL_k}{E_j A_j} - \frac{PL_k}{E_k A_k} \right) - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^J \left(\frac{E_k A_k}{E_j A_j} \frac{L_j}{L_k^{eff}} \int_0^L w'^2 dx \right) \\ &\quad + \sum_{k=j}^J \left(\frac{E_k A_k}{E_j A_j} \frac{L_j}{L_k^{eff}} \int_{x_{ji}}^L w_j'^2 dx \right), \quad (4.38) \\ C_{j2} &= -P + \frac{E_j A_j}{2L_j^{eff}} \int_0^L w_j'^2 dx. \end{aligned}$$

Que reemplazando la Ec. (4.38) en (4.26), y diferenciando respecto a la coordenada espacial, la relación a inyectar en la ecuación flexional (4.21) es

$$u_j'(x, t) = -\frac{P}{E_j A_j} - \frac{1}{2} w_j'^2 + \frac{1}{2L_j^{eff}} \int_0^L w'^2 dx. \quad (4.39)$$

Donde L_j^{eff} representa el largo efectivo del j -ésimo tramo de la viga cuyo valor es determinado de la siguiente expresión

$$L_j^{eff} = \sum_{k=1}^J \frac{L_k E_j A_j}{E_k A_k}. \quad (4.40)$$

En este caso, a diferencia del anterior, si se evalúa el desplazamiento para el extremo $x = L$ puede verificarse y obtenerse nuevamente la condición de borde dada la Ec. (4.37). De esta manera, la CB resulta claramente más rígida que la presentada en la Subsección anterior debido al grado de libertad axial restringido en ambos extremos. Reemplazando la Ec. (4.39) en el término de acoplamiento axial perteneciente a la ecuación flexional (4.21), la aproximación de este correspondiente al modelo reducido es

$$-\frac{\partial}{\partial x} \left[E_j A_j \left(u_j' + \frac{w_j'^2}{2} \right) w_j' \right] = P w_j'' - \frac{E_j A_j}{2L_j^{eff}} w_j'' \int_0^L w'^2 dx. \quad (4.41)$$

Donde $E_j A_j / L_j^{eff}$ es un parámetro constante para todo j . Comparando la Ec. (4.41) con la Ec. (4.35), se obtiene: un primer término idéntico a la reducción anterior, y un segundo término adicional de $\mathcal{O}(EA)$ que emerge de la reducción en la ecuación flexional. Este término, de orden cúbico, representa la no linealidad geométrica de la viga que se adicionara al término presentado en la Ec. (4.36). Debido al hecho que $\mathcal{O}(EA) \gg \mathcal{O}(EI)$, es común encontrar que el nuevo término expresado en la ecuación (4.36) es despreciado frente al obtenido en la Ec. (4.41), tal como será demostrado luego en el análisis dimensional.

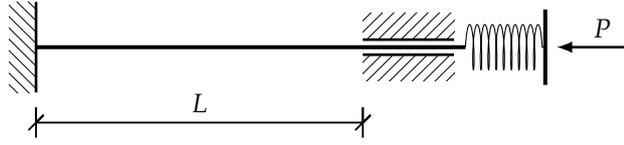


Figura 4.7: Representación esquemática de la condición de borde axial para el *Caso C*.

Caso C: Fuerza axial sumada a restricción elástica en el extremo

Los casos *A* y *B* presentados en las subsecciones anteriores significan condiciones de borde extremas en lo que respecta al grado de rigidez asumido en la CB axial. Esto es, que mientras que la primera reducción no restringe el movimiento axial, la segunda lo hace de manera total. En este sentido se ha probado que la elección de esta CB influye fuertemente en la expresión final de la no linealidad geométrica, donde, en el caso de movimiento axial sin restricciones en el extremo, emergen solo términos de $\mathcal{O}(EI)$, mientras que en el caso de movimiento axial totalmente restringido, emergen términos de $\mathcal{O}(EA)$. En escenarios reales, resulta muy difícil que alguna de estas dos hipótesis logre reproducir el comportamiento dinámico de la estructura debido a la existencia de huelgos y fricción inherentes a cualquier montaje. A fin de estudiar un caso intermedio donde el movimiento axial sea posible pero de manera limitada, una alternativa es asumir que el extremo derecho se encuentra sometido a una carga axial sumada a una restricción elástica. Acorde a esto, la expresión matemática que modela este comportamiento, representada en la Figura 4.7, puede ser expresada como

$$N(L, t) = -P - k_c u(L, t). \quad (4.42)$$

Donde k_c representa la restricción elástica como fuente de no idealidad de la CB. Reemplazando ahora las Ec. (4.27), (4.28) y (4.42) en la Ec. (4.26) la solución de las constantes de integración es

$$\begin{aligned} C_{j1} &= \sum_{k=1}^j \left(\frac{PL_k}{\zeta_j} - \frac{PL_k}{\zeta_k} \right) - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^j \left(\frac{E_k A_k k_c L_j}{E_j A_j \zeta_j} \int_0^L w'^2 dx \right) \\ &\quad + \sum_{k=j}^j \left(\frac{E_k A_k k_c L_j}{E_j A_j \zeta_j} \int_{x_{ji}}^L w'^2 dx \right), \quad (4.43) \\ C_{j2} &= -\frac{E_j A_j}{\zeta_j} P + \frac{k_c E_j A_j}{\zeta_j} \int_0^L w'^2 dx. \end{aligned}$$

Donde ζ_j es una rigidez efectiva para cada tramo cuyo valor es definido como

$$\zeta_j = E_j A_j + \sum_{k=1}^j \frac{k_c L_j E_k A_k}{E_j A_j}. \quad (4.44)$$

Finalmente, reemplazando la Ec. (4.43) en (4.26), y diferenciando respecto a x , se obtiene la siguiente expresión para inyectar en la ecuación flexional (4.21)

$$u'_j = -\frac{P}{\zeta_j} + \frac{k_c}{2\zeta_j} \int_0^L w'^2 dx - \frac{1}{2} w'_j{}^2. \quad (4.45)$$

Siguiendo un procedimiento análogo al realizado en las reducciones anteriores, la Ec. (4.45) es reemplazada en el término de acoplamiento axial perteneciente a la ecuación flexional (4.21) obteniendo así

$$-\frac{\partial}{\partial x} \left[E_j A_j \left(u'_j + \frac{w_j'^2}{2} \right) w'_j \right] = P \alpha w_j'' - \frac{1}{2} k_c \alpha w_j'' \int_0^L w'^2. \quad (4.46)$$

Donde el parámetro adimensional y constante para cada tramo $\alpha = E_j A_j / \zeta_j$ fue introducido por simplicidad. Este coeficiente toma valores desde 0 a 1 a medida que k_c disminuye desde un valor grande a 0 y sirve como coeficiente en la carga axial efectiva que sufre la viga a través del término $P \alpha w''$. Como primera observación, debe notarse que para $k_c = 0$ α debe ser igual a 1 debido a que $\zeta_j = E_j A_j$, reduciendo la Ec. (4.46) al *Caso A* dado por la Ec. (4.35). Por el contrario, cuando k_c tiende a infinito, es posible demostrar que

$$\lim_{k_c \rightarrow \infty} \left[P \alpha w_j'' - \frac{1}{2} k_c \alpha w_j'' \int_0^L w'^2 \right] = \frac{E_j A_j}{2L_j^{eff}} w_j'' \int_0^L w'^2 dx. \quad (4.47)$$

El cual representa la misma no linealidad geométrica de $\mathcal{O}(EA)$ que en el *Caso B*, dada por la Ec. (4.41), pero con un valor de $P = 0$. A fines de clarificar la diferencia de los distintos términos emergentes del acoplamiento axial-flexional a la hora de reducir el desplazamiento axial de la viga, se presenta la siguiente expresión

$$-\frac{\partial}{\partial x} \left[EA \left(u' + \frac{w'^2}{2} \right) w' \right] \approx \begin{cases} P w'' & \text{Caso A} \\ P w'' - \frac{EA}{2L^{eff}} w'' \int_0^L w'^2 dx & \text{Caso B} \\ P \alpha w'' - \frac{1}{2} k_c \alpha w'' \int_0^L w'^2 dx & \text{Caso C} \end{cases} \quad (4.48)$$

Observando esta última expresión, resulta claro que es posible recuperar los casos *A* y *B* a partir del *Caso C* mediante una correcta elección de los parámetros k_c y α . Un resumen más comprensible de los valores que deben tomar estos parámetros se encuentra en el Cuadro 4.2.

	k_c	α
Caso A	0	1
Caso B	$\frac{EA}{L^{eff}}$	1

Cuadro 4.2: Valores elegidos para k_c y α pertenecientes al *Caso C* para recuperar los *Casos A* y *B*.

Ecuaciones electromecánicas con hipótesis simplificativas basadas en el grado de esbeltez

Como se mencionó anteriormente, es posible desarrollar la formulación matemática a partir del *Caso C* y luego recuperar los casos ideales (*A* y *B*) mediante la elección de parámetros presentados en el Cuadro 4.2. Por lo tanto, se presentan las ecuaciones de movimiento para el desplazamiento

transversal de la viga y el voltaje del piezoeléctrico, que se obtienen eliminando el grado de libertad axial por la hipótesis de gran esbeltez, y reemplazando la Ec. (4.45) en las Ecs. (4.21) y (4.22)

$$m\ddot{w} + v \frac{\partial}{\partial t} (w' \dot{w}') + c_2 \dot{w} + c_3 \dot{w} |\dot{w}| + P\alpha w'' + \frac{\partial^2}{\partial x^2} [EI w'''] - EI (w' w''^2)'' - \frac{1}{2} k_c \alpha w'' \int_0^L w'^2 dx + \Theta_1' v + (\Theta_0 w)' v + \Psi_2 v \left(w'' + 2 \frac{P}{\zeta} w'' \right)'' \quad (4.49)$$

$$\text{sgn}(w'') + EJ_n \left[w''^2 + 3 \frac{P}{\zeta} w''^2 \right]'' \text{sgn}(w'') = -m\ddot{g},$$

$$C_p \dot{v} + \frac{v}{R} - \int_{L_p} \left[\Theta_1 \frac{\partial}{\partial t} \left(w'' + \frac{P}{\zeta} w'' \right) - \int_{L_p} \Theta_0 \frac{k_c}{\zeta} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} w''^2 \right) dx \right] dx \quad (4.50)$$

$$- \int_{L_p} \Psi_2 \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} w''^2 + \frac{P}{\zeta} w''^2 \right) \text{sgn}(w'') dx = 0.$$

En estas expresiones es posible observar que la carga axial P afecta a la rigidez lineal del sistema a través el término $P\alpha w''$, a los acoplamientos electromecánico Θ_1 y Ψ_2 , así como a la rigidez no lineal constitutiva EJ_n . Por otro lado, se identifican dos términos asociados a la rigidez geométrica no lineal, uno debido a la condición de borde no ideal $k_c \alpha$, y el otro al campo de deformaciones no lineal $(EI (w' w''^2)''$). La contribución de los términos involucrados en las Ecs. (4.49) y (4.50) es analizada mediante el proceso de análisis dimensional.

4.3.2 Análisis dimensional

El análisis dimensional es una técnica ampliamente utilizada en problemas de ingeniería proporcionando un método sistemático capaz de identificar aquellos términos «pequeños» que puedan ser despreciados en ecuaciones diferenciales [180]. Una de las principales virtudes de esta técnica radica en que la definición de «pequeño» no resulta en una arbitrariedad, sino que son definidos por aquellos término que sean mucho menores a 1. De esta manera, una ecuación diferencial puede ser adimensionalizada y algunos términos puede ser despreciados, permitiendo de esta forma obtener una solución más sencillo. Por último, otra de las ventajas asociadas a este análisis radica en la disminución de los parámetros asociados a la ecuación diferencial, debido a que los términos quedan expresados en cantidades adimensionales.

Con el fin de proceder con este análisis, las siguientes cantidades adimensionales asociadas a las variables dependientes e independientes del problema son introducidas

$$W = \frac{w}{L}, \quad X = \frac{x}{L}, \quad T = \frac{t}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{m}}, \quad V = v \frac{C_p}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{m}}. \quad (4.51)$$

Reemplazando las expresiones (4.51) en las Ecs. (4.49) y (4.50), las EDP asociadas al desplazamiento flexional y al circuito eléctrico son obtenidas como

$$\begin{aligned} & \ddot{W} + \hat{\nu} \frac{\partial}{\partial T} (W' \dot{W}') + C_2 \dot{W} + C_3 \dot{W} |\dot{W}| + \hat{P} W'' + W^{IV} \\ & - \frac{1}{2} K W'' \int_0^1 W'^2 dx - K_G (W' W''^2)'' + \hat{\Theta}_1^{f''} V + (\hat{\Theta}_0^f W)' V \quad (4.52) \\ & + (\hat{\Psi}_2^f + \hat{\Psi}_2^{fp}) V W^{IV} \operatorname{sgn}(W'') + (K_C + K_C^p) [W''^2]'' \operatorname{sgn}(W) = -\ddot{G}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \dot{V} + \frac{V}{\hat{R}} - \left[\int_{l_p} (\hat{\Theta}_1 + \hat{\Theta}_1^p) \frac{\partial W''}{\partial T} - \int_{l_p} \hat{\Theta}_0 \frac{\partial W'^2}{\partial T} dX \right] dX \\ & - \int_{l_p} (\hat{\Psi}_2 + \hat{\Psi}_2^p) \frac{\partial (W'')^2}{\partial T} \operatorname{sgn}(W'') dX = 0. \quad (4.53) \end{aligned}$$

Donde los parámetros adimensionales son

$$\begin{aligned} \hat{\nu} &= \frac{\nu r}{L^2 m}, & C_2 &= \frac{c_2 L^2}{\sqrt{m E I}}, & C_3 &= \frac{c_3 r}{m}, & \hat{P} &= \frac{P L^2 \alpha}{E I}, \\ K &= \frac{k_c \alpha}{E A}, & K_G &= \left(\frac{r}{L} \right)^2, & \hat{\Theta}_1^f &= \frac{\Theta_1 L^4}{C_p r} \sqrt{\frac{m}{E I^3}}, & \hat{\Theta}_0^f &= \frac{\Theta_0 L^5}{C_p r} \sqrt{\frac{m}{E I^3}}, \\ \hat{\Psi}_2^f &= \frac{m r^2 \Psi_2}{C_p^2 E I L^4}, & \hat{\Psi}_2^{fp} &= \frac{P m r^2 \Psi_2}{\zeta C_p^2 E I L^4}, & K_C &= \frac{E J_n r^2}{L^4}, & K_C^p &= \frac{E J_n r^2 P}{\zeta L^4}, \\ \hat{\Theta}_1 &= \frac{r \Theta_1}{L^4} \sqrt{\frac{E I}{m}}, & \hat{\Theta}_1^p &= \frac{P r \Theta_1}{\zeta L^4} \sqrt{\frac{E I}{m}}, & \hat{\Theta}_0 &= \frac{r^2 \Theta_0 k}{\zeta L^4} \sqrt{\frac{E I}{m}}, & \hat{\Psi}_2 &= \frac{r^2 \Psi_2}{2 L^6} \sqrt{\frac{E I}{m}}, \\ \hat{\Psi}_2^p &= \frac{P r^2 \Psi_2}{\zeta L^6} \sqrt{\frac{E I}{m}}, & \hat{R} &= \frac{C_p R}{L^2} \sqrt{\frac{E I}{m}}, & l_p &= \frac{L_p}{L}. \end{aligned} \quad (4.54)$$

Donde $r = \sqrt{I/A}$ representa el radio de giro de la sección. Aquí, los parámetros denotados con superíndice p indican la inclusión de la carga axial P , frente a sus homónimos sin dicho superíndice. A su vez, el superíndice f ha sido introducido a fines de referir los parámetros pertenecientes en la ecuación flexional que se encuentran repetidos en la ecuación eléctrica. Observando la Ec. (4.44) se puede notar que $\mathcal{O}(\zeta) = \mathcal{O}(EA)$. De esta manera, para valores de carga menores que la rigidez axial, se puede asumir fácilmente que

$$\mathcal{O}\left(\frac{P}{\zeta}\right) \ll 1. \quad (4.55)$$

Lo cual implica que las variables adimensionales deben satisfacer las siguientes relaciones

$$\begin{aligned} \mathcal{O}\left(\hat{\Psi}_2^{fp}\right) &\ll \mathcal{O}\left(\hat{\Psi}_2^f\right), & \mathcal{O}\left(K_C^p\right) &\ll \mathcal{O}\left(K_C\right), \\ \mathcal{O}\left(\hat{\Theta}_1^p\right) &\ll \mathcal{O}\left(\hat{\Theta}_1\right), & \mathcal{O}\left(\hat{\Psi}_2^p\right) &\ll \mathcal{O}\left(\hat{\Psi}_2\right). \end{aligned} \quad (4.56)$$

Por lo tanto, cuatro términos pueden ser despreciados de las Ecs. (4.52) y (4.53). Por otro lado, para la ecuación flexional, se observa que existen dos parámetros referidos a la no linealidad geométrica de orden cúbico asociados a aquellos que involucran a los parámetros adimensionales K y K_G . En el

análisis adimensional de teorías de vigas, una de las relaciones generalmente impuestas resulta ser

$$\mathcal{O}\left(\frac{r^2}{L^2}\right) \ll 1. \quad (4.57)$$

Lo cual implica que

$$\mathcal{O}(K_G) \ll \mathcal{O}(K). \quad (4.58)$$

Siendo posible despreciar la no linealidad geométrica proveniente del campo de deformaciones no lineal, frente a la emergente por la condición de borde axial no ideal. En base a lo desarrollado, un total de cinco términos pueden ser eliminados de las EDP. A partir de ahora y por conveniencia, se eliminan de las ecuaciones dimensionales aquellos términos que han sido apropiadamente despreciados en el análisis dimensional. Por consiguiente, las Ecs (4.49) y (4.50) toman la forma

$$\begin{aligned} m\ddot{w} + v\frac{\partial}{\partial t}(w'\dot{w}') + c_2\dot{w} + c_3\dot{w}|\dot{w}| + P\alpha w'' + \frac{\partial^2}{\partial x^2}[EIw''] \\ - \frac{1}{2}k_c\alpha w'' \int_0^L w'^2 dx + \Theta_1'v + (\Theta_0w)'v + \Psi_2vw^{IV} \operatorname{sgn}(w'') \\ + EJ_n w''^2 \operatorname{sgn}(w'') = -m\ddot{g}, \end{aligned} \quad (4.59)$$

$$\begin{aligned} C_p\dot{v} + \frac{v}{R} - \int_{L_p} \left[\Theta_1 \frac{\partial}{\partial t}(w'') - \int_{L_p} \Theta_0 \frac{k_c}{\zeta} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2}w''^2 \right) dx \right] dx \\ - \int_{L_p} \Psi_2 \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2}w''^2 \right) \operatorname{sgn}(w'') dx = 0. \end{aligned} \quad (4.60)$$

Que serán las Ecs. a considerar en las secciones siguientes de esta tesis.

4.4 MODELO ELECTROMECAÁNICO EN ESTADO DE PRE-PANDEO

Con el fin de introducir el procedimiento matemático para resolver las EDP del recolector en la configuración bi-empotrada, resolveremos en una primera instancia el problema en el estado de pre-pandeo, donde no existe ningún tipo de configuración pre-deformada.

4.4.1 Discretización espacial en régimen de pre-pandeo

La solución de las Ecs. (4.59) y (4.60) es obtenida mediante el proceso de discretización espacial o análisis modal. Anulando los términos no lineales, de amortiguamiento, piezoeléctricos y la forzante de la Ec. (4.59), el problema de vibraciones libres para una viga uniforme a tramos puede ser expresada como [213, 236]

$$E_j I_j w_j^{IV} + P\alpha w_j'' + m_j \ddot{w}_j = 0. \quad (4.61)$$

Donde el subíndice j es usado nuevamente para representar cada uno de los tramos de la viga. Aplicando el método de separación de variables, se asume una respuesta armónica para la solución temporal, el desplazamiento transversal puede ser expresado como

$$w_j(x, t) = \phi_j(x) (A \cos \omega t + B \sin \omega t). \quad (4.62)$$

Reemplazando la Ec. (4.62) en la Ec. (4.61) y separando la parte temporal del problema se puede obtener la siguiente relación

$$\phi_j^{IV} - \beta_j^4 \phi_j + \kappa_j^2 \phi_j'' = 0, \quad (4.63)$$

siendo $\kappa_j^2 = P\alpha/E_j I_j$ y $\beta_j^4 = \rho_j A_j \omega^2/E_j I_j$. La solución a la Ec. (4.63) se obtiene asumiendo la solución de Euler, que tiene la forma

$$\phi_j(x) = C_j e^{s_j x}. \quad (4.64)$$

Donde C_j son constantes a determinar y los valores de s puede ser determinados a partir de resolver

$$s_j^4 + \kappa_j^2 s_j^2 - \beta_j^4 = 0. \quad (4.65)$$

Cuya solución es

$$s_{j1}^2, s_{j2}^2 = \sqrt{\frac{\kappa_j^2}{4} + \beta_j^4} \pm \frac{\kappa_j^2}{2}. \quad (4.66)$$

Por lo tanto, la solución a la Ec. (4.63) puede ser expresada mediante funciones trigonométricas de la forma

$$\phi_j(x) = C_{j1} \cosh(s_{j1}x) + C_{j2} \sinh(s_{j1}x) + C_{j3} \cos(s_{j2}x) + C_{j4} \sin(s_{j2}x). \quad (4.67)$$

Como se ha expuesto, las C_{ji} representan las constantes de integración asociadas a cada tramo. La cantidad de constantes de integración asociada es igual al orden de derivación de la Ec. (4.61), por lo que deben ser determinadas un total de $4J$ constantes de las ecuaciones de borde y compatibilidad. Las mismas pueden ser expresadas si se considera la configuración bi-empotrada como

$$\begin{aligned} \phi_1(0, t) &= 0, \\ \phi_1'(0, t) &= 0, \\ \phi_i \left(\sum_{n=1}^i L_n, t \right) &= \phi_{i+1} \left(\sum_{n=1}^i L_n, t \right), \\ \phi_i' \left(\sum_{n=1}^i L_n, t \right) &= \phi_{i+1}' \left(\sum_{n=1}^i L_n, t \right), \\ E_i I_i \phi_i'' \left(\sum_{n=1}^i L_n, t \right) &= E_{i+1} I_{i+1} \phi_{i+1}'' \left(\sum_{n=1}^i L_n, t \right), \\ E_i I_i \phi_i''' \left(\sum_{n=1}^i L_n, t \right) &= E_{i+1} I_{i+1} \phi_{i+1}''' \left(\sum_{n=1}^i L_n, t \right), \\ \phi_J(L, t) &= 0, \\ \phi_J'(L, t) &= 0, \end{aligned} \quad (4.68)$$

donde $i = 1, \dots, J-1$. Remplazando la Ec. (4.67) en la Ec. (4.68), un sistema de ecuaciones algebraicas lineal y homogéneo es obtenido. Dicho sistema puede ser escrito de forma matricial como

$$\mathbf{MC} = \mathbf{0}. \quad (4.69)$$

Donde $\mathbf{C} = [C_{11} \ C_{12} \ C_{13} \ \dots \ C_{J4}]^T$ es un vector columna compuesto por todas las constantes de integración, mientras que \mathbf{M} es una matriz cuadrada de orden $4J$. Con el fin de encontrar soluciones distintas a la trivial

para la Ec. (4.69), se debe verificar que el $\det(\mathbf{M}) = 0$. Dicha expresión da lugar a lo que se conoce como ecuación de frecuencias con infinitas soluciones para ω_j , las cuales representan las distintas frecuencias naturales del sistema y sus valores pueden ser obtenidos fácilmente mediante cualquier método de búsqueda de raíces, como por ejemplo Newton-Raphson. Del análisis modal, cada uno de estos valores obtenidos representa un auto-valor y posee un auto-función asociada, comúnmente llamado modo de vibración. Los modos son luego obtenidos imponiendo la condición de orto-normalidad respecto a la matriz de masa

$$\int_0^L m \phi_i \phi_j dx = \delta_{ij}. \quad (4.70)$$

Donde

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases} \quad (4.71)$$

Por último, el desplazamiento total de la viga puede ser determinado como la combinación lineal de las auto-funciones como

$$w(x, t) = \sum_{i=1}^N q_i(t) \phi_i(x). \quad (4.72)$$

Donde $q_i(t)$ es la i -ésima coordenada generalizada, mientras que N el numero de modos a considerar en la solución. Reemplazando la Ec. (4.72) en las Ecs. (4.59) y (4.60), multiplicando por el modo $\phi_i(x)$ e integrando entre $x = 0$ y $x = L$, se obtiene el siguiente conjunto de $N + 1$ ecuaciones, para la amplitud de cada modo $q_i(t)$

$$\begin{aligned} \ddot{q}_i + \sum_{j,k=1}^N \chi_{ijk} (\dot{q}_j \dot{q}_k + q_j \dot{q}_k) + \mu_{2i} \dot{q}_i + \sum_{j,k=1}^N \mu_{3ijk} \dot{q}_j \dot{q}_k \operatorname{sgn}(\dot{q}_j) + \omega_i^2 q_i \\ + \sum_{j,k,l=1}^N K_{Gijk} q_j q_k q_l + \sum_{j,k=1}^N K_{Cijk} q_j q_k \operatorname{sgn}(q_j) \\ + v \left[\theta_i + \sum_{j=1}^N \theta_{Gij} q_j + \sum_{j=1}^N \theta_{Cij} q_j \operatorname{sgn}(q_j) \right] = -F_i \cos(\Omega t), \end{aligned} \quad (4.73)$$

$$C_p \dot{v} + \frac{v}{R} - \sum_{i=1}^N \psi_i \dot{q}_i + \sum_{i,j=1}^N \psi_{Gij} q_i \dot{q}_j - \sum_{i,j=1}^N \psi_{Cij} q_i \dot{q}_j \operatorname{sgn}(q_j) = 0. \quad (4.74)$$

Donde la información espacial del sistema está representada en los siguientes parámetros modales

$$\chi_{ijk} = v \int_0^L \phi_i \phi_j' \phi_k' dx, \quad (4.75)$$

$$\mu_{2ij} = c_2 \int_0^L \phi_i \phi_j dx, \quad (4.76)$$

$$\mu_{3ijk} = c_3 \int_{L_p} \phi_i \phi_j \phi_k \operatorname{sgn}(\phi_j) dx, \quad (4.77)$$

$$\omega_i^2 = \int_0^L \phi_i \left(EI(x) \phi_i^{IV} + P\alpha \phi_i'' \right) dx, \quad (4.78)$$

$$K_{Gijkl} = -\frac{1}{2} k_c \alpha \left(\int_0^L \phi_i \phi_j'' dx \right) \left(\int_0^L \phi_k' \phi_l' dx \right), \quad (4.79)$$

$$K_{Cijk} = EJ_n \int_{L_p} \phi_i \left[\phi_j'' \phi_k'' \right]'' \operatorname{sgn}(\phi_j'') dx, \quad (4.80)$$

$$\theta_i = \int_{L_p} \Theta_1'' \phi_i dx, \quad (4.81)$$

$$\theta_{Gij} = \int_{L_p} \Theta_0 \phi_i \phi_j'' dx, \quad (4.82)$$

$$\theta_{Cij} = \Psi_2 \int_{L_p} \phi_i \phi_j^{IV} \operatorname{sgn}(\phi_j'') dx, \quad (4.83)$$

$$F_i = G \int_0^L m(x) \phi_i dx, \quad (4.84)$$

$$\psi_i = \int_{L_p} \Theta_1 \phi_i'' dx, \quad (4.85)$$

$$\psi_{Gij} = \int_{L_p} \Theta_0 \frac{k_c L_2}{\zeta} \phi_i' \phi_j' dx, \quad (4.86)$$

$$\psi_{Cij} = \Psi_2 \int_{L_p} \left[\phi_i'' \phi_j'' \right] \operatorname{sgn}(\phi_j'') dx. \quad (4.87)$$

4.5 MODELO ELECTROMECAÁNICO EN ESTADO DE POS-PANDEO

A diferencia del caso anterior, para obtener las ecuaciones discretizadas del régimen de pos-pandeo, es necesario obtener la solución al problema de pandeo estático de forma de poder calcular la configuración pre-deformada para luego ser inyectada en las Ecs. (4.59) y (4.60).

4.5.1 Modos de pandeo estático

Eliminando las derivadas temporales y los términos no lineales de la Ec. (4.59), la ecuación asociada al problema de pandeo estático puede ser expresada como [210, 231]

$$E_j I_j w_{sj}^{IV} + P \alpha w_{sj}'' = \frac{1}{2} k_c \alpha w_{sj}'' \int_0^L w_s'^2 dx, \quad (4.88)$$

donde $w_{sj} = w_{sj}(x)$ representa el desplazamiento transversal estático asociado al j -ésimo tramo mientras que $w_s = w_s(x)$ es introducido por simplicidad para indicar la misma variable pero en todo el dominio. Observando esta última expresión, el término integral del miembro derecho resulta constante, por lo que es convenientemente redefinido como

$$\Gamma = \frac{1}{2} k_c \int_0^L w_s'^2 dx. \quad (4.89)$$

De esta manera, la Ec. (4.88) es reescrita como

$$w_{sj}^{IV} + \lambda_j^2 w_{sj}'' = 0. \quad (4.90)$$

Donde fueron introducidos los parámetros $\lambda_j^2 = \bar{P} \alpha / E_j I_j$, y $\bar{P} = P - \Gamma$. La solución general a la Ec. (4.90) puede ser definida como [189]

$$w_{sj} = K_{j1} + K_{j2}x + K_{j3} \cos(\lambda_j x) + K_{j4} \sin(\lambda_j x). \quad (4.91)$$

Donde K_{ji} representa cada una de las cuatro constantes de integración asociadas a cada tramo de la viga, que deben satisfacer las condiciones de borde y compatibilidad del problema. Reemplazando la Ec. (4.91) en las mismas condiciones de borde del problema de pre-pandeo dado por las Ecs. (4.68), pero ahora en términos de $w_s(x)$, se obtiene un sistema de ecuaciones algebraicas lineal y homogéneo compuesto por $4J$ incógnitas. La expresión de dicho sistema en forma matricial toma la forma

$$\mathbf{N}\mathbf{K} = \mathbf{0}. \quad (4.92)$$

Donde $\mathbf{K} = [K_1 \ K_2 \ K_3 \ \dots \ K_{4J}]^T$ es un vector columna que contiene las constantes de integración y \mathbf{N} es una matriz de orden $4J$. De forma análoga al análisis de modos de vibración en régimen de pre-pandeo, se resuelva la Ec. $\det(\mathbf{N}) = 0$ para obtener soluciones distintas a la trivial. Dicha expresión da lugar a una ecuación con infinitas soluciones de \bar{P} que representa cada valor de la carga crítica. Luego de encontrar los valores de carga crítica, el desplazamiento transversal de los modos de pandeo puede ser determinado obligando a los modos satisfacer la condición previamente impuesta para λ_j

$$E_j I_j \lambda_j^2 = P - \Gamma. \quad (4.93)$$

Donde dado que Γ depende del modo de pandeo, esta última expresión representa una relación implícita entre la amplitud de desplazamiento transversal y el valor de la carga P .

4.5.2 Ecuaciones diferenciales de pos-pandeo

Las ecuaciones diferenciales que gobiernan la dinámica de pos-pandeo pueden ser obtenidas descomponiendo al desplazamiento transversal total

como la suma del desplazamiento estático (dado por w_s resuelto en el problema de pandeo estático) y una nueva variable dinámica $w_d(x, t)$ como sigue

$$w(x, t) = w_s(x) + w_d(x, t), \quad (4.94)$$

donde w_d es la componente dependiente del tiempo que representa las vibraciones alrededor de esa configuración pre-deformada. Reemplazando la Ec. (4.94) en la Ec. (4.59), se obtiene la siguiente ecuación

$$\begin{aligned} m\ddot{w}_d + \nu \frac{\partial}{\partial t} (w'_d \dot{w}_d') + c_2 \dot{w}_d + c_3 \dot{w}_d |\dot{w}_d| + P\alpha w''_d + EI w_d^{IV} \\ - \frac{1}{2} k_c \alpha (w''_s + w''_d) \left(\int_0^L (w'_s + w'_d)^2 dx \right) dx + \Theta_1' v + [\Theta_0 (w'_s + w'_d)]' v \\ + \Psi_2 v (w_s^{IV} + w_d^{IV}) \operatorname{sgn}(w''_s + w''_d) + EJ_n [(w''_s + w''_d)^2]'' \operatorname{sgn}(w''_s + w''_d) = -m\ddot{g}, \end{aligned} \quad (4.95)$$

donde, w_s no produce términos inerciales ni de amortiguamiento debido a que el mismo no varía con el tiempo. Además, los términos de rigidez lineal desaparecen si se impone la condición dada por (4.88).

Siguiendo con la ecuación eléctrica, el campo de desplazamientos dado por la ecuación (4.94) es reemplazado en (4.60) obteniendo así

$$\begin{aligned} C_p \dot{v} + \frac{v}{R} - \int_{L_p} \left[\Theta_1 \frac{\partial}{\partial t} w''_d - \Theta_0 \frac{k_c}{2\zeta} \int_{L_p} (w_s''^2 + w_d''^2) dx \right] dx \\ - \int_{L_p} \frac{\Psi_2}{2} \frac{\partial}{\partial t} (w_d''^2) \operatorname{sgn}(w''_s + w''_d) dx = 0. \end{aligned} \quad (4.96)$$

De esta manera, queden representadas las dos ecuaciones diferenciales a derivadas parciales que incluyen la configuración pre-deformada.

4.5.3 Discretización espacial en régimen de pos-pandeo

Con el fin de dar solución al problema de vibración forzada en pos-pandeo, el problema asociado a vibraciones libres debe ser resuelto en una primera instancia. Anulando términos no lineales, de amortiguamiento, piezoeléctricos y forzante de la Ec. (4.95), se obtiene la siguiente expresión [210, 231]

$$m\ddot{w}_{dj} + \tilde{P}\alpha w''_{dj} + EI w_{dj}^{IV} = k_c \alpha w''_{sj} \int_0^L w'_s w'_d dx. \quad (4.97)$$

Aplicando una vez más el método de separación de variables, y asumiendo una solución armónica para la coordenada temporal, la solución para w_d es

$$w_d(x, t) = \phi_j(x) (A \cos \omega t + B \sin \omega t). \quad (4.98)$$

Reemplazando la Ec. (4.98) en la Ec. (4.97), la dependencia temporal puede ser anulada obteniéndose

$$\phi_j^{IV} - \beta_j^4 \phi_j + \kappa_j^2 \phi_j'' = d_j w''_{sj} \int_0^L w'_s \phi_j' dx, \quad (4.99)$$

donde las constantes $\kappa_j^2 = \bar{P}\alpha/E_j I_j$, $\beta_j^4 = \rho_j A_j \omega^2/E_j I_j$ y $d_j = k_c \alpha/2E_j I_j$ fueron introducidos por simplicidad. En esta última ecuación, el miembro izquierdo representa el problema de discretización espacial en caso de que no se asuma ningún tipo de configuración previa (i. e. $w_s = 0$), lo que corresponde al problema de pre-pandeo dado por la Ec. (4.63). En este caso, la principal diferencia es que la Ec. (4.99) representa una EDO no homogénea, por lo que su solución general puede ser expresada como

$$\phi_j = \phi_{hj} + \phi_{pj}. \quad (4.100)$$

Donde ϕ_{hj} y ϕ_{pj} representan las soluciones homogénea y particular, respectivamente. La solución homogénea puede ser obtenida resolviendo

$$\phi_{hj}^{IV} - \beta_j^4 \phi_{hj} + \kappa_j^2 \phi_{hj}'' = 0, \quad (4.101)$$

La cual fue previamente resuelta en el apartado anterior por tratarse de la misma Ec. (4.63). Para este caso es

$$\phi_{hj}(x) = C_{j1} \cosh(s_{j1}x) + C_{j2} \sinh(s_{j1}x) + C_{j3} \cos(s_{j2}x) + C_{j4} \sin(s_{j2}x). \quad (4.102)$$

Esta expresión corresponde a la misma forma modal que para $P < P_{crit}$. Por otro lado, la solución particular puede ser obtenida resolviendo

$$\phi_{pj}^{IV} - \beta_j^4 \phi_{pj} + \kappa_j^2 \phi_{pj}'' = d_j w_{sj}'' \int_0^L w_s' \phi_h' dx + d_j w_{sj}'' \int_0^L w_s' \phi_p' dx. \quad (4.103)$$

Analizando el extremo derecho, los términos integrales resultan constantes, por lo que ϕ_{pj} debe tener la forma

$$\phi_{pj}(x) = C_{j5} w_{sj}''. \quad (4.104)$$

Reemplazando en la Ec. (4.103), se puede obtener

$$-C_{j5} \beta_j^4 w_{sj}'' = d_j w_{sj}'' \int_0^L w_s' \phi_h' dx + C_{j5} d_j w_{sj}'' \int_0^L w_s' w_s''' dx. \quad (4.105)$$

Donde la relación dada por la Ec. (4.88) fue utilizada una vez más [210, 231]. Definiendo las siguientes cantidades integrales por comodidad

$$\Lambda_p = \int_0^L w_s' \phi_h' dx, \quad \Lambda_q = \int_0^L w_s' w_s''' dx, \quad (4.106)$$

y asumiendo que $w_{sj}'' \neq 0$, la condición que debe satisfacer las condiciones de borde C_{j5} puede ser expresadas como

$$d_j \Lambda_p + C_{j5} (d_j \Lambda_q + \beta_j^4) = 0. \quad (4.107)$$

Reemplazando las Ecs. (4.102) y (4.104) en la Ec. (4.100), se obtiene la forma modal asociada al problema de vibraciones en el régimen de pos-pandeo

$$\phi_j(x) = C_{j1} \cosh(s_{j1}x) + C_{j2} \sinh(s_{j1}x) + C_{j3} \cos(s_{j2}x) + C_{j4} \sin(s_{j2}x) + C_{j5} w_{sj}''. \quad (4.108)$$

A diferencia de la forma modal para el problema de pre-pandeo, dado por la Ec. (4.67), un total de $5J$ constantes de integración deben ser determinadas. Estos valores emergen de las mismas condiciones de borde del problema

de pre-pandeo, dadas por la Ec. (4.68), sumado a las J condiciones que se adicionan por la Ec. (4.107), la cual sirve como una CB adicional.

Una vez más, al igual que en el caso de pre-pandeo, la discretización espacial involucra un problema de autovalores y autovectores con infinitos valores de ω_j asociados. Por lo tanto, el desplazamiento total de la viga puede ser determinado como la combinación lineal de las auto-funciones

$$w(x, t) = \sum_{i=1}^N q_i(t) \phi_i(x), \quad (4.109)$$

Siendo N el número de modos a considerar en la solución discretizada. Reemplazando (4.109) en las Ecs. de desplazamiento transversal (4.95) y voltaje (4.96), se obtiene el siguiente conjunto de $N + 1$ ecuaciones discretas

$$\begin{aligned} \dot{q}_i + \sum_{j,k=1}^N \chi_{ijk} (\dot{q}_j \dot{q}_k + q_j \dot{q}_k) + \mu_{2i} \dot{q}_i + \sum_{j,k=1}^N \mu_{3ijk} \dot{q}_j \dot{q}_k \operatorname{sgn}(\dot{q}_j) \\ + \omega_i^2 q_i + \sum_{j,k=1}^N K_{Gijk}^s q_j q_k + \sum_{j,k,l=1}^N K_{Gijk} q_j q_k q_l + \sum_{j=1}^N K_{Cij}^s q_j \operatorname{sgn}(q_j) \\ + \sum_{j,k=1}^N K_{Cijk} q_j q_k \operatorname{sgn}(q_j) + v \left[\theta_i + \theta_{Gi}^s + \theta_{Ci}^s \operatorname{sgn}(q_j) + \sum_{j=1}^N \theta_{Gij} q_j \right. \\ \left. + \sum_{j=1}^N \theta_{Cij} q_j \operatorname{sgn}(q_j) \right] = -F_i \cos(\Omega t), \end{aligned} \quad (4.110)$$

$$\begin{aligned} C_p \dot{v} + \frac{v}{R} - \sum_{i=1}^N (\psi_i - \psi_{Gi}^s) \dot{q}_i + \sum_{i,j=1}^N \psi_{Gij} q_i \dot{q}_j - \sum_{i=1}^N \psi_{Ci}^s \dot{q}_i \operatorname{sgn}(q_i) \\ - \sum_{i,j=1}^N \psi_{Cij} q_i \dot{q}_j \operatorname{sgn}(q_j) = 0. \end{aligned} \quad (4.111)$$

Donde los parámetros indicados con superíndice s reflejan la contribución adicional de considerar que la viga se encuentra inicialmente pre-deformada, debido al pandeo de la estructura. Si estos términos son eliminados (i. e. $w_s = 0$), se obtienen las mismas expresiones asociadas al estado de pre-pandeo Ecs. (4.73) y (4.74). Los nuevos parámetros modales involucran tanto los modos de vibración como a la configuración pre-deformada como se observa a continuación en las siguientes expresiones

$$\omega_i^2 = \int_0^L \phi_i \left(EI \phi_i^{IV} + \tilde{P} \alpha \phi_i'' - k_c \alpha w_s'' \int_0^L w_s' \phi_i' dx \right) dx, \quad (4.112)$$

$$K_{Gijk}^s = -k_c \alpha \int_0^L \phi_i \left[w_s'' \left(\frac{1}{2} \int_0^L \phi_j' \phi_k' dx \right) + \phi_j'' \left(\int_0^L w_s' \phi_j' dx \right) \right] dx, \quad (4.113)$$

$$K_{Cij}^s = EJ_n \int_{L_p} \phi_i \left[2w_s'' \phi_j'' \right]'' \operatorname{sgn}(\phi_j'') dx, \quad (4.114)$$

$$\theta_{Gi}^s = \int_{L_p} \Theta_0 \phi_i w_s'' dx, \quad (4.115)$$

$$\theta_{Ci}^s = \Psi_2 \int_{L_p} \phi_i w_s^{IV} \operatorname{sgn}(\phi_i'') \, dx, \quad (4.116)$$

$$\psi_{Gi}^s = \int_{L_p} \Theta_0 \frac{k_c L_2}{\zeta} \phi_i' w_s' \, dx, \quad (4.117)$$

$$\psi_{Ci}^s = \Psi_2 \int_{L_p} [\phi_i'' w_s''] \operatorname{sgn}(\phi_i'') \, dx. \quad (4.118)$$

Por último, para excitaciones armónicas cerca de la frecuencia fundamental del sistema, la contribución de modos superiores puede ser despreciada de la solución asumiendo $N = 1$. En este caso, las Ecs. (4.110) y (4.111) toman la forma

$$\begin{aligned} \ddot{q} + \tilde{\chi} (\dot{q}^2 + q\ddot{q}) + \omega^2 q + \tilde{\mu}_2 \dot{q} + \tilde{\mu}_3 \dot{q}^2 \operatorname{sgn}(\dot{q}) + \tilde{K}_C^s q^2 + \tilde{K}_C q^3 \\ + \tilde{K}_C q^2 \operatorname{sgn}(q) + v [\tilde{\theta} + \tilde{\theta}_G^s + \tilde{\theta}_C^s \operatorname{sgn}(q) + \tilde{\theta}_G q \\ + \tilde{\theta}_C q \operatorname{sgn}(q)] = -\tilde{F} \cos(\Omega t), \end{aligned} \quad (4.119)$$

$$C_p \dot{v} + \frac{v}{R} - (\tilde{\psi} - \tilde{\psi}_G^s) \dot{q} + \tilde{\psi}_G q \dot{q} - \tilde{\psi}_C^s \dot{q} \operatorname{sgn}(q) - \tilde{\psi}_C q \dot{q} \operatorname{sgn}(q) = 0. \quad (4.120)$$

4.6 SOLUCIÓN REDUCIDA POR MÉTODO DE PERTURBACIÓN

4.6.1 Método de Escalas Múltiples

Diferentes métodos de perturbación han sido utilizados para dar soluciones analíticas aproximadas a sistemas electromecánicos acoplados no lineales, como pueden ser: el método de Lindstedt-Poincaré [237], balance armónico [43, 209], método de promediación [238], y el método de escalas múltiples [239, 240], entre otros. Para dar solución numérica a las Ecs. (4.110) y (4.111), es válido emplear métodos numéricos para ecuaciones diferenciales ordinarias como Runge-Kutta. Sin embargo, las soluciones analíticas aproximadas resultan ser convenientes para estudiar diferentes configuraciones de parámetros geométricos y/o constitutivos con un mínimo costo de cómputo o cálculo. Aquí, el Método de Escalas Múltiples (MEM) ha sido elegido como método de reducción por ser uno de los más apropiados para analizar la respuesta dinámica tanto para vigas en régimen de pos-pandeo [241, 242] como para recolectores piezoeléctricos en configuración cantilever [207, 239, 240], y además, sometidas a cargas axiales [166]. Siguiendo este método, la variable independiente temporal es expandida en n nuevas variables de tiempo teniendo la forma [235, 243]

$$T_n = \varepsilon^n t, \quad (4.121)$$

donde ε es un parámetro de contabilidad adimensional (comúnmente denominado en inglés *bookkeeping parameter*) que eventualmente será igualado a

uno. Las funciones $q(t)$ y $v(t)$ deben ser expandidas acorde este parámetro como

$$q(t) \approx q_0(T_0, T_1, T_2) + \varepsilon q_1(T_0, T_1, T_2) + \varepsilon^2 q_2(T_0, T_1, T_2), \quad (4.122)$$

$$v(t) \approx v_0(T_0, T_1, T_2) + \varepsilon v_1(T_0, T_1, T_2) + \varepsilon^2 v_2(T_0, T_1, T_2), \quad (4.123)$$

donde $T_0 = t$ es la escala de tiempo original mientras que T_2 y T_3 son escalas de tiempo más lentas. Como se puede observar, se proponen tres escalas distintas para el problema a analizar. Esto es debido a que el sistema de ecuaciones presenta no linealidades de orden cuadrático y cúbico, las cuales ocurren en diferentes escalas de tiempo y deben ser capturas por separado. Los parámetros del sistema deben ser escalados acorde a ε también como

$$\begin{aligned} \tilde{\psi} &\rightarrow \varepsilon^0 \psi, & \tilde{K}_G^s &\rightarrow \varepsilon K_G^s, & \tilde{K}_C^s &\rightarrow \varepsilon^2 K_C^s, & \tilde{\theta}_C &\rightarrow \varepsilon^2 \theta_C, & \tilde{\psi}_C^s &\rightarrow \varepsilon^2 \psi_C^s. \\ \tilde{\psi}_G^s &\rightarrow \varepsilon^0 \psi_G^s, & \tilde{F} &\rightarrow \varepsilon^2 F, & \tilde{\theta}_C^s &\rightarrow \varepsilon^2 \theta_C^s, & \tilde{\psi}_C &\rightarrow \varepsilon^2 \psi_C, & \tilde{\theta}_G^s &\rightarrow \varepsilon^2 \theta_G^s, \\ \tilde{\chi} &\rightarrow \varepsilon \chi, & \tilde{K}_G &\rightarrow \varepsilon^2 K_G, & \tilde{\mu}_2 &\rightarrow \varepsilon^2 \mu_2, & \tilde{\mu}_3 &\rightarrow \varepsilon^2 \mu_3, \\ \tilde{\psi}_G &\rightarrow \varepsilon \psi_G, & \tilde{\theta}_G &\rightarrow \varepsilon^2 \theta_G, & \tilde{K}_C &\rightarrow \varepsilon^2 K_C, & \tilde{\theta} &\rightarrow \varepsilon^2 \theta, \end{aligned} \quad (4.124)$$

Mientras que las derivadas respecto al tiempo se convierten ahora en expansión en términos de derivadas parciales respecto a las nuevas escalas temporales como

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial T_0} \frac{dT_0}{dt} + \frac{\partial}{\partial T_1} \frac{dT_1}{dt} + \dots = D_0 + \varepsilon D_1 + \varepsilon^2 D_2 + \dots, \quad (4.125)$$

$$\frac{d^2}{dt^2} = D_0^2 + 2\varepsilon D_0 D_1 + \varepsilon^2 (D_1^2 + 2D_0 D_2) + \dots, \quad (4.126)$$

donde las derivadas parciales son denotadas acorde a la notación de Euler como $D_i^j = \partial^j / \partial T_i^j$, siendo i la escala de tiempo y j el orden de la derivada. Remplazando las Ecs. (4.122), (4.123) y (4.124) en las Ecs. (4.119) y (4.120); y agrupando términos acorde el orden de ε^n se obtiene el siguiente conjunto de ecuaciones

$O(\varepsilon^0)$:

$$D_0^2 q_0 + \omega^2 q_0 = 0, \quad (4.127)$$

$$C_p D_0 v_0 + \frac{v_0}{R} = (\psi + \psi_G^s) D_0 q_0. \quad (4.128)$$

$O(\varepsilon^1)$:

$$D_0^2 q_1 + \omega^2 q_1 = -2(D_0 D_1 q_0) - \chi (D_0 q_0)^2 - \chi q_0 (D_0^2 q_0) - K_G^q q_0^2, \quad (4.129)$$

$$C_p D_0 v_1 + \frac{v_1}{R} = -C_p D_1 v_0 + (\psi + \psi_G^s) (D_0 q_1 + D_1 q_0) - \psi_G q_0 (D_0 q_0). \quad (4.130)$$

$O(\varepsilon^2)$:

$$\begin{aligned} D_0^2 q_2 + \omega^2 q_2 = & -F \cos(T_0 \Omega) - 2\chi (D_0 q_0) (D_0 q_1 + D_1 q_0) - \chi q_0 [D_0^2 q_1 \\ & + 2(D_0 D_1 q_0)] - \chi q_1 (D_0^2 q_0) - (\mu_2 + \mu_3 |D_0 q_0|) D_0 q_0 \\ & - D_1^2 q_0 - 2D_0 D_1 q_0 - 2D_0 D_2 q_0 - K_G q_0^3 - 2K_G^s q_0 q_1 \\ & - K_C q_0^2 \operatorname{sgn}(q_0) - K_C^s q_0 \operatorname{sgn}(q_0) - v_0 [\theta + \theta_G^s \\ & + \theta_G q_0 + \theta_C^s \operatorname{sgn}(q_0) + \theta_C q_0 \operatorname{sgn}(q_0)], \end{aligned} \quad (4.131)$$

$$C_p D_0 v_2 + \frac{v_2}{R} = -C_p (D_1 v_1 + D_2 v_0) + (\psi + \psi_G^s) (D_0 q_2 + D_1 q_1 + D_2 q_0) + (D_0 q_0) (q_0 \psi_C + \psi_C^s) \operatorname{sgn}(q_0) - \psi_G (D_0 q_0) q_1. \quad (4.132)$$

La solución a la Ec. (4.127) puede ser encontrada como

$$q_0 = A(T_1, T_2) e^{i\omega T_0} + cc, \quad (4.133)$$

donde cc denota los términos complejos conjugados. Remplazando la Ec. (4.133) en la Ec. (4.128) la solución al voltaje en la primera escala de tiempo puede ser obtenida como

$$v_0 = B(T_1, T_2) e^{-\frac{T_0}{C_p R}} - \frac{\psi R \omega}{-i + C_p R \omega} A(T_1, T_2) e^{i\omega T_0} + cc. \quad (4.134)$$

Debido a que solo interesa la respuesta dinámica en el estado estacionario, el primer término puede ser eliminado debido a que a medida que $T_0 \rightarrow \infty$ el término $e^{-\frac{T_0}{C_p R}} \rightarrow 0$. Remplazando las Ecs. (4.133) y (4.134) en la Ec. (4.129) y tomando los términos seculares, la condición de solución para la segunda escala de tiempo puede ser obtenida

$$D_1 A = 0. \quad (4.135)$$

Lo cual implica que $A = A(T_2)$. Eliminando los términos seculares en las Ecs. (4.129) y (4.130), las siguientes soluciones para la segunda escala de tiempo son obtenidas

$$q_1 = \frac{K_G^s}{3\omega} \left(A^2 e^{2i\omega T_0} - 2A\bar{A} + \bar{A}^2 e^{-2i\omega T_0} \right) - \frac{2\chi}{3} \left(A^2 e^{2i\omega T_0} + \bar{A}^2 e^{-2i\omega T_0} \right) + cc, \quad (4.136)$$

$$v_1 = \left(\frac{4}{3} \chi R \omega - \frac{2}{3\omega} K_G^s R \right) (\psi + \psi_G^s) \left(\frac{A^2 e^{2i\omega T_0}}{-i + 2C_p R \omega} \right) - \psi_G R \omega \left(\frac{A^2 e^{2i\omega T_0}}{-i + 2C_p R \omega} \right) + cc. \quad (4.137)$$

Remplazando las Ecs. (4.133) y (4.137) en la Ec. (4.131), y tomando los términos seculares una vez más, la condición de solución asociada a la tercera escala de tiempo resulta

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} e^{i\sigma T_2} F + iA\mu_2\omega + \frac{\mu_3}{2\pi} \int_0^{2\pi} D_0 q_0 |D_0 q_0| e^{-iT_0} dT_0 + \frac{K_C}{2\pi} \int_0^{2\pi} q_0^2 \operatorname{sgn}(q_0) e^{-iT_0} dT_0 \\ & + \frac{K_C^s}{2\pi} \int_0^{2\pi} q_0 \operatorname{sgn}(q_0) e^{-iT_0} dT_0 + \frac{AR\psi\omega (\theta + \theta_G^s)}{-i + C_p R \omega} + \frac{\theta_C^s}{2\pi} \int_0^{2\pi} v_0 q_0 \operatorname{sgn}(q_0) e^{-iT_0} dT_0 \\ & + \left(3K_G + \frac{5}{3} K_G^s \chi - \frac{10}{3\omega^3} K_G^s{}^2 - 2\chi^2 \omega^2 \right) A^2 \bar{A} + 2i\omega (D_2 A) = 0. \end{aligned} \quad (4.138)$$

Los términos seculares son aquellos que producen singularidades en la respuesta temporal.

Donde los términos que involucran funciones signos fueron promediados en un periodo, y el *parámetro de sintonización* σ fue introducido acorde a

$$\Omega = \omega + \varepsilon^2 \sigma. \quad (4.139)$$

La variable compleja A puede ser expresada en forma polar como

$$A = \frac{1}{2} a(T_2) e^{i\beta(T_2)}, \quad (4.140)$$

que reemplazando la Ec. (4.140) en la Ec. (4.138) y separando la parte real e imaginaria, las ecuaciones de modulación pueden ser obtenidas

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \mu_2 \omega a + \frac{R\psi \omega a (\theta + \theta_G^s)}{2(1 + C_p^2 R^2 \omega^2)} + \frac{2R\theta_C a^2 \sin(\eta)}{3\pi} + \frac{4\mu_3 \omega^2 a^2}{3\pi} \\ + \frac{1}{2} g \sin(\gamma) + \omega \dot{a} = 0, \end{aligned} \quad (4.141)$$

$$\begin{aligned} -\sigma \omega a + \frac{C_p R^2 \psi \omega^2 a (\theta + \theta_G^s)}{2(1 + C_p^2 R^2 \omega^2)} + \left(\frac{3}{8} K_G + \frac{5}{24} K_G^s \chi - \frac{5}{12\omega^3} K_G^{s2} \right. \\ \left. - \frac{1}{14} \chi^2 \omega \right) a^3 + \frac{4K_C a^2}{3\pi} + \frac{4R\theta_C a^2 \cos(\eta)}{3\pi} + \frac{1}{2} g \cos(\gamma) + \omega a \dot{\gamma} = 0. \end{aligned} \quad (4.142)$$

Donde η es el desfase entre los primeros armónicos del voltaje y desplazamiento, cuyo valor será presentado más adelante, mientras que γ es una nueva variable introducida para volver al sistema autónomo cuya expresión es

$$\gamma = \sigma T_2 - \beta. \quad (4.143)$$

Como fue previamente mencionado, es de interés conocer las soluciones correspondientes al estado estable. Por esta razón, asumimos valores nulos para las derivadas respecto al tiempo \dot{a} y $\dot{\gamma}$ en las Ecs. (4.141) y (4.142). En dicho caso, dichas ecuaciones pasan de ser ecuaciones diferenciales, a ecuaciones algebraicas. Despejando las funciones trigonométricas que involucran a γ en el forzamiento, y mediante la aplicación de la identidad pitagórica, la solución para la amplitud de desplazamiento a puede ser obtenida

$$a^2 \left(\frac{\mathcal{D}_l}{2} + a \mathcal{D}_{nl} \right)^2 + \left[a^3 \mathcal{K}_G + a^2 \mathcal{K}_C - a \left(\frac{\mathcal{D}_P}{2} - \sigma \right) \right]^2 = \mathcal{F}. \quad (4.144)$$

Donde fueron incluidos los siguientes parámetros

$$\mathcal{D}_l = \mu_2 - \frac{R\psi (\theta + \theta_G^s)}{C_p^2 R^2 \omega^2 + 1}, \quad (4.145)$$

$$\mathcal{D}_{nl} = \frac{4\mu_3 \omega}{3\pi} + \frac{2\theta_C \sin(\eta)}{3\pi \omega}, \quad (4.146)$$

$$\mathcal{D}_P = \frac{R\psi (\theta + \theta_G^s)}{C_p^2 R^2 \omega^2 + 1}, \quad (4.147)$$

$$\mathcal{K}_C = \frac{4K_C}{3\pi \omega} + \frac{4\theta_C \cos(\eta)}{3\pi \omega}, \quad (4.148)$$

$$\mathcal{K}_G = \frac{3K_G}{8\omega} + \frac{5K_G^s \chi}{24\omega} - \frac{5K_G^s}{12\omega^3} - \frac{\chi^2 \omega}{4}, \quad (4.149)$$

$$\mathcal{F} = \frac{g^2}{4\omega^2}. \quad (4.150)$$

Cada uno de estos parámetros posee un significado físico:

- \mathcal{D}_l representa un *amortiguamiento lineal efectivo*, provocado por el amortiguamiento estructural (de la portante y el piezoeléctrico) y por el efecto piezoeléctrico lineal y no lineal geométrico.
- \mathcal{D}_{nl} representa un *amortiguamiento no lineal efectivo*, provocado por el amortiguamiento no lineal piezoeléctrico y el efecto piezoeléctrico no lineal constitutivo.
- \mathcal{D}_p representa el *amortiguamiento piezoeléctrico*, mismo término que se encuentra restando en \mathcal{D}_l .
- \mathcal{K}_C representa la *no linealidad constitutiva efectiva*, donde K_C^p depende de la rigidez y θ_C^p del acoplamiento.
- \mathcal{K}_G representa la *no linealidad geométrica efectiva*, donde K_G^q es la rigidez no lineal de orden 2, K_G^p la de orden 3 y χ el término dependiente de la inercia no lineal.

La expresión dada por la Ec. (4.144) representa una relación implícita entre a y σ , y por lo tanto, la respuesta en estado estacionario del sistema. Puede ser probado que, para cierta configuración de parámetros, puede existir más de una solución para a y ciertos valores de σ , una propiedad típica de los sistemas no lineales donde el valor de amplitud de desplazamiento depende de las condiciones iniciales para adoptar una u otra solución. Una vez determinado el valor de amplitud, el valor de la variable γ puede ser determinado a partir de cualquiera de las Ecs. (4.141) o (4.142).

Por otro lado, una vez obtenida la amplitud de desplazamiento, la amplitud de voltaje puede ser determinada a partir de las Ecs. (4.134) y (4.137). Sin embargo, los acoplamientos piezoeléctricos no lineales constitutivos (ψ_C y ψ_C^s) presentes solamente en la Ec. (4.132), no serían considerados en la solución, por cómo han sido escalados en la Ec. (4.124). Con el fin de capturar su influencia en el voltaje, resulta necesario determinar una solución a esta última ecuación; no obstante, dado que la misma involucra funciones signo, no existe solución analítica exacta disponible. Para lidiar con ello, estos términos deben ser expandidos en una serie trigonométrica de Fourier como:

$$D_0 q_0 (\psi_C q_0 + \psi_C^s) \operatorname{sgn}(q_0) \approx \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \left(\psi_C \frac{A^{r_1} \sqrt{A\bar{A}}}{A^{r_2}} (-1)^{r_2} i e^{in\omega T_0} \right) + b_n \left(\psi_C^s \frac{A^{r_3} \sqrt{A\bar{A}}}{A^{r_3}} (-1)^{r_3-1} i e^{in\omega T_0} \right) \right] + cc. \quad (4.151)$$

Donde los exponentes son:

$$r_1 = \frac{n+1}{2}, \quad r_2 = \frac{n-1}{2}, \quad r_3 = \frac{n}{2}. \quad (4.152)$$

Y los parámetros a_n y b_n , coeficientes de la serie de Fourier, son obtenidos como:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2\omega}{\pi} \int_0^{2\pi} |\sin \theta| \cos \theta \cos n\theta \, d\theta, \\ b_n &= \frac{2\omega}{\pi} \int_0^{2\pi} |\sin \theta| \cot \theta \sin n\theta \, d\theta. \end{aligned} \quad (4.153)$$

Observando la expresión anterior, a_n presenta valores distintos de cero para valores impares de n mientras que b_n para valores pares de n , por lo que observando la Ec. 4.151, ψ_C^s producirá una serie de armónicos de orden par mientras que ψ_C de ordenes impares. Reemplazando la Ec. (4.151) en la Ec. (4.132), la solución general, expresada como una serie infinita de armónicos, puede ser obtenida:

$$\begin{aligned} v_2 \approx & \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \left(\psi_C \frac{A^{r_1} R (-1)^{r_2} \sqrt{A\bar{A}}}{(-i + nC_p R\omega) \bar{A}^{r_2}} i e^{in\omega T_0} \right) \right. \\ & \left. + b_n \left(\psi_C^s \frac{A^{r_3} R (-1)^{r_3-1} \sqrt{A\bar{A}}}{(-i + nC_p R\omega) \bar{A}^{r_3}} i e^{in\omega T_0} \right) \right] + cc, \end{aligned} \quad (4.154)$$

donde esta última expresión permite tomar tantos armónicos como sean deseados para aproximar los acoplamientos que involucren funciones signos debido a la no linealidad constitutiva.

4.6.2 Soluciones en el dominio temporal

La re-composición temporal es definida como el proceso donde las distintas soluciones, obtenidas en distintas escalas de tiempo, son agrupadas en una sola expresión como función armónica del tiempo. Reemplazando la Ec. (4.140) en las Ecs. (4.133) y (4.136), y luego ambas en la Ec. (4.122), la primera y segunda aproximación del desplazamiento son obtenidas como

$$q(t) = a \cos(\omega t + \beta) + a^2 \frac{K_G^s - 2\chi\omega^2}{6\omega^2} \cos(2\omega t + 2\beta) - \frac{a^2 K_G^s}{2\omega^2} + O(\varepsilon^2). \quad (4.155)$$

Además, recordando que $\beta = \sigma T_2 - \gamma$ a partir de la Ec. (4.143) y reemplazando la Ec. (4.139) en la Ec. (4.155), la respuesta en términos de la frecuencia de forzamiento es obtenida como

$$q(t) = a \cos(\Omega t - \gamma) + a^2 \frac{K_G^s - 2\chi\omega^2}{6\omega^2} \cos(2\Omega t - 2\gamma) - \frac{a^2 K_G^s}{2\omega^2} + O(\varepsilon^2), \quad (4.156)$$

que representa la solución temporal en estado estacionario del desplazamiento para el sistema forzado. Además, haciendo cero a \dot{a} y $\dot{\gamma}$ en las Ecs. (4.141) y (4.142), el valor de γ para un cierto valor de a puede ser obtenido a partir de cualquiera de esas expresiones. Siguiendo un procedimiento similar, la solución temporal en estado estacionario del voltaje puede ser obtenida reemplazando la Ec. (4.140) en las Ecs. (4.134), (4.137) y (4.154) y luego estas tres en la Ec. (4.123) de forma que

$$v(t) = V \cos(Y_1) + V^G \cos(Y_2) + \sum_{n=1}^{\infty} V_n^C \cos(Y_n), \quad (4.157)$$

donde las amplitudes de los armónicos quedan determinados por

$$\begin{aligned} V &= aR\omega\varphi_1(\psi + \psi_G^s), \\ V^G &= a^2R\omega\varphi_2 \left[\psi_G^s + \frac{(\psi + \psi_G^s)(K_G^s - 2\chi\omega^2)}{\omega^2} \right], \\ V_n^C &= a^2R\omega\varphi_n(a_n\psi_C + b_n\psi_C^s), \end{aligned} \quad (4.158)$$

siendo $\varphi_i = (1 + i^2C_p^2R^2\omega^2)^{-1/2}$. Es importante remarcar que todos los términos que tienen superíndice s , son términos que sólo son distintos de cero cuando la estructura se encuentra en su estado de pos-pandeo. En el caso de pre-pandeo, y despreciando la inercia no lineal χ , las expresiones son reducidas a

$$\begin{aligned} V &= aR\omega\varphi_1\psi, \\ V^G &= a^2R\omega\varphi_2\psi_G^s, \\ V_n^C &= a^2R\omega\varphi_n a_n\psi_C^s. \end{aligned} \quad (4.159)$$

Por otro lado, los argumentos de las funciones trigonométricas, dependientes del tiempo son

$$Y_i = i(\Omega t - \gamma) + \eta_i, \quad (4.160)$$

donde $\eta_i = -\arctan(-iC_pR\omega)$ representa los desfases entre los diferentes armónicos que componen al voltaje.

VERIFICACIÓN NUMÉRICA Y VALIDACIÓN EXPERIMENTAL

Hasta aquí, las ecuaciones diferenciales que gobiernan la electrodinámica del dispositivo propuesto han sido presentadas. Ahora, la validez de dichas expresiones para predecir el comportamiento piezoeléctrico en escenarios reales debe ser puesta a prueba. Para ello, se llevarán a cabo dos procedimientos bien diferenciados, los cuales consisten en una primera *verificación numérica* seguida de otra *validación experimental*.

En orden de llevar a cabo estos procedimientos, dos muestras son seleccionadas como se observa en la Figura 5.1. De las Figuras es posible deducir que ambas muestras están conformadas por parches o laminas de material piezoeléctrico, denominadas *Compuestos de Macro Fibras* o *Macro Fiber Composites* (MFC por sus siglas en inglés) del tipo P2 y manufacturados por *Smart Materials* [50], adosados a una viga portante metálica y empotradas en ambos extremos (Figs. 5.1a y 5.1c). Las dimensiones de las muestras son bastante diferentes, tanto para el material piezoeléctrico como para la estructura. La razón principal de esta elección es la de estudiar la configuración biempotrada involucrando valores notablemente distintos de rigidez así como de acoplamiento electromecánico. Esto significa que, a la hora de resolver numéricamente el modelo propuesto, la contribución de los términos emergentes son diferentes, aspecto de interés para una verificación más precisa de la formulación propuesta. Aún más, motivados por este mismo punto, la Muestra 1 es estudiada adoptando la configuración cantilever, tal como se puede observar en la Figura 5.1b, dando lugar a un caso menos rígido que los dos anteriores.

Las dimensiones y constantes del modelo constitutivo de las muestras se encuentran definidas en el Cuadro 5.1. En relación a los parámetros no lineales e_{311} , c_{111p} y $\zeta_{ni} = c_3/2\omega_i$, la identificación de los mismos puede ser encontrada en trabajos previos [244].

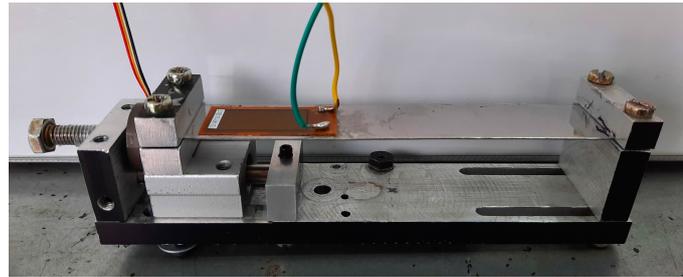
5.1 VERIFICACIÓN NUMÉRICA

Con el objetivo de verificar el modelo reducido y la solución obtenida por el MEM, los resultados pueden ser contrastados con los obtenidos por la integración numérica de las Ecs. (4.119) y (4.120). En el procedimiento de cálculo de la integración numérica se utiliza la función *solve_ivp* librería *SciPy* dentro de un código propio implementado en *Python* [245]. La solución obtenida por MEM es verificada para tres configuraciones diferentes: (a) cantilever (b) biempotrada con carga axial en el régimen de pre-pandeo y (c) en régimen de pos-pandeo. La principal motivación de realizarlo de esta forma es la de comprobar la precisión de la solución reducida para distintos valores de parámetros que pueden tener gran influencia sobre la respuesta dinámica.

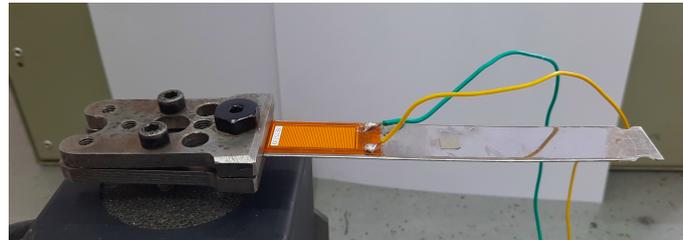
La metodología numérica es llevada a cabo de la siguiente forma: las Ecs. (4.119) y (4.120) son integradas numéricamente de forma implícita acorde al Método de Runge-Kutta de cuarto orden, asumiendo condiciones iniciales nulas y por un largo intervalo de tiempo a fin de asegurar que la solución de

La denominación comercial P2 representa al modo d_{31} .

El valor de acoplamiento electromecánico depende tanto de la geometría como de las propiedades piezoeléctricas.



(a)



(b)



(c)

Figura 5.1: Muestras ensayadas (a) Muestra 1 (MFC 2814-P2) en configuración biempotrada, (b) Muestra 1 en configuración cantilever, (c) Muestra 2 (MFC 8507-P2) en configuración biempotrada.

estado estacionario haya sido alcanzada. Luego, la amplitud de la respuesta dinámica es obtenida a partir de registrar y promediar los valores picos positivos y negativos tanto del desplazamiento como de generación de voltaje. Este procedimiento, se realiza para diferentes valores de la condición de excitación. Seguidamente, estos resultados son comparados con la solución reducida del MEM obtenida en la sección 4.6. Además, con el objeto de tener un mayor entendimiento del grado de correlación entre ambas soluciones, la respuesta temporal numérica para cada condición de excitación es también comparada con la solución analítica dada por las Ecs. (4.156) y (4.157).

Resulta importante resaltar que a la hora de validar numéricamente el modelo, todos de los parámetros geométricos y/o constitutivos deben estar debidamente definidos. Por ello, el amortiguamiento modal lineal ($\zeta_i = \mu_i/2\omega_i$) y el valor de la constante k_c asociada a la restricción elástica axial deben ser previamente definidos. En este apartado, los valores a utilizados son de $0,0005 < \zeta_i < 0,015$ y $k = 5,5 \times 10^5$. Estos valores numéricos fueron identificados experimentalmente, como se mostrará en la sección 5.2 denominada *validación experimental*.

La «condición de excitación» queda determinada tanto por la frecuencia como por la amplitud de la forzante.

El valor de ζ_i considerado varía según la muestra y el valor de la carga axial P

Parámetro	Valor		
	Muestra 1 (BE)	Muestra 1 (C)	Muestra 2 (BE)
c_{11s}	230GPa		
c_{11p}	60,336GPa		
ρ_s	8100kg/m ³		
ρ_p	5400kg/m ³		
L_1	81,5mm	3mm	12mm
L_2	28mm	28mm	85mm
L_3	2,9mm	99,5mm	17,5mm
h_s	0,495mm	0,381mm	
h_p	0,3mm	0,3mm	
b_s	19,8mm	12,7mm	
b_p	14mm	7mm	
e_{31}	-12,67Cm ⁻²		
e_{311}	$9,4553 \times 10^{-3}$ Cm ⁻²		
c_{111p}	$-2,685 \times 10^{12}$ Pa		
ζ_{n1}	$3,0071 \times 10^{-4}$		
C_p	36nF	48nF	
R_l	109kΩ		

Cuadro 5.1: Parámetros geométricos y de materiales de las distintas muestras (BE: Biempotrada, C: Cantilever)

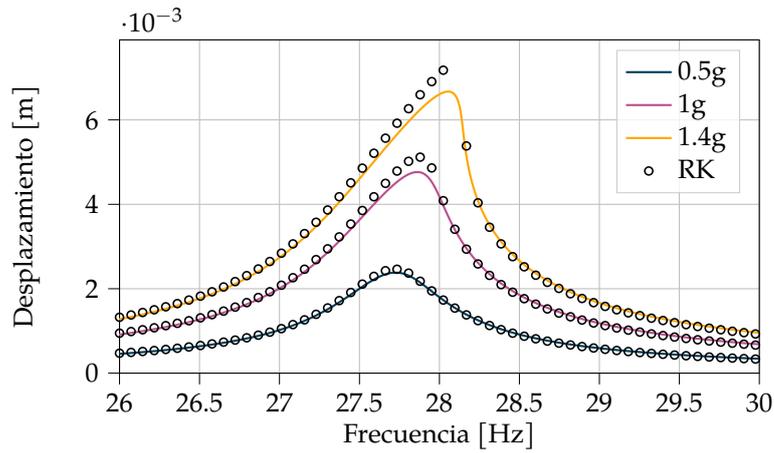
5.1.1 Configuración cantilever

Como ha sido comentando previamente, una de las configuraciones más comúnmente adoptada para la REP es la cantilever. Entre las diferencias que pueden ser establecidas entre ésta y la biempotrada, probablemente la más importante es la menor rigidez a la flexión alcanzada para la viga cantilever, presentando valores de frecuencia natural más bajos para las mismas dimensiones geométricas. Además, una viga en configuración cantilever sufrirá desplazamientos claramente mayores con respecto a la bi-empotrada, lo que *a priori* sugiere una mayor contribución de términos no lineales. Otra de las razones por la que esta configuración es seleccionada para las verificaciones numéricas y experimentales en las siguientes secciones es su mayor sencillez de implementación debido a la presencia de un solo empotramiento y a la inexistencia del acoplamiento axial-flexional.

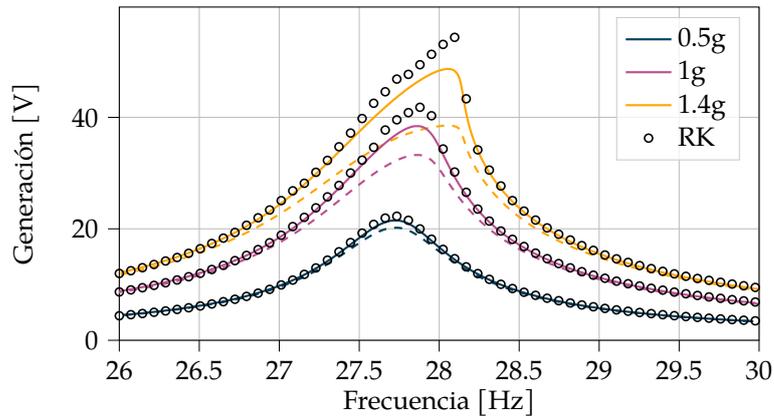
A pesar de estas ventajas, resulta necesario realizar algunas aclaraciones en lo que respecta a la formulación matemática desarrollada en el Capítulo 4. En la teoría de vigas Bernoulli-Euler, para una configuración cantilever, la hipótesis comúnmente empleada es la de viga inextensible [227]. En este caso, el campo de deformaciones no contempla el grado de libertad axial

En la configuración cantilever existe una mayor contribución de la rigidez no lineal proveniente del campo de desplazamientos con respecto a la bi-empotrada, pero no existe efecto de alargamiento.

La elección de asumir viga inextensible depende de la configuración adoptada.



(a)



(b)

Figura 5.2: Comparativa entre soluciones obtenidas por Método de Escalas Múltiples (MEM) frente a la integración numérica de las ecuaciones (RK: Runge-Kutta). Respuestas en frecuencia de la amplitud para la Muestra 1 en la configuración cantilever. (a) Desplazamiento, (b) Generación de voltaje. Líneas discontinuas y continuas representan contribución de uno y tres armónicos respectivamente.

$u = u(x, t)$, resultando ser ligeramente diferente al asumido previamente en la Ec. 4.8, siendo ahora [244]

$$S_1 = -z \left(w'' + \frac{1}{2} w'^2 w'' \right). \quad (5.1)$$

Sin embargo, siguiendo un procedimiento de discretización espacial similar al presentado en el Capítulo 4, se pueden obtener las mismas Ecs. (4.73) y (4.74), pero con distintas definiciones de los parámetros modales [244]. El hecho de que las EDOs obtenidas sean las mismas no es un detalle menor y representa una gran ventaja debido a que la solución reducida obtenida por el MEM en la Sección 4.6 resulta de total aplicación para esta configuración.

Una vez mencionadas estas salvedades, la comparativa de la respuesta en frecuencia del desplazamiento obtenidas tanto por integración numérica (RK) como analíticamente a través del MEM es mostrada en la Figura 5.2a para la configuración cantilever. En este gráfico, se identifica una muy buena correlación entre ambas soluciones, incluso para valores de excitación altos y cerca de la condición de resonancia. Además, se observa un ligero comportamiento de endurecimiento (respuesta curvada hacia la derecha) a medida que aumentan

La cantidad de armónicos asumidos no depende de la cantidad de modos de vibración ($n = 1$), sino de la expansión en serie de Fourier del voltaje.

los valores de amplitud de excitación. Este fenómeno, es atribuible al efecto de la no linealidad geométrica de orden cúbico. Por el otro lado, en la Figura 5.2b, se muestra también la respuesta en frecuencia del voltaje generado por el piezoeléctrico. En esta Figura, se analiza también la influencia del número de armónicos considerados en la Ec. (4.157) provenientes de la expansión en series de Fourier del acoplamiento no lineal constitutivo. De esta forma, se grafican con líneas discontinuas la amplitud del voltaje obtenida asumiendo un solo armónico, mientras que las líneas continuas corresponden al valor máximo alcanzado por la solución en un periodo completo de oscilación al asumir tres armónicos ($n = 3$ en la Ec. 4.157). Asumiendo la solución dada por integración numérica como referencia, es evidente que la hipótesis de un solo armónico subestima la amplitud de generación eléctrica cerca de resonancia, donde se identifica una diferencia de aproximada de 10V para una frecuencia de 28Hz (condición resonante) y la máxima amplitud de excitación 1,4g. Para un mejor entendimiento de este efecto, las respuestas temporales son analizadas en la Figura 5.3 para distintas condiciones de excitación. En la Figura 5.2b, se observa que cuando la frecuencia de excitación se encuentra lejos de la frecuencia natural del sistema, la solución de un solo armónico representa una aproximación precisa para el voltaje generado, incluso considerando grandes amplitudes de excitación. Esto puede ser confirmado mediante la observación de la Figura 5.3a, donde se representa la comparativa de las soluciones temporales obtenidas para ambas variables y por ambos métodos, considerando una amplitud de aceleración de 1,4g y un corrimiento de 3Hz de la condición resonante de $\omega_n = 28\text{Hz}$. Por contrapartida, a medida que este corrimiento se hace mas pequeño y nos acercamos a la condición de resonancia, los otros armónicos que componen la Ec. (4.157) pasan a tener un rol mas significativo para la respuesta de voltaje, y no así para el desplazamiento. Este comportamiento se encuentra representado en la Figura 5.3b, donde pese a que la amplitud de aceleración se mantuvo en 1,4g, se estableció la condición de resonancia. Además, este fenómeno es aún más marcado para valores mayores de aceleración, como se puede observar en la última Figura 5.3c, donde la amplitud de excitación fue incrementada a 5g.

Para identificar con mayor detalle la influencia del número de armónicos sobre la respuesta de voltaje generado, en la Figura 5.3 se utilizan diferentes tipo de líneas, a saber: rojas continuas para el primer armónico (Ω), discontinuas para el segundo (2Ω) y punteadas para el tercero (3Ω). De esta manera, es posible comprender en forma detallada cómo son adicionados los armónicos, y analizar su respectiva influencia en la solución dada por MEM, para todos los escenarios discutidos anteriormente. La identificación de estos armónicos por separado resulta de gran utilidad para el análisis cualitativo de los acoplamientos piezoeléctricos que tienen mayor relevancia en la respuesta dinámica. Observando la Figura 5.3 se puede notar que en todos los casos el segundo armónico, que depende exclusivamente del valor del acoplamiento no lineal piezoeléctrico (ψ_G), no representa una contribución significativa en la solución. Esto confirma que las hipótesis utilizadas en este sentido por diversos autores son validas [166, 186, 206], quienes despreciaron los acoplamientos no lineales resultantes del campo de deformación no lineal.

Por otra parte, la presente solución reducida dada por la Ec. (4.157) es también capaz de contemplar el efecto del acoplamiento piezoeléctrico no lineal constitutivo ψ_C a través del parámetro V_n^C , (Ec. 4.158), cuyo efecto es

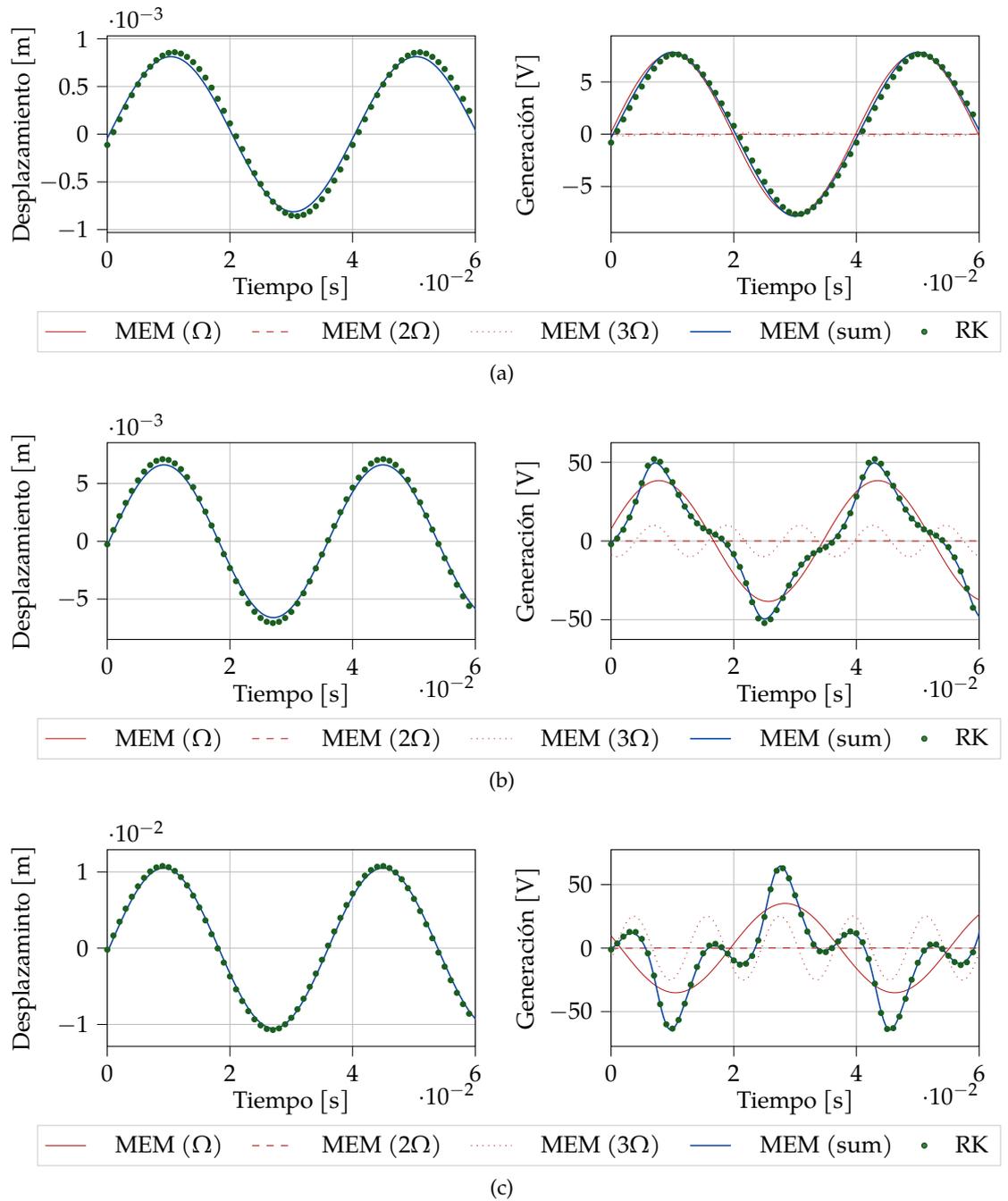
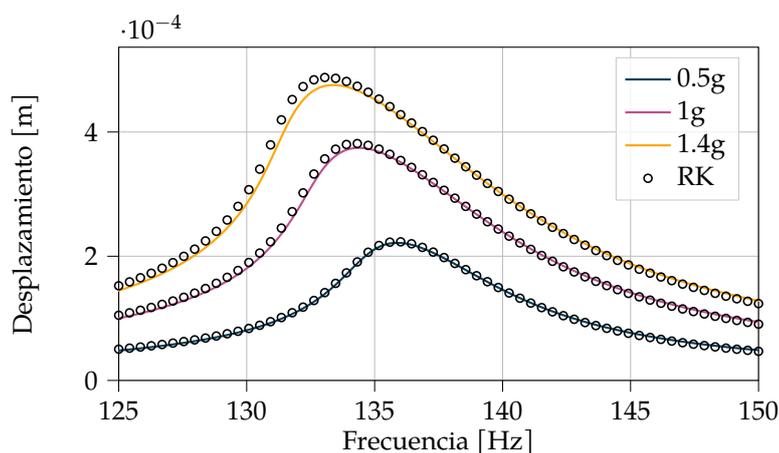
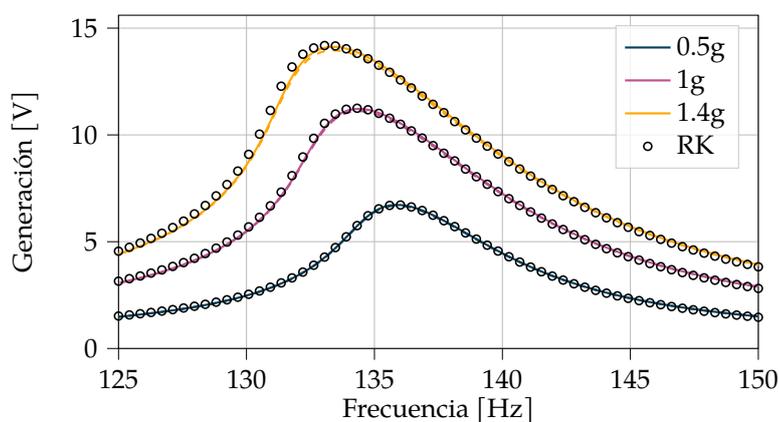


Figura 5.3: Comparativa entre soluciones obtenidas por Método de Escalas Múltiples (MEM) frente a la integración numérica de las ecuaciones (RK: Runge-Kutta). Respuestas temporales para la Muestra 1 en la configuración cantilever ($\omega_n = 28\text{Hz}$) para: (a) $\Omega = 25\text{Hz}$ y $G = 1,4g$; (b) $\Omega = 28\text{Hz}$ y $G = 1,4g$; (c) $\Omega = 28\text{Hz}$ y $G = 5g$.



(a)



(b)

Figura 5.4: Comparativa entre soluciones obtenidas por Método de Escalas Múltiples (MEM) frente a la integración numérica de las ecuaciones (RK: Runge-Kutta). Respuestas de amplitud en frecuencia para la Muestra 1 en la configuración biempotrada (Régimen de pre-pandeo, $P = 104N$). (a) Desplazamiento, (b) Generación de voltaje. Líneas discontinuas y continuas representan suposición de uno y tres armónicos respectivamente.

aproximado como una serie de armónicos impares. Como se comprobó en la Figura 5.3, y contrariamente con el acoplamiento no lineal geométrico, ψ_C tiene una gran influencia sobre la respuesta eléctrica para este caso de estudio. Este fenómeno, representa un punto destacable debido a que no ha sido señalado en estudios previos donde se utilizaron constitutivas similares, y su no inclusión puede llevar a resultados incorrectos de la solución. Por último, se puede destacar que la solución de tres armónicos resultó suficiente para predecir correctamente el voltaje generado, al menos para los valores de excitación numéricamente probados (5g).

5.1.2 Configuración biempotrada en pre-pandeo

Continuando con la configuración biempotrada en el estado de pre-pandeo, la respuesta en frecuencia tanto del desplazamiento como del voltaje, obtenidas por los métodos RK y MEM para las Muestras 1 y 2, se encuentran presentadas en las Figuras 5.4 y 5.5, respectivamente. Como se mencionó anteriormente, las ecuaciones discretizadas para esta configuración son en esencia las mismas que

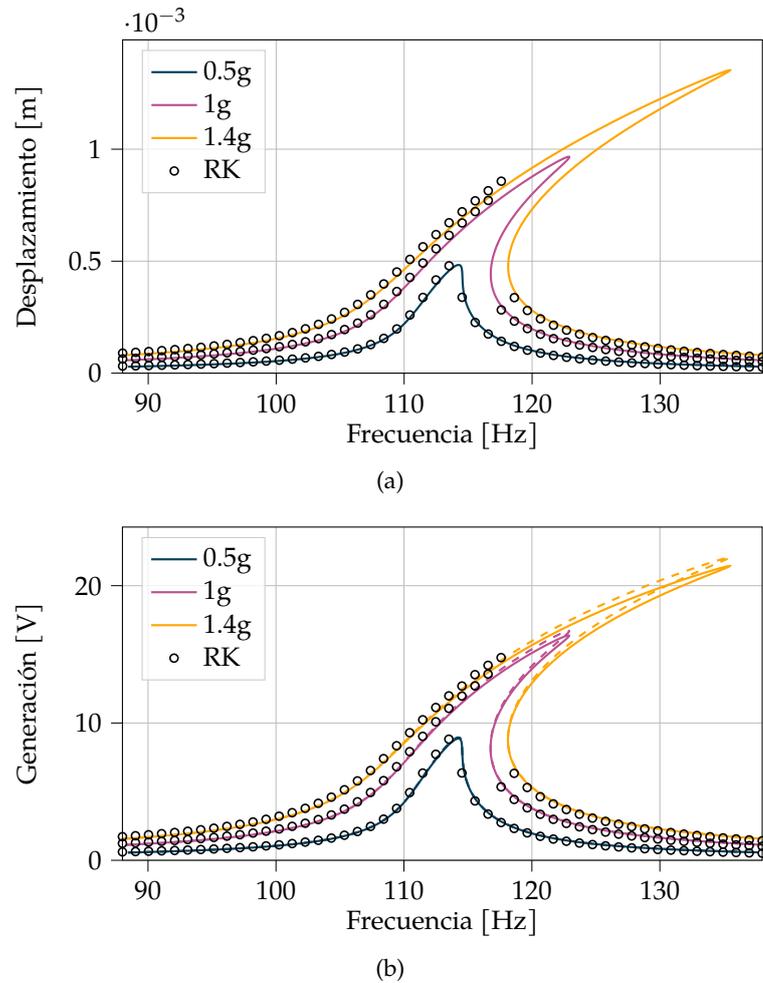


Figura 5.5: Comparativa entre soluciones obtenidas por Método de Escalas Múltiples (MEM) frente a la integración numérica de las ecuaciones (RK: Runge-Kutta). Respuestas de amplitud en frecuencia para la Muestra 2 en la configuración biempotrada (Régimen de pre-pandeo, $P = 35,5N$). (a) Desplazamiento, (b) Generación de voltaje. Líneas discontinuas y continuas representan suposición de uno y tres armónicos respectivamente.

para una viga cantilever, pero con diferentes definiciones para los parámetros, asociados a las distintas condiciones de borde y al acoplamiento axial-flexional. En este caso, los valores de rigidez global más altos están asociados con menores amplitudes de desplazamiento así como también con valores más altos de frecuencia natural. En este punto, vale la pena mencionar que las Muestras 1 y 2 presentan la misma condición de borde, y las diferencias se encuentran en la longitud del material piezoeléctrico y las características seccionales de la viga portante (véase Cuadro (5.1)).

Comenzando el análisis para las curvas presentadas para la Muestra 1 en la Figura 5.4, se observa un comportamiento de ablandamiento caracterizado por una leve inclinación de la curva de respuesta en frecuencia hacia la izquierda. En este caso, este fenómeno es atribuido a la rigidez no lineal constitutiva del material piezoeléctrico K_C [43]. Además, es posible observar que en este caso la rigidez no lineal geométrica K_G no contribuye significativamente en la respuesta dinámica, debido al efecto de endurecimiento, caracterizado por un corrimiento de las curvas de FRFs hacia la derecha no es observado. Estos resultados, resultan razonables si tenemos en cuenta que la amplitud de los desplazamientos de las coordenadas generalizadas resultan ser aproximada-

En la estado de pre-pandeo, el único término responsable del ablandamiento es K_C debido a la inexistencia de una configuración pre-deformada ($K_G^s = 0$).

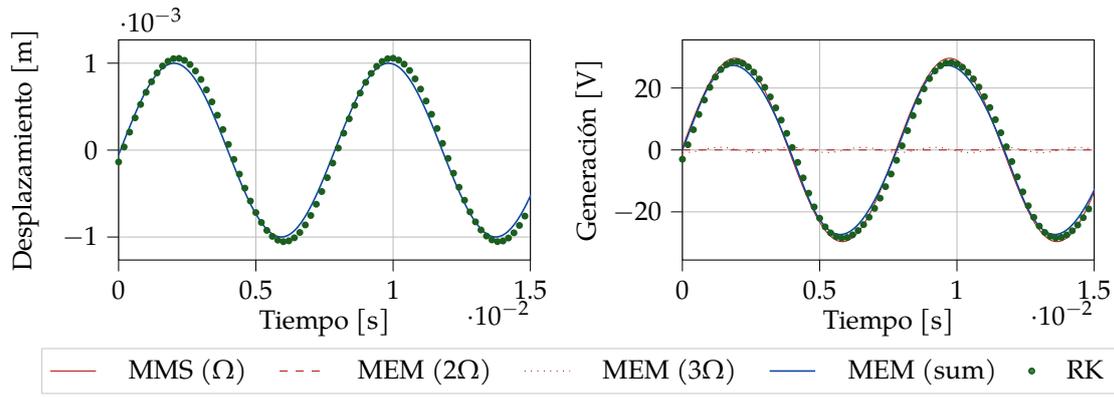
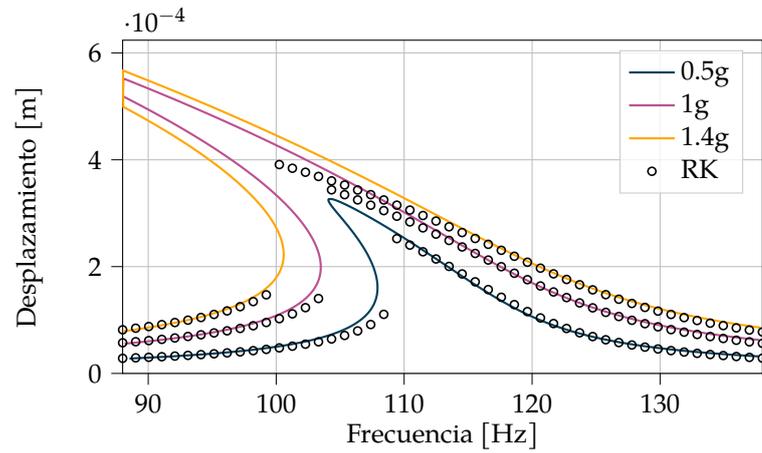


Figura 5.6: Comparativa entre soluciones obtenidas por Método de Escalas Múltiples (MEM) frente a integración numérica de las ecuaciones (RK: Runge-Kutta). Respuestas temporales para la Muestra 1 en la configuración biempotrada, ($\omega_n = 137\text{Hz}$, Régimen de pre-pandeo, $P = 104\text{N}$) para $\Omega = 128\text{Hz}$ y $G = 5\text{g}$.

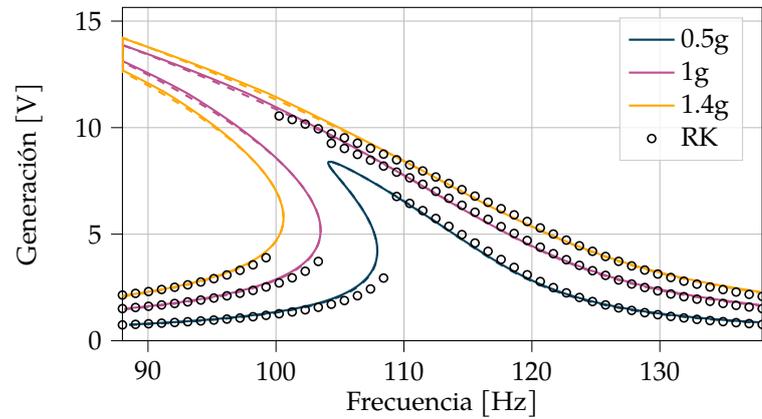
mente diez veces menores que los asociadas a la configuración cantilever (véase Figuras 5.2a y 5.4a). Además, el término K_C representa una no linealidad cuadrática mientras que K_G es de orden cúbico como puede observarse en la Ec. (4.73), por lo que es de esperar que K_C tenga mayor influencia sobre la respuesta dinámica para valores de amplitud más bajos. Comparando los resultados numéricos obtenidos con ambos métodos, puede notarse que existe un gran grado de concordancia entre ambos métodos, para todos los valores de amplitud y frecuencia mostrados.

En lo referido a la Muestra 2, observando la respuesta dinámica presentada en la Figura 5.5, ocurre el efecto contrario al caso anterior, donde la curva se encuentra notablemente curvada hacia la derecha (endurecimiento). Esto indica, que la influencia de la rigidez no lineal geométrica K_G (asociada a la restricción elástica k_c) fue considerablemente mayor con respecto a lo observado anteriormente en la Muestra 1. Esto tiene sentido, si consideramos que los desplazamientos generalizados de esta Muestra fueron mayores a la anterior (véase Figs. 5.5a y 5.4a), el mismo fenómeno que ocurrió con la Muestra 1 en la configuración cantilever. A esta altura, vale la pena apuntar que en esta sección solo interesa analizar la correlación entre ambos métodos de solución, donde las diferencias en la generación serán analizadas mas adelante en detalle.

A la hora de evaluar el grado de correlación entre los dos métodos de resolución (RK y MEM), se puede observar una notable semejanza para los valores del desplazamiento utilizando ambos métodos de solución, tal como fue observado en la configuración cantilever (véase Figs. 5.4a y 5.5a). Por otro lado, en lo referido a la generación de voltaje, prácticamente la misma solución fue alcanzada tanto para uno como para tres armónicos en ambas muestras (véase Figs. 5.4b y 5.5b). Esto parece indicar que la consideración de un solo armónico es suficiente en este caso, debido a la mayor rigidez global asociada a la configuración biempotrada. Esta idea, se ve confirmada observando la respuesta temporal obtenida por ambos métodos (MEM y RK) de la Muestra 1 con una excitación de (5g), presentada en la Figura 5.6. Allí puede observarse que, pese a los valores altos de la amplitud de excitación, las contribuciones del segundo y tercer armónico son prácticamente nulas. En este caso, se eligió



(a)



(b)

Figura 5.7: Comparativa entre soluciones obtenidas por Método de Escalas Múltiples (MEM) frente a integración numérica de las ecuaciones (RK: Runge-Kutta). Respuestas de amplitud en frecuencia para la Muestra 2 en la configuración biempotrada (Régimen de pos-pandeo, $P = 80,5\text{N}$). (a) Desplazamiento, (b) Generación de voltaje. Líneas discontinuas y continuas representan suposición de uno y tres armónicos respectivamente.

un valor de Ω ligeramente menor al de ω_n , debido al efecto de ablandamiento, el cual disminuyó el valor de frecuencia de desplazamientos máximos.

En síntesis, es posible afirmar que para la configuración biempotrada con carga axial, la hipótesis de un solo armónico arrojó excelentes resultados incluso para valores de excitación grandes. Esto es importante debido a que simplifica en gran medida la solución reducida del modelo en esta configuración. Algo importante a aclarar es que considerar la solución de un solo armónico no significa que el acoplamiento electromecánico no lineal constitutivo ψ_C sea despreciado, debido a que, como puede observarse en la Ec. (4.158), la amplitud de V_1^C depende de dicho parámetro.

5.1.3 Configuración biempotrada en pos-pandeo

Por último, se desarrolló la verificación numérica para el estado de pos-pandeo. En este caso, el análisis se basa en la Muestra 2 debido a ser la más sensible a las no linealidades geométricas (por su menor rigidez), como constitutivas (por su mayor cantidad de material piezoeléctrico). Matemáticamente,

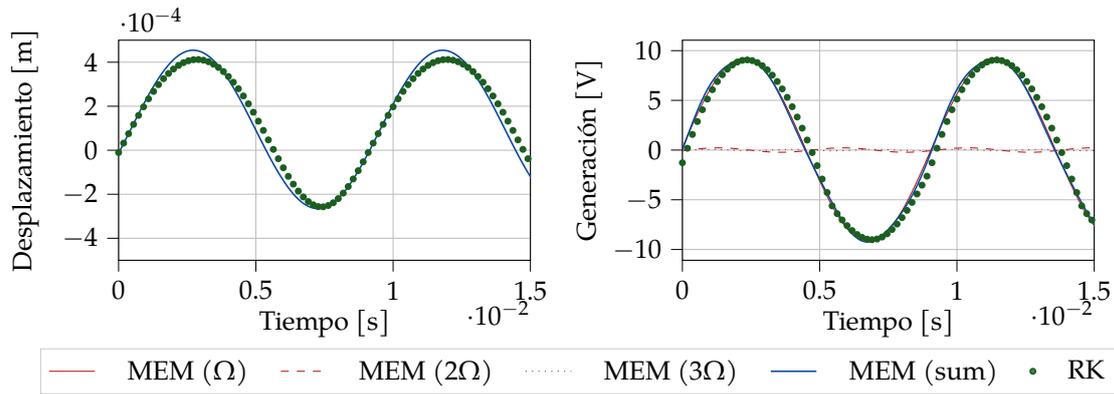


Figura 5.8: Comparativa entre soluciones obtenidas por Método de Escalas Múltiples (MEM) frente a integración numérica de las ecuaciones (RK: Runge-Kutta). Respuestas temporales para la Muestra 2 en la configuración biempotrada ($\omega_n = 90\text{Hz}$, $P = 80,5\text{N}$) para $\Omega = 85\text{Hz}$ y $G = 2g$.

el estado de pos-pandeo representó un caso más complejo que el de pre-pandeo dado que involucra una mayor cantidad de términos, (denotados con el superíndice s en las Ecs. (4.110) y (4.111)), provenientes de la configuración pre-deformada de la viga w_s .

La comparativa entre los métodos de resolución aquí propuestos para el estado de pos-pandeo se encuentran representados en la Figura 5.7. En este caso, la respuesta dinámica está caracterizada por un notable efecto de ablandamiento, comportamiento que es contrario al de endurecimiento del caso anterior de pre-pandeo (véase Fig. 5.5). Este resultado es atribuido a la presencia del nuevo término de rigidez no lineal K_G^s de orden cuadrático, que emerge al considerar la configuración pre-deformada de la viga. En lo que se refiere al grado de concordancia entre ambos métodos, se observa una destacada correlación tanto para los desplazamientos como para el voltaje, existiendo una ligera diferencia para los valores máximos, cerca de la zona donde se produce el *salto* en la respuesta.

Al igual que para los casos anteriores, las respuesta temporales de desplazamiento y voltaje fueron analizadas tal como se muestra en la Figura 5.8. Un fenómeno interesante a destacar es que si bien los desplazamientos en la Figura 5.8 presentan un comportamiento armónico, los mismos mostraron un ligero corrimiento respecto a la posición de equilibrio $q = 0$, con valores máximos y mínimos aproximadamente de $4,1\text{mm}$ y $-0,23\text{mm}$. Este fenómeno es correctamente predicho por la segunda aproximación del desplazamiento en la Ec. (4.156) y es debido a la existencia de la no linealidad cuadrática K_G^s a través del término de valor constante (no oscilante) $a^2 K_G^s / 2\omega^2$. En lo referido al término oscilante con frecuencia 2Ω de la Ec. (4.156), el mismo no posee tanta relevancia. Por otro lado, en lo referido al voltaje y la cantidad de armónicos asumidos en la respuesta, puede confirmarse que la aproximación de un solo armónico es una elección precisa para el estado de pos-pandeo.

El «salto» o «jumping» es un fenómeno propio de los sistemas no lineales en el cual una pequeña variación de la frecuencia de excitación produce una gran variación en la amplitud de la respuesta dinámica.

5.1.4 Discusión sobre la verificación numérica

En base a lo presentado en esta sección de *verificación numérica*, donde el propósito es validar la solución reducida obtenida por el MEM frente a la solución numérica por integración de las ecuaciones a través de RK, se puede arribar a las siguientes conclusiones:

1. La solución reducida del MEM arrojó excelentes resultados para predecir la respuesta dinámica del sistema tanto en la FRF de desplazamiento y voltaje, como en las respuestas temporales comparada con RK. Los casos estudiados fueron: (i) configuración cantilever, (ii) configuración biempotrada en régimen de pre-pandeo y (iii) configuración biempotrada en régimen de pos-pandeo. Además, las dos muestras consideradas para la configuración biempotrada, tuvieron valores geométricos notablemente diferentes tanto para la estructura como para el piezoeléctrico lo que extiende la comparación para un régimen más amplio de parámetros.
2. Para la configuración cantilever y para diferentes amplitudes de excitación, la amplitud del desplazamiento se mantuvo puramente armónica. Esto no se observó con la respuesta del voltaje, donde los términos correspondientes a las constitutivas no lineales que involucran funciones signo producen respuestas no armónicas cerca de la condición de resonancia. En este caso, la aproximación de las funciones signos en una serie de Fourier logra predecir correctamente soluciones no armónicas a partir de la solución reducida del MEM. En este sentido, la aproximación de tres armónicos resulta ser suficiente para obtener una buena aproximación a la forma de onda del voltaje, comparada con RK.
3. Por otro lado, para la configuración biempotrada, el desplazamiento y el voltaje prestaron una forma de onda armónica en la solución dada por el método de integración numérica, para todas las condiciones de excitación e incluso en resonancia. Esto implica, que asumir armónicos puros para estas variables es una aproximación suficiente de la respuesta, lo cual simplifica en gran medida la descripción de la respuesta dinámica de la solución reducida del MEM.

5.2 VALIDACIÓN EXPERIMENTAL

El esquema experimental completo utilizado para llevar a cabo las *verificaciones experimentales* se encuentra presentado en la Figura 5.9a. Las muestras fueron montadas en un excitador electromecánico *Labworks Inc. ET-132* [246] excitado de forma armónica a través de un generador de funciones *RIGOL DG4062* [247] cuya señal de salida fue amplificada por un amplificador fabricado por técnicos de CONICET pertenecientes al *Centro Científico Tecnológico Bahía Blanca*. Además, fue empleado un vibrómetro láser *Polytec PDV-100* [248] para medir la velocidad en un punto específico de la muestra. A fines de medir la excitación que experimentan las muestras, un acelerómetro piezoeléctrico *PCB Piezotronics 352C68* [249] fue situado en la parte móvil del excitador electromecánico donde se sitúan las muestras. Por otro lado, los distintos parches piezoeléctricos fueron conectados a una resistencia eléctrica, sobre la cual se midió la generación eléctrica. Por último, las señales correspondientes al acelerómetro, vibrómetro y piezoeléctrico fueron adquiridas por una placa adquisidora *National Instruments, chasis: 9174, módulos 9230 y 9234* [250].

Una vista más cercana de una de las muestra ensayadas en la configuración biempotrada puede ser observada en la Figura 5.9b. En este caso, un tornillo fue utilizado para provocar la pre-carga axial en el extremo de la viga sobre el cual se colocó una celda de carga piezorresistiva *TE Connectivity FX-29* [251], alimentada por una placa *Arduino UNO* [252] para mediar la fuerza axial

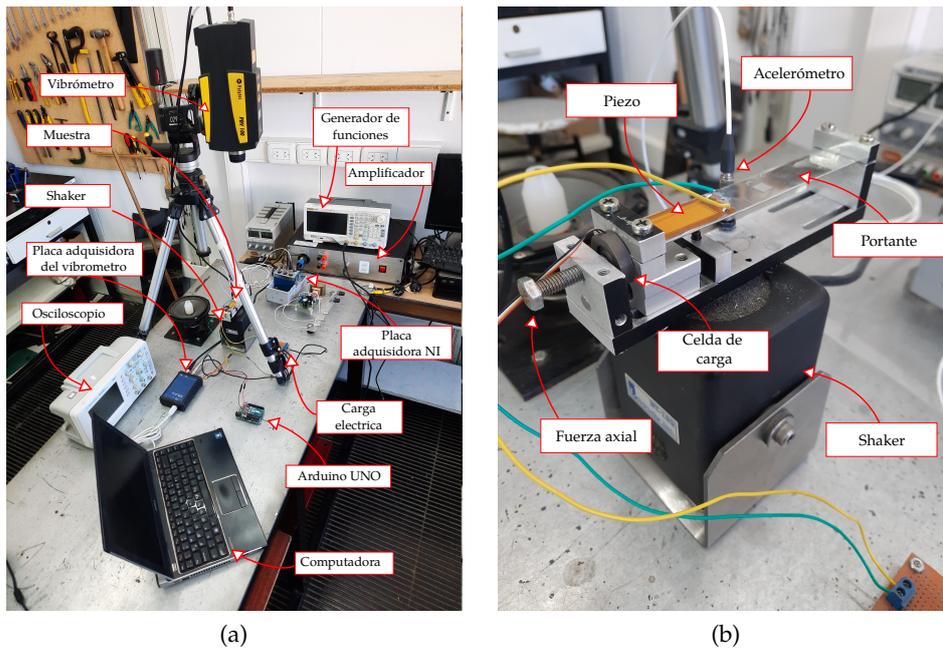
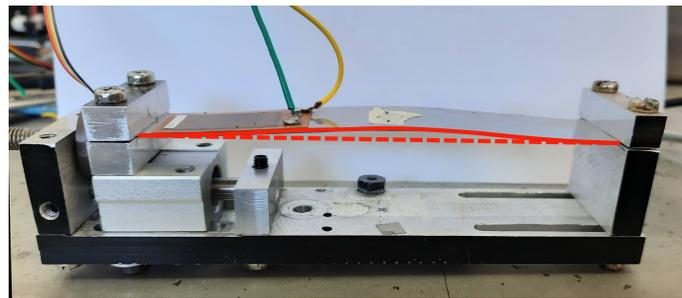


Figura 5.9: Configuración experimental. (a) Esquema completo. (b) Vista detallada de la muestra.

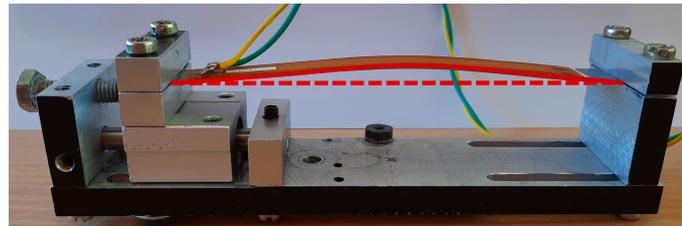
inducida a la muestra. Con el fin de garantizar que no existan variaciones en las CB durante la realización de cada ensayo, se registraron y compararon los valores de carga axial antes y después de los mismos, los cuales debían permanecer inalterados.

A fin de relevar el procedimiento realizado durante la *verificación experimental*, diferenciaremos cinco pasos empleados para las muestras:

1. El primer paso es la identificación del amortiguamiento mecánico $\mu_{2i} = 2\omega_i\zeta_i$, donde ζ_i es el i -ésimo amortiguamiento modal lineal del sistema. La correcta estimación de este parámetro resulta fundamental debido a la alta sensibilidad que posee en la amplitud de la respuesta dinámica cerca de la condición de resonancia.
2. Seguidamente, se realiza el análisis de la influencia de la restricción elástica k_c como fuente de la condición de borde no ideal y se determina numéricamente su valor para la configuración experimental empleada en esta tesis. Este parámetro afecta a la rigidez no lineal geométrica tanto de orden cúbico como cuadrático a través las Ecs. (4.113) y (4.113), por lo que es de esperar que tenga influencia en los efectos de ablandamiento y/o endurecimiento del sistema.
3. Tercero, se analiza la *inestabilidad estática* debido a la carga axial. Para ello, la carga axial es progresivamente aplicada mediante el tornillo hasta sobrepasar el punto de pandeo tal como se muestra en la Figura 5.10. Este valor es medido mediante la utilización de la celda de carga, mientras que el desplazamiento transversal es registrado en simultaneo mediante un sensor de proximidad *Pro vibtech TM-0182* [253]. Para este ensayo, las predicciones numéricas de los valores de carga crítica de pandeo fueron dadas por los autovalores de la Ec. (4.92). Por otro lado, las predicciones del desplazamiento lateral de pandeo fueron obtenidas por la Ec. (4.93).



(a)



(b)

Figura 5.10: Configuraciones de pos-pandeo (líneas continuas) contra su configuración no pandeada (líneas discontinuas) de las Muestras (a) 1 y (b) 2.

4. Seguido al paso anterior, se estudia la modificación de la rigidez transversal del sistema, y por lo tanto, de la *frecuencia natural* a medida que varía P . Este proceso es llevado a cabo de una manera similar al previamente mencionado análisis de la *inestabilidad estática*: mientras que la carga axial es progresivamente incrementada, la vibración libre de la viga debido a una perturbación inicial fue adquirida usando el acelerómetro piezoeléctrico. Esta señal es pos-procesada utilizando el algoritmo de la Transformada Rápida De Fourier (FFT) con el fin de identificar la frecuencia natural del sistema. Por otro lado, los valores teóricos son predichos por la Ec. (4.112). En este caso, para valores cada vez más grandes de la carga axial P , se obtiene una tendencia decreciente o creciente de la frecuencia natural para $P < P_{crit}$ o $P > P_{crit}$, respectivamente. Para clarificar este comportamiento, la Figura 5.11 muestra una representación típica adimensional de la variación de la frecuencia natural para una viga sometida a una carga axial. Aquí, las dos tendencias previamente comentadas pueden ser observadas, donde la frecuencia natural de la viga se hace cero (en forma teórica) para el valor exacto de $P = P_{crit}$.
5. Finalmente, se lleva a cabo la verificación experimental de la *respuesta dinámica* basada en la respuesta en estado estacionario de la viga. En este caso, las muestras son excitadas armónicamente utilizando el excitador electromecánico. Cinco niveles objetivo de carga axial fueron definidos para el procedimiento experimental como son esquemáticamente representados en la Figura 5.11 [202]. El primer caso, referido como P_0 , corresponde al estudio sin carga axial ($P = 0$). El segundo caso P_1 involucra a un nivel de carga axial dentro de la configuración de pre-pandeo, mientras que el caso P_2 a su recíproco pero en la configuración de pos-pandeo. En este punto, resulta necesario aclarar que referimos a estos casos como *recíprocos* debido a que poseen el mismo valor de frecuencia natural, pese a estar sujetos a niveles diferentes de P . El cuarto caso P_3 corresponde al recíproco de P_0 , mientras que el último

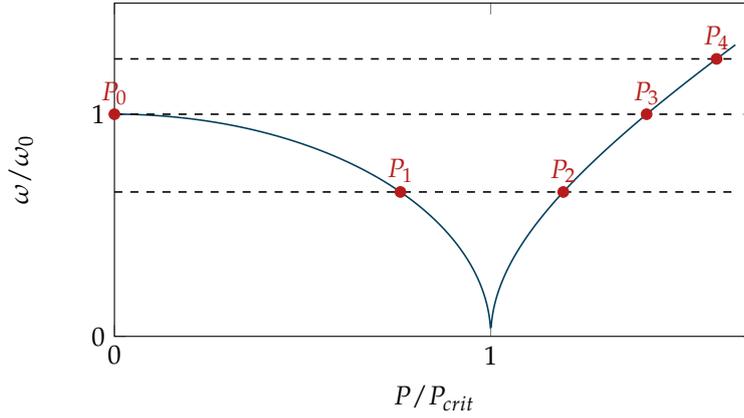


Figura 5.11: Representación adimensional de la variación frecuencia natural fundamental de una viga producto de una carga axial. Las líneas de puntos indican los niveles de carga axial objetivo que serán ensayados, que involucran estados en condición de pre- y pos-pandeo con iguales frecuencias naturales.

caso P_4 representó el más rígido testado, el cual no tiene caso recíproco asociado en pre-pandeo.

Además de variar la carga axial, fueron elegidos diferentes valores de amplitud y frecuencia de excitación (cerca de la frecuencia natural del sistema en cada caso). Para cada condición de excitación, los valores de aceleración fueron adquiridos por el acelerómetro piezoeléctrico junto con el voltaje generado, mediante la placa adquisidora. Luego, la información almacenada es utilizada para construir las curvas de respuesta en estado estacionario del voltaje para la lámina piezoeléctrica. En este caso, los valores predichos por el modelo son calculados a partir de la Ec.(4.157).

5.2.1 Identificación del amortiguamiento lineal

Para sistemas electromecánicos sometidos a muy bajas excitaciones, es sabido que las contribuciones de los términos no lineales en la respuesta dinámica son despreciables debido a las bajas amplitudes del desplazamiento como del voltaje. En este escenario, la disipación de energía del sistema puede ser atribuida a dos fuentes: (i) amortiguamiento mecánico lineal, comúnmente propuesto como proporcional a la velocidad y, (ii) disipación de energía a través de la resistencia eléctrica por efecto Joule. Estableciendo la condición de circuito abierto para el piezoeléctrico, no existe ninguna disipación de energía eléctrica, por lo tanto, la única fuente de disipación es la mecánica. En esta condición, la variable β_i es definida como el cociente entre la velocidad evaluada en un punto y la aceleración de la base, la cual se representa como función de la frecuencia de forzamiento Ω como [164]

$$\beta_i(\Omega) = -\frac{i}{\Omega} + \frac{iF_i\Omega\phi_i(x_{vib})}{\omega_i^2 + i2\omega_i\zeta_i\Omega - \Omega^2}. \quad (5.2)$$

Donde i es la unidad imaginaria, x_{vib} es la coordenada espacial donde la velocidad es medida, ζ_i es amortiguamiento modal asociada al i -ésimo modo normal del sistema, F_i es la forzante modal, Ω es la frecuencia de excitación, mientras que ω_i y ϕ_i la i -ésima frecuencia natural del sistema y su modo de

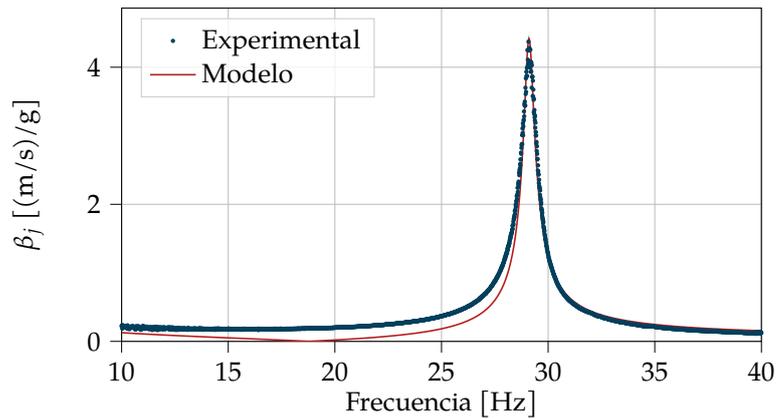


Figura 5.12: Resultados del ajuste por mínimos cuadrados para la identificación del amortiguamiento modal lineal. Muestra 1 en configuración cantilever. ($\zeta_1 = 0,00923$).

vibración asociado, respectivamente. En la Ec. (5.2), la única variable desconocida resulta ser el amortiguamiento modal. Utilizando esta ecuación, es posible identificar dicho valor experimentalmente, al realizar un barrido en frecuencia a muy baja excitación de la muestra, adquiriendo de manera simultánea la aceleración de la base (utilizando el acelerómetro) y la velocidad para el punto $x = x_{vib}$ (mediante la utilización del vibrómetro). Una vez obtenidas ambas señales, el amortiguamiento mecánico puede ser perfectamente determinado mediante la técnica de ajuste por mínimos cuadrados entre la Ec. (5.2) y las señales experimentales.

Como primera instancia, se realiza la identificación del amortiguamiento modal de la Muestra 1 en su configuración cantilever. La Figura 5.12 muestra el ajuste de curvas por mínimos cuadrados entre los resultados experimentales y el modelo analítico. En este caso, el valor del amortiguamiento modal caracterizado fue de 0,00923, el cual se encuentra dentro de los valores esperados, reportados en la literatura [254]. Por otro lado, la identificación del amortiguamiento de la misma muestra pero en su configuración biempotrada puede encontrarse en la Figura 5.13a. En este caso, a diferencia de la configuración cantilever, la identificación del amortiguamiento modal se realiza para distintos niveles de la carga axial P , donde cada uno de estos puntos corresponde a un valor obtenido mediante el ajuste entre aquellos que surgen de las curvas del modelo analítico, dado por la Ec. (5.2), y de las curvas experimentales (semejante al presentado en la Fig. 5.12). Para esta muestra, la identificación se realiza para ocho niveles de pre-carga incluyendo el caso $P = 0$. Respecto al máximo de pre-carga valor testado, el mismo fue de $P = 172\text{N}$, valor mayor al crítico teórico el cual se ubicó en los 154N.

Un procedimiento similar es llevado a cabo para la Muestra 2 tal como se representa en la Figura 5.13b. En este caso se experimentaron seis niveles de carga axial, donde el valor máximo fue de $P = 72\text{N}$, superior al crítico teórico de 64N aproximadamente.

Analizando los valores identificados del amortiguamiento modal para ambas muestras, los mismos se situaron entre $0,005 < \zeta_1 < 0,015$, donde no se identifica una tendencia clara que refleje una dependencia con la carga axial P . Comparado con otros autores, este comportamiento no parece obedecer a la tendencia creciente del amortiguamiento a medida que P aumenta reportada por Leland y Wright [190] o Eichhorn y col. [191]. Sin embargo, estos dos

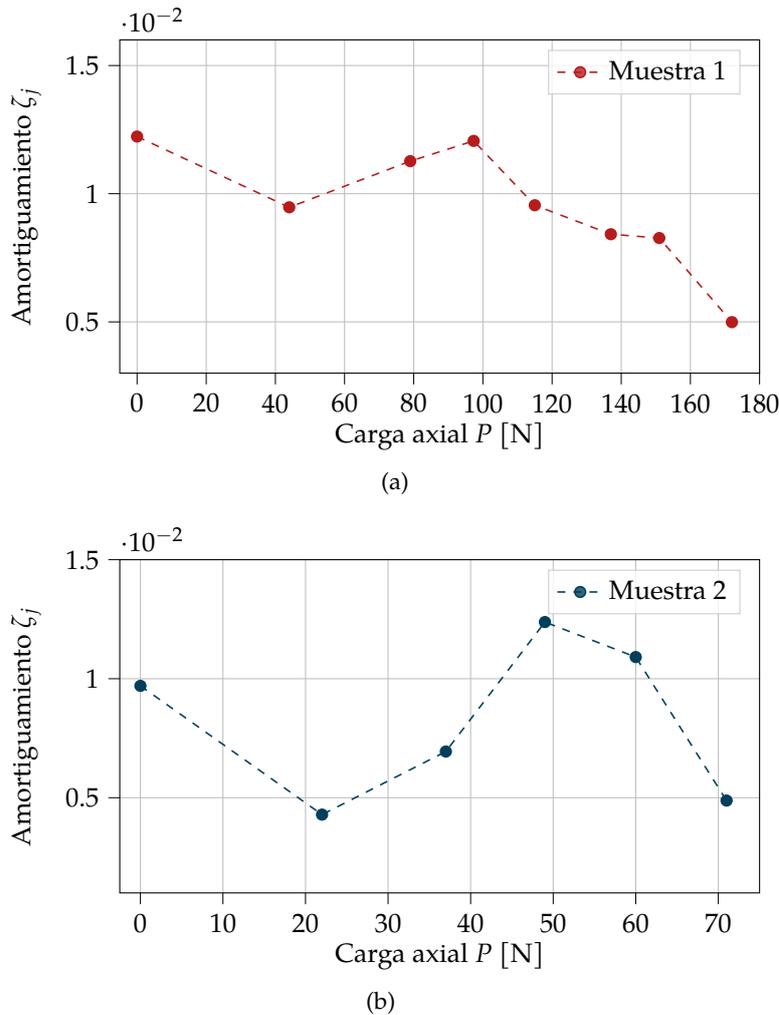


Figura 5.13: Amortiguamiento modal lineal identificado para distintos valores de la carga axial P para las Muestras (a) 1 y (b) 2.

estudios se basaron en la configuración cantilever y dentro del régimen de pre-pandeo. Por otro lado, Masana y Daqaq [166], reportaron una tendencia creciente del amortiguamiento modal a medida que P aumenta para la configuración biempotrada. No obstante, sus resultados no resultan comparables con los aquí presentados debido a que basaron en el amortiguamiento efectivo (el cual incluye el amortiguamiento eléctrico producto del acoplamiento electromecánico), restringiéndose a una predicción teórica en el régimen de pre-pandeo .

5.2.2 Identificación de la constante elástica asociado a la condición de borde no ideal

Como fue previamente comentado en la Subsección 4.3.1, la condición de borde axial posee una fuerte influencia en la rigidez no lineal geométrica del desplazamiento transversal. Con el objetivo de identificar el rol del parámetro k_c , asociada a la CB no ideal, aquí se presenta un estudio paramétrico de los coeficientes emergentes de la Ec. (4.48) para el Caso C y para ambas Muestras en la Figura 5.14. Ambos gráficos son presentados usando escala logarítmica para un mejor entendimiento del rol de este parámetro, considerando un amplio rango de valores. Primero, se muestra en la Figura 5.14a la variación del coeficiente $k_c \alpha / 2$, que representa la no linealidad geométrica asociada a la

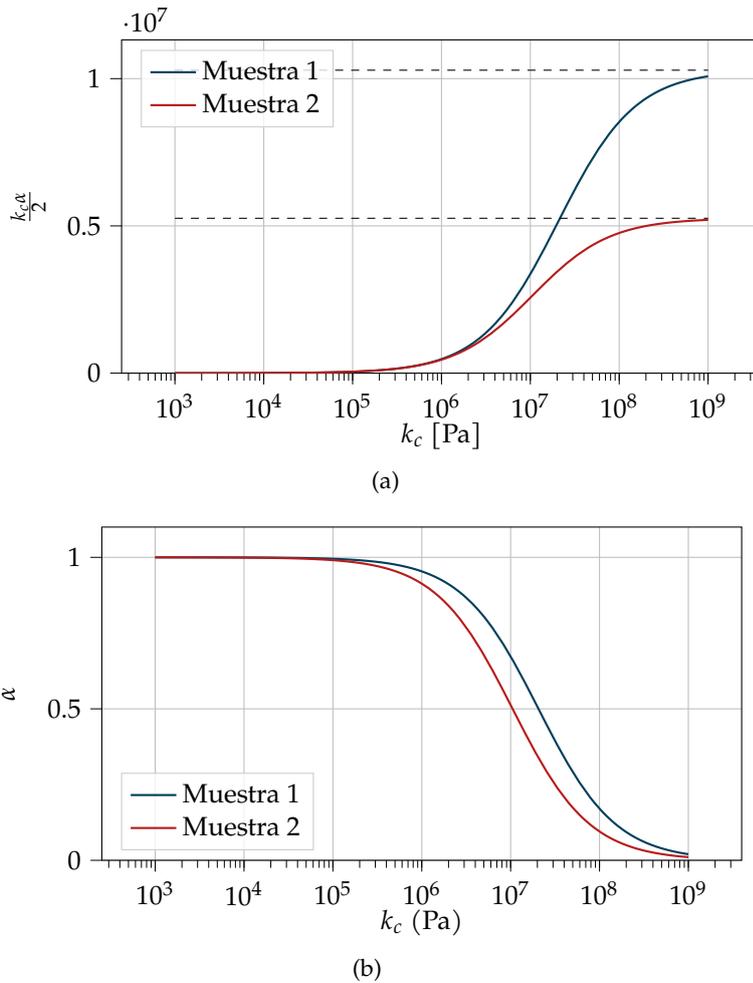
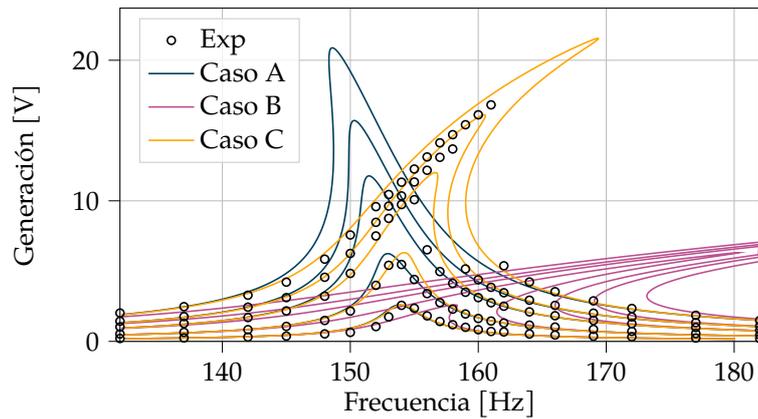
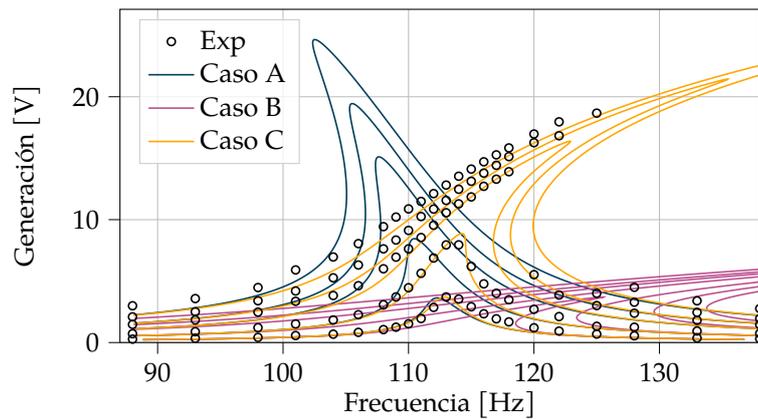


Figura 5.14: Rol de la constante k en (a) coeficiente de la no linealidad geométrica, líneas punteadas denotan los valores de $EA/2L^{eff}$ como caso extremo B; y (b) relación entre la carga axial efectiva P_0 aplicada a la viga comparada con la real P .

condición de borde, en función de los valores de k_c . Como caso extremo, se grafica en líneas punteadas horizontales el valor que emergen el *Caso B*, es decir, $EA/2L^{eff}$. Para la Muestra 1, este valor fue de $1,03 \times 10^7$ Pa mientras que, para la Muestra 2 fue $0,526 \times 10^7$ Pa. Como se puede observar, a medida que aumenta k_c los términos de rigidez emergentes del *Caso C* crecen asintóticamente hacia la rigidez asociada al *Caso B*, lo que representa una demostración gráfica del limite cuando $k_c \rightarrow \infty$. En la Figura 5.14b se presenta la variación de la relación de carga $P_0/P = \alpha$ en función de k_c . En este caso, P es la carga real aplicada a la estructura mientras que $P_0 = P\alpha$ es la carga axial efectiva que sufre la viga. Resulta claro que a medida que k_c aumenta, existe una tendencia decreciente para α y para el caso limite de $k_c \rightarrow \infty$, desaparece $\alpha \rightarrow 0$. Esto significa, que si la rigidez axial del extremo derecho tiende a infinito, no es posible aplicar ni un desplazamiento prescrito ni una carga axial. Comparando ambas muestras, es posible observar que los valores de k_c afectan en mayor medida a la Muestra 2, dado que los valores de α decrecen más rápidamente en la Figura 5.14b a medida que k_c es variado. Este fenómeno se debe al menor valor de rigidez axial EA de la Muestra 2, que la hace más sensible frente al valor de rigidez k_c .



(a)



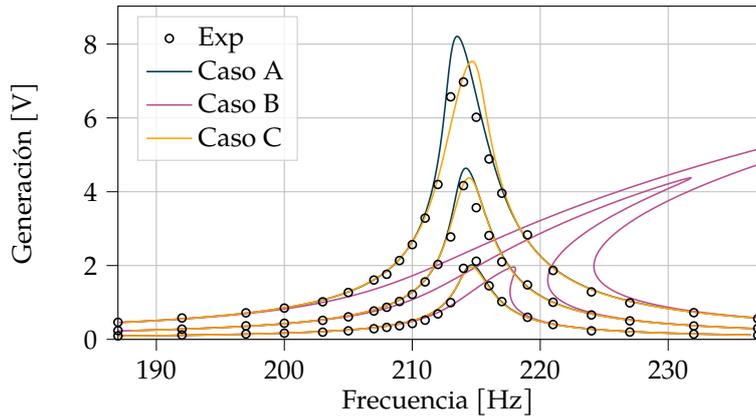
(b)

Figura 5.15: Comparativas de la FRFs predichas numéricamente frente a resultados experimentales correspondientes a la Muestra 2 para (a) $P = 0$ (b) $P = 36\text{N}$. Niveles de excitación: 0,2g, 0,5g, 1g, 1,4g y 2g. $k_c = 5,5 \times 10^5$ para el *Caso C*.

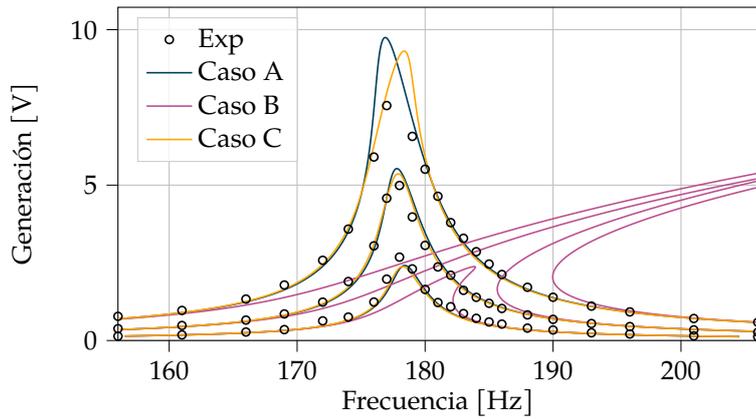
La Figura 5.15 compara las curvas de las Funciones de Respuesta en Frecuencia (FRFs) de la Muestra 2 obtenidas experimentalmente contra las curvas numéricas que surgen de los tres casos posibles de reducción del modelo matemático obtenidos por MEM (Casos A, B y C). Para esta muestra, la condición biempotrada sin carga axial ($P = 0$) y con pre-carga de $P = 36\text{N}$, son presentadas en las Figuras 5.15a y 5.15b, respectivamente, para niveles de excitación de entre 0,2 y 2g. Como fue previamente comentado y será estudiado en profundidad más adelante, la frecuencia natural del sistema tiende a disminuir con una carga axial. En este caso, puede observarse como esta misma varió desde 155Hz hasta 112Hz desde el caso sin carga (Fig. 5.15a para 0,2g) hasta la condición pre-cargada (Fig. 5.15b para 0,2g). Analizando la forma de las FRF, puede identificarse un efecto de ablandamiento en el *Caso A* el cual estuvo en total desacuerdo con los resultados experimentales que mostraron un claro endurecimiento. El comportamiento asociado al *Caso A* fue producto de la no linealidad constitutiva emergente por el material piezoeléctrico y es más notorio para valores mayores de P y de niveles de excitación de la base. En este caso, la rigidez no lineal geométrica de $\mathcal{O}(EA)$ fue igual a cero como fue mencionado en la Ec. (4.35). Continuando con el *Caso B*, fue observada una tendencia contraria a la del *Caso A*, con un fuerte efecto de endurecimiento a medida que aumenta la amplitud de excitación y la carga

axial. Este comportamiento, ocurre debido a la rigidez no lineal geométrica, la cual tomó su valor máximo para este caso debido al efecto de *alargamiento*. Pese a predecir un efecto de endurecimiento, los resultados del *Caso B* no concuerdan con los resultados experimentales debido a lo pronunciada que resultó la curva predicha numéricamente. Por ello, resulta claro que ni el *Caso A* ni el *Caso B* pudieron predecir correctamente los resultados experimentales. Esto indica que en el extremo donde se aplica la carga, la condición de la viga no se encuentra ni perfectamente restringida ni móvil. Como solución a esto, el *Caso C* tiene la capacidad de actuar como un caso intermedio entre los dos. Los resultados presentados han sido provistos para un valor identificado experimentalmente de la constante $k_c = 5,5 \times 10^5$ que representa al *Caso C*. Con este valor, es posible calcular el parámetro adimensional α resultando a ser de 0,9739. Este parámetro, modifica ligeramente el valor efectivo de la carga axial P , comparado con los *Casos A* y *B* donde esto no ocurre como puede verse en la Ec. (4.48). Sin embargo, la variación de la carga axial no produce un efecto significativo en la variación de la frecuencia natural en ninguno de los *Casos A*, *B* o *C* (véase Figura 5.15b). Para el valor elegido de k_c , el cual no es alterado en ninguna condición, el efecto de endurecimiento debido a la rigidez no lineal geométrica es perfectamente reproducido en todos los resultados experimentales. Esto indica que la propuesta condición de borde no ideal es una alternativa adecuada para predecir correctamente la respuesta dinámica desde la condición sin carga hasta la cargada del sistema real, por medio de una correcta elección del parámetro k_c .

Por otro lado, con el fin de verificar el valor identificado de k_c , la Figura 5.16 presenta la misma comparativa anterior pero para la Muestra 1. En este caso, se presentan las condiciones sin carga ($P = 0$) así como con pre-carga ($P = 65\text{N}$) para 0,2g, 0,5g y 1g. La diferencia en los niveles de excitación respecto a la Muestra 2 es debido a limitaciones experimentales, por presentarse algunas dificultades para alcanzar niveles mayores de excitación debidas al excitador electromecánico en el espectro de frecuencia más alto. En esta muestra, la frecuencia natural se vio modificada desde los 215Hz hasta los 180Hz debido a la presencia de la carga axial. Observando estos resultados, el *Caso A* presentó una vez mas un comportamiento de ablandamiento debido a la rigidez no lineal constitutiva, pero no tan notable como la otra muestra debido a la menor dimensión del parche piezoeléctrico. Continuando con la el *Caso B*, el modelo mostró un acentuado endurecimiento que no se correlacionó en lo absoluto con los resultados experimentales. Finalmente, el *Caso C*, con el valor de $k_c = 5,5 \times 10^5$ previamente identificado, muestra una buena concordancia con los resultados experimentales. En síntesis, puede decirse que ambos *Casos A* como *C* aproximan correctamente los resultados experimentales. La buena predicción del *Caso A*, ocurre debido a que la Muestra 1 es mas ancha y de mayor espesor (véase Cuadro 5.1), lo que significa mayor rigidez global, menores desplazamientos y por lo tanto menor contribución de los términos no lineales. Por esta razón, puede ser observado que si la muestra presenta una rigidez mucho mayor a la asumida por la restricción elástica k_c (en esta Muestra al menos 4 veces mayor), el *Caso A* puede arrojar resultados similares a los obtenidos por el *Caso C*.



(a)



(b)

Figura 5.16: Comparativas de la FRFs predichas numéricamente frente a resultados experimentales correspondientes a la Muestra 1 para (a) $P = 0$ (b) $P = 65\text{N}$. Niveles de excitación: 0,2g, 0,5g, 1g. $k_c = 5,5 \times 10^5$ para el Caso C.

5.2.3 Estudio del desplazamiento lateral de pandeo

En el análisis de la dinámica de pos-pandeo, la correcta determinación de la configuración pre-deformada w_s resulta un paso fundamental debido a la influencia directa en la determinación de los parámetros modales asociados, denotados con superíndice s en las Ecs. 4.110 y 4.111. Por ello, en esta subsección se presentan los resultados numéricos y experimentales referidos a la *inestabilidad estática* para las Muestras 1 y 2 en la configuración biempotrada tal como es mostrado en las Figs. 5.17a y 5.17b, respectivamente. Como es sabido el desplazamiento fuera de plano asociado al pandeo lateral posee una forma prototípica que responde a la *bifurcación tridente supercrítica*, teniendo a P como parámetro de bifurcación [255]. Las predicciones matemáticas descritas por el modelo analítico fueron dadas por la Ec. (4.93) y gráficamente presentadas con líneas rojas en las Figs. 5.17a y 5.17b. En estas Figuras, puede ser observado cómo para valores de P menores que los críticos ($P_{crit}^{(1)} = 154\text{N}$ y $P_{crit}^{(2)} = 64\text{N}$), la única solución es la nula debido a la inexistencia de un estado de pandeo. Sin embargo, tan pronto como P excede el valor crítico, tres posibles soluciones aparecen: dos estables (líneas continuas), asociadas con cada dirección posible del primer modo de pandeo, y una inestable (línea discontinua) representando la configuración inicialmente recta de la viga. Como se observa, la solución matemática de este problema responde a un sistema simétrico.

La «bifurcación tridente» es más conocida como «pitchfork bifurcation» por su nombre en inglés

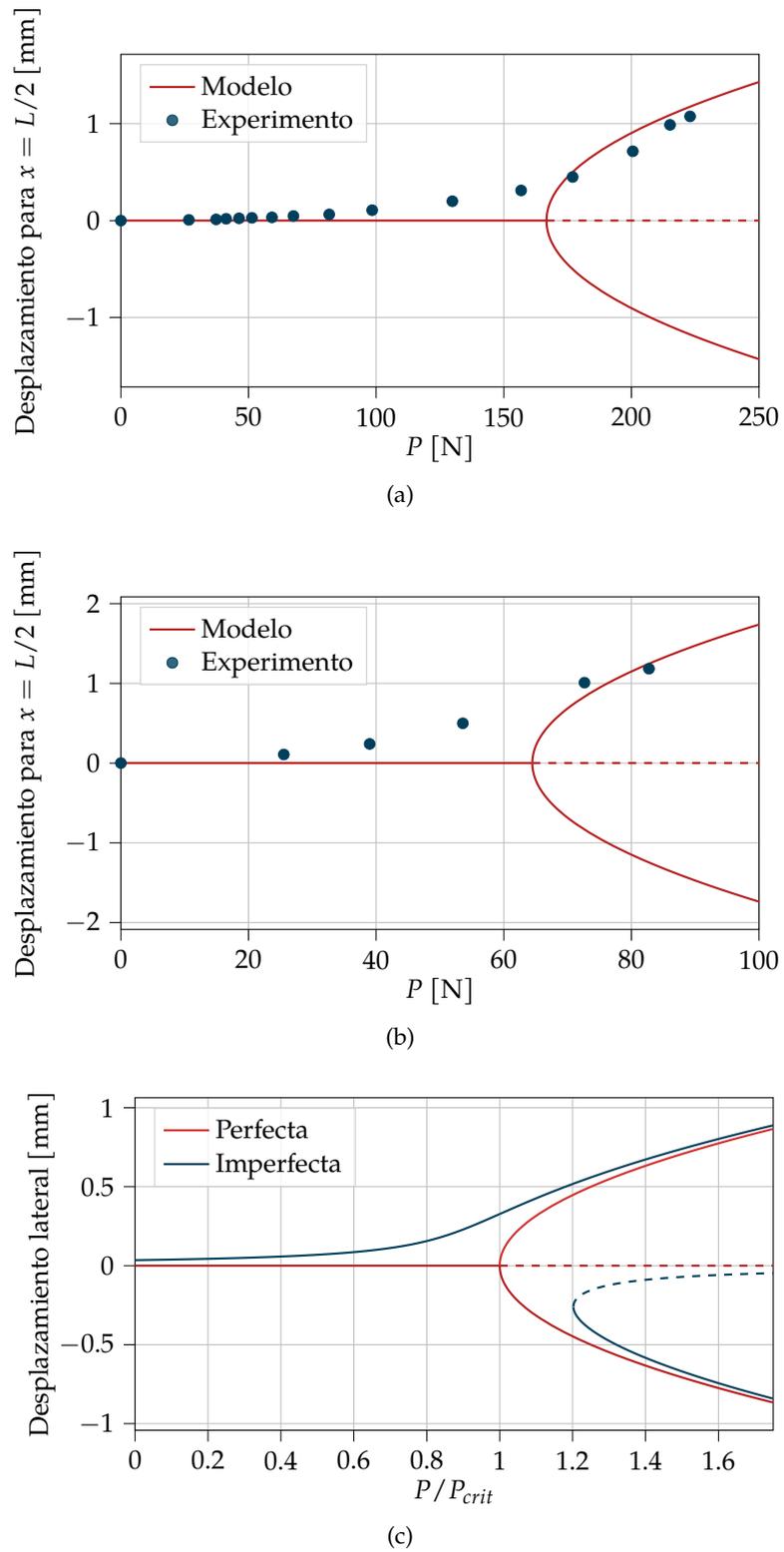


Figura 5.17: Diagramas de bifurcación tipo tridente del desplazamiento lateral evaluado a $x = L/2$ a medida que la carga axial es variada. Líneas continuas representan soluciones estables mientras que las discontinuas, inestables. Soluciones numéricas y experimentales para la (a) Muestra 1, (b) Muestra 2. (c) Representación adimensional de los diagramas de bifurcación perfectos e imperfectos para una viga pandeada para $a = P/P_{crit}$, $b = 1$ y $h = 0,05$ en la Ec. (5.3).

Sin embargo, los resultados experimentales presentan una respuesta diferente que es representada con puntos azules en las Figuras 5.17a y 5.17b. La mayor diferencia se observa cerca de la condición crítica de pandeo, donde los valores experimentales muestran pequeños valores de desplazamiento lateral incluso para $P < P_{crit}$. Este comportamiento, puede corresponder a la existencia de *imperfecciones*, las cuales se encuentran presentes, en mayor o menor medida, en todos los problemas reales de bifurcación. Las fuentes de imperfección posibles, pueden ser debidas a diversos factores como: *geométricos*, p. ej. la viga no posee una configuración inicialmente recta, *materiales* p. ej. el material no es homogéneo ni isótropo, y de la *fuerza aplicada*, p. ej. ésta no se encuentra perfectamente centrada ni paralela al eje de la viga [256]. En este punto, resulta importante remarcar que ninguno de estos efectos son incluidos en la presente formulación matemática.

En un caso general, cuando una imperfección se introduce matemáticamente en el modelo del pandeo lateral de una viga, la simetría de la bifurcación tridente se rompe, por lo que aparece un camino primario y otro secundario. Las diferencias entre los diagramas de bifurcación adimensionales para vigas genéricas perfectas e imperfectas se encuentran ilustrados en la Figura 5.17c. En este caso, los valores numéricos son encontrados a partir de las raíces de la fuerza restauradora $f(x)$ asociada al oscilador de Duffing dado por la Ec. (4.1), sumando un parámetro de imperfección constante h , comúnmente obtenido por asumir una viga con una deformación inicial previa al pandeo, de la siguiente manera [257, 258]

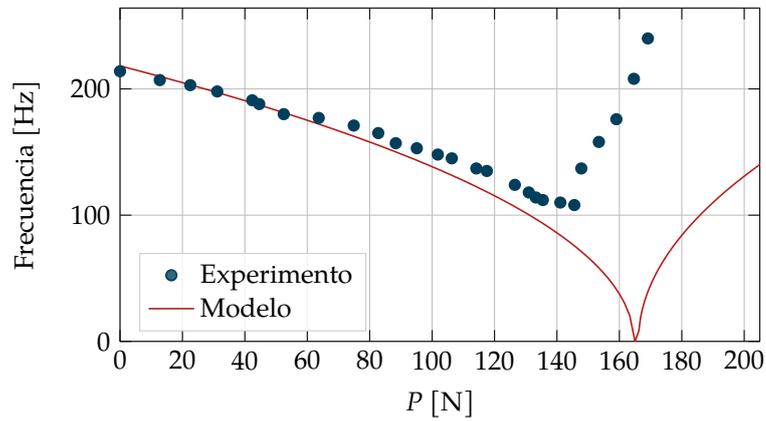
$$(1 - a)x^* + bx^{*3} + h = 0. \quad (5.3)$$

Los caminos de bifurcación se dividen en uno principal (superior) y uno secundario (inferior). La forma asociada al camino principal, resulta similar a los resultados experimentales identificados en las Figuras 5.17a y 5.17b, donde el desplazamiento lateral existe para valores de $P < P_{crit}$. Por esta razón, es posible confirmar la existencia de imperfecciones en la configuración experimental, así como también una buena correlación cualitativa entre el modelo matemático y los resultados experimentales, donde las mayores discrepancias se dan cerca de $P \approx P_{crit}$.

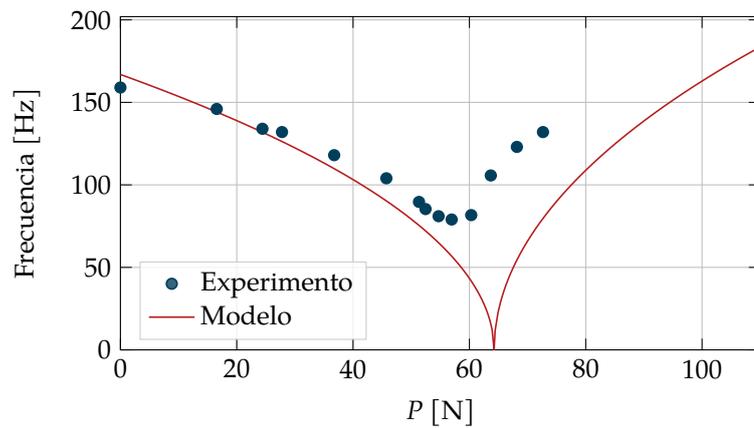
5.2.4 Estudio de la variación de rigidez transversal por pre-carga

Para el recolector sometido a una carga axial, probablemente una de las características más interesantes radica en la posibilidad de modificar la rigidez global del sistema y con ello su frecuencia natural mediante la modificación del valor de la carga axial. En esta subsección, se estudia la influencia de la carga axial en la *frecuencia natural* de las muestras como se observa en la Figura 5.18. En este caso, la frecuencia natural para los casos sin carga axial ($P = 0$) son de 207 y 154Hz para las Muestras 1 y 2, respectivamente (Figs. 5.18a y 5.18b). La diferencia es debida al nivel rigidez de la viga, dependiente del área seccional y longitud de la portante y del material piezoeléctrico, debido a que los parámetros constitutivos son los mismos. A medida que la carga axial aumenta, se pueden identificar dos zonas, una para los valores decrecientes de la frecuencia natural correspondiente al estado de pre-pandeo y otra para los valores crecientes correspondiente al estado de pos-pandeo. Comparando los resultados numéricos y experimentales, se observan ciertas

En este caso asumimos una imperfección del tipo $h = cte$ debido a ser la más sencilla de modelar.



(a)



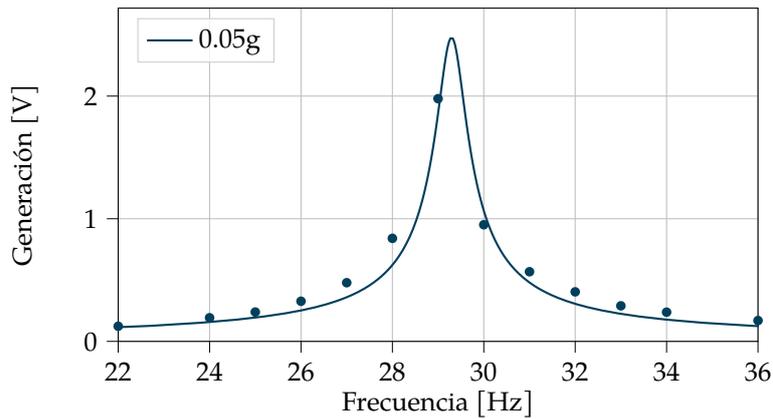
(b)

Figura 5.18: Modificación de la frecuencia natural transversal para distintos valores de la carga axial P . (a) Muestra 1, (b) Muestra 2.

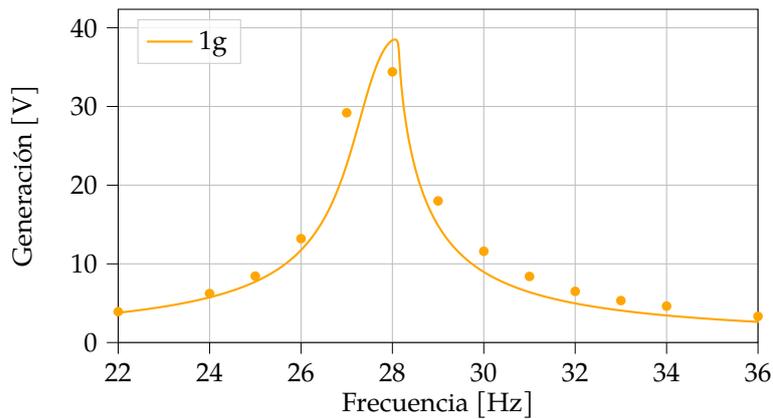
diferencias pese a tener una tendencia similar. Por ejemplo, cerca de la zona crítica de pandeo, donde la frecuencia natural se hace cero, en ninguna de las muestras es posible alcanzar esa situación mediante ensayos experimentales. Este fenómeno está asociado a la existencia de imperfecciones inherentes al sistema [257], como fue mencionado en el apartado anterior. En Figs. 5.18a y 5.18b se observa como se produce el cambio de tendencia para valores de $P < P_{crit}$ ($P_{crit}^{(1)} = 154\text{N}$ y $P_{crit}^{(2)} = 64\text{N}$, respectivamente), un efecto típico que producen las imperfecciones en la modificación de la frecuencia natural de la viga [259]. Este comportamiento resulta razonable y en concordancia con lo previamente observado en el estudio de la *inestabilidad estática* donde los desplazamientos fuera del plano lateral también ocurrieron para $P < P_{crit}$ (véase Fig. 5.17). Desde un punto de vista cuantitativo, puede observarse cómo las discrepancias son más significativas cuando $P \approx P_{crit}$.

5.2.5 Estudio de la respuesta en frecuencia del voltaje generado

En esta Subsección se estudia la respuesta en frecuencia en el estado estacionario del voltaje generado asociada a ambas configuraciones. Comenzando con la Muestra 1 en la configuración cantilever, los resultados experimentales son comparados con los predichos por la solución reducida del MEM dada por la Ec. (4.157). Primero, la Figura 5.19a presenta la generación del voltaje



(a)

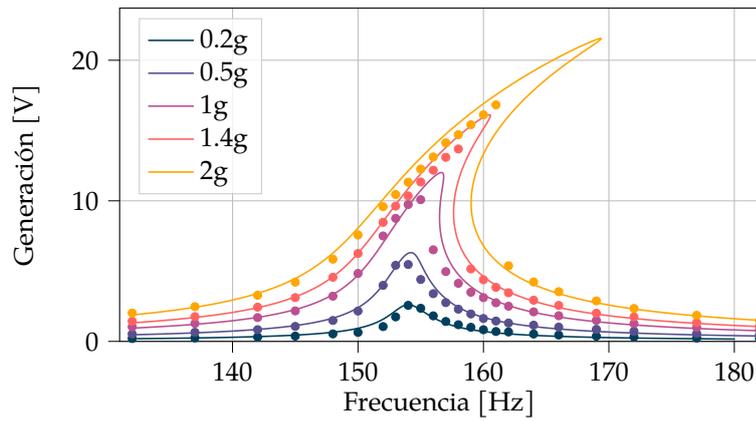


(b)

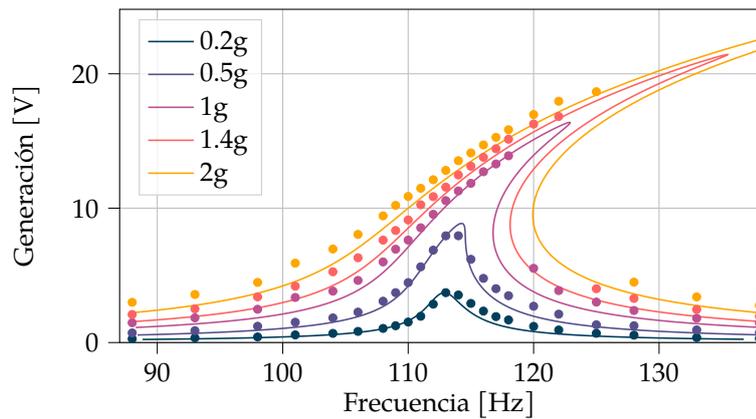
Figura 5.19: Generación de voltaje para la Muestra 1 en configuración cantilever. Los puntos representan resultados experimentales mientras que líneas continuas, las predicciones de la solución reducida del MEM: (a) 0,05g y (b) 1g

para bajos niveles de excitación (0,05g), donde se obtiene una respuesta lineal como era de esperar debido a los pequeños desplazamientos de la viga. Luego, incrementando la amplitud de la forzante a 1g, las predicciones del modelo y los resultados experimentales son comparadas en la Figura 5.19b. Se observa una buena concordancia entre los resultados numéricos y experimentales junto con una ligera modificación de la frecuencia natural del sistema atribuida a la contribución de la rigidez no lineal constitutiva proveniente del material piezoeléctrico, provocando un efecto de endurecimiento.

La respuesta en estado permanente de la Muestra 2 en la configuración biempotrada es estudiada en la Figura 5.20. En ella pueden observarse los resultados numéricos y experimentales asociados al estado de pre-pandeo. Primero se muestran los resultados sin ningún tipo de carga axial aplicada ($P_0 = 0$) en la Figura 5.20a. En este caso, un efecto de endurecimiento es identificado a medida que la excitación de base aumenta, donde los valores de frecuencia asociados a los valores picos de generación se desplazan hacia la derecha. Este comportamiento, aparece matemáticamente debido a la presencia de la rigidez no lineal geométrica de orden cubico K_G . En este caso, el modelo analítico es capaz de reproducir perfectamente este comportamiento para el valor de la restricción elástica obtenido anteriormente, $k_c = 5,5 \times 10^5$. Por otro lado, cuando la misma muestra es sometida a una carga axial de



(a)



(b)

Figura 5.20: Generación de voltaje para la Muestra 2 en configuración biempotrada. Régimen monoestable. Los puntos representan resultados experimentales mientras que líneas continuas predicciones de la solución reducida del MEM: (a) $P_0 = 0$ y (b) $P_1 = 36\text{N}$.

$P_1 = 36\text{N}$, los efectos asociados al decrecimiento global de la rigidez de la estructura por la carga axial, así como un mayor efecto de endurecimiento por el incremento de los desplazamientos (y por lo tanto un rol más significativo de la rigidez no lineal geométrica K_G) son predichos por el modelo y confirmados experimentalmente en la Figura 5.20b. Vale la pena señalar que la rigidez no lineal geométrica no es la única fuente de no linealidad en el presente modelo. Existen otras fuentes (véase Ecs. 4.110 y 4.111) como por ejemplo: la inercia no lineal χ , sin contribución significativa en la respuesta dinámica; el amortiguamiento no lineal μ_3 con un rol similar al amortiguamiento lineal pero con mayor contribución para amplitudes de excitación más elevadas [41, 230, 244], la rigidez no lineal constitutiva, asociada al efecto de ablandamiento en la respuesta permanente de la generación del voltaje [43]; y los acoplamientos no lineales geométricos (θ_G y ψ_G) y constitutivos (θ_C y ψ_C), que afectan a la respuesta pero en una menor medida si se las compara con los acoplamientos lineales (θ y ψ). Por otro lado, los estados de carga axial seleccionados en esta sección corresponden a los definidos en la Figura 5.11, donde P_0 es el caso sin carga axial, mientras que P_1 es un valor de carga axial menor a la carga crítica P_{crit} (régimen de pre-pandeo).

Respecto al voltaje generado en el estado de pre-pandeo, el caso P_1 presenta un mejor rendimiento debido a los valores picos más altos, mayor generación

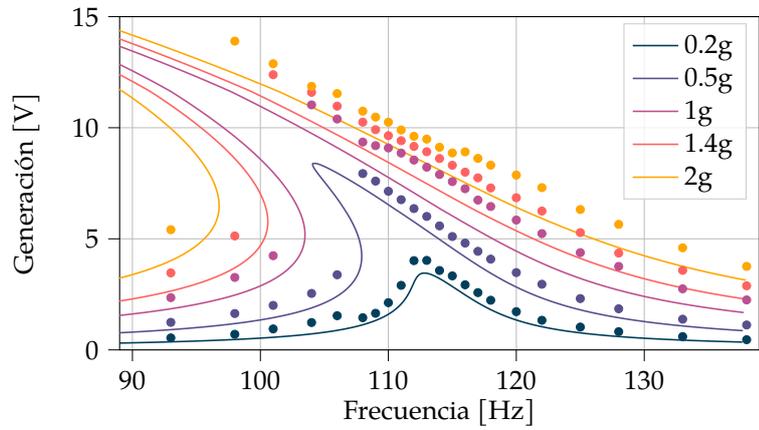
En la muestra 2, el efecto de ablandamiento proveniente por la no linealidad material K_C es superado por el efecto de endurecimiento producto por la no linealidad geométrica K_G durante el estado de pre-pandeo.

fuera de resonancia y la capacidad de recolectar energía para valores de frecuencia más bajos. Estas observaciones estuvieron en total acuerdo con lo reportado por otros autores para la misma configuración [166, 207, 208]. De estas observaciones surge de manera natural el interrogante de cómo afectara a la generación, el estado de pos-pandeo o régimen biestable para los casos P_0 y P_1 .

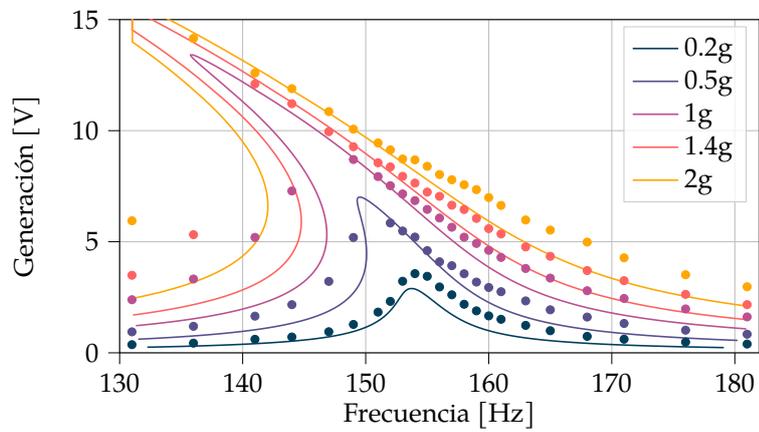
Los resultados numéricos y experimentales de la misma muestra en el estado de pos-pandeo ($P > P_{crit}$) se encuentran presentados en la Figura 5.21. Primero, la Figura 5.21a presenta la respuesta en estado estacionario del voltaje obtenido para $P_2 = 81\text{N}$. Para dicho nivel de carga axial, el estado recíproco al asociado a $P_1 = 36\text{N}$ (véase Figura 5.11) fue alcanzado teniendo aproximadamente los mismos valores de frecuencia natural de 115Hz, pero en los regímenes mono- y biestables, respectivamente. En la Figura 5.21a, se puede observar un comportamiento de ablandamiento predicho de los resultados analíticos y confirmado por los experimentales. Este comportamiento ocurre debido a la presencia de la rigidez no lineal geométrica de orden cuadrático K_G^s , emergente de la configuración pre-deformada w_s . El segundo estado de pos-pandeo estudiado corresponde a $P_3 = 95\text{N}$ y se encuentra presentado en la Figura 5.21b, cuyo caso fue P_0 , teniendo ambos frecuencias naturales de aproximadamente 154Hz. En este punto, se puede realizar el mismo análisis que el anterior sobre el efecto de endurecimiento en estado de pre-pandeo y de ablandamiento en estado de pos-pandeo. Por último, el caso de mayor carga $P_4 = 107\text{N}$, corresponde al más rígido y es presentado en la Figura 5.21c. A este valor de la carga axial, el efecto de ablandamiento es, el más acentuado entre todos los estudiados. A diferencia del caso de pre-pandeo, no existe reportes de otros autores para la misma configuración.

Observando las Figuras 5.20 y 5.21 en conjunto, se pueden destacar algunos resultados contrastando los regímenes mono- y biestables. Al igual que con el efecto de endurecimiento en el estado de pre-pandeo, el efecto de ablandamiento en el pos-pandeo también tiende a ser más notorio para valores de carga axial P mayores, incluso considerando un crecimiento en el nivel de rigidez global del sistema. Esto último se debe al incremento del desplazamiento fuera del plano w_s junto con la carga axial P , el cual afecta fuertemente el parámetro modal K_G^s (véase Ec. 4.113) acentuando la no linealidad cuadrática. Es importante remarcar que si bien ambos efectos de endurecimiento y ablandamiento son magnificados para valores más altos de la carga axial, estos ocurren por causas bien diferenciadas.

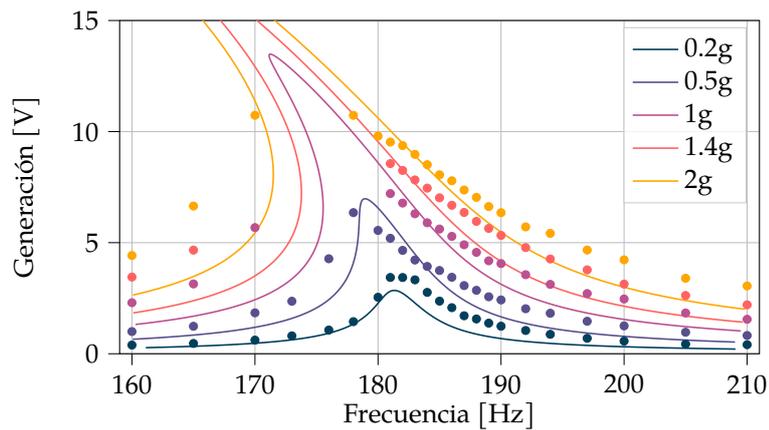
Por otro lado, en lo referido a los niveles de correlación entre los resultados numéricos y experimentales, los asociados con el estado pre-pandeo tuvieron una mayor correspondencia con los experimentales comparados con los encontrados en el estado pos-pandeo. Esto se debe a las dificultades asociadas con las incertidumbres de la condición pre-deformada w_s debido a las imperfecciones presentes en el sistema real, tal como fue mencionado en las validaciones experimentales del *desplazamiento lateral de pandeo* (subsección 5.2.3) y de la *variación de la rigidez transversal* (subsección 5.2.4). La existencia de estas imperfecciones, resulta en valores de voltaje teóricos ligeramente diferentes a los experimentales en la respuesta de voltaje de estado estable. Con el fin de dar un tratamiento cuantitativo, se obtuvieron la *porcentaje de acuerdo promediado* (PAP) y la *raíz del error cuadrático medio* (RECM) para los



(a)



(b)



(c)

Figura 5.21: Generación de voltaje para la Muestra 2 en configuración biempotrada. Régimen biestable. Los puntos representan resultados experimentales mientras que líneas continuas predicciones de la solución reducida del MEM: (a) $P_2 = 81\text{N}$, (b) $P_3 = 95\text{N}$ y (c) $P_4 = 107\text{N}$.

valores más bajo y alto de P ensayados en pre- y pos-pandeo respectivamente, definidas como

$$\begin{aligned} \text{PAP} &= \sum \frac{|(V_t - V_e)/V_e|}{n}, \\ \text{RECM} &= \sqrt{\frac{\sum (V_t - V_e)^2}{n}}, \end{aligned} \quad (5.4)$$

donde V_t y V_e corresponden a los valores de voltaje teóricos y experimentales respectivamente, mientras que n el número de mediciones. Comenzando con el caso de $P = 0$, presentando en la Figura 5.20a, y considerando todos los niveles de excitación ensayados, el PAP fue de 90,5 % mientras que la RECM fue de 0,71V. Estos resultados son más que aceptables. Por otro lado, para el valor más grande de carga axial $P = 107\text{N}$, presentando en la Figura 5.21c, los valores fueron de $\text{PAP} = 76,2\%$ y $\text{RECM} = 0,92\text{V}$, lo cual evidencia cómo las incertidumbres asociadas al estado de pre-pandeo o régimen biestable afectan a las predicciones numéricas. Sin embargo, resulta importante notar que las predicciones menos precisas de los resultados experimentales se encuentran localizadas para frecuencias menores a las asociadas a los picos de voltaje. Si estos puntos no son tomados en consideración, las estimaciones de PAP y la RECM son mejoradas a 82,2 % y 0,75V, respectivamente (para un rango de entre 178Hz a 210Hz en la Figura 5.21c), lo cual sugiere que el modelo matemático es más preciso para valores más altos de frecuencia.

5.3 IMPORTANCIA DE LA CONSIDERACIÓN DE TÉRMINOS NO LINEALES

En esta subsección, se analiza la importancia de los parámetros no lineales del presente modelo para una correcta predicción de los resultados experimentales. En este proceso se busca identificar el rol específico de cada uno de los parámetros, tanto en los estados de pre- como de pos-pandeo del recolector.

La Figura 5.22a presenta la influencia de los parámetros no lineales junto con los resultados experimentales para la Muestra 1 en su estado de pre-pandeo. En este caso, la Muestra 1 fue sometida a una carga axial $P = 104\text{N}$ y una aceleración $G = 1,4g$, la cual representa la condición de mayor amplitud de excitación testada experimentalmente durante el estado de pre-pandeo. Comenzando con la respuesta lineal, puede observarse que al desprestigiar los parámetros no lineales se sobrestima en gran medida la generación de energía, incluso para valores de frecuencia de excitación alejadas de la condición resonante. Por ejemplo, para una frecuencia de excitación de 142Hz (fuera de resonancia), los valores de voltaje de la solución lineal son de 12V, mientras que los resultados experimentales se situaron en 8V, lo cual representa una diferencia del 50 %. Siguiendo con el análisis, la inclusión del amortiguamiento no lineal junto con el acoplamiento no lineal constitutivo ($\mu_2 + \theta_C + \psi_C$), dan lugar a una disminución del pico de voltaje hasta un comportamiento similar al experimental. Dado que el efecto de estos parámetros en la FRF es similar, la relevancia de alguno de ellos puede identificarse si observamos la curva donde el amortiguamiento es considerado junto con la rigidez no lineal geométrica ($\mu_2 + K_G$). En este caso, comparando estas dos últimas situaciones, la diferencia de los picos de generación es debida solamente al acoplamiento no lineal constitutivo ψ_C , recordando que K_G solo produce un corrimiento de frecuencia. De esta manera, se confirma la gran influencia del amortiguamiento no lineal

La solución lineal es obtenida mediante la solución de MEM haciendo nulos los parámetros no lineales.

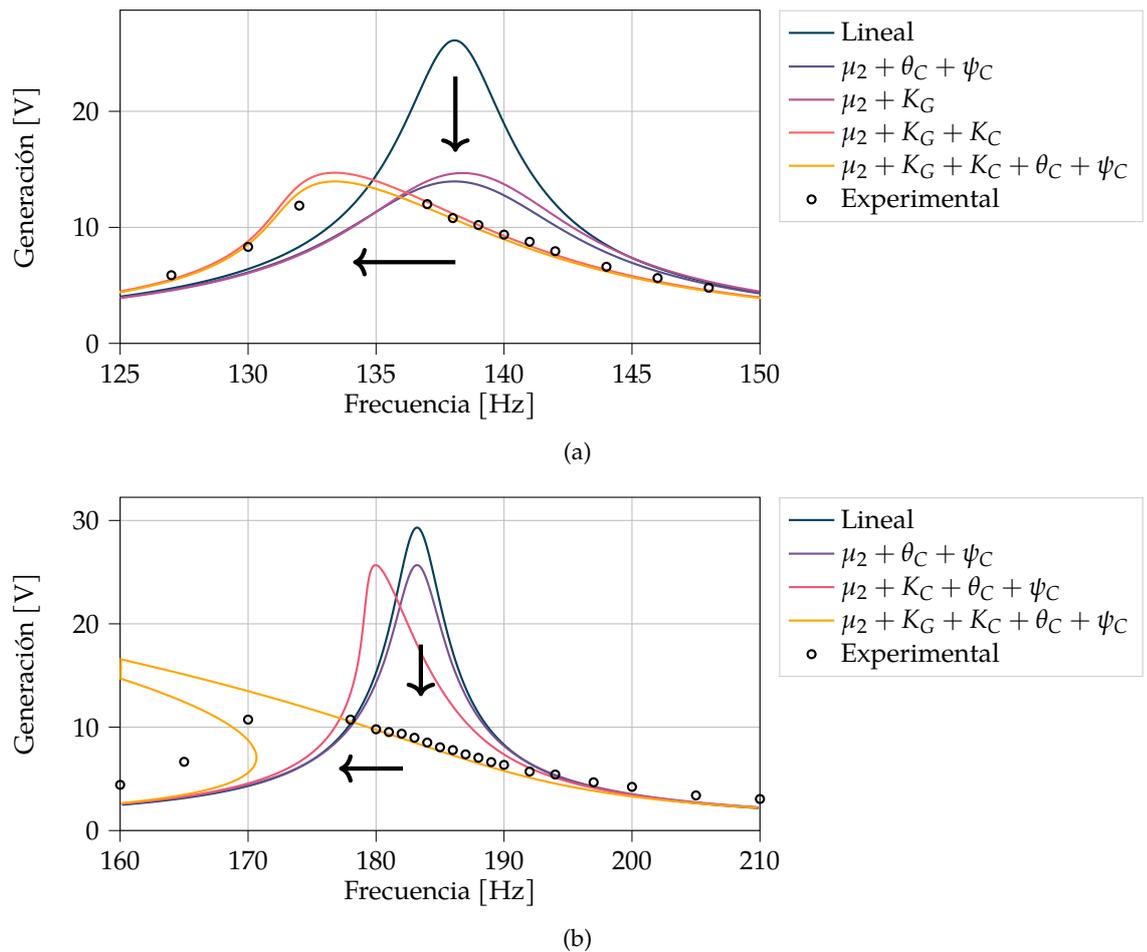


Figura 5.22: Influencia de los términos no lineales en el estado permanente de la respuesta dinámica de la (a) Muestra 1, configuración biempotrada en el estado de pre-pandeo ($P = 104\text{N}$, $G = 1,4\text{g}$). (b) Muestra 2 configuración biempotrada en el estado de pos-pandeo ($P = 107\text{N}$, $G = 2\text{g}$).

μ_2 . Adicionalmente, un ligero efecto de endurecimiento es observado en esta curva debido a la inclusión de K_G . Sin embargo, este efecto es fuertemente contrarrestado cuando la rigidez no lineal constitutiva es agregada ($\mu_2 + K_G + K_C$), donde el ablandamiento posee un mayor peso en la respuesta. Por último, todos los términos fueron incluidos en la última curva ($\mu_2 + K_G + K_C + \theta_C + \psi_C$), que en comparación con los resultados experimentales, alcanzó la mejor predicción en comparación con los escenarios anteriormente planteados.

A esta altura, resulta importante aclarar que tanto los acoplamientos no lineales geométricos (θ_G y ψ_G) como la inercia no lineal (χ) fueron incluidas en todas las curvas de la Figura 5.22. La razón por la que no fue hecha ningún tipo de mención sobre su influencia es debido a que su contribución fue prácticamente inapreciable.

De igual forma que en el caso anterior, se analizó el rol de los términos no lineales en el estado de pos-pandeo para la Muestra 2 tal como se observa en la Figura 5.22b, donde se eligieron $P = 107\text{N}$ y $G = 2\text{g}$ porque representan la condición de mayor excitación para esta Muestra en este estado. Nuevamente, el amortiguamiento modal con el acoplamiento no lineal constitutivo ($\mu_2 + \theta_C + \psi_C$) fueron añadidos en una primera instancia demostrando el mismo comportamiento que en el estado de pre-pandeo. Seguido a esto, la influencia de la rigidez no lineal constitutiva fue añadida al estado anterior

En pos-pandeo, los parámetros no lineales son siempre añadidos de a pares, donde cada uno es agregado junto con su homónimo que incluye la configuración pre-deformada w_s (por ejemplo K_G y K_G^s).

$(\mu_2 + K_C + \theta_C + \psi_C)$, confirmando una vez más el efecto de ablandamiento propio de estas relaciones constitutivas. Sin embargo, a diferencia del estado de pre-pandeo de la Muestra 1, donde el efecto de ablandamiento quedaba correctamente predicho al incluir K_C , la inclinación a la izquierda de los resultados experimentales resulta ahora bastante más pronunciada. Esto es debido a la necesidad de incluir la rigidez no lineal geométrica K_G^s , la cual posee un efecto de ablandamiento por tratarse de una no linealidad de orden cuadrático. Una vez más, puede notarse que la solución que incluye todos los términos no lineales es la que mejor predijo los resultados experimentales, confirmando la conveniencia del modelo aquí presentado.

MODELO INTERACCIÓN VEHÍCULO-PAVIMENTO

A nivel mundial, la cantidad de vehículos en circulación es una cifra que se encuentra en aumento año tras año. En el año 1970, 30 millones de vehículos fueron producidos y 246 millones se encontraban registrados a nivel mundial, mientras que para el 2005, 65 millones fueron producidos y 800 millones registrados [260]. Solamente en nuestro territorio nacional, la cantidad de vehículos registrados ha aumentado de 7 millones en el año 2005 a 13 para el 2015 [261]. La Organización Mundial de la Salud (OMS) determinó que la gran cantidad de vehículos en circulación causa que aproximadamente 50 millones de persona por año en el mundo sufran traumatismos producto de accidentes de tránsito, donde la velocidad inapropiada es el factor más contribuyente a la ocurrencia de estos infortunios. Por consiguiente, el control de la velocidad mediante la implementación de distintos tipos de obstáculos (loma de burro, tachas, badén, etc.) que cumplan la función de disminuir la energía cinética de los vehículos, resulta una herramienta necesaria para mejorar la seguridad vial.

Los reductores de velocidad son elementos que sobresalen de la superficie del pavimento colocados intencionalmente en carreteras con el fin de evitar accidentes. Su función principal es la de obligar a los conductores a disminuir su velocidad de circulación, generando un malestar a la conducción cuando son atravesados a una rapidez por encima de la de diseño o recomendada. Durante el proceso de frenado gran cantidad de energía cinética es disipada, siendo la mayor parte en forma de calor en el sistema de freno. Sin embargo, parte de esa energía es disipada en las deformaciones y vibraciones de los sistemas de amortiguación y de la misma carretera. Por lo tanto, resulta lógico creer que una gran cantidad de energía se disipa en los reductores de velocidad, lo que los hacen una fuente de energía a explorar para la implementación y desarrollo de dispositivos basados en la REP.

El aumento de la cantidad de vehículos circulando a nivel mundial, ha también motivado el desarrollo de la rama de la ingeniería denominada *dinámica vehicular*, la cual estudia el comportamiento dinámico de los vehículos de transporte incluyendo múltiples aspectos como seguridad, confiabilidad, confortabilidad, optimización de combustible y su interacción con el ambiente: (i.e. pavimento y aire) [262, 263]. Actualmente, existen algunas alternativas comerciales y de código abierto que pueden satisfactoriamente modelar la dinámica vehicular y cuantificar las fuerzas introducida por el pavimento, como por ejemplo: *CarSim* [264], *VeDyna* [265], *AutoSIM* [266], *Modelon* [267] o *MSC ADAMS*. Sin embargo, el uso de estas herramientas presentan dos grandes desventajas: (i) la mayoría de ellas requieren licencias de uso las cuales resultan costosas, y además (ii) están orientadas específicamente a la dinámica vehicular, donde el impacto del vehículo a la carretera y la respuesta de ésta queda en un segundo plano.

En este contexto, en el presente Capítulo se desarrolla una formulación matemática capaz de predecir la dinámica acoplada de un vehículo atravesando una superficie irregular u obstáculo el cual posee un grado de libertad vertical. Para ello, distintos modelos basados en la cantidad de grados de libertad son

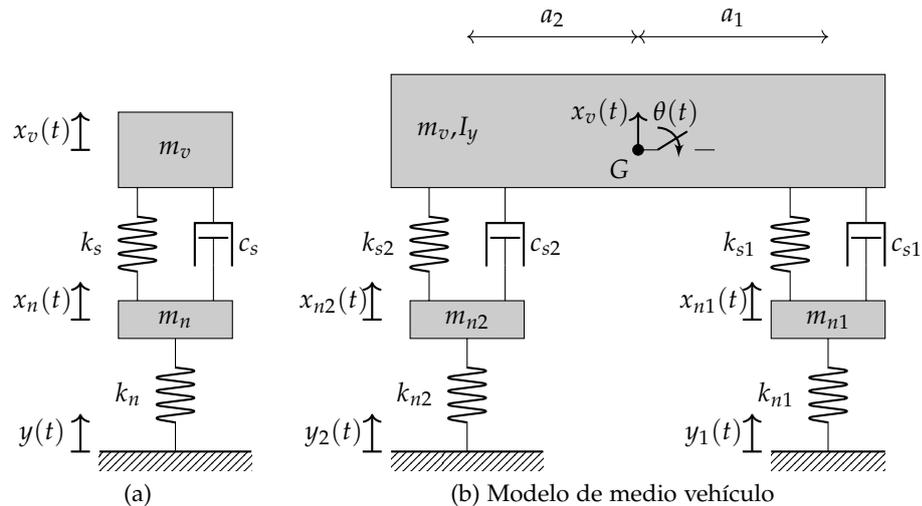


Figura 6.1: Esquema representativo de los modelos de (a) cuarto y (b) medio vehículo de 2 y 4 GDL respectivamente.

propuestos. Una vez identificada su influencia, diversos estudios paramétricos son llevados a cabo con el fin de identificar el rol de cada parámetro en la respuesta dinámica con un especial énfasis en la fuerza vertical máxima experimentada. Por otro lado, respecto al perfil del reductor de velocidad, dos geometrías diferentes son tenidas en cuenta, una «cóncava» y una «trapezoidal» asociadas a los reductores de velocidad tipo «loma de burro» y «tacha vial», de mayor implementación en escenarios reales. Por último, las ecuaciones dinámicas son obtenidas basadas en las siguientes hipótesis simplificativas:

1. El vehículo se mueve en línea recta y en el caso más general acorde a un Movimiento Rectilíneo Uniformemente Variado (MRUV).
2. Tanto la suspensión como los neumáticos presentan un comportamiento lineal.
3. La disipación de energía del vehículo se produce solamente en la suspensión, siendo despreciable la del neumático, la cual posee un comportamiento puramente elástico.
4. Los efectos aerodinámicos no son considerados.

6.1 FORMULACIÓN MATEMÁTICA

6.1.1 Modelos de vehículos

En el estudio de la dinámica vehicular, diversos modelos han sido desarrollados para estudiar la respuesta del vehículo frente a las irregularidades presentes en el camino [260, 262, 268, 269]. Uno de los modelos más sencillos es el *modelo de cuarto de vehículo* esquemáticamente representado en la Figura 6.1a. Este modelo, está conformado por dos masas vinculadas que admiten solo el desplazamiento vertical, contabilizando un total de 2 GDL (grados de libertad). En este caso, las masas son representadas como m_v (masa suspendida), dada por un cuarto del total del cuerpo del vehículo y m_n (masa no suspendida) dada por la masa de una sola rueda. Por otro lado, c_s es el coeficiente de

El modelo de cuarto de vehículo (Fig. 6.1a) es más conocido por su nombre en inglés como «quarter-car model»

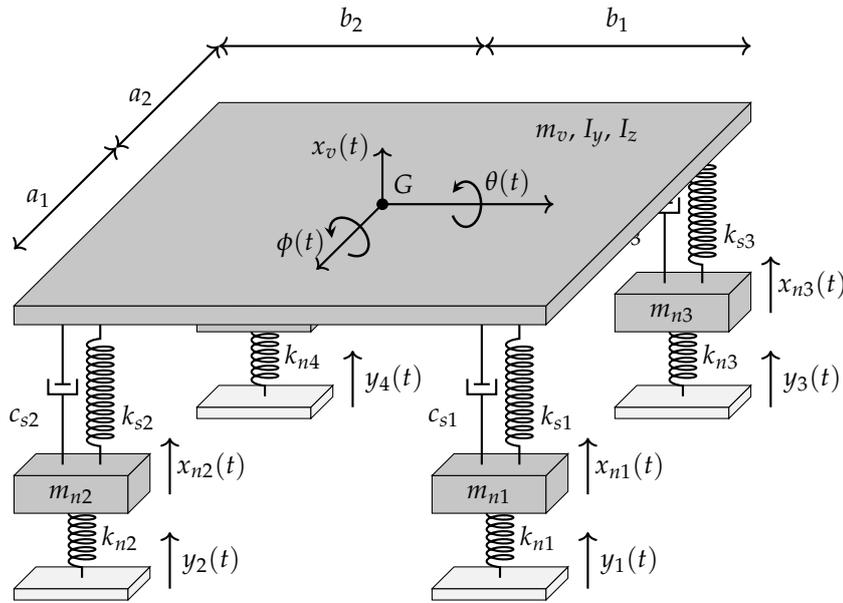


Figura 6.2: Esquema del modelo completo de vehículo de 7 GDL.

amortiguamiento de la suspensión, mientras que k_s y k_n son las constantes elásticas asociadas a la suspensión y al neumático, respectivamente. En este punto, resulta importante notar la hipótesis asumida donde la disipación de energía en el neumático se asume despreciable frente a la que se produce en la suspensión. Por último, la función $y(t)$ representa la excitación del sistema dada por las imperfecciones y/o obstáculos presentes en el pavimento.

Otro modelo comúnmente utilizado, y con un cierto grado de sofisticación, es el modelo de medio vehículo, representado en la Figura 6.1b. En este caso, tres masas son consideradas: una suspendida representando la mitad del cuerpo del vehículo y otras dos masas representando las ruedas delanteras y traseras, respectivamente. Como resultado, un total de cuatro grados de libertad (representados por x_v , θ , x_{n1} y x_{n2}) son obtenidos dados por el desplazamiento vertical de las tres masas, sumadas al giro de la masa suspendida θ , el cual es comúnmente llamado *pitch* o *cabeceo*. Una de las principales ventajas de este modelo, además de la evidente posibilidad de la incorporación del *pitch*, es la capacidad de considerar distintos parámetros para las suspensiones como para los neumáticos en los trenes delanteros y traseros, así como la posibilidad de capturar el efecto de la posición del centro de gravedad del vehículo en el plano transversal del mismo. Como desventaja evidente es la mayor cantidad de información requerida para modelar el sistema, puesto que es necesario identificar la posición del centro de masa en el plano lateral (determinado por las cotas a_1 y a_2), así como el momento de inercia I_z , alrededor de un eje pasante por dicho punto, y normal al plano lateral.

Por último, uno de los modelos más completos utilizados para estudiar la vibración del vehículo, es el denominado modelo de vehículo completo (o *full car model* por su nombre en inglés), presentado esquemáticamente en la Figura 6.2. En esta formulación, un total de cinco masas son asumidas: una por cada rueda sumada al cuerpo de vehículo. Como resultado, se alcanza un total de siete grados de libertad (x_v , θ , x_{n1} , x_{n2} , x_{n3} y x_{n4}) representado por: los desplazamientos verticales de cada rueda, el del cuerpo del vehículo, y las dos rotaciones de este: el *cabeceo* anteriormente comentado, y el nuevo grado de libertad respecto al modelo anterior denominado ángulo de *rolido* o

El modelo de medio vehículo (Fig. 6.1b) es también encontrado como «half-car» o «bicycle model»

roll. La inclusión de este nuevo grado de libertad implica una mayor cantidad de datos de entrada al modelo numérico, donde el centro de gravedad debe ser posicionado también en el plano frontal (dada por las cotas b_1 y b_2), y debe conocerse el momento de inercia en dicho plano respecto al centro de gravedad G .

Deducción de las ecuaciones diferenciales del movimiento

Una vez introducidos los distintos modelos, se presentan las ecuaciones de movimiento considerando un marco de referencia absoluto. Para ello, se utilizan las ecuaciones de Lagrange considerando fuerzas generalizadas Q_k

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = Q_k, \quad (6.1)$$

donde $L = T - U$ representa al funcional lagrangiano, q_k la k -ésima coordenada generalizada del sistema y Q_k la k -ésima fuerza generalizada. Estas expresiones pueden ser llevadas a una forma más simple y practica si consideramos vibraciones lineales a la siguiente forma [269]

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_k} + \frac{\partial V}{\partial q_k} = f_r, \quad (6.2)$$

donde f_r es ahora fuerza externa aplicada al sistema, T y U representan la energía cinética y potencial respectivamente, mientras que D la función disipación o de Rayleigh. Estas cantidades escalares, pueden ser obtenidas a partir de las siguientes expresiones

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \dot{\mathbf{x}}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{x}} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \dot{x}_i m_{ij} \dot{x}_j, \\ V &= \frac{1}{2} \mathbf{x}^T \mathbf{K} \mathbf{x} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i k_{ij} x_j, \\ D &= \frac{1}{2} \dot{\mathbf{x}}^T \mathbf{C} \dot{\mathbf{x}} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \dot{x}_i c_{ij} \dot{x}_j. \end{aligned} \quad (6.3)$$

Donde \mathbf{M} , \mathbf{K} , y \mathbf{C} son las matrices de masa, rigidez y amortiguamiento y \mathbf{x} el vector desplazamiento. Comenzando con el modelo más sencillo, el de cuarto vehículo representado en la Figura 6.1a, las expresiones anteriores pueden ser obtenidas como:

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} m_v \dot{x}_v^2 + \frac{1}{2} m_n \dot{x}_n^2, \\ U &= \frac{1}{2} k_s (x_v - x_n)^2 + \frac{1}{2} k_n (x_n - y)^2, \\ D &= \frac{1}{2} c_s (\dot{x}_v - \dot{x}_n)^2. \end{aligned} \quad (6.4)$$

Reemplazando las expresiones dadas por la Ec. (6.4) en la Ec. (6.2), las ecuaciones diferenciales del movimiento para este modelo pueden ser obtenidas

$$\begin{aligned} m_v \ddot{x}_v + c_s (\dot{x}_v - \dot{x}_n) + k_s (x_v - x_n) &= 0, \\ m_n \ddot{x}_n - c_s (\dot{x}_v - \dot{x}_n) - k_s (x_v - x_n) + k_n (x_n - y) &= 0, \end{aligned} \quad (6.5)$$

las cuales pueden ser representadas de manera más sencilla si empleamos la notación matricial como

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}\mathbf{x} = \mathbf{f}, \quad (6.6)$$

donde \mathbf{f} es el vector forzamiento del sistema. En este caso, las matrices del sistema pueden ser expresadas de la siguiente forma

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_v & 0 \\ 0 & m_n \end{bmatrix}; \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_s & -c_s \\ -c_s & c_s \end{bmatrix}; \quad \mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_s & -k_s \\ -k_s & k_s + k_n \end{bmatrix} \quad (6.7)$$

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_v(t) \\ x_n(t) \end{bmatrix}; \quad \mathbf{f} = \begin{bmatrix} 0 \\ k_n y(t) \end{bmatrix}$$

El mismo procedimiento anterior puede aplicarse para el modelo de medio vehículo de la Figura 6.1b. En este caso, las funciones asociadas a las energías cinética y elástica, así como la función de disipación resultan

$$T = \frac{1}{2}m_v\dot{x}_v^2 + \frac{1}{2}m_{n1}\dot{x}_{n1}^2 + \frac{1}{2}m_{n2}\dot{x}_{n2}^2 + \frac{1}{2}I_y\dot{\theta}^2,$$

$$U = \frac{1}{2}k_{s1}(x_v - x_{n1} - a_1\theta)^2 + \frac{1}{2}k_{s2}(x_v - x_{n2} - a_2\theta)^2 + \frac{1}{2}k_{n1}(x_{n1} - y_1)^2 + \frac{1}{2}k_{n2}(x_{n2} - y_2)^2, \quad (6.8)$$

$$D = \frac{1}{2}c_{s1}(\dot{x}_v - \dot{x}_{n1} - a_1\dot{\theta})^2 + \frac{1}{2}c_{s2}(\dot{x}_v - \dot{x}_{n2} - a_2\dot{\theta})^2.$$

Reemplazando las expresiones dadas por la Ec. (6.8) en las Ec. (6.2) se obtienen un total de cuatro ecuaciones diferenciales, una por cada grado de libertad. Dicho sistema puede ser expresado de manera matricial de la misma manera que el dado por la Ec. (6.6), donde ahora las matrices de masa, amortiguamiento y rigidez, así como el vector desplazamiento y forzamiento toman la forma

$$\mathbf{M} = \text{diag}(m_v, I_z, m_{n1}, m_{n2}) \quad (6.9)$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_{s1} + c_{s2} & a_2c_{s2} - a_1c_{s1} & -c_{s1} & -c_{s2} \\ & a_1^2c_{s1} + a_2^2c_{s2} & a_1c_{s1} & -a_2c_{s2} \\ & & c_{s1} & 0 \\ \text{sym} & & & c_{s2} \end{bmatrix} \quad (6.10)$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_{s1} + k_{s2} & a_2k_{s2} - a_1k_{s1} & -k_{s1} & -k_{s2} \\ & a_1^2k_{s1} + a_2^2k_{s2} & a_1k_{s1} & -a_2k_{s2} \\ & & k_{s1} + k_{n1} & 0 \\ \text{sym} & & & k_{s2} + k_{n2} \end{bmatrix} \quad (6.11)$$

$$\mathbf{x} = [x_v(t) \quad \theta(t) \quad x_{n1}(t) \quad x_{n2}(t)]^T \quad (6.12)$$

$$\mathbf{f} = [0 \quad 0 \quad k_{n1}y_1(t) \quad k_{n2}y_2(t)]^T \quad (6.13)$$

Por último, se obtienen las ecuaciones diferenciales para el modelo completo del vehículo donde las expresiones de las energías cinética y potencial y función disipación son

$$\begin{aligned}
T &= \frac{1}{2}m_v\dot{x}_v^2 + \frac{1}{2}m_{n1}\dot{x}_{n1}^2 + \frac{1}{2}m_{n2}\dot{x}_{n2}^2 + \frac{1}{2}m_{n3}\dot{x}_{n3}^2 + \frac{1}{2}m_{n4}\dot{x}_{n4}^2 \\
&\quad + \frac{1}{2}I_x\dot{\phi}^2 + \frac{1}{2}I_y\dot{\theta}^2, \\
U &= \frac{1}{2}k_{s1}(x_v - x_{n1} + b_1\phi - a_1\theta)^2 + \frac{1}{2}k_{s2}(x_v - x_{n2} - b_2\phi - a_1\theta)^2 + \\
&\quad \frac{1}{2}k_{s3}(x_v - x_{n3} - b_1\phi + a_2\theta)^2 + \frac{1}{2}k_{s4}(x_v - x_{n4} + b_2\phi + a_2\theta)^2 \\
&\quad + \frac{1}{2}k_R\left(\phi - \frac{x_{n1} - x_{n2}}{w}\right)^2 + \frac{1}{2}k_{r1}(x_{n1} - y_1)^2 + \frac{1}{2}k_{r2}(x_{n2} - y_2)^2 \\
&\quad + \frac{1}{2}k_{r3}(x_{n3} - y_3)^2 + \frac{1}{2}k_{r4}(x_{n4} - y_4)^2, \\
D &= \frac{1}{2}c_{s1}(\dot{x}_v - \dot{x}_{n1} + b_1\dot{\phi} - a_1\dot{\theta})^2 + \frac{1}{2}c_{s2}(\dot{x}_v - \dot{x}_{n2} - b_2\dot{\phi} - a_1\dot{\theta})^2 + \\
&\quad \frac{1}{2}c_{s3}(\dot{x}_v - \dot{x}_{n3} - b_1\dot{\phi} + a_2\dot{\theta})^2 + \frac{1}{2}c_{s4}(\dot{x}_v - \dot{x}_{n4} - b_2\dot{\phi} + a_2\dot{\theta})^2.
\end{aligned} \tag{6.14}$$

Donde ahora k_R es la rigidez asociada a la barra estabilizadora del eje delantero mientras que $w = b_1 + b_2$ representa el ancho total del eje del vehículo. Empleando nuevamente la Ec. (6.2), y considerando que ahora el sistema dinámico posee siete grados de libertad, las matrices de masa, amortiguamiento y rigidez de la misma Ec. (6.6) toman la forma

$$\mathbf{M} = \text{diag}(m_v, I_x, I_z, m_{n1}, m_{n2}, m_{n3}, m_{n4}) \tag{6.15}$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & -c_{s1} & -c_{s2} & -c_{s3} & -c_{s4} \\ & c_{23} & c_{23} & -b_1c_{s1} & b_2c_{s2} & b_1c_{s3} & -b_2c_{s4} \\ & & c_{33} & a_1c_{s1} & a_1c_{s2} & -a_2c_{s3} & -a_2c_{s4} \\ & & & c_{s1} & 0 & 0 & 0 \\ & & & & c_{s2} & 0 & 0 \\ & & & & & c_{s3} & 0 \\ \text{sym} & & & & & & c_{s4} \end{bmatrix} \tag{6.16}$$

Siendo

$$\begin{aligned}
c_{11} &= c_{s1} + c_{s2} + c_{s3} + c_{s4}, \\
c_{21} &= c_{12} = b_1(c_{s1} - c_{s3}) + b_2(c_{s4} - c_{s2}), \\
c_{31} &= c_{13} = a_2(c_{s3} + c_{s4}) - a_1(c_{s1} + c_{s2}), \\
c_{22} &= b_1^2(c_{s1} + c_{s3}) + b_2^2(c_{s2} + c_{s4}), \\
c_{32} &= c_{23} = a_1b_2c_{s2} - a_1b_1c_{s1} - a_2b_1c_{s3} + a_2b_2c_{s4}, \\
c_{33} &= a_1^2(c_{s1} + c_{s2}) + a_2^2(c_{s3} + c_{s4}),
\end{aligned} \tag{6.17}$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & -k_{s1} & -k_{s2} & -k_{s3} & -k_{s4} \\ & k_{23} & k_{23} & k_{24} & k_{25} & b_1 k_{s3} & -b_2 k_{s4} \\ & & k_{33} & a_1 k_{s1} & a_1 k_{s2} & -a_2 k_{s3} & -a_2 k_{s4} \\ & & & k_{44} & -\frac{k_R}{w^2} & 0 & 0 \\ & & & & k_{55} & 0 & 0 \\ & & & & & k_{n3} + k_{s3} & 0 \\ \text{sym} & & & & & & k_{n4} + k_{s4} \end{bmatrix} \quad (6.18)$$

Siendo

$$\begin{aligned} k_{11} &= k_{s1} + k_{s2} + k_{s3} + k_{s4}, \\ k_{21} &= k_{12} = b_1 (k_{s1} - k_{s3}) + b_2 (k_{s4} - k_{s2}), \\ k_{31} &= k_{13} = a_2 (k_{s3} + k_{s4}) - a_1 (k_{s1} + k_{s2}), \\ k_{22} &= k_R + b_1^2 (k_{s1} + k_{s3}) + b_2^2 (k_{s2} + k_{s4}), \\ k_{32} &= k_{23} = a_1 b_2 k_{s2} - a_1 b_1 k_{s1} - a_2 b_1 k_{s3} + a_2 b_2 k_{s4}, \\ k_{42} &= k_{24} = -\frac{k_R}{w} + b_1 k_{s1}, \\ k_{25} &= \frac{k_R}{w} + b_2 k_{s2}, \\ k_{33} &= a_1^2 (k_{s1} + k_{s2}) + a_2^2 (k_{s3} + k_{s4}), \\ k_{44} &= k_{n1} + k_{s1} + \frac{k_R}{w^2}, \\ k_{55} &= k_{n2} + k_{s2} + \frac{k_R}{w^2}. \end{aligned} \quad (6.19)$$

Mientras que el vector desplazamiento y forzamiento resultan

$$\mathbf{x} = \left[x_v(t) \quad \phi(t) \quad \theta(t) \quad x_{n1}(t) \quad x_{n2}(t) \quad x_{n3}(t) \quad x_{n4}(t) \right]^T, \quad (6.20)$$

$$\mathbf{f} = \left[0 \quad 0 \quad 0 \quad k_{n1} y_1(t) \quad k_{n2} y_2(t) \quad k_{n3} y_3(t) \quad k_{n4} y_4(t) \right]^T, \quad (6.21)$$

Fuerzas verticales inducidas por el vehículo

En el apartado anterior, las ecuaciones diferenciales que gobiernan el movimiento del vehículo fueron obtenidas para tres tipos distintos de modelos de vehículos. En dichas expresiones, las fuerzas verticales dinámicas ejercidas por el vehículo en la carretera emergen naturalmente considerando la posición y rigidez del neumático en conjunto con el valor del perfil de la carretera. Sin embargo, ningún tipo de consideración respecto a las fuerzas dependientes del peso del vehículo fue realizada. La fuerza vertical total F_v ejercida por cada neumático a la carretera (igual y opuesta a la fuerza que la carretera le ejerce a cada neumático), puede ser expresada como

$$F_v = F_v^{(d)} + F_v^{(e)} = k_n (x_n - y) + F_v^{(e)} \quad (6.22)$$

Donde $F_v^{(d)} = k_n (x_n - y)$ es la componente vertical dinámica, mientras que $F_v^{(e)}$ es la fuerza estática producida por el peso total del vehículo. Esta última fuerza $F_v^{(e)}$ es, en el caso más general, una función dependiente de la configuración y aceleración del vehículo y adopta distintas expresiones dependiendo de la cantidad de GDL asumidos. Comenzando con el modelo

de cuarto de vehículo, $F_v^{(e)}$ puede ser obtenida simplemente considerando la suma en la dirección vertical del peso de la masa suspendida y de la rueda como

$$F_v^{(e)} = (m_v + m_n) g \quad (6.23)$$

Donde g representa la aceleración de la gravedad. Por otro lado, para el modelo de medio vehículo, las fuerzas verticales ejercidas por el peso deben ser obtenidas considerando tanto la sumatoria de fuerzas verticales como horizontales, así como la sumatoria de momentos respecto a un punto arbitrario. Considerando una carretera sin inclinación, las fuerzas verticales producidas en el tren delantero y trasero pueden ser expresadas como

$$F_{v1}^{(e)} = \left(m_v \frac{a_2}{l} + m_{n1} \right) g; \quad F_{v2}^{(e)} = \left(m_v \frac{a_1}{l} + m_{n2} \right) g \quad (6.24)$$

Donde $l = a_1 + a_2$ es la distancia total entre los ejes del vehículo. Para el caso del modelo de vehículo completo, donde el ángulo de rolido es incluido, las fuerzas verticales estáticas no pueden ser totalmente determinadas debido a que se trata de un sistema estáticamente indeterminado [269]. Por ello, en este modelo, se emplean las mismas expresiones que para el caso del medio vehículo, lo cual implica despreciar la influencia del ángulo de rolido.

Por otro lado, cuando un vehículo se mueve y/o acelera en una superficie inclinada, la distribución del peso en el eje delantero y trasero se ve ligeramente afectada. Este fenómeno se manifiesta en mayor medida para valores mayores del ángulo de inclinación de la carretera y/o aceleración. Siguiendo un procedimiento similar al utilizado para obtener las fuerzas estáticas, la distribución del peso en cada eje puede ser recalculada considerando estos dos efectos como [269]

$$\begin{aligned} F_{v1}^{(e)} &= \left(m_v \frac{a_2}{l} \cos \theta - m_v \frac{h}{l} \sin \theta + m_1 \right) g - m a_v \frac{h}{l}; \\ F_{v2}^{(e)} &= \left(m_v \frac{a_1}{l} \cos \theta + m_v \frac{h}{l} \sin \theta + m_2 \right) g + m a_v \frac{h}{l}; \end{aligned} \quad (6.25)$$

donde a_v es la aceleración del vehículo y h la altura del centro de masa del vehículo medida desde el suelo. Por otro lado, resulta importante aclarar, que para el modelo de 2 GDL, la distribución del peso no se ve afectada cuando el vehículo se encuentra acelerando en una superficie inclinada, por lo que la Ec. (6.23) sigue teniendo validez.

De esta manera, con el fin de determinar las fuerzas verticales que se desarrollan por el paso del vehículo sobre un obstáculo, se incorporan las fuerzas estáticas en el término de fuerza f de la Ec. (6.6), dependiendo del modelo seleccionado, ya sea por la Ec. (6.23) del modelo de 2 GDL o por las Ecs. (6.25) del modelo de 4 y 7 GDL .

Movimiento del vehículo

Como último aspecto referido al modelo de vehículo, se define la función desplazamiento del mismo. Para ello, se asume como caso mas general que el vehículo se encuentra en un estado de aceleración constante y en línea recta, lo

Debe recordarse que para el modelo de medio vehículo la masa m_v considerada corresponde a la mitad del vehículo

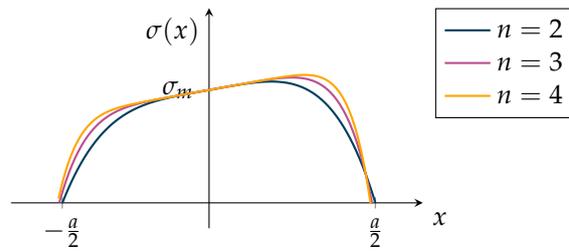


Figura 6.3: Distribución de presión vertical del neumático en la dirección de movimiento.

cual corresponde un movimiento rectilíneo uniformemente variado (MRUV). En este caso, las ecuaciones de posición $s_v(t)$ y velocidad $v_v(t)$ resultan

$$\begin{aligned} s_v(t) &= s_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a_v t^2 \\ v_v(t) &= v_0 + a_v t \end{aligned} \quad (6.26)$$

Donde s_0 y v_0 representan la posición y velocidad inicial del vehículo.

6.1.2 Modelo de neumático e interacción vehículo pavimento

Durante el desplazamiento del vehículo, el único punto de contacto que existe entre este y la superficie del pavimento se da a través del neumático. Dicho contacto, se produce siempre a través de una área comúnmente denominada *huella*, *parche de contacto* o *región de contacto*, la cual posee un rol fundamental en las fuerzas transmitidas. Dichas fuerzas, son comúnmente divididas entre normales y de fricción las cuales son las responsables de la adherencia entre ambas superficies, aspecto de gran relevancia en las condiciones de arranque y frenado. Otra de las funciones de gran importancia que posee el neumático, además de la función obvia de sostener el vehículo, radica en su capacidad de absorber los impactos producto de las pequeñas irregularidades presentes en el camino. Por todos estos motivos, la dinámica del neumático cumple un rol fundamental en el comportamiento del vehículo, influenciando en enorme medida su nivel confort.

A la hora de modelar matemáticamente los neumáticos, diversos enfoques analíticos han sido propuestos con el fin de predecir correctamente la interacción con el pavimento. En todas las expresiones presentadas hasta aquí, ningún tipo de consideración respecto a la forma del contacto ha sido realizada aún, es decir, que la resolución de la Ec. (6.6) tal como se presenta equivale a asumir que el contacto entre el neumático y la carretera se da en un solo punto, dado por $y(t)$. Este enfoque es uno de los más empleados debido a su sencillez y es denominado modelo de neumático de *Punto de Contacto Único* (PCU), siendo conocido por despreciar la existencia del parche de contacto. Entre las aplicaciones más comunes donde este modelo es adoptado se destacan el cálculo de los modos de vibración del vehículo, así como el estudio transitorio del mismo cuando es sometido a excitaciones de baja frecuencia relativa o de gran longitud de onda [268]. Sin embargo, para carreteras con obstáculos lo suficientemente «abruptos», este modelo tiende a sobrestimar notoriamente las fuerzas de interacción debido a su incapacidad de contemplar las características envolventes del mismo. El primer estudio de modelos capaces de contemplar estas características fue llevado a cabo por

El modelo de neumático de Punto de Contacto Único se conoce como Single Point Contact Model (SPC) por su nombre en inglés

Las capacidades del neumático de copiar pequeñas irregularidades se denominan propiedades envolventes.

Un modelo más sofisticado de contacto es conocido como Rigid Roller Contact Model (RRC) por su nombre en inglés. También conocido como Flexible Roll Contact Model (FRC) por su nombre en inglés.

El modelo de contacto desarrollado por Duarte y col. [158] presenta una excelente relación costo-beneficio.

Lippmann y col. [270] quienes investigaron las propiedades de filtrado de alta frecuencia debido a la capacidad envolvente del neumático. Basado en este mismo fenómeno, Guo [271] propuso un modelo de neumático basado en el filtrado geométrico del perfil de la carretera, donde una entrada suavizada $y_e(t)$ es considerada como excitación al sistema, el cual fue llamado como de *Contacto de Rolido Rígido* (CRR). Como principales ventajas, en este modelo el alcance del contacto es automáticamente tenido en cuenta debido al radio de la rueda, además de contemplar diferentes excitaciones para irregularidades positivas como negativas. Sin embargo, como desventaja, la huella del neumático no es introducida y el contacto continua actuando en un punto. Años más tarde, Guo y Liu [272] solucionaron este problema introduciendo un modelo mejorado denominado de *Contacto de Rolido Flexible* (CRF), el cual contemplaba tanto las propiedades de filtrado geométrico como por flexibilidad. Sui e Hirshey [273] compararon los distintos modelos previamente mencionados en conjunto con simulaciones tridimensionales del método de elementos finitos utilizando LS-DYNA, probando que las soluciones dadas por el modelo CRF y el software comercial eran las que más se asemejaban. Luego, Yang y col. [274] presentaron un modelo *Revisado de Contacto de Rolido Flexible* (RCRF) el cual incluyó el amortiguamiento y el desplazamiento del pavimento. Por último, otra variante de modelo de neumático fue utilizada más recientemente por Duarte y col. [158] con el fin de determinar la fuerza vertical ejercida por el neumático sobre un reductor de velocidad capaz de desplazarse verticalmente, problema similar al planteado en esta tesis. En este caso, se logró una excelente solución costo-beneficio donde si bien el modelo presentaba limitaciones debido a la hipótesis de longitud de huella constante y su incapacidad de contemplar que el neumático se desprege del pavimento, las aproximaciones a la interacción real resultaron superiores a las obtenidas por el modelo de PCU, principalmente debido a que la carga era aplicada de manera gradual. Debido a esto, en nuestra formulación se emplea un modelo semejante al de Duarte y col. [158], donde el contacto entre ambas superficies se asume a través de un parche de contacto de longitud constante a inversamente proporcional a la presión del neumático y directamente proporcional al peso estático soportado por el vehículo, con una distribución de presión no homogénea dada por la siguiente función [269, 275]

$$\sigma(s_r) = \sigma_m \left[1 - \frac{4^n (s_r - s_n)^{2n}}{a^{2n}} + \frac{(s_r - s_n)}{2a} \right], \quad (6.27)$$

Para la mayoría de los neumáticos se suele asumir $n = 2$.

donde s_r es un sistema de coordenada móvil solidario a la posición del centro de masa del neumático s_n ($s_n = s_v$ para el modelo de 2 GDL o $s_{n1} = s_v + a_1$, $s_{n2} = s_v - a_2$ para el modelo de 4 y 7 GDL), n es un coeficiente adimensional empírico de la distribución de presión dependiente del tipo de neumático cuya influencia se encuentra esquemáticamente representada en la Figura 6.3, mientras que σ_m es el valor de presión promediada en el área, cuyo valor surge de resolver

$$\int_{A_p} \sigma(s_r) dx = F_v, \quad (6.28)$$

donde la F_v es determinada acorde a la Ec. (6.22), mientras que A_p es la longitud asociada al área total del parche de contacto. De esta forma, la fuerza desarrollada por el vehículo al reductor de velocidad, a medida que la rueda

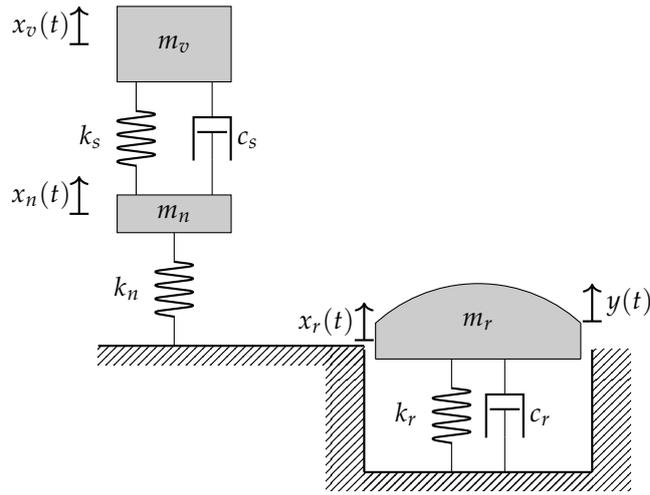


Figura 6.4: Modelo de cuarto de vehículo con reductor acoplado a reductor de velocidad móvil.

alcanza o supera al reductor, será gradual y determinada considerando la integral de área del miembro izquierdo de la Ec. (6.28), pero en el área de contacto.

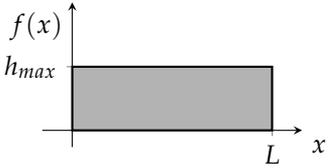
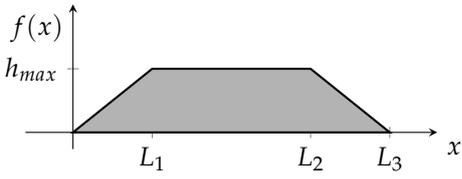
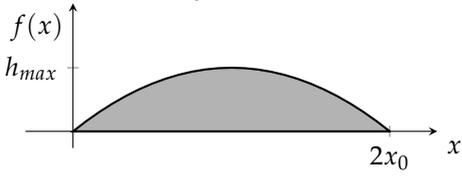
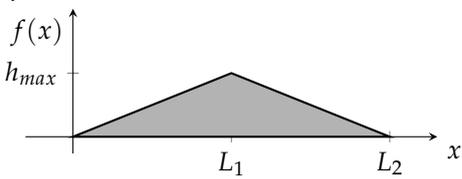
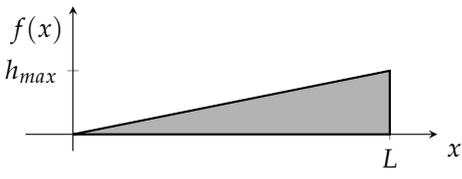
6.1.3 Modelo de reductor de velocidad

Hasta aquí, se dedujeron las ecuaciones de movimiento capaces de predecir el comportamiento dinámico del vehículo sujeto a una excitación de base $y(t)$ producto de las irregularidades de la carretera. Ahora, se plantean las ecuaciones del movimiento correspondientes al reductor, el cual incluye un perfil sumado a un grado de libertad vertical, siendo éste excitado por el pasar del vehículo. La representación esquemática del reductor en conjunto con el vehículo circulante (bajo modelo de cuarto de vehículo en este caso), se encuentra en la Figura 6.4. Tal como puede notarse, el mismo es modelado como una masa suspendida de valor m_r con valores de rigidez y amortiguamiento k_r y c_r . En este caso, la ecuación del movimiento del mismo puede ser obtenida de manera sencilla mediante la aplicación de la segunda Ley de Newton llegando así

$$\begin{aligned} m_r \ddot{x}_r + c_r \dot{x}_r + k_r x_r &= -F_v && \text{si } x_r > x_t \\ m_r \ddot{x}_r + c_r \dot{x}_r + k_r x_t &= -F_v + F_t && \text{si } x_r = x_t \end{aligned} \quad (6.29)$$

donde $x_r(t)$ es el desplazamiento vertical, mientras que F_v es la fuerza vertical inducida por el vehículo. En particular, se asume un valor de desplazamiento máximo x_t admitido para el reductor de velocidad, es decir, que si $x_r = x_t$, se adiciona una fuerza de contacto F_t introducida por un tope.

Como fue previamente mencionado, la fuerza vertical F_v inducida por el vehículo depende del perfil de la carretera $y(t)$, de la posición de la rueda $x_n(t)$, del modelo de neumático y del peso del vehículo (véase Ec. 6.22). Si se considera el cambio de variable $y = x_r + f$, donde $f = f[s_v(t)]$ es el perfil del reductor, las ecuaciones asociadas al vehículo y al reductor quedan mutuamente acopladas a través de las fuerzas verticales F_v .

Perfil	Función analítica
Reductor tipo escalón	$f(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ h_{max} & 0 \leq x < L \\ 0 & x \geq L \end{cases}$ 
Reductor tipo trapezoidal	$f(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{h_{max}}{L_1} x & 0 \leq x < L_1 \\ h_{max} & L_1 \leq x < L_2 \\ -\frac{h_{max}}{L_3-L_2-L_1} x + \frac{h_{max}L_3}{L_3-L_2-L_1} & L_2 \leq x < L_3 \\ 0 & x \geq L_3 \end{cases}$ 
Reductor tipo cóncavo	$f(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ h_{max} - r + \sqrt{r^2 - (x - x_0)^2} & 0 \leq x < 2x_0 \\ 0 & x \geq 2x_0 \end{cases}$ <p>donde $x_0 = \sqrt{2rh - h^2}$</p> 
Reductor tipo triangular	$f(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{h_{max}}{L_1} x & 0 \leq x < L_1 \\ -\frac{h_{max}}{L_2-L_1} x + h_{max} \left(1 + \frac{L_1}{L_2-L_1}\right) & L_1 \leq x < L_2 \\ 0 & x \geq L_2 \end{cases}$ 
Reductor tipo rampa	$f(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{h_{max}}{L} x & 0 \leq x < L \\ 0 & x \geq L \end{cases}$ 

Cuadro 6.1: Distintas funciones para representar perfiles de carretera.

Perfiles de reductores de velocidad

A la hora de diseñar perfiles de reductores de velocidad existe una enorme cantidad variantes posibles que podrían ser empleadas. Actualmente, en lo que respecta a nuestro país, no existe ningún tipo de legislación que regule las dimensiones geométricas y/o materiales que deben utilizarse obligatoriamente para ser incorporados en calles. Esto implica, que a la hora de simular numéricamente el pasar de un vehículo sobre un reductor móvil, un gran número de perfiles dados por la función $f(x)$ podrían ser considerados. Algunos ejemplo con las geometrías mas simples, se encuentran en el Cuadro 6.1. De todas estas, resultan de principal interés el perfil tipo trapezoidal y cóncavo, debido a que son los perfiles que representan los empleados comúnmente.

6.2 SIMULACIONES Y RESULTADOS NUMÉRICOS

Con el fin de realizar la simulación numérica, las Ecs. (6.6) y (6.29) son resueltas en simultaneo. En lo referido a la metodología numérica, la misma es llevada a cabo de la siguiente manera: asumiendo condiciones iniciales nulas, las ecuaciones del movimiento son integradas numéricamente empleando el método Runge-Kutta (RK) de cuarto orden empleando la función *solve_ivp* de la librería *SciPy*, durante un intervalo de tiempo de $t_f = 10s$ y con un paso tiempo máximo de $T = 0,01s$. La posición espacial del reductor en la dirección de movimiento del vehículo es elegida de forma que la interacción vehículo-reductor se produzca para $t = 5s$. Por otro lado, los primeros 5s de la simulación se emplean para que el vehículo oscile producto de su peso propio, hasta alcanzar una posición de equilibrio dependiente de los valores de rigidez de la suspensión y del neumático. Considerando que los ejes del movimiento fueron definidos positivos hacía arriba (véase Figs. 6.1 y 6.2), la posición de equilibrio se dan siempre para valores negativos de x_v y x_n .

En lo referido a los parámetros de las simulaciones, en el Cuadro 6.2 se presentan los distintos valores adoptados para cada elemento que conforma el sistema. Tal como se puede notar, y como se había mencionado anteriormente, se seleccionan dos tipos de perfiles para el reductor: el «cóncavo» y el «trapezoidal». Por otro lado, dos columnas se encuentran representadas en este Cuadro para la mayoría de los parámetros necesarios, denotadas como «Valor» y «Estudio paramétrico». La primera columna denota los valores de referencia que se usaran para las simulaciones, mientras que la segunda muestra el rango de valores utilizados para estudiar su influencia en la respuesta dinámica.

6.2.1 *Identificación de la influencia de los grados de libertad del vehículo*

En primera instancia se busca identificar la influencia del modelo de vehículo empleado en la predicción de la dinámica del mismo al atravesar un reductor de velocidad. Por ello, la Figura 6.5 compara la respuesta temporal de algunas variables temporales para un mismo vehículo modelado con de 2, 4 y 7 grados de libertad y atravesando un reductor tipo cóncavo. La Figura 6.5a, denota el desplazamiento vertical del cuerpo del vehículo pudiendo identificarse que los modelos de 4 y 7 GDL arrojan soluciones con formas exactamente idénticas pero ligeramente diferentes en amplitud. El desplazamiento inicial del modelo de 4 GDL se encuentra aproximadamente 0,2mm por debajo del

Las variables elegidas para realizar la comparación son aquellas capaces de ser reproducidas por los tres modelos.

Parte	Elemento	Valor	Estudio paramétrico
Vehículo	Masa del vehículo, m_v	1085 [kg]	700 – 2500 [kg]
	Masa rueda, m_n	40 [kg]	25 – 85 [kg]
	Inercia frontal, I_x		820 [kgm ²]
	Inercia lateral, I_z		1100 [kgm ²]
	Cota frontal al CG, a_1		1,4 [m]
	Cota trasera al CG, a_2		1,5 [m]
	Cota lateral izquierda al CG, b_1		0,7 [m]
	Cota lateral derecha al CG, b_2		0,8 [m]
	Altura centro de gravedad, h		0,75 [m]
	Velocidad inicial, v_0	5,5 [m/s]	1 – 18 [m/s]
	Aceleración, a	0	0 – 3 [m/s ²]
Suspensión	Rigidez barra estabilizadora, k_r		25000 [N/m]
	Rigidez suspensión, k_s	10000 [Pa]	5000 – 20000 [Pa]
	Amortiguamiento suspensión, c_s	800 [N/ (ms ⁻¹)]	400 – 1600 [N/ (ms ⁻¹)]
Neumático	Rigidez neumático, k_n	100000 [Pa]	50000 – 150000 [Pa]
	Largo parche de contacto, a		8 [cm]
	Coefficiente de distribución de presión, n		2
Reductor (trapezoidal)	Altura máxima, h_{max}	5,5 [cm]	1 – 5,5 [cm]
	Largo, L		40 [cm]
	Masa, m_r	5 [kg]	2 – 10 [kg]
	Rigidez, k_r	80 [kPa]	40 – 100 [kPa]
	Amortiguamiento, c_r	3600 [N/ (ms ⁻¹)]	800 – 5000 [N/ (ms ⁻¹)]
Reductor (cóncavo)	Altura máxima, h_{max}	4,5 [cm]	1 – 5,5 [cm]
	Largo, L		20 [cm]
	Masa, m_r	5 [kg]	2 – 10 [kg]
	Rigidez, k_r	80 [kPa]	40 – 100 [kPa]
	Amortiguamiento, c_r	3600 [N/ (ms ⁻¹)]	800 – 5000 [N/ (ms ⁻¹)]

Cuadro 6.2: Valores asumidos para la simulación numérica de la interacción vehículo-pavimento, teniendo en cuenta un vehículo típico real.

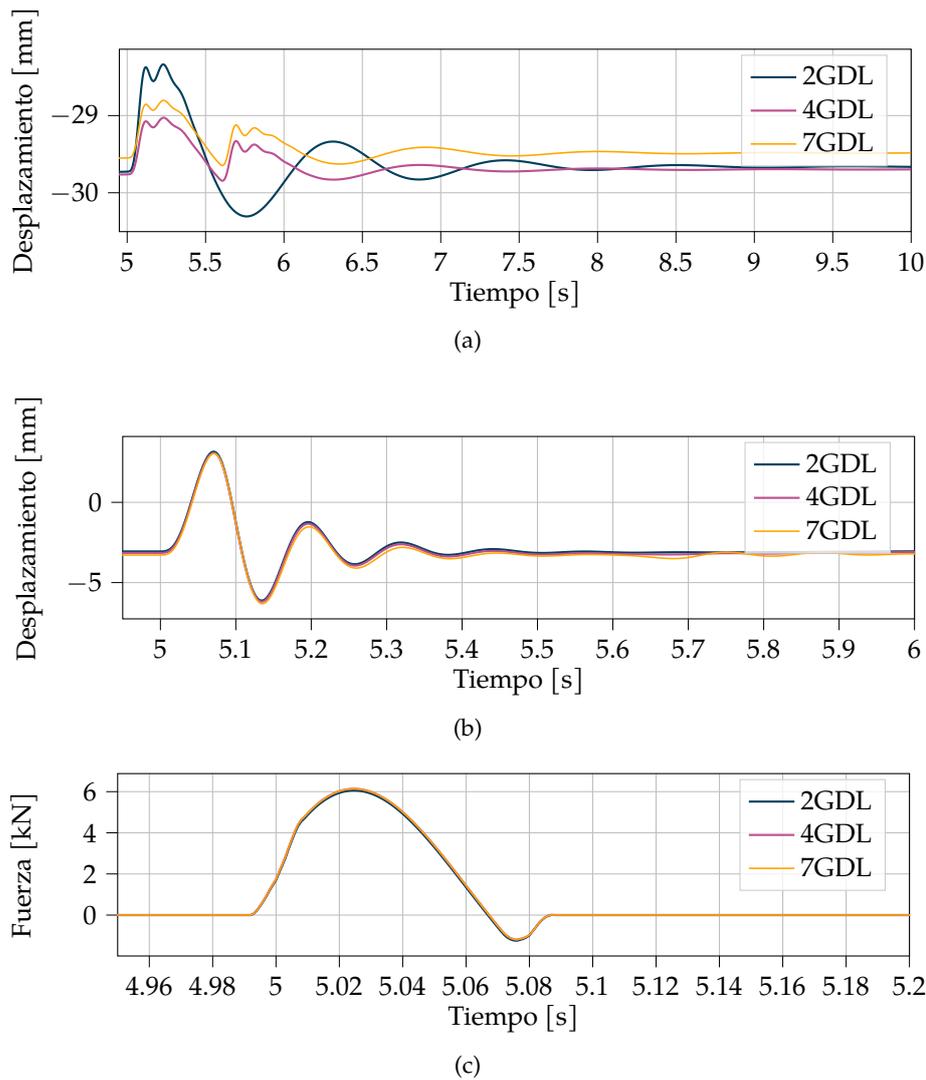


Figura 6.5: Influencia del modelo de vehículo para reductor cóncavo en (a) desplazamiento vertical del vehículo, (b) desplazamiento del centro de la rueda y (c) fuerzas verticales totales. ($v_0 = 5\text{m/s}$).

modelo de 7 GDL. Estas discrepancias indican una diferencia en la posición de equilibrio alcanzadas por la deformación inicial de la suspensión y los neumáticos debido al peso propio. Esto se debe a que el modelo de 7 GDL contempla la distribución de la masa en el ancho del vehículo; donde se ha asumido que centro de gravedad no se encuentra exactamente en el centro de vehículo respecto al plano frontal, tal como se observa en los valores distintos de b_1 y b_2 del Cuadro 6.2. Por esta razón, pese a que los parámetros del sistema adoptan los mismos valores numéricos en los dos casos, el sistema de referencia x_v se encuentra localizado en lugares diferentes en el espacio; lo que da lugar a esta pequeña discrepancia. Por otro lado, para el caso de 2 GDL, se observan discrepancias mayores en comparación con los otros dos modelos, las cuales pueden ser entendidas considerando que: (i) El primer pico de aproximadamente $-28,5\text{mm}$ localizado entre 5 y 5,5s presenta un fenómeno similar al anteriormente mencionado, donde la coordenada x_v , es medida justo por encima de la rueda (véase Figura 6.1) debido a que este modelo no considera la distribución de masa en la longitud del movimiento del vehículo. Estas diferencias, resultan en que la medición de la coordenada x_v asociada

La coordenada x_v siempre se mide respecto al centro de gravedad G.

En el modelo de medio vehículo no existe distribución de masa en el ancho del vehículo, mientras que en el de cuarto vehículo no existe ni en el ancho ni a lo largo del eje de movimiento del vehículo.

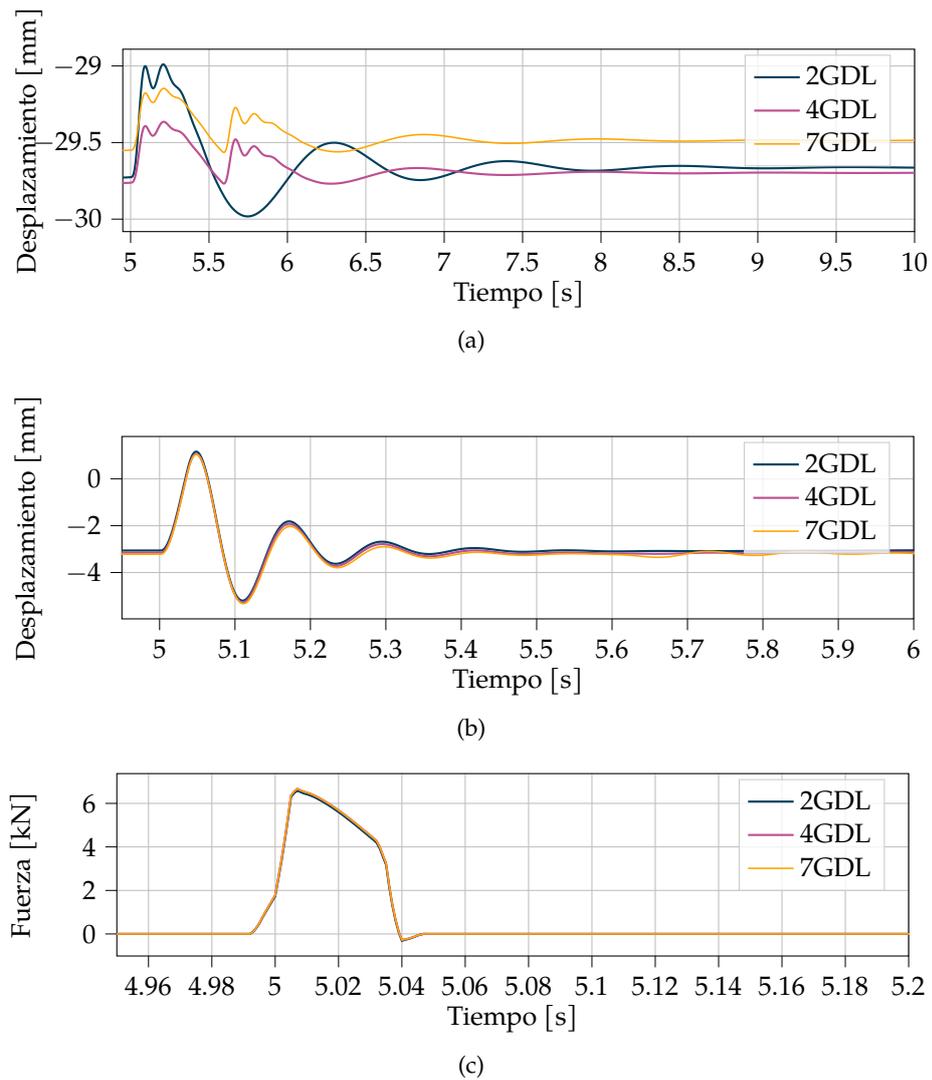


Figura 6.6: Influencia del modelo de vehículo para el reductor tipo trapezoidal en (a) desplazamiento vertical del vehículo x_v , (b) desplazamiento del centro de la rueda x_n y (c) fuerzas verticales totales F_v . ($v_0 = 5m/s$).

el modelo de 2 GDL se vea amplificada respecto a los otros dos modelos. (ii) Segundo, los desplazamientos a partir de los 5,5s resultan bastante diferentes tanto en forma como amplitud; en este caso, estas diferencias están asociada al «golpe» del eje trasero del vehículo para los modelos de 4 y 7 GDL, el cual no es contemplado en el modelo de 2 GDL. Continuando con otro aspecto, la Figura 6.5b presenta la comparativa del desplazamiento del centro de la rueda del vehículo. En este caso, es posible notar cómo los tres modelos presentan un compartimento idéntico, demostrando que en el estudio de esta variable es indistinto el modelo de vehículo empleado. Debido a esto, resulta lógico esperar que las fuerzas verticales calculadas sean iguales para los tres modelos, como se observa en la Figura 6.5.

El mismo análisis se realiza para el caso de un reductor trapezoidal en la Figura 6.6, donde se destaca que la predicción de la fuerza vertical F_v , mostrada en la Figura 6.6c, es la misma para cada uno de los modelos del vehículo considerados. Además, respecto a la forma de la fuerza vertical en el tiempo representada en la Figura 6.6c, el reductor tipo trapezoidal presenta cambios mas «abruptos» al igual que un valor pico mayor de aproximadamente 6,2kN

versus los 6kN del reductor tipo cóncavo pero en un tiempo de aplicación más corto de 0,08s (véase Fig. 6.5c) contra 0,04s del trapezoidal. Estas dos observaciones, pueden ser fácilmente atribuibles a la mayor irregularidad del perfil y a la longitud más corta del reductor trapezoidal, efectos que pueden ocasionar una sensación de mayor malestar sobre el conductor del vehículo

En base a estos resultados, es posible concluir que el modelo de 2 GDL resulta ser la mejor solución, en términos de costo computacional, a la hora de predecir la fuerza experimentada por el reductor de velocidad al ser atravesado por un vehículo. Sin embargo, carece de la posibilidad de estudiar una posible interacción del reductor con el pasaje de los dos ejes del vehículo.

6.2.2 Identificación de la influencia de los parámetros del vehículo

En esta sección se busca identificar el rol de los parámetros que intervienen en el modelo del vehículo sobre los valores de fuerzas verticales máximas transmitidas al reductor de velocidad. Para ello, se presentan distintos estudios paramétricos variando tanto las masas del vehículo y de la rueda, la amortiguación de la suspensión, rigideces de la suspensión y del neumático en las Figs. 6.7 y 6.8, considerando cuatro velocidades del vehículo y para el reductor tipo «cóncavo» y «trapezoidal», respectivamente. Como primera observación, comparando las Figuras, resulta claro que la velocidad del vehículo juega un rol fundamental en todos los casos, donde los valores más altos de fuerza vertical máxima F_v corresponden a mayores velocidades del vehículo, siendo ésta uno de los factores más determinantes. Segundo, en lo referido a los parámetros del vehículo, valores crecientes de los parámetros de masa, rigidez y amortiguamiento provenientes de cualquier elemento resulta siempre en valores más altos de fuerza vertical. Sin embargo, de todos ellos probablemente el factor que más relevancia muestra es la rigidez del neumático, donde la mayor variación se observa para el reductor tipo «cóncavo» con una velocidad $v = 10\text{ m/s}$, donde en el intervalo de valores propuestos de la rigidez del neumático k_n , la fuerza vertical aumentó desde 4,4kN hasta los 8,1kN, significando un aumento del 84%. Es importante mencionar que el valor de k_n depende de múltiples factores como ser el tipo de neumático (radial o convencional), material, geometría, y sobretodo de presión de inflado [268]. Esto último podría representar un inconveniente para obtener una buena predicción de la fuerza en situaciones reales.

Por otro lado, comparando cualitativamente los dos perfiles de reductor, es posible notar que el reductor tipo «trapezoidal» presenta valores de fuerza vertical más constantes en función de los distintos parámetros y de las velocidades del vehículo. Gráficamente, esto se puede observar en como las líneas de la Figura 6.11 poseen una tendencia mucho más horizontal (menor influencia de los parámetros constitutivos) así como se encuentran más juntas entre si (menor influencia de la velocidad) que las de la Figura 6.10.

Por último, un parámetro importante a estudiar es el largo del parche de contacto del neumático a , donde su influencia, junto con la velocidad del vehículo sobre la fuerza vertical máxima se encuentra ilustrada en las Figs. 6.9a y 6.9b para el perfil tipo cóncavo y trapezoidal, respectivamente. De las figuras se identifica en ambos casos el aumento de las fuerzas verticales con la velocidad del vehículo como se mencionó anteriormente. Sin embargo, la influencia del parche de contacto es distinta para ambos perfiles. En el caso del

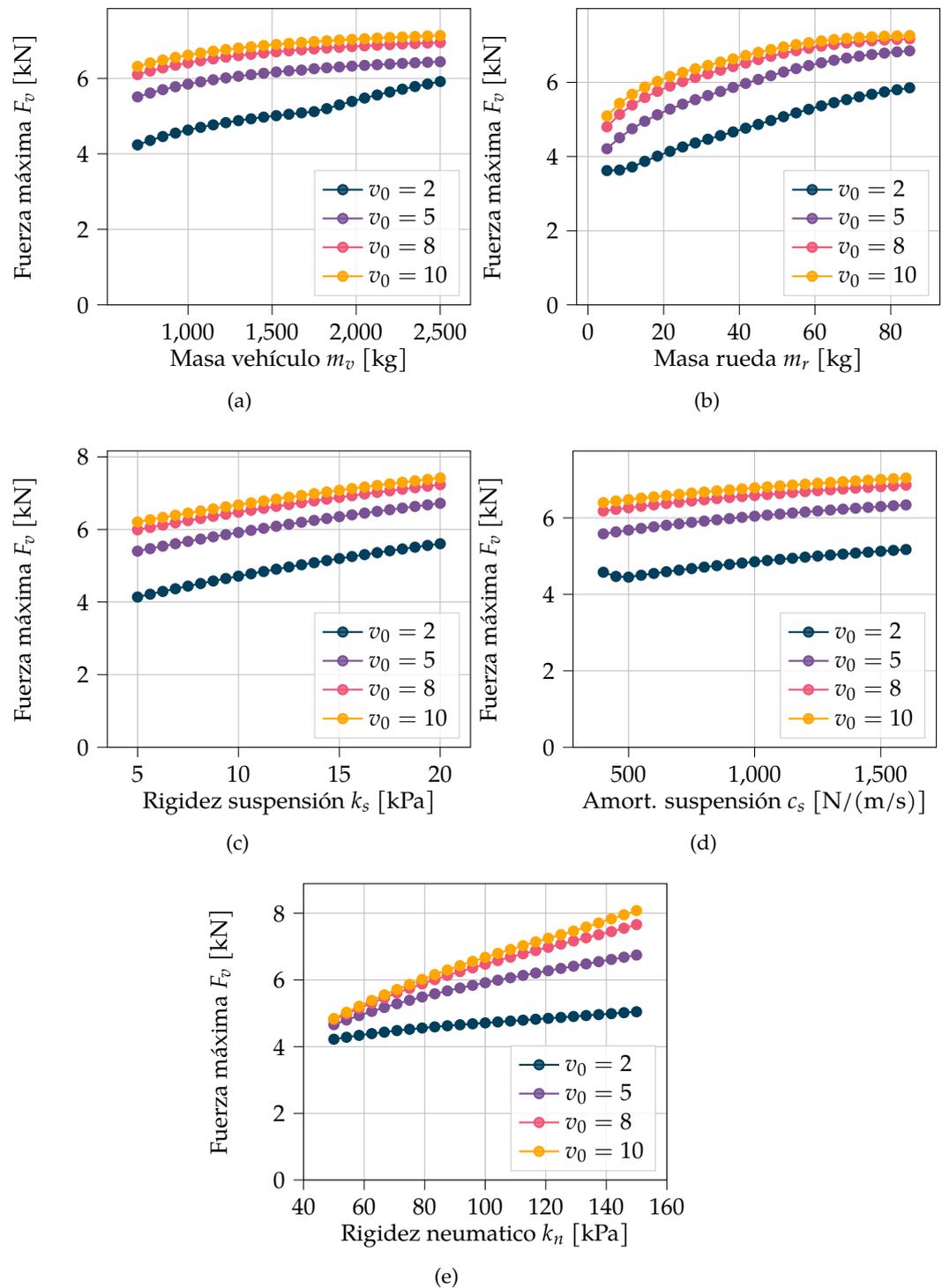


Figura 6.7: Influencia de los parámetros del vehículo en la fuerza vertical total máxima para reductor cóncavo: (a) Masa del vehículo m_v , (b) Masa de la rueda m_r , (c) Rigidez suspensión k_s , (d) Amortiguamiento de la suspensión c_s y, (e) Rigidez del neumático k_n .

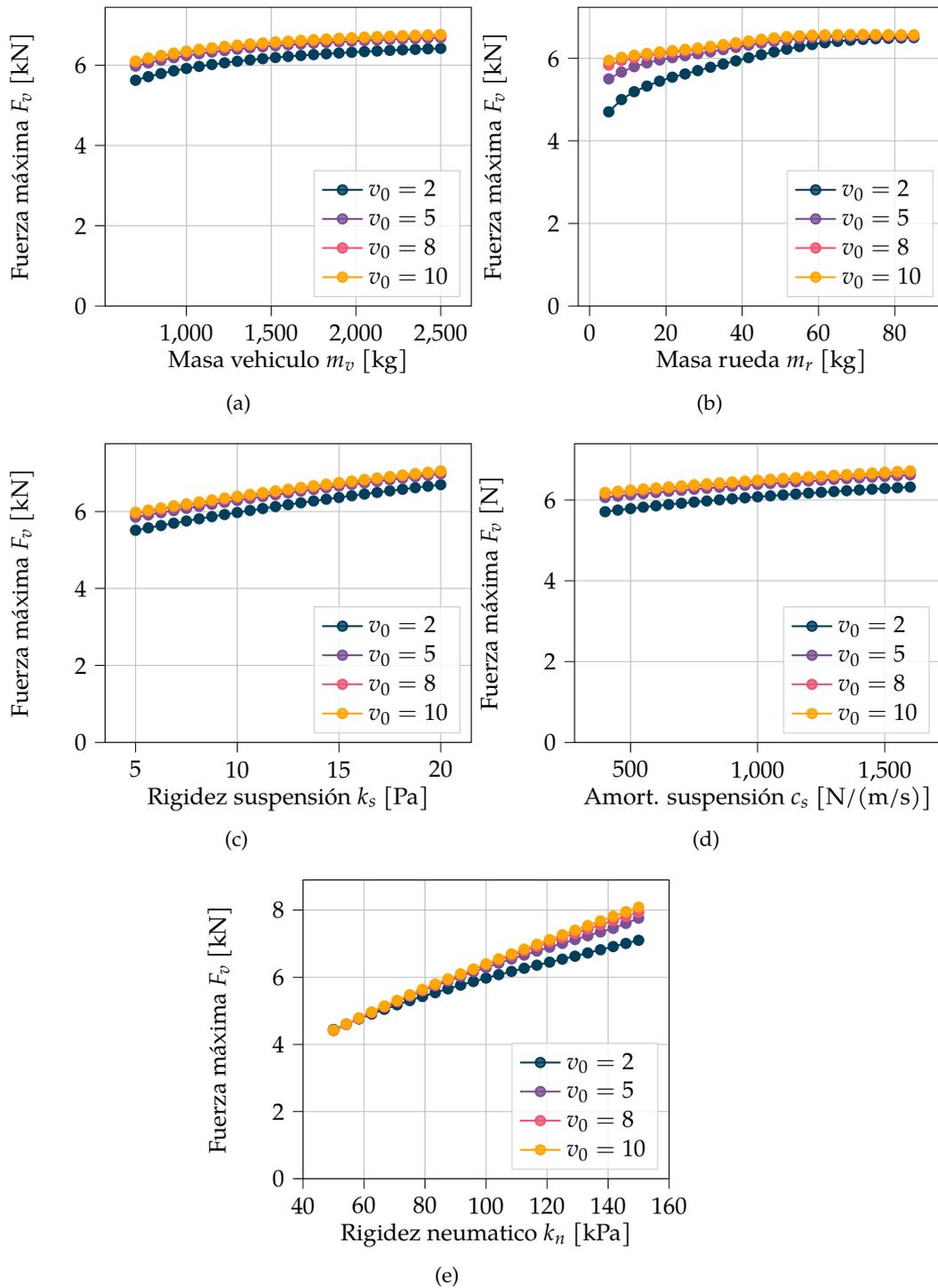


Figura 6.8: Influencia de los parámetros del vehículo en la fuerza vertical total máxima para reductor tipo trapecoidal: (a) Masa del vehículo m_v , (b) Masa de la rueda m_r , (c) Rigidez suspensión k_s , (d) Amortiguamiento de la suspensión c_s y, (e) Rigidez del neumático k_n .

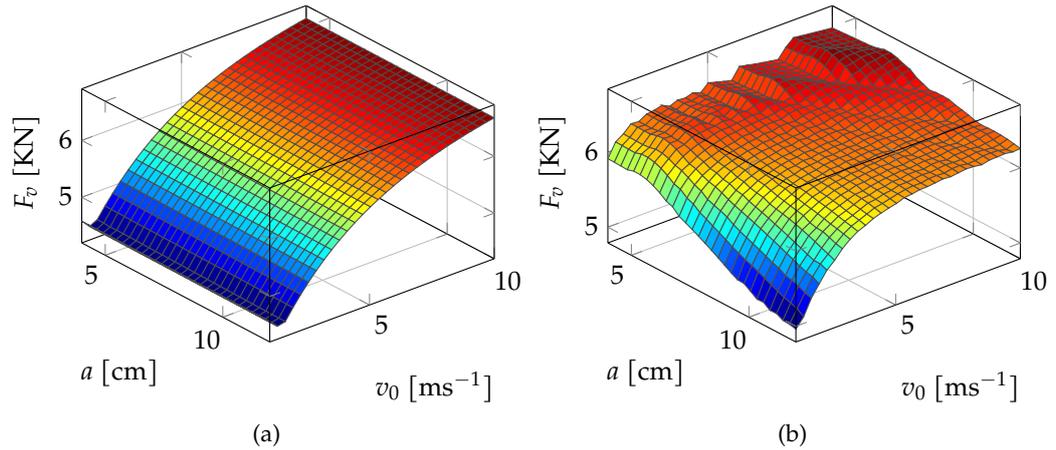


Figura 6.9: Influencia de la longitud del parche de contacto a y velocidad del vehículo v_0 en las fuerzas verticales máximas para los reductores (a) cóncavo, (b) trapezoidal.

perfil trapezoidal, los valores de fuerza disminuyen a medida que la longitud del parche es incrementada. Dicha influencia, es aún más notoria para valores menores de la velocidad del vehículo, donde por ejemplo para una velocidad de 2 m/s , la fuerza vertical máxima disminuyó en un 20 % (de 6 a 5kN) cuando la longitud del parche fue aumentada de 4 a 12cm. Dicho efecto es menor para una velocidad de 10 m/s , donde la fuerza disminuye de 6,3 a 6,2kN para la misma variación de la longitud del parche. Por el otro lado, en el reductor cóncavo los valores de fuerza son independientes de los valores testados de longitud del parche. Este comportamiento puede ser atribuidos a la superficie más «suave» y la mayor longitud del reductor cóncavo respecto al trapezoidal (véase Cuadro 6.2).

6.2.3 Identificación de la influencia de los parámetros del reductor de velocidad

En el apartado anterior se identificó el rol de los parámetros del vehículo sobre los valores máximos de la fuerza vertical. En esta sección, se realiza un análisis similar pero sobre los parámetros del reductor de velocidad, como ser la altura máxima del perfil h_{max} , la velocidad v_0 , el amortiguamiento c_r , la rigidez k_r del reductor, distancia tope x_t y la masa m_r del reductor. Los resultados de las simulaciones se encuentran representados en las Figs. 6.10 y 6.11 para el reductor «cóncavo» y «trapezoidal», respectivamente.

En primera instancia, las Figs. 6.10a y 6.11a muestran los resultados obtenidos a medida que la altura del perfil y la velocidad del vehículo son modificados mutuamente. En este caso, los valores de fuerza vertical más grandes son identificados a medida que cualquiera de los dos parámetros aumentan. Adicionalmente, se puede notar como la relevancia de la velocidad del vehículo aumenta a medida que crece la altura del perfil. Estos parámetros representan la variación más significativa de la fuerza vertical, donde se registra un aumento máximo de aproximadamente 58 % para el reductor cóncavo en la Fig.6.10a (de 3,9kN a 6,2kN). En segunda instancia, se analiza la influencia de la rigidez y amortiguamiento del reductor en las Figs. 6.10b y 6.11b para los distintos reductores. Aquí, puede notarse que en ambos casos existe una combinación entre k_r y c_r que produce que la fuerza vertical sea

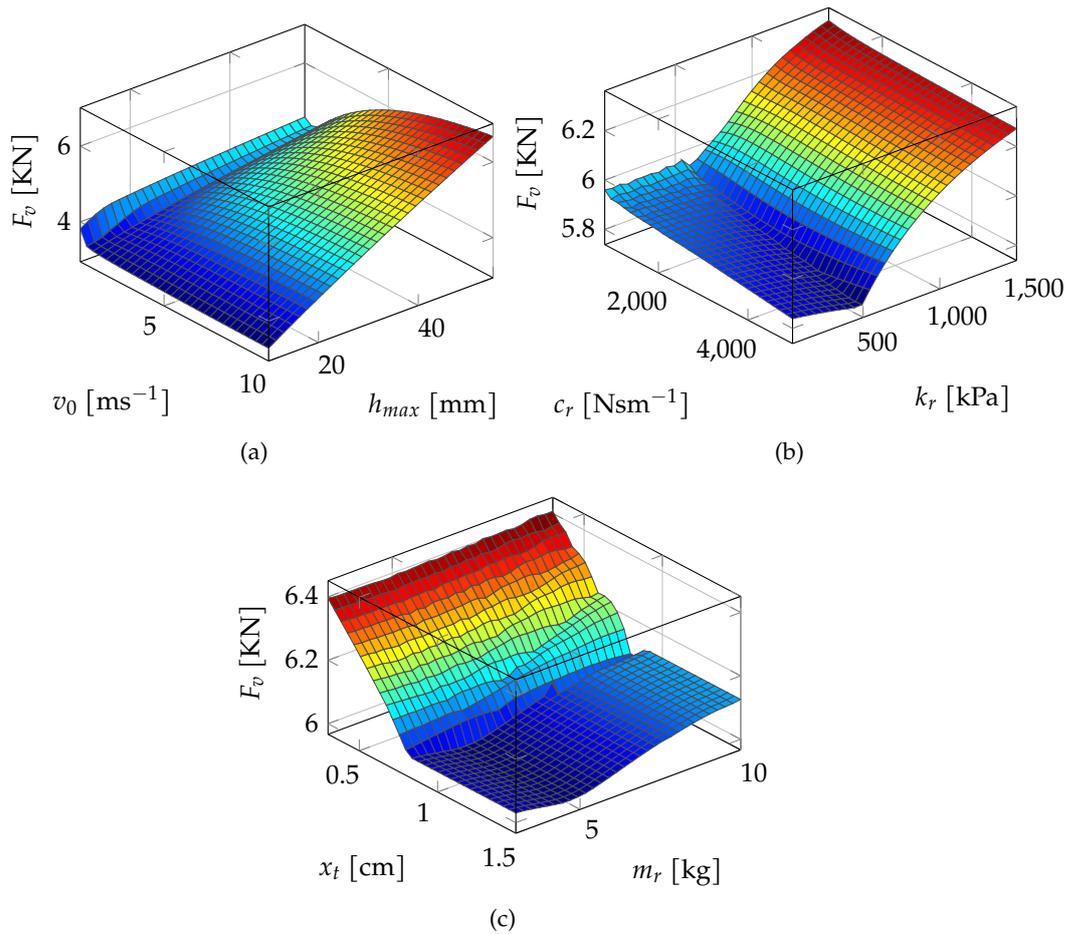


Figura 6.10: Influencia de los parámetros dinámicos del vehículo y del reductor en las fuerzas verticales máximas para el reductor cóncavo. (a) altura máxima del perfil h_{max} - velocidad v_0 , (b) amortiguamiento c_r - rigidez k_r del reductor; y (c) x_t distancia tope y masa m_r del reductor.

mínima, la cual gráficamente se observa como un valle en la superficie esquematizada. Sin embargo, estos dos parámetros no provocan grandes cambios porcentuales en la fuerza vertical para el intervalo propuesto, donde se registra un aumento máximo de solo 8 % para el reductor cóncavo en la Fig. 6.10b (de 5,8kN a 6,25kN). Por último, las Figs. 6.10c y 6.11c muestran en conjunto cómo el valor máximo del desplazamiento admitido x_t y de la masa total del recolector afectan a la fuerza vertical máxima. En este caso, los valores de k_r y c_r son elegidos mediante el criterio de que para una velocidad de $v_0 = 5\text{m/s}$ el desplazamiento máximo sea aproximadamente de 1cm. De esta forma, se puede observar que cuando el tope del reductor es elegido de forma que sea menor a esta cantidad, el valor que adopte la masa m_r no tiene gran relevancia en la fuerza transmitida. Sin embargo, si el tope se encuentra más allá del máximo del desplazamiento máximo experimentado por el vehículo, entonces la fuerza tiende ligeramente a aumentar con la la masa. Finalmente, resulta importante destacar que estos parámetros tampoco afectaron significativamente los valores máximos de fuerza vertical, donde se registran variaciones máximas por debajo del 5 % para el reductor cóncavo en la Fig. 6.10c (de 6,1kN a 6,4kN).

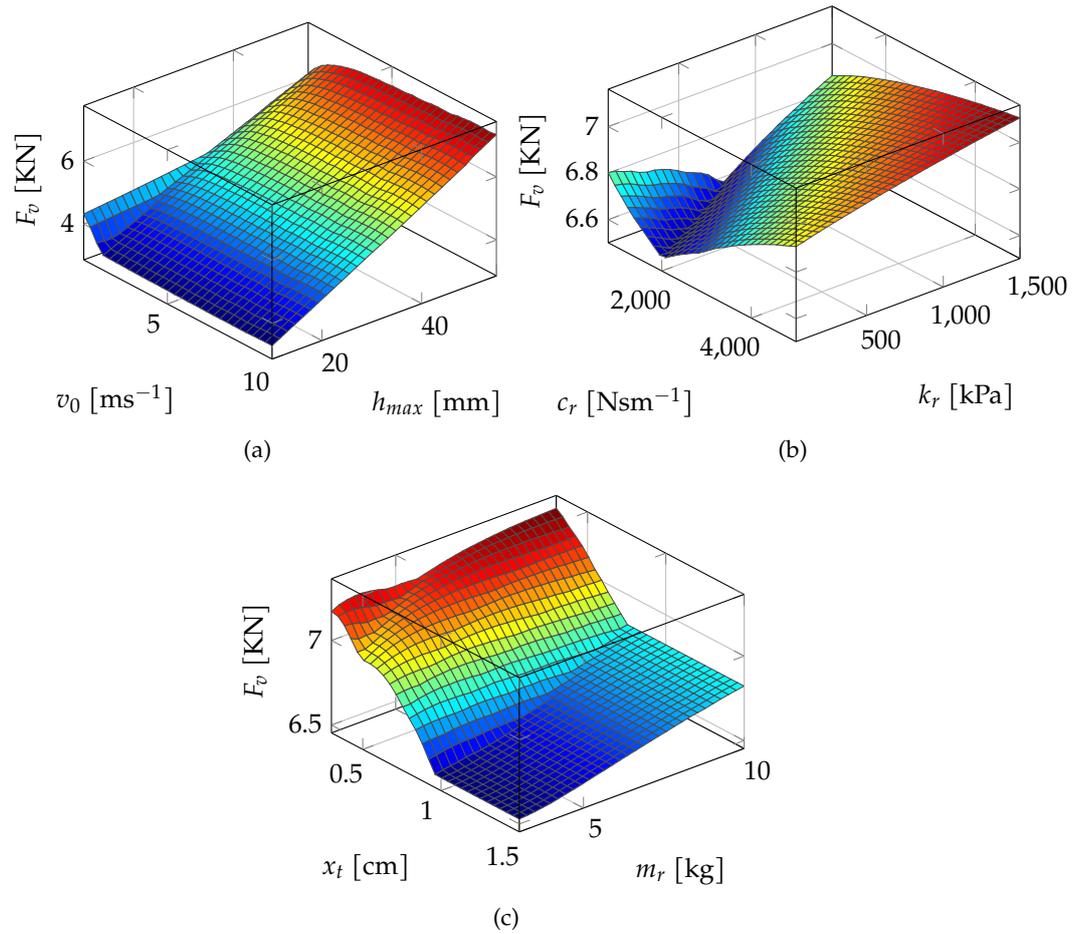


Figura 6.11: Influencia de los parámetros dinámicos del vehículo y del reductor en las fuerzas verticales máximas para el reductor tipo trapecoidal. (a) altura máxima del perfil h_{max} - velocidad v_0 , (b) amortiguamiento c_r - rigidez k_r del reductor; y (c) x_t distancia tope y masa m_r del reductor.

A lo largo del Capítulo 4 se presentó la formulación matemática del recolector de energía piezoeléctrico conformado por una viga bi-empotrada, en sus estados de pre- y pos-pandeo. Por otro lado, en el Capítulo 6 se desarrolló el modelo de interacción de un vehículo atravesando un reductor de velocidad. En este capítulo se analiza la interacción entre ambas partes con el fin de evaluar la factibilidad de recolectar energía proveniente del paso de un vehículo.

En procedimiento adoptado consiste en resolver el problema de manera desacoplada, es decir, resolver en una primera instancia la interacción vehículo-reductor sin considerar la presencia del recolector de energía piezoeléctrico. De esta manera, se desprecia la influencia del recolector de energía en la dinámica vehículo-pavimento, considerando que la masa involucrada por el reductor de velocidad es lo suficientemente grande comparada con la del recolector de energía. Aplicando esta hipótesis se obtiene la aceleración que sufre la masa del reductor de velocidad m_r mediante la derivación numérica de su velocidad, utilizando el método de diferencias finitas. Luego, se utiliza la aceleración calculada como la excitación de entrada al modelo matemático del piezoeléctrico, asumiendo que el recolector de energía se encuentra solidario a la masa del reductor de velocidad. La aceleración es incorporada a través de la función de excitación de base $g(t)$, tal como se observa en la Ec. 4.59 y las ecuaciones del movimiento son resueltas nuevamente por integración numérica acorde al método de Runge-Kutta de cuarto orden empleando la función `solve_ivp` de la librería de *SciPy* en *Python*.

La velocidad del reductor se obtiene de la integración numérica de las ecuaciones acopladas del vehículo-reductor.

7.1 CONSIDERACIONES SOBRE LA FORMA DE ONDA DE LA GENERACIÓN

A la hora de estudiar el rendimiento del recolector piezoeléctrico, se realizan algunas observaciones en lo que se refiere a la naturaleza de la excitación. A diferencia de lo estudiado en el Capítulo 5, en este caso la forzante dista de ser una componente armónica estacionaria en el tiempo. En la Figura 7.1a se muestra el comportamiento mencionado, donde se presenta la evolución temporal del desplazamiento del neumático, del cuerpo de vehículo y del reductor de velocidad para una simulación típica. De estas tres respuestas, la de mayor interés es la del «Reductor», debido a que se trata de la función de entrada $g(t)$ para el modelo piezoeléctrico. Se puede observar que la respuesta temporal posee una forma impulsiva, donde los picos de aceleración (derivada segunda del desplazamiento del reductor) corresponden a la situación en que el neumático alcanza y abandona el reductor. En la Figura 7.1b se grafica una respuesta típica de la salida de voltaje del recolector. Tal como se puede observar, la respuesta posee un comportamiento armónico decreciente en el tiempo causado por el amortiguamiento mecánico y eléctrico; donde los máximos de voltaje se encuentran en los instantes en que la rueda alcanza y abandona el reductor, para $t = 0$ y $t = 0,2s$ respectivamente.

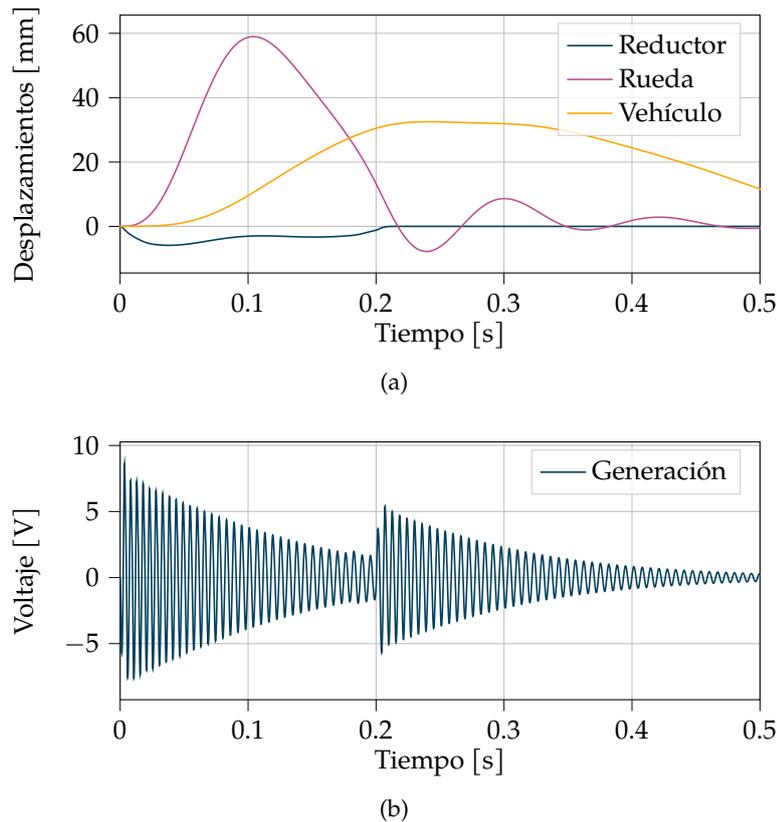


Figura 7.1: Respuestas temporales típicas para la REPP de los (a) Desplazamientos, y (b) Voltaje generado.

Por otra parte, debido sus características físicas, los dispositivos piezoeléctricos generan energía en forma de corriente alterna (CA). De esta manera, la señal de voltaje debe ser rectificadada y acondicionada para poder ser utilizada como fuente de alimentación en dispositivos electrónicos de baja potencia que utilizan corriente continua (CC) para su funcionamiento. Para llevar esto adelante, existen distintos circuitos eléctricos (basados en arreglos de diodos, capacitores y resistencias eléctricas), que realizan una determinada función en base a los requerimientos de potencia de la carga eléctrica:

- Rectificado (R): Consiste en colocar un puente rectificador de diodos entre el transductor piezoeléctrico y la carga eléctrica R a alimentar tal como se muestra en la Figura 7.2a. De esta manera, el puente consigue convertir la CA piezoeléctrica de la Figura 7.3a en crestas positivas «rizadas» como se muestra en la Figura 7.3b.
- Rectificado y filtrado (RF): En base al esquema anterior, se incorpora un capacitor en paralelo entre la resistencia eléctrica a alimentar y el puente rectificador (Figura 7.2b). La función del mismo es la de suavizar el efecto «rizado», logrando mantener valores constantes de generación como se observa en la Figura 7.3c.
- Rectificado, filtrado y almacenamiento (RFA): La opción más completa consiste en añadir un elemento en serie con la carga resistiva con el fin de acumular la energía (Figura 7.2c). En aplicaciones de REP, los elementos más utilizados para esta función son los supercapacitores, por sus ventajas frente a las baterías de litio. También se suelen emplear

Las ventajas asociadas a los supercapacitores radica en su densidad de energía, velocidad de carga, ciclos de vida útil y menor cantidad de elementos desechables, posibles contaminantes.

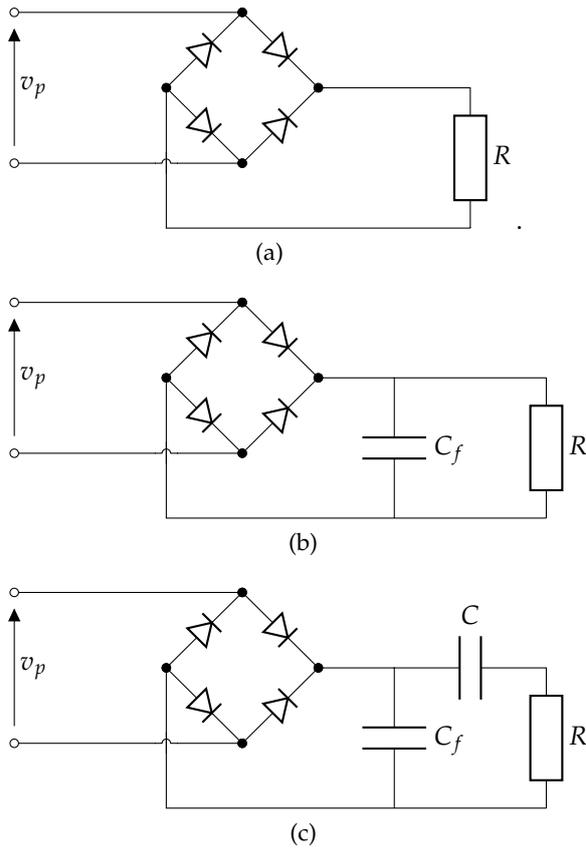


Figura 7.2: Esquemas de los circuitos eléctricos comúnmente acoplados a los materiales piezoeléctricos. (a) Rectificado, (b) Rectificado y filtrado, (c) Rectificado, filtrado y almacenamiento.

circuitos temporizadores con el fin de controlar los niveles de carga y descarga del capacitor, empleando modos de operación donde el circuito se encuentra desconectado o conectado (conocidos como *sleep mode* y *awake mode*) [150]

En todos los casos anteriores, el comportamiento real de los circuitos eléctricos puede ser complejo y no lineal, dependiendo de las características de los distintos elementos constituyentes. Para el análisis propuesto en esta tesis y con el fin de evaluar la cantidad de energía generada, se asume un circuito eléctrico con un puente de diodos como el de la Figura 7.2a, el cual presenta una forma de onda como la de la Figura 7.3b. Adicionalmente, se asume la hipótesis de *diodos ideales*, lo que implica que los mismos se comportan como conductores perfectos (sin caída de tensión) en la dirección de funcionamiento y como aislantes perfectos en los casos donde se invierte la polarización. Además, en los diodos ideales se asumen nulos: el voltaje de umbral, la resistencia interna y la corriente de fuga, así como un valor infinito del voltaje de ruptura. Con el fin de evaluar el rendimiento en la REPP, se elijen tres variables diferentes:

- Voltaje máximo (v_{max}): Como se mencionó previamente, la forma de onda es armónica y decreciente en el tiempo. Por ello, una de las primeras variables a identificar resulta ser el pico de voltaje. Debido a la dependencia de la dirección de la polarización del material piezoeléctrico, el pico máximo podría ser negativo. Sin embargo, esto no resulta posible si se tiene en cuenta que se verifica que $v(t) \geq 0 \forall t$ producto de la presencia

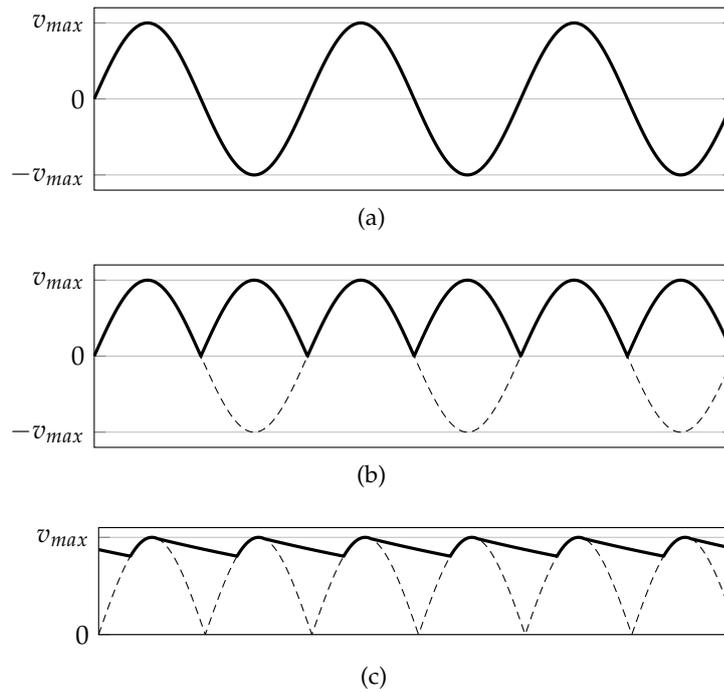


Figura 7.3: Formas de onda (a) Generación, (b) Rectificado, (c) Rectificado y filtrado

del puente de diodos (véase Fig. 7.2a). Por lo tanto, el valor de voltaje máximo puede ser obtenido como

$$v_{max} = \text{máx} [|v(t)|]. \quad (7.1)$$

- Potencia máxima (p_{max}): En los dispositivos empleados para la REP, existe un valor de resistencia eléctrica R que maximiza la generación, dependiendo de la frecuencia de excitación Ω y la capacidad del material piezoeléctrico C_p [165, 276]. Dicho fenómeno se denomina *teorema de máxima transferencia potencia* e implica en este caso que la impedancia de salida del piezoeléctrico y de la carga deban ser iguales. Debido a esto, el pico de potencia resulta una variable interesante a ser estudiada calculada mediante la siguiente expresión

$$p_{max} = \frac{v_{max}^2}{R}. \quad (7.2)$$

- Energía total transferida a la resistencia eléctrica (E_p): A pesar de la utilidad de las variables anteriores, las mismas representan cantidades instantáneas sin aportar información global de la evolución temporal del voltaje. Este procedimiento puede resultar inexacto cuando, por ejemplo, se desea comparar dos recuperadores de energía piezoeléctricos, donde uno tenga un pico de generación mayor al otro pero su onda decae rápidamente. Por este motivo, estudiar la energía total disipada en la resistencia eléctrica resulta una idea útil y atractiva, dado que se trata de una cantidad integral respecto al tiempo que da una idea global de la energía recuperada

$$E_p = \int_{t_0}^{t_f} v i dt = \int_{t_0}^{t_f} \frac{v^2}{R} dt. \quad (7.3)$$

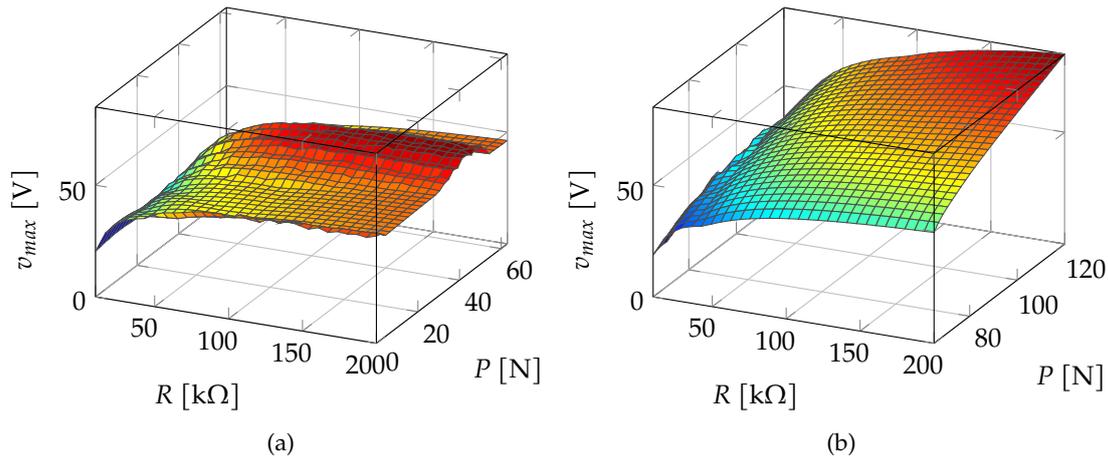


Figura 7.4: Estudio paramétrico $P - R$ del pico de voltaje. Reductor tipo trapezoidal. Estados de (a) pre-pandeo y (b) pos-pandeo. ($v_0 = 5\text{m/s}$).

7.2 ESTUDIOS NUMÉRICOS

Con el fin de llevar a cabo los distintos estudios numéricos, se deben elegir los valores de los parámetros del modelo. En lo referido al recolector, se consideran las dimensiones geométricas dadas por la Muestra 2 del Cuadro 5.1, que consiste en un parche piezoeléctrico MFC 8507 adosado a una portante de acero de un largo total de 114,5mm. La razón de la elección de esta muestra por sobre la Muestra 1 (que posee un parche MFC 2814), está basada en la mayor área cubierta por el material piezoeléctrico, que resulta en mayores niveles de generación. Por otro lado, los valores asociados al vehículo y al perfil del reductor de velocidad se pueden encontrar en el Cuadro 6.2. En este caso, los estudios se basan en el reductor del tipo «trapezoidal» debido a que, comparado con el «cóncavo», presenta la ventaja de desarrollar fuerzas menos dependientes de los parámetros del vehículo, tal como fue observado en el Capítulo anterior (véase Figs. 6.7 y 6.8). Por otro lado, en lo referido al modelo del neumático, se asume el modelo de contacto de huella constante en todas las simulaciones.

Considerando el dispositivo propuesto en esa tesis, uno de los primeros interrogantes que emerge de manera natural, es saber si existe algún valor de carga axial P que maximice la generación de energía. Por ello, se adopta en primera instancia un estudio paramétrico donde se varían simultáneamente los valores de P y de la resistencia eléctrica del circuito, R . La razón de variar estos parámetros en simultáneo radica en el hecho de que la carga axial P posee la capacidad de alterar la rigidez transversal de la viga y por ello su frecuencia natural (véase Fig. 5.11), mientras que R regula la máxima transferencia de energía. Además, estos dos parámetros son los únicos que no dependen ni de la geometría ni de las relaciones constitutivas de los materiales en el modelo matemático. Los intervalos elegidos para estos parámetros van desde $P = 0$ a 63N y $P = 65\text{N}$ a 120N, (con 30 muestras para cada intervalo) para los estados de pre- y pos-pandeo, respectivamente, mientras que R es variado entre 10 y 200kΩ (tomando 30 muestras) en ambos casos, totalizando un total de 1800 combinaciones. Respecto a la excitación dada por el vehículo, se asume en este primer estudio que la velocidad del vehículo se mantiene constante en 5m/s o 18km/h , un valor típico al atravesar un reductor de velocidad.

El área cubierta por el parche MFC 8507 es aproximadamente un 50 % más respecto al MFC 2814.

El valor de carga crítica de pandeo se situó en $P_{crit} = 64\text{N}$ para la muestra 2, aproximadamente

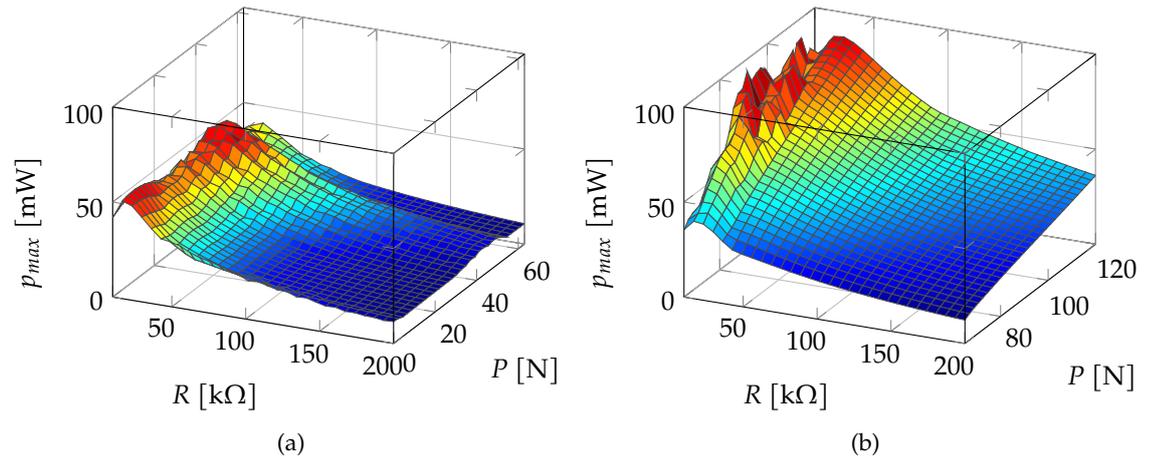


Figura 7.5: Estudio paramétrico $P - R$ del pico de potencia. Reductor tipo trapecoidal. Estados de (a) pre-pandeo y (b) pos-pandeo. ($v_{v0} = 5m/s$).

En las Figs. 7.4, 7.5 y 7.6 se muestra el primer estudio paramétrico $P - R$, correspondiente a los resultados del pico de voltaje, pico de potencia y de energía total transferida a la resistencia eléctrica, respectivamente. Comenzando con el pico de voltaje generado, la Figura 7.4a muestra los valores numéricos obtenidos para el estado de pre-pandeo mientras la Figura 7.4b los de pos-pandeo. Como era de esperar, en ambos casos el valor de resistencia eléctrica R juega un rol primordial en los valores de voltaje, resultando en valores más altos a medida que la resistencia aumenta. Respecto a la carga axial P , los resultados demuestran que durante el estado de pos-pandeo el voltaje generado aumenta a medida que la fuerza es mayor, donde por ejemplo, para una resistencia de 200k Ω el pico de voltaje máximo crece de aproximadamente 50 a 85V cuando la carga axial aumenta desde 65 a 120N. En contrapartida, este fenómeno, no es tan apreciable para el estado de pre-pandeo, donde los valores de pico de voltaje se mantienen prácticamente inalterados a medida que varía P , excepto por un intervalo comprendido entre los 35 y 45N donde se registran valores ligeramente superiores. Por otro lado, comparando ambos estados entre sí, resulta claro que los valores de voltaje asociados al estado de pos-pandeo son claramente mayores para todo el espacio de parámetros, excepto para el caso de R en el límite inferior de los valores considerados $R = 10k\Omega$.

Los valores pico de potencia, se muestran en la Figura 7.5. Al igual que en el caso anterior, el estado de pos-pandeo, que presenta valores picos de 100mW (Fig. 7.5b) sobrepasando de manera global al recolector en el estado de pre-pandeo, cuyo valor pico máximo considerando todo el rango de parámetros es ligeramente superior a los 50mW (Fig. 7.5a). Además, se encuentra una tendencia similar al caso anterior, donde en el estado de pos-pandeo hay una importante variación de los valores picos a medida que aumenta P , fenómeno no tan significativa para el estado de pre-pandeo. Por otro lado, puede notarse como para ambos estados el pico de potencia corresponde a un valor de R de aproximadamente 25k Ω , el cual se mantiene constante pese a la variación de la frecuencia natural dependiente de P para cada caso. Como se mencionó anteriormente, para este es un valor óptimo de R en el cual ocurre el fenómeno de máxima transferencia de potencia del piezoeléctrico a la carga (resistencia eléctrica).

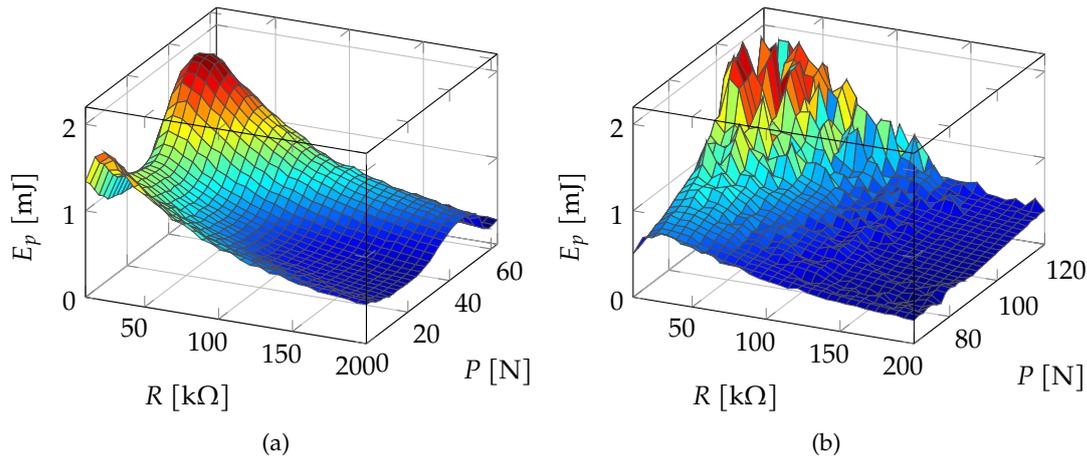


Figura 7.6: Estudio paramétrico $P - R$ de la energía transferida. Reductor tipo trapecoidal. Estados de (a) pre-pandeo y (b) pos-pandeo. ($v_0 = 5^m/s$).

Por último, se presenta en la Figura 7.6 el estudio de la energía total transferida a la resistencia eléctrica para el mismo estudio paramétrico $P - R$. Esta variable resulta una de las más interesantes para comparar el rendimiento de los distintos estados del recolector, producto de que no solo depende de los valores máximos de la onda (los cuales se desarrollan en un determinado instante), sino que también de su decaimiento en el tiempo, incluso después de que la fuerza vertical es removida. Comparando globalmente los resultados asociados a ambos estados, se presentan valores máximos de aproximadamente 1,8mJ para ambas muestras. Al igual que en el estudio de pico de potencia, la máxima generación se encuentra en el mismo valor de aproximadamente $R = 25k\Omega$. Esto resulta lógico, debido a que este valor depende de la capacitancia C_p del material piezoeléctrico así como de la frecuencia de excitación, determinada por la velocidad del vehículo, la cuales permanecen inalteradas en todo el espacio de parámetros. En lo referido a los valores de carga axial para la cual se presenta la máxima energía, los mismos fueron localizados para aproximadamente $P = 45N$ y $P = 105N$ para los estados de pre- como pos-pandeo, respectivamente. Con esas cargas las frecuencias naturales son de aproximadamente $f_n = 91Hz$ y $f_n = 141Hz$ para los estados de pre- como pos-pandeo, respectivamente.

Una vez definidos los valores que maximizan la generación de energía para la velocidad propuesta ($v_0 = 5^m/s$), se procede a analizar la influencia de la velocidad del vehículo circulante, la cual varía en función del estilo de conducción del conductor. Manteniendo el valor de las cargas axiales P en los valores que maximizan la energía, se varía la velocidad del vehículo v_0 en un intervalo comprendido entre 2 y $10^m/s$ que corresponde a valores de entre 7 y $36^{km/h}$. De esta forma, se realiza el estudio paramétrico $v_0 - R$ de las mismas variables asociadas al pico de generación, pico de potencia y energía total transferida a la resistencia eléctrica en las Figs. 7.7, 7.8 y 7.9, respectivamente. Respecto a la variable R , es elegida en el rango de valores de 10 a $200k\Omega$ debido a su gran influencia en las variables eléctricas (v_{max} , p_{max} y E_p), como ha sido mostrado anteriormente.

Comenzando nuevamente el análisis de los picos de voltaje, las Figs. 7.7a y 7.7b muestran los resultados para los estados de pre- y pos-pandeo elegidos. Al igual que en el estudio paramétrico anterior, los voltajes picos identificados

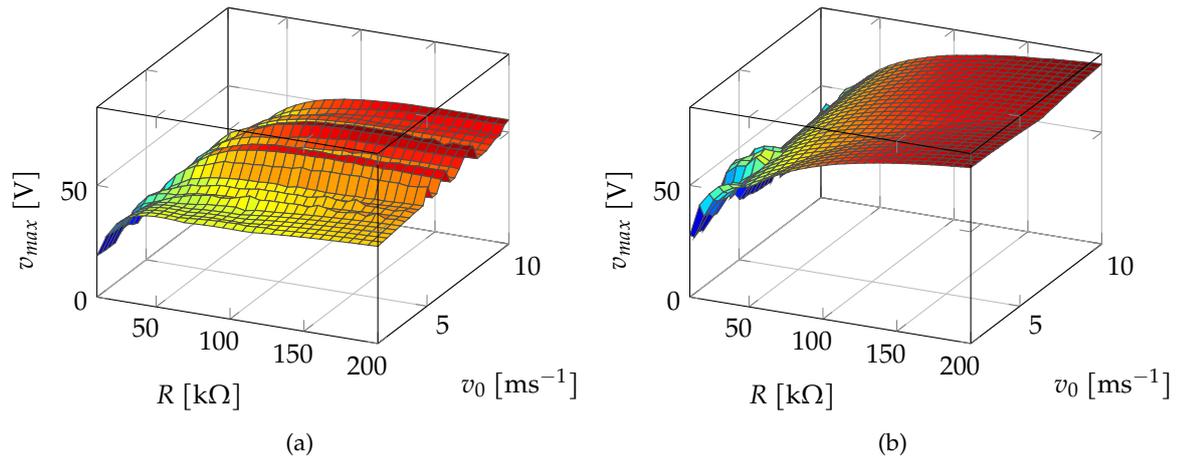


Figura 7.7: Estudio paramétrico $v_0 - R$ del pico de voltaje. Reductor tipo trapecoidal. Estados de (a) pre-pandeo con $P = 45\text{N}$ y (b) pos-pandeo con $P = 105\text{N}$.

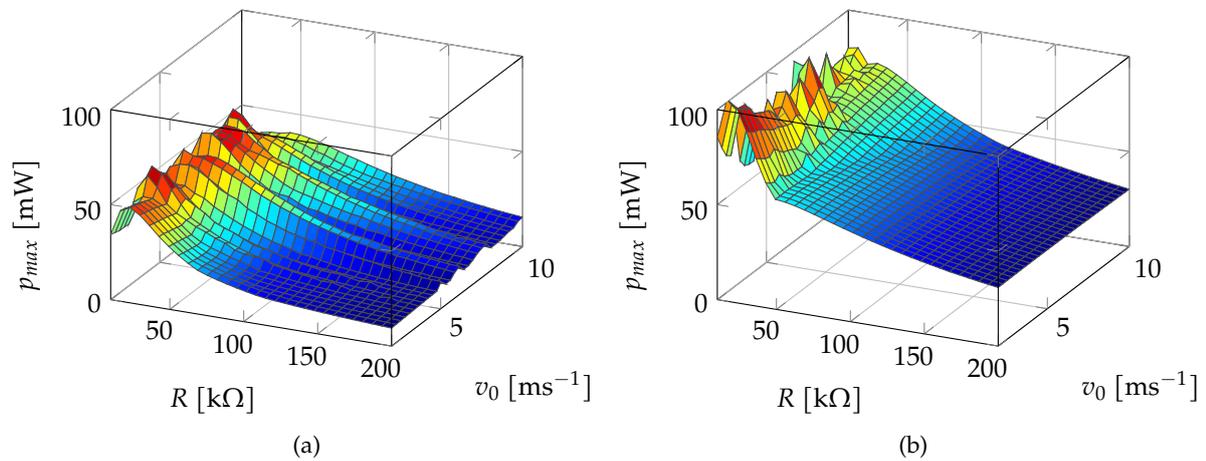


Figura 7.8: Estudio paramétrico $v_0 - R$ del pico de potencia. Reductor tipo trapecoidal. Estados de (a) pre-pandeo con $P = 45\text{N}$ y (b) pos-pandeo con $P = 105\text{N}$.

para el estado de pos-pandeo son claramente mayores; registrándose valores máximos de 85V frente a los 50V asociados al estado de pre-pandeo para una resistencia y velocidad de 200kΩ y 10m/s, respectivamente. Comparado con el barrido paramétrico $P - R$, es posible evaluar la influencia de la velocidad del vehículo v_0 en la generación. Como es posible observar, en las Figs. 7.7a y 7.7b, la velocidad a la que el vehículo atraviesa el reductor de velocidad no afecta significativamente al pico de generación para ninguno de los dos estados. Esto puede ser atribuido a lo observado en el capítulo anterior, donde los valores de fuerza vertical máxima F_v no son afectados significativamente para este reductor a medida que varía la velocidad (véase Fig. 6.8). Sin embargo, se observa una serie de oscilaciones que presentan valores máximos y mínimos relativos, lo cual podría deberse a un fenómeno resonante entre la excitación provocada por el paso del vehículo y las las frecuencias naturales del reductor y del recolector piezoeléctrico.

En el análisis de pico de potencia las Figs. 7.8a y 7.8b muestran los resultados en pre- y pos-pandeo, respectivamente. De igual forma que en el análisis anterior, los valores máximos de picos de potencia corresponden al estado de pos-pandeo siendo alrededor de los 100mW frente a los 50mW del estado

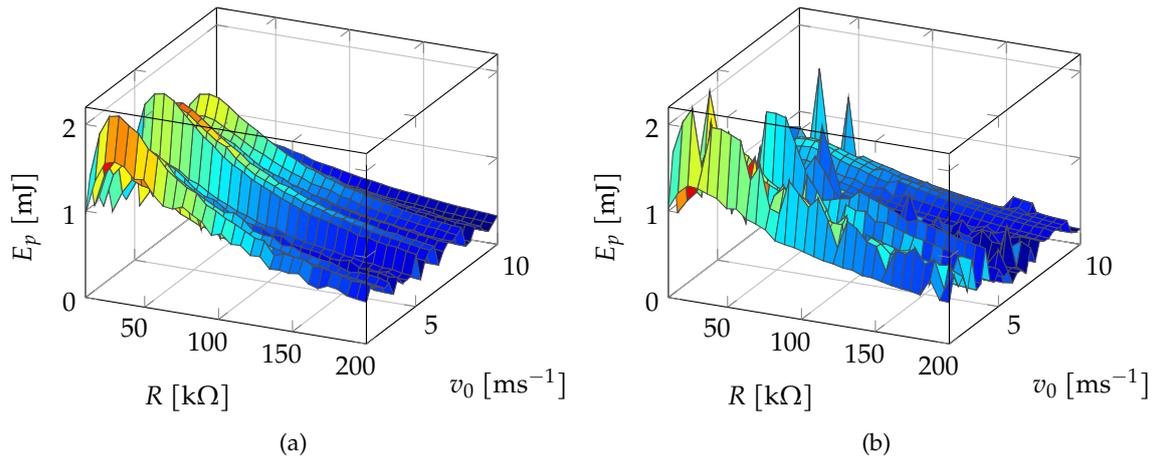


Figura 7.9: Estudio paramétrico $v_0 - R$ de la energía transferida. Reductor tipo trapecoidal. Estados de (a) pre-pandeo con $P = 45\text{N}$ y (b) pos-pandeo con $P = 105\text{N}$.

de pre-pandeo. Aún mas, los valores picos de generación se encuentran una vez más en un valor de resistencia óptima R de aproximadamente $25\text{k}\Omega$, independientemente de la velocidad v_0 . De esta manera, pese a las pequeñas oscilaciones en los valores respecto a la velocidad v_0 , (tal como fue observado con el voltaje), no se observa una gran influencia de la velocidad del vehículo sobre los valores picos de potencia para los casos analizados.

El último análisis corresponde a la energía total disipada en la resistencia eléctrica del estudio paramétrico $v_0 - R$, el cual es presentado en las Figs. 7.9a y 7.9b para los estados de pre- como pos-pandeo, respectivamente. Como se había mencionado previamente, esta variable es particularmente atractiva para analizar el rendimiento de ambos estados del dispositivo. Comenzando con el estado de pre-pandeo (Fig. 7.9a), se observa una alta dependencia del valor de la resistencia eléctrica en la cantidad máxima de energía, donde se identifica nuevamente un valor óptimo de aproximadamente de $R = 25\text{k}\Omega$. Respecto a la variación con la velocidad del vehículo v_0 , los valores de energía total crecen y decrecen con mínimos y máximos locales tal como se había observado en las variables del pico de voltaje y potencia. Por otro lado, estas mismas tendencias son observadas para el estado de pos-pandeo, pero de manera más desordenada (Fig. 7.9b), donde pese a que los valores de velocidad que maximizan la generación son diferentes al estado de pre-pandeo, se observa también una superficie ondulada con máximos en aproximadamente $R = 25\text{k}\Omega$. En comparación con la respuesta del estado de pre-pandeo, resulta importante remarcar lo «errático» que parece ser la superficie en pos-pandeo, lo cual puede ser atribuible a la influencia de la configuración pre-deformada de la estructura, lo cual se traduce en una respuesta dinámica del recolector más compleja y sensible producto de la mayor cantidad de términos asociados a las ecuaciones del movimiento en este estado (véase Ecs. 4.110 y 4.111)

Con el propósito de estudiar con mayor profundidad la energía transferida en ambos estados, la Fig. 7.10a presenta la variación de energía en función de la velocidad del vehículo v_0 para $R = 25\text{k}\Omega$ (valor aproximado para la máxima transferencia de energía). En la Figura, se aprecia el comportamiento «errático» de la dependencia de la velocidad, donde no se observa ningún tipo de tendencia creciente o decreciente para el rango de valores propuestos. Por otro lado,

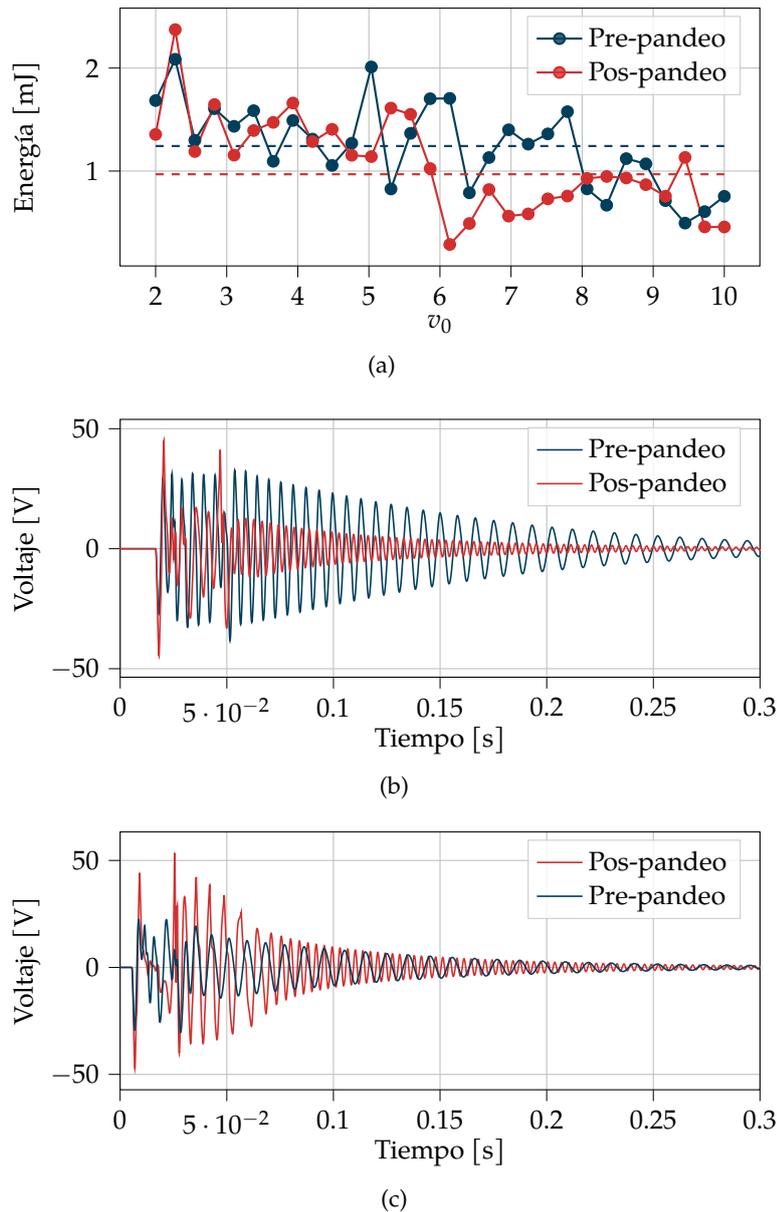


Figura 7.10: Comparativas del rendimiento de los recolectores de energía óptimos en regímenes de pre- ($P = 45\text{N}$) y pos-pandeo ($P = 105\text{N}, R = 25\text{k}\Omega$): (a) Energía total en función de la velocidad; y formas de onda para (b) $v_0 = 6\text{m/s}$ y (c) $v_0 = 9\text{m/s}$.

se trazan en dos líneas punteadas el valor promedio de energía total respecto a la velocidad v_0 . Como se puede notar, el estado de pre-pandeo constituye un valor medio más alto, el cual se sitúa en 1,24mJ frente a los 0,97mJ asociados al estado de pos-pandeo, implicando una mejora de 21 %. Con el propósito de entender este comportamiento, las Figs. 7.10b y 7.10c muestran las respuestas temporales del voltaje para ambos estados considerando valores de velocidad de 6 y 9m/s, respectivamente. Los valores de velocidad son elegidos debido a que representan casos antagónicos, donde en un caso el estado de pre-pandeo genera más energía mientras que en el otro el de pos-pandeo. Comenzando con la Fig. 7.10b, donde la energía en el estado de pre-pandeo es superior, puede observarse como dos picos de generación de aproximadamente 45V son alcanzados primero por el recolector en pos-pandeo frente a los de aproximadamente 35V del estado de pre-pandeo, lo cual se encuentra en concordancia

con lo observado en los estudios paramétricos presentados en la Fig. 7.7. Estos valores máximos están vinculados a la «entrada» y «salida» de la rueda, que producen los valores de aceleración máximos debido a los cambios abruptos de la evolución temporal del desplazamiento. Una vez que la rueda abandona el reductor, comienza el periodo de oscilación libre donde la onda decrece gradualmente. En este caso, la amplitud inicial del modelo de pre-pandeo es claramente mayor, atributo que afecta positivamente a la energía total generada (debido a la notable mayor área -y por ende mayor energía- que cubre la forma de onda respecto con el eje horizontal). Por otra parte, analizando el periodo de vibraciones libres, puede notarse cómo el periodo de la señal de voltaje en pos-pandeo es claramente menor a la de pre-pandeo, debido a su mayor valor de frecuencia natural con los valores de carga axial asumidos ($f_n = 91\text{Hz}$ y $f_n = 141\text{Hz}$).

En el caso de la Fig. 7.10c se incrementa la velocidad a 9m/s . Como primer aspecto distintivo se observa que los picos máximos asociados a la «entrada» y «salida» de la rueda al reductor se dan en un intervalo temporal menor, tal como era de esperarse debido a la mayor velocidad del vehículo. Al igual que en el caso anterior, el recolector en el estado de pos-pandeo alcanza valores mayores de pico de voltaje. Sin embargo, la diferencia con el caso anterior se encuentra en la amplitud inicial asociada al periodo de vibraciones libres, la cual en este caso es mayor para el estado de pos-pandeo, afectando positivamente al área bajo la curva.

En lo referido al decrecimiento de la amplitud de voltaje, se distinguen dos zonas limitadas, antes y después de $t = 0,1\text{s}$. Es posible observar en la Fig. 7.10c, una mayor amplitud de generación para el estado de pos-pandeo antes de $t = 0,1\text{s}$; sin embargo, su tasa de decrecimiento fue considerablemente mayor en comparación con el estado de pre-pandeo, provocando que ambas amplitudes sean prácticamente iguales al llegar a $t = 0,1\text{s}$. Estas diferencias en las tasas de decrecimiento, son debidas a la presencia del amortiguamiento cuadrático, el cual tiene mayor predominancia con altas amplitudes. A partir del valor $t = 0,1\text{s}$, se nota cómo los voltajes de ambos estados decrecen prácticamente al mismo ritmo. Esto es debido al menor valor de amplitud, por lo que la contribución del amortiguamiento cuadrático es claramente menor. En función a estas observaciones, resulta importante notar que no se aprecia la influencia del amortiguamiento cuadrático en la Fig. 7.10b, donde la amplitud correspondiente al caso de pre-pandeo decrece lentamente. De esta manera, se puede afirmar que el amortiguamiento cuadrático afecta en mayor medida al modelo de pos-pandeo. Esto puede deberse a que, tal como se mencionó al comienzo del Cap. 5, el amortiguamiento modal no lineal ζ_{ni} se mantuvo constante; sin embargo, el amortiguamiento que experimenta el dispositivo dependerá del parámetro μ_{3i} el cual además depende de la frecuencia natural y forma modal (véase Ec. 4.110). Este comportamiento fue observado para otras velocidades del vehículo, sin embargo los resultados no son presentadas en la tesis para no extender el volumen de la misma.

En base a todo lo aquí expuesto, resulta adecuado pensar el que el recolector sometido al estado de pre-pandeo resulta más atractivo para este tipo de excitación.

El decrecimiento no es logarítmico debido a que el modelo cuenta con amortiguamiento cuadrático.

CONCLUSIONES

En la presente tesis, se estudió la posibilidad de recolectar la energía disipada en pavimentos, o más específicamente en reductores de velocidad, proveniente de la circulación de un vehículo e implementando la transducción piezoeléctrica. El estudio se realizó sobre un dispositivo conformado por una portante bi-empotrada con un parche piezoeléctrico pegado a la misma y sometida a una carga axial estática en uno de sus extremos, la cual permitía variar la rigidez transversal de la viga y por lo tanto su frecuencia natural. Durante el desarrollo de este trabajo, se alcanzaron una serie de contribuciones y conclusiones significativas, las cuales se detallan y resumen a continuación.

Comenzando con la formulación matemática del recolector, se desarrolló un complejo modelo electromecánico no lineal del acoplamiento piezoeléctrico empleando la teoría de vigas Bernoulli-Euler. Entre los aspectos destacados del modelo se puede mencionar: primero, un campo de desplazamiento y de deformaciones no lineal, dando así lugar a efectos inerciales y de rigidez geométrica no lineales. Segundo, la inclusión de otras fuentes de no linealidad como el amortiguamiento cuadrático y constitutivas no lineales para el material piezoeléctrico. De esta forma, en base al análisis del estado del arte, esta fue la primera vez que se consideran todas estas fuentes de no linealidad para el análisis de recolección de energía. En lo referido a las ecuaciones diferenciales electrodinámicas, las mismas fueron obtenidas siguiendo una formulación Lagrangiana y luego discretizadas para una cantidad genérica de modos siguiendo el método de Galerkin o de descomposición modal. Además, se consideró a la carga axial mayor a la carga crítica de pandeo; en consecuencia, también fue estudiado el estado de pos-pandeo, para lo que debió obtenerse la solución al problema de pandeo estático no lineal.

En otro aspecto, durante el desarrollo de la formulación matemática también se contempló por primera vez la inclusión de una condición de borde no ideal para un transductor piezoeléctrico cargado axialmente. Dicha condición, asumida como elástica, fue capaz de actuar como caso intermedio entre los dos casos extremos comúnmente encontrados en la literatura, donde los desplazamientos axiales son totalmente o nulamente restringidos. Este aspecto es de suma importancia debido a que en la realidad cualquiera de estas dos situaciones ideales son difícil de encontrar. Dicha condición de borde demostró poseer un carácter extremadamente relevante, sobretodo en la forma de la función de respuesta en frecuencia del recolector de energía.

Adicionalmente, las expresiones más relevantes obtenidas por la presente formulación matemática fueron verificadas experimentalmente considerando distintos ensayos y contemplando distintas muestras y configuraciones del recolector. De esta forma, la verificación se realizó para un amplio espectro de parámetros. En lo referido a las no-linealidades asumidas al modelo, las mismas demostraron tener un rol primordial en la respuesta dinámica tanto para los estados de pre- como pos-pandeo, y el no considerarlas puede arrojar resultados alejados de los experimentales. Además, la determinación analítica de la configuración pre-deformada jugó un papel clave en el estado de pos-pandeo, pues de ella depende gran cantidad de parámetros modales

asociados a este estado. En base a los resultados, se demostró la existencia de imperfecciones, la cual significó ligeras desviaciones entre los resultados teóricos y experimentales cuando la carga axial se encuentra próxima a la carga crítica, afectando la configuración pre-deformada asociada al problema de pandeo lateral.

Considerando las ecuaciones unimodales, se empleó el Método de Escalas Múltiples (MEM) para obtener la solución al problema del acoplamiento piezoeléctrico tanto para el estado de pre- como pos-pandeo y asumiendo excitaciones de base armónicas. Como aspecto destacado del método de reducción empleado, la inclusión del efecto piezoeléctrico representa un avance en la formulación matemática de dispositivos de esta índole dado que, si bien el MEM ya había sido empleado para dar solución a la dinámica de pos-pandeo de vigas [242], el efecto piezoeléctrico no había sido incluido. La solución obtenida fue comparada con resultados experimentales y numéricos (donde las ecuaciones del movimiento fueron integradas empleando el método de Runge-Kutta), mostrando un excelente acuerdo en ambos casos. Por lo tanto, el Método de Escalas Múltiples (MEM) demostró ser una herramienta de gran utilidad para el estudio de la dinámica del dispositivo excitado armónicamente.

Por otro lado, también se desarrolló un modelo de la interacción vehículo-pavimento considerando distintos modelos de vehículo, de perfiles de reductor y un modelo de neumático de parche de contacto constante. De esta forma, se logró simular la dinámica acoplada de un vehículo atravesando un reductor de velocidad con un grado de libertad vertical. Por consiguiente, se obtuvo la excitación a la cual es sometida la viga piezoeléctrica y se estudió su dinámica empleando soluciones basadas en el método de Runge-Kutta. Como conclusión, se probó que el modelo de vehículo más sencillo, considerando dos grados de libertad resultaba suficiente para predecir la interacción vehículo-pavimento. Además, se encontró que los parámetros de rigidez del neumático, así como el tipo y altura de perfil son los que más afectan de manera porcentual a las fuerzas verticales desarrolladas por el vehículo al atravesar un reductor de velocidad.

En base a las predicciones numéricas, acoplando los modelos del recolector y de la interacción vehículo-pavimento y considerando circuitos eléctricos ideales, se concluyó que es posible recuperar un promedio de aproximadamente 1mJ por el pasar de un solo vehículo para condiciones de carga axial P y resistencia eléctrica elegidos apropiadamente, tanto en los regímenes de pre- como pos-pandeo. Además de la exhaustiva comparación para ambos estados, se determinó que el dispositivo en el estado de pre-pandeo muestra ser una mejor alternativa para la aplicación propuesta.

Por último, uno de los objetivos propuestos para la presente tesis, trata sobre la utilización de materiales piezoeléctricos de origen nacional libres de plomo fabricados por INTEMA para la recolección de energía. Entre los distintos sistemas posibles los del tipo BNKT y KNL-NTS fueron comparados experimentalmente frente al PZT donde se observó un rendimiento inferior en comparación con los PZT comerciales. Sin embargo, el desarrollo de estos materiales resulta prometedor y atractivo debido a su principal ventaja asociadas a la no toxicidad durante su proceso de fabricación.

TRABAJOS FUTUROS

Considerando lo expuesto en esta tesis, se presentan algunos trabajos a futuro :

- Considerar la presencia de imperfecciones en la formulación matemática con el fin de dar un tratamiento más preciso al problema de inestabilidad elástica o pandeo lateral.
- Incluir la influencia del circuito eléctrico con el propósito de estudiar el rendimiento del recolector, incluyendo la presencia del puente rectificador (con diodos no ideales), así como los capacitores de filtrado y almacenamiento y temporizador.
- Explorar la implementación de otros tipos de actuadores piezoeléctricos basados en tensión como ser: *piezocomposites*, *piezostacks*, *bridge* y/o *cymbal*.
- Implementar mediciones en campo y controladas de las fuerzas verticales del vehículo así como de la generación de voltaje para el dispositivo propuesto con el fin de validar el modelo en entornos reales.

PUBLICACIONES REALIZADAS

Durante el transcurso de los estudios presentados, diversas publicaciones surgieron tal como se detallan a continuación:

En congresos nacionales

- [1] SM Osinaga, M Febbo y SP Machado. «Influencia de la Carga Axial en Recolectores Piezoeléctricos No Lineales». En: *Mecánica Computacional* 37.43 (2019), págs. 1733-1746.
- [2] Mariano Febbo, Sebastián P Machado y Santiago M Osinaga. «Recolectores Piezoeléctricos para Transferencia Óptima de Energía a Baja Impedancia». En: *Mecánica Computacional* 37.44 (2019), págs. 1789-1789.
- [3] SM Osinaga, M Febbo, SP Machado, L Ramajo y MS Castro. «Comparación de Diferentes Morfologías de Pastillas Piezoeléctricas de Origen Nacional para la Cosecha de Energía de Vibraciones». En: *Mecánica Computacional* 36.42 (2018), págs. 1935-1947.
- [4] SM Osinaga, M Febbo, SP Machado, J Camargo, A Prado Espinosa, F Rubio Marcos, L Ramajo y MS Castro. «Modelado y caracterización de cerámicos piezoeléctricos para la recolección de energía en sistemas vibrantes». En: *Mecánica Computacional* 35.25 (2017), págs. 1379-1390.

En revistas internacionales

- [1] SM Osinaga, SP Machado y M Febbo. «On the role of nonlinear piezoelectric constitutive parameters in the dynamic response of clamped–clamped axially loaded beams». En: *Energy Conversion and Management* 268 (2022), pág. 116028. ISSN: 0196-8904. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.enconman.2022.116028>.

- [2] SM Osinaga, SP Machado y M Febbo. «An analytical model of the electromechanical coupling for a piezoelectric stepped buckled beam for energy harvesting applications». En: *Mechanical Systems and Signal Processing* 179 (2022), pág. 109355. ISSN: 0888-3270. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ymsp.2022.109355>.
- [3] SM Osinaga, M Febbo y SP Machado. «Effect of elastic restraints in the modeling of prestressed piezoelectric energy harvesters». En: *Applied Mathematical Modelling* 101 (2022), págs. 573-585. DOI: [10.1016/j.apm.2021.09.010](https://doi.org/10.1016/j.apm.2021.09.010).
- [4] J Camargo, SM Osinaga, M Febbo, SP Machado, F Rubio-Marcos, L Ramajo y MS Castro. «Piezoelectric and structural properties of bismuth sodium potassium titanate lead-free ceramics for energy harvesting». En: *Journal of Materials Science: Materials in Electronics* (2021). DOI: [10.1007/s10854-021-06430-3](https://doi.org/10.1007/s10854-021-06430-3).
- [5] M Difeo, SM Osinaga, M Febbo, SP Machado, MS Castro y L Ramajo. «Influence of the $(\text{Bi}_{0,5}\text{Na}_{0,5})\text{TiO}_3 - \text{BaTiO}_3$ lead-free piezoceramic geometries on the power generation of energy harvesting devices». En: *Ceramics International* (2020). DOI: [10.1016/j.ceramint.2020.12.184](https://doi.org/10.1016/j.ceramint.2020.12.184).
- [6] SP Machado, M Febbo, CD Gatti y SM Osinaga. «A piezoelectric beam model with geometric, material and damping nonlinearities for energy harvesting». En: *Smart Materials and Structures* 29.9 (2020), pág. 095009. DOI: [10.1088/1361-665X/ab9ddb](https://doi.org/10.1088/1361-665X/ab9ddb).

BIBLIOGRAFÍA

- [1] Shashank Priya y Daniel J Inman. *Energy harvesting technologies*. Vol. 21. Springer, 2009, pág. 524. DOI: [10.1007/978-0-387-76464-1](https://doi.org/10.1007/978-0-387-76464-1) (vid. págs. 23, 36).
- [2] Tom J Kazmierski y Steve Beeby. *Energy harvesting systems*. Springer, 2011. DOI: [0.1007/978-1-4419-7566-9](https://doi.org/10.1007/978-1-4419-7566-9) (vid. pág. 23).
- [3] Alireza Khaligh y Omer C Onar. *Energy harvesting: solar, wind, and ocean energy conversion systems*. CRC press, 2017 (vid. pág. 23).
- [4] Oliver Brand, Gary K Fedder, Christofer Hierold, Jan G Korvink y Osamu Tabata. *Micro energy harvesting*. John Wiley & Sons, 2015. ISBN: 978-3-527-31902-2 (vid. pág. 23).
- [5] Francisco Duarte y Adelino Ferreira. «Energy harvesting on road pavements: state of the art». En: *Proceedings of the Institution of Civil Engineers-Energy* 169.2 (2016), págs. 79-90. DOI: [10.1680/jener.15.00005](https://doi.org/10.1680/jener.15.00005) (vid. págs. 23, 41, 45, 55).
- [6] T-B Xu. «Energy harvesting using piezoelectric materials in aerospace structures». En: *Structural Health Monitoring (SHM) in Aerospace Structures*. Elsevier, 2016, págs. 175-212 (vid. pág. 23).
- [7] Peter Spies, Markus Pollak y Loreto Mateu. *Handbook of energy harvesting power supplies and applications*. CRC Press, 2015 (vid. pág. 24).
- [8] Denis Dondi, Alessandro Bertacchini, Luca Larcher, Paolo Pavan, D Brunelli y L Benini. «A solar energy harvesting circuit for low power applications». En: *2008 IEEE International Conference on Sustainable Energy Technologies*. IEEE, 2008, págs. 945-949 (vid. pág. 24).
- [9] Shuguang Li, Jianping Yuan y Hod Lipson. «Ambient wind energy harvesting using cross-flow fluttering». En: *Journal of Applied Physics* (2011). DOI: doi.org/10.1063/1.3525045 (vid. pág. 24).
- [10] Gael Sebald, Daniel Guyomar y Amen Agbossou. «On thermoelectric and pyroelectric energy harvesting». En: *Smart Materials and Structures* 18.12 (2009), pág. 125006. DOI: [10.1088/0964-1726/18/12/125006](https://doi.org/10.1088/0964-1726/18/12/125006) (vid. págs. 24, 43).
- [11] S P Beeby, M J Tudor y NM White. «Energy harvesting vibration sources for microsystems applications». En: *Measurement science and technology* 17.12 (2006), R175. DOI: [10.1088/0957-0233/17/12/R01](https://doi.org/10.1088/0957-0233/17/12/R01) (vid. pág. 24).
- [12] Lewis M Fraas y Larry D Partain. *Solar cells and their applications*. Vol. 236. John Wiley & Sons, 2010. ISBN: 978-0-470-44633-1. DOI: [10.1002/9780470636886](https://doi.org/10.1002/9780470636886) (vid. págs. 24, 41).
- [13] Jaejun Lee, Chisoo Lim, Jaekyu Lim, Sungchul Yang y Jeonghyuk Im. «Application of solar thermoelectric generation system for health monitoring system of civil infrastructures». En: *KSCE Journal of Civil Engineering* 22.1 (2018), págs. 110-116. DOI: [10.1007/s12205-017-0945-7](https://doi.org/10.1007/s12205-017-0945-7) (vid. pág. 24).
- [14] Steven R. Anton y Henry A. Sodano. «A review of power harvesting using piezoelectric materials (2003-2006)». En: *Smart Materials and Structures* (2007). ISSN: 09641726. DOI: [10.1088/0964-1726/16/3/R01](https://doi.org/10.1088/0964-1726/16/3/R01) (vid. pág. 24).
- [15] C Martín Saravia, José M Ramírez y Claudio D Gatti. «A hybrid numerical-analytical approach for modeling levitation based vibration energy harvesters». En: *Sensors and Actuators A: Physical* 257 (2017), págs. 20-29. DOI: [10.1016/j.sna.2017.01.023](https://doi.org/10.1016/j.sna.2017.01.023) (vid. pág. 24).
- [16] Chuan Li y W Tse Peter. «Fabrication and testing of an energy-harvesting hydraulic damper». En: *Smart Materials and Structures* 22.6 (2013), pág. 065024. DOI: [10.1088/0964-1726/22/6/065024](https://doi.org/10.1088/0964-1726/22/6/065024) (vid. págs. 24, 45).

- [17] E Halvorsen, ER Westby, S Husa, A Vogl, NP Ostbo, V Leonov, Tom Sterken y T Kvisteroy. «An electrostatic energy harvester with electret bias». En: *Transducers 2009-2009 International Solid-State Sensors, Actuators and Microsystems Conference*. IEEE. 2009, págs. 1381-1384. DOI: [10.1109/SENSOR.2009.5285829](https://doi.org/10.1109/SENSOR.2009.5285829) (vid. pág. 24).
- [18] Huicong Liu, Junwen Zhong, Chengkuo Lee, Seung-Wuk Lee y Liwei Lin. «A comprehensive review on piezoelectric energy harvesting technology: Materials, mechanisms, and applications». En: *Applied Physics Reviews* 5.4 (2018), pág. 041306. DOI: [10.1063/1.5074184](https://doi.org/10.1063/1.5074184) (vid. pág. 24).
- [19] Haitong Liang, Guangbo Hao y Oskar Z Olszewski. «A review on vibration-based piezoelectric energy harvesting from the aspect of compliant mechanisms». En: *Sensors and Actuators A: Physical* (2021), pág. 112743. DOI: [10.1016/j.sna.2021.112743](https://doi.org/10.1016/j.sna.2021.112743) (vid. págs. 24, 64).
- [20] Red Vial Argentina, e-Astaltfo. <http://www.e-asfalto.com/redvialarg/redvial.htm>. Último acceso: 2021-12 (vid. pág. 24).
- [21] Flota circulante de vehículos en Argentina, AFAC (Asociación de Fabricas Argentinas de Componentes). <https://autoblog.com.ar/wp-content/uploads/2020/06/Informe-de-Parque-Circulante-Afac-2020.pdf>. Último acceso: 2021-12 (vid. pág. 24).
- [22] Balances Energeticos, Ministerio de Economia. <https://www.argentina.gob.ar/economia/energia/hidroenergeticos>. Último acceso: 2021-12 (vid. pág. 24).
- [23] Suvrajyoti Mishra, Lakshmi Unnikrishnan, Sanjay Kumar Nayak y Smita Mohanty. «Advances in piezoelectric polymer composites for energy harvesting applications: a systematic review». En: *Macromolecular Materials and Engineering* 304.1 (2019), pág. 1800463. DOI: [10.1002/mame.201800463](https://doi.org/10.1002/mame.201800463) (vid. pág. 27).
- [24] Efstratia N Sgourou, Yerasimos Panayiotatos, Konstantinos Davazoglou, Andrei L Solovjov, Ruslan V Vovk y Alexander Chroneos. «Self-diffusion in perovskite and perovskite related oxides: Insights from modelling». En: *Applied Sciences* 10.7 (2020), pág. 2286. DOI: [10.3390/app10072286](https://doi.org/10.3390/app10072286) (vid. pág. 28).
- [25] EU Directive y col. «Restriction of the use of certain hazardous substances in electrical and electronic equipment (RoHS)». En: *Official Journal of the European Union* 46 (2013), págs. 19-23 (vid. pág. 29).
- [26] L Ramajo, M Castro, F Rubio-Marcos y J Fernandez-Lozano. «Influence of MoO₃ on electrical and microstructural properties of (K_{0.44} Na_{0.52} Li_{0.04})(Nb_{0.86} Ta_{0.10} Sb_{0.04}) O₃». En: *Journal of Materials Science: Materials in Electronics* 24.9 (2013), págs. 3587-3593. DOI: [10.1109/ISAF.2012.6297856](https://doi.org/10.1109/ISAF.2012.6297856) (vid. pág. 29).
- [27] JA Cortés, J Camargo, MF Rachia, F Rubio-Marcos, L Ramajo, M Castro y MA Ramírez. «Influence of the sintering temperature on ferroelectric properties of potassium-sodium niobate piezoelectric ceramics». En: *Journal of Advanced Dielectrics* 11.3 (2021), págs. 2140002-249. DOI: [10.1142/S2010135X21400026](https://doi.org/10.1142/S2010135X21400026) (vid. pág. 29).
- [28] Jonathan Taub, L Ramajo y Miriam Susana Castro. «Phase structure and piezoelectric properties of Ca- and Ba-doped K_{1/2}Na_{1/2}NbO₃ lead-free ceramics». En: *Ceramics International* 39.4 (2013), págs. 3555-3561. DOI: [10.1016/j.ceramint.2012.10.181](https://doi.org/10.1016/j.ceramint.2012.10.181) (vid. pág. 29).
- [29] Fernando Rubio-Marcos, José F Fernandez, Diego A Ochoa, José E García, Rocio E Rojas-Hernandez, Miriam Castro y Leandro Ramajo. «Understanding the piezoelectric properties in potassium-sodium niobate-based lead-free piezoceramics: interrelationship between intrinsic and extrinsic factors». En: *Journal of the European Ceramic Society* 37.11 (2017), págs. 3501-3509. DOI: [10.1016/j.jeurceramsoc.2017.04.045](https://doi.org/10.1016/j.jeurceramsoc.2017.04.045) (vid. pág. 29).
- [30] Javier Eduardo Camargo, Leandro Alfredo Ramajo, Fernando Rubio-marcos y Miriam Susana Castro. «Estudio de las condiciones de procesamiento de Bi_{0.5}(Na_{0.8}K_{0.2})_{0.5}TiO₃». En: *Boletín de la Sociedad Española de Cerámica y Vidrio* (2014). ISSN: 0366-3175. DOI: [10.3989/cyv.42014](https://doi.org/10.3989/cyv.42014) (vid. pág. 29).

- [31] Javier Camargo, Leandro Ramajo, Fernando Rubio-Marcos y Miriam Castro. «Ferroelectric properties of $\text{Bi}_{0,5}(\text{Na}_{0,8}\text{K}_{0,2})_{0,5}\text{TiO}_3$ ceramics». En: *Advanced Materials Research*. Vol. 975. Trans Tech Publ. 2014, págs. 3-8. DOI: [10.4028/www.scientific.net/amr.975.3](https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/amr.975.3) (vid. pág. 29).
- [32] L Ramajo, J Camargo, Fernando Rubio-Marcos y M Castro. «Influences of secondary phases on ferroelectric properties of $\text{Bi}(\text{Na},\text{K})\text{TiO}_3$ ceramics». En: *Ceramics International* 41.4 (2015), págs. 5380-5386. DOI: [10.1016/j.ceramint.2014.12.100](https://doi.org/10.1016/j.ceramint.2014.12.100) (vid. págs. 29, 189).
- [33] J Camargo, A Prado Espinosa, L Ramajo y M Castro. «Influence of the sintering process on ferroelectric properties of $\text{Bi}_{0,5}(\text{Na}_{0,8}\text{K}_{0,2})_{0,5}\text{TiO}_3$ lead-free piezoelectric ceramics». En: *Journal of Materials Science: Materials in Electronics* 29.7 (2018), págs. 5427-5432. DOI: [10.1007/s10854-017-8508-8](https://doi.org/10.1007/s10854-017-8508-8) (vid. págs. 29, 191).
- [34] Andrea Prado-Espinosa, Javier Camargo, Leandro Ramajo y Miriam Castro. «Improvement on dielectric and microstructural properties of lead free $\text{Bi}_{0,5}\text{Na}_{0,5}\text{TiO}_3$ ceramics through processing conditions». En: *Journal of Materials Science: Materials in Electronics* 28.22 (2017), págs. 16836-16841. DOI: [10.1007/s10854-017-7599-6](https://doi.org/10.1007/s10854-017-7599-6) (vid. pág. 29).
- [35] Andrea Prado-Espinosa, Miriam Castro y Leandro Ramajo. «Influence of secondary phases on ferroelectric properties of $\text{Bi}_{0,5}\text{Na}_{0,5}\text{TiO}_3$ ceramics». En: *Ceramics International* 43.7 (2017), págs. 5505-5508. DOI: [10.1016/j.ceramint.2017.01.071](https://doi.org/10.1016/j.ceramint.2017.01.071) (vid. págs. 29, 189).
- [36] Andrea Prado-Espinosa, Javier Camargo, Adolfo del Campo, Fernando Rubio-Marcos, Miriam Castro y Leandro Ramajo. «Exploring new methodologies for the identification of the morphotropic phase boundary region in the $(\text{BiNa})\text{TiO}_3 - \text{BaTiO}_3$ lead free piezoceramics: Confocal Raman Microscopy». En: *Journal of Alloys and Compounds* 739 (2018), págs. 799-805. DOI: [10.1016/j.jallcom.2017.12.308](https://doi.org/10.1016/j.jallcom.2017.12.308) (vid. pág. 29).
- [37] IEEE. «Standard on piezoelectricity». En: *ANSI/IEEE Std* (1988), págs. 176-1987. DOI: [10.1109/IEEESTD.1988.79638](https://doi.org/10.1109/IEEESTD.1988.79638) (vid. págs. 30, 31, 73).
- [38] Alper Erturk y Daniel J Inman. *Piezoelectric energy harvesting*. John Wiley & Sons, 2011. ISBN: 978-0-470-68254-8. DOI: [10.1002/9781119991151](https://doi.org/10.1002/9781119991151) (vid. págs. 32, 55).
- [39] Katsuo Negishi. «Jump Phenomenon in Resonance Curve of Ferroelectric Ceramics». En: *Journal of the Physical Society of Japan* 15.3 (mar. de 1960), págs. 534-534. DOI: [10.1143/jpsj.15.534](https://doi.org/10.1143/jpsj.15.534) (vid. pág. 33).
- [40] U Von Wagner y P Hagedorn. «Piezo-beam systems subjected to weak electric field: experiments and modelling of non-linearities». En: *Journal of Sound and Vibration* 256.5 (2002), págs. 861-872. DOI: [10.1006/jsvi.2002.5024](https://doi.org/10.1006/jsvi.2002.5024) (vid. pág. 33).
- [41] Samuel C Stanton, Alper Erturk, Brian P Mann y Daniel J Inman. «Nonlinear piezoelectricity in electroelastic energy harvesters: modeling and experimental identification». En: *Journal of Applied Physics* 108.7 (2010), pág. 074903. DOI: [10.1063/1.3486519](https://doi.org/10.1063/1.3486519) (vid. págs. 34, 71, 124).
- [42] Gérard A Maugin. *Nonlinear electromechanical effects and applications*. Vol. 1. World Scientific Publishing Company, 1986. DOI: [10.1142/0165](https://doi.org/10.1142/0165) (vid. pág. 34).
- [43] Stephen Leademham y Alper Erturk. «Unified nonlinear electroelastic dynamics of a bimorph piezoelectric cantilever for energy harvesting, sensing, and actuation». En: *Nonlinear Dynamics* 79.3 (2015), págs. 1727-1743. DOI: [10.1007/s11071-014-1770-x](https://doi.org/10.1007/s11071-014-1770-x) (vid. págs. 34, 70, 73, 92, 106, 124).
- [44] Claudio David Gatti. «Diseño e implementación de recuperadores de energía en vehículos de transporte». Tesis doct. 2019. URL: <https://repositoriodigital.uns.edu.ar/handle/123456789/4517> (vid. págs. 34, 70, 74).
- [45] *Beijing Ultrasonic*. <https://www.bjultrasonic.com/category/piezoelectric-ceramic/>. Último acceso: 2021-12 (vid. pág. 36).

- [46] Chien-hong Lin y Anastasia Muliana. *Micromechanics modeling of hysteretic responses of piezoelectric composites*. Elsevier, 2019, págs. 121-155 (vid. pág. 36).
- [47] RE Newnham, Atakan Dogan, QC Xu, K Onitsuka, J Tressler y S Yoshikawa. «Flextensional moonie actuators». En: *1993 Proceedings IEEE Ultrasonics Symposium*. IEEE. 1993, págs. 509-513. DOI: doi.org/10.1109/ultsym.1993.339557 (vid. págs. 36, 49).
- [48] Aydin Dogan, Jose F Fernandez, Kenji Uchino y Robert E Newnham. «The cymbal electromechanical actuator». En: *ISAF'96. Proceedings of the Tenth IEEE International Symposium on Applications of Ferroelectrics*. Vol. 1. IEEE. 1996, págs. 213-216 (vid. págs. 37, 49).
- [49] P Ochoa, M Villegas y JF Fernandez. «Effective piezoelectric coefficient calculation of cymbal piezocomposite». En: *Ferroelectrics* 273.1 (2002), págs. 315-320. DOI: [10.1080/00150190211775](https://doi.org/10.1080/00150190211775) (vid. pág. 37).
- [50] *Smart Materials*. <https://www.smart-material.com/index.html>. Último acceso: 2021-12 (vid. págs. 38, 49, 99).
- [51] *PiezoTechnics*. <https://www.piezotechnics.com>. Último acceso: 2021-12 (vid. pág. 39).
- [52] *PiezoDrive*. <https://www.piezodrive.com/actuators>. Último acceso: 2021-12 (vid. pág. 39).
- [53] *PI Ceramics*. <https://www.piceramic.com/en/products/>. Último acceso: 2021-12 (vid. pág. 39).
- [54] *Pant*. <http://en.pantpiezo.com/>. Último acceso: 2021-12 (vid. pág. 39).
- [55] *APC - American Piezo*. <https://www.americanpiezo.com/products-services.html>. Último acceso: 2021-12 (vid. pág. 40).
- [56] *CeramTec*. <https://www.ceramtec-industrial.com/en/industries/piezo-applications>. Último acceso: 2021-12 (vid. pág. 40).
- [57] Hong Duo Zhao, Jiang Ming Ling y Peng Cheng Fu. «A review of harvesting green energy from road». En: *Advanced Materials Research*. Vol. 723. Trans Tech Publ. 2013, págs. 559-566 (vid. pág. 41).
- [58] Chun Hua Sun, Hong Bing Wang, Jian Hong Du y Yi Ping Zhang. «Review on technical approach and research status of energy harvesting from roads». En: *Advanced Materials Research*. Vol. 962. Trans Tech Publ. 2014, págs. 1551-1555 (vid. pág. 41).
- [59] A Shukla y SA Ansari. «Energy harvesting from road pavement: a cleaner and greener alternative». En: *Energy* 5.02 (2018) (vid. pág. 41).
- [60] Hao Wang, Abbas Jasim y Xiaodan Chen. «Energy harvesting technologies in roadway and bridge for different applications—A comprehensive review». En: *Applied Energy* 212 (2018), págs. 1083-1094. DOI: [10.1016/j.apenergy.2017.12.125](https://doi.org/10.1016/j.apenergy.2017.12.125) (vid. págs. 41, 45, 48, 55, 58).
- [61] Saifuddin Ahmad, Muhammad Abdul Mujeebu y Mohd Ahmadullah Farooqi. «Energy harvesting from pavements and roadways: A comprehensive review of technologies, materials, and challenges». En: *International Journal of Energy Research* 43.6 (2019), págs. 1974-2015. DOI: [10.1002/er.4350](https://doi.org/10.1002/er.4350) (vid. pág. 41).
- [62] Mohammadreza Gholikhani, Hossein Roshani, Samer Dessouky y AT Papa- giannakis. «A critical review of roadway energy harvesting technologies». En: *Applied Energy* 261 (2020), pág. 114388. DOI: [10.1016/j.apenergy.2019.114388](https://doi.org/10.1016/j.apenergy.2019.114388) (vid. págs. 41, 55).
- [63] Niloufar Zabihi y Mohamed Saafi. «Recent developments in the energy harvesting systems from road infrastructures». En: *Sustainability* 12.17 (2020), pág. 6738. DOI: [10.3390/su12176738](https://doi.org/10.3390/su12176738) (vid. págs. 41, 55).
- [64] Hongye Pan, Lingfei Qi, Zutao Zhang y Jinyue Yan. «Kinetic energy harvesting technologies for applications in land transportation: A comprehensive review». En: *Applied Energy* 286 (2021), pág. 116518. DOI: [10.1016/j.apenergy.2021.116518](https://doi.org/10.1016/j.apenergy.2021.116518) (vid. págs. 41, 45).

- [65] Andrew Dawson, Rajib Mallick, Alvaro Garcia Hernandez y Pejman Keikhaei Dehdezi. «Energy harvesting from pavements». En: *Climate Change, Energy, Sustainability and Pavements*. Springer, 2014, págs. 481-517 (vid. págs. 41, 55).
- [66] Hao Wang y Abbas Jasim. «Piezoelectric energy harvesting from pavement». En: *Eco-Efficient Pavement Construction Materials*. Elsevier, 2020, págs. 367-382 (vid. pág. 41).
- [67] Symeoni Andriopoulou. «A review on energy harvesting from roads.» Tesis de mtría. 2012 (vid. pág. 41).
- [68] Dhruvalkumar Hitendrakumar Patel. «Smart Roads: Investigating Roadways as Energy Sources for Potential Application of In-Lane Charging». Tesis de mtría. 2019 (vid. pág. 41).
- [69] Shad Roundy, Paul K. Wright y Jan Rabaey. «A study of low level vibrations as a power source for wireless sensor nodes». En: *Computer Communications* 26.11 (2003), págs. 1131-1144. ISSN: 0140-3664. DOI: 10.1016/S0140-3664(02)00248-7 (vid. pág. 41).
- [70] RJ Wakulat. *Photovoltaics (PV)*. Salem Press, Pasadena, 2016 (vid. pág. 41).
- [71] Oregon Department of Transportation - Solar Highway Program: From Concept to Reality. 2008. URL: <https://www.oregon.gov/odot/Programs/Solar%20Highway%20documents/Solar-Highway-Program-Guidebook.pdf> (vid. págs. 41, 42).
- [72] Solar Roadways. URL: <https://solarroadways.com/> (vid. pág. 42).
- [73] Nederlandse Organisatie voor Toegepast Natuurwetenschappelijk Onderzoek (TNO) - SolaRoad. URL: <https://www.tno.nl/en/focus-areas/techtransfer/spin-offs/solaroad-energy-of-the-street/> (vid. págs. 42, 43).
- [74] Colas - Wattway. URL: <http://www.wattwaybycolas.com/en> (vid. págs. 42, 43).
- [75] W Kang-Won y AJ Correia. «A pilot study for investigation of novel methods to harvest solar energy from asphalt pavements». En: *Korea Institute of Construction Technology (KICT), Goyang City, South Korea* (2010) (vid. pág. 42).
- [76] Federal Highway Administration - Project: Solar Roadways. Jun. de 2011. URL: <https://highways.dot.gov/research/projects/solar-roadways> (vid. pág. 42).
- [77] Aditya Shekhar, Stan Klerks, Pavol Bauer y Venugopal Prasanth. «Solar road operating efficiency and energy yield—an integrated approach towards inductive power transfer». En: *European Photovoltaic Solar Energy Conference and Exhibition (EU-PVSEC)*. 2015, págs. 2614-2619 (vid. pág. 43).
- [78] Amin Nozariasmarz y col. «Review of wearable thermoelectric energy harvesting: From body temperature to electronic systems». En: *Applied Energy* 258 (2020), pág. 114069. DOI: 10.1016/j.apenergy.2019.114069 (vid. pág. 43).
- [79] David Michael Rowe. *Thermoelectrics handbook: macro to nano*. CRC press, 2019. ISBN: 9781315220390. DOI: 10.1201/9781420038903 (vid. pág. 43).
- [80] M Hasebe, Y Kamikawa y S Meiarashi. «Thermoelectric generators using solar thermal energy in heated road pavement». En: *2006 25th international conference on thermoelectrics*. IEEE. 2006, págs. 697-700 (vid. págs. 43, 44).
- [81] Guangxi Wu y Xiong Yu. «System design to harvest thermal energy across pavement structure». En: *2012 IEEE Energytech*. IEEE. 2012, págs. 1-4 (vid. pág. 44).
- [82] Guoting Liang y Peilong Li. *Research on thermoelectrics transducers for harvesting energy from asphalt pavement based on seebeck effects*. CRC Press, Boca Raton, Fla, 2015 (vid. pág. 44).
- [83] Seyed Amid Tahami, Mohammadreza Gholikhani, Reza Nasouri, Samer Des-souky y AT Papagiannakis. «Developing a new thermoelectric approach for energy harvesting from asphalt pavements». En: *Applied Energy* 238 (2019), págs. 786-795. DOI: 10.1016/j.apenergy.2019.01.152 (vid. pág. 44).

- [84] Lukai Guo y Qing Lu. «Potentials of piezoelectric and thermoelectric technologies for harvesting energy from pavements». En: *Renewable and Sustainable Energy Reviews* 72 (2017), págs. 761-773. DOI: [10.1016/j.rser.2017.01.090](https://doi.org/10.1016/j.rser.2017.01.090) (vid. pág. 45).
- [85] David J Griffiths. *Introduction to electrodynamics*. American Association of Physics Teachers, 2005. ISBN: 9781108333511. DOI: [10.1017/9781108333511](https://doi.org/10.1017/9781108333511) (vid. pág. 45).
- [86] Gonzalo del Castillo-Garcia, Elena Blanco-Fernandez, Pablo Pascual-Munoz y Daniel Castro-Fresno. «Energy harvesting from vehicular traffic over speed bumps: A review». En: *Proceedings of the Institution of Civil Engineers–Energy* 171.2 (2018), págs. 58-69. DOI: [10.1680/jener.17.00008](https://doi.org/10.1680/jener.17.00008) (vid. pág. 45).
- [87] Lubinda F Walubita, Dagbegnon Clement Sohoulane Djebou, Abu NM Faruk, Sang Ick Lee, Samer Dessouky y Xiaodi Hu. «Prospective of societal and environmental benefits of piezoelectric technology in road energy harvesting». En: *Sustainability* 10.2 (2018), pág. 383. DOI: [10.3390/su10020383](https://doi.org/10.3390/su10020383) (vid. págs. 45, 58).
- [88] Tesla Inc. - Regenerative Braking System. URL: <https://www.tesla.com/blog/magic-tesla-roadster-regenerative-braking> (vid. pág. 45).
- [89] Ehsan Asadi, Roberto Ribeiro, Mir Behrad Khamesee y Amir Khajepour. «Analysis, prototyping, and experimental characterization of an adaptive hybrid electromagnetic damper for automotive suspension systems». En: *IEEE Transactions on Vehicular Technology* 66.5 (2016), págs. 3703-3713. DOI: [10.1109/TVT.2016.2606607](https://doi.org/10.1109/TVT.2016.2606607) (vid. pág. 45).
- [90] Xiudong Tang, Teng Lin y Lei Zuo. «Design and optimization of a tubular linear electromagnetic vibration energy harvester». En: *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics* 19.2 (2013), págs. 615-622. DOI: [10.1109/TMECH.2013.2249666](https://doi.org/10.1109/TMECH.2013.2249666) (vid. pág. 45).
- [91] Waleed Salman, Lingfei Qi, Xin Zhu, Hongye Pan, Xingtian Zhang, Shehar Bano, Zutao Zhang y Yanping Yuan. «A high-efficiency energy regenerative shock absorber using helical gears for powering low-wattage electrical device of electric vehicles». En: *Energy* 159 (2018), págs. 361-372. DOI: [10.1016/j.energy.2018.06.152](https://doi.org/10.1016/j.energy.2018.06.152) (vid. pág. 46).
- [92] Zutao Zhang, Xingtian Zhang, Weiwu Chen, Yagubov Rasim, Waleed Salman, Hongye Pan, Yanping Yuan y Chunbai Wang. «A high-efficiency energy regenerative shock absorber using supercapacitors for renewable energy applications in range extended electric vehicle». En: *Applied Energy* 178 (2016), págs. 177-188. DOI: [10.1016/j.apenergy.2016.06.054](https://doi.org/10.1016/j.apenergy.2016.06.054) (vid. pág. 46).
- [93] Zhanwen Wang, Tianming Zhang, Zutao Zhang, Yanping Yuan y Yujie Liu. «A high-efficiency regenerative shock absorber considering twin ball screws transmissions for application in range-extended electric vehicles». En: *Energy and Built Environment* 1.1 (2020), págs. 36-49. DOI: [10.1016/j.enbenv.2019.09.004](https://doi.org/10.1016/j.enbenv.2019.09.004) (vid. pág. 46).
- [94] Mingyi Liu, Rui Lin, Shengxi Zhou, Yilun Yu, Aki Ishida, Margarita McGrath, Brook Kennedy, Muhammad Hajj y Lei Zuo. «Design, simulation and experiment of a novel high efficiency energy harvesting paver». En: *Applied Energy* 212 (2018), págs. 966-975. DOI: [10.1016/j.apenergy.2017.12.123](https://doi.org/10.1016/j.apenergy.2017.12.123) (vid. pág. 46).
- [95] *Pavegen*. URL: <https://pavegen.com/> (vid. pág. 46).
- [96] Hyung-Jo Jung, In-Ho Kim y Jeongsu Park. «Experimental validation of energy harvesting device for civil engineering applications». En: *Sensors and Smart Structures Technologies for Civil, Mechanical, and Aerospace Systems 2012*. Vol. 8345. International Society for Optics y Photonics. 2012, pág. 83451C (vid. pág. 46).
- [97] Wenai Shen, Songye Zhu y Hongping Zhu. «Experimental study on using electromagnetic devices on bridge stay cables for simultaneous energy harvesting and vibration damping». En: *Smart Materials and Structures* 25.6 (2016), pág. 065011. DOI: [10.1088/0964-1726/25/6/065011](https://doi.org/10.1088/0964-1726/25/6/065011) (vid. pág. 46).

- [98] Andrea Pirisi, Marco Mussetta, Francesco Grimaccia y Riccardo E Zich. «Novel speed-bump design and optimization for energy harvesting from traffic». En: *IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems* 14.4 (2013), págs. 1983-1991. DOI: [10.1109/TITS.2013.2272650](https://doi.org/10.1109/TITS.2013.2272650) (vid. págs. 46, 47).
- [99] Lirong Wang, Prakhar Todaria, Abhishek Pandey, James O'Connor, Barbara Chernow y Lei Zuo. «An electromagnetic speed bump energy harvester and its interactions with vehicles». En: *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics* 21.4 (2016), págs. 1985-1994. DOI: [10.1109/TMECH.2016.2546179](https://doi.org/10.1109/TMECH.2016.2546179) (vid. pág. 47).
- [100] Francisco Duarte, Adelino Ferreira y João Paulo Champalimaud. «Waynergy vehicles: system prototype demonstration in an operational environment». En: *Proceedings of the Institution of Civil Engineers-Municipal Engineer*. Vol. 172. 2. Thomas Telford Ltd. 2019, págs. 106-113 (vid. págs. 47, 58).
- [101] Waydip. URL: <https://gust.com/companies/waydip> (vid. pág. 47).
- [102] Mohammadreza Gholikhani, Reza Nasouri, Seyed Amid Tahami, Sarah Legette, Samer Dessouky y Arturo Montoya. «Harvesting kinetic energy from roadway pavement through an electromagnetic speed bump». En: *Applied Energy* 250 (2019), págs. 503-511. DOI: [10.1016/j.apenergy.2019.05.060](https://doi.org/10.1016/j.apenergy.2019.05.060) (vid. págs. 47, 48).
- [103] Zutao Zhang, Xingtian Zhang, Yagubov Rasim, Chunbai Wang, Bing Du y Yanping Yuan. «Design, modelling and practical tests on a high-voltage kinetic energy harvesting (EH) system for a renewable road tunnel based on linear alternators». En: *Applied Energy* 164 (2016), págs. 152-161. DOI: [10.1016/j.apenergy.2015.11.096](https://doi.org/10.1016/j.apenergy.2015.11.096) (vid. pág. 46).
- [104] Prakhar Todaria, Lirong Wang, Abhishek Pandey, James O'Connor, David McAvoy, Terence Harrigan, Barbara Chernow y Lei Zuo. «Design, modeling and test of a novel speed bump energy harvester». En: *Sensors and Smart Structures Technologies for Civil, Mechanical, and Aerospace Systems 2015*. Vol. 9435. International Society for Optics y Photonics. 2015, pág. 943506 (vid. pág. 46).
- [105] Francisco Duarte, Adelino Ferreira y Paulo Fael. «Road Pavement Energy-Harvesting Device to Convert Vehicles' Mechanical Energy into Electrical Energy». En: *Journal of Energy Engineering* 144.2 (2018), pág. 04018003. DOI: [10.1061/\(ASCE\)EY.1943-7897.0000512](https://doi.org/10.1061/(ASCE)EY.1943-7897.0000512) (vid. pág. 47).
- [106] Yisheng Chen, He Zhang, Yangyang Zhang, Chunhua Li, Qian Yang, Hongyu Zheng y Chaofeng Lü. «Mechanical energy harvesting from road pavements under vehicular load using embedded piezoelectric elements». En: *Journal of Applied Mechanics* 83.8 (2016). DOI: [10.1115/1.4033433](https://doi.org/10.1115/1.4033433) (vid. pág. 48).
- [107] Innawattech of Israel generates electricity from road traffic. URL: <https://www.israel21c.org/innawattech-of-israel-generates-electricity-from-road-traffic/> (visitado 12-03-2012) (vid. pág. 48).
- [108] Genziko. «Power generator». US9294014B2. 2013. URL: <https://patents.google.com/patent/US9294014> (vid. pág. 48).
- [109] Davion Hill, Arun Agarwal y Nellie Tong. *Assessment of piezoelectric materials for roadway energy harvesting Cost of energy and demonstration roadmap*. California Energy Commission, 2014 (vid. págs. 48, 55).
- [110] Hongduo Zhao, Jianming Ling y Jian Yu. «A comparative analysis of piezoelectric transducers for harvesting energy from asphalt pavement». En: *Journal of the Ceramic Society of Japan* 120.1404 (2012), págs. 317-323. DOI: [10.2109/jcersj2.120.317](https://doi.org/10.2109/jcersj2.120.317) (vid. págs. 48, 49).
- [111] Hongduo Zhao, Yujie Tao, Yanliang Niu y Jianming Ling. «Harvesting energy from asphalt pavement by piezoelectric generator». En: *Journal of Wuhan University of Technology-Mater. Sci. Ed.* 29.5 (2014), págs. 933-937. DOI: [10.1007/s11595-014-1023-3](https://doi.org/10.1007/s11595-014-1023-3) (vid. pág. 48).
- [112] Hongduo Zhao, Jian Yu y Jianming Ling. «Finite element analysis of Cymbal piezoelectric transducers for harvesting energy from asphalt pavement». En: *Journal of the ceramic society of Japan* 118.1382 (2010), págs. 909-915. DOI: [10.2109/jcersj2.118.909](https://doi.org/10.2109/jcersj2.118.909) (vid. pág. 49).

- [113] Clyde Jake Kendall. «Parasitic power collection in shoe mounted devices». Tesis doct. Citeseer, 1998 (vid. pág. 49).
- [114] Karla M Mossi, Gregory V Selby y Robert G Bryant. «Thin-layer composite unimorph ferroelectric driver and sensor properties». En: *Materials Letters* 35.1-2 (1998), págs. 39-49. DOI: [10.1016/S0167-577X\(97\)00214-0](https://doi.org/10.1016/S0167-577X(97)00214-0) (vid. pág. 49).
- [115] Gene H Haertling. «Rainbow ceramics: a new type of ultra-high-displacement actuator». En: *American Ceramic Society Bulletin* 73.1 (1994), págs. 93-96 (vid. pág. 49).
- [116] Hiba Najini y Senthil Arumugam Muthukumaraswamy. «Investigation on the selection of piezoelectric materials for the design of an energy harvester system to generate energy from traffic». En: *International Journal of Engineering and Applied Sciences* 3.2 (2016), pág. 257722 (vid. pág. 49).
- [117] Hyeoung Woo Kim, Amit Batra, Shashank Priya, Kenji Uchino, Douglas Markley, Robert E Newnham y Heath F Hofmann. «Energy harvesting using a piezoelectric cymbal transducer in dynamic environment». En: *Japanese journal of applied physics* 43.9R (2004), pág. 6178. DOI: [10.1143/JJAP.43.6178](https://doi.org/10.1143/JJAP.43.6178) (vid. págs. 49, 50).
- [118] Jiang-bo Yuan, Xiao-biao Shan, Tao Xie y Wei-shan Chen. «Energy harvesting with a slotted-cymbal transducer». En: *Journal of Zhejiang University-SCIENCE A* 10.8 (2009), págs. 1187-1190. DOI: [10.1631/jzus.A0920183](https://doi.org/10.1631/jzus.A0920183) (vid. págs. 49, 50).
- [119] Jiangbo Yuan, Xiaobiao Shan, Tao Xie y Weishan Chen. «Modeling and improvement of a cymbal transducer in energy harvesting». En: *Journal of Intelligent Material Systems and Structures* 21.8 (2010), págs. 765-771. DOI: [10.1177/1045389X10366318](https://doi.org/10.1177/1045389X10366318) (vid. pág. 50).
- [120] Daniel Arnold, William Kinsel, William W Clark y Changki Mo. «Exploration of new cymbal design in energy harvesting». En: *Active and Passive Smart Structures and Integrated Systems 2011*. Vol. 7977. International Society for Optics y Photonics. 2011, 79770T (vid. pág. 50).
- [121] Changki Mo, Daniel Arnold, William C Kinsel y William W Clark. «Modeling and experimental validation of unimorph piezoelectric cymbal design in energy harvesting». En: *Journal of Intelligent Material Systems and Structures* 24.7 (2013), págs. 828-836. DOI: [10.1177/1045389X12463459](https://doi.org/10.1177/1045389X12463459) (vid. págs. 50, 51).
- [122] Xinnan Liu y Jianjun Wang. «Performance Exploration of A Radially Layered Cymbal Piezoelectric Energy Harvester under Road Traffic Induced Low Frequency Vibration». En: *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*. Vol. 542. 1. IOP Publishing. 2019, pág. 012075 (vid. págs. 50, 51, 55).
- [123] Hyeoungwoo Kim, Shashank Priya y Kenji Uchino. «Modeling of piezoelectric energy harvesting using cymbal transducers». En: *Japanese journal of applied physics* 45.7R (2006), pág. 5836. DOI: [10.1143/JJAP.45.5836](https://doi.org/10.1143/JJAP.45.5836) (vid. pág. 49).
- [124] J Oi Almen. «The uniform-section disk spring». En: *ASME*. Vol. 58. 1936, págs. 305-314 (vid. pág. 49).
- [125] Abbas Jasim, Hao Wang, Greg Yesner, Ahmad Safari y Ali Maher. «Optimized design of layered bridge transducer for piezoelectric energy harvesting from roadway». En: *Energy* 141 (2017), págs. 1133-1145. DOI: [10.1016/j.energy.2017.10.005](https://doi.org/10.1016/j.energy.2017.10.005) (vid. págs. 51, 52).
- [126] A Moure, MA Izquierdo Rodriguez, S Hernandez Rueda, A Gonzalo, F Rubio-Marcos, D Urquiza Cuadros, A Perez-Lepe y JF Fernandez. «Feasible integration in asphalt of piezoelectric cymbals for vibration energy harvesting». En: *Energy Conversion and Management* 112 (2016), págs. 246-253. DOI: [10.1016/j.enconman.2016.01.030](https://doi.org/10.1016/j.enconman.2016.01.030) (vid. pág. 51).
- [127] Ling Yao, Hong Duo Zhao, Zhan Yu Dong, Yi Fan Sun y Yuan Fa Gao. «Laboratory testing of piezoelectric bridge transducers for asphalt pavement energy harvesting». En: *Key Engineering Materials*. Vol. 492. Trans Tech Publ. 2012, págs. 172-175 (vid. pág. 51).

- [128] Cong Li. «Road performance of common piezoelectric transducer for asphalt pavement energy harvesting». En: *Applied Mechanics and Materials*. Vol. 744. Trans Tech Publ. 2015, págs. 1491-1494 (vid. pág. 51).
- [129] ZHAO Hongduo, QIN Luyao y LING Jianming. «Test and analysis of bridge transducers for harvesting energy from asphalt pavement». En: *International Journal of Transportation Science and Technology* 4.1 (2015), págs. 17-28. DOI: [10.1260/2046-0430.4.1.17](https://doi.org/10.1260/2046-0430.4.1.17) (vid. págs. 51, 52).
- [130] G Yesner, M Kuciej, Ahmad Safari, A Jasim, Hao Wang y Ali Maher. «Piezoelectric energy harvesting using a novel cymbal transducer design». En: *2016 Joint IEEE International Symposium on the Applications of Ferroelectrics, European Conference on Application of Polar Dielectrics, and Piezoelectric Force Microscopy Workshop (ISAF/ECAPD/PFM)*. IEEE. 2016, págs. 1-4 (vid. págs. 51, 52).
- [131] G Yesner, Ahmad Safari, A Jasim, Hao Wang, B Basily y Ali Maher. «Evaluation of a novel piezoelectric bridge transducer». En: *2017 Joint IEEE International Symposium on the Applications of Ferroelectric (ISAF)/International Workshop on Acoustic Transduction Materials and Devices (IWATMD)/Piezoresponse Force Microscopy (PFM)*. IEEE. 2017, págs. 113-115 (vid. pág. 52).
- [132] Abbas Jasim, Greg Yesner, Hao Wang, Ahmad Safari, Ali Maher y B Basily. «Laboratory testing and numerical simulation of piezoelectric energy harvester for roadway applications». En: *Applied Energy* 224 (2018), págs. 438-447. DOI: [10.1016/j.apenergy.2018.05.040](https://doi.org/10.1016/j.apenergy.2018.05.040) (vid. pág. 52).
- [133] HJ Xiang, JJ Wang, ZF Shi y ZW Zhang. «Theoretical analysis of piezoelectric energy harvesting from traffic induced deformation of pavements». En: *Smart Materials and Structures* 22.9 (2013), pág. 095024. DOI: [10.1088/0964-1726/22/9/095024](https://doi.org/10.1088/0964-1726/22/9/095024) (vid. pág. 52).
- [134] Zhiwei Zhang, Hongjun Xiang y Zhifei Shi. «Modeling on piezoelectric energy harvesting from pavements under traffic loads». En: *Journal of Intelligent Material Systems and Structures* 27.4 (2016), págs. 567-578. DOI: [10.1177/1045389X15575081](https://doi.org/10.1177/1045389X15575081) (vid. pág. 52).
- [135] Xuejuan Zhao, Hongjun Xiang y Zhifei Shi. «Piezoelectric energy harvesting from vehicles induced bending deformation in pavements considering the arrangement of harvesters». En: *Applied Mathematical Modelling* 77 (2020), págs. 327-340. DOI: [10.1016/j.apm.2019.07.048](https://doi.org/10.1016/j.apm.2019.07.048) (vid. pág. 52).
- [136] Haocheng Xiong y Linbing Wang. «Piezoelectric energy harvester for public roadway: On-site installation and evaluation». En: *Applied Energy* 174 (2016), págs. 101-107. DOI: [10.1016/j.apenergy.2016.04.031](https://doi.org/10.1016/j.apenergy.2016.04.031) (vid. pág. 53).
- [137] Xuezheng Jiang, Yancheng Li, Jianchun Li, Jiong Wang y Jin Yao. «Piezoelectric energy harvesting from traffic-induced pavement vibrations». En: *Journal of Renewable and Sustainable Energy* (2014), pág. 043110. DOI: [10.1063/1.4891169](https://doi.org/10.1063/1.4891169) (vid. pág. 53).
- [138] AT Papagiannakis, Samer Dessouky, Arturo Montoya y Hossein Roshani. «Energy harvesting from roadways». En: *Procedia Computer Science* 83 (2016), págs. 758-765. DOI: [10.1016/j.procs.2016.04.164](https://doi.org/10.1016/j.procs.2016.04.164) (vid. pág. 53).
- [139] Hossein Roshani, Samer Dessouky, Arturo Montoya y AT Papagiannakis. «Energy harvesting from asphalt pavement roadways vehicle-induced stresses: A feasibility study». En: *Applied Energy* 182 (2016), págs. 210-218. DOI: [10.1016/j.apenergy.2016.08.116](https://doi.org/10.1016/j.apenergy.2016.08.116) (vid. págs. 53, 58).
- [140] Hailu Yang, Linbing Wang, Yue Hou, Meng Guo, Zhoujing Ye, Xinlong Tong y Dawei Wang. «Development in stacked-array-type piezoelectric energy harvester in asphalt pavement». En: *Journal of Materials in Civil Engineering* 29.11 (2017), pág. 04017224 (vid. págs. 53, 58).
- [141] Hailu Yang, Linbing Wang, Bin Zhou, Ya Wei y Qian Zhao. «A preliminary study on the highway piezoelectric power supply system». En: *International Journal of Pavement Research and Technology* 11.2 (2018), págs. 168-175. DOI: [10.1016/j.ijprt.2017.08.006](https://doi.org/10.1016/j.ijprt.2017.08.006) (vid. pág. 53).

- [142] M Wischke, M Masur, M Kroner y P Woias. «Vibration harvesting in traffic tunnels to power wireless sensor nodes». En: *Smart Materials and Structures* 20.8 (2011), pág. 085014. DOI: [10.1088/0964-1726/20/8/085014](https://doi.org/10.1088/0964-1726/20/8/085014) (vid. pág. 53).
- [143] Niell G Elvin, Nizar Lajnef y Alex A Elvin. «Feasibility of structural monitoring with vibration powered sensors». En: *Smart Materials and Structures* 15.4 (2006), pág. 977. DOI: [10.1088/0964-1726/15/4/011](https://doi.org/10.1088/0964-1726/15/4/011) (vid. pág. 53).
- [144] Guoliang Ye, Jize Yan, Zi Jing Wong, Kenichi Soga y Ashwin Seshia. «Optimisation of a piezoelectric system for energy harvesting from traffic vibrations». En: *2009 IEEE International Ultrasonics Symposium*. IEEE. 2009, págs. 759-762 (vid. pág. 53).
- [145] Michael Peigney y Dominique Siegert. «Piezoelectric energy harvesting from traffic-induced bridge vibrations». En: *Smart Materials and Structures* 22.9 (2013), pág. 095019. DOI: [10.1088/0964-1726/22/9/095019](https://doi.org/10.1088/0964-1726/22/9/095019) (vid. pág. 54).
- [146] Alper Erturk. «Piezoelectric energy harvesting for civil infrastructure system applications: Moving loads and surface strain fluctuations». En: *Journal of Intelligent Material Systems and Structures* 22.17 (2011), págs. 1959-1973. DOI: [10.1177/1045389X11420593](https://doi.org/10.1177/1045389X11420593) (vid. pág. 54).
- [147] Ye Zhang, Steve CS Cai y Lu Deng. «Piezoelectric-based energy harvesting in bridge systems». En: *Journal of Intelligent Material Systems and Structures* 25.12 (2014), págs. 1414-1428. DOI: [10.1177/1045389X13507354](https://doi.org/10.1177/1045389X13507354) (vid. pág. 54).
- [148] M Karimi, AH Karimi, R Tikani y S Ziaei-Rad. «Experimental and theoretical investigations on piezoelectric-based energy harvesting from bridge vibrations under travelling vehicles». En: *International Journal of Mechanical Sciences* 119 (2016), págs. 1-11. DOI: [10.1016/j.ijmecsci.2016.09.029](https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2016.09.029) (vid. pág. 54).
- [149] Estiyanti Ekawati, Rahimatul Yusra Mardiah, Hadi Parmana y col. «Speed bump with piezoelectric cantilever system as electrical energy harvester». En: *2016 International Conference on Instrumentation, Control and Automation (ICA)*. IEEE. 2016, págs. 154-159 (vid. págs. 54, 58).
- [150] Nan Chen, Hyun Jun Jung, Hamid Jabbar, Tae Hyun Sung y Tingcun Wei. «A piezoelectric impact-induced vibration cantilever energy harvester from speed bump with a low-power power management circuit». En: *Sensors and Actuators A: Physical* 254 (2017), págs. 134-144. DOI: [10.1016/j.sna.2016.12.006](https://doi.org/10.1016/j.sna.2016.12.006) (vid. págs. 54, 58, 62, 155).
- [151] Ji Hoon Hyun, Nan Chen y Dong Sam Ha. «Energy Harvesting Circuit for Road Speed Bumps Using a Piezoelectric Cantilever». En: *IECON 2018-44th Annual Conference of the IEEE Industrial Electronics Society*. IEEE. 2018, págs. 4219-4223 (vid. págs. 54, 58).
- [152] Gyeong Ju Song y col. «Performance of a speed bump piezoelectric energy harvester for an automatic cellphone charging system». En: *Applied Energy* 247 (2019), págs. 221-227. DOI: [10.1016/j.apenergy.2019.04.040](https://doi.org/10.1016/j.apenergy.2019.04.040) (vid. págs. 54, 55, 58).
- [153] Haocheng Xiong, Linbing Wang, Dong Wang y Cristian Druta. «Piezoelectric Energy Harvesting from Traffic Induced Deformation of Pavements.» En: *International Journal of Pavement Research and Technology* 5.5 (2012) (vid. pág. 56).
- [154] Hongduo Zhao, Luyao Qin, Yujie Tao y Jianming Ling. «Study on structure of PZT piles based transducer for harvesting energy from asphalt pavement». En: *Proceedings of the 2013 IJPC-International Journal of Pavements Conference, São Paulo, Brazil*. 2013, págs. 9-10 (vid. pág. 56).
- [155] Abbas F Jasim, Hao Wang, Greg Yesner, Ahmad Safari y Pat Szary. «Performance analysis of piezoelectric energy harvesting in pavement: laboratory testing and field simulation». En: *Transportation Research Record* 2673.3 (2019), págs. 115-124. DOI: [10.1177/0361198119830308](https://doi.org/10.1177/0361198119830308) (vid. pág. 58).

- [156] Hossein Roshani, Pranav Jagtap, Samer Dessouky, Arturo Montoya y AT Papagiannakis. «Theoretical and experimental evaluation of two roadway piezoelectric-based energy harvesting prototypes». En: *Journal of Materials in Civil Engineering* 30.2 (2018), pág. 04017264. DOI: [10.1061/\(ASCE\)MT.1943-5533.0002112](https://doi.org/10.1061/(ASCE)MT.1943-5533.0002112) (vid. pág. 58).
- [157] Yangsen Cao, Aimin Sha, Zhuangzhuang Liu, Jiarong Li y Wei Jiang. «Energy output of piezoelectric transducers and pavements under simulated traffic load». En: *Journal of Cleaner Production* 279 (2021), pág. 123508. DOI: [10.1016/j.jclepro.2020.123508](https://doi.org/10.1016/j.jclepro.2020.123508) (vid. pág. 58).
- [158] Francisco Duarte, Adelino Ferreira y Paulo Fael. «Software for simulation of vehicle-road interaction». En: *New advances in information systems and technologies*. Springer, 2016, págs. 681-690 (vid. págs. 58, 140).
- [159] Siti Nooraiin Mohd Razali, Amirul Muhamad, Arash Arifin, Afiqah Asri y Habib Musa Mohamed. «A Study of Piezoelectric as Electric Transducer on Asphalt Pavement». En: *Multidisciplinary Applied Research and Innovation* 2.1 (2021), págs. 46-60 (vid. pág. 58).
- [160] Xiaochen Xu, Dongwei Cao, Hailu Yang y Ming He. «Application of piezoelectric transducer in energy harvesting in pavement». En: *International Journal of Pavement Research and Technology* 11.4 (2018), págs. 388-395. DOI: [10.1016/j.ijprt.2017.09.011](https://doi.org/10.1016/j.ijprt.2017.09.011) (vid. pág. 59).
- [161] Yashwardhan Sahi y Swet Chandan. «Finite Element Analysis of Lead-Free Ceramic Based Cymbal Transducer for Energy Harvesting». En: *Integrated Ferroelectrics* 212.1 (2020), págs. 81-88. DOI: [10.1080/10584587.2020.1819037](https://doi.org/10.1080/10584587.2020.1819037) (vid. pág. 59).
- [162] Alper Erturk. «Assumed-modes modeling of piezoelectric energy harvesters: Euler–Bernoulli, Rayleigh, and Timoshenko models with axial deformations». En: *Composite Structures* 106 (2012), págs. 214-227. DOI: [10.1016/j.compstruc.2012.05.010](https://doi.org/10.1016/j.compstruc.2012.05.010) (vid. pág. 61).
- [163] Alper Erturk y Daniel J Inman. «On mechanical modeling of cantilevered piezoelectric vibration energy harvesters». En: *Journal of Intelligent Material Systems and Structures* 19.11 (2008), págs. 1311-1325. DOI: [10.1177/1045389X07085639](https://doi.org/10.1177/1045389X07085639) (vid. pág. 61).
- [164] A Erturk y D J Inman. «An experimentally validated bimorph cantilever model for piezoelectric energy harvesting from base excitations». En: *Smart Materials and Structures* 18.2 (feb. de 2009), pág. 025009. ISSN: 0964-1726. DOI: [10.1088/0964-1726/18/2/025009](https://doi.org/10.1088/0964-1726/18/2/025009) (vid. págs. 61, 62, 113).
- [165] Sebastián Pablo Machado, Mariano Febbo, F Rubio-Marcos, Leandro Alfredo Ramajo y MS Castro. «Evaluation of the performance of a lead-free piezoelectric material for energy harvesting». En: *Smart Materials and Structures* 24.11 (2015), pág. 115011. DOI: [10.1088/0964-1726/24/11/115011](https://doi.org/10.1088/0964-1726/24/11/115011) (vid. págs. 61, 156).
- [166] Ravindra Masana y Mohammed F Daqaq. «Electromechanical modeling and nonlinear analysis of axially loaded energy harvesters». En: *Journal of Vibration and Acoustics* 133.1 (2011), pág. 011007. DOI: [10.1115/1.4002786](https://doi.org/10.1115/1.4002786) (vid. págs. 61, 62, 65, 77, 92, 103, 115, 125).
- [167] Mohammed F Daqaq, Ravindra Masana, Alper Erturk y D Dane Quinn. «On the role of nonlinearities in vibratory energy harvesting: a critical review and discussion». En: *Applied Mechanics Reviews* 66.4 (2014). DOI: [10.1115/1.4026278](https://doi.org/10.1115/1.4026278) (vid. págs. 61, 63).
- [168] Alperen Toprak y Onur Tigli. «Piezoelectric energy harvesting: State-of-the-art and challenges». En: *Applied Physics Reviews* 1.3 (2014), pág. 031104. DOI: [10.1063/1.4896166](https://doi.org/10.1063/1.4896166) (vid. pág. 61).
- [169] Huidong Li, Chuan Tian y Z. Daniel Deng. «Energy harvesting from low frequency applications using piezoelectric materials». En: *Applied Physics Reviews* (2014). DOI: [10.1063/1.4900845](https://doi.org/10.1063/1.4900845) (vid. pág. 62).

- [170] Wanlu Zhou, Gopinath Reddy Penamalli y Lei Zuo. «An efficient vibration energy harvester with a multi-mode dynamic magnifier». En: *Smart Materials and Structures* 21.1 (2011), pág. 015014. DOI: [10.1088/0964-1726/21/1/015014](https://doi.org/10.1088/0964-1726/21/1/015014) (vid. pág. 62).
- [171] Claudio Gatti, José Ramirez, Mariano Febbo y Sebastián Machado. «Multi-modal piezoelectric device for energy harvesting from engine vibration». En: *Journal of Mechanics of Materials and Structures* 13.1 (2018), págs. 17-34. DOI: [10.2140/jomms.2018.13.17](https://doi.org/10.2140/jomms.2018.13.17) (vid. pág. 62).
- [172] Mariano Febbo, Sebastián Pablo Machado y Santiago Manuel Osinaga. «A novel up-converting mechanism based on double impact for non-linear piezoelectric energy harvesting». En: *Journal of Physics D: Applied Physics* 53.47 (2020), pág. 475501. DOI: [10.1088/1361-6463/abab28](https://doi.org/10.1088/1361-6463/abab28) (vid. pág. 62).
- [173] Yan Peng, Zhibing Xu, Min Wang, Zhongjie Li, Jinlin Peng, Jun Luo, Shaorong Xie, Huayan Pu y Zhengbao Yang. «Investigation of frequency-up conversion effect on the performance improvement of stack-based piezoelectric generators». En: *Renewable Energy* 172 (2021), págs. 551-563. DOI: [10.1016/j.renene.2021.03.064](https://doi.org/10.1016/j.renene.2021.03.064) (vid. pág. 62).
- [174] Guimin Chen, Yanjie Gou y Aimei Zhang. «Synthesis of compliant multistable mechanisms through use of a single bistable mechanism». En: *Journal of Mechanical Design* (2011). DOI: [10.1115/1.4004543](https://doi.org/10.1115/1.4004543) (vid. pág. 62).
- [175] AF Arrieta, Tommaso Delpero, AE Bergamini y P Ermanni. «Broadband vibration energy harvesting based on cantilevered piezoelectric bi-stable composites». En: *Applied Physics Letters* 102.17 (2013), pág. 173904. DOI: [10.1063/1.4803918](https://doi.org/10.1063/1.4803918) (vid. págs. 62, 64).
- [176] Zhengqiu Xie, CA Kitio Kwuimy, Zhiguo Wang y Wenbin Huang. «A piezoelectric energy harvester for broadband rotational excitation using buckled beam». En: *AIP Advances* 8.1 (2018), pág. 015125. DOI: [10.1063/1.5018077](https://doi.org/10.1063/1.5018077) (vid. págs. 62, 64).
- [177] B Kathpalia, D Tan, I Stern y A Erturk. «An experimentally validated model for geometrically nonlinear plucking-based frequency up-conversion in energy harvesting». En: *Smart Materials and Structures* 27.1 (2017), pág. 015024. DOI: [10.1088/1361-665X/aa9b01](https://doi.org/10.1088/1361-665X/aa9b01) (vid. pág. 62).
- [178] Ryan L Harne y KW Wang. «A review of the recent research on vibration energy harvesting via bistable systems». En: *Smart Materials and Structures* 22.2 (2013), pág. 023001. DOI: [10.1088/0964-1726/22/2/023001](https://doi.org/10.1088/0964-1726/22/2/023001) (vid. pág. 63).
- [179] Shitong Fang, Shengxi Zhou, Daniil Yurchenko, Tao Yang y Wei-Hsin Liao. «Multistability phenomenon in signal processing, energy harvesting, composite structures, and metamaterials: A review». En: *Mechanical Systems and Signal Processing* 166 (2022), pág. 108419. DOI: [10.1016/j.ymsp.2021.108419](https://doi.org/10.1016/j.ymsp.2021.108419) (vid. pág. 63).
- [180] S.H. Strogatz. *Nonlinear Dynamics and Chaos: With Applications to Physics, Biology, Chemistry, and Engineering*. New York: Avalon Publishing, 2014. DOI: [10.1201/9780429492563](https://doi.org/10.1201/9780429492563) (vid. págs. 63, 76, 82).
- [181] Chundong Xu, Zhu Liang, Bo Ren, Wenning Di, Haosu Luo, Dong Wang, Kailing Wang y Zhifang Chen. «Bi-stable energy harvesting based on a simply supported piezoelectric buckled beam». En: *Journal of Applied Physics* 114.11 (2013), pág. 114507. DOI: [10.1063/1.4821644](https://doi.org/10.1063/1.4821644) (vid. págs. 64, 65, 78).
- [182] Masoud Derakhshani, Thomas A Berfield y Kevin D Murphy. «A component coupling approach to dynamic analysis of a buckled, bistable vibration energy harvester structure». En: *Nonlinear Dynamics* 96.2 (2019), págs. 1429-1446. DOI: [10.1007/s11071-019-04863-4](https://doi.org/10.1007/s11071-019-04863-4) (vid. pág. 64).
- [183] Vinod R Challa, MG Prasad, Yong Shi y Frank T Fisher. «A vibration energy harvesting device with bidirectional resonance frequency tunability». En: *Smart Materials and Structures* 17.1 (2008), pág. 015035. DOI: [10.1088/0964-1726/17/01/015035](https://doi.org/10.1088/0964-1726/17/01/015035) (vid. pág. 64).

- [184] Marco Ferrari, Vittorio Ferrari, Michele Guizzetti, Bruno Andò, Salvatore Baglio y Carlo Trigona. «Improved energy harvesting from wideband vibrations by nonlinear piezoelectric converters». En: *Sensors and Actuators A: Physical* 162.2 (2010), págs. 425-431. DOI: [10.1016/j.sna.2010.05.022](https://doi.org/10.1016/j.sna.2010.05.022) (vid. pág. 64).
- [185] Junxiang Jiang, Shaogang Liu, Lifeng Feng y Dan Zhao. «A Review of Piezoelectric Vibration Energy Harvesting with Magnetic Coupling Based on Different Structural Characteristics». En: *Micromachines* 12.4 (2021), pág. 436. DOI: [10.3390/mi12040436](https://doi.org/10.3390/mi12040436) (vid. pág. 64).
- [186] Y Zhu, Jean Zu y W Su. «Broadband energy harvesting through a piezoelectric beam subjected to dynamic compressive loading». En: *Smart Materials and Structures* 22.4 (2013), pág. 045007. DOI: [10.1088/0964-1726/22/4/045007](https://doi.org/10.1088/0964-1726/22/4/045007) (vid. págs. 64, 66, 103).
- [187] Hong-Xiang Zou, Lin-Chuan Zhao, Qiu-Hua Gao, Lei Zuo, Feng-Rui Liu, Ting Tan, Ke-Xiang Wei y Wen-Ming Zhang. «Mechanical modulations for enhancing energy harvesting: Principles, methods and applications». En: *Applied Energy* 255 (2019), pág. 113871. DOI: [10.1016/j.apenergy.2019.113871](https://doi.org/10.1016/j.apenergy.2019.113871) (vid. pág. 64).
- [188] Hai Tao Li, Wei Yang Qin, Jean Zu y Zhengbao Yang. «Modeling and experimental validation of a buckled compressive-mode piezoelectric energy harvester». En: *Nonlinear Dynamics* 92.4 (2018), págs. 1761-1780. DOI: [10.1007/s11071-018-4160-y](https://doi.org/10.1007/s11071-018-4160-y) (vid. pág. 64).
- [189] Chien Ming Wang y Chang Yi Wang. *Exact solutions for buckling of structural members*. Florida: CRC press, 2004. ISBN: 9780849322228. DOI: [10.1201/9780203483534](https://doi.org/10.1201/9780203483534) (vid. págs. 64, 88).
- [190] Eli S Leland y Paul K Wright. «Resonance tuning of piezoelectric vibration energy scavenging generators using compressive axial preload». En: *Smart Materials and Structures* 15.5 (2006), pág. 1413. DOI: [10.1088/0964-1726/15/5/030](https://doi.org/10.1088/0964-1726/15/5/030) (vid. págs. 64, 114).
- [191] Christoph Eichhorn, Frank Goldschmidtboeing y Peter Woias. «A frequency tunable piezoelectric energy converter based on a cantilever beam». En: *Proceedings of PowerMEMS* 9.12 (2008), págs. 309-312 (vid. págs. 64, 114).
- [192] C Eichhorn, F Goldschmidtboeing y P Woias. «Bidirectional frequency tuning of a piezoelectric energy converter based on a cantilever beam». En: *Journal of Micromechanics and Microengineering* 19.9 (2009), pág. 094006. DOI: [10.1088/0960-1317/19/9/094006](https://doi.org/10.1088/0960-1317/19/9/094006) (vid. pág. 64).
- [193] Christoph Eichhorn, Frank Goldschmidtboeing, Yannick Porro y Peter Woias. «A piezoelectric harvester with an integrated frequency-tuning mechanism». En: *Power MEMS* (2009), págs. 45-48 (vid. pág. 64).
- [194] AF Arrieta, P Hagedorn, Alper Erturk y DJ Inman. «A piezoelectric bistable plate for nonlinear broadband energy harvesting». En: *Applied Physics Letters* 97.10 (2010), pág. 104102. DOI: [10.1007/s11071-009-9476-1](https://doi.org/10.1007/s11071-009-9476-1) (vid. pág. 65).
- [195] B Ando, S Baglio, M Bau, AR Bulsara, V Ferrari, M Ferrari y G L Episcopo. «A nonlinear energy harvester by direct printing technology». En: *Procedia Engineering* 47 (2012), págs. 933-936. DOI: [10.1016/j.proeng.2012.09.299](https://doi.org/10.1016/j.proeng.2012.09.299) (vid. pág. 65).
- [196] Seok-Min Jung y Kwang-Seok Yun. «Energy-harvesting device with mechanical frequency-up conversion mechanism for increased power efficiency and wideband operation». En: *Applied Physics Letters* 96.11 (2010), pág. 111906. DOI: [10.1063/1.3360219](https://doi.org/10.1063/1.3360219) (vid. pág. 65).
- [197] B Ando, S Baglio, AR Bulsara y V Marletta. «A bistable buckled beam based approach for vibrational energy harvesting». En: *Sensors and Actuators A: Physical* 211 (2014), págs. 153-161. DOI: [10.1016/j.sna.2013.12.027](https://doi.org/10.1016/j.sna.2013.12.027) (vid. pág. 65).

- [198] AJ Sneller, P Cette y BP Mann. «Experimental investigation of a post-buckled piezoelectric beam with an attached central mass used to harvest energy». En: *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers* 225.4 (2011), págs. 497-509. DOI: [10.1177/0959651811401954](https://doi.org/10.1177/0959651811401954) (vid. pág. 65).
- [199] Daniel A Porter y Thomas A Berfield. «A bi-stable buckled energy harvesting device actuated via torque arms». En: *Smart Materials and Structures* 23.7 (2014), pág. 075003. DOI: [10.1088/0964-1726/23/7/075003](https://doi.org/10.1088/0964-1726/23/7/075003) (vid. pág. 65).
- [200] Weiqun Liu, Fabien Formosa, Adrien Badel, Amen Agbossou y Guangdi Hu. «Investigation of a buckled beam generator with elastic clamp boundary». En: *Smart Materials and Structures* 25.11 (2016), pág. 115045. DOI: [10.1088/0964-1726/25/11/115045](https://doi.org/10.1088/0964-1726/25/11/115045) (vid. págs. 65, 70).
- [201] Yang Zhu y Jean W Zu. «Enhanced buckled-beam piezoelectric energy harvesting using midpoint magnetic force». En: *Applied Physics Letters* 103.4 (2013), pág. 041905. DOI: [10.1063/1.4816518](https://doi.org/10.1063/1.4816518) (vid. pág. 65).
- [202] Ravindra Masana y Mohammed F Daqaq. «Relative performance of a vibratory energy harvester in mono-and bi-stable potentials». En: *Journal of Sound and Vibration* 330.24 (2011), págs. 6036-6052. DOI: [10.1016/j.jsv.2011.07.031](https://doi.org/10.1016/j.jsv.2011.07.031) (vid. págs. 66, 112).
- [203] R Masana y Mohammed Farid Daqaq. «Energy harvesting in the superharmonic frequency region of a twin-well oscillator». En: *Journal of Applied Physics* 111.4 (2012), pág. 044501. DOI: [10.1063/1.3684579](https://doi.org/10.1063/1.3684579) (vid. pág. 66).
- [204] F Cottone, L Gammaitoni, H Vocca, M Ferrari y V Ferrari. «Piezoelectric buckled beams for random vibration energy harvesting». En: *Smart Materials and Structures* 21.3 (2012), pág. 035021. DOI: [10.1088/0964-1726/21/3/035021](https://doi.org/10.1088/0964-1726/21/3/035021) (vid. págs. 66, 78).
- [205] F Cottone, M Mattarelli, H Vocca y L Gammaitoni. «Effect of boundary conditions on piezoelectric buckled beams for vibrational noise harvesting». En: *EPJ-Special Topics* 224.14 (2015), págs. 2855-2866. DOI: [10.1140/epjst/e2015-02593-5](https://doi.org/10.1140/epjst/e2015-02593-5) (vid. págs. 66, 71).
- [206] MH Ansari y M Amin Karami. «Energy harvesting from controlled buckling of piezoelectric beams». En: *Smart Materials and Structures* 24.11 (2015), pág. 115005. DOI: [10.1088/0964-1726/24/11/115005](https://doi.org/10.1088/0964-1726/24/11/115005) (vid. págs. 66, 103).
- [207] A Garg y SK Dwivedy. «Nonlinear dynamics of axially loaded piezoelectric energy harvester». En: *Procedia Engineering* 144 (2016), págs. 592-599. DOI: [10.1016/j.proeng.2016.05.046](https://doi.org/10.1016/j.proeng.2016.05.046) (vid. págs. 66, 92, 125).
- [208] Meghashyam Panyam y Mohammed F Daqaq. «A comparative performance analysis of electrically optimized nonlinear energy harvesters». En: *Journal of Intelligent Material Systems and Structures* 27.4 (2016), págs. 537-548. DOI: [10.1177/1045389X15573344](https://doi.org/10.1177/1045389X15573344) (vid. págs. 66, 125).
- [209] Feng Qian, Shengxi Zhou y Lei Zuo. «Approximate solutions and their stability of a broadband piezoelectric energy harvester with a tunable potential function». En: *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation* 80 (2020), pág. 104984. DOI: [10.1016/j.cnsns.2019.104984](https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2019.104984) (vid. págs. 67, 92).
- [210] Yunbin Chen y Zhi Yan. «Nonlinear analysis of axially loaded piezoelectric energy harvesters with flexoelectricity». En: *International Journal of Mechanical Sciences* 173 (2020), pág. 105473. DOI: [10.1016/j.ijmecsci.2020.105473](https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2020.105473) (vid. págs. 67, 71, 88-90).
- [211] Pavlo Zubko, Gustau Catalan y Alexander K Tagantsev. «Flexoelectric effect in solids». En: *Annual Review of Materials Research* 43 (2013), págs. 387-421. DOI: [10.1146/annurev-matsci-071312-121634](https://doi.org/10.1146/annurev-matsci-071312-121634) (vid. pág. 67).
- [212] Masoud Derakhshani, Niknam Momenzadeh y Thomas A Berfield. «Analytical and experimental study of a clamped-clamped, bistable buckled beam low-frequency PVDF vibration energy harvester». En: *Journal of Sound and Vibration* 497 (2021), pág. 115937. DOI: [10.1016/j.jsv.2021.115937](https://doi.org/10.1016/j.jsv.2021.115937) (vid. pág. 67).

- [213] Singiresu S Rao. *Vibration of continuous systems*. New Jersey: John Wiley & Sons, 2019. DOI: [10.1002/9781119424284](https://doi.org/10.1002/9781119424284) (vid. págs. 67, 84, 193).
- [214] M Pakdemi y H Boyaci. «Effect of non-ideal boundary conditions on the vibrations of continuous systems». En: *Journal of Sound and Vibration* 249.4 (2002), pág. 815d823. DOI: [10.1006/jsvi.2001.3760](https://doi.org/10.1006/jsvi.2001.3760) (vid. pág. 68).
- [215] M Pakdemirli y H Boyaci. «Vibrations of a stretched beam with non-ideal boundary conditions». En: *Mathematical and Computational Applications* 6.3 (2001), págs. 217-220. DOI: [10.3390/mca6030217](https://doi.org/10.3390/mca6030217) (vid. pág. 68).
- [216] M Pakdemirli y H Boyaci. «Vibrations of a Simply Supported Beam with a Non-Ideal Support at an Intermediate Point». En: *Mathematical and Computational Applications* 8.2 (2003), págs. 159-164. DOI: [10.3390/mca8020159](https://doi.org/10.3390/mca8020159) (vid. pág. 68).
- [217] Hakan Boyaci. «Vibrations of stretched damped beams under non-ideal boundary conditions». En: *Sadhana* 31.1 (2006), págs. 1-8. DOI: [10.1007/bf02703795](https://doi.org/10.1007/bf02703795) (vid. pág. 68).
- [218] A Kamali Eigoli y MT Ahmadian. «Nonlinear vibration of beams under nonideal boundary conditions». En: *Acta Mechanica* 218.3 (2011), págs. 259-267. DOI: [10.1007/s00707-010-0423-5](https://doi.org/10.1007/s00707-010-0423-5) (vid. pág. 68).
- [219] Jinhee Lee. «Free vibration analysis of beams with non-ideal clamped boundary conditions». En: *Journal of Mechanical Science* 27.2 (2013), págs. 297-303. DOI: [10.1007/s12206-012-1245-2](https://doi.org/10.1007/s12206-012-1245-2) (vid. pág. 69).
- [220] H Onur Ekici y Hakan Boyaci. «Effects of non-ideal boundary conditions on vibrations of microbeams». En: *Journal of Vibration and Control* 13.9-10 (2007), págs. 1369-1378. DOI: [10.1177/1077546307077453](https://doi.org/10.1177/1077546307077453) (vid. pág. 69).
- [221] Jing-Zhong Xing y Yong-Gang Wang. «Free vibrations of a beam with elastic end restraints subject to a constant axial load». En: *Archive of Applied Mechanics* 83.2 (2013), págs. 241-252. DOI: [10.1007/s00419-012-0649-x](https://doi.org/10.1007/s00419-012-0649-x) (vid. pág. 69).
- [222] Zhen Ni y Hongxing Hua. «Axial-bending coupled vibration analysis of an axially-loaded stepped multi-layered beam with arbitrary boundary conditions». En: *International Journal of Mechanical Sciences* 138 (2018), págs. 187-198. DOI: [10.1016/j.ijmecsci.2018.02.006](https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2018.02.006) (vid. pág. 69).
- [223] Stefano Lenci y Giuseppe Rega. «Axial-transversal coupling in the free nonlinear vibrations of Timoshenko beams with arbitrary slenderness and axial boundary conditions». En: *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences* 472.2190 (2016), pág. 20160057. DOI: [10.1098/rspa.2016.0057](https://doi.org/10.1098/rspa.2016.0057) (vid. págs. 69, 71).
- [224] Stefano Lenci y Giuseppe Rega. «Nonlinear free vibrations of planar elastic beams: a unified treatment of geometrical and mechanical effects». En: *Procedia IUTAM* 19 (2016), págs. 35-42. DOI: [10.1016/j.piutam.2016.03.007](https://doi.org/10.1016/j.piutam.2016.03.007) (vid. págs. 69, 71).
- [225] S Lenci, F Clementi y G Rega. «A comprehensive analysis of hardening/softening behaviour of shearable planar beams with whatever axial boundary constraint». En: *Meccanica* 51.11 (2016), págs. 2589-2606. DOI: [10.1007/s11012-016-0374-6](https://doi.org/10.1007/s11012-016-0374-6) (vid. págs. 69, 71).
- [226] Erdogan Madenci e Ibrahim Guven. *The finite element method and applications in engineering using ANSYS®*. Luxembourg: Springer, 2015. DOI: [10.1007/978-1-4899-7550-8](https://doi.org/10.1007/978-1-4899-7550-8) (vid. pág. 70).
- [227] Ali H Nayfeh y P Frank Pai. *Linear and nonlinear structural mechanics*. New Jersey: John Wiley & Sons, 2008. ISBN: 9783527617562. DOI: [10.1002/9783527617562](https://doi.org/10.1002/9783527617562) (vid. págs. 70, 72, 79, 101).
- [228] Y. Fung. *A first course in continuum mechanics: for physical and biological engineers and scientists*. New Jersey: Prentice Hall, 1994, pág. 311 (vid. págs. 70, 72).

- [229] CD Gatti, JM Ramirez, SP Machado y M Febbo. «Influence of nonlinear constitutive relations in unimorphs piezoelectric harvesters». En: *Journal of Physics: Conference Series*. Vol. 773. 1. IOP Publishing, 2016, pág. 012093. DOI: [10.1088/1742-6596/773/1/012093](https://doi.org/10.1088/1742-6596/773/1/012093) (vid. págs. 70, 71, 73).
- [230] Samuel C Stanton, Alper Erturk, Brian P Mann y Daniel J Inman. «Resonant manifestation of intrinsic nonlinearity within electroelastic micropower generators». En: *Applied Physics Letters* 97.7 (2010), pág. 254101. DOI: [10.1063/1.3530449](https://doi.org/10.1063/1.3530449) (vid. págs. 71, 124).
- [231] Ali H Nayfeh y Samir A Emam. «Exact solution and stability of postbuckling configurations of beams». En: *Nonlinear Dynamics* 54.4 (2008), págs. 395-408. DOI: [10.1007/s11071-008-9338-2](https://doi.org/10.1007/s11071-008-9338-2) (vid. págs. 71, 88-90).
- [232] Carlos EN Mazzilli, César T Sanches, Odulpho GP Baracho Neto, Marian Wiercigroch y Marko Keber. «Non-linear modal analysis for beams subjected to axial loads: Analytical and finite-element solutions». En: *International Journal of Non-Linear Mechanics* 43.6 (2008), págs. 551-561. DOI: [10.1016/j.ijnonlinmec.2008.04.004](https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2008.04.004) (vid. págs. 72, 76).
- [233] Leonard Meirovitch. *Methods of analytical dynamics*. North Chelmsford, Massachusetts: Courier Corporation, 2010 (vid. pág. 72).
- [234] Friedrich Gerard Friedlander, G Friedlander, Mark Suresh Joshi, M Joshi y Mohan C Joshi. *Introduction to the Theory of Distributions*. Cambridge University Press, 1998. ISBN: 9780521649711 (vid. pág. 74).
- [235] Ali H Nayfeh y Dean T Mook. *Nonlinear oscillations*. New Jersey: John Wiley & Sons, 2008. ISBN: 9783527617586. DOI: [10.1002/9783527617586](https://doi.org/10.1002/9783527617586) (vid. págs. 76, 92).
- [236] FJ Shaker. «Effect of Axial Load on Mode Shape and Frequencies of Beams, NASA Lewis Research Center». En: *Report NASA-TN-8109* (1975) (vid. pág. 84).
- [237] Xianzhi Dai, Yumei Wen, Ping Li, Jin Yang y Xiaofang Jiang. «A vibration energy harvester using magnetostrictive/piezoelectric composite transducer». En: *Sensors, 2009 IEEE*. IEEE. 2009, págs. 1447-1450. DOI: [10.1109/ICSENS.2009.5398445](https://doi.org/10.1109/ICSENS.2009.5398445) (vid. pág. 92).
- [238] Abdessattar Abdelkefi, Muhammad R Hajj y Ali H Nayfeh. «Power harvesting from transverse galloping of square cylinder». En: *Nonlinear Dynamics* 70.2 (2012), págs. 1355-1363. DOI: [10.1007/s11071-012-0538-4](https://doi.org/10.1007/s11071-012-0538-4) (vid. pág. 92).
- [239] A Abdelkefi, AH Nayfeh y MR Hajj. «Global nonlinear distributed-parameter model of parametrically excited piezoelectric energy harvesters». En: *Nonlinear Dynamics* 67.2 (2012), págs. 1147-1160. DOI: [10.1007/s11071-011-0059-6](https://doi.org/10.1007/s11071-011-0059-6) (vid. pág. 92).
- [240] Pouyan Shahabi, Hamed Ghafarirad y Afshin Taghvaeipour. «Nonlinear vibration analysis of piezoelectric bending actuators: Theoretical and experimental studies». En: *Comptes Rendus Mécanique* 347.12 (2019), págs. 953-966. DOI: [10.1016/j.crme.2019.10.007](https://doi.org/10.1016/j.crme.2019.10.007) (vid. pág. 92).
- [241] Samir A Emam y Ali H Nayfeh. «Nonlinear responses of buckled beams to subharmonic-resonance excitations». En: *Nonlinear Dynamics* 35.2 (2004), págs. 105-122. DOI: [10.1023/B:NODY.0000020878.34039.d4](https://doi.org/10.1023/B:NODY.0000020878.34039.d4) (vid. pág. 92).
- [242] Carlos EN Mazzilli. «Buckling and post-buckling of extensible rods revisited: a multiple-scale solution». En: *International Journal of Non-Linear Mechanics* 44.2 (2009), págs. 200-208. DOI: [10.1016/j.ijnonlinmec.2008.11.005](https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2008.11.005) (vid. págs. 92, 166).
- [243] Ali H Nayfeh. *Perturbation methods*. New Jersey: John Wiley & Sons, 2008. ISBN: 9783527617609. DOI: [10.1002/9783527617609](https://doi.org/10.1002/9783527617609) (vid. pág. 92).
- [244] Sebastián P Machado, Mariano Febbo, Claudio D Gatti y Santiago M Osinaga. «A piezoelectric beam model with geometric, material and damping nonlinearities for energy harvesting». En: *Smart Materials and Structures* 29.9 (2020), pág. 095009. DOI: [10.1088/1361-665x/ab9ddb](https://doi.org/10.1088/1361-665x/ab9ddb) (vid. págs. 99, 102, 124).

- [245] Guido Van Rossum y Fred L Drake Jr. *Python tutorial*. Vol. 620. Centrum voor Wiskunde en Informatica Amsterdam, 1995 (vid. pág. 99).
- [246] *Labworks Inc.* <https://www.labworks-inc.com>. Último acceso: 2022-02 (vid. pág. 110).
- [247] *Rigol.* <https://www.rigolna.com>. Último acceso: 2022-02 (vid. pág. 110).
- [248] *Polytec.* <https://www.polytec.com>. Último acceso: 2022-02 (vid. pág. 110).
- [249] *PCB Piezotronics.* <https://www.pcb.com/>. Último acceso: 2022-02 (vid. pág. 110).
- [250] *NI: National Instruments.* <https://www.ni.com>. Último acceso: 2022-02 (vid. pág. 110).
- [251] *TE connectivity.* <https://www.te.com/>. Último acceso: 2022-02 (vid. pág. 110).
- [252] *Arduino.* <https://www.arduino.cc/>. Último acceso: 2022-02 (vid. pág. 110).
- [253] *Provibtech.* <http://www.pvtvm.com/>. Último acceso: 2022-02 (vid. pág. 111).
- [254] F Orban. «Damping of materials and members in structures». En: *Journal of Physics: Conference Series*. Vol. 268. 1. IOP Publishing. 2011, pág. 012022. DOI: 10.1088/1742-6596/268/1/012022 (vid. pág. 114).
- [255] Stephen Wiggins, Stephen Wiggins y Martin Golubitsky. *Introduction to applied nonlinear dynamical systems and chaos*. Vol. 2. Luxembourg: Springer, 1990. DOI: 10.1007/b97481 (vid. pág. 119).
- [256] Gaetano Arena, Rainer MJ Groh, Raf Theunissen, Paul M Weaver y Alberto Pirrera. «Design and testing of a passively adaptive inlet». En: *Smart Materials and Structures* 27.8 (2018), pág. 085019. DOI: 10.1088/1361-665X/aacf79 (vid. pág. 121).
- [257] Samir A Emam. «A static and dynamic analysis of the postbuckling of geometrically imperfect composite beams». En: *Composite Structures* 90.2 (2009), págs. 247-253. DOI: 10.1016/j.compstruct.2009.03.020 (vid. págs. 121, 122).
- [258] Xiaochao Chen y Yinghui Li. «Size-dependent post-buckling behaviors of geometrically imperfect microbeams». En: *Mechanics Research Communications* 88 (2018), págs. 25-33. DOI: 10.1016/j.mechrescom.2017.12.005 (vid. pág. 121).
- [259] G Piana, A Manuello, R Malvano y A Carpinteri. «Fundamental frequencies of slender beams subject to imposed axial end displacements». En: *Experimental and Applied Mechanics, Volume 6*. Springer, 2015, págs. 59-66. DOI: 10.1007/978-3-319-06989-08 (vid. pág. 122).
- [260] Rajesh Rajamani. *Vehicle dynamics and control*. Springer Science & Business Media, 2011. ISBN: 0941-5122. DOI: 10.1007/978-1-4614-1433-9 (vid. págs. 131, 132).
- [261] *Flota circulante de vehiculos en Argentina, AFAC (Asociacion de Fabricas Argentinas de Componentes)*. <https://datosmacro.expansion.com/negocios/vehiculos-en-uso/argentina>. Último acceso: 2021-12 (vid. pág. 131).
- [262] Thomas D Gillespie. *Fundamentals of vehicle dynamics*. SAE Technical Paper, 1992. ISBN: 978-1-56091-199-9. DOI: 10.4271/R-114 (vid. págs. 131, 132).
- [263] Francisco Aparicio Izquierdo, Carlos Vera Alvarez y Vicente Díaz López. *Teoría de los vehículos automóviles*. Madrid. Universidad Politécnica de Madrid, 1995. ISBN: 8474841461 (vid. pág. 131).
- [264] Mechanical Simulation CarSim. «CarSim 2019.1 New Features». En: () (vid. pág. 131).
- [265] Tesis Dynaware. «veDyna 3.10 User Manual». En: *München* (2007) (vid. pág. 131).
- [266] MW Sayers. «Autosim». En: *Vehicle System Dynamics* 22.S1 (1993), págs. 53-56 (vid. pág. 131).
- [267] AB Modelon y Sweden Lund. «Vehicle Dynamics Library». En: *User's Guide, Version 1* (2007) (vid. pág. 131).

- [268] Hans Pacejka. *Tire and vehicle dynamics*. Elsevier, 2005. ISBN: 978-0-08-097016-5. DOI: [10.1016/C2010-0-68548-8](https://doi.org/10.1016/C2010-0-68548-8) (vid. págs. 132, 139, 147).
- [269] Reza N Jazar. *Vehicle dynamics: theory and application*. Springer, 2017. ISBN: 978-0-387-74244-1. DOI: [10.1007/978-0-387-74244-1](https://doi.org/10.1007/978-0-387-74244-1) (vid. págs. 132, 134, 138, 140).
- [270] SA Lippmann, WA Piccin y TP Baker. «Enveloping characteristics of truck tires: A laboratory evaluation». En: *SAE Transactions* (1966), págs. 831-836. DOI: [10.4271/650184](https://doi.org/10.4271/650184) (vid. págs. 140).
- [271] Konghui Guo. *Tire roller contact model for simulation of vehicle vibration input*. Inf. téc. SAE Technical Paper, 1993. DOI: [10.4271/932008](https://doi.org/10.4271/932008) (vid. págs. 140).
- [272] Konghui Guo y Qing Liu. *A model of tire enveloping properties and its application on modelling of automobile vibration systems*. Inf. téc. SAE Technical Paper, 1998. DOI: [10.4271/980253](https://doi.org/10.4271/980253) (vid. págs. 140).
- [273] Jun Sui y John Hirshey. «Evaluation on analytical tire models for vehicle vertical vibration simulation using virtual tire testing method». En: *SAE transactions* (1999), págs. 1521-1526. DOI: [10.4271/1999-01-0786](https://doi.org/10.4271/1999-01-0786) (vid. págs. 140).
- [274] ShaoPu Yang, ShaoHua Li y YongJie Lu. «Dynamics of vehicle-pavement coupled system based on a revised flexible roller contact tire model». En: *Science in China Series E: Technological Sciences* 52.3 (2009), págs. 721-730. DOI: [10.1007/s11431-009-0053-0](https://doi.org/10.1007/s11431-009-0053-0) (vid. págs. 140).
- [275] Phanikrishna Thota, Bernd Krauskopf, Mark Lowenberg y Etienne Coetzee. «Influence of tire inflation pressure on nose landing gear shimmy». En: *Journal of Aircraft* 47.5 (2010), págs. 1697-1706. DOI: doi.org/10.2514/1.C000248 (vid. págs. 140).
- [276] Yi-Chung Shu e IC Lien. «Efficiency of energy conversion for a piezoelectric power harvesting system». En: *Journal of micromechanics and microengineering* 16.11 (2006), págs. 2429 (vid. págs. 156).
- [277] *Fritsch*. <https://www.fritsch-international.com/>. Último acceso: 2022-04 (vid. págs. 188).
- [278] *Indef*. <https://www.indef.com.ar/>. Último acceso: 2022-04 (vid. págs. 188).
- [279] *VitreK*. <https://vitrek.com/>. Último acceso: 2022-04 (vid. págs. 189).
- [280] *Bruker*. <https://www.bruker.com/>. Último acceso: 2022-04 (vid. págs. 189).
- [281] *Malvern PANalytical*. <https://www.malvernpanalytical.com/>. Último acceso: 2022-04 (vid. págs. 189).
- [282] *Jeol*. <https://www.jeol.co.jp/en/>. Último acceso: 2022-04 (vid. págs. 189).
- [283] *Renishaw*. <https://www.renishaw.com/>. Último acceso: 2022-04 (vid. págs. 191).
- [284] *Hewlett-Packard 4284A*. <http://www.hp.com/>. Último acceso: 2022-04 (vid. págs. 191).
- [285] *Sinocera*. <http://www.sinocera.net/>. Último acceso: 2022-04 (vid. págs. 191).
- [286] COMSOL. «Introduction to COMSOL Multiphysics®». En: *COMSOL Multiphysics, Burlington, MA, accessed Feb 9* (1998), págs. 2018 (vid. págs. 193).

EVALUACIÓN DE MATERIALES LIBRES DE PLOMO DE ORIGEN NACIONAL PARA GENERACIÓN DE ENERGÍA

En este apéndice se presenta una breve descripción del procedimiento para la obtención de materiales piezoeléctricos libres de plomo, conformados por reacciones de estado sólido. Como valor agregado, las muestras desarrolladas son de fabricación nacional, específicamente producidas por la división «cerámicos» del *Instituto de Investigación en Ciencia y Tecnología de Materiales (INTEMA)*. La metodología empleada para conformar los distintos tipos de sistemas piezoeléctricos es similar, donde las diferencias entre cada uno se encuentra en las relaciones estequiométricas, tiempos y temperatura de calcinado o sinterización, y/o voltaje empleado para la polarización de las muestras.

Adicionalmente al proceso de elaboración, serán también descritos el conjunto de métodos necesarios para su caracterización, así como la evaluación del rendimiento de las muestras para la recolección de energía.

Llamamos «sistema» a los diferentes compuestos piezoeléctricos, p. ej. BNKT, BNT-BT, etc.

A.1 PROCESO DE CONFORMACIÓN DE LA MUESTRAS

La conformación de cerámicas piezoeléctricas es un largo y trabajoso proceso de varios días de duración donde deben ser realizados una gran cantidad de pasos. El procedimiento comienza con la *preparación de los reactivos* (carbonatos y óxidos) presentados en la Figura A.1a, los cuales son:

- Oxido de titanio (IV).
- Carbonato de sodio (Anhidro).
- Carbonato de potasio.
- Oxido de bismuto (III).
- Oxido de niobio (V).



(a)



(b)

Figura A.1: (a) Preparación de reactivos, (b) Molino planetario de bolas *Fritsch Pulverisette 7 Classic Line*.

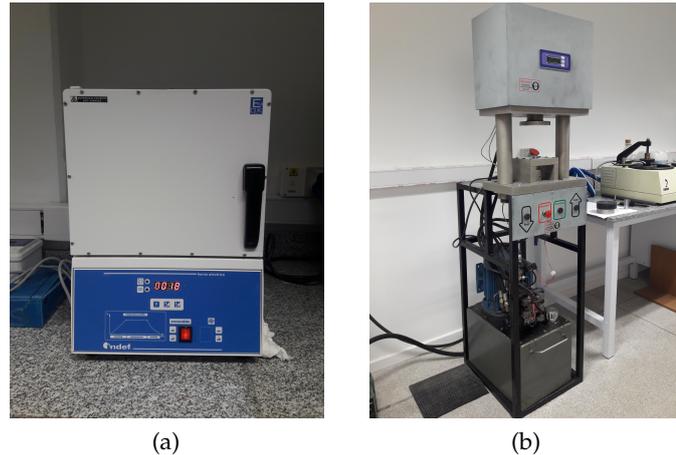


Figura A.2: (a) Horno eléctrico *Indef 273* empleado para calcinación y sinterizado, (b) Prensa hidráulica utilizada para la conformación de las muestras.

En este primer paso, los reactivos deben ser molidos y llevados un tamaño de grano parejo, utilizando un molino planetario de bolas marca *Fritsch Pulverisette 7 Classic Line Fritsch* [277], mostrado en la Figura A.1b. Este tipo de equipos son ideales para triturar el material a moler y operan mediante impacto de alta energía por medio de bolas de molienda en vasos rotativos que giran una velocidad nominal de 1100RPM. En este caso, el elemento utilizado como vehículo es alcohol isopropílico, lo que significa una molienda del tipo húmeda. La razón de la utilización de este líquido es que luego puede ser eliminado mediante la evaporación en un horno de secado (realizado durante aproximadamente 12 horas a una temperatura de 80°C). Una vez completado el secado, se utilizan tamices de una granulometría de 62 micrómetros para garantizar un tamaño por debajo de dicho nivel.

Seguidamente, se procede a la preparación de cada vaso con las cantidades estequiométricas del sistema buscado, donde se repite el proceso de molienda, secado y tamizado. Luego de esto, el compuesto debe ser *calcinado*, donde se busca la eliminación de la fase orgánica existente. Este procedimiento es llevado a cabo en un horno eléctrico marca *Indef 273* [278], presentado en la Figura A.2a. En lo referido a las temperaturas y tiempos elegidos, estos varían ligeramente dependiendo del sistema, situándose los mismos entre rangos de aproximadamente 700 a 800°C durante 2 a 3 horas. Una vez completado este proceso, el compuesto debe ser molido, secado y tamizado por una tercera y última vez.

El siguiente paso consiste en la *conformación geométrica* de la muestra. Este paso es llevado a cabo mediante una prensa hidráulica fabricada por técnicos del INTEMA que opera con una presión nominal de 100kg/cm². Con el fin de dar cohesión a las muestras, acetato de polivinilo (PVA) en una solución acuosa es agregado como ligante previo al prensado. La forma final de las muestras depende de la forma del molde, donde tanto discos como placas pueden ser obtenidas como resultado final.

Seguido a esto, las muestras deben ser *sinterizadas*, donde se busca dar cohesión a los polvos, creando enlaces entre las partículas y dándole una estructura granular definida. El sinterizado es llevado a cabo en el mismo horno *Indef 273* de la Figura A.2a, y tanto las temperaturas, sus intervalos temporales, así como la velocidad de enfriamiento dependen fuertemente del

Los materiales más comunes para las bolas de molienda son acero inoxidable y carburo de tungsteno.

Las placas son obtenidas a partir del corte de muestras en forma de disco.

La velocidad de enfriamiento posee un rol crucial para evitar fracturas por tensiones térmicas.

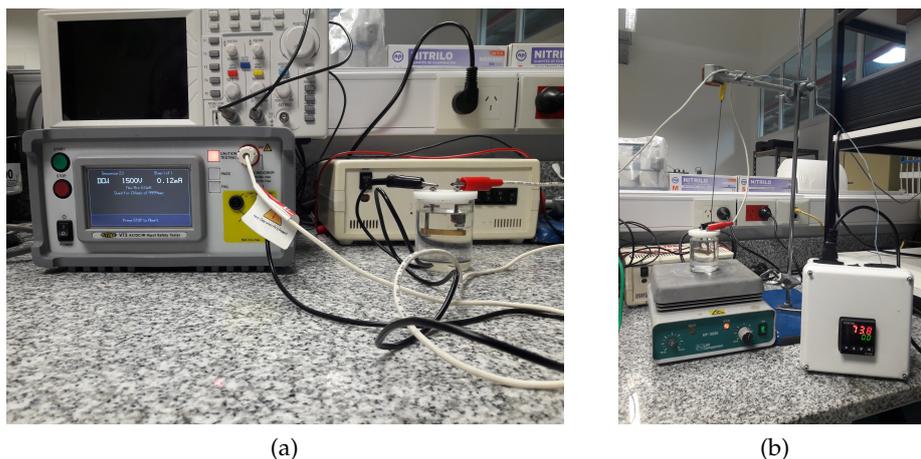


Figura A.3: Proceso de polarización. (a) Tester de alta potencia Vitrek V73, (b) Muestra sometida a temperatura.

sistema. Estos valores, deben ser obtenidos experimentalmente a partir de la literatura y/o ensayos anteriormente realizados. En este paso, se busca la formación de la estructura cristalina del tipo *perovskita* con la mayor cantidad de distorsiones posibles en conjunto con la creación de fases secundarias, las cuales están asociadas un mayor efecto piezoeléctrico [32, 35].

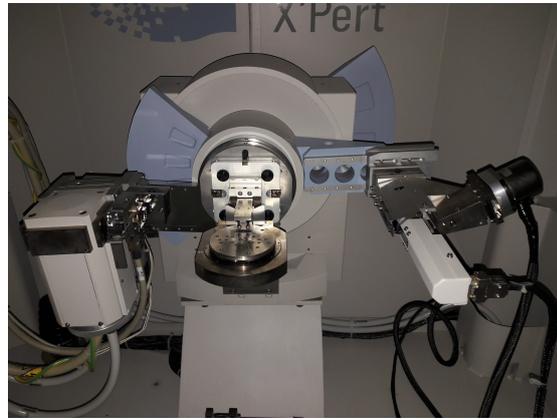
Por último, las muestras deben ser polarizadas utilizando un tester de alta potencia Vitrek V73 [279] mostrado en la Figura A.3a. En una primera instancia, se utiliza pintura de plata para la conformación de los electrodos. Luego, las muestras son colocadas en un baño de aceite de silicona como protección de los posibles arcos eléctricos que se puedan producir. La tensión necesaria a aplicar, así como el tiempo requerido dependen una vez más del sistema. Aun más, para algunos sistemas el proceso de polarización debe ser realizado con temperatura, como puede ser el caso de BNKT mostrado en la Figura A.3b. Una vez finalizado este paso las muestras piezoeléctricas ya se encuentran listas para ser caracterizadas y estudiadas.

A.2 MÉTODOS DE CARACTERIZACIÓN DE LAS MUESTRAS

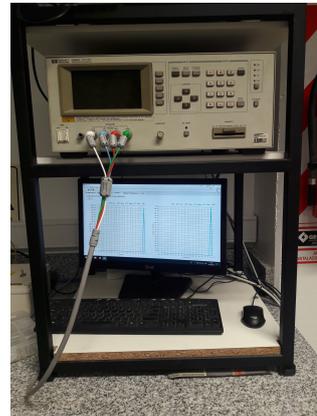
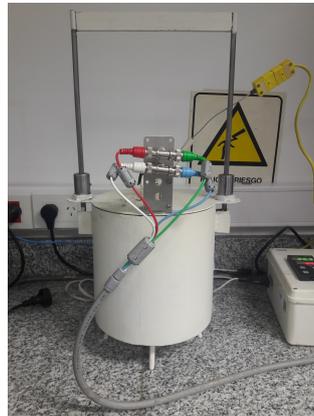
Una vez conformadas las muestras, se realizan una serie de ensayos de caracterización del material a fines de identificar las propiedades del mismo. Estos estudios involucran tanto análisis estructurales, micro-estructurales, eléctricos y físicos, tal como se presentan a continuación:

1. *Densidad*, mediante la aplicación del método de Arquímedes y utilizando balanzas de precisión.
2. *Módulo de elasticidad*, empleando un nanoindenter marca Bruker Hysitron TI 980 [280] y de acuerdo a la norma ISO 14577.
3. *Difracción de Rayos X*, para caracterizar las diferentes fases cristalinas utilizando un analizador marca PANalytical X'pert Pro [281] representado en la Figura A.4a.
4. *Microscopio electrónico de barrido* (o SEM por sus siglas en inglés), para el estudio de la morfología de grano y presencia de fases secundarias empleando un microscopio marca Jeol JSM-6460LV [282].

SEM: Scanning
Electron Microscope



(a)



(b)



(c)

Figura A.4: Instrumental empleado (a) Analizador de rayos X PANalytical X'pert Pro, (b) Impedancímetro Hewlett-Packard 4284A, (c) Medidor de d_{33} SINCERA YE2730A.

5. *Espetroscopia Raman*, para identificar la presencia de distorsiones en la estructura *perovskita* mediante un equipo marca *Renishaw inVia Raman Microscope* [283].
6. *Curvas de polarización-campo (P-E)*, para medir la histéresis ferroeléctrica del material, en un baño de aceite de silicona utilizando un circuito Sawyer-Tower modificado.
7. Influencia de la temperatura en las *propiedades dieléctricas* del material permitiendo la determinación de la pérdida dieléctrica $\tan \delta$ así como el calculo indirecto de la capacidad C_p considerando la geometría de la muestra. En este caso, se utilizó un impedancímetro marca *Hewlett-Packard 4284A* [284] que opera en un rango de 20Hz-1MHz acoplado a una estufa para realización del ensayo a diferentes temperaturas. Adicionalmente, el factor de acoplamiento planar electromecánico (K_p) puede ser determinado a partir de las curvas de impedancia de las cerámicas polarizadas acorde a

$$K_p = \sqrt{2,51 \left\{ \frac{f_a - f_r}{f_a} \right\}} \quad (\text{A.1})$$

donde f_a y f_r representan las frecuencias de anti-resonancia y resonancia respectivamente [33].

8. Por último, la medición del d_{33} se realiza utilizando un equipo marca *SINOCERA YE2730A* [285] diseñados por *Global Sensor Technology* y representado en la Figura A.4c.

A.3 EVALUACIÓN PARA LA RECOLECCIÓN DE ENERGÍA

Una vez realizada la caracterización de la mayor parte de las propiedades de las muestras piezoeléctricas libres de plomo, es posible llevar a cabo la evaluación de estos materiales para la recolección de energía. Con este propósito, se preparan dos vigas que contienen dos muestras piezoeléctricas conformadas por los sistemas *BNKT* y *KNL-NTS*. fueron, adheridos una viga de acero en configuración cantilever, tan cerca del empotramiento como sea posible. La razón de la elección de estos sistemas se debe a que fueron las que demostraron mejores propiedades (mayor valor de d_{33} en el ensayo 8). En este procedimiento, las muestras fueron excitadas de manera armónica a baja amplitud con el fin de garantizar una respuesta lineal, buscando de esta manera completar dos objetivos:

1. Identificar el valor de la constante de acoplamiento piezoeléctrico d_{31} , a partir del ajuste por mínimos cuadrados entre el resultado experimental y numérico de la curva V/g .
2. Comparar el rendimiento de estos materiales frente a alternativas basadas en PZT. Las muestras libres de plomo desarrolladas son cerámicas tipo *bulk*, por lo tanto para realizar una comparación adecuada se utiliza una cerámica del mismo tipo basada en PZT. Por ello, se utilizó un zumbador (o más conocido como *buzzer* por su denominación en inglés) fabricado en PZT-5H y pegado a una muestra de acero similar a las otras muestras. Las dimensiones de los tres sistemas se encuentran presentados en el Cuadro A.1.

	BNKT	KNL-NTS	PZT-5H
Muestra	Placa	Disco	Disco
Espesor, h_p	0,71	1,1	0,2
Ancho, b_p [mm]	9,17	-	-
Largo, L_p [mm]	12,4	-	-
Diámetro, d_p [mm]	-	16,4	18

Cuadro A.1: Dimensiones geométricas de las muestras elegidas para la evaluación de la recolección de energía.

En lo referido a la formulación matemática, las ecuaciones lineales discretizadas que gobiernan el problema asociado al acoplamiento electromecánico pueden ser obtenidas eliminando los términos no lineales constitutivos y geométricos de las Ecs. (4.73) y (4.74)

$$\begin{aligned} \ddot{q}_i + \mu_{2i} \dot{q}_i + \omega_i^2 q_i + \theta_i v &= -F_i \cos(\Omega t), \\ C_p \dot{v} + \frac{v}{R} - \psi_i \dot{q}_i &= 0. \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

siendo los parámetros modales asociados los siguientes:

$$\begin{aligned} F_i &= G \int_0^L m \phi_i dx, \\ \theta_i = \psi_i &= \frac{d_{31}}{c_{33} h_p} \left(\int_{A_p} z dA_p \right) \left(\int_{L_p} \Lambda'' \phi_i dx \right), \\ \mu_{2i} &= 2\omega_i \zeta_i \int_0^L \phi_i^2 dx \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

donde para nuestras muestras, los únicos parámetros desconocidos resultan ser ζ_i y d_{31} . Debido a tratarse de un problema lineal, los modos de vibración pueden desacoplarse entre sí, permitiendo hallar una solución analítica exacta mediante, por ejemplo, la aplicación de balance armónico, donde se asume la siguiente dependencia de las variables independientes

$$\begin{aligned} q_i &= \bar{q}_i e^{i\Omega t} \\ v &= \bar{v} e^{i\Omega t}, \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

siendo \bar{v} y \bar{q}_i las amplitudes (complejas) del voltaje y de la i -ésima coordenada generalizada respectivamente. Reemplazando las expresiones (A.4) en (A.2), las soluciones para el módulo de las variables son

$$\begin{aligned} \bar{q}_i(\Omega) &= \frac{F_i \theta_i \Omega R}{\sqrt{[\omega_i - \Omega^2 - \mu_{2i} C_p R \Omega^2]^2 + [\mu_{2i} \Omega + R \Omega (\theta_i^2 + C_p \omega_i^2 - C_p \Omega^2)]^2}}, \\ \bar{v}(\Omega) &= \sum_{i=1}^N \frac{\theta_i \Omega R}{\sqrt{1 + C_p^2 R^2 \Omega^2}} \bar{q}_i. \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

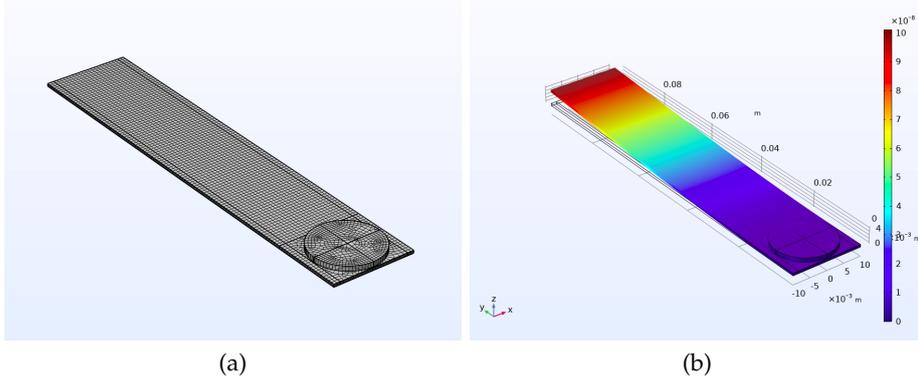


Figura A.5: Obtención del modo de vibración a partir de COMSOL (a) Malla desarrollada, (b) Solución del primer modo de vibración.

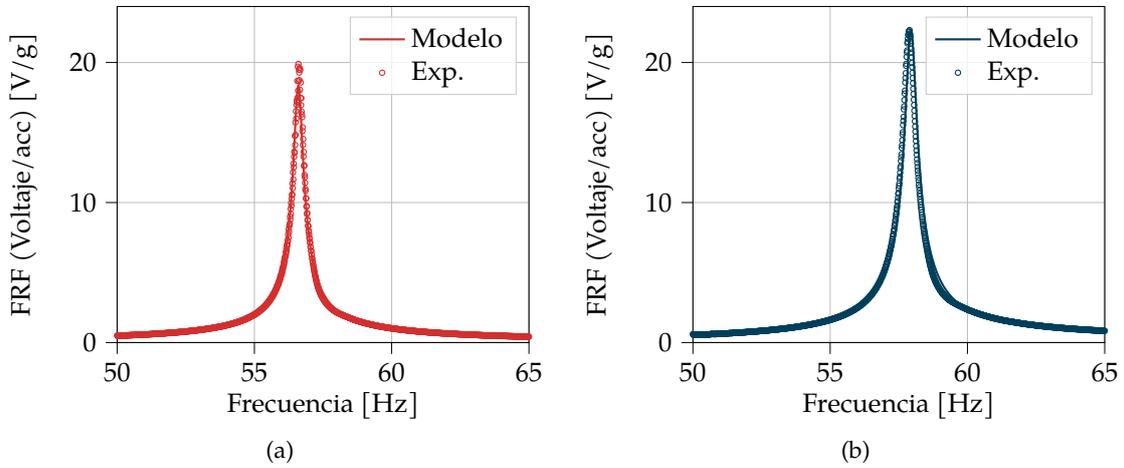


Figura A.6: Ajuste por mínimos cuadrados para las muestras (a) BNKT (placa) y (b) KNL-NTS (disco).

Mientras que la recomposición espacial resulta:

$$w(x, t) = \sum_{i=1}^N \phi_i \bar{q}_i e^{i\Omega t}. \tag{A.6}$$

Tal como puede observarse, las expresiones dadas por (A.3) dependen de la forma modal ϕ_i . Cuando la geometría es una placa (BNKT), ésta puede ser obtenida analíticamente de forma exacta como [213]

$$\phi_i(x) = C_1 \cosh(\beta_i x) + C_2 \sinh(\beta_i x) + C_3 \cos(\beta_i x) + C_4 \sin(\beta_i x), \tag{A.7}$$

donde $\beta_i = \sqrt[4]{\omega^2 \rho A / EI}$. Sin embargo, dicha solución no es válida para la muestra en forma de disco (KNL-NTS), donde no existe una solución analítica. Para salvar esto, un modelo tridimensional de elementos finitos fue desarrollado en el software COMSOL Multiphysics [286] tal como se encuentra presentado en la Figura A.5. De esta manera, el modo de vibración asociado al primer modo flexional fue calculado, exportado y normalizado respecto a la matriz de masa. Luego, los parámetros modales (Ecs. A.3) quedan definidos mediante realizar el cálculo de las derivadas e integrales de forma numérica..

El ajuste por mínimos cuadrados para ambas muestras se encuentra representado en la Figura A.6 mientras que los valores identificados se encuentran presentados en el Cuadro A.2. En el caso propuesto, la caracterización del

	BNKT	KNL-NTS
Muestra	Placa	Disco
d_{31} [$\mu\text{C}/\text{N}$]	12,8	22
d_{33} [$\mu\text{C}/\text{N}$]	129	117
c_{33} [GPa]	92	136
ρ [kg/m^3]	5760	4667
C_p [nF]	1,28	1,54
ζ_1	0,0031	0,0037
V/g (pico)	19,9	22,3
f_n [Hz]	56,6	57,9

Cuadro A.2: Valores caracterizados para las muestras libres de plomo de los resultados experimentales. Valores resaltados grises denotan aquellos obtenidos por mínimos cuadrados.

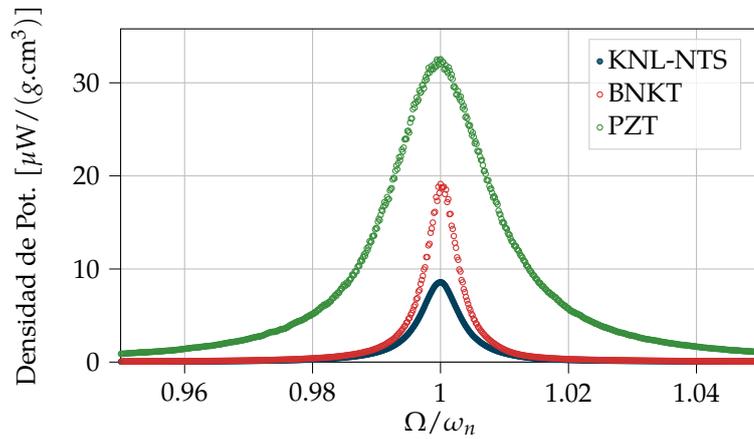


Figura A.7: Densidad de potencia generada para distintos materiales sobre una $R = 248\text{k}\Omega$

material fue realizada para las muestras *BNKT* y *KNL-NTS*, mientras que para para el *PZT-5H* dichos valores fueron obtenidos de la literatura. Si consideramos que para una cerámica *PZT-5H*, los coeficientes d_{31} y d_{33} usualmente se encuentran aproximadamente en 300 y 600 $\mu\text{C}/\text{N}$ respectivamente, los valores identificados para las muestras libres de plomo estuvieron muy por debajo de estos números, representando entre 6 a 20 veces menos. Como cálculo adicional se presenta una comparativa experimental entre estas muestras y el *buzzer*, en términos de la densidad de potencia, con el objeto de eliminar la dependencia del volumen de la muestra y/o la resistencia eléctrica empleada para la comparativa. De esta forma la variable de comparación introducida es

$$\bar{p}(\Omega) = \frac{\bar{v}^2(\Omega)}{RV_p}. \quad (\text{A.8})$$

La Figura A.7 muestra los resultados obtenidos de la Ec. (A.8), donde cada curva fue normalizada en el eje de las abscisas para cada valor de frecuencia natural ω_n a fines facilitar la comparativa. Observando esta Figura, la mayor densidad de potencia corresponde a la muestra basada en plomo (*PZT*). Esto

confirma, que las muestra de PZT son bastante superiores comparadas con las estudiadas en esta sección y que deber ser llevados a cabo mayores desarrollos para mejorar su rendimiento. Sin embargo, no debe perderse de vista las ventajas de las muestras libres de plomo, las cuales son una prometedora alternativa a futuro debido a que representan menor grado de contaminación en comparación con los PZT, siendo posible poder fabricarlas en el país.

FORMAS CONSTITUTIVAS MATERIALES PIEZOELÉCTRICOS

Las ecuaciones constitutivas de un material piezoeléctrico pueden ser expresadas de diversas formas en función del arreglo elegido para las variables independientes, dando así lugar a diferentes matrices constitutivas. La simbología, así como el orden tensorial, tamaño y unidades de estas matrices se presentan de manera resumida en la siguiente Cuadro:

Símbolo	Tipo de objeto	Tamaño	Unidades	Significado
T	Vector	6x1	$\frac{N}{m^2}$	Tensión mecánica
S	Vector	6x1	N/D	Tensor de deformaciones
E	Vector	3x1	$\frac{N}{C}$	Campo eléctrico
D	Vector	3x1	$\frac{C}{m^2}$	Desplazamiento eléctrico
s	Matriz	6x6	$\frac{m^2}{N}$	Conformidad mecánica
c	Matriz	6x6	$\frac{N}{m^2}$	Elasticidad mecánica
ϵ	Matriz	3x3	$\frac{F}{m}$	Permitividad eléctrica
d	Matriz	3x6	$\frac{C}{N}$	Acoplamiento piezoeléctrico (forma Deformación-Carga eléctrica)
e	Matriz	3x6	$\frac{C}{m^2}$	Acoplamiento piezoeléctrico (forma Tensión-Carga eléctrica)
g	Matriz	3x6	$\frac{m^2}{C}$	Acoplamiento piezoeléctrico (forma Deformación-Voltaje)
q	Matriz	3x6	$\frac{N}{C}$	Acoplamiento piezoeléctrico (forma Tensión-Voltaje)

Cuadro B.1: Simbología utilizada para variables y parámetros constitutivos en materiales piezoeléctricos.

Por otro lado, las expresiones para convertir las ecuaciones constitutivas de una forma a otra, pueden ser sintetizadas como:

- De Deformación-Carga eléctrica (*Strain-Charge*) a Tensión-Carga eléctrica (*Stress-Charge*)

$$\begin{aligned}
 c_E &= s_E^{-1} \\
 e &= d \cdot s_E^{-1} \\
 \epsilon_S &= \epsilon_T - d \cdot s_E^{-1} d^t
 \end{aligned}
 \tag{B.1}$$

- De Deformación-Carga eléctrica (*Strain-Charge*) a Deformación-Voltaje (*Strain-Voltage*)

$$\begin{aligned} s_D &= s_E - \mathbf{d}^t \epsilon_T^{-1} \cdot \mathbf{d} \\ \mathbf{g} &= \epsilon_T^{-1} \cdot \mathbf{d} \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

- De Tensión-Carga eléctrica (*Stress-Charge*) a Tensión-Voltaje (*Stress-Voltage*)

$$\begin{aligned} c_D &= c_E - \mathbf{e}^t \epsilon_s^{-1} \cdot \mathbf{e} \\ \mathbf{q} &= \epsilon_s^{-1} \cdot \mathbf{e} \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

- De Deformación-Voltaje (*Strain-Voltage*) a Tensión-Voltaje (*Stress-Voltage*)

$$\begin{aligned} c_D &= s_D^{-1} \\ \mathbf{q} &= \mathbf{g} \cdot s_D^{-1} \\ \epsilon_s^{-1} &= \epsilon_T^{-1} + \mathbf{g} \cdot s_D^{-1} \mathbf{g}^t \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$



ECUACIONES ELECTROMECÁNICAS DE EULER-LAGRANGE

Las ecuaciones electromecánicas de Euler-Lagrange para el dispositivo desarrollado son obtenidas a partir del principio de Hamilton el cual puede ser enunciado como

$$\int_{t_2}^{t_1} (\delta T - \delta U + \delta W_{nc}) dt = 0 \quad (\text{C.1})$$

donde δT , δU , δW_{nc} representan las variaciones de la energía cinética, la energía potencial y el trabajo de las fuerzas no conservativas respectivamente. En la obtención de las ecuaciones se tendrán en consideración como trabajo de fuerzas no conservativas a (i) amortiguamiento viscoso lineal axial y (ii) flexional, (iii) amortiguamiento cuadrático no lineal y por último, (iv) disipación de energía en la resistencia eléctrica por *efecto Joule*. El efecto del amortiguamiento en la dirección axial no será contemplado.

La dependencia del funcional $L = T - U$ puede ser expresada como

$$L = L(x, t, u, w, \Phi, \dot{u}, \dot{w}, u', u'', w', w'') \quad (\text{C.2})$$

donde x y t son la coordenada espacial y temporal que representan las variables independientes y u , w y Φ el desplazamiento axial, transversal y flujo eléctrico que representan las variables dependientes del problema. La variación del funcional puede ser expresada como

$$\delta L = \frac{\partial L}{\partial \dot{u}} \delta \dot{u} + \frac{\partial L}{\partial \dot{w}} \delta \dot{w} + \frac{\partial L}{\partial u'} \delta u' + \frac{\partial L}{\partial u''} \delta u'' + \frac{\partial L}{\partial w'} \delta w' + \frac{\partial L}{\partial w''} \delta w'' + \frac{\partial L}{\partial \Phi} \delta \Phi \quad (\text{C.3})$$

donde cada uno de los términos de la Ec. (C.3) debe ser integrado como

$$\int_{t_2}^{t_1} \frac{\partial L}{\partial \dot{u}} \delta \dot{u} dt = \frac{\partial L}{\partial \dot{u}} \delta u \Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_2}^{t_1} \left[\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{u}} \right) \delta u \right] dt \quad (\text{C.4})$$

$$\int_{t_2}^{t_1} \frac{\partial L}{\partial \dot{w}} \delta \dot{w} dt = \frac{\partial L}{\partial \dot{w}} \delta w \Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_2}^{t_1} \left[\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{w}} \right) \delta w \right] dt \quad (\text{C.5})$$

$$\int_{t_2}^{t_1} \left(\frac{\partial L}{\partial u'} \delta u' \right) dt = \int_{t_2}^{t_1} \left[\frac{\partial L}{\partial u'} \delta u \Big|_0^L - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial L}{\partial u'} \right) \delta u \right] dt \quad (\text{C.6})$$

$$\begin{aligned} \int_{t_2}^{t_1} \frac{\partial L}{\partial u''} \delta u'' dt &= \int_{t_2}^{t_1} \left[\frac{\partial L}{\partial u''} \delta u' \Big|_0^L - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial L}{\partial u''} \right) \delta u' \right] dt \\ &= \int_{t_2}^{t_1} \left[\frac{\partial L}{\partial u''} \delta u' \Big|_0^L - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial L}{\partial u''} \right) \delta u \Big|_0^L + \frac{\partial}{\partial x^2} \left(\frac{\partial L}{\partial u''} \right) \delta u \right] dt \end{aligned} \quad (\text{C.7})$$

$$\int_{t_2}^{t_1} \left(\frac{\partial L}{\partial w'} \delta w' \right) dt = \int_{t_2}^{t_1} \left[\frac{\partial L}{\partial w'} \delta w \Big|_0^L - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial L}{\partial w'} \right) \delta w \right] dt \quad (\text{C.8})$$

$$\begin{aligned} \int_{t_2}^{t_1} \left(\frac{\partial L}{\partial w''} \delta w'' \right) dt &= \int_{t_2}^{t_1} \left[\frac{\partial L}{\partial w''} \delta w' \Big|_0^L - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial L}{\partial w''} \right) \delta w' \right] dt \\ &= \int_{t_2}^{t_1} \left[\frac{\partial L}{\partial w''} \delta w' \Big|_0^L - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial L}{\partial w''} \right) \delta w \Big|_0^L + \frac{\partial}{\partial x^2} \left(\frac{\partial L}{\partial w''} \right) \delta w \right] dt \end{aligned} \quad (\text{C.9})$$

$$\int_{t_2}^{t_1} \left(\frac{\partial L}{\partial \Phi} \delta \Phi \right) dt = \int_{t_2}^{t_1} \left[-\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial L}{\partial \Phi} \right) \delta \Phi \right] dt. \quad (\text{C.10})$$

A su vez, la variaci3n del trabajo de las fuerzas no conservativas resulta

$$\int_{t_2}^{t_1} \delta W_{nc} dt = \int_{t_2}^{t_1} [-c_1 \dot{u} \delta u - c_2 \dot{w} \delta w - c_3 \dot{w}^2 \text{sgn}(\dot{w}) \delta w - i \delta \Phi] dt \quad (\text{C.11})$$

Reescribiendo el principio de Hamilton, y agrupando en t3rminos comunes la siguiente expresi3n es obtenida

$$\begin{aligned} &\int_{t_2}^{t_1} \left\{ \left[-\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{u}} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial L}{\partial u'} \right) - c_1 \dot{u} \right] \delta u \right. \\ &+ \left[-\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{w}} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial L}{\partial w'} \right) + \frac{\partial}{\partial x^2} \left(\frac{\partial L}{\partial w''} \right) - c_2 \dot{w} - c_3 \dot{w}^2 \text{sgn}(\dot{w}) \right] \delta w \\ &+ \left[-\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial L}{\partial \Phi} \right) - i \right] \delta \Phi + \frac{\partial L}{\partial \dot{u}} \delta u \Big|_0^L + \frac{\partial L}{\partial u'} \delta u \Big|_0^L \\ &\left. + \left[\frac{\partial L}{\partial w'} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial L}{\partial w''} \right) \right] \delta w \Big|_0^L + \frac{\partial L}{\partial \dot{w}} \delta w \Big|_0^L + \frac{\partial L}{\partial w''} \delta w' \Big|_0^L \right\} dt = 0 \end{aligned} \quad (\text{C.12})$$

Donde, por arbitrariedad de los desplazamientos virtuales, y reemplazando $\dot{\Phi} = v$, las ecuaciones electromec'nicas son obtenidas como

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{u}} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial L}{\partial u'} \right) - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial L}{\partial u''} \right) + c_1 \dot{u} &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{w}} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial L}{\partial w'} \right) - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial L}{\partial w''} \right) + c_2 \dot{w} + c_3 \dot{w}^2 \text{sgn}(\dot{w}) &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial L}{\partial v} \right) + \frac{v}{R} &= 0 \end{aligned} \quad (\text{C.13})$$

Sumado a las siguientes condiciones de borde

$$\left. \frac{\partial L}{\partial u'} \delta u \right|_0^L = 0 \quad (\text{C.14})$$

$$\left. \frac{\partial L}{\partial \dot{u}} \delta u \right|_0^L = 0 \quad (\text{C.15})$$

$$\left. \frac{\partial L}{\partial w''} \delta w' \right|_0^L = 0 \quad (\text{C.16})$$

$$\left. \frac{\partial L}{\partial \dot{w}} \delta w \right|_0^L = 0 \quad (\text{C.17})$$

$$\left[\frac{\partial L}{\partial w'} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial L}{\partial w''} \right) \right] \delta w \Big|_0^L = 0 \quad (\text{C.18})$$