



# VIII JEIN

## JORNADAS DE ENSEÑANZA DE LA INGENIERÍA

---

Facultad Regional Santa Fe

# Reconocimiento de la función derivada

## Derivative function recognition

Presentación: 21/09/2021

### Marta Graciela Caligaris

Grupo Ingeniería & Educación - Facultad Regional San Nicolás - Universidad Tecnológica Nacional - Argentina  
mcaligaris@frsn.utn.edu.ar

### María Elena Schivo

Grupo Ingeniería & Educación - Facultad Regional San Nicolás - Universidad Tecnológica Nacional - Argentina  
mschivo@frsn.utn.edu.ar

### María Rosa Romiti

Grupo Ingeniería & Educación - Facultad Regional San Nicolás - Universidad Tecnológica Nacional - Argentina  
mromiti@frsn.utn.edu.ar

### Resumen

El Análisis Matemático se vincula con conceptos relacionados con la abstracción que no resultan sencillos para los estudiantes. Teniendo en cuenta distintas investigaciones realizadas sobre dificultades en la enseñanza y aprendizaje del Cálculo Diferencial, particularmente en el aspecto local y global de la derivada, se llevó a cabo un estudio en el que se analizó si brindando información sobre la derivada en un punto, los estudiantes podían inferir sobre la función derivada y viceversa. En este artículo se comentan experiencias realizadas en 2016, 2017 y 2021, los resultados correspondientes y los cambios implementados en 2021 mediante la incorporación de aplicaciones interactivas confeccionadas con GeoGebra y la utilización de sitios web propios durante las clases sincrónicas online de la asignatura. El objetivo de este trabajo es analizar si dichas incorporaciones provocan cambios en los resultados obtenidos hasta el momento. La experiencia fue llevada a cabo con alumnos de Análisis Matemático I de distintas especialidades de Ingeniería de la Facultad Regional San Nicolás, Universidad Tecnológica Nacional.

**Palabras clave:** función derivada, derivada local, aplicaciones interactivas

### Abstract

Calculus is linked to concepts related to abstraction that are not easy for students. Taking into account different research studies carried out on difficulties in the teaching and learning of Differential Calculus, particularly in the local and global aspect of the derivative, an own study was carried out. It was analyzed if by providing information on the derivative at one point, the students could infer about the derivative function and vice versa. This article shows experiences carried out in 2016, 2017 and 2021, the corresponding results and the changes implemented in 2021 through the incorporation of interactive applications prepared with GeoGebra and the use of self-designed websites during the synchronous online classes of the issue. The objective of this work is to analyze if the changes in the classes cause variations in the results obtained so far. The experience was carried out with students of a first course on Calculus of different specialties of Engineering of the Facultad Regional San Nicolás, Universidad Tecnológica Nacional.

**Keywords:** derivative function, local derivative, interactive applications

## Introducción

El Cálculo se asocia con determinados aspectos, entre ellos la necesidad de resolver problemas ligados a movimientos, trazados de rectas tangentes a curvas, búsquedas de máximos y mínimos y velocidades de cuerpos.

Dichos conceptos están relacionados con la abstracción. Para Azcárate Giménez y Camacho Machín (2003), el proceso de abstracción -que consiste en la sustitución de fenómenos concretos por conceptos confinados en la mente- no se puede decir que sea una característica que sólo se trabaja en la Matemática Superior, como tampoco lo son las de analizar, categorizar, conjeturar, generalizar, sintetizar, definir, demostrar, formalizar, pero adquieren mayor relevancia en dicho nivel. Estos procesos cognitivos son los implicados en el pensamiento matemático avanzado que se llevan a cabo en asignaturas como Análisis Matemático I.

Ferrini-Mundy y Graham (1994) ponen especial atención a la comprensión por parte de los estudiantes de la relación entre la representación gráfica de una función y la de su derivada. Por lo general tienden a considerar dichas representaciones como separadas, sin relación. Habre y Abboud (citado por Sánchez-Matamoros et al., 2008) manifiestan la importancia que tiene para comprender el concepto, el poder relacionar la función con su derivada, basados en los resultados obtenidos en sus trabajos, en los cuales demostraron que los alumnos no poseían la misma comprensión cuando se trabajaba en forma analítica y gráfica.

Artigue (1995) sostiene que, aunque se puede enseñar a los alumnos a realizar de manera más o menos rutinaria algunos cálculos de derivadas, así como también a resolver determinados problemas clásicos, hay dificultades para que los jóvenes logren comprender los conceptos y métodos de pensamiento que conforman el eje del Análisis Matemático. Así, por ejemplo, logran resolver ejercicios que se les plantean con la aplicación de reglas de derivación y sin embargo presentan dificultades cuando necesitan manejar el significado de derivada, ya sea a través de su expresión como límite del cociente incremental o en su interpretación geométrica.

Otro aspecto importante en la comprensión de la derivada es la relación entre el aspecto local y global. El estudio realizado por Badillo Jiménez (2003) dio a conocer la existencia de diferentes alcances de la idea de derivada en un punto y de la función derivada. Para la autora, comprender el significado de la derivada en un punto no implica comprender necesariamente la idea de la función derivada. Sin embargo, sostiene que aquellos sujetos que comprendían la idea de función derivada, parecía que entendían la de derivada de la función en un punto (Sánchez-Matamoros et al., 2008). Esto se pone en evidencia particularmente en el concepto de velocidad, cuando los alumnos tienen dificultades al pasar de la velocidad media y la velocidad instantánea en un punto, a la construcción de la noción de velocidad instantánea y la noción de tasa de variación instantánea (Azcárate, 1990).

Teniendo en cuenta los antecedentes sobre las dificultades en la enseñanza y aprendizaje del Cálculo Diferencial, particularmente en la consideración local y global de la derivada, se comenzó a investigar este aspecto en el año 2016. En esta oportunidad se trabajó con los estudiantes de Ingeniería Industrial y se analizó si brindando información sobre la derivada en un punto, los estudiantes podían inferir sobre la función derivada y viceversa.

En el primer trabajo práctico y para evaluar si brindándoles información sobre la derivada en un punto los estudiantes podían inferir sobre la función derivada, se les presentó la gráfica de una función y se les pidió que indicaran cuál de las gráficas que también se mostraban, representaban a la de su función derivada. Se solicitó que se justificara el análisis realizado. Los resultados fueron alarmantes. El 86 % de los estudiantes desaprobaron esta instancia.

Luego de la devolución personalizada a los estudiantes sobre el trabajo anterior y para evaluar si teniendo información sobre la función derivada podían inferir sobre la derivada en un punto, se pidió en el segundo trabajo práctico que, considerando que el gráfico presentado correspondía al de la función derivada, indicaran cómo resultaba el signo de la pendiente de la recta tangente a la función en un punto, justificando la respuesta. En este caso, los resultados mejoraron, pero sigue siendo alto el porcentaje de desaprobados. Alrededor del 40% de los estudiantes no tuvo un desempeño satisfactorio.

A modo de síntesis se corroboró que si bien se obtuvieron mejores resultados acerca de la derivada local cuando conocían la función derivada, es muy alto el porcentaje de estudiantes que no dominan este concepto.

Lo anterior motivó que partir del ciclo lectivo 2017 se incorporaran a la guía de práctica de la asignatura, los enunciados de las evaluaciones utilizadas en 2016 y preguntas orientadoras para ayudar al alumno a identificar funciones derivadas o derivadas puntuales. También se añadieron, como material didáctico, aplicaciones interactivas realizadas con GeoGebra. Por ejemplo, para la visualización de la función derivada se preparó una ventana interactiva que muestra una función a la que se le va trazando la recta tangente en distintos puntos de un intervalo. También señala el valor numérico de la pendiente de dicha recta en cada punto mediante un texto dinámico y permite apreciar cómo ese valor es el que va tomando la función derivada en cada uno de los puntos. La animación se logra mediante un deslizador que, en este caso, representa los distintos valores que toma la variable en el intervalo. En la Figura 1 se presenta esta ventana, para dos posiciones diferentes del deslizador (Caligaris et al., 2015). Se puede apreciar el material completo en <https://www.frsn.utn.edu.ar/gie/amilab/> (Caligaris et al., 2016).

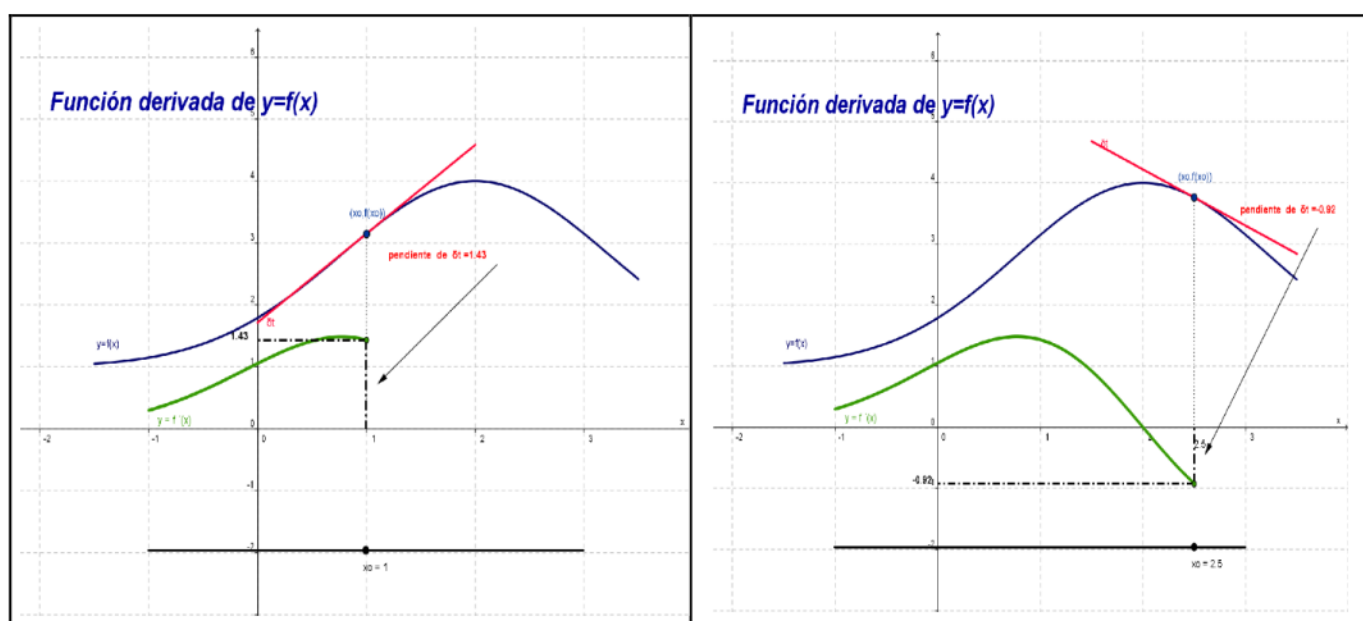


Figura 1. Aplicación diseñada para mostrar a la función derivada

En 2021 se llevó a cabo un estudio similar referido al tema, pero con la incorporación en las clases sincrónicas online de las aplicaciones propias y compartiendo e interactuando con Geogebra. En este trabajo se muestra la experiencia realizada y los resultados correspondientes.

## Desarrollo

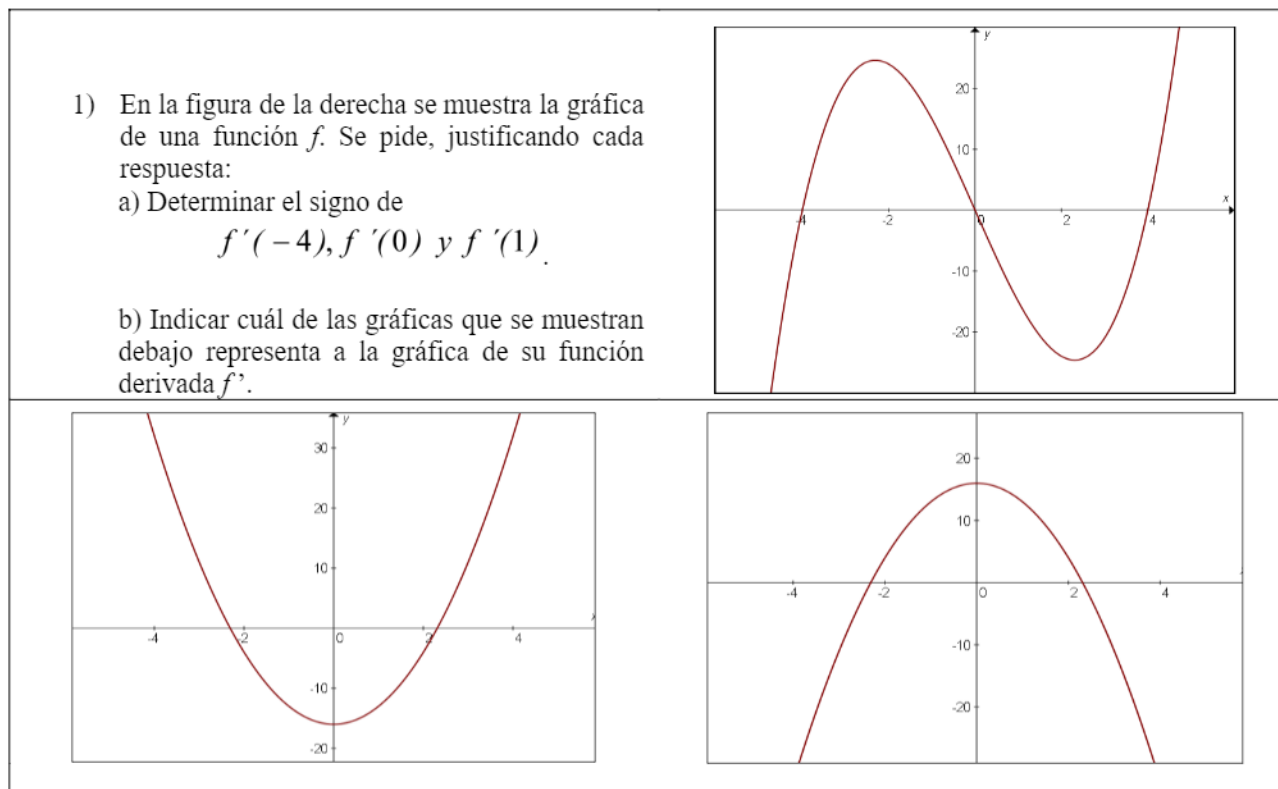
Considerando la problemática planteada y el objetivo propuesto, se trabajó sobre la realidad tratando de ser lo más fiel posible en la interpretación de lo observado. Se utilizó el enfoque cualitativo, cuyo “propósito consiste en ‘reconstruir’ la realidad, tal y como la observan los actores de un sistema social previamente definido” (Hernández Sampieri et al., 2003: p.5).

La experiencia se realizó en el ciclo lectivo 2021 con 67 alumnos de Análisis Matemático I de Ingeniería Industrial, Eléctrica, Metalúrgica, Electrónica y Mecánica de la Facultad Regional San Nicolás, Universidad Tecnológica Nacional.

Los resultados se extrajeron de la tercera evaluación parcial de la asignatura, luego de abordar la definición de derivada en un punto, función derivada, interpretación geométrica, reglas de derivación, teoremas sobre funciones derivables y variación de funciones, siguiendo la planificación de la cátedra. Se utilizaron cuestionarios abiertos para

la recolección de datos asociados a las producciones de los estudiantes.

Se presenta en la Figura 2 la primera de las dos actividades que se plantearon en el parcial, referidas al tema en estudio. Como se puede apreciar, se pidió a los alumnos que, teniendo en cuenta el gráfico presentado que muestra a una función de ley  $f(x)$ , determinaran el valor de la derivada en distintos puntos. Se pidió además, que indicaran, cuál de las gráficas presentadas, representa la de su función derivada.



**Figura 2.** Actividad 1 del parcial

Se muestra en la Figura 3 la segunda actividad que se planteó en el parcial, para evaluar si teniendo información sobre la función derivada pueden inferir sobre la derivada en un punto. En ésta se pidió a los alumnos que, teniendo en cuenta el gráfico correspondiente al de una función derivada de ley  $f'(x)$ , indicaran ciertas características de la función en determinados puntos. También se les solicitó que identificaran entre dos dadas, la gráfica de la función.

En la Tabla 1 se muestra el criterio de evaluación que se utilizó para analizar el desempeño de los alumnos en las dos actividades.

SATISFACTORIO	PARCIALMENTE SATISFACTORIO	INSATISFACTORIO
El que realiza la totalidad de los ejercicios bien.	El que realiza al menos la mitad de los ejercicios bien.	El que realiza menos de la mitad bien o no justifica.

**Tabla 1.** Criterio de evaluación utilizado para la corrección de las actividades.

2) La figura de la derecha es la representación gráfica de la función derivada  $f'$ , de una función  $f$ . Se pide responder verdadero o falso, justificando las respuestas.

- a)  $f$  es derivable para todo valor real.
- b)  $f$  posee en  $x = 0$  un extremo relativo.
- c)  $f$  presenta en algún punto de su gráfica, tangente horizontal.

d) El gráfico de la función  $f$  puede ser alguno de los mostrados en la **imagen 4**.

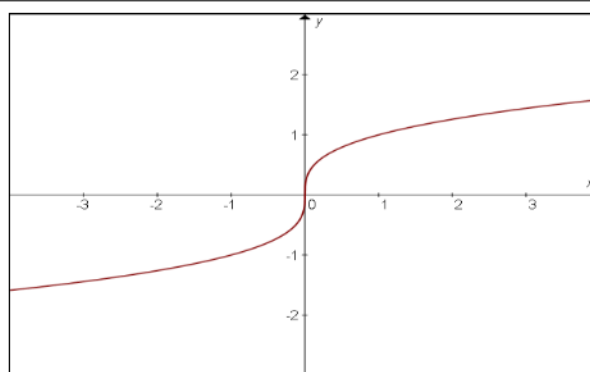
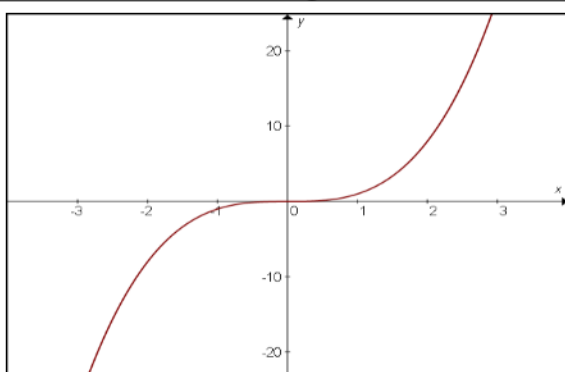
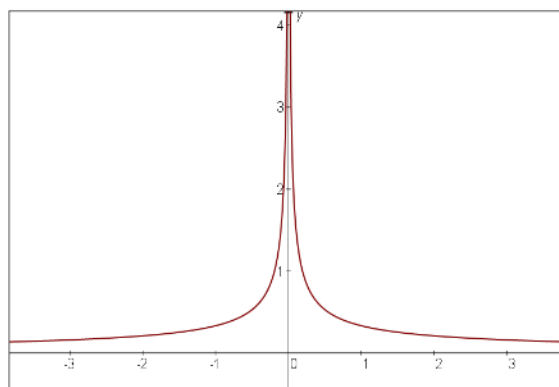


Figura 3. Actividad 2 del parcial

	ACTIVIDAD 1	ACTIVIDAD 2
SATISFACTORIO	26,86 %	13,43 %
PARCIALMENTE SATISFACTORIO	20,90 %	23,88 %
INSATISFACTORIO	52,24 %	62,69 %

Tabla 2. Resultados obtenidos en las dos actividades.

En la Tabla 2 se presentan los resultados obtenidos, en porcentajes. Como se puede observar, más del 50% de los alumnos examinados tuvieron resultados insatisfactorios en las dos actividades planteadas. Es decir, más de la mitad de los estudiantes no identifica a la derivada como función. Sin embargo, de estos alumnos, casi el 30% aprobó el parcial con 6 o más puntos, demostrando tener un dominio aceptable del resto de los contenidos de la unidad didáctica correspondiente a “Derivadas y aplicaciones”.

Sobre la Actividad 2, la cantidad de desaprobados se debió a que no pudieron responder correctamente las consignas a partir de la función derivada que se les presentó.

Además, de la Actividad 1, se analizaron los errores cometidos por los alumnos que obtuvieron un resultado parcialmente satisfactorio para saber en qué radicaban sus errores. Se determinó que el 92,8 % resolvieron bien el punto a) referido a la derivada puntual, y mal el punto b) referido al reconocimiento de la función derivada. Estos datos muestran que casi la totalidad de los estudiantes que sacaron parcialmente satisfactorio en esta actividad, pudo resolver correctamente las preguntas sobre derivadas puntuales, pero casi ninguno pudo reconocer a la función derivada. Por lo general tienden a considerar dichas representaciones como separadas, sin relación.

## Conclusiones

En la experiencia llevada a cabo durante 2016 se concluyó que la gran mayoría de los alumnos no podían arribar a la respuesta correcta sobre la función derivada a partir de datos locales de la misma. Si bien los resultados acerca de la derivada local cuando se conocía la función derivada fueron mejores, fue alto el porcentaje de desaprobados. Esto hizo que se actualizaran las actividades y metodología a partir del ciclo lectivo 2017, tendientes a tratar de revertir esta situación.

Del análisis de resultados en 2021 se puede concluir que la mayor dificultad en los alumnos pasa por el reconocimiento de la derivada como función. Si bien los alumnos manifestaron la importancia del trabajo que se llevó a cabo durante las clases incorporando la tecnología, mostrando y analizando gráficos de funciones y funciones derivadas, esto no se vio reflejado en los resultados obtenidos en el parcial.

El concepto de derivada posee múltiples aplicaciones consideradas en esta asignatura, pero la problemática sobre el reconocimiento de la derivada como función que se detectó en esta investigación deberá ser abordada con mayor detenimiento en años posteriores y especial atención a que el estudiante pueda relacionar la representación gráfica de una función y la de su función derivada como sostienen Ferrini-Mundy y Graham.

## Referencias

- Artigue, M. (1995). Ingeniería didáctica en educación matemática. Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. México. Grupo Editorial Iberoamérica. P. Gómez (Ed.): 97-140.
- Azcárate Giménez, C. (1990). "La velocidad: introducción al concepto de derivada". Tesis doctoral. Universitat Autònoma de Barcelona
- Azcárate Giménez, C. y Camacho Machín, M. (2003). "Sobre la Investigación en Didáctica del Análisis". Boletín de la Asociación Matemática Venezolana, X (2):135-149.
- Badillo Jiménez, E. (2003). "La derivada como objeto matemático y como objeto de enseñanza y aprendizaje en profesores de matemáticas de Colombia. La derivada un concepto a caballo entre la Matemática y la Física". Tesis de doctorado. Universitat Autònoma de Barcelona.
- Caligaris, M.G., Schivo, M.E. y Romiti, M.R. (2015). "Calculus & GeoGebra, an interesting partnership", *Procedia - Social and Behavioral Sciences*, 174, 1183-1188
- Caligaris, M.G., Schivo, M.E., Rodríguez, G.B. y Romiti, M.R. (2016). "Laboratorio Virtual de Análisis Matemático I". Actas del Segundo Congreso Internacional de Enseñanza de las Ciencias y la Matemática (2 CIECyM) y el Tercer Encuentro Nacional de Enseñanza de la Matemática (3 ENEM), Tandil, Argentina, 6 al 9 de septiembre, 572-578.
- Ferrini-Mundy, J. y Graham, K. (1994). "Research in calculus learning. Understanding limits, derivatives and integrals". Dubinsky & J. Kaput (Eds.), *Research Issues in Undergraduate Mathematics Learning*. MMA. Notes 33 (31-45).
- Hernández Sampieri, R., Fernández Collado, C. y Baptista Lucio, P. (2003). "Metodología de la investigación". (3ra. Ed.). McGraw Hill. México DF.
- Sánchez-Matamoros, G., García, M. y Llinares, S. (2008). "La comprensión de la derivada como objeto de investigación en didáctica de la matemática". *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*. 11 (2): 267-296.