

VIII JEIN

JORNADAS DE ENSEÑANZA DE LA INGENIERÍA

Facultad Regional Santa Fe

PVI: distintos problemas requieren distintos métodos

IVP: different problems require different methods

Presentación: 15/10/2021

Marta Graciela Caligaris

Grupo Ingeniería & Educación - Facultad Regional San Nicolás - Universidad Tecnológica Nacional - Argentina
mcaligaris@frsn.utn.edu.ar

Georgina Beatriz Rodríguez

Grupo Ingeniería & Educación - Facultad Regional San Nicolás - Universidad Tecnológica Nacional - Argentina
grodriguez@frsn.utn.edu.ar

Lorena Fernanda Laugero

Grupo Ingeniería & Educación - Facultad Regional San Nicolás - Universidad Tecnológica Nacional - Argentina
llaugero@frsn.utn.edu.ar

Gabriel Alejandro Bertero

Grupo Ingeniería & Educación - Facultad Regional San Nicolás - Universidad Tecnológica Nacional - Argentina
gbertero@frsn.utn.edu.ar

Resumen

El Grupo de investigación GIE (Grupo Ingeniería & Educación) viene desarrollando, desde el año 2008, aplicaciones a medida relacionadas con diversos temas de Análisis Numérico incluidos en diferentes cursos de la Facultad Regional San Nicolás, de la Universidad Tecnológica Nacional, que pueden ser utilizadas con distintos objetivos. Los problemas que consideran los circuitos eléctricos seleccionados en este artículo, entre otros, intentan mostrar en contexto la razón por la que se desarrollaron tantos métodos para resolver el mismo tipo de problema matemático. A pesar de la precisión del método de Runge Kutta, la solución que da no se acerca a la solución analítica para todos los problemas. Aquí es donde la estabilidad de los métodos se vuelve importante, y vale la pena hacer notar a los estudiantes la necesidad de recurrir a los métodos implícitos para superar esta dificultad.

Palabras clave: Ecuaciones diferenciales, Aplicaciones, Análisis Numérico

Abstract

The research Group GIE (Grupo Ingeniería & Educación, in Spanish) has been developing, since 2008, tailor-made applications related to diverse issues of Numerical Analysis included in different courses at the Facultad Regional San Nicolás, from the Universidad Tecnológica Nacional, Argentina, that can be used with several purposes. The problems involving electrical circuits selected in this paper, among others, try to show in context the reason why so many methods for solving the same type of mathematical problem were developed. Despite of the accuracy of the Runge Kutta method, the solution that it gives does not approach the analytical solution for all problems. Here is where the stability of the methods becomes important, and it is worth to make students notice that implicit methods overcome this difficulty.

Keywords: Differential Equations, Apps, Numerical Analysis

Introducción

Diversos problemas de ciencias e ingeniería, generalmente dependientes del tiempo, se modelizan con ecuaciones diferenciales ordinarias (EDOs) con condiciones en un mismo valor de la variable independiente, llamados problemas

de valor inicial (PVI). Para aproximar la solución de un PVI, se debe garantizar que el problema esté bien planteado, es decir, que admita solución única y que pequeñas variaciones en la ecuación o en las condiciones no afecten mayormente a la solución.

Los métodos numéricos para resolver un PVI de primer orden:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dy}{dt} = f(t, y) \\ y(a) = \alpha \end{array} \right. \quad a \leq t \leq b \quad (1)$$

parten de una discretización del dominio de interés, como un conjunto de puntos equiespaciados. En estos puntos, se aplica una fórmula de recurrencia, particular para cada método, que usa uno o más puntos anteriores. Esto permite clasificarlos en métodos de un paso, como los métodos de Euler, de Taylor o de Runge-Kutta, o métodos multipasos.

Para resolver problemas de valor inicial de orden superior, no es necesario utilizar nuevos métodos, sino que puede emplearse una extensión de los métodos para resolver PVI de primer orden expresando la EDO de orden n por medio de un sistema de n ecuaciones diferenciales simultáneas de primer orden cada una.

En este trabajo, se muestra una aplicación que permite establecer comparaciones entre algunos métodos de un paso y métodos multipasos y también analizar las soluciones numéricas obtenidas al variar ciertos parámetros. Además, se discuten las ecuaciones rígidas, analizando un método con el que se puede obtener una solución válida.

Los métodos multipasos

Los métodos de Taylor para aproximar la solución de un problema de valor inicial son llamados métodos de un paso, porque la aproximación de la solución en un punto de la malla se obtiene con información proveniente de la aproximación obtenida en el punto anterior. Los métodos de Runge-Kutta también son considerados de un paso porque, aunque utilizan información en puntos interiores del intervalo $[t_i, t_{i+1}]$, no la conservan para emplearla directamente en aproximaciones futuras. Toda la información que emplean se obtiene dentro del subintervalo en que va a aproximarse la solución.

En el momento de calcular la aproximación en un punto dado de la malla, la solución aproximada está disponible en todos los puntos previos, y como el error $|w_i - y(t_i)|$ tiende a aumentar con i , parece razonable desarrollar métodos que usen datos precedentes más precisos al obtener la solución en dicho punto. Se conocen como métodos multipasos a aquellos que emplean la aproximación en más de uno de los puntos de red precedentes para determinar la aproximación en el punto siguiente.

Un método multipasos de p pasos para resolver el PVI como el presentado en la ecuación (1) es aquel cuya ecuación de diferencias para obtener la aproximación w_{n+1} en el punto t_{n+1} de la malla definida por $\{t_n = a + h n, n = 1, \dots, N\}$, con tamaño de paso $h = (b-a)/N$, puede representarse por medio de la siguiente ecuación, con p entero y mayor que 1:

$$w_{n+1} = a_0 w_n + a_1 w_{n-1} + \dots + a_p w_{n-p} + h [b_{-1} f(t_{n+1}, w_{n+1}) + b_0 f(t_n, w_n) + \dots + b_p f(t_{n-p}, w_{n-p})] \quad w_{n+1} = \sum_{i=0}^p a_i w_{n-i} + h \sum_{i=-1}^p b_i f(w_{n-i}, t_{n-i}) \quad (2)$$

para $n = p, \dots, N-1$, donde $h = (b-a)/N$, $a_0, a_1, \dots, a_p, b_{-1}, \dots, b_p$ son constantes y se especifican los valores iniciales $w_0 = \alpha$ y los demás valores necesarios para iniciar el método se obtienen con un método de Runge-Kutta u otro método de un paso.

Cuando $b_{-1} = 0$, el método es explícito o abierto, ya que la ecuación (2) da de manera explícita el valor de w_{n+1} en función de los valores previamente determinados.

Cuando $b_{-1} \neq 0$, el método es implícito o cerrado, ya que en la ecuación (2), w_{n+1} se encuentra en ambos lados, quedando especificado sólo implícitamente. En la implementación de un método implícito, se debe resolver la ecuación implícita para w_{n+1} . No es evidente que siempre se pueda resolver esta ecuación, ni que

siempre se obtenga una solución única para w_{n+1} . En caso que no se pueda resolver la ecuación, se deberá recurrir a algún método de aproximación de ecuaciones no lineales.

Actualización de la aplicación de diseño propio: incorporación de los métodos multipasos

El recurso que se muestra en este trabajo es una actualización de una herramienta previamente presentada para trabajar con circuitos eléctricos utilizando métodos de un paso (Caligaris et al., 2012). En esta oportunidad, se agregaron métodos multipasos dentro de las posibilidades para aproximar la solución de una ecuación diferencial con valores iniciales. Para obtener con esta aplicación una solución aproximada de un PVI debe indicarse, en primer lugar, el orden del problema que se va a resolver con el botón de opción correspondiente. Esto habilitará los cuadros necesarios para cargar los datos del problema según su tipo: los coeficientes de la ecuación, las condiciones iniciales y el intervalo donde se quiere obtener la solución. Es posible ingresar la ley de la solución exacta del problema, en caso de conocerse, para poder hacer comparaciones y determinar errores.

En la parte inferior de la ventana, se pueden seleccionar hasta tres opciones para realizar simultáneamente diferentes aproximaciones. Cada una de estas opciones permite elegir, de una lista desplegable, un método entre Euler, Runge-Kutta de orden cuatro, Adams-Bashforth y Adams-Bashforth-Moulton, y la cantidad de puntos en donde se va a calcular la solución. Para que se calculen y muestren las opciones elegidas, se deben tildar las casillas de verificación a la izquierda de cada aproximación. Se puede optar por aplicar el mismo método con distintos pasos, o distintos métodos con pasos iguales o con pasos diferentes.

La solución numérica puede analizarse desde el punto de vista gráfico o tabular. La representación gráfica de la solución discreta se presenta en un sistema de ejes coordenados utilizando diferentes colores para los puntos asociados a cada aproximación. La representación tabular permite comparar las distintas aproximaciones calculadas y analizar el comportamiento de la solución numérica respecto de la solución exacta, en caso de que sea ingresada.

A modo de ejemplo, en la Figura 1, se muestran dos circuitos y el cálculo de $q(t)$ con la aplicación de diseño propio. Problemas de este tipo son los que se presentarán en el aula para poner la matemática en contexto. En este trabajo, no se profundizará en los problemas, por razones de espacio.

Ecuaciones rígidas

Las ecuaciones diferenciales rígidas (EDR) son aquellas cuyas soluciones contienen escalas significativamente diferentes para la variable independiente. En general, se caracterizan por tener un término de la forma e^{-ct} , donde c es una constante positiva grande. Por lo general, esto es parte de la solución general, llamada solución transitoria. La parte más importante de la solución es la solución de estado estacionario (Burden & Faires, 2003). Los métodos mencionados en las secciones anteriores tienen problemas de estabilidad para resolver este tipo de ecuaciones.

Gear (Crow, 2003) desarrolló otros métodos multipasos implícitos con mejores características de estabilidad. Su forma general, para una ecuación del tipo (1) con una malla establecida por (2), está dada por:

$$y_{i+1} = \gamma \left[\sum_{j=1}^n \alpha_j y_{i+j-1} + \beta h f(t_{i+1}, y_{i+1}) \right] \quad (3)$$

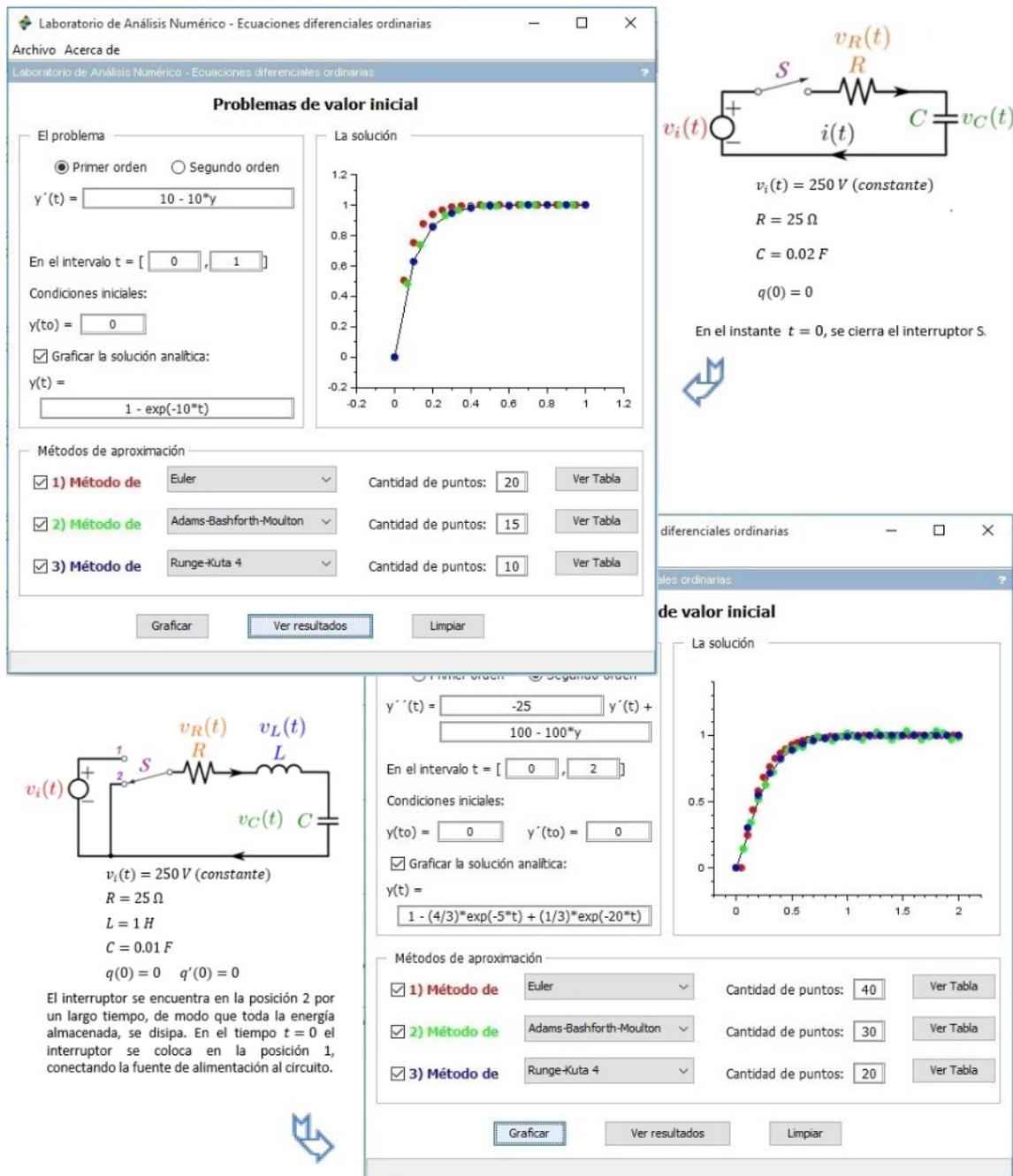


Figura 1. Ejemplos de PVI de primer y segundo orden

El método de Gear para $n = 1$ es equivalente al método de Adams-Moulton de primer orden. Los métodos de Gear de orden superior se complican al ponerlos en práctica por su naturaleza implícita, dado que en cada iteración se debe resolver una ecuación, que resulta no lineal si la ecuación diferencial es no lineal. En estos casos, se puede aplicar, por ejemplo, el método de Newton-Raphson. A continuación, se muestran dos ejemplos de aplicación del método de Gear de tres pasos, uno para un caso lineal y otro para no lineal. La fórmula del método en este caso está dada por:

$$y_{n+1} = \frac{18}{11}y_n - \frac{9}{11}y_{n-1} + \frac{2}{11}y_{n-2} + \frac{6}{11}hf(t_{n+1}, y_{n+1}), \quad n = 3, \dots, N \quad (4)$$

Ejemplo 1

Considérese la ecuación diferencial $y' = -20y + 20 \sin(t) + \cos(t)$, $0 \leq t \leq 2$, con $y(0) = 1$. Al utilizar la aplicación presentada anteriormente, con un tamaño de paso $h = 0.25$, se obtienen los resultados que se muestran en la Figura 2.

ti	y(ti)	Euler (n = 8)	Adams-Bashforth-Moulton (n = 8)
0	1	1	1
0.25	0.2541419	-3.75	13.951
0.5	0.4794709	16.479248	188.30821
0.75	0.6816391	-63.300468	2575.4582
1	0.841471	256.79299	38932.032
1.25	0.9489846	-1022.8295	594214.73
1.5	0.997495	4096.1419	9073607.3
1.75	0.9839859	-16379.562	1.386D+08
2	0.9092974	65523.124	2.116D+09

Figura 2. Soluciones obtenidas con la aplicación del Ejemplo 1 al emplear distintos métodos

Como se puede observar en la Figura 3, ninguno de los dos métodos sirve para aproximar la solución exacta. Por esa razón, se intentará aproximar la solución utilizando el método de Gear. En este caso, la ecuación diferencial es lineal, con lo cual en la expresión del método de Gear de tres pasos, puede despejarse la incógnita y y_{i+1} :

$$y_{n+1} = \frac{18}{11}y_n - \frac{9}{11}y_{n-1} + \frac{2}{11}y_{n-2} + \frac{6}{11}h[-20y_{n+1} + \text{sen}(y_{n+1}) + \cos(y_{n+1})] \quad (5)$$

Resultando:

$$y_{n+1} = \frac{\frac{18}{11}y_n - \frac{9}{11}y_{n-1} + \frac{2}{11}y_{n-2} + \frac{6}{11}h[\text{sen}(y_{n+1}) + \cos(y_{n+1})]}{20h\frac{6}{11}+1} \quad (6)$$

Obteniendo los primeros dos valores con el método de Runge Kutta con un paso menor ($h = 0.05$) y luego aplicando esta fórmula para $h=0.25$, se obtienen los valores que se indican en la Tabla 1.

Tabla 1. Solución del Ejemplo 1 utilizando el método de Gear

ti	0	0.25	0.50	0.75	1	1.25	1.5	1.75	2
yi	1	0.25417	0.47947	0.72902	0.86268	0.94801	0.99485	0.98421	0.91007
y(ti)	1	0.25414	0.47947	0.68164	0.84147	0.94898	0.99745	0.98399	0.90930

Ejemplo 2

Dada la ecuación diferencial $y' = 5e^{5t}(y - t)^2 + 1$, $0 \leq t \leq 1$, con $y(0) = -1$, en la Figura 3 se muestra la salida tabular obtenida en la aplicación con un tamaño de paso $h = 0.2$, para distintos métodos, junto con la solución exacta.

ti	y(ti)	Euler (n = 5)	R-K, 4 (n = 5)	Adams-Bashforth-Moulton (n = 5)
0	-1	-1	-1	-1
0.2	-0.1678794	-0.2	-0.3586157	-0.3586157
0.4	0.2646647	0.0349251	0.1832926	0.1832926
0.6	0.5502129	0.8197362	1.4123455	1.4123455
0.8	0.7816844	1.5895461	5.676D+15	19519.02
1	0.9932621	35.425104	2.94D+275	1.265D+23

Figura 3. Solución del ejemplo con distintos métodos, obtenida con la aplicación

Nuevamente, ninguno de estos métodos brinda una solución válida para este problema. Se aplica entonces el método de Gear de tres pasos, para una malla de 5 puntos en el intervalo dado, obteniendo la fórmula:

$$y_{n+1} = \frac{18}{11}y_n - \frac{9}{11}y_{n-1} + \frac{2}{11}y_{n-2} + \frac{6}{11}h[5e^{5t}(y_{n+1} - t_{n+1})^2 + 1], n = 3..5 \quad (7)$$

Como valores iniciales se toman la condición inicial y los dos primeros valores obtenidos con el método de Runge Kutta, con un paso menor. Claramente la ecuación (7) es no lineal, por lo que se requiere utilizar el método de Newton-Raphson en cada iteración. Los resultados obtenidos se muestran en la Tabla 2.

Tabla 2. Solución del ejemplo 2

t_i	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1
y_i	-1	-0.16796	0.26462	0.53889	0.72965	0.95718
$y(t_i)$	-1	-0.16788	0.26466	0.55021	0.78168	0.99326

En este caso, el valor aproximado de y_i se obtuvo aplicando el método de Runge Kutta para los dos primeros valores calculados, y luego el método de Gear, aproximando en cada paso la solución de la ecuación no lineal con tres iteraciones del método de Newton-Raphson. Es posible mejorar la precisión de la solución obtenida aumentando dichas iteraciones.

Conclusiones

Los resultados obtenidos mediante métodos numéricos cobran sentido cuando éstos son implementados en computadora. El uso de aplicaciones como la presentada en este trabajo, como se mostró en los ejemplos, permite que los alumnos no tengan que destinar tanto tiempo ni a la programación ni a los procedimientos mecánicos para calcular manualmente la solución numérica de los problemas que se les plantea. En consecuencia, al obtener aproximaciones con mayor facilidad y rapidez, los estudiantes pueden dedicar tiempo para profundizar algunas cuestiones conceptuales inherentes a los métodos estudiados o realizar actividades que impliquen el afianzamiento de ciertas competencias matemáticas. Por otro lado, es importante que los alumnos vean las dificultades en la programación de algunos métodos, como los implícitos, y para este caso, esto se puede lograr con herramientas sencillas como una planilla de cálculo.

Referencias

- Caligaris, M.G., Rodríguez, G.B., Laugero, L.F. y Liria, L.V. (2012). "La resolución numérica de ecuaciones diferenciales en el contexto de los circuitos eléctricos" Actas del Congreso Latinoamericano de Ingeniería y Ciencias Aplicadas, San Rafael, Mendoza, Argentina, 28 al 30 de marzo.
- Crow, M.L. (2010). Computational Methods for Electric Power Systems. Second Edition. Boca Ratón: CRC Press, Taylor & Francis Group.
- Burden, R.L. y Faires, J.D. (2003). Análisis numérico. Séptima edición. México: International Thompson Editores.