



CAPITULO 7

INTRODUCCIÓN A LA DINÁMICA ESTRUCTURAL

7.1.-	Introducción.....	2
7.2.-	Consideraciones energéticas.....	3
7.2.1.-	Energía almacenada por un resorte (potencial).....	3
7.2.2.-	Energía disipada por un amortiguador.....	3
7.2.3.-	Energía almacenada por una masa (cinética).....	3
7.3.-	Configuraciones típicas de resortes.....	4
7.4.-	Sistema de 1 grado de libertad excitado senoidalmente desde la fundación.....	5
7.5.-	Resolución de casos con n grados de libertad.....	9
7.5.1.-	Desplazamiento relativo entre niveles.....	14
7.5.2.-	Determinación del estado de cargas.....	16
7.6.-	Sistema de 2 grados de libertad excitado senoidalmente en el nivel 2.....	17

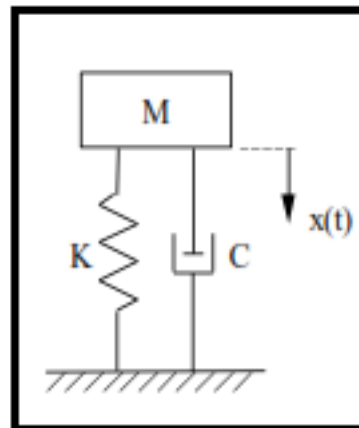


7.1.- Introducción.

En este capítulo estudiaremos las **vibraciones de sistemas mecánicos con n grados de libertad**.

El modelo más simple es el de 1 grado de libertad consistente en una masa conectada a un resorte y un amortiguador. La configuración del sistema queda determinada por solo un parámetro, $x = x(t)$, el cual representa la posición de la masa como una función del tiempo t .

La masa es la parte del sistema mecánico capaz de almacenar energía cinética, mientras que el resorte es capaz de almacenar energía potencial.



Durante las vibraciones la energía cinética de la masa es convertida en potencial en el resorte, y viceversa. Si la energía mecánica total del sistema, suma de la potencial y cinética, se conserva constante en el tiempo, el sistema es denominado conservativo. No obstante, esta es solo una hipótesis simplificativa, puesto que en todos los sistemas oscilantes hay algún tipo de disipación debido al amortiguamiento.

Las fuerzas de amortiguamiento siempre se oponen al movimiento, y disipan energía mecánica de los sistemas transformándola en calor.

En muchos casos, no obstante, podemos despreciar la presencia de amortiguamiento, especialmente cuando estamos interesados en analizar el movimiento de un sistema solo durante periodos cortos de tiempo. En estas condiciones decimos que el sistema presenta **vibraciones no amortiguadas**.

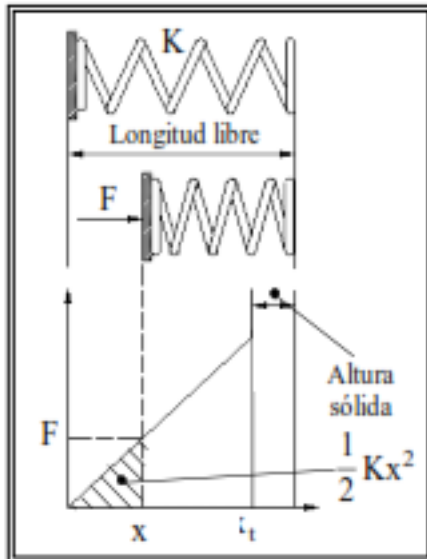
Cuando no hay fuerzas externas sobre la masa del sistema, decimos que el mismo presenta **vibraciones libres**; pero si hay fuerzas externas sobre la masa decimos que el sistema produce **vibraciones forzadas**.

Es importante notar que consideraremos solo **oscilaciones lineales**, donde las fuerzas elásticas y amortiguadoras son tales que las ecuaciones diferenciales que representan el movimiento del sistema son **ecuaciones diferenciales lineales**.



7.2.- Consideraciones energéticas

7.2.1.- Energía almacenada por un resorte (potencial)



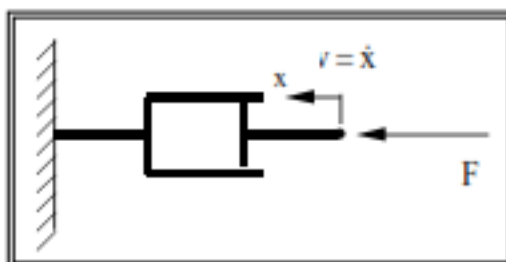
$$E_p = \frac{F x}{2}$$

Siendo $F = K x$, reemplazando:

$$E_p = \frac{K x x}{2}$$

$$E_p = \frac{K x^2}{2}$$

7.2.2.- Energía disipada por un amortiguador



$$\text{Potencia} = F v = C v v = C v^2$$

$$\text{Energía} = \int_{t_1}^{t_2} C \dot{x}^2 dt$$

7.2.3.- Energía almacenada por una masa (cinética)

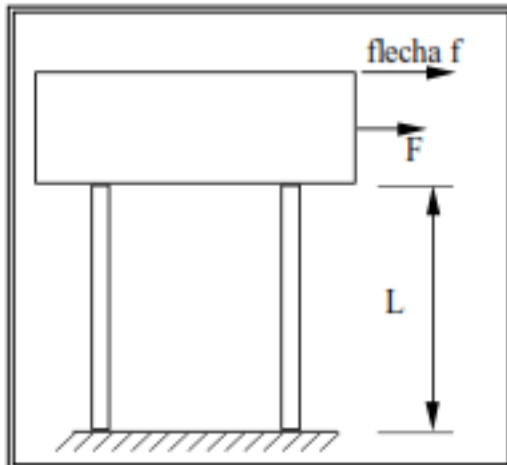


$$E_c = \frac{1}{2} M v^2 = \frac{1}{2} M \dot{x}^2$$



7.3.- Configuraciones típicas de resortes.

Nos remitiremos al capítulo 2 (punto 2.2.1. Resortes) para considerar las diferentes configuraciones y agregaremos una, muy útil para trabajar en este capítulo, nos referimos al **pórtico de dos columnas**:



$$f = \frac{FL^3}{24EI}$$

$$K = \frac{F}{f} = \frac{24EI}{L^3}$$

Comentario: Para pórticos de n columnas:

$$K = \frac{24EI}{2L^3} n = 12n \frac{EI}{L^3}$$

Cálculo de rigideces mediante la formulación de Wilbur

$$K_n = \frac{48E}{h_n \left[\frac{4h_n}{\sum R_{cn}} + \frac{h_{n-1} + h_n}{\sum R_{v(n-1)}} + \frac{h_n + h_{n+1}}{\sum R_{vn}} \right]}$$

K_n : Rigidez de entresuelo n.

R_c : Rigidez geométrica de columna = I_c/h_n

R_v : Rigidez geométrica de viga = I_v/h_v

h_n : Altura de columna.

l_v : Longitud de viga.

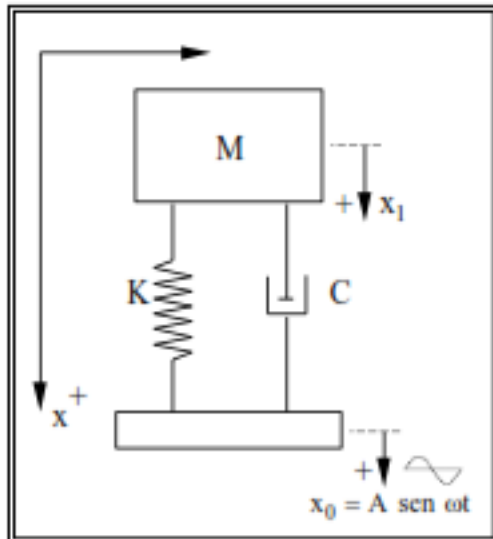
I_c : Momento de inercia de columna.

I_v : Momento de inercia de viga.

E : Módulo de elasticidad del material.



7.4.- Sistema de 1 grado de libertad excitado senoidalmente desde la fundación



$$x_0 = A \text{ sen } \omega t$$

$$\dot{x}_0 = A \omega \text{ cos } \omega t$$

Resolviendo el equilibrio de fuerzas:

$$\underbrace{M \ddot{x}_1 + C \dot{x}_1 + K x_1}_{\text{Liberando la masa}} - \underbrace{C \dot{x}_0 + K x_0}_{\text{Liberando la fundación}} = 0$$

Resultando la ecuación diferencial de equilibrio de fuerzas:

$$M \ddot{x}_1 + C \dot{x}_1 + K x_1 = C \dot{x}_0 + K x_0$$

La resolveremos utilizando el método de la transformada de Laplace. Designaremos al operador de Laplace por la letra s que, siendo las condiciones iniciales nulas, significa $s = \frac{d}{dt}$;

$$s^2 = \frac{d^2}{dt^2}; \text{ etc.}$$

Transformando entonces, queda:

$$M s^2 X_1 + C s X_1 + K X_1 = C s X_0 + K X_0$$

sacando factor común:

$$(M s^2 + C s + K) X_1 = (C s + K) X_0$$

Como queremos conocer la respuesta del sistema referida a la excitación es conveniente tratar directamente la relación $\frac{X_1}{X_0}$ resultando:°

$$\frac{X_1}{X_0} = \frac{C s + K}{M s^2 + C s + K}$$

Por una propiedad de la transformada de Laplace, el reemplazo de s por $j\omega$ en la igualdad anterior mostraría, en forma de número complejo, a la ley de variación de $\frac{X_1}{X_0}$ en función de la frecuencia de excitación ω , quedando:



$$\frac{\bar{x}_1}{\bar{x}_0} = \frac{C j\omega + K}{-M\omega^2 + C j\omega + K}$$

Siendo \bar{x}_0 y \bar{x}_1 las máximas amplitudes de las oscilaciones de la fundación y de la masa respectivamente.

Ordenando y racionalizando llegaríamos a una expresión del tipo:

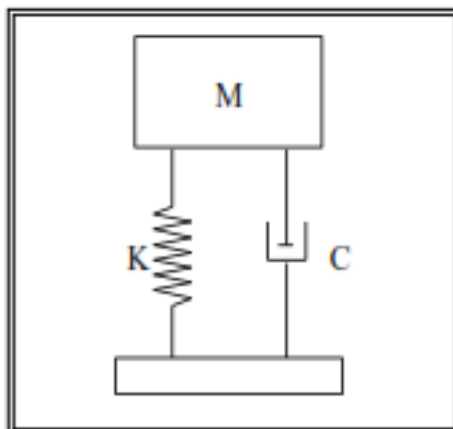
$$\frac{\bar{x}_1}{\bar{x}_0} = a + jb$$

Como en rigor nos interesa la relación de máximas amplitudes en términos absolutos conviene calcular los módulos, con lo que:

$$\left| \frac{\bar{x}_1}{\bar{x}_0} \right| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Con el objeto de clarificar lo expuesto, utilizaremos el siguiente caso:

$$M = 1$$



$$K = 1$$

$$\zeta = 0.05$$

Sabiendo que :

$$\zeta = \frac{C}{C_{cr}} = \frac{C}{2\sqrt{KM}}$$

$$\therefore C = 2\zeta\sqrt{KM} = 2 \times 0.05\sqrt{1 \times 1} = 0.1$$

$$C = 0.1$$

Para la resolución del caso utilizaremos MATLAB cuyas líneas de trabajo se ven en los siguientes párrafos:

```
s = '(j*w)';
m='1';
k='1';

p= sym('(c*s+k)/(m*s^2+c*s+k)');
p=subs(p,m,'m');
p=subs(p,k,'k');
p=subs(p,s,'s');

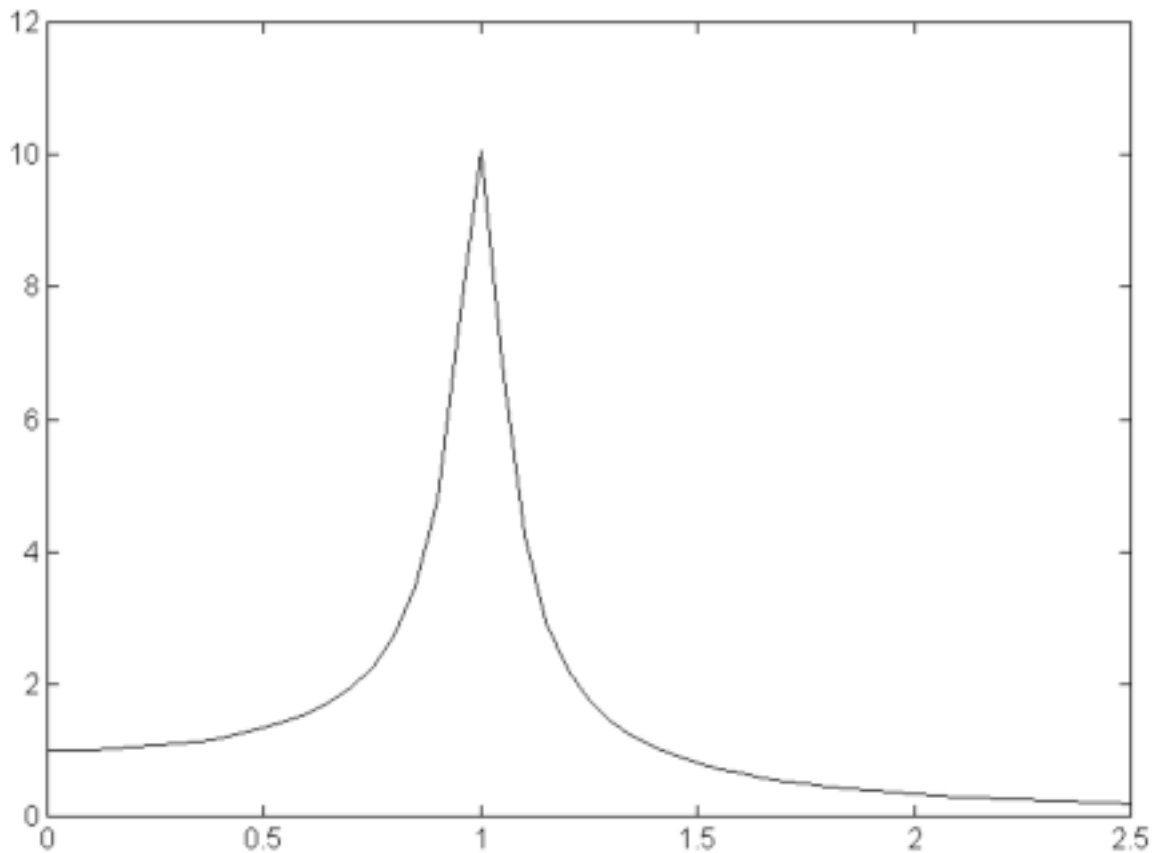
clf
whitebg(1,'w')
xinicial=0;
xfinal=2.5;
xpaso=.05;
c=.1;

x=xinicial:xpaso:xfinal;

for veces=1:round((xfinal-xinicial)/xpaso+1)
    w=x(veces);
    z(veces)=abs(eval(p));
end
```



figure(1)
plot(x,z,'k-')



El siguiente caso contempla la variación del coeficiente de amortiguamiento desde $C = 0.01$ hasta $C = 0.6$

```
clear
s = '(j*w)';
m='1';
k='1';

p= sym('(c*s+k)/(m*s^2+c*s+k)');
p=subs(p,m,'m');
p=subs(p,k,'k');
p=subs(p,s,'s');

clf
whitebg(1,'w')
view(3)

xinicial=0;
xfinal=2.5;
xpaso=.05;

yinicial=0.01;
yfinal=0.6;
ypaso=.01;

%Defino la malla
x=xinicial:xpaso:xfinal;y=yinicial:ypaso:yfinal;
```



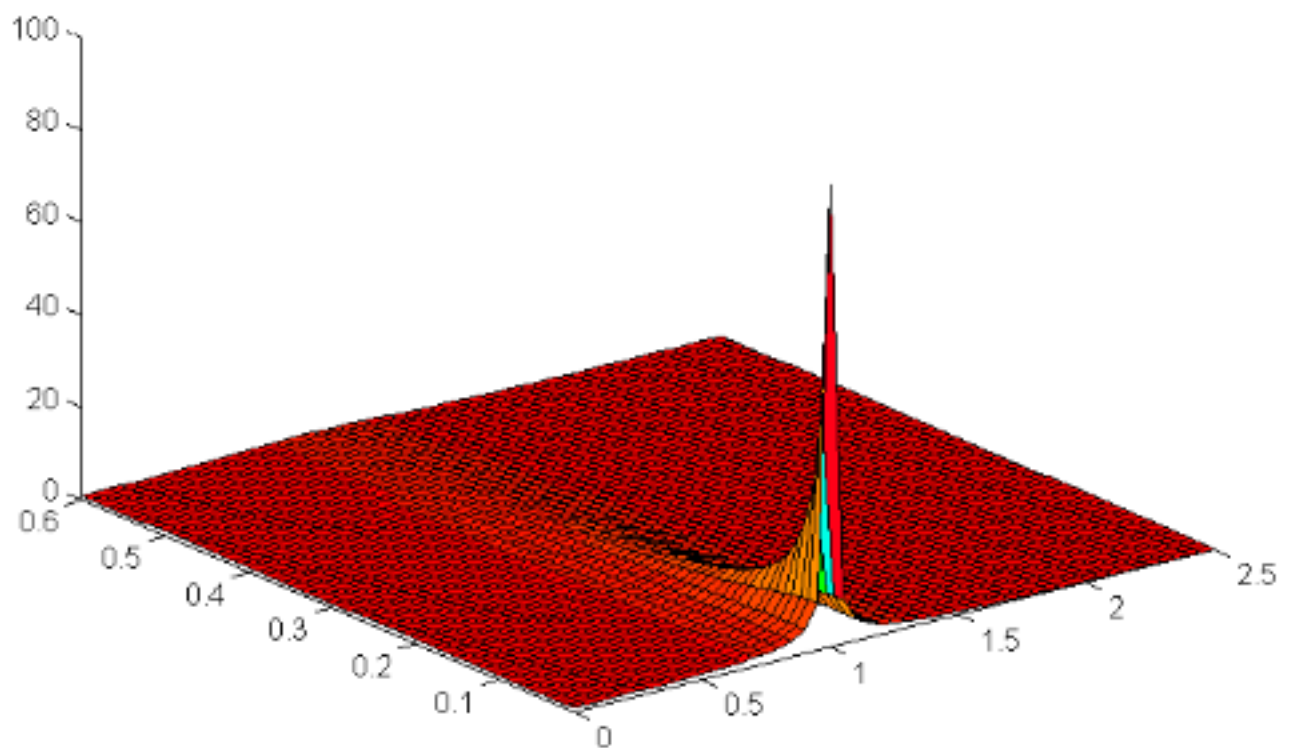
```
[xx,yy]=meshgrid(x,y);

%Defino la malla
x=xinicial:xpaso:xfinal;y=yinicial:ypaso:yfinal;
[xx,yy]=meshgrid(x,y);

zmax=0;
zmin=0;
for veces=1:round((xfinal-xinicial)/xpaso+1)
    for veces1=1:round((yfinal-yinicial)/ypaso+1)
        w=x(veces);
        c=y(veces1);
        z(veces1,veces)=abs(eval(p));

        %Determino valores max y min de z para ejes
        if zmax<z(veces1,veces); zmax=z(veces1,veces);end;
        if zmin>z(veces1,veces); zmin=z(veces1,veces);end;
    end
end
figure(1)
surf(x,y,z)
AXIS([min(x) max(x) min(y) max(y) zmin zmax])
```

Respuesta en frecuencia de un sistema de 1 grado de libertad excitado en la fundación

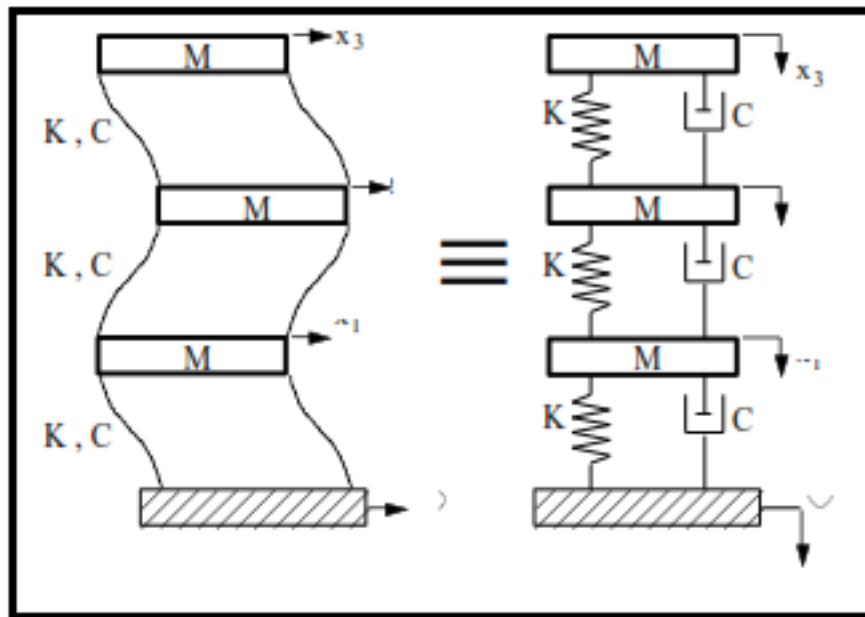




7.5.- Resolución de casos con n grados de libertad

Con el objeto de sistematizar la metodología tomaremos como ejemplo mas simple de resolución un sistema de 3 grados de libertad, o sea 3 niveles, en el cual las masas, rigideces y amortiguamientos de los niveles e interniveles serán considerados iguales. Al igual que para el caso de 1 grado de libertad, la estructura será solicitada desde su fundación con un movimiento sinusoidal simulando una acción del tipo sísmica de dirección horizontal. Si bien utilizamos un modelo de desplazamiento vertical no debemos olvidar que en el caso de estructuras civiles los desplazamientos que deben tenerse en cuenta son los del tipo horizontal.

El dibujo muestra el proceso de similitud con sus equivalencias.



Para evitar confusiones con los signos de las fuerzas que se originan en cada uno de los componentes, especialmente en resortes y amortiguadores, conviene bloquear todos los niveles liberando de a uno el nivel en estudio y los adyacentes para conformar la ecuación diferencial que modeliza la dinámica de ese nivel.

	Liberación del nivel i	Liberación del nivel i+1	Liberación del nivel i-1
Nivel 1	$M \ddot{x}_1 + 2C \dot{x}_1 + 2K x_1$	$-C \dot{x}_2 - K x_2$	$-C \dot{x}_0 - K x_0 = 0$
Nivel 2	$M \ddot{x}_2 + 2C \dot{x}_2 + 2K x_2$	$-C \dot{x}_3 - K x_3$	$-C \dot{x}_1 - K x_1 = 0$
Nivel 3	$M \ddot{x}_3 + C \dot{x}_3 + K x_3$	0	$-C \dot{x}_2 - K x_2 = 0$

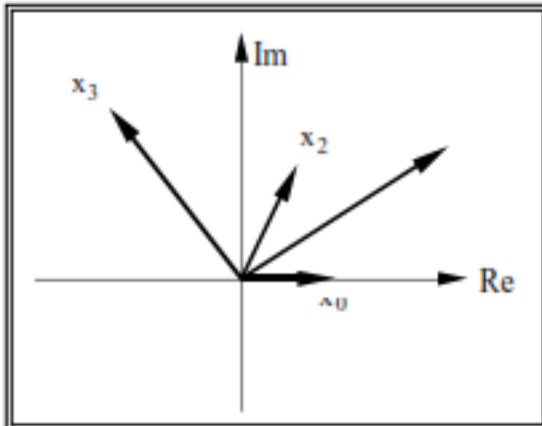
Ordenando en función de las variables, teniendo en cuenta que x_0 es la sollicitación y aplicando al mismo tiempo la transformada de Laplace resulta:



$$\begin{bmatrix} Ms^2 + 2Cs + 2K & -(Cs + K) & 0 \\ -(Cs + K) & Ms^2 + 2Cs + 2K & -(Cs + K) \\ 0 & -(Cs + K) & Ms^2 + Cs + K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (Cs + K)X_0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Conformando un sistema de 3 ecuaciones diferenciales simultáneas con 3 incógnitas que son las transformadas de los desplazamientos absolutos de cada uno de los niveles.

Para resolver el caso podemos utilizar nuevamente MATLAB recurriendo al método de pivote unitario tal como podrá verse en los párrafos siguientes.



Es conveniente notar que los desplazamientos x_i obtenidos serán valores complejos y referidos a un sistema absoluto de coordenadas. Para conocer los desplazamientos relativos será necesario operar por diferencias entre los desplazamientos x_i de los distintos niveles. El mostrado es un diagrama vectorial a modo de ejemplo de la situación antes planteada. Vemos que como x_0 es la excitación o sollicitación y tiene una amplitud conocida, la tomamos como referencia y la asumimos como un valor real.

Cálculo

El modelo de 3 grados de libertad que calcularemos tiene como parámetros:

$$M_1 = M_2 = M_3 = M = 1$$

$$K_1 = K_2 = K_3 = K = 1$$

$$C_1 = C_2 = C_3 = C = \text{variable entre } 0.01 \text{ y } 0.7$$

todos en unidades consistentes.

Listado del programa utilizado:

```
clear
s = '(j*w)';
p=sym('[m*s^2+2*c*s+2*k -(c*s+k) 0 -(c*s+k);-(c*s+k) (m*s^2+2*c*s+2*k) -(c*s+k) 0;0 -(c*s+k) (m*s^2+c*s+k) 0; 0 0 0 1]');
dp=expand(determ(p));
dp=subs(dp,s,'s');

s1=sym('[m*s^2+2*c*s+2*k -(c*s+k) 0 -(c*s+k);-(c*s+k) (m*s^2+2*c*s+2*k) -(c*s+k) 0;0 -(c*s+k) (m*s^2+c*s+k) 0; 1 0 0 0]');
ds1=expand(determ(s1));
ds1=subs(ds1,s,'s');

s2=sym('[m*s^2+2*c*s+2*k -(c*s+k) 0 -(c*s+k);-(c*s+k) (m*s^2+2*c*s+2*k) -(c*s+k) 0;0 -(c*s+k) (m*s^2+c*s+k) 0; 0 1 0 0]');
ds2=expand(determ(s2));
```



```
ds2=subs(ds2,s,'s');

s3=sym('[m*s^2+2*c*s+2*k -(c*s+k) 0 -(c*s+k);-(c*s+k) (m*s^2+2*c*s+2*k) -(c*s+k) 0;0 -(c*s+k) (m*s^2+c*s+k) 0; 0 0 1 0]');
ds3=expand(determ(s3));
ds3=subs(ds3,s,'s');

m=1;
k=1;

xinicial=0;
xfinal=2.5;
xpaso=.05;

yinicial=0.01;
yfinal=.7;
ypaso=.01;

%Defino limites
x=xinicial:xpaso:xfinal;y=yinicial:ypaso:yfinal;

zmax1=0;
zmin1=0;
zmax2=0;
zmin2=0;
zmax3=0;
zmin3=0;

for veces=1:round((xfinal-xinicial)/xpaso+1)
    for veces1=1:round((yfinal-yinicial)/ypaso+1)

        w=x(veces);
        c=y(veces1);
        z1(veces1,veces)=abs(eval(ds1)/eval(dp));
        z2(veces1,veces)=abs(eval(ds2)/eval(dp));
        z3(veces1,veces)=abs(eval(ds3)/eval(dp));

        %Determino valores max y min de z para ejes
        if zmax1<z1(veces1,veces); zmax1=z1(veces1,veces);end;
        if zmin1>z1(veces1,veces); zmin1=z1(veces1,veces);end;
        if zmax2<z2(veces1,veces); zmax2=z2(veces1,veces);end;
        if zmin2>z2(veces1,veces); zmin2=z2(veces1,veces);end;
        if zmax3<z3(veces1,veces); zmax3=z3(veces1,veces);end;
        if zmin3>z3(veces1,veces); zmin3=z3(veces1,veces);end;

    end
end

figure(1)
clf
whitebg(1,'w')
view(3)
surf(x,y,z1)
AXIS([min(x) max(x) min(y) max(y) zmin1 zmax1])

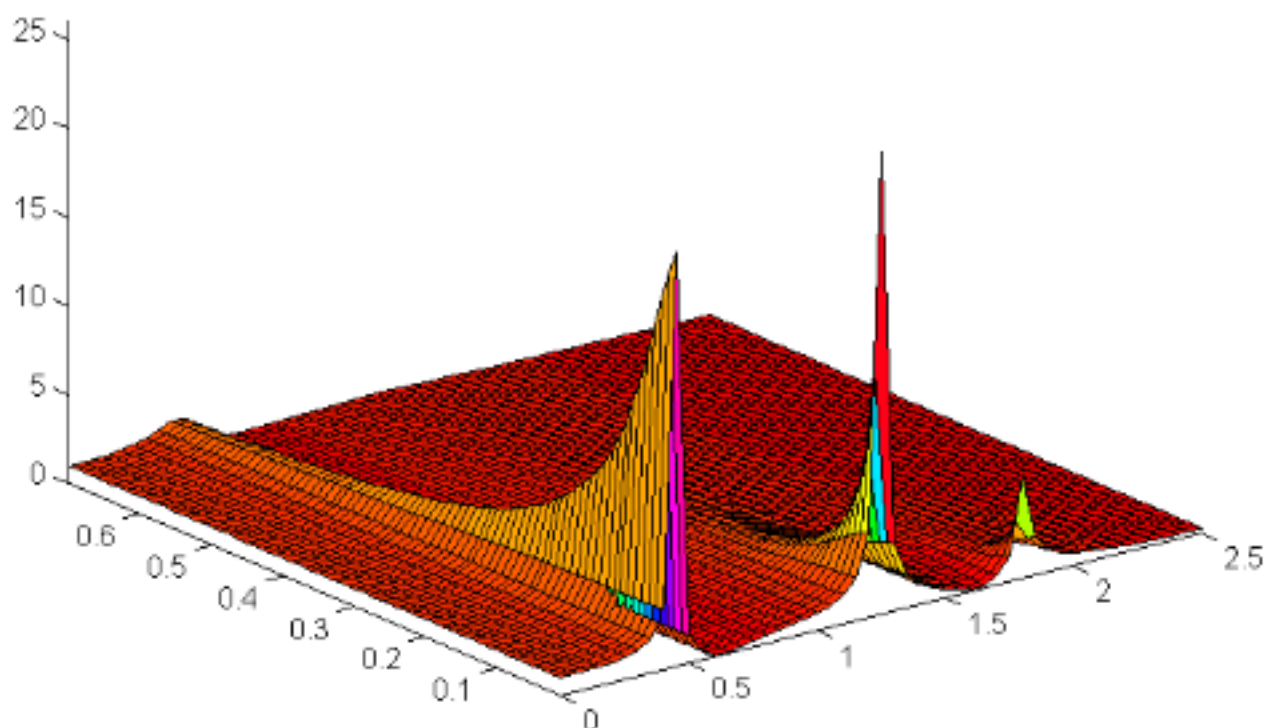
figure(2)
clf
whitebg(2,'w')
view(3)
surf(x,y,z2)
AXIS([min(x) max(x) min(y) max(y) zmin2 zmax2])

figure(3)
clf
whitebg(3,'w')
view(3)
```

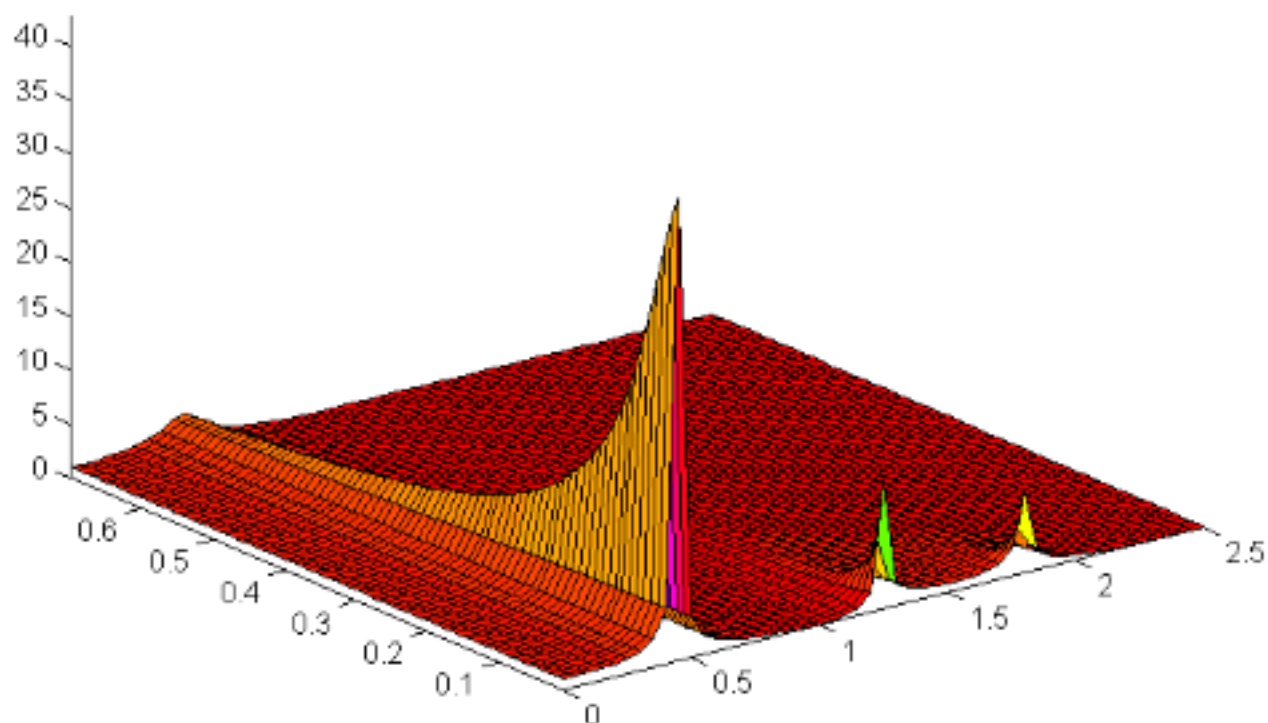


surf(x,y,z3)
AXIS([min(x) max(x) min(y) max(y) zmin3 zmax3])

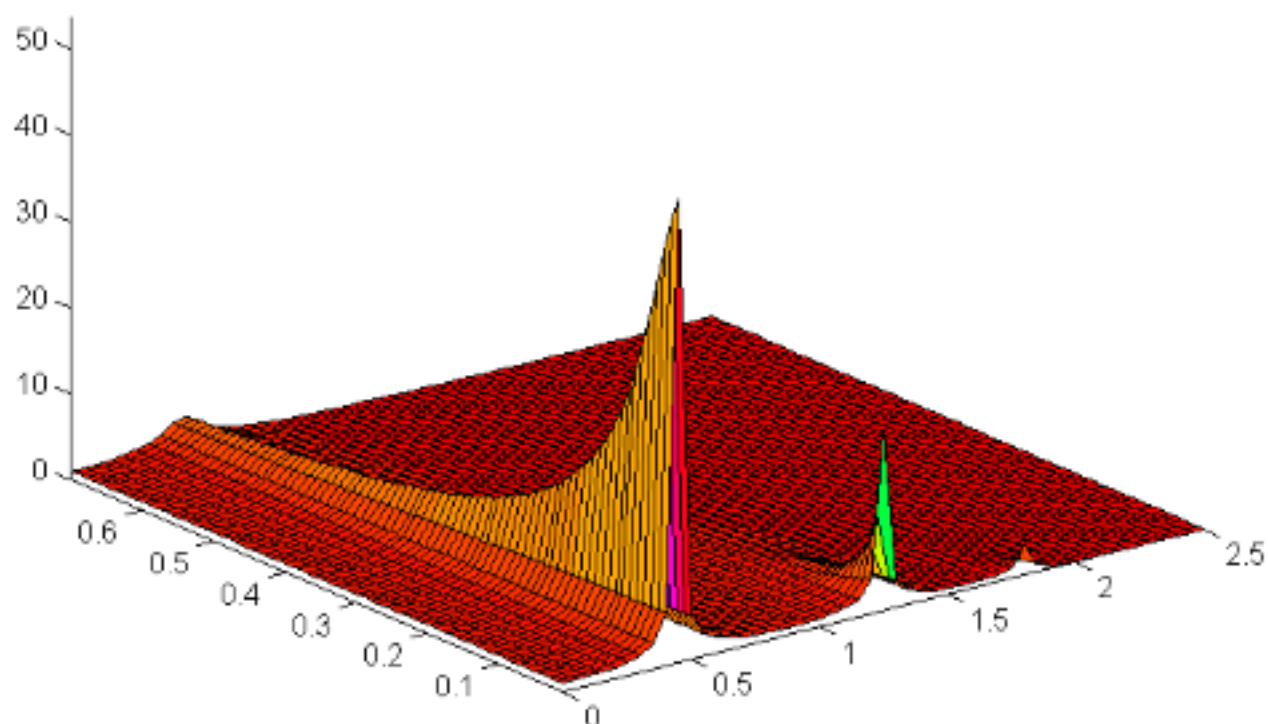
Respuesta en frecuencia de un sistema de 3 grados de libertad excitado en la fundación - 1er Nivel



Respuesta en frecuencia de un sistema de 3 grados de libertad excitado en la fundación - 2do Nivel



Respuesta en frecuencia de un sistema de 3 grados de libertad excitado en la fundación - 3er Nivel

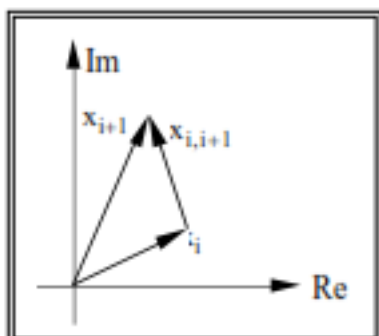




7.5.1.- Desplazamiento relativo entre niveles

El cálculo del desplazamiento relativo entre niveles es muy importante desde el punto de vista de las solicitaciones estructurales ya que permitirán obtener, por ejemplo, los momentos flectores y los esfuerzos de corte.

Como lo mencionáramos anteriormente el desplazamiento relativo $x_{i,i+1}$ genérico deberá obtenerse como diferencia entre ambos, es decir:



$$x_{i,i+1} = x_{i+1} - x_i$$

Es conveniente notar que, en general, nos interesa obtener el módulo de la diferencia $|x_{i+1} - x_i|$, y es lo que obtendremos en el cálculo siguiente donde veremos graficados los valores $|x_{01}|$, $|x_{12}|$ y $|x_{23}|$ para una relación de amortiguamiento $\zeta = 0.05$ (5%), es decir $C = 0.1$

Cálculo

Listado del programa utilizado:

```
s = '(j*w)';
p=sym('[m*s^2+2*c*s+2*k -(c*s+k) 0 -(c*s+k);-(c*s+k) (m*s^2+2*c*s+2*k) -(c*s+k) 0;0 -(c*s+k) (m*s^2+c*s+k) 0; 0 0 0 1]');
dp=expand(determ(p));
dp=subs(dp,s,'s');

s1=sym('[m*s^2+2*c*s+2*k -(c*s+k) 0 -(c*s+k);-(c*s+k) (m*s^2+2*c*s+2*k) -(c*s+k) 0;0 -(c*s+k) (m*s^2+c*s+k) 0; 1 0 0 0]');
ds1=expand(determ(s1));
ds1=subs(ds1,s,'s');

s2=sym('[m*s^2+2*c*s+2*k -(c*s+k) 0 -(c*s+k);-(c*s+k) (m*s^2+2*c*s+2*k) -(c*s+k) 0;0 -(c*s+k) (m*s^2+c*s+k) 0; 0 1 0 0]');
ds2=expand(determ(s2));
ds2=subs(ds2,s,'s');

s3=sym('[m*s^2+2*c*s+2*k -(c*s+k) 0 -(c*s+k);-(c*s+k) (m*s^2+2*c*s+2*k) -(c*s+k) 0;0 -(c*s+k) (m*s^2+c*s+k) 0; 0 0 1 0]');
ds3=expand(determ(s3));
ds3=subs(ds3,s,'s');

m=1;
c=.1;
k=1;

x0=1;

clf

sum=0;
for w=0:.01:2.5
    sum=sum+1;
    x(sum)=w;

    x1=eval(ds1)/eval(dp);
    x2=eval(ds2)/eval(dp);
```



```
x3=eval(ds3)/eval(dp);
```

```
x01(sum)=(x1-x0);
```

```
x12(sum)=(x2-x1);
```

```
x23(sum)=(x3-x2);
```

```
x01abs(sum)=abs(x01(sum));
```

```
x12abs(sum)=abs(x12(sum));
```

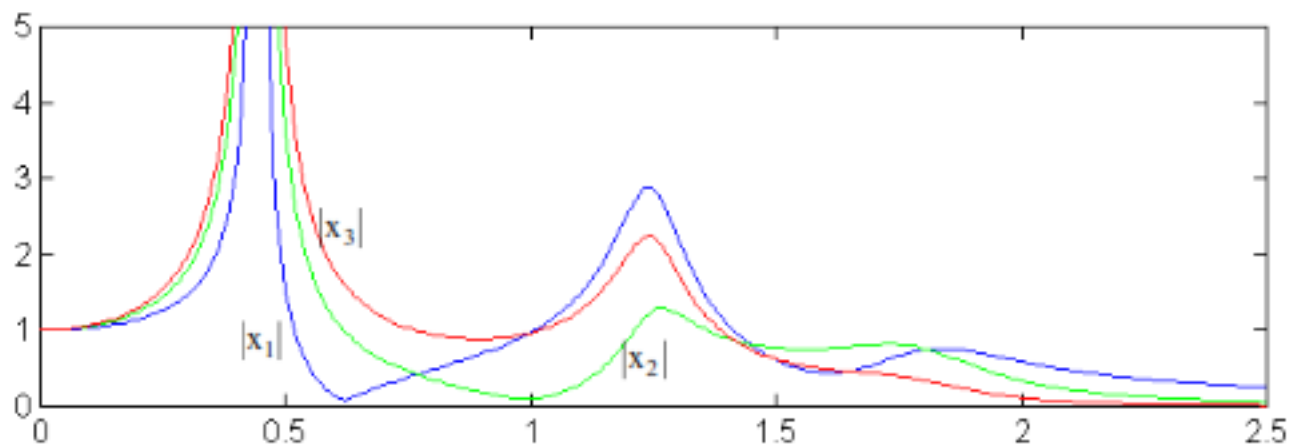
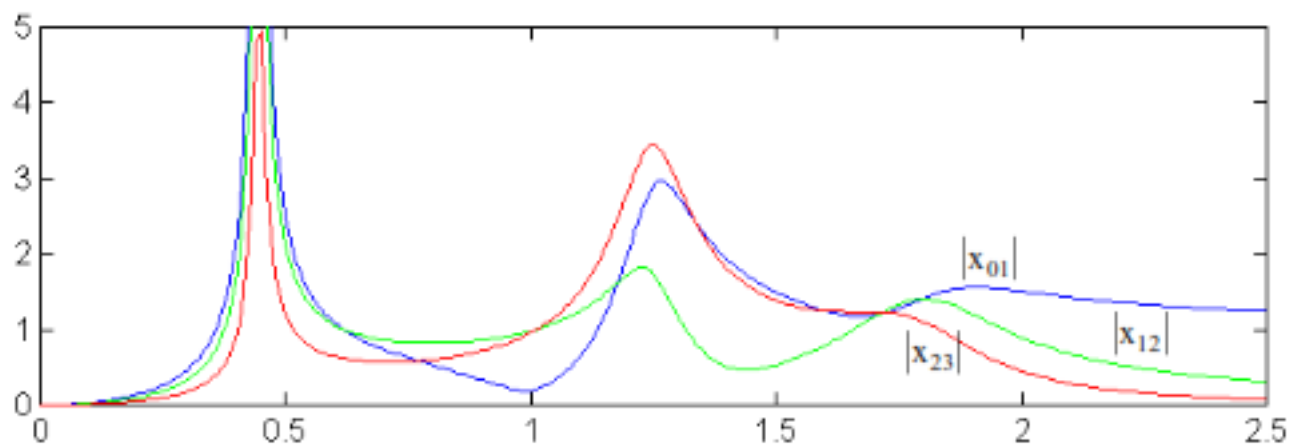
```
x23abs(sum)=abs(x23(sum));
```

```
x1abs(sum)=abs(x1);
```

```
x2abs(sum)=abs(x2);
```

```
x3abs(sum)=abs(x3);
```

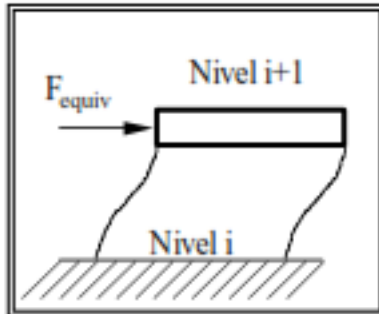
```
end  
figure(1)  
whitebg(1,'w')  
subplot(2,1,1),plot(x,x01abs,'b-',x,x12abs,'g-',x,x23abs,'r-')  
axis([0 2.5 0 5])  
subplot(2,1,2),plot(x,x1abs,'b-',x,x2abs,'g-',x,x3abs,'r-')  
axis([0 2.5 0 5])
```





7.5.2.- Determinación del estado de cargas

Conocido el estado de deformaciones de una estructura, pueden conocerse sus cargas.

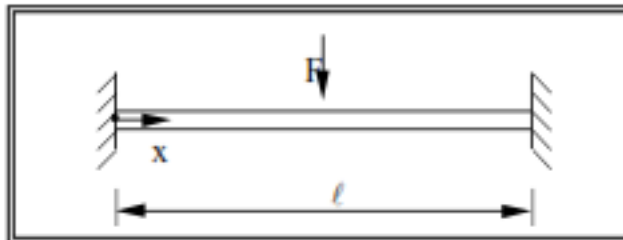


En nuestro caso, haciendo referencia a la figura, podemos calcular la fuerza equivalente F_{equiv} conociendo la rigidez del nivel y los desplazamientos relativos, con lo que:

$$F_{equiv} = K_{i,i+1} |x_{i+1} - x_i|$$

Valor este con el cual podrán determinarse momentos flectores, esfuerzos de corte y los estados de tensión correspondientes en las distintas secciones.

Para el cálculo de momentos en la configuración de pórticos, partimos por similitud de la viga biempotrada en la cual el momento se calcula como:



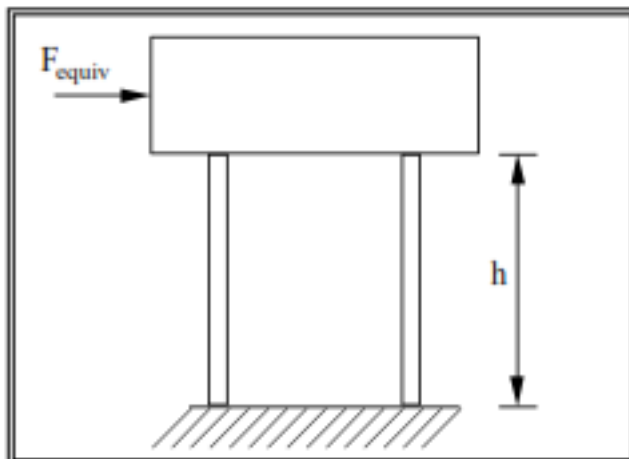
$$M = \frac{F \ell}{2} \left(\frac{x}{\ell} - \frac{1}{4} \right)$$

para $0 < x < \ell/2$

Observándose que el momento flector máximo ocurre en los empotramientos y en el centro del vano, tomando el valor:

$$|M| = \frac{F \ell}{8}$$

En el caso del pórtico reemplazamos a F por F_{equiv} y a ℓ por $2h$.



$$|M| = \frac{F_{equiv} 2h}{8}$$

$$\therefore |M| = \frac{F_{equiv} h}{4}$$



7.6.- Sistema de 2 grados de libertad excitado senoidalmente en el nivel 2.

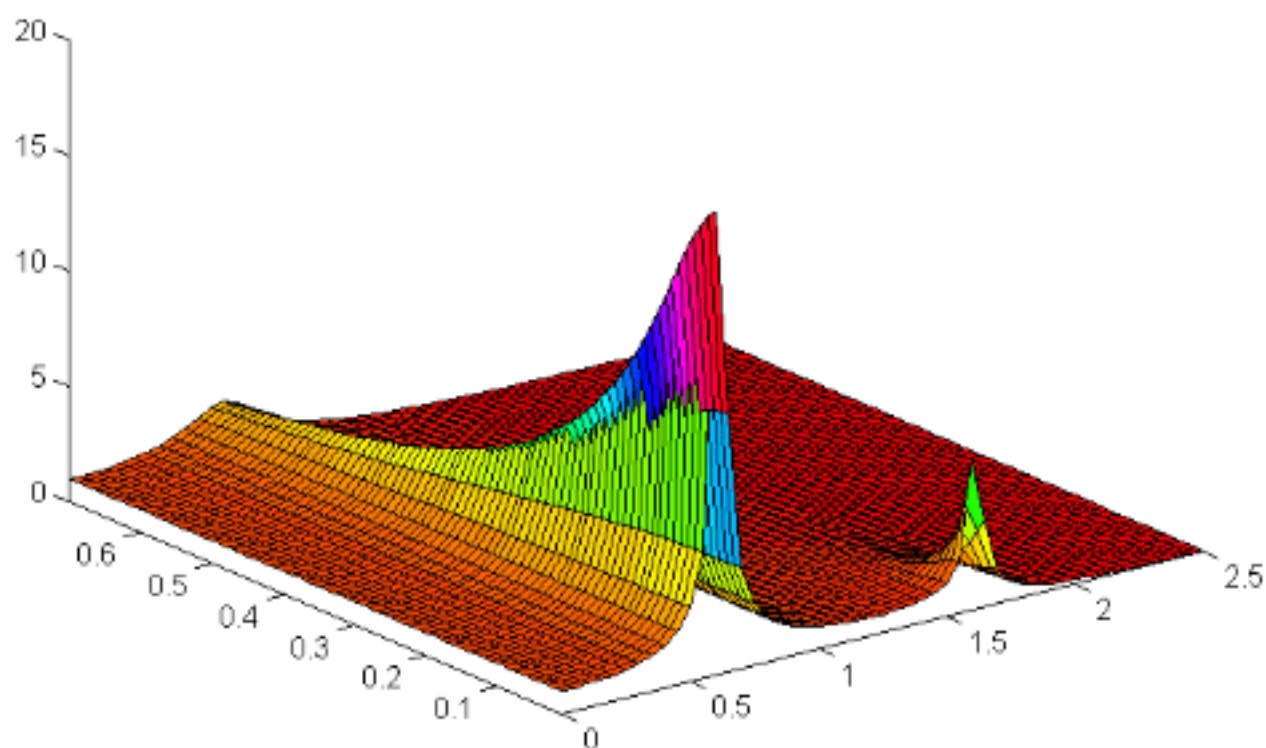
Listado del programa

```
clear
s=(j*w);
m='1';
k='1';
p=sym('(m*s^2+2*c*s+2)/k, -(c*s+k)/k, 0; -(c*s+k)/k, (m*s^2+c*s+k)/k, -1; 0, 0, 1');
p=subs(p,m,'m');
p=subs(p,k,'k');
dp=determ(p);
dp=subs(dp,s,'s');
s1=sym('(m*s^2+2*c*s+2)/k, -(c*s+k)/k, 0; -(c*s+k)/k, (m*s^2+c*s+k)/k, -1; 1, 0, 0');
s1=subs(s1,m,'m');
s1=subs(s1,k,'k');
ds1=determ(s1);
ds1=subs(ds1,s,'s');
s2=sym('(m*s^2+2*c*s+2)/k, -(c*s+k)/k, 0; -(c*s+k)/k, (m*s^2+c*s+k)/k, -1; 0, 1, 0');
s2=subs(s2,m,'m');
s2=subs(s2,k,'k');
ds2=determ(s2);
ds2=subs(ds2,s,'s');
xinicial=0;
xfinal=2.5;
xpaso=.05;
yinicial=0.01;
yfinal=.7;
ypaso=.01;
%Defino limites
x=xinicial:ypaso:xfinal;y=yinicial:ypaso:yfinal;
zmax1=0;
zmin1=0;
zmax2=0;
zmin2=0;
for veces=1:round((xfinal-xinicial)/xpaso+1)
    for veces1=1:round((yfinal-yinicial)/ypaso+1)
        w=x(veces);
        c=y(veces1);
        z1(veces1,veces)=abs(eval(ds1)/eval(dp));
        z2(veces1,veces)=abs(eval(ds2)/eval(dp));
        %Determino valores max y min de z para ejes
        if zmax1<z1(veces1,veces); zmax1=z1(veces1,veces);end;
        if zmin1>z1(veces1,veces); zmin1=z1(veces1,veces);end;
        if zmax2<z2(veces1,veces); zmax2=z2(veces1,veces);end;
        if zmin2>z2(veces1,veces); zmin2=z2(veces1,veces);end;
    end
end
figure(1)
clf
whitebg(1,'w')
view(3)
surf(x,y,z1)
AXIS([min(x) max(x) min(y) max(y) zmin1 zmax1])
title ('Respuesta en frecuencia de un sistema de 2 grados de libertad excitado en el segundo nivel - 1er Nivel')

figure(2)
clf
whitebg(2,'w')
view(3)
surf(x,y,z2)
AXIS([min(x) max(x) min(y) max(y) zmin2 zmax2])
title ('Respuesta en frecuencia de un sistema de 2 grados de libertad excitado en el segundo nivel - 2do Nivel')
```



Respuesta en frecuencia del 1^{er} nivel de un sistema de 2 grados de libertad excitado en el segundo nivel



Respuesta en frecuencia del 2^{do} nivel de un sistema de 2 grados de libertad excitado en el segundo nivel

