

## DINAMICA DE CONTROL DE ACTITUD DE UN PEQUEÑO SATELITE DE OBSERVACION TERRESTRE EN LA FASE DE ADQUISICION

*Ing. Carlos Cagliolo (UTN – FRC)*

*Ing. Jorge Jazni (UTN – FRC)*

*Ing. Gustavo González (UTN – FRC)*

### 1. RESUMEN

Este trabajo trata el estudio de un Sistema de Control de Actitud para un Satélite de Observación Terrestre, destinado a posibilitar su orientación en la dirección deseada, permitiendo, por parte del sistema de cámaras de a bordo, la adquisición y consecuente visualización del área elegida.

### 2. INTRODUCCIÓN

Durante la fase de amortiguamiento el satélite reduce su velocidad angular  $\omega$  hasta llegar a un estado en el cual:

$$\omega_f \approx 1,8\omega_o$$

siendo  $\omega_o$  la velocidad angular de órbita. Para la altura prevista de 800 Km el período orbital es de 100 minutos aproximadamente por lo cual:

$$\omega_o = 0,6 \frac{\text{rev}}{\text{hora}}$$

con una velocidad angular final del satélite:

$$\omega_f \approx 1,1 \frac{\text{rev}}{\text{hora}}$$

suficientemente baja como para permitir la operación de las cámaras de a bordo. No obstante ello la actitud permanece indeterminada, siendo necesario a partir de entonces, la puesta en funciones de un sistema, objeto de este trabajo, a fin de modificar controladamente la actitud y con ello permitir la adquisición de las imágenes de teleobservación sobre el área deseada.

## **2.1. REQUISITOS PARA EL SISTEMA DE CONTROL DE ACTITUD.**

En función del limitado tiempo disponible durante el paso del satélite se considera de importancia fundamental:

- Rápida respuesta del sistema: el satélite debe iniciar la orientación y llegar a la velocidad angular de adquisición en el menor tiempo posible. Se estima deseable una demora no mayor de algunos segundos.
- La velocidad angular de la rotación de adquisición debe permitir una maniobra de 180° (caso más desfavorable) en aproximadamente 30 segundos.
- La detención del movimiento una vez obtenida la adquisición debe efectuarse en un lapso similar al de iniciación.
- Se considera altamente deseable que el sistema no consuma fluidos no renovables.

Dado que variaciones de actitud no implican necesariamente modificación del momento cinético del satélite, durante la fase de adquisición no es necesario capacitar el sistema para desarrollar cuplas de interacción con el medio exterior, por el mismo motivo puede prescindirse del proceso de reacción con expulsión de masa.

En base a estas consideraciones estamos en condiciones de analizar lo siguiente.

## **2.2. CRITERIO DE SELECCIÓN DEL PRINCIPIO DE FUNCIONAMIENTO**

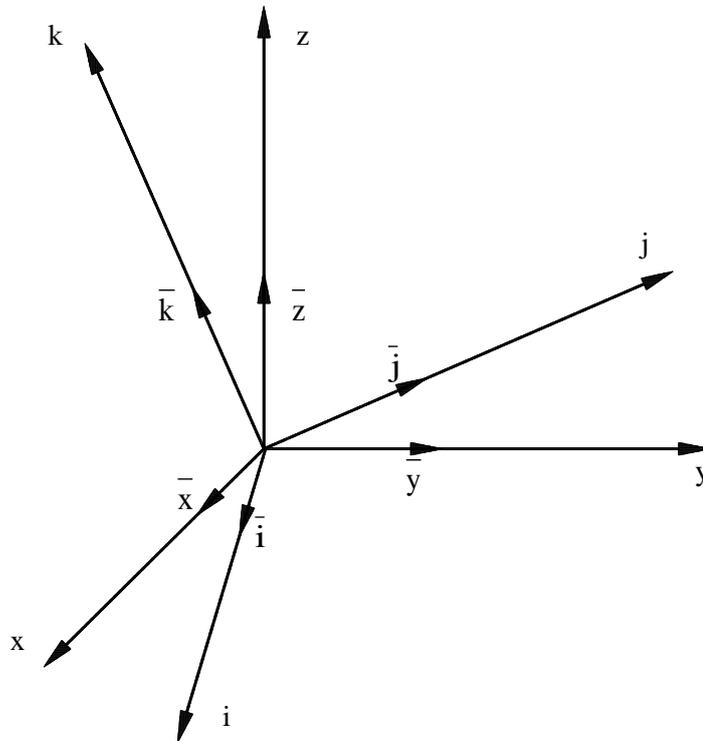
- El sistema de magnetómetros y bobinas utilizado en la fase de amortiguamiento podría en principio, debido a su capacidad de generar cuplas, ser utilizado para la adquisición. No obstante la ventaja que significaría el aprovechamiento de elementos ya implementados a bordo, tal solución no es conveniente debido la lentitud de las maniobras que resultaría de las pequeñas cuplas aplicadas, insuficientes para satisfacer los requisitos relativos a tiempos de repuesta.
- Los sistemas por eyección de gas son descartados por su complejidad y por estar el tiempo de funcionamiento limitado por el consumo de la reserva de gas.
- Sistema por reacción interna mediante ruedas de inercia. Esta solución satisface los requisitos enunciados antes y es el sistema que se estudiará en este trabajo.

### 2.3. DESCRIPCIÓN DEL SISTEMA

El sistema consta de tres ruedas independientes, cada una de ellas accionada por un motor sobre cuyo eje está directamente montada. Las ruedas están dispuestas con sus ejes paralelos a los ejes principales de inercia del satélite. El sistema permite el control del satélite en cabeceo, guiñada y rolido, correspondiendo cada maniobra al giro del rotor respectivo.

El principio de funcionamiento se basa en constituir al satélite, en lugar de un cuerpo rígido, en un sistema de cuerpos entre los que se intercambian acciones (cuplas). Estas acciones, internas respecto al conjunto, son externas respecto a cada componente, y capaces por ello de modificar su respectiva velocidad angular absoluta.

### 3. NOMECLATURA A UTILIZAR



X, Y, Z : Terna inercial respecto a las rotaciones, inversa, versores  $\bar{X}$ ,  $\bar{Y}$ ,  $\bar{Z}$

i, j, k: Terna móvil, inversa, versores  $\bar{i}$ ,  $\bar{j}$ ,  $\bar{k}$ .

Sentido de los vectores axiales: Como el avance de un tornillo de hélice derecha.

Entre los versores se tiene:

$$\bar{i} = i_x \bar{x} + i_y \bar{y} + i_z \bar{z}$$

$$\bar{j} = j_x \bar{x} + j_y \bar{y} + j_z \bar{z}$$

$$\bar{k} = k_x \bar{x} + k_y \bar{y} + k_z \bar{z}$$

$$\bar{x} = x_i \bar{i} + x_j \bar{j} + x_k \bar{k}$$

$$\bar{y} = y_i \bar{i} + y_j \bar{j} + y_k \bar{k}$$

$$\bar{z} = z_i \bar{i} + z_j \bar{j} + z_k \bar{k}$$

Siendo:

$$\left. \begin{array}{l} i_x, i_y, i_z \\ j_x, j_y, j_z \\ k_x, k_y, k_z \end{array} \right\} \text{Cosenos directores de los ejes } i, j, k \text{ referidos a la terna } X, Y, Z.$$

$$\left. \begin{array}{l} x_i, x_j, x_k \\ y_i, y_j, y_k \\ z_i, z_j, z_k \end{array} \right\} \text{Cosenos directores de los ejes } X, Y, Z \text{ referidos a la terna móvil } i, j, k.$$

Entre los cosenos directores existen las siguientes igualdades:

Para  $M = X, Y, Z$  ;  $N = i, j, k$  , es  $M_n = N_m$

#### 4. ANÁLISIS DEL SISTEMA

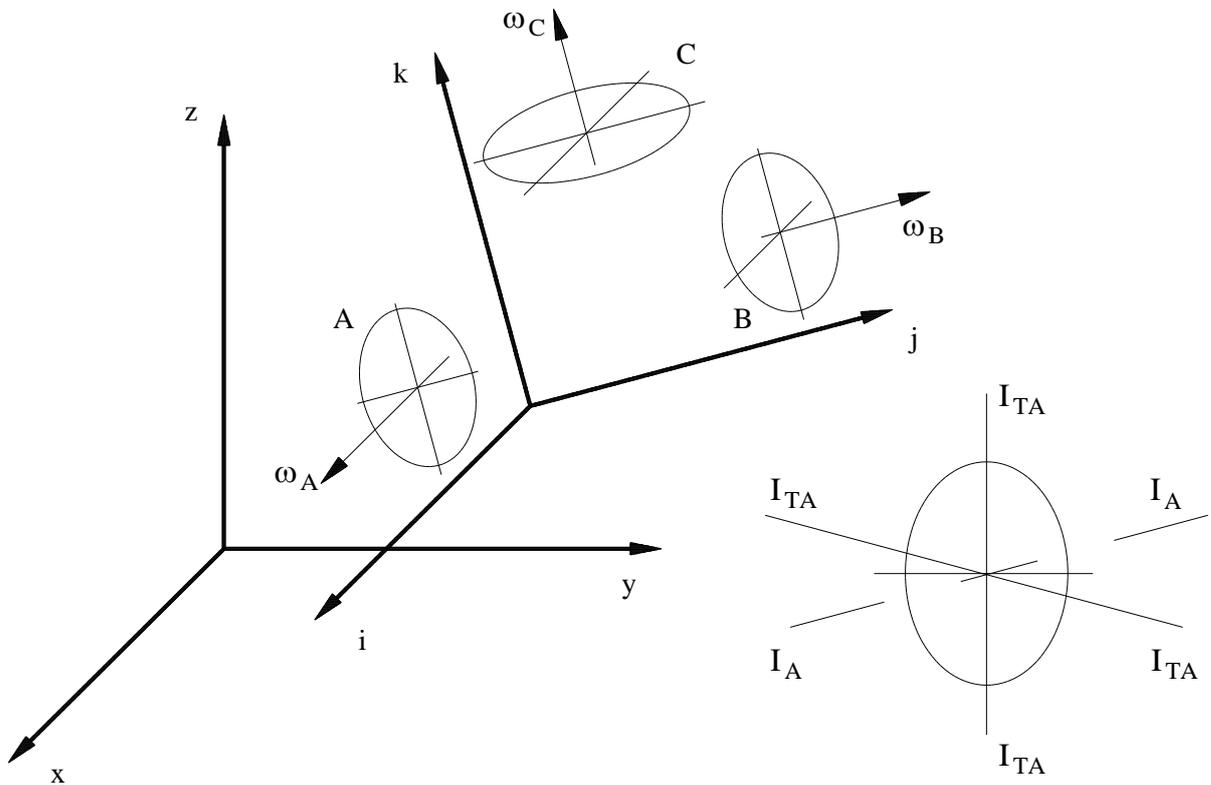


Figura 1

A, B y C son los rotores de reacción, cada uno de ellos formado por un volante de inercia más la parte rotante del correspondiente motor de accionamiento. Los ejes de rotores están dispuestos paralelos a los ejes centrales  $i$ ,  $j$ ,  $k$  del cuerpo rígido único que resulta al bloquear los rotores (satélite). La localización de los rotores no tiene influencia en el funcionamiento del sistema por lo cual puede elegirse libremente en el diseño.

#### 5. MOMENTOS DE INERCIA

Sean  $I'$ ,  $J'$ ,  $K'$  momentos principales de inercia baricéntricos del satélite, supuestos los rotores reducidos a masas puntuales situadas en sus respectivos baricentros (1).

Sean

$I_A$ ,  $I_B$ ,  $I_C$ : momentos de inercia baricéntricos axiales de los rotores.

$I_{TA}$ ,  $I_{TB}$ ,  $I_{TC}$ : momentos de inercia baricéntricos transversales de los rotores.

Por ser los rotores cuerpos de revolución los anteriores son momentos principales de inercia.

Se tiene, finalmente:

$$\begin{aligned}
I &= I' + I_A + I_{TB} + I_{TC} \\
J &= J' + I_{TA} + I_B + I_{TC} \\
K &= K' + I_{TA} + I_{TB} + I_C
\end{aligned}
\tag{2}$$

Donde I, J, K son los momentos principales de inercia del sistema estando los rotores bloqueados, referidos a los ejes centrales i, j, k.

## 6. VELOCIDADES ANGULARES

### Satélite

$\overline{\omega}_i, \overline{\omega}_j, \overline{\omega}_k$  : proyecciones de la velocidad absoluta de la terna móvil sobre los ejes i, j, k respectivamente.

### Rotores

Siendo los ejes de los rotores A, B, C respectivamente paralelos a los ejes i, j, k, las componentes de las velocidades relativas son:

$$\begin{aligned}
\text{Rotor A} \quad \omega_{RAi} &= \omega_A & \omega_{RAj} &= 0 & \omega_{RAk} &= 0 \\
\text{Rotor B} \quad \omega_{RBi} &= 0 & \omega_{RBj} &= \omega_B & \omega_{RBk} &= 0 \\
\text{Rotor C} \quad \omega_{RCi} &= 0 & \omega_{RCj} &= 0 & \omega_{RCk} &= \omega_C
\end{aligned}$$

$\omega_A, \omega_B, \omega_C$  son velocidades de giro de los rotores con respecto al satélite.

Las velocidades absolutas de los rotores expresadas en la terna móvil resultan, por el Teorema de adición de velocidades

$$\begin{aligned}
\text{Rotor A} \quad \overline{\omega}_{absA} &= (\overline{\omega}_i + \omega_A)\overline{i} + \overline{\omega}_j + \overline{\omega}_k \\
\text{Rotor B} \quad \overline{\omega}_{absB} &= \overline{\omega}_i + (\overline{\omega}_j + \omega_B)\overline{j} + \overline{\omega}_k \\
\text{Rotor C} \quad \overline{\omega}_{absC} &= \overline{\omega}_i + \overline{\omega}_j + (\omega_C + \overline{\omega}_k)\overline{k}
\end{aligned}
\tag{3}$$

## 7. MOMENTOS CINÉTICOS

El momento cinético del sistema es la suma de los momentos cinéticos de sus componentes:

$$\bar{H} = \bar{H}' + \bar{H}_A + \bar{H}_B + \bar{H}_C$$

$\bar{H}'$  : Momento cinético absoluto del satélite (según idealización (1))

$\bar{H}_A$ ,  $\bar{H}_B$ ,  $\bar{H}_C$  : Momentos cinéticos baricéntricos absolutos de los rotores.

$$\bar{H}' = \omega_i I' \bar{i} + \omega_j J' \bar{j} + \omega_k K' \bar{k}$$

$$\bar{H}_A = (\omega_i + \omega_A) I_A \bar{i} + \omega_j I_{TA} \bar{j} + \omega_k I_{TA} \bar{k}$$

$$\bar{H}_B = \omega_i I_{TB} \bar{i} + (\omega_j + \omega_B) I_B \bar{j} + \omega_k I_{TB} \bar{k}$$

$$\bar{H}_C = \omega_i I_{TC} \bar{i} + \omega_j I_{TC} \bar{j} + (\omega_k + \omega_C) I_C \bar{k}$$

Las componentes del momento cinético del sistema resultan:

$$\begin{aligned} H_i &= \omega_i (I' + I_A + I_{TB} + I_{TC}) + \omega_A I_A = \omega_i I + \omega_A I_A \\ H_j &= \omega_j (J' + I_{TA} + I_B + I_{TC}) + \omega_B I_B = \omega_j J + \omega_B I_B \\ H_k &= \omega_k (K' + I_{TA} + I_{TB} + I_C) + \omega_C I_C = \omega_k K + \omega_C I_C \end{aligned} \quad (4)$$

## 8. ECUACIONES DE MOVIMIENTO

Llamando  $\bar{M}$  al momento mecánico exterior aplicado al satélite es:

$$\frac{d\bar{H}}{dt} = \bar{M}$$

Válida con referencia al sistema inercial x, y, z, siendo

$$\bar{H} = H_i \bar{i} + H_j \bar{j} + H_k \bar{k}$$

el momento cinético dado por ecuaciones (4)

En x, y, z los versores  $\bar{i}$ ,  $\bar{j}$ ,  $\bar{k}$  son variables, por lo tanto:

$$\frac{d\bar{H}}{dt} = H_i \frac{d\bar{i}}{dt} + \frac{d}{dt} [\omega_i I + \omega_A I_A] \bar{i} + H_j \frac{d\bar{j}}{dt} + \frac{d}{dt} [\omega_j J + \omega_B I_B] \bar{j} + H_k \frac{d\bar{k}}{dt} + \frac{d}{dt} [\omega_k K + \omega_C I_C] \bar{k} = \bar{M}$$

$$\frac{d\bar{i}}{dt} = \bar{\omega} \times \bar{i} \quad ; \quad \frac{d\bar{j}}{dt} = \bar{\omega} \times \bar{j} \quad ; \quad \frac{d\bar{k}}{dt} = \bar{\omega} \times \bar{k}$$

$$\frac{d\bar{H}}{dt} = H_i \bar{\omega} \times \bar{i} + \frac{d\omega_i}{dt} I \bar{i} + \frac{d\omega_A}{dt} I_A \bar{i} +$$

$$\begin{aligned}
& + H_j \bar{\omega} \times \bar{j} + \frac{d\omega_j}{dt} J \bar{j} + \frac{d\omega_B}{dt} I_B \bar{j} + \\
& + H_k \bar{\omega} \times \bar{k} + \frac{d\omega_k}{dt} K \bar{k} + \frac{d\omega_c}{dt} I_c \bar{k} = \bar{M}
\end{aligned} \tag{5}$$

Se hace notar que, siendo

$$\frac{d\omega_A}{dt}, \quad \frac{d\omega_B}{dt}, \quad \frac{d\omega_C}{dt}$$

aceleraciones relativas de los rotores, dichos valores no son, como sucedería en un ensayo estático, iguales al cociente de la cupla motriz del motor sobre el momento de inercia del rotor.

Desarrollando los productos vectoriales y multiplicando por las componentes de  $\bar{H}$

$$\begin{aligned}
H_i \bar{\omega} \times \bar{i} &= \omega_k H_i \bar{j} - \omega_j H_i \bar{k} \\
H_j \bar{\omega} \times \bar{j} &= -\omega_k H_j \bar{i} + \omega_i H_j \bar{k} \\
H_k \bar{\omega} \times \bar{k} &= \omega_j H_k \bar{i} - \omega_i H_k \bar{j}
\end{aligned}$$

Reemplazando en (5) y separando componentes:

$$\begin{aligned}
\omega_j H_k - \omega_k H_j + \frac{d\omega_i}{dt} I + \frac{d\omega_A}{dt} I_A &= M_i \\
\omega_k H_i - \omega_i H_k + \frac{d\omega_j}{dt} J + \frac{d\omega_B}{dt} I_B &= M_j \\
\omega_i H_j - \omega_j H_i + \frac{d\omega_k}{dt} K + \frac{d\omega_C}{dt} I_C &= M_k
\end{aligned}$$

Introduciendo los valores de H dado por (4)

$$\begin{aligned}
\omega_j (\omega_k K + \omega_c I_c) - \omega_k (\omega_j J + \omega_B I_B) + \frac{d\omega_i}{dt} I + \frac{d\omega_A}{dt} I_A &= M_i \\
\omega_k (\omega_i I + \omega_A I_A) - \omega_i (\omega_k K + \omega_C I_C) + \frac{d\omega_j}{dt} J + \frac{d\omega_B}{dt} I_B &= M_j \\
\omega_i (\omega_j J + \omega_B I_B) - \omega_j (\omega_i I + \omega_A I_A) + \frac{d\omega_k}{dt} K + \frac{d\omega_C}{dt} I_C &= M_k
\end{aligned}$$

Efectuando los productos indicados y sacando factor común llegamos finalmente a las ecuaciones generales del movimiento:

$$\begin{aligned}
\omega_j \omega_k (K - J) + \omega_j \omega_c I_c - \omega_k \omega_B I_B + \frac{d\omega_i}{dt} I + \frac{d\omega_A}{dt} I_A &= M_i \\
\omega_k \omega_i (I - K) + \omega_k \omega_A I_A - \omega_i \omega_C I_C + \frac{d\omega_j}{dt} J + \frac{d\omega_B}{dt} I_B &= M_j
\end{aligned} \tag{6}$$

$$\omega_i \omega_j (J - I) + \omega_i \omega_B I_B - \omega_j \omega_A I_A + \frac{d\omega_k}{dt} K + \frac{d\omega_C}{dt} I_C = M_k$$

Si se bloquean los rotores el sistema se convierte en un cuerpo rígido de momentos de inercia I, J, K (ver (2)).

Haciendo

$$\omega_A = \omega_B = \omega_C = 0 \quad ; \quad \frac{d\omega_A}{dt} = \frac{d\omega_B}{dt} = \frac{d\omega_C}{dt} = 0$$

en las ecuaciones (6) tenemos:

$$\omega_j \omega_k (K - J) + \frac{d\omega_i}{dt} I = M_i$$

$$\omega_k \omega_i (I - K) + \frac{d\omega_j}{dt} J = M_j$$

$$\omega_i \omega_j (J - I) + \frac{d\omega_k}{dt} K = M_k$$

Que son las ecuaciones de Euler del movimiento de un sólido de momentos de inercia principales I, J, K sometido a la cupla  $\overline{M}[M_i, M_j, M_k]$ .

Analizaremos como ejemplo de aplicación de las ecuaciones generales obtenidas el caso representado por el ensayo del satélite sobre mesa sin rozamiento de un grado de libertad (eje i, vertical). En este caso tenemos:

$$M_i = 0 \quad ; \quad \omega_j = 0 \quad ; \quad \omega_k = 0 \quad ; \quad \frac{d\omega_j}{dt} = 0 \quad ; \quad \frac{d\omega_k}{dt} = 0$$

y las ecuaciones (6) se reducen a:

$$M_i = \frac{d\omega_i}{dt} I + \frac{d\omega_A}{dt} I_A = 0 \quad (7)$$

$$M_j = -\omega_i \omega_C I_C + \frac{d\omega_B}{dt} I_B \quad (8)$$

$$M_k = \omega_i \omega_B I_B + \frac{d\omega_C}{dt} I_C \quad (9)$$

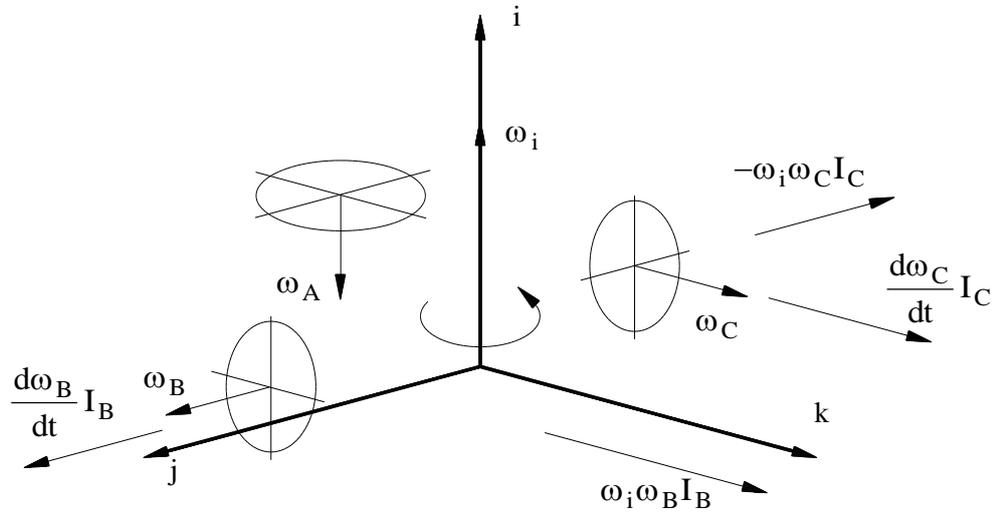


Figura 2

Los términos de la (7) contienen las aceleraciones angulares alrededor del eje de la mesa. Integrando y suponiendo condiciones iniciales

$$\omega_i = 0 \quad \omega_A = 0 \quad , \quad \omega_i I + \omega_A I_A = 0 \quad \therefore \quad \omega_i = -\omega_A \frac{I_A}{I} \quad (10)$$

Este resultado, de la mayor importancia, muestra que la velocidad  $\omega_i$  del satélite (velocidad angular de la rotación de adquisición) es proporcional a  $\omega_A$ , es decir, que  $\omega_i$  aparece y se anula tan pronto se pone en marcha o se detiene el motor de accionamiento del rotor.

Como tratándose de pequeños motores los tiempos de arranque y detención pueden hacerse muy reducidos, (incluso menores a un segundo) se comprende la aptitud del sistema para satisfacer la función encomendada.

### Cuplas Internas eje i

La velocidad angular absoluta del rotor A es por las (3)  $\omega_{absA} = \omega_i + \omega_A$ ; y la cupla aplicada a A:

$$M_A = \frac{d}{dt} (\omega_i + \omega_A) I_A = \frac{d\omega_i}{dt} I_A + \frac{d\omega_A}{dt} I_A$$

Reemplazando

$$\frac{d\omega_A}{dt} I_A$$

por su valor dado por (7)

$$M_A = \frac{d\omega_i}{dt} I_A - \frac{d\omega_i}{dt} I = -\frac{d\omega_i}{dt} (I - I_A)$$

La cupla aplicada al satélite es (principio de acción y reacción)

$$M_{\text{sat}} = -M_A$$

$$M_{\text{sat}} = \frac{d\omega_i}{dt} (I - I_A)$$

y la aceleración angular del satélite:

$$\frac{d\omega_i}{dt} = \frac{M_{\text{sat}}}{I - I_A}$$

## 9. CUPLAS APLICADAS SOBRE EJES j Y k.

$M_j$  y  $M_k$ , dadas por (8) y (9), están suministradas por el cojinete de la mesa rotante, y equilibran las cuplas de precesión y aceleración de los rotores B y C. En la figura se representan junto a los rotores sobre los cuales actúan.

Volviendo a las ecuaciones generales analizaremos ahora su resolución.

## 10. RESOLUCIÓN DE LAS ECUACIONES GENERALES DE MOVIMIENTO

A fin de resolver las ecuaciones (6) introduciremos la hipótesis que mejor representa la situación real, según la cual la velocidad relativa del rotor es una función conocida del tiempo. Adoptaremos para el arranque y detención funciones rampa, y durante la marcha  $\omega = \text{cte}$ .

Es de hacer notar que la parte más importante de la acción del rotor sobre la actitud del satélite se desarrolla durante la marcha a régimen del motor, condición que es representada con exactitud por la suposición  $\omega = \text{cte}$ .

Aplicando las consideraciones anteriores las aceleraciones angulares relativas

$$\frac{d\omega_A}{dt} = \gamma_A \quad ; \quad \frac{d\omega_B}{dt} = \gamma_B \quad ; \quad \frac{d\omega_C}{dt} = \gamma_C$$

se convierten en parámetros que pueden tomar tres valores conocidos:

$$\gamma_A = \gamma \text{ arranque A}$$

$$\gamma_A = 0$$

$$\gamma_A = \gamma \text{ detención A}$$

Lo mismo para  $\gamma_B$  y  $\gamma_C$

Las velocidades angulares  $\omega_A, \omega_B, \omega_C$  se calculan a partir de  $\gamma$  aplicando las conocidas expresiones de la cinemática. En base a las ecuaciones (6) y teniendo en cuenta lo anterior:

$$\begin{aligned}\frac{d\omega_i}{dt} &= \frac{1}{I} \left[ M_i - \omega_j \omega_k (K - J) - \omega_j \omega_c I_c + \omega_k \omega_B I_B - \gamma_A I_A \right] \\ \frac{d\omega_j}{dt} &= \frac{1}{J} \left[ M_j - \omega_k \omega_i (I - K) - \omega_k \omega_A I_A + \omega_i \omega_C I_C - \gamma_B I_B \right] \\ \frac{d\omega_k}{dt} &= \frac{1}{K} \left[ M_k - \omega_i \omega_j (J - I) - \omega_i \omega_B I_B + \omega_j \omega_A I_A - \gamma_C I_C \right]\end{aligned}\quad (11)$$

En las cuales las únicas incógnitas son  $\omega_i, \omega_j, \omega_k$  y sus derivadas. Las ecuaciones (11) se pueden resolver por integración numérica. El desarrollo de dicha resolución como parte de la simulación computacional de la dinámica completa del satélite se efectuará en otro trabajo.

## 11. CONCLUSIONES

Se demuestra en el presente trabajo (ver pág. 10) que el sistema de ruedas de reacción es un medio conveniente para el control de actitud de un satélite de teleobservación.

Las ecuaciones obtenidas en el curso del análisis constituyen instrumentos que, adecuadamente implementados en un programa de simulación, permiten la resolución del movimiento en cualquier caso particular de configuración física del satélite que se desee estudiar, sea respecto a la distribución de masas, a las cuplas externas aplicadas, o a las condiciones de velocidad angular y actitud iniciales.

El estudio proporciona asimismo información de utilidad en el diseño de ingeniería, posibilitando la determinación de las características básicas de los motores de reacción, en atención a los requerimientos especificados para el sistema.

## 12. RESULTADOS OBTENIDOS

El sistema de control de actitud mediante ruedas de reacción estudiado en este trabajo, representado por las expresiones matemáticas expuestas, fue introducido formando parte de un programa de simulación computacional de la dinámica completa de un microsatélite de observación terrestre, observándose en dicha simulación el funcionamiento plenamente satisfactorio del sistema.