

APLICACIONES DEL MÉTODO DE CÁLCULO PARA DIMENSIONAR DENTADOS DE ENGRANAJES DEL AUTOR TRIER Y PRESTACIONES OBTENIDAS

Mirassou Horacio Martín

Facultad Regional General Pacheco, Universidad Tecnológica Nacional
Departamento de Ingeniería Mecánica
Hipólito Irigoyen 288, General Pacheco (B1617FRP), Buenos Aires, Argentina
Correo-e: hmirassou@docentes.frgp.utn.edu.ar
hmmirassou@yahoo.com

RESUMEN

Este trabajo es la continuación de otro cuyo título es “Diseño y cálculo de cajas de engranajes especiales para barcos areneros y prestaciones obtenidas” presentado en el Sexto Congreso Argentino de Ingeniería Mecánica VI CAIM 2018 e incluido en las memorias del congreso.

Ese trabajo incluye una síntesis del método de cálculo de la norma AGMA 218.01 (1982) para la evaluación de la resistencia a la flexión y al picado (pitting) de dientes de engranajes rectos y helicoidales.

En este trabajo se expone simplificado el método de cálculo para dimensionar dentados de engranajes, de ejes paralelos y ruedas cilíndricas de acero, del autor Ing. Trier (1946), para potencias y velocidades de giro aproximadamente constantes. Se adaptaron sus ecuaciones para expresar las tensiones en [MPa], las originales utilizan [kgf/cm²].

El proceso de cálculo es notablemente más simple que el de las normas AGMA, DIN o ISO actuales, eso permite ahorrar tiempo.

Se presentan cálculos según el método de Trier de los dentados de cuatro ejemplos de cajas de engranajes que transmiten potencias entre 170 y 650 CV, con velocidades tangenciales entre 8,4 y 12 m/s en sus diámetros primitivos. Esas cajas fueron diseñadas, construidas e instaladas en Argentina en 1974, 1984, 1999 y 2013, actualmente están en condiciones de funcionar, en algunas se renovaron piñón y corona, en otras están los originales, se tiene registro de sus vidas útiles medidas en horas de funcionamiento.

De ese modo se pueden comparar las prestaciones obtenidas con las hipótesis de cálculo de dimensionamiento. En general los resultados superaron las expectativas.

En el trabajo anterior presentado al VI CAIM 2018 se exponen datos de las mismas cuatro cajas de engranajes, con cálculos según AGMA 218.01 de los dentados de dos de ellas, de modo que es posible comparar esos cálculos con los realizados según Trier.

Palabras Claves: Engranajes, Cálculo, Dimensionamiento, Trier.

1. INTRODUCCIÓN

Este trabajo es la continuación de [1], de modo que la primera página de la Introducción de [1] es común a ambos. La bibliografía [2-13] consultada para este trabajo es igual a la de [1], aunque en otro orden, con el agregado de [14] y [15]. En la Sección 2 se expone el método del autor Trier [6] para dimensionar dentados de engranajes. El método se presenta simplificado y adaptado para expresar las tensiones en [MPa] con la notación definida a continuación. En la Subsección 1.1 se repite la notación utilizada en [1], que está basada en la norma [8], incluso la notación de C_G . En la Subsección 1.2 se presenta una notación nueva para las variables adicionales utilizadas por Trier [6], algunas en [8] no se utilizan y por lo tanto tampoco en [1].

1.1. Notación de variables utilizadas basada en la norma AGMA 218.01

C = distancia entre ejes d = diámetro primitivo piñón D = diámetro primitivo corona
 m_n = módulo normal d_o = diámetro exterior piñón D_o = diámetro exterior corona
 N = cantidad de dientes n = velocidad de rotación W_t = fuerza tangencial transmitida
 $m_G = N_G / N_P$ = relación de reducción (o multiplicación) subíndices: P = piñón ; G = corona
 P = potencia F = ancho de cara de la rueda más angosta (medida en forma paralela a su eje)
 T = torque Φ_n = ángulo de presión normal del perfil del diente (los más utilizados: 20° y 15°)
 V_t = velocidad tangencial en diámetro primitivo [m/s] H_B = dureza Brinell de un material
 E = módulo de elasticidad de un material [MPa] Ψ_s = ángulo de hélice en diámetro primitivo
 $C_G = N_G / (N_G \pm N_P)$ = factor de relación de transmisión (+ : corona exterior, - : corona interior)

1.2. Notación adaptada de variables adicionales utilizadas en el método de Trier

S_a = tensión de flexión admisible a fatiga sin impacto [MPa] (es σ_{adm} definida en [6] pág. 152)
 S_{ut} = resistencia a la tracción de un material [MPa] $f = F / m_n$ = relación entre F y m_n
 k_b = tensión de flexión admisible real del dentado [MPa] f_v = factor de velocidad tangencial
 A = valor numérico función de la exactitud del dentado [m/s] $N_n = N / (\cos^3 \Psi_s) = N$ equivalente
 γ = factor de forma de diente recto γ_n = factor de forma de diente inclinado
 k_r = coeficiente de presión de rodadura [MPa] h = vida útil en horas de funcionamiento

1.3. Relación entre la resistencia a la tracción (S_{ut}) de un acero y su dureza Brinell

La Ecuación (1), válida para la mayoría de los aceros, se presenta en [14] pág. 132. S_{ut} se expresa en [N/mm²], esto es, [MPa]. La Ecuación (2), tomada de [3] pág. 72, es semejante.

$$S_{ut} = 3,45 \cdot H_B \quad (1)$$

$$S_{ut} = 3,45 \cdot H_B \pm 0,2 \cdot H_B \quad (2)$$

La Tabla 2-3 de [3] pág. 73 muestra conversiones aproximadas entre escalas de dureza Brinell, Vickers y Rockwell para aceros, y sus resistencias a la tracción aproximadas.

2. MÉTODO DE TRIER PARA DIMENSIONAR Y VERIFICAR DENTADOS DE ENGRANAJES

Se expone el método para engranajes cilíndricos de ejes paralelos con torque y velocidad de giro aprox. constantes, cuyos materiales son aceros bonificados, normalizados o recocidos en toda su masa, con durezas entre 95 y 320 Brinell, según el rango dado en la Tabla 5 de [6] pág. 153. Se trabajó algebraicamente para que las tensiones y presiones se expresen en [MPa], dado que en el texto original [6] las fuerzas se expresan en kilogramos fuerza [kgf]. La potencia P a transmitir se expresa en CV, de acuerdo a la relación: $1 \text{ CV} = 75 \text{ kgf.m/s} = 735,5 \text{ N.m/s}$.

2.1. Cálculo de los dientes basado en su resistencia a la flexión

Se deben definir S_{ut} , S_a y k_b para el piñón y la corona, según sus materiales. Para eso se deben definir las durezas Brinell H_B de cada material. Con las Ecuaciones (1) o (2) se define S_{ut} para cada material. Para cálculos a flexión de dentados con endurecimiento superficial, H_B es la dureza del núcleo bajo la capa dura. S_a se calcula multiplicando a S_{ut} por un factor función de la clase de flexión aplicada al diente, la cual puede ser repetida o alternante. La flexión es repetida en las ruedas simples que siempre giran en un mismo sentido, de modo que en cada diente el esfuerzo de tracción en su base siempre ocurre de un mismo lado. La flexión es alternante en ruedas intermedias, de modo que en cada diente el esfuerzo de tracción en su base ocurre en ambos lados en cada vuelta de la rueda. En esos casos el efecto de fatiga es más grave. En otros casos posibles ruedas simples pueden girar en ambos sentidos transmitiendo potencia en distintos instantes, entonces en cada diente el esfuerzo de tracción en su base ocurre en ambos lados, estos casos pueden considerarse junto con los de flexión alternante. Luego S_a se calcula con las Ecuaciones (3) y (4), que constituyen una síntesis de parte de lo expuesto en [6] en las págs. 152 a 155, y en la Tabla 5 pág. 153.

$$\text{Para flexión alternante corresponde: } S_a = (0,18 \text{ a } 0,20) \cdot S_{ut} \quad (3)$$

$$\text{Para flexión repetida corresponde: } S_a = (0,24 \text{ a } 0,26) \cdot S_{ut} \quad (4)$$

El cálculo de k_b se realiza multiplicando a S_a por un factor de velocidad f_v , el cual se calcula con la Ecuación (5), dada en [6] pág. 151.

$$f_v = A / (A + V_t) \quad (5)$$

A es un valor numérico función de la exactitud del dentado y de la calidad del montaje, y los posibles efectos dinámicos, como las vibraciones y sacudidas, etc. En [6] pág. 152 se expresa: valor de A entre 3 y 6 m/s para engranajes utilizados en la industria, con engranajes de la mejor calidad se puede adoptar: $A = 10 \text{ m/s}$. Luego k_b se calcula con la Ecuación (6), de [6] pág. 151.

$$k_b = f_v \cdot S_a \quad (6)$$

En el dimensionamiento de un nuevo sistema de engranajes se debe estimar un valor de V_t para ingresarlo a la Ecuación (5). Para eso se puede trabajar por iteración con varias aproximaciones hasta definir las dimensiones definitivas de las ruedas. En los casos comunes se considera un sistema formado por un piñón y una corona con cantidad de dientes N_P y N_G .

De la Tabla 1 se obtiene el factor de forma γ para cada uno en función de N_P y N_G , de modo directo si es diente recto. Si el diente es inclinado se debe calcular N_n (según Subsección 1.2) para piñón y corona, con esos valores se ingresa a la Tabla 1 y se obtiene γ_n para cada uno. La Tabla 1 está tomada de la Tabla 4 de [6] pág.150. Notación: cp indica dentado con penetración.

Tabla 1. Factor de forma del diente γ

| N | $\phi_n = 20^\circ$ | | N | $\phi_n = 15^\circ$ | | N | $\phi_n = 20^\circ$ | | $\phi_n = 15^\circ$ | |
|-----|---------------------|----------|-----|---------------------|----------|--------------|---------------------|----------|---------------------|--|
| | γ | γ | | γ | γ | | γ | γ | γ | |
| 10 | 14,58 cp | | 19 | 10,49 | 12,58 cp | 43 | 8,54 | 10,23 | | |
| 11 | 13,75 cp | | 20 | 10,31 | 12,35 cp | 50 | 8,36 | 9,96 | | |
| 12 | 13,07 cp | 15,50 cp | 21 | 10,13 | 12,15 cp | 60 | 8,17 | 9,72 | | |
| 13 | 12,50 cp | 14,83 cp | 23 | 9,85 | 11,82 cp | 75 | 7,98 | 9,45 | | |
| 14 | 12,01 | 14,27 cp | 25 | 9,62 | 11,55 | 100 | 7,82 | 9,18 | | |
| 15 | 11,6 | 13,80 cp | 27 | 9,42 | 11,32 | 150 | 7,65 | 8,89 | | |
| 16 | 11,26 | 13,46 cp | 30 | 9,17 | 11,02 | 300 | 7,5 | 8,59 | | |
| 17 | 10,96 | 13,10 cp | 34 | 8,92 | 10,7 | infinito | 7,37 | 8,3 | | |
| 18 | 10,72 | 12,83 cp | 38 | 8,72 | 10,46 | (cremallera) | | | | |

Se debe definir la relación geométrica f (según Subsección 1.2), cuando F y m_n se conocen, o según un criterio basado en la experiencia cuando se dimensiona un dentado nuevo. En general el valor de f está limitado por la exactitud que pueda lograrse en el perfil de los dientes y en los apoyos, y por la rigidez y paralelismo de los ejes. Para dientes rectos en los mejores casos f puede valer hasta 16. Con dientes inclinados existen casos de f entre 30 y 36.

2.1.1 Ecuaciones para calcular el módulo normal necesario para resistir la flexión

La Ecuación (7), adaptación de una ecuación dada en [6] pág. 156, permite determinar el módulo normal m_n (en mm) de un dentado recto para resistir el efecto de la flexión:

$$m_n^3 = \frac{4,5 \cdot 10^6 \cdot P \cdot \gamma}{f \cdot N \cdot n \cdot k_b} \quad (7)$$

La Ecuación (8), adaptación de una ecuación dada en [6] pág. 167, permite determinar el módulo normal m_n (en mm) de un dentado inclinado para resistir el efecto de la flexión:

$$m_n^3 = \frac{3 \cdot 10^6 \cdot P \cdot \gamma_n \cdot \cos \psi_s}{f \cdot N \cdot n \cdot k_b} \quad (8)$$

donde: P = Potencia transmitida en CV, n = velocidad de rotación en r.p.m., k_b en MPa.

Se debe realizar un cálculo de m_n para el piñón y otro para la corona, cada uno con sus datos: γ (o γ_n), N , n , k_b , luego se debe considerar el mayor m_n obtenido. Esto cuando la corona tiene dentado exterior. Trier [6] pág. 150 explica que para las coronas con dentado interior no es necesario recalcular su resistencia a la flexión, dado que por su forma sus dientes son más resistentes que los de una cremallera, solamente se debe calcular la resistencia a la flexión de los dientes del piñón. Esto se cumple cuando la resistencia S_{ut} del material de la corona es mayor al 72% de la resistencia S_{ut} del material del piñón, según [6] pág. 145.

2.2. Cálculo de los dientes basado en su resistencia a la presión de rodadura y duración

Las Ecuaciones (9) y (10), adaptaciones de ecuaciones dadas en [6] págs. 158 y 169, permiten dimensionar el módulo m_n (en mm), cuando los materiales del piñón y la corona son aceros.

$$k_r = \frac{1670.H_B^2}{E.(n.h)^{0,333}} \quad (9)$$

$$m_n^3 = \frac{28,1.10^6.P.(\cos\psi_s)^4}{N_P^2.f.n_P.k_r.\text{sen}(2\phi_n).C_G} \quad (10)$$

donde: P = Potencia transmitida en CV, n = velocidad de rotación en r.p.m., E y k_r en MPa.

Para dimensionar un sistema de engranajes se debe definir h : duración deseada en cantidad de horas de funcionamiento, o vida útil. En las Ecuaciones (9) y (10) se ingresan los datos del piñón: n_P , E_P , H_{BP} , N_P . El valor obtenido de k_r es igual en los dientes del piñón y de la corona. Por otro lado, cuando dimensiones y materiales de un sistema de engranajes están definidos, se pueden utilizar las Ecuaciones (11) y (12), deducidas (operando algebraicamente) de las Ecuaciones (9) y (10), para estimar la vida útil h en cantidad de horas.

$$k_r = \frac{28,1.10^6.P.(\cos\psi_s)^4}{N_P^2.f.n_P.m_n^3.\text{sen}(2\phi_n).C_G} \quad (11)$$

$$h = \frac{1}{n} \left(\frac{1670.H_B^2}{E.k_r} \right)^3 \quad (12)$$

En la Ecuación (11) se ingresan los datos N_P , n_P del piñón para calcular k_r , cuyo valor es igual en dientes de piñón y corona. En la ecuación (12) se ingresan los datos n , E , H_B del piñón, para calcular su vida útil h , y los datos n , E , H_B de la corona, para calcular su vida útil h . Cuando se dimensiona también es conveniente realizar esta verificación luego de utilizar la Ecuación (10). En dentados con endurecimiento superficial, H_B es la dureza de la capa dura. Las Ecuaciones (3) a (12) son aplicables cuando la lubricación de los engranajes es adecuada.

3. EJEMPLOS DE DIMENSIONAMIENTO DE DENTADOS Y PRESTACIONES OBTENIDAS

Se presentan 4 ejemplos de cajas de engranajes diseñadas y construidas en Argentina en años pasados. En [1] se presentan estos mismos 4 ejemplos, en otro orden. De ese modo se puede comparar el método de Trier con el de AGMA 218.01 y evaluar las prestaciones obtenidas con estas cajas reales. Las 3 últimas cajas mostradas fueron diseñadas con el método de Trier. El caso 1 es de diseño más reciente realizado por otros diseñadores, aquí se lo verifica con el método de Trier. En todos los casos es: $\phi_n = 20^\circ$, $E = 206.000$ MPa (en piñones y coronas).

3.1. Ejemplo 1: Caja multiplicadora construida e instalada en el año 2013

Se muestra en las Figuras 1a y 2a. Son dos cajas de engranajes gemelas. Datos principales:

$N_P = 34$ | $N_G = 53$ | $m_G = N_G / N_P = 1,56$ | $P = 650$ CV | $n_G = 365$ rpm | $n_P = 570$ rpm | $m_n = 8$ | $F = 160$ | $\Psi_s = 14^\circ 50'$ | $d = 281,38$ | $D = 438,61$ | $T_P = 8010$ Nm | $T_G = 12500$ Nm | $W_t = 57000$ N | $V_t = 8,4$ m/s | Material del piñón: acero SAE 3115 cementado dureza superficial mínima 57 HRC | Material de la corona: acero SAE 8620 cementado dureza superficial mínima 56 HRC | Dentado tallado por generación y rectificado luego del tratamiento térmico | Calidad de transmisión AGMA aprox. $Q_v = 8$ | Lubricación y refrigeración: el aceite de la caja pasa por un radiador, ubicado a 2 m de la caja, enfriado con un ventilador accionado por un motor eléctrico de 2 CV que también acciona la bomba de engranajes, con el aceite que retorna se realiza lubricación forzada sobre la zona de engrane de los dientes. Volumen total de aceite: 30 litros.

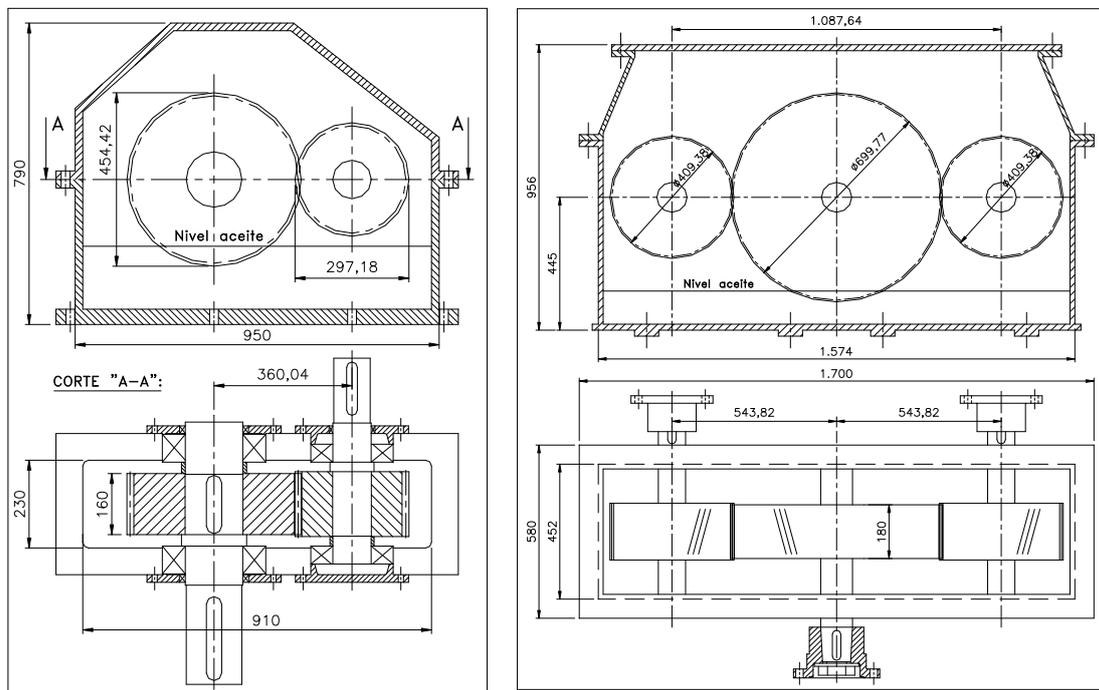


Figura 1: (a) caja de engranajes del Ejemplo 1; (b) caja de engranajes del Ejemplo 2



Figura 2: (a) caja de engranajes del Ejemplo 1; (b) caja de engranajes del Ejemplo 2

Aplicación del método de Trier para dimensionar el módulo normal m_n , se inicia definiendo:

$N_P = 34$ | $N_G = 53$ | $H_{BP} = 600$ | $H_{BG} = 580$ | $f = 20$ | $\Psi_s = 14^\circ 50'$ | $n_P = 570$ rpm | $P = 650$ CV.

Según [15] pág. 376, para aceros aleados cementados como los utilizados, la resistencia del núcleo central se puede estimar de modo conservador en: $Sut_P = 1000 \text{ MPa}$ | $Sut_G = 1000 \text{ MPa}$

Las ruedas siempre giran en un mismo sentido, entonces en los dientes la flexión es repetida.

Con Sut de piñón y corona, de la Ecuación (4) resulta: $Sa_P = 260 \text{ MPa}$ | $Sa_G = 260 \text{ MPa}$

Luego de realizar varias aproximaciones, se definió la velocidad tangencial: $Vt = 8,4 \text{ m/s}$

Para la Ecuación (5), considerando el dentado rectificado, se estimó: $A = 5 \text{ m/s} \Rightarrow fv = 0,373$

Con Sa de piñón y corona, de la Ecuación (6) resulta: $kb_P = 97 \text{ MPa}$ | $kb_G = 97 \text{ MPa}$

De la definición dada en Subsección 1.2: $N_n = N / (\cos^3 \psi_s)$, resulta: $N_{n_P} = 37$ | $N_{n_G} = 58$

De la Tabla 1, en función de N_{n_P} y N_{n_G} , resulta: $\gamma_{n_P} = 8,77$ | $\gamma_{n_G} = 8,21$

Introduciendo los datos del piñón en la Ecuación (8) resulta: $m_{n_P} = 7,61 \text{ mm}$

Introduciendo los datos de la corona en la Ecuación (8) resulta: $m_{n_G} = 7,45 \text{ mm}$

Se definió: $m_n = 8 \text{ mm}$, de eso resulta: $d = 281,38$ | $D = 438,61$ | $F = 160$ | $Vt = 8,4 \text{ m/s}$

$C_G = N_G / (N_G + N_P) = 0,6092$ | Introduciendo datos en la Ecuación (11) resulta: $kr = 6,03 \text{ MPa}$

($H_{BP} = 600$; $H_{BG} = 589$) de la Ecuación (12) resulta: $h_P = 198.800 \text{ horas}$ | $h_G = 253.300 \text{ horas}$

Estas cajas han trabajado desde diciembre 2013 hasta marzo 2020, 20.000 horas aprox., 9 horas diarias casi todos los días. Las bombas de refoulado que accionan demandan 380 CV. Las cajas se diseñaron para transmitir 650 CV previendo un posible reemplazo de las bombas.

3.2. Ejemplo 2: Caja multiplicadora construida e instalada en el año 1974

Se muestra en las Figuras 1b y 2b. Esta caja es única, es el Ejemplo 4 en [1]. Trabajó varios años en un barco arenero, se estima durante aprox. 30.000 horas, luego permaneció guardada. Actualmente está instalada en otro barco arenero, el cual está siendo reformado. Con corona y piñones originales, se cambiaron los rodamientos. El motor diesel de 330 CV a 320 rpm acciona el eje de la corona, los ejes de los piñones accionan bombas de refoulado que demandan aprox. 170 CV y 150 CV cada una, con sus ejes girando a 553 rpm, datos: $N_P = 70$ | $N_G = 121$ | $m_G = N_G / N_P = 1,73$ | $m_n = 5,5$ | $\psi_s = 15^\circ$ | $VDo = 11,73 \text{ m/s}$ | $C = 543,8 \text{ mm}$ (entre ejes de corona y piñón) | $2.C = 1087,6 \text{ mm}$. Se diseñó con gran distancia entre ejes de piñones para permitir colocar las bombas juntas. Dentado tallado por generación sin rectificado posterior. Material de los piñones: acero SAE 1045 (dureza aprox. 180 HB). Corona construida con una llanta rolada de acero SAE 1045 (dureza aprox. 180 HB) unida con soldadura a dos discos, y estos unidos con soldadura a un núcleo montado a su eje. Volumen de aceite: 70 l.

Aplicación del método de Trier para dimensionar el módulo normal m_n , se inicia definiendo: $N_P = 70$ | $N_G = 121$ | $H_{BP} = 180$ | $H_{BG} = 180$ | $f = 32$ | $\phi_n = 20^\circ$ | $\psi_s = 15^\circ$ | $n_P = 553 \text{ rpm}$ | $P = 170 \text{ CV}$.

Con H_B de piñón y corona, de la Ecuación (1) resulta: $Sut_P = 621 \text{ MPa}$ | $Sut_G = 621 \text{ MPa}$

Las ruedas siempre giran en un mismo sentido, entonces la flexión es repetida.

Con Sut de piñón y corona, de la Ecuación (4) resulta: $Sa_P = 155,2 \text{ MPa}$ | $Sa_G = 155,2 \text{ MPa}$

Luego de realizar varias aproximaciones, se definió la velocidad tangencial: $Vt = 11,54 \text{ m/s}$

Para la Ecuación (5), con criterio conservador, se estimó: $A = 4 \text{ m/s} \Rightarrow fv = 0,2574$

Con S_a de piñón y corona, de la Ecuación (6) resulta: $kb_P = 40 \text{ MPa}$ | $kb_G = 40 \text{ MPa}$

De la definición dada en Subsección 1.2: $N_n = N / (\cos^3 \psi_s)$, resulta: $N_{n_P} = 77$ | $N_{n_G} = 134$

De la Tabla 1, en función de N_{n_P} y N_{n_G} , resulta: $\gamma_{n_P} = 7,97$ | $\gamma_{n_G} = 7,70$

Introduciendo los datos del piñón en la Ecuación (8) resulta: $m_{n_P} = 4,30 \text{ mm}$

Introduciendo los datos de la corona en la Ecuación (8) resulta: $m_{n_G} = 4,25 \text{ mm}$

Se definió: $m_n = 5,5 \text{ mm}$, de eso resulta: $d = 398,58$ | $D = 688,98$ | $F = 176$ | $V_t = 11,54 \text{ m/s}$

Se definió: $F = 180 \text{ mm}$, de eso resulta: $f = F/m_n = 32,72$ | $C_G = N_G / (N_G + N_P) = 0,6335079$

Introduciendo datos en la Ecuación (11) resulta: $kr = 0,692 \text{ MPa}$

Introduciendo datos en la Ecuación (12) resulta: $h_P = 99.000 \text{ horas}$ | $h_G = 85.600 \text{ horas}$

En cada giro, los dientes de la corona trabajan dos veces, entonces h_G se reduce a la mitad del valor calculado con la Ecuación (12) para un caso simple de un piñón y una corona.

3.3. Ejemplo 3: Caja reductora construida e instalada en el año 1984

Este caso es el Ejemplo 3 en [1]. Su configuración es semejante a la mostrada en la Figura 3. Esta caja es única y está instalada en la planta terrestre de una empresa arenera. El piñón y la corona originales funcionaron durante aprox. 27 años, fueron reemplazados por un piñón y corona fabricados en 2011; 27 años tienen 9861 días y aprox. 79.000 hs con 8 hs/día de trabajo. Los dientes de piñón y corona estaban en buen estado, el reemplazo fue motivado por otra causa. Datos principales: $N_P = 26$ | $N_G = 77$ | $m_G = N_G / N_P = 2,96$ | $P = 190 \text{ CV}$ | $n_P = 1700 \text{ rpm}$ | $n_G = 574 \text{ rpm}$ | $m_n = 5$ | $F = 145$ | $\psi_s = 15^\circ$ | $d = 134,58$ | $D = 398,58$ | $T_P = 785 \text{ Nm}$ | $T_G = 2325 \text{ Nm}$ | $W_t = 11665 \text{ N}$ | $V_t = 11,98 \text{ m/s}$ | $V_{do} = 12,86 \text{ m/s}$ | $V_{D0} = 12,28 \text{ m/s}$ | Material del piñón: acero SAE 4140 bonificado dureza superficial aprox. 270 Brinell | Material de la corona: acero SAE 1045 normalizado dureza superficial 180 a 200 Brinell | Dentado tallado por generación sin rectificado posterior | Calidad de transmisión AGMA aprox. $Q_v = 8$ | Lubricación y refrigeración: el aceite de la caja es salpicado por los dientes de la corona. Vol. aceite: 35 l.

Aplicación del método de Trier para dimensionar el módulo normal m_n , se inicia definiendo:

$N_P = 26$ | $N_G = 77$ | $H_{BP} = 270$ | $H_{BG} = 180$ | $f = 29$ | $\phi_n = 20^\circ$ | $\psi_s = 15^\circ$ | $n_P = 1700 \text{ rpm}$ | $P = 190 \text{ CV}$.

Con H_B de piñón y corona, de la Ecuación (1) resulta: $S_{ut_P} = 931,5 \text{ MPa}$ | $S_{ut_G} = 621 \text{ MPa}$

Las ruedas siempre giran en un mismo sentido, entonces en los dientes la flexión es repetida.

Con S_{ut} de piñón y corona, de la Ecuación (4) resulta: $S_{a_P} = 232,8 \text{ MPa}$ | $S_{a_G} = 155,2 \text{ MPa}$

Luego de realizar varias aproximaciones, se definió la velocidad tangencial: $V_t = 11,98 \text{ m/s}$

Para la Ecuación (5), con criterio conservador, se estimó: $A = 4 \text{ m/s} \Rightarrow f_v = 0,2503$

Con S_a de piñón y corona, de la Ecuación (6) resulta: $kb_P = 58,2 \text{ MPa}$ | $kb_G = 38,8 \text{ MPa}$

De la definición dada en Subsección 1.2: $N_n = N / (\cos^3 \psi_s)$, resulta: $N_{n_P} = 29$ | $N_{n_G} = 85$

De la Tabla 1, en función de N_{n_P} y N_{n_G} , resulta: $\gamma_{n_P} = 9,25$ | $\gamma_{n_G} = 7,92$

Introduciendo los datos del piñón en la Ecuación (8) resulta: $m_{n_P} = 4,09 \text{ mm}$

Introduciendo los datos de la corona en la Ecuación (8) resulta: $m_{n_G} = 4,45 \text{ mm}$

Se definió: $m_n = 5 \text{ mm}$, de eso resulta: $d = 134,58$ | $D = 398,58$ | $F = 145$ | $V_t = 11,98 \text{ m/s}$

$C_G = N_G / (N_G + N_P) = 0,7475728$ | Introduciendo datos en la Ecuación (11) es: $k_r = 2,321$ MPa

Introduciendo datos en la Ecuación (12) resulta: $h_P = 9.728$ horas | $h_G = 2.530$ horas

Si se considera: $H_{BG} = 200$, resulta: $h_G = 4.760$ horas | Las vidas útiles de las ruedas superaron los valores calculados, la del piñón más de 8 veces, y la de la corona más de 16 veces (con $H_{BG} = 200$). Es probable que esta prestación pudo lograrse gracias a una buena lubricación. En este caso el cálculo de la vida útil según Trier resultó ser muy conservador. Por otro lado, se pueden observar estas características: a) el montaje cónico de la corona con el eje elimina todo huelgo posible, en comparación con un montaje cilíndrico, b) luego del tallado de los dientes no se realizaron tratamientos térmicos que pudieran causar deformaciones.

3.4. Ejemplo 4: Caja reductora construida e instalada en el año 1999

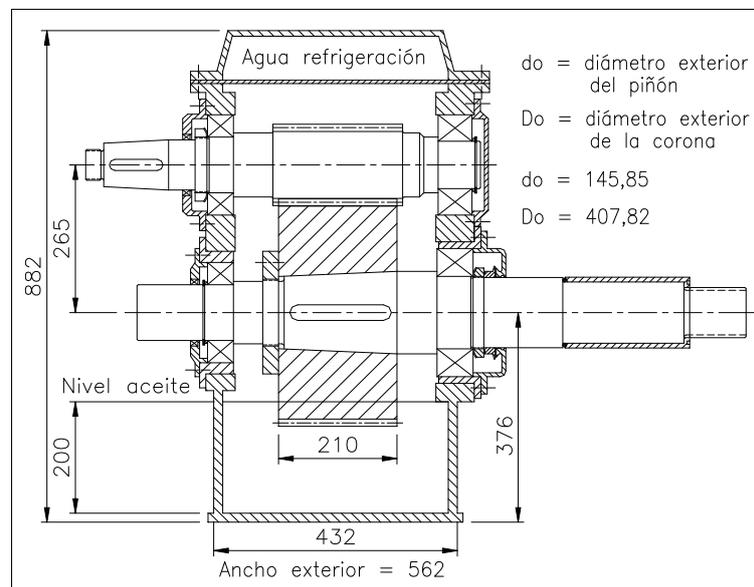


Figura 3: vista en corte longitudinal central de la caja de engranajes del Ejemplo 4

Este caso es el Ejemplo 2 en [1]. La caja es simétrica respecto de un plano longitudinal central. El eje-piñón está ubicado arriba de la corona. Se fabricaron e instalaron 2 cajas gemelas, para impulsar 2 bombas de refoulado gemelas, en un barco arenero. Comenzaron a trabajar en el año 2000, todos los días aprox. 8 hs. Hasta el año 2019 transcurrieron aprox. 19 años, esto es 6.939 días, aprox. 53.000 horas de trabajo (los barcos deben detenerse a veces para tareas de mantenimiento). En una de las cajas están el piñón y la corona originales, en la otra fueron reemplazados luego de aprox. 35.000 horas de trabajo. Datos principales: $N_P = 22$ | $N_G = 65$ | $m_G = N_G / N_P = 2,95$ | $P = 340$ CV | $n_P = 1660$ rpm | $n_G = 562$ rpm | $m_n = 6$ | $F = 210$ | $\psi_s = 10^\circ$ | $d = 134,04$ | $D = 396,02$ | $T_P = 1440$ Nm | $T_G = 4250$ Nm | $W_t = 21464$ N | $V_t = 11,65$ m/s | $V_{d_o} = 12,68$ m/s | $V_{D_o} = 12$ m/s | Material del piñón: acero SAE 4140 bonificado dureza superficial aprox. 270 Brinell | Material de la corona: acero SAE 1045 normalizado dureza superficial 180 a 200 Brinell | Dentado tallado por generación sin rectificado posterior | Calidad de transmisión AGMA aprox. $Q_v = 8$ | Lubricación y refrigeración: el aceite de la caja es salpicado por los

dientes de la corona, no se utiliza lubricación forzada, dada la alta velocidad V_{Do} (extremo de diente corona) el aceite lubrica los dientes y transfiere calor a la placa superior refrigerada por agua, que circula por un laberinto de placas. Volumen total de aceite: 42 litros.

Aplicación del método de Trier para dimensionar el módulo normal m_n , se inicia definiendo:

$$N_P = 22 \mid N_G = 65 \mid H_{BP} = 270 \mid H_{BG} = 180 \mid f = 35 \mid \Phi_n = 20^\circ \mid \Psi_s = 10^\circ \mid n_P = 1660 \text{ rpm} \mid P = 340 \text{ CV}$$

Con H_B de piñón y corona, de la Ecuación (1) resulta: $Sut_P = 931,5 \text{ MPa} \mid Sut_G = 621 \text{ MPa}$

Las ruedas siempre giran en un mismo sentido, entonces en los dientes la flexión es repetida.

Con Sut de piñón y corona, de la Ecuación (4) resulta: $Sa_P = 232,8 \text{ MPa} \mid Sa_G = 155,2 \text{ MPa}$

Luego de realizar varias aproximaciones, se definió la velocidad tangencial: $V_t = 11,65 \text{ m/s}$

Para la Ecuación (5), con criterio conservador, se estimó: $A = 4 \text{ m/s} \Rightarrow f_v = 0,2556$

Con Sa de piñón y corona, de la Ecuación (6) resulta: $kb_P = 59,5 \text{ MPa} \mid kb_G = 39,6 \text{ MPa}$

De la definición dada en Subsección 1.2: $N_n = N / (\cos^3 \Psi_s)$, resulta: $N_{n_P} = 23 \mid N_{n_G} = 68$

De la Tabla 1, en función de N_{n_P} y N_{n_G} , resulta: $\gamma_{n_P} = 9,85 \mid \gamma_{n_G} = 8,07$

Introduciendo los datos del piñón en la Ecuación (8) resulta: $m_{n_P} = 5,07 \text{ mm}$

Introduciendo los datos de la corona en la Ecuación (8) resulta: $m_{n_G} = 5,43 \text{ mm}$

Se definió: $m_n = 6 \text{ mm}$, de eso resulta: $d = 134,04 \mid D = 396,02 \mid F = 210 \mid V_t = 11,65 \text{ m/s}$

$C_G = N_G / (N_G + N_P) = 0,7471264$ | Cálculo de la vida útil h estimada en cantidad de horas:

Introduciendo datos en la Ecuación (11) resulta: $k_r = 3,0795 \text{ MPa}$

Introduciendo datos en la Ecuación (12) resulta: $h_P = 4.265 \text{ horas} \mid h_G = 1.106 \text{ horas}$

Si se considera: $H_{BG} = 200$, resulta: $h_G = 2.081 \text{ horas}$

Las vidas útiles de las ruedas superaron los valores calculados, la del piñón más de 12 veces, y la de la corona más de 25 veces (con $H_{BG} = 200$), en una caja. En la otra caja, más de 8 y 16 veces, respectivamente. Son aplicables los mismos comentarios realizados en el Ejemplo 3.

4. ANEXO. DEDUCCIÓN DE LAS ECUACIONES (7) A (12)

4.1 Equivalencia entre la notación original de Trier y la adoptada en este trabajo

| <u>Notación y unidades originales de Trier [6]:</u> | <u>Notación y unidades adoptadas en este trabajo:</u> |
|---|---|
| Subíndices: 1 = piñón ; 2 = corona | Subíndices: P = piñón ; G = corona |
| N = potencia transmitida [CV] | P = potencia transmitida [CV] |
| m = módulo normal [mm] | m_n = módulo normal [mm] |
| $\Psi = 10 b / m$ [adimensional] | $f = F / m_n$ [adimensional] $\Rightarrow F = f \cdot m_n$ (13) |
| b = ancho de cara rueda más angosta [cm] | F = ancho de cara rueda más angosta [mm] |
| z = cantidad de dientes | N = cantidad de dientes |
| kb = tensión de flexión admisible real [kgf/cm ²] | kb = tensión de flexión admisible real [N/mm ²] |
| β = ángulo de hélice en diámetro primitivo [°] | Ψ_s = ángulo de hélice en diámetro primitivo [°] |
| k = coeficiente de presión de rodadura [kgf/cm ²] | k_r = coeficiente de presión de rodadura [MPa] |
| H = dureza Brinell de un material | H_B = dureza Brinell de un material |

E = módulo de elasticidad [kgf/cm²]

d_1 = diámetro primitivo piñón [cm]

M_{d1} = torque en eje piñón [kgfcm]

$M_{d1} = 71620 N / n_1$

α_n = ángulo de presión normal [°]

$i = z_2 / z_1$ = relación de transmisión

$(i \pm 1) / i = (z_2 \pm z_1) / z_2$

Nota: la ecuación (14) es válida para dentado sin corrección.

E = módulo de elasticidad [N/mm²]

d = diámetro primitivo piñón [mm]

$d = m_n \cdot N_P / \cos \psi_s$ (14)

T_P = torque en eje piñón [Nm]

Φ_n = ángulo de presión normal [°]

$m_G = N_G / N_P$ = relación de transmisión

$(N_G \pm N_P) / N_G = 1 / C_G$ (16)

4.2. Deducción de las Ecuaciones (7) a (12)

La Ecuación (7) se deduce de la última ecuación de la Sección 11 de [6] pág. 156 transcripta abajo (notación original). Con esa ecuación se calcula m en mm con los datos en las unidades previstas en [6]. Se elevaron al cubo ambos miembros para obtener la Ecuación (17).

$$m = 35,7 \cdot \left(\frac{1000 \cdot N \cdot \gamma}{\psi \cdot z \cdot n \cdot k_b} \right)^{0,333} = 357 \cdot \left(\frac{N \cdot \gamma}{\psi \cdot z \cdot n \cdot k_b} \right)^{0,333} \Rightarrow m^3 = 357^3 \cdot \left(\frac{N \cdot \gamma}{\psi \cdot z \cdot n \cdot k_b} \right) \quad (17)$$

Cambio en Ecuación (17) de la notación original de [6] a la notación adoptada en este trabajo:

$$m_n^3 = \frac{357^3 \cdot P \cdot \gamma}{f \cdot N \cdot n \cdot k_b \cdot 10,197162} = \frac{4,462 \cdot 10^6 \cdot P \cdot \gamma}{f \cdot N \cdot n \cdot k_b} \cong \frac{4,5 \cdot 10^6 \cdot P \cdot \gamma}{f \cdot N \cdot n \cdot k_b} \quad (18)$$

Los miembros primero y último de la Ecuación (18) forman la Ecuación (7). En el segundo miembro de la Ecuación (18) el número divisor 10,197162 se agregó para compensar el cambio de unidades de k_b dado que se cumple la relación (según norma ISO 80000 Anexo C):

$$[\text{kgf/cm}^2] = 9,80665 [\text{N}] / (100 [\text{mm}^2]) \Rightarrow [\text{N/mm}^2] = 10,197162 [\text{kgf/cm}^2] \quad (19)$$

La Ecuación (8) se deduce de la última ecuación de la pág. 167 Sección 17 de [6] transcripta abajo (notación original). Se elevaron al cubo ambos miembros para obtener la Ecuación (20).

$$m_n = 35,7 \cdot \left(\frac{1000 \cdot N \cdot \gamma_n \cdot \cos \beta}{1,5 \cdot \psi \cdot z \cdot n \cdot k_b} \right)^{0,333} \Rightarrow m_n^3 = 357^3 \cdot \left(\frac{N \cdot \gamma_n \cdot \cos \beta}{1,5 \cdot \psi \cdot z \cdot n \cdot k_b} \right) \quad (20)$$

Cambio en Ecuación (20) de la notación original de [6] a la notación adoptada en este trabajo:

$$m_n^3 = \frac{357^3 \cdot P \cdot \gamma_n \cdot \cos \psi_s}{1,5 \cdot f \cdot N \cdot n \cdot k_b \cdot 10,197162} = \frac{2,975 \cdot 10^6 \cdot P \cdot \gamma_n \cdot \cos \psi_s}{f \cdot N \cdot n \cdot k_b} \cong \frac{3 \cdot 10^6 \cdot P \cdot \gamma_n \cdot \cos \psi_s}{f \cdot N \cdot n \cdot k_b} \quad (21)$$

Los miembros primero y último de la Ecuación (21) forman la Ecuación (8). En el segundo miembro de la Ecuación (21) el número divisor 10,197162 se agregó para compensar el cambio de unidades de k_b del mismo modo que se hizo con la Ecuación (18).

La Ecuación (9) se deduce de dos ecuaciones de [6]: la última de la pág. 158 y la ecuación de W dada en esa misma página, transcriptas abajo (notación original).

$$W = n.h.60 / 1000000 \Rightarrow W^{0,333} = (n.h)^{0,333} / 25,54364 \quad (22)$$

$$k = \frac{6800.H^2}{E.W^{0,333}} = \frac{6800.H^2.25,54364}{E.(n.h)^{0,333}} = \frac{173696,8.H^2}{E.(n.h)^{0,333}} \quad (23)$$

Cambio en Ecuación (23) de la notación original de [6] a la notación adoptada en este trabajo:

$$k_r = \frac{173696,8.H_B^2}{10,197162^2.E.(n.h)^{0,333}} = \frac{1670,45.H_B^2}{E.(n.h)^{0,333}} \cong \frac{1670.H_B^2}{E.(n.h)^{0,333}} \quad (24)$$

Los miembros primero y último de la Ecuación (24) forman la Ecuación (9). En el segundo miembro de la Ecuación (24) el número divisor $10,197162^2$ se agregó para compensar el cambio de unidades de E y de k_r del mismo modo que se hizo con las Ecuaciones (18) y (21).

La Ecuación (10) se deduce de la segunda ecuación de la pág. 169 de [6], transcrita abajo (notación original). Esta ecuación relaciona variables de engranajes de diente inclinado.

$$b.d_1^2 = \frac{4.M_{d1} \cdot \cos^2 \beta \left(\frac{i+1}{i} \right)}{k \cdot \text{sen}(2\alpha_n)} = \frac{4.71620.N \cdot \cos^2 \beta \left(\frac{i+1}{i} \right)}{n_1.k \cdot \text{sen}(2\alpha_n)} \quad (25)$$

La quinta ecuación de la pág. 159 de [6] es semejante para diente recto, se transcribe abajo.

$$b.d_1^2 = \frac{4.M_{d1} \left(\frac{i \pm 1}{i} \right)}{k \cdot \text{sen}(2\alpha_n)} = \frac{4.71620.N \left(\frac{i \pm 1}{i} \right)}{n_1.k \cdot \text{sen}(2\alpha_n)} = \frac{286480.N \left(\frac{i \pm 1}{i} \right)}{n_1.k \cdot \text{sen}(2\alpha_n)} \quad (26)$$

En las Ecuaciones (25) y (26) se reemplazó M_{d1} por el segundo miembro de la Ecuación (15). La expresión entre paréntesis de las Ecuaciones (25) y (26) es igual a $1/C_G$ según la Ecuación (16). Cambio en Ecuación (25) de notación original de [6] por notación adoptada en este trabajo considerando Ecuaciones (13), (14) y (16):

$$0,001.f.m_n.(N_p.m_n)^2 = \frac{286480.P \cdot \cos^4 \psi_s \left(\frac{1}{C_G} \right)}{n_p.10,197162.k_r \cdot \text{sen}(2\phi_n)} \quad (27)$$

En el primer miembro de la Ecuación (27) el coeficiente 0,001 compensa el cambio de unidad de m en cm a mn en mm, y en el segundo miembro el número divisor 10,197162 compensa el cambio de unidad de k en [kgf/cm²] a k_r en [N/mm²]. Despejando mn^3 se obtiene:

$$m_n^3 = \frac{28094091.P \cdot \cos^4 \psi_s \left(\frac{1}{C_G} \right)}{N_p^2 \cdot f \cdot n_p \cdot k_r \cdot \text{sen}(2\phi_n)} \cong \frac{28,1 \cdot 10^6.P \cdot \cos^4 \psi_s \left(\frac{1}{C_G} \right)}{N_p^2 \cdot f \cdot n_p \cdot k_r \cdot \text{sen}(2\phi_n)} \quad (28)$$

Los miembros primero y último de la Ecuación (28) forman la Ecuación (10).

La Ecuación (11) se deduce de la Ecuación (10), que es igual a la Ecuación (28), pasando multiplicando al primer miembro a k_r y pasando dividiendo al segundo miembro a mn^3 .

La Ecuación (12) se deduce de la Ecuación (9), que es igual a la Ecuación (24), pasando dividiendo al segundo miembro a k_r , pasando multiplicando al primer miembro a $h^{0,333}$ y luego elevando al cubo a ambos miembros de la ecuación.

5. CONCLUSIONES

En los cuatro ejemplos presentados se demuestra la efectividad del método de Trier en esos casos, principalmente en el dimensionamiento a flexión. En los ejemplos tercero y cuarto la vida útil real superó muchas veces a la vida útil calculada (basada en la resistencia a la presión de rodadura) posiblemente por una buena lubricación con el uso de aceites de extrema presión para transmisiones, y por el régimen de velocidad constante con períodos de descanso.

En el diseño de nuevos engranajes de ruedas cilíndricas y ejes paralelos, cuando el torque y la velocidad de giro son aprox. constantes y los materiales de las ruedas son aceros, es posible iniciar el proceso de diseño aplicando el método de Trier, cuya simplicidad permite ahorrar tiempo, y luego verificar los resultados con las normas AGMA, DIN o ISO vigentes.

6. REFERENCIAS

- [1] Mirassou H.M. *Diseño y cálculo de cajas de engranajes especiales para barcos areneros y prestaciones obtenidas*. Sexto Congreso Argentino de Ingeniería Mecánica VI CAIM 2018, ISBN 978-987-46987-0-4, 10 al 12 de Octubre de 2018, San Miguel de Tucumán.
- [2] Tedeschi P. *Proyecto de máquinas, 2ª Edición*. EUDEBA, Buenos Aires, 1979.
- [3] Norton R.L. *Diseño de máquinas*. Prentice Hall, México, 1999.
- [4] SAE Gear and Spline Technical Committee. *Gear Design, Manufacturing and Inspection Manual AE-15*. Society of Automotive Engineers Inc., USA, 1990.
- [5] ANSI/AGMA 110.04-1980. Nomenclature of Gear Tooth Failure Modes. American Gear Manufacturers Association, USA, 1986 (Reaffirmed 1989).
- [6] Trier H. *Trazado y cálculo de las ruedas dentadas*. Editorial Labor, Buenos Aires, 1946.
- [7] Shigley J.E., Mischke C. *Diseño en Ingeniería Mecánica, 5ª Ed.* McGraw-Hill, México, 1990.
- [8] AGMA 218.01. Standard for Rating the Pitting Resistance and Bending Strength of Spur and Helical Involute Gear Teeth. American Gear Manufacturers Association, USA, 1982.
- [9] Budynas R.G., Nisbett J.K. *Diseño en Ingeniería Mecánica de Shigley, 8ª Edición*. McGraw-Hill, México, 2008.
- [10] Budynas R.G., Nisbett J.K. *Shigley's Mechanical Engineering Design, Ninth Edition*. McGraw-Hill, USA, 2011.
- [11] ANSI/AGMA 2001-D04. Fundamental Rating Factors and Calculation Methods for Involute Spur and Helical Gear Teeth. American Gear Manufacturers Association, USA, 2004.
- [12] Faires V.M. *Diseño de elementos de máquinas*. Montaner y Simón, España, 1977.
- [13] Townsend D.P. *Dudley's Gear Handbook, Second edition*. McGraw-Hill, USA, 1992.
- [14] Callister W.D. Jr. *Materials Science and Engineering An Introduction, Third Edition*. John Wiley & Sons, USA, 1994.
- [15] Apraiz Barreiro J. *Tratamientos térmicos de los aceros, 8ª Edición*. Editorial Dossat, España, 1985.